



**HAL**  
open science

# Identification et caractérisation de sources électromagnétiques - Application à la discrétion des moteurs de propulsion navale

Louis Schmerber

► **To cite this version:**

Louis Schmerber. Identification et caractérisation de sources électromagnétiques - Application à la discrétion des moteurs de propulsion navale. Matière Condensée [cond-mat]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2006. Français. NNT: . tel-00128151v1

**HAL Id: tel-00128151**

**<https://theses.hal.science/tel-00128151v1>**

Submitted on 30 Jan 2007 (v1), last revised 1 Feb 2007 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'INP GRENOBLE**

**Spécialité : « Génie Électrique »**

préparée au **Laboratoire d'Électrotechnique de Grenoble, UMR 5529**  
dans le cadre de **l'École Doctorale « Électrotechnique, Électronique, Automatique  
Télécommunication, Signal »**

présentée et soutenue publiquement

par

**Louis-Antoine SCHMERBER**

le 21 décembre 2006

---

## **Identification et caractérisation de sources électromagnétiques. Application à la discrétion des moteurs de propulsion navale**

**Directeur de thèse : Albert Foggia**

**Co-encadrant : Laure-Line Rouve**

### **JURY**

M.	Jean-Louis	LACOUME,	Président
M.	Francis	PIRIOU,	Rapporteur
M.	Thierry	WAECKERLE,	Rapporteur
M.	Hugues	HENOCQ,	Examineur
M.	Nicolas	SILVESTRE,	Invité
M.	Laure-Line	ROUVE,	Co-encadrant de thèse
M.	Albert	FOGGIA,	Directeur de thèse



# Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire de thèse ont été réalisés au Laboratoire de Magnétisme du Navire (LMN) et au Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble (LEG). Ces deux laboratoires sont situés dans l'Ecole Nationale d'Ingénieurs Electriciens de Grenoble (ENSIEG) de l'Institut Polytechnique de Grenoble (INPG).

Tout d'abord je voudrais remercier Messieurs Jean-Louis Coulomb et Yves Brunet, respectivement directeur du LMN et du LEG, pour l'accueil qu'ils m'ont fait au sein de ces laboratoires.

Ensuite, je voudrais remercier tous les membres du jury.

- Monsieur Jean-Louis Lacoume du Laboratoire des Images et Signaux (LIS) de Grenoble pour m'avoir fait l'honneur de présider le Jury. J'ai beaucoup apprécié l'intérêt qu'il a porté à ce travail et la disponibilité qu'il m'a accordé lorsque j'ai rencontré divers problèmes d'échantillonnage spatial.
- Monsieur Francis Piriou du Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique de Puissance de Lille (L2EP) pour avoir accepté la tâche aride de rapporteur ainsi que pour ses commentaires sur ce travail.
- Monsieur Thierry Waeckerle Ingénieur de recherche chez Imphy Alloys qui a également accepté cette lourde tâche de rapporteur. Nous nous sommes souvent croisés au LMN sans jamais cerner l'enrichissement que serait notre collaboration, désormais je me tiendrai à sa disposition pour que ce travail ait le plus d'applications possibles, en particulier du côté des matériaux.
- Monsieur Hugues Henocq ingénieur de recherche au GESMA, pour s'être également prêté à la tâche délicate d'examineur et de relecteur. J'ai eu plaisir à discuter des passages sombres de cette thèse et à voir l'intérêt que la Marine Nationale portait à ce travail.
- Monsieur Nicolas Silvestre responsable DGA, qui a répondu à l'invitation du LMN et m'a fait l'honneur de lire et d'assister à la thèse.
- Madame Laure-Line Rouve pour l'encadrement sans égal de cette thèse, la patience quotidienne qui lui a permis de partager son bureau avec une tête de mule pendant plus de trois ans. Ce n'est pas la première thèse pour laquelle sa présence a été indispensable et je tiens à lui rendre l'énorme part de travail qui est la sienne.
- Monsieur Albert Foggia pour la direction clairvoyante qu'il a réussie à donner à cette thèse et la patience dont il a fait preuve pendant et avant cette thèse.

Mes remerciements se tournent maintenant vers les personnes qui m'ont le plus guidé au cours de cette thèse : l'ensemble de personnes ayant mis à disposition

---

leurs travaux et réflexions scientifiques.

Je tiens également à remercier Jean-Paul Bongiraud qui n'arrivera certainement jamais à se débarrasser de sa tâche de gestionnaire du LMN. Heureusement pour lui, l'heure de la séparation approche lui ouvrant une nouvelle vie plus musicale encore.

A Gilles Cauffet, sans qui mes pas se seraient tournés vers les nano-choses et qui a réussi me faire monter à bord du navire avant que je n'atteigne le bout du couloir. J'ai apprécié son encadrement lors de mon DEA ainsi que ce qu'il m'a apporté pour accomplir ce travail.

Merci également aux différents thésards du LMN, Sébastien et Yannick, qui tour à tour ont réussi à me supporter quand je venais leur transmettre mon amour de la science, et c'est ma joie...

Gilles Quemener, qui a proposé au LMN le sujet métaphysique de l'origine de notre galaxie en observant la lenteur des neutrons froids. J'espère que nos discussions autour des harmoniques sphériques porteront leurs fruits et que le Big Bang et l'anti-matière n'auront bientôt plus aucun secret pour lui.

Gilles David, l'autre Gilles, celui avec qui j'ai eu plaisir à partager mes repas quotidiennement et qui restera à jamais ma référence en matière d'expert Linux.

A mes amis, Sylvain, Olivier et Philippe avec qui je partage la devise des trois mousquetaires. Aujourd'hui je tiens à les remercier pour leur indéfectible soutien qui m'a guidé tout au long de cette thèse.

Martin Bloedt, éminence grise du diagnostic machine et compagnon de cordée. Je lui dois le semblant de rigueur allemande dont fait preuve cette thèse et mon utilisation abusive de latex. J'espère de tout cœur enrichir mon carnet de route de sommets enneigés, pourquoi pas une sombre face nord de l'Oberland...

Tous les amis que j'aurais peine à énumérer sans en oublier : Vincent, Elwin, Perrine, Elise et Guillaume, Sonia et Laurent, Silvia et Pierre, les musicaux Laurence et Emmanuel sans oublier Gabriel, Monseigneur Dédé.

Arrive enfin, ma famille. Je commencerai par mes trois sœurs, Sophie, Aude et Eudoxie, ainsi les pièces rapportées respectives, Jérôme, Thierry et Stéphane. Sans oublier Clara la bien nommée. Mes parents et grand-parents à qui je dois ce que je suis. Michel et Annie, Gael et Maguelone et Mathias. A tous merci pour votre soutien.

A toi, Amandine qui supportes le pire.

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Modèle et identification de sources magnéto-</b>	<b>5</b>
	<b>dynamiques</b>	
<b>1</b>	<b>Modèles multipolaires harmoniques</b>	<b>9</b>
1.1	Introduction . . . . .	9
1.2	Détermination des équations locales des champs . . . . .	10
1.2.1	Équations de Maxwell et relation des matériaux . . . . .	10
1.2.2	L'équation de diffusion . . . . .	11
1.3	Solutions harmoniques des champs . . . . .	12
1.3.1	Séparation des variables et fonctions propres . . . . .	12
1.3.1.1	Le potentiel scalaire . . . . .	12
1.3.1.2	Le potentiel vecteur magnétique . . . . .	12
1.3.1.3	Séparations des variables . . . . .	13
1.3.1.4	Le problème de Sturm-Liouville . . . . .	14
1.3.2	Développement harmonique du champ électromagnétique . . . . .	15
1.3.2.1	Écriture des champs en coordonnées polaires . . . . .	15
1.3.2.2	Écriture des champs en coordonnées sphériques . . . . .	16
1.3.3	Remarques . . . . .	17
1.3.3.1	Validité du développement . . . . .	17
1.3.3.2	Développements multipolaires . . . . .	17
1.3.3.3	Problème interne - Problème externe . . . . .	18
1.4	Propriétés des développements en série du champ . . . . .	18
1.4.1	La séparation des variables . . . . .	19
1.4.2	Une écriture intéressante des champs électromagnétiques . . . . .	19
1.4.3	Propriétés des fonctions propres . . . . .	20
1.4.3.1	Orthogonalité des fonctions propres . . . . .	20
1.4.3.2	Orthonormalisation . . . . .	21
1.4.3.3	Les fonctions propres, système complet . . . . .	22
1.5	Conclusions . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Identification de sources magnétostatiques</b>	<b>25</b>
2.1	Introduction . . . . .	25
2.2	Approche empirique . . . . .	26
2.2.1	Détermination du modèle harmonique d'une source . . . . .	26
2.2.1.1	La notion d'ordre . . . . .	27
2.2.1.2	L'information a priori . . . . .	28
2.2.1.3	Zone de validité du modèle . . . . .	28

---

2.2.1.4	Propriétés des coefficients harmoniques . . . . .	29
2.2.1.5	Choix du centre de la décomposition . . . . .	29
2.2.1.6	Remarque complémentaire . . . . .	30
2.2.2	Identification - Approche empirique . . . . .	31
2.2.2.1	Propriétés des fonctions harmoniques . . . . .	31
2.2.2.2	Mise en oeuvre d'un dispositif d'identification . . .	32
2.2.3	Conclusion . . . . .	33
2.3	Problème inverse . . . . .	34
2.3.1	Problème direct . . . . .	34
2.3.1.1	Modèle harmoniques sphériques . . . . .	34
2.3.1.2	Écriture matricielle du problème direct . . . . .	35
2.3.2	Inversion et identification . . . . .	36
2.3.2.1	Quasi-solution . . . . .	36
2.3.2.2	Décomposition en valeurs singulières . . . . .	37
2.3.3	Stabilisation et écriture optimale . . . . .	38
2.3.3.1	Normalisation des polynômes de Legendre . . . . .	38
2.3.3.2	Normalisation sur le support des mesures . . . . .	39
2.3.3.3	Normalisation itérative des lignes et colonnes . . .	41
2.3.4	Conclusion . . . . .	42
2.4	L'identification appliquée . . . . .	43
2.4.1	Identification d'un moteur simulé . . . . .	43
2.4.1.1	Stabilisation, inversion et identification . . . . .	44
2.4.1.2	Détermination de l'ordre maximum . . . . .	45
2.4.2	Réduction du nombre de capteurs . . . . .	46
2.4.3	Perspectives de l'identification . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Identification de sources magnétodynamiques</b>	<b>49</b>
3.1	Introduction . . . . .	49
3.2	Écriture des modèles magnétodynamiques . . . . .	50
3.2.1	Solutions générales dynamiques des équations de Maxwell . .	50
3.2.1.1	Détermination du modèle . . . . .	51
3.2.1.2	Paramètres du modèle - Ordre . . . . .	52
3.2.2	Principe de l'identification magnétodynamique . . . . .	52
3.2.2.1	Extraction des fréquences caractéristiques . . . . .	52
3.2.2.2	Décomposition spatiale . . . . .	53
3.2.3	Types de sources . . . . .	54
3.2.3.1	Les sources pulsantes . . . . .	54
3.2.3.2	Les sources tournantes . . . . .	54
3.2.3.3	Les sources tournantes et pulsantes . . . . .	55
3.3	Mise en oeuvre de l'identification magnétodynamique . . . . .	56
3.3.1	Extraction fréquentielle . . . . .	57
3.3.1.1	Identification des fréquences caractéristiques . . . . .	57
3.3.1.2	Extraction fréquentielle . . . . .	59
3.3.2	Identification spatiale . . . . .	60
3.3.3	Extrapolation de la signature électromagnétique . . . . .	61
3.4	Analyse et identification de sources dynamiques . . . . .	63

---

3.4.1	Analyse préliminaire . . . . .	63
3.4.2	Analyse des coefficients harmoniques . . . . .	65
3.4.2.1	Propriétés des coefficients harmoniques . . . . .	65
3.4.2.2	Coefficients d'une source pulsante . . . . .	66
3.4.2.3	Coefficients d'une source tournante . . . . .	67
3.4.2.4	Coefficients d'une source tournante et pulsante . . . . .	68
3.4.2.5	Bilan des différents types de sources . . . . .	68
3.4.3	Classification en types de sources . . . . .	69
3.4.3.1	Séparation des sources tournantes . . . . .	69
3.4.3.2	Algorithme de classification . . . . .	70
3.5	Conclusions . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Compléments statistiques à l'identification magnétique</b>	<b>73</b>
4.1	Introduction . . . . .	73
4.1.1	Objectifs . . . . .	73
4.1.2	Notions de statistiques . . . . .	75
4.1.2.1	Loi normale et système linéaire . . . . .	75
4.1.2.2	Théorie de la décision . . . . .	79
4.1.3	L'inversion Bayésienne . . . . .	81
4.1.3.1	L'information comme densité de probabilité . . . . .	81
4.1.3.2	Théorème de Bayes . . . . .	82
4.1.3.3	Intérêt - Illustration . . . . .	83
4.2	Estimateur de maximum de vraisemblance . . . . .	85
4.2.1	Écriture . . . . .	86
4.2.2	Propriétés - Optimalité . . . . .	86
4.2.3	Indicateurs de qualité de l'estimateur . . . . .	87
4.2.3.1	Opérateur de résolution - performance a priori . . . . .	88
4.2.3.2	Résidus de mesures . . . . .	88
4.2.4	Exemple d'application des indicateurs de qualité . . . . .	89
4.2.4.1	Stabilisation par minimisation de la variance des paramètres . . . . .	89
4.2.4.2	Vérification a priori de la qualité de l'estimation . . . . .	90
4.2.4.3	Résidus de mesures . . . . .	92
4.2.4.4	Conclusions . . . . .	93
4.3	Estimateurs Bayésiens . . . . .	93
4.3.1	Maximum a posteriori (MAP) . . . . .	94
4.3.1.1	L'information a priori . . . . .	94
4.3.1.2	Écriture et propriétés de l'estimateur . . . . .	95
4.3.1.3	Opérateur de résolution . . . . .	95
4.3.1.4	Résidus des mesures . . . . .	97
4.3.1.5	Conclusions et perspectives . . . . .	98
4.3.2	Compléments sur l'estimation bayésienne . . . . .	98
4.3.2.1	L'estimateur de moyenne a posteriori (MMSE) . . . . .	99
4.3.2.2	Calcul de l'estimateur - Méthodes numériques . . . . .	99
4.3.2.3	Application . . . . .	100
4.4	Conclusions . . . . .	102



---

## II Analyse harmonique et dimensionnement de blindages magnétiques 103

<b>5</b>	<b>Efficacité d'un blindage passif</b>	<b>107</b>
5.1	Introduction au blindage . . . . .	107
5.1.1	Origine des phénomènes d'atténuation . . . . .	108
5.1.1.1	Le ferromagnétisme . . . . .	108
5.1.1.2	Les Courants de Foucault . . . . .	112
5.1.1.3	Hypothèses et cadre de l'étude . . . . .	113
5.1.2	Interprétations empiriques . . . . .	113
5.1.2.1	Interprétation dipolaire - multipolaire . . . . .	114
5.1.2.2	Formulations élémentaires . . . . .	116
5.1.3	Définitions . . . . .	118
5.1.3.1	Principe . . . . .	118
5.1.3.2	L'efficacité . . . . .	119
5.1.3.3	L'effet de forme . . . . .	120
5.2	Méthode harmonique de calcul de blindage . . . . .	121
5.2.1	Méthode matricielle de calcul de blindage . . . . .	121
5.2.1.1	Situation . . . . .	121
5.2.1.2	Écriture matricielle des relations de passage . . . . .	122
5.2.1.3	Résolution et propriétés de la solution . . . . .	125
5.2.2	Généralisation . . . . .	126
5.2.2.1	Écriture à tout ordre . . . . .	126
5.2.2.2	Blindages multicouches . . . . .	127
5.3	Interprétation . . . . .	128
5.3.1	Cas statique . . . . .	129
5.3.1.1	Efficacité maximale . . . . .	130
5.3.1.2	Comportement asymptotique . . . . .	130
5.3.1.3	Pente à l'origine . . . . .	131
5.3.1.4	Aperçu graphique . . . . .	131
5.3.2	Cas dynamique . . . . .	132
5.3.2.1	Atténuation dynamique - Module et Argument . . . . .	133
5.3.2.2	Représentation Ordre-fréquence de l'atténuation . . . . .	133
5.3.3	Blindage multicouches . . . . .	135
5.3.3.1	Effet de la multiplication de couches . . . . .	136
5.3.3.2	Dimensionnement optimal . . . . .	137
5.4	Conclusions . . . . .	138
<b>6</b>	<b>Effet de forme d'un blindage</b>	<b>141</b>
6.1	Introduction . . . . .	141
6.2	Calcul numérique de la matrice de blindage harmonique . . . . .	142
6.2.1	Convergence des séries de fonctions propres . . . . .	142
6.2.1.1	Écriture des sources dans les différentes zones - conditions de passage . . . . .	143
6.2.1.2	Écriture du système matriciel . . . . .	145
6.2.1.3	Application . . . . .	146

---

6.2.1.4	Conclusion . . . . .	148
6.2.2	Orthonormalisation des fonctions harmoniques . . . . .	148
6.2.2.1	Processus d'orthonormalisation . . . . .	148
6.2.2.2	Application . . . . .	151
6.2.2.3	Conclusions - Perspectives . . . . .	152
6.2.3	Base canonique . . . . .	153
6.2.3.1	Identification de la base canonique . . . . .	153
6.2.3.2	Projection sur la surface . . . . .	154
6.2.3.3	Écriture matricielle du problème sur la base canonique . . . . .	154
6.2.3.4	Résolution-Interêt . . . . .	155
6.2.3.5	Application . . . . .	156
6.2.4	Interprétation . . . . .	157
6.2.5	Généralisation . . . . .	159
6.3	Applications . . . . .	160
6.3.1	Calcul du blindage dynamique obtenu à l'aide d'une gaine infinie en aluminium . . . . .	161
6.3.1.1	Description du problème . . . . .	161
6.3.1.2	Détermination de l'ordre N du développement . . . . .	161
6.3.1.3	Résolution - Validation . . . . .	162
6.3.1.4	Compléments . . . . .	163
6.3.2	Application au calcul de champ d'un moteur . . . . .	163
6.3.2.1	Description du problème . . . . .	164
6.3.2.2	Écriture du système matriciel harmonique . . . . .	165
6.3.2.3	Optimisation - résolution . . . . .	166
6.3.2.4	Résultats - Performances . . . . .	168
6.3.2.5	Perspectives . . . . .	169
6.4	Conclusions . . . . .	169

### **III Application et Conclusions 171**

<b>7</b>	<b>Identification magnétodynamique de moteur discoïde</b>	<b>173</b>
7.1	Description de l'expérience . . . . .	173
7.1.1	La source . . . . .	173
7.1.2	L'environnement magnétique . . . . .	174
7.1.3	Les moyens de mesures . . . . .	175
7.2	L'identification magnétostatique . . . . .	175
7.2.1	La quête d'information . . . . .	175
7.2.1.1	Les aimants . . . . .	176
7.2.1.2	Modulation du champ des aimants par l'effet de forme de la culasse . . . . .	176
7.2.1.3	Le champ magnétique terrestre . . . . .	177
7.2.2	Placement des capteurs d'identification . . . . .	178
7.2.3	Identification des coefficients harmoniques . . . . .	182
7.2.3.1	Hierarchie du modèle - Interêt du placement . . . . .	182

---

7.2.3.2	Estimation hiérarchique bayésienne . . . . .	182
7.2.3.3	Résultats de l'identification statique . . . . .	183
7.2.3.4	Analyse des résultats . . . . .	186
7.3	L'identification magnétodynamique . . . . .	187
7.3.1	Analyse de la situation . . . . .	187
7.3.1.1	Mise en œuvre . . . . .	187
7.4	Conclusions . . . . .	190

**A Résolution de l'équation de diffusion par la méthode des variables séparées** **195**

A.1	Définition des repères polaires et sphériques . . . . .	195
A.2	Résolution de l'équation de diffusion en coordonnées polaires . . . . .	196
A.2.1	L'équation de Laplace en coordonnées polaires . . . . .	196
A.2.2	L'équation de diffusion en coordonnées polaires . . . . .	197
A.2.3	Écriture de la solution générale . . . . .	199
A.3	Résolution de l'équation de diffusion en coordonnées sphériques . . . . .	201
A.3.1	L'équation de Laplace en coordonnées sphériques . . . . .	201
A.3.2	L'équation de diffusion en coordonnées sphériques . . . . .	202
A.3.3	Remarque fondamentale à propos des écritures dynamiques . . . . .	204

**B Problèmes inverses, quêtes d'informations** **207**

B.1	Définitions . . . . .	207
B.1.1	Le problème direct . . . . .	207
B.1.2	Le problème inverse . . . . .	208
B.1.3	Les problèmes bien/mal posés . . . . .	208
B.1.4	Définition algébrique . . . . .	208
B.1.5	Quasi-solution d'un problème inverse . . . . .	210
B.1.6	Problèmes conditionnellement bien-posés . . . . .	210
B.2	Inversion sans information . . . . .	211
B.2.1	La décomposition en valeurs singulières . . . . .	212
B.2.2	Analyse du problème inverse . . . . .	212
B.2.3	La pseudo inverse . . . . .	213
B.2.4	Conditionnement . . . . .	214
B.2.5	Régularisation par troncature . . . . .	215
B.3	Inversion et informations a priori . . . . .	216
B.3.1	Les Informations a priori . . . . .	217
B.3.2	La régularisation au sens de Tikhonov . . . . .	217
B.3.2.1	Choix de la fonctionnelle stabilisatrice . . . . .	219
B.3.2.2	Choix du paramètre de régularisation . . . . .	220
B.3.3	Approche stochastique des problèmes inverses . . . . .	221
B.3.3.1	L'information comme probabilité . . . . .	221
B.3.3.2	L'inversion Bayésienne . . . . .	222
B.3.3.3	Ecriture du problème inverse Bayésien . . . . .	223
B.3.3.4	Interprétation de l'inversion bayésienne . . . . .	224

---

<b>C Boîte à outils mathématiques</b>	<b>225</b>
C.1 Généralisation de l'écriture harmonique - Application au blindage sphérique . . . . .	225
C.1.1 Écriture de la matrice d'un blindage monocouche . . . . .	226
<b>Bibliographie</b>	<b>226</b>



# Table des figures

1.1	L'orthonormalisation permet l'identification sur un support quelconque.	22
2.1	Domaines d'influence des ordres d'une source quelconque ( $\Sigma$ ) en fonction de la distance au centre.	27
2.2	Exemple d'une source décentrée par rapport au centre de la décomposition multipolaire : le câble décentré.	30
2.3	Développement harmonique et surface limite.	31
2.4	Source ( $\Sigma$ ) et dispositif de capteurs qui réalisent un échantillonnage spatial.	33
2.5	Dispositions de 26 capteurs triaxiaux sur un cube d'arête égale à 2m entourant une source ( $\Sigma$ ) dont nous désirons faire une identification en harmoniques sphériques.	39
2.6	Conditionnement du système linéaire aux cours de la normalisation itérative des colonnes et lignes de $\mathbf{F}$ . Chaque itération est représentée par deux points : le premier est le conditionnement après normalisation des colonnes et le second après normalisation des lignes.	42
2.7	Moteur à aimants permanents de rayon extérieur $R_{ext}=20\text{cm}$ possédant 4 pôles, 12 encoches statoriques. Nous chercherons à identifier ce moteur à partir de mesures simulées sur un cercle $\mathcal{C}$ de rayon $R_0=26\text{cm}$ .	43
2.8	Composantes $B_x$ de l'induction magnétique obtenus par la méthode des éléments finis (FEM), par une identification sans normalisation ( $Id_1$ ), puis par une identification stabilisée ( $Id_2$ ) à l'ordre $N=50$ .	44
2.9	Influence relative des $n$ premiers coefficients harmoniques par rapport au module de l'induction mesurée.	46
2.10	Influence $Inf$ des premiers coefficients harmoniques jusqu'à l'ordre $N=10$ .	46
2.11	Exemple d'interpolation de l'induction magnétique identifiée à l'aide de 3 capteurs (graphique du haut) et d'extrapolation du potentiel vecteur sur un cercle placé deux fois plus loin (graphique du bas).	47
3.1	Mesure de l'induction magnétique $B_x$ et sa FFT sur un capteur de référence. La transformée de Fourier (FFT) fait apparaître un certain nombre de raies aux fréquences $f_c$ caractéristiques de la source.	57
3.2	Représentation de la composante $B_x$ de l'induction magnétique pour tous les capteurs au cours du temps (gauche) - Représentation de la transformée de Fourier (FFT) pour chacune de ces mesures (droite).	58
3.3	Algorithme d'identification des fréquences caractéristiques.	58

---

3.4	Comparaison entre l'induction mesurée $B_x$ et identifiée $B_{x_{Id}}$ sur le capteur de référence $C_1$ , du point de vue de la FTT (gauche) et du signal temporel (droite). . . . .	62
3.5	Représentations temps-espace des variations de l'induction d'une source d'ordre 1 (terme $a_{1,1}$ ) pulsant à 6Hz (figure gauche) et d'ordre 2 (terme $a_{2,2}$ ) tournant à 3Hz (droite). . . . .	64
3.6	Algorithme de classification des coefficients identifiés en fonction du type de source. . . . .	70
4.1	Loi normale centrée et intervalles de confiance (gauche). Lois gaussiennes généralisées pour $n=1,2$ et 4 (droite) . . . . .	77
4.2	Représentation des densités de probabilité d'un problème d'interpolation linéaire (figure de gauche) à l'aide d'une seule mesure (figure centrale) et de plusieurs mesures bruitées (figure de droite). L'étoile correspond à la solution de référence, c'est-à-dire la droite que devrait suivre théoriquement la mesure, la croix correspond au couple de paramètres (a,b) que nous avons choisi en fonction de la mesure et correspondant à une droite respective. . . . .	78
4.3	Représentation des densités de probabilité d'un problème inverse d'interpolation linéaire (figure de gauche) à l'aide des mesures 1 (figure centrale) et des mesures 2 (figure de droite). L'étoile correspond à la solution de référence, c'est-à-dire la droite que devrait suivre théoriquement la mesure, la croix correspond au couple de paramètres (a,b) que nous avons choisi en fonction de la mesure et correspondant à une droite respective. Les mesures 3 sont obtenues en retirant un point aberrant, en conséquence la variance de la densité de probabilité est plus petite (voir figure de droite). 80	80
4.4	Exemples de densités de probabilités gaussiennes particulières. - (A) La distribution de Dirac - (B) une loi normale centrée - (C) Loi uniforme sur un intervalle [a,b] appelée également fonction porte. . . . .	82
4.5	Illustration de l'intérêt de l'information a priori sur le problème d'interpolation linéaire. La mesure 1 ne permet pas de définir le couple (a,b) : le système est sous-déterminé ce qui se traduit par une distribution de probabilité de variance infinie (voir figure centrale). Par défaut nous faisons le choix de la solution de norme minimale (croix blanche) qui conduit à une erreur d'estimation : voir droite 1. L'apport d'information a priori sur b complète notre connaissance des paramètres et permet de déterminer une estimation correcte (carré). La densité a posteriori $p(\mathbf{C} \mathbf{Y})$ a une variance finie (voir figure de droite). . . . .	85
4.6	Illustration de la stabilisation du système linéaire $\mathbf{F}$ par normalisation et pondération itérative. . . . .	90
4.7	La diagonale de l'opérateur de résolution $\mathbf{R}$ donne une mesure a priori de l'erreur d'estimation. Lorsque le système est bien conditionné et de rang plein, cet opérateur est proche de la matrice identité. Sinon, il donne une indication de la qualité des paramètres estimés. Par exemple, avec seulement les 4 capteurs supérieurs du cube, nous remarquons que certains paramètres seront erronés. . . . .	91

---

4.8	Variance des résidus de mesures estimés sur les capteurs en fonction de l'ordre de la source identifiée. Les points de forte variance sont ceux les plus loin de la source (sommets du cube métrologique). Nous remarquons que plus l'ordre de la source est élevé et plus la variance des résidus de mesures est faible. . . . .	92
4.9	La diagonale de l'opérateur de résolution $\mathbf{R}$ relative à l'estimateur du MAP. La figure de gauche montre la qualité de résolution sans information a priori. La figure de droite montre la qualité de résolution avec intervention de l'information a priori . . . . .	96
4.10	(1). - Fonction de vraisemblance $p_x$ correspondant à une distribution normale de $x$ . - (2). - Fonction de densité a posteriori $p_p$ utilisant un a priori non linéaire : l'espérance, le maximum et la médiane sont distincts et correspondent à des estimateurs bayésiens différents. . . . .	98
4.11	Illustration de l'intérêt de l'estimateur du MMSE - Avec un seul point de mesure et une information a priori faible ( $a$ appartient à l'intervalle $].5;2]$ ). Nous calculons l'estimateur (voir carré sur la figure centrale), ce calcul passe par l'intégration de la densité de probabilité a posteriori qui est possible grâce à un échantillonnage de $p(\mathbf{C} \mathbf{Y})$ obtenu par un algorithme MCMC (voir figure de droite)). . . . .	101
5.1	fig. A : Courbe de première aimantation. - fig. B : Aspect schématique des transformations des domaines de Weiss correspondant au processus d'aimantation. . . . .	109
5.2	Cycle d'hystérésis $M(H)$ . $M_s$ et $H_s$ sont les valeurs crêtes de l'aimantation et du champ d'excitation $H$ , $M_r$ l'aimantation rémanente et $H_c$ le champ coercitif . . . . .	110
5.3	Courbe anhystérétique $B(H)$ d'un matériau magnétique doux (FeSi) . . . . .	111
5.4	Courants de Foucault induits dans une tôle conductrice par la variation du champ d'une source de moment dipolaire $\vec{M}$ . . . . .	112
5.5	(a) : Représentation de l'aimantation d'une tôle de perméabilité relative $\mu_r > 1$ sous l'action d'un champ externe $\vec{H}$ - (b) : Représentation dipolaire de l'aimantation d'un blindage sphérique entourant une source dipolaire statique $\vec{M}_s$ - (c) : Représentation multipolaire de l'aimantation relative à une source d'ordre $n=3$ . . . . .	114
5.6	(a) : Représentation des courants de Foucault et de la source dipolaire induite par les variations d'un champ externe sur une tôle en aluminium. - (b) : Représentation dipolaire des sources induites par les variations d'un dipôle inclus dans un blindage sphérique. . . . .	115
5.7	(a) : Blindage sphérique de perméabilité $\mu$ plongé dans un champ uniforme $\vec{H}_0$ parallèle à l'axe $z$ - (b) : Interprétation de l'aimantation à l'aide de dipôles : un champ $\vec{H}_1$ se superpose à $\vec{H}_0$ à l'intérieur du blindage créant ainsi l'effet de blindage. . . . .	116



---

5.8	Atténuation $\mathbf{S}$ d'un blindage sphérique en fonction du rapport de ses rayons interne et externe et de sa perméabilité relative $\mu_r = \mu/\mu_0$ . Quelle que soit l'épaisseur du blindage il est d'autant plus efficace que sa perméabilité est grande. Il existe cependant une atténuation limite pour chaque blindage, qui ne dépend que du choix du matériau et qui est déterminée par la valeur de $\mathbf{S}$ quand l'épaisseur est infinie. . . . .	118
5.9	Division de l'espace en trois zones pour les deux types de problèmes : (a) externe si la source ( $\mathcal{S}^{(1)}$ ) est à l'intérieur du blindage et (b) interne si la source ( $\mathcal{S}^{(2)}$ ) est à l'extérieur du blindage. . . . .	122
5.10	Représentation des conditions de passage du champ magnétique en un point P de la frontière séparant deux milieux. . . . .	123
5.11	Comportement de $\mathbf{S}_n$ en fonction, soit uniquement de l'épaisseur du blindage (gauche), soit uniquement de sa perméabilité (droite). Le rayon $R_1$ interne du blindage vaut 50cm. . . . .	132
5.12	Module de l'atténuation en fonction de la fréquence et de l'ordre des termes la source blindée. La figure de gauche représente ce module pour un blindage de rayons $R_1=300\text{mm}$ et $R_2=305\text{mm}$ en Aluminium. La figure de droite représente le module de l'efficacité pour ce même blindage en Acier. . . . .	134
5.13	Représentation ordre-fréquence de l'efficacité $\xi_n$ d'un blindage sphérique en acier. . . . .	135
5.14	Trois blindages monocouche et multicouche compris entre les mêmes rayons $R_1=300\text{mm}$ et $R_2=315\text{mm}$ . . . . .	136
5.15	(a) : Représentation de l'atténuation de blindages multicouche en fonction de l'ordre de la source à blinder. - (b) : Représentation de l'atténuation de blindages multicouche pour une source d'ordre $n=4$ en fonction de la perméabilité. . . . .	137
5.16	Atténuation en fonction de l'épaisseur de l'entrefer d'un blindage à 2 couches en acier pour différents ordres faibles. . . . .	138
6.1	Contours de forme circulaire $\mathcal{S}_1$ (a) et de forme carrée $\mathcal{S}_2$ (b) correspondant à deux objets ferromagnétiques plongés dans un champ magnétique quelconque. . . . .	143
6.2	Représentation d'un cube de 20cm d'arête et de perméabilité relative $\mu_r=1000$ . Nous évaluons la qualité du calcul harmonique en comparant l'induction calculée à une simulation FEM du problème sur un chemin de validation. - Les deux figures à droite représentent respectivement l'induction magnétique suivant x et suivant y calculées harmoniquement à l'ordre 20 et 50 et la référence donnée par la méthode des éléments finis.	146
6.3	Termes diagonaux de la matrice de covariance des résidus du calcul de l'aimantation d'un cube. . . . .	147
6.4	Induction magnétique suivant x (gauche) et suivant y (droite) créé par un cube aimanté. Il s'agit de comparer une induction magnétique de référence simulée (FEM) avec le résultat du calcul harmonique orthonormé jusqu'à l'ordre 12. . . . .	152

---

6.5	Induction suivant x (gauche) et suivant y (droite) créé par un cube aimanté. Il s'agit de comparer une induction de référence simulée (FEM) avec le résultat du calcul harmonique sur la base canonique à l'ordre 12.	156
6.6	Surface circulaire conforme à une surface quelconque $\mathcal{C}_s$ .	158
6.7	Exemple de problèmes pour lesquelles la méthode de calcul harmonique est généralisable. (a) : problème à deux surfaces comme un blindage monocouche - (b) Problème à trois surfaces, quatres zones comme un moteur : rotor-entrefer-stator-milieu extérieur.	160
6.8	Blindage carré d'arête interne $R_1$ et externe $R_2$ en aluminium. Validation du calcul harmonique à l'ordre $N = 17$ du blindage relatif à deux conducteurs parcourus par un courant $I=10A$ de fréquence $f=5Hz$ .	162
6.9	Géométrie simplifiée d'un moteur comportant 4 zones délimitées par 3 surfaces.	164
6.10	(a). Discrétisation du rotor - (b). Décomposition de la surface en série trigonométrique à l'ordre $N = 12$ - (c). Décomposition de série de la surface à l'ordre $N = 7$ : apparition des phénomènes de Gibbs.	166
6.11	Variances des résidus de calcul de trois problème différents : (a). Discrétisation initiale (28 points) à l'ordre $N = 12$ - (b). Amélioration de la discrétisation (30 points) à l'ordre $N = 12$ - (c). Discrétisation initiale à l'ordre $N = 7$ .	167
6.12	(a) - Discrétisation du moteur sur la période d'étude et chemin de validation dans l'entrefer. Comparaisons de l'induction magnétique suivant x (b) et suivant y (c) entre la méthode des éléments finis et la méthode harmonique à l'ordre 5 et 7.	168
6.13	a - Discrétisation du moteur sur la période d'étude et chemin de validation à l'extérieur de la machine. Comparaisons de l'induction magnétique suivant x (b) et suivant y (c) entre la méthode des éléments finis et la méthode harmonique à l'ordre 5.	169
7.1	(a). Photo du moteur discoïde identifié. - (b). Représentation géométrique des aimants des deux rotors, de la culasse et des pieds du moteur.	174
7.2	Simulation d'une source d'ordre $n = 4$ contenue dans une culasse. (a) : Influence des coefficients harmoniques sur un cercle de rayon $R_{ext}$ de 55cm - (b) : induction magnétique radiale sur ce cercle - (c) : induction magnétique orthoradiale.	177
7.3	Simulation de l'aimantation de la culasse du moteur dans le champ terrestre. (a) : Influence des coefficients harmoniques sur un cercle de rayon $R_{ext}$ de 55cm - (b) : Induction magnétique radiale sur ce cercle - (c) : Induction magnétique orthoradiale.	178
7.4	Opérateurs de résolution relatifs aux 15 coefficients harmoniques principaux lors d'une identification à l'ordre 5.- (a) : Opérateur de résolution correspondant aux positions initiales des capteurs.- (b) : Opérateur de résolution correspondant aux positions réelles optimisées.	180
7.5	Visualisation d'ensemble du moteur, des 5 capteurs d'identification et des 4 capteurs de validation.	181

---

7.6	Influence des 35 coefficients harmoniques identifiés à l'ordre 5 à l'aide des 5 capteurs. . . . .	185
7.7	Comparaison des trois composantes de l'induction magnétique sur les capteurs de validation. L'erreur relative est inférieure à 10 % pour un modèle d'ordre $N = 5$ . Seul $C_7$ ( $N^{\circ}2$ ) a une erreur importante qui est due à sa proximité de la source et surtout au fait qu'il est à l'intérieur des mesures d'identification. . . . .	185
7.8	Comparaison des trois composantes de l'induction magnétique pour un modèle à l'ordre $N = 3$ sur les capteurs de validation. L'erreur relative est très importante signe de repliement. . . . .	186
7.9	Comparaison des trois composantes statiques de l'induction magnétique sur les capteurs de validation, dans le cas d'un moteur alimenté à 2Hz. Erreur relative entre le modèle et la mesure. . . . .	188
7.10	Comparaison des trois composantes statiques de l'induction magnétique extrapolées dans le temps sur le capteur $C_6$ de validation, dans le cas d'un moteur alimenté à 2Hz. Il s'agit de la superposition du statique, de la fréquence d'alimentation et de la fréquence de rotation. . . . .	191
A.1	Représentation des systèmes de coordonnées polaires et sphériques . . .	195
B.1	Espaces de Hilbert des paramètres du modèle $\mathcal{M}$ et des mesures $\mathcal{D}$ .	209
B.2	Sous-espace vectoriel $\mathcal{M}^+$ restriction de $\mathcal{M}$ du point de vue de la pseudo inverse. . . . .	214
B.3	La régularisation de Tikhonov. . . . .	218

# Liste des tableaux

2.1	Rang et conditionnement de l'identification sans normalisation des fonctions harmoniques (A), avec (B), avec normalisation des colonnes (C), avec normalisation itérative des lignes et colonnes de $\mathbf{F}$ (D).	40
2.2	Rang et conditionnement de l'identification sans orthonormalisation (A) et avec (B) à l'ordre 50. Rang et conditionnement de l'identification sans orthonormalisation (C) et avec (D) après réduction du nombre de capteurs.	44
3.1	Paramètres des trois sources $S_1$ , $S_2$ et $S_3$ qui composent $(\Sigma)$ . $\Omega$ est la vitesse de rotation des sources autour de l'axe z, $\omega$ est la pulsation de la source et $\psi$ le déphasage.	56
3.2	Fréquences caractéristiques de la source $(\Sigma)$ .	59
3.3	Coefficients harmoniques identifiés aux fréquences caractéristiques de $(\Sigma)$ . La justification des valeurs de ces coefficients est donnée au paragraphe §3.4.2.1	61
6.1	Coefficients harmoniques du problème externe dans la zone 2 relatifs à la réaction d'un cube dans un champ source uniforme. Seuls les termes correspondant à la modulation du champ source par la forme du cube sont présents.	159
6.2	Description du problème de blindage de deux conducteurs infinis par la gaine en aluminium de la figure (6.8)	161
6.3	Paramètres relatifs au calcul harmonique du moteur	165
7.1	Caractéristiques du moteur discoïde à aimants permanents.	174
7.2	Les 15 coefficients harmoniques représentatifs du moteur statique dans le champ terrestre.	179
7.3	Positions des capteurs dans le référentiel du centre du moteur.	180
7.4	Valeurs des coefficients de la décomposition harmonique du moteur à l'ordre $N = 1$ .	183
7.5	Valeurs des coefficients de la décomposition harmonique du moteur à l'ordre $N=2$ pour le modèle hiérarchique (Valeur Hier.) et pour une identification "normale" à l'ordre 2 à l'aide des capteurs $C_1$ , $C_2$ et $C_5$ (Valeur Norm.).	183
7.6	Positions des capteurs de validation dans le référentiel du centre du moteur (Fig.7.5).	184
7.7	Valeurs des coefficients de la décomposition harmonique statique du moteur à l'ordre $N = 2$ lors de son fonctionnement à 2Hz.	188

---

7.8 Coefficients harmoniques identifiés aux fréquences caractéristiques du moteur. . . . .	189
---	-----

# Notations

$\Omega$	vitesse de rotation
$\Psi$	potentiel scalaire magnétique
$\delta, \delta_f$	épaisseur de peau
$\epsilon, \epsilon_0$	permittivité, permittivité du vide
$\mu, \mu_r, \mu_0$	perméabilité, perméabilité relative, perméabilité du vide
$\sigma$	conductivité
$\omega$	pulsation
$\xi_n$	efficacité d'un blindage passif respectivement à l'ordre n
$\vec{A}$	potentiel vecteur magnétique
$\vec{B}$	induction magnétique
$\vec{H}$	champ magnétique
$\vec{E}$	champ électrique
$\vec{M}$	aimantation magnétique
$\vec{D}$	polarisation électrique
$I, I_f$	courant électrique, courant de Foucault
$In_f$	Influence magnétique d'un terme harmonique
$N$	ordre maximum d'une source multipolaire
$\mathbf{F}$	matrice du problème direct harmonique
$\mathbf{C}, \mathbf{C}_0, \mathbf{C}_\perp$	vecteur des coefficients harmoniques
$\mathbf{B}_{mes}$	vecteur des mesures d'induction magnétique
$\mathbf{W}, \mathbf{W}_c, \mathbf{W}_l, \mathbf{W}_\perp$	matrices de pondérations stabilisatrices
$\mathbf{S}, \mathbf{S}_n, \mathbf{S}_n^{max}$	Atténuation d'un blindage
$\mathbf{G}, \mathbf{G}_n$	Matrice de filtrage d'un blindage
$f, f_e, f_c$	fréquence, fréquence d'échantillonnage, fréquence caractéristique
$j$	racine carré complexe de -1
$\vec{i}$	densité volumique de courant
$k, k_f$	nombre d'onde complexe
$n$	indexation de l'ordre d'une source multipolaire
$m$	indexation des termes d'une source d'un ordre n
$\{a_n, b_n\}$	coefficients harmoniques polaires
$\{a_{n,m}, b_{n,m}\}$	coefficients harmoniques sphériques
$\Re\{.\}$	partie réelle d'un nombre complexe

---

$\Im\{.\}$	partie imaginaire d'un nombre complexe
$E\{.\}$	espérance mathématique
$var\{.\}$	variance
$\mathcal{N}\{.\}$	loi normale
$\chi^2\{.\}$	distribution du $\chi^2$
$\hat{x}$	valeur estimée de $x$
$p(x) \sim q(x)$	les densités de probabilité $p$ et $q$ de $x$ sont équivalentes
$I_\nu(.)$	fonction de Bessel modifiée de première espèce
$K_\nu(.)$	fonction de Bessel modifiée de seconde espèce
$P_n^m(.)$	polynôme de Legendre de première espèce
$Q_n^m(.)$	polynôme de Legendre de seconde espèce
$Y_n^m(.)$	Harmonique sphérique d'ordre $n$ et de terme $m$
$\Gamma(.)$	fonction gamma
$\langle \vec{u}   \vec{v} \rangle$	produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$
$\vec{u} \times \vec{v}$	produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$
$\delta_{i,j}$	fonction de kronecker : vaut 1 lorsque $i=j$ , sinon 0
$\mathbf{F}^t$	matrice transposée de $\mathbf{F}$
$\mathbf{F}^{-1}$	matrice carrée inverse de $\mathbf{F}$
$\mathbf{F}^+$	matrice inverse généralisée de $\mathbf{F}$
$(r, \theta, z)$	système de coordonnées cylindrique
$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$	vecteurs de base du repère cylindrique
$(r, \theta, \phi)$	système de coordonnées sphériques
$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$	vecteurs de base du repère sphérique
MAP	Maximum A Posteriori
MCMC	Markov Chain Monte Carlo
MMSE	Minimum Mean Square Error
MV	Maximum de Vraisemblance
FEM	Finite Element Method
FMM	Fast Multipole Method
MLI	Modulation de Largeur d'Impulsions

# Introduction générale

La « magie » du magnétisme, rigoureusement scientifique, réside dans l'extraordinaire particularité qu'il a d'embrasser des ordres de grandeur infiniment petits et grands. La définition la plus fréquente qu'on lui trouve se résume par l'action des aimants sur les matériaux ferromagnétiques : le champ magnétique est la susceptibilité qu'a une source magnétique d'exercer une force sur un autre corps. Principe qu'illustre le champ magnétique terrestre lorsqu'il oriente l'aiguille aimantée d'une boussole vers le nord. Si la matière aimantée fut à l'origine du magnétisme, l'apparition de l'électricité engendra une autre source de champ magnétique liée au passage d'un courant électrique dans un conducteur. Dès lors, l'interaction de la matière aimantée et des courants n'a cessé de porter ses fruits dans des domaines multiples et variés.

Le moteur électrique est, sans nul doute, l'application la plus courante de l'interaction entre ces deux sources de champ magnétique. Au cours du dernier siècle, l'électrotechnique a porté le développement du moteur électrique dans d'innombrables domaines de sorte qu'il se décline désormais sur l'échelle allant du micro-moteur au super-alternateur. Si le rendement des moteurs électriques justifie à lui seul leur essor, l'électrotechnique n'a pas cessé de chercher des moyens techniques pour améliorer leurs performances en contrôlant au mieux les champs magnétiques internes. Cependant, une faible proportion des champs magnétiques nécessaires au fonctionnement des moteurs se propage à l'extérieur. Ces champs de fuites ont peu d'influence sur les caractéristiques électrotechniques, mais sont au coeur même de la discrétion magnétique des moteurs. En particulier pour les moteurs de forte puissance dont l'emploi est nécessaire dans le domaine de la propulsion navale, les champs de fuites rayonnés peuvent atteindre des niveaux préjudiciables qui permettent la détection à distance des bâtiments de la Marine Nationale.

## Historique du magnétisme du navire

Un navire dont la coque est en acier, matériau ferromagnétique par excellence, canalise et déforme les lignes de champ localement. Le fonctionnement des mines magnétiques repose sur la détection des déformations du champ magnétique terrestre appelées *anomalies*. Si l'apparition des mines magnétiques date de la fin de la première guerre mondiale, elles causèrent d'énormes dégâts dans la flotte alliée au début de la seconde guerre mondiale. Le risque qu'elles représentaient poussa alors toutes les marines à se préoccuper de la protection des navires. La Marine Nationale française fit appel à Louis Néel qui eut l'idée de compenser l'aimantation des



---

coques des bâtiments induite par le champ terrestre en utilisant une aimantation permanente opposée communiquée à l'aide de circuits électriques [Née91]. En 1947, la Marine Nationale et Monsieur Néel fondèrent le Laboratoire de Magnétisme du Navire (LMN) dans lequel furent dimensionnés sur des maquettes à l'échelle les systèmes de compensation active des bâtiments de la Marine de 1947 à 1986. Ces études de discrétion magnétique ne représentent cependant qu'un seul aspect des exigences des guerres modernes où les maîtres mots sont furtivité et performance. En effet, dans bien des domaines liés aux bâtiments, comme l'acoustique, la résistance des matériaux ou la propulsion, à l'impératif de performance est venu se greffer celui de la furtivité.

## Problématique

Nous venons d'exposer brièvement l'histoire du magnétisme du navire ce qui nous permet de présenter la problématique à laquelle va répondre cette thèse : *la discrétion magnétique des moteurs de propulsion navale*. Il s'agit d'une des pièces les plus complexes du grand puzzle qu'est le magnétisme du navire. Contrairement aux études statiques dans lesquelles le LMN est expert, elle nécessite une approche différente qui doit englober d'une part la compréhension du fonctionnement des machines électriques, mais surtout les phénomènes basses fréquences liés aux variations du champ magnétique dans la machine, la coque du navire et le milieu marin.

La vulnérabilité des bâtiments de la Marine Nationale doit être réduite à son plus strict minimum afin de préserver la présence et l'efficacité de la Marine non seulement sur le territoire français mais aussi dans toutes régions du monde nécessitant une intervention militaire ou humanitaire. Or, les mesures des anomalies électromagnétiques peuvent indiquer la présence d'un bâtiment : c'est le principe de détection des mines magnétiques. Il est donc impératif pour la survie des équipages de réduire le niveau de ces anomalies afin qu'elles ne puissent plus être détectées. La discrétion électromagnétique des moteurs de propulsion est un élément essentiel dans la réduction de ces anomalies. Elle a pris aujourd'hui une importance capitale avec le développement du navire tout électrique (NTE). En effet, depuis une décennie le projet de la Marine Nationale est de remplacer la propulsion classique par une propulsion électrique sur tous les bâtiments modernes. Il est donc impératif d'accompagner cette modernité d'un fort potentiel en termes de furtivité et d'immunité qui passe nécessairement par la discrétion électromagnétique du bateau et des organes de son réseau électrique.

## Objectifs

Pour répondre à cette problématique nous distinguons deux objectifs qui sont l'identification magnétodynamique d'une part et le dimensionnement de blindage d'autre part.

Le but de l'identification magnétodynamique est de trouver un modèle des champs électriques et magnétiques rayonnés par un moteur qui permette de le caractériser à partir de mesures faites dans son voisinage, il s'agit d'une démarche de

---

type *problème inverse*. Ce modèle doit prendre en compte les caractéristiques du milieu marin et, en particulier, la conductivité de l'eau. En effet, les variations des champs magnétiques induisent des champs électriques et des courants de Foucault qui se propagent dans le milieu, offrant des moyens de détection supplémentaires. Le but de l'identification magnétodynamique est double : d'une part elle fournit une écriture des champs électromagnétiques qui permet leur extrapolation et, d'autre part, elle permet de caractériser une source. L'enjeu de l'identification est alors également double : elle permet de calculer des champs à grandes distances et de mettre en oeuvre une stratégie de discrétion, mais aussi de caractériser un moteur, ce qui s'avère être un outil précieux pour diagnostiquer les causes de son indiscretion.

Les blindages magnétiques permettent la réduction des signatures magnétiques en encerclant la source de matériaux ferromagnétiques qui canalisent les lignes de champ ou à l'aide de conducteurs parcourus par des courants électriques. Le dimensionnement de blindages que nous proposons passe par la distinction de ses deux effets : l'effet d'atténuation et l'effet de forme. Le calcul de l'effet d'atténuation permet le dimensionnement d'un blindage adapté au moteur en évaluant son efficacité. Le calcul de l'effet de forme permet d'évaluer l'influence de la forme d'un blindage. Cependant, le calcul de blindage que nous proposons ne se limite pas à la réduction de la source. Il est une méthode de simulation des champs basée sur les relations de passage sur une surface et de ce fait peut se généraliser à des problèmes plus complexes comme le calcul du rayonnement du moteur lui-même.

## Itinéraire

Cette thèse ne se limite pas à la réduction des champs électromagnétiques d'un moteur de propulsion Navale. En effet, nous proposons une approche plus générale qui assure l'identification de sources électromagnétiques quelconques et la réduction de leur signature. Cette généralisation repose sur les propriétés des modèles harmoniques qui permettent l'écriture d'une source électromagnétique dynamique dans un milieu conducteur.

Nous proposons de distinguer trois parties à cette étude :

1. La première partie est consacrée à la définition de l'identification magnétodynamique. Nous commençons par rappeler les équations locales des champs électromagnétiques dans un milieu conducteur et proposons une écriture générale de leurs solutions sous la forme de séries de fonctions harmoniques. Nous présentons ensuite l'identification magnétostatique, résolution d'un système linéaire, que nous généralisons à des sources dynamiques. Pour finir, nous proposons une approche statistique qui optimise l'identification grâce à des outils de diagnostic des systèmes linéaires et l'intervention d'information a priori.
2. La seconde partie propose le dimensionnement de blindages utilisant les propriétés des développements en séries précédents. Cette démarche prolonge l'utilité des modèles harmoniques en proposant un dimensionnement adapté à une source identifiée. Nous sommes ainsi capables de réduire la signature

---

électromagnétique d'une source que nous avons identifiée. Enfin nous exposons une méthode puissante et originale de calcul harmonique des relations de passage sur une frontière qui permet la simulation de problèmes électromagnétiques. Nous montrons dans cette partie que cette méthode de calcul est utile à l'identification car elle fournit l'information a priori nécessaire à l'approche statistique.

3. La troisième partie propose l'application de l'identification magnétodynamique à un moteur discoïde, maquette d'un moteur de propulsion navale. Il s'agit d'une synthèse des deux parties précédentes. L'identification magnétodynamique puisant l'information dont elle a besoin dans les outils de diagnostic des systèmes linéaires présentés en première partie et le calcul du problème direct à l'aide de la méthode harmonique de simulation proposée en seconde partie. Nous verrons qu'avec un nombre limité de capteurs, nous sommes capables de définir un modèle magnétodynamique précis du rayonnement du moteur dans l'air, ce qui nous permettra d'extrapoler sa signature fréquentielle et de diagnostiquer l'origine de son indiscretion.

# Première partie

## Modèle et identification de sources magnétodynamiques



# Introduction

La première partie de cette thèse est consacrée à la définition de l'identification de sources magnétodynamiques. Le principe de cette identification est de déterminer un modèle qui permette d'extrapoler la signature électromagnétique d'une source à partir de mesures faites dans son voisinage.

L'application principale de cette thèse étant la discrétion magnétique des moteurs de propulsion navale, nous ferons en sorte que l'identification magnétodynamique soit possible dans des milieux dont les propriétés sont identiques à celles du milieu marin dans lequel se propage la signature de ces moteurs.

Afin de proposer une identification magnétodynamique optimale nous avons découpé cette partie en quatre chapitres qui présentent tour à tour les modèles de sources harmoniques, l'identification magnétodynamique et enfin des compléments statistiques essentiels qui assurent la qualité de la méthode. Ces quatre chapitres suivent la démarche suivante :

Dans le premier chapitre, nous rappelons les équations locales qui régissent les champs électriques et magnétiques dans l'air et les milieux conducteurs. Puis nous proposons des solutions générales adaptées aux sources dynamiques sous la forme de séries de fonctions harmoniques. Nous définissons précisément les propriétés de ces fonctions qui vont permettre l'identification magnétique d'une source aussi complexe qu'un moteur. Ce chapitre a encore pour but de présenter les propriétés des fonctions harmoniques qui vont servir au calcul harmonique de blindage que nous proposons dans la seconde partie de ce manuscrit.

Dans le second chapitre, nous présentons les limites de l'identification à l'aide des modèles harmoniques. En particulier le nombre de mesures nécessaires, leur placement et l'obtention du modèle. Dans ce chapitre, nous traitons uniquement de l'identification statique. Nous proposons d'écrire l'identification comme la résolution d'un système linéaire couramment appelé problème inverse. Nous montrerons encore des outils élémentaires qui vont permettre d'optimiser cette identification. L'identification sera enfin appliquée à un moteur à aimants permanents en coordonnées polaires, ce qui illustrera les propriétés de l'identification et ses deux principales applications qui sont l'extrapolation de signature et le diagnostic.

Dans le troisième chapitre, nous allons généraliser l'identification statique à des sources magnétiques contenues dans des milieux conducteurs. Cette identification va permettre l'extrapolation des champs magnétiques et électriques liés à la source et aux propriétés du milieu. Nous allons encore un peu plus loin en proposant une application de l'identification magnétodynamique comme un outil de diagnostic. Il s'agit en effet d'une analyse des champs électromagnétiques rayonnés par une

source qui permet de distinguer les éléments d'une source sur une double échelle spatiale et fréquentielle.

Dans le quatrième chapitre, nous présentons une approche statistique de l'identification magnétique. Nous cherchons à franchir les limites de l'identification en particulier le manque de mesures qui rend le système linéaire sous-déterminé. Pour surmonter cet obstacle nous aurons recours à des estimateurs bayésiens qui exploitent l'information a priori sur une source pour compléter l'information apportée par des mesures. La description statistique de l'identification apporte des outils essentiels qui permettent encore de diagnostiquer l'état de la solution et de garantir sa robustesse.

La lecture de cette première partie est nécessaire à la compréhension du calcul de blindage harmonique que nous proposons ultérieurement dans cette thèse. Elle présente la mise en place de l'identification magnétique à l'aide d'un modèle harmonique dont la globalité permet l'économie de mesures grâce à l'intervention d'informations a priori. Il est ainsi possible d'extrapoler la signature magnétique ou électrique d'une source aux propriétés du milieu. Un point doit encore être éclairé à propos de l'origine et de la nature de l'information a priori. C'est pourquoi, la deuxième partie de ce manuscrit propose une réponse par le biais de considérations géométriques qui permettent le calcul de l'effet de forme d'un blindage.

# Chapitre 1

## Modèles multipolaires harmoniques

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1.2</b>	<b>Détermination des équations locales des champs</b>	<b>10</b>
1.2.1	Équations de Maxwell et relation des matériaux	10
1.2.2	L'équation de diffusion	11
<b>1.3</b>	<b>Solutions harmoniques des champs</b>	<b>12</b>
1.3.1	Séparation des variables et fonctions propres	12
1.3.2	Développement harmonique du champ électromagnétique	15
1.3.3	Remarques	17
<b>1.4</b>	<b>Propriétés des développements en série du champ</b>	<b>18</b>
1.4.1	La séparation des variables	19
1.4.2	Une écriture intéressante des champs électromagnétiques	19
1.4.3	Propriétés des fonctions propres	20
<b>1.5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>23</b>

---

### 1.1 Introduction

Dans ce premier chapitre, nous cherchons un modèle de sources de champs électromagnétiques qui permet non seulement l'identification magnétodynamique de ces dernières, mais aussi l'élaboration de leur discrétion électromagnétique. Bien que l'application principale de cette thèse soit la discrétion magnétique des moteurs de propulsion navale, nous nous sommes rapidement aperçus que le choix d'un modèle général étendrait considérablement le champ d'application de cette étude. La problématique de ce chapitre consiste donc à définir un modèle de source et à cibler ses propriétés essentielles pour en faire l'usage le plus intelligent et le plus vaste possible.

La dynamique des champs magnétiques de fuites rayonnés par un moteur électrique de propulsion navale implique le développement de champs électromagnétiques dans le milieu marin, mais aussi dans la carcasse conductrice du



moteur. La première étape de l'élaboration d'un modèle consiste à déterminer clairement les équations différentielles qui résument le comportement local des champs électromagnétiques en fonction des fréquences et des caractéristiques du milieu. Puis vient une seconde étape, plus calculatoire qui consiste à résoudre ces équations différentielles afin d'obtenir un modèle général. Les deux premières parties de ce chapitre porteront donc respectivement sur les deux étapes susdites et aboutissent à l'écriture générale du développement multipolaire harmonique d'une source quelconque de champ électromagnétique. Enfin, dans une dernière partie nous distinguerons les propriétés des développements harmoniques qui font l'intérêt de ce modèle, puisqu'elles sont autant d'outils d'analyse et de caractérisation des champ électromagnétiques rayonnés et a fortiori de la source elle-même.

## 1.2 Détermination des équations locales du champ électromagnétique

### 1.2.1 Équations de Maxwell et relation des matériaux

Dans un milieu dépourvu de charges électriques<sup>1</sup>, caractérisé par sa perméabilité magnétique ( $\mu$ ), sa conductivité ( $\sigma$ ) et sa permittivité ( $\epsilon$ ) électriques, le comportement des champs électromagnétiques répond aux équations de Maxwell et aux relations relatives au matériau qui constitue ce milieu. Les équations de Maxwell s'énoncent :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{rot}\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \text{div}\vec{B} &= 0 \\ \overrightarrow{rot}\vec{H} &= \vec{i} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} & \text{div}\vec{D} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Nous ferons l'hypothèse que le milieu est homogène, isotrope et qu'il suit de plus une loi d'aimantation et de polarisation linéaires. Il en résulte alors les relations relatives au matériau :

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \quad \vec{i} = \sigma \cdot \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad (1.2)$$

Les hypothèses précédentes sont fortes et nous montrerons leurs limites au cours de cette étude, en particulier celles qui sont liées à la loi d'aimantation (hystérésis) mais aussi celles qui proviennent de l'inhomogénéité du milieu. Prenons par exemple le milieu marin. La conductivité de l'eau dépend de son degré de salinité, qui lui même dépend de la pression. L'hypothèse d'homogénéité n'est donc pas recevable et les relations (1.2) précédentes ne seront valables que localement ce qui entraîne une validité restreinte du développement harmonique.

A partir des relations (1.1) et (1.2) nous démontrons facilement que toutes les grandeurs électromagnétiques ( $\vec{A}, \vec{B}, \vec{E}$  et  $\vec{i}$ ) répondent à l'équation différentielle appelée équation d'onde :

$$\Delta X - \mu\sigma \cdot \frac{\partial X}{\partial t} - \mu\epsilon \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0 \quad (1.3)$$

<sup>1</sup>comprendre des charges électriques statiques, il peut y avoir des courants électriques

Comme nous cherchons des solutions dynamiques nous écrivons la grandeur électromagnétique  $X$  à l'aide des nombres complexes sous la forme :

$$X = \Psi \cdot e^{j\omega t} \quad (1.4)$$

Avec cette convention d'écriture l'équation différentielle représentant le comportement local des champs électromagnétiques s'écrit sous forme complexe :

$$\Delta\Psi - \underbrace{j\mu\sigma\omega \cdot \Psi}_I + \underbrace{\mu\epsilon\omega^2 \cdot \Psi}_{II} = 0 \quad (1.5)$$

### 1.2.2 L'équation de diffusion

Nous allons démontrer maintenant que, dans le cadre de nos applications, le terme représentant les phénomènes de déplacement est négligeable devant celui qui représente les phénomènes induits. Autrement dit, nous pouvons négliger le terme (II) devant (I) dans l'équation différentielle (1.5) précédente.

Avant toute chose commençons par expliciter le rapport entre les courants de déplacement et les courants de Foucault :

$$r = \left| \frac{\mu\epsilon\omega^2}{j\mu\sigma\omega} \right| = \frac{2\pi\epsilon f}{\sigma} \quad (1.6)$$

Dans le domaine des fréquences qui nous intéressent ( $f < 1\text{kHz}$ ) nous avons donc l'inégalité :

$$\text{si } f < 1\text{kHz} : \quad r < \frac{2\pi\epsilon 1e^3}{\sigma} \quad (1.7)$$

Dans l'eau<sup>2</sup>, le rapport  $r$  est de l'ordre du millionième et de ce fait les courants de déplacement sont négligeables face aux courants de Foucault<sup>3</sup>. Il en est de même lorsque le milieu est un bon conducteur comme pour la plupart des matériaux ferromagnétiques qui rentrent dans la conception des moteurs électriques. Dans le cas de l'aluminium<sup>4</sup> le rapport  $r$  est de l'ordre de  $1e^{-15}$ . Ainsi, pour que les courants de déplacement soient significatifs il faudrait des fréquences de fonctionnement supérieures à la centaine de gigahertz.

Pour conclure, dans le milieu marin qui entoure un moteur de propulsion, ou dans les matériaux conducteurs qui constituent la machine, le comportement local des champs électromagnétiques est donné par l'équation de diffusion :

$$\Delta\Psi - j\mu\sigma\omega \cdot \Psi = 0 \quad (1.8)$$

*Remarque : L'équation de Laplace est une écriture particulière de l'équation (1.8) pour des phénomènes statiques ( $\omega = 0$ ) ou pour des milieux de conductivité nulle comme l'air ( $\sigma = 0$ ). Elle s'écrit alors :*

$$\Delta\Psi = 0 \quad (1.9)$$

<sup>2</sup> $\sigma = 4\Omega^{-1}m^{-1}$ ,  $\mu = \mu_0$  et  $\epsilon = 80\epsilon_0$

<sup>3</sup>Pour avoir un rapport  $r$  d'un millièème il faudrait une fréquence de l'ordre de 10MHz

<sup>4</sup> $\sigma = 3.6 \cdot 10^7 \Omega^{-1}m^{-1}$ ,  $\mu = \mu_0$  et  $\epsilon = \epsilon_0$

## 1.3 Solutions harmoniques des champs

### 1.3.1 Séparation des variables et fonctions propres

Nous utiliserons une méthode de résolution de l'équation différentielle (1.8) par séparation des variables afin d'obtenir les développements en série de fonctions propres harmoniques. Les variables choisies sont celles qui interviennent dans les systèmes de coordonnées utilisés pour l'étude des moteurs. En particulier les coordonnées polaires (2D) et les coordonnées sphériques (3D).

#### 1.3.1.1 Le potentiel scalaire

La pratique couramment utilisée pour déterminer le développement en série du champ magnétique consiste à introduire le potentiel magnétique scalaire  $\Psi$  et à démontrer qu'il répond à l'équation (1.8) ou (1.9). Ainsi la résolution de l'équation est grandement facilitée du fait qu'elle est scalaire et nous obtenons facilement une solution à variables séparées utilisant des fonctions harmoniques scalaires. L'écriture du champ magnétique est alors obtenue par dérivation en utilisant le gradient du potentiel scalaire magnétique [Leg96][Rou99].

Ce raisonnement est tout à fait adapté au développement du champ magnétique dans l'air mais pose problème dès lors que nous sommes dans un milieu conducteur, car le champ magnétique  $\vec{H}$  ne dérive plus d'un potentiel, du fait que son rotationnel n'est plus nul. Nous avons donc intérêt à chercher une autre grandeur qui soit à l'origine des différentes grandeurs électromagnétiques : le potentiel vecteur magnétique.

#### 1.3.1.2 Le potentiel vecteur magnétique

Pour deux raisons nous chercherons l'expression du développement du potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  :

1. Il répond à l'équation (1.8) et admet une solution en série de fonctions harmoniques.
2. Il est proportionnel au champ électrique et aux courants de Foucault dans un milieu conducteur, et permet le calcul simple du champ magnétique par dérivation :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \vec{E} = -j\omega \vec{A} \text{ et } \vec{i} = -j\omega \sigma \vec{A} \quad (1.10)$$

Pour résumer, le développement en série du potentiel vecteur donne directement celui du champ électrique, des courants de Foucault et par dérivation celui du champ magnétique (1.10). Le potentiel vecteur magnétique est donc le lien entre toutes ces grandeurs physiques. Ainsi la connaissance de son développement multipolaire implique la connaissance du développement multipolaire de chacun.

Le choix de résoudre (1.8) pour le potentiel  $\vec{A}$  est donc judicieux, mais il pose le problème de la résolution d'une équation différentielle vectorielle [Lor01]. Il est néanmoins possible de se ramener à la résolution d'une équation scalaire en exploitant les propriétés du potentiel vecteur dans des cas simples où sa direction est facilement déterminable à l'aide de considérations géométriques (symétries, périodes, ...).

Lorsque le système de coordonnées est plus complexe la détermination de la direction du potentiel vecteur magnétique n'est plus aussi évidente. Une astuce utilisant la divergence de  $\vec{A}$  permet de lier cette grandeur vectorielle à une grandeur scalaire répondant à l'équation de diffusion.

Nous rappelons que si la divergence de  $\vec{A}$  est nulle, il existe un vecteur  $\vec{W}$  tel que :

$$\vec{A} = \overrightarrow{rot}\vec{W} \quad \text{avec} \quad \vec{W} = W_1\vec{u} + (\vec{u} \times \vec{\nabla})W_2 \quad (1.11)$$

avec  $\vec{u}$ ,  $W_1$  et  $W_2$  choisis de sorte que le potentiel vecteur magnétique réponde à l'équation de diffusion (1.8)[Smy68]. Par exemple, en choisissant  $\vec{u} = r \cdot \vec{e}_r$  en coordonnées sphériques, ce qui correspond au développement de l'expression de l'onde sphérique transverse électrique [Ang72]<sup>5</sup>, il vient alors de (1.11) et (1.8) :

$$\vec{W} = rW_1 \cdot \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \Delta W_1 - j\mu\sigma\omega \cdot W_1 = 0 \quad (1.12)$$

Nous venons donc de déterminer un scalaire  $W_1$  qui répond à l'équation de diffusion et qui rentre dans l'écriture du vecteur  $\vec{W}$  dont dérive le potentiel vecteur  $\vec{A}$ . Ce raisonnement s'applique encore en coordonnées cylindriques et elliptiques et permet de définir toutes les grandeurs à partir de l'écriture d'une seule solution scalaire harmonique.

### 1.3.1.3 Séparations des variables

Lorsque l'équation de diffusion (ou de Laplace) est écrite dans un système de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  ou  $(x_1, x_2)$  il est possible de calculer les solutions par la méthode de séparations des variables [Str41] [Dur66] [Ang72]. Les solutions recherchées s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \Psi(x_1, x_2, x_3) &= f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot f_3(x_3) \\ \text{ou} & \\ \Psi(x_1, x_2) &= f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \end{aligned} \quad (1.13)$$

La séparation de variables conduit à 3 (ou 2) équations différentielles distinctes de la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ a(x) \frac{\partial f}{\partial x} \right] + [b(x) + \lambda \cdot c(x)] \cdot f(x) = 0 \quad \forall x \in ]\alpha, \beta[ \quad (1.14)$$

---

<sup>5</sup>Durand préfère la définition d'un opérateur hermitien  $\vec{L}$  pour résoudre l'équation de Laplace vectorielle [Dur68] (chapitre V, p255)

où  $\lambda$  est une constante arbitraire qui apparaît dans le processus de séparations de variables (voir Annexe A). Les équations différentielles du type de (1.14) qui apparaissent sont :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \pm m^2 f = 0 \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ (1-x^2) \frac{\partial f}{\partial x} \right] + \frac{m^2}{1-x^2} \cdot f + n(n+1) \cdot f = 0 \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \left( \frac{n^2}{x} \pm m^2 x \right) \cdot f = 0 \quad (1.17)$$

Les solutions de (1.15) sont les fonctions hyperboliques  $\sinh(mx)$ ,  $\cosh(mx)$  et les fonctions trigonométriques  $\sin(mx)$  et  $\cos(mx)$ . Les solutions de (1.16) sont les fonctions de Legendre de première et de second espèce  $P_n^m(x)$  et  $Q_n^m(x)$  et enfin, les solutions de (1.17) sont les fonctions de Bessel de première et seconde espèce  $J_n(mx)$ ,  $Y_n(mx)$ ,  $I_n(mx)$  et  $K_n(mx)$  [Whi65] [Ang72]. Nous obtenons alors une famille de fonctions qui dépendent des valeurs de  $n$  et  $m$ .

### 1.3.1.4 Le problème de Sturm-Liouville

Le problème de Sturm-Liouville consiste à trouver des solutions de (1.14) satisfaisant des conditions de type Neumann-Dirichlet aux limites  $\alpha$  et  $\beta$  du domaine de la variable  $x$  du type :

$$\begin{cases} A \cdot f(x) + B \cdot f'(x) = 0 & \text{quand } x = \alpha \\ C \cdot f(x) + D \cdot f'(x) = 0 & \text{quand } x = \beta \end{cases} \quad (1.18)$$

où  $A, B, C, D$  sont des constantes arbitraires et  $f'$  la dérivée de  $f$  par rapport à  $x$  [Arf95][Dur66].

Quand l'intervalle  $[\alpha, \beta]$  est borné, les conditions ne peuvent être satisfaites que si  $\lambda$  a des valeurs bien déterminées  $\lambda_k$  qui sont les valeurs propres du problème de Sturm-Liouville. Alors à chaque valeur propre  $\lambda_k$  correspond une fonction propre  $f_k$ , ces fonctions forment un spectre discret et la solution de l'équation de diffusion (ou de Laplace) s'écrit comme une série de fonctions propres :

$$\begin{aligned} \Psi(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{n,m} a_{n,m} \cdot f_{1,n}(x_1) \cdot f_{2,m}(x_2) \cdot f_{3,n,m}(x_3) \\ &\text{ou} \\ \Psi(x_1, x_2) &= \sum_n a_n \cdot f_{1,n}(x_1) \cdot f_{2,m}(x_2) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Par contre, quand l'intervalle  $] \alpha, \beta [$  est infini, les conditions aux limites précédentes (1.18) sont satisfaites pour tout  $\lambda$ , le spectre des fonctions propres est alors

continu et la solution générale de l'équation de diffusion est donnée par l'intégrale :

$$\Psi(x_1, x_2, x_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdot f_{1,n}(x_1) \cdot f_{2,m}(x_2) \cdot f_{3,n,m}(x_3) \cdot dn \cdot dm$$

ou

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} a_{n,m} \cdot f_{1,n}(x_1) \cdot f_{2,m}(x_2) \cdot dn$$
(1.20)

### 1.3.2 Développement harmonique du champ électromagnétique

Nous avons montré qu'il était plus judicieux, lors de la résolution de l'équation de diffusion, de chercher l'écriture générale du potentiel vecteur magnétique plutôt que celle du potentiel scalaire. Le développement de la solution harmonique passe alors par l'intermédiaire  $W_1$  qui est solution de l'équation de diffusion scalaire. Nous désirons obtenir une écriture des champs sous la forme de séries de fonctions propres, ce qui n'est possible que s'il existe des conditions favorables aux extrémités des intervalles de résolution du type de (1.18). Or les champs électromagnétiques développés par des sources localisées ont naturellement des propriétés<sup>6</sup> telles que la résolution de l'équation de diffusion est toujours un problème de Sturm-Liouville à spectre discret quel que soit le système de coordonnées lié au problème.

#### 1.3.2.1 Écriture des champs en coordonnées polaires

En coordonnées polaires, le potentiel vecteur est dirigé suivant l'axe  $z$  perpendiculairement au plan  $(x, y)$  porteur du champ magnétique (figure A.1). Le potentiel vecteur n'a alors qu'une seule composante qui répond à l'équation de diffusion scalaire. L'écriture générale dynamique du potentiel magnétique est alors (voir Annexe A) :

$$\vec{A}(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n'' I_n(kr) + B_n'' K_n(kr)] \cdot [C_n'' \cos(n\theta) + D_n'' \sin(n\theta)] \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_z \quad (1.21)$$

D'après (1.10) nous obtenons alors l'écriture du champ électrique et des courants de Foucault induits dans le matériau :

$$\begin{aligned} \vec{E}(r, \theta, t) &= (-j\omega) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} [A_n'' I_n(kr) + B_n'' K_n(kr)] \cdot [C_n'' \cos(n\theta) + D_n'' \sin(n\theta)] \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_z \\ \vec{i}(r, \theta, t) &= (-j\omega\sigma) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} [A_n'' I_n(kr) + B_n'' K_n(kr)] \cdot [C_n'' \cos(n\theta) + D_n'' \sin(n\theta)] \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$
(1.22)

---

<sup>6</sup>Périodicité, valeurs finies en dehors des sources, et valeur nulle du champ à l'infini.

et l'induction magnétique en coordonnées polaires :

$$\vec{B}(r, \theta, t) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r} [A_n'' I_n(kr) + B_n'' K_n(kr)] \cdot [-nC_n'' \sin(n\theta) + nD_n'' \cos(n\theta)] \cdot e^{j\omega t} \\ - \sum_{n=0}^{\infty} k [A_n'' I_n^{(1)}(kr) + B_n'' K_n^{(1)}(kr)] \cdot [C_n'' \cos(n\theta) + D_n'' \sin(n\theta)] \cdot e^{j\omega t} \end{cases}$$

avec :  $I_n^{(1)} = \frac{\partial}{\partial r}(I_n)$  et  $K_n^{(1)} = \frac{\partial}{\partial r}(K_n)$   $k = \frac{(1+j)}{\delta}$  et  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}$

(1.23)

Il s'agit d'une solution générale de l'équation différentielle de diffusion c'est-à-dire qu'en tout point du plan  $P(r, \theta)$  il existe un développement des champs électromagnétiques sous la forme (1.22) ou (1.23). L'identification magnétique que nous développerons consiste à trouver une solution unique valable dans tout l'espace (ou dans un domaine exploitable).

### 1.3.2.2 Écriture des champs en coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques nous avons vu que la détermination du potentiel vecteur passait par l'intermédiaire du vecteur  $\vec{W}$  de sorte que  $\vec{A}$  réponde à l'équation de diffusion. Dans ce cas il s'écrit : (voir Annexe A.3.2)

$$\vec{W}(r, \theta, \phi, t) = \sqrt{\frac{r}{k}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} [E_n \cdot I_{(n+\frac{1}{2})}(kr) + F_n \cdot K_{(n+\frac{1}{2})}(kr)] \cdot Y_n(\theta, \phi) \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_r$$

avec :  $Y_n(\theta, \phi) = \sum_{m=0}^n [A_{n,m}'' \cos m\phi + B_{n,m}'' \sin m\phi] \cdot P_n^m(\cos \theta)$

(1.24)

Il vient alors l'expression générale du champ électrique :

$$\vec{E}(r, \theta, \phi, t) = \begin{cases} 0 \\ \frac{-j\omega}{\sin \theta \sqrt{kr}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} [E_n \cdot I_{(n+\frac{1}{2})}(kr) + F_n \cdot K_{(n+\frac{1}{2})}(kr)] \cdot \frac{\partial Y_n(\theta, \phi)}{\partial \phi} \cdot e^{j\omega t} \\ \frac{j\omega}{\sqrt{kr}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} [E_n \cdot I_{(n+\frac{1}{2})}(kr) + F_n \cdot K_{(n+\frac{1}{2})}(kr)] \cdot \frac{\partial Y_n(\theta, \phi)}{\partial \theta} \cdot e^{j\omega t} \end{cases}$$
(1.25)

Pour trouver l'induction magnétique nous utiliserons la relation liant le potentiel vecteur à l'induction magnétique ( $r \vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{B}$ ) nous pouvons donc exprimer les composantes de l'induction en fonction de  $W_1$  [Dur65][Smy68] :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{r} W_1) = -\vec{\nabla} \times (\vec{r} \times \vec{\nabla} W_1) = r \frac{\partial}{\partial r} (\vec{\nabla} W_1) + 2\vec{\nabla} W_1 \quad (1.26)$$

D'où l'écriture des composantes de  $\vec{B}$  :

$$\vec{B}(r, \theta, \phi, t) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ E_n \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( I_n^{(2)}(kr) \right) + F_n \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( K_n^{(2)}(kr) \right) \right] \cdot Y_n(\theta, \phi) \cdot e^{j\omega t} \\ \frac{1}{r} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[ E_n \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( I_n^{(2)}(kr) \right) + F_n \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( K_n^{(2)}(kr) \right) \right] \cdot \frac{\partial Y_n(\theta, \phi)}{\partial \theta} \cdot e^{j\omega t} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[ E_n \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( I_n^{(2)}(kr) \right) + F_n \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( K_n^{(2)}(kr) \right) \right] \cdot \frac{\partial Y_n(\theta, \phi)}{\partial \phi} \cdot e^{j\omega t} \end{cases}$$

avec :  $I_n^{(2)}(kr) = \sqrt{\frac{r}{k}} \cdot I_{(n+\frac{1}{2})}(kr)$  et  $K_n^{(2)}(kr) = \sqrt{\frac{r}{k}} \cdot K_{(n+\frac{1}{2})}(kr)$

(1.27)

### 1.3.3 Remarques

Précisons quelques propriétés des développements précédents des grandeurs électromagnétiques afin de nous familiariser à eux.

#### 1.3.3.1 Validité du développement

Les développements précédents sont les solutions générales de l'équation différentielle de la diffusion, respectivement en coordonnées polaires ou sphériques. Ils sont aussi souvent obtenus à partir d'un développement limité de  $(1/r)$  dans le système de coordonnées considéré [Dur66][Leg96]. Suivant l'approche choisie pour obtenir le développement harmonique la zone de validité du développement change. En effet, si nous considérons le développement limité il ne sera valable qu'à l'extérieur d'un contour ( $\mathcal{C}_0$ ) relatif au système de coordonnées (sphère, ellipse, cercle, ...) et ne pourra être écrit dans le volume intérieur à ( $\mathcal{C}_0$ ). Par contre, si nous considérons que les développements harmoniques sont les solutions à variables séparées de l'équation de diffusion, la solution est valable en tout point P du domaine d'étude et il existe une famille unique de coefficients  $\{A_n'', B_n'', C_n'', D_n'' \dots\}$  qui permet de représenter le champ à l'aide de séries de fonctions propres. Ces coefficients sont données par les conditions de Cauchy contenues dans le problème de Sturm-Liouville (1.18).

#### 1.3.3.2 Développements multipolaires

Quand la solution est déterminée et unique, il existe une famille de coefficients qui détermine l'écriture exacte des champs magnétique et électrique dans le domaine d'étude. Par exemple, lorsque nous nous intéressons aux champs rayonnés par une source localisée nous déterminons son développement à partir des connaissances que nous avons de son champ rayonné ou à partir de mesures magnétiques et électriques voisines. Dans ce cas nous déterminons la famille de coefficients unique qui permet l'écriture des champs rayonnés par la source. Puisque ces coefficients sont uniques et ne dépendent que de la source, l'écriture en série de fonctions propres harmoniques est appelée développement harmonique d'une source. Bien



que ce soit l'expression du champ rayonné qui est développée par cette méthode, nous trouvons assez fréquemment dans la littérature le terme de *développement multipolaire* ce qui correspond à une approche physique de la solution du problème de Sturm-Liouville qui consiste à représenter la source comme une superposition de masses magnétiques appelées dipôles, quadrupôles, octupôles... [Wik84]

### 1.3.3.3 Problème interne - Problème externe

Toutes les solutions générales issues de l'équation de diffusion portent la marque de la séparation des variables. Dans le cas des harmoniques sphériques et polaires, des fonctions angulaires sont multipliées par une fonction qui ne dépend que de la variable  $r$ , c'est-à-dire directement de la distance entre le centre de la décomposition et le point de calcul. Nous pouvons constater qu'il y a un couple de fonctions propres à cette variable dont l'une est croissante et l'autre décroissante, par exemple la solution scalaire  $\Psi$  de l'équation de Laplace s'écrit (voir Annexe A) :

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[ A_n \cdot r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right] \cdot [B'_{n,m} \cos m\phi + C'_{n,m} \sin m\phi] \cdot P_n^m(\cos \theta) \quad (1.28)$$

Ces deux fonctions de la variable  $r$  sont généralement liées à deux types de problème : les problèmes interne et externe [Teg85].

- Admettons que nous cherchions à développer les champs autour d'une source. Plus nous nous éloignons et moins ces champs seront importants de sorte qu'à l'infini le champ de la source est nul<sup>7</sup>. Dans ces conditions, les fonctions croissantes de  $r$  ne peuvent pas intervenir dans l'écriture des champs et les solutions du problème ne s'écrivent qu'avec les fonctions décroissantes. Cette écriture est caractéristique d'un *problème externe*, c'est-à-dire extérieur à la source.
- Au contraire, lorsque les sources sont tout autour du domaine de développement harmonique ou à l'infini<sup>8</sup> et qu'il n'y a pas de source magnétique dans ce domaine, alors le champ ne peut qu'augmenter en fonction de  $r$ . On parle alors de *problème interne*, puisque le développement est entouré de sources.

## 1.4 Propriétés des développements en série du champ

Les méthodes que nous allons mettre au point dans la suite de cette étude reposent sur les propriétés des développements en série des champs. En particulier se distinguent les propriétés liées à la séparation de variables, sujet que nous avons déjà commencé d'aborder, les propriétés liées à l'écriture commune des champs électromagnétiques et enfin les propriétés algébriques des fonctions propres qui sont la base de l'identification magnétique que nous proposerons dans le chapitre suivant.

<sup>7</sup>Il s'agit d'une condition de type (1.18) pour la variable  $r$  qui indique que tous les coefficients relatifs à des fonctions croissantes sont nuls

<sup>8</sup>Cas du champ terrestre

### 1.4.1 La séparation des variables

La méthode de séparation des variables pour résoudre l'équation de diffusion à permis une écriture en série des champs électromagnétiques dans un milieu conducteur. Nous sommes déjà revenus sur les propriétés des fonctions de décroissance en coordonnées sphériques et polaires selon le type de problème, mais là n'est qu'un aspect des propriétés de la séparation des variables. Prenons l'écriture d'une solution de l'équation de Laplace (1.28) que nous écrirons à l'aide des harmoniques sphériques :

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_n \cdot r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right] \cdot Y_n(\theta, \phi) \quad (1.29)$$

Ainsi il apparaît clairement que les solutions s'écrivent comme le produit de fonctions harmoniques ( $Y_n$ ) et de fonctions ( $r^n$  et  $r^{-(n+1)}$ ) qui dépendent de l'indice  $n$ . Il y a donc des périodes spatiales ou des schémas périodiques spatiaux associés à des décroissances spécifiques. Ce phénomène est à l'origine du développement multipolaire à l'aide des solutions à variables séparées. L'indice  $n$  est appelé *ordre* ce qui permet de classer les sources selon la décroissance du champ qu'elles rayonnent. Par exemple, en coordonnée sphériques, l'ordre  $n=1$  ou dipolaire est caractérisé par une périodicité unitaire et une décroissance du champ magnétique en  $r^{-3}$ , il possède trois termes distincts<sup>9</sup> qui correspondent aux trois configurations possibles d'un dipôle.

La décomposition multipolaire est tout à fait appropriée à la discrétion magnétique du moteur. En considérant un moteur électrique comme la somme de sources d'ordres différents nous pouvons nous concentrer sur certains ordres en fonction de leur incidence sur les champs à une distance donnée [Leg96][Sch05a]. De plus, les périodicités associées à un ordre donnent une information sur l'origine de l'indiscrétion magnétique. Par exemple, si la décomposition harmonique du champ magnétique d'un moteur fait apparaître un terme dipolaire, son influence sera majoritaire à grande distance. La périodicité relative à cet ordre nous permettra d'identifier la source d'indiscrétion à un phénomène de période unitaire, comme les pôles si la machine est dipolaire ou encore à un défaut d'excentricité ou de bobinage.

### 1.4.2 Une écriture intéressante des champs électromagnétiques

Le champ magnétique et le champ électrique sont reliés par les relations de Maxwell (1.1) de sorte que les coefficients qui interviennent dans l'écriture du champ magnétique interviennent également dans celle du champ électrique, des courants de Foucault et du potentiel vecteur magnétique.

Revenons un instant sur le choix que nous avons fait de la direction du vecteur  $\vec{W}$  colinéaire à  $\vec{r}$  en coordonnées sphériques. Il implique que le potentiel vecteur

---

<sup>9</sup> qui dépendent des valeurs de  $m$  de sorte que  $0 \leq m \leq n$  pour chaque ordre  $n$

et le champ électrique sont perpendiculaires à cette direction<sup>10</sup> et qu'ils sont des phénomènes induits par une source magnétique. C'est bien le cas de l'étude d'un moteur plongé dans un milieu conducteur : il génère des champs magnétiques qui eux-mêmes induisent des phénomènes électriques.

### 1.4.3 Propriétés des fonctions propres

Nous avons déjà mis en évidence les propriétés des séries de fonctions propres et en particulier les propriétés liées à la séparation des variables. Dans cette section nous mettons en évidence la propriété d'orthogonalité des fonctions harmoniques liée à la résolution d'un problème de Sturm-Liouville. Nous verrons par la suite qu'elle est essentielle et sous-jacente à l'identification magnétique.

#### 1.4.3.1 Orthogonalité des fonctions propres

Lors de la résolution du problème de Sturm-Liouville à spectre discret, les fonctions propres  $f_k$  associées aux  $\lambda_k$  forment une suite de fonctions orthogonales [Dur66] [Pol02] [Hab04]. Elles vérifient alors sur le domaine de définition la condition d'orthogonalité :

$$\int_{\alpha}^{\beta} c(x) f_p f_q dx = 0 \quad \text{si } p \neq q \quad (1.30)$$

Dans le cas de la résolution de problèmes internes ou externes, seules les fonctions propres liées aux variables angulaires sont solutions d'un problème de Sturm Liouville puisqu'elles répondent toujours à des conditions de type (1.18) sur leur intervalle de résolution. Néanmoins, pour une des variables (généralement la distance  $r$ ) il n'existe pas de conditions de type (1.18) claires et l'orthogonalité des fonctions correspondantes n'est plus intrinsèque<sup>11</sup>. Notons cependant que les termes des séries solutions de l'équation de diffusion sont toujours orthogonaux sur un support  $\mathcal{C}$  indépendant de la variable  $r$ .

