



Lois de commande pour une classe de modèles non linéaires sous la forme Takagi-Sugeno : Mise sous forme LMI

Alexandre Kruszewski

► To cite this version:

Alexandre Kruszewski. Lois de commande pour une classe de modèles non linéaires sous la forme Takagi-Sugeno : Mise sous forme LMI. Automatique / Robotique. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, 2006. Français. NNT : . tel-00128986

HAL Id: tel-00128986

<https://theses.hal.science/tel-00128986>

Submitted on 5 Feb 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES
ET DU HAINAUT-CAMBRESIS

pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITÉ

spécialité

Automatique

par

Alexandre KRUSZEWSKI

Ingénieur-Maître

Lois de commande pour une classe de modèles
non linéaires sous la forme Takagi-Sugeno :
Mise sous forme LMI

Soutenue le 12 décembre 2006 devant la commission d'examen :

MM.	Michel	Dambrine	Pr., LAMIH, Valenciennes	(examineur)
	Germain	Garcia	Pr., LAAS, Toulouse	(rapporteur)
	Thierry Marie	Guerra	Pr., LAMIH, Valenciennes	(directeur)
	Noureddine	Manamanni	Pr., CRESTIC, Reims	(examineur)
	Didier	Maquin	Pr., CRAN, Nancy	(rapporteur)
	Jean-Pierre	Richard	Pr., LAGIS, Lille	(président)
	Antonio	Sala-Piqueras	Pr. Titular, UPV, Valencia	(examineur)

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES
ET DU HAINAUT-CAMBRESIS

pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITÉ

spécialité

Automatique

par

Alexandre KRUSZEWSKI

Ingénieur-Maître

Lois de commande pour une classe de modèles
non linéaires sous la forme Takagi-Sugeno :
Mise sous forme LMI

Soutenue le 12 décembre 2006 devant la commission d'examen :

MM.	Michel	Dambrine	Pr., LAMIH, Valenciennes	(examineur)
	Germain	Garcia	Pr., LAAS, Toulouse	(rapporteur)
	Thierry Marie	Guerra	Pr., LAMIH, Valenciennes	(directeur)
	Nouredine	Manamanni	Pr., CRESTIC, Reims	(examineur)
	Didier	Maquin	Pr., CRAN, Nancy	(rapporteur)
	Jean-Pierre	Richard	Pr., LAGIS, Lille	(président)
	Antonio	Sala-Piqueras	Pr. Titular, UPV, Valencia	(examineur)

Remerciements

Comme la tradition le veut, je vais consacrer cette page à remercier certaines personnes. Tout d'abord je tiens à remercier toute l'équipe qui m'a accompagné tout au long de ce périple qu'est la thèse.

Je vais plus particulièrement remercier les personnes suivantes (qui se reconnaîtront sûrement) :

Celui qui m'a supporté pendant tout ce temps et qui a déplacé son bureau un couloir plus loin (et par la même occasion son caisson de basse 500w crachant du ACDC). Ceci nous a permis de souffler un peu même s'il lui reste encore du travail (les « ALEX T'ES QU'UN BLAIREAU » ne sont pas filtrés par le couloir ou encore les « OUAHAHAHAHA » criés en passant).

Celui qui m'a prouvé que tout le monde peut écrire un document de référence et qui me rappelle tous les jours que le doctorat permet de réaliser de grandes choses (très pointu et qui chauffe),

Celui qui remonte le niveau intellectuel des blagues même si quelques fois on ne le suit pas (surtout après repas au RU) et qui nous a épargné un incendie (vive les MOSFETS),

Celui qui s'exclame « HAYAYAÏ » et « HOUUUI ! »,

Celui qui envoie des blagues d'un humour douteux par mail et qui a une incroyable culture historique,

Celui qui maîtrise le scrabble-et-plus-si-affinité,

Celui qui nous montre qu'avoir des mioches ça peut servir,

Celui qui élabore des méta-méta...-méta programmes avec amour,

Celui qui veut concurrencer le LAMIH avec son labo et qui possède de bonnes techniques d'anti-diplomatie,

Celui qui nous remonte le moral avec la couleur de ses chemises,

Celui qui m'a ouvert les yeux sur la vraie nature des fonctions candidates de Lyapunov et des fonctions définies positives,

Celle qui se reconnaitra car c'est la seule,

Et, ... el que llegó després de la batalla,

Et enfin la future qui a stressé plus que moi et mes deux correcteurs de « correction-orthographique-de-WORD »

Sommaire

Sommaire	1
Introduction générale.....	3
Chapitre I : Modèles de type Takagi-Sugeno	7
A. Introduction	8
B. Définition et problématique.....	8
1. Définition des modèles Takagi-Sugeno	8
2. Approche par secteur non-linéaire	10
3. Problèmes à base de contraintes LMI	11
4. Relaxations	15
5. Stabilité des modèles Takagi-Sugeno	17
6. Stabilisation des modèles Takagi-Sugeno	21
7. Stabilisation des modèles TS par retour de sortie	24
C. Performances et robustesse	26
1. Problème du régulateur	26
2. Commande H_∞	29
3. Robustesse	30
4. Stabilisation de modèles Takagi-Sugeno à retard	30
D. Discussion et conclusion	32
Chapitre II : Nouvelles conditions de stabilisation des modèles TS	37
A. Introduction	38
B. Stabilisation de modèles TS continus par retour de sortie	40
C. Stabilisation de modèles TS continus : prémisses partiellement mesurables.....	46
D. Stabilisation des modèles TS discrets incertains par retour de sortie	49
E. Stabilisation de modèles TS discrets incertains : retour d'état.....	56
F. Stabilisation de modèles incertains à retard variable.	58
G. Conclusion.....	62
Chapitre III : Réduction du conservatisme en discret	63
A. Introduction	64
B. Première famille de fonctions candidates (approche A)	65

1. Notations et relaxations étendues	66
2. Stabilité des modèles Takagi-Sugeno discrets	68
3. Stabilisation des modèles Takagi-Sugeno discrets.....	71
4. Stabilisation de modèles Takagi-Sugeno incertains.....	74
C. Deuxième famille de fonctions candidates (approche B).....	77
1. Stabilité des modèles Takagi-Sugeno discrets	80
2. Stabilisation des modèles Takagi-Sugeno discrets.....	85
D. Avantages, limites et perspectives des approches	87
Chapitre IV : Vers une unification des résultats	91
A. Introduction	92
B. Modèles Takagi-Sugeno discrets à retards.....	94
1. Stabilité.....	94
2. Stabilisation.....	98
C. Généralisation des fonctions candidates	101
1. Stabilité des modèles Takagi-Sugeno discrets	101
2. Stabilisation des modèles Takagi-Sugeno discrets.....	105
D. Généralisation de la loi de commande	107
E. Stabilisation de modèles TS discrets périodiques	111
F. Conclusion.....	113
Chapitre V : Perspectives	115
B. Extensions	117
1. Stabilisation des modèles TS discrets périodiques.....	117
2. Réutilisation du lemme de Finsler.....	119
C. Réduction de la complexité	120
1. Elimination de variables.....	120
2. Réduction du nombre de contraintes LMI.....	121
Conclusion.....	125
Références	129
Annexe 1	137

Introduction générale

Cette thèse se focalise sur une classe particulière de modèles non linéaires appelés modèles Takagi-Sugeno (TS) /Takagi et Sugeno 1985/. Ces modèles sont issus au départ de la représentation des connaissances et de la recopie du savoir-faire d'un opérateur humain. Même s'ils sont issus de cette approche historique de la logique floue, ils peuvent s'interpréter comme une collection de modèles linéaires interconnectés par des fonctions non linéaires. Les fonctions non linéaires sont dépendantes des variables dites de prémisses. L'espace de ces dernières représente l'espace dans lequel on partitionne le modèle non linéaire. Il ne s'agit pas ici de réaliser des linéarisations autour de points de fonctionnement et de connecter ces modèles linéaires par des fonctions ce qui ne représente qu'une approximation d'un modèle non linéaire.

Bien au contraire, il s'agit dans notre contexte de décrire le plus exactement possible un modèle non linéaire ou un système physique. Dans ce dernier cas on peut s'appuyer sur le fait que ces modèles ont la propriété d'approximation universelle /Wang et Mendel 1992/. Il existe alors des techniques d'identification principalement entrée/sortie qui permettent d'obtenir de tels modèles /Sala et al. 2005/. Le problème le plus délicat restant dans le choix des variables de prémisses qui partitionnent l'espace /Gasso 2000/.

L'approche utilisée dans notre cas se fait sur la base de modèles non linéaires en utilisant l'espace d'état. Dans ce cas, il est possible de mettre une grande partie des modèles non linéaires sous la forme de modèles TS représentant exactement le modèle non linéaire dans un compact de l'espace d'état. Comme dans la majorité des études de ce type de modèle, nous supposons, de façon implicite, que les modèles TS utilisés sont commandables et observables /Sala et al. 2005/ au moins dans le compact des variables d'état considéré.

Les lois de commande couramment utilisées sur ce type de modèles sont de type retour d'état non linéaire statique appelé PDC (Parallel Distributed Compensation) /Wang et al. 1996/. Ce type de loi de commande utilise les mêmes fonctions non linéaires permettant d'interpoler les modèles linéaires des modèles TS. L'étude de la stabilité et de la stabilisation de ces types de modèles fait appel, dans la grande majorité des cas, à la méthode directe de Lyapunov. De façon quasiment généralisée, c'est une fonction de Lyapunov de type quadratique qui est

utilisée. Cela est dû principalement au fait de pouvoir résoudre les conditions de stabilité/stabilisation. Effectivement, l'une des principales difficultés est de pouvoir écrire ces conditions sous la forme de contraintes LMI (Linear Matrix Inequalities) /Boyd et al. 1994/. Notons que les conditions obtenues ne prenant pas en compte certaines caractéristiques des fonctions d'interpolation non linéaires, elles ne peuvent être que suffisantes.

De très nombreux résultats sont disponibles aujourd'hui pour ce type de modèles. Le lecteur pourra se référer par exemple à /Tanaka et Wang 2001/ /Sala et al. 2005/ et à l'ensemble des références citées dans ces travaux. Les premiers travaux ne traitaient que de la stabilité et de stabilisation sans critères de robustesse ou notions de performances. Depuis des extensions à des retours d'état avec observateur, à des modèles sous forme descripteur, à des modèles incertains, à des modèles à retard à des modèles incertains à retard, à des retours de sortie dynamiques,... existent. Des critères de performances ont aussi été considérés comme la minimisation d'un critère quadratique, D-stabilité, H_∞ ,...

En dépit de cette multitude de résultats, il reste un certain nombre de problèmes à résoudre. L'approche par fonction de Lyapunov quadratique intensivement explorée semble avoir atteint ses limites. Notamment, les conditions obtenues étant seulement suffisantes le principal problème est de savoir que faire si elles sont trop restrictives ? Comment relâcher un problème LMI qui n'a pas de solution ? /Sala et al. 2005/. Le but de ce mémoire est de sortir du cadre des fonctions de Lyapunov quadratiques en proposant des résultats moins conservatifs que ceux rencontrés dans la littérature.

Le premier chapitre présente les modèles TS et les résultats de base obtenus sur ces derniers en stabilité et stabilisation. Les outils LMI et les différentes propriétés matricielles utiles dans la suite du mémoire sont également abordés. Sans être exhaustif sur les nombreux résultats existants dans la littérature, le chapitre s'intéresse aussi à la robustesse des modèles TS incertains, aux modèles TS à retards et à l'introduction des performances par l'intermédiaire de contraintes LMI (D-stabilité, atténuation H_∞ , ...). Enfin les limites de l'approche sont évoquées. Principalement, la conservativité des résultats due en partie au choix de la fonction de Lyapunov quadratique et l'absence de résultat avec une loi de commande par retour de sortie dans le cas où les variables de prémisses ne sont pas mesurables. L'ensemble du mémoire essaiera de repousser en partie ces limites.

Le deuxième chapitre donne une solution en termes de problème sous contraintes LMI, évoqué ci avant du retour de sortie utilisant un observateur, en continu et en discret. Les

fonctions de Lyapunov non quadratiques en discret se révélant inclure les résultats du cas quadratique, elles sont utilisées pour obtenir de nouvelles conditions de stabilisation des modèles TS incertains à retards. Les chapitres suivants ne se placeront que dans le cas discret. Le troisième chapitre propose d'étendre les résultats de stabilité et de stabilisation des modèles TS discrets en utilisant des fonctions de Lyapunov dont la variation est considérée sur k échantillons. Les résultats classiques, qu'ils soient quadratiques ou non quadratiques, se retrouvent alors inclus dans cette généralisation (ils correspondent évidemment à $k = 1$). Le prix à payer pour cette généralisation est le nombre de contraintes LMI mises en jeu et/ou de variables additionnelles rajoutées. Une discussion sur ces limitations de l'approche conclut le chapitre.

Les résultats obtenus dans le chapitre précédent peuvent être étendus à de nombreux cas : TS à retards, performances ... Néanmoins, les démonstrations sont fastidieuses et répétitives. Dans ce contexte, le quatrième chapitre propose un cadre unificateur pour traiter les différents problèmes de stabilité/stabilisation des modèles TS discrets. Cette unification utilise le lemme de Finsler. Elle permet de plus de proposer des fonctions de Lyapunov plus générales qui incluent celles présentées dans le chapitre trois. Cette généralisation permet aussi l'obtention de lois de commande de type périodique sur des modèles TS périodiques ou non. Le prix à payer est toujours le nombre de contraintes LMI mises en jeu.

Le dernier chapitre propose alors un certain nombre de perspectives. A court terme, on peut envisager aisément l'extension des résultats du chapitre quatre à d'autres types de modèles TS et/ou en introduisant des notions de performances. De façon plus intéressante, l'unification faite dans le chapitre précédent permet de s'intéresser à des problèmes différents : dans le cas des modèles périodiques, l'utilisation de fonction de Lyapunov périodiques. Enfin, les principales limites dues aux solveurs actuels sont le nombre de LMI et le nombre de variables. Des idées permettant de réduire ces deux nombres sont proposées.

Chapitre I : Modèles de type Takagi-Sugeno

A. Introduction	8
B. Définition et problématique.....	8
1. Définition des modèles Takagi-Sugeno	8
2. Approche par secteur non-linéaire	10
3. Problèmes à base de contraintes LMI	11
4. Relaxations	15
5. Stabilité des modèles Takagi-Sugeno	17
6. Stabilisation des modèles Takagi-Sugeno.....	21
7. Stabilisation des modèles TS par retour de sortie	24
C. Performances et robustesse	26
1. Problème du régulateur	26
2. Commande H_∞	29
3. Robustesse	30
4. Stabilisation de modèles Takagi-Sugeno à retard	30
D. Discussion et conclusion	32

A. Introduction

Ce chapitre présente un ensemble de résultats concernant les modèles Takagi-Sugeno /Takagi et Sugeno 1985/. La première partie donne leur définition et la façon de les obtenir à partir d'un modèle non linéaire. Leur stabilité et/ou stabilisation fait appel au formalisme des inégalités matricielles linéaires (LMI) /Boyd et al. 1994/. Ces dernières ainsi qu'un certain nombre de propriétés matricielles sont rappelées. Les résultats standards concernant la stabilité et la stabilisation des modèles TS sont alors présentés. La littérature de ce domaine étant abondante, une sélection de différents résultats concernant la robustesse et les performances des lois de commande est réalisée. Enfin les limites de l'approche et des résultats actuellement disponibles sont discutées.

B. Définition et problématique

1. Définition des modèles Takagi-Sugeno

Les modèles Takagi-Sugeno (TS) sont composés d'un ensemble de modèles linéaires interconnectés par des fonctions non linéaires vérifiant la propriété de somme convexe (1.2) /Takagi et Sugeno 1985/. Ils peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \delta x(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))C_i x(t) \end{cases}, \quad (1.1)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, r\} \quad h_i(z(t)) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1, \quad (1.2)$$

Dans le cas des modèles continus δ représente l'opérateur de dérivation et dans le cas des modèles discrets l'opérateur d'avance. $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état du modèle $u(t) \in \mathbb{R}^m$ le vecteur des entrées et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ le vecteur des sorties. Les matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $i \in \{1, \dots, r\}$ représentent un ensemble de r modèles linéaires. Les fonctions d'appartenance $h_i(\cdot)$ ont la propriété de somme convexe (1.2) et sont fonctions d'un vecteur $z(t) \in \mathbb{R}^z$ appelé vecteur des prémisses. Ce dernier ne possède pas de caractéristiques

particulières et peut donc être composé de variables d'état ou de fonctions de variables d'état (cette caractéristique est la principale différence entre les modèles TS et les modèles linéaires à paramètres variant).

Les modèles TS peuvent être obtenus de deux façons. La première par identification à partir des signaux d'entrées/sorties /Gasso 2000/ ; elle utilise la propriété d'approximation universelle d'un modèle de type TS /Wang et Mendel 1992/. Ce type d'approche n'est pas détaillé dans ce document. La deuxième méthode se base directement sur l'expression du modèle non-linéaire /Tanaka et Wang 2001/. Elle sera la base des travaux développés dans ce mémoire.

La méthode permettant de passer d'un modèle non-linéaire affine en la commande à un modèle TS est appelée approche par secteur non-linéaire /Tanaka et Wang 2001/. Elle permet d'obtenir un représentant de type TS d'un modèle non-linéaire. Il ne s'agit pas d'une approximation (comme pourrait l'être la linéarisation autour de points de fonctionnement) le modèle TS obtenu est identique au modèle non linéaire dans un compact de l'espace des variables de prémisses.

Elle permet de passer d'un modèle, où $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ et $h(\cdot)$ sont des fonctions non-linéaires :

$$\begin{cases} \delta x(t) = f(z(t))x(t) + g(z(t))u(t) \\ y(t) = h(z(t))x(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

à un modèle de type TS (1.1). Cette méthode sera détaillée dans la section suivante.

Remarque : Le représentant Takagi-Sugeno (1.1) d'un modèle non-linéaire (1.3) n'est pas unique /Taniguchi et al. 2001/. Il est assez facile de prouver qu'il en existe une infinité. La question de son choix peut d'ailleurs être très importante : il s'agit de « construire le meilleur » représentant, au sens du respect des contraintes imposées pour la synthèse d'une loi de commande (robustesse/performances).

Notation : Soit Y_i des matrices de dimensions appropriées et $h_i(\cdot)$ des fonctions scalaires ayant la propriété de somme convexe, on pose : $Y_z = h_i(z(t))Y_i$.

2. Approche par secteur non-linéaire

On considère le modèle non-linéaire (1.3) en supposant qu'il existe un compact des variables de prémisses $z(t) \in C \subset \mathbb{R}^z$ sur lequel les nonlinéarités sont bornées. Soient $nl_i(\cdot) \in [\underline{nl}_i, \overline{nl}_i]$, $i \in \{1, \dots, k\}$ ces non-linéarités, on peut alors écrire dans $C \subset \mathbb{R}^z$ /Morère 2001/ : $nl_i(\cdot) = \underline{nl}_i \cdot w_0^i(\cdot) + \overline{nl}_i \cdot w_1^i(\cdot)$ avec :

$$\begin{cases} w_0^i(\cdot) = (\overline{nl}_i - nl_i(\cdot)) / (\overline{nl}_i - \underline{nl}_i) \\ w_1^i(\cdot) = (nl_i(\cdot) - \underline{nl}_i) / (\overline{nl}_i - \underline{nl}_i) \end{cases} \quad (1.4)$$

Notons que de façon immédiate on a $w_0^i(\cdot) \geq 0$, $w_1^i(\cdot) \geq 0$ et $w_0^i(\cdot) + w_1^i(\cdot) = 1$. Les fonctions non linéaires $h_i(z(t))$, $i \in \{1, \dots, r\}$ du modèle TS (1.1) se construisent alors directement à partir de :

$$h_{1+i_0+i_1 \times 2 + \dots + i_{k-1} \times 2^{k-1}}(\cdot) = \prod_{j=1}^k w_{i_j}^j(\cdot) \quad (1.5)$$

Les fonctions d'appartenance sont donc dans ce cas une combinaison de fonctions non-linéaires présentes dans le modèle (1.3). La propriété de somme convexe (1.2) se déduit directement.

Remarque : le nombre de modèles linéaires augmente exponentiellement avec le nombre k de fonctions non linéaires distinctes du modèle (1.3) /Taniguchi et al. 2001/. Il est de 2^k .

Exemple : soit le modèle non-linéaire suivant avec $\alpha(t) \in [\underline{\alpha}(t), \overline{\alpha}(t)]$:

$$\delta x(t) = \begin{bmatrix} 1 & \cos(x_1(t)) \\ \alpha(t) & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \cos(x_1(t)) \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \quad (1.6)$$

Un représentant TS s'obtient de la façon suivante en considérant comme vecteur des prémisses $z^T(t) = [x_1(t) \quad \alpha(t)]$. Les deux non linéarités s'écrivent :

$$w_0^1(x_1(t)) = \frac{1 - \cos(x_1(t))}{2}, \quad w_1^1(x_1(t)) = \frac{1 + \cos(x_1(t))}{2},$$

$$w_0^2(\alpha(t)) = (\overline{\alpha}(t) - \alpha(t)) / (\overline{\alpha}(t) - \underline{\alpha}(t)), \quad w_1^2(\alpha(t)) = 1 - w_0^2(\alpha(t)).$$

En utilisant (1.5), on obtient : $h_1(z) = w_0^1(x_1) \cdot w_0^2(\alpha)$, $h_2(z) = w_1^1(x_1) \cdot w_0^2(\alpha)$,

$h_3(z) = w_0^1(x_1) \cdot w_1^2(\alpha)$ et $h_4(z) = w_1^1(x_1) \cdot w_1^2(\alpha)$. Un représentant TS de (1.6) s'écrit alors :

$$\delta x(t) = \sum_{i=1}^4 h_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad \text{où} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \underline{\alpha}(t) & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \bar{\alpha}(t) & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \underline{\alpha}(t) & -1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \underline{\alpha}(t) & -1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B_2 = B_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}. \quad \text{Il représente}$$

exactement (1.6) dans l'espace d'état si $\alpha(t) \in [\underline{\alpha}(t), \bar{\alpha}(t)]$.

3. Problèmes à base de contraintes LMI

Le but de ce mémoire est de donner des conditions de stabilité/stabilisation sous la forme d'un problème à résoudre composé de contraintes LMI (Linear Matrix Inequality). La description des contraintes LMI ainsi qu'une méthode permettant de résoudre les problèmes qui leurs sont associés sont présentées dans cette section. Différents lemmes sont présentés en deuxième partie. Ils permettent de manipuler les inégalités matricielles afin de les rendre linéaires en les inconnues quand cela est possible.

a) Utilisation du formalisme LMI

Les contraintes LMI (Linear Matrix Inequality) s'écrivent sous la forme :

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i < 0 \quad \text{avec} \quad F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (1.7)$$

$F(x)$ est une fonction affine en les variables de décision x_i , $i \in \{1, \dots, m\}$ /Boyd et al. 1994/.

L'ensemble des solutions $S = \{x \in \mathbb{R}^m, F(x) < 0\}$ est convexe. Un problème de faisabilité LMI s'écrit :

$$\text{Trouver } x_i, i \in \{1, \dots, m\} \text{ tels que } F(x) < 0. \quad (1.8)$$

(1.8) est équivalent à $\inf_x \lambda_{\max}(F(x)) < 0$. Cela revient donc à minimiser la fonction :

$$f : x \rightarrow \lambda_{\max}(F(x)) < 0. \quad \text{Cette minimisation est possible car cette fonction est convexe}$$

/Scherer et Weiland 2004/. La résolution du problème (1.8) peut se faire par des algorithmes performants comme l'algorithme du point intérieur /Boyd et al. 1994/. Dans les problèmes qui seront abordés, les variables utilisées sont des matrices. Le passage des variables scalaires à des matrices se fait directement.

Par exemple, les problèmes du type $A + BPC + C^T P^T B^T < 0$ avec pour inconnue P peuvent être mis sous la forme $F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i < 0$. Pour cela il suffit de décomposer la matrice P dans une base de matrices symétriques.

Dans toute la suite on utilise la LMI Toolbox de Matlab pour résoudre les problèmes sous contraintes LMI.

b) Propriétés

Dans cette partie, les principaux lemmes utilisés dans la littérature sont détaillés. La plupart des lemmes présentés ont pour principal objectif de rendre les inégalités matricielles linéaires en les variables recherchées ou de traiter certains cas particuliers.

Des inégalités nonlinéaires convexes peuvent être transformées en LMI. On suppose que $P(s)$, $X(s)$ et $Q(s)$ dépendent de façon affine du paramètre s . En utilisant les compléments de Schur, on peut rendre LMI l'inégalité suivante :

$$Q(s) - X(s)^T P(s)^{-1} X(s) > 0, P(s) > 0.$$

Lemme 1 (complément de Schur) : Soient $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ une matrice définie positive, $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice de rang plein en ligne et $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice quelconque. Les deux inégalités suivantes sont équivalentes :

$$1. Q(s) - X(s)^T P(s)^{-1} X(s) > 0, P(s) > 0 \quad (1.9)$$

$$2. \begin{bmatrix} Q(s) & (*) \\ X(s) & P(s) \end{bmatrix} > 0 \quad (1.10)$$

Dans certains cas particuliers de ces inégalités nonlinéaires convexes certaines propriétés permettent d'introduire des variables supplémentaires à rechercher. Ces propriétés sont présentées sur les deux inégalités $A^T P A - Q < 0$, $P > 0$ et $A^T P + P A + Q < 0$. Pour la première on a le lemme suivant.

Lemme 2 : Soient A , G , L , P et Q des matrices de taille appropriée. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$1. A^T P A - Q < 0, P > 0 \quad (1.11)$$

$$2. \begin{bmatrix} -Q & A^T P \\ P A & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (1.12)$$

$$3. \exists G \begin{bmatrix} -Q & A^T G \\ G^T A & -G - G^T + P \end{bmatrix} < 0, P > 0 \quad (1.13)$$

$$4. \exists G, L \begin{bmatrix} -Q + A^T L^T + L A & -L + A^T G \\ -L^T + G^T A & -G - G^T + P \end{bmatrix} < 0, P > 0 \quad (1.14)$$

Remarque : La propriété (1.13) se retrouve dans /De Oliveira et al. 1999/, la (1.14) à /Peaucelle et al. 2000/

Preuve :

(1.11) $\Leftrightarrow$ (1.12) : Complément de Schur

(1.12) $\Rightarrow$ (1.13) et (1.14) : Il suffit de choisir $G = P$ et $L = 0$

(1.13) et (1.14) $\Rightarrow$ (1.11) : Par congruence avec $\begin{bmatrix} I & A^T \end{bmatrix}$

Pour la seconde inégalité, on a le résultat suivant.

Lemme 3 /Peaucelle et al. 2000/ : Soient A , G , L , P et Q des matrices de taille appropriée. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$1. A^T P + P A + Q < 0 \quad (1.15)$$

$$2. \exists G, L \begin{bmatrix} A^T L^T + L A + Q & P - L + A^T G \\ P - L^T + G^T A & -G - G^T \end{bmatrix} < 0 \quad (1.16)$$

Preuve :

(1.16) $\Rightarrow$ (1.15) : Par congruence avec $\begin{bmatrix} I & A^T \end{bmatrix}$

(1.15) $\Rightarrow$ (1.16) : Si (1.15) est vérifiée, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $A^T P^T + P A + Q + \frac{\varepsilon}{2} A^T A < 0$, en utilisant

le complément de Schur il vient $\begin{bmatrix} A^T P^T + P A + Q & \varepsilon A^T \\ \varepsilon A & -2\varepsilon I \end{bmatrix} < 0$. Le résultat s'obtient en posant

dans (1.16) $L = P$ et $G = \varepsilon I$

Remarque : Les conditions nécessaires (lemme 2 (1.11) $\Rightarrow$ (1.13) et (1.14), lemme 3 (1.15) $\Rightarrow$ (1.16)) sont garanties si les matrices G , L ne sont pas contraintes.

Le lemme nommé S-procédure permet de vérifier une condition inégalité quadratique sous contraintes inégalités quadratiques. Quand elles sont strictes, on peut écrire le lemme suivant /Boyd et al. 1994/.

Lemme 4 (S-procédure) : Soient des matrices $T_i = T_i^T$, $i \in \{0, \dots, p\}$. Les deux expressions suivantes sont équivalentes :

$$1. \zeta^T T_0 \zeta > 0 \text{ pour tout } \zeta \neq 0 \text{ tel que } \zeta^T T_i \zeta \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, p\} \quad (1.17)$$

$$2. \exists \tau_1, \dots, \tau_p \geq 0 \text{ tels que } T_0 - \sum_{i=1}^p \tau_i T_i > 0 \quad (1.18)$$

Dans de nombreux problèmes de commande on peut être amené à obtenir des contraintes LMI par élimination de variables. Dans ce cas on obtient un problème de faisabilité de taille réduite. Pour ce faire, on utilise les deux versions du lemme de Finsler.

Lemme 5 (Finsler) /De Oliveira et Skelton 2001/ : Soient un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, et des matrices $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telle que $\text{rang}(R) < n$. Les quatre expressions suivantes sont équivalentes

$$1. x^T Q x < 0 \quad \forall x \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \neq 0, Rx = 0\} \quad (1.19)$$

$$2. R_\perp^T Q R_\perp < 0 \text{ où } R_\perp \text{ représente le complément orthogonal de } R \quad (1.20)$$

$$3. \exists \sigma \in \mathbb{R} \text{ telle que } Q - \sigma R^T R < 0 \quad (1.21)$$

$$4. \exists X \in \mathbb{R}^{n \times m} \text{ telle que } Q + XR + R^T X^T < 0 \quad (1.22)$$

Lemme 6 (Finsler) /Boyd et al. 1994/ : Soient un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, et des matrices $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telles que $\text{rang}(R) < n$ et $\text{rang}(S) < n$. Les quatre expressions suivantes sont équivalentes :

$$1. x^T Q x < 0 \quad \forall x \neq 0 \text{ tels que } Rx = 0, Sx = 0 \quad (1.23)$$

$$2. R_\perp^T Q R_\perp < 0 \text{ et } S_\perp^T Q S_\perp < 0 \quad (1.24)$$

$$3. \exists \sigma \in \mathbb{R} \text{ telle que } Q - \sigma R^T R < 0 \text{ et } Q - \sigma S^T S < 0 \quad (1.25)$$

$$4. \exists X \in \mathbb{R}^{n \times m} \text{ telle que } Q + S^T X R + R^T X^T S < 0 \quad (1.26)$$

Enfin les lemmes suivants seront utiles dans la suite.

Lemme 7 (Congruence) : Soit deux matrices P et Q , si P est définie positive et si Q est de rang plein en colonne alors la quantité QPQ^T est définie positive.

Lemme 8 (Congruence : cas particulier) : Soit deux matrices carrées P et Q , si Q est de rang plein alors P est définie positive si et seulement si la quantité QPQ^T est définie positive.

Lemme 9 : Soit X et Y deux matrices aux tailles appropriées. L'inégalité suivante est toujours vraie pour toute matrice $Q = Q^T > 0$:

$$XY^T + YX^T \leq XQX^T + YQ^{-1}Y^T \quad (1.27)$$

Preuve /Wang, et al., 1992/ :

$$Q > 0 \Rightarrow (QX - Y)^T Q^{-1} (QX - Y) \geq 0 \Leftrightarrow XY^T + YX^T \leq XQX^T + YQ^{-1}Y^T$$

La plupart des problèmes de stabilité et de stabilisation rencontrés dans la suite concernent des quantités utilisant une somme de la forme : $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) Y_i < 0$, ou deux sommes voire plus. Les différents résultats assurant le caractère négatif de la somme sont présentés dans la partie suivante.

4. Relaxations

Dans toute cette partie on suppose que la seule connaissance disponible sur les h_i est la propriété de somme convexe. Dans le cas d'une simple somme, avec Y_i des matrices de taille appropriée, il s'agit de trouver des conditions suffisantes assurant :

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) Y_i < 0 \quad (1.28)$$

Le seul résultat qui sera utilisé est :

Lemme 10 : Soit Y_i des matrices de taille appropriée, (1.28) est vérifiée si :

$$Y_i < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (1.29)$$

Remarque : Notons que ces conditions ne sont que suffisantes et introduisent forcément du conservatisme.

Dans le cas d'une double somme avec Υ_{ij} des matrices de taille appropriée :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \Upsilon_{ij} < 0 \quad (1.30)$$

Une solution triviale à (1.30) est : $\Upsilon_{ij} < 0 \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2$. En constatant que $h_i(\cdot) h_j(\cdot) = h_j(\cdot) h_i(\cdot)$ on peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \Upsilon_{ij} &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))^2 \Upsilon_{ii} + \sum_{i=1}^r \sum_{j \neq i}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \Upsilon_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))^2 \Upsilon_{ii} + \sum_{i=1}^r \sum_{j < i}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) (\Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji}) \end{aligned}$$

et proposer le résultat suivant :

Lemme 11 /Tanaka et Sano 1994/ : Soient Υ_{ij} des matrices de taille appropriée. (1.30) est vérifiée si :

$$\Upsilon_{ii} < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (1.31)$$

$$\Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} < 0 \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2 \quad i < j \quad (1.32)$$

Plusieurs relaxations existent pour améliorer le lemme 11. Ces relaxations peuvent être groupées en deux familles. La première famille est celle des relaxations qui n'introduisent aucune variable supplémentaire. La deuxième famille regroupe les autres types de relaxations. La principale différence en termes d'efficacité est que les relaxations introduisant des variables supplémentaires produisent des problèmes LMI qui sont moins conservatifs mais plus longs à résoudre voire impossible à cause de la puissance de calcul des ordinateurs actuels. L'annexe I reprend plus en détails les différents travaux effectués sur la relaxation de (1.30). Nous présentons dans la suite les deux résultats qui nous paraissent correspondre au meilleur compromis qualité de la solution /compatibilité avec les solveurs actuels.

Le lemme suivant est issu de /Tuan et al. 2001/. Le domaine des solutions satisfaisant ses conditions inclut les domaines des solutions du lemme 11.

Lemme 12 /Tuan et al. 2001/ : Soient Υ_{ij} des matrices de taille appropriée. (1.30) est vérifiée si :

$$\Upsilon_{ii} < 0, \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (1.33)$$

$$\frac{2}{r-1} \Upsilon_{ii} + \Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} < 0, \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2, i \neq j \quad (1.34)$$

La preuve est donnée annexe 1.

Des relaxations plus efficaces existent en termes de taille des domaines de solutions. Néanmoins, elles nécessitent l'introduction de variables additionnelles. Leur nombre fait croître la complexité du problème à résoudre, et même pour des problèmes de taille faible on peut atteindre les limites des solveurs actuels. Le lemme suivant est issu de /Liu et Zhang 2004/. Il représente un bon compromis entre conservatisme et complexité.

Lemme 13 /Liu et Zhang 2003/ : Soient Υ_{ij} des matrices de taille appropriée. (1.30) est vérifiée s'il existe des matrices $Q_i = Q_i^T, i \in \{1, \dots, r\}$ et $Q_{ij} = Q_{ji}^T, (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2$, telles que :

$$\Upsilon_{ii} > Q_i \quad \forall i \in \{1, \dots, r\}, \quad (1.35)$$

$$\Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} > Q_{ij} + Q_{ji} \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2, j > i, \quad (1.36)$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 & Q_{12} & \dots & Q_{1r} \\ Q_{21} & Q_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & Q_{(r-1)r} \\ Q_{r1} & \dots & Q_{r(r-1)} & Q_r \end{bmatrix} > 0. \quad (1.37)$$

La preuve est donnée annexe 1.

5. Stabilité des modèles Takagi-Sugeno

L'étude de la stabilité des modèles Takagi-Sugeno s'effectue principalement en utilisant la méthode directe de Lyapunov /Tanaka et Sugeno 1992/. Cette méthode implique le choix d'une fonction candidate de Lyapunov. Dans toute la suite, sans perte de généralité on suppose que le point d'équilibre est l'origine.

Remarque : Le choix de cette fonction est le premier élément dans l'étude de la stabilité qui

introduit du conservatisme. Ce point sera abordé plus tard.

Définition : Une fonction candidate de Lyapunov V est une fonction scalaire définie positive satisfaisant :

- $\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty$
- $\alpha(\|x\|) \leq V(x) \leq \beta(\|x\|)$

où $\alpha, \beta \in C^1$ sont des fonctions définies positives.

Théorème 1 : Un modèle $\dot{x}(t) = f(x(t))$ est globalement asymptotiquement stable et converge vers 0 s'il existe une fonction candidate de Lyapunov V telle que :

- $\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = 0 \quad \forall x(0) \in \mathbb{R}^n$

La fonction candidate de Lyapunov la plus couramment utilisée est dite quadratique. Elle est définie par :

$$V(x) = x^T P x, \quad P = P^T > 0 \quad (1.38)$$

Si on étudie la stabilité avec ce type de fonction de Lyapunov on parlera de stabilité quadratique.

Remarque : Dans toute la suite, pour simplifier les notations pour toute matrice X , quand on écrit $X > 0$ ($X < 0$) on suppose que X est symétrique, i.e. $X = X^T$. Enfin la notation matricielle $X > Y$ correspond à $X - Y > 0$, i.e. la matrice $X - Y$ est définie positive.

a) Cas continu

Soit le modèle Takagi-Sugeno continu suivant en régime libre :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) \quad (1.39)$$

La stabilité quadratique s'étudie en calculant la dérivée de la fonction (1.38) :

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \frac{d}{dt} (x(t)^T P x(t)) = \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) \quad (1.40)$$

Ou encore en utilisant (1.39) :

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) \right)^T P x(t) + x(t)^T P \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) \right) \quad (1.41)$$

En utilisant les notations définies précédemment, on obtient :

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = x(t)^T (A_z^T P + P A_z) x(t) \quad (1.42)$$

Prouver la stabilité quadratique du modèle (1.39) revient à résoudre le problème suivant :

$$\textbf{Problème 1 :} \text{ Trouver une matrice } P > 0 \text{ telle que } A_z^T P + P A_z < 0 \quad \forall z(t) \in \mathbb{R}^z \quad (1.43)$$

Le fait de vérifier $\frac{d}{dt}V(x(t)) < 0$ pour tout $x(t) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ peut être source de conservatisme car tous les états $x(t)$ ne sont pas forcément admissibles par le modèle (par exemple on peut avoir des éléments de l'état toujours positifs).

Comme les fonctions h_i sont à valeurs positives, une condition suffisante pour avoir (1.43) pour tout $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est que chaque élément de la somme soit négatif.

Théorème 2 /Tanaka et Sugeno 1992/ : Le modèle TS continu (1.39) est GAS si :

$$\exists P > 0, A_i^T P + P A_i < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (1.44)$$

La condition (1.44) ne peut être que suffisante car aucune caractéristique des fonctions h_i n'est prise en compte. En effet on suppose, en utilisant cette relaxation, que $(h_1(z(t)), \dots, h_r(z(t))) \in [0 \ 1]^r$ or il est tout à fait possible que certains r-uples soient inatteignables. Ceci constitue une autre source de conservatisme. L'exemple ci-dessous illustre ce phénomène.

Exemple : Soit le modèle non linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -5 - 10 \times \cos^2(x_1) & 30 - 20 \times |\cos(x_1)| \\ 4 \times (1 - |\cos(x_1)|) \times \cos^2(x_1) & -5 - 10 \times (1 - \cos^2(x_1)) \end{bmatrix} x(t) \quad (1.45)$$

En utilisant l'approche par secteur non linéaire on obtient le modèle TS suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 h_i(z(t)) A_i x(t) \quad \text{avec} \quad A_1 = \begin{bmatrix} -15 & 10 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -15 & 30 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ 0 & -15 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -5 & 30 \\ 0 & -15 \end{bmatrix}, \quad w_0^1(x_1) = |\cos(x_1)|, \quad w_1^1(x_1) = 1 - w_0^1(x_1), \quad w_0^2(x_1) = \cos^2(x_1),$$

$w_1^2(x_1) = 1 - w_0^2(x_1)$, $h_1 = w_0^1 \cdot w_0^2$, $h_2 = w_1^1 \cdot w_0^2$, $h_3 = w_0^1 \cdot w_1^2$ et $h_4 = w_1^1 \cdot w_1^2$. Notons que le modèle TS représente exactement (1.45) dans $\mathbb{R}^2$.

Pour ce modèle, il est impossible de trouver une matrice P définie positive satisfaisant la condition (1.44). En effet, la matrice A_2 a une valeur propre positive et donc il n'existe aucune matrice P définie positive telle que $A_2^T P + P A_2 < 0$. Cependant, le modèle (1.45) est stable. En effet les w_i^j étant fonction de la même variable x_1 , h_2 et h_3 n'atteignent pas leurs bornes par exemple $h_3 = 1$ n'est pas atteignable car il est impossible d'avoir x_1 tel que $|\cos(x_1)| = 1$ et $\cos^2(x_1) = 0$. Pour prouver la stabilité, on utilise la propriété $|\cos(x_1)| \geq \cos^2(x_1)$. La condition de stabilité s'écrit :

$$\begin{aligned} & \cos^2(x_1) |\cos(x_1)| \mathcal{L}_1 + \cos^2(x_1) (1 - |\cos(x_1)|) \mathcal{L}_2 \\ & + (1 - \cos^2(x_1)) |\cos(x_1)| \mathcal{L}_3 + (1 - \cos^2(x_1)) (1 - |\cos(x_1)|) \mathcal{L}_4 < 0 \end{aligned} \quad (1.46)$$

avec $\mathcal{L}_i = A_i^T P + P A_i$. On suppose avoir $\mathcal{L}_1 < 0$, $\mathcal{L}_3 < 0$ et $\mathcal{L}_4 < 0$. Remarquons que $(1 - \cos^2(x_1)) |\cos(x_1)| \geq (1 - |\cos(x_1)|) \cos^2(x_1)$. On peut donc majorer (1.46) par : $\cos^2(x_1) (1 - |\cos(x_1)|) (\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3) < 0$. Des conditions suffisantes sont donc $\mathcal{L}_1 < 0$, $\mathcal{L}_3 < 0$

$\mathcal{L}_4 < 0$ et $\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 < 0$. Elles sont vérifiées pour $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 20 \end{bmatrix}$.

b) Cas discret

Soit le modèle Takagi-Sugeno discret suivant en régime libre :

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) \quad (1.47)$$

La stabilité quadratique s'étudie en calculant la variation de la fonction $V(x) = x^T P x$:

$$\Delta V(x(t)) = V(x(t+1)) - V(x(t)) = x(t+1)^T P x(t+1) - x(t)^T P x(t) \quad (1.48)$$

En calculant (1.48) le long des trajectoires du modèle, on obtient :

$$\Delta V(x(t)) = \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) \right)^T P \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) \right) - x(t)^T P x(t) \quad (1.49)$$

Ou encore en utilisant les notations définies précédemment :

$$\Delta V(x(t)) = x(t)^T (A_z^T P A_z - P) x(t) \quad (1.50)$$

L'étude de la stabilité quadratique revient donc à résoudre le problème suivant :

Problème 2 : Trouver une matrice $P > 0$ telle que $A_z^T P A_z - P < 0 \quad \forall z(t) \in \mathbb{R}^z$ (1.51)

En utilisant le complémentent de Schur sur $A_z^T P P^{-1} P A_z - P$, (1.51) est équivalente à :

$$\begin{bmatrix} -P & (*) \\ P A_z & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (1.52)$$

On en déduit le théorème suivant.

Théorème 3 /Tanaka et Sugeno 1992/ : Le modèle TS discret (1.47) est globalement asymptptiquement stable (GAS) si : $\exists P > 0$, $\begin{bmatrix} -P & (*) \\ P A_i & -P \end{bmatrix} < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, r\}$ (1.53)

6. Stabilisation des modèles Takagi-Sugeno

Soit le modèle TS continu ou discret suivant :

$$\begin{cases} \delta x(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) = A_z x(t) + B_z u(t) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t) = C_z x(t) \end{cases} \quad (1.54)$$

Plusieurs lois de commande sont envisageables. On peut distinguer celles par retour d'état et celles par retour de sortie. Dans le premier cas, la plus simple d'entre elles est un retour linéaire : $u(t) = -F x(t)$. Elle est très peu utilisée dans la mesure où les degrés de liberté pour résoudre les conditions LMI rendent les résultats très conservatifs. De plus, elle est un cas particulier d'une loi plus générale appelée PDC (Parallel Distributed Compensation) /Wang et al. 1996/. Cette dernière correspond à un retour d'état non linéaire qui prend en compte les mêmes fonctions positives h_i que celle de (1.54) :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i x(t) = -F_z x(t) \quad (1.55)$$

Si $F_i = F$, $\forall i \in \{1, \dots, r\}$ on retrouve une loi linéaire.

