HAL
open science

Contrôle actif dual des écoulements turbulents pariétaux. Expériences et Simulations Numériques Directes.

Olivier Léon Doche

▶ **To cite this version:**

Olivier Léon Doche. Contrôle actif dual des écoulements turbulents pariétaux. Expériences et Simulations Numériques Directes.. Mécanique [physics.med-ph]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2006. Français. NNT : . tel-00126529

HAL Id: tel-00126529

https://theses.hal.science/tel-00126529

Submitted on 25 Jan 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE JOSEPH FOURIER
SCIENCES. TECHNOLOGIE. MEDECINE

N° attribué par la bibliothèque

THÈSE DE DOCTORAT

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER

Spécialité : Mécanique des Fluides et Transferts

préparée au Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels
dans le cadre de **l'École Doctorale** ***Mécanique et Énergétique***

Contrôle actif dual des écoulements turbulents pariétaux

Expériences et Simulations Numériques Directes

Doctorant :

Olivier DOCHE

Directeur de thèse :

Sedat TARDU

Composition du jury :

Pr. Yves Gagne	Président
Dr. Jean-Luc Aider	Rapporteur
Dr. Jean-Paul Bonnet	Rapporteur
Dr. José Eduardo Wesfreid	Examinateur
Dr. Patrick Gilliéron	Examinateur
Dr. Jean-Paul Thibault	Examinateur
Dr. Sedat Tardu	Examinateur

Remerciements

Mes premiers remerciements vont, bien évidemment, à Sedat Tardu pour son enthousiasme, son encadrement exceptionnel, ses précieux conseils et surtout ses qualités humaines. Merci encore à lui de s'être réellement investi dans ces travaux et d'avoir fait que cette thèse puisse être effectuée dans les meilleures conditions, le tout dans une ambiance de travail des plus agréables.

Merci aux membres du jury pour leurs expertises. Yves Gagne m'a fait l'honneur d'accepter d'en être le président et, comme il a été un des acteurs principaux de ma formation universitaire, sa présence à une signification particulière pour moi.

Un grand merci à Stephane Montésino pour son soutien et son esprit critique qui a permis de constamment remettre en question mes résultats et d'affiner les explications proposées dans ce mémoire.

Un grand merci à la ISCHIA Team (Titi, Steph et Sedat) pour ces grands moments passés en conférences ("*I'm not stupide... Our car is over there*") et courage à tous ceux qui sont en cours de rédaction de leur mémoires ou qui vont l'être sous peu (Cyril, Fares...)

Je tiens également à remercier le LEGI, pour son accueil, la bonne humeur permanente qui y règne et la compétence de son personnel (chercheurs, techniciens, le personnel du service de repro. et visu...).

En bref, et surtout afin de n'oublier personne, je remercie sincèrement toutes celles et ceux qui me sont venus en aide au cours de ce périple et qui ont fait que la tâche a semblé moins difficile qu'elle ne paraissait.

A Zouz' qui aurait été content du pot...
A mes parents qui m'ont donné toutes les clés pour arriver jusque ici...
A mes grands-parents sans lesquels mes parents ne seraient pas là (et oui...)
A mon frère Dadou, à tous mes potes (par ordre non-alphabétique : Bean, Soja, Vince, Goush, Bags, Lorraine, Cy, Guigui, Laura, Tom, et tous les autres...)

A ma femme, Coco, dont la patience fût exemplaire à mon égard...

et finalement...
A mon fils (Léo) ou à ma fille (Cléo), qui pointera son nez très prochainement...

Je dédie ce travail...

Table des matières

Table des matières viii

Table des figures xvi

Table de notations xvii

Introduction générale 1

I Prélude : mise en contexte et première approche expérimentale du problème de contrôle dual 5

1 Mise en contexte de l'étude 7
- 1.1 Introduction . . . 7
- 1.2 Le contrôle de la turbulence - Historique et enjeux . . . 7
- 1.3 De l'utilité d'un contrôle actif pour agir sur la turbulence de proche paroi 8
- 1.4 Contrôles actifs par asservissement . . . 10
  - 1.4.1 Lois de contrôle basées sur des arguments physiques . . . 10
  - 1.4.2 Schémas adaptatifs . . . 11
  - 1.4.3 Contrôle optimal, une première approche . . . 11
  - 1.4.4 Un défi technologique important . . . 16
- 1.5 Le contrôle dual ou schéma de contrôle hybride . . . 17
- 1.6 Conclusions . . . 19

2 Étude expérimentale d'un soufflage localisé et instationnaire 21
- 2.1 Introduction . . . 21
- 2.2 Injection temporellement sinusoïdale - Mécanismes clés . . . 21
  - 2.2.1 Dispositif expérimental . . . 21
  - 2.2.2 Injection temporellement sinusoïdale . . . 23
  - 2.2.3 Phénoménologie . . . 28
  - 2.2.4 Effet de la fréquence imposée . . . 29
- 2.3 Injection temporellement asymétrique . . . 31

2.3.1 Un nouveau dispositif de soufflage 31
2.3.2 Résultats 32
2.4 Conclusions 39

II Méthode numérique et résultats dans le cadre d'écoulements non contrôlés 41

3 Description du modèle numérique 43
3.1 Introduction 43
3.2 Choix de la résolution numérique 43
3.3 Notations et adimensionnalisations 44
3.4 Résolution numérique par Simulation Numérique Directe 46
3.4.1 Les équations gouvernant la dynamique 46
3.4.2 Description du domaine de calcul 46
3.4.3 La périodicité spatiale imposée 49
3.4.4 La discrétisation 49
3.4.5 La méthode du *Pas Fractionné* 50
3.4.6 Détermination de la pression 51
3.4.7 Le code de visualisation 52
3.5 Quelques résultats importants 52
3.5.1 Contrainte totale moyenne 53
3.5.2 Le profil moyen de vitesse longitudinale 54
3.5.3 Les fluctuations de vitesse et de vorticité 54
3.5.4 Les contraintes de Reynolds 56
3.5.5 Dissymétrie et Aplatissement 56
3.5.6 Les corrélations longitudinales en deux points 57
3.6 Budget énergétique des contraintes de Reynolds 59
3.7 Sur l'identification des structures tourbillonnaires 61
3.8 Conclusions 66

4 Transport de scalaire passif : application au transfert de chaleur dans un canal plan en régime développé turbulent 67
4.1 Introduction 67
4.2 Formulation du problème 67
4.3 Implémentation numérique 68
4.4 Résultats en canal turbulent plan développé 69
4.4.1 Les principales statistiques 71
4.4.2 Études asymptotiques 75
4.4.3 Quelques champs instantanés de température 75
4.4.4 Budget énergétique des fluctuations de température 80
4.5 Conclusions 81

5 Multigrille **83**
5.1 Introduction . . . 83
5.2 Description du maillage utilisé . . . 83
5.3 La méthode Multigrille . . . 86
5.3.1 Transformée de Fourier Rapide ou Multigrille . . . 86
5.3.2 Principe de la résolution Multigrille . . . 87
5.3.3 Structure de l'opérateur à 2 grilles . . . 89
5.3.4 De 2 niveaux à n niveaux de grille . . . 93
5.4 Implémentation numérique . . . 95
5.4.1 Application à l'équation de pression . . . 95
5.4.2 Choix de la grille grossière . . . 96
5.4.3 Opérateur de Transfert : R et I . . . 96
5.4.4 Smoother et parallélisation . . . 97
5.4.5 Périodicité et Conditions de Neumann . . . 101
5.5 Validation de la méthode . . . 102
5.6 Conclusions . . . 105

III Études numériques de contrôles actifs en canal turbulent **107**

6 Étude dynamique et thermique d'un soufflage stationnaire localisé **109**
6.1 Introduction . . . 109
6.2 Implémentation numérique du problème de soufflage . . . 109
6.3 Étude d'une fente de "grande dimension" . . . 111
6.3.1 Sur la paroi inférieure du canal . . . 112
6.3.2 A l'intérieur du canal . . . 115
6.3.3 Bilan énergétique des fluctuations de température . . . 121
6.4 Étude d'une fente de "petite dimension" . . . 124
6.4.1 Sur la paroi . . . 125
6.4.2 A l'intérieur du canal . . . 126
6.4.3 Bilan énergétique des contraintes de Reynolds . . . 127
6.4.4 Bilan énergétique des fluctuations de température . . . 132
6.5 Discussion . . . 133
6.6 Comparaison avec des données expérimentales . . . 140
6.7 Conclusions . . . 142

7 Approche analytique et implémentation numérique d'un contrôle suboptimal **143**
7.1 Introduction . . . 143
7.2 Approche analytique et formulation du problème . . . 143
7.2.1 Formulation de la fonction de coût . . . 143
7.2.2 L'équation d'état . . . 144
7.2.3 L'opérateur différentiel de Sensibilité . . . 147

7.2.4 Constitution du problème adjoint 149
7.3 Implémentation numérique du contrôle suboptimal 154
7.3.1 La première étape de la méthode du Pas Fractionné 154
7.3.2 La seconde étape de la méthode du Pas Fractionné 156
7.3.3 Modification de l'action à la paroi par utilisation du gradient . . . 158
7.3.4 Récapitulatif de la méthode 159
7.4 Comprendre pour mieux contrôler ou contrôler pour mieux comprendre . 160
7.5 Conclusions 161

8 Application d'un contrôle suboptimal à un écoulement turbulent en canal 163
8.1 Introduction 163
8.2 Contrôle basé sur une seule évaluation du gradient 163
8.2.1 Formulation 163
8.2.2 Étude statistique : répercussions du contrôle sur la structure fine de la turbulence en proche paroi 166
8.3 Contrôle par recherche itérative 177
8.3.1 Itérations temporelles anticipées 177
8.3.2 Méthodes de recherche itérative 178
8.4 Conclusions 180

9 Étude d'un contrôle actif dual 181
9.1 Introduction 181
9.2 Problématique 181
9.3 Évolution temporelle de la contrainte moyenne 183
9.4 Champs instantanés 184
9.5 Moyennes de phase 188
9.6 Discussion 193
9.7 - Ouverture - Analogies avec les méthodes de contrôle du chaos 195
9.8 Conclusions 197

Conclusions et perspectives 199

A Mécanisme de création de vorticité positive lors d'un soufflage localisé 207

B Évaluation du terme analogue au gradient de pression moyen pour la résolution du système adjoint 209

C Article à paraître dans la revue *Comptes rendus de l'Académie des sciences (Mécanique)* 211

D Article à paraître dans la revue *Theoretical and computational fluid dynamics* 221

Liste des figures

1.1 Loi de contrôle *Ad-Hoc* appliquée à un écoulement turbulent 10
1.2 Pas successifs lors d'un contrôle utilisant les horizons de prédictions . . . 12
1.3 Évolution temporelle de la contrainte turbulente pour différentes formulations du contrôle (Bewley *et al.* [2001]) 15
1.4 Micro capteur de contrainte pariétale (Jiang *et al.* [1996] et Jiang *et al.* [1997]). (a) un seul capteur, (b) un ensemble flexible de 128 capteurs 17
1.5 Illustration de trois injections prédictibles - excitations sinusoïdales - dans le spectre de puissance 19

2.1 (a) - Dispositif expérimental, (b) - La zone manipulée en détail 23
2.2 Soufflage sinusoïdal et sa première harmonique 24
2.3 Comparaison des contraintes et de leurs intensités turbulentes moyennées en temps dans le cas d'une injection sinusoïdale et constante 25
2.4 Moyennes de phase de (a) la contrainte pariétale (b) de son intensité turbulente à plusieurs positions à l'aval de la fente 26
2.5 Distribution en fonction de y^+ de (a) la vitesse longitudinale (b) la contrainte (c) l'intensité turbulente de la vitesse longitudinale (d) le facteur de dissymétrie, en $x^+ = 40$ à l'aval de la fente et pour $t/T = 0.4 - 0.8$ 27
2.6 Mécanisme possible de génération d'une structure cohérente transversale par instabilité de la couche de cisaillement lors de la phase de relaminarisation 27
2.7 Moyennes de phase de (a) la contrainte pariétale (b) son intensité turbulente à plusieurs positions à l'aval de la fente 28
2.8 Vitesse d'advection de la structure présentée sur la figure 2.5 28
2.9 Représentation schématique de l'action d'un soufflage instationnaire sur la turbulence de proche paroi (Tardu [2001]) 29
2.10 Récapitulatif des différents mécanismes mis en jeu lors d'une injection sinusoïdale à haute fréquence 30
2.11 La fréquence critique pour l'apparition d'un enroulement est $f_{cr}^+ = 8.10^{-3}$. 30
2.12 Photographie du système pulsant créé spécialement pour l'étude de l'injection asymétrique 31
2.13 Moyenne de phase de la vitesse imposée à travers la fente pour le cas sinusoïdal et asymétrique 32

2.14 Moyennes de phase de la contrainte pariétale en $x^+ = 20$ 33
2.15 Moyennes de phase de l'activité turbulente en $x^+ = 20$ 34
2.16 Moyennes de phase de la contrainte pour les deux types de soufflage en $x^+ = 112$ 35
2.17 Moyennes de phase de l'activité turbulente pour les deux types de soufflage en $x^+ = 112$ 35
2.18 Moyennes de phase du facteur de dissymétrie en $x^+ = 112$ 36
2.19 Moyennes de phase du facteur d'aplatissement en $x^+ = 112$ 37
2.20 Valeurs moyennes des frottements en différentes abscisses et pour différents types d'injections 37
2.21 Effet de la fréquence d'injection sur l'évolution de la zone relaminarisée . 39

3.1 Système de coordonnées et domaine de calcul 47
3.2 Évolution du maillage dans la direction normale à l'écoulement pour différentes valeurs de a 47
3.3 Raffinement du maillage près de la paroi inférieure 48
3.4 Positionnement des quantités sur une maille 48
3.5 Profil de contrainte totale sur toute la hauteur du canal 53
3.6 Vitesse longitudinale moyenne en unités pariétales 54
3.7 Valeurs *R.M.S.* des fluctuations de vitesse 55
3.8 Valeurs *R.M.S.* des fluctuations de vorticité 55
3.9 Contraintes de Reynolds en unités pariétales 56
3.10 Profil du facteur de dissymétrie pour les trois composantes du champ de vitesse 57
3.11 Profil du facteur d'aplatissement pour les trois composantes du champ de vitesse 58
3.12 Comparaison des **corrélations en 2 points** des fluctuations de vitesse suivant la **direction longitudinale**, à $y^+ = 5.5$, avec les données numériques de Kim *et al.* [1987]. 59
3.13 Comparaison des **corrélations en 2 points** des fluctuations de vitesse suivant la **direction transverse**, à $y^+ = 5.5$, avec les données numériques de Kim *et al.* [1987]. 59
3.14 Budget énergétique des contraintes de Reynolds :$\overline{u'v'}$ 61
3.15 Iso-contour de $\lambda_2 = -0.018$ (noire) et de fluctuations de pression $p'^+ = -1.6$ (bleu transparent) 64
3.16 Iso-contour de $\lambda_2 = -0.018$ (blanc) et de fluctuations de vorticité longitudinale ω'_x sur un plan normal à la paroi et situé en $y^+ = 30$ 64
3.17 Iso-contour de $\lambda_2 = -0.018$ (blanc) et de fluctuations de vorticité longitudinale ω'_x sur un plan longitudinal 65
3.18 Iso-contour de $\lambda_2 = -0.018$ (blanc) et de fluctuations de vorticité longitudinale ω'_x sur un plan transverse. Les vecteurs représentent les vitesses fluctuantes dans le plan considéré 65

4.1 Profil de température initial 70
4.2 Profil de température moyenne exprimée en unité pariétales 71
4.3 Profil moyen des fluctuations *R.M.S.* de la température exprimée en unités pariétales 72
4.4 Profil du facteur de dissymétrie pour le champ de température 72
4.5 Profil du facteur d'aplatissement pour le champ de température 73
4.6 Profil des quantités croisées $\overline{u_i'T'}^+$ 73
4.7 Correlations vitesses-températures 74
4.8 Profil moyen de température modifiée et de vitesse longitudinale 74
4.9 Comportement asymptotique de la quantité *RMS* de la température modifiée 75
4.10 Comportement asymptotique des quantités $\overline{u_i'\theta'}^+$ 76
4.11 Température instantanée et détection λ_2 76
4.12 Coupe longitudinale de la température instantanée 77
4.13 Zoom de la coupe longitudinale de la température instantanée 77
4.14 Coupes transversales de température fluctuantes 77
4.15 Coupes longitudinales de température fluctuantes 78
4.16 Température fluctuante en $y^+ = 1$ 79
4.17 En $y^+ = 5$ 79
4.18 En $y^+ = 15$ 79
4.19 En $y^+ = 30$ 79
4.20 En $y^+ = 100$ 79
4.21 En $y^+ = 180$ 79
4.22 Bilan énergétique des fluctuations de températures 81

5.1 Évolution du maillage près de la zone raffinée 85
5.2 Représentation 3D du maillage imposé sur le domaine de calcul. Une maille sur quatre est représentée dans chaque direction. 85
5.3 Processus itératif de résolution 88
5.4 Passage d'une grille de dimensions h à H=2h 89
5.5 Structure d'un cycle à 2 niveaux de grille 89
5.6 Opérateur de lissage : Évolution du terme v_h^r en fonction du nombre d'itérations 91
5.7 Restriction par Pondération Totale (PT) et par Demi-Pondération (DP) . . 92
5.8 Restriction et Interpolation sur 4 niveaux de grille 93
5.9 Cycle de Multigrille sur 4 niveaux 94
5.10 Niveau 1 : maillage le plus fin 94
5.11 Niveau 2 94
5.12 Niveau 3 95
5.13 Niveau 4 : maillage le plus gros 95
5.14 Illustration de l'interpolation trilinéaire 97
5.15 Résolution par ordonnancement Rouge-Noir 100

5.16 Agencement de quantités centrées sur un maillage régulier 2D avec application des conditions aux limites . . . 102
5.17 Évolution de la contrainte totale sur toute la hauteur du canal . . . 103
5.18 Profils des contraintes de Reynolds . . . 103
5.19 Évolution du profil de vitesse longitudinale moyenne . . . 104
5.20 Valeurs *RMS* des trois composantes de la vorticité . . . 104
5.21 Valeurs *RMS* de la pression . . . 105

6.1 Schéma du domaine de calcul . . . 110
6.2 Profil du jet pariétal v_0^+ pour une fente de dimension $L_x^+ = 170$ . . . 111
6.3 Corrélation spatiale de la contrainte fluctuante pariétale en deux points . . . 112
6.4 Comparaison de l'évolution longitudinale de la contrainte moyenne. Les positions des fentes sont représentées par des tirets pointillés dans le cas de Park & Choi [1999] et par des tirets simples dans notre cas. Les quantités sont adimensionnalisées par rapport au cas standard. . . . 113
6.5 Évolution longitudinale de la contrainte turbulente et du flux de température 114
6.6 Évolution longitudinale des quantités *RMS* de la contrainte turbulente et du flux de température . . . 114
6.7 Facteur de dissymétrie . . . 115
6.8 Facteur d'aplatissement . . . 115
6.9 Contour des vitesses moyennes relatives . . . 116
6.10 Profils de vitesses longitudinales moyennes pour différentes positions à l'aval de la fente et adimensionnalisés par u_τ local . . . 117
6.11 Contours des quantités *R.M.S.* de la vitesse longitudinale. Les lignes pleines correspondent à des valeurs positives alors que les pointillés représentent des valeurs négatives. . . . 118
6.12 Iso-Contours du terme de production provenant du budget énergétique de $\overline{u'v'}$ . . . 118
6.13 Contours de températures relatives pour une fente de dimension $L_x^+ = 170$ 119
6.14 Profils des températures transformées moyennes (θ) adimensionnalisées par u_τ et q locaux . . . 119
6.15 Contours des fluctuations *R.M.S.* de la température . . . 120
6.16 Profils des fluctuations *R.M.S.* de la température modifiée . . . 120
6.17 Contours des termes croisés de vitesses-températures portant sur la vitesse longitudinale . . . 121
6.18 Contours des termes croisés de vitesses-températures portant sur la vitesse normale . . . 121
6.19 Contours du terme d'advection de la température . . . 123
6.20 Contours du terme de transport turbulent de la température . . . 123
6.21 Contours du terme de production de la température . . . 123
6.22 Contours du terme de diffusion de la température . . . 124
6.23 Contours du terme de dissipation de la température . . . 124

6.24 Évolution longitudinale de la contrainte turbulente et du flux de température pour une fente de 17 unités pariétales 125
6.25 Évolution longitudinale des quantités *RMS* de la contrainte turbulente et du flux de température 126
6.26 Facteur d'asymétrie 126
6.27 Facteur d'aplatissement 127
6.28 Contour des vitesses moyennes relatives 127
6.29 Profils de vitesses moyennes pour différentes positions à l'aval de la fente et adimensionnalisées par u_τ local 128
6.30 Contours des quantités *R.M.S.* de la vitesse longitudinale 128
6.31 Contours du terme de production 129
6.32 Contours du terme de vitesses-pressions corrélées 129
6.33 Contours de températures relatives 130
6.34 Profils des températures transformées moyennes (θ) adimensionnalisés par u_τ et q locaux 130
6.35 Contours des fluctuations *R.M.S.* de la température 131
6.36 Profils des fluctuations *R.M.S.* de la température modifiée 131
6.37 Contours des termes croisés de vitesses-températures portant sur la vitesse longitudinale 132
6.38 Contours des termes croisés de vitesses-températures portant sur la vitesse normale 132
6.39 Contours du terme d'advection de la température 133
6.40 Contours du terme de transport turbulent de la température 134
6.41 Contours du terme de production de la température 134
6.42 Contours du terme de diffusion de la température 134
6.43 Contours du terme de dissipation de la température 135
6.44 Comparaison du flux de chaleur pariétale pour un paramètre de sévérité unique $\beta = 0.006$ et pour plusieurs largeurs de fente. La zone d'injection de 170 unités pariétales est représentée par le rectangle sans remplissage, celle de 70 par le rectangle gris-clair et celle de 17 unités pariétales par le rectangle plus foncé (ou violet si la figure est en couleur). Le bord aval de chacune des fentes est positionné en $x^+ = 455$. 135
6.45 Composante de la vorticité transverse pour une fente de 170 unités pariétales 136
6.46 Composante de la vorticité transverse pour une fente de 17 unités pariétales 136
6.47 Iso-Contour $\lambda_2 = -0.02$ pour une fente de 170 unités pariétales 137
6.48 Détail de la zone manipulée de la figure 6.47 137
6.49 Iso-Contour $\lambda_2 = -0.02$ pour une fente de 17 unités pariétales 138
6.50 Détail de la zone manipulée de la figure 6.49 138
6.51 Contours des contraintes de Reynolds moyennes pour une fente de 17 unités pariétales 139

6.52 Évolutions de la contrainte pariétale pour $\beta = 0.006$ et 3 tailles de fentes différentes. Les résultats liés à la plus petite fente ($L_x^+ = 8$) proviennent de données expérimentales (Tardu [1998]). 140
6.53 Évolutions des fluctuations de contrainte pariétale pour $\beta = 0.006$ et 3 tailles de fentes différentes. 141
6.54 Évolutions du facteur de dissymétrie de la contrainte pariétale pour $\beta = 0.006$ et 3 tailles de fentes différentes. 141
6.55 Évolutions du facteur d'aplatissement de la contrainte pariétale pour $\beta = 0.006$ et 3 tailles de fentes différentes. 142

7.1 Récapitulatif de la mise en oeuvre d'un contrôle suboptimal 159
7.2 L'alternance des zones de hautes et basses vitesses provoque l'apparition d'une vorticité normale à la paroi (Tardu [1995]). 160

8.1 Le gradient donne seulement la direction de la minimisation 164
8.2 Cas où p est trop important 165
8.3 Évolution temporelle de la contrainte turbulente pour $p = 0.1$ 166
8.4 Comparaison des valeurs *RMS* des vitesses u et w pour le cas standard (ligne) et le cas contrôlé (ligne + symboles) 167
8.5 Comparaison des valeurs *RMS* de la vitesse v 167
8.6 Comparaison des contraintes de Reynolds 168
8.7 Comparaison de la vitesse moyenne longitudinale adimensionnalisée par les variables internes et locales 168
8.8 Comparaison du facteur de dissymétrie 169
8.9 Comparaison du facteur d'aplatissement 170
8.10 Comparaison des valeurs *RMS* des composantes de vorticité 170
8.11 Champ instantané de contrainte pariétale dans le cas d'un écoulement non manipulé. Les structures cohérentes sont détectées par une méthode λ_2 . . 171
8.12 Même figure que 8.11 mais dans le cas de l'application d'un contrôle suboptimal 171
8.13 Distribution de la vorticité transverse *RMS* dans le cas d'un contrôle suboptimal et $Ad - Hoc$ 172
8.14 Distribution de la production (ligne pleine) et de la force volumique turbulente (ligne en tirets) dans le cas contrôlé (symboles) et standard (sans symbole). Les quantités sont adimensionnalisées par rapport au cas non manipulé. 173
8.15 Évolution de la différence entre le terme de production et de dissipation provenant de l'équation de transport de la vorticité transversale fluctuante. Comme précédemment, les symboles représentent le cas contrôlé et la ligne pleine le cas standard 174
8.16 Évolution du terme de dissipation provenant de l'équation de transport de la vorticité transversale fluctuante 174

8.17 Mécanisme de réduction de contrainte pariétale 176
8.18 Les itérations anticipées 177
8.19 Évolution temporelle des contraintes dans le cas de contrôles suboptimaux sans recherche de minima (p fixé) et avec une recherche itérative réévaluant le gradient de la fonction de coût 179
8.20 Comparaison des méthodes de recherche de minima recalculant ou non le gradient entre chaque itération 179

9.1 Processus stochastique (turbulence de proche paroi) forcé par un soufflage sinusoïdal en temps et dont la fréquence est proche de la fréquence d'éjection. 182
9.2 Schéma d'application d'un contrôle dual à un écoulement en canal 182
9.3 Évolution de la contrainte pariétale pour un contrôle dual basé sur un schéma suboptimal 183
9.4 Évolution de la contrainte pariétale pour un contrôle Ad-Hoc, type v et w, associé ou non à une injection instationnaire 185
9.5 Champ instantané de contrainte pariétale et de structures cohérente dans le cas d'un soufflage sinusoïdal seul 185
9.6 Champ instantané de contrainte pariétale et de structures cohérentes dans le cas d'un contrôle suboptimal seul 186
9.7 Champ instantané de contrainte pariétale et de structures cohérentes dans le cas d'un contrôle dual 187
9.8 Distribution instantanée du jeu de soufflages/aspirations à la paroi dans le cas du contrôle suboptimal 187
9.9 Distribution instantanée du jeu de soufflages/aspirations à la paroi dans le cas du contrôle dual 188
9.10 Moyenne de phase de la vitesse imposée à travers la fente 189
9.11 Moyennes de phase de la contrainte dans la direction longitudinale pour un soufflage sinusoïdal 189
9.12 Moyennes de phase de la contrainte dans la direction longitudinale pour un contrôle dual 190
9.13 Moyennes de phase de la contrainte pariétale pour un soufflage sinusoïdal à différentes distances du bord aval de la fente 191
9.14 Moyennes de phase de la contrainte pariétale pour un contrôle dual à différentes distances du bord aval de la fente 191
9.15 Contours des moyennes de phase de la contrainte pariétale pour un contrôle dual. La position de la fente est représentée par le rectangle noir. 192
9.16 Contours des moyennes de phase de la vitesse v_0^+ imposée à la paroi dans le cas du contrôle dual 193
9.17 L'attracteur étrange de Lorentz 195

A.1 Création de vorticité positive lors d'un soufflage en paroi 207
A.2 Profils de vitesses longitudinales relatives 208

Table des notations

Indices et abréviations

CLS ou SBL	Abréviation de Couche Limite Standard (*Standard Boundary Layer*)
*	Variable adimensionnelle utilisée dans le code DNS (sans dimension)
$_i$	Composante suivant les trois directions (i=1 à 3)
$_x$	Composante suivant l'axe longitudinal de l'écoulement
$_y$	Composante suivant l'axe normal à l'écoulement
$_z$	Composante suivant l'axe transverse de l'écoulement
$_0$	Quantité prise à la paroi
$_{RMS}$	Écart-type de la variable (Root Mean Square)
$S(q')$	Facteur de dissymétrie de la variable q
$F(q')$	Facteur d'aplatissement de la variable q
$\bar{q}$	Moyenne temporelle (et spatiale si direction homogène) de la variable q
$\langle q \rangle$	Moyenne de phase de la variable q
q'	Fluctuation de la variable q
q^+	Variable q exprimée en unité de paroi aussi appelée unité pariétale (sans dimension)
$q(rel.)$	Valeur relative de q correspondant à la différence entre le cas contrôlé et le cas sans contrôle

Nombres sans dimension

Re	Nombre de Reynolds basé sur U_{cp}, h et ν
$Re_\tau = h^+$	Nombre de Reynolds basé sur u_τ , h et ν
Pr	Nombre de Prandtl
Nu	Nombre de Nusselt
β	Paramètre de sévérité du soufflage

Termes relatifs à l'écoulement et aux contrôles

Dynamique :

x, x_1	[m]	Direction axiale de l'écoulement
y, x_2	[m]	Direction normale de l'écoulement
z, x_3	[m]	Direction transversale de l'écoulement
u, u_1	[ms^{-1}]	Composante axiale de la vitesse (suivant x)
v, u_2	[ms^{-1}]	Composante normale de la vitesse (suivant y)
w, u_3	[ms^{-1}]	Composante transversale de la vitesse (suivant z)
p	[Pa]	Pression
$\omega_{x,y,z}$	[s^{-1}]	Composante axiale, normale et verticale de la vorticité
$\varphi_{1,2,3}$	[x]	Vitesse adjointe dans la direction axiale, normale et transverse
h	[m]	Demi-hauteur du canal
$\Gamma^{\pm}$	[m^2]	Surface de la paroi inférieure (-) et supérieure (+) du canal
Ω	[m^3]	Volume fluide
U_{cp}	[ms^{-1}]	Vitesse au centre du canal pour un profil de Poiseuille plan
U_c	[ms^{-1}]	Vitesse au centre du canal pour un écoulement turbulent
U_∞	[ms^{-1}]	Vitesse externe d'une couche limite
δ	[m]	Épaisseur de couche limite
u_τ	[ms^{-1}]	Vitesse de frottement
t	[s]	Temps
T	[s]	Période de soufflage
T_∞	[s]	Temps de retournement des grandes échelles
ν	[m^{2}s^{-1}]	Viscosité cinématique du fluide
ρ	[kgm^{-3}]	Masse volumique du fluide
τ	[Pa]	Contrainte pariétale
J	[J]	Fonction de coût
ϕ	[ms^{-1}]	Distribution d'aspirations/soufflages sur la paroi inférieure du canal

Thermique :

T	[K]	Température
T_c	[K]	Température au centre du canal
T_{cond}	[K]	Température moyenne pour un profil de conduction pur
T_{inf} *et* T_{sup}	[K]	Température sur les parois inférieure et supérieure
T_τ	[K]	Température de frottement
θ	[K]	Température modifiée
α	[m^{2}s^{-1}]	Diffusivité thermique
q	[Watt m^{-2}]	Flux de chaleur pariétal

NB : Dans le code de Simulation Numérique Directe, la direction axiale est représentée par x_3, et la direction transversale par x_1.

Introduction générale

La turbulence et son contrôle

Les phénomènes tels que les vents, les courants océaniques, les écoulements dans les vaisseaux sanguins ou ceux que l'on retrouve dans bon nombre d'installations industrielles ont un impact important sur notre vie et la société qui nous entoure. Il est donc naturel que les technologies visant à prédire et à contrôler les écoulements aient été, et restent toujours, un des grands domaines de recherche de la mécanique des fluides.

La turbulence est un état particulier d'un écoulement pour lequel il devient non prédictible (du moins au moment où j'écris ces lignes). Supposons que l'on connaisse, de façon détaillée, sa configuration à un instant donné. Bien que cet écoulement soit régi par des équations déterminées (déterministes), il n'est pas possible de prédire son évolution ultérieure sur une grande durée.

La grande majorité des écoulements faisant partie de notre vie quotidienne sont turbulents. Ainsi, de l'étude des mouvements de l'eau dans un torrent au comportement des volutes de fumée de cigarette (bonne excuse pour ne pas arrêter de fumer), des mécanismes similaires sont impliqués.

La turbulence apparaît pour une valeur élevée du rapport entre la vitesse du fluide et sa viscosité (c'est à dire un grand nombre de Reynolds). Dans ces conditions, la cohésion entre les filets fluides n'est plus assurée et une instabilité dynamique se développe. Elle résulte en la création d'un éventail de tourbillons d'échelles très variées qui influencent considérablement l'évolution de l'écoulement (état chaotique).

Certains de ses effets sont positifs, la turbulence peut par exemple améliorer les mélanges pour favoriser la combustion dans les moteurs. Mais pour le transport aérien ou maritime, elle est à l'origine d'une traînée quasiment deux fois supérieure à celle obtenue dans le cas laminaire (état stable du fluide).

Malgré son importance, la physique de la turbulence et le développement de méthodes de contrôles efficaces ont progressé assez lentement. Ceci s'explique principalement par la nature non linéaire et la grande complexité du phénomène. Mais récemment, de grandes avancées ont été faites.

La première concerne les simulations numériques de la turbulence. Grâce aux développements rapides de l'informatique, l'utilisation des Simulations Numériques Directes (SND ou DNS) s'est grandement répandue. Bien qu'elle soit pour l'instant limitée à des géométries simples d'écoulements, elle reste sans aucun doute la méthode numérique la

plus puissante pour analyser et comprendre les structures complexes générées par les écoulements turbulents.

La seconde grande étape est liée à l'émergence des technologies permettant la fabrication de micro-systèmes (MEMS). On peut maintenant produire des capteurs ou des actionneurs dont les dimensions sont de l'ordre du micromètre. Par leurs actions localisées, ces MEMS peuvent devenir un atout majeur afin de contrôler plus finement la turbulence de proche paroi.

Objectifs de l'étude

Le contrôle suboptimal est une stratégie de contrôle fine et efficace. Son application, dans une optique de diminution de la traînée turbulente a été intensément étudiée durant la dernière décennie. Si on sait que l'utilisation d'un tel procédé peut mener à des réductions de traînée proche de 25%, son appliquation dans un cadre expérimental reste très délicat. En effet, le principal inconvénient réside dans la nécessité de disposer d'une densité surfacique de MEMS trop importante.

Pour remédier à cela, on propose ici un contrôle de type dual dont la principale caractéristique repose sur l'interaction entre deux types de contrôles : un soufflage localisé en espace et périodique en temps (contrôle en boucle ouverte) suivi d'un contrôle suboptimal (contrôle en boucle fermée). L'idée principale est d'*organiser* la turbulence par une excitation oscillante de manière à la rendre plus prédictible et de ce fait plus contrôlable. Ces deux types de contrôle devront donc être étudiés séparément avant de combiner leurs effets. On espère, par ce procédé, obtenir une meilleure diminution du frottement tout en rendant l'approche expérimentale envisageable.

Méthodologie

Ce manuscrit est composé de trois grandes parties. La première expose de manière succincte les différentes méthodes de contrôle de la turbulence de proche paroi et introduit la notion de contrôle actif dual. On y présentera aussi en détail l'étude expérimentale qui a permis de définir la principale direction de recherche.

La seconde partie s'attache à décrire les différents outils numériques nécessaires à l'étude d'un écoulement turbulent en canal. On y décrira comment la Simulation Numérique Directe ainsi que le transport de scalaire passif ont été implémentés et on justifiera de leurs bons fonctionnements en présentant les résultats principaux obtenus dans le cadre d'écoulements non contrôlés. Une méthode multigrille a aussi été développée afin de pouvoir simuler le canal turbulent sur un domaine comportant plusieurs directions irrégulières.

La troisième et dernière partie traite d'écoulements contrôlés activement. Lors de la première étude, on s'intéressera à l'évolution dynamique et thermique d'un écoulement en canal turbulent, pleinement développé et soumis, par l'intermédiaire d'une fente transverse à un soufflage localisé. Suivra la formulation, l'implémentation et les résultats de

l'application d'un contrôle par asservissement (boucle fermée) de type suboptimal. Finalement, on analysera comment notre écoulement est affecté par un contrôle actif dual, c'est à dire combinant un soufflage en boucle ouverte et un contrôle par asservissement.

Première partie

Prélude : mise en contexte et première approche expérimentale du problème de contrôle dual

Le premier chapitre s'attache à fournir au lecteur les principales notions nécessaires à la bonne compréhension de cet ouvrage. On traite ici de la notion globale de *contrôle de la turbulence* préférentiellement axé sur la réduction de traînée en zone de proche paroi. Un survol des différentes méthodes est effectué et on justifiera de l'utilisation d'un schéma actif de type dual.

A sa suite, l'étude expérimentale présentée a pour objectif d'analyser la réponse d'une couche limite turbulente à une excitation instationnaire localisée. Cette injection périodique représente la première composante du processus de contrôle dual.

Chapitre 1

Mise en contexte de l'étude

1.1 Introduction

Ces dernières décennies ont vu émerger de nombreuses techniques et développements visant à contrôler des écoulements turbulents. Le texte présenté ici s'attache à décrire dans sa globalité la notion de contrôle de la turbulence à travers diverses techniques plus ou moins complexes et efficaces.

Ces techniques peuvent être classées dans deux catégories distinctes, actives ou passives. Le contrôle actif présente encore deux branches principales qui sont les contrôles en boucles ouvertes et boucles fermées (appelés aussi contrôles par asservissement ou *feedback*). Chaque méthode comporte des avantages et des inconvénients qui leurs sont propres. Il sera donc important de peser le "pour" et le "contre" en regard du type d'objectif fixé, de l'écoulement étudié et des moyens mis à disposition.

La première partie présente l'historique et les enjeux du contrôle de la turbulence, la deuxième effectue un bref comparatif entre une méthode de contrôle active et une méthode de contrôle passive ; la troisième partie expose différentes méthodes de contrôle par asservissement en se focalisant sur l'approche (sub)optimale, finalement la quatrième et dernière partie présentera les attraits d'un contrôle actif de type dual.

1.2 Le contrôle de la turbulence - Historique et enjeux

Il est d'ores et déjà indispensable de préciser la notion de contrôle. Contrôler un système consiste à orienter son évolution temporelle et/ou spatiale vers un but prédéfini et si possible en utilisant le plus faible apport énergétique.

Il est à souligner que le contrôle de la turbulence est un domaine de recherche d'une importance considérable autant du point vue économique (gain d'énergie par réduction de frottement, optimisation des mélanges, réduction de bruits. . .) que du point de vue technique par la mise en oeuvre de tels procédés. La réduction du frottement turbulent, l'augmentation du mélange dans les moteurs à combustion ou encore l'amélioration des

transferts thermiques dans les échangeurs sont des thèmes où le contrôle de la turbulence peut jouer un rôle primordial. On sait par exemple que la contribution de la traînée de frottement à la traînée totale d'un avion est approximativement de 30% pour le Concorde et 45% pour un Airbus (voir Peyrat-Armandy [1997]). Un contrôle plus abouti permettrait donc une économie plus qu'importante pour l'industrie aéronautique.

On a précisé précédemment qu'il fallait distinguer deux types d'approches fondamentalement différentes : le contrôle passif et le contrôle actif.

Les schémas de contrôle actif sont des méthodes qui fournissent de l'énergie au système à contrôler (en l'occurrence ici à l'écoulement) ; on peut prendre comme exemple une distribution de soufflage et/ou aspiration instationnaire à la paroi.

Par opposition, les schémas de contrôle passif sont définis comme des méthodes modifiant le système par une action stationnaire. Parmi les applications du contrôle passif on peut citer : la diminution de traînée par ajout de polymères ou par la modification de l'état de surface (utilisation de riblets, Choi [1989]) ou encore l'utilisation de LEBUS (*Large Eddy Break-Up Systems*). Le contrôle passif ne comporte donc pas d'asservissement aux modifications de l'écoulement.

D'un point de vue historique, le problème du contrôle de la turbulence n'a pas reçu le même engouement que, par exemple, le problème de fermeture des équations de Navier-Stokes. Une explication peut être trouvée dans le papier de Bushnell & McGinley [1989]. Jusque dans les années 50, l'approche privilégiée du contrôle était de décrire et d'expliquer plus en profondeur la physique même de la turbulence. Le sentiment général était donc de mieux comprendre le phénomène avant d'espérer lui appliquer un contrôle efficace. Au milieu des années 50, la parution de l'article de Clauser [1956] suggère de considérer la physique de la turbulence comme un problème de "boîte noire". Son contenu (c'est-à-dire la physique de la turbulence) pourrait ainsi être étudié en modifiant différents paramètres d'entrées, c'est à dire les conditions aux limites et initiales. L'étude des réponses du système révèle alors l'impact des conditions d'entrées sur l'évolution de l'écoulement turbulent fournissant ainsi de précieux renseignements sur les mécanismes mis en jeu. Ces résultats peuvent être aussi utilisés dans le but de paramétrer certaines théories de la turbulence.

1.3 De l'utilité d'un contrôle actif pour agir sur la turbulence de proche paroi

Dans cette partie, on met l'accent sur le contrôle de la turbulence en zone de proche paroi et plus précisément sur la recherche de la réduction du frottement turbulent.

Les études intensives sur la réduction de traînée par des moyens passifs ont abouti à des résultats décevants. En effet, l'utilisation des *riblets* engendre au mieux une réduction du frottement pariétal de 8 à 10% dans des conditions optimales, c'est à dire des conditions de laboratoire avec un espacement et une hauteur des *riblets* adaptés à la vitesse de

l'écoulement. Il est évident que dans des conditions réelles ces résultats sont encore bien moindres.

Ce résultat significatif, mais loin d'être satisfaisant, n'est pas très surprenant. On sait que l'augmentation de la contrainte en régime turbulent est due à la création des tourbillons quasi-longitudinaux dans la sous-couche tampon de la couche limite turbulente. L'écoulement induit par ces structures cohérentes crée des zones d'éjections (vitesses verticales positives) et de balayages (vitesses verticales négatives) près de la paroi. Il en résulte l'apparition de contraintes de Reynolds qui viennent intensifier les contraintes préexistantes et provoquent une augmentation substantielle du frottement pariétal. Or les tourbillons quasi longitudinaux sont des structures qui apparaissent de manière aléatoires à la fois dans l'espace et dans le temps (forte intermittence spatio-temporelle). Il n'est donc pas étonnant que l'utilisation d'un système de contrôle stationnaire (**figé**) soit limité voir même inefficace. Les échecs en contrôle passif ont donc stimulé considérablement les recherches sur le contrôle actif de la turbulence.

Si on connaît à l'avance la distribution spatio-temporelle de l'énergie à fournir au système, le contrôle sera qualifié de schéma en **boucle ouverte** (ou *open-loop*). Mais si l'ajout d'énergie est conditionné par des mesures en temps réel, on qualifiera le schéma de **boucle fermée** (*closed-loop*). C'est la notion d'asservissement.

Lorsqu'on cherche à contrôler un phénomène intermittent, on pourrait s'attendre à ce qu'un contrôle en boucle ouverte ne soit pas d'une grande efficacité car il ne peut s'adapter aux modifications de l'écoulement.

Ce n'est pourtant pas tout à fait le cas. Un contrôle en boucle ouverte peut cibler son action sur certaines propriétés du système. On peut par exemple jouer sur une échelle de temps caractéristique de l'écoulement.

L'article de Dhanak & Si [1999] illustre bien cette idée en montrant que l'utilisation d'une paroi oscillant transversalement peut mener à 40% de réduction de frottement. Lors de cette étude, la période d'oscillation a une importance primordiale car elle modifie l'interaction des structures quasi longitudinales avec la paroi provoquant la diminution des contraintes turbulentes.

L'article de Jeon *et al.* [2004] montre qu'une diminution de 50% de la contrainte pariétale peut être obtenue sur une sphère où le contrôle est effectué par une injection/aspiration périodique à travers une fente. Une fréquence critique de soufflage a été révélée, en dessous de laquelle aucune réduction significative n'est constatée. Au-dessus de cette fréquence une instabilité apparaît dans la couche limite et une zone de recirculation se développe provoquant la diminution du frottement.

L'instationnarité semble donc être un paramètre essentiel pour obtenir un contrôle performant.

1.4 Contrôles actifs par asservissement

Le contrôle en boucle fermée est certainement l'approche la plus intéressante car il a la possibilité de s'adapter aux modifications de l'écoulement.

1.4.1 Lois de contrôle basées sur des arguments physiques

Dans les situations où la physique mise en jeu est bien comprise, on peut appliquer une loi de contrôle établie à l'avance.

Le papier de Choi *et al.* [1994] en fournit un bon exemple. Dans cette étude, la loi de contrôle est extrêmement simple. Un plan de détection horizontal est placé dans un écoulement turbulent en canal à une certaine distance de la paroi inférieure.

Loi de contrôle : "*Si sur le plan de détection, on détecte une fluctuation de vitesse normale, alors on appliquera au même endroit mais sur la paroi inférieure, la même vitesse affectée du signe opposé.*"

L'objectif principal d'une telle manipulation est de réduire l'effet des vortex quasi-longitudinaux sur la paroi de manière à diminuer la contrainte pariétale. La figure 1.1 montre qu'un *v-control*, c'est à dire un contrôle basé sur la mesure des fluctuations de vitesse verticale, permet d'éloigner la zone de fort cisaillement de la paroi. L'étude est menée au moyen d'une simulation numérique directe à un nombre de Reynolds de 3300.

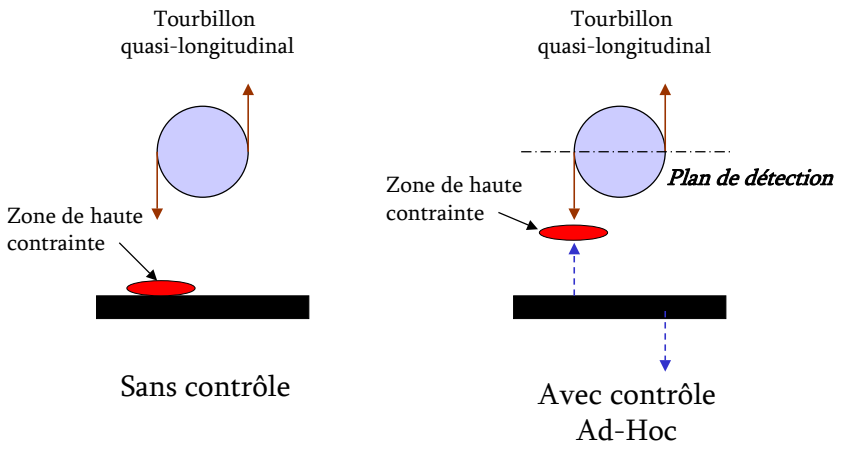


FIGURE 1.1 – Loi de contrôle *Ad-Hoc* appliquée à un écoulement turbulent

Par la suite, on fera référence à ce contrôle par la terminologie *Ad-Hoc*.

L'étude de Choi *et al.* [1994] est évidemment une étude numérique, ce type de contrôle ne peut être mis en oeuvre de manière expérimentale. Le problème principal repose sur le fait qu'il faut réussir à mesurer en temps réel, toutes les vitesses d'un plan horizontal à l'intérieur même de l'écoulement. Il serait alors très utile de pouvoir relier une mesure effectuée sur la paroi à la fluctuation de vitesse sur le plan de détection. Les travaux de Choi *et al.* [1994] montrent ainsi qu'en utilisant la variable présentant la meilleure

corrélation (c'est à dire $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}$) la réduction de frottement obtenue est de 6%. Ce résultat est comparable à la réduction de traînée par des moyens passifs tels que les *riblets* (Choi *et al.* [1992]).

1.4.2 Schémas adaptatifs

Les schémas adaptatifs sont constitués d'un réseau dont l'information entrante est une quantité mesurable de l'écoulement et l'information sortante une action sur celui-ci. Avant de pouvoir utiliser un tel contrôle, il faut déterminer les paramètres d'asservissement en confrontant le réseau à l'écoulement considéré. C'est une étape *d'apprentissage* où les différents paramètres peuvent être ajustés de manière heuristique en fonction de la réaction de l'écoulement. L'avantage principale de ces méthodes réside dans la possibilité d'ajuster les différents paramètres d'asservissement de manière à s'adapter à une modification de l'écoulement moyen, ou à une réponse singulière des actionneurs. De plus, contrairement au contrôle optimal qui requiert une information sur tout le domaine de l'écoulement (on le verra par la suite), ce type d'approche permet d'agir seulement en fonction de quantités mesurées à la paroi ; l'algorithme s'adaptera à cette contrainte. Ainsi, une fois les coefficients déterminés par apprentissage, le temps de réaction du contrôle peut être très court, ce qui constitue un point important pour la mise en place d'une étude expérimentale. L'inconvénient majeur est que pour une dynamique complexe d'écoulement et des mesures via des capteurs sensibles au bruit, la capacité du système adaptatif à converger vers une loi de contrôle efficace se trouve énormément réduite.

Lee *et al.* [1990] ont eu l'idée d'utiliser cette approche pour établir la corrélation entre la vitesse en $y^+ = 10$ (hauteur optimale du plan de détection) et la contrainte pariétale $\frac{\partial w}{\partial y}|_{y=0}$, comme expliqué dans le paragraphe précédent pour l'étude du contrôle *Ad-Hoc*. L'application numérique de cette corrélation par réseau de neurones mène à une réduction de la traînée proche de 20%.

1.4.3 Contrôle optimal, une première approche

Dans cette section, on tente de fournir au lecteur une image simplifiée et intuitive du contrôle optimal en explicitant tout d'abord son concept avant de l'illustrer par un exemple tiré de la littérature. Sachant que cette méthode a été retenue pour notre étude, on reviendra dans les chapitres suivants sur les points essentiels qu'il faut impérativement développer pour une bonne compréhension du sujet.

1.4.3.1 Le concept du contrôle (sub)optimal

La nature complexe, multi-échelle des écoulements turbulents rend les méthodes précédentes inadaptées (schémas adaptatifs, basés sur des arguments physiques). En effet, leur capacité d'adaptation **en temps réel** à des modifications de l'écoulement est très limitée.

Ce n'est pas le cas du contrôle (sub)optimal qui permet de définir un algorithme de contrôle directement à partir des équations qui gouvernent le problème (*Navier-Stokes*).

L'article de Bewley *et al.* [2001] permet d'appréhender le concept du contrôle optimal grâce à une analogie fort intéressante avec les algorithmes développés pour le jeu d'échec. Il n'est évidemment pas nécessaire de connaître les règles du jeu pour comprendre les explications qui vont suivre.

Lorsqu'on joue aux échecs, le but est de capturer le roi de l'adversaire grâce à une combinaison de mouvements réfléchis. Tour à tour, chaque joueur déplace une pièce suivant une stratégie qui vise à plus ou moins long terme à gagner la partie, c'est à dire à crier haut et fort *échec et mat*. Un bon joueur est un joueur capable de prévoir quel sera l'impact du déplacement d'une pièce sur l'évolution de la partie et on appellera **horizon de prédiction** le nombre de tours qu'il peut prévoir à l'avance.

Le concept des contrôles par horizons de prédiction est illustré par la figure 1.2.

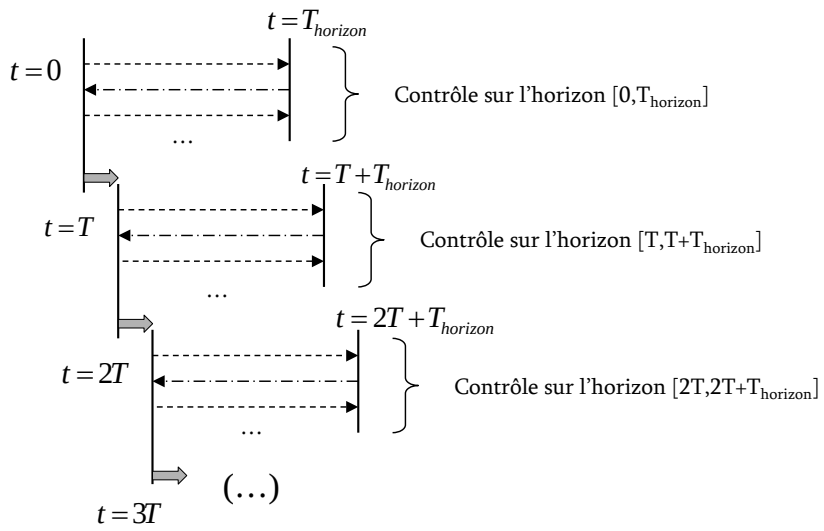


FIGURE 1.2 – Pas successifs lors d'un contrôle utilisant les horizons de prédictions

La flèche pleine (grise) indique ici l'avancement temporel de l'écoulement. Les réponses de l'écoulement à différentes distributions "tests" de contrôles sont explorées durant la phase d'itération. Ces réponses sont représentées par les flèches en tirets. Les flèches en tirets-points indiquent une étape de calcul adjoint, qu'on explicitera en détail par la suite, où le contrôle est optimisé par un algorithme de recherche de minimum. Une fois que les itérations ont convergé vers une distribution optimale du contrôle, l'écoulement évolue au pas de temps suivant et le processus d'optimisation est reconduit.

En considérant le système simplifié du jeu d'échecs, essayons de comprendre comment les programmes informatiques arrivent à résister aux meilleurs joueurs d'échecs. La machine d'IBM, *Deep Blue*, dont la formidable prestation en 1997 contre le champion

mondial Garry Kasparov s'est traduite en une défaite symbolique pour l'humanité, était capable de construire à chaque tour un arbre d'évolution temporelle du jeu. Le programme choisissait ensuite le mouvement qui menait au meilleur résultat en sachant évidemment que son adversaire adoptait une approche similaire (jeu non coopératif). La version de *Deep Blue* qui a gagné contre Kasparov était capable de calculer plus de 200 milliards de mouvements en trois minutes, c'est le temps qui était imparti à chaque tour de jeu. Mais même avec ce nombre incroyable de calculs par seconde et un jeu d'une complexité réduite, le match est resté serré face à la formidable intuition de Kasparov.

Mais revenons au problème du contrôle de la turbulence. Pour contrôler un écoulement turbulent, l'approche de la machine *Deep Blue* est à bannir car les possibilités sont maintenant beaucoup trop nombreuses. En effet, si on cherche à contrôler la turbulence de proche paroi par aspirations/soufflages, il sera nécessaire de coordonner un grand tableau d'actionneurs répondant à une dynamique non-linéaire (gouvernée par les équations de Navier-Stokes). Chaque modification de l'action à la paroi, à travers la position ou l'amplitude du soufflage, ne peut donc pas être testée. Une information supplémentaire est donc nécessaire.

Les manipulations par des algorithmes génétiques (par exemple Koumoutsakos *et al.* [1998]) sont des méthodes grossières mais qui puisent leurs avantages dans une facilité de programmation et une capacité à minimiser les fonctions pathologiques (fortes variations, discontinuités, etc.) pour lesquelles l'information sur le gradient (variations de la fonction de coût dans l'espace des paramètres) est quasiment inutile. Ce type d'algorithme reste donc efficace pour les problèmes d'optimisation comportant un faible nombre de dimensions mais aussi pour les systèmes dont l'équation gouvernant l'évolution n'est pas connue.

Pour résoudre notre problème d'optimisation, on peut aller au delà de l'algorithme génétique car nous avons à disposition les équations gouvernant le système (*Navier Stokes*) ainsi qu'une expression qui doit être minimisée, nommée la fonction de coût, traduisant analytiquement l'objectif fixé.

Avec ces deux nouveaux éléments, on est capable de générer une procédure de recherche itérative, basée sur le gradient de la fonction de coût et capable de contrôler l'écoulement plus efficacement, l'objectif faisant maintenant partie intégrante de la résolution du problème. C'est précisément l'information sur le gradient qui nous permettra d'éviter de procéder par tâtonnement, c'est à dire de tester les infinies possibilités de distributions de soufflages/aspirations à la paroi.

Si on se penche maintenant sur l'horizon de prédiction, il paraît clair, dans le cas du jeu d'échec comme celui du contrôle de la turbulence, qu'une optimisation sur une longue durée, donc un grand horizon de prédiction, sera meilleure que celle sur un faible laps de temps. Mais on imagine aussi que la mise en oeuvre du contrôle devient de plus en plus difficile car la complexité croît exponentiellement. C'est pourquoi un temps de prédiction

intermédiaire doit être choisi. On peut alors imaginer que dans ce cas, l'objectif final n'est peut être pas obligatoirement la quantité à faire intervenir dans la fonction de coût.

En reprenant l'analogie avec le jeu d'échec, il peut être préférable d'assurer une bonne position de toutes ses pièces sur l'échiquier avant de lancer l'assaut décisif. C'est pourquoi, si on s'intéresse à la réduction du frottement, il peut être utile de dissocier la *cause* (les structures quasi-longitudinales...) et la *conséquence* (l'augmentation du frottement).

1.4.3.2 Quelques résultats tirés de la littérature

Les résultats présentés ici proviennent de l'étude numérique de Bewley *et al.* [2001] où un contrôle optimal a été appliqué à un écoulement en canal afin de réduire la contrainte turbulente. Le contrôle est effectué par un jeu de soufflage/aspiration positionné sur la paroi inférieure.

La figure 1.3 présente l'évolution temporelle de la contrainte pariétale pour trois types de contrôles optimaux *DRAG*, *TKE(reg)*, *TKE(ter)* et un contrôle par opposition type *Ad-Hoc*.

Le premier contrôle *DRAG*, représente un contrôle optimal dont la fonction de coût est définie comme suit :

$$J_{DRAG}(\phi) = \frac{1}{T_{horizon}} \int_0^{T_{horizon}} \int_{\Gamma^\pm} \nu \frac{\partial u(\phi)}{\partial y} \, dx.dz.dt + \frac{k}{T_{horizon}} \int_0^{T_{horizon}} \int_{\Gamma^\pm} \phi^2 \, dx.dz.dt \tag{1.1}$$

C'est donc le cas où l'on cherche à minimiser le frottement mais aussi l'énergie nécessaire au contrôle. Le facteur k représente le prix du contrôle. Si l'action à effectuer requiert une grande quantité d'énergie, le facteur k sera important et qualifié de cher. Il est important de souligner que cette fonction est intégrée sur un domaine $\Gamma^\pm$ qui représente les surfaces des parois inférieures et supérieures dans le cas d'un écoulement en canal. L'intégration temporelle de 0 à $T_{horizon}$ signifie que ce contrôle vise non pas à diminuer la contrainte en $T_{horizon}$ mais sur la totalité de l'horizon de prédiction.

Le contrôle *TKE(reg)* possède une fonction de coût du type :

$$J_{TKE(reg)}(\phi) = \frac{1}{2T_{horizon}} \int_0^{T_{horizon}} \int_{\Omega} \left|\mathbf{u}(\phi)\right|^2 \, d\Omega.dt + \frac{k}{T_{horizon}} \int_0^{T_{horizon}} \int_{\Omega} \phi^2 \, d\Omega.dt \tag{1.2}$$

où le premier terme représente la moyenne temporelle de l'énergie cinétique turbulente avec Ω le volume total du fluide. Le second terme, correspondant au prix du contrôle, reste inchangé. Là encore, on considère l'optimisation de l'énergie cinétique turbulente sur l'intégralité de l'horizon de prédiction.

Le dernier type de contrôle *TKE(ter)* est défini comme :

$$J_{TKE(ter)}(\phi) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \left|\mathbf{u}(\phi; T_{horizon})\right|^2 \, d\Omega + k\int_{\Omega} \phi^2 \, d\Omega \tag{1.3}$$

C'est donc le même type de fonction de coût que *TKE(reg)* à la différence qu'il n'y pas ici d'intégration temporelle. On cherche donc maintenant à minimiser l'énergie cinétique turbulente non plus sur une durée (de 0 à $T_{horizon}$) mais seulement au temps terminal $T_{horizon}$. On verra que cette différence est d'une importance considérable.

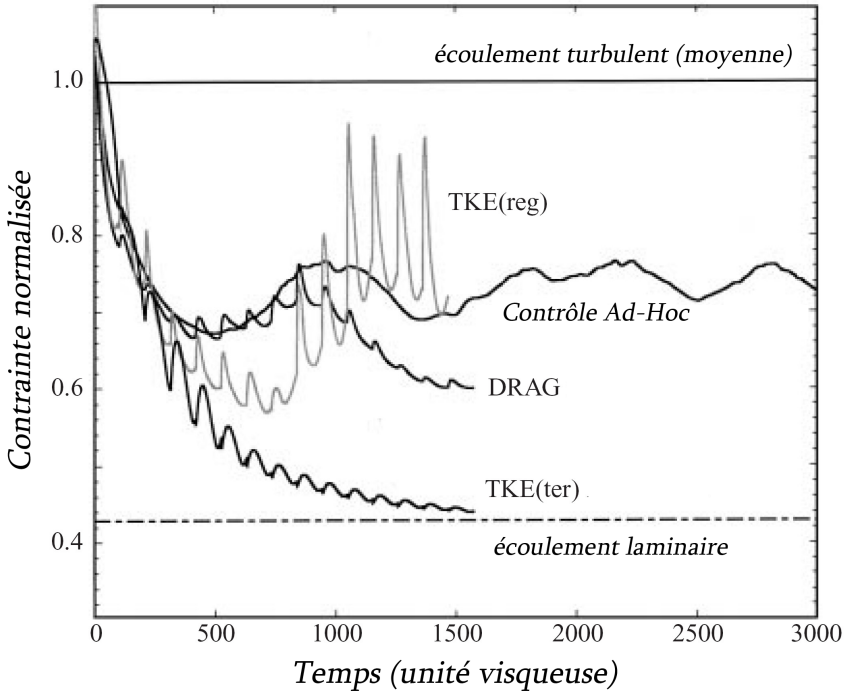


FIGURE 1.3 – Évolution temporelle de la contrainte turbulente pour différentes formulations du contrôle (Bewley *et al.* [2001])

Sur la figure 1.3, les horizons de prédiction sont tous de $T^+_{horizon} = 100$ et les simulations proviennent toutes d'un calcul DNS à $Re_\tau = 100$. Les nombres de Reynolds étant faibles ici, on peut se poser la question de la validité de ces résultats pour des valeurs plus élevées.

On remarque tout d'abord que la stratégie du contrôle *DRAG* est loin d'être la meilleure même si elle donne des résultats satisfaisants, on atteint une réduction proche de 40%. Le contrôle *TKE(reg)* provoque une diminution rapide du frottement, du même ordre que *DRAG* mais remonte à partir de 500 unités de temps.

La meilleure stratégie est sans nul doute la *TKE(ter)* qui parvient à une relaminarisation complète de l'écoulement à partir de $t^+ = 1500$; elle comporte l'avantage de décroître de manière monotone laissant ainsi présager une stabilisation à l'état laminaire.

Pour expliquer une telle différence, revenons au cas du jeu d'échecs. On confronte deux joueurs de même niveau en imposant à l'un de gagner la partie sans ne perdre aucune pièce et à l'autre le même objectif mais en lui permettant d'en sacrifier. Il va sans dire que ce dernier est avantagé dans la mesure où, quitte à perdre quelques pièces importantes, il peut arriver plus efficacement à capturer le roi adverse. Ainsi, dans le cas du *TKE(ter)*, on peut provoquer une augmentation de l'énergie cinétique turbulente mais dans le but d'obtenir une meilleure réduction un peu plus tard.

1.4.4 Un défi technologique important

Le concept d'asservissement impose l'utilisation de capteurs et d'actionneurs qui, dans une optique de diminution de contrainte pariétale, sont de préférence placés à même la paroi.

L'apparition aléatoire en temps et en espace des structures quasi-longitudinales nous impose d'utiliser des tableaux de MEMS (*Micro Electro Mechanical System*) d'une densité surfacique importante pour espérer avoir une action efficace sur leurs évolutions. Ainsi, la distance séparant chaque robot doit être de l'ordre de l'épaisseur de la sous-couche visqueuse (approximativement 5 unités pariétales) correspondant à un espacement de $500\mu m$ pour $Re = 10^4$, soit un ordre de grandeur en-dessous de l'échelle caractéristique des structures cohérentes. Il est donc nécessaire de créer des micro-systèmes dont la taille doit être de l'ordre de $100\mu m$ afin de mesurer et d'agir de manière très localisée.

Les développements récents des technologies dans le domaine de la micro-fluidique permettent maintenant de créer des MEMS de très petites dimensions. Des prototypes de tableaux constitués de capteurs et d'actionneurs ont été réalisés en 2002 par Yoshino *et al.* [2002].

Les MEMS ont été imaginés pour la première fois en 1959 par Richard Feynman dans un essai présenté à l'*American Physic Society*, intitulé *There's Plenty of Room at the Bottom* que l'on pourrait traduire par "Il y a encore beaucoup de place en bas" (c'est à dire dans les échelles inférieures). Feynman prévoit de nombreuses techniques et défis qui ont été rencontrés par la communauté MEMS, certains résolus et d'autres encore en cours de recherche. Aujourd'hui, les principales voies d'études concernent la résistance des MEMS à un environnement hostile ainsi que leurs productions à un faible coût.

La figure 1.4(a) présente un micro-capteur de contrainte dont la taille est de $200 \times 200\mu m^2$ avec une épaisseur de $1.2\mu m$. Le fil chaud est constitué de polysilicone et la réponse en fréquence du capteur est proche de $10^4 Hz$.

La figure 1.4(b) expose un ensemble flexible de ces capteurs, très utile pour recouvrir des parois à géométries diverses.

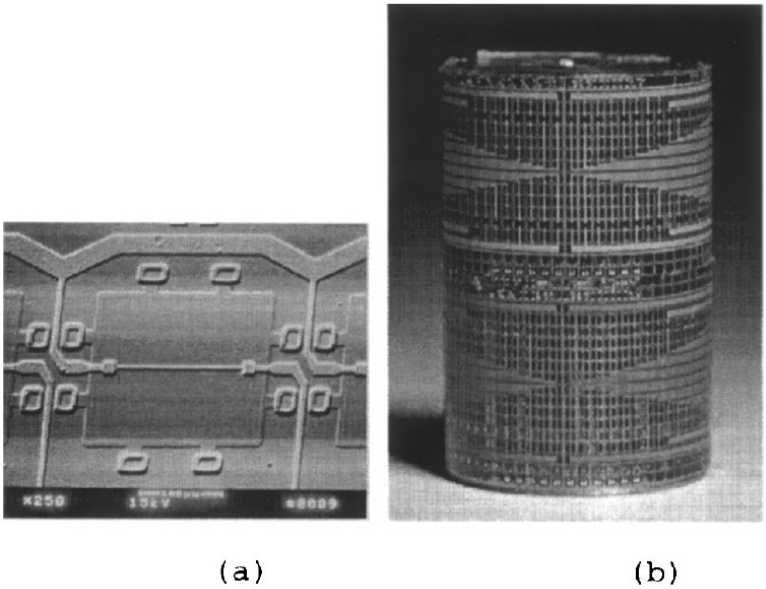


FIGURE 1.4 – Micro capteur de contrainte pariétale (Jiang *et al.* [1996] et Jiang *et al.* [1997]). (a) un seul capteur, (b) un ensemble flexible de 128 capteurs

1.5 Le contrôle dual ou schéma de contrôle hybride

Même si la technologie MEMS a fait d'importantes avancées durant les dernières années, le processus de fabrication des tableaux de capteurs/actionneurs à forte densité est toujours à l'état de recherche et le produit sera sans nul doute proposé à des prix prohibitifs (sans parler du système d'acquisition).

Certains écoulements comportent des propriétés intéressantes qui peuvent être exploitées lorsqu'on cherche à les contrôler. C'est le cas par exemple du sillage derrière un corps non profilé (*bluff body*) où la création de structures cohérentes est gouvernée par une fréquence d'oscillation à l'origine de l'allée de Von Karman.

Fort de cette constatation, un grand nombre de contrôles ont été imaginés afin d'éliminer ou d'atténuer la formation de ces tourbillons. On peut citer par exemple les travaux de Roshko [1955] et Ozono [1999] où une plaque de faible épaisseur est insérée dans le sillage afin de perturber la création des structures de Karman. L'article de Park *et al.* [1994] montre qu'un contrôle par asservissement, composé seulement d'un capteur et d'une paire de fentes agissant en opposition de phase sur un cylindre (une fente aspire pendant que l'autre souffle), permet la suppression totale de l'allée de Von Karman.

La turbulence de proche paroi dans le cas d'une couche limite sur plaque plane ou d'un canal ne comporte pas une telle caractéristique et son contrôle s'avère beaucoup plus délicat. En effet, les structures quasi-longitudinales, qui représentent la composante cohérente de la turbulence, sont à l'origine d'une augmentation de 80% de la contrainte

turbulente (comparée à la couche limite de Blasius). Par un processus de régénération auto entretenu, ces vortex se créent de manière très intermittente à la fois en temps et en espace.

L'idée conductrice de ma thèse est alors de contourner ce problème en essayant d'organiser la turbulence de proche paroi de manière à la rendre plus prédictible.

Les écoulements turbulents couvrent une large gamme fréquentielle du fait de leur nature multi-échelle.

Si $S[\omega]$ est le spectre de puissance d'un processus stochastique (ω est la pulsation), il peut être décomposé en deux parties distinctes :

$$S[\omega] = S_\alpha[\omega] + S_\beta[\omega] \tag{1.4}$$

où $S_\alpha[\omega]$ représente la composante régulière (imprédictible) et $S_\beta[\omega]$ la composante prédictible du processus. Ce résultat est connu sous le nom de décomposition de Wold (voir Papoulis [1984] pour les détails mathématiques).

La composante $S_\alpha[\omega]$ est une portion continue du spectre où aucune fréquence particulière ne peut être dégagée.

A l'inverse, $S_\beta[\omega]$ peut être composé d'une ou plusieurs raies spectrales, c'est à dire :

$$S_\beta[\omega] = \sum_i \beta_i \delta(\omega - \omega_i) \tag{1.5}$$

Dans le cas de la turbulence de proche paroi, $S_\alpha[\omega]$ devrait prédominer sur $S_\beta[\omega]$ car à l'inverse de l'allée de Von Karman, il n'existe pas de fréquence privilégiée propre à l'apparition des structures.

L'idée générale est donc d'appliquer une excitation locale en espace (injection de $S_\beta[\omega]$ dans le système) pour tenter d'améliorer la prédictabilité et de ce fait la contrôlabilité (figure 9.1).

L'objectif de cette approche est de filtrer $S_\alpha[\omega]$ afin d'accentuer la composante prédictible $S_\beta[\omega]$ de manière à améliorer l'efficacité d'un nouveau contrôle (par exemple suboptimal) positionné plus loin à l'aval.

C'est la notion de contrôle dual qu'on peut retrouver dans les travaux de Bar-Shalom [1981] ou Maitelli & Yoneyama [2000].

L'approche la plus intuitive est donc de commencer par forcer l'écoulement de proche paroi par une excitation sinusoïdale et d'étudier en détail les caractéristiques de l'écoulement modifié. La période de soufflage sera choisie proche de la fréquence de *bursting* car elle est fortement liée au processus de production de la turbulence.

Les notions de prédictabilité et de contrôlabilité sont intimement liées.

On a vu précédemment que pour être en mesure d'agir efficacement sur la turbulence de proche paroi, il était nécessaire de recourir à l'utilisation de tableaux de MEMS d'une

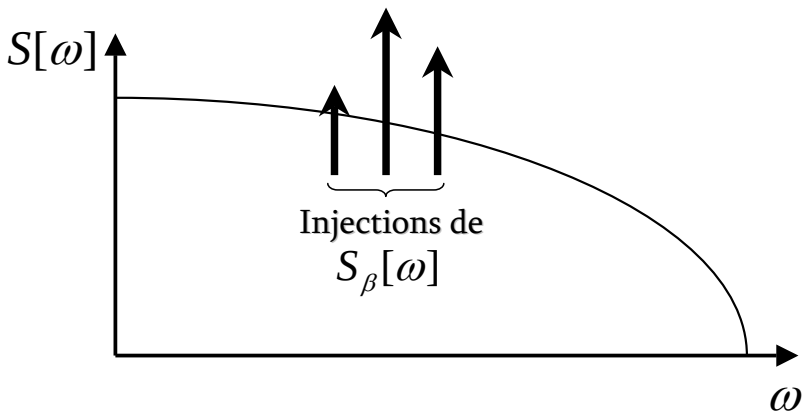


FIGURE 1.5 – Illustration de trois injections prédictibles - excitations sinusoïdales - dans le spectre de puissance

densité trop importante. Avec un écoulement plus prédictible, c'est à dire exhibant des raies spectrales plus prononcées, on peut cibler notre action et envisager une approche analogue à celle utilisée pour contrôler les allées de von Karman. Ainsi, au lieu de recouvrir intégralement la paroi d'un jeu de capteurs/actionneurs, on pourra jouer sur la position ou la densité des MEMS de manière à rendre le contrôle plus efficace et/ou plus facile à mettre en oeuvre expérimentalement.

1.6 Conclusions

On a présenté ici quelques techniques visant à contrôler la turbulence. Dans le cadre d'un écoulement de proche paroi, l'approche passive s'est révélée limitée dans le but de réduire la contrainte turbulente. Le contrôle actif en boucle ouverte ou fermée s'avère donc être la direction de recherche privilégiée afin d'y parvenir plus efficacement. Notre étude s'oriente vers l'application d'un contrôle actif dual (ou hybride) faisant intervenir deux manipulations distinctes. On combinera ainsi les effets d'un contrôle en boucle ouverte, effectué par une injection périodique, et d'un contrôle par asservissement de type *Ad-Hoc* ou suboptimal. On espère, par cette association, être en mesure de contrôler plus efficacement la turbulence de proche paroi.

Chapitre 2

Étude expérimentale d'un soufflage localisé et instationnaire

2.1 Introduction

L'objectif de cette étude expérimentale est d'analyser la réponse d'une couche limite turbulente soumise à une excitation localisée et instationnaire. De précédents travaux (Tardu [2001]) ont mis en exergue un comportement singulier de la contrainte pariétale sous certaines conditions et lorsque l'excitation est de la forme d'un soufflage sinusoïdal.

La première partie s'attache à présenter les résultats et les conclusions importantes résultant de cette étude (cas d'un soufflage temporellement sinusoïdal). De nouvelles mesures ont été effectuées dans des conditions similaires afin d'attester de la bonne reproductibilité de l'expérience. La seconde partie présente l'étude d'un soufflage asymétrique en temps et consolide par ses résultats la phénoménologie proposée.

2.2 Injection temporellement sinusoïdale - Mécanismes clés

2.2.1 Dispositif expérimental

Il est important de préciser que la notion de couche limite standard (*CLS*) se réfère à une couche limite turbulente développée. A l'opposé, une couche limite manipulée est une couche limite turbulente développée, modifiée par une action externe, comme par exemple un soufflage à la paroi (forçage aux conditions limites) ou l'application d'une force électro-magnétique (forçage volumique).

Le caractère oscillant de l'action imposée permet de décomposer la moyenne de phase d'une quantité turbulente comme suit :

$$\langle q(\vec{x},t/T)\rangle = \bar{q}(\vec{x}) + \tilde{q}(\vec{x},t/T) \tag{2.1}$$

où $\bar{q}$ représente la moyenne stationnaire (temporelle), $\tilde{q}$ la moyenne oscillante et T la période d'oscillation du soufflage.

On recompose alors intégralement une quantité turbulente de la manière suivante :

$$q(\vec{x},t) = \langle q(\vec{x},t/T)\rangle + q'(\vec{x},t) \tag{2.2}$$

où q' sont les fluctuations turbulentes.

2.2.1.1 La soufflerie et la zone d'injection

L'intégralité des mesures expérimentales effectuées a été réalisée dans la soufflerie basse vitesse du LEGI. Comme le montre la figure 2.1**-(a)**, la zone manipulée est positionnée à 1150mm d'une bande rugueuse permettant de déclencher la transition laminaire-turbulente.

L'injection d'air à travers la paroi inférieure de la veine d'essai est conduite par l'intermédiaire d'une fente d'épaisseur longitudinale, $L_x = 0.6\ mm$ et de longueur transversale $L_z = 100\ mm$ (2.1**-(b)**).

Il est à noter que dans les conditions nominales d'expérimentations, $U_{centre} = 4\ m/s$, l'épaisseur de la couche limite est alors approximativement de 3 cm sur la zone de manipulation. La correspondance "unité pariétale-dimension physique" est établie par l'intermédiaire d'une épaisseur visqueuse $l_\nu = \frac{\nu}{u_\tau}$ où la vitesse de frottement moyenne de la CLS est définie par $u_\tau = \sqrt{\tau/\rho}$, et ν est la viscosité cinématique de l'air.

Dans ces conditions, on obtient $l_\nu = 0.08\ mm$. Les dimensions de la fente sont alors : $L_x = 1212 l_\nu$ et $L_z = 7 l_\nu$.

Un actionneur à soufflage périodique en temps a spécialement été conçu pour cette étude. Ce pulseur est constitué d'une came, montée sur un arbre, et entraînée par un moteur à vitesse variable. La came ainsi mise en mouvement vient obstruer ou non la sortie du système afin de produire une injection (ou une aspiration) périodique. Les problèmes dus à la compressibilité de l'air (apparition d'ondes se propageant dans le système) ont été éliminés en utilisant des filtres acoustiques en sortie du système pulsant. Un tel dispositif permet d'obtenir une forme d'injection sinusoïdale avec une amplitude pouvant aller jusqu'à $A = 2\ m.s^{-1}$ ($A^+ = 10$). La fréquence de soufflage maximale pouvant être utilisée est $f = 50 H_z$ ($f^+ = 2.3\ 10^{-2}$).

2.2.1.2 Dispositif de mesure

La mesure de la contrainte pariétale est effectuée au moyen d'un capteur de type Cousteix-Houdeville afin d'éviter les problèmes liés à la conduction dans le substrat (voir par exemple Tardu *et al.* [1991]). Un fil chaud de 4μm de diamètre est installé sur une microcavité et positionné sur la paroi. La partie sensible du capteur a une longueur de 200μm correspondant à une distance transversale $\Delta_z^+ = 3$. La longueur du capteur doit être inférieure à 20 unités pariétales afin d'éviter l'effet d'intégration transverse pouvant être

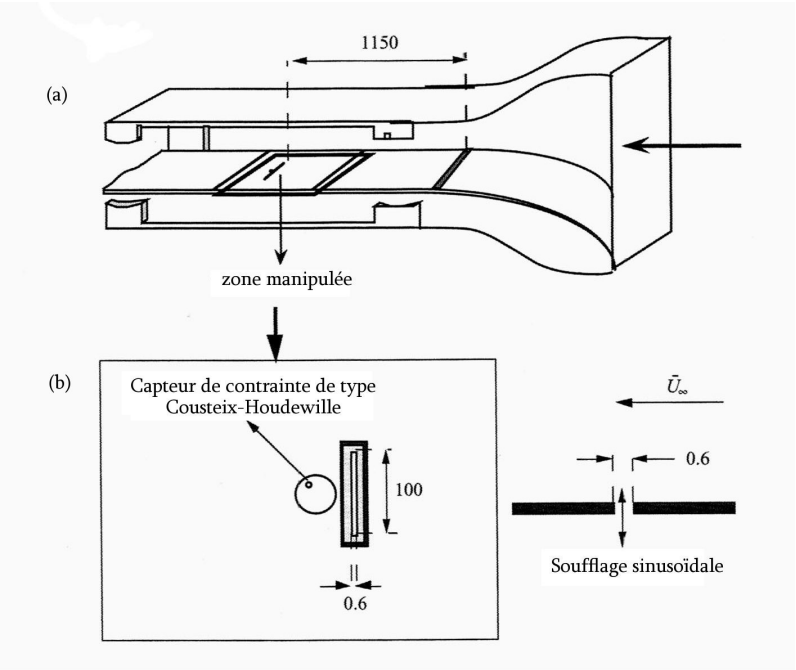


FIGURE 2.1 – (a) - Dispositif expérimental, (b) - La zone manipulée en détail

causé par les structures énergétiques (les vortex quasi-longitudinaux ont typiquement un diamètre de cette valeur).

La vitesse longitudinale est mesurée par un fil chaud de type TSI 1276-10W dont la partie sensible s'étend sur 5 unités pariétales. La fréquence d'échantillonnage est fixée à $f^+ = 2$ ($\approx 5000H_z$) et un filtre *Krohn Hite* est utilisé afin d'éliminer les bruits parasites. Typiquement, le temps total de chaque enregistrement est $T_{tot} = 5000.T_\infty$ dans le cas d'un soufflage constant ou d'une *CLS* avec $T_\infty = \delta/U_\infty$ le temps de retournement des grandes structures. Ce temps d'acquisition est assez long pour assurer la convergence des statistiques jusqu'au moment d'ordre 4 (Klewicki & Falco [1990]).

Dans le cas d'une injection instationnaire, la durée totale de l'enregistrement est augmentée jusqu'à $T_{tot} = 25000.T_\infty$ pour obtenir une bonne convergence statistique des moyennes de phases. Il est à noter que la calibration des fils chauds est effectuée *in situ*.

2.2.2 Injection temporellement sinusoïdale

Les résultats présentés ici sont obtenus avec une fréquence de soufflage de $f^+ = 0.017$ et une amplitude $A^+ = 5$, soit une vitesse maximale d'injection $v_0 = 2\ m.s^{-1}$. Le nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de la couche limite est $Re_\delta = 10^4$ correspondant à une vitesse au centre du canal $U_\infty = 4\ m.s^{-1}$.

Le paramètre de similarité le plus adéquat pour rendre compte de l'effet d'un soufflage ou d'une aspiration locale est le paramètre de sévérité β, défini comme le rapport entre le débit de l'injection à travers la fente et le débit de la couche limite.

$$\beta = \frac{L_x.v_0}{\int_0^\delta u.dy} \tag{2.3}$$

Le coefficient de quantité de mouvement C_μ est un autre paramètre de similarité fréquemment rencontré dans la littérature. Il est défini de la manière suivante :

$$C_\mu = \frac{L_x.v_0^2}{\int_0^\delta u^2.dy} \tag{2.4}$$

Mais comme il l'a été montré par Sano & Hirayama [1985], ce paramètre n'est pas correct pour caractériser un soufflage ou une aspiration locale.

L'étude présente est effectuée avec une taille de fente très petite (8 unités pariétales). Ainsi, même si la vitesse d'injection maximale semble importante (50% de U_∞), le paramètre de sévérité reste très faible et dispose d'une valeur moyenne de $\overline{\beta} = 0.006$.

Au cours du cycle d'oscillation, lorsque le soufflage est périodique en temps, la valeur maximum du paramètre de sévérité est $\beta_{max} = 0.012$. Dans le cas d'une injection instationnaire, le facteur de forme varie de manière cyclique et atteint au maximum $H = 1.6$ en $x/\delta = 0.1$ (à l'aval de la fente et à proximité immédiate) montrant qu'il n'y a pas de séparation au moins à cette position.

La forme temporelle de l'injection à travers la fente (voir figure 2.2) est $\left\langle v_0^+ \right\rangle = A^+(1 - cos\,[2\pi f^+ t^+])$.

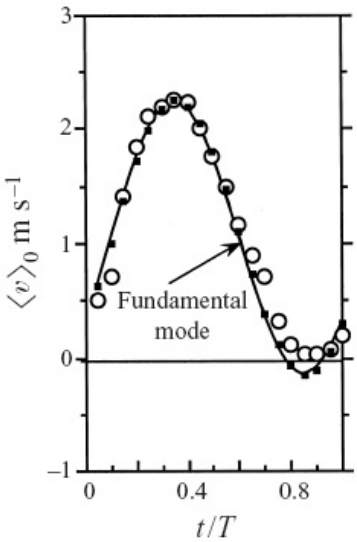


FIGURE 2.2 – Soufflage sinusoïdal et sa première harmonique

Il peut être intéressant de comparer les résultats obtenus avec une action instationnaire avec ceux obtenus dans le cas stationnaire (soufflage constant). Pour ces deux études, le

paramètre de sévérité moyen doit être similaire, c'est à dire $\overline{\beta} = 0.006$ afin de mettre en évidence l'apparition de phénomènes instationnaires.

Le tableau 2.3 expose les valeurs des contraintes et de leurs intensités turbulentes en $x^+ = 20$ et $x^+ = 40$.

	Unsteady blowing		Steady blowing	
x^+	$\overline{\tau}^*_P/\overline{\tau}_{SBL}$	$\sqrt{\overline{\tau'\tau'}^*_P}/\overline{\tau}_{SBL}$	$\overline{\tau}^*_S/\overline{\tau}_{SBL}$	$\sqrt{\overline{\tau'\tau'}^*_S}/\overline{\tau}_{SBL}$
20	0.55	0.15	0.64	0.14
40	0.67	0.17	0.67	0.16

FIGURE 2.3 – Comparaison des contraintes et de leurs intensités turbulentes moyennées en temps dans le cas d'une injection sinusoïdale et constante

On constate que l'instationnarité n'affecte pas significativement la contrainte et l'intensité turbulente, excepté au premier point de mesure, $x^+ = 20$, où on remarque une diminution notable de la contrainte turbulente. Notons que dans les deux cas, la diminution moyenne de la contrainte par rapport au cas non manipulé est d'approximativement 40%.