L'intérêt de l'orthogonalité de la suite des fonctions propres sur  $\mathcal{C}$  est qu'elle permet le développement en série de toute fonction des variables  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ . Prenons une fonction  $F$  quelconque de ces trois variables, alors sur  $\mathcal{C}$  cette fonction peut s'écrire à l'aide des fonctions propres :

$$F(X_0, x_2, x_3) = f_1(X_0) \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} A_{p,q} \cdot f_{2,p}(x_2) \cdot f_{3,q}(x_3) \quad (1.31)$$

Il s'agit de l'écriture de la meilleure solution de l'équation de diffusion sous forme d'une série de fonctions propres. Cette écriture est possible du fait de l'orthogonalité et correspond d'un point de vue algébrique à la projection de  $F$  sur la famille

<sup>10</sup>c'est pourquoi les développements (1.25) et (1.27) sont appelés développement de l'onde électrique transverse

<sup>11</sup>Si l'intervalle n'est pas fermé il n'y a pas orthogonalité

de fonctions propres solutions. Dans ce cas les coefficients  $A_{p,q}$  se déterminent simplement par projection :

$$A_{p,q} = \frac{\oint_{\mathcal{C}} F(x_1, x_2, x_3) \cdot c_2(x_2)c_3(x_3)f_{2,p}f_{3,q} \cdot dx_2dx_3}{f_1(X_0) \cdot \oint_{\mathcal{C}} c_2(x_2)c_3(x_3)f_{2,p}f_{3,q} \cdot dx_2dx_3} \quad (1.32)$$

A titre d'exemple prenons les solutions de l'équation de Laplace en coordonnées polaires qui correspondent à l'écriture d'un problème interne (voir Annexe A.2.3). Elles s'écrivent sur un cercle de rayon  $R_0$  comme des séries trigonométriques sous la forme :

$$\Psi(R_0, \theta) = a_0 \cdot \ln(R_0) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta] \cdot R_0^{-n} \quad (1.33)$$

Nous savons par ailleurs que puisqu'il n'y a pas de source sur ce cercle (conditions de validité du modèle) les grandeurs électromagnétiques sont continues et périodiques, elles se décomposent donc en séries de Fourier et les coefficients de cette série sont donnés par les produits scalaires :

$$\begin{aligned} \langle \Psi(R_0, \theta) | 1 \rangle &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \Psi(R_0, \theta) d\theta = a_0 \cdot \ln(R_0) \\ \langle \Psi(R_0, \theta) | \cos n\theta \rangle &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \Psi(R_0, \theta) \cos n\theta d\theta = a_n \cdot R_0^{-n} \\ \langle \Psi(R_0, \theta) | \sin n\theta \rangle &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \Psi(R_0, \theta) \sin n\theta d\theta = b_n \cdot R_0^{-n} \end{aligned} \quad (1.34)$$

Cet exemple montre qu'il est possible, à partir de l'écriture ou de la mesure d'une grandeur électromagnétique, de trouver simplement sa décomposition en série sur un contour  $\mathcal{C}$  et par là même de définir une écriture en série des champs électromagnétiques. Ce sont les propriétés d'orthogonalité sur  $\mathcal{C}$  des fonctions propres qui permettent l'identification d'une source sous la forme d'une série harmonique ou de modèle équivalent multipolaire.

### 1.4.3.2 Orthonormalisation

Nous venons de mettre en évidence la propriété d'orthogonalité des fonctions propres sur des contours particuliers  $\mathcal{C}$ , nous verrons encore dans la suite de cette étude l'importance des propriétés algébriques non seulement pour l'identification d'une source magnétique mais aussi dans le calcul des blindages. Admettons que nous cherchions la solution unique d'un problème externe ou interne à partir de la donnée de conditions aux limites sur un contour quelconque  $\mathcal{C}_s$  (voir figure.1.1). L'orthogonalité sur le contour  $\mathcal{C}_0$  permet par exemple de définir tous les coefficients

de la solution particulière du problème. Mais nous voyons que cette solution n'est pas mathématiquement acceptable dans l'espace entre  $\mathcal{C}_s$  et  $\mathcal{C}_0$ , bien que nous connaissions une écriture générale de la solution valable (voir figure.1.1).

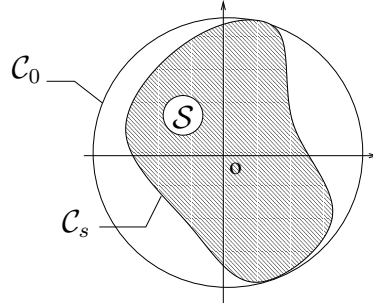


FIG. 1.1 – L'orthonormalisation permet l'identification sur un support quelconque.

Il est néanmoins possible d'étendre la solution à cet espace à condition de connaître des conditions aux limites sur  $\mathcal{C}_s$ . Admettons que nous connaissions le problème de Dirichlet qui est la donnée d'une fonction  $\Psi(P)$  en tout point P de  $\mathcal{C}_s$ . A l'extérieur de ce contour, en tout point M, nous connaissons également la solution générale de l'équation de diffusion sous la forme d'une série de fonctions propres (de terme général  $\psi_n$ ). En particulier quand le point M vient en P sur les limites du domaine :

$$\Psi(P) = \sum_n A_n \cdot \psi_n(P) \quad (1.35)$$

Malheureusement ces fonctions ne permettent plus la détermination des coefficients  $A_n$  dans le domaine d'étude du fait de la dépendance des trois variables spatiales (une des familles de fonctions propres n'est pas orthogonale, généralement la variable  $r$ ). C'est pourquoi, pour permettre la détermination des coefficients à partir de  $\Psi$  nous étendons la propriété d'orthogonalité des fonctions harmoniques en procédant à une orthonormalisation sur la surface [Dur66] [Leg96]. Nous définissons à partir des fonctions propres solutions  $\psi_n$  une famille de fonctions orthonormales  $\{v_n\}$  sur la surface telles que :

$$\forall M : \Psi(M) = \sum_n C_n \cdot v_n(M) \quad \text{et} \quad \forall n : C_n = \oint_{\mathcal{C}_s} \Psi(P) \cdot v_n(P) dl \quad (1.36)$$

A l'aide des fonctions orthonormées sur le contour  $\mathcal{C}_s$ , nous pouvons donc déterminer la solution particulière relative aux conditions limites en tout point M du domaine.

#### 1.4.3.3 Les fonctions propres, système complet

Si l'orthogonalité des fonctions harmoniques sur un contour particulier  $\mathcal{C}_0$  permet l'identification d'une solution unique à partir des conditions aux limites sur ce contour, lorsqu'il est quelconque l'identification passe nécessairement par un

processus d'orthonormalisation qui s'avère calculatoire. Pour permettre à moindre coût l'identification du champ sur un contour quelconque  $\mathcal{C}_s$ , il faut alors s'appuyer sur une autre particularité des familles de fonctions propres  $f_k$  : elles forment des systèmes complets dans l'espace des fonctions continues par morceaux sur  $\mathcal{C}_s$ . Le champ magnétique, électrique ou le potentiel vecteur sont des fonctions continues ou continues par morceaux sur un contour  $\mathcal{C}_s$  quelconque contenu dans un même milieu. Des conditions de Dirichlet sur  $\mathcal{C}_s$  peuvent donc s'écrire comme une fonction  $\Psi_m$  continue par morceaux. Or les fonctions propres solutions de l'équation de diffusion forment un système complet [Hob31] [Dur66], c'est-à-dire que pour tout  $\Psi_m$  défini sur un contour  $\mathcal{C}_s$  il est possible d'écrire :

$$\Psi_m(u) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot f_k(u) \quad u \in \mathcal{C}_s \quad (1.37)$$

et surtout :

$$\epsilon_N = \oint_{\mathcal{C}_s} \left| \Psi_m(u) - \sum_{k=1}^N A_k \cdot f_k(u) \right|^2 du \rightarrow 0 \quad \text{qd } N \rightarrow \infty \quad (1.38)$$

Autrement dit, quelle que soit l'écriture des conditions de Dirichlet (ou Neumann) sur un contour  $\mathcal{C}_s$ , il existe toujours une famille unique de coefficients  $A_k$  aux sens des moindres carrés qui permet d'écrire ces conditions à l'aide d'une série de fonctions propres (1.37).

Cette propriété des familles de fonctions propres est essentielle et nous permettra d'identifier les coefficients à l'aide d'une inversion aux sens des moindres carrés sur un contour quelconque. Cependant il est à noter que si cette méthode est moins calculatoire, elle est extrêmement contrainte par la vitesse de convergence de  $\epsilon_N$  sur  $\mathcal{C}_s$ . En particulier si le contour est anguleux (carré, dents rotoriques), la fonction  $\Psi_m$  (qui est continue par morceaux) aura alors des points anguleux ou pire des discontinuités. Dans ce cas la convergence de  $\epsilon_N$  sera particulièrement lente et la représentativité de  $\Psi_m$  à l'aide d'une série de fonctions propres ne sera valide que si la somme est infinie<sup>12</sup>.

Prenons par exemple l'écriture des solutions de l'équation de diffusion en coordonnées polaires. Elles s'écrivent à l'aide de séries de Fourier qui permettent une représentation d'une fonction continue par morceaux périodique sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$  mais font également apparaître des phénomènes de Gibbs lorsque la fonction possède une discontinuité.

## 1.5 Conclusions

La résolution de l'équation de diffusion à variables séparées permet d'écrire la solution de cette équation différentielle à l'aide d'une série de fonctions propres. L'écriture de l'unique solution des champs électromagnétiques est possible par identification de tous les coefficients sur un contour  $\mathcal{C}$ , ce qui est permis grâce aux

<sup>12</sup>Dans ce cas l'erreur aura forcément convergé

propriétés d'orthogonalités des fonctions propres. Il est également possible d'identifier une écriture des champs électromagnétiques sur un contour quelconque en exploitant le fait que les fonctions propres forment un système complet sur l'espace vectoriel normé des fonctions continues par morceaux sur  $\mathcal{C}$ . Cette propriété permet l'identification de la solution particulière au sens des moindres carrés sur un contour quelconque. Cependant, selon le contour  $\mathcal{C}$  la convergence d'une série de fonctions propres vers les conditions de Dirichlet peut être un phénomène extrêmement lent.

Dans ce chapitre nous avons montré l'origine et les propriétés des développements en série des champs électromagnétiques. Nous avons insisté sur les propriétés algébriques des solutions qui permettent de déterminer une solution unique en fonction des conditions aux limites. En particulier les écritures des problèmes internes et externes ressortent et fournissent l'écriture d'un modèle sous la forme d'un développement multipolaire. En explicitant les propriétés algébriques des fonctions propres de l'équation de diffusion nous montrons qu'il est toujours possible de déterminer une famille de coefficients à partir de conditions aux limites. L'identification magnétique que nous allons proposer dans le chapitre suivant consiste à identifier ces coefficients à partir d'un nombre limité de mesures. Comme nous verrons, le problème soulevé est celui de la détermination du nombre de mesures en fonctions de l'ordre du développement. En effet, mathématiquement il existe toujours une série infinie de fonctions propres solution mais en pratique nous cherchons un développement limité adapté à la source et aux nombres de capteurs magnétiques et électriques disponibles.

# Chapitre 2

## Identification de sources magnétostatiques

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>25</b>
<b>2.2</b>	<b>Approche empirique</b>	<b>26</b>
2.2.1	Détermination du modèle harmonique d'une source	26
2.2.2	Identification - Approche empirique	31
2.2.3	Conclusion	33
<b>2.3</b>	<b>Problème inverse</b>	<b>34</b>
2.3.1	Problème direct	34
2.3.2	Inversion et identification	36
2.3.3	Stabilisation et écriture optimale	38
2.3.4	Conclusion	42
<b>2.4</b>	<b>L'identification appliquée</b>	<b>43</b>
2.4.1	Identification d'un moteur simulé	43
2.4.2	Réduction du nombre de capteurs	46
2.4.3	Perspectives de l'identification	47

---

### 2.1 Introduction

Le chapitre précédent présentait les modèles harmoniques des champs. En particulier, nous insistions sur les propriétés des fonctions harmoniques liées à la séparation des variables qui introduisent la notion d'*ordre* nécessaire à la caractérisation d'une source.

Établir la décomposition harmonique d'une source s'apparente à identifier les termes harmoniques qui la caractérisent. Nous pouvons dès à présent sentir la dualité intrinsèque de l'identification : d'une part elle fournit une écriture des champs électromagnétiques qui permet leur extrapolation et, d'autre part elle permet de caractériser une source. L'enjeu de l'identification est alors également double : elle



permet le calcul des champs à grandes distances et la mise en oeuvre d'une stratégie de discrétion (blindage magnétique), mais aussi de caractériser une source, ce qui s'avère être un outil précieux de diagnostic.

Si le mécanisme de l'identification est assez simple à appréhender<sup>1</sup>, sa mise en oeuvre soulève un grand nombre de questions concernant la source, le modèle et la mesure. Afin de cibler ces interrogations et d'y apporter des réponses concrètes nous allons présenter l'identification en suivant une démarche progressive qui partira d'une approche analytique simple pour aboutir à l'écriture d'un système linéaire et à sa résolution. Le but de cette démarche est de nous familiariser avec l'écriture et la résolution de l'identification ainsi qu'aux problèmes sous-jacents qui pourraient être négligés.

Pour cette raison ce chapitre est divisé en deux parties. La première présente une approche empirique de l'identification tout en brossant les précautions nécessaires pour définir un modèle correct et adapté de source. La seconde partie présente l'identification comme un problème inverse et fait ressortir des outils qui vont permettre son écriture optimale. Enfin, riches de l'analyse et de l'expertise que nous aurons acquise, nous pourrons enfin conclure en montrant les perspectives de l'identification magnétostatique mais aussi ses limites à l'aide d'un exemple didactique.

## 2.2 Approche empirique

Par souci de clarté, nous proposons dans un premier temps d'étudier l'identification magnétostatique d'une source ( $\Sigma$ ) en coordonnées polaires (Fig.2.1), bien que ce système de coordonnées ne soit pas adapté à la représentation de sources de dimensions finies.

### 2.2.1 Détermination du modèle harmonique d'une source

En coordonnées polaires, le potentiel vecteur créé par une source magnétostatique s'écrit (voir Annexe A.2.3) :

$$\vec{A}(r, \theta) = \left\{ [a_0 + b_0 \cdot \ln(r)] + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n\theta) + b_n \cdot \sin(n\theta)] \cdot r^{-n} \right\} \cdot \vec{e}_z \quad (2.1)$$

il vient alors l'expression de l'induction magnétique :

$$\vec{B}(r, \theta) = \begin{vmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot [-a_n \cdot \sin(n\theta) + b_n \cdot \cos(n\theta)] \cdot r^{-(n+1)} \\ -\frac{b_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot [+a_n \cdot \cos(n\theta) + b_n \cdot \sin(n\theta)] \cdot r^{-(n+1)} \end{vmatrix} \quad (2.2)$$

---

<sup>1</sup>il s'agit de déterminer l'écriture harmonique d'une source magnétique à partir de mesures effectuées dans son voisinage

Identifier une source revient à déterminer l'ensemble des coefficients  $\{a_n, b_n\}$  qui permettent une bonne représentation du champ magnétique créé par celle-ci. C'est pourquoi la première étape de l'identification consiste à déterminer le nombre d'inconnues que nous cherchons. L'écriture (2.2) est une excellente représentation de l'induction magnétique en tout point de l'espace mais elle nécessite une infinité de coefficients. A partir de l'information disponible par quelques capteurs nous ne pouvons pas déterminer la valeur de tous les coefficients et pour ce faire nous devons limiter les séries (2.1) et (2.2) à leurs termes les plus significatifs.

### 2.2.1.1 La notion d'ordre

Les propriétés des modèles harmoniques que nous avons évoquées dans le chapitre précédent vont heureusement dans le sens d'un développement limité des séries précédentes (voir §1.4.1). En particulier la notion d'ordre liée à la décroissance de chaque terme joue un rôle majeur. En effet, l'observation de (2.2) ou (2.1) montre clairement que certains termes ont une décroissance plus forte en fonction de la distance au centre de la décomposition. Il existe donc une distance à partir de laquelle chacun de ces termes devient négligeable vis-à-vis du reste de la série. Cette série peut alors être limitée aux termes non négligeables en fonction de la distance à laquelle nous situons nos observations. Nous pouvons alors parler de *source d'ordre N*, l'ordre étant l'indice N du dernier terme de la série non négligeable (voir Fig.2.1).

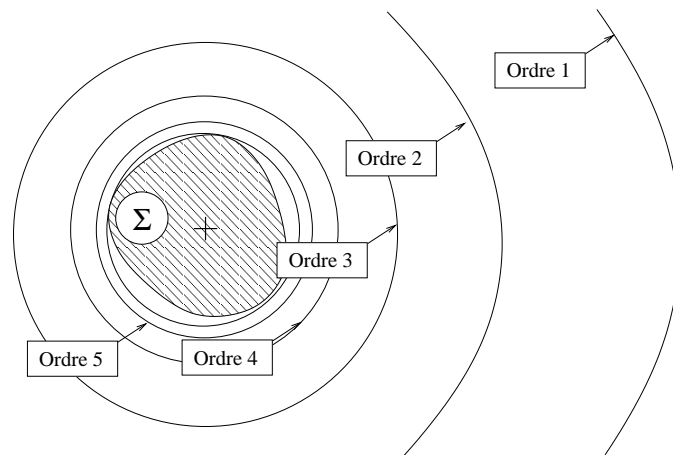


FIG. 2.1 – Domaines d'influence des ordres d'une source quelconque ( $\Sigma$ ) en fonction de la distance au centre.

Cependant, la détermination de l'ordre maximum n'est pas basée sur l'unique décroissance des termes et le bruit de la mesure intervient fortement. En effet, en plus du bruit magnétique ambiant, la mesure magnétique est toujours entachée du bruit des capteurs qui fait partie de leurs spécifications. Alors, la limitation d'une source à un ordre N n'est pas uniquement justifiée par le fait que les termes supérieurs à N sont négligeables, mais surtout parce qu'ils sont partiellement noyés dans le bruit de la mesure.

### 2.2.1.2 L'information a priori

L'information a priori joue un rôle central dans notre étude. En plus de la décroissance « naturelle » des termes qui définit l'ordre de la source, elle apporte une connaissance qui permet de négliger des termes supplémentaires dans le développement limité de l'induction magnétique (2.2). Par exemple, si la source est périodique de période  $P$ , il est évident que seuls les termes de période multiple de  $P$  vont avoir un rôle dans l'écriture de l'induction. En utilisant cette information nous divisons par  $P$  le nombre de coefficients  $\{a_n, b_n\}$  à identifier.

La difficulté de l'information a priori, même simple comme les périodicités ou les symétries, est qu'elle n'est pas rigoureusement exacte ou, dans le cadre de l'identification d'une source inconnue, qu'elle n'est pas disponible. Prenons l'exemple d'un moteur, à  $p$  paires de pôles. Il possède des périodicités relatives à ce nombre de pôles qui devraient permettre de limiter le nombre d'inconnues. Mais la réalité est toute autre et les dissymétries dues aux défauts d'usures ou de fabrication peuvent être contradictoires avec l'information a priori. Nous devons donc utiliser l'information avec intelligence pour ne pas contraindre l'identification à l'erreur. Nous rentrerons plus en détail sur l'emploi de l'information a priori au cours du chapitre 4. Pour l'heure, nous supposerons ne posséder aucune information a priori, ce qui va nous permettre de mettre en place l'identification magnétostatique la plus générale possible.

### 2.2.1.3 Zone de validité du modèle

Notre but est d'obtenir un modèle sous forme d'un développement limité de (2.2) qui soit représentatif de l'induction magnétique. La notion d'ordre, qui est toujours vérifiée quelle que soit la source, va nous permettre de limiter le développement de (2.2) de sorte que le nombre de coefficients à déterminer soit fini. Ainsi, l'induction magnétique d'une source d'ordre  $N$  s'écrira :

$$\vec{B}(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{n=1}^N n \cdot [-a_n \cdot \sin(n\theta) + b_n \cdot \cos(n\theta)] \cdot r^{-(n+1)} \\ -\frac{b_0}{r} + \sum_{n=1}^N n \cdot [+a_n \cdot \cos(n\theta) + b_n \cdot \sin(n\theta)] \cdot r^{-(n+1)} \end{cases} \quad (2.3)$$

En coordonnées polaires, par exemple, le nombre de coefficients  $\{a_n, b_n\}$  à identifier est  $2N+1$ . L'ordre  $N$  de la source variant avec la distance au centre (Fig.2.1), plus l'observation est éloignée du centre et moins le nombre de coefficients nécessaires pour caractériser l'induction de cette source sera important. Naturellement nous venons à penser que plus nous sommes loin et plus il est facile d'identifier une source. Mais ce raisonnement a principalement deux limites. La première est liée au rapport signal sur bruit : plus nous sommes loin de la source et moins le signal de la source est important par rapport au bruit, donc plus une erreur d'identification est possible. La seconde est liée à l'application que nous désirons : si nous cherchons à extrapoler la signature de la source au loin pour garantir sa discrétion, alors le raisonnement est acceptable. Par contre, si nous cherchons à caractériser la

source pour des applications de précision (diagnostic) ou obtenir un modèle précis à proximité pour garantir la discrétion à courte distance, alors le raisonnement n'est pas acceptable et nous devons chercher une source d'ordre  $N$  élevé. Afin d'éviter toute confusion possible précisons que lorsqu'un modèle est déterminé à l'ordre  $N$ , il n'est représentatif de l'induction magnétique qu'à l'extérieur de la zone où les termes d'ordre supérieur sont négligeables (voir Fig.2.1).

#### 2.2.1.4 Propriétés des coefficients harmoniques

Les coefficients harmoniques sont les inconnues à identifier à partir de la mesure. Ils possèdent quelques propriétés remarquables [Leg96] :

- Les coefficients interviennent dans l'écriture de toutes les grandeurs électromagnétiques, puisqu'elles sont toutes obtenues à partir du potentiel vecteur (voir §1.3.1). L'identification de ces coefficients est donc possible en regroupant différents types de mesures magnétiques (champ, gradient) et électriques (champ, potentiel électrique).
- Ils sont *intrinsèques* à la source et au choix du centre de la décomposition, c'est-à-dire qu'ils sont indépendants de la mesure. Quel que soit le jeu de mesures disponibles des grandeurs électromagnétiques de la source, les coefficients harmoniques obtenus doivent être identiques et indépendants des conditions de mesures ou des grandeurs mesurées.
- Les champs électriques, les potentiels vecteurs ou les champs magnétiques sont *linéairement dépendants* des coefficients. Il est donc très simple de calculer ces coefficients à partir des mesures.

Les propriétés des coefficients harmoniques sont telles que deux identifications à des ordres différents  $N_1$  et  $N_2$  doivent donner des coefficients communs identiques (les coefficients ne dépendent que de la source).

#### 2.2.1.5 Choix du centre de la décomposition

Le choix du centre de la décomposition est primordial. Il détermine la valeur de l'ensemble des coefficients. C'est pourquoi nous avons spécifié dans les propriétés de ces coefficients qu'ils étaient intrinsèques à la source et au choix du centre de la décomposition. Illustrons ce propos à l'aide d'un exemple simple : le conducteur infini décentré.

Prenons un câble électrique de rayon  $a$  parcouru par un courant électrique d'amplitude  $I$  (Fig.2.2.(1)). Si le centre de la décomposition est confondu avec le centre du câble, alors en tout point P tel que  $r > a$  nous pouvons écrire le potentiel vecteur magnétique à une constante près :

$$\vec{A}(r, \theta) = \left\{ -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \ln(r) + C^{ste} \right\} \cdot \vec{e}_z \quad (2.4)$$

Si maintenant, ce même câble est décentré de  $b$  par rapport au centre (Fig.2.2.(2)), le potentiel vecteur magnétique en tout point P défini à partir du

centre O de la décomposition s'écrira [Dur66] :

$$\vec{A}(r, \theta) = \left\{ -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \left[ \ln(r) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{b}{r}\right)^n \cos(n\theta) \right] + C^{ste} \right\} \cdot \vec{e}_z \quad (2.5)$$

Cette expression du potentiel vecteur montre très clairement la formation d'ordres supérieurs. L'importance de ces ordres dépend du rapport  $(b/r)$  : plus  $b$  sera grand et plus le câble sera une source d'ordre élevée.

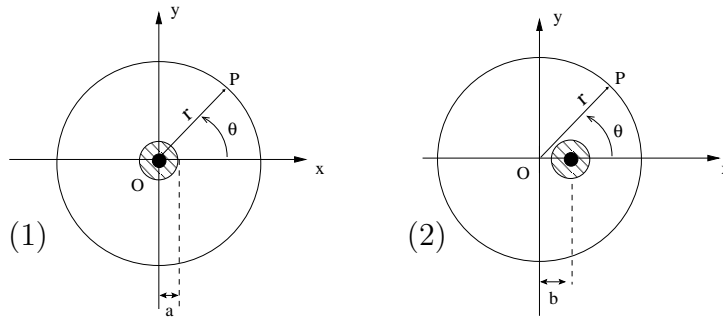


FIG. 2.2 – Exemple d'une source décentrée par rapport au centre de la décomposition multipolaire : le câble décentré.

Nous pouvons donc tirer un enseignement simple de cet exemple : Le choix du centre de la décomposition est un point crucial qui détermine l'ordre de la source et par là-même le nombre de coefficients à déterminer. Ainsi, toute identification doit être précédée de l'optimisation du centre de la décomposition [Sco03]. Dans la plupart des cas d'identification que nous traiterons, nous choisirons leur centre géométrique. En particulier pour des moteurs qui possèdent une géométrie liée à leur fonctionnement, l'hypothèse a priori la plus raisonnable consiste à choisir leur centre géométrique. Pour des sources inconnues, nous ferons preuve d'un degré supplémentaire d'analyse qui consiste à vérifier a posteriori la validité de notre hypothèse a priori : c'est le principe de l'inférence bayésienne que nous traiterons ultérieurement.

### 2.2.1.6 Remarque complémentaire

Les séries harmoniques de types (2.1) sont souvent obtenues à partir d'un développement limité de  $1/r$  dans le système de coordonnées considéré [Hob31][Sal82][Leg96]. De ce fait, le développement harmonique n'est valable qu'à l'extérieur d'une surface relative au repère (cercle, sphère, ellipse, ...) et adhère à la source (sphère englobant la source). L'approche que nous avons choisie, qui est celle de la résolution des équations de Maxwell à l'aide de la méthode des variables séparées n'impose à aucun moment cette limite de validité [Dur66]. Le fait d'être en dehors de la surface limite garantit la convergence des séries harmoniques et a fortiori la convergence du développement limité de  $1/r$ . En effet, prenons l'expression du potentiel vecteur (2.1) et supposons que la source ( $\Sigma$ ) est inscrite dans un cercle de rayon  $R_0$  (voir Fig.2.3). Alors en tout point tel que  $r > R_0$  nous pouvons

écrire ce potentiel :

$$\vec{A}(r, \theta) = \left\{ a_0 + b_0 \cdot \ln \left[ \frac{r}{R_0} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n\theta) + b_n \cdot \sin(n\theta)] \cdot \left[ \frac{r}{R_0} \right]^{-n} \right\} \cdot \vec{e}_z \quad (2.6)$$

Puisque  $(r/R_0)$  est supérieur à 1, nous sommes assurés de la convergence absolue de (2.6). Ce que nous traduisons physiquement par : en tout point tel que  $r > R_0$  il existe un ordre N fini qui permet une représentation à  $\epsilon$  près du potentiel. En d'autres termes, en dehors de ce cercle le champ de la source a un ordre fini qui ne dépend que de la distance au centre du développement.

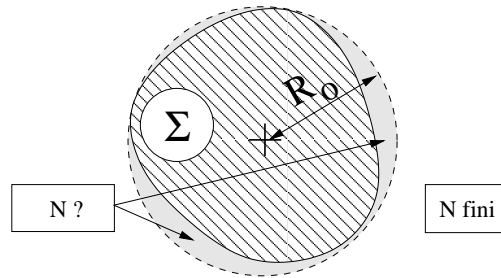


FIG. 2.3 – Développement harmonique et surface limite.

Lorsque  $r \leq R_0$ , il n'y a plus convergence absolue de la série, bien qu'un développement harmonique soit encore valable. Comme nous l'avons fait remarquer au chapitre précédent, les fonctions harmoniques forment un système complet qui assure une convergence du développement harmonique d'autant plus lente que la forme de la source est irrégulière. Pour cette raison nous considérerons pour l'instant qu'à l'intérieur de cette limite l'ordre de la source est indéterminable (il dépend de la vitesse de convergence des séries) et qu'a fortiori le nombre de capteurs nécessaires est également indéterminable. Nous éviterons donc, tout au moins dans le cadre de l'identification magnétique, d'exploiter des développements harmoniques dans cette zone.

## 2.2.2 Identification - Approche empirique

La première approche mise en oeuvre pour l'identification des séries de fonctions harmoniques repose sur les propriétés d'orthogonalité de ces fonctions. Pour déterminer les coefficients harmoniques nous pensons immédiatement à utiliser le produit scalaire canonique associé à l'espace de ces fonctions. Bien que cette méthode n'est pas celle que finalement nous retiendrons, elle est la première approche qui fut proposée par Fourier<sup>2</sup> et qui fournit un degré d'analyse important sur le nombre de capteurs nécessaires et leur placement en fonction de l'ordre de la source.

### 2.2.2.1 Propriétés des fonctions harmoniques

La propriété essentielle des développements harmoniques est liée, comme nous l'avons montré au chapitre précédent, à la méthode de séparation des variables

<sup>2</sup>Fourier travaillait sur une résolution harmonique de l'équation de la chaleur [Fou22].

et en particulier à la résolution d'un problème de Sturm-Liouville. Il s'agit de l'orthogonalité des fonctions dont les variables sont bornées (voir § 1.4.3), c'est-à-dire l'orthogonalité des fonctions angulaires.

Prenons par exemple le potentiel vecteur magnétique en coordonnées polaires :

$$\vec{A}(r, \theta) = \left\{ [a_0 + b_0 \cdot \ln(r)] + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n\theta) + b_n \cdot \sin(n\theta)] \cdot r^{-n} \right\} \cdot \vec{e}_z \quad (2.7)$$

Sur un support  $\mathcal{C}$  indépendant de la variable  $r$ , comme par exemple un cercle de rayon  $R$ , il est possible d'écrire simplement ce potentiel comme une série de Fourier sous la forme :

$$\vec{A}_R(\theta) = \left\{ [a_0 + b_0 \cdot \ln(R)] + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n\theta) + b_n \cdot \sin(n\theta)] \cdot R^{-n} \right\} \cdot \vec{e}_z \quad (2.8)$$

Par ailleurs, nous savons que les fonctions trigonométriques  $\{\sin(n\theta), \cos(n\theta)\}_{n \in \mathbb{N}}$  forment une base orthogonale de l'espace des fonctions continues par morceaux sur  $[0; 2\pi]$  au sens du produit scalaire  $\langle u|v \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} uv \cdot d\theta$ .

Alors, en exploitant les propriétés des fonctions trigonométriques nous pouvons déterminer les coefficients harmoniques dans (2.7), et il vient par application du produit scalaire sur  $\mathcal{C}$  :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^* : & \langle A_R(\theta) | \cos(n\theta) \rangle = a_n R^{-n} \\ & \langle A_R(\theta) | \sin(n\theta) \rangle = b_n R^{-n} \\ \text{si } n = 0 : & \langle A_R(\theta) | 1 \rangle = [a_0 + b_0 \cdot \ln(R)] \end{cases} \quad (2.9)$$

Il est donc possible en exploitant simplement les propriétés d'orthogonalité des fonctions harmoniques d'identifier les coefficients d'une décomposition en calculant pour tout ordre les produits scalaires précédents (2.9). Ce résultat, présenté pour des harmoniques polaires est également valable pour les harmoniques sphériques qui naturellement forment une base orthogonale sur une sphère.

### 2.2.2.2 Mise en oeuvre d'un dispositif d'identification

Le produit scalaire canonique, qui est le calcul d'une intégrale, nous permet donc de déterminer les coefficients harmoniques d'une décomposition. Le problème que nous devons résoudre maintenant est celui du calcul de ces intégrales à partir de représentations discrètes de la grandeur physique à identifier (voir Fig.2.4). En effet, nous ne possédons pas de mesure continue mais une représentation sous forme d'un *échantillonnage spatial*.

Rapportons nous alors à nos connaissances en traitement du signal : pour qu'un signal soit correctement échantillonné il faut que sa fréquence d'échantillonnage

soit au moins deux fois supérieure à celle du signal, sinon il y a nécessairement une perte d'information<sup>3</sup>. Ainsi lorsque nous voulons identifier une source d'ordre  $N$  en coordonnées polaires nous devons placer au moins  $2N+1$  capteurs (si chaque capteur apporte une seule information).

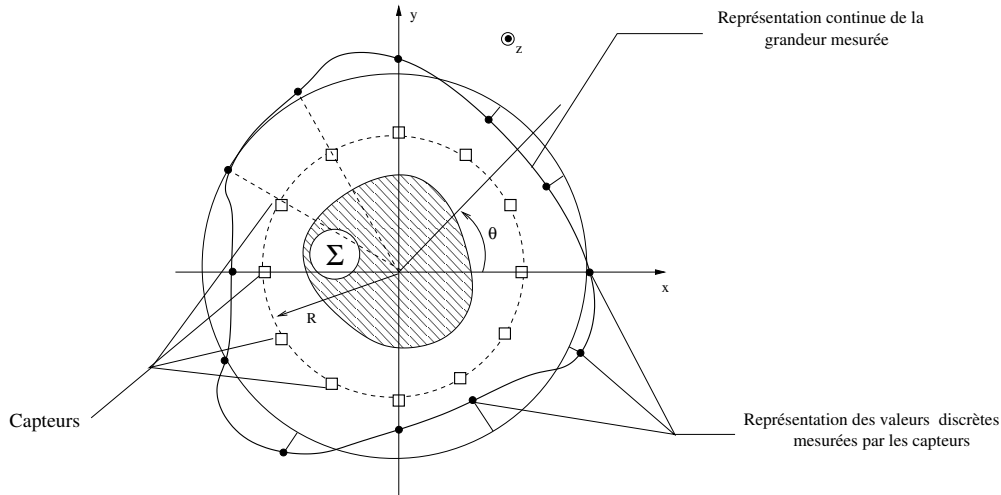


FIG. 2.4 – Source ( $\Sigma$ ) et dispositif de capteurs qui réalisent un échantillonnage spatial.

Il était simple à première vue d'appréhender le nombre de capteurs nécessaires à l'identification d'une source d'ordre  $N$ . Puisqu'il y avait  $2N+1$  inconnues en coordonnées polaires<sup>4</sup> il fallait nécessairement que les mesures apportent au moins  $2N+1$  informations. Nous verrons par la suite que c'est bien le nombre d'inconnues qui détermine le nombre de capteurs nécessaires à l'identification parce qu'il détermine le rang d'un système linéaire dont les coefficients sont solutions.

L'apport de cette approche empirique de l'identification est important parce qu'elle met en avant le mécanisme intrinsèque de l'identification basé sur la propriété d'orthogonalité des développements harmoniques. Elle fait de plus le lien avec la théorie du traitement du signal. En particulier, elle rappelle le théorème de Shannon, c'est-à-dire que c'est l'ordre  $N$  réel de la source qui détermine le nombre de capteurs nécessaires. Nous verrons par la suite que si nous avons mal estimé l'ordre maximum de cette source le résultat de l'identification sera nécessairement faux même si le système linéaire que nous écrivons est parfait (le système est parfait mais le modèle ne correspond pas).

### 2.2.3 Conclusion

L'examen de cette approche empirique nous a initié à des mécanismes simples d'identification, aux divers problèmes rencontrés et aux limites de l'approche analytique. La principale limite de cette approche est que le calcul des coefficients harmoniques passe par l'intégration numérique, ce qui est possible uniquement si les capteurs sont disposés sur un rayon constant. Quand une autre disposition de

<sup>3</sup>C'est le théorème de Shannon

<sup>4</sup>En coordonnées sphériques une source d'ordre  $N$  aura  $N^2 + 2N$  coefficients.



capteurs est exploitée nous perdons la propriété d'orthogonalité (du fait que la variable  $r$  n'est plus neutre) et de ce fait la méthode n'est plus exploitable. Il faut donc nous retourner vers une autre méthode d'identification, moins restrictive en terme de placement. Les propriétés des coefficients harmoniques nous poussent alors vers la résolution d'un système linéaire dont les inconnues sont les coefficients. Nous allons donc nous laisser entraîner dans cette voie tout en gardant à l'esprit la validité des développements harmoniques, l'influence du choix du centre et surtout l'importance de l'estimation de l'ordre maximum de la source qui détermine l'écriture d'un système linéaire adapté, mais aussi le nombre de mesures nécessaires.

## 2.3 Problème inverse

L'identification magnétostatique proposée dans la partie précédente exploitait une approche analytique qui se traduisait par le calcul numérique des produits scalaires associés aux fonctions harmoniques. Mais cette approche est trop restrictive. En particulier les mesures doivent être situées à rayon constant et respecter un échantillonnage assez régulier pour permettre le calcul numérique des produits scalaires. Les propriétés des coefficients harmoniques, en particulier la dépendance linéaire des grandeurs électromagnétiques vis-à-vis des coefficients, nous suggèrent d'identifier ces coefficients en résolvant un problème inverse matriciel (voir Annexe B.1.2). Nous allons donc montrer que cette approche est plus adaptée à l'identification magnétostatique, nous utiliserons pour cela un modèle de source en coordonnées sphériques.

### 2.3.1 Problème direct

La résolution d'un problème inverse nécessite deux étapes : la paramétrisation du système, que l'on appelle généralement problème direct, et la résolution qui dépend de la méthode de résolution choisie (voir Annexe B). Le problème direct est donc l'étape qui consiste à paramétrer au mieux un système physique afin d'obtenir l'adéquation entre ses paramètres et la physique. Les développements harmoniques sont des modèles de source dont une paramétrisation simple est possible à l'aide des coefficients harmoniques. De plus, les propriétés de ces coefficients (voir §2.2.1) sont intrinsèquement liées à l'état magnétique de la source ce qui nous conforte dans la représentativité et le choix de cette paramétrisation.

#### 2.3.1.1 Modèle harmoniques sphériques

Supposons que nous connaissons l'ordre  $N$  d'une source magnétostatique. Étant donné que nous ne disposons que de mesures d'induction magnétique, nous allons écrire un modèle harmonique de l'induction rayonnée par la source à l'aide des harmoniques sphériques jusqu'à l'ordre  $N$ .

Nous rappelons que ce modèle ne sera une paramétrisation admissible de l'induction magnétique que dans la zone où la source peut-être considérée comme une source d'ordre  $N$ . Nous avons montré dans le chapitre précédent que l'écriture de

l'induction magnétique en coordonnées sphériques passait par l'intermédiaire d'un vecteur  $\vec{W}$  (voir §1.3.2), qui s'écrira en un point  $P(r, \theta, \phi)$  :

$$\vec{W}(P) = \left\{ \sum_{n=0}^N r^{-n} \cdot \sum_{m=0}^n [a_{n,m} \cos(m\phi) + b_{n,m} \sin(m\phi)] \cdot P_n^m(\cos \theta) \right\} \cdot \vec{e}_r \quad (2.10)$$

La relation (1.26) donne alors l'expression de l'induction magnétique :

$$\vec{B}(P) = \left| \begin{array}{l} \sum_{n=1}^N n(n+1) \cdot r^{-(n+2)} \cdot \sum_{m=0}^n [a_{n,m} \cos(m\phi) + b_{n,m} \sin(m\phi)] \cdot P_n^m(\cos \theta) \\ \sum_{n=1}^N -n \cdot r^{-(n+2)} \cdot \sum_{m=0}^n [a_{n,m} \cos(m\phi) + b_{n,m} \sin(m\phi)] \cdot \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \\ \sum_{n=1}^N n \cdot m \cdot r^{-(n+2)} \cdot \sum_{m=0}^n [a_{n,m} \sin(m\phi) - b_{n,m} \cos(m\phi)] \cdot \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \end{array} \right. \quad (2.11)$$

que nous pouvons encore écrire :

$$\vec{B}(P) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n [a_{n,m} \cdot \vec{U}_{n,m}(P) + b_{n,m} \cdot \vec{V}_{n,m}(P)] \quad (2.12)$$

*Remarque* : L'écriture de l'induction magnétique (2.11) correspond à un problème externe caractérisant une source localisée. La solution harmonique complète de l'équation de Laplace possède un deuxième terme qui correspond à un problème interne caractérisant une source placée à l'extérieur des mesures (voir §1.3.3.3). Selon l'identification désirée nous utiliserons une écriture différente.

### 2.3.1.2 Écriture matricielle du problème direct

L'écriture (2.12) met très clairement en évidence la relation vectorielle linéaire entre les coefficients harmoniques  $\{a_{n,m}; b_{n,m}\}$  et l'induction au point P. Nous pouvons alors écrire ce système linéaire en  $p$  différents points de mesure, ce qui conduit à un système linéaire, qui peut s'écrire matriciellement :

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{C} \quad (2.13)$$

soit plus explicitement :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}(P_1) \\ \mathbf{B}(P_2) \\ \vdots \\ \mathbf{B}(P_p) \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}\{3p \times 1\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_{0,0}(P_1) & U_{1,0}(P_1) & V_{1,0}(P_1) & U_{1,1}(P_1) & \dots & V_{N,N}(P_1) \\ U_{0,0}(P_2) & U_{1,0}(P_2) & V_{1,0}(P_2) & U_{1,1}(P_2) & \dots & V_{N,N}(P_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{0,0}(P_p) & U_{1,0}(P_p) & V_{1,0}(P_p) & U_{1,1}(P_p) & \dots & V_{N,N}(P_p) \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}\{3p \times (N^2+2N)\}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_{0,0} \\ a_{1,0} \\ b_{1,0} \\ a_{1,1} \\ \vdots \\ b_{N,N} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}\{(N^2+2N) \times 1\}} \quad (2.14)$$

La résolution de ce système linéaire donne l'ensemble des valeurs des coefficients harmoniques recherchés, elle permet donc l'identification. Notre connaissance des systèmes linéaires nous permet déjà d'affirmer que pour avoir l'ensemble des paramètres solutions de (2.14) il faut que le rang du système soit égal au nombre de coefficients recherchés, ce qui suppose qu'il y a au moins autant d'information disponible par la mesure. En pratique, la matrice  $\mathbf{F}$  est rarement inversible et nous chercherons une solution approchée au sens des moindres carrés.

### 2.3.2 Inversion et identification

Reprenons l'écriture du problème direct précédent (2.13). L'identification consiste à déterminer les coefficients harmoniques à partir de la mesure. Nous cherchons donc à utiliser le modèle harmonique à l'inverse des deux relations (2.13) et (2.14) : il s'agit donc d'un *problème inverse* que nous pouvons mathématiquement résumer par :

$$\text{Trouver } \mathbf{C}_0 \text{ tel que : } \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_0 = \mathbf{B}_{mes} \quad (2.15)$$

où  $\mathbf{C}_0$  est le vecteur des coefficients *le plus proche* de la physique.

#### 2.3.2.1 Quasi-solution

Pour calculer les coefficients harmoniques solutions du problème inverse (2.15) nous pensons tout naturellement à inverser la matrice  $\mathbf{F}$ , mais elle n'est pas nécessairement inversible. En effet, nous n'avons pas nécessairement autant de mesures que de coefficients, en particulier quand le nombre de capteurs est limité. De plus, même si  $\mathbf{F}$  est carrée elle n'est pas nécessairement inversible car son rang peut être inférieur au nombre de coefficients recherchés. Nous devons alors nous satisfaire d'une solution  $\mathbf{C}_0$  approchée au sens des moindres carrés dite quasi-solution qui minimise la distance  $d$  entre la mesure et le modèle :

$$d(\mathbf{C}) = \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{C} - \mathbf{B}_{mes}\| \quad (2.16)$$

Cette quasi-solution est donnée par le *système normal*, ou formule des moindres carrés. Elle correspond aux coefficients  $\mathbf{C}_0$  qui annulent la dérivée de la distance (2.16)(voir B.1.5) :

$$\mathbf{C}_0 = (\mathbf{F}^t \mathbf{F})^{-1} \cdot \mathbf{F}^t \mathbf{B}_{mes} \quad (2.17)$$

Il y a cependant une limite importante à la solution (2.17) : elle n'est unique que lorsque le problème est bien posé (voir B.1.3). En particulier, le bruit de mesure introduit une incertitude qui peut dégrader le système linéaire, ce qui entraîne nécessairement l'existence de plusieurs solutions, parmi lesquelles nous devons faire un choix.

### 2.3.2.2 Décomposition en valeurs singulières

Avant d'établir le choix de la solution du problème inverse d'identification, nous allons faire ressortir deux outils importants nous permettant d'estimer l'état du système linéaire et de ses solutions.

Le premier de ces outils est le rang de la matrice  $\mathbf{F}$  qui représente le degré de liberté du système linéaire. Comme nous l'avons déjà fait remarquer, si le rang est inférieur au nombre de coefficients la solution n'est pas unique : on parle alors de problème *sous-déterminé* du fait que le noyau de  $\mathbf{F}$  n'est pas observable (voir B.1.4). L'intérêt du rang est donc qu'il donne la taille du sous-espace des coefficients identifiables (observables), c'est-à-dire le nombre de coefficients que nous pouvons identifier dans le meilleur des cas. Nous pouvons alors faire deux utilisations du rang : soit il nous informe sur la qualité globale du système linéaire (sa liberté), soit il nous informe sur la qualité de la mesure (nombre de mesures et placement). Il sera donc un outil précieux pour la mise en oeuvre de l'identification et sa résolution. Nous nous sommes jusqu'ici essentiellement inquiété de l'état de la matrice  $\mathbf{F}$ . Or le système linéaire dépend également du vecteur des mesures  $\mathbf{B}_{mes}$ . En effet, si la mesure est bruitée l'influence du bruit sur le problème inverse peut être important. Il peut effectivement entraîner des incohérences entre les lignes du système linéaire et ainsi erroner sa résolution. Nous cherchons donc un outil qui permet d'évaluer la stabilité du système vis-à-vis du bruit, ce que la décomposition en valeurs singulières de  $\mathbf{F}$  va nous fournir.

Si la matrice  $\mathbf{F}$  n'est pas inversible, les matrices  $(\mathbf{F}^t\mathbf{F})$  et  $(\mathbf{F}\mathbf{F}^t)$  sont carrées, symétriques. Elles sont alors diagonalisables et il existe deux matrices orthogonales  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  et une matrice diagonale  $\Lambda$  telles que  $\mathbf{F}$  admette une *décomposition en valeurs singulières* (voir B.2.1) :

$$\mathbf{F} = \mathbf{U} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{V}^t \quad (2.18)$$

La matrice  $\Lambda$  est particulièrement intéressante car, d'une part elle est de rang  $r$  égal à  $\text{rang}(\mathbf{F})$  et d'autre part elle possède  $r$  valeurs propres  $\lambda_1 \dots \lambda_r$  réelles positives et non nulles classées par module décroissant qui sont les valeurs singulières de  $\mathbf{F}$ . Pour comprendre l'intérêt de la décomposition en valeurs singulières nous pouvons écrire (2.15) en utilisant (2.18) sous la forme :

$$\Lambda \mathbf{V}^t \mathbf{C}_0 = \mathbf{U}^t \mathbf{B}_{mes} \quad \text{soit} \quad \Lambda \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y} \quad \text{avec} \quad \mathbf{X} = \mathbf{V}^t \mathbf{C}_0 \quad \text{et} \quad \mathbf{Y} = \mathbf{U}^t \mathbf{B}_{mes} \quad (2.19)$$

Cette équation met linéairement en relation la projection  $\mathbf{X}$  des coefficients  $\mathbf{C}_0$  sur une base orthogonale de l'espace des coefficients et la projection orthogonale  $\mathbf{Y}$  des mesures  $\mathbf{B}_{mes}$  sur une base orthogonale de l'espace des mesures. Nous obtenons ainsi une relation permettant d'évaluer à l'aide des valeurs singulières la stabilité des coefficients harmoniques identifiés vis-à-vis de la variation de la mesure (voir B.2.4).

A ce stade de la décomposition en valeurs singulières, l'idée classiquement exploitée pour la résolution de problèmes inverses consiste à observer chaque valeur singulière pour déduire la sensibilité de l'identification de chaque composante de  $\mathbf{X}$

vis-à-vis du bruit. Ce raisonnement permet en particulier de *régulariser* la solution en tronquant les valeurs singulières les plus instables (voir B.2.5) et ainsi favoriser l'ensemble des inconnues observables et stables. Mais ce raisonnement ne peut pas s'appliquer dans le cadre de l'identification en harmoniques sphériques pour deux raisons :

- La première est que la troncature réduit le nombre de coefficients observables (le rang de  $\mathbf{F}$ ). Nous perdons ainsi une information utile à propos du développement harmonique de la source, en négligeant une partie des coefficients : ce qui dégrade nécessairement la validité du modèle.
- La seconde limite est liée aux termes négligés. La troncature pourrait être une méthode utile si une valeur singulière tronquée était liée à un unique coefficient harmonique : dans ce cas, tronquer reviendrait effectivement à nous limiter aux solutions observables et stables. Malheureusement, nous ne négligeons pas un seul coefficient, mais un terme  $x_k$  de la projection  $\mathbf{X}$ . Alors, à moins que  $\mathbf{V}$  ne soit une matrice diagonale (ce qui signifie que  $\mathbf{F}$  est orthogonale) la troncature va avoir une incidence sur l'ensemble des coefficients.

Bien que la méthode de troncature ne convienne pas au processus d'identification, la décomposition en valeurs singulières reste un outil intéressant qui caractérise la sensibilité des coefficients dans leur ensemble vis-à-vis du bruit de mesure. En particulier, le *conditionnement de la matrice*  $\mathbf{F}$ , qui est le rapport entre la plus petite et la plus grande des valeurs singulières, est représentatif de la stabilité de l'évaluation de l'ensemble des coefficients. Il est donc un outil précieux qui nous permettra dans la suite de ce travail d'estimer la qualité globale du problème inverse.

### 2.3.3 Stabilisation et écriture optimale

Pour résumer les paragraphes précédents, l'identification est strictement équivalente à la résolution d'un système linéaire et possède deux outils de diagnostic sur l'état du système. Le rang apporte une information quantitative sur le système et renseigne sur le nombre de coefficients identifiables, le conditionnement fournit pour sa part une information qualitative sur la stabilité de ces coefficients. Nous allons maintenant évaluer les performances du système linéaire et optimiser son écriture en utilisant ces deux outils.

#### 2.3.3.1 Normalisation des polynômes de Legendre

La résolution du problème inverse consiste à trouver une solution telle que la distance (2.16) soit minimale. Or elle est minimale lorsque les coefficients harmoniques sont ceux qui déterminent la projection orthogonale de  $B_{mes}$  sur l'espace vectoriel relatif aux termes du développement harmonique. C'est d'ailleurs ce qui nous poussait lors de notre approche empirique à calculer les coefficients comme des produits scalaires (voir 2.9). Par ailleurs, nous savons que les fonctions harmoniques sont des familles de fonctions orthogonales (voir § 1.4.3), les harmoniques sphériques n'échappent pas à cette règle. Une première optimisation de l'écriture harmonique du problème inverse consiste alors naturellement à orthonormaliser la

base des fonctions harmoniques sphériques sur la sphère unitaire : chaque terme harmonique aura donc le même rôle. Nous exploitons alors la définition universelle des harmoniques sphériques [Hob31][Mac67][Ang72] :

$$Y_n^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \cdot P_n^m(\cos \theta) \cdot \begin{cases} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{cases} \quad (2.20)$$

L'orthonormalisation entraîne nécessairement le changement des valeurs des coefficients harmoniques  $\{a_{n,m}, b_{n,m}\}$  qui sont alors multipliés par la norme de la fonction harmonique qui leur est associée. Mais le changement important apporté par la normalisation concerne le conditionnement de la matrice  $\mathbf{F}$ . Elle entraîne en effet une amélioration sensible du conditionnement qui équivaut à un gain de stabilité pour le système linéaire.

Pour illustrer l'intérêt de la normalisation des fonctions harmoniques nous allons procéder à l'analyse d'un exemple simple. Supposons que nous possédons 26 capteurs triaxiaux équirépartis sur un cube autour d'une source ( $\Sigma$ ) d'ordre  $N=3$  comme représentés sur la figure 2.5.

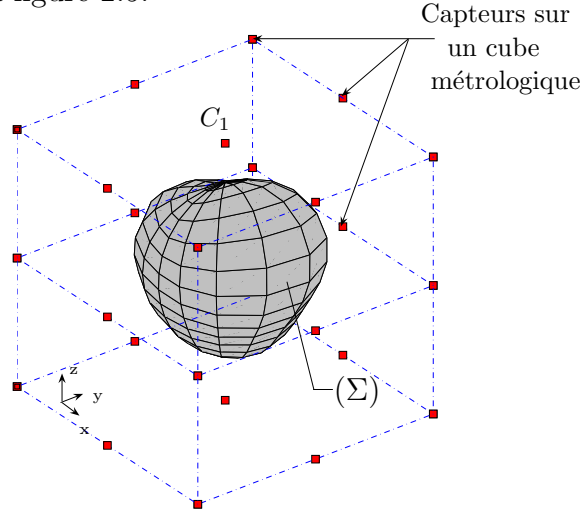


FIG. 2.5 – Dispositions de 26 capteurs triaxiaux sur un cube d'arête égale à 2m entourant une source ( $\Sigma$ ) dont nous désirons faire une identification en harmoniques sphériques.

Nous pouvons donc écrire la matrice  $\mathbf{F}$ , calculer son rang et son conditionnement. Du fait que le nombre de capteurs est important et qu'ils sont répartis régulièrement dans l'espace, nous pouvons de plus supposer que le rang du système linéaire sera égal au nombre des coefficients harmoniques (i.e : 15). Selon que les fonctions harmoniques sont seulement orthogonales (cas A) ou orthonormées (cas B) nous remarquons que le conditionnement est amélioré d'un facteur voisin de 6 (voir Tableau 2.1), ce qui signifie que nous avons augmenté la stabilité de l'identification.

### 2.3.3.2 Normalisation sur le support des mesures

Nous avons certes augmenté la stabilité du système linéaire en orthonormalisant les fonctions harmoniques sur la sphère unitaire, mais cette normalisation n'est pas

Cas	A	B	C	D
rang	15	15	15	15
cond	86.55	14.55	1.64	1.53

TAB. 2.1 – Rang et conditionnement de l'identification sans normalisation des fonctions harmoniques (A), avec (B), avec normalisation des colonnes (C), avec normalisation itérative des lignes et colonnes de  $\mathbf{F}$  (D).

suffisante. Deux raisons nous suggèrent que nous pouvons faire une meilleure normalisation. Tout d'abord, l'orthonormalisation que nous avons faite était valable sur la sphère unitaire alors que le support de la mesure est un cube. De plus, nous avons normalisé les fonctions harmoniques et non pas le modèle vectoriel harmonique dont les composantes en chaque point ont une norme différente (2.11). Pour mieux comprendre la normalisation que nous proposons, explicitons tout d'abord l'écriture (2.12) de la matrice  $\mathbf{F}$  :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2F_r \cdot r_1^{-3} & \dots & n(n+1)F_r \cdot r_1^{-(n+2)} & \dots & N(N+1)F_r \cdot r_1^{-(N+2)} \\ -F_\theta \cdot r_1^{-3} & \dots & -nF_\theta \cdot r_1^{-(n+2)} & \dots & NF_\theta \cdot r_1^{-(N+2)} \\ +F_\phi \cdot r_1^{-3} & \dots & nmF_\phi \cdot r_1^{-(n+2)} & \dots & N^2F_\phi \cdot r_1^{-(N+2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2F_r \cdot r_p^{-3} & \dots & n(n+1)F_r \cdot r_p^{-(n+2)} & \dots & N(N+1)F_r \cdot r_p^{-(N+2)} \\ -F_\theta \cdot r_p^{-3} & \dots & -nF_\theta \cdot r_p^{-(n+2)} & \dots & NF_\theta \cdot r_p^{-(N+2)} \\ +F_\phi \cdot r_p^{-3} & \dots & nmF_\phi \cdot r_p^{-(n+2)} & \dots & N^2F_\phi \cdot r_p^{-(N+2)} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Nous remarquons immédiatement que chaque vecteur colonne de  $\mathbf{F}$  correspondant à l'écriture de l'induction d'un terme harmonique sur les  $p$  points de mesures est en relation avec la décroissance de ce terme. Ainsi, quand les capteurs ne sont pas strictement tous sur la sphère unitaire, la norme de chaque colonne de  $\mathbf{F}$  aura une valeur proportionnelle à la décroissance moyenne du terme associé, ce qui cause nécessairement un mauvais conditionnement.

Pour pallier ce mauvais conditionnement naturel de  $\mathbf{F}$ , nous pouvons diviser chaque colonne par sa norme et ainsi normaliser le système. Pour normaliser  $\mathbf{F}$  sans changer la valeur des coefficients harmoniques recherchés, ni changer l'écriture de  $\mathbf{F}$ , nous introduisons une matrice diagonale de normalisation<sup>5</sup>  $\mathbf{W}$  dont les termes diagonaux sont les inverses des normes des colonnes. Alors, si les coefficients harmoniques étaient donnés par l'inverse généralisée<sup>6</sup> de  $\mathbf{F}$  notée  $\mathbf{F}^+$ , la solution du système normalisé serait donnée par :

$$\mathbf{C}_0 = \mathbf{W}(\mathbf{F}\mathbf{W})^+\mathbf{B}_{mes} \quad (2.22)$$

Ainsi, nous n'inversons plus la matrice  $\mathbf{F}$ , mais  $(\mathbf{F}\mathbf{W})$ . Il en résulte que le conditionnement représentatif de la stabilité du problème inverse n'est plus  $cond(\mathbf{F})$ , mais  $cond(\mathbf{F}\mathbf{W})$ , qui est nécessairement amélioré.

<sup>5</sup>Il s'agit en fait d'une pondération stabilisante (cf. Annexe B.2.5), une explication statistique est proposée au paragraphe 4.2.2

<sup>6</sup>voir Annexe B.2.3 pour une définition

A titre d'illustration, nous avons appliqué cette normalisation à l'exemple précédent (voir Fig.2.5). Il s'agit du cas C dont le conditionnement est donné par le tableau (2.1). Nous remarquons que le conditionnement est maintenant voisin de 1, c'est-à-dire que toutes les valeurs singulières sont voisines, ce qui est parfaitement cohérent avec notre démarche de normalisation.

### 2.3.3.3 Normalisation itérative des lignes et colonnes

Si le conditionnement de  $\mathbf{F}$  n'est pas unitaire lors de la normalisation des colonnes, c'est en partie parce que nous ne prenons pas en compte la valeur de chaque ligne lorsque nous calculons la norme de chaque colonne. L'idée qui vient alors naturellement consiste à normaliser également les lignes après avoir normalisé les colonnes. Cependant, la normalisation des lignes dégrade forcément la normalisation des colonnes et inversement. C'est pourquoi nous utiliserons un procédé itératif qui normalise colonnes, puis lignes jusqu'à ce que le conditionnement de la matrice se stabilise à son minimum. Cette méthode est utilisée fréquemment pour mieux conditionner les systèmes linéaires [Rui01] [Fra89] et ainsi gagner du temps lors de leur résolution itérative, comme par exemple dans le cas des solveurs éléments finis [Dou06].

Chaque itération consiste à trouver deux nouvelles matrices de normalisation des colonnes et des lignes respectivement  $\mathbf{W}_c^{(i)}$  et  $\mathbf{W}_l^{(i)}$  si bien qu'après la  $i^{\text{eme}}$  itération les coefficients solutions de l'identification sont donnés par [Rui01] :

$$\mathbf{C}_0 = \prod_i \mathbf{W}_c^{(i)} \cdot \left[ \prod_i \mathbf{W}_l^{(i)} \cdot \mathbf{F} \cdot \prod_i \mathbf{W}_c^{(i)} \right]^+ \cdot \prod_i \mathbf{W}_l^{(i)} \cdot \mathbf{B}_{mes} \quad (2.23)$$

Il reste à déterminer un critère d'arrêt pour les itérations. Tout d'abord nous limiterons le nombre d'itérations à la dimension minimale de la matrice  $\mathbf{F}$ , en supposant que chaque ligne et chaque colonne ont été au moins normalisées une fois. Un bon critère d'arrêt consisterait à imposer un seuil au conditionnement, par exemple : quand le conditionnement de la matrice est inférieur à  $(1+\epsilon)$  l'algorithme s'arrête. Malheureusement, si notre procédé assure la meilleure stabilisation du système linéaire, en aucun cas il n'assure que le conditionnement converge vers 1. La meilleure façon de choisir le nombre d'itérations est encore de calculer le conditionnement à chaque itération et de choisir celle à partir de laquelle la valeur du conditionnement a convergé. Nous pouvons par exemple stopper les itérations lorsque la variation du conditionnement entre deux itérations est inférieure à un seuil, ce qui sous-entend que le conditionnement s'est stabilisé.

En guise de conclusion, appliquons la normalisation itérative à l'exemple d'identification précédent. La dimension la plus petite de la matrice  $\mathbf{F}$  est 15 qui correspond aux 15 coefficients recherchés <sup>7</sup>. Aussi nous nous limiterons dans un premier temps à 15 itérations. La figure (2.6) trace le conditionnement du système au cours des itérations. Nous remarquons que le conditionnement passe par tous les états d'orthonormalisation précédents avant de converger vers son optimum ( $cond=1.53$ ) après 6 itérations.

<sup>7</sup>pour mémoire la source ( $\Sigma$ ) est d'ordre  $N=3$



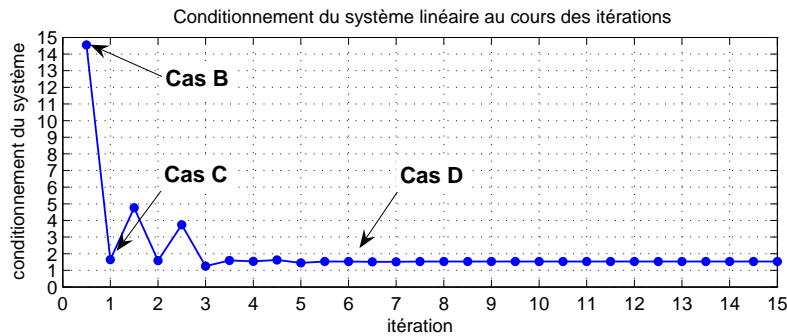


FIG. 2.6 – Conditionnement du système linéaire aux cours de la normalisation itérative des colonnes et lignes de  $\mathbf{F}$ . Chaque itération est représentée par deux points : le premier est le conditionnement après normalisation des colonnes et le second après normalisation des lignes.

### 2.3.4 Conclusion

Si l'approche empirique de l'identification est restrictive en terme de placement de capteurs, l'approche de type problème inverse que nous venons de traiter offre de plus vastes perspectives. Nous retiendrons en particulier que cette approche consiste à paramétrer le problème sous forme matricielle et chercher une solution au sens des moindres carrés qui soit la plus proche de la physique.

Mais l'intérêt de cette méthode n'est pas seulement le gain de liberté en terme de placement de capteurs. Elle fournit également des outils précieux qui permettent de diagnostiquer l'état de l'identification. Nous avons pour l'instant fait ressortir deux outils : le rang et le conditionnement qui permettent d'une part de dénombrer les coefficients identifiables et d'autre part d'évaluer la stabilité du système linéaire, sa qualité. Nous verrons dans la suite de cette étude que d'autres outils plus évolués et plus précis sont encore disponibles. Pour l'instant, nous allons nous satisfaire de ces deux outils qui vont nous permettre de quantifier d'une part le gain de la normalisation du système et d'autre part d'envisager un placement de capteurs par optimisation qui stabilise l'inversion [Rou05].

Il reste cependant une limite importante à l'identification magnétique qui est la détermination de l'ordre maximum de la source que nous cherchons à identifier. En effet, avant de mettre en place des capteurs pour l'identification nous devons déterminer l'ordre  $N$  de la source, ce qui va conditionner tout d'abord l'écriture du problème inverse, mais surtout le nombre et le placement de capteurs nécessaires à la résolution de ce problème. Sans connaissance a priori de la source il nous est absolument impossible de faire la moindre hypothèse a priori sur  $N$ . De ce fait, soit l'identification sera fautive, soit elle nécessitera un nombre important de mesures.

La solution au problème de l'ordre de la source est apportée par l'information a priori. En effet, dans l'immense majorité des cas d'identification nous avons toujours accès à un degré de connaissance concernant la source qui ne dépend que de notre capacité à l'analyser. Afin d'illustrer le processus d'analyse qui doit précéder la mise en œuvre d'une identification nous allons maintenant présenter l'identification d'un moteur à aimants permanents simulé à l'aide d'éléments finis. Si la simulation apporte une information totale sur la source, nous montrerons qu'une

analyse *magnétique* du moteur aurait également permis de faire une identification correcte.

## 2.4 L'identification appliquée

Afin d'illustrer l'identification, ses mécanismes et ses outils nous proposons maintenant de l'appliquer à un moteur à aimants permanents non alimenté. Nous commencerons donc cette partie en identifiant les sources à partir d'une simulation obtenue à l'aide de la méthode des éléments finis, qui virtuellement nous donne un nombre important de points de mesure. L'identification ainsi obtenue nous permettra alors de déterminer l'ordre de la source. Dans une deuxième partie nous montrerons qu'il est possible de réduire le nombre de capteurs en vue de l'identification et qu'une analyse, qui se passait de la simulation, pouvait nous guider sur cette voie. Nous concluons cet exemple en montrant les intérêts et perspectives de l'identification harmonique.

### 2.4.1 Identification d'un moteur simulé

Afin de mettre en place l'identification expérimentale d'un moteur à aimants permanents (Fig.2.7), nous proposons dans un premier temps d'exploiter une simulation pour obtenir un maximum d'information sur la source et en particulier son ordre  $N$ .

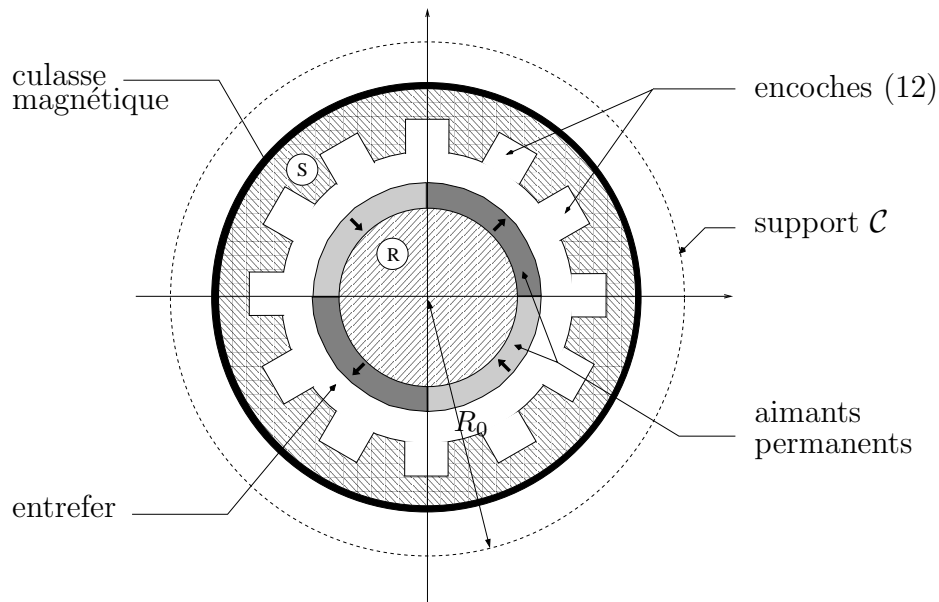


FIG. 2.7 – Moteur à aimants permanents de rayon extérieur  $R_{ext}=20\text{cm}$  possédant 4 pôles, 12 encoches statoriques. Nous chercherons à identifier ce moteur à partir de mesures simulées sur un cercle  $\mathcal{C}$  de rayon  $R_0=26\text{cm}$

Cette simulation est obtenue à l'aide de la méthode des éléments finis. Nous possédons alors sur un cercle ( $\mathcal{C}$ ) centré sur le centre géométrique du moteur et

de rayon  $R_0$  un nombre important de points de mesure (200 points) qui forme un excellent échantillonnage spatial de l'induction. Nous sommes alors capables d'identifier ce moteur à un ordre  $N=50$ .

### 2.4.1.1 Stabilisation, inversion et identification

La première étape de l'identification consiste à écrire la matrice  $\mathbf{F}$  pour une source d'ordre  $N=50$ . Cette matrice a en particulier 101 colonnes correspondant au nombre de coefficients recherchés. Mais, du fait de la différence de norme de chacune des colonnes et de l'ordre  $N$  important, elle est particulièrement mal conditionnée. Le cas A du tableau (2.2) résume le conditionnement et le rang dans le cas de cette identification sans normalisation. Nous remarquons immédiatement que du fait du très mauvais conditionnement lié aux différentes décroissances des ordres du système tous les coefficients ne peuvent être identifiés : le rang du système ne vaut alors que 46.

cas	A	B	C	D
rang	46	101	3	3
cond	$1.5e^{31}$	1.1208	$2.4e^5$	1.0281

TAB. 2.2 – Rang et conditionnement de l'identification sans orthonormalisation (A) et avec (B) à l'ordre 50. Rang et conditionnement de l'identification sans orthonormalisation (C) et avec (D) après réduction du nombre de capteurs.

La normalisation va heureusement mieux conditionner les colonnes et lignes du système linéaire. Ainsi, en dépit de l'ordre  $N$  important de la source nous avons un rang égal au nombre de coefficients recherchés (cas B du tableau 2.2).

La première application de l'identification est de pouvoir calculer les grandeurs magnétiques (induction ou potentiel vecteur) dans tout l'espace à l'aide de quelques coefficients. Par exemple, nous pouvons recalculer l'induction magnétique sur l'ensemble des points de mesures, nous interpolons ainsi la mesure (voir Fig.2.8).

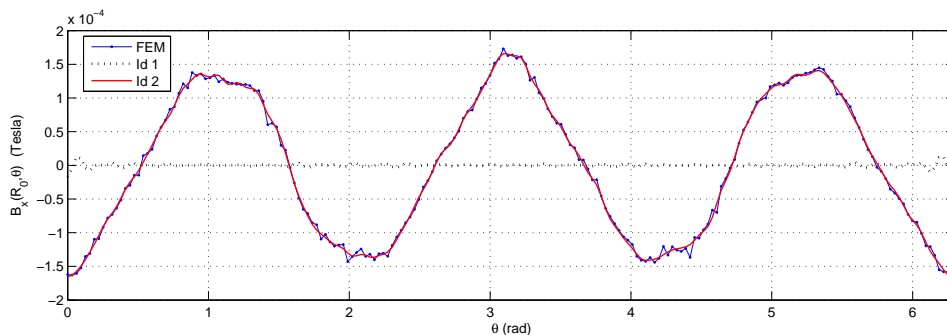


FIG. 2.8 – Composantes  $B_x$  de l'induction magnétique obtenus par la méthode des éléments finis (FEM), par une identification sans normalisation ( $Id_1$ ), puis par une identification stabilisée ( $Id_2$ ) à l'ordre  $N=50$ .

Sur cette figure nous pouvons tout d'abord remarquer que l'identification sans normalisation s'est soldée par un échec ( $Id_1$ ). Cependant, lorsque le système est

stabilisé le modèle harmonique colle à la simulation ( $Id_2$ ). En poussant le développement à l'ordre  $N=50$ , nous sommes allés trop loin et nous avons identifié une partie du bruit. Pour éviter l'identification du bruit et limiter le nombre de capteurs nécessaires nous allons déterminer l'ordre maximum identifiable en fonction du niveau du bruit.

### 2.4.1.2 Détermination de l'ordre maximum

L'identification fournit l'ensemble des coefficients harmoniques. Malheureusement, la lecture de ces coefficients ne permet pas de déterminer quelle est l'influence de chaque terme dans l'induction mesurée. En effet, il serait intéressant de déterminer une grandeur qui représenterait le poids de chaque terme dans la mesure, ce qui nous permettrait d'une part de comparer l'influence de chaque terme et d'autre part de déterminer ceux qui interviennent le plus dans cette mesure.

Pour calculer l'influence d'un terme harmonique nous pourrions prélever la colonne relative à ce terme dans  $\mathbf{F}$  et calculer l'induction qu'il crée en tout point de mesure, nous aurions ainsi une influence vectorielle  $I_v$  sur chaque point de mesure. Puisque nous cherchons une grandeur scalaire, l'influence serait la moyenne quadratique de  $I_v$ . Or, pour stabiliser le système nous avons déjà calculé la norme de chaque colonne, l'influence d'un terme harmonique peut alors être facilement obtenue en multipliant le coefficient harmonique par cette norme. Généralement, lorsque  $\mathbf{W}$  est la matrice de normalisation des colonnes de  $\mathbf{F}$  (voir eq.2.22), l'influence des coefficients harmoniques  $\mathbf{C}$  peut alors être définie par :

$$\mathbf{I}_{nf} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{C} \quad (2.24)$$

L'influence a deux intérêts, d'une part elle représente l'induction moyenne créée par chaque coefficient, ce qui permet de les comparer sur une même échelle<sup>8</sup>, et d'autre part elle va permettre de déterminer les termes qui n'ont pas d'influence sur la mesure et donc qui a fortiori ne sont pas identifiables.

Pour déterminer l'ordre  $N$  de la source nous calculerons le rapport :

$$r_n = \sum_{i=1}^n I_{nf}(i) / I_{mes} \quad (2.25)$$

si  $I_{mes}$  est la norme de l'induction sur les mesures, il représente alors l'influence relative des  $n$  premiers termes harmoniques sur la mesure. Nous pouvons par exemple tracer ce rapport en faisant varier  $n$  (voir Fig.2.9).

Pour déterminer l'ordre maximum observable nous fixons un seuil relatif à l'amplitude du bruit. Dès que ce seuil est franchi nous avons déterminé l'ordre maximum observable par rapport au bruit de mesure. Dans notre cas, nous avons choisi un seuil égal à 95% ce qui permet de définir le premier terme pour lequel la source est correctement représenté par le développement. Il s'agit du 21<sup>ème</sup> terme (voir Fig.2.9), ainsi nous pouvons considérer que notre moteur est une source d'ordre 10 sur le support  $\mathcal{C}$ .

<sup>8</sup>En effet, l'unité des coefficients harmoniques n'est pas la même pour chaque ordre du fait de la décroissance

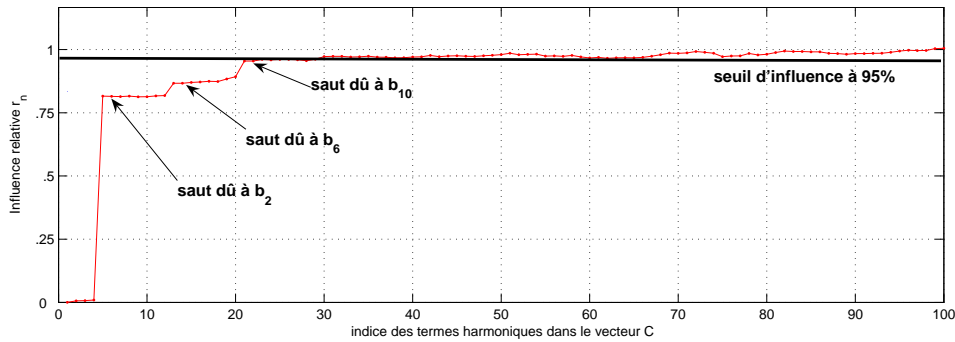


FIG. 2.9 – Influence relative des  $n$  premiers coefficients harmoniques par rapport au module de l'induction mesurée

### 2.4.2 Réduction du nombre de capteurs

L'analyse de l'influence des termes harmoniques nous a permis de déterminer l'ordre maximum d'un développement harmonique représentatif du moteur à aimants permanents. Puisque cette source est seulement d'ordre 10 nous pouvons l'identifier à l'aide de 11 mesures de l'induction magnétique<sup>9</sup>. Cette réduction du nombre de capteurs est déjà importante, mais n'est pas encore optimale. En effet, l'observation de la figure (2.9) montre que l'influence relative  $r_n$  évolue par sauts, ce qui signifie que certains termes ont plus d'influence. Ils sont donc plus représentatifs, ce que nous allons facilement vérifier en observant l'influence  $I_f$  des termes harmoniques jusqu'à l'ordre 10.

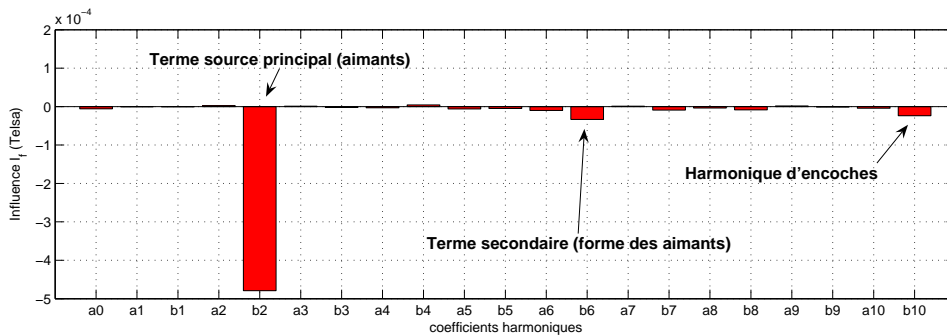


FIG. 2.10 – Influence  $I_n f$  des premiers coefficients harmoniques jusqu'à l'ordre  $N=10$ .

L'influence des coefficients (Fig.2.10) nous renseigne sur les termes les plus représentatifs de la source. Nous remarquons que trois termes ont un rôle important :  $b_2$ ,  $b_6$  et  $b_{10}$ . Une bonne représentation de la source est alors possible à l'aide de ces trois uniques coefficients. Ainsi nous pouvons écrire le système linéaire en n'utilisant que ces trois uniques termes. La matrice  $\mathbf{F}$  que nous écrivons n'a alors plus que 3 colonnes et est de rang égal à trois (cas C du tableau 2.2). Alors théoriquement le nombre de mesures nécessaires pour identifier cette source est 3, ce que fournissent 2 capteurs magnétiques. Mais la valeur du conditionnement de  $\mathbf{F}$  obtenue nous suggère d'augmenter le nombre de capteurs à 3. Ainsi, nous pouvons

<sup>9</sup>si une mesure possède 2 composantes  $B_x$  et  $B_y$

écrire un système linéaire à l'aide d'un modèle simplifié, le stabiliser (voir cas C et cas D du tableau 2.2) et enfin l'inverser. Nous obtenons ainsi trois coefficients qui permettent le calcul de l'induction magnétique, mais aussi du potentiel vecteur dans tout l'espace extérieur aux mesures. La figure (2.11) montre l'interpolation de l'induction magnétique obtenue à l'aide de ces trois capteurs. Nous remarquons que le modèle correspond bien à la simulation sans pour autant coller au bruit, nous avons donc parfaitement séparé la source des perturbations.

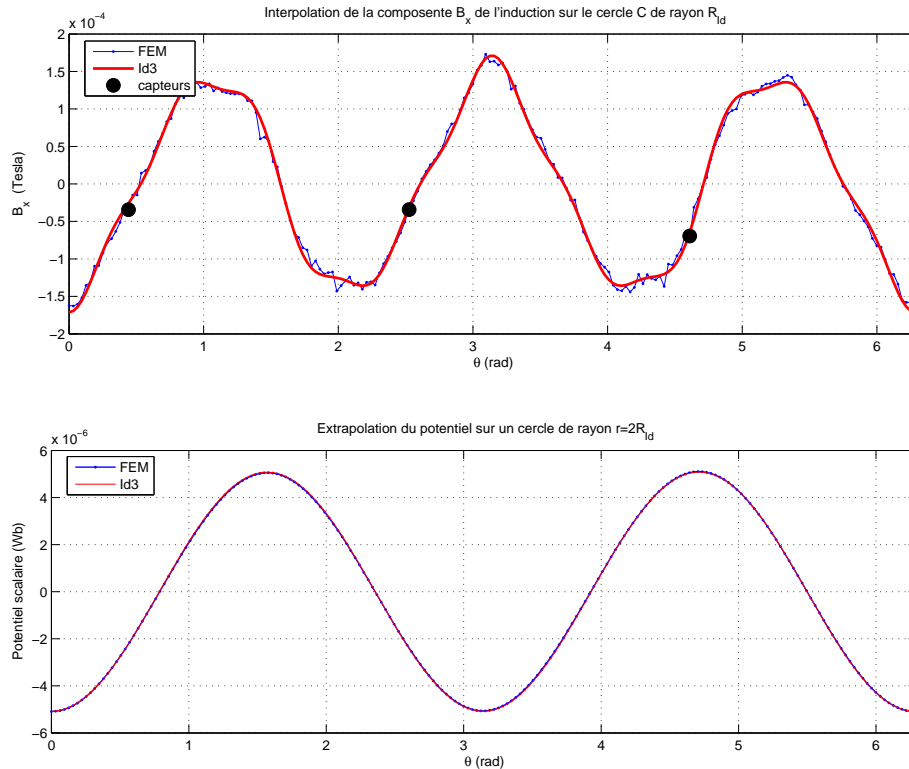


FIG. 2.11 – Exemple d'interpolation de l'induction magnétique identifiée à l'aide de 3 capteurs (graphique du haut) et d'extrapolation du potentiel vecteur sur un cercle placé deux fois plus loin (graphique du bas).

### 2.4.3 Perspectives de l'identification

La première application qui ressort de cet exemple est un moyen simple basé sur la simulation pour déterminer les termes caractéristiques du développement harmonique d'une source et le nombre de capteurs nécessaires. Cependant, nous devons insister sur une limite importante de cette démarche liée à la qualité de représentation de la simulation par rapport à la réalité. En effet, la simulation n'est qu'un autre modèle de la réalité qui peut ne pas être conforme. Ainsi, pour que la simulation permette la mise en oeuvre d'une identification expérimentale, nous devons auparavant garantir qu'elle est un bon modèle de la réalité.

Il ressort également de cet exemple une propriété importante des modèles harmoniques : la *globalité*. La donnée des trois coefficients  $b_2$ ,  $b_6$  et  $b_{10}$  permet non

seulement l'écriture de l'induction magnétique en tout point extérieur à  $\mathcal{C}$  mais également l'écriture de toute grandeur utilisant ces coefficients. Par exemple nous pouvons extrapoler la valeur du potentiel vecteur sur un cercle de rayon double de  $\mathcal{C}$  et nous trouverons bien les mêmes valeurs que la simulation éléments finis (voir Fig.2.11). En comparaison à d'autres méthodes d'extrapolation de signature comme la méthode des moments [Har90][Fro02b] ou les intégrales de frontières [Bru91] elle est sans doute la plus adaptée et la moins coûteuse. En effet, les quelques coefficients harmoniques permettent une extrapolation fidèle de l'induction de la source qui ne nécessite pas de calculs d'intégrales. Enfin, l'intérêt de la globalité du modèle est que l'identification n'est pas un problème inverse qui donne une valeur magnétique en quelques points : elle en donne l'*expression analytique*. De ce fait nous sommes capables d'analyser le comportement global de la source sans avoir besoin de calculer l'induction magnétique en un ensemble de points, mais simplement en observant les propriétés de son expression analytique.

Si l'identification est facilement déterminable à partir d'une simulation qui apporte un grand nombre d'informations, il était possible d'établir les termes du développement harmonique uniquement à l'aide d'une analyse élémentaire. En effet, la source principale dans le moteur est composée des aimants rotoriques répartis périodiquement (2 paires de pôles) de sorte qu'ils forment une source composée de termes de période multiple de 2. Autour de cette source se tient le stator et la carcasse qui transforment le champ en atténuant d'une part son amplitude (effet d'atténuation d'un blindage) tout en modulant d'autre part son expression par l'effet de forme des encoches (effet de forme d'un blindage). L'analyse du problème à l'aide de ces deux effets aurait donc pu nous permettre de déterminer que les coefficients de la source étaient essentiellement les  $b_{2p}$  et en particulier les termes sources  $b_2$  correspondant aux aimants et  $b_{10}$  correspondant aux encoches et aux aimants (voir Fig.2.10).

L'identification magnétique a d'énormes perspectives que nous n'avons pas encore exploitées. La première concerne l'analyse de la source qui doit permettre de déterminer a priori les termes harmoniques influents sans avoir recours à la simulation. Mais, cette analyse nécessite des éléments que nous ne possédons pas encore concernant l'effet d'atténuation et de forme d'un blindage et qui sont l'objet de la deuxième partie de cette thèse consacrée à l'étude des blindages magnétiques. La seconde perspective concerne la méthode de résolution de l'identification. L'approche des moindres carrés que nous exploitons dans ce chapitre est restrictive. En particulier, elle ne permet pas de prendre en compte l'information a priori issue d'une analyse qualitative ou quantitative, ce qu'offrira l'analyse bayésienne proposée dans le chapitre 4. Ainsi, le problème de l'identification ne sera définitivement clos que lorsque cette étude aura abouti. Pour l'heure nous allons nous satisfaire de l'approche que nous venons de présenter dans ce chapitre en la considérant comme une initiation poussée au processus d'identification. Les éléments que nous avons définis nous permettant déjà de mettre en oeuvre l'identification magnétostatique d'une source, nous avons choisi, pour ne pas compliquer la lecture de cette thèse, de présenter maintenant la généralisation de l'identification au cas des sources magnétodynamiques.

# Chapitre 3

## Identification de sources magnétodynamiques

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>49</b>
<b>3.2</b>	<b>Écriture des modèles magnétodynamiques</b>	<b>50</b>
3.2.1	Solutions générales dynamiques des équations de Maxwell	50
3.2.2	Principe de l'identification magnétodynamique	52
3.2.3	Types de sources	54
<b>3.3</b>	<b>Mise en œuvre de l'identification magnétodynamique</b>	<b>56</b>
3.3.1	Extraction fréquentielle	57
3.3.2	Identification spatiale	60
3.3.3	Extrapolation de la signature électromagnétique	61
<b>3.4</b>	<b>Analyse et identification de sources dynamiques</b>	<b>63</b>
3.4.1	Analyse préliminaire	63
3.4.2	Analyse des coefficients harmoniques	65
3.4.3	Classification en types de sources	69
<b>3.5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>71</b>

---

### 3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons mis en œuvre l'identification magnétostatique. Nous possédons ainsi un outil qui permet de caractériser une source statique et d'en extrapoler sa signature. Néanmoins, dans bien des problèmes électromagnétiques la source considérée est dynamique et l'identification magnétostatique n'est plus adaptée. En effet, les modèles harmoniques magnétostatiques ne sont qu'un cas particulier des modèles harmoniques magnétodynamiques obtenus pour une fréquence nulle. Ainsi, ils ne prennent ni en compte les phénomènes induits par la source, du fait des caractéristiques conductrices du milieu, ni son comportement dynamique.



L'objectif de ce chapitre est de généraliser la démarche d'identification précédente à des sources dynamiques en proposant une écriture qui prenne en compte tous les phénomènes électromagnétiques et tous les comportements dynamiques possibles. Pour atteindre ce but nous devons donc parfaitement analyser les sources dynamiques afin de proposer une écriture harmonique adaptée et une caractérisation précise en fonction du comportement fréquentiel et spatial de la source. Pour cette raison, nous proposons de diviser ce chapitre en trois parties. La première partie présente l'analyse des sources et leur écriture générale selon leur comportement. La seconde explicite le principe de l'identification magnétodynamique à l'aide d'un exemple didactique. Enfin la dernière partie fait la lumière sur la mise en œuvre de l'identification et ses automatismes.

## 3.2 Écriture des modèles magnétodynamiques

La première étape de l'identification magnétodynamique doit définir une écriture générale harmonique des champs électromagnétiques qui permette de déterminer les paramètres caractéristiques d'une source. Mais la problématique de l'identification dynamique est plus complexe car une source peut avoir différents comportements dynamiques et l'identification doit nous permettre de les distinguer.

Un modèle général est directement fourni par la solution complexe de l'équation de diffusion. S'il permet une identification magnétodynamique simple et l'extrapolation des signatures électromagnétiques à grande distance, il ne permet pas l'analyse du comportement de la source. Or cette analyse est essentielle pour notre étude. En effet, l'identification doit permettre de diagnostiquer l'origine des termes harmoniques pour comprendre les causes des signatures électromagnétiques.

Ainsi, en complément d'une identification générale issue directement des solutions de l'équation de diffusion et qui permet l'extrapolation des champs, nous proposerons une décomposition des sources magnétodynamiques en sources élémentaires dont la dynamique est différente.

### 3.2.1 Solutions générales dynamiques des équations de Maxwell

Les modèles harmoniques sont obtenus en résolvant l'équation de diffusion à l'aide de la méthode des variables séparées (voir Annexe A.2). Nous obtenons alors l'écriture (1.27) qui est la superposition d'un problème interne et d'un problème externe<sup>1</sup>. Bien que l'identification magnétodynamique soit possible pour ces deux types de problèmes, cette thèse est principalement concernée par l'étude de sources localisées. Aussi, pour ne pas alourdir cet exposé, nous présenterons l'identification appliquée uniquement à un problème externe en précisant que cette démarche d'identification est encore possible pour un problème interne.

---

<sup>1</sup>Voir §1.3.3.3

### 3.2.1.1 Détermination du modèle

En coordonnées sphériques et dans un milieu conducteur, la solution de l'équation de diffusion correspondant à un problème externe de fréquence  $f$  est :

$$\vec{B}_f(r, \theta, \phi, t) = \left| \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (K_n^{(2)}(k_f \cdot r)) \cdot \sum_{m=0}^n [a_{n,m,f} \cos(m\phi) + b_{n,m,f} \sin(m\phi)] \cdot P_n^m(\cos \theta) \cdot e^{-j2\pi ft} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (K_n^{(2)}(k_f \cdot r)) \cdot \sum_{m=0}^n [a_{n,m,f} \cos(m\phi) + b_{n,m,f} \sin(m\phi)] \cdot \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \cdot e^{-j2\pi ft} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (K_n^{(2)}(k_f \cdot r)) \cdot \sum_{m=0}^n [a_{n,m,f} \sin(m\phi) - b_{n,m,f} \cos(m\phi)] \cdot \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \cdot e^{-j2\pi ft} \end{array} \right.$$

avec :  $K_n^{(2)}(k_f \cdot r) = \sqrt{\frac{r}{k_f}} \cdot K_{(n+\frac{1}{2})}(k_f \cdot r)$  et  $k_f = \frac{(1+j)}{\delta_f}$

(3.1)

Cette solution est générale et englobe les solutions dans les milieux non conducteurs. Or nous disposons principalement de mesures de l'induction magnétique dans l'air. Nous allons donc préciser l'écriture de l'induction et adapter l'identification magnétodynamique à ce cas. Cependant, au moment opportun, nous expliciterons les modifications nécessaires pour adapter l'identification à des milieux conducteurs.

