



**HAL**  
open science

# Amplification paramétrique, sans bruit, continue, d'images en cavité

Laurent Lopez

► **To cite this version:**

Laurent Lopez. Amplification paramétrique, sans bruit, continue, d'images en cavité. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2006. Français. NNT: . tel-00130058

**HAL Id: tel-00130058**

**<https://theses.hal.science/tel-00130058>**

Submitted on 8 Feb 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Laboratoire Kastler-Brossel

Université Pierre et Marie Curie



Thèse de doctorat de l'Université Paris VI

Spécialité: Laser et Matière

*présentée par*

**Laurent Lopez**

*Pour obtenir le grade de  
DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS 6*

**Amplification paramétrique, sans bruit, continue, d'images en cavité**

*Soutenue le 20 Octobre 2006 devant le jury composé de :*

M. Claude FABRE ..... *Directeur de thèse*

M. Mikhail KOLOBOV ..... *Rapporteur*

M. Eric LANTZ ..... *Rapporteur*

M. Juan Ariel LEVENSON ..... *Examineur*

Mme. Alessandra GATTI ..... *Examinatrice*

Mme Agnès MAÎTRE ..... *Examinatrice*



Ce travail de thèse a été réalisé au laboratoire Kastler Brossel entre avril 2003 et juillet 2006. Je remercie ses directeurs successifs, Franck Laloë et Paul Indelicato, pour m'avoir accueilli pendant ces trois années. Un grand merci aussi à la Délégation Générale pour l'Armement qui m'a permis dans le cadre sa "formation par la recherche" de réaliser cette thèse.

Claude Fabre, Agnès Maître et Nicolas Treps ont encadré ce travail. Je tiens à insister sur la confiance qu'ils m'ont accordée durant ces trois années et sur l'ambiance qu'ils ont su créer à l'intérieur de l'équipe. Je remercie Claude Fabre qui, malgré son emploi du temps très chargé, a su rester très disponible et prodiguer des conseils et idées très constructives. Merci aussi à Agnès Maître pour sa disponibilité et sa relecture attentive de ce manuscrit. Un grand merci à Nicolas Treps, pour ses conseils quotidiens, mais aussi pour son acharnement à trouver le financement de mon nouveau laser.

Pendant ces années, j'ai eu l'occasion de travailler avec un grand nombre de personnes. Je remercie tout particulièrement Sylvain Gigan, avec lequel j'ai partagé l'expérience pendant près d'un an et qui m'a appris toutes les subtilités de l'expérience. Sans son travail préalable, cette thèse n'aurait pas été la même. Merci encore pour sa patience et sa bonne humeur! Mes remerciements vont aussi à Antonino Chiummo et à Ivan Ferreira dos Santos qui ont travaillé sur la cavité auto-imageante, mais aussi à Arnault Rivière de la Souchère pour son aide sur les calculs en cavité auto-imageante. Bon courage à Benoit Chalopin qui prend la suite de la manip.

Je remercie également les membres du jury: Eric Lantz, Juan Ariel Levenson, Alessandra Gatti pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail alors qu'ils avaient tous des emplois du temps très chargés en cette période de rentrée universitaire.

Au laboratoire, mes remerciements vont tout d'abord à Monique Bonamy et Laetitia Morel du secrétariat pour leur bonne humeur, leur gentillesse et leur efficacité. Je remercie aussi chaleureusement les mécaniciens Pascal Travers, Say-savanh Souramasing Oune, Christophe Rafailac qui ont toujours été prompts à répondre à mes attentes. Merci aussi à Jean-Pierre Okpics pour ses judicieux montages électroniques. Merci à Serge Begon et Corinne Poisson pour palier à mes défaillances en matière d'informatique.

Je tiens à remercier les membres de mon bureau: Gaëlle Keller (merci pour les précieux conseils informatiques ainsi que la relecture attentive de ce manuscrit), Jean Cvilinski, Charles Leyder qui ont permis d'humaniser mes longues heures de rédaction. Un grand merci à EOL, Olivier Arnoult, Julien Le Bars, Vincent Delaubert, Brahim Lamine, Rémy Hervé, Florence Thibout pour les traditionnelles discussions du repas à midi.

Je n'oublie évidemment pas dans ces remerciements mes parents pour leur

soutien au long de ces années d'étude. Un dernier merci pour Carolina, mon rayon de soleil pendant ces trois années!

---

# Table des matières

---

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b><i>Première partie</i> Images et cavités: aspects classiques</b>	<b>5</b>
<b>1 Optique transverse et cavités</b>	<b>7</b>
A Optique des faisceaux lasers: approximation paraxiale . . . . .	8
A.1 Equation d'onde paraxiale . . . . .	8
A.2 Bases propres dans l'approximation paraxiale . . . . .	9
A.3 Formalisme des matrices de Gauss . . . . .	10
B Images . . . . .	12
B.1 Qu'entendons nous par une image? . . . . .	12
B.2 Propagation d'une image . . . . .	13
C Cavités optiques . . . . .	15
C.1 Qu'est ce qu'une cavité? . . . . .	15
C.2 Stabilité d'une cavité . . . . .	15
C.3 Modes propres d'une cavité linéaire stable . . . . .	16
C.4 Cavité paraxiale à deux miroirs sphériques . . . . .	17
D Cavités optiques dégénérées . . . . .	18
D.1 Qu'est ce que la dégénérescence transverse? . . . . .	18
D.2 Finesse et quasi-dégénérescence . . . . .	19
D.3 Exemple de cavité dégénérée: la cavité confocale . . . . .	20
<b>2 Transmission d'une image à travers une cavité</b>	<b>23</b>
A Généralités . . . . .	24
A.1 Notations . . . . .	24
A.2 Cavité monomode . . . . .	25
A.3 Cavité totalement dégénérée . . . . .	26

B	Cavité partiellement imageante . . . . .	26
B.1	Transformation cyclique . . . . .	27
B.2	Propagation d'une image à travers une cavité dégénérée . . . . .	28
B.3	Application à la cavité confocale . . . . .	28
C	Etude de la cavité hémi-confocale . . . . .	29
C.1	Présentation . . . . .	29
C.2	Transmission à travers la cavité . . . . .	29
C.3	Etude expérimentale . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Une cavité totalement dégénérée: la cavité auto-imageante</b>	<b>35</b>
A	Généralités . . . . .	36
A.1	Une cavité auto-imageante à deux miroirs? . . . . .	36
A.2	Une cavité auto-imageante à trois miroirs . . . . .	37
A.3	Caractéristiques de la cavité auto-imageante linéaire . . . . .	37
B	Etude expérimentale d'une cavité auto-imageante en configuration linéaire . . . . .	42
B.1	La cavité . . . . .	42
B.2	Montage expérimental . . . . .	42
B.3	Réglages . . . . .	43
B.4	Transmission d'une image . . . . .	44
C	Etude expérimentale du doublage dans une cavité auto-imageante . . . . .	45
C.1	Le montage expérimental . . . . .	45
C.2	Résultats . . . . .	47
	 <i>Deuxième partie Images et cavités: aspects quantiques</i>	 <b>51</b>
<b>4</b>	<b>Éléments d'imagerie quantique</b>	<b>53</b>
A	Optique quantique monomode . . . . .	54
A.1	Quantification du champ électromagnétique . . . . .	54
A.2	Commutateur et inégalité d'Heisenberg . . . . .	54
A.3	États comprimés du rayonnement . . . . .	56
B	Optique quantique multimode . . . . .	57
B.1	Pourquoi l'optique quantique multimode? . . . . .	57
B.2	Contexte de "l'imagerie quantique" . . . . .	58
B.3	Critère de "multimodicité" d'un faisceau . . . . .	59
B.4	Outils d'optique non linéaire transverse . . . . .	61
C	Le processus paramétrique pour générer des états non classiques . . . . .	63
C.1	Réponse non-linéaire . . . . .	63
C.2	Processus nonlinéaire du second ordre . . . . .	64
C.3	Lois de conservation et condition d'accord de phase . . . . .	64

C.4	Relation entrée/sortie lors du passage dans un milieu paramétrique . . .	66
<b>5</b>	<b>OPO confocal</b>	<b>69</b>
A	Contexte . . . . .	70
B	Le modèle . . . . .	71
B.1	Hypothèses . . . . .	71
B.2	Equation d'évolution en champ proche . . . . .	72
B.3	Equation d'évolution en champ lointain . . . . .	72
C	Détection homodyne et spectre de bruit . . . . .	72
D	Analyse des fluctuations en champ proche . . . . .	73
E	Analyse des fluctuations en champ lointain . . . . .	75
F	Conclusion . . . . .	76
G	Reproduction de l'article . . . . .	77
<b>6</b>	<b>OPO auto-imageant</b>	<b>89</b>
A	Le modèle . . . . .	90
A.1	La cavité auto-imageante . . . . .	90
A.2	Hypothèses . . . . .	90
A.3	Equation d'évolution en champ proche . . . . .	93
A.4	Equation d'évolution en champ lointain . . . . .	94
B	Détection homodyne pour accéder aux fluctuations du champ . . . . .	95
B.1	Détection homodyne en champ proche et en champ lointain . . . . .	95
B.2	Relations entrée/sortie . . . . .	96
C	Réduction de bruit locale en champ proche . . . . .	96
C.1	Cas du cristal mince . . . . .	96
C.2	Cas du cristal épais . . . . .	99
D	Equation d'évolution en champ lointain . . . . .	100
D.1	Pompe plane en champ lointain . . . . .	101
E	Génération de faisceaux EPR locaux en champ lointain . . . . .	103
E.1	Le concept de faisceaux EPR locaux . . . . .	103
E.2	Schéma de détection . . . . .	103
E.3	Inséparabilité, résultats . . . . .	105
 <i>Troisième partie</i> Amplification sans bruit à l'aide d'un OPO sous le seuil: théorie		
<b>109</b>		
<b>7</b>	<b>Généralités sur l'amplification sans bruit</b>	<b>111</b>
A	Introduction . . . . .	112
A.1	Contexte de l'étude . . . . .	112
A.2	Bruit et signal dans un faisceau . . . . .	113



A.3	Facteur de bruit d'un amplificateur . . . . .	113
B	L'amplification classique monomode, insensible à la phase . . . . .	114
B.1	Présentation . . . . .	114
B.2	Transformation monomode insensible à la phase . . . . .	115
B.3	Théorème général de l'amplification insensible à la phase . . . . .	116
B.4	Exemples d'amplificateurs insensibles à la phase . . . . .	116
C	L'amplification monomode sensible à la phase . . . . .	118
C.1	Présentation . . . . .	118
C.2	Transformation monomode sensible à la phase . . . . .	119
C.3	Théorème de l'amplification sensible à la phase . . . . .	120
C.4	Exemples d'amplificateurs sensibles à la phase . . . . .	121
D	Un amplificateur multimode pour amplifier des images . . . . .	124
D.1	Amplification d'images en simple passage . . . . .	124
D.2	Amplification sans bruit d'images en cavité . . . . .	125
D.3	Limites imposées par la mécanique quantique dans un processus multimode	126
<b>8</b>	<b>Amplification paramétrique en cavité: théorie</b>	<b>127</b>
A	Résolution classique . . . . .	128
A.1	Le modèle . . . . .	128
A.2	Équations d'évolution . . . . .	129
A.3	Équations stationnaires sous le seuil . . . . .	130
A.4	Résolution intracavité . . . . .	131
A.5	Définition du gain normalisé en phase d'amplification . . . . .	133
B	Traitement quantique . . . . .	134
B.1	Équations semi-classiques . . . . .	134
B.2	Relation entrée/sortie sur les fluctuations . . . . .	135
B.3	Faisceaux jumeaux et squeezing . . . . .	137
B.4	Evolution du bruit d'intensité en fonction de la phase relative . . . . .	138
B.5	Calcul du rapport signal-à-bruit . . . . .	138
C	Nouveau modèle avec entrée et sortie séparées . . . . .	141
C.1	Expression du gain normalisé . . . . .	142
C.2	Faisceaux jumeaux-Compression de bruit . . . . .	142
C.3	Calcul du facteur de bruit normalisé dans le cas avec pertes et sensible à la phase	143
C.4	Calcul du facteur de bruit normalisé dans le cas avec pertes et insensible à la phase	143
D	Prise en compte des pertes dans la formule du rapport signal sur bruit . . . . .	144
D.1	Pertes à la détection . . . . .	145
E	Quand parler d'amplification "sans bruit"? . . . . .	147

<b>9</b>	<b>Un OPO optimisé pour l'amplification sans bruit</b>	<b>149</b>
A	Modélisation de l'OPO monomode de type II triplement résonnant . . . . .	150
A.1	Le modèle . . . . .	150
A.2	Equations d'évolution . . . . .	152
A.3	Relations entrée/sortie dans le cas sensible à la phase . . . . .	152
A.4	Relations entrée/sortie dans le cas insensible à la phase . . . . .	153
A.5	Conclusion . . . . .	154
B	Calcul du facteur de bruit dans un processus de type Bogoliubov généralisé . . . . .	155
B.1	Transformation générale sensible à la phase . . . . .	155
B.2	Calcul du gain . . . . .	155
B.3	Calcul du facteur de bruit . . . . .	155
B.4	Application à l'OPO . . . . .	156
C	Etude de l'OPO, cas insensible à la phase . . . . .	157
C.1	Transformation générale insensible à la phase . . . . .	157
C.2	Calcul du facteur de bruit . . . . .	157
C.3	Application à l'OPO insensible à la phase . . . . .	158
D	Quel OPO pour optimiser le facteur de bruit? . . . . .	158
D.1	Dégénérescence de la cavité . . . . .	158
D.2	Optimisation des caractéristiques de la cavité . . . . .	159
D.3	Modèle avec entrée et sortie sur le même miroir . . . . .	159
D.4	Modèle avec entrée et sortie sur des miroirs différents . . . . .	160

### *Quatrième partie* Amplification sans bruit à l'aide d'un OPO sous le seuil: expérience

165

<b>10</b>	<b>Techniques expérimentales</b>	<b>167</b>
A	Les sources, le filtrage . . . . .	168
A.1	L'ancien système de sources . . . . .	168
A.2	Le laser Diabolo . . . . .	171
A.3	La cavité de filtrage . . . . .	172
B	Détection et analyse du bruit . . . . .	173
B.1	Caméra CCD . . . . .	175
B.2	Photodiodes . . . . .	175
B.3	Analyse du bruit . . . . .	176
C	Asservissements . . . . .	178
C.1	Isolation passive . . . . .	178
C.2	Asservissement en température . . . . .	178
C.3	Asservissement des cavités . . . . .	179
C.4	Asservissement des phases relatives . . . . .	180

<b>11 Amplification d'images à l'aide d'un OPO héli-confocal</b>	<b>181</b>
A La double cavité . . . . .	182
A.1 Principe, intérêt . . . . .	183
A.2 Configuration expérimentale . . . . .	183
A.3 Les effets de double cavité, une limitation . . . . .	186
B Amplification en double cavité: étude classique . . . . .	190
B.1 Configuration expérimentale . . . . .	190
B.2 Réglages . . . . .	190
B.3 Transmission d'image . . . . .	191
B.4 Amplification d'image: Résultats classiques . . . . .	194
C Amplification en double cavité: étude quantique . . . . .	196
C.1 Images jumelles et déamplification d'images . . . . .	198
C.2 Caractérisation du facteur de bruit de l'amplificateur . . . . .	203
<b>12 Etude de l'amplification multimode à l'aide d'un OPO confocal</b>	<b>211</b>
A Contexte de l'étude . . . . .	212
A.1 Contexte au laboratoire . . . . .	212
A.2 Contexte théorique . . . . .	213
B Configuration expérimentale . . . . .	213
B.1 Schéma général . . . . .	213
B.2 La cavité . . . . .	215
B.3 Le cristal . . . . .	216
B.4 Injections . . . . .	216
B.5 Réglages . . . . .	217
B.6 Mesure du rapport signal-à-bruit . . . . .	219
C Résultats expérimentaux et discussion . . . . .	219
C.1 Injection à 1064 nm . . . . .	219
C.2 Résultats classiques . . . . .	219
C.3 Résultats quantiques . . . . .	222
C.4 Discussion . . . . .	222
<b>Conclusion</b>	<b>225</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>229</b>

---

# Introduction

---

Réduire le bruit qui dégrade toutes mesures de précision sur des images est une des thématiques centrales de l'optique moderne. Nombreux sont les exemples où des techniques toujours plus ingénieuses ont permis de s'affranchir de ces fluctuations inopinées. En biologie, la microscopie confocale à balayage laser permet d'éliminer la lumière diffusée par des plans défocalisés créant un bruit de fond. En astronomie, l'optique adaptative permet d'améliorer les distorsions du front d'onde dues aux perturbations atmosphériques. La liste de tels exemples est non exhaustive. Cependant, ces améliorations vont être ou sont déjà limitées par une source de fluctuation "ultime", inhérente à la nature quantique de la lumière. La compréhension de l'origine des fluctuations quantiques spatiales de la lumière est donc un enjeu majeur puisque tôt ou tard les avancées technologiques seront confrontées à cette limite.

La nature quantique de la lumière fût découverte il y a environ cent ans par Planck qui introduisit pour la première fois la notion de quanta. Cette notion fût reprise ensuite par Einstein pour définir le photon. L'aspect quantique de la lumière se manifeste par le biais des inégalités d'Heisenberg: pour un champ monochromatique, le produit des fluctuations d'intensité et de phase est supérieur à une certaine constante. Un laser fonctionnant très au dessus du seuil produit un état minimal du champ, qui permet d'atteindre l'égalité dans l'inégalité de Heisenberg. En outre, toutes les quadratures du champ sont affectées du même niveau de bruit, que l'on appelle bruit quantique standard. Le bruit d'intensité correspondant est alors appelé bruit de grenaille ou "shot noise". Cependant l'inégalité d'Heisenberg n'impose de contraintes que sur le produit des variances: on peut très bien envisager de réduire le bruit sur une quadrature si on augmente dans les mêmes proportions le bruit sur la quadrature orthogonale pour que le produit reste constant. De tels états dits "comprimés" ont été créés expérimentalement à partir des années 85.

La plupart de ces études considèrent le faisceau lumineux dans sa totalité donc comme une seule entité quantique: c'est ce que l'on appelle l'optique quantique monomode. Malheureusement on peut montrer qu'un faisceau monomode comprimé ne peut apporter aucune amélioration à la mesure des images optiques [Fabre00]. Pour rendre compte des mesures détaillées dans le plan transverse, il faut augmenter le nombre de degrés de liberté quantiques dans le plan transverse du champ, pour en faire une description complètement multimode: on a be-

soin de faisceaux "multimodes spatiaux". Ce sujet, l'imagerie quantique -"quantum imaging"- a commencé à être étudié de manière théorique à la fin des années 80 [Seng-Tiong-Ho]. Les propositions théoriques généralisent au niveau local les notions jusqu'alors valables pour l'ensemble du faisceau. La notion de réduction locale du bruit (sur une partie du faisceau) a été introduite pour la première fois par Kolobov [Kolobov89b], la possibilité d'amplifier conjointement plusieurs modes transverses a été donnée dans [Kolobov95].

Expérimentalement, différents groupes se sont peu à peu intéressés à l'imagerie quantique. La plupart des propositions théoriques font intervenir l'effet paramétrique pour générer des faisceaux multimodes spatiaux. Lorsque l'on travaille avec un laser continu passant dans un cristal non linéaire, l'effet non-linéaire étant relativement faible, en sortie les faisceaux sont peu intenses (régime dit de "comptage de photons"). Pour travailler avec un nombre macroscopique de photons (régime dit de "variables continues") il est nécessaire soit d'utiliser des lasers pulsés soit d'insérer le milieu non-linéaire dans une cavité optique résonnante. Dans ce dernier cas on crée un Oscillateur Paramétrique Optique (OPO). La plupart des réalisations expérimentales en "imagerie quantique" ont été réalisées en simple passage. Des expériences en régime de comptage de photons, ont permis d'obtenir des mesures de corrélations spatiales entre deux photons créés par génération paramétrique [Malygin85, Joobeur96]. De nombreux groupes utilisent les lasers pulsés: l'amplification sans bruit d'images a été démontrée dans cette configuration [Kumar99, Mosset05]. A notre connaissance, seule notre équipe s'intéresse à la réalisation expérimentale de l'amplification sans bruit d'images à l'aide d'un OPO.

Le groupe d'optique quantique du Laboratoire Kastler Brossel s'intéresse depuis une dizaine d'années à la réalisation d'expériences d'imagerie quantique utilisant un Oscillateur Paramétrique Optique. Une difficulté provenant de l'utilisation de cavités optiques est que généralement elles jouent le rôle d'un filtre spatial en sélectionnant un seul mode propre. La nécessité d'amplifier plusieurs modes transverses impose de travailler avec des cavités particulières, dites "dégénérées en modes transverses" qui permettent de préserver une partie des propriétés spatiales des faisceaux. Les premières expériences réalisées au laboratoire ont étudié les propriétés classiques des motifs optiques générés par un OPO au dessus du seuil d'oscillation en cavité dégénérée en modes transverses [Vaupel99]. Peu à peu le groupe s'est orienté vers une étude des fluctuations quantiques spatiales. En 2003, le groupe a montré la possibilité de générer des faisceaux multimodes spatiaux à l'aide d'un OPO confocal au dessus du seuil d'oscillation [Martinelli03]. A partir de la thèse de S. Gigan [Gigan], on s'est intéressé aux propriétés quantiques spatiales mais maintenant sous le seuil d'oscillation de l'OPO, notamment avec la mise en place d'une expérience d'amplification sans bruit d'images. Cette thèse se situe en continuité de ce travail.

L'objectif de cette thèse est l'étude théorique et expérimentale d'un OPO dégénéré en modes transverses sous le seuil d'oscillation pour contrôler les fluctuations locales de la lumière et notamment pour l'amplification sans bruit d'images.

Ce mémoire s'organise en quatre parties. Les chapitres d'introduction aux parties (1, 4, 7, 10) sont généraux et peuvent être omis par un lecteur familier de l'optique quantique trans-

verse en variable continue. La première partie s'intéresse aux propriétés classiques inhérentes à la manipulation d'images en cavité. La deuxième partie n'envisage plus le problème en terme de champ moyen, mais on s'intéresse théoriquement aux propriétés quantiques spatiales en sortie d'un OPO dégénéré en modes transverses. La troisième partie est consacrée à l'étude théorique de l'amplification sans bruit à l'aide d'un OPO. On construit un modèle permettant de comprendre les résultats expérimentaux exposés dans la quatrième et dernière partie.

Plus précisément, la première partie est consacrée à l'étude classique de la transmission d'une image à travers une cavité optique. Après un premier chapitre introductif rappelant les outils bien connus de l'imagerie paraxiale, on utilise un formalisme original permettant de comprendre la transmission d'une image à travers une cavité optique. Théorie et expérience sont confrontées avec succès grâce à l'étude de la cavité héli-confocale. Pour clore cette partie, nous étudions expérimentalement les propriétés de transmission et de génération de seconde harmonique d'une cavité permettant de transmettre intégralement une image: la cavité auto-imageante.

Après l'étude classique de la première partie, nous envisageons le problème au niveau quantique: nous essayons de comprendre au niveau théorique comment les fluctuations locales de la lumière en sortie d'un OPO dégénéré en modes transverses sont modifiées en fonction du degré de dégénérescence de la cavité, mais aussi de paramètres comme la taille de la pompe, la longueur du cristal utilisé. Le chapitre 4 introductif présente après quelques rappels d'optique quantique monomode, le contexte ainsi que le formalisme de l'optique quantique transverse en variables continues. Dans le chapitre 5, nous étudions les effets de la diffraction liés à la taille finie du cristal sur les propriétés locales du vide comprimé généré par un OPO confocal sous le seuil. Pour finir le chapitre 6, est consacré à l'étude d'un OPO en cavité auto-imageante sous le seuil et notamment à la possibilité de générer des faisceaux EPR locaux.

Dans une troisième partie, nous nous intéressons au phénomène de l'amplification optique. Le chapitre 7 introductif est dédié à des généralités sur l'amplification optique au niveau quantique. Les notions de processus insensibles et sensibles à la phase ainsi que des exemples sont abordés. Ensuite nous construisons dans le chapitre 8 un modèle d'OPO sous le seuil aussi proche que possible de notre expérience: nous calculons le taux de compression, le facteur de bruit théorique attendu pour notre système en tenant compte de toutes les pertes (à la détection mais aussi liées à l'utilisation de miroirs non parfaits). Nous insistons sur le type de mesure de facteur de bruit effectué, définissant ensuite sur quelle plage de fonctionnement on peut parler d'amplification sans bruit dans le cadre de notre expérience. Dans le chapitre 9, essayant de comprendre l'origine du bruit rajouté lors du processus d'amplification, nous proposons une géométrie de cavité optimisée pour l'amplification sans bruit en cavité.

La dernière partie est consacrée aux expériences réalisées au cours de ce travail de thèse. Le chapitre 10 présente les techniques expérimentales utilisées, communes aux expériences en variables continues. Les chapitres 11, 12 présentent les résultats des études classiques et quantiques de l'amplification sans bruit d'images en cavité respectivement héli-confocale puis confocale. Nous montrons le caractère quantique des images générées lors du processus

d'amplification. Caractérisant le facteur de bruit de l'amplificateur, nous montrons que l'on se situe dans un régime d'amplification "sans bruit".

*Première partie*

**Images et cavités: aspects classiques**





---

# Optique transverse et cavités

---

## Sommaire

<b>A</b>	<b>Optique des faisceaux lasers: approximation paraxiale</b>	<b>8</b>
A.1	Equation d'onde paraxiale	8
A.2	Bases propres dans l'approximation paraxiale	9
A.3	Formalisme des matrices de Gauss	10
<b>B</b>	<b>Images</b>	<b>12</b>
B.1	Qu'entendons nous par une image?	12
B.2	Propagation d'une image	13
<b>C</b>	<b>Cavités optiques</b>	<b>15</b>
C.1	Qu'est ce qu'une cavité?	15
C.2	Stabilité d'une cavité	15
C.3	Modes propres d'une cavité linéaire stable	16
C.4	Cavité paraxiale à deux miroirs sphériques	17
<b>D</b>	<b>Cavités optiques dégénérées</b>	<b>18</b>
D.1	Qu'est ce que la dégénérescence transverse?	18
D.2	Finesse et quasi-dégénérescence	19
D.3	Exemple de cavité dégénérée: la cavité confocale	20

---

## Introduction

Dans ce travail de thèse on utilise un milieu paramétrique en cavité, c'est-à-dire un Oscillateur Paramétrique Optique (OPO) pour amplifier des images. Une image est donc créée, imagée dans une cavité optique et, après son interaction non-linéaire en cavité elle sort amplifiée. Il convient donc dans un premier temps de comprendre à la fois la propagation d'une image mais aussi les propriétés générales des cavités optiques.

Ce chapitre introduit les outils permettant de décrire la propagation d'un champ électromagnétique de distribution transverse complexe dans l'approximation paraxiale ainsi que les cavités optiques. Ces notions générales bien connues [Siegman] ont déjà été introduites dans [Gigan], mais il nous a semblé nécessaire de les rappeler pour la compréhension des chapitres 2 et 3.

Dans une première partie, nous donnons les outils permettant de décrire la répartition transverse du champ électromagnétique dans l'approximation paraxiale lors de sa propagation (notamment le formalisme des matrices de Gauss qui sera repris par la suite). Dans une deuxième partie nous définissons ce que l'on entend par "image" dans ce travail de thèse et étudions sa propagation.

Ensuite nous nous intéressons aux cavités optiques, en définissant des notions comme la stabilité d'une cavité, ses modes propres. Pour finir nous introduisons la notion de dégénérescence transverse d'une cavité, notion cruciale lorsque l'on travaille en optique multimode transverse.

## A Optique des faisceaux lasers: approximation paraxiale

### A.1 Equation d'onde paraxiale

Dans le vide le champ électromagnétique vérifie l'équation de Maxwell:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0 \quad (1.1)$$

Considérons un faisceau se propageant dans une direction privilégiée ( $Oz$ ) (dans le sens des  $z$  croissants). On suppose que l'onde est quasi-plane, c'est à dire que la normale en tout point à la surface d'onde ( $\Sigma$ ) fait un angle petit avec l'axe ( $Oz$ ). Les surfaces d'ondes sont perpendiculaires à la direction de propagation, et donc quasi perpendiculaires à ( $Oz$ ).

La composante du champ  $\vec{E}$  suivant ( $Oz$ ) peut donc être négligée.  $\vec{E}$  est donc contenu dans le plan transverse. On peut également se restreindre au cas où la polarisation est uniforme dans le plan transverse. On va alors noter:

$$E(x, y, z, t) = A(x, y, z) e^{-i(kz - \omega t)} \vec{\epsilon}. \quad (1.2)$$

où  $A(x, y, z)$  est l'enveloppe du champ, supposée indépendante du temps (cependant toute notre discussion reste valable dans le cadre de l'approximation de l'enveloppe lentement variable). On va supposer que les variations transverses du champ sont faibles comparées aux variations selon  $z$  de l'onde plane  $e^{-i(kz - \omega t)}$ . Cette approximation est appelée approximation paraxiale et implique:

$$\left| \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right| \ll \left| 2k \frac{\partial A}{\partial z} \right| \text{ ou } \left| \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right| \text{ ou } \left| \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right|$$

L'équation de propagation de l'enveloppe dans l'approximation paraxiale devient :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} = 0 \quad (1.3)$$

Un faisceau est dit paraxial si il est localisé autour de l'axe ( $Oz$ ). Avec toutes les hypothèses énoncées précédemment, la propagation suivant  $z$  conservera le caractère paraxial du faisceau. On est alors dans le cadre de l'optique paraxiale.<sup>1</sup>

## A.2 Bases propres dans l'approximation paraxiale

### A.2.1 Modes de Hermite-Gauss

Les modes de Hermite-Gauss sont des modes propres de l'équation de propagation paraxiale de l'enveloppe (1.3) :

$$A_{mn}(x, y, z) = C_{mn} \frac{1}{w(z)} H_m \left( \frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_n \left( \frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) e^{ik \left( \frac{x^2+y^2}{2q(z)} \right)} e^{-i(n+m+1) \arctan \left( \frac{z}{z_R} \right)} \quad (1.4)$$

où :

$$\begin{aligned} C_{mn} &= \frac{1}{\sqrt{\pi 2^{m+n-1} m! n!}} \\ z_R &= \frac{\pi w_0}{\lambda} \\ q(z) &= z - iz_R \\ w(z) &= w_0 \sqrt{1 + \left( \frac{z}{z_R} \right)^2} \\ \Psi(z) &= (n + m + 1) \arctan \left( \frac{z}{z_R} \right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

$w_0$  est la taille du col du faisceau au point de focalisation, appelé aussi waist propre.  $q$  est le rayon de courbure complexe. Il est important de noter que  $q$  est indépendant de  $m$  et  $n$ , et ne dépend que de la taille et de la position du waist propre. On peut également introduire le rayon de courbure réel  $R(z)$  qui vaut  $R(z) = z + \frac{z_R^2}{z}$ . Enfin  $\Psi(z)$  est la phase de Gouy, terme de déphasage dépendant du mode  $TEM_{pq}$  considéré.

Les  $H_n$  sont les polynômes de Hermite, donnés par:

$$H_n(X) = (-1)^n e^{X^2} \frac{d^n}{dX^n} \left( e^{-X^2} \right). \quad (1.6)$$

---

1. Pour une étude détaillée de la validité de l'approximation paraxiale, on pourra se reporter au chapitre 16 de la référence [Siegman]

### A.2.2 Propriétés des faisceaux gaussiens

L'allure des modes gaussiens est bien connue et on peut en trouver une étude complète dans [Siegman], [Cagnac] par exemple. A  $z_0$  fixé, les  $A_{mn}(x, y, z_0)$  forment une base complète orthonormée du champ électromagnétique: il existe une décomposition unique de toute distribution transverse sur les  $A_{mn}(x, y, z_0)$ .

Un mode  $A_{mn}(x, y, z_0)$  possède  $m$  zéros sur l'axe  $x$  et  $n$  zéros sur l'axe  $y$ . Par conséquent il a  $(n+1)(m+1)$  lobes, de signes alternativement positifs et négatifs (correspondant à une différence de phase de  $\pi$ ). L'extension spatiale du mode  $A_{mn}$ , quantité qui nous sera utile pour évaluer le nombre de modes composant une image, peut être évaluée approximativement par la position du lobe le plus éloigné, situé à environ  $(x, y) = (\pm\sqrt{nw}, \pm\sqrt{mw})$  de l'axe.

Lorsque l'on considère une base de modes de Hermite-Gauss (dont la position et la taille du waist, la direction et la longueur d'onde sont fixés), on parle de la base des  $\{TEM_{pq}\}$ , et on appelle  $TEM_{mn}$  le mode associé à la forme transverse  $A_{mn}(x, y, z, t)$ .

### A.2.3 Modes de Laguerre-Gauss

Si l'ensemble du problème est à symétrie de révolution autour de l'axe du faisceau, la base dite de Laguerre-Gauss est plus adaptée. Si on se place en coordonnées cylindriques  $(O, r, \theta, z)$ , on a alors :

$$A_{pl}(r, \theta, z) = \left(\frac{r\sqrt{2}}{w(z)}\right)^{|l|} L_p^{|l|} \left(\frac{2r^2}{w(z)^2}\right) e^{-\frac{r^2}{w(z)^2}} e^{il\theta} e^{-i(2p+|l|+1)\arctan\left(\frac{z}{z_R}\right)}. \quad (1.7)$$

C'est également une base complète et orthonormée du plan transverse.

## A.3 Formalisme des matrices de Gauss

### A.3.1 Définition

Lorsqu'on étudie la propagation d'un rayon lumineux paraxial à travers un système optique simple, on peut utiliser le formalisme des matrices de Gauss (aussi appelées matrices ABCD).

Les matrices de Gauss permettent de traiter la propagation d'un rayon dans un système optique paraxial à une dimension (donc tout système optique à une dimension transverse, ou à symétrie de révolution). On va donc pour simplifier considérer un rayon paraxial à l'axe  $z$ . Il est caractérisé dans un plan  $(P)$  perpendiculaire à  $(Oz)$  par sa distance  $r$  à l'axe et l'angle  $\theta$  qu'il fait avec l'axe  $(Oz)$ . Le passage par un système optique paraxial linéaire donne dans le plan de sortie  $(P')$  le rayon caractérisé par  $r'$  et  $\theta'$  selon la relation linéaire:

$$\begin{pmatrix} r' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

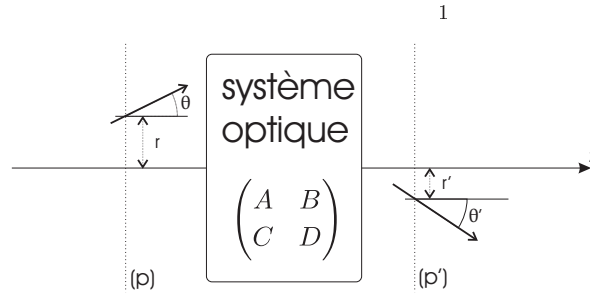


Fig. 1.1: Formalisme des matrices ABCD

où en notant  $n$  et  $n'$  les indices des milieux en  $(P)$  et  $(P')$ , on a :

$$AD - BC = \frac{n}{n'}. \quad (1.9)$$

La matrice est donc de déterminant unité si les indices des milieux de départ et d'arrivée sont les mêmes.

### A.3.2 Matrices de Gauss élémentaires

Les deux matrices de Gauss élémentaires sont:

- propagation sur une distance  $L$  dans un milieu d'indice  $n$

$$\begin{pmatrix} r' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

- traversée d'un dioptre de sphérique de rayon  $R$ , séparant des milieux d'indices  $n$  et  $n'$  à incidence normale:

$$\begin{pmatrix} r' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-n'}{n'R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

On peut obtenir la matrice de Gauss d'une succession quelconque de ces éléments en multipliant les matrices de Gauss de chaque élément (de droite à gauche).

On déduit en particulier la traversée d'une lentille mince de focale  $f$  :

$$\begin{pmatrix} r' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

et à partir de là, on peut trouver la matrice de Gauss de tout système optique linéaire (toute succession de milieux homogènes, de dioptries sphériques, lentilles, et en "dépliant" les chemins optiques, de miroirs sphériques).

### A.3.3 Matrice de Gauss et faisceau gaussien

Il est montré dans [Siegman] que le rayon de courbure complexe  $q(z)$  d'un faisceau gaussien se propageant dans un système de matrice ABCD se transforme selon:

$$q' = \frac{Aq + B}{Cq + D} \quad (1.13)$$

Il faut donc bien comprendre que le formalisme des matrices ABCD est valable pour l'optique paraxiale, et inclut donc les effets de diffraction.

## B Images

### B.1 Qu'entendons nous par une image?

Comme déjà souligné dans [Gigan], la définition d'une "image" dans ce travail de thèse est restrictive. Une image est dans son sens commun un objet polychromatique possédant une répartition complexe du champ électromagnétique dans le plan transverse. Les images dont il sera question dans ce travail sont obtenues par l'interception d'un faisceau laser par un filtre de caractéristique quelconque.

Considérons un laser émettant un faisceau continu, monochromatique, et de forme transverse gaussienne (mode  $TEM_{00}$ ):

$$E(x, y, z, t) = E_0 e^{-\frac{r^2}{2w^2}} e^{-i(kz - \omega t)} \quad (1.14)$$

où  $r$  est la distance à l'axe et  $w$  est la taille du mode gaussien. Si ce mode est de grande taille, on a au centre du faisceau, en première approximation, une onde plane, d'intensité  $E_0$ . On va placer dans le plan transverse de ce faisceau un objet d'intensité et de phase, autrement dit un filtre défini par une fonction de transfert:

$$T(x, y) = \rho(x, y) \exp[i\phi(x, y)] \quad (1.15)$$

où  $\rho(x, y)$  est la transmission en intensité à la position  $(x, y)$ , vérifiant  $0 \leq \rho(x, y) \leq 1$ , et  $\phi(x, y)$  est le déphasage local dû à l'objet.

Ce que nous appellerons l'image est le champ transmis juste après cet objet. Une image, dans ce travail, sera donc:

- une onde monochromatique, cohérente, à proximité d'un axe mais pas forcément paraxiale (puisque la fonction de transfert  $T(x, y)$  peut être en contradiction avec les conditions de l'optique paraxiale),
- d'intensité et de phase transverse quelconque, mais d'enveloppe gaussienne (cependant, afin de simplifier, on pourra considérer en première approximation la gaussienne comme très étendue, donc quasi-plane),

- dont la forme transverse ne dépend pas du temps. Cependant rien n’empêche théoriquement de considérer un objet dont la fonction de transfert dépend du temps (comme une matrice de cristaux liquides par exemple), ce qui permet de contrôler en temps réel l’image, ou de moduler localement l’intensité ou la phase.

Dans la suite de la discussion et afin d’être cohérent avec le vocabulaire de l’imagerie, on confondra le champ transmis et l’objet lui-même ; on appellera donc ”objet” ce champ, et on parlera de son ”image” par un système optique.

## B.2 Propagation d’une image

### B.2.1 Propagation d’une image

L’équation régissant la propagation d’un champ transverse  $A(\vec{r})$  (à ne pas confondre avec le coefficient A de la matrice ABCD) dans l’approximation paraxiale, où  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$  représente la coordonnée transverse, dérive de l’équation de Huygens-Fresnel dans l’espace libre (voir [Siegman] p. 778). Elle s’exprime uniquement en fonction de la matrice ABCD du système.

A deux dimensions elle s’écrit pour le passage de  $z_1$  à  $z_2$ , en fonction des coefficients de la matrice de Gauss entre ces deux positions

$$A_2(\vec{r}_2) = -e^{-ik(z_2-z_1)} \frac{i}{B\lambda} \iint d^2\vec{r}_1 A_1(\vec{r}_1) \exp \left[ -i \frac{\pi}{B\lambda} (A\vec{r}_1^2 - 2\vec{r}_1\vec{r}_2 + D\vec{r}_2^2) \right] \quad (1.16)$$

si  $B \neq 0$ , et :

$$A_2(\vec{r}_2) = -Mu_1(M\vec{r}_1) e^{\frac{ikCM\vec{r}_2^2}{2}} \quad (1.17)$$

si  $B = 0$ , où la matrice de Gauss est écrite  $T = \begin{pmatrix} M & 0 \\ C & \frac{1}{M} \end{pmatrix}$ .

On n’a pas besoin de tous les coefficients dans la matrice  $T$  puisque la matrice de Gauss est de déterminant unité.

On va maintenant introduire les notions de champ lointain (ou Far-Field, encore noté FF) et de champ proche (ou Near-Field, NF), qui sont des plans particuliers de la propagation, relativement au plan de référence qui est le plan où on a placé l’objet.

### B.2.2 Transformation en champ proche

On parle de transformation en champ proche lorsqu’il existe un plan où la forme exacte de l’image en **intensité** est retrouvée, à un facteur d’échelle près (on montre qu’une condition nécessaire et suffisante sur la matrice ABCD pour une transformation en champ proche est  $B = 0$  [Gigan]). Lors d’une telle propagation, le champ n’est reproduit qu’en intensité et la phase du champ change (ceci est lié au terme  $e^{\frac{ikCM\vec{r}_2^2}{2}}$  dans (1.17)).

Ces transformations, préservant uniquement l’intensité sont d’un faible intérêt en optique quantique. En effet dans ce domaine d’étude, les processus dépendent de la phase du faisceau



considéré. On utilise donc des transformations permettant de préserver à la fois la phase et l'intensité du faisceau. Une condition supplémentaire pour avoir une transformation préservant intensité et phase est donc  $C = 0$ . Selon la terminologie employée dans [Gigan], on parlera de "vrai champ proche" lorsque l'on considère une transformation préservant à la fois l'intensité et la phase. Dans la suite de ce travail (notamment aux chapitres 5 et 6), lorsque l'on parlera de transformation en champ proche on considérera des transformations préservant à la fois l'intensité et la phase.

Le système le plus simple pour réaliser une telle transformation est le montage dit  $f-2f-f$  (distance  $f$ , lentille de focale  $f$ , distance  $2f$ , lentille de focale  $f$ , distance  $f$ ) dont la matrice de Gauss est:

$$\begin{pmatrix} 0 & f \\ -1/f & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & f \\ -1/f & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

qui réalise un champ proche complet, avec un grandissement  $M = -1$ .

### B.2.3 Transformation en champ lointain

Toujours en imagerie, on définit le champ lointain (ou plan de Fourier) comme un plan où la propagation de l'image reproduit en intensité la transformée de Fourier spatiale de l'image.

L'équation (1.16) dans le cas où  $B \neq 0$  peut se réécrire:

$$A_2(\vec{r}_2) = -e^{-ik(z_2-z_1)} \frac{i}{B\lambda} e^{-iD\vec{r}_2^2} \iint d^2\vec{r}_1 u_1(\vec{r}_1) e^{-i\frac{\pi}{B\lambda}(-2\vec{r}_1\vec{r}_2)} e^{-i\frac{\pi}{B\lambda}(A\vec{r}_1^2)}. \quad (1.18)$$

On voit qu'une condition nécessaire et suffisante pour avoir un champ lointain est de pouvoir sortir de l'intégrale la deuxième exponentielle. Il faut donc avoir :

$$A = 0.$$

Tout comme en champ proche, nous ne nous intéressons qu'aux transformations préservant la phase du champ. Pour retrouver la transformée de Fourier exacte du champ, d'après 1.18, il faut donc la condition supplémentaire :

$$D = 0.$$

Le montage le plus simple pour réaliser une transformée de Fourier complète de l'image (amplitude et phase) est le montage dit  $f-f$  (lentille de focale  $f$ , précédée et suivie d'une distance  $f$ ) de matrice de Gauss:

$$T_{AF} = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -1/f & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

## C Cavités optiques

### C.1 Qu'est ce qu'une cavité?

En optique, une cavité est un milieu dans lequel peut se propager une onde électromagnétique, limité par des discontinuités du milieu de propagation. Sur ces discontinuités, l'onde est partiellement réfléchiée et transmise. Une onde interférera donc avec elle-même, de manière constructive ou destructive, en fonction de ses caractéristiques (longueur d'onde, direction, amplitude, propriétés de la cavité ...). Les configurations qui correspondent à une interférence constructive maximale sont appelées modes propres de la cavité.

Dans le domaine des longueurs d'ondes optiques, il suffit de prendre deux miroirs plans ou sphériques de coefficients de réflexion non nuls qui se font face pour obtenir une cavité, aussi appelée résonateur. Les modes gaussiens sont des modes propres de ce type de cavité, qui est donc paraxiale. Il n'est pas nécessaire de confiner transversalement la cavité par d'autres surfaces réfléchissantes, à cause de l'annulation naturelle des modes gaussiens à une certaine distance de l'axe naturel de la cavité.

### C.2 Stabilité d'une cavité

On considère un résonateur paraxial de matrice de propagation sur un tour ABCD, obtenue en "dépliant" la cavité (en remplaçant les miroirs par leur lentille équivalente). Ce résonateur est dit géométriquement stable si tout rayon paraxial reste au voisinage de l'axe après un nombre  $N$  quelconque de tours dans la cavité, c'est-à-dire à travers un système de matrice

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^N .$$

Lorsqu'on cherche à étudier la stabilité de la cavité, on est donc amené à étudier les valeurs propres et les vecteurs propres (qui sont en fait des rayons propres) de la matrice ABCD. On peut montrer que ses deux valeurs propres doivent être de module inférieur à l'unité afin que le rayon reste confiné. On montre ainsi que la cavité est stable si  $|A + D| < 2$  et instable si  $|A + D| > 2$  [Cagnac].

Dans le cas d'une cavité stable, on peut montrer [Arnaud69, Gigan05b] que la matrice de propagation sur un tour, ABCD, possède deux valeurs propres  $\mu_{\pm}$  telles que:

$$\mu_{\pm} = e^{\pm i\alpha} \tag{1.20}$$

où  $\alpha$  est la phase de Gouy accumulée sur un tour dans la cavité. Utilisant la valeur de la trace de la matrice, nous voyons qu'il existe un lien direct entre la phase de Gouy sur un tour et les coefficients de la matrice ABCD:

$$A + D = 2 \cos \alpha \tag{1.21}$$

### C.3 Modes propres d'une cavité linéaire stable

Un faisceau qui est un mode propre d'un résonateur se reproduira à l'identique sur un tour dans celui-ci. Dans l'espace de propagation des faisceaux gaussiens, on sépare la dimension longitudinale de la dimension transverse, car elles jouent des rôles très différents. De la même façon dans une cavité s'opère une double sélection :

#### C.3.1 Sélection en modes transverses

Un mode propre de la cavité est donc nécessairement un mode dont le rayon de courbure complexe est invariant par propagation sur un tour de cavité. Les modes propres d'une cavité stable à miroirs sphériques sont les modes gaussiens.

Déterminer tous les modes propres d'une cavité linéaire revient à déterminer la position et la taille du waist propre du mode  $TEM_{00}$  adapté à la cavité. En effet, tous les modes d'ordres supérieurs seront décrits par le même rayon de courbure complexe, et seront donc également résonnants.

#### C.3.2 Sélection longitudinale

Tous les modes propres transverses se reproduisent identiques à eux-mêmes après un tour de cavité, à une phase près. Pour que le mode soit résonnant il faut également que cette phase soit un multiple de  $2\pi$ .

En notant  $L$  la longueur de cavité (entre les positions initiales  $z_1$  et finale  $z_2$ ), la longueur d'un aller-retour est  $2L$  et les modes transverses résonnants sont les  $A_{mn,p}$  de fréquence  $\nu_{mnp}$  vérifiant sur un demi tour :

$$2\pi \frac{L}{c} \nu_{mnp} - (n + m + 1)\alpha = p\pi, \quad (1.22)$$

où  $\alpha = \arctan\left(\frac{z_2}{z_R}\right) - \arctan\left(\frac{z_1}{z_R}\right)$  est la phase de Gouy accumulée sur une longueur de cavité pour le mode  $TEM_{00}$ , et  $2\pi \frac{L}{c} \nu_{mnp}$  est la phase totale prise par une onde plane sur la longueur  $L$ .

On peut la réécrire :

$$\nu_{mnp} = \frac{c}{2L} \left( p + (n + m + 1) \frac{\alpha}{2\pi} \right) \quad (1.23)$$

Comme dans la propagation d'un champ, on voit que la phase de Gouy joue ici encore un rôle très important. Une fois déterminée la base des modes transverses  $\{TEM_{pq}\}$  adaptée à la cavité, c'est la phase de Gouy qui va déterminer si le mode est résonnant dans la cavité, pour une longueur donnée de cavité.

### C.4 Cavité paraxiale à deux miroirs sphériques

On va rappeler les principaux résultats du calcul bien connu [Siegman] des modes propres du résonateur paraxial à deux miroirs sphériques. On reviendra plus en détail sur les configurations fortement dégénérées transversalement.

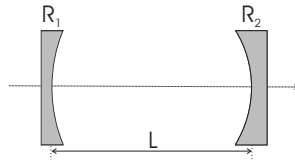


Fig. 1.2: Cavité à deux miroirs sphérique.

On considère deux miroirs sphériques  $M_1$  et  $M_2$ , de rayons de courbure  $R_1$  et  $R_2$ , séparés par une distance  $L$  (fig.1.2). On introduit les deux quantités adimensionnées  $g_1$  et  $g_2$  définies par

$$g_i = 1 - \frac{L}{R_i}.$$

On retrouve par des considérations géométriques simples le domaine de stabilité de la cavité, défini par  $0 \leq g_1 g_2 \leq 1$  et représenté sur la figure 1.3.

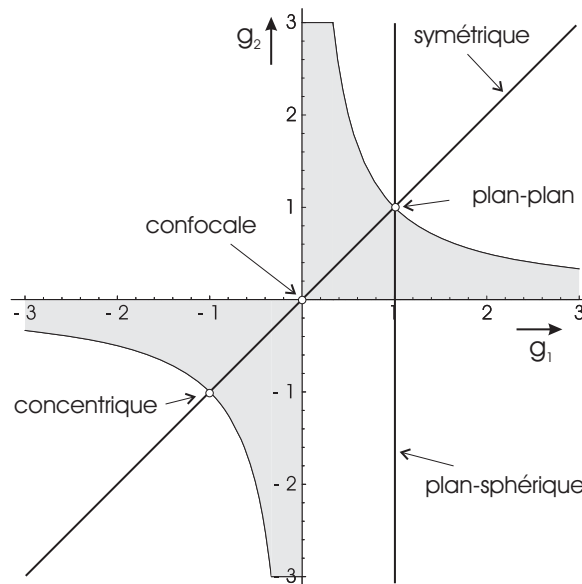


Fig. 1.3: Diagramme de stabilité d'un résonateur à deux miroirs. La région grisée  $0 \leq g_1 g_2 \leq 1$  correspond aux configurations stables. On a indiqué les configurations particulières les plus usuelles.

La base des modes propres de la cavité est la base des modes de gaussiens. On peut calculer  $z_R$ , paramètre de Rayleigh du mode propre de la cavité,  $w_0$  waist propre de la cavité et  $\alpha$  phase de Gouy sur un aller-retour dans la cavité en fonction de  $g_1$ ,  $g_2$  et  $L$ :

$$w_0^2 = \frac{\lambda L}{\pi} \sqrt{\frac{g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)}{(g_1 + g_2 - 2g_1 g_2)^2}} \quad (1.24)$$

$$z_R^2 = \frac{g_1 g_2 (1 - g_1 g_2) L^2}{(g_1 + g_2 - 2g_1 g_2)^2} \quad (1.25)$$

$$\alpha = 2 \arccos(\pm \sqrt{g_1 g_2}). \quad (1.26)$$

La matrice ABCD d'un tour complet de cavité vaut, en choisissant le miroir  $M_1$  comme référence:

$$T = \begin{pmatrix} -1 + 2g_2 & 2Lg_2 \\ 2\frac{2g_1 g_2 - g_1 - g_2}{L} & 4g_1 g_2 - 2g_2 - 1 \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

On notera que ces équations se simplifient si on considère une cavité symétrique ( $g_1 = g_2 = g$ ), ou plan-sphérique, auquel cas on aura  $g_1 = 1$ .

## D Cavités optiques dégénérées

Un résonateur est toujours dégénéré en fréquence car il est résonnant à  $m$  et  $n$  fixés pour plusieurs longueurs d'ondes. C'est ce qu'on appelle la dégénérescence longitudinale. Ce n'est pas ce type de dégénérescence qui nous intéresse puisque nous travaillons à une longueur d'onde donnée. Nous nous focalisons uniquement sur la dégénérescence transverse.

### D.1 Qu'est ce que la dégénérescence transverse?

#### D.1.1 Définition

Considérons une cavité quelconque de chemin optique sur un aller-retour égal à  $L$  et un mode  $TEM_{mn}$ . Le déphasage de ce mode sur un aller-retour est égal à  $kL + (m+n+1)\alpha$ , avec  $\alpha$  phase de Gouy sur un aller retour dans la cavité. Le mode  $TEM_{mn}$  est un mode propre de la cavité lorsque son déphasage sur un aller-retour est un multiple de  $2\pi$ . Ceci est valable pour un peigne de longueurs de cavité donné par:

$$L_{mnp} = \lambda(p + (n + m + 1)\frac{\alpha}{2\pi}) \quad (1.28)$$

On trouve un premier type de dégénérescence: tous les modes  $TEM_{mn}$  possédant la même valeur de  $s = m + n$  résonnent pour une même longueur de cavité. Ceci est lié à la géométrie de la cavité: si une image est transmise à travers une cavité, la même image ayant subi une rotation quelconque par rapport à l'axe optique sera transmise. On dira qu'une

cavité est "dégénérée en modes transverses" lorsqu'il existe une dégénérescence supérieure à la dégénérescence naturelle liée à la symétrie.

L'équation (1.28) nous montre qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la cavité soit dégénérée pour différentes valeur de  $s$  est que la phase de Gouy sur un tour  $\alpha$  soit une fraction rationnelle de  $2\pi$ . On va noter par la suite :

$$\alpha = 2\pi \frac{K}{N} [2\pi]. \quad (1.29)$$

La quantité  $N$  est l'**ordre de dégénérescence de la cavité**, où il faut bien noter pour la suite de la discussion que  $K$  et  $N$  doivent être pris de sorte que la fraction  $K/N$  soit irréductible.

### D.1.2 Propriétés de l'ordre de dégénérescence

En utilisant les équations (1.20) et (1.29), on montre qu'une cavité d'ordre de dégénérescence  $N$  reproduit un champ transverse quelconque identiquement à lui même en  $N$  tours, à une phase près. Autrement dit, sa matrice de Gauss vérifie:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.30)$$

Pour une telle cavité, une vision en termes de rayon lumineux de l'équation (1.30) nous dit qu'un rayon paraxial quelconque reviendra sur lui même après  $N$  tours dans la cavité. Autrement dit il suit un trajet fermé, d'où la notion, introduite dans [DingjanPhD], d'**orbite**.<sup>2</sup>

## D.2 Finesse et quasi-dégénérescence

La finesse d'un résonateur notée  $F$ , est reliée au nombre moyen d'allers-retours qu'effectue la lumière dans la cavité avant de sortir. Elle est reliée aux pertes en intensité par tour de cavité. Dans la limite d'une cavité de bonne finesse, en notant  $\gamma \ll 1$  le coefficient de pertes en intensité sur un tour, on a

$$F \approx \frac{2\pi}{\gamma}.$$

$F$  se caractérise par un élargissement lorentzien des résonances. La condition de dégénérescence transverse stricte, qui est que l'ordre de dégénérescence soit rationnel, est donc beaucoup moins stricte lorsque l'on prend en compte la finesse. En effet, des pics séparés d'une largeur inférieure à la largeur imposée par la finesse de la cavité seront *de facto* simultanément résonnants.

On peut comprendre cet effet de manière intuitive en comparant le nombre moyen de tours effectivement réalisés par la lumière (environ égal à  $F/2\pi$ ) et le nombre de tours  $N$  nécessaires

---

2. On remarquera, que d'après la définition (1.30), **une cavité plane, limitée par deux miroirs plans séparés d'une distance  $L$  n'est pas une cavité dégénérée**

à un rayon pour revenir sur lui même. Si  $N \gg F$ , parler de cavité dégénérée d'ordre  $N$  n'a pas de sens, en effet les photons sortent avant d'avoir pu revenir sur eux-mêmes. Par contre dans le cas où la finesse est faible, la condition moins stricte de résonance permet d'observer des dégénérescences plus facilement. En effet le photon sort au bout d'un nombre moyen de tours faible devant le nombre de tours nécessaire pour que les rayons appartenant à deux modes dont les résonances sont proches se différencient.

### D.3 Exemple de cavité dégénérée: la cavité confocale

Cette cavité est constituée de deux miroirs de rayon de courbure  $R$ , séparés par une distance  $L = R$ , et donc partageant le même point focal (figure D.3).

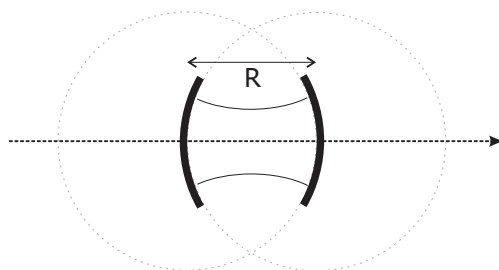


Fig. 1.4: Cavité confocale

Sur le graphe (1.3) on voit que la cavité confocale est en limite du domaine de stabilité. Lorsque la longueur de la cavité varie (déplacement sur la diagonale de la figure 1.3) on reste dans une zone de stabilité: bien qu'en limite de domaine de stabilité, la cavité confocale symétrique est donc stable par rapport aux perturbations expérimentales.

Sa matrice de propagation est:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

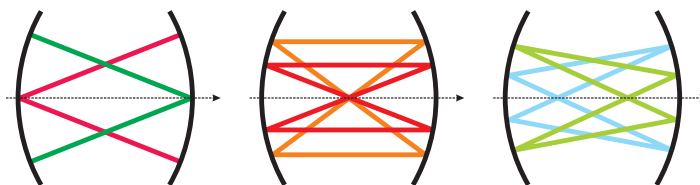


Fig. 1.5: orbites possibles en cavité confocale. (i) rayons passant par le centre des miroirs (ii) rayon passant par le centre de la cavité (iii) rayon quelconque

On a  $T^2 = 1$ , donc la cavité confocale symétrique est une cavité d'ordre de dégénérescence 2. Tous les rayons bouclent sur eux même en deux tours de cavité, comme on peut le voir sur la figure 1.5.

Expérimentalement on verra en outre que cette cavité est à la fois facile à aligner et robuste à de nombreuses perturbations expérimentales.

## Conclusion

Dans ce chapitre introductif, nous avons rappelé des notions bien connues concernant l'imagerie paraxiale ainsi que les cavités optiques.

Après avoir défini ce que l'on entend par "image" dans ce travail de thèse, nous avons donné les outils permettant de décrire la propagation d'un tel objet par un système optique simple. Nous avons insisté sur les transformations en champ proche et en champ lointain préservant à la fois l'intensité et la phase et donné leurs conditions d'obtention. Toutes ces notions seront d'un grand intérêt par la suite.

Ensuite, nous avons fait de brefs rappels sur les cavités optiques. Une cavité optique possède une base propre, qui pour une cavité à deux miroirs sphériques est la base des modes de Laguerre-Gauss adaptée à cette cavité. Généralement, pour une longueur d'onde donnée, ces différents modes transverses sont résonnants pour des longueurs de cavité différentes. Cependant il existe des cavités dites "dégénérées" où l'on observe la dégénérescence de certains modes transverses. Dans ces cavités un rayon lumineux possède une trajectoire fermée.

Les visions présentées en termes de matrice ABCD (pour la propagation d'une image) et celle en termes de modes propres de cavité ne permettent cependant pas de comprendre la propagation d'une image à travers une cavité de degré de dégénérescence quelconque. Dans le chapitre suivant, étudiant une cavité dégénérée particulière, la cavité héli-confocale, nous présenterons un formalisme introduit par S. Gigan [Gigan05b] permettant de résoudre ce problème.





---

# Transmission d'une image à travers une cavité

---

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Généralités</b> . . . . .	<b>24</b>
A.1	Notations . . . . .	24
A.2	Cavité monomode . . . . .	25
A.3	Cavité totalement dégénérée . . . . .	26
<b>B</b>	<b>Cavité partiellement imageante</b> . . . . .	<b>26</b>
B.1	Transformation cyclique . . . . .	27
B.2	Propagation d'une image à travers une cavité dégénérée . . . . .	28
B.3	Application à la cavité confocale . . . . .	28
<b>C</b>	<b>Etude de la cavité hémi-confocale</b> . . . . .	<b>29</b>
C.1	Présentation . . . . .	29
C.2	Transmission à travers la cavité . . . . .	29
C.3	Etude expérimentale . . . . .	31

---

## Introduction

Lors de la première étude d'amplification d'images à l'aide d'un oscillateur paramétrique réalisée au laboratoire (voir chapitre 11), nous avons utilisé une cavité partiellement dégénérée, la cavité hémi-confocale. Au départ l'utilisation d'une telle cavité posait cependant un problème en termes d'imagerie car on ne comprenait pas quelle forme transverse était transmise par la cavité. Si l'on raisonne avec le formalisme bien connu des "modes propres" de la cavité introduit au chapitre précédent, le problème n'est pas trivial. En effet, on le verra

plus loin, dans cette configuration seul un mode pair (ou impair) sur deux peuvent résonner en même temps dans cette cavité. A quoi cela correspond-il en termes d'image transmise?

Dans ce chapitre, utilisant un formalisme original introduit par S. Gigan [Gigan] dit des fonctions "auto-transformes", nous allons traiter le problème de la transmission d'une image à travers une cavité de degré de dégénérescence quelconque. Après une première partie générale, on introduit le formalisme des fonctions auto-transformes. Pour finir, les résultats théoriques sont confrontés à l'expérience grâce à l'étude de la cavité héli-confocale<sup>1</sup>.

## A Généralités

### A.1 Notations

Considérons une cavité linéaire à deux miroirs sphériques, adaptée en impédance: les miroirs d'entrée et de sortie ont les mêmes coefficients de transmission et on considère qu'il y a aucune perte dans la cavité. A résonance, le mode propre de la cavité est donc transmis intégralement. On considère une image en entrée comme une répartition complexe du champ électromagnétique monochromatique  $\vec{E}_{in}(\vec{r})$  dans un plan avant la cavité (voir 2.1). C'est cette image que l'on veut détecter sur un plan de détection en sortie de la cavité. Après propagation dans un système paraxial adéquat, le champ  $\vec{E}_{in}(\vec{r})$  est transformé par une transformation en champ proche (en intensité et en phase, avec un grandissement unité) dans un plan de la cavité, que l'on appellera plan de référence. Après propagation dans un deuxième système paraxial identique (réalisant une transformation en champ proche en intensité et en phase, de grandissement unité), on obtient l'image en sortie  $\vec{E}_{out}(\vec{r})$  sur un plan de détection (contenant une caméra CCD par exemple). Comme les trois plans (entrée, sortie, référence) sont parfaitement imagés l'un par rapport à l'autre, on utilisera la même notation  $\vec{r}$ , pour les trois coordonnées transverses et on omettra la coordonnée  $z$ .

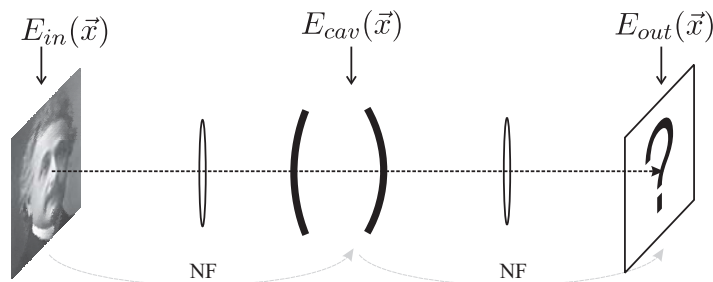


Fig. 2.1: Schéma de principe de la transmission d'une image à travers une cavité. On fait le vrai champ proche de l'image dans la cavité, puis le champ proche du même plan de la cavité sur une caméra CCD.

1. Ce chapitre a donné lieu à un article:[Gigan05b]

On note  $\mathcal{T}_{cav}$ , la matrice ABCD correspondant à un aller-retour dans la cavité en partant du plan de référence. D'après l'expression (1.16) du chapitre précédent, sans tenir compte des coefficients de réflexion des miroirs, le champ  $E_{rt}(\vec{r})$  après un aller-retour dans la cavité est donné par:

$$E_{rt}(\vec{r}) = e^{ikL}\mathcal{T}_{cav}[E_{in}(\vec{r})] \quad (2.1)$$

avec  $L$  longueur optique sur un aller-retour dans la cavité.

Considérons la base  $\{u_{mn}\}$ , base des modes propres gaussiens  $TEM_{mn}$  de la cavité. C'est la base adéquate afin d'étudier l'interaction du champ avec la cavité. Soit  $a_{m,n}$  la projection de l'image sur le mode  $TEM_{mn}$  de la cavité.

On a:

$$a_{m,n} = \int_{\text{espace}} E_{in}(\vec{x}) u_{m,n}^*(\vec{x}) d^2\vec{x} \quad (2.2)$$

et

$$E_{in}(\vec{r}) = \sum_{m,n} a_{m,n} u_{m,n}(\vec{r}) \quad (2.3)$$

L'action d'une cavité sur l'image peut être comprise comme une transmission et/ou un déphasage partiel sur chaque mode  $u_{m,n}$ . Autrement dit on a en sortie (dans le plan où on a imagé le plan de référence de la cavité):

$$E_{out}(\vec{r}, t) = \sum_{m,n} t_{m,n} a_{m,n} u_{m,n}(\vec{r}) \quad (2.4)$$

où  $t_{m,n}$  est la fonction de transmission en amplitude de la cavité pour le mode  $TEM_{mn}$ , fonction de la longueur et de la géométrie de la cavité. Le schéma de principe de l'expérience est représenté sur la figure 2.1.

## A.2 Cavité monomode

Considérons une cavité monomode, de longueur  $L$  choisie de telle manière que seul le mode  $TEM_{00}$  résonne. Autrement dit, la fonction de transmission de la cavité sera, pour une finesse infinie:

$$t_{m,n} = \delta_{m0}\delta_{n0} \quad (2.5)$$

Par conséquent le champ en sortie sera:

$$E_{out}(\vec{x}, t) = \sum_{m,n} t_{m,n} a_{m,n} u_{m,n}(\vec{x}) = a_{0,0} u_{0,0}(\vec{x}) \quad (2.6)$$

Toute l'information transverse sur le champ  $E_{in}$  sera perdue, lors du passage dans la cavité. Dans une telle cavité, la phase de Gouy  $\alpha/2\pi$  n'est pas une fraction rationnelle: en termes de matrice ABCD, il n'existe aucun entier  $N$  pour lequel  $\mathcal{T}_{cav}^N$  soit égal à la matrice identité. En termes de rayons, on a vu au chapitre précédent qu'une cavité monomode est

telle qu'un rayon ne revient jamais sur lui-même, quel que soit le nombre de tours dans la cavité.

$$\forall N \in \mathbb{N}, \mathcal{T}_{cav}^N \neq I_2 \quad (2.7)$$

où  $I_2$  est la matrice identité de taille  $2 \times 2$ .

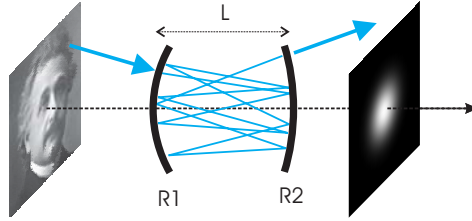


Fig. 2.2: Transmission d'une image à travers une cavité monomode, résonnante pour le  $TEM_{00}$ .

On peut alors comprendre cette perte de toute information spatiale en cavité monomode comme le fait qu'un rayon sortant de la cavité, caractérisé par distance à l'axe  $r'$ , et l'angle  $\theta'$  (voir la figure 1.1), aura perdu lors de ses nombreux allers-retours dans la cavité toute information spatiale relative au rayon entrant, caractérisé par  $r$  et  $\theta$  (voir figure 2.2).

### A.3 Cavité totalement dégénérée

Si on considère maintenant une cavité complètement dégénérée, (on reviendra en détail sur l'étude d'une telle cavité dans le chapitre suivant 3) alors tous les modes sont résonnants pour une même longueur de cavité. Par conséquent la fonction de transmission de la cavité, amenée à résonance, sera :

$$t_{m,n} = 1 \quad (2.8)$$

et le champ en sortie sera :

$$E_{out}(\vec{x}) = \sum_{m,n} t_{m,n} a_{m,n} u_{m,n}(\vec{x}) = E_{in}(\vec{x}) \quad (2.9)$$

Une cavité totalement dégénérée est donc totalement imageante. En termes de matrice ABCD, elle se caractérise par  $\mathcal{T}_{cav} = I_2$ . Par conséquent, un rayon sortira après un nombre quelconque de tours dans la cavité avec les mêmes caractéristiques  $(r, \theta)$  qu'à l'entrée (dans le plan de référence). Toute l'information spatiale est conservée. C'est pour cette raison que cette cavité est appelée cavité "auto-imageante".

## B Cavité partiellement imageante

On va ici s'intéresser à la transmission d'une image à travers une cavité dégénérée d'ordre  $N$  (voir page 18). On va utiliser un formalisme adapté à la description de telles cavités introduit

pour la première fois dans [Gigan05b] utilisant les fonctions "auto-transformées".