Pour les retours de sortie, une structure avec observateur peut être utilisée /Tanaka et al. 1998/ ou une structure de retour d'état dynamique /Assawinchaichote et al. 2004/, ces différents points seront discutés plus loin.

a) Cas continu

La boucle fermée dans le cas continu s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_z - B_z F_z) x(t) \\ y(t) = C_z x(t) \end{cases} \quad (1.56)$$

En suivant le même raisonnement que pour la stabilité avec $V(x) = x^T P x$ pour fonction candidate, stabiliser le modèle revient à résoudre le problème suivant :

Problème 3 : Trouver une matrice P définie positive et des matrices $F_i \quad i \in \{1, \dots, r\}$ telles que $(A_z - B_z F_z)^T P + P(A_z - B_z F_z) < 0$ (1.57)

On remarque que l'inégalité du problème 3 n'est pas linéaire en les variables P et F_i . En utilisant la propriété de congruence sur (1.57) avec la matrice symétrique de rang plein $X = P^{-1}$, on obtient :

$$X A_z^T + A_z X - X F_z^T B_z^T - B_z F_z X < 0 \quad (1.58)$$

En effectuant le changement de variable bijectif $M_i = F_i X$, $i \in \{1, \dots, r\}$, le problème (1.58) devient LMI en les variables X et M_i /Tanaka et Sugeno 1992/. On définit les quantités suivantes :

$$Y_{ij} = X A_i^T - M_j^T B_i^T + A_i X - B_i M_j \quad (1.59)$$

On se retrouve donc avec la quantité $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) Y_{ij}$ et tous les résultats peuvent en être déduit. Par exemple en utilisant la relaxation du lemme 12, on obtient le résultat de /Tuan et al. 2001/.

Théorème 4 : Soient un modèle TS continu (1.56), la loi de commande PDC (1.55) et les Y_{ij} définis en (1.59), s'il existe une matrice X définie positive et des matrices $M_i \quad i \in \{1, \dots, r\}$ telles que les conditions (1.33) et (1.34) soient vérifiées alors la boucle fermée est GAS. De plus si le problème a une solution, les gains de la PDC sont donnés par : $F_i = M_i X^{-1}$

Remarque : Si on veut retrouver les résultats de /Liu et Zhang 2003/ il suffit d'introduire des matrices additionnelles $Q_i = (Q_i)^T$, $i \in \{1, \dots, r\}$ et $Q_{ij} = (Q_{ji})^T$, $(i, j) \in \{1, \dots, r\}^2$ et d'appliquer les conditions (1.35) à (1.37). On peut faire de même pour toutes les autres relaxations /Teixeira et al. 2003/, /Fang et al. 2006/. L'essentiel est donc d'obtenir des quantités Υ_{ij} mises sous forme LMI, les relaxations s'appliquent directement.

b) Cas discret

La boucle fermée dans le cas discret s'écrit :

$$\begin{cases} x(t+1) = (A_z - B_z F_z) x(t) \\ y(t) = C_z x(t) \end{cases} \quad (1.60)$$

La variation de la fonction candidate de Lyapunov est négative si :

$$(A_z - B_z F_z)^T P (A_z - B_z F_z) - P < 0 \quad (1.61)$$

ou encore en utilisant le complément de Schur on obtient le problème suivant.

Problème 4 : Trouver une matrice P définie positive et des matrices F_i $i \in \{1, \dots, r\}$ telles

$$\text{que l'inégalité suivante soit satisfaite } \begin{bmatrix} -P & (*) \\ P(A_z - B_z F_z) & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (1.62)$$

En appliquant la propriété de congruence avec $\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix}$ sur (1.62), on obtient :

$$\begin{bmatrix} -X & (*) \\ A_z X - B_z F_z X & -X \end{bmatrix} < 0 \quad (1.63)$$

En utilisant le changement de variable bijectif $M_i = F_i X$. Il vient :

$$\begin{bmatrix} -X & (*) \\ A_z X - B_z M_z & -X \end{bmatrix} < 0 \quad (1.64)$$

On définit les quantités suivantes :

$$\Upsilon_{ij} = \begin{bmatrix} -X & (*) \\ A_i X - B_i M_j & -X \end{bmatrix} \quad (1.65)$$

Les Y_{ij} étant linéaires en les variables recherchées /Tanaka et al. 1998/, on en déduit donc les propriétés suffisantes de stabilité de la boucle fermée en utilisant une des relaxations vues précédemment. Par exemple on peut énoncer le théorème suivant.

Théorème 5 /Tanaka et Sugeno 1992/ : Soient un modèle TS discret (1.60), la loi de commande PDC (1.55) et les Y_{ij} définis en (1.65), s'il existe une matrice X définie positive et des matrices $M_i \quad i \in \{1, \dots, r\}$ telles que les conditions (1.33) et (1.34) soient vérifiées alors la boucle fermée est GAS. De plus si le problème a une solution, les gains de la PDC sont donnés par : $F_i = M_i X^{-1}$

Le retour d'état n'est utilisable que si tout l'état est accessible. La partie suivante s'intéresse au retour de sortie.

7. Stabilisation des modèles TS par retour de sortie

Deux possibilités existent : le retour d'état dynamique ou l'ajout d'un observateur d'état. Dans le premier cas, la loi de commande utilisée est :

$$\begin{cases} \delta \bar{x}(t) = A_z \bar{x}(t) + B_z y(t) \\ u(t) = C_z \bar{x}(t) + D_z y(t) \end{cases} \quad (1.66)$$

Elle suppose le vecteur des prémisses $z(t)$ mesuré. Les développements techniques autour de ce type de commande sont relativement fastidieux et ne sont pas développés ici. Le lecteur peut les retrouver dans /Assawinchaichote et al. 2004/ et /Tanaka et Wang 2001/. Dans la suite on se place dans le deuxième cas, utilisant un observateur. Ce dernier peut s'écrire de façon générale /Tanaka et al. 1998/ :

$$\begin{cases} \delta \hat{x}(t) = A_z \hat{x}(t) + B_z u(t) + K_z (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y} = C_z \hat{x}(t) \end{cases} \quad (1.67)$$

On remarquera que le vecteur des prémisses $z(t)$ n'est pas forcément mesuré, i.e. dans (1.67) on utilise son estimée $\hat{z}(t)$. Dans ce cas, la loi de commande s'écrit :

$$u(t) = -F_z \hat{x}(t) \quad (1.68)$$

La majorité des résultats rencontrés dans la littérature s'intéresse au cas particulier où $z(t)$ est mesurable, i.e. $\hat{z}(t) = z(t)$. Le cas général fera partie des problèmes traités dans ce mémoire chapitre II.

La dynamique de l'erreur de reconstruction $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ est donnée par :

$$\delta \tilde{x}(t) = (A_z - K_z C_z) \tilde{x}(t) \quad (1.69)$$

La dynamique du modèle bouclé s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta \tilde{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_z - B_z F_z & B_z F_z \\ 0 & A_z - K_z C_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} \quad (1.70)$$

Un principe de séparation peut être énoncé de plusieurs façons, en utilisant le principe de comparaison vectorielle /Ma et al. 1998/ ci-après ou les compléments de Schur /Jadbabaie et al. 1997/, /Yoneyama et al. 2000/.

Théorème 6 /Ma et al. 1998/ : S'il existe deux fonctions scalaires $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $V(\tilde{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et des nombres réels positifs $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3$ et $\tilde{\gamma}_4$ tels que :

$$1. \gamma_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq \gamma_2 \|x\|^2, \quad \tilde{\gamma}_1 \|\tilde{x}\|^2 \leq \tilde{V}(\tilde{x}) \leq \tilde{\gamma}_2 \|\tilde{x}\|^2 \text{ avec } \tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$2. \frac{\partial V(x)}{\partial x} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x) h_j(x) (A_i - B_i F_j) x \leq -\gamma_3 \|x\|^2$$

$$3. \frac{\partial \tilde{V}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x) h_j(x) (A_i - K_j C_i) \tilde{x} \leq -\tilde{\gamma}_3 \|\tilde{x}\|^2$$

$$4. \left\| \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right\| \leq \gamma_4 \|x\|, \quad \left\| \frac{\partial \tilde{V}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} \right\| \leq \tilde{\gamma}_4 \|\tilde{x}\|$$

alors, le modèle complet (2.22) est globalement uniformément asymptotiquement stable.

Remarque : Le théorème de séparation n'est plus valide dès que l'on considère des modèles TS avec incertitudes, des retards inconnus ou encore des variables de prémisses non mesurables.

L'utilisation du théorème précédent permet dans le cas quadratique de proposer les conditions de stabilité suivantes. Soient les quantités :

$$Y_{ij} = X A_i^T - M_j^T B_i^T + A_i X - B_i M_j \quad (1.71)$$

$$\tilde{Y}_{ij} = A_i^T \tilde{P} + \tilde{P} A_i - N_j C_i - C_i^T N_j^T \quad (1.72)$$

Théorème 7 /Yoneyama et al. 2000/ (cas continu) : Soient un modèle TS continu (1.56), la loi de commande PDC (1.55), l'observateur à prémisses mesurables (1.67), les Υ_{ij} définis en (1.71) et les $\tilde{\Upsilon}_{ij}$ définis en (1.72). S'il existe des matrices $X > 0$ et $M_i, i \in \{1, \dots, r\}$ telles que (1.33) et (1.34) soient vérifiées pour les Υ_{ij} , et s'il existe des matrices $\tilde{P} > 0$ et $N_i, i \in \{1, \dots, r\}$ telles que les conditions (1.33) et (1.34) soient vérifiées pour les $\tilde{\Upsilon}_{ij}$ alors la boucle fermée est GAS. Si ces deux problèmes ont une solution, les gains de la PDC sont donnés par $F_i = M_i X^{-1}$ et les gains de l'observateur par $K_i = P^{-1} N_i$.

On a le même résultat pour le cas discret avec les quantités suivantes :

$$\Upsilon_{ij} = \begin{bmatrix} -X & (*) \\ A_i X - B_i M_j & -X \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{\Upsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} -\tilde{P} & (*) \\ \tilde{P} A_i - N_j C_i & -\tilde{P} \end{bmatrix}$$

L'utilisation de ces premiers résultats présentés en stabilisation ne peut évidemment pas être suffisante. La solution obtenue en termes de gains de commande par les problèmes LMI est souvent de « faible » qualité, i.e. elle ne garantit ni robustesse, ni performances. A l'instar des développements du linéaire, de nombreux travaux ont eu trait à ces deux besoins indispensables que sont la robustesse et une garantie de performances.

C. Performances et robustesse

Sans être exhaustif dans cette partie, quelques résultats sont présentés permettant d'illustrer les mécanismes mis en œuvre pour garantir des notions de performances et/ou de robustesse. La section suivante traite du problème du régulateur dans le cas continu.

1. Problème du régulateur

On considère un modèle TS continu avec sa loi de commande PDC. On cherche à minimiser ou garantir un coût pour le critère quadratique suivant :

$$\int_0^\infty (y^T(t) Q y(t) + u^T(t) R u(t)) dt \text{ avec } Q > 0, R > 0 \quad (1.73)$$

On suppose qu'il existe une fonction de Lyapunov quadratique satisfaisant l'inégalité de Hamilton-Jacobi :

$$\dot{V}(x) + y^T(t) Q y(t) + u^T(t) R u(t) < 0 \quad (1.74)$$

En intégrant de 0 à $+\infty$, on a :

$$\begin{aligned} V(\infty) - V(0) + \int_0^\infty (y^T(t)Qy(t) + u^T(t)Ru(t))dt &< 0 \\ \Leftrightarrow \int_0^\infty (y^T(t)Qy(t) + u^T(t)Ru(t))dt &< V(0) - V(\infty) < V(0) = x_0^T P x_0 \end{aligned} \quad (1.75)$$

$x_0^T P x_0$ est donc une borne supérieure du critère. A partir de (1.74) on écrit :

$$\begin{aligned} 2x^T(t)(A_z - B_z F_z)^T P x(t) + x^T C_z^T Q C_z x(t) + x^T F_z^T R F_z x(t) &< 0 \\ \Leftrightarrow (A_z - B_z F_z)^T P + P(A_z - B_z F_z) + \begin{bmatrix} C_z^T & F_z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_z \\ F_z \end{bmatrix} &< 0 \end{aligned} \quad (1.76)$$

En utilisant le changement de variable $M_i = F_i X$, $X = P^{-1}$ et le complément de Schur, on obtient :

$$\begin{bmatrix} XA_z^T + A_z X - M_z^T B_z^T - B_z M_z & XC_z^T & M_z^T \\ C_z X & -Q^{-1} & 0 \\ M_z & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (1.77)$$

En définissant les quantités suivantes :

$$Y_{ij} = \begin{bmatrix} XA_i^T + A_i X - M_j^T B_i^T - B_i M_j & XC_i^T & M_j^T \\ C_i X & -Q^{-1} & 0 \\ M_j & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix}$$

On obtient une première solution au problème du régulateur avec comme variables à rechercher M_i et X . Afin de réduire ce nombre de variables, on peut utiliser le lemme de Finsler. Pour ce faire, (1.77) peut s'écrire :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} XA_z^T + A_z X & XC_z^T & 0 \\ C_z X & -Q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{Q}} - \underbrace{\begin{bmatrix} B_z \\ 0 \\ I \end{bmatrix}}_{\mathcal{R}^T} M_z \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{S}} - \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{S}^T} M_z^T \underbrace{\begin{bmatrix} B_z^T & 0 & I \end{bmatrix}}_{\mathcal{R}} < 0 \quad (1.78)$$

d'après (1.25), (1.78) est vraie si $\exists \sigma \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\mathcal{Q} - \sigma \mathcal{R}^T \mathcal{R} < 0 \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} -Q^{-1} & 0 \\ 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (1.79)$$

La deuxième inégalité étant vérifiée, (1.79) se résume à :

$$\begin{bmatrix} XA_z^T + A_z X - \sigma B_z B_z^T & XC_z^T & -\sigma B_z \\ C_z X & -Q^{-1} & 0 \\ -\sigma B_z^T & 0 & -R^{-1} - \sigma I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.80)$$

On a donc une deuxième solution au problème du régulateur /Tuan et al. 2001/. Notons pour deuxième solution qu'il ne s'agit alors que de résoudre un problème de faisabilité. Il est nécessaire de trouver une loi de commande admissible. Pour ce faire on peut utiliser l'inégalité de Hamilton-Jacobi :

$$\dot{V}(x) + z^T(t)Qz(t) + u^T(t)Ru(t) < 0 \Leftrightarrow \Phi(x, u) \triangleq \frac{\partial V(x)}{\partial x} (A_z x + B_z u) + x^T C_z^T Q C_z x + u^T R u < 0$$

$\min_u \Phi(x, u)$ s'obtient en écrivant :

$$\frac{\partial \Phi(x, u)}{\partial u} = \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x} B_z \right)^T + 2Ru = 0 \Leftrightarrow u = -\frac{1}{2} R^{-1} B_z^T \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x} \right)^T \quad (1.81)$$

S'il existe une solution au problème (1.80) alors de façon évidente la fonction de Lyapunov

$$V(x) = x^T P x = x^T X^{-1} x \text{ satisfait l'inégalité de Hamilton-Jacobi. Avec } \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x} \right)^T = 2Px, \text{ une}$$

loi de commande admissible est donc définie par :

$$u(t) = -R^{-1} B_z^T X^{-1} x(t) \quad (1.82)$$

On définit les quantités :

$$Y_{ij} = \begin{bmatrix} XA_i^T + A_i X - \sigma B_i B_j^T & X C_i^T & -\sigma B_i \\ C_i X & -Q^{-1} & 0 \\ -\sigma B_i^T & 0 & -R^{-1} - \sigma I \end{bmatrix} \quad (1.83)$$

En remarquant que $x_0^T P x_0 < \gamma \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \gamma & x_0^T \\ x_0 & X \end{bmatrix} > 0$, on peut proposer le résultat suivant.

Théorème 8 /Tuan et al. 2001/ : Soient un modèle TS continu (1.56) et les Y_{ij} définis en (1.83), s'il existe une matrice X définie positive et un scalaire σ tels que les conditions

$$\begin{bmatrix} \gamma & x_0^T \\ x_0 & X \end{bmatrix} > 0, \quad (1.33) \text{ et } (1.34) \text{ soient vérifiées alors la boucle fermée est GAS et } \gamma \text{ est une}$$

borne supérieure du critère quadratique (1.73). Une loi de commande admissible est donnée par $u(t) = -R^{-1} B_z^T X^{-1} x(t)$

Remarque : Dans ce cas, l'intérêt d'éliminer des variables est de pouvoir améliorer de façon significative la borne supérieure du critère quadratique /Tuan et al. 2001/ /Delmotte et al. 2007/. On notera que l'élimination ne réduit pas le nombre de LMI mais le nombre de variables de $\underbrace{m \times n}_{\text{taille de } M_i} \times r$.

2. Commande H_∞

On considère le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_z x(t) + B_{wz} w(t) + B_{uz} u(t), & x(0) = 0, \\ z(t) = C_z x(t) + D_{wz} w(t) + D_{uz} u(t) \end{cases}$$

où $w(t) \in \mathcal{L}_2$ est une perturbation. On s'intéresse à caractériser le pire cas pour une collection de signaux $w(t) \in \mathcal{L}_2$. On parle de gain $\mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2$ il correspond à trouver une borne supérieure

γ à $\sup_{w(t) \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}$. Cela revient à minimiser le critère suivant avec $\gamma > 0$:

$$\int_0^\infty \|z(t)\|^2 dt < \gamma^2 \int_0^\infty \|w(t)\|^2 dt \quad (1.84)$$

Après quelques manipulations semblables au problème du régulateur, on obtient la condition suivante :

$$\begin{bmatrix} XA_z^T + A_z X - M_z^T B_{uz}^T - B_{uz} M_z & B_{wz} & XC_z^T - M_z^T D_{uz}^T \\ B_{wz}^T & -\gamma I & D_{wz}^T \\ C_z X - D_{uz} M_z & D_{wz} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.85)$$

Ou une version avec élimination des variables M_i / Delmotte et al. 2007/ :

$$\begin{bmatrix} XA_z^T + A_z X - \sigma B_{uz} B_{uz}^T & B_{wz} & XC_z^T - \sigma B_{uz} D_{uz}^T \\ B_{wz}^T & -\gamma I & D_{wz}^T \\ C_z X - \sigma D_{uz} B_{uz}^T & D_{wz} & -\gamma I - \sigma D_{uz} D_{uz}^T \end{bmatrix} < 0 \quad (1.86)$$

Il est donc possible d'écrire les conditions LMI qui permettent de résoudre ce problème. Sans aller plus loin, de nombreux résultats existent et sont basés sur ce type de technique. /Tuan et al. 2001/, /Delmotte et al. 2007/.

Enfin, il y a d'autres moyens d'introduire des notions de performances à l'aide de contraintes LMI, par exemple :

- Pour garantir une vitesse de convergence à l'état on peut introduire un paramètre dans la fonction de Lyapunov (decay rate), i.e. trouver $\alpha > 0$ telle que $\dot{V}(x) + 2\alpha V(x) < 0$ /Tanaka et Wang 2001/.
- Introduire des contraintes sur l'entrée et/ou la sortie /Tanaka et al. 1998/. Cela se fait par l'ajout de contraintes LMI supplémentaires issues du cas linéaire /Boyd et al. 1994/.

- Utiliser des régions LMI permettant de placer les pôles en boucle fermée /Hong et Langari 2000/. Il s'agit de l'extension du cas linéaire /Chilali et Gahinet 1996/. Notons que dans le cas des modèles TS, cela revient à placer les pôles de la boucle fermée (par exemple $A_z - B_z F_z$, $\forall z(t)$) dans une région LMI /Hong et Langari 2000/, /Toulotte et al. 2004/.

3. Robustesse

Elle peut être prise en compte de plusieurs façons. En général, les modèles TS utilisent des incertitudes bornées en norme :

$$\begin{cases} \delta x(t) = (A_z + \Delta A_z)x(t) + (B_z + \Delta B_z)u(t) \\ y(t) = (C_z + \Delta C_z)x(t) \end{cases} \quad (1.87)$$

avec : $\begin{cases} \Delta A_z = H_a \Delta_{az} E_{az} \\ \|\Delta_{az}\|_2 \leq 1 \end{cases}, \begin{cases} \Delta B_z = H_b \Delta_{bz} E_{bz} \\ \|\Delta_{bz}\|_2 \leq 1 \end{cases}, \begin{cases} \Delta C_z = H_c \Delta_{cz} E_{cz} \\ \|\Delta_{cz}\|_2 \leq 1 \end{cases}, \text{ et } H_a, H_b, H_c, E_{ai}, E_{bi}, E_{ci},$

$i \in \{1, \dots, r\}$ des matrices constantes. A partir de tels modèles, en utilisant le lemme 9 il est possible d'obtenir des conditions LMI /Zhao et al. 1995/, /Tanaka et Wang 2001/.

A ce stade, il est impossible de rendre compte des résultats les moins conservatifs. La plupart des études se placent dans des cas particuliers, et la combinatoire est élevée : type de modèle TS utilisé (incertitudes, entrées externes...), choix des critères (critère quadratique, atténuation H_∞ ...), relaxation utilisée (avec ou sans variables supplémentaires)... Il y a presque autant de résultats que de choix possibles.

Enfin avant de conclure ce chapitre, quelques résultats sont rapidement rappelés concernant des modèles TS à retards.

4. Stabilisation de modèles Takagi-Sugeno à retard

Ce genre d'études est aujourd'hui en pleine « explosion », chaque type de retards est repris dans une démonstration souvent très similaire (en utilisant des fonctions de Lyapunov plus ou moins intéressantes ou en introduisant une relaxation plutôt qu'une autre). On ressent le besoin d'une généralisation. Sans entrer dans les détails lorsque le retard est présent sur l'état on peut écrire $\delta x(t) = A_z x(t) + \bar{A}_z x(t - \sigma(t)) + B_z u(t)$.

En considérant le retard constant, des premiers résultats avec une fonction quadratique sont proposés dans /Cao et Frank 2001/. Les résultats sont indépendants du retard. Des résultats moins conservatifs existent et se basent sur la connaissance de la valeur du retard /Guan et Chen 2004/. Ces résultats proposent également une solution pour la stabilisation via retour de sortie dynamique. Une dernière catégorie d'approche est celle concernant les modèles à retard variable. Dans ce cas, des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii sont utilisées /Chen et Liu 2004/ et les conditions obtenues sont dépendantes des bornes du retard. Selon les approches, la dérivée du retard doit être inférieure à 1 /Chen et Liu 2004/ ou quelconque /Tian et Peng 2006/.

D'autres travaux s'intéressent à la stabilisation robuste de modèles TS à retards. Dans le cas général, des incertitudes sont considérées sur les paramètres du modèle ou sur la valeur du retard. Par exemple dans /Tian et Peng 2006/, les auteurs considèrent le problème de la stabilisation de modèles TS continus incertains avec retard variant dans le temps. Des conditions de stabilité mettant en jeu les bornes des incertitudes et les bornes du retard sont données.

Pour illustrer la complexité de certains résultats le théorème suivant donne les conditions dans le cas de modèles TS continu à retard variable dans le temps /Tian et Peng 2006/. Pour relâcher les conditions, les auteurs introduisent des variables additionnelles par l'ajout de 0 « artificiels » :

$$\left(x(t)^T N_{1zz} + x(t - \sigma(t)) N_{2zz} + x(t - \sigma_0) N_{3zz} + \dot{x}(t) N_{4zz} \right) \left(x(t) - x(t - \sigma_0) - \int_{t-\sigma_0}^t \dot{x}(s) ds \right) = 0$$

On aboutit alors à des conditions moins conservatives mais rapidement incompatibles, en termes de nombre de variables à rechercher, avec les solveurs actuels.

Théorème 9 /Tian et Peng 2006/ : Soit le modèle Takagi-Sugeno continu à retard suivant :

$$\dot{x}(t) = A_z x(t) + \bar{A}_z x(t - \sigma(t)) + B_z u(t) \quad (1.88)$$

où $\underline{\sigma} \leq \sigma(t) \leq \bar{\sigma}$ est le retard variant dans le temps et la loi de commande $u(t) = -K_z x(t)$ (fixée à priori). La boucle fermée est globalement asymptotiquement stable s'il existe des matrices $P > 0$, $Q > 0$, $R_1 > 0$, $R_2 > 0$, N_{kij} , T_{kij} ($i, j \in \{1, \dots, r\}$ $k \in \{1, \dots, 4\}$) telles que :

$$\begin{bmatrix} \Xi_{zz}^{11} & (*) \\ \Xi_{zz}^{21} & \Xi^{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (1.89)$$

avec

$$\Xi_{zz}^{11} = \begin{bmatrix} \Gamma_{zz}^{11} & (*) & (*) & (*) \\ \Gamma_{zz}^{21} & \Gamma_{zz}^{22} & (*) & (*) \\ \Gamma_{zz}^{31} & \Gamma_{zz}^{32} & \Gamma_{zz}^{33} & (*) \\ \Gamma_{zz}^{41} & \Gamma_{zz}^{42} & \Gamma_{zz}^{43} & \Gamma_{zz}^{44} \end{bmatrix}, \Xi_{zz}^{21} = \begin{bmatrix} \tau N_{1zz}^T & \tau N_{2zz}^T & \tau N_{3zz}^T & \tau N_{4zz}^T \\ \delta N_{1zz}^T & \delta N_{2zz}^T & \delta N_{3zz}^T & \delta N_{4zz}^T \end{bmatrix}, \Xi^{22} = \begin{bmatrix} -\tau R_1 & 0 \\ 0 & -\delta R_2 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{zz}^{11} = Q + N_{1zz} + N_{1zz}^T + M_1 A_z + A_z^T M_1^T + M_1 B_z K_z + K_z^T B_z^T M_1^T,$$

$$\Gamma_{zz}^{21} = N_{2zz} - T_{1zz}^T + \bar{A}_z M_1^T + M_2 A_z + M_2 B_z K_z, \Gamma_{zz}^{22} = -T_{2zz} - T_{2zz}^T + M_2 \bar{A}_z + \bar{A}_z^T M_2^T,$$

$$\Gamma_{zz}^{31} = -N_{1zz}^T + N_{3zz} + T_{1zz}^T + M_3 A_z + M_3 B_z K_z, \Gamma_{zz}^{32} = -N_{2zz}^T + T_{2zz}^T - T_{3zz} + M_3 \bar{A}_z,$$

$$\Gamma_{zz}^{33} = -Q - N_{3zz} - N_{3zz}^T + T_{3zz} + T_{3zz}^T, \Gamma_{zz}^{41} = P + N_{4zz} - M_1^T + M_4 \bar{A}_z + M_4 B_z K_z,$$

$$\Gamma_{zz}^{42} = -T_4 - M_2^T + M_4 \bar{A}_z, \Gamma_{zz}^{43} = -N_{4zz} + T_{4zz} - M_3^T, \Gamma_{zz}^{44} = \tau R_1 + 2\delta R_2 - M_4 - M_4^T,$$

$$\delta = (\bar{\sigma} - \underline{\sigma})/2 \text{ et } \tau = (\bar{\sigma} + \underline{\sigma})/2$$

Enfin, notons que l'approche par fonction de Lyapunov ne permet de prouver la stabilité par rapport aux conditions initiales que pour l'origine. Si on veut étendre les résultats obtenus pour des entrées externes différentes de zéro (échelon, sinus), on peut utiliser la propriété d'ISS (Input to State Stability) /Sontag et Wang 1995/. Plusieurs résultats sont donnés pour les modèles TS dans /Lauber 2003/.

D. Discussion et conclusion

Ce premier chapitre a essayé de faire un tour d'horizon rapide sur les modèles TS. Il ressort principalement deux points. Le premier concerne, pour la plupart des problèmes, la possibilité d'obtenir des contraintes LMI. Le deuxième point concerne le conservatisme des résultats sachant que l'on n'a que des conditions suffisantes. Cela provient de plusieurs phénomènes : le choix du modèle, le fait de ne pas utiliser des connaissances autres que la propriété de somme convexe, le choix d'une fonction de Lyapunov quadratique, les différentes majorations utilisées...

En ce qui concerne la mise sous forme LMI, on se rend compte que sorti des problèmes standards (retour d'état robuste, retour de sortie sans incertitudes et avec les prémisses $z(t)$ mesurables ...), les problèmes deviennent rapidement difficiles et très peu de problèmes LMI peuvent être proposés.

Sans être exhaustif on peut citer comme problèmes à résoudre :

- Retour de sortie avec observateur dans le cas de modèles incertains et/ou du vecteur des prémisses $z(t)$ partiellement non mesurable. Notons qu'un résultat existe sous forme de LMI /Guerra et al. 2006/ au prix d'une majoration introduisant du conservatisme.
- Poursuite de trajectoire dans le cas incertain et en retour de sortie. Là encore l'unique résultat sous forme de LMI disponible /Mansouri 2006/ se fait au prix d'une majoration.
- Retour de sortie statique, retour de sortie dynamique avec des modèles TS incertains.

Afin de réduire le conservatisme des conditions obtenues, plusieurs travaux se sont consacrés à l'élaboration de nouvelles fonctions candidates Lyapunov. Ces travaux mettent en jeu des fonctions plus appropriées pour les modèles Takagi-Sugeno dans le sens où elles utilisent des informations sur les fonctions h_i autre que leur propriété de somme convexe.

Dans les cas continus et discrets, l'utilisation de fonctions de Lyapunov définies par morceaux semble donner des résultats satisfaisants /Johansson et al. 1999/ /Feng 2003/. Ces fonctions sont définies par $V(x) = V_i(x)$ $z(t) \in \mathcal{D}_i$ ou les $\mathcal{D}_i$ sont des partitions de l'ensemble des $z(t)$ admissibles telles que $\exists j \ h_j(z(t)) = 0$. Prouver la stabilité revient alors à vérifier que pour chaque i , $\delta V_i(x) < 0$ pour les modèles linéaires actifs (i.e. pour tous les modèles linéaire j tels que $\exists z(t) \in \mathcal{D}_i, \ h_j(z(t)) \neq 0$). Des contraintes de continuité aux frontières doivent être également vérifiées. La fonction ainsi construite prend en compte le caractère nonlinéaire du modèle. Néanmoins l'efficacité de l'approche dépend de la structure du modèle. Par exemple, elle ne peut pas être appliquée sur les modèles issus de l'approche par secteurs nonlinéaires. En effet, dans ce cas, il existe toujours un domaine $\mathcal{D}$ tel que $\forall z(t) \in \mathcal{D}, \forall j \ h_j(z(t)) \neq 0$.

Un autre choix qui semble assez naturel est de considérer une fonction qui prend en compte la même partition de l'espace des prémisses que celle des modèles TS. Par exemple on peut choisir /Blanco et al. 2001/ /Guerra et Vermeiren 2004/ :

$$V(x(t)) = x(t)^T \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) P_i \right) x(t) \quad (1.90)$$

De cette façon on est sûr d'englober le cas quadratique, il suffit de prendre $\forall i \in \{1, \dots, r\}$ $P_i = P$. Cette approche est très féconde dans le cas discret /Guerra et Vermeiren 2004/ et sera reprise dans ce mémoire.

Plusieurs travaux ont tenté d'adapter ces résultats dans le cas des modèles continus /Blanco et al. 2001/ /Tanaka et al. 2001/. Aucun résultat satisfaisant n'a été développé dans le sens où toutes les conditions obtenues nécessitent la connaissance d'une borne sur la dérivée des fonctions $h_i(z(t))$ ce qui est restrictif. Cependant des travaux récents semblent prometteurs /Rhee et Won 2006/. Ils utilisent une classe de fonctions candidates indépendantes du chemin qui ne s'appliquent qu'à une classe restreinte de modèles TS. De plus en stabilisation, seules des conditions BMI sont obtenues. Néanmoins, leur approche permet d'étendre les résultats du cas quadratique dans de nombreux cas sans connaître les bornes des dérivées des fonctions $h_i(z(t))$.

Pour finir, dans tout le mémoire, les modèles TS ainsi que les modèles linéaires qui les composent seront supposés commandables et observables.

La figure 1 donne les différents points abordés dans les chapitres suivants. En abscisse apparaissent les différentes fonctions de Lyapunov qui seront utilisées : Q (quadratique), NQ (non quadratique), kQ et kNQ (variations sur k instants dans le cas discret) et $\mathcal{P}Q$ et $\mathcal{P}NQ$ (généralisation). En ordonnées les types de commandes utilisées : les 3 premières sont des retour d'état (PDC, lois de commande pour le cas NQ , lois de commande périodique) la dernière est un retour de sortie utilisant un observateur. Enfin, dans chaque case on retrouve quel chapitre est concerné et quel type de modèles sont pris en compte : N (prémisses non mesurables), I (modèles TS incertains (1.87)), R (modèles TS à retards (1.88) en discret) et P (modèles TS périodiques).

Type de commande					
Retour d'état	Retour de sortie	Chap 2 TS N	Chap 2 TS I		
	Loi périodique				Chap 4 TS P
	Loi pour le NQ		Chap 2 TS I+R		Chap 4
	PDC			Chap 3 TS I Chap 4 TS R	Chap 4
		V_Q	V_{NQ}	$\mathcal{V}_{kQ \text{ et } NQ}$	$\mathcal{V}_{\mathcal{P}Q \text{ et } NQ}$
		Fonction de Lyapunov			

Figure 1 : Problèmes abordés dans le mémoire

L'intérêt de chaque étude menée est :

- soit de proposer des solutions, en termes de problèmes LMI, à des problèmes qui n'en avaient pas, chapitre 2 principalement ;
- soit de proposer des conditions nouvelles permettant au minimum d'englober les résultats issus de la littérature, chapitres 2 et 3 ;
- soit de dégager de nouvelles pistes permettant d'unifier les résultats pour un grand nombre de problèmes, chapitre 4.

Chapitre II : Nouvelles conditions de stabilisation des modèles TS

A. Introduction	38
B. Stabilisation de modèles TS continus par retour de sortie	40
C. Stabilisation de modèles TS continus : prémisses partiellement mesurables.....	46
D. Stabilisation des modèles TS discrets incertains par retour de sortie	49
E. Stabilisation de modèles TS discrets incertains : retour d'état.....	56
F. Stabilisation de modèles incertains à retard variable.	58
G. Conclusion.....	62

A. Introduction

Il ressort du chapitre précédent un certain nombre de verrous. L'un de ces verrous concerne la mise sous forme d'un problème LMI pour tous les retours de sortie, aussi bien dans le cas continu que discret, concernant des modèles TS avec prémisses non mesurables, incertitudes, retards ... Les deux premières parties donnent en partie une réponse à ces questions sous forme de problèmes LMI. Dans le cas continu, il s'agit du cas général de retour de sortie d'un modèle TS utilisant un vecteur de variables de prémisses $z(t)$ partiellement (ou totalement) non mesurable. Dans le cas discret, un retour de sortie pour des modèles TS incertains. Les deux mises sous forme LMI utilisent un canevas commun. L'extension à des cas similaires, modèle TS continu incertain ou modèle TS discret avec vecteur des variables de prémisses inconnu, peut être faite de façon directe et n'est pas donnée ici.

Le deuxième verrou est certainement le plus important. Il s'agit du conservatisme introduit par l'utilisation de la stabilité quadratique, i.e. utilisant une forme quadratique pour les fonctions de Lyapunov $x^T(t)Px(t)$. La deuxième partie se place dans le cas des modèles TS discrets et étend un certain nombre de résultats en utilisant des fonctions candidates de Lyapunov non quadratiques /Guerra et Vermeiren 2004/. Le retour de sortie est considéré dans ce contexte ainsi que la stabilisation par retour d'état de modèles TS incertains et incertains à retard. L'intérêt de ces approches est d'inclure les résultats issus du cas quadratique.

Certains problèmes dans la suite sont sous la forme d'une triple somme avec $h_i(\cdot)$ et $g_k(\cdot)$ des fonctions positives scalaires ayant la propriété de somme convexe et Υ_{ij}^k des matrices de tailles appropriées. Ils s'écrivent :

$$\Upsilon_{hh}^g = \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r g_k(\cdot) h_i(\cdot) h_j(\cdot) \Upsilon_{ij}^k < 0 \quad (2.1)$$

Afin d'obtenir des conditions LMI, on utilise le fait que les fonctions $g_k(\cdot)$ sont positives. On obtient donc les conditions suffisantes à (2.1) suivantes :

$$\Upsilon_{hh}^k = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\cdot) h_j(\cdot) \Upsilon_{ij}^k < 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, r\} \quad (2.2)$$

La double somme restante peut être traitée par toutes les relaxations présentées dans le chapitre I. On rappelle que dans le cas où il est difficile d'introduire de nouvelles variables, la relaxation est basée sur le lemme I-12 /Tuan et al. 2001/ qui s'écrit dans ce cas :

Lemme 1 : Soient Υ_{ij}^k des matrices et $h_i (i, j, k) \in \{1, \dots, r\}^3$ des fonctions positives ayant la propriété de somme convexe, si les conditions suivantes sont vérifiées alors (2.1) est vraie :

$$\Upsilon_{ii}^k < 0, \forall i, k \in \{1, \dots, r\} \quad (2.3)$$

$$\frac{2}{r-1} \Upsilon_{ii}^k + \Upsilon_{ij}^k + \Upsilon_{ji}^k < 0, \forall (i, j, k) \in \{1, \dots, r\}^3, i \neq j \quad (2.4)$$

S'il est possible d'introduire des variables additionnelles, on peut utiliser une extension de /Liu et Zhang 2003/ présentée au chapitre I et qui s'écrit :

Lemme 2 : Soit Υ_{ij}^k des matrices et h_i des fonctions ayant la propriété de somme convexe s'il existe des matrices $Q_i^k = (Q_i^k)^T, i \in \{1, \dots, r\}$ et $Q_{ij}^k = (Q_{ji}^k)^T, (i, j, k) \in \{1, \dots, r\}^3$, telles que $\forall (i, j, k) \in \{1, \dots, r\}^3$ les conditions suivantes soient vérifiées alors (2.1) est vraie :

$$\Upsilon_{ii}^k + Q_i^k < 0, \quad (2.5)$$

$$\Upsilon_{ij}^k + \Upsilon_{ji}^k + Q_{ij}^k + Q_{ji}^k \leq 0 \quad j > i, \quad (2.6)$$

$$\begin{bmatrix} Q_1^k & Q_{12}^k & \dots & Q_{1r}^k \\ Q_{21}^k & Q_2^k & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & Q_{(r-1)r}^k \\ Q_{r1}^k & \dots & Q_{r(r-1)}^k & Q_r^k \end{bmatrix} > 0. \quad (2.7)$$

Enfin des sommes plus importantes peuvent apparaître avec $f_m(\cdot), g_k(\cdot), h_j(\cdot)$ des fonctions positives ayant la propriété de somme convexe :

$$\left(\Upsilon_{hh}^{gg}\right)_f = \sum_{m=1}^{r_f} \sum_{k=1}^{r_g} \sum_{l=1}^{r_g} \sum_{j=1}^{r_h} \sum_{i=1}^{r_h} f_m(\cdot) g_k(\cdot) g_l(\cdot) h_j(\cdot) h_i(\cdot) \left(\Upsilon_{ij}^{kl}\right)_m < 0 \quad (2.8)$$

Dans ce contexte, l'ajout de variables additionnelles est à éviter, il est trop rapidement incompatible avec les solveurs actuels. Seul le premier type de relaxation /Tuan et al. 2001/ est étendu à ce cas. Pour ce faire, on remarquera que (2.8) est vérifiée si :

$$\left(\Upsilon_{ii}\right)_f^{gg} < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, r_h\} \quad (2.9)$$

$$\frac{2}{r_h-1} \left(\Upsilon_{ii}\right)_f^{gg} + \left(\Upsilon_{ij}\right)_f^{gg} + \left(\Upsilon_{ji}\right)_f^{gg} < 0 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, r_h\}, i \neq j. \quad (2.10)$$

On se ramène donc au cas de la triple somme traitée précédemment dans le lemme 1. En appliquant ce lemme sur les conditions (2.9) et (2.10) on obtient le résultat suivant :

Lemme 3 : Pour $i, j \in \{1, \dots, r_h\}$, $k, l \in \{1, \dots, r_g\}$ et $m \in \{1, \dots, r_f\}$, (2.8) est vérifiée si:

$$\left(\Upsilon_{ii}^{kk}\right)_m < 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{2}{r_g - 1} \left(\Upsilon_{ii}^{kk}\right)_m + \left(\Upsilon_{ii}^{kl}\right)_m + \left(\Upsilon_{ii}^{lk}\right)_m < 0, \quad k \neq l \quad (2.12)$$

$$\frac{2}{r_h - 1} \left(\Upsilon_{ii}^{kk}\right)_m + \left(\Upsilon_{ij}^{kk}\right)_m + \left(\Upsilon_{ji}^{kk}\right)_m < 0, \quad i \neq j \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} & \frac{4}{(r_g - 1)(r_h - 1)} \left(\Upsilon_{ii}^{kk}\right)_m + \frac{2}{r_g - 1} \left(\left(\Upsilon_{ii}^{kl}\right)_m + \left(\Upsilon_{ii}^{lk}\right)_m \right) \\ & + \frac{2}{r_h - 1} \left(\left(\Upsilon_{ij}^{kk}\right)_m + \left(\Upsilon_{ji}^{kk}\right)_m \right) + \left(\Upsilon_{ij}^{kl}\right)_m + \left(\Upsilon_{ji}^{kl}\right)_m + \left(\Upsilon_{ij}^{lk}\right)_m + \left(\Upsilon_{ji}^{lk}\right)_m < 0 \end{aligned} \quad , \quad i \neq j \text{ et } k \neq l \quad (2.14)$$

Les deux premières parties s'intéressent à la mise sous forme LMI du problème du retour de sortie avec observateur dans le cas de modèles TS.

B. Stabilisation de modèles TS continus par retour de sortie

On rappelle qu'une formulation LMI pour le retour de sortie dynamique n'est disponible que si les variables de prémisses $z(t)$ sont mesurées /Ma et al 1998/, /Assawinchaichote et al. 2004/. L'approche choisie est un retour d'état avec observateur. La motivation de cette partie est de proposer une formulation LMI du cas général de prémisses partiellement mesurées. Notons que très peu de travaux existent traitant de ce cas général et que les résultats obtenus ne sont jamais LMI. Les seules conditions obtenues sont BMI (Bilinear Matrix Inequalities) /Yoneyama et al. 2001/ /Lo et Lin 2004/ et leur résolution n'est pas forcément satisfaisante. Effectivement, la résolution utilise deux problèmes LMI séquencés /Lo et Lin 2004/, ce qui ne garantit pas la convergence de l'algorithme et donne des solutions très dépendantes de l'initialisation de l'algorithme. Pour la suite, il est nécessaire de différencier le vecteur $z(t)$ de sa reconstruction $\hat{z}(t)$. On introduit la notation suivante :

Notation : Soit Y_i, Y_{ij} des matrices de taille appropriée et $h_i(\cdot)$ des fonctions scalaires ayant

la propriété de somme convexe, on pose $Y_z = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))Y_i$, $Y_{\hat{z}} = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(t))Y_i$ et

$$Y_{zz} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(\hat{z}(t))Y_{ij}.$$

On considère le modèle TS continu :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_z x(t) + B_z u(t) \\ y(t) = C_z x(t) \end{cases} \quad (2.15)$$

la loi de commande par retour d'état de type PDC :

$$u(t) = -F_{\hat{z}} \hat{x}(t) \quad (2.16)$$

et l'observateur flou basé sur le modèle TS :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_{\hat{z}} \hat{x}(t) + B_{\hat{z}} u(t) + K_{\hat{z}} (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_{\hat{z}} \hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.17)$$

Remarque : Comme dans le cas général $z(t) \neq \hat{z}(t)$ les matrices de l'observateur $(A_{\hat{z}}, B_{\hat{z}}, C_{\hat{z}})$ sont différentes de celles du modèle. L'observateur ne garantit pas la convergence de l'erreur d'estimation d'état, i.e. $\hat{x}(t) \not\rightarrow x(t)$, en revanche la stabilisation de la boucle fermée est garantie i.e. $x(t) \rightarrow 0$ et $\hat{x}(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$.