Dans l'air la solution de l'équation de Laplace correspondant à un problème externe de fréquence  $f$  est :

$$\vec{B}_f(r, \theta, \phi, t) = \left| \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \cdot r^{-(n+2)} \cdot \sum_{m=0}^n [a_{n,m,f} \cos(m\phi) + b_{n,m,f} \sin(m\phi)] \cdot P_n^m(\cos \theta) \cdot e^{-j2\pi ft} \\ \sum_{n=1}^{\infty} -n \cdot r^{-(n+2)} \cdot \sum_{m=0}^n [a_{n,m,f} \cos(m\phi) + b_{n,m,f} \sin(m\phi)] \cdot \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \cdot e^{-j2\pi ft} \\ \sum_{n=1}^{\infty} n(m) \cdot r^{-(n+2)} \cdot \sum_{m=0}^n [a_{n,m,f} \sin(m\phi) - b_{n,m,f} \cos(m\phi)] \cdot \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \cdot e^{-j2\pi ft} \end{array} \right.$$
(3.2)

Les solutions (3.1) et (3.2) peuvent se traduire ainsi : l'induction magnétique variant à la fréquence  $f$  correspond à celle d'une source multipolaire. Une source magnétodynamique s'écrit alors de façon générale, si  $|f| < F_{max}$ , comme la somme :

$$\vec{B}(r, \theta, \phi, t) = \int_{-F_{max}}^{+F_{max}} \vec{B}_f(r, \theta, \phi, t) \cdot df \quad (3.3)$$

En observant (3.1) et (3.2) nous constatons que la différence essentielle entre ces écritures réside dans la décroissance des termes multipolaires pour chaque fréquence. En effet, dans le cas d'un milieu non conducteur la décroissance des termes

ne dépend que de l'ordre  $n$  alors que dans un milieu conducteur elle dépendra de l'ordre  $n$  et de la fréquence  $f$ .

### 3.2.1.2 Paramètres du modèle - Ordre

Quel que soit le milieu, l'écriture générale (3.3) est valide. Elle est particulièrement intéressante puisqu'elle permet une extrapolation rapide de l'induction magnétique en fonction des coefficients harmoniques  $\{a_{n,m,f}, b_{n,m,f}\}$ . Mais cette écriture doit être simplifiée aux termes fréquentiels et spatiaux représentatifs de la source.

Tout d'abord, les paramètres importants du modèle sont, comme dans le cas statique, les coefficients harmoniques  $\{a_{n,m,f}, b_{n,m,f}\}$ . Dans le chapitre précédent, nous avons limité leur nombre en fonction de l'ordre  $N$  de la source ce qui permettait l'écriture d'un système linéaire de dimensions finies. Dans le cas dynamique, pour déterminer un ensemble fini de coefficients représentatifs il faut tout d'abord identifier les fréquences caractéristiques de la source. Nous supposons pour cela que la fréquence d'échantillonnage est suffisante pour empêcher le repliement<sup>2</sup> mais surtout que la durée de l'échantillonnage permet la séparation des phénomènes dont les fréquences caractéristiques sont les plus proches.

L'analyse fréquentielle fournit ainsi  $N_c$  fréquences caractéristiques  $f_c^{(i)}$  qui permettent de simplifier (3.3) sous la forme :

$$\vec{B}(r, \theta, \phi, t) = \sum_{i=1}^{N_c} B_{f_c^{(i)}}(r, \theta, \phi, t) \quad (3.4)$$

De ce fait, le nombre de coefficients harmoniques est dénombrable. Pour permettre un placement adéquat des capteurs nous devons encore déterminer l'ordre de la source à chaque fréquence caractéristique. Le nombre de mesures nécessaires à l'identification magnétodynamique est déterminé par l'ordre  $N_\delta$  le plus contraignant, qui logiquement est défini par :

$$N_\delta = \max_{1 \leq i \leq N_c} \{N^{(i)}\} \quad (3.5)$$

## 3.2.2 Principe de l'identification magnétodynamique

L'identification magnétodynamique consiste à déterminer l'ensemble des coefficients harmoniques  $\{a_{n,m,f}, b_{n,m,f}\}$  représentatifs de la source. Elle passe par deux étapes distinctes : l'extraction des fréquences caractéristiques et l'identification spatiale.

### 3.2.2.1 Extraction des fréquences caractéristiques

Pour avoir un nombre fini de coefficients à identifier il faut déterminer les fréquences caractéristiques. Cette détermination et l'extraction qui en découle nécessitent une attention particulière aux conditions d'échantillonnage temporel. Si le

<sup>2</sup>ce qui implique que nous avons un signal à bande limitée : c'est toujours le cas puisqu'un filtrage fréquentiel est possible sur les mesures

signal est correctement échantillonné, nous exploitons la transformée de Fourier (FFT) des mesures qui permet d'identifier l'ensemble des  $N_c$  fréquences caractéristiques. Lorsque ces fréquences sont déterminées, nous pouvons extraire l'induction relative à une fréquence  $f_c^{(i)}$  particulière en calculant la projection :

$$\forall i, 1 \leq i \leq N_c : \quad \vec{B}_{f_c^{(i)}}(r, \theta, \phi) = \langle \vec{B}(r, \theta, \phi, t) | e^{-j2\pi f_c^{(i)} t} \rangle \quad (3.6)$$

Cette projection ne dépend plus du temps et correspond à l'écriture d'un développement multipolaire. Dans l'air par exemple, l'expression (3.6) correspondant à la fréquence  $f_c^{(i)}$  sera :

$$\vec{B}_{f_c^{(i)}}(r, \theta, \phi) = \left| \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \cdot r^{-(n+2)} \cdot \sum_{m=0}^n [a_{n,m,f_c^{(i)}} \cos(m\phi) + b_{n,m,f_c^{(i)}} \sin(m\phi)] \cdot P_n^m(\cos \theta) \\ \sum_{n=1}^{\infty} -n \cdot r^{-(n+2)} \cdot \sum_{m=0}^n [a_{n,m,f_c^{(i)}} \cos(m\phi) + b_{n,m,f_c^{(i)}} \sin(m\phi)] \cdot \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \\ \sum_{n=1}^{\infty} n(m) \cdot r^{-(n+2)} \cdot \sum_{m=0}^n [a_{n,m,f_c^{(i)}} \sin(m\phi) - b_{n,m,f_c^{(i)}} \cos(m\phi)] \cdot \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Il s'agit de l'expression (2.11) du développement multipolaire de l'induction magnétique d'une source statique. Riches de la lecture du chapitre précédent, nous sommes donc capables d'écrire un système linéaire stable qui donne les coefficients harmoniques intervenants dans (3.7).

### 3.2.2.2 Décomposition spatiale

Après extraction fréquentielle, nous obtenons un développement harmonique de l'induction magnétique qui ne dépend que des variables d'espace. Les coefficients harmoniques sont alors obtenus à l'aide d'une *identification spatiale*.

Nous avons déjà souligné le fait que la différence d'écriture en fonction du milieu touchait essentiellement les fonctions de décroissance (voir §3.2.1.1). L'identification spatiale correspond alors à une généralisation de l'identification magnétostatique qui prend en compte l'influence de la fréquence. En particulier, dans un milieu conducteur, il est nécessaire d'écrire un système linéaire matriciel similaire à (2.14) pour chaque fréquence. Les coefficients magnétodynamiques sont alors obtenus en résolvant ce système linéaire en prenant les mêmes précautions que lors de l'identification magnétostatique.

Les deux étapes de l'identification magnétodynamique permettent donc de déterminer les familles de coefficients harmoniques  $\{a_{n,m,f_c^{(i)}}, b_{n,m,f_c^{(i)}}\}$ , qui à leur tour vont permettre l'extrapolation des champs électromagnétiques. Notons que, si l'identification détermine l'écriture du modèle harmonique de la source, elle ne permet pas de remonter à l'origine des coefficients identifiés. Pour permettre une analyse du comportement d'une source nous devons encore mettre en évidence les

relations entre les coefficients harmoniques et la dynamique de la source, ce que nous proposons maintenant en définissant différents types de sources.

### 3.2.3 Types de sources

Nous définissons trois types de sources : les sources pulsantes, les sources tournantes et les sources qui pulsent et tournent simultanément. L'intérêt de ces définitions est simple : elles offrent une dimension supplémentaire à l'identification qui permet la décomposition d'une source en sources multipolaires dont le comportement dynamique est différent.

#### 3.2.3.1 Les sources pulsantes

L'écriture (3.2) nous indique que toute source peut être décomposée en sources complexes pulsantes. Si cette propriété est intéressante mathématiquement pour l'identification (voir 3.6) elle ne reflète pas la vraie nature pulsante de la source. Considérons une source statique ( $\Sigma$ ) définie par ses coefficients harmoniques  $\{a_{n,m}, b_{n,m}\}$ . Lorsqu'elle pulse à la fréquence  $f$ , nous pouvons donner l'expression de l'induction qu'elle crée sous la forme :

$$\vec{B}_f(r, \theta, \phi, t) = \left| \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \cdot r^{-(n+2)} \cdot \sum_{m=0}^n [a_{n,m} \cos(m\phi) + b_{n,m} \sin(m\phi)] \cdot P_n^m(\cos \theta) \cdot \sin(2\pi ft + \psi) \\ \sum_{n=1}^{\infty} -n \cdot r^{-(n+2)} \cdot \sum_{m=0}^n [a_{n,m} \cos(m\phi) + b_{n,m} \sin(m\phi)] \cdot \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \cdot \sin(2\pi ft + \psi) \\ \sum_{n=1}^{\infty} n(m) \cdot r^{-(n+2)} \cdot \sum_{m=0}^n [a_{n,m} \sin(m\phi) - b_{n,m} \cos(m\phi)] \cdot \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \cdot \sin(2\pi ft + \psi) \end{array} \right. \quad (3.8)$$

La caractéristique de ce type de source est que l'amplitude de chaque terme harmonique est modulée par une fonction sinusoïdale du temps. Mais spatialement l'induction ne varie pas : les extrema restent fixes à tout instant.

#### 3.2.3.2 Les sources tournantes

Considérons maintenant la même source multipolaire ( $\Sigma$ ) tournant autour de son axe  $z$  (voir Fig.A.1) avec une vitesse de rotation  $\Omega$  constante. Dans ce cas, chaque terme harmonique aura une fréquence particulière  $f_m = (m\Omega/2\pi)$  et le

développement d'une source tournante s'écrira :

$$\vec{B}_\Omega(r, \theta, \phi, t) = \left| \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \cdot r^{-(n+2)} \cdot \sum_{m=0}^n [a_{n,m} \cos(m(\phi - \Omega t + \psi)) + b_{n,m} \sin(m(\phi - \Omega t + \psi))] \cdot P_n^m(\cos \theta) \\ \sum_{n=1}^{\infty} -n \cdot r^{-(n+2)} \cdot \sum_{m=0}^n [a_{n,m} \cos(m(\phi - \Omega t + \psi)) + b_{n,m} \sin(m(\phi - \Omega t + \psi))] \cdot \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \\ \sum_{n=1}^{\infty} n(m) \cdot r^{-(n+2)} \cdot \sum_{m=0}^n [a_{n,m} \sin(m(\phi - \Omega t + \psi)) - b_{n,m} \cos(m(\phi - \Omega t + \psi))] \cdot \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Deux remarques importantes peuvent être faites à propos des sources tournantes :

1. Tout d'abord leur expression (3.9) montre qu'une source multipolaire qui tourne est caractérisée par plusieurs fréquences relatives à l'indice  $m$  du développement harmonique. L'identification générale que nous avons proposée précédemment ne mettait pas en évidence de liens entre des coefficients identifiées pour des fréquences distinctes. Ainsi, grâce à ce modèle nous pouvons chercher dans les différentes familles de coefficients ceux qui correspondent à l'écriture d'une même source tournante.
2. Nous ne considérerons dans cette partie que des rotations suivant l'angle  $\phi$ . La raison de cette restriction est liée à la difficulté d'exprimer les rotations des polynômes de Legendre. En conséquence, si l'extrapolation des champs électromagnétiques est toujours possible du fait de la généralité de l'identification, l'analyse des coefficients harmoniques ne sera possible que pour des sources ne possédant qu'un seul axe de rotation.

### 3.2.3.3 Les sources tournantes et pulsantes

Enfin, si la source ( $\Sigma$ ) tourne à la vitesse  $\Omega$  en pulsant à la fréquence  $f$  l'induction magnétique qu'elle crée s'écrira :

$$\vec{B}_\Omega(r, \theta, \phi, t) = \left| \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \cdot r^{-(n+2)} \cdot \sum_{m=0}^n [a_{n,m} \cos(m(\phi - \Omega t)) + b_{n,m} \sin(m(\phi - \Omega t))] \cdot P_n^m(\cos \theta) \cdot \sin(2\pi f t + \psi) \\ \sum_{n=1}^{\infty} -n \cdot r^{-(n+2)} \cdot \sum_{m=0}^n [a_{n,m} \cos(m(\phi - \Omega t)) + b_{n,m} \sin(m(\phi - \Omega t))] \cdot \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \cdot \sin(2\pi f t + \psi) \\ \sum_{n=1}^{\infty} n(m) \cdot r^{-(n+2)} \cdot \sum_{m=0}^n [a_{n,m} \sin(m(\phi - \Omega t)) - b_{n,m} \cos(m(\phi - \Omega t))] \cdot \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \cdot \sin(2\pi f t + \psi) \end{array} \right. \quad (3.10)$$

En développant cette expression nous montrons facilement que cette source est composée de deux sources tournantes aux fréquences  $f_1 = (m\Omega - f)$  et  $f_2 = (m\Omega + f)$  (voir 3.4.2.4). L'identification d'une telle source passe donc par l'identification d'un couple de sources tournantes.

### 3.3 Mise en œuvre de l'identification magnéto-dynamique

Dans cette partie nous allons revenir sur les deux étapes qui composent l'identification magnéto-dynamique, *l'extraction fréquentielle* et *l'identification spatiale*. Nous expliciterons leur mise en œuvre algorithmique que nous illustrerons parallèlement sur l'exemple d'une source magnéto-dynamique.

Reprenons la source ( $\Sigma$ ) et le cube métrologique présentés figure (2.5). Nous supposons que cette source est composée de trois sources multipolaires dynamiques de différents types dont les paramètres sont présentés dans le tableau (3.1) :

- $S_1$  est une source dipolaire qui pulse à 6Hz, elle est composée des deux termes  $a_{1,0}$  et  $a_{1,1}$  et se traduit en terme de fréquence au niveau des mesures par un signal de fréquence 6Hz (voir Fig.3.1).
- $S_2$  est une source d'ordre 2 composée des deux termes  $a_{2,1}$  et  $b_{2,2}$ . Chacun de ces termes se traduit par des fréquences particulières relatives aux indices  $m$  (voir 3.9) qui sont dans ce cas respectivement 6Hz et 12Hz (Fig.3.1).
- $S_3$  est une source multipolaire d'ordre 3 composée des deux termes  $b_{3,1}$  et  $b_{3,3}$ , qui tournent à 4 Hz en pulsant à 2Hz. Cette source se traduit par quatre fréquences qui sont 2Hz et 6Hz créées par  $b_{3,1}$  et 10Hz et 14Hz créées par  $b_{3,3}$  (Fig.3.1).

Sources	$S_1$		$S_2$		$S_3$	
Coeff	$a_{1,0}$	$a_{1,1}$	$a_{2,1}$	$b_{2,2}$	$b_{3,1}$	$b_{3,3}$
Valeur	$5 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$1.5 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-7}$
$\Omega/2\pi$ (Hz)	0	0	6	6	4	4
$\psi$ (rad)	$\pi/12$	$\pi/12$	0	0	$\pi/4$	$\pi/4$
$\omega/2\pi$ (Hz)	6	6	0	0	2	2
$f_c$ (Hz)	6	6	6	12	2 & 6	10 & 14

TAB. 3.1 – Paramètres des trois sources  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  qui composent ( $\Sigma$ ).  $\Omega$  est la vitesse de rotation des sources autour de l'axe z,  $\omega$  est la pulsation de la source et  $\psi$  le déphasage.

Nous supposons encore que l'identification se situe dans l'air et que nous disposons des 26 capteurs disposés sur le cube métrologique de la figure (2.5). Nous distinguerons en particulier le capteur de référence  $C_1$  au milieu de la surface supérieure du cube.

La figure (3.1) présente la mesure de la composante  $B_x$  de l'induction magnétique sur ce capteur et sa FFT. Il ressort de l'analyse spectrale de ce signal un certain nombre de fréquences relatives à la source qui sont liées à des termes spécifiques du développement multipolaire, nous sommes ainsi capables de distinguer les fréquences caractéristiques de la source et de mettre en œuvre l'extraction fréquentielle.

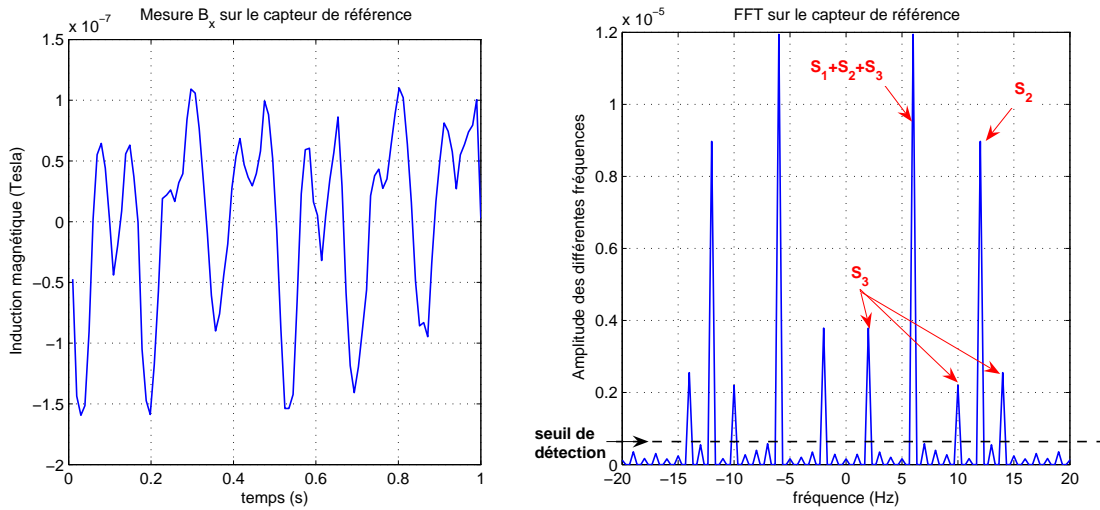


FIG. 3.1 – Mesure de l'induction magnétique  $B_x$  et sa FFT sur un capteur de référence. La transformée de Fourier (FFT) fait apparaître un certain nombre de raies aux fréquences  $f_c$  caractéristiques de la source.

### 3.3.1 Extraction fréquentielle

La première étape de l'identification consiste à extraire le signal aux fréquences caractéristiques. Plaçons-nous dans le cadre général de l'identification : nous possédons un certain nombre de mesures de l'induction de la source ( $\Sigma$ ) et aucune information sur cette source. Deux démarches sont alors possibles :

- La première démarche consiste à faire la transformée de Fourier de toutes les mesures et à extraire automatiquement le signal pour toutes les fréquences. Cette démarche a l'avantage de ne pas avoir recours à la subjectivité, puisqu'elle extrait tout le signal à toutes les fréquences. Mais son principal inconvénient est qu'elle augmente inutilement les calculs d'identification en analysant des fréquences qui n'ont pas de lien avec la source.
- La seconde démarche, qui est celle que nous préconisons, consiste à fixer un seuil qui détermine les fréquences caractéristiques (voir Fig.3.1). Une fois ce seuil choisi, l'identification des fréquences caractéristiques qui en découle est facilement automatisable. L'intérêt de cette démarche n'est pas seulement de limiter l'identification aux fréquences caractéristiques : elle est véritablement la première étape de l'identification magnétodynamique, puisqu'elle détermine les fréquences de la source.

#### 3.3.1.1 Identification des fréquences caractéristiques

Pour identifier les fréquences caractéristiques d'une source nous devons donc définir un seuil de détection, ce que nous ferons en observant le signal et en particulier le niveau de bruit de la mesure. Mais, du fait du placement relatif des capteurs vis-à-vis de la source, les mesures les plus proches ont un rapport signal sur bruit meilleur. Ainsi, un même seuil ne permettra pas d'identifier toutes les



fréquences caractéristiques sur toutes les mesures<sup>3</sup>.

C'est pourquoi nous proposons de déterminer les fréquences non pas en observant le spectre fréquentiel d'une mesure particulière, mais sur l'ensemble des mesures. La figure 3.2 montre la mesure de la composante  $B_x$  de l'induction magnétique sur l'ensemble des 26 capteurs et la FFT relative à chacune de ces mesures.

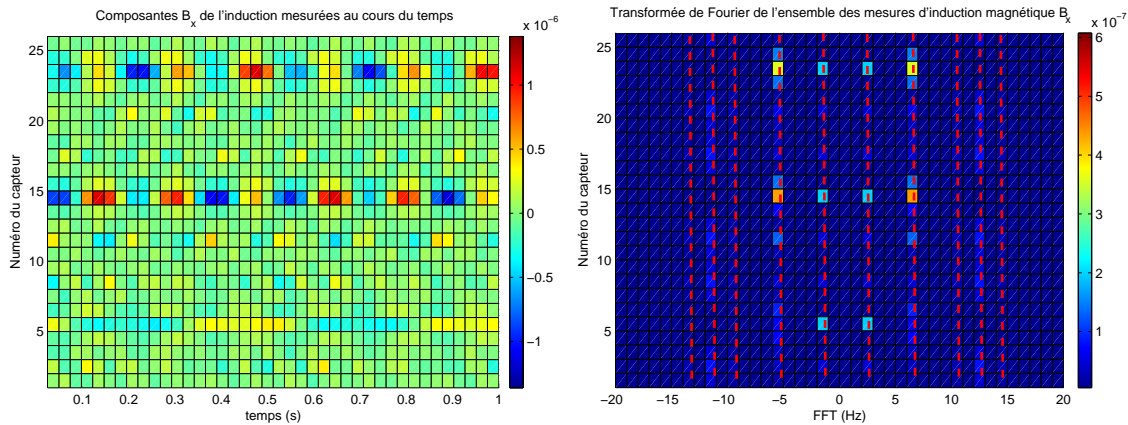


FIG. 3.2 – Représentation de la composante  $B_x$  de l'induction magnétique pour tous les capteurs au cours du temps (gauche) - Représentation de la transformée de Fourier (FFT) pour chacune de ces mesures (droite).

L'écriture simultanée de la FFT pour toutes les mesures permet d'isoler les fréquences communes aux capteurs qui sont celles qui caractérisent la source. Mais elle permet surtout de ne pas négliger certaines fréquences en regardant sur toutes les mesures, toutes les fréquences supérieures au seuil. Par exemple sur le capteur 21 les raies à  $-6\text{Hz}$  et  $6\text{Hz}$  n'apparaissent pas clairement, alors que l'existence de cette fréquence est évidente si nous observons l'ensemble des points de mesures.

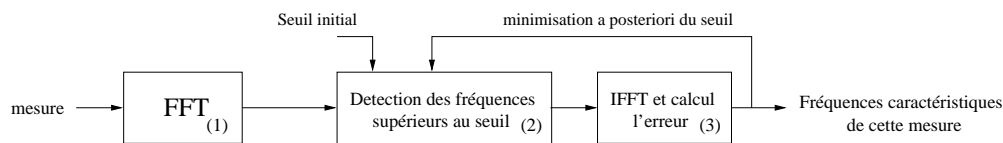


FIG. 3.3 – Algorithme d'identification des fréquences caractéristiques

Nous proposons alors l'algorithme d'identification des fréquences caractéristiques pour chaque mesure (voir Fig.3.3) :

1. Calculer la FFT de cette mesure.
2. Identifier les fréquences supérieures à un seuil initial défini par l'opérateur.
3. Interpoler la mesure uniquement avec les fréquences caractéristiques et calculer l'erreur moyenne<sup>4</sup> avec le signal initial. Si cette erreur est acceptable alors les fréquences sont identifiées. Sinon nous recommençons l'étape 2 en diminuant le seuil.

<sup>3</sup>Le bruit n'est pas la seule limite : un capteur à proximité de la source peut aussi ne pas mesurer les variations temporelles de certains termes harmoniques du fait de son placement

<sup>4</sup>Nous choisissons l'erreur moyenne pour moyenner l'erreur liée aux bruits.

Cet algorithme a plusieurs intérêts :

- Il garantit la fidélité à la mesure en assurant une erreur moyenne acceptable.
- Il a tendance à minimiser le seuil et donc assure une convergence de l'algorithme : dans le pire des cas nous sélectionnons toutes les fréquences.
- Il peut facilement minimiser l'intervention subjective d'un décideur dans le choix des seuils, en utilisant une optimisation du seuil par dichotomie à partir de la valeur de l'amplitude maximale de la FFT.

Pour résumer, l'algorithme que nous venons de présenter nous permet d'identifier les fréquences caractéristiques d'une source en minimisant l'erreur d'interpolation moyenne. Son application aux mesures de la source ( $\Sigma$ ) fait ressortir les 10 fréquences caractéristiques suivantes avec une erreur moyenne d'interpolation inférieure à 0.1% :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_c^{(i)}$ (Hz)	-14	-12	-10	-6	-2	2	6	10	12	14

TAB. 3.2 – Fréquences caractéristiques de la source ( $\Sigma$ ).

### 3.3.1.2 Extraction fréquentielle

L'extraction fréquentielle correspond aux calculs des produits scalaires (3.6) pour chaque fréquence caractéristique. Dans cette section nous allons montrer que ces projections sont, par définition, très proches d'une transformée de Fourier et sont ainsi facilement déterminées à l'aide des FFT précédentes. Nous insisterons aussi sur les précautions qui assurent le calcul précis de ces produits scalaires et qui sont de manière générale celles nécessaires à la FFT.

L'induction  $\vec{B}(t)$  mesurée en un point P dans un intervalle fermé  $[0, T]$  peut se décomposer en série de Fourier à termes complexes sous la forme [Ang72] :

$$\vec{B}(t) = \sum_{k=-N}^{+N} \langle \vec{B} | e^{-j\pi k \frac{f_e}{N} t} \rangle \cdot e^{-j\pi k \frac{f_e}{N} t} \quad \text{avec} \quad \langle \vec{B} | e^{-j\pi k \frac{f_e}{N} t} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{B} \cdot e^{-j\pi k \frac{f_e}{N} t} dt \quad (3.11)$$

où  $f_e$  est la fréquence d'échantillonnage de la mesure et N est tel que le nombre total d'échantillons M soit au moins  $(2N+1)$  pour permettre le calcul numérique des intégrales<sup>5</sup>. L'extraction des fréquences caractéristiques correspond au calcul des produits scalaires. Or nous les avons déjà calculés en faisant la FFT sur chaque mesure. Elle correspond au calcul de la transformée de Fourier qui est défini en chaque point P par [Ang72] :

$$\forall k \in [0, 2N] : \quad \vec{B}(k \frac{f_e}{2N}) = \int_0^T \vec{B} \cdot e^{-j\pi k \frac{f_e}{N} t} dt \quad (3.12)$$

<sup>5</sup>C'est le théorème de Shannon

Alors les valeurs des projections de  $\vec{B}$  aux fréquences caractéristiques (3.6) sont données par :

$$\vec{B}_{f_c^{(i)}}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{T} \cdot \vec{B}(f_c^{(i)}) \quad (3.13)$$

Or, par définition, la FFT (3.12) est obtenue par la méthode d'intégration des rectangles [Coo65] et s'écrit :

$$\forall k \in [1, M] : \text{FFT}(\vec{B})(f_k) = \sum_{n=1}^M \vec{B}(t_n) \cdot \exp(-j2\pi f_k t_n) \quad (3.14)$$

en posant<sup>6</sup> :

$$f_k = \frac{(k-1)}{M} \cdot f_e \quad \text{et} \quad t_n = \frac{(n-1)}{f_e} \quad (3.15)$$

### 3.3.2 Identification spatiale

L'extraction de l'induction magnétique aux fréquences caractéristiques  $f_c^{(i)}$  sur l'ensemble des mesures a permis d'isoler des sources multipolaires élémentaires à ces fréquences. La deuxième étape de l'identification magnétodynamique consiste à identifier les coefficients harmoniques intervenant dans l'expression de ces sources multipolaires.

L'écriture harmonique de l'induction magnétique dans l'air pour chaque fréquence caractéristique (3.7), est similaire à celle du cas magnétostatique. Alors, l'identification des coefficients harmoniques pour chaque fréquence est facilement mise en œuvre à partir de l'écriture de la matrice  $\mathbf{F}$  du système linéaire présenté au chapitre 2.

Par contre, si le milieu est conducteur, l'écriture du système harmonique correspondant sera différente à chaque fréquence, du fait de la dépendance des décroissances de chaque ordre relatives à l'épaisseur de peau  $\delta_f$  (voir 3.1). Dans ce cas l'identification magnétodynamique passera par la résolution de  $N_c$  systèmes linéaires différents qui définissent autant de matrices  $\mathbf{F}^{(i)}$ .

L'application de l'identification spatiale à la source ( $\Sigma$ ) précédente nous permet d'identifier l'ensemble des coefficients harmoniques complexes pour toutes les fréquences caractéristiques (voir tableau 3.3). Nous reviendrons sur les valeurs des coefficients complexes identifiés dans la prochaine section, pour l'instant nous nous contenterons de faire des remarques à propos de ces coefficients :

- Les coefficients harmoniques des fréquences caractéristiques négatives ne sont pas représentés dans le tableau (3.3) car ils sont les complexes conjugués des fréquences positives. En effet, le signal mesuré étant réel pour chaque fréquence il existe deux fréquences complexes conjuguées positive et négative dont la somme doit nécessairement être réelle.
- Si cette identification va nous permettre d'extrapoler les champs électromagnétiques, elle ne permet pas directement de remonter au comportement

<sup>6</sup>voir `help fft` dans matlab

magnétodynamique de la source. Alors nous pouvons considérer que nous n'avons pas réellement identifié la source. Néanmoins, et nous reviendrons sur ce point dans la prochaine section, les coefficients correspondant à une source tournante sont liés, comme par exemple  $a_{3,1}^{(1)}$  et  $b_{3,1}^{(1)}$ . Nous pouvons donc espérer identifier sans a priori certains types de source.

- Enfin, l'identification magnétodynamique offre la possibilité intéressante de décomposer l'induction à chaque fréquence en différents termes harmoniques. Ainsi, en plus de l'extrapolation, elle fournit un outil d'analyse des sources à deux dimensions, fréquentielle et spatiale.

i	1	2	3	4	5
$f_c^{(i)}$ (Hz)	2	6	10	12	14
$a_{1,0}^{(i)} \times 1e7$	0	(.65-2.41j)	0	0	0
$a_{1,1}^{(i)} \times 1e8$	0	(2.6-9.6j)	0	0	0
$a_{2,1}^{(i)} \times 1e8$	0	(5)	0	0	0
$b_{2,1}^{(i)} \times 1e8$	0	(-5j)	0	0	0
$a_{2,2}^{(i)} \times 1e8$	0	0	0	(10j)	0
$b_{2,2}^{(i)} \times 1e8$	0	0	0	(10)	0
$a_{3,1}^{(i)} \times 1e8$	(-2.65+2.65j)	(2.65+2.65j)	0	0	0
$b_{3,1}^{(i)} \times 1e8$	(2.65+2.65j)	(2.65-2.65j)	0	0	0
$a_{3,2}^{(i)} \times 1e8$	0	0	(1.71+1.71j)	0	(1.71-1.71j)
$b_{3,2}^{(i)} \times 1e8$	0	0	(1.71-1.71j)	0	(-1.71-1.71j)

TAB. 3.3 – Coefficients harmoniques identifiés aux fréquences caractéristiques de  $(\Sigma)$ . La justification des valeurs de ces coefficients est donnée au paragraphe §3.4.2.1

### 3.3.3 Extrapolation de la signature électromagnétique

L'identification magnétodynamique permet donc de déterminer les coefficients harmoniques dont le premier intérêt est l'extrapolation des signatures électromagnétiques à partir des mesures. Cette extrapolation consiste à utiliser le modèle magnétodynamique (3.4) dans le sens direct à partir des coefficients pour déterminer les champs électromagnétiques.

Ainsi, à l'aide des coefficients identifiés pour la source  $(\Sigma)$  nous sommes capables d'écrire l'induction magnétique sur le capteur de référence  $C_1$  à tout instant  $t$  qui suit la mesure (voir Fig.3.4) sous la forme :

$$\vec{B}(C_1) = \Re \left\{ \sum_{i=1}^{N_c} \vec{B}_{f_c^{(i)}}(C_1) \right\} \quad (3.16)$$

L'identification magnétodynamique peut être considérée comme une extraction de sources en fonction de leur comportement spatial. Cette remarque est intéressante du point de vue de la robustesse car, pour que les incertitudes de mesure aient une influence, il faut d'une part qu'elles correspondent à une fréquence caractéristique et d'autre part que leur comportement spatial puisse être décrit par

un modèle harmonique. En pratique, quand le bruit ne correspondra pas à une source son influence sera moyennée spatialement. En revanche, si le bruit sur les capteurs correspond à la signature d'une source, nous devons prendre des précautions supplémentaires en intégrant la connaissance a priori que nous avons du bruit en fonction des fréquences et des capteurs. Nous reviendrons sur ce point au cours du chapitre 4.

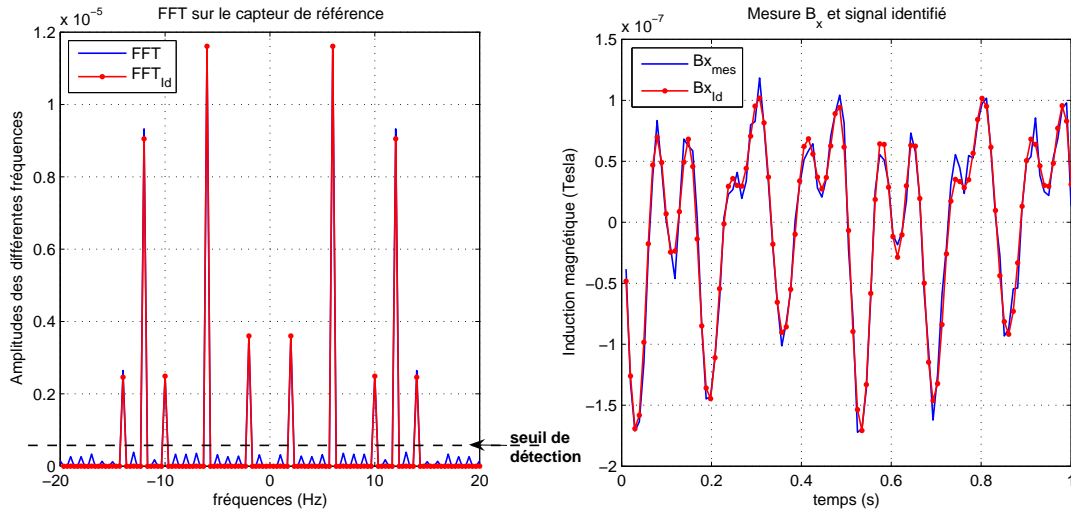


FIG. 3.4 – Comparaison entre l'induction mesurée  $B_x$  et identifiée  $B_{x_{Id}}$  sur le capteur de référence  $C_1$ , du point de vue de la FTT (gauche) et du signal temporel (droite).

L'identification magnétodynamique est un outil performant pour la discrétion magnétique puisqu'elle permet l'extrapolation des signatures électromagnétiques à grande distance. La globalité du modèle associée aux propriétés de décroissance des termes harmoniques nous permet de limiter le développement harmonique à quelques termes essentiels en fonction de la distance. Ainsi le modèle harmonique est parfaitement adapté à l'extrapolation puisqu'il est d'autant plus simple que la distance est grande<sup>7</sup>. En comparaison l'extrapolation des signatures électromagnétique à l'aide des intégrales de frontières [Ned00][Bur02][Col06] nécessitent toujours le calcul de l'intégrale de toutes les inconnues portées par la frontière et ce quelle que soit la distance d'extrapolation.

Enfin, pour introduire la dernière partie de ce chapitre, si la méthode d'identification que nous venons de proposer est parfaitement adaptée à l'extrapolation elle ne permet pas de remonter à l'origine des champs rayonnés, ce qui est nécessaire pour permettre l'analyse technique des causes des signatures. C'est pourquoi nous allons proposer en plus de la décomposition harmonique de la source une décomposition par type de source qui doit nous permettre de séparer des sources suivant leur fréquences, leurs termes harmoniques et le type de source qu'elles définissent.

<sup>7</sup>Voir la notion d'ordre §2.2.1.1

## 3.4 Analyse et identification de sources dynamiques

L'identification magnétodynamique est donc un processus basé sur une décomposition fréquentielle et spatiale de la source. Néanmoins ce processus n'est pas satisfaisant. Il permet l'extrapolation des signatures et la caractérisation spatiale de la source du fait de la décomposition multipolaire, mais il ne permet pas l'analyse précise de l'origine de la source. Or c'est en identifiant les causes des signatures que nous sommes le plus à même d'en diminuer les effets. Le but de cette partie est de proposer une analyse des coefficients complexes identifiés (voir tableau 3.3) qui permette la classification de ces termes suivant le comportement dynamique de la source. Ainsi l'identification consistera à déterminer une source en fonction de ses fréquences caractéristiques, de ses ordres et des dynamiques propres de chaque terme. Le but étant d'obtenir une décomposition en sources élémentaires ne dépendant plus des fréquences caractéristiques mais uniquement de la dynamique de ces sources.

Nous allons atteindre ce but en proposant tout d'abord une analyse élémentaire du comportement de chaque source mettant en évidence les distinctions possibles. Nous mettrons en évidence les propriétés des coefficients identifiés et enfin nous proposerons une identification exploitant la classification supplémentaire en sources élémentaires de différent type.

### 3.4.1 Analyse préliminaire

Nous allons commencer cette analyse en montrant qu'il est possible de distinguer les différents types de sources en fonction de leur dynamique respective.

Prenons pour cela deux sources élémentaires ne possédant qu'un seul terme harmonique respectivement  $a_{1,1}$  et  $a_{2,2}$ . La première pulse à  $f_1=6\text{Hz}$  tandis que la seconde tourne à  $f_2=3\text{Hz}$ . Les relations (3.8) et (3.9) nous permettent alors d'écrire sur un cercle unitaire dans le plan équatorial du repère<sup>8</sup> que les composantes radiales  $B_r$  de l'induction magnétique de ces sources respectent les relations de proportionnalité :

$$\begin{cases} B_{1,r}(\phi, t) \propto a_{1,1} \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(2\pi f_1 t + \psi_1) \\ B_{2,r}(\phi, t) \propto a_{2,2} \cdot \cos(2 \cdot (\phi - 2\pi f_2 t - \psi_2)) \end{cases} \quad (3.17)$$

Ces relations montrent clairement que les dynamiques de ces deux sources ont une fréquence caractéristique identique à 6Hz. L'identification magnétodynamique nous permet de distinguer ces deux sources en fonction de leur ordre respectif par le biais des coefficients harmoniques complexes relatifs aux fréquences -6Hz et 6Hz. Cependant, nous n'avons pas identifié le comportement des sources.

Pour comprendre en quoi consiste l'identification du comportement des sources nous proposons l'analyse de la figure (3.5) qui explicite leurs variations sur le cercle

<sup>8</sup>c'est à dire à  $\theta = \pi/2$  et  $r=1$ , voir Fig. A.1

unitaire précédent. Elle nous permet de distinguer les variations spatio-temporelles propres aux deux sources :

1. La première source, correspondant au terme  $a_{1,1}$ , est de période unitaire ( $m=1$ ) suivant  $\phi$  (Fig.3.5). L'amplitude de cette source varie au cours du temps sans que les maxima de l'induction ne se déplacent spatialement. Cette variation temporelle correspond à la fréquence 6Hz.
2. La seconde source, correspondant au terme  $a_{2,2}$ , est quand à elle, de période spatiale égale à 2 (Fig.3.5). Nous remarquons que les maxima de l'induction tournent au cours du temps, et ne pulsent pas. Puisque cette source tourne trois fois par seconde un capteur mesurera 6 maxima ( $2 \times 3$ ) par seconde et ainsi la fréquence caractéristique de cette source sera également 6Hz.

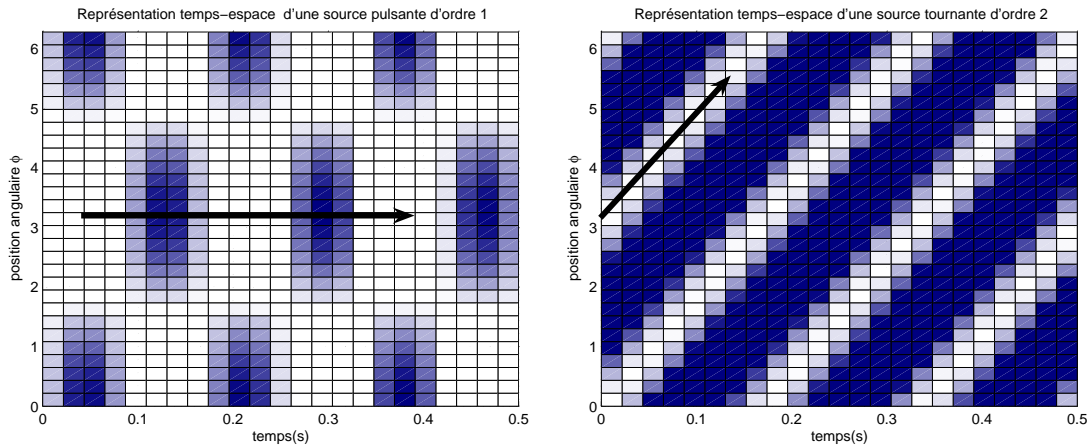


FIG. 3.5 – Représentations temps-espace des variations de l'induction d'une source d'ordre 1 (terme  $a_{1,1}$ ) pulsant à 6Hz (figure gauche) et d'ordre 2 (terme  $a_{2,2}$ ) tournant à 3Hz (droite).

Nous venons donc de distinguer visuellement une source pulsante d'une source tournante. Le troisième cas de source, tournantes-pulsantes correspondant à la somme de deux sources tournantes. Nous avons donc parfaitement distingué les deux grands comportements possibles des sources. A partir de l'observation de la figure 3.5, nous pouvons imaginer un algorithme basé sur les variations des maxima des champs, ou plus simplement sur l'observation des variations spatio-temporelles identiques à celles de la figure 3.5.

Mais, l'identification magnétodynamique doit être possible à l'aide d'un nombre faible de capteurs correctement placés autour de la source et dont ni le nombre, ni le positionnement ne permettent de représentation aussi explicite que celle de la figure 3.5. Alors, pour distinguer les différents types de sources possibles, nous devons exploiter une autre voie plus rigoureuse qui nécessite un retour sur les propriétés essentielles des coefficients harmoniques. Elle doit nous permettre de discriminer les différents types de sources simplement à partir des coefficients complexes de l'identification magnétodynamique.

### 3.4.2 Analyse des coefficients harmoniques

L'analyse précédente montre qu'il est possible visuellement de distinguer une source tournante d'une source pulsante à une même fréquence. Mais cette distinction est faite à l'aide des variations spatio-temporelles des mesures<sup>9</sup> ce qui est très restrictif et coûteux. En effet, les mesures ne permettent pas la visualisation de ces variations et une solution coûteuse serait de les compléter avec des valeurs extrapolées à partir des coefficients complexes harmoniques.

Afin de restreindre le champ de nos investigations, nous devons redéfinir l'analyse des types de sources que nous cherchons à établir. Il s'agit de trouver à partir des coefficients harmoniques complexes identifiés les caractéristiques qui permettent la distinction des différents comportements des sources. Ainsi, cette distinction ne doit pas être basée sur la mesure, mais uniquement sur les coefficients que nous avons déjà identifiés. C'est pourquoi dans cette partie nous allons rappeler brièvement les propriétés des coefficients harmoniques et en particulier comment ils sont affectés par la dynamique des sources.

#### 3.4.2.1 Propriétés des coefficients harmoniques

Dans le chapitre précédent, nous avons déjà explicité les propriétés des coefficients harmoniques<sup>10</sup>. Elles sont toujours valables pour les coefficients complexes fournis par l'identification magnétodynamique : d'une part ces coefficients ne dépendent que de l'état de la source et de son comportement dynamique (et pas de la mesure) et d'autre part ils interviennent linéairement dans la mesure du fait de la linéarité du modèle. Ces deux propriétés nous indiquent clairement qu'une variation temporelle de la source aura une conséquence proportionnelle sur les coefficients. Ainsi, s'il est possible de distinguer sur la mesure (voir Fig.3.5) le type de source, il sera également possible de le distinguer sur les coefficients harmoniques.

Pour permettre de distinguer les trois différents types de source nous allons maintenant procéder au problème direct pour chacune de ces sources afin de cerner les spécificités des coefficients harmoniques qui vont nous permettre de les discriminer. Afin d'être le plus précis possible, nous manipulerons uniquement la composante  $B_r$  du vecteur  $\vec{B}$  de l'induction magnétique et, du fait des propriétés des coefficients harmoniques, les conclusions auxquelles nous aboutirons seront valables pour toutes les mesures et tous les coefficients.

---

<sup>9</sup>les mesures sont ici à prendre au sens large, puisque les variations de la source touchent toutes les grandeurs électromagnétiques mesurables.

<sup>10</sup>Voir §2.2.1.4



### 3.4.2.2 Coefficients d'une source pulsante

Soit, la composante  $B_r$  d'une source pulsant à la fréquence  $f$  dont l'écriture est proposée par (3.8). Elle s'écrit alors :

$$B_r = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \cdot r^{-(n+2)} \cdot \sum_{m=0}^n [a_{n,m} \cos(m\phi) + b_{n,m} \sin(m\phi)] \cdot P_n^m(\cos \theta) \cdot \sin(2\pi ft + \psi_p) \quad (3.18)$$

Cette expression montre qu'il est possible, du fait de l'indépendance des variables spatiales et temporelles, d'affecter la variation temporelle de la source aux coefficients harmoniques, c'est-à-dire d'écrire :

$$B_r = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \cdot r^{-(n+2)} \cdot \sum_{m=0}^n [a'_{n,m} \cos(m\phi) + b'_{n,m} \sin(m\phi)] \cdot P_n^m(\cos \theta) \quad (3.19)$$

avec :  $a'_{n,m} = a_{n,m} \cdot \sin(2\pi ft + \psi_p)$  et  $b'_{n,m} = b_{n,m} \cdot \sin(2\pi ft + \psi_p)$

Cette démarche est parfaitement cohérente et traduit le fait que le caractère intrinsèque des coefficients est également valable pour la dynamique de la source. Puisque l'identification magnétodynamique détermine des coefficients complexes, nous explicitons le vecteur  $\mathbf{C}'$  des coefficients harmoniques d'une source tournante sous la forme :

$$\mathbf{C}' = \frac{\mathbf{C}}{2j} \cdot [\exp(j(2\pi ft + \psi_p)) - \exp(-j(2\pi ft + \psi_p))] \quad (3.20)$$

alors nous pouvons faire le lien avec les coefficients harmoniques identifiés. En effet, l'expression (3.20) du vecteur des coefficients de la source pulsant à la fréquence  $f$  est caractérisée par deux fréquences issues de la décomposition complexe du sinus. Nous en déduisons donc que l'identification d'une telle source conduit à deux vecteurs de coefficients relatifs aux fréquences caractéristiques, qui sont :

$$\begin{cases} \mathbf{C}_0^{-f} = \frac{-\mathbf{C}}{2j} \cdot \exp(-j\psi_p) \\ \mathbf{C}_0^{+f} = \frac{+\mathbf{C}}{2j} \cdot \exp(j\psi_p) \end{cases} \quad (3.21)$$

Une illustration de ce type de décomposition est donnée par les coefficients de la source pulsante  $S_1$  du tableau (3.1). Par exemple, le coefficient  $\bar{a}_{1,0}$  identifié et relatif à cette source vaut  $(.65-2.41j)1e-7$  (voir tableau 3.3) ce qui correspond au coefficient  $\mathbf{C}_0^{+f}$  de (3.21) lorsque  $\mathbf{C}$  et  $\psi_p$  prennent les valeurs des paramètres de cette source.

### 3.4.2.3 Coefficients d'une source tournante

La composante  $B_r$  d'une source tournant à la vitesse  $\Omega$  relative à l'écriture de l'induction magnétique (3.9) s'écrit :

$$B_r = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \cdot r^{-(n+2)} \cdot \sum_{m=0}^n [a_{n,m} \cos(m(\phi - \Omega t + \psi_t)) + b_{n,m} \sin(m(\phi - \Omega t + \psi_t))] \cdot P_n^m(\cos \theta) \quad (3.22)$$

Pour simplifier l'écriture nous considérerons le déphasage des sources tournantes nul à l'origine, ce qui signifie que les coefficients harmoniques sont déterminés par la position de la source à l'instant initial. Alors, en manipulant les sinus et cosinus, l'expression (3.23) peut encore s'écrire comme (3.19) :

$$B_r = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \cdot r^{-(n+2)} \cdot \sum_{m=0}^n [a'_{n,m} \cos(m\phi) + b'_{n,m} \sin(m\phi)] \cdot P_n^m(\cos \theta) \quad (3.23)$$

avec les coefficients  $a'_{n,m}$  et  $b'_{n,m}$  définis par les rotations :

$$\left. \begin{array}{l} \forall (n, m) \\ m \neq 0 \end{array} \right\} : \quad \begin{bmatrix} a'_{n,m} \\ b'_{n,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(m\Omega t) & -\sin(m\Omega t) \\ \sin(m\Omega t) & \cos(m\Omega t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{n,m} \\ b_{n,m} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Ainsi, la rotation d'une source suivant l'axe  $z$  correspond à la rotation de ses coefficients. Notons que lorsque  $m$  est nul la rotation de la source n'a pas de sens puisqu'elle correspond à la rotation d'une source axisymétrique<sup>11</sup>. L'étape suivante consiste à chercher l'expression des coefficients harmoniques complexes identifiés. Pour ce faire nous explicitons la forme complexe de la rotation (3.24) :

$$\left. \begin{array}{l} \forall (n, m) \\ m \neq 0 \end{array} \right\} : \quad \begin{bmatrix} a'_{n,m} \\ b'_{n,m} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left\{ e^{+jm\Omega t} \cdot \begin{bmatrix} 1 & j \\ -j & 1 \end{bmatrix} + e^{-jm\Omega t} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -j \\ j & 1 \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{bmatrix} a_{n,m} \\ b_{n,m} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Pour une vitesse de rotation  $\Omega$  et un terme  $m$  donnés, il y a donc deux fréquences caractéristiques. Par exemple, les coefficients complexes identifiés aux fréquences positives  $f_m = m\Omega/2\pi$  sont alors :

$$\left. \begin{array}{l} \forall (n, m) \\ m \neq 0 \end{array} \right\} : \quad \begin{bmatrix} a'_{n,m} \\ b'_{n,m} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & j \\ -j & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{n,m} \\ b_{n,m} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

L'illustration de cette identification complexe est donnée par la source tournante  $S_2$  du tableau 3.1 dont l'identification des termes harmoniques  $a_{2,1}$  et  $b_{2,1}$  est obtenue en appliquant (3.26) aux paramètres qui définissent cette source.

<sup>11</sup>une source axisymétrique est invariante par rotation

### 3.4.2.4 Coefficients d'une source tournante et pulsante

Enfin, la composante  $B_r$  de l'induction d'une source qui tourne à la vitesse  $\Omega$  et pulse à la fréquence  $f$  simultanément s'écrit à partir de (3.10) :

$$B_r = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \cdot r^{-(n+2)} \cdot \sum_{m=0}^n [a_{n,m} \cos(m(\phi - \Omega t)) + b_{n,m} \sin(m(\phi - \Omega t))] \cdot P_n^m(\cos \theta) \cdot \sin(2\pi f t + \psi_p) \quad (3.27)$$

que nous pouvons écrire sous la forme de (3.23) en posant les coefficients harmoniques  $a'_{n,m}$  et  $b'_{n,m}$  :

$$\begin{bmatrix} a'_{n,m} \\ b'_{n,m} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} \cos(ct - \phi_p) & -\sin(ct - \phi_p) \\ \sin(ct - \phi_p) & \cos(ct - \phi_p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(dt + \phi_p) & -\sin(dt + \phi_p) \\ \sin(dt + \phi_p) & \cos(dt + \phi_p) \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{bmatrix} a_{n,m} \\ b_{n,m} \end{bmatrix}$$

avec  $c = (m\Omega - \omega)$  et  $d = (m\Omega + \omega)$

(3.28)

Nous constatons que ce type de source se décompose en deux sources tournantes de fréquences respectives  $f_1 = m\Omega - \omega$  et  $f_2 = m\Omega + \omega$ . C'est ce que traduit l'écriture (3.28) qui donne les coefficients d'une source tournante comme la somme de deux rotations de coefficients. Un exemple de décomposition de source tournante et pulsante est donné par la source  $S_3$  du tableau (3.1). Le couple de fréquences identifié relatif au terme  $b_{3,1}$  est  $f_1=2\text{Hz}$  et  $f_2=6\text{Hz}$  (voir tableau 3.3), pour chacune de ces fréquences les coefficients identifiés sont ceux d'une source tournante.

### 3.4.2.5 Bilan des différents types de sources

L'écriture des coefficients harmoniques des différentes sources a fait ressortir les propriétés suivantes :

1. Tout d'abord, la dynamique des coefficients harmoniques est celle de la source. Ce qui va nous permettre d'identifier les paramètres des différents types de sources, uniquement en observant les variations des coefficients. Ce point est essentiel car, contrairement aux mesures, les coefficients concentrent l'information du modèle du fait de sa globalité.
2. Toute source peut se décomposer en source pulsante puisque la mesure est réelle. La distinction d'une source pulsante est donc trop générale et nous considérerons dans la suite de cette étude qu'une source pulse si vraiment aucune autre dynamique ne peut lui être assimilée.
3. La seule vraie distinction dynamique possible pour une source est de déterminer si elle pulse ou si elle tourne. Pour remonter au type de source nous commencerons donc par sélectionner les sources selon qu'elles sont tournantes ou pulsantes.
4. Nous voyons aussi que toute source tournante-pulsante est une combinaison de sources tournantes. Il est cependant possible de classer ces sources en couples de façon à identifier une source Tournante-pulsante.

### 3.4.3 Classification en types de sources

Forts de l'analyse des coefficients harmoniques de chaque source, nous allons proposer un algorithme de classification des coefficients déterminés par l'identification magnétodynamique. Il s'agit de distinguer les types de sources en utilisant au mieux les propriétés des coefficients de ces sources. En particulier, nous insisterons sur la mise en œuvre de la distinction entre sources pulsantes et tournantes.

#### 3.4.3.1 Séparation des sources tournantes

Pour saisir la difficulté de la séparation des deux principaux types de sources, nous devons rappeler que chaque coefficient identifié correspond à une source pulsante. Ainsi, si nous regardons chaque coefficient indépendamment, il est absolument impossible de distinguer une source pulsante d'une source tournante. Heureusement, lorsqu'une source tourne ses coefficients tournent également et de ce fait l'observation globale des variations des 2 coefficients d'un même terme harmonique nous permet de distinguer les deux types de sources.

La séparation de ces deux sources repose donc sur l'observation simultanée des coefficients d'un même ordre. Nous supposons ainsi que les coefficients d'un terme harmonique s'écrivent comme la somme de coefficients d'une source tournante et d'une source pulsante. Alors les coefficients réels de la source sont obtenus en faisant la somme des coefficients conjugués à chaque fréquence et vérifient :

$$\left. \begin{array}{l} \forall (n, m) \\ m \neq 0 \end{array} \right\} : \begin{bmatrix} a_{n,m}(t) \\ b_{n,m}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a'_{n,m,p}(t) \\ b'_{n,m,p}(t) \end{bmatrix}}_{\text{pulsant}} + \underbrace{\begin{bmatrix} a'_{n,m,t}(t) \\ b'_{n,m,t}(t) \end{bmatrix}}_{\text{tournant}} \quad (3.29)$$

que nous pouvons écrire à l'aide de (3.19) et (3.24) sous forme du système linéaire :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{n,m}(t) \\ b_{n,m}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{Coeff}_{Id}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sin(2\pi ft + \psi_p) & 0 & \cos(2\pi ft) & -\sin(2\pi ft) \\ 0 & \sin(2\pi ft + \psi_p) & \sin(2\pi ft) & \cos(2\pi ft) \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}(t, \phi_p)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_{n,m,p} \\ b_{n,m,p} \\ a_{n,m,t} \\ b_{n,m,t} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_f} \quad (3.30)$$

Nous aurons séparé ces deux sources lorsque la phase  $\psi_p$  et les coefficients  $\mathbf{C}_f$  seront clairement identifiés. Nous avons donc 5 paramètres à déterminer ce qui nécessite l'écriture du système linéaire (3.30) à au moins trois instants différents<sup>12</sup>.

Cependant, si le système est linéaire, il dépend du paramètre  $\psi_p$  et de ce fait une résolution linéaire de (3.30) ne peut être envisagée. Une solution possible consiste à utiliser un algorithme itératif qui minimise la distance :

$$d = \|\mathbf{Coeff}_{Id} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{C}_f\|^2 \quad (3.31)$$

<sup>12</sup>ce qui est facilement obtenu en faisant pulser les coefficients issus de l'identification magnétodynamique

La solution qui garantit la distance  $d$  minimale détermine les 5 paramètres de la source. Grâce à ces paramètres nous pouvons écrire les coefficients des termes pulsants et des termes tournants à cette fréquence. Nous venons ainsi de montrer qu'il était possible de séparer une source pulsante d'une source tournante à une même fréquence et au même ordre uniquement en observant la variation des coefficients harmoniques.

### 3.4.3.2 Algorithme de classification

L'identification magnétodynamique fournit des coefficients complexes qui sont ceux de la décomposition de la source à chaque fréquence. Toutes les sources identifiées sont pulsantes du fait de la généralité de l'identification. De ce fait, nous ne pouvons pas distinguer de source dont le comportement est réellement pulsant. Par contre, les sources tournantes peuvent être distinguées des sources pulsantes du fait qu'elles induisent des relations particulières entre les coefficients. Alors naturellement, la première étape de la classification consiste à faire la distinction entre une source selon qu'elle tourne ou pulse (voir Fig.3.6) : c'est l'étape de *sélection des sources*.

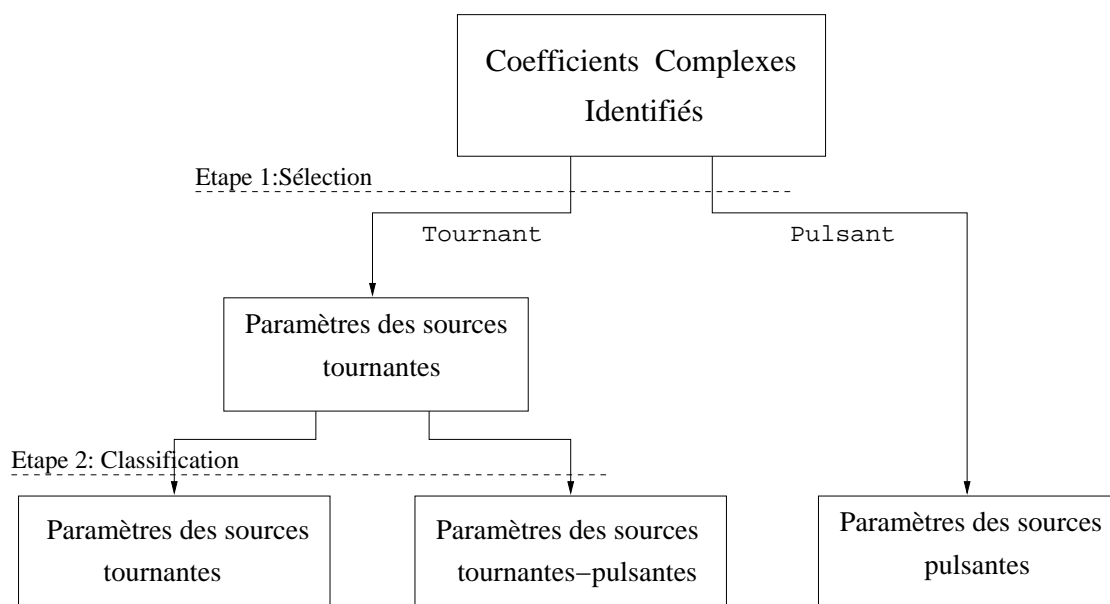


FIG. 3.6 – Algorithme de classification des coefficients identifiés en fonction du type de source.

Cette première étape fournit d'une part les coefficients des sources pulsantes et d'autre part ceux des sources tournantes. Nous n'avons plus de travail d'identification à effectuer sur les coefficients pulsants, par contre nous pouvons classer les sources tournantes suivant qu'elles tournent et pulsent ou non. Pour cela, nous chercherons des couples de fréquences correspondant aux mêmes termes harmoniques : il s'agit de l'étape de *classification des sources tournantes* (voir Fig.3.6).

Cet algorithme permet donc de distinguer les paramètres des différents types de source. En particulier, il préserve l'extrapolation en garantissant qu'une source

dont nous n'avons pas spécifié le comportement se décompose au moins en sources pulsantes. Mais le bon résultat de cet algorithme est conditionné par la première étape de sélection qui nécessite une analyse fine capable de distinguer parmi les sources pulsantes, celles qui tournent, ce qui est rendu possible par l'analyse temporelle des variations des coefficients.

## 3.5 Conclusions

Nous venons de mettre en évidence les mécanismes de l'identification magnétodynamique d'une source en faisant un effort particulier pour montrer que notre démarche d'identification était toujours possible dans un milieu conducteur. Sa première application est donc l'extrapolation des signatures basses fréquences quel que soit le milieu. En effet, elle fournit, tout comme l'identification statique, un ensemble de coefficients qui détermine l'unique écriture analytique des différentes grandeurs du champ électromagnétique générées par une source dynamique. L'extrapolation est essentielle dans la démarche de discrétion qui est la nôtre. Elle nous permet grâce aux propriétés de décroissance des termes harmoniques de prédire quels seront ceux à l'origine des signatures électromagnétiques d'une source.

Mais l'identification n'est pas seulement un outil d'extrapolation de signature. Elle permet également de classer les phénomènes selon leur fréquence et selon leur comportement spatial, ce qui nous autorise à faire des hypothèses techniques précises sur leur origine (rotor, encoches, ...). Cette analyse est d'autant plus précieuse qu'elle ne nécessite aucune information a priori sur la source analysée. De ce fait, l'identification est aussi un outil efficace de diagnostic de sources qui nous permettra de remonter aux causes des signatures afin de proposer des solutions technologiques, comme les blindages que nous proposerons dans la deuxième partie de ce manuscrit [Sch05b][Rou06].

Cependant, les performances de l'identification sont encore limités par le nombre de capteurs et l'ordre  $N$  maximum des sources. En effet, la décomposition spatiale doit respecter les conditions d'échantillonnages, tout comme l'identification magnétostatique. C'est pourquoi, nous proposons maintenant un chapitre de compléments statistiques à la résolution de systèmes linéaires qui va nous permettre de résoudre l'identification magnétostatique en complétant la mesure par de l'information a priori. Sa lecture va donc apporter les compléments nécessaires qui vont permettre l'identification magnétodynamique si l'ordre  $N$  de la source est inconnu ou le nombre de capteurs insuffisant.



# Chapitre 4

## Compléments statistiques à l'identification magnétique

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>73</b>
4.1.1	Objectifs	73
4.1.2	Notions de statistiques	75
4.1.3	L'inversion Bayésienne	81
<b>4.2</b>	<b>Estimateur de maximum de vraisemblance</b>	<b>85</b>
4.2.1	Écriture	86
4.2.2	Propriétés - Optimalité	86
4.2.3	Indicateurs de qualité de l'estimateur	87
4.2.4	Exemple d'application des indicateurs de qualité	89
<b>4.3</b>	<b>Estimateurs Bayésiens</b>	<b>93</b>
4.3.1	Maximum a posteriori (MAP)	94
4.3.2	Compléments sur l'estimation bayésienne	98
<b>4.4</b>	<b>Conclusions</b>	<b>102</b>

---

## 4.1 Introduction

### 4.1.1 Objectifs

L'identification magnétique proposée aux chapitres 2 et 3 de cette étude est restreinte par de nombreuses limites. La première que nous évoquons concerne le choix du modèle, en particulier celui de l'ordre  $N$  d'une source qui conditionne le nombre minimum de mesures indépendantes nécessaires à l'identification. Malheureusement, comme nous le montrions dans les chapitres précédents la notion d'ordre est relative d'une part à la distance d'observation et d'autre part à la qualité des mesures. Ainsi, quel que soit le nombre de mesures disponibles, si nous cherchons à faire une identification parfaite, nous pouvons d'ores et déjà être sûr



que le problème sera mal posé<sup>1</sup>, car une source d'ordre fini  $N$  est une vue de l'esprit qui ne trouve de justification que dans les limites de la mesure. L'art dans ce domaine progressant, nous devons parfaitement broser les contours de l'identification magnétique afin d'obtenir une méthodologie qui en fasse un outil optimal.

Dans un contexte aussi flou, l'identification magnétique semble compromise. Heureusement, bien que le problème ne soit pas parfaitement bien posé, sous réserve d'hypothèses, il est possible de trouver une solution optimale, c'est-à-dire qui soit la plus proche de la mesure tout en respectant nos hypothèses : nous parlons alors de *problèmes conditionnellement bien posés*<sup>2</sup>. Les hypothèses exploitées sont alors issues d'une connaissance a priori du problème qui décrit un contexte ou voisinage dans lequel nous cherchons la solution<sup>3</sup>. Les hypothèses les plus courantes et les plus simples exploitées conduisent à une simplification du problème qui rend la solution plus régulière, soit en négligeant un sous-ensemble instable du système linéaire comme c'est le cas pour la régularisation par troncature, soit en favorisant des hypothèses de stabilité de la solution comme c'est le cas de la régularisation au sens de Tikhonov.

Dans le contexte de cette étude, la limite principale de la régularisation est liée à la globalité des coefficients harmoniques. Par exemple, la troncature va favoriser les ordres les plus stables, ce qui n'est pas nécessairement une information pertinente à propos d'une source électromagnétique active. Il faut donc utiliser une information conduisant à une simplification judicieuse du système ce qui passe par une quête d'information qui permet de spécifier avec précision le contexte de la solution<sup>4</sup>.

Bien que les méthodes de régularisation, en particulier la régularisation de Tikhonov permettent de prendre en compte l'information a priori sur les coefficients harmoniques recherchés, elles offrent peu de moyens d'évaluer la pertinence de l'information a priori, la performance de l'inversion et l'origine des incertitudes ou instabilités. L'apport des méthodes statistiques d'estimation paramétrique est essentiel en ce sens. En effet, une interprétation statistique de l'information, qu'elle soit issue de la mesure ou a priori (subjective ou objective), augmente nos capacités à identifier les coefficients harmoniques grâce aux outils classiques de l'analyse statistique. En particulier les tests d'hypothèses qui sont la base de la théorie statistique de la décision et le fondement même de l'*inférence bayésienne* que nous allons exploiter dans ce chapitre pour parfaire l'identification magnétique.

L'objectif de ce chapitre est donc de compléter l'identification magnétique à l'aide d'outils issus de l'analyse statistique. Ces outils devront nous permettre de prédire les performances de l'inversion, tant au niveau des mesures, de l'information a priori que des coefficients identifiés. Ainsi nous pourrons prendre une décision conduisant, soit à une mise à jour de l'information a priori ou des mesures, soit à la solution optimale recherchée. Pour atteindre ce but, nous proposons

<sup>1</sup>Nous ne pouvons que vous encourager à lire l'Annexe B

<sup>2</sup>voir Annexe B.1.6

<sup>3</sup>voir Annexe B et [Tik76],[Zhd02]

<sup>4</sup>Un exemple de recherche d'information sur les coefficients harmoniques peut être fourni par la simulation, par exemple les conclusions du moteur à aimants simulé en §2.4 vont permettre de chercher une solution à partir de la mesure dont les coefficients sont voisins de ceux fournis par la simulation.

un plan en trois parties. Dans un premier temps, nous allons rappeler des notions de statistiques et introduire l'inversion bayésienne ce qui doit nous offrir les outils nécessaires à la bonne compréhension des mécanismes intervenant dans la suite de cette étude. Dans un second temps, nous étudierons le cas de l'estimation paramétrique sans information a priori. Nous y verrons comment prédire a priori l'état de la solution en fonction du modèle ou de la mesure. Cette partie est essentielle pour la compréhension du calcul de blindage proposée au cours du chapitre 6 de cette étude. Enfin, nous exposerons le cas de l'estimation paramétrique bayésienne à l'aide de l'information a priori.

## 4.1.2 Notions de statistiques

Au regard de l'épaisseur des livres de statistiques, il serait ambitieux de vouloir donner, dans cette thèse, une connaissance approfondie en la matière. Nous commençons donc cette partie en précisant que seules les notions essentielles à cette étude vont être brièvement rappelées et que nous recommandons la lecture d'ouvrages tels que [Spi91] et [Fre97] à tous les lecteurs ne se sentant pas à l'aise avec le vocabulaire et les mécanismes statistiques.

### 4.1.2.1 Loi normale et système linéaire

Nous aimerions dire avec ironie que les sciences sont inexactes. En effet, elles nous permettent seulement de formuler des hypothèses et seul l'intervention des statistiques nous permet de les vérifier. Par exemple, comment pourrions-nous analyser la mesure sans avoir recours aux statistiques ?

C'est le caractère incertain du modèle harmonique et la qualité des mesures qui nous poussent à considérer notre problème inverse comme une estimation paramétrique et non comme le résultat d'une opération mathématique. Nous devons donc traduire les informations, les modèles et les mesures sous la forme de distributions de probabilités représentatives de leur comportement.

Comme le montre la généralité avec laquelle le problème inverse bayésien est généralement abordé [Tar82][Rob92][Rob94][Ber94][Dro02], les fonctions de densité de probabilités représentatives peuvent être quelconques. Néanmoins, dans le cadre de problèmes discrets linéaires, il est courant d'utiliser les distributions gaussiennes [Kay93][Tar87]. Comme le rappelle [Zhd02], l'utilisation de la loi normale est justifiée par le *théorème de la limite centrale*<sup>5</sup> et offre au praticien une bonne approximation des phénomènes et des outils simples. Dans cette étude nous utiliserons essentiellement la distribution normale, c'est pourquoi il convient avant tout de rappeler ses principales caractéristiques.

**Définitions** La loi normale est, en raison du théorème de la limite centrale, la loi de base permettant d'interpréter statistiquement les résultats obtenus à partir

---

<sup>5</sup>Toute somme de variables aléatoires indépendante et identiquement distribuées tend vers une certaine variable aléatoire. Sous des conditions larges, la loi de probabilité associée converge vers une loi normale.

de mesures. Cette loi se caractérise par son écart type  $\sigma$  et sa moyenne  $\mu$ . Elle se note  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  et est définie par la densité de probabilité :

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right] \quad (4.1)$$

s méthodes de régularisation : elle ne cherche pas à simplifier le modèle en tronquant un

$$p(x) = C^{ste} \cdot \exp\left[-\frac{1}{n} \frac{|x - \mu|^n}{\sigma^n}\right] \quad (4.2)$$

L'utilisation de ces lois suppose la linéarité du modèle et que les fonctions de densité de probabilité correspondant aux informations, mesures et paramètres du modèle ne possèdent pas de biais relatifs à la source d'information, la qualité des mesures, l'exactitude du modèle.

Les lois gaussiennes généralisées ont un rôle particulier dans l'estimation paramétrique que nous proposons :

- Commençons par la loi normale (voir Fig.4.1). Son intérêt principal est qu'elle permet une formulation matricielle simple de l'estimation et apporte des outils statistiques<sup>6</sup> qui permettent d'extraire des renseignements significatifs sur les hypothèses, mesures et paramètres estimés.
- Les lois gaussiennes généralisées apportent un complément d'information qui augmente la robustesse de l'estimation, mais implique des algorithmes d'optimisation comme par exemple la méthode du simplex [Leg96] ou les algorithmes d'échantillonnage statistique [Rob94][Vie99]. Prenons par exemple les gaussiennes généralisées de la figure 4.1 et imaginons qu'elles représentent les distributions de plusieurs mesures d'une même grandeur. (La loi gaussienne est intéressante pour sa bonne représentation.) Par ailleurs, si nous connaissons l'instrument de mesure utilisé, nous pouvons par exemple postuler sur une loi gaussienne  $n=1$  ce qui traduira une répartition plus étalée de la densité, c'est-à-dire des lois d'écart plus souples (voir Fig.4.1).

Pour conclure, la description statistique de l'information a priori, des mesures et du système linéaire que nous utiliserons en vue de la résolution de l'identification sera principalement basée sur l'utilisation de la loi normale. Cependant, nous seront amenés à utiliser des lois gaussiennes généralisées soit pour augmenter la robustesse de l'identification, soit pour définir un comportement particulier de l'information a priori.

**Application aux systèmes linéaires** Jusqu'ici, l'identification magnétique que nous proposons reposait essentiellement sur la définition d'un problème direct issu de la modélisation et qui donnait les mesures en fonction du vecteur des coefficients harmoniques  $\mathbf{C}$  sous la forme de (2.13) :

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{C} \quad (4.3)$$

---

<sup>6</sup>estimateurs de tendance centrale (moyenne, médiane) ou estimateurs de dispersion (écart type)

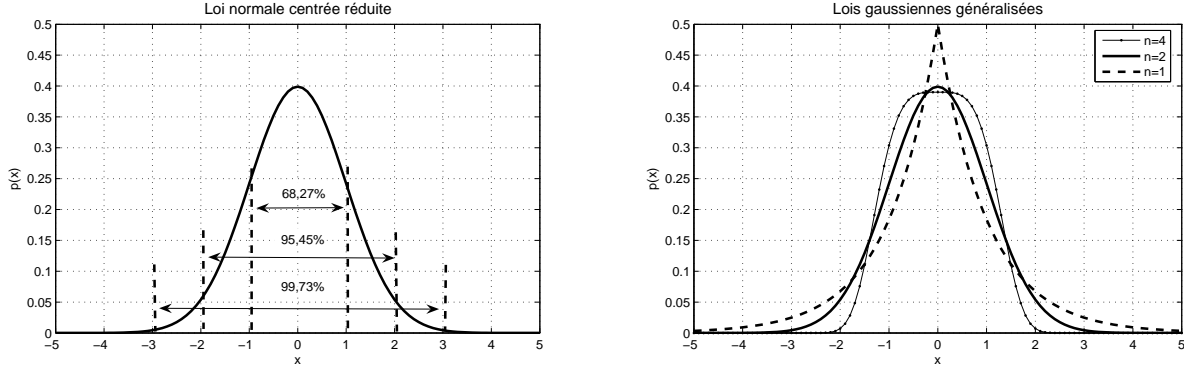


FIG. 4.1 – Loi normale centrée et intervalles de confiance (gauche). Lois gaussiennes généralisées pour  $n=1,2$  et  $4$  (droite)

Cependant, cette relation n'a que valeur de modèle et ne prend ni en compte les incertitudes de modélisation, ni les incertitudes de mesure : elle est donc trop restrictive et conduit, en dépit des efforts de stabilisation déjà proposés, à des solutions erronées. C'est pourquoi, nous proposons de redéfinir le problème direct en examinant d'un point de vue statistique la mesure magnétique  $\mathbf{B}_{mes}$ . Nous cherchons pour cela à définir la densité de probabilité  $p(\mathbf{B}_{mes}|\mathbf{C})$  correspondant à la distribution de probabilité de la mesure en fonction des coefficients harmoniques. En considérant que le modèle est représentatif des phénomènes, nous pouvons écrire [Tar82][Kay93] :

$$p(\mathbf{B}_{mes}|\mathbf{C}) \sim \exp \left[ -\frac{1}{2}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{C} - \mathbf{B}_{mes})^t \cdot \mathbf{S}_d^{-1} \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{C} - \mathbf{B}_{mes}) \right] \quad (4.4)$$

Cette densité correspond à la distribution que suit la mesure par rapport au modèle. Elle fait intervenir une matrice  $\mathbf{S}_d$  de covariance qui correspond aux incertitudes de mesure et de modélisation. La diagonale de cette matrice est particulièrement intéressante car elle est définie par la variance du bruit à chaque point de mesure. Précisons qu'il s'agit uniquement d'une description du problème direct précédent sous la forme de la probabilité de trouver la mesure lorsque les coefficients et les incertitudes (contenues dans  $\mathbf{S}_d$ ) sont connus.

Afin d'illustrer ce problème direct nous proposons l'exemple classique de l'interpolation linéaire. Supposons qu'au cours d'une expérience nous mesurons un phénomène dont le comportement est assimilé à une droite affine d'équation :

$$y = a \cdot x + b \quad (4.5)$$

L'approche classique consiste à poser le problème direct qui traduit le système linéaire aux  $n$  points de mesures et dont les deux solutions sont les coefficients  $a$  et  $b$ , sous la forme matricielle :

$$\underbrace{\mathbf{Y}}_{n \times 1} = \underbrace{\mathbf{A}}_{(n \times 2)} \cdot \mathbf{C} \text{ avec } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

L'approche statistique permet une interprétation plus riche du problème direct. Elle se traduit par la fonction de densité de probabilité  $p(\mathbf{Y}|\mathbf{C})$  :

$$p(\mathbf{Y}|\mathbf{C}) \sim \exp \left[ -\frac{1}{2}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} - \mathbf{Y})^t \cdot \mathbf{S}_d^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} - \mathbf{Y}) \right] \quad (4.7)$$

Imaginons par exemple que nous ne possédions qu'un seul point de mesure (voir mesure1, droite1 Fig4.2). Le système est alors sous-déterminé. Il y a donc une infinité de couples (a,b) solutions au problème c'est-à-dire une infinité de droites solutions : pour l'instant ce résultat est des plus communs. Ce qu'apporte la densité  $p(\mathbf{Y}|\mathbf{C})$  dans la description de ce problème direct est essentiel, comme le montre la figure centrale de (Fig.4.2). Nous voyons qu'elle est maximale le long de la droite définie par (4.5) et la mesure 1. Ce qui est remarquable, ce n'est pas cette droite, mais la possibilité que nous avons de choisir un couple de coefficients (a,b) quelconque en évaluant l'erreur que nous commettons par rapport à la description du problème direct : ce principe est à la base de la théorie de la décision.

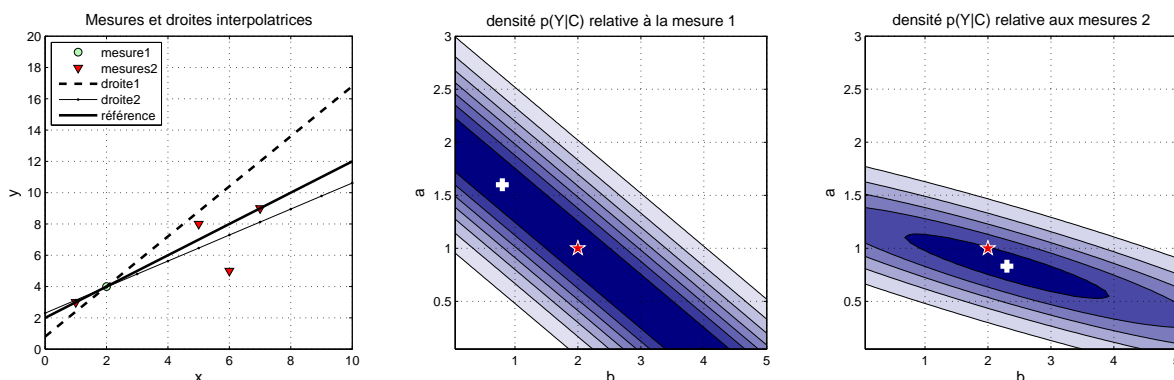


FIG. 4.2 – Représentation des densités de probabilité d'un problème d'interpolation linéaire (figure de gauche) à l'aide d'une seule mesure (figure centrale) et de plusieurs mesures bruitées (figure de droite). L'étoile correspond à la solution de référence, c'est-à-dire la droite que devrait suivre théoriquement la mesure, la croix correspond au couple de paramètres (a,b) que nous avons choisi en fonction de la mesure et correspondant à une droite respective.

En augmentant le nombre de points de mesure (mesures 2 et figure de droite) nous affinons la loi statistique. Dans ce cas nous pouvons choisir un couple (a,b) suivant différents critères<sup>7</sup> qui traduisent des approches statistiques différentes. Dans le cas de cet exemple, nous avons choisi le couple (a,b) maximisant la densité de probabilité (croix blanche), c'est-à-dire celui correspondant au maximum de vraisemblance. Mais tout autre choix aurait été possible à condition de pouvoir le justifier statistiquement, ce que permet la loi  $p(\mathbf{Y}|\mathbf{C})$ . Enfin, cette écriture du problème direct est particulièrement riche dans son interprétation statistique. En effet, nous héritons des outils qui vont nous permettre de diagnostiquer l'état du problème et celui des solutions.

<sup>7</sup>Modes, médiane, espérance, autres moments ...

### 4.1.2.2 Théorie de la décision

Comme nous venons de voir, l'intérêt de l'approche statistique est de traduire l'état du problème direct sous forme d'une densité de probabilité. Nous allons maintenant poser les bases de l'estimation paramétrique, qui d'un point de vue pratique est l'extraction de l'information contenue dans cette description statistique du problème direct. Dans cette quête d'information les outils principaux que nous exploiterons seront essentiellement le(s) mode(s), l'espérance et la variance qui caractérisent les lois normales<sup>8</sup>.

**Estimateur efficace** Avant d'aller plus loin, commençons par introduire la notion d'*estimateur efficace*. Cette notion est liée à la précision de l'information contenue dans la description statistique du problème direct. Nous verrons dans la suite de cet exposé que pour traduire la qualité d'informations a priori nous utiliserons des probabilités dont les variances sont représentatives de leur précision. Au contraire, si nous voulons faire une bonne estimation des grandeurs relatives à partir d'une densité de probabilité, il faut que le problème soit décrit de façon précise, ce qui suppose que la variance est faible. Un estimateur efficace est celui qui utilise une densité de probabilité suffisamment précise c'est-à-dire celui dont la variance est minimale. Nous favoriserons toujours l'estimateur dont la variance est la plus faible, si bien sûr il est représentatif des mesures. Reprenons l'exemple précédent (voir Fig.4.2), la densité de probabilité  $p(\mathbf{Y}|\mathbf{C})$  relative à la mesure 2 a une variance plus petite que celle de la mesure 1, ce qui réduit considérablement le choix des couples (a,b) solutions, par exemple un seul correspond au maximum. Cependant, connaissant la référence, nous savons que ce choix n'est pas le plus juste et nous pouvons supposer que cette erreur d'estimation est liée à la qualité de certaines mesures intervenant dans l'estimation.

**Tests d'hypothèses** Pour prendre une décision, il faut poser des hypothèses statistiques qui permettent une meilleure interprétation et une décision vis-à-vis des différentes sources d'information : modèle, mesures, a priori. Les procédés qui permettent de décider si les hypothèses sont vraies ou fausses sont appelées *tests d'hypothèses*. Dans le cadre générale de la statistique nous pouvons être amenés à tester si la statistique suit une loi gaussienne, si des mesures sont aberrantes ou une hypothèse trop risquée. Dans le cadre de la distribution normale, il existe des tests simples. Supposons qu'une mesure suive une loi normale de moyenne  $\mu$  et d'écart type  $\sigma$ . Nous pouvons définir les *intervalles de confiance* définis par la probabilité de trouver une mesure à p% (voir Fig.4.1). Alors, si nous cherchons à évaluer si une nouvelle mesure suit la même loi que les précédentes, nous pouvons formuler la règle de décision suivante :

- Si la mesure est dans l'intervalle de confiance à p %, elle est considérée comme faisant partie de la mesure.
- Sinon, elle est dans la région critique externe à l'intervalle de confiance et doit être rejetée.

---

<sup>8</sup>D'autres outils peuvent-être utilisés pour estimer une variable et sa précision, comme la médiane, l'écart ou d'autres moments d'ordre supérieur [Leg96][Sap76][Rob92]

Pour comprendre l'intérêt de ces tests revenons encore une fois à notre problème d'interpolation de droites précédent (voir Fig.4.3). Supposons par exemple, que les points mesurés conduisent à une variance suivant  $y$ ,  $\sigma_y^2$  égale à  $(0.7)^2$  et cherchons à présent à évaluer si il n'y a pas une mesure aberrante.

Pour ce faire nous commençons par estimer les paramètres (a,b) les plus probables à partir de l'ensemble des mesures (mesures 2) en choisissant le maximum de vraisemblance de la densité (voir figure du centre). Nous trouvons alors les paramètres de la droite 2. Si la droite est solution nous devrions trouver, respectivement à la variance de la mesure, que 99.73% des mesures sont voisines à moins de  $3\sigma_y$  de la droite estimée<sup>9</sup>. Or visuellement nous voyons que la troisième mesure sort de cet intervalle. Nous venons de vérifier que cette mesure est aberrante par rapport à la distribution des mesures définie par  $\sigma_y$ .

Si maintenant nous négligeons cette mesure nous commettrons une erreur maximale inférieure à 0.27%. Dans ce cas, la nouvelle densité de probabilité traduisant l'état du problème direct possède une variance plus faible (voir figure de droite) nous pouvons donc affirmer que notre nouvelle estimation sera plus efficace. Nous venons de stabiliser l'écriture du problème direct en retirant les incertitudes causées par une mesure aberrante.

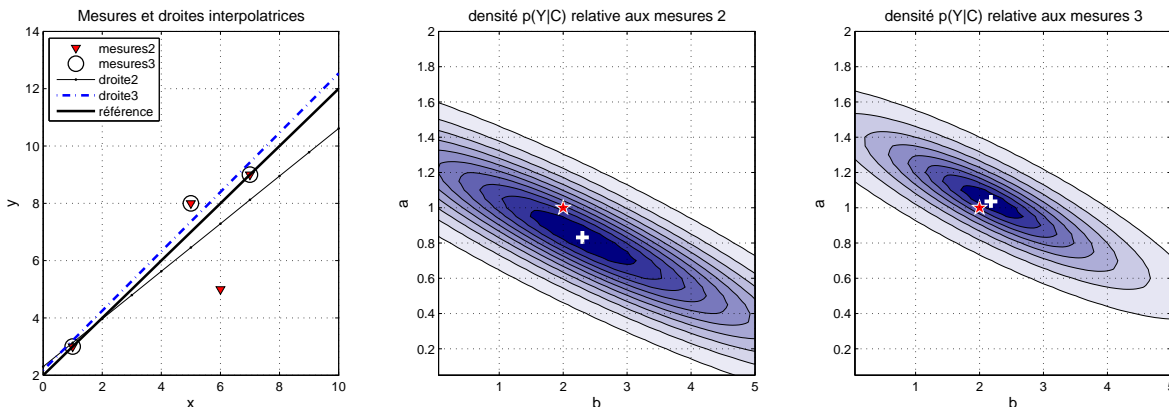


FIG. 4.3 – Représentation des densités de probabilité d'un problème inverse d'interpolation linéaire (figure de gauche) à l'aide des mesures 1 (figure centrale) et des mesures 2 (figure de droite). L'étoile correspond à la solution de référence, c'est-à-dire la droite que devrait suivre théoriquement la mesure, la croix correspond au couple de paramètres (a,b) que nous avons choisi en fonction de la mesure et correspondant à une droite respective. Les mesures 3 sont obtenues en retirant un point aberrant, en conséquence la variance de la densité de probabilité est plus petite (voir figure de droite).

Nous devons cependant préciser que ce mécanisme n'est réellement possible que lorsque le nombre de mesures permet une représentation statistique et que les mesures aberrantes sont minoritaires. Dans tout autre cas l'élimination des mesures aberrantes conduira à une estimation fautive. Dans cette section nous avons illustré une décision à l'aide des intervalles de confiance, nous aurons encore recours au test du  $\chi^2$  qui est généralement utilisé pour vérifier une hypothèse gaussienne et que nous utiliserons pour identifier les mesures aberrantes.

<sup>9</sup>Nous introduirons plus loin les valeurs des résidus de mesure, voir §4.2.3.2

Nous venons de rappeler brièvement les notions de statistiques qui nous seront utiles dans notre processus d'identification magnétique. Elles vont maintenant nous permettre de d'écrire statistiquement notre problème direct, les informations a priori et de résoudre notre système linéaire en utilisant une interprétation des densités de probabilité qui permette une estimation optimale des paramètres du modèle harmonique.

### 4.1.3 L'inversion Bayésienne

Nous venons de voir que l'intérêt de traduire un système linéaire par le biais d'une densité de probabilité permettait d'interpréter statistiquement l'information qu'il contient. Cette interprétation montre le lien entre probabilité et information. Malheureusement, elle n'est pas optimale quand le système est sous-déterminé<sup>10</sup>. Dans ce cas, il est nécessaire d'apporter un complément d'information au système de façon à préciser la solution et ainsi prendre une décision par rapport aux solutions possibles : c'est le principe de l'*inférence Bayésienne*.

#### 4.1.3.1 L'information comme densité de probabilité

L'estimation ou *inversion bayésienne* peut être considérée comme une combinaison d'informations de nature différente à propos des mesures, du modèle et des paramètres. Pour permettre cette estimation nous devons avoir une quantité d'information suffisante à propos des paramètres de sorte qu'il soit possible de décider d'une solution. C'est pour cette raison que Tarantola considère l'inversion bayésienne comme une quête d'information [Tar82][Tar87][Tar05]. De ce point de vue, le problème inverse sera l'ensemble des paramètres qui représentent au mieux l'information : un problème inverse n'est plus un calcul de paramètres, mais **un cumul d'informations qui décrivent le comportement de la solution**. Les deux sources d'informations possibles sont les mesures et l'information a priori que nous pouvons formuler à propos des paramètres estimés. Lorsque la qualité et le nombre de mesures sont suffisants pour résoudre le problème il n'est pas nécessaire d'avoir recours à l'information a priori, bien que son emploi augmente toujours la précision de l'estimé, à condition bien sûr que cette information soit cohérente et correctement traduite.