### B.1 Transformation cyclique

Certaines fonctions sont leur propre transformée de Fourier. Elles vérifient:

$$\tilde{f}(u) = f(u) \quad (2.10)$$

où la transformée de Fourier  $\tilde{f}$  est définie par:

$$\tilde{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{2\pi iux} dx. \quad (2.11)$$

Les deux exemples bien connus sont la gaussienne  $f(x) = e^{-\pi x^2}$  et le peigne de Dirac infini  $f(x) = \sum_n \delta(x - n)$ . Ces fonctions sont appelées Self-Fourier Functions ou SFFs. Caola dans [Caola91] montre que, pour une fonction  $g(x)$  quelconque, alors la fonction paire :

$$f(x) = g(x) + g(-x) + \tilde{g}(x) + \tilde{g}(-x) \quad (2.12)$$

est une SFF. Dans [Lohmann92a], Lohmann et Mendlovic ont de plus montré que la structure de construction d'une SFF par l'équation (2.12) est non seulement suffisante pour construire une SFF, mais également nécessaire. Autrement dit toute SFF  $f(x)$  peut être générée par l'équation (2.12) à partir d'une autre fonction  $g(x)$ .

On peut généraliser cette approche aux transformations cycliques d'ordre  $N$ . Une transformation  $\mathcal{T}_C$  est dite cyclique d'ordre  $N$  si, appliquée  $N$  fois à une fonction  $F$  quelconque on retrouve la fonction initiale :

$$\mathcal{T}_C^N[F(x)] = F(x)$$

Considérons  $\mathcal{T}$ , une transformation quelconque. Une fonction  $F_S$  va être fonction "auto-transformée" pour la transformation  $\mathcal{T}$  si:

$$\mathcal{T}[F_S(x)] = F_S(x)$$

En considérant une transformation cyclique d'ordre  $N$   $\mathcal{T}_C$ , on peut montrer que  $F_S(x)$ , défini comme

$$F(x) = g(x) + \mathcal{T}_C[g(x)] + \mathcal{T}_C^2[g(x)] + \dots + \mathcal{T}_C^{N-1}[g(x)] \quad (2.13)$$

est une fonction auto-transformée pour la transformation  $\mathcal{T}_C$ , puisque :

$$\mathcal{T}_C[F(x)] = \mathcal{T}_C[g(x)] + \mathcal{T}_C^2[g(x)] + \dots + \mathcal{T}_C^{N-1}[g(x)] + \mathcal{T}_C^N[g(x)] = F(x). \quad (2.14)$$

Et, comme précédemment, il est facile de se convaincre que toute fonction auto-transformée pour  $\mathcal{T}_C$  peut être générée de cette façon.

On va montrer par la suite que les cavités dégénérées génèrent naturellement de telles fonctions auto-transformées, par la transformation (2.14).

## B.2 Propagation d'une image à travers une cavité dégénérée

On considère une cavité d'ordre de dégénérescence  $N$ , avec  $\alpha = \frac{K}{N}[2\pi]$ . On prend en compte la finesse finie de la cavité. Pour cela on note  $r$ , le coefficient de réflexion en amplitude des deux miroirs (qui est le même pour les deux miroirs puisque l'on a supposé la cavité adaptée en impédance). On suppose que la longueur de la cavité est telle que les modes  $TEM_{mn}$ , avec  $s = m + n$  constant, soient résonnants. D'après (1.28), on a donc  $L_{mnp} = \lambda(p + (n + m + 1)\frac{\alpha}{2\pi})$ . Ainsi le champ en sortie est donné par:

$$E_{out}(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} [r^2 e^{-2i\pi s K/N} \mathcal{T}_{cav}]^n E_{in}(\vec{r}) \quad (2.15)$$

En utilisant le fait que  $(e^{-2i\pi s K/N} \mathcal{T}_{cav})^N [E_{in}(\vec{r})] = E_{in}(\vec{r})$ , on peut finalement écrire le champ en sortie comme:

$$E_{out}(\vec{r}) = \frac{1}{1 - r^{2N}} \sum_{n=0}^{N-1} (r^2 e^{-2i\pi s K/N} \mathcal{T}_{cav})^n [E_{in}(\vec{r})] \quad (2.16)$$

Le champ  $E_{out}(\vec{r})$  donné par (2.16) a une propriété importante:  $\mathcal{T}_{cav} E_{out}(\vec{r})$  est proportionnel à  $E_{out}(\vec{r})$ . **L'image en sortie est donc une fonction auto-transformée associée à la transformation  $\mathcal{T}_{cav}$ .** Il est à remarquer que  $E_{out}(\vec{r})$  dépend de  $s$  ( $s = 0, \dots, N - 1$ ) et est donc différent selon les différentes familles de modes. Pour simplifier le problème, lorsque l'on considère que les coefficients de réflexion des miroirs sont très bons, on peut approximer  $r$  par 1 dans tous les termes de la somme (2.16).

## B.3 Application à la cavité confocale

On a vu au chapitre précédent que la cavité confocale est une cavité dont la matrice de Gauss  $\mathcal{T}_{cav}$  vaut :

$$\mathcal{T}_{cav} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

La phase de Gouy sur un aller-retour est égale à  $\pi$  ( $K = 1, N = 2, s = 0, 1$ ). La transformation du champ sur un aller-retour  $\mathcal{T}_{cav} E(\vec{r})$  donne le champ symétrique  $E(-\vec{r})$ . Ainsi le champ en sortie est proportionnel à:

$$E_{in}(\vec{r}) + e^{-i\pi s} E_{in}(-\vec{r}) \quad (2.18)$$

En sortie, le champ correspond donc à la partie paire ( $s = 0$ ) ou impaire ( $s = 1$ ) de l'image en entrée.

## C Etude de la cavité héli-confocale

### C.1 Présentation

La cavité héli-confocale est obtenue en plaçant un miroir plan dans le plan de symétrie d'une cavité confocale (voir Figure 2.3). Cette modification ne change ni la trajectoire, ni la base des modes de la cavité.

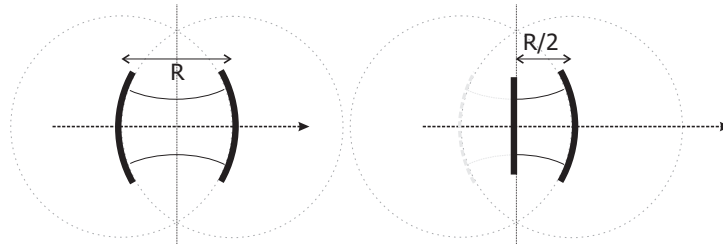


Fig. 2.3: La cavité confocale (à gauche) présente un plan de symétrie. Si on place un miroir dans ce plan, on obtient la cavité héli-confocale (à droite).

Cette cavité est donc constituée d'un miroir plan, et d'un miroir courbe de rayon de courbure  $R$  séparés par une distance  $\frac{R}{2}$ . Bien que les modes propres ne soient pas modifiés, nous allons voir par la suite que le comportement transverse de cette cavité est néanmoins fort différent de celui de la cavité confocale.

### C.2 Transmission à travers la cavité

#### C.2.1 En termes de modes propres de cavité

Cette cavité est dégénérée en modes transverses, c'est à dire que des familles de modes  $u_{pq}$  sont résonnantes pour les mêmes longueurs de cavité.

On a vu que la cavité confocale était dégénérée d'ordre 2. Dans le cas de la cavité héli-confocale, cette dégénérescence est d'ordre 4, c'est-à-dire qu'il existe 4 familles distinctes de modes correspondantes à  $p + q = n$  [4]. Cependant il est difficile de prédire le comportement en termes de transmission d'image uniquement avec cette information. On va voir que le traitement en termes de matrice de propagation apporte beaucoup plus d'informations.

#### C.2.2 En termes de matrice de propagation

La matrice ABCD d'un aller-retour, au départ du miroir plan, est:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{R}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{R}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{R}{2} \\ -\frac{2}{R} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$



Deux allers-retours donnent –logiquement– la matrice de propagation d'une cavité confocale:

$$M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ce qui revient à dire que deux allers-retour donnent le symétrique du champ à l'entrée. On retrouve également que

$$M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le champ revient identique à lui-même en quatre allers-retours, ce qui revient à dire que l'ordre de dégénérescence est de 4.

La phase de Gouy sur un aller-retour dans la cavité héli-confocale est égale à  $\pi/2$  ( $K = 1, N = 4$ ). La transformation effectuée sur un aller-retour est équivalente à une transformation par un système  $f - f$  (le miroir jouant le rôle de la lentille de focale  $f = \frac{R}{2}$ ), soit le système classique d'imagerie donnant le champ lointain exact. En notant  $E(\vec{r})$  le champ initial, le système effectue donc sur un aller-retour une transformée de Fourier spatiale à 2D, et donne donc le champ  $\tilde{E}(\vec{r})$ :

$$\mathcal{T}_{cav}(E(\vec{r})) = \tilde{E}(\vec{r}) = \frac{2}{\lambda R} \int E(\vec{x}) e^{-i\frac{4\pi}{\lambda R}\vec{r}\vec{x}} d^2\vec{x} \quad (2.20)$$

D'après (2.16), le champ sortant (voir figure 2.4) est proportionnel à:

$$E_{in}(\vec{x}) + e^{-\frac{i\pi s}{2}} \tilde{E}_{in}(\vec{x}) + e^{-\frac{2i\pi s}{2}} E_{in}(-\vec{x}) + e^{-\frac{3i\pi s}{2}} \tilde{E}_{in}(-\vec{x}) \quad (2.21)$$

avec  $s = 0, 1, 2, 3$ . On peut réécrire cette expression du champ en sortie de manière plus élégante par:

$$(E_{in}(\vec{x}) + a^2 E_{in}(-\vec{x})) + a (\tilde{E}_{in}(\vec{x}) + a^2 \tilde{E}_{in}(-\vec{x})) \quad (2.22)$$

avec  $a$ , racine 4<sup>ime</sup> de l'unité:  $a = 1, i, -1$  ou  $-i$ .

Cette équation permet de connaître le comportement en termes d'imagerie de la cavité:

- la valeur de  $a^2$  est 1 ou  $-1$  et détermine la parité du champ.
- la valeur de  $a$  détermine la phase entre la partie paire/impair du champ et de sa transformée de Fourier.

Un parallèle avec le traitement en termes de modes propres permet de voir que la valeur de  $a$  correspond à la famille de mode résonnante.

$$\begin{cases} a = 1 & \longrightarrow \text{modes } p + q = 0[4] \\ a = i & \longrightarrow \text{modes } p + q = 1[4] \\ a = -1 & \longrightarrow \text{modes } p + q = 2[4] \\ a = -i & \longrightarrow \text{modes } p + q = 3[4] \end{cases} \quad (2.23)$$

En termes d'imagerie la cavité héli-confocale, résonnante pour les modes  $p + q = 0[4]$ , transmet la partie paire du champ, et de sa transformée de Fourier.

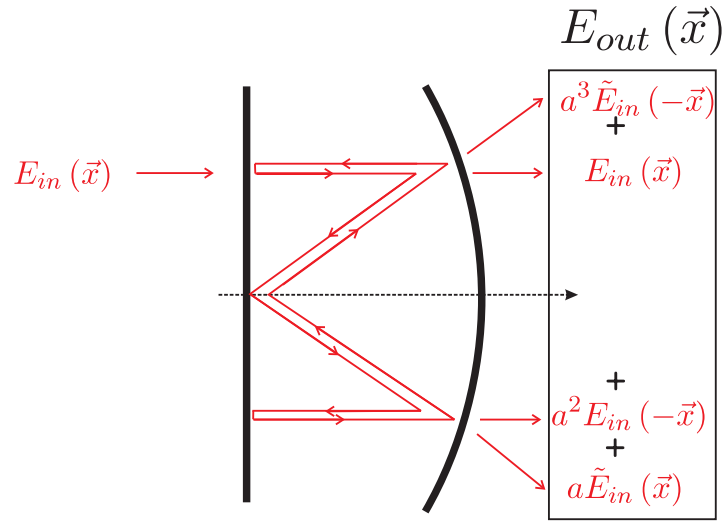


Fig. 2.4: Trajet d'un rayon dans la cavité héli-confocale

### C.3 Etude expérimentale

Une fois ces résultats théoriques établis, nous avons voulu les comparer avec l'expérience en étudiant la transmission d'une image quelconque à travers une cavité héli-confocale.

#### C.3.1 Configuration expérimentale

Expérimentalement, on réalise la transmission d'une image à travers la cavité, comme schématisé sur la figure 2.5, de la manière suivante:

1. On réalise l'image en interceptant un mode gaussien  $TEM_{00}$  issu d'un laser par une mire.
2. On image le champ juste après la mire (notre image) sur le miroir plan de la cavité par un champ proche complet (voir page 13).
3. On image le miroir plan de la cavité sur une caméra CCD par un nouveau champ proche complet.

#### C.3.2 Résultats

Dans ce paragraphe, on ne rentre pas en détail sur les différents éléments de l'expérience (pour cela on se reportera à la troisième partie). On a pu réaliser l'expérience consistant à transmettre une image à travers la cavité héli-confocale, qui très simplifiée peut se résumer au schéma 2.5. La mire utilisée est représentée au chapitre suivant (voir figure 3.5). Les résultats obtenus sont montrés sur la figure 2.6. On compare les images transmises sans cavité (absence du miroir plan), à gauche aux images transmises lorsque la cavité est asservie, à droite. On

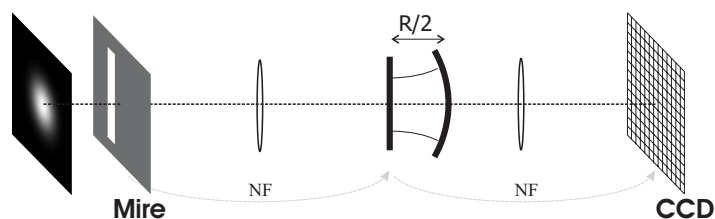


Fig. 2.5: Schéma de l'expérience de transmission d'une image à travers la cavité

voit que l'on retrouve bien toujours la partie paire de l'image et de la transformée de Fourier. Par exemple pour l'image constituée du **1**, on voit bien en sortie que l'on obtient la partie paire de l'image (le symétrique du **1** par rapport à l'axe optique) ainsi que la partie paire de la transformée de Fourier (qui correspond au trait horizontal).

## Conclusion

Une cavité monomode n'est pas adaptée à la transmission d'une image. Pour des cavités dégénérées, on a présenté un formalisme original permettant de comprendre leurs effets sur des images. Ce formalisme a été validé par sa confrontation avec l'étude expérimentale de la cavité héli-confocale. Ces résultats seront précieux pour la compréhension du chapitre **11**, où on étudie l'amplification paramétrique en cavité héli-confocale.

Nous voyons cependant qu'une cavité partiellement dégénérée déforme partiellement une image. De l'information est perdue. Une cavité partiellement dégénérée n'est donc pas parfaitement adaptée à l'amplification d'une image de forme quelconque. Nous avons voulu étudier une cavité transmettant intégralement une image: cette cavité dite "auto-imageante" est présentée dans le prochain chapitre.

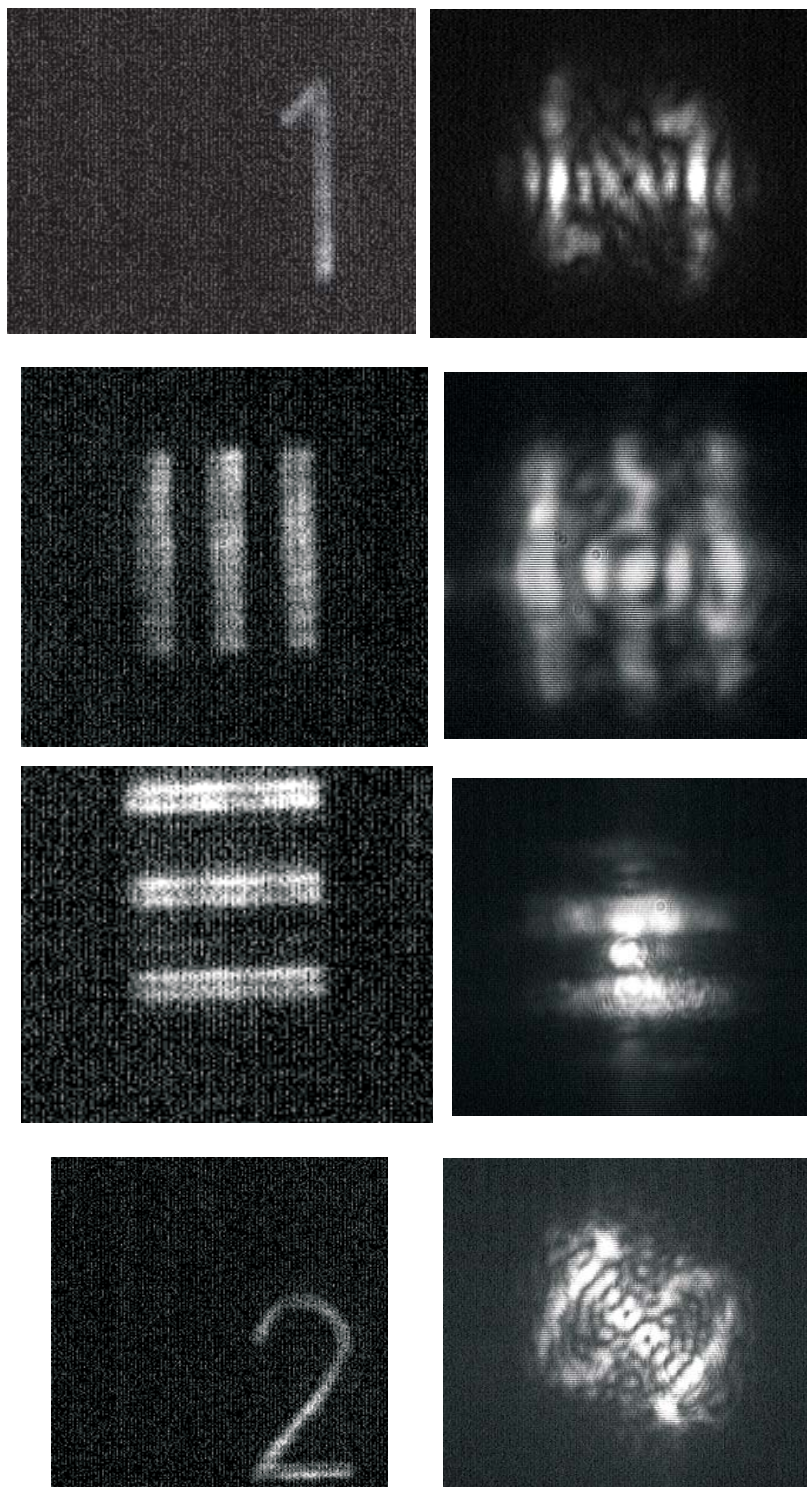


Fig. 2.6: Détail de la mire (à gauche) et leur transmission à travers la cavité confocale en champ proche (à droite).



---

# Une cavité totalement dégénérée: la cavité auto-imageante

---

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Généralités</b> . . . . .	<b>36</b>
A.1	Une cavité auto-imageante à deux miroirs? . . . . .	36
A.2	Une cavité auto-imageante à trois miroirs . . . . .	37
A.3	Caractéristiques de la cavité auto-imageante linéaire . . . . .	37
<b>B</b>	<b>Etude expérimentale d'une cavité auto-imageante en configuration linéaire</b> 42	
B.1	La cavité . . . . .	42
B.2	Montage expérimental . . . . .	42
B.3	Réglages . . . . .	43
B.4	Transmission d'une image . . . . .	44
<b>C</b>	<b>Etude expérimentale du doublage dans une cavité auto-imageante</b> 45	
C.1	Le montage expérimental . . . . .	45
C.2	Résultats . . . . .	47

---

## Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons étudié l'effet d'une cavité partiellement dégénérée sur une image. Une cavité dégénérée, de degré de dégénérescence  $N > 1$  ne transmet que partiellement l'image et la déforme. Le domaine d'utilisation de telles cavités est donc limité à des images particulières qui pourront être intégralement transmises. Pour la cavité confocale, ce sont les images à symétrie paire ou impaire par rapport à l'axe optique; pour la cavité hémi-confocale, les images auto-transformées pour la transformée de Fourier.

Il existe cependant des cavités qui permettent de transmettre intégralement une image. Ces cavités totalement dégénérées (de degré de dégénérescence unité) sont appelées "auto-imageantes". L'étude des cavités totalement dégénérées a commencée dans les années 60 [Pole65], [Wilczynski65]. Arnaud [Arnaud69] a fait une étude exhaustive des différentes configurations possibles, introduisant pour la première fois le modèle de cavité auto-imageante linéaire le plus simple (la cavité se compose d'un miroir plan, d'une lentille et d'un miroir courbe).

En vue de l'utilisation d'une telle cavité pour un oscillateur paramétrique optique, nous avons fait l'étude expérimentale d'une cavité linéaire parfaitement dégénérée. Dans une première partie introductive, nous voyons à quelles conditions une cavité la plus simple possible est totalement dégénérée, puis nous étudierons en détail les propriétés de la cavité auto-imageante la plus simple (son domaine de stabilité, sa plage de fonctionnement). Dans une deuxième partie, nous étudions expérimentalement la transmission d'une image à l'aide d'une cavité auto-imageante. Enfin dans une troisième partie nous utilisons une telle cavité pour convertir une image initialement dans l'infrarouge en une image dans le vert par doublage de fréquence.

## A Généralités

Une cavité est totalement dégénérée si un rayon quelconque reboucle sur lui-même après un aller-retour dans la cavité. De manière équivalente, on peut dire que la matrice de Gauss sur un aller-retour dans la cavité, à partir de n'importe quel plan, est l'identité:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quelle est la configuration de cavité la plus simple ayant une telle propriété?

### A.1 Une cavité auto-imageante à deux miroirs?

Pour commencer, on peut se demander s'il existe une cavité à deux miroirs totalement dégénérée. Dans la suite de la discussion, on va introduire des cavités en anneau, ne faisant intervenir que des miroirs plans et des lentilles. Ceci ne restreint en rien notre discussion puisque une cavité linéaire a un équivalent en anneau: il suffit de "déplier la cavité" et de remplacer les miroirs sphériques de rayon de courbure  $R$  par des lentilles de focale équivalente  $R/2$ .

La matrice ABCD reliant la position et l'angle d'un faisceau lumineux du plan image d'une lentille de distance focale  $f$ , à un plan situé à une distance  $c$  du plan focal objet est donnée par:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -(\frac{1}{f}) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -(\frac{1}{f}) & (\frac{c}{f}) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Considérons deux éléments optiques de distances focales  $f_1$  et  $f_2$  sur un trajet fermé. En utilisant deux fois l'expression précédente, la matrice ABCD sur un aller-retour est donné par:

$$M_{RT2} = \begin{pmatrix} 0 & f_1 \\ -(\frac{1}{f_1}) & (\frac{c}{f_1}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & f_2 \\ -(\frac{1}{f_2}) & (\frac{c}{f_2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\frac{f_1}{f_2}) & \frac{f_1 c_2}{f_2} \\ -(\frac{c_1}{f_1 f_2}) & -(\frac{f_2}{f_1}) + \frac{c_1 c_2}{f_1 f_2} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Pour que cette matrice soit égale à l'identité, les deux éléments doivent être confocaux ( $c_1 = c_2 = 0$ ) et doivent satisfaire la condition  $f_1 + f_2 = 0$ . Cette condition n'est pas réalisable avec deux lentilles minces puisque la longueur totale de la cavité est  $L = 2f_1 + 2f_2 = 0$ . Il est donc impossible d'envisager une cavité totalement dégénérée linéaire à deux miroirs. Qu'en est-t-il pour une cavité possédant trois lentilles?

## A.2 Une cavité auto-imageante à trois miroirs

En reprenant un schéma en anneau, mais maintenant contenant trois lentilles de focales  $f_1, f_2, f_3$ , avec des distances  $c_{ij}$  entre le plan focal image de la lentille  $i$  et le plan focal objet de la lentille  $j$  (voir figure 3.1), on peut montrer que la matrice ABCD sur un aller retour est égale à l'identité si et seulement si:

$$c_{12} = \frac{f_1 f_2}{f_3}, c_{23} = \frac{f_2 f_3}{f_1}, c_{31} = \frac{f_3 f_1}{f_2} \quad (3.3)$$

A cette condition la longueur totale de la cavité est donnée par:

$$L = 2(f_1 + f_2 + f_3) + c_{12} + c_{23} + c_{31} = \frac{(f_1 f_2 + f_2 f_3 + f_3 f_1)^2}{f_1 f_2 f_3} \quad (3.4)$$

Puisque les distances  $c_{ij}$  entre les lentilles doivent être positives, les trois lentilles doivent être convergentes. Lorsque  $f_1 = f_2 = f$ , la cavité en anneau est équivalente à la cavité linéaire représentée sur la figure 3.2, qui comprend un miroir de rayon de courbure  $R = 2f_3$ , une lentille de focale  $f$ , et un miroir plan. Les distances entre les éléments optiques mentionnées sur la figure 3.1 sont données par l'équation 3.3.

C'est cette configuration de cavité linéaire auto-imageante, la plus simple qui puisse exister que nous avons mise en place. Avant de voir sa réalisation expérimentale, étudions les propriétés d'une telle cavité.

## A.3 Caractéristiques de la cavité auto-imageante linéaire

### A.3.1 Domaine de stabilité de la cavité

Le domaine de stabilité d'une cavité de matrice ABCD sur un aller retour

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$



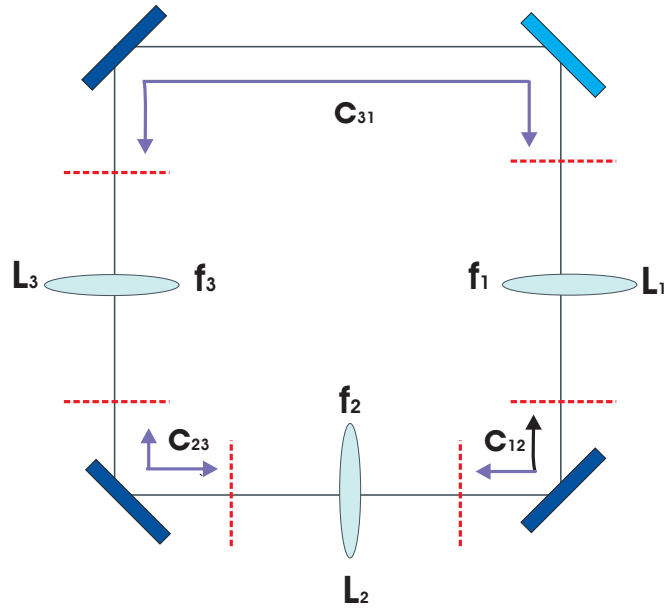


Fig. 3.1: Représentation schématique d'une cavité en anneau à trois lentilles. On introduit les distances  $c_{ij}$  entre le plan focal image de la lentille  $i$  et le plan focal objet de la lentille  $j$

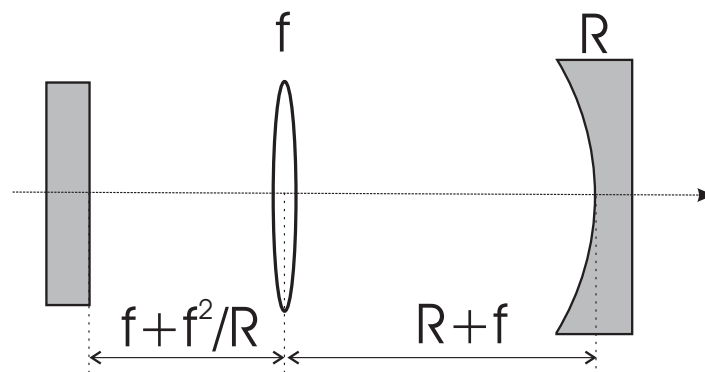


Fig. 3.2: Cavité auto-imageante à trois lentilles: équivalent en configuration linéaire

peut être étudié de façon générale [Siegman]. On peut montrer que les rayons restent confinés dans la cavité à condition que les valeurs propres de la cavité soient inférieures à l'unité. On montre ainsi que la cavité est stable si et seulement si  $|A + B| < 2$ . Le diagramme de stabilité de la cavité auto-imageante en fonction des longueurs  $L_1$  et  $L_2$  des éléments optiques est représenté sur la figure 3.3. On s'est placé dans le cas où  $R = 50\text{mm}$ ,  $f = 45,5\text{mm}$ .

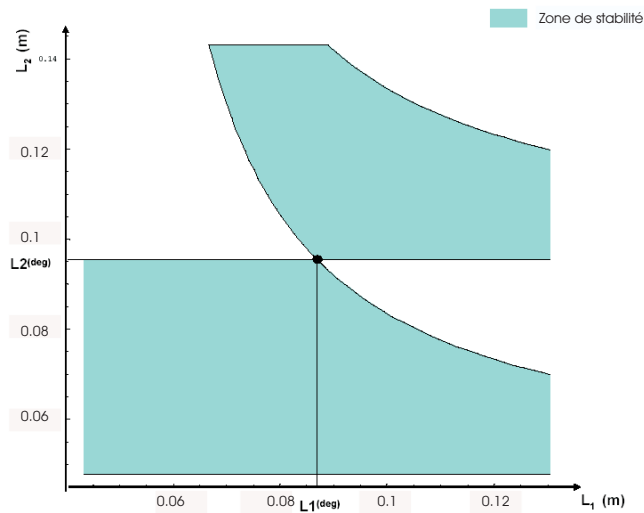


Fig. 3.3: Diagramme de stabilité de la cavité auto-imageante (partie colorée) en fonction des distances  $L_1$  et  $L_2$  entre les éléments optiques. Le point  $(L_1^{(deg)}, L_2^{(deg)})$  est le point de dégénérescence.

### A.3.2 Calcul du waist propre de la cavité auto-imageante proche de la zone de dégénérescence

On se propose de calculer le waist propre de la cavité formée d'un miroir plan, d'une lentille de focale  $f$ , d'un miroir de rayon de courbure  $R$ . On note  $\epsilon$  et  $\delta$  les écarts de cette cavité à la cavité auto-imageante.

Pour calculer le waist propre de la cavité (ou de manière équivalente son paramètre de Rayleigh  $z_R$ ) on calcule la matrice ABCD de propagation du miroir d'entrée  $M_1$  plan, jusqu'au miroir de sortie  $M_2$  (miroir courbe). Au niveau du miroir de sortie le rayon de courbure du faisceau doit être égal à  $R$ . C'est la condition qui va nous permettre de déterminer le waist propre de la cavité.

La matrice ABCD de  $M_1$  jusqu'à  $M_2$  est donnée par:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{-R+\epsilon}{f} & \frac{R\delta+f^2\epsilon/R-\delta\epsilon}{f} \\ \frac{-1}{f} & \frac{-f}{R} + \frac{\delta}{f} \end{pmatrix}$$

Ainsi le rayon de courbure complexe en  $M_2$  est donné par

$$q' = \frac{Aq + B}{Cq + D} \quad (3.5)$$

avec  $q = -iz_R$  où  $z_R$  représente le paramètre de Rayleigh de la cavité au niveau du miroir plan.

L'équation à résoudre est donc:

$$\frac{1}{q'} = \frac{1}{R} \quad (3.6)$$

qui a pour solution:

$$z_R(\epsilon, \delta) = \sqrt{\frac{-(R\delta(R-\epsilon) + f^2\epsilon)(R\delta\epsilon - f^2(R+\epsilon))}{R^2(R-\epsilon)\epsilon}} \quad (3.7)$$

La fonction  $z_R(\epsilon, \delta)$  possède un comportement non trivial en zéro. Lorsque l'on regarde le comportement de la limite de  $z_R$  sur des courbes  $\delta = \alpha\epsilon$  (avec  $\alpha$  réel quelconque), on trouve comme développement limité de la fonction  $z_R(\epsilon)$ :

$$z_R = \frac{f}{R}\sqrt{R^2\alpha + f^2} + \frac{f}{R^2} \frac{(2f^2 + R^2\alpha)\sqrt{R^2\alpha + f^2}}{R^2\alpha + f^2}\epsilon + 0(\epsilon^2) \quad (3.8)$$

Ceci correspond à un waist propre qui a pour limite:

$$w_0 = \left(\frac{\lambda f}{\pi R}\sqrt{R^2\alpha + f^2}\right)^{1/2} \quad (3.9)$$

Nous voyons donc que la limite en  $(0, 0)$  de la fonction  $z_R(\epsilon, \delta)$  dépend du chemin choisi: mathématiquement la fonction  $z_R$  n'admet pas de limite en zéro. Contrairement à la cavité

confocale pour laquelle on peut définir un waist propre de cavité à confocalité ( $w_0 = \frac{\lambda R}{2\pi}$ ), dans le cas de la cavité auto-imageante ceci est impossible. A la dégénérescence parfaite tout mode est résonnant dans la cavité auto-imageante: la notion de waist propre de cavité n'a pas raison d'être.

### A.3.3 Plage de fonctionnement en cavité auto-imageante

On se pose la question de savoir sur quelle plage on garde une cavité autoimageante. On sait par exemple que le réglage de la cavité concentrique est extrêmement fin, alors que celui de la confocale moins difficile (c'est un effet du deuxième ordre en fonction de l'écart à la confocalité).

Pour le calcul on se sert d'un critère de type Rayleigh, à savoir que l'écart entre les deux premiers pics doit être inférieur à la largeur d'un pic due à sa finesse. Pour ce critère, on introduit le paramètre  $\alpha$ , phase de Gouy sur un aller retour:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{A+D}{2}\right) \quad (3.10)$$

Selon le critère de Rayleigh la plage de dégénérescence est définie pour:

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\arccos\left(\frac{A+D}{2}\right)}{2\pi} \leq \frac{1}{F} \quad (3.11)$$

où  $F$  est la finesse de la cavité. Cependant, dans le cas d'un fonctionnement multimode, ce critère doit être modifié. En effet, supposons que l'on soit dans une zone non dégénérée, stable, mais proche de la situation autoimageante. La configuration de la cavité est monomode et on envoie de nombreux modes transverses  $TEM_{mn}$  dans cette cavité. On appellera  $N = \max\{1 + m + n\}$  et on suppose que  $N > 1$ , le cas  $N = 1$  ne nous intéressant pas pour des images. On voit bien que la véritable condition de Rayleigh est maintenant donnée par l'inégalité:

$$\frac{\arccos\left(\frac{A+D}{2}\right)}{2\pi} \leq \frac{1}{NF} \quad (3.12)$$

où  $F$  est la finesse de la cavité. Plus des modes élevés seront présents, plus la plage sur laquelle on travaille sera étroite. Ainsi, en calculant la matrice ABCD sur un aller retour de notre cavité ( $f \sim R = 50 \text{ mm}$ ) en fonction des écarts  $\delta$  et  $\epsilon$ , on a accès à  $\frac{\arccos\left(\frac{A+D}{2}\right)}{2\pi}$ , qui doit rester inférieur à  $\frac{1}{F}$ . Par exemple avec une finesse de 200, la précédente fonction ne doit pas dépasser 0.005. En traçant la fonction on voit que sur une plage de  $500\mu\text{m}$  on est encore dégénéré (cas  $N=2$ ). Par contre si on a  $N = 10$ , la plage de fonctionnement est bien plus réduite ( $50\mu\text{m}$ ).

Proche du point purement autoimageant, dans le cas  $R = f$ , le terme en  $\arccos\left(\frac{A+D}{2}\right)$  peut se développer en une expression du type:  $\arccos\left(\frac{A+D}{2}\right) = \arccos\left(1 - \frac{2}{R^2}\delta\epsilon - \frac{2}{R^2}\epsilon^2\right)$ . En utilisant le développement limité de  $\arccos$ , nous obtenons:  $\arccos\left(\frac{A+D}{2}\right) \simeq \frac{2(\sqrt{\delta\epsilon} + \epsilon)}{R}$ . Ainsi nous voyons que dans le cas de la cavité auto-imageante on a un effet d'écart au point

parfaitement autoimageant qui est du deuxième ordre, comme pour la cavité confocale. Ainsi la limite de la zone de fonctionnement autoimageant est du type  $\epsilon \leq \frac{1}{F}$  et non  $\epsilon \leq \frac{1}{F^2}$  comme dans le cas de la cavité concentrique.

## B Etude expérimentale d'une cavité auto-imageante en configuration linéaire

### B.1 La cavité

La cavité est constituée d'un miroir d'entrée  $M_1$  plan, d'une lentille convergente  $L$  de focale  $f = 50mm$ , d'un miroir sphérique  $M_2$  de rayon de courbure  $R = 50mm$ . Le miroir  $M_1$  est hautement réfléchissant pour l'infra-rouge (98%), et peu pour le vert à  $532nm$  (5%). Le miroir de sortie est hautement réfléchissant pour les deux longueurs d'ondes (99% pour l'infra-rouge,  $> 98\%$  pour le vert). La lentille est traitée anti-reflet pour l'infra-rouge. La finesse théorique de la cavité est d'environ 200 pour l'infra-rouge. Les trois éléments sont placés sur des montures permettant un réglage fin des positions ( $10\mu m$ ). Par la suite on appellera  $L_1$  la distance entre le miroir plan et la lentille  $L$  et  $L_2$  la distance entre la lentille et le miroir sphérique. A la dégénérescence on doit avoir:  $L_1 = f + f^2/R = L_2 = R + f = 100mm$ .

### B.2 Montage expérimental

Le schéma expérimental est représenté sur la figure 3.4. On utilise un laser Lightwave Nd:YAG, modèle 126 – 1064 – 700, émettant une puissance de  $700mW$  à  $1064nm$ . Le waist du laser se situe à une distance de  $50mm$  de sa sortie. Un isolateur optique ( $FR$ ) est placé en sortie du laser pour éviter les effets de réflexion sur le laser. En sortie de ce rotateur de Faraday, on utilise un modulateur électro-optique ( $EOM$ ) permettant de moduler en phase le faisceau à la fréquence de  $14,7MHz$ . Cette modulation permet l'asservissement de la cavité par la méthode Pound-Drever-Hall.

Une première lentille permet de collimater le faisceau issu du laser ( $L_1$ , de longueur focale  $f_1 = 750mm$ , située à  $440mm$  du waist du laser). Ce faisceau intercepte une mire de résolution placée dans le plan T (à une distance de  $200mm$  de la lentille  $L_1$ ) pour créer une image. Un système de deux lentilles télescopiques ( $L_2$  de focale  $f_2 = 500mm$ ,  $L_3$  de focale  $f_3 = 200mm$ ) permet de faire l'image en champ proche de cette image au niveau du miroir plan de la cavité.

L'analyse du faisceau transmis par la cavité se fait sur deux voies. En sortie de la cavité, une partie du faisceau lumineux est collectée sur une photodiode (dont le signal haute fréquence permet l'asservissement de la cavité). A l'aide d'un jeu télescopique de deux lentilles on fait l'image en champ proche du miroir plan sur une caméra CCD (CCD1), permettant de visualiser l'image transmise par la cavité.

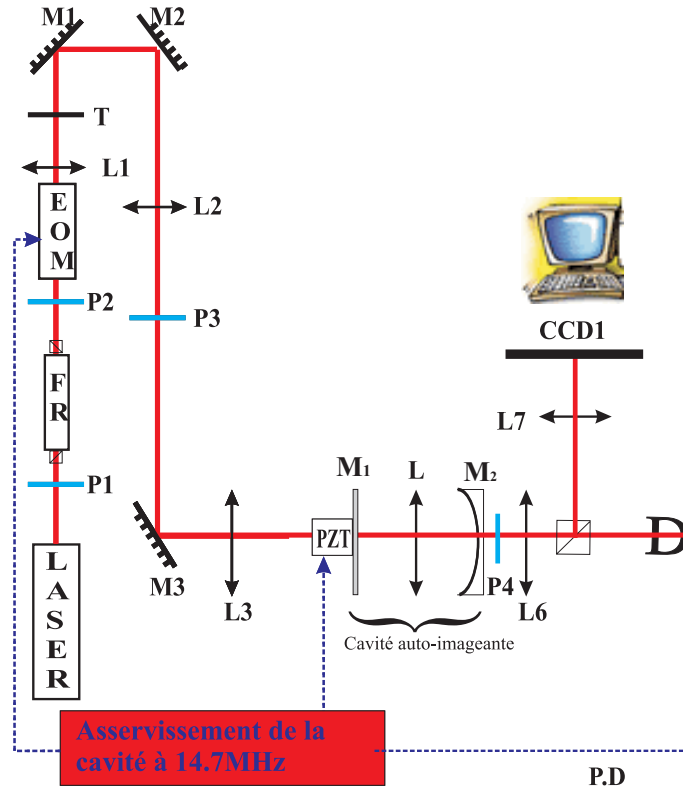


Fig. 3.4: Schéma de l'expérience de transmission d'image à l'aide d'une cavité auto-imageante

### B.3 Réglages

Le réglage de la cavité auto-imageante se révèle plus délicat que celui d'une simple cavité linéaire. Nous décrivons donc en détail une procédure de réglage qui s'est avérée efficace.

D'après le diagramme de stabilité de la cavité en fonction des longueurs  $L_1$  et  $L_2$ , nous voyons que la cavité n'est stable que sur une plage restreinte de longueurs. Tout le long du réglage, on s'efforce de rester dans une zone stable de la cavité. Pour ceci, au départ on choisit les longueurs  $L_1$  et  $L_2$  légèrement inférieures aux longueurs théoriques attendues pour le fonctionnement auto-imageant.

L'alignement de la cavité est rendu difficile par la présence de la lentille, insérée entre le miroir plan et le miroir sphérique. Pour réaliser un bon alignement, nous avons trouvé la

procédure suivante. Dans un premier temps, ayant enlevé les trois éléments de la cavité on fixe la direction de propagation du laser de manière à ce qu'elle soit parallèle à la direction du banc optique et à la hauteur des éléments optiques. Ensuite on insère le miroir courbe  $M_2$ . Pour s'assurer de sa bonne orientation, on vérifie que le faisceau réfléchi par le miroir et le faisceau incident se superposent bien. Pour cette étape on utilise un diaphragme, placé sur le trajet du faisceau incident, dont l'ouverture correspond à la taille du faisceau incident. Proche du bon réglage, on peut visualiser à l'aide d'une caméra infra-rouge la tache correspondante au faisceau réfléchi par le miroir  $M_2$  sur le bord du diaphragme. A l'aide de vis micrométriques présentes sur la monture du miroir on fait passer le faisceau réfléchi au centre du diaphragme: l'orientation du miroir  $M_2$  est réglée. On insère ensuite la lentille intracavité  $L$ , de manière à ce que la longueur  $L_2$  soit légèrement inférieure à la longueur de fonctionnement auto-imageant. Cette lentille est montée sur un support permettant de jouer sur l'inclinaison selon deux directions transverses. On règle l'inclinaison de la lentille (de la même manière que le miroir  $M_2$ ) en utilisant la méthode du diaphragme. Il est à remarquer que le réglage de la lentille est très sensible. Pour finir on insère le miroir plan, là aussi en prenant une longueur  $L_1$  légèrement inférieure à la longueur en fonctionnement auto-imageant et en s'assurant de son alignement grâce à la réflexion sur le diaphragme.

Après cette procédure d'alignement on cherche à se rapprocher de la configuration auto-imageante en augmentant progressivement les longueurs  $L_1$  et  $L_2$ . Lors du changement de longueur de la cavité de légers désalignements apparaissent. Pour les compenser on joue uniquement sur l'orientation des miroirs  $M_1$  et  $M_2$  sans toucher à l'orientation de la lentille. Les pics en transmission correspondant aux différents modes transverses vont peu à peu être résonnants pour une même longueur de cavité: on obtient un seul pic de transmission. Comment savoir que nous sommes le plus proche de la configuration auto-imageante? En configuration dégénérée l'intensité du pic principal est la somme des intensités des différents modes transverses et la finesse doit rester la même qu'en configuration monomode. Il faut donc chercher à avoir un pic d'intensité la plus grande possible, ainsi que la meilleure finesse. Une autre indication est que le pic doit avoir une forme symétrique.

Expérimentalement, nous avons réussi à obtenir une finesse en configuration dégénérée d'environ 180, ce qui est proche de la finesse théorique de 200 qui ne prend pas en compte les effets de pertes sur la lentille. Après cette procédure de réglage, nous avons étudié la transmission d'une image dans la cavité.

#### B.4 Transmission d'une image

L'image envoyée dans la cavité est créée par l'interception du faisceau laser par une mire de résolution USAF, représentée sur la figure 3.5. Avant d'intercepter la mire, le faisceau est collimaté (grâce à une lentille  $L_1$ ) et a une taille d'environ  $1,1\text{mm}$ . Les éléments de la mire utilisés lors de l'expérience se situent sur la zone encadrée en rouge (voir figure 3.5); leur longueur caractéristique est d'environ  $1\text{mm}$ .

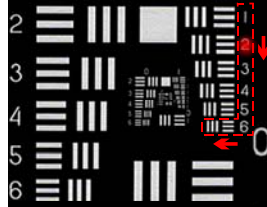


Fig. 3.5: Mire de résolution USAF utilisée pour générer les images en entrée de la cavité auto-imageante

Des exemples d'images transmises par la cavité auto-imageante, lorsque la cavité est asservie, sont présentées sur la figure 3.6. Nous avons réussi à notre connaissance pour la première fois à transmettre des images dans une cavité auto-imageante.

Nous avons étudié la résolution maximale de la cavité. Pour ceci on cherche à transmettre une image la plus petite possible. En sortie on doit être capable de voir les détails de cette image. La figure 3.7 montre l'étude de la résolution maximale. On compare l'image transmise sans cavité (on enlève le miroir plan en entrée  $M_1$ ) et l'image transmise lorsque la cavité est asservie. Nous avons trouvé une résolution maximale d'environ  $40\mu m$ .

## C Etude expérimentale du doublage dans une cavité auto-imageante

Encouragés par les bons résultats de transmission en simple cavité, nous avons mis au point une expérience de génération d'image en second harmonique. Partant d'une image dans l'infrarouge (à  $1064nm$ ), on cherche à transférer cette image dans le vert (à  $532nm$ ).

### C.1 Le montage expérimental

Le montage expérimental en doublage est représenté sur la figure 3.8.

Pour ceci on place un cristal de 5%  $MgO : LiNbO_3$ , d'accord de phase non critique, de type I, de taille  $15 \times 5 \times 5mm^3$ , dont la température optimale pour la génération de seconde harmonique est d'environ  $120^\circ C$ . Le cristal est placé dans un four de cuivre régulé



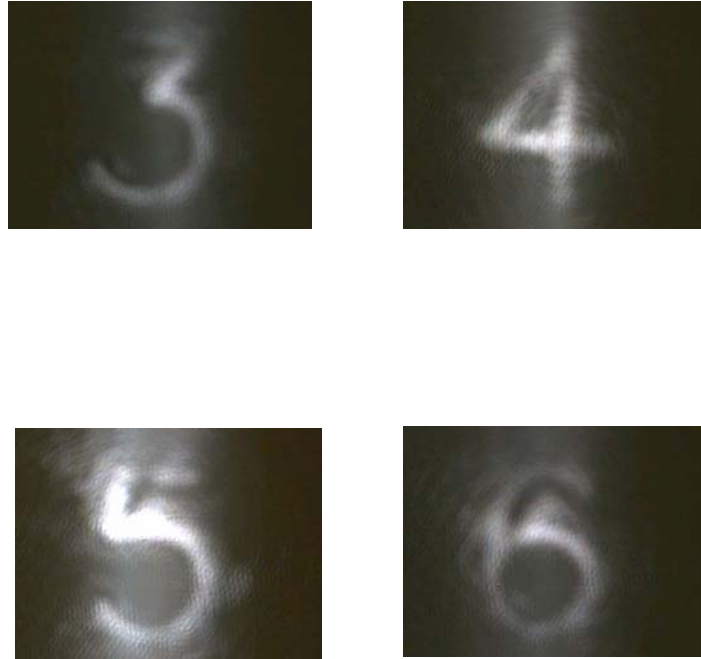


Fig. 3.6: Exemples d'images transmises par la cavité auto-imageante

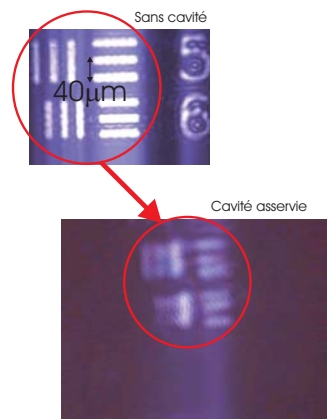


Fig. 3.7: Etude de la résolution de la cavité auto-imageante. Comparaison de l'image transmise sans cavité (en haut) et l'image transmise après asservissement de la cavité infra-rouge. La résolution de notre système est d'environ  $40\mu\text{m}$

en température grâce à un système Proportionnel Intégrateur Différentiel.

Le faisceau vert généré par seconde harmonique est séparé de l'infra-rouge grâce à une lame dichroïque (DM) présente avant le miroir plan (voir sur la figure 3.8). Pour enlever les résidus du faisceau à  $1064nm$  on place un filtre infra-rouge ( $F_2$ ) après la lame dichroïque. Un système de deux lentilles (télescope, lentilles  $L_4$  de longueur focale  $f_4 = 150mm$  et  $L_5$  de longueur focale  $f_5 = 1000mm$ ) permet de faire l'image en champ proche du plan contenant le miroir sur une caméra CCD (CCD2): on a accès à l'image dans le vert.

Dans la cavité linéaire l'image verte est créée par deux fois, correspondant aux passages aller et retour de la lumière infra-rouge. Pour éviter les effets d'interférences entre ces deux faisceaux, néfastes pour la qualité de l'image, nous avons placé un filtre (pour le vert) F dans la cavité. Ce filtre absorbe la lumière verte créé lors du premier passage mais est transparent pour l'infra-rouge. Le fonctionnement de la cavité est préservé pour l'infrarouge.

## C.2 Résultats

Les résultats d'images obtenues par doublage de fréquence à l'aide de la cavité auto-imageante sont représentés sur la figure 3.9. Ces images ont été obtenues lorsque la cavité auto-imageante est asservie sur le faisceau infra-rouge.

On peut comparer ces images obtenues dans le vert aux images utilisées pour les générer et ainsi étudier les dégradations introduites par la génération de seconde harmonique. Pour cela on enlève le filtre IR sur le trajet du vert ( $F_2$ ) et on le remplace par un filtre dans le vert. Les images dans l'infra-rouge sont enregistrées sur la caméra CCD2. Ces images sont représentées sur la figure 3.10.

Nous pouvons voir que tous les éléments des images initialement portées par le faisceau infra-rouge sont reconnaissables sur les images générées dans le vert. Notre montage expérimental permet donc de générer des images par doublage de fréquence en cavité auto-imageante. A notre connaissance, cette expérience constitue une première.

## Conclusion

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés à l'étude d'une cavité totalement dégénérée, la cavité auto-imageante.

Nous avons tout d'abord établi le schéma linéaire le plus simple de cavité auto-imageante: il comporte un miroir plan, une lentille, et un miroir sphérique. Le comportement de cette cavité à trois éléments optiques est bien différent des cavités linéaires à deux miroirs généralement étudiées. Nous avons donc précisé le domaine de stabilité de la cavité, sa plage de fonctionnement en configuration dégénérée. Nous avons aussi démontré que, à la dégénérescence parfaite, la cavité auto-imageante ne possède pas de waist propre.

Après ces considérations théoriques, nous avons étudié expérimentalement une telle cavité. Nous avons réussi, pour la première fois à notre connaissance, à transmettre intégralement des

images à travers cette cavité. Les résultats de transmission étant convaincants, nous sommes passés à une expérience de génération d'images en seconde harmonique après avoir inséré un cristal non-linéaire dans la cavité. Cette expérience s'est là aussi avérée fructueuse.

Cette étude classique préliminaire de la cavité auto-imageante a donc donné des résultats très satisfaisants. Dans le futur il semble envisageable de réaliser un OPO avec une telle cavité, puisque les résultats de génération d'images en doublage de fréquence ont été positifs. Anticipant une telle réalisation expérimentale, les aspects quantiques d'un OPO en cavité auto-imageante sont étudiés au chapitre 6.

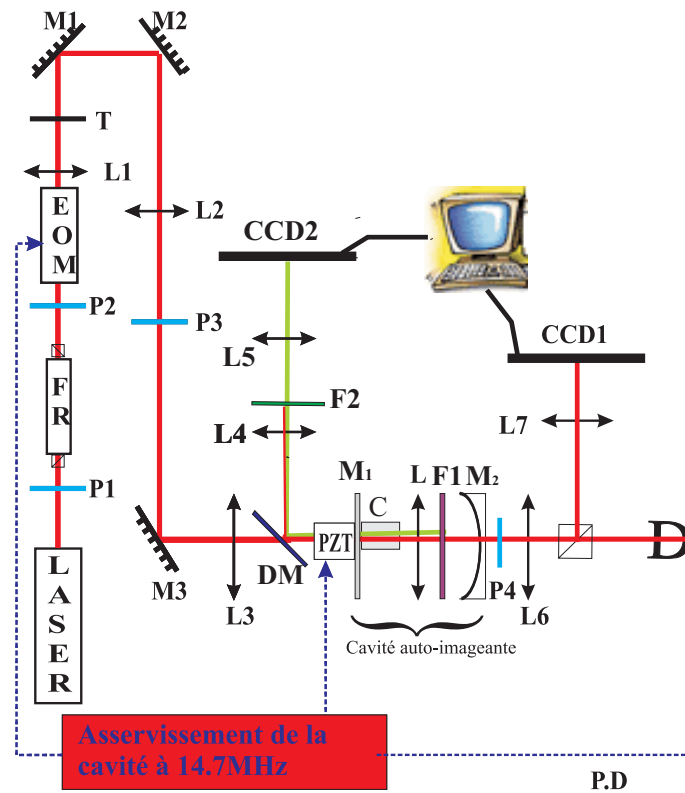


Fig. 3.8: Schéma de l'expérience de génération d'images en seconde harmonique à l'aide d'une cavité auto-imageante

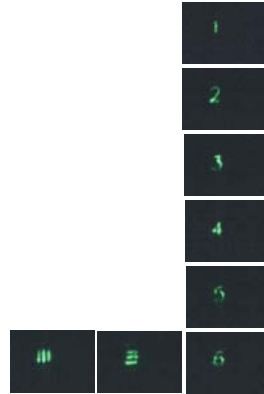


Fig. 3.9: Génération d'images en seconde harmonique (532nm) à l'aide d'une cavité auto-imageante



Fig. 3.10: Images IR de la mire utilisées pour la génération de second harmonique. Ces images permettent la comparaison avec les images créées dans le vert

*Deuxième partie*

**Images et cavités: aspects  
quantiques**



---

# Eléments d'imagerie quantique

---

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Optique quantique monomode</b> . . . . .	<b>54</b>
A.1	Quantification du champ électromagnétique . . . . .	54
A.2	Commutateur et inégalité d'Heisenberg . . . . .	54
A.3	Etats comprimés du rayonnement . . . . .	56
<b>B</b>	<b>Optique quantique multimode</b> . . . . .	<b>57</b>
B.1	Pourquoi l'optique quantique multimode? . . . . .	57
B.2	Contexte de "l'imagerie quantique" . . . . .	58
B.3	Critère de "multimodalité" d'un faisceau . . . . .	59
B.4	Outils d'optique non linéaire transverse . . . . .	61
<b>C</b>	<b>Le processus paramétrique pour générer des états non classiques</b> <b>63</b>	
C.1	Réponse non-linéaire . . . . .	63
C.2	Processus nonlinéaire du second ordre . . . . .	64
C.3	Lois de conservation et condition d'accord de phase . . . . .	64
C.4	Relation entrée/sortie lors du passage dans un milieu paramétrique . . . . .	66

---

## Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les notions essentielles quant à l'étude quantique des fluctuations spatiales du champ électromagnétique. Cette présentation n'est en rien exhaustive et on pourra se reporter à [Kolobov95] pour plus de détails.

Dans une première partie, on s'intéresse aux fluctuations d'un mode unique du champ électromagnétique. Les notions de limite quantique standard, d'état cohérent, d'état comprimé sont abordées. Ces notions générales nous serviront plus tard dans le chapitre 8.



Dans une seconde partie, nous généralisons les notions vues pour un seul mode à l'étude de plusieurs modes transverses: c'est ce que l'on appelle l'imagerie quantique ("quantum imaging"). Pour un traitement rigoureux de la quantification transverse du champ électromagnétique on pourra se reporter aux ouvrages [Kolobov95], [Cohen87]. Nous verrons dans les chapitres suivants (5 et 6) des applications d'un tel formalisme.

Dans une troisième partie, nous décrivons le processus paramétrique, processus non-linéaire permettant de générer des états multimodes spatiaux.

## A Optique quantique monomode

### A.1 Quantification du champ électromagnétique

Considérons un mode du champ électromagnétique, correspondant à une onde plane de direction et de polarisation fixées, et de fréquence  $\omega$ . Classiquement on peut définir son champ électromagnétique comme:

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi) = X_1 \cos \omega t + X_2 \sin \omega t \quad (4.1)$$

$E_0$  est l'amplitude,  $\varphi$  la phase de l'onde.  $X_1$  et  $X_2$  sont les amplitudes des quadratures dans le repère de Fresnel.

Dans le cadre d'une description quantique du champ électromagnétique, à chaque mode on associe un oscillateur harmonique et ses opérateurs de création  $\hat{a}$  et d'annihilation  $\hat{a}^+$  de photon:

$$\hat{E}(t) = \mathcal{E}_0(\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^+e^{i\omega t}) = \mathcal{E}_0(\hat{X}_1 \cos \omega t + \hat{X}_2 \sin \omega t) \quad (4.2)$$

où nous avons introduit les opérateurs de quadrature  $\hat{X}_1$  et  $\hat{X}_2$  qui s'expriment comme:

$$\hat{X}_1 = \hat{a} + \hat{a}^+ \text{ et } \hat{X}_2 = -i(\hat{a} - \hat{a}^+) \quad (4.3)$$

$\mathcal{E}_0$  est une constante de normalisation qui correspond au champ électrique d'un photon.

Le nombre moyen de photons détectés par unité de temps est donné par l'intermédiaire de l'opérateur nombre de photons:

$$\hat{N} = \hat{a}^+ \hat{a} \quad (4.4)$$

### A.2 Commutateur et inégalité d'Heisenberg

Les opérateurs de quadrature jouent des rôles similaires aux opérateurs position et impulsion d'une particule. Ils vérifient le même type de relation de commutation:

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = 2i \quad (4.5)$$

Cette relation de commutation étant non nulle, elle impose une borne inférieure au produit des variances des quadratures conjuguées. C'est ce qui est communément appelé l'inégalité de Heisenberg:

$$\langle \Delta \hat{X}_1^2 \rangle \langle \Delta \hat{X}_2^2 \rangle \geq 1 \quad (4.6)$$

On ne peut donc connaître simultanément avec une extrême précision des composantes de quadratures orthogonales. Leurs fluctuations constituent le "bruit quantique" de la lumière. Des états pour lesquels la relation 4.6 est une égalité sont appelés états minimaux.

Le choix des composantes de quadrature est arbitraire puisqu'il correspond à un choix d'origine des phases dans le plan de Fresnel. De manière générale on définit un couple de quadratures conjuguées par:

$$\hat{X}_1(\theta) = (\hat{a}e^{-i\theta} + \hat{a}^+e^{i\theta}) \text{ et } \hat{X}_2(\theta + \pi/2) = -i(\hat{a}e^{-i\theta} - \hat{a}^+e^{i\theta}) \quad (4.7)$$

Tout couple de quadratures conjuguées vérifie la relation de commutation déjà citée. Il existe un couple de quadratures privilégié lorsque la valeur moyenne du champ est non nulle: les quadratures définies par  $\theta = \varphi$ , où  $\varphi$  est la phase du champ, et  $\theta = \varphi + \pi/2$  correspondent respectivement aux quadratures dites d'amplitude et de phase.

Un état particulier est l'état vide possédant des fluctuations uniformément réparties sur toutes les quadratures:  $\langle \Delta \hat{X}_1^2 \rangle = \langle \Delta \hat{X}_2^2 \rangle = 1$ . Ces fluctuations constituent une référence appelée "limite quantique standard" ou "bruit quantique standard". Le champ électromagnétique issu d'un laser monomode très au dessus du seuil est très bien modélisé par ce que l'on appelle un état cohérent. Ces états introduits par Glauber correspondent à la superposition d'un champ classique et des fluctuations du vide. On peut montrer que les états cohérents sont des états minimaux. Le vide est un état cohérent dont le nombre moyen de photons est nul.

Une image corpusculaire permet de donner une image du bruit d'intensité d'un état cohérent. On peut se représenter le faisceau comme formé de photons aléatoirement répartis temporellement, suivant une distribution Poissonienne. On peut montrer que pour un état cohérent, la variance sur le nombre de photons  $N$  détectés pendant une durée  $t$  est donnée par:

$$\Delta N^2 = N \quad (4.8)$$

Une représentation courante d'un état quantique consiste à superposer dans le plan de Fresnel un champ classique et ses fluctuations. Le champ classique est représenté par un vecteur dont la norme donne l'amplitude et l'angle la phase. L'incertitude sur la position du vecteur, liée aux fluctuations, est représentée par un contour dont la distance à la valeur moyenne représente la variance du bruit pour chaque quadrature. La figure 4.1 est la représentation d'un état cohérent. Il est à noter, comme nous l'avons déjà souligné que le bruit est uniformément réparti sur toutes les quadratures.

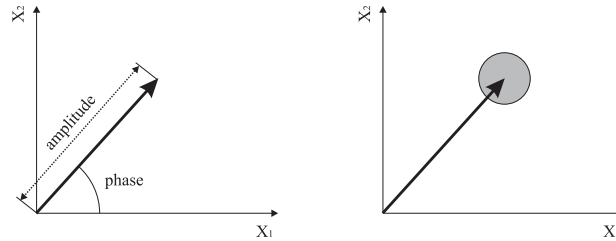


Fig. 4.1: Représentation de Fresnel du champ électromagnétique: à gauche représentation classique, à droite représentation des fluctuations quantiques pour un état cohérent

### A.3 États comprimés du rayonnement

La relation d'incertitude introduit une borne inférieure sur le produit des variances des quadratures orthogonales. On peut donc envisager des états pour lesquels la variance sur une quadrature sera inférieure à la limite quantique standard. Bien sûr, sur la quadrature orthogonale les fluctuations vont augmenter. De tels états sont appelés états comprimés, ou "squeezés". Dans le diagramme de Fresnel, l'aire d'incertitude n'est plus un cercle mais une ellipse dont le petit axe correspond à la quadrature comprimée.

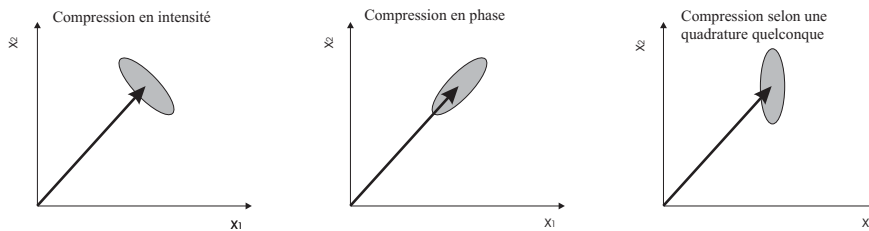


Fig. 4.2: Exemples d'états comprimés selon différentes quadratures

Une image corpusculaire d'un faisceau comprimé en intensité est là aussi possible. Les photons sont maintenant répartis plus régulièrement dans le temps. On parle de distribution subpoissonienne et dans ce cas:

$$\Delta N^2 \leq N \quad (4.9)$$

Pour générer de tels états, nous voyons qu'il faut briser la symétrie entre les quadratures: un processus dépendant de la phase est nécessaire. L'optique non-linéaire permet de générer de tels processus. Nous verrons par la suite comment nous utilisons un processus paramétrique pour générer de tels états, mais il est à noter que l'effet Kerr permet lui aussi une telle génération.

## B Optique quantique multimode

### B.1 Pourquoi l'optique quantique multimode?

Les états monomodes comprimés permettent de contrôler les fluctuations de la lumière lors d'une mesure sur l'ensemble du faisceau. Qu'en est-il lorsque l'on s'intéresse aux fluctuations locales de la lumière, c'est à dire lors d'une mesure partielle?

Considérons un état monomode comprimé en intensité dont le nombre moyen de photons est  $N_{tot}$ . La variance sur le nombre de photons total détectés est inférieure à un état cohérent donc:

$$\Delta N_{tot}^2 \leq N_{tot} \quad (4.10)$$

Considérons un détecteur parfait (de rendement quantique 1), permettant une détection partielle avec un nombre moyen de photons  $N_A$  (par exemple, on peut envisager d'utiliser un diaphragme de transmission variable devant un détecteur, voir figure 4.3).

On peut montrer que le bruit sur une mesure partielle d'un tel faisceau est donnée par [Fouet00]:

$$\Delta N_A^2 = \langle \hat{N}_A \rangle + \frac{\langle \hat{N}_A \rangle^2}{\langle \hat{N}_{tot} \rangle^2} (\Delta \hat{N}_{tot}^2 - \langle \hat{N}_{tot} \rangle) \quad (4.11)$$

où  $\hat{N}_{tot}$  est l'opérateur nombre de photons total du faisceau et  $\hat{N}_A$  est l'opérateur nombre de photons détectés. Le bruit d'intensité normalisé au bruit quantique standard  $\Delta N_A^2 / \langle \hat{N}_A \rangle$  varie linéairement avec la transmission  $T = \langle \hat{N}_A \rangle / \langle \hat{N}_{tot} \rangle$  du détecteur. On peut écrire la formule (4.11) sous la forme:

$$\frac{\Delta N_A^2}{\langle \hat{N}_A \rangle} = 1 - T \left( 1 - \frac{\Delta \hat{N}_{tot}^2}{\langle \hat{N}_{tot} \rangle} \right) \quad (4.12)$$

L'interprétation de cette formule est simple: les photons sont répartis aléatoirement dans le plan transverse. Une détection partielle introduit un bruit de partition, équivalent à un atténuateur de transmission T placé devant le détecteur.

Nous voyons sur cet exemple que l'utilisation d'un seul mode comprimé du champ électromagnétique ne permet pas de contrôler les fluctuations locales de la lumière. Il faut donc introduire des états possédant des fluctuations dont la répartition est non aléatoire dans

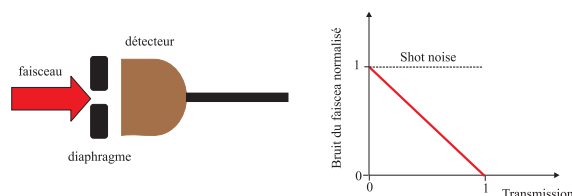


Fig. 4.3: Bruit normalisé de l'intensité d'un faisceau monomode comprimé en intensité en fonction de la transmission du diaphragme

le plan transverse. Ces états multimodes quantiques ne peuvent être décrits dans le cadre d'une théorie monomode, s'intéressant uniquement aux fluctuations temporelles. Nous devons passer à une description à la fois temporelle et spatiale des fluctuations: c'est ce qui est communément appelé l'imagerie quantique, "quantum-imaging".

## B.2 Contexte de "l'imagerie quantique"

Pendant très longtemps, les études de la plupart des groupes d'optique quantique portaient sur des faisceaux monomodes, pour lesquels un seul oscillateur harmonique est nécessaire pour décrire les fluctuations du champ. Toutes les propriétés de compression et de corrélations étaient valables uniquement sur l'ensemble du faisceau.

Vers la fin des années 80, des groupes se sont intéressés à une description plus globale du champ électrique en faisant intervenir plusieurs modes transverses [Seng-Tiong-Ho]. Kolobov et Sokolov en particulier sont les véritables instigateurs de l'optique quantique transverse, introduisant pour la première fois la notion de compression de bruit locale [Kolobov89]. Durant les années 90, de nombreux groupes se sont orientés vers l'optique quantique multimode, avec notamment l'introduction du concept d'images quantiques pour la première fois par Lugiato en 95 [Lugiato95]. La plupart des travaux [Kolobov99] utilisent la conversion paramétrique pour voir des effets quantiques transverses. Ils ont montré qu'un fort lien existe entre les propriétés spatiales du bruit et la formation spontanée de structures optiques.

Une des thématiques actuelles de l'imagerie quantique est l'amélioration des mesures faites sur des images. Que cela soit pour améliorer les techniques de superrésolution [Kolobov00], de microscopie à deux photons [Teich], ou bien de positionnement d'un faisceau laser [TrepshD], les faisceaux multimodes spatiaux permettent de battre les limites imposées par l'utilisation de faisceaux classiques. Dans ce même ordre d'idée, l'amplification sans bruit d'images, point central de cette thèse qui sera abordé dans la prochaine partie est un sujet qui intéresse de nombreuses équipes. ([Kumar99], [Mosset05], [Gigan06]).

Une autre thématique de l'imagerie quantique est de profiter du plus grand nombre de degrés de liberté du système pour généraliser les protocoles d'information quantique déjà existants pour des faisceaux monomodes. L'avantage est de disposer maintenant de plusieurs canaux d'information correspondant à différents modes transverses. Un protocole de téléportation d'images a été proposé [Sokolov01], généralisant le protocole de téléportation monomode [Vaidman94], [Braunstein98].

### B.3 Critère de "multimodicité" d'un faisceau

Une première question qui se pose est de définir ce que l'on entend par "faisceau multimode". Pour plus de détails on se reportera à [TrepsPhD] ou [Treps05].