En notant l'erreur d'estimation $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, on peut écrire son équation dynamique :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A_z - A_{\hat{z}} - K_{\hat{z}}(C_z - C_{\hat{z}}) - (B_z - B_{\hat{z}})F_{\hat{z}})x(t) + (A_{\hat{z}} - K_{\hat{z}}C_{\hat{z}} + (B_z - B_{\hat{z}})F_{\hat{z}})\tilde{x}(t) \quad (2.18)$$

ainsi que la dynamique de l'état du modèle (2.15) :

$$\dot{x}(t) = (A_z - B_z F_{\hat{z}})x(t) + B_z F_{\hat{z}} \tilde{x}(t) \quad (2.19)$$

En notant $\bar{A}_{zz} = A_z - A_{\hat{z}}$, $\bar{B}_{zz} = B_z - B_{\hat{z}}$ et $\bar{C}_{zz} = C_z - C_{\hat{z}}$ on peut écrire la dynamique globale de la boucle fermée :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_z - B_z F_{\hat{z}} & B_z F_{\hat{z}} \\ \bar{A}_{zz} - K_{\hat{z}} \bar{C}_{zz} - \bar{B}_{zz} F_{\hat{z}} & A_{\hat{z}} - K_{\hat{z}} C_{\hat{z}} + \bar{B}_{zz} F_{\hat{z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

L'expression (2.20) montre que le principe de séparation ne peut pas être appliqué. En effet les termes $\bar{A}_{zz}$, $\bar{B}_{zz}$ et $\bar{C}_{zz}$ représentent les différences entre le modèle observé et l'observateur. Dans le cas général, la dynamique de l'erreur $\dot{\tilde{x}}(t)$ est fonction de l'état du modèle à stabiliser. L'observateur ne peut donc pas converger indépendamment du modèle à stabiliser.

L'analyse de la stabilité de la boucle est réalisée grâce à la méthode directe de Lyapunov. Pour cela on considère, la fonction candidate suivante avec $P > 0$ et $\tilde{P} > 0$:

$$V(x, \tilde{x}) = x^T(t)Px(t) + \tilde{x}^T(t)\tilde{P}\tilde{x}(t) \quad (2.21)$$

Remarque : La fonction candidate de Lyapunov quadratique associée au modèle (2.20) est

normalement $V(x, \tilde{x}) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix}^T \mathcal{P} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix}$. La simplification (2.21) est faite pour permettre

l'obtention des conditions LMI au problème.

La dérivée de la fonction (2.21) s'écrit :

$$\dot{V}(x, \tilde{x}) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \tilde{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \tilde{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

En utilisant (2.20), on obtient :

$$\dot{V}(x, \tilde{x}) = (*) + \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \tilde{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_z - B_z F_z & B_z F_z \\ \bar{A}_{zz} - K_z \bar{C}_{zz} - \bar{B}_{zz} F_z & A_z - K_z C_z + \bar{B}_{zz} F_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Une condition nécessaire et suffisante pour avoir $\dot{V}(x, \tilde{x}) < 0$ le long des trajectoires du modèle est :

$$\begin{bmatrix} (A_z^T - F_z^T B_z^T)P + P(A_z - B_z F_z) & (*) \\ F_z^T B_z^T P + \tilde{P}(\bar{A}_{zz} - K_z \bar{C}_{zz} - \bar{B}_{zz} F_z) & (A_z^T - C_z^T K_z^T + F_z^T \bar{B}_{zz}^T)\tilde{P} + \tilde{P}(A_z - K_z C_z + \bar{B}_{zz} F_z) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.24)$$

En utilisant le lemme I-9, on obtient la majoration suivante :

$$\forall w \in \mathbb{R}^{**} \quad (*) + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\bar{B}_{zz} F_z & \bar{B}_{zz} F_z \end{bmatrix} \leq w^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{P}^2 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} -F_z^T \bar{B}_{zz}^T \\ F_z^T \bar{B}_{zz}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\bar{B}_{zz} F_z & \bar{B}_{zz} F_z \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

D'où (2.24) est vraie si :

$$\begin{bmatrix} (*) + P(A_z - B_z F_z) & (*) \\ F_z^T B_z^T P + \tilde{P}(\bar{A}_{zz} - K_z \bar{C}_{zz}) & (*) + \tilde{P}(A_z - K_z C_z) + w^{-1} \tilde{P}^2 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} -F_z^T \bar{B}_{zz}^T \\ F_z^T \bar{B}_{zz}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\bar{B}_{zz} F_z & \bar{B}_{zz} F_z \end{bmatrix} < 0 \quad (2.26)$$

ou encore en utilisant le complément de Schur et en permutant les lignes/colonnes 2 et 3 :

$$\begin{bmatrix} (*) + P(A_z - B_z F_z) & (*) & (*) \\ -\bar{B}_{zz} F_z & -w^{-1}I & (*) \\ F_z^T B_z^T P + \tilde{P}(\bar{A}_{zz} - K_z \bar{C}_{zz}) & F_z^T \bar{B}_{zz}^T & (*) + \tilde{P}(A_z - K_z C_z) + w^{-1}\tilde{P}^2 \end{bmatrix} < 0 \quad (2.27)$$

En utilisant le même raisonnement sur le terme $\tilde{P}(\bar{A}_{zz} - K_z \bar{C}_{zz})$, on obtient la condition suivante avec λ et θ deux scalaires positifs :

$$\begin{bmatrix} (*) + P(A_z - B_z F_z) + \lambda \bar{A}_{zz}^T \bar{A}_{zz} + \theta \bar{C}_{zz}^T \bar{C}_{zz} & (*) & (*) \\ -\bar{B}_{zz} F_z & -w^{-1}I & (*) \\ F_z^T B_z^T P & F_z^T \bar{B}_{zz}^T & \Theta \end{bmatrix} < 0 \quad (2.28)$$

avec $\Theta = (*) + \tilde{P}(A_z - K_z C_z) + w^{-1}\tilde{P}^2 + \lambda^{-1}\tilde{P}^2 + \theta^{-1}\tilde{P}K_z K_z^T \tilde{P}$

En utilisant la propriété de congruence avec $\text{diag}([X \quad I \quad X])$ et le changement de variable bijectif $M_z = F_z X$, (2.28) devient :

$$\begin{bmatrix} (*) + (A_z - B_z F_z)X + \lambda X \bar{A}_{zz}^T \bar{A}_{zz} X + \theta X \bar{C}_{zz}^T \bar{C}_{zz} X & (*) & (*) \\ -\bar{B}_{zz} M_z & -w^{-1}I & (*) \\ M_z^T B_z^T & M_z^T \bar{B}_{zz}^T & X \Theta X \end{bmatrix} < 0 \quad (2.29)$$

(2.29) est vérifiée impose $\Theta < 0$. Si $\Theta < 0$ on peut utiliser la majoration suivante :

$$(X + \mu \Theta^{-1})^T \Theta (X + \mu \Theta^{-1}) \leq 0 \Leftrightarrow X^T \Theta X \leq -\mu(X^T + X) - \mu^2 \Theta^{-1} \quad (2.30)$$

En appliquant cette majoration sur la condition (2.29), on obtient :

$$\begin{bmatrix} (*) + (A_z - B_z F_z)X + \lambda X \bar{A}_{zz}^T \bar{A}_{zz} X + \theta X \bar{C}_{zz}^T \bar{C}_{zz} X & (*) & (*) \\ -\bar{B}_{zz} M_z & -w^{-1}I & (*) \\ M_z^T B_z^T & M_z^T \bar{B}_{zz}^T & -2\mu X - \mu^2 \Theta^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.31)$$

L'utilisation du complément de Schur sur les termes $\lambda X \bar{A}_{zz}^T \bar{A}_{zz} X$, $\theta X \bar{C}_{zz}^T \bar{C}_{zz} X$ et $\mu^2 \Theta^{-1}$, donne :

$$\begin{bmatrix} (*) + A_z X - B_z M_z & (*) & (*) & (*) & (*) & 0 \\ \bar{A}_{zz} X & -\lambda^{-1}I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{zz} X & 0 & -\theta^{-1}I & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{B}_{zz} M_z & 0 & 0 & -w^{-1}I & (*) & 0 \\ M_z^T B_z^T & 0 & 0 & M_z^T \bar{B}_{zz}^T & -2\mu X & \mu I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu I & \begin{pmatrix} (*) + \tilde{P}(A_z - K_z C_z) + w^{-1}\tilde{P}^2 \\ + \lambda^{-1}\tilde{P}^2 + \theta^{-1}\tilde{P}K_z K_z^T \tilde{P} \end{pmatrix} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.32)$$

Enfin, avec le changement de variable bijectif $N_z = \tilde{P}K_z$ et en utilisant le complément de Schur sur $w^{-1}\tilde{P}^2$, $\lambda^{-1}\tilde{P}^2$ et $\theta^{-1}\tilde{P}K_zK_z^T\tilde{P}$ on obtient la condition :

$$\begin{bmatrix} (*) + A_z X - B_z M_z & (*) & (*) & (*) & (*) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{A}_{zz} X & -\lambda^{-1} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{zz} X & 0 & -\theta^{-1} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{B}_{zz} M_z & 0 & 0 & -w^{-1} I & (*) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_z^T B_z^T & 0 & 0 & M_z^T \bar{B}_{zz}^T & -2\mu X & \mu I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu I & (*) + \tilde{P}A_z - N_z C_z & (*) & (*) & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{P} & -wI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{P} & 0 & -\lambda I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_z^T & 0 & 0 & -\theta I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.33)$$

A partir de (2.33) on définit la quantité suivante :

$$\Upsilon_{ij}^k = \begin{bmatrix} (*) + A_i X - B_i M_j & (*) & (*) & (*) & (*) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{A}_{ij} X & -\lambda^{-1} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{ij} X & 0 & -\theta^{-1} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{B}_{ik} M_j & 0 & 0 & -w^{-1} I & (*) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_j^T B_i^T & 0 & 0 & M_j^T \bar{B}_{ik}^T & -2\mu X & \mu I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu I & (*) + \tilde{P}A_i - N_j C_i & (*) & (*) & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{P} & -wI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{P} & 0 & -\lambda I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_j^T & 0 & 0 & -\theta I \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

avec $\bar{A}_{ij} = A_i - A_j$, $\bar{B}_{ik} = B_i - B_k$ et $\bar{C}_{ik} = C_i - C_k$.

Théorème 1 /Guerra et al. 2006/ : Soient le modèle TS continu (2.15), l'observateur (2.17), la loi de commande (2.16) et les Υ_{ij}^k définis en (2.34). S'il existe des matrices définies positives X et $\tilde{P}$, des scalaires μ , w , λ et θ , et des matrices N_i et M_i $i \in \{1, \dots, r\}$ tels que les conditions (1.33) et (1.34) soient satisfaites alors la boucle fermée est globalement asymptotiquement stable. Les gains de commande sont donnés par $F_i = M_i X^{-1}$ et les gains de l'observateur par $K_i = \tilde{P}^{-1} N_j$.

Remarque : Le problème n'est pas strictement LMI puisque les conditions du théorème 1 ne sont pas linéaires en les scalaires μ , w , λ et θ . Il est donc nécessaire de les fixer a priori.

Pour montrer l'intérêt de l'approche on choisit un modèle TS instable en boucle ouverte. Il est

composé de deux modèles linéaires dont les matrices sont : $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 \\ -2.3 & -1 \end{bmatrix}$,

$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $C_1 = C_2 = [10 \ 2]$. Les fonctions non linéaires sont définies par :

$h_1(x(t)) = 0.5 + \arctan(x_2(t))/\pi$ et $h_2(x(t)) = 1 - h_1(x(t))$. On suppose $x_2(t)$ non

mesurable. Si on calcule une loi de commande et un observateur indépendamment (en supposant le principe de séparation valide) un résultat est /Tanaka et al. 1998/ :

$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,00 & -6,08 \\ 2,34 & -14,2 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,16 & 0,34 \\ -0,33 & -0,58 \end{bmatrix}$. On s'aperçoit qu'il existe des

conditions initiales telles que la boucle fermée est instable. Par exemple pour les conditions

initiales $x^T(0) = [100 \ 100]^T$ (pour le modèle) et $\hat{x}^T(0) = [0 \ 0]^T$ (pour l'observateur) la

figure 1 montre la divergence de la boucle fermée.

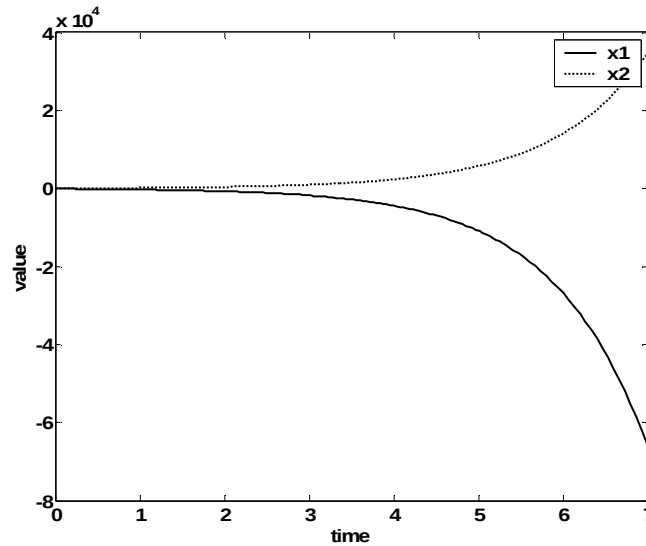


Figure 1 : évolution de l'état pour les conditions initiales $x^T(0) = [100 \ 100]^T$ et $\hat{x}^T(0) = [0 \ 0]^T$.

En prenant en compte le modèle complet et en utilisant le résultat du théorème 1 et avec

$w=1$, $\mu=7$ et $\lambda=1e-3$, un résultat est : $\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12,34 & 0,001567 \\ 11,78 & 0,006849 \end{bmatrix}$ et

$\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25,75 & -13,33 \\ 25,75 & -13,33 \end{bmatrix}$. Sur la figure ci-après, on retrouve l'évolution de l'état au

cours du temps pour les mêmes conditions initiales.

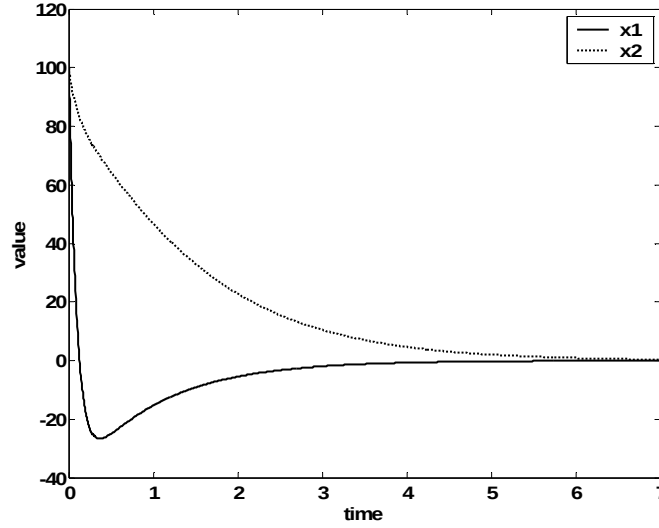


Figure 2 : évolution de l'état pour les conditions initiales $x^T(0) = [100 \ 100]^T$ et $\hat{x}^T(0) = [0 \ 0]^T$.

D'une manière générale, on peut être confronté à un cas intermédiaire entre $z(t)$ entièrement mesurable et $z(t)$ non mesurable.

C. Stabilisation de modèles TS continus : prémisses partiellement mesurables

Afin de représenter ce cas, on distingue la partie mesurée de $z(t)$ qui sera notée $\alpha(t)$, de la partie non mesurée qui sera noté $\beta(t)$. L'observateur et la loi de commande ont comme variable de prémisses $\alpha(t)$ et $\hat{\beta}(t)$. Le modèle, son observateur et sa loi de commande peuvent ainsi se réécrire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} v_i(\alpha(t)) w_j(\beta(t)) (A_{ij}x(t) + B_{ij}u(t)) = A_{\alpha\beta}x(t) + B_{\alpha\beta}u(t) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} v_i(\alpha(t)) w_j(\beta(t)) C_{ij}x(t) = C_{\alpha\beta}x(t) \end{cases} \quad (2.35)$$

$$u(t) = -\sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} v_i(\alpha(t)) w_j(\hat{\beta}(t)) F_{ij} \hat{x}(t) = -F_{\alpha\hat{\beta}} \hat{x}(t) \quad (2.36)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} v_i(\alpha(t)) w_j(\hat{\beta}(t)) (A_{ij} \hat{x}(t) + B_{ij}u(t) + K_{ij}(y(t) - \hat{y}(t))) \\ \quad = A_{\alpha\hat{\beta}} \hat{x}(t) + B_{\alpha\hat{\beta}}u(t) + K_{\alpha\hat{\beta}}(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} v_i(\alpha(t)) w_j(\hat{\beta}(t)) C_{ij} \hat{x}(t) = C_{\alpha\hat{\beta}} \hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.37)$$

où $v_i \geq 0$ et $w_j \geq 0$ représentent respectivement les non-linéarités faisant intervenir $\alpha(t)$ et $\beta(t)$. Dans l'ancienne écriture du modèle on a : $h_{(\cdot)}(z(t)) = v_i(\alpha(t)) \cdot w_j(\beta(t))$.

En utilisant la même démonstration que dans le cas précédent à partir de (2.33) on peut obtenir :

$$\begin{bmatrix} (*) + A_{\alpha\beta}X - B_{\alpha\beta}M_{\alpha\hat{\beta}} & (*) & (*) & (*) & (*) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (A_{\alpha\beta} - A_{\alpha\hat{\beta}})X & -\lambda^{-1}I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (C_{\alpha\beta} - C_{\alpha\hat{\beta}})X & 0 & -\theta^{-1}I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(B_{\alpha\beta} - B_{\alpha\hat{\beta}})M_{\alpha\hat{\beta}} & 0 & 0 & -w^{-1}I & (*) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{\alpha\hat{\beta}}^T B_{\alpha\beta}^T & 0 & 0 & M_{\alpha\hat{\beta}}^T (B_{\alpha\beta} - B_{\alpha\hat{\beta}})^T & -2\mu X & \mu I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu I & (*) + \tilde{P}A_{\alpha\hat{\beta}} - N_{\alpha\hat{\beta}}C_{\alpha\hat{\beta}} & (*) & (*) & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{P} & -wI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{P} & 0 & -\lambda I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{\alpha\hat{\beta}}^T & 0 & 0 & -\theta I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.38)$$

On définit la quantité suivante :

$$(\Upsilon_{ij}^{kl})_m = \begin{bmatrix} (*) + A_{im}X - B_{im}M_{jl} & (*) & (*) & (*) & (*) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (A_{im} - A_{ik})X & -\lambda^{-1}I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (C_{im} - C_{ik})X & 0 & -\theta^{-1}I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(B_{im} - B_{ik})M_{jl} & 0 & 0 & -w^{-1}I & (*) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{jl}^T B_{im}^T & 0 & 0 & M_{jl}^T (B_{im} - B_{ik})^T & -2\mu X & \mu I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu I & (*) + \tilde{P}A_{ik} - N_{jl}C_{ik} & (*) & (*) & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{P} & -wI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{P} & 0 & -\lambda I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{jl}^T & 0 & 0 & -\theta I \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Théorème 2 /Guerra et al. 2006/ : Soient un modèle TS continu à prémisses partiellement mesurables (2.35), l'observateur (2.37), la loi de commande (2.36) et les $(\Upsilon_{ij}^{kl})_m$ définis en (2.39). S'il existe des matrices définies positives X et $\tilde{P}$, des scalaires positifs w , λ et θ , et des matrices N_{ij} et M_{ij} $i, j \in \{1, \dots, r\}$ tels que les conditions (2.11) ~ (2.14) soient satisfaites alors la boucle fermée est globalement asymptotiquement stable. Les gains de commande sont donnés par $F_{ij} = M_{ij}X^{-1}$ et les gains d'observation par $K_{ij} = \tilde{P}^{-1}N_{ij}$.

A titre d'illustration on considère le modèle TS instable en boucle ouverte suivant :

$$A_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{2,1} = \begin{bmatrix} 1,5 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{1,2} = \begin{bmatrix} 2,5 & 0 \\ -2,3 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{2,2} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2,3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B_{1,1} = B_{1,2} = B_{2,1} = B_{2,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_{1,1} = C_{2,1} = [15 \quad 3] \text{ et } C_{1,2} = C_{2,2} = [16 \quad 3]. \text{ On suppose } x_1(t)$$

mesurable, $x_2(t)$ non mesurable. On choisit comme fonctions non linéaires

$$v_1(x_1) = 0.5 + \arctan(x_1)/\pi, \quad v_2(x_1) = 1 - v_1(x_1), \quad w_1(x_2) = 0.5 + \arctan(x_2)/\pi \quad \text{et}$$

$$w_2(x_2) = 1 - w_1(x_2).$$

La figure 3 représente l'évolution de l'état et de son estimée pour les conditions initiales suivantes : $x^T(0) = [10 \quad 10]^T$ et $\hat{x}^T(0) = [0 \quad 0]^T$. La figure 4 donne l'évolution de la sortie, de son estimée et des fonctions $w(\beta)$ et $w(\hat{\beta})$. Pour ne pas donner que des résultats de régulation, i.e. autour du point d'équilibre 0, une consigne différente de zéro est appliquée en boucle fermée après $t = 2s$ et on introduit une perturbation constante sur la sortie du modèle dans l'intervalle de temps $[10s \quad 15s]$.

En toute rigueur la stabilisation n'a été prouvée que pour le point d'équilibre 0. Néanmoins l'extension à des consignes de type échelon ou des signaux de type $\mathcal{L}_\infty$ se fait aisément en considérant les propriétés d'ISS (Input to State Stability) /Sontag et Wang 1995/. Cette propriété est vérifiée dans le cas des modèles TS en utilisant le fait que B_z est bornée /Lauber 2003/.

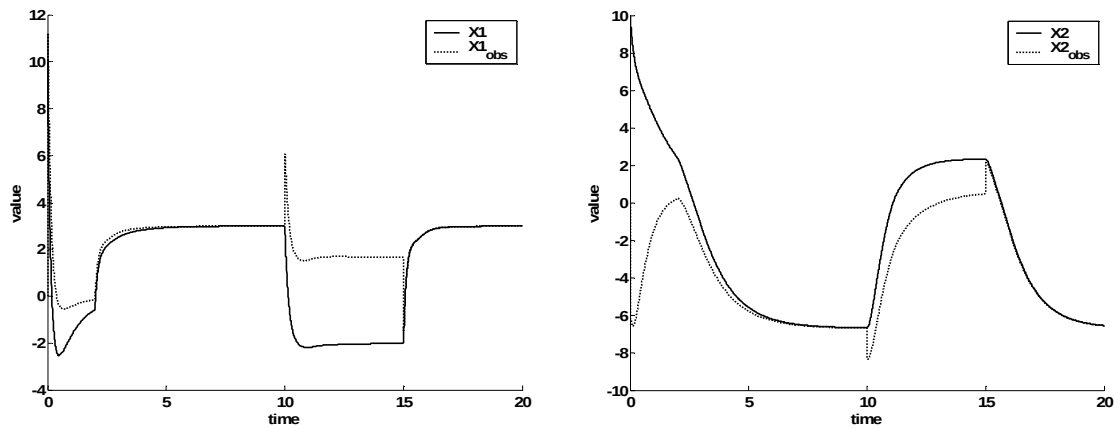


Figure 3 : évolution des deux états et de leurs estimées.

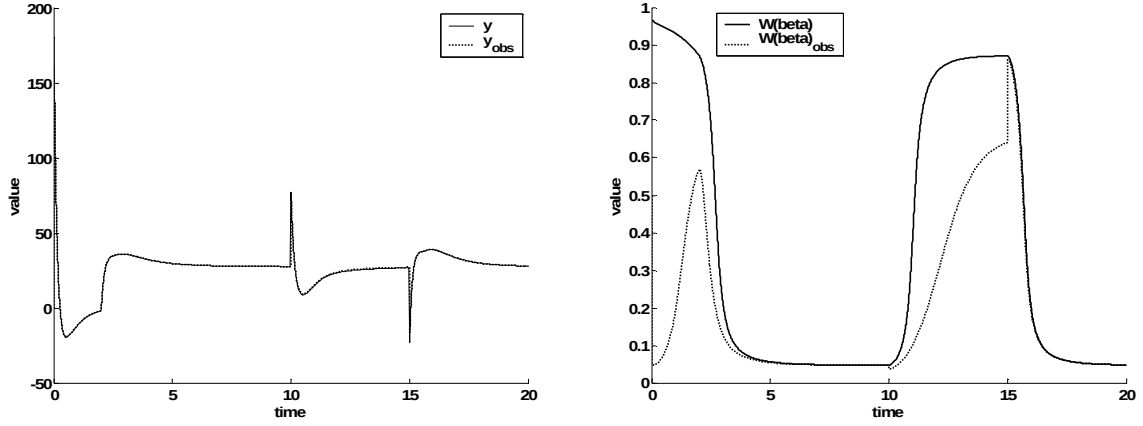


Figure 4 : évolution de la sortie, de son estimée, de $w(\beta)$ et de $w(\hat{\beta})$.

Les figures 3 et 4 montrent la convergence de l'erreur d'estimation de l'état en régime permanent hors perturbation. Elles illustrent également la remarque faite précédemment sur le fait que $\hat{x}(t) \not\rightarrow x(t)$ en présence d'une perturbation.

Notons que le même type d'approche peut être utilisé dans le cas de modèles TS continu avec incertitudes. Cette approche n'est traitée que dans le cas discret.

D. Stabilisation des modèles TS discrets incertains par retour de sortie

On s'intéresse aux modèles TS discrets incertains suivants /Zhao et al. 1995/, cf. chapitre I :

$$\begin{cases} x(t+1) = (A_{z(t)} + \Delta A_{z(t)})x(t) + (B_{z(t)} + \Delta B_{z(t)})u(t) \\ y(t) = (C_{z(t)} + \Delta C_{z(t)})x(t) \end{cases} \quad (2.40)$$

avec $\begin{cases} \Delta A_z = H_a \Delta_{az} E_{az} \\ \|\Delta_{az}\|_2 \leq 1 \end{cases}$, $\begin{cases} \Delta B_z = H_b \Delta_{bz} E_{bz} \\ \|\Delta_{bz}\|_2 \leq 1 \end{cases}$, $\begin{cases} \Delta C_z = H_c \Delta_{cz} E_{cz} \\ \|\Delta_{cz}\|_2 \leq 1 \end{cases}$, et $H_a, H_b, H_c, E_{ai}, E_{bi}, E_{ci}$ des

matrices constantes. Pour simplifier l'étude, on choisit $\Delta C_{z(t)} = 0$. La loi de commande utilisée permet de réduire le conservatisme et d'obtenir des conditions LMI. Elle s'écrit :

$$u(t) = -F_z G_z^{-1} \hat{x}(t) \quad (2.41)$$

et l'observateur :

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1) = A_z \hat{x}(t) + B_z u(t) + S_z^{-1} K_z (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_z \hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.42)$$

La dynamique de l'erreur de prédiction $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ est donnée par :

$$\tilde{x}(t+1) = (A_z - S_z^{-1}K_zC_z + \Delta B_zF_zG_z^{-1})\tilde{x}(t) + (\Delta A_z - \Delta B_zF_zG_z^{-1})x(t) \quad (2.43)$$

On peut écrire la dynamique du modèle en boucle fermée :

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ \tilde{x}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_z - \bar{B}_zF_zG_z^{-1} & \bar{B}_zF_zG_z^{-1} \\ \Delta A_z - \Delta B_zF_zG_z^{-1} & A_z - S_z^{-1}K_zC_z + \Delta B_zF_zG_z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

avec $\bar{A}_z = A_z + \Delta A_z$ et $\bar{B}_z = B_z + \Delta B_z$.

Pour l'étude de la stabilité de la boucle fermée, on choisit la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$V(x(t), \tilde{x}(t)) = x^T(t)G_z^{-T}P_zG_z^{-1}x(t) + \tilde{x}^T(t)\tilde{P}_z\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} G_z^{-T}P_zG_z^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{P}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Remarque : L'explication de la fonction de Lyapunov pour la partie commande i.e. $G_z^{-T}P_zG_z^{-1}$ sera faite dans la section suivante. On utilise dans ce paragraphe la version non quadratique des résultats, la version quadratique s'en déduit directement avec $P_i = G_i = P$ et $S_i = \tilde{P}_i = \tilde{P}$.

Remarque : La fonction candidate de Lyapunov non quadratique associée au modèle (2.44)

est normalement $V(x, \tilde{x}) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix}^T \mathcal{G}_z^{-T} \mathcal{P}_z \mathcal{G}_z^{-1} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix}$. La simplification (2.45) est faite pour obtenir des conditions LMI au problème.

Notation : Soient Y_i , des matrices de taille appropriée et $h_i(\cdot)$ des fonctions scalaires ayant

la propriété de somme convexe, on pose $Y_z = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))Y_i$ et $Y_{z+} = \sum_{i=1}^r h_i(z(t+1))Y_i$.

La variation de la fonction V s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta V(x(t), \tilde{x}(t)) &= V(x(t+1), \tilde{x}(t+1)) - V(x(t), \tilde{x}(t)) \\ &= \begin{bmatrix} x(t+1) \\ \tilde{x}(t+1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} G_{z+}^{-T}P_{z+}G_{z+}^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{P}_{z+} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t+1) \\ \tilde{x}(t+1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} G_z^{-T}P_zG_z^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{P}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Elle est négative si :

$$(*) \begin{bmatrix} G_{z+}^{-T}P_{z+}G_{z+}^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{P}_{z+} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_z - \bar{B}_zF_zG_z^{-1} & \bar{B}_zF_zG_z^{-1} \\ \Delta A_z - \Delta B_zF_zG_z^{-1} & A_z - S_z^{-1}K_zC_z + \Delta B_zF_zG_z^{-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_z^{-T}P_zG_z^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{P}_z \end{bmatrix} < 0 \quad (2.46)$$

L'utilisation de la congruence avec $\begin{bmatrix} G_z & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ sur l'inégalité (2.46) donne :

$$(*) \begin{bmatrix} G_{z+}^{-T} P_{z+} G_{z+}^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{P}_{z+} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_z G_z - \bar{B}_z F_z & \bar{B}_z F_z G_z^{-1} \\ \Delta A_z G_z - \Delta B_z F_z & A_z - S_z^{-1} K_z C_z + \Delta B_z F_z G_z^{-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_z & 0 \\ 0 & \tilde{P}_z \end{bmatrix} < 0 \quad (2.47)$$

L'utilisation du lemme I-2 ($3 \Rightarrow 1$) avec la matrice $\begin{bmatrix} G_{z+} & R_z \\ 0 & S_z \end{bmatrix}$ mène à la condition suivante :

$$\begin{bmatrix} -P_z & 0 & (*) & (*) \\ 0 & -\tilde{P}_z & (*) & (*) \\ \left(\begin{array}{c} \bar{A}_z G_z - \bar{B}_z F_z \\ + R_z (\Delta A_z G_z - \Delta B_z F_z) \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} \bar{B}_z F_z G_z^{-1} \\ + R_z (A_z - S_z^{-1} K_z C_z + \Delta B_z F_z G_z^{-1}) \end{array} \right) & -G_{z+} - G_{z+}^T + P_{z+} & -R_z \\ S_z \Delta A_z G_z - S_z \Delta B_z F_z & S_z A_z - K_z C_z + S_z \Delta B_z F_z G_z^{-1} & -R_z^T & -S_z - S_z^T + \tilde{P}_{z+} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.48)$$

Afin de traiter les parties non linéaires en les variables recherchées, on s'intéresse à :

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (*) & (*) \\ 0 & (B_z + \Delta B_z) F_z G_z^{-1} + R_z \Delta B_z F_z G_z^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & S_z \Delta B_z F_z G_z^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

En utilisant le lemme I-9, on obtient la borne supérieure suivante :

$$W \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (B_z + \Delta B_z) F_z + R_z \Delta B_z F_z \\ 0 \end{bmatrix} \Gamma_1^{-1} (*) + (*) (\Gamma_1 + \Gamma_2) \begin{bmatrix} 0 \\ G_z^{-T} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ S_z \Delta B_z F_z \end{bmatrix} \Gamma_2^{-1} (*) \quad (2.50)$$

avec $\Gamma_1 > 0$ et $\Gamma_2 > 0$ deux matrices quelconques à rechercher. En appliquant cette majoration sur la condition de stabilité (2.48), on obtient :

$$\begin{bmatrix} -P_z & 0 & (*) & (*) \\ 0 & -\tilde{P}_z + G_z^{-T} (\Gamma_1 + \Gamma_2) G_z^{-1} & 0 & (*) \\ \Omega_{(3,1)} & R_z A_z - R_z S_z^{-1} K_z C_z & \Omega_{(3,3)} & -R_z \\ S_z \Delta A_z G_z - S_z \Delta B_z F_z & S_z A_z - K_z C_z & -R_z^T & \Omega_{(4,4)} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.51)$$

avec :

$$\Omega_{(3,1)} = (A_z + \Delta A_z) G_z - (B_z + \Delta B_z) F_z + R_z \Delta A_z G_z - R_z \Delta B_z F_z \quad (2.52)$$

$$\Omega_{(3,3)} = -G_{z+} - G_{z+}^T + P_{z+} + ((B_z + \Delta B_z) F_z + R_z \Delta B_z F_z) \Gamma_1^{-1} ((B_z + \Delta B_z) F_z + R_z \Delta B_z F_z)^T \quad (2.53)$$

$$\Omega_{(4,4)} = -S_z - S_z^T + \tilde{P}_{z+} + S_z \Delta B_z F_z \Gamma_2^{-1} F_z^T \Delta B_z^T S_z^T \quad (2.54)$$

L'utilisation du complément de Schur sur les expressions (2.53) et (2.54) donne :

$$\begin{bmatrix} \Omega_{(3,3)} & R_z \\ R_z^T & \Omega_{(4,4)} \end{bmatrix} < 0 \text{ si } \begin{bmatrix} -G_{z+} - G_{z+}^T + P_{z+} & (*) & R_z & 0 \\ ((B_z + \Delta B_z)F_z + R_z \Delta B_z F_z)^T & -\Gamma_1 & 0 & 0 \\ R_z^T & 0 & -S_z - S_z^T + \tilde{P}_{z+} & (*) \\ 0 & 0 & F_z^T \Delta B_z^T S_z^T & -\Gamma_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (2.55)$$

Les parties comprenant les incertitudes et le terme $-R_z \times S_z^{-1} K_z C_z$ se regroupent de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & (*) & 0 & (*) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (*) & 0 & 0 & 0 \\ \begin{pmatrix} (R_z + I)H_a \Delta_{az} \times E_{az} G_z \\ -(R_z + I)H_b \Delta_{bz} \times E_{bz} F_z \end{pmatrix} & -R_z \times S_z^{-1} K_z C_z & 0 & 0 & (*) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} (H_b \Delta_{bz} \times E_{bz} F_z)^T \\ +(R_z H_b \Delta_{bz} \times E_{bz} F_z)^T \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ \begin{pmatrix} S_z H_a \Delta_{az} \times E_{az} G_z \\ -S_z H_b \Delta_{bz} \times E_{bz} F_z \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_z^T E_{bz}^T \times \Delta_{bz}^T H_b^T S_z^T & 0 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

En introduisant une matrice $X > 0$, des scalaires positifs η , ε , δ , λ et μ , et le fait que $\|\Delta_{az}\|_2 \leq 1$, et $\|\Delta_{bz}\|_2 \leq 1$ une borne supérieure à (2.56) est donnée par :

$$\text{diag} \left(\begin{array}{c} \varepsilon G_z^T E_{az}^T E_{az} G_z + \eta F_z^T E_{bz}^T E_{bz} F_z \\ C_z^T K_z^T S_z^{-T} X S_z^{-1} K_z C_z \\ 0 \\ \left[\varepsilon^{-1} (I + R_z) H_a H_a^T (I + R_z)^T + \eta^{-1} (I + R_z) H_b H_b^T (I + R_z)^T \right. \\ \quad \left. + \delta H_b H_b^T + \lambda^{-1} R_z H_b H_b^T R_z^T + R_z X^{-1} R_z^T \right] \\ \delta^{-1} F_z^T E_{bz}^T E_{bz} F_z + \lambda F_z^T E_{bz}^T E_{bz} F_z \\ \varepsilon^{-1} S_z H_a H_a^T S_z^T + \eta^{-1} S_z H_b H_b^T S_z^T + \mu^{-1} S_z H_b H_b^T S_z^T \\ \mu F_z^T E_{bz}^T E_{bz} F_z \end{array} \right) \quad (2.57)$$

L'utilisation de cette majoration nous mène à la condition de stabilité suivante :

$$\begin{bmatrix} \Theta_{1,1} & 0 & 0 & (*) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{P}_z + C_z^T K_z^T S_z^{-T} X S_z^{-1} K_z C_z & I & (*) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & -G_z - G_z^T + \Gamma_1 + \Gamma_2 & 0 & (*) & 0 & 0 \\ A_z G_z - B_z F_z & R_z A_z & 0 & \Theta_{4,4} & 0 & (*) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_z^T B_z^T & \Theta_{5,5} & 0 & 0 \\ 0 & S_z A_z - K_z C_z & 0 & R_j^T & 0 & \Theta_{6,6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Theta_{7,7} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.58)$$

$$\text{avec } \Theta_{1,1} = -P_z + \varepsilon G_z^T E_{az}^T E_{az} G_z + \eta F_z^T E_{bz}^T E_{bz} F_z$$

$$\begin{aligned} \Theta_{4,4} = & -G_{z+} - G_{z+}^T + P_{z+} + \varepsilon^{-1} (I + R_z) H_a H_a^T (I + R_z)^T + \eta^{-1} (I + R_z) H_b H_b^T (I + R_z)^T \\ & + \delta H_b H_b^T + \lambda^{-1} R_z H_b H_b^T R_z^T + R_z X^{-1} R_z^T \end{aligned}$$

$$\Theta_{5,5} = -\Gamma_1 + \delta^{-1} F_z^T E_{bz}^T E_{bz} F_z + \lambda F_z^T E_{bz}^T E_{bz} F_z$$

$$\Theta_{6,6} = -S_z - S_z^T + \tilde{P}_{z+} + \varepsilon^{-1} S_z H_a H_a^T S_z^T + \eta^{-1} S_z H_b H_b^T S_z^T + \mu^{-1} S_z H_b H_b^T S_z^T$$

$$\Theta_{7,7} = -\Gamma_2 + \mu F_z^T E_{bz}^T E_{bz} F_z$$

Enfin l'utilisation du complément de Schur et du lemme I-2 permet d'obtenir un problème qui peut être mis sous forme LMI. Pour ce faire on définit les quantités suivantes :

$$\Upsilon_{ij}^k = \begin{bmatrix} \Xi_{1,1}^{ijk} & (*) & (*) & 0 \\ \Xi_{2,1}^{ijk} & \Xi_{2,2}^{ijk} & (*) & 0 \\ \Xi_{3,1}^{ijk} & \Xi_{3,2}^{ijk} & \Xi_{3,3}^{ijk} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Xi_{4,4}^{ijk} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

$$\text{avec } \Xi_{1,1}^{ijk} = \begin{bmatrix} -P_i & (*) & (*) & 0 & 0 & 0 \\ E_{ai} G_j & -\varepsilon^{-1} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{bi} F_j & 0 & -\eta^{-1} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tilde{P}_i & (*) & I \\ 0 & 0 & 0 & K_j C_i & -S_i^T - S_i + X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & -G_i - G_i^T + \Gamma_1 + \Gamma_2 \end{bmatrix}$$

$$\Xi_{2,2}^{ijk} = \begin{bmatrix} (-G_k - G_k^T + P_k + \delta H_b H_b^T) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & 0 & 0 \\ R_j^T & -X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_a^T (I + R_j)^T & 0 & -\varepsilon I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_b^T (I + R_j)^T & 0 & 0 & -\eta I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_b^T R_j^T & 0 & 0 & 0 & -\lambda I & 0 & 0 & 0 \\ F_j^T B_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Gamma_1 & (*) & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{bi} F_j & -\delta I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{bi} F_j & 0 & -\lambda^{-1} I \end{bmatrix}$$

$$\Xi_{3,3}^{ijk} = \begin{bmatrix} -S_j - S_j^T + \tilde{P}_k & (*) & (*) & (*) \\ H_a^T S_j^T & -\varepsilon I & 0 & 0 \\ H_b^T S_j^T & 0 & -\eta I & 0 \\ H_b^T S_j^T & 0 & 0 & -\mu I \end{bmatrix} \quad \Xi_{4,4}^{ijk} = \begin{bmatrix} -\Gamma_2 & (*) \\ E_i F_j & -\mu^{-1} I \end{bmatrix}$$

$$\Xi_{2,1}^{ijk} = \begin{bmatrix} A_i G_j - B_i F_j & 0 & 0 & R_j A_i & 0 & 0 \\ 0_{7 \times 6} & & & & & \end{bmatrix} \quad \Xi_{3,1}^{ijk} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & S_j A_i - K_j C_i & 0 & 0 \\ 0_{3 \times 6} & & & & & \end{bmatrix}$$

$$\Xi_{3,2}^{ijk} = \begin{bmatrix} R_j^T & 0_{1 \times 7} \\ 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 7} \end{bmatrix}$$

Théorème 3 /Kruszewski et Guerra 2005a/: Soient un modèle TS discret incertain (2.40), la loi de commande (2.41), l'observateur (2.42) et les Υ_{ij}^k définis en (2.59). S'il existe des matrices $P_i > 0$, $\tilde{P}_i > 0$, G_i , S_i , F_i , K_i , R_i , $\Gamma_1 > 0$, $\Gamma_2 > 0$, $X > 0$, $Q_i^k = (Q_i^k)^T$, $Q_{ij}^k = (Q_{ji}^k)^T$, $i, j, k \in \{1, \dots, r\}$ et des scalaires ε , δ , η , μ et λ positifs tels que les conditions (2.5) ~ (2.7) soient satisfaites alors la boucle fermée est globalement asymptotiquement stable.

Pour montrer l'intérêt de l'approche on choisit un modèle TS instable en boucle ouverte suivant :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0,1 & -0,2 \\ -1 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0,5 & -1,2 \\ -0,09 & -0,9 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 4,1 \\ 0,8 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0,1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [0,5 \quad 2,5],$$

$$C_2 = [0,5 \quad 2], \quad H_a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_{a1} = [0,2 \quad 0], \quad E_{a2} = [0,2 \quad 0], \quad H_b = 0, \quad E_{b1} = 0, \quad E_{b2} = 0.$$

Les fonctions non linéaires scalaires sont définies par : $h_1(z(t)) = (1 - \cos(x_1(t))) / 2 \in [0 \quad 1]$ et $h_2(z(t)) = 1 - h_1(z(t))$.

Les conditions du théorème 3 ne peuvent pas être satisfaites dans le cas quadratique (c'est-à-dire $P_i = G_i = P$ et $S_i = \tilde{P}_i = \tilde{P}$). Dans le cas non-quadratique, un résultat est :

$$F_1 = [-0,3395 \quad -0,7796], \quad F_2 = [-1,999 \quad -2,820], \quad G_1 = \begin{bmatrix} 12,61 & 9,3 \\ 4,609 & 10,94 \end{bmatrix},$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 9,629 & 2,132 \\ 1,888 & 9,312 \end{bmatrix}, \quad K_1 = \begin{bmatrix} -0,1084 \\ 0,1128 \end{bmatrix} \text{ et } K_2 = \begin{bmatrix} -0,2471 \\ 0,0191 \end{bmatrix}.$$

La simulation présentée figures 5 et 6 utilise pour conditions initiales $x(0) = [5 \quad 3]^T$ pour le modèle et $\hat{x}(0) = [-3 \quad 5]^T$ pour l'observateur. La figure ci-après représente les deux trajectoires (modèle et observateur) dans le plan de phase (x_1, x_2) . Les équipotentielles de la partie commande de la fonction de Lyapunov sont également représentées. Elles permettent

de voir clairement le caractère non quadratique de cette fonction (les équipotentielles ne sont pas convexes). La même remarque peut être faite que dans le cas continu sur la convergence de l'estimation de l'état i.e. $\hat{x}(t) \not\rightarrow x(t)$.