Nous avons vu dans les exemples précédents (voir Fig.4.2 et 4.3) que le problème direct pouvait s'interpréter comme une densité de probabilité dont la variance était représentative de la qualité de la mesure et du modèle en fonction des paramètres que nous voulons estimer. Quelle que soit sa nature, l'information peut donc être traduite sous forme d'une densité de probabilité.

Afin de comprendre comment traduire l'information, prenons trois types d'informations différentes à propos d'un paramètre  $x$  :

1. Imaginons que nous sommes certains que  $x$  prenne la valeur  $x_0$ . Alors, en théorie, un échantillonnage quelconque de  $x$  doit avoir une variance  $\sigma^2$  nulle

---

<sup>10</sup>De façon générale il est toujours mieux de faire intervenir l'information a priori car elle améliore l'estimation



et une moyenne égale à  $x_0$  : la densité de probabilité de trouver  $x$  est donc la distribution de Dirac centrée en  $x_0$  (Fig.4.4-A).

2. Si maintenant, nous savons que  $x$  vaut en moyenne  $x_0$ , mais que nous ne sommes pas parfaitement sûr de cette hypothèse. Nous traduisons notre connaissance de  $x$  par une loi normale dont la variance est relative à la connaissance que nous avons de  $x$  (Fig.4.4-B). C'est le cas par exemple pour un vecteur de mesure dont nous pouvons estimer la matrice de covariance (ou au moins sa diagonale).
3. Enfin, si nous n'avons pas d'information précise sur  $x$ , nous supposons alors que toutes les valeurs de  $x$  sont équiprobables, la probabilité est donc constante. Cette définition n'apporte pas d'information, à moins bien sûr que l'équiprobabilité soit valable sur un intervalle fermé  $[a,b]$  (voir Fig.4.4).

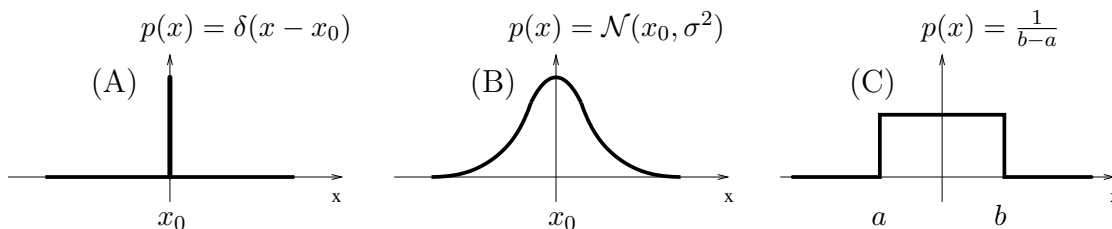


FIG. 4.4 – Exemples de densités de probabilités gaussiennes particulières. - (A) La distribution de Dirac - (B) une loi normale centrée - (C) Loi uniforme sur un intervalle  $[a,b]$  appelée également fonction porte.

Malheureusement, si cette représentation de l'information est aisée, elle n'en permet qu'une interprétation simple qui n'est pas conforme à l'information précise que nous avons des paramètres. Comme nous verrons dans la suite de cette étude, le choix de l'information a priori est essentiel et doit être fait avec exactitude et précision, pour ne pas induire d'erreurs d'estimation et permettre une résolution optimale.

A propos de l'information a priori, une polémique importante entoure l'inversion bayésienne. Certains considèrent que la difficulté d'interprétation statistique de l'information a priori est telle qu'elle conduit à une erreur systématique et refusent ainsi le principe de l'estimation bayésienne. Nous reviendrons sur ce point délicat dans la suite de notre exposé, pour l'heure nous allons présenter le théorème de Bayes qui est le postulat à l'origine de l'estimation paramétrique que nous allons exploiter.

#### 4.1.3.2 Théorème de Bayes

Le formalisme bayésien repose sur la *densité a posteriori* des paramètres que nous cherchons à estimer conditionnellement aux observations et aux informations *a priori* à notre disposition qui concernent les paramètres ou la forme du modèle.

Supposons que  $\mathbf{Y}$  soit le vecteur des observations et  $\mathbf{C}$  le vecteur des paramètres à estimer. La densité a posteriori  $p(\mathbf{C}|\mathbf{Y})$  conjointe de tous les paramètres est définie

à partir du théorème de Bayes [Bay63] :

$$p(\mathbf{C}|\mathbf{Y}) = \frac{p(\mathbf{Y}|\mathbf{C}) \cdot p(\mathbf{C})}{\int p(\mathbf{Y}|\mathbf{C}) \cdot p(\mathbf{C}) \cdot d\mathbf{C}} \quad (4.8)$$

où :

- $p(\mathbf{Y}|\mathbf{C})$  est la densité de probabilité conditionnelle des mesures connaissant les paramètres du modèle, c'est la *fonction de vraisemblance* que nous avons déjà utilisée pour traduire un problème direct (voir eq.4.7).
- $p(\mathbf{C})$  est la densité *a priori* relative aux paramètres  $\mathbf{C}$  choisie en fonction des connaissances disponibles, avant la prise en compte des mesures.
- enfin l'intégrale  $\int p(\mathbf{Y}|\mathbf{C})p(\mathbf{C})d\mathbf{C}$  est une constante de normalisation appelée *l'évidence bayésienne*.

La formule de Bayes (4.8) est à proprement parler l'inversion bayésienne. En effet, à l'aide des densités de probabilité disponibles sur l'observation, le modèle et les paramètres, nous obtenons une densité de probabilité conditionnelle représentative des coefficients connaissant l'observation. En quelque sorte, l'information que nous avons a été traduite sous forme de densité de probabilité et nous obtenons, par l'intermédiaire du théorème de Bayes, une densité de probabilité représentative de l'information que nous avons des paramètres recherchés. D'ailleurs, l'intérêt de l'approche bayésienne n'est pas d'estimer les paramètres, mais de recueillir le maximum d'information disponible à propos de ces derniers. C'est pourquoi la réelle solution de l'inversion est la densité de probabilité  $p(\mathbf{C}|\mathbf{Y})$  dont diverses interprétations sont possibles et aboutissent à des estimations différentes.

#### 4.1.3.3 Intérêt - Illustration

Nous allons maintenant revenir sur le théorème de Bayes afin d'illustrer sur un exemple simple utilisant des distributions normales le rôle et l'intérêt de l'information a priori pour l'estimation paramétrique bayésienne.

Imaginons que nous cherchons à estimer une grandeur  $x$  à partir de sa mesure. Pour déterminer, la densité de probabilité a posteriori nous devons dans un premier temps écrire la fonction de vraisemblance, traduire l'information a priori que nous avons a propos de  $x_0$  puis enfin écrire la densité a posteriori.

En admettant que la mesure soit donnée par une loi normale de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$ , nous pouvons écrire la fonction de vraisemblance :

$$p(mes|x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2} \right] \quad (4.9)$$

De plus si l'information a priori que nous possédons peut s'écrire sous forme d'une loi de probabilité normale centrée en  $x_0$  et de variance  $\tau^2$ , nous avons :

$$p(x) = \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{(x - x_0)^2}{\tau^2} \right] \quad (4.10)$$

Ce qui permet de définir la distribution a posteriori de la variable  $x$ , c'est-à-dire traduire l'ensemble de l'information disponible par la mesure ou l'a priori. Dans ce

cas, nous pouvons écrire cette distribution :

$$p(x|mes) \sim p(mes|x) \cdot p(x) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{(x - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]. \quad (4.11)$$

avec :

$$\mu_2 = \frac{\tau^2 \mu + \sigma^2 x_0}{\sigma^2 + \tau^2} \quad \sigma_2^2 = \frac{1}{\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}} \quad (4.12)$$

Ainsi, le résultat de l'inversion est une densité de probabilité dont les paramètres  $(\mu_2, \sigma_2^2)$  dépendent de ceux de la vraisemblance et de l'a priori. A partir de cet exemple, nous montrons à quel point l'apport d'information est important pour augmenter l'efficacité de l'estimation. En effet, la variance de la densité a posteriori est toujours diminuée par l'apport d'information a priori aussi peu informative soit elle (voir formule de  $\sigma_2^2$  dans (4.12)). Cependant nous voyons également l'importance de la traduction de l'information a priori. En effet, le choix de l'espérance de l'a priori conditionne la valeur de celle de la densité a posteriori (il s'agit de la moyenne pondérée des espérances). Un mauvais choix pour  $x_0$  aura donc une conséquence d'autant plus grave sur l'estimation que la variance  $\tau^2$  de l'a priori est faible.

Nous venons donc de montrer qu'un intérêt de l'inversion bayésienne était de faire intervenir de l'information a priori afin de préciser le comportement statistique des paramètres en fonction de la mesure. Ce qui nous conduit à nous demander tout simplement si nous ne pouvons pas trouver la solution de problèmes sous-déterminés en complétant le manque d'information des mesures par de l'information a priori. En effet, un résultat classique concernant l'estimation paramétrique [Sil01] est qu'une estimation sous conditions peut conduire à une unique solution, si l'information a priori est suffisante. Nous utiliserons ce principe dans l'identification magnétique, dont une des limites est pour l'instant de nécessiter un grand nombre de capteurs magnétiques.

Nous terminerons cette présentation de l'estimation Bayésienne en montrant un exemple de problème inverse pour lequel l'information a priori permet la résolution. Il s'agit toujours du problème d'interpolation linéaire présenté figure 4.2. Rappelons que si nous ne connaissons qu'un seul point de mesure (mesure1 Fig.4.5) le problème est sous-déterminé et une infinité de couples de paramètre (a,b) sont solutions : l'estimation à l'aide de la vraisemblance est impossible. Mais si nous savons que le paramètre b est voisin de 2, ce que nous traduisons par la densité a priori :

$$p(b) = \frac{1}{\sigma_b \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{(b - 2)^2}{\sigma_b^2} \right]. \quad (4.13)$$

Alors la densité de probabilité a posteriori  $p(\mathbf{C}|\mathbf{Y})$  est précise et nous pouvons par exemple définir l'estimateur de maximum a posteriori (MAP). La figure de droite de Fig.4.5, montre en effet une densité de probabilité de variance finie ce qui, si nous nous rappelons sa représentation en terme d'information, signifie que l'information est suffisante pour permettre l'estimation. Une fois encore, nous rappellerons que si l'estimation est possible et donne un résultat satisfaisant, c'est

parce que l'hypothèse a priori est excellente. Si par exemple nous posons l'hypothèse de norme minimale la solution serait celle de la droite 1, qui est bien moins satisfaisante<sup>11</sup>.

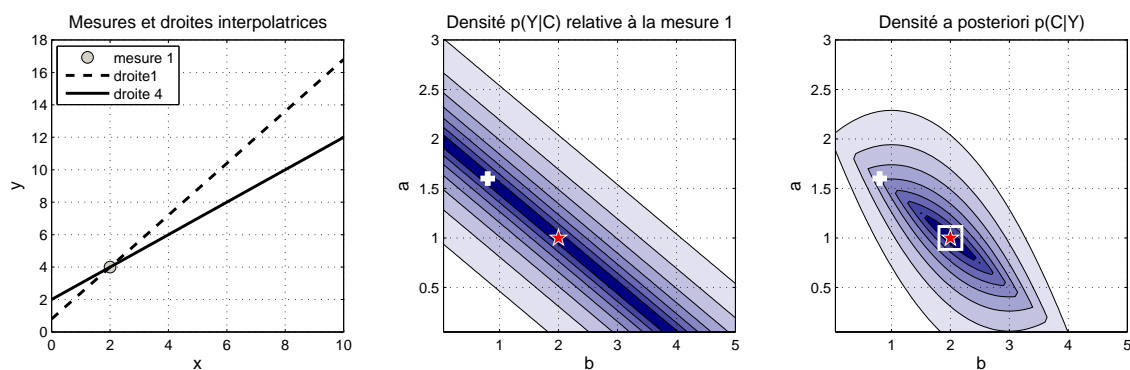


FIG. 4.5 – Illustration de l'intérêt de l'information a priori sur le problème d'interpolation linéaire. La mesure 1 ne permet pas de définir le couple  $(a,b)$  : le système est sous-déterminé ce qui se traduit par une distribution de probabilité de variance infinie (voir figure centrale). Par défaut nous faisons le choix de la solution de norme minimale (croix blanche) qui conduit à une erreur d'estimation : voir droite 1. L'apport d'information a priori sur  $b$  complète notre connaissance des paramètres et permet de déterminer une estimation correcte (carré). La densité a posteriori  $p(\mathbf{C}|\mathbf{Y})$  a une variance finie (voir figure de droite).

En conclusion, le contexte statistique que nous venons de présenter apporte les méthodes et outils statistiques qui vont permettre une meilleure estimation des coefficients harmoniques à partir de mesures. Plus qu'un outil mathématique, la statistique permet de traduire l'information de différente nature sous forme de densité de probabilité. Il est alors possible de compléter la mesure à l'aide d'informations diverses à propos d'une source. Ainsi, l'indétermination liée à la mesure ne nous pousse plus vers une erreur systématique car l'information a priori brosse un voisinage de la solution. Il y a donc, comme nous le verrons dans la suite de cet exposé, une solution à la résolution de systèmes sous-déterminés qui consiste à compléter le manque d'informations de la mesure par autant d'informations a priori nécessaires, ce qui passe bien sûr par une traduction précise et juste de cette information.

## 4.2 Estimateur de maximum de vraisemblance

Dans de nombreux cas de résolutions de systèmes linéaires nous ne posséderons pas d'information a priori. Alors, le formalisme bayésien ne fait pas de différence en terme d'information entre la *fonction de vraisemblance* et la *densité a posteriori*, car la densité a priori est uniforme. Nous chercherons donc uniquement à l'aide de la fonction de vraisemblance à estimer les coefficients harmoniques.

Le choix de l'estimateur est fondamental et doit être optimal. Deux politiques sont possibles : soit nous cherchons la solution la plus certaine, c'est-à-dire celle

<sup>11</sup>Pour mémoire, il s'agit de la solution donnée par l'inverse généralisée

qui correspond au *minimum de variance*, soit nous cherchons la solution la plus probable qui est donnée par le *maximum de vraisemblance*. Dans cette partie nous utiliserons des estimateurs de maximum de vraisemblance. La raison de ce choix est double car d'une part il existe toujours un maximum de vraisemblance et d'autre part la formulation des deux estimateurs est identique<sup>12</sup>. La difficulté de l'identification magnétique est de définir l'estimateur optimal. Pour y arriver nous devons encore mettre en place les outils statistiques qui vont nous permettre d'évaluer la qualité de l'estimation et de définir le meilleur estimateur possible.

### 4.2.1 Écriture

Reprenons la fonction de vraisemblance relative à notre problème d'identification magnétique (4.3) :

$$p(\mathbf{B}_{mes}|\mathbf{C}) \sim \exp \left[ -\frac{1}{2}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{C} - \mathbf{B}_{mes})^t \cdot \mathbf{S}_d^{-1} \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{C} - \mathbf{B}_{mes}) \right] \quad (4.14)$$

L'estimateur de maximum de vraisemblance de cette densité est donné par le vecteur des coefficients qui maximise la vraisemblance  $p(\mathbf{B}_{mes}|\mathbf{C})$  et qui est tel que :

$$\frac{\partial(\log p(\mathbf{B}_{mes}|\mathbf{C}))}{\partial \mathbf{C}} = 0 \quad (4.15)$$

Cette dernière équation peut admettre plusieurs solutions et nous choisirons celle qui définit le maximum de la fonction de vraisemblance. La solution  $\hat{\mathbf{C}}$  de (4.15) est donnée par [Tar82][Kay93] :

$$\hat{\mathbf{C}} = (\mathbf{F}^t \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^t \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{B}_{mes} \quad (4.16)$$

Finalement, cette solution est celle donnée par un estimateur des moindres carrés pondérés.

### 4.2.2 Propriétés - Optimalité

L'estimateur des moindres carrés (4.16) est donc un estimateur au sens statistique. L'intérêt du cadre statistique est lié à la description qu'il apporte et qui va permettre de définir l'estimateur optimal. Nous avons vu dans nos exemples précédents que plus l'information était importante et moins la variance de la densité de probabilité correspondante était forte. Nous définirons l'estimateur de maximum de vraisemblance optimal comme celui dont la variance est minimale. Nous allons donc calculer la variance de l'estimateur qui est à la fois une mesure de l'incertitude de l'estimation et un critère d'optimalité.

Soit l'estimateur de maximum de vraisemblance d'expression (4.16), il s'agit d'un estimateur sans biais dont la variance est :

$$var \{ \hat{\mathbf{C}} \} = E \{ \hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{C}}^t \} = (\mathbf{F}^t \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{F})^{-1} \quad (4.17)$$

<sup>12</sup>Les deux estimateurs sont asymptotiquement identiques [Kay93]

Ce résultat est essentiel et permet l'écriture statistique de l'estimateur sous la forme de la densité de probabilité [Kay93] :

$$\hat{\mathbf{C}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{C}, (\mathbf{F}^t \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{F})^{-1}) \quad (4.18)$$

Sous cette forme nous voyons que l'estimateur du maximum de vraisemblance est optimal lorsque la variance (4.17) est minimale. Dans le cas où le bruit est uniformément réparti sur les mesures, c'est-à-dire que  $\mathbf{S}_d$  est proportionnel à la matrice identité, nous voyons que l'estimateur est optimal lorsque  $\mathbf{F}^t \mathbf{F} = \mathbf{Id}$  c'est-à-dire que  $\mathbf{F}$  est une matrice orthonormale.

En général, la matrice  $\mathbf{F}$  n'est pas orthonormale, alors nous cherchons un produit scalaire pour lequel c'est le cas en introduisant une pondération dont le but est de stabiliser le système. C'est ce que nous avons fait au chapitre 2 en divisant chaque colonne de  $\mathbf{F}$  par l'inverse de sa norme, de sorte que  $(\mathbf{F}\mathbf{W})^t(\mathbf{F}\mathbf{W}) \sim \mathbf{Id}$ . Néanmoins, si cette méthode de stabilisation est très efficace et réduit la variance de l'estimateur, elle n'est pas optimale car la matrice  $\mathbf{W}$  de pondération ne permet qu'une pseudo-orthonormalité qui est vraie uniquement sur la diagonale<sup>13</sup>.

Le meilleur choix de pondération est donné par la décomposition de Cholesky de la matrice  $\mathbf{F}^t \mathbf{F}$ . En effet, cette décomposition est considérée comme l'écriture d'une racine carrée d'une matrice. Prenons par exemple une matrice  $\mathbf{M}$  définie positive (comme l'est  $\mathbf{F}^t \mathbf{F}$ ), la factorisation de Cholesky permet l'écriture de  $\mathbf{M}$  sous la forme [Pre92] :

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{L}^t \quad (4.19)$$

Pour cette raison, nous considérons que la matrice  $\mathbf{L}$  est une racine de  $\mathbf{M}$ . La meilleure pondération  $\mathbf{W}$  qui conduit à l'estimateur optimal est alors celle obtenue en normalisant la matrice  $\mathbf{F}$  par  $\mathbf{L}$  car elle conduit à l'orthonormalité des colonnes de  $\mathbf{F}$ . Ainsi, en utilisant cette pondération pour notre problème nous garantissons que l'estimateur  $\hat{\mathbf{C}}$  a une variance minimale.

### 4.2.3 Indicateurs de qualité de l'estimateur

Nous venons de calculer la variance de l'estimateur de maximum de vraisemblance, ce qui nous a permis de comprendre l'intérêt de la stabilisation proposée au chapitre 2 et d'introduire un estimateur optimal. Cette variance est un indicateur de la qualité de l'estimation a priori. Nous allons maintenant présenter deux autres indicateurs de qualité qui vont permettre d'optimiser l'estimateur soit en proposant une nouvelle écriture du système linéaire, c'est-à-dire une meilleure matrice  $\mathbf{F}$ , soit en retirant les mesures aberrantes, c'est-à-dire en filtrant les mesures de  $\mathbf{B}_{mes}$ . En quelque sorte, nous proposons dans cette section de définir la meilleure mesure et le meilleur système linéaire, en changeant le positionnement des capteurs quitte à réécrire la matrice  $\mathbf{F}$ .

<sup>13</sup>Elle n'est cependant pas à rejeter car elle ne nécessite qu'un calcul itératif de norme, qui est bien plus simple et moins long à mettre en oeuvre que le processus d'inversion

### 4.2.3.1 Opérateur de résolution - performance a priori

L'opérateur de résolution, noté  $\mathbf{R}$  n'est pas réellement le fruit de l'approche statistique. Il est un indicateur de qualité fréquemment utilisé pour mesurer a priori les performances d'une estimation [Leg96]. Son origine est liée à une interprétation des estimateurs comme des filtres qui prennent en entrée le vecteur des paramètres exact  $\mathbf{C}_{exact}$  d'une source et donnent en sortie les paramètres estimés  $\hat{\mathbf{C}}$  [Bac67][Bac70]. L'opérateur  $\mathbf{R}$  représente donc la fonction de transfert de l'estimateur et est une mesure de sa résolution [Tar05]. Pour construire cet opérateur imaginons que nous possédons une mesure exacte  $\mathbf{B}_{exact}$  définie par :

$$\mathbf{B}_{exact} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_{exact} \quad (4.20)$$

L'opérateur est la matrice  $\mathbf{R}$  telle que :

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C}_{exact} \quad (4.21)$$

Or à partir de la mesure (4.20) nous pouvons écrire l'estimateur de maximum de vraisemblance :

$$\hat{\mathbf{C}} = (\mathbf{F}^t \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^t \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{B}_{exact} \quad (4.22)$$

Nous avons donc simplement défini un opérateur révélateur de l'estimation. Dans le cas idéal, c'est-à-dire que le problème est sur-dimensionné et que la variance de mesure est faible, la matrice  $\mathbf{R}$  est proche de l'identité. Mais généralement ces conditions ne sont pas satisfaites et  $\mathbf{R}$  donnera l'erreur relative entre le paramètre exact et le paramètre estimé. Pour cette raison, cet opérateur est un excellent indicateur a priori de l'erreur d'estimation. Nous pouvons l'utiliser pour quantifier la qualité de l'estimation et détecter les composantes mal estimées ou optimiser le placement de capteurs de sorte que l'erreur relative d'estimation soit plus faible sur tout ou un sous-ensemble des paramètres estimés. La matrice  $\mathbf{R}$  a des propriétés semblables à la matrice de covariance  $\mathbf{S}_d$  : sur la diagonale nous trouvons l'erreur relative propre à un paramètre estimé et hors de cette diagonale des termes croisés qui reflètent les liens entre les erreurs d'estimation des composantes de  $\hat{\mathbf{C}}$ . Enfin, nous aurons recours à cet opérateur d'une part pour vérifier que l'estimation est de bonne qualité et prendre une décision sur les paramètres de moins bonne qualité et d'autre part pour placer nos mesures afin qu'une partie utile de la matrice  $\mathbf{R}$  soit le plus proche possible de l'identité [Leg96]. Ainsi, l'estimation des paramètres correspondant sera, a priori, la plus précise possible. Nous reviendrons sur cet opérateur et son utilisation au cours du chapitre 6 et dans les applications.

### 4.2.3.2 Résidus de mesures

Si l'opérateur de résolution permet une connaissance a priori de l'état des paramètres estimés, nous pouvons encore avoir accès à une estimation de la qualité des mesures et du modèle par le biais des résidus de mesures. Le vecteur des résidus de mesures est un estimateur de l'erreur de mesure qui est défini par :

$$\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{C}} - \mathbf{B}_{mes} \quad (4.23)$$

$\hat{\mathbf{V}}$  est une variable aléatoire d'espérance nulle et de variance  $E\{\hat{\mathbf{V}}\hat{\mathbf{V}}^t\}$ . Nous pouvons donc écrire l'estimateur des résidus de mesures sous la forme :

$$\hat{\mathbf{V}} \sim \mathcal{N}(0, (\mathbf{S}_d - \mathbf{F}(\mathbf{F}^t \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^t)) \quad (4.24)$$

L'estimateur des résidus de mesures est un outil statistique important. En effet, d'après (4.23)  $\hat{\mathbf{V}}$  donne la distribution de l'erreur entre le modèle et la mesure et va ainsi nous permettre de prendre une décision, soit sur le modèle, soit sur la mesure. Par exemple, pour déterminer l'ordre maximum N d'une source multipolaire, nous pouvons écrire le système pour différents ordres N et vérifier que la variance des résidus de mesures diminue et que l'opérateur de résolution reste proche de l'identité. Mais cette méthode a plutôt tendance à converger vers un modèle plus complexe qui minimise la variance des résidus. Reprenons l'exemple de l'interpolation linéaire par une droite, si nous avons 3 points non alignés la variance des résidus de mesures sera nécessairement non nulle et une interpolation par une parabole donnera certainement une variance plus faible. Cependant, si le modèle linéaire est conforme aux phénomènes physiques le mésalignement doit être interprété comme une erreur de mesure. Dans ce cas, nous pouvons à l'aide de tests sur la loi de probabilité des résidus prendre la décision d'éliminer une mesure erronée, ce qui aura comme conséquence de préciser la fonction de vraisemblance (voir Fig.4.3). La connaissance de la distribution de  $\hat{\mathbf{V}}$ , estimateur de l'erreur de mesure, va nous permettre de bâtir des tests sur la nature statistique des observations. Ils vont également nous permettre de détecter les mesures aberrantes qui faussent l'estimateur et ainsi de le rendre le moins sensible possible aux erreurs de positionnement et de mesures.

#### 4.2.4 Exemple d'application des indicateurs de qualité

Nous proposons maintenant d'utiliser les indicateurs de qualité que nous venons de définir pour la résolution d'un système linéaire sans information a priori. Pour se faire, nous reprendrons l'exemple de placement de capteurs proposé au chapitre 2 sur la figure (2.5), que nous avons utilisé pour définir et stabiliser la matrice  $\mathbf{F}$ . Pour mémoire, il s'agissait d'identifier une source magnétique d'ordre N=3 à l'aide de 26 capteurs triaxiaux répartis sur un cube métrologique. Le conditionnement de la matrice  $\mathbf{F}$  obtenue après stabilisation était de 1.53 (voir Tableau 2.1 colonne D). Dans cet exemple, il n'est pas question de résoudre l'estimation, mais de continuer d'une part la stabilisation, d'évaluer les performances a priori de l'estimateur de maximum de vraisemblance et enfin de quantifier l'erreur de modélisation ou de mesure par le biais de l'estimateur de variance a priori des résidus de mesures. Tous ces indicateurs doivent nous permettre de quantifier la qualité de l'estimateur mais surtout de prévenir et optimiser l'estimateur en intervenant sur les mesures.

##### 4.2.4.1 Stabilisation par minimisation de la variance des paramètres

L'estimateur de maximum de vraisemblance optimal est celui dont la variance est minimale : c'est le résultat important du paragraphe §4.2.2. Nous rappelons



que cet estimateur peut s'écrire à l'aide de la densité de probabilité :

$$\hat{\mathbf{C}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{C}, (\mathbf{F}^t \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{F})^{-1}) \quad (4.25)$$

Dans notre cas, nous ferons l'hypothèse que le bruit de mesure est uniforme sur l'ensemble des mesures, la matrice  $\mathbf{S}_d$  sera donc l'identité et l'estimateur aura pour variance :

$$\text{var}\{\hat{\mathbf{C}}\} = (\mathbf{F}^t \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{F})^{-1} \quad (4.26)$$

Pour stabiliser le système nous allons utiliser la proposition que nous faisons précédemment qui consistait à utiliser la factorisation de Cholesky de la variance pour normaliser  $\mathbf{F}$ . Si  $\mathbf{L}$  est la matrice de cholesky obtenue nous stabilisons le système en utilisant une matrice de pondération  $\mathbf{W}$  définie par :

$$\mathbf{W} = \mathbf{L}^{-1} \quad (4.27)$$

Le système est alors orthonormé ce qui se traduit par un conditionnement idéal du système normalisé égal à 1. La figure 4.6 compare les 15 valeurs singulières de la matrice  $\mathbf{F}$  avec la pondération itérative maximale et avec normalisation. Nous constatons que l'ensemble des valeurs singulières sont identiques et égales à 1 : ce qui traduit l'orthonormalité du nouveau système.

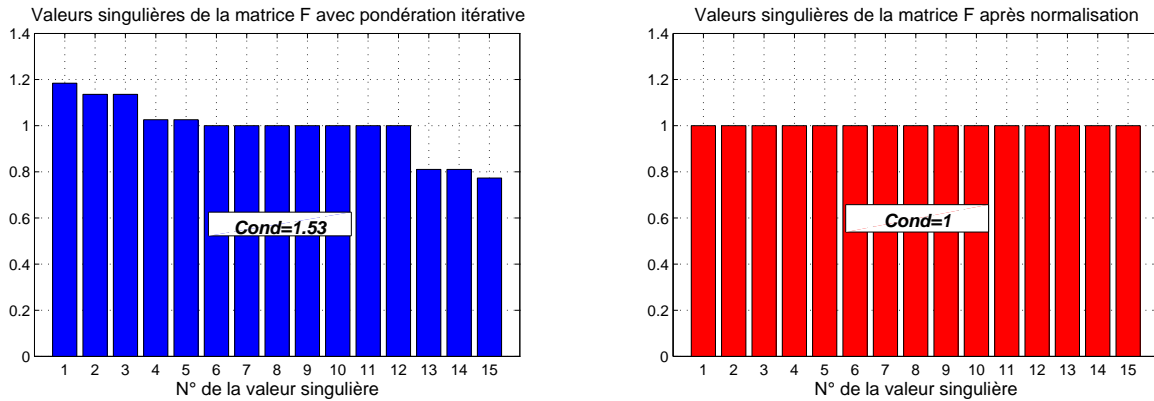


FIG. 4.6 – Illustration de la stabilisation du système linéaire  $\mathbf{F}$  par normalisation et pondération itérative.

Si nous obtenons un estimateur de variance minimale par la normalisation. Cette normalisation n'a pas de sens lorsque le système est sous-déterminé car la matrice de covariance de l'estimateur n'est pas définie positive et la factorisation de Cholesky ne peut s'effectuer. Dans ce cas nous nous satisfaisons de la pondération itérative proposée au chapitre 2 qui est robuste et optimale même lorsqu'un système est sous-déterminé.

#### 4.2.4.2 Vérification a priori de la qualité de l'estimation

Une fois l'estimateur optimal défini nous pouvons évaluer a priori la qualité de l'estimation, par le biais de l'opérateur de résolution  $\mathbf{R}$ . Cet opérateur matriciel donne la valeur de l'erreur commise en fonction d'un paramètre idéal (voir

équation (4.21)). Ainsi, nous pouvons prédire non seulement les erreurs théoriques d'estimation paramétrique, mais aussi les erreurs de corrélation entre termes. Cette prédiction est possible en observant soit les termes de la diagonale de  $\mathbf{R}$ , soit les termes croisés. Idéalement cette matrice doit être égale à la matrice identité, ce qui signifierait que l'estimation a une résolution parfaite, et que les paramètres estimés sont bien les paramètres exacts. En pratique quand la matrice est de rang plein et est stabilisée, l'opérateur de résolution est la matrice identité (voir Fig.4.7). Par contre,  $\mathbf{R}$  prend tout son sens lorsque le système est sous-dimensionné. En effet, dans ce cas  $\mathbf{R}$  donne la qualité de l'estimation paramétrique et nous permet d'identifier a priori les paramètres qui seront correctement identifiés et ceux qui seront erronés. Par exemple, si nous ne gardons que les 4 capteurs extrêmes de la face supérieure du cube météorologique de la figure 2.5 et que nous désirons identifier une source d'ordre 3, il manquera nécessairement 3 mesures de l'induction (un capteur). Dans ce cas, il ne sera pas possible d'identifier correctement tous les coefficients harmoniques et nous devons identifier les termes erronés. Dans notre exemple, nous voyons sur les valeurs de la diagonale de  $\mathbf{R}$  que les coefficients 6,7,8 et 15 ne peuvent pas a priori être identifiés correctement. La conséquence du manque de mesure affecte donc fortement l'identification de quatre coefficients.

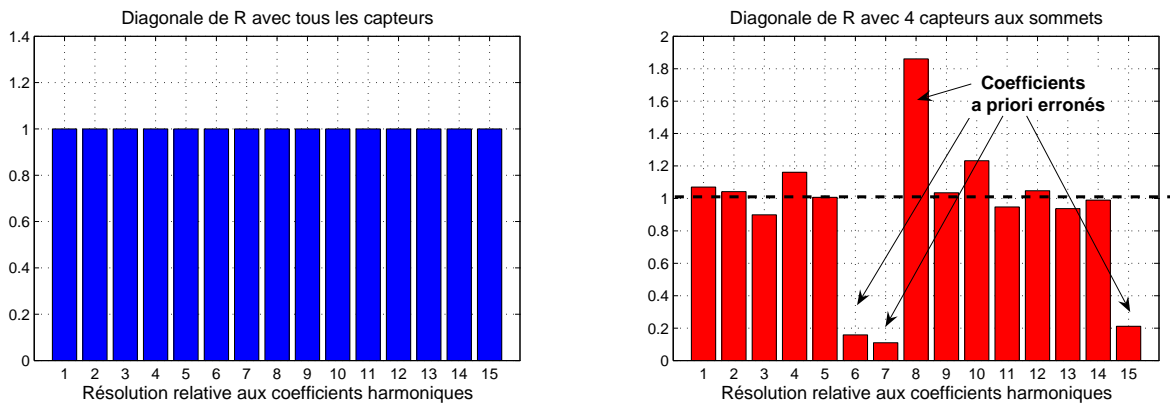


FIG. 4.7 – La diagonale de l'opérateur de résolution  $\mathbf{R}$  donne une mesure a priori de l'erreur d'estimation. Lorsque le système est bien conditionné et de rang plein, cet opérateur est proche de la matrice identité. Sinon, il donne une indication de la qualité des paramètres estimés. Par exemple, avec seulement les 4 capteurs supérieurs du cube, nous remarquons que certains paramètres seront erronés.

En pratique ces valeurs de l'opérateur de résolution sont essentielles car elles vont permettre de replacer les capteurs de manière à augmenter la qualité de l'estimation de certains paramètres [Leg96][Sco03]. Dans un cas plus général où nous cherchons des paramètres répartis spatialement (charges magnétiques, moments magnétiques) elles nous permettront non seulement d'optimiser le nombre de ces paramètres, leur position et les mesures. Comme le suggérait Legris [Leg96], pour trouver un positionnement il faut définir une fonction objective qui permette de minimiser l'erreur a priori de l'estimation des paramètres à l'aide d'algorithmes itératifs ou stochastiques. Lorsqu'un tel placement est possible, nous avons alors un sous-espace de paramètres dans lequel la résolution est optimale. Pour estimer

les autres paramètres nous devons donc puiser dans nos connaissances a priori des coefficients, comme nous verrons dans la prochaine section.

#### 4.2.4.3 Résidus de mesures

Un autre indicateur de qualité a priori du système linéaire est une mesure de la distance entre le modèle et la mesure : il s'agit des résidus de mesures  $\hat{\mathbf{V}}$ . Nous avons vus précédemment qu'ils suivaient la loi normale :

$$\hat{\mathbf{V}} \sim \mathcal{N} \left( 0, (\mathbf{S}_d - \mathbf{F}(\mathbf{F}^t \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^t) \right) \quad (4.28)$$

Dans ce cas, l'observation de la variance de  $\hat{\mathbf{V}}$  est particulièrement instructive, car elle permet soit d'optimiser le modèle, soit de détecter les mesures aberrantes. Reprenons l'exemple du cube métrologique avec tous les capteurs et une source d'ordre  $N=3$ . A priori, nous avons beaucoup plus de mesures que nécessaire pour estimer les coefficients harmoniques : ce qui doit se traduire par un surplus d'information : nous aurons donc certainement des résidus de mesures que nous pouvons réduire en augmentant l'ordre de la source, à condition de ne pas dégrader la résolution de l'estimateur. D'autre part, si une mesure est aberrante elle aura pour conséquence une variance forte sur le terme diagonal lui correspondant de la matrice de variance de  $\hat{\mathbf{V}}$ . En pratique, nous utiliserons des tests statistiques, comme le  $\chi^2$  ou les intervalles de confiance, pour vérifier que les résidus suivent une loi relative au nombre de degrés de liberté  $\nu$  du système [Leg96].

Quel que soit le rang du système linéaire que nous cherchons à résoudre, le vecteur des résidus de mesures  $\hat{\mathbf{V}}$  quantifie le surplus d'information disponible sur les mesures et met également en avant les mesures les plus contraignantes. Il dépend du modèle, mais aussi du placement des mesures. Nous verrons, dans les applications, qu'il permet de déterminer les points pour lesquels le modèle est le moins adapté et nous l'utiliserons pour optimiser le positionnement des mesures ou des inconnues (optimisation de maillage).

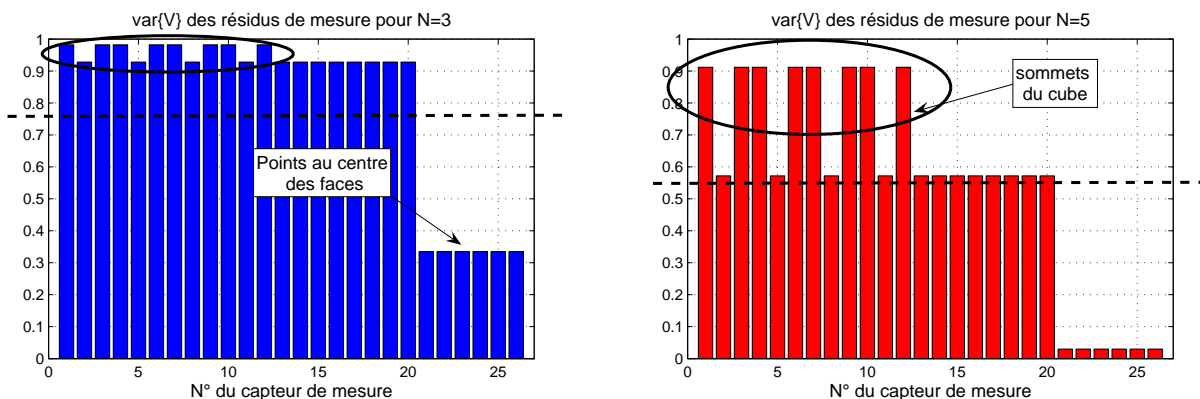


FIG. 4.8 – Variance des résidus de mesures estimés sur les capteurs en fonction de l'ordre de la source identifiée. Les points de forte variance sont ceux les plus loin de la source (sommets du cube métrologique). Nous remarquons que plus l'ordre de la source est élevé et plus la variance des résidus de mesures est faible.

Pour illustrer l'intérêt des résidus, nous reprenons une dernière fois le cube métrologique et une source d'ordre  $N=3$ . Si nous calculons la variance des résidus de mesures relatifs à l'identification magnétique, nous remarquons que les mesures aux sommets du cube ont une variance forte (voir Fig.4.8). Le problème du placement des capteurs est en effet délicat, en particulier dans le cas de l'identification magnétique à l'aide des harmoniques sphériques, car la décroissance des termes favorise les mesures proches. En augmentant l'ordre de la source à  $N = 5$  nous voyons que la variance diminue sur l'ensemble des points ce qui signifie que nous exploitons plus d'information des mesures. Cependant, l'écart entre les variances a augmenté ce qui traduit une plus forte instabilité du système<sup>14</sup>.

#### 4.2.4.4 Conclusions

Nous venons d'illustrer l'intérêt des indicateurs de qualité de l'estimateur de maximum de vraisemblance. Notre exemple d'identification magnétique n'a pas encore été résolu et déjà nous avons un estimateur optimal dont nous pouvons mesurer la qualité a priori. Nous verrons dans la suite de ce chapitre que cette approche est essentielle pour quantifier l'information disponible par la mesure afin de tirer le plus d'informations des mesures, soit en enlevant les plus aberrantes, soit en écrivant le problème direct en optimisant le placement des mesures. Enfin, nous montrerons dans le chapitre 6 l'intérêt de cette approche pour le calcul de l'effet de forme d'un moteur utilisant l'écriture harmonique. Elle garantit en effet le bon résultat de l'estimation lorsque le système linéaire est de rang plein. Cependant, lorsque le système linéaire est sous-déterminé, nous ne pouvons pas estimer l'ensemble des paramètres du modèle et nous devons compléter cette optimisation par un apport d'information a priori, ce qui nous conduit à la présentation des estimateurs bayésiens.

## 4.3 Estimateurs Bayésiens

Nous serons souvent confrontés lors de l'identification magnétique à la recherche d'un nombre important de paramètres à partir de peu de mesures. Le système linéaire représenté sous forme matricielle  $\mathbf{F}$  est alors sous-déterminé et admet une infinité de solutions. Comme nous le montrions au cours du paragraphe § 4.1.3 l'estimation bayésienne va nous permet de résoudre l'identification en faisant intervenir de l'information a priori disponible sur le comportement de la source. Le problème inverse est alors conditionné à un apport suffisant d'information qui doit compléter la mesure. Pour cette raison, les statisticiens [Tar82] considèrent qu'un problème inverse est essentiellement une quête d'information. Le point de vue que nous avons adopté est identique : pour résoudre l'identification nous allons chercher l'information la plus précise possible sur la source afin que les mesures ne soient qu'un moyen d'actualiser la connaissance que nous avons déjà de la source. Comme nous le verrons dans cette section, pour atteindre nos objectifs nous devons adop-

<sup>14</sup>L'idéal étant que les résidus aient une variance uniforme, c'est à dire que la matrice de variance des résidus soit proportionnelle à l'Identité

ter la démarche bayésienne dont les principales difficultés sont la traduction de l'information a priori et le choix d'un estimateur.

### 4.3.1 Maximum a posteriori (MAP)

Nous allons maintenant présenter l'estimateur de maximum a posteriori qui permet une interprétation matricielle simple lorsque nous pouvons décrire l'information a priori sous forme de distribution normale. Nous verrons par la suite qu'il est possible d'utiliser d'autres estimateurs bayésiens plus robustes lorsque l'information est décrite à l'aide de densités de probabilité non linéaires et générales. Nous supposerons dans cette partie que nous possédons une information a priori suffisamment précise pour la décrire sous forme d'une distribution normale. Le but de cette partie est de montrer les mécanismes de l'identification magnétique bayésienne à l'aide de l'estimateur du MAP.

#### 4.3.1.1 L'information a priori

Pour nous permettre d'écrire matriciellement l'estimateur du MAP nous commencerons par supposer que l'information a priori que nous possédons sur les paramètres est linéaire, ce qui nous limite dans son choix et la qualité de sa description statistique. L'information a priori est définie, comme nous l'avons vu précédemment, par sa moyenne et sa variance qui correspondent respectivement à la valeur la plus probable et la certitude qui lui est accordée. De façon générale, l'information que nous possédons sur les coefficients harmoniques d'une source peut être de différentes natures :

1. Nous pouvons avoir une *connaissance totale* des coefficients harmoniques de la source, c'est-à-dire que nous en avons une valeur exacte. Par exemple, l'identification appliquée à la simulation éléments finis du moteur à aimants permanents du chapitre 2 nous permet d'avoir un a priori certain de la valeur de ses coefficients harmoniques définis par une matrice de covariance  $\mathbf{S}_0$  importante et un vecteur de coefficients a priori  $\mathbf{C}_0$ . Lorsque nous posséderons de l'information a priori de cette nature, nous utiliserons la mesure uniquement pour corriger le modèle a priori et l'actualiser.
2. Notre connaissance des coefficients peut également être *partielle*. Soit parce que nous n'en connaissons qu'une partie, soit que la qualité de l'a priori est médiocre. Dans ce cas, la mesure sera utilisée en complément de l'information.
3. Nous pouvons également avoir une *connaissance faible* des coefficients, sous la forme de relations entre coefficients, de niveau admissible, d'intervalle, ou simplement de signe. Dans ce cas, soit l'information a priori sera uniquement utilisée dans le but d'améliorer l'estimation et il faudra évaluer l'apport de l'a priori afin de compléter au mieux les mesures.
4. En pratique, il n'existe pas de situation sans information a priori, car la mesure peut toujours nous permettre d'estimer au moins l'amplitude maximale des coefficients harmoniques.

### 4.3.1.2 Écriture et propriétés de l'estimateur

Supposons que nous connaissons un vecteur  $\mathbf{C}_0$  de coefficients harmoniques qui soit un bon a priori. La densité a priori correspondant à cette information sur les coefficients s'écrira alors :

$$p(\mathbf{C}) \sim \exp \left[ -\frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{C}_0)^t \cdot \mathbf{S}_0^{-1} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{C}_0) \right] \quad (4.29)$$

Le théorème de Bayes (4.8) donne alors la densité a posteriori correspondant à l'information que nous avons des coefficients en fonction de la mesure et de l'information a priori, sous la forme :

$$p(\mathbf{C}|\mathbf{B}_{mes}) \sim p(\mathbf{B}_{mes}|\mathbf{C}) \cdot p(\mathbf{C}) \quad (4.30)$$

L'estimateur de maximum a posteriori est donné par le maximum de cette densité de probabilité que nous pouvons écrire matriciellement [Tar82] :

$$\hat{\mathbf{C}} = (\mathbf{F}^t \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{F} + \mathbf{S}_0^{-1})^{-1} \cdot (\mathbf{F}^t \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{B}_{mes} + \mathbf{S}_0^{-1} \mathbf{C}_0) \quad (4.31)$$

Dans ce cas, l'écriture statistique de l'estimateur de maximum a posteriori peut s'écrire sous la forme de la densité de probabilité [Kay93] :

$$\hat{\mathbf{C}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{C}, (\mathbf{F}^t \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{F} + \mathbf{S}_0^{-1})^{-1}) \quad (4.32)$$

Ce résultat est très proche de celui que nous avons déjà rencontré concernant l'estimateur de maximum de vraisemblance. La différence est la présence de la matrice de covariance a priori  $\mathbf{S}_0$  dans la variance de l'estimateur, ce qui traduit bien le rôle de l'information a priori. Elle vient préciser l'information disponible et est un gain, quelque soit sa valeur. Nous voyons encore que si nous avons stabilisé le problème direct à l'aide d'une normalisation, il sera encore possible d'utiliser les matrices de pondération dans l'estimateur sans que le rôle de l'information a priori ne soit changé.

### 4.3.1.3 Opérateur de résolution

Nous rapellons que cet opérateur de résolution n'est pas un opérateur statistique. Dans le cas précis de l'estimation par maximum a posteriori il est défini par la matrice  $\mathbf{R}$  telle que :

$$(\hat{\mathbf{C}} - \mathbf{C}_0) = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{C}_{exact} - \mathbf{C}_0) \quad (4.33)$$

c'est-à-dire qu'il mesure la qualité de la résolution en donnant une mesure de la distance introduite entre les paramètres estimés et l'information a priori. En développant simplement (4.33) à l'aide de (4.31) nous pouvons écrire cet opérateur sous la forme :

$$\mathbf{R} = (\mathbf{F}^t \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{F} + \mathbf{S}_0^{-1})^{-1} \cdot \mathbf{F}^t \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{F} \quad (4.34)$$

Comme nous l'avons déjà montré  $\mathbf{R}$  donne la qualité a priori de l'estimateur. Nous pouvons ainsi prédire la qualité des paramètres que nous allons estimer en

fonction des mesures mais aussi de l'information a priori disponible. Ce point est essentiel car nous devons, et c'est là l'intérêt de l'approche bayésienne, tirer le maximum d'information utile de la mesure et la compléter à l'aide de l'information a priori sans favoriser une de ces deux quantités.

Afin d'illustrer l'intérêt de l'opérateur et de l'information a priori, reprenons le cube métrologique précédent. Lorsque nous ne possédons que 4 capteurs et que nous voulons identifier une source d'ordre  $N=3$ , nous avons un système sous déterminé et certains coefficients identifiés seront a priori erronés car l'information est insuffisante (voir Fig.4.9).

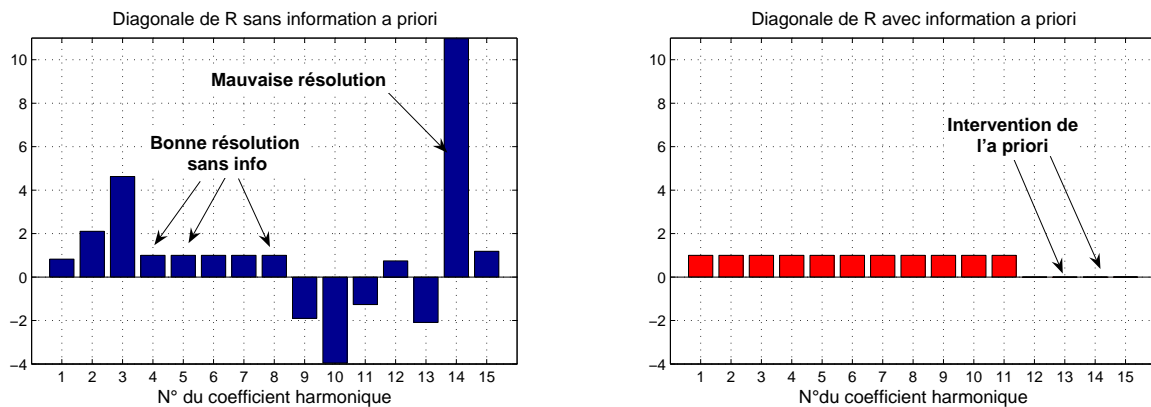


FIG. 4.9 – La diagonale de l'opérateur de résolution  $\mathbf{R}$  relative à l'estimateur du MAP. La figure de gauche montre la qualité de résolution sans information a priori. La figure de droite montre la qualité de résolution avec intervention de l'information a priori

L'intervention d'information a priori va permettre de lever l'indétermination. Nous pouvons procéder de différentes manières selon l'information a priori et les possibilités d'optimisation du système linéaire.

En effet, si nous possédons de l'information sur certains coefficients, nous pouvons par exemple optimiser le positionnement des capteurs de façon à ce que l'opérateur de résolution relatif aux coefficients dont nous ignorons la valeur soit optimale et, dans ce cas, la mesure permettra d'identifier les coefficients que nous ignorons.

Si nous ne pouvons changer la position des points de mesure il faut commencer par observer la matrice de résolution sans information a priori (figure de gauche de 4.9). Nous remarquons par exemple que certains termes ont une très bonne résolution<sup>15</sup> alors que d'autres sont moins précis. Dans ce cas l'intérêt de  $\mathbf{R}$  est de montrer les termes que la mesure permet d'estimer et ceux qui ne peuvent l'être. Ainsi, si nous faisons intervenir de l'information a priori sur ces termes nous améliorons la résolution des autres termes. Par exemple, en constatant sur la figure précédente que les derniers termes sont a priori les moins bien estimés, nous pouvons faire intervenir un a priori les concernant et ainsi le facteur de résolution de l'estimateur du MAP sera optimal pour les termes qui ne sont pas concernés par l'information a priori (voir figure droite de Fig.4.9).

<sup>15</sup>L'estimateur a une résolution excellente lorsque  $\mathbf{R}$  est proche de la matrice identité, voir eq.(4.33)

Nous venons d'illustrer le processus sélectif de cumul d'information que nous utiliserons pour l'identification. Il pose cependant plusieurs problèmes, dont le premier concerne la description de l'information a priori. En effet, hormis le cas d'une connaissance totale, si nous cherchons à actualiser une connaissance a priori à l'aide de la mesure, nous devons définir la variance de l'a priori de façon à permettre par le jeu des pondérations l'intervention de la mesure. Dans le cas de l'exemple de la figure (4.9), nous voyons que l'information est très forte ce qui a pour conséquence qu'estimation et a priori sont identiques : nous avons une information dominant la mesure. Pour l'identification magnétique, il sera nécessaire de s'assurer que le placement des capteurs est optimal pour les autres coefficients de sorte que toute l'information leur soit dédiée.

#### 4.3.1.4 Résidus des mesures

Si l'opérateur de résolution  $\mathbf{R}$  de l'estimation nous permet de quantifier la précision de l'estimateur, les résidus de mesure vont permettre d'estimer l'écart de la mesure et du modèle, mais aussi de la mesure et de l'a priori. En effet, l'information a priori n'est pas nécessairement cohérente avec la mesure ce qui doit nous permettre d'éliminer soit l'information, soit la mesure ou de revoir le modèle. Dans notre cas, nous essayerons de faire confiance à la mesure dont nous disposons afin de remettre à jour l'information a priori que nous possédons ce qui doit nous garantir des résidus de mesures faibles et la possibilité de détecter les capteurs sur lesquels l'information est inutilisée ou inutilisable. La définition du vecteur des résidus de mesure est identique à (4.23) et s'écrit :

$$\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{C}} - \mathbf{B}_{mes} \quad (4.35)$$

L'observation des résidus permet d'identifier les mesures, l'information a priori ou le modèle qui sont erronés. L'observation directe des résidus de mesures peut permettre de détecter les points les plus proches et les plus éloignés. C'est-à-dire ceux pour lesquels l'information est trop riche ou trop pauvre. Ces résidus suivent une répartition statistique qui nous permet de décider de l'état d'une mesure, d'un a priori ou d'un modèle par le biais de tests. Le test le plus fréquent est celui du  $\chi^2$  utile uniquement dans le cas de systèmes linéaires et qui teste l'hypothèse gaussienne de l'estimateur. De manière générale, ce test permet une analyse qualitative de l'estimateur. Dans le cas de l'estimateur du MAP, la mesure de l'écart ou fonction de proximité (*misfit*) est donnée par la statistique du  $\chi^2$  suivante [Tar05] :

$$\chi^2 = -2 \log(p(\mathbf{C}|\mathbf{B}_{mes})) \quad (4.36)$$

Nous nous intéresserons en particulier au minimum de cette fonction qui doit suivre une statistique du  $\chi^2$  à  $\nu$  degrés de liberté,  $\nu$  étant le rang du système linéaire considéré [Leg96]. Tous les tests spécifiques aux lois gaussiennes prennent évidemment un sens lorsque le nombre de degrés de liberté (en relation avec le nombre de mesures) est élevé. En règle générale, il sera assez difficile d'établir des tests gaussiens lorsque le nombre de mesures est inférieur à 30.



### 4.3.1.5 Conclusions et perspectives

Dans cette partie nous nous sommes placés dans le cadre de systèmes linéaires décrits par des lois normales. Cette interprétation était intéressante car elle permet l'intervention de l'information a priori et une écriture matricielle simple d'un estimateur. Cependant, les tests statistiques que nous pouvons mener sur l'estimateur et qui sont des tests relatifs aux lois normales peuvent nous conduire à remettre en cause la description du problème et de l'information a priori à l'aide de densité de probabilité normale. Cette incompatibilité est liée en générale à la description de l'information a priori, qui n'est pas nécessairement linéaire. Par exemple nous pouvons avoir des relations non linéaires entre coefficients qui sont traduites très grossièrement sous forme de lois normales. Or utiliser une description optimale de cette information évite d'une part les erreurs d'estimation mais est surtout un gain notable en terme de robustesse. Pour aller plus loin dans l'estimation nous devons parfaitement définir l'information a priori quelle que soit sa nature et utiliser des estimateurs plus robustes. Nous devons encore définir clairement les estimateurs bayésiens non linéaires que nous allons utiliser et les méthodes numériques qu'ils exploitent afin de définir et d'utiliser pleinement la meilleure description de l'information a priori et l'estimateur le mieux adapté.

### 4.3.2 Compléments sur l'estimation bayésienne

L'estimateur du MAP est le plus simple des estimateurs bayésiens. Nous venons de voir que dans le cas de résolutions de systèmes linéaires il permettait l'utilisation de l'information a priori disponible sur les paramètres. Cependant, les limites de cette approche viennent d'une part de la description de l'information et de son caractère non linéaire et d'autre part du peu de robustesse de l'estimateur. En effet, exploiter de l'information générale ou non linéaire sous-entend l'utilisation d'algorithmes itératifs pour déterminer le minimum d'une fonction objective. Nous nous plaçons donc désormais dans le cadre de l'utilisation de tels algorithmes. Cependant, le contexte bayésien va permettre un choix plus vaste d'estimateurs correspondant à une valeur statistique plus riche ce qui apporte un gain notable en terme de robustesse et permet la diminution du risque d'erreur d'estimation.

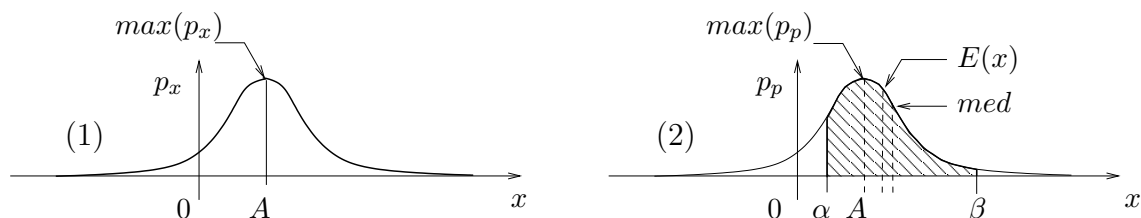


FIG. 4.10 – (1). - Fonction de vraisemblance  $p_x$  correspondant à une distribution normale de  $x$ . - (2). - Fonction de densité a posteriori  $p_p$  utilisant un a priori non linéaire : l'espérance, le maximum et la médiane sont distincts et correspondent à des estimateurs bayésiens différents.

Afin d'illustrer l'apport des compléments que nous proposons, prenons un exemple simple de description statistique non linéaire d'un problème (voir

Fig.4.10). Imaginons que la fonction de vraisemblance de notre problème direct  $p_x$  soit donnée par une loi normale de moyenne  $A$  et de variance  $\sigma^2$  et que l'information que nous possédons sur le paramètre recherché  $x$  est qu'il appartient à l'intervalle  $[\alpha, \beta]$  non centré autour de  $A$ . Dans ce cas, la densité de probabilité a posteriori  $p_p$  est une densité non linéaire correspondant à une probabilité tronquée (voir Fig.4.10.2). Si nous choisissons l'estimateur du MAP, nous remarquons que notre a priori est non informatif, puisqu'il n'a pas de conséquence sur l'estimation. Par contre, en reprenant la description statistique du problème nous pouvons calculer l'espérance ou la médiane de  $p_p$ , ce qui fournit des estimateurs exploitant pleinement l'information et offrant une plus grande robustesse [Leg96] (voir Fig.4.10.2).

Les statistiques qui définissent ces différents estimateurs sont essentiellement la moyenne et la médiane. Elles correspondent à un estimateur minimisant un coût différent, sensible aux erreurs d'estimation les plus grandes [Kay93] [Rob94] [Vie99]. Cette thèse se bornera à l'étude de l'estimateur de moyenne a posteriori (MMSE) dont le principal intérêt est qu'il permet de prendre en compte des informations non linéaires simples.

#### 4.3.2.1 L'estimateur de moyenne a posteriori (MMSE)

Commençons par préciser que dans le cadre gaussien, l'estimateur du MAP et le MMSE sont identiques et les coefficients harmoniques estimés sont facilement obtenus par la solution matricielle précédente. Par contre, lorsque la description de l'information a priori ou le modèle n'est pas gaussien ou linéaire nous exploiterons l'estimateur du MMSE. L'intérêt de cet estimateur est sa robustesse et qu'il exploite toute l'information disponible. Il est déterminé par la moyenne de la densité a posteriori considérée. Dans le cas de l'identification magnétique si nous cherchons à estimer les coefficients harmoniques à partir de mesures, l'estimateur du MMSE est définie par :

$$\hat{\mathbf{C}}_{MMSE} = E\{\mathbf{C}|\mathbf{B}_{mes}\} = \int \mathbf{C} \cdot p(\mathbf{C}|\mathbf{B}_{mes}) \cdot d\mathbf{C} \quad (4.37)$$

D'après cette définition, l'estimateur du MMSE nécessite un calcul d'intégration. Dans ce cas, il n'est plus question d'exploiter une écriture matricielle et nous aurons recours à des méthodes numériques.

#### 4.3.2.2 Calcul de l'estimateur - Méthodes numériques

Plusieurs méthodes numériques sont envisageables selon que nous cherchons à estimer le maximum d'une densité de probabilité, à calculer une intégrale pour marginaliser une loi ou évaluer l'espérance. Les principales méthodes généralement utilisées sont les suivantes :

1. L'approximation des lois générales par des lois normales. Ce qui permet, comme nous l'avons vu, de donner une expression matricielle d'un estimateur bayésien. Dans ce cas les estimateurs du MAP et du MMSE sont confondus du fait de la description normale des lois de probabilité.

2. La méthode de Newton-Raphson qui exploite une approximation quadratique du développement en série de Taylor du log de la densité a posteriori. Cette méthode est intéressante pour la rapidité de convergence lorsque les paramètres initiaux sont proches du MAP. Cependant cet algorithme peut ne pas converger ou alors converger vers un optimum local qui dépend des valeurs initiales.
3. Les méthodes d'optimisation. Ces méthodes permettent la recherche du MAP en évitant de tomber dans le piège des maxima locaux : les plus en vogue sont les algorithmes génétiques.
4. Les méthodes par simulation. L'approche dans ces méthodes est différente. Il ne s'agit pas de chercher le MAP, mais de simuler à l'aide de générateurs de variables aléatoires la densité a posteriori de façon à conserver la description statistique du problème : c'est cette direction que nous allons maintenant exploiter pour calculer l'estimateur du MMSE en utilisant des méthodes de simulations de type Monte-Carlo.

**Simulation par chaîne de Markov** Pour obtenir une simulation représentative de la densité a posteriori, il ne suffit pas d'avoir un générateur de variables aléatoires, car pour obtenir un ensemble d'échantillons représentatifs le processus serait trop long. Pour ce faire nous utilisons un générateur lié par une chaîne de Markov. C'est-à-dire qu'un échantillon est généré en fonction de l'échantillon précédent.

Le processus le plus simple de génération de chaîne de Markov est celui de la marche aléatoire. Dans ce cas, la chaîne progresse à partir d'un état  $i$  vers l'état  $(i+1)$  en avançant d'un pas aléatoire défini dans son voisinage. Cette marche est soumise à un test sur la densité de probabilité qui assure le lien statistique entre les deux échantillons et garanti ainsi un mélange optimal. Cependant, cette démarche n'assure en rien la convergence de la chaîne de Markov qui peut encore diverger. Il est possible de contrôler l'état de la chaîne en observant ses variations et ainsi contrôler ses paramètres de façon à accélérer sa convergence [Rob94][Vie99].

Dans le cas de l'identification magnétique, comme chaque paramètre est indépendant et d'amplitude particulière, nous utiliserons un algorithme MCMC de type *une variable à la fois* de façon à trouver un échantillonnage de la probabilité a posteriori plus adapté à l'identification.

**Calcul de l'estimateur du MMSE** Lorsque la chaîne de Markov converge, il est possible, en vertu de la loi des grands nombres, de calculer de façon discrète des intégrales sur la probabilité a posteriori, comme par exemple l'espérance ou la médiane. L'estimateur du MMSE est donné par le calcul de (4.37) et **permet une estimation non linéaire et robuste qui ne dépend pas d'un maximum mais de l'ensemble de la description de la densité de probabilité a posteriori.**

#### 4.3.2.3 Application

Reprenons une dernière fois l'exemple d'interpolation linéaire. Pour mémoire, nous essayons de trouver une droite représentative d'un phénomène à l'aide uni-

quement d'un seul point de mesure : le nombre de solution est infini. Pour définir les paramètres  $a$  et  $b$  nous devons utiliser l'information a priori disponible.

Par exemple, si nous supposons que le vecteur des paramètres est de norme minimale la droite solution est la droite 1 (Fig.4.11). Nous remarquons qu'elle est distante de la droite de référence qui correspond à la description des phénomènes physiques ( $a = 1, b = 2$ ).

Nous pouvons également traduire l'information a priori que nous avons sous la forme d'une densité normale, comme proposé en § 4.1.3.3, dans ce cas l'identification à l'aide de l'estimateur du MAP sera efficace, mais peu robuste. En effet, si la description de l'information a priori est erronée la conséquence sur le MAP sera importante.

Enfin, si l'information a priori est non linéaire, faible ou erronée, nous devons encore être capables de définir un estimateur robuste qui utilise toute l'information a priori : c'est le cas de l'estimateur du MMSE. Par exemple, si l'information que nous possédons sur les paramètres  $a$  et  $b$  se résume uniquement par le fait que le paramètre  $a$  appartient à l'intervalle  $[0.5; 2]$ , alors l'estimation efficace passe nécessairement par le calcul du MMSE. En effet, la densité de probabilité a posteriori  $p(\mathbf{C}|\mathbf{Y})$  représentative de notre problème d'interpolation admet toujours une infinité de solutions au sens du MAP, qui sont tous les maxima pour  $a$  dans l'intervalle  $[0.5; 2]$  (voir figure du centre Fig.4.11).

Pour calculer l'estimateur du MMSE nous procédons à l'échantillonnage de la densité a posteriori  $p(\mathbf{C}|\mathbf{Y})$  à l'aide d'une chaîne de Markov (voir figure de droite de 4.11). Afin que cette chaîne converge plus vite nous la faisons partir d'un point initial concordant avec l'information a priori. La chaîne de Markov obtenue  $\{\mathbf{C}\}$  assure un échantillonnage mélangé qui permet le calcul du MMSE.

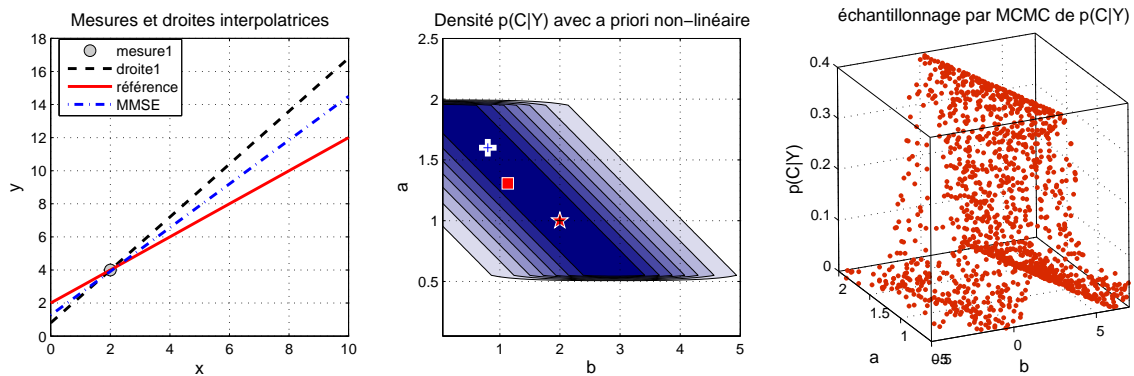


FIG. 4.11 – Illustration de l'intérêt de l'estimateur du MMSE - Avec un seul point de mesure et une information a priori faible ( $a$  appartient à l'intervalle  $[.5; 2]$ ). Nous calculons l'estimateur (voir carré sur la figure centrale), ce calcul passe par l'intégration de la densité de probabilité a posteriori qui est possible grâce à un échantillonnage de  $p(\mathbf{C}|\mathbf{Y})$  obtenu par un algorithme MCMC (voir figure de droite)).

Le résultat est que l'estimateur des paramètres de la droite prend en compte l'information sur l'intervalle pour  $a$ . La solution obtenue (droite MMSE de la figure de gauche) est plus proche de la référence. Nous sommes donc, grâce à cette méthode capables de calculer des estimateurs plus robustes et surtout qui exploitent

la plus petite information disponible.

## 4.4 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons présenté différents estimateurs statistiques qui permettent de résoudre les systèmes linéaires intervenants dans l'identification magnétodynamique que nous proposons. Cette quête d'estimateurs est motivée par les limites de l'identification que nous évoquions au cours des deux chapitres précédents. En particulier le nombre de capteurs et leur positionnement respectivement à l'ordre  $N$  d'une source. Ces limites sont telles que le système linéaire représentatif du problème est généralement sous-déterminé ce qui entraîne nécessairement l'obtention d'un modèle erroné.

Le contexte statistique permet de surmonter cet obstacle en exploitant l'information a priori disponible sur une source [Sch06]. Il apporte également des outils qui vont permettre le diagnostic de l'état du système linéaire. Nous serons ainsi capables d'intervenir sur le positionnement des capteurs ou de la source afin d'optimiser l'écriture de l'identification et de contrôler que toute l'information disponible est correctement exploitée. Sur ce point l'estimation bayésienne est différente des autres méthodes de régularisation : elle ne cherche pas à simplifier le modèle en tronquant une partie de l'information qui dérange, mais elle cherche à exploiter toute l'information disponible.

Ce chapitre clos donc les problèmes de l'identification magnétostatique en proposant des outils qui vont permettre de converger vers la solution la plus stable, de diagnostiquer l'état du système linéaire, d'assurer la robustesse de l'estimation et enfin de proposer un placement de capteurs adapté à la source et à l'information a priori disponible. Nous sommes donc désormais capables de procéder à l'identification magnétodynamique d'une source complexe, même si son ordre  $N$  n'est pas parfaitement déterminé et le nombre de capteurs insuffisant. Pour compléter cette étude, le chapitre 7 de cette thèse propose une application de l'identification magnétodynamique d'une maquette de moteur discoïde de propulsion navale. Elle illustre toutes les précautions et études nécessaires à l'obtention du modèle harmonique. En particulier une partie de l'information est souvent obtenue par des considérations géométriques simples comme l'effet de forme dû à l'aimantation des matériaux ferromagnétiques qui constituent la source : c'est pourquoi nous proposons maintenant la lecture d'une deuxième partie qui concerne l'analyse harmonique et le dimensionnement de blindages magnétiques.

## Deuxième partie

# Analyse harmonique et dimensionnement de blindages magnétiques



# Introduction

La seconde partie de cette thèse est consacrée au calcul de blindages magnétiques de sources. Le principe du blindage magnétique est d'encercler une source à l'aide de matériaux ferromagnétiques pour réduire l'amplitude des champs électromagnétiques : il s'agit d'un effet d'écran.

Dans cette partie nous exploiterons une formulation harmonique des champs électromagnétiques qui garantit la cohérence avec les modèles proposés pour l'identification et offre la possibilité de dimensionner un blindage adapté en fonction des différents termes de la décomposition harmonique d'une source. Ainsi, la méthode que nous proposons est dans la continuité naturelle de l'identification magnétodynamique proposée dans la première partie de cette thèse.

Cette partie se découpe en deux chapitres qui portent respectivement sur l'effet d'atténuation et l'effet de forme d'un blindage. Le premier effet est synonyme de l'efficacité du blindage et son calcul permet le dimensionnement. Le second est lié à la forme des blindages et son évaluation fournit une méthode de simulation électromagnétique efficace qui exploite uniquement les relations de passage sur les surfaces et les propriétés de l'écriture harmonique. Le détail de ces deux chapitres est le suivant :

Dans le premier chapitre, nous commençons par présenter l'origine des phénomènes d'atténuation dans un blindage : les courants de Foucault et l'aimantation. Nous rappellerons qu'ils sont liés d'une part à la dynamique de la source et d'autre part aux propriétés magnétiques et électriques des matériaux utilisés. Nous présentons ensuite une méthode de calcul qui permet d'évaluer l'efficacité d'un blindage et exploite une écriture matricielle des conditions de passage sur les surfaces. Le résultat essentiel qui ressort de cette méthode est que l'atténuation du blindage dépend de l'ordre et de la fréquence de la source. Du fait de cette dépendance il est possible de dimensionner un blindage en fonction de la décomposition harmonique d'une source. Nous pouvons donc proposer les paramètres (épaisseur, propriétés magnétiques) d'un blindage parfaitement adapté à la décomposition harmonique et à la dynamique d'une source. Pour clore ce chapitre nous montrons qu'il est possible d'envisager un blindage multicouches qui optimise encore les performances d'un blindage.

Dans le second chapitre, nous définissons une méthode de calcul harmonique de l'effet de forme d'un blindage. Nous généralisons l'écriture des relations de passage de l'induction magnétique sur un problème comportant une seule frontière de forme quelconque. Le calcul est possible grâce à une écriture globale de ces relations sur la surface qui est offerte par leur projection sur la base des fonctions harmo-



riques. Nous proposons une interprétation intéressante de ce calcul qui montre que les champs électromagnétiques rayonnés par un objet sont le résultat d'une modulation du champ source par la forme de l'objet. Le calcul que nous proposons peut se généraliser à des problèmes électromagnétiques complexes comportant plusieurs surfaces et des milieux conducteurs, ce qui en fait une méthode de calcul de problèmes électromagnétiques générale comparable à la méthode des éléments finis. Nous terminons ce chapitre par deux exemples didactiques qui permettent d'appréhender l'intérêt et les applications de la méthode.

Cette partie complète la précédente en proposant le calcul harmonique des blindages. Nous y établissons une méthode qui permet de dimensionner un blindage adapté à une source identifiée et de calculer précisément la nouvelle signature de cette source et de son blindage. Cette méthode est générale et permet le calcul plus complexe de problèmes électromagnétiques utilisant un découpage en région de l'espace. Ainsi, nous sommes aussi capables de faire un calcul direct qui donne les coefficients harmoniques d'une source et qui fournit l'information a priori nécessaire à l'identification. La lecture de cette partie va donc permettre de fusionner les résultats du problème direct et du problème inverse et d'assurer un modèle représentatif d'une source en surmontant les limites de l'identification magnétodynamique, c'est-à-dire le manque de mesures et l'origine de l'information a priori.

# Chapitre 5

## Efficacité d'un blindage passif

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction au blindage</b>	<b>107</b>
5.1.1	Origine des phénomènes d'atténuation	108
5.1.2	Interprétations empiriques	113
5.1.3	Définitions	118
<b>5.2</b>	<b>Méthode harmonique de calcul de blindage</b>	<b>121</b>
5.2.1	Méthode matricielle de calcul de blindage	121
5.2.2	Généralisation	126
<b>5.3</b>	<b>Interprétation</b>	<b>128</b>
5.3.1	Cas statique	129
5.3.2	Cas dynamique	132
5.3.3	Blindage multicouches	135
<b>5.4</b>	<b>Conclusions</b>	<b>138</b>

---

### 5.1 Introduction au blindage

Dans la première partie de cette thèse nous avons abordé le problème de la discrétion magnétique en proposant l'identification magnétodynamique d'une source à l'aide de modèles harmoniques. Cette approche est justifiée par les propriétés de ces modèles. En particulier, elle offre la séparation d'une source en termes que nous pouvons hiérarchiser suivant leur ordre, qui est synonyme de l'influence qu'ils auront à distance de la source. Nous sommes ainsi capables de caractériser une source et d'en spécifier les termes gênants, causes d'indiscrétions électromagnétiques. Alors, pour réduire l'amplitude de ces termes et assurer la discrétion, nous proposons d'exploiter des blindages magnétiques.

Ce chapitre porte essentiellement sur le blindage passif qui consiste à entourer une source de matériaux dont les propriétés électromagnétiques réduisent l'amplitude des champs. L'effet de blindage est obtenu en exploitant l'aimantation et les courants de Foucault, qui sont causés respectivement par la présence d'un champ électromagnétique et sa variation. L'interprétation de ces phénomènes est

à l'origine de nombreuses formulations empiriques ou, plus récemment, de méthodes numériques qui permettent le calcul de l'atténuation des champs due au blindage. Malheureusement, aucune de ces méthodes n'offre de méthodologie pour dimensionner un blindage adapté à une source, car elles traduisent uniquement les réactions des matériaux sans jamais les confronter aux caractéristiques de la source à blinder.

La méthode de calcul de blindage que nous proposons dans ce chapitre prolonge justement la caractérisation d'une source sous la forme d'une décomposition harmonique. Il s'agit d'évaluer l'efficacité d'un blindage pour chacun des termes harmoniques de la décomposition d'une source, ce qui permet non seulement le calcul d'un blindage spécifique, mais surtout la mise en œuvre d'outils de rationalisation qui vont servir à définir une méthode de dimensionnement de blindages.

Pour atteindre ces objectifs, nous divisons ce chapitre en trois parties. La première partie rappelle les phénomènes à l'origine de l'effet de blindage, leur interprétation empirique et les principales définitions utiles. La seconde partie contient le développement de notre méthode harmonique de calcul de blindage. Enfin, la troisième partie propose une méthodologie de blindage, véritable "*mode d'emploi*" du dimensionnement et de l'analyse des blindages harmoniques. L'approche structurée que nous avons choisie doit nous permettre de comprendre les mécanismes du blindage et de situer notre méthode dans la lignée des approches et formulations empiriques les plus connues.

### 5.1.1 Origine des phénomènes d'atténuation

Le but d'un blindage est d'atténuer le champ magnétique d'une source. Cette atténuation est obtenue en exploitant les réactions des matériaux à la présence et aux variations d'un champ. Deux phénomènes interviennent dans ces réactions : l'aimantation et les courants de Foucault. Afin de comprendre ces phénomènes qui permettent le blindage et motivent le choix des matériaux, nous allons présenter précisément leurs origines, c'est-à-dire le ferromagnétisme et les courants de Foucault.

#### 5.1.1.1 Le ferromagnétisme

La première origine de l'effet de blindage est l'aimantation qui est une conséquence des propriétés ferromagnétiques des matériaux utilisés. Le but de cette partie, qui est une introduction au ferromagnétisme, est de comprendre le comportement des matériaux ferromagnétiques en présence d'un champ à blinder et de distinguer ceux dont les propriétés se prêtent le mieux à l'atténuation. C'est pourquoi nous étudierons le ferromagnétisme de sa définition et ses origines à la principale distinction entre matériaux doux et durs.

**Définition - Origine** On aimante un morceau de matière en le plongeant dans un champ magnétique d'excitation  $\vec{H}$ . Il acquiert alors une aimantation magnétique  $\vec{M}$ . L'aimantation ainsi acquise va créer un champ propre qui se superpose au champ d'excitation, faisant de cette matière une source de champ magnétique.

Le ferromagnétisme est la propriété qu'ont certains matériaux à acquérir une aimantation importante en présence d'un champ excitateur faible. C'est à l'échelle mésoscopique qu'apparaissent les phénomènes à l'origine de cette aimantation. En effet, les matériaux ferromagnétiques se divisent spontanément en domaines appelés domaines de Weiss, qui portent tous une aimantation élémentaire constante. Ces domaines sont séparés par les parois de Bloch, zone où l'aimantation change de direction et s'inverse (voir figure 1.B) sous l'effet d'un champ externe [Bri97].

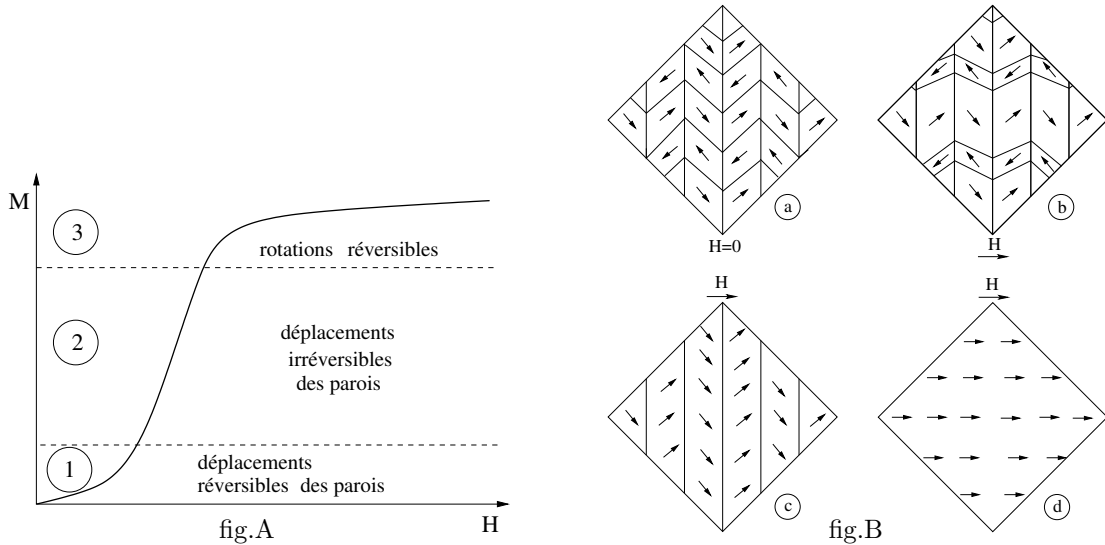


FIG. 5.1 – fig. A : Courbe de première aimantation. - fig. B : Aspect schématique des transformations des domaines de Weiss correspondant au processus d'aimantation.

Quand une substance est complètement désaimantée, les domaines ont des orientations différentes et opposées deux à deux (figure 1.B.a). De ce fait l'aimantation macroscopique observable est nulle. L'application d'un champ magnétique d'excitation croissant ( $\vec{H}$ ) va transformer ces domaines durant trois phases caractéristiques de la première aimantation (figure 5.1.A) :

1. Certains domaines augmentent de volume au dépend des autres en privilégiant la direction du champ d'excitation. Il apparaît alors une aimantation macroscopique (figure 5.1.B.b). Pour des valeurs de champ faible, cette transformation est réversible, c'est-à-dire que les parois reprennent leur position initiale si le champ décroît à nouveau (figure 5.1.A).
2. Une augmentation plus importante du champ aura pour conséquence de diminuer le nombre de domaines et d'augmenter leur volume (figure 5.1.B.c). Les déplacements des parois deviennent alors irréversibles, c'est-à-dire qu'il n'est plus envisageable de retrouver une configuration antérieure des domaines en diminuant le champ excitateur.
3. Enfin le champ continuant à croître il produit une rotation de l'aimantation de chaque domaine et la disparition des parois. L'aimantation est alors orientée dans la même direction que le champ excitateur (figure 5.1.B.d). Pour des champs importants, l'augmentation du champ n'aura plus de conséquence sur l'aimantation : nous avons alors atteint la saturation du matériau.

Dans ce paragraphe nous avons montré que l'aimantation n'était pas un processus réversible et qu'elle était limitée par des phénomènes de saturation. Pour aboutir à un blindage optimal nous devons donc parfaitement connaître l'état de l'aimantation du blindage en fonction du champ de la source, ce qui est résumé par le *cycle d'hystérésis* propre à chaque matériau ferromagnétique.

**L'hystérésis** Si après avoir décrit la courbe de première aimantation jusqu'à saturation nous faisons décroître lentement le champ d'excitation  $\vec{H}$ , la courbe obtenue est différente de la précédente. Ainsi lorsque  $\vec{H}$  s'annule l'aimantation ne s'annule pas et il demeure une aimantation rémanente  $\vec{M}_r$  (figure 5.2). Pour annuler l'aimantation il faut alors établir un champ  $\vec{H}_c$  en sens inverse : le champ coercitif. Puis en continuant à décroître dans cette direction un nouvel état de saturation de l'aimantation est atteint.

Pour caractériser le ferromagnétisme, généralement nous traçons une courbe représentant la courbe de variation de l'aimantation magnétique  $\vec{M}$  en fonction du champ magnétique d'excitation  $\vec{H}$ . La loi décrite pour passer d'un état d'aimantation à un autre dépend du sens de variation du champ et de l'état antérieur du matériau. Lorsque le champ d'excitation  $\vec{H}$  varie, le point représentatif de l'état du système décrit une boucle dans le plan (M,H) appelée cycle d'hystérésis du matériau (figure 5.2).

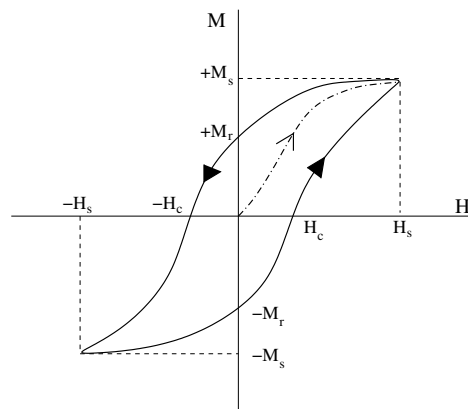


FIG. 5.2 – Cycle d'hystérésis  $M(H)$ .  $M_s$  et  $H_s$  sont les valeurs crêtes de l'aimantation et du champ d'excitation  $H$ ,  $M_r$  l'aimantation rémanente et  $H_c$  le champ coercitif

Deux familles de matériaux ferromagnétiques se distinguent à partir des caractéristiques de leurs hystérésis respectifs et sont couramment utilisées en génie électrique : les matériaux magnétiques doux et les matériaux magnétiques durs. Cette distinction réside essentiellement dans la valeur du champ coercitif  $H_c$ .

**Les matériaux magnétiques pour les blindages** Nous avons distingué les matériaux magnétiques durs et doux. Dans la conception des blindages nous exploiterons essentiellement des matériaux magnétiques doux, ce que nous pouvons justifier en précisant les propriétés respectives de ces deux types de matériaux.

1. **Les matériaux magnétiques durs** sont ceux qui conservent une forte aimantation rémanente  $\vec{M}_r$  lorsque le champ d'excitation s'annule, et sont tels

que cette aimantation demeure en présence de variations importantes du champ, c'est ainsi que fonctionnent les aimants.

L'exploitation de ces matériaux pour la discrétion est envisageable, en particulier pour des sources statiques, mais n'est pas exploitable dans notre approche de discrétion. L'emploi de ces matériaux ne peut pas être considéré comme un blindage passif, mais actif, puisque nous superposons une source dont l'aimantation est constante et indépendante du champ de la source. Du point de vue de la discrétion, le risque est important, car si le champ de la source est modifié, les matériaux durs exploités dans le blindage créeront une source d'indiscrétion importante.

2. **Les matériaux magnétiques doux** sont ceux dont l'aimantation dépend du champ magnétique dans lequel ils sont plongés. Pour ces matériaux, sauf dans le cas où l'on veut calculer les pertes par hystérésis<sup>1</sup>, il est possible de négliger le cycle d'hystérésis en raison des faibles valeurs du champ coercitif. La loi d'aimantation est alors représentée par une relation  $B(H)$  anhystérétique (voir Fig.5.3).

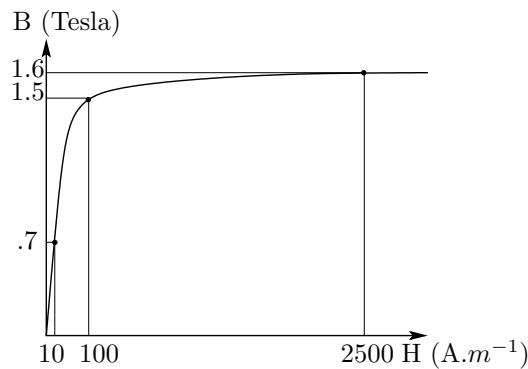


FIG. 5.3 – Courbe anhystérétique  $B(H)$  d'un matériau magnétique doux (FeSi)

Cette courbe anhystérétique peut se décomposer en deux zones principales. La première est une zone de linéarité du matériau dans laquelle le flux magnétique est proportionnel au champ  $H$  d'excitation et s'écrit à l'aide de la perméabilité relative  $\mu_r$ , sous la forme :

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \cdot \vec{H}$$

La seconde zone est la zone de saturation dans laquelle le matériau est aimanté à saturation et se comporte comme de l'air.

Ces matériaux sont ceux utilisés dans des applications de blindage, la principale raison de ce choix réside dans leur comportement linéaire vis-à-vis d'un champ externe : ils s'aimantent proportionnellement à la source à blinder et constituent ainsi le matériau idéal pour le blindage. Ces matériaux sont d'autant plus performant qu'ils créent une aimantation forte capable de s'opposer à la source ce qui est encore optimisable en choisissant des matériaux de perméabilité relative élevée. Malheureusement, ce choix est souvent limité par la

<sup>1</sup>liées aux mouvements des domaines de Weiss pendant un cycle d'hystérésis

saturation qui intervient dès que les niveaux de champ deviennent trop importants. Le dimensionnement de blindage commence donc toujours par un choix pertinent de matériau, qui doit prendre en compte le niveau de champ de la source pour éviter les phénomènes de saturation tout en garantissant une efficacité maximale du blindage.

### 5.1.1.2 Les Courants de Foucault

L'aimantation est une cause de l'atténuation des blindages magnétiques, mais elle n'est pas l'unique source d'atténuation d'un blindage. Une autre source d'atténuation possible sont les courants de Foucault créés par les variations des champs dans les matériaux conducteurs. En effet, lorsqu'une pièce métallique conductrice est plongée dans un champ magnétique variable des courants sont induits créant ainsi une source qui s'oppose aux variations qui lui ont donné naissance : se sont les courants de Foucault.

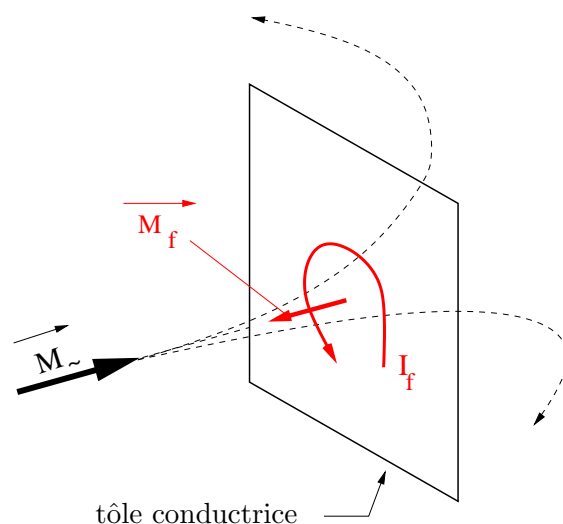


FIG. 5.4 – Courants de Foucault induits dans une tôle conductrice par la variation du champ d'une source de moment dipolaire  $\vec{M}$

La figure (5.4) illustre la création de courants de Foucault dans une tôle servant au blindage d'une source dipolaire dynamique représentée par son moment  $\vec{M}$ . Si le ferromagnétisme crée une source statique : l'aimantation, les courants de Foucault forment des sources de nature différente, qui sont des boucles de courant, et qui sont des sources dynamiques qui s'opposent à la variation du champ d'excitation. La figure (5.4) peut alors se résumer ainsi : les variations de la source  $\vec{M}$  induisent dans la tôle des courants de Foucault qui forment des boucles de courants  $I_f$  dont l'effet, équivalent à un moment  $\vec{M}_f$  s'oppose aux variations de  $\vec{M}$ .