L'établissement des moyennes de phases est très utile afin de mettre en exergue les phénomènes instationnaires causés par une action périodique. Ainsi, la figure 2.4(a) expose l'évolution cyclique de la contrainte turbulente en $x^+ = 20$ et $x^+ = 40$ à l'aval de la fente. La moyenne de phase $\langle\tau\rangle$ est adimensionnalisée par la contrainte moyennée temporellement dans le cas standard et le temps est adimensionnalisé par la période de soufflage T. La forme de l'injection est aussi représentée mais ne correspond pas à l'échelle de la figure.

Un comportement singulier de la contrainte se produit durant la phase d'accélération de la vitesse d'injection. On constate que le frottement décroît rapidement jusqu'à atteindre la limite laminaire définie comme la valeur de la contrainte pour une couche limite de Blasius au même nombre de Reynolds. L'activité turbulente $\langle\tau'\tau'\rangle$ correspondante est reportée sur la figure 2.4(b). Cette activité est totalement supprimée sur quasiment la moitié de la période d'oscillation en $x^+ = 20$. Avec la décroissance de la contrainte et de l'intensité turbulente, on peut conclure à l'apparition d'une zone relaminarisée durant la phase d'accélération.

A $x^+ = 40$, on remarque une légère augmentation des deux quantités en $t/T = 0.6$, montrée par une flèche sur la figure 2.4. On verra que ce phénomène est lié à l'apparition d'une instabilité générée par l'instationnarité du soufflage.

En effet, une étude attentive de la figure 2.5 permet de conclure à la création d'une structure transversale apparaissant à l'aval et à proximité de la fente.

La figure 2.5 - (a) montre comment sont affectés les profils de vitesses longitudinales moyennes en $t/T = 0.4$ et $t/T = 0.8$ soit respectivement au milieu de la phase d'accélération et de décélération de la vitesse d'injection en $x^+ = 40$. Un caractéristique frappante est

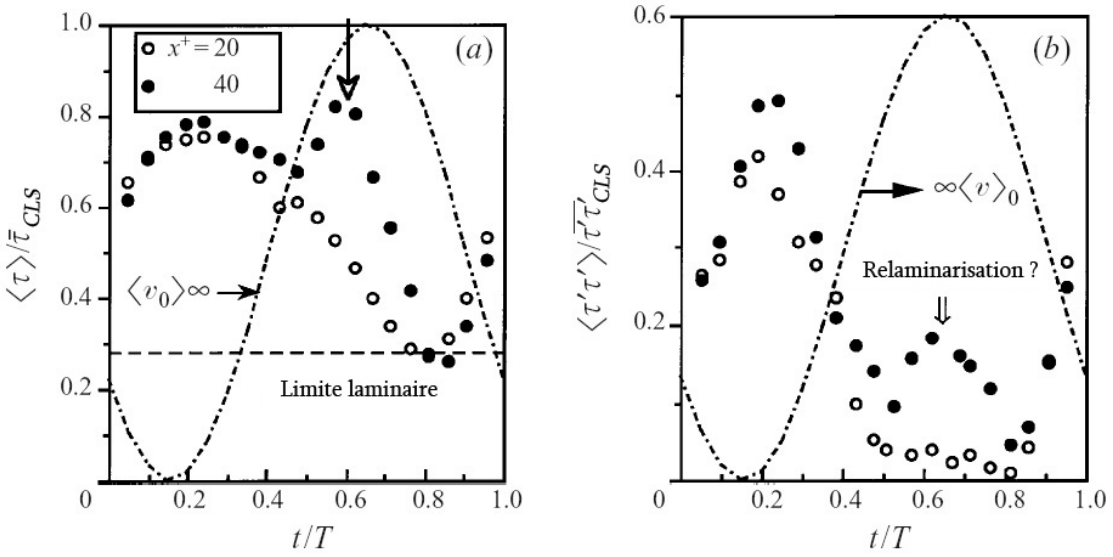


FIGURE 2.4 – Moyennes de phase de (a) la contrainte pariétale (b) de son intensité turbulente à plusieurs positions à l'aval de la fente

alors la présence d'un point fortement inflexionnel durant la phase de décélération. On peut donc être en présence d'une instabilité inviscide de la couche relaminarisée comme suggéré par le théorème de Fjortoft. De plus, l'apparition d'une zone instable est en phase avec le caractère déstabilisant d'une décélération spatiale ou temporelle (Drazin & Reid [1981] p.361).

L'évolution de la dérivée normale de la vitesse (figure 2.5 - (b)) montre effectivement une modification du signe de la dérivée seconde. Si on extrapole les points de mesure à la paroi, on peut aussi constater que la dérivée seconde est nulle en $y^+ = 0$. On ne génère donc aucun gradient de pression adverse qui pourrait être à l'origine d'une séparation instationnaire.

L'existence d'une structure cohérente transversale $\Omega'_{z\ COH}$ peut être constatée sur les figures 2.5(c) et (d). L'apparition de minimum et maximum locaux dans l'évolution de $\sqrt{\tau'\tau'}$ ainsi que celle d'un pic pour le facteur de dissymétrie en sont significatif.

La naissance de la structure $\Omega'_{z\ COH} > 0$ a lieu approximativement en $x^+ = 20$, elle est ensuite advectée par l'écoulement moyen et agit sur la paroi sur une distance approximative de $x^+ = 150$ avant de diffuser vers les couches supérieures. Sa vorticité étant positive, son action à la paroi se traduit par une accumulation de vorticité négative représentée par $\omega'_{z\ SEC} < 0$ (figure 2.6).

La structure $\Omega'_{z\ COH} > 0$ créée provoque une augmentation drastique de la contrainte et de l'activité turbulente sur son passage. La position de ces maximums en plusieurs positions à l'aval de la fente (représentée par des flèches sur la figure 2.7) est bien localisée à la fois en espace et en temps, rendant le processus tout à fait prédictible.

La distance séparant deux pics de contraintes en fonction de la durée séparant leurs apparitions est reportée sur la figure 2.8. La dérivée est évidemment la vitesse de propa-

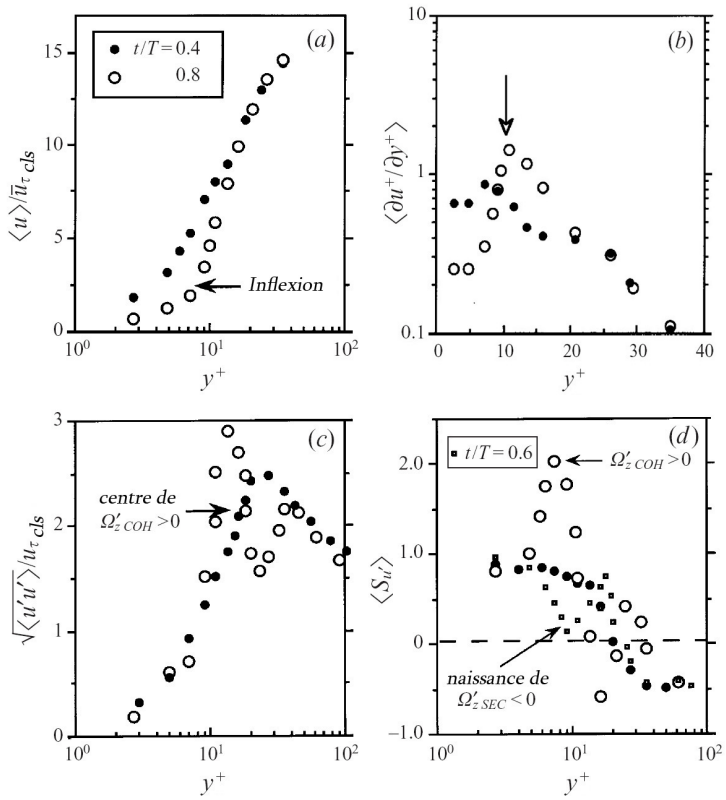


FIGURE 2.5 – Distribution en fonction de y^+ de (a) la vitesse longitudinale (b) la contrainte (c) l'intensité turbulente de la vitesse longitudinale (d) le facteur de dissymétrie, en $x^+ = 40$ à l'aval de la fente et pour $t/T = 0.4 - 0.8$

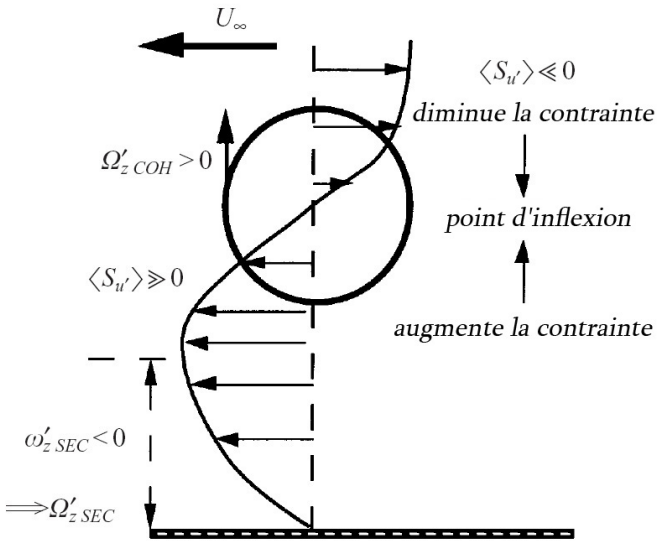


FIGURE 2.6 – Mécanisme possible de génération d'une structure cohérente transversale par instabilité de la couche de cisaillement lors de la phase de relaminarisation

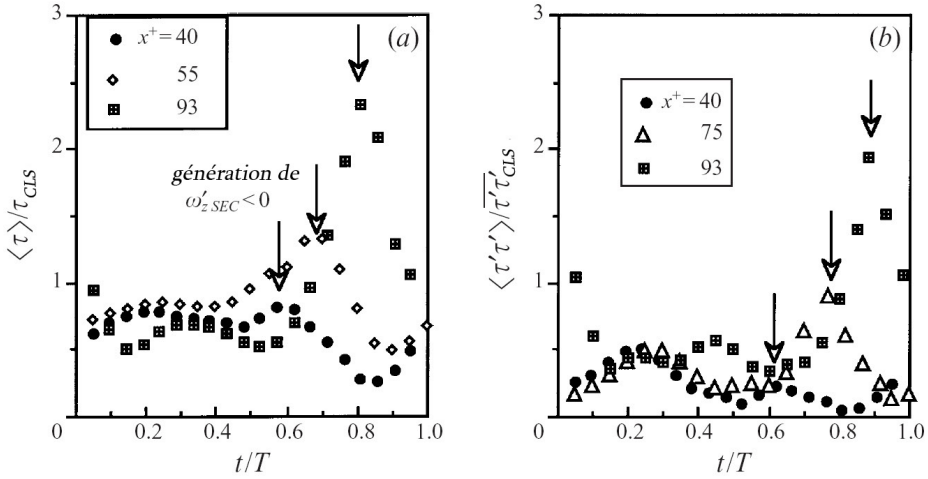


FIGURE 2.7 – Moyennes de phase de (a) la contrainte pariétale (b) son intensité turbulente à plusieurs positions à l'aval de la fente

gation des pics des contraintes et des intensités turbulentes qui n'est autre que la vitesse d'advection de la structure transverse. On remarque ainsi que $\Omega'_{z\ COH}$ voyage à une vitesse constante de 7 unités pariétales. Étant advectée par l'écoulement, elle doit donc se situer à une distance comprise entre $5 < y^+ < 10$ de la paroi, c'est à dire dans la partie basse de la sous-couche tampon.

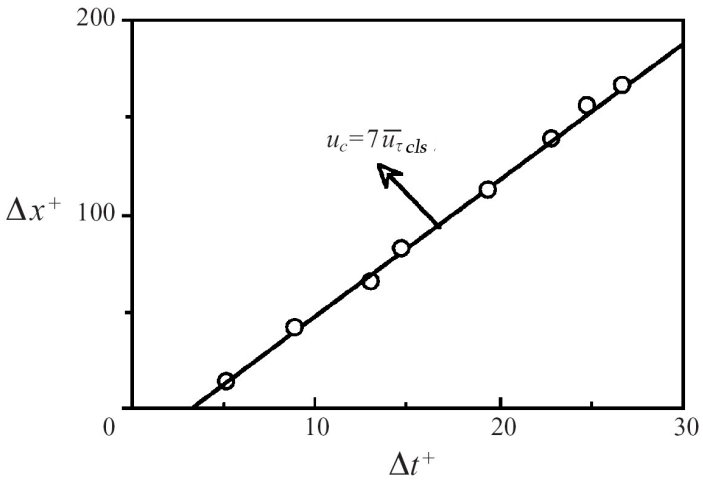


FIGURE 2.8 – Vitesse d'advection de la structure présentée sur la figure 2.5

2.2.3 Phénoménologie

Contrairement à une aspiration pariétale, lorsqu'on agit par un soufflage, aucune vorticité n'est enlevée ou produite. On ne fait que modifier la distribution de vorticité

déjà existante. Aux abords de la fente, l'injection éloigne la couche vorticitaire négative d'une distance $\delta\langle y_v\rangle \propto \int_t^{t+\langle t_c\rangle} \langle v_0\rangle\, dt$ où $\langle t_c\rangle$ est le temps de convection des structures sur la fente (figure 2.9) . On peut évaluer $\langle t_c\rangle$, sachant que $t_c^+ \approx \frac{L_x^+}{u_c^+}$ où u_c est la vitesse de convection des structures et L_x la largeur de la fente dans la direction longitudinale. On peut ainsi estimer $t_c^+ \approx 1$ qui est très petit comparé à la période de soufflage $T^+ = 59$. Le taux de déplacement peut alors être approximé comme $\delta\langle y_v\rangle \propto \langle v_0\rangle\langle t_c\rangle$. Si $\langle\omega_d\rangle$ est la quantité de vorticité déplacée par le soufflage, on peut en déduire qu'il existe un déficit de vitesse positive à la paroi $\delta\langle u_0\rangle = \langle\omega_d\rangle\,\delta\langle y_v\rangle$ (pour plus d'explications, voir Annexe A). Il s'en suit donc la création d'une couche de vorticité positive nommée $\omega'_{z\ COH}$. Cette nappe vorticitaire dilue la vorticité négative existante et induit une diminution significative de la contrainte pouvant aller jusqu'à une relaminarisation locale de l'écoulement.

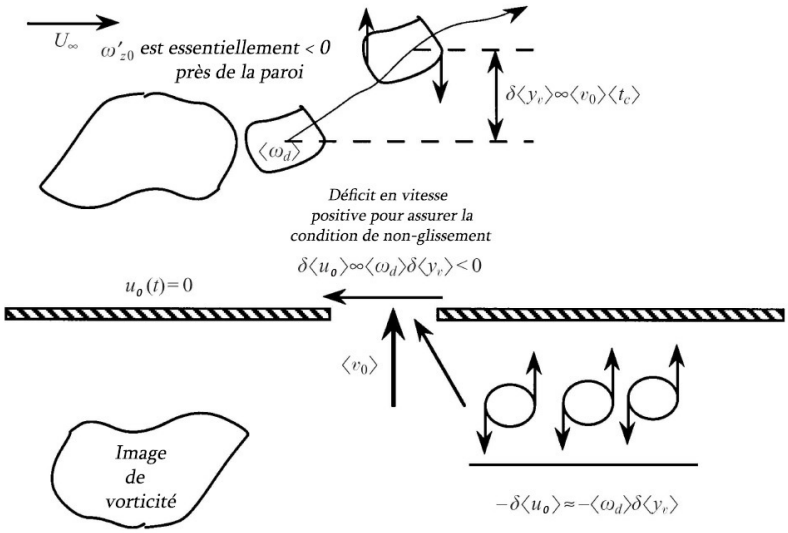


FIGURE 2.9 – Représentation schématique de l'action d'un soufflage instationnaire sur la turbulence de proche paroi (Tardu [2001])

La figure 2.10 résume les différents processus liés à une injection locale instationnaire de forme sinusoïdale. L'épaisseur de la zone relaminarisée se comporte comme une couche de Stokes ; elle est liée à la fréquence imposée par la relation $l^+ = \frac{1}{\sqrt{f^+}}$. On verra plus loin dans ce chapitre que la fréquence joue un rôle primordial dans la création de la structure transverse $\Omega'_{z\ COH}$.

Une seconde structure cohérente $\Omega'_{z\ SEC}$ est formée à partir de l'intensification de la nappe $\omega'_{z\ SEC}$; son action sur la turbulence de proche paroi est cependant limitée car elle diffuse rapidement vers les couches supérieures.

2.2.4 Effet de la fréquence imposée

Dans le cas d'une injection sinusoïdale, Tardu [2001] a montré que la fréquence de l'excitation conditionnait l'apparition d'une structure transversale. Des mesures ont été

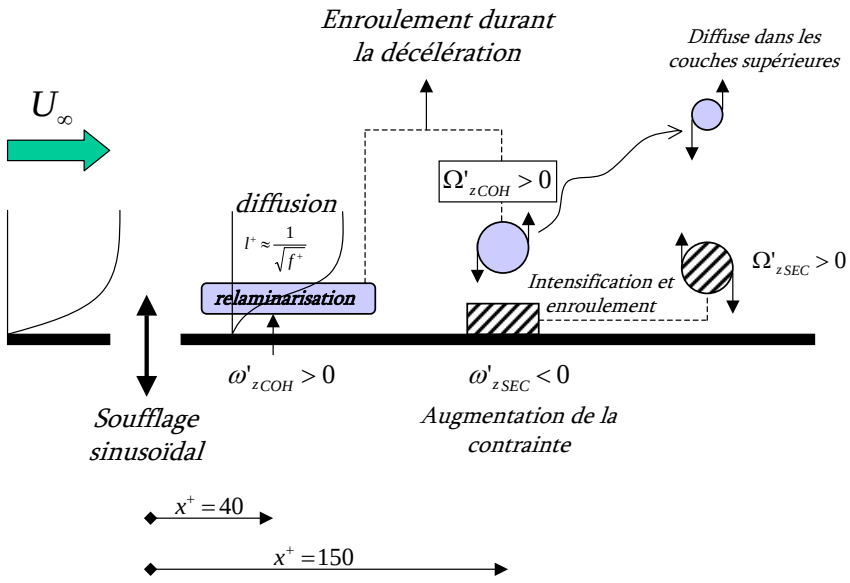


FIGURE 2.10 – Récapitulatif des différents mécanismes mis en jeu lors d'une injection sinusoïdale à haute fréquence

effectuées en modulant la fréquence d'injection et pour quatre positions différentes entre $80 < x^+ < 140$. Les résultats sont reportés sur la figure 2.11 où l'ordonnée prend la valeur 1 si on constate l'apparition d'un enroulement en chaque points de mesure et 0 dans le cas contraire. Elle montre ainsi qu'il existe une valeur critique $f^+_{cr} = 8.10^{-3}$ en dessous de laquelle l'enroulement n'a pas lieu.

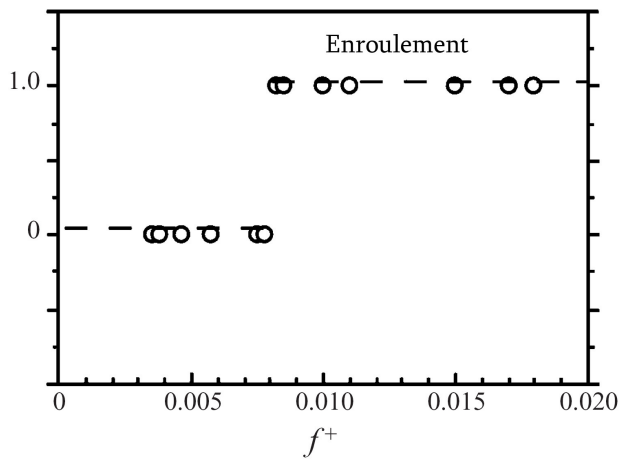


FIGURE 2.11 – La fréquence critique pour l'apparition d'un enroulement est $f^+_{cr} = 8.10^{-3}$

2.3 Injection temporellement asymétrique

Lors de l'étude d'une action sinusoïdale, on a vu que les phases d'accélération et de décélération du soufflage jouaient un rôle primordial à la fois dans la création d'une zone relaminarisée mais aussi dans la formation des structures cohérentes. Fort de ces observations, l'analyse d'une nouvelle forme temporelle de l'injection se présente comme une suite logique à l'expérimentation précédente.

La phase d'accélération est bénéfique en terme de réduction de la contrainte turbulente car elle mène à la création d'une nappe de vorticité positive qui tend à relaminariser localement l'écoulement. Mais durant la phase de décélération cette accumulation a tendance à se déstabiliser et à s'enrouler en une structure transverse augmentant considérablement le frottement pariétal sur son passage. C'est précisément la formation de cette structure qu'il faut inhiber par l'application d'une nouvelle injection, non plus sinusoïdale mais asymétrique en temps.

2.3.1 Un nouveau dispositif de soufflage

Un nouveau système d'injection par air pulsé a été spécialement conçu pour cette étude. Il est constitué d'un moteur à courant continu dont le rôle est de transformer un soufflage constant généré par de l'air comprimé en un soufflage alternatif, oscillant entre 0 et 2 $m.s^{-1}$. Pour cela, l'air sous pression entre dans une chambre dont l'orifice de sortie est progressivement fermé puis brusquement ouvert par une came asymétrique (figure 2.12).

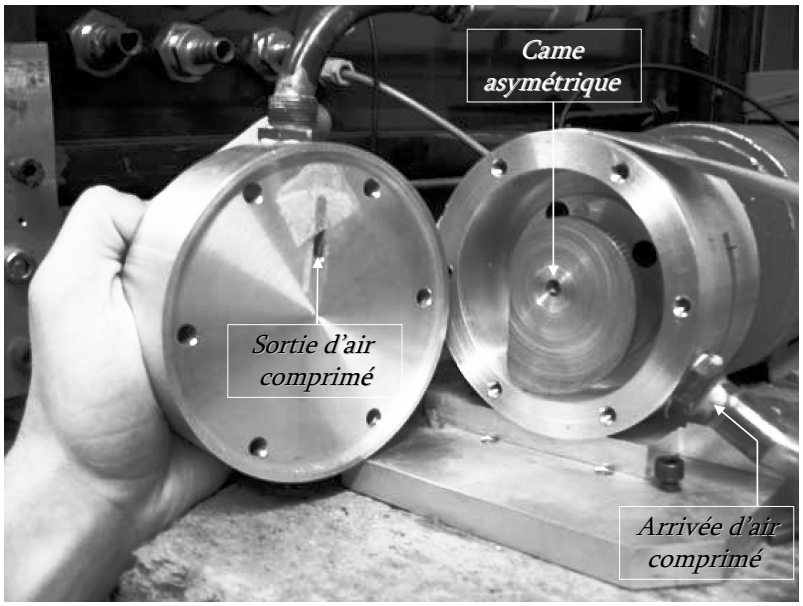


FIGURE 2.12 – Photographie du système pulsant créé spécialement pour l'étude de l'injection asymétrique

Grâce à ce système pulsant, une forme satisfaisante d'injection asymétrique peut être obtenue.

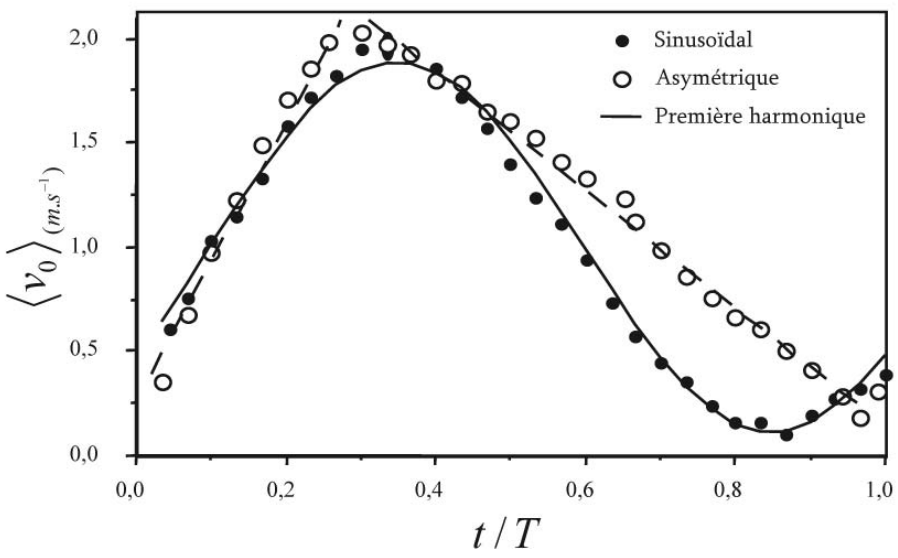


FIGURE 2.13 – Moyenne de phase de la vitesse imposée à travers la fente pour le cas sinusoïdal et asymétrique

La figure 2.13 présente la moyenne de phase de l'injection asymétrique, sinusoïdale ainsi que leur première harmonique. Pour l'injection asymétrique, on voit clairement que la durée pendant laquelle la vitesse décroît est beaucoup plus importante que celle pendant laquelle la vitesse augmente traduisant ainsi une accélération moyenne quasiment deux fois supérieure à la décélération.

Ce type d'injection est choisi de manière à provoquer, comme le soufflage sinusoïdal, l'apparition d'une région localement relaminarisée à l'aval de la fente. C'est pourquoi l'accélération, même si elle est ici quelque peu intensifiée, reste le paramètre primordial dans le but d'obtenir une bonne réduction de la contrainte turbulente. La faible décélération de l'injection asymétrique présente l'avantage d'être beaucoup moins déstabilisante, laissant ainsi le temps à la nappe de vorticité positive d'être advectée dans la direction longitudinale et de diffuser dans la direction normale sans s'enrouler en une structure cohérente.

2.3.2 Résultats

La bonne convergence des statistiques en terme de moyenne de phase est évidemment conditionnée par la durée d'acquisition du signal.

On sait que dans le cas stationnaire, le temps d'acquisition nécessaire est de l'ordre de $1000 * T_\infty$, soit dans notre cas approximativement 10 secondes.

Si on s'intéresse maintenant à un processus instationnaire et qu'on choisit de diviser la période de soufflage en 30 créneaux dans le but d'effectuer des moyennes locales au sens temporel, la durée d'acquisition totale devra évidemment être augmentée. Ainsi, on aura besoin d'une durée de $1000 * T_\infty$ par créneaux soit au total $30.000 * T_\infty$ correspondant approximativement à 5 minutes d'acquisition.

La figure 2.14 présente l'évolution des moyennes de phase de la contrainte turbulente, notées $\langle\tau\rangle$ et adimensionnalisées par la moyenne temporelle des contraintes dans le cas non manipulé. Les résultats sont présentés en $x^+ = 20$ à l'aval de la fente correspondant à une distance approximative de 2 mm.

Afin d'interpréter plus facilement les résultats, on reporte sur chaque figure la forme approximative de la vitesse d'injection $\langle v_0\rangle$.

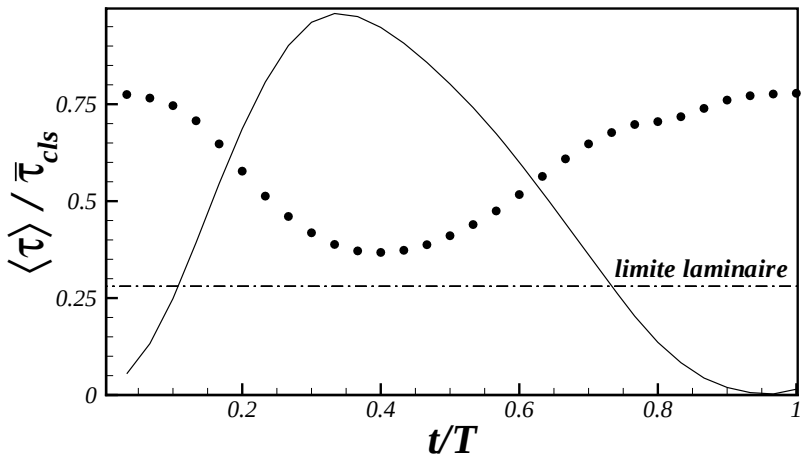


FIGURE 2.14 – Moyennes de phase de la contrainte pariétale en $x^+ = 20$

La limite laminaire représentée est obtenue à partir d'une couche limite de *Blasius* comportant un nombre de Reynolds identique.

Ces premiers résultats montrent que l'application d'une injection asymétrique est à l'origine d'une diminution importante de la moyenne de phase des contraintes. De la même manière que l'action sinusoïdale, les valeurs minimales du frottement moyen sont en correspondance directe avec les phases d'accélération tout comme les valeurs maximales sont liées aux phases de décélération de l'injection. La moyenne temporelle de la contrainte est $\overline{\tau} = 0.55$, ce qui indique une réduction de la traînée de 45% par rapport à celle d'une couche limite turbulente non manipulée. En $t/T = 0.4$, elle atteint une valeur minimale $\langle\tau\rangle = 0.35$ très proche de la limite laminaire.

La figure 2.15 trace l'évolution des moyennes de phase de l'intensité turbulente des contraintes adimensionnalisées par leur homologue dans le cas non manipulé.

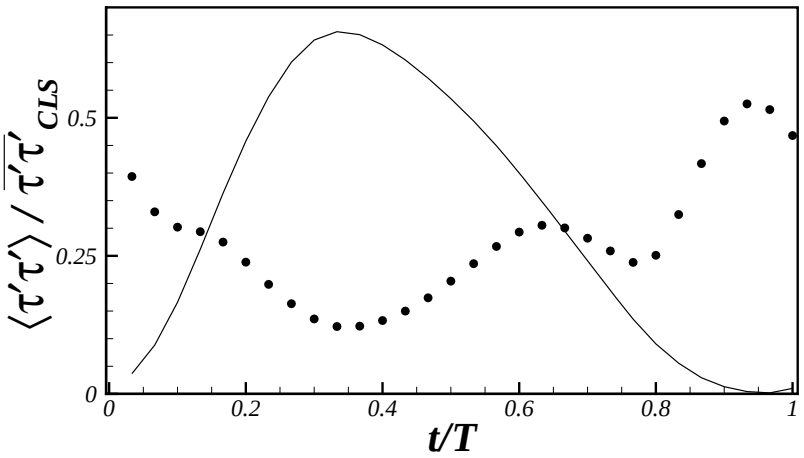


FIGURE 2.15 – Moyennes de phase de l'activité turbulente en $x^+ = 20$

La moyenne temporelle de l'intensité turbulente $\overline{\tau'\tau'}$ est plus de 3 fois inférieure à celle obtenue dans un cas standard, caractérisant ainsi une très forte diminution globale de l'activité turbulente.

En $x^+ = 20$, l'activité turbulente est considérablement réduite sur la moitié de la période, à savoir de $t/T = 0.1$ à $t/T = 0.6$. Là encore, les zones de fortes activités coïncident avec les phases de décélérations et les zones de faibles activités avec celles d'accélérations. A cette position, les évolutions des contraintes et des intensités turbulentes dans le cas sinusoïdale et asymétrique présentent un comportement très similaire.

La figure 2.16 compare les moyennes de phases de la contrainte pariétale pour les deux types de soufflage *Sinusoïdal* et *Asymétrique*, chacune adimensionnalisée par la contrainte moyenne dans un cas non manipulé ($\overline{\tau}_{CLS}$). Ces deux études sont présentées à une distance $x^+ = 112$ après la fente et on été effectuées durant la même expérimentation. Il est important de souligner que les résultats obtenus lors d'une injection sinusoïdale sont identiques à ceux obtenus par Tardu [2001], certifiant la bonne répétabilité des résultats.

Le pic de contrainte dans le cas sinusoïdal provient de la création du vortex transversal comme explicité précédemment (section 2.2.3). La réaction de la turbulence de proche paroi est différente lors du soufflage asymétrique, on constate non seulement une diminution drastique de ce pic mais aussi de la globalité des contraintes. On constate que la phase relaminarisée s'étend maintenant sur 70% de la période d'oscillation et que le rapport des contraintes moyennées temporellement s'élève à $\frac{\overline{\tau}_{Asym.}}{\overline{\tau}_{Sinus.}} = 0.5$, traduisant le fait que l'excitation asymétrique est deux fois plus efficace en terme de réduction de traînée.

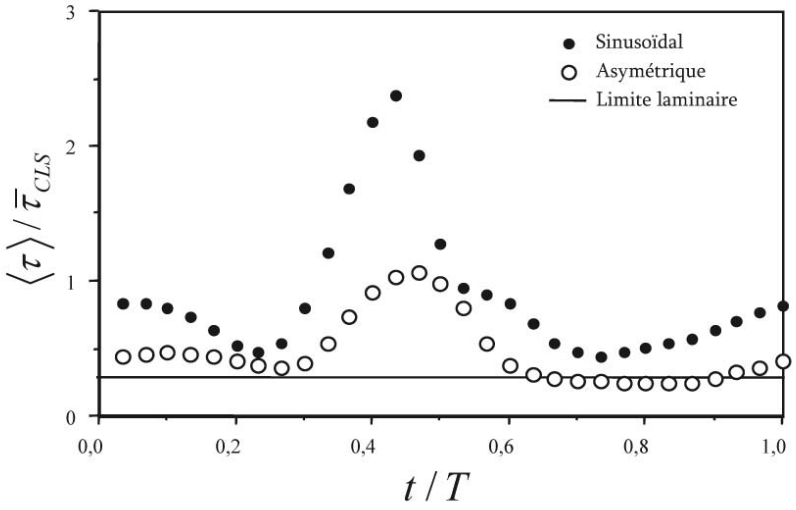


FIGURE 2.16 – Moyennes de phase de la contrainte pour les deux types de soufflage en $x^+ = 112$

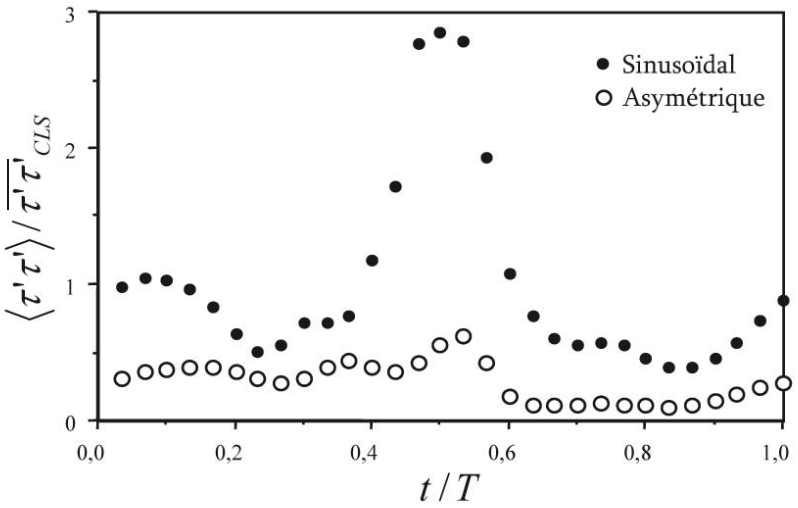


FIGURE 2.17 – Moyennes de phase de l'activité turbulente pour les deux types de soufflage en $x^+ = 112$

La présence du vortex transversal est associée à une augmentation drastique des fluctuations turbulentes comme le montre la figure 2.17 dans le cas sinusoïdal. La valeur du pic $\langle\tau'\tau'\rangle_S$ est 3 fois supérieure au cas non manipulé. Lors de l'injection asymétrique, l'activité turbulente est quasiment supprimée, confirmant ainsi qu'il n'y a **pas de création systématique de structures** pénalisantes pour la contrainte pariétale.

L'effet de l'excitation asymétrique en $x^+ = 112$ peut aussi être analysé à travers l'évolution de la moyenne de phase du facteur de dissymétrie (figure 2.18) et d'aplatissement (figure 2.19).

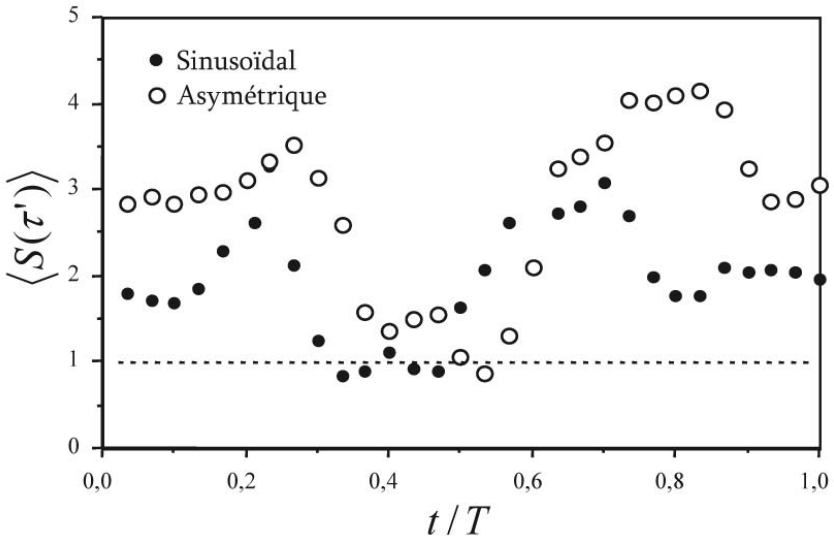


FIGURE 2.18 – Moyennes de phase du facteur de dissymétrie en $x^+ = 112$

Le comportement du facteur de dissymétrie est assez similaire dans les deux cas. On constate une forte tendance à la création d'évènements positifs avec des valeurs qui peuvent atteindre jusqu'à 3 fois (cas sinusoïdal) et 4 fois (cas asymétrique) celles du cas standard.

L'analyse du moment d'ordre 4 de la contrainte turbulente (figure 2.19) mène à une conclusion intéressante. Comme dans le cas du facteur de dissymétrie, les valeurs présentées ici sont en générale supérieures au cas non-manipulé.

On remarque qu'en $t/T = 0.8$, le facteur d'aplatissement lié au soufflage asymétrique atteint une valeur $\langle F(\tau') \rangle = 30$ alors que dans le cas sinusoïdal $\langle F(\tau') \rangle = 10$.

L'ensemble des remarques précédentes nous autorise à penser que, dans le cas d'une excitation asymétrique, les tourbillons se forment seulement par intermittence. En supposant que leur formation est périodique, on peut tenter d'estimer leur fréquence d'apparition. La figure 2.16 montre qu'en $t/T = 0.45$, les deux soufflages provoquent une augmentation de la contrainte turbulente. En considérant que ces deux pics proviennent de la création d'un tourbillon similaire, le rapport de leur valeur (1/2.5), indique une fréquence d'apparition approximative de 1/3, soit un tourbillon pour 3 périodes d'injection dans le cas asymétrique. Ce résultat est confirmé par l'étude de l'intermittence (figure 2.19) mais aussi par une observation directe du signal durant l'expérimentation.

Sur la figure 2.20 sont reportées les contraintes moyennées en temps, en plusieurs position à l'aval de la fente et pour trois types de soufflage : Sinusoïdal, Constant et

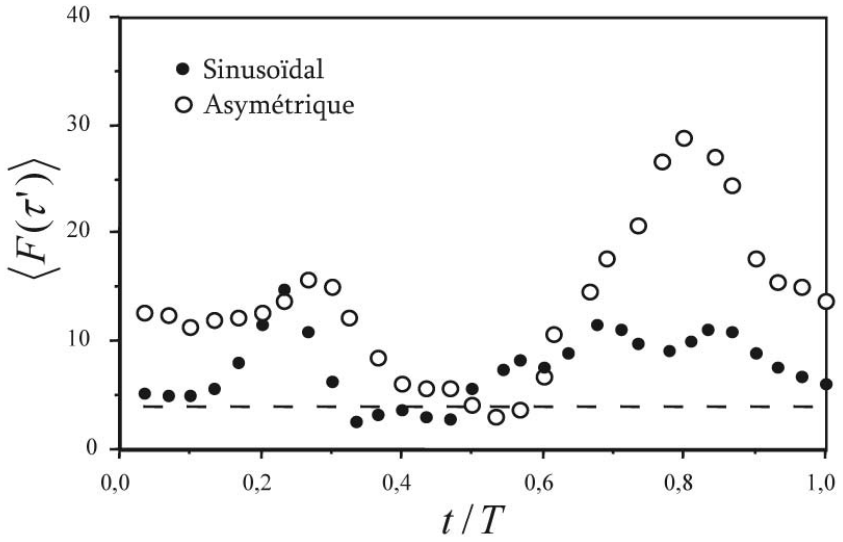


FIGURE 2.19 – Moyennes de phase du facteur d'aplatissement en $x^+ = 112$

Asymétrique. Il est à noter que les valeurs présentées sont toutes obtenues à partir de la même campagne de mesure.

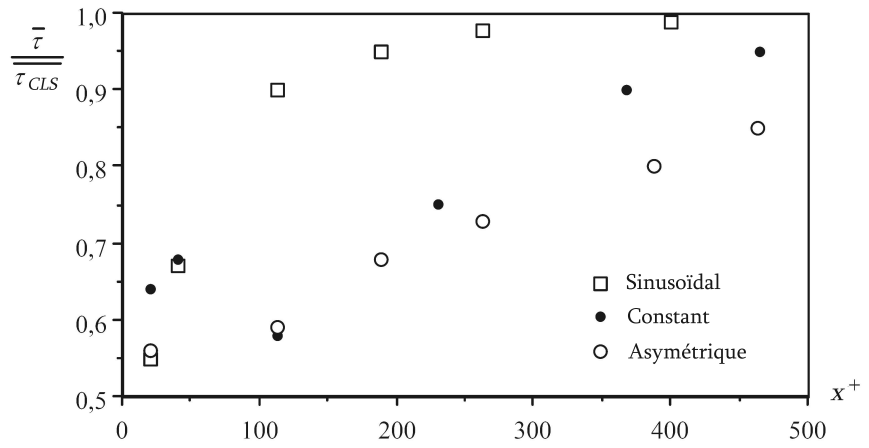


FIGURE 2.20 – Valeurs moyennes des frottements en différentes abscisses et pour différents types d'injections

Pour l'injection sinusoïdale, l'apparition d'une zone de relaminarisation est assez nette en $x^+ = 20$ alors que le retour à l'état standard de la turbulence se fait très rapidement ; en $x^+ = 112$ on est déjà à $\frac{\bar{\tau}}{\tau_{CLS}} = 0.9$ et la relaxation est terminée en $x^+ = 250$.

Dans le cas de l'injection continue, on ne constate pas l'apparition d'une phase de relaminarisation mais la relaxation met beaucoup plus de temps à s'établir que dans le cas sinusoïdal. On l'atteint quasiment en $x^+ = 500$ ($\approx 4cm$).

Pour l'injection asymétrique, on remarque à la fois la présence d'une zone de relaminarisation mais aussi l'existence d'une distance de relaxation très longue. En effet, en $x^+ = 460$ ($\approx 3.7cm$), on constate encore 15% de réduction du frottement par rapport à une couche limite turbulente standard. L'impact de l'injection asymétrique sur la contrainte turbulente est donc très important et son effet s'étend sur une grande distance.

Il est aussi important de souligner que ces résultats sont moyennés temporellement et que leurs moyennes de phase peuvent atteindre des valeurs beaucoup plus faibles. L'ajout d'un contrôle par MEMS disséminés sur une zone à l'aval de la fente pourrait donc être une direction de recherche intéressante afin de réduire encore plus drastiquement la contrainte turbulente.

On a vu que dans le cas d'une injection sinusoïdale la création d'une structure transverse était conditionnée par la fréquence de soufflage. Le déclenchement de la structure transversale $\Omega'_{z\ COH}$ est provoqué par une accumulation et une forte concentration de vorticité positive ($\omega'_{z\ COH}$). Pour une fréquence inférieure à f^+_{cr}, l'épaisseur de la nappe est trop importante et la concentration de vorticité est trop faible pour provoquer le déclenchement de la structure $\Omega'_{z\ COH}$.

Dans le cas d'une excitation asymétrique, on s'attend de même à ce que la fréquence affecte le comportement de la contrainte à l'aval de la fente mais en influençant maintenant sa distance de relaxation. On a vu précédemment que cette nappe, tout comme la structure générée, était localisée approximativement en $y^+ = 7$, soit dans la sous-couche tampon inférieure. Or l'épaisseur de cette couche vorticitaire dépend de la fréquence imposée ; on rappelle que $l^+ = \frac{1}{\sqrt{f^+}}$ (figure 2.10). En calculant l'épaisseur critique liée à la fréquence critique ($f^+_{cr} = 8.10^{-3}$), on obtient $l^+_{cr} \approx 10$.

La figure 2.21 expose schématiquement la phénoménologie d'une injection asymétrique soumise à des fréquences inférieures ou supérieures à la fréquence critique.

Ainsi, pour $f^+ < f^+_{cr}$, l'épaisseur de la nappe de vorticité est trop importante et peut s'étendre jusqu'à la sous-couche tampon supérieure (voir même la région de sillage, c'est à dire la couche logarithmique) où le mélange turbulent devient intense. La vorticité positive est ainsi mélangée et la zone relaminarisée ne s'étend pas sur une distance importante à l'aval de la fente.

Dans le cas où $f^+ > f^+_{cr}$, la couche vorticitaire reste confinée sous la sous-couche tampon où elle peut être diffusée et advectée dans la direction longitudinale, augmentant considérablement l'étendue de la zone relaminarisée et donc la distance de relaxation.

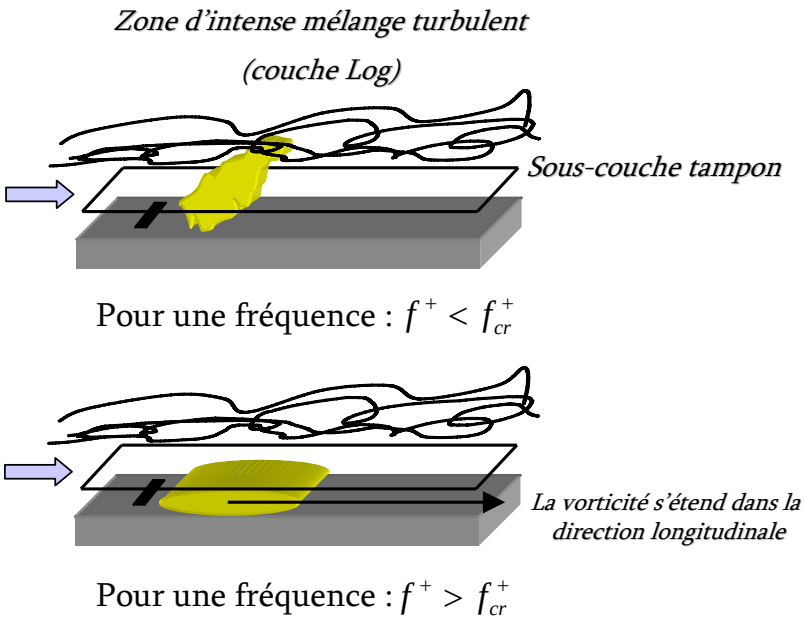


FIGURE 2.21 – Effet de la fréquence d'injection sur l'évolution de la zone relaminarisée

2.4 Conclusions

On a analysé ici l'effet d'un soufflage instationnaire et localisé sur une couche limite turbulente. Pour une grande fréquence d'injection et pour une forme temporelle du soufflage sinusoïdal, une structure transversale cohérente est créée durant la phase de décélération. Même si une zone relaminarisée est constatée, l'advection de ce tourbillon provoque une augmentation drastique de la contrainte pariétale à l'aval de la fente. Dans le cas où l'injection prend une forme temporelle asymétrique, la création de cette structure est inhibée et une large zone relaminarisée apparaît. La réduction est alors approximativement deux fois plus efficace que lors de l'application d'une excitation sinusoïdale (en $x^+ = 112$ on a $\overline{\tau}_{sinus} \approx 1$ et $\overline{\tau}_{asym} \approx 0.5$).

L'apparition de la structure transversale peut être un événement utile si on envisage d'effectuer un contrôle de type dual. En effet, la connaissance de l'évolution spatiale et temporelle de cette entité facilite la mise en place d'un nouveau contrôle plus en aval qui pourrait empêcher son interaction avec la paroi ou directement provoquer sa destruction.

Deuxième partie

Méthode numérique et résultats dans le cadre d'écoulements non contrôlés

Avant d'étudier en détail l'impact de différents contrôles sur notre écoulement, il est de mise de présenter la méthode numérique choisie ainsi que les principaux résultats obtenus en l'absence de manipulation. Cette approche est nécessaire afin de justifier de la validité des résultats futurs.

Le code de Simulation Numérique Directe a fait l'objet de nombreuses modifications au cours de mes travaux et les composantes complètement nouvelles seront évoquées dans les chapitres 4 (Transport de scalaire passif) et 5 (Résolution par MultiGrille).

Chapitre 3

Description du modèle numérique

3.1 Introduction

Le code de Simulation Numérique Directe utilisé a été développé initialement par Paolo Orlandi et publié dans Orlandi [2000]. La thèse de François Bouillon (Bouillon [2004]) apporte de surcroît des modifications importantes concernant l'exécution du code, la visualisation des données et l'application d'un forçage volumique de type électromagnétique.

Ce chapitre s'attache à présenter les principales composantes du code de simulation ainsi que les résultats obtenus dans le cas d'un écoulement turbulent non manipulé.

3.2 Choix de la résolution numérique

La simulation des écoulements turbulents reste un domaine de recherche très actif. Plusieurs approches peuvent être envisagées pour prédire leurs évolutions mais toutes n'ont pas la même précision ni le même coût numérique. Suivant l'objectif fixé et les moyens à disposition, le choix se portera généralement sur une des méthodes suivantes :

- **RANS** : La méthode RANS (*Reynolds Average Navier Stokes*) est basée sur la résolution des équations de Navier-Stokes moyennées en temps (si l'écoulement est stationnaire) ou en espace (dans la direction où les valeurs moyennes sont fixes). Cette approche nécessite une fermeture en un ou deux points et mène à un jeu d'équations différentielles partielles nommées équations de Reynolds. Différents modèles de fermetures peuvent être choisis comme par exemple le modèle $k - \epsilon$.
- **LES** : La méthode LES (*Large Eddy Simulation*) ou SGE (Simulation des Grandes Échelles) résout, comme son nom l'indique, les grandes échelles de l'écoulement et modélise les plus petites (sous-maille). Cette approche peut être vue comme un compromis entre les méthodes RANS et DNS.
- **DNS** : La méthode DNS (*Direct Numerical Simulation*), ou SND (Simulation Numérique Directe), résout l'intégralité des échelles définies par la discrétisation du

domaine de calcul. C'est cette résolution qui sera détaillée dans la suite de ce chapitre.

Il est évident que l'utilisation de modèles pour simuler un écoulement turbulent rend la prédiction moins précise, mais en contrepartie la méthode DNS, qui ne procède à aucune approximation de fermeture, nécessite des ressources calculatoires beaucoup plus importantes. Les résolutions par Simulation Numérique Directe ne peuvent pourtant pas être considérées comme étant des résolutions exactes d'écoulements turbulents car les erreurs numériques dues aux discrétisations spatiales et temporelles sont toujours présentes (mais quantifiables).

Il est important de préciser dès maintenant que la prédiction d'écoulements soumis à différents types de contrôles ne peut admettre aucune approximation ou modèle. En effet, la nature du contrôle, qu'il soit à grandes ou petites échelles, tend à modifier la structure même de l'écoulement à travers toutes ses échelles rendant l'utilisation de modèle inappropriée. Le choix de la résolution numérique s'est donc porté sur une Simulation Numérique Directe qui reste, d'un point de vue conceptuel, la méthode la plus adaptée à l'analyse de diverses stratégies de contrôle.

Pour résoudre correctement toutes les échelles présentes dans l'écoulement, la taille de la boîte doit être obligatoirement supérieure à la plus grosse structure engendrée. Mais chaque maille du domaine doit aussi résoudre les échelles dissipatives dont la taille diminue comme le nombre de Reynolds augmente. En effet, on peut montrer que le rapport entre la plus grande échelle et la plus petite est proportionnel à $Re^{3/4}$. Ainsi plus le nombre de Reynolds augmente, plus la taille des mailles doit être petite et plus le nombre de points de grille devient grand engendrant ainsi un coût numérique croissant. Dans un cas 3D, et comme le pas de temps est lié à la taille des mailles, le nombre total de point de grille devient proportionnel à Re^3. Ceci explique pourquoi il est rare de trouver des Simulations Numériques Directes dont le Reynolds est supérieure à 5000. Une exception doit toutefois être citée, une simulation a pu être effectuée sur le *Earth Simulator* au Japon. L'article de Kaneda & Ischihara [2006] présente des résultats provenant d'un domaine comportant 4093^3 points de grille en turbulence isotrope permettant ainsi l'application d'un Reynolds proche de 40 000.

Pour plus de renseignements sur les différents types de simulation de la turbulence, le lecteur intéressé pourra par exemple se référer à l'ouvrage de Ferziger & Peric [2002]. Pour une réflexion et une présentation qualitative sur les méthodes DNS, on pourra consulter le papier de Moin & Mahesh [1998].

3.3 Notations et adimensionnalisations

Deux types de variables seront utilisés dans notre étude, les variables globales adimensionnalisées par rapport aux échelles externes et les variables internes adimensionnalisées par rapport aux petites échelles (visqueuses). Sous ces considérations, deux nombres de Reynolds peuvent être mis à jour : $Re = U_p.h/\nu$ et $Re_\tau = u_\tau.h/\nu$. Le premier nombre fait

intervenir la vitesse centrale d'un profil de Poiseuille U_p alors que le second fait appel à une vitesse de frottement u_τ définie comme $\tau = \rho.(u_\tau)^2$. Les deux nombres font appel à la demi-hauteur du canal (h) et à la viscosité moléculaire (ν).

En première approximation, et au regard des diverses publications abordant le sujet, une loi semi-empirique, issue des travaux de Hinze [1975], peut être employée afin de déterminer la vitesse u_τ et donc Re_τ.

$$Re_\tau = \frac{1}{8.3}(Re)^{\frac{7}{8}}$$

Afin de s'assurer de la véracité de cette loi, une évaluation de la vitesse de frottement est effectuée durant les simulations. Ainsi, Re_τ peut être déterminé comme suit :

$$Re_\tau = \sqrt{\frac{h^2}{\nu}\overline{\frac{\partial u}{\partial y}}\bigg|_{y=0}} \tag{3.1}$$

Pour nos simulations d'un écoulement pleinement turbulent et non forcé, l'écart relatif entre la loi de Hinze et la valeur obtenue est approximativement 0.2% (178.35 pour la loi de Hinze contre 177.98 pour $Re = 4200$). La loi de Hinze est donc parfaitement valable pour un champ turbulent développé. Cette valeur d'environ 180 est classiquement utilisée dans la littérature pour des simulations à géométries analogues (Choi *et al.* [1994], Kim *et al.* [1987], Orlandi [2000]).

Les quantités adimensionnalisées globalement (par rapport aux échelles externes) n'auront pas de notations spécifiques dans la suite du texte alors que les quantités adimensionnalisées à la paroi (par rapport aux échelles internes) comporteront un label " + ". Ces deux échelles sont bien évidemment liées, et on peut établir des relations dans le but de faciliter la lecture de cet ouvrage.

Ainsi :

$$\begin{aligned} l^+ &= l.Re_\tau \\ t^+ &= t.{Re_\tau}^2/Re \\ u^+ &= u.Re_\tau/Re \end{aligned} \tag{3.2}$$

où l représente les échelles de longueur, t le temps et u les vitesses.

On peut dorénavant noter que l'unité temporelle du code n'est autre que le temps de retournement des grandes structures. Cette unité temporelle sera référencée comme T_{out} dans le cas d'un canal turbulent. Les vitesses seront notées u (ou u_1) dans la direction longitudinale x (ou x_1), v (ou u_2) dans la direction normale y (ou x_2) et w (ou u_3) dans la direction transverse z (ou x_3)

3.4 Résolution numérique par Simulation Numérique Directe

Il est nécessaire, pour une bonne compréhension des modifications futures, d'expliciter quelques éléments importants du code de calcul.

3.4.1 Les équations gouvernant la dynamique

On se base ici dans l'hypothèse d'un écoulement incompressible. Cette condition impose d'obtenir pour chaque itération temporelle un champ de vitesses à divergence locale nulle, tel que :

$$\frac{\partial u_j^*}{\partial x_j^*} = 0 \tag{3.3}$$

Cette condition n'est pas traitée directement mais sera introduite lors de la dernière étape de la résolution des équations de Navier-Stokes grâce à la méthode du *"Pas Fractionné"*.

Les équations de Navier Stokes peuvent être écrites sous forme adimensionnelle de la manière suivante :

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u_i^* u_j^*}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u_j^*}{\partial x_j^{*2}} \tag{3.4}$$

où le nombre de Reynolds est défini par $Re = U_{cp}.h/\nu$ avec h la demi hauteur du canal, U_{cp} la vitesse centrale du profil de Poiseuille correspondant et ν la viscosité cinématique. Si rien ne le spécifie, les quantités présentées ci-après seront adimensionnalisées par rapport aux échelles externes, c'est à dire U_{cp} et h.

3.4.2 Description du domaine de calcul

La figure 3.1 présente le système de coordonnées lié au canal ainsi que les directions des vitesses correspondantes.

Le maillage utilisé ici est régulier dans les directions x et z, c'est à dire que la distance entre chaque noeud reste constante sur respectivement toute la longueur et la profondeur du canal. Dans la direction y, on utilise un raffinement près de chaque paroi de manière à résoudre convenablement les processus de production-dissipation essentiels à l'obtention d'un écoulement turbulent développé. Cette transformation prend la forme :

$$\xi(j) = \frac{1}{2}(1 + \frac{\tanh(a(\frac{j-1}{n_y} - 0.5))}{\tanh(0.5a)}) \qquad (0 < \xi(j) < 1) \tag{3.5a}$$

$$y(j) = 2(-\frac{1}{2} + \xi(j)) \qquad (-1 < y_{code}(j) < 1) \tag{3.5b}$$

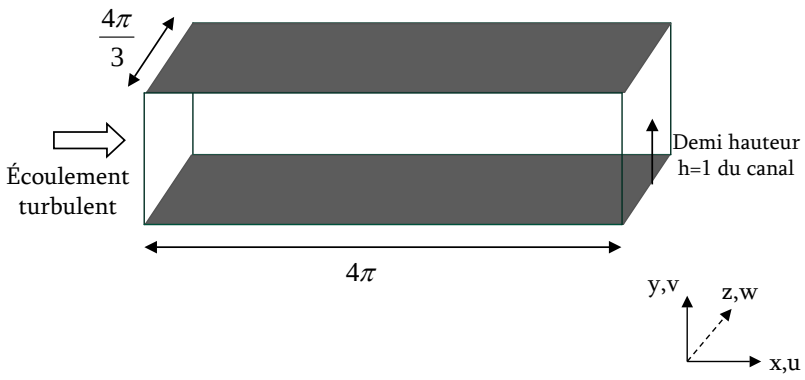


FIGURE 3.1 – Système de coordonnées et domaine de calcul

avec

n_y : nombre de points de calculs (nœuds) suivant la normale (y)

j : incrément sur $n_y (0 \leq j \leq n_y)$

où a représente le coefficient d'étirement. Il est intéressant de remarquer que l'origine des $y(j)$ est positionnée au centre du canal, ce qui n'est pas le cas pour les autres coordonnées. Ainsi, pour $j < n_y/2$, on aura $y(j) < 0$ et pour $j > n_y/2$ $y(j) > 0$.

La figure suivante 3.2 présente l'évolution verticale du maillage en fonction du coefficient d'étirement.

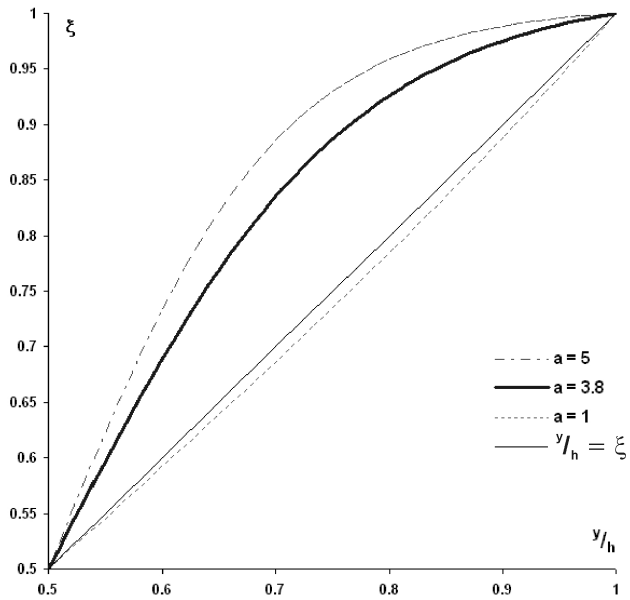


FIGURE 3.2 – Évolution du maillage dans la direction normale à l'écoulement pour différentes valeurs de a

L'implémentation d'une telle transformation implique nécessairement la présence d'un plus grand nombre de points dans la zone de proche paroi sans toutefois imposer une évolution trop rapide du maillage (pour des raisons de précisions sur les coefficients géométriques). C'est pour ces raisons que notre choix s'est porté sur le cas $a = 3.8$.

La figure 3.3 présente l'évolution du maillage dans la direction y proche de la paroi inférieure. Pour un coefficient d'étirement $a = 3.8$, la maille la plus petite (la plus proche de la paroi) a une taille de $\Delta y^+ = 0.5$ et la plus grande (au centre du canal) de $\Delta y^+ = 5.5$.

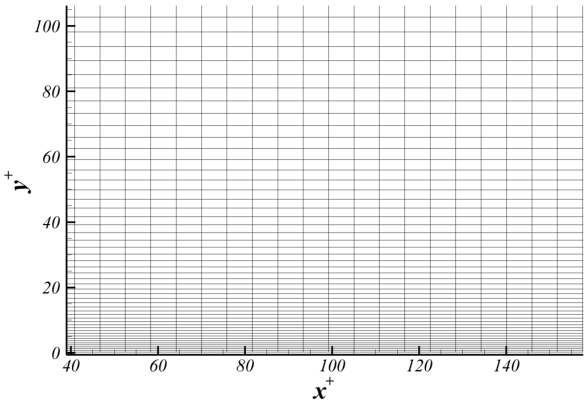


FIGURE 3.3 – Raffinement du maillage près de la paroi inférieure

La figure 3.4 présente le positionnement des variables sur une maille.

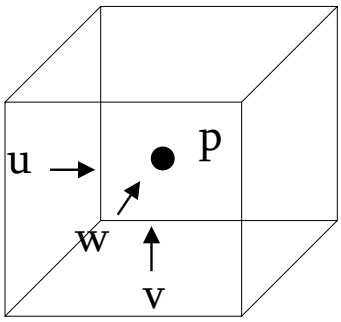


FIGURE 3.4 – Positionnement des quantités sur une maille

L'emplacement des variables est essentiel pour la bonne résolution de la méthode du *"Pas Fractionné"*. La pression étant située au centre de chaque maille, son gradient sera calculé sur chacune des faces correspondantes à la direction choisie. Or, comme on le verra un peu plus loin dans ce chapitre, la seconde étape de la méthode du *"Pas Fractionné"* fait appel à un gradient de pression dans le but de corriger les différentes composantes du champ de vitesse.

3.4.3 La périodicité spatiale imposée

Dans toutes nos études numériques, on considérera un écoulement turbulent homogène sur x et z. Des conditions limites récurrentes peuvent donc être appliquées dans ces directions. Cette approximation n'est valable que si la taille du canal (ou de la boîte de calcul) peut contenir les plus grandes structures de l'écoulement. Il est alors commode d'utiliser une transformée de Fourier discrète qui permettra un stockage moins important et une résolution plus rapide via une *F.F.T.* (*Fast Fourier Transform*). Les longueurs longitudinales et transversales du canal seront donc choisies en conséquence, c'est à dire qu'elle feront intervenir le nombre π. Dans les résultats suivants, si aucun commentaire n'est apporté, on considérera une longueur sur x de 4π et une longueur sur z de $(4/3)\pi$. La demi-hauteur du canal, suivant y prend par défaut la valeur 1. Ainsi, si on souhaite vérifier que les dimensions choisies sont suffisantes, une méthode consiste à étudier les corrélations de fluctuations turbulentes de vitesse en x et z et de s'assurer que ces variables sont bien décorrélées. Ces statistiques sont présentées dans la section suivante.

3.4.4 La discrétisation

La résolution numérique des équations de Navier-Stokes se base sur un schéma aux différences finies du second ordre à la fois en temps et en espace. Cette section détaille les différentes discrétisations utilisées.

3.4.4.1 La discrétisation des termes non-linéaires

La composante non linéaire, représentée par les termes $\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}$, peut être discrétisée de manière explicite suivant un schéma *d'Adams-Bashforth* ou de *Runge-Kutta* au 3ème ordre (*RK3*). Ces deux types de résolution fournissent des résultats identiques. Quelques tests ont montré que *RK3* se révélait bien plus stable qu'*Adams-Bashforth* mais demandait un temps de résolution trois fois plus important pour un calcul identique.

La condition de stabilité dont on fait référence ici est la condition de *Courant-Fredrich-Levy* (*CFL*), elle s'écrit :

$$CFL = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{u_i \Delta t}{\Delta x_i} \right) \tag{3.6}$$

Pour un schéma de type *Adams-Bashforth*, le *CFL* maximum doit être inférieur à 0.7 alors que pour *RK*3 le seuil est reporté à 2. Étant donné le grand nombre d'itérations temporelles que nous allons devoir effectuer par la suite (principalement pour assurer la convergence statistique des moyennes de phase), mon choix s'est porté sur la résolution de type *Adams-Bashforth*. La résolution par RK3 serait par exemple utile pour atteindre rapidement un état convergé de la turbulence à partir d'un champ laminaire imposé. En effet, le pas d'avancement temporel pourrait être augmenté significativement sans

pour autant provoquer la divergence des calculs. Il faut préciser que ce sont des schémas explicites utilisant des quantités calculées aux pas de temps précédents. Ils sont donc, par nature, intimement liés à l'avancement temporel de la simulation.

3.4.4.2 La discrétisation des termes linéaires

La discrétisation des termes linéaires est cette fois-ci implicite et le schéma utilisé est celui de *Crank-Nicholson*. L'avantage de cette méthode réside dans le fait qu'elle est inconditionnellement stable. La résolution temporelle s'effectuera en identifiant une matrice qui sera inversée et résolue par une méthode de LU (voir Press *et al.* [2001] pour plus de précisions) dans chacune des trois directions. L'étape de résolution matricielle peut sembler lourde étant donné la taille des tableaux à manipuler mais leur nature tridiagonale cyclique (due aux conditions périodiques) permet de réduire considérablement ce coût.

3.4.5 La méthode du *Pas Fractionné*

Les équations de Navier Stokes discrétisées ne peuvent être résolues directement car l'équation d'incompressibilité locale n'est pas vérifiée. La méthode du *Pas Fractionné* permettra de l'intégrer dans son développement. Cette méthode nécessite l'intervention de quantités intermédiaires qui seront indicées k dans le développement de cette section.

En utilisant *RK3* ou *Adams-Bashforth* pour la discrétisation des termes non linéaires et *Crank-Nicholson* pour les termes linéaires, l'équation 3.4 discrétisée devient :

$$\frac{\hat{u}_i^k - u_i^n}{\Delta t} = \gamma^k H_i^n + \rho^k H_i^{n-1} + \frac{\alpha^k}{2Re} L_{jj}(\hat{u}_i^k + u_i^n) - \alpha^k G_i p^n \sigma_1 \tag{3.7}$$

où $G_i p$ est le gradient de pression discrétisé, L_{jj} est l'opérateur Laplacien discrétisé et H_i représente les termes non-linéaires. u_i^n est le champ de vitesse au temps n, $\hat{u}_i^k$ est celui au pas de temps intermédiaire. Δt est le pas d'avancement temporel du calcul. Les constantes γ^k, ρ^k et α^k sont dépendantes de la méthode utilisée, *RK3* ou *Adams-Bashforth*. On peut récrire l'équation 3.7 de la manière suivante :

$$\Delta u_i - \beta^k L_{jj} \Delta u_i = (\gamma^k H_i^n + \rho^k H_i^{n-1} - \alpha^k G_i p^n \sigma_1) + 2\beta^k L_{jj} \Delta u_i \tag{3.8}$$

où $\beta^k = \frac{\Delta t \alpha^k}{2Re}$ et $\Delta u_i = \hat{u}_i^k - u_i^n$.

La seconde étape nous permet d'appliquer l'équation de continuité locale et donc d'obtenir un champ de vitesse sans divergence. Dans ce but, un scalaire potentiel η est introduit afin de corriger le champ de vitesse indicé k pour que la condition de continuité soit satisfaite. On pose alors l'équation suivante :

$$\frac{u_i^{n+1} - \hat{u}_i^k}{\Delta t} = -\alpha^k G_i \eta \sigma_2 \tag{3.9}$$

En appliquant l'opérateur divergence discrétisé, noté D_i à l'équation 3.9 par l'intermédiaire de $D_i u^{n+1} = 0$, on obtient une équation elliptique de type (*Poisson*) permettant la détermination de la quantité η. Cette équation est :

$$L_{jj}\eta = \frac{\sigma_2}{\alpha^k \Delta t} D_i \hat{u}_i^k \tag{3.10}$$

Cette méthode nous permet de définir un champ de vitesse solénoïdal, c'est à dire respectant une divergence localement nulle. Ainsi, la quantité scalaire η de l'éq. 5.2 est déterminée grâce au $\hat{u}_i^k$ qui résulte de la résolution matricielle générée par l'équation 3.8. L'utilisation de l'eq. 3.9 comme dernière étape permet de trouver le champ de vitesse au pas de temps $n+1$. Il est important de noter que seules les fluctuations de pression sont calculées par cette méthode. L'évolution de la pression moyenne, et plus précisément le gradient de pression longitudinal est un résultat global qui ne peut être déterminé que par un post-traitement à chaque itération temporelle.

Ce type de résolution temporelle de N.S., faisant intervenir à la fois un schéma explicite (*Adams-Bashforth* ou *RK3*) et implicite (*Crank-Nicholson*) est qualifié de schéma hybride. Une des premières versions de cette méthode a été publiée par Moin & Kim [1982] où l'intégration de la pression n'était effectuée que lors de la seconde étape ($\sigma_1 = 0$).

3.4.6 Détermination de la pression

Dans la simulation présentée ici, qui est un cas d'écoulement turbulent développé en canal, on souhaite imposer un débit constant. L'application d'une telle condition impose l'intervention d'un gradient de pression longitudinal dont le rôle est principalement de contrebalancer le frottement pariétal.

Si on intègre l'équation de Navier-Stokes dans la direction x et sur le volume total de la boîte de calcul, on obtient :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u u_j}{\partial x_j}\, dx.dy.dz = \int_\Omega -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u_j}{\partial {x_j}^2}\, dx.dy.dz \tag{3.11}$$

où Ω est le volume total occupé par l'écoulement. La périodicité spatiale dans les directions x et z ainsi que la condition d'adhérence $u_i = 0$ aux parois supérieure et inférieure mènent à :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \int_\Omega -\frac{\partial p}{\partial x}\, dx.dy.dz + \frac{1}{Re}\int_\Omega \frac{\partial^2 u_j}{\partial {x_j}^2}\, dx.dy.dz \tag{3.12}$$

où $Q = \int_\Omega u\, dx.dy.dz$.

Si on souhaite imposer un débit constant, on doit fixer $\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$. De plus, la pression longitudinale moyenne $\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}$ peut être distribuée uniformément sur tout le volume fluide. L'équation 3.12 se réduit donc à :

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{1}{\Omega}.\frac{1}{Re}\int_{\Omega}\frac{\partial^2 u_j}{\partial {x_j}^2}\,dx.dy.dz \tag{3.13}$$

La condition de débit constant est donc vérifiée par application sur chaque maille d'une partie du gradient de pression longitudinal moyen.

3.4.7 Le code de visualisation

La Simulation Numérique Directe ne peut fournir par nature que des quantités instantanées. Un code de visualisation a donc été développé par François Bouillon (Bouillon [2004]) durant sa thèse de manière à traiter les résultats au terme des calculs. Un grand nombre de quantités importantes pour la caractérisation des écoulements peut ainsi être dégagé. Toutefois, une précaution doit être prise lors de l'utilisation de ces statistiques. En effet, pour des raisons de stockage et de taille de mémoire vive, ces calculs admettent par défaut une condition d'ergodicité (pas de dépendance dans les directions homogènes x et z). Toute variation moyenne temporelle ou spatiale est donc exclue. Ainsi, pour l'étude d'une turbulence en canal développée, cette condition est par nature vérifiée. Mais si on s'intéresse par exemple à un soufflage pariétal, introduisant ainsi une composante moyenne oscillante en temps et localisée en espace, le traitement statistique des données devra impérativement être modifié.

3.5 Quelques résultats importants

Afin de pouvoir correctement interpréter les résultats futurs, on décide d'exposer les résultats les plus importants, c'est à dire les résultats les plus caractéristiques de la turbulence développée en canal tridimensionnelle. Cette démarche permettra à la fois de s'assurer du bon fonctionnement du code standard mais aussi de commenter quelques résultats typiques auxquels on fera référence dans la suite de l'étude numérique.

Le pas de temps choisi pour cette simulation est $dt = 0.01$. Le premier champ de vitesse utilisé pour effectuer des statistiques résulte de 100.000 itérations temporelles à partir d'un écoulement laminaire. On atteint donc un temps d'évolution équivalent à $1000 * T_{out}$ représentant ainsi 1000 fois le temps de retournement des grandes échelles. Il est à noter que la transition à la turbulence à été forcée par application d'un bruit ajouté au profil de Poiseuille.

Pour ce calcul, on impose $Re = 4200$, et la résolution du domaine de calcul est $257 * 129 * 129$ respectivement sur (x,y,z). La taille des mailles dans la direction longitudinale est ainsi de $\Delta x^+ = 8$ et de $\Delta z^+ = 5.5$ dans la direction transversale. Les résultats présentés proviennent de calculs effectués sur 50.000 itérations temporelles et sont sauvegardés toutes les 1000 itérations. La tranche temporelle utilisée pour établir les statistiques correspond donc à 4000 unités pariétales.

L'homogénéité de l'écoulement dans les directions x et z ainsi que la validité de la condition d'ergodicité dans ce cas précis nous permet, dans un premier temps, d'effectuer des moyennes spatiales sur tous les plans horizontaux du domaine (formés par x et z). Par la suite, chacun de ces plans horizontaux se trouvera moyenné temporellement. Par ce procédé, on augmente significativement le nombre d'*individus* et la convergence statistique des quantités turbulentes s'en trouve accélérée.

3.5.1 Contrainte totale moyenne

La contrainte totale moyenne ($\overline{\tau}^+_{tot}$) d'un écoulement turbulent en canal développé peut être déterminée analytiquement. L'équation régissant son évolution est :

$$\overline{\tau}^+_{tot} = \underbrace{-\overline{u'v'}^+}_{\text{Contrainte de Reynolds}} + \underbrace{\overline{\frac{du^+}{dy^+}}}_{\text{Contrainte visqueuse}} = 1 - \frac{y^+}{h^+} \tag{3.14}$$

où Re_τ intervient implicitement dans la formulation du h^+.

La figure 3.5 présente l'évolution de la contrainte totale sur toute la hauteur du canal. La ligne pleine représente l'attente théorique et les symboles, les résultats obtenus avec notre simulation.

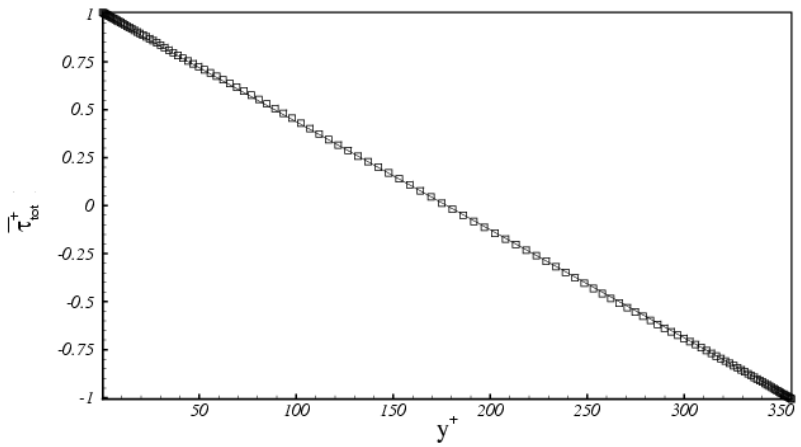


FIGURE 3.5 – Profil de contrainte totale sur toute la hauteur du canal

Outre sa bonne adhésion au modèle théorique, ce résultat révèle à la fois un calcul des contraintes de Reynolds ($-\overline{u'v'}^+$) et des contraintes visqueuses ($\frac{\partial \overline{u}^+}{\partial y^+}$) cohérent. Le profil linéaire des contraintes totales nous assure l'obtention d'un champ turbulent statistiquement convergé.

3.5.2 Le profil moyen de vitesse longitudinale

On présente ici le profil des vitesses longitudinales sur la demi-hauteur du canal. La vitesse est adimensionnalisée par la vitesse de frottement u_τ. La courbe en traits pointillés représente l'évolution théorique de la vitesse dans la zone où la viscosité prédomine, c'est à dire dans la sous-couche visqueuse ($y^+ < 5$) où la loi est linéaire. La courbe en trait plein représente la zone où l'inertie domine ; c'est la couche *log* où la loi d'évolution est comme son nom l'indique logarithmique ($y^+ > 30$).

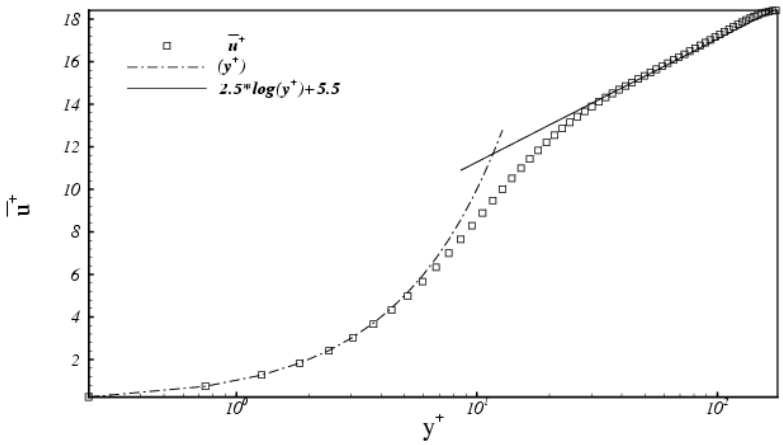


FIGURE 3.6 – Vitesse longitudinale moyenne en unités pariétales

3.5.3 Les fluctuations de vitesse et de vorticité

Les fluctuations de vitesse ou de vorticité peuvent être représentées par des quantités *RMS* (*Root Means Square*) ou encore par des variances (moment d'ordre 2). Pour une variable q, on peut écrire :

$$q'_{R.M.S.} = \sqrt{\overline{q'^2}} \tag{3.15}$$

Les intensités turbulentes présentées sur la figure 3.7 portent sur les fluctuations de vitesse et sont donc adimensionnalisées par la vitesse de frottement u_τ. La symétrie des profils par rapport à la demi-hauteur du canal indique que le nombre d'échantillons utilisés pour établir les moyennes est suffisant.

L'évolution des profils *RMS* coïncide très bien avec les études numériques menées précédemment par Kim *et al.* [1987]. De plus, la valeur et la position du maximum des fluctuations longitudinales concordent exactement avec les résultats expérimentaux obtenus par Tardu [2001]. Une bonne identification de ce pic est important car il rend compte de la zone de production turbulente.

La figure 3.8 présente les différentes composantes des fluctuations de vorticité.

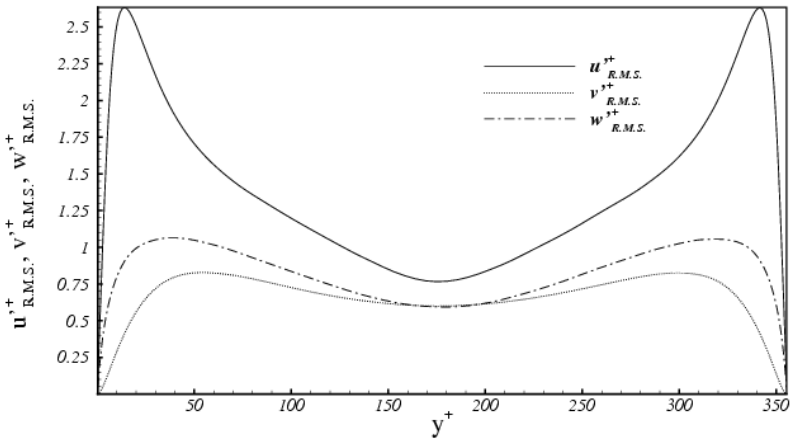


FIGURE 3.7 – Valeurs *R.M.S.* des fluctuations de vitesse

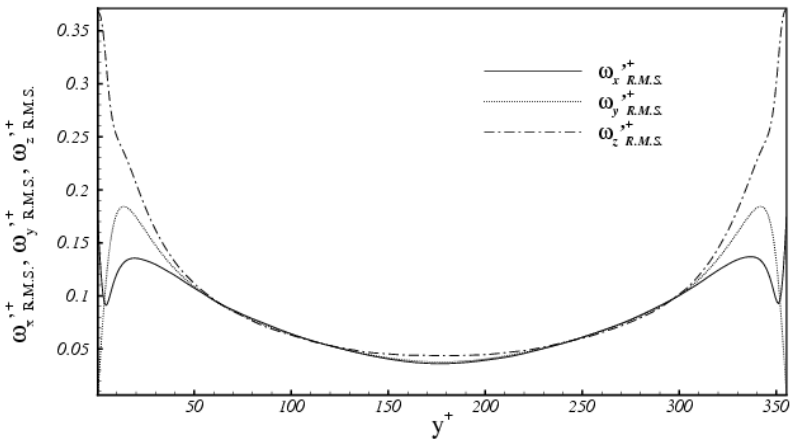


FIGURE 3.8 – Valeurs *R.M.S.* des fluctuations de vorticité

Il est intéressant de constater que la composante longitudinale de vorticité ($\omega'^{+}_{x_{RMS}}$) comporte un minimum local pour $y^+ \approx 5$, juste avant d'atteindre sa valeur maximale sur la paroi. Une explication est avancée dans l'article Moser & Moin [1984] ; ils considèrent les structures tourbillonnaires longitudinales comme responsables de ce comportement. Selon eux, le positionnement moyen des centres des vortex est à l'origine du maximum atteint (la composante $\frac{\partial w}{\partial y}$ fluctuante est la plus forte). L'apparition du minimum en est une conséquence car le profil de vitesse transversale généré par le passage du vortex doit obligatoirement recoupée à $w = 0$ sur la paroi.

3.5.4 Les contraintes de Reynolds

La figure 3.9 présente les contraintes de Reynolds qui forment une composante de la contrainte totale (ligne pleine) comme spécifiée par l'équation 3.14. Une valeur nulle est obtenue sur la paroi du fait de l'application de la condition d'adhérence et au centre du canal pour des raisons de symétrie. On constate que le pic est bien localisé dans la zone de production turbulente $y^+ \approx 20$, à l'endroit où les intensités turbulentes sont les plus fortes.

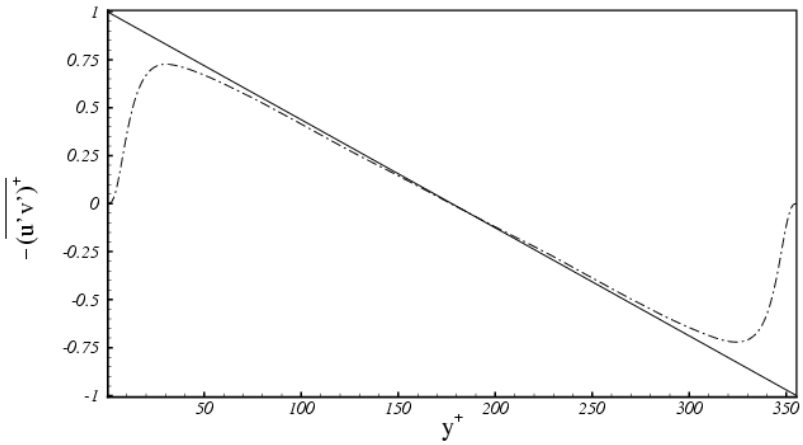


FIGURE 3.9 – Contraintes de Reynolds en unités pariétales

3.5.5 Dissymétrie et Aplatissement

Les facteurs de dissymétrie (*skewness*, voir figure 3.10) et d'aplatissement (*flatness* voir figure 3.11) représentent respectivement les moments d'ordres 3 et 4 du champ de vitesse fluctuant. Ces facteurs représentent donc une mesure de déviation par rapport à une distribution Gaussienne. Pour une quantité q', le facteur de dissymétrie s'exprime par :

$$S(q') = \frac{\overline{q'^3}}{\left(\overline{q'_{RMS}{}^2}\right)^{3/2}} \tag{3.16}$$

Ainsi pour des valeurs positives de S, la densité de probabilité est déviée vers les événements positifs alors que pour des valeurs négatives de S, elle sera déviée vers les événements négatifs.