#### B.3.1 Faisceau multimode classique

Usuellement, un faisceau est dit multimode dans la base  $TEM_{pq}$  quand le faisceau est la somme de plusieurs modes  $TEM_{pq}$ . En général cela signifie que le champ proche et le champ lointain sont différents, mais ce n'est pas forcément le cas. La partie positive de l'enveloppe complexe d'un tel champ,  $E^{(+)}(\vec{r}, z)$ , peut être décomposée sur la base  $u_{p,q}(\vec{r}, z)$  des  $TEM_{pq}$  selon :

$$E^{(+)}(\vec{r}, z) = \sum_{pq} \alpha_{p,q} u_{p,q}(\vec{r}, z) \quad (4.13)$$

où au moins deux coefficients  $\alpha_{p,q}$  sont non-nuls.

Néanmoins, si la superposition des modes est cohérente, les coefficients  $\alpha_{p,q}$  sont fixés et le champ est en fait décrit par un seul mode. En effet si on définit le mode  $v_0(\vec{r}, z)$  par :

$$v_0(\vec{r}, z) = \frac{E^{(+)}(\vec{r}, z)}{\int |E^{(+)}(\vec{r}, z)|^2 d^2r} \quad (4.14)$$

et qu'on construit une base orthonormale des  $\{v_i(\vec{r}, z)\}$  dont le premier élément est  $v_0(\vec{r}, z)$ , alors dans cette base le champ  $E^{(+)}(\vec{r}, z)$  se décompose sur un seul vecteur de la base, et est donc en fait monomode. Le caractère multimode ou monomode paraît donc dépendant de la base dans laquelle on se place. Il faut noter que ce raisonnement ne s'applique pas au cas où les quantités  $\alpha_{p,q}$  fluctuent, puisque dans ce cas là  $v_0$  change constamment. D'un point de vue quantique les choses sont différentes. On va voir qu'on peut définir de manière intrinsèque un état monomode et un état multimode.

#### B.3.2 Faisceau multimode quantique

On définit un état monomode de la manière suivante :

**Définition 1** *L'état  $|\Psi\rangle$  est un état monomode si il existe une base de modes  $\{v_i(\vec{r}, z)\}$  dans laquelle il peut s'écrire :*

$$|\Psi\rangle = |\Psi_0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \dots$$

où le premier mode de la base est dans un état  $|\Psi_0\rangle$  qui n'est pas du vide, et tous les autres modes sont des états vides du rayonnement.

Un faisceau multimode est un faisceau qui n'est pas monomode, par conséquent:

**Définition 2** *Un état  $|\Psi\rangle$  est un état multimode s'il ne peut s'écrire dans aucune base sous la forme précédente  $|\Psi\rangle = |\Psi_0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \dots$*

### B.3.3 Caractérisation formelle

On peut montrer [TrepPhD] que l'action sur un état monomode de tous les opérateurs annihilation de n'importe quelle base transverse donne des vecteurs proportionnels, et que cette condition est nécessaire et suffisante pour montrer qu'un état est monomode. Par conséquent pour un état multimode, il existe au moins une base dans laquelle cette propriété n'est pas vraie.

Cette propriété mathématique des états monomodes et multimodes est difficile à vérifier expérimentalement. Par contre il existe une condition expérimentale suffisante, mais pas nécessaire, qui prouve qu'un faisceau est multimode (réciproquement une condition nécessaire mais pas suffisante pour montrer qu'un faisceau est monomode).

### B.3.4 Caractérisation expérimentale

La différence majeure entre la description classique et la description quantique vient du fait que la description classique non stochastique ne décrit que les propriétés du champ moyen, alors que la description quantique apporte en plus une information sur la répartition des fluctuations autour de la valeur moyenne. Un faisceau monomode est caractérisé par la forme transverse du mode  $v_0(\vec{r}, z)$  qui le porte, qui décrit aussi bien la répartition du champ moyen que celle de ses fluctuations. Dans un champ multimode, chaque mode peut avoir des fluctuations différentes, par conséquent la répartition spatiale des fluctuations et des corrélations ne peut être déduite de la forme transverse du champ moyen.

On va utiliser la mesure partielle en intensité pour caractériser le caractère multimode d'un faisceau, c'est-à-dire le fait que le bruit et le champ moyen n'ont pas forcément la même répartition spatiale.

A la différence d'un champ monomode dont l'évolution du bruit normalisé lors de la fermeture du diaphragme est linéaire, cette évolution ne le sera plus nécessairement lorsque l'on considère des états comprimés multimodes.

Ce critère a été mis en oeuvre au laboratoire pour montrer qu'un OPO confocal au dessus du seuil produit des faisceaux multimodes transverses [Martinelli03].

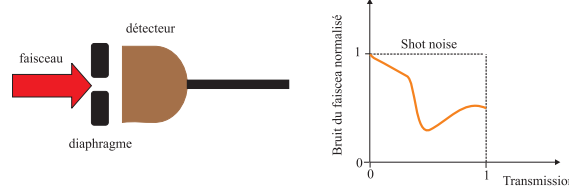


Fig. 4.4: Bruit normalisé de l'intensité d'un faisceau multimode comprimé en intensité en fonction de la transmission du diaphragme

## B.4 Outils d'optique non linéaire transverse

### B.4.1 Quantification du champ

Soit un champ électromagnétique dans l'espace, de polarisation bien déterminée. L'opérateur champ électrique  $\hat{E}(\vec{r}, t)$  s'écrit :

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = \hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) + \hat{E}^{(+)\dagger}(\vec{r}, t), \quad (4.15)$$

où  $\hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t)$  est l'opérateur de fréquence positive. La quantification du champ électrique dans le vide et dans tout l'espace (sans considérer une boîte de côté L) donne comme expression pour cet opérateur :

$$\hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) = i\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\omega(k)} \hat{a}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(k)t)}. \quad (4.16)$$

Dans cette équation,  $\omega(k)$  est donné par la relation de dispersion dans le vide  $\omega(k) = c.k$  et  $\hat{a}(\vec{k})$  et  $\hat{a}^\dagger(\vec{k})$  sont les opérateurs d'annihilation et de création d'un photon de vecteur d'onde  $\vec{k}$ . Ces opérateurs vérifient les relations de commutation :

$$\begin{aligned} [\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] &= (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\ [\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}(\vec{k}')] &= 0 \\ [\hat{a}^\dagger(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] &= 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Notons qu'on n'a fait jusqu'à présent aucune approximation.

### B.4.2 Quantification transverse

On considère un champ laser stationnaire, se propageant dans une direction privilégiée de l'espace  $z$  (vecteur unitaire  $\vec{z}$ ), de pulsation centrée sur  $\omega_0$ , et de direction centrée autour



du vecteur d'onde  $\vec{k}_0 = k_0 \vec{z}$ . On va maintenant se placer également dans l'approximation paraxiale, c'est-à-dire qu'on suppose que le vecteur d'onde  $\vec{k}$  est principalement longitudinal, et on va noter  $\vec{k} = k_z \vec{z} + \vec{q}$  où  $\vec{q}$  est la partie transverse du vecteur d'onde (supposée petite devant  $k_0$ ). On suppose également que sa fréquence est centrée dans une bande  $\delta\omega$  autour de  $\omega_0$ , autrement dit on va poser  $\omega(k) = \omega_0 + \Omega$ , avec  $\Omega < \delta\omega \ll \omega_0$ .

Par conséquent on peut écrire:

$$\hat{E}^{(+)}(\vec{\rho}, z, t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0}}\hat{a}(\vec{\rho}, z, t)e^{-i\omega_0(t-\frac{z}{c})} \quad (4.18)$$

où  $\hat{a}(\vec{\rho}, z, t)$  est l'opérateur enveloppe du champ. Pour un faisceau à la pulsation  $\omega_0$  il est normalisé en  $\sqrt{\text{nombre de photons}}$ .

On se place à partir de maintenant dans un plan particulier  $z = z_0$  de l'axe de propagation, c'est à dire qu'on ne s'intéresse dans la suite qu'aux propriétés quantiques dans un plan transverse donné et pas entre différents plans transverses. On ne spécifiera donc plus la coordonnée longitudinale  $z$ .

On peut alors introduire l'opérateur destruction d'un photon d'énergie  $\hbar\omega$  à la position transverse  $\vec{\rho}$ , noté  $\hat{a}_\omega(\vec{\rho})$ , défini par:

$$\hat{a}_\omega(\vec{\rho}) = \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \hat{a}(\vec{q}, k_z) e^{i\vec{q}\cdot\vec{\rho}}, \quad (4.19)$$

où  $\omega = ck_z$ . On peut montrer que son commutateur vaut :

$$[\hat{a}_\omega(\vec{\rho}), \hat{a}_{\omega'}^\dagger(\vec{\rho}')] = 2\pi c \delta(\omega - \omega') \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}') \quad (4.20)$$

et comme :

$$\hat{a}(\vec{\rho}, z, t) = \int_{-\delta\omega}^{+\delta\omega} \frac{\delta\Omega}{2\pi c} \sqrt{\frac{\omega_0 + \Omega}{\omega_0}} \hat{a}_\omega(\vec{\rho}) e^{-i\Omega(t-\frac{z}{c})}, \quad (4.21)$$

on peut écrire le commutateur de l'opérateur enveloppe  $\hat{a}(\vec{\rho}, z, t)$  dans le plan transverse :

$$[\hat{a}(\vec{\rho}, z, t), \hat{a}^\dagger(\vec{\rho}', z, t')] = \frac{1}{c} \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}') \delta_1(t - t') \quad (4.22)$$

où  $\delta_1(t - t')$  peut être dans certaines conditions approché par une fonction de Dirac.

### B.4.3 Décomposition en modes

Nous verrons par la suite que des états comprimés localement peuvent être créés grâce à un milieu paramétrique inséré en cavité dégénérée transversalement. Dans ce cas il est plus naturel de décomposer le champ électromagnétique sur la base des modes propres de la cavité. Une approche rigoureuse de ce formalisme peut être trouvé dans [Kolobov99].

On se donne une famille de modes  $\{u_i\}$  du plan transverse, telle que les modes  $u_i(\vec{\rho})$  forment une base orthonormale. Dans l'étude d'un OPO on introduira naturellement la base

propre de la cavité. Normalement ces modes propres dépendent de la coordonnée longitudinale  $z$ , que l'on omettra par la suite en se plaçant dans un plan donné. L'ensemble des fonctions doit vérifier la relation d'orthonormalité :

$$\int u_i^*(\vec{\rho})u_j(\vec{\rho})d^2\rho = \delta_{ij}. \quad (4.23)$$

et de complétude:

$$\sum_i u_i^*(\vec{\rho})u_i(\vec{\rho}') = \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}') \quad (4.24)$$

Si on considère la famille des modes gaussiens (voir équation (1.4)), alors dans n'importe quel plan transverse ( $z$  fixé) ils constituent une base orthonormée du plan. C'est la base naturelle pour étudier la propagation libre d'un champ (comme les ondes planes), ou son interaction en cavité.

On définit ainsi les opérateurs  $\hat{a}_i(t)$  de destruction sur le mode  $u_i$ . Il vaut :

$$\hat{a}_i(t) = \int \hat{a}(\vec{\rho}, t)u_i(\vec{\rho})d^2\vec{\rho}. \quad (4.25)$$

ce qui équivaut à décomposer l'opérateur enveloppe sur la base des modes propres:

$$\hat{a}(\vec{\rho}, t) = \sum_i u_i(\vec{\rho})\hat{a}_i(t) \quad (4.26)$$

On peut alors écrire en utilisant la relation (4.22):

$$[\hat{a}_i(t), \hat{a}_j^\dagger(t')] = \delta_{ij}\delta(t - t') \quad (4.27)$$

## C Le processus paramétrique pour générer des états non classiques

Après la présentation dans les sections précédentes d'états "non classiques", la question est de savoir comment les générer. Nous utiliserons l'effet paramétrique, un processus non linéaire du second ordre.

### C.1 Réponse non-linéaire

La plupart des processus étudiés en optique sont linéaires. Ces processus sont indépendants de l'intensité lumineuse, n'affectent pas la fréquence et obéissent au principe de superposition. Cependant l'invention du laser en 1960 a permis d'accéder à des puissances beaucoup plus importantes, rendant les effets non-linéaires non négligeables. Lors du passage d'une onde électromagnétique dans un milieu diélectrique, la distribution de charge à l'équilibre va être modifiée, induisant une polarisation macroscopique  $P$ . Dans un milieu non linéaire cette polarisation va pouvoir osciller à des fréquences harmoniques de la fréquence d'excitation.

La relation entre la polarisation atomique macroscopique et le champ électromagnétique s'exprime comme:

$$P = \varepsilon_0(\chi E + \chi^{(2)} E^2 + \chi^{(3)} E^3 + \dots) \quad (4.28)$$

où  $\varepsilon_0$  est la permittivité du vide,  $\chi$  est la susceptibilité du milieu,  $\chi^{(i)}$  sont les  $i^{me}$  susceptibilités non-linéaires du milieu.

Le premier terme  $\chi E$ , est responsable de toutes les propriétés linéaires du milieu (indice du milieu, absorption). Dans ce domaine, les ondes n'interagissent pas entre elles et on reste dans le cadre de l'optique classique.

Les termes supérieurs sont responsables de phénomènes non linéaires: conversion paramétrique, génération d'harmoniques, indices non-linéaires. Ces phénomènes, dépendants de la phases des différentes ondes en présence, permettent de générer des états non classiques.

Nous allons nous focaliser sur les effets du deuxième ordre

## C.2 Processus nonlinéaire du second ordre

Les processus non-linéaires du second ordre font intervenir la susceptibilité non linéaire du second ordre  $\chi^{(2)}$ . Ils peuvent être simplement décrits par une interaction à trois photons, ce que l'on nomme communément l'interaction à trois ondes. Pour un traitement très complet de ce type d'interaction on se reportera à [Boyd92].

On distingue généralement deux phénomènes lors d'un processus non-linéaire du second ordre (voir figure 4.5). Tout d'abord la génération de second harmonique, où deux photons de même fréquence donnent un photon à la fréquence double. Nous verrons qu'un tel effet est utilisé dans notre expérience pour réaliser le doublage en fréquence de notre laser. Ensuite la "conversion paramétrique", où deux photons, dits "signal" et "complémentaire", de fréquences  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont créés à partir d'un photon dit "de pompe" à la fréquence  $\omega_0$ .

## C.3 Lois de conservation et condition d'accord de phase

Dans tout processus physique, l'énergie et la quantité de mouvement doivent être conservés. Ceci implique une restriction sur la plage de fonctionnement dans laquelle le processus non-linéaire est effectif. Pour l'énergie on doit avoir:

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 \quad (4.29)$$

Pour la quantité de mouvement les vecteurs d'onde des photons doivent vérifier:

$$\vec{k}_0 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \quad (4.30)$$

avec  $|\vec{k}_i| = k_i = n_i \omega_i / c$ ,  $n_i$  étant l'indice de réfraction du milieu diélectrique. Supposant que les trois ondes se propagent colinéairement cette condition s'écrit:

$$n_0 \omega_0 = n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 \quad (4.31)$$

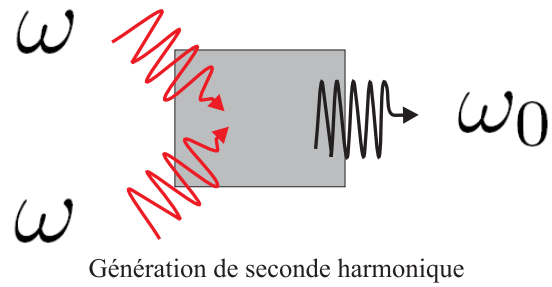
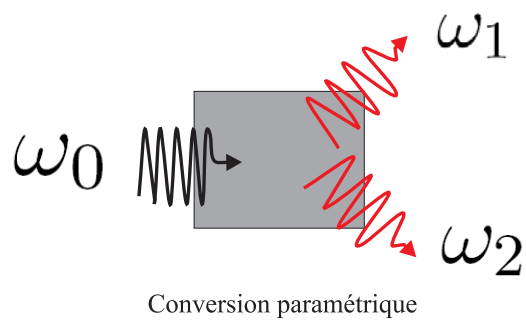


Fig. 4.5: Doublage de fréquence et conversion paramétrique dans un processus à trois ondes

Le cristal étant de dimension finie, la condition d'accord de phase n'est pas absolument exacte et ne peut être vérifiée qu'approximativement, l'interaction étant d'autant plus efficace que l'on se rapproche de cette condition. Pour des matériaux isotropes, on peut montrer qu'une telle condition ne peut être vérifiée. L'accord de phase est donc généralement obtenu en utilisant un cristal biréfringent. En tirant profit des indices différents vus par les polarisations ordinaire et extraordinaire dans un milieu uniaxe et de leurs dépendances en température, on peut obtenir l'accord de phase et trouver une plage de fonctionnement.<sup>1</sup>

On distingue deux types d'accords de phase:

- **Type-I:** Le signal et le complémentaire ont la même polarisation, la pompe est polarisée orthogonalement.
- **Type-II:** Le signal et le complémentaire sont polarisés orthogonalement, et la pompe est polarisée perpendiculairement au signal (ou au complémentaire).

Pour un accord de phase de type II, signal et complémentaires sont émis suivant des polarisations orthogonales et sont donc séparables. Cette configuration permet de générer des états fortement corrélés ([LauratPhD]). Elle sera étudiée dans ma thèse au chapitre 11 avec l'utilisation d'un cristal de KTP.

Lors d'un accord de phase de type I, il est par contre impossible de distinguer signal et complémentaire qui sont dégénérés. Cette configuration permet de générer des états comprimés ([PingKoyLamPhD]). Elle sera utilisée dans ma thèse au chapitre 12 avec l'utilisation d'un cristal de  $MgO : LiNbO_3$ .

#### C.4 Relation entrée/sortie lors du passage dans un milieu paramétrique

Pour prouver que l'interaction paramétrique permet de générer des faisceaux multimodes spatiaux, nous reprenons la démonstration succincte présentée dans [Gatti99b]. Pour plus de détails quant à la démonstration on peut se reporter aux ouvrages de référence [Kolobov99, Kolobov89].

Considérons la situation simple d'un milieu paramétrique et de deux ondes planes de fréquences  $\omega_0/2$  (avec  $\omega_0$  fréquence de l'onde pompe), dont les directions de propagation sont symétriques par rapport à l'axe du système. Appelant  $\vec{x} \equiv (x, y)$  la coordonnée dans le plan transverse et  $\vec{k} \equiv (k_x, k_y)$  la coordonnée transverse du vecteur d'onde, on considère deux ondes planes de la forme  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$  et  $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ . Introduisant  $a_{\vec{k}}^{in}$  et  $a_{-\vec{k}}^{in}$  les opérateurs d'annihilation de photons pour les champs entrants  $a_{\vec{k}}^{in}$  et  $a_{-\vec{k}}^{in}$ , et  $a_{\vec{k}}^{out}$  et  $a_{-\vec{k}}^{out}$  pour les champs sortants, ces champs sont reliés par une relation entrée sortie unitaire ([Kolobov89, Kolobov95]):

1. Une autre méthode est d'utiliser un accord de phase artificiel dans le PPLN par exemple ([BarracoPhD, BencheikhPhD, Levenson95]) qui permet d'avoir une interaction constructive, bien que dans le cristal  $\Delta\vec{k} \neq 0$ .

$$\begin{aligned} a_{\vec{k}}^{out} &= e^{i\psi} [\cosh(r)a_{\vec{k}}^{in} + e^{i\phi} \sinh(r)a_{-\vec{k}}^{in}] \\ a_{-\vec{k}}^{out} &= e^{i\psi} [\cosh(r)a_{-\vec{k}}^{in} + e^{i\phi} \sinh(r)a_{\vec{k}}^{in}] \end{aligned} \quad (4.32)$$

avec  $r$  appelé paramètre de squeezing.

On suppose qu'en entrée les deux champs sont dans un état cohérent noté  $|\alpha\rangle_{\vec{k}}$  et  $|\beta\rangle_{-\vec{k}}$ . En appliquant la transformation 4.32 sur l'état de départ, l'état d'entrée décorrélié  $|\alpha\rangle_{\vec{k}}|\beta\rangle_{-\vec{k}}$  est transformé en un état intriqué [Caves85]:

$$|OUT\rangle = G(\psi) \exp\{\zeta a_{\vec{k}}^+ a_{-\vec{k}}^+ - \zeta^* a_{\vec{k}}^- a_{-\vec{k}}^-\} |\alpha\rangle_{\vec{k}} |\beta\rangle_{-\vec{k}} \quad (4.33)$$

avec  $G(\psi) = \exp\{i\psi a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}}^- - a_{-\vec{k}}^- a_{-\vec{k}}^-\}$  et  $\zeta = r e^{i\phi}$ .  $\exp\{\zeta a_{\vec{k}}^+ a_{-\vec{k}}^+ - \zeta^* a_{\vec{k}}^- a_{-\vec{k}}^-\}$  correspond à un opérateur d'intrication (voir par exemple [Quantim]).

Par cette démonstration succincte, nous voyons donc que l'interaction paramétrique permet de générer des "états intriqués", et ce pour différents modes spatiaux.

## Conclusion

Ce chapitre nous a permis d'introduire les notions générales quant à l'étude des propriétés quantiques spatiales des faisceaux lumineux. Après un rappel d'optique quantique monomode, nous avons généralisé ces notions au cas où plusieurs modes transverses sont nécessaires pour décrire les fluctuations du champ électromagnétique. Pour finir, nous avons décrit l'effet paramétrique, effet non linéaire permettant de générer des états non classiques multimodes.

Après ces généralités qui nous ont permis de mieux comprendre le contexte de l'imagerie quantique, nous allons étudier les propriétés spatiales du vide comprimé multimode généré par un OPO sous le seuil en fonction de ses caractéristiques (géométrie de la cavité, longueur du cristal, taille de la pompe). Dans le chapitre 5, on étudiera un OPO en cavité confocale, alors qu'au chapitre 6 on abordera le cas d'une cavité auto-imageante.



---

# OPO confocal

---

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Contexte</b> . . . . .	<b>70</b>
<b>B</b>	<b>Le modèle</b> . . . . .	<b>71</b>
	B.1 Hypothèses . . . . .	71
	B.2 Equation d'évolution en champ proche . . . . .	72
	B.3 Equation d'évolution en champ lointain . . . . .	72
<b>C</b>	<b>Détection homodyne et spectre de bruit</b> . . . . .	<b>72</b>
<b>D</b>	<b>Analyse des fluctuations en champ proche</b> . . . . .	<b>73</b>
<b>E</b>	<b>Analyse des fluctuations en champ lointain</b> . . . . .	<b>75</b>
<b>F</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>76</b>
<b>G</b>	<b>Reproduction de l'article</b> . . . . .	<b>77</b>

---

## Introduction

Les articles théoriques concernant les effets quantiques transverses ("quantum imaging effects") générés par un oscillateur paramétrique optique dégénéré en modes transverses utilisent l'approximation de "cristal fin": on tient compte de la diffraction lors de la propagation dans la cavité mais celle-ci est occultée dans le milieu non-linéaire. Dans ce chapitre, on se propose d'introduire une nouvelle méthode théorique permettant de dépasser cette approximation. Ceci va nous permettre de traiter des situations proches de la réalité expérimentale, où la longueur du cristal est environ égale à la taille de la longueur de Rayleigh de la cavité. On utilise cette méthode dans le cas d'un OPO confocal, où dans l'approximation du cristal fin on prédit une compression de bruit parfaite quelles que soient la taille et la forme du



détecteur utilisé. Nous montrons qu’il apparaît maintenant une ”aire de cohérence”, correspondant à la taille de détecteur minimale que l’on peut utiliser pour observer une compression maximale. Cette taille donne donc une limite sur la résolution optique de notre système.

Ce chapitre expose dans ses grandes lignes cette étude. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à la lecture de l’article [Lopez05] qui est reproduit en fin de cette section.

## A Contexte

La plupart des calculs relatifs aux effets non linéaires en cavité, tant au niveau classique que quantique, ont été effectués en utilisant l’approximation de *champ moyen*: on considère que les paramètres longitudinaux et transverses des différents champs en interaction changent peu lors de leur propagation dans le milieu non linéaire. Cette approximation simplifie grandement les calculs, et pour la dépasser on doit utiliser des simulations numériques [Leberre99]. Dans l’approximation du champ moyen, on doit donc supposer que la diffraction est négligeable dans le milieu non linéaire, ce qui restreint le domaine de validité de la méthode aux cristaux dont la longueur  $l_c$  est beaucoup plus petite que que la longueur de Rayleigh  $z_R$  des modes de la cavité (que l’on notera  $z_c$ ).

Cette hypothèse est en désaccord avec la réalité expérimentale. Les expérimentateurs aiment peu travailler dans cette configuration: ils préfèrent travailler dans le cas  $l_c \simeq z_c$  qui permet une efficacité d’interaction non linéaire bien meilleure, à puissance de pompe donnée [Boyd68]. Si l’on veut prédire des résultats en adéquation avec l’expérience, nous devons nécessairement introduire une théorie prenant en compte la diffraction à l’intérieur du cristal.

Classiquement, les effets de diffraction dans le milieu non linéaire ont déjà été pris en compte dans le cas du simple passage (sans cavité autour) et il a été montré qu’ils avaient une influence directe sur la forme du faisceau lumineux [Shen]. Ces effets ont aussi été comptabilisés dans des études quantiques, dans le cas de l’amplificateur paramétrique [Brambilla04], et plus récemment dans le cas de solitons [Trepas04]. Ils sont négligeables lorsque le milieu non linéaire est inséré en cavité monomode car la forme du mode est imposée par la cavité. Cependant ils prennent une toute autre importance en cavité dégénérée en modes transverses, comme la cavité confocale ou la cavité auto-imageante, qui n’imposent pas de structure transverse aux modes en interaction mais qui permettent de générer des états multimodes spatiaux.

Dans l’approximation en cristal fin, c’est à dire en prenant compte des effets de diffraction uniquement hors du cristal, il a été prédit [Grangier85] [Petsas03] qu’un OPO confocal sous le seuil permet des générer des états non classiques comprimés localement. On peut montrer qu’en utilisant une pompe plane, le niveau de compression mesuré en sortie ne dépend ni du profil spatial de l’oscillateur local utilisé, ni de la taille du détecteur utilisé. Ceci implique qu’une réduction de bruit conséquente (parfaite dans le cas juste en dessous du seuil) peut être observée sur une portion arbitrairement réduite du faisceau lumineux en sortie. Ainsi dans ce cas idéal, il n’existe pas de limitation quant à la taille de zone du faisceau sur laquelle

le bruit du faisceau est réduit lorsque l'OPO est à exacte confocalité. Ce système apparaît très prometteur pour permettre d'augmenter la résolution dans les images optiques.

Il est donc très important de disposer d'un modèle plus réaliste, qui ne soit pas limité par l'approximation de cristal fin, pour savoir si on pourra observer une compression locale de bruit en condition expérimentale réaliste, où la longueur du cristal est environ celle de la longueur de Rayleigh de la cavité. Tel est le but de ce chapitre, où nous allons montrer que la présence d'un cristal long impose une taille limite de surface sur laquelle on peut mesurer de la compression (appelée aire de cohérence). Cette surface est proportionnelle à  $w_c^2 l_c / z_R$ , où  $w_c$  est le waist de la cavité,  $l_c$  est la longueur du cristal, et  $z_R$  la longueur de Rayleigh de la cavité.

On présente tout d'abord le modèle utilisé pour traiter des effets de diffraction dans le cristal. Ensuite, on explique le principe de mesure de compression à l'aide d'une détection homodyne. Pour finir, les résultats en champ proche et en champ lointain seront abordés.

## B Le modèle

### B.1 Hypothèses

On considère un OPO en cavité confocale, pompé sous le seuil d'oscillation. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, la cavité confocale permet de transmettre soit la partie paire, soit la partie impaire du champ. On se place dans le cas où la partie paire est transmise. Il faut donc comprendre que dans cette situation, seule la partie paire du champ intracavité "subit" l'interaction paramétrique.

Dans les anciennes approches [Grangier85, Petsas03], le cristal étant considéré infiniment fin, l'interaction non linéaire entre champ de pompe et signal est ponctuelle. Dans notre nouveau modèle, tenant compte de la longueur finie du cristal notée  $l_c$ , l'interaction non linéaire a lieu tout au long de la propagation du champ dans le milieu non-linéaire. Dans ces conditions on peut montrer que l'hamiltonien d'interaction du système en représentation d'interaction est donné par:

$$H_{int} = \frac{i\hbar g}{2l_c} \int_{-l_c/2}^{l_c/2} dz' \int \int d^2x' \{A_P(\mathbf{x}', z') [\hat{B}_+^\dagger(\mathbf{x}', z', t)]^2 - h.c.\}, \quad (5.1)$$

où  $g$  est le terme de couplage proportionnel à la susceptibilité non-linéaire  $\chi^{(2)}$ ,  $A_p(\mathbf{x}, z)$  est l'enveloppe du champ de pompe,  $\hat{B}_+(\mathbf{x}, z)$  est la partie paire du champ signal intracavité, avec  $\mathbf{x}$  coordonnée dans le plan transverse,  $z$  coordonnée longitudinale correspondant à la direction de propagation de la pompe. Cette équation généralise l'hamiltonien en cristal fin utilisé dans [Petsas03].

## B.2 Equation d'évolution en champ proche

Connaissant l'hamiltonien d'interaction, on peut calculer l'équation d'évolution du champ intracavité en champ proche. Dans le cas du cristal infiniment fin, on montre que l'équation d'évolution décrit une infinité d'oscillateurs paramétriques optiques indépendants, correspondant à chaque point du plan.

Prenant en compte de la longueur finie du cristal, un couplage entre différents points du plan transverse apparaît. Ce couplage est effectif sur une "aire de cohérence", dont la longueur caractéristique  $l_{coh}$  est donnée par:

$$l_{coh} = \sqrt{\frac{\lambda l_c}{\pi n_s}} = w_C \sqrt{\frac{l_c}{n_s z_C}}, \quad (5.2)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde du champ intracavité,  $n_s$  est l'indice de réfraction du champ intracavité dans le milieu non-linéaire,  $w_C$  et  $z_C$  sont respectivement le waist et la longueur de Rayleigh de la cavité. Cette expression montre que lorsque la longueur du cristal est d'environ celle de la longueur de Rayleigh de la cavité, la longueur de cohérence transverse est environ égale au waist de cavité. Puisque la pompe est de forme gaussienne de waist  $w_p$ , pour travailler en régime multimode, on doit soit travailler avec une pompe défocalisée  $w_p \gg w_c$ , soit avec un cristal dont la taille est plus petite que la longueur de Rayleigh de la cavité, mais ceci au détriment du seuil d'oscillation de l'OPO. Le paramètre central du problème est donc:

$$b = \frac{w_p^2}{l_{coh}^2} = 2n_s \frac{z_p}{l_c}, \quad (5.3)$$

où  $z_p$  est la longueur de Rayleigh du faisceau de pompe. Ce paramètre donne le nombre de modes spatiaux qui peuvent être excités indépendamment (ce nombre correspond de manière équivalente au nombre de modes qui peuvent être comprimés indépendamment).

## B.3 Equation d'évolution en champ lointain

On peut accéder à l'équation d'évolution en champ lointain en prenant la transformée de Fourier spatiale de l'équation en champ proche. En champ lointain un couplage entre différents vecteurs d'onde apparaît, mais cette fois-ci en raison de la taille finie du faisceau de pompe. Un couplage entre divers vecteurs d'onde apparaît sur une aire de longueur caractéristique  $l_{coh} \sim \frac{1}{w_p}$ . On montre que le nombre de modes transverses pouvant être excités de manière indépendante est de nouveau donné par le paramètre  $b = \frac{w_p^2}{l_{coh}^2} = 2n_s \frac{z_p}{l_c}$ .

## C Détection homodyne et spectre de bruit

Connaissant l'équation du champ intracavité, nous pouvons maintenant avoir accès au spectre de bruit en sortie de notre système dans les deux configurations de champ proche

et de champ lointain. Dans le cas du cristal fin [Petsas03] en champ proche ou de la pompe plane en champ lointain ce calcul est analytique.

Cependant la présence d'un couplage en champ proche (lié à la longueur finie du cristal) ou en champ lointain (lié à la taille finie de la pompe) entre différents points du plan transverse nous oblige maintenant à utiliser une méthode numérique de résolution.

La méthode numérique consiste à discrétiser le plan transverse. Pour simplifier le problème, nous sommes passés à un modèle à une dimension transverse: la cavité est constituée de miroirs cylindriques, ainsi la répartition transverse du champ ne dépend que d'un seul paramètre,  $y$ .

Cette discrétisation permet d'obtenir une relation entrée-sortie, à fréquence nulle, entre les champs entrants  $B_+^{in}(y)$ , et les champs sortants  $B_+^{out}(y)$ , couplant tous les points du plan transverse, du type:

$$B_+^{out}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dy' U(y, y') B_+^{in}(y') + \int_{-\infty}^{\infty} dy' V(y, y') B_+^{in+}(y') \quad (5.4)$$

Grâce à cette nouvelle relation, on peut calculer numériquement le niveau de compression en sortie de l'OPO pour une géométrie de détecteur utilisée quelconque.

## D Analyse des fluctuations en champ proche

En champ proche la présence du cristal épais entraîne un couplage entre pixels, sur une zone dont la taille caractéristique est  $l_{coh}$ .

Nous avons considéré tout d'abord le cas d'une pompe plane et d'un oscillateur local plan. Dans le cas du cristal fin ([Grangier85]), le niveau de compression ne dépend pas de la taille du détecteur utilisé. La figure 5.1 représente les résultats d'une mesure à l'aide d'un détecteur de forme circulaire, de rayon  $\Delta\rho$ , centré sur l'axe optique (la zone de détection est donc symétrique, comme dans [Petsas03]). Nous représentons le niveau de compression, à fréquence nulle en fonction du rayon du détecteur, normalisé à la longueur de cohérence  $l_{coh} = \sqrt{\frac{\lambda l_c}{\pi n_s}}$ . On peut voir que pour  $\Delta\rho < l_c$ , lorsque  $\Delta\rho \rightarrow 0$  nous n'avons plus de compression, comme nous l'avons prévu. Pour des tailles plus importantes de détecteurs, on peut obtenir une compression parfaite.

Ensuite nous avons envisagé le cas plus réaliste de la pompe non plane où le niveau de compression dépend maintenant du paramètre  $b = \frac{w_p^2}{l_{coh}^2} = 2n_s \frac{z_p}{l_c}$ . La figure 5.2 représente le spectre de bruit normalisé, à fréquence nulle, en fonction du rayon du détecteur normalisé à  $l_{coh}$ , pour différents paramètres  $b$ , en utilisant un oscillateur local plan. Comme dans la figure 5.1, pour  $\Delta\rho \rightarrow 0$ , la réduction de bruit devient nulle. On remarque que les effets de compression disparaissent pour de grandes tailles de détecteur en raison de la taille finie de la pompe, comme cela a été déjà souligné dans [Petsas03].

Pour finir nous avons considéré le cas d'un détecteur constitué de deux pixels (dont la taille est égale à la taille de cohérence) symétriques par rapport à l'axe de la cavité. La figure 5.3

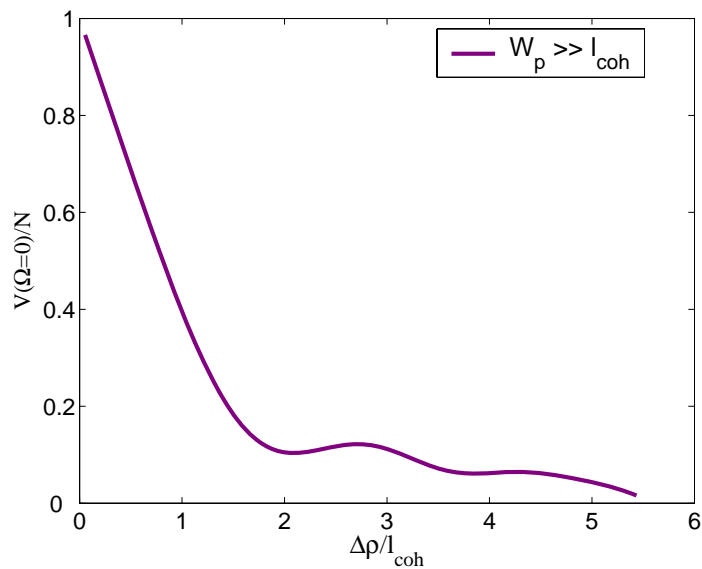


Fig. 5.1: Spectre de bruit à fréquence nulle, normalisé au shot noise, en pompe plane, en fonction du rayon de courbure du détecteur (normalisé à  $l_{coh}$ ).

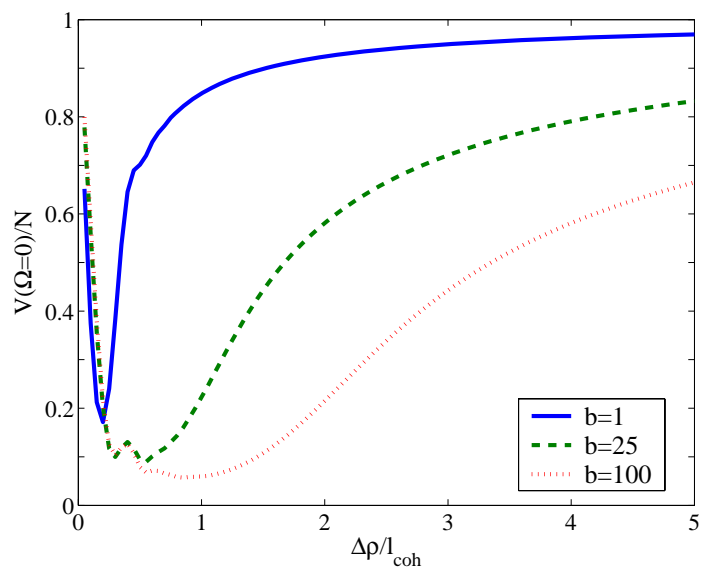


Fig. 5.2: Spectre de bruit à fréquence nulle, normalisé au shot noise, en fonction du rayon du détecteur (normalisé à  $l_{coh}$ ), pour différentes valeurs de  $b$

représente les résultats théoriques du niveau de compression obtenu pour différentes valeurs de  $b$ , en fonction de la distance entre les deux pixels. Pour de grandes valeurs de  $\rho$ , le niveau

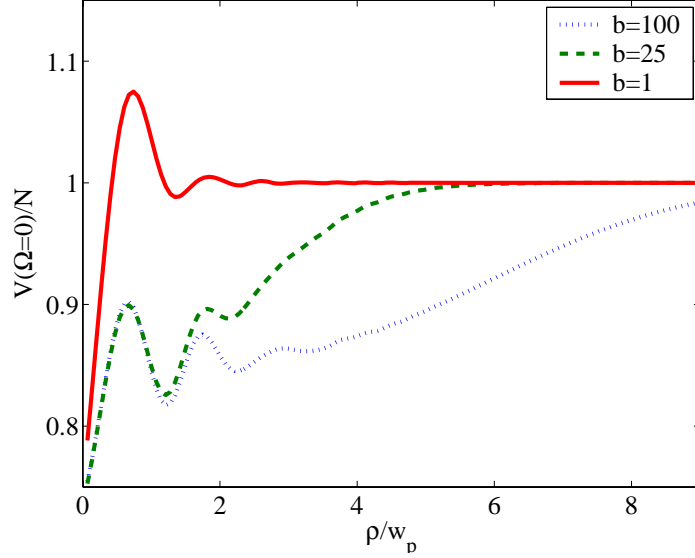


Fig. 5.3: Spectre de bruit normalisé au bruit quantique, en fonction de la distance des deux pixels  $\rho$  à l'axe optique (normalisée à  $l_{coh}$ ), pour différentes valeurs de  $b$

de bruit tend vers le bruit quantique standard, comme cela a été décrit dans [Petsas03]. Cependant pour de faibles valeurs de  $\rho$ , la compression ne tend pas vers zero, comme dans le cas du cristal épais.

## E Analyse des fluctuations en champ lointain

Dans ce paragraphe, on va étudier les fluctuations en sortie de l'OPO en champ lointain dans la base des vecteurs  $q$ . Comme déjà souligné dans le deuxième paragraphe, le couplage entre vecteurs d'onde est maintenant dû à la taille finie de la pompe. Une nouvelle aire de cohérence apparaît,  $l_{coh,f}$  donnée par:

$$l_{coh,f} \propto \frac{1}{w_p}$$

On va s'intéresser uniquement au cas où la pompe est non plane et où une résolution numérique est nécessaire.

Nous avons fait une étude pour deux géométries de détecteurs. La figure 5.4 représente l'évolution du bruit à fréquence nulle pour un détecteur circulaire centré sur l'axe optique, à résonance, pour différents paramètres  $b$ , en fonction de la taille du détecteur normalisée

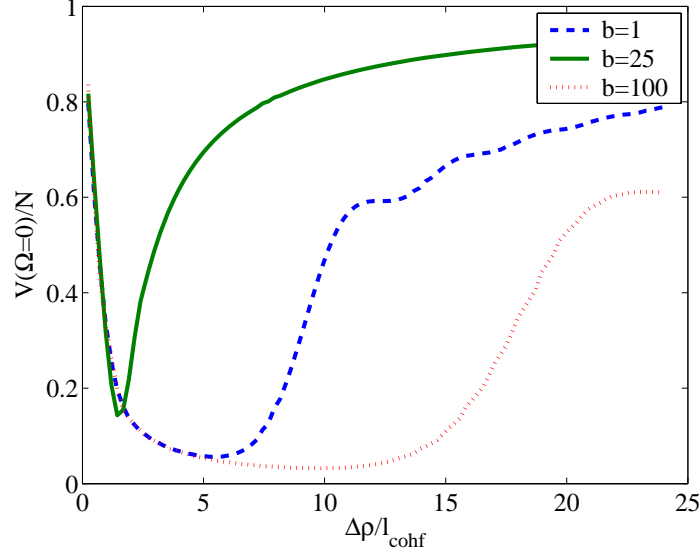


Fig. 5.4: Spectre de bruit à fréquence nulle, normalisé au shot noise, en fonction du rayon du détecteur  $\Delta\rho$  (normalisé à  $l_{cohf}$ ), dans le cas d'une pompe de taille finie en champ lointain, pour différentes valeurs de  $b$

à  $l_{cohf}$ . On voit une évolution comparable au cas de la pompe plane, sauf pour les faibles tailles de détecteur où le bruit tend la limite quantique standard.

La figure 5.5 représente les résultats obtenus dans le cas d'un détecteur constitué de deux pixels (pixels dont la taille est égale à la taille de cohérence  $l_{cohf}$ ), pour différentes valeurs de  $b$ , en fonction de la distance entre les pixels  $\rho$ . On remarque que le niveau de compression diminue pour de faibles distances, ceci en raison de la taille finie de la pompe.

## F Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu qu'en raison des effets de diffraction à l'intérieur du cristal non linéaire dans un OPO confocal, la réduction de bruit locale initialement prévue quelle que soit la forme et la taille du détecteur dans le cas du cristal mince est maintenant limitée à des surfaces de taille supérieures à une aire de cohérence de dimension typique  $l_{coh}$ . Ces calculs montrent donc qu'il faudra prendre en compte ce phénomène dans les expériences futures. Si l'on veut produire un faisceau dont plusieurs zones élémentaires sont comprimées, il faut donc choisir soit un cristal de longueur inférieur à  $z_R$ , soit une pompe défocalisée dont le waist est bien plus grand que le waist propre de la cavité. Dans les deux cas l'efficacité de couplage linéaire est réduite. Par exemple avec un cristal de longueur  $1cm$ , la longueur de cohérence est de  $40\mu m$ , et on doit choisir une taille de waist de pompe bien plus grande que cette valeur pour obtenir un fonctionnement multimode (le nombre de modes excités étant

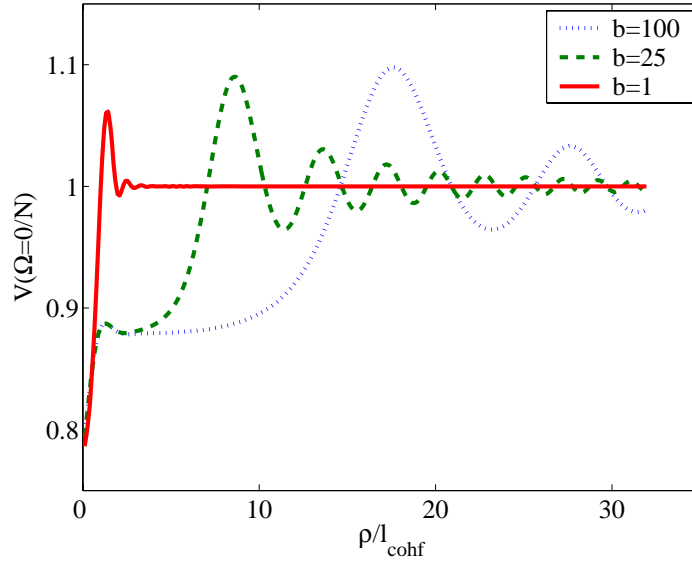


Fig. 5.5: Spectre de bruit normalisé au bruit quantique, en fonction de la distance des deux pixels  $\rho$  à l'axe optique (normalisée à  $l_{coh}$ ), en régime de pompe de taille finie en champ lointain pour différentes valeurs de  $b$

égal à  $b = \frac{w_p^2}{l_{coh}^2}$ ). Cette pompe défocalisée implique que le seuil d'oscillation est augmenté d'un facteur environ égal à  $b$ . Ainsi l'obtention d'un fonctionnement multimode n'est pas gratuit: à puissance de pompe donnée, le nombre de modes excités est donné par le rapport entre la puissance de pompe injectée et la puissance de pompe du seuil de fonctionnement monomode.

## G Reproduction de l'article



PHYSICAL REVIEW A 72, 013806 (2005)

### Multimode squeezing properties of a confocal optical parametric oscillator: Beyond the thin-crystal approximation

L. Lopez, S. Gigan, N. Treps, A. Maître, and C. Fabre

*Laboratoire Kastler Brossel, Université Pierre et Marie Curie, Campus Jussieu, Case 74, 75252 Paris cedex 05, France*

A. Gatti

*INFN, Dipartimento di Scienze Fisiche e Matematiche, Università dell'Insubria, Via valleggio 11, 22100 Como, Italy*

(Received 4 March 2005; published 8 July 2005)

Up to now, transverse quantum effects (usually labeled as “quantum imaging” effects) which are generated by nonlinear devices inserted in resonant optical cavities have been calculated using the “thin-crystal approximation,” i.e., taking into account the effect of diffraction only inside the empty part of the cavity, and neglecting its effect in the nonlinear propagation inside the nonlinear crystal. We introduce in the present paper a theoretical method which is not restricted by this approximation. It allows us in particular to treat configurations closer to the actual experimental ones, where the crystal length is comparable to the Rayleigh length of the cavity mode. We use this method in the case of the confocal optical parametric oscillator, where the thin-crystal approximation predicts perfect squeezing on any area of the transverse plane, whatever its size and shape. We find that there exists in this case a “coherence length” which gives the minimum size of a detector on which perfect squeezing can be observed, and which gives therefore a limit to the improvement of optical resolution that can be obtained using such devices.

DOI: [10.1103/PhysRevA.72.013806](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.72.013806)

PACS number(s): 42.50.Dv, 42.65.Yj, 42.60.Da

#### I. INTRODUCTION

Nonlinear optical elements inserted in optical cavities have been known for a long time to produce a great variety of interesting physical effects, taking advantage of the field enhancement effect and of the feedback provided by a resonant cavity [1,2]. In particular, a great deal of attention has been devoted to cavity-assisted nonlinear transverse effects, such as pattern formation [4] and spatial soliton generation [5]. More recently the quantum aspects of these phenomena have begun to be studied, mainly at the theoretical level, under the general name of “quantum imaging,” especially in planar or confocal cavities.

Almost all the investigations relative to intracavity nonlinear effects, both at the classical and quantum level, have been performed within the *mean-field approximation*, in which one considers that the different interacting fields undergo only weak changes through their propagation inside the cavity, in terms of their longitudinal and transverse parameters. This almost universal approach simplifies a great deal the theoretical investigations, and numerical simulations are generally needed if one wants to go beyond this approximation [9]. It implies in particular that diffraction is assumed to be negligible inside the nonlinear medium, which limits the applicability of the method to nonlinear media whose length  $l_c$  is much smaller than the Rayleigh length  $z_R$  of the cavity modes  $z_c$  (so-called “thin” medium). This is a configuration that experimentalists do not like much: they prefer to operate in the case  $l_c \approx z_c$  which yields a much more efficient nonlinear interaction for a given pump power [10]. If one wants to predict results of experiments in realistic situations, one therefore needs to extend the theory beyond the usual thin nonlinear medium approximation, and take into account diffraction effects occurring together with the nonlinear interaction inside the medium.

The effects of simultaneous diffraction and nonlinear propagation have already been taken into account in the case of free propagation, i.e., without optical cavity around the nonlinear crystal, and they have been found to have a direct influence on the shape of the propagating beam [3]. These effects have also been studied in detail at the quantum level in the parametric amplifier case [8], and recently for the soliton case [11]. In contrast, they do not play a significant role when the nonlinear medium is inserted in an optical cavity with nondegenerate transverse modes, which imposes the shape of the mode. But they are of paramount importance in the case of cavities having degenerate transverse modes, such as a plane or confocal cavity, which do not impose the transverse structure of the interacting fields, and which are used to generate multimode quantum effects.

Within the thin-crystal approximation, i.e., taking into account diffraction effects only outside the crystal, striking quantum properties have been predicted to occur in a degenerate optical parametric oscillator (OPO) below threshold using a confocal cavity [12,13]: this device generates quadrature squeezed light which is multimode in the transverse domain. It was shown in the case of a plane pump that the level of squeezing measured at the output of such an OPO neither depends on the spatial profile of the local oscillator used to probe it, nor on the size of the detection region. This implies that a significant quantum noise reduction, in principle tending to perfection when one approaches the oscillation threshold from below, can be observed in arbitrarily small portions of the down-converted beam. Therefore in this model there is no limitation in the transverse size of the domains in which the quantum noise is reduced when the OPO works in the exact confocal configuration. Such a multimode squeezed light appears thereby as a very promising tool to increase the resolution in optical images beyond the wavelength limit.

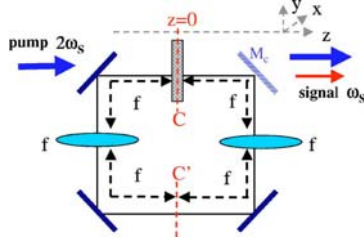
LOPEZ *et al.*PHYSICAL REVIEW A **72**, 013806 (2005)

FIG. 1. Confocal ring cavity. The mirrors transmit the pump wave and reflect the signal wave, with the exception of mirror  $M_c$  that partially transmits the signal.

It is therefore very important to make a more realistic theoretical model of this system, which is no longer limited by the thin-crystal approximation, to see whether the predicted local squeezing is still present in actual experimental realizations in which the crystal length is of the order of the Rayleigh range of the resonator. This is the purpose of the present paper, in which we will show that the presence of a long crystal inside the resonator imposes a lower limit to the size of the regions in which squeezing can be measured (“coherence area”), which is proportional to  $w_c^2 l_c / z_R$ , where  $w_c$  is the cavity beam waist,  $l_c$  is the crystal length, and  $z_R$  the Rayleigh range of the resonator.

The following section (Sec. II) is devoted to the general description of the model that is used to treat the effect of diffraction inside the crystal, using the assumption that the single pass nonlinear interaction is weak in the crystal. We then describe in Sec. III the method that is used to determine the squeezing spectra measured in well-defined homodyne detection schemes. We give in Sec. IV and V the results for such quantities respectively in the near field and in the far field, and conclude in Sec. VI.

## II. MODEL

### A. Assumptions of the model

Let us consider a confocal cavity, that for simplicity we take as a ring cavity of the kind shown schematically in Fig. 1 ([14,15]). It is formed by four plane mirrors and two lenses having a focal length equal to one-quarter of the total cavity length, and symmetrically placed along the cavity, so that the focal points coincide at two positions  $C$  and  $C'$ . It contains a type-I parametric medium of length  $l_c$ , centered on the point  $C$  (see figure). It is pumped by a field  $A_p$  of frequency  $2\omega_s$ , having a Gaussian shape and focused in the plane containing the point  $C$ . In such a plane the variation of the mean envelope with the transverse coordinate  $\mathbf{x}$  is given by

$$A_p(\mathbf{x}) = A_p \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{w_p^2}\right). \quad (1)$$

We assume that the mirrors are totally transparent for the pump wave, and perfectly reflecting for the field at frequency  $\omega_s$ , except for the coupling mirror  $M_c$ , which has a small transmission  $t$  at this frequency. The system was described in

Ref. [13] under the thin parametric medium approximation. We will follow here the same approach, generalized to the case of a thick parametric medium of length  $l_c$ . The intracavity signal field at frequency  $\omega_s$  is described by a field envelope operator  $\hat{B}(\mathbf{x}, z)$ , where  $z$  is the longitudinal coordinate along the cavity ( $z=0$  corresponding to plane  $C$ ), obeying the standard equal time commutation relation at a given transverse plane at position  $z$ :

$$[\hat{B}(\mathbf{x}, z, t), \hat{B}^\dagger(\mathbf{x}', z, t)] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2)$$

As we are only interested in the regime below threshold and without pump depletion, the pump field fluctuations do not play any role.

In a confocal resonator the cavity resonances correspond to complete sets of Gauss-Laguerre modes with a given parity for transverse coordinate inversion; we assume that a set of cavity *even* modes is tuned to resonance with the signal field, and that the odd modes are far off resonance. It is then useful to introduce the even part of the field operator:

$$\hat{B}_+(\mathbf{x}, z, t) = \frac{1}{2}[\hat{B}(\mathbf{x}, z, t) + \hat{B}(-\mathbf{x}, z, t)], \quad (3)$$

which obeys a modified commutation relation:

$$[\hat{B}_+(\mathbf{x}, z, t), \hat{B}_+^\dagger(\mathbf{x}', z, t)] = \frac{1}{2}[\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \delta(\mathbf{x} + \mathbf{x}')] \quad (4)$$

and can be written as an expansion over the even Gauss-Laguerre modes:

$$\hat{B}_+(\mathbf{x}, z, t) = \sum_{p,l \text{ even}} f_{p,l}(\mathbf{x}, z) \hat{a}_{p,l}(z, t), \quad (5)$$

where  $\hat{a}_{p,l}(z, t)$  is the annihilation operator of a photon in mode  $(p, l)$  at the cavity position  $z$  and at time  $t$ .

The interaction Hamiltonian of the system in the interaction picture is given by

$$H_{\text{int}} = \frac{i\hbar g}{2l_c} \int_{-l_c/2}^{l_c/2} dz' \int \int d^2x' \{A_p(\mathbf{x}', z') [\hat{B}_+^\dagger(\mathbf{x}', z', t)]^2 - \text{H.c.}\}, \quad (6)$$

where  $g$  is the coupling constant proportional to the second order nonlinear susceptibility  $\chi^{(2)}$ . This equation generalizes the thin medium parametric Hamiltonian of Ref. [16].

### B. Evolution equation in the image plane (near field)

In previous approaches [12,13], the crystal was assumed to be thin, so that one could neglect the longitudinal dependence of  $A_p$  and  $\hat{B}_+$  along the crystal length in the Hamiltonian (6). This cannot be done in a thick crystal. We will, nevertheless, make a simplifying assumption which turns out to be very realistic in the cw regime, with pump powers below 1 W. We assume that the nonlinear interaction is very weak, so that it does not affect much the field amplitudes in a single pass through the crystal. We will therefore remove the  $z$  dependence of the operators  $\hat{a}_{p,l}$  in Eqs. (5) and (6), assuming  $\hat{a}_{p,l}(z, t) = \hat{a}_{p,l}(z=0, t) = \hat{a}_{p,l}(t)$ , where  $z=0$  is the

MULTIMODE SQUEEZING PROPERTIES OF A...

PHYSICAL REVIEW A **72**, 013806 (2005)

crystal and cavity center  $C$ . The longitudinal variation of the signal operator  $\hat{B}$  is then only due to diffraction and is described by the well-known  $z$  dependence of the modal functions  $f_{p,i}(\mathbf{x}, z)$ . This assumption leads to a rather simple expression of the commutator for the  $\hat{B}_+$  field at different positions inside the crystal:

$$[\hat{B}_+(\mathbf{x}, z, t), \hat{B}_+^\dagger(\mathbf{x}', z', t')] = G_+(z - z'; \mathbf{x}, \mathbf{x}'). \quad (7)$$

Here  $G_+(z; \mathbf{x}, \mathbf{x}')$  is the symmetrized part of the Fresnel propagator  $G(z; \mathbf{x}, \mathbf{x}')$ , describing the field linear propagation inside the crystal:

$$G_+(z; \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{2} [G(z; \mathbf{x}, \mathbf{x}') + G(z; \mathbf{x}, -\mathbf{x}')] \quad (8)$$

with

$$G(z; \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{ik_s}{2\pi z} e^{ik_s(|\mathbf{x} - \mathbf{x}' - \boldsymbol{\rho}_s|^2)/2z}, \quad (9)$$

where  $k_s = n_s \omega_s / c$  is the field wave number, with  $n_s$  being the index of refraction at frequency  $\omega_s$ , and we have introduced a walk-off term, present only if the signal wave is an extraordinary one, described by the two-dimensional walk-off angle  $\boldsymbol{\rho}_s$ .

It is now possible to derive the time evolution of the field operator  $\hat{B}(\mathbf{x}, z, t)$  due to the parametric interaction. We will, for example, calculate it at the midpoint plane  $z=0$  of the crystal:

$$\left. \frac{\partial \hat{B}_+}{\partial t}(\mathbf{x}, 0, t) \right|_{\text{int}} = g \int \int d^2 x'' K_{\text{int}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') \hat{B}_+^\dagger(\mathbf{x}'', 0, t) \quad (10)$$

with the integral kernel  $K_{\text{int}}$  given by

$$K_{\text{int}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') = \frac{1}{l_c} \int_{-l_c/2}^{l_c/2} dz' \times \int \int d^2 x' A_p(\mathbf{x}', z') G_+^*(z'; \mathbf{x}', \mathbf{x}) G_+^*(z'; \mathbf{x}', \mathbf{x}''). \quad (11)$$

In the limit of a thin crystal considered in Refs. [12,13], Eq. (11) is replaced by the simpler expression

$$\left. \frac{\partial \hat{B}_+}{\partial t}(\mathbf{x}, 0, t) \right|_{\text{int}} = g A_p(\mathbf{x}) \hat{B}_+^\dagger(\mathbf{x}, 0, t). \quad (12)$$

In the thin-crystal case [Eq. (12)], the parametric interaction is local, i.e., the operators at different positions of the transverse plane are not coupled to each other, whereas in the thick-crystal case [Eq. (11)], the parametric interaction mixes the operators at different points of the transverse plane, over areas of finite extension. Note, however, that operators corresponding to different  $z$  values are not coupled to each other, because of our assumption of weak parametric interaction. This situation is very close to the one considered in Refs. [6–8] for parametric down-conversion and amplification in a single-pass crystal, where finite transverse coherence areas for the spatial quantum effects arise because of

the finite spatial emission bandwidth of the crystal. In a similar way, in our case the spatial extension of the kernel  $K_{\text{int}}$  will turn out to give the minimum size in which spatial correlation or local squeezing can be observed in such a system. The analogy will become more evident in the next section, where we will explicitly solve the propagation equation of the Fourier spatial modes along the crystal.

In order to get the complete evolution equation for the signal beam, one must add the free Hamiltonian evolution of the intracavity beam and the damping effects. This part of the treatment is standard [17], and is identical to the case of a thin crystal inserted in a confocal cavity [13]. The final evolution equation reads

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{B}_+}{\partial t}(\mathbf{x}, 0, t) = & -\gamma(1 + i\Delta) \hat{B}_+(\mathbf{x}, 0, t) \\ & + g \int \int d^2 x'' K_{\text{int}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') \hat{B}_+^\dagger(\mathbf{x}'', 0, t) \\ & + \sqrt{2} \gamma \hat{B}_{+\text{in}}(\mathbf{x}, 0, t), \end{aligned} \quad (13)$$

where  $\gamma$  is the cavity escape rate,  $\Delta$  the normalized cavity detuning of the even family of modes closest to resonance with the signal field, and  $\hat{B}_{+\text{in}}$  the input field operator.

In order to evaluate the coupling kernel, let us first take into account the diffraction of the pump field, focused at the center of the crystal,  $z=0$ . It is described by the Fresnel propagator  $G_p(z; \mathbf{x}, \mathbf{x}')$ , equal to Eq. (9) when one replaces  $k_s$  by the pump wave number  $k_p$ , and the signal walk-off angle  $\boldsymbol{\rho}_s$  with the pump walk-off angle  $\boldsymbol{\rho}_p$ . One then gets

$$K_{\text{int}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') = \frac{1}{l_c} \int_{-l_c/2}^{l_c/2} dz' \int d^2 x' \int d^2 y A_p(\mathbf{y}) G_p(z'; 0; \mathbf{x}', \mathbf{y}) \times G_+^*(z'; 0; \mathbf{x}', \mathbf{x}) G_+^*(z'; 0; \mathbf{x}', \mathbf{x}''). \quad (14)$$

Assuming for simplicity exact collinear phase matching  $k_p = 2k_s$ , and neglecting the walk-off of the extraordinary wave, four of the five integrations can be exactly performed, and one finally gets

$$K_{\text{int}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') = \frac{1}{2} \left[ A_p \left( \frac{\mathbf{x} + \mathbf{x}''}{2} \right) \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') + A_p \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}''}{2} \right) \Delta(\mathbf{x} + \mathbf{x}'') \right] \quad (15)$$

with

$$\Delta(\mathbf{x} \pm \mathbf{x}'') = \frac{ik_s}{4\pi l_c} \int_{-l_c/2}^{l_c/2} \frac{dz'}{z'} e^{(ik_s/4z')|\mathbf{x} \pm \mathbf{x}''|^2}. \quad (16)$$

It can be easily shown that the function  $\Delta(\mathbf{x} \pm \mathbf{x}'')$  tends to the usual two-dimensional distribution  $\delta(\mathbf{x} \pm \mathbf{x}'')$  when  $l_c \rightarrow 0$ , and that it can be written in terms of the integral sine function  $\text{Si}(x) = \int_0^x (\sin udu/u)$  [18],

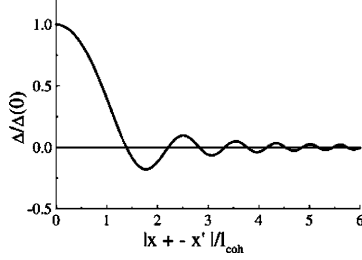
LOPEZ *et al.*PHYSICAL REVIEW A **72**, 013806 (2005)

FIG. 2. Evaluation of the coupling kernel,  $\Delta$  given by Eq. (16) is plotted as a function of  $|\mathbf{x} \pm \mathbf{x}'|$  scaled to the coherence length (18). The first zero of  $\Delta$  is obtained for the value 1.37 of the coordinate.

$$\Delta(\mathbf{x} \pm \mathbf{x}') = \frac{k_s}{2\pi l_c} \left[ \frac{\pi}{2} - \text{Si} \left( \frac{k_s |\mathbf{x} \pm \mathbf{x}'|^2}{2l_c} \right) \right]. \quad (17)$$

This expression shows us that  $\Delta$  takes negligible values when  $|\mathbf{x} \pm \mathbf{x}'| \gg \sqrt{\lambda l_c / \pi n_s}$ . Figure 2 plots  $\Delta$  as a function of the distance  $|\mathbf{x} \pm \mathbf{x}'|$  scaled to

$$l_{\text{coh}} = \sqrt{\frac{\lambda l_c}{\pi n_s}} = w_C \sqrt{\frac{l_c}{n_s z_C}}, \quad (18)$$

where  $w_C$  and  $z_C$  are the cavity waist and Rayleigh range, respectively. This expression shows that when the crystal length is on the order of the Rayleigh range of the resonator, the transverse coherence length is on the order of the cavity waist. Recalling that the pump field has a Gaussian shape of waist  $w_p$ , in order to have a multimode operation one must therefore use a defocused pump, with  $w_p \gg w_C$ , or alternatively use a crystal much shorter than the Rayleigh range of the resonator, which is detrimental for the oscillation threshold of the OPO. The relevant scaling parameter of our problem is therefore

$$b = \frac{w_p^2}{l_{\text{coh}}^2} = 2n_s \frac{z_p}{l_c}, \quad (19)$$

where  $z_p$  is the Rayleigh or diffraction length of the pump beam. This parameter sets the number of spatial modes that can be independently excited, and it will turn out to give also the number of modes that can be independently squeezed.

### C. Evolution equation in the spatial Fourier domain (far field)

In this section we will investigate the intracavity dynamics of the spatial Fourier amplitude of the signal field, which will offer an alternative formulation of the problem. Fourier modes can be observed in the far-field plane with respect to the crystal center  $C$ , which in turn can be detected in the focal plane of a lens placed outside the cavity. Let us introduce the spatial Fourier transform of the signal field envelope operator,

$$\hat{B}_+(\mathbf{q}, z, t) = \int \frac{d^2x}{2\pi} \hat{B}_+(\mathbf{x}, z, t) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = \frac{1}{2} [\hat{B}(\mathbf{q}, z, t) + \hat{B}(-\mathbf{q}, z, t)]. \quad (20)$$

Equation (14) becomes

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{B}_+}{\partial t}(\mathbf{q}, 0, t) = & -\gamma(1 + i\Delta) \hat{B}_+(\mathbf{q}, 0, t) \\ & + g \int d^2q'' \tilde{K}_{\text{int}}(\mathbf{q}, \mathbf{q}'') \hat{B}_+^\dagger(\mathbf{q}'', 0, t) \\ & + \sqrt{2} \gamma \tilde{B}_{+\text{in}}(\mathbf{q}, 0, t), \end{aligned} \quad (21)$$

where the coupling Kernel  $\tilde{K}_{\text{int}}(\mathbf{q}, \mathbf{q}'')$  is the Fourier transform of the kernel (15) with respect to both arguments. Straightforward calculations show that

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{\text{int}}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = & \frac{1}{2} \left[ \tilde{A}_p(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \text{sinc} \left( \frac{l_c}{2k_s} \left| \frac{\mathbf{q} - \mathbf{q}'}{2} \right|^2 \right) \right. \\ & \left. + \tilde{A}_p(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \text{sinc} \left( \frac{l_c}{2k_s} \left| \frac{\mathbf{q} + \mathbf{q}'}{2} \right|^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (22)$$

where  $\tilde{A}_p$  is the spatial Fourier transform of the Gaussian pump profile (1), i.e.,  $\tilde{A}_p(\mathbf{q}) = (w_p^2/2) A_p \exp[-|\mathbf{q}|^2 (w_p^2/4)]$ . {and where sinc represents the Sinus Cardinal function.}

The result (22) can also be derived by solving the propagation equation of the pump and signal wave inside a  $\chi^{(2)}$  crystal directly in the Fourier domain and in the limit of weak parametric gain. We will follow here the same approach as in Refs. [8,19], and write the propagation equation in terms of the spatiotemporal Fourier transform field operators  $\hat{A}_j(\mathbf{q}, \omega, z)$  of the pump ( $j=p$ ) and signal ( $j=s$ ) waves. Since the cavity linewidth is smaller by several orders of magnitude than the typical frequency bandwidth of the crystal, the cavity filters a very small frequency bandwidth around the carrier frequency  $\omega_s$  of the signal; moreover, we have assumed that the pump is monochromatic, so that we can safely neglect the frequency argument in the propagation equations, which take the form

$$\frac{\partial \hat{A}_j}{\partial z}(\mathbf{q}, z) = ik_{jz}(\mathbf{q}) \hat{A}_j(\mathbf{q}, z) + \hat{P}_j^{\text{NL}}(\mathbf{q}, z), \quad (23)$$

where  $\hat{P}_j^{\text{NL}}$  is the nonlinear term, arising from the second-order nonlinear susceptibility of the crystal.  $k_{jz}(\mathbf{q}) = \sqrt{k_j^2 - q^2}$  is the projection along the  $z$  axis of the wave vector, with  $k_j = k_j(\omega_j, \mathbf{q})$  being the wave number, which for extraordinary waves depends also on the propagation direction (identified by  $\mathbf{q}$ ). For the pump wave, we assume an intense coherent beam, that we suppose undepleted by the parametric down-conversion process in a single pass through the crystal, so that

$$\hat{A}_p(\mathbf{q}, z) \rightarrow \tilde{A}_p(\mathbf{q}, z) = e^{ik_{pz}(\mathbf{q})z} A_p(\mathbf{q}, 0), \quad (24)$$

where we take the crystal center as the reference plane  $z=0$ . For the signal, the propagation equation is more easily solved by setting  $\hat{A}_s(\mathbf{q}, z) = \exp[ik_{sz}(\mathbf{q})z] \hat{a}_s(\mathbf{q}, z)$ . The evolu-

MULTIMODE SQUEEZING PROPERTIES OF A...

tion along  $z$  of the operator  $\hat{a}_s$  is only due to the parametric interaction and is governed by the equation (see, e.g., Refs. [8,19] for more details)

$$\frac{\partial \hat{a}_s}{\partial z}(\mathbf{q}, z) = \frac{\sigma}{l_c} \int d^2 q' A_p(\mathbf{q} + \mathbf{q}', 0) \hat{a}_s^\dagger(\mathbf{q}', z) e^{i\delta(\mathbf{q}, \mathbf{q}')z}, \quad (25)$$

where  $\sigma/l_c$  is the parametric gain per unit length, and we have introduced the phase mismatch function

$$\delta(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = k_{pz}(\mathbf{q} + \mathbf{q}') - k_{sz}(\mathbf{q}) - k_{sz}(\mathbf{q}'). \quad (26)$$

Equation (25) has the formal solution

$$\begin{aligned} \hat{a}_s\left(\mathbf{q}, \frac{l_c}{2}\right) &= \hat{a}_s\left(\mathbf{q}, -\frac{l_c}{2}\right) + \frac{\sigma}{l_c} \int_{-l_c/2}^{l_c/2} dz' \\ &\times \int d^2 q' A_p(\mathbf{q} + \mathbf{q}', 0) \hat{a}_s^\dagger(\mathbf{q}', z') e^{i\delta(\mathbf{q}, \mathbf{q}')z'}. \end{aligned} \quad (27)$$

Assuming a weak parametric efficiency  $\sigma \ll 1$ , we can solve this equation iteratively. At first order in  $\sigma$  the solution reads

$$\hat{a}_s\left(\mathbf{q}, \frac{l_c}{2}\right) = \hat{a}_s\left(\mathbf{q}, -\frac{l_c}{2}\right) + \sigma \int d^2 q' K_1(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \hat{a}_s^\dagger(\mathbf{q}', 0), \quad (28)$$

with

$$K_1(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \tilde{A}_p(\mathbf{q} + \mathbf{q}', 0) \text{sinc}\left(\delta(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \frac{l_c}{2}\right). \quad (29)$$

We observe that in the paraxial approximation  $k_{jz}(\mathbf{q}) \approx k_j - \rho_j \cdot \mathbf{q} - q^2/2k_j$ , where  $\rho_j$  is the walk-off angle and  $k_j = n_j \omega_j/c$ . The phase mismatch function is hence given by

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{q}, \mathbf{q}') &= k_p - 2k_s + (\rho_s - \rho_p) \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{q}') - \frac{|\mathbf{q} + \mathbf{q}'|^2}{2k_p} \\ &+ \frac{1}{2k_s} (q^2 + q'^2). \end{aligned} \quad (30)$$

Assuming exact phase matching  $k_p = 2k_s$ , and neglecting the walk-off term, the argument of the sinc function in Eq. (29) becomes

$$\delta(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \frac{l_c}{2} = \frac{l_c}{2k_s} \left| \frac{\mathbf{q} - \mathbf{q}'}{2} \right|^2. \quad (31)$$

In this way we start to recover the result of the Hamiltonian formalism used to derive Eqs. (22) and (14), where, however, the effect of walk-off and phase mismatch were neglected for simplicity. Indeed, it is not difficult to show that the variation of the intracavity field operator  $\hat{B}_\pm(\mathbf{q}, 0, t)$  per cavity round-trip time  $\tau$ , due to the parametric interaction in a single pass through the crystal, is

PHYSICAL REVIEW A **72**, 013806 (2005)

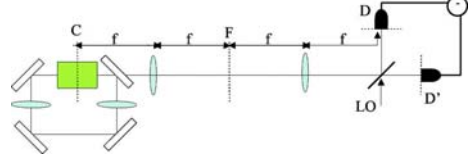


FIG. 3. Balanced homodyne detection scheme in the near field. Two matching lenses of focal  $f$  are used to image the cavity center  $C$  at the detection planes  $D$  and  $D'$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \Delta \hat{B}_\pm(\mathbf{q}, 0, t) \Big|_{\text{int}} &= \frac{\sigma}{\tau} \int d^2 q' \frac{1}{2} [K_1(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \\ &+ K_1(\mathbf{q}, -\mathbf{q}')] \hat{B}_\pm^\dagger(\mathbf{q}', 0, t). \end{aligned} \quad (32)$$

This approach permits us to understand the physical origin of the sinc terms in the coupling kernel of Eq. (22) [which are the Fourier transform of the  $\Delta$  terms in Eq. (15)], that is, the limited phase-matching bandwidth of the nonlinear crystal. For a crystal of negligible length, phase matching is irrelevant and there is no limitation in the spatial bandwidth of down-converted modes, whereas for a finite crystal the cone of parametric fluorescence has an aperture limited to a bandwidth of transverse wave vectors  $\Delta q \approx 1/l_{\text{coh}} \propto 1/\sqrt{\lambda l_c}$ . As a consequence of the confocal geometry, the cavity ideally transmits all the Fourier modes, so that the only limitation in spatial bandwidth is that arising from phase matching along the crystal.