La notion de courants de Foucault est associée à celle de l'épaisseur de peau  $\delta$  qui représente l'épaisseur des matériaux dans laquelle siège la majorité des phénomènes induits. Si l'aimantation dépend de la perméabilité et de la saturation, les courants de Foucault dépendent de la conductivité du blindage et de la fréquence. En effet, si l'épaisseur des tôles utilisées est plus petite que l'épaisseur de peau, l'ensemble

des phénomènes induits ne pourront être contenus par le blindage et, de ce fait, l'efficacité de ce dernier en sera diminuée : il s'agit donc d'un facteur limitant équivalent à la saturation.

En conclusion, cette introduction aux courants de Foucault montre l'importance du choix des matériaux pour le blindage d'une source dynamique. En effet, nous devons choisir un matériau qui favorise le développement des courants de Foucault en fonction des variations de la source et de l'épaisseur des matériaux. Dans le cadre plus général du blindage d'une source qui possède des éléments statiques et dynamiques, nous devons assurer qu'il y a une aimantation et des courants de Foucault optimaux ce qui passe par un choix adapté de matériaux, qui prend en compte l'amplitude et la dynamique des sources.

### 5.1.1.3 Hypothèses et cadre de l'étude

Rappelons tout d'abord le cadre de cette étude : il s'agit de mettre en place une stratégie de dimensionnement de blindage qui permette d'adapter le blindage à une source. Le calcul de l'effet de blindage que nous obtenons n'est d'ailleurs pas réellement l'objectif que nous visons. Nous nous autoriserons donc quelques hypothèses classiques qui négligent certains phénomènes physiques dont les modélisations sont complexes et méritent à elles seules des études qui sortent du cadre de cette thèse.

Tout d'abord nous négligerons les phénomènes liés à la saturation des matériaux. Ainsi nos matériaux seront parfaitement linéaires et caractérisés par une perméabilité constante. Cette première hypothèse entraîne la nécessité de négliger les variations de la perméabilité des matériaux en fonction de la fréquence. En effet, nous avons vu que les variations d'un champ d'excitation créent des courants de Foucault dans la matière. Ils sont en fait localisés sur les parois de Bloch et ont une influence sur la déformation des domaines de Weiss, ce qui a naturellement pour conséquence de ralentir le processus d'aimantation et se traduit par une diminution de la perméabilité magnétique.

Les hypothèses de linéarité que nous utilisons dans ce chapitre simplifient les phénomènes physiques et vont nous permettre d'exploiter, d'une part des interprétations physiques simples, et d'autre part les développements harmoniques définis dans la première partie de cette thèse. Grâce à ces hypothèses, nous sommes capables de prolonger notre analyse harmonique au dimensionnement de blindages.

## 5.1.2 Interprétations empiriques

Dans la section précédente, nous avons montré les deux principales origines de l'effet de blindage d'une source. Nous avons insisté sur le choix des matériaux, sur lequel repose le dimensionnement de blindage. Pour aller plus loin, et élaborer une stratégie de blindage, nous allons maintenant présenter une interprétation physique et classique de l'effet de blindage statique et dynamique qui doit nous permettre de comprendre les mécanismes avec une vue globale. Cette vision est celle traditionnellement exploitée dans la littérature qui permet le calcul analytique de l'effet du blindage pour des champs dont l'expression est simple. C'est cette voie que



nous voulons utiliser et généraliser à l'écriture harmonique des sources pour que le blindage soit une conséquence logique de l'identification.

### 5.1.2.1 Interprétation dipolaire - multipolaire

Nous rappelons, pour commencer, que deux phénomènes différents interviennent dans le blindage magnétique : l'aimantation pour les sources statiques et les courants de Foucault pour les sources dynamiques<sup>2</sup>.

**Interprétation de l'aimantation** Notre premier effort consiste à interpréter le processus d'aimantation des matériaux et son intervention dans l'effet d'un blindage. Prenons une tôle ferromagnétique de perméabilité relative  $\mu_r > 1$ . Les matériaux ferromagnétiques doux ont la propriété de canaliser les lignes de champ et ainsi de s'aimanter fortement (voir Fig.5.5.a), en particulier quand le champ d'excitation  $\vec{H}$  est parallèle à la surface du blindage. Cette aimantation forme alors une nouvelle source que nous pouvons schématiser comme des dipôles ponctuels sommes locales de l'aimantation à l'endroit du blindage où le champ de la source est parallèle à la surface (voir Fig.5.5.b).

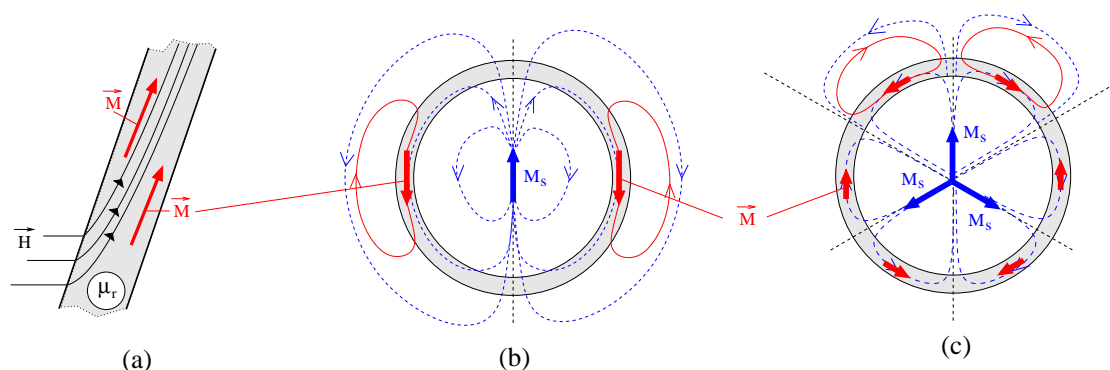


FIG. 5.5 – (a) : Représentation de l'aimantation d'une tôle de perméabilité relative  $\mu_r > 1$  sous l'action d'un champ externe  $\vec{H}$  - (b) : Représentation dipolaire de l'aimantation d'un blindage sphérique entourant une source dipolaire statique  $\vec{M}_s$  - (c) : Représentation multipolaire de l'aimantation relative à une source d'ordre  $n=3$

Cette représentation dipolaire permet de comprendre comment l'aimantation réduit la signature d'une source dipolaire. Il y a superposition du champ de la source et du champ des dipôles dus à l'aimantation, ce qui conduit à une réduction du niveau de champ à l'extérieur du blindage (Fig.5.5.b). Ce raisonnement est généralisable pour des sources multipolaires (Fig.5.5.c), cependant il possède plusieurs limites :

- Tout d'abord l'équivalence dipolaire ou multipolaire de l'aimantation n'est valable qu'à grande distance du blindage où l'aimantation peut être confondue à sa valeur intégrée dans le blindage.

<sup>2</sup>Généralement la perméabilité des matériaux n'est pas unitaire et nous avons simultanément aimantation et courants de Foucault

- Si le modèle permet d’expliquer l’intervention de l’aimantation dans l’effet d’atténuation, il ne permet pas de calculer les valeurs des dipôles équivalents, ni celle du champ. Ce qui est néanmoins possible si nous considérons une répartition de dipôles dans le blindage ou sur sa surface : ce raisonnement nous conduit alors à la méthode dite des moments magnétiques [Har90] [Fro02a].

**Interprétation des courants de Foucault** Soit une plaque de tôle que nous choisissons en aluminium pour éviter tout phénomène d’aimantation<sup>3</sup>. Lorsque nous plongeons cette plaque dans un champ externe variant  $\vec{H}$  elle est le siège de courants de Foucault qui s’opposent aux variations de ce champ. La figure (5.6.a) illustre la création de boucles de courants qui sont représentées par des moments magnétiques  $\vec{M}$  s’opposant à  $\vec{H}$ .

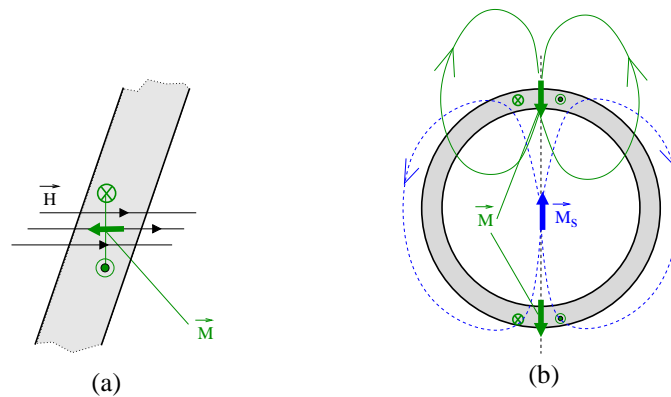


FIG. 5.6 – (a) : Représentation des courants de Foucault et de la source dipolaire induite par les variations d’un champ externe sur une tôle en aluminium. - (b) : Représentation dipolaire des sources induites par les variations d’un dipôle inclus dans un blindage sphérique.

La représentation dipolaire permet encore d’interpréter la réaction du blindage à la variation de la source en superposant le champ dû à deux dipôles ponctuels dont les moments sont relatifs aux courants de Foucault. Ce modèle dipolaire de la réaction du blindage est cependant différent du précédent. C’est pourquoi les moments magnétiques équivalents à l’effet de blindage se situent où le champ est le plus perpendiculaire à la surface du blindage (voir Fig.5.6.b). Les limites de cette interprétation du blindage dynamique sont les mêmes que dans le cas de l’aimantation, en particulier le modèle dipolaire du blindage n’est valable qu’à une distance suffisamment grande pour négliger la répartition volumique des courants de Foucault.

**Conclusion** Ces interprétations ont permis de comprendre les processus intervenant dans le blindage en faisant la distinction entre les phénomènes propres aux blindages statiques et dynamiques. Nous retiendrons en particulier que les deux processus qui permettent la réduction de signatures sont des réactions différentes :

<sup>3</sup>L’aluminium est amagnétique et ne s’aimante pas

l'aimantation est favorisée par la source tandis que les courants de Foucault s'y opposent. Mais le résultat essentiel que nous pouvons tirer de cette analyse est que l'effet du blindage dépend de la source, du matériau du blindage et de la forme de ce blindage. En effet, l'aimantation est d'autant plus forte dans un blindage que le champ de la source lui est parallèle, de même, les courants de Foucault sont maximum où la surface du blindage permet un flux maximum. Cependant, nous rappelons que la principale limite de cette interprétation est qu'elle ne rend pas compte de l'aimantation réelle ou des courants de Foucault qui sont des grandeurs volumiques. Il manque à cette interprétation un point de vue analytique qui formaliserait cette approche et rendrait possible le calcul. C'est dans cette direction que nous allons maintenant en présentant des formulations élémentaires qui vont permettre le calcul de l'aimantation et des courants de Foucault.

### 5.1.2.2 Formulations élémentaires

Dans ce paragraphe nous présentons une interprétation analytique de l'effet de blindage d'où découlent les formules empiriques de l'efficacité des blindages qui permettent de définir leurs tendances en fonction de l'épaisseur et la perméabilité.

La méthode de dimensionnement de blindage que nous établirons à la fin de ce chapitre est une généralisation de cette approche à des sources multipolaires. C'est pourquoi nous insistons sur cette démarche classique qui consiste à calculer analytiquement l'expression du champ magnétique uniquement en exploitant les conditions aux limites sur les deux surfaces d'un blindage sphérique [Dur68] [Rik87] [Teg85].

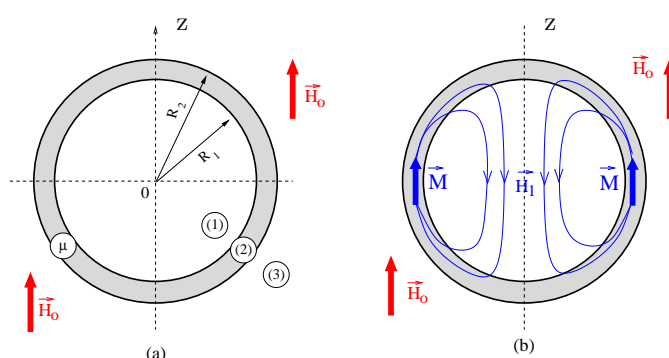


FIG. 5.7 – (a) : Blindage sphérique de perméabilité  $\mu$  plongé dans un champ uniforme  $\vec{H}_0$  parallèle à l'axe  $z$  - (b) : Interprétation de l'aimantation à l'aide de dipôles : un champ  $\vec{H}_1$  se superpose à  $\vec{H}_0$  à l'intérieur du blindage créant ainsi l'effet de blindage.

Soit un blindage de forme sphérique de rayons interne  $R_1$  et externe  $R_2$ , plongé dans un champ magnétique  $\vec{H}_0$  statique, uniforme et parallèle à l'axe  $z$  (voir Fig.5.7 (a)). Le potentiel scalaire magnétique s'écrit respectivement en tout point  $P(r, \theta, \phi)$

à l'aide de constantes (A,B,C,D) comme :

$$\begin{cases} \Psi_1 = A \cdot r \cos \theta & (r < R_1) \\ \Psi_2 = (B \cdot r + C \cdot \frac{R_1^3}{r^2}) \cos \theta & (R_1 < r < R_2) \\ \Psi_3 = D \cdot \frac{R_1^3}{r^2} \cos \theta - H_0 \cdot r \cos \theta & (r > R_2) \end{cases} \quad (5.1)$$

Toutes ces expressions sont des solutions harmoniques de l'équation de Laplace. Pour déterminer les coefficients qui permettent l'écriture du potentiel dans les différentes zones, nous exploitons les conditions aux limites en  $r=R_1$  et  $r=R_2$  :

$$\begin{cases} \Psi_1 = \Psi_2 & \mu_0 \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} = \mu \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} \text{ pour } r = R_1 \\ \Psi_2 = \Psi_3 & \mu \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} = \mu_0 \frac{\partial \Psi_3}{\partial r} \text{ pour } r = R_2 \end{cases} \quad (5.2)$$

Elles conduisent à un système de 4 équations linéaires permettant de déterminer les coefficients (A,B,C,D). L'intérêt de cette approche est de fournir l'expression analytique du potentiel scalaire et ainsi de toutes les grandeurs magnétiques [Dur68]. En particulier, elle permet le calcul d'un ratio **S** entre le potentiel de la source sans le blindage et celui avec blindage qui est l'atténuation du blindage [Rik87]. Il est donné par la formule :

$$\mathbf{S} = \Psi_1 / \Psi_0 = \frac{9\mu\mu_0}{(2\mu + \mu_0)(\mu + 2\mu_0) - 2(\mu - \mu_0)^2 \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3} \quad (5.3)$$

Ainsi l'apport de l'approche analytique est déterminant dans la démarche de dimensionnement de blindages magnétiques. Elle offre des outils de dimensionnement comme l'expression de l'atténuation du blindage (5.3) qui met en relation l'atténuation avec l'épaisseur du blindage et sa perméabilité. En comparaison avec l'interprétation empirique précédente (voir Fig.5.7.b) qui ne permet qu'une compréhension globale des phénomènes, elle fournit des outils précis qui permettent un dimensionnement rationnel des blindages. Par exemple, l'analyse mathématique de (5.3) nous renseigne sur plusieurs points de la conception d'un blindage adapté :

- Le blindage est d'autant plus efficace que le rapport des rayons  $R_1/R_2$  est petit. Alors, si nous désirons construire un blindage avec des tôles d'épaisseur constante il sera d'autant plus efficace qu'il sera de petites dimensions.
- Si nous possédons un matériau de perméabilité donnée, l'atténuation est d'autant plus forte que l'épaisseur est grande. Néanmoins, il existe toujours une valeur limite de (5.3) qui dépend uniquement de la perméabilité magnétique et qui est donnée pour  $R_1/R_2 = 0$ . Elle implique qu'il y a une limite à l'atténuation qui ne dépend pas de l'épaisseur du blindage (voir Fig.5.8) et qu'il est préférable d'avoir des matériaux de forte perméabilité, plutôt que des matériaux d'épaisseur importante.

Pour récapituler, l'intérêt de cette approche est de fournir une expression analytique des grandeurs électromagnétiques liées au blindage en fonction de ses paramètres. Il en résulte des outils, qui nous permettent, grâce à l'analyse mathématique

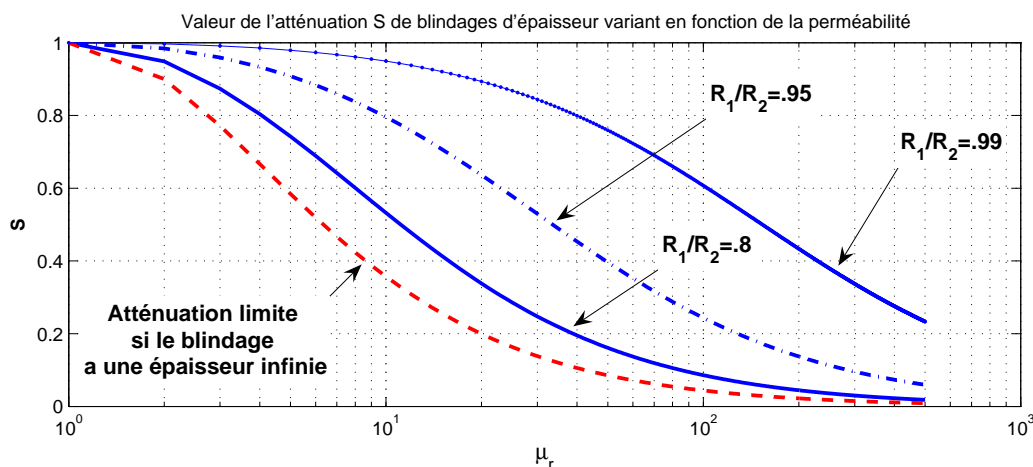


FIG. 5.8 – Atténuation  $S$  d'un blindage sphérique en fonction du rapport de ses rayons interne et externe et de sa perméabilité relative  $\mu_r = \mu/\mu_0$ . Quelle que soit l'épaisseur du blindage il est d'autant plus efficace que sa perméabilité est grande. Il existe cependant une atténuation limite pour chaque blindage, qui ne dépend que du choix du matériau et qui est déterminée par la valeur de  $S$  quand l'épaisseur est infinie.

d'expressions telles que (5.3), d'élaborer une stratégie de blindage. Si nous n'avons présenté ces résultats que dans le cadre d'un champ uniforme et statique, il est envisageable de généraliser la méthode à des sources multipolaires harmoniques statiques ou dynamiques : c'est cette direction que nous allons suivre maintenant après avoir donné une définition claire des phénomènes et propriétés liés au blindage.

### 5.1.3 Définitions

#### 5.1.3.1 Principe

Le blindage magnétique exploite les réactions des matériaux ferromagnétiques et conducteurs à la présence d'une source et à ses variations pour créer un écran qui diminue sa signature électromagnétique. En synthèse de la partie précédente, nous rappelons que les deux principales réactions exploitées sont l'aimantation et les courants de Foucault. L'aimantation est un phénomène favorisé par la structure des matériaux ferromagnétiques. Elle crée une source dans la matière dont le champ magnétique s'oppose à celui de la source à blinder, diminuant ainsi le champ à l'extérieur du blindage. Les courants de Foucault, sont quant à eux des phénomènes qui s'opposent aux variations du champ magnétique de la source.

Si le principe du blindage est assez simple, sa mise en oeuvre est un art qui nécessite de nombreuses précautions à commencer par un choix adapté de matériaux. En effet, ce choix est primordial dans une stratégie de blindage car il détermine l'efficacité du blindage, mais surtout justifie les hypothèses de linéarité qui permettent le développement de formulations analytiques pour les blindages. Nous commencerons donc toujours notre démarche de blindage en nous assurant que les matériaux choisis ne seront pas saturés par la présence de la source, ce qui passe

par l'analyse de la courbe d'aimantation respectivement à l'amplitude du champ magnétique de cette source.

Cependant, l'atténuation du blindage ne dépend pas uniquement du niveau de champ de la source, il dépend aussi de sa variation. En effet, si la source est dynamique, l'effet des courants de Foucault vient s'ajouter et augmente encore l'atténuation du blindage. Cette atténuation dynamique dépend de la fréquence du champ de la source et se traduit par un effet de peau d'épaisseur  $\delta$ . Nous devons donc assurer, si nous voulons exploiter l'atténuation dynamique d'un blindage, que l'épaisseur du blindage est bien supérieure à l'épaisseur de peau pour les fréquences que nous voulons blinder.

En somme, dimensionner un blindage commence par le choix judicieux d'un matériau adapté à la source ce qui est conditionné par l'amplitude et la fréquence des sources. Par exemple, si nous avons des sources de champ faibles et de fortes variations, nous favoriserons des matériaux conducteurs (peu coûteux), plutôt que magnétiques. Au contraire, pour des champs magnétiques statiques nous utiliserons plutôt des matériaux de forte perméabilité (très coûteux).

Enfin, le choix du matériau étant fait de façon à ce que le blindage soit optimal, il autorise également d'exploiter les hypothèses de linéarité qui permettent le calcul analytique d'un blindage, c'est-à-dire que les milieux sont définis par des conductivité  $\sigma$  et perméabilité  $\mu$  constantes. Alors, nous pouvons exploiter les conditions aux limites sur le blindage pour déterminer ses effets sur le champ d'une source, c'est-à-dire son efficacité et son effet de forme.

### 5.1.3.2 L'efficacité

Le blindage magnétique peut se diviser en deux phénomènes distincts : l'atténuation et l'effet de forme. Nous considérons dans cette étude que l'atténuation est le but du blindage tandis que l'effet de forme est l'ensemble des effets au second ordre qui sont liés à la forme du blindage. Pour cette raison nous avons choisi de traiter, dans la suite de ce chapitre, de l'atténuation de sources par un blindage de forme neutre (sphérique), puis dans le prochain chapitre d'introduire les effets de forme, qui généralisent notre approche à des blindages de forme quelconque. Ainsi, en nous concentrant sur l'atténuation d'un blindage sphérique nous allons faire ressortir l'efficacité de ce blindage en fonction de ses caractéristiques, c'est-à-dire que nous allons nous concentrer sur ses performances sans prendre en compte les variations locales liées à sa forme.

Afin de préciser notre étude nous introduisons maintenant la notion d'efficacité d'un blindage qui rend compte de sa performance c'est-à-dire de sa capacité à atténuer un champ magnétique. Soit une source créant un champ magnétique  $\vec{H}_0$ , en notant  $\vec{H}_T$ , le champ magnétique de la source et de son blindage<sup>4</sup> nous pouvons introduire le rapport, appelé efficacité d'un blindage :

$$\xi = -20 \log \left\| \frac{\vec{H}_T}{\vec{H}_0} \right\| = -20 \log \|\mathbf{S}\| \quad \text{où } \mathbf{S} \text{ est l'atténuation du blindage} \quad (5.4)$$

<sup>4</sup>c'est à dire le champ magnétique de la source atténué par le blindage

Si cette définition permet d'évaluer l'atténuation de blindages <sup>5</sup> et de comparer les performances, pour une source complexe, elle n'est pas une définition globale de l'effet d'atténuation. Pour cette raison nous introduisons un coefficient d'efficacité dépendant de l'ordre de chaque terme harmonique de la source défini par :

$$\xi_n = -20 \log \left\| \frac{\vec{H}_{T,n}}{\vec{H}_{0,n}} \right\| = -20 \log \|\mathbf{S}_n\| \quad \text{où } \mathbf{S}_n \text{ est l'atténuation à l'ordre } n \quad (5.5)$$

Adopter ces coefficients c'est admettre qu'un blindage se comporte comme un filtre respectivement à la décomposition harmonique d'une source. Le coefficient  $\xi_n$  représente alors la fonction de transfert du blindage pour chaque ordre d'une décomposition multipolaire. Le principal intérêt de cette démarche est que les  $\xi_n$  sont déterminés en fonction de l'ordre des termes de la source et ne dépendent que des paramètres du blindage. Ce qui permet de prédire et d'optimiser l'atténuation d'un blindage indépendamment de l'amplitude des différents termes de la source et uniquement grâce à la connaissance de sa richesse harmonique. C'est cette démarche que nous allons définir dans la suite de notre exposé et qui nous permettra d'adapter un blindage à une source multipolaire.

### 5.1.3.3 L'effet de forme

Bien qu'il s'agisse du sujet du prochain chapitre, nous avons déjà introduit l'influence de la forme d'un blindage sur l'aimantation et les courants de Foucault. Pour comprendre le mécanisme du blindage imaginons une source d'ordre  $n$ , caractérisée par un seul coefficient harmonique  $C_n$ , dans un blindage. Si ce blindage est sphérique alors son effet se traduit uniquement par l'efficacité  $\xi_n$  relative à l'ordre  $n$  de la source. Mais si le blindage a une forme quelconque, son effet sur la décomposition aura une conséquence sur plusieurs termes de la décomposition harmonique de la source. En quelque sorte, nous avons une efficacité vectorielle  $\mathbf{G}_n$ , fonction du blindage, de sorte que les coefficients  $\mathbf{C}_T$  de la décomposition multipolaire de la source avec blindage ne soient plus donnés directement par une efficacité scalaire, mais par le produit :

$$[\mathbf{C}_T] = [\mathbf{G}_n] \cdot C_n \quad (5.6)$$

Les termes du vecteur  $\mathbf{G}_n$  sont des termes de corrélation relatifs à l'ordre de la source, la forme du blindage et à ses propriétés électromagnétiques. De façon générale, nous pouvons alors écrire pour une source d'ordre  $N$ , déterminée par le vecteur de ses coefficients harmoniques  $\mathbf{C}_0$ , que les coefficients  $\mathbf{C}_T$  de la décomposition harmonique de la source et de son blindage sont obtenus à l'aide d'une matrice de filtrage  $\mathbf{G}$ . Les termes hors diagonale  $\mathbf{G}$  sont des termes de corrélation entre les ordres liés uniquement à la forme du blindage, quant aux termes diagonaux, ils sont les termes d'atténuation relatifs au blindage. Ainsi, l'effet du blindage s'écrira comme la relation matricielle :

$$[\mathbf{C}_T] = [\mathbf{G}] \cdot [\mathbf{C}_0] \quad (5.7)$$

<sup>5</sup>Elle est quasi similaire au ratio  $\mathbf{S}$  du blindage introduit précédemment

Pour conclure, la méthode de calcul de blindage que nous proposons dans cette thèse est une analogie au filtrage. Schématiquement, nous chercherons à écrire l'effet d'un blindage sous la forme d'une relation matricielle (5.7) qui lie les coefficients harmoniques de la source à ceux de cette même source blindée. Ainsi, la suite de cette étude consiste à déterminer les termes de la matrice  $G$  en fonction des paramètres du blindage, c'est pourquoi, nous commençons par les termes diagonaux, qui sont directement donnés par le calcul de l'efficacité d'un blindage de forme sphérique.

## 5.2 Méthode harmonique de calcul de blindage

La méthode de calcul de blindage que nous présentons maintenant est une généralisation à tout ordre de la formulation présentée au paragraphe 5.1.2.2. Cependant, au lieu de considérer un champ uniforme nous allons utiliser le développement multipolaire d'une source que nous avons identifiée. Cette méthode est donc le prolongement naturel de l'identification que nous avons proposée dans la première partie de cette thèse.

L'approche que nous choisissons pour le calcul de l'effet d'atténuation est la suivante : il s'agit dans un premier temps de proposer une écriture matricielle de l'atténuation d'un blindage sphérique et de l'analyser de façon à établir des outils généraux de dimensionnement relatif aux paramètres du blindage, à des sources multipolaires statiques ou dynamiques [Sch05b].

### 5.2.1 Méthode matricielle de calcul de blindage

#### 5.2.1.1 Situation

Deux situations de blindage sont possibles suivant nos motivations :

1. Soit nous cherchons à diminuer la signature électromagnétique d'une source et pour ce faire nous l'englobons dans un blindage (voir Fig.5.9.a).
2. Soit nous cherchons à diminuer les champs électromagnétiques dans la zone intérieure du blindage et les sources sont à l'extérieur (voir Fig.5.9.b).

Afin d'offrir un maximum de généralité, et une écriture unique<sup>6</sup> des conditions aux limites sur les frontières du blindage, nous allons déterminer la réaction du blindage à une excitation maximale. Imaginons pour cela que nous ayons deux sources à l'intérieur ( $\mathcal{S}^{(1)}$ ) et à l'extérieur du blindage ( $\mathcal{S}^{(2)}$ ), qui peuvent se décomposer en source multipolaires suivant les ordres  $n$  :

$$\mathcal{S}^{(i)} = \sum_n \mathcal{S}_n^{(i)}$$

<sup>6</sup>qui ne dépend pas du type de problème de blindage : externe ou interne



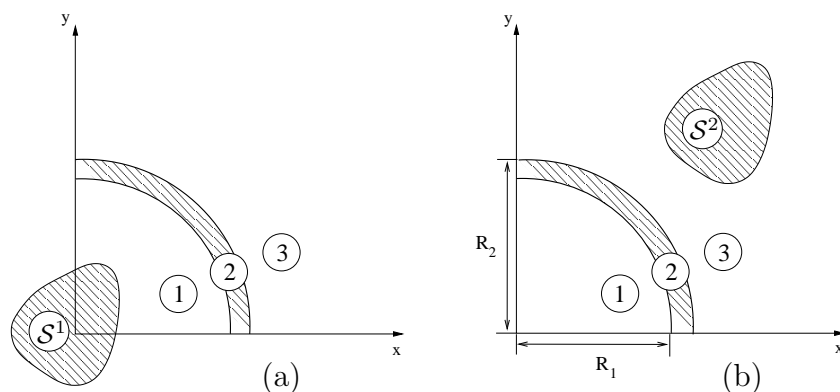


FIG. 5.9 – Division de l'espace en trois zones pour les deux types de problèmes : (a) externe si la source ( $\mathcal{S}^{(1)}$ ) est à l'intérieur du blindage et (b) interne si la source ( $\mathcal{S}^{(2)}$ ) est à l'extérieur du blindage.

L'espace peut alors se décomposer en trois zones (voir Fig.5.9) dans lesquelles les champs électromagnétiques ont des comportements particuliers :

- Dans la **zone 1**, qui correspond à l'intérieur du blindage, les champs sont la somme de  $\mathcal{S}^{(1)}$  et d'un problème externe<sup>7</sup> qui correspond à la réaction du blindage et à la source  $\mathcal{S}^{(2)}$ .
- Dans la **zone 2** les champs électromagnétiques s'écrivent comme la superposition d'un problème interne et externe relatifs aux réactions des matériaux aux deux sources  $\mathcal{S}^{(1)}$  et  $\mathcal{S}^{(2)}$ .
- Dans la **zone 3** les champs électromagnétiques s'écrivent comme la superposition de la source  $\mathcal{S}^{(2)}$  et d'un problème externe représentatif de  $\mathcal{S}^{(1)}$  et de la réaction du blindage.

Pour calculer l'effet de blindage, nous devons encore mettre en relation les réactions du blindage dans les différentes zones, ce que nous allons faire en exploitant les relations de passages des champs sur les frontières du blindages.

### 5.2.1.2 Écriture matricielle des relations de passage

Soit deux milieux (1) et (2) séparés par une frontière  $\mathcal{F}$  (voir Fig 5.10). Dans chacun de ces milieux les champs électromagnétiques répondent à l'équation de diffusion relative à leurs propriétés électromagnétiques ( $\mu$ ,  $\sigma$ ). Nous pouvons donc écrire ces champs à l'aide des modèles harmoniques généraux proposés dans la première partie de cette thèse.

En considérant qu'un problème de blindage est déterminé par le comportement des champs sur les frontières interne et externe, les relations de passage (5.8) peuvent être utilisées pour établir le lien entre les valeurs des coefficients harmo-

<sup>7</sup>Pour la définition d'un problème interne/externe voir §1.3.3.3

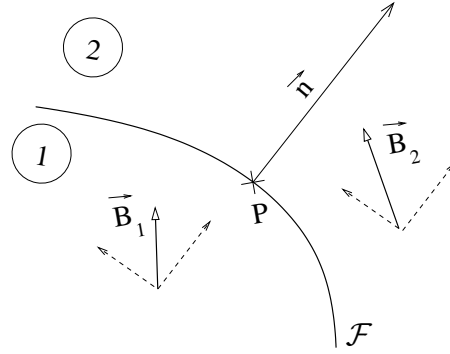


FIG. 5.10 – Représentation des conditions de passage du champ magnétique en un point P de la frontière séparant deux milieux.

niques dans les différentes zones<sup>8</sup>.

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot [\mu_2 \vec{H}_2(P) - \mu_1 \vec{H}_1(P)] = 0 \\ \vec{n} \times [\vec{H}_2(P) - \vec{H}_1(P)] = 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

Pour ce faire, nous allons expliciter les différentes écritures harmoniques dans les trois zones du blindage. Nous considérerons un blindage sphérique ainsi que le développement en harmoniques sphériques de la solution de l'équation de diffusion (1.27) généralisée sous la forme (voir Annexe C.1) :

$$\vec{B}(r, \theta, \phi, t) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} [E_n \cdot \mathcal{C}_r^n(r, f) + F_n \cdot \mathcal{D}_r^n(r, f)] \cdot Y_n(\theta, \phi) \cdot e^{j\omega t} \\ \sum_{n=0}^{\infty} [E_n \cdot \mathcal{C}_\theta^n(r, f) + F_n \cdot \mathcal{D}_\theta^n(r, f)] \cdot \frac{\partial Y_n(\theta, \phi)}{\partial \theta} \cdot e^{j\omega t} \\ \sum_{n=0}^{\infty} [E_n \cdot \mathcal{C}_\phi^n(r, f) + F_n \cdot \mathcal{D}_\phi^n(r, f)] \cdot \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_n(\theta, \phi)}{\partial \phi} \cdot e^{j\omega t} \end{cases} \quad (5.9)$$

Les fonctions  $\mathcal{C}^n(r, f)$  et  $\mathcal{D}^n(r, f)$  étant respectivement les fonctions croissantes et décroissantes relatives aux milieux, à l'ordre du développement et aux fréquences considérées. A l'aide de cette écriture nous exprimerons le développement harmonique de l'induction magnétique du blindage et des sources  $\mathcal{S}^{(1)}$  et  $\mathcal{S}^{(2)}$  dans les trois zones définies par le blindage et à un même ordre  $n$ .

– Dans la zone 1 l'induction des termes d'un même ordre  $n$  correspondant à

<sup>8</sup>Il existe des relations identiques pour le champ électrique, mais elles sont équivalentes, puisque les sources magnétiques et électriques solutions de la diffusion sont liées

la réaction du blindage (problème interne) et à la source  $\mathcal{S}^{(1)}$  s'écrira :

$$\vec{B}_n^{(1)}(r, \theta, \phi, t) = \begin{cases} [E_n^{(1)} \cdot \mathcal{C}_{r,1}^n(r, f)] \cdot Y_n(\theta, \phi) \cdot e^{j\omega t} \\ [E_n^{(1)} \cdot \mathcal{C}_{\theta,1}^n(r, f)] \cdot \frac{\partial Y_n(\theta, \phi)}{\partial \theta} \cdot e^{j\omega t} \\ [E_n^{(1)} \cdot \mathcal{C}_{\phi,1}^n(r, f)] \cdot \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_n(\theta, \phi)}{\partial \phi} \cdot e^{j\omega t} \end{cases} + \begin{cases} \mathcal{S}_{r,n}^{(1)} \\ \mathcal{S}_{\theta,n}^{(1)} \\ \mathcal{S}_{\phi,n}^{(1)} \end{cases} \quad (5.10)$$

– Dans la **zone 2** l'induction des termes d'un même ordre  $n$  (problème mixte interne et externe) s'écrira :

$$\vec{B}_n^{(2)}(r, \theta, \phi, t) = \begin{cases} [E_n^{(2)} \cdot \mathcal{C}_{r,2}^n(r, f) + F_n^{(2)} \cdot \mathcal{D}_{r,2}^n(r, f)] \cdot Y_n(\theta, \phi) \cdot e^{j\omega t} \\ [E_n^{(2)} \cdot \mathcal{C}_{\theta,2}^n(r, f) + F_n^{(2)} \cdot \mathcal{D}_{\theta,2}^n(r, f)] \cdot \frac{\partial Y_n(\theta, \phi)}{\partial \theta} \cdot e^{j\omega t} \\ [E_n^{(2)} \cdot \mathcal{C}_{\phi,2}^n(r, f) + F_n^{(2)} \cdot \mathcal{D}_{\phi,2}^n(r, f)] \cdot \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_n(\theta, \phi)}{\partial \phi} \cdot e^{j\omega t} \end{cases} \quad (5.11)$$

– Et enfin, dans la **zone 3** l'induction des termes d'un même ordre  $n$  correspondant à la réaction du blindage (problème externe) et à la source  $\mathcal{S}^{(2)}$  s'écrira :

$$\vec{B}_n^{(3)}(r, \theta, \phi, t) = \begin{cases} [F_n^{(3)} \cdot \mathcal{D}_{r,3}^n(r, f)] \cdot Y_n(\theta, \phi) \cdot e^{j\omega t} \\ [F_n^{(3)} \cdot \mathcal{D}_{\theta,3}^n(r, f)] \cdot \frac{\partial Y_n(\theta, \phi)}{\partial \theta} \cdot e^{j\omega t} \\ [F_n^{(3)} \cdot \mathcal{D}_{\phi,3}^n(r, f)] \cdot \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_n(\theta, \phi)}{\partial \phi} \cdot e^{j\omega t} \end{cases} + \begin{cases} \mathcal{S}_{r,n}^{(2)} \\ \mathcal{S}_{\theta,n}^{(2)} \\ \mathcal{S}_{\phi,n}^{(2)} \end{cases} \quad (5.12)$$

Nous venons d'écrire sous forme harmonique l'induction magnétique créée par un blindage dans les différentes zones. Nous avons alors, pour chaque terme harmonique quatre coefficients à déterminer en fonction de la source, qui sont les coefficients  $E_n^{(i)}$  et  $F_n^{(i)}$  intervenant dans l'écriture de l'induction magnétique créée dans les trois différentes zones (5.10) (5.11) et (5.12). Or les conditions aux limites (5.8) écrites sur les deux frontières du blindage en  $R_1$  et  $R_2$  forment justement un système linéaire de rang égal à 4 qui va nous permettre de déterminer l'atténuation  $\mathcal{S}_n$  du blindage à l'ordre  $n$ . Ce système linéaire s'écrit pour un blindage sphérique :

$$\left[ \begin{array}{l} \text{sur la première frontière :} \\ [\mathcal{S}_{r,n}^{(1)} + E_n^{(1)} \cdot \mathcal{C}_{r,1}^n(R_1, f)] = [E_n^{(2)} \cdot \mathcal{C}_{r,2}^n(R_1, f) + F_n^{(2)} \cdot \mathcal{D}_{r,2}^n(R_1, f)] \\ \mu_2 \cdot [\mathcal{S}_{\theta,n}^{(1)} + E_n^{(1)} \cdot \mathcal{C}_{\theta,1}^n(R_1, f)] = \mu_1 \cdot [E_n^{(2)} \cdot \mathcal{C}_{\theta,2}^n(R_1, f) + F_n^{(2)} \cdot \mathcal{D}_{\theta,2}^n(R_1, f)] \\ \text{sur la deuxième frontière :} \\ [E_n^{(2)} \cdot \mathcal{C}_{r,2}^n(R_2, f) + F_n^{(2)} \cdot \mathcal{D}_{r,2}^n(R_2, f)] = [F_n^{(3)} \cdot \mathcal{D}_{r,3}^n(R_2, f) + \mathcal{S}_{r,n}^{(2)}] \\ \mu_3 \cdot [E_n^{(2)} \cdot \mathcal{C}_{\theta,2}^n(R_2, f) + F_n^{(2)} \cdot \mathcal{D}_{\theta,2}^n(R_2, f)] = \mu_2 \cdot [F_n^{(3)} \cdot \mathcal{D}_{\theta,3}^n(R_2, f) + \mathcal{S}_{\theta,n}^{(2)}] \end{array} \right. \quad (5.13)$$

Il est obtenu en divisant chaque ligne par les fonctions harmoniques correspondantes. Les deux termes  $\mathcal{S}_n^{(1)}$  et  $\mathcal{S}_n^{(2)}$  correspondent à l'écriture harmonique des sources harmoniques excitatrices à l'ordre  $n$  considéré dans l'écriture de ce système.

En isolant les sources, nous pouvons encore écrire le système linéaire matriciellement (5.13) sous la forme<sup>9</sup> :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\mathcal{C}_{r,1}^n(R_1, f) & \mathcal{C}_{r,2}^n(R_1, f) & \mathcal{D}_{r,2}^n(R_1, f) & 0 \\ -\mu_2 \mathcal{C}_{\theta,1}^n(R_1, f) & \mu_1 \mathcal{C}_{\theta,2}^n(R_1, f) & \mu_1 \mathcal{D}_{\theta,2}^n(R_1, f) & 0 \\ 0 & \mathcal{C}_{r,2}^n(R_2, f) & \mathcal{D}_{r,2}^n(R_2, f) & -\mathcal{D}_{r,3}^n(R_2, f) \\ 0 & \mu_3 \mathcal{C}_{\theta,2}^n(R_2, f) & \mu_3 \mathcal{D}_{\theta,2}^n(R_2, f) & -\mu_2 \mathcal{D}_{\theta,3}^n(R_2, f) \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_n} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} E_n^{(1)} \\ E_n^{(2)} \\ F_n^{(2)} \\ F_n^{(3)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_n} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{S}_{r,n}^{(1)} \\ \mu_2 \mathcal{S}_{\theta,n}^{(1)} \\ \mathcal{S}_{r,n}^{(2)} \\ \mu_2 \mathcal{S}_{\theta,n}^{(2)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}\mathbf{o}_n} \quad (5.14)$$

### 5.2.1.3 Résolution et propriétés de la solution

Puisque la matrice  $\mathbf{B}_n$  est inversible<sup>10</sup> nous pouvons écrire les coefficients harmoniques correspondant à la réaction du blindage en fonction des sources sous la forme :

$$\mathbf{C}_n = \mathbf{B}_n^{-1} \cdot \mathbf{S}\mathbf{o}_n \quad (5.15)$$

de plus en supposant que les termes sources  $\mathbf{S}\mathbf{o}_n$  peuvent s'écrire en fonction des coefficients harmoniques des sources sous la forme :

$$\mathbf{S}\mathbf{o}_n = \mathbf{F}_n \cdot \mathbf{C}\mathbf{o}\mathbf{e}\mathbf{f}\mathbf{f}_s^n \quad (5.16)$$

nous pouvons exprimer (5.15) sous la forme :

$$\mathbf{C}_n = [\mathbf{B}_n^{-1} \cdot \mathbf{F}_n] \cdot \mathbf{C}\mathbf{o}\mathbf{e}\mathbf{f}\mathbf{f}_s^n \quad (5.17)$$

Ce que nous écrivons encore sous forme fonctionnelle :

$$\begin{bmatrix} E_n^{(1)} \\ E_n^{(2)} \\ F_n^{(2)} \\ F_n^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{1,n}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, R_1, R_2, f) \\ g_{2,n}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, R_1, R_2, f) \\ g_{3,n}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, R_1, R_2, f) \\ g_{4,n}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, R_1, R_2, f) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{C}\mathbf{o}\mathbf{e}\mathbf{f}\mathbf{f}_s^n \quad (5.18)$$

Cette écriture justifie l'analogie entre un filtre et un blindage, puisque les coefficients harmoniques relatifs à l'induction dans les différentes zones sont fonction des coefficients harmoniques des sources d'excitation  $\mathcal{S}^{(1)}$  et  $\mathcal{S}^{(2)}$  ainsi que des paramètres du blindage.

Dans le cas d'un problème externe, c'est-à-dire quand nous cherchons à blinder la source  $\mathcal{S}^{(1)}$  et que  $\mathcal{S}^{(2)}$  est nulle, nous pouvons encore écrire (5.18) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} E_n^{(1)} \\ E_n^{(2)} \\ F_n^{(2)} \\ F_n^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{1,n}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, R_1, R_2, f) \\ g_{2,n}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, R_1, R_2, f) \\ g_{3,n}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, R_1, R_2, f) \\ g_{4,n}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, R_1, R_2, f) \end{bmatrix} \cdot F_n \quad (5.19)$$

<sup>9</sup>Nous avons explicité ces matrices dans l'annexe C

<sup>10</sup>carrée et de rang égale à 4

où  $F_n$  est un coefficient de la décomposition harmonique de la source  $\mathcal{S}^{(1)}$  à l'ordre  $n$ . Alors, du fait des propriétés des coefficients harmoniques nous pouvons définir l'expression analytique de l'atténuation  $\mathbf{S}_n$  du blindage à l'ordre  $n$  par :

$$\mathbf{S}_n = \frac{F_n^{(3)}}{F_n} = g_{4,n}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, R_1, R_2, f) \quad (5.20)$$

Il est important de remarquer que l'atténuation du blindage  $\mathbf{S}_n$  relatif aux termes d'ordre  $n$  de la source est une grandeur complexe si la source est dynamique. Nous avons déjà vu que, dans ce cas, l'induction s'écrit dans la matière à l'aide du développement harmonique utilisant des fonctions de Bessel complexes, ce qui implique que l'atténuation  $\mathbf{S}_n$  est également complexe. Physiquement la représentation complexe permet d'intégrer le déphasage dû aux courants de Foucault dans le blindage, nous reviendrons sur ce point dans la suite de ce chapitre.

## 5.2.2 Généralisation

L'écriture du système matriciel (5.14) permet le calcul des coefficients harmoniques d'un même ordre dans les différentes zones d'un blindage monocouche et conduit à l'expression de l'atténuation respective à un ordre donné  $n$ . Pour rendre ce calcul plus général, nous allons maintenant écrire le système à tout ordre, puis pour des blindages multicouches.

### 5.2.2.1 Écriture à tout ordre

Jusqu'ici, nous avons calculé l'atténuation  $\mathbf{S}_n$  en considérant un seul terme harmonique de la décomposition des sources. Il est encore possible de généraliser l'écriture matricielle à tout ordre, ce qui nous permet de mettre en relation directement l'ensemble des coefficients relatifs à la source dans les différentes zones. Matriciellement le système linéaire des conditions de passage généralisé pour une source d'ordre  $N$  est :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{B}_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{So}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{So}_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{So}} \quad (5.21)$$

La matrice  $\mathbf{B}$  est alors diagonale par bloc, ce qui facilite son inversion, puisque chaque bloc est inversible. Il est alors possible d'écrire la formule généralisée équivalente à (5.15) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{B}_N^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{So}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{So}_N \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Cette expression lie les coefficients des développements harmoniques à tout ordre dans les différentes zones, en fonction de ceux de la source. Une remarque importante doit être faite : l'inversion par bloc, tout comme le calcul matriciel

terme à terme, sont possibles car chaque terme harmonique est indépendant des autres du fait de l'orthogonalité du développement sur la surface de la sphère. Nous reviendrons plus en détail sur ce point dans le prochain chapitre où justement c'est cette propriété d'orthogonalité qui nous permettra d'étendre notre calcul à des surfaces de forme quelconque.

Enfin, pour clore sur la généralisation de l'écriture matricielle, nous pouvons encore écrire une matrice  $\mathbf{G}$  dont les termes diagonaux sont les atténuations  $\mathbf{S}_n$  qui lient directement tous les coefficients du développement harmonique de la source et du blindage à ceux de la source sans blindage : il s'agit de la matrice de fonction de transfert du blindage dans le cas d'un blindage sphérique. Elle s'écrit :

$$\begin{bmatrix} F_1^{(3)} \\ \vdots \\ F_N^{(3)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{S}_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

### 5.2.2.2 Blindages multicouches

Un intérêt de l'écriture des conditions de passage entre zones est de pouvoir se généraliser à  $\ell$  couches différentes de blindage. L'idée de superposer plusieurs couches est identique à celle qui pousse à isoler thermiquement en utilisant un double vitrage. Pour rester le plus général possible, nous prendrons un blindage constitué de  $\ell$  couches, soit  $2\ell$  frontières, et  $4\ell$  équations de passages. Le système matriciel pour chaque ordre compte alors  $4\ell$  inconnues et peut se résoudre en inversant une matrice  $\mathbf{B}_n$  de dimension  $4\ell$ . Pour permettre l'écriture générale de la matrice du système à résoudre, nous allons discerner trois matrices qui rentrent dans son écriture.

Parmi toutes les frontières, seules la première et la dernière ont un rôle particulier, car dans la zone interne au blindage il ne peut y avoir d'autre problème externe que celui de la source, de même, à l'extérieur le blindage est uniquement un problème externe. Dans ce cas, nous définissons deux matrices correspondant aux conditions limites sur ces deux frontières qui sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1^n &= \begin{bmatrix} -\mathcal{C}_{r,1}^n(R_1, f) & \mathcal{C}_{r,2}^n(R_1, f) & \mathcal{D}_{r,2}^n(R_1, f) & 0 \\ -\mu_2 \mathcal{C}_{\theta,1}^n(R_1, f) & \mu_1 \mathcal{C}_{\theta,2}^n(R_1, f) & \mu_1 \mathcal{D}_{\theta,2}^n(R_1, f) & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_{2\ell}^n &= \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{C}_{r,2\ell}^n(R_{2\ell}, f) & \mathcal{D}_{r,2\ell}^n(R_{2\ell}, f) & -\mathcal{D}_{r,2\ell+1}^n(R_{2\ell}, f) \\ 0 & \mu_{2\ell+1} \mathcal{C}_{\theta,2\ell}^n(R_{2\ell}, f) & \mu_{2\ell+1} \mathcal{D}_{\theta,2\ell}^n(R_{2\ell}, f) & -\mu_{2\ell} \mathcal{D}_{\theta,2\ell+1}^n(R_{2\ell}, f) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Enfin sur la  $i^{\text{eme}}$  frontière intermédiaire les conditions limites se traduisent matriciellement par :

$$\mathbf{C}_i^n = \begin{bmatrix} -\mathcal{C}_{r,2i}^n(R_{2i}, f) & -\mathcal{D}_{r,2i}^n(R_{2i}, f) & \mathcal{C}_{r,2i+1}^n(R_{2i}, f) & \mathcal{D}_{r,2i+1}^n(R_{2i}, f) \\ -\mu_{2i+1} \mathcal{C}_{\theta,2i}^n(R_{2i}, f) & -\mu_{2i+1} \mathcal{D}_{\theta,2i}^n(R_{2i}, f) & \mu_{2i} \mathcal{C}_{\theta,2i+1}^n(R_{2i}, f) & \mu_{2i} \mathcal{D}_{\theta,2i+1}^n(R_{2i}, f) \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Chacune des matrices  $\mathbf{C}_i^n$  précédentes contient l'écriture des conditions limites sur une frontière. Pour écrire le système linéaire matriciel qui permet le calcul des coefficients harmoniques à l'ordre  $n$  dans les  $2\ell + 1$  zones du blindage il nous suffit de construire la matrice diagonale par bloc :

$$\mathbf{B}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^n & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{C}_i^n & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & \mathbf{C}_{2\ell}^n \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

qui permet d'écrire le système matriciel des conditions limites relatives au blindage multicouche sous la forme :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^n & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{C}_i^n & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & \mathbf{C}_{2\ell}^n \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_n} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} E_n^{(1)} \\ \vdots \\ E_n^{(2i)} \\ F_n^{(2i)} \\ \vdots \\ F_n^{(2\ell+1)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_n} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{S}\mathbf{o}_n^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{S}\mathbf{o}_n^{(i)} \\ \vdots \\ \mathbf{S}\mathbf{o}_n^{(\ell)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}\mathbf{o}_n} \quad (5.27)$$

La résolution de ce système linéaire est facilement obtenue en inversant la matrice  $\mathbf{B}_n$ . Elle donne l'ensemble des coefficients harmoniques correspondant à un terme donné de la décomposition de la source blindée en fonction des paramètres du blindage. Un point intéressant du blindage multicouche est, comme nous le verrons plus tard, qu'il permet d'optimiser l'efficacité du blindage en fonction du nombre de couches, des matériaux utilisés, de leur épaisseur respective, mais aussi de l'épaisseur des entrefers qui séparent les couches.

### 5.3 Interprétation

Nous venons de mettre en œuvre une méthode de calcul matriciel qui fait le lien entre les coefficients harmoniques d'une source et ceux des développements harmoniques de l'induction dans les différentes zones d'un blindage<sup>11</sup>. En particulier nous avons fait ressortir l'atténuation  $\mathbf{S}_n$  du blindage qui est essentielle dans notre démarche car elle rend compte de l'efficacité en fonction des paramètres de la source (ordre et fréquence), mais aussi des paramètres du blindage (épaisseurs, conductivités, perméabilités et entrefers). L'atténuation est donc la clé du dimensionnement de blindages adaptés, c'est pourquoi nous proposons de définir maintenant ses propriétés dans le cas de sources statiques et dynamiques. Cette analyse doit nous conduire à l'acmé de ce chapitre : la rationalisation du dimensionnement de blindages.

<sup>11</sup>du fait des propriétés des coefficients harmoniques nous pouvons encore écrire, à l'aide de ces coefficients toutes les grandeurs électromagnétiques dans les différentes zones du blindage.

### 5.3.1 Cas statique

Soit une source statique  $\mathcal{S}^{(1)}$  localisée dans l'air et dont le champ magnétique admet une décomposition en série harmonique à l'ordre  $N$  sous la forme (2.11). Cette décomposition peut être déterminée par l'identification magnétostatique à partir de mesures du champ magnétique proche. Afin d'atténuer le champ magnétique de cette source nous proposons de placer un blindage sphérique<sup>12</sup> et d'évaluer l'efficacité respectivement à la décomposition de  $\mathcal{S}^{(1)}$ .

Pour calculer les coefficients harmoniques des décompositions du champ dans les différentes zones nous utiliserons l'expression matricielle (5.15) qui donne ces coefficients en fonction de ceux de la source  $\mathcal{S}^{(1)}$ . La matrice  $\mathbf{B}_n$  correspondant à un problème statique est alors écrite dans les différentes zones (voir C.4) et le vecteur des sources correspondantes  $\mathbf{S}_n$  s'écrit en fonction des coefficients harmoniques<sup>13</sup> :

$$\mathbf{S}_n = \begin{bmatrix} n(n+1)R_1^{-(n+2)} \\ -\mu_2 n R_1^{-(n+2)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot d_{n,m} \quad (5.28)$$

Il vient l'écriture fonctionnelle qui donne les coefficients harmoniques dans les différentes zones en fonction des coefficients de la source :

$$\begin{bmatrix} c_{n,m}^{(1)} \\ d_{n,m}^{(2)} \\ c_{n,m}^{(2)} \\ d_{n,m}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1,n}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, R_1, R_2) \\ f_{2,n}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, R_1, R_2) \\ f_{3,n}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, R_1, R_2) \\ f_{4,n}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, R_1, R_2) \end{bmatrix} \cdot d_{n,m} \quad (5.29)$$

En particulier nous remarquons que la fonction  $f_{4,n}$  n'est autre que l'atténuation  $\mathbf{S}_n$  puisque :

$$d_{n,m}^{(3)} = f_{4,n}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, R_1, R_2) \cdot d_{n,m} \quad (5.30)$$

Si le calcul des coefficients (5.28) est matriciel, il est possible, dans le cas d'un blindage statique et monocouche, d'explicitier analytiquement  $\mathbf{S}_n$  lorsque  $\mu_1 = \mu_3 = \mu_0$  et en définissant la perméabilité relative du blindage  $\mu_r = \mu_2/\mu_0$ . Son expression est alors :

$$\mathbf{S}_n = \frac{\mu_r \cdot (2n+1)^2}{\left[ n^2(\mu_r+1)^2 + n(1+2\mu_r) + \mu_r(n\mu_r+1) \right] - n(n+1)[\mu_r-1]^2 \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^{2n+1}} \quad (5.31)$$

Ainsi, nous remarquons que l'expression (5.3) de l'atténuation  $\mathbf{S}$  d'un blindage sphérique dans un champ uniforme que nous avons donnée précédemment n'était qu'un cas particulier de (5.31) à l'ordre 1. Nous rappelons que l'analyse mathématique de l'expression (5.3) avait mis en évidence les performances et les limites du

<sup>12</sup>Nous cherchons à évaluer l'efficacité et non l'effet de forme

<sup>13</sup>Nous noterons de façon générale les coefficients harmoniques  $c_{n,m}$  lorsqu'ils correspondent à des termes croissants et  $d_{n,m}$  lorsqu'ils sont décroissants



blindage en fonction de la perméabilité, ce qui permettait un choix stratégique de matériaux et d'épaisseur pour le blindage. C'est cette démarche que nous voulons maintenant généraliser en considérant une dimension supplémentaire au problème qui est la dépendance de l'atténuation en fonction de l'ordre de la source.

Les propriétés principales de l'efficacité d'un blindage de type « air-métal-air » peuvent être définies grâce à l'expression analytique de  $\mathbf{S}_n$  (5.31). C'est pourquoi, dans cette thèse nous étudierons cette fonction plutôt que l'efficacité, en gardant à l'esprit qu'elle correspond à l'atténuation du blindage pour chaque terme harmonique de la source. Les résultats que nous ferons ressortir pourront ensuite être transposables à l'efficacité  $\xi_n$  en utilisant un tracé logarithmique (en dB) de  $\mathbf{S}_n$ .

### 5.3.1.1 Efficacité maximale

L'expression (5.31) fait clairement ressortir la dépendance de l'efficacité aux paramètres du blindage mais aussi et surtout, respectivement à l'ordre des termes harmoniques de la source que nous voulons blinder. L'atténuation  $\mathbf{S}_n$  est monotone décroissante en fonction de l'ordre ce qui indique que le blindage est plus efficace pour les termes d'ordre élevé : **il se comporte donc comme un filtre passe-bas.**

Le second résultat que nous obtenons à partir de (5.31) concerne la valeur limite de l'atténuation pour un matériau de perméabilité donnée lorsque l'épaisseur du blindage tend vers l'infini. Il s'agit de la valeur optimale de l'atténuation en fonction de l'ordre. Elle est obtenue en faisant tendre le rapport ( $R_1/R_2$ ) vers zéro, ce qui conduit à l'expression de l'atténuation optimale<sup>14</sup> :

$$\mathbf{S}_n^{max} = \frac{\mu_r \cdot (2n + 1)^2}{[n^2(\mu_r + 1)^2 + n(1 + 2\mu_r) + \mu_r(n\mu_r + 1)]} \quad (5.32)$$

Cette atténuation optimale est un outil intéressant dans le dimensionnement de blindage car elle va déterminer le choix d'un matériau magnétique. Par exemple, si la perméabilité est trop faible, les valeurs de  $\mathbf{S}_n^{max}$  vont servir à déterminer si le matériau constituant le blindage est assez performant ou s'il doit être changé.

### 5.3.1.2 Comportement asymptotique

Un autre résultat lié à (5.31) est intéressant. Il s'agit de la valeur asymptotique de  $\mathbf{S}_n$  en fonction de l'ordre des termes de la source. En effet, lorsque  $n$  tend vers l'infini nous avons l'équivalence suivante :

$$\mathbf{S}_n^{max}(R_1, R_2, \mu_r) \sim \frac{4\mu_r}{(\mu_r + 1)^2} \approx \frac{4}{\mu_r} \quad \text{si } \mu_r \gg 1 \quad (5.33)$$

Ce qui signifie que le comportement asymptotique d'un blindage ne dépend que de sa perméabilité et non de son épaisseur. Ce résultat est important car il montre que l'efficacité a une valeur limite en fonction de l'ordre  $n$  des termes du développement d'une source, qui correspond à l'optimum de  $\mathbf{S}_n^{max}$  en fonction de  $n$ .

<sup>14</sup>Elle correspond à l'efficacité maximale possible à l'aide d'un blindage de matériau donné : c'est-à-dire lorsque l'épaisseur tend vers l'infini

Pour illustrer ce propos, prenons par exemple un blindage de perméabilité relative  $\mu_r=10$ . La valeur asymptotique (5.33) de  $\mathbf{S}_n$  indique que la meilleure atténuation possible, correspondra à  $\mathbf{S}_n = .33$ , c'est-à-dire que la source sera au mieux atténuée de 67% et ce quelle que soit l'épaisseur du blindage.

### 5.3.1.3 Pente à l'origine

Nous avons vu, dans la partie précédente, que les ordres élevés de la décomposition harmonique des sources avaient une décroissance plus forte que les ordres faibles. C'est pourquoi, dans une démarche de discrétion magnétique les sources que nous cherchons à blinder seront des sources d'ordre faible pour lesquelles la valeur asymptotique de l'efficacité du blindage sera peu indicative.

Dans le cadre d'une étude de blindage, ce qui nous intéresse est la vitesse de convergence en fonction de l'ordre. En effet, elle donne directement la décroissance de l'efficacité et l'effet des différents paramètres aux ordres faibles. Une bonne estimation de cette vitesse de convergence est donnée, pour les ordres faibles, par la valeur de la pente de  $\mathbf{S}_n$  à l'origine ( $n = 0$ ). Ainsi, plus son module sera grand et plus l'efficacité atteindra rapidement sa valeur asymptotique (son optimum).

L'expression de cette pente à l'origine est :

$$\frac{\partial \mathbf{S}_n}{\partial n}(n = 0) = 4 - \frac{(1 + \mu_r)^2}{\mu_r} + \frac{(1 - \mu_r)^2}{\mu_r} \cdot \left( \frac{R_1}{R_2} \right) \quad (5.34)$$

### 5.3.1.4 Aperçu graphique

Afin d'illustrer les propriétés de l'efficacité que nous venons de mettre en évidence, nous présentons ces valeurs dans différents cas de blindages :

- Dans un premier temps nous avons mis en évidence la dépendance de  $\mathbf{S}_n$  par rapport à l'épaisseur du blindage. Nous avons fait varier la valeur du rayon extérieur du blindage  $R_2$  de 50.1cm à 51cm (le rayon interne vaut  $R_1=50$ cm), pour un blindage de perméabilité relative égale à 100. Le graphique de gauche de la figure 5.11 représente  $\mathbf{S}_n$  pour trois épaisseurs en fonction de l'ordre. Ces trois cas se distinguent essentiellement par la valeur de leur pente à l'origine puisqu'elles dépendent du rapport des rayons, tandis que la valeur asymptotique de convergence est identique. Ainsi, si nous désirons blinder une source d'ordre faible avec un blindage de perméabilité de 100 une efficacité optimale sera obtenue en augmentant son épaisseur. Cependant, nous sommes limités dans ce raisonnement par la valeur limite  $\mathbf{S}_n^{max}$  de l'efficacité du blindage pour chaque ordre<sup>15</sup>.
- Dans un second temps, nous avons encore calculé la valeur de l'efficacité pour des matériaux de perméabilité différente en gardant une épaisseur constante (voir Fig.5.11 droite). Nous constatons immédiatement la variation de la valeur asymptotique de l'efficacité, qui ne dépend que de  $\mu_r$ . Cette variation

<sup>15</sup>C'est un résultat très théorique car nous serons limités d'abord par le poids du blindage, son conditionnement et son coût

entraîne une translation des graphiques, c'est-à-dire une optimisation globale de l'efficacité du blindage.

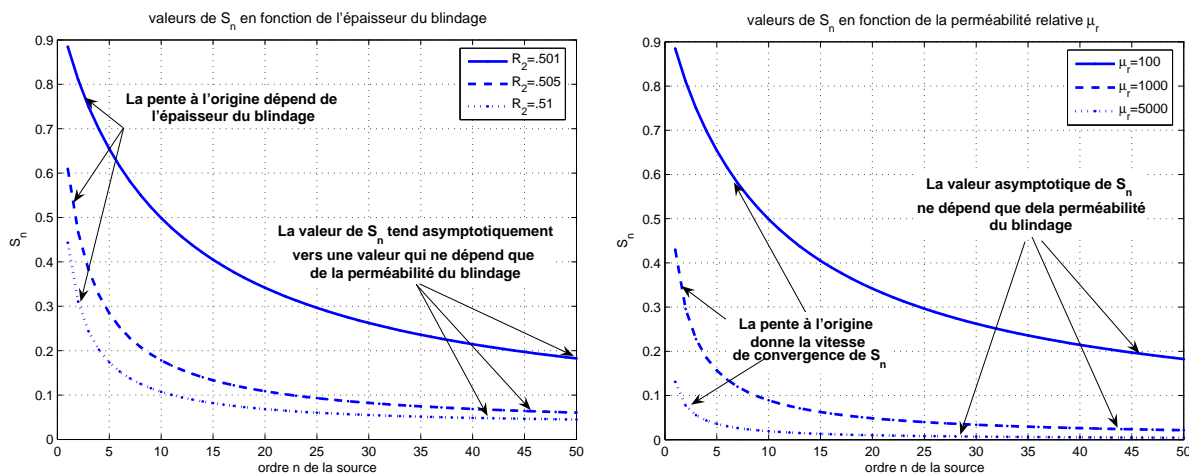


FIG. 5.11 – Comportement de  $S_n$  en fonction, soit uniquement de l'épaisseur du blindage (gauche), soit uniquement de sa perméabilité (droite). Le rayon  $R_1$  interne du blindage vaut 50cm.

### 5.3.2 Cas dynamique

Soit une source dynamique  $\mathcal{S}^{(1)}$  localisée dans l'air à l'intérieur d'un blindage et dont le champ magnétique se décompose en série harmonique à l'ordre  $N$  sous la forme complexe (3.2). Afin de déterminer les coefficients harmoniques dans les différentes zones, nous utilisons une nouvelle fois l'expression matricielle (5.15) qui donnent ces coefficients en fonctions de ceux de la source. Contrairement au cas statique la matrice  $\mathbf{B}_n$  qui permet le calcul est complexe du fait de l'utilisation de fonctions de Bessel (voir Annexe C.5) bien que la matrice des sources soit identique à (5.28).

Comme pour le cas statique nous pouvons écrire les coefficients harmoniques dans les différentes zones sous forme fonctionnelle :

$$\begin{bmatrix} \bar{c}_{n,m}^{(1)} \\ \bar{d}_{n,m}^{(2)} \\ \bar{c}_{n,m}^{(2)} \\ \bar{d}_{n,m}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_{1,n}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, R_1, R_2) \\ \bar{f}_{2,n}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, R_1, R_2) \\ \bar{f}_{3,n}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, R_1, R_2) \\ \bar{f}_{4,n}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, R_1, R_2) \end{bmatrix} \cdot \bar{d}_{n,m} \quad (5.35)$$

Deux remarques importantes doivent être faites :

1. Les coefficients calculés, mais aussi les matrices sont complexes. L'atténuation est donc également complexe.
2. Contrairement au cas statique, il n'existe pas d'expression analytique simple de l'atténuation d'un blindage pour une source dynamique, pour cerner le comportement du blindage nous devons donc faire une étude paramétrique

de l'atténuation qui, dans ce cas, dépend de l'ordre et de la fréquence de la source.

### 5.3.2.1 Atténuation dynamique - Module et Argument

Au chapitre 3, nous avons montré que toute source de champ magnétique pouvait s'écrire comme une somme de sources pulsantes complexes : c'est le principe qui permettait l'identification magnétodynamique (voir eq.(3.16)). Alors pour une fréquence  $f$  donnée nous pouvons écrire un développement harmonique de l'induction de la source  $\mathcal{S}^{(1)}$  à l'ordre  $n$  et en tout point  $P$  sous la forme de (3.1), c'est-à-dire :

$$\vec{B}_{f,n}(P, t) = \vec{B}_n(P) \cdot e^{-j(2\pi ft + \psi)} \quad (5.36)$$

De son côté, le calcul de l'atténuation donne un coefficient complexe dont le module et l'argument dépendent de l'ordre  $n$  et de la fréquence  $f$  de la source et qui s'écrit :

$$\bar{\mathbf{S}}_n = |\bar{\mathbf{S}}_n| \cdot e^{-j\nu_n} \quad (5.37)$$

Alors l'induction de la source  $\mathcal{S}^{(1)}$  avec le blindage s'écrira sous forme complexe :

$$\vec{B}_{f,n}^b(P, t) = |\bar{\mathbf{S}}_n| \cdot \vec{B}_n(P) \cdot e^{-j(2\pi ft + \psi + \nu_n)} \quad (5.38)$$

et la mesure est obtenue en prenant la partie réelle de (5.38), c'est-à-dire :

$$\vec{B}_{f,n}^{mes}(P, t) = |\bar{\mathbf{S}}_n| \cdot \vec{B}_n(P) \cdot \cos(2\pi ft + \psi + \nu_n) \quad (5.39)$$

Cette expression met en évidence deux phénomènes liés à l'aimantation et aux courants de Foucault dans un blindage. Le module de  $\bar{\mathbf{S}}_n$  correspond à l'effet d'atténuation tandis que l'argument  $\nu_n$  est représentatif du retard entre la variation de la source et le développement des courants de Foucault. Module et argument de  $\bar{\mathbf{S}}_n$  dépendent des paramètres géométriques du blindage mais aussi électromagnétiques ( $\sigma, \mu$ ) qui définissent l'épaisseur de peau dans le matériau.

### 5.3.2.2 Représentation Ordre-fréquence de l'atténuation

Pour vérifier qu'un blindage atteint les objectifs d'un cahier des charges, en terme de performances, nous ne nous préoccuperons pas de l'argument  $\nu_n$  de  $\bar{\mathbf{S}}_n$  mais uniquement de son module qui représente bien l'efficacité du blindage.

Lorsque nous avons étudié l'atténuation d'un blindage statique nous avons montré qu'elle dépendait de l'ordre de la source. Dans le cas d'un blindage dynamique elle dépendra de l'ordre et de la fréquence de la source. Une représentation judicieuse du module de l'atténuation peut alors être donnée sous forme d'une surface dépendant de ces deux paramètres (voir Fig.5.12).

Afin de comprendre le comportement d'un blindage en fonction de l'ordre et de la fréquence d'une source et faire ressortir son fonctionnement comme nous l'avons fait pour le blindage statique, nous avons étudié deux blindages particuliers :

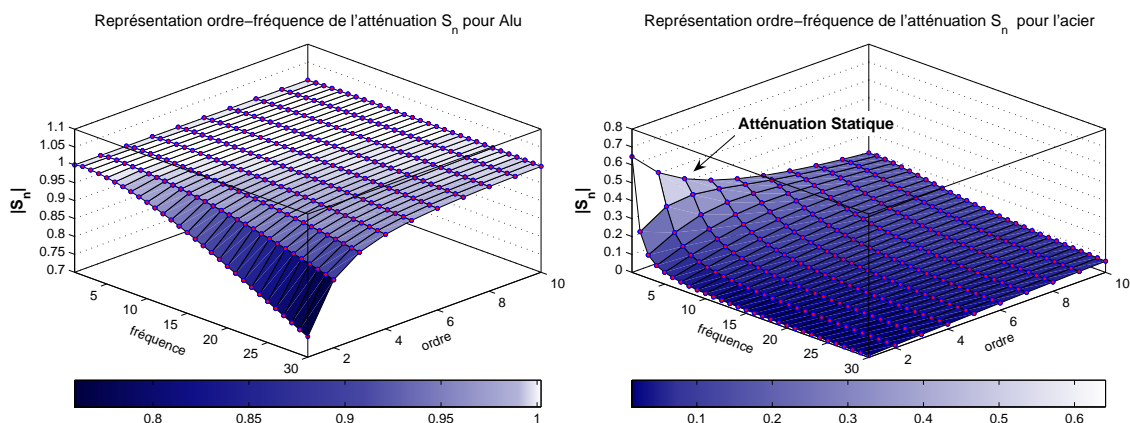


FIG. 5.12 – Module de l'atténuation en fonction de la fréquence et de l'ordre des termes la source blindée. La figure de gauche représente ce module pour un blindage de rayons  $R_1=300\text{mm}$  et  $R_2=305\text{mm}$  en Aluminium. La figure de droite représente le module de l'efficacité pour ce même blindage en Acier.

1. Tout d'abord, nous avons calculé le module de l'atténuation pour un blindage amagnétique en Aluminium<sup>16</sup>. Le but de ce calcul étant de caractériser l'atténuation causée uniquement par des courants de Foucault. La courbe obtenue (figure (5.12) gauche) fait ressortir très clairement le comportement du blindage. Le premier point que nous remarquons est que l'atténuation est unitaire lorsque la fréquence est nulle, ce qui traduit l'absence de phénomènes d'aimantation. Il ressort également que le blindage est d'autant plus efficace que la fréquence est élevée : à un ordre donné le blindage se comporte également comme un filtre passe-bas en fonction de la fréquence. Ce phénomène étant plus important sur les ordres faibles que sur les ordres élevés. En revanche à  $f$  donnée, nous pouvons encore dire que le blindage est un filtre passe-haut en fonction de l'ordre des termes de la source.
2. Nous venons de caractériser un blindage dû uniquement aux courants de Foucault, cependant dans le cadre général des blindages les matériaux que nous utiliserons seront magnétiques de sorte à assurer l'aimantation nécessaire à l'atténuation de sources statiques. Si nous prenons par exemple un acier commun<sup>17</sup>, le comportement de l'atténuation est modifié par l'aimantation. Le premier point que nous pouvons remarquer est que nous retrouvons la caractéristique de l'atténuation statique pour  $f = 0$ . Cependant, nous ne pouvons plus déterminer de comportement global du blindage en fonction de l'ordre de la source : il s'agit d'une compétition entre aimantation et courants de Foucault qui n'a pas de comportement spécifique. Le seul point invariant est le comportement du blindage en fonction de la fréquence : il se comporte toujours comme un filtre passe-bas mais l'atténuation est accentuée par la nouvelle valeur de l'épaisseur de peau  $\delta_f$ .

Pour conclure, nous pouvons décrire le comportement global du blindage d'une

<sup>16</sup> $\mu_r=1$  et  $\sigma=37,7.10^6\text{S/m}$

<sup>17</sup> $\mu_r=250$  et  $\sigma=9,9.10^6\text{S/m}$

source dynamique en considérant qu'il se comporte comme un filtre passe-bas en fonction de la fréquence. Le point de départ de sa caractéristique étant le cas statique il sera toujours plus efficace en fréquence. Un dernier point, nous pouvons remarquer le peu de représentativité de l'atténuation lorsque le matériau choisi est très performant (voir Fig.5.12 pour l'acier) car la décroissance en fonction de la fréquence est importante. C'est pour cette raison (et par analogie au filtrage) qu'est définie l'efficacité (eq.5.5) qui permet une meilleure représentation de l'effet d'un blindage (Fig.5.13).

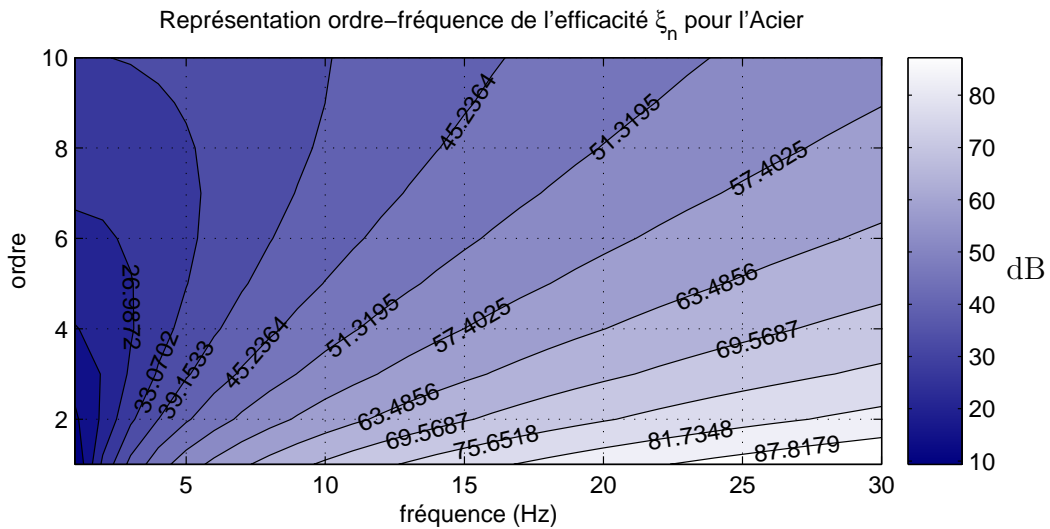


FIG. 5.13 – Représentation ordre-fréquence de l'efficacité  $\xi_n$  d'un blindage sphérique en acier.

### 5.3.3 Blindage multicouches

Le principe du blindage multicouche est intuitif, car physiquement nous savons qu'en alternant du vide et des matériaux ferromagnétiques nous allons augmenter les performances du blindage<sup>18</sup>. Nous sommes également poussés dans cette direction par le conditionnement des matériaux. En effet, ceux dont les propriétés électromagnétiques sont performantes pour blinder sont généralement obtenus par des procédés industriels contraignants du point de vue de leurs dimensions. Nous trouvons donc plus facilement ces matériaux sous forme de tôles dont l'épaisseur est imposée. Le blindage multicouche est donc le seul moyen d'augmenter les performances en limitant le poids, la réalisation et le coût d'un blindage.

Concentrons nous sur le gain d'efficacité obtenu par l'emploi d'un blindage multicouche. Pour ce faire, nous proposons de comparer les performances de trois blindages distincts :

- Un premier blindage monocouche de rayon interne  $R_1=300\text{mm}$  et externe  $R_2=315\text{mm}$  (voir cas (a) Fig.5.14).
- Un blindage 2 couches de rayon interne  $R_1$  et externe  $R_2$ , dont les épaisseurs et l'entrefer sont égaux à  $e_1=5\text{mm}$  (voir cas (b) Fig.5.14).

<sup>18</sup>Une analogie est possible avec le principe de l'isolation thermique par couches

- Un blindage 3 couches de rayon interne  $R_1$  et externe  $R_2$ , dont les épaisseurs et l'entrefer sont égaux à  $e_1=3\text{mm}$  (voir cas (c) Fig.5.14).

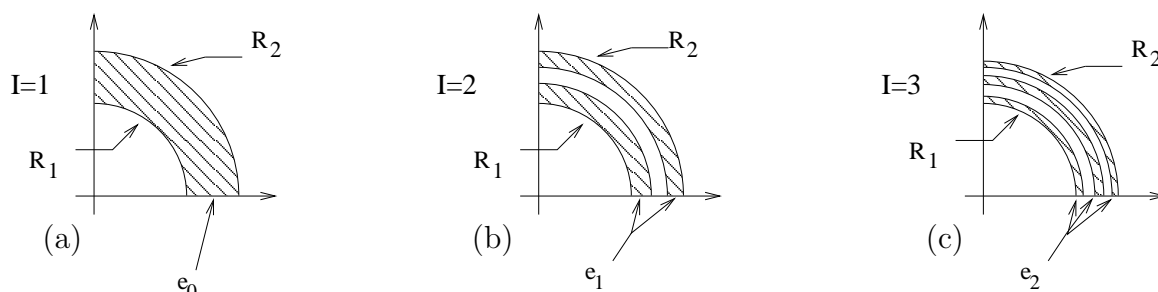


FIG. 5.14 – Trois blindages monocouche et multicouche compris entre les mêmes rayons  $R_1=300\text{mm}$  et  $R_2=315\text{mm}$ .

Dans un premier temps nous comparerons l'atténuation de ces trois blindages pour un matériau donné (l'acier) afin de faire ressortir le gain lié au nombre de couches. Puis nous montrerons que ce gain peut être amélioré en fonction de la perméabilité des matériaux choisis et des dimensions des entrefers.

### 5.3.3.1 Effet de la multiplication de couches

Pour établir des règles claires de conception de blindages multicouches nous allons comparer les trois blindages proposés dans la figure 5.14 lorsque leur perméabilité est celle d'un acier commun. Pour ce faire, nous traçons l'atténuation  $S_n$  de ces blindages en fonction de l'ordre de la source (voir Fig.5.15(a)).

Nous remarquons que les blindages multicouches sont plus efficaces que le blindage monocouche aux ordres élevés. Pour expliquer ce phénomène nous rappelons que la valeur asymptotique  $S^{max}$  de l'atténuation d'un blindage dépend uniquement de la perméabilité  $\mu_r$  du blindage et non de son épaisseur. Or, si les atténuations des différentes couches sont notées  $S_n^{(i)}$  une bonne approximation de l'atténuation totale du blindage est donnée sous la forme :

$$S_n \sim \prod_i S_n^{(i)} \quad (5.40)$$

ce qui explique que la valeur asymptotique de  $S_n$  est plus faible. Ce résultat montre que les limites du blindage monocouche peuvent être dépassées en utilisant le blindage multicouche. En effet, nous avons montré précédemment qu'il y avait une atténuation maximale  $S_n^{max}$  correspondant à une épaisseur de blindage infinie, ce qui nous a conduit à la conclusion que le seul moyen d'améliorer le blindage était de choisir un matériau de perméabilité plus forte. Désormais nous pouvons affirmer qu'il y a deux moyens d'améliorer les performances d'un blindage aux ordres élevés qui sont, soit de choisir un matériau plus performant, soit de multiplier le nombres de couches du blindage.

Si le blindage multicouche est plus performant pour les ordres élevés, ce n'est pas le cas aux ordres faibles (Fig.5.15.(a)). Au contraire, plus le nombre de couches

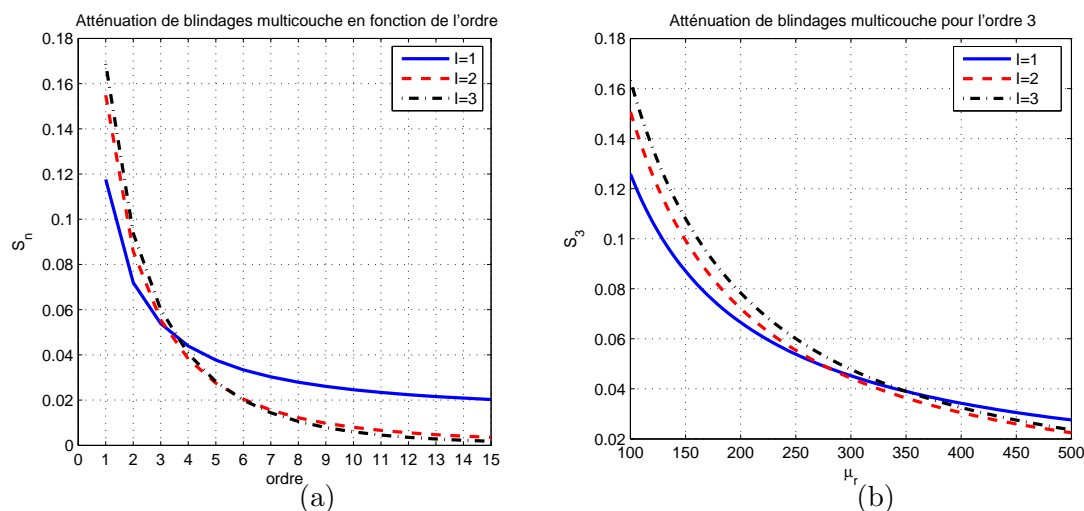


FIG. 5.15 – (a) : Représentation de l'atténuation de blindages multicouche en fonction de l'ordre de la source à blinder. - (b) : Représentation de l'atténuation de blindages multicouche pour une source d'ordre  $n=4$  en fonction de la perméabilité.

est important et moins le blindage est efficace. Ce résultat est lié à la décroissance du volume de blindage. En effet, nous avons montré que la pente à l'origine de l'atténuation d'un blindage statique dépendait de sa perméabilité et de son épaisseur<sup>19</sup>. Or le découpage du blindage que nous proposons tend vers une minimisation de l'épaisseur (voir Fig.5.14) ce qui diminue nécessairement l'atténuation.

Pour améliorer l'atténuation d'un blindage multicouche aux ordres faibles nous pouvons encore augmenter la perméabilité du blindage. Le gain que nous obtenons pour ces ordres dépend alors du nombre de couches. Par exemple, l'atténuation  $S_3$  tracée pour les trois blindages précédents, montre qu'il existe une perméabilité relative, voisine de 350 au-delà de laquelle plus le nombre de couches est important et plus le blindage sera efficace [Rik87]. Ainsi, en multipliant les couches nous améliorons également les performances des blindages aux ordres faibles, à condition d'avoir un matériau adapté.

### 5.3.3.2 Dimensionnement optimal

En multipliant le nombre de couches d'un blindage nous optimisons ses performances. Cependant, les blindages multicouches que nous venons de présenter ne sont pas optimaux. En effet, comme le présente la figure (5.14), ils sont obtenus simplement en découpant le blindage monocouche en couches d'égales épaisseurs ce qui ne correspond en aucun cas à un dimensionnement optimal. Pour comprendre l'optimisation que nous proposons, prenons le cas du blindage à deux couches précédent. Si les deux couches sont proches l'efficacité globale du blindage sera plus faible car l'aimantation des deux couches est liée. Pour augmenter l'efficacité nous cherchons alors à augmenter l'entrefer du blindage afin que les deux couches soient indépendantes et ainsi que le blindage soit optimal. Cependant, en augmentant l'entrefer, nous augmentons les rayons de la couche extérieure ce qui diminue son

<sup>19</sup>voir §5.3.1.3



efficacité. Nous venons de mettre en évidence l'existence d'un maximum qui est un compromis entre l'indépendance des couches et leur efficacité maximale.

La figure (5.16) présente la variation de l'atténuation pour différents ordres d'une décomposition harmonique en fonction de l'entrefer entre deux couches d'un blindage. Nous remarquons que l'atténuation passe par un minimum pour chaque ordre qui correspond à l'entrefer optimal. Ce minimum dépend de l'ordre de la source et suit une courbe qui donne l'entrefer optimal en fonction de l'ordre de la source. Cette courbe est parabolique et tend vers zéro, ce qui se justifie en rappelant que plus l'ordre d'une source est élevé et plus sa décroissance est forte. Enfin, elle montre que pour une source multipolaire, l'entrefer optimum est un compromis qui dépend entièrement de la décomposition harmonique de la source. Par exemple, si la source possède des ordres faibles importants, il sera plus judicieux de blinder cette source en optimisant l'entrefer pour l'ordre faible le plus important, les ordres élevés étant forcément mieux blindés, ce résultat est encore vrai en fonctionnement dynamique.

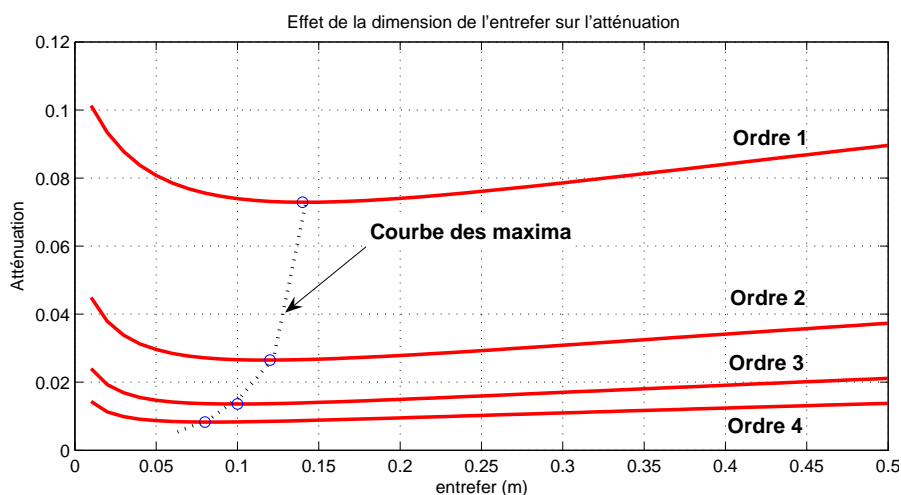


FIG. 5.16 – Atténuation en fonction de l'épaisseur de l'entrefer d'un blindage à 2 couches en acier pour différents ordres faibles.

Nous avons présenté le blindage multicouche dans le cas statique. Les résultats obtenus en terme de nombre de couches et d'optimisation peuvent encore s'appliquer aux cas des sources dynamiques en exploitant l'écriture matricielle adéquat.

## 5.4 Conclusions

Nous voici arrivés à la fin de ce chapitre où il est temps de récapituler les comportements utiles des blindages sous forme méthodologique.

Pour commencer, rappelons le résultat essentiel de la première partie de cette thèse qui est que toute source magnétodynamique peut être décomposée en série harmonique dont les termes sont classés par fréquence et par ordre. C'est parce que l'objectif de la discrétion magnétique est la réduction des termes les plus influents et que l'identification magnétodynamique permet de les discriminer que nous avons

proposé le calcul de l'atténuation  $S_n$  représentatif de l'effet d'un blindage pour chaque ordre. Ainsi, nous ne nous sommes pas bornés à un calcul d'atténuation pour une source, mais nous avons cherché à analyser le comportement du blindage à chaque ordre. Le gain de cette approche est immense d'un point de vue méthodologique car elle va permettre le dimensionnement d'un blindage adapté à une source, c'est-à-dire choisir les matériaux adaptés, leur épaisseur, le nombre de couches et dimensionner les entrefers.

Afin de mettre clairement en œuvre notre méthodologie de blindage, nous proposons de la découper en trois étapes successives qui doivent permettre le dimensionnement le plus adapté à la source :

**Première étape : Identification des termes à réduire** Puisque nous proposons une méthode de dimensionnement de blindages adaptés à une source, nous devons avant toute chose identifier la source et en particulier les termes harmoniques dont nous voulons réduire la signature. Le dimensionnement d'un blindage adapté en dépend. Par exemple, si les termes que nous voulons réduire sont des ordres élevés et à des fréquences importantes (dans ce cas c'est le champ près de la source que nous cherchons à réduire), notre blindage sera d'épaisseur faible et de conductivité élevée.

**Deuxième étape : Choix des matériaux** Une fois la première étape franchit, nous devons choisir les matériaux utilisés selon leurs performances. Pour nous aider dans cette démarche nous pouvons utiliser l'atténuation asymptotique ou l'atténuation maximale qui donnent le meilleur blindage possible à l'aide d'un matériau quels que soient son épaisseur, l'ordre et la fréquence de la source.

**Troisième étape : Choix de l'épaisseur, nombre de couches et entrefer** La dernière étape du blindage est le dimensionnement. Il est obtenu grâce au calcul de l'atténuation du blindage aux différents ordres et fréquences que nous voulons blinder. Ce dimensionnement peut encore faire intervenir une stratégie de blindage multicouches qui optimise les performances en jouant sur son nombre de couches et ses entrefers.