Le facteur d'aplatissement est une mesure de l'intermittence, il s'exprime par :

$$F(q') = \frac{\overline{q'^4}}{\left(\overline{q'_{RMS}{}^2}\right)^2} \tag{3.17}$$

Pour le cas d'une distribution gaussienne, la valeur du facteur d'aplatissement est de 3 et pour la contrainte pariétale turbulente, elle atteint approximativement 4. L'intermittence représente l'élévation de la "jupe" de la distribution considérée par rapport à la distribution normale. Plus sa valeur est élevée, plus la densité de probabilité d'apparition des événements extrêmes est importante.

La figure 3.10 montre que la partie intérieure du canal est soumise à $S(u') < 0$ alors que proche de la paroi $S(u') > 0$.

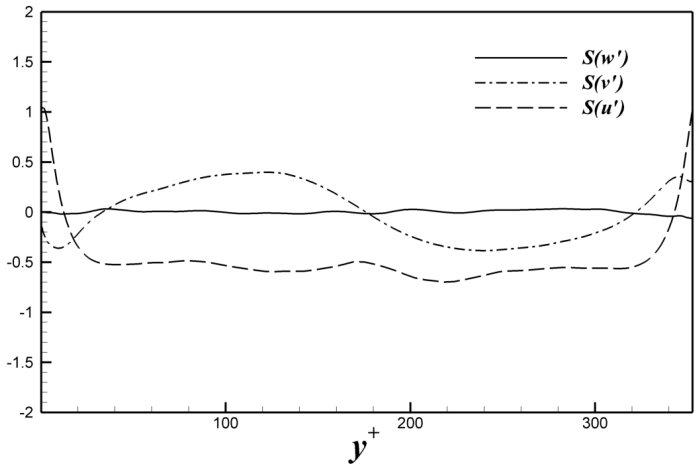


FIGURE 3.10 – Profil du facteur de dissymétrie pour les trois composantes du champ de vitesse

La figure 3.11 montre une forte intermittence de la composante v' avec des valeurs supérieures à 15 dans la zone de proche paroi. Ce résultat n'est pas surprenant car en $y^+ = 0$, le comportement asymptotique des fluctuations de vitesse v' est $v \propto y^2$ (u' et w' sont proportionnels à y^+).

La forte valeur du facteur d'aplatissement est donc la conséquence des phénomènes d'éjections et de balayages qui prennent une importance considérable sur cette composante de vitesse.

3.5.6 Les corrélations longitudinales en deux points

Une étude importante afin de justifier du bon choix des dimensions du domaine est l'étude des corrélations en deux points des vitesses dont l'expression est :

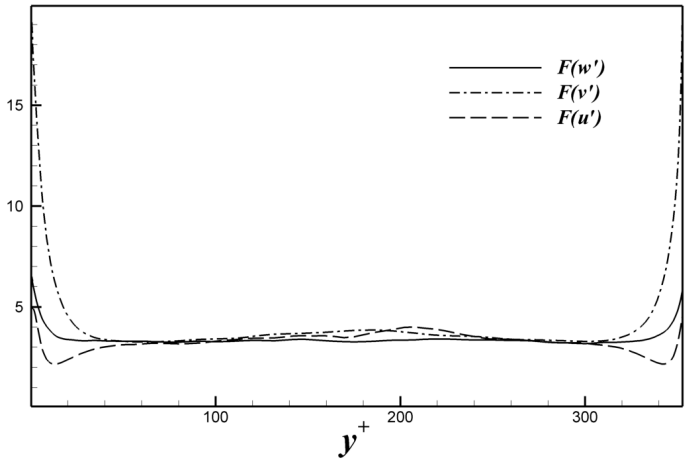


FIGURE 3.11 – Profil du facteur d'aplatissement pour les trois composantes du champ de vitesse

$$Ru'_i u'_i = \frac{\overline{u'_i\left(x + x_j\right) u'_i\left(x_j\right)}}{\overline{u'_i\left(x_j\right) u'_i\left(x_j\right)}} \tag{3.18}$$

Cette expression permet de vérifier si les vitesses sont spatialement découplées dans les directions longitudinales et transversales. Si c'est le cas, les corrélations doivent tendre vers une valeur nulle lorsque la distance augmente. Les figures 3.12 et 3.13 comparent ces valeurs à celles présentes dans l'étude de Kim *et al.* [1987] et montre que cette condition est vérifiée pour la taille de notre domaine. Ces résultats sont tirés de la thèse de François Bouillon (Bouillon [2004]) et sont obtenus pour une taille de domaine identique à la notre.

Un point important concerne la viscosité numérique générée par la discrétisation spatiale et temporelle. Il est essentiel de s'assurer que la dissipation artificielle engendrée par le schéma numérique est faible et qu'elle n'affecte pas significativement l'énergie totale de l'écoulement. A partir d'une simulation inviscide, Orlandi [2000] a montré que pour une discrétisation spatiale similaire à la notre, le facteur déterminant était le pas d'avancement temporel. Ainsi, pour des pas de temps importants, l'étude montre que l'énergie totale reste conservée mais que l'enstrophie se trouve diminuée. Cette modification de l'enstrophie étant en majeure partie liée à la résolution discrétisée des petites échelles, ceci implique qu'une étude portant sur les structures fines (hauts nombres d'ondes) requiert un pas d'avancement temporel petit. Dans toutes nos simulations, le pas de temps reste faible si on le compare à l'étude précédente et le problème de la viscosité numérique est donc écarté.

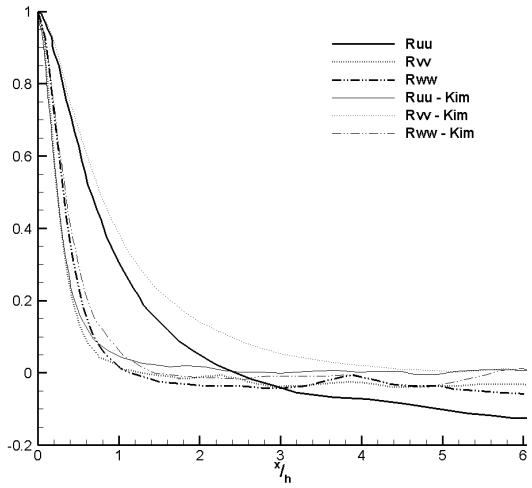


FIGURE 3.12 – Comparaison des **corrélations en 2 points** des fluctuations de vitesse suivant la **direction longitudinale**, à $y^+ = 5.5$, avec les données numériques de Kim *et al.* [1987].

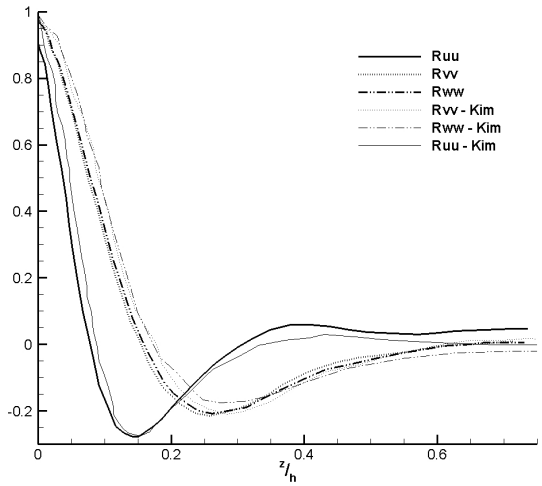


FIGURE 3.13 – Comparaison des **corrélations en 2 points** des fluctuations de vitesse suivant la **direction transverse**, à $y^+ = 5.5$, avec les données numériques de Kim *et al.* [1987].

3.6 Budget énergétique des contraintes de Reynolds

Les équations de transport des contraintes de Reynolds proviennent des équations de Navier-Stokes. On détermine dans un premier temps les contraintes fluctuantes avant de procéder à une moyenne d'ensemble (interchangeable avec les moyennes temporelles).

D'une manière générale ces équations s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle u_i' u_j' \right\rangle = A_{ij} + P_{ij} + T_{ij} + D_{ij} + N_{ij} - \epsilon_{ij} \tag{3.19}$$

où

Terme d'**Advection** : $A_{ij} = -\left\langle u'_i u'_j \right\rangle_{,k} \langle u_k \rangle$

Terme de **Production** : $P_{ij} = -\left[\left\langle u'_i u'_k \right\rangle \left\langle u_{j,k} \right\rangle + \left\langle u'_j u'_k \right\rangle \left\langle u_{i,k} \right\rangle\right]$

Terme de **Transport turbulent** : $T_{ij} = -\left\langle u'_i u'_j u'_k \right\rangle_{,k}$

Terme de **Diffusion moléculaire** : $D_{ij} = \left\langle u'_i u'_j \right\rangle_{,kk}$

Terme de **Pression** : $N_{ij} = -\left[\left\langle u'_i p'_{,j} \right\rangle + \left\langle u'_j p'_{,i} \right\rangle\right]$

Terme de **Dissipation** : $\epsilon_{ij} = 2\left\langle u'_{i,k} u'_{j,k} \right\rangle$

Dans le cas d'une turbulence homogène (dans les directions $x(x_1)$ et $z(x_3)$) et stationnaire, on obtient pour les termes croisés ($u'v'$) :

$$0 = A_{12} + P_{12} + T_{12} + D_{12} + N_{12} - \epsilon_{12} \tag{3.20}$$

avec

$$\begin{aligned}
A_{12} &= 0 \\
P_{12} &= -\overline{v'v'}\overline{\frac{\partial u}{\partial y}} \\
T_{12} &= -\frac{\partial}{\partial y}\overline{u'v'^2} \\
D_{12} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2}\overline{u'v'} \\
N_{12} &= -\left(\overline{u'\frac{\partial p'}{\partial y}} + \overline{v'\frac{\partial p'}{\partial x}}\right) \\
\epsilon_{12} &= 2\left(\overline{\frac{\partial u'}{\partial x}.\frac{\partial v'}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial u'}{\partial y}.\frac{\partial v'}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial u'}{\partial z}.\frac{\partial v'}{\partial z}}\right)
\end{aligned}$$

La figure 3.14 présente l'évolution des termes énergétiques liés aux contraintes de Reynolds croisées ($u'v'$), sur la demi-hauteur du canal et adimensionnalisés par rapport aux échelles internes.

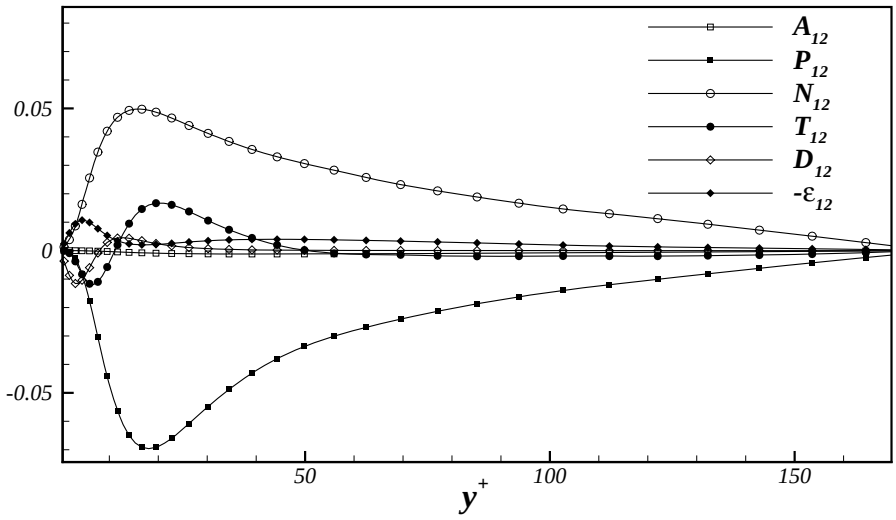


FIGURE 3.14 – Budget énergétique des contraintes de Reynolds :$\overline{u'v'}$

A l'exception de la zone de très proche paroi, l'apport énergétique est majoritairement effectué par le terme de production et la perte énergétique principale provient du terme de pression. La production est un puit énergétique pour le terme $\overline{u'v'}$ mais devient une source pour $-\overline{u'v'}$; il en va évidemment de même pour tous les autres termes.

Loin de la paroi, toutes les autres quantités sont quasiment nulles.

Dans une zone intermédiaire ($10 < y^+ < 50$), le transport turbulent (ou la diffusion turbulente) atteint sa valeur maximale de puit alors que la production est maximale. Nous sommes ici dans la zone où les vortex quasi-longitudinaux naissent et évoluent. Le mélange turbulent est donc intense et provoque une diffusion turbulente importante.

Évidemment, très près de la paroi ($y^+ < 10$), la diffusion moléculaire ainsi que la dissipation deviennent prépondérantes. Cependant, la somme de ces deux termes est quasiment nulle montrant ainsi que la viscosité n'a pas de réelle influence sur la dynamique des contraintes de Reynolds (elle est rapidement dissipée). Il est important de souligner que les résultats présentés sur la figure 3.14 sont très similaires à ceux obtenus par Mansour *et al.* [1988].

3.7 Sur l'identification des structures tourbillonnaires

La détection des structures cohérentes et plus précisément des vortex quasi-longitudinaux au sein d'un écoulement turbulent reste difficile à mettre en oeuvre dans les études expérimentales. Les méthodes couramment utilisées font appels à des traceurs et à des

résolutions par PTV (*Particle Tracking Velocimetry*) ou PIV (*Particle Image Velocimetry*) qui fournissent généralement des résultats plus qualitatifs que quantitatifs.

D'un point de vue numérique, et même si on a accès à de nombreuses quantités au sein d'un écoulement, la détection des structures cohérentes reste délicate.

En effet, la théorie elle même s'accorde mal à son sujet. Lamb [1945] définit un vortex comme un tube dont les surfaces sont des lignes de vorticité. Mais dans un régime laminaire on peut satisfaire cette définition sans pour autant être en présence de vortex. Pour Lugt [1979], un vortex se compose d'une multitude de particules qui tournent autour d'un centre commun. Selon Lesieur [1997], un vortex cohérent est une zone de l'espace où la vorticité est assez concentrée pour engendrer des vitesses tout en conservant sa forme sur un temps caractéristique T_c. Les structures vorticitaires peuvent devenir irrégulières et leurs formations sont imprévisibles. En prenant comme référence Jeong & Hussain [1995], le noyau d'un vortex (plus facilement localisable que le vortex dans sa totalité) doit impérativement exhiber une vorticité non nulle (et donc une circulation nette) tout en satisfaisant l'invariance Galiléenne.

De ce manque de définition précise, il découle une multitude de techniques de détection. Jeong & Hussain [1995] ont montré que les plus intuitives (détection de minimum de pression, iso-contours de vorticité, trajectoires fermées ou en spirales) n'étaient pas les mieux adaptées. Ils proposent alors une méthode d'extraction plus aboutie : celle de détection λ_2 (choisie pour notre étude).

La méthode de détection λ_2 consiste à détecter une valeur négative de la seconde valeur propre ($\lambda_2 < 0$) du tenseur suivant :

$$\left(||\Omega||^2 + ||S||^2\right) \tag{3.21}$$

avec
$||\Omega||$: partie antisymétrique du tenseur de déformation ∇u
$||S||$: partie symétrique du tenseur de déformation ∇u

Ce procédé permet d'identifier les structures comportant un minimum local de pression, tout comme la méthode du critère Q, mais sans tenir compte du taux de déformation irrotationnelle et des termes de viscosité (qui peuvent modifier la distribution de pression "utile" à une détection par critère Q).

La figure 3.15 montre que pour un même champ de vitesse la détection par localisation de minimum de pression n'est ni nécessaire ni suffisante pour extraire les structures quasi longitudinales. Ainsi, même si on constate une bonne correspondance spatiale avec les résultats obtenus par la méthode λ_2, on remarque que certaines zones comportent des iso-contours de pression sans présence de λ_2 et inversement.

Sur la figure 3.16, on peut voir le résultat d'une détection λ_2 ainsi que le champ fluctuant de vorticités longitudinales (ω_x) sur un plan situé en $y^+ = 30$. Malgré une très

bonne correspondance, on remarque que certaines zones de hautes fluctuations ne sont pas en présence de structures. Ceci est du au choix du seuil de détection $\lambda_2 = -0.018$. Cette valeur plutôt restrictive est volontairement choisie afin d'éviter la détection de fausses structures, quitte à en perdre quelques-unes.

Les figures 3.17 et 3.18 montrent respectivement un plan longitudinal et transverse de vorticité longitudinale fluctuante. La figure 3.18 comporte en plus les vitesses fluctuantes u' et v' afin d'examiner l'interaction des structures avec le champ de vitesse.

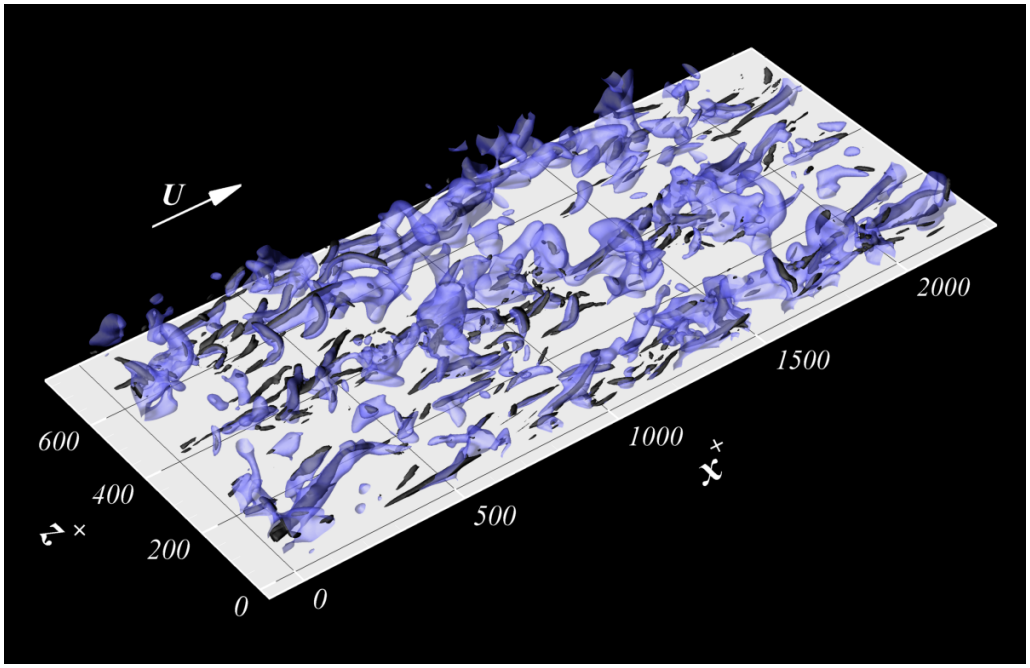


FIGURE 3.15 – Iso-contour de $\lambda_2 = -0.018$ (noire) et de fluctuations de pression $p'^+ = -1.6$ (bleu transparent)

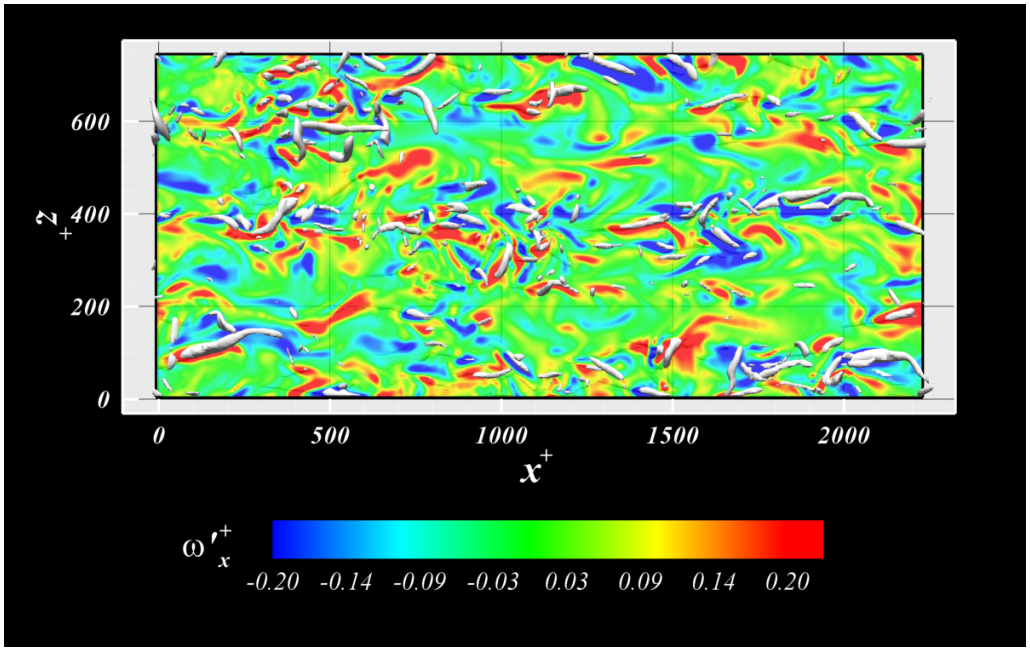


FIGURE 3.16 – Iso-contour de $\lambda_2 = -0.018$ (blanc) et de fluctuations de vorticité longitudinale ω'_x sur un plan normal à la paroi et situé en $y^+ = 30$

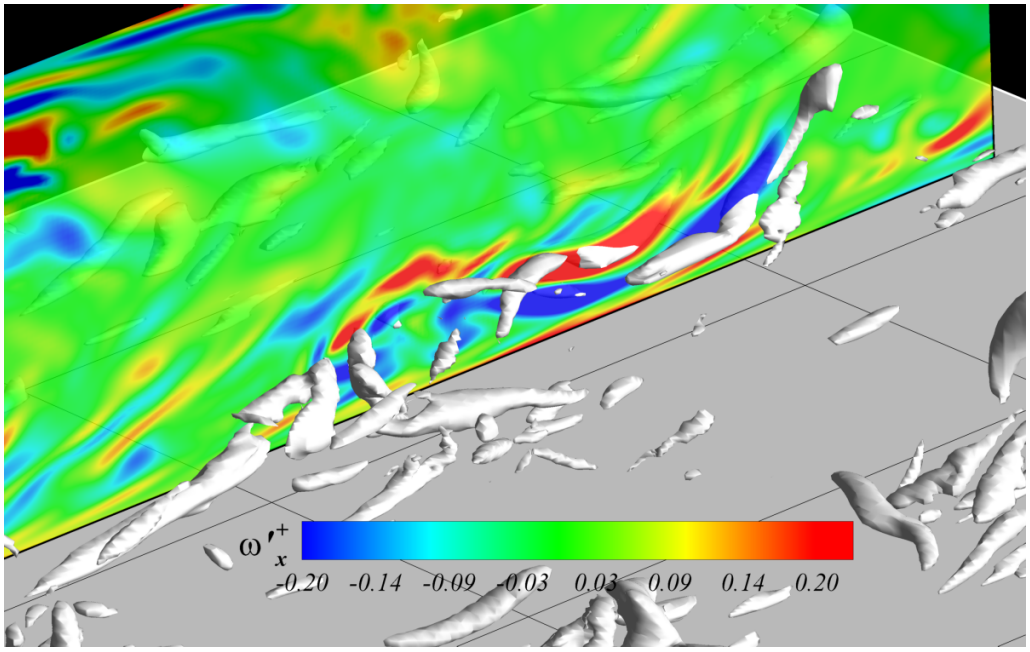


FIGURE 3.17 – Iso-contour de $\lambda_2 = -0.018$ (blanc) et de fluctuations de vorticité longitudinale ω'_x sur un plan longitudinal

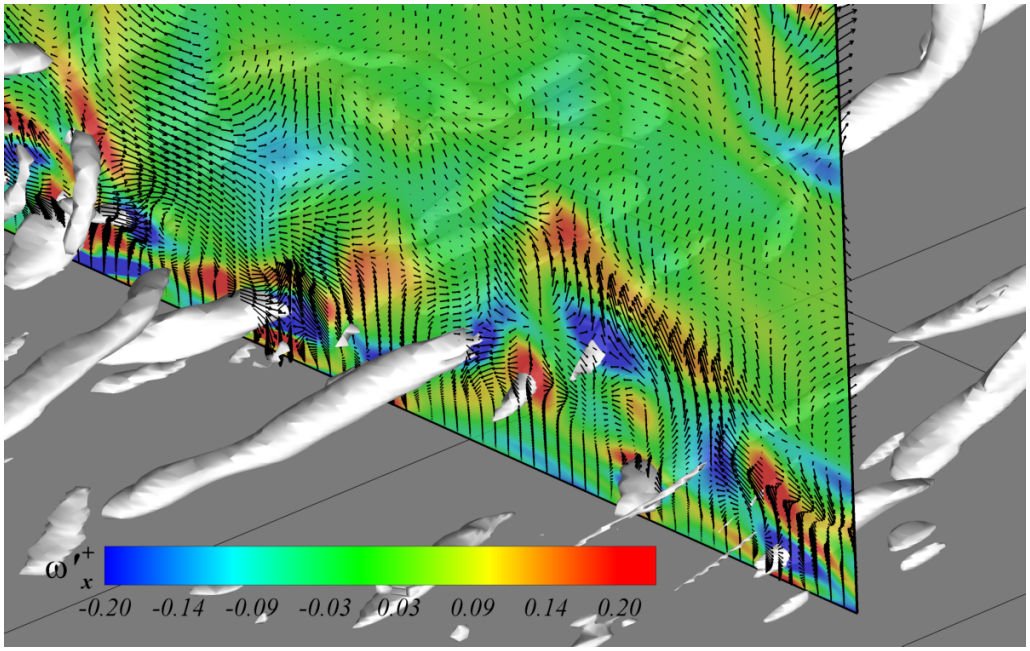


FIGURE 3.18 – Iso-contour de $\lambda_2 = -0.018$ (blanc) et de fluctuations de vorticité longitudinale ω'_x sur un plan transverse. Les vecteurs représentent les vitesses fluctuantes dans le plan considéré

3.8 Conclusions

On a présenté ici les détails de la résolution par Simulation Numérique Directe d'un écoulement en canal.

Le champ turbulent est statistiquement convergé et les résultats sont en très bon accord avec ceux présentés dans la littérature. Notre écoulement turbulent est donc une base solide pour analyser les diverses manipulations qui lui seront appliquées dans la suite de cette étude.

La méthode de détection choisie afin d'extraire les structures cohérentes est une méthode de type λ_2 qui se révèle, à ce jour, être la technique la plus aboutie dans ce domaine.

Chapitre 4

Transport de scalaire passif : application au transfert de chaleur dans un canal plan en régime développé turbulent

4.1 Introduction

Un scalaire passif est une quantité gérée par l'équation de transport et qui n'affecte pas la dynamique de l'écoulement. Si le scalaire considéré est la température, on négligera ainsi les effets dus à la convection naturelle dans l'équation de quantité de mouvement. Ce chapitre a pour objectif de décrire comment le calcul du transfert de chaleur a été intégré à la résolution par Simulation Numérique Directe. On commencera ainsi par présenter les outils numériques utilisés avant d'exposer les principaux résultats obtenus en canal turbulent non manipulé. Cette étude constitue alors la première étape d'une analyse visant à mettre en relation le contrôle de la turbulence et son effet sur les transferts de chaleurs.

4.2 Formulation du problème

Le transport de température sera étudié à travers l'équation de conservation de l'énergie pour un fluide à conductivité et masse volumique constante. Cette dernière peut s'écrire :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial (u_j T)}{\partial x_j} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} \tag{4.1}$$

où α est la diffusivité thermique du fluide et T le champ de température instantané. Cette équation nécessite le calcul simultané du champ de vitesse u_j résultant de la résolu-

tion *DNS* de l'équation de Navier-Stokes présentée précédemment. Dans l'étude menée ici, la paroi inférieure du canal est chauffée de manière uniforme à la température T_{inf}, et la paroi supérieure à la température T_{sup}.

4.3 Implémentation numérique

L'équation 4.1 doit être adimensionnalisée par rapport aux unités du code. On fera donc intervenir la vitesse de Poiseuille au centre du canal U_{cp} et la demi-hauteur h du canal.

La température sera traitée de la manière suivante :

$$T^*(x,y,z,t) = \frac{T(x,y,z,t) - \overline{T}_{cond}}{\Delta T} \tag{4.2}$$

où $\Delta T = (T_{inf} - T_{sup})$ et $\overline{T}_{cond} = (T_{inf} + T_{sup})/2$ correspondent respectivement à la variation de température entre les deux parois et à la valeur moyenne de température dans le cas d'une conduction pure.

L'équation adimensionnalisée prend donc la forme :

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{\partial (u_j^* T^*)}{\partial x_j^*} = \frac{1}{RePr} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_j^{*2}} \tag{4.3}$$

où Re $(= \frac{U_{cp}.h}{\nu})$ est le nombre de Reynolds et Pr $(= \frac{\nu}{\alpha})$ le nombre de Prandtl. Les quantités indicées $*$ sont adimensionnalisées par les unités du code. La suite de cette étude traitera exclusivement avec des quantités sans dimension et on omettra ainsi les indices $*$ pour plus de clarté. Il est important de préciser que cette adimensionnalisation est assez différente de celle proposée généralement dans la littérature ([Lyons *et al.*, 1991b; Kawamura *et al.*, 1998]), où une température modifiée à valeur nulle est utilisée sur chaque paroi. Bien que cette transformation est très utile pour dégager les évolutions de profils dans la zone de proche paroi, elle s'avère beaucoup moins intuitive et ne sera donc pas implémentée directement dans le code de calcul. Ces transformations usuelles seront tout de même utilisées en post-traitement dans le but de comparer nos résultats avec ceux de la littérature.

La résolution numérique de l'équation 4.3 comporte les même difficultés que celles présentées par la résolution des équations de Navier-Stokes. Une méthode similaire sera donc employée afin de résoudre le champ de température. Deux distinctions sont toutefois à souligner. La première concerne la nature du champ scalaire. Comme précisé précédemment, la température sera traitée comme un scalaire et à la différence du champ de vitesse, qui est un champ vectoriel à 3 composantes, la taille de mémoire vive nécessaire à sa résolution sera divisée par trois. De même, le temps CPU utile à la résolution de l'équation d'énergie est divisé par 5 si on la compare à la résolution DNS. Ceci s'explique non seulement par le fait qu'on calcule un champ scalaire plutôt que vectoriel mais aussi

par l'absence d'un terme analogue au gradient de pression qui impose l'utilisation de l'outil FFT (ou Multigrille) afin assurer la condition d'incompressibilité. La résolution numérique d'un transport scalaire n'est donc pas coûteuse en terme de temps de calcul et peut être aisément intégrée dans la résolution numérique des équations de Navier-Stokes.

La méthode numérique utilisée ici reste donc très similaire à celle utilisée pour résoudre la première étape de la méthode du Pas Fractionné.

La discrétisation et le ré-arrangement de l'équation 4.3 mène à :

$$\Delta T - \left(\frac{\Delta t}{2}\frac{\alpha^k}{Re.Pr}\right) L_{jj}\{\Delta T\} = -\left(\gamma^k W^n + \rho^k W^{n-1}\right)\Delta t + \frac{\Delta t}{Re.Pr} L_{jj}\{T^n\} \tag{4.4}$$

où $\Delta T = \left(T^{n+1} - T^n\right)$, ρ^k, γ^k et α^k sont des constantes dépendantes de l'algorithme choisi, $Runge - Kutta$ ou $Adams - Bashforth$.

La résolution numérique requiert là encore la détermination explicite des termes de convection du scalaire passif (noté W). On aura donc accès à la valeur de $W^{n+1/2}$ grâce au champ W^n et W^{n-1}. La partie droite de l'équation 4.4 est donc connue et on procède ensuite à la résolution matricielle par une méthode de type *Crank-Nicholson* :

$$\left[1 - \left(\frac{\Delta t}{2}\frac{\alpha^k}{Re.Pr}\right) L_{jj}\right] * \Delta T = RHS$$

Une fois la quantité ΔT obtenue, on peut déduire le champ de température grâce à la relation :

$$T^{n+1} = T^n + \Delta T$$

4.4 Résultats en canal turbulent plan développé

Afin de s'assurer que l'équation d'énergie est bien implémentée, il est nécessaire de procéder à sa vérification dans des conditions classiques (écoulement turbulent développé et non forcé). Dans l'étude proposée, on choisit de considérer le cas d'un canal plan turbulent, dont les parois inférieure et supérieure sont chauffées à des températures différentes.

Le profil initial imposé est un profil de conduction pure entre les deux parois comme le montre la figure 4.1. Il est à noter qu'aucune fluctuation ne sera superposée à ce champ initial.

Les conditions aux limites imposées pour cette étude sont $T_{inf} = 0.5$ et $T_{sup} = -0.5$ en unités code. La pente du profil de conduction pure est donc de -0.5 et la variation totale de température est fixée à $\Delta T = 1$. Il est judicieux de présenter les résultats obtenus en unités caractérisant les échelles internes.

La température prendra donc la forme :

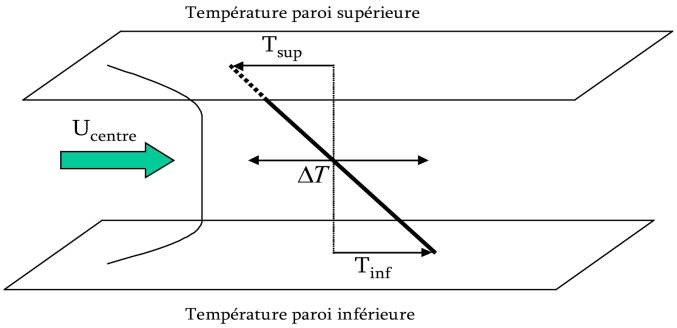


FIGURE 4.1 – Profil de température initial

$$T^+ = \frac{T}{T_\tau}$$

où $T_\tau = \frac{\left\langle \frac{\partial T}{\partial y} \right\rangle_{y=0}}{Re_\tau . Pr}$ est communément appelé la température de frottement.
Le nombre de Nusselt est défini comme :

$$Nu = \frac{qh}{k\Delta T} \tag{4.5}$$

où q représente le flux réel à la paroi et k la conductivité thermique du fluide. L'expression 4.5 peut être récrite de la manière suivante :

$$Nu = \frac{q}{q_{cond}} \tag{4.6}$$

où q_{cond} représente le flux de chaleur par conduction pure entre les deux parois chauffées à températures différentes. C'est cette dernière formulation qui sera utilisée pour calculer le nombre de Nusselt lors des simulations numériques qui suivront. L'application du profil initial de température, et donc du début de la simulation du transport de température, est effectuée à partir d'un champ turbulent de vitesse-pression pleinement développé. Il faut préciser que l'obtention d'un champ turbulent de température ne requiert pas la même intégration temporelle que celle nécessaire à l'obtention d'un champ de vitesse turbulent. En effet, on constate qu'il suffit de 50.000 itérations temporelles à partir de l'application du profil initial de conduction pure (à $\Delta t = 0.01$) pour que le champ de température devienne pleinement développé. Dans notre cas, le calcul comporte 100.000 itérations temporelles, le temps d'intégration t_{int} est donc approximativement $t_{int} = 1000$ unités code correspondant à $t^+_{int} = 8000$ unités pariétales. La première partie, $t^+_{int} = [0,4000]$, correspond alors à l'obtention d'un champ de température pleinement développé et la deuxième, $t^+_{int} = [4000,8000]$, à l'établissement des statistiques.

Le calcul complet requiert approximativement 400 heures CPU (1.45 Ghz, 64 bits, POWER4) et 2GB de RAM pour un calcul mono-processeur (attention une parallélisation augmente la mémoire vive nécessaire).

Deux calculs ont été lancés à partir de deux champs de vitesse-pression pleinement développés mais à partir de pas de temps différents. Après confrontation des statistiques, on constate un écart inférieur à 0.5% sur les moments d'ordre 1 et 2 (les moments d'ordre plus élevés n'ont pas été testés). De plus, la symétrie apparente des statistiques sur la demi-hauteur du canal conforte la thèse de l'obtention d'un champ de température turbulent pleinement développé.

La simulation numérique est effectuée sur un maillage de $513 * 129 * 129$ dans les directions respectives x,y,z. La direction y reste raffinée aux abords des parois comme il est précisé dans la section 3. Le nombre de Reynolds, basé sur la demi-hauteur du canal et sur la vitesse au centre du profil de Poiseuille, est $Re = 4200$. Le nombre de Reynolds basé sur la vitesse de friction est $Re_\tau = 180$. L'avancement temporel est assuré par la méthode de $Runge - Kutta$ d'ordre 3 et la résolution des termes diffusifs par la méthode de $Crank - Nicholson$.

Dans cette section, les statistiques présentées sont obtenues par moyenne temporelle et spatiale (sur chaque plan {x,y}). Cette procédure est justifiée par le fait que les champs turbulents de vitesses et de températures sont homogènes dans les directions x et z.

4.4.1 Les principales statistiques

La figure 4.2 présente l'évolution de la température moyenne à travers la hauteur totale du canal. Ces résultats sont en parfaite adéquation avec ceux présentés par Lyons *et al.* [1991a].

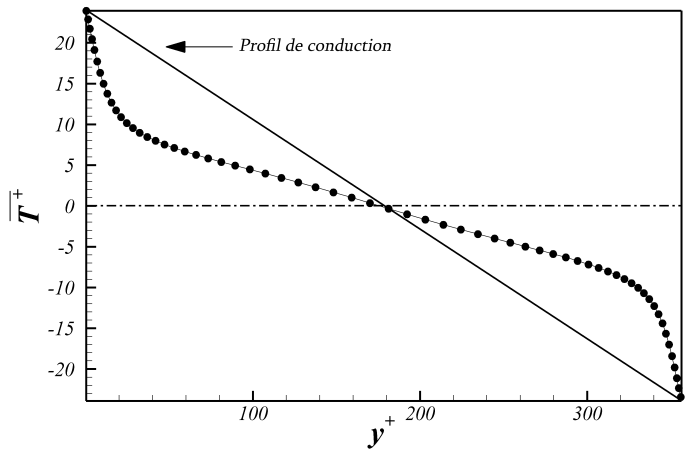


FIGURE 4.2 – Profil de température moyenne exprimée en unité pariétales

La figure 4.3 présente les quantités RMS des fluctuations de température. On remarque que le premier pic est atteint dans une zone proche de $y^+ = 20$, ce qui confirme que la zone

de production turbulente affecte significativement le comportement du scalaire passif. Contrairement aux fluctuations de vitesse, les fluctuations de température ne diminuent pas à travers le canal et atteignent même un maximum global en son centre ($y^+ = 180$). Si le profil de vitesse exhibe un gradient nul au centre du canal, les conditions limites appliquées sur la température imposent comme le montre la figure 4.2 l'existence d'un gradient non nul en $y^+ = 180$. Un terme de production $-\overline{v'T'}\frac{\partial \overline{T}}{\partial y}$ est donc présent au centre du canal expliquant l'apparition de ce pic.

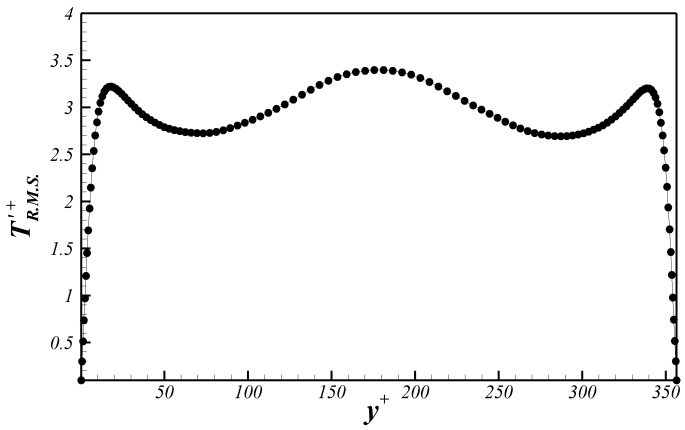


FIGURE 4.3 – Profil moyen des fluctuations *R.M.S.* de la température exprimée en unités pariétales

La figure 4.4 montre que le facteur de dissymétrie est négatif dans la partie inférieure du canal ($y^+ < 180$) et devient positif dans sa partie supérieure. En $y^+ = 25$, en pleine zone de production turbulente, le *skewness* atteint 0 montrant ainsi que la densité de probabilité devient symétrique.

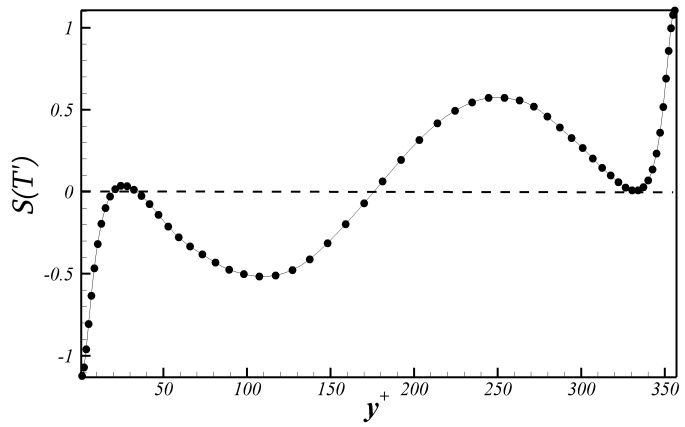


FIGURE 4.4 – Profil du facteur de dissymétrie pour le champ de température

La figure 4.5 montre que le champ de température est beaucoup moins intermittent que le champ de vitesse dont les valeurs maximales peuvent être supérieures à 15 pour $F(v')$ dans la zone de proche paroi.

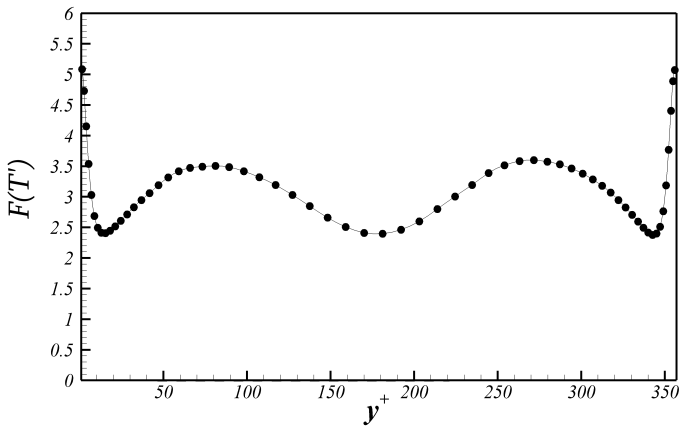


FIGURE 4.5 – Profil du facteur d'aplatissement pour le champ de température

Sur les figures 4.6 et 6.3 sont reportées respectivement les quantités croisées $\overline{u_i'T'}^+$ (adimensionnalisées par u_τ et T_τ) et les corrélations de vitesse-température (adimensionnalisées par les quantités *RMS* locales).

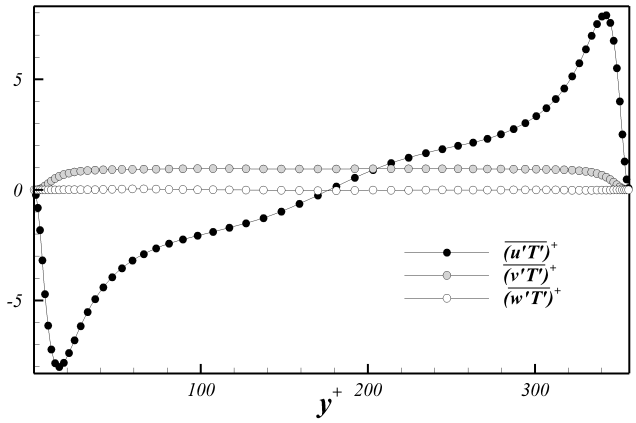


FIGURE 4.6 – Profil des quantités croisées $\overline{u_i'T'}^+$

Les résultats de la figure 6.3 sont en parfaite adéquation avec ceux de Lyons *et al.* [1991a] et révèlent une très bonne corrélation du champ de vitesse longitudinal fluctuant u' avec le champ de température près de la paroi.

Comme précisé précédemment, une température transformée peut être utilisée pour investiguer plus en détail la zone de proche paroi. On définit alors θ comme :

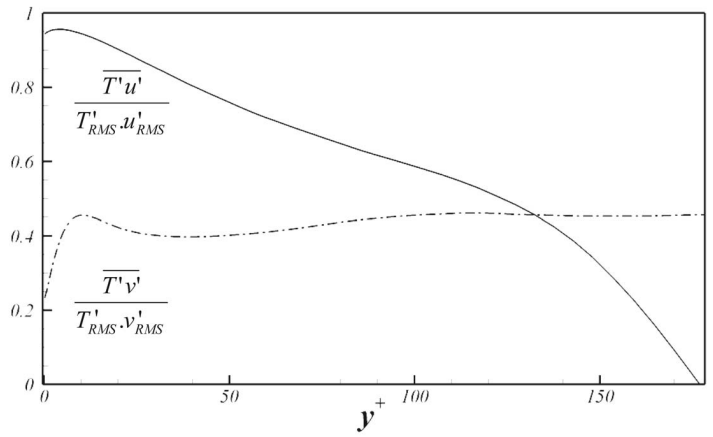


FIGURE 4.7 – Correlations vitesses-températures

$$\theta(x,y,z,t) = \left| \frac{T(x,y,z,t) - T_{inf}}{T_{inf} - T_{sup}} \right| \tag{4.7}$$

et le passage en échelle interne est immédiat :

$$\theta^+(x,y,z,t) = \theta(x,y,z,t) * \left[\frac{Re_\tau.Pr}{\left\langle \frac{\partial T}{\partial y} \right\rangle_{y=0}} \right] \tag{4.8}$$

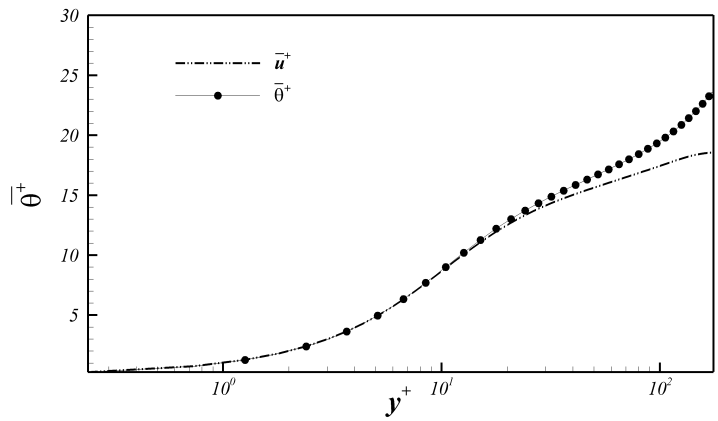


FIGURE 4.8 – Profil moyen de température modifiée et de vitesse longitudinale

4.4.2 Études asymptotiques

Comme le montre la figure 4.8, la loi d'évolution de la température dans la sous-couche visqueuse est linéaire. On peut montrer que les quantités *RMS* de température se comporteront de la même manière que les fluctuations de vitesse longitudinale.

En effet, Kawamura *et al.* [1998] montre que $\frac{\partial \theta'}{\partial y} = \frac{q'_w}{\overline{q_w}}$ menant donc à :

$\theta'_{RMS} \approx a_0 y^+ + a_1 y^{+2} ...$

On peut alors en déduire les comportements asymptotiques des termes croisés :

$$\overline{u'\theta'}^+ \approx b_1 y^{+2} + b_2 y^{+3} + ...$$
$$\overline{v'\theta'}^+ \approx c_2 y^{+3} + c_3 y^{+4} + ...$$
$$\overline{w'\theta'}^+ \approx d_1 y^{+2} + d_2 y^{+3} + ...$$

Les figures 4.9 et 4.10 montrent que les comportements asymptotiques sont bien respectés pour les fluctuations de température modifiée θ'^+_{RMS} et les quantités croisées fluctuantes $\overline{u'_i\theta'}^+$. Les travaux de Li *et al.* [2006] ont montré que ces comportements asymptotiques restaient inchangés lors de l'application d'une rotation sur un axe normal aux parois.

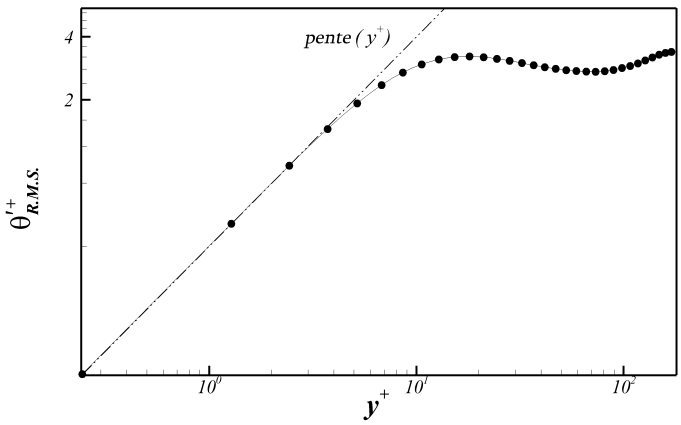


FIGURE 4.9 – Comportement asymptotique de la quantité *RMS* de la température modifiée

On peut remarquer que la quantité $\overline{w'\theta'}^+$ n'est pas reportée sur la figure car elle est identiquement nulle sur toute la hauteur du canal. Pour s'en assurer, il suffit de multiplier la composante transversale instantanée de Navier-Stokes par la température et de moyenner l'ensemble. Il n'existe donc aucune corrélation moyenne entre la vitesse fluctuante transversale et les fluctuations de température.

4.4.3 Quelques champs instantanés de température

Les figures suivantes présentent des images 3D du canal turbulent pour des champs choisis arbitrairement. Sur l'image 4.11 on peut voir trois coupes transversales présentant

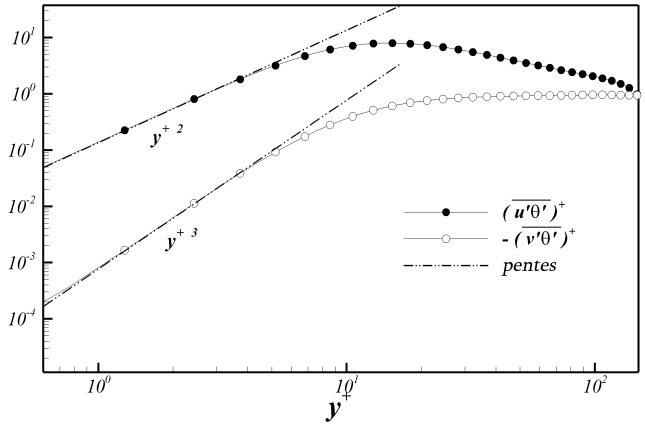


FIGURE 4.10 – Comportement asymptotique des quantités $\overline{u_i'\theta'}^+$

les contours de températures instantanées accompagnées d'une détection de structures sur la demi-hauteur inférieure du canal. La détection de structures est effectuée par une méthode λ_2 avec un seuil fixé à -0.02.

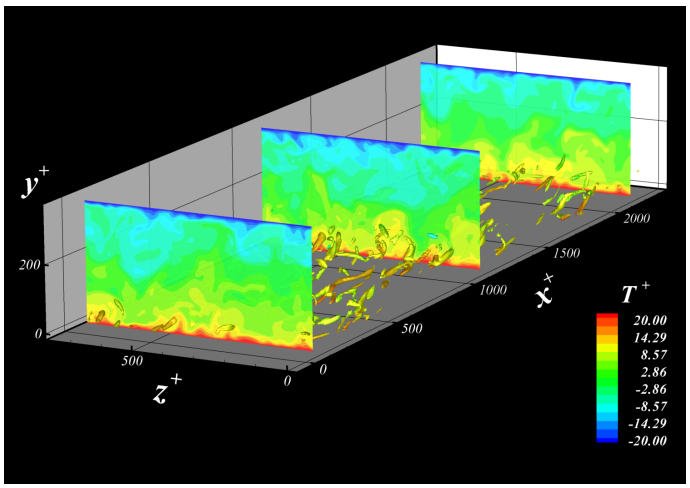


FIGURE 4.11 – Température instantanée et détection λ_2

Il est clair que la présence des structures quasi longitudinales affecte grandement le champ de température. On peut voir qu'à chaque apparition de vortex est associée une zone de mélange thermique importante s'étendant suivant la direction normale à la paroi et pouvant même atteindre le centre du canal (voir la coupe centrale).

Les figures 4.12 et 4.13 permettent d'évaluer qualitativement l'effet de la turbulence de paroi sur l'évolution longitudinale de la température instantanée. On remarque la encore que les vortex sont à l'origine de forts gradients thermiques. Ainsi, dans la zone $500 < x^+ < 1000$, l'absence de structure "lisse" le champ de température en proche paroi alors que dans la zone $1000 < x^+ < 1500$ (présentée plus en détail sur la figure 4.13) on

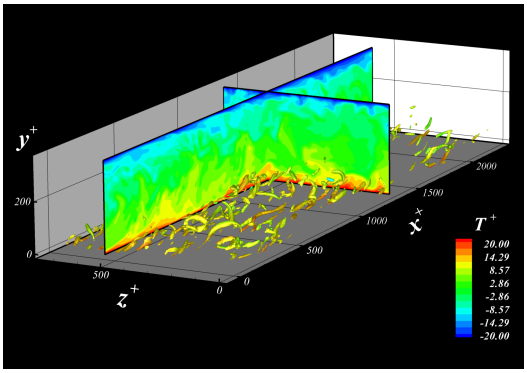


FIGURE 4.12 – Coupe longitudinale de la température instantanée

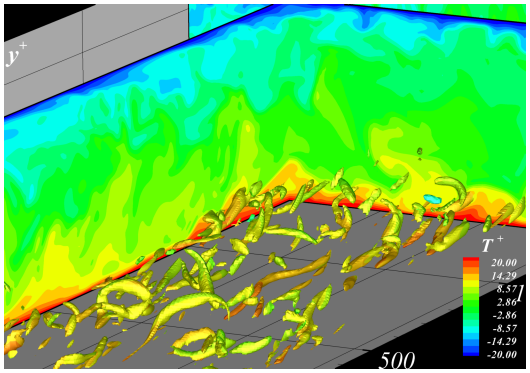


FIGURE 4.13 – Zoom de la coupe longitudinale de la température instantanée

constate une forte perturbation qui s'étend sur approximativement 500 unités pariétales .

Les figures 4.14 et 4.15 font maintenant référence aux fluctuations de température. A l'évidence, ces images montrent que l'interaction des structures avec le champ de température fluctuant est très importante. De plus, on voit maintenant l'apparition cohérente de zone de fluctuations de températures négatives et positives aux abords des structures. On remarque aussi clairement que la température au centre du canal peut être significativement affectée par les structures évoluant près de la paroi.

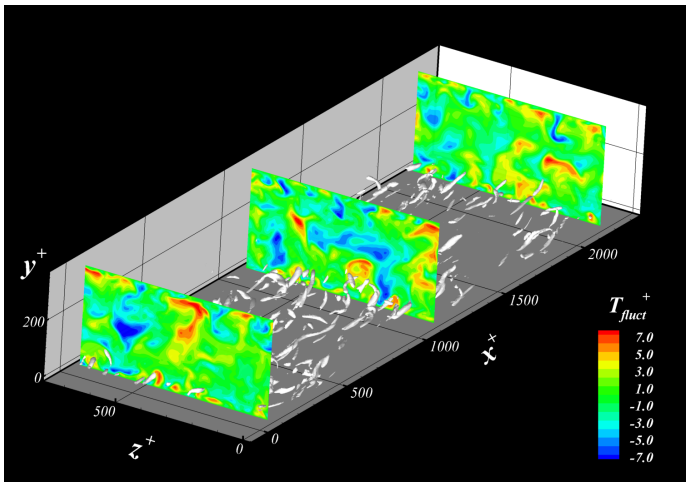


FIGURE 4.14 – Coupes transversales de température fluctuantes

La planche présentée ci-après (figures 4.16 à 4.21) montre l'évolution des températures fluctuantes dans la direction y (normale à la paroi). Il est intéressant de revenir à la figure 4.3 (Profil moyen des fluctuations RMS de la température) pour étudier ces images. En effet, pour la première figure on se place en $y^+ = 1$ et évidemment aucune fluctuation n'est visible, ($\theta_{RMS} \approx 0$). En $y^+ = 5$, les fluctuations apparaissent mais restent de faibles

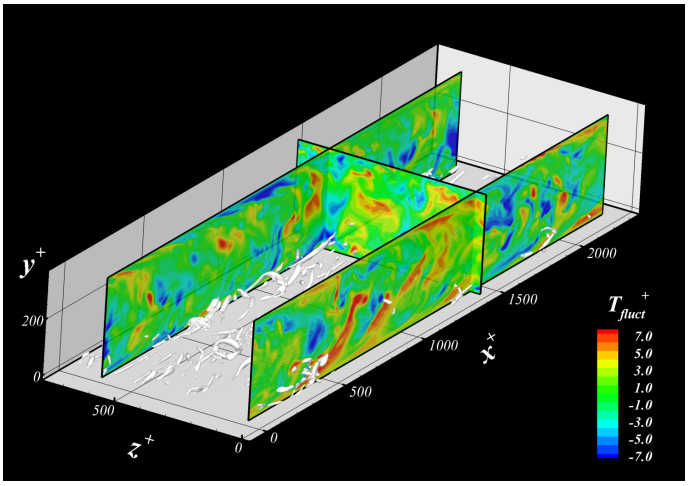


FIGURE 4.15 – Coupes longitudinales de température fluctuantes

amplitudes et localisées en espace. Entre $y^+ = 15$ et $y^+ = 30$, le premier pic des quantités *RMS* apparaît et on voit de fortes amplitudes de fluctuations sur l'intégralité des plans. Comme précisé auparavant, l'apparition de ce pic est dû à l'activité générée dans la zone de production turbulente. En $y^+ = 100$, les fluctuations diminuent globalement comme le montre l'évolution des quantités *RMS*. En $y^+ = 180$, le pic global de la valeur *RMS* est atteint et la dernière figure montre clairement ce comportement.

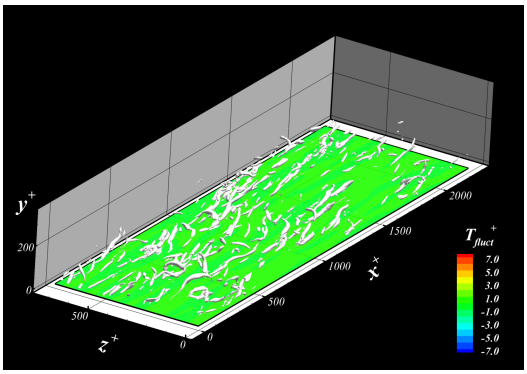


FIGURE 4.16 – Température fluctuante en $y^+ = 1$

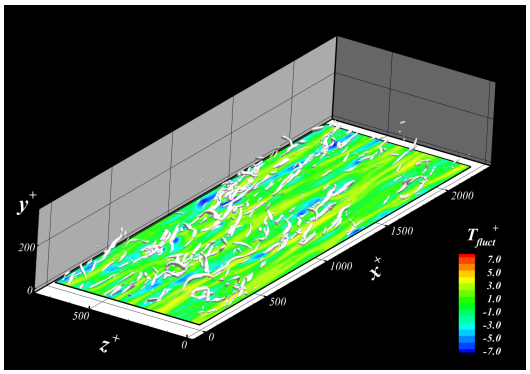


FIGURE 4.17 – En $y^+ = 5$

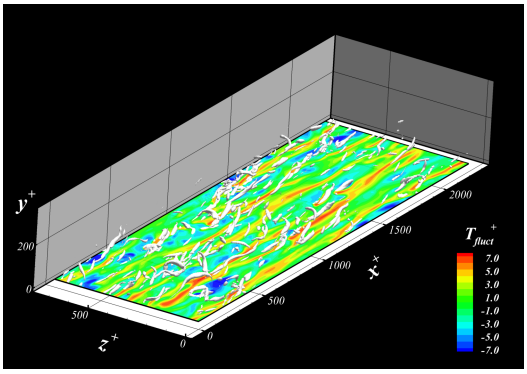


FIGURE 4.18 – En $y^+ = 15$

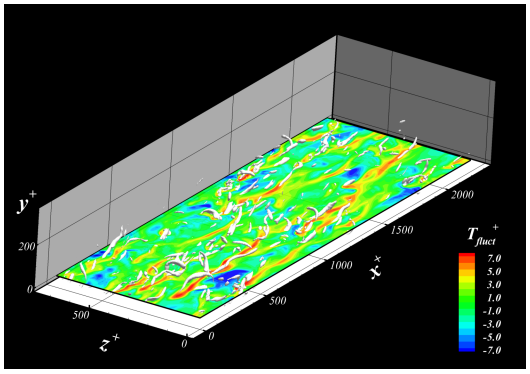


FIGURE 4.19 – En $y^+ = 30$

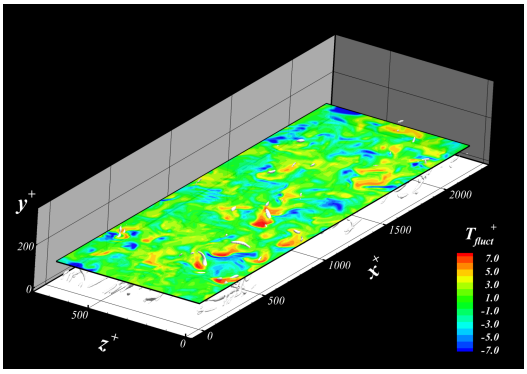


FIGURE 4.20 – En $y^+ = 100$

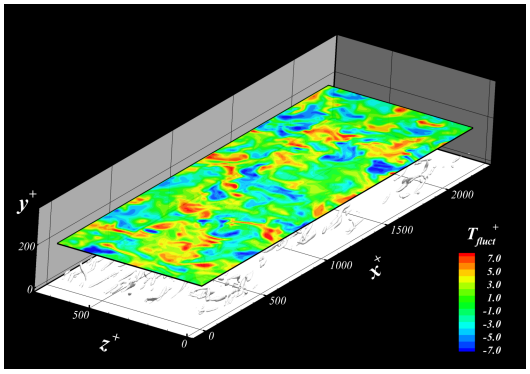


FIGURE 4.21 – En $y^+ = 180$

4.4.4 Budget énergétique des fluctuations de température

L'équation générale du budget énergétique lié aux fluctuations de température est :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\langle T'^2\right\rangle = A + B + C + D + E \tag{4.9}$$

où

Terme d'**Advection** : $A = -\frac{1}{2}\langle u_k\rangle\left\langle T'^2\right\rangle_{,k}$

Terme de **Transport turbulent** : $B = -\frac{1}{2}\left\langle u'_k T'^2\right\rangle_{,k}$

Terme de **Production** : $C = -\left\langle u'_k T'\right\rangle_{,k}\langle T'\rangle_{,k}$

Terme de **Diffusion moléculaire** : $D = \frac{1}{2.Pr.Re}\left\langle T'^2\right\rangle_{,kk}$

Terme de **Dissipation** : $E = -\frac{1}{Pr.Re}\left\langle T'_{,k}T'_{,k}\right\rangle$

Dans le cas d'un écoulement stationnaire et homogène dans les directions longitudinale x et transversale z, l'équation 4.9 devient :

$$0 = A + B + C + D + E \tag{4.10}$$

avec

$$\begin{aligned}
A &= 0\\
B &= -\frac{1}{2}\frac{\partial\overline{T'^2}}{\partial y}\\
C &= -\overline{v'T'}.\overline{\frac{\partial T}{\partial y}}\\
D &= \frac{1}{2.Pr.Re}\frac{\partial^2\overline{T'^2}}{\partial y^2}\\
E &= -\frac{1}{Pr.Re}\left(\left(\overline{\frac{\partial T'}{\partial x}}^2\right)+\left(\overline{\frac{\partial T'}{\partial y}}^2\right)+\left(\overline{\frac{\partial T'}{\partial z}}^2\right)\right)
\end{aligned}$$

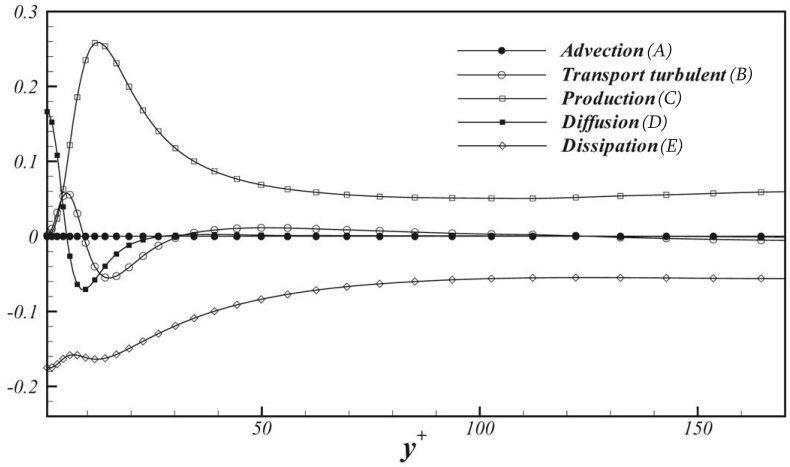


FIGURE 4.22 – Bilan énergétique des fluctuations de températures

La figure 4.22 présente le bilan énergétique lié aux fluctuations de température.

On constate que le terme de production de températures fluctuantes est maximal dans la zone $10 < y^+ < 20$ du fait d'une production cinématique turbulente élevée.

A partir de $y^+ \approx 30$, tous les termes à l'exception de la production et de la dissipation deviennent négligeables. La balance énergétique est donc assurée et montre qu'on satisfait à la relation *Production* = *Dissipation* assez loin de la paroi.

Sur cette dernière, seuls restent les termes de dissipation et de diffusion moléculaire et l'équilibre énergétique montre que la relation *Diffusion* = *Dissipation* est bien vérifiée.

Il est à noter que le bilan énergétique de la température fluctuante est très similaire à celui du terme $\overline{u'^2}$ (Chassaing [2000]).

4.5 Conclusions

On a décrit ici comment le transport d'un scalaire passif ou plus précisément de la température a été implémenté dans le code de calcul. Cette résolution est évidemment couplée à celle des équations de Navier-Stokes mais comporte un coût numérique beaucoup plus faible, ce qui permet de l'intégrer facilement au processus calculatoire.

Les statistiques obtenues s'accordent bien avec celles publiées par différents auteurs tels que Lyons *et al.* [1991a] ou Kawamura *et al.* [1998]. Même si elle n'est pas utilisée intensément dans les études qui suivront, la résolution du transport de scalaire passif est finalement un outil assez simple à mettre en oeuvre et peut s'avérer très utile pour pousser plus loin les investigations.

Chapitre 5

Multigrille

5.1 Introduction

L'application d'une injection pariétale et localisée à une couche limite ou à un canal turbulent est à l'origine d'une dynamique vorticitaire importante aux abords même de la zone manipulée. Dans un cas extrême, cette nappe de vorticité peut s'enrouler en un tourbillon de proche paroi et affecter significativement le comportement de l'écoulement. Les travaux de Jimenez & Orlandi [1993] montrent que de fortes discontinuités dans la distribution de vorticité sont observables près de la région où se forme la structure cohérente. On constate alors l'apparition d'une forte accumulation vorticitaire se traduisant nécessairement par la création d'importants gradients de vitesses.

L'étude numérique d'un tel problème nécessite donc une bonne résolution spatiale sur la zone de contrôle dans le but de résoudre entièrement la dynamique vorticitaire à l'origine des phénomènes constatés lors de l'étude expérimentale. Une étude similaire, mais pour une aspiration localisée, peut être trouvée dans l'ouvrage de Sherman [1990]. Dans ces travaux, une taille de maille très fine (sous l'échelle de Kolmogorov) s'avère être une condition importante à la bonne résolution numérique du problème.

Ce chapitre s'intéresse donc à la l'implémentation et à la validation d'une Simulation Numérique Directe dont la direction longitudinale présente une irrégularité spatiale.

On verra que l'équation de pression (nécessaire à l'obtention de la condition d'incompressibilité) présente l'incapacité d'être résolue plus rapidement par passage dans l'espace de Fourier (FFT impossible). La méthode retenue pour résoudre cette équation est un algorithme de type MultiGrille, utilisé ici dans le but d'accélérer la convergence d'une méthode de relaxation classique.

5.2 Description du maillage utilisé

Le maillage utilisé ici est analogue, dans les directions verticale et transversale, à celui défini dans la partie 3 et seule la direction longitudinale différera.

Dans le cas d'une injection localisée, la région où la fente sera positionnée devra faire l'objet d'un raffinement important car c'est précisément à cet endroit que la dynamique vorticitaire sera la plus importante.

Pour établir la fonction d'étirement nécessaire à la transformation d'un domaine régulier en un domaine irrégulier, plusieurs points sont à prendre en considération. Tout d'abord, l'établissement des coefficients géométriques nous impose de vérifier que, sur l'intégralité du domaine de calcul, la fonction ainsi que ses dérivées première et seconde soient continues. De plus, du fait de la périodicité spatiale imposée, cette condition s'étend aussi sur la jonction entre la sortie et l'entrée du canal.

La formulation de la fonction d'étirement choisie est la suivante :

$$x(\zeta) = x_a(\zeta) * x_b(\zeta)$$

avec

$$x_a(\zeta) = x_r \frac{tanh\,[\alpha_1 \zeta]}{tanh\,[\alpha_1 \zeta_r]}$$

et

$$x_b(\zeta) = \frac{1}{x_a(\zeta = 1)} + \left(1 - \frac{1}{x_a(\zeta = 1)}\right) \frac{tanh\,[\alpha_2(\zeta - 1)]}{tanh\,[\alpha_2(\zeta_r - 1)]}$$

où $\zeta \in [-1,1]$ et représente le maillage régulier à transformer. Les coefficients α_1 et α_2 permettent de contrôler l'intensité du raffinement et de l'étirement et sont ajustés de manière empirique. Les variables ζ_r et x_r traduisent la position de la plus petite maille (centre du raffinement), respectivement dans le domaine régulier et transformé. Le maillage irrégulier $x(\zeta)$ évolue lui aussi sur l'intervalle $[-1,1]$ et une simple transformation permet de l'extrapoler aux dimensions de notre domaine.

La figure 5.1 présente l'évolution du maillage en proche paroi et aux abords de la zone raffinée. Dans cette configuration, la fente sera de préférence positionnée entre $x^+ = 430$ et $x^+ = 470$.

Le domaine de calcul dans sa totalité est exposé avec ses deux directions irrégulières x^+ et y^+ sur la figure 5.2.

Rappelons qu'une modification substantielle du maillage affectera la condition *C.F.L.* (Courant Friedriech Levy) à travers la taille de la maille la plus fine imposée au domaine de calcul. Cette condition de stabilité, provenant du traitement explicite des termes non linéaires, s'écrit :

$$CFL = \frac{u\Delta t}{\Delta x} \tag{5.1}$$

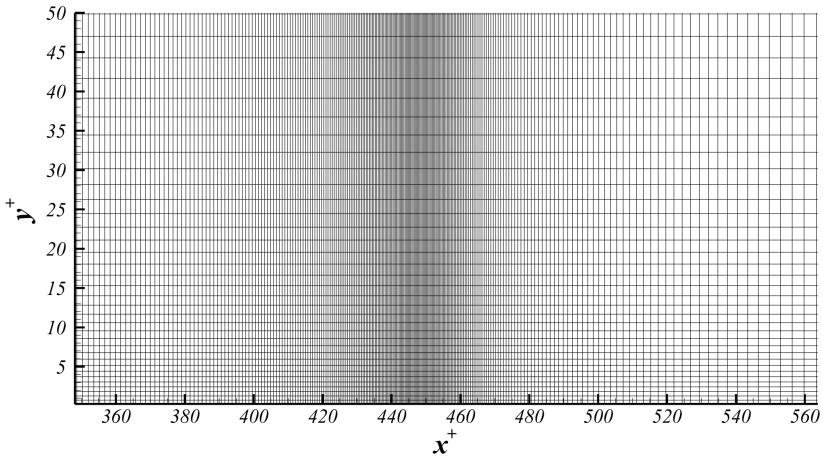


FIGURE 5.1 – Évolution du maillage près de la zone raffinée

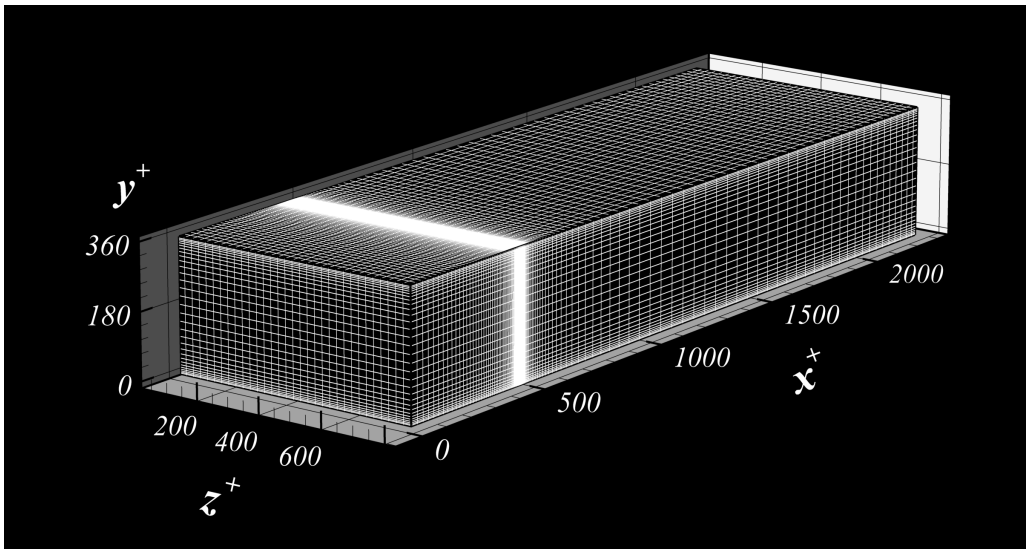


FIGURE 5.2 – Représentation 3D du maillage imposé sur le domaine de calcul. Une maille sur quatre est représentée dans chaque direction.

Comme précisé précédemment, un schéma de type Adams-Bashforth est caractérisé par une limite de stabilité proche de $CFL_{max} = 0.7$. Ainsi, pour une taille de maille réduite, il est nécessaire d'appliquer un pas de temps plus faible dans le but de conserver un *C.F.L.* constant.

Le maillage choisi pour la résolution numérique du problème de soufflage comporte une taille de maille minimale de $\Delta x^+_{min} = 0.3$ et une taille maximale $\Delta x^+_{max} = 12$. Pour obtenir un *CFL* acceptable (< 0.7), le pas de temps numérique doit être fixé à $\Delta t^+ = 1.5\ 10^{-3}$, c'est à dire approximativement 1/6 du pas de temps appliqué dans le cas d'un maillage régulier dans la direction longitudinale.

5.3 La méthode Multigrille

5.3.1 Transformée de Fourier Rapide ou Multigrille

Lorsqu'on cherche à résoudre une équation différentielle partielle sur un domaine irrégulier (anisotropie des coefficients de l'EDP ou maillage irrégulier), on ne peut plus faire appel aux transformées de Fourier dans les directions irrégulières.

Considérons la résolution numérique de l'équation suivante :

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_{1\,reg}^2} + \frac{\partial \eta}{\partial x_{2\,reg}^2} + \frac{\partial \eta}{\partial x_{3\,irreg}^2} = f(x_1,x_2,x_3) \tag{5.2}$$

Ici seule la direction x_3 est irrégulière.

Si on applique maintenant la transformée de Fourier à chacune des directions, on obtient :

$$\sum_{k_1=0}^{N_1}\sum_{k_2=0}^{N_2}\sum_{k_3=0}^{N_3}[\left(k_1^{*2}(k_1) + k_2^{*2}(k_2) + k_3^{*2}(k_3,l)\right)\hat{\eta}(k_1,k_2,k_3)$$
$$= \hat{F}(k_1,k_2,k_3)].e^{\frac{\iota 2\pi k_1 i}{N_1}} e^{\frac{\iota 2\pi k_2 j}{N_2}} e^{\frac{\iota 2\pi k_3 k}{N_3}}$$

où k_i^{*2} sont les nombres d'ondes modifiés, dépendant de la discrétisation et de la géométrie imposées (anisotropies, irrégularités...), les k_i représentent les nombres d'ondes sur leurs directions respectives et i,j,l les indices spatiales sur les directions x_1,x_2,x_3.

Dans cet exemple, il apparaît donc une dépendance entre l'espace physique et les nombres d'ondes de l'espace de Fourier dans la direction x_3. Ainsi, même si un système tridiagonale a été mis à jour, la décomposition spectrale est rendue impossible par l'anisotropie et le système ne peut être résolu.

Il est à noter qu'une résolution par FFT reste envisageable sur un domaine irrégulier. Mais cette approche nous contraint à une reformulation totale du problème. Cette méthode reste à l'état de recherche et ne sera donc pas utilisée dans l'étude présente. Pour plus d'informations, le lecteur intéressé pourra se référer aux articles de Liu et al. [2000] et Leung & Chen [2001].

Pour contourner ce problème, on utilise une méthode Multigrille. Cet algorithme de résolution repose sur des procédures itératives simples telles que les méthodes de *Gauss – Seidel* ou *SOR* (*Successive Over Relaxation*) dont la convergence peut être significativement améliorée par décomposition du domaine de résolution. Les méthodes Multigrille ont la possibilité d'être aussi efficaces que les méthodes *F.F.T.* mais restent beaucoup plus délicates à implémenter. Leur avantage principal réside dans le fait qu'il n'est pas nécessaire de disposer d'un domaine régulier et périodique pour procéder à la résolution d'une équation elliptique de type Poisson.

5.3.2 Principe de la résolution Multigrille

Dans cette partie, on considère une équation aux dérivées partielles elliptique de type Poisson. On choisit, pour des raisons de clarté, de présenter la résolution Multigrille dans le cas d'un problème bidimensionnel et régulier. Pour une première approche, le livre de Press *et al.* [2001] reste une référence de choix pour la clarté de l'explication proposée. Pour une lecture plus complète, le lecteur pourra se référer aux ouvrages de Trottenberg *et al.* [2001] ou Wesseling [1992].*

Il est important, dès à présent, de préciser qu'une résolution Mutligrille n'est pas un algorithme prédéfini, mais plutôt une stratégie menant à l'accélération de la convergence d'une méthode par relaxation simple. Ainsi, à chaque problème correspond un algorithme de Multigrille propre. Dans le paragraphe qui suit, on s'attache à fournir les clés principales de ce type de résolution (spécifiquement pour une équation de type Poisson), qu'il conviendra d'adapter si le problème traité n'est pas similaire.

On cherche à résoudre une équation de Poisson de la forme suivante :

$$L_h u_h = f_h \qquad (\Omega_h) \tag{5.3}$$

où L_h est l'opérateur Laplacien 2D et f_h le terme source. L'indice h précise le niveau de grille considéré et le domaine de résolution est (Ω_h).

Si u_h^r est une approximation de la solution, alors on définit l'**erreur** commise par :

$$v_h^r = u_h - u_h^r \tag{5.4}$$

et le **résidu** par :

$$d_h^r = f_h - L_h u_h^r \tag{5.5}$$

L'équation déficitaire est alors :

$$L_h v_h^r = d_h^r \tag{5.6}$$

Ainsi la résolution précise de l'équation 5.6 permet d'obtenir la solution u_h cherchée par reconstitution de la solution :

$$u_h = u_h^r + v_h^r \tag{5.7}$$

Jusqu'à présent, aucun artifice numérique n'a été utilisé. Si maintenant on ne considère plus l'opérateur L_h sous sa forme complète mais qu'on le remplace par un opérateur simplifié : $\hat{L}_h$, **l'équation déficitaire** devient :

$$\hat{L}_h \hat{v}_h^r = d_h^r \tag{5.8}$$

qui mène à une nouvelle approximation de la solution :

$$u_h^{r+1} = u_h^r + v_h^r \tag{5.9}$$

La solution exacte n'est donc plus déterminée à la fin du processus, mais on a obtenu une première approximation u_h^{r+1} de la solution u_h.

Le schéma 5.3 intègre cette résolution à une procédure itérative.

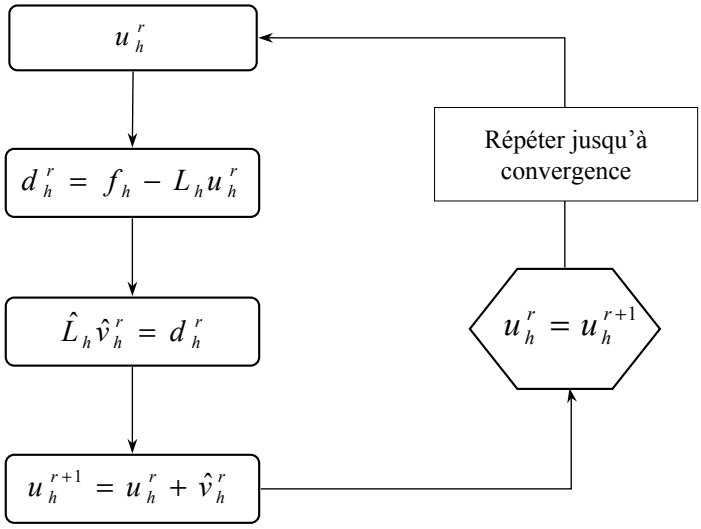


FIGURE 5.3 – Processus itératif de résolution

Jusqu'à présent, aucune hypothèse sur la forme de l'opérateur de Laplace approximé $\hat{L}_h$ n'a été spécifiée. L'idée principale liée à la formulation de la Multigrille consiste à définir :

$$\hat{L}_h = L_H \qquad (\Omega_H) \tag{5.10}$$

où $H = 2h$.

L'opérateur approximé devient donc **l'opérateur exact de Laplace mais projeté sur une grille plus grossière**. On ne considère pour l'instant que le cas où la taille des mailles est doublée sur chaque direction. La figure 5.4 représente ce changement de domaine pour des variables positionnées aux noeuds de grille.

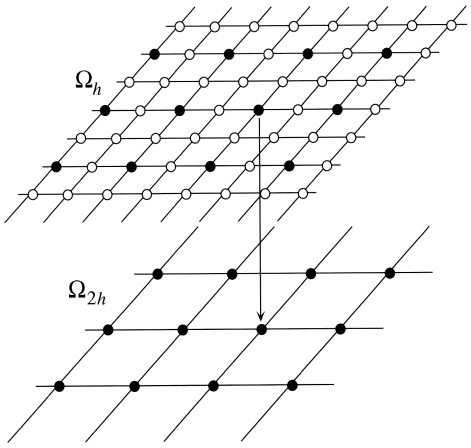


FIGURE 5.4 – Passage d'une grille de dimensions h à H=2h

5.3.3 Structure de l'opérateur à 2 grilles

Un algorithme de Multigrille intègre plusieurs composantes. On distingue ainsi, **la procédure de lissage (*smoothing*), le mode d'évolution de la grille vers des niveaux plus élevés (généralement de tailles de mailles plus grossières), les opérateurs de transfert entre les niveaux** et **le type de cycle considéré**.

On a vu dans la section précédente que la résolution du système 5.3 nécessitait la résolution approximative de l'équation elliptique sur le domaine Ω_h. Ce procédé est appelé **lissage** ou plus communément **smoothing** dans la littérature. L'opérateur de lissage est généralement dérivé de méthodes de relaxations classiques telles que la méthode *Jacobi*, *Gauss-Seidel* ou encore *SOR*.

Le schéma 5.5 présente les différents éléments d'un algorithme de Multigrille à deux niveaux.

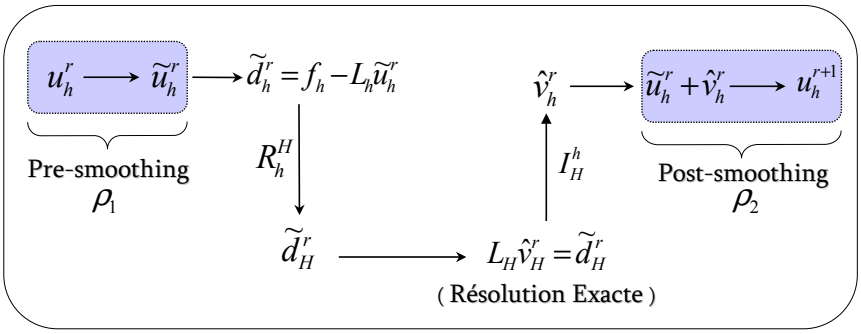


FIGURE 5.5 – Structure d'un cycle à 2 niveaux de grille

On remarque que les procédures de lissage (*pre et post smoothing*) sont positionnées au début et à la fin de chaque cycle. Les quantités ρ_1 et ρ_2, représentent respectivement

le nombre d'itérations employées dans la méthode de relaxation choisie. Les opérateurs R_h^H (Restriction) et I_H^h (Interpolation) sont des opérateurs géométriques qui permettront le transfert des quantités d'une grille à l'autre.