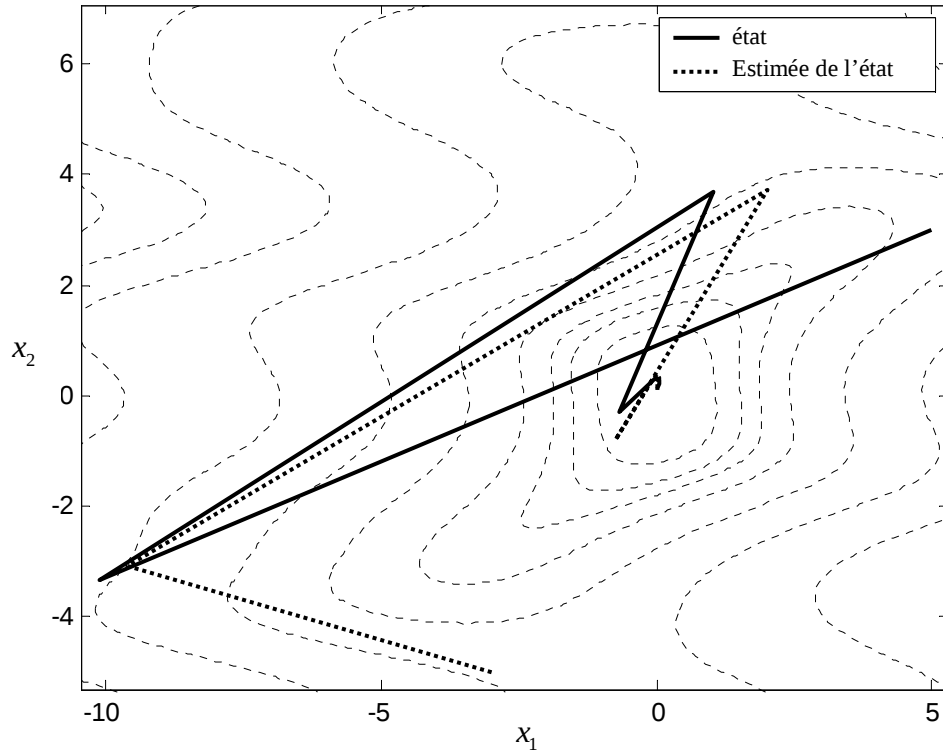


Figure 5 : évolution des variables d'états du modèle et de l'observateur dans le plan (x_1, x_2) .

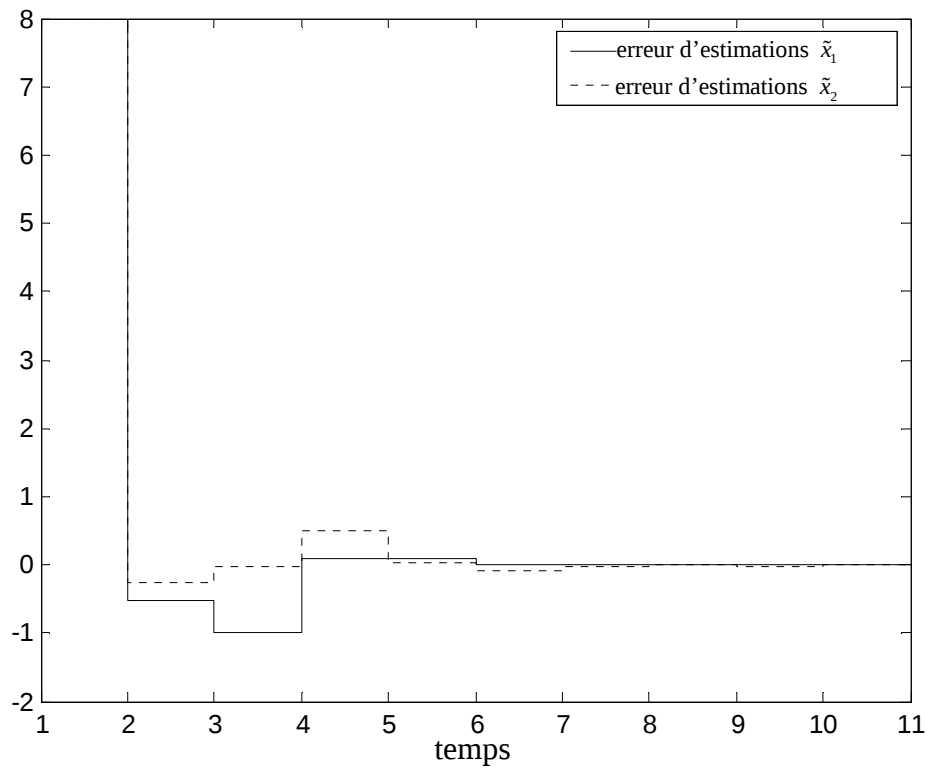


Figure 6 : évolution des erreurs de reconstruction de l'état.

Cette approche peut s'étendre à d'autres types de problèmes de façon similaire par exemple $z(t)$ partiellement mesuré. La suite de ce chapitre propose l'utilisation du non quadratique à des problèmes de retour d'état.

E. Stabilisation de modèles TS discrets incertains : retour d'état

On s'intéresse au modèle TS discret incertain (2.40). La fonction de Lyapunov utilisée est /Guerra et Vermeiren 2004/ :

$$V(x(t)) = x(t)^T \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) G_i \right)^{-T} \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) P_i \right) \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) G_i \right)^{-1} x(t) \quad (2.60)$$

ou encore :

$$V(x(t)) = x(t)^T G_z^{-T} P_z G_z^{-1} x(t) \quad (2.61)$$

La loi de commande est donnée par :

$$u(t) = -F_z G_z^{-1} x(t) \quad (2.62)$$

Après quelques manipulations identiques au cas de la stabilisation quadratique c.f. chapitre I section B-6 on obtient :

$$\begin{bmatrix} -P_z & (*) \\ (A_z + \Delta A_z) G_z - (B_z + \Delta B_z) F_z & -G_{z+}^T - G_{z+} + P_{z+} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.63)$$

Une borne supérieure du terme incertain est obtenue en utilisant le lemme I-9, $\|\Delta_{az}\|_2 \leq 1$ et $\|\Delta_{bz}\|_2 \leq 1$:

$$\begin{bmatrix} 0 & (*) \\ \Delta A_z G_z - \Delta B_z F_z & 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \lambda^{-1} G_z^T E_{az}^T E_{az} G_z + \tau^{-1} F_z^T E_{bz}^T E_{bz} F_z & 0 \\ 0 & \lambda H_a H_a^T + \tau H_b H_b^T \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

En considérant cette majoration, une condition suffisante de stabilité est :

$$\begin{bmatrix} -P_z + \lambda^{-1} G_z^T E_{az}^T E_{az} G_z + \tau^{-1} F_z^T E_{bz}^T E_{bz} F_z & (*) \\ A_z G_z - B_z F_z & -G_{z+}^T - G_{z+} + P_{z+} + \lambda H_a H_a^T + \tau H_b H_b^T \end{bmatrix} < 0 \quad (2.65)$$

Le complémentent de Schur permet de mettre (2.65) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} -P_z & (*) & (*) & (*) \\ E_{az} G_z & -\lambda I & 0 & 0 \\ E_{bz} F_z & 0 & -\tau I & 0 \\ A_z G_z - B_z F_z & 0 & 0 & -G_{z+}^T - G_{z+} + P_{z+} + \lambda H_a H_a^T + \tau H_b H_b^T \end{bmatrix} < 0 \quad (2.66)$$

On définit la quantité suivante :

$$\Upsilon_{ij}^k = \begin{bmatrix} -P_i & (*) & (*) & (*) \\ E_{ai}G_j & -\lambda I & 0 & 0 \\ E_{bi}F_j & 0 & -\tau I & 0 \\ AG_j - B_iF_j & 0 & 0 & -G_k^T - G_k + P_k + \lambda H_a H_a^T + \tau H_b H_b^T \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Théorème 4 : Soient le modèle TS discret (2.40), la loi de commande (2.62) et les Υ_{ij}^k définis en (2.67). S'il existe des matrices définies positives P_i , des scalaires τ et λ , et des matrices G_i et F_i $i \in \{1, \dots, r\}$ tels que les conditions (1.33) et (1.34) soient satisfaites alors la boucle fermée est globalement asymptotiquement stable.

Remarque /Guerra et Vermeiren 2004/ : la fonction $V(x(t)) = x(t)^T G_z^{-T} P_z G_z^{-1} x(t)$ est une fonction candidate de Lyapunov. Pour le prouver, on utilise le fait que P_z est une somme convexe de matrices définies positives et que G_z est une somme convexe de matrices de rang plein. On a $\underline{\lambda}I \leq P_z \leq \bar{\lambda}I$ et donc $\underline{\lambda}x(t)^T G_z^{-T} G_z^{-1} x(t) \leq V(x(t)) \leq \bar{\lambda}x(t)^T G_z^{-T} G_z^{-1} x(t)$. Comme $G_z G_z^T > 0$ alors $\exists \bar{\mu} > 0$ et $\underline{\mu} > 0$ tels que $\bar{\mu}I \geq \max_z (G_z G_z^T)$ et $\underline{\mu}I \leq \min_z (G_z G_z^T)$. donc : $\underline{\lambda}\bar{\mu}x(t)^T x(t) \leq V(x(t)) \leq \bar{\lambda}\underline{\mu}x(t)^T x(t)$. $V(x(t))$ est donc une fonction candidate de Lyapunov.

Afin d'illustrer l'efficacité de l'approche, on considère le modèle TS discret (2.40) avec les matrices suivantes : $A_1 = \begin{bmatrix} -0,5 & 1 \\ -0,1 & 0,5 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} -0,9 & 0,5 \\ -0,1 & -1,20 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0,1 \end{bmatrix}$, $H_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_{a1} = [a \ 0]$, $E_{a2} = [0 \ b]$, $H_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $E_{b1} = E_{b2} = \begin{bmatrix} 3b \\ 0 \end{bmatrix}$ où a et b sont deux paramètres.

La figure 7 montre l'apport en termes de robustesse. L'approche non quadratique (NQ) permet de prendre en compte des incertitudes plus importantes que l'approche quadratique (Q).

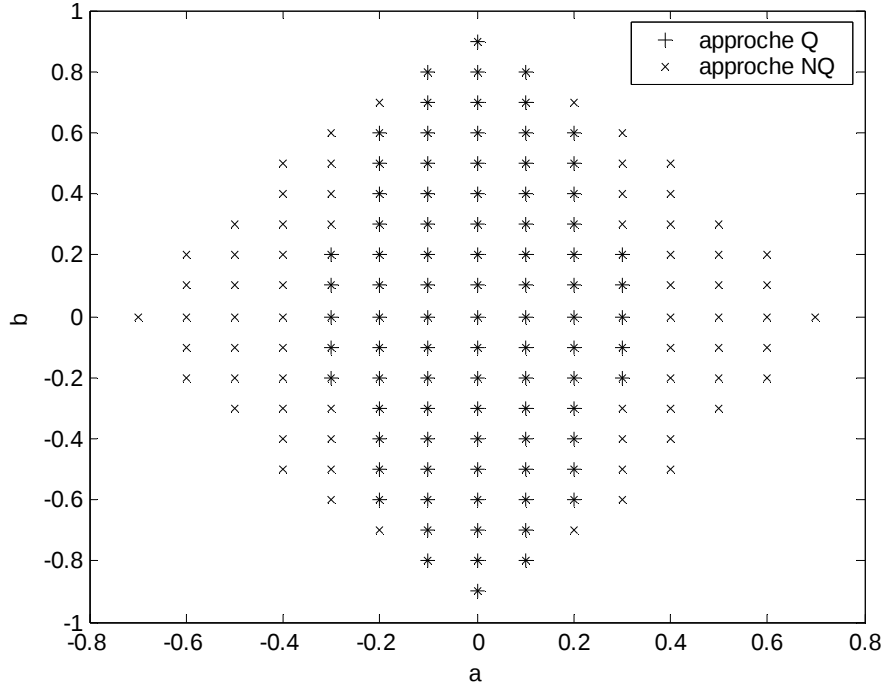


Figure 7 : comparaison entre les domaines de solutions des approches quadratiques et non quadratiques

F. Stabilisation de modèles incertains à retard variable.

Afin d'élargir la gamme des modèles stabilisables, on s'intéresse aux modèles Takagi-Sugeno discrets incertains à retard variable sur l'état. Ces modèles permettent de considérer des retards qui peuvent être dus à des communications entre plusieurs procédés. On suppose dans la suite que le retard est variable. On considère donc les modèles à retard variant $\sigma(t) \in \mathbb{N}$ pouvant s'écrire :

$$\begin{cases} x(t+1) = (A_z + \Delta A_z)x(t) + (\hat{A}_z + \Delta \hat{A}_z)x(t - \sigma(t)) + (B_z + \Delta B_z)u(t) \\ y(t) = (C_z + \Delta C_z)x(t) \end{cases} \quad (2.68)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \Delta A_z = H_a \Delta_{az} E_{az} \\ \|\Delta_{az}\|_2 \leq 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \Delta B_z = H_b \Delta_{bz} E_{bz} \\ \|\Delta_{bz}\|_2 \leq 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \Delta C_z = H_c \Delta_{cz} E_{cz} \\ \|\Delta_{cz}\|_2 \leq 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \Delta \hat{A}_z = H_{\hat{a}} \Delta_{\hat{a}z} E_{\hat{a}z} \\ \|\Delta_{\hat{a}z}\|_2 \leq 1 \end{cases} \quad \text{et}$$

$H_a, H_b, H_c, H_{\hat{a}}, E_{az}, E_{bz}, E_{cz}$ des matrices constantes et la loi de commande :

$$u(t) = -F_z G_z^{-1} x(t) \quad (2.69)$$

On considère la fonction candidate de Lyapunov non-quadratique suivante :

$$V_t = x^T(t) G_z^{-T} P_z G_z^{-1} x(t) + \bar{V}_t \quad (2.70)$$

$$\text{avec } \bar{V}_t = \sum_{\alpha=t-\sigma(t)}^{t-1} x^T(\alpha) S^{-T} Z S^{-1} x(\alpha) + \sum_{j=-\sigma_2+1}^{-\sigma_1+1} \sum_{l=t+j-1}^{t-1} x^T(l) S^{-T} Z S^{-1} x(l) \quad (2.71)$$

Ce type de fonction candidate de Lyapunov est utilisé dans le cadre de modèles à retard variant dans le temps. Elle permet de majorer la partie variante du retard /Xu et Chen 2004/ ainsi on a l'inégalité suivante :

$$\Delta \bar{V}_t(t) \leq (\sigma_2 - \sigma_1 + 1)x^T(t)S^{-T}ZS^{-1}x(t) - x(t - \sigma(t))^T S^{-T}ZS^{-1}x(t - \sigma(t)) \quad (2.72)$$

avec $\Delta \bar{V}_t(t)$ la variation de la fonction $\bar{V}_t$ le long des trajectoires du modèle. On note $\bar{\sigma} = \sigma_2 - \sigma_1 + 1$, $\bar{A}_z = A_z + \Delta A_z$, $\hat{A}_z = \hat{A}_z + \Delta \hat{A}_z$ et $\bar{B}_z = B_z + \Delta B_z$. La variation de la fonction candidate de Lyapunov (2.70) est donnée par :

$$\Delta V_t = (*)G_{z+}^{-T}P_{z+}G_{z+}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{A}_z - \bar{B}_z F_z G_z^{-1} & \hat{A}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \sigma(t)) \end{bmatrix} - x(t)^T G_{z+}^{-T}P_{z+}G_{z+}^{-1}x(t) + \Delta \bar{V}_t \quad (2.73)$$

(2.73) est négative si :

$$(*)G_{z+}^{-T}P_{z+}G_{z+}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{A}_z - \bar{B}_z F_z G_z^{-1} & \hat{A}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -G_z^{-T}P_z G_z^{-1} + \bar{\sigma}S^{-T}ZS^{-1} & 0 \\ 0 & -S^{-T}ZS^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.74)$$

L'utilisation de la congruence avec la matrice $\begin{bmatrix} G_z^T & 0 \\ 0 & S^T \end{bmatrix}$ sur (2.74) donne :

$$\begin{bmatrix} G_z^T \bar{A}_z^T - F_z^T \bar{B}_z^T \\ S^T \hat{A}_z^T \end{bmatrix} G_{z+}^{-T}P_{z+}G_{z+}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{A}_z G_z - \bar{B}_z F_z & \hat{A}_z S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_z + \bar{\sigma}G_z^T S^{-T}ZS^{-1}G_z & 0 \\ 0 & -Z \end{bmatrix} < 0 \quad (2.75)$$

L'utilisation du lemme I-2 ($3 \Rightarrow 1$) sur l'inégalité (2.75) mène à :

$$\begin{bmatrix} -P_z + \bar{\sigma}G_z^T S^{-T}ZS^{-1}G_z & 0 & (*) \\ 0 & -Z & (*) \\ \bar{A}_z G_z - \bar{B}_z F_z & \hat{A}_z S & -G_{z+} - G_{z+}^T + P_{z+} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.76)$$

On pose $\Delta M \equiv W + W^T$ avec :

$$W = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H_a \Delta_{az} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{az} G_z & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H_{\bar{a}} \Delta_{\bar{a}z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & E_{az} S & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H_b \Delta_{bz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -E_{bz} F_z & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

En utilisant le lemme I-9, on obtient la borne supérieure suivante pour la quantité ΔM :

$$\Delta M \leq \text{diag} \left(\begin{bmatrix} \varepsilon^{-1} G_z^T E_{az}^T E_{az} G_z + \mu^{-1} F_z^T E_{bz}^T E_{bz} F_z \\ \delta^{-1} S^T E_{\bar{a}z}^T E_{\bar{a}z} S \\ \varepsilon H_a \Delta_{az} \Delta_{az}^T H_a^T + \delta H_{\bar{a}} \Delta_{\bar{a}z} \Delta_{\bar{a}z}^T H_{\bar{a}}^T + \mu H_b \Delta_{bz} \Delta_{bz}^T H_b^T \end{bmatrix} \right) \quad (2.78)$$

Ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} -P_z + \bar{\sigma} G_z^T S^{-T} Z S^{-1} G_z + \varepsilon^{-1} G_z^T E_{az}^T E_{az} G_z \\ + \mu^{-1} F_z^T E_{bz}^T E_{bz} F_z \end{pmatrix} & 0 & (*) \\ 0 & -Z + \delta^{-1} S^T E_{az}^T E_{az} S & (*) \\ A_z G_z - B_z F_z & A_{1z} S & \begin{pmatrix} -G_{z+} - G_{z+}^T + P_{z+} + \varepsilon H_a H_a^T \\ + \delta H_{\bar{a}} H_{\bar{a}}^T + \mu H_b H_b^T \end{pmatrix} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.79)$$

En utilisant le complément de Schur, il vient :

$$\begin{bmatrix} -P_z & (*) & (*) & (*) & 0 & 0 & (*) \\ E_{az} G_z & -\varepsilon I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{bz} F_z & 0 & -\mu I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_z & 0 & 0 & -S - S^T + \bar{\sigma} Z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Z & (*) & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{\bar{a}z} S & -\delta I & 0 \\ A_z G_z - B_z F_z & 0 & 0 & 0 & A_{1z} S & 0 & \Theta \end{bmatrix} < 0 \quad (2.80)$$

avec $\Theta = -G_{z+} - G_{z+}^T + P_{z+} + \varepsilon H_a H_a^T + \delta H_{\bar{a}} H_{\bar{a}}^T + \mu H_b H_b^T$

Comme les scalaires ε , μ et δ sont indépendants des autres variables dans (2.80) on peut

utiliser $\varepsilon_{zz}^{z+} > 0$, $\mu_{zz}^{z+} > 0$ et $\delta_{zz}^{z+} > 0$. On obtient :

$$\Gamma_{zz}^{z+} = \begin{bmatrix} -P_z & (*) & (*) & (*) & 0 & 0 & (*) \\ E_{az} G_z & -\varepsilon_{zz}^{z+} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{bz} F_z & 0 & -\mu_{zz}^{z+} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_z & 0 & 0 & -S - S^T + \bar{\sigma} Z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Z & (*) & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{\bar{a}z} S & -\delta_{zz}^{z+} I & 0 \\ A_z G_z - B_z F_z & 0 & 0 & 0 & A_{1z} S & 0 & \Theta_{zz}^{z+} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.81)$$

avec $\Theta_{zz}^{z+} = -G_{z+} - G_{z+}^T + P_{z+} + \varepsilon_{zz}^{z+} H_a H_a^T + \delta_{zz}^{z+} H_{\bar{a}} H_{\bar{a}}^T + \mu_{zz}^{z+} H_b H_b^T$ et on définit les quantités

suivantes :

$$\Gamma_{ij}^k = \begin{bmatrix} -P_i & (*) & (*) & (*) & 0 & 0 & (*) \\ D_i G_j & -\varepsilon_{ij}^k I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_i F_j & 0 & -\mu_{ij}^k I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_j & 0 & 0 & -S - S^T + \bar{\sigma} Z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Z & (*) & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{D}_i S & -\delta_{ij}^k I & 0 \\ A_i G_j - B_i F_j & 0 & 0 & 0 & A_{1i} S & 0 & \Theta_{ij}^k \end{bmatrix} < 0 \quad (2.82)$$

$\Theta_{ij}^k = -G_k - G_k^T + P_k + \varepsilon_{ij}^k H_a H_a^T + \delta_{ij}^k H_{\bar{a}} H_{\bar{a}}^T + \mu_{ij}^k H_b H_b^T$

Théorème 5 /Guerra et al. 2004/: Soient un modèle TS discret incertain (2.68), la loi de commande (2.69) et les Υ_{ij}^k définis en (2.82). S'il existe des matrices P_i , G_i , F_i , S , Z , $Q_i^k = (Q_i^k)^T$, $i \in \{1, \dots, r\}$, $Q_{ij}^k = (Q_{ji}^k)^T$, $(i, j, k) \in \{1, \dots, r\}^3$, des scalaires ε_{ij}^k , δ_{ij}^k et μ_{ij}^k tels que les conditions (1.35) ~ (1.37) soient vérifiées alors la boucle fermée est globalement asymptotiquement stable.

A titre d'exemple, on considère le modèle (2.68) avec :

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -0.5 & 2 \\ -0.1 & 0.5 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.5 \\ -0.1 & -1.7 \end{bmatrix}, E_{a1} = \begin{bmatrix} 0.007 & 0 \\ 0 & 0.015 \end{bmatrix}, E_{a2} = \begin{bmatrix} 0.007 & 0 \\ 0 & 0.0135 \end{bmatrix}, \\ H_a &= H_{\bar{a}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, H_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 4.8 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0.1 \end{bmatrix}, E_{b1} = \begin{bmatrix} 0.016 \\ 0 \end{bmatrix}, E_{b2} = \begin{bmatrix} 0.014 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{A}_1 &= \begin{bmatrix} 0.07 & 0 \\ 0 & 0.07 \end{bmatrix}, \hat{A}_2 = \begin{bmatrix} 0.06 & 0 \\ 0 & 0.06 \end{bmatrix}, E_{\hat{a}1} = \begin{bmatrix} 0.014 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{\hat{a}2} = \begin{bmatrix} 0.012 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \bar{\sigma} = 2. \end{aligned}$$

Notons que ce modèle, même dans une version simplifiée sans incertitudes et sans retard ne peut pas être stabilisé avec les conditions quadratiques et la relaxation de /Liu et Zhang 2003/. Une solution est donnée par le théorème 5 :

$$\begin{aligned} P_1 &= \begin{bmatrix} 0,463 & 0,01486 \\ 0,01486 & 0,005454 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0,2493 & -0,01954 \\ -0,01954 & 0,001715 \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} 0,362 & -0,004548 \\ 0,01337 & 0,005741 \end{bmatrix}, \\ G_2 &= \begin{bmatrix} 0,2678 & -0,01514 \\ -0,02017 & 0,001557 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} -0,007582 \\ 0,0008144 \end{bmatrix}^T, F_2 = \begin{bmatrix} -0,0241 \\ -0,001244 \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

Afin de pouvoir simuler, on choisit comme fonction nonlinéaire

$$h_1(x_1(t)) = \frac{1}{1,217} \left(1 - \frac{\sin(x_1(t))}{x_1(t)} \right) \text{ et } h_2(x_1(t)) = 1 - h_1(x_1(t)), \text{ et pour conditions initiales}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix} \text{ et } x(t) = 0 \quad \forall t < 0.$$

La figure 8 présente l'évolution de l'état au cours du temps. La figure 9 donne l'évolution du retard.

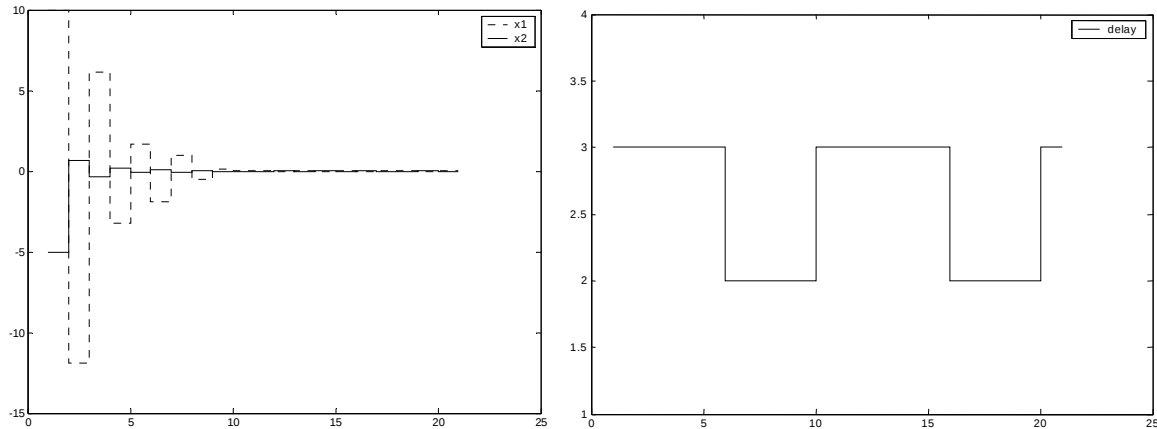


Figure 8 et 9 : évolution des deux variables d'état au cours du temps et du retard

G. Conclusion

Ce deuxième chapitre a permis dans un premier temps, de proposer des solutions utilisant des contraintes LMI à des problèmes qui jusque là n'en avaient pas. Il s'agit des problèmes de retour de sortie pour des modèles TS incertains. Ces résultats ont été obtenus en utilisant une majoration qui peut se révéler conservative, mais qui peut s'appliquer à une large classe de problèmes.

Le deuxième apport a été l'utilisation des approches non quadratiques initialisées dans /Guerra et Vermeiren 2004/ à des problèmes de stabilisation robuste. Notons que les résultats obtenus sont essentiellement « techniques » dans le sens où ils ne proposent pas une nouvelle voie de traitement des différents problèmes abordés. Ils consistent essentiellement à améliorer l'existant par des mises sous forme de contraintes LMI différentes.

Chapitre III : Réduction du conservatisme en discret

A.	Introduction	64
B.	Première famille de fonctions candidates (approche A)	65
1.	Notations et relaxations étendues	66
2.	Stabilité des modèles Takagi-Sugeno discrets	68
3.	Stabilisation des modèles Takagi-Sugeno discrets.....	71
4.	Stabilisation de modèles Takagi-Sugeno incertains.....	74
C.	Deuxième famille de fonctions candidates (approche B).....	77
1.	Stabilité des modèles Takagi-Sugeno discrets	80
2.	Stabilisation des modèles Takagi-Sugeno discrets.....	85
D.	Avantages, limites et perspectives des approches	87

A. Introduction

Comme il a été précisé dans le chapitre I, les conditions de stabilité ou de stabilisation d'un modèle ne sont que suffisantes. Ce conservatisme intervient à plusieurs reprises dans les démonstrations de stabilité. Il intervient au niveau du choix du modèle, du choix de la fonction candidate de Lyapunov, de la mise sous forme linéaire en les paramètres recherchés et enfin lors de l'utilisation des relaxations qui permettent de supprimer les fonctions h_i du problème.

Ce chapitre propose d'utiliser des fonctions de Lyapunov dont la variation est prise en compte sur k échantillons. Deux familles seront considérées. La première évite l'introduction de nouvelles variables dans le problème et ainsi permet de rendre les problèmes obtenus exploitables dans un temps raisonnable. Le nombre k d'échantillons considérés et le choix de la fonction sont importants car ils permettent de choisir le rapport conservatisme/complexité. Une application de cette approche aux modèles Takagi-Sugeno incertain est présentée.

La deuxième famille de fonction nécessite l'introduction de nouvelles variables dans le problème mais permet d'obtenir des domaines de solution plus grands. Elle est constituée d'une somme de fonctions candidates de Lyapunov calculées à différents instants. Le nombre de fonctions utilisées et leur type permettent également de choisir le rapport conservatisme/complexité des conditions.

On introduit la notation suivante :

Notation : Dans toute la suite, $t \in \mathbb{N}$ indique l'échantillon et $k \in \mathbb{N}^*$ un nombre fini d'échantillons. La variation d'une fonction V sur un échantillon s'écrit : ΔV , une variation sur k échantillons : $\Delta_k V(t) = V(t+k) - V(t)$.

B. Première famille de fonctions candidates (approche A)

Dans cette partie la fonction candidate de Lyapunov choisie est $\mathcal{V}(X_k(t)) = \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{V}(x(t+i))$ avec $\tilde{V}$ une fonction candidate de Lyapunov et $X_k(t) = \begin{bmatrix} x(t)^T & \dots & x(t+k-1)^T \end{bmatrix}^T$ un état augmenté du modèle. Cette fonction de Lyapunov prend donc en compte la valeur des états successifs sur une fenêtre de taille k . On note que si $k=1$, l'analyse de la stabilité revient à étudier la variation de la fonction candidate $\tilde{V}(x)$.

La variation de la fonction $\mathcal{V}(X_k(t)) = \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{V}(x(t+i))$ sur un échantillon est donnée par

l'expression :

$$\Delta \mathcal{V}(X_k(t)) = \mathcal{V}(X_k(t+1)) - \mathcal{V}(X_k(t)) = \tilde{V}(x(t+k)) - \tilde{V}(x(t)) \quad (3.1)$$

Cette expression correspond à l'étude de la variation de la fonction candidate de Lyapunov $\tilde{V}(x)$ sur k échantillons $\Delta_k \tilde{V}(x(t)) \triangleq \tilde{V}(x(t+k)) - \tilde{V}(x(t))$. A partir de (3.1), on déduit le théorème suivant.

Théorème 1 /Kruszewski et Guerra 2005/ : Soit un modèle discret $x(t+1) = f(x(t))$. S'il existe une fonction candidate de Lyapunov $\tilde{V}(x)$ telle que $\Delta_k \tilde{V}(x(t)) = \tilde{V}(x(t+k)) - \tilde{V}(x(t)) < 0$ le long des trajectoires du modèle pour toutes conditions initiales admissibles alors le modèle est globalement asymptotiquement stable.

$\Delta_k \tilde{V}(x(t)) < 0$ entraîne $\tilde{V}(x(t+k)) \leq \tilde{V}(x(t))$ à chaque instant le long des trajectoires du modèle considéré. Cette décroissance sur k échantillons de la fonction $\tilde{V}$ indique qu'entre t et $t+k$ on autorise des remontées de cette fonction. Néanmoins sa convergence vers l'origine reste vraie.

La figure 1 illustre ce phénomène. La variation de la fonction candidate de Lyapunov $\tilde{V}$ n'est pas négative le long de la trajectoire et donc la condition $\Delta \tilde{V}(x) < 0$ n'est pas vérifiée. On peut s'apercevoir sur la figure que les suites des points blancs, $\tilde{V}(x(2 \times t))$ et gris, $\tilde{V}(x(2 \times t+1))$ sont strictement décroissantes. La condition $\Delta_2 \tilde{V}(x) < 0$ est donc suffisante pour prouver la stabilité dans ce cas.

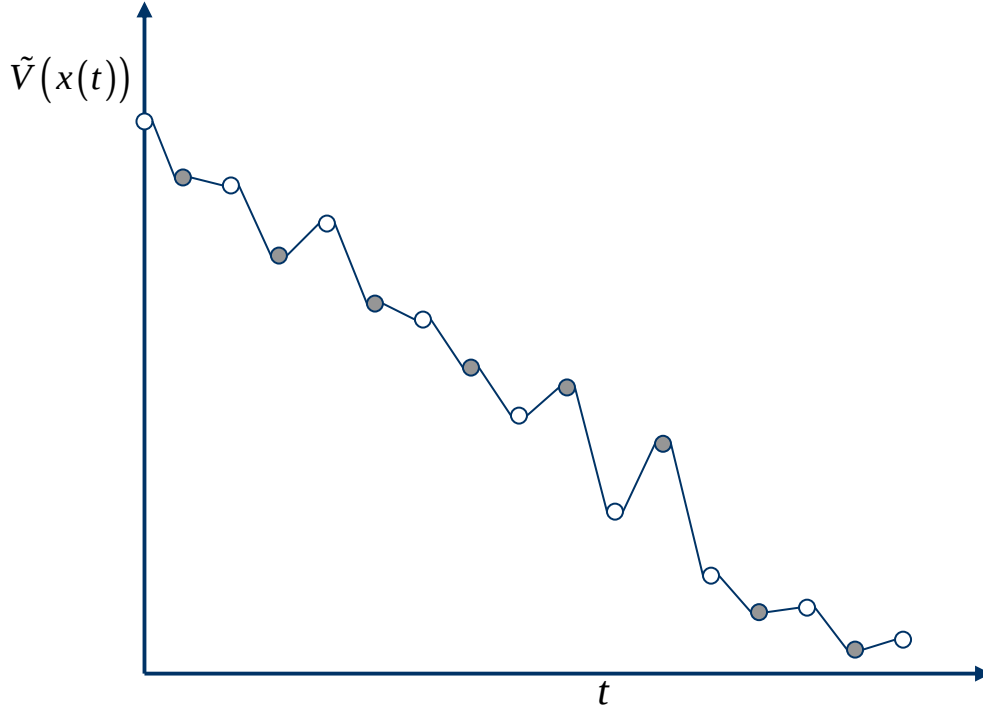


Figure 1 : évolution d'une fonction candidate de Lyapunov le long d'une trajectoire d'un modèle

Une propriété intéressante de ce type d'approche est de permettre un ordre partiel sur $k \in \mathbb{N}^*$. Elle est donnée par le lemme suivant.

Lemme 1 /Kruszewski et Guerra 2005/ : Soient $\tilde{V}$ une fonction candidate de Lyapunov et $m, k \in \mathbb{N}^*$. S'il existe $l \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = k \times l$ alors :

Si $\forall t \quad \Delta_k \tilde{V}(x(t)) < 0$ alors $\Delta_m \tilde{V}(x(t)) < 0 \quad \forall t$.

Preuve : directe en considérant le fait que $\Delta_m \tilde{V}(x(t)) = \sum_{i=0}^{l-1} \tilde{V}(x(t+ik))$.

La suite de cette partie a trait à l'application de cette approche pour les modèles TS. Notons que, d'après le lemme 1, toute approche avec $k > 1$ est théoriquement meilleure que l'approche classique qui correspond à $k = 1$. Le but est de déterminer si les résultats obtenus avec $k > 1$ améliorent de façon significative les résultats classiques.

1. Notations et relaxations étendues

L'introduction du nombre fini d'échantillons $k > 1$ amène à considérer l'ensemble des échantillons entre t et $t+k$, il nous faut donc étendre les notations précédentes à cet ensemble d'échantillons.

Notation : Soit Y_i, Y_{ij} des matrices de taille appropriée et $h_i(\cdot)$ des fonctions scalaires ayant

la propriété de somme convexe, on pose $Y_{z(t+n)} = \sum_{i=1}^r h_i(z(t+n))Y_i$ et

$$Y_{z(t+n), z(t+n)} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t+n))h_j(z(t+n))Y_{ij}.$$

De la même manière que pour les notations, l'utilisation du nombre fini d'échantillons $k > 1$ amène à considérer une extension des relaxations vues précédemment. Dans le cas d'une somme où un seul terme apparaît à chaque instant :

$$\sum_{i_0=1}^r \dots \sum_{i_{k-1}=1}^r h_{i_0}(z(t)) \dots h_{i_{k-1}}(z(t+k-1))Y_{i_0, \dots, i_{k-1}} < 0 \quad (3.2)$$

Dans le cas où sont présents deux termes au même instant :

$$\sum_{i_0=1}^r \dots \sum_{i_{k-1}=1}^r \sum_{j_0=1}^r \dots \sum_{j_{k-1}=1}^r h_{i_0}(z(t)) \dots h_{i_{k-1}}(z(t+k-1))h_{j_0}(z(t)) \dots h_{j_{k-1}}(z(t+k-1))Y_{i_0, \dots, i_{k-1}, j_0, \dots, j_{k-1}} < 0 \quad (3.3)$$

Remarque importante 1: Dans toute la suite, les quantités $Y_{i_0, \dots, i_{k-1}, j_0, \dots, j_{k-1}}$ peuvent toujours se décomposer de la manière suivante :

$$Y_{i_0, \dots, i_{k-1}, j_0, \dots, j_{k-1}} \triangleq \tilde{Y} + \tilde{Y}_{i_0, j_0}^{(0)} + \dots + \tilde{Y}_{i_{k-1}, j_{k-1}}^{(k-1)} \quad (3.4)$$

Cela indique que seul $\tilde{Y}_{i_m, j_m}^{(m)}$ $m \in \{1, \dots, k\}$ dépend de $z(t+m)$. Par exemple le produit $B_{z(t+1)}F_{z(t+2)}$ ne peut pas exister.

Les quantités $h_i(z(t+i))$ et $h_j(z(t+j))$ $i \neq j$ étant indépendantes une condition suffisante pour vérifier l'inégalité (3.2) est donnée dans le lemme suivant.

Lemme 2 : Soient $Y_{i_0, \dots, i_{k-1}}$ des matrices et h_i des fonctions ayant la propriété de somme convexe, (3.2) est vérifiée si les r^k conditions suivantes sont vraies :

$$\forall i_0, \dots, i_{k-1} \in \{1, \dots, r\} \quad Y_{i_0, \dots, i_{k-1}} < 0 \quad (3.5)$$

Dans le cas (3.3), la même remarque sur l'indépendance des termes s'applique. Avec la remarque 1 et en utilisant $h_i(\cdot)h_j(\cdot) = h_j(\cdot)h_i(\cdot)$ une condition suffisante est donnée par le lemme suivant.

Lemme 3 : Soit $\Upsilon_{i_0, \dots, i_{k-1}, j_0, \dots, j_{k-1}} \triangleq \tilde{\Upsilon} + \tilde{\Upsilon}_{i_0, j_0}^{(0)} + \dots + \tilde{\Upsilon}_{i_{k-1}, j_{k-1}}^{(k-1)}$ des matrices et h_i des fonctions ayant la propriété de somme convexe, (3.3) est vérifiée si les $(0,5 \cdot r(r+1))^k$ conditions suivantes sont vraies :

$$\forall (i_0, j_0), \dots, (i_{k-1}, j_{k-1}) \in \{1, 2, \dots, r\}^2 \quad \Upsilon_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}, j_0 j_1 \dots j_{k-1}} + \Upsilon_{j_0 j_1 \dots j_{k-1}, i_0 i_1 \dots i_{k-1}} < 0 \quad (3.6)$$

$i_0 \leq j_0, \dots, i_{k-1} \leq j_{k-1}$

Preuve : elle est directe en utilisant la décomposition (3.4).

Remarque 2 : A l'instar de ce qui a été proposé précédemment, des relaxations plus performantes (incluant les résultats du lemme 3) peuvent être obtenues. Elles correspondraient à des extensions directes des lemmes donnés dans la partie B-4 du chapitre I. Ces extensions ne sont pas réalisées ici. La raison principale est le rajout des variables supplémentaires. Effectivement dans le cas /Liu et Zhang 2003/ le nombre de variables additionnelles augmente au moins en $\left(\frac{n(3n+1)}{2}\right)^k \left(\frac{r(r+1)}{2}\right)^k$ ce qui est clairement incompatible avec les solveurs actuels.

2. Stabilité des modèles Takagi-Sugeno discrets

Considérons le modèle Takagi-Sugeno autonome suivant :

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) = A_{z(t)} x(t) \quad (3.7)$$

et une fonction candidate de Lyapunov quadratique :

$$\tilde{V}(x) = x^T P x \quad (3.8)$$

L'approche proposée ici s'apparente aux travaux de /Megretski 1996/ sur les modèles linéaires non stationnaires :

$$x(t+1) = A(t)x(t), \quad A(t) \in \mathcal{A} \quad (t = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (3.9)$$

$A(t)$ est une matrice variable dans le temps qui prend des valeurs quelconques dans un polytope : $\mathcal{A} = \text{co}(A_i)$ où les $A_i \ i \in \{1, \dots, N\}$ sont les sommets du polytope. Les résultats principaux sont donnés par les théorèmes suivants.

Théorème 2 /Megretski 1996/ : Le modèle (3.9) est globalement asymptotiquement stable (GAS) si et seulement s'il existe une matrice P définie positive et un scalaire T tels que :

$$A^T P A - P < 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}(T) \quad (3.10)$$

où $\mathcal{A}(T) = \{A = A_{k(1)} A_{k(2)} \dots A_{k(T)}, 1 \leq k(t) \leq N\}$.

Lemme 4 /Megretski et Rantzer 1997/ : Soit un modèle (3.9). Si ce dernier est stable alors :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Delta_k V(x(t)) < 0 \text{ pour toutes fonctions de Lyapunov.}$$

Preuve : Si le modèle est stable, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x(t+k)\|_2 = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} V(x(t+k)) = 0$.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Delta_k V(x(t)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} V(x(t+k)) - V(x(t)) = -V(x(t)) < 0.$$

En reprenant les modèles TS discrets, la variation sur k échantillons de la fonction (3.8) est donnée par :

$$\Delta_k \tilde{V}(x(t)) = x(t+k)^T P x(t+k) - x(t)^T P x(t) \quad (3.11)$$

Selon le théorème 2, le modèle (3.7) est globalement stable s'il existe une matrice $P > 0$ telle que $\Delta_k \tilde{V}(x(t)) < 0$ le long de toutes les trajectoires admissibles de (3.7). L'écriture des échantillons compris entre t et $t+k$ se ramène à :

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) = A_{z(t)} x(t) \\ x(t+2) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t+1)) A_i x(t+1) = A_{z(t+1)} x(t+1) = A_{z(t+1)} A_{z(t)} x(t) \\ &\vdots \\ x(t+k) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t+k-1)) A_i x(t+k-1) = A_{z(t+k-1)} x(t+k-1) = A_{z(t+k-1)} \times \dots \times A_{z(t)} x(t) \end{aligned} \quad (3.12)$$

(3.11) s'écrit alors :

$$\Delta_k \tilde{V}(x(t)) = x(t)^T \left(\left(A_{z(t+k-1)} \times \dots \times A_{z(t)} \right)^T P A_{z(t+k-1)} \times \dots \times A_{z(t)} - P \right) x(t) < 0 \quad (3.13)$$

(3.7) est globalement asymptotiquement stable si :

$$\left(A_{z(t+k-1)} \times \dots \times A_{z(t)} \right)^T P A_{z(t+k-1)} \times \dots \times A_{z(t)} - P < 0 \quad (3.14)$$

Cette inégalité s'apparente aux résultats de /Megretski 1996/. De façon équivalente après utilisation du complément de Schur on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} -P & (*) \\ P(A_{z(t+k-1)} \times \dots \times A_{z(t)}) & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (3.15)$$

L'utilisation du lemme 2 sur (3.15) donne r^k conditions à vérifier. On définit les quantités :

$$\Upsilon_{i_0, \dots, i_{k-1}} = \begin{bmatrix} -P & (*) \\ P(A_{i_{k-1}} \times \dots \times A_{i_0}) & -P \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Théorème 3 /Kruszewski et Guerra 2005b/: Soient un modèle TS discret (3.7) et les $\Upsilon_{i_0, \dots, i_{k-1}}$ définis en (3.16). S'il existe une matrice P définie positive telle que les conditions (3.5) soient vérifiées alors le modèle (3.7) est globalement asymptotiquement stable.

Afin d'illustrer l'efficacité de l'approche, on considère la famille de modèles suivants :

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) \text{ avec } A_1 = \begin{bmatrix} a & -0,5 \\ 0 & -0,86 \end{bmatrix} \text{ et } A_2 = \begin{bmatrix} 0,87 & 0 \\ -0,5 & b \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

avec $a, b \in [0,1]$ et h_i des fonctions scalaires ayant la propriété de somme convexe.

L'expression des h_i est inutile puisqu'il n'y pas de simulation.

Le but est de déterminer l'espace des modèles atteignables par différentes méthodes en fonction des paramètres a et b . La figure 2 donne les domaines où la stabilité est prouvée par le théorème 3 pour $k=1$ (• cas classique 2 LMI à résoudre) et pour $k=4$ (◦ et • 16 LMI à résoudre) dans le plan (a, b) .