Cette méthodologie de blindage est riche car elle utilise la décomposition harmonique d'une source. Elle montre de façon évidente qu'un blindage doit être adapté en fonction de la nature de la source puisque le comportement de chaque terme harmonique est particulier. Cependant, il y a deux limites à la méthode : qui sont d'une part qu'aux ordres faibles et fréquences faibles les sources sont difficiles à blinder, et d'autre part que la méthode se base sur une équivalence de blindage de forme régulière.

Afin de répondre au premier problème nous proposons l'utilisation d'un blindage actif. C'est-à-dire un blindage utilisant des conducteurs dont l'induction magnétique crée la signature opposée aux fréquences et ordres faibles. Il y a deux intérêts à cela qui sont d'une part que ces sources sont assez aisées à construire

(bobines de Helmholtz) et d'autre part qu'elles annulent la source que nous désirons blinder.

Enfin, le deuxième problème est celui de la forme du blindage. Si l'atténuation du blindage peut être déterminée grâce à une équivalence sphérique, ce qui permet un dimensionnement adapté d'un blindage, notre méthode ne permet pas le calcul précis la fonction de transfert  $\mathbf{G}$  d'un blindage qui doit prendre en compte les effets de forme : ce que nous étudierons au chapitre suivant.

# Chapitre 6

## Effet de forme d'un blindage

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>141</b>
<b>6.2</b>	<b>Calcul numérique de la matrice de blindage harmonique</b>	<b>142</b>
6.2.1	Convergence des séries de fonctions propres	142
6.2.2	Orthonormalisation des fonctions harmoniques	148
6.2.3	Base canonique	153
6.2.4	Interprétation	157
6.2.5	Généralisation	159
<b>6.3</b>	<b>Applications</b>	<b>160</b>
6.3.1	Calcul du blindage dynamique obtenu à l'aide d'une gaine infinie en aluminium	161
6.3.2	Application au calcul de champ d'un moteur	163
<b>6.4</b>	<b>Conclusions</b>	<b>169</b>

---

### 6.1 Introduction

Au cours du chapitre précédent nous avons montré qu'il était possible de faire une analogie simple entre un filtre et un blindage. Ainsi l'effet d'un blindage est caractérisé par une fonction de transfert matricielle représentative de l'atténuation du blindage. Nous nous sommes jusqu'ici arrêtés au calcul de cette atténuation qui permettait le dimensionnement d'un blindage adapté en fonction de la décomposition de la source que nous désirons blinder. La forme du blindage était alors limitée à une surface régulière sphérique (3D) ou circulaire (2D).

Dans ce chapitre nous allons établir une méthode de calcul harmonique de blindage, qui va permettre un calcul précis de la matrice harmonique liée à un blindage de forme quelconque. Le principal intérêt de ce calcul est qu'il fournit les décompositions des champs électriques et magnétiques dans tout l'espace. Par rapport au chapitre précédent, nous gagnons le calcul de l'effet de forme du blindage.

Contrairement à la démarche de type problème inverse proposée dans la première partie de cette thèse, nous abordons maintenant la résolution d'un problème

direct. C'est-à-dire que nous supposerons connue une description des sources et nous calculons les champs électromagnétiques sous forme de séries harmoniques. Dans la majorité des cas un problème direct est déterminé alors que son problème inverse peut être mal posé. C'est pourquoi, il sert de référence à la résolution des problèmes inverses : par exemple, il est fréquent de voir le résultat d'un problème inverse validé par une simulation éléments finis. Dans notre cas, le problème direct n'aura pas cette vocation, mais, puisqu'il est certain, son but sera de fournir l'information a priori nécessaire à l'identification. Nous clôturerons ainsi les débats possibles sur l'origine des informations a priori sur une source. Bien sûr nous aboutirons également à une méthode de calcul des champs électromagnétiques, qui permettra également la simulation analytique.

Pour arriver à nos fins, ce chapitre est découpé en deux sections qui portent respectivement sur le calcul numérique sur les surfaces des blindages puis présente plusieurs applications qui illustrent l'intérêt de cette méthode.

## 6.2 Calcul numérique de la matrice de blindage harmonique

Il existe de nombreuses méthodes permettant le calcul de blindages magnétiques. Par exemple, nous pouvons utiliser des intégrales de frontière, des éléments finis ou encore des différences finies. Mais, dans notre démarche de blindage, nous cherchons un modèle harmonique de la source blindée. C'est pourquoi, plutôt que de mélanger plusieurs méthodes de calcul, ce qui complexifierait la résolution, nous allons définir une méthode de calcul purement harmonique à partir de celle que nous avons déjà présentée dans le chapitre précédent et qui était basée sur les conditions de passage sur les surfaces du blindage.

Ce calcul reposera sur les propriétés des harmoniques sphériques que nous avons rappelées au premier chapitre de cette thèse. Pour mémoire, il s'agit essentiellement de la validité de l'écriture harmonique dans tout le domaine d'étude, de la convergence de ces séries de fonctions harmoniques et de leur orthonormalisation sur une surface quelconque. Nous montrerons dans cette section l'intérêt de chacune de ces propriétés ainsi que l'existence d'une base canonique qui va nous permettre le calcul du blindage. Nous finirons cette section en montrant que l'écriture du blindage harmonique que nous proposons se généralise facilement à des sources complexes comme par exemple des moteurs.

### 6.2.1 Convergence des séries de fonctions propres

Commençons par rappeler que l'écriture des solutions des équations de Maxwell sous forme de séries harmoniques est valable en tout point de l'espace. Cependant, comme nous l'avons déjà fait remarquer au paragraphe §2.2.1.6, pour avoir un développement harmonique représentatif du champ à proximité de la surface du blindage, la série harmonique peut avoir un nombre de termes important. Dans cette section nous allons montrer que la convergence des séries harmoniques sur la surface d'un blindage est en relation avec la régularité de la surface. Nous verrons

par la suite qu'elle est en fait en relation avec la décomposition harmonique de la surface elle-même. C'est pourquoi nous proposons tout d'abord une approche instinctive pour le calcul de l'effet de forme qui consiste à discrétiser la surface du blindage pour écrire les conditions de passage (5.8) en de nombreux points, ce qui permettra de lier les écritures harmoniques dans les différentes zones de ce blindage. Afin de simplifier le problème de blindage, qui possède généralement deux surfaces nous proposons un calcul à une surface (voir Fig.6.1) en partant du principe que ce que nous ferons sur cette surface se généralisera à des problèmes comportant plusieurs surfaces. Il s'agit du calcul de l'anomalie que crée un bloc carré de matériau ferromagnétique plongé dans un champ magnétique source extérieur quelconque. Si nous sommes capables d'établir le lien entre le champ magnétique source extérieur, le champ dans la matière (zone 1) et l'anomalie magnétique dans la zone 2, alors nous pourrons appliquer notre méthode de calcul à des problèmes possédant plusieurs surfaces comme des blindages.

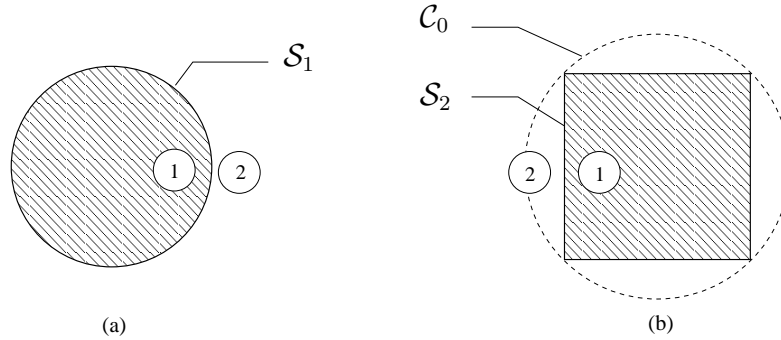


FIG. 6.1 – Contours de forme circulaire  $\mathcal{S}_1$  (a) et de forme carrée  $\mathcal{S}_2$  (b) correspondant à deux objets ferromagnétiques plongés dans un champ magnétique quelconque.

### 6.2.1.1 Écriture des sources dans les différentes zones - conditions de passage

Commençons par définir le type de source que nous avons en fonction des deux différentes zones du problème. Nous savons que dans la zone 2 extérieure à notre objet circulaire (Fig 6.1.a) le champ source magnétique extérieur s'écrit sous forme de séries comme un problème interne et le champ magnétique de réaction du matériau, qui pour sa part s'écrit comme un problème externe. En tout point  $P$  à l'extérieur du matériau l'induction magnétique s'écrit alors sous la forme<sup>1</sup> :

$$\vec{B}_2(P) = \vec{B}_2^e(P) + \vec{B}_2^i(P) \quad \text{où} \quad \vec{B}_2^i(P) = \vec{B}_{source}(P) \quad (6.1)$$

Dans la zone 1 du blindage le champ magnétique s'écrit sous forme d'une série harmonique correspondant à un problème interne. Ainsi, en tout point  $P$  de la zone 1, il s'écrit sous la forme :

$$\vec{B}_1(P) = \vec{B}_1^i(P) \quad (6.2)$$

<sup>1</sup>La convention d'écriture est la suivante :  $\vec{B}_2^e$  se lit induction magnétique dans la zone 2 relative à un problème externe. L'exposant i est utilisé pour un problème interne

Pour établir le lien entre les coefficients des développements harmoniques dans les différentes zones nous utilisons les conditions de passage (5.8) sur la surface. Du fait de l'orthogonalité des fonctions harmoniques sur la surface circulaire elles s'écrivent pour chaque terme  $n$  indépendamment du point  $P$  sous la forme :

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot [\vec{B}_{2,n} - \vec{B}_{1,n}] = 0 \\ \vec{n} \times [\mu_1 \vec{B}_{2,n} - \mu_2 \vec{B}_{1,n}] = 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

Ces deux relations de passage fournissent donc  $2n$  relations linéaires indépendantes qui nous permettent d'écrire un système linéaire dont les solutions sont les  $2n$  coefficients harmoniques intervenant dans l'écriture de  $\vec{B}_1^i$  et  $\vec{B}_2^e$ . Cette résolution passe par la détermination d'une matrice  $\mathbf{G}$  identique à celle que nous proposons au paragraphe §5.2.2.1.

**Surface quelconque - Condition d'échantillonnage surfacique** Nous venons donc de faire un bref rappel de la méthode de calcul matriciel que nous avons proposée au chapitre précédent, adaptée au problème de la figure (6.1.a). Cependant, elle est essentiellement basée sur la propriété d'orthogonalité des fonctions sur un support régulier qui permet d'écrire indépendamment les relations de passage pour chaque terme des décompositions. Si maintenant la surface n'est plus régulière, nous perdons la propriété d'orthogonalité, et, pour déterminer les  $2n$  termes que nous cherchons, nous devons forcément discrétiser la surface pour écrire les relations de passage (6.3) en au moins  $n$  points distincts.

Ce que nous venons d'écrire est la condition pour que le système linéaire soit de rang plein. Il faut donc une discrétisation de la surface de l'objet qui respecte le nombre de coefficients harmoniques que nous cherchons. Si cette condition est assez facile à réaliser, car nous sommes dans un problème direct, il est difficile de définir le nombre de coefficients nécessaires sur la surface de l'objet car il dépend de la vitesse de convergence des séries qui est fortement perturbée par l'irrégularité de la surface. La réelle difficulté de la méthode est donc de trouver le nombre  $N$  de termes représentatifs simultanément des inductions magnétiques  $\vec{B}_1^i$  et  $\vec{B}_2^e$  sur la surface de l'objet.

**Convergence des séries** Au cours du chapitre 1, nous avons présenté les fonctions harmoniques comme un système complet, ce qui garantit la convergence des séries harmoniques  $\vec{B}_1^i$  et  $\vec{B}_2^e$  au sens des moindres carrés sur la surface (voir Eq.1.38). En d'autres termes nous sommes assurés de l'existence de deux entiers  $N_1$  et  $N_2$  de sorte que les inductions magnétiques recherchées sur la surface dans les deux zones puissent s'écrire :

$$\begin{cases} \vec{B}_1^i = \sum_{n=1}^{N_1} \vec{B}_{1,n}^i + \vec{\epsilon}_{N_1} \\ \vec{B}_2^e = \sum_{n=1}^{N_2} \vec{B}_{2,n}^e + \vec{\epsilon}_{N_2} \end{cases} \quad (6.4)$$

Ainsi, en prenant  $N$  termes pour notre développement, avec  $N$  égal au max de  $N_1$  et  $N_2$  nous pouvons écrire les relations de passages précédentes en  $N$  points et assurer qu'elles sont représentatives à epsilon près des relations de passage réelles de l'induction.

### 6.2.1.2 Écriture du système matriciel

Le système linéaire que nous allons résoudre peut s'écrire facilement sous forme matricielle. Imaginons par exemple que nous ayons discrétisé la surface carrée de la figure (6.1.b) en  $p$  points distincts et que nous cherchons à calculer l'induction dans les deux zones en coordonnées polaires jusqu'à un ordre  $N$ . La matrice des relations de passage (6.3) écrite sur l'ensemble des points est alors de dimension ( $2p \times [4N + 2]$ ) et s'écrit :

$$\underbrace{\left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{2,e}^n & -\mathbf{B}_{1,i}^n \\ \hline \mu_1 \cdot \mathbf{B}_{2,e}^t & -\mu_2 \cdot \mathbf{B}_{1,i}^t \end{array} \right]}_{\mathbf{B}(2p \times [4N+2])} \cdot \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \mathbf{C}_e \\ \mathbf{C}_i \end{array} \right]}_{\mathbf{C}([4N+2] \times 1)} = \underbrace{\left[ \begin{array}{c} -\mathbf{B}_{2,source}^n \\ -\mu_1 \cdot \mathbf{B}_{2,source}^t \end{array} \right]}_{\mathbf{B}_s(2p \times 1)} \quad (6.5)$$

Les matrices  $\mathbf{B}_{2,e}^n$  et  $\mathbf{B}_{1,i}^n$  correspondent à l'écriture en série des vecteurs normaux aux  $p$  points de la surface dans la zone 2 et 1. Il s'agit respectivement de l'écriture d'un problème externe (dans 2) et d'un problème interne (dans 1). De même, les matrices  $\mathbf{B}_{2,e}^t$  et  $\mathbf{B}_{1,i}^t$  correspondent à l'écriture en série aux  $p$  points, mais pour la composante tangentielle de l'induction.

Puisque nous cherchons l'écriture de la source jusqu'à l'ordre  $N$  dans les zones 1 et 2, nous devons déterminer  $4N + 2$  coefficients harmoniques. Il nous faut alors discrétiser la surface en au moins  $2N + 1$  points pour lesquels les relations de passages sont distinctes : c'est la condition minimale que nous avons évoquée précédemment pour garantir que le système soit de rang plein. Lorsque nous utiliserons le modèle harmonique sphérique, ces conditions seront différentes. Pour un ordre  $N$  du développement nous aurons à identifier  $2(N^2 + 2N)$  coefficients, nous aurons donc besoin d'au moins  $N^2 + 2N$  points sur la surface.

**Stabilité - Résolution** La résolution de la matrice  $\mathbf{B}$  dans le cas de ce blindage est particulièrement instable. En effet, les quatre matrices rentrant dans sa composition ont chacune une structure voisine de celle de la matrice  $\mathbf{F}$  de l'équation (2.21). C'est-à-dire que chaque colonne a une norme relative à l'ordre de la source. Pire encore, les matrices des problèmes internes ont une norme croissante en fonction des termes alors que les matrices des problèmes externes ont des colonnes de norme décroissante. Pour résoudre ce système linéaire nous devons donc nécessairement stabiliser la matrice en utilisant une matrice de pondération. Puisqu'il s'agit d'un problème direct, nous pouvons agir sur la discrétisation de la surface de façon à ce que le système soit de rang plein. De ce fait, l'ensemble des coefficients harmoniques solutions est obtenu en utilisant la pondération  $\mathbf{W}$  présentée en §2.3.3.2 :

$$\mathbf{C} = \mathbf{W}(\mathbf{B}\mathbf{W})^+ \mathbf{B}_s \quad (6.6)$$



Malheureusement, et nous allons le voir dans le calcul d'application suivant, bien que le système soit de rang suffisant, l'irrégularité de la surface entraîne une insuffisance du modèle due à la lenteur de convergence en moyenne quadratique des séries harmoniques. Pour assurer la convergence sur le support nous devons donc pousser le développement aussi loin que possible afin d'assurer une erreur minimale sur la frontière ce qui sous-entend une discrétisation importante de la surface. Avant de proposer une approche plus fine de notre calcul qui permet une convergence plus rapide en ordonnant les termes, nous allons proposer un exemple d'application qui illustrera cette méthode et en montrera les limites principales.

### 6.2.1.3 Application

Nous proposons maintenant d'effectuer le calcul (6.6) correspondant à un problème 2D en coordonnées polaires. La description de ce problème est la suivante : un cube de 20cm d'arête et de perméabilité magnétique  $\mu_r = 1000$  est plongé dans un champ vertical de  $20\mu\text{T}$  dans lequel il s'aimante. Nous cherchons à calculer les coefficients harmoniques solution de ce problème dans les zones 1 et 2 représentées figure (6.1). Ces coefficients sont donnés par le vecteur  $\mathbf{C}$  solution de (6.6). Ils permettent l'écriture analytique d'une solution dans les deux zones du problème, ce qui va nous permettre de comparer l'induction extrapolée à l'aide des développements harmoniques à des simulations obtenues à l'aide d'un solveur éléments finis (FEM). Nous cherchons à valider notre modèle ou à diagnostiquer ses limites.

**Influence de l'ordre de développement** Notre première tentative consiste à évaluer la méthode de calcul harmonique en utilisant un développement faible et une discrétisation juste suffisante. Pour ce faire, nous découpons la surface du cube en 44 éléments ce qui assure que le système linéaire est de rang plein si le développement est poussé à l'ordre  $N = 20$ .

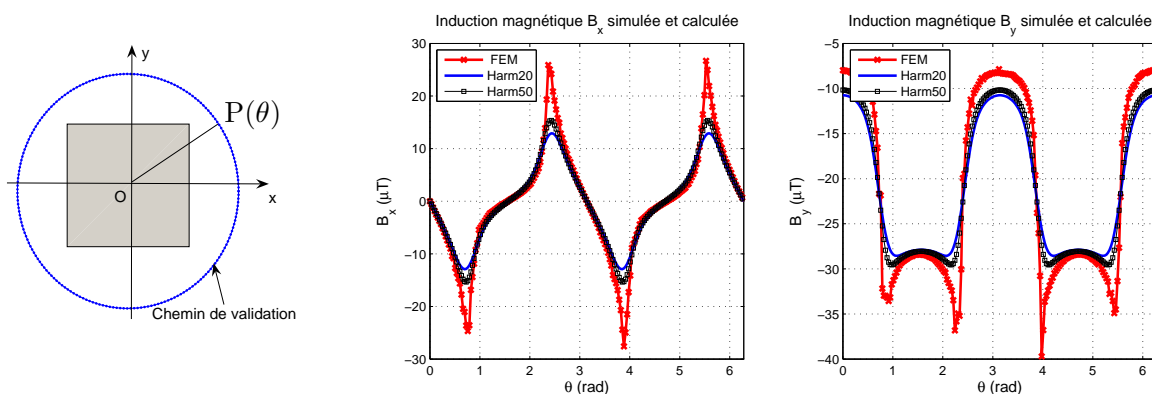


FIG. 6.2 – Représentation d'un cube de 20cm d'arête et de perméabilité relative  $\mu_r=1000$ . Nous évaluons la qualité du calcul harmonique en comparant l'induction calculée à une simulation FEM du problème sur un chemin de validation. - Les deux figures à droite représentent respectivement l'induction magnétique suivant x et suivant y calculées harmoniquement à l'ordre 20 et 50 et la référence donnée par la méthode des éléments finis.

Nous comparons ensuite l'induction calculée à l'aide des coefficients harmoniques à la simulation sur un chemin de validation (voir Fig.6.2). Sur cette figure, nous voyons très clairement que le résultat (Harm20) est distant de la simulation de référence (FEM) : la méthode de calcul n'est donc pas optimale.

Si notre calcul n'est pas optimal, il donne cependant un résultat voisin de la référence, qui se caractérise essentiellement par des valeurs plus faibles et surtout par des variations locales moins importantes. En effet, les "pics" ne sont pas respectés. Or, ils correspondent aux ordres élevés du développement liés aux quatre sommets du cube. Un moyen simple d'optimiser le calcul est alors de pousser un peu plus loin le développement multipolaire dans les différentes zones. C'est pourquoi nous augmentons le nombre de points sur la surface à 120 éléments ce qui va nous permettre le calcul des coefficients harmoniques à l'ordre  $N = 50$ .

Le résultat obtenu (Harm50) montre une amélioration faible des valeurs de l'induction magnétique. Cette amélioration est due à la lenteur de convergence des fonctions harmoniques sur la surface. Si nous voulons obtenir les coefficients solutions nous devons donc accélérer cette convergence.

**Influence de la régularité de la surface** Ce qui ralentit fortement la convergence de la série est l'irrégularité de la surface du cube. Pour s'en rendre compte nous proposons d'utiliser les résidus de mesures  $\hat{V}$  relatifs à la résolution du système (6.6). D'après ce que nous écrivions dans le chapitre 4, il est intéressant de regarder la diagonale de la matrice de covariance de ces résidus qui est donnée d'après (4.24) par :

$$\text{var}\{\hat{V}\} = \text{Id} - \mathbf{B}\mathbf{W}(\mathbf{B}\mathbf{W})^+ \quad (6.7)$$

Pour mémoire, ces résidus suivent une loi normale d'espérance nulle. La matrice (6.7) est carrée et de dimension  $2p$ . D'après l'écriture du système (6.5) les  $p$  premiers termes correspondent à la variance des résidus de mesures normaux à la surface et les  $p$  derniers correspondent à la variance des résidus tangentiels. L'observation de cette diagonale va donc nous permettre de diagnostiquer les points et les composantes pour lesquels les résidus sont importants (ont une variance forte).

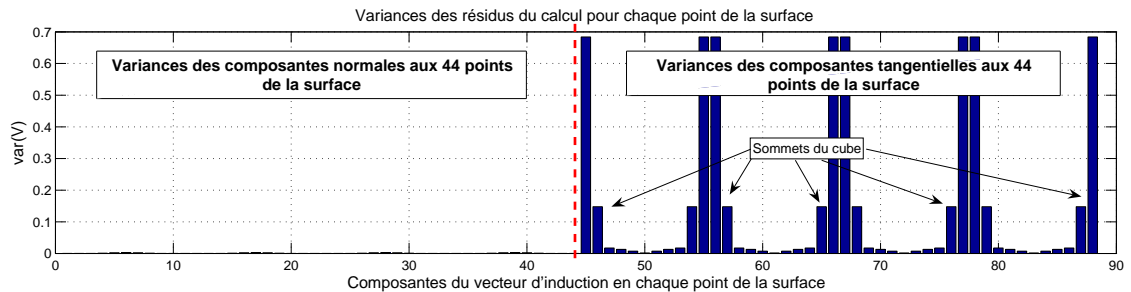


FIG. 6.3 – Termes diagonaux de la matrice de covariance des résidus du calcul de l'aimantation d'un cube.

La figure (6.3) montre que la variance des résidus du calcul est très importante pour les termes tangents de l'induction magnétique sur la surface. Elle est d'ailleurs

d'autant plus importante que nous nous rapprochons des sommets du cube. Nous sommes en train de mettre en évidence des phénomènes de Gibbs liés à l'irrégularité de la surface. Puisqu'ils sont causés par les angles de la surface nous pourrions être amené à adapter la discrétisation de façon à réduire la variance des résidus. Une optimisation simple de la discrétisation est de mettre les points éloignés des sommets, de façon à limiter les résidus. Mais, en allant dans cette direction, nous sommes tout simplement en train de simplifier la forme de l'objet pour le rendre régulier, et c'est la nature du problème que nous changeons.

#### 6.2.1.4 Conclusion

Nous avons proposé une première ébauche du calcul de blindage harmonique. En discrétisant la surface d'un cube et en écrivant les relations de passage que suit l'induction magnétique, nous sommes arrivés à l'écriture d'un système linéaire. Ce système lie les coefficients harmoniques dans les deux zones définies par la surface du cube en fonction de la source. Malheureusement, la convergence des séries harmoniques est très lente du fait de l'irrégularité de la surface, ce qui d'une part se traduit par des coefficients harmoniques faux et des résidus de calcul importants sur la surface. Deux solutions sont alors envisageables soit nous augmentons la discrétisation et l'ordre du développement harmonique, soit nous optimisons le positionnement des points de calcul. Dans le premier cas le calcul sera très lent et peu adapté à la simplicité du problème. Dans le second cas, en changeant les points de place nous changeons la nature du problème. Cependant, la solution proposée n'est pas satisfaisante, l'écriture du système linéaire donne des résultats encourageants. C'est pourquoi, nous allons maintenant proposer d'orthonormaliser les fonctions harmoniques sur la surface de façon à ordonner les termes, ce qui facilitera la convergence des séries harmoniques.

### 6.2.2 Orthonormalisation des fonctions harmoniques

Sur un cercle ou une sphère les fonctions harmoniques sont orthogonales. Nous montrons au premier chapitre de cette thèse que cette propriété naturelle des solutions d'un problème de Sturm-Liouville pouvait être étendue sur une surface quelconque par un procédé d'orthonormalisation. Dans cette section nous allons montrer l'intérêt d'orthonormaliser les développements harmoniques sur les surfaces des blindages. En particulier, nous expliquerons le gain de l'orthonormalisation en terme de vitesse de convergence des séries. La méthode que nous obtiendrons sera ensuite illustrée grâce à l'exemple du cube précédent. Nous finirons en montrant les limites de l'orthonormalisation pour le calcul de blindage et la nécessité que nous avons de trouver une base harmonique globale commune à l'ensemble des surfaces d'un même blindage.

#### 6.2.2.1 Processus d'orthonormalisation

Au chapitre 1, nous avons exposé le principe de l'orthonormalisation des fonctions harmoniques sur la surface limite ( $\mathcal{C}_s$ ) d'un objet de forme quelconque (voir

§1.4.3.2). Il repose sur la définition d'un produit scalaire relatif à la surface de l'objet défini par une intégrale surfacique (6.10). Nous allons l'utiliser maintenant pour définir une famille de fonctions harmoniques orthonormales sur la surface en utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Cette orthonormalisation concerne les deux types de familles de fonctions harmoniques sur la surface d'un blindage, c'est-à-dire celle qui décrit un problème interne et celle qui décrit le problème externe.

Afin de permettre le calcul de ces deux nouvelles familles de fonctions nous utiliserons l'écriture du potentiel scalaire, qui facilite le calcul numérique des intégrales. L'orthonormalisation étant un processus linéaire, les fonctions harmoniques orthogonales seront des combinaisons linéaires des fonctions harmoniques naturelles. C'est pourquoi le résultat de l'orthonormalisation du potentiel scalaire (où du vecteur  $\vec{W}$ ) sur la surface sera également valable pour les différentes grandeurs vectorielles qui en dérivent du fait de la linéarité du modèle.

**Produit scalaire** Dans le cas de l'exemple du cube précédent, nous avons deux familles de fonctions harmoniques à orthonormaliser. Mais nous n'illustrerons ce processus que sur les fonctions harmoniques entrant dans l'écriture du problème interne dans la zone 2. Dans cette zone, pour tout point  $P$  de la surface le développement harmonique du potentiel scalaire magnétique jusqu'à l'ordre  $N$  s'écrit (voir eq. A.8) :

$$\Psi_2(P) = a_0 + \sum_{n=1}^N [a_n \cdot r^n \cos(n\theta) + b_n \cdot r^n \sin(n\theta)] \quad (6.8)$$

et nous cherchons une famille de fonctions harmoniques orthogonales  $\{\psi_n\}$  telle qu'en  $P$  ce même potentiel scalaire s'écrit :

$$\Psi_2(P) = \alpha_0 \cdot \psi_1(r, \theta) + \sum_{n=1}^N [\alpha_n \cdot \psi_{2n}(r, \theta) + \beta_n \cdot \psi_{2n+1}(r, \theta)] \quad (6.9)$$

L'orthonormalité de cette famille est définie par le produit scalaire sur l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur  $\mathcal{C}_s$  :

$$\forall(f, g) : \langle f|g \rangle = \oint_{\mathcal{C}_s} f \cdot g^* \cdot ds \quad (6.10)$$

Elle se traduit pour cette famille par la relation d'orthonormalité suivante :

$$\forall(n, m) : \langle \psi_n|\psi_m \rangle = \oint_{\mathcal{C}_s} \psi_n \cdot \psi_m^* \cdot ds = \delta_{n,m} \quad (6.11)$$

qui va permettre, à partir des fonctions harmoniques intervenant dans (6.8), d'obtenir une famille de fonctions  $\psi_n$  orthonormales<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Notons que cette suite n'est pas unique et qu'il existe de nombreuses bases de fonctions  $\psi$  orthonormées

**Processus d'orthonormalisation** Le processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt suit l'algorithme suivant :

1. Nous choisissons comme premier terme de la famille orthonormale  $\psi_n$  une fonction harmonique que nous normalisons. Le choix de ce premier terme va déterminer le reste de la famille. En raison de la hiérarchie naturelle des termes, nous construirons la famille en commençant par les termes d'ordre les plus faibles, la première fonction de la famille orthonormale relative à l'écriture harmonique (6.8) sera donc :

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{\langle 1|1 \rangle}} \quad (6.12)$$

2. Une fois la première fonction orthonormale choisie nous augmentons la dimension de la famille en incluant une nouvelle fonction harmonique. Si par exemple nous avons déjà  $i$  fonctions orthonormales et que nous voulons déterminer  $\psi_{i+1}$ , elle sera définie en assurant que les deux familles de fonctions de dimension  $(i + 1)$  soient équivalentes, que  $\psi_{i+1}$  soit orthogonale à toutes les autres fonctions  $\psi$  déjà existantes et enfin qu'elle soit de norme unitaire.

Ce processus assure la création d'une famille de fonctions  $\psi_n$  orthonormées de même dimension. Comme à chaque indice  $i$  la nouvelle fonction est une combinaison linéaire des  $i$  premières fonctions harmoniques, nous pouvons écrire une relation matricielle simple à l'aide d'une matrice triangulaire inférieure  $\mathbf{T}$  qui lie les fonctions harmoniques à leurs homologues orthonormalisées sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_{2N+1} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ r \cos(\theta) \\ \vdots \\ r^N \sin(N\theta) \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

**Écriture et résolution du problème orthonormalisé** Reprenons l'écriture du système matriciel (6.5) correspondant au problème d'aimantation du cube. Nous voyons que la matrice  $\mathbf{B}$  du problème est découpée en deux parties suivant sa largeur. Ces deux parties correspondent à l'écriture harmonique de l'induction dans 2 ou dans 1 et chaque colonne définit un ordre particulier. Si nous voulons exploiter l'écriture orthonormale des fonctions harmoniques sur la surface nous devons calculer les matrices  $\mathbf{T}_e$  et  $\mathbf{T}_i$  correspondant respectivement à l'orthonormalisation des fonctions harmoniques du problème externe et interne sur la surface  $\mathcal{C}_s$ . Le système orthonormé de (6.5) s'écrit alors :

$$\underbrace{\left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{2,e}^n & -\mathbf{B}_{1,i}^n \\ \hline \mu_1 \cdot \mathbf{B}_{2,e}^t & -\mu_2 \cdot \mathbf{B}_{1,i}^t \end{array} \right]}_{\mathbf{B}} \cdot \underbrace{\left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{T}_e^t & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{T}_i^t \end{array} \right]}_{\mathbf{W}_\perp} \cdot \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \mathbf{C}_e^\perp \\ \mathbf{C}_i^\perp \end{array} \right]}_{\mathbf{C}_\perp} = \underbrace{\left[ \begin{array}{c} -\mathbf{B}_{2,source}^n \\ -\mu_1 \cdot \mathbf{B}_{2,source}^t \end{array} \right]}_{\mathbf{B}_s} \quad (6.14)$$

Le vecteur des coefficients harmoniques solution  $\mathbf{C}$  est lié à celui des coefficients harmoniques orthonormés  $\mathbf{C}_\perp$  par la relation :

$$\mathbf{C} = \mathbf{W}_\perp \cdot \mathbf{C}_\perp \quad (6.15)$$

La résolution du système orthonormé s'écrit donc de la même façon que (6.6) en utilisant la pondération  $\mathbf{W}_\perp$ , c'est-à-dire que les coefficients harmoniques sont donnés par la relation :

$$\mathbf{C} = \mathbf{W}_\perp \cdot (\mathbf{B}\mathbf{W}_\perp)^+ \cdot \mathbf{B}_s \quad (6.16)$$

A l'aide de cette pondération, **nous ne cherchons pas à stabiliser globalement le système, mais uniquement à le stabiliser sur la surface** ( $\mathcal{C}_s$ ) de l'objet. Puisque cette pondération assure l'orthonormalisation sur la surface  $\mathcal{C}_s$  nous améliorons nécessairement l'écriture des conditions de passage. C'est pourquoi, nous avons bon espoir d'avoir significativement amélioré la qualité de notre calcul, ce que nous allons vérifier immédiatement.

#### 6.2.2.2 Application

Nous proposons maintenant d'effectuer le calcul (6.16) afin d'évaluer les coefficients harmoniques intervenant dans l'écriture de l'induction dans les deux zones du cube aimanté par un champ constant. Nous cherchons à évaluer la performance du calcul des relations de passage sur sa surface lorsque l'écriture harmonique est orthonormalisée.

Nous commençons par faire remarquer que le processus d'orthonormalisation que nous venons de décrire est long car il nécessite un nombre important de calculs de produit scalaire. Par exemple, un développement à l'ordre  $N$  nécessite  $2N + 1$  fonctions harmoniques, ce qui suppose  $(2N + 1)^2$  produits scalaires. A ce propos, Durand [Dur66] donne une astuce intéressante pour calculer les fonctions harmoniques orthonormales qui passe par l'utilisation de déterminants. Si cette méthode réduit le nombre de calculs et permet de stocker les produits scalaires dans une matrice, le procédé est coûteux, lent et instable. En effet, l'orthonormalisation nécessite des calculs qui deviennent rapidement numériquement instables lorsque l'ordre  $N$  devient important ou que la surface de l'objet prend des dimensions extrêmes.

Afin de montrer le gain de l'orthonormalisation, nous allons à nouveau comparer l'induction sur le chemin de validation précédent. En raison du peu de stabilité lié au procédé d'orthonormalisation nous utiliserons un développement maximal jusqu'à l'ordre  $N = 12$  et une discrétisation régulière de la surface en 44 points.

La figure (6.4) compare le résultat de l'écriture harmonique orthonormée obtenue à l'ordre  $N = 12$  (Ortho12) et la simulation (FEM). Nous constatons que l'orthonormalisation fournit un gain important de stabilité qui donne un résultat correct à l'ordre 12. L'orthogonalité augmente donc la stabilité et accélère la convergence. La résolution par les moindres carrés est équivalente à une projection vectorielle sur l'espace des fonctions harmoniques, qui dans notre cas est orthonormé : il s'agit donc d'une projection orthogonale qui assure une erreur minimale d'estimation.

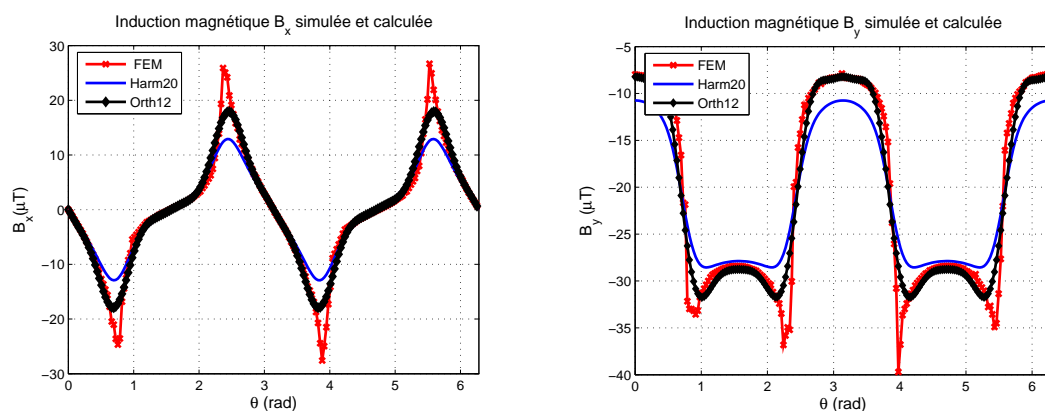


FIG. 6.4 – Induction magnétique suivant  $x$  (gauche) et suivant  $y$  (droite) créé par un cube aimanté. Il s'agit de comparer une induction magnétique de référence simulée (FEM) avec le résultat du calcul harmonique orthonormé jusqu'à l'ordre 12.

Remarquons que les inductions harmoniques ont toujours des variations lissées par rapport à la référence et que ce lissage est toujours proportionnel à l'ordre du développement. En limitant le développement à l'ordre 12 nous avons filtré les ordres élevés qui permettraient de mieux représenter ses fortes variations.

### 6.2.2.3 Conclusions - Perspectives

Si le calcul direct des relations de passage sur la surface du cube nous donnait des résultats prometteurs, nous obtenons de très bons résultats grâce à l'orthonormalisation du système. Cependant, cette méthode ne peut pas nous satisfaire parce qu'elle est réellement lourde et qu'un calcul de blindage comportant plusieurs surfaces va encore augmenter le nombre et l'instabilité des calculs.

Le principal argument qui motive le rejet de cette méthode de calcul est son manque de robustesse. En effet, il n'est pas envisageable de l'exploiter pour un calcul de blindage comportant plusieurs surfaces car l'unicité de l'écriture dans les différentes zones du blindage ne permet pas de multiples orthonormalisations. Prenons par exemple un blindage monocouche de forme quelconque, il se découpe en trois zones comme le blindage sphérique de la figure (5.9). Dans chacune de ces zones les séries de fonctions harmoniques s'écrivent de façon unique. En particulier dans la zone 2, qui est le blindage, nous avons la superposition d'un problème interne et d'un problème externe et la possibilité d'orthonormaliser les séries harmoniques soit sur la surface interne du blindage, soit sur la surface externe. En aucun cas nous pouvons orthonormaliser sur les deux surfaces : de ce fait la convergence de la méthode de calcul est seulement assurée sur une seule des surfaces du blindage et les problèmes de lenteur de convergence que l'orthonormalisation avait fait disparaître resurgissent.

Une brève synthèse des résultats déjà obtenus nous permet de confirmer que la méthode de calcul harmonique de blindage est possible et que l'utilisation de l'orthonormalisation sur la surface permet d'en optimiser la vitesse de convergence. Cependant, pour généraliser le calcul de blindages à des problèmes possédant plusieurs surfaces nous devons soit trouver une écriture harmonique adaptée aux sur-

faces, soit trouver une base de fonctions communes à toutes les surfaces qui soit adaptée à l'écriture des conditions de passage. C'est cette voie que nous allons exploiter maintenant et qui va permettre le calcul de blindages multicouches de forme quelconque.

### 6.2.3 Base canonique

Si nous avons proposé les deux dernières méthodes de calcul harmonique de blindage précédent, c'est essentiellement pour tester deux propositions que nous avons rencontré dans la littérature [Dur66] et [Leg96]. Les résultats sont encourageants, mais ne permettent pas de généralisation de la méthode à des blindages multicouches de forme quelconque. La solution que nous allons proposer maintenant va être à l'origine d'une nouvelle méthode de calcul des champs électromagnétiques pour des sources statiques ou dynamiques. Nous reviendrons dans la partie suivante de ce chapitre sur ses propriétés. Pour l'instant, nous allons nous concentrer sur les propriétés mathématiques qui vont permettre la méthode et l'interprétation que nous en faisons.

#### 6.2.3.1 Identification de la base canonique

Pour aller plus loin, nous devons rappeler quelques résultats et propriétés relatifs aux fonctions harmoniques. En particulier les propriétés des solutions d'un problème de Sturm-Liouville. Prenons par exemple la forme générale du potentiel scalaire magnétique solution en harmoniques sphériques de l'équation de Laplace. Pour mémoire, elle s'écrit comme (1.29), c'est-à-dire :

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_n \cdot r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right] \cdot Y_n(\theta, \phi) \quad (6.17)$$

Lors de la résolution des équations différentielles de diffusion ou de Laplace (voir chapitre 1), nous montrions que seules les fonctions correspondant à des variables bornées étaient orthogonales. Par exemple, dans l'écriture (6.17) seules les harmoniques sphériques forment un système orthogonal quand  $(\theta, \phi)$  appartient au domaine  $[0; \pi] \times [0; 2\pi]$ . **Ainsi les harmoniques sphériques forment une famille de fonctions orthogonales dans tout l'espace.**

Pour se convaincre de ce résultat, prenons l'expression du potentiel scalaire harmonique en coordonnées elliptiques allongées [Leg96] :

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_n \cdot P_n^m(\cosh(r)) + B_n \cdot Q_n^m(\cosh(r)) \right] \cdot Y_n(\theta, \phi) \quad (6.18)$$

ou encore l'expression de la solution de l'équation de diffusion en coordonnées sphériques (voir Annexe A.3.2) :

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{kr}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_n \cdot I_{n+\frac{1}{2}}(kr) + B_n \cdot K_{n+\frac{1}{2}}(kr) \right] \cdot Y_n(\theta, \phi) \quad (6.19)$$



Toutes ces solutions s'écrivent à l'aide des harmoniques sphériques. Ainsi, indépendamment de la forme des surfaces (elliptique) ou de la dynamique de la source, les harmoniques sphériques restent une base orthogonale que nous pouvons exploiter<sup>3</sup>.

### 6.2.3.2 Projection sur la surface

Pour calculer l'efficacité d'un blindage de forme sphérique ou polaire nous montrons au chapitre précédent que chaque terme avait un comportement particulier (voir §5.2.1.2). Ainsi, nous écrivons une matrice  $\mathbf{B}_n$  des relations de passage qui ne comportait que les termes liés à la décroissance de l'induction magnétique sur la surface. Implicitement nous utilisons déjà la base des harmoniques sphériques en projetant les relations de passage. Nous proposons maintenant d'utiliser cette projection pour optimiser l'écriture des conditions de passage sur la frontière.

Nous allons donc projeter les relations de passage sur la base canonique, ce qui va nous permettre d'écrire des relations de passage qui ne dépendent plus des points de la surface, mais uniquement des coefficients de la décomposition canonique dans chacune des zones. Pour mémoire les relations de passage sur une surface s'écrivent pour l'induction magnétique :

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot [\vec{B}_2(P) - \vec{B}_1(P)] = 0 \\ \vec{n} \times [\mu_1 \vec{B}_2(P) - \mu_2 \vec{B}_1(P)] = 0 \end{cases} \quad (6.20)$$

Sur cette surface, dans les deux zones 1 et 2 nous pouvons par exemple écrire à l'aide des termes de la base canonique  $\{\psi_{n,m}\}$  :

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{B}_2(P) = \sum_{n,m} a_{n,m} \psi_{n,m} & \vec{n} \times \mu_1 \vec{B}_2(P) = \sum_{n,m} \alpha_{n,m} \psi_{n,m} \\ \vec{n} \cdot \vec{B}_1(P) = \sum_{n,m} b_{n,m} \psi_{n,m} & \vec{n} \times \mu_2 \vec{B}_2(P) = \sum_{n,m} \beta_{n,m} \psi_{n,m} \end{cases} \quad (6.21)$$

Ainsi, du fait de l'orthogonalité nous pouvons écrire les relations (6.20) indépendamment à chaque ordre. Ainsi écrite, il s'agit de relations de passage globales puisqu'elles concernent les coefficients de la décomposition canonique des inductions normales et tangentes sur la surface. Alors, les relations globales correspondant à (6.20) s'écrivent simplement :

$$\forall(n, m) : \begin{cases} a_{n,m} = b_{n,m} \\ \alpha_{n,m} = \beta_{n,m} \end{cases} \quad (6.22)$$

### 6.2.3.3 Écriture matricielle du problème sur la base canonique

Tout d'abord, nous allons définir une écriture matricielle de la projection. Prenons par exemple une surface discrétisée en  $p$  points  $P$  sur lesquels nous pouvons

<sup>3</sup>Ce résultat est transposable en 2D, les fonctions harmoniques polaires forment une base orthogonale

écrire le potentiel scalaire magnétique  $\Psi$ . Comme la base canonique est orthonormée et complète pour les fonctions continues par morceaux sur la surface nous avons :

$$\forall P : \quad \Psi(P) = \sum_{n,m} \alpha_{n,m} \cdot \psi_{n,m}(P) \quad (6.23)$$

En limitant le développement à l'ordre  $N$ , nous pouvons également écrire matriciellement ce développement :

$$\begin{bmatrix} \Psi(P_1) \\ \Psi(P_2) \\ \vdots \\ \Psi(P_p) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_{1,0}(P_1) & \dots & \psi_{N,N}(P_1) \\ \psi_{1,0}(P_2) & \dots & \psi_{N,N}(P_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{1,0}(P_p) & \dots & \psi_{N,N}(P_p) \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_c} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{1,0} \\ \vdots \\ \alpha_{N,N} \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

Ainsi la matrice de projection est donnée par l'inverse généralisée de  $\mathbf{P}_c$  notée  $\mathbf{P}_c^+$ . Pour écrire le problème du blindage à une couche nous utiliserons cet inverse comme pondération à gauche dans le calcul matriciel (6.5). Dans ce cas il s'écrira :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{P}_c^+ & | & 0 \\ 0 & | & \mathbf{P}_c^+ \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}_c} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{2,e}^n & | & -\mathbf{B}_{1,i}^n \\ \mu_1 \cdot \mathbf{B}_{2,e}^t & | & -\mu_2 \cdot \mathbf{B}_{1,i}^t \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_e \\ \mathbf{C}_i \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{P}_c^+ & | & 0 \\ 0 & | & \mathbf{P}_c^+ \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}_c} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{B}_{2,source}^n \\ -\mu_1 \cdot \mathbf{B}_{2,source}^t \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_s} \quad (6.25)$$

Dans la section précédente la pondération qui orthonormalisait le système avait pour but d'ordonner l'écriture des développements harmoniques c'est pourquoi elle agissait sur les colonnes de la matrice  $\mathbf{B}$  (pondération à droite). Mais dans notre cas, nous ordonnons les grandeurs sur les points de la surface. En fait, cette projection permet de comparer des coefficients globaux sur la surface à l'aide d'une base commune aux différentes écritures. Ainsi, nous retrouvons uniquement le caractère global des développements harmoniques que nous avons perdu en discrétisant la surface.

#### 6.2.3.4 Résolution-Interêt

La solution du problème à une surface (6.25) à l'aide de la base canonique est le vecteur des coefficients harmoniques données par :

$$\mathbf{C} = (\mathbf{W}_c \mathbf{B})^+ \cdot \mathbf{W}_c \cdot \mathbf{B}_s \quad (6.26)$$

Du fait de la globalité, la matrice  $(\mathbf{W}_c \mathbf{B})$  est carrée. En effet, lors de la projection nous devons nous limiter au même ordre  $N$  que celui des développements dans les zones. Ainsi le nombre de lignes et de colonnes de cette matrice est nécessairement identique. Nous mettons le doigt sur un point important de cette pondération qui est qu'elle réduit le nombre de lignes du système matriciel  $\mathbf{B}$  puisque, quel que soit le nombre de points sur la surface le nombre de coefficients de la base canonique est égal à l'ordre  $N$  du développement. Dans le cas précis du calcul du cube

en coordonnées polaires, si nous cherchons les coefficients harmoniques relatifs à une source d'ordre  $N$ , la matrice  $(\mathbf{W}_c \mathbf{B})$  sera alors de dimension  $([4N + 2]^2)$ .

### 6.2.3.5 Application

Reprenons une dernière fois l'exemple du cube aimanté dans un champ uniforme vertical constant de  $20\mu\text{T}$ . Nous cherchons des développements à l'ordre  $N = 12$  dans les différentes zones. Pour déterminer les  $4N + 2$  coefficients nous devons toujours avoir une discrétisation de la surface suffisante de façon à ce que la matrice  $\mathbf{B}$  intervenant dans (6.26) soit toujours de rang plein.

En appliquant (6.26) nous trouvons les coefficients harmoniques relatifs au problème. En particulier ceux qui permettent l'écriture de l'induction magnétique sur le chemin de validation. Le résultat de l'inversion est satisfaisant dès l'ordre 12 (voir Fig.6.5) et est comparable à celui obtenu par l'orthonormalisation du système.

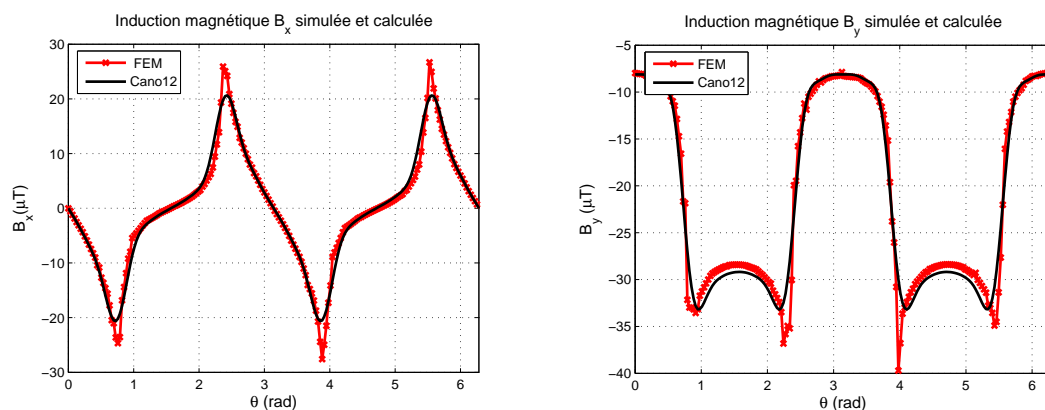


FIG. 6.5 – Induction suivant  $x$  (gauche) et suivant  $y$  (droite) créé par un cube aimanté. Il s'agit de comparer une induction de référence simulée (FEM) avec le résultat du calcul harmonique sur la base canonique à l'ordre 12.

Contrairement à l'orthonormalisation, le calcul de la projection est très rapide. Il ne nécessite que l'écriture et l'inversion de la matrice  $\mathbf{P}_c$  relative à la décomposition sur la base canonique. De plus, l'utilisation de cette base permet d'étendre le calcul à des problèmes de blindage possédant plusieurs couches ou plusieurs dynamiques.

Cette méthode de calcul n'est pas comparable à une méthode d'intégrale de frontière, car les inconnues ne sont pas portées par les frontières : il s'agit des coefficients harmoniques qui permettent l'écriture des grandeurs électromagnétiques. C'est un point essentiel, car les méthodes d'intégrales de frontières nécessitent énormément de calculs d'intégrales pour écrire le système linéaire mais aussi pour extrapoler les champs à partir des solutions. De plus, le calcul de ces intégrales dépend de la qualité de la discrétisation de la surface. Au contraire, notre méthode dépend peu de cette discrétisation puisque les relations de passages sont écrites pour des coefficients globaux. Un avantage supplémentaire est que son écriture et sa résolution ne nécessitent qu'une écriture matricielle élémentaire des séries harmoniques.

En comparaison à la méthode des éléments finis, nous réduisons la dimension du système linéaire au strict minimum, c'est-à-dire à l'unique calcul des relations sur la surface. Cette méthode est la plus proche de la nôtre, car elle consiste à trouver un développement polynomial simple des grandeurs sur chaque élément fini, alors que nous cherchons un développement poussé sur des éléments non finis : les zones. En quelque sorte notre méthode est une méthode éléments non finis qui ressemble à une Fast Multipole Method (FMM)[Gre87][Gre88], mais qui n'utilise qu'un découpage régional de l'espace.

Pour aller plus avant, nous allons maintenant proposer une interprétation particulière des phénomènes de blindage à l'aide de notre méthode de calcul et d'un regard de "traiteur" du signal. Nous proposons dans un premier temps de montrer qu'un problème électromagnétique de blindage est équivalent à un filtre harmonique et dans un second temps de montrer que ce filtrage est une modulation du champ d'excitation par la forme du blindage.

#### 6.2.4 Interprétation

Au paragraphe 5.1.3.3 nous proposons une interprétation de l'effet de forme grâce à la matrice de blindage  $\mathbf{G}$ . Elle vérifiait la relation matricielle (5.7) et nous permettait de faire le lien entre un blindage et un filtrage.

Nous avons défini au chapitre précédent la notion d'efficacité et ses applications. Ainsi en regardant les propriétés de  $\mathbf{G}$  nous pouvons faire le lien entre efficacité et termes diagonaux, effet de forme et termes croisés. Pour cela, il suffit d'écrire l'induction source  $\mathbf{B}_s$  dans (6.26) sous forme harmonique à l'aide de (2.13). Les coefficients harmoniques solutions sont alors donnés en fonction des coefficients harmoniques de la source par la relation :

$$\mathbf{C} = \underbrace{(\mathbf{W}_c \mathbf{B})^+ \cdot \mathbf{W}_c \cdot \mathbf{F}_s}_{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{C}_s \quad (6.27)$$

La matrice  $\mathbf{G}$  a donc effectivement le rôle d'une fonction de transfert du blindage : le vecteur des coefficients  $\mathbf{C}$  est la réponse au vecteur d'excitation  $\mathbf{C}_s$ .

Si cette analogie aux techniques du traitement de signal est intéressante, elle est encore beaucoup plus riche. En effet, nous voyons que notre méthode est performante car elle utilise une projection des relations de passage et de l'induction magnétique source sur une base canonique. Or cette base canonique est formée des fonctions trigonométriques sin et cos en coordonnées polaires ou des harmoniques sphériques  $\mathbf{Y}_{n,m}$  en coordonnées sphériques. L'opération effectuée grâce aux matrices  $\mathbf{P}_c^+$  est donc une transformée de Fourier ou une transformée sphérique. Le calcul de blindage que nous proposons est alors équivalent spatialement à un produit de convolution utilisant uniquement l'induction échantillonnée. Ce produit de convolution est défini par les intégrales de Green.

Nous proposons maintenant une interprétation de ce filtrage à l'aide de la transformation conforme. Cette analyse va nous permettre de mettre en évidence une façon simple d'interpréter le blindage comme la modulation du champ source par la forme de l'objet.

**La transformation conforme** La transformation conforme est une opération mathématique courante pour qui veut calculer à l'aide de méthodes analytiques un problème de géométrie complexe [Dur66]. Par exemple, elle fournit une expression analytique sous forme de séries harmoniques de la perméance de l'entrefer d'une machine électrique tournante. Le calcul de l'induction dans l'entrefer est alors le produit des sources statoriques et rotoriques par cette perméance : ce qui correspond bien à une modulation des champs sources par la forme de l'entrefer [Hel77][Köc99].

Nous proposons d'étendre la notion de modulation à des problèmes généraux électromagnétiques en montrant que la décomposition harmonique de l'objet module l'induction source. L'intérêt de cette interprétation est qu'elle va permettre de connaître la richesse harmonique des champs à l'aide uniquement d'une description globale de la forme : elle va donc livrer de l'information a priori sur la décomposition harmonique de la source avec le blindage.

Prenons l'exemple d'un cube en coordonnées sphériques, la transformation conforme conserve les angles et fait correspondre tous les points d'un même domaine [Dur66][Dri02][How90]. Par exemple, nous pouvons choisir de faire correspondre tout point P interne au cube de la figure (6.6) avec tout point P' interne à une sphère en utilisant la transformation conforme :

$$\mathcal{T} : \forall(\rho, \theta, \phi) : r(\theta, \phi) = \sum_{k,l} c_{k,l} \cdot \rho^k \cdot Y_k^l(\theta, \phi) \quad (6.28)$$

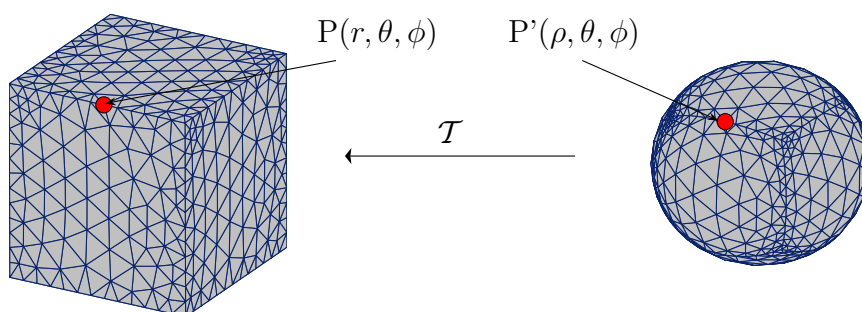


FIG. 6.6 – Surface circulaire conforme à une surface quelconque  $\mathcal{C}_s$ .

D'après (6.28), cette transformation fait intervenir la décomposition harmonique du cube sur la surface de la sphère. Si la géométrie du problème a été simplifiée en un problème de surface régulière, l'expression de la source est devenue complexe. Ainsi, si le potentiel scalaire magnétique source s'écrivait :

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \sum_{n,m} a_{n,m} \cdot r^n \cdot Y_n^m(\theta, \phi) \quad (6.29)$$

il s'écrit sur la surface conforme sphérique ( $\rho = \rho_0$ ) :

$$\Psi(\rho, \theta, \phi) = \sum_{n,m} a_{n,m} \cdot \left[ \sum_{k,l} c_{k,l} \cdot \rho_0^k \cdot Y_k^l(\theta, \phi) \right]^n \cdot Y_n^m(\theta, \phi) \quad (6.30)$$

ce qui permet d'identifier la richesse harmonique de réaction du cube : il s'agit bien, au premier ordre, d'une modulation de la décomposition harmonique de la forme du cube par le champ source.

A titre illustratif, nous proposons d'utiliser cette modulation de forme pour prédire la décomposition harmonique de l'aimantation du cube que nous avons utilisé pour déterminer notre méthode de calcul. En coordonnées polaires, la décomposition harmonique de la surface du cube s'écrira :

$$\forall P(r, \theta, \phi) \in \mathcal{C}_s : r(\theta, \phi) = a_0 + \sum_n [a_{4n} \cos(4n\theta) + b_{4n} \sin(4n\theta)] \quad (6.31)$$

Elle ne fait intervenir que les termes harmoniques d'ordre 4 et multiples du fait de la périodicité de la surface (voir Fig.6.1.b). Puisque ce champ est plongé dans un champ source constant de potentiel scalaire magnétique :

$$\Psi_s(r, \theta, \phi) = 2.10^{-6} \cdot r \cdot \sin(\theta) \quad (6.32)$$

la modulation de forme nous indique que la composition harmonique de la réaction du cube sera essentiellement composée des termes d'ordre 1,  $4n - 1$  et  $4n + 1$ , ce que confirme le calcul harmonique (voir tableau (6.1)).

terme	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_7$
valeur $\times 10^{-6}$	2.9927	$5.10^{-4}$	$-7.10^{-5}$	$-4.10^{-6}$

TAB. 6.1 – Coefficients harmoniques du problème externe dans la zone 2 relatifs à la réaction d'un cube dans un champ source uniforme. Seuls les termes correspondant à la modulation du champ source par la forme du cube sont présents.

### 6.2.5 Généralisation

La méthode harmonique de calcul de blindage que nous venons de présenter utilise une projection sur la base harmonique canonique associée au système de coordonnées utilisé, ce qui permet de généraliser le calcul (6.27) de l'aimantation du cube à des problèmes comportant plusieurs surfaces, des milieux de propriétés électriques ou magnétiques différentes (faisant intervenir les fonctions de Bessel) ou enfin à des problèmes dynamiques<sup>4</sup>.

Par exemple, un blindage monocouche est constitué de deux surfaces  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  délimitant trois zones (voir Fig.6.7.a). Afin de permettre le calcul du blindage de forme quelconque nous discrétisons toujours ses deux surfaces de façon à respecter l'ordre  $N$  du développement que nous avons choisi. Ainsi, nous pouvons décrire dans chaque zone l'écriture de la réaction du blindage :

- Dans la **zone 1**, quelle que soit la source la réaction du blindage s'écrit comme un problème interne, qui traduit l'aimantation ou les courants de Foucault dans la matière.

<sup>4</sup>En régime permanent seulement, car  $f=C^{ste}$

- Dans la zone 2, le problème s'écrit de façon générale comme la superposition d'un problème interne et d'un problème externe.
- Enfin, dans la zone 3, la réaction du blindage s'écrit comme un problème externe.

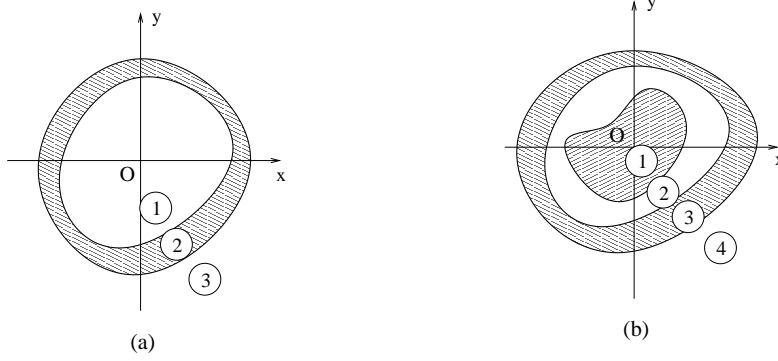


FIG. 6.7 – Exemple de problèmes pour lesquelles la méthode de calcul harmonique est généralisable. (a) : problème à deux surfaces comme un blindage monocouche - (b) Problème à trois surfaces, quatre zones comme un moteur : rotor-entrefer-stator-milieu extérieur.

En écrivant le problème en chaque point de la discrétisation de chaque surface (soit en  $(p_1+p_2)$  points), nous pouvons écrire le système linéaire des relations de passage projetées sur la base canonique sous la forme :

$$\mathbf{W}_c \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1,i}^n & -\mathbf{B}_{1,e}^n & -\mathbf{B}_{1,i}^n & 0 \\ \mu_2 \mathbf{B}_{1,i}^t & -\mu_1 \mathbf{B}_{1,e}^t & -\mu_1 \mathbf{B}_{1,i}^t & 0 \\ 0 & -\mathbf{B}_{2,e}^n & -\mathbf{B}_{2,i}^n & \mathbf{B}_{2,e}^n \\ 0 & -\mu_3 \mathbf{B}_{2,e}^t & -\mu_3 \mathbf{B}_{2,i}^t & \mu_2 \mathbf{B}_{2,e}^t \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_i^1 \\ \mathbf{C}_e^2 \\ \mathbf{C}_i^2 \\ \mathbf{C}_e^3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} = \mathbf{W}_c \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{B}_{1,source}^n \\ -\mu_2 \cdot \mathbf{B}_{1,source}^t \\ -\mathbf{B}_{2,source}^n \\ -\mu_2 \cdot \mathbf{B}_{2,source}^t \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_s} \quad (6.33)$$

où  $\mathbf{B}_{2,e}^t$  est la matrice de l'induction tangentielle sur tous les points de la surface 2 pour un problème externe et  $\mathbf{B}_{2,i}^n$  est la matrice de l'induction normale sur la surface 2 pour un problème interne. La solution de (6.33) est alors donnée par (6.26). Ce calcul de blindage est bien sûr généralisable à des problèmes dynamiques de la même façon que l'a été le calcul de l'efficacité au chapitre 5. Dans ce cas, dans les zones où les champs répondent à l'équation de diffusion, l'écriture des matrices blocs se fera en utilisant les séries solutions dynamiques.

Le calcul du blindage monocouche que nous venons de présenter peut encore se généraliser à des problèmes à plus de deux surfaces, comme par exemple le calcul de l'induction dans les différentes zones d'un moteur (Fig.6.33.b) que nous proposerons à la fin de ce chapitre.

### 6.3 Applications

Nous proposons à présent deux exemples de calcul harmonique de blindage afin de donner un aperçu des possibilités de la méthode. Le premier calcul est

celui du blindage dynamique de deux conducteurs de polarité opposée formant un dipôle pulsant en coordonnées polaires. Le second est celui d'un moteur électrique constitué d'un rotor massif, d'un entrefer et d'un stator : il s'agit d'un calcul simple statique également en coordonnées polaires.

Ce sont des exemples simples (ou simplifiés) de problèmes réels. Le but de cette partie étant de montrer des applications à notre méthode, de valider la méthode, mais surtout d'exposer la démarche que nous devons adopter pour optimiser le calcul grâce aux outils de diagnostic liés à la résolution des systèmes linéaires, à l'utilisation des périodes et symétries et enfin à la possibilité d'optimiser la discrétisation surfacique.

### 6.3.1 Calcul du blindage dynamique obtenu à l'aide d'une gaine infinie en aluminium

Notre première application est la résolution d'un problème de blindage dynamique en coordonnées polaires. Il s'agit du problème classique du calcul de l'effet de blindage fréquentiel du champ magnétique de deux conducteurs infiniment longs dans une gaine de forme carrée en aluminium (voir Fig.6.8). L'effet de blindage est donc obtenu à l'aide uniquement des courants de Foucault qui se développent dans la gaine [Teg85].

#### 6.3.1.1 Description du problème

Une description précise du problème est donnée par le tableau suivant (6.2) :

Paramètre	$R_1$ [cm]	$R_2$ [cm]	$R_v$ [cm]	$\mu_r$	$\sigma$ [S/m]	I [A]	f [Hz]
valeur	3	4	3	1	$37,7 \cdot 10^6$	10	5

TAB. 6.2 – Description du problème de blindage de deux conducteurs infinis par la gaine en aluminium de la figure (6.8)

Avant de se lancer dans le calcul, nous devons déterminer l'ordre  $N$  maximum du développement des champs électriques et magnétiques représentatifs dans les différentes zones. En effet,  $N$  détermine le nombre de points de la discrétisation sur les surfaces  $C_1$  et  $C_2$ , et, par là même, les dimensions des matrices  $\mathbf{W}_c$ ,  $\mathbf{B}_s$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  intervenant dans l'écriture matricielle des conditions de passage (6.33) sur les surfaces du blindage.

#### 6.3.1.2 Détermination de l'ordre $N$ du développement

La modulation de forme va nous permettre de déterminer l'ordre  $N$  et les termes importants du développement harmonique dans les différentes zones. En effet, nous avons une source constituée de deux conducteurs parcourus par des courants opposés pulsants : il s'agit d'une source d'ordre 1 ou dipolaire. La forme du blindage est quant à elle carrée, ce qui suppose que chaque surface se décompose en série harmonique à l'aide uniquement des termes harmoniques multiples de 4. La modulation de la source par la forme nous indique donc que seuls les termes



$(4n - 1)$  et  $(4n + 1)$  sont solutions, c'est-à-dire que le développement dans les différentes zones peut se limiter uniquement aux termes de périodicités impaires. Nous aurions très bien pu énoncer ce résultat sans utiliser la modulation de forme, simplement en constatant que le problème possède un unique plan de symétrie (voir Fig.6.8) et qu'aucun terme de période paire ne peut respecter cette condition. Mais ce qu'apporte la modulation est plus riche : la forme du blindage se décompose à l'aide uniquement d'harmonique  $4n$  et la source indique qu'en nous limitant à un développement de la surface de degré  $n$  nous devons développer tous les termes impairs jusqu'à l'ordre  $4n + 1$ . Dans notre cas nous allons choisir un développement de la surface à l'ordre  $n = 4$ , ce qui fera un calcul harmonique des relations de passage jusqu'à l'ordre 17. Nous choisirons pour cela de discrétiser les surfaces régulièrement à l'aide de 44 points (voir Fig.6.8).

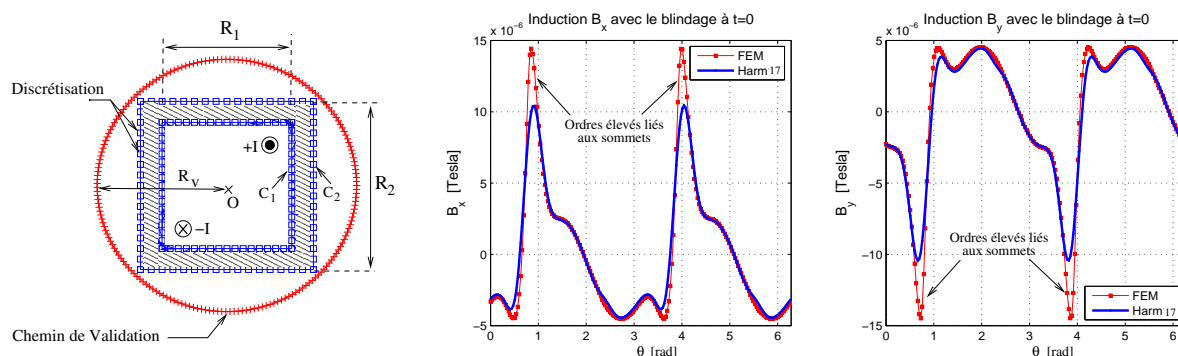


FIG. 6.8 – Blindage carré d'arête interne  $R_1$  et externe  $R_2$  en aluminium. Validation du calcul harmonique à l'ordre  $N = 17$  du blindage relatif à deux conducteurs parcourus par un courant  $I=10A$  de fréquence  $f=5Hz$ .

### 6.3.1.3 Résolution - Validation

Nous calculons donc à l'aide de la discrétisation précédente le développement harmonique de l'induction magnétique dans les trois zones du blindage à l'ordre  $N = 17$ . Pour ce faire nous utilisons la solution (6.26) proposée dans la section précédente. Dans un premier temps nous cherchons à valider le calcul en le comparant au résultat de la méthode des éléments finis (FEM). Nous utilisons pour cela un contour circulaire de rayon  $R_v$  entourant l'extérieur du blindage (voir Fig.6.8) sur lequel nous comparons les parties réelles de l'expression analytique de l'induction que nous avons calculée et la référence FEM. La figure(6.8) montre que les coefficients harmoniques obtenus sont cohérents vis-à-vis de la simulation. Cependant, nous constatons toujours un phénomène de lissage relatif au développement harmonique limité à l'ordre  $N = 17$ . Ce phénomène étant lié à des ordres élevés il aura complètement disparu sur un cercle de rayon supérieur du fait des décroissances.

Nous rappelons enfin que l'intérêt principal de la méthode harmonique est d'obtenir les coefficients harmoniques qui interviennent dans l'écriture de toutes les grandeurs électromagnétiques dans les différentes zones (voir §1.3.2). Ainsi, les coefficients solutions du calcul précédent permettent d'écrire l'induction magnétique

dans le blindage, mais aussi le champ électrique ou les courants de Foucault, puisqu'ils dérivent tous du même potentiel vecteur magnétique.

#### 6.3.1.4 Compléments

Nous proposons enfin un complément intéressant à propos de la modulation du champ source par la forme de l'objet. Nous avons montré que seuls les ordres impairs intervenaient dans l'écriture des décompositions des sources. Or nous avons utilisé tous les termes du développement jusqu'à l'ordre 17 ce qui faisait 140 coefficients harmoniques à identifier. Puisque seuls les termes impairs interviennent nous pourrions retirer du système tous les pairs, le système n'aurait alors plus que 72 coefficients harmoniques inconnus. De ce fait, nous pourrions également réduire de moitié la discrétisation de la surface tout en conservant la qualité du résultat : les dimensions de la matrice de filtrage harmonique correspondant au blindage seront alors  $[72 \times 72]$  et l'inversion instantanée.

### 6.3.2 Application au calcul de champ d'un moteur

Comme nous le montrions précédemment, notre méthode de calcul harmonique peut se généraliser à des problèmes comportant plusieurs surfaces. C'est le cas par exemple d'un moteur, que nous pouvons considérer comme un blindage possédant trois surfaces. L'idée est la suivante, nous allons calculer les coefficients harmoniques dans les différentes zones d'un moteur en fonction des sources dans l'entrefer (aimants et courants) et uniquement en écrivant le système matriciel des relations de passage sur les frontières.

Le premier intérêt de ce calcul est bien sûr de fournir l'écriture harmonique dans le rotor, l'entrefer et le stator de la machine en fonction des paramètres de cette dernière, c'est-à-dire des formes (encoches) mais aussi des matériaux (perméabilité et conductivité). Nous sommes ainsi capables de donner une expression analytique du champ magnétique dans l'entrefer qui prend en compte sa forme uniquement en fonction des sources. En d'autres termes, nous avons calculé les coefficients harmoniques de la décomposition spatiale de la perméance réelle de l'entrefer jusqu'à l'ordre  $N$ . Nous venons de répondre avec précision, c'est-à-dire à l'aide d'un développement harmonique poussé, à un problème qui classiquement se résout analytiquement qu'aux premiers ordres [Hel77]. L'apport de notre méthode est conséquente, en particulier dans le domaine du diagnostic par mesures de courants statoriques qui repose justement sur une décomposition harmonique de la perméance de l'entrefer [Blö06].

Le second intérêt de notre calcul est d'établir, à l'aide de la matrice des relations de passage le lien entre les coefficients harmoniques des décompositions dans les différentes zones. En particulier, entre le champ magnétique extérieur au moteur et le champ magnétique dans l'entrefer. A ce propos, puisque nous sommes en présence d'un blindage dû au stator, nous pouvons dès à présent affirmer que les coefficients harmoniques de la décomposition des champs magnétique ou électrique à l'extérieur du moteur seront images de ceux dans l'entrefer.

Pour parvenir à ces résultats nous devons auparavant établir notre méthode de

calcul : c'est-à-dire définir la matrice des conditions de passage, réduire le domaine à l'aide des symétries, optimiser la discrétisation des surfaces à l'aide des outils de diagnostic liés au système linéaire et enfin résoudre le système.

### 6.3.2.1 Description du problème

Nous proposons pour commencer de simplifier la géométrie du moteur que nous voulons calculer. Nous nous limiterons donc à un calcul statique ne possédant que 2 encoches rotoriques et sans encoches statoriques (voir Fig.6.9). Nous négligerons donc d'une part les phénomènes liés à la dynamiques des sources (courants de Foucault) et d'autres part les harmoniques liées à la forme du stator. Il s'agit d'un point de départ, qui doit nous permettre d'utiliser la description classique d'un moteur afin de mettre en oeuvre un calcul harmonique méthodique et robuste.

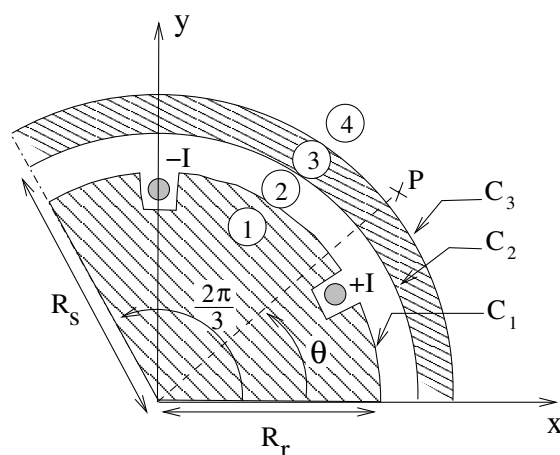


FIG. 6.9 – Géométrie simplifiée d'un moteur comportant 4 zones délimitées par 3 surfaces.

La première étape du calcul est une description précise du problème, qui permet la détermination du domaine d'étude et des surfaces importantes.

Le domaine est de période  $T=2\pi/3$ . C'est une information extrêmement riche car elle permet de limiter le développement aux termes harmoniques multiples de 3 qui seuls respectent cette période. C'est-à-dire que nous divisons par 3 également le nombre de coefficients à déterminer. Ce qui est évidemment un gage de qualité et de rapidité pour la solution.

Enfin, le problème se découpe en 4 zones :

1. La **zone 1**, délimitée par la surface  $\mathcal{C}_1$  de rayon  $R_r$ , qui est le rotor avec ses encoches. Dans cette zone le développement est celui d'un problème interne, les sources étant dans l'entrefer. Elle est caractérisée par sa perméabilité relative  $\mu_r^{rot}$  et par la présence de 2 encoches carrées par pôle d'arête  $a$ .
2. La **zone 2**, délimitée par les surfaces  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  qui est l'entrefer de la machine. Dans cette zone nous avons les sources et la réaction des matériaux statoriques et rotoriques qui s'écrivent comme la superposition d'un problème interne et externe.

3. La zone 3, délimitée par les surfaces  $\mathcal{C}_2$  de rayon  $R_s$  et  $\mathcal{C}_3$  de rayon  $R_s^2$  qui est le stator de la machine électrique de perméabilité relative  $\mu_r^{stat}$ . Dans cette zone le développement harmonique s'écrit également comme la superposition des deux problèmes.
4. La zone 4, qui s'étend au delà de la surface  $\mathcal{C}_3$  et dans laquelle le développement s'écrit comme un problème externe dans l'air.

Les valeurs des différents paramètres relatifs à cette description sont donnés par le tableau (6.3). Une remarque importante doit encore être rajoutée : les moteurs ont en général une carcasse métallique entourant le stator de forme quelconque qui peut avoir des pieds ou des ailettes de refroidissement. Si nous voulons encore prendre en compte la carcasse nous pouvons rajouter la surface correspondant à la forme extérieure de cette carcasse : nous définissons alors une zone supplémentaire.

Paramètre	$R_r$ [cm]	$R_s$ [cm]	$R_{s,2}$ [cm]	a [cm]	$\mu_r^{rot}$	$\mu_r^{stat}$	I [A]
valeur	6	7	8	.5	1000	1000	10

TAB. 6.3 – Paramètres relatifs au calcul harmonique du moteur

### 6.3.2.2 Écriture du système matriciel harmonique

Nous avons toujours deux relations de passage pour chaque surface, ce qui fait que la matrice harmonique  $\mathbf{B}$  est composée de 36 matrices blocs de relations de passage (6.34). Si nous développons la source à un ordre  $N$ , nous avons alors  $4N + 2$  coefficients à identifier pour déterminer l'expression analytique de l'induction dans les différentes zones<sup>5</sup>. Du fait de la projection la matrice  $\mathbf{B}_{mot}$  du système est de dimension  $(4N + 2)^2$  et le système linéaire s'écrit :

$$\mathbf{B}_s = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1,i}^n & -\mathbf{B}_{1,e}^n & -\mathbf{B}_{1,i}^n & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{B}_{1,i}^t & -\mu_r^{rot} \mathbf{B}_{1,e}^t & -\mu_r^{rot} \mathbf{B}_{1,i}^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{B}_{2,e}^n & -\mathbf{B}_{2,i}^n & \mathbf{B}_{2,e}^n & \mathbf{B}_{2,i}^n & 0 \\ 0 & -\mu_r^{stat} \mathbf{B}_{2,e}^t & -\mu_r^{stat} \mathbf{B}_{2,i}^t & \mathbf{B}_{2,e}^t & \mathbf{B}_{2,i}^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}_{3,e}^n & -\mathbf{B}_{3,i}^n & -\mathbf{B}_{3,e}^n \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}_{3,i}^t & -\mathbf{B}_{3,e}^t & -\mu_r^{stat} \mathbf{B}_{3,e}^t \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{mot}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_i^1 \\ \mathbf{C}_e^2 \\ \mathbf{C}_i^2 \\ \mathbf{C}_e^3 \\ \mathbf{C}_i^3 \\ \mathbf{C}_e^4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \quad (6.34)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}_{j,i}^n : \text{matrice de l'induction magnétique normale, problème interne sur la } j^{eme} \text{ surface} \\ \mathbf{B}_{j,e}^t : \text{matrice de l'induction magnétique tangente, problème externe sur la } j^{eme} \text{ surface} \\ \mathbf{C}_i^k : \text{Coefficients harmoniques relatifs au problème interne dans la } k^{eme} \text{ zone.} \\ \mathbf{C}_e^k : \text{Coefficients harmoniques relatifs au problème externe dans la } k^{eme} \text{ zone.} \end{array} \right.$$

<sup>5</sup>En effet il y a en tout  $6(2N+1)$  coefficients, mais du fait de la période nous ne gardons que les multiples de 3

### 6.3.2.3 Optimisation - résolution

Pour résoudre le système linéaire (6.34) il ne suffit pas d'inverser le système, même après projection. En effet, les coefficients obtenus seront certes proches de la solution mais peuvent également être erronés. La raison principale de cette erreur vient de la forme irrégulière de la surface du rotor et en particulier de la discrétisation des encoches. En effet, il est assez difficile de déterminer une discrétisation assurant la stabilité de la projection sur la surface. Par exemple, si nous cherchons un développement à l'ordre  $N$  nous devons mettre sur chaque surface au moins  $(4N + 2)/3$  points, en particulier sur  $\mathcal{C}_1$ . Comment alors répartir ces points entre les encoches et les parties circulaires de cette surface sans trop discrétiser les unes ou les autres ?

La réponse est donnée par l'opérateur de résolution et la variance des résidus de mesures de la projection  $\mathbf{W}_c$  liée à cette surface. En effet, la matrice projetée qui concerne toujours des relations de coefficients harmoniques globaux n'a pas de résidus alors que la projection, qui dépend de chaque point de la surface (i.e de la discrétisation (voir eq.(6.24)) peut en avoir d'importants (phénomène de Gibbs). Pour déterminer la bonne discrétisation nous allons donc observer et optimiser ces deux critères, mais aussi le résultat de la projection par le biais de la transformée de Fourier de la surface du rotor.

Nous cherchons à développer la source jusqu'à l'ordre  $3N$  avec  $N = 12$ . Alors chaque surface doit avoir au moins  $2N + 1$  points dans l'intervalle  $[0, 2\pi/3]$ . Nous commençons donc par répartir 28 (plus des 25 nécessaires) points en mettant 2 points par arête d'encoche et 8 points par surface lisse du rotor (voir Fig.6.10.a).

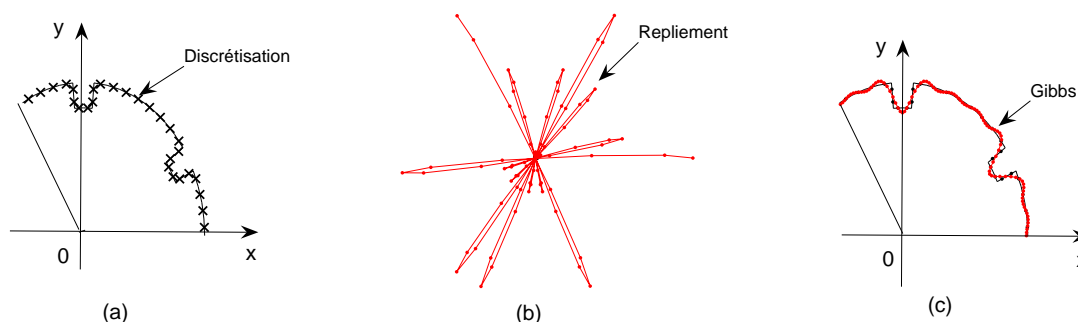


FIG. 6.10 – (a). Discrétisation du rotor - (b). Décomposition de la surface en série trigonométrique à l'ordre  $N = 12$  - (c). Décomposition de série de la surface à l'ordre  $N = 7$  : apparition des phénomènes de Gibbs.

Bien que notre discrétisation respecte l'ordre  $N$  du développement, nous pouvons déjà affirmer que le résultat est erroné. En effet, la matrice  $\mathbf{B}$  du problème est parfaitement écrite, mais la projection sur la base canonique, qui s'écrit comme la transformation conforme de la surface, est un problème mal posé. En décomposant cette surface jusqu'au terme de degré  $N = 12$  nous observons en effet un fort repliement qui indique la mauvaise qualité du maillage (voir Fig.6.10.b). Afin

de déterminer les points du maillage qui posent problème nous calculons encore la variance des résidus de calcul sur la surface (voir Fig.6.11.a). Ils montrent qu'il y a une forte instabilité sur les côtés des encoches<sup>6</sup>.

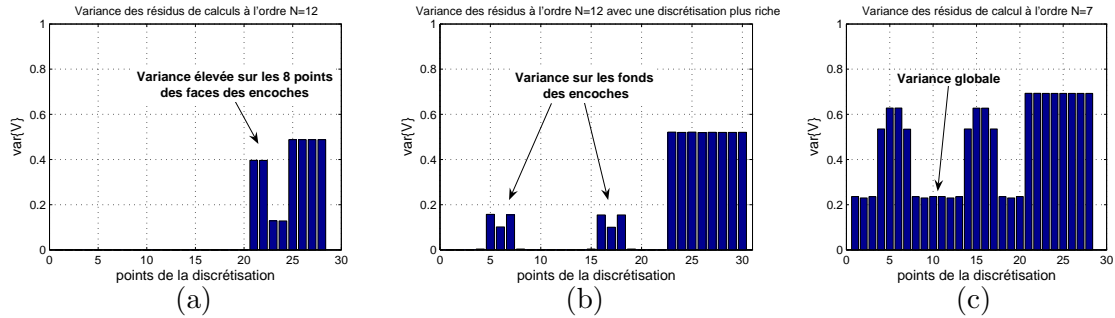


FIG. 6.11 – Variations des résidus de calcul de trois problèmes différents : (a). Discrétisation initiale (28 points) à l'ordre  $N = 12$  - (b). Amélioration de la discrétisation (30 points) à l'ordre  $N = 12$  - (c). Discrétisation initiale à l'ordre  $N = 7$ .

Plusieurs solutions peuvent être utilisées pour résoudre notre problème. Elles partent du principe que, du fait de la forme irrégulière la résolution du système ne peut pas être stable et que nous allons chercher une solution qui répartit au mieux l'instabilité sur l'ensemble des points.

Une première solution consiste à optimiser la discrétisation des encoches de façon à répartir l'instabilité de façon globale sur l'encoche. Par exemple, en discrétisant en trois points le fond des encoches, nous augmentons la variance des résidus dans toute l'encoche (voir Fig.6.11.b). Ainsi nous rajoutons des degrés de liberté au système qui permet de prendre en compte de façon égale toutes les relations sur les surfaces de l'encoche.

La seconde approche est plus objective et se base uniquement sur la décomposition de la forme du blindage. Elle consiste à diminuer l'ordre de son développement afin de respecter la discrétisation. Une analyse préalable de la forme peut nous aider à choisir un ordre approprié. Nous pouvons ainsi affirmer que la forme du rotor se décompose essentiellement à l'aide des harmoniques pairs puisqu'il y a deux encoches. La source étant d'ordre 1 (+I et -I) sur la période du problème : un ordre intéressant est par exemple l'ordre 7 qui prend en compte l'harmonique 3 due à la forme carrée des encoches<sup>7</sup>. A cet ordre la décomposition de la forme du rotor est en effet plus appropriée (Fig.6.10.c). Elle laisse cependant apparaître des phénomènes de Gibbs causés par l'irrégularité et qui ont tendance à faire diverger la projection et par là-même à faire diverger le système. Nous remarquons encore qu'en diminuant l'ordre du développement nous avons augmenté la variance des résidus sur l'ensemble des points (Fig.6.11.c) : c'est-à-dire que théoriquement nous offrons plus de liberté au système, c'est pourquoi la décomposition ne suit pas exactement la forme de la surface. Enfin, pour limiter les phénomènes de Gibbs nous observerons les coefficients harmoniques de la décomposition de la forme et choisirons l'ordre du développement à l'aide d'une méthode bloquant le développement harmonique dès que les coefficients deviennent croissants en fonction de

<sup>6</sup>En effet, ils apportent une information très proche du fait de la forme de l'encoche

<sup>7</sup>Un créneau se décompose en harmoniques impaires

l'ordre : ce qui caractérise les phénomènes de Gibbs [Boy01].

Pour conclure, nous venons de mettre en évidence l'importance du maillage. Il peut entraîner deux types d'erreur lorsque la surface est irrégulière qui sont : soit le repliement, soit les phénomènes de Gibbs. Pour palier ce problème nous proposons d'adapter notre maillage quand c'est possible ou alors de réduire l'ordre du développement jusqu'à ce que disparaissent les phénomènes de Gibbs. Dans notre cas par exemple, en observant les coefficients de la décomposition en série du rotor, nous constatons que l'ordre 7 a des phénomènes de Gibbs alors que l'ordre 5 n'en possède pas : nous pouvons donc envisager le développement en série dans les différentes zones à cet ordre.

### 6.3.2.4 Résultats - Performances

Nous proposons de comparer maintenant le résultat de notre méthode à celui donné par la méthode des éléments finis. Tout d'abord, nous commençons par vérifier la valeur du champ dans l'entrefer à l'ordre 5 (qui est le résultat de notre méthode) et à l'ordre 7 pour mettre en évidence les conséquences globales des phénomènes de Gibbs (voir Fig.6.12).

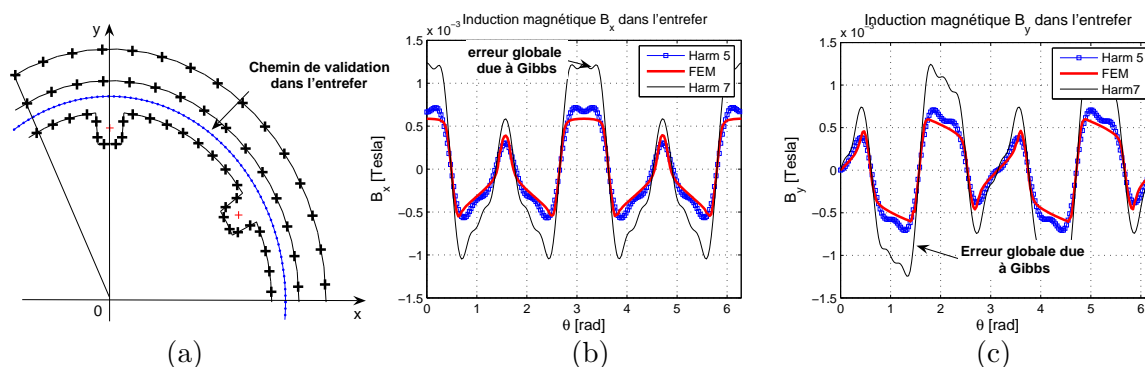


FIG. 6.12 – (a) - Discretisation du moteur sur la période d'étude et chemin de validation dans l'entrefer. Comparaisons de l'induction magnétique suivant  $x$  (b) et suivant  $y$  (c) entre la méthode des éléments finis et la méthode harmonique à l'ordre 5 et 7.