We notice that if the pump is defocused enough, the phase-matching limitation results in a limitation of the spot size  $\propto 1/l_{\text{coh}}$  in the far field with respect to the cavity center. Inside this spot, modes are coupled because of the finite size of the pump beam [the terms  $\propto \tilde{A}_p$  in Eq. (22)], inside a region of size  $\propto w_p^{-1}$ . The relevant parameter which sets the number of Fourier modes that can be independently excited is again given by  $b = w_p^2/l_{\text{coh}}^2$  [see Eq. (19)].

### III. HOMODYNE DETECTION AND SQUEEZING SPECTRUM

#### A. Homodyne detection scheme in the far field and near field

The method used for measuring the noise-spectrum outside the cavity is a balanced homodyne detection scheme [20]. We will use two configurations: the near-field configuration ( $x$ -position basis described in Sec. II B) and the far-field configuration ( $q$ -vector basis described in Sec. II C). The complete detection scheme in the near-field case is schematically shown in Fig. 3. The two matching lenses of focal length  $f$  image the crystal and cavity center plane  $C$  onto the detection planes  $D$  and  $D'$ . The image focal plane  $F$  of the first lens coincides with the object focal plane of the second one, and represents the far-field plane with respect to the cavity center  $C$ . In planes  $C$ ,  $F$ ,  $D$  the signal field has its minimum waist, and it has a flat wave front.

The detection scheme in the far field is obtained by using only one lens as depicted in Fig. 4. The focal length  $f$  lens is used to image the far-field plane with respect to the cavity center  $C$  onto the detection plane  $D$ .

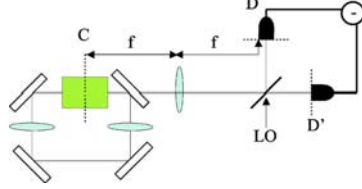
LOPEZ *et al.*PHYSICAL REVIEW A **72**, 013806 (2005)

FIG. 4. Balanced homodyne detection scheme in the far field. A matching lens of focal  $f$  is used to make the far-field image of the cavity center  $C$  at the detection planes  $D$  and  $D'$ .

The symmetrical beam-splitter BS (reflection and transmission coefficients  $r=1/\sqrt{2}$  and  $t=1/\sqrt{2}$ ) mixes the output signal field with an intense stationary and coherent beam  $\alpha_L(\mathbf{x}, z)$ , called local oscillator (LO). Note that for all the fields being evaluated at the beam-splitter location, we will omit the  $z$  dependence in the following. The difference photocurrent is a measure of the quadrature operator:

$$E_H(\Omega) = \int_{\text{det}} d\mathbf{x} [B^{\text{out}}(\mathbf{x}, \Omega) \alpha_L^*(\mathbf{x}) + B^{\text{out}+}(\mathbf{x}, -\Omega) \alpha_L(\mathbf{x})], \quad (33)$$

where “det” is the reciprocal image of the photodetection region at the beam-splitter plane, and assumed to be identical for the two photodetectors. We have also assumed here that the quantum efficiency of the photodetector is equal to 1. Here  $B^{\text{out}}$  is the sum of its odd and even part:

$$B^{\text{out}}(\mathbf{x}, \Omega) = B_+^{\text{out}}(\mathbf{x}, \Omega) + B_-^{\text{out}}(\mathbf{x}, \Omega). \quad (34)$$

The fluctuations  $\delta E_H(\Omega)$  of the homodyne field around steady state are characterized by a noise spectrum:

$$V(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega' \langle \delta E_H(\Omega) \delta E_H(\Omega') \rangle = N + S(\Omega), \quad (35)$$

where  $E_H$  is normalized so that  $N$  gives the mean photon number measured by the detector,

$$N = \int_{\text{det}} dx |\alpha_L(x)|^2. \quad (36)$$

$N$  represents the shot-noise level, and  $S$  is the normally ordered part of the fluctuation spectrum, which accounts for the excess or decrease of noise with respect to the standard quantum level.

### B. Input-output relation

The relation linking the outgoing fields  $B_{\pm}^{\text{out}}(\mathbf{x}, t)$  with the intracavity and input fields at the cavity input-output port [17] is

$$B_{\pm}^{\text{out}}(\mathbf{x}, t) = \sqrt{2\gamma} B_{\pm}(\mathbf{x}, t) - B_{\pm}^{\text{in}}(\mathbf{x}, t). \quad (37)$$

Equation (13) in the near-field [or Eq. (21) in the far-field case] is easily solved in the frequency domain, by introducing

$$B_{\pm}^{\text{in/out}}(\mathbf{x}, \Omega) = \int \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} B_{\pm}^{\text{in/out}}(\mathbf{x}, t) e^{-i\Omega t}.$$

Taking into account the boundary condition (37), we obtain the input-output relation:

$$\begin{aligned} [i\Omega + \gamma(1 + i\Delta)] [B_+^{\text{out}}(\mathbf{x}, \Omega) + B_+^{\text{in}}(\mathbf{x}, \Omega)] \\ = 2\gamma B_+^{\text{in}}(\mathbf{x}, \Omega) + \frac{\gamma}{i\Omega + \gamma(1 - i\Delta)} \iint d^2\mathbf{x}' K_{\text{int}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \\ \times \left( 2\gamma B_+^{\text{in}+}(\mathbf{x}', -\Omega) + \iint d^2\mathbf{x}'' \gamma K_{\text{int}}^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') [B_+^{\text{in}}(\mathbf{x}'', \Omega) \right. \\ \left. + B_+^{\text{out}}(\mathbf{x}'', \Omega) \right). \end{aligned} \quad (38)$$

In the case of a thin crystal in the near field [13] or a plane pump in the far field, this relation describes an infinite set of independent optical parametric oscillators. In these cases the squeezing spectrum can be calculated analytically as we will see in the following. But in other cases, this relation links all points in the transverse plane. In order to get the input-output relation, we have to inverse relation (38) by using a numerical method.

### C. Numerical method

In order to inverse relation (38) by numerical means, we need to discretize the transverse plane in order to replace integrals by discrete sums. For the sake of simplicity, we will only describe here the solution in the single transverse dimension model: the cavity is assumed to consist of cylindrical mirrors, so that the the transverse fields depend on a single parameter  $y$ . In this case the electromagnetic fields are represented by vectors and the interaction terms by matrices. Straightforward calculations show that we can introduce the interaction functions  $U(y, y')$  and  $V(y, y')$  (calculated at resonance  $\Delta=0$  and at zero frequency in near-field or far-field configurations) linking two different points in the transverse plane, so that relation (38) becomes

$$B_+^{\text{out}}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dy' U(y, y') B_+^{\text{in}}(y') + \int_{-\infty}^{\infty} dy' V(y, y') B_+^{\text{in}+}(y'). \quad (39)$$

Since we assumed that the odd part of the output field is in the vacuum state,  $B_-^{\text{out}}$  gives no contribution to the normally ordered part of the spectrum  $S$ , which can be calculated by using the input-output relation (21) for the even part of the field, and by using the commutation rules for the even part:

$$[B_{\pm}^{\text{in/out}}(x, t), B_{\pm}^{\text{in/out}+}(x', t')] = \frac{1}{2} [\delta(x - x') \pm \delta(x + x')] \delta(t - t'). \quad (40)$$

In the following, we will assume, as in Refs. [13,12], that the local oscillator has a constant phase profile  $\varphi_L(\mathbf{x}) = \varphi_L$ , so that  $\alpha_L(x) = |\alpha_L(x)| e^{i\varphi_L}$ . We obtain the ordered part of the spectrum, normalized to the shot noise:

MULTIMODE SQUEEZING PROPERTIES OF A...

PHYSICAL REVIEW A 72, 013806 (2005)

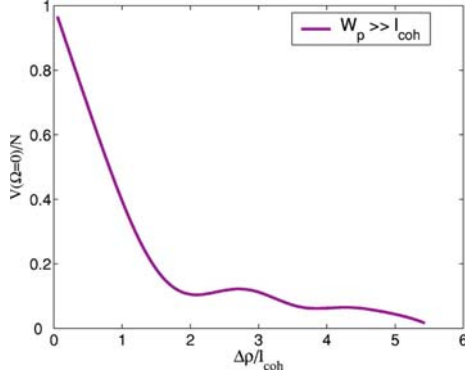


FIG. 5. Squeezing spectrum at zero frequency, normalized to the shot noise, as a function of the detector radius (scaled to  $l_{\text{coh}}$ ).

$$\begin{aligned} \frac{S(0)}{N} &= \frac{1}{\int_{\text{det}} dy |\alpha_L|^2} \int \int_{\text{det}^2} dx dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dy |\alpha_L(x)| |\alpha_L(x')| \\ &\quad \times \{ [V(x,y)V(x',y) + V(x,y)V(x,-y)] + \cos(2\varphi_L) \\ &\quad \times [U(x,y)V(x',y) + U(x,y)V(x',-y)] \}. \end{aligned} \quad (41)$$

Now, knowing the  $U(y,y')$  and  $V(y,y')$  interaction functions, we are able to calculate the squeezing spectrum in both near- and far-field cases.

#### IV. SQUEEZING SPECTRUM IN THE NEAR FIELD

In this section, we use the near-field homodyne detection (Fig. 3) described in Ref. [13]. As already said in Sec. II, in the near field, the thick crystal couples pixels contained in a region whose size is in the order of  $l_{\text{coh}}$  (18).

Let us study first the case of a plane-wave pump and a plane-wave local oscillator. As pointed out in Ref. [12], in this case and in the thin-crystal approximation, the level of squeezing does not depend on the width of the detection region. Figure 5 shows results predicted for a measurement performed with a circular detector of radius  $\Delta\rho$  centered on the cavity axis (which is a symmetric detection area, as pointed out in Ref. [13]). We represent the squeezing spectrum at zero frequency as a function of the size of the detector, scaled to the coherence length  $l_{\text{coh}} = \sqrt{\lambda l_c} / \pi n_s$ . We can see that for  $\Delta\rho < l_c$ , the squeezing tends to zero when  $\Delta\rho \rightarrow 0$ , as already predicted. For larger values of the detector size, perfect squeezing can be achieved. We can also see that the squeezing evolution is comparable to the  $\Delta$  function evolution (Fig. 2).

In the more realistic case of finite-size pump, the squeezing level depends on the parameter  $b = w_p^2 / l_{\text{coh}}^2 = 2n_s(z_p / l_c)$ , as pointed out in Sec. I. Figure 6 represents the squeezing spectrum at zero frequency as a function the detector radius, normalized to  $l_{\text{coh}}$ , for different  $b$  parameters, using a plane local oscillator. As already seen in Fig. 5, for  $\Delta\rho \rightarrow 0$ , the noise reduction effect tends to zero. But we see now that there is

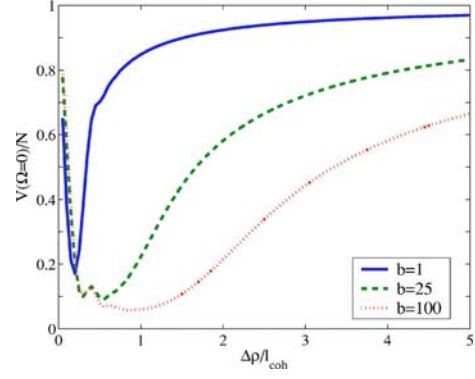


FIG. 6. Squeezing spectrum at zero frequency, normalized to the shot noise, as a function of the radial amplitude of the detector scaled to  $l_{\text{coh}}$ , plotted for several values of  $b$ .

also no squeezing effect for large values of the detector radius, because of the finite size of the pump, as already shown in Ref. [13].

Figure 7 shows theoretical results in the case of a detector consisting of two symmetric pixels (pixel of size equal to the coherence length), for different  $b$  values, in function of the distance between the two pixels. For large values of  $\rho$ , the noise level goes back to shot noise because of the finite size of the pump, as already depicted in Ref. [13]. But now, for small  $\rho$  values, the squeezing does not tend to zero, as in the thin-crystal case.

#### V. SQUEEZING SPECTRUM IN THE FAR FIELD

In this section, we will consider the spatial squeezing spectrum in the far field (Fig. 4) and in the  $q$ -vector basis. As already said in Sec. II C, the coupling between  $q$ -vector modes is now due to the finite length of the pump. We will see that a new coherence length  $l_{\text{coh}f}$  appears in such a case, given by

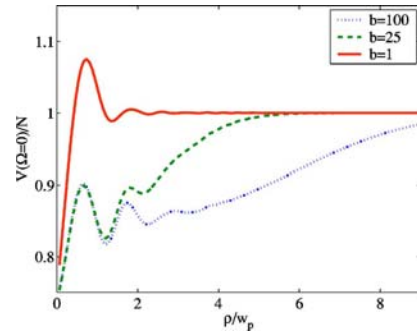


FIG. 7. Squeezing spectrum at zero frequency, normalized to the shot noise, as a function of the pixel distance between the two pixels  $\rho$  from the cavity axis (scaled to  $l_{\text{coh}}$ ), plotted for several values of  $b$ .

LOPEZ *et al.*PHYSICAL REVIEW A **72**, 013806 (2005)

$$l_{\text{coh } f} \propto \frac{1}{w_p}.$$

We will successively investigate two configurations: the plane-wave pump regime (where the squeezing spectrum can be calculated analytically), and the case of a finite pump size (where a numerical method is necessary).

### A. Plane-wave pump regime in the far field

In order to evaluate the far-field case, we introduce the spatial Fourier transforms of the electromagnetic field temporal frequency components:

$$\tilde{B}_{\pm}^{\text{in/out}}(\mathbf{q}, \Omega) = \int \int \frac{d^2x}{2\pi} \hat{B}_{\pm}^{\text{in/out}}(\mathbf{x}, \Omega) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}.$$

In the case of a plane-wave pump,  $A_p(\mathbf{x}, z) = A_p$ , so that Eq. (22) becomes

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{B}_{\pm}}{\partial t}(\mathbf{q}, 0, t) = & -\gamma \left[ (1 + i\Delta) \tilde{B}_{\pm}(\mathbf{q}, 0, t) + \sqrt{2} \gamma \tilde{B}_{\pm}^{\text{in}}(\mathbf{q}, 0, t) \right. \\ & \left. - A_p \text{sinc}\left(\frac{l_c \mathbf{q}^2}{2k_s}\right) \tilde{B}_{\pm}^{\text{i}}(\mathbf{q}, 0, t) \right]. \end{aligned} \quad (42)$$

This equation, which does not mix different  $\mathbf{q}$  values, can be solved analytically. It is similar to Eq. (14) in Ref. [13]. Taking into account the boundary condition

$$\tilde{B}_{\pm}^{\text{out}}(\mathbf{q}, t) = \sqrt{2} \gamma \tilde{B}_{\pm}(\mathbf{q}, t) - \tilde{B}_{\pm}^{\text{in}}(\mathbf{q}, t) \quad (43)$$

we obtain

$$\tilde{B}_{\pm}^{\text{out}}(\mathbf{q}, \Omega) = U(\mathbf{q}, \Omega) \tilde{B}_{\pm}^{\text{in}}(\mathbf{q}, \Omega) + V(\mathbf{q}, \Omega) \tilde{B}_{\pm}^{\text{in}}(-\mathbf{q}, -\Omega), \quad (44)$$

where

$$U(\mathbf{q}, \Omega) = \frac{[1 - i(\Delta - \Omega/\gamma)][1 - i(\Delta + \Omega/\gamma)] + A_p^2 \text{sinc}^2\left(\frac{l_c \mathbf{q}^2}{2k_s}\right)}{[1 + i(\Delta + \Omega/\gamma)][1 - i(\Delta - \Omega/\gamma)] - A_p^2 \text{sinc}^2\left(\frac{l_c \mathbf{q}^2}{2k_s}\right)} \quad (45)$$

and

$$\begin{aligned} V(\mathbf{q}, \Omega) &= \frac{2A_p \text{sinc}\left(\frac{l_c \mathbf{q}^2}{2k_s}\right)}{[1 + i(\Delta + \Omega/\gamma)][1 - i(\Delta - \Omega/\gamma)] - A_p^2 \text{sinc}^2\left(\frac{l_c \mathbf{q}^2}{2k_s}\right)}. \end{aligned} \quad (46)$$

In the case of the plane-wave regime, the input-output relation in the spatial Fourier space describes therefore an infinite set of independent optical parametric oscillators below threshold. This can be simply understood: the  $q$ -vector basis is the eigenbasis of the diffraction, so that no coupling between  $q$ -vector modes due to the crystal appears.

Let us now consider the homodyne-detection scheme, schematically shown in Fig. 4. The lens provides a spatial Fourier transform of the output field  $B_{\text{out}}(x, \Omega)$ , so that at the location of plane  $D$  the field  $B_{\text{out}}^D(x, \Omega)$  is

$$B_{\text{out}}^D(x, \Omega) = \frac{2\pi}{\lambda f} \tilde{B}_{\text{out}}\left(\frac{2\pi}{\lambda f} x, \Omega\right). \quad (47)$$

In this plane,  $B_{\text{out}}^D(x, \Omega)$  is mixed with an intense stationary and coherent beam  $\alpha_{\text{LO}}^D(x) = (2\pi/\lambda f) \tilde{\alpha}_{\text{LO}}(2\pi x/\lambda f, \Omega)$ , where  $\alpha_L(x)$  has a Gaussian shape, with a waist  $w_{\text{LO}}$ . The homodyne field has thus an expression similar to the near-field case, where functions of  $x$  are now replaced by their spatial Fourier transforms:

$$E_H(\Omega) = \int_{\text{det}} d\mathbf{q} [\tilde{B}^{\text{out}}(\mathbf{q}, \Omega) \tilde{\alpha}_{\text{LO}}^*(\mathbf{q}) + \tilde{B}^{\text{out}+}(\mathbf{q}, -\Omega) \tilde{\alpha}_{\text{LO}}(\mathbf{q})]. \quad (48)$$

This analogy shows that, in the case of a local oscillator that has an even parity with respect to coordinate inversion, the squeezing spectrum is given by (like in Ref. [13])

$$\begin{aligned} V(\Omega) = & \int_{\text{det}} d\mathbf{q} \{ |\tilde{\alpha}_{\text{LO}}(\mathbf{q})|^2 [1 - \sigma(\mathbf{q})] \\ & + \int_{\text{det}} d\mathbf{q}' \{ |\tilde{\alpha}_{\text{LO}}(\mathbf{q}')|^2 \sigma(\mathbf{q}) R(\mathbf{q}, \Omega) \}, \end{aligned} \quad (49)$$

where the noise spatial density  $R(\mathbf{q}, \Omega)$  is given by

$$R(\mathbf{q}, \Omega) = |U(\mathbf{q}, \Omega) + e^{2i\varphi_{\text{LO}}(\mathbf{q})} V^*(\mathbf{q}, -\Omega)|^2 \quad (50)$$

and where

$$\sigma(\mathbf{q}) = \int_{\text{det}} d\mathbf{q}' \delta_{\pm}(\mathbf{q}, \mathbf{q}'). \quad (51)$$

In order to minimize  $R(\mathbf{q}, \Omega)$ , the local oscillator phase should be chosen as  $\varphi_{\text{LO}}(\mathbf{q}) = \arg[U(\mathbf{q}, \Omega)V(\mathbf{q}, \Omega)]/2$ . In particular, at resonance and at zero frequency  $U(\mathbf{q}, 0)$  and  $V(\mathbf{q}, 0)$  are real and the optimal local oscillator phase would correspond to  $\varphi_{\text{LO}}(\mathbf{q}) = \pi/2$ , when  $\text{sinc}(l_c \mathbf{q}^2/2k_s) \geq 0$ , and  $\varphi_{\text{LO}}(\mathbf{q}) = 0$ , when  $\text{sinc}(l_c \mathbf{q}^2/2k_s) \leq 0$ , which is not indeed very practical. However, modes for which  $\text{sinc}(l_c \mathbf{q}^2/2k_s) \leq 0$  are quite outside the phase matching curve, so that the choice  $\varphi_{\text{LO}}(\mathbf{q}) = \pi/2$  everywhere should give good results. The squeezing spectrum at resonance and zero frequency, for  $\varphi_{\text{LO}}(\mathbf{q}) = \pi/2$  can be analytically calculated and as a function of the radius  $r$  of a detector centered on the optical axis is given by

$$\begin{aligned} \frac{V(r, 0)}{N} = & \frac{1}{\int_0^{r/r_0} u \exp\left(\frac{-w_{\text{LO}}^2 k_s u^2}{l_c}\right) du} \int_0^{r/r_0} u \exp\left(\frac{-w_{\text{LO}}^2 k_s u^2}{l_c}\right) du \\ & \times \left( \frac{1 + A_p \text{sinc}(u^2)}{1 - A_p \text{sinc}(u^2)} \right)^2, \end{aligned} \quad (52)$$

where



MULTIMODE SQUEEZING PROPERTIES OF A...

PHYSICAL REVIEW A 72, 013806 (2005)

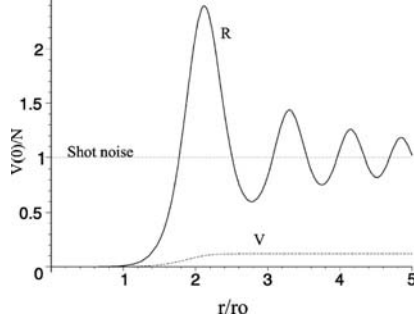


FIG. 8. Squeezing spectrum normalized to the shot noise, at zero frequency, at resonance, in the plane pump regime and far-field case, for two measurement configurations.  $V$  is obtained using a circular detector of radial amplitude  $r$  (scaled to  $r_0$ ).  $R$  is obtained using a pair of symmetrical pixels in function of the pixel distance from the axis  $r$  (scaled to  $r_0$ ).

$$r_0 = \frac{\lambda f}{2\pi} \sqrt{\frac{2k_s}{l_c}} = \frac{\lambda f}{\pi} \frac{1}{l_{\text{coh}}} \quad (53)$$

Figure 8 shows the results obtained in the case of two different detection configurations: the  $V$  curve shows results in the case of a circular detector of variable radius  $r$  (scaled to  $r_0$ ), using a local oscillator waist  $w_{\text{LO}} = r_0$ . As already said in Sec. II, the limitation of the squeezing level is due to the nonperfect phase matching along the crystal. For  $r > r_0$ , the squeezing level decreases. So, in the plane-wave pump regime in the far field, the thickness of the crystal has a role comparable with the finite size of the pump in the near field, as reported in Ref. [13]. The  $R$  curve shows results obtained in the case of two small symmetrical pixels and a plane-wave local oscillator as a function of the pixel distance from the cavity axis  $r$ , scaled to  $r_0$ . We can see that the noise level goes back to the shot-noise level for  $r > r_0$ , because of the nonperfect phase matching along the crystal.

### B. Squeezing spectrum in the far-field case and finite-size pump regime

When one takes into account the finite size of the pump, a coupling between different  $q$  vectors appear, and one needs to solve equations numerically, as in the near-field case. A new coherence length  $l_{\text{coh}f}$  appears in the far field:  $l_{\text{coh}f} = 1/w_p$ .

Figure 9 shows the evolution of the squeezing spectrum at zero frequency, and at resonance, for different  $b$  parameters, in a function of the detector radius scaled to  $l_{\text{coh}f}$ . We see the same evolution as in the analytical case, except that the noise level tends to shot noise for small values of the detector.

Figure 10 shows the results obtained in the case of two symmetrical pixels (pixel of size equal to the coherence length  $l_{\text{coh}f}$ ), for different  $b$  values, in a function of the distance between the two pixels  $\rho$ . The evolution is similar to the one given by Fig. 6 for large distances, but there is also a decrease of the squeezing effect for small distances.

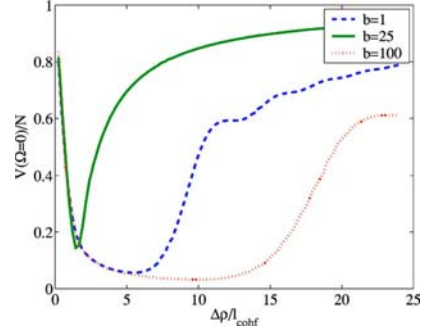


FIG. 9. Squeezing spectrum normalized to the shot noise at zero frequency, and at resonance, as a function of the radial amplitude of the detector  $\Delta\rho$  (scaled to the coherence area  $l_{\text{coh}f}$ ), in the finite pump regime and far-field approach and for different values of  $b$ .

## VI. DISCUSSIONS AND CONCLUSIONS

We have seen that when one takes into account the effect of diffraction inside the nonlinear crystal in a confocal OPO, the local squeezing predicted for any shape and size of the detectors in the thin-crystal approximation is now restricted to detection areas lying within a given range, characterized by a coherence length  $l_{\text{coh}}$ . This prediction introduces serious limitations to the success of an experiment, and must be taken into account when designing the experimental setup. With the purpose of producing a light beam that is squeezed in several elementary portions of its transverse cross section, either a crystal short compared to  $z_R$  should be used or, alternatively, a defocused pump, with a waist much larger than the cavity waist. In both cases the efficiency of the nonlinear coupling is reduced. For instance, with a 1-cm-long crystal,  $l_{\text{coh}}$  is equal to  $40 \mu\text{m}$ , and one must choose a pump waist much larger than this value in order to observe multimode squeezing (the number of modes being roughly equal to the ratio  $b = w_p^2/l_{\text{coh}}^2$ ). This defocused pump will imply a much

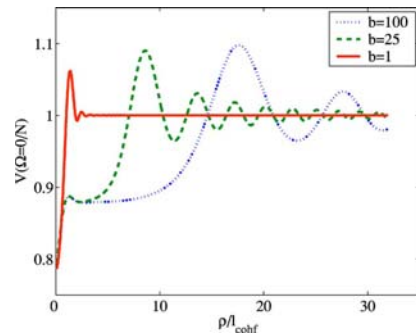


FIG. 10. Squeezing spectrum normalized to the shot noise at zero frequency, and at resonance, as a function of the distance between the two pixels  $\rho$  (scaled to the coherence area  $l_{\text{coh}f}$ ), in the finite pump regime and far-field approach and for different values of  $b$ .

LOPEZ *et al.*PHYSICAL REVIEW A **72**, 013806 (2005)

higher threshold for the OPO oscillation, which is multiplied by a factor also close to  $b$ . The conclusion of this analysis is that one cannot have multimode squeezing “for free,” and that with a given pump power, one will be able to excite a number of modes which is roughly equal to the ration of the injected pump power to the threshold power for single mode operation.

## ACKNOWLEDGMENTS

Laboratoire Kastler-Brossel, of the Ecole Normale Supérieure and the Université Pierre et Marie Curie, is associated with the Centre National de la Recherche Scientifique. This work was supported by the European Commission in the frame of QUANTIM Project No. IST-2000-26019.

- 
- [1] W. Boyd, *Nonlinear Optics* (Academic Press, New York, 1992).
- [2] A. Siegman, *Lasers* (University Science Books, Sausalito, CA, 1986).
- [3] Y. R. Shen, *The Principles of Nonlinear Optics* (Wiley, New York, 1984).
- [4] L. A. Lugiato, M. Brambilla, and A. Gatti, *Adv. At., Mol., Opt. Phys.* **40**, 229 (1998).
- [5] S. Barland, J. R. Tredicce, M. Brambilla, L. A. Lugiato, S. Balle, M. Giudici, T. Maggipinto, L. Spinelli, G. Tissoni, T. Koedl, M. Miller, and R. Jaeger, *Nature (London)* **419**, 699 (2002).
- [6] M. I. Kolobov and I. V. Sokolov, *Sov. Phys. JETP* **69**, 1097 (1989).
- [7] M. I. Kolobov, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 1539 (1999).
- [8] E. Brambilla, A. Gatti, M. Bache, and L. A. Lugiato, *Phys. Rev. A* **69**, 023802 (2004).
- [9] M. LeBerre, D. Leduc, E. Ressayre, and A. Tallet, *J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt.* **1**, 153 (1999).
- [10] G. Boyd and D. Kleinman, *J. Appl. Phys.* **39**, 3597 (1968).
- [11] E. Lantz, T. Sylvestre, H. Maillotte, N. Treps, and C. Fabre, *J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt.* **6** S295 (2004).
- [12] L. A. Lugiato and Ph. Grangier, *J. Opt. Soc. Am. B* **31**, 3761 (1985).
- [13] K. I. Petsas, A. Gatti, L. A. Lugiato, and C. Fabre, *Eur. Phys. J. D* **22**, 501 (2003).
- [14] C. Schwob, P. F. Cohadon, C. Fabre, M. A. Marte, H. Ritsch, A. Gatti, and L. Lugiato, *Appl. Phys. B: Lasers Opt.* **66**, 685 (1998).
- [15] S. Mancini, A. Gatti, and L. Lugiato, *Eur. Phys. J. D* **12**, 499 (2000).
- [16] A. Gatti and L. Lugiato, *Phys. Rev. A* **52**, 1675 (1995).
- [17] C. W. Gardiner and M. J. Collett, *Phys. Rev. A* **31**, 3761 (1985).
- [18] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (U.S. Department of Commerce, 1972).
- [19] A. Gatti, R. Zambrini, and M. San Miguel, *Phys. Rev. A* **68**, 053807 (2003).
- [20] *J. Mod. Opt.* **34** (6/7), 1 (1987), special issue on squeezed light.



---

# OPO auto-imageant

---

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Le modèle</b> . . . . .	<b>90</b>
A.1	La cavité auto-imageante . . . . .	90
A.2	Hypothèses . . . . .	90
A.3	Equation d'évolution en champ proche . . . . .	93
A.4	Equation d'évolution en champ lointain . . . . .	94
<b>B</b>	<b>Détection homodyne pour accéder aux fluctuations du champ</b> .	<b>95</b>
B.1	Détection homodyne en champ proche et en champ lointain . . . . .	95
B.2	Relations entrée/sortie . . . . .	96
<b>C</b>	<b>Réduction de bruit locale en champ proche</b> . . . . .	<b>96</b>
C.1	Cas du cristal mince . . . . .	96
C.2	Cas du cristal épais . . . . .	99
<b>D</b>	<b>Equation d'évolution en champ lointain</b> . . . . .	<b>100</b>
D.1	Pompe plane en champ lointain . . . . .	101
<b>E</b>	<b>Génération de faisceaux EPR locaux en champ lointain</b> . . . . .	<b>103</b>
E.1	Le concept de faisceaux EPR locaux . . . . .	103
E.2	Schéma de détection . . . . .	103
E.3	Inséparabilité, résultats . . . . .	105

---

## Introduction

La plupart des études quantiques sur les propriétés spatiales du bruit émis par un OPO sous le seuil ont été réalisées en cavité plane ou confocale. En cavité plane, l'étude du vide multimode local, de l'amplification sans bruit d'images a été faite par Kolobov et Lugiato

[Kolobov95]. Les auteurs insistent sur les limitations d'un tel système, qui proviennent du fait que la cavité plane n'est pas une cavité dégénérée: la diffraction vient dégrader les effets de compression. Pour dépasser ces problèmes, la cavité confocale a été introduite [Petsas03], [Mancini00] car les problèmes de diffraction disparaissent. Cependant la cavité confocale ne permet de transmettre que la partie paire ou impaire de l'image. Ceci implique que pour observer de la compression spatiale de bruit, il est nécessaire d'utiliser un détecteur symétrique et de détecter des images de parité donnée.

La cavité confocale n'étant pas parfaitement imageante, nous avons voulu aller plus loin et étudier dans ce chapitre les propriétés quantiques spatiales d'un OPO en cavité parfaitement dégénérée (la cavité auto-imageante introduite au chapitre 3). Nous utilisons un modèle similaire au chapitre précédent, tenant compte de la taille finie du cristal, mais cette fois-ci en cavité auto-imageante. Cette configuration entraîne des changements notoires par rapport à la cavité confocale. Nous verrons par exemple qu'en champ proche, une compression du bruit quantique peut être observée pour une taille de détecteur supérieure à l'aire de cohérence, mais à la différence de la cavité confocale, nous montrerons que le détecteur n'a pas besoin d'être symétrique par rapport à l'axe optique. En champ lointain, si les propriétés de compression sont identiques à celles de la cavité confocale (pour observer de la compression un détecteur symétrique est nécessaire), nous montrerons qu'un OPO auto-imageant permet de générer ce que l'on appelle des "faisceaux EPR locaux". Cette mise en évidence est impossible en cavité confocale.

Nous allons décrire le modèle utilisé. Ensuite nous reviendrons sur le montage de détection homodyne permettant de mesurer le spectre de bruit en sortie du système. Les résultats de l'étude de la compression de bruit en champ proche et en champ lointain seront ensuite abordés. Pour finir, on s'intéressera à la génération de faisceaux EPR locaux.

## A Le modèle

### A.1 La cavité auto-imageante

Le processus paramétrique a lieu en cavité auto-imageante. On utilise un modèle de cavité en anneau à trois lentilles de distances focales  $f_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  (voir figure 6.1). Comme nous l'avons vu au chapitre 3, la cavité est auto-imageante à condition que les distances  $c_{ij}$  entre le plan image de la lentilles  $i$  et le plan objet de la lentille  $j$  soient données par:

$$c_{12} = \frac{f_1 f_2}{f_3}, c_{23} = \frac{f_2 f_3}{f_1}, c_{31} = \frac{f_3 f_1}{f_2} \quad (6.1)$$

### A.2 Hypothèses

Le modèle utilisé est identique à celui utilisé dans le chapitre précédent, si ce n'est que la cavité est auto-imageante. Nous insisterons donc sur les différences. On considère un milieu

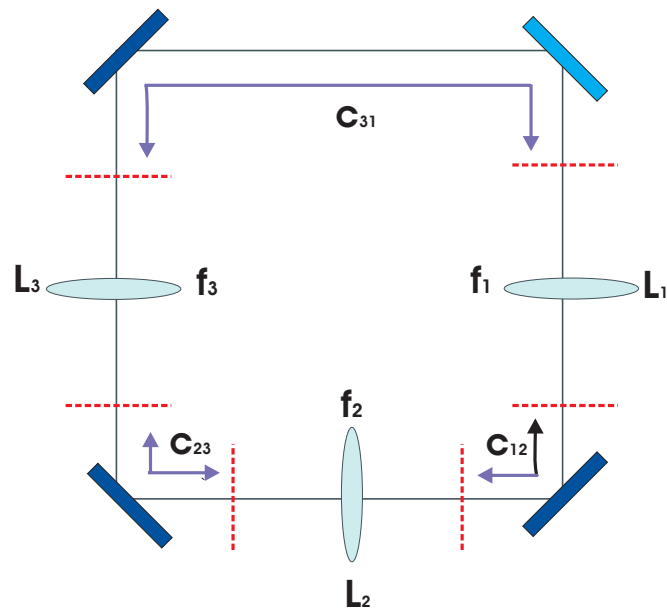


Fig. 6.1: Schéma de la cavité auto-imageante en anneau. Les distances entre plan focal de la lentille  $i$  et plan objet de la lentille  $j$  sont notées  $c_{ij}$  et doivent satisfaire la condition (6.1)

paramétrique inséré dans une cavité auto-imageante en anneau, comme représenté sur la figure 6.2. La cavité contient un cristal paramétrique de type I de longueur  $l_c$ , centré en C

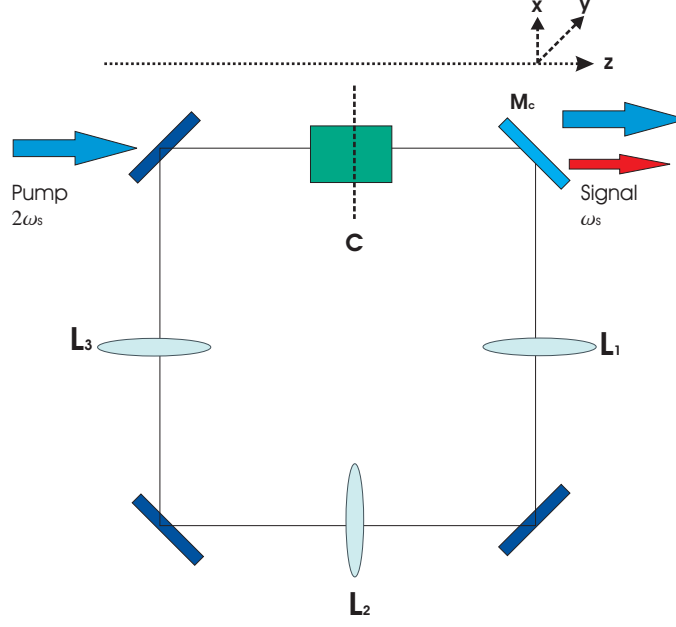


Fig. 6.2: OPO auto-imageant en cavité en anneau

(voir Fig(6.2)). Elle est pompée par un un champ  $A_p$  de fréquence  $2\omega_s$ , de forme transverse gaussienne, focalisée dans le plan contenant C. La variation  $\mathbf{x}$  transverse du champ dans ce plan est donnée par:

$$A_p(\mathbf{x}) = A_p \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{w_p^2}\right) \quad (6.2)$$

La direction de propagation de la pompe,  $z$ , sera par la suite appelée "axe optique" de la cavité. Rigoureusement, cet axe n'est pas l'axe optique de la cavité auto-imageante, puisque une telle cavité en possède une infinité (toute direction est un axe optique de la cavité puisque tout rayon revient sur lui même après un aller-retour dans la cavité). La direction  $z$  fixe par la suite la symétrie cylindrique du problème. On suppose que les miroirs sont totalement transparents pour le faisceau de pompe et parfaitement réfléchissant pour le champ à la fréquence  $\omega_s$ , à l'exception du miroir  $M_c$ , possédant une faible transmission  $t$  à cette fréquence. Le champ intracavité signal, de fréquence  $\omega_s$ , est décrit par un opérateur enveloppe  $\hat{B}(\mathbf{x}, z)$  ( $z$  est la coordonnée longitudinale le long de la cavité avec  $z = 0$  correspondant au plan C) qui obéit aux relations de commutations (le plan transverse  $z$  étant fixé)(voir chapitre 4):

$$[\hat{B}(\mathbf{x}, z, t), \hat{B}^\dagger(\mathbf{x}', z, t)] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (6.3)$$

Ne nous intéressant qu'au régime en-dessous du seuil et sans déplétion de pompe, les fluctuations de pompe ne jouent pas de rôle.

La différence fondamentale avec la cavité confocale est qu'il existe maintenant une longueur de cavité pour laquelle tous les modes transverses sont résonnants (et non plus uniquement les modes à parité donnée). On décompose l'opérateur enveloppe du champ intra-cavité sur une base quelconque du champ électromagnétique, par exemple la base des modes Gauss-Laguerre:

$$\hat{B}(\mathbf{x}, z, t) = \sum_{p,l} f_{p,l}(\mathbf{x}, z) \hat{a}_{p,l}(z, t), \quad (6.4)$$

où  $\hat{a}_{p,l}(z, t)$  est l'opérateur d'annihilation d'un photon dans le mode  $(p, l)$  à la position  $z$  et au temps  $t$ .

L'hamiltonien d'interaction en représentation d'Heisenberg est donné par:

$$H_{int} = \frac{i\hbar g}{2l_c} \int_{-l_c/2}^{l_c/2} dz' \int \int d^2x' \{A_P(\mathbf{x}', z') [\hat{B}^\dagger(\mathbf{x}', z', t)]^2 - h.c.\}, \quad (6.5)$$

où  $g$  est un terme de couplage proportionnel à la susceptibilité non-linéaire  $\chi^{(2)}$ .

### A.3 Equation d'évolution en champ proche

Supposant une faible interaction non linéaire en simple passage, on peut montrer que l'évolution de l'opérateur enveloppe du signal  $\hat{B}$  est liée uniquement à la diffraction (comme au chapitre précédent). Le commutateur pour l'opérateur signal est donc donné par:

$$[\hat{B}(\mathbf{x}, z, t), \hat{B}^\dagger(\mathbf{x}', z', t')] = G^*(z - z'; \mathbf{x}, \mathbf{x}'). \quad (6.6)$$

où  $G(z; \mathbf{x}, \mathbf{x}')$  est le propagateur de Fresnel décrivant l'évolution du champ dans le cristal:

$$G(z; \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{ik_s}{2\pi z} e^{ik_s \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}' - \boldsymbol{\rho}_s z|^2}{2z}} \quad (6.7)$$

où  $k_s = n_s \omega_s / c$  est le vecteur d'onde du champ, avec  $n_s$ , indice du cristal à la fréquence  $\omega_s$ . Nous avons introduit un terme de walk-off, présent uniquement si le signal est sur la polarisation extraordinaire, décrit par l'angle de walk-off  $\boldsymbol{\rho}_s$ .

On peut donc avoir accès à l'équation d'évolution de l'opérateur  $\hat{B}(\mathbf{x}, z, t)$  au centre  $z = 0$  du cristal:

$$\frac{\partial \hat{B}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0, t) = -\gamma(1 + i\Delta)\hat{B}(\mathbf{x}, 0, t) + g \int \int d^2x'' K_{int}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') \hat{B}^\dagger(\mathbf{x}'', 0, t) + \sqrt{2\gamma} \hat{B}_{in}(\mathbf{x}, 0, t)$$

avec  $\gamma$  inverse du temps de vie dans la cavité,  $\Delta$  écart à la résonance normalisé des modes, et  $\hat{B}_{in}$  opérateur du signal d'entrée. Le terme de couplage entre différents points du plan



transverse  $K_{int}$  est donné par :

$$K_{int}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') = \frac{1}{l_c} \int_{-l_c/2}^{l_c/2} dz' \int \int d^2x' A_P(\mathbf{x}', z') G^*(z'; \mathbf{x}', \mathbf{x}) G^*(z'; \mathbf{x}', \mathbf{x}'') \quad (6.8)$$

Dans l'équation (6.8), le premier terme est lié à la propagation et aux pertes, le second à l'interaction paramétrique.

Nous voyons donc que les équations d'évolution sont similaires au cas de la cavité confocale, la différence étant que le champ total intracavité et non plus uniquement sa partie paire intervient. En supposant un accord de phase collinéaire,  $k_p = 2k_s$ , et en négligeant l'effet du walk-off sur la polarisation extraordinaire, le terme de couplage devient:

$$K_{int}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') = A_p \left( \frac{\mathbf{x} + \mathbf{x}''}{2} \right) \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') \quad (6.9)$$

avec

$$\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') = \frac{ik_s}{4\pi l_c} \int_{-l_c/2}^{l_c/2} \frac{dz'}{z'} e^{\frac{ik_s}{4z'} |\mathbf{x} - \mathbf{x}''|^2} \quad (6.10)$$

Nous retrouvons donc les mêmes conclusions que précédemment: une longueur de cohérence,  $l_{coh}$  apparaît:

$$l_{coh} = \sqrt{\frac{\lambda l_c}{\pi n_s}} \quad (6.11)$$

L'expression de la longueur de cohérence est donc la même que dans le chapitre précédent. Le paramètre clef, donnant le nombre de modes qui peuvent être excités indépendamment, est donc ici aussi:

$$b = \frac{w_p^2}{l_{coh}^2} \quad (6.12)$$

#### A.4 Equation d'évolution en champ lointain

Introduisons la transformée de Fourier spatiale du champ intracavité:

$$\hat{B}(\mathbf{q}, z, t) = \int \frac{d^2x}{2\pi} \hat{B}(\mathbf{x}, z, t) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \quad (6.13)$$

Prenant la transformée de Fourier de l'équation (6.8) on obtient :

$$\frac{\partial \hat{B}}{\partial t}(\mathbf{q}, 0, t) = -\gamma(1 + i\Delta) \hat{B}(\mathbf{q}, 0, t) + g \int d^2q'' \tilde{K}_{int}(\mathbf{q}, \mathbf{q}'') \hat{B}^\dagger(\mathbf{q}'', 0, t) + \sqrt{2\gamma} \tilde{B}_{in}(\mathbf{q}, 0, t) \quad (6.14)$$

avec le terme d'interaction  $\tilde{K}_{int}(\mathbf{q}, \mathbf{q}'')$  qui est la transformée de Fourier de (6.9). On peut montrer que:

$$\tilde{K}_{int}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \tilde{A}_p(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \text{sinc} \left[ \frac{l_c}{2k_s} \left| \frac{\mathbf{q} - \mathbf{q}'}{2} \right|^2 \right] \quad (6.15)$$

où  $\tilde{A}_p$  est la transformée de Fourier spatiale du champ de pompe (6.2), i.e.  $\tilde{A}_p(\mathbf{q}) = \frac{w_p^2}{2} A_p \exp(-|\mathbf{q}|^2 \frac{w_p^2}{4})$ .

## B Détection homodyne pour accéder aux fluctuations du champ

### B.1 Détection homodyne en champ proche et en champ lointain

Pour mesurer les fluctuations du champ en sortie de la cavité, nous utilisons les deux configurations de détection homodyne déjà présentées au chapitre précédent. La détection en champ proche est rappelée sur la figure 6.3, alors que la détection en champ lointain est présentée sur la figure 6.4.

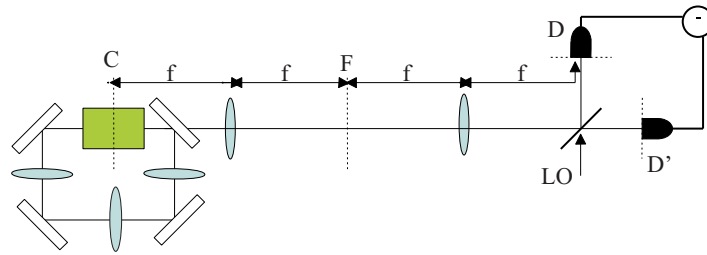


Fig. 6.3: Schéma de détection homodyne en champ proche. Deux lentilles de distance focale  $f$  sont utilisées pour imager le centre de la cavité  $C$  au niveau des plans de détection  $D$  et  $D'$

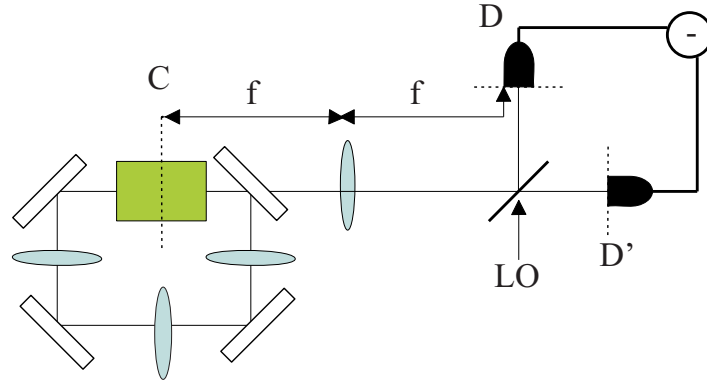


Fig. 6.4: Schéma de détection homodyne en champ lointain. La lentille de distance focale  $f$  est utilisée pour imager en champ lointain le centre du cristal sur les plans de détection  $D$  et  $D'$

Les fluctuations  $\delta E_H(\Omega)$  du champ détecté sont caractérisées par un spectre de bruit:

$$V(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega' \langle \delta E_H(\Omega) \delta E_H(\Omega') \rangle = N + S(\Omega) \quad (6.16)$$

où  $E_H$  est normalisé de telle manière que  $N$  donne le nombre moyen de photons détectés par le détecteur.

$$N = \int_{det} dx |\alpha_L(x)|^2 \quad (6.17)$$

$N$  donne le bruit quantique standard, et  $S$  est la partie ordonnée normale du spectre des fluctuations, qui donne l'excès ou la compression de bruit par rapport à la limite quantique standard.

## B.2 Relations entrée/sortie

Pour calculer les fluctuations en sortie de notre système, on utilise comme au chapitre précédent une méthode entrée/sortie. Connaissant les fluctuations du champ en entrée (un état cohérent), nous allons pouvoir exprimer celles en sortie. La relation entre le champ de sortie  $B^{out}(\mathbf{x}, t)$  et le champ intra-cavité est donnée par [Gardiner85]:

$$B^{out}(\mathbf{x}, t) = \sqrt{2\gamma}B(\mathbf{x}, t) - B^{in}(\mathbf{x}, t) \quad (6.18)$$

L'équation (6.8) en champ proche (et (6.14) en champ lointain) peut être résolue en passant dans l'espace fréquentiel en introduisant la transformée de Fourier:

$$B^{in/out}(\mathbf{x}, \Omega) = \int \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} B^{in/out}(\mathbf{x}, t) e^{-i\Omega t}$$

On obtient ainsi la relation entrée/sortie reliant  $B^{in}(\mathbf{x}, \Omega)$  et  $B^{out}(\mathbf{x}, \Omega)$ . Dans le cas du cristal fin en champ proche [Petsas03] ou bien d'une pompe plane en champ lointain, cette relation décrit un ensemble infini d'oscillateurs paramétriques optiques indépendants. Le niveau de compression peut être alors calculé de manière analytique, comme on le verra par la suite. Cependant, dans les autres cas, on doit utiliser la méthode numérique présentée dans le chapitre précédent.

## C Réduction de bruit locale en champ proche

Dans cette section on utilise le schéma de détection homodyne (Fig. 6.3) déjà décrit dans [Petsas03]. On va s'intéresser à deux cas. Tout d'abord on se placera dans l'approximation de cristal mince qui donne une bonne compréhension du problème sans faire intervenir la limite de résolution du système. Ensuite, nous considérerons le cas général du cristal de longueur  $l_{coh}$ .

### C.1 Cas du cristal mince

Dans le cas du cristal fin, l'équation d'évolution devient :

$$\frac{\partial \hat{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\gamma((1 + i\Delta)\hat{B}(\mathbf{x}, t) - A_p(\mathbf{x})\hat{B}^+(\mathbf{x}, t)) + \sqrt{2\gamma}\hat{B}^{in}(\mathbf{x}, t) \quad (6.19)$$

Utilisant la relation:

$$\hat{B}^{out}(\mathbf{x}, t) = \sqrt{2\gamma}\hat{B}(\mathbf{x}, t) - \hat{B}^{in}(\mathbf{x}, t) \quad (6.20)$$

on obtient dans le domaine fréquentiel:

$$\hat{B}^{out}(\mathbf{x}, \Omega) = U(\mathbf{x}, \Omega)\hat{B}^{in}(\mathbf{x}, \Omega) + V(\mathbf{x}, \Omega)\hat{B}^{in+}(\mathbf{x}, -\Omega) \quad (6.21)$$

où

$$U(\mathbf{x}, \Omega) = \frac{[1 - i(\Delta - \Omega/\gamma)][1 - i(\Delta + \Omega/\gamma)] + A_p^2(\mathbf{x})}{[1 + i(\Delta + \Omega/\gamma)][1 - i(\Delta - \Omega/\gamma)] - A_p^2(\mathbf{x})} \quad (6.22)$$

et

$$V(\mathbf{x}, \Omega) = \frac{2A_p(\mathbf{x})}{[1 + i(\Delta + \Omega/\gamma)][1 - i(\Delta - \Omega/\gamma)] - A_p^2(\mathbf{x})} \quad (6.23)$$

On a accès ainsi au spectre de bruit:

$$V(\Omega) = \int_{det} d\mathbf{x} |U(\mathbf{x}, \Omega)\alpha_L^*(\mathbf{x}) + V^*(\mathbf{x}, -\Omega)\alpha_L(\mathbf{x})|^2 \quad (6.24)$$

Calculons le niveau de compression à  $\Omega = 0$  et  $\Delta = 0$ . La précédente expression devient:

$$\frac{V(0)}{N} = 1 + \frac{\int_{det} d\mathbf{x} |\alpha_L(\mathbf{x})|^2 \frac{4A_p(\mathbf{x})}{(1-A_p^2(\mathbf{x}))^2} (2A_p(\mathbf{x}) + 1 + A_p^2(\mathbf{x}) \cos(2\varphi_L))}{\int_{det} d\mathbf{x} |\alpha_L(\mathbf{x})|^2} \quad (6.25)$$

La compression est maximale pour un oscillateur local de front d'onde plan,  $\varphi_L = \frac{\pi}{2}$ , et on obtient:

$$\frac{V(0)}{N} = 1 - \frac{\int_{det} d\mathbf{x} |\alpha_L(\mathbf{x})|^2 \frac{4A_p(\mathbf{x})}{(1-A_p^2(\mathbf{x}))^2}}{\int_{det} d\mathbf{x} |\alpha_L(\mathbf{x})|^2} \quad (6.26)$$

On peut étudier les propriétés locales de compression en utilisant des détecteurs de formes différentes. Tout d'abord, utilisons un détecteur ponctuel, de taille bien inférieure au waist de pompe  $w_p$ , à la distance  $\rho$  de l'axe de la cavité. En introduisant le paramètre adimensionné  $s = \frac{\rho}{w_p}$  et en utilisant un oscillateur local plan, le niveau de compression est donné par:

$$\frac{V(0)}{N} = 1 - \frac{4A_p e^{-s^2}}{(1 + A_p e^{-s^2})^2} \quad (6.27)$$

La figure 6.5 représente l'évolution de la compression en fonction de la distance à l'axe optique  $s$  (normalisée), pour différentes puissances de pompe. Dans le cas d'un détecteur circulaire de rayon  $\Delta\rho$ , centré sur l'axe optique, d'un oscillateur local plan, le niveau de compression en sortie en fonction de la taille du détecteur normalisée à la taille du waist de pompe,  $\Delta s = \frac{\Delta\rho}{w_p}$ , est donné par:

$$\frac{V(0)}{N} = 1 + \frac{4A_p}{(\Delta s)^2} \frac{e^{-(\Delta s)^2} - 1}{(1 + A_p)(1 + A_p e^{-(\Delta s)^2})} \quad (6.28)$$

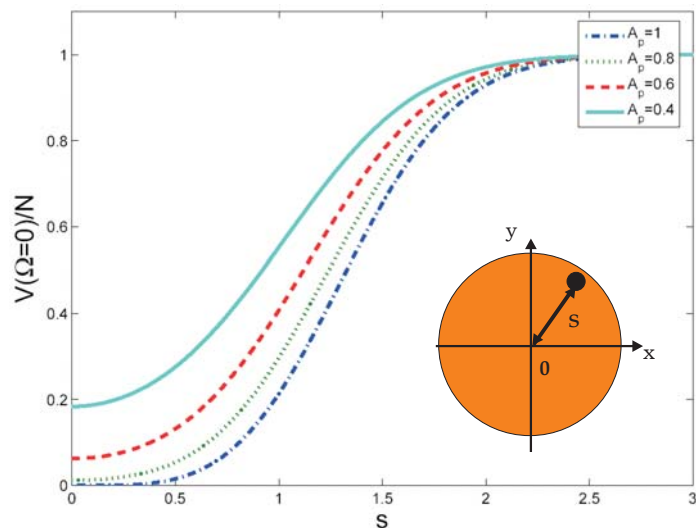


Fig. 6.5: Cas du cristal mince. Evolution du bruit quantique normalisé au bruit quantique standard, pour un détecteur ponctuel, en fonction de la distance normalisée du pixel à l'axe optique  $s = \frac{\rho}{w_p}$  pour différentes puissances de pompe, normalisées au seuil

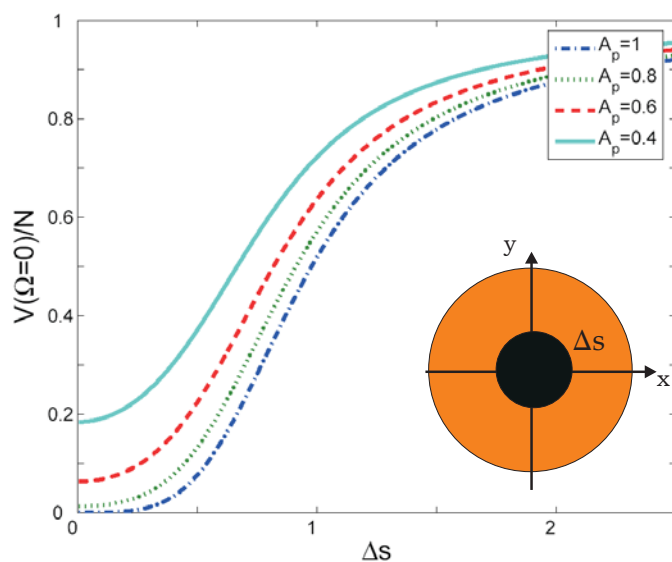


Fig. 6.6: Cas du cristal mince. Evolution du bruit quantique normalisé au bruit quantique standard, pour un détecteur circulaire, de rayon normalisé  $\Delta s$ , pour différentes puissances de pompe normalisées au seuil d'oscillation

La figure 6.6 représente cette évolution.

Dans ces deux courbes, nous voyons que le niveau de compression du bruit quantique est important lorsqu'il y a suffisamment de gain. Les caractéristiques de compression sont similaires au cas de l'OPO confocal, mais maintenant nous n'avons plus besoin d'un système de détection symétrique (détecteurs et oscillateur local).

En effet l'opérateur de quadrature (mesuré grâce au montage de détection homodyne) permet de mesurer le bruit sur la projection du champ en sortie sur un mode imposé par l'oscillateur local et le détecteur. Dans le cas de l'OPO confocal, lorsqu'il est bloqué sur la résonance des modes pairs, seule la partie paire du champ en sortie est comprimée: on a besoin d'un détecteur symétrique pour observer le maximum de compression. Dans le cas de l'OPO auto imageant, comme l'intégralité du champ en sortie est comprimée, on peut utiliser un détecteur non symétrique et obtenir le maximum de compression.

## C.2 Cas du cristal épais

Dans le cas du cristal épais, la relation entrée/sortie n'est plus une relation point à point. Elle devient:

$$B^{out}(x, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dy U(x, y, \Omega) B^{in}(y, \Omega) + \int_{-\infty}^{\infty} dy V(x, y, \Omega) B^{in+}(y, -\Omega) \quad (6.29)$$

En utilisant l'expression précédente et la relation entrée sortie, le niveau de compression en sortie de notre système est donné par:

$$\begin{aligned} \frac{V(\Omega)}{N} &= \frac{1}{\int_{det} dx |\alpha_L(x)|^2} \int \int_{det^2} dx dx' \alpha_L^*(x) \alpha_L^*(x') \int_{-\infty}^{+\infty} dy U(x, y, \Omega) V(x', y, -\Omega) \\ &+ \frac{1}{\int_{det} dx |\alpha_L(x)|^2} \int \int_{det^2} dx dx' \alpha_L(x) \alpha_L(x') \int_{-\infty}^{+\infty} dy V^*(x, y, -\Omega) U^*(x', y, \Omega) \\ &+ \frac{1}{\int_{det} dx |\alpha_L(x)|^2} \int \int_{det^2} dx dx' \alpha_L^*(x) \alpha_L(x') \int_{-\infty}^{+\infty} dy U(x, y, \Omega) U^*(x', y, \Omega) \\ &+ \frac{1}{\int_{det} dx |\alpha_L(x)|^2} \int \int_{det^2} dx dx' \alpha_L(x) \alpha_L^*(x') \int_{-\infty}^{+\infty} dy V^*(x, y, -\Omega) V(x', y, -\Omega) \end{aligned} \quad (6.30)$$

Comme nous l'avons souligné, nous allons retrouver les effets liés à la taille finie du cristal déjà rencontrés dans le chapitre précédent, à savoir qu'il existe une taille minimale sur laquelle on peut observer de la compression.

La figure 6.7 représente les résultats obtenus grâce à un détecteur héli-circulaire (c'est-à-dire la moitié d'un détecteur circulaire: on choisit un tel détecteur pour montrer que la détection n'a pas besoin d'être symétrique) de rayon  $\Delta\rho$ , lorsque l'onde de pompe est plane.

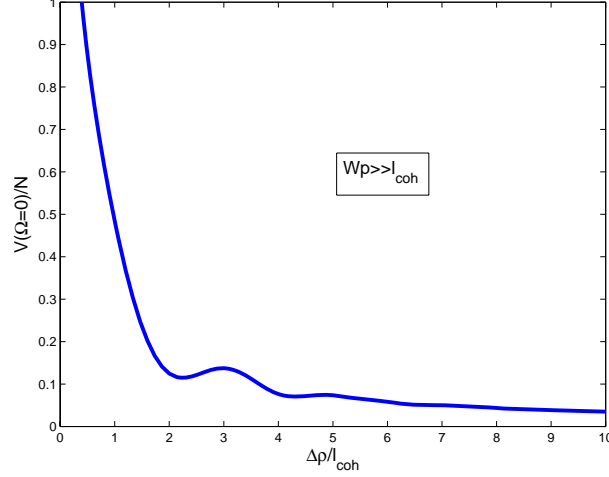


Fig. 6.7: Cas du cristal épais, pompe plane en champ proche. Evolution du bruit quantique normalisé au bruit quantique standard, pour un détecteur hémicirculaire, de rayon  $\Delta\rho$  (normalisé à  $l_{coh}$ ).

Le niveau de compression à fréquence nulle est représenté en fonction de la taille du détecteur, normalisée à la longueur de cohérence  $l_{coh} = \sqrt{\frac{\lambda l_c}{\pi n_s}}$ .

Pour un même détecteur, nous avons représentés les résultats obtenus lorsque l'on prend en compte de la taille finie de la pompe 6.8. Le niveau de compression dépend du paramètre  $b = \frac{w_p^2}{l_{coh}^2}$ . Comme au chapitre précédent, nous voyons donc que plus  $b$  est faible, plus on se ramène à une évolution monomode.

Lorsque le rayon du détecteur est inférieur à  $l_{coh}$ , le niveau de compression diminue en raison de la taille finie du cristal.

## D Equation d'évolution en champ lointain

Dans ce paragraphe, on va étudier les fluctuations en sortie de l'OPO auto-imageant en champ lointain (Fig. 6.3) (dans la base des vecteurs  $\mathbf{q}$ ). On va s'intéresser à deux cas: tout d'abord la cas de la pompe plane (les calculs sont analytiques), et le cas d'une pompe de taille finie (la méthode numérique est nécessaire). Nous allons montrer que pour observer de la compression de bruit en champ lointain, il faut utiliser un détecteur symétrique, à la différence du champ proche.

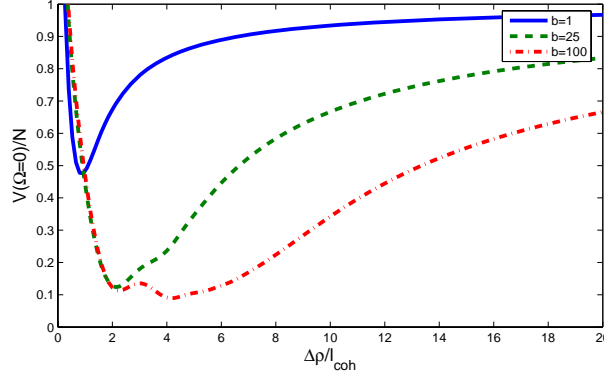


Fig. 6.8: Cas du cristal épais. Evolution du bruit quantique normalisé au bruit quantique standard, pour un détecteur hémicirculaire, de rayon  $\Delta\rho$  (normalisé à  $l_{\text{coh}}$ ), pour différentes tailles de waist de pompe,  $b$

### D.1 Pompe plane en champ lointain

Pour résoudre l'équation d'évolution en champ lointain, on passe dans l'espace des fréquences spatiales en introduisant:

$$\tilde{B}^{in/out}(\mathbf{q}, \Omega) = \int \int \frac{d^2x}{2\pi} \hat{B}^{in/out}(\mathbf{x}, \Omega) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}$$

Dans le cas de la pompe plane,  $A_p(\mathbf{x}, z) = A_p$ , l'équation (22) devient:

$$\frac{\partial \tilde{B}}{\partial t}(\mathbf{q}, 0, t) = -\gamma[(1 + i\Delta)\tilde{B}(\mathbf{q}, 0, t) + \sqrt{2\gamma}\tilde{B}_{in}(\mathbf{q}, 0, t) - A_p \text{sinc}\left(\frac{l_c \mathbf{q}^2}{2k_s}\right)\tilde{B}^\dagger(\mathbf{q}, 0, t)] \quad (6.31)$$

Cette équation qui ne couple pas différents  $\mathbf{q}$  peut être résolue analytiquement. Elle est similaire à l'équation (14) de la référence [Petsas03]. En prenant en compte que:

$$\tilde{B}^{out}(\mathbf{q}, t) = \sqrt{2\gamma}\tilde{B}(\mathbf{q}, t) - \tilde{B}^{in}(\mathbf{q}, t) \quad (6.32)$$

on obtient:

$$\tilde{B}^{out}(\mathbf{q}, \Omega) = U(\mathbf{q}, \Omega)\tilde{B}^{in}(\mathbf{q}, \Omega) + V(\mathbf{q}, \Omega)\tilde{B}^{in+}(-\mathbf{q}, -\Omega) \quad (6.33)$$

où

$$U(\mathbf{q}, \Omega) = \frac{[1 - i(\Delta - \Omega/\gamma)][1 - i(\Delta + \Omega/\gamma)] + A_p^2 \text{sinc}^2\left(\frac{l_c \mathbf{q}^2}{2k_s}\right)}{[1 + i(\Delta + \Omega/\gamma)][1 - i(\Delta - \Omega/\gamma)] - A_p^2 \text{sinc}^2\left(\frac{l_c \mathbf{q}^2}{2k_s}\right)} \quad (6.34)$$

et

$$V(\mathbf{q}, \Omega) = \frac{2A_p \text{sinc}\left(\frac{l_c \mathbf{q}^2}{2k_s}\right)}{[1 + i(\Delta + \Omega/\gamma)][1 - i(\Delta - \Omega/\gamma)] - A_p^2 \text{sinc}^2\left(\frac{l_c \mathbf{q}^2}{2k_s}\right)} \quad (6.35)$$



Introduisant la transformée de Fourier spatiale de l'oscillateur local  $\tilde{\alpha}_{LO}$ , on peut montrer que le résultat d'une détection homodyne en champ lointain (Fig. 6.4) est donné par:

$$E_H(\Omega) = \int_{det} d\mathbf{q} [\tilde{B}^{out}(\mathbf{q}, \Omega) \tilde{\alpha}_{LO}^*(\mathbf{q}) + \tilde{B}^{out+}(\mathbf{q}, -\Omega) \tilde{\alpha}_{LO}(\mathbf{q})] \quad (6.36)$$

Ceci nous permet de calculer le spectre de bruit en champ lointain qui est donné par: ([Petsas03]):

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \int_{det} d\mathbf{q} |\tilde{\alpha}_{LO}(\mathbf{q})|^2 (|U(\Omega, \mathbf{q})|^2 + |V(-\Omega, \mathbf{q})|^2) \\ &+ \int_{det} d\mathbf{q} \int_{det} d\mathbf{q}' (U(\Omega, \mathbf{q}) V(-\Omega, \mathbf{q}') \tilde{\alpha}_{LO}^*(\mathbf{q}) \tilde{\alpha}_{LO}^*(\mathbf{q}') \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}')) \\ &+ \int_{det} d\mathbf{q} \int_{det} d\mathbf{q}' (V^*(-\Omega, \mathbf{q}) U^*(\Omega, \mathbf{q}') \tilde{\alpha}_{LO}(\mathbf{q}) \tilde{\alpha}_{LO}(\mathbf{q}') \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}')) \quad (6.37) \end{aligned}$$

Cette expression est différente de celle en champ proche. En champ lointain, on voit qu'il existe des corrélations entre vecteurs d'onde de directions opposées. Ce couplage va entraîner (nous le verrons par la suite) la générations de faisceaux EPR locaux. Pour comprendre le comportement de la compression de bruit spatiale en champ lointain, considérons tout d'abord le cas d'un détecteur ponctuel, non centré par rapport à l'axe optique. Le spectre de bruit sur un tel détecteur est donné par:

$$V(\Omega) = \int_{det} d\mathbf{q} |\tilde{\alpha}_{LO}(\mathbf{q})|^2 (|U(\Omega, \mathbf{q})|^2 + |V(-\Omega, \mathbf{q})|^2) \quad (6.38)$$

A fréquence nulle et à résonance, lorsque l'on s'approche du seuil,  $A_p, |U(0, \mathbf{q})|^2 + |V(0, \mathbf{q})|^2 \gg 1$ : il y a donc un fort excès de bruit sur le signal détecté. Ceci semble logique car avec ce montage, on détecte uniquement les fluctuations du signal, qui est fortement bruité (voir par exemple [LauratPhD]). En champ lointain, pour obtenir le maximum de compression, on doit détecter à la fois le signal et le complémentaire émis lors du processus paramétrique. Dans ce cas le spectre de bruit est donné par:

$$V(\Omega) = \int_{det} d\mathbf{q} |\tilde{\alpha}_{LO}(\mathbf{q})|^2 |U(\mathbf{q}, \Omega) + e^{2i\varphi_{LO}(\mathbf{q})} V^*(\mathbf{q}, -\Omega)|^2 \quad (6.39)$$

Cette expression est identique aux résultats effectués utilisant une cavité confocale (voir chapitre 5). C'est un résultat général: en champ lointain, les résultats concernant l'étude du bruit local avec un détecteur symétrique seront les mêmes pour une cavité confocale et une cavité auto-imageante. En effet dans ce cas on détecte les fluctuations de la partie paire du champ qui sont comprimées de la même manière (au moins dans le cadre de nos modèles théoriques) pour les deux cavités. Pour l'étude de la compression de bruit quantique de la cavité auto-imageante en champ lointain on peut donc se reporter aux calculs effectués en cavité confocale dans le chapitre précédent.