Il parait dès lors clair que la méthode Multigrille ne peut être considérée comme un simple algorithme de résolution d'EDP. Elle doit être envisagée comme une stratégie, dont chaque composante est dépendante du problème considéré. On traitera, par exemple, différemment un problème comportant des variables positionnées au centre des mailles et un problème avec des variables positionnées sur les noeuds de grille.

5.3.3.1 Algorithme de relaxation : *Smoother*

La convergence d'un algorithme de multigrille dépend fortement du type de relaxation choisi. L'efficacité de chacune de ces méthodes est en relation directe avec le type de problème considéré.

Si on décompose en séries de Fourier l'erreur v_h^r commise sur la solution, on peut ordonner les fréquences en deux catégories. La moitié inférieure de la bande spectrale correspond aux *composantes lisses* et la moitié supérieure correspond aux *composantes non-lisses*.

On sait qu'une méthode itérative classique voit sa convergence fortement détériorée lorsque le domaine de calcul comporte des mailles de petites tailles (ou un grand nombre de points). La raison est que les composantes lisses (basses fréquences) sont faiblement réduites en amplitude à chaque itération. Mais certaines méthodes de relaxation permettent de réduire de manière très importante les composantes non-lisses (hautes fréquences) : ces méthodes deviennent alors de **bons opérateurs de lissages**.

Dans le cas d'une Multigrille à deux niveaux, les composantes de l'erreur dont la longueur d'onde est inférieure à $H = 2h$ (grandes fréquences) ne peuvent être représentées sur la grille grossière (Ω_H) et leurs amplitudes ne peuvent donc être réduites à zéro. Mais ce sont justement ces composantes qui viennent d'être lissées par relaxation sur la grille plus fine (Ω_h). C'est le concept même de Multigrille qu'on retrouve derrière ces considérations, chaque niveau de grille résout une partie de l'erreur commise et contribue à recomposer la solution du problème.

Sur la figure 5.6, on voit qu'une méthode de relaxation classique réduit très rapidement les amplitudes de l'erreur dans la zone de haute fréquence. Il suffit de 5 itérations pour obtenir un champ quasiment lisse.

5.3.3.2 Choix de la grille grossière

Dans la partie précédente, on a laissé entendre que le passage d'une grille à l'autre se faisait par $h \Leftrightarrow H(= 2h)$, c'est à dire en doublant la taille de la maille dans chaque direction. Il est vrai que ce choix est généralement retenu du fait de sa simplicité et de son efficacité. Il n'est cependant pas rare de trouver des lois de maillage différentes. On peut

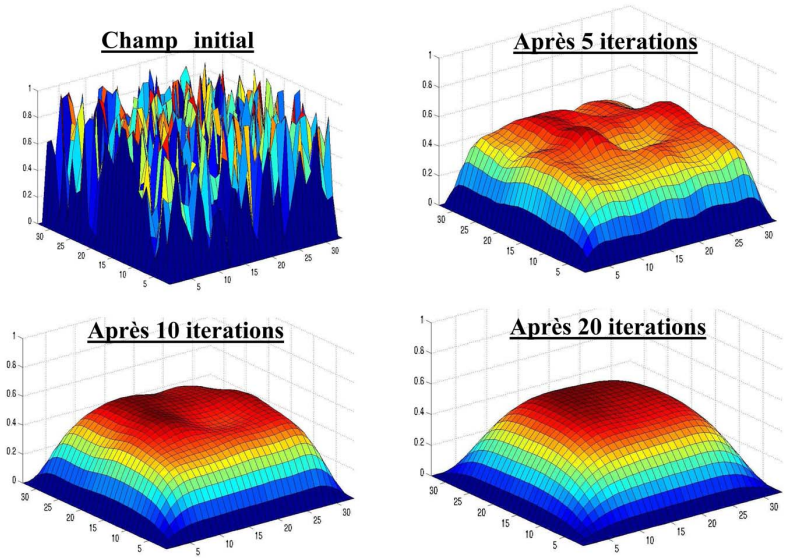


FIGURE 5.6 – Opérateur de lissage : Évolution du terme v_h^r en fonction du nombre d'itérations

citer par exemple les travaux de Ham *et al.* [2006] où l'évolution du domaine de calcul est alternée suivant la direction considérée. Le but est alors d'accélérer la convergence de la Multigrille dans le cas d'une importante anisotropie de la grille de calcul.

5.3.3.3 L'opérateur Restriction : R_h^H

Pour décrire de manière succincte les transformations liées aux changements de grille, on introduit une notation matricielle spécifique. L'exemple suivant permet de définir cette notation.

Considérant une transformation quelconque :

$$u_H(x,y)=u_h(x+\Delta x,y)-2u_h(x,y)+3u_h(x,y+\Delta y)+4u_h(x-\Delta x,y)+5u_h(x,y-\Delta y)$$
$$u_H(x,y)=M_h^H.u_h(x,y)$$

la matrice M_h^H prendra la forme :

$$M_h^H = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}_h^H \tag{5.11}$$

Une composante importante de l'algorithme de Multigrille est l'opérateur Restriction, R_h^H. Cette transformation gère les transferts de quantités de la grille fine à la grille grossière. Plusieurs types de restrictions peuvent être utilisées. On distingue principalement deux catégories importantes, *Pondération Totale (PT)* qui utilise l'intégralité des points environnants pour effectuer le transfert et *Demi Ponderation (DP)* qui utilise seulement les points les plus proches.

La figure 5.7 expose cette différence pour un maillage 2D où les points de calcul sont situés aux noeuds de la grille.

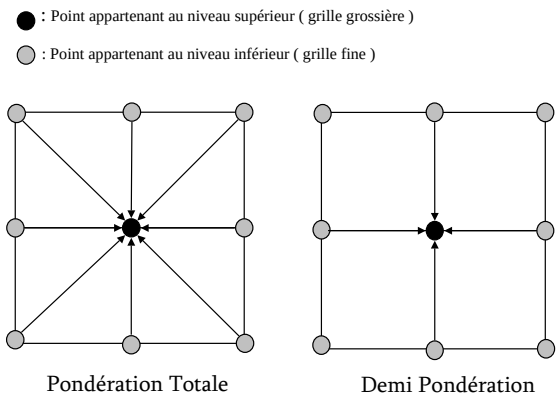


FIGURE 5.7 – Restriction par Pondération Totale (PT) et par Demi-Pondération (DP)

Ainsi, pour la *PT*, la transformation R_h^H peut se résumer à la matrice 5.12.

$$R_h^H = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_h^{2h} \tag{5.12}$$

Et pour la *DP*, l'expression de la restriction prend la forme de la matrice 5.13.

$$R_h^H = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_h^{2h} \tag{5.13}$$

Dans cette notation, les différentes entrées de la matrice représentent les pondérations effectuées sur la grille de transfert.

5.3.3.4 Opérateur d'Interpolation : I_H^h

De la même manière que l'opérateur Restriction, l'opérateur d'Interpolation (appelé aussi Prolongation), I_H^h permet le transfert des quantités de la grille grossière à la grille fine. Les interpolations bilinéaires sont généralement utilisées pour ce type de transformation.

Elles peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2h}^{h} \tag{5.14}$$

5.3.4 De 2 niveaux à n niveaux de grille

On a présenté précédemment le principe d'une stratégie Multigrille composée de 2 niveaux de grille seulement. Dans la pratique, il est très rare d'utiliser ce procédé car la grille grossière comporte un nombre encore trop important de points de calcul. N'oublions pas que le dernier niveau est, à la différence des autres, résolu ***de manière exacte***. Il convient donc d'appliquer cette méthode sur plusieurs niveaux, définissant ainsi un domaine de calcul composé de peu de points dans le but d'accélérer la convergence de la méthode.

La figure 5.8 présente l'agencement des opérateurs de transfert sur 4 niveaux de grille et sur un domaine mono-dimensionnel. On notera que l'exemple traité ici diffère quelque peu des figures 5.10 et 5.7 car les quantités sont maintenant positionnées au centre des mailles (c'est le cas qui nous intéresse particulièrement).

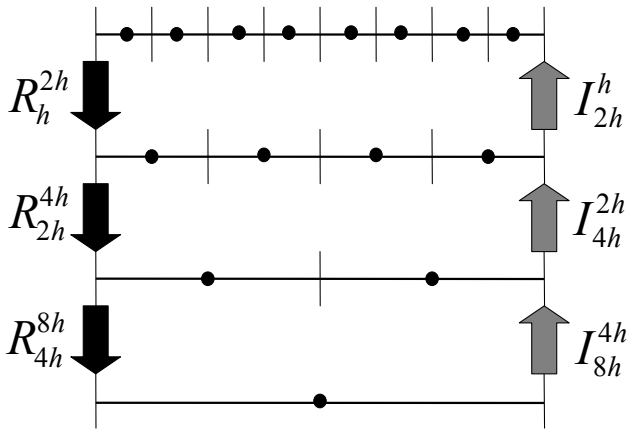


FIGURE 5.8 – Restriction et Interpolation sur 4 niveaux de grille

La figure 5.9 présente la structure d'*une itération (ou d'un Cycle)* de la méthode Multigrille. On rappelle que le résidu est défini par $\tilde{d}_h = f_h - L_h\tilde{u}_h$.

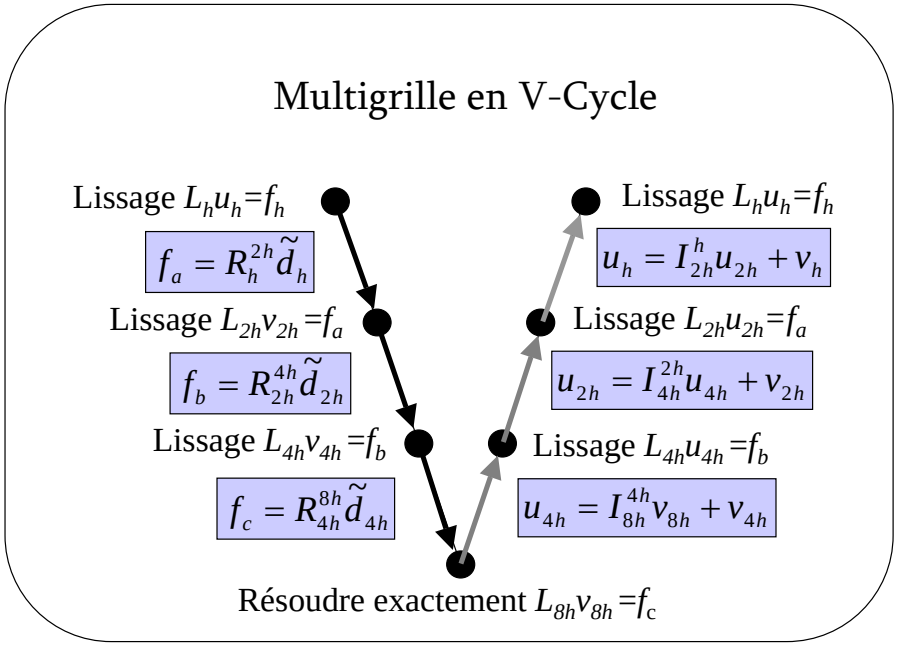


FIGURE 5.9 – Cycle de Multigrille sur 4 niveaux

Les figures 5.10, 5.11, 5.12 et 5.13 exposent la manière dont est affecté le maillage lorsque le niveau de grille augmente. On a choisi ici de présenter 4 transferts avec un maillage irrégulier appliqué seulement dans la direction verticale. A chaque passage d'un niveau à un autre, on réduit d'un facteur 2 le nombre de mailles dans chaque direction. En 3D, le nombre de points de grille est donc diminué d'un facteur 8 à chaque transformation. Au total, entre la grille n°1 et la grille n°4, on obtient un facteur de réduction de $8^3 = 512$. La convergence sur cette dernière grille est donc très significativement améliorée.

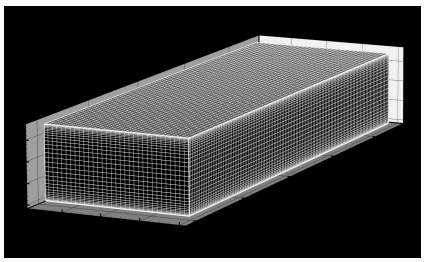


FIGURE 5.10 – Niveau 1 : maillage le plus fin

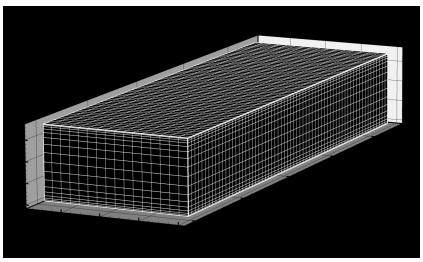


FIGURE 5.11 – Niveau 2

Les méthodes Multigrille présentent l'avantage de n'altérer que faiblement leurs convergences (le nombre de cycle nécessaire) lorsque la taille du domaine, ou la résolution spatiale augmente. De plus, à la différence des autres algorithmes itératifs, le temps de calcul croît linéairement avec le nombre de points de grille.

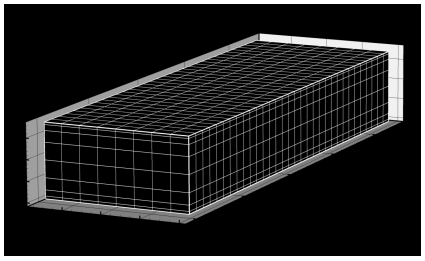


FIGURE 5.12 – Niveau 3

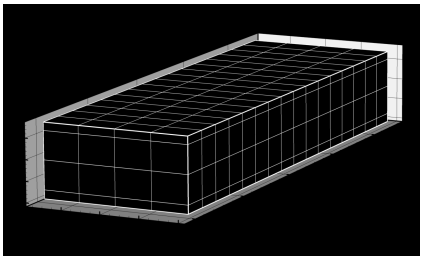


FIGURE 5.13 – Niveau 4 : maillage le plus gros

5.4 Implémentation numérique

5.4.1 Application à l'équation de pression

5.4.1.1 De l'utilité de la Multigrille

On a vu que dans le cas d'une résolution *DNS* par *Pas Fractionné*, la seconde étape de la méthode consistait à introduire un scalaire potentiel η. L'utilisation de cette variable permet de corriger le champ de vitesse dans le but de satisfaire la condition d'incompressibilité. On obtient alors la distribution η en résolvant une équation classique de *Poisson* et c'est donc un problème aux conditions limites.

Jusqu'à présent, la périodicité et l'utilisation d'un maillage régulier dans les directions transversales et longitudinales (respectivement z et x) autorisait un passage dans l'espace spectral. La direction verticale restait physique et ainsi couplée aux coefficients spectraux (des autres directions) permettait la résolution (rapide) d'une matrice tridiagonale.

Dans le cas de l'utilisation d'un maillage irrégulier dans la direction longitudinale, on a vu qu'une *FFT* ne pouvait être utilisée. La méthode la plus directe consisterait à passer dans l'espace spectrale seulement dans la direction régulière (z) et résoudre comme auparavant le problème de manière matricielle. Malheureusement, la matrice obtenue n'est aucunement tridiagonale et le temps nécessaire à la résolution de l'équation de *Poisson* deviendrait beaucoup trop important.

La solution la plus acceptable est donc d'opter pour une formulation Multigrille dans le but de résoudre la seconde étape du *Pas Fractionné*.

Rappelons qu'on cherche une solution à l'équation :

$$L_{jj}\eta = \frac{1}{\Delta t} D_i \hat{u}_i^k \tag{5.15}$$

où D_i représente l'opérateur divergence.

5.4.2 Choix de la grille grossière

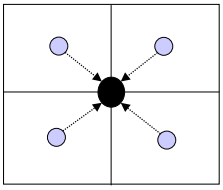
Comme il l'a été précisé auparavant, la transformation du maillage d'un niveau à un autre est effectuée en divisant par deux le nombre de points de grille sur chacune des directions. On ne dérogera pas ici à cette règle. L'utilisation de quantités centrées nous permettra d'utiliser la même loi que celle présentée par la figure 5.8, l'extrapolation au cas 3D étant immédiate.

5.4.3 Opérateur de Transfert : R et I

En maillage 2D, avec des quantités η centrées sur chaque maille, la restriction utilisée serait équivalente à :

$$\eta_H(i,j) = \frac{1}{4} R_h^H . \eta_h(i,j) \quad avec \quad R_h^H = \begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ & . & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix}$$

qui se traduirait graphiquement par :



D'une manière analogue à celle du cas 2D, l'opérateur Restriction (R_h^H) prends une forme très simple dans une configuration 3D :

$$\eta_H(i,j,k) = \frac{1}{8} \left[\left(R_h^H\right)_{l-1/2} \eta_h(i,j,k) + \left(R_h^H\right)_{l+1/2} \eta_h(i,j,k) \right] \tag{5.16}$$

où

$$\left(R_h^H\right)_{l-1/2} = \begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ & . & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix}_h^H \quad et \quad \left(R_h^H\right)_{l+1/2} = \begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ & . & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix}_h^H \tag{5.17}$$

Bien que sa forme ne s'apparente pas exactement à la DP, elle peut être considérée comme telle car le nombre de points nécessaire à une restriction est faible (8 points sur Ω_h se réduisent à 1 point sur Ω_{2h}).

La notation matricielle n'est alors plus adaptée pour rendre compte d'une interpolation trilinéaire. La figure 5.14 est beaucoup plus explicite.

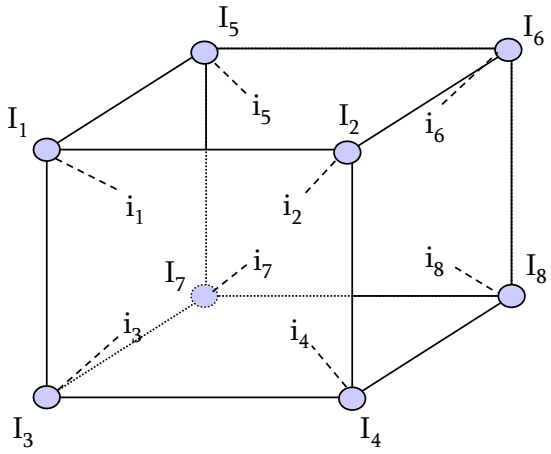


FIGURE 5.14 – Illustration de l'interpolation trilinéaire

Ainsi pour obtenir les quantités η au positions $i_{1,\ldots,8}$, à partir des points appartenant à la grille supérieure, l'interpolation trilinéaire s'écrit :

$$\begin{cases} I_H^h \eta_{[i_1]} = \dfrac{1}{64}\left(27.\eta_{[I_1]} + 9.\eta_{[I_2]} + 9.\eta_{[I_3]} + 9.\eta_{[I_5]} + 3.\eta_{[I_4]} + 3.\eta_{[I_6]} + 3.\eta_{[I_7]} + \eta_{[I_8]}\right) \\ I_H^h \eta_{[i_2]} = \dfrac{1}{64}\left(27.\eta_{[I_2]} + 9.\eta_{[I_1]} + 9.\eta_{[I_4]} + 9.\eta_{[I_6]} + 3.\eta_{[I_3]} + 3.\eta_{[I_5]} + 3.\eta_{[I_8]} + \eta_{[I_7]}\right) \\ I_H^h \eta_{[i_3]} = \ldots \end{cases}$$

Il est important de souligner que par un souci de clarté, les opérateurs de transfert traités précédemment ont été établis sur un maillage régulier. Le passage à un domaine irrégulier est aisé mais nécessite l'intervention d'une correction géométrique sur les différents coefficients pondérateurs.

5.4.4 Smoother et parallélisation

Sur chaque niveau de grille, l'équation à résoudre est une équation de *Poisson* :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_3^2} = f(x_1, x_2, x_3) \tag{5.18}$$

Dans le cas d'un domaine irrégulier, la grille physique x_i (anisotrope) peut être transformée en une grille de calcul régulière ζ_i. Sur la dérivée première, cette manipulation se résume à :

$$\left.\frac{\partial \eta}{\partial x_1}\right|_i = \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial x_1}\right)_i \cdot \left.\frac{\partial \eta}{\partial \zeta_1}\right|_i \triangleq \alpha_i^1 \left.\frac{\Delta \eta}{\Delta \zeta_1}\right|_i \tag{5.19}$$

où $\Delta\eta = \left(\eta_{i+1/2} - \eta_{i-1/2}\right)$, $\Delta\zeta_1$ est un pas spatial constant dans la direction x_1 et α_i^1 représente un coefficient géométrique traduisant l'irrégularité du domaine discrétisé. Les autres directions sont traitées de manière similaire.

La dérivée seconde est un peu plus délicate à traiter. En optant pour une discrétisation basée sur le Jacobien, on obtient :

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2}\right|_{i+\frac{1}{2}} = \left.\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right|_{i+\frac{1}{2}} \cdot \left(\left.\dfrac{\partial \eta}{\partial x_1}\right|_{i+1} - \left.\dfrac{\partial \eta}{\partial x_1}\right|_i\right) \\ \qquad \triangleq \dfrac{1}{\Delta\zeta_1^2}\left(\alpha_i^*\right)\left[\alpha_i \eta_{i-\frac{1}{2}} - (\alpha_i + \alpha_{i+1})\eta_{i+\frac{1}{2}} + \alpha_{i+1}\eta_{i+\frac{3}{2}}\right] \end{cases}$$

où α_i^* est un coefficient analogue à α_i mais centré en $i + \frac{1}{2}$.

La méthode généralement rencontrée dans les applications Multigrilles est une relaxation de type *Gauss Seidel*. En utilisant à présent une notation matricielle, le problème peut se formuler comme :

$$\mathbf{L}.[\eta] = \mathbf{f} \tag{5.20}$$

En dissociant la matrice **L** en une matrice **S**, contenant le triangle supérieur de **L** à l'exception de la diagonale, **I** le triangle inférieur de **L** à l'exception de la diagonale et **D** comportant seulement diagonale de **L** (le reste est nul), on formule le processus itératif comme :

$$(\mathbf{I} + \mathbf{D}).[\eta]^{k+1} = -\mathbf{S}.[\eta]^k + \mathbf{f} \tag{5.21}$$

Cette dernière relation mérite d'être explicitée. Pour un domaine 2D régulier et comportant sur chaque direction x_1 et x_2 une taille de maille identique ($\Delta\zeta_1 = \Delta\zeta_2 = \Delta\zeta$), on obtient :

$$\eta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+1} = \frac{1}{4}\left(\eta_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}^{k} + \eta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+1} + \eta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}^{k} + \eta_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k+1}\right) - \frac{\Delta\zeta^2}{4} f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \tag{5.22}$$

On remarque ainsi que les composants de la nouvelle approximation sont utilisés dès qu'ils sont calculés et donc disponibles à l'itération $k+1$. Il est à noter que par opposition à la méthode Jacobi qui utilise simplement les valeurs provenant de l'itération précédente, cette formulation réduit de manière significative la taille de mémoire vive occupée et semble intuitivement augmenter la vitesse de convergence.

Une nouvelle amélioration peut être apportée à la méthode de *Gauss-Seidel*. Un paramètre ω peut être introduit de manière à anticiper les corrections futures à effectuer. La convergence est ainsi améliorée car le nombre d'itérations nécessaire est réduit. Cette formulation, appelée *SOR* (*Successive Over Relaxation*), modifie le résultat de chaque itération de *Gauss Seidel* de la manière suivante :

$$\eta^{k+1}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \omega.\eta^{k+1}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + (1-\omega)\eta^{k}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \tag{5.23}$$

On remarque que si le facteur de relaxation ω, est égal à 1, la méthode se réduit à une résolution de *Gauss Seidel*. Le paramètre ω est donc choisi de manière à pondérer le résultat obtenu à chaque itération. Il peut être démontré qu'une *SOR* ne peut converger que sous la condition : $0 < \omega < 2$. Si $0 < \omega < 1$. On parle alors de sous-relaxation, la correction appliquée étant réduite par rapport à celle de Gauss Seidel. Si $1 < \omega < 2$, on parle de sur-relaxation, et la correction est alors surévaluée. Sous certaines conditions, il est possible de déterminer analytiquement la valeur optimale de ω, mais dans la grande majorité des cas sa détermination reste empirique. De manière générale, les discrétisations par différences finies trouvent un avantage substantiel à être résolues par sur-relaxation.

Il ne faut pourtant pas confondre la notion de convergence et la notion de lissage. En effet, une relaxation peut converger rapidement vers la solution sans pour autant réduire, lors des premières itérations, les erreurs appartenant aux hautes fréquences. Ainsi, dans un algorithme de Multigrille, c'est la propriété de lissage et non de convergence qui importe.

Durant la relaxation, l'ordonnancement de mise à jour des inconnues est primordial. En revenant à l'équation 5.22, on remarque que l'inconnue $\eta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ cherchée n'est en relation qu'avec ses voisins directs. Cette considération mène à redéfinir l'ordre de calcul des inconnues. La figure 5.15 présente un ordonnancement en pair-impair (appelé aussi rouge-noir ou encore *Red-Black ordering*). Pour une couleur fixée, tous les points sont indépendants les uns des autres. La résolution du système complet est alors effectuée en alternant les résolutions des systèmes composées des couleurs rouges et noires.

Deux avantages sont à tirer d'un tel agencement. Le couplage avec une procédure de type *SOR* permet de réduire beaucoup plus rapidement les erreurs à hautes fréquences. L'amélioration de la procédure de lissage est d'autant plus importante que la grille qui sera utilisée est irrégulière dans deux directions. Il a été montré que l'anisotropie ou l'irrégularité du maillage est à l'origine d'une détérioration importante de la convergence de la Multigrille. Plusieurs solutions sont envisageables pour traiter ce type de problème.

Les travaux de Llorente & Melson [2000] soulignent l'incapacité de la méthode de *Gauss Seidel* à résoudre convenablement des domaines fortement anisotropes et proposent une approche de relaxation par plan. Lors de cette procédure, toutes les inconnues appartenant à un plan (généralement celui qui présente la plus forte anisotropie) sont relaxées

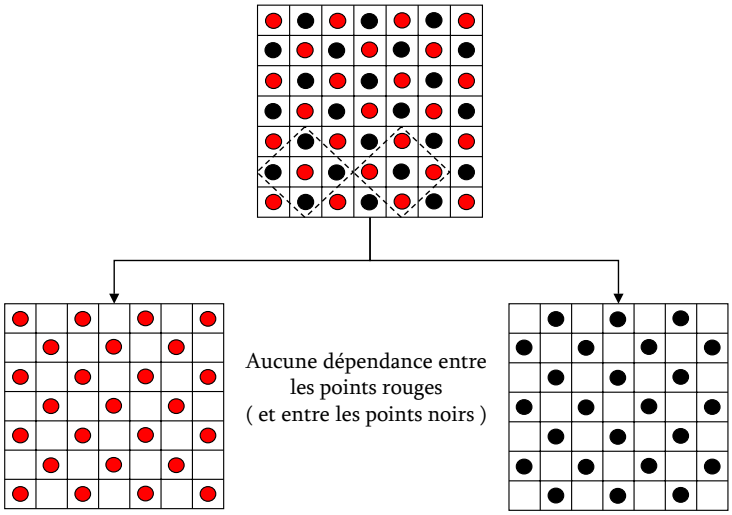


FIGURE 5.15 – Résolution par ordonnancement Rouge-Noir

simultanément. Bien qu'il ne soit pas nécessaire de résoudre exactement chaque plan du domaine, le coût d'une telle approche reste important. Il est cependant équilibré par le gain obtenu sur la convergence de l'algorithme de Multigrille. Le désavantage principal de cette méthode réside dans la difficile parallélisation de l'algorithme obtenu.

Une autre solution consiste à garder une procédure de lissage classique tout en régularisant les mailles sur les niveaux supérieurs. Cette approche (*Semi Coarsening*) est exploitée par Ham *et al.* [2006] qui proposent une adaptation du maillage à chaque niveaux de grille en fonction de l'anisotropie locale.

Dans notre cas, même si le domaine est irrégulier, la variation de taille de maille n'est pas assez importante pour justifier de telles modifications. Un test montre qu'un facteur de relaxation bien choisi ($\omega = 1.8$), et couplé à un ordonnancement rouge-noir alternant chaque plan du domaine, requiert 10 cycles de Multigrille avec un facteur de convergence $\epsilon = 10^{-6}$. Si, sur l'intégralité de la boîte de calcul , la valeur maximale du résidu est supérieure à ϵ alors une nouvelle itération est effectuée, sinon la convergence vers la solution a été obtenue. Dans des conditions identiques, mais sur un domaine régulier, le nombre nécessaire de cycles est de 5 et le temps de convergence est donc seulement doublé entre le cas régulier et irrégulier.

Le second avantage de la méthode d'ordonnancement rouge-noir est sa faculté à être aisément parallélisable. Sur une base de deux processeurs, la parallélisation de la relaxation effectuée suivant l'agencement défini par la figure 5.15, peut se traduire par :

– **Étape 1** : Pour les points noirs

  * Processeur 1 : Calcul des points i=2,4,6,..., N pour j impair
  * Processeur 2 : Calcul des points i=1,3,5..., N-1 pour j pair
- **Étape 2** : Pour les points rouges
  * Processeur 1 : Calcul des points i=1,3,5,..., N-1 pour j impair
  * Processeur 2 : Calcul des points i=2,4,6..., N pour j pair

C'est précisément cette méthode qui a été retenue comme procédure de lissage pour notre Multigrille. De nombreuses améliorations peuvent être apportées afin d'améliorer la convergence l'algorithme en V-cycle, on peut citer par exemple les travaux de Zhang [1996] où est proposée l'utilisation d'une sous-relaxation sur les procédures de lissage positionnées sur le demi cycle correspondant aux restrictions (*pre-smoothing*) et l'utilisation d'une sur-relaxation sur le demi-cycle correspondant aux interpolations (*post-smoothing*). Une augmentation de 30% du temps de convergence peut ainsi être obtenue.

5.4.5 Périodicité et Conditions de Neumann

Des conditions aux limites de natures différentes sont appliquées à l'équation de pression. Dans les directions x et z les conditions sont périodiques alors que sur la paroi inférieure et supérieure on impose des conditions de Neumann. En effet, l'équation de correction de pression provient de :

$$\frac{u_i^{n+1} - \hat{u}_i^k}{\Delta t} = -G_i \eta \tag{5.24}$$

Les conditions aux limites n'étant pas modifiées entre le premier et le second pas de la méthode du *Pas-Fractionné*, on obtient sur la direction verticale, $u_{2,paroi}^{n+1} = \hat{u}_{2,paroi}^k$ et donc $\left.\frac{\partial \eta}{\partial x_2}\right|_{paroi} = 0$. On ne détaillera pas ici les modifications apportées aux différents opérateurs de transfert, cependant il est important de préciser que le traitement des conditions aux limites à travers les opérateurs de restriction et d'interpolation affecte de manière significative la convergence de l'algorithme de Multigrille.

La figure suivante 5.16 résume bien l'agencement des points de grille sur 3 niveaux ainsi que les conditions aux limites appliquées. Les points extérieurs au domaine sont des points fictifs, introduits pour assurer les conditions de périodicité et de dérivée nulle aux parois.

Les flèches qui relient les quantités du domaine aux quantités fictives (extérieures) signifient que leurs valeurs sont égales. Cette correspondance est utilisée dans la procédure de lissage et s'applique évidemment à chaque niveau de grille. Notons que l'application des conditions de périodicité et de Neumann permet la détermination du champ η à une constante près. Pour trouver *au moins* une solution à l'équation de Poisson, il est alors nécessaire de satisfaire la condition de compatibilité portant sur le terme source :

$$\int_\Omega D_i \hat{u}_i^k d\Omega = 0 \tag{5.25}$$

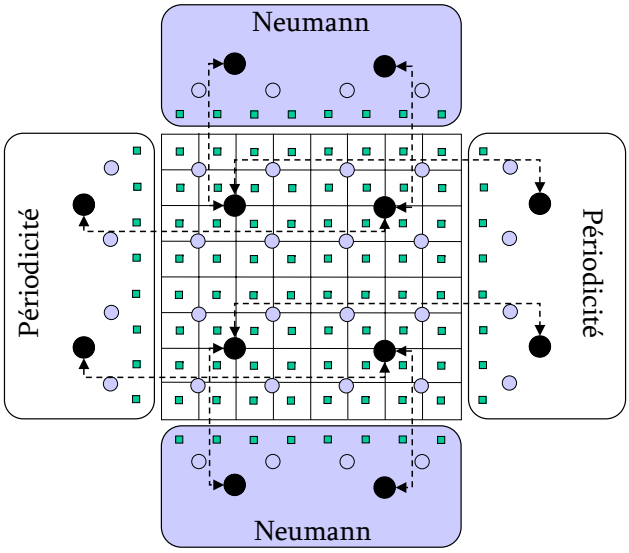


FIGURE 5.16 – Agencement de quantités centrées sur un maillage régulier 2D avec application des conditions aux limites

Dans notre cas, cette condition est automatiquement vérifiée car le champ $\hat{u}_i^k$ est à divergence globale nulle.

5.5 Validation de la méthode

Cette section présente les différentes statistiques obtenues dans le cas d'un écoulement en canal turbulent. Le problème est maintenant discrétisé sur le maillage présenté dans la section 5.2. De manière à valider la résolution par Multigrille, il convient d'utiliser des paramètres identiques à ceux utilisés lors de l'étude présentée dans le chapitre 3. Ainsi, le nombre de Reynolds sera fixé à $Re = 4200$, et la taille du canal sera de $4\pi \times 2 \times 4/3\pi$. Seul le pas de temps numérique est influencé par le maillage choisi ; on rappelle que dans cette étude $\Delta t = 0.0015$ unité code. Les statistiques sont effectuées sur 200.000 itérations correspondant à une tranche temporelle de 2500 unités pariétales. Le coût numérique pour cette simulation est de 1500 heures CPU (monoprocesseur à 1.45 Ghz, 64 bits, POWER4).

La figure 5.17 représente l'évolution de la contrainte totale exprimée en unités pariétales sur toute la hauteur du canal. L'évolution linéaire est bien respectée et justifie d'une bonne convergence des statistiques. Les contraintes de Reynolds sont reportées sur la figure 5.18. Sur chaque paroi, la valeur des contraintes de Reynolds est nulle car aucune intensité turbulente n'est permise (condition d'adhérence). En revanche, les valeurs atteignent un maximum en $y^+ \approx 25$ correspondant à la zone de production turbulente (l'intensité turbulente est la plus élevée).

La figure 5.19 présente l'évolution de la vitesse longitudinale moyenne $\overline{u}^+$ en fonction de la hauteur du canal. La loi de paroi linéaire (représentée par la ligne en traits pointillés)

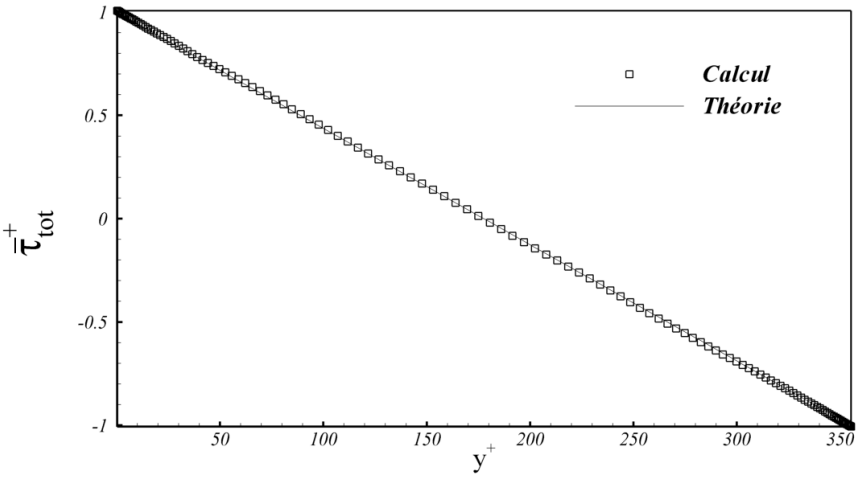


FIGURE 5.17 – Évolution de la contrainte totale sur toute la hauteur du canal

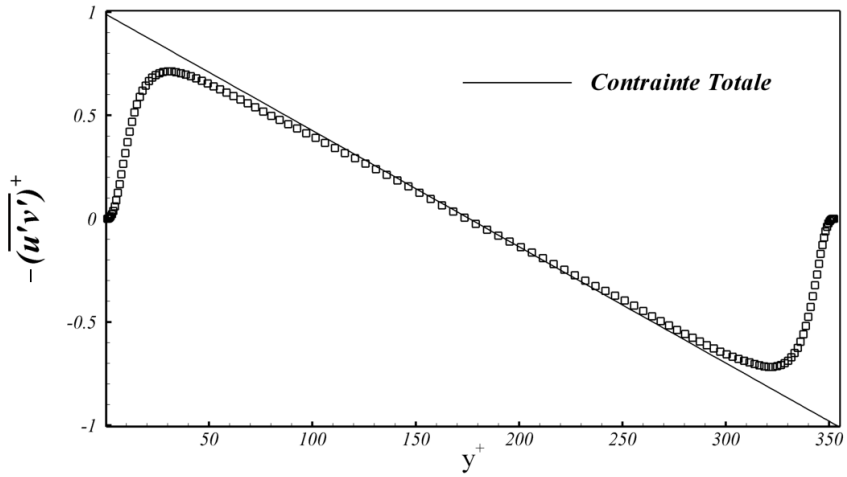


FIGURE 5.18 – Profils des contraintes de Reynolds

s'accorde parfaitement avec les résultats obtenus dans la zone $y^+ < 5$ et la sous couche tampon prend le relais pour $5 < y^+ < 30$. Dans la zone supérieure ($y^+ > 30$) la loi logarithmique ($2.log y^+ + 5.5$) représentée par la ligne pleine est en bonne adéquation avec nos résultats.

La figure 5.20 présente les quantités *RMS* de la vorticité. Ces résultats sont parfaitement identiques à ceux obtenus dans le cas d'un maillage régulier dans la direction x.

La figure (5.21) est certainement la plus importante pour justifier de la validité de la méthode. En effet, les fluctuations de pression sont la conséquence directe de résolution

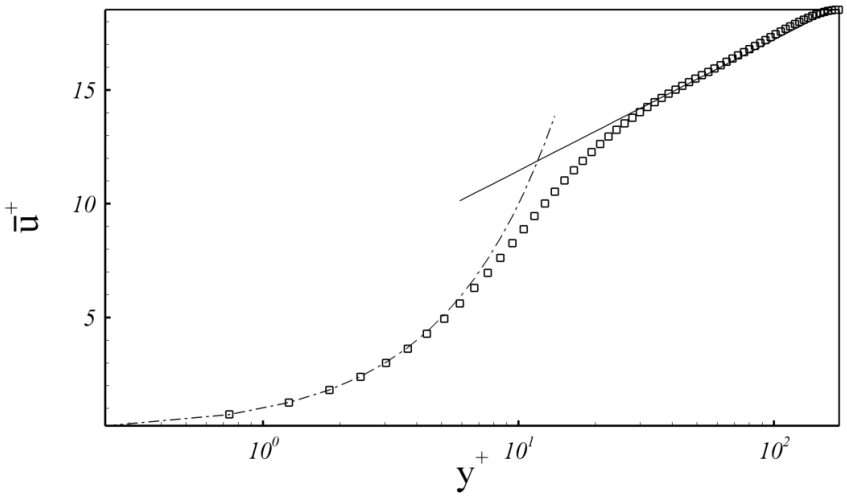


FIGURE 5.19 – Évolution du profil de vitesse longitudinale moyenne

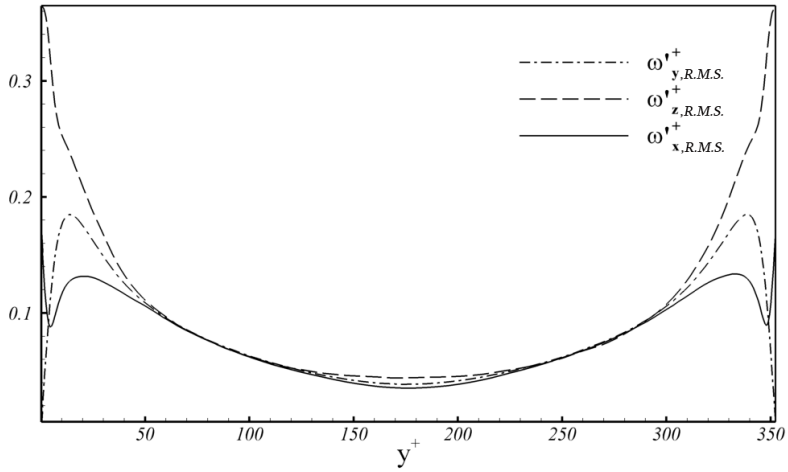


FIGURE 5.20 – Valeurs *RMS* des trois composantes de la vorticité

par Multigrille. Cette figure montre une très bonne adéquation entre les résultats obtenus avec un maillage classique et avec un maillage irrégulier.

Il est à noter que l'ensemble des statistiques présentées précédemment s'accordent, une fois de plus, parfaitement avec les résultats numériques publiés par Kim *et al.* [1987] qui ont eux-même été comparés et validés face aux données expérimentales de Eckelmann [1974]. Des mesures expérimentales plus récentes et plus fiables en zone de proche paroi peuvent être trouvées dans la littérature. On peut citer par exemple les résultats de Durst *et al.* [1993] obtenus par laser Doppler.

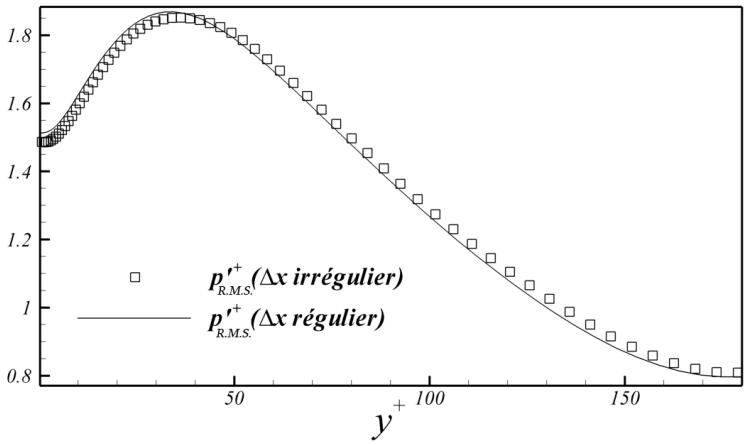


FIGURE 5.21 – Valeurs *RMS* de la pression

5.6 Conclusions

Ce chapitre s'attache à exposer les limites de la résolution d'une EDP par passage dans l'espace de Fourier. On propose ici une méthode alternative qui permettra de résoudre une équation elliptique de type Poisson pour tout type de maillage structuré.

En effet, si le domaine ne comporte qu'une seule direction irrégulière, une matrice tridiagonale peut être identifiée et le calcul peut être effectué en utilisant une Transformée de Fourier Rapide. Dans le cas où plusieurs directions sont étirées, une résolution par Multigrille semble être à ce jour la méthode la plus adéquate.

La recherche d'une solution à une équation de Poisson intervient lors de la seconde étape de la méthode du Pas Fractionné et fait donc partie intégrante de la Simulation Numérique Directe. Lors de l'étude d'une injection localisée, l'utilisation d'une Multigrille s'avère nécessaire afin de raffiner intensément le maillage près de la zone de soufflage permettant ainsi une résolution précise de la dynamique à cet endroit.

Cet outil numérique est approximativement deux fois plus coûteux en terme de temps de calcul qu'une Transformée de Fourier Rapide mais de nombreuses optimisations restent a apporter afin d'alléger l'algorithme ou d'améliorer sa vitesse d'exécution.

Troisième partie

Études numériques de contrôles actifs en canal turbulent

Chapitre 6

Étude dynamique et thermique d'un soufflage stationnaire localisé

6.1 Introduction

Les écoulements en canaux ou en couches limites turbulentes soumis à une injection localisée sont fréquemment rencontrés dans les applications industrielles. Ces configurations peuvent être par exemple trouvées dans le cadre des turbines à gaz où l'objectif est de diminuer les transferts de chaleur avec la paroi sous peine de perte de rendement. Des injections localisées peuvent aussi être utilisées dans le but d'empêcher la surchauffe de composants électroniques ou afin de refroidir la surface d'un circuit imprimé.

De précédentes études (par exemple Park & Choi [1999] ou Krogstad & Kourakine [2000]) ont montré que l'application d'un soufflage uniforme sur l'intégralité d'une paroi provoquait la diminution de la contrainte pariétale tout en engendrant une augmentation de son intensité turbulente. Mais bien que plusieurs travaux portant sur une injection stationnaire localisée aient été effectués, aucune analyse sur les transferts de chaleur n'a pu être recensée.

Dans cette étude, on s'intéressera donc à l'évolution dynamique et thermique d'un écoulement en canal turbulent, pleinement développé et soumis, par l'intermédiaire d'une fente transverse à un soufflage localisé stationnaire.

6.2 Implémentation numérique du problème de soufflage

Les résolutions dynamiques et thermiques (scalaire passif) sont ici effectuées par Simulations Numériques Directes comme présentées respectivement dans les chapitres 3 et 4.

Un maillage irrégulier dans la direction longitudinale (résolution par Multigrille) sera utilisé afin de résoudre précisément le cas d'une fente de petite dimension ($L_x^+ = 17$ en x)

alors que la résolution sera effectuée sur un maillage régulier (résolution par *FFT*) pour l'étude d'une fente dont la dimension est $L_x^+ = 170$.

Les dimensions du canal ainsi que les nombres de Reynolds, Prandtl sont respectivement fixés à 4200 et 1. Le nombre de points utilisés est de $513 \times 129 \times 129$ respectivement dans les directions x,y et z.

L'application d'un soufflage constant sur la paroi inférieure du canal requiert la modification des conditions aux limites liées à la résolution dynamique. Il est à noter que les conditions utilisées pour le problème thermique restent identiques à celles indiquées dans le chapitre 4. D'un point de vue thermique, la paroi inférieure du canal est chauffée uniformément à la température T_{inf} alors que la paroi supérieure est refroidie à T_{sup} (chapitre 4).

Dans les résultats présentés ci-après, seule la dimension de la fente diffère. L'écoulement est considéré bidimensionnel (pas de dépendance des moyennes spatiales ou temporelles sur la direction transverse) car la fente occupe toute la largeur du canal (figure 6.1).

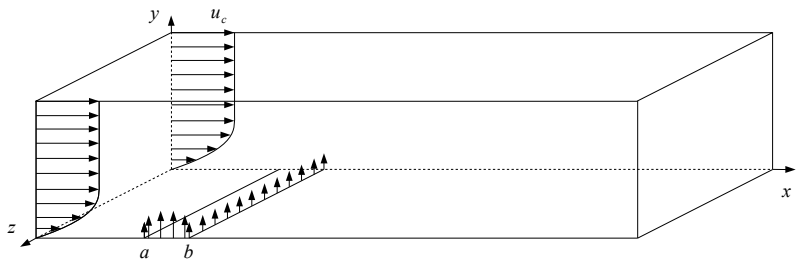


FIGURE 6.1 – Schéma du domaine de calcul

Pour chaque étude le paramètre de sévérité (β) est identique. On rappelle que β est défini par :

$$\beta = \frac{\int_a^b v_0.dx}{\int_0^h u.dy} \tag{6.1}$$

où a et b correspondent à la position des bords amont et aval de la fente et h est la demi-hauteur du canal. Le paramètre β représente donc le rapport entre le débit injecté à travers la fente et le débit à travers la demi-hauteur du canal. Ainsi, la vitesse d'injection sera adaptée à chaque taille de fente afin d'obtenir une valeur fixée : $\beta = 0.006$ (faible débit injecté).

Le profil du jet imposé à travers la paroi est présenté sur la figure 6.2. Le passage d'une vitesse maximale, sur la partie centrale de la zone d'injection, à une vitesse nulle, sur chacun de ses bords, est assuré par une fonction polynomiale de degré 3 (Orlandi [2000]).

Dans le cas d'une fente de petite dimension ($L_x^+ = 17$), on utilise le même profil mais rapporté à l'échelle adéquate. D'autres formes de jets testées n'affectent pas significativement les résultats présentés ci-après.

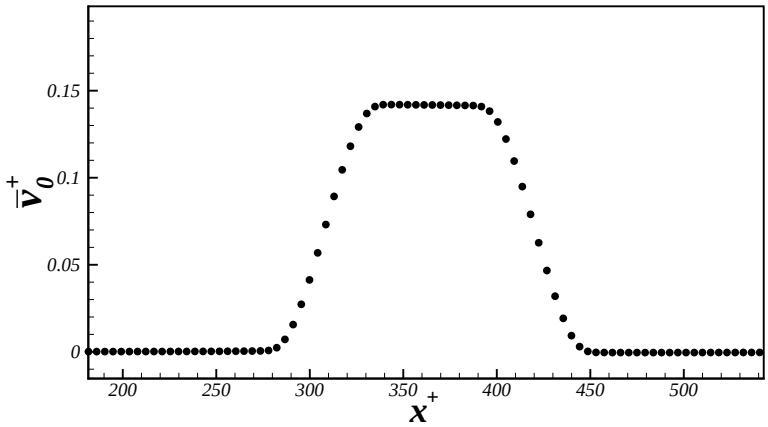


FIGURE 6.2 – Profil du jet pariétal v_0^+ pour une fente de dimension $L_x^+ = 170$

Il est important de préciser que l'application d'un soufflage localisé n'est pas incompatible avec la condition de périodicité longitudinale imposée à notre domaine de calcul. Cette affirmation peut être démontrée par l'établissement des corrélations spatiales en deux points de la contrainte pariétale fluctuante.

$$C(\Delta x) = \frac{\overline{\tau'(x_1)\,\tau'(x_1 + \Delta x)}}{\overline{\tau'(x_1)\,\tau'(x_1)}}$$

où x_1 représente la position de référence, dans notre cas choisie juste sur le bord aval de la fente.

On remarque que $C(\Delta x)$ atteint une valeur nulle à partir de 900 unités pariétales à l'aval de la fente. La décorrélation apparaît donc sur une distance plus faible que celle correspondant à la demi-longueur de la boîte de calcul (figure 6.3).

Le problème de la périodicité spatiale dans la direction longitudinale (et transverse) ne se pose donc pas dans le cas d'une fente dont la sévérité de soufflage est faible ($\beta = 0.006$).

6.3 Étude d'une fente de "grande dimension"

Dans cette première étude on considère une fente de dimension $L_x^+ = 170$. Un paramètre de sévérité $\beta = 0.006$ est obtenu pour une vitesse d'injection fixée à $v_0^+ = 0.14$

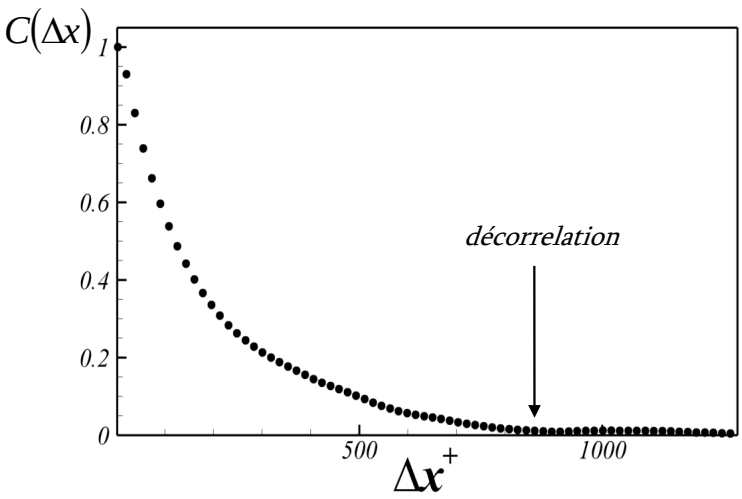


FIGURE 6.3 – Corrélation spatiale de la contrainte fluctuante pariétale en deux points

correspondant à 0.8% de la vitesse au centre du canal. Du fait de la dimension importante de la fente, un maillage régulier est utilisé dans la direction longitudinale. La zone manipulée est ainsi définie par 40 points de grille, ce qui permet une bonne résolution de la dynamique et des transferts associés. Les statistiques sont ici établies sur une durée $t^+ = 4000\nu/u_\tau^2$ et, du fait de la nature bidimensionnelle de l'injection, les quantités pourront être moyennées sur la direction transverse.

6.3.1 Sur la paroi inférieure du canal

La figure 6.4 présente l'évolution longitudinale de la contrainte pariétale moyenne adimensionnalisée par rapport aux échelles internes (ν et u_τ) d'un écoulement non manipulé. Sont reportés sur le même graphique les résultats obtenus par Park & Choi [1999]. Pour leur étude, la dimension de la fente est $L_x^+ = 125$ et la vitesse d'injection la plus proche de notre étude est $v_0 = 0.0185 * u_\infty$ correspondant à 1.85% de la vitesse à l'infini (cas d'une couche limite turbulente). Ainsi, bien que leur taille de fente soit plus petite, la vitesse d'injection est beaucoup plus importante. Ceci se traduit par un paramètre de sévérité β approximativement 1.7 fois supérieur à notre manipulation.

Malgré ces différences, la traînée évolue d'une manière similaire. La figure 6.4 montre que dans les deux cas, la contrainte diminue, non seulement sur la fente, mais aussi en amont de l'injection. Évidemment, du fait d'une sévérité plus importante, la traînée moyenne obtenue par Park & Choi [1999] est plus faible sur la fente.

Dans les deux cas, dès qu'on dépasse le bord aval de la fente, la contrainte augmente jusqu'à relaxer complètement aux alentours de 1000 unités pariétales après la fente. Cette distance ne semble pas être significativement affectée par l'augmentation de la sévérité. En effet, les travaux de Park & Choi [1999] (numériques) et Sano & Hirayama [1985] (expérimentaux) exposent des résultats expérimentaux pour lesquels une sévérité plus

importante (approximativement un facteur 2 sur β) ne modifie pas significativement la distance de relaxation.

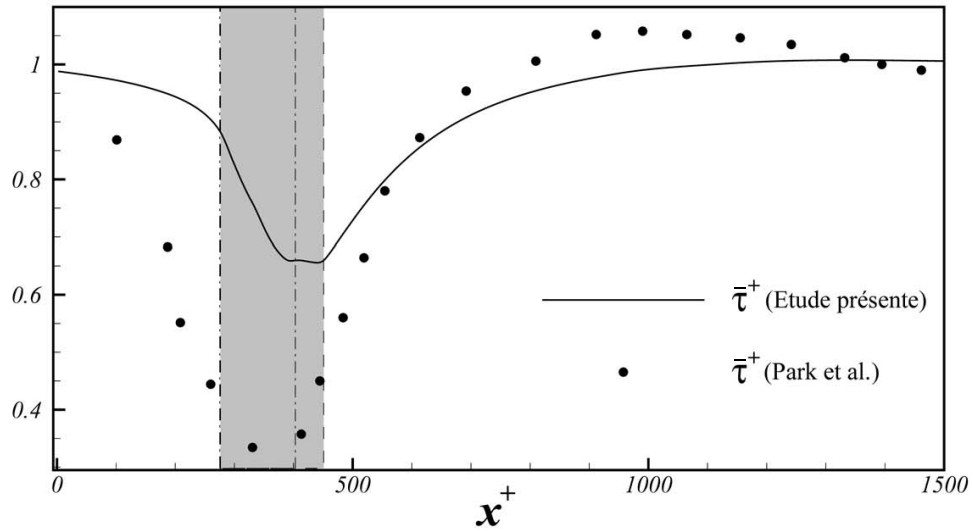


FIGURE 6.4 – Comparaison de l'évolution longitudinale de la contrainte moyenne. Les positions des fentes sont représentées par des tirets pointillés dans le cas de Park & Choi [1999] et par des tirets simples dans notre cas. Les quantités sont adimensionnalisées par rapport au cas standard.

La figure 6.5 montre l'évolution moyenne dans la direction longitudinale de la contrainte et du flux de température à la paroi, tous deux adimensionnalisés par rapport à leurs homologues dans le cas non manipulé. Le transfert de chaleur semble beaucoup plus affecté par le soufflage et présente un maximum de réduction proche de 60% alors que la contrainte turbulente n'est réduite que de 35% sur la fente. De plus, on constate que le flux de température commence à augmenter avant d'atteindre le bord aval de la fente alors que le frottement a tendance à se stabiliser.

L'évolution longitudinale des quantités *R.M.S.* du flux et de la contrainte (figure 6.6) présente un comportement très similaire. La relaxation s'effectue dans les deux cas sur une distance très courte.

En analysant la structure fine de la turbulence par l'intermédiaire du facteur de dissymétrie (S sur la figure 6.7) et d'aplatissement (F sur la figure 6.8), on constate que les quantités propres au flux de température sont systématiquement supérieures à celles de la contrainte à la paroi. Pour S et F, les valeurs présentées dans le cas contrôlé restent généralement supérieures à celles du cas standard, à savoir :

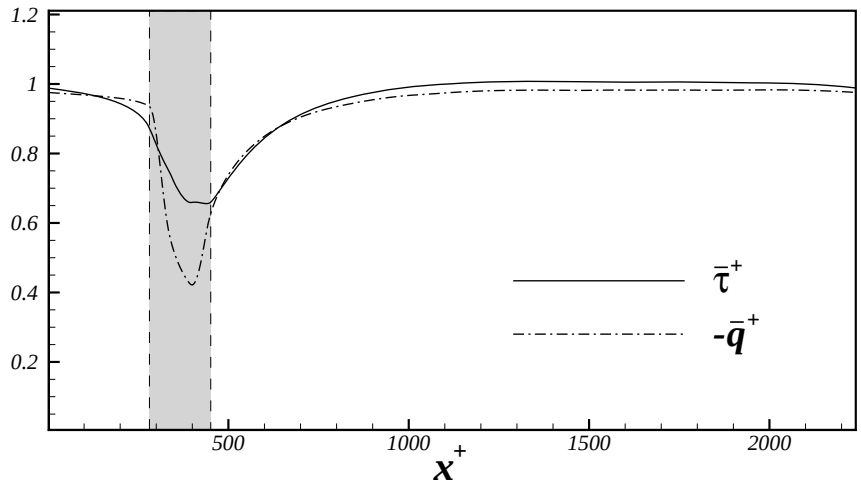


FIGURE 6.5 – Évolution longitudinale de la contrainte turbulente et du flux de température

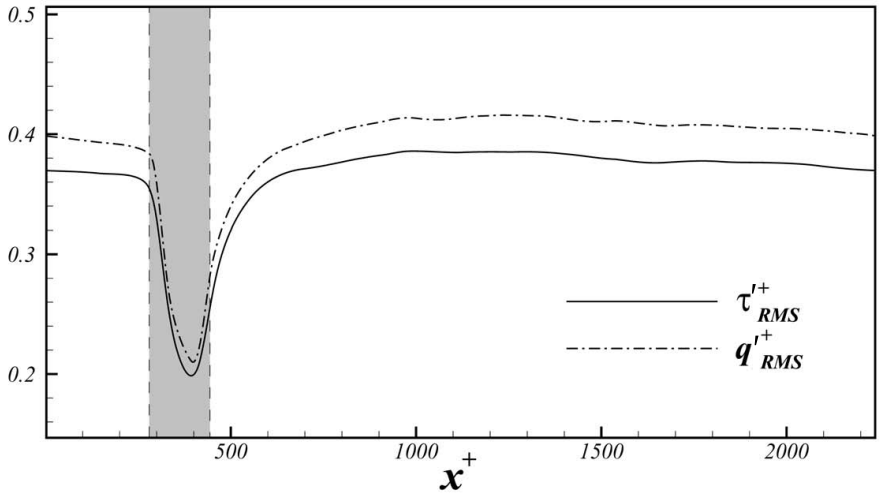


FIGURE 6.6 – Évolution longitudinale des quantités *RMS* de la contrainte turbulente et du flux de température

$$
\begin{aligned}
S(q')_{standard} &\approx -1.15 \\
F(q')_{standard} &\approx 5.2 \\
S(\tau')_{standard} &\approx 1 \\
F(\tau')_{standard} &\approx 4.7
\end{aligned}
$$

L'augmentation de S et F par rapport au cas non manipulé peut s'expliquer simplement. Leurs pics de valeurs sont positionnés près du bord aval de la fente, à l'endroit

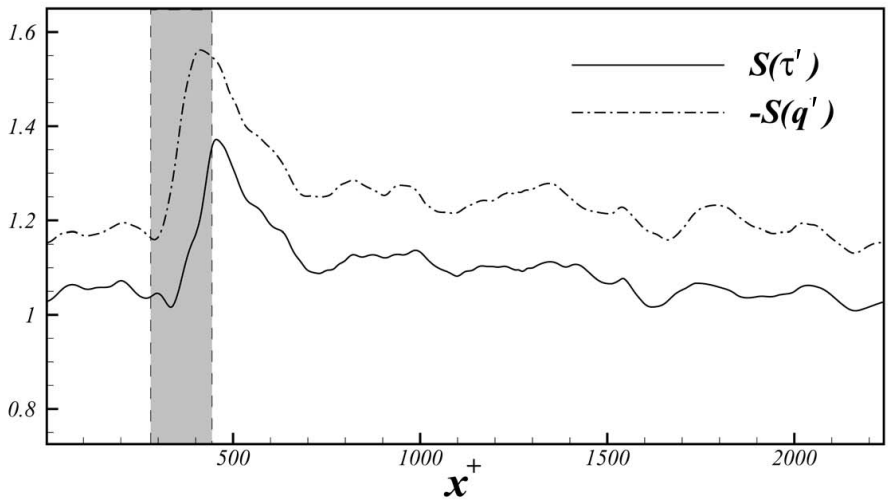


FIGURE 6.7 – Facteur de dissymétrie

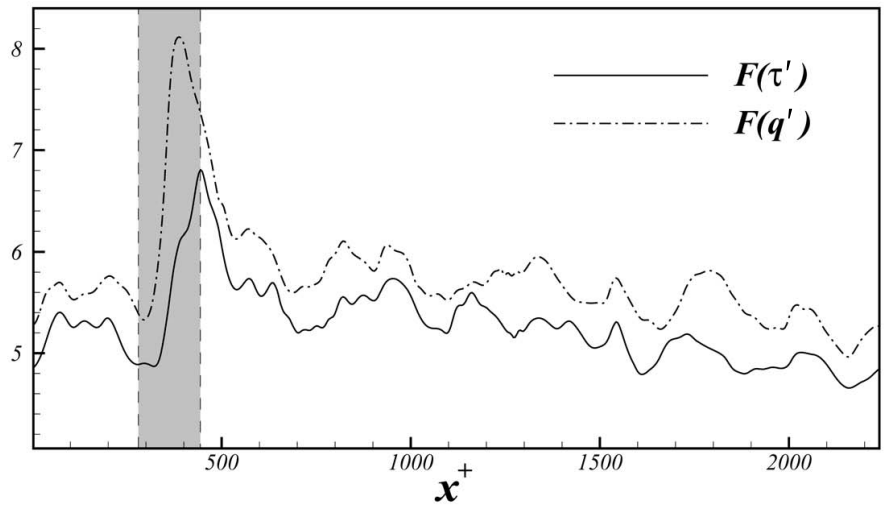


FIGURE 6.8 – Facteur d'aplatissement

même où l'activité turbulente de la contrainte et du flux de température atteint des valeurs minimales (figure 6.6). Cette zone peut être alors considérée comme plus ou moins relaminarisée. Les perturbations engendrées par le passage des structures cohérentes sont donc relativement plus importantes et provoquent l'augmentation des facteurs de dissymétrie et d'aplatissement.

6.3.2 A l'intérieur du canal

Sur les figures présentant des contours, les mentions (rel.) correspondent aux quantités relatives, c'est à dire :

$$Q(rel.) = Q_{[avec\ contrôle]} - Q_{[sans\ contrôle]}$$

Pour faciliter l'analyse des résultats, on fait apparaître sur certains contours des lignes afin de mieux distinguer les variations des quantités considérées. Les lignes pontillées correspondront à des zones négatives alors que les lignes pleines représenteront des régions positives. La fente est localisée par un rectangle noir entre les abscisses $x^+ = 280$ et $x^+ = 450$.

Si aucune mention contraire n'est spécifiée, les quantités seront adimensionnalisées par rapport aux variables internes d'un écoulement non manipulé.

6.3.2.1 Étude dynamique

L'application d'un soufflage constant présente une tendance globale à décélérer l'écoulement moyen dans la direction longitudinale aux abords de la zone manipulée (figure 6.9). On constate que la région localisée près du bord aval est beaucoup plus altérée par l'action pariétale. Même si l'intensité du soufflage est très faible, le temps de passage des particules sur la zone manipulée est important du fait de la grande dimension de la fente. L'effet du soufflage sur les particules étant intégré sur toute la zone manipulée, son impact sur la vitesse longitudinale est alors maximal près du bord aval.

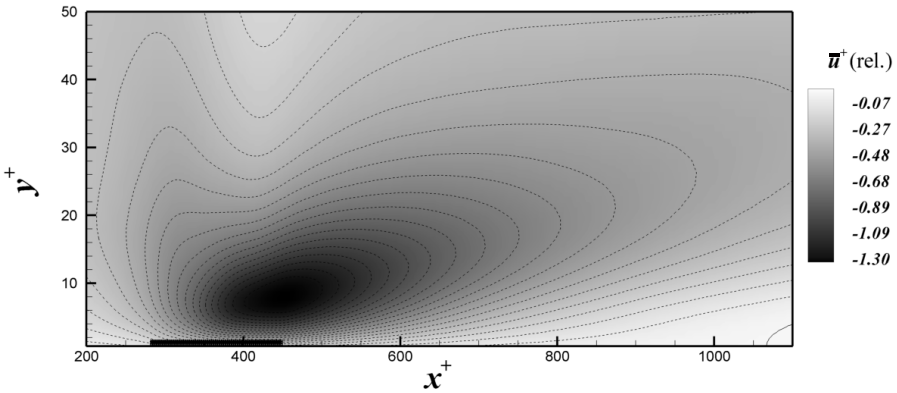


FIGURE 6.9 – Contour des vitesses moyennes relatives

Les profils de vitesses longitudinales adimensionnalisées de manière locale, c'est à dire par rapport aux échelles internes du cas contrôlé et à la position x^+ considérée, sont reportés sur la figure 6.10. Ces résultats montrent que sur la zone d'injection, l'évolution des vitesses diffère significativement du cas non manipulé. Évidemment, plus on s'éloigne de la zone manipulée et plus le profil a tendance à converger vers l'état standard.

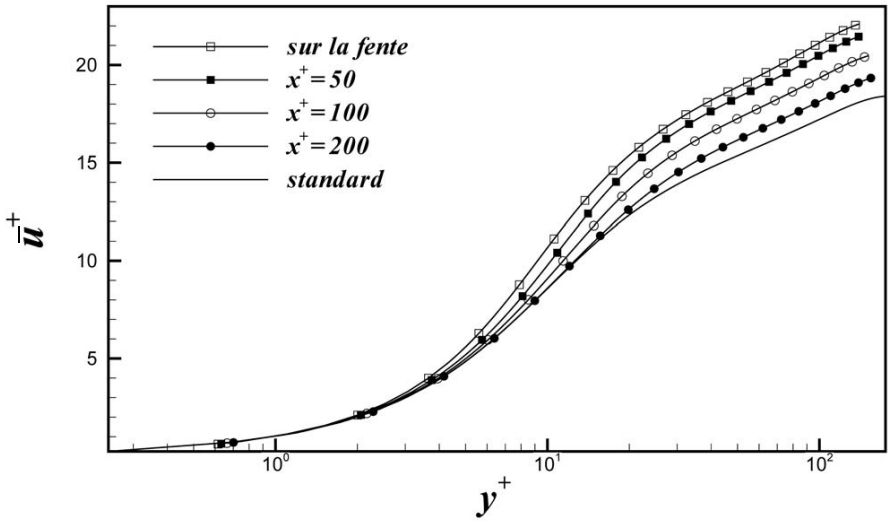


FIGURE 6.10 – Profils de vitesses longitudinales moyennes pour différentes positions à l'aval de la fente et adimensionnalisés par u_τ local

La figure 6.15 montre que les fluctuations de vitesse longitudinale sont aussi affectées par le soufflage. Près de la paroi, aux abords de la fente, l'intensité des fluctuations de vitesse est diminuée d'approximativement 25% par rapport au cas non manipulé en $y^+ = 5$. Ceci s'explique évidemment par le fait que la vitesse moyenne est fortement réduite dans cette zone. En $x^+ = 150$ à l'aval de la fente et pour $25 < y^+ < 35$, la valeur *R.M.S.* augmente légèrement (entre 5 et 10%). Ce comportement peut être attribué à l'activité turbulente des structures cohérentes éloignées de la paroi par l'effet du soufflage.

A l'aval de la fente et très proche de la paroi, le comportement de u'^+_{RMS} est différent de celui constaté par Park & Choi [1999]. En effet, les auteurs montrent qu'un soufflage stationnaire est à l'origine une augmentation de l'activité turbulente dans cette région. Cependant, cette constatation résulte de l'application d'un soufflage intense (écoulement proche de la séparation) provoquant une intensification des structures quasi-longitudinales.

La figure 6.12 présente la variation du terme de production issu du budget énergétique de $\overline{u'v'}$ et adimensionnalisé par rapport aux échelles internes du cas non manipulé. En reprenant la formulation générale de P_{12} (voir chapitre 3), son expression en présence d'une vitesse verticale moyenne non nulle est :

$$P_{12} = -\overline{v'v'}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} - \overline{u'u'}\frac{\partial \overline{v}}{\partial x}$$

On peut remarquer sur la figure 6.12 que la région située près du bord amont de la fente présente une forte augmentation de production des contraintes de Reynolds (attention, le signe de la production est inversé car on considère ici $-\overline{u'v'}$). Sur le bord aval et en $y^+ = 10$, la production de $-\overline{u'v'}$ est diminuée d'approximativement 50%. Ce comportement est lié

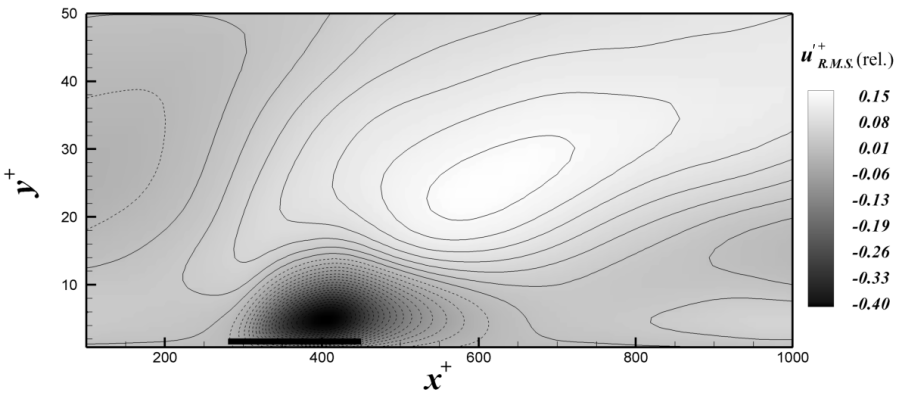


FIGURE 6.11 – Contours des quantités *R.M.S.* de la vitesse longitudinale. Les lignes pleines correspondent à des valeurs positives alors que les pointillés représentent des valeurs négatives.

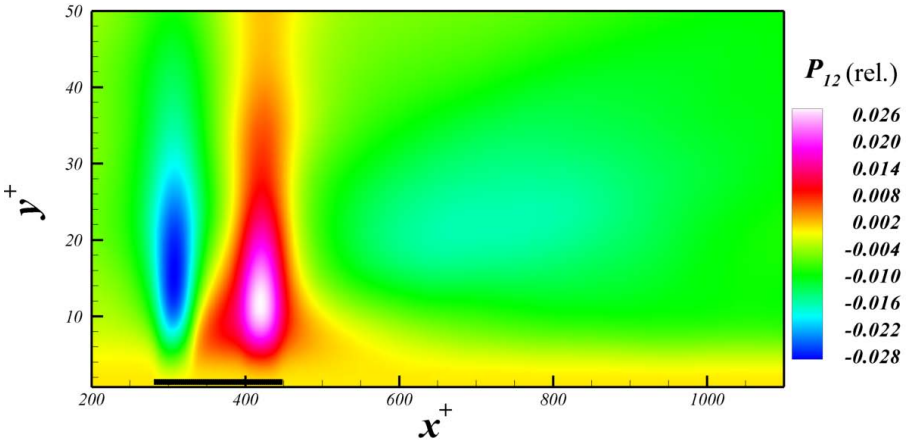


FIGURE 6.12 – Iso-Contours du terme de production provenant du budget énergétique de $\overline{u'v'}$

au fait que les intensités turbulentes de u' et v' sont très faibles dans cette zone. Sur une distance $\Delta x^+ = 500$ après la fente, la production présente une tendance à l'augmentation certainement provoquée par le déplacement des structures cohérentes vers le centre du canal. Notons que l'évolution de la quantité P_{12} est assez similaire à celle de l'activité turbulente de la vitesse longitudinale (figure 6.15).

6.3.2.2 Étude thermique

Dans le chapitre 4, on a vu que la température transformée θ présentait un comportement similaire à la vitesse longitudinale u. Sur la figure 6.13 sont reportés les contours de températures moyennes relatives. A la différence de $\overline{u}$ (figure 6.9), la température est globalement augmentée sur tout le domaine, traduisant le fait que l'injection stationnaire a tendance à déplacer les nappes chaudes de proche paroi vers les nappes plus froides

à l'intérieur du canal. Les profils de température adimensionnalisée par rapport aux échelles internes et locales (figure 6.14), montrent que sur la fente la similarité locale n'est plus respectée. La température semble donc être beaucoup plus affectée par une injection stationnaire que la vitesse longitudinale.

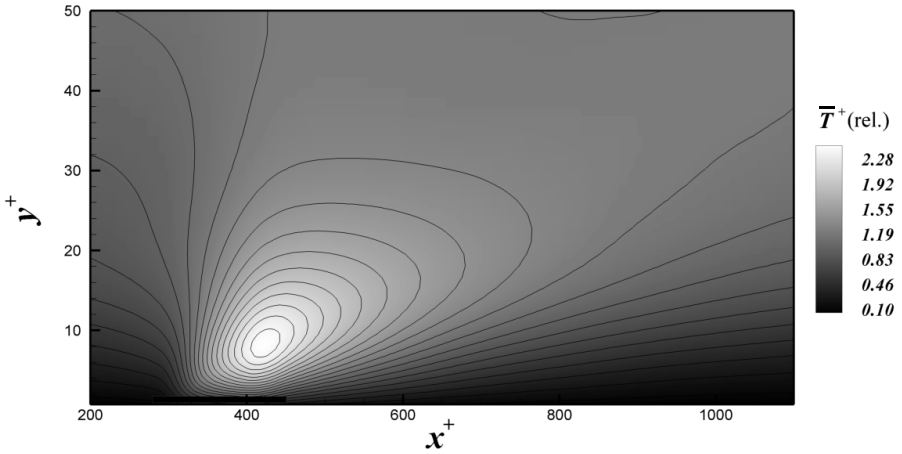


FIGURE 6.13 – Contours de températures relatives pour une fente de dimension $L_x^+ = 170$

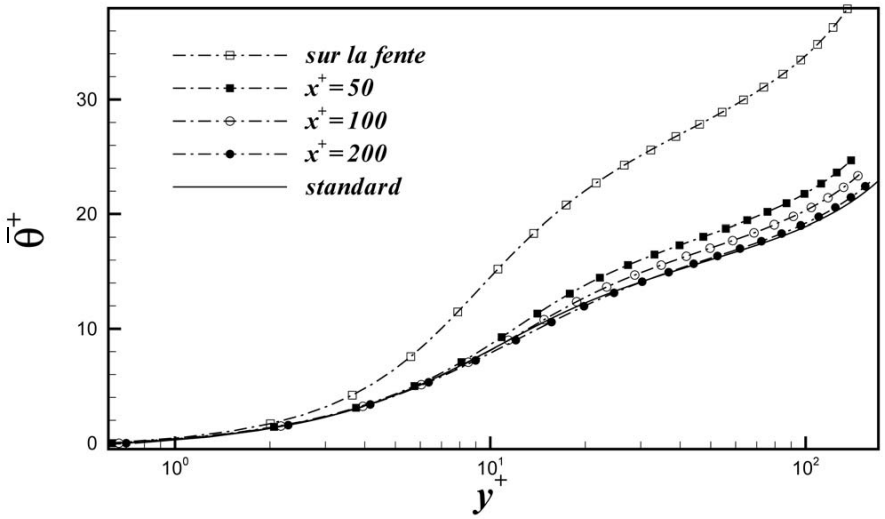


FIGURE 6.14 – Profils des températures transformées moyennes (θ) adimensionnalisées par u_τ et q locaux

Les figures 6.15 et 6.16 présentent respectivement les contours et les profils adimensionnalisés par rapport aux variables locales contrôlées des quantités *R.M.S.* de la température. Ainsi, contrairement au comportement des fluctuations de vitesse qui présentent une tendance à l'augmentation à l'aval de la fente, on remarque sur la figure 6.15 que les intensités de fluctuations de température sont globalement diminuées. De la même manière que les profils présentés par la figure 6.14, la figure 6.16 montre que la similarité

locale des fluctuations *R.M.S.* de température n'est pas respectée sur la zone manipulée mais devient plus proche du cas standard à mesure que l'on s'en éloigne.

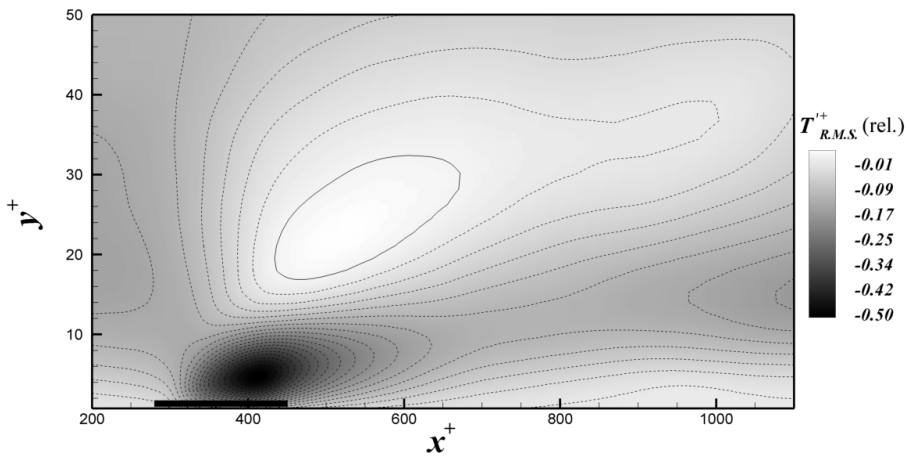


FIGURE 6.15 – Contours des fluctuations *R.M.S.* de la température

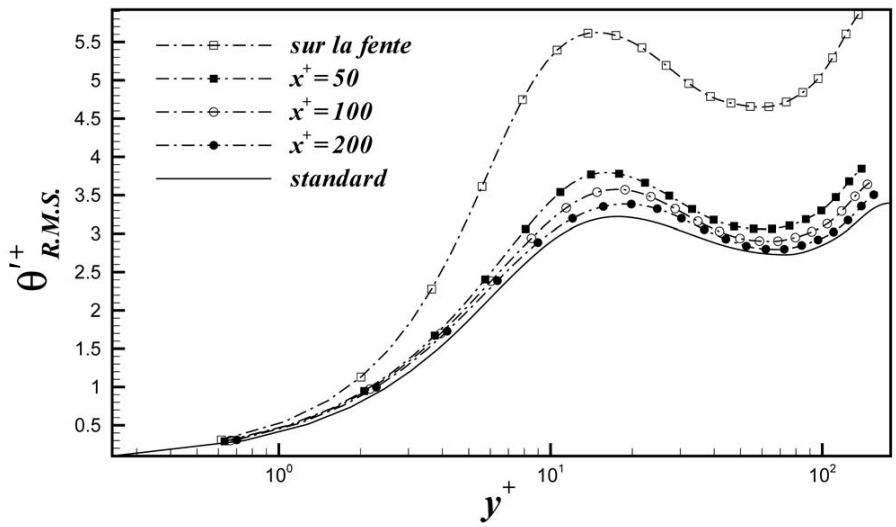


FIGURE 6.16 – Profils des fluctuations *R.M.S.* de la température modifiée

Les termes croisés de vitesses-températures montrent un effet significatif du soufflage surtout dans la direction longitudinale (figure 6.17). En effet, en $y^+ \approx 5$ on constate une augmentation de 30% sur la fente par rapport au cas non manipulé alors que dans les couches supérieures ($15 < y^+ < 50$) et à l'aval de la fente, le terme $\overline{u'T'}^+$ est globalement diminué de 15%. Ainsi, non seulement les intensités *R.M.S.* de u et T sont diminuées dans la sous-couche conductrice mais leur corrélation est fortement augmentée par rapport au cas non manipulé.

Pour la corrélation avec la vitesse normale (figure 6.18), l'effet est moindre et une diminution de 15% par rapport au cas standard est constatée sur la fente en $y^+ = 10$.

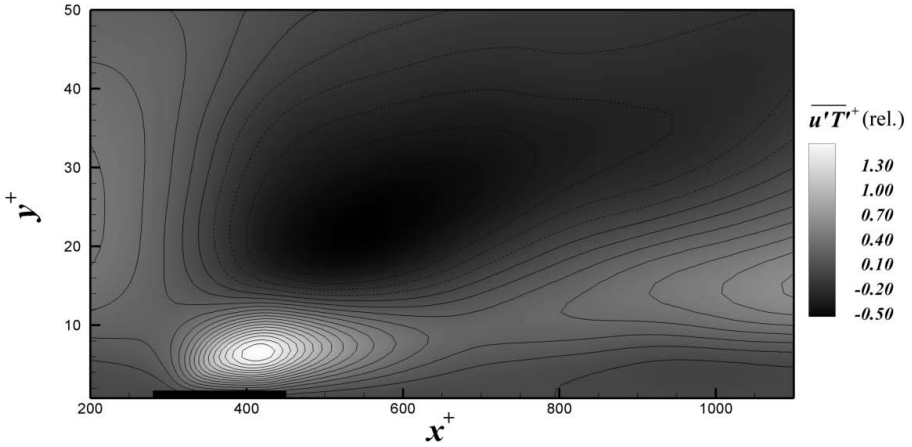


FIGURE 6.17 – Contours des termes croisés de vitesses-températures portant sur la vitesse longitudinale

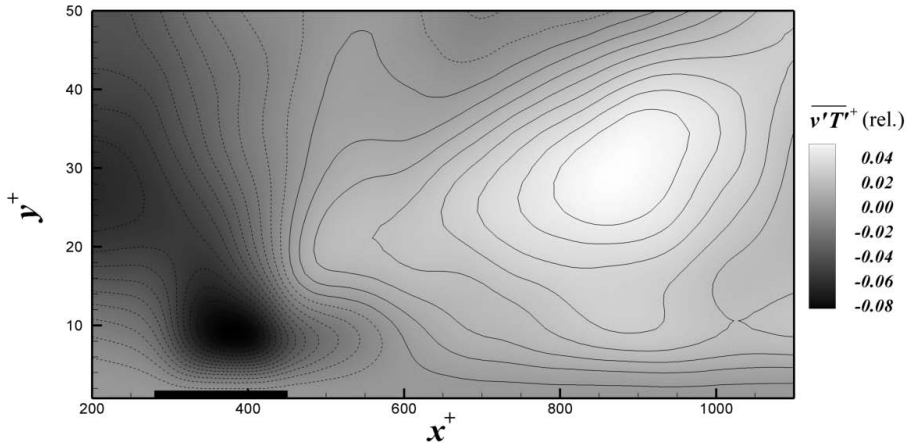


FIGURE 6.18 – Contours des termes croisés de vitesses-températures portant sur la vitesse normale

6.3.3 Bilan énergétique des fluctuations de température

Dans cette partie, on analyse les composantes du bilan énergétique de la température. Les expressions des différents termes du budget (A,B,C,*etc.*) ont été exposées dans le chapitre 4. Pour chaque position x,y, on vérifie que la somme de tous les termes est bien nulle (balance énergétique).

Le terme d'advection ($A = -\frac{1}{2}\overline{u}\frac{\partial\overline{T'^2}}{\partial x} - \frac{1}{2}\overline{v}\frac{\partial\overline{T'^2}}{\partial y}$) (figure 6.19), identiquement nul sur tout le domaine dans le cas non manipulé, présente ici une diminution notable au-dessus de la fente. Le terme A devient donc principalement un puits énergétique lors d'une injection pariétale.