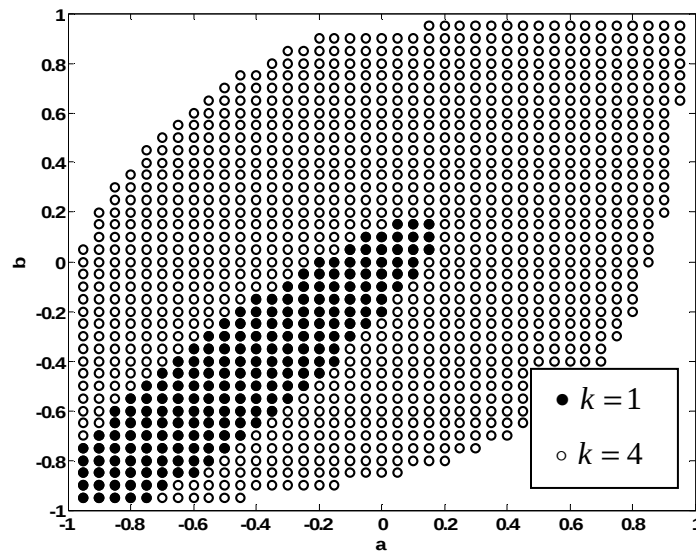


Figure 2 : Domaines où la stabilité est prouvée par le Théorème 3 pour différentes valeurs de k

L'intérêt de l'approche est donc confirmé dans ce cas.

3. Stabilisation des modèles Takagi-Sugeno discrets

Considérons le modèle Takagi-Sugeno suivant :

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) = A_{z(t)} x(t) + B_{z(t)} u(t) \quad (3.18)$$

la loi de commande PDC :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i G^{-1} x(t) = - F_{z(t)} G^{-1} x(t) \quad (3.19)$$

et la fonction candidate de Lyapunov :

$$\tilde{V}(x) = x^T G^{-T} P G^{-1} x \quad (3.20)$$

Sa variation sur k échantillons est donnée par :

$$\Delta_k \tilde{V}(x(t)) = x(t+k)^T G^{-T} P G^{-1} x(t+k) - x(t)^T G^{-T} P G^{-1} x(t) \quad (3.21)$$

De la même façon que pour la stabilité, l'écriture des échantillons compris entre t et $t+k$ se ramène à :

$$\begin{aligned} x(t+1) &= (A_{z(t)} - B_{z(t)} F_{z(t)} G^{-1}) x(t) \\ x(t+2) &= (A_{z(t+1)} - B_{z(t+1)} F_{z(t+1)} G^{-1}) (A_{z(t)} - B_{z(t)} F_{z(t)} G^{-1}) x(t) \\ &\vdots \\ x(t+k) &= (A_{z(t+k-1)} - B_{z(t+k-1)} F_{z(t+k-1)} G^{-1}) \times \dots \times (A_{z(t)} - B_{z(t)} F_{z(t)} G^{-1}) x(t) \end{aligned} \quad (3.22)$$

$\Delta_k \tilde{V}(x(t)) < 0$ est donc assuré si :

$$x(t)^T \left((*) G^{-T} P G^{-1} (A_{z(t+k-1)} - B_{z(t+k-1)} F_{z(t+k-1)} G^{-1}) \times \dots \times (A_{z(t)} - B_{z(t)} F_{z(t)} G^{-1}) - G^{-T} P G^{-1} \right) x(t) < 0 \quad (3.23)$$

Ou de façon équivalente par :

$$(*) G^{-T} P G^{-1} (A_{z(t+k-1)} - B_{z(t+k-1)} F_{z(t+k-1)} G^{-1}) \times \dots \times (A_{z(t)} - B_{z(t)} F_{z(t)} G^{-1}) - G^{-T} P G^{-1} < 0 \quad (3.24)$$

Notons que $A_{z(t+i)} - B_{z(t+i)} F_{z(t+i)} G^{-1} = (A_{z(t+i)} G - B_{z(t+i)} F_{z(t+i)}) G^{-1}$, (3.24) s'écrit :

$$(*) G^{-T} P G^{-1} (A_{z(t+k-1)} G - B_{z(t+k-1)} F_{z(t+k-1)}) \times \dots \times G^{-1} (A_{z(t)} G - B_{z(t)} F_{z(t)}) G^{-1} - G^{-T} P G^{-1} < 0 \quad (3.25)$$

En utilisant une congruence avec la matrice de rang plein G il vient :

$$(*) G^{-T} P \left[G^{-1} (A_{z(t+k-1)} G - B_{z(t+k-1)} F_{z(t+k-1)}) \right] \times \dots \times \left[G^{-1} (A_{z(t)} G - B_{z(t)} F_{z(t)}) \right] - P < 0 \quad (3.26)$$

L'application du lemme I-2 ($3 \Rightarrow 1$) sur l'inégalité (3.26) donne la condition équivalente :

$$\begin{bmatrix} -P & (*) \\ \Phi \left[G^{-1} (A_{z(t)} G - B_{z(t)} F_{z(t)}) \right] & -\Phi - \Phi^T + (*) G^{-T} P G^{-1} \times \dots \times (A_{z(t+1)} G - B_{z(t+1)} F_{z(t+1)}) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.27)$$

Afin de permettre une mise sous forme LMI, on choisit $\Phi = G$. On définit la suite de matrices suivante :

$$\Gamma_i = (*) G^{-T} P G^{-1} (A_{z(t+k-1)} G - B_{z(t+k-1)} F_{z(t+k-1)}) G^{-1} \times \dots \times (A_{z(t+i)} G - B_{z(t+i)} F_{z(t+i)}) \quad (3.28)$$

$$(3.27) \text{ s'écrit alors : } \begin{bmatrix} -P & (*) \\ \Phi \left[G^{-1} (A_{z(t)} G - B_{z(t)} F_{z(t)}) \right] & -\Phi - \Phi^T + \Gamma_1 \end{bmatrix} < 0. \text{ On peut appliquer à}$$

nouveau le lemme I-2 avec $\Phi = G$ sur (3.27) :

$$\begin{bmatrix} -P & (*) & 0 \\ A_{z(t)} G - B_{z(t)} F_{z(t)} & -G - G^T & (*) \\ 0 & A_{z(t+1)} G - B_{z(t+1)} F_{z(t+1)} & -G - G^T + \Gamma_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.29)$$

De façon récursive on obtient :

$$\begin{bmatrix} -P & (*) & & 0 \\ A_{z(t)} G - B_{z(t)} F_{z(t)} & -G - G^T & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & (*) \\ 0 & & A_{z(t+k-1)} G - B_{z(t+k-1)} F_{z(t+k-1)} & -G - G^T + P \end{bmatrix} < 0 \quad (3.30)$$

Afin d'utiliser le lemme 3 sur l'expression (3.30), on définit les quantités :

$$\Upsilon_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}, j_0 j_1 \dots j_{k-1}} = \begin{bmatrix} -P & (*) & & 0 \\ A_{i_0} G - B_{i_0} F_{j_0} & -G - G^T & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & (*) \\ 0 & & A_{i_{k-1}} G - B_{i_{k-1}} F_{j_{k-1}} & -G - G^T + P \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Théorème 4 /Kruszewski et Guerra 2005b/ : Soit un modèle TS discret (3.18), la loi de commande (3.19) et les $\Upsilon_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}, j_0 j_1 \dots j_{k-1}}$ définis en (3.31). S'il existe une matrice P définie positive et des matrices G et F_i , $i \in \{1, \dots, r\}$ telles que les conditions (3.6) soient vérifiées alors la boucle fermée est globalement asymptotiquement stable.

Remarquons que l'on garde un ordre partiel sur $k \in \mathbb{N}^*$.

Lemme 5 /Kruszewski et Guerra 2005b/ : Soient $m, p \in \mathbb{N}^*$, supposons qu'il existe une matrice P définie positive et des matrices G et F_i , $i \in \{1, \dots, r\}$ telles que la condition (3.30) soit vérifiée pour $k = m$. S'il existe $l \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = m \times l$ alors la condition (3.30) est satisfaite pour $k = p$.

Preuve : La preuve est donnée pour $l = 2$ mais s'étend facilement au cas général. On suppose que (3.30) est vérifiée pour $k = m$. Cela implique : $\Delta_m \tilde{V}(x(t)) = \tilde{V}(x(t+m)) - \tilde{V}(x(t)) < 0$ mais aussi $\Delta_m \tilde{V}(x(t+m)) = \tilde{V}(x(t+2m)) - \tilde{V}(x(t+m)) < 0$. En utilisant (3.30) il existe donc λ_m et λ_{2m} deux scalaires strictement positifs tels que :

$$\begin{bmatrix} -P & (*) & & 0 \\ \tilde{A}_{z(t)} & -G - G^T & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & (*) \\ 0 & & \tilde{A}_{z(t+m-1)} & -G - G^T + P \end{bmatrix} < -\lambda_m I \quad (3.32)$$

$$\begin{bmatrix} -P & (*) & & 0 \\ \tilde{A}_{z(t+m)} & -G - G^T & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & (*) \\ 0 & & \tilde{A}_{z(t+2m-1)} & -G - G^T + P \end{bmatrix} < -\lambda_{2m} I \quad (3.33)$$

avec $\tilde{A}_{z(t), z(t)} = A_{z(t)} G - B_{z(t)} F_{z(t)}$.

Ecrivons la condition de stabilité de la boucle fermée pour $k = m \times 2$:

$$\begin{bmatrix} -P & (*) & & & & 0 \\ \tilde{A}_{z(t), z(t)} & -G - G^T & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & \tilde{A}_{z(t+m-1), z(t+m-1)} & -G - G^T + P - P & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & \tilde{A}_{z(t+2m-1), z(t+2m-1)} & -G - G^T + P \end{bmatrix} < 0 \quad (3.34)$$

En utilisant les majorations (3.32) et (3.33), (3.34) est vérifiée si :

$$\begin{bmatrix} -\lambda_m I & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_m I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_{2m} I & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_{2m} I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.35)$$

Or (3.35) est toujours vérifiée car λ_m et λ_{2m} deux scalaires strictement positifs.

4. Stabilisation de modèles Takagi-Sugeno incertains

Afin d'introduire des notions de robustesse dans la loi de commande, on utilise des modèles TS discrets prenant en compte des incertitudes de modélisation /Zhao et al. 1995/. Le modèle TS incertain s'écrit alors, cf. chapitre I :

$$\begin{cases} x(t+1) = (A_{z(t)} + \Delta A_{z(t)})x(t) + (B_{z(t)} + \Delta B_{z(t)})u(t) \\ y(t) = (C_{z(t)} + \Delta C_{z(t)})x(t) \end{cases} \quad (3.36)$$

avec $\begin{cases} \Delta A_z = H_a \Delta_{az} E_{az} \\ \|\Delta_{az}\|_2 \leq 1 \end{cases}, \begin{cases} \Delta B_z = H_b \Delta_{bz} E_{bz} \\ \|\Delta_{bz}\|_2 \leq 1 \end{cases}, \begin{cases} \Delta C_z = H_c \Delta_{cz} E_{cz} \\ \|\Delta_{cz}\|_2 \leq 1 \end{cases},$ et $H_a, H_b, H_c, E_{ai}, E_{bi}, E_{ci}$ des

matrices constantes de tailles appropriées.

La loi de commande PDC utilisée est :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i G^{-1} x(t) = -F_{z(t)} G^{-1} x(t) \quad (3.37)$$

et la fonction candidate de Lyapunov :

$$\tilde{V}(x) = x^T G^{-T} P G^{-1} x \quad (3.38)$$

En posant $\bar{A}_{z(t)} \equiv A_{z(t)} + \Delta A_{z(t)}$ et $\bar{B}_{z(t)} \equiv B_{z(t)} + \Delta B_{z(t)}$, et en utilisant le résultat précédent concernant la stabilisation de modèle TS sans incertitudes (théorème 4 (3.30)), on obtient la condition suivante :

$$\begin{bmatrix} -P & (*) & 0 \\ \bar{A}_{z(t)} G - \bar{B}_{z(t)} F_{z(t)} & -G^T - G & \ddots \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & \bar{A}_{z(t+k-1)} G - \bar{B}_{z(t+k-1)} F_{z(t+k-1)} & -G^T - G + P \end{bmatrix} < 0 \quad (3.39)$$

On s'intéresse à la partie incertaine de (3.39). Le terme $\bar{A}_{z(t)} G - \bar{B}_{z(t)} F_{z(t)}$ peut se traiter de la manière suivante en introduisant deux scalaires $\tau_0 > 0$ et $\mu_0 > 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ H_a \Delta a_{z(t)}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{az(t)} G & 0 \end{bmatrix} + (*) \leq \begin{bmatrix} \tau_0^{-1} G^T E_{az(t)}^T E_{az(t)} G & 0 \\ 0 & \tau_0 H_a \Delta a_{z(t)}(t) (\Delta a_{z(t)}(t))^T H_a^T \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ H_b \Delta b_{z(t)}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{bz(t)} F_{z(t)} & 0 \end{bmatrix} + (*) \leq \begin{bmatrix} \mu_0^{-1} F_{z(t)}^T E_{bz(t)}^T E_{bz(t)} F_{z(t)} & 0 \\ 0 & \mu_0 H_b \Delta b_{z(t)}(t) (\Delta b_{z(t)}(t))^T H_b^T \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

En utilisant $\|\Delta_{az}\|_2 \leq 1$ et $\|\Delta_{bz}\|_2 \leq 1$ les bornes supérieures de (3.40) et (3.41) sont donc indépendantes du temps. En répétant ces majorations pour $\bar{A}_{z(t+i)}G - \bar{B}_{z(t+i)}F_{z(t+i)}$, $i \in \{0, \dots, k-1\}$ on obtient la borne supérieure :

$$\begin{bmatrix} -P + \Omega_0^1 & (*) & & & 0 \\ A_{z(t)}G - B_{z(t)}F_{z(t)} & -G^T - G + \Omega_0^2 & & \ddots & \\ & \ddots & & \ddots & (*) \\ 0 & & A_{z(t+k-1)}G - B_{z(t+k-1)}F_{z(t+k-1)} & -G^T - G + P + \Omega_{k-1}^2 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.42)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Omega_i^1 &= \tau_i^{-1} G^T E_{az(t+i)}^T E_{az(t+i)} G + \mu_i^{-1} F_{z(t+i)}^T E_{bz(t+i)}^T E_{bz(t+i)} F_{z(t+i)} \\ \Omega_i^2 &= \mu_i H_b H_b^T + \tau_i H_a H_a^T \end{aligned} \quad (3.43)$$

L'utilisation du complément de Schur sur (3.42)

$$\begin{bmatrix} -P & (*) & (*) & (*) & 0 & & \dots & & 0 \\ E_{bz(t)}F_{z(t)} & -\mu_0 I & 0 & 0 & & & & & \\ E_{az(t)}G & 0 & -\tau_0 I & 0 & & & & & \vdots \\ A_{z(t)}G - B_{z(t)}F_{z(t)} & 0 & 0 & -G^T - G + \Omega_0^2 & & \ddots & & & \\ 0 & & & & \ddots & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & -G^T - G + \Omega_{k-2}^2 & (*) & (*) & (*) \\ \vdots & & & \ddots & 0 & E_{bz(t+k-1)}F_{z(t+k-1)} & -\mu_{k-1} I & 0 & 0 \\ & & & & 0 & E_{az(t+k-1)}G & 0 & -\tau_{k-1} I & 0 \\ 0 & & \dots & & 0 & A_{z(t+k-1)}G - B_{z(t+k-1)}F_{z(t+k-1)} & 0 & 0 & -G^T - G + P + \Omega_{k-1}^2 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.44)$$

On définit les quantités :

$$\Upsilon_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}, j_0 j_1 \dots j_{k-1}} = \begin{bmatrix} -P & (*) & (*) & (*) & 0 & & \dots & & 0 \\ E_{bi_0}F_{j_0} & -\mu_0 I & 0 & 0 & & & & & \vdots \\ E_{ai_0}G & 0 & -\tau_0 I & 0 & & & & & \\ A_{i_0}G - B_{i_0}F_{j_0} & 0 & 0 & -G^T - G + \Omega_0^2 & & \ddots & & & \\ 0 & & & & \ddots & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & -G^T - G + \Omega_{k-2}^2 & (*) & (*) & (*) \\ \vdots & & & \ddots & 0 & E_{bi_{k-1}}F_{j_{k-1}} & -\mu_{k-1} I & 0 & 0 \\ & & & & 0 & E_{ai_{k-1}}G & 0 & -\tau_{k-1} I & 0 \\ 0 & & \dots & & 0 & A_{i_{k-1}}G - B_{i_{k-1}}F_{j_{k-1}} & 0 & 0 & -G^T - G + P + \Omega_{k-1}^2 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Théorème 5 /Kruszewski et al. 2006b/: Soit un modèle TS discret incertain (3.36), la loi de commande (3.37) et les $\Upsilon_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}, j_0 j_1 \dots j_{k-1}}$ définis en (3.45). S'il existe une matrice P définie positive, des matrices G , F_i et des scalaires τ_i et μ_i positifs, $i \in \{1, \dots, r\}$ telles que les conditions (3.6) soient vérifiées alors la boucle fermée est globalement asymptotiquement stable.

On considère le modèle TS incertain (3.36) avec la loi de commande (3.37) où

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1,9 & -1,44 \\ 2 & 0,2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0,08 & 0,7 \\ 0,58 & 0,69 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0,26 \\ 0,92 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -0,86 \\ 0,21 \end{bmatrix}, \quad H_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H_b = 1, \\ E_{b1} = E_{b2} = [0 \quad 0,19] \text{ et } E_{a1} = E_{a2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,05 \end{bmatrix}.$$

Les conditions classiques utilisant la fonction candidate de Lyapunov $\tilde{V}(x) = x^T G^{-T} P G^{-1} x$ ne donnent pas de résultat (théorème 5 avec $k=1$). En utilisant le théorème 5 avec $k=2$, on obtient le résultat suivant pour la loi de commande $u(t) = -F_{z(t)} G^{-1} x(t)$:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,3646 & -1,4471 \\ -0,2596 & -1,4563 \end{bmatrix} \text{ et } G = \begin{bmatrix} 0,02 & -0,0246 \\ -0,0243 & 0,0439 \end{bmatrix}.$$

Pour la simulation, on choisit $h_1(z(t)) = 1/(1+0.9|x_1(t)|)$ et $h_2(z(t)) = 1-h_1(z(t))$. Les figures ci-après montrent l'évolution de l'état et de la fonction $\tilde{V}(x(t))$ pour les conditions initiales $x(0) = [-50 \quad -40]^T$.

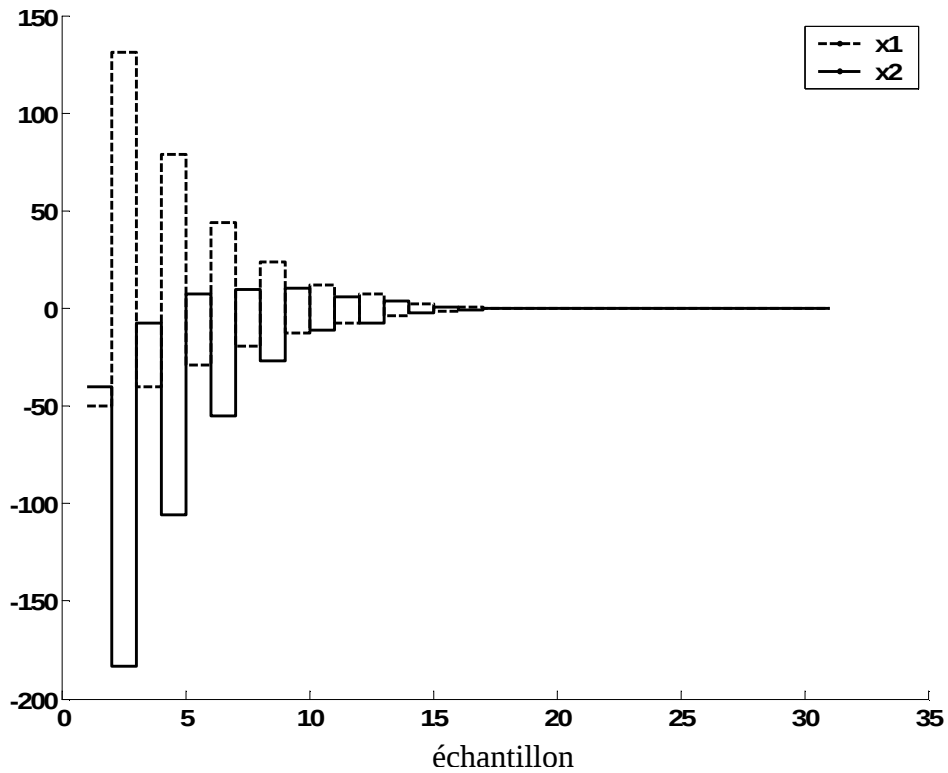


Figure 3 : Evolution de l'état du modèle pour la condition initiale $x(0) = [-50 \quad -40]^T$

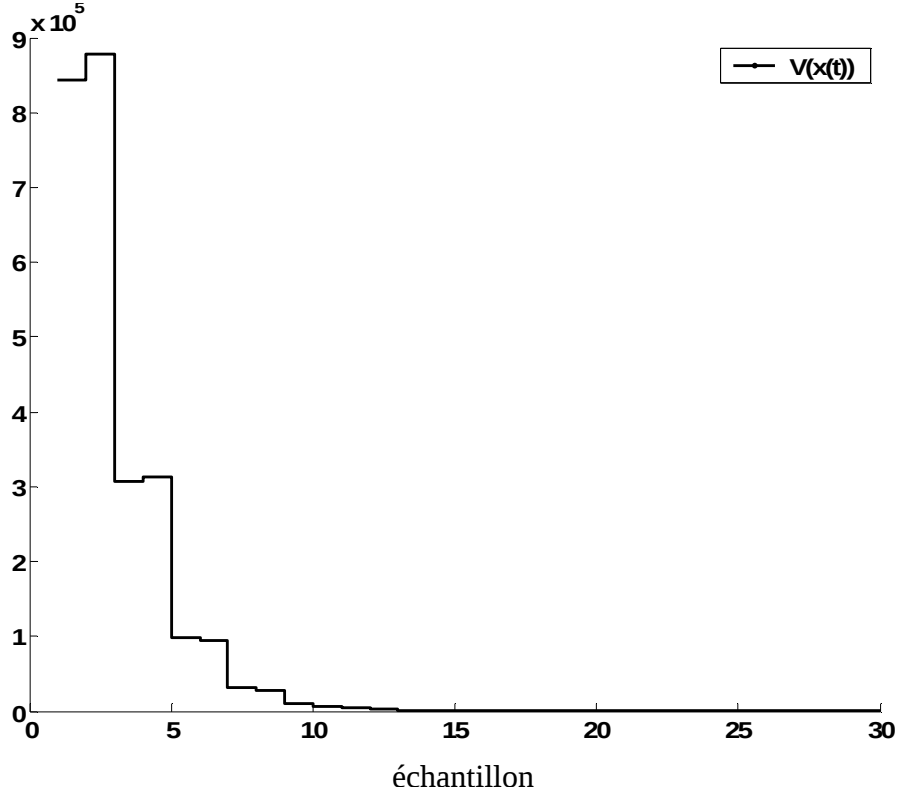


Figure 4 : évolution de la fonction $\tilde{V}(x(t))$ pour la condition initiale $x(0) = [-50 \ -40]^T$

Sur ces deux figures on peut observer la convergence de l'état vers l'origine. On peut également constater que la fonction $\tilde{V}(x(t))$ n'est pas décroissante le long de la trajectoire. Par contre les fonctions $\tilde{V}(x(2t))$ et $\tilde{V}(x(2t+1))$ sont strictement décroissantes.

Remarque : L'extension de ces différents résultats de stabilité et de stabilisation à des fonctions non quadratiques i.e. $\tilde{V}(x(t)) = x^T(t)G_z^{-T}P_zG_z^{-1}x(t)$ est immédiate. La structure des preuves utilisant la même forme i.e. $\tilde{V}(x(t)) = x^T(t)G^{-T}PG^{-1}x(t)$. Un exemple de résultat non quadratique sera donné à la fin de ce chapitre. Notons dans ce cas que le nombre de variables de $\tilde{V}$ passe de $0,5 \cdot n(3n+1)$ à $0,5 \cdot n(3n+1) \cdot r$ si n est le nombre d'états.

C. Deuxième famille de fonctions candidates (approche B)

Dans cette partie, on considère une famille de fonctions candidates de Lyapunov qui généralise la précédente. Ces fonctions s'écrivent comme la somme de différentes fonctions candidates de Lyapunov dépendantes d'instantants différents :

$$\mathcal{V}_k(X_k(t)) = \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{V}_i(x(t+i)) \quad (3.46)$$

Avec $\tilde{V}_i$, $i \in \{0, \dots, k-1\}$ des fonctions candidates de Lyapunov et

$X_k(t) = \begin{bmatrix} x(t)^T & \dots & x(t+k-1)^T \end{bmatrix}^T$ un état augmenté du modèle.

Dans la suite, on considère que les fonctions $\tilde{V}_i$ ont toutes la même structure. Par exemple dans le cas quadratique : $\tilde{V}_i = x^T P^{(i)} x$.

Le principe de cette approche permet de donner plus ou moins de poids aux différents instants. La fonction candidate de Lyapunov $\mathcal{V}_k$ correspond à une « moyenne pondérée » de différentes fonctions de Lyapunov. L'étude de la variation de $\mathcal{V}_k$ et plus particulièrement la condition $\Delta \mathcal{V}_k(X_k(t)) = \mathcal{V}_k(X_k(t+1)) - \mathcal{V}_k(X_k(t)) < 0$ autorise des croissances locales des fonctions $\tilde{V}_i$ sur un intervalle, qui peut être supérieur à k échantillons, tout en garantissant la convergence de $\mathcal{V}_k$.

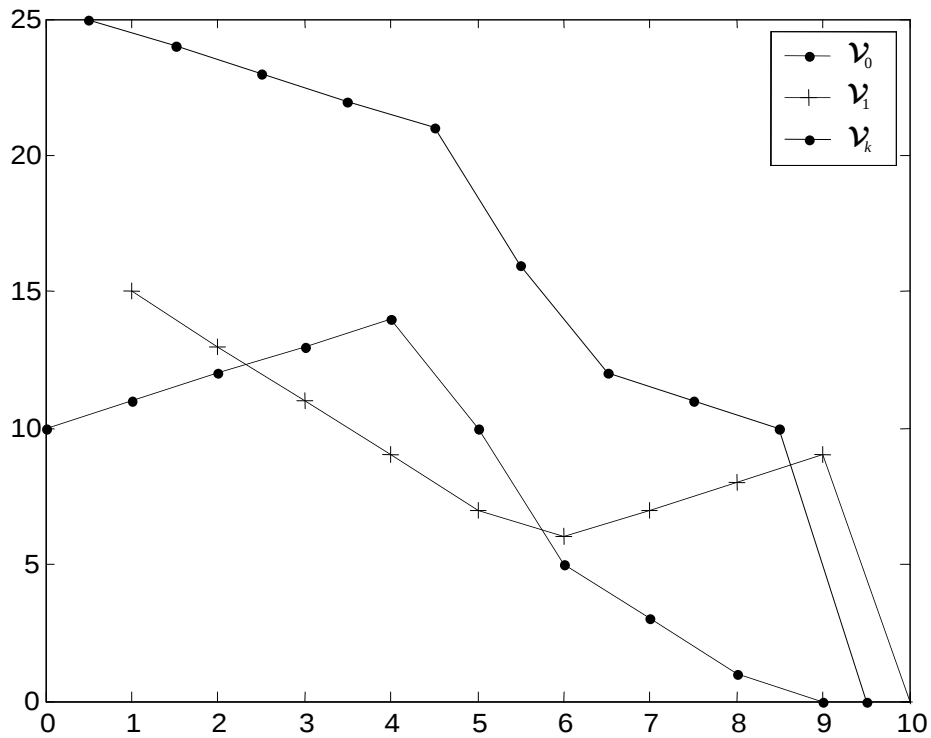


Figure 5 : évolution des différentes composante de la fonction candidate (...) et de la fonction $\mathcal{V}_k$ (-)

La figure 5 représente l'évolution d'une fonction candidate de Lyapunov $\mathcal{V}_2(X_2(t)) = \tilde{V}_0(x(t)) + \tilde{V}_1(x(t+1))$ (trait plein) et celle de ces deux composantes (traits en pointillés). Même si la figure 5 représente un cas fictif, elle permet de bien cerner la différence avec la première méthode. Si on considère $\tilde{V}_0$ (resp. $\tilde{V}_1$) et la première approche, il est nécessaire de considérer sa variation sur 5 échantillons. Effectivement, sur la figure 5, il suffit de regarder les 5 premier points de $\tilde{V}_0$. De façon théorique, les résultats de cette approche incluent ceux de l'approche précédente.

Lemme 6 : S'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et une fonction candidate de Lyapunov tels que $\forall t \Delta_k \tilde{V}(x(t)) < 0$ alors il existe des fonctions candidates de Lyapunov $\tilde{V}_i$ telles que $\Delta \left(\sum_{i=0}^{k-1} \tilde{V}_i(x(t+i)) \right) = \Delta \mathcal{V}_k(X_k(t)) < 0 \quad \forall t$.

Preuve : la démonstration est directe, il suffit de poser $\tilde{V}_i = \tilde{V}$ pour obtenir $\Delta \mathcal{V}_k(X_k(t)) = \Delta_k \tilde{V}(X_k(t))$.

De façon générale, on peut dire que pour cette nouvelle approche le nombre de variables augmente mais qu'il est possible d'obtenir des résultats avec un nombre fini d'échantillons k moins important, c'est-à-dire avec un nombre de conditions LMI plus faible. Ces différents points seront discutés dans la suite.

Pour cette approche on a une propriété d'ordre total pour $k \in \mathbb{N}^*$. Cela indique que les domaines de solutions sont emboîtés.

Lemme 7 : S'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $\tilde{V}_i, i \in \{0, \dots, k-1\}$ tels que $\Delta \mathcal{V}_k(X_k(t)) < 0$ avec $\mathcal{V}_k(X_k(t)) = \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{V}_i(x(t+i))$ alors il existe des fonctions candidate de Lyapunov $\hat{V}_i, i \in \{0, \dots, k\}$ telles que $\Delta \mathcal{V}_{k+1}(X_{k+1}(t)) < 0$ avec $\mathcal{V}_{k+1}(X_{k+1}(t)) = \sum_{i=0}^k \hat{V}_i(x(t+i))$.

Preuve : la démonstration est directe, il suffit choisir $\tilde{V}_i = \hat{V}_i$ pour $i \in \{0, \dots, k-1\}$ et $\hat{V}_k$ suffisamment petite.

1. Stabilité des modèles Takagi-Sugeno discrets

On considère à nouveau le modèle TS discret qui s'écrit :

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) = A_{z(t)} x(t) \quad (3.47)$$

On choisit pour fonctions élémentaires :

$$\tilde{V}_i(x(t)) = x(t)^T P^{(i)} x(t), \quad i \in \{0, \dots, k-1\} \quad (3.48)$$

Remarque : On utilise la notation $P^{(i)}$ pour pouvoir conserver dans la suite la notation propre à l'approche non quadratique i.e. $P_{z(t+i)}^{(i)}$.

La variation de la fonction candidate de Lyapunov $\mathcal{V}_k(X_k(t)) = \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{V}_i(x(t+i))$ est donnée par

l'expression suivante :

$$\Delta \mathcal{V}_k(X_k(t)) = \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{V}_i(x(t+i+1)) - \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{V}_i(x(t+i)) \quad (3.49)$$

$$\Delta \mathcal{V}_k(X_k(t)) = \sum_{i=0}^{k-1} x(t+i+1)^T P^{(i)} x(t+i+1) - \sum_{i=0}^{k-1} x(t+i)^T P^{(i)} x(t+i) \quad (3.50)$$

En réutilisant le fait que (3.47) s'écrit :

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) = A_{z(t)} x(t) \\ x(t+2) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t+1)) A_i x(t+1) = A_{z(t+1)} x(t+1) = A_{z(t+1)} A_{z(t)} x(t) \\ &\vdots \\ x(t+k) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t+k-1)) A_i x(t+k-1) = A_{z(t+k-1)} x(t+k-1) = A_{z(t+k-1)} \times \dots \times A_{z(t)} x(t) \end{aligned} \quad (3.51)$$

on obtient :

$$\Delta \mathcal{V}_k(X_k(t)) = x^T(t) \left(\sum_{i=0}^{k-1} (*) P^{(i)} A_{z(t+i)} \times \dots \times A_{z(t)} - \sum_{i=0}^{k-1} (*) P^{(i)} A_{z(t+i-1)} \times \dots \times A_{z(t)} \right) x(t) \quad (3.52)$$

$\Delta \mathcal{V}_k(X_k(t)) < 0 \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}^{n^*}$ si et seulement si :

$$\sum_{i=0}^{k-1} (*) P^{(i)} A_{z(t+i)} \times \dots \times A_{z(t)} - \sum_{i=0}^{k-1} (*) P^{(i)} A_{z(t+i-1)} \times \dots \times A_{z(t)} < 0 \quad (3.53)$$

$$\text{ou encore : } (*) P^{(k-1)} A_{z(t+k-1)} \times \dots \times A_{z(t)} + \sum_{i=0}^{k-2} (*) (P^{(i)} - P^{(i+1)}) A_{z(t+i)} \times \dots \times A_{z(t)} - P^{(0)} < 0 \quad (3.54)$$

Sans relaxations le nombre de conditions LMI correspondant à (3.54) est de l'ordre de r^{2k} /Guerra et Kruszewski 2006/. Pour réduire ce nombre important de conditions tout en gardant l'inclusion des résultats précédents on peut utiliser le lemme I-2 ($3 \Rightarrow 1$) en introduisant des variables additionnelles. Le nombre de conditions LMI obtenu est alors r^k . Pour cela on définit les matrices suivantes $j \in \{1, \dots, k-1\}$:

$$\Gamma_j = (*) P^{(k-1)} A_{z(t+k-1)} \times \dots \times A_{z(t+j)} + \sum_{i=j}^{k-2} (*) (P^{(i)} - P^{(i+1)}) A_{z(t+i)} \times \dots \times A_{z(t+j)} + P^{(j-1)} - P^{(j)} \quad (3.55)$$

(3.54) s'écrit alors :

$$A_{z(t)}^T \Gamma_1 A_{z(t)} - P^{(0)} < 0 \quad (3.56)$$

L'utilisation du lemme I-2 permet d'obtenir la condition suffisante :

$$\begin{bmatrix} -P^{(0)} & (*) \\ G_{(\cdot)}^{(0)} A_{z(t)} & -G_{(\cdot)}^{(0)} - G_{(\cdot)}^{(0)T} + \Gamma_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.57)$$

Quelque soit la matrice $G_{(\cdot)}^{(0)}$ la suffisance (3.57) $\Rightarrow$ (3.56) est garantie. Plusieurs possibilités sont envisageables. Si on veut conserver la nécessité du lemme I-2, (3.56) $\Rightarrow$ (3.57) $G_{(\cdot)}^{(0)}$ doit pouvoir être égale à Γ_1 ce qui implique qu'elle doit dépendre de tous les indices $z(t+1) \dots z(t+k-1)$ deux fois. On écrira alors $G_{(\cdot)}^{(0)} = G_{z(t+1)z(t+1) \dots z(t+k-1)z(t+k-1)}^{(0)}$. Cette solution qui conserve l'équivalence avec (3.56) conserve le nombre de conditions LMI et introduit un nombre gigantesque de variables. Une solution intermédiaire qui permet de réduire le nombre conditions LMI est obtenue en utilisant $G_{(\cdot)}^{(0)} = G_{z(t+1), \dots, z(t+k-1)}^{(0)}$.

$$\begin{bmatrix} -P^{(0)} & (*) \\ G_{z(t+1), \dots, z(t+k-1)}^{(0)} A_{z(t)} & -G_{z(t+1), \dots, z(t+k-1)}^{(0)} - G_{z(t+1), \dots, z(t+k-1)}^{(0)T} + \Gamma_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.58)$$

En appliquant la factorisation et le lemme de façon récursive sur les Γ_j , on obtient :

$$\begin{bmatrix} -P^{(0)} & (*) & & 0 \\ G_{(\cdot)}^{(0)} A_{z(t)} & -G_{(\cdot)}^{(0)} - G_{(\cdot)}^{(0)T} + P^{(0)} - P^{(1)} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & (*) \\ 0 & & G^{(k-1)} A_{z(t+k-1)} & -G^{(k-1)} - (G^{(k-1)})^T + P^{(k-1)} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.59)$$

On définit les quantités :

$$\Upsilon_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}} = \begin{bmatrix} -P^{(0)} & (*) & 0 \\ G_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(0)} A_{i_0} & -G_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(0)} - G_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(0)T} + P^{(0)} - P^{(1)} & \ddots \\ 0 & \ddots & (*) \\ & G^{(k-1)} A_{i_{k-1}} & -G^{(k-1)} - G^{(k-1)T} + P^{(k-1)} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Théorème 6 : Soient un modèle TS discret (3.47) et les $\Upsilon_{i_0, \dots, i_{k-1}}$ définis en (3.60). S'il existe des matrices $P^{(i)}$ définies positives et des matrices $G_{i_{m+1} \dots i_{k-1}}^{(m)}$, $m \in \{0, \dots, k-1\}$ telles que les conditions (3.5) soient vérifiées alors le modèle (3.47) est globalement asymptotiquement stable.

Même avec le choix « réducteur » $G_{(\cdot)}^{(0)} = G_{z(t+1), \dots, z(t+k-1)}^{(0)}$ les résultats présentés incluent ceux de la première approche.

Lemme 8 : S'il existe une matrice P définie positive avec $\Upsilon_{i_0, \dots, i_{k-1}} = \begin{bmatrix} -P & (*) \\ P A_{i_{k-1}} \times \dots \times A_{i_0} & -P \end{bmatrix}$ telles que les conditions (3.5) soient vérifiées alors il existe des matrices $P^{(m)}$ définies positives et des matrices $G_{i_{m+1} \dots i_{k-1}}^{(m)}$, $m \in \{0, \dots, k-1\}$, $i \in \{1, \dots, r\}$ telles que les conditions (3.5) soient vérifiées avec $\Upsilon_{i_0, \dots, i_{k-1}}$ définis en (3.60)

Preuve : On suppose que $\Upsilon_{i_0, \dots, i_{k-1}} < 0 \quad \forall i_0, \dots, i_{k-1} \in \{1, \dots, r\}$. On a donc :

$$\begin{bmatrix} -P & (*) \\ P A_{i_{k-1}} \times \dots \times A_{i_0} & -P \end{bmatrix} < 0 \quad \forall i_0, \dots, i_{k-1} \in \{1, \dots, r\} \quad (3.61)$$

En utilisant le complément de Schur, on obtient les conditions équivalentes :

$$A_{i_0}^T \times \dots \times A_{i_{k-1}}^T P A_{i_{k-1}} \times \dots \times A_{i_0} - P < 0 \quad (3.62)$$

On choisit $P^{(i)} = P \quad \forall i \in \{0, \dots, k-1\}$. Pour ne pas alourdir la preuve on considère le cas $k = 2$ pour (3.60). On a :

$$\Upsilon_{i_0 i_1} = \begin{bmatrix} -P & (*) & 0 \\ G_{i_1}^{(0)} A_{i_0} & -G_{i_1}^{(0)} - G_{i_1}^{(0)T} & (*) \\ 0 & G^{(1)} A_{i_1} & -G^{(1)} - G^{(1)T} + P \end{bmatrix} < 0 \quad (3.63)$$

avec $G^{(1)} = P$, en utilisant le complément de Schur, (3.63) est vérifiée si et seulement si :

$$\begin{bmatrix} -P & (*) \\ G_{i_1}^{(0)} A_{i_0} & -G_{i_1}^{(0)} - G_{i_1}^{(0)T} + A_{i_1}^T P A_{i_1} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.64)$$

avec $G_{i_1}^{(0)} = A_{i_1}^T P A_{i_1}$, en utilisant le complément de Schur, (3.64) est vérifiée si et seulement si :

$(*) P A_{i_1} A_{i_0} - P < 0$ ce qui est (3.62) pour $k = 2$.

On conserve la propriété d'ordre total pour $k \in \mathbb{N}^*$. Cela indique que les domaines de solutions sont emboîtés.

Lemme 9 : S'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $P^{(m)} > 0$ et $G_{i_{m+1} \dots i_{k-1}}^{(m)}$, $m \in \{0, \dots, k-1\}$, $i \in \{1, \dots, r\}$ tels que la condition (3.59) soit vérifiée pour $k = p$ alors il existe, $P^{(m)} > 0$ et $G_{i_{m+1} \dots i_{k-1}}^{(m)}$, $m \in \{0, \dots, k-1\}$, $i \in \{1, \dots, r\}$ tels que la condition (3.59) soit vérifiée pour $k = p+1$.

Preuve : il suffit de choisir $P^{(p+1)}$ suffisamment petit et d'utiliser le complément de Schur sur (3.59) pour obtenir le résultat.

A titre d'exemple, on choisit le modèle TS discret avec $r = 2$. Les modèles linéaires sont

définis par $A_1 = \begin{bmatrix} a & -0,7 \\ 0 & -0,9 \end{bmatrix}$ et $A_2 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ -0.7 & b \end{bmatrix}$ où a et b sont deux paramètres.

Les fonctions élémentaires choisies pour $\mathcal{V}_k(X_k(t))$ sont : $\tilde{V}_i(x(t)) = x(t)^T P^{(i)} x(t)$.

L'approche proposée donne des résultats pour des valeurs de a et b à partir de $k = 2$, figure 6. Les résultats sont effectivement moins conservatifs puisque l'approche présentée dans la partie A n'a de solution que pour des valeurs $k \geq 3$. Les deux figures suivantes montrent l'efficacité de la nouvelle approche. La première illustre l'inclusion des domaines des solutions du théorème 6 pour différentes valeur de k , lemme 9. La deuxième figure montre l'augmentation du domaine de solution lorsque l'on passe de la première approche à la deuxième lemme 8.

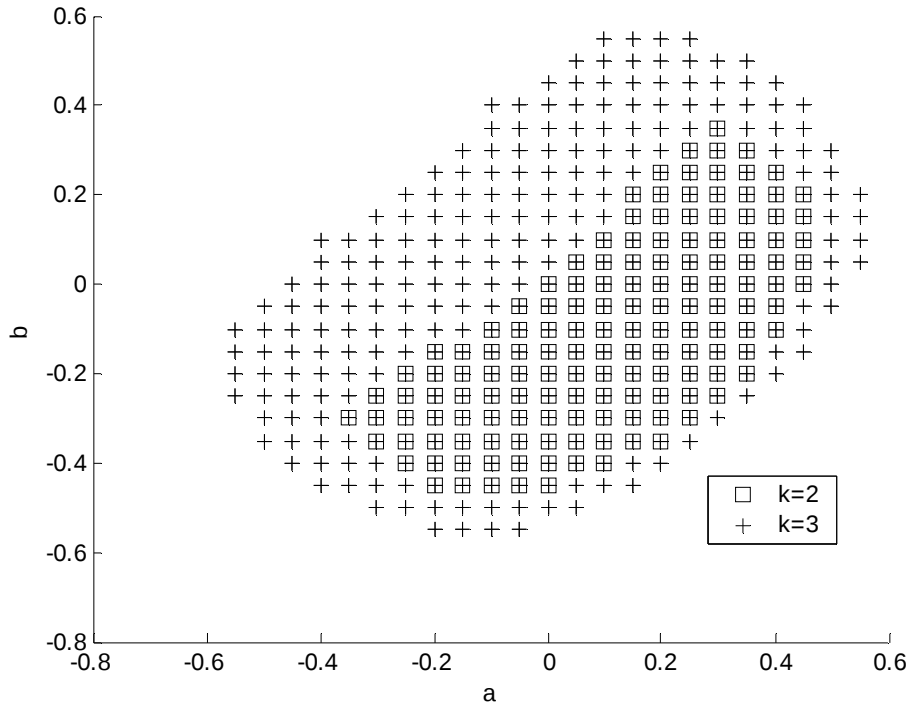


Figure 6 : Domaines de solution pour le théorème 6 pour différentes valeurs de k

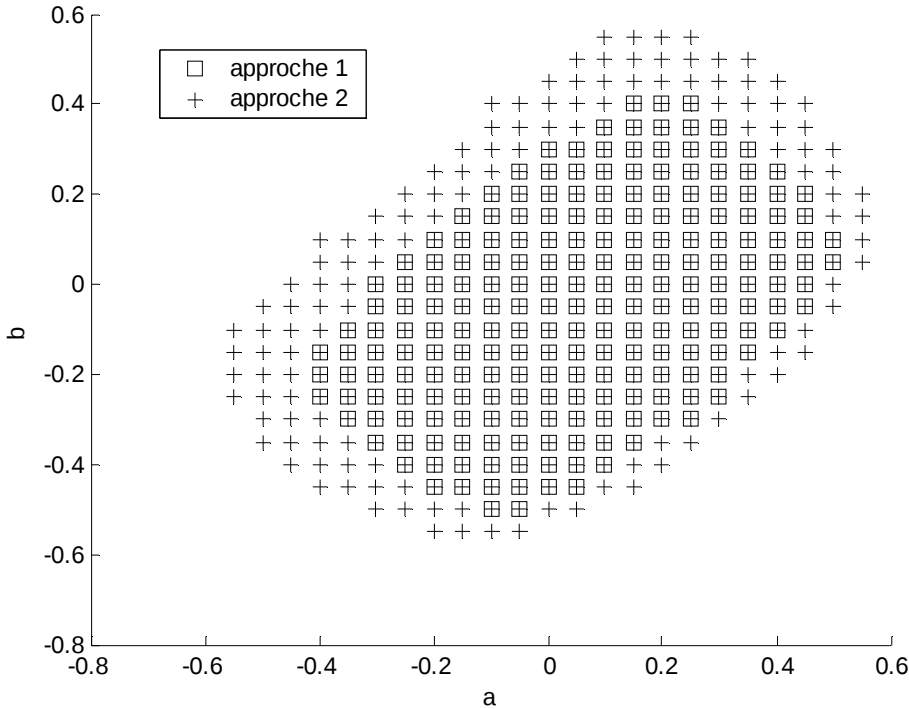


Figure 7 : Domaines de solution pour les théorèmes 4 et 6 pour $k=3$

Enfin, rappelons que l'amélioration des conditions se fait au prix d'une augmentation importante des matrices à rechercher. Pour des valeurs de k très grandes, la première approche reste donc attractive car plus appropriée pour les solveurs actuels.