## E Génération de faisceaux EPR locaux en champ lointain

### E.1 Le concept de faisceaux EPR locaux

Comme nous l'avons montré dans le paragraphe précédent, en champ lointain, le couplage entre vecteurs d'onde de directions opposées est responsable de fortes corrélations: nous allons montrer l'apparition de faisceaux EPR locaux. Le concept de "faisceaux EPR locaux a été introduit pour la première fois dans [Gatti99]. C'est une généralisation au niveau local d'un concept introduit en optique par Reid et Drummond [Reid88] pour l'ensemble du faisceau. Pour plus de détails sur le concept de faisceaux EPR, on pourra se reporter à [LauratPhD]. L'idée directrice est d'utiliser l'analogie entre position et impulsion d'une particule et les composantes de quadratures du champ électromagnétique. Considérant deux modes du champ électromagnétique, les faisceaux sont dits EPR s'ils possèdent deux composantes de quadratures orthogonales respectivement corrélées et anti-corrélées.

### E.2 Schéma de détection

Pour caractériser le niveau de corrélation entre parties symétriques du faisceau, on va comparer les fluctuations de quadrature sur deux pixels. Pour obtenir ces quantités, on introduit le schéma de détection homodyne (fig. 6.9) proposé dans l'article [Navez01]. L'efficacité de détection est considérée parfaite.

Une quadrature du champ à la position  $\mathbf{k}$  est donné par:

$$Z_{\phi_L}(\mathbf{k}, \Omega) = B^{out}(\mathbf{k}, \Omega)\alpha_L^*(\mathbf{k}) + B^{out+}(\mathbf{k}, -\Omega)\alpha_L(\mathbf{k}) \quad (6.40)$$

avec  $B^{out}(\mathbf{k}, \Omega)$ ,  $B^{in}(\mathbf{k}, \Omega)$ ,  $B^{in+}(-\mathbf{k}, -\Omega)$  liés par les relations entrée/sortie. Supposant que le pixel est de taille  $R_j$ , la quantité mesurée est:

$$Z_{\phi_L}^j(\Omega) = \int_{R_j} d\mathbf{k} Z_{\phi_L}(\mathbf{k}, \Omega) \quad (6.41)$$

Pour comparer les fluctuations de quadrature mesurées sur deux pixels  $j = 1$  et  $j = 2$ , on compare la somme et la différence de ces quantités:

$$Z_{\phi_L}^{(\pm)}(\Omega) = Z_{\phi_L}^{(1)}(\Omega) \pm Z_{\phi_L}^{(2)}(\Omega) \quad (6.42)$$

Pour évaluer le degré de corrélation et d'anti-corrélation, on introduit le spectre de bruit correspondant:

$$V_{\phi_L}^{(\pm)}(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega' \langle Z_{\phi_L}^{(\pm)}(\Omega) Z_{\phi_L}^{(\pm)}(\Omega') \rangle \quad (6.43)$$

On peut montrer que:

$$V_{\phi_L}^{(-)}(\Omega) = V_{\phi_L + \pi/2}^{(+)}(\Omega) \quad (6.44)$$

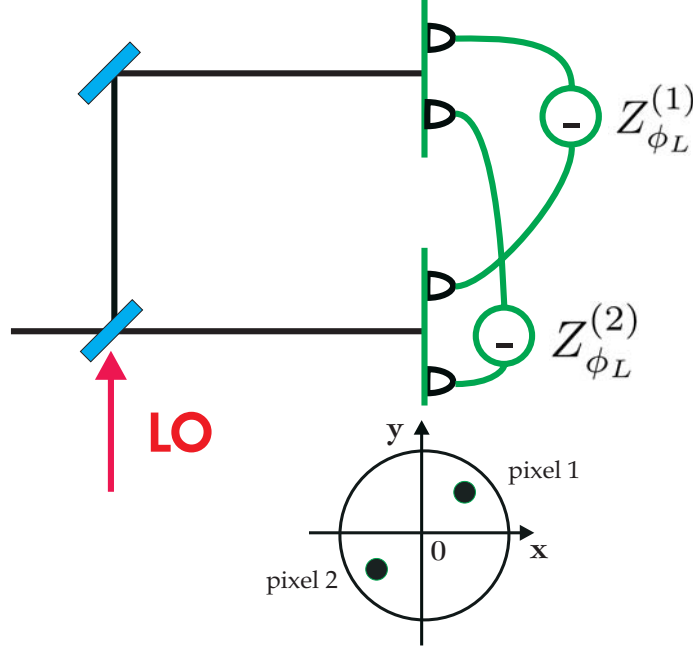


Fig. 6.9: Schéma de détection homodyne pour la mesure de quadratures du champ sur deux pixels symétriques: pixel 1 et pixel 2. Schéma proposé dans [Navez01]

Ainsi, le niveau de corrélation des quadratures  $Z_{\phi_L}^{(1)}$  et  $Z_{\phi_L}^{(2)}$  est égal au niveau d'anti-corrélation sur les quadratures orthogonales correspondantes  $Z_{\phi_L+\pi/2}^{(1)}$  et  $Z_{\phi_L+\pi/2}^{(2)}$ . Pour calculer (6.43), on développe l'expression:

$$\begin{aligned}
 V_{\phi_L}^{(\pm)}(\Omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega' \langle Z_{\phi_L}^{(1)}(\Omega) Z_{\phi_L}^{(1)}(\Omega') \rangle + \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega' \langle Z_{\phi_L}^{(2)}(\Omega) Z_{\phi_L}^{(2)}(\Omega') \rangle \\
 &\quad \pm \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega' \langle Z_{\phi_L}^{(1)}(\Omega) Z_{\phi_L}^{(2)}(\Omega') \rangle \pm \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega' \langle Z_{\phi_L}^{(2)}(\Omega) Z_{\phi_L}^{(1)}(\Omega') \rangle \quad (6.45)
 \end{aligned}$$

Le terme  $\int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega' \langle Z_{\phi_L}^{(i)}(\Omega) Z_{\phi_L}^{(i)}(\Omega') \rangle$  correspond à la mesure effectuée à l'aide d'une détection homodyne effectuée à l'aide d'un pixel unique. Les autres termes sont des termes croisés, si bien que:

$$V_{\phi_L}^{-}(\Omega) = V_{\phi_L+\pi/2}^{+}(\Omega) = V(\Omega) \quad (6.46)$$

où  $V(\Omega)$  représente le spectre de bruit obtenu en utilisant deux pixels symétriques. Nous avons vu dans le paragraphe précédent qu'il est possible d'observer de la compression de bruit locale en utilisant un détecteur symétrique: on a  $V(\Omega) \leq 1$ . Si l'on raisonne maintenant en terme de corrélations ou d'anti-corrélations sur des quadratures orthogonales, comme  $V_{\phi_L}^{-}(\Omega) = V_{\phi_L+\pi/2}^{+}(\Omega) = V(\Omega)$  on obtient en sortie du système des faisceaux EPR locaux.

La relation (6.46) montre la connexion entre compression et corrélations quantiques. Ces deux phénomènes sont liés. Quel est le lien entre compression du bruit et corrélations EPR? Cette discussion est présentée dans [Quantim]. Nous nous en inspirons. L'intrication en champ lointain apparaît entre les modes  $\hat{a}_{\mathbf{q}} \sim e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}$  et  $\hat{a}_{-\mathbf{q}} \sim e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}$ . Comme  $\hat{a}_{\mathbf{q}}$  et  $\hat{a}_{-\mathbf{q}}$  sont des faisceaux intriqués, il est connu [Quantim] que la combinaison linéaire de modes:

$$\begin{aligned}\frac{\hat{a}_{\mathbf{q}} + \hat{a}_{-\mathbf{q}}}{\sqrt{2}} &\sim \cos(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}) \\ \frac{\hat{a}_{\mathbf{q}} - \hat{a}_{-\mathbf{q}}}{\sqrt{2}} &\sim \sin(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x})\end{aligned}\quad (6.47)$$

va être comprimée sur des quadratures orthogonales. Les modes proportionnels à  $\cos(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x})$  sont des modes pairs: en utilisant un schéma de détection homodyne pair, on peut donc observer de la compression de bruit. On remarquera que si l'on utilise un schéma de détection homodyne impair, on pourra voir de la compression mais sur la quadrature orthogonale.

### E.3 Inséparabilité, résultats

En sortie de l'OPO auto-imageant en champ lointain, des parties symétriques du faisceau de taille supérieure à l'aire de cohérence sont donc fortement corrélées (et anti-corrélées). Lorsque ces deux parties du faisceau ne peuvent être décrites par la description indépendante de deux entités, on dit que ces deux parties sont "inséparables" (pour plus de détails sur cette notion on peut se reporter à [LauratPhD]).

Pour caractériser le degré d'inséparabilité, Duan *et al* [Duan00] ont montré qu'il faut faire une mesure de corrélation sur des composantes de quadratures orthogonales. Ils ont montré que dans le cas d'états gaussien il existe un critère suffisant d'inséparabilité, faisant intervenir la "séparabilité"  $S_{12}$ , donnée par

$$S_{12}(\Omega) = \frac{1}{2}(V_{\phi_L}^-(\Omega) + V_{\phi_L + \frac{\pi}{2}}^+(\Omega)) \quad (6.48)$$

Selon Duan, une condition suffisante pour qu'un état soit inséparable est<sup>1</sup>:

$$S_{12}(\Omega) < 1 \quad (6.49)$$

Tout d'abord nous nous intéressons à une mesure de corrélation entre deux détecteurs hémis-circulaires de taille variable, décrits sur la figure 6.10. La figure 6.11 montre l'évolution de la séparabilité à fréquence nulle,  $S_{12}(0) = S_{12}$  pour différentes valeurs de  $b$ , en fonction du rayon du détecteur normalisé à  $l_{coh.f}$ . Ces résultats sont identiques aux mesure de compression du bruit utilisant un détecteur circulaire de rayon  $\Delta\rho$  centré sur l'axe optique.

La figure 6.12 montre les résultats de séparabilité obtenus dans le cas de deux pixels symétriques (de taille l'aire de cohérence), pour différentes valeurs de  $b$  en fonction de la distance entre les deux pixels  $\rho$ .

1. Il existe des critères d'inséparabilité faisant intervenir une condition moins restrictive [Tombesi], mais dans cette étude on se restreint au critère de Duan

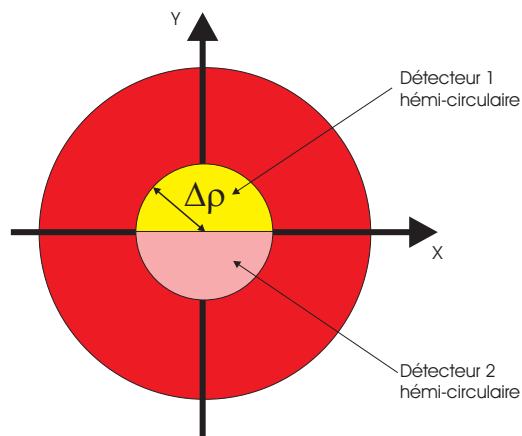


Fig. 6.10: Schéma des détecteurs utilisés pour la mesure d'inséparabilité. On utilise deux détecteurs hémicirculaires de rayon  $\Delta\rho$

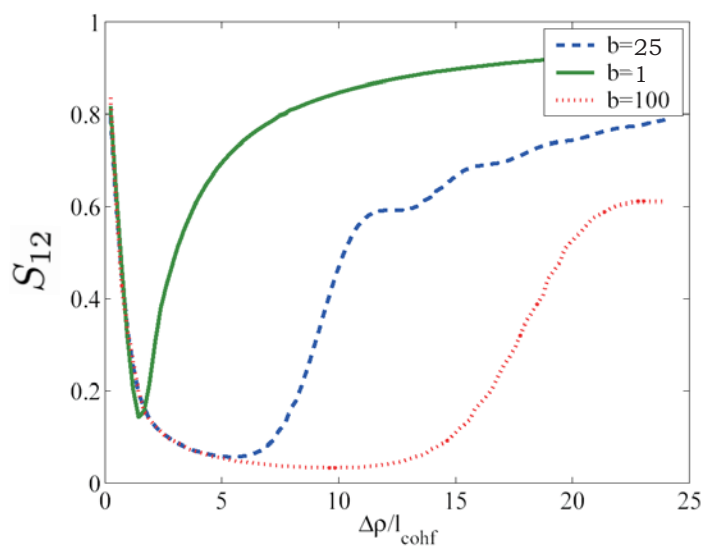


Fig. 6.11: Inséparabilité à fréquence nulle, à résonnance, en fonction du rayon  $\Delta\rho$  des détecteurs hémicirculaires (normalisé à  $l_{\text{coh}f}$ ), dans le cas d'une pompe de taille finie, en champ lointain, pour différentes valeurs de  $b$ .

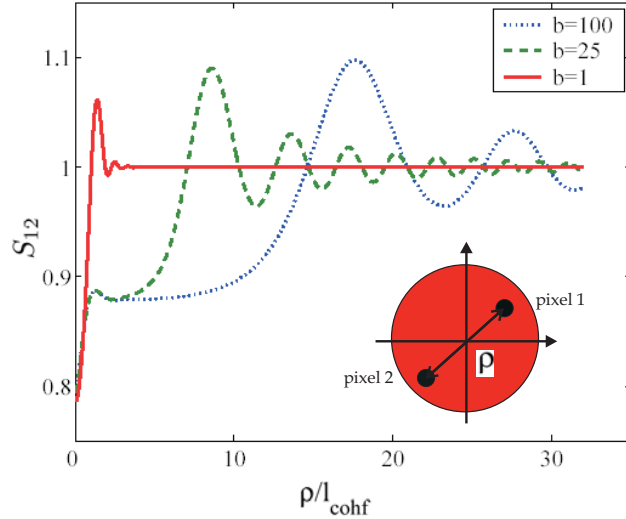


Fig. 6.12: Inséparabilité à fréquence nulle, à résonance, en fonction de la distance entre les pixels  $\rho$  (normalisée à la longueur de cohérence  $l_{cohf}$ ), dans le cas d'une pompe de taille finie, en champ lointain, pour différentes valeurs de  $b$ .

## Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié les propriétés spatiales du vide comprimé émis par un OPO sous le seuil en cavité auto-imageante. Nous avons montré qu'en champ proche, on peut observer de la compression de bruit quantique en utilisant un détecteur de taille supérieure à l'aire de cohérence du système. A la différence de la cavité confocale ce détecteur n'a pas besoin d'être symétrique par rapport à l'axe optique de la cavité. En champ lointain, nous avons montré qu'en termes de réduction de bruit quantique, l'OPO héli-confocal a les mêmes propriétés qu'un OPO en cavité confocale: pour obtenir le maximum de compression de bruit en sortie, signal et complémentaire doivent être détectés en même temps: un détecteur symétrique s'impose. L'originalité de la cavité auto-imageante en champ lointain provient de la possibilité de générer des faisceaux EPR locaux, chose impossible en cavité confocale.

Nous voyons d'après cette étude toute la richesse du comportement quantique d'une telle cavité. A terme sa réalisation expérimentale est très prometteuse en terme d'applications. La génération de vide comprimé peut servir dans des expériences de petit déplacements, d'amélioration de la superrésolution. La possibilité de générer des faisceaux EPR locaux permet d'envisager des expériences de téléportation d'images.



*Troisième partie*

**Amplification sans bruit à l'aide  
d'un OPO sous le seuil: théorie**





---

# Généralités sur l'amplification sans bruit

---

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Introduction</b>	<b>112</b>
A.1	Contexte de l'étude	112
A.2	Bruit et signal dans un faisceau	113
A.3	Facteur de bruit d'un amplificateur	113
<b>B</b>	<b>L'amplification classique monomode, insensible à la phase</b>	<b>114</b>
B.1	Présentation	114
B.2	Transformation monomode insensible à la phase	115
B.3	Théorème général de l'amplification insensible à la phase	116
B.4	Exemples d'amplificateurs insensibles à la phase	116
<b>C</b>	<b>L'amplification monomode sensible à la phase</b>	<b>118</b>
C.1	Présentation	118
C.2	Transformation monomode sensible à la phase	119
C.3	Théorème de l'amplification sensible à la phase	120
C.4	Exemples d'amplificateurs sensibles à la phase	121
<b>D</b>	<b>Un amplificateur multimode pour amplifier des images</b>	<b>124</b>
D.1	Amplification d'images en simple passage	124
D.2	Amplification sans bruit d'images en cavité	125
D.3	Limites imposées par la mécanique quantique dans un processus multimode	126

---

## Introduction

Dans ce chapitre, on se propose de présenter des généralités sur l'amplification optique au niveau quantique.

Dans une première partie, après avoir exposé le contexte d'une telle étude, nous définirons des notions essentielles telles que le bruit, le signal associés à un faisceau optique en régime continu.

La deuxième partie et la troisième partie sont consacrées respectivement à l'étude des amplificateurs insensibles à la phase et sensibles à la phase. Suivant le raisonnement de Caves [Caves82], dans le cas d'une amplification monomode, nous montrerons les limites imposées par la mécanique quantique sur le bruit ajouté lors de tels processus d'amplification. Des exemples de tels processus seront abordés.

Dans la quatrième partie, nous verrons comment, en généralisant la notion d'amplification monomode, on peut concevoir un amplificateur permettant d'amplifier une image constituée de plusieurs modes transverses.

## A Introduction

### A.1 Contexte de l'étude

L'étude de l'amplification optique est une préoccupation majeure de l'optique moderne. La possibilité d'amplifier des signaux est essentielle par exemple en télécommunication, lorsque l'on cherche à faire se propager des signaux sur de très grandes distances. L'étude de tels amplificateurs a débuté avec la découverte des masers et des lasers, basés sur l'émission stimulée [Townes], [Weber53], [Basov54], [Gordon54], [Schawlow58]. L'amplification est un processus physique qui peut ajouter du bruit. Par exemple pour un laser, le milieu amplificateur est excité par une pompe possédant un bruit propre d'origine classique qui peut être partiellement transmis au signal.

Si au départ l'origine du bruit était essentiellement classique (bruit thermique, bruit acoustique, inhomogénéités, etc.), les progrès technologiques ont permis d'obtenir des faisceaux dont le bruit correspond au bruit quantique standard. Ainsi dans les années 80 [Caves82], Caves s'intéressant à la détection des ondes gravitationnelles, où les détecteurs atteignent déjà les limites quantiques, se pose la question des limites imposées par la mécanique quantique sur le bruit ajouté lors d'un processus d'amplification d'un signal monomode. Il montre, à l'aide d'un formalisme déjà utilisé par Haus et Mullen [Haus], que l'on peut distinguer deux types de processus d'amplification. Le premier est un processus insensible à la phase, aussi nommé classique, et qui, comme nous le verrons par la suite, ajoute inévitablement du bruit. Le second est dit sensible à la phase, et dans ce cas il est possible d'amplifier sans bruit une quadrature. Comme pour la génération d'états comprimés, comme son nom l'indique l'amplification sensible à la phase nécessite un processus dépendant de la phase.

Dans le domaine temporel (utilisant des faisceaux monomodes) de nombreuses démonstrations d'amplification sans bruit ont été réalisées en utilisant le processus paramétrique, soit en simple passage en régime pulsé [Levenson93], soit en cavité en régime continue [Ou93]. Dans le domaine spatial et temporel, de nombreuses propositions théoriques ([Navez01] en

simple passage, [Kolobov95], [Mancini00] en cavité) ont prédit une amplification sans bruit d'images qui a été réalisée expérimentalement dans les équipes de Kumar [Kumar99] et Lantz [Mosset05], en simple passage en régime pulsé. Cependant jusqu'ici personne n'a démontré l'amplification d'images en cavité en régime continu. L'objectif de cette thèse est de mettre en place un système d'amplification d'images en régime continu à l'aide d'un milieu paramétrique placé en cavité dégénérée en modes transverses.

## A.2 Bruit et signal dans un faisceau

Un faisceau optique continu, d'intensité  $I(t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c |E(t)|^2$ , à une longueur d'onde donnée, est caractérisé par sa densité spectrale de bruit d'intensité :

$$S_I[\Omega] = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{-i\Omega\tau} \langle I(t)I(t+\tau) \rangle \quad (7.1)$$

où  $\langle I(t)I(t+\tau) \rangle$  est la fonction d'autocorrélation classique en intensité du champ.

$S_I[\Omega]$  est constitué pour une part du bruit quantique du faisceau, égal pour un faisceau cohérent à un bruit blanc poissonnien (indépendant de la fréquence) proportionnel à l'intensité détectée [Fabre95]:

$$S_I[\Omega] = 2\varepsilon_0 c \langle I \rangle$$

A cela s'ajoute un bruit classique, somme de tous les bruits techniques à cette fréquence. On va se placer pour toute cette discussion dans le cas où tout le bruit classique a été éliminé. Il ne reste alors à une fréquence d'analyse donnée que le bruit venant de la statistique quantique des photons.  $S_I[\Omega]$  peut aussi contenir une partie déterministe, sous la forme d'une modulation à cette fréquence, et qui contient l'information véhiculée par le faisceau : **nous l'appellerons le signal**.

Nous sommes amenés à définir le rapport signal-à-bruit  $R_{S/B}$  sur cette information comme le rapport de la puissance du signal de modulation sur la puissance de bruit mesurée dans les mêmes conditions en l'absence du signal.

## A.3 Facteur de bruit d'un amplificateur

On définit le facteur de bruit d'un système comme le rapport entre le rapport signal-à-bruit en entrée et le rapport signal-à-bruit en sortie:

$$F_B = \frac{R_{S/B_{in}}}{R_{S/B_{out}}} \quad (7.2)$$

L'amplification d'un signal ne permet pas d'améliorer le rapport signal-à-bruit, car elle ne peut pas amplifier préférentiellement le signal par rapport au bruit. On aura donc au mieux:

$$F_B = 1$$

## B L'amplification classique monomode, insensible à la phase

### B.1 Présentation

Un processus d'amplification est dit classique, lorsqu'il est insensible à la phase. Considérons un état cohérent à l'entrée d'un tel système amplificateur (figure 7.1). En sortie à la fois son gain et ses fluctuations doivent être indépendants des quadratures. Le seul effet d'un déphasage en entrée est un déphasage équivalent en sortie. Suivant le raisonnement de Haus et

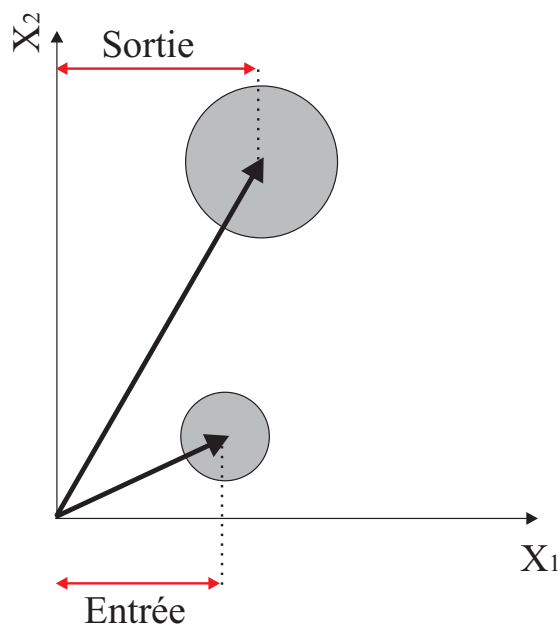


Fig. 7.1: Représentation de Fresnel du champ électromagnétique en entrée et en sortie d'un amplificateur insensible à la phase. Représentation schématique

Mullen [Haus] et Caves [Caves82], nous allons chercher les limites imposées par la mécanique quantique sur le bruit ajouté lors du processus d'amplification par un tel amplificateur. On se limitera ainsi au cas où le signal est porté par un seul mode.

On modélise un amplificateur optique monomode par "une boîte noire", avec en entrée un unique mode  $\hat{a}^{in}$ , qui porte le signal. L'interaction de ce mode avec les modes internes au système amplificateur donne le signal en sortie  $\hat{a}^{out}$ . La relation entrée/sortie pour un

amplificateur monomode linéaire est du type:

$$\hat{a}^{out} = U\hat{a}^{in} + V\hat{a}^{in+} + \hat{f} \quad (7.3)$$

avec  $(U, V) \in \mathbb{C}^2$ .  $\hat{f}$  correspond au bruit ajouté lors du processus d'amplification. Les modes en entrée et en sortie doivent vérifier la relation de commutation pour des modes bosoniques:

$$[\hat{a}^{in}, \hat{a}^{in+}] = [\hat{a}^{out}, \hat{a}^{out+}] = 1 \quad (7.4)$$

Cette relation impose la relation de commutation suivante pour l'opérateur  $\hat{f}$ :

$$[\hat{f}, \hat{f}^+] = 1 - |U|^2 + |V|^2 \quad (7.5)$$

## B.2 Transformation monomode insensible à la phase

Un amplificateur est insensible à la phase si et seulement si il respecte les conditions suivantes:

*Condition 1:* L'expression de  $|\langle \hat{a}^{out} \rangle|$  est invariante selon un quelconque déphasage du champ en entrée.

*Condition 2:* Si le bruit en entrée est uniforme selon toutes les quadratures alors il en est de même en sortie: si  $\Delta \hat{X}_1^{in} = \Delta \hat{X}_2^{in} = \Delta \hat{X}^{in}(\theta)$  alors  $\Delta \hat{X}_1^{out} = \Delta \hat{X}_2^{out} = \Delta \hat{X}^{out}(\theta)$ . La deuxième condition signifie que le bruit ajouté par l'amplificateur est distribué aléatoirement selon toutes les quadratures.

La condition 1 est vraie si et seulement si, soit  $U$ , soit  $V$  est nul. On supposera par la suite que  $V = 0$  et que  $|U| \geq 1$  (le signal en sortie est amplifié). La relation d'entrée/sortie pour une quadrature quelconque  $\theta$  du champ en sortie d'un amplificateur insensible à la phase est donc de la forme:

$$\hat{X}^{out}(\theta) = \sqrt{G}\hat{X}^{in}(\theta) + \hat{X}^f(\theta) \quad (7.6)$$

où on a introduit  $G = |U|^2$ , gain de l'amplificateur insensible à la phase.

On peut remarquer qu'avec ces nouvelles notations le commutateur de l'opérateur  $\hat{f}$  s'écrit:

$$[\hat{f}, \hat{f}^+] = 1 - G \quad (7.7)$$

Si l'on s'intéresse à une quadrature quelconque du champ électromagnétique en sortie  $\hat{X}^{out}(\theta)$ , d'après la condition 2, ses fluctuations doivent être indépendantes de la quadrature considérée:

$$(\Delta \hat{X}^{out}(\theta))^2 = G(\Delta \hat{X}^{in}(\theta))^2 + (\Delta \hat{X}^f(\theta))^2 \quad (7.8)$$

La deuxième condition implique donc que la variance  $\Delta \hat{X}^f(\theta)$  soit elle aussi indépendante de la quadrature considérée.

Il est important de remarquer que les conditions d'amplification insensible à la phase dépendent du système étudié (via  $U$  et  $V$ ), mais aussi de la façon dont il est préparé (via la valeur de  $\Delta \hat{X}^f(\theta)$ ). Nous verrons par la suite que si le bruit sur la voie  $\hat{f}$  dépend de la phase, forcément le processus n'est plus insensible à la phase.

### B.3 Théorème général de l'amplification insensible à la phase

Le facteur de bruit  $F$  d'un amplificateur insensible à la phase est donné par le ratio du rapport signal-à-bruit sur une quadrature quelconque en entrée et du rapport signal-à-bruit sur une quadrature quelconque en sortie. En utilisant le fait que  $\langle \hat{X}^{out}(\theta) \rangle^2 = G \langle \hat{X}^{in}(\theta) \rangle^2$ , et la relation (7.8) on obtient:

$$F = \frac{\langle \hat{X}^{in}(\theta) \rangle^2 (\Delta \hat{X}^{out}(\theta))^2}{(\Delta \hat{X}^{in}(\theta))^2 \langle \hat{X}^{out}(\theta) \rangle^2} = \frac{(\Delta X^{out}(\theta))^2}{G(\Delta \hat{X}^{in}(\theta))^2} = 1 + \frac{(\Delta \hat{X}^f(\theta))^2}{(G(\Delta \hat{X}^{in}(\theta))^2)} \quad (7.9)$$

Supposons qu'en entrée l'état est cohérent et ses fluctuations normalisées de telle manière que  $(\Delta \hat{X}^{in}(\theta))^2 = 1$ . Comme  $[\hat{f}, \hat{f}^+] = 1 - G$  (voir (7.7)), en utilisant l'inégalité d'Heisenberg, nous avons nécessairement  $(\Delta \hat{X}^f(\theta))^2 \geq |[\hat{f}, \hat{f}^+]| = G - 1$ . Nous obtenons ainsi la limite fondamentale pour l'amplification insensible à la phase:

$$F \geq 2 - 1/G \quad (7.10)$$

Il faut souligner que ce type d'inégalité est valable uniquement lorsque l'on considère un système avec en entrée un état cohérent. Il s'agit du théorème fondamental de l'amplification insensible à la phase: dans la limite d'un gain infini, il y a dégradation du rapport signal à bruit d'au moins un facteur 2, soit  $3dB$ . Cette dégradation provient du fait que l'amplificateur quantique est un système possédant au moins deux entrées, sans quoi les relations de commutation sur les variables sortantes ne seraient pas respectées. On amplifie les fluctuations d'au moins une voie sans signal, ce qui dégrade le rapport signal-à-bruit. Plus le nombre de voies "porteuses de bruit" vont être nombreuses, plus le bruit ajouté sera important (on reviendra sur ce point au chapitre 9). Le cas d'égalité dans la formule (7.10) est atteint lorsqu'une seule voie porte le bruit, et cette voie est au bruit quantique standard. Nous verrons par la suite un tel exemple d'égalité lors de l'amplification paramétrique insensible à la phase.

### B.4 Exemples d'amplificateurs insensibles à la phase

#### B.4.1 Le laser

Le laser est un premier exemple d'amplificateur insensible à la phase. En effet le processus interne d'amplification (inversion de population à l'aide d'un niveau métastable) ne possède aucun mécanisme faisant intervenir la phase.

#### B.4.2 Amplification paramétrique

Un autre exemple d'amplificateur insensible à la phase est l'amplification paramétrique à l'aide d'un cristal de type II, où seule une voie (signal ou complémentaire) est injectée. Reprenons la démonstration de [Levenson93].

Un amplificateur paramétrique de type II (voir chapitre 4) fait intervenir deux voies, signal et complémentaire orthogonalement polarisées (notées respectivement  $\hat{a}$  et  $\hat{b}$ ). Ces deux voies

sont couplées par la pompe, qui produit des photons jumeaux sur chaque voie. Ce couplage est modélisé par l'hamiltonien:

$$H = \frac{\gamma}{v}(\hat{a}^+\hat{b}^+ + \hat{a}\hat{b}) \quad (7.11)$$

$\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  sont les opérateurs d'annihilation de photons sur les voies signal et complémentaire,  $v$  vitesse de la lumière dans le milieu non linéaire, et  $\gamma = \chi^{(2)}\alpha_0 e^{i\phi}$  est le terme de couplage paramétrique, qui dépend de la susceptibilité non linéaire du milieu, de l'amplitude de pompe  $\alpha_0 = \sqrt{I_P}$ , du déphasage  $\phi$  entre la pompe et le signal. Par la suite, dans ce paragraphe, on se place en phase d'amplification donc  $\phi = 0$ .

On peut montrer [Yuen86] qu'en représentation d'Heisenberg, après passage dans le milieu non linéaire de longueur  $L$ , l'opérateur de la voie signal peut s'exprimer en fonction des opérateurs  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  en entrée du système comme:

$$\hat{a}^{out} = \cosh(\gamma L)\hat{a} + \sinh(\gamma L)\hat{b}^+ \quad (7.12)$$

On retrouve une transformation du type l'équation (7.6), avec  $U = \cosh(\gamma L)$ ,  $\hat{f} = \sinh(\gamma L)\hat{b}^+$ . L'opérateur nombre de photons qui correspond à une mesure d'intensité est donné par:

$$\begin{aligned} \hat{N} &= \hat{a}^{out+}\hat{a}^{out} \\ &= \cosh^2(\gamma L)\hat{a}^+\hat{a} + \sinh^2(\gamma L)\hat{b}^+\hat{b} \\ &\quad + \cosh(\gamma L)\sinh(\gamma L)(\hat{a}^+\hat{b}^+ + \hat{a}\hat{b}) \end{aligned} \quad (7.13)$$

Lorsque l'on injecte uniquement la voie signal, on peut d'après (7.13) calculer le nombre de photons mesuré en sortie:

$$\langle N \rangle_{PIA} = \langle \hat{a}^{out+}\hat{a}^{out} \rangle = n \cosh^2(\gamma L) + \sinh^2(\gamma L) \quad (7.14)$$

où  $n$  est le nombre de photon en entrée. La plupart du temps  $n \gg 1$  et l'on peut donc négliger le terme d'émission paramétrique spontanée (cette approximation sera faite par la suite). Ainsi le gain de l'amplificateur est donné par:

$$G_{PIA} = \cosh^2(\gamma L) \quad (7.15)$$

On retrouve bien que  $G_{PIA} = |U|^2$ .

Calculons maintenant le bruit d'intensité en sortie de l'amplificateur,

$$\langle \Delta N^2 \rangle = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 \quad (7.16)$$

On obtient dans le cas où uniquement le signal est injecté:

$$\langle \Delta N^2 \rangle_{PIA} = n \cosh^2(\gamma L)[\cosh^2(\gamma L) + \sinh^2(\gamma L)] \quad (7.17)$$



Ainsi le rapport signal à bruit en sortie vaut:

$$SNR_{out} = \frac{n \cosh^2(\gamma L)}{\cosh^2(\gamma L) + \sinh^2(\gamma L)} \quad (7.18)$$

Etant donné qu'en entrée le faisceau est au bruit quantique standard, on a

$$SNR_{in} = n \quad (7.19)$$

Ainsi le rapport signal à bruit de l'amplificateur paramétrique de type II insensible à la phase est donné par:

$$F_{PIA} = \frac{\cosh^2(\gamma L) + \sinh^2(\gamma L)}{\cosh^2(\gamma L)} = 2 - \frac{1}{G_{PIA}} \quad (7.20)$$

Nous voyons que la formule précédente est un cas d'égalité de (7.10). Le bruit rajouté provient des fluctuations du vide présentes sur la voie complémentaire. Un récapitulatif des états en entrée et en sortie lors de l'amplification paramétrique insensible à la phase est représenté sur la figure 7.2.

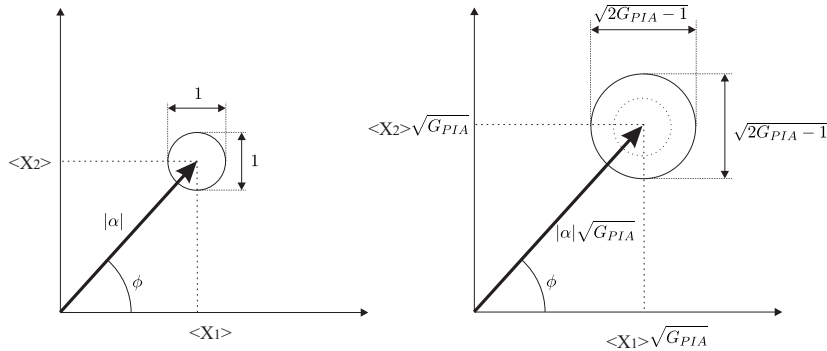


Fig. 7.2: Représentation de Fresnel du champ électromagnétique lors de l'amplification paramétrique insensible à la phase: à gauche représentation du champ en entrée (état cohérent), à droite représentation du champ en sortie

## C L'amplification monomode sensible à la phase

### C.1 Présentation

Contrairement au cas classique, l'amplificateur sensible à la phase présente un gain et/ou un bruit dépendant de la phase. On peut donc distinguer deux configurations (figure 7.3):

- une configuration où bruit et gain sont dépendants de la phase (voir figure 7.3 à gauche)
- une configuration où uniquement le bruit dépend de la quadrature considérée (voir figure 7.3 à droite)

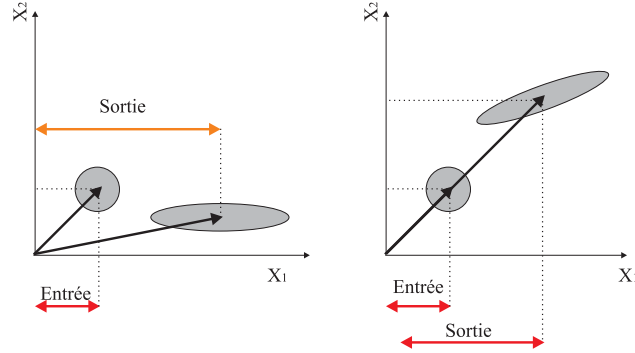


Fig. 7.3: Représentation de Fresnel du champ électromagnétique en entrée et en sortie d'un amplificateur sensible à la phase. A gauche, configuration où à la fois le signal et le bruit dépendent de la phase. A droite, le gain est indépendant de la phase, mais le bruit est sensible à la quadrature considérée

## C.2 Transformation monomode sensible à la phase

Dans le cas d'un amplificateur sensible à la phase la sortie dépend de la phase de l'entrée. Il existe un couple de quadratures qui est amplifié préférentiellement.

L'équation d'évolution peut être écrite<sup>1</sup> en reliant un couple de quadratures orthogonales

1. Comment prouver que l'on peut trouver un couple de quadratures aux gains réel? Partons de la relation:

$$\hat{a}^{out} = U\hat{a} + V\hat{a}^\dagger + \hat{f} \quad (7.21)$$

avec  $U = |U|e^{iu}$  et  $V = |V|e^{iv}$ . Calculons la quadrature en sortie,

$$X_\phi^{out} = e^{i\phi}\hat{a}^{out} + e^{-i\phi}\hat{a}^{out\dagger}$$

On a:

$$X_\phi^{out} = (e^{i(\phi+u)}|u| + e^{-i(\phi+v)}|v|)\hat{a}^{in} + (e^{-i(\phi+u)}|u| + e^{i(\phi+v)}|v|)\hat{a}^{in\dagger} + X_\phi^f \quad (7.22)$$

En prenant  $\phi = -\frac{u+v}{2}$ , on obtient:

$$X_{\phi=-\frac{u+v}{2}}^{out} = (|u| + |v|)(e^{i\frac{u-v}{2}}\hat{a}^{in} + e^{-i\frac{u-v}{2}}\hat{a}^{in\dagger}) + X_{\phi=-\frac{u+v}{2}}^f \quad (7.23)$$

On a donc

$$X_{\phi=-\frac{u+v}{2}}^{out} = (|u| + |v|)X_{\frac{u-v}{2}}^{in} + X_{\phi=-\frac{u+v}{2}}^f$$

et de la même manière on peut obtenir:

$$X_{-\frac{u+v}{2}+\frac{\pi}{2}}^{out} = (|u| - |v|)X_{\frac{u-v}{2}+\frac{\pi}{2}}^{in} + X_{-\frac{u+v}{2}+\frac{\pi}{2}}^f \quad (7.24)$$

en entrée  $(\hat{X}_1^{in}, \hat{X}_2^{in})$  et un couple de quadratures orthogonales en sortie  $(\hat{X}_1^{out}, \hat{X}_2^{out})$  tels que:

$$\begin{aligned}\hat{X}_1^{out} &= (|U| + |V|)\hat{X}_1^{in} + \hat{X}^f(\theta_1) \\ \hat{X}_2^{out} &= (|U| - |V|)\hat{X}_2^{in} + \hat{X}^f(\theta_2)\end{aligned}\quad (7.25)$$

avec  $\hat{X}^f(\theta_1)$  et  $\hat{X}^f(\theta_2)$  opérateurs de quadratures orthogonaux de type  $e^{i\theta_i}\hat{f} + e^{-i\theta_i}\hat{f}^+$ , avec  $i = 1, 2$ .

On peut définir les gains pour les quadratures privilégiées:

$$G_1 = (|U| + |V|)^2, G_2 = (|U| - |V|)^2 \quad (7.26)$$

ainsi que le gain moyen:

$$G = \frac{1}{2}(G_1 + G_2) = |U|^2 + |V|^2 \quad (7.27)$$

### C.3 Théorème de l'amplification sensible à la phase

Dans ce cas, nous pouvons définir un facteur de bruit sur chaque quadrature. En considérant le couple de quadratures préférentielles noté  $i = 1, 2$ , en introduisant les facteurs de bruit  $F_i$  sur chaque quadrature, en considérant un état cohérent en entrée  $((\Delta\hat{X}_1^{in})^2 = (\Delta\hat{X}_2^{in})^2 = 1)$  on obtient:

$$\begin{aligned}G_1(F_1 - 1) &= (\Delta\hat{X}^f(\theta_1))^2 \\ G_2(F_2 - 1) &= (\Delta\hat{X}^f(\theta_2))^2\end{aligned}\quad (7.28)$$

Or on remarque que comme  $[\hat{f}, \hat{f}^+] = 1 - (G_1G_2)^{1/2}$ , on a, d'après le principe d'Heisenberg,  $(\Delta\hat{X}^f(\theta_1))(\Delta\hat{X}^f(\theta_2)) \geq |1 - (G_1G_2)^{1/2}|$ . On en déduit le théorème fondamental pour l'amplification sensible à la phase:

$$(F_1 - 1)^{1/2}(F_2 - 1)^{1/2} \geq |1 - (G_1G_2)^{1/2}| \quad (7.29)$$

Cette formule est similaire au produit des variances sur les quadratures orthogonales. Ainsi dans le cas d'une amplification sensible à la phase, rien ne nous empêche d'avoir un facteur de bruit sur une quadrature proche de 1, pourvu que du bruit soit rajouté sur l'autre quadrature.

Un cas particulier doit cependant être souligné. Dans le cas où  $G_1G_2 = 1$ , le facteur de bruit peut être égal à un pour les deux quadratures. Cette configuration correspond nécessairement au cas sans pertes, c'est-à-dire où la relation entrée sortie se réduit à:

$$\hat{a}^{out} = U\hat{a}^{in} + V\hat{a}^{in+} \quad (7.30)$$

Nous verrons un exemple de ce type d'amplification sans aucun ajout de bruit avec l'amplification paramétrique sensible à la phase en type II.

## C.4 Exemples d'amplificateurs sensibles à la phase

Nous allons voir tout d'abord deux exemples d'amplificateurs sensibles à la phase utilisant l'effet paramétrique. Cela va nous permettre de retrouver les deux configurations introduites au début de ce paragraphe: il existe des processus d'amplification sensible à la phase où à la fois le gain et le bruit en dépendent, alors que pour certains processus, seul le bruit en sortie dépend de la phase. Pour finir nous mentionnerons une technique d'amplification sans bruit ne faisant intervenir aucun processus non-linéaire.

### C.4.1 Amplification paramétrique 1: gain et bruit dépendent de la phase

Reprenons le modèle du paragraphe B.4.2. Maintenant, contrairement au cas insensible à la phase, à la fois signal et complémentaire sont injectés. Considérant maintenant le mode à  $45^\circ$ , défini comme:

$$\hat{d} = \frac{\hat{a} + \hat{b}}{\sqrt{2}} \quad (7.31)$$

Suivant le même raisonnement que dans le paragraphe B.4.2, on peut montrer que:

$$\langle N \rangle_{45^\circ} = n[\cosh(2\gamma L) + \sinh(2\gamma L) \cos(\phi)] \quad (7.32)$$

avec  $\phi$  déphasage entre la pompe et le signal. Le gain sur le mode à  $45^\circ$  est donc:

$$G_{PSA} = \cosh(2\gamma L) + \sinh(2\gamma L) \cos(\phi) \quad (7.33)$$

Ce gain est maintenant dépendant de la phase. En ce qui concerne les fluctuations d'intensité en sortie, on montre de même que:

$$\langle \Delta N^2 \rangle_{PSA} = n[\cosh(4\gamma L) + \sinh(4\gamma L) \cos(\phi)] \quad (7.34)$$

Ces fluctuations elles aussi dépendent de la phase. Le facteur de bruit de l'amplificateur est donc donné par:

$$F_{PSA} = \frac{\cosh(4\gamma L) + \sinh(4\gamma L) \cos(\phi)}{(\cosh(2\gamma L) + \sinh(2\gamma L) \cos(\phi))^2} \quad (7.35)$$

On peut donc voir qu'en phase d'amplification (correspondant à  $\phi = 0$ ), on a préservation du rapport signal à bruit:

$$F_{PSA} = 1 \quad (7.36)$$

Nous sommes donc dans un cas très particulier d'amplification, puisque c'est le cas idéal où aucun bruit n'est ajouté lors du processus. Nous verrons dans le chapitre suivant que la mise en cavité du cristal non-linéaire va impliquer la présence de pertes (dues en partie aux traitements des miroirs). Dans ce cas l'amplificateur va ajouter du bruit.

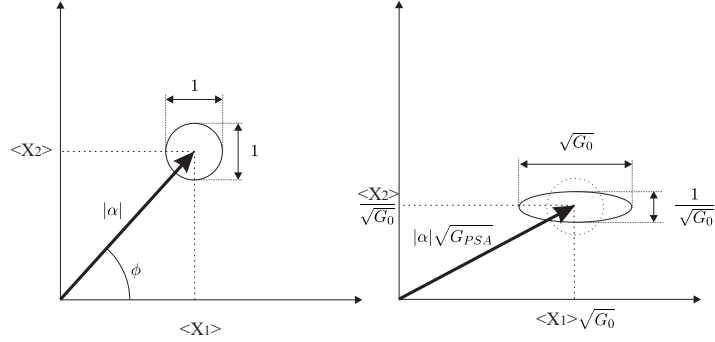


Fig. 7.4: Représentation de Fresnel du champ électromagnétique en entrée et sortie d'un amplificateur paramétrique sensible à la phase. Dans cette configuration signal et complémentaires sont injectés

#### C.4.2 Amplification paramétrique 2: bruit dépendant de la phase

Une autre configuration expérimentale d'amplification sensible à la phase utilisant un milieu paramétrique est celle employée dans le groupe de Kimble [Ou93]. Utilisons les notations déjà employées dans le paragraphe B.4.2. Dans ce cas les auteurs injectent le signal sur une seule voie (la voie  $\hat{a}$  par exemple), en injectant du vide comprimé sur la voie complémentaire (voie  $\hat{b}$ ). Par ce processus on peut réaliser une amplification qui ajoute moins de bruit qu'un processus classique. Il faut noter que dans cette configuration le gain est indépendant de la phase, seul le bruit en dépend.

En sortie, l'opérateur signal est relié aux opérateurs signal et complémentaire par la relation:

$$\hat{a}^{out} = \sqrt{G}\hat{a}^{in} + \sqrt{G-1}\hat{b} \quad (7.37)$$

Considérons la quadrature quelconque du mode signal,  $\hat{X}(\theta) = \hat{a}e^{-i\theta} + \hat{a}^+e^{i\theta}$ , la variance sur cette quadrature en sortie est donnée par:

$$(\Delta\hat{X}^{out}(\theta))^2 = G(\Delta\hat{X}^{in}(\theta))^2 + (G-1)(\Delta\hat{X}_1^b(\theta))^2 \quad (7.38)$$

Supposons que le mode sur la voie  $\hat{a}$  soit dans un état cohérent ( $(\Delta\hat{X}^{in}(\theta))^2 = 1$ ) et que sur la voie  $\hat{b}$ , le bruit sur la quadrature  $\theta_1$  soit déamplifié. On a en sortie:

$$(\Delta\hat{X}^{out}(\theta_1))^2 = G + (G-1)(\Delta\hat{X}^b(\theta_1))^2 \quad (7.39)$$

Le facteur de bruit sur la quadrature  $\theta_1$  est donc:

$$F(\theta_1) = \frac{(\Delta\hat{X}^{out}(\theta_1))^2}{G} = 1 + (1-1/G)(\Delta\hat{X}^b(\theta_1))^2 \quad (7.40)$$

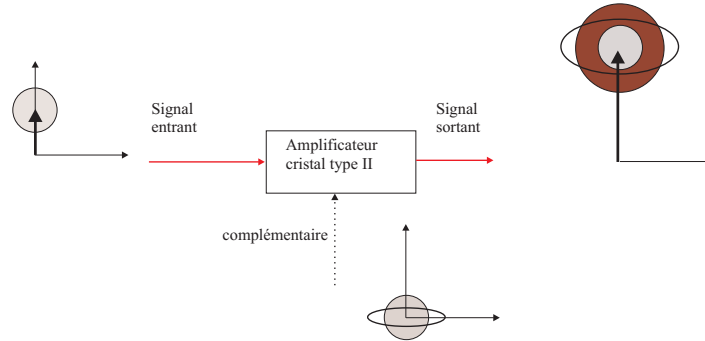


Fig. 7.5: Diagramme illustrant l'expérience réalisée par Kimble (inspiré de [Ou93]). Le signal est dans un état cohérent alors que l'on injecte sur la voie complémentaire du vide comprimé (compression selon la quadrature verticale). En sortie on obtient de l'amplification sans bruit sur la quadrature verticale (voir schéma)

On voit donc que  $F(\theta_1) \rightarrow 1$  lorsque  $\Delta\hat{X}_1^b(\theta_1) \rightarrow 0$  (c'est à dire lorsque le bruit est réduit sur la quadrature  $\theta_1$ ). Par cette méthode, il y a donc amplification sans bruit sur la quadrature  $\theta_1$ .

#### C.4.3 Méthode de rétroaction

Les précédentes méthodes d'amplification sans bruit font intervenir des non-linéarités, mais il existe des méthodes "tout-linéaire" mais dépendantes de la phase qui permettent d'amplifier un signal [Masalov97]. Une telle méthode a été utilisée dans [Lam97] avec un montage de rétroaction utilisant un modulateur électro-optique (Fig.7.6). Récemment [Andersen05], ce même type de montage a permis de mettre au point une expérience de "clonage quantique".

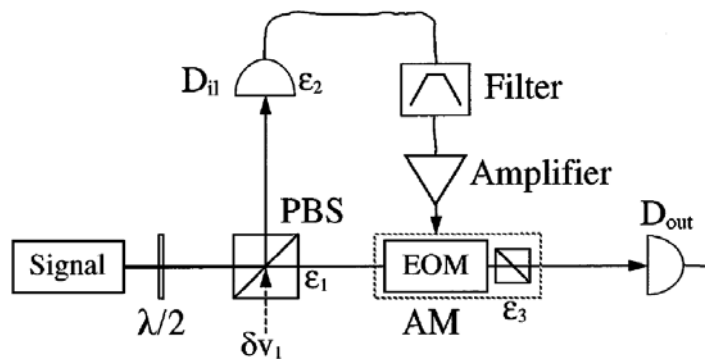


Fig. 7.6: Schéma de l'expérience d'amplification sans bruit utilisant un montage de rétroaction. Emprunt [Lam97]

## D Un amplificateur multimode pour amplifier des images

Généralisant les notions d'amplification dans le cas monomode, nous allons voir dans ce paragraphe comment construire un amplificateur permettant d'amplifier plusieurs modes transverses.

### D.1 Amplification d'images en simple passage

La génération paramétrique permet d'amplifier des images. En régime pulsé, l'amplification classique d'images a été obtenue expérimentalement [Devaux95]. Qu'en est-il de l'amplification sans bruit?

De nombreuses études théoriques ont été faites dans le cas simple, sans cavité. Le dispositif amplificateur consiste en un cristal non linéaire pompé par une onde plane et placé au centre d'un dispositif télescopique. Dans la configuration insensible à la phase (fig 7.7), on positionne l'objet dans le plan focal objet de la première lentille de sorte que sa transformée de Fourier soit dans le plan du cristal. La deuxième lentille permet d'effectuer la transformée de Fourier inverse et d'observer l'image sur un écran dans son plan focal. L'objet joue le rôle du signal qui est dupliqué par l'interaction paramétrique. Sur l'écran, deux images parfaitement symétriques peuvent être observées. L'une correspond au signal amplifié, l'autre au complémentaire. Leurs fluctuations sont corrélées en intensité et anticorrélées en phase [Navez01]. De même dans la configuration sensible à la phase où deux images symétriques incohérentes sont injectées dans l'amplificateur, les deux images obtenues à la sortie du dispositif sont non seulement amplifiées mais intriquées.

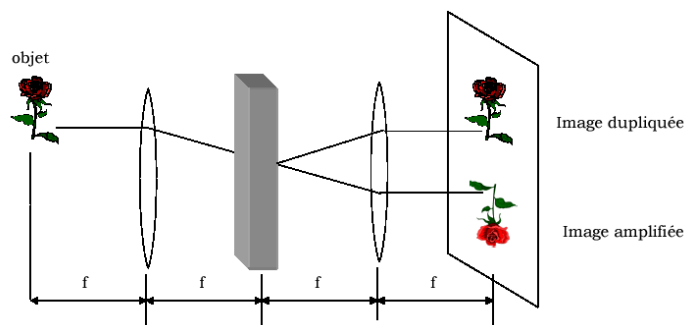


Fig. 7.7: Amplification d'images en simple passage. Configuration insensible à la phase

Expérimentalement, en régime pulsé, l'amplification sans bruit d'images [Kumar99] [Mosset05] ainsi que les corrélations spatiales dans les images [Marable98] ont déjà été observées.

## D.2 Amplification sans bruit d'images en cavité

Les propositions théoriques d'amplification sans bruit d'images en simple passage (régime pulsé) ont été transposées au cas des variables continues où le cristal doit être inséré dans une cavité dégénérée en modes transverses.

Lugiato et Kolobov [Kolobov95] ont proposé un premier montage d'amplification d'images sans bruit utilisant un OPO en cavité plane. La cavité plane n'étant pas une cavité dégénérée (voir chapitre 1), ce montage souffre de beaucoup d'imperfections. Le facteur de bruit dans un tel système est préservé uniquement sur une faible zone de l'espace et non sur l'intégralité de l'image, ce qui limite son utilisation.

Pour pallier aux problèmes de la cavité plane, Mancini *et al.* [Mancini00] ont proposé d'utiliser une cavité confocale (fig 7.8). Dans ce cas, ils montrent que l'intégralité de l'image, pourvu qu'elle soit de parité donnée, peut être amplifiée sans bruit (dans le modèle idéal d'une pompe plane, en négligeant les pertes à la détection, les auteurs montrent que le facteur de bruit est conservé en n'importe quel point de l'espace). Pour une étude comparée des cavités planes et confocales, on pourra se référer à [Mancini00b].

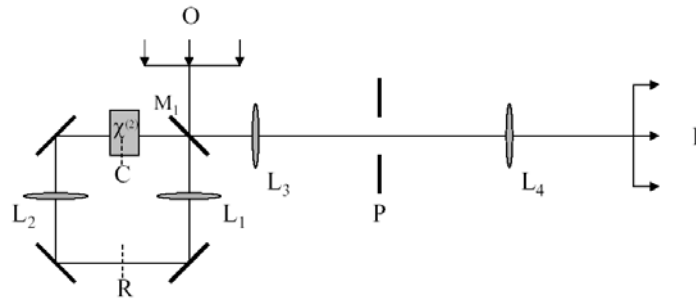


Fig. 7.8: Schéma de l'amplification d'images sans bruit en cavité confocale proposé dans [Mancini00]. L'image est créée au plan  $O$ , puis imagée en champ proche grâce aux deux lentilles  $L_1$  et  $L_2$  au centre du cristal  $C$ . Le centre du cristal est imagé en vrai champ proche grâce aux lentilles  $L_3$  et  $L_4$  sur l'écran  $I$

Si les modèles théoriques précédents d'amplification sans bruit en cavité tiennent compte des aspects spatiaux du gain, du facteur de bruit en fonction des caractéristiques de la pompe utilisée, de la géométrie de la cavité, ils se placent toujours dans le cas idéal où les pertes (dans le cristal, sur les miroirs) n'interviennent pas. Nous développerons dans le prochain chapitre un modèle d'amplificateur tenant compte de ces pertes, puisqu'elles sont non négligeables dans notre expérience.



### D.3 Limites imposées par la mécanique quantique dans un processus multimode

Nous avons vu, dans les deux premiers paragraphes de ce chapitre, comment établir les limites sur le facteur de bruit dans un processus sensible et insensible à la phase. Ces limites sont-elles encore valables lorsque l'on parle d'amplification d'images? A priori, la réponse est non triviale car la démonstration de Caves n'est valable que dans le cas où un seul mode est amplifié.

Cependant nous avons déjà constaté que les notions qui jusqu'alors n'étaient valables que sur l'ensemble du faisceau en optique quantique monomode peuvent se généraliser à des zones du faisceau dont la taille est inférieure à une aire de cohérence de notre système (voir chapitre 4). Nous avons vu par exemple comment il est possible de créer du squeezing local à l'aide d'un OPO (voir chapitres 5 et 6).

Nous admettrons donc pour le moment (sans le démontrer formellement) que les notions de limites imposées par la mécanique quantique dans le cas monomode se généralisent au cas local. Cette affirmation correspond bien aux résultats théoriques de Mancini [Mancini00], où dans des conditions idéales on peut avoir un facteur de bruit préservé en tout point de l'espace. Une étude ultérieure pourra être envisagée dans une formulation proche de celle de Caves, pour généraliser ses résultats au cas multimode.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons fait un état des lieux de l'amplification sans bruit au niveau quantique. Suivant la démarche de Caves, nous avons montré qu'il existe une limite "universelle" sur le bruit quantique ajouté par un amplificateur classique (indépendant de la phase). Ainsi le facteur de bruit dans un tel amplificateur est donné par:

$$F > 2 - 1/G$$

avec  $G$ , gain de l'amplificateur.

Cette limite peut être battue en utilisant un processus sensible à la phase. Dans ce cas une quadrature peut être amplifiée avec un ajout de bruit moins important que dans le cas classique. Un processus d'amplification sera donc décrit comme "sans bruit" lorsque pour un gain donné, son facteur de bruit sera inférieur à la limite de  $2 - 1/G$ .

Après cette présentation générale, nous allons nous consacrer à l'étude détaillée du système d'amplification sans bruit qui sera mis en place dans la partie expérimentale. Nous calculerons le bruit ajouté par l'amplificateur en tenant compte des pertes du système, en insistant sur les mesures de facteur de bruit réellement réalisées.

---

# Amplification paramétrique en cavité: théorie

---

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Résolution classique</b> . . . . .	<b>128</b>
A.1	Le modèle . . . . .	128
A.2	Équations d'évolution . . . . .	129
A.3	Équations stationnaires sous le seuil . . . . .	130
A.4	Résolution intracavité . . . . .	131
A.5	Définition du gain normalisé en phase d'amplification . . . . .	133
<b>B</b>	<b>Traitement quantique</b> . . . . .	<b>134</b>
B.1	Équations semi-classiques . . . . .	134
B.2	Relation entrée/sortie sur les fluctuations . . . . .	135
B.3	Faisceaux jumeaux et squeezing . . . . .	137
B.4	Evolution du bruit d'intensité en fonction de la phase relative . . . . .	138
B.5	Calcul du rapport signal-à-bruit . . . . .	138
<b>C</b>	<b>Nouveau modèle avec entrée et sortie séparées</b> . . . . .	<b>141</b>
C.1	Expression du gain normalisé . . . . .	142
C.2	Faisceaux jumeaux-Compression de bruit . . . . .	142
C.3	Calcul du facteur de bruit normalisé dans le cas avec pertes et sensible à la phase	143
C.4	Calcul du facteur de bruit normalisé dans le cas avec pertes et insensible à la phase	143
<b>D</b>	<b>Prise en compte des pertes dans la formule du rapport signal sur bruit</b>	<b>144</b>
D.1	Pertes à la détection . . . . .	145
<b>E</b>	<b>Quand parler d'amplification "sans bruit"?</b> . . . . .	<b>147</b>

---

## Introduction

Dans ce chapitre, nous présenterons un modèle d'oscillateur paramétrique optique monomode, permettant de calculer les valeurs que nous mesurons expérimentalement, en fonction des caractéristiques de notre système: coefficients de réflexion des miroirs, pertes dans le cristal, pertes à la détection. Tout d'abord nous aborderons les calculs de réduction de bruit quantique en phase d'amplification (faisceaux jumeaux) et de déamplification (compression des fluctuations d'intensité du faisceau). On retrouve des résultats déjà bien connus ([Zhang99]).

Ensuite nous calculerons le rapport signal-à-bruit en tenant compte, là aussi, des pertes du système. C'est à ce niveau que nos calculs s'avèrent nouveaux, car à notre connaissance, jusqu'alors les calculs de rapport signal à bruit dans un OPO ne prennent pas en compte toutes les pertes du système (seulement les pertes à la détection). Ces pertes impliquent un ajout de bruit lors du processus d'amplification, même en configuration sensible à la phase. Nous verrons que pour ces calculs de facteur de bruit, le choix de la modélisation de la cavité s'avère crucial. On se limite à l'étude de cavités en anneau qui permettent de simplifier les calculs (pas de phénomènes d'ondes stationnaires). Par contre, parmi ces cavités en anneau, nous pouvons introduire une cavité avec entrée/sortie sur le même miroir (ce qui est fait dans la plupart des modèle théoriques: [Zhang99], [Mancini00], [Kolobov95]), mais il semble que l'on modélise mieux notre cavité linéaire par une cavité en anneau où entrée/sortie se font sur des miroirs différents.

Pour finir, nous reviendrons sur un point clef pour la compréhension des expériences effectuées (voir chapitre 11). En effet, expérimentalement, nous ne mesurons pas le facteur de bruit du système stricto-sensu mais ce que l'on appellera un facteur de bruit "normalisé" qui permet de s'affranchir des problèmes de transmission de la cavité à vide. Nous verrons comment à partir de ces mesures nous pouvons dire que nous sommes dans un processus d'amplification sans bruit.

## A Résolution classique

### A.1 Le modèle

On considère un cristal paramétrique caractérisé par son coefficient  $\chi^{(2)}$ , permettant un accord de phase de type II et placé dans une cavité en anneau constituée de miroirs plans. Tous les miroirs sont parfaitement réfléchissants, sauf le miroir de couplage. L'interaction paramétrique couple les champs pompe, signal et complémentaire notés 0, 1 et 2 respectivement, et toutes les variables se rapportant aux champs seront affectées de l'indice correspondant. L'indice  $i$  désignera un quelconque de ces indices. On se restreint au fonctionnement sous le

seuil d'un tel système. Une étude de ce système dans un cas moins général peut être trouvée dans [Zhang99].

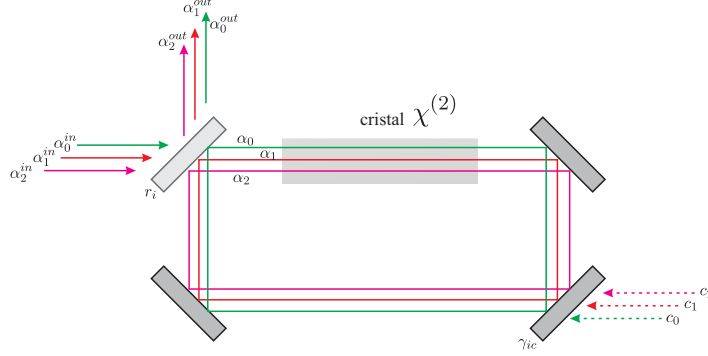


Fig. 8.1: Modélisation de l'OPO sous le seuil en cavité en anneau. Les pertes intra-cavité sont modélisées par un couplage avec l'extérieur (via  $\gamma_{ci}$ )

On appelle  $\gamma_{ei}$  les pertes par transmission sur le miroir de couplage. On suppose de plus la finesse grande pour tous les modes (soit  $\gamma_{ei} \ll 1$ ) donc  $r_{ei} \simeq 1 - \gamma_{ei}$  et  $t_{ei} = \sqrt{2\gamma_{ei}}$ .

Le système sera également considéré non parfait, c'est-à-dire avec des pertes. L'ensemble de ces pertes (dues au traitement imparfait des miroirs, mais aussi à l'absorption du cristal, ou à la diffusion) est modélisé par un couplage avec l'extérieur sur un des miroirs. On note  $\gamma_{ci}$  les couplages des champs  $i$  avec l'extérieur, qui couplent la cavité avec des modes  $c_i$  du champ, vides. Le modèle de cavité est représenté sur la figure 8.1.

On se limite au cas dégénéré en fréquence:

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{\omega_0}{2} = \omega.$$

On désigne par  $\alpha_i^{in}$ ,  $\alpha_i^{out}$ , et  $\alpha_i$  les champs respectivement à l'entrée, à la sortie, et dans la cavité.

## A.2 Équations d'évolution

On désigne par  $\alpha'_i$  le champ après un tour dans la cavité. Compte tenu de la biréfringence du cristal, les longueurs optiques  $L_i$  de la cavités sont différentes selon le champ  $i$  considéré. On a:

$$\begin{aligned} \alpha'_1 &= r_1 e^{-i\omega_1 L_1/c} (1 - \gamma_{c1}) (\alpha_1 + g\alpha_0\alpha_2^*) + t_1 \alpha_1^{in} + \sqrt{2\gamma_{c1}} c_1 \\ \alpha'_2 &= r_2 e^{-i\omega_2 L_2/c} (1 - \gamma_{c2}) (\alpha_2 + g\alpha_0\alpha_1^*) + t_2 \alpha_2^{in} + \sqrt{2\gamma_{c2}} c_2 \\ \alpha'_0 &= r_0 e^{-i\omega_0 L_0/c} (1 - \gamma_{c0}) (\alpha_0 + g\alpha_1\alpha_1) + t_0 \alpha_0^{in} + \sqrt{2\gamma_{c0}} c_0 \end{aligned} \quad (8.1)$$

où  $g$  caractérise le couplage paramétrique entre les trois champs qui ont interagi sur la longueur du cristal. On a supposé que les champs variaient peu lors de l'interaction.