Le terme de transport turbulent ($B = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\overline{u'T'^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\overline{v'T'^2}$) (figure 6.20) est significativement augmenté en $y^+ = 10$ avant d'être réduit tout autant en $y^+ = 20$. Dans le cas standard, en $y^+ = 10$, le terme de transport turbulent est négatif (puits) et présente un

minimum en $y^+ = 15$. Dans le cas contrôlé, la valeur du minimum n'est pas modifiée mais sa position est translatée en $y^+ = 20$.

Le terme de production des fluctuations de température ($C = -\overline{u'T'}\frac{\partial \overline{T}}{\partial x} - \overline{v'T'}\frac{\partial \overline{T}}{\partial y}$) (figure 6.21) est sensiblement modifié sur la fente. En effet, le pic de production turbulente est un peu plus éloigné de la paroi que sa position dans le cas standard et sa valeur est augmentée de 40%. De plus, on remarque que l'augmentation affecte une large zone située entre 20 et 40 unités pariétales sur la hauteur et s'étendant sur approximativement 250 unités pariétales à l'aval de la fente. Le soufflage semble donc repousser graduellement les structures quasi-longitudinales vers le centre du canal. Au contraire, sur le bord aval de la zone manipulée mais pour $5 < y^+ < 10$, la production est significativement diminuée du fait de l'absence de structures cohérentes.

Le terme de diffusion ($D = \frac{1}{2.Pr.Re}\left\{\frac{\partial^2 \overline{T'^2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{T'^2}}{\partial y^2}\right\}$) (figure 6.22) semble, comme le transport turbulent, être une simple translation du profil avec un minimum situé entre $10 < y^+ < 15$.

Le terme de dissipation ($E = -\frac{1}{Pr.Re}\left\{\overline{\left(\frac{\partial T'}{\partial x}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial T'}{\partial y}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial T'}{\partial z}\right)^2}\right\}$) (figure 6.23) (fortement négatif sur la paroi dans le cas non manipulé) montre une tendance à l'augmentation en devenant quasiment nul sur la zone manipulée et en étant réduit approximativement d'un facteur 3 sur une distance $x^+ = 200$ à l'aval.

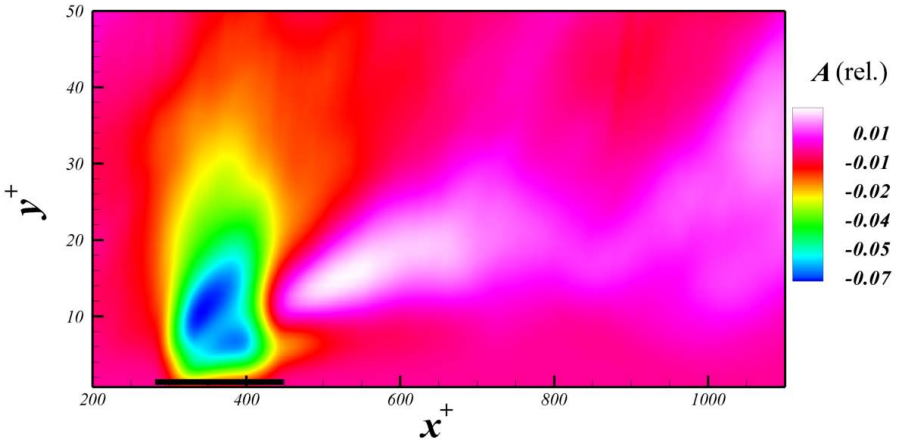


FIGURE 6.19 – Contours du terme d'advection de la température

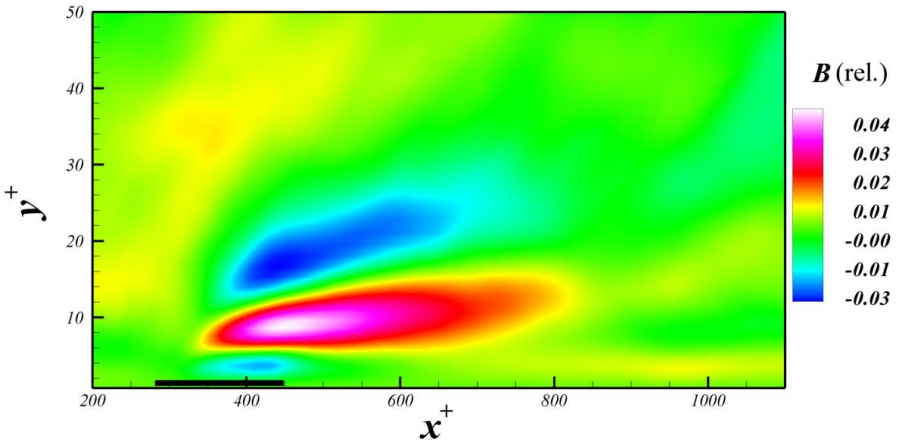


FIGURE 6.20 – Contours du terme de transport turbulent de la température

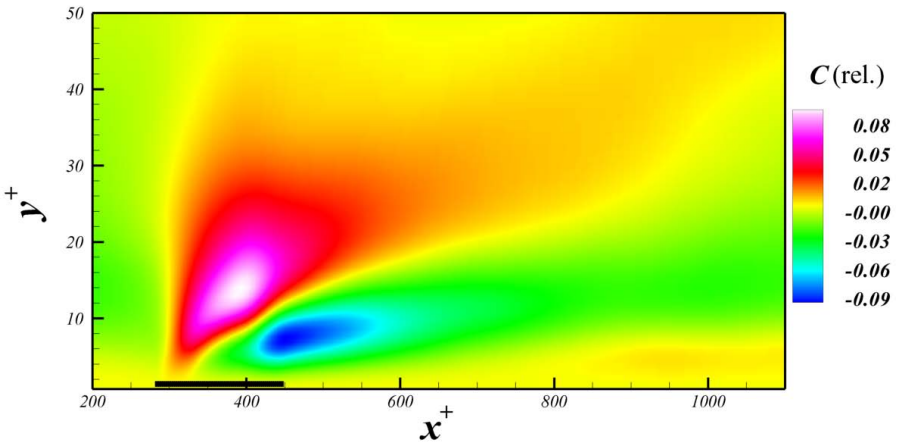


FIGURE 6.21 – Contours du terme de production de la température

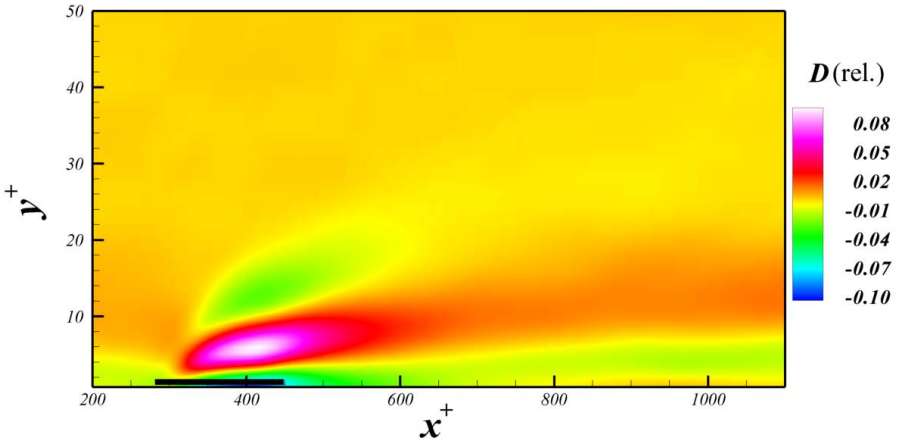


FIGURE 6.22 – Contours du terme de diffusion de la température

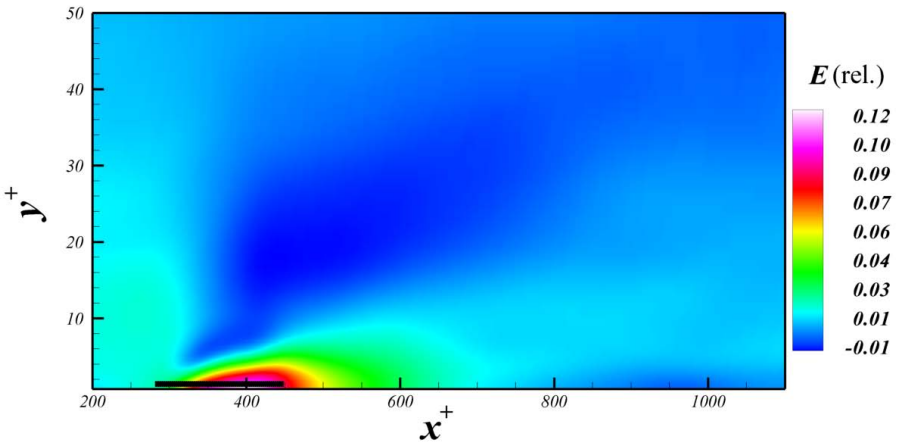


FIGURE 6.23 – Contours du terme de dissipation de la température

6.4 Étude d'une fente de "petite dimension"

La fente considérée à présent est de dimension $L_x^+ = 17$ dans la direction longitudinale. La valeur du paramètre de sévérité est la même que pour l'étude précédente à savoir $\beta = 0.006$. Le soufflage est donc modifié en conséquence et la vitesse d'injection est maintenant fixée à $v_0 = 0.08u_\infty$ soit 8% de la vitesse résidant au centre du canal. Du fait du coût numérique important généré par la résolution Multigrille, les quantités statistiques sont obtenues sur un temps total $t^+ = 1000\nu/u_\tau^2$ (soit 10 traversées du canal) mais avec un nombre de champs conséquent. Le calcul requiert approximativement 1000 heures CPU (1.45 Ghz, 64 bits, POWER4).

6.4.1 Sur la paroi

La figure 6.24 montre que le comportement de la contrainte turbulente sur la zone manipulée est totalement différent de celui obtenu lors de l'étude précédente.

En effet, le frottement ne diminue plus sur la fente mais augmente de manière significative, dépassant même la valeur du frottement dans le cas non manipulé. A l'amont, on constate une décroissance importante de la contrainte turbulente avec une réduction maximale d'approximativement 70% lorsqu'on atteint la zone manipulée alors que dans l'étude précédente la réduction n'était que 10%. Il est important de noter que sur le bord aval de la fente, la valeur de la contrainte reste assez similaire (entre 5 et 10% de différence) tout comme la distance de relaxation.

Le flux de température, quant à lui, subit une réelle décroissance à la fois sur la zone manipulée mais aussi sur une grande distance à l'aval. Il devient quasiment nul sur la fente et présente donc une réduction de 40% par rapport à celui obtenu dans le cas d'une fente large. A l'amont, le soufflage n'affecte que très peu le flux qui reste très proche de sa valeur dans le cas standard.

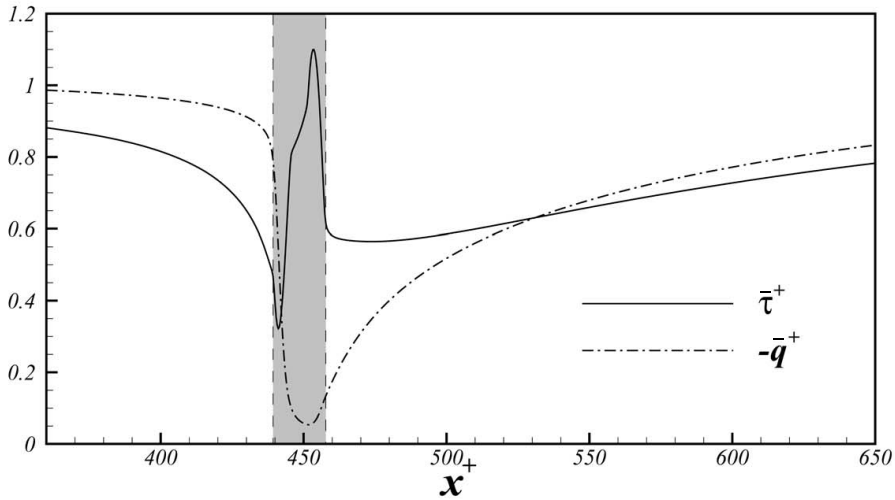


FIGURE 6.24 – Évolution longitudinale de la contrainte turbulente et du flux de température pour une fente de 17 unités pariétales

Les valeurs des fluctuations *R.M.S.* (figure 6.25) de la contrainte turbulente et du flux de température sont similaires à ceux obtenus pour une fente plus large bien que la distance de relaxation soit plus importante. Il est à noter que pour cette étude le soufflage affecte la contrainte sur une zone amont à la région manipulée.

Les facteurs de dissymétrie et d'aplatissement sont présentés sur les figures 6.26 et 6.27. Pour chacune des quantités les profils des moments d'ordre 3 (S) et 4 (F) présentent un comportement quasiment identique. Sur la fente, les valeurs sont très supérieures à celles obtenues lors de l'étude précédente (voir figures 6.7 et 6.8), laissant présager de la formation de structures cohérentes à cet endroit.

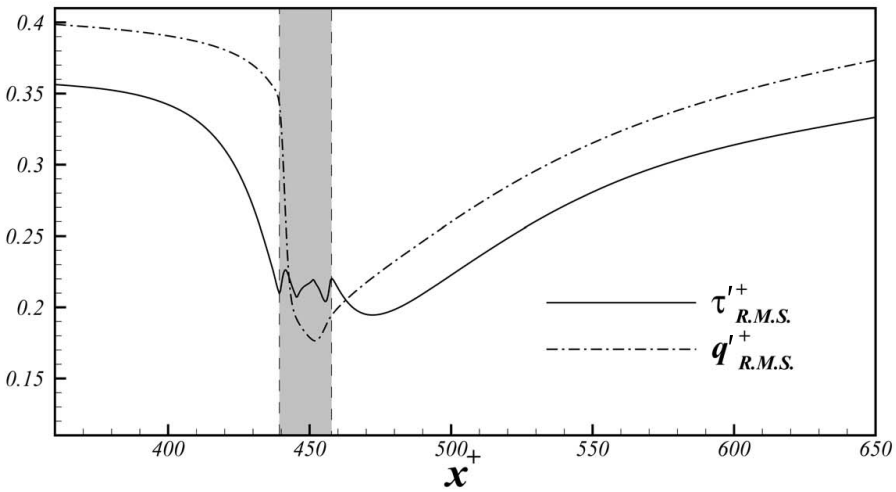


FIGURE 6.25 – Évolution longitudinale des quantités *RMS* de la contrainte turbulente et du flux de température

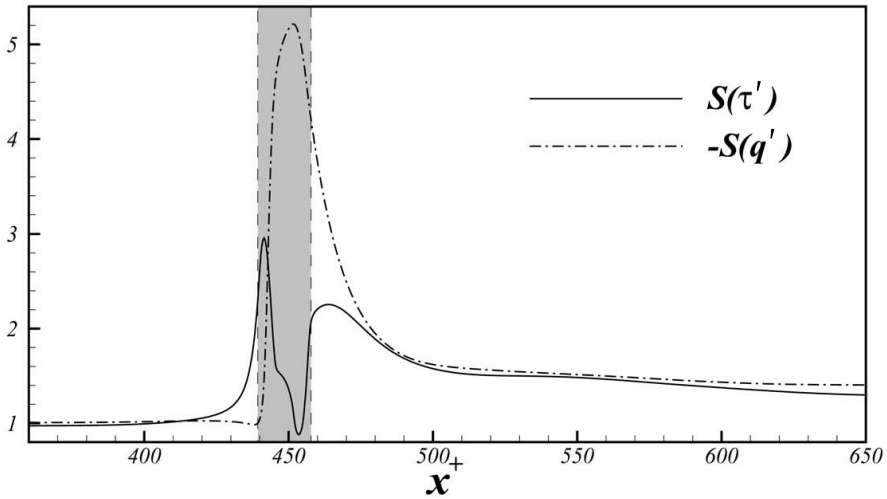


FIGURE 6.26 – Facteur d'asymétrie

6.4.2 A l'intérieur du canal

La figure 6.28 montre que la vitesse longitudinale moyenne a tendance, comme précédemment, à être réduite aux abords de la fente. Sur la zone d'injection et près du bord aval, on remarque une zone qui ne présente pas de réelle diminution et semble ainsi être peu affectée par le soufflage.

A part sur la fente, $\overline{u}$ ne semble pas être extrêmement affectée par la modification de l'amplitude de la vitesse d'injection (un facteur 10 entre les deux études). En effet, en comparant les profils de vitesses adimensionnalisées localement pour $L_x^+ = 170$ (figure 6.10) et pour $L_x^+ = 17$ (figure 6.29), on ne constate pas de grandes différences même si quelques écarts peuvent être observés.

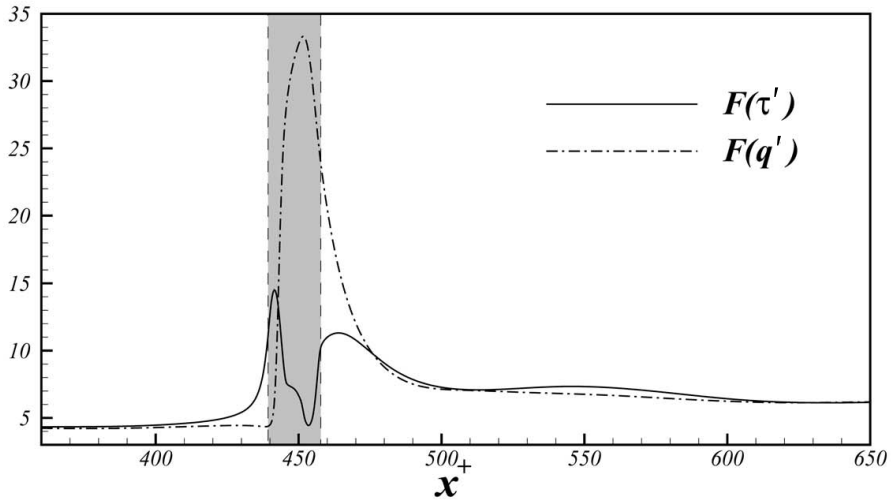


FIGURE 6.27 – Facteur d'aplatissement

Le paramètre β peut donc toujours être considéré comme un paramètre de similarité pour la composante dynamique même si, comme le montre l'analyse de la structure fine de la turbulence (figures 6.24, 6.25, 6.26 et 6.27), une instabilité semble s'établir sur la zone manipulée. L'apparition d'une structure cohérente (on le verra un peu plus tard) pourrait alors expliquer les (faibles) écarts constatés près du bord aval de la fente.

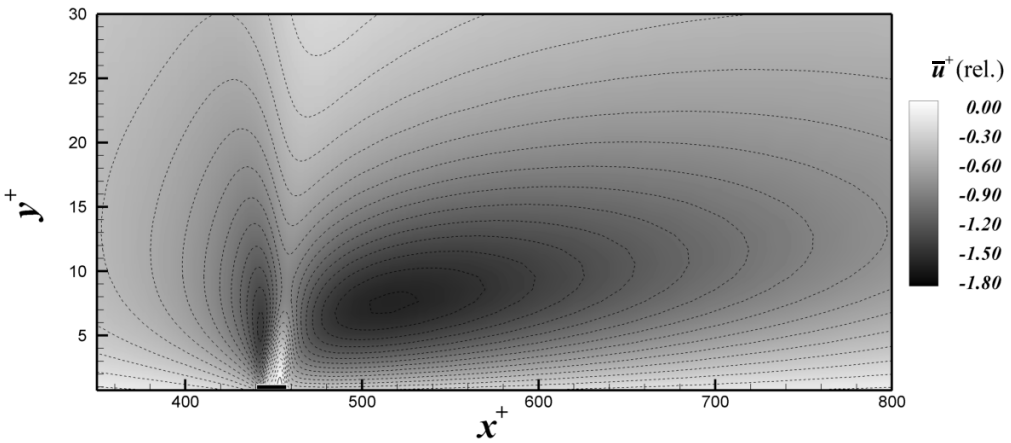


FIGURE 6.28 – Contour des vitesses moyennes relatives

La figure 6.30 montre que les intensités *R.M.S.* semblent un peu plus affectées que celles résultant de l'injection à travers une fente de 170 unités pariétales.

6.4.3 Bilan énergétique des contraintes de Reynolds

L'étude des différents termes composant le bilan énergétique des contraintes de Reynolds est ici effectuée. Les termes de production (P_{12} sur la figure 6.31) et de pressions-

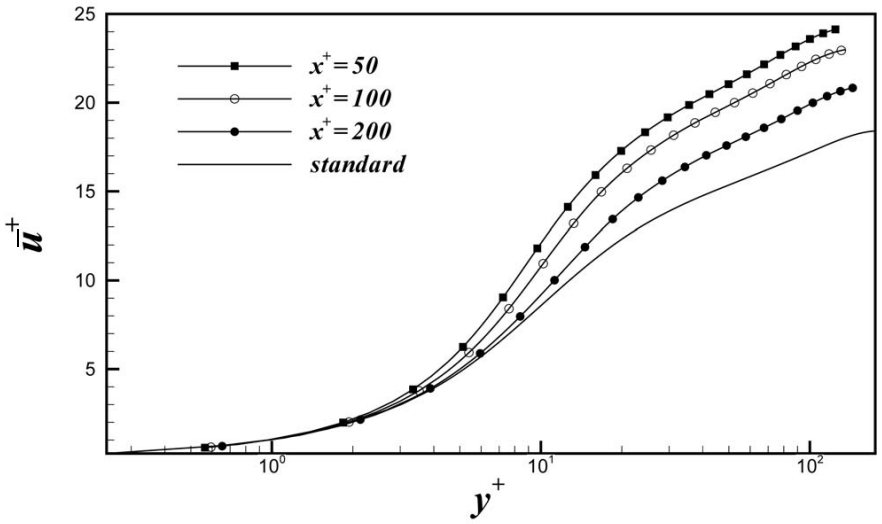


FIGURE 6.29 – Profils de vitesses moyennes pour différentes positions à l'aval de la fente et adimensionnalisées par u_τ local

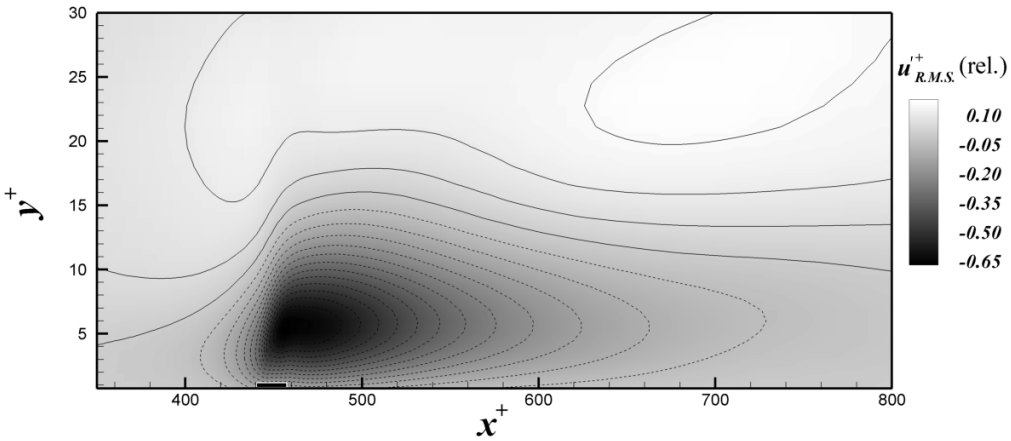


FIGURE 6.30 – Contours des quantités *R.M.S.* de la vitesse longitudinale

vitesses corrélées (N_{12} sur la figure 6.32) seront les seuls résultats discutés du fait de leurs fortes contributions au bilan énergétique. Dans le cas d'un soufflage stationnaire, le terme N_{12} prend la forme :

$$N_{12} = -\left(\overline{u'\frac{\partial p'}{\partial y}} + \overline{v'\frac{\partial p'}{\partial x}}\right)$$

Les valeurs de P_{12} et N_{12} sont au minimum quatre fois supérieures à celle des autres quantités.

Les deux termes ont donc tendance à s'équilibrer sur la zone manipulée. On constate ainsi que près du bord amont, la production de $\overline{u'v'}$ contribue négativement au bilan

(positivement pour $-\overline{u'v'}$) à l'opposé du terme de vitesses-pressions corrélées. De même, près du bord aval, la production de $\overline{u'v'}$ est positive (négative pour $\overline{u'v'}$) et le terme corrélé est négatif. Sur la fente, les valeurs des deux termes sont approximativement quatre fois supérieures au cas standard.

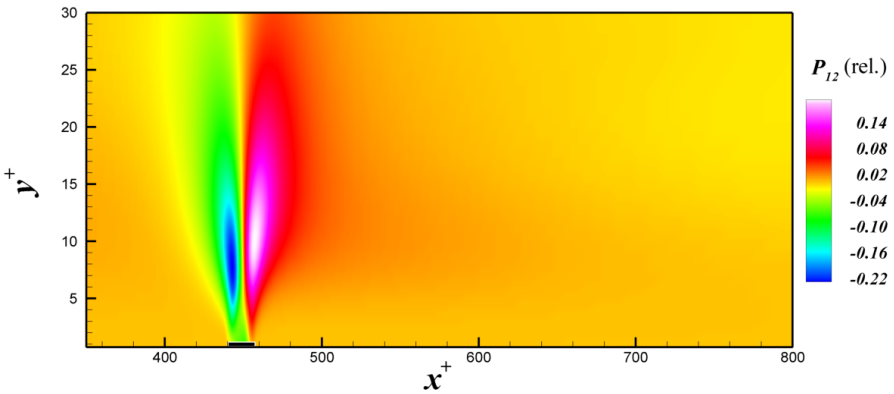


FIGURE 6.31 – Contours du terme de production

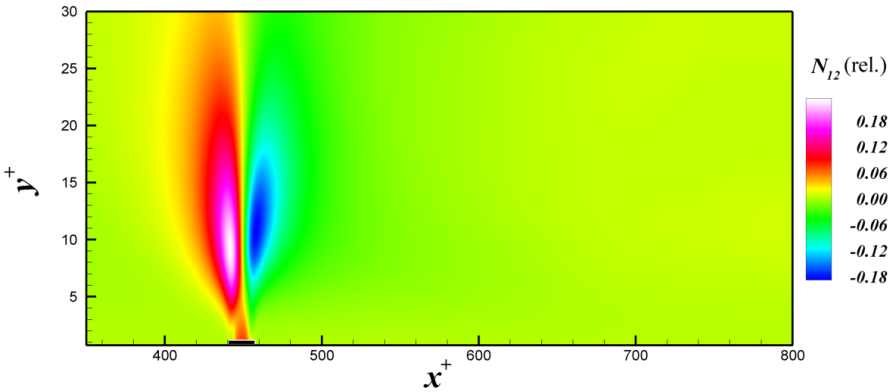


FIGURE 6.32 – Contours du terme de vitesses-pressions corrélées

A l'inverse de la vitesse longitudinale, la température moyenne est sensiblement augmentée aux abords de la fente (figure 6.33). L'évolution des profils de θ adimensionnalisée par rapport aux échelles internes et locales du cas contrôlé (figure 6.34), montre que l'amplitude de la vitesse d'injection modifie de manière importante le comportement de la température en différentes positions à l'aval de la zone d'injection. En effet, les valeurs de θ sont non seulement très différentes de celles obtenues dans le cas standard mais sont aussi beaucoup plus importantes que dans le cas d'une fente de grande dimension (figure 6.14).

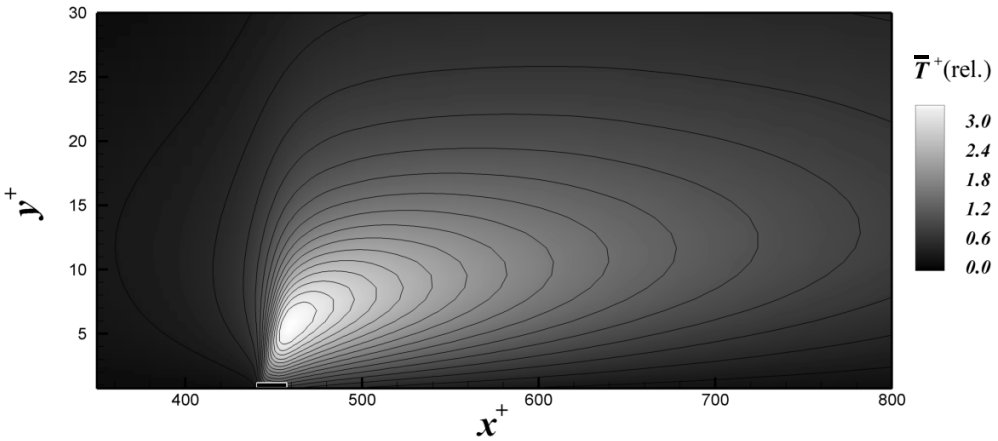


FIGURE 6.33 – Contours de températures relatives

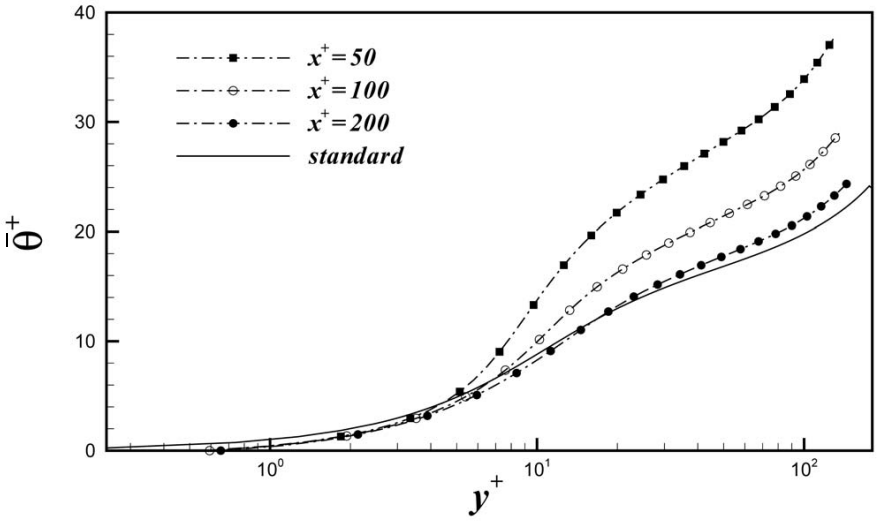


FIGURE 6.34 – Profils des températures transformées moyennes (θ) adimensionnalisés par u_τ et q locaux

Les figures 6.35 et 6.36 montrent que même si la valeur maximale des fluctuations *R.M.S.* de température est augmentée d'approximativement 30% par rapport au cas d'une fente plus large, leurs distributions restent similaires. On notera qu'ici, l'état d'équilibre

est atteint sur une distance plus longue à l'aval de la fente (approximativement 300 unités pariétales au lieu de 200).

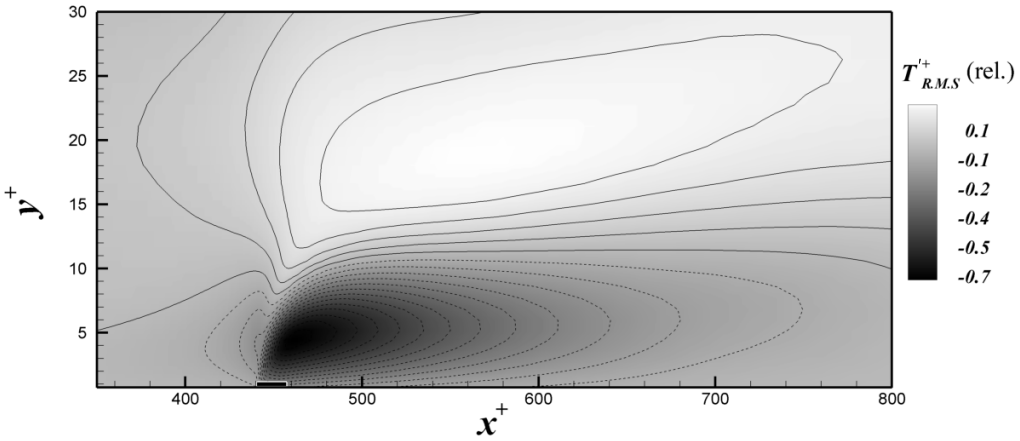


FIGURE 6.35 – Contours des fluctuations *R.M.S.* de la température

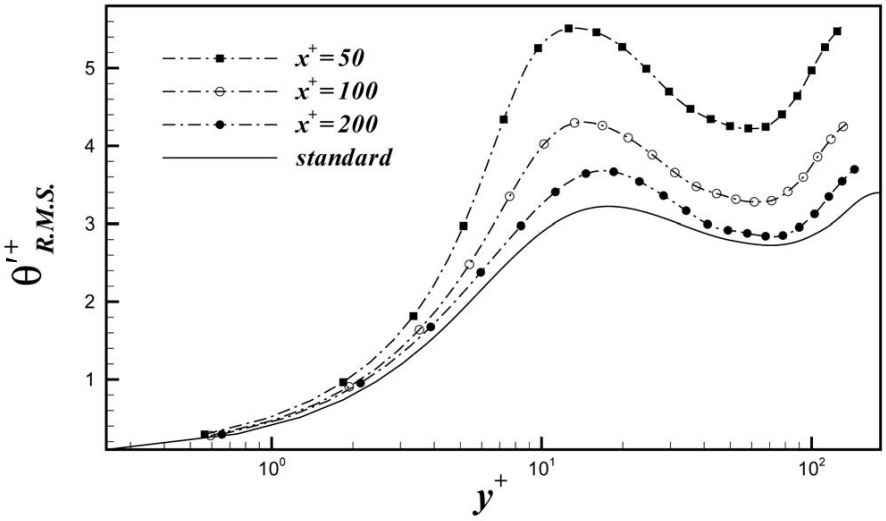


FIGURE 6.36 – Profils des fluctuations *R.M.S.* de la température modifiée

Les termes croisés de vitesses-températures portant sur la vitesse longitudinale (figure 6.37) montrent une intensification globale près de la fente mais avec une distribution similaire à celle obtenue avec une large fente.

En revanche, le terme $\overline{v'T'}^+$ (figure 6.38) est singulièrement modifié si on le compare à l'étude précédente. En étudiant les distributions on remarque l'apparition d'une zone positive juste au-dessus de la fente s'étendant jusqu'a $y^+ = 8$. On constate aussi que la zone négative est scindée en deux parties à l'amont et à l'aval de la fente et présente des valeurs beaucoup plus négatives (approximativement un facteur 2) que dans le cas précédent (figure 6.18).

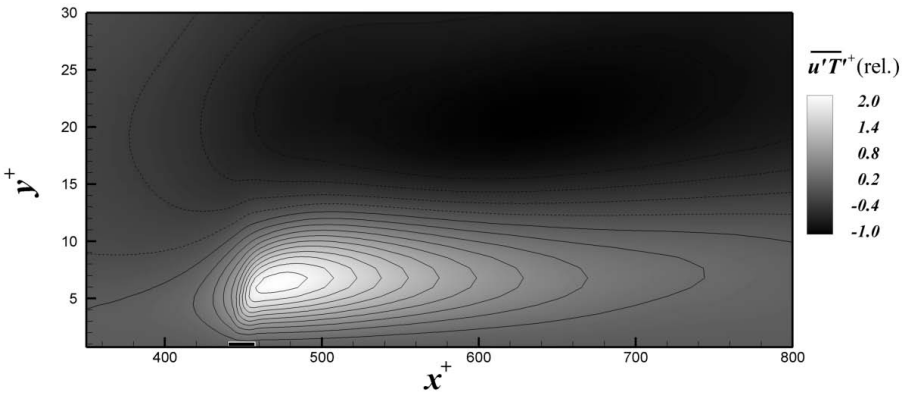


FIGURE 6.37 – Contours des termes croisés de vitesses-températures portant sur la vitesse longitudinale

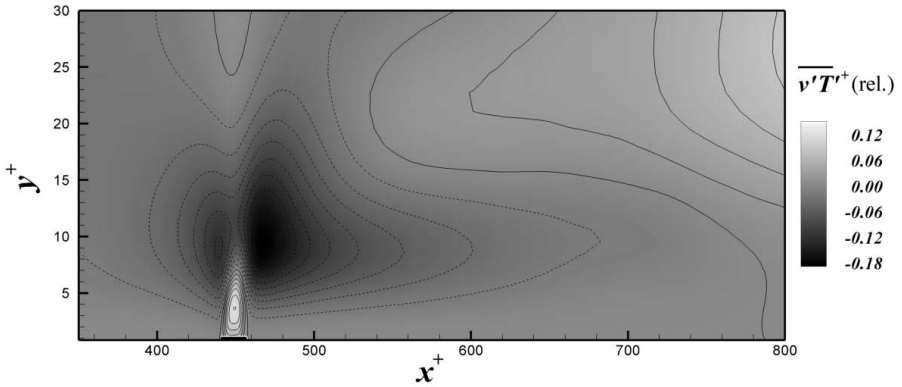


FIGURE 6.38 – Contours des termes croisés de vitesses-températures portant sur la vitesse normale

6.4.4 Bilan énergétique des fluctuations de température

Comme précédemment, on effectue l'étude des différents termes composant le budget énergétique lié aux fluctuations de température.

Le terme d'advection (A) (figure 6.39), montre un comportement similaire à l'étude précédente mais atteint des valeurs jusqu'à huit fois plus grandes au-dessus de la zone manipulée. Dans ces conditions, A contribue au bilan énergétique des fluctuations de température en provoquant une importante perte d'énergie. Le terme de transport turbulent (B) (figure 6.41) présente un comportement radicalement différent de celui présenté pour une fente de largeur plus importante même si les valeurs sont bien moins affectées que dans le cas du terme d'advection. Dans le cas standard et en $y^+ = 8$, la contribution du terme B au budget énergétique est quasiment nulle. A cette distance de la paroi on peut constater que sur la zone manipulée un intense puits énergétique apparaît. Le terme B change ensuite brusquement de signe et se transforme en une source énergétique dès qu'on atteint le bord aval de la fente. Il est aussi intéressant de constater que la fente elle-même est le siège d'une forte production énergétique.

Le terme de production des fluctuations de températures (C) (figure 6.41) est aussi significativement modifié sur la fente. En effet, sur la fente, le pic de production turbulente a été abaissé en $y^+ = 7$ (contrairement à l'étude précédente qui avait tendance à éloigner le pic de la paroi) et sa valeur est augmentée d'un facteur 3 par rapport au cas standard. De plus, on remarque une forte diminution du terme C s'étendant sur $\Delta x^+ = 300$ à l'aval de la fente rendant la production nette de fluctuation de température quasiment nulle dans cette région (la production dans le cas standard est approximativement de 0.15).

Le terme de diffusion D (figure 6.42 se comporte d'une manière analogue à l'étude d'une fente plus large même si les valeurs présentées ici sont une fois de plus supérieures.

Outre la présence d'une importante réduction juste au-dessus de la fente, le terme de dissipation E (figure 6.43) ne semble pas être profondément affecté par l'augmentation de la vitesse d'injection.

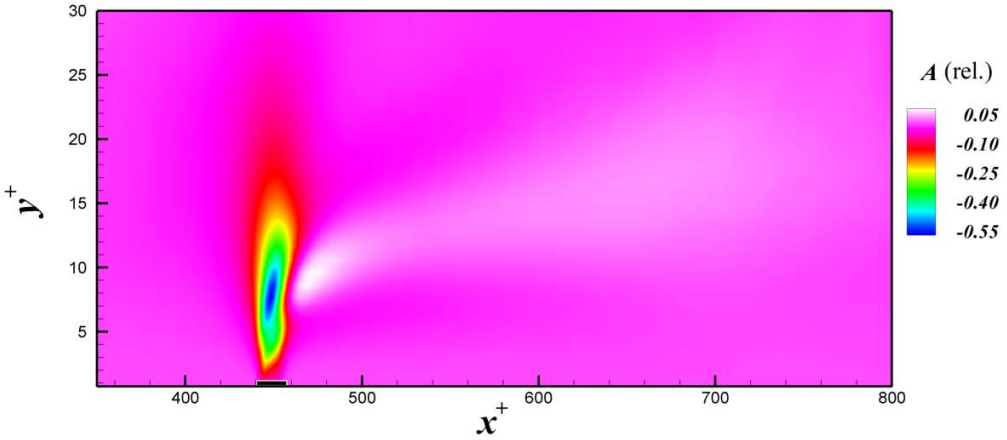


FIGURE 6.39 – Contours du terme d'advection de la température

6.5 Discussion

Les deux types de soufflage étudiés précédemment ont montré des comportements radicalement différents sur la zone d'injection. A l'aval de la fente, les valeurs assez similaires des contraintes pariétales et des distances de relaxation laissent penser que la quantité β reste un paramètre de similitude adapté pour décrire la dynamique de l'écoulement. En revanche, ce paramètre ne semble pas du tout adapté pour rendre compte des évolutions du transfert de chaleur. Effectivement, la figure 6.44 montre que le flux de température à la paroi est fortement dépendant de la taille de la zone d'injection ($L_x^+ = 170, L_x^+ = 70$, ou $L_x^+ = 17$). Il peut être localement nul dans le cas d'une fente de petite dimension alors qu'il atteint au maximum 60% de réduction pour une fente plus large. De plus, son comportement à l'aval de la zone d'injection présente de grandes différences.

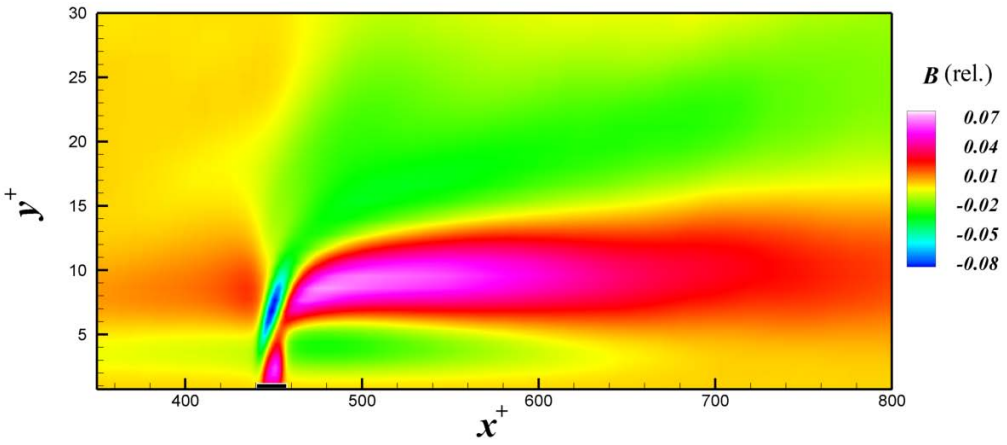


FIGURE 6.40 – Contours du terme de transport turbulent de la température

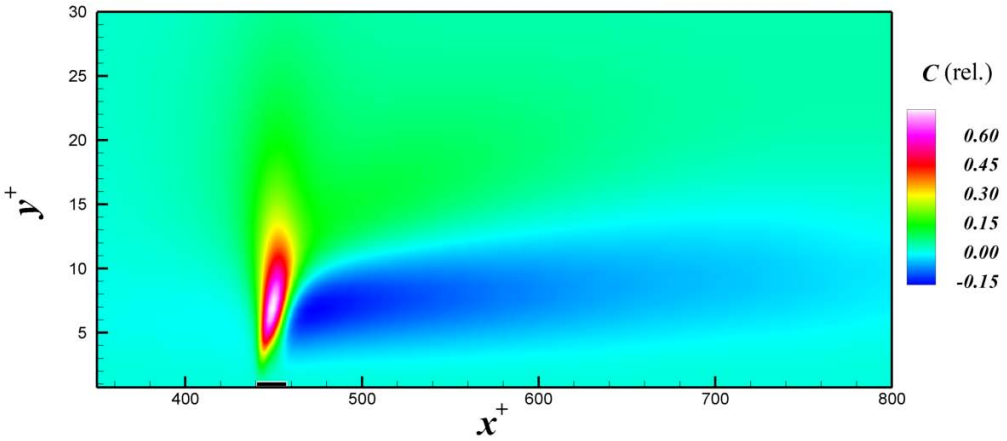


FIGURE 6.41 – Contours du terme de production de la température

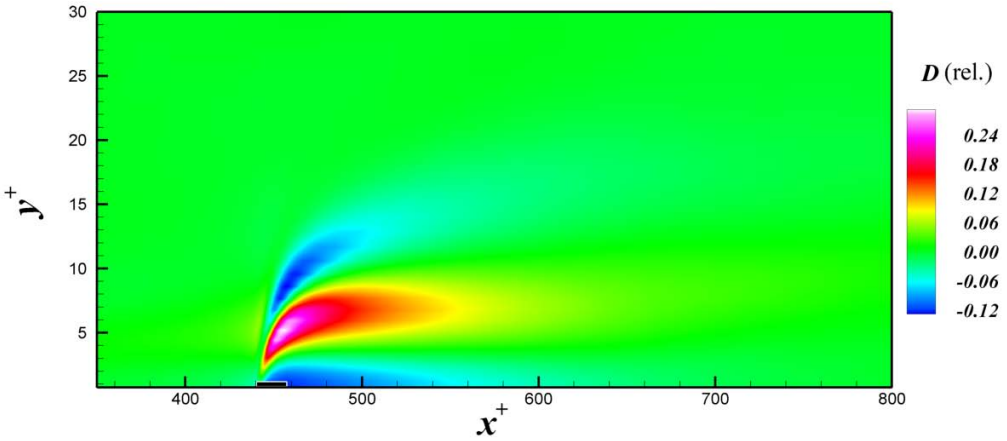


FIGURE 6.42 – Contours du terme de diffusion de la température

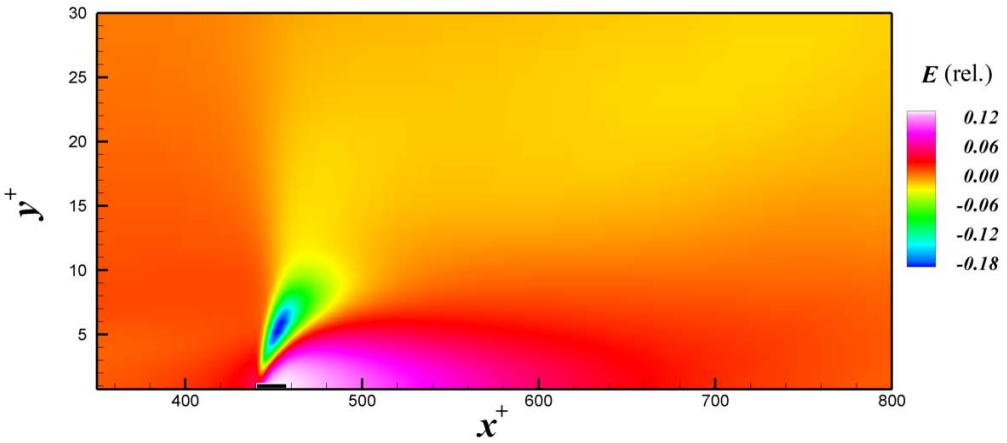


FIGURE 6.43 – Contours du terme de dissipation de la température

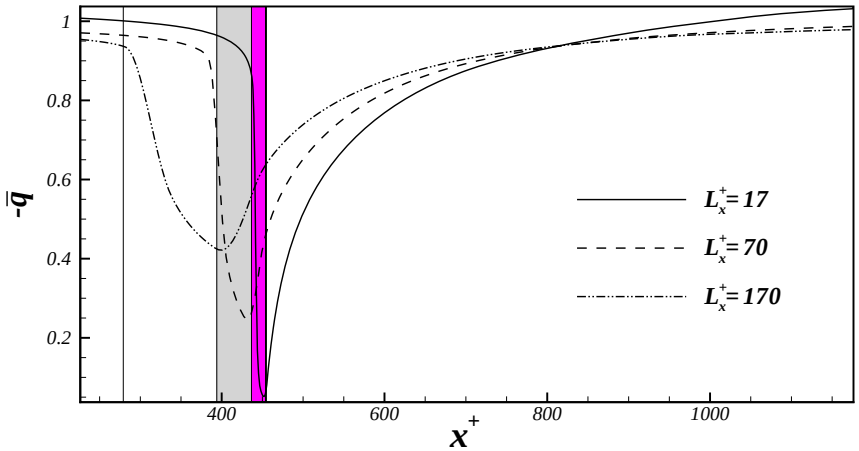


FIGURE 6.44 – Comparaison du flux de chaleur pariétale pour un paramètre de sévérité unique $\beta = 0.006$ et pour plusieurs largeurs de fente. La zone d'injection de 170 unités pariétales est représentée par le rectangle sans remplissage, celle de 70 par le rectangle gris-clair et celle de 17 unités pariétales par le rectangle plus foncé (ou violet si la figure est en couleur). Le bord aval de chacune des fentes est positionné en $x^+ = 455$.

Les quantités pariétales et les budgets énergétiques portant sur les contraintes de Reynolds et sur les fluctuations de température peuvent laisser penser qu'une instabilité, probablement stationnaire, est déclenchée dans le cas de la fente de 17 unités pariétales de largeur.

L'évolution particulière des contraintes turbulentes sur la zone manipulée pourrait être la conséquence d'une brusque modification locale de la vorticité transverse. Les figures 6.45 et 6.46 montrent comment la composante $-\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}$ relative de $\overline{\omega_z}$ est affectée par, respectivement, le soufflage à travers les fentes de 170 et 17 unités pariétales. La vorticité totale n'est pas présentée car le terme $\frac{\partial \overline{v}}{\partial x}$ est affecté par l'évolution longitudinale de la vitesse d'injection imposée (le soufflage recolle de manière progressive à une vitesse

nulle sur chacun des bords de la fente). On peut donc constater que sur la figure 6.45, une création de vorticité positive a lieu sur et juste après la zone manipulée. Cette vorticité a tendance à diluer $\overline{\omega}_z < 0$ existante et elle est à l'origine de la réduction de la contrainte turbulente.

De la même manière, la figure 6.46 montre que la contrainte diminue après la zone manipulée. Cependant, le comportement à l'amont et sur la fente est significativement différent. On remarque tout d'abord que le bord amont présente une zone de vorticité relative maximale. Elle n'est toutefois pas suffisamment élevée pour provoquer un décollement (on devrait obtenir une valeur proche de 1 pour être dans ce cas). Sur la fente, cette zone positive a tendance à être éloignée de la paroi mais contrairement au cas précédent, elle n'atteint pas le bord aval de la fente. La vorticité prend alors à cet endroit une valeur très proche du cas non manipulé.

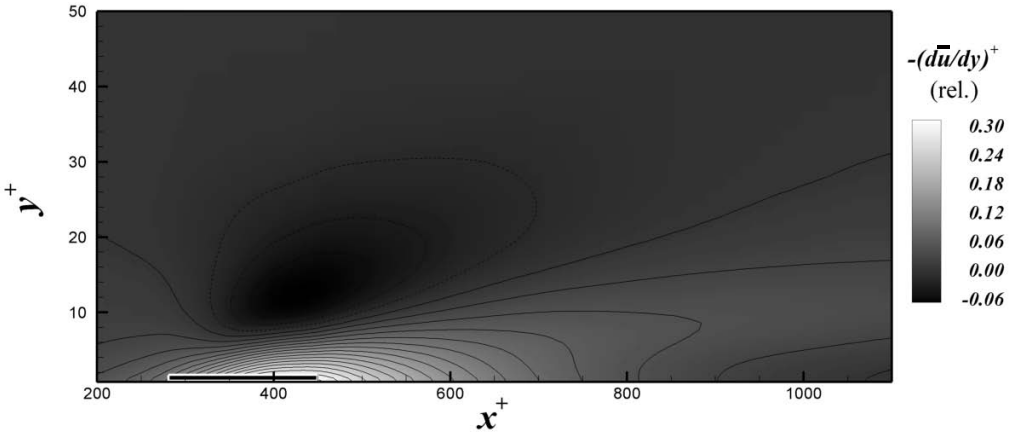


FIGURE 6.45 – Composante de la vorticité transverse pour une fente de 170 unités pariétales

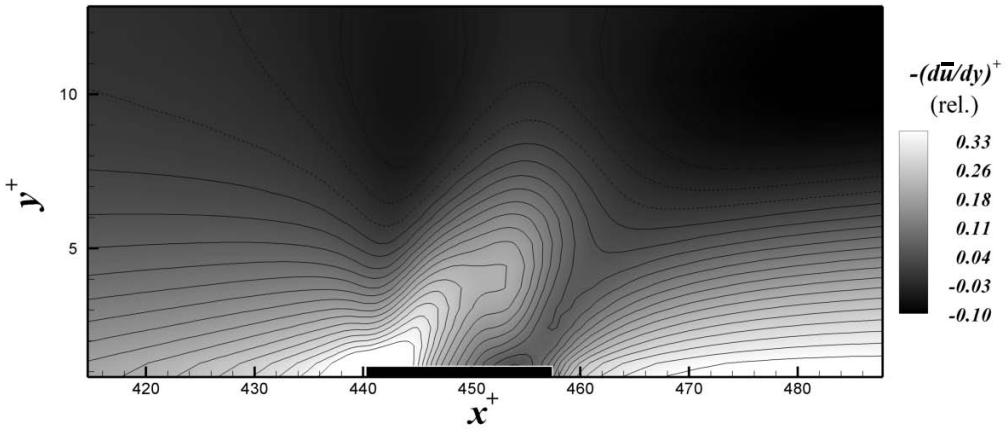


FIGURE 6.46 – Composante de la vorticité transverse pour une fente de 17 unités pariétales

Une détection par la méthode λ_2 s'avère utile afin de localiser les structures cohérentes impliquées dans ce processus. Les figures 6.47 et 6.48, montrent qu'à l'exception d'un éloignement de la paroi des structures quasi-longitudinales, une faible vitesse d'injection (fente large) n'est pas à l'origine de fortes modifications dans le canal.

Au contraire, les figures 6.49 et 6.50 montrent qu'une structure cohérente se forme sur la fente et près du bord aval et sur toute la largeur du canal. D'autres détections (non présentées ici) effectuées sur des champs de vitesses à des pas de temps différents exhibent une phénoménologie identique. Il semblerait donc que la formation de la structure transverse soit, dans ces conditions, un processus stationnaire.

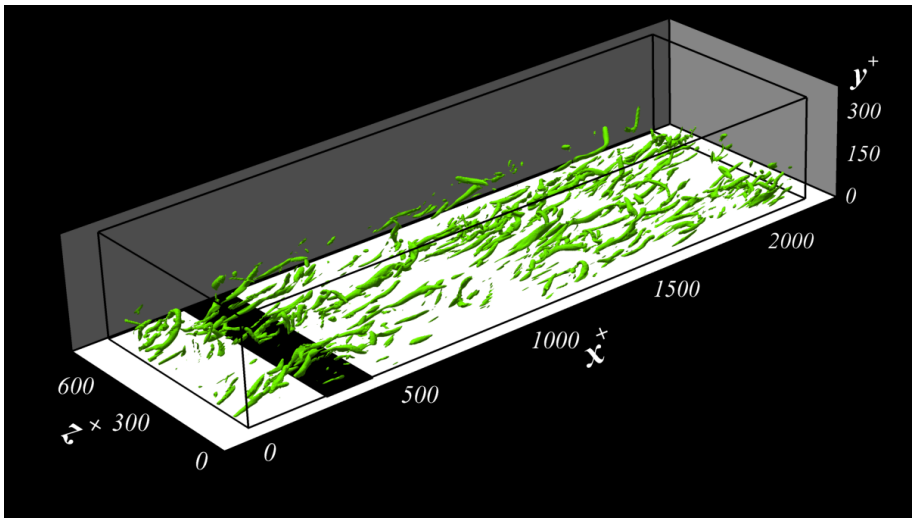


FIGURE 6.47 – Iso-Contour $\lambda_2 = -0.02$ pour une fente de 170 unités pariétales

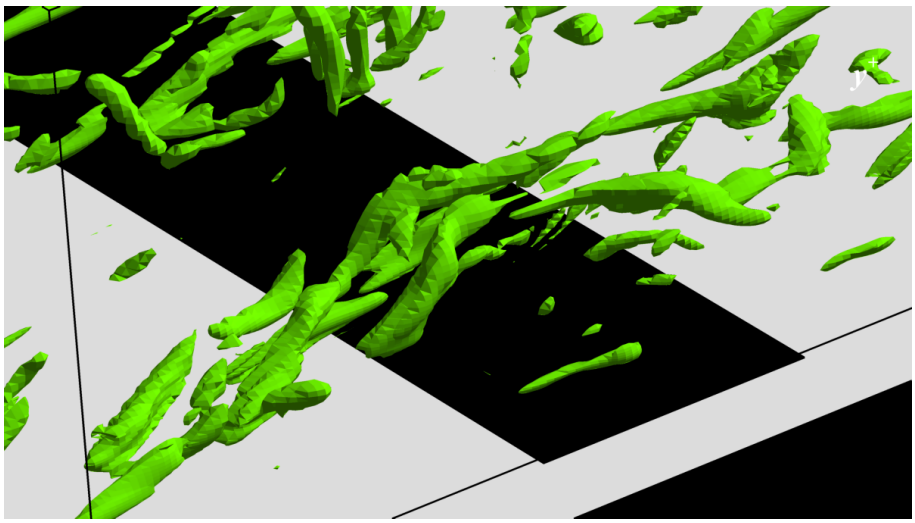


FIGURE 6.48 – Détail de la zone manipulée de la figure 6.47

L'évolution des contraintes de Reynolds sur la fente de 17 unités pariétales peut venir confirmer les constatations précédentes. On voit clairement sur la figure 6.51 que

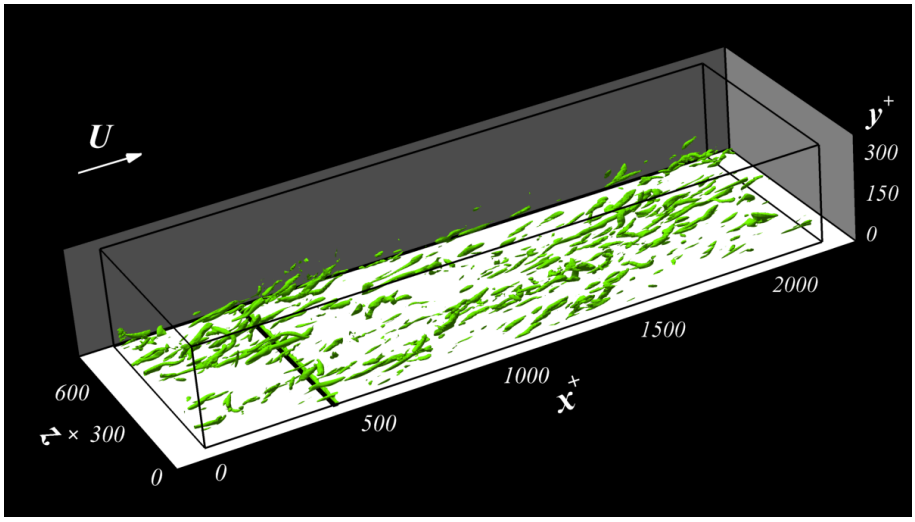


FIGURE 6.49 – Iso-Contour $\lambda_2 = -0.02$ pour une fente de 17 unités pariétales

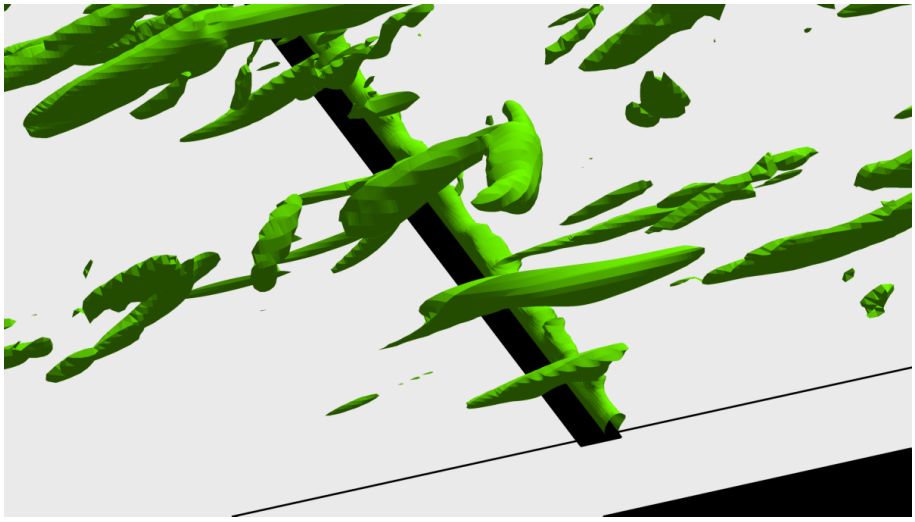


FIGURE 6.50 – Détail de la zone manipulée de la figure 6.49

les contraintes de Reynolds **moyennées en temps** sont advectées par un mouvement giratoire près du bord aval. Ainsi, et contrairement au cas de la fente de plus grande dimension, on voit qu'au centre de la zone manipulée les hautes contraintes ont tendance à être advectées près de la paroi alors que sur la zone aval les contraintes de faibles valeurs sont repoussées vers le centre du canal.

La création de la structure transverse n'est pas située sur la paroi même. Comme le montre la figure 6.46, une région de forte vorticité relative positive est constatée près du bord amont de la fente. Mais dans cette région, l'effet de la viscosité moléculaire est trop important pour autoriser la déstabilisation de la nappe de vorticité positive.

Cette zone a donc tendance à être advectée par l'écoulement et éloignée de la paroi sous l'effet du soufflage, provoquant une accumulation continue de vorticité positive en

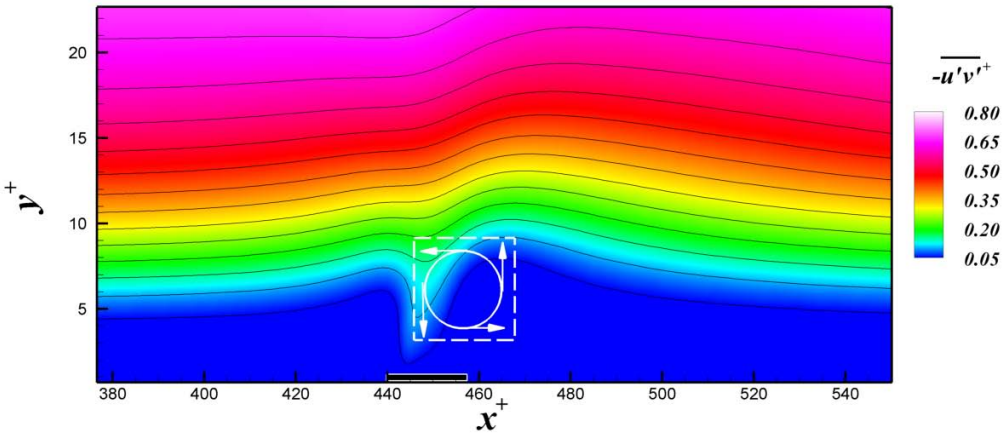


FIGURE 6.51 – Contours des contraintes de Reynolds moyennes pour une fente de 17 unités pariétales

$y^+ \approx 5$. Cette accumulation locale rend la zone instable et provoque l'enroulement de la nappe à l'origine du tourbillon détecté.

La structure transversale ainsi créée n'est pas advectée par l'écoulement car le caractère stationnaire de l'injection empêche le détachement de la structure. En effet, la zone d'enroulement est continuellement nourrie par un apport vorticitaire provoquant une déstabilisation locale et permanente de la nappe de vorticité. Pour une fente de $L_x^+ = 70$, cette structure commence à prendre forme (non montré ici) mais son intensité est bien moins importante que pour $L_x^+ = 17$. Bien que le tourbillon n'est pas advecté par l'écoulement, il semble affecter significativement le comportement du flux de température pariétal mais assez peu la contrainte à l'aval de la fente.

Cette constatation nous mène alors à l'analogie de Reynolds fréquemment employée afin de mettre en correspondance le flux de chaleur et la contrainte à la paroi. Rappelons sa formulation. En fixant $Pr = 1$, on obtient l'expression suivante (voir Bejan [1995]) :

$$\frac{\tau}{-q} = \frac{U_c}{C_p * (T_c - T_{inf})}$$

La contrainte est alors reliée au flux pariétal par l'intermédiaire d'une quantité propre au fluide C_p (chaleur spécifique à pression constante). Les résultats précédents montrent donc que cette analogie de Reynolds n'est plus vérifiée dans le cas d'un déséquilibre spatial de l'écoulement.

6.6 Comparaison avec des données expérimentales

Il est alors de mise de comparer les résultats obtenus numériquement avec les résultats expérimentaux publiés par Tardu [1998]. Dans cette étude, la dimension de la fente dans la direction longitudinale est $L_x^+ = 8$ et le paramètre de sévérité est identique à l'étude présente ($\beta = 0.006$). Une étude numérique avec une fente de 8 unités pariétales aurait été possible mais le coût numérique serait alors un peu trop élevé du fait de la condition *C.F.L.* à respecter (Δx diminue pour un nombre de points grilles équivalent sur les fentes).

Les résultats numériques sont en bon accord avec les résultats expérimentaux (figures 6.52, 6.53, 6.54 et 6.55). En effet, les données expérimentales évoluent d'une manière similaire et de façon prévisible. Évidemment, la taille de fente étant moins importante, quelques légères différences sont constatées.

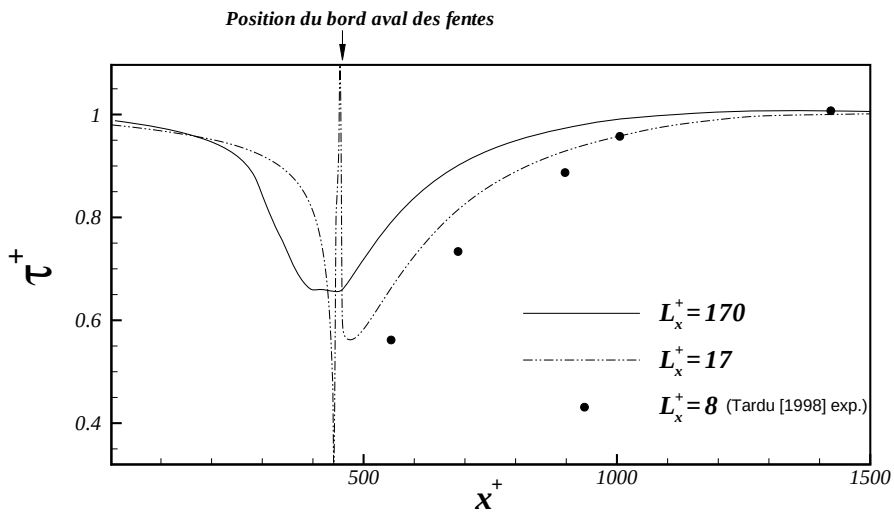


FIGURE 6.52 – Évolutions de la contrainte pariétale pour $\beta = 0.006$ et 3 tailles de fentes différentes. Les résultats liés à la plus petite fente ($L_x^+ = 8$) proviennent de données expérimentales (Tardu [1998]).

Pour un même paramètre de sévérité, la taille de fente tend à modifier à la fois la valeur de la contrainte près du bord aval de la fente mais aussi la distance de relaxation. En effet, on constate une différence de contrainte moyenne de 20% (figure 6.52) entre la fente la plus large et la plus étroite (expérimentale) et sur le premier point de mesure disponible ($x^+ = 100$ à l'aval de la fente). De même, la distance de relaxation passe de 1000 (plus grande fente) à 1400 (plus petite fente) unités pariétales (figures 6.52 et 6.53).

Même si des écarts sont constatés entre les résultats obtenus avec différentes fentes, les variations restent assez petites et permettent de considérer, avec indulgence, que le paramètre de sévérité est toujours adapté (n'oublions pas que la grande fente a une dimension quasiment 20 fois plus importante que la plus petite).

Cependant, la décroissance systématique de la contrainte et l'augmentation de la distance de relaxation lorsque la taille de fente diminue peuvent laisser penser que la

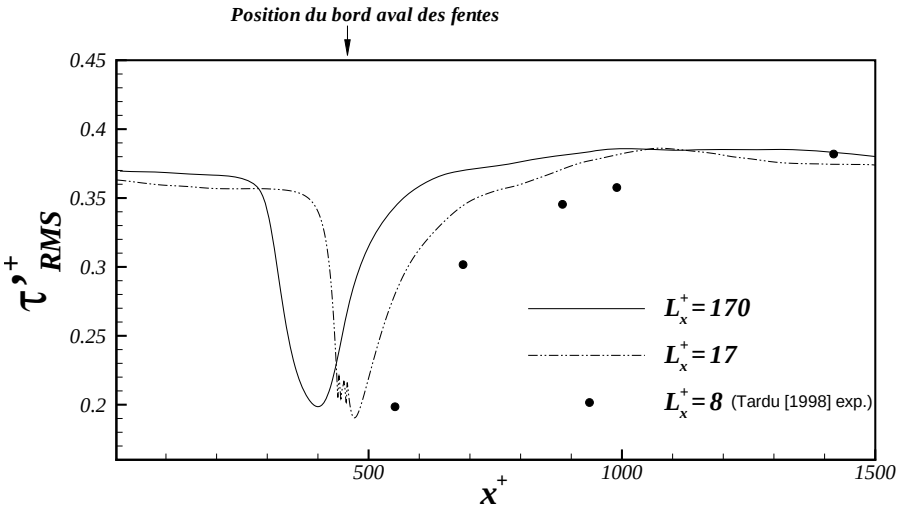


FIGURE 6.53 – Évolutions des fluctuations de contrainte pariétale pour $\beta = 0.006$ et 3 tailles de fentes différentes.

structure vorticitaire formée sur la fente joue un rôle important. Le mécanisme suggéré est le suivant : plus la fente est petite, plus l'intensité du tourbillon est importante et plus elle affecte l'écoulement après la fente (des résultats non présentés ici montrent que pour une fente de dimension $L_x^+ = 70$ une structure de faible intensité apparaît).

Les facteurs de dissymétrie (figure 6.54) et d'aplatissement (figure 6.55) ne présentent pas de sensibles distinctions entre une fente de 17 et 8 unités pariétales. Dans les deux cas, une structure vorticitaire se crée sur la zone de soufflage provoquant l'augmentation de $S(\tau')$ et $F(\tau')$.

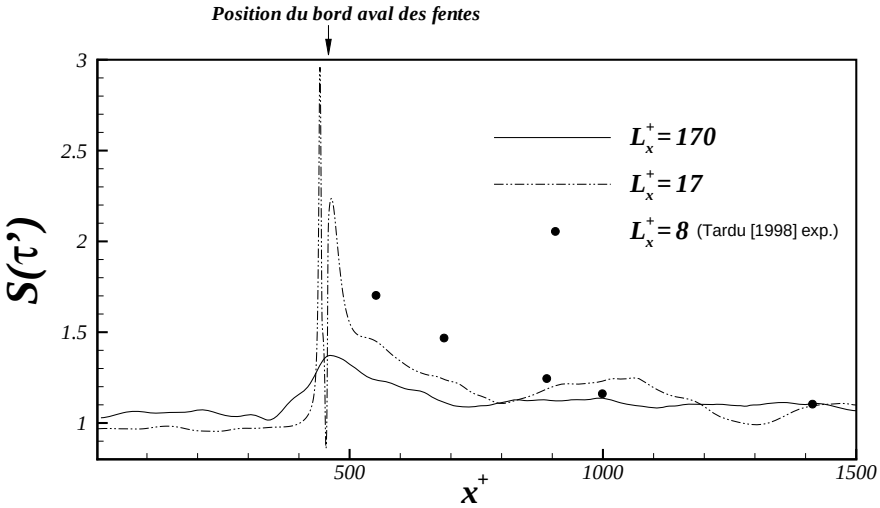


FIGURE 6.54 – Évolutions du facteur de dissymétrie de la contrainte pariétale pour $\beta = 0.006$ et 3 tailles de fentes différentes.

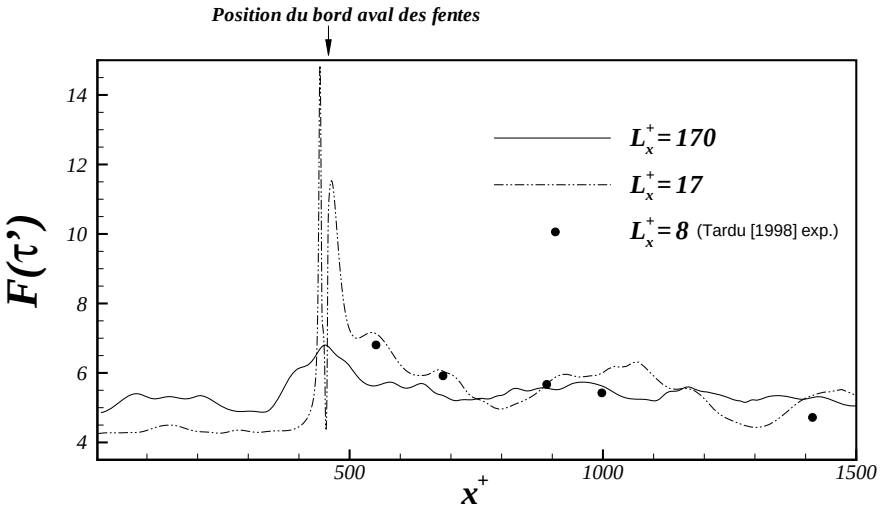


FIGURE 6.55 – Évolutions du facteur d'aplatissement de la contrainte pariétale pour $\beta = 0.006$ et 3 tailles de fentes différentes.

6.7 Conclusions

Un écoulement turbulent en canal soumis à une injection stationnaire localisée à travers une paroi uniformément chauffée est ici étudié. Pour un paramètre de sévérité identique, mais pour une dimension de fente différente, le transfert de chaleur pariétal est beaucoup plus affecté que le frottement. Pour une petite fente ($L_x^+ = 17$), le soufflage engendre une instabilité locale provoquant la formation, sur la zone d'injection, d'une structure transverse de vorticité positive. Ce tourbillon n'est pas advecté mais son effet sur l'évolution de l'écoulement semble d'autant plus important que la fente est petite. Il semblerait aussi qu'on puisse lui attribuer la forte variation constatée sur le flux de chaleur à l'aval de la zone manipulée. Le paramètre de sévérité β devient un paramètre de similitude approximatif, mais reste assez pertinent pour décrire la dynamique de l'écoulement. En effet, les écarts restent plutôt faibles entre les résultats obtenus avec différentes tailles de fente et même si un tourbillon apparaît sur les plus petites d'entre elles. Par contre, il est clair que β n'est plus adapté pour décrire les évolutions de la température dans le canal.

L'analogie de Reynolds n'est alors plus vérifiée dans ce cas.

Chapitre 7

Approche analytique et implémentation numérique d'un contrôle suboptimal

7.1 Introduction

Dans ce chapitre, on développe la théorie du contrôle optimal dans l'optique d'établir un contrôle par asservissement de type prédictif. Pour des raisons de coût numérique, on s'intéressera uniquement à une formulation suboptimale visant à réduire la contrainte pariétale dans un canal turbulent.

L'approche analytique présentée ci-après s'inspire grandement des travaux de Bewley *et al.* [1993].

7.2 Approche analytique et formulation du problème

7.2.1 Formulation de la fonction de coût

Dans le chapitre 1, on a vu que la formulation du problème d'optimisation nécessitait la définition d'une fonction de coût propre à l'objectif du contrôle. Cette fonction $J(\phi)$ peut prendre la forme suivante :

$$J(\phi) = \frac{k}{2\Gamma} \iint_{x_2=0} \phi^2 \, dx_1 dx_3 + \frac{1}{\Gamma} \iint_{x_2=0} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \, dx_1 dx_3 \tag{7.1}$$

où $\phi(x_1,x_3)$ est une distribution spatiale de vitesses pariétales représentant l'emplacement des points d'aspirations ou de soufflages. La quantité Γ est la surface de la paroi sur laquelle est appliquée le contrôle. Les variables $x_1(u_1)$, $x_2(u_2)$ et $x_3(u_3)$ représentent respectivement les directions (et la vitesse correspondante) longitudinale, normale et

transversale de l'écoulement. Comme précisé dans le premier chapitre, le choix de porter le contrôle directement sur la réduction de contrainte pariétale n'est peut être pas le meilleur mais il permet une approche plus intuitive du problème d'optimisation. La formulation de la fonction coût (eq. 7.1) est propre au schéma *suboptimal* (et non *optimal*) car la notion d'horizon, c'est à dire le temps de prédiction n'est pas introduite. Pour faire simple, et pour revenir à l'analogie du jeu d'échecs, l'approche suboptimale consiste à chercher *seulement sur un tour de jeu* la meilleure distribution de pièces possible. Au contraire une approche optimale analysera sur un temps de prédiction les évolutions possibles du jeu. Il est donc facilement compréhensible que le contrôle optimal mène à de meilleurs résultats que le suboptimal. Cette approche simplifiée a été proposée par Choi *et al.* [1993] afin de se défaire du stockage considérable et du temps de calcul trop important nécessaire à la mise en place d'un schéma optimal.

7.2.2 L'équation d'état

Le système considéré ici est gouverné par les équations de Navier-Stokes, l'équation de continuité et la conservation du débit sur le domaine de l'écoulement Ω. A cela viennent s'ajouter des conditions limites appropriées sur les parois et une condition de périodicité suivant les directions x_1 et x_3.

Le système ainsi défini est le suivant :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u_j}{\partial {x_j}^2} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \iiint_\Omega u_1 \, dx_1 dx_2 dx_3 &= C \end{aligned}\right\} \quad (\Delta)$$

où C traduit l'application d'une condition de débit constant dans le canal. Les conditions aux limites suivantes seront appliquées à l'étude d'un contrôle suboptimal dans un canal turbulent. Il convient de les définir dès à présent car elles conditionneront la formulation du problème d'optimisation.

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= \phi(x_1,x_3) \\ u_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ sur la paroi inférieure}$$

et

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{array}\right\} \text{ sur la paroi supérieure}$$

La paroi supérieure n'est donc pas soumise au contrôle suboptimal car aucune vitesse n'y est affectée. Cette condition est plus importante qu'elle ne paraît. En effet, il est nécessaire d'éviter l'introduction de "quantité de matière" dans le système car la divergence globale n'est alors plus assurée. Ainsi le fait de ne pas imposer de vitesses sur la paroi supérieure est un bon moyen de vérifier que la somme des aspirations/soufflages sur le domaine de contrôle (c'est à dire la paroi inférieure) est nulle.

La première étape est de discrétiser l'équation d'état Δ afin d'y appliquer le contrôle suboptimal. Ainsi, si on discrétise la première équation du système Δ avec un schéma implicite de type *Crank-Nicholson* (même pour les termes non-linéaires), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= -\gamma^k \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j^{n+1} u_i^{n+1}) - \rho^k \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j^n u_i^n) \\ &- \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[p^{n+1} + p^n\Big] + \frac{\alpha^k}{2Re}\Big[\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j} u_i^{n+1} + \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j} u_i^n\Big] \end{aligned} \tag{7.2}$$

Il est important de souligner qu'on n'utilise pas ici le même type de discrétisation pour la résolution du problème d'optimisation et pour celle des équations de Navier-Stokes. On verra même un peu plus tard que les deux problèmes sont de nature différente, le contrôle suboptimal étant un problème aux conditions limites et la résolution de Navier-Stokes un problème aux valeurs initiales.

En choisissant donc une résolution implicite pour les termes non-linéaires, les constantes deviennent : $\gamma^k = 0.5$, $\rho^k = 0.5$ et $\alpha^k = 1$.

L'équation 7.2 s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(u_j^{n+1} u_i^{n+1}) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(u_j^n u_i^n) \\ &- \frac{1}{2}\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial p^n}{\partial x_i} + \frac{1}{2Re}\Big[\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j} u_i^{n+1} + \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j} u_i^n\Big] \end{aligned} \tag{7.3}$$

Il est avantageux de choisir des outils numériques les plus similaires à ceux utilisés pour la résolution numérique des équations de Navier-Stokes. Ainsi, des routines communes pourront être utilisées de manière à alléger la programmation nécessaire à la résolution du problème d'optimisation.

On peut maintenant décomposer le problème en groupant les différents termes de la manière suivante :

$$Q^{n+1} + R^n = 0 \tag{7.4}$$

où Q^{n+1} regroupe l'ensemble des termes correspondant au temps $n+1$ et R^n ceux au temps n.

Le système Δ peut donc être décomposé comme suit :

$$\left.\begin{array}{c} u_i^{n+1} + \beta_1\Big[\dfrac{\partial p'^{n+1}}{\partial x_i} + \dfrac{\partial \overline{p}^{n+1}}{\partial x_1}\delta_{i1} + \dfrac{\partial}{\partial x_j}(u_j^{n+1}u_i^{n+1})\Big] - \beta_2\Big[\dfrac{\partial}{\partial x_j}\dfrac{\partial}{\partial x_j}u_i^{n+1}\Big] \\ -\beta_1\dfrac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i} \\ \beta_1\displaystyle\int\int\int_\Omega u_1^{n+1}\,dx_1dx_2dx_3 \end{array}\right\} (\Delta_1)$$

et

$$\left.\begin{array}{c} -u_i^n + \beta_1\Big[\dfrac{\partial p'^{n}}{\partial x_i} + \dfrac{\partial \overline{p}^{n}}{\partial x_1}\delta_{i1} + \dfrac{\partial}{\partial x_j}(u_j^{n}u_i^{n})\Big] - \beta_2\Big[\dfrac{\partial}{\partial x_j}\dfrac{\partial}{\partial x_j}u_i^{n}\Big] \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} (\Delta_2)$$

où $\beta_1 = \frac{\Delta t}{2}$ et $\beta_2 = \frac{\Delta t}{2Re}$. On notera que la seconde équation du système Δ_1 a été multipliée par $-\beta_1$ et la troisième par β_1. Cette modification est nécessaire pour une résolution plus aisée du problème d'optimisation en faisant apparaître des termes analogues à ceux de N.S. "classique". Des outils similaires pourront donc être utilisés.

7.2.3 L'opérateur différentiel de Sensibilité

L'atout majeur du contrôle optimal est sa capacité de pouvoir *mesurer* la sensibilité de la fonction de coût J^{n+1} (voir eq. 7.1) à une modification du paramètre de contrôle ϕ^{n+1} effectuée au même instant. Par exemple, si on cherche à réduire la contrainte pariétale sur un plan, il est avantageux de connaître la réponse de J (ici l'intégrale spatiale de la contrainte sur la paroi) et le lien qu'elle établit avec la distribution de soufflages/aspirations appliquée. Il est important de noter que l'état même du champ de vitesse (et de pression) en $n+1$ sera conditionné par l'application des conditions aux limites (aspirations/soufflages) au même instant. Cette sensibilité sera propre à l'état de l'écoulement et à son évolution. Elle sera donc régie par les équations de Navier-Stokes.

Un opérateur différentiel de Sensibilité ($\hat{S}$) permet de mesurer l'impact d'une modulation de ϕ^{n+1} sur le système au temps $n+1$. En introduisant la perturbation linéarisée d'une fonction ξ, notée $\widetilde{\xi}$ et provoquée par l'application d'une perturbation arbitraire $\widetilde{\phi}$, on peut le définir de la manière suivante :

$$\widetilde{\xi}(\phi;\widetilde{\phi}) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\xi(\phi+\epsilon\widetilde{\phi}) - \xi(\phi)}{\epsilon} = \iint_{\Gamma^-} \frac{D\xi(\phi)}{D\phi}\widetilde{\phi}\, dx_1.dx_3 \tag{7.5}$$

où Γ^- représente la paroi inférieure du canal et D l'opérateur de Fréchet (Vainberg [1964]). Bien que l'on ait ici une formulation basée sur des fonctionnelles, cette approche est analogue à la détermination de l'accroissement local d'une variable par multiplication de son gradient avec une composante infinitésimale.

Si maintenant on introduit une composante temporelle et que l'on cherche la sensibilité $\widetilde{\xi}(\phi;\widetilde{\phi})$ en $n+1$, le paramètre de contrôle ϕ et sa perturbation $\widetilde{\phi}$ seront appliqués sur l'intervalle de temps $[t^n,t^{n+1}]$. On peut expliquer ceci en considérant que la perturbation appliquée en $n+1$ est la cause de la modification de l'écoulement au même instant (les quantités en n n'étant pas modifiées).

Grâce à cette méthode, la sensibilité $\widetilde{\xi}(\phi;\widetilde{\phi})$ de l'écoulement en $n+1$ pourra être transcrite en terme de gradient et on pourra établir un algorithme de minimisation afin de déterminer le minimum de la fonction de coût.