2. Stabilisation des modèles Takagi-Sugeno discrets

On se replace dans les mêmes conditions que la partie I-3, stabilisation d'un modèle TS discret (3.18) avec une loi de commande PDC (3.19) et les fonctions élémentaires de $\mathcal{V}_k$:

$$\tilde{V}_i(x) = x^T G^{-T} P^{(i)} G^{-1} x \quad (3.65)$$

La variation de la fonction candidate de Lyapunov $\mathcal{V}_k$ est donnée par l'expression suivante :

$$\Delta \mathcal{V}_k(X_k(t)) = \sum_{i=0}^{k-1} x(t+i+1)^T G^{-T} P^{(i)} G^{-1} x(t+i+1) - \sum_{i=0}^{k-1} x(t+i)^T G^{-T} P^{(i)} G^{-1} x(t+i) \quad (3.66)$$

En utilisant le fait que (3.47) s'écrit :

$$\begin{aligned} x(t+1) &= (A_{z(t)} - B_{z(t)} F_{z(t)} G^{-1}) x(t) \\ x(t+2) &= (A_{z(t+1)} - B_{z(t+1)} F_{z(t+1)} G^{-1}) (A_{z(t)} - B_{z(t)} F_{z(t)} G^{-1}) x(t) \\ &\vdots \\ x(t+k) &= (A_{z(t+k-1)} - B_{z(t+k-1)} F_{z(t+k-1)} G^{-1}) \times \dots \times (A_{z(t)} - B_{z(t)} F_{z(t)} G^{-1}) x(t) \end{aligned} \quad (3.67)$$

On obtient la condition de stabilité suivante :

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{k-1} (*) G^{-T} P^{(i)} G^{-1} (A_{z(t+i)} - B_{z(t+i)} F_{z(t+i)} G^{-1}) \times \dots \times (A_{z(t)} - B_{z(t)} F_{z(t)} G^{-1}) \\ &- \sum_{i=1}^{k-1} (*) G^{-T} P^{(i)} G^{-1} (A_{z(t+i-1)} - B_{z(t+i-1)} F_{z(t+i-1)} G^{-1}) \times \dots \times (A_{z(t)} - B_{z(t)} F_{z(t)} G^{-1}) - P^{(0)} < 0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

Ou encore en posant $\tilde{A}_{z(t), z(t)} = A_{z(t)} G - B_{z(t)} F_{z(t)}$:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{k-1} (*) G^{-T} P^{(i)} G^{-1} \tilde{A}_{z(t+i), z(t+i)} G^{-1} \times \dots \times \tilde{A}_{z(t), z(t)} G^{-1} \\ &- \sum_{i=1}^{k-1} (*) G^{-T} P^{(i)} G^{-1} \tilde{A}_{z(t+i-1), z(t+i-1)} \times \dots \times \tilde{A}_{z(t), z(t)} G^{-1} - G^{-T} P^{(0)} G^{-1} < 0 \end{aligned} \quad (3.69)$$

En utilisant exactement le même développement que dans le cas de la stabilité, on aboutit au résultat suivant. La variation de la fonction candidate $\mathcal{V}_k$ est négative si :

$$\begin{bmatrix} -P^{(0)} & (*) & & & 0 \\ A_{z(t)} G - B_{z(t)} F_{z(t)} & -G^T - G + P^{(0)} - P^{(1)} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -G^T - G + P^{(k-2)} - P^{(k-1)} & (*) \\ 0 & & & A_{z(t+k-1)} G - B_{z(t+k-1)} F_{z(t+k-1)} & -G^T - G + P^{(k-1)} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.70)$$

Notons par rapport à la stabilité que l'on ne recherche qu'une seule matrice G . Cela est dû à la structure de la loi de commande (3.19). On définit alors les quantités suivantes :

$$\Upsilon_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}, j_0 j_1 \dots j_{k-1}} = \begin{bmatrix} -P^{(0)} & (*) & 0 \\ A_{i_0} G - B_{i_0} F_{j_0} & -G - G^T + P^{(0)} - P^{(1)} & \ddots \\ & \ddots & (*) \\ 0 & A_{i_{k-1}} G - B_{i_{k-1}} F_{j_{k-1}} & -G - G^T + P^{(k-1)} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Théorème 7 : Soit un modèle TS discret (3.18), la loi de commande (3.19) et les $\Upsilon_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}, j_0 j_1 \dots j_{k-1}}$ définis en (3.71). S'il existe des matrices $P^{(i)}$ définies positives et des matrices G et F_i , $i \in \{1, \dots, r\}$ telles que les conditions (3.6) soient vérifiées alors la boucle fermée est globalement asymptotiquement stable.

Les résultats du théorème 7 sont inclus dans ceux du théorème 4.

Lemme 10 : S'il existe des matrices $P > 0$, G et F_i , $i \in \{1, \dots, r\}$ telles que les conditions (3.6) soient vérifiées avec $\Upsilon_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}, j_0 j_1 \dots j_{k-1}}$ définis en (3.31) il existe des matrices $P^{(i)} > 0$, G et F_i , $i \in \{1, \dots, r\}$ telles que les conditions (3.6) soient vérifiées avec $\Upsilon_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}, j_0 j_1 \dots j_{k-1}}$ définis en (3.71).

Preuve : La preuve est directe, il suffit de choisir $P^{(i)} = P$ pour les conditions du théorème 7 pour retrouver les conditions du théorème 4.

Il ne semble pas possible de garder la propriété d'ordre total sur $k \in \mathbb{N}^*$, la propriété suivante ne donne qu'un ordre partiel. Cela est dû au fait qu'on ne conserve qu'une matrice G .

Lemme 11 : Soient $m, p \in \mathbb{N}^*$, supposons qu'il existe une matrice P définie positive et des matrices G et F_i , $i \in \{1, \dots, r\}$ telles que la condition (3.30) soit vérifiée pour $k = m$. S'il existe $l \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = m \times l$ alors la condition (3.30) est satisfaite pour $k = p$.

Lemme 12 : S'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $P^{(j)} > 0$, $j \in \{0, \dots, k-1\}$, G et F_i , $i \in \{1, \dots, r\}$, tels que la condition (3.70) soit vérifiée pour $k = p$ alors il existe, $P^{(j)} > 0$, $j \in \{0, \dots, k-1\}$, G et F_i , $i \in \{1, \dots, r\}$ tels que la condition (3.70) soit vérifiée pour $k = p+1$.

Preuve : identique au lemme 5

D. Avantages, limites et perspectives des approches

Le chapitre précédent avait proposé de réduire le conservatisme des résultats en utilisant une fonction de Lyapunov non quadratique. Ce chapitre-ci a permis de développer d'autres formes de résultats en utilisant une fonction de Lyapunov prenant en compte un nombre k d'états antérieurs. La réduction du conservatisme a toujours un coût, accroissement du nombre de variables et/ou accroissement du nombre de conditions LMI. Les résultats présentés ont peu tenu compte de ces accroissements pour laisser place au développement théorique. Dans cette dernière partie ces différents problèmes vont être abordés.

En premier lieu, un récapitulatif des résultats est proposé figure 8. Sur la figure, $\mathcal{V}_A$ (resp. $\mathcal{V}_B$) concerne les résultats de l'approche A, basé sur $\Delta_k V(t) < 0$ (resp. B basée sur $\Delta \mathcal{V}_k(X_k(t)) < 0$), théorème 1 lemme 1 (resp. lemme 7). Elle rappelle les principales inclusions en fonction du nombre fini d'échantillons k .

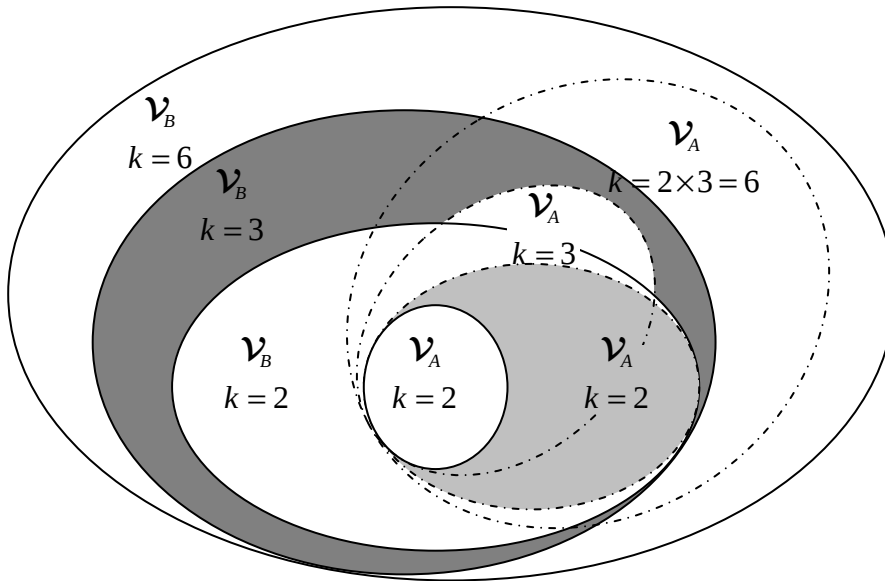


Figure 8 : inclusion des différents domaines de solutions

En second lieu, ces résultats peuvent s'étendre à tout type de fonctions candidates de Lyapunov pour cette classe de modèle. A titre d'illustration, une réunion des résultats du chapitre II et des approches présentées dans ce chapitre peut être réalisée en utilisant la fonction élémentaire $\tilde{V}(x(t)) = x(t)^T G_{z(t)}^{-T} P_{z(t)} G_{z(t)}^{-1} x(t)$. De nouvelles conditions se déduisent alors de manière directe. Par exemple, pour le cas de l'approche A et la stabilisation de modèles TS on peut énoncer le théorème ci-après.

Théorème 8 /Kruszewski et Guerra 2005/ : Soit un modèle TS discret $x(t+1) = A_{z(t)}x(t) + B_{z(t)}u(t)$ bouclé par la loi de commande $u(t) = -F_{z(t)}G_{z(t)}^{-1}x(t)$, s'il existe une matrice P définie positive et des matrices G_i et F_i , $i \in \{1, \dots, r\}$ telle que la condition donnée ci-après soit vérifiée alors la boucle fermée est globalement asymptotiquement stable.

$$\begin{bmatrix} -P_{z(t)} & (*) & 0 \\ A_{z(t)}G_{z(t)} - B_{z(t)}F_{z(t)} & \ddots & \vdots \\ & \ddots & -G_{z(t+k-1)}^T - G_{z(t+k-1)} & (*) \\ 0 & A_{z(t+k-1)}G_{z(t+k-1)} - B_{z(t+k-1)}F_{z(t+k-1)} & -G_{z(t+k)}^T - G_{z(t+k)} + P_{z(t+k)} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.72)$$

La preuve n'est pas donnée ici. La mise sous forme LMI s'effectue de la même manière que précédemment. Plusieurs résultats de ce type ont été obtenus sur des modèles TS incertains et aussi à retard /Kruszewski et al. 2006a/ et /Kruszewski et al. 2006b/.

Enfin, la complexité des problèmes LMI est évidemment fonction du nombre de variables, du nombre d'échantillons et de la taille du modèle TS utilisé. Soient pour un modèle discret TS : r le nombre de modèles linéaires, n la dimension de l'état, m le nombre d'entrées, k le nombre fini d'échantillons. On peut alors déterminer le nombre d'inconnues présentes dans les différentes matrices des problèmes LMI : pour la matrice $P = P^T > 0$ ou chacune des matrices $P_{(\cdot)} = P_{(\cdot)}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $0,5 \cdot n(n+1)$ inconnues, pour les matrices G , n^2 et pour les gains de la loi PDC : $F_{(\cdot)} \in \mathbb{R}^{n \times m} \Rightarrow n \times m$. On en déduit donc pour la stabilisation des modèles TS discrets par les approches A et B, théorèmes 4 et 7, le même nombre $(0,5 \cdot r(r+1))^k$ et la même taille $(k+1)n \times (k+1)n$ pour les contraintes LMI. La différence se faisant sur le nombre de variables utilisées : $n(1,5 \cdot n + 0,5 + r \times m)$ pour l'approche A, $n(n + 0,5(n+1) \cdot k + r \times m)$ pour l'approche B, puisque dans cette dernière le nombre de matrices $P_{(\cdot)}$ dépend de k .

Pour illustrer la complexité obtenue le tableau 1 donne quelques exemples numériques en fonction de r , n , m et k ainsi que la faisabilité par rapport au solveur LMI TOOLBOX de Matlab.

Approche	$k = 1$	A	B
Nombre de contraintes LMI	$0,5 \cdot r(r+1)$	$(0,5 \cdot r(r+1))^k$	$(0,5 \cdot r(r+1))^k$
Taille des contraintes LMI	$2n \times 2n$	$(k+1)n \times (k+1)n$	$(k+1)n \times (k+1)n$
Nombre de variables	$n(1,5 \cdot n + 0,5 + r \times m)$	$n(1,5 \cdot n + 0,5 + r \times m)$	$n(n + 0,5(n+1) \cdot k + r \times m)$
Temps de calcul*	0,4s	7min	8min

Tableau 1 : complexité des approches

* Les temps de calcul sont donnés à titre indicatif. Les calculs sont effectués sur un pentium IV 3 GHz avec 2 Go RAM pour $r = 4$, $n = 2$, $m = 1$ et $k = 3$. Les tests ont été réalisés sur un modèle impossible à stabiliser sans connaissances sur les fonctions non linéaires (deux des quatre modèles linéaires sont non commandables). Il est important de noter que le temps nécessaire à la résolution des problèmes dépend également des matrices du modèle. Ainsi dans certains cas, l'approche B statuera l'infaisabilité ou donnera une solution plus rapidement que l'approche A.

La principale limite de ces approches est le nombre exponentiellement croissant en fonction k de conditions LMI. Pour la première approche, lorsque k devient suffisamment grand (supérieur à 8) les conditions de stabilisation d'un modèle TS à 2 règles et 2 états deviennent impossibles à résoudre avec des ordinateurs standards. En effet le temps de calcul et la quantité de mémoire nécessaire deviennent non négligeables. La deuxième approche est plus sensible au paramètre k que la première à cause du nombre croissant d'inconnues.

Chapitre IV : Vers une unification des résultats

A. Introduction	92
B. Modèles Takagi-Sugeno discrets à retards	94
1. Stabilité.....	94
2. Stabilisation.....	98
C. Généralisation des fonctions candidates	101
1. Stabilité des modèles Takagi-Sugeno discrets	101
2. Stabilisation des modèles Takagi-Sugeno discrets.....	105
D. Généralisation de la loi de commande	107
E. Stabilisation de modèles TS discrets périodiques	111
F. Conclusion.....	113

A. Introduction

Le chapitre propose une extension des résultats présentés en utilisant le lemme de Finsler rappelé ici :

Lemme 1 (Finsler) /De Oliveira et Skelton 2001/ : Soit un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, et des matrices $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telle que $\text{rang}(R) < n$. Les quatre expressions suivantes sont équivalentes

$$1. x^T Q x < 0 \quad \forall x \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \neq 0, Rx = 0\} \quad (4.1)$$

$$2. R_{\perp}^T Q R_{\perp} < 0 \quad \text{où } R_{\perp} \text{ représente le complément orthogonal de } R \quad (4.2)$$

$$3. \exists \sigma \in \mathbb{R} \text{ telle que } Q - \sigma R^T R < 0 \quad (4.3)$$

$$4. \exists X \in \mathbb{R}^{n \times m} \text{ telle que } Q + XR + R^T X^T < 0 \quad (4.4)$$

Cette approche est voisine des travaux présentés dans le cas des modèles linéaires incertains /Ebihara et al. 2005/. L'idée est, dans leur cas, d'utiliser les dérivées d'ordre plus élevés sur le vecteur d'état. Cette façon redondante de représenter des modèles est traduite par des contraintes égalités puis utilisés à travers le lemme 1 de Finsler. Ce type de méthode n'est pas exploitable directement sur les modèles TS continus, les dérivées d'ordre supérieur faisant apparaître les dérivées successives de $\dot{h}_i$.

Néanmoins, en discret, ce type d'approche est envisageable. Elle permet de prendre en compte le passé du modèle et n'est pas dépourvue d'intérêt surtout au regard des fonctions de Lyapunov abordées au chapitre III.

L'intérêt de ces différentes approches est de présenter une extension naturelle des conditions présentées précédemment. Elles permettent notamment un cadre unifié de traitement des problèmes et ouvrent des perspectives nouvelles sur ce type d'approches. Le chapitre décrit alors sur quelques cas particuliers comment procéder pour obtenir les contraintes égalités utilisables dans le lemme 1 de Finsler. Il montre également comment retrouver les résultats précédents et pourquoi l'extension faite les améliore.

On rappelle également les notations utilisées dans le chapitre III et les lemmes suivants (cf. chapitre I).

Notation : Soit Y_i, Y_{ij} des matrices de taille appropriée et $h_i(\cdot)$ des fonctions scalaires ayant

la propriété de somme convexe, on pose $Y_{z(t+n)} = \sum_{i=1}^r h_i(z(t+n))Y_i$ et

$$Y_{z(t+n), z(t+n)} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t+n))h_j(z(t+n))Y_{ij}.$$

Lemme 2 : Soient A, G, L, P et Q des matrices de taille appropriée. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$1. A^T P A - Q < 0, P > 0 \quad (4.5)$$

$$2. \begin{bmatrix} -Q & A^T P \\ P A & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (4.6)$$

$$3. \exists G \begin{bmatrix} -Q & A^T G \\ G^T A & -G - G^T + P \end{bmatrix} < 0, P > 0 \quad (4.7)$$

$$4. \exists G, L \begin{bmatrix} -Q + A^T L^T + L A & -L + A^T G \\ -L^T + G^T A & -G - G^T + P \end{bmatrix} < 0, P > 0 \quad (4.8)$$

On rappelle les lemmes permettant de traiter les inégalités du type :

$$\sum_{i_0=1}^r \dots \sum_{i_{k-1}=1}^r h_{i_0}(z(t)) \dots h_{i_{k-1}}(z(t+k-1)) Y_{i_0, \dots, i_{k-1}} < 0 \quad (4.9)$$

et du type :

$$\sum_{i_0=1}^r \dots \sum_{i_{k-1}=1}^r \sum_{j_0=1}^r \dots \sum_{j_{k-1}=1}^r h_{i_0}(z(t)) \dots h_{i_{k-1}}(z(t+k-1)) h_{j_0}(z(t)) \dots h_{j_{k-1}}(z(t+k-1)) Y_{i_0, \dots, i_{k-1}, j_0, \dots, j_{k-1}} < 0 \quad (4.10)$$

Lemme 3 : Soit $Y_{i_0, \dots, i_{k-1}}$ des matrices et h_i des fonctions ayant la propriété de somme convexe, (4.9) est vérifiée si les r^k conditions suivantes sont vraies :

$$\forall i_0, \dots, i_{k-1} \in \{1, \dots, r\} Y_{i_0, \dots, i_{k-1}} < 0 \quad (4.11)$$

Lemme 4 : Soit $Y_{i_0, \dots, i_{k-1}, j_0, \dots, j_{k-1}} \triangleq \tilde{Y} + \tilde{Y}_{i_0, j_0}^{(0)} + \dots + \tilde{Y}_{i_{k-1}, j_{k-1}}^{(k-1)}$ des matrices et h_i des fonctions ayant la propriété de somme convexe, (4.10) est vérifiée si les $(0,5 \cdot r(r+1))^k$ conditions suivantes sont vraies :

$$\forall (i_0, j_0), \dots, (i_{k-1}, j_{k-1}) \in \{1, 2, \dots, r\}^2 Y_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}, j_0 j_1 \dots j_{k-1}} + Y_{j_0 j_1 \dots j_{k-1}, i_0 i_1 \dots i_{k-1}} < 0 \quad (4.12)$$

B. Modèles Takagi-Sugeno discrets à retards

Pour montrer l'utilisation du lemme de Finsler et ne pas répéter les résultats du chapitre III, on se place dans le même cas que III-A mais en considérant des modèles à retard. Le retard est supposé constant. Ces modèles s'écrivent :

$$x(t+1) = A_{z(t)}x(t) + \bar{A}_{z(t)}x(t-d) + B_{z(t)}u(t) \quad (4.13)$$

Dans un premier temps, des conditions de stabilité indépendantes du retard d sont données. Le problème de la stabilisation est ensuite abordé sous deux hypothèses : la première considère que le retard est inconnu et la seconde que le retard est connu.

1. Stabilité

On considère (4.13) en régime libre :

$$x(t+1) = A_{z(t)}x(t) + \bar{A}_{z(t)}x(t-d) \quad (4.14)$$

et la fonction de Lyapunov :

$$\mathcal{V}_k(X_k(t)) = X_k(t)^T \text{diag}(Q) X_k(t) + \sum_{\alpha=t-d}^{t-1} X_k(\alpha)^T \text{diag}(Z^{-1}) X_k(\alpha) \quad (4.15)$$

$$X_k(t) = \begin{bmatrix} x(t)^T & \dots & x(t+k-1)^T \end{bmatrix}^T.$$

Remarque : Cette fonction a été choisie de façon à faciliter la lecture. Il est possible d'obtenir des conditions LMI en utilisant la deuxième approche présentée dans le chapitre III.

Dans la suite on suppose que $d > k$. Une condition suffisante de stabilité est :

$$\Delta \mathcal{V}_k(\mathcal{X}_k(t)) = \mathcal{V}_k(\mathcal{X}_k(t+1)) - \mathcal{V}_k(\mathcal{X}_k(t)) < 0 \quad (4.16)$$

avec

$$\mathcal{X}_k(t) = \begin{bmatrix} x(t)^T & x(t-d)^T & x(t+1)^T & \dots & x(t+k-2)^T & x(t+k-2-d)^T & x(t+k-1)^T \end{bmatrix}^T$$

$\Delta \mathcal{V}_k(\mathcal{X}_k(t))$ s'écrit :

$$\Delta \mathcal{V}_k = \mathcal{X}_{k+1}(t)^T \text{diag} \left(\begin{bmatrix} -Q + Z^{-1} & -Z^{-1} & \dots & Z^{-1} & -Z^{-1} & Q \end{bmatrix} \right) \mathcal{X}_{k+1}(t) \quad (4.17)$$

Notons que (4.14) s'écrit :

$$0 = A_{z(t)}x(t) + \bar{A}_{z(t)}x(t-d) - x(t+1) = \begin{bmatrix} A_{z(t)} & \bar{A}_{z(t)} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d) \\ x(t+1) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Ou pour tous les instants $i \in \{0, \dots, k-1\}$:

$$0 = A_{z(t+i)}x(t+i) + \bar{A}_{z(t+i)}x(t+i-d) - x(t+i+1) = \begin{bmatrix} A_{z(t+i)} & \bar{A}_{z(t+i)} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t+i) \\ x(t+i-d) \\ x(t+i+1) \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

On obtient alors $R_{z(t), \dots, z(t+k-1)} \mathcal{X}_{k+1}(t) = 0$ avec :

$$R_{z(t), \dots, z(t+k-1)} = \begin{bmatrix} A_{z(t)} & \bar{A}_{z(t)} & -I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{z(t+1)} & \bar{A}_{z(t+1)} & -I & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & A_{z(t+k-1)} & \bar{A}_{z(t+k-1)} & -I \end{bmatrix}.$$

et en utilisant le lemme de Finsler (lemme 1 $4 \Rightarrow 1$), on obtient la condition : $\exists X \in \mathbb{R}^{(2k+1) \cdot n \times k \cdot n}$ une matrice telle que :

$$\text{diag} \left(\begin{bmatrix} -Q + Z^{-1} & -Z^{-1} & \dots & Z^{-1} & -Z^{-1} & Q \end{bmatrix} \right) + X R_{z(t), \dots, z(t+k-1)} + (*) < 0 \quad (4.20)$$

Notons que pour obtenir l'équivalence $1 \Rightarrow 4$, il faudrait définir un $X_{z(t), \dots, z(t+k-1)}$, mais cela fait « exploser » le nombre de variables. On définit alors les quantités suivantes :

$$\Upsilon_{i_0, \dots, i_{k-1}} = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} -Q + Z^{-1} & -Z^{-1} & \dots & Z^{-1} & -Z^{-1} & Q \end{bmatrix} \right) + X R_{i_0, \dots, i_{k-1}} + (*) \quad (4.21)$$

Théorème 1 : Soit un modèle TS discret à retard sur l'état (4.14). S'il existe des matrices $Q > 0$, $Z^{-1} > 0$ et X telles que les conditions (4.11) avec les $\Upsilon_{i_0, \dots, i_{k-1}}$ définis en (4.20) soient vérifiées alors le modèle (4.14) est globalement asymptotiquement stable.

Ce théorème généralise les résultats du chapitre précédent. Par exemple, si on veut retrouver des résultats en utilisant le lemme IV-2, il faut effectuer le changement de variable $Q = G^{-T} P G^{-1}$ et choisir pour la matrice X :

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ G^{-T} & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & G^{-T} & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & G^{-T} & 0 & & \\ & & 0 & 0 & & \\ & & 0 & G^{-T} & & \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

(4.20) s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \Theta_1 & 0 & (*) & & 0 \\ 0 & -Z^{-1} & (*) & & \\ G^{-T}A_{z(t)} & G^{-T}\bar{A}_{z(t)} & -G^{-T}-G^{-1}+Z^{-1} & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -G^{-T}-G^{-1}+Z^{-1} & 0 & (*) \\ & & & 0 & -Z^{-1} & (*) \\ 0 & & G^{-T}A_{z(t+k-1)} & G^{-T}\bar{A}_{z(t+k-1)} & \Theta_k \end{bmatrix} < 0 \quad (4.23)$$

Avec $\Theta_1 = -G^{-T}PG^{-1} + Z^{-1}$ et $\Theta_k = -G^{-T} - G^{-1} + G^{-T}PG^{-1}$. En appliquant la propriété de congruence avec la matrice de rang plein :

$$\text{diag}\left(\left[\text{diag}\left(\begin{bmatrix} G^T & Z & G^T \end{bmatrix}\right) \dots \text{diag}\left(\begin{bmatrix} G^T & Z & G^T \end{bmatrix}\right)\right]\right) \quad (4.24)$$

on obtient :

$$\begin{bmatrix} G^T Z^{-1}G - P & 0 & (*) & & 0 \\ 0 & -Z & (*) & & \\ A_{z(t)}G & \bar{A}_{z(t)}Z & G^T Z^{-1}G - G^T - G & & \\ & & \ddots & & \\ & & & G^T Z^{-1}G - G^T - G & 0 & (*) \\ & & & 0 & -Z & (*) \\ 0 & & A_{z(t+k-1)}G & \bar{A}_{z(t+k-1)}Z & P - G^T - G \end{bmatrix} < 0 \quad (4.25)$$

En utilisant le complément de Schur sur les termes $G^T Z^{-1}G$ et en définissant la quantité suivante, on obtient le corollaire 1.

$$\Upsilon_{i_0, \dots, i_{k-1}} = \begin{bmatrix} -P & (*) & 0 & (*) & 0 & \dots & 0 \\ G & -Z & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & -Z & (*) & & \ddots & \vdots \\ A_{i_0}G & 0 & \bar{A}_{i_0}Z & -G^T - G & & & \\ 0 & & \ddots & & & & 0 \\ & & & -G^T - G & (*) & 0 & (*) \\ \vdots & & \ddots & G & -Z & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & -Z & (*) \\ 0 & \dots & 0 & A_{i_{k-1}}G & 0 & \bar{A}_{i_{k-1}}Z & -G^T - G + P \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Corollaire 1 /Kruszewski et al. 2006a/ : Soit un modèle TS discret à retard sur l'état en régime libre (4.14). S'il existe des matrices $P > 0$, $Z > 0$ et G telles que les conditions (4.11) avec les $\Upsilon_{i_0, \dots, i_{k-1}}$ définis en (4.26) soient vérifiées alors le modèle (4.14) est globalement asymptotiquement stable.

Remarque : Pour un modèle sans retard i.e. $\bar{A}_1 = 0$, on retrouve les conditions du chapitre III approche A.

A titre d'exemple, on considère le modèle (4.14) avec :

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & -0,5 & 0 \\ 0 & -0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & -0,3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,2 & 0 \\ -0,6 & 0,2 & 0,1 \\ 0,5 & -0,1 & -0,3 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_1 = \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad a \text{ et } b \text{ deux}$$

scalaires.

La figure 1 donne les domaines de solutions du corollaire 1 (X définie en (4.22)) pour $k = 1$ (condition avec une fonction quadratique) et pour $k = 4$ et le domaine de solutions pour le théorème 1 (X libre) pour $k = 4$. Evidemment, le théorème 1 donne le domaine de solution le plus étendu. On remarquera cependant que sur cet exemple le choix de X (4.22) donne de bons résultats.

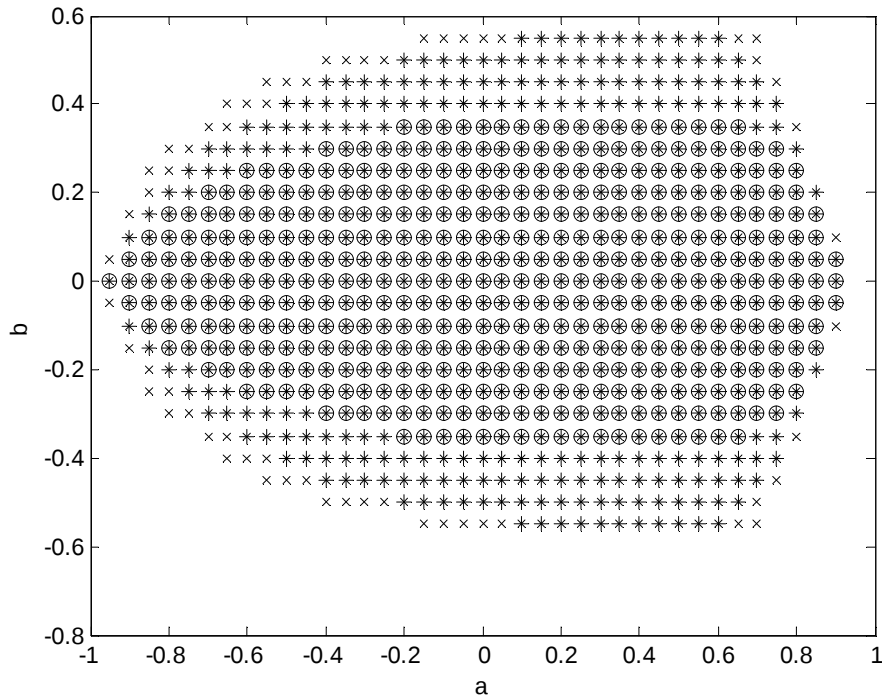


Figure 1 : Domaines de solutions pour le corollaire 1 avec $k = 1$ ($\circ$) et $k = 4$ ($+$), et pour le théorème 1 avec $k = 4$ ($\times$)

2. Stabilisation

Deux cas sont à distinguer pour le choix de la loi de commande. Le premier considère le retard inconnu.

On considère la loi de commande :

$$u(t) = -F_{z(t)} G^{-1} x(t) \quad (4.27)$$

et la fonction candidate de Lyapunov :

$$\mathcal{V}_k(X_k(t)) = X_k(t)^T \left[\text{diag}(G^{-T} P G^{-1}) \right] X_k(t) + \sum_{\alpha=t-d}^{t-1} X_k(\alpha)^T Z^{-1} X_k(\alpha) \quad (4.28)$$

En suivant le même raisonnement que dans le cas de la stabilité sur la boucle fermée $x(t+1) = (A_{z(t)} - B_{z(t)} F_{z(t)} G^{-1}) x(t) + \bar{A}_{z(t)} x(t-d)$ on aboutit à (4.20). De manière à rendre le problème LMI, on définit la même matrice $X \in \mathbb{R}^{(2k+1) \cdot n \times k \cdot n}$ que (4.22). Le résultat se déduit immédiatement en définissant la quantité suivante :

$$\Upsilon_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}, j_0 j_1 \dots j_{k-1}} = \begin{bmatrix} -P & (*) & 0 & (*) & 0 & \dots & 0 \\ G & -Z & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & -Z & (*) & & \ddots & \vdots \\ A_{i_0} G - B_{i_0} F_{j_0} & 0 & \bar{A}_{i_0} Z & -G^T - G & & & \\ 0 & & & \ddots & & & 0 \\ & & & & -G^T - G & (*) & 0 & (*) \\ \vdots & & \ddots & & G & -Z & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & -Z & (*) \\ 0 & \dots & & 0 & A_{i_{k-1}} G - B_{i_{k-1}} F_{j_{k-1}} & 0 & \bar{A}_{i_{k-1}} Z & -G^T - G + P \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Théorème 2 /Kruszewski et al. 2006a/: Soit un modèle TS discret à retard (4.13) et la loi de commande (4.27). S'il existe des matrices $P > 0$, $Z > 0$, G et F_i , $i \in \{1, \dots, r\}$ telles que les conditions (4.11) avec les $\Upsilon_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}, j_0 j_1 \dots j_{k-1}}$ définis en (4.29) soient vérifiées alors la boucle fermée est globalement stable pour tout retard d .

Remarque : Dans certains cas, le retard est connu. On peut alors utiliser une partie retardée dans la loi de commande :

$$u(t) = -F_{z(t)} G^{-1} x(t) - \bar{F}_{z(t)} Z^{-1} x(t-d) \quad (4.30)$$

et en utilisant la même fonction candidate de Lyapunov (4.28), on obtient de façon directe le résultat. Ce dernier correspond au théorème 2 en remplaçant dans les quantités $Y_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}, j_0 j_1 \dots j_{k-1}}$ définies en (4.29), $\bar{A}_i$ par $\bar{A}_i Z - B_i \bar{F}_j$.

Dans cet exemple, on considère le problème de la stabilisation. On considère (4.13) avec :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0,2 & -4,25 \\ 0 & -0,8 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 4,25 & 0 \\ -0,6 & 0,2 \end{bmatrix}, \bar{A}_1 = \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad d = 4.$$

Le retard est supposé inconnu. Afin de pouvoir simuler le modèle, on considère les fonctions suivantes : $h_1(x_1) = 1 - h_2(x_1) = (1 + \cos(x_1))/2$. Il n'y a pas de solution pour les conditions classiques ($k = 1$). En utilisant la nouvelle approche et en choisissant $k = 2$, on obtient une solution :

$$P = \begin{bmatrix} 0,1639 & -0,289 \\ -0,289 & 0,0762 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0,1621 & -0,288 \\ -0,0302 & 0,0767 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1670 & -0,3123 \\ 0,3407 & -0,0101 \end{bmatrix}. \text{ Les deux}$$

figures suivantes donnent l'évolution des deux états et de la commande pour les conditions initiales $x^T(0) = [10 \quad -10]$ et $x(-3) = x(-2) = x(-1) = x(0)$.

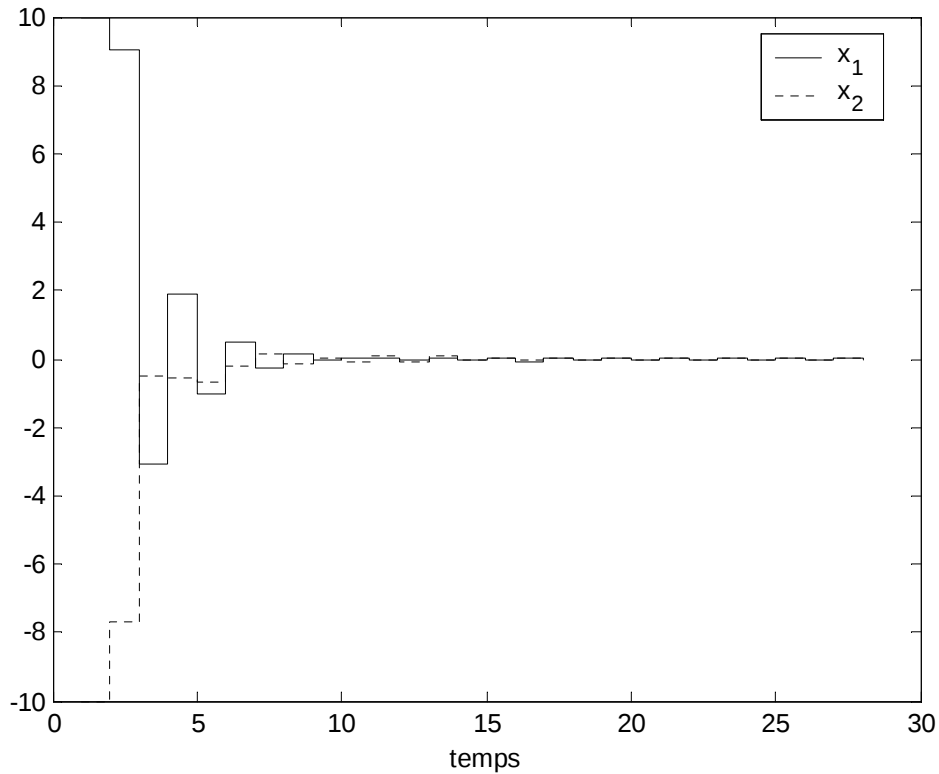


Figure 2 : évolution de l'état

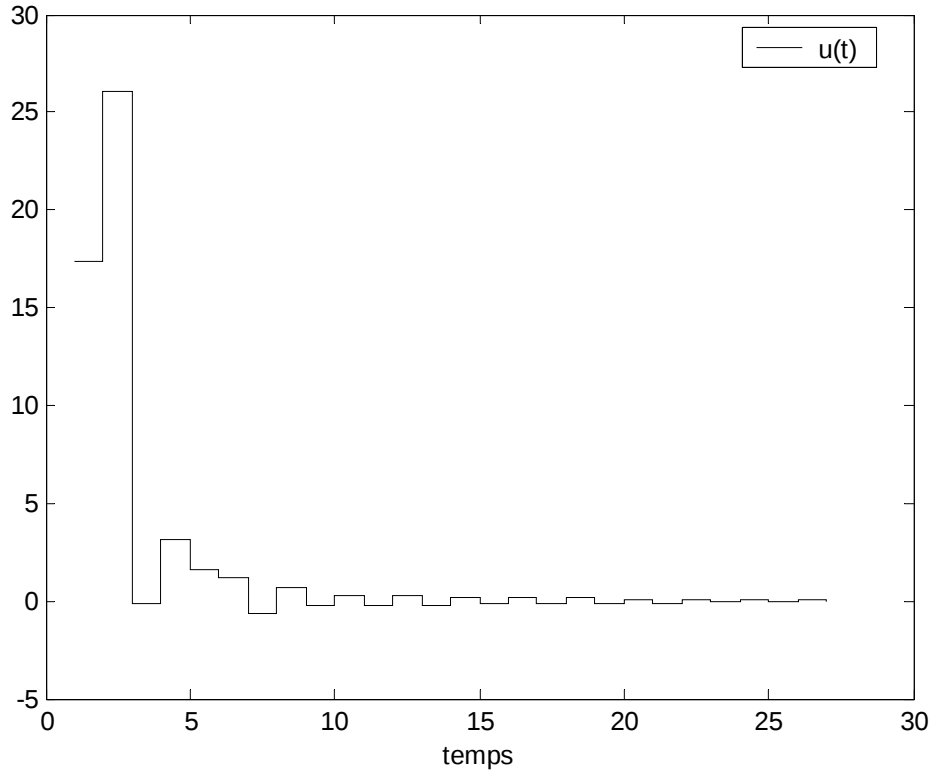


Figure 3 : évolution de la commande

On constate sur ces deux figures que le modèle converge vers l'origine et que la commande n' « explose pas ».

La fonction de Lyapunov utilisée a permis l'obtention de conditions de stabilité indépendantes du retard. Il est cependant possible d'étendre aisément les résultats vers des conditions dépendantes du retard ou de ces bornes, par exemple en utilisant la fonction issue de /Xu & Chen 2004/ et donnée dans le chapitre II :

$$V = x^T(t)G^{-T}PG^{-1}x(t) + \sum_{\alpha=t-\sigma(t)}^{t-1} x^T(\alpha)S^{-T}ZS^{-1}x(\alpha) + \sum_{j=-\sigma_2+1}^{-\sigma_1+1} \sum_{l=t+j-1}^{t-1} x^T(l)S^{-T}ZS^{-1}x(l)$$

Enfin pour des problèmes de lisibilité nous n'avons traité que le cas $d > k$. Dans le cas $d < k$, certains termes retardés sont regroupés avec les termes non retardés. Ceci permet une réduction du conservatisme. En effet la loi de commande, même si elle n'utilise pas l'état retardé, peut agir sur la partie retardée du modèle. Ces extensions ne seront pas faites dans ce mémoire.

L'utilisation du lemme de Finsler permet également de proposer l'utilisation de fonctions de Lyapunov plus générales.

C. Généralisation des fonctions candidates

On considère les fonctions candidates du type :

$$\mathcal{V}_k(X_k(t)) = X_k(t)^T \mathcal{P} X_k(t), \quad \mathcal{P} \in \mathbb{R}^{kn \times kn}, \quad \mathcal{P} > 0 \quad (4.31)$$

$$\text{avec } X_k(t) = \begin{bmatrix} x(t)^T & \dots & x(t+k-1)^T \end{bmatrix}^T.$$

Ces fonctions prennent en compte l'état du modèle à plusieurs instants successifs. Il existe des termes permettant de coupler différents instants. Ceci augmente donc le nombre de degrés de liberté des problèmes LMI qui lui sont associés. On remarque également que les fonctions du chapitre III sont des cas particuliers de (4.31). En choisissant $\mathcal{P} = \text{diag}(P)$ on retrouve

$$\text{l'approche A et en choisissant } \mathcal{P} = \begin{bmatrix} P_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_{k-1} \end{bmatrix} \text{ l'approche B.}$$

1. Stabilité des modèles Takagi-Sugeno discrets

Soit le modèle :

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) = A_{z(t)} x(t) \quad (4.32)$$

et la fonction candidate :

$$\mathcal{V}_k(X_k(t)) = X_k(t)^T \mathcal{P} X_k(t) = X_k(t)^T \begin{bmatrix} P^{(0,0)} & \dots & P^{(0,k-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P^{(k-1,0)} & \dots & P^{(k-1,k-1)} \end{bmatrix} X_k(t) \quad (4.33)$$

avec $P^{(i,j)} = P^{(j,i)^T}$ des matrices constantes. Pour que la fonction (4.33) soit une fonction candidate de Lyapunov il faut que :

$$\begin{bmatrix} P^{(0,0)} & \dots & P^{(0,k-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P^{(k-1,0)} & \dots & P^{(k-1,k-1)} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.34)$$

Remarque : La fonction candidate de Lyapunov (4.33) peut être facilement étendue en non quadratique. Pour cela il suffit de considérer une matrice $\mathcal{P}_{z(t), \dots, z(t+k-1)}$.