Si les champs varient lentement, on peut écrire que  $\alpha'_i - \alpha_i = \tau_i d\alpha_i/d\tau$ , où  $\tau_i = L_i/c$  est le temps nécessaire à la lumière pour faire un tour de cavité. On peut réécrire :

$$\begin{aligned}\tau_1 \frac{d\alpha_1}{dt} &= -(\gamma_{e1} + \gamma_{c1} - i\delta_1)\alpha_1 + g\alpha_0\alpha_2^* + t_1\alpha_1^{in} + \sqrt{2\gamma_{c1}}c_1 \\ \tau_2 \frac{d\alpha_2}{dt} &= -(\gamma_{e2} + \gamma_{c2} - i\delta_2)\alpha_2 + g\alpha_0\alpha_1^* + t_2\alpha_2^{in} + \sqrt{2\gamma_{c2}}c_2 \\ \tau_0 \frac{d\alpha_0}{dt} &= -(\gamma_{e0} + \gamma_{c0} - i\delta_0)\alpha_0 + g\alpha_1\alpha_2 + t_0\alpha_0^{in} + \sqrt{2\gamma_{c0}}c_0\end{aligned}\quad (8.2)$$

où on a noté  $\delta_i$  le désaccord à résonance du champ  $i$ , qui est donné par la relation  $\omega_i L_i/c = 2p_i\pi + \delta_i$ , avec  $p_i$  entier. On a supposé qu'on était résonnant ou quasi-résonnant pour les trois champs donc que  $\delta_i \ll 2\pi$  et on a développé  $e^{i\delta_i} \simeq 1 + i\delta_i$ .

Le champ en sortie s'écrit simplement:

$$\alpha_i^{out} = -r_i\alpha_i^{in} + t_i\alpha_i \simeq -\alpha_i^{in} + \sqrt{2\gamma_i}\alpha_i$$

Ces équations sont très générales et permettent de décrire classiquement le comportement de la cavité avec milieu paramétrique dans un grand nombre de situations. En particulier, elles décrivent le fonctionnement de l'OPO au-dessus du seuil d'oscillation. On ne s'intéresse ici qu'au fonctionnement sous le seuil d'oscillation.

### A.3 Équations stationnaires sous le seuil

On s'intéresse ici à l'amplification d'un très faible signal, injecté avec une polarisation quelconque, par une pompe puissante. On va donc maintenant introduire quelques hypothèses simplificatrices :

- La pompe peut être considérée comme peu modifiée par l'interaction.  $\alpha_0$  est alors un paramètre, et le système se réduit à deux équations. Cette approximation est valable uniquement dans le cas de l'amplification d'un petit signal. Elle permet d'éviter un grand nombre de problèmes théoriques, en particulier l'apparition de bistabilités à l'approche du seuil, dont on peut trouver une étude dans [Schiller95, Protsenko95].
- On suppose que la transmission du miroir de couplage sur les modes signal et complémentaire est la même, soit  $\gamma_{e1} = \gamma_{e2} = \gamma_e$ . On suppose également les pertes pour les différents modes dans la cavité  $\gamma_{ic} = \gamma_c$  égales. On note les pertes totales  $\gamma = \gamma_e + \gamma_c$  pour les champs signal et complémentaire.
- On cherche également des solutions stationnaires des champs. On considère qu'on injecte à l'entrée des champs stationnaires (ou très lentement variables par rapport aux constantes de temps de la cavité). Les dérivées par rapport au temps sont donc nulles.
- Les modes  $c_i$  sont des modes vides du rayonnement. Lorsqu'on ne s'intéresse qu'au champ moyen, le terme de couplage en  $\sqrt{2\gamma_{ic}}c_i$  disparaît. Lorsque l'on s'intéressera aux fluctuations, par contre, il faudra en tenir compte.

Les équations (8.2) deviennent donc au premier ordre :

$$\begin{aligned}(1 - i\Delta_1)\alpha_1 &= \sigma\alpha_2^* + e_1 \\ (1 - i\Delta_2)\alpha_2 &= \sigma\alpha_1^* + e_2\end{aligned}\tag{8.3}$$

où on a posé

$$\Delta_i = \delta_i/\gamma, \quad \sigma = g\alpha_0/\gamma \text{ et } e_i = \frac{t}{\gamma}\alpha_i^{in} = \frac{\sqrt{2}\gamma e_i}{\gamma}\alpha_i^{in}.$$

Remarquons que si on définit les champs  $\alpha_+$  et  $\alpha_-$  à  $\pm 45^\circ$  par :

$$\alpha_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1 \pm \alpha_2)$$

alors si  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ , les équations 8.3 se découpent en :

$$(1 - i\Delta)\alpha_+ = \sigma\alpha_+^* + e_+ \tag{8.4}$$

$$(1 - i\Delta)\alpha_- = -\sigma\alpha_-^* + e_- \tag{8.5}$$

#### A.4 Résolution intracavité

On se place dans le cas idéal de la double résonance parfaite  $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ . Le système se résout alors simplement en :

$$\alpha_1 = \frac{e_1 + \sigma e_2^*}{1 - |\sigma|^2} \tag{8.6}$$

$$\alpha_2 = \frac{e_2 + \sigma e_1^*}{1 - |\sigma|^2} \tag{8.7}$$

et dans la base à  $\pm 45^\circ$  :

$$\alpha_+ = \frac{e_+ + \sigma e_+^*}{1 - |\sigma|^2} \tag{8.8}$$

$$\alpha_- = \frac{e_- - \sigma e_-^*}{1 - |\sigma|^2} \tag{8.9}$$

La solution dépend donc, tous les paramètres de la cavité étant fixés, de  $\sigma$ , c'est à dire de la puissance de pompe. On voit immédiatement qu'on doit avoir  $|\sigma| < 1$  afin que nos équations soient valables. On peut donc interpréter  $\sigma$  comme la puissance de pompe normalisée au seuil.  $e_1$  et  $e_2$  sont les champs intracavité signal et complémentaire sans amplification. Si on définit le gain intracavité en amplitude,  $g$  fonction de la puissance de pompe, comme le ratio entre le champ intracavité en présence de pompe et le champ intracavité sans pompe, on a :

$$g_i = \frac{\alpha_i(\sigma)}{\alpha_i(0)}$$

Alors on a, pour le signal et le complémentaire :

$$g_1 = \frac{1 + \sigma \frac{e_2^*}{e_1}}{1 - |\sigma|^2} \text{ et } g_2 = \frac{1 + \sigma \frac{e_1^*}{e_2}}{1 - |\sigma|^2} \quad (8.10)$$

On voit donc que pour une puissance de pompe constante, le gain dépend uniquement de  $\frac{e_2^*}{e_1}$ . Il est donc déterminé par l'état de polarisation en entrée. On va maintenant supposer qu'on injecte en entrée un champ cohérent  $\alpha_{in}$ , linéairement polarisé, dont la direction de polarisation fait un angle  $\beta$  avec la polarisation signal. On prend comme référence de phase la phase de ce champ entrant:  $\alpha_{in}$  est réel. Par contre, avec ces hypothèses  $\sigma = |\sigma|e^{-2i\varphi}$  est complexe et son argument représente la phase relative de l'injection et de la pompe. On peut alors réécrire:

$$g_1(\sigma, \beta, \varphi) = \frac{1 + |\sigma| \tan \beta e^{-2i\varphi}}{1 - |\sigma|^2} \text{ et } g_2(\sigma, \beta, \varphi) = \frac{1 + |\sigma| \tan(\pi/2 - \beta) e^{-2i\varphi}}{1 - |\sigma|^2} \quad (8.11)$$

et symétriquement dans la base  $\pm 45^\circ$  :

$$g_+ = \frac{1 + |\sigma| e^{-2i\varphi}}{1 - |\sigma|^2} \text{ et } g_- = \frac{1 - |\sigma| e^{-2i\varphi}}{1 - |\sigma|^2} \quad (8.12)$$

En supposant que seul le mode  $\alpha_+^{in}$  est injecté en entrée, le gain intracavité sur la polarisation à  $45^\circ$  varie en fonction de la phase relative entre la pompe, le signal et le complémentaire: c'est l'amplification sensible à la phase. L'évolution de gain intracavité en fonction de la phase relative est représenté sur la figure 8.2. Il est à noter que lorsqu'une seule polarisation est

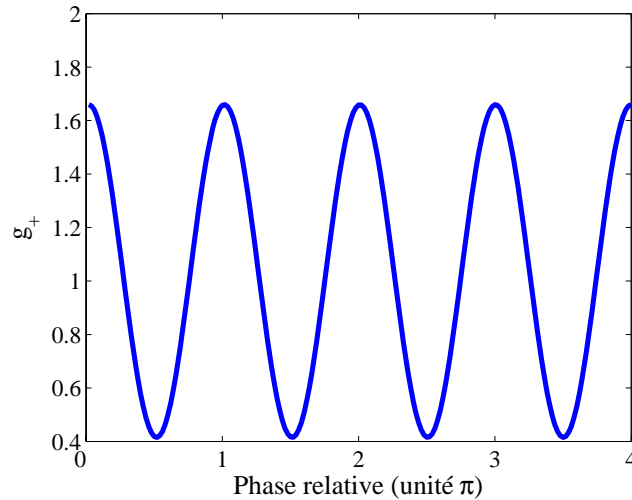


Fig. 8.2: Evolution du gain en amplitude intracavité  $g_+$  pour  $\sigma = 0.6$ , lorsque l'on injecte à  $45^\circ$  des axes optiques. Le gain est sensible à la phase

injectée,  $\alpha_1$  par exemple, le gain ne dépend pas de la phase relative et est donné par:

$$g_1 = \frac{1}{1 - |\sigma|^2} \quad (8.13)$$

Nous avons maintenant le cas d'une amplification insensible à la phase.

Nous retrouvons ainsi des résultats déjà vus dans le chapitre précédent. A savoir, si l'on injecte sur le mode à  $45^\circ$  des axes optiques ( $\alpha_+$ ), on obtient un phénomène d'amplification sensible à la phase alors que si l'on injecte uniquement sur la voie signal ( $\alpha_1$ ), l'amplification devient insensible à la phase.

### A.5 Définition du gain normalisé en phase d'amplification

Les précédentes expressions correspondent au gain intracavité, mais physiquement ces données ne sont pas intéressantes car il n'est pas possible de mesurer les champs intracavité. On définit donc un nouveau gain  $\tilde{G}$  en intensité (le gain normalisé), rapport entre l'intensité de sortie lorsque la pompe est injectée dans l'OPO et l'intensité de sortie sans pompe injectée. On parle de gain "normalisé" car en le définissant ainsi, ce gain vaut 1 lorsqu'il n'y a pas d'amplification. Nous introduisons cette quantité car c'est celle qui sera effectivement mesurée (voir chapitre 11).

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons uniquement à la phase d'amplification ( $\sigma$  est réel). On se place dans les cas sensible puis insensible à la phase.

#### A.5.1 Cas sensible à la phase

Dans ce cas, nous pouvons utiliser les relations nous donnant la valeur de  $\alpha_+$ . Si nous supposons que tous les champs sont en phase, ce qui est le cas lors de la phase d'amplification, le champ intracavité  $\alpha_+$  est donné par:

$$\alpha_+ = \frac{\sqrt{2\gamma_e}}{\gamma(1-\sigma)}\alpha_{in} \quad (8.14)$$

Le champ sortant étant donné par  $\alpha_{out} = -\alpha_{in} + \sqrt{2\gamma_e}\alpha$ , nous obtenons comme valeur en sortie:

$$\alpha_{out}(\sigma) = \left(\frac{2\gamma_e}{\gamma(1-\sigma)} - 1\right)\alpha_{in} \quad (8.15)$$

Ainsi, si nous définissons le gain normalisé par:

$$\tilde{G}_{PSA}(\sigma) = \frac{|\alpha_{out}(\sigma)|^2}{|\alpha_{out}(\sigma=0)|^2} \quad (8.16)$$

nous obtenons comme valeur pour le gain:

$$\tilde{G}_{PSA}(\sigma) = \frac{\left(\frac{2\gamma_e/\gamma}{1-\sigma} - 1\right)^2}{(2\gamma_e/\gamma - 1)^2} \quad (8.17)$$



Dans le cas limite sans perte qui nous intéressera par la suite, nous avons  $\gamma_e = \gamma$  donc l'expression précédente se transforme en:

$$\tilde{G}_{PSA}^{sanspertes}(\sigma) = \frac{(1 + \sigma)^2}{(1 - \sigma)^2} \quad (8.18)$$

### A.5.2 Cas insensible à la phase

De la même manière nous pouvons calculer l'expression du gain dans le cas insensible à la phase. Dans ce cas on injecte uniquement sur  $\alpha_1$ . Dans la cavité le champ est maintenant:

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{2\gamma_e}}{\gamma(1 - \sigma^2)} \alpha_{in} \quad (8.19)$$

en utilisant les relations entrée/sortie, le gain normalisé a pour expression:

$$\tilde{G}_{PIA}(\sigma) = \frac{(\frac{2\gamma_e/\gamma}{1 - \sigma^2} - 1)^2}{(2\gamma_e/\gamma - 1)^2} \quad (8.20)$$

Dans le cas sans pertes cette expression devient:

$$\tilde{G}_{PIA}^{sanspertes}(\sigma) = \frac{(1 + \sigma^2)^2}{(1 - \sigma^2)^2} \quad (8.21)$$

On remarque que la formule de gain en configuration insensible à la phase est identique à celle de la configuration sensible à la phase après changement de variable  $\sigma = \sigma^2$ .

## B Traitement quantique

Dans la précédente partie, nous avons établi les équations qui régissent les champs moyens pour un OPO plan sous le seuil d'oscillation et injecté. Nous en avons déduit les gains sur les champs moyens.

Dans cette partie, nous nous intéressons aux fluctuations quantiques en sortie de l'OPO. Partant des équations d'évolution classique du paragraphe précédent, nous allons utiliser une méthode semi-classique pour calculer la réduction de bruit quantique en phase d'amplification et de déamplification, mais aussi le facteur de bruit de l'amplificateur.

### B.1 Équations semi-classiques

La méthode semi-classique permet d'écrire l'opérateur  $\hat{a}_j$  sous la forme

$$\hat{a}_j = \alpha_j + \delta\hat{\alpha}_j$$

comme somme de sa valeur moyenne classique  $\alpha_j$ , et d'un opérateur fluctuation  $\delta\hat{\alpha}_j$ . On peut linéariser les équations d'évolution autour des valeurs moyennes, afin de trouver les équations

régissant les fluctuations. Il a été montré [Reynaud92] que ce problème peut être traité par une méthode entrée/sortie. Cette fois il n'est pas possible de laisser de côté les fluctuations du vide (modes  $c_i$ ).

En linéarisant les équations (8.2) on trouve que:

$$\begin{aligned}\tau_1 \frac{d\delta\alpha_1}{dt} &= -(\gamma_{1e} + \gamma_{1c} - i\delta_1)\delta\alpha_1 + g\alpha_0\delta\alpha_2^* + g\alpha_2^*\delta\alpha_0 + \sqrt{2\gamma_{1e}}\delta\alpha_1^{in} + \sqrt{2\gamma_{1c}}\delta c_1 \\ \tau_2 \frac{d\delta\alpha_2}{dt} &= -(\gamma_{2e} + \gamma_{2c} - i\delta_2)\delta\alpha_2 + g\alpha_0\delta\alpha_1^* + g\alpha_1^*\delta\alpha_0 + \sqrt{2\gamma_{2e}}\delta\alpha_2^{in} + \sqrt{2\gamma_{2c}}\delta c_2 \\ \tau_0 \frac{d\delta\alpha_0}{dt} &= -(\gamma_{0e} + \gamma_{0c} - i\delta_0)\alpha_0 + g\delta\alpha_1\alpha_2 + g\alpha_1\delta\alpha_2 + \sqrt{2\gamma_{0e}}\delta\alpha_0^{in} + \sqrt{2\gamma_{0c}}\delta c_0\end{aligned}\quad (8.22)$$

On va maintenant faire les mêmes hypothèses simplificatrices que dans la partie stationnaire. On va supposer la triple résonance acquise ( $\delta_i = 0$ ), les pertes égales pour le signal et le complémentaire (on a  $\gamma_e = \gamma_{ei}$  et  $\gamma_c = \gamma_{ci}$ ). On supposera l'injection et la pompe au bruit quantique standard. Ne nous intéressant qu'aux équations d'évolution sur les modes signal et complémentaire, les équations précédentes se simplifient en:

$$\begin{aligned}\tau_1 \frac{d\delta\alpha_1}{dt} &= -\gamma\delta\alpha_1 + g\alpha_0\delta\alpha_2^* + g\alpha_2^*\delta\alpha_0 + \sqrt{2\gamma_e}\delta\alpha_1^{in} + \sqrt{2\gamma_c}\delta c_1 \\ \tau_2 \frac{d\delta\alpha_2}{dt} &= -\gamma\delta\alpha_2 + g\alpha_0\delta\alpha_1^* + g\alpha_1^*\delta\alpha_0 + \sqrt{2\gamma_e}\delta\alpha_2^{in} + \sqrt{2\gamma_c}\delta c_2\end{aligned}\quad (8.23)$$

où la valeur des champs moyens est donnée par les équations (8.6). On va prendre la transformée de Fourier des équations (8.23) afin d'analyser en fréquence les fluctuations  $\delta\tilde{\alpha}_i(\omega)$  définies par:

$$\delta\tilde{\alpha}_i(\omega) = \int_{-\infty}^{-\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \delta\alpha_i(t) e^{-i\omega t}$$

Les équations (8.23) deviennent alors:

$$\begin{aligned}\gamma(1 + i\Omega)\delta\tilde{\alpha}_1(\Omega) &= \gamma\sigma\delta\tilde{\alpha}_2^*(-\Omega) + g\alpha_2^*\delta\tilde{\alpha}_0(\Omega) + \sqrt{2\gamma_e}\delta\tilde{\alpha}_1^{in}(\Omega) + \sqrt{2\gamma_c}\delta\tilde{c}_1(\Omega) \\ \gamma(1 + i\Omega)\delta\tilde{\alpha}_2(\Omega) &= \gamma\sigma\delta\tilde{\alpha}_1^*(-\Omega) + g\alpha_1^*\delta\tilde{\alpha}_0(\Omega) + \sqrt{2\gamma_e}\delta\tilde{\alpha}_2^{in}(\Omega) + \sqrt{2\gamma_c}\delta\tilde{c}_2(\Omega)\end{aligned}\quad (8.24)$$

où on a posé  $\Omega = \omega\tau/\gamma$ , et  $\sigma = g\alpha_0/\gamma$ .

Les équations se découpent sur la base  $\pm 45^\circ$ :

$$\begin{aligned}\gamma(1 + i\Omega)\delta\tilde{\alpha}_+(\Omega) &= \gamma\sigma\delta\tilde{\alpha}_+^*(-\Omega) + g\alpha_+^*\delta\tilde{\alpha}_0(\Omega) + \sqrt{2\gamma_e}\delta\tilde{\alpha}_+^{in}(\Omega) + \sqrt{2\gamma_c}\delta\tilde{c}_+(\Omega) \\ \gamma(1 + i\Omega)\delta\tilde{\alpha}_-(\Omega) &= -\gamma\sigma\delta\tilde{\alpha}_-^*(-\Omega) - g\alpha_-^*\delta\tilde{\alpha}_0(\Omega) + \sqrt{2\gamma_e}\delta\tilde{\alpha}_-^{in}(\Omega) + \sqrt{2\gamma_c}\delta\tilde{c}_-(\Omega)\end{aligned}\quad (8.25)$$

## B.2 Relation entrée/sortie sur les fluctuations

Les fluctuations d'un mode  $\alpha_i$  pour une fréquence d'analyse du bruit et une quadrature données dans la direction  $\theta$  de la représentation de Fresnel sont données par:

$$p_i(\theta, \Omega) = \delta\tilde{\alpha}_i(\Omega)e^{-i\theta} + \delta\tilde{\alpha}_i^*(-\Omega)e^{i\theta}$$

En particulier, en notant  $\theta_i$  la phase du champ  $\alpha_i$  en entrée, les fluctuations d'amplitude  $p_i$  et de phase  $q_i$  s'expriment comme:

$$\begin{aligned} p_i &= \delta\tilde{\alpha}_i(\Omega)e^{-i\theta_i} + \delta\tilde{\alpha}_i^*(-\Omega)e^{i\theta_i} \\ q_i &= -i(\delta\tilde{\alpha}_i(\Omega)e^{-i\theta_i} - \delta\tilde{\alpha}_i^*(-\Omega)e^{i\theta_i}) \end{aligned} \quad (8.26)$$

Nous allons maintenant considérer le bruit sur la somme et la différence des fluctuations des champ signal et complémentaire, notées:

$$p_{\pm} = \frac{p_1 \pm p_2}{\sqrt{2}} \text{ et } q_{\pm} = \frac{q_1 \pm q_2}{\sqrt{2}} \quad (8.27)$$

Nous allons maintenant calculer l'évolution de ces fluctuations de quadratures à partir de (8.25). Il est à noter que ces relations sont simples lorsque le signal et la pompe sont en phase (phase d'amplification,  $\varphi = 0$  donc  $\sigma = |\sigma|$ ) ou bien lorsque le signal et la pompe sont en opposition de phase (phase de déamplification,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  donc  $\sigma = -|\sigma|$ ).

Les fluctuations sur les quadratures en phase d'amplification ou de déamplification sont:

$$\begin{aligned} \gamma(1+i\Omega)p_+ &= \gamma\sigma p_+ + \sqrt{2\gamma_e}p_+^{in} + \sqrt{2\gamma_c}p_+^c + \frac{g\sqrt{2\gamma_e}\alpha_{in+}}{\gamma(1-\sigma)}p_0 \\ \gamma(1+i\Omega)q_+ &= -\gamma\sigma p_+ + \sqrt{2\gamma_e}q_+^{in} + \sqrt{2\gamma_c}q_+^c + \frac{g\sqrt{2\gamma_e}\alpha_{in+}}{\gamma(1-\sigma)}q_0 \\ \gamma(1+i\Omega)p_- &= -\gamma\sigma p_- + \sqrt{2\gamma_e}p_-^{in} + \sqrt{2\gamma_c}p_-^c - \frac{g\sqrt{2\gamma_e}\alpha_{in-}}{\gamma(1-\sigma)}p_0 \\ \gamma(1+i\Omega)q_- &= \gamma\sigma q_- + \sqrt{2\gamma_e}q_-^{in} + \sqrt{2\gamma_c}q_-^c - \frac{g\sqrt{2\gamma_e}\alpha_{in-}}{\gamma(1-\sigma)}q_0 \end{aligned} \quad (8.28)$$

En supposant les miroirs fortement réfléchissants, les conditions de couplage à la sortie de la cavité sur les quadratures sont:

$$\begin{aligned} p_{\pm}^{out} &= -p_{\pm}^{in} + \sqrt{2\gamma_e}p_{\pm} \\ q_{\pm}^{out} &= -q_{\pm}^{in} + \sqrt{2\gamma_e}q_{\pm} \end{aligned} \quad (8.29)$$

On peut donc exprimer les fluctuations sortantes de la cavité en fonction des fluctuations des champs entrants.

Les fluctuations des champs sortants en phase d'amplification ou de déamplification s'écrivent alors:

$$\begin{aligned} p_+^{out} &= \left(\frac{2\gamma_e}{\gamma(1-\sigma+i\Omega)} - 1\right)p_+^{in} + \frac{2\sqrt{\gamma_c\gamma_e}}{\gamma(1-\sigma+i\Omega)}p_+^c + \frac{2g\gamma_e\alpha_{in+}}{\gamma^2(1-\sigma)(1-\sigma+i\Omega)}p_0 \\ q_+^{out} &= \left[\frac{2\gamma_e}{\gamma(1+\sigma+i\Omega)} - 1\right]q_+^{in} + \frac{2\sqrt{\gamma_c\gamma_e}}{\gamma(1+\sigma+i\Omega)}q_+^c + \frac{2g\gamma_e\alpha_{in+}}{\gamma^2(1-\sigma)(1+\sigma+i\Omega)}q_0 \\ p_-^{out} &= \left(\frac{2\gamma_e}{\gamma(1+\sigma+i\Omega)} - 1\right)p_-^{in} + \frac{2\sqrt{\gamma_c\gamma_e}}{\gamma(1+\sigma+i\Omega)}p_-^c - \frac{2g\gamma_e\alpha_{in-}}{\gamma^2(1-\sigma)(1+\sigma+i\Omega)}p_0 \\ q_-^{out} &= \left(\frac{2\gamma_e}{\gamma(1-\sigma+i\Omega)} - 1\right)q_-^{in} + \frac{2\sqrt{\gamma_c\gamma_e}}{\gamma(1-\sigma+i\Omega)}q_-^c - \frac{2g\gamma_e\alpha_{in-}}{\gamma^2(1-\sigma)(1-\sigma+i\Omega)}q_0 \end{aligned} \quad (8.30)$$

Les fluctuations sur une quadrature quelconque du champ en sortie sont données par la somme de trois termes. Les deux premiers termes, liés aux fluctuations du champ entrant et aux fluctuations du vide modélisant les pertes dans la cavité sont les termes habituels sous le seuil. Ils sont responsables de la production de vide comprimé sous le seuil. Par contre le dernier terme n'est présent que s'il y a injection d'un champ: c'est un terme de couplage aux fluctuations de la pompe. Ce terme de couplage ajoute du bruit sur toutes les quadratures.

### B.3 Faisceaux jumeaux et squeezing

Après avoir étudié l'évolution des fluctuations sur différentes quadratures, nous allons pouvoir mieux analyser deux phénomènes qui sont présents en configuration sensible à la phase: en phase d'amplification, la compression des fluctuations d'intensité sur la différence d'intensité entre signal et complémentaire (faisceaux jumeaux); en phase de déamplification, la compression des fluctuations d'intensité sur le mode à  $45^\circ$ . Ces calculs ont déjà été faits dans un modèle similaire dans [Zhang99]. On suppose dans cette section que l'on se place en configuration sensible à la phase avec injection sur le mode  $\alpha_+$ .

#### B.3.1 Faisceaux jumeaux en amplification

Dans une mesure de faisceaux jumeaux, on mesure la différence d'intensité entre signal et complémentaire,  $I_1 - I_2$ . On montre (voir par exemple [LauratPhD]), en notant  $I = I_1 = I_2$  que la variance sur la différence des intensités est donnée par:

$$V(I_1 - I_2) = I * V(p_-^{out}) \quad (8.31)$$

Ainsi la variance de la différence d'intensité normalisée est égale à la variance de la quadrature  $p_-^{out}$ . D'après les calculs précédents, puisque  $\alpha_{in-} = 0$  (car on injecte sur le mode  $\alpha_{in+}$ ), le terme de couplage aux fluctuations de la pompe s'annule et nous obtenons:

$$p_-^{out} = \left( \frac{2\gamma_e}{\gamma(1 + \sigma + i\Omega)} - 1 \right) p_-^{in} + \frac{2\sqrt{\gamma_c\gamma_e}}{\gamma(1 + \sigma + i\Omega)} p_-^c \quad (8.32)$$

Ainsi on obtient pour la variance des fluctuations d'intensité normalisée:

$$\frac{V(I_1 - I_2)}{I} = 1 - \frac{4\gamma_e\sigma}{\gamma[(1 + \sigma)^2 + \Omega^2]} \quad (8.33)$$

#### B.3.2 Squeezing d'intensité en déamplification

Lorsque l'on étudie la phase de déamplification, il est à noter maintenant qu'il existe un déphasage de  $\pi$  entre signal et complémentaire et la pompe. On a donc  $\sigma = -|\sigma|$ . La variance des fluctuations d'amplitude du mode à  $45^\circ$  est donc donnée par:

$$V(p_+^{out}) = 1 - \frac{4\gamma_e|\sigma|}{\gamma[(1 + |\sigma|)^2 + \Omega^2]} + \frac{4|\sigma|^2\gamma_e^2}{\gamma^2(1 + |\sigma|)^2} \frac{|\alpha_{in+}|^2}{\alpha_0^2(1 + |\sigma|)^2} \quad (8.34)$$

Nous voyons d'après cette formule que nous avons une expression pour le squeezing d'intensité quasi identique à celle des faisceaux jumeaux. Cette fois le terme de couplage aux fluctuations de la pompe est non nul. On peut évaluer l'importance de ce terme de couplage. Le terme  $\frac{|\alpha_{in+}|^2}{(1+|\sigma|^2)^2}$  est proportionnel à l'intensité dans le mode déamplifié et on a un terme en  $1/\alpha_0^2$ , donc inversement proportionnel à l'intensité de pompe. Ces termes sont proportionnels au ratio entre la puissance de pompe et la puissance du mode déamplifié. Etant dans l'approximation de la pompe non-déplétée, ces termes sont faibles. Par la suite on les négligera.

#### B.4 Evolution du bruit d'intensité en fonction de la phase relative

Un point important à souligner est que l'on peut aussi tracer l'évolution de  $V(p_+^{out})$  en fonction de la phase relative entre pompe, signal et complémentaire. Dans le cas général d'un déphasage quelconque, l'information sur la phase est portée par l'argument de  $\sigma$ . A partir des équations 8.25 on obtient, en négligeant les pertes dans le cristal, les fluctuations de la pompe et à fréquence nulle:

$$p_+^{out} = \frac{1 + |\sigma|^2}{1 - |\sigma|^2} p_+^{in}(\theta = 0) + \frac{2|\sigma|}{1 - |\sigma|^2} p_+^{in}(\theta = 2\varphi) \quad (8.35)$$

D'où l'expression de la variance à fréquence nulle devient, lorsque l'on néglige les fluctuations de la pompe ainsi que les pertes dans le cristal:

$$V(p_+^{out}) = \frac{(1 + \sigma^2)^2 + 4\sigma^2 + 4\sigma(1 + \sigma^2)\cos(2\varphi)}{(1 - |\sigma|^2)^2} \quad (8.36)$$

En tenant compte des pertes dans le cristal, l'expression précédente devient:

$$V(p_+^{out}) = 1 + \frac{8\gamma_e|\sigma|^2}{\gamma(1 - |\sigma|^2)^2} + \frac{4\gamma_e|\sigma|(1 + |\sigma|^2)\cos(2\varphi)}{\gamma(1 - |\sigma|^2)^2} \quad (8.37)$$

Lorsque l'on prend en compte des fluctuations de la pompe, nous obtenons:

$$V(p_+^{out}) = 1 + \frac{8\gamma_e|\sigma|^2}{\gamma(1 - |\sigma|^2)^2} + \frac{4\gamma_e|\sigma|(1 + |\sigma|^2)\cos(2\varphi)}{\gamma(1 - |\sigma|^2)^2} + \frac{2\gamma_e|\sigma|^2\alpha_{in+}^2}{|\alpha_0|^2} \frac{1 + |\sigma|^2 + 2|\sigma|\cos(2\varphi)}{(1 - |\sigma|^2)^2} \quad (8.38)$$

#### B.5 Calcul du rapport signal-à-bruit

Connaissant l'évolution des différentes quadratures nous pouvons calculer le facteur de bruit théorique de notre système. Le rapport signal-à-bruit sur la quadrature d'amplitude est défini comme ([Levenson93], [BencheikhPhD]):

$$R = \frac{N^2}{(\Delta N)^2} \quad (8.39)$$

où  $N$  désigne le nombre de photons détectés. Pour faire le lien avec nos notations on remarque que  $(\Delta N)^2 = N * V(p_+^{out})$ . Ainsi le rapport signal-à-bruit est donné par:

$$R = \frac{N}{V(p_+^{out})} \quad (8.40)$$

A partir de ce bref rappel nous pouvons donc calculer le facteur de bruit de notre système, défini comme le ratio entre le rapport signal-à-bruit en entrée et le rapport signal-à-bruit en sortie, en considérant qu'en entrée nous avons un état cohérent ( $V(p_+^{in}) = 1$ ):

$$F = \frac{R_{entree}}{R_{sortie}} = \frac{N}{V(p_+^{in})} \frac{V(p_+^{out})}{GN} = \frac{V(p_+^{out})}{G} \quad (8.41)$$

avec  $G = \frac{|\alpha^{out}|^2}{|\alpha^{in}|^2}$ .

Expérimentalement, nous ne mesurons pas cette quantité. Nous mesurons un facteur de bruit normalisé  $\tilde{F}$ , ratio entre le rapport signal à bruit sans amplification ( $\sigma = 0$ ) et le rapport signal-à-bruit avec amplification. Ce facteur de bruit normalisé s'exprime en fonction du gain normalisé  $\tilde{G}$ :

$$\tilde{F} = \frac{V(p_+^{out})_\sigma}{V(p_+^{out})_{\sigma=0}} \cdot \frac{1}{\tilde{G}} \quad (8.42)$$

avec  $\tilde{G} = \frac{|\alpha^{out}|_\sigma^2}{|\alpha^{out}|_{\sigma=0}^2}$ , gain normalisé de notre système défini précédemment.

### B.5.1 Calcul du facteur de bruit dans le cas sans pertes et sensible à la phase

Comme nous l'avons déjà vu, dans ce cas nous avons  $\gamma_e = \gamma$ . Ainsi en phase d'amplification on a:

$$V(p_+^{out})_\sigma = \frac{(1 + \sigma)^2}{(1 - \sigma)^2} \quad (8.43)$$

Cette expression correspond à l'expression du gain (dans cette configuration, gain et gain normalisé ont la même valeur). Ainsi nous trouvons:

$$F_{sanspertes} = \tilde{F} = 1 \quad (8.44)$$

Nous retrouvons le même résultat que dans le cas "sans cavité" et sans pertes, à savoir que le facteur de bruit est préservé lors du processus d'amplification (voir chapitre 7). Ceci n'est pas étonnant puisque dans le modèle en cavité utilisé ici aucun bruit n'est ajouté. Ceci n'est plus le cas lorsque l'on tient compte des pertes dans le cristal (modélisées par  $\gamma_c$ ).

### B.5.2 Calcul du facteur de bruit dans le cas avec pertes et sensible à la phase

En reprenant le même raisonnement que précédemment, on arrive à un facteur de bruit normalisé, en posant  $\alpha = \frac{\gamma_e}{\gamma}$ :

$$\tilde{F} = \frac{(2\alpha - 1)^2}{(2\alpha - 1 + \sigma)^2} ((1 - \sigma)^2 + 4\alpha\sigma) \quad (8.45)$$

On voit donc que le facteur de bruit normalisé dépend du gain. Son évolution est représentée sur la figure 8.3. Lorsque le gain devient infini, à la limite nous obtenons un facteur de bruit de:

$$\tilde{F} = \frac{(2\alpha - 1)^2}{\alpha} = \frac{(\gamma_e - \gamma_c)^2}{\gamma\gamma_e} < 1 \quad (8.46)$$

Ainsi nous pouvons remarquer que la présence des pertes implique que le facteur de bruit

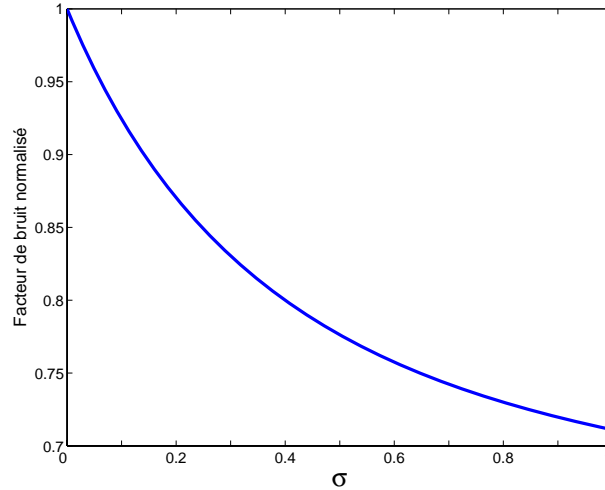


Fig. 8.3: Evolution du facteur de bruit normalisé en fonction de la puissance de pompe normalisée au seuil  $\sigma$ , dans le cas où  $\frac{\gamma_e}{\gamma} = 0.9$ .

normalisé n'est plus égal à l'unité. Ceci semble logique puisque la présence de pertes correspond à un canal d'entrée de bruit dans notre système. Ce bruit entre et est ensuite amplifié. On remarque même que dans cette configuration de cavité, lorsque le gain est maximal, le facteur de bruit normalisé est inférieur à un! Ce résultat est un peu surprenant, puisqu'il semblerait que l'on ait gagné en rapport signal sur bruit. Ceci provient du fait que l'on calcule une quantité "normalisée". En effet si maintenant on définit le gain comme:

$$G(\sigma) = \frac{|\alpha_{out}(\sigma)|^2}{|\alpha_{in}|^2} = \left(\frac{2\alpha}{1 - \sigma} - 1\right)^2 \quad (8.47)$$

Le facteur de bruit est maintenant toujours supérieur à 1. Son évolution est représentée sur la figure 8.4.

$$F = \frac{((1 - \sigma)^2 + 4\alpha\sigma)}{(2\alpha - (1 - \sigma))^2} \quad (8.48)$$

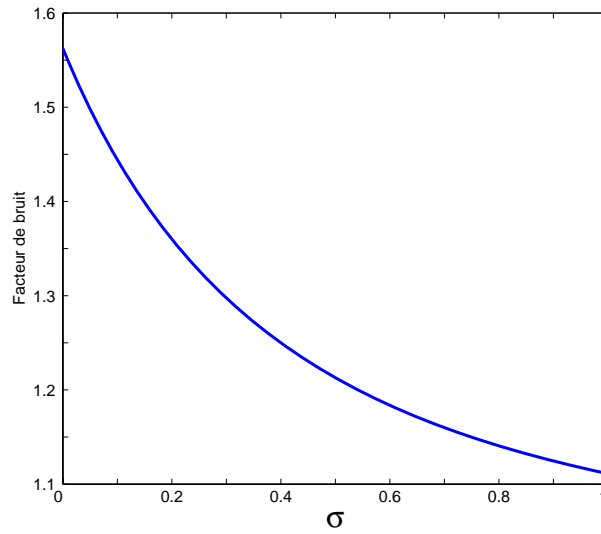


Fig. 8.4: Evolution du facteur de bruit en fonction de  $\sigma$ , dans le cas où  $\frac{\gamma_e}{\gamma} = 0.9$ .

Ce premier modèle permet de comprendre pourquoi le facteur de bruit dépend maintenant des pertes. Cependant, ce modèle utilisant un seul miroir de couplage n'est pas satisfaisant pour modéliser notre expérience en cavité linéaire. L'effet d'interférence sur le signal de sortie ( $\alpha^{out} = -\alpha^{in} + \sqrt{2\gamma_e\alpha}$ ), qui semblent expliquer pourquoi le facteur de bruit décroît avec le gain n'est pas présent dans notre expérience. On passera à un modèle en anneau mais maintenant avec entrée et sortie séparées.

## C Nouveau modèle avec entrée et sortie séparées

Le modèle d'OPO en anneau avec entrée et sortie sur le même miroir de couplage ne semble pas correspondre à notre expérience. Comme nous le verrons par la suite (chapitre 11) nous utilisons une cavité linéaire avec les miroirs d'entrée et de sortie séparés. Il n'y a donc pas d'effet d'interférences entre l'entrée et la sortie dans notre système. Pour modéliser au mieux notre système, introduisons un modèle similaire au précédent, mais maintenant avec une voie de sortie via un autre miroir, caractérisé par des pertes en transmission  $\gamma_s$ . Notre



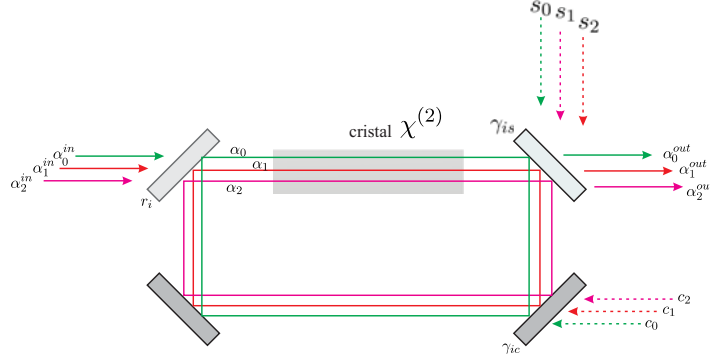


Fig. 8.5: Nouveau schéma de l'OPO avec entrée et sortie séparées.

nouveau modèle est donc caractérisé par les pertes sur le miroir d'entrée  $\gamma_e$ , sur le miroir de sortie  $\gamma_s$ , les différentes pertes du système, modélisées par un coefficient de couplage  $\gamma_c$ . Les pertes totales sont données par  $\gamma = \gamma_e + \gamma_s + \gamma_c$ . On ne détaillera pas les calculs qui sont similaires aux précédents. Il y a deux changements notoires. Tout d'abord il y a un terme de bruit en plus qui va venir du miroir de sortie. Ensuite, pour ce qui est du champ en sortie il est maintenant donné par:

$$\alpha^{out} = -\alpha_s + \sqrt{2\gamma_s}\alpha \quad (8.49)$$

Ceci va changer l'expression du gain.

### C.1 Expression du gain normalisé

On montre que le gain en configuration sensible à la phase a pour expression:

$$\tilde{G}_{PSA}(\sigma) = \frac{|\alpha_{out}(\sigma)|^2}{|\alpha_{out}(\sigma=0)|^2} = \frac{1}{(1-\sigma)^2} \quad (8.50)$$

De la même manière le gain en configuration insensible à la phase est donné par:

$$\tilde{G}_{PIA}(\sigma) = \frac{|\alpha_{out}(\sigma)|^2}{|\alpha_{out}(\sigma=0)|^2} = \frac{1}{(1-\tilde{\sigma})^2} \quad (8.51)$$

avec  $\tilde{\sigma} = \sigma^2$ .

### C.2 Faisceaux jumeaux-Compression de bruit

Les formules pour les photons jumeaux ainsi pour la compression de bruit d'intensité sont identiques au précédent modèle, mais maintenant elles font intervenir le coefficient de couplage  $\gamma_s$ . Pour les photons jumeaux en phase d'amplification on a:

$$\frac{V(\delta(I_1 - I_2))}{I} = 1 - \frac{4\gamma_s\sigma}{\gamma(1+\sigma)^2} \quad (8.52)$$

Et pour la compression de bruit d'intensité en phase de déamplification on obtient:

$$V(p_+^{out}) = 1 - \frac{4\gamma_s|\sigma|}{\gamma(1+|\sigma|)^2} + \frac{4|\sigma|^2\gamma_e^2}{\gamma^2(1+|\sigma|)^2} \frac{|\alpha_{in+}|^2}{\alpha_0^2(1+|\sigma|)^2} \quad (8.53)$$

Dans notre expérience en cavité héli-confocale (voir chapitre 11), nous avons  $\gamma_e = \gamma_c = 0.8\%$  et  $\gamma_s = 1\%$ . La compression de bruit maximale est donc ( $G = \infty$ ) de 0.45. Pour nos valeurs expérimentales, ( $G = 3$ ), on trouve comme compression de bruit théorique prenant compte des pertes à la détection  $V = 0.55 \pm 0.05$ . Ceci reste en bon accord avec les valeurs expérimentales ( $V = 0.7$ )

### C.3 Calcul du facteur de bruit normalisé dans le cas avec pertes et sensible à la phase

En reprenant le nouveau modèle, on trouve comme nouvelle expression de gain:

$$\tilde{G}_1(\sigma) = \frac{1}{(1-\sigma)^2} \quad (8.54)$$

On trouve aussi pour la variance du champ en sortie en négligeant le terme de couplage avec les fluctuations de la pompe :

$$V(p_+^{out}) = 1 + \frac{4\gamma_s\sigma}{\gamma(1-\sigma)^2} \quad (8.55)$$

Dans ce cas on trouve comme facteur de bruit normalisé:

$$\tilde{F}_{PSA} = (1-\sigma)^2 + \frac{4\gamma_s\sigma}{\gamma} \quad (8.56)$$

Cette formule s'exprime aussi en fonction du gain  $\tilde{G}$ :

$$\tilde{F}_{PSA} = \frac{1}{\tilde{G}} + \frac{4\gamma_s}{\gamma} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\tilde{G}}}\right) \quad (8.57)$$

Pour que le facteur de bruit normalisé soit supérieur à 1 pendant toute la plage de fonctionnement, il faut que  $\frac{\gamma_s}{\gamma} > \frac{1}{2}$ , c'est à dire  $\gamma_s > \gamma_c + \gamma_e$ . Ceci correspond à notre configuration expérimentale en cavité héli-confocale où  $\gamma_s = 1\%$  et  $\gamma_e + \gamma_c = 0.8$ . L'évolution du facteur de bruit normalisé en fonction du gain normalisé (avec des valeurs de pertes correspondantes à celles en cavité héli-confocale) est représentée sur la figure 8.6.

### C.4 Calcul du facteur de bruit normalisé dans le cas avec pertes et insensible à la phase

Nous ne rentrerons pas en détail dans les calculs. Dans le cas insensible à la phase, nous considérons que l'on injecte uniquement sur la voie signal. Pour calculer le facteur de bruit,

nous voyons qu'il faut calculer la variance d'une quadrature quelconque du champ en sortie (puisque toutes les quadratures ont une même évolution).

Ainsi, connaissant la variance du champ en sortie et l'expression du gain nous avons:

$$\tilde{F}_{PIA} = (1 - \tilde{\sigma})^2 + \frac{8\gamma_s \tilde{\sigma}^2}{\gamma} \quad (8.58)$$

Cette formule s'exprime aussi en fonction du gain normalisé  $\tilde{G}$ :

$$\tilde{F}_{PIA} = \frac{1}{\tilde{G}} + \frac{8\gamma_s}{\gamma} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\tilde{G}}}\right) \quad (8.59)$$

L'évolution du facteur de bruit normalisé en fonction du gain normalisé (avec des valeurs de pertes correspondantes à celles en cavité héli-confocale) dans le cas insensible à la phase est représenté sur la figure 8.6.

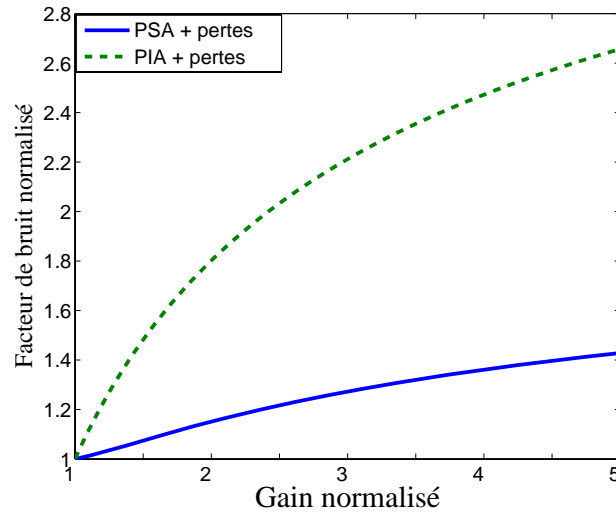


Fig. 8.6: Evolution du facteur de bruit normalisé en fonction du gain normalisé tenant compte des pertes dans notre système dans le cas sensible à la phase (PSA+pertes) et dans le cas insensible à la phase (PIA+pertes), dans les conditions de notre expérience en cavité héli-confocale (voir chapitre 11):  $\gamma_s = 1\%$ ,  $\gamma = 1.8\%$ .

## D Prise en compte des pertes dans la formule du rapport signal sur bruit

Dans la section précédente nous avons vu comment les formules de rapport signal sur bruit étaient modifiées par la prise en compte de fluctuations du vide entrantes dans notre système

amplificateur. Ces fluctuations sont amplifiées en fonction du gain de l'amplificateur. Au final le facteur de bruit du système dépend donc du gain. Un autre problème qui jusqu'alors n'a pas été abordé est la prise en compte des pertes lors de la détection de notre signal amplifié. Ce problème bien connu a été déjà souligné dans les articles [Kumar99], [Levenson93].

Si nous voulons un modèle vraiment complet, alors il faudra tenir compte des deux phénomènes: pertes entrantes dans l'amplificateur, puis pertes à la détection. Le problème général à modéliser est représenté par la figure 8.7.

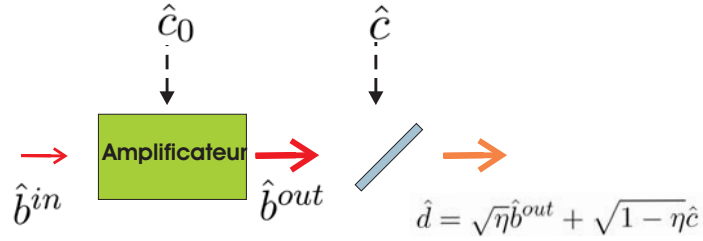


Fig. 8.7: Schéma général des sources de bruit à prendre en compte lors de la modélisation de l'amplificateur.

### D.1 Pertes à la détection

Les pertes à la détection sont modélisées par une lame semi-réfléchissante (voir figure 8.7).

A l'entrée de l'amplificateur le champ est noté  $\hat{b}^{in}$ , en sortie il est noté  $\hat{b}^{out}$ . A cause de la prise en compte des pertes, le champ réellement mesuré en sortie est donné par:

$$\hat{d} = \sqrt{\eta}\hat{b}^{out} + \sqrt{1-\eta}\hat{c} \quad (8.60)$$

où  $\hat{c}$  représente les fluctuations du vides liées aux pertes à la détection. En remarquant que:

$$\begin{aligned} \langle \hat{d}^\dagger \hat{d} \rangle &= \eta \langle \hat{b}^{out\dagger} \hat{b}^{out} \rangle \\ \langle (\hat{d}^\dagger \hat{d})^2 \rangle &= \eta^2 \langle (\hat{b}^{out\dagger} \hat{b}^{out})^2 \rangle + \eta(1-\eta) \langle \hat{b}^{out\dagger} \hat{b}^{out} \rangle \end{aligned} \quad (8.61)$$

on a pour rapport signal sur bruit en entrée:

$$R_E = \frac{\langle \hat{b}^{in\dagger} \hat{b}^{in} \rangle^2}{\langle (\hat{b}^{in\dagger} \hat{b}^{in})^2 \rangle} \quad (8.62)$$

En sortie on trouve:

$$R_S = \frac{\eta^2 \langle \hat{b}^{out\dagger} \hat{b}^{out} \rangle^2}{\eta^2 \langle (\hat{b}^{out\dagger} \hat{b}^{out})^2 \rangle + \eta(1-\eta) \langle \hat{b}^{out\dagger} \hat{b}^{out} \rangle} \quad (8.63)$$

Ainsi on montre que le facteur de bruit mesuré par un détecteur de rendement quantique  $\eta$ , ( $F(\eta)$ ) est donnée par:

$$F(\eta) = F(\eta = 1) + \frac{1 - \eta}{\eta} \frac{\langle \hat{b}^{in\dagger} \hat{b}^{in} \rangle^2}{\langle (\hat{b}^{in\dagger} \hat{b}^{in})^2 \rangle \langle \hat{b}^{out\dagger} \hat{b}^{out} \rangle} \quad (8.64)$$

Or comme en entrée on a un état cohérent  $R_E = N$ , car  $\langle \hat{b}^{in\dagger} \hat{b}^{in} \rangle = N$  et en notant  $\langle \hat{b}^{out\dagger} \hat{b}^{out} \rangle = GN$ , on obtient comme formule:

$$F(\eta) = F(\eta = 1) + \frac{1 - \eta}{\eta G} \quad (8.65)$$

C'est une formule générale, valable quel que soit le processus d'amplification pour un amplificateur de gain  $G$ , avec en entrée un état cohérent.

Expérimentalement, nous mesurons un facteur de bruit normalisé. La formule précédente se généralise au cas du facteur de bruit normalisé. On montre que:

$$\tilde{F}(\eta) = \tilde{F}(\eta = 1) + \frac{1 - \eta}{\eta \tilde{G}} \quad (8.66)$$

### D.1.1 Remarque concernant l'expérience

Dans notre expérience, nous mesurons les rapports signal-à-bruit sur le même détecteur en sortie de rendement quantique  $\eta$ . Le rapport signal-à-bruit effectivement mesuré  $\tilde{F}_{exp}$  est donc:

$$\tilde{F}_{exp} = \frac{R_{sortie,\eta,G=1}}{R_{sortie,\eta,G}} = \eta \tilde{F}(\eta) \quad (8.67)$$

car  $R_{sortie,\eta,G=1} = \eta R_{sortie,\eta=1,G=1}$ . On doit comparer nos valeurs expérimentales à la valeur théorique:

$$\eta \tilde{F}(\eta = 1) + \frac{1 - \eta}{\tilde{G}} \quad (8.68)$$

la valeur de  $\tilde{F}(\eta = 1)$  étant donnée par les calculs théoriques. L'incertitude sur la connaissance des pertes à la détection pour nos photodiodes est liée à l'incertitude sur la mesure de l'efficacité quantique des photodiodes réalisée à l'aide d'un wattmètre (qui est de l'ordre de  $\pm 5\%$ ). Expérimentalement, on trouve que l'efficacité des photodiodes est de  $1 \pm 5\%$ . Il semble que la prise en compte des pertes à la détection ne soit pas très importante dans notre expérience où les rendements quantiques des détecteurs sont importants. Pour savoir si nous sommes dans un régime d'amplification "purement" quantique, le facteur de bruit mesuré expérimentalement doit être inférieur à la valeur théorique prévue pour un amplificateur insensible à la phase de pertes équivalentes (pour le même gain  $\tilde{G}$ ):

$$\tilde{F}_{exp} < \eta [\tilde{F}_{PIA}(\eta = 1)] + \frac{1 - \eta}{\tilde{G}} \quad (8.69)$$

## E Quand parler d'amplification "sans bruit"?

Cette question peut surprendre puisque dans le chapitre introductif, nous avons déjà montré en suivant le raisonnement de Caves qu'il existe une limite "universelle" pour un processus d'amplification de gain  $G$  correspondant à  $2 - 1/G$ . Si l'on trouve un processus amplificateur de gain  $G$  ayant un facteur de bruit plus faible, nous pouvons conclure à une amplification de type quantique, "sans bruit".

Dans notre expérience cependant, nous ne mesurons pas de facteur de bruit stricto-sensu, mais –comme nous l'avons déjà souligné– un facteur de bruit normalisé et ceci pour différentes raisons:

- Si on considère les coefficients de transmission des miroirs utilisés dans la cavité hémiconfocale, la transmission à vide de la cavité est de 50%. La cavité n'est pas optimisée pour une adaptation d'impédance ( $\gamma_e \simeq \gamma_s \gg \gamma_c$  voir chapitre 11), car au départ nous avons étudié la génération de faisceaux jumeaux et dans ce cas pour avoir un maximum de compression on doit avoir  $\gamma_s/\gamma \gg 1$ .
- Utilisant une cavité hémiconfocale, seul un mode pair sur deux est transmis lorsque l'on asservit la cavité. La transmission de la cavité diminue là aussi d'environ 50%.

Utilisant des mesures de facteur de bruit normalisé, les limites énoncées au chapitre introductif n'ont pas droit de cité. Prenons un exemple d'OPO avec  $\gamma_s/\gamma \simeq 0.3$  (qui correspond à notre situation expérimentale en cavité confocale du chapitre 12). La figure 8.8 représente les bornes inférieures de facteur de bruit normalisé attendues dans le cas sensible (PSA) et insensible (PIA) à la phase. En pointillé est représenté la limite classique  $2 - 1/G$ . On constate que le facteur de bruit normalisé théorique dans le cas insensible à la phase est inférieur à la limite des  $2 - 1/G$ . On viole donc apparemment la limite classique!

Par cet exemple, nous voulons montrer que nous ne pouvons donc pas comparer nos valeurs de facteurs de bruit normalisés à une quelconque limite "universelle". Nous parlerons donc d'amplification "sans bruit" dans le cas où notre système rajoute moins de bruit qu'un système équivalent (en terme de pertes), mais fonctionnant en régime insensible à la phase. Il faut comprendre que notre expérience est pour le moment un "démonstrateur" permettant de générer des images aux propriétés non-classiques et rajoutant moins de bruit qu'un système équivalent mais fonctionnant en régime insensible à la phase. Dans le futur, on pourra envisager de créer un système optimisé pour l'amplification sans bruit, permettant de réaliser des mesures "réelles" de facteur de bruit (et non plus des mesures de facteur de bruit normalisé). Dans le chapitre suivant nous reviendrons sur ce problème et nous tenterons de définir les meilleures caractéristiques (géométrie, traitement des miroirs) d'un OPO pour l'amplification sans bruit.

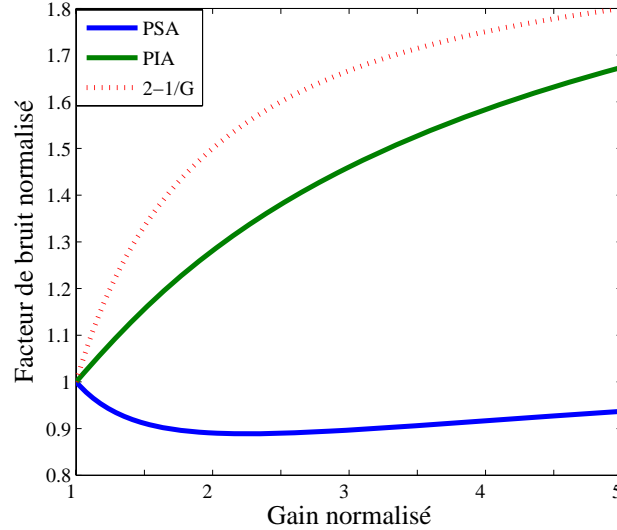


Fig. 8.8: Evolution du facteur de bruit normalisé en tenant compte des pertes dans notre système dans le cas sensible à la phase et dans le cas insensible à la phase, dans les conditions de notre expérience en cavité confocale:  $\gamma_s/\gamma = 1/3$ . La courbe en pointillés représente la limite absolue  $2 - 1/G$

## Conclusion

Le modèle d'oscillateur paramétrique monomode que nous avons introduit permet d'accéder à toutes les valeurs expérimentales qui nous intéressent: faisceaux jumeaux en amplification, compression de bruit en intensité en déamplification, facteur de bruit en fonction du gain.

Nous avons insisté sur les mesures de bruit réalisées expérimentalement. Nous avons accès à un facteur de gain normalisé qui nous permet de comparer les performances de facteur de bruit de notre amplificateur à celles d'un système ayant les mêmes pertes mais fonctionnant dans un régime insensible à la phase. Lors de ces mesures, une comparaison à la limite classique  $2 - 1/G$  n'est pas appropriée.

Reste un problème d'interprétation: le formalisme utilisé ne permet pas de comprendre l'origine des formules de facteur de bruit. Nous allons développer dans la prochaine partie un nouveau point de vue permettant de résoudre ce problème. Il nous permettra ensuite de trouver les caractéristiques optimales d'un OPO pour l'amplification sans bruit.

---

# Un OPO optimisé pour l'amplification sans bruit

---

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Modélisation de l'OPO monomode de type II triplement résonnant</b>	<b>150</b>
A.1	Le modèle . . . . .	150
A.2	Equations d'évolution . . . . .	152
A.3	Relations entrée/sortie dans le cas sensible à la phase . . . . .	152
A.4	Relations entrée/sortie dans le cas insensible à la phase . . . . .	153
A.5	Conclusion . . . . .	154
<b>B</b>	<b>Calcul du facteur de bruit dans un processus de type Bogoliubov généralisé</b>	<b>155</b>
B.1	Transformation générale sensible à la phase . . . . .	155
B.2	Calcul du gain . . . . .	155
B.3	Calcul du facteur de bruit . . . . .	155
B.4	Application à l'OPO . . . . .	156
<b>C</b>	<b>Etude de l'OPO, cas insensible à la phase</b>	<b>157</b>
C.1	Transformation générale insensible à la phase . . . . .	157
C.2	Calcul du facteur de bruit . . . . .	157
C.3	Application à l'OPO insensible à la phase . . . . .	158
<b>D</b>	<b>Quel OPO pour optimiser le facteur de bruit?</b>	<b>158</b>
D.1	Dégénérescence de la cavité . . . . .	158
D.2	Optimisation des caractéristiques de la cavité . . . . .	159
D.3	Modèle avec entrée et sortie sur le même miroir . . . . .	159
D.4	Modèle avec entrée et sortie sur des miroirs différents . . . . .	160

---



## Introduction

Dans le chapitre précédent, utilisant une méthode semi-classique, nous avons calculé le facteur de bruit d'un OPO monomode de type II sous le seuil en tenant compte des pertes. Des questions restent cependant en suspend. Nous n'avons pas identifié les termes de bruit présents dans les formules. Il nous a semblé nécessaire de chercher à mieux comprendre l'origine de ces expressions afin de proposer un OPO de caractéristiques optimisées pour l'amplification sans bruit.

Nous utiliserons un nouveau point de vue plus compact "d'entrée/sortie", qui simplifie grandement les calculs effectués dans la section précédente et qui a l'avantage de pouvoir se généraliser à d'autres types d'amplificateurs. Ce point de vue a déjà été utilisé par Caves ([Caves82]) et dans notre partie générale sur les amplificateurs. Il a permis, en utilisant uniquement l'hypothèse de linéarité de la transformation ainsi que la nécessité d'avoir une relation unitaire de donner une limite au facteur de bruit d'un amplificateur monomode. Ce raisonnement se fait sans chercher à exprimer les sources de bruit intervenant dans l'amplificateur.

Dans ce chapitre, utilisant ce nouveau point de vue, nous allons chercher à expliciter les termes de bruit, cherchant non plus une borne inférieure sur le facteur de bruit mais son expression exacte. Ce type d'approche a été utilisé récemment par C.Fabre et G.Leuchs [Leuchs05].

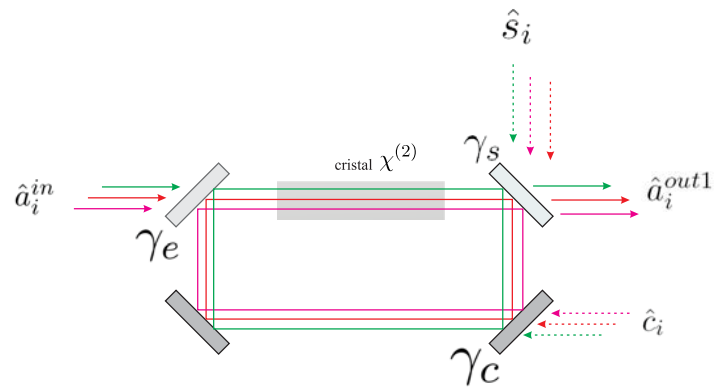
Dans une première partie, nous établirons les relations entrées/sortie dans le cas d'un OPO de type II sensible puis insensible à la phase. Cette approche nous permettra de généraliser ce type de relations: dans une deuxième partie nous définirons une relation générale de type sensible à la phase et nous établirons sa formule de facteur de bruit. De la même manière, la troisième partie sera consacrée aux relations de type insensible à la phase. Pour finir nous chercherons à définir un type de cavité optimisé pour l'amplification sans bruit en vue d'expériences futures.

## A Modélisation de l'OPO monomode de type II triplement résonnant

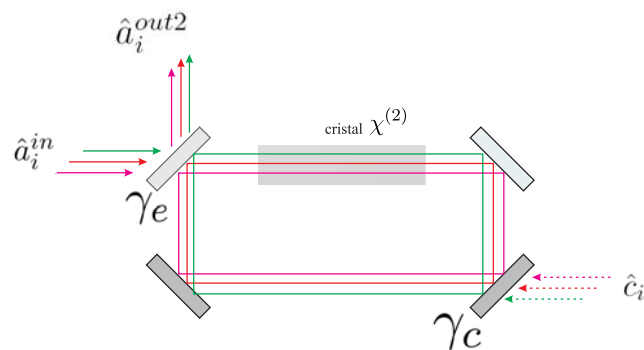
### A.1 Le modèle

On considère un OPO de type II, triplement résonnant. On utilise un modèle de cavité en anneau identique à celui introduit au chapitre précédent. Nous aborderons deux types d'OPO, ceci en vue de comparer leurs performances: le premier est un modèle avec entrée et sortie sur le même miroir (modèle 2); le second, qui modélise mieux notre cavité linéaire, présente une entrée et une sortie sur des miroirs différents (modèle 1) (voir figure 9.1).

Nous utilisons les mêmes notations. Négligeant la biréfringence des miroirs, on caractérise la transmission par le miroir d'entrée et de sortie par  $\gamma_e$  et  $\gamma_s$ , dont la valeur est la même selon



Modèle 1 d'OPO



Modèle 2 d'OPO

Fig. 9.1: Modélisation de l'oscillateur paramétrique optique. Le modèle 1 (haut) modélise au mieux notre configuration expérimentale. Le modèle 2 est généralement utilisé dans la littérature sur les OPOs.

les modes signal et complémentaire. Les autres pertes sont modélisées par un couplage avec l'extérieur avec coefficient de transmission  $\gamma_c$ . Comme dans le chapitre précédent, nous nous plaçons en régime de pompe non déplétée. Nous négligeons aussi, comme cela a été déjà fait les termes faisant intervenir les fluctuations de la pompe. La puissance de pompe normalisée au seuil est notée  $\sigma$ . Les variables se rapportant aux champs signal et complémentaire seront notées par les indices 1 et 2. On introduit les opérateurs d'annihilation et de création pour les champs en entrée  $\hat{a}_i^{in}, \hat{a}_i^{in+}$ , en sortie sur le miroir d'entrée  $\hat{a}_i^{out2}, \hat{a}_i^{out2+}$ , en sortie sur un miroir différent  $\hat{a}_i^{out1}, \hat{a}_i^{out1+}$  et dans la cavité  $\hat{a}_i, \hat{a}_i^+$ . Le couplage avec l'extérieur par le miroir de sortie fait intervenir les modes  $\hat{s}_i$  ( $i = 1, 2$ , selon la polarisation qui correspond aux modes signal et complémentaire). De même, le couplage lié aux pertes sera modélisé par les modes  $\hat{c}_i$  (voir pour récapitulatif la figure 9.1).

## A.2 Equations d'évolution

On peut montrer ([FabreCours]), pour le modèle 1, qu'à fréquence nulle, à la triple résonance parfaite, en phase d'amplification ( $\sigma$  est réel positif), les équations d'évolution pour les opérateurs  $\hat{a}_i$  intracavité en représentation de Heisenberg sont données par:

$$\hat{a}_1 = \sigma \hat{a}_2^+ + \frac{\sqrt{2\gamma_e}}{\gamma} \hat{a}_1^{in} + \frac{\sqrt{2\gamma_c}}{\gamma} \hat{c}_1 + \frac{\sqrt{2\gamma_s}}{\gamma} \hat{s}_1 \quad (9.1)$$

$$\hat{a}_2 = \sigma \hat{a}_1^+ + \frac{\sqrt{2\gamma_e}}{\gamma} \hat{a}_2^{in} + \frac{\sqrt{2\gamma_c}}{\gamma} \hat{c}_2 + \frac{\sqrt{2\gamma_s}}{\gamma} \hat{s}_2 \quad (9.2)$$

Si on s'intéresse au mode dans la base à  $45^\circ$  intracavité,  $\hat{a}_+ = \frac{\hat{a}_1 + \hat{a}_2}{\sqrt{2}}$ , les équations d'évolutions sont découplées:

$$\hat{a}_+ = \sigma \hat{a}_+^+ + \frac{\sqrt{2\gamma_e}}{\gamma} \hat{a}_+^{in} + \frac{\sqrt{2\gamma_c}}{\gamma} \hat{c}_+ + \frac{\sqrt{2\gamma_s}}{\gamma} \hat{s}_+ \quad (9.3)$$

où l'indice + se rapporte aux modes dans la base à  $45^\circ$ . Pour les équations d'évolution dans le modèle 2, il suffit d'enlever les termes de couplage sur le miroir de sortie  $\hat{s}_i$ , puisque dans ce modèle ce miroir est parfaitement réfléchissant.

## A.3 Relations entrée/sortie dans le cas sensible à la phase

### A.3.1 Modèle 1

Dans le cas d'une amplification sensible à la phase, on injecte le signal d'entrée sur le mode à  $45^\circ$  des axes optiques. Trouvons donc la relation entrée/sortie pour ce mode.

Après avoir pris l'hermitique conjugué dans l'expression (9.3), on obtient ,pour le seul

opérateur  $\hat{a}_+$  intracavité, une équation du type:

$$(1 - \sigma^2)\hat{a}_+ = \frac{\sigma\sqrt{2\gamma_e}}{\gamma}\hat{a}_+^{in+} + \frac{\sqrt{2\gamma_e}}{\gamma}\hat{a}_+^{in} + \frac{\sigma\sqrt{2\gamma_c}}{\gamma}\hat{c}_+^+ + \frac{\sqrt{2\gamma_c}}{\gamma}\hat{c}_+ + \frac{\sqrt{2\gamma_e}}{\gamma}\hat{a}_+^{in} + \frac{\sigma\sqrt{2\gamma_s}}{\gamma}\hat{s}_+^+ + \frac{\sqrt{2\gamma_s}}{\gamma}\hat{s}_+ \quad (9.4)$$

Pour obtenir l'équation du champ en sortie, on écrit:  $\hat{a}_+^{out1} = -\hat{s}_+ + \sqrt{2\gamma_s}\hat{a}_+$ . On obtient ainsi comme relation entrée/sortie:

$$\hat{a}_+^{out1} = \frac{2\gamma_s/\gamma - 1 + \sigma^2}{1 - \sigma^2}\hat{s}_+ + \frac{2\sigma\gamma_s}{\gamma(1 - \sigma^2)}\hat{s}_+^+ + \frac{2\sqrt{\gamma_e\gamma_s}}{\gamma(1 - \sigma^2)}\hat{a}_+^{in} + \frac{2\sigma\sqrt{\gamma_e\gamma_s}}{\gamma(1 - \sigma^2)}\hat{a}_+^{in+} + \frac{2\sqrt{\gamma_c\gamma_s}}{\gamma(1 - \sigma^2)}\hat{c}_+ + \frac{2\sigma\sqrt{\gamma_c\gamma_s}}{\gamma(1 - \sigma^2)}\hat{c}_+^+ \quad (9.5)$$

### A.3.2 Modèle 2

En utilisant l'équation d'évolution du champ intracavité ainsi que la relation entrée/sortie,  $\hat{a}_+^{out2} = -\hat{a}_+^{in} + \sqrt{2\gamma_s}\hat{a}_+$ , on obtient comme relation entrée/sortie:

$$\hat{a}_+^{out2} = \frac{2\gamma_e/\gamma - 1 + \sigma^2}{1 - \sigma^2}\hat{a}_+^{in} + \frac{2\sigma\gamma_e}{\gamma(1 - \sigma^2)}\hat{a}_+^{in+} + \frac{2\sqrt{\gamma_e\gamma_c}}{\gamma(1 - \sigma^2)}\hat{c}_+ + \frac{2\sigma\sqrt{\gamma_e\gamma_c}}{\gamma(1 - \sigma^2)}\hat{c}_+^+ \quad (9.6)$$

## A.4 Relations entrée/sortie dans le cas insensible à la phase

### A.4.1 Modèle 1

Dans le cas insensible à la phase, en supposant que l'on injecte sur le mode signal  $\hat{a}_1$ , trouvons de même les relations entrée/sortie pour ce mode.