L'application de l'opérateur différentiel 7.5 aux différentes quantités de notre problème mène à :

$$\begin{pmatrix} u_i \xrightarrow{\hat{S}} \theta_i \\ p' \xrightarrow{\hat{S}} \rho \\ \dfrac{\partial \overline{p}}{\partial x_1} \xrightarrow{\hat{S}} \lambda \end{pmatrix}$$

Si on applique l'opérateur de Sensibilité $\hat{S}$ à la fonction de coût J (voir eq. 7.1), il vient :

$$\widetilde{J}(\phi;\widetilde{\phi}) = \frac{k}{\Gamma}\int\int_{\Gamma^-} \phi\widetilde{\phi}\, dx_1 dx_3 + \frac{1}{\Gamma}\int\int_{\Gamma^-} \frac{\partial\theta_1}{\partial x_2}\, dx_1 dx_3 \tag{7.6}$$

Lorsqu'on l'applique directement au système (Δ), une simplification importante apparaît. En effet, la sensibilité ne peut aucunement dépendre des termes présents en $n-1$ et n. De manière plus explicite, le fait d'appliquer une nouvelle distribution d'aspirations/soufflages au temps $n+1$, ne modifiera d'aucune manière les champs de vitesses (et de pressions) au temps n et $n-1$. En reprenant l'eq. 7.4, cette considération se traduit par :

$$Q^{n+1} + R^n = 0 \;\overset{\hat{S}}{\rightarrow}\; \widetilde{Q}^{n+1} = 0$$

car

$$\widetilde{R}^n \;\overset{\hat{S}}{\rightarrow}\; 0$$

et le système (Δ_2) n'apporte donc aucune contribution au problème d'optimisation. La transformée ($\widetilde{\Delta}_1$) du système (Δ_1) peut alors s'écrire :

$$\left.\begin{aligned}
\theta_i + \beta_1\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_i} + \lambda\delta_{i1} + \theta_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j\frac{\partial\theta_i}{\partial x_j}\right) - \beta_2\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\theta_i\right) &= 0 \\
-\beta_1\frac{\partial\theta_i}{\partial x_i} &= 0 \\
\beta_1\int\int\int_{\Omega}\theta_1\, dx_1 dx_2 dx_3 &= 0
\end{aligned}\right\}\ (\widetilde{\Delta}_1)$$

où toutes les quantités sont évaluées au temps *n+1*. Les conditions aux limites à appliquer sont les suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
\theta_1 &= 0 \\
\theta_2 &= \widetilde{\phi}(x_1,x_3) \\
\theta_3 &= 0
\end{aligned}\right\}\ \text{sur la paroi inférieure}$$

et

$$\left.\begin{array}{l}\theta_1 = 0\\ \theta_2 = 0\\ \theta_3 = 0\end{array}\right\} \text{ sur la paroi supérieure}$$

En résumé, le système $(\widetilde{\Delta}_1)$ rend compte de l'évolution d'une perturbation *test* dans l'écoulement. Le but de cette manipulation est d'identifier le gradient $\frac{DJ(\phi)}{D\phi}$ qu'on retrouve dans l'équation 7.5 et qui permettra d'évaluer une direction de "mise à jour" du contrôle ϕ afin de minimiser la fonction de coût. Le problème qui se pose dès à présent est que toutes les quantités du système $(\widetilde{\Delta}_1)$ dépendent implicitement de $\widetilde{\phi}$ empêchant ainsi toute identification du gradient à partir de l'équation 7.6.

7.2.4 Constitution du problème adjoint

On cherche maintenant à mettre à jour une relation qui permettra d'identifier le gradient $\frac{DJ(\phi)}{D\phi}$. On fait alors appel à la notion d'identité adjointe.

On commence par définir :

$$\vec{\Theta} = \begin{pmatrix} \theta_i \\ \rho \\ \lambda \end{pmatrix} \quad et \quad \vec{\Psi} = \begin{pmatrix} \varphi_i \\ \pi \\ \kappa \end{pmatrix}$$

comme respectivement les états différentiel (Sensibilité) et adjoint.

L'opérateur adjoint A^* prend la forme suivante :

$$\left\langle A\vec{\Theta},\vec{\Psi}\right\rangle = \left\langle \vec{\Theta},A^*\vec{\Psi}\right\rangle + b \tag{7.7}$$

où le produit interne $\langle f_1,f_2\rangle$ représente :

$$\langle f_1,f_2\rangle = \iiint_\Omega f_1 f_2 \, dx_1 dx_2 dx_3$$

En développant le terme $\left\langle A\vec{\Theta},\vec{\Psi}\right\rangle$, avec $(\widetilde{\Delta}_1) = A\vec{\Theta}$, on obtient l'expression suivante :

$$\iiint_\Omega \Big[\varphi_i\,\theta_i + \beta_1\varphi_i\Big(\frac{\partial\rho}{\partial x_i} + \lambda\delta_{i1} + \theta_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j\frac{\partial\theta_i}{\partial x_j}\Big) - \beta_2\varphi_i\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\theta_i\Big) - \beta_1\pi\frac{\partial\theta_i}{\partial x_i} + \beta_1\Big(\iiint_\Omega \theta_i\delta_{i1}\,d\Omega\Big).\kappa\Big]\,d\Omega \tag{7.8}$$

où $d\Omega = dx_1.dx_2.dx_3$.

On construit l'opérateur adjoint en récrivant l'équation 7.8 de manière à faire apparaître explicitement les composantes du vecteur $\vec{\Psi}$. Par exemple, pour le troisième terme, une première intégration par partie donne :

$$\iiint_\Omega -\beta_2\varphi_i\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\theta_i\Big)\,d\Omega = -\beta_2\Big[\iiint_\Omega -\Big(\frac{\partial\theta_i}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\Big)\,d\Omega + \iint[\frac{\partial\theta_i}{\partial x_1}\varphi_i]\,dx_2dx_3 + \iint[\frac{\partial\theta_i}{\partial x_2}\varphi_i]\,dx_1dx_3 + \iint[\frac{\partial\theta_i}{\partial x_3}\varphi_i]\,dx_1dx_2\Big] \tag{7.9}$$

qui avec la condition de périodicité spatiale et les conditions limites sur θ_i devient :

$$\iiint_\Omega -\beta_2\varphi_i\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\theta_i\Big)\,d\Omega = -\beta_2\Big[\iiint_\Omega -\Big(\frac{\partial\theta_i}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\Big)\,d\Omega - \iint_{\Gamma^-}[\frac{\partial\theta_i}{\partial x_2}\varphi_i]\,dx_1dx_3\Big] \tag{7.10}$$

Une seconde intégration par partie mène à :

$$\begin{aligned}
&\iiint_\Omega -\beta_2\varphi_i\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\theta_i\Big)\,d\Omega = \\
&\quad -\beta_2\Big[\iiint_\Omega\Big(\theta_i\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi_i\Big)\,d\Omega - \iint_{\Gamma^-}\frac{\partial\theta_1}{\partial x_2}\varphi_1\,dx_1dx_3 \\
&\quad -\iint_{\Gamma^-}\frac{\partial\theta_3}{\partial x_2}\varphi_3\,dx_1dx_3 + \iint_{\Gamma^-}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\theta_2\,dx_1dx_3\Big]
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Dans le premier terme de la partie droite l'éq. 7.11, $\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi_i\right)$ constitue une partie de l'opérateur adjoint A^*. Les 3 autres termes apportent une contribution au terme b. En faisant de même avec tous les termes de l'équation 7.8 et en réorganisant le tout, on trouve l'opérateur adjoint A^* tel que :

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_i + \beta_1\Big(\frac{\partial\pi}{\partial x_i} + \lambda\delta_{i1} + \varphi_j\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - u_j\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\Big) - \beta_2\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi_i\Big) \\
&\beta_1\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i} \\
&\beta_1\iiint_\Omega\varphi_1\,d\Omega
\end{aligned}\right\}\ (A^*\vec{\Psi})$$

avec

$$\begin{aligned}
b = &-\beta_2\iint\Big[\frac{\partial\theta_1}{\partial x_2}\varphi_1\Big]_{\Gamma^-}^{\Gamma^+}dx_1dx_3 - \beta_2\iint\Big[\frac{\partial\theta_3}{\partial x_2}\varphi_3\Big]_{\Gamma^-}^{\Gamma^+}dx_1dx_3 \\
&+\beta_2\iint\Big[\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\theta_2\Big]_{\Gamma^-}^{\Gamma^+}dx_1dx_3 - \beta_1\iint\Big[\theta_2\pi\Big]_{\Gamma^-}^{\Gamma^+}dx_1dx_3 \\
&+\beta_1\iint\Big[\varphi_2\rho\Big]_{\Gamma^-}^{\Gamma^+}dx_1dx_3 + \beta_1\iint\Big[\phi\varphi_2\theta_2\Big]_{\Gamma^-}^{\Gamma^+}dx_1dx_3
\end{aligned} \tag{7.12}$$

L'expression 7.12 est déjà simplifiée pour le cas d'un contrôle avec aspirations/soufflages à la paroi. Ce cas spécifique a été introduit par l'application des conditions aux limites portant sur les variables θ_i et u_i ainsi que par l'intervention des conditions inhérentes à la périodicité dans les directions longitudinale et transversale.

Il est important de souligner que le schéma de la résolution *DNS* peut être différent de celui utilisé pour résoudre le problème de contrôle. On a ici une contribution des termes non-linéaires de Navier-Stokes au système $A^*\vec{\Psi}$, qui se traduit par la présence des termes $\varphi_j\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ et $-u_j\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}$. On affirme donc ici que la formulation du contrôle suboptimal

ne dépend pas du schéma d'avancement temporel utilisé. Ainsi, un calcul explicite de type *Adams-Bashfort* pour les termes non-linéaires de Navier-Stokes ne nous interdit pas d'utiliser les termes $\varphi_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ et $-u_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ dans la résolution du problème d'optimisation au temps $n+1$. Le système $A^* \vec{\Psi}$ reste toutefois non-linéaire dans le sens où les quantités u_i et φ_i sont dépendantes les unes des autres à travers la distribution ϕ imposée. Par la suite, on les qualifiera de termes de couplage non-linéaires (*T.C.N.L.*).

Le système 7.2.4 est un système d'équations aux différentielles partielles *couplées*. Ainsi, les outils classiques utiles à la résolution numérique des équations de Navier-Stokes ne pourront s'appliquer que sous certaines approximations qu'on explicitera par la suite.

Mais pourquoi conserver les *T.C.N.L.* alors qu'on pourrait les traiter, comme lors de la résolution numérique de Navier-Stokes de manière explicite ?

Cette approximation conduirait au découplage des équations du système adjoint et à une résolution plus aisée de notre problème d'optimisation.

Des auteurs tels que Lee *et al.* [1998] affirment que l'importance des *T.C.N.L.* ($\varphi_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ et $-u_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$) est directement liée à la nature de la variable à contrôler dans la fonction de coût. Une telle affirmation sous tend que l'on doit prendre en considération l'effet des termes non-linéaires de Navier-Stokes dans notre problème d'optimisation. C'est un principe de précaution. Il va sans dire que ces quantités sont à l'origine d'une dynamique importante dans l'écoulement. Toutefois, les auteurs affirment que des études effectuées précédemment (non publiées) montrent que la contribution des termes non-linéaires devenait négligeable lorsque le temps d'optimisation (pour nous l'avancement temporel Δt) était court. Ceci est vrai **seulement** si la fonction de coût est basée sur des quantités telles que le gradient de pression ou le gradient de vitesse transversale. Dans le cas où le contrôle porte directement sur la contrainte pariétale, leurs résultats montrent qu'une diminution du frottement est impossible avec une méthode de contrôle suboptimale. Ce résultat n'est pas réellement surprenant car le système adjoint n'est plus couplé aux équations de Navier-Stokes.

En reprenant l'éq.7.7, et sachant que $\left\langle A\vec{\Theta}, \vec{\Psi} \right\rangle$=0, on a :

$$\left\langle \vec{\Theta}, A^* \vec{\Psi} \right\rangle = -b \tag{7.13}$$

Mais comme le système adjoint n'est pas physique, on a la liberté de le fixer à :

$$A^* \vec{\Psi} = 0 \qquad \text{entraînant} \qquad b = 0 \tag{7.14}$$

Comme il l'a été précisé un peu plus haut, l'intervention d'un problème adjoint permettra de trouver une nouvelle relation qui nous aidera à déterminer le gradient $\frac{DJ(\phi)}{D\phi}$.

Les conditions limites pour le problème adjoint n'ont pas été encore fixées et c'est un choix judicieux sur ces dernières qui nous permettra de mettre à jour une telle relation.

Avec la condition sur b fixée, l'opérateur adjoint A^* s'écrit :

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i + \beta_1\left(\frac{\partial \pi}{\partial x_i} + \lambda\delta_{i1} + \varphi_j\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - u_j\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right) - \beta_2\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi_i\right) = 0 \\ \beta_1\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} = 0 \\ \beta_1\iiint_\Omega \varphi_1\, d\Omega = 0 \end{aligned}\right\} \quad (\Delta_{adj})$$

Le système Δ_{adj} sera à résoudre numériquement afin de mettre en oeuvre un contrôle suboptimal. Le terme b peut ne pas être fixé à 0. Dans le cas où on cherche à contrôler le frottement à la paroi, ce choix se révèle judicieux car l'obtention du gradient de la fonction de coût sera facilité. Évidemment, si on choisit de contrôler une variable différente, le terme b pourra être fixé à des valeurs différentes.

Si on choisit :

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= 1 \\ \varphi_2 &= 0 \\ \varphi_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ sur la paroi inférieure}$$

et

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= 0 \\ \varphi_2 &= 0 \\ \varphi_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ sur la paroi supérieure}$$

l'équation 7.12 devient :

$$b = \beta_2\iint_{\Gamma^-}\frac{\partial \theta_1}{\partial x_2}\, dx_1dx_3 + \beta_1\iint_{\Gamma^-}\widetilde{\phi}\pi\, dx_1dx_3 - \beta_1\iint_{\Gamma^+}\widetilde{\phi}\pi\, dx_1dx_3 \tag{7.15}$$

et donc

$$\iint_{\Gamma^-}\frac{\partial \theta_1}{\partial x_2}\, dx_1dx_3 = \frac{\beta_1}{\beta_2}\left(\iint_{\Gamma^+}\widetilde{\phi}\pi\, dx_1dx_3 - \iint_{\Gamma^-}\widetilde{\phi}\pi\, dx_1dx_3\right) \tag{7.16}$$

Ainsi,

$$\widetilde{J}(\phi;\widetilde{\phi}) = \iint_{\Gamma^{\pm}} \frac{DJ(\phi)}{D\phi}\widetilde{\phi}\, dx_1 dx_3 = \frac{k}{\Gamma}\iint_{\Gamma^{-}} \phi\widetilde{\phi}\, dx_1 dx_3 + \frac{\beta_1}{\beta_2\Gamma}\iint -\widetilde{\phi}\pi_{\Gamma^{-}}\, dx_1 dx_3 \tag{7.17}$$

et comme cette dernière relation est valable pour chaque portion du domaine Γ, on peut généraliser à :

$$\frac{DJ(\phi)}{D\phi} = \frac{k}{\Gamma}\phi - \frac{\beta_1}{\beta_2\Gamma}\pi_{\Gamma^{-}} \tag{7.18}$$

où ϕ est une distribution d'aspirations/soufflages et $\pi_{\Gamma^{-}}$ la fluctuation de pression adjointe sur la paroi inférieure résultant de la résolution du système adjoint Δ_{adj}.

L'équation 7.18 est la clé de la résolution du problème d'optimisation car elle permettra d'appliquer un algorithme de minimisation itératif afin de trouver un minimum à la fonction de coût $J(\phi)$.

7.3 Implémentation numérique du contrôle suboptimal

Les outils numériques nécessaires à la résolution du problème suboptimal peuvent être dérivés de ceux utilisés par notre Simulation Numérique Directe. Ces deux résolutions (Suboptimale et DNS) doivent être effectuées à chaque itération temporelle car le contrôle a pour objectif de modifier les conditions aux limites (aspirations/soufflages) utilisées pour l'avancement temporel de l'écoulement.

7.3.1 La première étape de la méthode du Pas Fractionné

L'équation principale résultant de la formulation du problème adjoint est :

$$\varphi_i + \beta_1\left(\frac{\partial\pi}{\partial x_i} + \lambda\delta_{i1} + \varphi_j\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - u_j\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right) - \beta_2\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi_i\right) = 0 \tag{7.19}$$

Comme précisé précédemment, l'équation 7.19 n'est pas, comme dans le cas de la résolution de Navier-Stokes, un problème aux valeurs initiales mais un problème de

conditions aux limites. En effet, on ne retrouve pas ici la notion d'avancement temporel et il va sans dire que la résolution même de cette équation est fondamentalement différente de celle de Navier-Stokes. Mais rien ne nous interdit de calquer la méthode du Pas Fractionné, utilisée pour la résolution de la DNS classique, afin de résoudre ce nouveau jeu d'équations.

Quelques modifications sont toutefois à apporter :

- Les équations sont couplées. On remarque que dans chaque direction, longitudinale, verticale et transversale, les trois quantités φ_1,φ_2 *et* φ_3 sont présentes.
- La résolution de la première étape du Pas Fractionné ne porte pas sur des variations temporelles de la quantité recherchée (Δu_i) mais sur les quantités adjointes temporellement indépendantes.
- Le calcul de la variable λ (l'analogue du gradient de pression longitudinal moyen) peut être effectué par application d'une condition résultant de la contrainte imposée par la troisième équation du système Δ_{adj}, ($\beta_1 \iiint_\Omega \varphi_1 \, d\Omega = 0$).

La première étape de la méthode du Pas Fractionné s'écrit :

$$\varphi_i + \beta_1\left(\lambda^* \delta_{i1} + \varphi_j \frac{\delta u_j}{\delta x_i} - u_j \frac{\delta \varphi_i}{\delta x_j}\right) - \beta_2 L_{jj} \varphi_i = 0 \tag{7.20}$$

où L_{jj} est l'opérateur Laplacien et δ l'opérateur différentiel discrétisé. Il est à noter que $\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ et u_j sont connus ici, car ces termes résultent d'un calcul antérieur de Navier-Stokes avec une distribution de soufflages/aspirations ϕ à tester. L'équation 7.20 ne comporte pas le terme π, qui peut être perçu comme l'analogue des fluctuations de pression. Son calcul, qui est au centre du problème d'optimisation, sera effectué lors de la seconde étape de la méthode. Ainsi, comme lors de la résolution de N.S. classique, les quantités adjointes résultant de cette première étape ne satisferont pas l'équation de continuité (2me équation du système Δ_{adj}). L'incompressibilité sera donc assurée lors de la seconde étape, en corrigeant le champ des quantités adjointes de manière à imposer la condition de divergence nulle par application du champ fluctuant π approprié.

Dans un premier temps, il faut choisir la méthode la plus propice à la résolution d'un système d'équations couplées. Les méthodes itératives sont capables de résoudre ce type de problème mais leur coût numérique est beaucoup trop important. En considérant la vitesse adjointe continue et dérivable entre deux pas de temps, on peut effectuer une approximation de Taylor sur les quantités adjointes φ_i de manière à évaluer directement les termes : $\varphi_j \frac{\delta u_j}{\delta x_i} - u_j \frac{\delta \varphi_i}{\delta x_j}$.

On obtient ainsi :

$$\varphi_i - \beta_2 L_{jj} \varphi_i = -\beta_1\left(\lambda^* \delta_{i1} + \varphi_j \frac{\delta u_j}{\delta x_i} - u_j \frac{\delta \varphi_i}{\delta x_j}\right) \tag{7.21}$$

L'équation 7.21 est donc similaire à celle résultant de la première étape du Pas Fractionné dans le cas de la résolution de Navier Stokes.

En effet, pour la Simulation Numérique Directe on avait :

$$\Delta u_i - \beta_2 L_{jj} \Delta u_i = \left(RHS_i\right)_{connu} \tag{7.22}$$

où $\left(RHS_i\right)_{connu}$ comportait la somme des termes non-linéaires calculés explicitement (au temps précédent n) sur chaque direction i. La résolution ne porte plus ici sur la différence temporelle Δ mais sur la quantité entière φ. Quelques modifications mineures seront donc à apporter, mais sans conséquence sur la méthode employée. Ainsi la partie gauche de l'équation peut être mise sous forme matricielle et résolue sur chaque direction (les équations étant dorénavant découplées).

Reste le problème de la détermination de la variable λ. Le calcul de cette quantité peut cette fois encore être calqué sur celui de son homologue dans le cas de la résolution classique de la DNS, c'est à dire le gradient de pression longitudinal moyen $\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_1}$. Pour plus de précisions sur son évaluation, le lecteur pourra se reporter à l'annexe B.

7.3.2 La seconde étape de la méthode du Pas Fractionné

Lors de la résolution numérique de Navier Stokes, on a vu que la seconde étape de la méthode du Pas Fractionné permettait l'obtention d'un champ de vitesse à divergence localement nulle par l'intervention d'un scalaire η.

$$\frac{u_i^{n+1} - \hat{u}_i^k}{\Delta t} = -\alpha^k G_i \eta \tag{7.23}$$

où G_i représente l'opérateur gradient.

En appliquant l'opérateur divergence discrétisé D_i à l'éq. 7.23, on obtenait la relation 7.24, qui permettait de déterminer le scalaire η afin d'imposer $D_i u_i^{n+1} = 0$. La condition d'incompressibilité en $n+1$ menait à l'équation de Poisson :

$$L_{jj}\eta = \frac{1}{\alpha^k \Delta t} D_i \hat{u}_i^k \tag{7.24}$$

Ainsi il était possible de calculer la quantité η à partir du champ connu $\hat{u}_i^k$.

Dans le cas du contrôle suboptimal, et en gardant la même notation pour le scalaire η on peut écrire :

$$\varphi_i - \hat{\varphi}_i = -G_i\eta \tag{7.25}$$

où $\hat{\varphi}_i$ est le champ de vitesses adjointes qui résulte de la première étape du Pas Fractionné et φ_i est le nouveau champ recherché et qui doit satisfaire la deuxième équation du système Δ_{adj}, c'est à dire l'équation de continuité. On remarque de plus que les notions temporelles qui apparaissaient par l'intermédiaire de n et Δ ont été écartées.

En procédant d'une manière similaire à la résolution des équations Navier Stokes, on applique l'opérateur D_i à l'équation précédente. Le problème se résout donc à :

$$L_{jj}\eta = D_i\hat{\varphi}_i \tag{7.26}$$

Mais souvenons nous que la pression fluctuante adjointe a totalement été écartée de la première étape du Pas Fractionné. Or cette quantité π est la clé du problème d'optimisation comme le montre l'équation 7.18. Sa détermination, même si elle n'est pas nécessaire au calcul du champ de vitesse adjoint φ_i, reste primordiale pour l'obtention du gradient de la fonction de coût. En remplaçant φ_i par $(\varphi_i + G_i\eta)$ dans l'équation 7.21, on obtient l'expression :

$$\varphi_i - \beta_2 L_{jj}\varphi_i = RHS_i - \beta_1\lambda_*\delta_{i1} - G_i\Big[\eta - \beta_2 L_{jj}\eta\Big] \tag{7.27}$$

En identifiant les termes avec ceux de l'équation 7.19, le calcul de la pression fluctuante ajointe π se résout à :

$$\pi = \eta - \beta_2 L_{jj}\eta \tag{7.28}$$

L'évaluation du terme π sur la paroi inférieure permettra de calculer le gradient de la fonction de coût J et ainsi de mettre à jour la distribution de soufflage à la paroi ϕ.

7.3.3 Modification de l'action à la paroi par utilisation du gradient

A partir de l'évaluation de la pression fluctuante adjointe π, on a vu qu'on pouvait calculer le gradient de la fonction de coût $\frac{DJ(\phi)}{D\phi}$ et ainsi déterminer la direction de mise à jour de la distribution $\phi(x_1,x_3)$. Ainsi une modification de l'action à la paroi peut s'écrire :

$$\phi^{m+1} = \phi^m - p^m \left[\frac{DJ(\phi^m)}{D\phi} \right]_{normé} \tag{7.29}$$

où l'indice m est l'incrément de cette recherche itérative. La quantité p^m représente le pas de recherche (appelé aussi paramètre de descente). Sa valeur pourra varier en fonction de l'état de la recherche de $J(\phi)_{min}$ mais dépendra aussi de l'algorithme de minimisation choisi. Il est important de remarquer qu'avec une telle méthode, on ne peut accéder qu'à des minimums locaux. La solution finale, c'est à dire la distribution de soufflages/aspirations à la paroi pourra donc dépendre de la distribution initiale ϕ^0.

7.3.4 Récapitulatif de la méthode

L'algorithme suivant expose les différentes étapes nécessaires à l'application d'un contrôle suboptimal.

- **1ère étape** : on commence par une condition limite et initiale arbitraire de $\phi_0(x_1,x_3)$. On peut par exemple fixer une vitesse nulle sur l'intégralité de la paroi inférieure, auquel cas $\phi_0(x_1,x_3) = 0$.
- **2ème étape** : on résout le problème adjoint afin d'évaluer la pression fluctuante adjointe π. On détermine alors la direction $\frac{DJ(\phi_0)}{D\phi}$.
- **3ème étape** : on applique un algorithme de minimisation et on obtient une nouvelle distribution ϕ_0, notée ϕ^m.
- **4ème étape** : si on effectue une recherche de minimum, on réitère les étapes 2 et 3 jusqu'à l'obtention d'un minimum de la fonction de coût J. La distribution est alors notée ϕ^m_{opt}.
- **5ème étape** : on procède à l'avancement temporel de l'écoulement avec application de la condition limite ϕ^m_{opt}.
- **6ème étape** : on reprend la 1ère étape avec $\phi_0(x_1,x_3)=\phi^{n+1}_{opt}$

L'organigramme 7.1 montre comment les deux résolutions (DNS et contrôle suboptimal) sont couplées.

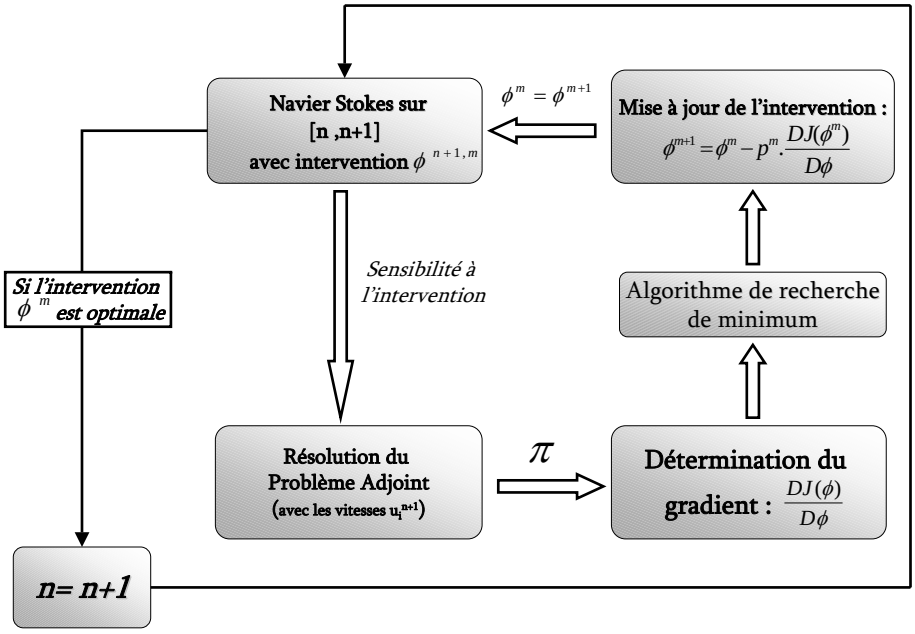


FIGURE 7.1 – Récapitulatif de la mise en oeuvre d'un contrôle suboptimal

7.4 Comprendre pour mieux contrôler ou contrôler pour mieux comprendre

Tout au long du chapitre, on a formulé un contrôle suboptimal visant directement à réduire la contrainte turbulente. Cette approche n'est certainement pas la mieux adaptée. Dans le chapitre 1, on a vu qu'il était possible de focaliser le contrôle sur les causes de l'augmentation de la contrainte turbulente et non sur ses conséquences. Reste à bien choisir la fonction de coût et donc la variable à contrôler.

Il va sans dire que le choix de cette variable sera intimement lié à la physique de l'écoulement. Or, dans le cas des écoulements de proche paroi, le phénomène distinctif est sans nul doute l'existence de structures cohérentes. Aussi intéressons nous plutôt à la formation de ces tourbillons quasi-longitudinaux.

Des auteurs tels que Jimenez & Pinelli [1999] ont cherché quel était le mécanisme à l'origine de la formation des structures en zone de proche paroi. En effet, malgré notre compréhension d'une partie du cycle de régénération, on ne connaît toujours pas avec certitude la nature du processus donnant naissance aux tourbillons quasi-longitudinaux.

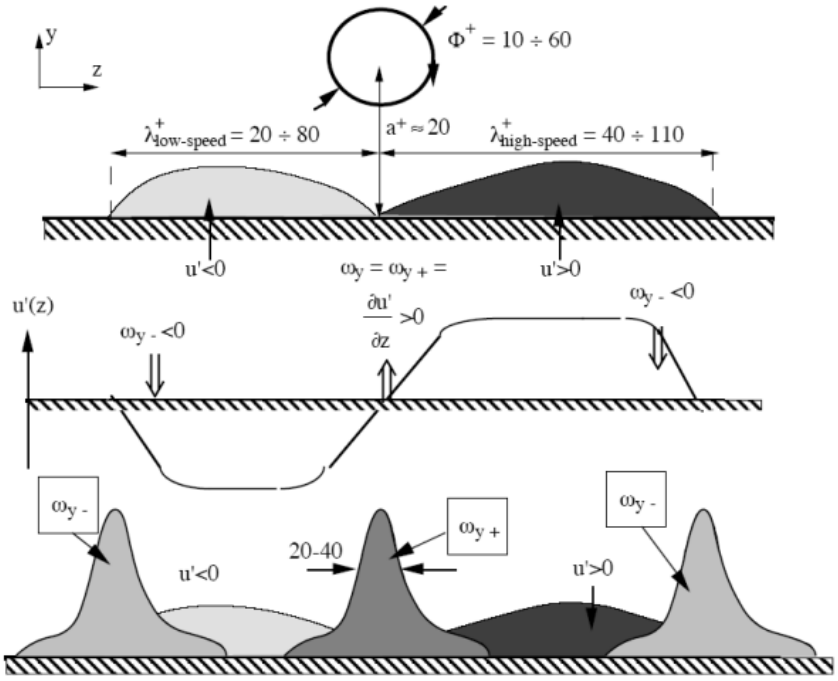


FIGURE 7.2 – L'alternance des zones de hautes et basses vitesses provoque l'apparition d'une vorticité normale à la paroi (Tardu [1995]).

Dans l'article de Jimenez & Pinelli [1999], trois candidats potentiels ont donc été étudiés.

Le premier se base sur le fait qu'il n'existe pas de cycle de régénération proche de la paroi mais que les vortex sont crées par l'intensification d'une perturbation provenant du coeur de l'écoulement.

La seconde hypothèse prend comme point de départ un vortex déjà formé. En se rapprochant de la paroi, il créera une nappe de vorticité de signe opposé qui sera soulevée par induction du tourbillon primaire et s'intensifiera (s'étirera) grâce à l'écoulement moyen.

La dernière étude porte sur la déstabilisation même des zones de hautes et basses (Z.H.B.) vitesses engendrant de fait un nouveau tourbillon. Cette déstabilisation proviendrait d'un point d'inflexion sur la distribution des vitesses, provoqué par l'alternance des Z.H.B.

La figure 7.2 est tirée d'un article publié par Tardu [1995] et montre comment se forme cette instabilité inviscide. On constate que l'alternance des Z.H.B. est à l'origine d'une vorticité ω_y normale à la paroi. Or le gradient de vitesse longitudinale moyen empêche la formation de tourbillons verticaux. Son action tend à aligner cette distribution dans le sens de l'écoulement, provoquant ainsi une intensification (étirement) de la vorticité et pouvant ainsi donner naissance à un tourbillon quasi-longitudinal.

L'application d'un contrôle suboptimal basé sur ω_y à la paroi permettra de vérifier que cette quantité est bien impliquée dans le processus de régénération des structures.

Ainsi, outre le fait qu'une bonne formulation de la fonction de coût peut s'avérer efficace en terme de réduction de frottement, l'approche (sub)optimal peut être utile afin de mettre en exergue les processus liés à différentes phénoménologies. L'avantage principal réside dans le fait que l'action du contrôle reste physique (soufflages/aspirations, glissements à la paroi, etc.) et qu'aucune approximation, tels que l'application de filtres ou le découplage d'une direction etc., n'est effectuée. Le contrôle suboptimal peut ainsi devenir un bon outil afin d'investiguer les différents mécanismes mis en jeu dans un écoulement turbulent.

7.5 Conclusions

Le contrôle suboptimal est un contrôle par asservissement présentant l'avantage d'être formulé directement à partir des équations de Navier-Stokes. On cherche ici à minimiser une fonction de coût exprimée comme l'intégrale du frottement appartenant à la paroi inférieure d'un canal turbulent.

Un développement analytique permet d'aboutir à la formulation d'un système d'équations dont la résolution fait appel à des outils numériques similaires à ceux utilisés pour la Simulation Numérique Directe. Sur cette base, un algorithme permettant la résolution numérique du problème a été développé. Le chapitre suivant présente les principaux résultats obtenus dans le cadre d'un écoulement turbulent en canal.

Chapitre 8

Application d'un contrôle suboptimal à un écoulement turbulent en canal

8.1 Introduction

Lors du chapitre précédent, on a formuler un problème d'optimisation basé sur l'évaluation d'un gradient de la fonction de coût $\frac{DJ}{D\phi}$. Ce développement résultait en l'obtention d'une équation permettant la mise à jour de la distribution de soufflages/aspirations ϕ à la paroi.

Rappelons son expression :

$$\phi^{m+1} = \phi^m - p^m \left[\frac{DJ(\phi^m)}{D\phi} \right]_{normé} \tag{8.1}$$

On présente ici deux stratégies visant à réduire la fonction de coût. La première n'effectue qu'une seule évaluation du gradient (et donc une seule mise à jour de ϕ) tandis que la seconde procède par itérations successives jusqu'à obtention d'un minimum local. Ces deux contrôles sont appliqués à un écoulement turbulent développé en canal.

8.2 Contrôle basé sur une seule évaluation du gradient

8.2.1 Formulation

L'équation 8.1 représente la formulation générique de mise à jour de l'action à la paroi en vue d'une minimisation de la fonction de coût. Lors d'un processus itératif, dès que la distribution ϕ est modifiée, son gradient $\frac{DJ}{D\phi}$ n'est plus adapté et doit être recalculé. Une nouvelle résolution du problème adjoint devra donc être effectuée.

L'étude présente s'attache à établir le paramètre de descente $p^m = Constante$ le mieux adapté à une optimisation basée sur une seule évaluation du gradient, c'est à dire en

ne mettant à jour qu'une seule fois la distribution ϕ. On effectuera donc qu'une seule résolution du problème adjoint à chaque avancement temporel de notre écoulement.

Le gradient de la fonction de coût ne fournit d'information que sur la direction de mise à jour. Aucune information sur p n'est disponible. Une étude paramétrique s'avère donc nécessaire afin de déterminer le paramètre de descente le plus efficace.

On cherche ici à diminuer la fonction de coût entre deux pas de temps consécutifs, t_n et t_{n+1}. La première étape consiste à effectuer un avancement temporel "virtuel" de l'écoulement entre t_n et t_{n+1} en conservant la fonction ϕ_{init} de soufflage du temps t_n. On résout ensuite le problème adjoint pour obtenir une expression du gradient ($\overrightarrow{grad J} = \frac{DJ}{D\phi}$) de la fonction de coût par rapport à la fonction de soufflage. Le gradient nous indiquera de quelle façon modifier la fonction de soufflage en t_{n+1} afin de réduire J. On applique ensuite l'équation 8.1 avec une valeur **fixe** de p^m et on obtient une nouvelle distribution ϕ_{final}. La dernière étape est l'avancement temporel "réel" de l'écoulement entre t_n et t_{n+1} avec comme condition limite en t_{n+1} la fonction de soufflage modifiée (ϕ_{final}).

Dans ce processus où l'équation 8.1 n'est appliquée qu'une seule fois, le choix de la valeur de p est essentiel. La figure 8.1 montre comment cette variable peut affecter le contrôle. De manière à rendre l'explication plus intuitive, on choisit de présenter un cas mono-dimensionnel où le coût ne dépend plus d'une fonction mais seulement d'une valeur de soufflage en un point. Évidemment, pour un plan doté, par exemple de, 10×10 actionneurs, la dimension deviendrait 100, ce qui est plutôt difficile à représenter graphiquement.

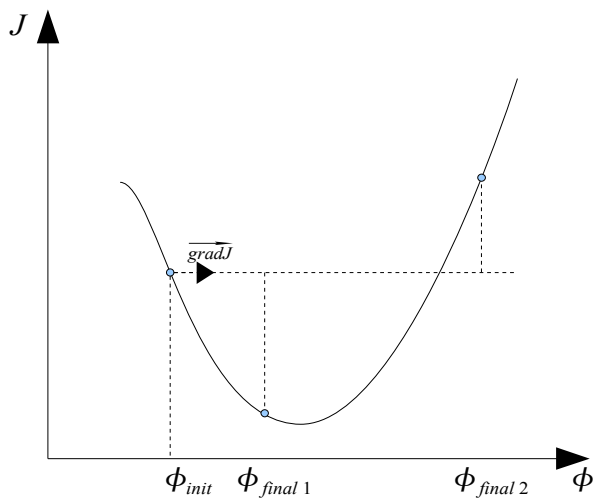


FIGURE 8.1 – Le gradient donne seulement la direction de la minimisation

On remarque ainsi qu'un choix trop grand du paramètre p positionne la distribution $\phi_{final\ 2}$ trop loin de la distribution initiale provoquant l'augmentation de la fonction de

coût. La figure 8.2 montre l'évolution temporelle de la traînée pour un contrôle effectué avec $p = 2$. Ce pas de recherche beaucoup trop grand mène à une augmentation sévère de la contrainte.

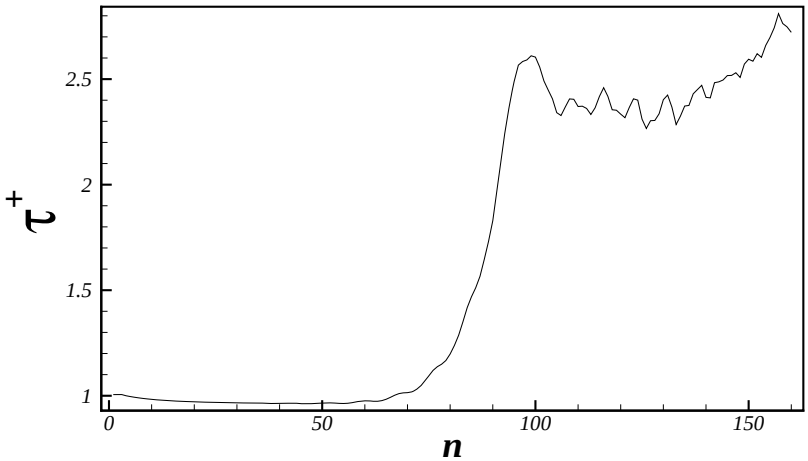


FIGURE 8.2 – Cas où p est trop important

A l'inverse, le choix d'une valeur de p trop faible n'apporte aucune modification substantielle à J.

Le paramètre de descente optimal n'est pas forcément celui qui réduit la contrainte le plus rapidement à partir de l'application du contrôle. En effet, on a pu constater que les 50 premières itérations autorisaient l'utilisation d'une valeur assez grande de p en provoquant une forte diminution de J. Mais après cette période, le contrôle n'agit plus et la fonction de coût augmente rapidement.

La figure 8.3 présente l'évolution temporelle de la contrainte exprimée en unités pariétales pour une valeur de pas de recherche la mieux adaptée, $p = 0.1$ (représenté par $\phi_{final\ 1}$ sur la figure 8.1). On obtient approximativement 8% de réduction de la traînée turbulente.

Les résultats de Bewley *et al.* [1993] en canal turbulent et avec l'approche suboptimale montrent une diminution globale de la traînée de 16%. Cependant, la résolution spatiale de leur simulation est très faible (65×35×32 points) tout comme leur nombre de Reynolds basé sur la vitesse de frottement $Re_\tau = 90$ (180 dans notre cas). On peut donc légitimement se demander si une comparaison entre les deux études est possible.

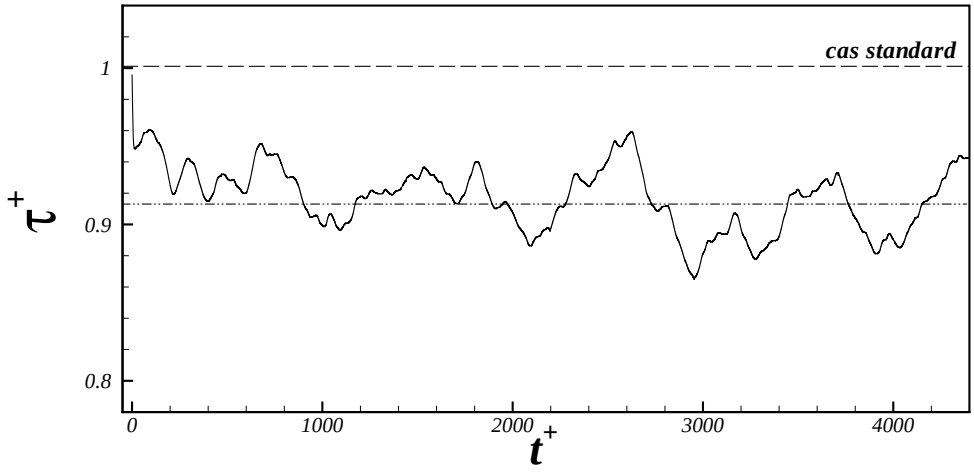


FIGURE 8.3 – Évolution temporelle de la contrainte turbulente pour $p = 0.1$

8.2.2 Étude statistique : répercussions du contrôle sur la structure fine de la turbulence en proche paroi

8.2.2.1 Résultats

Les statistiques présentées dans cette section sont établies sur 40.000 itérations temporelles avec un pas $dt = 0.01$ et un maillage de $513 \times 129 \times 129$ points. Le calcul total requiert approximativement 300 heures CPU, ce qui reste très acceptable pour une résolution comportant un coût numérique équivalant à trois Simulations Numériques Directes.

Dans les graphes présentés ci-après, le cas sans contrôle est identifié par les lignes seules et le cas contrôlé par les lignes et les symboles.

Les figures 8.4, 8.5 et 8.6 montrent les profils *RMS* des vitesses et des contraintes de Reynolds en fonction de la distance verticale à la paroi. Toutes les quantités sont adimensionnalisées par rapport à la vitesse de frottement locale, c'est à dire respectivement par rapport à u_τ de l'écoulement contrôlé de façon suboptimale.

Une caractéristique commune des écoulements contrôlés de manière active ou passive réside dans l'obtention d'un état d'équilibre de la turbulence de proche paroi. En effet, les distributions des quantités contrôlées sont assez similaires à celles obtenues dans le cas non manipulé quand elles sont adimensionnalisées par rapport aux variables locales. C'est la cas par exemple lors d'applications de contrôles passifs par *riblets* (Tardu [1995]) ou de contrôles actifs par aspiration ou soufflage (Tardu [2001]).

Dans notre cas, les profils des contraintes de Reynolds et de vorticités adimensionnalisées de la sorte sont très similaires, bien que ceux correspondants au cas manipulé soient systématiquement légèrement inférieurs.

Sur la figure 8.5, on constate que la valeur *RMS* de la vitesse imposée par le contrôle est proche de 0.05. Cette faible valeur correspond approximativement à $1/400^{ème}$ de la vitesse longitudinale au centre du canal.

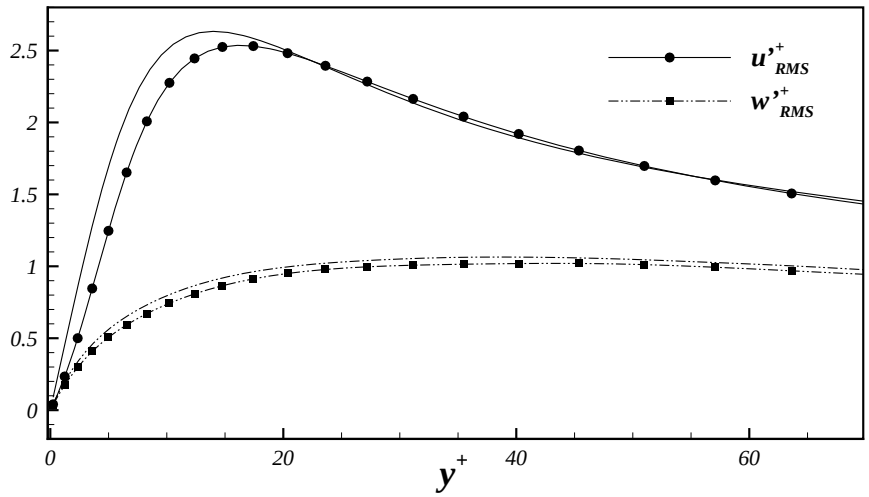


FIGURE 8.4 – Comparaison des valeurs *RMS* des vitesses u et w pour le cas standard (ligne) et le cas contrôlé (ligne + symboles)

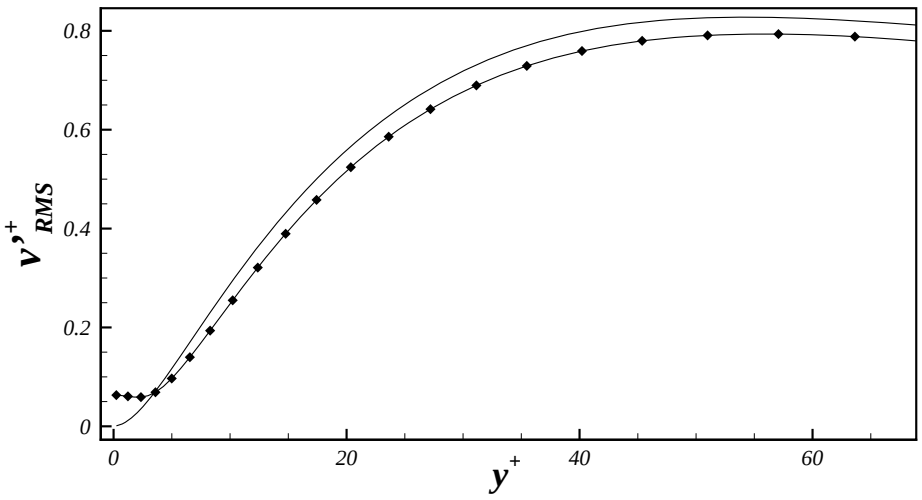


FIGURE 8.5 – Comparaison des valeurs *RMS* de la vitesse v

L'épaississement de la sous-couche visqueuse accompagne généralement les mécanismes de réduction de contrainte pariétale. Dans notre cas, ce phénomène est également constaté (figure 8.7) car l'épaisseur de la sous-couche visqueuse passe de 5 à 7 unités pariétales provoquant ainsi la translation de la couche logarithmique.

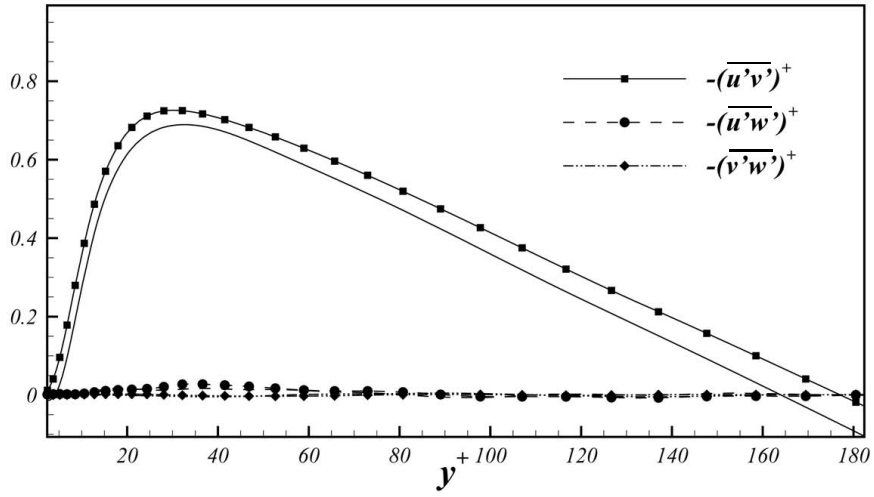


FIGURE 8.6 – Comparaison des contraintes de Reynolds

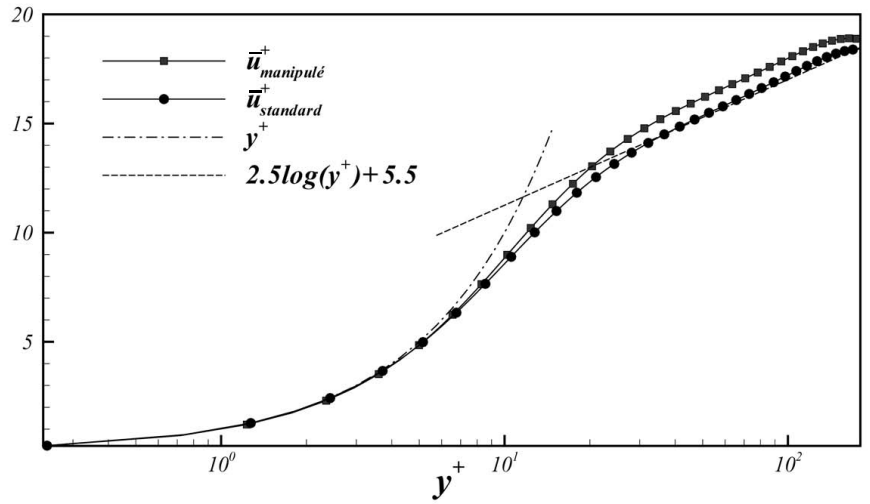


FIGURE 8.7 – Comparaison de la vitesse moyenne longitudinale adimensionnalisée par les variables internes et locales

La structure fine de la turbulence peut être analysée à travers le facteur de dissymétrie (S, figure 8.8) et d'aplatissement (F, figure 8.9) des fluctuations de vitesse. On peut remarquer que le S et le F des composantes u' et w' ne sont pas affectés par l'application du contrôle. En revanche, la vitesse verticale v' est fortement modifiée pour $y^+ \leq 20$. La sous-couche tampon inférieure ($5 < y^+ < 15$) est dominée par les balayages, soit $u' > 0$ et $v' < 0$, se traduisant par $S(u') > 0$ et $S(v') < 0$. Le contrôle affecte profondément le facteur de dissymétrie des vitesses verticales qui devient $S(v') > 0$ dans la sous-couche visqueuse tandis que $S(u') > 0$ n'est pas altéré. Les événements $v' > 0$ et $u' > 0$ prédominent pour $y^+ < 5$, et sont à l'origine d'une création de contraintes de Reynolds négatives $\overline{u'v'} < 0$

dans cette zone. C'est effectivement ce que l'on constate sur la figure 4.10 qui présente la distribution de la corrélation $C = \frac{\overline{u'v'}}{u'_{RMS}v'_{RMS}}$ dans le cas standard et contrôlé.

Le terme $-\overline{u'v'} < 0$ résulte en une production négative de l'énergie cinétique moyenne $-\overline{u'v'}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} < 0$. Ceci est évidemment bénéfique en terme de réduction de traînée mais la contrainte de Reynolds est très faible dans la sous-couche visqueuse et ne contribue que très peu au frottement.

Les fluctuations de vitesse verticale sont très intermittentes dans la sous-couche tampon et le facteur d'aplatissement $F(v')$ peut atteindre des valeurs proches de 20 à la paroi alors que dans le cas contrôlé l'action à la paroi diminue énormément $F(v')$ (figure 8.9). Le contrôle suboptimal affecte donc principalement la structure fine des fluctuations verticales de vitesse.

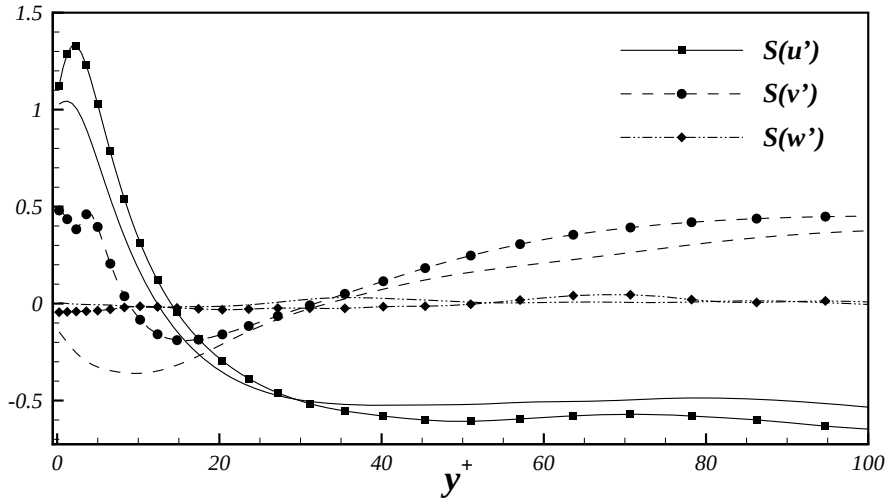


FIGURE 8.8 – Comparaison du facteur de dissymétrie

Les distributions des quantités *RMS* de la vorticité ω'_x, ω'_y et ω'_z sont reportées sur la figure 8.10. Elles sont adimensionnalisées par rapport à la vitesse de frottement locale.

Les deux premières composantes ont des évolutions similaires et présentent une légère augmentation de $\omega'_{x,RMS}$ et $\omega'_{y,RMS}$ lors de l'application du contrôle. La caractéristique la plus frappante est certainement la forte diminution de l'activité turbulente que subit la vorticité transverse. On peut clairement remarquer sur la figure 8.10 que $\omega'_{z,RMS}$ diminue en-dessous de $y^+ = 5$ pouvant même atteindre une réduction de 50% par rapport au cas standard à la paroi. La valeur de $\omega'_{z,RMS}$ en $y^+ = 0$ correspond à l'intensité turbulente de la contrainte τ'_{RMS}. De ce fait, τ'_{RMS} est réduit d'un facteur 2 tandis qu'on obtient seulement une diminution approximative de 10% pour la contrainte moyenne. Ce comportement peut être aussi constaté sur les champs présentés sur les figures 8.11 et 8.12 (respectivement le cas non contrôlé et contrôlé). Sur ces figures, on reporte à la fois les contraintes pariétales

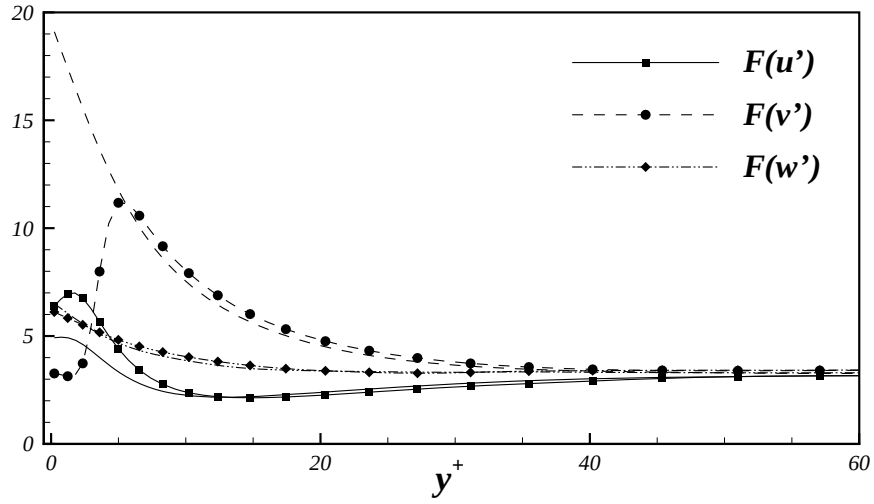


FIGURE 8.9 – Comparaison du facteur d'aplatissement

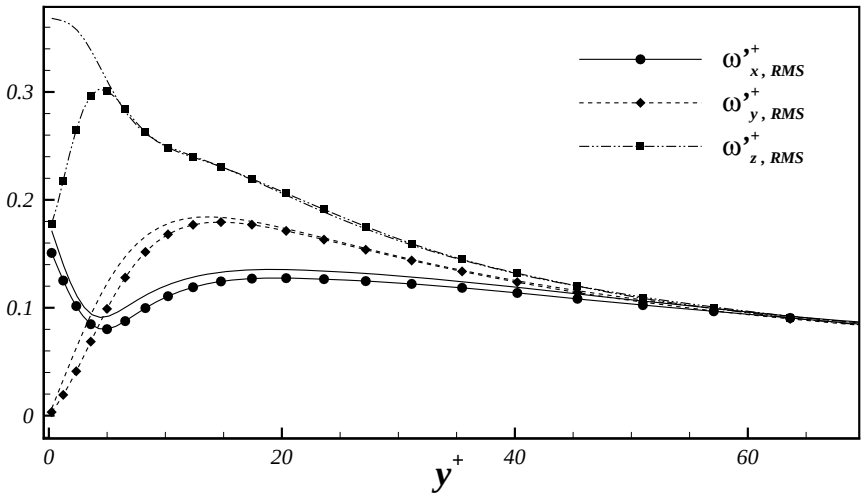


FIGURE 8.10 – Comparaison des valeurs *RMS* des composantes de vorticité

instantanées mais aussi les structures cohérentes détectées par une méthode λ_2. Dans le cas contrôlé, le nombre de vortex a sensiblement diminué et on remarque que les zones de hautes activités turbulentes (figure 8.11) ont disparu (figure 8.12). La suppression de l'activité pariétale n'est donc pas accompagnée d'une diminution importante de la contrainte et provoque un déséquilibre de la turbulence de proche paroi dans la sous-couche visqueuse.

Ce comportement est assez proche de celui qu'on peut observer lors de l'application d'un contrôle de type *Ad-Hoc* (Choi *et al.* [1994]). On rappelle que lors de ce dernier, les vitesses imposées à la paroi sont choisies instantanément comme l'opposé des vitesses fluctuantes verticales dans la sous-couche tampon inférieure (en $y^+ = 10$).

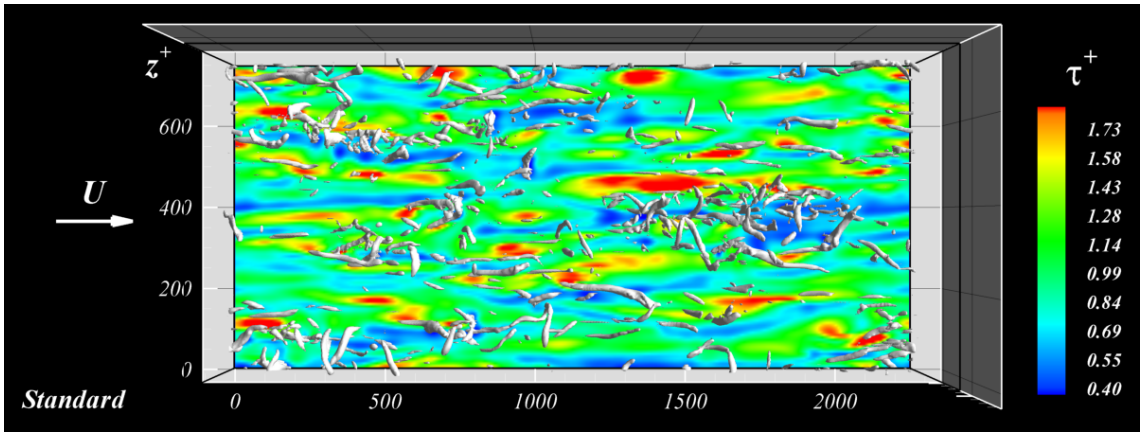


FIGURE 8.11 – Champ instantané de contrainte pariétale dans le cas d'un écoulement non manipulé. Les structures cohérentes sont détectées par une méthode λ_2

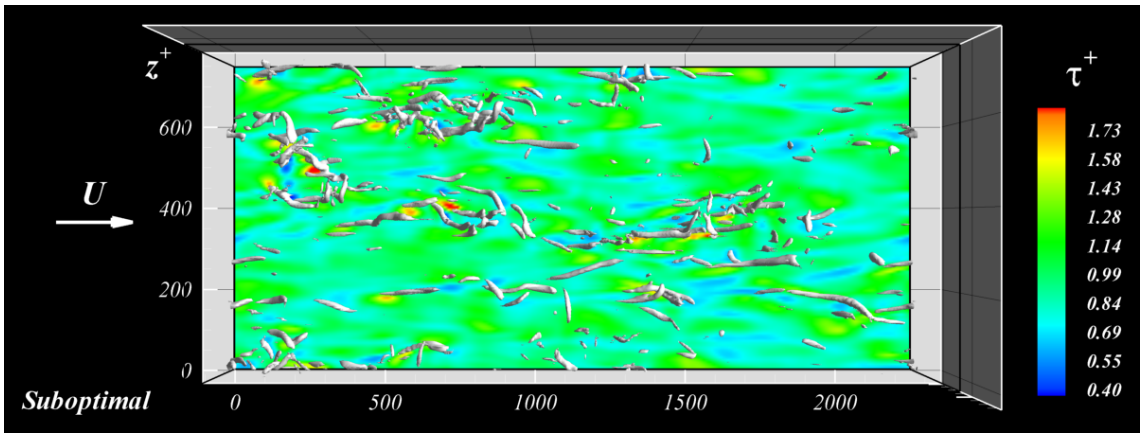


FIGURE 8.12 – Même figure que 8.11 mais dans le cas de l'application d'un contrôle suboptimal

On peut résumer cette manipulation à : $v'^+(x^+,y^+ = 0,z^+,t^+) = -v'^+(x^+,y^+ = 10,z^+,t^+)$.

L'application d'un tel contrôle résulte en l'obtention de 25% de réduction de la contrainte pariétale.

Sur la figure 8.13 est comparée la distribution $\omega'_{z,RMS}$ résultant d'une stratégie $Ad-Hoc$ et Suboptimale. Les fluctuations de vorticité transverse décroissent dans les deux cas dans la sous-couche tampon mais $\omega'_{z,RMS}$ est plus faible dans le cas suboptimal.

L'équation de transport de la vorticité moyenne transversale $\Omega_z = -\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}$ ($= \overline{\omega_z}$ changement de notation pour plus de lisibilité) pour un écoulement en canal et présentant une homogénéité dans la direction longitudinale et transverse, s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}\Omega_z = \overline{\omega'_i \frac{\partial w'}{\partial x_i}} - \frac{\partial}{\partial y}\overline{v'\omega'_z} + \nu\frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial y^2} \tag{8.2}$$

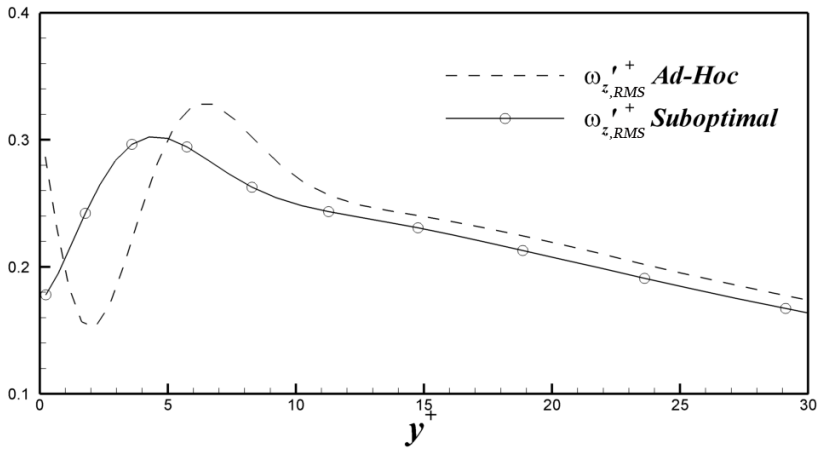


FIGURE 8.13 – Distribution de la vorticité transverse *RMS* dans le cas d'un contrôle suboptimal et *Ad − Hoc*

Le premier terme du coté droit de l'équation 8.2 est la production P_{Ω_z} par étirement (vorticité transverse), inclinaison (vorticité normale) et déformation (vorticité longitudinale) alors que le dernier représente la diffusion visqueuse. Le second terme $B = -\frac{\partial}{\partial y}\overline{v'\omega_z'}$ rend compte de l'advection ou de la force volumique turbulente. A la paroi, sa valeur est nulle dans les cas manipulé et non-manipulé car $\frac{\partial v'}{\partial y} = 0$ en $y^+ = 0$ (par continuité) et ainsi $(v'\omega_z')^+ \propto y^{+2}$ de manière asymptotique. Pour le contrôle suboptimal, le flux $v'\omega_z'$ est positif dans la partie $y^+ < 2$ de la sous-couche visqueuse (figure 8.14). La vorticité transverse étant $\Omega_z = -\frac{\partial u}{\partial y} < 0$, le terme $B > 0$ en $y^+ < 5$ est bénéfique pour la réduction de contrainte turbulente. On précise que les quantités présentées sur la figure 8.14 sont adimensionnalisées par rapport à la viscosité et la vitesse de frottement dans le cas standard afin de visualiser plus aisément les différences de comportement.

La production P_{Ω_z} décroît approximativement de la même façon que la contrainte moyenne. Son expression peut se réduire à :

$$P_{\Omega_z} = \overline{\frac{\partial v'}{\partial z}\frac{\partial w'}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial u'}{\partial z}\frac{\partial w'}{\partial y}} + \overline{\omega_z'\frac{\partial w'}{\partial z}} \tag{8.3}$$

Une étude approfondie des termes de l'équation 8.3 a montré que toutes les composantes (étirement, inclinaison et déformation) étaient affectées de manière similaire par le contrôle.

L'intensité turbulente des fluctuations de vorticité transverse est gouvernée par :

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\overline{\omega_z'^2} = P_{\omega_z'} - T_{\omega_z'} - \epsilon_{\omega_z'} + D_{\omega_z'} \tag{8.4}$$

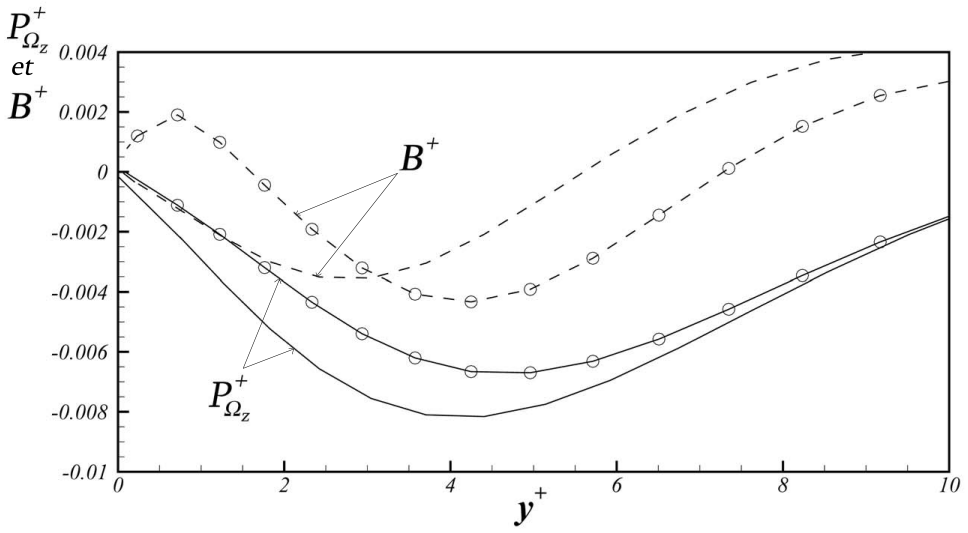


FIGURE 8.14 – Distribution de la production (ligne pleine) et de la force volumique turbulente (ligne en tirets) dans le cas contrôlé (symboles) et standard (sans symbole). Les quantités sont adimensionnalisées par rapport au cas non manipulé.

où les termes correspondant à la production, au transport turbulent, à la dissipation et à la diffusion sont respectivement :

$$P_{\omega'_z} = \overline{\omega'_z \omega'_i \frac{\partial w'}{\partial x_i}} + \Omega_z \overline{\omega'_z \frac{\partial w'}{\partial z}}$$

$$T_{\omega'_z} = \frac{1}{2} \overline{u'_i \frac{\partial \omega'^2_z}{\partial x_i}} + \overline{v' \omega'_z} \frac{\partial \Omega_z}{\partial y}$$

$$\epsilon_{\omega'_z} = \overline{\nu \left\{ \left(\frac{\partial \omega'_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega'_z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega'_z}{\partial z} \right)^2 \right\}}$$

$$D_{\omega'_z} = \nu \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial^2 \omega'_z}{\partial x_i \partial x_i}}$$

Les résultats présentés sur les figures 8.15 et 8.16 expliquent la réduction drastique de $\omega'_{z,RMS}$ dans la sous-couche visqueuse (figure 8.10). La différence entre la production et la dissipation ($P_{\omega'_z} - \epsilon_{\omega'_z}$ sur la figure 8.15) décroît brutalement pour $y^+ < 4$ jusqu'à devenir négative dans une très fine couche aux abords de la paroi ($y^+ < 2$). Les termes qui contribuent le plus intensément à la décroissance de la production sont reliés à $\frac{\partial w'}{\partial z}$ et proviennent ainsi de la composante d'étirement de la vorticité transverse, c'est à dire $\overline{\omega'_z \omega'_z \frac{\partial w'}{\partial z}}$ et $\Omega_z \overline{\omega'_z \frac{\partial w'}{\partial z}}$ (non montré ici).

La dissipation (figure 8.16), dont le terme prépondérant est $\left(\frac{\partial \omega'_z}{\partial y} \right)^2$, décroît de manière prévisible dans la sous-couche tampon mais augmente fortement pour $y^+ < 2$ provoquant ainsi $P_{\omega'_z} < \epsilon_{\omega'_z}$. Ceci se traduit par une forte diminution de l'activité turbulente $\omega'_{z,RMS}$ à la paroi.

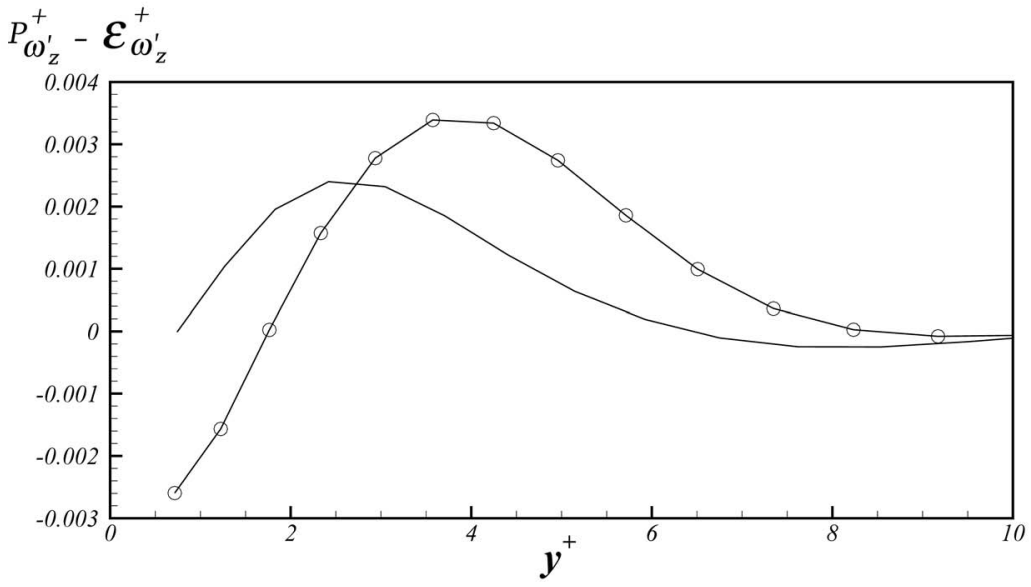


FIGURE 8.15 – Évolution de la différence entre le terme de production et de dissipation provenant de l'équation de transport de la vorticité transversale fluctuante. Comme précédemment, les symboles représentent le cas contrôlé et la ligne pleine le cas standard

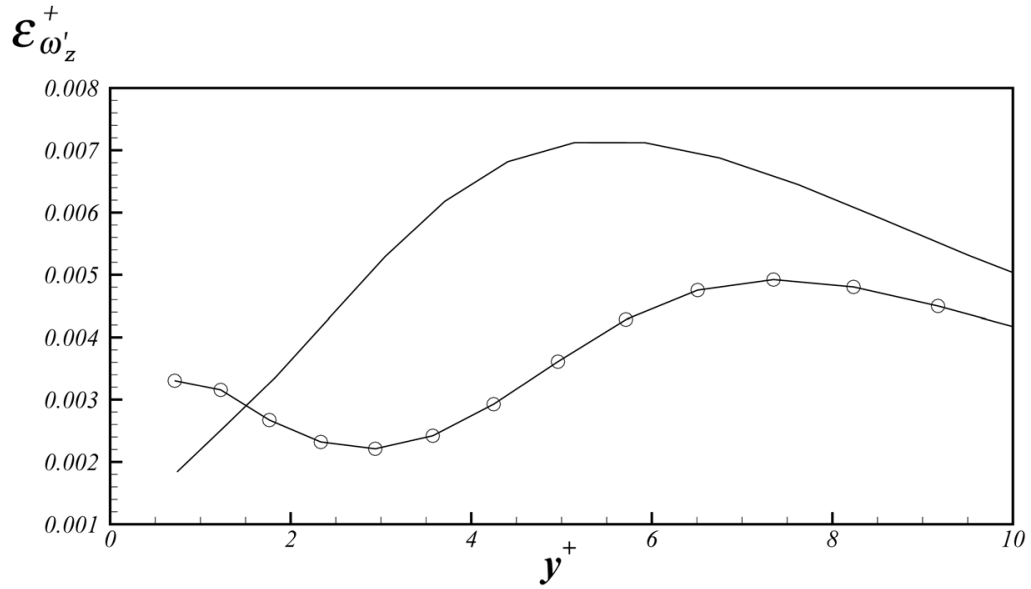


FIGURE 8.16 – Évolution du terme de dissipation provenant de l'équation de transport de la vorticité transversale fluctuante

Le flux instantané de vorticité transverse à la paroi peut être relié au gradient de pression longitudinal par : $-\nu\left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y=0}$. Une renforcement de $\left(\frac{\partial \omega'_z}{\partial y}\right)^2$ engendre donc une augmentation de $\left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right)^2$.

Un contrôle actif basé sur ces considérations a été précédemment étudié par Koumoutsakos [1999]. Cette stratégie qui impose un flux de vorticité opposé à celui mesuré résulte en une diminution de 40% de la contrainte pariétale. Cependant, l'amplitude des vitesses d'aspirations/soufflages nécessaires est tellement importante ($\approx$ 10% de la vitesse débitante longitudinale) qu'on ne peut plus considérer cette méthode comme un contrôle actif mais plutôt comme un forçage à la paroi.

8.2.2.2 Discussion

On a montré dans le paragraphe précédent qu'une stratégie de contrôle suboptimal basée directement sur la contrainte à la paroi, n'affectait significativement que la moitié inférieure de la sous-couche visqueuse. L'efficacité de cette méthode est assez limitée en terme de réduction de frottement, mais affecte profondément son activité turbulente. La contrainte pariétale moyenne est réduite grâce à la diminution de la production de vorticité moyenne mais aussi par l'augmentation de la force volumique turbulente dans la sous-couche visqueuse. Le contrôle suboptimal engendre une dissipation importante qui surpasse la production dans la zone $y^+ < 2$. Ceci provoque la décroissance importante des fluctuations de frottement à la paroi ($\approx$ 50%).

L'équation de transport de la contrainte pariétale moyenne peut être réduite à une simple équation de diffusion :

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\tau} = \nu \frac{\partial^2 \overline{\tau}}{\partial y^2} \tag{8.5}$$

La relation 8.5 est valable non seulement pour un écoulement standard mais aussi pour un écoulement manipulé par des vitesses normales à la paroi. Seule, cette équation ne donne pas d'information directe sur la façon d'améliorer le contrôle. Dans la sous-couche visqueuse, où on peut considérer que $\Omega_z = -\tau$, la contrainte peut être manipulée en agissant sur les termes de production de la vorticité Ω_z et/ou sur le terme de force volumique turbulente $\frac{\partial}{\partial y}\overline{v'\omega_z'}$. En effet, les régions où $\frac{\partial}{\partial y}\overline{v'\omega_z'} < 0$ diminuent la contrainte. Ainsi, pour être efficace, un contrôle devrait augmenter l'intensité des corrélations $\frac{\partial}{\partial y}\overline{v'\omega_z'} < 0$ et supprimer les zones où $\frac{\partial}{\partial y}\overline{v'\omega_z'} > 0$. Or dans la sous-couche visqueuse, on a $\frac{\partial}{\partial y}\overline{v'\omega_z'} \approx \omega_z'\frac{\partial v'}{\partial y}$. On pourrait alors imaginer et suggérer une stratégie de contrôle basée sur les éjections ($v' > 0, \frac{\partial v'}{\partial y} > 0$) et les balayages ($v' < 0, \frac{\partial v'}{\partial y} < 0$) comme le montre le schéma 8.17.

Un contrôle actif imposant une vitesse transversale w à la paroi semble beaucoup plus adapté car l'équation de transport de la contrainte s'en trouve modifiée. Elle s'écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\tau} = -2\rho\nu\left(\overline{\omega_z'\frac{\partial w'}{\partial z}}\right)_{y=0} + \nu\frac{\partial^2\overline{\tau}}{\partial y^2} \tag{8.6}$$

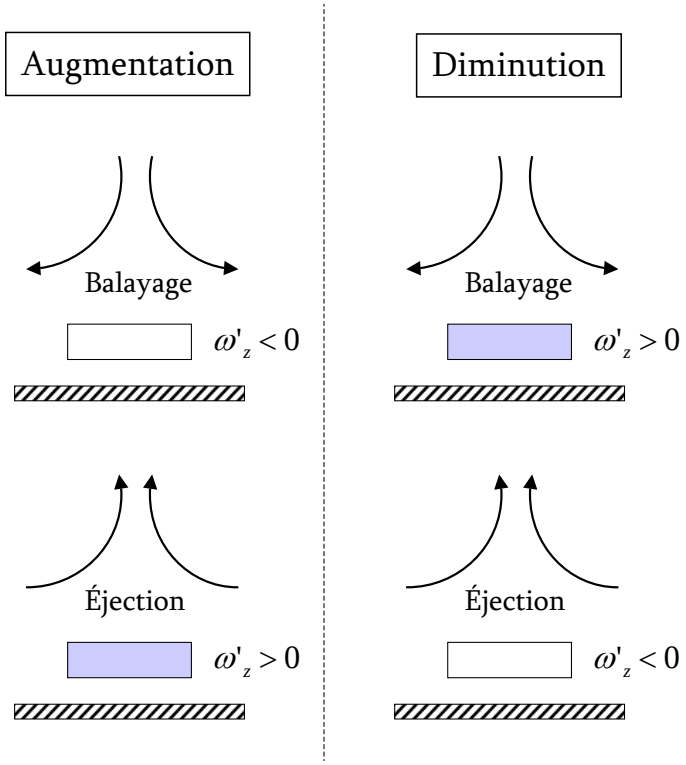


FIGURE 8.17 – Mécanisme de réduction de contrainte pariétale

où ρ représente ici la densité. Du fait de la vitesse transverse à la paroi, le terme $\left(\overline{\omega'_z \frac{\partial w'}{\partial z}}\right)_{y=0}$ n'est pas nul et $\left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)_{y=0} = -\left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)_{y=0} \neq 0$ par continuité. La combinaison de la force volumique turbulente et de l'étirement à la paroi donne naissance au premier terme de la partie droite de l'équation 8.6 qui est une relation exacte et non une approximation. En effet, on obtient $\left(\overline{\omega'_z \frac{\partial w'}{\partial z}}\right)_{y=0} = -\left(\overline{\omega'_z \frac{\partial v'}{\partial y}}\right)_{y=0}$ et la même stratégie de contrôle présentée sur la figure 8.17 peut en être déduite. La différence fondamentale est que, maintenant, la paroi est affectée par une vitesse transversale w.

Ces arguments peuvent expliquer pourquoi un contrôle actif, dont la fonction de coût est directement basée sur la contrainte pariétale, n'est pas très efficace lorsqu'on manipule l'écoulement par un jeu d'aspirations/soufflages à la paroi.

Même dans le cas d'un contrôle optimal comportant un horizon de prédiction important, la réduction maximale obtenue est de 40% tandis qu'on peut obtenir une relaminarisation complète en contrôlant l'énergie cinétique.

Les stratégies de contrôle se basant sur des vitesses transverses à la paroi (Lee *et al.* [1990]) ou sur un gradient de vitesse transverse (Lee & Kim [2002]) donnent, quant à elles, des résultats prometteurs.

8.3 Contrôle par recherche itérative

La méthode du pas de recherche constant, présentée précédemment, a ses limites car même si le paramètre p est choisi de manière à diminuer au mieux la fonction de coût, son action reste globale et ne s'affine pas à chaque itération temporelle. On cherche donc ici à améliorer la méthode de mise à jour de la distribution ϕ en proposant une modification dynamique du paramètre p^m. Afin de permettre au contrôle de s'adapter un peu plus à la situation, on implémente une recherche itérative de minima, où plusieurs essais permettront d'identifier une distribution d'aspirations/soufflages plus adéquate.

On introduit alors la notion d'*itérations temporelles anticipées*.

8.3.1 Itérations temporelles anticipées

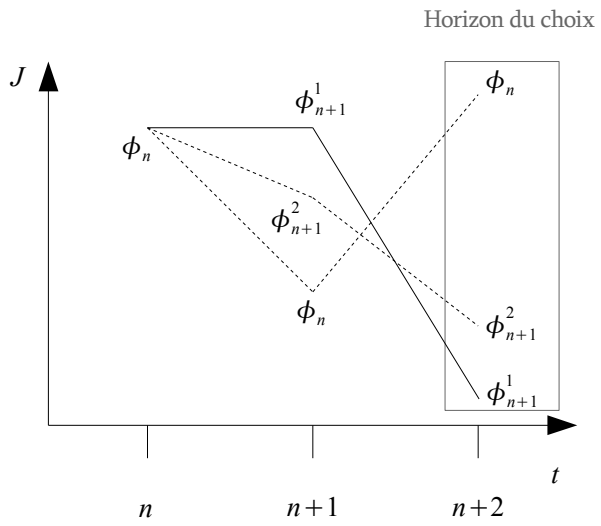


FIGURE 8.18 – Les itérations anticipées

La figure 8.18 montre les différentes étapes nécessaires à cette nouvelle résolution. A partir du temps n, on cherche à trouver la meilleure fonction de soufflage à appliquer en t_{n+1} de manière à réduire la fonction de coût en $n+2$.

Cette stratégie de contrôle est basée sur une recherche de minima en $n+2$ mais en se basant sur **la direction obtenue en** $n+1$. En effet, la contrainte pariétale, et donc la fonction de coût, ne peut être substantiellement modifiée lors d'une application soudaine de conditions aux limites. Dans ces conditions, une recherche de minima s'avère infructueuse. Une durée d'approximativement $\Delta t^+ \approx \Delta y^{+2}$ est nécessaire pour que l'information à la paroi diffuse jusqu'au premier point de grille résolu. Ce premier point, nécessaire à l'estimation de la contrainte est positionné en $\Delta y^+ = 0.1$ ce qui résulte en un temps de diffusion d'à peu près $\Delta t^+ = 0.01$. Ce délai correspond effectivement au pas d'avancement temporel utilisé pour notre simulation et c'est pourquoi la recherche est effectuée en $n+2$ et non en $n+1$.

8.3.2 Méthodes de recherche itérative

8.3.2.1 En recalculant le gradient de la fonction de coût

Comme précisé précédemment, dans le cas d'une recherche de minimum, la mise à jour de la distribution ϕ modifie $\overrightarrow{grad}J$. La résolution du problème adjoint fournit alors une nouvelle direction qui sera réutilisée afin de converger vers un minimum de J si il en existe un à proximité immédiate (recherche de minima locaux). Dans le cas du contrôle avec pas constant, l'utilisateur doit choisir une valeur fixe de paramètre de descente p qui sera appliquée sur cette direction.

Dans le cas présent, le paramètre p^m sera dépendant des résultats obtenus par les itérations temporelles anticipées. De manière plus explicite, si la distribution initiale est ϕ_{init} en n, on commence par calculer $\overrightarrow{grad}J$ en $n+1$ et on se déplace dans la direction indiquée (on suit cette direction pour mettre à jour la fonction de soufflage). On effectue l'itération temporelle anticipée entre $n+1$ et $n+2$ en imposant $\phi^{n+2} = \phi^{n+1}$ afin que l'information à la paroi ait le temps de diffuser jusqu'au premier point de grille. Si la fonction de coût diminue en $n+2$, alors le paramètre p est modifié et le processus recommence (calcul d'un nouveau gradient, etc.) jusqu'à ce que la fonction J ne diminue plus ou commence à croître. Le minimum est ainsi localisé.