Nous constatons qu'à l'ordre 5, comme l'indiquaient les coefficients de la décomposition de cette surface, nous avons un résultat très proche de la simulation éléments finis. Cependant à l'ordre 7 les phénomènes de Gibbs entraînent une erreur globale sur tout le chemin de validation. L'étape d'optimisation de la discrétisation et du choix de l'ordre maximum est donc nécessaire si nous voulons faire un calcul exact. Heureusement, la simplicité de la méthode de détection de Gibbs permet la mise en œuvre d'un d'algorithme simple pour déterminer l'ordre  $N$  du développement.

En terme de performances, nous développons les séries solutions jusqu'à l'ordre 5 dans les différentes zones, ce qui fait un développement à l'ordre 15 sur le domaine  $[0; 2\pi]$ . La matrice du système projeté est alors de dimension  $[66 \times 66]$ , son inversion est très rapide (toujours moins d'une seconde).

### 6.3.2.5 Perspectives

Le calcul précédent nous offre encore la possibilité de calculer sous forme de séries harmoniques le champ à l'extérieur de la machine. La figure (6.13) compare justement l'induction calculée à l'ordre 5 sur un chemin circulaire extérieur au moteur.

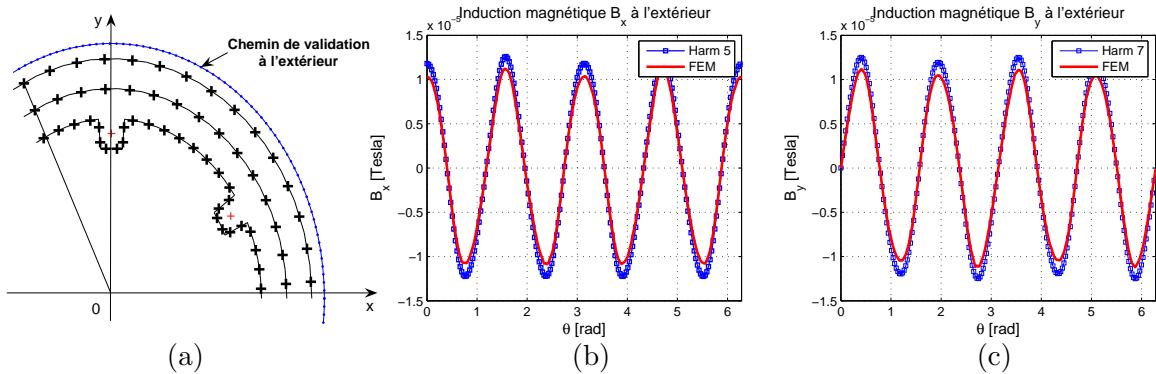


FIG. 6.13 – a - Discretisation du moteur sur la période d'étude et chemin de validation à l'extérieur de la machine. Comparaisons de l'induction magnétique suivant x (b) et suivant y (c) entre la méthode des éléments finis et la méthode harmonique à l'ordre 5.

Le résultat est encore plus satisfaisant à l'extérieur (écart inférieur à 7%), car les harmoniques élevés dans l'entrefer ont été filtrés par le blindage que forme le stator ( $\mu_r = 100$ ). L'intérêt de la méthode harmonique est de bénéficier des propriétés globales des modèles harmoniques pour le calcul des champs à l'extérieur de la machine. Nous n'avons pas besoin par exemple de mailler inutilement tout l'espace pour déterminer le champ d'un modèle global simple, ni non plus de calculer les valeurs en chaque point de l'espace par le biais d'intégrales surfaciques. Le modèle est en effet entièrement contenu dans quelques coefficients harmoniques qui ont un rôle comparable aux valeurs des raies d'une FFT.

L'intérêt de ce calcul est également de permettre d'identifier les termes harmoniques par une simulation rapide et performante à l'aide d'un modèle complet ou approché d'une source. Par exemple, la méthode harmonique fournit les coefficients harmoniques à l'extérieur du moteur, ce qui va nous permettre de déterminer les termes harmoniques importants et nous donner une bonne idée de leur amplitude. Ainsi nous obtenons une information a priori intéressante qui nous servira lors de l'identification.

## 6.4 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons mis en œuvre une méthode de calcul harmonique de blindages. Il s'agit d'un complément au chapitre précédent qui offrait une méthode de dimensionnement de ces blindages garantissant leurs performances sans prendre en compte les effets de forme. Pour mémoire, le calcul harmonique que nous proposons se base sur l'écriture des conditions de passage sur la discrétisation des surfaces d'un blindage. Il peut encore se généraliser à des sources de problèmes électromagnétiques plus complexes comportant plusieurs surfaces de forme



quelconque, des sources dynamiques et des milieux conducteurs. Ainsi le calcul harmonique est une méthode générale de calcul des champs utilisant les conditions de passage sur les frontières des régions pour déterminer le développement en série des grandeurs électromagnétiques à l'intérieur de ces régions. Si elle est en ce point comparable à la méthode des éléments finis dans laquelle l'espace est découpé en nombreux éléments de dimensions réduites et utilise une approximation polynomiale simple, elle tire tout son intérêt dans sa description globale du problème. Cependant, la globalité est également à l'origine d'erreurs liées au développement en série harmonique, comme le repliement et les phénomènes de Gibbs. Ces phénomènes existent également dans la méthode des éléments finis, mais étaient locaux du fait du maillage.

Si ce chapitre permet une méthode de calcul harmonique des champs il est surtout riche de l'interprétation qu'il permet d'en faire. En effet, nous avons certainement déjà eu l'intuition que la forme d'un objet déterminait les champs électromagnétiques qu'il rayonnait, sans pouvoir simplement expliquer le phénomène. La contribution de cette thèse est essentielle dans ce sens. En effet, nous avons démontré que la richesse harmonique des champs étaient uniquement une modulation de la décomposition harmonique de la forme de l'objet par celle du champ source. Nous sommes donc capables d'appliquer un raisonnement quantitatif utilisant une description sommaire de la décomposition de la source et des surfaces d'un objet et qui donne directement la richesse harmonique des champs électromagnétiques dans les différentes zones de l'espace. Nous sommes donc capables, sans le moindre calcul, de retirer de l'information a priori à propos du modèle harmonique d'une source à l'aide uniquement de considérations géométriques [Sch06].

L'intérêt de cette partie est donc triple :

- Elle permet de dimensionner un blindage magnétique adapté à une source en utilisant sa décomposition multipolaire pour déterminer les matériaux et le nombre de couches qui le constitue.
- Elle offre une méthode de calcul générale des conditions de passage sur une surface quelconque qui se généralise à des problèmes multi-surfaces, dynamiques et dans des milieux magnétiques et conducteurs.
- Enfin, elle offre la possibilité d'obtenir une information a priori précise à propos d'une source, soit par le calcul direct harmonique, soit par une analyse sommaire du problème. Cette partie fournit donc l'information a priori nécessaire à l'identification magnétodynamique bayésienne que nous avons mise en place dans la première partie de cette thèse.

La rencontre des deux premières parties de cette thèse, de l'identification magnétodynamique et du calcul de blindage, va permettre d'aboutir à l'objectif que nous nous sommes fixés qui est l'identification magnétodynamique d'une source quelconque. C'est pourquoi nous proposons dans la dernière partie de cette thèse l'identification d'une maquette de moteur discoïde à aimants permanents qui illustre l'importance des méthodes et des outils que nous avons présentés et l'efficacité de la méthode.

**Troisième partie**  
**Application et Conclusions**



# Chapitre 7

## Identification magnétodynamique de moteur discoïde

Dans ce chapitre nous allons appliquer l'identification magnétodynamique à un moteur discoïde à aimants permanents. Nous montrerons l'utilité des différents outils présentés dans les deux premières parties de cette thèse et la mise en oeuvre de l'identification d'une source réelle de champs magnétiques.

Ce chapitre se divise en trois parties qui sont : la description de l'expérience, l'identification magnétostatique du moteur puis l'identification magnétodynamique. Il nous permet donc d'obtenir un modèle statique et dynamique du moteur. Cependant, avant toute chose, il met en avant la méthode de l'identification d'une source, c'est pourquoi nous ferons un effort particulier pour illustrer la démarche qui conduit au modèle harmonique et à l'analyse des causes de son indiscretion.

### 7.1 Description de l'expérience

L'identification magnétodynamique consiste à déterminer les coefficients harmoniques correspondant au rayonnement électromagnétique d'une source à partir de mesures magnétiques ou électriques faites dans son voisinage. Dans notre cas, nous effectuerons des mesures d'induction magnétique dans l'air entourant une source : il s'agit donc uniquement d'un problème magnétodynamique. Avant donc de nous lancer dans l'identification, nous devons parfaitement décrire l'expérience. En effet, cette description est importante car elle fournit une grande partie de l'information a priori sur la source et la qualité de la mesure, qui sont les deux origines d'information dont nous disposons.

#### 7.1.1 La source

Notre source est un moteur discoïde de faible puissance qui est une maquette à échelle réduite d'un moteur de propulsion navale (voir Fig.7.1.a). La technologie discoïde est intéressante du fait du faible encombrement des moteurs, ce qui permet par exemple de les placer dans des POD, petites nacelles externes au bateau qui augmentent sa mobilité.

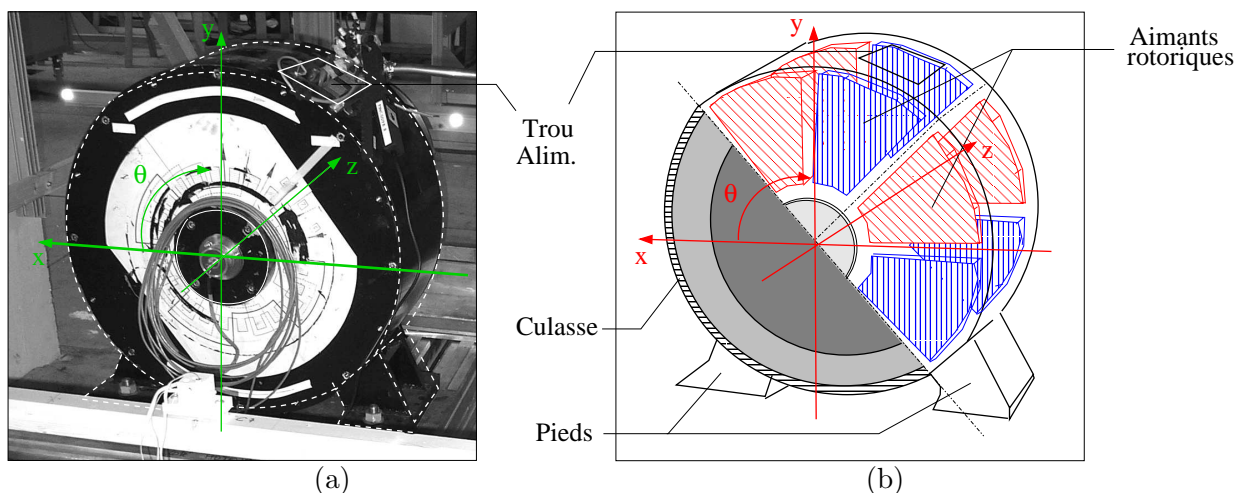


FIG. 7.1 – (a). Photo du moteur discoïde identifié. - (b). Représentation géométrique des aimants des deux rotors, de la culasse et des pieds du moteur.

Les caractéristiques principales de ce moteur sont contenues dans le tableau (7.1). Il s'agit d'un moteur à aimants permanents, ce qui signifie que même non alimenté, il possède une signature statique du fait des aimants. Il a également 4 paires de pôles, réparties sur deux demi moteurs. En particulier, il possède deux disques rotoriques (Fig.7.1.b) sur lesquels sont disposés parallèlement les aimants. Ces disques entraînent la rotation de l'axe du moteur lorsque le stator est alimenté. Il y a également deux demi stators bobinés parallèlement qui sont "pris en sandwich" entre les deux disques rotoriques. Ce stator est mécaniquement lié à la culasse du moteur.

Paramètre	$P_{nom}$ [kW]	$I_{nom}$ [A]	$\Omega_{nom}$ [tr.min <sup>-1</sup> ]	p	$R_{ext}$ [cm]
valeur	15	9	600	4	31

TAB. 7.1 – Caractéristiques du moteur discoïde à aimants permanents.

Enfin, la culasse du moteur en acier a la forme d'un cylindre creux qui possède un trou destiné à l'alimentation du stator au-dessus du moteur et surtout deux pieds en acier massif qui permettent son ancrage au sol (voir Fig.7.1.b).

### 7.1.2 L'environnement magnétique

Les mesures que nous allons effectuer se dérouleront au Laboratoire de Métrologie Magnétique en Champs Faibles (LMMCF) à Herbeys. Nous y disposons d'un simulateur de champ capable à l'aide de bobines de contrôler le champ ambiant avec une précision inférieure à 4nT. Cependant nous n'utiliserons pas ce dispositif car nos mesures seront effectuées dans le champ magnétique terrestre. La localisation du LMMCF est cependant importante, car elle assure un environnement magnétique stable à l'écart de la ville et de ses anomalies électromagnétiques.

Notre expérience prend donc place dans le champ magnétique terrestre qui possède essentiellement deux composantes. Le moteur est placé de sorte que ces deux composantes coïncident avec l'axe y et z du repère fixe lié au centre du moteur (voir

Fig.7.1). Enfin, puisque nous allons identifier une source dynamique, il nous faut signaler la présence du réseau à 50Hz et de l'alimentation du moteur (variateur). Étant données les fréquences de fonctionnement du moteur pendant les diverses identifications dynamiques (1-6Hz) et les fréquences caractérisant l'environnement, nous pouvons assurer que l'environnement est sain et que nous distinguerons parfaitement notre source du bruit aux fréquences qui la caractérisent.

### 7.1.3 Les moyens de mesures

Nous disposons de 9 capteurs fluxgate Bartington triaxiaux (Mag3) qui permettent la mesure de champs faibles dynamiques. Nous distinguons cinq capteurs d'identification que nous placerons à des positions permettant la meilleure identification possible et quatre capteurs de validation qui permettront de vérifier par extrapolation la validité du modèle. Nous disposons donc uniquement de 15 mesures de l'induction magnétique rayonnée par le moteur qui sont liées entre elles par la nature triaxiale des capteurs.

L'acquisition est permise grâce à une chaîne PXI qui permet d'échantillonner le signal sur 16 bits et au-delà de 100kHz. De plus, nous possédons des filtres analogiques qui limitent la bande passante des capteurs d'identification et ainsi limitent également le repliement. Enfin, nous utilisons une mesure laser des positions du centre du moteur et des différents capteurs à l'aide d'un théodolite. Il assure le positionnement précis de la mesure et de la source.

## 7.2 L'identification magnétostatique

Nous commençons cette section en rappelant le problème principal de l'identification magnétique qui est de déterminer l'ordre maximum  $N$  que nous pouvons identifier sans erreur à l'aide d'un nombre fini de capteurs.

Dans notre cas, nous possédons 5 capteurs et nous cherchons à identifier le moteur sans alimentation et statique, puis alimenté et dynamique. Or avec seulement 5 capteurs nous disposons uniquement de 15 mesures ce qui nous limite à une identification à l'ordre 3 (15 coefficients).

Pour permettre l'identification d'un modèle harmonique plus complet du moteur nous devons chercher toute l'information disponible sur la source, disposer les capteurs en fonction de cette information et enfin seulement rechercher les coefficients harmoniques les plus cohérents vis-à-vis de la mesure et de l'information a priori.

### 7.2.1 La quête d'information

Sans information, il est tout simplement impossible de déterminer un modèle harmonique, car nous devons connaître au moins la qualité du placement et de la mesure et avoir une idée de la richesse harmonique de la source. Dans notre cas, le placement des capteurs est excellent du fait de la visée laser et la mesure statique n'est bruitée ni par le réseau, ni par la MLI puisque le moteur n'est pas alimenté.

Dans ces conditions la mesure peut être considérée comme excellente au LMMCF et l'information concernera essentiellement les sources de champ magnétique.

Les deux sources de champ statique que nous avons au LMMCF sont le champ terrestre et les aimants. Notre expérience peut d'ailleurs se résumer très simplement à l'effet de ces deux sources sur une masse ferromagnétique qui mécaniquement forme un moteur. Pour déterminer l'information sur les coefficients harmoniques qui composent la source nous devons donc évaluer les coefficients dûs à l'effet de forme du moteur sur les aimants et le champ magnétique terrestre.

### 7.2.1.1 Les aimants

Nous commençons par caractériser le champ magnétique rayonné par les aimants. D'après la description que nous avons faite précédemment, les aimants sont disposés géométriquement de façon à former 4 paires de pôles identiques (Fig.7.1). D'autre part, le moteur est composé de deux demi-moteurs parallèles qui se situent théoriquement sur des plans symétriques par rapport au centre mécanique du moteur (stator).

L'information que nous tirons de cette description sommaire des sources nous renseigne sur deux points : les aimants permanents sont disposés alternativement sur les 2 disques rotoriques avec une période égale à 4 suivant  $\theta$  (Fig.7.1) et le plan  $(0, \vec{x}, \vec{y})$  contenant le stator est un plan d'antisymétrie des sources.

Cette information est très riche car seuls les termes harmoniques possédant ces symétries et périodes sont représentatifs de l'induction magnétique des aimants. Le développement harmonique des aimants se limite donc aux harmoniques sphériques dont les termes  $m$  sont multiples de 4 et les ordres  $n$  sont tels que  $z = n - m$  est impaire. En effet, les polynômes de Legendre  $P_n^m$  sont des fonctions impaires lorsque  $z = n - m$  est impaire et paires dans le cas contraire [Ang72][Sch06]. Nous pouvons donc affirmer grâce à cette courte étude que les coefficients harmoniques prépondérants du développement des aimants seuls sont tous les  $\{c_{2k+1, 4l}\}$ . Ce résultat est encore valable lorsque le stator et la culasse sont rajoutés, puisque les symétries et périodicités du moteur sont encore respectées. Nous avons donc estimé les termes harmoniques les plus représentatifs du moteur en régime statique.

Pour l'instant, nous n'avons pas eu recours au moindre calcul pour déterminer la richesse harmonique de la source. Mais, si nous voulons obtenir un complément d'information sur les coefficients, nous pouvons avoir recours à l'identification d'une simulation éléments finis qui offre un complément d'information : l'amplitude des termes sources. Nous nous passerons de cette information qui n'est pas nécessaire et qui peut induire en erreur si le modèle simulé ne correspond pas à la réalité.

### 7.2.1.2 Modulation du champ des aimants par l'effet de forme de la culasse

Nous venons d'identifier les termes principaux du rayonnement du moteur avec sa culasse, mais nous n'avons pas pris en compte le fort effet de forme dû à la présence des pieds massifs et du trou de l'alimentation (Fig.7.1). En effet, la présence des pieds et du trou brise la périodicité suivant  $\theta$  sans changer cependant la

présence du plan d'antisymétrie.

Pour déterminer les termes harmoniques qui interviennent dans la décomposition harmonique nous devons donc évaluer les termes  $m$  suivant  $\theta$  issus de l'effet de forme. Pour ce faire, nous n'avons besoin que d'un calcul d'effet de forme 2D. Nous appliquons donc la méthode de calcul présentée au chapitre 6 à un problème de blindage contenant une source d'ordre 4. Nous cherchons ainsi à évaluer comment la périodicité de la source composée des aimants rotoriques et du stator est modulée en  $\theta$  par la forme de la culasse.

En regardant l'induction magnétique simulée harmoniquement sur un cercle de rayon  $R_{ext}=55\text{cm}$  entourant le moteur nous constatons la présence d'une anomalie qui brise la périodicité d'ordre 4 (Fig.7.2). Elle est causée par les pieds du moteur. Afin d'avoir une idée de la richesse harmonique de la décomposition suivant  $\theta$  nous regardons l'influence de ces coefficients sur le cercle précédent. Nous constatons que le moteur et ses pieds se décomposent en série utilisant tous les termes. Il s'agit d'un cas de blindage. La source constituée des aimants est donc diminuée tandis qu'apparaissent des termes prépondérants d'ordre faible liés à la forme de la culasse.

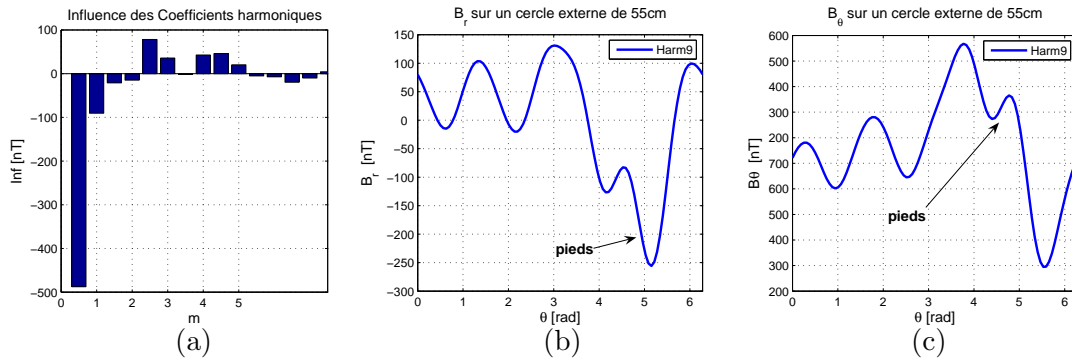


FIG. 7.2 – Simulation d'une source d'ordre  $n = 4$  contenue dans une culasse. (a) : Influence des coefficients harmoniques sur un cercle de rayon  $R_{ext}$  de 55cm - (b) : induction magnétique radiale sur ce cercle - (c) : induction magnétique orthoradiale.

En conclusion, par rapport au modèle sans les pieds nous ne pouvons plus prendre exclusivement des termes de période multiple de 4 suivant  $\theta$ , mais tous les termes. Heureusement, nous conservons toujours le plan d'antisymétrie, ce qui nous permet d'identifier les coefficients harmoniques correspondant au moteur statique : ils sont alors les  $\{c_{m+2k+1,m}\}$ .

### 7.2.1.3 Le champ magnétique terrestre

Le champ magnétique terrestre est la source de champ la plus importante. Du fait également de l'importance de la culasse du moteur elle induit une forte réaction d'aimantation. C'est cette source que nous allons majoritairement mesurer. Pour déterminer les termes de la décomposition harmonique de l'aimantation nous proposons à nouveau d'exploiter le calcul de l'effet de forme.

Le champ magnétique terrestre est uniforme et composé de deux composantes suivant  $z$  ( $20\mu\text{T}$ ) et  $y$  ( $40\mu\text{T}$ ) (la troisième est beaucoup plus faible). Nous pouvons



donc simuler harmoniquement l'induction de la culasse et des pieds pour évaluer les termes polaires les plus importants dans le plan principal du problème. Comme dans le cas des aimants, nous cherchons à identifier la richesse harmonique de la source suivant  $\theta$ .

La simulation montre que l'aimantation de la culasse est essentiellement un phénomène d'ordres faibles car la valeur des coefficients harmoniques relatifs est uniquement importante pour  $m = 1, 2$  et  $3$ . Ce qui correspond à l'aimantation de la culasse (dipolaire) et des pieds (voir Fig.7.3).

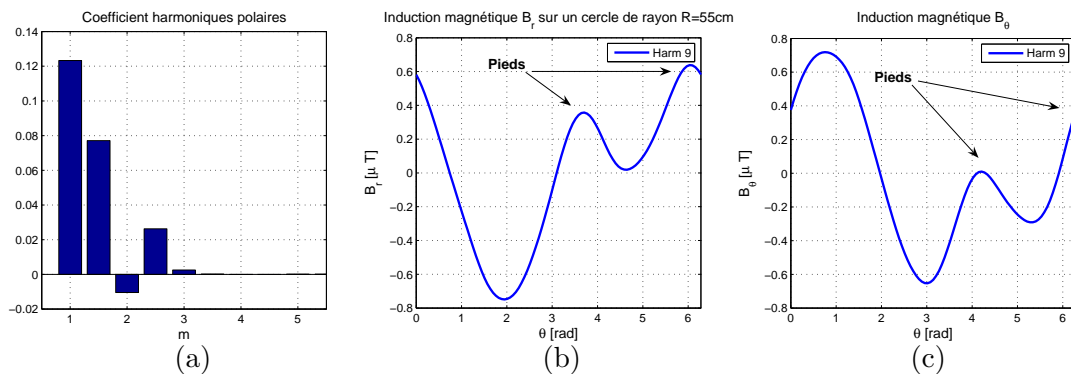


FIG. 7.3 – Simulation de l'aimantation de la culasse du moteur dans le champ terrestre. (a) : Influence des coefficients harmoniques sur un cercle de rayon  $R_{ext}$  de 55cm - (b) : Induction magnétique radiale sur ce cercle - (c) : Induction magnétique orthoradiale.

En effet, la simulation du problème à l'ordre 9 met clairement en évidence la simplicité harmonique de la décomposition. Nous voyons que sur un cercle de rayon  $R_{ext}=55\text{cm}$  l'aimantation magnétique crée une source dipolaire avec une double anomalie au niveau des pieds.

Les deux sources de champ magnétique : aimants et champ terrestre vont donc se traduire majoritairement à l'aide des coefficients harmoniques  $\{c_{m+2k+1,m}\}$  et des ordres faibles. Nous pouvons encore affirmer que l'aimantation de la culasse va être prépondérante dans la mesure puisque la culasse a un effet de blindage sur les aimants qui est du second ordre par rapport à l'aimantation de la culasse. La source statique que nous allons mesurer sera donc essentiellement une source d'ordre  $n$  faible. Cependant, nous irons chercher les pôles du moteurs, minoritaires dans la signature magnétostatique en utilisant une disposition adaptée des capteurs d'identification.

## 7.2.2 Placement des capteurs d'identification

Les considérations géométriques précédentes permettent donc d'identifier les coefficients harmoniques prépondérants dans la décomposition de la source. Ainsi, nous savons que les ordres faibles et les  $\{c_{(m+2k+1,m)}\}$  seront majoritairement représentatifs du moteur statique. De plus, nous pouvons encore affirmer que les termes tels que  $m = 1$  et  $2$ , qui sont ceux correspondant à l'induit de la culasse, auront une influence importante alors que ceux d'ordre élevé qui correspondent au blindage des aimants auront une influence faible.

Pour placer les capteurs de mesure nous allons utiliser l'opérateur de résolution  $\mathbf{R}$  du problème d'identification [Leg96]. Nous montrons au chapitre 4 que la diagonale de cette matrice était représentative de la qualité de l'identification de chaque coefficient harmonique. Pour garantir un facteur de résolution optimal des termes représentatifs de la source nous allons donc optimiser le placement des capteurs de façon à garantir le meilleur opérateur de résolution pour les coefficients d'ordre faible et les  $\{c_{(m+2k+1,m)}\}$  liés aux aimants. Ainsi, nous garantissons la qualité de l'identification des coefficients harmoniques représentatifs de la source même si l'ordre du développement est élevé. Nous devons cependant assurer que le nombre de termes que nous cherchons soit au moins égal au nombre de mesures dont nous disposons, sinon l'optimisation du facteur de résolution n'est pas possible. Puisque nous possédons 15 composantes magnétiques nous pouvons optimiser l'opérateur de résolution des termes principaux de la source jusqu'à l'ordre  $N = 5$ . Il s'agit des 15 coefficients donnés dans le tableau (7.2).

L'identification que nous proposons consiste donc à chercher les 35 coefficients d'une source d'ordre  $N = 5$  à l'aide de seulement 5 capteurs. Mais ces capteurs sont placés de sorte à identifier de façon optimale les termes sources de la décomposition, l'erreur sur les autres termes se limitant de fait à l'identification du bruit ou des irrégularités. Cependant, afin de stabiliser l'identification du bruit et limiter les phénomènes de repliements nous utilisons encore une hypothèse de norme minimale sur tous ces coefficients.

Coeff	$a_{1,0}$	$a_{2,1}$	$b_{2,1}$	$a_{3,0}$	$a_{3,2}$	$b_{3,2}$	$a_{4,1}$	$b_{4,1}$
Coeff	$a_{4,2}$	$b_{4,2}$	$a_{4,3}$	$b_{4,3}$	$a_{5,0}$	$a_{5,4}$	$b_{5,4}$	.

TAB. 7.2 – Les 15 coefficients harmoniques représentatifs du moteur statique dans le champ terrestre.

L'algorithme d'optimisation du placement de capteurs est le suivant :

1. Nous choisissons une disposition des cinq capteurs initiale  $P_{init}$  (voir Tableau.7.3). Nous écrivons ensuite la matrice  $\mathbf{F}$  de l'identification magnétique à l'ordre  $N = 5$ , puis l'opérateur de résolution lui correspondant.
2. Un algorithme d'optimisation cherche une nouvelle position des capteurs de façon à maximiser la résolution de l'identification des coefficients  $\{c_{(m+2k+1,m)}\}$ . Il itère à partir du placement initial en choisissant des points au dessus du plancher du LMMCF et contenus en dehors de la sphère englobant le moteur.
3. Enfin, il s'arrête lorsque la fonction objective (norme des termes de la diagonale de l'opérateur de résolution) est maximale.

Pour être plus précis sur l'identification des ordres faibles, caractéristiques de l'aimantation de la culasse, nous ajoutons une pondération dans la fonction objective qui favorise une meilleure résolution des termes d'ordres faibles. Le placement optimal que nous obtenons est en fait un compromis, car il n'existe pas de placement idéal à l'aide de capteurs triaxiaux (peut-être est-ce possible avec des capteurs monoaxes ?).

En effet, nous n'allons pas chercher un opérateur de résolution égal à 1 pour tous les coefficients car ce n'est pas possible, nous assurerons uniquement ce facteur aux ordres les plus faibles de sorte que le modèle soit suffisamment précis pour une extrapolation au loin. Pour les ordres élevés nous optimiserons seulement les positions des capteurs en assurant l'opérateur optimal.

Capteur	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
$P_{init}$ [m]	(.6,.6,.6)	(-.6,-.6,.6)	(-.6,-.6,-.6)	(.6,.6,-.6)	(.6,-.6,-.6)
$P_{optim}$ [m]	(.724,.998,2.71)	(-1.15,-.15,1.5)	(-.76,-.5,-6.8)	(.8,1.1,-.9)	(1.18,0,-.9)

TAB. 7.3 – Positions des capteurs dans le référentiel du centre du moteur.

Le positionnement de capteurs que nous trouvons (voir  $P_{optim}$  du tableau 7.3) permet un gain notable de l'opérateur de résolution des 15 coefficients caractéristiques de la source (voir Fig.7.4). En particulier aux ordres faibles. Il peut cependant être très éloigné de 1 pour certains termes harmoniques et nous devons nous souvenir que pour ces termes l'identification sera moins performante.

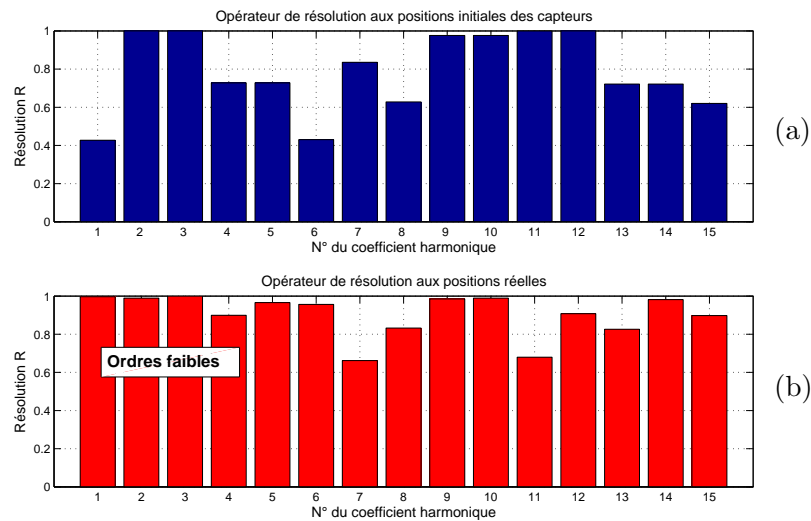


FIG. 7.4 – Opérateurs de résolution relatifs aux 15 coefficients harmoniques principaux lors d'une identification à l'ordre 5.- (a) : Opérateur de résolution correspondant aux positions initiales des capteurs.- (b) : Opérateur de résolution correspondant aux positions réelles optimisées.

Dans cette section nous proposons une disposition de capteurs magnétiques correspondant au moteur que nous cherchons à identifier. Elle est donnée par le calcul des positions qui assurent l'optimalité de la résolution sur les termes les plus représentatifs de la source. C'est-à-dire ceux que nous avons identifiés à l'aide des considérations géométriques de la section précédente. Nous sommes donc désormais capables de mettre en place une identification adaptée à la source. Ce placement garantit la meilleure identification possible des 15 coefficients relatifs aux termes harmoniques sources.

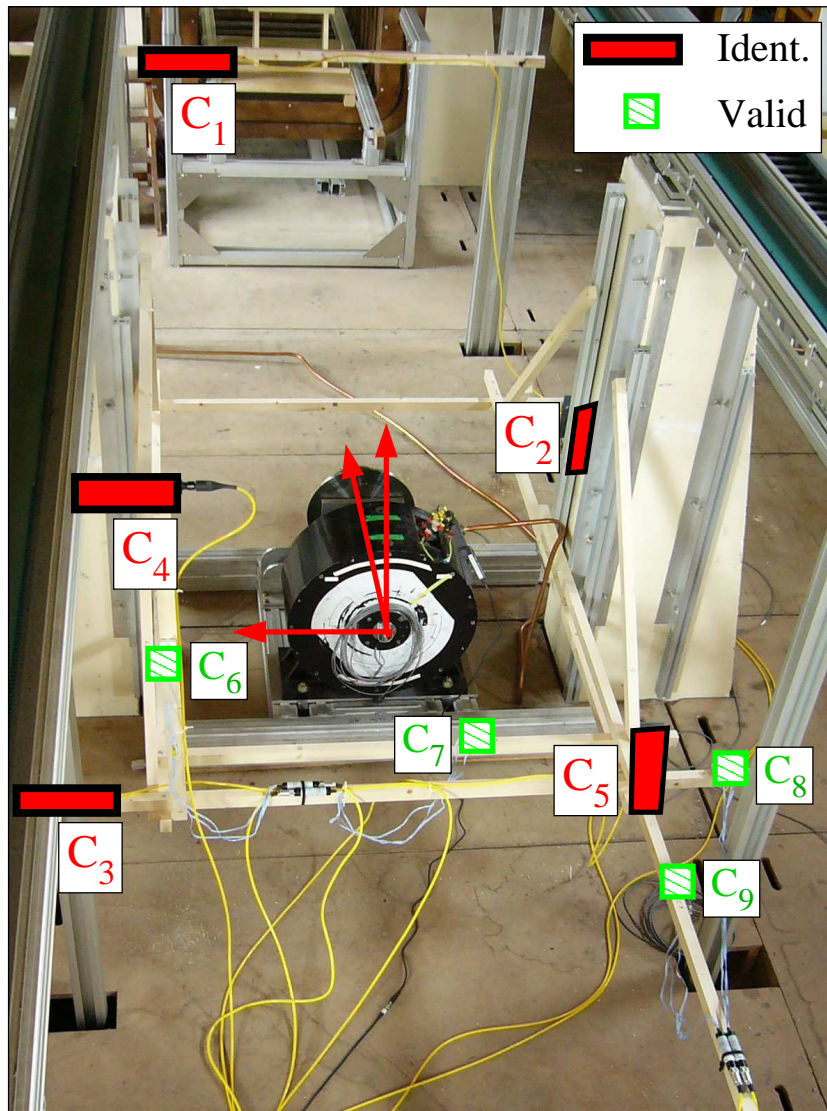


FIG. 7.5 – Visualisation d'ensemble du moteur, des 5 capteurs d'identification et des 4 capteurs de validation.

## 7.2.3 Identification des coefficients harmoniques

### 7.2.3.1 Hiérarchie du modèle - Intérêt du placement

Au chapitre 2 de cette étude, nous présentions la notion d'ordre des modèles harmoniques. Elle introduit une hiérarchie spatiale des termes d'une décomposition harmonique selon leur ordre  $n$ . Par exemple, les termes dipolaires sont prédominants loin d'une source alors que les termes d'ordre  $N$  élevé ne le sont qu'à proximité de la source. Jusqu'ici nous avons présenté ce résultat comme un frein à l'identification car l'ordre maximum  $N$  déterminait le nombre de capteurs nécessaires ce que nous présentions comme une condition d'échantillonnage spatial. Mais cette condition ne prend pas en compte la distance de chaque capteur à la source et la hiérarchie naturelle du modèle harmonique.

Prenons par exemple le capteur d'identification le plus éloigné du moteur, c'est-à-dire  $C_1$  (Fig.7.5). Il est aberrant d'utiliser ce capteur pour essayer d'identifier les coefficients harmoniques d'un ordre  $n$  élevé car une petite erreur de mesure a une conséquence désastreuse sur ces coefficients du fait des décroissances associées. Il faut donc préférentiellement les utiliser pour identifier des termes d'ordre faible pour lesquels une erreur de mesure faible correspond à une erreur d'identification des coefficients harmoniques faible. De même, utiliser une mesure proche pour déterminer un modèle d'ordre faible entraîne nécessairement une erreur du fait de l'importance des termes d'ordre élevé à proximité de la source.

Idéalement nous pouvons imaginer avoir des zones propres à chaque ordre dans lesquelles sont disposés suffisamment de capteurs pour identifier tous les termes propres à un même ordre. Ainsi nous identifions les coefficients des ordres supérieurs à mesure que nous nous rapprochons de la source. Cette approche est intéressante si nous avons suffisamment de mesures pour identifier les coefficients dans les différentes zones mais est très coûteuse du point de vue de la mesure. Nous allons cependant garder son principe en l'adaptant grâce à l'estimation bayésienne.

### 7.2.3.2 Estimation hiérarchique bayésienne

La distribution des capteurs d'identification comprend des mesures éloignées et des mesures proches. Il y en a donc qui sont plus adaptées à l'identification des termes d'ordre faible et d'autres plus proches et plus adaptées aux ordres élevés (voir Fig.7.5). Pour estimer les 35 coefficients harmoniques nous utiliserons un estimateur du MAP exploitant la hiérarchie du modèle harmonique et le placement des capteurs.

L'idée du modèle hiérarchique est la suivante : nous allons identifier les coefficients harmoniques d'une source au pas à pas en estimant des coefficients d'ordre de plus en plus élevé, en utilisant également des capteurs de plus en plus proches, et les derniers coefficients identifiés comme information a priori. L'intérêt est que nous ne partons pas immédiatement en quête d'un modèle d'ordre  $N = 5$  ce qui causerait du repliement, mais nous cherchons d'abord un modèle simple (dipôle) à l'aide des mesures qui nous permettent de le trouver sans commettre d'erreur remarquable. Comme le résultat de cette identification est voisin de la réalité, nous l'utiliserons comme information a priori pour une identification plus poussée. Petit

à petit, nous enrichissons notre information a priori sur les coefficients de la source grâce à l'identification magnétique.

### 7.2.3.3 Résultats de l'identification statique

Pour commencer, afin de clarifier la démarche hiérarchique nous allons présenter ses deux premières étapes, c'est-à-dire l'identification des ordres  $N = 1$  et  $N = 2$ , et le mécanisme qui va permettre sous condition d'une identification antérieure de déterminer la suivante. Enfin nous présenterons les résultats obtenus à l'ordre 5 et leur analyse.

**L'ordre  $N = 1$**  Nous commençons donc par identifier les paramètres du dipôle à l'aide des deux capteurs les plus éloignés du moteur, c'est-à-dire  $C_1$  et  $C_5$ . (voir Fig.7.5). Les coefficients harmoniques solutions sont donnés par le tableau (7.4).

Coefficients	$a_{1,0}$	$a_{1,1}$	$b_{1,1}$
Valeur	1526.7	-31.044	1643.3

TAB. 7.4 – Valeurs des coefficients de la décomposition harmonique du moteur à l'ordre  $N = 1$ .

Puisque nous utilisons des mesures lointaines, en particulier  $C_1$  nous limitons le repliement et pouvons estimer que l'identification de ces coefficients est une bonne estimation de leur valeur réelle. Nous pouvons donc utiliser ces valeurs comme information a priori pour l'identification suivante à l'ordre 2.

**L'ordre  $N = 2$**  Nous affinons le développement jusqu'à l'ordre  $N = 2$  en évitant d'utiliser le capteur  $C_1$  qui nous sert exclusivement à assurer les paramètres dipolaires. Nous pouvons utiliser les deux mesures les plus éloignées alors :  $C_2$  et  $C_5$ . Si nous assurons que les coefficients de l'ordre 1 sont certains nous pouvons leur attribuer une variance assez faible pour que le facteur de résolution des 5 coefficients de l'ordre 2 soit maximum : nous cherchons alors des coefficients harmoniques voisins de ceux à l'ordre 1 et qui sont les plus probables<sup>1</sup>. Les nouveaux coefficients harmoniques à l'ordre  $N = 2$  sont donnés par le tableau (7.5).

Coefficients	$a_{1,0}$	$a_{1,1}$	$b_{1,1}$	$a_{2,0}$	$a_{2,1}$	$b_{2,1}$	$a_{2,2}$	$b_{2,2}$
Valeur Hiér.	1105	-476.8	1400	-214	-211	-167.9	-267.53	-85.6
Valeur Norm.	-479	2363	6107	521	-1855	-1675	2848	3104

TAB. 7.5 – Valeurs des coefficients de la décomposition harmonique du moteur à l'ordre  $N=2$  pour le modèle hiérarchique (Valeur Hier.) et pour une identification "normale" à l'ordre 2 à l'aide des capteurs  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_5$  (Valeur Norm.).

Nous remarquons que les termes dipolaires ont été mis à jour lors de la nouvelle estimation, et qu'ils restent voisins de la solution (à comparer avec la valeur des

<sup>1</sup> Il s'agit d'une identification sous condition à l'aide d'une chaîne de Markov entre les ordres de la décomposition

termes de l'identification normale). Afin de mettre en évidence le gain de la méthode hiérarchique nous avons identifié la source à l'aide des mêmes trois capteurs  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_5$ . Le problème est bien posé, mais les coefficients sont différents. En particulier les termes d'ordres 2 ont des valeurs très importantes (Tab.7.5 voir Valeur Norm.) qui sont la marque du repliement. Le modèle à l'ordre 2 est donc insuffisant et ce que nous gagnons par notre approche est de limiter le repliement en forçant les termes dipolaires.

**L'ordre  $N = 5$**  Nous continuons donc la chaîne hiérarchique de l'identification jusqu'à l'ordre  $N = 5$ . En réactualisant l'information a priori à l'aide des derniers coefficients. Pour limiter le repliement nous pouvons encore ajouter une information sur les coefficients qui est que leur influence est inférieure à celles des termes dipolaires, ce qui est vrai dans notre problème puisqu'il s'agit essentiellement de l'induit de la culasse du moteur.

Afin d'évaluer les performances de l'identification nous avons disposé 4 capteurs de vérification qui vont permettre de comparer la mesure au modèle identifié. Leurs positions sont données dans le tableau (7.6). Ils ont été placés en des points où mécaniquement il était possible de les mettre (voir Fig.7.5). En particulier, il est à noter que le 2<sup>ème</sup> capteur de validation ( $C_7$ ) est le plus proche du moteur. De ce fait, le modèle identifié ne pourra être valable sur ce dernier. Il montrera cependant que la richesse harmonique est plus élevée que l'ordre 5 à l'intérieur des mesures d'identification.

Capteur	$C_6$	$C_7$	$C_8$	$C_9$
Pos[m]	(.6,.69,-.99)	(-.22,-.01,.72)	(-.97,-.01,-.903)	(-.66,.06,-1.37)

TAB. 7.6 – Positions des capteurs de validation dans le référentiel du centre du moteur (Fig.7.5).

La figure (7.7) montre les performances et limites de l'identification. Sur les capteurs  $C_6$ ,  $C_8$ ,  $C_9$ , nous avons une erreur relative d'extrapolation inférieure à 10% par rapport à la valeur mesurée. Par contre, sur le capteur  $C_7$  le résultat n'est pas convenable. Ce résultat est cependant cohérent avec notre démarche car le modèle identifié est uniquement valable à l'extérieur des mesures.  $C_7$  possède simplement une information plus riche sur le moteur que les autres capteurs.

Nous avons vu que les coefficients harmoniques étaient intrinsèques à la source ce qui permettait une analyse du comportement spatial du moteur. Afin d'illustrer cette analyse nous proposons de représenter l'influence de ces coefficients (voir Fig.7.6). A posteriori, nous voyons que le moteur se divise en deux sources, l'une dont l'influence concerne les ordres faibles de  $N = 1$  à 3 et l'autre d'ordre élevé égal à 5. Il s'agit respectivement de l'induit de la culasse et des aimants permanents des pôles. Ce résultat est donc cohérent avec la quête d'information qui avait permis le placement des capteurs d'identification.

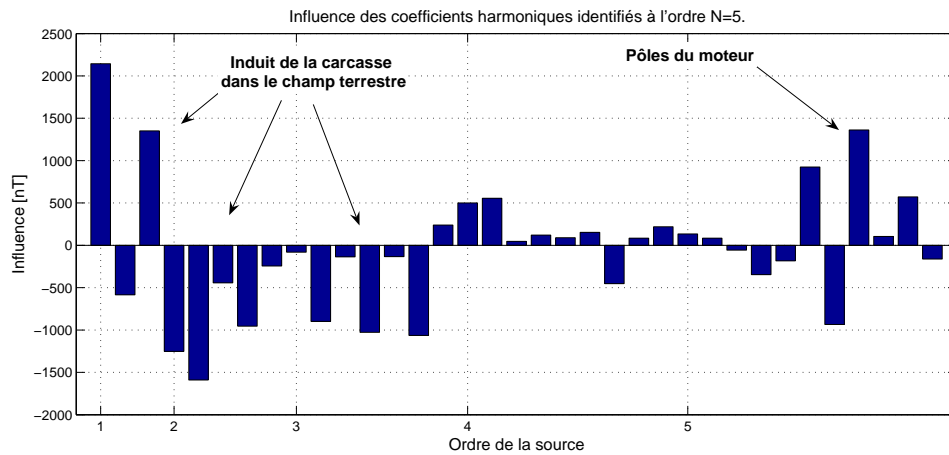


FIG. 7.6 – Influence des 35 coefficients harmoniques identifiés à l'ordre 5 à l'aide des 5 capteurs.

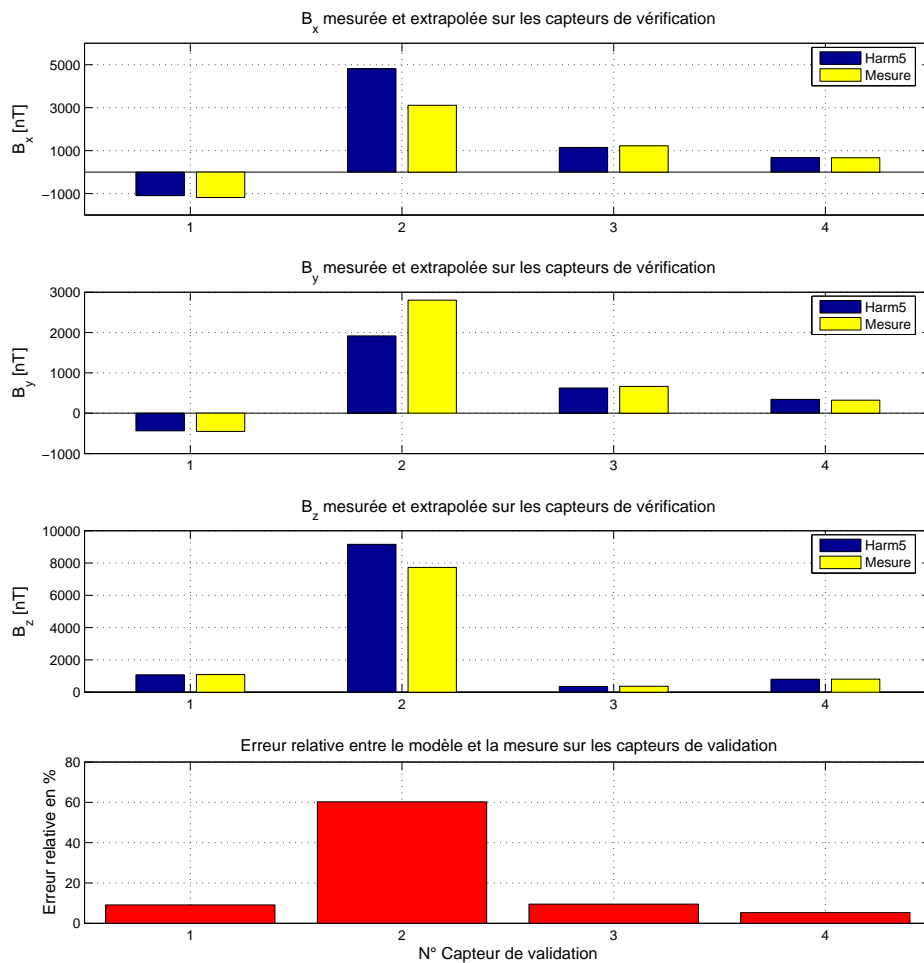


FIG. 7.7 – Comparaison des trois composantes de l'induction magnétique sur les capteurs de validation. L'erreur relative est inférieure à 10 % pour un modèle d'ordre  $N = 5$ . Seul  $C_7$  ( $N^{\circ 2}$ ) a une erreur importante qui est due à sa proximité de la source et surtout au fait qu'il est à l'intérieur des mesures d'identification.



### 7.2.3.4 Analyse des résultats

En regardant l'influence des termes harmoniques jusqu'à l'ordre  $N = 3$  nous pourrions être tentés d'identifier une source d'ordre  $N = 3$  en considérant que les aimants ont un apport faible dans la décomposition. Nous possédons 5 capteurs, donc 15 mesures, c'est-à-dire exactement le nombre nécessaire à l'identification. Nous proposons donc de faire cette identification et de la valider sur les capteurs de validation. Le résultat de cette identification est divergeant (voir Fig.7.8).

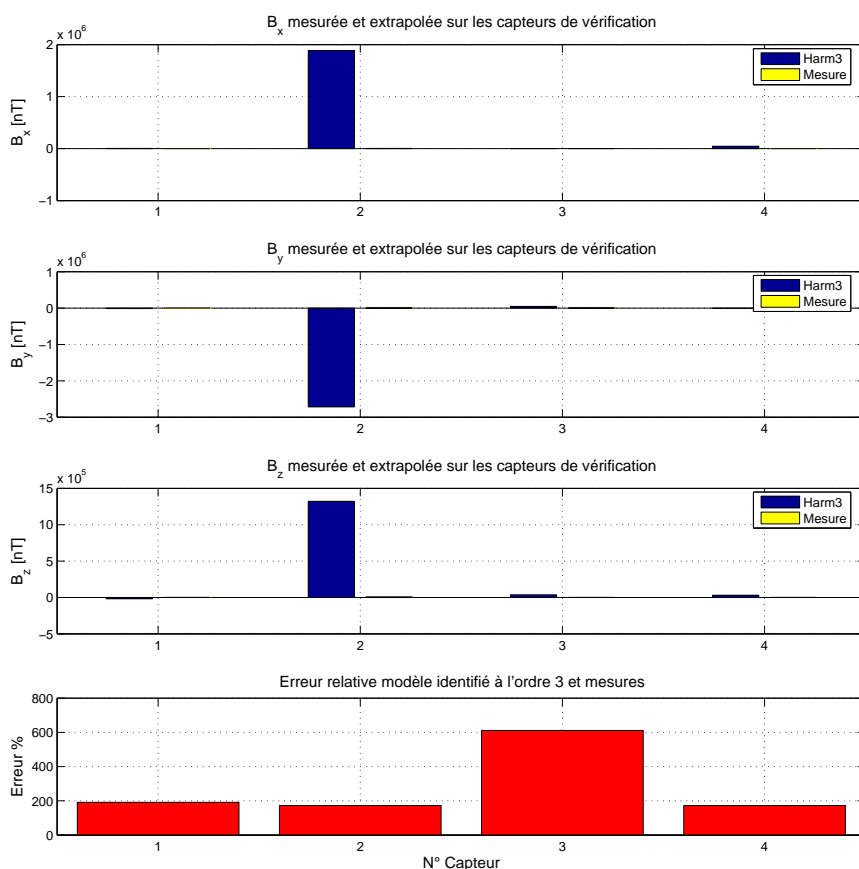


FIG. 7.8 – Comparaison des trois composantes de l'induction magnétique pour un modèle à l'ordre  $N = 3$  sur les capteurs de validation. L'erreur relative est très importante signe de repliement.

Nous venons donc de montrer que les termes harmoniques d'ordre supérieur à 3 sont nécessaires dans l'identification, car ils causent du repliement. Le placement des capteurs étant adapté à des termes d'ordre supérieur mesurés, ce repliement est devenu inévitable. Pour éviter ce repliement, il faudrait proposer un placement de capteurs adapté à l'identification d'une source d'ordre 3.

Enfin, pour clore l'identification magnétostatique, nous devons discuter de la validité des coefficients harmoniques identifiés. Il est certain qu'ils ne sont pas exacts car le système global est sous-déterminé. Mais ils correspondent à une actualisation du modèle pas à pas qui réduit considérablement le repliement. Dans ce processus le placement des capteurs est essentiel. Dans notre exemple, l'identifica-

tion est conditionnée par le capteur  $C_1$  qui permet l'identification d'un dipôle avec une erreur faible. Ainsi, l'identification hiérarchique n'est pas seulement possible parce que le modèle s'y prête, elle est possible parce que la disposition des capteurs est telle que chacun porte une information particulière relative à un ordre.

## 7.3 L'identification magnétodynamique

Nous allons maintenant mettre en œuvre l'identification magnétodynamique du moteur. Nous n'irons pas caractériser le type de sources et proposerons uniquement la mise en œuvre de l'identification dans le but d'extrapoler la signature du moteur. Pour ce faire nous utiliserons les placements de capteurs précédents.

### 7.3.1 Analyse de la situation

Un moteur est une source de champ magnétique tournant, c'est la raison pour laquelle nous avons choisi de faire coïncider l'axe de rotation du moteur et la direction  $z$  du repère. Le moteur que nous allons identifier est alimenté par un courant de fréquence 2Hz, ce qui correspond, du fait du nombre de paires de pôles de notre machine ( $p=4$ ), à une vitesse de rotation  $\Omega$  égale à 0.5Hz. Nous nous attendons donc à avoir des fréquences multiples de  $\Omega$  correspondant à la rotation du modèle harmonique du moteur, c'est-à-dire d'un terme fondamental et ses harmoniques. En particulier à  $f=2\text{Hz}$ , fréquence à laquelle l'alimentation et les aimants des pôles en rotation viennent superposer leur signature. Dynamiquement la source doit donc être composée des fréquences multiples de 0.5Hz liées à la rotation du moteur et des fréquences multiples de  $f=2\text{Hz}$  relatives à l'alimentation du moteur.

Par rapport à l'identification magnétostatique, la partie statique de la source à évoluée. En effet, puisque les aimants tournent, ils ont une induction nulle en moyenne. Nous perdons donc les aimants dans la signature statique. Par contre, cette rotation des aimants implique le développement de courants de Foucault dans la culasse qui sont perpendiculaires au mouvement et constants. Les aimants ont donc toujours un effet sur la signature statique mais uniquement aux ordres faibles.

#### 7.3.1.1 Mise en œuvre

Nous appliquons l'identification magnétodynamique aux mesures du moteur alimenté à 2Hz. Les fréquences caractéristiques relatives à une amplitude de la FFT significative sont principalement celles situées à 2Hz et 0.5Hz. Il s'agit, comme nous l'avons signalé des fréquences de l'alimentation et de la rotation du moteur. Si ces fréquences ressortent, elles sont d'amplitude inférieure à la partie statique. C'est pourquoi, nous commençons par identifier le statique.

**Identification du statique** La moyenne des valeurs pendant la durée de l'échantillonnage nous permet d'évaluer la signature statique du moteur. Nous l'identifions alors à l'ordre 5 en utilisant la méthode hiérarchique précédente. Les coefficients harmoniques que nous identifions ont essentiellement des valeurs significatives aux ordres 1 et 2 (voir Tableau (7.7)).

Coefficients	$a_{1,0}$	$a_{1,1}$	$b_{1,1}$	$a_{2,0}$	$a_{2,1}$	$b_{2,1}$	$a_{2,2}$	$b_{2,2}$
Valeur	1600	-398	1 894	-200	-230	-170	-31	-33

TAB. 7.7 – Valeurs des coefficients de la décomposition harmonique statique du moteur à l'ordre  $N = 2$  lors de son fonctionnement à 2Hz.

Nous proposons de valider cette identification à l'aide des mesures sur les capteurs de validation. Nous remarquons que la qualité de l'identification a diminué (voir Fig.7.9). En effet, l'erreur relative d'identification est voisine de 20% alors qu'elle n'était que de 10% dans le cas du moteur statique seul. Cette erreur d'identification peut être due à la présence de sources dynamiques qui entraîne des courants de Foucault, aux faiblesses des capteurs ou à une richesse harmonique supérieure à l'ordre  $N=5$  de notre identification.

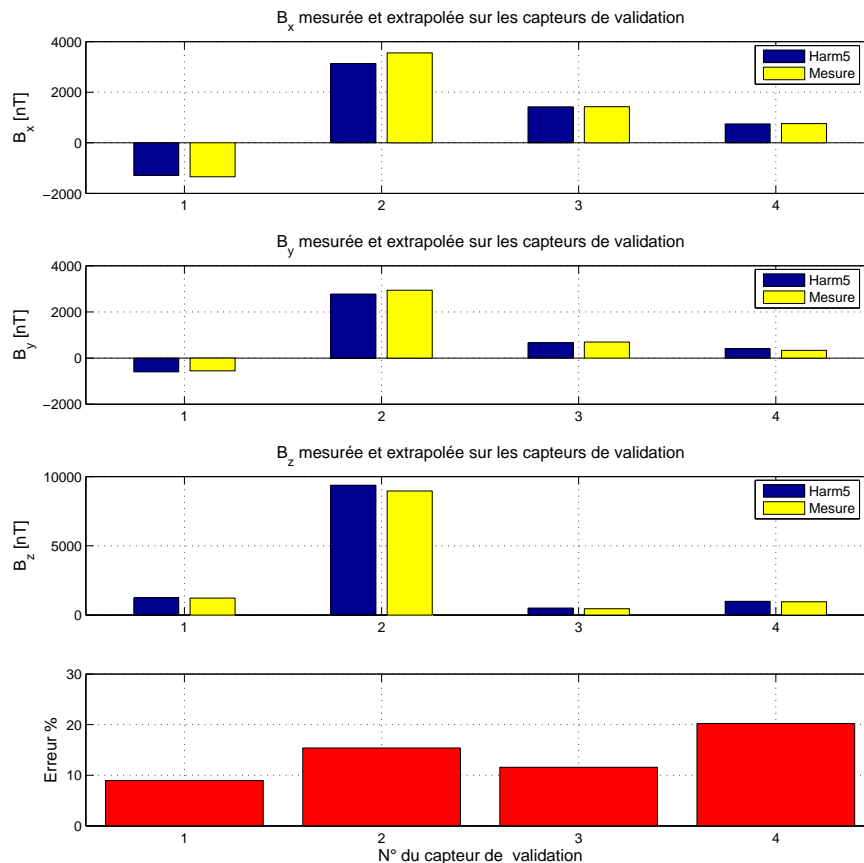


FIG. 7.9 – Comparaison des trois composantes statiques de l'induction magnétique sur les capteurs de validation, dans le cas d'un moteur alimenté à 2Hz. Erreur relative entre le modèle et la mesure.

L'erreur d'identification du statique aura comme conséquence de créer des offsets importants dans l'extrapolation des signatures. En effet, le niveau du statique étant supérieur cette erreur peut avoir une amplitude supérieure au dynamique, même si elle ne correspond qu'à une faible partie de la signature statique.

**Identification dynamique** L'identification dynamique repose sur le même principe d'identification spatiale utilisant un modèle hiérarchique aux fréquences caractéristiques de la source. Dans notre cas, les fréquences caractéristiques principales sont les fréquences 0.5Hz et 2Hz qui correspondent au fonctionnement principal du moteur. Le résultat de l'identification magnétodynamique donne pour ces deux fréquences les coefficients harmoniques du tableau (7.8) :

i	1	2
$f_c^{(i)}$ (Hz)	.5	2
$a_{1,0}^{(i)}$	(3.0082+1.5625j)	(13.945+242.46j)
$a_{1,1}^{(i)}$	(-33.227+5.54j)	(-4.69-56.14j)
$b_{1,1}^{(i)}$	(16,183+27.92i)	(-2.818-28.68j)
$a_{2,1}^{(i)}$	(3.8378)	0
$b_{2,1}^{(i)}$	(4.98-6.9j)	0
$a_{3,0}^{(i)}$	0	-28.922j
$a_{5,0}^{(i)}$	0	5.6024j
$a_{5,4}^{(i)}$	0	(-.716-15.1j)
$b_{5,4}^{(i)}$	0	(-1.12-5.73j)

TAB. 7.8 – Coefficients harmoniques identifiés aux fréquences caractéristiques du moteur.

Ces coefficients permettent d'extrapoler la signature du moteur en écrivant la variation complexe de la décomposition harmonique identifiée au cours du temps (voir paragraphe §3.3.3). Afin de démontrer l'intérêt de cette identification nous allons analyser ces coefficients en essayant de remonter à leurs causes :

- A la fréquence 0.5Hz le terme dipolaire est prépondérant. La valeur des coefficients dipolaires indique par ailleurs que les termes sources sont essentiellement dans le plan de la machine. Nous pouvons encore dire, grâce à l'analyse des coefficients dipolaires, qu'il s'agit de la superposition d'une source pulsante et d'une source tournante. Du fait de la fréquence de la source, ces deux sources dipolaires ne peuvent qu'être liées à la rotation du moteur et pas à son alimentation. La source tournante s'explique par un défaut ponctuel des aimants du rotor, quant à la source pulsante il pourrait s'agir d'une excentricité mécanique, ou d'un mésalignement de l'axe de rotation. Pour ce dipôle, nous pouvons encore distinguer la source pulsante de celle tournante. Le résultat permet de faire l'analyse suivante : le dipôle est principalement une source tournante et une source pulsante plus faible et principalement composée de  $b_{1,1}$ . C'est-à-dire qu'elle oscille suivant l'axe  $y$  du moteur. Ce résultat confirme l'hypothèse du balourd ou du mésalignement de l'axe (il doit certainement se voir à d'autres fréquences).
- La source à 2Hz est caractérisée par un fort terme dipolaire  $a_{1,0}$  suivant l'axe du moteur. Il s'accompagne d'autres termes harmoniques suivant cet axe ( $a_{3,0}$  et  $a_{5,0}$ ). Ils correspondent à un défaut de bobinage connu du moteur. En effet, le bobinage des têtes de bobine forme une spire circulaire à l'intérieur

du moteur et c'est la décomposition de cette spire pulsant à la fréquence d'alimentation que nous avons identifiée.

Les deux autres termes dipolaires  $a_{1,1}$  et  $b_{1,1}$  sont également importants. Ils correspondent à une source pulsant dans le plan  $(x, y)$ . Il s'agit certainement du champ relatif au trou qui permet l'alimentation du stator qui laisse s'échapper une partie du champ magnétique de la spire (elle pulse) mais aussi des aimants qui passent derrière ce trou. Enfin, nous remarquons que ce terme a une composante principale suivant l'axe  $x$  ( $a_{1,1}$  est plus fort que  $b_{1,1}$ ) ce qui nous suggère que, soit la spire de courant n'est pas exactement dans l'axe du moteur, soit notre repère n'est pas exactement aligné à l'axe du moteur, soit enfin, il s'agit de l'effet de blindage des pieds, plus important suivant la direction  $y$  (terme  $b_{1,1}$  plus faible).

Enfin, les termes  $a_{5,4}$  et  $b_{5,4}$  correspondent aux aimants, mais leur amplitude est trop faible pour permettre une analyse de la source. Il s'agit d'une conséquence de l'effet de blindage des aimants par la culasse, en particulier les courants de Foucault qui réduisent significativement le niveau de leur signature. Mais il s'agit aussi d'un défaut lié à la méthode hiérarchique qui favorise les termes d'ordre faible et limite l'amplitude des termes élevés. La méthode permet donc uniquement de démontrer l'existence du terme harmonique, mais n'offre pas une précision suffisante pour la caractériser.

**Extrapolation de la signature** Nous venons de proposer un diagnostic de l'état de la machine à l'aide des coefficients harmoniques et de mesures proches. C'est un des deux intérêts de l'identification magnétodynamique, le premier étant de fournir le modèle harmonique de la source pour permettre l'extrapolation de sa signature. Pour évaluer cette signature, nous allons comparer notre modèle harmonique à la mesure sur le capteur de validation  $C_6$ . Tous les capteurs donnent un résultat similaire, excepté le capteur  $C_7$  pour les raisons que nous évoquions précédemment. La figure (7.10) illustre cette extrapolation.

Tout d'abord, nous remarquons l'offset dû à l'erreur d'identification statique. Elle correspond à l'erreur de 20 % d'identification dont nous parlions dans le cas statique et n'affecte pas l'identification des sources dynamiques qui ont a priori une amplitude respectée.

Nous remarquons encore la présence d'un léger déphasage causé par l'identification des termes magnétodynamiques et qui affecte essentiellement la source à 2Hz.

Enfin, si nous avons identifié les termes dynamiques principaux, nous voyons sur la composante  $B_y$  qu'il était encore possible d'aller plus loin et d'identifier les dents ou les encoches de la machine, qui se caractérisent par une légère oscillation à 12Hz (la machine a 24 encoches).

## 7.4 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons présenté l'identification magnétodynamique d'un moteur discoïde à aimants. Comme nous avons pu le constater, cette identification

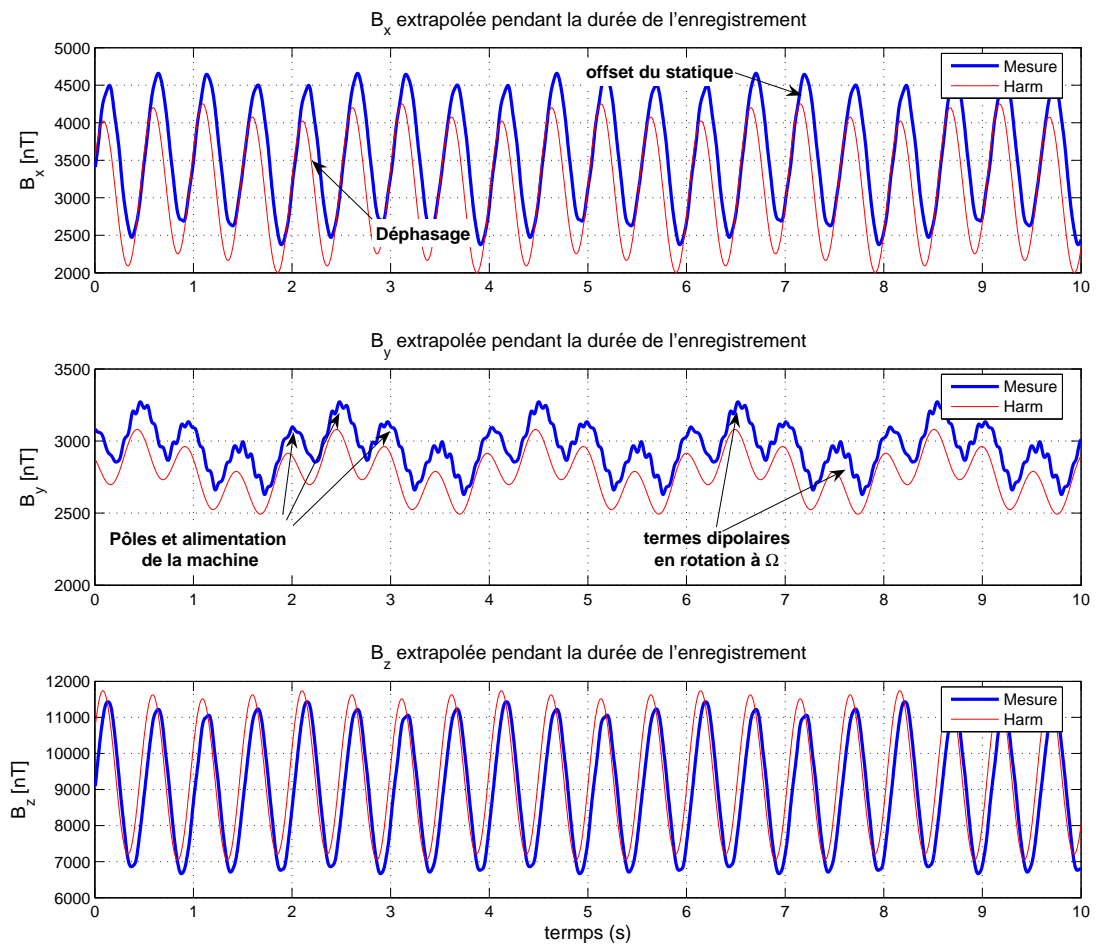


FIG. 7.10 – Comparaison des trois composantes statiques de l'induction magnétique extrapolées dans le temps sur le capteur  $C_6$  de validation, dans le cas d'un moteur alimenté à 2Hz. Il s'agit de la superposition du statique, de la fréquence d'alimentation et de la fréquence de rotation.

est la synthèse des deux parties théoriques précédentes. La première fournit les modèles et les outils d'inversion qui permettent d'obtenir les paramètres du moteur, la seconde partie apporte l'information a priori nécessaire pour mettre en place la mesure en fonction de l'a priori.

Le résultat de l'identification est l'estimation des coefficients harmoniques relatifs au fonctionnement du moteur statique ou alimenté à 2Hz. Ils permettent d'une part d'extrapoler la signature et, d'autre part, de diagnostiquer les causes de l'indiscrétion du moteur.

Le diagnostic que nous pouvons effectuer à partir des champs magnétiques rayonnés par le moteur concerne le cas statique. Majoritairement la signature est causée par l'aimantation de la culasse dans le champ terrestre. Cette aimantation se caractérise par des termes dipolaires forts, ce qui nous oblige à disposer les capteurs de façon à limiter toute erreur d'identification sur ces termes. Dans ces conditions, identifier les aimants des pôles, source d'ordre élevé devient difficile du fait du nombre faible de mesures. Nous arrivons cependant à estimer les paramètres correspondant à ces pôles grâce à une approche hiérarchique liée aux propriétés du modèle harmonique. Mais cette méthode est limitée qui est de favoriser les ordres faibles au profit des ordres élevés. Le résultat obtenu est alors une estimation acceptable, mais qui n'est pas exacte. Si l'expérience avait pris place en champ nul (situation possible au LMMCF), l'importance des termes d'ordre élevé aurait été meilleure et aurait apportée plus de renseignements sur le modèle statique du moteur.

Le fonctionnement en fréquence du moteur va nous livrer une grande part de l'information du moteur. Les termes fréquentiels offrent des renseignements essentiels sur l'indiscrétion dynamique du moteur. Nous constatons en effet, qu'elle n'est pas causée par les aimants, ni le bobinage du stator, mais uniquement par les défauts de construction de la machine : trou de l'alimentation, spires de tête de bobine, excentricité, mésalignement.

L'identification magnétodynamique livre donc la source de l'indiscrétion de ce moteur : ils s'agit de ses défauts de construction ou d'usure. Avant donc de chercher à dimensionner un blindage, nous devons nous assurer que sa construction est parfaite, car elle est le gage de sa discrétion.

Enfin, nous avons présenté une application de notre méthode d'identification et montré son intérêt dans le diagnostic par mesure de champ magnétique. Elle permet d'identifier avec précision un défaut par sa fréquence et son comportement spatial et ainsi permet de déterminer parfaitement l'origine des champ magnétiques.

# Conclusions et perspectives

## Conclusions

Pour répondre au problème de la discrétion des moteurs de propulsion navale, à savoir la propagation de champs électromagnétiques causée par ces moteurs dans le milieu marin, nous avons choisi une approche analytique. Elle repose sur l'écriture et les propriétés des champs sous forme de séries harmoniques solutions des équations de Maxwell. Son intérêt est la généralité de l'écriture qui permet d'appliquer les méthodes que nous proposons à une source quelconque de champs magnétodynamiques.

Cette thèse propose deux itinéraires pour garantir la discrétion magnétique, d'une part l'identification d'une source dynamique et d'autre part le dimensionnement d'un blindage magnétique. Sous ces deux titres se cachent les deux parties de cette thèse qui traite tout d'abord de l'identification comme un problème inverse et ensuite du dimensionnement de blindage comme une simulation directe du problème. La solution de notre problème se trouve, comme le montre la dernière partie, à la croisée des chemins ; c'est-à-dire lorsque problème inverse et direct n'ont qu'un but commun : fournir l'information la plus complète possible à propos de la source étudiée.

La définition d'une écriture magnétodynamique harmonique générale fut la première étape. Elle passe par l'écriture adaptée d'une source dans un milieu conducteur et dans le domaine de fréquences de notre étude ( $f < 1\text{kHz}$ ). Cette étape franchie, grâce à la détermination de l'écriture générale des développements harmoniques dynamiques et l'analyse de leurs propriétés, nous étions armés d'un modèle adapté à l'identification et la caractérisation de sources. L'identification permet l'extrapolation des signatures électromagnétiques basse fréquence dans un milieu conducteur, ainsi que la caractérisation des sources. Sur ce dernier point, elle propose une analyse couplée des harmoniques spatiales et fréquentielles qui permet le diagnostic précis des sources de champs. Appliquée à un moteur, cette analyse fait ressortir les défauts qui sont la cause de son indiscretion magnétique.

La seconde étape de cette thèse est consacrée au dimensionnement de blindage. Nous proposons dans un premier temps des méthodes et outils simples qui permettent d'adapter un blindage à une source. Nous y montrons qu'il est possible de dimensionner un blindage en utilisant les propriétés du développement harmonique de cette source. Enfin, le calcul du dimensionnement offre une méthode originale de calcul des champs harmoniques, basée sur les relations de surface qui permet d'une part, de simuler des problèmes généraux électromagnétiques, et d'autre part,



de fournir de l'information a priori sur une source.

Enfin, c'est la synthèse de ces deux parties, qui permet une identification robuste et le diagnostic précis des causes de l'indiscrétion ; en effet, le problème inverse puise dans l'information fournie par le problème direct et le problème direct exploite les outils du problème inverse. Nous sommes capables de déterminer les sources d'un problème d'indiscrétion magnétique et d'agir en exploitant les propriétés d'un blindage magnétique adapté.

## Perspectives

Tout d'abord, l'identification magnétodynamique permet la caractérisation du comportement d'une source, grâce à sa double analyse fréquentielle et spatiale. En comparaison à d'autres méthodes de diagnostic, comme le diagnostic par mesure de courant, elle permet de distinguer spatialement deux sources de fréquence identique. Elle a donc un fort potentiel dans l'utilisation de mesures magnétiques de champ proche pour le diagnostic d'installations électriques.

Elle propose une méthode de calcul électromagnétique dans des milieux conducteurs en découpant l'espace en région. Il s'agit d'un calcul harmonique rapide qui peut s'appliquer à des problèmes complexes, comme le calcul d'un moteur, l'aimantation ou les courants de Foucault dans la coque d'un navire, ou bien tout simplement le dimensionnement d'un blindage de forme quelconque.

Une dernière perspective concerne l'application de cette thèse : la discrétion des moteurs. L'analyse harmonique montre que les champs rayonnés par les moteurs sont causés par les défauts de construction et d'usure. Il est donc important d'établir des normes strictes de construction qui doivent assurer la discrétion magnétique des moteurs dès leur construction.

# Annexe A

## Résolution de l'équation de diffusion par la méthode des variables séparées

### A.1 Définition des repères polaires et sphériques

Les deux principaux systèmes de coordonnées que nous utilisons sont les systèmes polaires et sphériques, par définition un point  $P$  du plan ou de l'espace est alors représenté par un rayon et un ou deux angles avec la convention représentée dans la figure suivante.

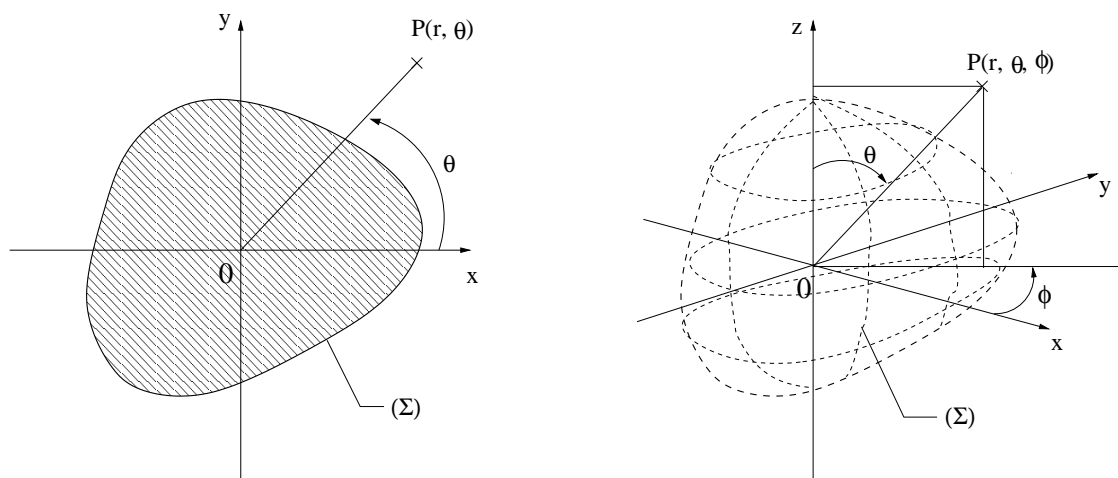


FIG. A.1 – Représentation des systèmes de coordonnées polaires et sphériques

## A.2 Résolution de l'équation de diffusion en coordonnées polaires

### A.2.1 L'équation de Laplace en coordonnées polaires

L'équation de Laplace est un cas particulier de l'équation de diffusion. Son expression en coordonnées polaires dans le plan pour un scalaire  $\Psi$  est :

$$\Delta\Psi(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} \right) = 0 \quad (\text{A.1})$$

Nous cherchons les solutions de (A.1) dites à *variables séparées* qui s'écrivent sous la forme :

$$\Psi(r, \theta) = R(r) \cdot T(\theta) \quad (\text{A.2})$$

En injectant une solution de la forme de (A.2) dans (A.1) il vient :

$$T(\theta) \cdot \left[ \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right] + \frac{R(r)}{r^2} \cdot \left[ \frac{\partial^2 T(\theta)}{\partial \theta^2} \right] = 0$$

c'est-à-dire :

$$\left[ \frac{r^2}{R(r)} \cdot \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{r}{R(r)} \cdot \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right] = -\frac{1}{T(\theta)} \cdot \frac{\partial^2 T(\theta)}{\partial \theta^2} = \lambda = C^{ste} \quad \forall(r, \theta)$$

En effet une fonction de  $\theta$  et une fonction de  $r$  ne peuvent être égales que si elles sont toutes deux constantes, il vient alors le système d'équations :

$$\begin{cases} r^2 \cdot \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + r \cdot \frac{\partial R(r)}{\partial r} - \lambda \cdot R(r) = 0 \\ \frac{\partial^2 T(\theta)}{\partial \theta^2} + \lambda \cdot T(\theta) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Commençons par résoudre la deuxième équation, qui est sans doute celle que nous connaissons le mieux. Trois cas sont à distinguer :

1.  $\lambda < 0$  : Posons  $\lambda = -a^2$ , avec  $a > 0$ , il vient alors la solution :  
 $T(\theta) = C \cdot e^{a\theta} + D \cdot e^{-a\theta}$
2.  $\lambda > 0$  : Posons  $\lambda = b^2$ , avec  $b > 0$ , il vient alors la solution :  
 $T(\theta) = C \cdot \cos(b\theta) + D \cdot \sin(b\theta)$
3.  $\lambda = 0$  : il vient la solution :  
 $T(\theta) = C\theta + D$

– Le premier cas est exclu, car il faut que la fonction  $\Psi(r, \theta)$  soit périodique de période  $2\pi$  en  $\theta$ .

– Le dernier cas est acceptable si  $C = 0$ , d'où  $T(\theta) = D$  (seul cas périodique).

- Le deuxième cas est acceptable, à condition de prendre  $b = n$  entier strictement positif.

En posant  $\lambda = n^2$ , la solution de l'équation en  $\theta$  est alors :

$$T(\theta) = C_n \cdot \cos(n\theta) + D_n \cdot \sin(n\theta) \quad (\text{A.4})$$

Reste à résoudre la première équation de (A.3) avec  $\lambda = n^2$ , soit :

$$\begin{cases} r^2 \cdot \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + r \cdot \frac{\partial R(r)}{\partial r} - n^2 \cdot R(r) = 0 \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Pour les plus savants d'entre nous, il s'agit de l'équation d'Euler-Cauchy dont la solution est :

$$\begin{cases} R(r) = A_n \cdot r^n + B_n \cdot r^{-n} & \forall n \in \mathbb{N}^* \\ R(r) = A_0 \cdot \ln(r) + B_0 & n = 0 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Les deux équations différentielles (A.3) font apparaître des fonctions propres qui dépendent de  $n$  :

$$\begin{cases} \Psi_n(r, \theta) = [A_n \cdot r^n + B_n \cdot r^{-n}] \cdot [C_n \cdot \cos(n\theta) + D_n \cdot \sin(n\theta)] & \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \Psi_0(r, \theta) = [A_0 \cdot \ln(r) + B_0] & n = 0 \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

La solution générale de l'équation de Laplace en coordonnées polaires s'écrit comme la superposition de ces fonctions propres, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \Psi(r, \theta) = & \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cdot r^n + B_n \cdot r^{-n}] \cdot [C_n \cdot \cos(n\theta) + D_n \cdot \sin(n\theta)] \\ & + [A_0 \cdot \ln(r) + B_0] \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

### A.2.2 L'équation de diffusion en coordonnées polaires

L'équation de diffusion prend en compte le cas statique : si  $\omega = 0$  elle s'écrit comme l'équation de Laplace en coordonnées polaires que nous avons déjà traitée. Une partie de la solution générale de l'équation de diffusion est donc :

$$\begin{aligned} \Psi_1(r, \theta) = & \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cdot r^n + B_n \cdot r^{-n}] \cdot [C_n \cdot \cos(n\theta) + D_n \cdot \sin(n\theta)] \\ & + [A_0 \cdot \ln(r) + B_0] \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

## Le cas Dynamique

Si  $\omega$  n'est pas nul, le potentiel est une grandeur qui dépend du temps et l'équation à résoudre est celle de la diffusion. Il y a cependant une discussion suivant la valeur de  $\sigma$ .

### Résolution avec $\sigma = 0$

Dans l'air et les matériaux non conducteurs nous avons  $\sigma = 0$  et dans ce cas l'équation de diffusion se résume de nouveau à l'équation de Laplace dont nous connaissons les solutions statiques. Cependant elles dépendent du temps et s'écrivent :

$$\Psi_2(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A'_n \cdot r^n + B'_n \cdot r^{-n}] \cdot [C'_n \cdot \cos(n\theta) + D'_n \cdot \sin(n\theta)] \cdot e^{j\omega t} + [A'_0 \cdot \ln(r) + B'_0] \cdot e^{j\omega t} \quad (\text{A.10})$$

La solution générale de l'équation de diffusion dans un milieu où  $\sigma = 0$  est une solution de type statique pulsante.

### Résolution avec $\sigma \neq 0$

Ce cas correspond à un matériau conducteur de conductivité électrique  $\sigma$  donnée. Nous définirons alors l'épaisseur de peau  $\delta$  :  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}$ . Ainsi l'équation de diffusion s'écrit :

$$\Delta\Psi(r, \theta) - \frac{2j}{\delta^2} \cdot \Psi(r, \theta) = 0$$

soit en coordonnées polaires :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\Psi(r, \theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2\Psi(r, \theta)}{\partial\theta^2} \right) - \frac{2j}{\delta^2} \cdot \Psi(r, \theta) = 0$$

Nous cherchons une nouvelle fois les solutions de ce problème à variables séparées qui s'écrivent :

$$\Psi(r, \theta) = R(r) \cdot T(\theta)$$

En injectant une solution de cette forme dans l'équation précédente nous arrivons à l'écriture du problème sous la forme différentielle :

$$T(\theta) \cdot \left[ \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right] + \frac{R(r)}{r^2} \cdot \left[ \frac{\partial^2 T(\theta)}{\partial \theta^2} \right] - \frac{2j}{\delta^2} \cdot R(r) \cdot T(\theta) = 0$$

que nous pouvons encore écrire :

$$\left[ \frac{r^2}{R(r)} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{r}{R(r)} \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right] - \frac{2jr^2}{\delta^2} = - \left[ \frac{1}{T(\theta)} \frac{\partial^2 T(\theta)}{\partial \theta^2} \right] = \lambda = C^{ste} \quad \forall(r, \theta)$$

En effet une fonction de  $\theta$  et une fonction de  $r$  ne peuvent être égales à une constante près que si elles sont toutes deux constantes, il vient alors le système d'équations

différentielles :

$$\begin{cases} r^2 \cdot \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + r \cdot \frac{\partial R(r)}{\partial r} - \left( \lambda + \frac{2jr^2}{\delta^2} \right) \cdot R(r) = 0 \\ \frac{\partial^2 T(\theta)}{\partial \theta^2} + \lambda \cdot T(\theta) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

La deuxième équation différentielle a déjà été résolue au cours du section précédent, en prenant  $\lambda = n^2$  la solution en  $\theta$  est :

$$T(\theta) = C_n \cdot \cos(n\theta) + D_n \cdot \sin(n\theta)$$

Il reste donc à résoudre l'équation différentielle :

$$\begin{cases} r^2 \cdot \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + r \cdot \frac{\partial R(r)}{\partial r} - \left( n^2 + \frac{2jr^2}{\delta^2} \right) \cdot R(r) = 0 \\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Les fonctions solutions de ce type d'équation sont les fonctions de Bessel, dans notre cas les solutions s'écrivent :

$$R(r) = A_n'' \cdot I_n\left((1+j)\frac{r}{\delta}\right) + B_n'' \cdot K_n\left((1+j)\frac{r}{\delta}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

où  $I_n$  et  $K_n$  sont les fonctions de Bessel de seconde espèce.

Dans ce cas la solution de l'équation de Laplace s'écrit donc :

$$\Psi_3(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n'' I_n\left((1+j)\frac{r}{\delta}\right) + B_n'' K_n\left((1+j)\frac{r}{\delta}\right)] \cdot [C_n'' \cdot \cos(n\theta) + D_n'' \cdot \sin(n\theta)] \quad (\text{A.12})$$

### A.2.3 Écriture de la solution générale

L'écriture la plus générale la solution de l'équation de diffusion en coordonnées polaires est :

$$\begin{aligned} \Psi(r, \theta, t) = & [A_0 \cdot \ln(r) + B_0] + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cdot r^n + B_n \cdot r^{-n}] \cdot [C_n \cdot \cos(n\theta) + D_n \cdot \sin(n\theta)] \\ & + [A'_0 \cdot \ln(r) + B'_0] \cdot e^{j\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} [A'_n \cdot r^n + B'_n \cdot r^{-n}] \cdot [C'_n \cdot \cos(n\theta) + D'_n \cdot \sin(n\theta)] \cdot e^{j\omega t} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} [A_n'' I_n\left((1+j)\frac{r}{\delta}\right) + B_n'' K_n\left((1+j)\frac{r}{\delta}\right)] \cdot [C_n'' \cdot \cos(n\theta) + D_n'' \cdot \sin(n\theta)] \cdot e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Mais cette solution est très générale, en particulier le milieu dans lequel nous cherchons à résoudre cette équation est caractérisé par une valeur unique pour  $\sigma$ . La solution dépend du milieu de sorte que nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
 & \star Si \quad \sigma = 0 \\
 \Psi(r, \theta, t) &= [A_0 \cdot \ln(r) + B_0] + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cdot r^n + B_n \cdot r^{-n}] \cdot [C_n \cdot \cos(n\theta) + D_n \cdot \sin(n\theta)] \\
 &+ [A'_0 \cdot \ln(r) + B'_0] \cdot e^{j\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} [A'_n \cdot r^n + B'_n \cdot r^{-n}] \cdot [C'_n \cdot \cos(n\theta) + D'_n \cdot \sin(n\theta)] \cdot e^{j\omega t} \\
 & \star Si \quad \sigma \neq 0 \\
 \Psi(r, \theta, t) &= [A_0 \cdot \ln(r) + B_0] + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cdot r^n + B_n \cdot r^{-n}] \cdot [C_n \cdot \cos(n\theta) + D_n \cdot \sin(n\theta)] \\
 &+ \sum_{n=0}^{\infty} [A''_n I_n((1+j)\frac{r}{\delta}) + B''_n \cdot K_n((1+j)\frac{r}{\delta})] \cdot [C''_n \cdot \cos(n\theta) + D''_n \cdot \sin(n\theta)] \cdot e^{j\omega t}
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

## A propos de l'écriture des solutions

Il est intéressant de remarquer que les solutions de l'équation différentielle précédente écrite en (A.14) sont continues en fonction de  $\sigma$ , en particulier au voisinage de zéro.