Suivant la même démarche que dans le cas sensible à la phase, on obtient comme équation d'évolution pour l'opérateur d'annihilation intracavité signal  $\hat{a}_1$ :

$$\hat{a}_1 = \frac{\sqrt{2\gamma_e}}{\gamma(1 - \sigma^2)}\hat{a}_1^{in} + \frac{\sqrt{2\gamma_e}\sigma}{\gamma(1 - \sigma^2)}\hat{a}_2^{in+} + \frac{\sqrt{2\gamma_c}}{\gamma(1 - \sigma^2)}\hat{c}_1 + \frac{\sqrt{2\gamma_c}\sigma}{\gamma(1 - \sigma^2)}\hat{c}_2^+ + \frac{\sqrt{2\gamma_s}}{\gamma(1 - \sigma^2)}\hat{s}_1 + \frac{\sqrt{2\gamma_s}\sigma}{\gamma(1 - \sigma^2)}\hat{s}_2^+ \quad (9.7)$$

En utilisant la relation entrée/sortie

$$\hat{a}_1^{out1} = -\hat{s}_1 + \sqrt{2\gamma_s}\hat{a}_1$$

on obtient comme relation entrée/sortie pour l'opérateur d'annihilation signal:

$$\hat{a}_1^{out1} = \frac{2\sqrt{\gamma_e\gamma_s}}{\gamma(1 - \sigma^2)}\hat{a}_1^{in} + \frac{2\sqrt{\gamma_e\gamma_s}\sigma}{\gamma(1 - \sigma^2)}\hat{a}_2^{in+} + \frac{2\sqrt{\gamma_c\gamma_s}}{\gamma(1 - \sigma^2)}\hat{c}_1 + \frac{2\sqrt{\gamma_c\gamma_s}\sigma}{\gamma(1 - \sigma^2)}\hat{c}_2^+ + \left(\frac{2\gamma_s}{\gamma(1 - \sigma^2)} - 1\right)\hat{s}_1 + \frac{2\gamma_s\sigma}{\gamma(1 - \sigma^2)}\hat{s}_2^+ \quad (9.8)$$

Cette relation entrée/sortie fait intervenir un seul mode portant le signal  $\hat{a}_1^{in}$ , les autres modes ( $\hat{a}_2^{in}$ ,  $\hat{c}_1$ ,  $\hat{c}_2$ ,  $\hat{s}_1$ ,  $\hat{s}_2$ ) étant responsables de l'ajout de bruit.

#### A.4.2 Modèle 2

De la même manière, on peut calculer la relation entrée/sortie dans le modèle 2, qui donne:

$$\hat{a}_1^{out2} = \left(\frac{2\gamma_e}{\gamma(1-\sigma^2)} - 1\right)\hat{a}_1^{in} + \frac{2\gamma_e\sigma}{\gamma(1-\sigma^2)}\hat{a}_2^{in+} + \frac{2\sqrt{\gamma_c\gamma_e}}{\gamma(1-\sigma^2)}\hat{c}_1 + \frac{2\sqrt{\gamma_c\gamma_e}\sigma}{\gamma(1-\sigma^2)}\hat{c}_2^+ \quad (9.9)$$

### A.5 Conclusion

#### A.5.1 Cas sensible à la phase

La transformation entrée/sortie sur la voie 2 pour le mode à  $45^\circ$  dans notre OPO de type II fait donc intervenir deux modes: un mode  $\hat{a}^{in}$  qui porte le signal et un mode de bruit,  $\hat{c}$ . Cette relation est une relation entrée/sortie de type Bogoliubov à deux modes [[Bogoliubov47](#)]:

$$\hat{a}, \hat{c} \longrightarrow U\hat{a} + V\hat{a}^+ + \beta_{c1}\hat{c} + \beta_{c2}\hat{c}^+ \quad (9.10)$$

avec  $U, V, \beta_{c1}, \beta_{c2}$  réels.

Sur la voie 1, nous voyons que l'on a une relation du même type faisant intervenir un mode de bruit en plus  $\hat{s}$  provenant des pertes sur le miroir de sortie. C'est une relation de Bogoliubov généralisée.

Nous allons chercher à calculer le facteur de bruit dans le cas d'une transformation de Bogoliubov généralisée. Nous montrerons que l'on arrive à des expressions de facteur de bruit très compactes, puis nous utiliserons de telles formules pour notre OPO.

#### A.5.2 Cas insensible à la phase

Comme nous le voyons sur les exemples de l'OPO modèle 1 et 2, cette relation entrée/sortie sur le mode signal est du type:

$$\hat{a}, \hat{b}_k, \hat{m}_k \longrightarrow \sqrt{G}\hat{a} + \sum_{k=1}^n (\zeta_k \hat{b}_k + \nu_k \hat{m}_k^+) \quad (9.11)$$

Par la suite, nous allons chercher le facteur de bruit lors d'une telle transformation.

## B Calcul du facteur de bruit dans un processus de type Bogoliubov généralisé

### B.1 Transformation générale sensible à la phase

On considère l'évolution générale d'un amplificateur de type:

$$\hat{a}^{out} = U\hat{a}^{in} + V\hat{a}^{in+} + \sum_{k=1}^n \beta_{k1}\hat{c}_k + \beta_{k2}\hat{c}_k^+ \quad (9.12)$$

avec  $U, V, \beta_{ki}, i = 1, 2$  réels. On suppose qu'en entrée le signal est porté par le mode  $\hat{a}^{in}$ . Les modes de bruit sont notés  $\hat{c}_k$ . Pour que ce processus soit dépendant de la phase, il faut qu'au moins un des couples  $(U, V), (\beta_{k1}, \beta_{k2})$  soit différent de  $(0, 0)$ . Nous supposons par la suite que  $(U, V) \neq (0, 0)$ , c'est à dire que le gain dépend de la phase.

L'unitarité de la transformation impose:

$$U^2 - V^2 + \sum_{k=1}^n (\beta_{k1}^2 - \beta_{k2}^2) = 1 \quad (9.13)$$

### B.2 Calcul du gain

Si en entrée le champ est dans un état cohérent de la forme:

$$\alpha_{in} = |\alpha_{in}|e^{i\varphi} \quad (9.14)$$

On a en sortie:

$$|\alpha_{out}|^2 = |\alpha_{in}|^2 |Ue^{i\varphi} + Ve^{-i\varphi}|^2 + V^2 + \sum_{k=1}^n \beta_{k2}^2 \quad (9.15)$$

En négligeant les termes non proportionnels à l'intensité (termes de type "fluorescence paramétrique") on obtient bien un gain pour la quadrature d'amplitude dépendant de la phase du champ en entrée:

$$G(\varphi) = |Ue^{i\varphi} + Ve^{-i\varphi}|^2 = U^2 + V^2 + 2UV\cos(2\varphi) \quad (9.16)$$

On note  $G(0) = G$ .

### B.3 Calcul du facteur de bruit

En introduisant l'opérateur quadrature:

$$\hat{X}_\phi^{out} = e^{i\phi}\hat{a}^{out} + e^{-i\phi}\hat{a}^{out+} \quad (9.17)$$

on montre que lorsque l'on a un état cohérent en entrée, on obtient:

$$\langle (\delta \hat{X}_\phi^{out})^2 \rangle = U^2 + V^2 + 2UV \cos(2\phi) + \sum_{k=1}^n (\beta_{k1}^2 + \beta_{k2}^2 + 2\beta_{k1}\beta_{k2} \cos(2\phi)) \quad (9.18)$$

Si on s'intéresse aux fluctuations sur la quadrature d'amplitude  $\hat{X}_+^{out}$  ( $\phi = 0$ ) on obtient donc:

$$\langle (\delta \hat{X}_+^{out})^2 \rangle = (U + V)^2 + \sum_{k=1}^n (\beta_{1k} + \beta_{2k})^2 = G + (\beta_1 + \beta_2)^2 \quad (9.19)$$

Ainsi le facteur de bruit pour la quadrature d'amplitude est donné par:

$$F_{PSA} = \frac{\langle (\delta \hat{X}_+^{out})^2 \rangle}{G} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(\beta_{1k} + \beta_{2k})^2}{G} \quad (9.20)$$

Nous voyons sur ces formules de facteur de bruit que dès qu'il y a la présence de modes de bruit, le facteur de bruit est dégradé (par les termes  $\sum_{k=1}^n \frac{(\beta_{1k} + \beta_{2k})^2}{G}$ ). Nous allons appliquer ces formules au cas de l'OPO triplement résonnant de type II que nous avons introduit au début de ce chapitre.

#### B.4 Application à l'OPO

Ayant établi les expressions généralisées pour le facteur de bruit, nous les appliquons par exemple à l'OPO de type II sensible à la phase dans le modèle 1 (équation 9.5). En notant  $\alpha = \frac{\gamma_e}{\gamma}$ ,  $\xi = \frac{\gamma_c}{\gamma}$ ,  $\delta = \frac{\gamma_s}{\gamma}$ , on obtient:

$$\begin{aligned} G &= \frac{4\alpha\delta}{(1-\sigma)^2} \\ (\beta_{11} + \beta_{12})^2 &= \frac{4\xi\delta}{(1-\sigma)^2} \\ (\beta_{21} + \beta_{22})^2 &= \frac{(2\delta + \sigma - 1)^2}{(1-\sigma)^2} \end{aligned} \quad (9.21)$$

Le facteur de bruit de l'OPO dans le modèle 1,  $F_{1PSA}$  est donc donné par:

$$F_{1PSA} = 1 + \frac{(\beta_{11} + \beta_{12})^2 + (\beta_{21} + \beta_{22})^2}{G} = 1 + \frac{\gamma_c}{\gamma_e} + \frac{\gamma_s}{\gamma_e} + \frac{1}{G} - 2\sqrt{\frac{\gamma_s}{\gamma_e G}} \quad (9.22)$$

Comme nous l'avons déjà mentionné à de nombreuses reprises, expérimentalement nous avons accès à un gain et à un facteur de bruit normalisé. En absence de pompe, le gain normalisé  $\tilde{G}(\sigma = 0)$  vaut 1. De même le facteur de bruit normalisé  $\tilde{F}_{1PSA}$  est égal à 1 sans pompe. Le facteur de bruit normalisé  $\tilde{F}_{1PSA}$  est donné par:

$$\tilde{F}_{1PSA} = F_1 \times G(\sigma = 0) = F_1 \times \frac{4\gamma_e\gamma_s}{\gamma^2} = \frac{1}{\tilde{G}} + \frac{4\gamma_s}{\gamma} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\tilde{G}}}\right) \quad (9.23)$$

Nous retrouvons bien les résultats de facteur de bruit déjà obtenus par la méthode semi-classique dans le chapitre précédent.

Sur la voie 2, on trouve de la même manière un facteur de bruit  $F_{2PSA}$ :

$$F_{2PSA} = 1 + \frac{4\gamma_e\gamma_c}{\gamma^2(2\gamma_e/\gamma + \sigma - 1)^2} \quad (9.24)$$

avec

$$G = \frac{(2\gamma_e/\gamma + \sigma - 1)^2}{(1 - \sigma)^2} \quad (9.25)$$

## C Etude de l'OPO, cas insensible à la phase

### C.1 Transformation générale insensible à la phase

Cette relation entrée/sortie sur le mode signal, est du type

$$\hat{a}, \hat{b}_k, \hat{m}_k \longrightarrow \sqrt{G}\hat{a} + \sum_{k=1}^n (\zeta_k \hat{b}_k + \nu_k \hat{m}_k^+) \quad (9.26)$$

L'unitarité de la transformation impose:

$$G + \sum_{k=1}^n (\zeta_k^2 - \nu_k^2) = 1 \quad (9.27)$$

### C.2 Calcul du facteur de bruit

Si on s'intéresse aux fluctuations sur la quadrature d'amplitude on obtient:

$$\langle (\delta \hat{X}_+^{out})^2 \rangle = G + \sum_{k=1}^n (\zeta_k^2 + \nu_k^2) \quad (9.28)$$

Le facteur de bruit est donc:

$$F_{PIA} = \frac{\langle (\delta \hat{X}_+^{out})^2 \rangle}{G} = 1 + \frac{\sum_{k=1}^n (\zeta_k^2 + \nu_k^2)}{G} \quad (9.29)$$

En utilisant l'unitarité de la transformation on obtient:

$$F_{PIA} = 2 - \frac{1}{G} + 2 \frac{\sum_{k=1}^n \zeta_k^2}{G} \quad (9.30)$$

On retrouve bien un facteur de bruit de type insensible à la phase (en  $2 - 1/G$ ) avec des termes de bruit ajoutés en plus.



### C.3 Application à l'OPO insensible à la phase

En appliquant ces formules à la transformation du mode signal lors d'une amplification insensible à la phase dans le modèle 1 (paragraphe A.4.1), on trouve:

$$\begin{aligned} G &= \frac{4\gamma_e\gamma_s}{\gamma^2(1-\sigma^2)^2} \\ \zeta_1^2 &= \frac{\gamma_c\gamma_s}{\gamma^2(1-\sigma^2)^2} \\ \zeta_2^2 &= \frac{(2\gamma_s/\gamma - 1 + \sigma^2)^2}{(1-\sigma^2)^2} \end{aligned} \quad (9.31)$$

Le facteur de bruit est donc:

$$F_{1PIA} = 2 - \frac{1}{G} + 2\frac{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}{G} \quad (9.32)$$

Pour accéder au facteur de bruit normalisé nous écrivons:

$$\tilde{F}_{1PIA} = \frac{F_{1PIA}}{G(\sigma=0)} = \frac{4\gamma_e\gamma_s}{\gamma^2} \times F_{1PIA} = \frac{1}{\tilde{G}} + \frac{8\gamma_s}{\gamma} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\tilde{G}}}\right) \quad (9.33)$$

Là aussi nous retrouvons les résultats obtenus au chapitre précédent, mais maintenant par une autre méthode.

## D Quel OPO pour optimiser le facteur de bruit?

Dans le chapitre précédent nous avons montré comment notre système actuel n'était pas encore optimisé pour réaliser une "véritable" amplification sans bruit, puisque pour le moment nous ne tenons pas compte de la transmission à vide de la cavité. Nos mesures constituent une première étape, prouvant que notre processus d'amplification ajoute moins de bruit qu'un système équivalent en termes de pertes, mais fonctionnant en configuration insensible à la phase.

Une prochaine étape pourra être la réalisation d'un amplificateur permettant d'effectuer de "véritables" mesures de rapport signal-à-bruit. Forts des expressions de facteur de bruit trouvées au paragraphe précédent, nous allons tenter de définir une géométrie d'OPO propice à l'amplification sans bruit d'images (dans cette nouvelle configuration le facteur de bruit pourra être calculé en entrée et en sortie du système, sans passer par des mesures de facteur de bruit normalisé).

### D.1 Dégénérescence de la cavité

La degré de dégénérescence transverse est le premier point à considérer. En effet si l'on veut effectuer des mesures en entrée et en sortie du système, il faut que la cavité ne déforme

pas l'image, sans quoi les mesures ne sont plus valables que pour une certaine classe d'images (celles transmises par la cavité). Par exemple en cavité héli-confocale, nous avons vu que la cavité ne laisse passer qu'un seul mode pair (ou impair) sur deux (voir chapitre 2): pour qu'une image ne soit pas déformée elle doit nécessairement être auto-transformée pour la transformée de Fourier. Ceci restreint donc énormément la plage de fonctionnement de la cavité.

Pour l'amplification d'images, l'utilisation d'une cavité confocale ou auto-imageante est donc la meilleure solution. La cavité auto-imageante permet de transmettre toutes formes d'images; la cavité confocale les images de symétrie paire ou impaire.

## D.2 Optimisation des caractéristiques de la cavité

Lors d'une expérience de génération de photons jumeaux ou d'états comprimés, les miroirs de la cavité OPO sont choisis de telle manière que "les pertes utiles" (transmission du miroir de sortie) soient proches des pertes totales:  $\frac{\gamma_s}{\gamma} \simeq 1$  (voir notations du chapitre 8:  $\gamma_s$  représente le coefficient de transmission du miroir de sortie). Pour s'en convaincre, on se reportera aux formules (8.33, 8.34, 8.52, 8.53). Dans ces conditions les faisceaux en sortie de notre OPO ont un taux de compression maximum, et ceci indépendamment de la géométrie de la cavité (linéaire ou en anneau).

On peut donc optimiser les paramètres de la cavité pour maximiser la compression. Peut-on faire de même pour l'amplification sans bruit?

## D.3 Modèle avec entrée et sortie sur le même miroir

Comparons les formules de facteur de bruit pour le modèle en anneau avec entrée/sortie séparées (9.22) et le modèle avec entrée et sortie sur le même miroir de couplage (9.24). Nous voyons que dans le cas où entrée et sortie sont sur le même miroir, il y a une "voie" d'entrée de bruit en moins (le miroir de sortie): cette configuration est celle qui ajoute le moins de bruit lors du processus d'amplification. C'est d'ailleurs celle utilisée dans les articles théoriques ([Kolobov95],[Mancini00]), puisque dans le cas idéal sans pertes dans la cavité, on est dans le cas de préservation du facteur de bruit ( $F = 1$  quel que soit le gain).

On peut envisager, pour réaliser un tel système avec une seule voie d'entrée et de sortie, d'utiliser une cavité en anneau avec trois ou quatre miroirs et au moins deux lentilles (deux pour la cavité confocale, trois pour la cavité auto-imageante). Cependant l'ajout de nombreux miroirs diminue la stabilité de l'expérience et augmente les pertes intrinsèques à la cavité.

Pour contourner ces problèmes, on pourrait utiliser une cavité linéaire avec à l'entrée un circulateur optique. Dans cette configuration le miroir d'entrée joue le rôle du miroir de couplage. Le miroir de sortie doit être HR pour toutes les longueurs d'ondes. Ce type de configuration a déjà été réalisée ([Zhang:01], [MacKenzie02]), mais il est à remarquer qu'elle pose bon nombre de problèmes lors de l'utilisation d'un cristal de type II, et si nous voulons amplifier des images. En effet si on utilise un rotateur de Faraday comme circulateur optique, l'image que nous devons amplifier devra être assez collimatée pour ne pas être déformée lors

du passage dans le circulateur. Le circulateur jouera donc bien souvent le rôle d'un filtre spatial. De plus les isolateurs optiques ont une transmission médiocre, ce qui est rédhibitoire pour les expériences d'optique quantique continues.

#### D.4 Modèle avec entrée et sortie sur des miroirs différents

La mise en oeuvre expérimentale d'une cavité avec même miroir d'entrée et de sortie étant difficile, comment optimiser les caractéristiques d'une cavité linéaire pour l'amplification sans bruit d'images?

##### D.4.1 Cavité adaptée en impédance

A priori, il semble logique au départ de privilégier une cavité "adaptée en impédance" ( $\gamma_e = \gamma_s \gg \gamma_c$ ): en effet dans ce cas le rapport signal-à-bruit n'est pas dégradé par la présence de la cavité (dans ce cas  $F = 1$  et  $G = 1$  lorsque  $\sigma = 0$ ).

Dans ce cas le facteur de bruit du système est donné par:

$$F_{imp} = 2 + \frac{1}{G} - \frac{2}{\sqrt{G}} \quad (9.34)$$

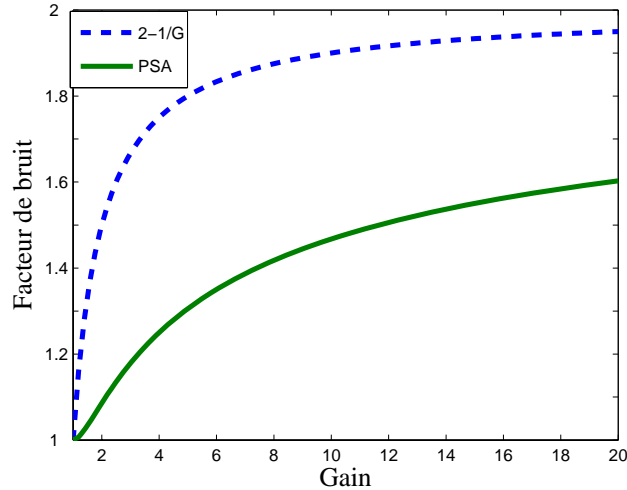


Fig. 9.2: Evolution du facteur de bruit en fonction du gain pour une cavité adaptée en impédance (courbe PSA). La limite du facteur de bruit pour une amplification insensible à la phase est représentée en pointillés

L'écart  $\varepsilon$  au cas insensible à la phase est donné par:

$$\varepsilon = 2 - \frac{1}{G} - F_{imp} = 2\left[\sqrt{\frac{1}{G}} - \frac{1}{G}\right] \geq 0 \quad (9.35)$$

Ainsi, dans le cas d'une cavité adaptée en impédance, le facteur de bruit dans le cas sensible à la phase est toujours inférieur à la limite de  $2 - 1/G$  (comme nous pouvons le voir sur la figure 9.2), cependant pour des forts gains on voit que le facteur de bruit se rapproche "dangereusement" du cas insensible à la phase. Existe-t-il des cavités aux meilleures performances?

#### D.4.2 Cavités optimisées pour un gain

Pour comparer les performances de différentes cavités, on peut se donner un gain  $G$  donné (donc une puissance de pompe et des pertes totales  $\gamma = \gamma_s + \gamma_e$  données) et chercher à minimiser son facteur de bruit en fonction du rapport  $\frac{\gamma_s}{\gamma_e}$ . En posant  $x = \frac{\gamma_s}{\gamma_e}$ , il faut donc chercher le minimum de la fonction:

$$F(x) = 1 + x + \frac{1}{G} - 2\sqrt{\frac{x}{G}} \quad (9.36)$$

Ce minimum est atteint pour  $x = \frac{\gamma_e}{\gamma_s} = \frac{1}{G}$  et dans ce cas  $F = 1$ . La cavité adaptée en impédance est donc la meilleure cavité pour un gain de 1. Nous voyons donc que pour optimiser le rapport signal à bruit de notre système les caractéristiques des miroirs doivent être choisies en fonction du gain escompté. Sur la figure 9.3, nous avons représenté l'évolution du facteur de bruit d'un amplificateur optimisé pour le gain  $G = 4$  (gain qui correspond à nos valeurs expérimentales). Pour des faibles valeurs de gain ( $G < 2$ ), le facteur de bruit est élevé. Par contre pour des valeurs supérieures ( $G \geq 3$ ), nous voyons que le facteur de bruit est bien réduit comparé au cas de la cavité adaptée en impédance. Même pour un gain infini, le facteur de bruit reste raisonnable (lorsque  $G \rightarrow +\infty$ ,  $F \rightarrow 1,25$ ). On a donc tout intérêt à bien choisir la valeur des coefficients de transmission des miroirs. Dans le cas d'une optimisation pour un gain de 4, on doit avoir  $\frac{\gamma_s}{\gamma_e} = \frac{1}{4}$ : ce choix de traitement est réaliste et peut être mis en oeuvre expérimentalement.

Il existe cependant une contrainte à l'optimisation des performances de l'amplificateur: plus on souhaite avoir un gain important plus on s'écarte du cas de la cavité adaptée en impédance, et plus on devra fonctionner proche du seuil pour atteindre les valeurs de gain escomptées. On peut voir cet effet sur la figure 9.4, où on a tracé l'évolution du gain et du facteur de bruit en fonction de la puissance de pompe normalisée au seuil dans le cas d'un OPO adapté en impédance et dans le cas de l'OPO optimisé pour le gain de 4. Pour le cas optimisé, on peut voir que pour avoir un gain de 1, on doit avoir  $\sigma \simeq 0,22$  et pour avoir un gain de 4, on doit avoir  $\sigma \simeq 0,6$ . Dans le cas optimisé il faut donc travailler plus proche du seuil d'oscillation. Malheureusement le fonctionnement de l'amplificateur est d'autant plus instable que l'on se rapproche du seuil. L'optimisation du facteur de bruit ne peut se faire sans contrepartie.

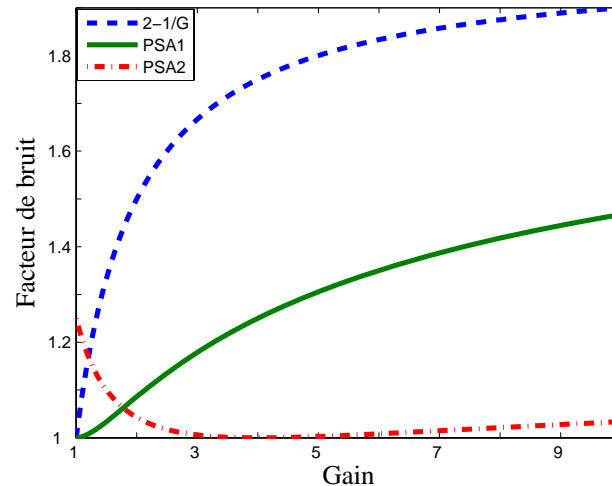


Fig. 9.3: Evolution du facteur de bruit en fonction du gain pour une cavité optimisée pour le gain  $G = 4$  (courbe PSA2). En comparaison, on trace la courbe pour une cavité adaptée en impédance (courbe PSA1)

## Conclusion

Dans ce chapitre, définissant des relations entrée/sortie sensibles et insensibles à la phase, nous avons obtenu des formules compactes de facteur de bruit d'un système linéaire. Ce formalisme nous a permis d'identifier les différents termes intervenant dans le facteur de bruit d'un OPO monomode sous le seuil d'oscillation. Par cette méthode nous retrouvons les résultats de facteur de bruit normalisé du chapitre précédent, mais cette fois avec une méthode plus élégante.

Pour finir, nous nous sommes attachés à optimiser les caractéristiques d'un OPO pour l'amplification sans bruit d'images en vue d'expériences futures. Nous avons montré que la cavité avec un seul miroir de couplage (miroir d'entrée et de sortie du faisceau) est celle qui en théorie ajoute le moins de bruit. Cette cavité est cependant difficile à mettre en place expérimentalement, c'est pourquoi nous nous sommes intéressés aux cavités linéaires (bien modélisées par une cavité en anneau avec entrée et sortie sur des miroirs différents). Dans ce cas nous avons montré que le choix des miroirs d'entrée et de sortie est crucial en vue de l'obtention d'un facteur de bruit aussi réduit que possible.

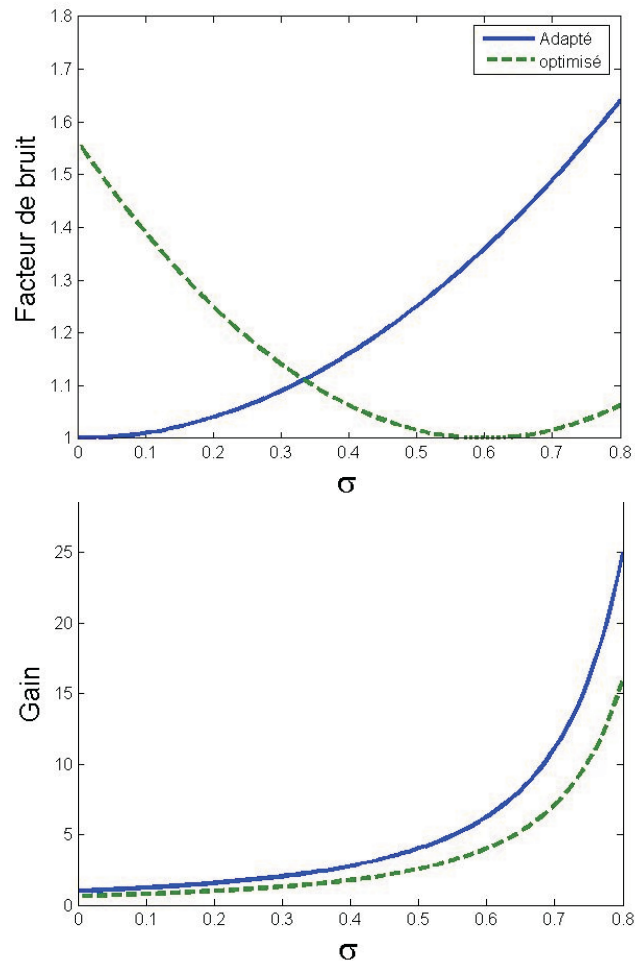


Fig. 9.4: Evolution du facteur de bruit et du gain en fonction de la puissance de pompe normalisée au seuil  $\sigma$ . On compare les résultats d'une cavité adaptée en impédance et d'une cavité optimisée pour un gain de 4



*Quatrième partie*

**Amplification sans bruit à l'aide  
d'un OPO sous le seuil: expérience**





---

# Techniques expérimentales

---

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Les sources, le filtrage</b> . . . . .	<b>168</b>
A.1	L'ancien système de sources . . . . .	168
A.2	Le laser Diabolo . . . . .	171
A.3	La cavité de filtrage . . . . .	172
<b>B</b>	<b>Détection et analyse du bruit</b> . . . . .	<b>173</b>
B.1	Caméra CCD . . . . .	175
B.2	Photodiodes . . . . .	175
B.3	Analyse du bruit . . . . .	176
<b>C</b>	<b>Asservissements</b> . . . . .	<b>178</b>
C.1	Isolation passive . . . . .	178
C.2	Asservissement en température . . . . .	178
C.3	Asservissement des cavités . . . . .	179
C.4	Asservissement des phases relatives . . . . .	180

---

## Introduction

Dans ce chapitre nous présenterons les différentes techniques expérimentales utilisées pendant ce travail de thèse et qui interviennent de manière générale dans une expérience d'optique quantique. Pour réaliser un OPO nous avons besoin de deux sources cohérentes (une à la fréquence  $2\omega$ , la pompe, l'autre à la fréquence  $\omega$ , pour générer un signal), stables et dont le bruit correspond à la limite quantique standard. Un élément important pour notre expérience est la nécessité d'avoir une grande puissance de pompe pour pouvoir amplifier un grand nombre de modes transverses. Cet impératif de puissance ne doit cependant pas aller au détriment

	Mephisto 1200
Puissance (mW)	1250
Largeur spectrale	<1 kHz/100ms
Dérive en fréquence	<45 MHz/3h
Bruit d'intensité relatif (dB)	<-110
Excursion en fréquence (PZT)	100 Mhz

TAB. 10.1: *Caractéristiques du laser commercial Méphisto de la firme allemande Innolight*

de la stabilité de l'expérience. Travaillant sur le bruit quantique de la lumière, les sources de bruit technique, "classique", doivent être éliminées.

Dans une première partie, nous présenterons les deux types de sources laser utilisées lors de ma thèse ainsi que leur filtrage fréquentiel. Ensuite une deuxième partie est consacrée à la détection des signaux ainsi qu'à l'analyse du bruit d'un faisceau. On présentera plus particulièrement une méthode d'acquisition informatique qui nous a permis d'étudier le bruit sur la somme et sur la différences des fluctuations des faisceaux signal et complémentaire émis par un OPO (voir chapitre 11). Pour finir, la dernière partie est consacrée aux différentes techniques d'asservissement (température, longueur de cavité, phase relative) qui permettent d'assurer la stabilité de l'expérience.

## A Les sources, le filtrage

### A.1 L'ancien système de sources

Durant les deux premières années de ce travail nous avons travaillé avec un système de sources "maison", car jusqu'alors aucune source commerciale ne possédait les caractéristiques de puissance, de stabilité et de pureté modale escomptées à  $532nm$ . Ce système est composé d'un couple de lasers maître/esclave, où un laser primaire dit "maître", stable et monomode, injecte un laser secondaire dit "esclave" de plus forte puissance, afin de forcer son fonctionnement sur le mode du laser "maître". En sortie de ce système, une grande partie de la puissance sert à injecter une cavité de doublage.

Nous décrivons donc rapidement les trois éléments de la source "maison". Pour plus de détail, on pourra se reporter à [Gigan].

#### A.1.1 Le laser maître

Le laser "maître" est un laser commercial Nd:YAG, "Méphisto" de la firme allemande Innolight. Les caractéristiques de ce laser sont résumées dans le tableau 10.1.

La stabilité et la pureté de ce laser est primordiale pour l'ensemble de l'expérience puisqu'il va servir à injecter et à asservir plusieurs cavités. La pureté spatiale du faisceau (très peu

d'astigmatisme, faisceau quasiment à la limite de la diffraction), ainsi que le fonctionnement monomode longitudinal sont obtenus grâce à une géométrie de cavité en anneau non plane (non-planar ring cavity ou NPRO). Le barreau de Nd:YAG est pompé par des diodes laser qui, comparativement à des lampes flash, ont une efficacité d'absorption bien meilleure (car elles ont un spectre d'émission monochromatique), d'où des effets thermiques réduits. La stabilité en fréquence est due au fait que la cavité est monolithique, et que la température des diodes laser et du cristal de Nd:YAG est contrôlée précisément.

A la sortie du laser on place un isolateur optique afin d'éviter les phénomènes de retour qui peuvent déstabiliser le laser. On ajoute également un modulateur électro-optique (Gsanger LM0202-PHAS) qui permet d'ajouter une modulation de phase très importante à 14,7 MHz. Cette modulation permet de réaliser une partie de nos asservissements.

### A.1.2 Laser esclave

Ce laser est constitué d'un barreau de Nd:YAG pompé par une lampe flash, et refroidi par eau, de marque Spectron. Placé en cavité linéaire le barreau est capable de délivrer plusieurs dizaines de Watts à 1064 nm, mais est très multimode, tant spatialement qu'en fréquence. On le place dans une cavité en anneau à 4 miroirs plans, et à un seul miroir de couplage. Cette cavité est a priori instable, mais la lampe flash crée un fort gradient de température dans le barreau, donc une lentille thermique qui stabilise la cavité.

Dans cette configuration le laser esclave fournit environ 2 à 3 Watts à 1064 nm dans chacun des deux sens de rotation possibles de la cavité. L'asservissement sur le laser esclave consiste à injecter sur le mode  $TEM_{00}$  de la cavité suffisamment de puissance, et à ajouter des pertes sur tous les autres modes (grâce à un diaphragme), afin de favoriser le mode qu'on injecte. De cette manière, le laser ne peut laser que sur ce mode, en amplifiant l'injection et non plus l'émission spontanée (voir figure 10.1).

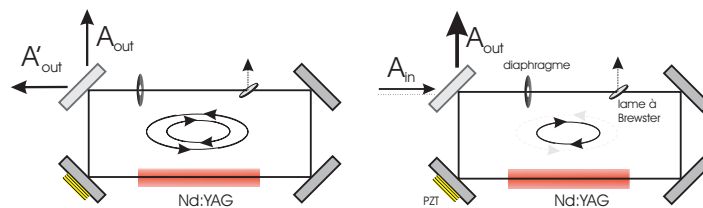


Fig. 10.1: *A gauche: sans injection, le laser esclave n'a pas de direction privilégiée donc lase dans les deux sens, et est très multimode. À droite: injecté, il ne lase que dans le sens imposé par l'injection, en l'amplifiant*

La cavité est asservie en longueur sur la fréquence du laser maître par une cale piézo-électrique agissant sur un des miroirs. Cet asservissement est réalisé par la méthode Pound-Drever-Hall (voir plus loin pour une description complète de cette méthode C.3) grâce à la

modulation de phase à 14.7 MHz sur le faisceau.

Une fois le laser esclave bien injecté, et asservi, on dispose en sortie de ce laser de 4 à 6 W à 1064 nm, avec la même pureté spectrale que le laser de départ. Cette puissance est suffisante pour le doublage et pour l'injection.

### A.1.3 Cavité de doublage

La plus grande partie de la puissance laser issue du laser esclave va être doublée afin de nous fournir la puissance de pompe nécessaire à 532 nm. Après avoir prélevé la partie nécessaire à l'injection, on envoie entre 3 et 4 Watts de faisceau infrarouge à 1064 nm vers la cavité de doublage. Celle-ci, représentée sur la figure 10.2 est constituée d'un cristal de  $LiNbO_3$  dopé MgO, coupé pour un accord de phase non critique de type I, régulé en température vers  $100^\circ C$ . La face arrière du cristal est traitée HR (Haute-Réflexivité) pour 1064 et 532 nm, et constitue la face arrière de la cavité. L'entrée de la cavité est constituée par un miroir plan convexe traité HR à 1064nm et antireflet à 532 nm. Cette cavité est donc résonnante pour l'infrarouge mais pas pour le vert et est donc parfaitement adaptée au doublage de fréquence  $1064 + 1064 \rightarrow 532$ .

On utilise pour l'asservir la méthode des bandes latérales (voir C.3) sur la modulation à 14,7 MHz sur le faisceau infrarouge résiduel transmis à travers le traitement HR déposé sur le fond du cristal.

Une lame dichroïque placée avant la cavité permet de séparer le faisceau à 532 nm (réfléchi) du faisceau 1064 nm (transmis) .

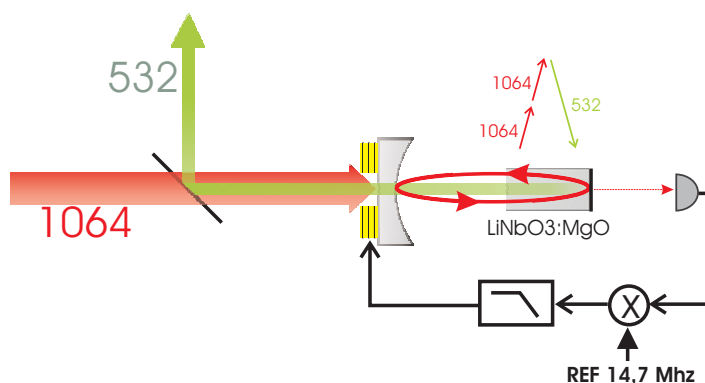


Fig. 10.2: Schéma de la cavité de doublage

### A.1.4 Stabilité générale du système de sources "maison"

Le système de sources "maison" a permis pendant une dizaine d'années de réaliser des expériences d'optique quantique multimode nécessitant une forte puissance de pompe. Sans ce

dispositif, rien n'aurait pu être fait puisque aucune source commerciale permettait d'atteindre les puissances escomptées.

Cependant ce système était extrêmement difficile à stabiliser (notamment le laser esclave ainsi que la cavité de doublage), si bien que l'on passait davantage de temps à régler les sources que ce qui nous intéressait, c'est-à-dire l'oscillateur paramétrique optique.

## A.2 Le laser Diabolo

Pour pallier les difficultés inhérentes à notre source "maison", nous avons acheté en juin 2005 un laser "Diabolo" commercial de la société allemande "Innolight" possédant deux sorties cohérentes, à 1064 nm ainsi qu'à 532 nm. Ce modèle de laser existait déjà bien avant notre achat mais ne possédait pas encore les caractéristiques de puissance acceptables pour notre expérience. L'achat d'un tel laser a permis de simplifier grandement notre expérience ainsi que garantir une stabilité générale beaucoup plus importante, rendant des mesures quantiques réalisables.

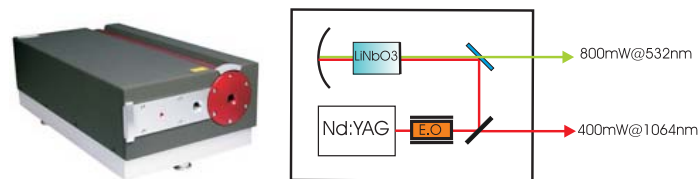


Fig. 10.3: A gauche: Photographie du laser Diabolo de la société Innolight. A droite: Schéma de principe du laser Diabolo

Le schéma de principe de ce laser est représenté sur la figure 10.3. Le laser Diabolo est un laser Nd:YAG pompé par des diodes à 808 nm et conçu selon une structure monolithique en anneau non planaire et délivre une puissance de 2W à 1064 nm. La largeur de raie est de 1 kHz sur 100 ms et la longueur de cohérence dépasse le kilomètre. Environ 400 mW d'infrarouge sont prélevés, constituant ainsi ce que l'on appellera notre signal, le reste est injecté dans une cavité de doublage semi-monolithique construite autour d'un cristal de Niobate de Lithium. Cette cavité est asservie par la méthode Pound-Drever-Hall à l'aide d'une modulation de phase à 12 MHz réalisée à la sortie du laser. En sortie, nous avons environ 800mW à 532nm.

Ce laser à l'avantage d'être extrêmement stable et de peu se dérégler. La présence d'une modulation de phase à 12 MHz à 1064 nm ainsi qu'à 532 nm est très intéressante puisque ces différentes modulations pourront nous servir pour d'autres asservissements par la suite, et ceci sans ajout éventuel d'autres modulations.

Une autre propriété intéressante du Diabolo est sa bonne accordabilité en fréquence. Le cristal de Nd:YAG est intercalé entre un élément Peltier permettant un contrôle en température ainsi qu'un module piézoélectrique agissant par contrainte mécanique. Ces deux éléments

permettent de changer l'indice du cristal de Niobate de Lithium et donc la longueur optique de la cavité. Ces deux techniques permettent d'explorer plusieurs intervalles spectraux libres de la cavité laser. Cette propriété n'est pas exploitée dans notre expérience mais l'a été dans la thèse [LauratPhD].

### A.3 La cavité de filtrage

Dans les expériences d'optique quantique, on veut que l'unique source de bruit soit le bruit quantique. Pour cela, il faut s'affranchir du bruit technique, au moins aux fréquences d'analyse. Le laser Diabolo, malgré son extrême stabilité, possède un bruit technique basse fréquence important dû aux perturbations acoustiques, thermiques, électriques et une oscillation de relaxation vers 1 MHz. Le faisceau émis est au bruit quantique standard vers 10 MHz.

Pour diminuer la fréquence à laquelle on est au bruit quantique standard, on utilise une cavité de filtrage ("mode-cleaner") qui se comporte comme un filtre passe-bas en transmission et réfléchit les composantes dont la fréquence est plus grande que la bande passante. Lorsque l'on considère une cavité triangulaire (qui a l'avantage d'éviter les retours) dont les transmissions sont notées  $T_1$  (miroirs d'entrée),  $T_2$  (sortie),  $T_3$  (autre miroir), la finesse  $F$ , l'intervalle spectral libre  $I$ , la largeur à mi-hauteur  $\Delta$  et la transmission  $T$  s'expriment comme:

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{2\pi}{T_1 + T_2 + T_3} \\
 I &= \frac{c}{L} \\
 \Delta &= \frac{I}{F} = \frac{c(T_1 + T_2 + T_3)}{2\pi L} \\
 T &= \frac{4T_1T_2}{(T_1 + T_2 + T_3)^2}
 \end{aligned} \tag{10.1}$$

On remarque que la fréquence de coupure est d'autant plus basse que la cavité est longue et la finesse élevée. Pour avoir une transmission élevée lors de cette opération de filtrage, nous voyons que les transmissions sur les miroirs d'entrée et de sortie doivent être les mêmes et que le troisième miroir doit avoir une transmission aussi faible que possible. On voit que dans le cas de cavité de haute finesse la condition sur le troisième miroir est difficile à obtenir puisque les pertes sur les deux autres miroirs sont déjà faibles. De très bons traitements sont nécessaires.

Nous avons réalisé une cavité de filtrage en Invar, qui permet de limiter les fluctuations de longueur dues au changement de température dans la pièce. La configuration compacte, massive, assure une stabilité mécanique importante (la cavité peut rester pendant plusieurs jours asservie). La longueur totale de la cavité est d'environ 40 cm, et les caractéristiques des miroirs (Research Electro-Optic) sont résumées dans le tableau 10.2. De part la géométrie de la cavité, utilisant deux miroirs plans et un miroir sphérique, la finesse dépend de la

	$M_1, M_2$	$M_3$
Rayon de courbure	plan $R = \infty$	Concave -1m
Diamètre	1 pouce	1/2 pouce
Transmission polarisation p	non fournie	>50 ppm
Transmission polarisation s	700 ppm	>50 ppm

TAB. 10.2: *Caractéristiques constructeur des miroirs de la cavité de filtrage. Les polarisations p et s désignent les polarisation respectivement parallèles et perpendiculaires au plan d'incidence du faisceau avec le miroir à 45°.*

	polarisation p	polarisation s
Finesse théorique	non fournie	4300
Finesse mesurée	200	2500
Fréquence de coupure	3.7 Mhz	300 kHz
Transmission théorique	~ 100%	96.5 %
Transmission mesurée	80 %	55 %

TAB. 10.3: *Finesse et transmission de la cavité de filtrage*

polarisation. Le waist propre de la cavité est situé au plus loin du miroir courbe, c'est à dire à mi-chemin des deux miroirs plans, et vaut environ  $w_0 = 400\mu m$ . Cette cavité est parfaitement non dégénérée: un seul mode transverse est transmis par la cavité. Les pics de transmission de cette cavité sont représentés sur la figure 10.5. La cavité est asservie par la méthode Pound-Drever-Hall en utilisant la fraction du faisceau réfléchi sur le miroir d'entrée. Cet asservissement se fait grâce à la modulation à 12 MHz présente sur le faisceau infra-rouge. Le schéma de principe d'une telle cavité ainsi que de son module d'asservissement est représenté sur la figure 10.4.

Les valeurs expérimentales des finesesses et des transmissions sont représentées sur le tableau 10.3.

Nous avons travaillé avec la basse finesse qui nous a permis de ne pas perdre trop de puissance. Dans les conditions de puissance de notre expérience, l'utilisation d'une telle finesse nous assurait que le faisceau en sortie de la cavité de filtrage possédait des fluctuations au bruit quantique standard pour nos fréquences d'analyse (4.5 MHz-5.5 MHz).

## B Détection et analyse du bruit

Après passage dans le milieu amplificateur, l'image doit être analysée avec une résolution spatiale, ce qui nécessite d'avoir un détecteur possédant plusieurs pixels. Une caméra CCD permet une étude classique de la répartition transverse de l'intensité d'une image. Par contre en ce qui concerne le bruit, ce type de détecteur ne peut être utilisé en raison d'une



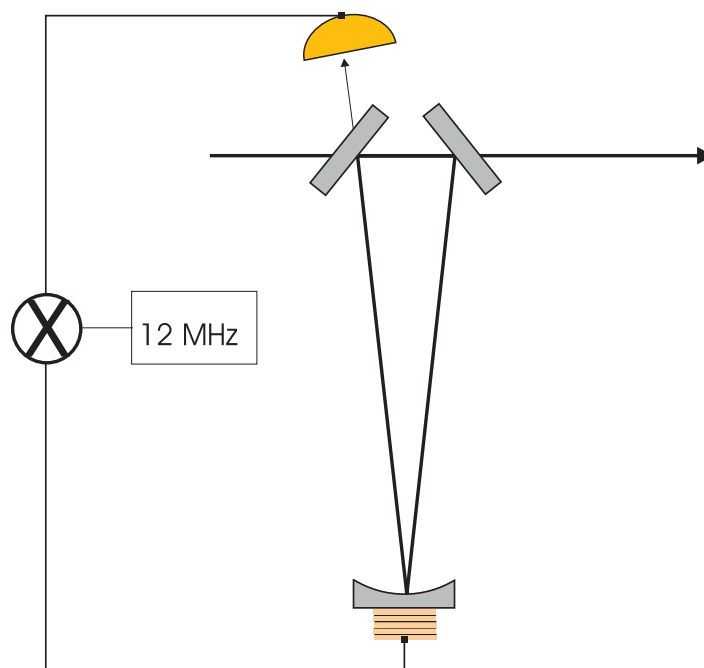


Fig. 10.4: Schéma de principe de la cavité de filtrage. Les miroirs d'entrée et de sortie sont plans. Le troisième miroir possède un rayon de courbure de 1 m. L'asservissement se fait grâce à la méthode Pound-Drever-Hall.

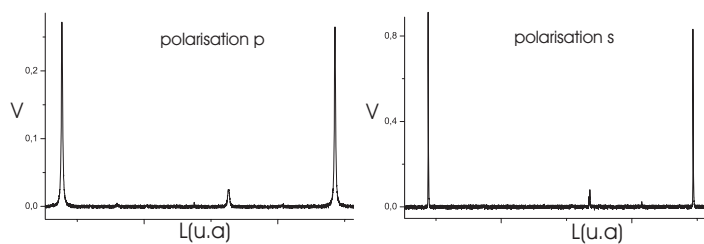


Fig. 10.5: Transmission de la cavité de filtrage pour les deux polarisations  $p$  et  $s$  de la cavité. L'abscisse est la longueur de la cavité (balayée), la distance entre les deux pics étant égale à  $\lambda$ , la hauteur est l'intensité détectée sur la photodiode, en Volts, proportionnelle à l'intensité transmise.

faible bande passante (de l'ordre du kHz). Ainsi pour l'analyse transverse du bruit en régime continu il n'existe pas encore de détecteurs possédant une aussi bonne résolution spatiale que les caméras. Pour l'étude des fluctuations locales, on peut utiliser soit une matrice de photodiodes, soit une photodiode unique avec un filtre spatial.

### B.1 Caméra CCD

Une caméra CCD est une matrice de sites photosensibles. L'image est enregistrée sous la forme de charges électriques contenues dans les sites. La lecture est effectuée de manière **séquentielle** par l'électronique de la caméra (appelée horloge) qui balaye ligne par ligne et point par point les capteurs.

Par conséquent une caméra CCD ne renvoie que la valeur moyenne locale de l'intensité (la fréquence maximum d'analyse est la fréquence de rafraîchissement de l'image). A  $1.06 \mu m$ , c'est le silicium qui est utilisé, et son efficacité quantique de détection est faible. Par conséquent une simple caméra CCD n'est pas l'outil adapté aux mesures quantiques sur des faisceaux continus. Cependant pour une étude qualitative et/ou classique de l'amplification, c'est un outil irremplaçable.

Nous avons utilisé une Caméra CCD de marque PULNIX (CCIR, monochrome, analogique) associée d'une part avec un moniteur standard et un magnétoscope, d'autre part avec un système d'acquisition informatique constitué d'une carte d'acquisition National Instruments PXI-1408 (convertisseur Analogique/Numérique 8 bits, 50 Hz, 48 dB SNR ratio).

Nous obtenons 25 images par secondes  $640*480$  pixels en 256 niveaux d'intensité.

### B.2 Photodiodes

Pour des mesures spatiales du bruit, on peut utiliser des matrices de photodiodes adressées séparément. Dans un tel système, la réponse de chaque voie doit être identique, ce qui nécessite un travail d'équilibrage électronique fastidieux (pour un aperçu de la procédure d'équilibrage on peut se reporter à [MartinelliNote]). Ce travail étant prohibitif lorsque l'on augmente le nombre de voies, seul un détecteur à quatre quadrants a été développé au laboratoire (voir la thèse [TrepPhD]), lors d'une expérience de mesure de petits déplacements).

Lors de ma thèse, je n'ai pas utilisé de tels détecteurs, mais de simples photodiodes, la géométrie à quatre quadrants ne correspondant pas forcément à la structure géométrique du bruit en sortie de la cavité héli-confocale.

Une photodiode n'apporte a priori aucune information transverse sur le faisceau, elle ne mesure que l'intensité totale  $i(t)$  du faisceau qu'elle intercepte. Cependant si on place un masque d'intensité spatial avant la photodiode, on ne mesure que l'intensité et le bruit associés à la partie transmise par le masque. Un masque ne laissant passer qu'une petite zone de l'image (un pixel) nous donnera accès au bruit local de cette zone. On peut ainsi accéder à la répartition spatiale du bruit et des corrélations locales dans le faisceau. On prélève une

partie du faisceau à l'aide d'un diaphragme à iris [Martinelli03], ou encore d'une lame de rasoir (voir par exemple [MaurinPhD]).

Les photodiodes utilisées sont des photodiodes Epitax 500 en InGaAs de  $500\mu\text{m}$  de diamètre. Le rendement quantique des photodiodes est supérieur à 95%, l'incertitude sur cette mesure étant liée à l'utilisation d'un micro-wattmètre de faible précision (environ 5 %). Le circuit électronique des photodiodes est présenté sur la figure 10.6. Une première voie, dite "DC", donne accès à la partie basse fréquence du photocourant (jusqu'à une dizaine de kHz). Une autre voie, haute fréquence est construite autour d'un amplificateur bas bruit permettant d'aller jusqu'à des fréquences de l'ordre de 20 Mhz.

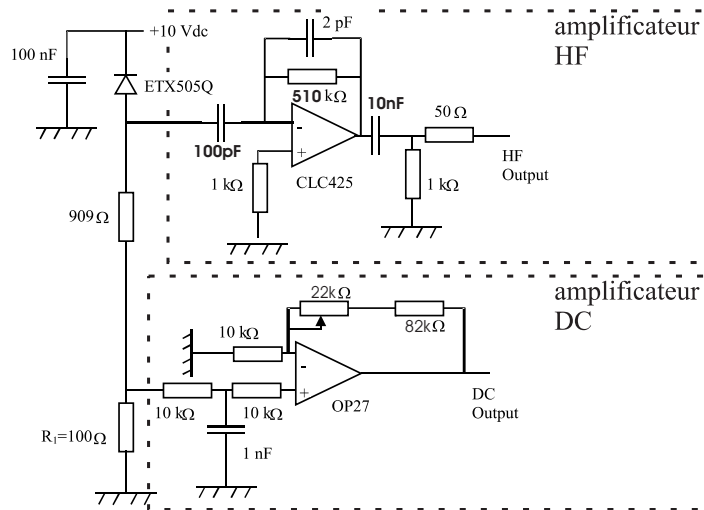


Fig. 10.6: Électronique des photodiodes.

### B.3 Analyse du bruit

Pour analyser les fluctuations des photocourants à haute fréquence, nous avons utilisé un analyseur de spectre (voir [Fabre95] pour plus de détails) qui donne accès à la puissance de bruit d'un faisceau lumineux. Nous avons aussi utilisé une méthode consistant à démoduler le photocourant à une fréquence d'analyse donnée puis à l'échantillonner à l'aide d'une carte d'acquisition informatique. Cette méthode permet une post-sélection des points expérimentaux et ainsi de réaliser des mesures même si la stabilité de l'expérience est moyenne. Par exemple, nous le verrons par la suite, nous avons fait des acquisitions lors de l'amplification d'une image en balayant la phase relative entre pompe, signal et complémentaire. L'intérêt de la détection informatique est, dans ce cas, de pouvoir faire une post sélection en sélectionnant d'une part les points en phase de déamplification et d'autre part ceux en phase d'amplification. Un autre intérêt de la postsélection qui est présenté dans [LauratPhD] est de concevoir des protocoles de mesures conditionnelles sur un état non-classique.

La chaîne d'acquisition, présentée sur la figure 10.7, a été développée au laboratoire par A.Maître, N.Treps, M.Martinelli. Elle comporte:

- Un filtre passe bande (4 MHz-6 MHz), qui permet d'éliminer le bruit à basse fréquence (oscillation de relaxation du laser) et le pic de modulation à 12 MHz. Ceci évite une saturation des amplificateurs bas bruit.
- Un amplificateur très bas bruit Mini-Circuit.
- Un démodulateur qui multiplie le courant amplifié par une porteuse de fréquence choisie (généralement 5 MHz), puis réalise un filtre passe-bas (5 kHz, 25 kHz ou 100 kHz) équivalent à la "Resolution Bandwith" d'un analyseur de spectre.
- Un amplificateur basse fréquence permettant d'adapter le niveau de signal aux caractéristiques de la carte d'acquisition.
- Une carte d'acquisition National Instrument *PCI-6110E*, (noté *CAN*, comme convertisseur analogique numérique). Cette carte possède 4 entrées simultanées avec une fréquence d'échantillonnage maximale de 5 MHz et une résolution de 12 bits.
- L'interface entre la carte d'acquisition et l'ordinateur est réalisée grâce à un programme "LabView". La modification apportée lors de cette thèse est que ces données ne sont plus traitées par Labview qui est un logiciel relativement lent et lourd. Le traitement se fait maintenant grâce à Matlab qui permet une plus grande liberté dans la programmation ainsi qu'une plus grande rapidité.

Il est nécessaire d'équilibrer les voies *HF*, qui en raison des nombreux composants électroniques mis en jeu n'ont pas la même réponse. Pour une revue détaillée de la procédure d'équilibrage, on se reportera à [TrepsPhD], [MartinelliNote]. Nous reviendrons au chapitre 11 sur l'amplification en cavité héli-con focale sur des exemples d'acquisition ainsi que sur le traitement des données.

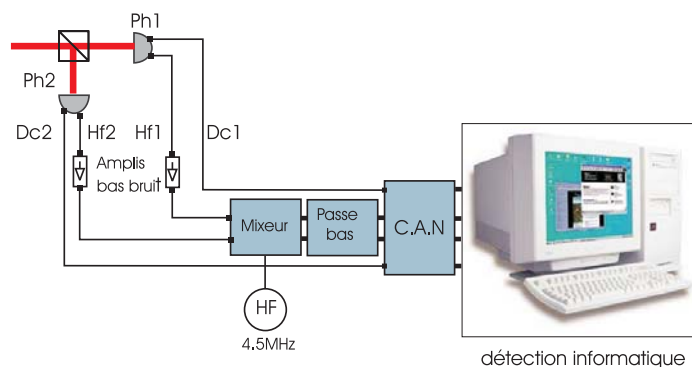


Fig. 10.7: Schéma d'analyse du bruit par détection informatique

## C Asservissements

L'expérience ne compte pas moins de deux cavités, deux cristaux, et plusieurs longueurs qui doivent être asservies à une fraction de longueur d'onde. La stabilité de l'expérience requiert donc le contrôle et l'asservissement d'un grand nombre de paramètres. Nous allons détailler les différentes techniques garantissant une extrême stabilité à notre expérience.

### C.1 Isolation passive

Avant les asservissements, il est nécessaire d'isoler au mieux les systèmes des sources ambiantes de fluctuations (de température, de vibration).

La table optique, sur laquelle nous avons remonté l'expérience, est une RS-1000 de la compagnie Newport (de dimensions  $3,6 \times 1,2m$ ). Une structure en nid d'abeille lui assure en même temps une bonne rigidité et un poids modéré (environ 500 kg), et une atténuation des vibrations. L'isolation sismique est assurée par des pieds I-2000 également de marque Newport. Un système d'amortissement pneumatique assure une importante isolation des vibrations tant verticales qu'horizontales.

Les parties particulièrement sensibles de l'expérience, comme les cavités, sont en plus isolées des vibrations résiduelles de la table par une épaisseur de caoutchouc isolant spécial.

Les mouvements de l'air induisent des changements locaux rapides de pression et de température. Dans la libre propagation d'un faisceau, ces effets sont de peu d'importance. Dans une cavité de finesse  $F$ , la longueur totale de la cavité doit être asservie à une fraction de  $\lambda/F$ . Il est donc important d'éviter les mouvements d'air. Toutes les cavités ont donc été placées dans des boîtes en Plexiglas. Une très légère surpression dans les boîtes (à l'aide d'un flux d'air comprimé) évite les mouvements d'air et assure la propreté de l'ensemble.

### C.2 Asservissement en température

La stabilisation thermique de la pièce se fait grâce à une climatisation (pièce maintenue aux alentours de  $20^\circ C$ ) afin d'éviter la dilatation et le dérèglement de l'expérience lors des changements importants de température. Les cristaux devant être stabilisés en température sont insérés dans des fours en cuivre, eux-mêmes régulés en température (voir plus loin).

Les asservissements en température du cristal laser ainsi que du cristal doubleur  $LiNbO_3$  sont réalisés grâce à une régulation en température intégrée au boîtier d'alimentation.

Les régulations en température utilisées dans les cavités OPO sont d'une extrême importance. Pour l'OPO de type II (chapitre 11), la cavité amplificatrice contient un cristal de KTP, coupé de façon à fonctionner autour de la température ambiante (entre  $20^\circ C$  et  $40^\circ C$ ). Ce cristal est placé dans un four. La température du cristal est contrôlée par une thermistance insérée dans le four, aussi près que possible du cristal. La régulation peut alors se faire grâce à un dispositif à effet Peltier. L'électronique d'asservissement est un P.I.D commercialisé par Innolight. Les contacts thermiques entre le Peltier et le four, entre le Peltier et la source

froide, et entre le four et la thermistance de contrôle sont favorisés par l'emploi d'une pâte conductrice type silicone argenté (Artic Alumina, de ArcticSilver). Cette régulation, associée à l'isolation par une boîte de Plexiglas de la cavité nous a permis de réguler en température autour de  $30^{\circ}\text{C}$  avec une stabilité de la température de l'ordre du  $m\text{K}$ . Cet asservissement est relativement rapide (temps de réponse de l'ordre de la seconde).

Pour l'OPO de type I (chapitre 12), nous utilisons un cristal de  $\text{LiNbO}_3$ , dopé  $\text{MgO}$ . Ce cristal est coupé pour un accord de phase non critique à la température de  $120^{\circ}\text{C}$ . A cette température, un asservissement utilisant l'effet Peltier est impossible. Nous utilisons une régulation en température PID (proportionnel, intégrateur, différentiel) "maison" permettant uniquement de chauffer grâce à une résistance chauffante de  $50\Omega$ . Le signal d'erreur est créé par une thermistance de  $100k\Omega$  à la température ambiante, dont la résistance varie avec la température selon une loi connue. Pour gagner en précision et en rapidité, nous avons construit un four de cuivre le plus petit possible pour limiter la charge à chauffer et ajouté tout autour un boîtier en Téflon garantissant une bonne isolation thermique. Nous n'arrivons pas à obtenir une régulation aussi rapide et précise que dans le cas du *KTP*, mais nous sommes arrivés à une précision de l'ordre de  $10m\text{K}$ .

### C.3 Asservissement des cavités

L'asservissement de la longueur des cavités se fait par la méthode des bandes latérales, aussi appelée méthode Pound-Drever-Hall [Black01],[Drever83]. On pourra en trouver une description détaillée dans [Bachor]. Avant de passer dans la cavité, le faisceau est modulé en phase, à la fréquence  $\omega_L$ : ceci revient à ajouter autour de la fréquence laser  $\omega_L$  des bandes latérales aux fréquences  $\omega_L \pm \Omega$ . Le signal d'erreur est obtenu en démodulant le faisceau réfléchi par la cavité à la fréquence  $\omega_L$ . Il est proportionnel à la dérivée du pic de résonance.

Pour l'étape de démodulation, on utilise un mélangeur ZAD-1 suivi d'un passe-bas type PLP-1.9 (composants Minicircuit). L'ajustement de la phase est réalisé en variant la longueur des câbles BNC. Cependant lorsque nous avons travaillé à des fréquences de modulation où un circuit déphaseur était disponible (Minicircuit JPHAS-18-26 par exemple), nous en avons également utilisé avec des résultats similaires. Une fois le signal démodulé, on obtient un signal d'erreur.

L'électronique d'asservissement est un P.I (Proportionnel-Intégrateur) maison. Le troisième étage différentiel n'est pas vraiment nécessaire à l'asservissement rapide d'une cavité (pas de dérive à long terme à corriger). Il n'a donc pas été inclus.

Le signal d'asservissement final est envoyé sur un amplificateur Haute-Tension, également maison, qui contrôle une cale piézo-électrique (PZT) sur laquelle est fixée un des miroirs de la cavité. On rétro-agit ainsi sur la longueur de la cavité. Le système cale+miroir présentant des résonances mécaniques à quelques kHz, l'amplificateur HT effectue un filtre passe-bas de fréquence de coupure typiquement de l'ordre de quelques kiloHertz.

La cavité de filtrage ainsi que la (ou les) cavité(s) de l'OPO ont été asservies grâce à cette

méthode.

#### C.4 Asservissement des phases relatives

La phase relative entre l'image et la pompe doit être contrôlée précisément afin de réaliser l'amplification dépendante de la phase. Une différence d'une demi-longueur d'onde change l'amplification en déamplification. Par rapport à une cavité, l'asservissement n'a pas à être aussi précis ( $\lambda/2$  dans le cas d'une cavité). Cependant, contrairement à l'asservissement d'une cavité, il n'est pas facile de trouver un signal d'erreur afin d'asservir cette longueur. En fait le seul signal d'erreur disponible expérimentalement vient du phénomène qu'on cherche à asservir, c'est à dire de l'amplification elle-même. C'est la méthode utilisée dans [PingKoyLamPhD] afin d'asservir en déamplification le vide comprimé émis par un OPA type I.

Dans notre expérience, la cavité de pompe de l'OPO est asservie grâce à la modulation de phase à 12 MHz présente sur le faisceau vert en sortie du laser. Par contre, lorsqu'il n'y a pas de processus d'amplification, cette modulation de phase n'est pas présente sur le faisceau infra-rouge, puisqu'elle a été éliminée par la cavité de filtrage. Lors du processus d'amplification, cette modulation (portée initialement uniquement par la pompe) va être transférée dans l'infra-rouge: si on démodule le signal infrarouge à 12MHz, on détecte un signal proportionnel à l'amplification. Ce signal permet d'asservir la phase relative. Comparé aux asservissements de cavité, cet asservissement est très sensible à la stabilité générale de l'expérience, l'amplification devant être très stable afin de pouvoir asservir efficacement.

## Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les différentes techniques expérimentales utilisées lors de ce travail de thèse. Au-delà de ce travail, nous avons décrit les éléments de base de toute expérience d'optique quantique en variables continues.

L'achat du laser commercial en remplacement du système de sources "maison" a permis de simplifier grandement l'expérience, d'augmenter sa fiabilité et sa stabilité. Il nous a permis de réaliser des mesures "quantiques" qui sont présentées dans les deux prochains chapitres.

---

# Amplification d'images à l'aide d'un OPO hémi-confocal

---

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>La double cavité</b> . . . . .	<b>182</b>
A.1	Principe, intérêt . . . . .	183
A.2	Configuration expérimentale . . . . .	183
A.3	Les effets de double cavité, une limitation . . . . .	186
<b>B</b>	<b>Amplification en double cavité: étude classique</b> . . . . .	<b>190</b>
B.1	Configuration expérimentale . . . . .	190
B.2	Réglages . . . . .	190
B.3	Transmission d'image . . . . .	191
B.4	Amplification d'image : Résultats classiques . . . . .	194
<b>C</b>	<b>Amplification en double cavité: étude quantique</b> . . . . .	<b>196</b>
C.1	Images jumelles et déamplification d'images . . . . .	198
C.2	Caractérisation du facteur de bruit de l'amplificateur . . . . .	203

---

## Introduction

Dans ce chapitre nous présenterons une étude classique et quantique de l'amplification d'images à l'aide d'une cavité hémi-confocale. Cette expérience est réalisée en configuration de double cavité: les cavités infrarouge et verte de l'OPO sont indépendantes. Dans une première partie, nous présenterons plus particulièrement cette configuration, précisant pourquoi elle se révèle extrêmement avantageuse dans le cas d'une amplification multimode. Dans une



deuxième partie, nous présenterons la caractérisation classique de cet amplificateur. Ces résultats ont été obtenus avant le déménagement et le changement de laser, conjointement avec Sylvain Gigan qui finissait sa thèse. Ils ont donné lieu à un article [Gigan06]: nous montrons que lors du processus d'amplification plusieurs modes transverses sont amplifiés. Dans une troisième partie, nous montrerons des résultats plus récents (obtenus après changement de laser) qui s'attachent à montrer le caractère non classique de l'amplification. Tout d'abord nous reviendrons sur les mesure d'images jumelles en phase d'amplification ainsi que sur les mesures de compression des fluctuations d'intensité sur l'image en phase de déamplification. Pour finir, nous caractériserons le facteur de bruit de notre amplificateur. Ces résultats prouvent le fonctionnement non classique de notre amplificateur et la possibilité d'amplifier sans bruit des images. Cette expérience représente à notre connaissance la première démonstration expérimentale d'une amplification sans bruit d'images en cavité en régime de variables continues.

## A La double cavité

L'utilisation d'un OPO multimode transverse nécessite des puissances de pompe élevées. En effet, l'ordre de grandeur de la puissance de pompe nécessaire pour atteindre le seuil de fonctionnement multimode (nécessaire pour atteindre le seuil de  $N$  modes) dans une cavité dont le seuil monomode est  $I_0$ , sera de:

$$I_N \sim N \times I_0 \tag{11.1}$$

Pour rester dans une gamme de puissance raisonnable, il faut chercher à diminuer le seuil de fonctionnement en régime monomode, donc travailler en cavité triplement résonnante (pour le signal, le complémentaire, la pompe). Une autre contrainte imposée par le fonctionnement multimode est la nécessité d'avoir une pompe large de manière à exciter de nombreux modes transverses (voir [Mancini00], [Lopez05]).