Le calcul de la variation de la fonction (4.33) donne la condition suffisante de stabilité suivante :

$$X_{k+1}(t)^T \Delta \mathcal{P} X_{k+1}(t) < 0 \quad (4.35)$$

$$\text{avec } \Delta \mathcal{P} = \begin{bmatrix} -P^{(0,0)} & (*) & \dots & (*) & 0 \\ -P^{(1,0)} & P^{(0,0)} - P^{(1,1)} & \dots & (*) & (*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -P^{(k-1,0)} & P^{(k-2,0)} - P^{(k-1,1)} & \dots & P^{(k-2,k-2)} - P^{(k-1,k-1)} & (*) \\ 0 & P^{(k-1,0)} & \dots & P^{(k-1,k-2)} & P^{(k-1,k-1)} \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

En remarquant que (4.32) s'écrit : $0 = A_{z(t)}x(t) - x(t+1) = \begin{bmatrix} A_{z(t)} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t+1) \end{bmatrix}$, on pose

$R_{z(t), \dots, z(t+k-1)} X_{k+1}(t) = 0$ avec :

$$R_{z(t), \dots, z(t+k-1)} = \begin{bmatrix} A_{z(t)} & -I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{z(t+1)} & -I & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_{z(t+k-1)} & -I \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

En utilisant le lemme de Finsler sur la condition (4.35) et sous la contrainte

$R_{z(t), \dots, z(t+k-1)} X_{k+1}(t) = 0$, on obtient la condition suivante de stabilité :

$$\exists X \in \mathbb{R}^{(k+1)n \times kn} \text{ telle que : } \Delta \mathcal{P} + X R_{z(t), \dots, z(t+k-1)} + R_{z(t), \dots, z(t+k-1)}^T X^T < 0 \quad (4.38)$$

Comme dans le cas précédent, pour obtenir l'équivalence $1 \Rightarrow 4$ dans le lemme de Finsler, il faudrait définir un $X_{z(t), \dots, z(t+k-1)}$, mais cela fait « exploser » le nombre de variables. On définit alors les quantités suivantes :

$$\Upsilon_{i_0, \dots, i_{k-1}} = \begin{bmatrix} -P^{(0,0)} & (*) & \dots & (*) & 0 \\ -P^{(1,0)} & P^{(0,0)} - P^{(1,1)} & \dots & (*) & (*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -P^{(k-1,0)} & P^{(k-2,0)} - P^{(k-1,1)} & \dots & P^{(k-2,k-2)} - P^{(k-1,k-1)} & (*) \\ 0 & P^{(k-1,0)} & \dots & P^{(k-1,k-2)} & P^{(k-1,k-1)} \end{bmatrix} + X R_{i_0, \dots, i_{k-1}} + (*) \quad (4.39)$$

Théorème 3 : Soit un modèle TS discret (4.32). S'il existe des matrices $P^{(i,j)} = P^{(j,i)^T}$, $i, j \in \{0, \dots, k-1\}$ et X telles que $\mathcal{P} > 0$ et que les conditions (4.11) avec les $\Upsilon_{i_0, \dots, i_{k-1}}$ définis en (4.39) soient vérifiées alors le modèle (4.32) est globalement asymptotiquement stable.

On peut choisir également une solution intermédiaire entre une matrice X constante mais pleine et $X_{z(t), \dots, z(t+k-1)}$. Cette dernière fait en plus intervenir des termes croisés $z(t+i)z(t+i)$. La matrice suivante réalise un bon compromis en permettant un nombre de variables réduit sans introduire de termes croisés :

$$X = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ G_{z(t+1), \dots, z(t+k-1)}^{(0)} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & G_{z(t+k-1)}^{(k-2)} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & G^{(k-1)} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Elle permet également de montrer comment on améliore les résultats du chapitre III. On aboutit directement au résultat suivant. On définit la quantité :

$$\Upsilon_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}} = \Delta \mathcal{P} + \begin{bmatrix} 0 & (*) & & 0 \\ G_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(0)} A_{i_0} & -G_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(0)} & -G_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(0)T} & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & G^{(k-1)} A_{i_{k-1}} & -G^{(k-1)} - G^{(k-1)T} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Théorème 4 : Soient un modèle TS discret (4.32) et les $\Upsilon_{i_0, \dots, i_{k-1}}$ définis en (4.41). S'il existe des matrices $P^{(l,m)} = P^{(m,l)T}$ et $G_{i_{m+1} \dots i_{k-1}}^{(m)}$, $l, m \in \{0, \dots, k-1\}$, $i_{(\cdot)} \in \{1, \dots, r\}$ telles que les conditions (4.11) et $\mathcal{P} > 0$ soient vérifiées alors le modèle (4.32) est globalement asymptotiquement stable.

On a également la propriété d'ordre total pour $k \in \mathbb{N}^*$. Cela indique que les domaines de solutions du théorème 4 sont emboîtés.

Lemme 5 : S'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $P^{(l,m)} = P^{(m,l)T}$ et $G_{i_{m+1} \dots i_{k-1}}^{(m)}$, $l, m \in \{0, \dots, k-1\}$, $i_{(\cdot)} \in \{1, \dots, r\}$ telles que les conditions du théorème 4 soient vérifiées ((4.11) et $\mathcal{P} > 0$) pour $k = p$ alors il existe, $P^{(l,m)} = P^{(m,l)T}$ et $G_{i_{m+1} \dots i_{k-1}}^{(m)}$, $l, m \in \{0, \dots, k-1\}$, $i_{(\cdot)} \in \{1, \dots, r\}$ telles que les conditions du théorème 4 soient vérifiées pour $k = p+1$.

Preuve : La preuve est similaire à celle du lemme III-9, il suffit de choisir $P^{(p,\cdot)} = 0$, $P^{(p,p)}$ suffisamment petit et d'utiliser le complément de Schur pour obtenir le résultat.

Enfin, on rappelle ici les quantités utilisées dans le chapitre III approche B pour le même problème :

$$\Upsilon_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}} = \begin{bmatrix} -P^{(0)} & (*) & 0 \\ G_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(0)} A_{i_0} & -G_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(0)} - G_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(0)T} + P^{(0)} - P^{(1)} & \ddots \\ & \ddots & (*) \\ 0 & G^{(k-1)} A_{i_{k-1}} & -G^{(k-1)} - G^{(k-1)T} + P^{(k-1)} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Lemme 6 : S'il existe des matrices $P^{(i)} > 0$ et $G_{i_{m+1} \dots i_{k-1}}^{(m)}$, $i, m \in \{0, \dots, k-1\}$ telles que les conditions du théorème III-6 soient vérifiées ((4.11) avec $\Upsilon_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}}$ définis en (4.42)) alors il existe des matrices $P^{(i,j)}$ et $G_{i_{m+1} \dots i_{k-1}}^{(m)}$ telles que les conditions du théorème 4 soient vérifiées.

Preuve : Il suffit de choisir les mêmes matrices $G_{i_{m+1} \dots i_{k-1}}^{(m)}$ et de poser $P^{(i,j)} = P^{(i)}$ pour $i = j$ et $P^{(i,j)} = 0$ pour $i \neq j$.

Afin de montrer l'efficacité de l'approche, on reprend le modèle présenté en III-B1 :

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) = A_{z(t)} x(t) \text{ avec } A_1 = \begin{bmatrix} a & -0.8 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ -0.8 & b \end{bmatrix} \text{ et } a \text{ et } b \text{ deux}$$

paramètres. La figure 4 donne les résultats obtenus avec le théorème 4 pour des valeurs de a et b pour $k = 3$. Le domaine obtenu est comparé avec ceux des théorèmes III-3 et III-6.

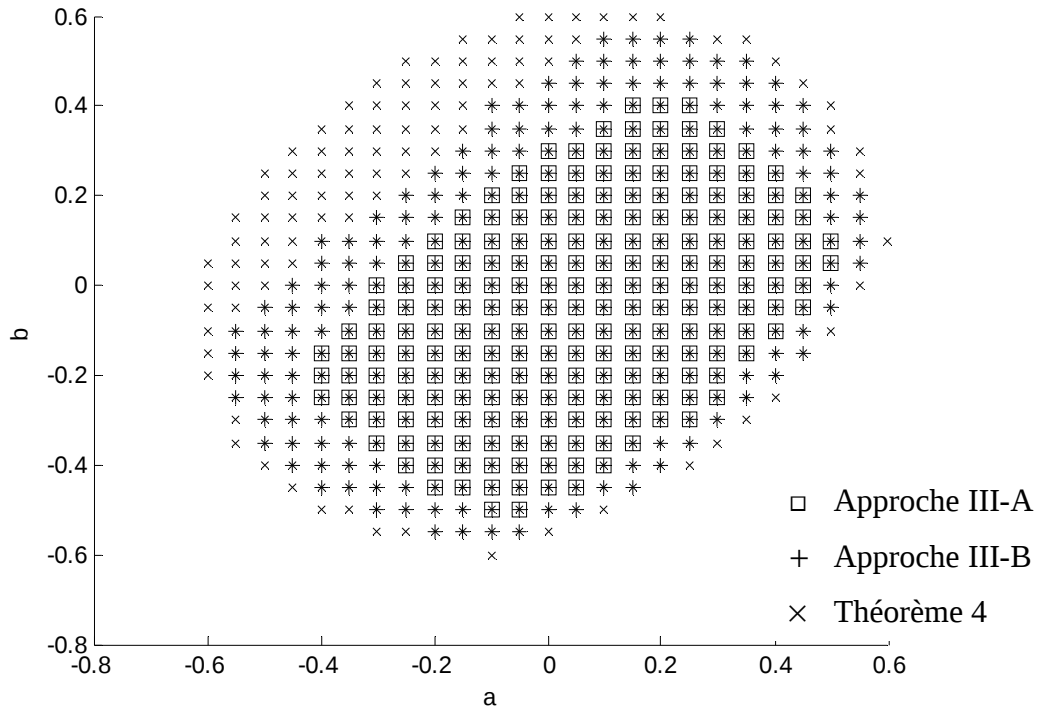


Figure 4 : domaines des solutions pour les différents théorèmes avec $k = 3$.

Sans reprendre l'ensemble des résultats du chapitre III, la partie suivante propose de généraliser les résultats pour une fonction de Lyapunov utilisant des matrices constantes.

2. Stabilisation des modèles Takagi-Sugeno discrets

On considère le modèle suivant :

$$x(t+1) = A_{z(t)}x(t) + B_{z(t)}u(t) \quad (4.43)$$

la loi de commande :

$$u(t) = -F_{z(t)}G^{-1}x(t) \quad (4.44)$$

et la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$\mathcal{V}_k(X_k(t)) = X_k(t)^T \left(\text{diag}(G^{-T}) \right) \mathcal{P} \left(\text{diag}(G^{-1}) \right) X_k(t) \quad (4.45)$$

La boucle fermée est stable avec $\Delta\mathcal{P}$ défini en (4.36) si :

$$X_{k+1}(t)^T \left(\text{diag}(G^{-T}) \right) \Delta\mathcal{P} \left(\text{diag}(G^{-1}) \right) X_{k+1}(t) < 0 \quad (4.46)$$

En réécrivant le modèle (4.43) comme une succession de contraintes égalité, on pose

$$R_{z(t), \dots, z(t+k-1)} X_{k+1}(t) = 0 \text{ avec :}$$

$$R_{z(t), \dots, z(t+k-1)} = \begin{bmatrix} A_{z(t)} - B_{z(t)}F_{z(t)}G^{-1} & -I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{z(t+1)} - B_{z(t+1)}F_{z(t+1)}G^{-1} & -I & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_{z(t+k-1)} - B_{z(t+k-1)}F_{z(t+k-1)}G^{-1} & -I \end{bmatrix}$$

En utilisant le lemme de Finsler on obtient la condition suivante de stabilité :

$$\exists X \in \mathbb{R}^{(k+1)n \times kn}, \left(\text{diag}(G^{-T}) \right) \Delta\mathcal{P} \left(\text{diag}(G^{-1}) \right) + X R_{z(t), \dots, z(t+k-1)} + R_{z(t), \dots, z(t+k-1)}^T X^T < 0 \quad (4.47)$$

Afin de rendre le problème LMI, on fixe la structure de la matrice X comme suit :

$$X = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ G^{-T} & \ddots & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & G^{-T} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

En utilisant la congruence avec $\text{diag}(G)$ et en définissant :

$$\Upsilon_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}, j_0 j_1 \dots j_{k-1}} = \Delta \mathcal{P} + \begin{bmatrix} 0 & (*) & 0 & \dots & 0 \\ A_{i_0} G - B_{i_0} F_{j_0} & -G^T - G & (*) & \ddots & \vdots \\ 0 & A_{i_1} G - B_{i_1} F_{j_1} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -G^T - G & (*) \\ 0 & \dots & 0 & A_{i_{k-1}} G - B_{i_{k-1}} F_{j_{k-1}} & -G^T - G \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

$$\text{avec } \Delta \mathcal{P} = \begin{bmatrix} -P^{(0,0)} & (*) & \dots & (*) & 0 \\ -P^{(1,0)} & P^{(0,0)} - P^{(1,1)} & \dots & (*) & (*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -P^{(k-1,0)} & P^{(k-2,0)} - P^{(k-1,1)} & \dots & P^{(k-2,k-2)} - P^{(k-1,k-1)} & (*) \\ 0 & P^{(k-1,0)} & \dots & P^{(k-1,k-2)} & P^{(k-1,k-1)} \end{bmatrix}$$

on obtient le théorème suivant :

Théorème 5 : Soient un modèle TS discret (4.43), la loi de commande (4.44) et les $\Upsilon_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}, j_0 j_1 \dots j_{k-1}}$ définis en (4.49), s'il existe des matrices $P^{(l,m)} = P^{(m,l)^T}$, $l, m \in \{0, \dots, k-1\}$, G et F_i , $i \in \{1, \dots, r\}$ telles que les conditions (4.12) et $\mathcal{P} > 0$ soient vérifiées alors la boucle fermée est globalement asymptotiquement stable.

Les résultats du théorème 5 incluent ceux de l'approche B (III-7). On rappelle les quantités utilisées :

$$\Upsilon_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}, j_0 j_1 \dots j_{k-1}} = \begin{bmatrix} -P^{(0)} & (*) & \dots & 0 \\ A_{i_0} G - B_{i_0} F_{j_0} & -G - G^T + P^{(0)} - P^{(1)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (*) \\ 0 & \dots & A_{i_{k-1}} G - B_{i_{k-1}} F_{j_{k-1}} & -G - G^T + P^{(k-1)} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Lemme 7 : S'il existe des matrices $P^{(m)} > 0$, $m \in \{0, \dots, k-1\}$, G et F_i , $i \in \{1, \dots, r\}$, telles que les conditions du théorème III-7 ((4.12) vérifiées avec $\Upsilon_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}, j_0 j_1 \dots j_{k-1}}$ définis en (4.50)) alors il existe des matrices $P^{(m,n)} = P^{(m,n)^T}$, $m, n \in \{0, \dots, k-1\}$, G et F_i , $i \in \{1, \dots, r\}$ telles que les conditions du théorème 5 soient vérifiées.

Preuve : Il suffit de poser $P^{(i,i)} = P^{(i)}$ et $P^{(i,j)} = 0$ pour $i \neq j$.

La généralisation de la fonction de Lyapunov peut se faire en utilisant l'approche non quadratique, des matrices additionnelles différentes (dépendant des $z(t+\cdot)$), d'autres relaxations, des modèles incertains, ... Il s'agit simplement de choisir pour le lemme de Finsler une matrice X qui permette une mise sous forme LMI. Sans rentrer dans ce type de résultats qui sont essentiellement techniques, la partie suivante s'intéresse à une généralisation de la loi de commande.

D. Généralisation de la loi de commande

Cette généralisation s'appuie sur l'idée développée dans le lemme suivant :

Lemme 8 : Soit un modèle non linéaire discret : $x(t+1) = f(x(t))$, $X_k(t) = \begin{bmatrix} x(t)^T & \dots & x(t+k-1)^T \end{bmatrix}^T$, $\mathcal{V}_k(X_k(t)) : \mathbb{R}^{kn} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction candidate de Lyapunov. Si la condition $\Delta_k \mathcal{V}_k(X_k(t)) = \mathcal{V}_k(X_k(t+k)) - \mathcal{V}_k(X_k(t)) < 0$ est vérifiée pour tout t tels que $t \bmod k = 0$ alors le modèle est globalement asymptotiquement stable.

Preuve : On suppose que la condition $\Delta_k \mathcal{V}_k(X_k(t)) < 0$ est vérifiée pour tout t tels que $t \bmod k = 0$. On a donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{V}_k(X_k(t)) = 0$ pour tout t tel que $t \bmod k = 0$. Comme $\mathcal{V}_k(X_k(t))$ est une fonction candidate de Lyapunov, on a $\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t \bmod k = 0}} \|X_k(t)\| = 0$ et donc

$\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t \bmod k = 0}} \|x(t+i)\| = 0, \quad i \in \{0, \dots, k-1\}$ (car $X_k(t) = \begin{bmatrix} x(t)^T & \dots & x(t+k-1)^T \end{bmatrix}^T$). Ce qui

implique que le modèle est globalement asymptotiquement stable.

Pour illustrer cette idée, l'écriture est proposée pour $k=2$ et une fonction de base quadratique. On a alors : $\mathcal{V}_2(x(t), x(t+1)) = x(t)^T P^{(0)} x(t) + x(t+1)^T P^{(1)} x(t+1)$ ou dans l'écriture précédente $\mathcal{V}_2(X_2(t))$ avec $X_2(t) = \begin{bmatrix} x(t)^T & x(t+1)^T \end{bmatrix}^T$. La condition du lemme 8 devient $\Delta_2 \mathcal{V}_2(X_2(t)) < 0$ pour tout t tel que $t = 2\tau$ ou encore :

$$\begin{bmatrix} x(2\tau+2) \\ x(2\tau+3) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P^{(0)} & 0 \\ 0 & P^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(2\tau+2) \\ x(2\tau+3) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x(2\tau) \\ x(2\tau+1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P^{(0)} & 0 \\ 0 & P^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(2\tau) \\ x(2\tau+1) \end{bmatrix} < 0$$

On prouve donc que $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \|X_2(2\tau)\| = 0$ c'est-à-dire que $x(2\tau) \rightarrow 0$ et $x(2\tau+1) \rightarrow 0$. De

façon générale, l'idée est de remplacer la classique étude de $\Delta_k \mathcal{V}_k(X_k(t))$ pour tout t par celle pour les $t = k \cdot \tau$. L'application de ce lemme généralise les lois de commande en leur permettant d'être périodiques. On considère les modèles s'écrivant :

$$x(t+1) = A_{z(t)}x(t) + B_{z(t)}u(t) \quad (4.51)$$

et la loi de commande :

$$u(t) = -F_{z(t)}^{(c)} G^{(c)-1} x(t) \quad c = t \bmod k \quad (4.52)$$

Les gains de cette loi de commande sont de période k . A chaque instant $c \in \{0, \dots, k-1\}$ d'un

cycle, les gains sont donnés par : $F_{z(t)}^{(c)} = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i^{(c)}$. Le nombre de variables recherchées

est donc multiplié par k , introduisant ainsi des degrés de liberté supplémentaires, et comme le démontre la suite permettant d'obtenir des résultats plus intéressants. On choisit la fonction candidate suivante :

$$\mathcal{V}_k(X_k(t)) = \sum_{i=0}^{k-1} x^T(t+i) G^{(i)-T} P^{(i)} G^{(i)-1} x(t+i) \quad (4.53)$$

Remarque : On retourne vers des fonctions de Lyapunov rencontrées du chapitre III i.e. sans considérer la généralisation faite dans ce chapitre. Il ne s'agit pas de perdre le lecteur mais d'utiliser la fonction qui rende la démonstration plus simple. Cependant, il est facile d'obtenir des conditions LMI pour des fonctions du type $\mathcal{V}_k(X_k(t)) = X_k(t)^T \mathcal{P} X_k(t)$.

La boucle fermée du modèle (4.51) avec la loi de commande (4.52) s'écrit :

$$x(t+1) = A_{z(t)}x(t) - B_{z(t)}F_{z(t)}^{(c)}G^{(c)-1}x(t) \quad \text{avec } c = t \bmod k \quad (4.54)$$

En ne considérant que les instants t tels que $t \bmod k = 0$, on peut écrire :

$$\begin{cases} x(t+1) = \left(A_{z(t)} - B_{z(t)}F_{z(t)}^{(0)}G^{(0)-1} \right) x(t) \\ x(t+2) = \left(A_{z(t+1)} - B_{z(t+1)}F_{z(t+1)}^{(1)}G^{(1)-1} \right) x(t+1) \\ \vdots \\ x(t+2k-1) = \left(A_{z(t+2k-2)} - B_{z(t+2k-2)}F_{z(t+2k-2)}^{(k-2)}G^{(k-2)-1} \right) x(t+2k-2) \end{cases} \quad (4.55)$$

Ce qui nous donne la contrainte sur l'état $R_{z(t), \dots, z(t+2k-1)} X_{2k}(t) = 0$ avec

$$R_{z(t), \dots, z(t+2k-1)} = \begin{bmatrix} A_{z(t)} - B_{z(t)} F_{z(t)}^{(0)} G^{(0)-1} & -I & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & A_{z(t+2k-2)} - B_{z(t+2k-2)} F_{z(t+2k-2)}^{(k-2)} G^{(k-2)-1} & -I \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

$$\text{et } X_{2k}(t) = \begin{bmatrix} x(t)^T & \dots & x(t+2k-1)^T \end{bmatrix}^T.$$

En utilisant le lemme 8, une condition suffisante de stabilité est :

$$\Delta_k \mathcal{V}_k(X_k(t)) = \sum_{i=0}^{k-1} x(t+i+k)^T G^{(i)-T} P^{(i)} G^{(i)-1} x(t+i+k) - \sum_{i=0}^{k-1} x(t+i)^T G^{(i)-T} P^{(i)} G^{(i)-1} x(t+i) < 0 \quad (4.57)$$

ou encore

$$\Delta_k \mathcal{V}_k(X_k(t)) = X_{2k}(t)^T \text{diag} \left(\begin{bmatrix} -\bar{P}^{(0)} & \dots & -\bar{P}^{(k-1)} & \bar{P}^{(0)} & \dots & \bar{P}^{(k-1)} \end{bmatrix} \right) X_{2k}(t) < 0 \quad (4.58)$$

$$\text{avec } \bar{P}^{(i)} = G^{(k-1)-T} P^{(k-1)} G^{(k-1)-1}.$$

En appliquant le lemme de Finsler avec la contrainte (4.56), on obtient la condition :

$\exists X \in \mathbb{R}^{(2k+1) \times n \times n}$ une matrice telle que :

$$\text{diag} \left(\begin{bmatrix} -\bar{P}^{(0)} & \dots & -\bar{P}^{(k-1)} & \bar{P}^{(0)} & \dots & \bar{P}^{(k-1)} \end{bmatrix} \right) + X R_{z(t), \dots, z(t+2k-2)} + (*) < 0 \quad (4.59)$$

Afin de rendre le problème LMI en les variables qui nous intéressent, on fixe :

$$X = \begin{bmatrix} 0_{1 \times (2k-1)} \\ \text{diag} \left(\begin{bmatrix} G^{(1)-T} & \dots & G^{(k-1)-T} & G^{(0)-T} & \dots & G^{(k-1)-T} \end{bmatrix} \right) \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Après l'utilisation de la congruence avec $\text{diag} \left(\begin{bmatrix} G^{(0)} & \dots & G^{(k-1)} & G^{(0)} & \dots & G^{(k-1)} \end{bmatrix} \right)$ sur

l'inégalité (4.59) et en définissant la quantité (4.61), on obtient le théorème 6.

$$\Upsilon_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}, j_0 j_1 \dots j_{k-1}} = \begin{bmatrix} -P^{(0)} & (*) & 0 & & \dots & 0 \\ \bar{A}_{i_0 j_0}^{(0)} & \Phi^{(1)} & \ddots & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & (*) & \ddots & \\ & & \bar{A}_{i_{k-2} j_{k-2}}^{(k-2)} & \Phi^{(k-1)} & (*) & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \bar{A}_{i_{k-1} j_{k-1}}^{(k-1)} & \Theta^{(0)} & (*) \\ & & & \bar{A}_{i_k j_k}^{(0)} & \Theta^{(1)} & \ddots & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & (*) \\ 0 & & \dots & 0 & \bar{A}_{i_{2k-2} j_{2k-2}}^{(k-2)} & \Theta^{(k-1)} \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

$$\text{avec } \bar{A}_j^{(c)} = A_j G^{(c)} - B_j F_j^{(c)}, \Phi^{(c)} = -G^{(c)} - G^{(c)T} - P^{(c)} \text{ et } \Theta^{(c)} = -G^{(c)} - G^{(c)T} + P^{(c)}.$$

Théorème 6 /Kruszewski et Guerra 2007/ : Soit un modèle TS discret (4.51) et la loi de commande (4.52), s'il existe des matrices $P^{(c)} > 0$, $G^{(c)}$ et $F_j^{(c)}$, $c \in \{0, \dots, k-1\}$ $j \in \{1, \dots, r\}$ telles que les conditions (4.12) soient vérifiées pour $\Upsilon_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}, j_0 j_1 \dots j_{k-1}}$ définis en (4.61) alors la boucle fermée est globalement asymptotiquement stable.

L'exemple suivant montre l'efficacité de l'approche. On considère le modèle (4.51) avec les

matrices $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2,5 & 0,5 & 0,5 \\ 1 & 1 & 0,1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -0,5 & 0,5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}$ où a est un paramètre.

Les différentes valeurs de a tels que les modèles soient stabilisés sont :

Théorème III-7 avec $k = 4$: $a \in [-1,1592 \quad 3,8730]$

Théorème 6 avec $k = 2$ et une loi de commande PDC (non périodique) ($G^{(i)} = G$ et $F_j^{(i)} = F_j$) : $a \in [-1,39 \quad 3,57]$

Théorème 6 avec $k = 2$ et une loi périodique : $a \in [-1,74 \quad 8,94]$.

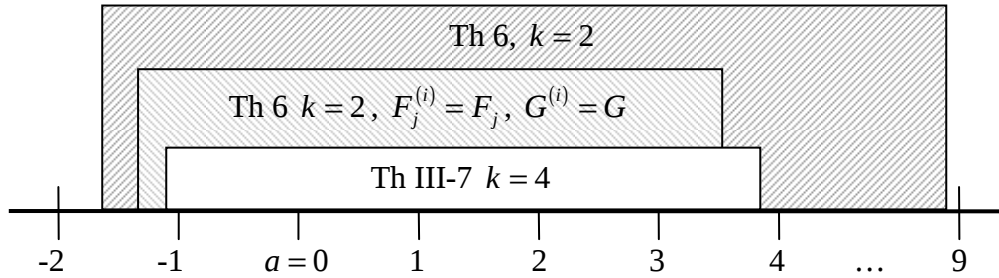


Figure 5 : Domaines de stabilisation pour les différentes approches

La figure 5 illustre les différents domaines de stabilisation. On s'aperçoit que même pour des valeurs de k supérieures l'approche III-B ne parvient pas à rivaliser sur cet exemple avec l'approche proposée.

La loi de commande étant périodique il semble assez naturel de proposer un contexte d'étude utilisant des modèles périodiques.

E. Stabilisation de modèles TS discrets périodiques

Dans cette partie, on considère le modèle suivant :

$$\begin{cases} x(t+1) = A_{z(t)}^{(c)} x(t) + B_{z(t)}^{(c)} u(t) \\ y(t) = C_{z(t)}^{(c)} x(t) \end{cases}, \quad c = t \bmod p, \quad p \text{ est la période des matrices du modèle.} \quad (4.62)$$

et la même loi de commande que précédemment :

$$u(t) = -F_{z(t)}^{(c)} G^{(c)-1} x(t) \quad c = t \bmod p \quad (4.63)$$

Dans la littérature, une approche permettant de prouver la stabilité des modèles périodiques utilise des fonctions de Lyapunov périodiques /Bolzern et Colaneri 1988/. Le critère de stabilité est le suivant :

Théorème 7 /Bolzern et Colaneri 1988/: Un modèle discret de période p est dit p -stable s'il existe p fonctions candidates de Lyapunov $V_l(x)$, $l \in \{0, \dots, p-1\}$ telles que :

$$\forall x(t), V_0(x(t)) > V_1(x(t+1)) > \dots > V_{p-1}(x(t+t-1)) > V_0(x(t+p)) \quad (4.64)$$

L'application dans notre cas donne avec : $V_l(x) = x^T (G^{(l)})^{-T} P^{(l)} (G^{(l)})^{-1} x$ la condition suivante (les notations sont issues de ce type de méthode) :

$$\begin{bmatrix} -P^{(l \bmod p)} & (*) \\ A_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} G^{(l \bmod p)} - B_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} F_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} & -G^{((l+1) \bmod p)} - G^{((l+1) \bmod p)^T} + P^{((l+1) \bmod p)} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.65)$$

$$l \in \{0, \dots, p-1\}$$

On définit les quantités suivantes :

$$\Upsilon_{ij}^l = \begin{bmatrix} -P^{(l \bmod p)} & (*) \\ A_i^{(l \bmod p)} G^{(l \bmod p)} - B_i^{(l \bmod p)} F_j^{(l \bmod p)} & -G^{((l+1) \bmod p)} - G^{((l+1) \bmod p)^T} + P^{((l+1) \bmod p)} \end{bmatrix} < 0, \quad (4.66)$$

$$l \in \{0, \dots, p-1\}$$

Théorème 8 : Soit un modèle TS discret (4.62) et la loi de commande (4.63), s'il existe des matrices $P^{(c)} > 0$, $G^{(c)}$ et $F_j^{(c)}$, $c \in \{0, \dots, p-1\}$ $j \in \{1, \dots, r\}$ telles que les conditions (4.12) soient vérifiées pour tous les Υ_{ij}^l définis en (4.66) alors la boucle fermée est p -stable.

On peut proposer une approche différente basée sur la partie précédente. En choisissant la fonction candidate de Lyapunov (4.53) et en appliquant les mêmes manipulations que dans la section précédente on obtient les mêmes quantités $\Upsilon_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}, j_0 j_1 \dots j_{k-1}}$ qu'en (4.61), seules les matrices des modèles linéaires (A_i, B_i) sont remplacées par $(A_i^{(c)}, B_i^{(c)})$. On a donc dans (4.61) : $\bar{A}_j^{(c)} = A_i^{(c)} G^{(c)} - B_i^{(c)} F_j^{(c)}$.

Théorème 9 : Soit un modèle TS discret périodique (4.62) et la loi de commande périodique (4.63), s'il existe des matrices $P^{(c)} > 0$, $G^{(c)}$ et $F_j^{(c)}$, $c \in \{0, \dots, k-1\}$ $j \in \{1, \dots, r\}$ telles que les conditions (4.12) soient vérifiées pour $\Upsilon_{i_0 i_1 \dots i_{p-1}, j_0 j_1 \dots j_{p-1}}$ définis en (4.61) alors la boucle fermée est globalement asymptotiquement stable.

Il se trouve que les résultats de ces approches ne sont pas ordonnées, i.e. il existe des exemples où les résultats du théorème 8 sont meilleurs que ceux du 9 et réciproquement.

Par exemple, si on considère le modèle (4.62) avec $A_1^1 = \begin{bmatrix} 1,5 & 1 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$, $A_2^1 = \begin{bmatrix} 1,5 & 10 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$, $A_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B_1^1 = B_2^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $B_1^2 = B_2^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, le théorème 8 donne une solution mais pas le théorème 9.

Inversement, si on considère le modèle le (4.62) avec $A_1^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$, $A_1^2 = \begin{bmatrix} 1,5 & 1 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$, $A_2^2 = \begin{bmatrix} 1,5 & 10 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$, $B_1^1 = B_2^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $B_1^2 = B_2^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, avec théorème 9 donne une solution mais pas le théorème 8.

F. Conclusion

Ce chapitre a permis de proposer une extension naturelle de l'ensemble des résultats sur les TS discrets présentés dans les trois premiers chapitres. Elle est basée sur des contraintes égalités prenant en compte des états passés du modèle et l'utilisation du lemme de Finsler. La redondance ainsi obtenue permet d'introduire de nouvelles variables qui relâchent de façon parfois importante les résultats.

Cette approche est générale et unifie la manière d'obtenir les résultats. Elle a été présentée sur certains types de modèles TS discrets. Son extension à des modèles TS incertains ou en utilisant comme base des fonctions de Lyapunov une approche non quadratique est directe et n'a pas été développée ici.

Cette généralité a également permis d'envisager des extensions vers d'autres types de commande et de modèles. Ainsi des lois de commande périodiques ont été introduites pour des modèles TS ainsi que leur utilisation sur des modèles périodiques.

Chapitre V : Perspectives

A. Introduction	116
B. Extensions	117
1. Stabilisation des modèles TS discrets périodiques.....	117
2. Réutilisation du lemme de Finsler.....	119
C. Réduction de la complexité	120
1. Elimination de variables.....	120
2. Réduction du nombre de contraintes LMI.....	121

A. Introduction

A partir du moment où les approches utilisées permettent d'améliorer les résultats rencontrés classiquement dans la littérature pour la stabilité et la stabilisation, les perspectives ouvertes sont nombreuses. Si on reprend le tableau du chapitre I qui donne les différents problèmes abordés au cours de ce mémoire, figure 1, les différentes cases laissées vides se remplissent de façons plus ou moins directes. On rappelle simplement que le type de modèles pris en compte est : N (prémisses non mesurables), I (modèles TS incertains), R (modèles TS à retards en discret) et P (modèles TS périodiques).

		Type de commande			
Loi périodique Loi pour le NQ	Retour de sortie	Chap 2 TS N	Chap 2 TS I		
					Chap 4 TS P
			Chap 2 TS I+R		Chap 4
	PDC			Chap 3 TS I Chap 4 TS R	Chap 4
		V_Q	V_{NQ}	$\mathcal{V}_{kQ \text{ et } NQ}$	$\mathcal{V}_{PQ \text{ et } NQ}$
		Fonction de Lyapunov			

Figure 1 : Problèmes abordés dans le mémoire

Par exemple, en retour de sortie, les cases (3,4) et (4,4) pour des modèles TS discrets à prémisses mesurables et des lois de commande utilisant un observateur sont une extension directe de la case (2,4). De façon résumée, si le modèle TS est certain, il existe un principe de séparation, la démonstration emprunte la même forme que celle de /Ma et al. 1998/ basée sur le principe de comparaison vectorielle. Si le modèle TS est incertain, on peut utiliser le même type de majoration que pour la case (2,4).

De façon évidente, tous les problèmes de performance doivent également être retravaillés, problème du régulateur, atténuation H_∞ , placement de pôles dans des régions LMI, contraintes sur les entrées/sorties ... Ce dernier chapitre s'intéresse à deux problèmes particuliers. Le premier concerne deux nouvelles pistes possibles permettant d'étendre les résultats présentés précédemment. Le second essaye de réduire la complexité des problèmes LMI formulés dans les chapitres III et IV en réduisant le nombre de variables et/ou le nombre de contraintes LMI.

B. Extensions

1. Stabilisation des modèles TS discrets périodiques

Sur les modèles périodiques, qui concluent le chapitre précédent, on peut proposer une généralisation de /Bolzern et Colaneri 1988/. Pour ce faire, on choisit pour fonction périodique :

$$\mathcal{V}_{k,l}(X_k(t)) = \sum_{i=0}^{k-1} x^T(t+i) G^{((i+l) \bmod p)^{-T}} P_{(i)}^{(l)} G^{((i+l) \bmod p)^{-1}} x(t+i), \quad i \in \{0, \dots, k-2\}$$

En utilisant le même raisonnement que dans les approches présentées au chapitre IV, on obtient les quantités suivantes :

$$\Upsilon_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}, j_0 j_1 \dots j_{k-1}}^l = \begin{bmatrix} -P_{(0)}^{(l \bmod p)} & (*) & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{A}_{i_0, j_0}^{(l)} & \Omega_0^{(l)} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & (*) & 0 \\ \vdots & \ddots & \tilde{A}_{i_{k-2}, j_{k-2}}^{(l+k-2)} & \Omega_{k-2}^{(l+k-2)} & (*) \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{A}_{i_{k-1}, j_{k-1}}^{(l+k-1)} & -G^{((l+k) \bmod p)} - G^{((l+k) \bmod p)^T} + P_{(k-1)}^{((l+1) \bmod p)} \end{bmatrix},$$

$$l \in \{0, \dots, p-1\} \quad (5.1)$$

$$\tilde{A}_{i,j}^{(l)} = A_i^{(l \bmod p)} G^{(l \bmod p)} - B_i^{(l \bmod p)} F_j^{(l \bmod p)}, \quad \Omega_i^{(l)} = -G^{((l+1) \bmod p)} - G^{((l+1) \bmod p)^T} + P_{(i)}^{((l+1) \bmod p)} - P_{(i+1)}^{(l \bmod p)}$$

Théorème 1 : Soit un modèle TS discret (4.62) et la loi de commande (4.63), s'il existe des matrices $P_{(i)}^{(l)} > 0$, $G^{(l)}$ et $F_i^{(l)}$, $l \in \{0, \dots, p-1\}$ $i \in \{1, \dots, r\}$ telles que les conditions (4.12) soient vérifiées pour tous les $\Upsilon_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}, j_0 j_1 \dots j_{k-1}}^l$ définis en (4.67) alors la boucle fermée est p -stable.

Lemme 1 : S'il existe des matrices telles que les conditions du théorème IV-8 soient vérifiées alors il existe des matrices telles que les conditions du théorème 1 soient vérifiées.

Preuve : Directe en utilisant les résultats du lemme III-10, en prenant $P_{(i)}^{(l)} = P^{(l)}$.

La figure 2 donne un aperçu des domaines de stabilisation des modèles TS discrets périodiques et des différentes inclusions existantes. Evidemment la taille des domaines n'est pas représentative.

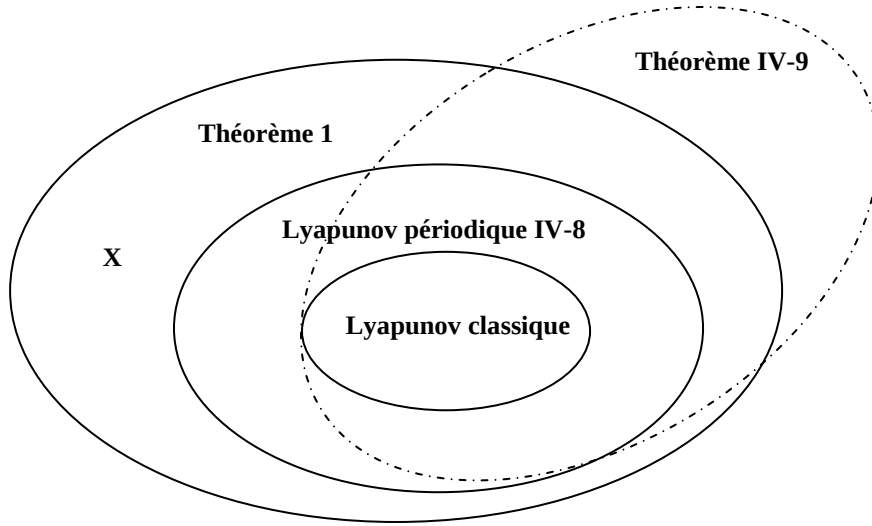


Figure 2 : Inclusion des résultats des différentes approches

Si on reprend les exemples précédents, le théorème 1 ne donne pas de meilleurs résultats que le théorème IV-8. Pour montrer l'apport de cette partie on choisit un exemple dont la position est indiquée par une croix dans la figure 2 : soit le modèle avec pour matrices

$$A_1^1 = \begin{bmatrix} 1,5 & 10 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad A_2^1 = \begin{bmatrix} 0,5 & 10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad A_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad B_1^1 = B_2^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et}$$

$B_1^2 = B_2^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, le théorème 1 avec $k = 2$ donne des solutions et pas le théorème IV-9.

2. Réutilisation du lemme de Finsler

L'utilisation du lemme de Finsler peut également être envisagée de manière encore plus générale. Effectivement, considérons le modèle TS discret avec une loi de commande PDC :

$$x(t+1) = A_{z(t)}x(t) + B_{z(t)}u(t) \quad (5.2)$$

$$u(t) = -F_{z(t)}x(t) \quad (5.3)$$

On peut écrire les expressions (4.43) et (4.44) sous la forme d'une contrainte :

$$\begin{bmatrix} A_{z(t)} & -I & B_{z(t)} \\ F_{z(t)} & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t+1) \\ u(t) \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t+1) \\ u(t) \end{bmatrix} = 0 \quad (5.4)$$

L'application du lemme de Finsler avec par exemple la fonction de Lyapunov quadratique

$V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$ donne le résultat suivant avec la matrice $X \in \mathbb{R}^{3n \times 2n}$:

$$\begin{bmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + X \begin{bmatrix} A_{z(t)} & -I & B_{z(t)} \\ F_{z(t)} & 0 & I \end{bmatrix} + (*) < 0 \quad (5.5)$$

Remarque : Notons que cette approche peut aussi être utilisée en continu si on n'utilise pas de contraintes utilisant des dérivées d'ordre supérieur. Effectivement, il suffit de remplacer

$$\begin{bmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ par } \begin{bmatrix} 0 & P & 0 \\ P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A partir d'un choix judicieux de la matrice X , il est aisé d'obtenir des conditions sous la forme de contraintes LMI. Evidemment, on peut imaginer rajouter d'autres instants, aussi bien pour l'état que pour la commande. On utilise alors le vecteur augmenté :

$\Phi_k = [x(t)^T \quad \dots \quad x(t+k)^T \quad u(t)^T \quad \dots \quad u(t+k-1)^T]^T$ et la contrainte :

$$\begin{bmatrix} \Omega_{1,1} & \Omega_{1,2} \\ \Omega_{2,1} & \Omega_{2,2} \end{bmatrix} \Phi_k = 0 \quad (5.6)$$

$$\Omega_{1,1} = \begin{bmatrix} A_{z(t)} & -I & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & A_{z(t+k-1)} & -I \end{bmatrix}, \quad \Omega_{1,2} = \begin{bmatrix} B_{z(t)} & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_{z(t+k-1)} \end{bmatrix}, \quad \Omega_{2,1} = \begin{bmatrix} F_{z(t)} & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & F_{z(t+k-1)} & 0 \end{bmatrix}$$

et $\Omega_{2,2} = I_{km \times km}$. Il reste à déterminer si les conditions obtenues permettent d'améliorer de façon substantielle les résultats.

C. Réduction de la complexité

Le problème majeur des approches développées reste leur compatibilité avec les solveurs actuels. L'un des besoins est donc de pouvoir réduire leur complexité, i.e. diminuer le nombre de variables à rechercher et surtout le nombre de contraintes LMI à vérifier. Les deux paragraphes suivants s'intéressent à des premières pistes possibles pour aller vers cette réduction.

1. Elimination de variables

La réduction du nombre de variables peut être effectuée en utilisant la deuxième version du lemme de Finsler (cf. chapitre I lemme I-6). Ce type d'approche a été utilisé sur les modèles TS dans les cas classiques /Tuan et al. 2001/ /Delmotte et al. 2007/. Au regard des différents problèmes traités dans ce mémoire, l'élimination des variables de commande semble faisable dans certains cas et difficile dans d'autres.