Pour mettre en évidence ce que nous venons d'énoncer il convient de donner quelques résultats concernant les fonctions de Bessel de seconde espèce et en particulier leur développement asymptotique au voisinage de zéro :

$$I_m(\omega) \sim \frac{1}{m!} \left(\frac{1}{2}\omega\right)^m, \quad K_m(\omega) \sim \begin{cases} \ln(\omega) & m = 0 \\ \frac{1}{2}(m-1)! \left(\frac{1}{2}\omega\right)^{-m} & m \neq 0 \end{cases} \tag{A.15}$$

Reprenons donc l'expression (A.14), en particulier lorsque  $\sigma \neq 0$  et faisons le développement asymptotique lorsque  $\sigma \sim 0$ , il vient facilement que nous pouvons écrire le développement asymptotique sous la forme :

$$\begin{aligned}
 V(r, \theta, t) &\sim [A_0 \cdot \ln(r) + B_0] + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cdot r^n + B_n \cdot r^{-n}] \cdot [C_n \cdot \cos(n\theta) + D_n \cdot \sin(n\theta)] \\
 &+ [A'''_0 \cdot \ln(r) + B'''_0] \cdot e^{j\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} [A'''_n \cdot r^n + B'''_n \cdot r^{-n}] \cdot [C'''_n \cdot \cos(n\theta) + D'''_n \cdot \sin(n\theta)] \cdot e^{j\omega t}
 \end{aligned}$$

Nous venons de démontrer que les solutions sont continues pour tout  $\sigma$  (elles le sont également au voisinage de  $\omega = 0$  et donc pour tout couple  $(\sigma, \omega) \in \mathbb{R}^2$ ).

## A.3 Résolution de l'équation de diffusion en coordonnées sphériques

### A.3.1 L'équation de Laplace en coordonnées sphériques

L'expression de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\Delta\Psi(r, \theta, \phi) = \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial\Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial\Psi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} = 0 \quad (\text{A.16})$$

Si nous cherchons des solutions du type  $\Psi = R(r) \cdot S(\theta, \phi)$ , elle prend la forme :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{S} \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial S}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{S \sin^2\theta} \frac{\partial^2 S}{\partial\phi^2} = 0 \quad (\text{A.17})$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) = -\frac{1}{S} \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial S}{\partial\theta} \right) - \frac{1}{S \sin^2\theta} \frac{\partial^2 S}{\partial\phi^2} = C^{ste} \quad (\text{A.18})$$

En effet, une fonction de la variable  $r$  et une fonction des deux variables angulaires  $\theta$  et  $\phi$  sont égales que si elles sont toutes deux égales à une constante (dans notre cas nous choisirons  $C^{ste} = n(n+1)$ ), il vient alors le système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) - n(n+1) \cdot R = 0 \\ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial S}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 S}{\partial\phi^2} + n(n+1) \cdot S = 0 \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

Si de plus nous posons encore  $S(\theta, \phi) = T(\theta) \cdot F(\phi)$  il vient de (A.19) le système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial\phi^2} + m^2 \cdot F = 0 \\ \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial T}{\partial\theta} \right) + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] \cdot T = 0 \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

En posant  $\cos\theta = u$  dans cette dernière équation il vient alors l'équation :

$$(1-u^2) \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial u^2} - 2u \cdot \frac{\partial T}{\partial u} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{(1-u^2)} \right] \cdot T = 0 \quad (\text{A.21})$$

dont les solutions sont les fonctions de Legendre de première et seconde espèce  $P_n^m$  et  $Q_n^m$ . Quand  $n$  et  $m$  sont entiers les solutions des équations différentielles précédentes sont :

$$\begin{cases} R(r) = A \cdot r^n + \frac{B}{r^{n+1}} \\ T(\theta) = C P_n^m(\cos\theta) + D Q_n^m(\cos\theta) \\ F(\phi) = C' \cos m\phi + D' \sin m\phi \end{cases} \quad (\text{A.22})$$



La solution la plus générale de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques s'écrit donc :

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_n \cdot r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right] \sum_{m=0}^n [B_{n,m} P_n^m(\cos \theta) + C_{n,m} Q_n^m(\cos \theta)] \cdot [B'_m \cos m\phi + C'_m \sin m\phi] \quad (\text{A.23})$$

Mais pour décrire le champ magnétique nous ne garderons que les fonctions de Legendre bornées pour tout  $\theta$ , la solution générale de l'équation de Laplace s'écrit alors à l'aide des harmoniques sphériques :

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[ A_n \cdot r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right] \cdot [B'_m \cos m\phi + C'_m \sin m\phi] \cdot P_n^m(\cos \theta) \quad (\text{A.24})$$

### A.3.2 L'équation de diffusion en coordonnées sphériques

L'équation de diffusion prend en compte le cas statique : si  $\omega = 0$  elle s'écrit comme l'équation de Laplace en coordonnée polaire que nous avons déjà traitée. Une partie de la solution générale de l'équation de diffusion est donc :

$$\Psi_1(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[ A_n \cdot r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right] \cdot [B'_m \cos m\phi + C'_m \sin m\phi] \cdot P_n^m(\cos \theta) \quad (\text{A.25})$$

### Le cas Dynamique

Si  $\omega$  n'est pas nul, le potentiel est une grandeur qui dépend du temps et l'équation à résoudre est celle de la diffusion. Il y a cependant une discussion suivant la valeur de  $\sigma$ .

#### Résolution avec $\sigma = 0$

Dans l'air nous avons  $\sigma = 0$  et dans ce cas l'équation de diffusion se résume de nouveau à l'équation de Laplace dont nous connaissons les solutions statiques. Cependant elles dépendent du temps et s'écrivent :

$$\Psi_2(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[ A_n \cdot r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right] \cdot [B'_m \cos m\phi + C'_m \sin m\phi] \cdot P_n^m(\cos \theta) \cdot e^{j\omega t} \quad (\text{A.26})$$

La solution générale de l'équation de diffusion dans un milieu où  $\sigma = 0$  est une solution de type statique pulsante.

**Résolution avec  $\sigma \neq 0$** 

Dans ce cas nous sommes dans un matériau et la valeur de  $\sigma$  est donnée et l'équation de diffusion en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} \right) - j\sigma\mu\omega \cdot \Psi = 0 \quad (\text{A.27})$$

En posant la solution  $\Psi$  sous la forme  $\Psi(r, \theta, \phi) = R(r) \cdot T(\theta) \cdot F(\phi)$ , l'équation (A.27) est séparable. Nous obtenons alors un système de trois équations différentielles dont les solutions respectives sont  $R(r)$ ,  $T(\theta)$  et  $F(\phi)$  :

$$r^2 \cdot \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + 2r \cdot \frac{\partial R(r)}{\partial r} - (j\sigma\mu\omega r^2 + n(n+1)) \cdot R(r) = 0 \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \cdot \frac{\partial T(\theta)}{\partial \theta} \right) + \left( n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \cdot T(\theta) = 0 \quad (\text{A.29})$$

$$\frac{\partial^2 F(\phi)}{\partial \phi^2} + m^2 F(\phi) = 0 \quad (\text{A.30})$$

$$(\text{A.31})$$

Les deux dernières équations sont identiques à celles que nous avons résolues en magnétostatique, elles font apparaître les fonctions harmoniques sphériques, de sorte que :

$$Y_n^m(\theta, \phi) = [A_m \cos(m\theta) + B_m \sin(m\theta)] \cdot [C_{n,m} P_n^m(\cos(\theta)) + D_{n,m} Q_n^m(\cos(m\theta))] \quad (\text{A.32})$$

En utilisant les harmoniques sphériques de surfaces de degré  $n$  les solutions des équations différentielles précédentes s'écrivent :

$$Y_n(\theta, \phi) = \sum_{m=0}^n [a_{n,m} \cos(m\theta) + b_{n,m} \sin(m\theta)] \cdot P_n^m(\cos(\theta)) \quad (\text{A.33})$$

Nous avons déterminé les fonctions harmoniques sphériques, il reste à identifier la fonction radiale  $R(r)$  qui satisfait (??). En écrivant  $R(r) = (k \cdot r)^{\frac{1}{2}} \cdot L(r)$  avec  $k = \frac{(1+j)}{\delta}$  et  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\omega}}$  [Str41].  $L(r)$  vérifie alors l'équation différentielle :

$$r^2 \cdot \frac{\partial L(r)}{\partial r^2} + r \cdot \frac{\partial L(r)}{\partial r} - \left[ k^2 r^2 + \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \right] \cdot L(r) = 0 \quad (\text{A.34})$$

L'équation (A.28) admet pour solution les fonctions de Bessel modifiées de première espèce et de seconde espèce : de sorte que les  $L(r)$  s'écrivent :

$$L(r) = C_n'' \cdot I_{n+\frac{1}{2}}(kr) + D_n'' \cdot K_{n+\frac{1}{2}}(kr) \quad (\text{A.35})$$

d'où :

$$R(r) = \frac{1}{\sqrt{kr}} [C_n'' \cdot I_{n+\frac{1}{2}}(kr) + D_n'' \cdot K_{n+\frac{1}{2}}(kr)] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{A.36})$$

In fine, la solution complexe  $\Psi(r, \theta, \phi)$  de l'équation de diffusion est :

$$\Psi(r, \theta, \phi, t) = \frac{1}{\sqrt{kr}} \sum_{n=0}^{\infty} [C_n'' \cdot I_{n+\frac{1}{2}}(kr) + D_n'' \cdot K_{n+\frac{1}{2}}(kr)] \cdot Y_n(\theta, \phi) \cdot e^{j\omega t} \quad (\text{A.37})$$

★Si  $\sigma = 0$

$$\begin{aligned} \Psi(r, \theta, \phi, t) = & \sum_{n=0}^{\infty} \left[ C_n \cdot r^n + \frac{D_n}{r^{n+1}} \right] \sum_{m=0}^n [A_{n,m} \cos m\phi + B_{n,m} \sin m\phi] \cdot P_n^m(\cos \theta) \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ C_n' \cdot r^n + \frac{D_n'}{r^{n+1}} \right] \sum_{m=0}^n [A_{n,m}' \cos m\phi + B_{n,m}' \sin m\phi] \cdot P_n^m(\cos \theta) \cdot e^{j\omega t} \end{aligned}$$

★Si  $\sigma \neq 0$

$$\begin{aligned} \Psi(r, \theta, \phi, t) = & \sum_{n=0}^{\infty} \left[ C_n \cdot r^n + \frac{D_n}{r^{n+1}} \right] \sum_{m=0}^n [A_{n,m} \cos m\phi + B_{n,m} \sin m\phi] \cdot P_n^m(\cos \theta) \\ & + \left( \frac{1}{\sqrt{kr}} \right) \sum_{n=0}^{\infty} [C_n'' I_{n+\frac{1}{2}}(kr) + D_n'' K_{n+\frac{1}{2}}(kr)] \sum_{m=0}^n [A_{n,m}'' \cos m\phi + B_{n,m}'' \sin m\phi] \cdot P_n^m(\cos \theta) \cdot e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

### A.3.3 Remarque fondamentale à propos des écritures dynamiques

Les deux écritures des sources dynamiques, en coordonnées sphériques (A.38) ou polaires (A.14), doivent encore être remaniées pour permettre l'identification. Tout d'abord, nous pouvons remarquer que l'astuce proposée par Stratton qui consiste à poser  $R(r) = (k \cdot r)^{-\frac{1}{2}} \cdot L(r)$  pour résoudre l'équation de diffusion en coordonnées sphériques est discutable, puisque tout multiple de  $R(r)$  est aussi solution. A ce propos, Smythe [Smy68] propose plutôt de poser  $R(r) = (r)^{-\frac{1}{2}} \cdot L(r)$ . Le choix de ce changement de variable est lourd de conséquences sur les coefficients harmoniques identifiables dans un milieu conducteur.

En effet, les coefficients harmoniques identifiés à chaque fréquence dans un milieu conducteur dépendront de la fréquence et nous ne pouvons pas trouver une source dont les coefficients sont uniques pour toutes fréquences du fait de la non linéarité des fonctions de Bessel (ce qui n'est pas le cas dans un milieu non conducteur où il n'y a pas de fonction de Bessel).

Nous allons proposer de normaliser les solutions harmoniques, précédentes afin d'assurer la continuité entre les solutions dynamiques et le cas statique. Cette approche n'est pas seulement la plus élégante d'un point de vue mathématique, elle est aussi celle qui est la plus proche de la physique puisqu'elle garantit la continuité des coefficients entre le statique et le dynamique.

Les fonctions de Bessel admettent les équivalences suivantes [Ang72] quand  $k$

tend vers zéro :

$$I_\nu(kr) \sim \frac{(kr)^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}, \quad K_\nu(kr) \sim \frac{2^{(\nu-1)} \Gamma(\nu)}{(kr)^\nu} \quad (\text{A.39})$$

alors les solutions sphériques et polaires de l'équation de diffusion sont équivalentes à :

$$\Psi(r, \theta, \phi, t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \left[ C_n^{3D} \cdot \frac{(kr)^n}{2^{(n+\frac{1}{2})} \Gamma(n + \frac{3}{2})} + D_n^{3D} \cdot \frac{2^{(n-\frac{1}{2})} \Gamma(n + \frac{1}{2})}{(kr)^{(n+1)}} \right] \cdot Y_n(\theta, \phi) \cdot e^{j\omega t} \quad (\text{A.40})$$

pour le cas sphérique et pour le cas polaire :

$$\Psi(r, \theta, t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_n^{2D} \cdot \frac{(kr)^n}{2^n \Gamma(n + 1)} + B_n^{2D} \cdot \frac{2^{(n-1)} \Gamma(n)}{(kr)^n} \right] \cdot [C_n'' \cos n\theta + D_n'' \sin n\theta] \cdot e^{j\omega t} \quad (\text{A.41})$$

Nous pouvons alors normaliser les développements de façon à assurer la continuité des écritures statiques et dynamiques, nous proposons une écriture normalisée des solutions de l'équation de diffusion sous la forme :

en coordonnées sphériques :

$$\Psi(r, \theta, \phi, t) = \left( \frac{1}{\sqrt{kr}} \right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_n^s E_n \cdot I_{n+\frac{1}{2}}(kr) + \beta_n^s F_n \cdot K_{n+\frac{1}{2}}(kr)] \cdot Y_n(\theta, \phi) \cdot e^{j\omega t}$$

en coordonnées polaires :

$$\Psi(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_n^p A_n'' \cdot I_n(kr) + \beta_n^p B_n'' \cdot K_n(kr)] \cdot [C_n'' \cdot \cos(n\theta) + D_n'' \cdot \sin(n\theta)]$$

$$\text{avec : } \alpha_n^s = \frac{2^{(n+\frac{1}{2})} \cdot \Gamma(n + \frac{3}{2})}{k^n} \quad \beta_n^s = \frac{(k)^{(n+1)}}{2^{(n-\frac{1}{2})} \cdot \Gamma(n + \frac{1}{2})}$$

$$\text{et : } \alpha_n^p = \frac{2^n \cdot \Gamma(n + 1)}{k^n} \quad \beta_n^p = \frac{k^n}{\Gamma(n) \cdot 2^{(n-1)}}$$

(A.42)

Cette écriture est identique quel que soit le changement de variable utilisé pour résoudre l'équation de diffusion et assure la continuité des coefficients du statique vers le dynamique.



# Annexe B

## Problèmes inverses, quêtes d'informations

Dans cette annexe, nous nous limiterons à l'étude de l'inversion de problèmes directs discrets et linéaires ce qui est parfaitement cohérent avec les caractéristiques des problèmes directs que nous rencontrerons. Nous utiliserons une représentation algébrique entre l'espace des mesures  $\mathcal{D}$  et l'espace des paramètres  $\mathcal{M}$ , afin d'explicitier au mieux notre démarche et la raison pour laquelle nous considérons qu'un problème inverse est bien plus une quête d'information que juste une inversion mathématique. Commençons en explicitant les notions qui sont liées au problème inverse.

### B.1 Définitions

Qu'est ce qu'un problème inverse ? Nous pouvons le définir comme la démarche qui consiste à évaluer des paramètres  $\mathbf{m}$  physiques à l'aide de mesures  $\mathbf{d}$  fournies par l'expérience, connaissant un modèle mathématique du problème direct qui donne explicitement  $\mathbf{d}$  en fonction de  $\mathbf{m}$ .

#### B.1.1 Le problème direct

Le problème direct est l'étape qui consiste à paramétrer au mieux un système physique afin d'obtenir l'adéquation entre ses paramètres et la physique. Cette étape est marquée par le choix d'un modèle dont les paramètres sont pertinents. Nous avons déjà insisté sur l'importance du choix du modèle dans l'introduction générale et nous allons comprendre que cette étape doit anticiper le problème inverse tant du point de vue de la dimension de l'espace des paramètres<sup>1</sup> que vis-à-vis de tout apport d'informations<sup>2</sup>.

Un système physique dépend donc de paramètres, symboliquement notés  $\mathbf{m}$ . Ces paramètres sont particulièrement liés à la géométrie du système, aux sources

---

<sup>1</sup>C'est la globalité : nous essayerons avec peu de paramètres de représenter au mieux un système complexe

<sup>2</sup>C'est le caractère informatif du modèle : si le modèle permet une analyse qualitative elle doit pouvoir être glissée dans le problème direct

et aux propriétés des matériaux. Le problème direct est le calcul de la réponse  $\mathbf{d}$  à partir des paramètres  $\mathbf{m}$ . Le modèle physique choisi donne alors la réponse  $\mathbf{d}$  du système physique comme fonction explicite :

$$\mathbf{d} = \mathbf{A}(\mathbf{m}) \quad (\text{B.1})$$

où  $\mathbf{A}$  est un opérateur qui contient la physique du système étudié, c'est-à-dire un modèle mathématique du système.

### B.1.2 Le problème inverse

Il s'agit généralement de situations où le système est en partie ou entièrement inconnu, mais où nous avons accès à des informations sur ce dernier, soit par des mesures de sa réponse, soit par des connaissances a priori de son état. Simplement, au stade où nous en sommes, nous dirons du problème inverse qu'il est la démarche inverse du problème de modélisation. C'est-à-dire qu'il utilise l'information concernant le modèle physique *à l'envers* : à partir d'une connaissance (partielle) de ses sorties vers les paramètres. Le problème inverse revient donc à trouver un jeu de paramètre  $\mathbf{m}_0$  pour toute mesure  $\mathbf{d}$ , ce que nous résumons :

$$\text{Trouver } \mathbf{m}_0 \in \mathcal{M} \text{ tel que } \quad \mathbf{A}\mathbf{m}_0 = \mathbf{d} \quad \forall \mathbf{d} \in \mathcal{D} \quad (\text{B.2})$$

avec  $\mathbf{m}_0$  est le jeu de paramètres le *plus proche* de la physique.

### B.1.3 Les problèmes bien/mal posés

Au sens de Hadamard un problème est bien posé s'il réalise les trois conditions :

1. Existence d'une solution
2. Unicité de la solution
3. Stabilité de la réponse vis-à-vis de petites erreurs (bruits de mesures, erreurs de modélisation).

Ce qui sous-entend, bien évidemment, que le modèle doit être cohérent avec la physique et en accord avec la mesure. Mais aussi que les paramètres réels du modèle sont *indépendants* de la qualité de la mesure. Dans l'immense majorité des cas, le problème direct est bien posé, quand la plupart des problèmes inverses sont mal posés.

### B.1.4 Définition algébrique

Les problèmes que nous étudions sont discrets, c'est-à-dire que nous possédons un nombre fini d'inconnues et de mesures. Nous avons donc tout intérêt à utiliser une définition algébrique du problème inverse à l'aide d'espaces vectoriels de dimension finie pour situer mathématiquement l'inversion. Définissons deux espaces Hilbertiens  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{D}$ , respectivement l'espace des paramètres et l'espace des mesures (Fig.B.1).

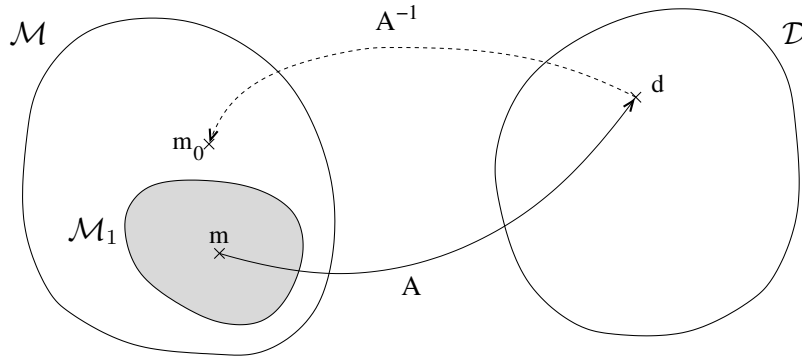


FIG. B.1 – Espaces de Hilbert des paramètres du modèle  $\mathcal{M}$  et des mesures  $\mathcal{D}$ .

Le problème direct peut alors être modélisé par un opérateur  $\mathbf{A} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{D}$ . Le problème inverse consiste alors à trouver un vecteur  $\mathbf{m}_0$  dans  $\mathcal{M}$  tel que :  $\mathbf{A}(\mathbf{m}_0) = \mathbf{d}$  pour tout vecteur  $\mathbf{d}$  appartenant à  $\mathcal{D}$ . Rappelons que nous n'utiliserons que des opérateurs linéaires, ainsi  $\mathbf{A}$  est défini comme une application linéaire de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{D}$  et :

$$\mathbf{d} = \mathbf{A}\mathbf{m} \quad (\text{B.3})$$

Au cours du paragraphe précédent nous avons introduit les trois conditions de Hadamard pour qu'un problème soit bien posé. Au regard de la définition algébrique du problème ces conditions sont toujours respectées si l'application  $\mathbf{A}$  est bijective, ce qui sous-entend que  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{D}$  sont isomorphes et revient à dire que  $\mathbf{A}$  est inversible. Malheureusement, dans l'immense majorité des cas la matrice  $\mathbf{A}$  n'est pas inversible. Reprenons les conditions de Hadamard avec un oeil algébrique pour définir quelles propriétés de  $\mathbf{A}$  se cache derrière chaque condition pour le problème inverse :

1. L'existence d'une solution nécessite l'appartenance de  $\mathbf{d}$  à  $\text{Im}(\mathbf{A})$ . En d'autres termes si nous voulons qu'il existe une solution il faut que  $\mathbf{A}$  soit surjective. Si  $\mathbf{d}$  est un vecteur de mesures et que notre modélisation est cohérente nous pouvons affirmer que  $\mathbf{A}$  est surjective, à condition que le bruit sur les mesures n'entraîne pas d'incohérences vis-à-vis du modèle.
2. L'unicité de la solution, si celle-ci existe, équivaut à  $\text{Ker}(\mathbf{A}) = \{0\}$ , ce qui est possible uniquement si les dimensions des deux espaces sont identiques. Or, au cours de cette thèse nous travaillerons essentiellement avec des dimensions différentes. En effet, nous avons plus de paramètres à identifier que de mesures. Dans ce cas,  $\mathbf{A}$  n'est pas injective ce qui entraîne naturellement que le problème inverse n'a pas de solution unique.
3. Enfin la stabilité du problème inverse dépend des deux points précédents : si le vecteur  $\mathbf{d}$  est bruité il faut d'une part qu'il reste dans  $\text{Im}(\mathbf{A})$ , mais aussi que deux vecteurs différents et bruités soient distinguables. Enfin si le modèle est incertain, il faut que  $\mathbf{d}$  appartienne encore à  $\text{Im}(\mathbf{A})$  et que  $\mathbf{A}$  soit injective pour que le problème soit bien posé.

En somme, ce qu'Hadamard préconise est que la matrice  $\mathbf{A}$  soit la plus bijective



possible<sup>3</sup>, ce qui ne sera pas notre cas puisque les dimensions des deux espaces ne correspondent pas. Nous supposons dans la suite de cet exposé que notre modèle est assez cohérent avec la physique pour que tout vecteur  $\mathbf{d}$  de  $\mathcal{D}$  ait au moins un antécédent  $\mathbf{m}_0$  dans  $\mathcal{M}$  ( $\mathbf{A}$  est donc surjective du fait que notre modèle est cohérent et que la mesure est de qualité<sup>4</sup>).

### B.1.5 Quasi-solution d'un problème inverse

De façon générale, si le problème est mal posé la matrice  $\mathbf{A}$  n'est pas inversible et nous chercherons des solutions  $\mathbf{m}_0$  au sens des moindres carrés, dites *quasi-solutions* du problème inverse et qui sont définies à l'aide de la norme sur  $\mathcal{D}$  telles que :

$$\min_{\mathbf{m} \in \mathcal{M}} \|\mathbf{A}\mathbf{m} - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 \quad (\text{B.4})$$

Il s'agit donc de trouver une solution au problème inverse  $\mathbf{m}_0$  qui n'est pas l'inverse (puisque  $\mathbf{A}^{-1}$  n'existe pas), mais qui minimise la distance entre la mesure et le problème direct. La représentation matricielle permet d'évaluer facilement la valeur de  $\mathbf{m}_0$ , pour cela nous définissons la forme linéaire  $f$  à l'aide du produit scalaire sur  $\mathcal{D}$  :

$$f(\mathbf{m}) = \|\mathbf{A}\mathbf{m} - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 = (\mathbf{A}\mathbf{m} - \mathbf{d})^t \cdot (\mathbf{A}\mathbf{m} - \mathbf{d}) \quad \forall \mathbf{m} \in \mathcal{M} \quad (\text{B.5})$$

Le vecteur  $\mathbf{m}_0$  solution au sens des moindres carrés est celui pour lequel  $f(\mathbf{m})$  est minimum. Classiquement pour estimer le minimum nous calculons la différentielle de  $f(\mathbf{m})$  :

$$\delta f(\mathbf{m}) = 2(\mathbf{A}\delta\mathbf{m})^t \cdot (\mathbf{A}\mathbf{m} - \mathbf{d}) \quad (\text{B.6})$$

La quasi-solution est alors la valeur de  $\mathbf{m}_0$  qui annule (B.6) et est donnée par la formule suivante, appelée *système normal* :

$$\mathbf{m}_0 = (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^t \mathbf{d} \quad (\text{B.7})$$

Nous comprenons mieux pourquoi l'unicité de la solution d'un problème inverse n'est pas garantie : la dérivé (B.6) peut s'annuler pour plusieurs vecteurs  $\mathbf{m}$  de  $\mathcal{M}$  correspondant à des minima locaux différents de la fonction  $f$ . Si la solution du système normal est proche de l'inversion elle ne garantit en aucun cas qu'il s'agit de la solution minimale sur  $\mathcal{M}$ .

### B.1.6 Problèmes conditionnellement bien-posés

Prenons un système physique dont nous connaissons un modèle certain (qui définit la matrice  $\mathbf{A}$ ) et supposons que nous connaissons l'ensemble des  $n$  paramètres (vecteur  $\mathbf{m}$ ) qui déterminent avec exactitude ce système dans l'espace vectoriel  $\mathcal{M}$  de dimension  $n$  (voir Fig.B.1). Supposons encore que nous possédons moins de

<sup>3</sup>ce qui peut être obtenu sur des sous-espaces de dimensions égales (voir pseudo-inverse)

<sup>4</sup>ou que nous ayons des informations sur l'état de ces mesures

mesures (vecteur  $\mathbf{d}$ ) de ce système que de paramètres : alors l'espace vectoriel  $\mathcal{D}$  est de dimension  $m$  tel que  $m < n$ . Nous venons d'écrire que le problème direct est parfaitement maîtrisé, c'est à dire que le vecteur  $\mathbf{d}$  est obtenu à partir de  $\mathbf{m}$  par l'application  $\mathbf{A}$  (voir Fig.B.1).

Le problème inverse consiste à retrouver  $\mathbf{m}$  à partir de  $\mathbf{d}$ . Or nous avons vu dans le paragraphe précédent que, du fait des dimensions ce problème était forcément mal posé et la solution au sens des moindres carrés n'est pas nécessairement  $\mathbf{m}$ , puisqu'il n'y a pas unicité de la solution, mais un vecteur  $\mathbf{m}_0$  minimisant (B.5). La distance entre la solution  $\mathbf{m}_0$  et les paramètres exacts attendus (nous connaissons  $\mathbf{m}$ ) peut être importante (voir Fig.B.1). Nous commençons à sentir qu'il serait plus astucieux de chercher une solution dans un certain voisinage  $\mathcal{M}_1$  de  $\mathbf{m}$  afin de contraindre le problème inverse et ainsi trouver une solution proche des paramètres réels. La définition d'un tel voisinage nécessite de l'information sur la solution. Plus la quantité d'information du problème est importante et plus ce voisinage sera restreint. Le cas extrême étant la connaissance totale des paramètres du modèle, auquel cas  $\mathcal{M}_1 = \{\mathbf{m}\}$  et nous n'avons plus aucune raison de résoudre de problème inverse.

Malheureusement, cette situation n'existe pas car les mesures sont bruitées, le modèle est imparfait et l'information que nous avons sur la source est partielle, voir inexistante. Dans le cas d'une inversion sans information a priori sur les paramètres nous verrons qu'il existe un moyen de restreindre l'espace  $\mathcal{M}$  à un sous-espace relatif au problème. Mais si nous voulons améliorer le problème inverse il nous faut rechercher un maximum d'information sur la source de façon à ce que  $\mathcal{M}_1$  soit le plus petit possible. Un apport suffisant d'information ne garantit pas l'unicité de la solution, mais garantit que cette solution sera très voisine des paramètres réels désirés. Tikhonov ([Tik76]) introduit la notion de *problèmes conditionnellement bien-posés* qui nécessitent l'existence d'information a priori sur la source : ils s'agit de problèmes inverses mal-posés mais dont les solutions sont contraintes à l'intérieur de  $\mathcal{M}_1$ , voisinage qui respecte les informations a priori sur le modèle. Il ne s'agit plus seulement de résoudre le problème inverse au sens des moindres carrés en vérifiant que la distance (B.5) dans  $\mathcal{D}$  soit minimale, nous rajoutons en plus la condition que les paramètres recherchés sont cohérents avec l'information a priori : c'est-à-dire qu'ils appartiennent au voisinage  $\mathcal{M}_1$  défini par cette information. La solution du problème inverse est alors un compromis entre le problème inverse normal (B.7) et une *fonction de stabilisation*  $\mathbf{R}$  qui limite l'ensemble des solutions à  $\mathcal{M}_1$ .

## B.2 Inversion sans information

Nous venons de voir que, lorsque nous avons un problème inverse *sous-déterminé*<sup>5</sup> un moyen de trouver une solution unique consiste à la rechercher dans un sous-espace de  $\mathcal{M}$  : c'est le principe de la *régularisation*. Ce sous-espace peut-être défini par l'information a priori sur le système, ce que nous verrons dans la

<sup>5</sup>C'est-à-dire que la dimension  $n$  de l'espace  $\mathcal{M}$  des paramètres est supérieur à la dimension  $m$  de l'espace  $\mathcal{D}$  des mesures.

prochaine section. Dans cette section nous supposons ne posséder aucune information sur le système et nous regarderons comment il est possible de régulariser le problème.

### B.2.1 La décomposition en valeurs singulières

Nous avons vu que le problème inverse peut être posé ainsi :

$$\text{Trouver } \mathbf{m} \in \mathcal{M} \text{ tel que : } \mathbf{A}\mathbf{m} = \mathbf{d} \quad \forall \mathbf{d} \in \mathcal{D} \quad (\text{B.8})$$

Si la matrice  $\mathbf{A}$  n'est pas inversible, les matrices  $(\mathbf{A}^t \mathbf{A})$  et  $(\mathbf{A} \mathbf{A}^t)$  sont carrées, symétriques et respectivement d'ordre  $n$  et  $m$ . Elles sont alors diagonalisables, c'est-à-dire qu'il existe deux bases orthonormées respectivement de  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{D}$  dans lesquelles nous pouvons les écrire comme des matrices diagonales  $\Lambda$  de rang  $r$ . Les matrices  $\Lambda$  possèdent alors  $r$  valeurs propres réelles non-négatives sur la diagonale telles que  $r \leq \inf(n, m)$ . En somme, les propriétés de ces matrices sont telles qu'il existe :

1.  $r$  valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  non nulles et classées par module décroissant.
2.  $n$  vecteurs orthonormés  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  de  $\mathcal{M}^n$ , qui constituent les colonnes d'une matrice orthogonale  $\mathbf{V}$ .
3.  $m$  vecteurs orthonormés  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$  de  $\mathcal{D}^m$ , qui constituent les colonnes d'une matrice orthogonale  $\mathbf{U}$ .

La matrice  $\mathbf{A}$  admet alors une *décomposition en valeurs singulières* :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \Lambda \mathbf{V}^t \quad (\text{B.9})$$

La matrice  $\Lambda$ , de dimension  $m \times n$ , contient les valeurs singulières de  $\mathbf{A}$  sur la diagonale c'est-à-dire que  $\lambda(i, i) = \lambda_i$  pour  $i \leq r$  sinon  $\lambda(i, j) = 0$ .

### B.2.2 Analyse du problème inverse

Étant donnée la décomposition en valeurs singulières de  $\mathbf{A}$  (B.9) nous pouvons écrire (B.8) après multiplication à gauche par  $\mathbf{U}^t$  :

$$\Lambda \mathbf{V}^t \mathbf{m} = \mathbf{U}^t \mathbf{d} \quad \text{soit} \quad \Lambda \mathbf{X} = \mathbf{Y} \quad \text{avec : } \mathbf{X} = \mathbf{V}^t \mathbf{m} \text{ et } \mathbf{Y} = \mathbf{U}^t \mathbf{d} \quad (\text{B.10})$$

Et nous voyons que cette équation met simplement en relation linéaire la projection  $\mathbf{X}$  de  $\mathbf{m}$  sur une base orthogonale de  $\mathcal{M}$  et la projection  $\mathbf{Y}$  de  $\mathbf{d}$  sur une base orthogonale de  $\mathcal{D}$ . Cette écriture va nous permettre d'explicitier plus en détail les caractéristiques de l'application  $\mathbf{A}$  que nous avons évoquées précédemment :

- Le noyau de l'application  $\mathbf{A}$  est le sous espace vectoriel  $\mathcal{M}$   $\text{Ker}(\mathbf{A}) = \text{Vect}_{\mathcal{M}}(\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$ . Ce qui justifie le fait que si le rang de  $\mathbf{A}$  n'est pas égal à la dimension des paramètres ( $r \neq n$ )  $\mathbf{A}$  ne peut pas être injective, il n'y a donc pas unicité de la solution.
- L'image de  $\mathbf{A}$  est le sous espace vectoriel de  $\mathcal{D}$   $\text{Im}(\mathbf{A}) = \text{Vect}_{\mathcal{D}}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r)$ . L'existence d'une solution nécessite donc que  $\mathbf{d}$  appartienne à  $\text{Im}(\mathbf{A})$ .

Plaçons nous maintenant dans le cas des problèmes sous-déterminés que nous pouvons rencontrer dans cette étude. La dimension de l'espace des mesures  $m$  est inférieure à celle de l'espace des paramètres  $n$ . Alors le rang  $r$  est forcément inférieur à  $m$  ( $r \leq \inf\{n, m\}$ ). Nous cherchons alors la quasi-solution du problème définie par (B.4), ce qui revient à chercher la ou les solutions d'un problème de type (B.8) dont le second membre est la projection orthogonale de  $\mathbf{d}$  sur  $\text{Im}(\mathbf{A})$ . Les quasi-solutions du problème inverse sont alors données par :

$$\mathbf{m}_0 = \sum_{i=1}^r \frac{y_i}{\lambda_i} \mathbf{v}_i + \sum_{i=r+1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \quad \text{où les } \alpha_i \text{ sont quelconques.} \quad (\text{B.11})$$

L'équation (B.11) explicite clairement le fait que le problème inverse aura une solution unique si nous pouvons déterminer les valeurs des différents coefficients  $\alpha_i$ . Autrement dit un problème inverse n'a de solution unique que lorsqu'il est complété par autant d'informations qu'il y a de coefficients  $\alpha$ .

### B.2.3 La pseudo inverse

L'approche des moindres carrés peut être exprimée en terme d'inverse généralisé d'une application linéaire. Dans ce cas nous cherchons une matrice  $\mathbf{A}^+$  rectangulaire de dimensions  $n \times m$  tel que le problème inverse s'écrive :

$$\mathbf{m} = \mathbf{A}^+ \mathbf{d} \quad (\text{B.12})$$

Pour un problème donné il existe une infinité de matrices inverses généralisées qui dépendent du choix des paramètres  $\alpha_i$  dans (B.11). Nous retiendrons en particulier l'une de ces matrices, la *pseudo inverse*  $\mathbf{A}^+$ , qui correspond à la solution  $\mathbf{m}_0$  donnée par (B.11) de norme minimale pour laquelle tous les  $\alpha_i$  sont nuls. Mais pour définir la pseudo inverse nous faisons l'hypothèse que la solution est de norme minimale, ce qui doit correspondre avec le système physique.

Cette hypothèse n'est pas toujours acceptable et ne le sera absolument pas dans le cadre de notre étude. Nous cherchons les valeurs des coefficients harmoniques d'une source  $\mathbf{m}_h$ , qui, du fait de la globalité du modèle harmonique, ont tous la même importance : l'hypothèse que tous les  $\alpha$  sont nuls est alors souvent incohérente avec le modèle.

L'action de la pseudo inverse correspond à la restriction des solutions du problème inverse au sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}$  observable  $\text{Vect}_{\mathcal{M}}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r)$  de dimension  $r$  que nous noterons  $\mathcal{M}^+$  (voir Fig.B.2). Nous venons donc de définir une application  $\mathbf{A}^+$  bijective entre les sous-espaces  $\mathcal{M}^+$  et  $\mathcal{D}$  de dimension égale à  $r$  qui correspond à un sous-problème bien posé. En général, la restriction de la solution à  $\mathcal{M}^+$  n'est pas synonyme de solution unique car les mesures sont bruitées et il nous faut encore régulariser en réduisant  $\mathcal{M}^+$  à un sous-espace adapté en fonction des valeurs singulières<sup>6</sup>.

<sup>6</sup>Nous cherchons un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}$  isomorphe à  $\mathcal{D}$

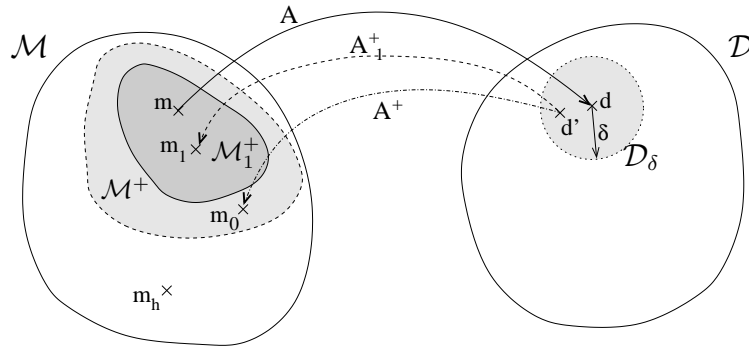


FIG. B.2 – Sous-espace vectoriel  $\mathcal{M}^+$  restriction de  $\mathcal{M}$  du point de vue de la pseudo inverse.

### B.2.4 Conditionnement

Jusqu'à présent nous nous sommes préoccupé uniquement des quasi-solutions d'un problème inverse (B.8) avec l'hypothèse que les mesures  $\mathbf{d}$  sont parfaitement connues et non bruitées. Or, nous ne pouvons en aucun cas imaginer posséder une connaissance exacte de l'état des mesures  $\mathbf{d}$ , l'étude du problème inverse serait donc incomplète sans l'étude des perturbations sur les mesures. Reprenons la quasi-solution du problème inverse précédente donnée par la pseudo-inverse  $\mathbf{A}^+$ . Rappelons que la définition de cette pseudo-inverse correspond à la restriction des solutions du problème inverse à un sous-espace  $\mathcal{M}^+$  de dimension égale au rang  $r$  de  $\mathbf{A}$  sur lequel la solution est unique dans l'hypothèse de mesures non bruitées. Cette solution est celle de norme minimale que nous pouvons écrire à l'aide de (B.11) :

$$\mathbf{m}_0 = \sum_{i=1}^r \frac{y_i}{\lambda_i} \mathbf{v}_i \quad (\text{B.13})$$

Supposons maintenant que les mesures soient bruitées avec un bruit de norme finie inférieure à  $\delta$ . Nous noterons  $\mathbf{d}' (= \mathbf{d} + \mathbf{n}_\delta)$  le vecteur des mesures bruitées (voir Fig.B.2). Nous pouvons supposer que la boule  $\mathcal{D}_\delta$  de centre  $\mathbf{d}$  et de rayon  $\delta$  est incluse dans  $\text{Im}(\mathbf{A})$  du fait de la bonne qualité de nos mesures, mais la présence de bruit a fortement tendance à réduire le rang  $r$  de la matrice  $\mathbf{A}^7$ .

A l'aide de la matrice  $\mathbf{U}^t$  définissant la projection orthogonale sur la base des  $u_i$  (B.10), nous pouvons évaluer la projection de la mesure bruitée sur cette base :

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{U}^t(\mathbf{d} + \mathbf{n}_\delta) = \mathbf{Y} + \mathbf{U}^t \mathbf{n}_\delta \quad (\text{B.14})$$

Nous avons alors, du fait de l'orthogonalité, que la norme de l'erreur liée au bruit vaut :  $\|\delta \mathbf{Y}\| = \|\mathbf{U}^t \mathbf{n}_\delta\|_D \leq \delta$ . Cette erreur pouvant a priori porter sur n'importe quelle composante, par exemple :

$$\delta \mathbf{Y} = \mathbf{U}^t \mathbf{n}_\delta = \mathbf{v}_k \cdot \delta \quad \text{avec } k \text{ fixé } \in [0, n] \quad (\text{B.15})$$

<sup>7</sup> Le bruit diminue la linéarité du système

la variation  $\delta \mathbf{m}$  de la solution  $\mathbf{m}$  par pseudo inverse de  $\mathbf{d}$  est alors :

$$\delta \mathbf{m} = \mathbf{v}_k \cdot \frac{\delta}{\lambda_k} \quad (\text{B.16})$$

ce qui correspond à une variation relative :

$$\frac{\|\delta X\|_{\mathcal{M}}}{\|\delta Y\|_{\mathcal{D}}} = \frac{1}{\lambda_k} \quad (\text{B.17})$$

Il en résulte qu'une erreur sur  $y_n$  (projection de  $\delta \mathbf{Y}$  sur le vecteur  $\mathbf{u}_n$ ) crée une perturbation ( $|\lambda_1|/|\lambda_n|$ ) fois plus grande qu'une erreur sur  $y_1$  (rappelons que les  $\lambda_i$  sont classés par ordre décroissant). Ce rapport est appelé *conditionnement* de  $\mathbf{A}$ . Il est révélateur de la sensibilité du problème aux perturbations des données. En particulier, si le conditionnement de  $\mathbf{A}$  est de l'ordre du niveau de bruit le résultat de l'inversion n'aura plus de sens.

### B.2.5 Régularisation par troncature

Soit un vecteur de mesure  $\mathbf{d}$  obtenu par le calcul du problème direct (B.8) à partir de  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{d}'$  sa mesure bruitée (voir Fig.B.2). Nous sommes toujours dans l'hypothèse d'un problème inverse sous-déterminé. La quasi-solution de norme minimale  $\mathbf{m}_0$  est donnée par la pseudo inverse  $\mathbf{A}^+$ . Nous avons déjà vu lorsque nous présentions la pseudo-inverse que l'hypothèse de norme minimale correspondait à la restriction de la solution à un sous-espace  $\mathcal{M}^+$  de dimension  $r$ . Nous venons de montrer que le bruit de mesure avait une influence sur le rang du système linéaire, ce qui peut se caractériser par la valeur du conditionnement de la matrice  $\mathbf{A}$ . Si le bruit a un niveau supérieur à l'inverse du conditionnement de  $\mathbf{A}$  nous pouvons encore affirmer que la quasi-solution  $\mathbf{m}_0$  de norme minimale n'est plus unique, car la dimension du sous-espace vectoriel des solutions observables de  $\mathbf{A}$  a diminué. Dans ce cas, la solution  $\mathbf{m}_0$  obtenue par la pseudo inverse s'écrit alors :

$$\mathbf{m}_0 = \sum_{i=1}^{r'} \frac{y_i}{\lambda_i} \mathbf{v}_i + \sum_{i=r'+1}^r \frac{\alpha'_i}{\lambda_i} \mathbf{v}_i \quad \text{où les } \alpha'_i \text{ dépendent du bruit.} \quad (\text{B.18})$$

L'écriture (B.18) de la solution montre très clairement que si nous voulons toujours obtenir une solution de norme minimale qui soit unique et stable il faut réduire l'espace des paramètres solutions  $\mathcal{M}$  à un sous espace observable de  $\mathcal{M}^+$  tel que la deuxième somme de (B.18) soit nulle. Nous constatons également que cette deuxième somme est relative au bruit et est fortement pondérée par l'inverse de valeurs propres faibles, ce qui déstabilise fortement le système. Alors, pour obtenir une solution unique et stable nous éliminons les valeurs singulières gênantes de la matrice  $\Lambda$  afin que les  $\lambda_i$  les plus faibles n'interviennent plus et que le conditionnement soit acceptable vis-à-vis du bruit : c'est la *troncature*. En somme, nous définissons une pseudo-inverse tronquée qui est une bijection entre le sous-espace vectoriel  $\mathcal{M}_1^+$  des solutions du problème inverse observables en fonction du bruit et l'espace des mesures bruitées (voir Fig.B.2). Ce qui revient, en d'autres termes, à négliger les composantes des mesures portées par  $\mathbf{u}_{r'+1}, \dots, \mathbf{u}_r$  en raison de l'effet

amplificateur des plus petites valeurs singulières  $\lambda_{r'+1}, \dots, \lambda_r$  vis-à-vis des erreurs sur la solution  $\mathbf{m}_0$ .

Si la solution  $\mathbf{m}_1$  obtenue est stable et unique sur le sous-espace  $\mathcal{M}_1^+$ , elle n'est que la solution la plus proche, au sens des moindres carrés, sur un sous-espace de dimension inférieure. De ce fait, elle est uniquement satisfaisante pour résoudre des problèmes dont la simplification à un sous-espace de dimension inférieure est acceptable. C'est le cas, par exemple, si nous cherchons une répartition de grandeurs physiques à partir de données bruitées : nous trouvons alors la répartition la plus régulière possible au sens du sous-espace observable. C'est pourquoi, la méthode de la troncature des valeurs singulières est généralement utilisée pour des problèmes inverses à partir de données bruitées. Dans ce cas, la seule information nécessaire est celle du niveau de bruit. Elle donne alors la solution approchée la plus stable ce qui garantit la robustesse de l'inversion vis-à-vis du bruit.

Pour le problème de l'identification de coefficients harmoniques la régulation par troncature ne peut pas s'appliquer du fait de la globalité de la représentation. En effet, certains termes harmoniques d'ordres élevés qui correspondent à des valeurs singulières faibles sont présents dans la mesure. Ces termes dégradant considérablement le conditionnement de la matrice  $\mathbf{A}$  seront tronqués bien qu'interviennent dans la mesure. Pour cette raison, nous n'exploiterons cette méthode que lorsque la matrice  $\mathbf{A}$  sera au moins carrée et que nous aurons une idée du niveau de bruit. Dans ce cas, nous exploiterons le conditionnement de la matrice  $\mathbf{A}$  a posteriori pour déterminer de bonnes conditions de mesure et permettre d'augmenter au maximum la dimension du sous-espace  $\mathcal{M}_1^+$ . Nous déterminerons ainsi des conditions de mesures bruitées qui permettront un problème inverse stable et de dimension voisine du nombre  $n$  de paramètres.

*Remarque* : Un moyen simple d'améliorer le conditionnement de la matrice est de normaliser les colonnes de la matrices  $\mathbf{A}$ . Nous déterminons pour cela une matrice de préconditionnement  $\mathbf{W}$  carrée diagonale de dimension  $n$  dont les termes diagonaux sont les inverses des normes des colonnes de  $\mathbf{A}$ . Alors le conditionnement de la matrice  $\mathbf{A}' = \mathbf{A}\mathbf{W}$  est sensiblement amélioré, son rang est augmenté et nous avons stabilisé le problème. L'écriture généralisée de la quasi-solution s'écrit :

$$\mathbf{m}_0 = \mathbf{W}(\mathbf{A}\mathbf{W})^+ \mathbf{d} \quad (\text{B.19})$$

### B.3 Inversion et informations a priori

Dans la section précédente nous avons proposé une inversion sans information a priori sur le système physique, le modèle ou les mesures. En dépit de cette hypothèse, nous avons déterminé une solution unique à condition de réduire la dimension de l'espace des paramètres solutions. De ce fait, la quasi-solution obtenue n'était qu'une approximation de la solution réelle sur un sous-espace de  $\mathcal{M}$ , ce qui n'est pas satisfaisant puisqu'une partie de la solution ne peut être déterminée.

Plutôt que de définir un sous-espace de  $\mathcal{M}$ , nous allons maintenant définir un sous-domaine borné de  $\mathcal{M}$  et de même dimension à l'aide d'informations a priori sur

le système. Pour cet exercice, plusieurs voies sont possibles et nous retiendrons les deux courants les plus forts qui sont : la voie *analytique* développée par Tikhonov [Tik76] dont nous avons déjà posé le principe de problèmes conditionnellement bien-posés et la voie *stochastique* développée par Tarantola [Tar87] qui cherche à modéliser le système à l'aide de lois de probabilité.

### B.3.1 Les Informations a priori

Les informations a priori qui peuvent intervenir dans la résolution d'un problème inverse ne concernent pas uniquement le système étudié. Elles peuvent également porter sur les conditions de mesures, la qualité du modèle ou la connaissance partielle ou totale des paramètres recherchés. Enfin, cette information peut être tant quantitative que qualitative.

Prenons par exemple des mesures bruitées. En aucun cas il nous sera possible de déterminer avec exactitude la valeur de la mesure. En règle générale, nous nous contentons de sa valeur moyenne et d'un intervalle de confiance défini par sa variance et/ou par une *interprétation subjective* des conditions de la mesure (mesure de référence). Si nous voyons très clairement comment utiliser la moyenne de la mesure, nous ne voyons pas nécessairement comment intégrer le degré de confiance que nous accordons à cette mesure : nous touchons au but des deux méthodes que nous présenterons dans cette section.

Avant de pousser plus en avant notre raisonnement, rappelons que nous cherchons essentiellement à limiter l'ensemble des paramètres quasi-solution du problème inverse à un sous-domaine borné de  $\mathcal{M}$  pour y sélectionner les paramètres les plus cohérents avec les informations a priori. Dans cette démarche, l'information la plus importante est celle qui concerne la connaissance des paramètres réels du système.

Voici quelques exemples possibles d'informations a priori sur les paramètres  $\mathbf{m}$  d'un système [Tar82] :

1. Un ou plusieurs paramètres du système sont bornés.  
Par exemple :  $a \leq \mathbf{m}(i) \leq b$ . Alors toutes les solutions incohérentes sont exclues.
2. Il y a une relation d'ordre entre différents paramètres.  
Par exemple :  $\mathbf{m}(1) \geq \dots \geq \mathbf{m}(n)$
3. Les paramètres ont une répartition spatiale et nous savons qu'elle est régulière.
4. Nous avons plus de certitudes sur l'information concernant une partie des paramètres que sur le reste.
5. Enfin nous n'avons aucune information sur certains paramètres (ce qui peut également se traduire dans l'écriture du problème inverse).

### B.3.2 La régularisation au sens de Tikhonov

Contrairement à la régularisation par troncature des valeurs singulières qui déterminait une solution unique de norme minimale sur un sous-espace de  $\mathcal{M}$ , la



régularisation au sens de Tikhonov préserve la dimension de l'espace des paramètres. Pour ce faire, il définit un opérateur régularisant  $\mathbf{R}(d, \alpha)$  qui impose aux solutions d'appartenir à un sous-domaine  $\mathcal{M}_{Th}$  relatif à l'information a priori. Il ne s'agit plus de chercher les quasi-solutions du problème inverse qui minimisent la norme (B.4), mais de choisir parmi toutes les quasi-solutions celle qui correspond au meilleur compromis entre la cohérence vis-à-vis de l'information a priori et les mesures.

L'idée de Tikhonov est la suivante : la mesure  $\mathbf{d}$  est toujours entachée d'une erreur  $\delta$  par rapport à une mesure exacte  $\mathbf{d}_{exact}$ . Il part donc du postulat, tout à fait justifié, que la mesure est incertaine mais voisine d'une mesure exacte pour définir un voisinage de  $\mathbf{d}_{exact}$  dans  $\mathcal{D}$  contenant  $\mathbf{d}$ , ce qui s'écrit :

$$\|\mathbf{d} - \mathbf{d}_{exact}\|_{\mathcal{D}} \leq \delta \quad (\text{B.20})$$

De ce fait naturellement le problème au sens des moindres carrés ne se pose plus comme la minimisation (B.4) mais comme la recherche des éléments  $\mathbf{m}$  dans le sous-ensemble  $\mathcal{M}_\delta \subset \mathcal{M}$  des éléments  $\mathbf{m}$  vérifiant :

$$\|\mathbf{A}\mathbf{m} - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}} \leq \delta \quad (\text{B.21})$$

En introduisant l'incertitude de la mesure nous évitons une erreur dans le problème inverse, mais de ce fait nous augmentons aussi considérablement le nombre des solutions possibles. La figure (B.3) illustre très clairement ce phénomène.

Prenons un système physique parfaitement connu défini par ses paramètres  $\mathbf{m}_{exact}$ , l'application  $\mathbf{A}$  donne alors le vecteur des mesures exactes  $\mathbf{d}_{exact}$  dans  $\mathcal{D}$ . Or la mesure réelle est incertaine, c'est pourquoi nous pouvons la définir à  $\delta$  près dans un sous-ensemble de  $\mathcal{D}_\delta \subset \mathcal{D}$ .

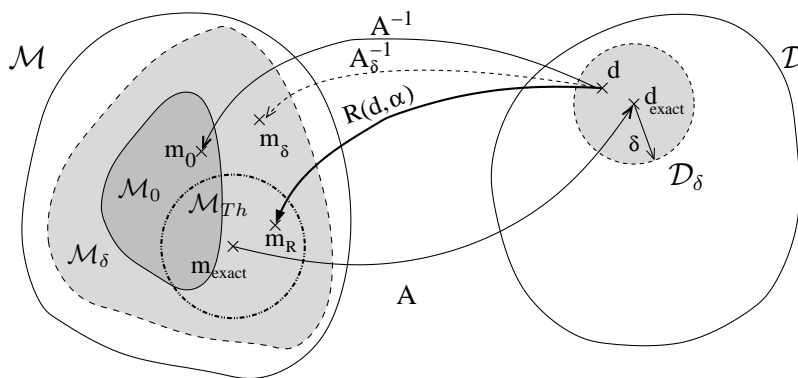


FIG. B.3 – La régularisation de Tikhonov.

Soit  $\mathbf{d}$  un vecteur de mesure de  $\mathcal{D}_\delta$  relatif à l'observation du système. Nous pouvons rechercher les quasi-solutions du problème inverse à l'aide du système normal (B.7) (nous écrivons abusivement le problème inverse  $A^{-1}$ ) dans ce cas nous trouvons un ensemble de vecteurs  $\mathbf{m}_0$  qui définissent le sous-ensemble  $\mathcal{M}_0$  des solutions possible par le système normal. Puisque les mesures sont incertaines nous pouvons affirmer qu'aucune des solutions du système normal n'est exactement

la solution  $\mathbf{m}_{exact}$  : c'est pourquoi Tikhonov cherche une solution voisine définie à un  $\delta$  près.

Les quasi-solutions  $\mathbf{m}_\delta$  du problème inverse (B.21) prennent en compte l'incertitude de la mesure et définissent un sous-espace  $\mathcal{M}_\delta$  de  $\mathcal{M}$  qui inclut nécessairement  $\mathcal{M}_0$  (voir Fig.B.3) : nous augmentons le nombre des solutions. L'idée de Tikhonov est d'avoir recours à un opérateur régularisant  $\mathbf{R}(d, \alpha)$  pour réduire l'ensemble des solutions à un sous-ensemble  $\mathcal{M}_{Th}$  de  $\mathcal{M}_\delta$  de taille réduite (diamètre). Cet opérateur dépend d'un paramètre régularisant  $\alpha$  et d'une fonctionnelle stabilisatrice  $\Omega$  qui traduit généralement l'information a priori que nous possédons sur le système. En somme cette fonctionnelle définit un voisinage de l'information a priori dans lequel nous allons chercher les solutions et le paramètre  $\alpha$  correspond à l'importance ou la certitude que nous accordons à cette information.

La régularisation au sens de Tikhonov revient à minimiser la fonctionnelle  $\Omega(\mathbf{m})$  sous la contrainte (B.21), nous cherchons alors des solutions  $\mathbf{m}_{Th}$  qui minimisent :

$$\mathbf{S}_\alpha(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = \|\mathbf{A}\mathbf{m} - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 + \alpha\Omega(\mathbf{m}) \quad (\text{B.22})$$

Ce qui correspond à la démarche que nous évoquions précédemment : être le plus proche possible de l'information a priori tout en respectant la distance entre la mesure exacte et la mesure réelle. Le paramètre de régularisation  $\alpha$  offrant un degré de liberté supplémentaire, il a un rôle d'arbitre entre proximité de la solution et des mesures et conformité à l'information (stabilité de la solution). La régularisation au sens de Tikhonov dépend donc du choix de la fonctionnelle stabilisatrice  $\Omega$  et du paramètre  $\alpha$  qui doivent traduire l'information a priori et le poids que nous lui accordons par rapport à la mesure.

### B.3.2.1 Choix de la fonctionnelle stabilisatrice

Le choix de la fonctionnelle stabilisatrice dépend du degré de connaissance a priori que nous avons du système :

- Si nous ne possédons absolument aucune information sur le système la seule fonctionnelle représentative de l'information est la fonction nulle : et nous résolvons le système normal :

$$\mathbf{m}_{Th} = (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^t \mathbf{d} \quad (\text{B.23})$$

- Lorsque notre problème inverse concerne des distributions de grandeurs physiques, nous pouvons faire des régularisations utilisant les hypothèses de norme ou d'entropie minimales ce qui impose une forte régularité de la solution (lissage). En notant  $\mathbf{L}$  la matrice de stabilisation choisie, le problème inverse est la recherche des paramètres  $\mathbf{m}_{Th}$  qui minimisent :

$$\mathbf{S}_\alpha(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = \|\mathbf{A}\mathbf{m} - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 + \alpha\|\mathbf{L}\mathbf{m}\|_{\mathcal{M}}^2 \quad (\text{B.24})$$

La solution est donnée par l'équation matricelle :

$$\mathbf{m}_{Th}(\alpha) = (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \alpha \mathbf{L}^t \mathbf{L})^{-1} \cdot \mathbf{A}^t \mathbf{d} \quad (\text{B.25})$$

- En exploitant toujours les mêmes hypothèses nous pouvons encore appliquer des pondérations. Ce qui revient à appliquer une régularité plus forte à certains paramètres du modèles ou une erreur moindres sur certains capteurs. Dans ce cas, le problème inverse est la recherche des paramètres qui minimisent :

$$\mathbf{S}_\alpha(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = \|\mathbf{W}_d \mathbf{A} \mathbf{m} - \mathbf{W}_d \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 + \alpha \|\mathbf{W}_m \mathbf{L} \mathbf{m}\|_{\mathcal{M}}^2 \quad (\text{B.26})$$

Un choix astucieux de pondération  $\mathbf{W}_d$  et  $\mathbf{W}_m$  revient à considérer la sensibilité de la matrice  $\mathbf{A}$  vis-à-vis des paramètres et vis-à-vis des mesures afin de stabiliser au maximum le problème<sup>8</sup> [Zhd02]. L'écriture matricielle du problème inverse est alors :

$$\mathbf{m}_{Th}(\alpha) = (\mathbf{A}^t \mathbf{W}_d^2 \mathbf{A} + \alpha \mathbf{L}^t \mathbf{W}_m^2 \mathbf{L})^{-1} \cdot \mathbf{A}^t \mathbf{W}_d^2 \mathbf{d} \quad (\text{B.27})$$

- Si nous connaissons des paramètres a priori du système physique  $\mathbf{m}_{prior}$  alors nous chercherons une solution voisine de ces paramètres. La fonctionnelle stabilisante la plus naturelle est celle définie par la distance au modèle a priori. Les solutions du problème inverse sont donc celles qui minimisent :

$$\mathbf{S}_\alpha(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = \|\mathbf{A} \mathbf{m} - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 + \alpha \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_{prior}\|_{\mathcal{M}}^2 \quad (\text{B.28})$$

Pour aller plus loin nous pouvons encore pondérer les mesures et les paramètres en utilisant les sensibilités. Cependant, elles ne sont pas représentatives ni de la variance réelle des paramètres vis à vis des informations a priori ni des variances des mesures<sup>9</sup>. Dans ce cas le système matriciel solution s'écrit :

$$\mathbf{m}_{Th}(\alpha) = (\mathbf{A}^t \mathbf{W}_d^2 \mathbf{A} + \alpha \mathbf{W}_m^2)^{-1} \cdot (\mathbf{A}^t \mathbf{W}_d^2 \mathbf{d} + \alpha \mathbf{W}_m^2 \mathbf{m}_{prior}) \quad (\text{B.29})$$

- Enfin nous pouvons utiliser d'autres stabilisateurs  $\Omega$  de la forme :

$$\Omega(\mathbf{m}) = \|\mathbf{L} \mathbf{m} - \mathbf{g}_{prior}\|_{\mathcal{M}}^2 \quad (\text{B.30})$$

où  $\mathbf{L}$  est une matrice de dimensions  $q \times n$  qui représente une information complémentaire sur les paramètres  $\mathbf{m}$ . Comme par exemple une relation entre paramètres. Dans ce cas, l'écriture du problème inverse pondéré sera :

$$\mathbf{m}_{Th}(\alpha) = (\mathbf{A}^t \mathbf{W}_d^2 \mathbf{A} + \alpha \mathbf{L}^t \mathbf{W}_g^2 \mathbf{L})^{-1} \cdot (\mathbf{A}^t \mathbf{W}_d^2 \mathbf{d} + \alpha \mathbf{W}_g^2 \mathbf{g}_{prior}) \quad (\text{B.31})$$

### B.3.2.2 Choix du paramètre de régularisation

Si l'opérateur de stabilisation inclut l'information a priori dans le problème inverse, le paramètre de régularisation  $\alpha$  permet de faire le meilleur choix dans l'ensemble des solutions  $\mathcal{M}_{Th}$  obtenu par une des équations précédentes. Ce choix correspond à un compromis optimal entre la satisfaction du modèle vis-à-vis des

<sup>8</sup>Ce qui est équivalent à l'astuce proposée en remarque dans (B.2.5)

<sup>9</sup>Il s'agit néanmoins de bonnes estimations

mesures et le respect de l'information a priori. En clair, il représente l'importance que nous donnons à la mesure par rapport à l'information.

La méthode la plus classique pour déterminer un coefficient  $\alpha$  optimal est basée sur le principe itératif de la courbe en L ou *L-curve* [Han97][WH96]. Il s'agit de comparer le module de la distance entre le modèle et la mesure  $\|\mathbf{A}\mathbf{m} - \mathbf{d}\|$  en fonction du module de la fonction stabilisatrice  $\|\Omega(\mathbf{m})\|$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ . La courbe en L a, comme son nom l'indique, une forme de L concave ou convexe et la valeur optimale de  $\alpha$  est celle qui correspond au point du coude du L. Il s'agit de la valeur qui donne le meilleur compromis entre la distance à la mesure (qui "fitte" les données) et l'information a priori.

Si la méthode de régularisation de Tikhonov donne d'excellents résultats, le choix du paramètre de régularisation est restrictif. Tout d'abord il impose une méthode itérative qui augmente les temps de calcul et ne garantit en aucun cas que l'information participe avec un juste poids à la résolution. En effet,  $\alpha$  est un compromis entre fidélité à la mesure et aux informations, alors que nous pouvons encore avoir accès à un degré d'information supplémentaire qui serait, par exemple, que la mesure a une variance  $\sigma_m^2$  alors que l'information est certaine. Dans ce cas le paramètre  $\alpha$  optimal n'est plus celui du coude de la L-curve, mais un paramètre qui favorisera plus l'information. Nous pouvons alors nous demander comment choisir ce paramètre régularisant  $\alpha$  en accord avec l'incertitude de mesure et la précision de l'information a priori mais aussi comment traduire l'information a priori qualitative sur le modèle, les mesures, les paramètres. L'approche stochastique que nous allons développer maintenant va répondre à ces questions.

### B.3.3 Approche stochastique des problèmes inverses

Pour Tarantola [Tar82] [Tar87] un problème inverse ne s'apparente en aucun cas à un problème analytique. Il considère qu'un problème inverse est une combinaison d'informations de différentes natures, telles que les conditions expérimentales (mesures), l'information a priori sur le système (les paramètres) ou encore la connaissance des incertitudes de modélisation. Avec ce point de vue le problème inverse est forcément unique et représentatif du système physique : il est l'ensemble des paramètres qui coïncident au mieux avec toutes ces informations. Ce qui signifie que le problème inverse n'est plus la recherche des paramètres  $\mathbf{m}$ , mais un cumul d'informations qui décrivent le comportement de la solution.

#### B.3.3.1 L'information comme probabilité

Il s'agit de traduire mathématiquement l'information que nous possédons sur les différentes variables d'un système en terme de probabilité. Prenons par exemple les mesures  $\mathbf{d}$ . Nous avons par les conditions expérimentales, une idée de la qualité de ces mesures tant d'un point de vue qualitatif que quantitatif. Cette idée est souvent appréciative, peut être parfaitement subjective ou alors froidement objective. L'approche stochastique traduit le degré de confiance que nous accordons aux informations en terme de probabilité.

En règle générale, l'information que nous possédons sur une variable  $\mathbf{x}$  peut être entièrement contenue dans la donnée d'une fonction densité de probabilité  $f_X(\mathbf{x})$ . Par exemple pour la mesure :

1. si nous savons que la mesure est excellente,  $\mathbf{d}$  prend une valeur certaine  $\mathbf{d}_0$ , alors la densité de probabilité liée à  $\mathbf{d}$  est :

$$f_D(\mathbf{d}) = \delta(\mathbf{d} - \mathbf{d}_0)$$

2. si nous connaissons une estimation de la mesure, notée  $\hat{\mathbf{d}}$  et si nous pouvons estimer la variance de cette mesure  $\sigma_d^2$  alors la fonction de densité de probabilité liée à  $\mathbf{d}$  peut s'écrire comme la loi normale :

$$f_D(\mathbf{d}) = \mathcal{N}(\hat{\mathbf{d}}, \sigma_d)$$

L'interprétation par des densités de probabilité va plus loin qu'une simple évaluation de la moyenne et de la variance d'une variable. La variance  $\sigma_x^2$  peut être interprétée de façon qualitative. Si la mesure est certaine alors la variance est nulle. C'est le cas 1 précédent pour la variable  $\mathbf{d}$ . Il se lit : la probabilité que  $\mathbf{d}$  soit  $\mathbf{d}_0$  est totale, ce qui implique que la mesure  $\mathbf{d}_0$  est parfaite. Par contre, si la mesure est bruitée ou que nous estimons sa qualité moyenne, alors  $\mathbf{d}$  est probablement son estimation  $\hat{\mathbf{d}}$  (moyenne par exemple) avec une incertitude qui dépend des conditions de mesure (bruit, appréciation personnelle) : c'est ce que traduit la loi normale du cas 2.<sup>10</sup>

Nous comprenons mieux pourquoi Tarantola définit un problème inverse comme une quête d'informations [Tar82]. Si nous possédons des informations, de quelques natures soient-elles, elles définissent des fonctions de probabilité pour chaque variable du problème directe ou inverse qui sont des descriptions précises de voisinages particuliers relatifs à l'information a priori.

### B.3.3.2 L'inversion Bayésienne

Nous avons présenté au cours des sections précédentes le problème direct sous la forme analytique :

$$\mathbf{d} = \mathbf{A}\mathbf{m} \tag{B.32}$$

mais cette approche est trop restrictive. La plupart du temps le calcul des mesures  $\mathbf{d}$  à partir de paramètres  $\mathbf{m}$  n'est pas exact car notre modèle ou la théorie n'est pas parfaite et notre paramétrisation n'est qu'une simplification grossière de la réalité. Dans ce cas l'approche stochastique prend tout son sens, ce que nous traduisons est alors que la relation (B.32) est incertaine, ce qui s'écrit en terme de probabilité comme la densité de probabilité de  $\mathbf{d}$  sachant  $\mathbf{m}$  :

$$p(\mathbf{d}|\mathbf{m}) = \mathcal{N}(\mathbf{A}\mathbf{m}, \sigma_T) = C^{ste} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\|\mathbf{d} - \mathbf{A}\mathbf{m}\|^2}{\sigma_T^2} \right\} \tag{B.33}$$

<sup>10</sup>Le cas 1 n'est en fait qu'un cas particulier de loi normale pour laquelle l'écart type est nul et l'estimée  $\hat{\mathbf{d}}$  est la mesure  $d_0$

où  $\sigma_T^2$  est la variance que nous estimons pour la représentation du modèle. Cette expression peut s'interpréter : la relation qui donne  $\mathbf{d}$  en fonction de  $\mathbf{m}$  est (B.32) avec une incertitude théorique donnée par  $\sigma_T$ .

En gardant notre approche stochastique le problème inverse consiste à déterminer la densité de probabilité des paramètres  $\mathbf{m}$  connaissant les mesures  $\mathbf{d}_{obs}$ , c'est la *fonction de densité de probabilité a posteriori* donnée par la loi de Bayes :

$$p(\mathbf{m}|\mathbf{d}_{obs}) = \frac{p(\mathbf{d}_{obs}|\mathbf{m}) \cdot p(\mathbf{m})}{p(\mathbf{d}_{obs})} \quad (\text{B.34})$$

Nous ne cherchons plus un résultat analytique : la quasi-solution du problème. Ce que nous cherchons c'est le comportement de la solution en fonction de l'information que nous avons sur les mesures  $\mathbf{d}_{obs}$ , les coefficients  $\mathbf{m}$  et le modèle. La formulation bayésienne (B.34) montre que si nous avons suffisamment d'information nous avons proportionnellement de l'information sur les paramètres recherchés. Résoudre le problème inverse consiste donc à interpréter (B.34) à l'aide de lois normales.

### B.3.3.3 Ecriture du problème inverse Bayésien

L'écriture du problème inverse consiste donc à expliciter les différentes fonctions de densité de probabilité intervenant dans (B.34). Les densités de probabilité  $p(\mathbf{d}_{obs}|\mathbf{m})$  et  $p(\mathbf{m})$  correspondant aux informations que nous possédons respectivement sur les mesures et les paramètres :

1. Soit  $\mathbf{m}_{prior}$  l'information a priori que nous avons sur les paramètres recherchés. Alors naturellement la probabilité que  $\mathbf{m}$  soit  $\mathbf{m}_{prior}$  est maximale (c'est la valeur moyenne). L'incertitude (ou la qualité de l'information) définit un intervalle dans lequel l'information peut encore se situer (c'est la matrice de covariance). La densité de probabilité  $p(\mathbf{m})$  qui traduit l'information a priori que nous possédons s'écrit alors :

$$p(\mathbf{m}) = \mathcal{N}(\mathbf{m}_{prior}, \sigma_m) = C^{ste} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{m} - \mathbf{m}_{prior})^t \sigma_m^{-1} (\mathbf{m} - \mathbf{m}_{prior}) \right\} \quad (\text{B.35})$$

2. Soit  $\mathbf{d}_{obs}$  les mesures. En considérant que le modèle donne la mesure exacte par le problème direct (B.33) et que l'incertitude de mesure peut être représentée par une matrice de covariance  $\sigma_d$  alors la fonction de densité de probabilité conditionnelle  $p(\mathbf{m}|\mathbf{d}_{obs})$  s'écrit :

$$p(\mathbf{d}_{obs}|\mathbf{m}) = C^{ste} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{m} - \mathbf{d}_{obs})^t (\sigma_T + \sigma_d)^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{m} - \mathbf{d}_{obs}) \right\} \quad (\text{B.36})$$

3. Enfin nous supposons que toutes les mesures sont équiprobables, dans ce cas :

$$p(\mathbf{d}_{obs}) = C^{ste} \quad (\text{B.37})$$

La fonction de densité de probabilité a posteriori du système s'écrit alors :

$$p(\mathbf{m}|\mathbf{d}_{obs}) = C^{ste} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{m} - \mathbf{d}_{obs})^t (\sigma_T + \sigma_d)^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{m} - \mathbf{d}_{obs}) \right\} \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{m} - \mathbf{m}_{prior})^t \sigma_m^{-1} (\mathbf{m} - \mathbf{m}_{prior}) \right\} \quad (\text{B.38})$$

Elle traduit la densité de probabilité de la solution du problème inverse. Nous obtenons donc de l'information a posteriori sur les paramètres recherchés à partir de l'information a priori et des mesures. L'interprétation de (B.38) est donc identique à celle que nous avons faite pour écrire une loi de probabilité à partir des informations a priori. La valeur la plus probable est celle du maximum de vraisemblance qui est obtenu quand les termes exponentiels sont maxima, c'est-à-dire lorsque la fonction  $f_{Baynes}$  suivante est minimale :

$$f_{Baynes} = (\mathbf{A}\mathbf{m} - \mathbf{d}_{obs})^t (\sigma_T + \sigma_d)^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{m} - \mathbf{d}_{obs}) + (\mathbf{m} - \mathbf{m}_{prior})^t \sigma_m^{-1} (\mathbf{m} - \mathbf{m}_{prior}) \quad (\text{B.39})$$

Comme pour le système normal au sens des moindres carrés, le minimum de  $f_{Baynes}$  est obtenu par différentiation et les paramètres solutions de l'inversion baynesienne sont :

$$\mathbf{m}_0 = (\mathbf{A}^t \sigma_{(T+d)}^{-1} \mathbf{A} + \sigma_m^{-1})^{-1} (\mathbf{A}^t \sigma_{(T+d)}^{-1} \mathbf{d} + \sigma_m^{-1} \mathbf{m}_{prior}) \quad (\text{B.40})$$

Les matrices  $\sigma_{(T+d)}$  et  $\sigma_d$  étant des matrices de covariance définies par :

$$\sigma_{\mathbf{x}} = [\text{covar}(\mathbf{x}(i), \mathbf{x}(j))]$$

### B.3.3.4 Interprétation de l'inversion baynesienne

La véritable solution de l'inversion baynesienne n'est pas l'expression  $\mathbf{m}_0$  (B.40), mais l'expression de la fonction de densité a posteriori (B.38). Elle donne toute l'information sur les paramètres  $\mathbf{m}$  à partir de l'information que nous avons du système, elle est donc beaucoup plus riche. En particulier, elle permet a posteriori de qualifier le problème inverse à l'aide des propriétés liées aux lois normales (Espérance, écart-type, test du  $\chi^2, \dots$ )

# Annexe C

## Boîte à outils mathématiques

### C.1 Généralisation de l'écriture harmonique - Application au blindage sphérique

Au chapitre 5 nous proposons l'écriture générale de l'induction magnétique d'une source en harmoniques sphériques sous la forme :

$$\vec{B}(r, \theta, \phi, t) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} [E_n \cdot \mathcal{C}_r^n(r, f) + F_n \cdot \mathcal{D}_r^n(r, f)] \cdot Y_n(\theta, \phi) \cdot e^{j\omega t} \\ \sum_{n=0}^{\infty} [E_n \cdot \mathcal{C}_\theta^n(r, f) + F_n \cdot \mathcal{D}_\theta^n(r, f)] \cdot \frac{\partial Y_n(\theta, \phi)}{\partial \theta} \cdot e^{j\omega t} \\ \sum_{n=0}^{\infty} [E_n \cdot \mathcal{C}_\phi^n(r, f) + F_n \cdot \mathcal{D}_\phi^n(r, f)] \cdot \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_n(\theta, \phi)}{\partial \phi} \cdot e^{j\omega t} \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Cette formulation permet de généraliser les calculs de blindage à des milieux conducteurs et aux cas de sources dynamiques. Afin de garantir une bonne compréhension de cette écriture nous allons maintenant expliciter l'expression des fonctions  $\mathcal{C}_r^n$  et  $\mathcal{D}_r^n$  dans les différentes situations que nous pouvons rencontrer :

Dans le cas statique ces fonctions sont :

$$\begin{cases} \mathcal{C}_r^n(r) = n(n+1) \cdot r^{(n-1)} \\ \mathcal{C}_\theta^n(r) = (n+1) \cdot r^{(n-1)} \\ \mathcal{C}_\phi^n(r) = (n+1) \cdot r^{(n-1)} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathcal{D}_r^n(r) = n(n+1) \cdot r^{-(n+2)} \\ \mathcal{D}_\theta^n(r) = -n \cdot r^{-(n+2)} \\ \mathcal{D}_\phi^n(r) = -n \cdot r^{-(n+2)} \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Dans le cas dynamique elles sont :

$$\begin{cases} \mathcal{C}_r^n(r, f) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} (I_n^{(2)}(kr)) \\ \mathcal{C}_\theta^n(r, f) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (I_n^{(2)}(kr)) \\ \mathcal{C}_\phi^n(r, f) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (I_n^{(2)}(kr)) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathcal{D}_r^n(r, f) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} (K_n^{(2)}(kr)) \\ \mathcal{D}_\theta^n(r, f) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (K_n^{(2)}(kr)) \\ \mathcal{D}_\phi^n(r, f) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (K_n^{(2)}(kr)) \end{cases} \quad (\text{C.3})$$



### C.1.1 Écriture de la matrice d'un blindage monocouche

L'écriture de la matrice de blindage (5.14) pour chaque terme d'un même ordre multipolaire est donnée par :

pour le cas statique :

$$\mathbf{B}_n = \begin{bmatrix} -n(n+1)R_1^{-(n-1)} & n(n+1)R_1^{(n-1)} & n(n+1)R_1^{-(n+2)} & 0 \\ -\mu_2(n+1)R_1^{(n-1)} & \mu_1(n+1)R_1^{(n-1)} & -\mu_1 n R_1^{-(n+2)} & 0 \\ 0 & n(n+1)R_2^{(n-1)} & n(n+1)R_2^{-(n+2)} & -n(n+1)R_2^{-(n+2)} \\ 0 & \mu_3(n+1)R_2^{(n-1)} & -\mu_3 n R_2^{-(n+2)} & \mu_2 n R_2^{-(n+2)} \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

pour le cas dynamique :

$$\mathbf{B}_n(f) = \begin{bmatrix} -n(n+1)R_1^{-(n-1)} & \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( I_n^{(2)}(kR_1) \right) & \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( K_n^{(2)}(kR_1) \right) & 0 \\ -\mu_2(n+1)R_1^{(n-1)} & \mu_1 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( I_n^{(2)}(kR_1) \right) & \mu_1 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( K_n^{(2)}(kR_1) \right) & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( I_n^{(2)}(kR_2) \right) & \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( K_n^{(2)}(kR_2) \right) & -n(n+1)R_2^{-(n+2)} \\ 0 & \mu_3 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( I_n^{(2)}(kR_2) \right) & \mu_3 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( K_n^{(2)}(kR_2) \right) & \mu_2 n R_2^{-(n+2)} \end{bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

# Bibliographie

- [Ang72] A. Angot, *Compléments de mathématiques à l'usage des ingénieurs de l'électrotechnique et des télécommunications*, Masson & Cie, Paris, 1972.
- [Arf95] G. Arfken, *Mathematical Methods for physicists*, Academic Press, 1995.
- [Bac67] G. Backus, « Numerical applications of a formalism for geophysical inverse problems », *Geophysical Journal of the Royal astronomy society* - 13, 247-276, 1967.
- [Bac70] G. Backus, « Uniqueness in the inversion of accurate gross earth data », *Philosophical Transaction of the Royal society* - 266, 123-192, 1970.
- [Bay63] T. Bayes, « An essay towards solving a problem in the doctrine of chance », *Phil. Trans. Roy. Soc.* - 53 :370-480, 1763.
- [Ber94] J. Bernardo, *Bayesian Theory*, Wiley Series in Probability an Mathematical Statistics, 1994.
- [Blö06] M. Blödt, *Condition monitoring of mechanical faults in variable speed induction motor drives. - Application of stator current Time-Fréquency analysis and parameters estimation*, Thèse de doctorat, LEEI/ENSEEIH-Toulouse, 2006.
- [Boy01] J. P. Boyd, *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, Dover Publication, Mineola, New-York, 2001.
- [Bri97] P. Brissonneau, *Magnétisme et matériaux magnétiques*, Édition Hermès, 1997.
- [Bru91] X. Brunotte, *Modélisation de l'infini et prise en compte de régions magnétiques minces - Application à la modélisation des aimantations des navires.*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1991.
- [Bur02] P. Burguignoli, *Integral representation of the electromagnetic field and boundary integral equations*, Departement of electronic engineering, Rome, 2002.
- [Col06] B. Collard, « A new formulation for scattering by impedant 3d bodies », *Progress in Electromagnetics reseach symposium*, 2006.
- [Coo65] J. Cooley et al., « An algorithm for the machine calculation of complex fourier series », *Math. Comput.* 19, 297-301, 1965.
- [Dou06] C. Doucet et al., « An automatic strategy for solving ill-conditioned linear systems of equations resulting from a finite element method », *CEFC 2006, Miami, Florida USA April 30-May 3*, 2006.

- [Dri02] T. Driscoll, *Schwarz-Christoffel Mapping*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [Dro02] J.-J. Droesbeke, *Méthodes Bayésienne en Statistique*, ED. Technip, Paris, 2002.
- [Dur65] E. Durand, *Electrostatique, tome I, Les distributions*, Masson & Cie, Paris, 1965.
- [Dur66] E. Durand, *Electrostatique, tome II, Problème généraux conducteurs*, Masson & Cie, Paris, 1966.
- [Dur68] E. Durand, *Magnétostatique*, Masson & Cie, Paris, 1968.
- [Fou22] J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, 1822.
- [Fra89] J. Francklin, « On the scaling of multidimensionnal matrices », *Linear Algebra and its applications*, 1989.
- [Fre97] D. Freedman, *Statistics*, W.W. Norton and Company, 1997.
- [Fro02a] B. Froidurot, *Discrétion magnétique des machines électriques de propulsion navale*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2002.
- [Fro02b] B. Froidurot, « Magnetic discretion of naval propulsion machines », *IEEE Transactions on Magnetics*, 2002.
- [Gre87] L. Greengard, « A fast algorithm for particle simulations », *Journal of Computational Physics*, 1987.
- [Gre88] L. Greengard, « Rapid evaluation of potential fields in 3 dimensions », *Lecture Notes in Math*, Springer-Verlag, 1988.
- [Hab04] R. Haberman, *Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Bondary Value Problem*, Pearson Education, New Jersey, 2004.
- [Han97] C. Hansen, *Rank-deficient and discrete Ill-Posed Problems*, SIAM - Society for industrial and Applied Mathematics, 1997.
- [Har90] R. F. Harrington, « Origin and development of the method of moments for field computation », *IEEE Antenas and Propagation*, 1990.
- [Hel77] B. Heller, *Harmonic Field Effects in Induction Machines*, Elsevier Scientific Publising Company, New-York, 1977.
- [Hob31] E. Hobson, *The theory of spherical harmonics*, Cambridge University Press, London, 1931.
- [How90] L. Howell, *Computation of conformal maps by modified Schwarz-Christoffel Transformations*, Thèse de doctorat, B.S. Mathematics, Massachusetts Institute of Technology, 1990.
- [Kay93] S. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing : Estimation theory*, Signal Processing Series - Prentice Hall, 1993.
- [Köc99] C. Köchli, *Contribution à l'étude des moteurs synchrones monophasés*, Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1999.
- [Leg96] M. Legris, *Identification de l'état magnétique d'un système ferromagnétique à partir de mesures du champ proche*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1996.

- [Lor01] J. Lorange, *Couplage des inductances par rayonnement magnétique. Étude théorique et expérimentale*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2001.
- [Mac67] T. MacRobert, *Spherical Harmonics*, Pergamon Press, Oxford, 1967.
- [Née91] L. Néel, *Un siècle de physique*, Odile Jacob, 1991.
- [Ned00] J. Nedelec, *Acoustic and electromagnetic equations, integral representations for harmonic problems*, Springer-Verlag, New-York, 2000.
- [Pol02] A. Polianin, *Exact solutions for ordinary differential equations*, Chapman-Hall, 2002.
- [Pre92] W.-H. Press, *Numerical recipes : the art of scientific computing*, Cambridge University Press, 1992.
- [Rik87] T. Rikitake, *Magnetic and electromagnetic Shielding*, Terra Scientific Publishing Company, Tokyo, 1987.
- [Rob92] C. Robert, *L'analyse statistique Bayésienne*, Economica, 1992.
- [Rob94] C. Robert, *The Bayesian Choice*, Springer-Verlag, 1994.
- [Rou99] L.-L. Rouve, « Application of the spherical harmonic model to identify the magnetic state of a system and to extrapolate its signature », *Studies in Applied Electromagnetics and Mechanics*, IOS Press, 1999.
- [Rou05] L.-L. Rouve et L. Schmerber, « Optimal magnetic sensor location for spherical harmonics identification applied to radiated electrical devices », *IEEE Transaction on Magnetics*, Volume 42, Issue 4, 2005.
- [Rou06] L.-L. Rouve, « Design of a combined passive and active magnetic shield adapted to electrical machines », *Proc. Marelec 2006, Amsterdam*, 2006.
- [Rui01] D. Ruiz, « A scaling algorithm to equilibrate both rows and columns norms in matrices », *ENSEEIHT-IRIT Technical Report RT/APO/01/4*, 2001.
- [Sal82] J. Saliou, *Détermination optimale des composantes multipolaires d'une source magnétique, par analyse du champ proche.*, Diplôme d'ingénieur CNAM, 1982.
- [Sap76] G. Saporta, *Théories et méthodes de la statistique*, ED. Technip, Paris, 1976.
- [Sch05a] L. Schmerber, « Original 2d cylindrical harmonics method for identification of the near magnetic stray field of an electrical motor », *International Electric Machines and Drives Conference (IEMDC2005)*, 2005.
- [Sch05b] L. Schmerber, « A powerful method to design passive and active magnetic shield for on board electrical devices », *Proc. AES 2005, Versailles*, 2005.
- [Sch06] L. Schmerber, « Spherical harmonic identification using a priori information about an electrical device », *CEFC 2006, Miami Florida USA*, 2006.
- [Sco03] R. Scorretti, *Caractérisation numérique et expérimentale du champ magnétique B.F. généré par des systèmes électrotechniques en vue de la modélisation des courants induits dans le corps humain*, Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2003.

- [Sil01] P. Sillard, *Estimation par moindres carrés*, Collection Hermès - Ed. Lavoisier, 2001.
- [Smy68] W. Smythe, *Static and dynamic electricity*, Mc Graw-Hill Book, 1968.
- [Spi91] M. Spiegel, *Theorie et applications de la statistique*, Mc Graw-Hill Book Company, Paris, 1991.
- [Str41] J. Stratton, *The theory of electromagnetism*, Mc Graw-Hill Book Company, New-York, 1941.
- [Tar82] A. Tarantola, « Inverse problems = quest for information », *Journal of Geophysics*, 1982.
- [Tar87] A. Tarantola, *Inverse Problem Theory*, Elsevier, 1987.
- [Tar05] A. Tarantola, *Inverse Problem Theory and methods for model parameter estimation*, SIAM - Society for industrial and Applied Mathematics, 2005.
- [Teg85] J. Tegopoulos, *Eddy currents in linear conducting media*, Ed. Elsevier, Amsterdam, Oxford, New-York, 1985.
- [Tik76] A. Tikhonov et V. Arsenine, *Methodes de résolution de problèmes mal posés*, Edition mir, Moscou, 1976.
- [Vie99] M. Vieira, *Estimation Bayésienne par les méthodes MCMC - Application à la surveillance des moteurs asynchrones*, Thèse de doctorat, Université de Nice - Sophia Antipolis, 1999.
- [WH96] M. H. W. Heinz et A. Neubauer, *Regularization of Inverse Problems*, Kluwer academic Publishers, Londres, 1996.
- [Whi65] E. Whittaker et G. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge University Press, 1965.
- [Wik84] J. P. Wikso, « A comparaison of scalar multipole expansions », *J. App. Phy.*, 1984.
- [Zhd02] M. Zhdanov, *Geophysical inverse theory and regularization problem*, Elsevier, 2002.

Cette thèse présente une méthode d'identification de sources électromagnétiques dynamiques ainsi qu'une méthode de calcul de dimensionnement de blindage électromagnétique. Elles reposent sur les développements harmoniques solutions des équations de Maxwell. L'identification électromagnétique permet de caractériser une source dynamique dans un milieu conducteur à partir de mesures de champs électromagnétiques proches. Elle permet l'extrapolation des signatures électromagnétiques d'une source et le diagnostic d'installations électriques par mesures de champs proches. Cette identification repose sur l'estimation bayésienne des paramètres du développement harmonique d'une source qui permet l'intervention d'information a priori. Le calcul de blindage repose sur l'écriture harmonique des conditions de passage sur les frontières d'un blindage. Il permet de dimensionner un blindage en distinguant l'effet d'atténuation et l'effet de forme en fonction des matériaux et des couches de ce dernier.

- 
- Identification électromagnétique
  - Blindage magnétique
  - Diagnostic électromagnétiques
  - Courants de Foucault
  - Conditions de passage harmonique
  - Identification magnétodynamique
  - Blindage multicouches
  - Harmoniques sphériques
  - Développements harmoniques
  - Estimation bayésienne
- 

This Ph.D. thesis presents two methods : one to identify dynamic electromagnetic sources and another one to size an efficient magnetic shield. Both are based on harmonic expansion solutions of Maxwell's equations. The electromagnetic identification gives from near electromagnetic fields measurements the main characteristics of a dynamic source closed in a conducting media. Electromagnetic field extrapolation of the source and condition monitoring based on near field measurements are the applications of the identification method. It uses Bayesian estimation of the harmonic expansion parameters of a source. It allows the use of prior information. The magnetic shielding method is based on the harmonic expansion of boundary conditions and the distinction between the attenuation effect and the shape effect of the shield on the parameters of an electromagnetic source.

- 
- Electromagnetic Identification
  - Electromagnetic shield
  - Condition monitoring
  - Eddy current
  - Harmonic boundary conditions
  - Magnetodynamic Identification
  - Multi-layered electromagnetic shielding
  - Spherical Harmonics
  - Harmonic Expansion
  - Bayesian estimation
-