Dans notre cas, la modification du paramètre de descente p prend la forme : $p^{m+1} = \frac{p^m}{2}$. On considère ainsi qu'à chaque évaluation, on se rapproche un peu plus de la configuration optimale.

Les résultats obtenus par cette méthode sont présentés sur la figure 8.19. On remarque une diminution approximative de 2% de la contrainte moyenne turbulente entre le contrôle basé sur une recherche itérative par réévaluation de $\overrightarrow{grad}J$ et le contrôle à pas constant.

Cependant, le coût numérique engendré par la recherche de minima est beaucoup trop important pour justifier le gain obtenu. En effet, dans le cas d'un calcul sans itération, on résout l'équivalent de trois Simulations Numériques Directes pour chaque avancement temporel de l'écoulement, contre quatorze en moyenne dans le cas où on effectue la recherche de minimum avec itérations anticipées.

8.3.2.2 Sans recalculer le gradient de la fonction de coût

Une autre approche, plus rapide, consiste à conserver le gradient de la fonction de coût pour la recherche itérative. Auquel cas, on effectuera un seul calcul du problème adjoint par pas de temps et les tentatives de localisation de minima seront réalisées avec le même gradient (c'est à dire la même direction de modification du soufflage), mais avec des valeurs différentes du paramètre p.

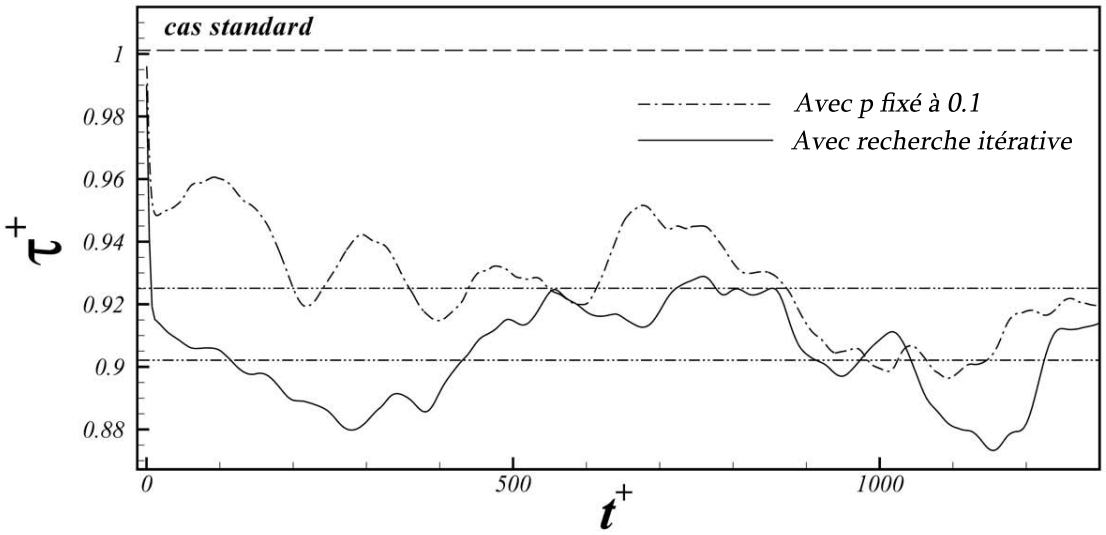


FIGURE 8.19 – Évolution temporelle des contraintes dans le cas de contrôles suboptimaux sans recherche de minima (p fixé) et avec une recherche itérative réévaluant le gradient de la fonction de coût

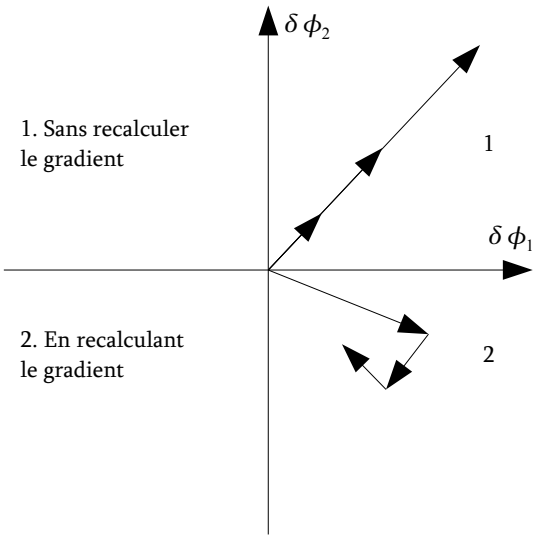


FIGURE 8.20 – Comparaison des méthodes de recherche de minima recalculant ou non le gradient entre chaque itération

Comme le montre la figure 8.20, cette méthode consiste à définir une "ligne" de mise à jour car les différentes possibilités de modifications apportées à la fonction de soufflage seront toutes colinéaires. On choisira ensuite la meilleure distribution de ϕ parmi les différentes tentatives effectuées dans cette direction.

Bien que moins coûteuse que la recherche complète de minimum, cette méthode n'a pas donné de résultats satisfaisants et ne sera donc pas retenue.

8.4 Conclusions

Un contrôle suboptimal dont la fonction de coût est directement dépendante de la contrainte pariétale, a été appliqué à un canal turbulent et résolu par Simulation Numérique Directe. Son effet sur la structure fine de la turbulence de proche paroi a été analysé principalement par l'intermédiaire des équations de transport de la vorticité transverse. On a pu ainsi constater que le contrôle influençait principalement la moitié inférieure de la sous-couche visqueuse. L'efficacité de la stratégie suboptimale est limitée en terme de diminution moyenne de contrainte pariétale (de 8 à 10%) mais affecte significativement son intensité turbulente ($\approx 50\%$).

Deux stratégies itératives visant à réduire la fonction de coût ont été étudiées. Pour l'une d'elles, une amélioration sensible de la réduction de contrainte a pu être constatée par rapport au cas où on n'effectue aucune recherche de minimum. Mais le coût numérique nécessaire à cette résolution est beaucoup trop important et le gain obtenu ne justifie pas son utilisation.

Chapitre 9

Étude d'un contrôle actif dual

9.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude numérique d'un contrôle actif dual (ou hybride). On choisit ici de combiner deux manipulations distinctes : un contrôle en boucle ouverte suivi d'un contrôle en boucle fermée. L'analyse portera ici essentiellement sur la capacité de ce dernier à s'adapter aux modifications imposées par une action périodique en temps et localisée en espace.

9.2 Problématique

On a vu dans le premier chapitre qu'un contrôle dual visait à organiser structurellement la turbulence de proche paroi afin d'en améliorer la prédictabilité et, de ce fait, la contrôlabilité (obtention d'une meilleure réduction de traînée dans notre cas).

Rappelons qu'un processus stochastique $S[\omega]$, tel que la turbulence de proche paroi, peut être décomposé de la manière suivante :

$$S[\omega] = S_\alpha[\omega] + S_\beta[\omega] \tag{9.1}$$

où $S_\alpha[\omega]$ est la composante régulière (imprédictible) et $S_\beta[\omega]$ la composante prédictible. L'équation 9.1 est généralement appelée *Décomposition de Wold*.

L'idée conductrice consiste à filtrer la composante régulière par application d'un soufflage périodique, ici sinusoïdal, dans l'optique de donner plus de poids au processus prédictible (déterministe).

La figure 9.1 reprend le schéma présenté dans le premier chapitre mais, dans ce cas, seulement une raie spectrale est forcée par application d'une unique excitation sinusoïdale pure. La fréquence de soufflage est alors choisie de façon à être proche de la fréquence

d'éjection (*bursting*) de manière à influer principalement sur la production d'énergie cinétique turbulente.

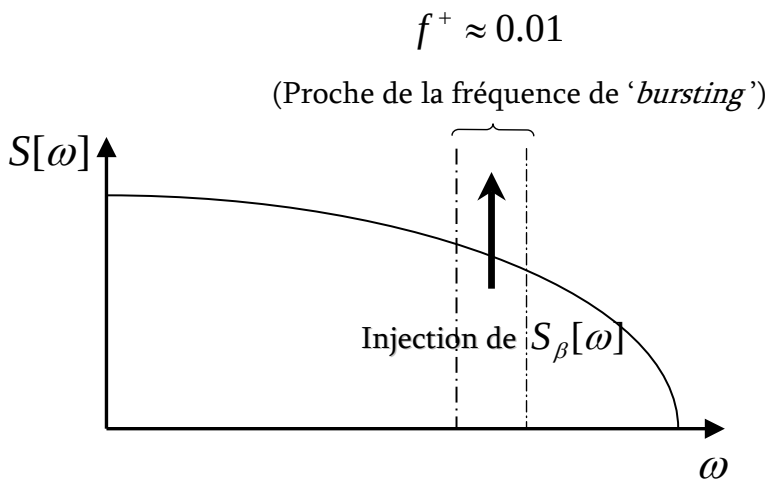


FIGURE 9.1 – Processus stochastique (turbulence de proche paroi) forcé par un soufflage sinusoïdal en temps et dont la fréquence est proche de la fréquence d'éjection.

Un contrôle en boucle fermée est ensuite employé afin de profiter de l'organisation induite par l'excitation instationnaire.

La figure 9.2 illustre comment ces deux types de manipulations sont agencées sur la paroi inférieure du canal turbulent.

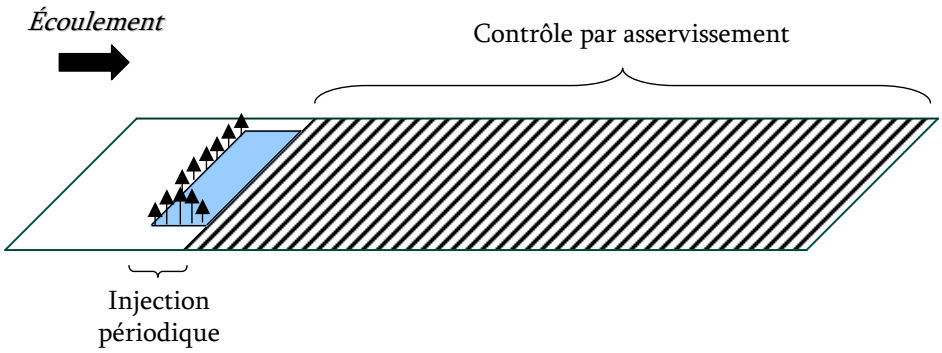


FIGURE 9.2 – Schéma d'application d'un contrôle dual à un écoulement en canal

Sur la première portion du canal, de $x^+ = 0$ (section d'entrée) à $x^+ = 170$, aucun contrôle n'est appliqué. De $x^+ = 170$ à $x^+ = 340$, on impose une excitation sinusoïdale à travers une fente. La taille de la fente choisie dans la direction longitudinale est de $L_x^+ = 170$, la sévérité moyenne est fixée à $\overline{\beta} = 0.005$ avec une fréquence de soufflage de

$f^+ = 0.018$ soit très proche de la fréquence de *bursting*. Le reste de la paroi inférieure du canal est soumis à un contrôle par asservissement de type Ad-Hoc ou Suboptimal.

9.3 Évolution temporelle de la contrainte moyenne

La figure 9.3 montre comment est affectée temporellement la contrainte turbulente lorsque l'écoulement est soumis à différents types de manipulations. On distingue ainsi trois types de contrôles : Sinusoïdal, Suboptimal et Dual. Le premier fait référence à une injection instationnaire localisée et dont la forme temporelle est sinusoïdale. Le second concerne un contrôle suboptimal dont les caractéristiques ont été présentées dans le chapitre 8. On précise que le schéma choisi ne procède qu'à une seule évaluation du gradient de la fonction de coût sans chercher à localiser les minimums, le but étant ici de montrer que l'instationnarité imposée localement augmente la contrôlabilité du système. Le dernier est constitué de la combinaison de ces deux dernières manipulations comme illustré par la figure 9.2.

La moyenne de contrainte est calculée spatialement, pour chaque itération temporelle, sur toute la zone s'étendant du bord aval de la fente jusqu'à la fin du canal ($x^+ \in [340,2260]$. Les moyennes temporelles (droites en traits et pointillés) ne sont établies qu'à partir de $t^+ = 500$, afin d'éviter d'y intégrer le phénomène de transition lié à l'adaptation du contrôle.

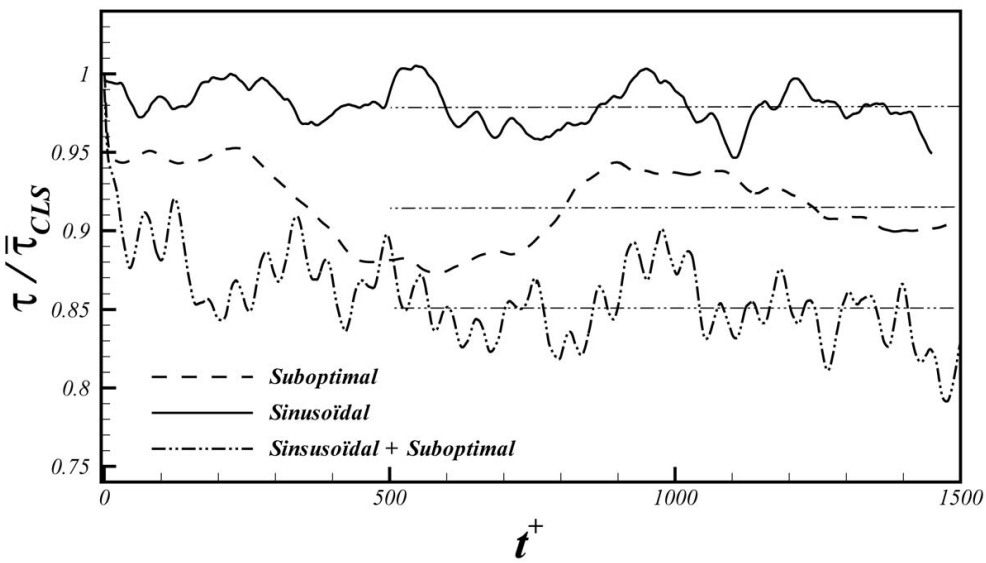


FIGURE 9.3 – Évolution de la contrainte pariétale pour un contrôle dual basé sur un schéma suboptimal

Plusieurs points intéressants peuvent être dégagés de l'analyse de la figure 9.3. Tout d'abord, l'injection sinusoïdale seule ne provoque pas une importante modification du

comportement de la contrainte et mène seulement à 2% de réduction de traînée. Le contrôle suboptimal est évidement plus efficace et engendre une diminution du frottement proche de 9%.

Le contrôle dual quant à lui, réagit d'une manière surprenante. On remarque que la moyenne temporelle de la contrainte est sensiblement affectée et présente une réduction approximative de 15%, soit environ deux fois plus que dans le cas du contrôle suboptimal seul. On peut également remarquer que la réduction de la traînée peut atteindre localement des valeurs aussi importantes que 20%.

De plus, les variations temporelles de la contrainte sont très régulières et présentent une périodicité marquée de forme sinusoïdale. Il est important de souligner que la période de ces oscillations est égale à celle de l'injection à travers la fente.

Ce comportement est singulier car la moyenne spatiale de τ est effectuée sur une grande portion de la paroi après la fente. Ainsi, si on considère que la nappe de vorticité positive créée par le soufflage sinusoïdal (voir 2) est advectée à une vitesse approximative $u^+_{advect} = 7$ et qu'elle est générée à chaque période de soufflage $T^+ = 56$, on peut déduire que la distance séparant chaque minimum de contrainte est proche de $x^+ = 400$. La distance entre le maximum et le minimum est donc logiquement de $x^+ = 200$, et cette dernière n'est pas suffisante pour que la traînée turbulente puisse relaxer complètement. Pour chaque période, on assiste donc à la cohabitation spatiale du minimum et du maximum de contrainte. Dans ces conditions, aucune périodicité marquée ne peut se développer.

Cette hypothèse est vérifiée car aucune oscillation n'est constatée lors d'un contrôle par injection sinusoïdale isolée.

En remplaçant le contrôle suboptimal par un contrôle Ad-hoc (voir chapitre 1) de type v (vertical) ou w (transversal), l'évolution temporelle de la contrainte, dans le cas du contrôle dual, semble bien moins affectée que lors de l'étude précédente (figure 9.4). Pour plus de précisions sur le contrôle type *Ad-Hoc*, voir Annexe D. Même si on constate l'apparition d'une période privilégiée, elle n'est pas aussi marquée que lors de l'utilisation du contrôle suboptimal et aucune réduction de contrainte entre les deux approches (Duale et Ad-Hoc) n'est ici observée.

9.4 Champs instantanés

Les figures 9.5, 9.6 et 9.7 présentent les champs instantanés de traînée turbulente dans le cas d'un contrôle par soufflage seul, suboptimal seul et dual. Ici, la contrainte τ^+ est adimensionnalisée par rapport aux échelles internes obtenues dans le cas d'un écoulement non contrôlé. Une détection par la méthode des λ_2 est utilisée afin d'extraire les structures cohérentes des champs de vitesses instantanées. Les vortex sont identifiés par des valeurs comprises entre $[-0.04, -0.02]$.

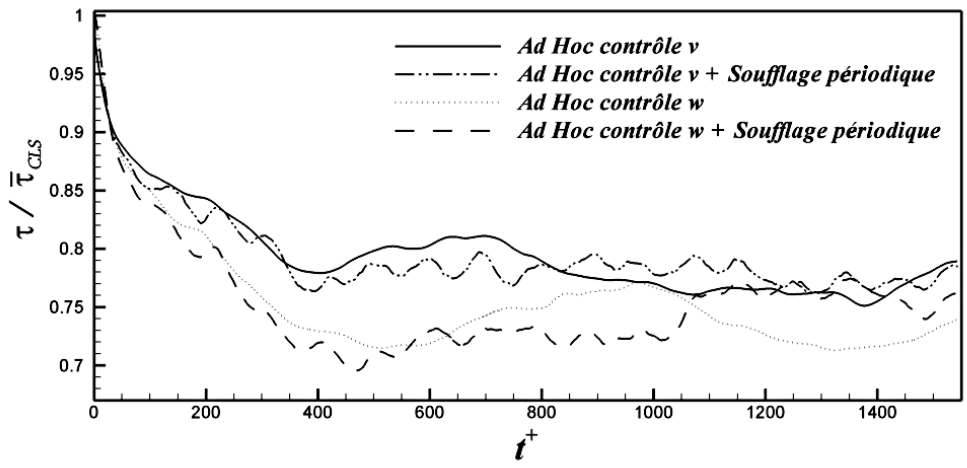


FIGURE 9.4 – Évolution de la contrainte pariétale pour un contrôle Ad-Hoc, type v et w, associé ou non à une injection instationnaire

Lors d'une injection sinusoïdale seule (figure 9.5), la contrainte n'est sensiblement affectée que dans une zone proche du bord aval de la fente. A partir de $x^+ = 1000$, la turbulence de proche paroi a complètement relaxé et on retrouve un comportement similaire à celui d'un écoulement en canal non manipulé. Les structures cohérentes sont dans ce cas intenses, de dimensions plutôt importantes et interagissent avec la paroi afin de créer des zones de hautes et basses vitesses bien distinctes.

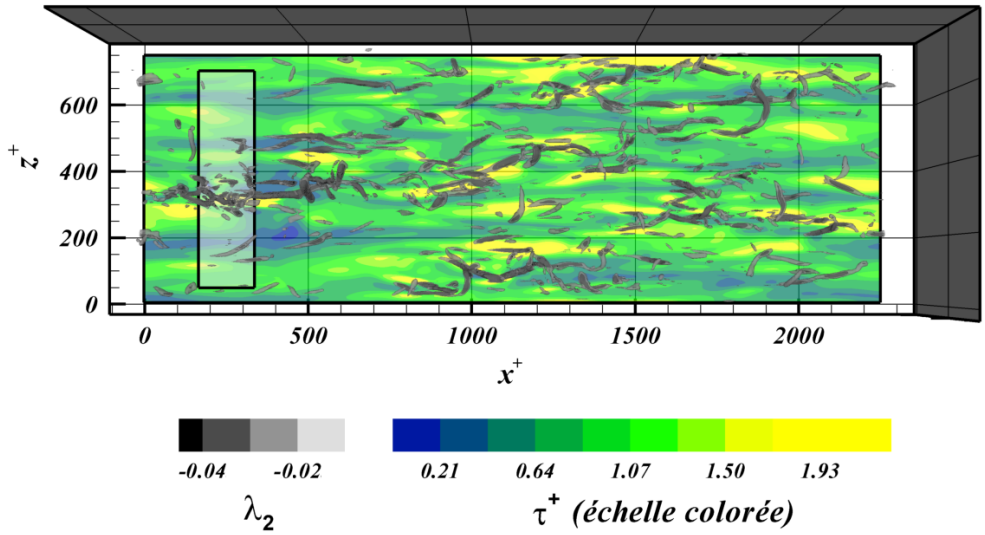


FIGURE 9.5 – Champ instantané de contrainte pariétale et de structures cohérente dans le cas d'un soufflage sinusoïdal seul

La contrainte soumise au contrôle suboptimal réagit très différemment (figure 9.5). Si les fluctuations de vorticité transverse semblent très fortement réduites, la contrainte moyenne n'est diminuée que de 8 ou 9%. La population de structures cohérentes s'est amoindrie, les zones de hautes et basses vitesses sont complètement annihilées, et les seuls vortex restant sont de petites dimensions.

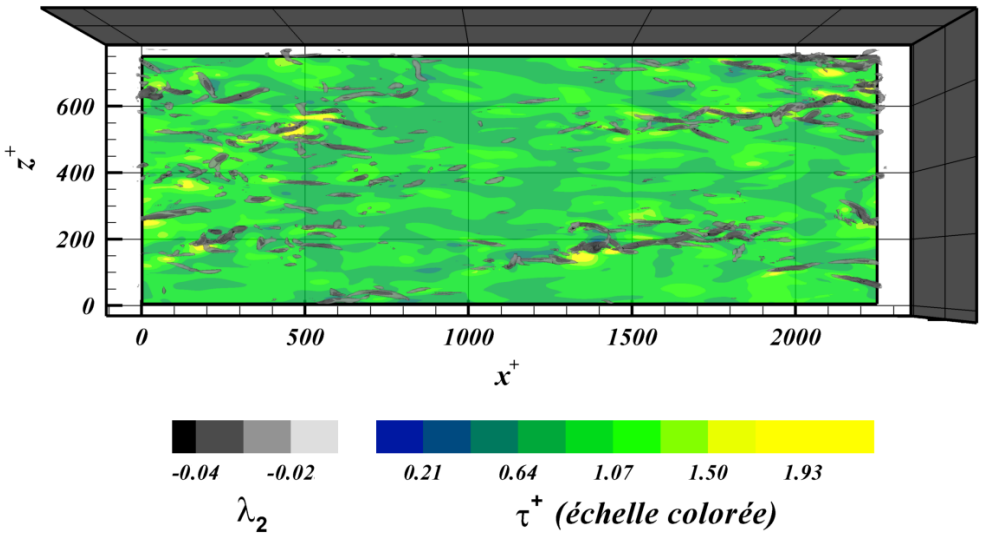


FIGURE 9.6 – Champ instantané de contrainte pariétale et de structures cohérentes dans le cas d'un contrôle suboptimal seul

Le champ instantané dans le cas d'un contrôle dual (Sinusoïdal+Suboptimal) est encore une fois très intéressant à étudier (figure 9.7). L'injection instationnaire crée toujours une région de faible contrainte près de la fente, mais cette fois ci le contrôle suboptimal semble propager ce comportement plus en aval. On constate que les zones de hautes et basses vitesses sont, là encore, très diminuées bien que le nombre de structures soit ici plus important que dans le cas du contrôle suboptimal seul. De plus, sur la première portion du canal où aucune manipulation n'est appliquée, on observe l'apparition rapide de zones de hautes contraintes comme si le processus de relaxation s'établissait sur une distance très courte. Ces remarques montrent que le contrôle suboptimal tend à affecter l'équilibre de la turbulence pariétale en diminuant non seulement l'interaction des structures cohérentes avec la paroi mais en propageant aussi l'effet du soufflage sur une plus grande distance. Cet équilibre est fragile du fait de la faible pénétration de son action dans l'écoulement qui s'étend approximativement sur la demi-épaisseur de la sous-couche visqueuse.

Les figures 9.8 et 9.9 présentent respectivement le champ instantané des vitesses imposées à la paroi dans le cas du contrôle suboptimal et du contrôle dual. Dans les deux cas, le comportement est très similaire et on remarque que le contrôle par asservissement a tendance à imposer des vitesses plus conséquentes aux zones où les structures évoluent.

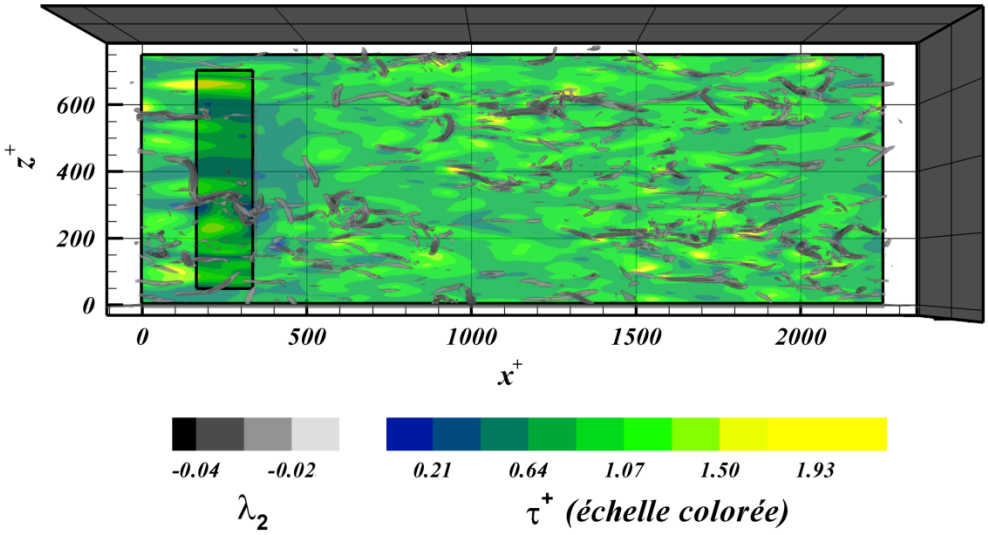


FIGURE 9.7 – Champ instantané de contrainte pariétale et de structures cohérentes dans le cas d'un contrôle dual

Notons que les amplitudes de vitesses sont identiques dans les deux cas avec une norme maximale de $|v_0{}^+| = 0.16$ et une valeur *RMS* moyenne de 0.05. L'action à la paroi est donc très faible et représente au maximum $1/100^{ème}$ de la vitesse au centre du canal. On précise aussi que l'intégrale des vitesses v_0 est nulle à chaque pas de temps du calcul et sur la portion du canal où le contrôle par asservissement est appliqué.

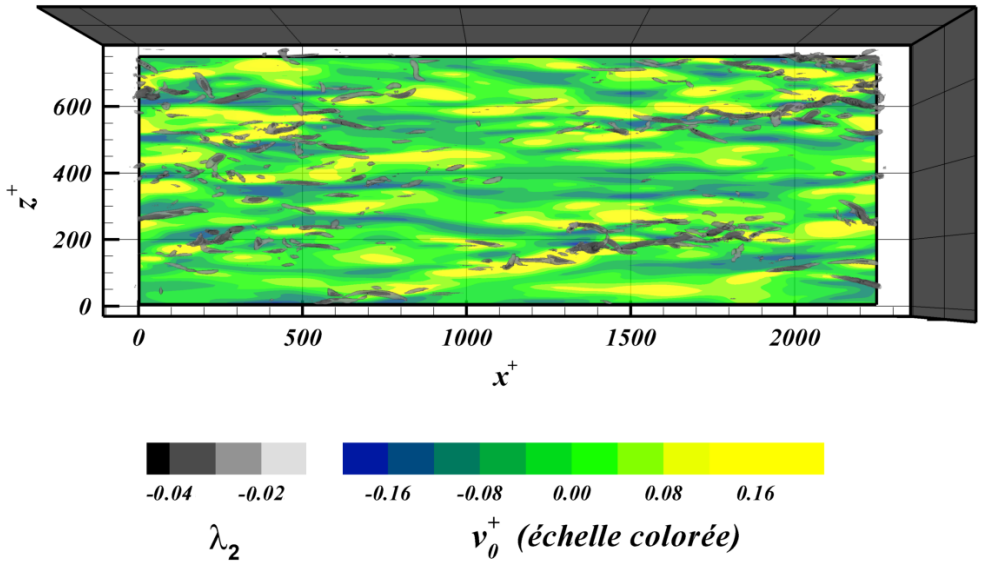


FIGURE 9.8 – Distribution instantanée du jeu de soufflages/aspirations à la paroi dans le cas du contrôle suboptimal

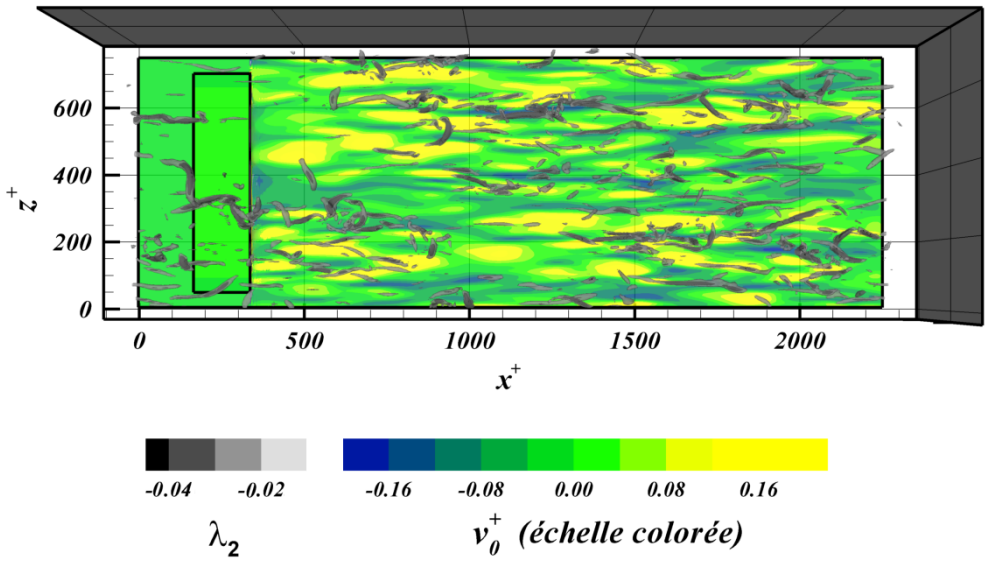


FIGURE 9.9 – Distribution instantanée du jeu de soufflages/aspirations à la paroi dans le cas du contrôle dual

9.5 Moyennes de phase

Les moyennes de phase sont très utiles afin de dégager les informations instationnaires et locales liées au contrôle. Les statistiques présentées dans cette section ont été obtenues sur 200.000 itérations temporelles représentant un temps total de 15.000 unités pariétales. Le calcul requiert 2000 heures CPU (1.45 Ghz, 64 bit, POWER4), soit une durée approximative de 3 mois sur un simple processeur.

Les figures 9.11 et 9.12 présentent les évolutions de la moyenne de phase des contraintes, suivant la direction longitudinale de l'écoulement, pour une injection sinusoïdale et pour un contrôle dual. Elles sont adimensionnalisées par leur homologue dans le cas non contrôlé ($\overline{\tau}_{CLS}$) et seule la région s'étendant à l'aval de la fente est présentée. L'entremêlement des courbes représentant les différentes positions temporelles sur la période de soufflage rend difficile l'interprétation de cette figure. C'est pourquoi on a choisi de mettre en évidence deux temps caractéristiques, $t/T = 0.15$ et $t/T = 0.65$ traduisant respectivement la fin de l'accélération et de la décélération du soufflage (voir figure 9.10).

La figure 9.11 montre que dans le cas d'une injection sinusoïdale seule, la traînée est significativement affectée sur une distance de $x^+ = 600$. Au delà, la relaxation est achevée et on ne constate plus de variations temporelle de la contrainte. On vérifie aussi que la réduction moyenne de la contrainte est proche de 2% comme on le constate sur la figure 9.3.

L'évolution de $\langle\tau\rangle$ à l'aval de la fente semble concorder avec les hypothèses formulées précédemment. Ainsi, à la fin de la décélération ($t/T = 0.65$), la contrainte est minimale en $x^+ = 400$ mais atteint une valeur beaucoup plus importante en $x^+ = 600$, soit 200

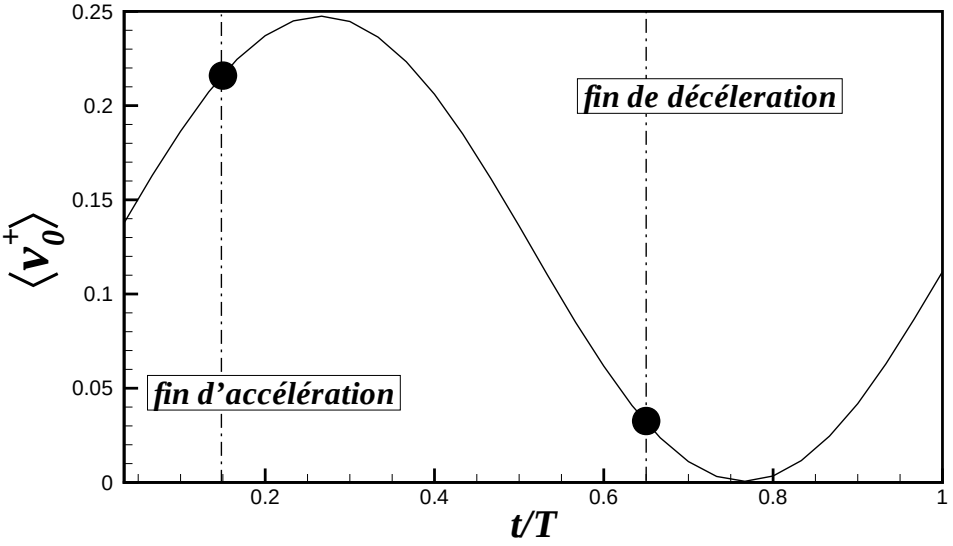


FIGURE 9.10 – Moyenne de phase de la vitesse imposée à travers la fente

unités pariétales plus en aval. Cette distance est celle parcourue par la nappe de vorticité advectée pendant la phase de décélération dont la durée correspond à une demi-période. Un comportement similaire est observé à la fin de l'accélération ($t/T = 0.15$) traduisant le fait que l'évolution spatio-temporelle de la contrainte est en constante opposition de phase et qu'aucune périodicité marquée de la contrainte ne peut être engendrée sur cette portion du canal.

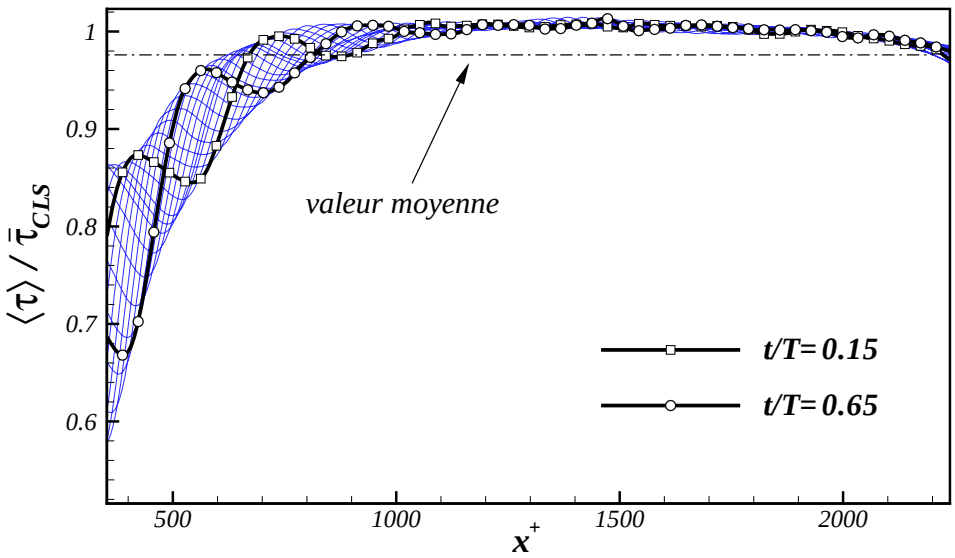


FIGURE 9.11 – Moyennes de phase de la contrainte dans la direction longitudinale pour un soufflage sinusoïdal

Pour un contrôle dual, la traînée montre un comportement similaire sur une distance $x^+ = 600$ à l'aval de la fente, bien que le maximum de contrainte soit maintenant positionné en $x^+ = 400$.

Une distinction fondamentale est toutefois à relever.

A partir de $x^+ = 1000$, alors que dans le cas précédent la relaxation était terminée, la contrainte se stabilise ici à une valeur dépendant de l'état du soufflage. Tout se passe donc comme si le contrôle suboptimal s'adaptait instantanément à l'injection sinusoïdale.

La moyenne spatiale en $t/T = 0.15$ est alors différente de celle obtenue en $t/T = 0.65$ et c'est précisément cet écart ($\approx 3\%$) qui engendre la périodicité constatée sur la figure 9.3.

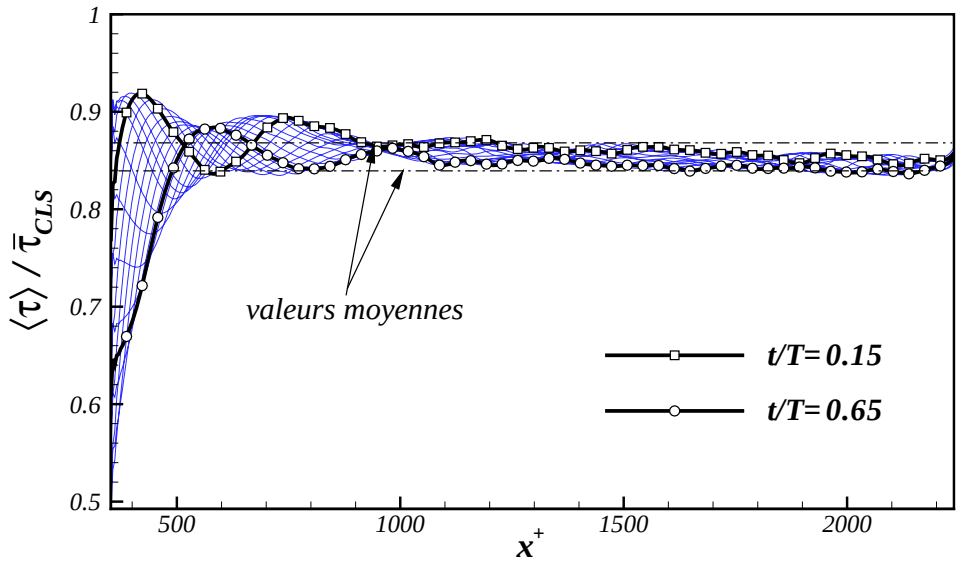


FIGURE 9.12 – Moyennes de phase de la contrainte dans la direction longitudinale pour un contrôle dual

Ce comportement singulier nous permet de formuler deux hypothèses. La première est qu'une périodicité s'est propagée au delà de $x^+ = 1000$ et s'étend à présent sur toute la paroi. La seconde est que, sur cette région, les oscillations de la contrainte ne sont plus en opposition de phase.

Ces hypothèses sont confirmées par l'analyse des figures 9.13 et 9.14 qui présentent respectivement la moyenne de phase des contraintes en plusieurs positions à l'aval de la fente pour l'injection sinusoïdale et pour le contrôle dual.

Sur la figure 9.13 on constate qu'aucune périodicité ne peut être distinguée sur une distance supérieure à $x^+ = 800$ à l'aval de la fente.

En revanche, sur la figure 9.14, des oscillations importantes de la contrainte sont observées sur une distance $x^+ = 700$ après la fente et jusqu'à la fin du canal. Pour chaque position, les amplitudes varient entre 1.5% et 2.5%. Mieux encore, les oscillations sont en

phase et les minimums sont localisés en $t/T = 0.6$, c'est à dire à la fin de la décélération de l'injection sinusoïdale.

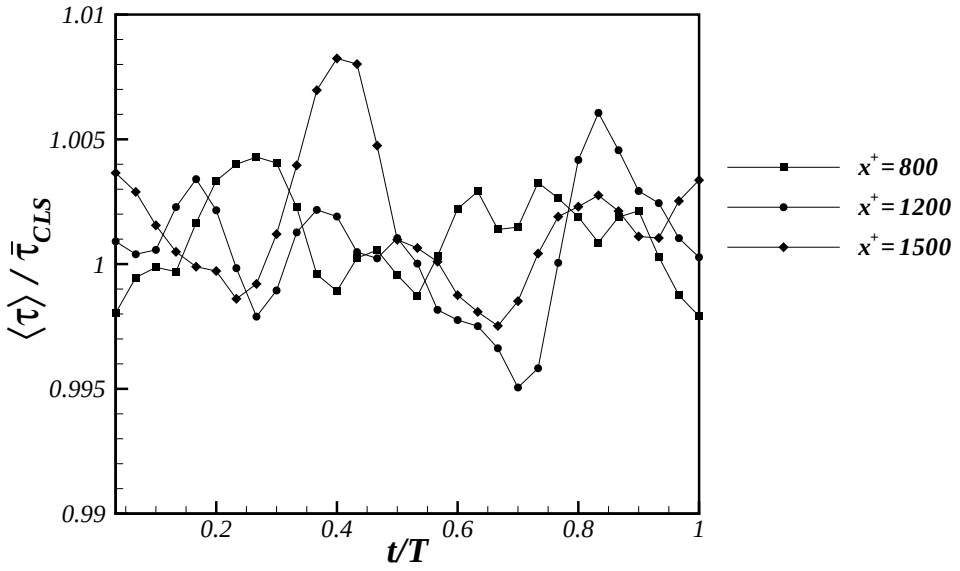


FIGURE 9.13 – Moyennes de phase de la contrainte pariétale pour un soufflage sinusoïdal à différentes distances du bord aval de la fente

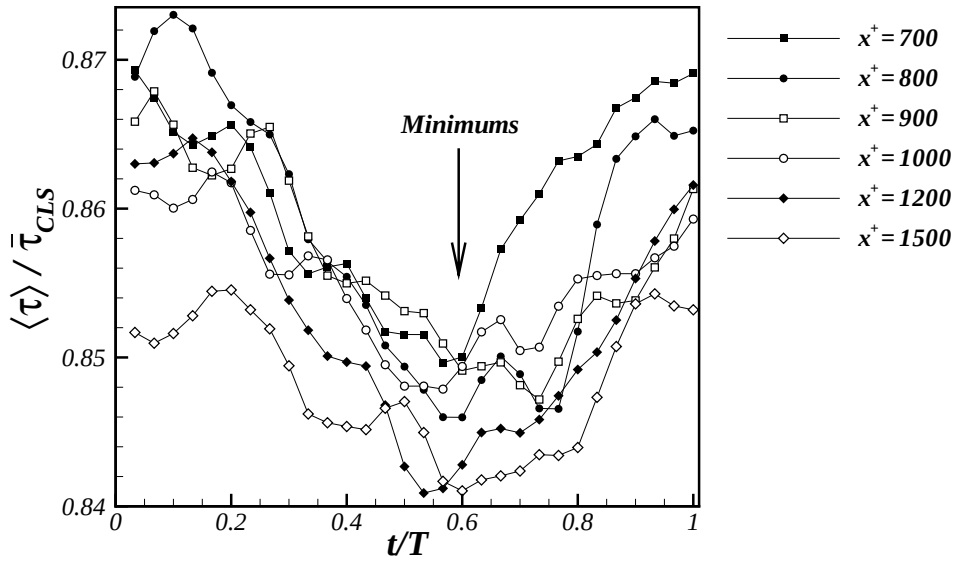


FIGURE 9.14 – Moyennes de phase de la contrainte pariétale pour un contrôle dual à différentes distances du bord aval de la fente

La figure 9.15 expose les contours des moyennes de phase de la contrainte sur toute la paroi inférieure du canal et montre plus précisément l'apparition de la mise en phase

des oscillations. La première région de réduction intense du frottement est située sans surprise sur la fente et juste à l'aval. Elle apparaît au moment où la vitesse d'injection devient importante.

Une seconde bande de faible contrainte apparaît en $x^+ = 500$. Elle n'est en fait que le prolongement par périodicité de la forte réduction créée par l'injection et montre qu'une nappe de vorticité positive est effectivement advectée par l'écoulement.

A partir de $x^+ = 1000$, on voit clairement la mise en phase des oscillations. Sur une région temporelle s'étendant de $t/T = 0.5$ à 0.7, on constate l'apparition d'un région de faible contrainte à l'origine de ce comportement singulier.

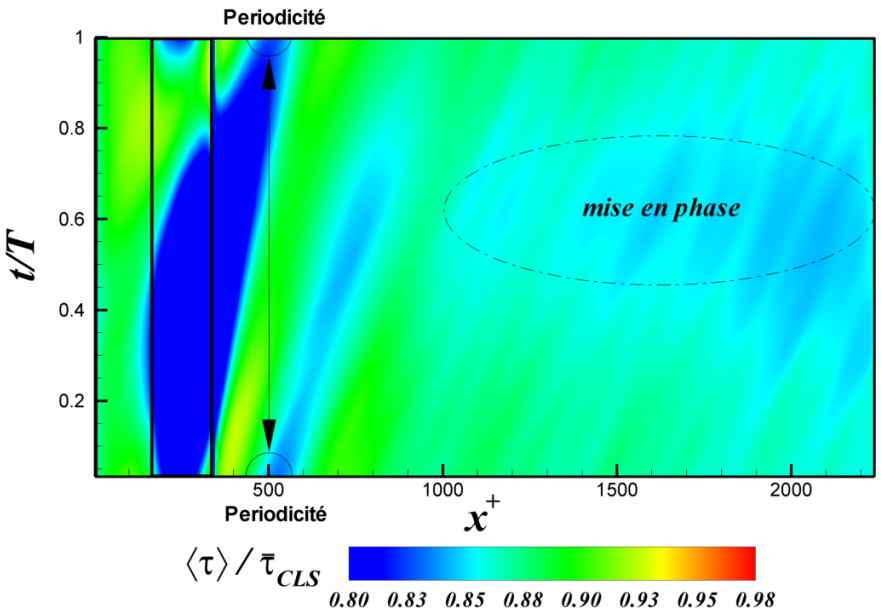


FIGURE 9.15 – Contours des moyennes de phase de la contrainte pariétale pour un contrôle dual. La position de la fente est représentée par le rectangle noir.

Il est alors très intéressant d'analyser les moyennes de phase des vitesses imposées à la paroi dans le cas du contrôle dual (figure 9.16). Les amplitudes sont ici très faibles ($\approx 2\%$) mais permettent de décrire comment le schéma par asservissement modifie son comportement lorsqu'il est soumis à une injection périodique.

Dès qu'on atteint le bord aval de la fente, le contrôle suboptimal tend à aspirer fortement sur une distance approximative de $x^+ = 100$ et pendant l'intégralité de la période. Comme sur la région où est appliqué ce contrôle, la somme des vitesses imposées doit être nulle ; il en résulte obligatoirement l'apparition d'une zone où le soufflage prédomine. Cette région est située à partir de $x^+ = 700$ et s'étend entre $t/T = 0.3$ et $t/T = 0.7$. Il est également intéressant de remarquer que la vitesse de contrôle à la paroi se comporte comme un paquet d'ondes, se propageant dans la direction longitudinale. Grâce aux résultats

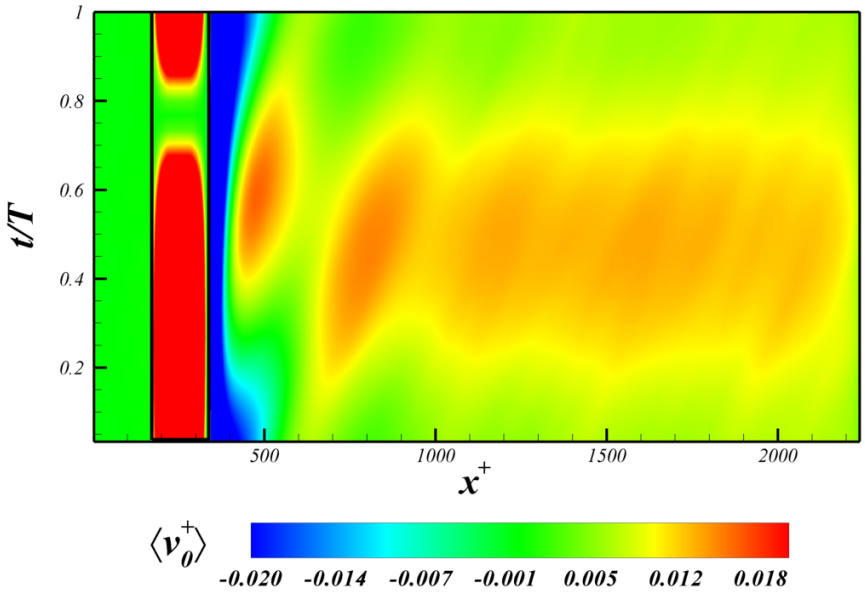


FIGURE 9.16 – Contours des moyennes de phase de la vitesse v_0^+ imposée à la paroi dans le cas du contrôle dual

présentés sur la figure 9.16, on pourrait alors formuler un contrôle en boucle ouverte rendant le contrôle plus adapté à un contexte expérimental.

9.6 Discussion

Les résultats précédents ont montré que l'application d'un contrôle dual composé d'une injection sinusoïdale et d'un contrôle de type suboptimal permet d'améliorer significativement la réduction de la traînée turbulente.

Le choix du schéma en boucle fermée semble toutefois avoir une importance considérable. En effet, l'application d'un contrôle par asservissement de type Ad-Hoc n'engendre aucune diminution de contrainte turbulente. La hauteur du plan de détection est ici fixée à $y^+ = 10$ comme lors des travaux de Choi *et al.* [1994]. Cette distance est optimale et correspond à la région où les structures sont créées et interagissent le plus fortement avec la paroi.

Dans ce cas, une partie de la loi de contrôle (la hauteur du plan de détection) est établie à l'avance et n'est pas modifiée durant l'évolution du système dynamique. Le contrôle de type Ad-Hoc présente donc une faible capacité d'adaptation aux modifications spatiales et/ou temporelles de l'écoulement et n'est donc pas le meilleur choix en vue d'une application dans le cadre d'un contrôle dual.

A l'inverse, le contrôle suboptimal est un schéma prédictif formulé directement à partir des équations de Navier Stokes ; il présente la capacité de réagir instantanément aux modifications structurelles de l'écoulement. L'interprétation de son comportement

en présence d'une action instationnaire se révèle assez ardue mais on peut tout de même se risquer à quelques hypothèses sur les mécanismes mis en jeu.

Sur la paroi, trois régions sont à distinguer.

La première s'étend de $x^+ = 340$ jusqu'à $x^+ = 500$. Cette zone, où la réduction du frottement est intense, est principalement organisée par l'injection sinusoïdale, tant et si bien que le contrôle suboptimal ne peut proposer aucune action fine capable d'influencer significativement le comportement de la contrainte. Ceci se traduit, juste à l'aval de la fente, par une aspiration assez forte s'étendant sur l'intégralité de la période d'injection. Ainsi, du fait de la condition de débit intégral nul à travers la paroi, le contrôle suboptimal privilégiera, un peu plus loin en aval, une action par soufflage (figure 9.16).

La seconde bande, de $x^+ = 500$ jusqu'à $x^+ = 1000$, voit s'alterner des régions où le soufflage prédomine avec d'autres régions, plus étendues, où l'aspiration est plus importante. L'écoulement subit l'effet combiné des deux contrôles, et à cet endroit le contrôle suboptimal agit de manière à empêcher le retour de l'écoulement à l'état relaxé (figure 9.12). On remarque sur la figure 9.16 que dans cette zone, l'intégrale des vitesses à la paroi est quasiment nulle.

La troisième région, de $x^+ = 1000$ jusqu'à la fin du canal, est donc préférentiellement soumise à un soufflage dont la moyenne temporelle est approximativement $\overline{v_0}^+ = 0.011$ soit $1/2000^{ème}$ de la vitesse au centre du canal. Cette faible valeur, même appliquée à l'ensemble de la paroi, ne peut être responsable d'une intense réduction de la contrainte turbulente. Cependant, elle peut contribuer à la différence de contrainte moyenne constatée lors de l'application du contrôle dual. La vitesse d'injection sinusoïdale moyennée en temps est de $\overline{v_0}^+ = 0.125$ et elle engendre une diminution proche de 30% sur la fente (non montré sur les courbes). Or le soufflage moyen correspond à peu près à un dixième de la vitesse moyenne d'injection à travers la fente, pouvant ainsi être à l'origine d'une réduction de 3%. Le gain total de 4% constaté sur la contrainte moyennée temporellement est alors obtenu en prenant en considération la réduction liée aux deux régions précédentes.

La mise en phase des contraintes, et donc l'apparition d'une périodicité temporelle, est en relation étroite avec la distribution de soufflage/aspiration à la paroi. La figure 9.14 montre que les minimums de contrainte sont positionnés en $t/T = 0.6$ correspondant à la fin du processus de décélération à travers la fente. Or en analysant les résultats de la figure 9.12, on constate que c'est à ce moment précis que l'effet de l'injection sinusoïdale est la plus importante sur la paroi. Le contrôle par asservissement profite donc de ce terrain favorable pour adapter son action et réduire plus intensément la contrainte. En effet, si on se reporte maintenant à la figure 9.16, on remarque en $t/T = 0.6$ et sur l'intégralité de la paroi, que le contrôle suboptimal présente une tendance au soufflage, et évidemment, du fait de la condition de débit nul, impose une aspiration importante juste à l'aval de la fente (non montré ici). Du fait de cette forte aspiration en $t/T = 0.6$, les structures qui ont été éloignées de la paroi par l'effet de l'injection sinusoïdale, sont maintenant attirées

vers elle et le contrôle suboptimal tente alors de diminuer leurs interactions avec la paroi en générant une zone de soufflage en $x^+ = 500$.

Pour résumer, le contrôle par asservissement évolue sur une période identique à celle imposée par le soufflage à travers la fente. Sa distribution spatiale étant aussi dépendante de l'état de l'injection, on peut en conclure que le contrôle suboptimal s'est adapté à la fois en espace et en temps à une action instationnaire localisée.

9.7 - Ouverture - Analogies avec les méthodes de contrôle du chaos

Il est alors intéressant de mettre en parallèle notre méthode de contrôle dual et les méthodes utilisées pour contrôler les systèmes chaotiques. Rappelons brièvement la notion de chaos. Un système est dit *chaotique* lorsque son évolution dépend sensiblement de ses conditions initiales. Cette propriété implique que deux trajectoires, provenant de deux conditions initiales quasiment identiques, se séparent (ou divergent) exponentiellement l'une de l'autre. La non-linéarité et la tridimensionnalité du système sont des conditions nécessaires à l'obtention d'un état chaotique.

Pour illustrer ces propos on peut faire appel à l'attracteur étrange de Lorentz (figure 9.17). Ce schéma expose l'évolution du système chaotique dans le temps. Sa trajectoire n'est pas régulière (non fermée) et le système semble complètement imprédictible. Dans le cas d'un système stable, la trajectoire serait alors fermée ou convergerait vers un point unique (pour les systèmes dissipatifs).

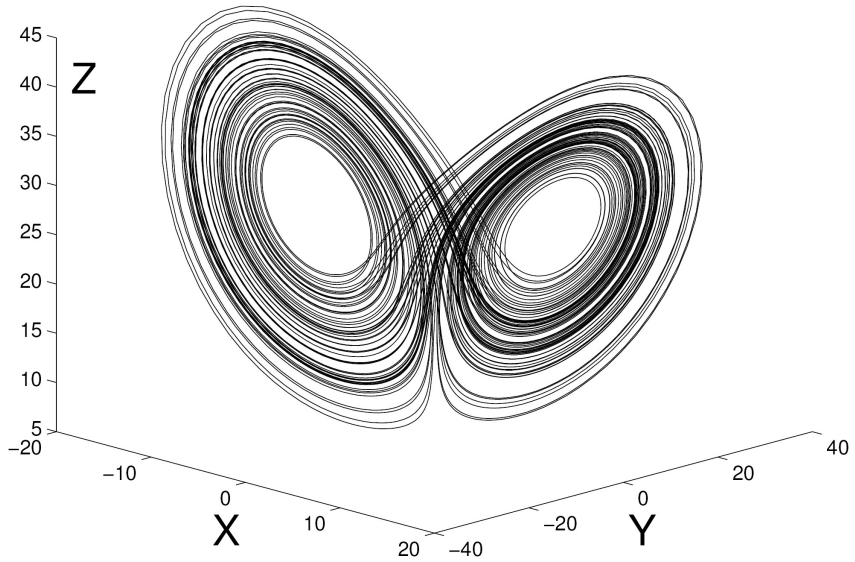


FIGURE 9.17 – L'attracteur étrange de Lorentz

Pendant de nombreuses années, la présence du chaos a été indésirable du fait de l'imprédictibilité dont il était à l'origine. Mais au-delà de son extrême sensibilité aux conditions initiales, cet état exhibe deux propriétés particulièrement intéressantes.

La première est qu'un système chaotique est constitué d'une collection infinie d'orbites périodiques[1] dont chacune d'elles est instable. Deuxièmement, durant une évolution temporelle de l'attracteur chaotique, le système visite tous les points voisins de sa position sur l'orbite. Ces points appartiennent alors à d'autres orbites périodiques instables.

La conséquence de ces propriétés est qu'une dynamique chaotique ***couve un comportement périodique*** et saute, à chaque instant, d'une orbite instable à l'autre.

Le contrôle du chaos est basé sur cette constatation. L'idée générale est que lorsque la trajectoire s'approche d'une orbite périodique désirée de l'attracteur chaotique, on applique des petites perturbation afin de la stabiliser.

En effet, si on sait que de petites perturbations peuvent donner lieu à de grands écarts sur un temps suffisamment long, un choix judicieux de ces perturbations peut diriger la trajectoire où on le souhaite dans l'attracteur afin de forcer le système vers un état dynamique désiré. C'est la notion de *ciblage*.

Le point important est alors que l'on est capable de produire une infinité de comportements dynamiques à partir d'un même système chaotique et en utilisant seulement de petites perturbations.

Le contrôle du chaos a été introduit par Ott *et al.* [1990] et de nombreuses études en ont immédiatement découlé (par exemple Azevedo & Rezende [1991] ou Alsing *et al.* [2004]). L'idée principale est d'attendre que le système chaotique évolue vers une orbite périodique identifiée préalablement et de la stabiliser par l'application de perturbations identifiées en temps réel. L'orbite "cible" est évidemment choisie comme étant celle qui permettra d'atteindre ou de se rapprocher de l'état final désiré.

Cette méthode a été aussi appliquée à un écoulement pseudo-turbulent (Guan *et al.* [2004]). Dans cette étude, la synchronisation[2] d'un état turbulent vers un autre est analysée. Imaginons deux simulations numériques d'un même écoulement turbulent bidimensionnel, mais chacune résultant de conditions initiales différentes. A partir d'un certain temps, les deux champs de vitesses seront évidemment différents. Dans l'étude de Guan *et al.* [2004] on cherche alors à modifier la dynamique d'un des états pseudo-turbulents afin qu'il se synchronise complètement avec l'autre (la cible). Pour ce faire, seule la composante de vitesse u longitudinale est modifiée, c'est à dire que seule cette quantité sera

[1] Une orbite périodique est une solution spéciale d'un système dynamique présentant la particularité de retourner à son état initial et de se répéter dans le temps. Elle se traduit par l'apparition d'une trajectoire fermée dans l'espace des phases.

[2] Le terme de synchronisation semble ici plus approprié que celui de contrôle. Le phénomène de synchronisation apparaît lorsqu'on met en présence deux attracteurs chaotiques. Sous certaines conditions, et lorsque les deux attracteurs rentrent en interaction, l'un des deux peut influer sur le comportement de l'autre. Plusieurs degrés de synchronisation ont été constatés, de la synchronisation complète où les trajectoires deviennent strictement identiques à la synchronisation de phase où les systèmes exhibent les mêmes fréquences.

utilisée et corrigée pour atteindre la vitesse u ciblée (appartenant à l'état turbulent de référence). La vitesse verticale v ne sera, quant à elle, pas contrôlée et laissée libre. Il est alors montré que la composante u peut être entièrement synchronisée/contrôlée (les deux états turbulents exhibent alors la même vitesse u dans leurs évolutions) mais qu'elle n'induit pas forcément une synchronisation de la composante v.

Il est aussi important de spécifier qu'un système chaotique peut être synchronisé non seulement par application de contrôles en boucles fermées (*feedback*) mais aussi par utilisation de contrôles en boucles ouvertes. Des travaux effectués par Mirus & Sprott [1999] indiquent que l'application d'une simple perturbation ***sinusoïdale*** peut permettre de stabiliser une ou plusieurs orbites périodiques instables. En choisissant une fréquence d'excitation identique à la périodicité de l'orbite que l'on cherche à contrôler, leurs résultats montrent qu'une action efficace peut être obtenue sur le système au moyen d'une faible amplitude de perturbation sinusoïdale.

La turbulence de proche paroi ne peut être, à proprement parlé, considérée comme un système chaotique. Cependant, les décompositions par POD (*Proper Orthogonal Decomposition*) effectuées par Aubry *et al.* [1988] ont montré que certains modes liés à la fréquence d'éjection (*bursting*) étaient instables et pouvaient être en relation avec la formation des tourbillons quasi-longitudinaux. Un parallélisme avec les orbites périodiques instables des systèmes chaotiques semble donc pouvoir être effectué.

Dans le cas du contrôle dual, la fréquence du soufflage sinusoïdal imposé est proche de celle de *bursting*. Cette excitation pourrait peut être provoquer la stabilisation d'une ou plusieurs orbites liées au mécanisme de formation des structures cohérentes. Le système n'est évidemment pas dans un état de synchronisation complète car les variables de la turbulence de proche paroi ne présentent pas toutes une périodicité marquée. Cependant, la propagation de la périodicité constatée sur la contrainte pariétale peut laisser penser à l'apparition d'un phénomène de synchronisation de phase avec le soufflage. Ainsi, le contrôle suboptimal agirait comme un régulateur/correcteur permettant de conserver l'orbite dans son état stable et provoquant la propagation de la périodicité sur tout le domaine de contrôle.

Évidemment, ces hypothèses ne constituent en aucun cas une quelconque preuve du mécanisme de réduction de contrainte pariétale.

9.8 Conclusions

Un contrôle dual, composé d'une injection sinusoïdale et d'un contrôle suboptimal, se révèle être une approche permettant une réduction sensible de la contrainte pariétale. En effet, on obtient dans ce cas 15% de réduction de frottement contre 11% si on cumule les réductions engendrées par les deux contrôles non combinés. L'efficacité du contrôle est donc augmentée de 30%. L'obtention de ce gain semble être fortement liée à la nature

du contrôle par asservissement qui doit présenter une bonne capacité d'adaptation aux modifications spatiales et temporelles de l'écoulement.

La mise en oeuvre expérimentale d'une telle approche n'est à ce jour pas envisageable, mais ces résultats montrent qu'un contrôle actif dual peut permettre de réduire significativement la contrainte et pourrait permettre l'utilisation d'une densité surfacique moins importante de MEMS.

Conclusions et perspectives

Les travaux présentés dans ce mémoire ont permis d'effectuer des avancées significatives dans le domaine du contrôle actif d'écoulements turbulents. Notre étude s'oriente vers l'application d'un contrôle actif dual (ou hybride) faisant intervenir deux manipulations distinctes. On combinera ainsi les effets d'un contrôle en boucle ouverte, effectué par une injection périodique, et d'un contrôle par asservissement de type suboptimal.

Une étude expérimentale a permis de mettre en évidence l'effet d'un soufflage instationnaire et localisé sur une couche limite turbulente. Ainsi, lorsque l'injection temporelle imposée est sinusoïdale, une structure transversale cohérente peut prendre forme. L'advection de ce tourbillon provoque alors une augmentation drastique de la contrainte pariétale à l'aval de la fente. Pour un soufflage temporellement asymétrique, la création de cette structure est inhibée et une large zone relaminarisée apparaît. Dans l'optique d'un contrôle dual, la formation du tourbillon peut être bénéfique car sa fréquence d'apparition et sa position sont toutes deux bien déterminées.

Une Simulation Numérique Directe est alors utilisée pour pousser plus loin les investigations. Le code ainsi que diverses implémentations, telles que la Multigrille ou la résolution du transport de scalaire passif, ont donc été testés en l'absence de manipulations et constituent une base solide pour les investigations liées à l'application de différents types de contrôle.

La première étude numérique montre comment une injection stationnaire localisée à travers une paroi chauffée affecte un écoulement turbulent en canal. On a constaté que pour un débit de soufflage identique, mais pour une dimension de fente différente, le transfert de chaleur pariétal était beaucoup plus affecté que la contrainte. En effet, pour des zones d'injection de petites tailles, le soufflage donne naissance à une structure transverse de vorticité positive. Ce tourbillon n'est pas advecté par l'écoulement mais semble affecter principalement le flux de chaleur pariétal à l'aval de la fente. Le paramètre de sévérité défini par Sano & Hirayama [1985] n'est donc pas adapté pour décrire les évolutions de la température dans le canal.

La seconde étude numérique concerne l'application d'un contrôle par asservissement, de type suboptimal à un écoulement turbulent en canal. Dans notre formulation du contrôle, la fonction de coût est directement basée sur la contrainte pariétale. Son effet sur la structure fine de la turbulence de proche paroi a été analysé principalement par l'intermédiaire des équations de transport de la vorticité transverse. Par cette méthode, on obtient une diminution moyenne de contrainte pariétale d'approximativement 10%

tandis que son intensité turbulente est réduite d'un facteur deux. Une analyse approfondie de ces résultats a alors permis de dégager de nouvelles lois de contrôle visant à diminuer plus efficacement la contrainte pariétale.

Finalement, le fait d'appliquer à la fois une injection sinusoïdale et un contrôle suboptimal pour former un contrôle dual, semble être une méthode de contrôle réellement efficace. On obtient 15% de réduction de contrainte moyenne avec cette approche, contre 11% si on cumule les réductions engendrées par les deux contrôles non combinés. L'efficacité du contrôle est donc augmentée de 30%. L'utilisation d'un schéma par asservissement présentant la faculté de s'adapter aux modifications de l'écoulement est une condition nécessaire à l'obtention d'une diminution du frottement.

Ces travaux ont permis de soulever plusieurs problématiques intéressantes.

On a vu que l'application d'un contrôle dual permettait de diminuer significativement la contrainte. Mais peut-on obtenir une réduction, au moins comparable au cas suboptimal seul, avec une densité surfacique de MEMS moins importante ?

La réponse à cette question est loin d'être immédiate car le problème d'optimisation, c'est à dire le processus de tests temporels basés sur le gradient de la fonction de coût, serait de plus petite dimension que l'écoulement. En effet, imaginons que l'on place un actionneur/détecteur une maille sur deux (ou plus), l'information disponible pour simuler l'écoulement quelques pas de temps plus loin ne serait alors pas complète. De plus, le nombre de points d'aspirations/soufflages à la paroi se trouverait aussi diminué. On pourrait alors imaginer utiliser des estimateurs qui auraient pour but de recomposer la solution (l'évolution temporel de l'écoulement) à partir de quelques points de mesures. La distribution de soufflages/aspirations serait alors définie par rapport à cette estimation et appliquée par la suite à l'écoulement "physique".

Une autre question intéressante serait : peut on filtrer l'écoulement (décomposition en séries de Fourier par exemple) et établir un contrôle suboptimal sur cette base ?

On agirait alors directement sur certaines échelles caractéristiques de l'écoulement, comme par exemple les structures quasi-longitudinales.

On a vu lors de l'analyse du contrôle suboptimal, qu'une loi de contrôle basée sur le terme de forçage volumique permettrait de réduire la contrainte turbulente. Pour implémenter cette méthode, les difficultés principales restent de détecter les zones de hautes et basses vitesses et d'appliquer instantanément une vitesse transverse à la paroi. On peut alors imaginer un contrôle dual avec forçage électromagnétique ou électrostatique pour surmonter ces problèmes. Sur une première zone d'action le forçage aurait pour objectif d'organiser spatialement les zones de hautes et basses vitesses tandis que sur une seconde zone, plus en aval, un contrôle viserait à diminuer leurs effets sur la paroi voire même à les éliminer.

Bibliographie

Alsing, P., Gavrielides, A., & Kovanis, V. 2004, History dependant control of unstable periodic orbits. *Physical Reviews E*, 50(3), 1968–1977.

Aubry, N., Holmes, P., Lumley, J., & Stone, E. 1988, The dynamics of coherent structures in the wall region of a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 192, 115–173.

Azevedo, A. & Rezende, S. 1991, Controlling chaos in spin-waves instabilities. *Physical Reviews Letter*, 66(10), 1342–1345.

Bar-Shalom, Y. 1981, Stochastic dynamic programming : caution and probing. *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-26, 1184–1195.

Bejan, A. 1995, *Convective heat transfer*. John Wiley and Sons.

Bewley, T., Choi, H., & Moin, P. 1993, Optimal feedback control of turbulent channel flow. *Center for Turbulence Research - Annual Reasearch Briefs*, pp. 3–19.

Bewley, T., Moin, P., & Temam, R. 2001, Dns-based predictive control of turbulence : an optimal benchmark for feedback algorithms. *J. Fluid Mech.*, 447, 179–225.

Bouillon, F. 2004, Simulations numériques directes du contrôle électromagnétique. *Université Joseph Fourier*.

Bushnell, D. & McGinley, C. 1989, Turbulence control in wall flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 21, 1–20.

Chassaing, P. 2000, *Turbulence en mécanique des fluides*. Cépaduès-Editions.

Choi, H., Moin, P., & J.Kim 1994, Active turbulence control for drag reduction in wall-bounded flows. *J. Fluid Mech.*, 262, 75–110.

Choi, H., Moin, P., & Kim, J. 1992, Direct numerical simulation of turbulent flow over riblets. *J. Fluid Mech.*, 255, 503–539.

Choi, H., Temam, R., Moin, P., & Kim, J. 1993, Feedback control for unsteady flow and its application to the stochastic burgers equation. *J. Fluid Mech.*, 253, 509 543.

Choi, K. 1989, Near wall structure of a turbulent boundary layer with riblets. *J. Fluid Mech.*, 288, 417–458.

Clauser, D. 1956, The turbulent boundary layer. *Adv. App. Mech.*, 14, 1–51.

Dhanak, M. & Si, C. 1999, On reduction of turbulent wall friction through spanwise wall oscillations. *J. Fluid Mech.*, 383, 175–195.

Drazin, P. & Reid, W. 1981, *Hydrodynamic stability*. Cambridge Univ. Press.

Durst, F., Jovanovic, J., & Sender, J. 1993, Detailed measurement of the near-wall region of a turbulent pipe flow. *Ninth International Symposium on Turbulent Shear Flows*, 9, 225–240.

Eckelmann, H. 1974, The structure of the viscous sublayer and the adjacent wall region in a turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, 65, 439 – 459.

Ferziger, J. & Peric, M. 2002, *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer.

Guan, S., Wei, G., & Lai, C. 2004, Controllability of flow turbulence. *Physical Reviews E*, 69, 1–12.

Ham, F., Lien, F., & Strong, A. 2006, Multiple semi-coarsened multigrid method with application to large eddy simulation. *International Journal For Numerical Methods in Fluids*, 50, 579–596.

Hinze, J. O. 1975, *Turbulence : an introduction to its mechanism and theory*. Mc Graw-Hill book company.

Jeon, S., Choi, J., Jeon, W., Choi, H., & Park, J. 2004, Active control of flow over a sphere for drag reduction at a subcritique reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 517, 113–129.

Jeong, J. & Hussain, F. 1995, On the identification of a vortex. *J. Fluid Mech.*, pp. 15–44.

Jiang, F., Tai, Y., Gupta, B., Goodman, R., Tung, S., Huang, J., & Ho, C. 1996, A surfacemicromachined shear-stress imager - in an ivestigation of micro structures, sensors, actuators, machines and systems. *Proc. Ann. Int. Workshop MEMS 9th, Amsterdam - IEEE*, pp. 110–115.

Jiang, F., Tai, Y., Walsh, K., Tsao, T., Lee, G., & Ho, C. 1997, A flexible mems technology and its first application to shear stress sensor skin - in an ivestigation of micro structures, sensors, actuators, machines and robots. *Proc. Ann. Int. Workshop MEMS 10th, Nagoya - IEEE*, pp. 465–470.

Jimenez, J. & Orlandi, P. 1993, The rollup of a vortex layer near a wall. *J. Fluid Mech.*, 248.

Jimenez, J. & Pinelli, A. 1999, The autonomous cycle of near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.*, 389, 335–359.

Kaneda, Y. & Ischihara, T. 2006, High-resolution direct numerical simulation of turbulence. *Journal of Turbulence*, 7(20).

Kawamura, H., Ohsaka, K., Abe, H., & Yamamoto, K. 1998, Dns of turbulent heat transfer in channel flow with low to medium-high prandtl number fluid. *Int. J. of Heat and Fluid Flow*, 19, 482–491.

Kim, J., Moin, P., & R.Moser 1987, Turbulence statistics in fully developed channel flow at low reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 177, 133–166.

Klewicki, J. & Falco, R. E. 1990, On accurately measuring statistics associated with small-scale structure in turbulent boundary layers using hot-wire probes. *J. Fluid Mech.*, 219, 119–142.

Koumoutsakos, P. 1999, Vorticity flux control for a turbulent channel flow. *Phys. Fluids*, 11, 248–250.

Koumoutsakos, P., Freund, J., & Parekh, D. 1998, Evolution strategies for parameter optimization in jet flow control. *Center for Turbulence Research, Proceedings of the Summer Program*, pp. 121–132.

Krogstad, P. & Kourakine, A. 2000, Some effects of localized injection on the turbulent structure in a boundary layer. *Physics of Fluids*, 12(11), 2990–2999.

Lamb, H. 1945, *Hydrodynamics*. Dover.

Lee, C. & Kim, J. 2002, Application of neural networks to turbulence control for drag reduction. *Phys. Fluids*, 14(7), 2523–2529.

Lee, C., Kim, J., Babcock, D., & Goodman, R. 1990, Application of neural networks to turbulence control for drag reduction. *Phys. Fluids*, 9, 1740–1747.

Lee, C., Kim, J., & Choi, H. 1998, Suboptimal control of turbulent channel flow for drag reduction. *J. Fluid Mech.*, 358, 245–258.

Lesieur, M. 1997, *Turbulence in fluids*. Kluwer Academic Publishers.

Leung, W. & Chen, Y. 2001, Transformed-space nonuniform pseudospectral time-domain algorithm. *Microwave and Optical Technology Letters*, 29,n°6.

Li, B., Liu, N., & Lu, X. 2006, Direct numerical simulation of wall-normal rotating turbulent channel flow with heat transfer. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, 49, 1162–1175.

Liu, Q., Xu, X., Tian, B., & Zhang, Z. 2000, Applications of nonuniform fast transform algorithms in numerical solutions of differential and integral equations. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 38(4).

Llorente, M. & Melson, N. 2000, Behaviour of plane relaxation methods as multigrid smoothers. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 10, 92–114.

Lugt, H. 1979, The dilemma of defining a vortex. *Recent Developments in Theoritical and Experimental Fluid Mechanics*, pp. 309–321.

Lyons, S., Hanratty, T., & McLaughlin, J. 1991a, Direct numerical simulation of passive heat transfer in a turbulent channel flow. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 34(4/5), 1149–1161.

Lyons, S., Hanratty, T., & McLaughlin, J. 1991b, Large-scale computer simulation of fully developed turbulent channel flow with heat transfer. *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, 13, 999–1028.

Maitelli, A. & Yoneyama, T. 2000, A multistage suboptimal dual controller using optimal predictors. *IEEE Trans. Automatic Control*, 44, 1002.

Mansour, N., Kim, J., & Moin, P. 1988, Reynolds-stress and dissipation rate budgets in a turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, pp. 15–44.

Mirus, K. & Sprott, J. 1999, Controlling chaos in low- and high-dimensional systems with periodic parametric perturbations. *Physical Reviews E*, 59(5), 5313–5324.

Moin, P. & Kim, J. 1982, Numerical investigation of turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, 118, 341–377.

Moin, P. & Mahesh, K. 1998, Direct numerical simulation : A tool in turbulence research. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 30, 539–578.

Moser, R. D. & Moin, P. 1984, Direct numerical simulation of curved turbulent channel flow. *NASA TM 85974*.

Orlandi, P. 2000, *Fluid Flow Phenomena : A Numerical Toolkit*. Kluwer Academy Publishers.

Ott, E., Grebogi, C., & Yorke, J. 1990, Controlling chaos. *Physical Reviews Letter*, 64(11), 1196–1199.

Ozono, S. 1999, Flow control of vortex shedding by a short splitter plate asymmetrical-lyarranged downstream of a cylinder. *Phys. Fluids*, 11(10), 2928–2934.

Papoulis, A. 1984, *Probability, random variables and stochastic process*. McGraw-Hill.

Park, D., Ladd, D., & Hendricks, E. 1994, Feedback control of von karman vortex shedding behind a circular cylinder at low reynolds numbers. *Phys. Fluids*, 6(7), 2390–2405.

Park, J. & Choi, H. 1999, Effects of uniform blowing or suction from a spanwise slot on a turbulent boundary layer flow. *Physics of Fluids*, 11(10), 3095–3105.

Peyrat-Armandy, A. 1997, *Control of turbulence*. Teknea.

Press, W., Teukolsky, S., Vetterling, W., & B.Flannery 2001, *Numerica Recipes : The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press.

Roshko, A. 1955, On the wake and drag of bluff body. *J. Aeronaut. Sci.*, 22, 124–132.

Sano, M. & Hirayama, N. 1985, Turbulent boundary layers with injection and suction through a slit. *BJSME*, 28, 807–814.

Sherman, F. S. 1990, *Viscous Flow*. McGraw-Hill.

Tardu, S. 1995, Coherent structures and riblets. *Flow, Turbulence and Combustion*, 54, 349–385.

Tardu, S. 1998, Near wall turbulence control by local time periodical blowing. *Exp. Therm. and Fluid Science*, 16, 41–53.

Tardu, S. 2001, Active control of near wall turbulence by oscillating blowing. *J. Fluid Mech.*, 439, 217–253.

Tardu, S., Pham, C., & Binder, G. 1991, Effects of longitudinal diffusion and conduction to the substrate on the response of hot film gages - a numerical simulation. *Advances in Turbulence 3*, pp. 506–513.

Trottenberg, U., Oosterlee, C., & Schuller, A. 2001, *Multigrid*. Academic Press.

Vainberg, M. 1964, *Variational methods for the study of nonlinear operators*. Holden-Day.

Wesseling, P. 1992, *An Introduction to Multigrid Methods*. John Wiley and Sons.

Yoshino, T., Tsuda, M., Suzuki, Y., & Kasagi, N. 2002, Toward development of feedback control system for wall turbulence with mems sensors and actuators. *3rd Symp. on Smart Control of Turbulence*, pp. 311–327.

Zhang, J. 1996, Acceleration of five-point red-black gauss-seidel in multigrid for poisson equation. *Applied Mathematics and Computation*, 80,n°1.

Annexe A

Mécanisme de création de vorticité positive lors d'un soufflage localisé

Lors d'un soufflage pariétal, une couche de vorticité positive se crée dans la zone de proche paroi. La figure A.1 montre de quelle manière l'éloignement d'une partie de la couche vorticitaire est à l'origine de ce phénomène.

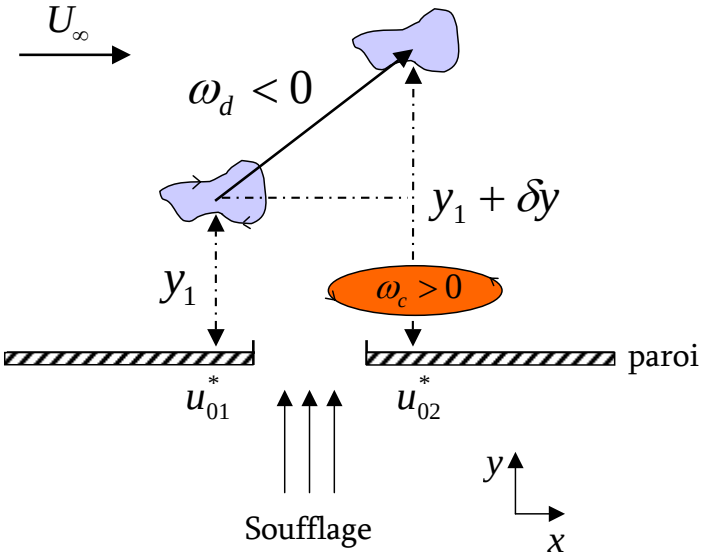


FIGURE A.1 – Création de vorticité positive lors d'un soufflage en paroi

Les vitesses u^*_{01} et u^*_{02} sont définies comme, respectivement, les vitesses longitudinales à la paroi (négatives) engendrées par la vorticité ω_d avant et après la zone de soufflage. Elles peuvent être perçues comme la différence des vitesses entre le cas visqueux et inviscide (figure A.2).

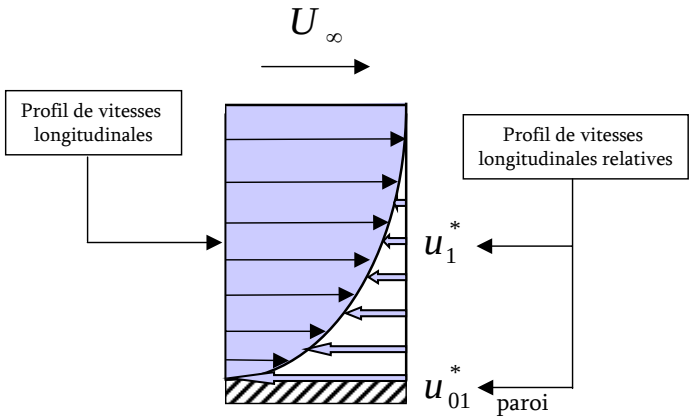


FIGURE A.2 – Profils de vitesses longitudinales relatives

On peut alors établir la relation :

$$\omega_d = -\frac{u_1^* - u_{01}^*}{y_1} = -\frac{u_1^* - u_{02}^*}{y_1 + \delta y} \tag{A.1}$$

qui traduit le simple fait que la couche de vorticité ω_d est translatée d'une distance δy par l'intervention du soufflage.

On peut donc en déduire qu'instantanément, la variation de vitesse à la paroi n'est pas nulle. Et plus précisément :

$$\delta u_0 = u_{02}^* - u_{01}^* = -\omega_d \delta y \tag{A.2}$$

Comme $\omega_d < 0$, il en résulte que $u_{02}^* > u_{01}^*$ et il se crée un déficit de vitesse positive à la paroi. Pour rétablir l'équilibre et assurer la condition d'adhérence, une nappe de vorticité positive ω_c est créée (figure A.1).

Annexe B

Évaluation du terme analogue au gradient de pression moyen pour la résolution du système adjoint

La troisième équation du système adjoint Δ_{adj}, est une condition volumique du même type que celle portant sur la condition de débit constant dans le canal. Si on intègre la première équation, sur la direction longitudinale et sur la totalité du domaine, on a :

$$\iiint_{\Omega} \varphi_1 \, d\Omega + \beta_1 \iiint_{\Omega} \left(\lambda + \varphi_j \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - u_j \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} \right) d\Omega - \beta_2 \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_1 \right) d\Omega = 0 \quad \text{(B.1)}$$

Le terme comportant l'analogue des fluctuations de pressions π a été éliminé car son intégrale volumique est obligatoirement nulle (somme de fluctuations).

En appliquant la condition traduite par la troisième équation du système adjoint Δ_{adj}, on peut écrire :

$$\iiint_{\Omega} \lambda \, d\Omega = - \iiint_{\Omega} \left(\varphi_j \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - u_j \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} \right) d\Omega + \frac{\beta_2}{\beta_1} \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_1 \right) d\Omega \quad \text{(B.2)}$$

En utilisant maintenant les différentes conditions limites sur le problème physique et le problème adjoint ainsi que les conditions imposées par la périodicité, l'éq. B.2 devient :

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} \lambda \, d\Omega &= -\iiint_{\Omega} \varphi_j \frac{\partial u_j}{\partial x_1} d\Omega - \iint_{\Gamma^-} \phi \, dx_1 dx_3 + \frac{\beta_2}{\beta_1} \iiint_{\Omega} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2^2} d\Omega \\ &= C_{total}\end{aligned} \tag{B.3}$$

En traduisant numériquement l'équation ci-dessus et en admettant que la variable λ peut être uniformément distribuée sur chacune des mailles de notre domaine, on peut écrire :

$$\lambda^* = \frac{1}{\Omega} * C_{total} \tag{B.4}$$

où λ^* représente un terme de forçage régulier par maille de calcul et Ω le volume du canal.