A titre d'illustration on reprend le cas périodique vu au chapitre IV. Pour ne pas alourdir les écritures, on ne considère que le cas d'une période $p = 2$. On rappelle le modèle et la commande :

$$\begin{cases} x(t+1) = A_{z(t)}^{(c)} x(t) + B_{z(t)}^{(c)} u(t) \\ y(t) = C_{z(t)}^{(c)} x(t) \end{cases}, \quad c = t \bmod p \quad (5.7)$$

$$u(t) = -F_{z(t)}^{(c)} G^{(c)-1} x(t) \quad c = t \bmod p \quad (5.8)$$

La contrainte s'écrit dans ce cas $R_{z(t), z(t+1), z(t+2)} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t+1) \\ x(t+2) \end{bmatrix} = 0$ avec :

$$R_{z(t), z(t+1), z(t+2)} = \begin{bmatrix} A_{z(t)}^{(0)} - B_{z(t)}^{(0)} F_{z(t)}^{(0)} G^{(0)-1} & -I & 0 & 0 \\ 0 & A_{z(t+1)}^{(1)} - B_{z(t+1)}^{(1)} F_{z(t+1)}^{(1)} G^{(1)-1} & -I & 0 \\ 0 & 0 & A_{z(t+2)}^{(0)} - B_{z(t+2)}^{(0)} F_{z(t+2)}^{(0)} G^{(0)-1} & -I \end{bmatrix}$$

En utilisant la matrice $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ G^{(0)-T} & 0 & 0 \\ 0 & G^{(1)-T} & 0 \\ 0 & 0 & G^{(0)-T} \end{bmatrix}$, et le lemme de Finsler on obtient la

condition $\Delta P + \Omega < 0$ avec :

$$\Omega = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} G^{(0)^T} & G^{(1)^T} & G^{(0)^T} \end{bmatrix} \right) \left(X R_{z(t), z(t+1), z(t+2)} + R_{z(t), z(t+1), z(t+2)}^T X^T \right) \text{diag} \left(\begin{bmatrix} G^{(0)} & G^{(1)} & G^{(0)} \end{bmatrix} \right)$$

ou :

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & (*) & 0 & 0 \\ A_{z(t)}^{(0)} - B_{z(t)}^{(0)} F_{z(t)}^{(0)} & -G^{(1)} - G^{(1)^T} & (*) & 0 \\ 0 & A_{z(t+1)}^{(1)} - B_{z(t+1)}^{(1)} F_{z(t+1)}^{(1)} & -G^{(0)} - G^{(0)^T} & (*) \\ 0 & 0 & A_{z(t+2)}^{(0)} - B_{z(t+2)}^{(0)} F_{z(t+2)}^{(0)} & -G^{(1)} - G^{(1)^T} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

On s'aperçoit que l'on peut éliminer $F_{z(t+1)}^{(1)}$ en utilisant le deuxième lemme de Finsler car cette quantité n'apparaît qu'une fois. En définissant :

$$\bar{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & (*) & 0 & 0 \\ A_{z(t)}^{(0)} - B_{z(t)}^{(0)} F_{z(t)}^{(0)} & -G^{(1)} - G^{(1)^T} & (*) & 0 \\ 0 & A_{z(t+1)}^{(1)} & -G^{(0)} - G^{(0)^T} & (*) \\ 0 & 0 & A_{z(t+2)}^{(0)} - B_{z(t+2)}^{(0)} F_{z(t+2)}^{(0)} & -G^{(1)} - G^{(1)^T} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

on peut écrire :

$$\Delta P + \Omega = \Delta P + \bar{\Omega} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{z(t+1)}^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} F_{z(t+1)}^{(1)} [0 \quad I \quad 0 \quad 0] + (*) < 0 \quad (5.11)$$

et en utilisant la deuxième version du lemme de Finsler, (5.11) est satisfaite s'il existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tel que : $\Delta P + \bar{\Omega} - \sigma \text{diag} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{z(t+1)}^{(1)} B_{z(t+1)}^{(1)^T} & 0 \end{bmatrix} \right) < 0$. Malheureusement, en tout cas en utilisant cette forme, il semble impossible d'éliminer $F_{z(\cdot)}^{(0)}$ puisqu'elles apparaissent à deux endroits. On ne peut donc pas appliquer l'élimination sur l'ensemble des gains de la commande, le résultat est donc plutôt « pauvre » en terme de réduction.

2. Réduction du nombre de contraintes LMI

Ce problème peut être abordé par l'introduction de variables additionnelles. On se retrouve donc à nouveau dans un compromis, nombre de variables à rechercher/nombre de contraintes LMI à vérifier. L'idée est de séparer les différents instants $t+i$, $i \in \{0, \dots, k-1\}$ présents dans les conditions pour ne plus avoir de conditions « croisées » utilisant deux instants différents.

On passe alors globalement de $(\bullet)^k$ à $k \times (\bullet)$ conditions LMI.

On considère pour simplifier la lecture le résultat de la deuxième approche du chapitre III rappelé ici. Le modèle $x(t+1) = A_{z(t)}x(t) + B_{z(t)}u(t)$ est stabilisé par la loi de commande $u(t) = -F_{z(t)}G^{-1}$ s'il existe des matrices telles que :

$$\begin{bmatrix} -P^{(0)} & (*) & & & 0 \\ A_{z(t)}G - B_{z(t)}F_{z(t)} & -G^T - G + P^{(0)} - P^{(1)} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -G^T - G + P^{(k-2)} - P^{(k-1)} & (*) \\ 0 & & & A_{z(t+k-1)}G - B_{z(t+k-1)}F_{z(t+k-1)} & -G^T - G + P^{(k-1)} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.12)$$

Le nombre de contraintes LMI est dans ce cas : $(0,5 \cdot r(r+1))^k$. Cela est dû au fait de devoir vérifier l'ensemble des conditions issues de (5.12) $\forall (i_0, j_0), \dots, (i_{k-1}, j_{k-1}) \in \{1, 2, \dots, r\}^2$, $i_0 \leq j_0, \dots, i_{k-1} \leq j_{k-1}$. Si on considère le dernier bloc 2×2 de (5.12) on peut rajouter sur sa

diagonale en introduisant la matrice $Q^{(k-1)} : \begin{bmatrix} Q^{(k-1)} - Q^{(k-1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Remarque : notons que l'on peut de la même façon introduire une matrice de variables plus générale : $\bar{Q}^{(k-1)} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(k-1)} & (*) \\ Q_{12}^{(k-1)} & Q_{22}^{(k-1)} \end{bmatrix}$. Dans ce cas, cela conduit à conserver une matrice de la taille de celle utilisée dans (5.12)

De façon évidente, (5.12) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} -P^{(0)} & (*) & 0 & \dots & 0 \\ A_{z(t)}G - B_{z(t)}F_{z(t)} & -G^T - G + P^{(0)} - P^{(1)} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & -G^T - G + P^{(k-2)} + Q^{(k-1)} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & -P^{(k-1)} - Q^{(k-1)} & (*) \\ 0 & \dots & 0 & A_{z(t+k-1)}G - B_{z(t+k-1)}F_{z(t+k-1)} & -G^T - G + P^{(k-1)} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.13)$$

et (5.13) est alors vérifiée si (5.14) et (5.15) le sont.

$$\begin{bmatrix} -P^{(0)} & (*) \\ A_{z(t)}G - B_{z(t)}F_{z(t)} & -G^T - G + P^{(0)} - P^{(1)} & \ddots \\ & \ddots & \ddots \\ & & A_{z(t+k-2)}G - B_{z(t+k-2)}F_{z(t+k-2)} & -G^T - G + P^{(k-2)} + Q_{11}^{(k-1)} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.14)$$

$$\begin{bmatrix} -P^{(k-1)} - Q^{(k-1)} & (*) \\ A_{z(t+k-1)}G - B_{z(t+k-1)}F_{z(t+k-1)} & -G^T - G + P^{(k-1)} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.15)$$

On vient donc d'éliminer pour (5.14) le temps $t+k-1$ et de rajouter la matrice $Q^{(k-1)}$. En appliquant ce raisonnement par récurrence par l'introduction de matrices $Q^{(i)}$, $i \in \{1, \dots, k-1\}$, on obtient une série de problèmes ne dépendant chacun, que d'un seul instant. On obtient alors les conditions suivantes :

$$\begin{bmatrix} -P^{(0)} & (*) \\ A_{z(t)}G - B_{z(t)}F_{z(t)} & -G^T - G + P^{(0)} + Q^{(1)} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.16)$$

$$\begin{bmatrix} -P^{(i)} - Q^{(i)} & (*) \\ A_{z(t+i)}G - B_{z(t+i)}F_{z(t+i)} & -G^T - G + P^{(i)} + Q^{(i+1)} \end{bmatrix} < 0, \quad i \in \{1, \dots, k-2\} \quad (5.17)$$

$$\begin{bmatrix} -P^{(k-1)} - Q^{(k-1)} & (*) \\ A_{z(t+k-1)}G - B_{z(t+k-1)}F_{z(t+k-1)} & -G^T - G + P^{(k-1)} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.18)$$

Le nombre de contraintes LMI est passé de $(0,5 \cdot r(r+1))^k$ à $k \times 0,5 \cdot r(r+1)$ et le nombre de variables de $n(1,5 \cdot n + 0,5 + r \times m)$ à $n(1,5 \cdot n + 0,5 + r \times m) + (k-1) \times 0,5 \cdot n(n+1)$. Il reste à déterminer l'efficacité de l'approche en termes de solutions.

Conclusion

Cette thèse s'est intéressée à une classe de modèles non linéaires mis sous la forme de modèles Takagi-Sugeno. Les approches utilisées pour traiter de la stabilité et de la stabilisation de ces modèles trouvent leur inspiration dans les outils du linéaire. Ce passage du linéaire au non linéaire (sous la forme de modèles linéaires interconnectés par des fonctions non linéaires) s'accompagne de la perte des conditions nécessaires et suffisantes. Le fait de ne garder que la suffisance est dû principalement à deux causes. La première est la non prise en compte de l'ensemble des informations comprises dans les fonctions non linéaires (exceptées la propriété de somme convexe). La deuxième est l'utilisation quasiment généralisée d'une fonction de Lyapunov quadratique. Cette dernière, évidemment la plus simple, permet la mise sous forme de problèmes LMI, mais est évidemment peu adaptée pour couvrir l'ensemble des modèles TS. Le mémoire est principalement basé sur cette remarque.

Un certain nombre de problèmes restent ouverts principalement parce qu'une mise sous forme de problèmes LMI est difficile, voire impossible. Des algorithmes basés sur le séquençement de deux problèmes LMI sont alors utilisés sans aucune garantie de convergence. C'est le cas par exemple des retours d'état avec observateur dès que l'on s'éloigne du cas standard (modèle TS sans incertitude et prémisses mesurables). Un premier résultat a permis de proposer une majoration autorisant une mise sous forme LMI dans le cas des prémisses mesurables (donné dans le cas continu) et/ou dans le cas de modèles incertains (donné dans le cas discret). Notons que si cette majoration permet la mise sous forme LMI du problème initial, elle n'inclut pas tous les résultats issus des algorithmes basés sur le séquençement de deux problèmes LMI.

Ce premier résultat obtenu, le mémoire s'est restreint au cas des modèles TS discrets. L'idée, répétons-le était de « sortir » de la fonction de Lyapunov quadratique. Plusieurs solutions ont été proposées :

- Continuer dans la veine des travaux de /Guerra et Vermeiren 2004/, en utilisant des fonctions de Lyapunov adaptées à chaque modèle TS traité. La partition de la fonction de Lyapunov prend alors en compte la même partition que celle du modèle étudié. Des extensions ont alors été réalisées sur les modèles incertains à retards variant dans le temps. Notons que dans ce contexte, les résultats du cas quadratique sont toujours inclus dans ceux du non quadratique, il en est toujours un cas particulier.
- Proposer une nouvelle façon de prendre en compte la variation de la fonction de Lyapunov. Il s'agit alors de choisir une fonction de « base » (quadratique ou autre) et d'étudier sa variation sur k échantillons. Notons que dans ce contexte la variation usuelle sur un pas de la fonction en est toujours un cas particulier. Deux approches en fonction du choix de la fonction de Lyapunov de « base » ont été mises en œuvre. Dans la première toutes les fonctions de « base » sont identiques. Des résultats ont été donnés pour le cas des modèles incertains. Ils ont montré qu'il existe une relation d'ordre (partiel ou total) sur le nombre d'échantillons k pris en compte, i.e. plus k est grand, moins le résultat est conservatif. Le « prix à payer » pour ce résultat est l'augmentation du nombre de LMI (en puissance de k) et l'augmentation du nombre de variables (proportionnel à k). Ce prix est rapidement incompatible avec les capacités des solveurs actuels.
- Généraliser les résultats précédents en les unifiant. Pour ce faire, le lemme de Finsler a été utilisé. L'idée, à la manière de ce qui a été réalisé en linéaire /Ebihara et al. 2005/, est de considérer le modèle TS sous forme de contrainte égalité sur le nombre d'échantillons k . Cette redondance permet de relâcher les résultats, parfois de façon importante. Elle permet également de traiter un grand nombre de problèmes dans un cadre unique, évitant les démonstrations similaires « à répétition ». Il est alors possible de voir les résultats cités dans le point précédent comme un cas particulier de cette généralisation. A titre d'illustration des résultats ont été donnés sur la stabilité des modèles TS et la stabilisation des modèles à retards. De façon évidente, la même remarque sur le « prix à payer » peut être faite dans ce cas.

Ces différentes propositions amènent à des perspectives nouvelles. On peut envisager aisément l'extension des résultats du chapitre quatre à d'autres types de modèles TS et/ou en introduisant des notions de performances. Un autre intérêt est que cette unification a permis de traiter de façon quasi « naturelle » d'autres types de problèmes. Parmi ceux-ci, les modèles TS de type périodique et/ou des lois de commande périodiques ont été présentés. On peut alors imaginer, à la manière de /Bolzern et Colaneri 1988/, utiliser des fonctions de Lyapunov périodiques. Enfin, il est important d'essayer de réduire le nombre de LMI en gardant des solutions de bonne qualité, i.e. en ne perdant pas trop de solutions, pour pouvoir les appliquer sur des problèmes de taille plus élevée.

Loin d'avoir répondu à toutes les questions que soulève ce type de modèles, il reste de nombreuses investigations à mener. Y a-t-il un choix de k « optimal » ? Comment prendre en compte des connaissances (autre que la propriété de somme convexe) sur les fonctions non linéaires $h_i(\cdot)$?

Références

- Assawinchaichote W., Nguang S.K., Shi P. 2004, *H_∞ output feedback control design for uncertain singularly perturbed systems: an LMI approach*, Automatica, Vol. 40(12), pp2147-2152.
- Blanco Y., 2001. *Stabilisation des modèles Takagi-Sugeno et leur usage pour la commande des systèmes non linéaires*, Thèse de Doctorat, Université des sciences et technologies de Lille
- Blanco Y., Perruquetti W., Borne P., 2001. *Non quadratic stability of nonlinear systems in the Takagi-Sugeno form*. ECC'01, Porto, Portugal.
- Bolzern P. et Colaneri P., 1988, *The periodic Lyapunov equation*, Journal on Matrix Analysis and Applications. SIAM.
- Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V., 1994, *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Studies in Applied Mathematics; Philadelphia.
- Cao Y.-Y. et Frank P.M., 2001, *Stability analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via linear Takagi-Sugeno fuzzy models*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 124, pp213–229.
- Chen B. et Liu X.P., 2004, *Reliable control design of fuzzy dynamic systems with time-varying delay*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 146, pp349–374.
- Chilali M. et Gahinet P., 1996, *Design with Pole Placement Constraints: an LMI approach*, IEEE Transactions on Automatic Control, pp358-367.
- Delmotte F., Guerra T.M., Ksontini M. 2007, *Continuous Takagi-Sugeno's Models: Reduction of the Number of LMI conditions in various fuzzy control design techniques*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems (acceptée)

- De Oliveira M.C., Bernussou J., Geromel J.C. 1999. *A new discrete-time robust stability condition*. Systems & Control Letters, Vol. 37, pp261-265
- De Oliveira M. C. et R. E. Skelton, 2001, *Stability Tests for Constrained Linear Systems*, Perspectives in Robust Control, Lecture Notes in Control and Information Sciences 268 edited by S. O. Reza Moheimani, Springer.
- Ebihara Y., Peaucelle D., Arzelier D., Hagiwara T., 2005, *Robust Performance Analysis of Linear Time-Invariant Uncertain Systems by Taking Higher-Order Time-Derivatives of the State*, IEEE CDC/ECC, Séville, Espagne.
- Fang C.H., Liu Y.S., Kau S.W., Hong L., Lee C.H., 2006, *A new LMI-Based Approach to Relaxed Quadratic Stabilization of T-S Fuzzy Control Systems*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 14(3)
- Feng G., 2003, *Controller synthesis of fuzzy dynamical systems based on piecewise Lyapunov functions*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 11(5), pp605-612.
- Gasso K., 2000, *Identification des systèmes dynamiques non linéaires : approche multi-modèles*, Thèse de l'Institut National Polytechnique de Lorraine.
- Guan X.P. et Chen C.L., 2004, *Delay-dependent guaranteed cost control for T-S fuzzy systems with time delays*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 12, pp236–249.
- Guerra T-M., Kruszewski A. 2004. *Non-quadratic stabilization conditions for uncertain discrete nonlinear models in the Takagi-Sugeno's form*. Workshop IFAC AFNC'04 (Advances in Fuzzy and Neural Control), Oulu Finlande, septembre.
- Guerra T.M et Kruszewski A., 2006, *Nouvelles fonctions de Lyapunov pour l'étude de la stabilité et de la stabilisation de modèles discrets non linéaires sous la forme Takagi-Sugeno*. IEEE CIFA'06, Bordeaux.
- Guerra T-M., Kruszewski A. 2006. *Nouvelles fonctions de Lyapunov pour l'étude de la stabilité et de la stabilisation de modèles discrets non linéaires sous la forme Takagi-Sugeno*. E-STA, 3.

- Guerra T.M, Kruszewski A, Richard J.P., 2004, *Non-quadratic stabilization conditions for a class of uncertain discrete-time nonlinear models with time-varying delays*. IFAC Time Delay Systems, Louvain, Belgique.
- Guerra T-M., Kruszewski A., Vermeiren L., Rago-Tirmant H., 2006. *Conditions of output stabilization for nonlinear models in the Takagi-Sugeno's form*. Fuzzy Sets & Systems, Vol. 157(9), pp1248-1259.
- Guerra T.M et Vermeiren L., 2004, *LMI-based relaxed non-quadratic stabilization conditions for nonlinear systems in Takagi-Sugeno's form*, Automatica, Vol. 40(5), pp823-829.
- Hong S.K. et Langari R., 2000, *An LMI-based fuzzy control system design with TS framework*, Information Sciences, Vol. 123, pp163-179.
- Jadbabaie A., Titli A., Jamshidi M., 1997, *Fuzzy observer based control of nonlinear systems*, IEEE Conf. on Decision and Control, San Diego, CA.
- Johansson M, Rantzer A, Arzen K., 1999, *Piecewise quadratic stability of fuzzy systems*. IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol.7, pp713-722.
- Kruszewski A. et Guerra T-M., 2005a, *Conditions of output stabilization for uncertain discrete fuzzy models*. IFAC Triennial World Congress, Prague, République Tchèque.
- Kruszewski A et Guerra T.M., 2005b, *New Approaches for the Stabilization of Discrete Takagi-Sugeno Fuzzy Models*. IEEE CDC/ECC, Séville, Espagne.
- Kruszewski A. et Guerra T-M., 2007, *Improvement for stabilization of nonlinear discrete-time models in the Takagi-Sugeno's form using cycling control laws*, IEEE ACC, New York (soumise)
- Kruszewski A., Wang R., Guerra T-M., 2006a, *New approaches for stabilization of a class of nonlinear discrete time-delay models*. Workshop IFAC TDS, L'Aquila, Italie.
- Kruszewski A., Wang R., Guerra T-M., 2006b, *Non-quadratic stabilization conditions for a class of uncertain non linear discrete-time T-S fuzzy models: a new approach*, IPMU'06, Paris.

- Lauber J., 2003, *Moteur à allumage commandé avec EGR : Modélisation et commande non linéaires*, Thèse de Doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis.
- Lauber J., Kruszewski A., Guerra T-M., Perruquetti W., Richard J-P. 2005. *Stabilisation d'une classe de modèles à retards basée sur une représentation de type Tagaki-Sugeno*. Groupe de Travail Systèmes à Retards GDR MACS, Paris, avril
- Lo J.C et Lin M.L, 2004, *Observer-based robust H_∞ control for fuzzy systems using two-step procedure*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 12(3), pp350-359.
- Liu X et Zhang Q., 2003, *New approaches to controller designs based on fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LMI*. Automatica, Vol.39(9), pp1571-1582.
- Ma X.J, Sun Z.Q, He Y.Y, 1998, *Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer*. IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol.6(1), pp41-50.
- Mansouri B. 2006, *Contribution à la synthèse de lois de commandes en poursuite de trajectoire pour les systèmes flous de type Takagi Sugeno incertains*, Thèse de Doctorat, Université de Reims Champagne-Ardenne. U.F.R des Sciences Exactes et Naturelles.
- Mansouri B., Kruszewski A., Guelton K., Manamanni N., Guerra T-M. 2006. *Commande sous optimale pour le suivi de trajectoires des modèles flous TS incertains*. LFA'06, Cépaduès, Toulouse, novembre
- Megretski A., 1996, *Integral quadratic constraints derived from the set-theoretic analysis of difference inclusions*, IEEE CDC, Kobe, Japon
- Megretski A. et Rantzer A., 1997, *System analysis via integral quadratic constraints*, IEEE TAC, Vol. 42(6)
- Peaucelle D, Arzelier D, Bachelier O, Bernussou J., 2000, *A New Robust D-stability Condition for Real Convex Polytopic Uncertainty*, Systems & Control Letters, Vol.40, pp21–30.
- Rago-Tirmant H., Vermeiren L., Guerra T-M., Kruszewski A., Parent M. 2006. *Modélisation et commande d'un véhicule à deux roues*. Journal Européen des Systèmes Automatisés, 40 (4-5), pp. 535-561.

- Rhee B.J, et Won S., 2006, *A new fuzzy Lyapunov function approach for a Takagi–Sugeno fuzzy control system design*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 157(9), pp1211-1228
- Sala A., Guerra T.M., Babuska R., 2005, *Perspectives of fuzzy systems and control*, Fuzzy Sets & Systems, Vol.156, pp432-444.
- Scherer C. et Weiland S., 2004, *Linear Matrix Inequalities in Control* (présentation)
- Sontag E.D. et Wang Y., 1995, *On Characterization of input-to-state stability property*, Systems and Control Letters, Vol. 24, pp351-359.
- Skelton R.E, Iwasaki T, Grigoriadis K., 1998, *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design*. Taylor and Francis, Series in Systems and Control.
- Takagi T et Sugeno M. 1985 *Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control*, IEEE transaction on System Man and Cybernetics, Vol.15(1), pp116-132.
- Tanaka K, Ikeda T, Wang H.O., 1998, *Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs*, IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol.4(2), pp1-16.
- Tanaka K. et Sano M., 1994, *A robust stabilization problem of fuzzy control systems and its application to backing up control of a truck-trailer*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 2, pp119-134.
- Tanaka K. et Sugeno M., 1992, *Stability analysis and design of fuzzy control systems*, Fuzzy Sets and Systems, Vol.45(2), pp135-156
- Tanaka K et Wang H.O., 2001, *Fuzzy control systems design and analysis. A linear matrix inequality approach*. John Wiley and Sons, New York.
- Taniguchi T, Tanaka K, Wang H.O., 2001, *Model construction, rule reduction and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol.9(4), pp525-537.
- Taniguchi T, Tanaka K, Wang H. O., 2000, *Fuzzy descriptor systems and nonlinear model following control*, IEEE Transaction on Fuzzy systems, Vol.8(4), pp.442-452
- Teixeira M., Assunçao R., Avellar E., 2003, *On relaxed LMI-based design for fuzzy regulators and fuzzy observers*. IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol.11(5), pp613-623.

- Tian E. et Peng C., 2006, *Delay-dependent stability analysis and synthesis of uncertain T–S fuzzy systems with time-varying delay*, Fuzzy Sets and Systems, Volume 157(4), pp544-559.
- Toulotte P.F., Delprat S., Guerra T.M., Boonaert J., 2004, *Robust fuzzy control with pole placement in LMI region: application to an automated vehicle*, IEEE VTS-Vehicular Power & Propulsion 2004, Paris.
- Tuan H.D, Apkarian P, Narikiyo T, Yamamoto Y., 2001, *Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design*. IEEE Trans. on Fuzzy Systems Vol.9, pp324-332.
- Wang L.X. et Mendel J.M., 1992, *Fuzzy basis functions, universal approximation and irthogonal least-squares*, IEEE T. on Neural Networks, Vol.3(5), pp807-814.
- Wang H.O, Tanaka K, Griffin M., 1996, *An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and Design Issues*, IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol.4(1), pp14-23.
- Wang Y., Xie L., De Souza C.E., 1992, *Robust control of a class of uncertain nonlinear systems*. Systems & Control letters, Vol.19, pp139-149.
- Xu S. et T. Chen, 2004, *Robust control for uncertain discrete-time systems with time-varying delays via exponential output feedback controllers*. Systems & Control Letters, Vol.51, pp171-183.
- Yoneyama J., 2003, *Robust control analysis and synthesis for uncertain fuzzy systems with time-delay*, IEEE Trans. Fuzzy Systems, pp396–401.
- Yoneyama J, Nishikawa M, Katayama H, Ichikawa A., 2000, *Output stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy systems*. Fuzzy Set and Systems Vol.111, pp253-266.
- Zhou S et Li T., 2005, *Robust stabilization for delayed discrete-time fuzzy systems via basis-dependent Lyapunov-Krasovskii function*, Fuzzy Sets and Systems, Vol.151, pp139-153.
- Zhao J., 1995, *Fuzzy logic in modeling and control*, Ph.D. dissertation, CESAME, Louvain la Neuve, Belgique.

Annexe 1

Cette annexe détaille différentes relaxations pour les inégalités matricielles du type

$$\Upsilon_{zz} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \Upsilon_{ij} < 0. \text{ Elles permettent d'obtenir des conditions suffisantes.}$$

A. Relaxation /Tuan et al. 2001/

La relaxation présentée dans cette partie est issue de /Tuan et al. 2001/. Cette relaxation permet d'obtenir trois types de conditions suffisantes faisant intervenir ou non des variables additionnelles. La première étant la plus intéressante dans notre cas. En effet elle permet d'obtenir des conditions sans variables additionnelles et ainsi d'alléger la résolution des problèmes à base de contraintes LMI. De plus ces résultats sont les meilleurs connus sans ajout de variables. Ces conditions sont données par le théorème suivant.

Théorème 1 /Tuan et al. 2001/ : Soient Υ_{ij} des matrices de tailles appropriées et h_i des fonctions ayant la propriété de somme convexe. La condition $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \Upsilon_{ij} < 0$ est vérifiée si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

$$- \Upsilon_{ii} < 0, i \in \{1, \dots, r\} \quad (1)$$

$$\frac{1}{r-1} \Upsilon_{ii} + \frac{1}{2} (\Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji}) < 0, i, j \in \{1, \dots, r\}, i \neq j \quad (2)$$

- il existe des matrices $Q_{ij} = Q_{ji}, i \neq j$ telles que :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{r-1} \Upsilon_{ii} & Q_{ij} \\ Q_{ij} & \frac{1}{r-1} \Upsilon_{jj} \end{bmatrix} < 0, \frac{1}{2} (\Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji}) \leq Q_{ij}, i, j \in \{1, \dots, r\}, i < j \quad (3)$$

- il existe des matrices $Q_{ij} = Q_{ji}, i \neq j$ telles que :

$$\Upsilon_{ii} + \sum_{j \neq i}^r Q_{ij} < 0, Q_{ij} \geq 0, Q_{ij} \geq \frac{1}{2} (\Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji}), i, j \in \{1, \dots, r\}, i < j \quad (4)$$

La démonstration s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme 1 /Tuan et al. 2001/ : Soit une matrice 2×2 $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$ avec $p_{ij} \in \mathbb{R}$, on a :

$$x^T P x < 0, \forall x_1, x_2 \geq 0, x = (x_1, x_2) \neq 0 \quad (5)$$

si et seulement s'il existe une quantité $q_{12} \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{bmatrix} p_{11} & q_{12} \\ q_{12} & p_{22} \end{bmatrix} < 0, p_{12} \leq q_{12} \quad (6)$$

Une condition suffisante pour avoir (5) ou (6) est :

$$p_{11} < 0, p_{22} < 0, p_{11} + p_{12} < 0 \text{ et } p_{22} + p_{12} < 0 \quad (7)$$

Preuve du lemme 1 :

(6) $\Rightarrow$ (5)

$$\begin{bmatrix} p_{11} & q_{12} \\ q_{12} & p_{22} \end{bmatrix} < 0 \Leftrightarrow p_{11}x_1^2 + 2q_{12}x_1x_2 + p_{22}x_2^2 < 0. \text{ Comme } x_1, x_2 \geq 0 \text{ et } p_{12} \leq q_{12} \text{ alors}$$

$$2p_{12}x_1x_2 \leq 2q_{12}x_1x_2 \text{ et on a donc : } p_{11}x_1^2 + 2p_{12}x_1x_2 + p_{22}x_2^2 < p_{11}x_1^2 + 2q_{12}x_1x_2 + p_{22}x_2^2 < 0$$

(5) $\Rightarrow$ (6)

Pour avoir $\begin{bmatrix} p_{11} & q_{12} \\ q_{12} & p_{22} \end{bmatrix} < 0$, il suffit que : $p_{11} < 0$, $p_{22} < 0$ et $\det \left(\begin{bmatrix} p_{11} & q_{12} \\ q_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \right) > 0$ c'est-à-dire

$$p_{11}p_{22} - q_{12}^2 > 0.$$

On suppose que (5) est vérifiée. On a $p_{11}x_1^2 + 2p_{12}x_1x_2 + p_{22}x_2^2 < 0$, $\forall x_1, x_2 \geq 0$, $x = (x_1, x_2) \neq 0$. De façon évidente $p_{11} < 0$ et $p_{22} < 0$. En considérant $x_2 = 1$, $p_{11}x_1^2 + 2p_{12}x_1x_2 + p_{22}x_2^2 < 0$ devient : $p_{11}x_1^2 + 2p_{12}x_1 + p_{22} < 0$.

Le maximum de cette quantité pour $x_1 \geq 0$ est $\frac{p_{11}p_{22} - p_{12}^2}{p_{11}}$ et doit être négatif. D'où :

$p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0$. En choisissant $q_{12} = p_{12}$ on satisfait toutes les conditions pour avoir (6).

(7) $\Rightarrow$ (5), si $p_{12} < 0$, $p_{11} < 0$, $p_{22} < 0$ et $x_1, x_2 \geq 0$ il est alors évident que

$p_{11}x_1^2 + 2p_{12}x_1x_2 + p_{22}x_2^2 < 0$. Si $p_{12} \geq 0$ on peut réécrire le problème sous la forme :

$$p_{11}x_1^2 + 2p_{12}x_1x_2 + p_{22}x_2^2 = (p_{11} + p_{12})x_1^2 + (p_{22} + p_{12})x_2^2 + p_{12}(2x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2)$$

En procédant à la majoration suivante :

$$(p_{11} + p_{12})x_1^2 + (p_{22} + p_{12})x_2^2 - p_{12}(x_1 - x_2)^2 \leq (p_{11} + p_{12})x_1^2 + (p_{22} + p_{12})x_2^2 < 0$$

on obtient le résultat souhaité.

Preuve du théorème 1 :

Intéressons nous à la condition $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))Y_{ij} < 0$ où les h_i sont des fonctions

vérifiant la propriété de somme convexe ($h_i(z(t)) \geq 0$ et $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$). Afin d'alléger

l'écriture de la démonstration, on omet la partie $(z(t))$ des fonctions h_i . On peut réécrire la

quantité $Y_{zz} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j Y_{ij}$ comme suit :

$$\begin{aligned} Y_{zz} &= \sum_{i=1}^r \sum_{j \neq i}^r h_i h_j Y_{ij} + \sum_{i=1}^r h_i^2 Y_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j < i}^r h_i h_j (Y_{ij} + Y_{ji}) + \sum_{i=1}^r \sum_{j \neq i}^r h_i^2 \frac{1}{r-1} Y_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j < i}^r h_i h_j (Y_{ij} + Y_{ji}) + \sum_{i=1}^r \sum_{j < i}^r \left(h_i^2 \frac{1}{r-1} Y_{ii} + h_j^2 \frac{1}{r-1} Y_{jj} \right) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j < i}^r \left(\frac{1}{r-1} h_i^2 Y_{ii} + \frac{1}{r-1} h_j^2 Y_{jj} + h_i h_j (Y_{ij} + Y_{ji}) \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Ce qui nous permet de réécrire l'inégalité $Y_{zz} < 0$ de la façon suivante :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j < i}^r \left(\frac{1}{r-1} h_i^2 Y_{ii} + \frac{1}{r-1} h_j^2 Y_{jj} + h_i h_j (Y_{ij} + Y_{ji}) \right) < 0 \quad (9)$$

(9) est vérifiée si : $h_i^2 x^T \frac{1}{r-1} Y_{ii} x + h_j^2 x^T \frac{1}{r-1} Y_{jj} x + 2h_i h_j x^T \frac{1}{2} (Y_{ij} + Y_{ji}) x < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ ou :

$$h_i^2 \frac{1}{r-1} Y_{ii} + h_j^2 \frac{1}{r-1} Y_{jj} + 2h_i h_j \frac{1}{2} (Y_{ij} + Y_{ji}) = \begin{bmatrix} h_i \\ h_j \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{r-1} Y_{ii} & \frac{1}{2} (Y_{ij} + Y_{ji}) \\ \frac{1}{2} (Y_{ij} + Y_{ji}) & \frac{1}{r-1} Y_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_i \\ h_j \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

avec $h_i \geq 0$.

Ceci nous permet d'appliquer le lemme 1 ((5) $\Leftarrow$ (7)) et donne la condition suivante pour assurer $\Upsilon_{zz} < 0$:

$$\Upsilon_{ii} < 0, i \in \{1, \dots, r\} \quad (11)$$

$$\frac{1}{r-1} \Upsilon_{ii} + \frac{1}{2} (\Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji}) < 0, i, j \in \{1, \dots, r\}, i \neq j \quad (12)$$

En appliquant le lemme 1, ((5) $\Leftrightarrow$ (6)), on obtient la condition suivante :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{r-1} \Upsilon_{ii} & Q_{ij} \\ Q_{ij} & \frac{1}{r-1} \Upsilon_{jj} \end{bmatrix} < 0, \frac{1}{2} (\Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji}) \leq Q_{ij}, i, j \in \{1, \dots, r\}, i < j \quad (13)$$

Pour prouver (4), remarquons que : $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \Upsilon_{ij} = \sum_{i=1}^r h_i^2 \Upsilon_{ii} + \sum_{i=1}^r \sum_{j \neq i}^r h_i h_j \frac{1}{2} (\Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji})$, en

utilisant la majoration avec Q_{ij} , on obtient : $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \Upsilon_{ij} \leq \sum_{i=1}^r h_i^2 \Upsilon_{ii} + \sum_{i=1}^r \sum_{j \neq i}^r h_i h_j Q_{ij}$. Comme de

plus $Q_{ij} \geq 0$ on peut écrire : $h_i h_j Q_{ij} \leq \frac{1}{2} (h_i^2 + h_j^2) Q_{ij}$ d'où :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \Upsilon_{ij} \leq \sum_{i=1}^r h_i^2 \Upsilon_{ii} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j \neq i}^r (h_i^2 + h_j^2) Q_{ij} = \sum_{i=1}^r h_i^2 \Upsilon_{ii} + \sum_{i=1}^r \sum_{j \neq i}^r h_i^2 Q_{ij}$$

$$\text{et finalement : } \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \Upsilon_{ij} \leq \sum_{i=1}^r h_i^2 \left(\Upsilon_{ii} + \sum_{j \neq i}^r Q_{ij} \right).$$

Les différentes variantes permettent d'ajouter ou non des variable. La partie suivante présente une autre relaxation introduisant des variables.

B. Relaxation /Liu et Zhang 2004/

On rappelle le théorème.

Théorème 2 /Liu et Zhang 2004/ : Soient Υ_{ij} des matrices de tailles appropriées et h_i des fonctions ayant la propriété de somme convexe. La condition $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \Upsilon_{ij} > 0$ est vérifiée s'il existe des matrices $Q_i, i \in \{1, \dots, r\}$ et $Q_{ij}, (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2$, telles que :

$$Q_i = (Q_i)^T \quad \forall i \in \{1, \dots, r\}, \quad (14)$$

$$Q_{ij} = (Q_{ji})^T \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2, \quad (15)$$

$$\Upsilon_{ii} > Q_i \quad \forall i \in \{1, \dots, r\}, \quad (16)$$

$$\Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} > Q_{ij} + Q_{ji} \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2 \quad j > i, \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 & Q_{12} & \dots & Q_{1r} \\ Q_{21} & Q_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & Q_{(r-1)r} \\ Q_{r1} & \dots & Q_{r(r-1)} & Q_r \end{bmatrix} > 0. \quad (18)$$

La démonstration s'appuie sur la propriété de congruence. On suppose qu'il existe des matrices $Q_i = (Q_i)^T \quad \forall i \in \{1, \dots, r\}$ et $Q_{ij} = (Q_{ji})^T \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2$ telles que :

$$\Upsilon_{ii} > Q_i \quad \forall i \in \{1, \dots, r\}, \Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} > Q_{ij} + Q_{ji} \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2 \quad j > i,$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 & Q_{12} & \dots & Q_{1r} \\ Q_{21} & Q_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & Q_{(r-1)r} \\ Q_{r1} & \dots & Q_{r(r-1)} & Q_r \end{bmatrix} > 0 \quad (19)$$

En utilisant la propriété de congruence sur (19) avec la matrice $[h_1 I \quad \dots \quad h_r I]$, si (19) est vérifiée, on a également :

$$\begin{bmatrix} h_1 I \\ \vdots \\ h_r I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_1 & Q_{12} & \dots & Q_{1r} \\ Q_{21} & Q_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & Q_{(r-1)r} \\ Q_{r1} & \dots & Q_{r(r-1)} & Q_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 I \\ \vdots \\ h_r I \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r h_i^2 Q_i + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j Q_{ij} > 0 \quad (20)$$

ou encore $\sum_{i=1}^r h_i^2 Q_i + \sum_{i=1}^r \sum_{i < j}^r h_i h_j (Q_{ij} + Q_{ji}) > 0$. En utilisant le fait que $\Upsilon_{ii} > Q_i$ et

$\Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} > Q_{ij} + Q_{ji}$ on obtient l'inégalité suivante :

$$\sum_{i=1}^r h_i^2 \Upsilon_{ii} + \sum_{i=1}^r \sum_{i < j}^r h_i h_j (\Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji}) > \sum_{i=1}^r h_i^2 Q_i + \sum_{i=1}^r \sum_{i < j}^r h_i h_j (Q_{ij} + Q_{ji}) > 0 \quad (21)$$

On a donc $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \Upsilon_{ij} > 0$.

Ce résultat, bien qu'il introduise une quantité non négligeable de variables additionnelles, représente un des meilleurs compromis complexité/quantité de solutions. Néanmoins il existe des théorèmes permettant de « mieux relâcher » les conditions, par exemple dans /Texeira et al. 2001/.

C. Relaxation /Teixeira et al. 2001/

Théorème 3 : Soient Υ_{ij} des matrices de tailles appropriées et h_i des fonctions ayant la propriété de somme convexe.

La condition $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \Upsilon_{ij} > 0$ est vérifiée s'il existe des matrices R_{jh}, T_{ijh} et

$W_{ijh}, i, j, h \in \{1, \dots, r\}$ telles que :

$$Z_{jh} = \begin{cases} R_{jh}, & \text{si } j < h \\ R_{jh}, & \text{si } j > h \\ 0, & \text{si } j = h \end{cases} \quad (22)$$

$$\Phi n_{ijh} = \begin{cases} \Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} - T_{ijh} - \frac{1}{2} W_{ijh}, & \text{si } i < j \\ \Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} - T_{ijh} - \frac{1}{2} W_{ijh}, & \text{si } i > j \end{cases} \quad (23)$$

$$W_{lmh} = \begin{cases} R_{lm}, & \text{si } l = h \text{ ou } m = h \\ 0, & \text{si } l \neq h \text{ ou } m \neq h \end{cases} \quad (24)$$

$$\Phi t_h = \begin{bmatrix} 2\Upsilon_{11} + Z_{1h} & \Phi n_{12h} & \cdots & \Phi n_{1rh} \\ \Phi n_{21h} & 2\Upsilon_{22} + Z_{2h} & & \Phi n_{2rh} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Phi n_{r1h} & \Phi n_{r2h} & \cdots & 2\Upsilon_{rr} + Z_{rh} \end{bmatrix} > 0, \forall h \in \{1, \dots, r\} \quad (25)$$

La preuve de ce théorème ne sera pas donnée. Il faut juste noter qu'elle s'appuie sur l'introduction de variables additionnelles et sur la quantité suivante :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \Upsilon_{ij} = \begin{bmatrix} h_1 I \\ \vdots \\ h_r I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Upsilon_{1,1} & \cdots & \Upsilon_{1,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Upsilon_{r,1} & \cdots & \Upsilon_{r,r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 I \\ \vdots \\ h_r I \end{bmatrix}$$

Ces variables additionnelles sont ajoutées grâce au lemme suivant :

Lemme 2 : Soient $h_i(z(t))$ des fonctions ayant la propriété de somme convexe et R_{ij} , $i=1, \dots, r$, $i < j$ des matrices symétriques aux dimensions On définit avec $a = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_r]^T$:

$$H(a) = \begin{bmatrix} H_{11}(a) & (h_1 + h_2) \frac{1}{2} R_{12} & \dots & (h_1 + h_r) \frac{1}{2} R_{1r} \\ (h_1 + h_2) \frac{1}{2} R_{12} & H_{22}(a) & \dots & (h_2 + h_r) \frac{1}{2} R_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (h_1 + h_r) \frac{1}{2} R_{1r} & (h_2 + h_r) \frac{1}{2} R_{2r} & \dots & H_{rr}(a) \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$H_{ii}(a) = - \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^r h_j R_{ij} - \sum_{\substack{j=1 \\ j<i}}^r h_j R_{ji}. \quad (27)$$

On a alors :

$$[h_1 I \ h_2 I \ \dots \ h_r I] H(a) [h_1 I \ h_2 I \ \dots \ h_r I]^T = 0. \quad (28)$$

Le but de ce lemme est de permettre l'introduction de termes de couplage entre les termes Υ_{ij} dans l'inégalité :

$$[h_1 I \ h_2 I \ \dots \ h_r I] \begin{bmatrix} \Upsilon_{1,1} & \dots & \Upsilon_{1,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Upsilon_{r,1} & \dots & \Upsilon_{r,r} \end{bmatrix} [h_1 I \ h_2 I \ \dots \ h_r I]^T > 0$$

Le théorème 3 donne de meilleurs résultats que celui de /Liu et Zhang 2004/. Cependant, il devient très vite inexploitable puisqu'il atteint très rapidement les limites des solveurs.

Lois de commande pour une classe de modèles nonlinéaires sous la forme Takagi-Sugeno : Mise sous forme LMI

Cette thèse se focalise sur une classe particulière de modèles non linéaires appelés modèles Takagi-Sugeno. Même s'ils sont issus de l'approche historique de la logique floue, ils peuvent s'interpréter comme une collection de modèles linéaires interconnectés par des fonctions non linéaires.

L'étude de la stabilité de ces types de modèles fait appel, dans la grande majorité des cas, à la méthode directe de Lyapunov avec une fonction de type quadratique. Celle-ci permettant écrire facilement des conditions sous la forme de contraintes LMI. Les conditions obtenues ne sont que suffisantes.

De nombreux résultats sont disponibles aujourd'hui pour ce type de modèles. Les premiers travaux ne traitaient que de la stabilité et de stabilisation sans critères de robustesse ou notions de performances. Depuis des extensions à des retours d'état avec observateur, à des modèles sous forme descripteur, à des modèles incertains, à des modèles à retard à des modèles incertains à retard, à des retours de sortie dynamiques,... existent. Des critères de performances ont aussi été considérés comme la minimisation d'un critère quadratique, D-stabilité, H_{∞} ,...

En dépit de cette multitude de résultats, il reste un certain nombre de problèmes à résoudre. L'approche par fonction de Lyapunov quadratique semble avoir atteint ces limites. Les conditions obtenues étant seulement suffisantes le principal problème est de savoir que faire si elles sont trop restrictives ? Comment relâcher un problème LMI qui n'a pas de solution ? Le but de ce mémoire est de sortir du cadre des fonctions de Lyapunov quadratiques en proposant des résultats moins conservatifs que ceux rencontrés dans la littérature..

Control laws for a class of nonlinear models in the Takagi-Sugeno's form: getting LMI conditions

This PhD thesis deals with a particular class of nonlinear models called Takagi-Sugeno. In spite of their fuzzy background, they can be seen as a collection of linear models blended by some nonlinear functions.

The stability analysis of this kind of models is investigated through the direct Lyapunov method and using a quadratic function. This choice is due to its capability to cope with LMI constraints. These conditions are only sufficient.

Many results are available for these models. The first works were dealing only with stability and stabilization without any robustness criterion or performances indexes. Extensions are available on state feedback with observer, descriptor models, uncertain models, models with delays, dynamic output feedbacks... Some performances criteria are also considered as the minimization of quadratic criterion, D-Stability, H_{∞} ...

In spite of these results, some problems need to be solved. The quadratic Lyapunov function approach seems to have reached its limit. Considering that the conditions are only sufficient, what can be done if they are too restrictive? How to relax a LMI problem which has no solution? The goal of this thesis is to quit the quadratic framework by proposing less conservative results than those met in the literature.