Annexe C

Article à paraître dans la revue *Comptes rendus de l'Académie des sciences (Mécanique)*

Sur le contrôle Ad-Hoc et son effet sur le transport d'un scalaire passif

Olivier DOCHE [a] Sedat TARDU [b]

[a] *Laboratoire des écoulements géophysiques et industriels (LEGI), BP53, 38041, Grenoble, France*
[b] *LEGI, 1025 rue de la Piscine, 38041, Grenoble cedex, France*

Reçu le ***** ; accepté après révision le +++++

Présenté par £££££

Résumé

Un scalaire passif tel que la température est ici soumis à l'action de deux contrôles actifs, *Ad-Hoc* v et w dans un écoulement turbulent de proche paroi. L'analyse des résultats permet d'établir le lien entre les diminutions de transfert de chaleur et de contrainte en paroi. On propose alors un mécanisme de réduction de frottement et de flux pariétal pour le contrôle w. Ce dernier permet d'expliquer les différences constatées lors de l'application des deux types de contrôle. *Pour citer cet article : O. Doche, S. Tardu, C. R. Mecanique 333 (2006).*

Abstract

On the Ad-Hoc control and its effect on the passive scalar transport. The behaviour of a passive scalar, represented by the temperature, is studied through two types of active control, *Ad-Hoc* wall-normal v and transverse w velocity components in a turbulent wall-bounded flow. A link is established between the flux and shear reduction at the wall. The Ad-Hoc control through the opposite in phase transverse velocity component is elucidated. The differences between v and w control are discussed through this mechanism. *To cite this article: O. Doche, S. Tardu, C. R. Mecanique 333 (2005).*

Key words: Ad-Hoc control; Active control; Feedback control; Passive scalar; Turbulence; Drag reduction; Heat transfer reduction; DNS; Wall-bounded flows

Mots-clés : contrôle Ad-Hoc ; Contrôle actif ; Contrôle par asservissement ; Scalaire passif ; Turbulence ; Réduction de frottement ; Réduction de transfert de chaleur pariétal ; DNS ; Écoulements de proche paroi

Email addresses: `olivier.doche@hmg.inpg.fr` (Olivier DOCHE), `sedat.Tardu@hmg.inpg.fr` (Sedat TARDU).

Abridged English version

Among different active control strategies, the plane detection procedure [1] (named here Ad-Hoc) is a simple and efficient way to obtain drag reduction in wall bounded turbulent flows. In a channel, one locates into the flow a virtual horizontal plane (parallel to the wall). If, on this detection plane, we measure fluctuating velocity (for example a positive one), then, we apply instantaneously at the wall its opposite (a negative fluctuating velocity). This control law can lead to two distinct manipulations, a *v-control* which detects and acts on vertical velocities (v') and a *w-control* which deals with the transverse ones (w'). Considering the detection plane, the optimal distance from the wall is about $y^+ = 10$. In this case, the *v-control* leads to 20% of drag reduction and the *w-control* to 26%. The reaction of a passive scalar to Ad-Hoc control is investigated in this study. For this purpose, we use Direct Numerical Simulations wherein the Navier Stokes and the continuity equations are discretized by second order finite differences and resolved by a fractional step method. The energy equation is resolved by similar tools.

For each control, we show that the behaviour of the flux is very similar to the shear at the wall. Yet, the turbulent wall shear and heat flux intensities differ significantly. Furthermore, vertical velocity-temperature correlations and the fine structure analysis performed near the wall, show strong differences between the *Ad-Hoc* v et w control. For the *v-control*, the transport equation at the wall for the heat flux and the shear reduce to simple diffusive equation. Additional terms exist for the wall transport equations in the case of *w-control*, explaining the relative efficiency of this particular strategy.

For both control, the correlation between the transverse velocity and the temperature fluctuation is found to be zero. So, the transverse velocity is not directly engaged in the procedure. The transverse gradient of the w component is directly linked to the vertical gradient of the v component. In the case of *w-control*, when a transverse fluctuation is generated by a structure, we apply, directly at the wall, its opposite. Considering the whole vortex, this leads to a transverse gradient distribution of w at the wall, and by continuity, a vertical velocity, of opposite sign which could be detected by a *v-control*, is created. Both v and w *Ad-Hoc* schemes are finally quite similar. The main distinction is that, for the *w-control*, the vertical velocity is not directly generated at the wall, but above. It pushes away from the wall the high shear stress and high flux regions by acting as a barrier for the ejection and sweep events which cannot reach the wall. This explain why the RMS of the wall flux (or the wall shear stress) and the $v'T'$ correlation have larger value for *v-control* in the near wall region compared with a *w-control*.

1. Introduction

Lorsqu'on cherche à manipuler finement les écoulements turbulents de proche paroi, la formation aléatoire en temps et en espace des structures cohérentes nous incite à faire appel aux méthodes de contrôle actives par asservissement. Parmi différentes stratégies, le contrôle par plan de détection (ici le contrôle *Ad-Hoc*) est un moyen simple et efficace permettant d'obtenir des diminutions significatives du frottement pariétal. Dans un canal turbulent, on place, à l'intérieur de l'écoulement, un plan horizontal de détection (parallèle à la paroi). Si, sur ce plan, on mesure une fluctuation de vitesse (par exemple positive), on applique alors instantanément son opposé (c'est à dire une fluctuation négative) à même la paroi. Cette loi de contrôle peut donner naissance à deux stratégies pertinentes. La première, appelée ici *Ad-Hoc* v, ne détecte et n'agit que sur les vitesses verticales, c'est à dire normales à la paroi. La seconde, *Ad-Hoc* w, ne se base quant à elle que sur les fluctuations de vitesse transverse. Les travaux de [1] ont montré que, pour les deux contrôles, la distance optimale entre le plan de détection et la paroi est de $y^+ = 10$. Le symbole + indique que la variable est adimensionnalisée par rapport aux échelles internes, c'est à dire en utilisant la vitesse de frottement $u_\tau = \sqrt{\tau/\rho}$ (τ est la contrainte pariétale) et la viscosité

ν. Dans le cas d'une manipulation de type v, la réduction de contrainte pariétale est de 20% alors qu'elle peut atteindre 26% pour le type w. Bien qu'étant une étude purement numérique et plutôt difficilement transposable au cadre expérimental, ce contrôle reste un outil d'investigation utile pour comprendre les mécanismes liés à la réduction de contrainte pariétale. En effet, si l'effet du contrôle v est compris, le mécanisme de réduction propre au contrôle w n'est pas encore proprement identifié.

On propose dans ce papier d'étudier le comportement d'un scalaire passif (la température) soumis aux deux contrôles précédemment cités. Le code numérique utilisé est une Simulation Numérique Directe. Les équations de Navier-Stokes et la condition d'incompressibilité, discrétisées par différences finies d'ordre deux, sont résolues par la méthode du *Pas Fractionné* [2]. L'avancement temporel est assuré par un schéma de *Runge-Kutta* au troisième ordre et les termes linéaires sont calculés par la méthode de *Crank-Nicholson*. Des conditions périodiques sont appliquées dans les directions homogènes de l'écoulement, c'est à dire dans la direction transversale et longitudinale.

La taille la boîte de calcul est de $(4\pi \times 2 \times 1.33\pi)$ avec un maillage de $(513 \times 129 \times 129)$ dans les directions respectives $(x, y \; et \; z)$ (longitudinale, normale et transverse). Le nombre de Reynolds, basé sur la vitesse au centre du canal, est fixé à $Re = 4200$ et le pas de temps correspond à $\Delta t^+ = 0.1$.

La température est obtenue par l'intermédiaire de l'équation d'énergie pour une conductivité et une masse volumique constante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial (u_j T)}{\partial x_j} = \frac{1}{RePr} \frac{\partial^2 T}{\partial {x_j}^2} \tag{1}$$

avec la notation d'Einstein ($x_1 = x$, $x_2 = y$ et $x_3 = z$) et un nombre de Prandtl $Pr = 1$. On résout l'équation 1 en utilisant des outils numériques similaires au calcul de Navier-Stokes. Durant toutes les simulations, la paroi inférieure est maintenue à température constante. La température T est adimensionnalisée par rapport aux échelles internes par l'intermédiaire de la température de frottement $T_\tau = \frac{\left.\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}\right|_{y=0}}{Re_\tau . Pr}$. Le symbole $(\bar{\ })$ indique que la quantité considérée est moyennée en temps et en espace dans les directions homogènes de l'écoulement, c'est à dire les directions longitudinale (x) et transverse (z). Les résultats obtenus dans le cas non-manipulé (standard) sont en parfaites adéquations avec ceux présentés par [3] pour la résolution de Navier-Stokes et pour le transport de salaire passif [4].

2. Résultats

Les résultats présentées sur le tableau 1 montrent que le flux moyen de température à la paroi, adimensionnalisé par les variables internes dans le cas non manipulé, se comporte comme la contrainte pariétale. On constate une diminution du flux à la paroi d'approximativement 20% sous un contrôle de type v et 25% sous un type w. L'analogie de Reynolds est donc dans ce cas vérifiée.

Les profils de température moyenne transformée $T_* = \left| \frac{T - T_{inf}}{T_{inf} - T_{sup}} \right|$ (où T_{inf} et T_{sup} sont les conditions limites de température imposées respectivement sur les paroi inférieure et supérieure) et adimensionnalisée par rapport aux variables internes et locales, sont présentés sur la figure 1. D'une manière analogue au comportement de la vitesse longitudinale, on constate un épaississement de la couche conductrice et donc une translation de la loi logarithmique, caractéristique d'une stabilisation relative du champs de température. Même si, sous manipulations, les profils s'écartent significativement du cas standard, les fluctuations de température restent assez similaires dans le cas du contrôle v et w (figure 2). Pour les schémas v et w, comme pour le cas standard, ces valeurs sont très similaires aux fluctuations de vitesse longitudinale (non montré ici).

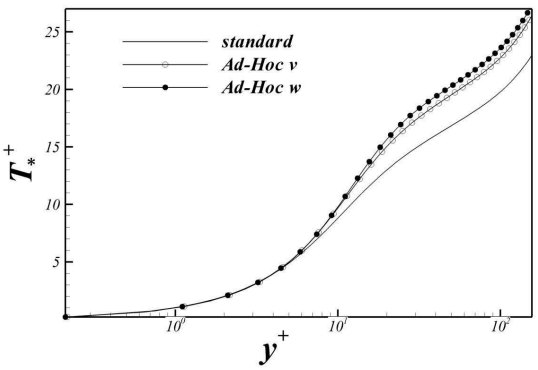


FIG. 1. Profils de température moyenne transformée. *Mean transformed temperature profiles*

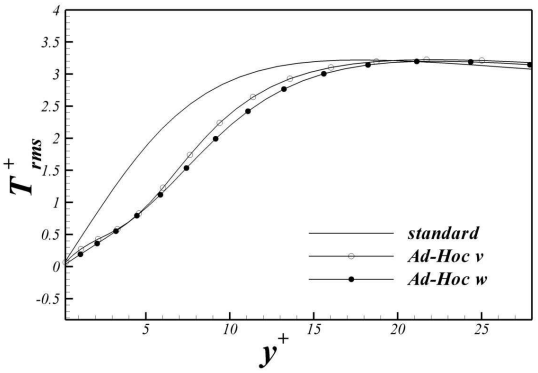


FIG. 2. Profils des fluctuations de température. *Fluctuating temperature profiles*

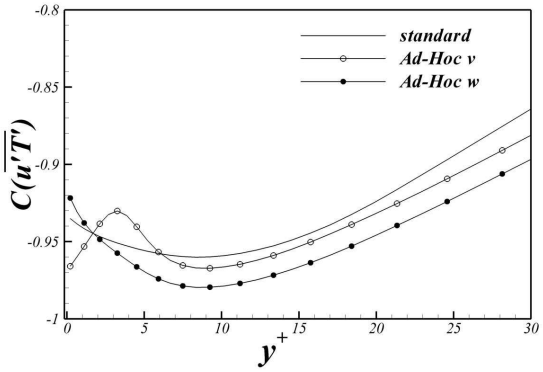


FIG. 3. Corrélation entre les fluctuations de vitesse longitudinale et les fluctuations de température. *Correlation between longitudinal fluctuating velocity and temperature fluctuation.*

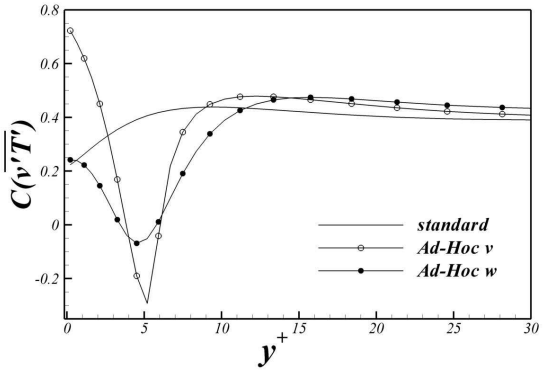


FIG. 4. Corrélation entre les fluctuations de vitesse normale et les fluctuations de température. *Correlation between wall-normal fluctuating velocity and temperature fluctuation.*

Les figures 3 et 4 exposent respectivement les corrélations $C(\overline{u'T'}) = \frac{\overline{u'T'}}{u_{rms}.T_{rms}}$ et $C(\overline{v'T'}) = \frac{\overline{v'T'}}{v_{rms}.T_{rms}}$ en zone de proche paroi. Pour chacun des contrôles, comme pour le cas standard, la valeur de $C(\overline{u'T'})$ est assez proche de -1, traduisant le fait qu'une fluctuation de vitesse longitudinale est toujours associée à une fluctuation de température. Pour $y^+ > 2$, on remarque que la température est globalement mieux corrélée avec la vitesse longitudinale lors de l'application d'un contrôle *Ad-Hoc* basé sur w. Sur la figure 4, on peut constater que les deux manipulations influent significativement sur la corrélation $C(\overline{v'T'})$ et exhibent un comportement similaire. Pour $y^+ < 2.5$, une valeur importante de corrélation $C(\overline{v'T'})$ est obtenue pour un contrôle v. Il est important de préciser que pour les deux types de manipulation, ainsi que pour le cas standard, la corrélation $C(\overline{w'T'}) = \frac{\overline{w'T'}}{w_{rms}.T_{rms}}$ est identiquement nulle sur toute la hauteur du canal. Cette remarque n'est pas anodine car elle montre que ce n'est pas directement la vitesse en paroi w qui influence la température.

Les champs instantanés de flux et de contrainte en paroi, pour les contrôles v et w, sont présentés sur les figures 5, 6, 7 et 8. Ces quantités sont adimensionnalisées par rapport aux échelles internes obtenues dans le cas standard. Pour un même contrôle, le flux et la contrainte sont localement affectés de manière identique.

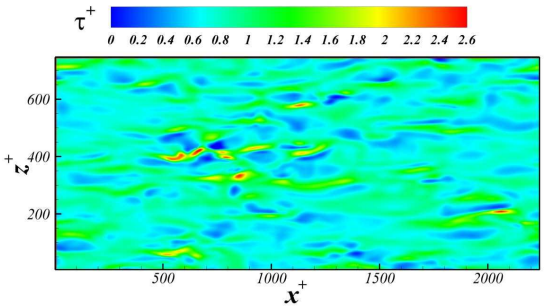


FIG. 5. Champ instantané de contrainte pariétale dans le cas d'un contrôle *Ad-Hoc v*. *Instantaneous wall shear stress distribution under Ad-Hoc v manipulation*

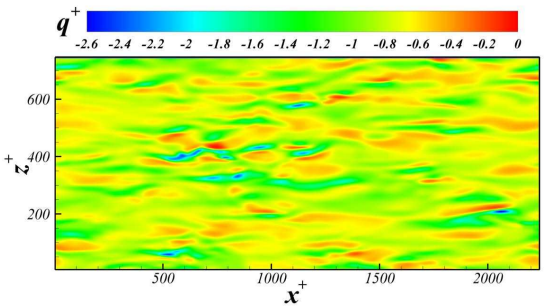


FIG. 6. Champ instantané du flux pariétal dans le cas d'un contrôle *Ad-Hoc v*. *Instantaneous wall heat transfer distribution under Ad-Hoc v manipulation*

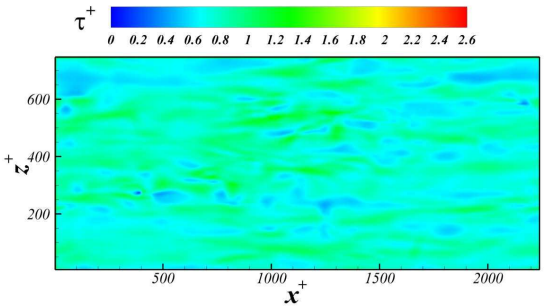


FIG. 7. Champ instantané de contrainte pariétale dans le cas d'un contrôle *Ad-Hoc w*. *Instantaneous wall shear stress distribution under Ad-Hoc w manipulation*

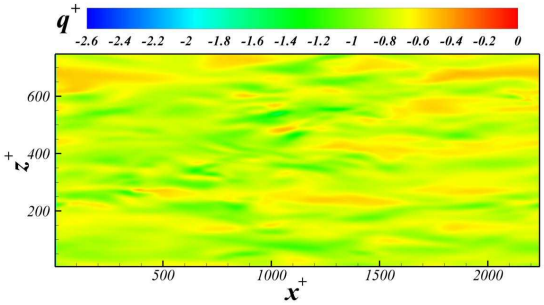


FIG. 8. Champ instantané du flux pariétal dans le cas d'un contrôle *Ad-Hoc w*. *Instantaneous wall heat transfer distribution under Ad-Hoc v manipulation*

Cependant, une différence flagrante, portant sur la valeur des fluctuations du transfert de chaleur en paroi et du frottement, est constatée entre les deux contrôles. En effet, dans le cas standard (non montré ici), on obtient $\bar{\tau}^+_{rms} \approx \bar{q}^+_{rms} = 0.4$ alors que pour le contrôle *Ad-Hoc v*, on a $\bar{\tau}^+_{rms} \approx \bar{q}^+_{rms} = 0.26$ et pour le contrôle *Ad-Hoc w*, $\bar{\tau}^+_{rms} \approx \bar{q}^+_{rms} = 0.12$.

Dans le cas d'un contrôle v et proche de la paroi, le facteur de dissymétrie (figure 9) est doublé par rapport aux cas standard. Les fluctuations négatives de température, provenant certainement des balayages ($v' < 0$), sont beaucoup plus présentes en paroi. Les facteurs d'aplatissements (figure 10) montrent que l'intermittence des fluctuations de température est aussi beaucoup plus importante en paroi lors de l'application d'un contrôle v (approximativement un facteur 3 par rapport au cas standard). Ces constatations sont confirmées par la figure 6 qui montre que les zones de faibles transferts thermiques sont beaucoup plus localisées et intenses que les zones de hauts transferts.

3. Discussion

On a vu dans la section précédente que les contrôles *Ad-Hoc* de type v et w affectaient différemment le flux de chaleur pariétal (et la contrainte). En effet, même si les profils moyens et l'évolution de la

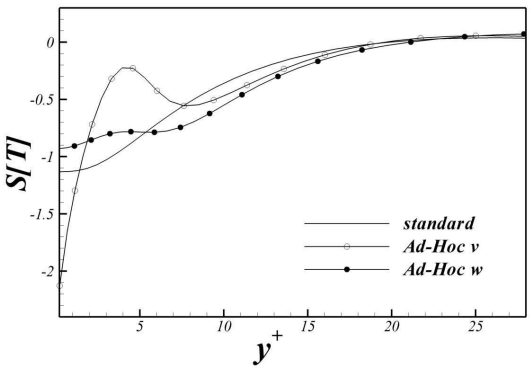


FIG. 9. Facteur de dissymétrie de la température. *Skewness factor of the temperature*

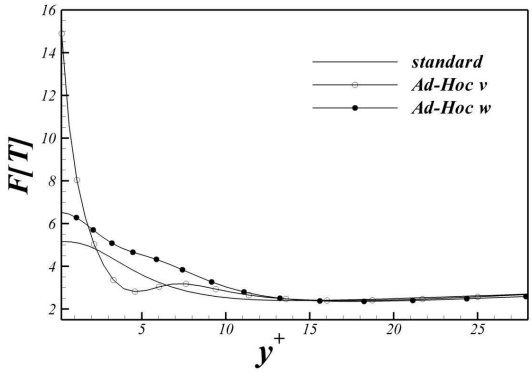


FIG. 10. Facteur d'aplatissement de la température. *Flatness factor of the temperature*

température semblent concorder, l'analyse de la structure fine révèle de fortes disparités entre les deux types de contrôle, particulièrement pour $y^+ < 5$. Dans le cas d'un contrôle v, comme en l'absence de manipulation, les équations de transport du flux et de la contrainte en paroi, moyennées en espace s'écrivent :

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial y^2} \tag{2}$$

Les équations 2 ne sont donc que de simples équations diffusives.

En revanche dans le cas d'un contrôle w, ces deux équations deviennent :

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = -\left(\frac{\partial}{\partial y}\overline{v'q'}\right) + \left(\overline{\frac{\partial w'}{\partial z}q'}\right) + \alpha \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t} = -\left(\frac{\partial}{\partial y}\overline{v'\tau'}\right) + \left(\overline{\frac{\partial w'}{\partial z}\tau'}\right) + \nu \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial y^2} \tag{3}$$

où le premier terme à droite des équations représente représente le forçage volumique turbulent et le second est le terme de production. On remarque l'apparition de termes corrélant les vitesses transverses en paroi et le flux (ou la contrainte). Ainsi, le contrôle w semble plus adapté pour agir directement en paroi. Mais dans la section 2, on a vu que la corrélation $C(\overline{w'T'})$ était nulle sur tout le domaine. Le mécanisme de réduction de transfert de chaleur (et de contrainte) n'est donc pas directement lié aux mouvements transverses générés par les fluctuations w en paroi.

Considérons les termes analogues $-\frac{\partial}{\partial y}\overline{v'q'}$ et $-\frac{\partial}{\partial y}\overline{v'\tau'}$. Dans la sous couche visqueuse ($y^+ < 5$), on peut écrire $-\frac{\partial}{\partial y}\overline{v'q'} \approx \overline{\frac{\partial w'}{\partial z}q'}$ ainsi que $-\frac{\partial}{\partial y}\overline{v'\tau'} \approx \overline{\frac{\partial w'}{\partial z}\tau'}$. En effet, en appliquant l'équation de continuité sur la paroi, on obtient $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial z}$.

Ainsi les équations 3 deviennent :

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = 2\left(\overline{\frac{\partial w'}{\partial z}q'}\right) + \alpha \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t} = 2\left(\overline{\frac{\partial w'}{\partial z}\tau'}\right) + \alpha \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial y^2} \tag{4}$$

Lors de l'application d'un contrôle w, la diminution du transfert de chaleur pariétal et du frottement peut alors s'expliquer par l'existence de nouveaux termes reliant directement le flux et la contrainte au gradient transverse de la vitesse w en paroi. Cette constatation ne donne pas réellement d'indices sur les mécanismes de réduction mis en jeu. La figure 4 montre que, pour les deux types de contrôle, les corrélations entre les vitesses verticales et les fluctuations de température ont un comportement similaire. En effet, w' n'étant pas directement impliqué dans le processus, v' est certainement la composante de vitesse prenant activement part aux mécanismes de réduction. Au dessus de la paroi jusqu'à la zone de

production turbulente, la relation $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial z}$ reste toujours valable car les structures cohérentes sont très étendues dans la direction longitudinale ($\frac{\partial u}{\partial x} \approx 0$).

Le schéma 11 expose le mécanisme de réduction alors suggéré. Dans le cas du contrôle w et lors du passage d'une structure cohérente, la paroi est soumise à une vitesse transverse opposée à celle détectée. En $y^+ = 0$, on voit alors se former une distribution de gradient de vitesse transverse $\frac{\partial w}{\partial z}$ qui donne lieu à un gradient de vitesse normale $-\frac{\partial v}{\partial y}$. Ceci résulte en la création d'une vitesse v, opposé à la vitesse verticale qui aurait été détectée lors d'un contrôle *Ad-Hoc* v. Le schéma w agit alors d'une manière très similaire au schéma v mais affecte aussi directement la paroi par l'intermédiaire des équations de transport (comme montré par les équations 4).

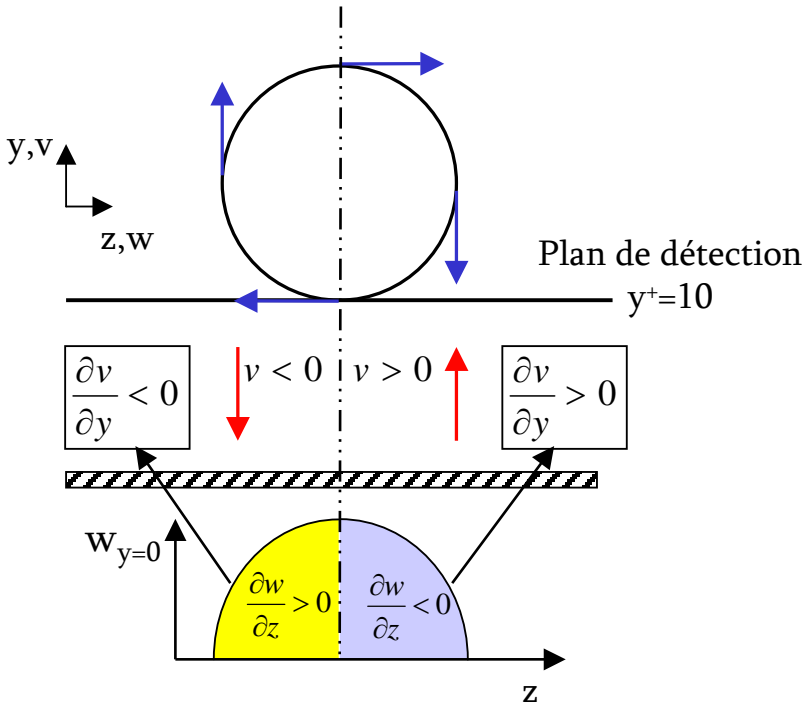


FIG. 11. Mécanisme de réduction de contrainte et de flux pariétal suggéré lors du passage d'une structure cohérente, pour un contrôle *Ad-Hoc* de type w. (La paroi est représentée par la zone hachurée.). *Drag and flux reduction mechanism suggested for a Ad-Hoc w control when a coherent structure is detected (the wall is represented by the hatched zone).*

Dans le cas d'un contrôle w, la vitesse verticale ainsi créée (flèches rouges) ne peut se former qu'au-dessus de la paroi. On peut dès lors expliquer pourquoi, pour $y^+ < 2.5$, la corrélation $C(\overline{v'T'})$ (figure 4) est beaucoup plus importante pour le contrôle v que pour le w. La zone d'interaction entre les vitesses verticales opposées est alors éloignée et les éjections ($v > 0$) ainsi que les balayages ($v < 0$) engendrées par les structures quasi-longitudinales n'atteignent plus la paroi (faibles fluctuations du flux et de la contrainte). Les travaux de [1] montrent qu'un schéma *Ad-Hoc* combiné (v et w simultanément), donne des résultats identiques à l'application d'un contrôle w seul. Ce résultat constitue une preuve supplémentaire que le mécanisme lié au contrôle v fait partie intégrante du mécanisme de réduction du contrôle w.

	Standard	Ad-Hoc v	Ad-Hoc w
$\bar{\tau}^+$	1	0.8	0.74
$\bar{q}^+$	-1	-0.81	-0.76

TAB. 1
Valeurs moyennes de la contrainte et du flux en paroi, avec ou sans manipulation, et adimensionnalisés par les échelles internes obtenues dans le cas standard. *Shear and flux mean value at the wall, with and without manipulation, and non-dimensionnalized by the viscous scales obtained in the standard case.*

Remerciements

Nous remercions vivement l'Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique (IDRIS) pour les moyens numériques mis à disposition.

Références

[1] Choi, H., Moin, P. et Kim, J. (1994). Active turbulence control for drag reduction in wall-bounded flows. *J. Fluid Mech.*, 262 :75–110.

[2] Kim, J. et Moin, P. (1985). Application of fractionnal-step method to incompressible Navier-Stokes equation. *J. Comp. Phys.*, 59 :308–323.

[3] Kim, J., Moin, P., et R.Moser (1987). Turbulence statistics in fully developed channel flow at low reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 177 :133–166.

[4] Lyons, S., Hanratty, T., et McLaughlin, J. (1991). Direct numerical simulation of passive heat transfer in a turbulent channel flow. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 34 (4/5) :1149–1161.

Annexe D

Article à paraître dans la revue *Theoretical and computational fluid dynamics*

ONE-INFORMATION SUBOPTIMAL CONTROL REPERCUSSION ON THE FINE STRUCTURE OF WALL TURBULENCE

Sedat F. TARDU, Olivier DOCHE

Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels, LEGI

B.P. 53 X, 38041 Grenoble, Cédex, France

Sedat.Tardu@hmg.inpg.fr

Phone; +33476827030, Fax:+33476825271

Key words: Wall turbulence, drag control, active suboptimal control, vorticity dynamics, near wall turbulence structure.

Abstract

The suboptimal control with the cost function directly connected to the wall shear and introduced for a while has been revisited through direct numerical simulations of high temporal and spatial resolution. Its effect on the fine structure of the wall turbulence has been analyzed in details, essentially through the spanwise vorticity transport mechanism. It is shown that only half of the viscous sublayer is mainly affected by the control. The actuation efficiency is limited in terms of the wall shear stress reduction, but is high as long as the turbulent wall activity is concerned. The wall shear stress is reduced due both to the reduction of the shear production in the viscous sublayer and to the contribution of the turbulent body force. The dissipation involving in the streamwise vorticity fluctuations transport equation increases significantly and overcomes the production in a thin layer near the wall leading to a drastic diminution of the turbulent wall shear stress fluctuations.

Introduction

Development of efficient and feasible active drag control strategies is the new challenge of the wall turbulence research for the next decades. The socio-economic consequences of the drag reduction are becoming increasingly important for improving the performance of aircrafts and ships. New ideas are being developing in several teams around the world to achieve this delicate goal, by using either techniques based on the knowledge of near wall coherent structures and related physics [1,2] or by applying adaptive [3] or non adaptive [4] non linear control theory to the wall turbulence.

Optimal and suboptimal strategies are part of the second category. The goal of optimal control is to determine the actuation at the wall, which minimizes the total cost i.e., sum of the total shear stress and the cost for the intervention at the wall during a time interval T. This procedure is long and memory time consuming. Suboptimal control tries to pass beyond this shortcoming by proceeding at each time step. Suboptimal control techniques applied to the turbulent drag reduction problem have been introduced for a while [5,6], yet detailed analysis of the controlled flow field is curiously missing in the literature to our knowledge. Our objective is to revisit the suboptimal strategy through well-resolved direct numerical simulations at a comparatively higher Reynolds number in order to have a more profound physical insight into the turbulence response. A particular attention will be paid here to the structural alteration in the low buffer and viscous sublayers, especially through the vorticity transport mechanisms. It has to be emphasized that; as the title indicates only one information strategies are concerned in this paper. The pre-determined cost function is based only on the streamwise component of the shear stress at the wall. There are substantial published works dealing with the performance development of suboptimal control techniques. For example Lee et al. [7] use two laws requiring respectively spatial information on the wall pressure over the entire wall and one component (spanwise) of the wall shear also over the entire wall. The

aim here is not to develop more efficient suboptimal strategies but to contribute to the understanding of the response of the wall turbulence to such an actuation, which has some striking facets, as it will be discussed. At last but not least, we have to indicate that, despite the considerable practical difficulties some researchers involve into well-designed experiments dealing with optimal or derivative strategies [8]. Thus, it is not impossible to have in the more or less next future real applications of active control that is worthwhile to be investigated in more details and from different points of view.

Suboptimal control

Contrarily to the optimal control whose aim is to relaminarize the flow in a given time interval, the suboptimal strategy attempts to decrease at each time step the cost function. The latter is:

$$J(\phi) = \frac{k}{2\Gamma} \iint_w \phi^2 \, dS + \frac{1}{\Gamma} \iint_w \tau \, dS \tag{1}$$

where τ is the shear at the wall whose area is denoted by Γ, ϕ is the action at the wall in the form of pinpoint blowing/suction distribution and k is a constant. The first integral above is clearly the energy expended to achieve the drag reduction. The control problem consists of determining the optimum ϕ at each time step. The state equation is the Navier-Stokes equation:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2} \tag{2}$$

where ν is the viscosity, u_i and x_i are respectively the instantaneous local velocity and coordinates and P denotes the pressure . Mixed notations will be used here for convenience, i.e., the streamwise (x_1), wall normal (x_2) and spanwise (x_3) directions will also be denoted respectively by x, y and z together with the corresponding velocity components u (u_1), v

(u_2) and w (u_3). The equation (1) is subject to the following boundary conditions at the wall, $x_2 = y = 0$:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= \phi(x_1, x_3) \\ u_3 &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

The sensitivity of the cost function to the actuation modifications ϕ is measured through Fréchet derivatives as in classical non-linear control theory [9]. The variation of a functional $\xi(\phi)$, denoted by $\tilde{\xi}(\phi, \tilde{\phi})$ is given by:

$$\tilde{\xi}(\phi, \tilde{\phi}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\xi(\phi + \varepsilon\tilde{\phi}) - \xi(\phi)}{\varepsilon} = \iint_w \frac{F\xi(\phi)}{F\phi} \tilde{\phi} \, dS \tag{4}$$

where F stands for the Fréchet operator [10]. In practice, the Navier-Stokes equation is discretized in time and space, and the resulting operators are transformed through the Fréchet operator. Using a Crank-Nicholson scheme for the time discretization results for instance in the decomposition $Q^{n+1} + R^n = 0$ of **(2)** where Q^{n+1} and R^n regroup the terms at the times steps $n+1$ and n. The resulting Fréchet transformation of (2) is consequently:

$$A\theta_i \equiv \theta_i + \beta_1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \lambda \delta_{i1} + \theta_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} \right) - \beta_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \theta_i \right) = 0 \tag{5}$$

where β_1 and β_2 are the coefficients resulting from the time discretization, and θ_i, ρ and λ are the Fréchet transforms of respectively u_i, the pressure fluctuations p' and the mean pressure gradient $\frac{\partial P}{\partial x_1}$, δ_{ij} standing for the Kronecker delta function. The last equation combined with the Fréchet transformation of the cost function:

$$\tilde{J}(\phi, \tilde{\phi}) = \iint_w \frac{DJ(\phi)}{D\phi} dS = \frac{k}{\Gamma} \iint_w \phi \; \tilde{\phi} \, dS + \frac{1}{\Gamma} \iint_w \tilde{\tau} \, dS \tag{6}$$

subject to the boundary conditions **(3)** allows the determination of the gradient $\frac{DJ}{D\phi}$ from which the actuation at the next time step $n+1$ is computed either by a conjugate gradient method $\phi^{n+1} = \phi^n - \alpha\left(\frac{DJ}{D\phi}\right)^n$ or by a research of minima algorithm. By the introduction of an adjoint problem related to **(**5) and the convenient choice of its boundary conditions, $\frac{DJ}{D\phi}$ can be related to the fluctuating adjoint pressure field at the wall. The adjoint operator A^* is defined by:

$$\langle A\theta_i, \varphi_i \rangle = \left\langle \theta_i, A^* \varphi_i \right\rangle + b \tag{7}$$

where φ_i is the adjoint of θ_i and b is a constant to be determined. The internal product $\langle f_1, f_2 \rangle$ is the triple integral in the control volume V $\langle f_1, f_2 \rangle = \iiint_V f_1 f_2 \, dx_1 dx_2 dx_3$. Applying the operator given by (7) to the equation (5) results in:

$$A^* \varphi_i \equiv \varphi_i + \beta_1 \left(\frac{\partial \pi}{\partial x_i} + \lambda \delta_{i1} + \varphi_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - u_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right) - \beta_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_i \right) \tag{8}$$

obtained by partial integration and through the use of streamwise and spanwise periodic boundary conditions used in the direct numerical simulations procedure (see the next session). In the equation (8) λ and π stand respectively for the mean adjoint pressure gradient and fluctuating adjoint pressure field. The advantage of using an adjoint method is in the entire liberty of related boundary conditions choice. Choosing, for instance $\varphi_1 = 1$ and $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$ at the wall leads to:

$$b = \beta_2 \iint_w \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} dS + \beta_1 \iint_w \tilde{\phi} \pi \, dS \tag{9}$$

. Choosing $A^* \varphi_i = 0$ results in $b = 0$, and finally combining (9) with (6) one has:

$$\frac{DJ(\phi)}{D\phi} = \frac{k}{\Gamma}\phi - \frac{\beta_1}{\beta_2\Gamma}\pi_w \tag{10}$$

relating the Fréchet variation of the cost function to the adjoint pressure field π_w at the wall. Thus both the Navier Stokes equation (2) and its related adjoint (8) are resolved in time and space to determine π_w and the suboptimal distribution of blowing/suction actuation at the wall. The procedure is the same as used [5] with some subtle differences. We noticed for instance that the research of minima algorithm in the cost function at the time step n is particularly efficient when it is based on the gradient $\frac{DJ(\phi)}{D\phi}$ computed at $n-1$ and not n. Indeed, the wall shear stress, thereby the cost function cannot have proper information on the instantaneous change induced by a sudden variation in the boundary condition. A time lag of about $\Delta t^+ \approx \Delta y^{+2}$ in wall units (related to the shear velocity and viscosity) is necessary in order that the information at the wall diffuses to the first resolved mesh points near the wall. Taking $\Delta y^+ = 0.1$ where the estimation of the shear is performed results in $\Delta t^+ = 0.01$ which is just the time step of the simulations. `

Direct Numerical Simulations

The Direct Numerical Simulation (DNS) code developed by Orlandi [11] has been modified and adapted to investigate the effect of localized blowing of different temporal shapes. The code is of finite difference type combined with fractional time procedure. The non-linear terms are explicitly resolved by an Adams-Bash forth scheme. Periodical boundary conditions are used in the homogeneous streamwise and spanwise directions. The size of the computational domain is $(4\pi h \times 2h \times 1.33\pi h)$ in respectively the streamwise x, wall normal y and spanwise z directions, h standing for the channel half width. There are $(513 \times 129 \times 129)$

computational modes in (x,y,z). Uniform and stretched coordinates are used in the streamwise, spanwise and wall normal directions. The first mesh from the wall is at 0.2 wall units. The mesh sizes in the x and z directions are respectively 4.5 and 5.5 $\ell_\nu = \frac{\nu}{u_\tau}$ where ν and u_τ are the viscosity and the shear velocity. The Reynolds number based on the channel height and the centerline velocity is fixed at $Re = \frac{h U_c}{\nu} = 4200$ corresponding to $Re_\tau = \frac{h u_\tau}{\nu} = 180$. The computational time step is $\Delta t^+ = \frac{\Delta t}{\ell_\nu} u_\tau$=0.1. These parameters have to be compared with $32 \times 65 \times 32$ mesh points, $Re_\tau = 90$ and $\Delta t^+ = \frac{\Delta t}{\ell_\nu} u_\tau$ used in [5,6].

Results

Fig. 1 shows the wall shear stress history during the control versus time in wall units. The scaling of the quantities in this paper is done with respect to the inner variables i.e., shear velocity u_τ and viscosity ν and $(\ )^+$ stands for the non-dimensional quantities. The shear velocity is either $u_{\tau S}$ of the standard unmanipulated channel flow, or $u_{\tau M}$ of the controlled flow. In order to alleviate the notation the non -dimensional quantity q will be denoted by q^+ in both cases, with clear precision in the text and the legends. Thus the wall shear stress τ and time t in Fig. 1 are both scaled with $u_{\tau S}$ of the standard wall flow. The τ time story obtained through the one-step equation $\phi^{n+1} = \phi^n - \alpha\left(\frac{DJ}{D\phi}\right)^n$ is compared with that resulting from the search of minima algorithm. Several tests revealed that the optimum value of α is 0.01 under the present conditions. It is seen that the search of minima algorithm is more efficient as expected, giving place to 10% of drag reduction. This is somewhat smaller than the 16% reduction reported by Bewley and Moin [6]. The reason for this difference can plausibly be

attributed to the differences in the Reynolds number that is twice larger here. The high time and space resolution used here, in particular in the streamwise direction and with a 10 times smaller time step are also some factors that may explain this difference. It is seen in Fig. 1 that during a short time period of about 10 wall units the shear decreases sharply and subsequently stabilizes at $t^+ \geq 200$. The root mean square (rms) of the wall normal velocity at the wall to achieve this drag is small and only $v'^+ = 0.05$ (not shown here).

The common characteristic of some active or passive control strategies used so far is the equilibrium pertinence of the wall turbulence. Thus, the distributions of controlled flow quantities q collapse more or less with those of the unmanipulated flow when they are scaled with the local wall variables, i.e. the viscosity ν and the friction velocity $u_{\tau S}$ and $u_{\tau M}$ of respectively the standard (S) and manipulated (M) wall layers. This is the case for instance for passive control by riblets (Tardu, [12]) or active control through localized suction and blowing (Tardu, [13]). The thickening of the viscous sublayer and the consequent shift of the equilibrium log layer that is still existent under the control, on the other hand, systematically accompany drag reduction. This is also the case for the sub optimally controlled wall turbulence**.** Fig. 2 shows the non-dimensional streamwise velocity profiles $u^+ = \dfrac{u}{u_{\tau S}}$ and $\dfrac{u}{u_{\tau M}}$ versus the wall normal distance that respectively takes the form $y^+ = \dfrac{y}{\nu} u_{\tau S}$ and $y^+ = \dfrac{y}{\nu} u_{\tau M}$ in the standard and controlled configurations. The thickening of the viscous layer from 5 to 7 wall units and the subsequent removal of the buffer and log layers can be clearly observed in this Fig.

The fine structure of the turbulence depicted through the skewness ($S_{q'} = \frac{\overline{q'^3}}{\overline{q'^2}^{3/2}}$) and flatness ($F_{q'} = \frac{\overline{q'^4}}{\overline{q'^2}^2}$) of the fluctuating velocity components can be depicted in Fig. 3. It is seen that neither S nor F of streamwise u' and spanwise w' velocity fluctuations are significantly affected by the control. The wall normal velocity structure is however strongly modified at $y^+ \leq 20$. The standard buffer layer is dominated by the sweep events with $u' > 0$ and $v' < 0$ resulting in $S_{u'} > 0$ and $S_{v'} < 0$ (Fig. 3a). The control affects profoundly the skewness of the wall normal velocity fluctuations that becomes $S_{v'} > 0$ in the viscous sublayer while $S_{u'} > 0$ is not altered. Thus, events with $v' > 0$ and $u' > 0$ are dominant at $y^+ > 5$ resulting in negative Reynolds shear stress $-\overline{u'v'} < 0$ in this zone. This can be clearly seen in Fig. 4 that shows the distribution of the correlation coefficient $C = \frac{-\overline{u'v'}}{\sqrt{\overline{u'u'}}\sqrt{\overline{v'v'}}}$ in the standard and manipulated wall layers. The negative shear stress results in negative production $-\overline{u'v'}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} < 0$. That is of course beneficent in terms of the shear decrease, but $-\overline{u'v'}$ is negligibly small in the viscous sublayer and so is its contribution to the drag reduction. The wall normal velocity fluctuations are highly intermittent in the buffer layer, and the flatness $F_{v'}$ can reach values as high as 20 at the wall. The actuation at the wall decreases significantly $F_{v'}$ (Fig. 3b). The suboptimal control affects mainly the fine structure of the wall normal velocity fluctuations.

The distributions of the root mean squares (rms) of the streamwise $\omega_x'^+$, wall normal $\omega_y'^+$ and spanwise $\omega_z'^+$ vorticity components versus y^+ are shown in Fig.5. They are scaled with respect to the local shear velocity. The first two components have similar distributions

with only slight decrease of $\omega_x'^+$ and $\omega_y'^+$ under the control. The striking feature, however is the sharp drop off of the turbulent spanwise vorticity activity in the viscous sublayer and near the wall. It is clearly seen in Fig. 5 that $\omega_z'^+$ diminishes at $y^+ \leq 5$ up to nearly 50% at the wall. The value of $\omega_z'^+$ at $y^+ = 0$ is equal to the wall shear stress intensity $\sqrt{\overline{\tau'\tau'}}^+$. Therefore, the turbulent $\sqrt{\overline{\tau'\tau'}}^+$ intensity decreases by a factor of 2 in the controlled wall layer, while the decrease in shear itself is only 10%. This can also be seen clearly in the snapshots shown in Fig. 6a and 6b corresponding respectively to the uncontrolled and controlled cases. The quasi-streamwise vortical structures that are generic of the wall turbulence detected by the λ_2 technique [14] appearing as "spaghettis" and the associated local wall shear stress are reproduced in these figures. It is recalled that the λ_2 technique is based on the second negative eigenvalue of the $\mathbf{S^2} + \mathbf{W^2}$ where $S_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$ is the symmetric and $\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} - u_{j,i}\right)$ is the antisymmetric components and $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ is the derivative of the instantaneous velocity component u_i in the x_j direction. There are significantly less coherent structures and more strikingly, the highly fluctuating shear stress sites (Fig. 6a) disappear in the controlled case (Fig. 6b). Yet, the suppression of the wall activity is not accompanied by a subsequent decrease of the shear giving place to a highly non-equilibrium wall turbulence in the viscous sublayer. The situation is qualitatively similar to the opposition in phase ad-hoc controlled wall turbulence [1]. Recall that, in the latter, the blowing/suction velocity distribution at the wall is instantaneously chosen as opposite of the wall normal velocity distribution in the high buffer layer, at $y^+ = 10$, i.e. $v^+\left(x^+, y^+ = 0, z^+, t^+\right) = -v^+\left(x^+, y^+ = 10, z^+, t^+\right)$. A drag reduction of 25 % can be achieved by ad-hoc control (not shown here). Fig. 7 compares the $\omega_z'^+$ distributions resulting from

suboptimal and ad-hoc control strategies. It is seen that the spanwise vorticity fluctuations decrease in the viscous sublayer in both cases, but $\omega_z'^+$ at the wall is much more smaller under the suboptimal control.

The transport equation for the mean spanwise vorticity $\Omega_z = -\frac{\partial u}{\partial y}$ for the channel flow that is homogeneous in the streamwise and spanwise directions is:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Omega_z = \overline{\omega_i' \frac{\partial w'}{\partial x_i}} - \frac{\partial}{\partial y}\overline{v'\omega_z'} + \nu \frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial y^2} \tag{11}$$

where mixed notations are used for simplicity. The first term at the right hand side of the last equation is the production P_{Ω_z} through stretching, tilting and twisting of respectively the spanwise, wall normal and streamwise fluctuating vorticity, and the last term is the viscous diffusion. The second term $B = -\frac{\partial}{\partial y}\overline{v'\omega_z'}$ is the advection or the turbulent body force term. It is zero at the wall in the standard and controlled cases since $\frac{\partial v'}{\partial y} = 0$ at $y^+ = 0$ by continuity and $\left(v'\omega_z'\right)^+ \propto y^{+2}$ asymptotically near the wall. In the controlled flow, however, the $v'\omega_z'$ flux is negative in a very thin part of the viscous at $y^+ < 2$ close to the wall as it can clearly be seen in Fig. 8 obtained at $t^+ = 1500$ where the wall shear stress is more or less stabilized in time. The spanwise vorticity being $\Omega_z = -\frac{\partial u}{\partial y} < 0$, a positive $-\frac{\partial}{\partial y}\overline{v'\omega_z'} > 0$ at $y^+ < 5$ is beneficent in terms of shear reduction. The quantities in Fig. 8 are non-dimensionalized by the viscosity and the shear velocity of the standard unmanipulated turbulent channel flow to sort out direct effects**.** The production P_{Ω_z} decreases roughly by the same amount of the shear velocity (Fig. 8). It reduces to:

$$P_{\Omega_z} = -\overline{\frac{\partial v'}{\partial z}\frac{\partial w'}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial u'}{\partial z}\frac{\partial w'}{\partial y}} + \overline{\omega_z' \frac{\partial w'}{\partial z}} \tag{12}$$

Close look at each term of this equation revealed that they all decrease roughly by the same amount, i.e. tilting, twisting and stretching are equally affected by the control.

The turbulent intensity of the spanwise velocity fluctuations is governed by:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\overline{\omega_z'^2} = P_{\omega_z'} - T_{\omega_z'} - \varepsilon_{\omega_z'} + D_{\omega_z'} \tag{13}$$

where, the terms related to the production, turbulent transport, dissipation and diffusion are respectively:

$$P_{\omega_z'} = \overline{\omega_z'\omega_i'\frac{\partial w'}{\partial x_i}} + \Omega_z\overline{\omega_z'\frac{\partial w'}{\partial z}}$$

$$T_{\omega_z'} = \frac{1}{2}\overline{u_i'\frac{\partial \omega_z'^2}{\partial x_i}} + \overline{v'\omega_z'}\frac{\partial \Omega_z}{\partial y} \tag{14}$$

$$\varepsilon_{\omega_z'} = \nu\left\{\left(\frac{\partial \omega_z'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_z'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_z'}{\partial z}\right)^2\right\}$$

$$D_{\omega_z'} = \nu\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \omega_z'}{\partial x_i \partial x_i}$$

The results shown in Fig. 9 and 10 explain the drastic reduction of $\omega_z'^+$ under the control in the viscous sublayer (Fig. 5). The difference between the production and the dissipation $P_{\omega_z'} - \varepsilon_{\omega_z'}$ decreases sharply at $y^+ < 5$ and becomes even negative in a significantly thin layer at $y^+ < 2$ (Fig. 9). The terms that mostly contribute to the production decrease of are those related to $\frac{\partial w'}{\partial z}$, coming from the stretching of the spanwise vorticity, i.e., $\overline{\omega_z'\omega_z'\frac{\partial w'}{\partial z}}$ and $\Omega_z\overline{\omega_z'\frac{\partial w'}{\partial z}}$ (not shown here). More strikingly, the dissipation, whose major term is $\left(\frac{\partial \omega_z'}{\partial y}\right)^2$, decreases in the low buffer layer as expected, but increases at $y^+ < 2$ resulting in $P_{\omega_z'} < \varepsilon_{\omega_z'}$ and destroying rapidly the turbulent shear activity ω_z' at the wall (Fig. 10). The instantaneous flux of spanwise vorticity at the wall is related to the streamwise fluctuating pressure gradient

through $-\nu\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial y}\right)_w = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_w$. The increase of $\left(\frac{\partial\omega_z'}{\partial y}\right)^2$ near the wall is thus equivalent to the enhancement of $\left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right)_w^2$. Active control based on the vorticity flux has been investigated in the past by Koumoutsakos [2]. The out-of phase control with the manipulated spanwise vorticity flux opposite to the measured one resulted in 40% of drag reduction, but the formulation of the problem does not include the cost function. Indeed, the instantaneous actuator strengths are very large in this strategy, which should be classified as a forcing at the wall rather than an active control scheme.

Discussion and conclusion

The suboptimal control with related cost function directly connected to the wall shear and introduced by Bewley and Moin [5] has been revisited through direct numerical simulations of high temporal and spatial resolution. Its effect on the fine structure of the wall turbulence has been analyzed in details, essentially through the spanwise vorticity transport mechanism.

The ensemble of the results discussed in the previous section show that only half of the viscous sublayer is mainly affected by the suboptimal control in agreement with previous investigations in different contexts [15]. The efficiency of the latter is quite limited in terms of the wall shear stress reduction, but is high as long as the turbulent wall activity is concerned. The wall shear stress is reduced due both to the reduction of the shear production in the viscous sublayer and to the contribution of the turbulent body force. The suboptimal control increases the dissipation that overcomes the production in a thin layer near the wall leading to a drastic diminution of the turbulent wall shear stress fluctuations.

The transport equation of the wall shear stress reduces to the simple diffusion equation $\frac{\partial}{\partial t}\tau = \nu \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2}$ as in the non standard flow through any control actuated by blowing/suction at the wall. This equation alone gives no direct information on how the efficiency of the control strategy can be improved. In the viscous sublayer wherein $\Omega_z \approx -\tau$, the shear can be manipulated by affecting the vorticity production terms, and/or the turbulent body force term $\frac{\partial}{\partial y}\overline{v'\omega_z'}$. The regions wherein $\frac{\partial}{\partial y}v'\omega_z' < 0$ decreases the shear locally. Thus, to be efficient, the control should increase the intensity of the correlations $\frac{\partial}{\partial y}v'\omega_z' < 0$ and suppresses the zones with $\frac{\partial}{\partial y}v'\omega_z' > 0$. In the viscous sublayer one has approximately $\frac{\partial}{\partial y}v'\omega_z' \approx \omega_z' \frac{\partial}{\partial y}v'$. One can imagine and suggest a related control strategy schematically shown in Fig.11 through the ejection ($v' > 0, \frac{\partial v'}{\partial y} > 0$) and sweep ($v' < 0, \frac{\partial v'}{\partial y} < 0$) events. Active control by imposing a *spanwise* velocity component w at the wall is, in this perspective, more promising because the wall shear stress transport equation is substantially modified compared to the unmanipulated flow and becomes:

$$\frac{\partial}{\partial t}\tau = -2\rho\nu\left(\overline{\omega_z' \frac{\partial w'}{\partial z}}\right)_w + \nu \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2}$$

where ρ is now the density, because in this case the stretching of the vorticity $\overline{\omega_z' \frac{\partial w'}{\partial z}}$ is not null at the wall and $\left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)_w = -\left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)_w \neq 0$ by continuity locally and instantaneously. The combination of the turbulent body force and stretching at the wall gives place to the first term at the right hand side of the previous relationship that is exact and not an approximation. One has $\left(\overline{\omega_z' \frac{\partial w'}{\partial z}}\right)_w = -\left(\overline{\omega_z' \frac{\partial v'}{\partial y}}\right)_w$ and curiously the same scheme shown in Fig. 11 emerges also in

this case, with, however a fundamental difference: the w control affects directly the wall itself. These arguments can explain the relative failure of the active control strategies with cost function related to the wall shear while the actuating mechanism is unsteady blowing/suction at the wall. Even in optimal schemes the maximum drag reduction obtained this way did not exceed 40 %, while relaminarization could be achieved by using the turbulent kinetic energy in the cost function [4]. Control strategies based on the spanwise velocity gradient [3], or actuating through spanwise wall movement [15] gave on the other hand promising results. The key problem concerning the technical feasibility of these control schemes is unfortunately still unresolved.

Acknowledgment

We are grateful to the support of IDRIS the center of high performance computations of the National French Research Center (CNRS). We also thank Mr. Vincent Kubicki for his assistance during this work.

The first author dedicates this paper to the memory of Esat Tardu, his father.

References

[1] Choi, H., Moin, P., Kim, J. “Active turbulence control for drag reduction in wall bounded flows” J. Fluid Mech., 262, 75 (1994).

[2] Koumoutsakos P. “Vorticity flux control for a turbulent channel flow” Phys. Fluids, 11(2), pp. 248-250 (1999).

[3] Lee, C., Kim, J., Babcock, D., Goodman, R., “Application of neural networks to turbulence control for drag reduction” Phys. Fluids 9(6), 1740 (1997).

[4] Bewley T., Moin P., Temam R. “DNS-based predictive control of turbulence: an optimal benchmark for feedback algorithms” J. Fluid Mech., 447, 179-225 (2001).

[5] Bewley T., Choi H., Temam R., Moin P., " Optimal feedback control of turbulent channel flow" Annual Research Briefs pp. 3-14, Center of Turbulence Research, Stanford Un., USA (1993).

[6] Bewley T., Moin P. “Optimal control of turbulent channel flows” in *Active Control of Vibration and Noise* (ed. K.W. Wang, A.H. Von Flotow, R. Shoureshi, E.W. Hendricks & T.W. Farabee). ASME DE-Vol.75, 1994.

[7] Lee, C, Kim J., Choi H., “Suboptimal control of turbulent channel flow for drag reduction” J. Fluid Mech., 358, 245 (1999).

[8] Kasagi N., Fukagata K., Suzuki Y. “Adaptive control of wall-turbulence for skin friction drag reduction and some consideration for high Reynolds number flws” in Proceedings of 2nd International Symposium on Seawater Drag Reduction, Busan-Korea, pp. 17-32 (2005).

[9] Lions J.L.“Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations”, Springer-Verlag, Heidelberg, New York (1971).

[10] Vainberg, M. “Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators”, Holden-Day (1964).

[11] Orlandi, 2002 “Fluid flow phenomena: a numerical toolkit” Kluwer Academic Publishers.

[12] Tardu S., "Coherent Structures and Riblets" *Flow, Turbulence and Combustion,* vol. 54, pp. 349-385 (1995).

[13] Tardu S. "Active control of near wall turbulence by local unsteady blowing *J. Fluid Mech.*, 43, 217-253 (2001).

[14] Jeong J., Hussain F. “On the identification of a vortex” J. Fluid Mech., 285, pp. 69-94 (1995).

[15] Lee C., Kim J. “Control of the viscous sublayer for drag reduction” Phys. Fluids, 14(7), pp. 2523-2529 (2002).

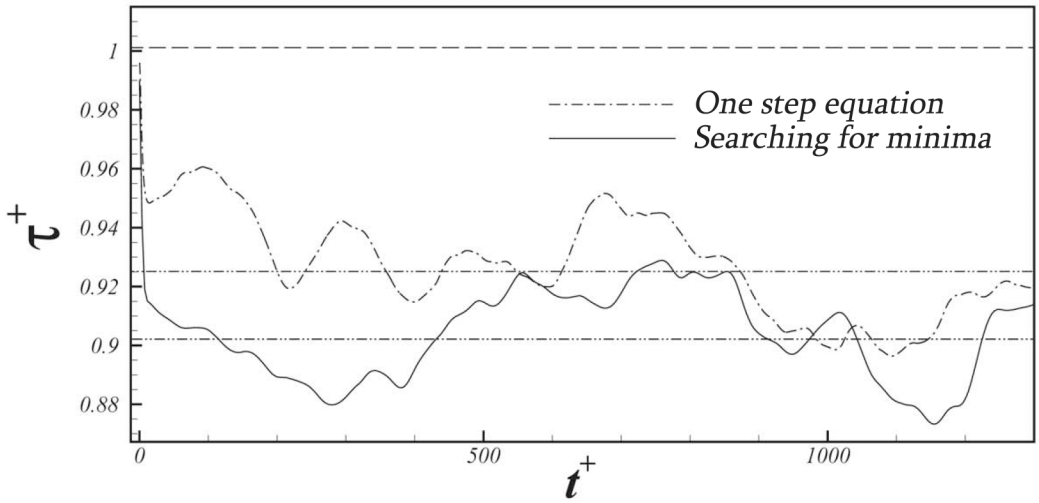


Figure 1 Time history of the wall shear stress scaled with respect to the inner variables of the standard turbulent channel flow.

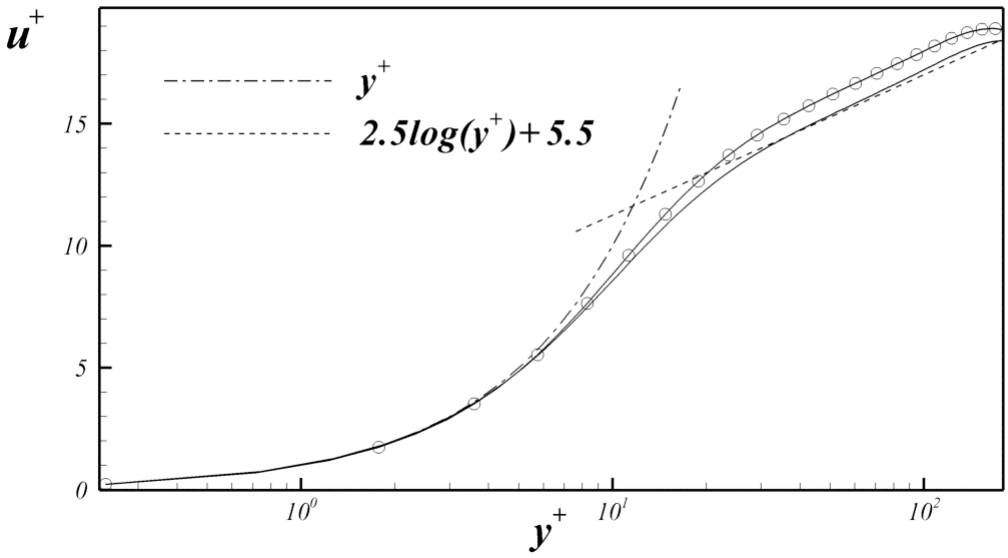
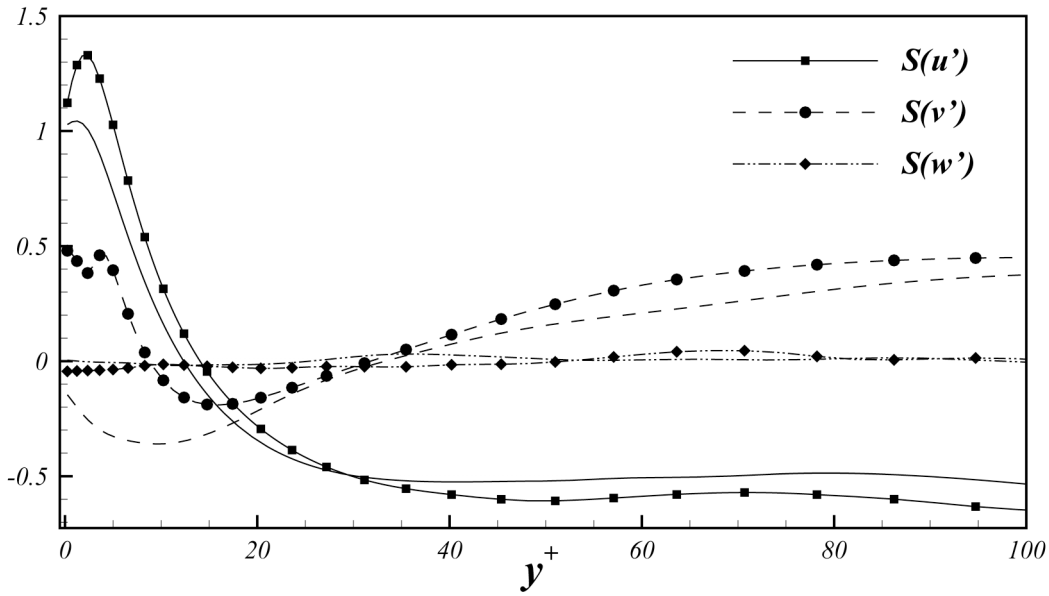


Figure 2 Streamwise velocity profile scaled with local shear velocity in the standard (continuous line) and manipulated (line with open circles) flows.

a)



b)

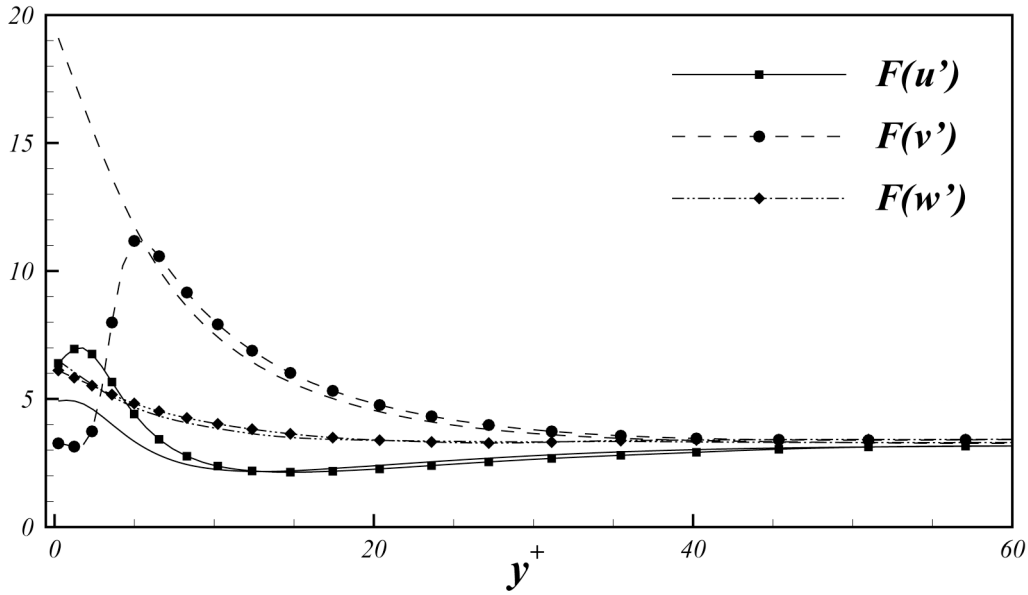


Figure 3 The skewness (*a*) and flatness (*b*) of the streamwise (solid line), wall normal (dashed line) and spanwise (dashed line and points) fluctuating velocity components in standard (without symbols) and controlled (with symbols).

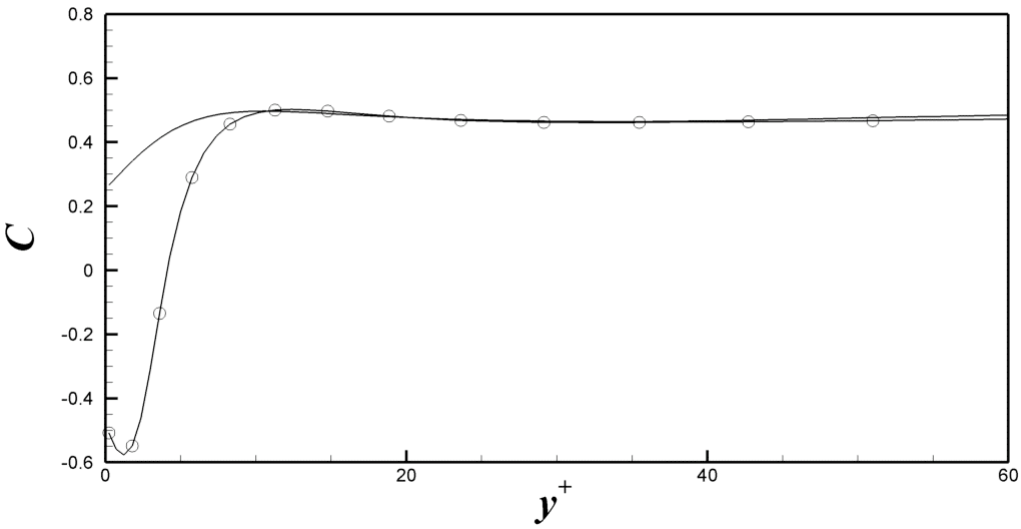


Figure 4 Correlation coefficient in the inner layer in the standard (solid line) and controlled (solid line with open circles) flows.

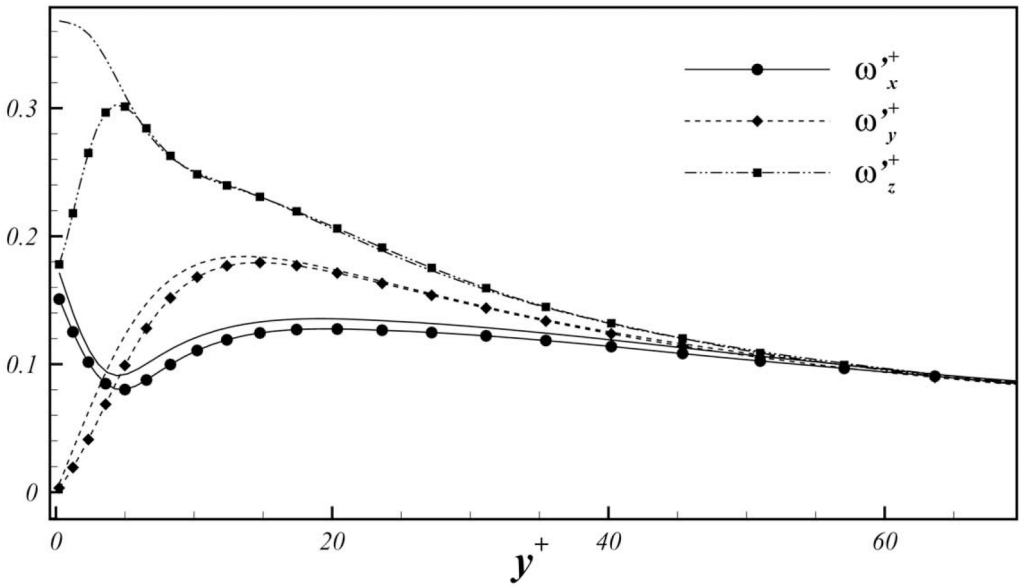
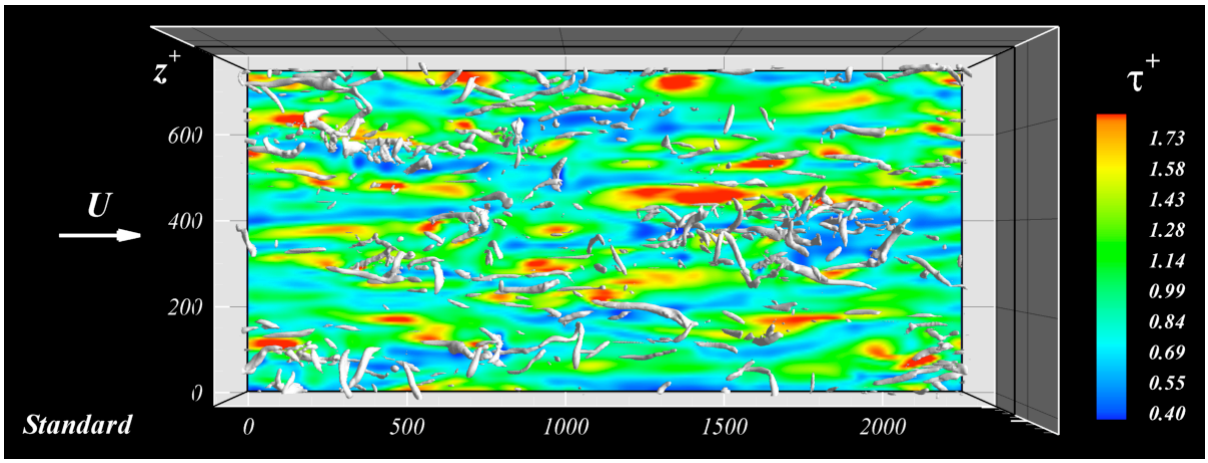


Figure 5 Root mean square of the streamwise (solid line), wall normal (dotted line) and spanwise (dashed line and points) in the standard (without symbols) and controlled (with symbols, respectively circles, diamonds, and squares) flows. The quantities are normalized with the local shear velocity.

a)



b)

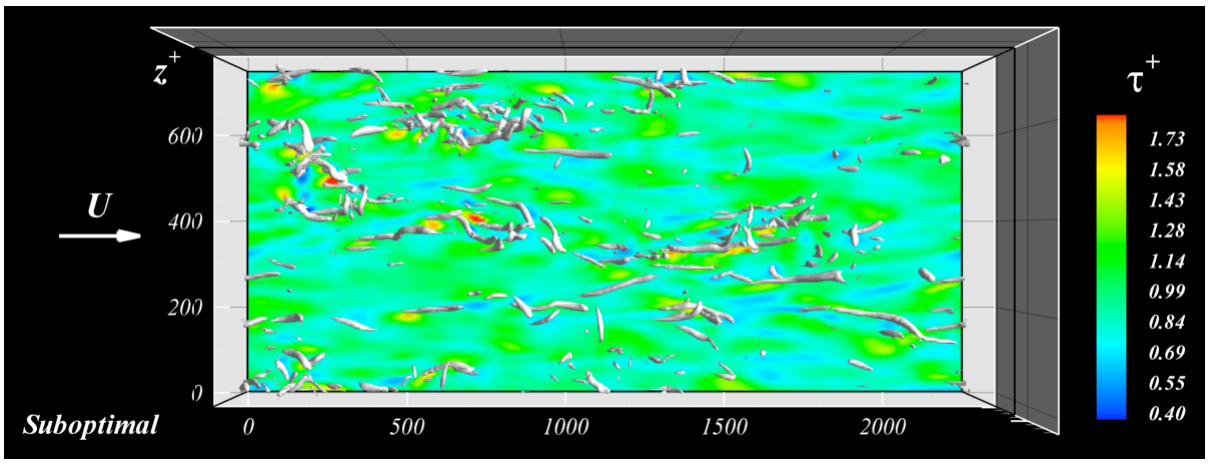


Figure 6 Snapshots of the wall shear and quasi-streamwise vortices in the non-control (*a*) and control (*b*) cases.

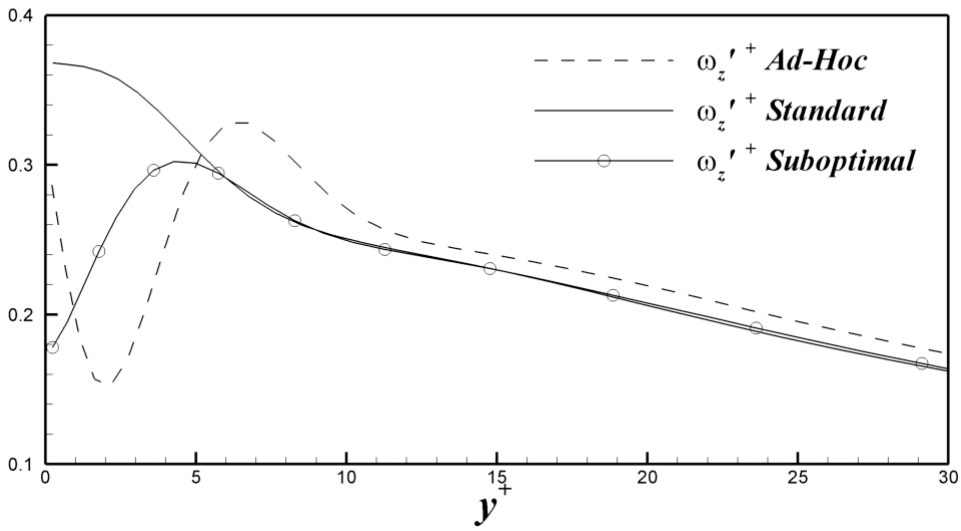


Figure 7 Distribution of the spanwise vorticity rms non dimensionalized with respect to the shear velocity of the standard flow, in the suboptimal and ad-hoc control cases. Legend on the Fig.

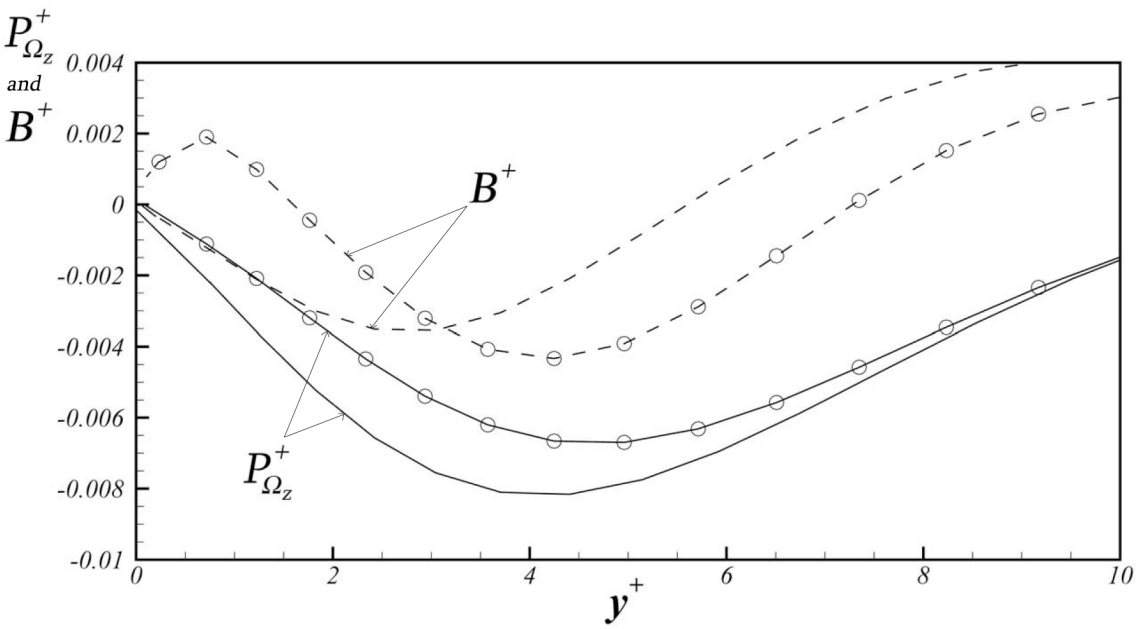


Figure 8 Distribution of the production (solid line) and the turbulent body force (dashed line) in controlled (with open circles) and standard (without symbols). The quantities are scaled with the shear velocity of the non control case.

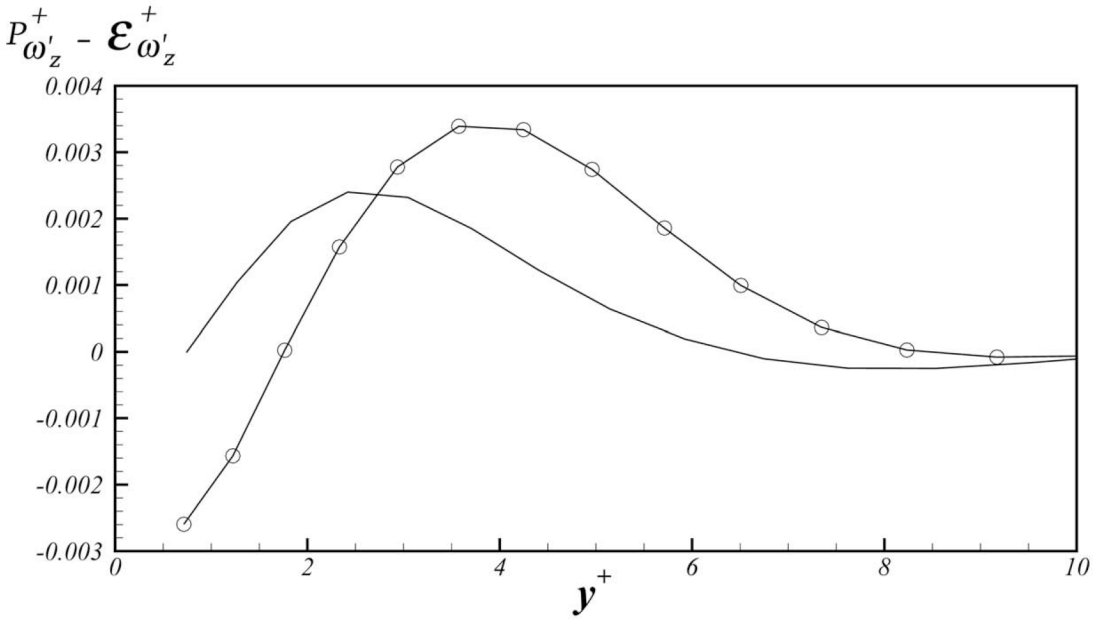


Figure 9 The difference between production and dissipation in the transport equation of the fluctuating spanwise vorticity in the controlled (solid line) and no-controlled (solid line with open circles) cases.

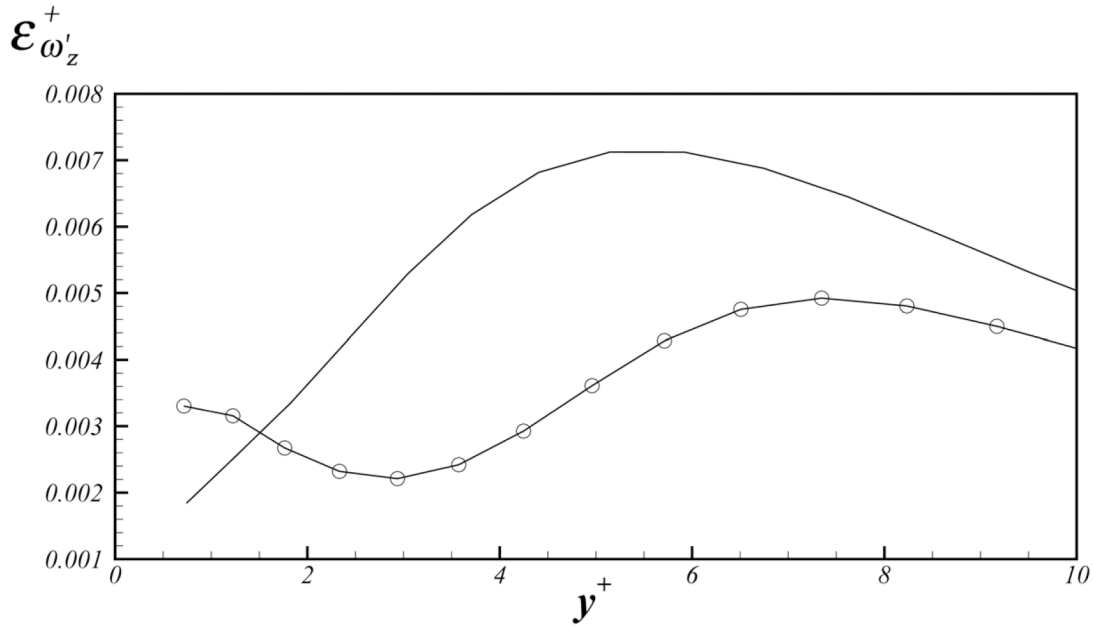


Figure 10 Dissipation in the transport equation of the fluctuating spanwise vorticity in the controlled (solid line) and no-controlled (solid line with open circles) cases.

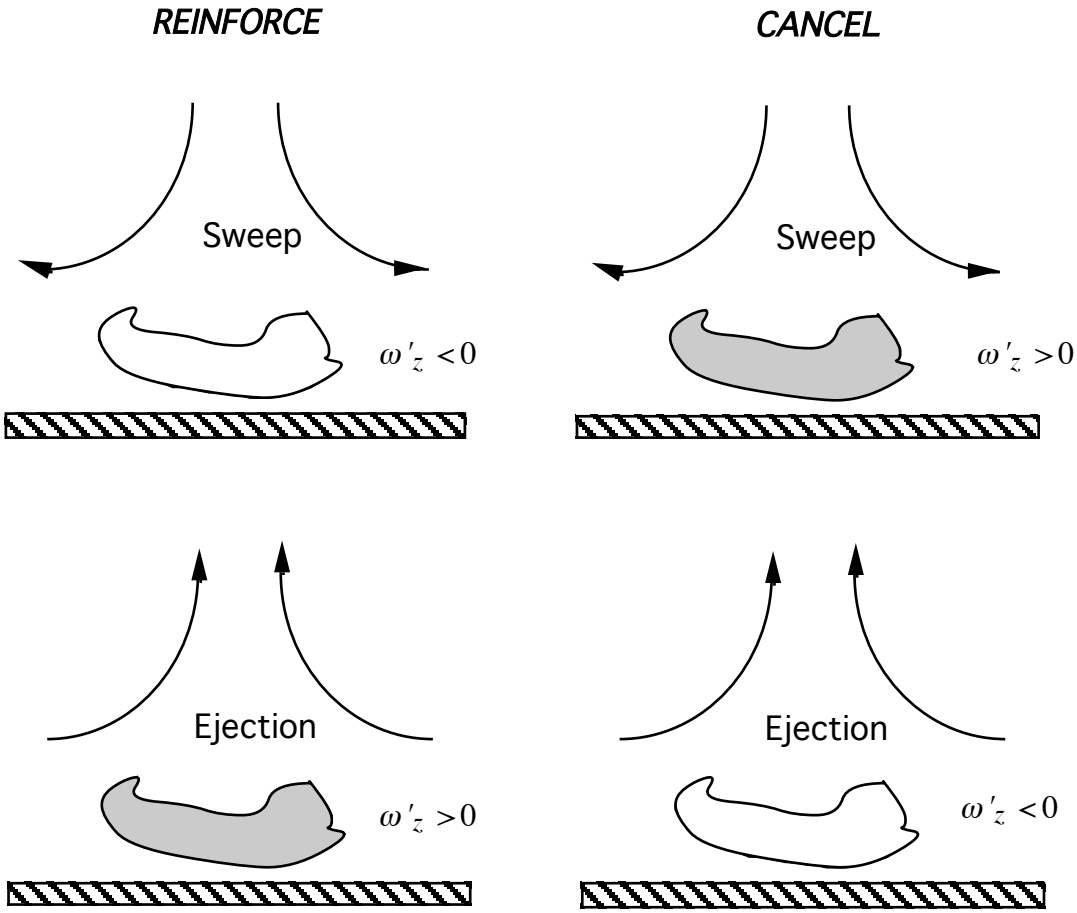


Figure 11 Drag reduction mechanism