De par ces contraintes, la réalisation d'un OPO multimode transverse en simple cavité (cavité linéaire à deux miroirs sphériques hautement réfléchissants pour la pompe et le signal) est très difficile:

- on ne peut atteindre la longueur de dégénérescence exacte simultanément pour deux longueurs d'ondes en raison des différences d'indice du cristal suivant la longueur d'onde. Ainsi si on est à confocalité pour le signal, la pompe ne le sera pas parfaitement. Il existe donc une contrainte sur la taille du waist de pompe que l'on peut utiliser.
- l'asservissement de la cavité ne peut se faire que sur une longueur d'onde. Pour arriver à la triple dégénérescence, il reste encore une (cas du cristal de type I) ou deux (cas du cristal de type II) résonance(s) à obtenir. Ces contraintes diminuent notablement la stabilité de l'expérience (voir chapitre 12 pour la réalisation d'OPO confocal de type I; pour un OPO confocal type II on se reportera à [Gigan]).

C'est pour pallier ces difficultés que nous avons mis au point une double cavité.

### A.1 Principe, intérêt

Le principe de la double cavité est d'imbriquer des cavités optiques en jouant sur les traitements des miroirs de manière à faire résonner chaque longueur d'onde dans une cavité séparée. Un exemple de double cavité est présenté sur la figure 11.1. Pour une revue

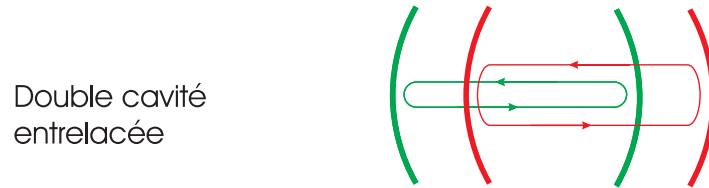


Fig. 11.1: Schéma de principe de l'expérience d'amplification d'image. Le système de source maître-esclave n'est pas représenté.

bibliographique des doubles cavités on se reportera à [Gigan].

L'intérêt d'une telle cavité pour l'OPO multimode est grand.

- Cette configuration permet d'asservir indépendamment les cavités vertes et infra-rouge, rendant ainsi l'expérience beaucoup plus stable.
- En choisissant judicieusement les rayons de courbure des miroirs et les longueurs de cavité, on peut construire une cavité verte de telle manière que son waist propre soit beaucoup plus important que le waist propre de la cavité infra-rouge, permettant ainsi un fonctionnement multimode transverse.

### A.2 Configuration expérimentale

On travaille avec un OPO triplement résonnant, pour la conversion  $2\omega \rightarrow \omega$ . Le cristal doit être placé dans la région où les deux cavités se superposent.

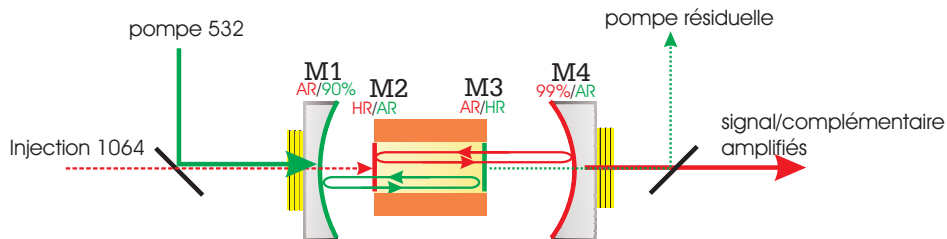


Fig. 11.2: Schéma de la double cavité réalisée expérimentalement. Le rouge/vert correspond aux faisceaux ou traitements à 1064/532 nm.

On a choisi une géométrie où les deux cavités sont entrelacées (voir 11.1). Le schéma de la double cavité que nous avons utilisée est reporté sur la figure 11.2. La cavité verte est entre

les miroirs M1 et M3, et la cavité infrarouge entre les miroirs M2 et M4. On a choisi une configuration expérimentale où deux des miroirs (M2 et M3) sont directement déposés sur les faces du cristal de KTP, ce qui nous évite de travailler avec 4 miroirs plus un cristal, rendant ainsi le montage plus stable, plus compact, et en minimisant le nombre d'interfaces.

### A.2.1 Cristal

On utilise un cristal de KTP (fabriqué et traité par Cristal Laser) taillé pour un accord de phase non-critique. Les traitements des faces entrée et sortie sont rassemblés sur le tableau 11.1.

	face 1 (M2)	face 2 (M3)
Traitement à 532nm	AR (5.25 %)	HR (99.3 %)
Traitement à 1064nm	HR (99.96 %)	AR (0.11 %)

TAB. 11.1: Coefficients de réflexion des faces du cristal de KTP utilisé dans la double cavité

Le cristal est de dimensions  $3 * 3 * 10$  mm et est placé dans un four, qui le maintient à la température de dégénérescence grâce à un module Peltier (voir chapitre 10). L'asservissement en température est très précis (de l'ordre du  $mK$ ) et rapide (temps de réaction de l'ordre de la seconde). L'asservissement en température est un paramètre important car il va nous permettre de faire résonner en même temps signal et complémentaire et donc d'atteindre la triple dégénérescence. Dans un cristal de type II en cavité, à une température donnée, signal et complémentaire ne résonnent généralement pas en même temps car les indices du cristal sont différents selon les deux polarisations. Pour arriver à la dégénérescence, nous utilisons la différence de coefficients thermo-optiques (c'est à dire  $\frac{dn}{dt}$ ) entre signal et complémentaire.

Les coefficients thermo-optiques des trois ondes sont donnés dans le tableau 11.2. Ils ont été calculés à partir des coefficients thermo-optiques des axes propres du cristal ([Dimitriev]) et des équations de Sellmeier.

Les coefficients thermo-optiques pour la pompe et pour le signal sont donc très proches, et assez différents de celui du complémentaire. Lorsque l'on fait varier la température, on change donc la longueur effective de la cavité de manière différente pour les trois ondes. Complémentaire et pompe changent peu l'un par rapport à l'autre, par contre le signal lui varie beaucoup plus en valeur relative.

On dispose donc avec la température du cristal d'un paramètre permettant de changer la position de la résonance du signal relativement aux deux autres.

signal	complémentaire	pompe
$1.6 * 10^{-5}$	$1.3 * 10^{-5}$	$1.3 * 10^{-5}$

TAB. 11.2: Coefficients thermo-optiques du KTP ( en  $K^{-1}$ )

### A.2.2 Miroirs

Les miroirs sont traités pour la longueur d'onde correspondant à la cavité dans laquelle ils sont placés. Néanmoins il est important de noter qu'ils doivent également être traités anti-reflet pour l'autre longueur d'onde. L'injection de l'infrarouge dans la cavité infrarouge traverse la cavité verte. Il est donc nécessaire que cette dernière (et particulièrement M1) ne réfléchisse pas l'infrarouge. Les traitements sont reportés sur le tableau 11.3.

	M1 (face1)	M1 (face2)	M4 (face1)	M4 (face2)
Rayon de courbure	$\infty$	variable	100mm	$\infty$
Traitement à 532nm	AR	90%	6.6%	AR
Traitement à 1064nm	AR	5%	98.93 %	AR

TAB. 11.3: Coefficients de réflexion des miroirs M1 et M4

Pour le miroir M4 de sortie, on utilise un rayon de courbure  $R = 100mm$ . Pour le miroir M1, nous avons choisi un miroir de rayon de courbure 2000 mm et une longueur de cavité de 50 mm. Ceci nous permet d'avoir un waist de pompe relativement grand. La taille du mode  $TEM_{00}$  d'une cavité plan-concave, de longueur  $L$ , dont le rayon de courbure du miroir concave est  $R$ , est donnée par la relation:

$$w_0(R, L, \lambda) = ((R - L) \frac{L\lambda^2}{\pi^2})^{1/4}.$$

Ceci correspond donc dans les conditions de notre expérience à un waist dans le vert de

$$w_{532nm} \sim 230\mu m.$$

Pour caractériser le degré de multimodalité de cette injection, nous pouvons introduire le paramètre

$$b = \frac{w_p^2}{l_{coh}^2}$$

(introduit dans la partie 5 et dans l'article [Lopez05]), qui nous donne le nombre de modes transverses qui vont pouvoir être amplifiés indépendamment. Expérimentalement nous avons  $l_{coh} = \sqrt{\frac{\lambda_c}{\pi n_s}} \simeq 45\mu m$ , donc  $b \sim 25$ . Nous sommes donc bien dans un régime de fonctionnement multimode. Il est à remarquer cependant qu'en raison de l'absorption (1% par passage) dans le vert, il y a création d'une lentille thermique, de focale de l'ordre du mètre qui fera converger le faisceau. Ainsi la valeur de  $b$  donnée n'est pas une valeur précise mais un ordre de grandeur quant au nombre de modes réellement amplifiés.

### A.2.3 Cavité

La cavité verte, qui va de M1 à M3, est une cavité monomode plan-concave de longueur d'environ 50 mm, à waist grand. La cavité infrarouge est une cavité multimode, allant du

miroir plan M2 au miroir M4 de rayon de courbure  $R = 100mm$ . La cavité multimode la plus simple à partir de ces deux miroirs est la cavité hémi-confocale, où les deux miroirs sont séparés d'une distance  $L = 50mm$ . Cette cavité a été étudiée en détail au chapitre 2. Les finesses des deux cavités sont reportées dans le tableau A.2.3. Pour calculer les pertes liées à la présence du cristal, on compare les finesses des cavités verte et infrarouge avec et sans cristal. La finesse de la cavité "sans cristal" est obtenue en retournant le cristal: dans ce cas, inversant M2 et M3, les cavités vertes et infrarouge sont de vraies cavités Pérot-Fabry (pas de présence de cristal à l'intérieur de la cavité). Les valeurs des finesses des cavités retournées (sans cristal) ainsi que les pertes liées au cristal sont reportées sur le tableau A.2.3.

	Cavité verte	Cavité IR
Finesse cristal retourné	60	450
Coefficient de transmission sortie	10%	1%
Pertes $\gamma_e$ sur le miroir HR	$\simeq 5\%$	0.4%
Finesse avec cristal	39	350
Pertes $\gamma_c$ dues au cristal	5%	0.4%
Bande passante ( $L = 50mm$ )	150 MHz	17 MHz

TAB. 11.4: *Finesse et pertes mesurées des cavités verte et infrarouge*

Ces mesures de finesse (et donc des pertes) seront très importantes par la suite pour confronter nos résultats expérimentaux aux prévisions théoriques. Il est à noter que la précision sur les mesures de finesse est d'environ 5%.

### A.3 Les effets de double cavité, une limitation

L'entrelacement de deux cavités optiques résonnantes pour des longueurs d'ondes différentes ainsi que l'imperfection des traitements optiques sur les surfaces des miroirs entraîne l'apparition de cavités Fabry-Pérot parasites: des sous cavités. Nous allons détailler l'origine d'un tel phénomène ainsi que ses contraintes sur l'expérience.

#### A.3.1 Origine

L'origine principale des cavités parasites vient des réflexions parasites sur les interfaces où le faisceau arrive à incidence normale. Dans un trajet optique on peut voir apparaître de telles interfaces à la traversée de lames, d'atténuateurs, etc. Entre de telles optiques peut se former une cavité type Fabry-Perot de basse finesse. En inclinant très légèrement les optiques responsables, et en utilisant des optiques traitées anti-reflet, on évite en général facilement ce phénomène.

Dans la double cavité, cet effet est important, et inévitable. Tout d'abord les traitements des miroirs et des faces du cristal se font à deux longueurs d'onde, ils sont donc plus délicats

et la qualité des traitements à chaque longueur d'onde résulte d'un compromis. En particulier les traitements AR sont souvent mauvais. Ainsi dans notre double cavité, le traitement AR à 1064 nm sur M1 n'est que de 5%, et sur le KTP le traitement AR à 532 nm sur M2 est également de 5%. Par conséquent la cavité M1-M2 sera une cavité parasite pour l'infrarouge, extérieure à la cavité de haute finesse pour l'infrarouge (M2-M4). De manière similaire, le miroir M2, placé dans la cavité résonante verte M1-M3, la sépare en deux sous-cavités de basses finesse M1-M2 et M2-M3. Enfin il est bien sûr impossible d'incliner même légèrement les optiques pour éviter ces résonances, puisque ces interfaces sont des miroirs pour l'autre longueur d'onde, et qu'on désalignerait la double cavité.

### A.3.2 Caractérisation

L'expression générale de la finesse pour une cavité linéaire limitée par des miroirs de coefficients de réflexion  $R_1$  et  $R_2$  est:

$$F = \frac{\pi(R_1 R_2)^{1/4}}{1 - \sqrt{R_1 R_2}}$$

Pour une cavité Fabry-Perot très résonnante, l'expression approchée de la finesse est

$$F = \frac{2\pi}{T}$$

où  $T$  représente les pertes totales en intensité sur un tour de la cavité. La transmission d'une telle cavité est donné par [FabreLasers]:

$$T = \left| \frac{E_t}{E_i} \right|^2 = \frac{T_1 T_2}{1 + R_1 R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos(kL)} \quad (11.2)$$

Dans notre cas, toutes les cavités parasites se font entre un miroir  $R_1$  (HR ou très réfléchissant), et un miroir  $R_2$  très réfléchissant. On a reporté les pics de cavité Fabry-Perot pour différentes valeurs de  $R_2$  sur la figure 11.3. Pour une finesse faible, on voit qu'on a pas des pics (comme pour la courbe correspondant à  $R_2 = 80\%$ ), mais une modulation sur l'intensité. Même pour  $R_2 = 0.1\%$ , on voit que l'intensité subit une modulation d'environ 10%, et que cette modulation atteint 50% pour seulement 5% de réflexion sur  $R_2$ . Expérimentalement, on observe cette modulation tant sur l'infrarouge que sur le vert transmis par la double cavité. Lorsque l'on asservit la cavité verte, et qu'on balaie la cavité infrarouge, l'effet de la cavité parasite entre M3 et M4 est représentée sur la figure 11.4.

Pour la cavité infrarouge, on a également une double cavité entre M1 et M2, similaire à celle de la pompe, ceci est représenté sur la figure 11.5. Nous voyons une modulation de l'ordre de 20% de la transmission de la cavité infrarouge en fonction de la longueur de la cavité verte. Par contre le traitement AR à 1064 nm du miroir M3 est très bon, et on n'a pas observé de double cavité entre M2 et M3 pour l'infrarouge.

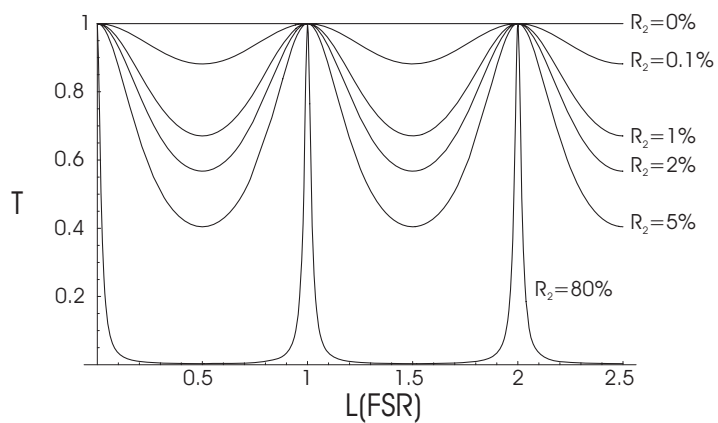


Fig. 11.3: Pics de transmission théorique (normalisé) d'une cavité parasite, avec  $R_1 = 99\%$  et pour différentes valeurs de  $R_2$ .

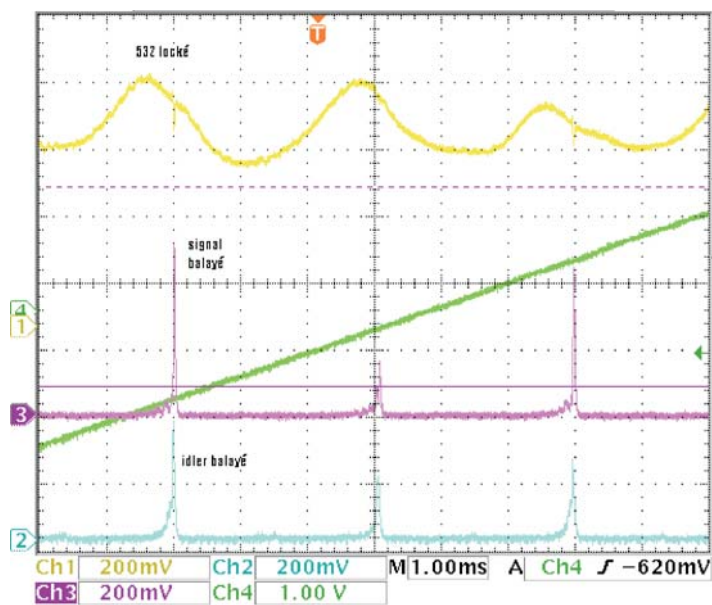


Fig. 11.4: Modulation de l'intensité transmise par la cavité verte asservie, lorsque l'on balaye la longueur de la cavité infrarouge

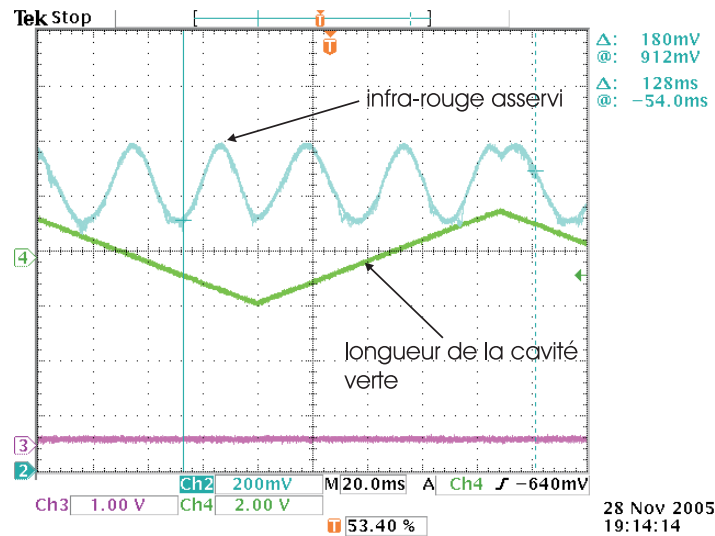


Fig. 11.5: Modulation de l'intensité transmise par la cavité infrarouge asservie, lorsque l'on balaye la longueur de la cavité verte

### A.3.3 Inconvénients

L'inconvénient majeur des cavités Fabry-Perot parasites est que, à puissance de pompe ou d'injection constante, la puissance dans chaque cavité dépend de la longueur de l'autre cavité, de la température, etc. Par conséquent:

- Sur la cavité infrarouge : il est difficile d'avoir une référence de puissance en cavité. Par exemple lorsque l'on cherche à déterminer si on a amplification ou désamplification, le fait de mettre la pompe ou pas va modifier (par effet thermique) les conditions expérimentales, donc le niveau de référence. Il sera donc plus difficile de conclure à l'amplification ou à la désamplification sur la seule comparaison des niveaux moyens sans ou en présence de pompe. Nous verrons comment remédier à ce problème par la suite (voir section calcul du facteur de bruit de l'amplificateur).
- Sur la cavité verte : le problème est identique.
- Sur le seuil de fonctionnement en OPO de la double cavité : une conséquence des deux propriétés précédentes est que, contrairement à une cavité simple, le seuil de la double cavité dépend fortement des cavités parasites.

La solution qui sera retenue pour pallier l'incertitude sur la transmission de la cavité infrarouge sera de travailler à longueur de cavité verte constante, comme nous le verrons par la suite lors des mesures du rapport signal sur bruit.





thermique) et donc à rendre le mode propre plus petit. Il est très difficile d'évaluer la taille réelle du mode propre de la cavité lorsque celle-ci est asservie. Par ailleurs la température dans le cristal modifie la double résonance signal/complémentaire, ainsi que l'effet Fabry-Pérot parasite dans le cristal (entre M2 et M3) pour la pompe, voire désaligne les cavités. Suivant l'adaptation de la pompe, la température, etc, ce système peut donc être très instable.

Expérimentalement on constate même de nombreux phénomènes d'hystéresis lorsque l'on varie la puissance de pompe. Le seuil balayé (sans effets thermiques) est toujours d'environ 25-30 mW. Lorsque à partir de cette configuration on asservit la cavité, suivant le point dans le cristal, la température, etc, on peut très bien ne jamais obtenir le seuil de fonctionnement de la cavité asservie même avec l'intensité maximum de pompe disponible. A l'inverse, on peut aussi se trouver dans un cas où la situation stable est une situation très au-dessus du seuil, donc impropre à l'amplification. Enfin, malgré nos efforts nous n'avons pas pu trouver de méthode fiable et reproductible pour trouver un point de fonctionnement. Néanmoins, en essayant différents points dans le cristal, et différentes températures, on peut trouver des positions et une température où le système peut s'asservir de manière reproductible. De plus si on trouve un point de fonctionnement stable, celui-ci pourra rester asservi pendant plusieurs minutes.

Il faut donc garder à l'esprit, pour l'interprétation des résultats, qu'il est très ardu de trouver un point de fonctionnement pour la triple résonance sous le seuil. De plus, en raison des effets thermiques et des cavités parasites, définir un seuil de fonctionnement, une taille de mode propre ou une intensité moyenne en cavité asservie n'est pas chose aisée.

### B.3 Transmission d'image

Lorsque l'on injecte une image dans la cavité héli-confocale, on a vu au chapitre 2 que si on asservissait la cavité sur la résonance du mode propre  $TEM_{00}$  de la cavité, on récupérerait en transmission la partie paire de l'image, ainsi que la partie paire de sa transformée de Fourier. On va voir ici plus en détail le comportement de cette cavité, plus complexe que la cavité type Fabry-Pérot du chapitre 2, en particulier à cause de la présence d'un cristal, et de la taille transverse finie.

#### B.3.1 Effet du walk-off

L'étude de la transmission d'image à travers la cavité permet de mettre en évidence l'effet du walk-off sur les images, effet différent sur le signal et sur le complémentaire. On a réalisé la transmission par la cavité de différentes images. La cavité étant héli-confocale, l'axe propre de la cavité est aisément repérable : c'est l'axe de symétrie de la figure. On peut voir sur la figure 11.7 que si on injecte une image sur les deux polarisations à la fois, l'axe de symétrie de l'image complémentaire transmise est légèrement décalé verticalement : c'est l'effet du walk-off.

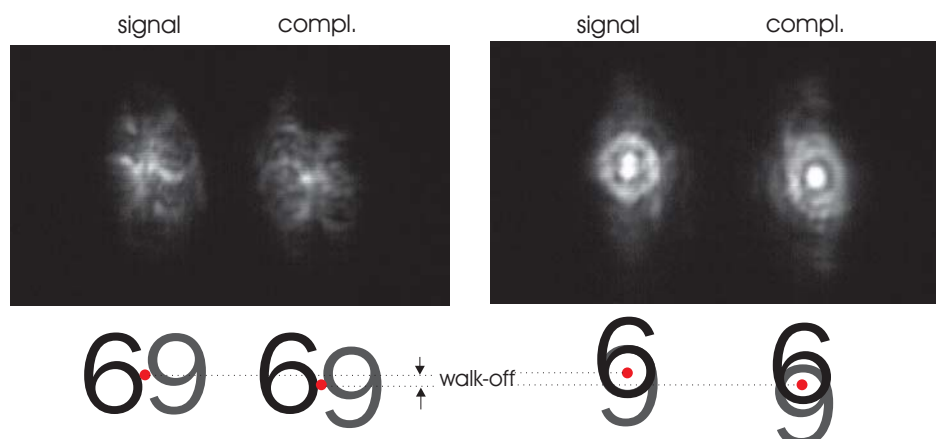


Fig. 11.7: Mise en évidence de l'effet du walk-off sur la transmission d'une image (ici chiffre 6).

Les différentes solutions possibles seraient :

- Injecter l'image par le miroir M4 (lors de la réflexion sur la face HR du cristal, la polarisation subissant le walk-off reviendrait sur ses pas, comme dans un cristal à walk-off compensé).
- Utiliser un cristal à walk-off compensé.
- Compenser le walk-off en ajoutant sur le trajet un cristal de même longueur traité anti-reflet.
- Utiliser un cristal type I, où signal et complémentaire ne subissent plus le walk-off (mais où la pompe continue à le subir).

Pour s'affranchir de ce problème d'imagerie, on pourrait utiliser un cristal à walk-off compensé (on compense l'effet du walk-off en ajoutant un deuxième cristal de même longueur traité anti-reflet, tourné de  $180^\circ$ ) ou bien utiliser un cristal de type I. Dans ce dernier cas, signal et complémentaire ne subiront plus l'effet de walk-off, par contre la pompe continue à le subir.

Pour ne pas être gêné dans la suite de notre étude par ce phénomène, on a travaillé avec des images qui sont peu modifiées par le walk-off (des fentes verticales par exemple).

### B.3.2 Limite de résolution

Les principales sources limitant la résolution sont :

- La diffraction : caractérisée par le nombre de Fresnel  $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}$  du système optique.
- Les imperfections dues aux optiques (qualité de surface des miroirs, des lentilles), ainsi qu'au cristal.
- La qualité de la dégénérescence qui limite le nombre de modes simultanément résonnants dans la cavité, donc la reconstruction des petits détails de l'image.

- La qualité du système d'imagerie: si on n'est pas exactement au champ proche, cela se traduit par une perte de résolution dans l'image.

La mire de résolution dont on dispose permet d'étudier et de caractériser la résolution d'un système optique. Le réseau de fentes de plus en plus serrées permet de tester toutes les fréquences spatiales. On caractérisera la qualité de transmission du système optique en déterminant les fentes les plus petites qu'on peut distinguer à la caméra en transmission. Dans notre cas on est cependant limité par l'effet de la cavité héli-con focale, qui mélange champ proche et champ lointain. Dans ces conditions, nous nous sommes contentés d'une étude quantitative préliminaire.

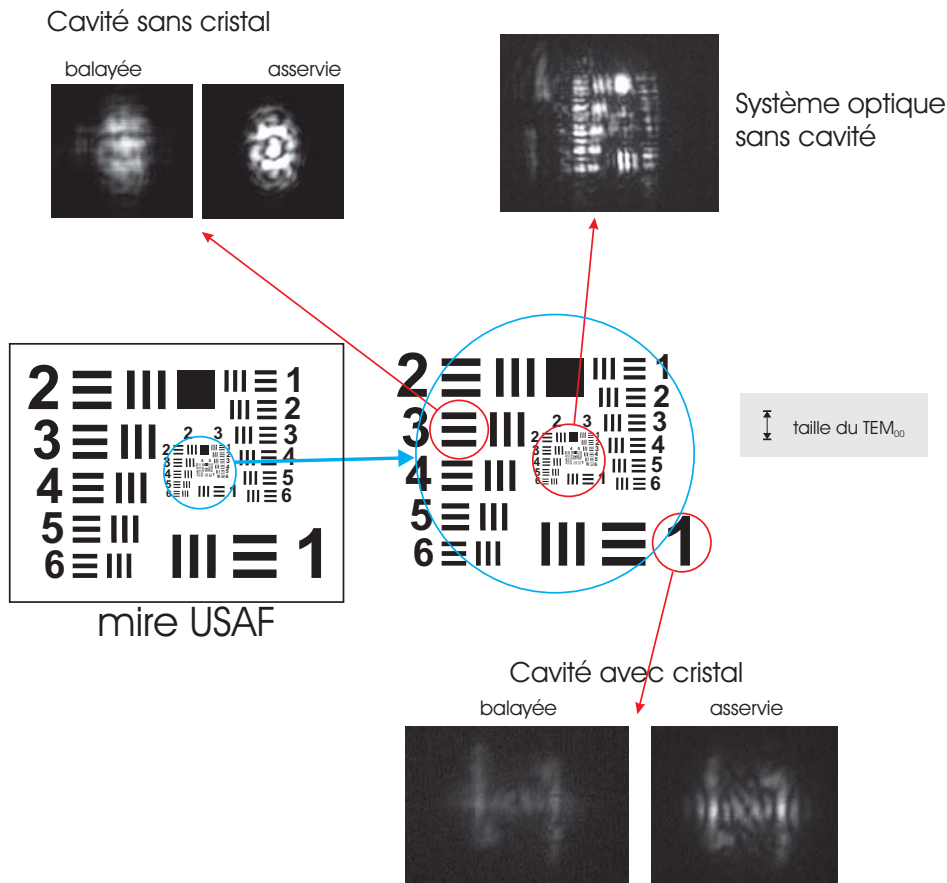


Fig. 11.8: Champ proche de la fente dans différentes configurations.

On a représenté sur la figure 11.8 la transmission de la mire dans différentes configurations. La taille du  $TEM_{00}$  de la cavité donne l'échelle de cette image dans le plan du cristal. Sans cavité, on voit que la limite de résolution est bien inférieure à la taille du mode propre de la cavité. Par contre en cavité, on voit sur l'image transmise que l'on a du mal à résoudre

des détails de taille plus petite que le waist de la cavité (qui nécessitent des modes d'ordre élevés).

## B.4 Amplification d'image : Résultats classiques

Dans cette partie on va montrer les résultats de l'amplification d'une double fente. Cette image a de nombreux avantages :

- Elle est déjà paire, et transmet une quantité appréciable de lumière, ce qui permet suffisamment d'intensité en cavité pour permettre de l'asservir.
- Elle est peu sensible au walk-off.
- Sa transformée de Fourier est perpendiculaire aux fentes, donc aisément distinguable de ces dernières.
- En se déplaçant sur la mire on varie simplement la taille et l'écartement des fentes, et on peut choisir facilement des fentes verticales ou horizontales.

### B.4.1 Amplification d'image

On a observé une amplification sensible à la phase de cette image. Une courbe typique à l'oscilloscope numérique est montrée sur la figure 11.9. Le gain maximum en intensité est de l'ordre de  $G_{max} = 6$ .

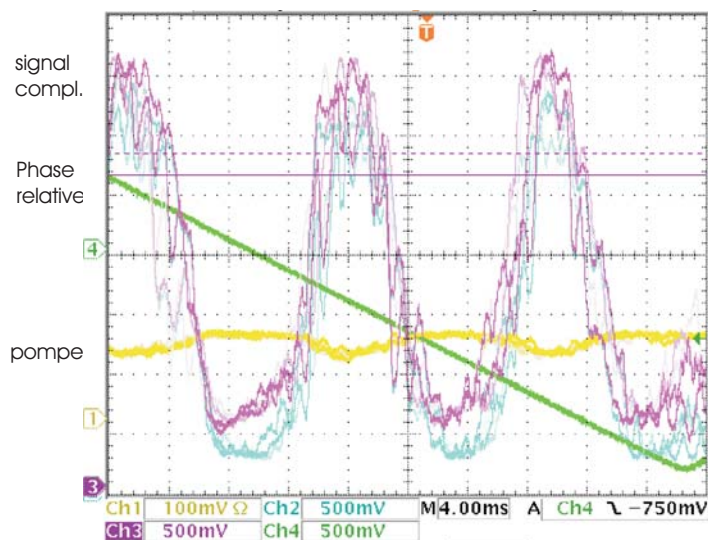


Fig. 11.9: Amplification sensible à la phase d'une image injectée (ici une triple fente).

L'asservissement de la phase relative, bien qu'assez peu stable (de l'ordre de quelques secondes), permet de prendre une acquisition grâce à la CCD du profil transverse du faisceau (signal et complémentaire) au maximum ou au minimum de la courbe d'amplification. On

peut également prendre une image lorsque la phase relative est balayée, ou sans la pompe. Des images typiques obtenues sont montrées sur la figure 11.10.

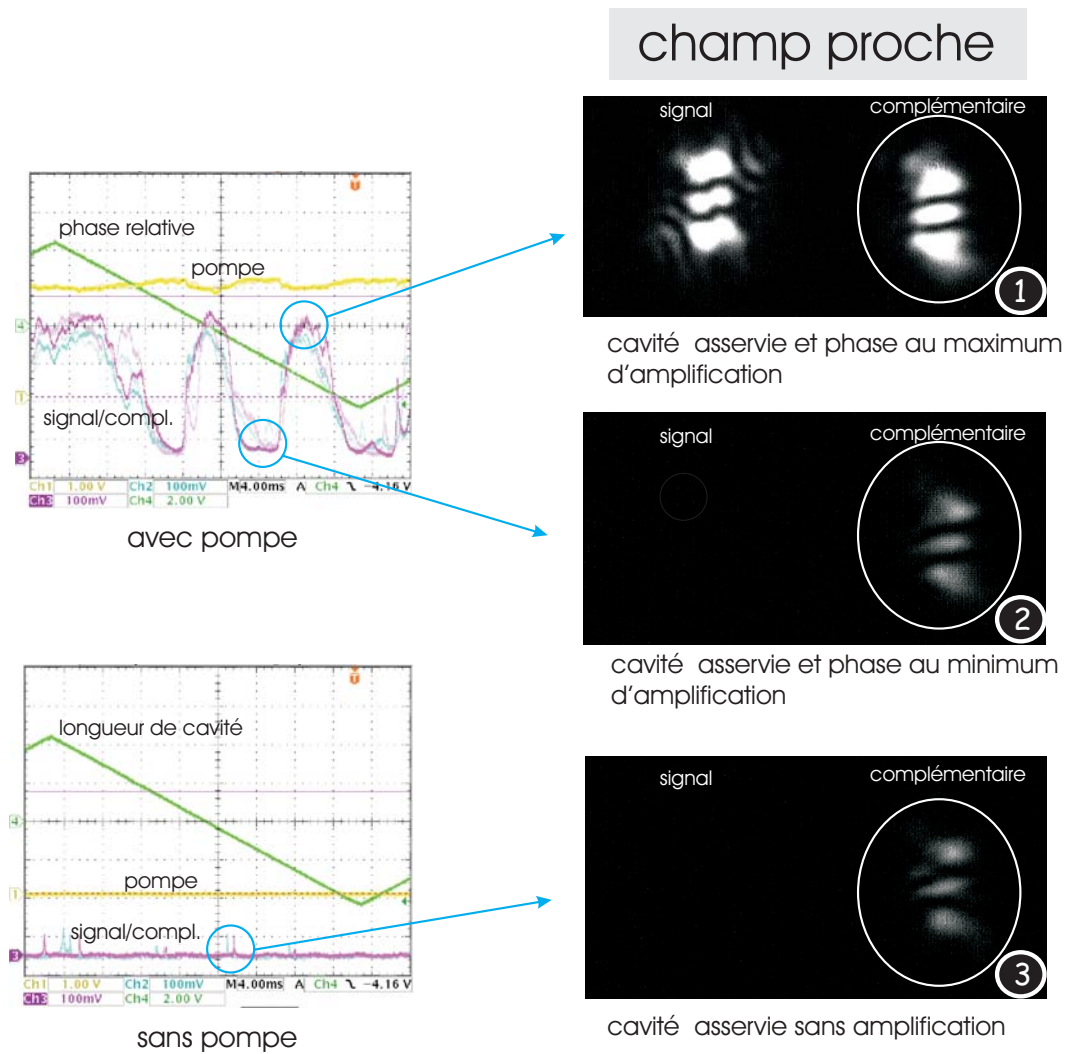


Fig. 11.10: Comparaison de la transmission d'une image dans trois situations (ici une double fente horizontale).

Notons qu'on voit principalement la partie centrale de l'image (le reste étant beaucoup moins intense, n'apparaît pas sur la photo). Sur l'image la plus basse, on ne voit que le complémentaire, et pas le signal puisque sans pompe ils ne sont pas résonnants pour la même longueur de cavité.

### B.4.2 Gain local

On peut alors traiter informatiquement les images obtenues afin d'en déduire le gain local. l'image étant en 8 bit, on a donc une matrice de points dont les valeurs sont comprises entre 0 et 255. Si on prend les images et qu'on divise point à point les intensités, les données sont inexploitable, ne serait-ce qu'à cause du bruit de fond de l'image. On effectue donc les opérations suivantes:

- On supprime le bruit de fond : en analysant une zone sombre de l'image (un coin par exemple), on évalue le signal correspondant à la valeur maximale du bruit de fond. On soustrait cette valeur à toutes les autres valeurs. Tous les points dont l'intensité est inférieure à cette valeur sont remplacés par cette valeur: on a ainsi séparé le bruit de fond du signal. On peut remarquer que de cette manière on définit un gain unité pour le bruit de fond.
- On effectue un "binning", c'est à dire une association de pixels, afin de réduire le bruit. Nous avons fait un binning (a posteriori) dans des zones de taille  $2 \times 2$  pixels, c'est à dire qu'on a divisé par 4 le nombre de points. Notons qu'il est tout à fait licite d'effectuer cette opération, qui revient juste à considérer des pixels plus gros. Il ne s'agit donc pas d'un "lissage" de nos courbes.

Les résultats sont rassemblés sur la figure 11.11. On a également indiqué la taille du  $TEM_{00}$  de la cavité. On voit que la figure de gain  $\frac{\text{amplifié}}{\text{non-amplifié}}$  est moins uniforme. En effet la pompe intracavité induit des effets thermiques qui modifient la géométrie de la cavité. Cette figure nous donne en fait indirectement accès à la déformation de l'image en présence de la pompe. Par contre si l'on regarde le gain  $\frac{\text{amplifié}}{\text{dé-amplifié}}$ , où seule la phase relative a changé, et où l'effet de la pompe est quasiment le même, on obtient une figure de gain local régulière. Le gain étant plus étendu que le mode  $TEM_{00}$  de la cavité infrarouge, on a donc bien une amplification multimode de notre image. Ce résultat constitue à notre connaissance la première mise en évidence de l'amplification en continue de plusieurs modes transverses en cavité.

## C Amplification en double cavité: étude quantique

Forts des résultats de l'étude classique de l'amplification, nous sommes passés à une étude des propriétés quantiques du système. Cette étude s'est faite en deux parties. Tout d'abord nous avons étudié les propriétés quantiques des faisceaux : on montre qu'en phase d'amplification, nous sommes capable de générer des faisceaux jumeaux, et en phase de dé-amplification le bruit d'intensité du faisceau peut être réduit. Ensuite nous avons caractérisé le facteur de bruit de l'amplificateur, prouvant que notre système ajoute moins de bruit qu'un système équivalent en termes de pertes mais fonctionnant en régime insensible à la phase. Nous réalisons la première mise en évidence d'amplification sans bruit, continue, d'images en cavité.

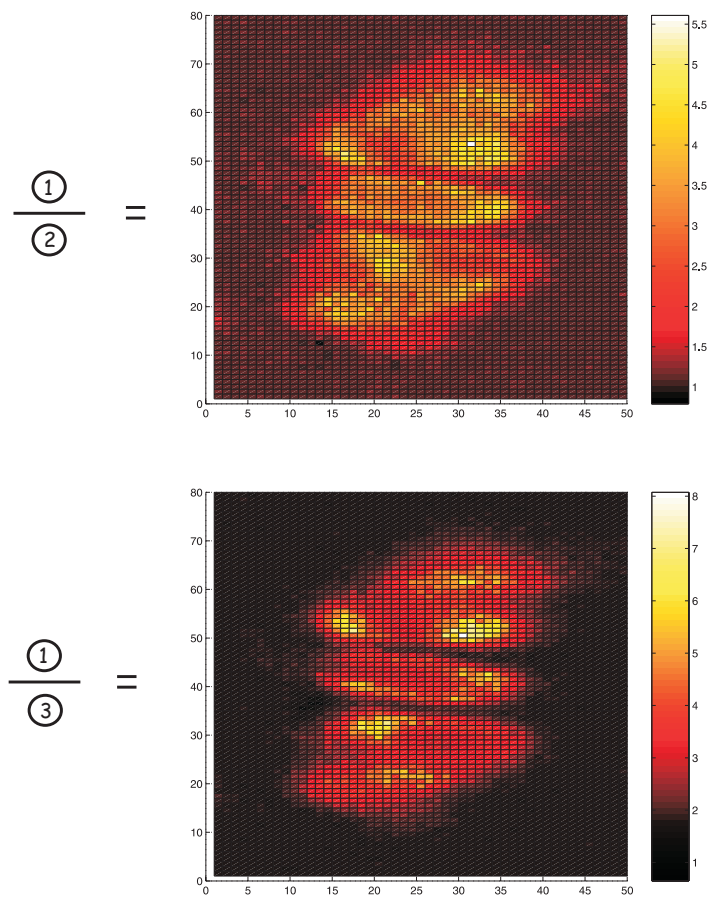


Fig. 11.11: Comparaison du gain local (c'est à dire le rapport des intensité pixel à pixel) entre le maximum et le minimum de l'amplification (en haut), et le maximum de l'amplification et l'image transmise non-amplifiée (en bas). Les numéros correspondent aux images de la figure [11.10](#)



## C.1 Images jumelles et déamplification d'images

### C.1.1 Dispositif expérimental

Pour étudier les propriétés quantiques, nous avons utilisé le nouveau laser Diabolo, ce qui a considérablement simplifié le schéma de l'expérience (représenté sur la figure 11.12). L'ancienne partie "source" (lasers et cavité de doublage) est maintenant remplacée par le seul laser.

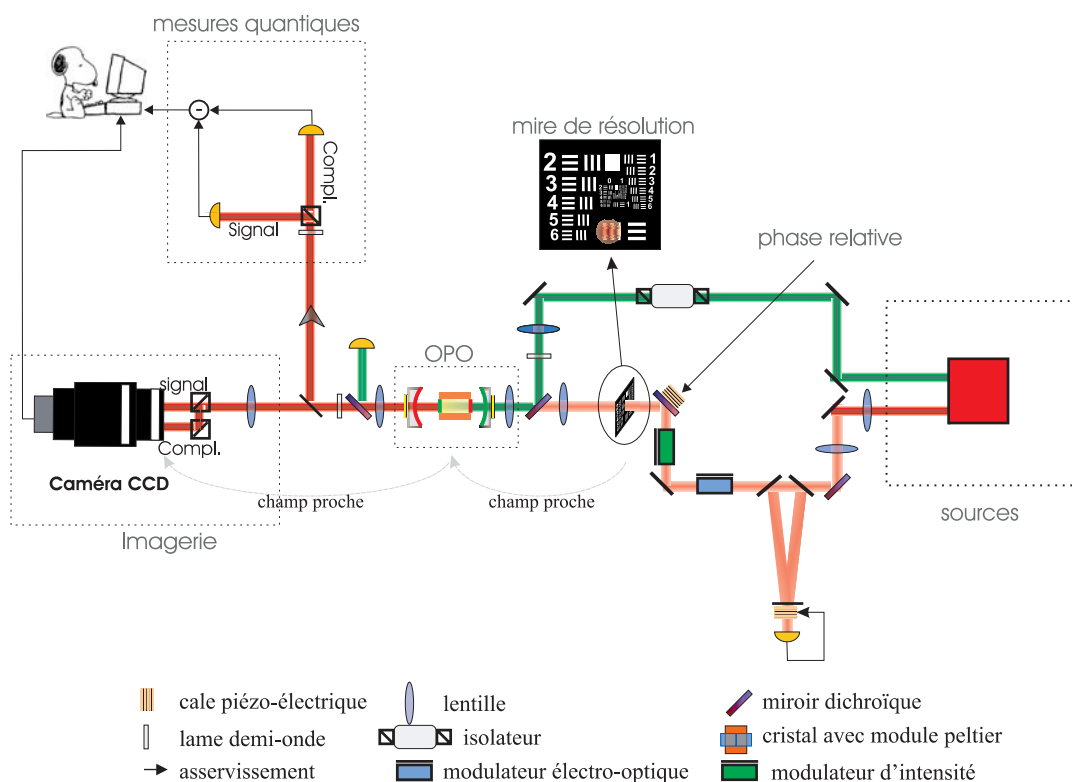


Fig. 11.12: Schéma de principe de l'étude des propriétés quantiques de l'amplification d'image en cavité hémiconfocale

Les asservissements des cavités verte et infrarouge ainsi que de la phase relative sont schématisés sur la figure 11.13. En sortie de la cavité de filtrage, on intercale sur le trajet du faisceau un modulateur de phase Newfocus (à 8.5 MHz). Cette modulation permet d'asservir la cavité infra-rouge de l'OPO par la méthode Pound-Drever-Hall (C.3). Pour asservir la cavité verte, on utilise de même la méthode des bandes latérales en utilisant la modulation de phase à 12 MHz présente sur le faisceau vert en sortie du laser. La phase relative est asservie

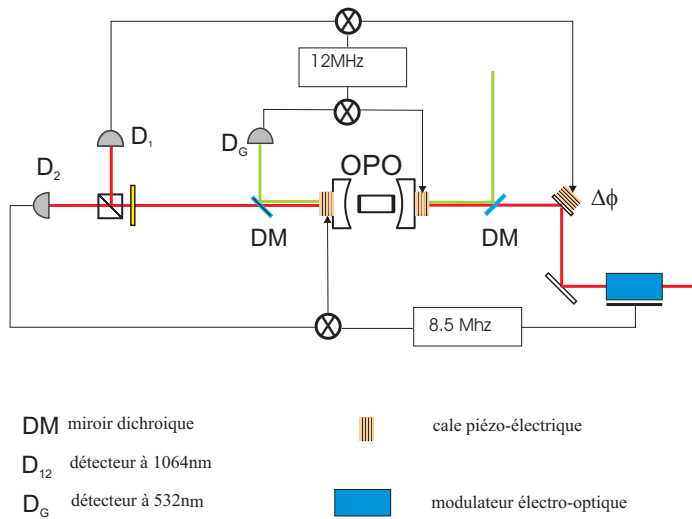


Fig. 11.13: Module d'asservissement des cavités vertes, infra-rouge ainsi que de la phase relative dans le cas de l'amplification en cavité hémiconfocale

en démodulant à 12 MHz le faisceau infra-rouge transmis par l'OPO (pour plus de précisions sur l'asservissement on se reportera à C.4).

### C.1.2 Analyse du bruit

Pour étudier la gemellité de nos images en phase d'amplification puis la compression des fluctuations d'intensité en déamplification, nous devons avoir accès simultanément aux voies *HF* et *DC*. Ceci peut être réalisé grâce à un analyseur de spectre ainsi qu'un oscilloscope synchronisés. Cependant, nous avons opté pour une méthode d'acquisition informatique (présentée dans le chapitre 10), qui permet un traitement des données plus facile et plus exploitable. Le schéma de détection est représenté sur la figure 10.7. Les voies *HF* signal et complémentaire (voies bruit 1 et bruit 2), après amplification puis démodulation à la fréquence d'analyse du bruit (4.5 MHz) constituent deux entrées sur la carte d'acquisition informatique. Sur les deux autres voies, on récupère les signaux *DC* des voies signal et complémentaire (signal 1 et signal 2). Pour chaque voie, on obtient des fichiers de points (100000 points en 0.5s). Un exemple typique d'acquisition informatique est présenté sur la figure 11.14. Cette acquisition est faite en balayant la phase relative entre la pompe, le signal et le complémentaire. On voit bien les deux voies *DC*, correspondant à l'amplification et à la déamplification. On remarque que le bruit est lui aussi amplifié puis déamplifié. La figure 11.15 représente l'évolution du bruit sur une photodiode lors de cette acquisition.

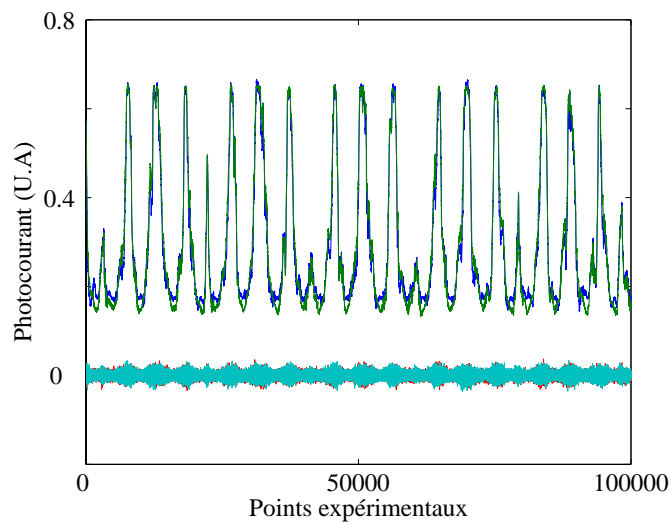


Fig. 11.14: Acquisition informatique typique lors du balayage de la phase relative. Apparaissent les voies DC signal et complémentaire ainsi que les fluctuations des photocourants à 4.5 MHz pour les voies signal et complémentaire

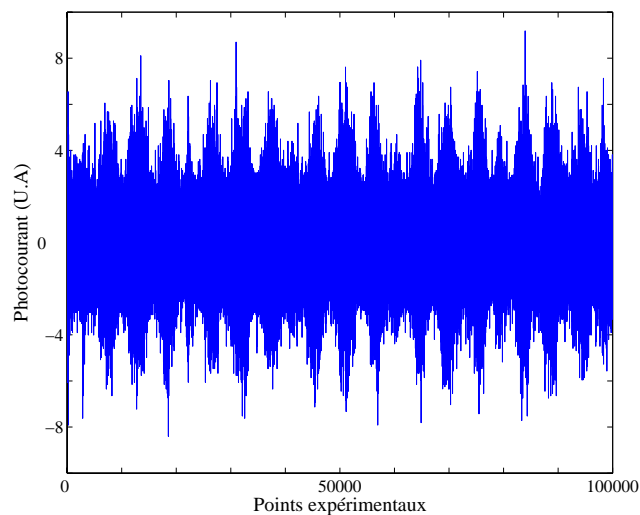
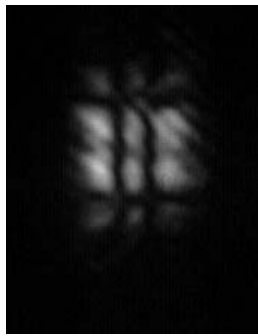


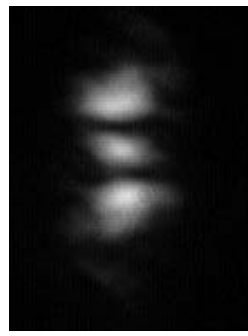
Fig. 11.15: Fluctuations d'intensité d'un faisceau individuel à la fréquence d'analyse de 4.5 MHz lors du balayage de la phase relative.

### C.1.3 Résultats

Les mesures ont été réalisées en injectant dans la cavité plusieurs types d'images: 2 fentes horizontales, 2 fentes verticales, ainsi qu'un mode défocalisé (trois fois la taille du waist propre de la cavité). Le choix de ces images est dû au fait que l'on ne dispose pas d'une plage de puissance très grande dans l'infrarouge. Ainsi l'injection d'une image beaucoup plus complexe, se traduisant par une forte atténuation au niveau de la mire est rédhitoire par la suite, car nous détectons des signaux proches du bruit électronique. Pour s'affranchir de ces problèmes, nous avons donc choisi des zones de la mire (et donc des images) ayant une transmission suffisante. Il est à remarquer qu'une étude sur des images plus complexes pourrait être réalisée en utilisant une source plus puissante dans l'infra-rouge. La figure 11.16 montre des exemples d'images amplifiées. Tout comme dans le paragraphe B.1, ces images sont obtenues en réalisant l'image en champ proche du centre de la cavité sur la caméra CCD.



2 fentes verticales amplifiées



2 fentes horizontales amplifiées

Fig. 11.16: Types d'images amplifiées pour les mesures d'images jumelles et les mesures d'images déamplifiées

Ces mesures ont été réalisées, soit en balayant la phase relative et en postsélectionnant les points en amplification ou déamplification, soit en asservissant la phase relative en phase d'amplification ou déamplification. La figure 11.17 fait un récapitulatif des mesures effectuées. Elle présente les différents niveaux DC pour signal et complémentaire obtenues:

- lorsqu'il n'y a pas d'amplification
- lorsque l'on balaie la phase relative
- lorsque la phase relative est asservie en phase d'amplification
- lorsque la phase relative est asservie en phase de déamplification.

Les meilleurs résultats (qui ne dépendent pas du type d'images utilisées) nous donnent une réduction du bruit sur la différence d'intensité des images signal et complémentaire en phase d'amplification de 30% sous le bruit quantique standard. Cette valeur est en bon accord avec les valeurs théoriques attendues prenant en compte des pertes (valeur théorique attendue:

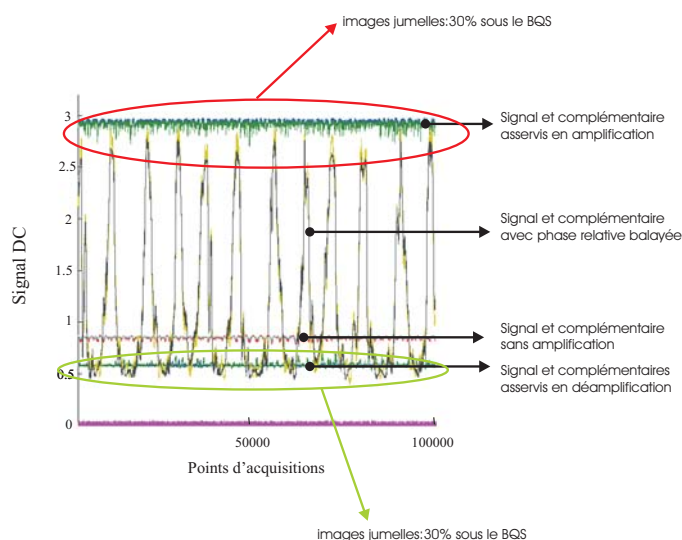


Fig. 11.17: Différents niveaux DC pour signal et complémentaire

45%). Notre système est donc capable de générer des images jumelles, de forme transverse complexe.

En phase de déamplification, nous avons montré une réduction du bruit sur la somme des fluctuations entre images signal et complémentaire de 30%, ceci aussi quelle que soit la forme de l'image. Si au lieu de raisonner en se plaçant dans la base signal-complémentaire, on raisonne en se plaçant dans la base à  $45^\circ$ , ceci équivaut à dire que le mode à  $45^\circ$  est comprimé en intensité (réduction de 30% par rapport au bruit quantique standard). Cette valeur est en bon accord avec les prévisions théoriques (réduction de bruit de moins de 45%). Il est à souligner qu'il a été plus difficile d'obtenir les résultats en déamplification que les résultats en amplification. La stabilité de l'expérience doit être plus grande puisque lors de la mesure, les bruits techniques ne disparaissent pas, ce qui est le cas lors de la soustraction des photocourants pour une mesure de photons jumeaux (voir chapitre 8). Les meilleurs résultats ont été obtenus lorsque les voies signal et complémentaire étaient très bien équilibrées. Le fait de pouvoir déamplifier une image de forme complexe est un résultat très intéressant: à terme on peut donc utiliser notre système pour générer un vide comprimé de forme transverse choisie. Cette propriété peut avoir des applications, notamment dans des expériences de petits déplacements (voir thèse [TrepsPhD]).

Toutes les mesures ont été réalisées pour l'instant sur l'ensemble du faisceau et ceci pour différentes raisons. On peut imaginer de faire simplement une expérience de fermeture du diaphragme (comme dans l'expérience au dessus du seuil dans [Martinelli03]), mais la mesure d'effets quantiques locaux semble encore hors de portée des détecteurs actuels. En effet on est sur l'ensemble des faisceaux à quelques dB seulement (3 à 6 sur notre expérience) du bruit

d'obscurité des photodiodes. Détecter une partie de l'image seulement nous donnera un signal plus faible que ce bruit d'obscurité, donc non exploitable. Ce problème de puissance pourrait être contourné en mettant au point une détection homodyne. Là, la puissance en sortie de l'OPO ne serait plus rédhibitoire puisque l'essentiel de la puissance viendrait de l'oscillateur local. Cependant la mise en place d'une telle détection homodyne n'est pas facile, puisque si l'on veut récupérer le maximum de compression, le mode de l'oscillateur local doit être adapté à la mesure d'un mode pair sur eux. On pourrait envisager pour cela de le créer avec une autre cavité héli-confocale, mais on voit bien que cela entraîne énormément de difficultés. Nous n'avons donc pas cherché à pousser nos recherches dans cette direction, puisqu'à terme la réalisation d'un OPO en cavité auto-imageante devrait permettre d'observer une compression du bruit sur n'importe quel mode spatial.

## C.2 Caractérisation du facteur de bruit de l'amplificateur

On a vu au chapitre 7 qu'en théorie le facteur de bruit d'un amplificateur parfait n'est pas dégradé lors d'une amplification sensible à la phase. L'amplificateur n'ajoute donc pas de bruit propre, et l'amplification est dite sans bruit. Cependant nous avons vu que dans un modèle prenant en compte la présence de pertes (dans le cristal, sur les miroirs de sortie), un bruit est ajouté, même en configuration sensible à la phase (voir chapitre 8). Ainsi nous avons vu les conditions pour lesquelles l'amplification s'effectuait sans bruit. Le but de cette section est de réaliser l'expérience permettant de calculer le facteur de bruit de notre amplificateur.

### C.2.1 Dispositif expérimental

En sortie de la cavité de filtrage, après le modulateur de phase, on place un modulateur d'intensité large bande Newfocus modèle 4104. Il permet de moduler sur une large plage de fréquence allant du DC jusqu'à  $200\text{MHz}$ . Ce modulateur est constitué de deux cristaux montés à  $45^\circ$ , ce montage permettant de limiter la biréfringence thermique. En sortie du modulateur de phase, la polarisation est verticale. Avant le modulateur d'intensité on place une lame  $\lambda/4$ , de manière à passer d'une polarisation linéaire à une polarisation circulaire. En sortie du modulateur d'amplitude on place un cube polariseur permettant de laisser passer la polarisation horizontale. Un tel montage avec deux polariseurs croisés en entrée et en sortie du modulateur permet d'avoir une bonne modulation d'intensité. Pour vérifier si le cas échéant une modulation de phase parasite se rajoutait, nous avons monté une détection homodyne, permettant de vérifier que la quadrature d'amplitude et uniquement elle était modulée.

Pour réaliser la modulation d'intensité à  $5\text{MHz}$ , le modulateur est piloté par un générateur de fonction Agilent 33250.

### C.2.2 Pourquoi des mesures normalisées?

Comme nous l'avons déjà mentionné au chapitre 3, tout au long de nos expériences, nous mesurons des quantités "normalisées": on compare les quantités en sortie de l'OPO sans amplification (sans pompe) aux quantités en sortie avec amplification. Toutes les mesures sont réalisées en utilisant les mêmes photodiodes en transmission de la cavité. Il faut donc comprendre que l'on mesure un gain "normalisé"  $\tilde{G}$ : ce gain vaut 1 lorsqu'il n'y a pas d'amplification. De la même manière, nous avons accès au facteur de bruit "normalisé"  $\tilde{F}$  du système: nous mesurons le ratio entre le rapport signal-à-bruit en sortie sans amplification et le rapport signal-à-bruit en sortie avec amplification. Le facteur de bruit normalisé vaut donc 1 lorsque le gain normalisé vaut 1.

Comme nous l'avons souligné dans le chapitre 3, le fait de réaliser des mesures de facteur de bruit "normalisé" nous empêche de comparer nos résultats de facteur de bruit avec les limites universelles de 1 (cas sensible à la phase) et de  $2 - 1/G$  (cas insensible à la phase). Cependant dans notre configuration expérimentale, le fait de calculer des quantités normalisées était la meilleure solution et ceci pour différentes raisons. Tout d'abord au départ, le choix des miroirs n'a pas été optimisé pour avoir une transmission maximale (au départ les miroirs ont été choisis pour observer des photons jumeaux). D'après la valeur des miroirs d'entrée et de sortie de la cavité, la transmission de la cavité sans amplification est de  $T = 50\%$ . Cette limitation provenant du choix des miroirs n'est pas cruciale puisque un choix de bons miroirs permettrait de la dépasser. La limitation majeure provient de l'utilisation de la cavité hémi-confocale. Dans le chapitre 2, nous avons vu que la cavité transmet un mode pair sur deux. Comme nous injectons une image paire se décomposant environ de la même manière entre modes pairs multiples de 0[4] et les modes pairs multiples de 2[4], en transmission on perd déjà environ la moitié de la puissance à cause de la géométrie de la cavité (le facteur de bruit est dégradé d'un facteur 2, ceci sans amplification). Il devient donc difficile de calculer le rapport signal sur bruit en entrée du système... Une solution serait de créer une image auto-transforme pour la transformée de Fourier (grâce à une nouvelle cavité hémi-confocale) puis de l'injecter dans l'OPO hémiconfocal. Cette solution étant extrêmement contraignante (elle demande une puissance importante dans l'infra-rouge que nous n'avons pas) nous avons préféré réaliser des mesures de rapport signal-à-bruit normalisé qui s'avèrent être actuellement la meilleure solution pour notre système.

### C.2.3 Procédure de mesure

Pour réaliser une mesure de rapport signal-à-bruit en sortie sans amplification, nous mesurons le rapport signal-à-bruit en injectant une très faible puissance de pompe (pratiquement pas d'amplification). Cette mesure se fait avec les cavités verte et infrarouge asservies. Pour obtenir maintenant une mesure du rapport signal-à-bruit en sortie avec amplification, on augmente progressivement la puissance de pompe. Cette procédure doit se faire sans dé-asservir la cavité verte. En effet, par effet de double cavité, nous avons vu que le niveau de transmission

dans l'infrarouge dépend de la longueur de la cavité verte: pendant toutes nos mesures on doit garder la même longueur de cavité verte, de manière à s'assurer une même transmission de la cavité infra-rouge. Cette procédure est contraignante puisque l'expérience doit être stable durant toute la mesure, mais elle est nécessaire pour pallier les effets de double cavité. Un exemple de mesures est présenté sur la figure 11.18. On représente le niveau de transmission pour les voies signal et complémentaire lorsque les cavités infra-rouge et verte de l'OPO ainsi que la phase relative de l'OPO sont asservies, sans amplification (figure du haut), puis pour deux degrés différents d'amplification. On a représenté aussi le niveau de pompe transmise. On voit bien sur ces courbes que l'asservissement de la phase relative marche bien (le niveau de signal et complémentaire est stable). On trouve un gain DC normalisé d'environ  $G = 6$ .

Les mesures de rapport signal-à-bruit sont réalisées en phase d'amplification, donc après asservissement de la phase relative. Les signaux HF des photodiodes signal et complémentaire sont additionnés et analysés par analyseur de spectre. Le schéma général de la détection est présenté sur la figure 11.19, et un résultat typique de données à l'analyseur de spectre (RBW de 100 kHz et VBW de 100 Hz) sur la figure 11.20. Pour calculer la variance du signal en sortie sans amplification  $V_S^E$ , connaissant le niveau de signal  $\vartheta_S^E$  avec un niveau de bruit  $\vartheta_B^E$  (le bruit quantique), nous avons:

$$V_B^E = 10^{\vartheta_S^E/10} - 10^{\vartheta_B^E/10} \quad (11.3)$$

Le rapport signal sur bruit pour le faisceau en sortie sans amplification est donné par:

$$R_{S/B}^E = \frac{10^{\vartheta_S^E/10} - 10^{\vartheta_B^E/10}}{10^{\vartheta_B^E/10} - 10^{\vartheta_D/10}} \quad (11.4)$$

avec  $\vartheta_D$  qui correspond au bruit de fond de l'analyseur de spectre.

En procédant de même pour le faisceau de sortie avec amplification (caractérisé par un niveau de signal  $\vartheta_S^S$  et un bruit  $\vartheta_B^S$ ), nous avons accès au gain normalisé de l'amplificateur:

$$\tilde{G}^2 = \frac{10^{\vartheta_S^S/10} - 10^{\vartheta_B^S/10}}{10^{\vartheta_S^E/10} - 10^{\vartheta_B^E/10}} \quad (11.5)$$

ainsi qu'au facteur de bruit normalisé, ratio du rapport signal-à-bruit en sortie sans amplification et du rapport signal-à-bruit en sortie avec amplification:

$$\tilde{F} = \frac{R_{S/B}^E}{R_{S/B}^S} \quad (11.6)$$

### C.2.4 Résultats

L'ensemble des résultats expérimentaux est représenté sur la figure 11.21. Sont aussi représentées sur cette figure les courbes théoriques de facteur de bruit normalisé en fonction



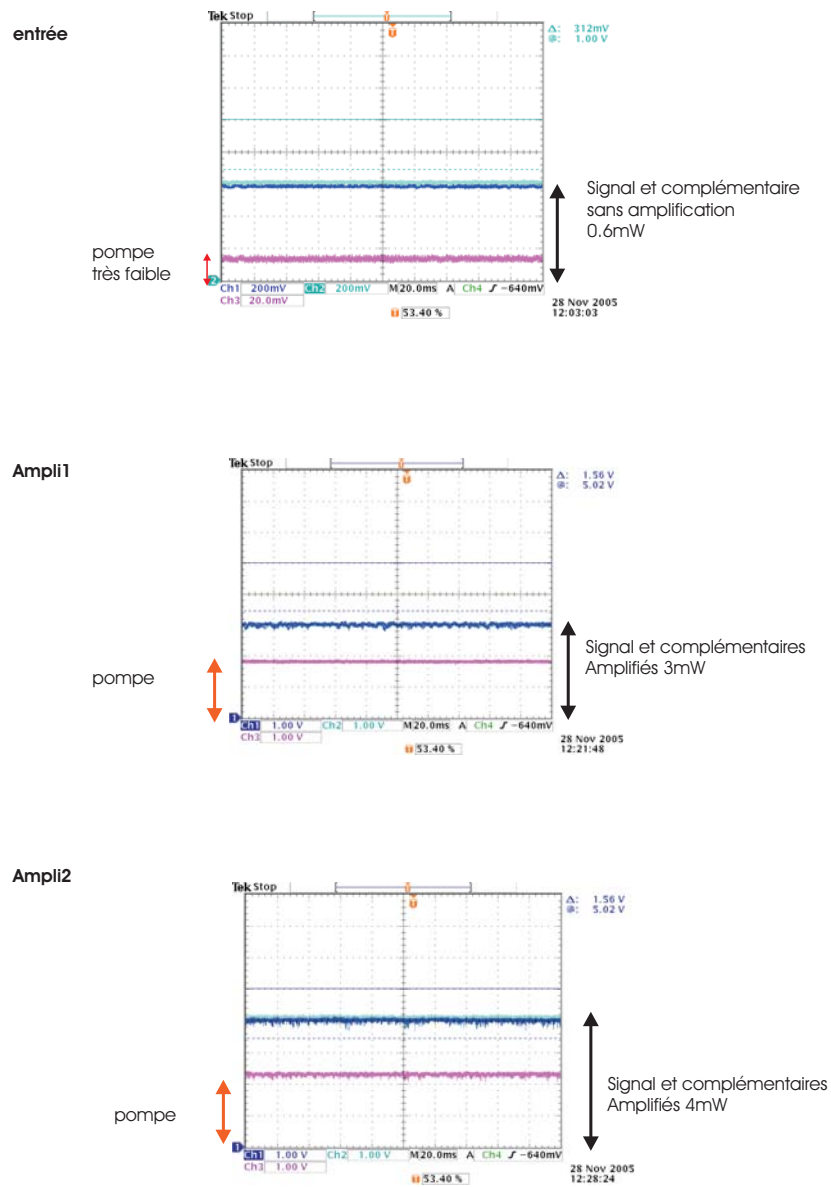


Fig. 11.18: Transmission de la cavité héli-confoocale pour signal et complémentaire, sans amplification (figure du haut), puis pour différents niveaux d'amplification. L'intensité transmise par la cavité verte est elle aussi représentée

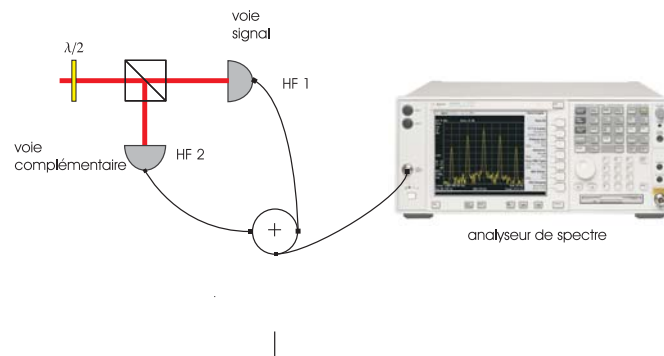


Fig. 11.19: Détection à l'analyseur de spectre: schéma du montage expérimental

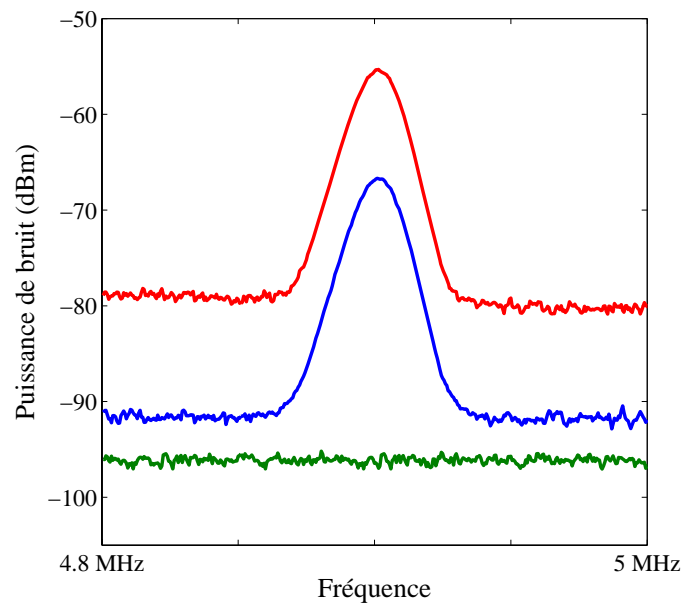


Fig. 11.20: Acquisition type à l'analyseur de spectre pour une mesure du facteur de bruit de l'amplificateur. La courbe horizontale représente le bruit électronique, la courbe du milieu le signal et le bruit non amplifiés, la courbe du haut le signal et le bruit amplifiés

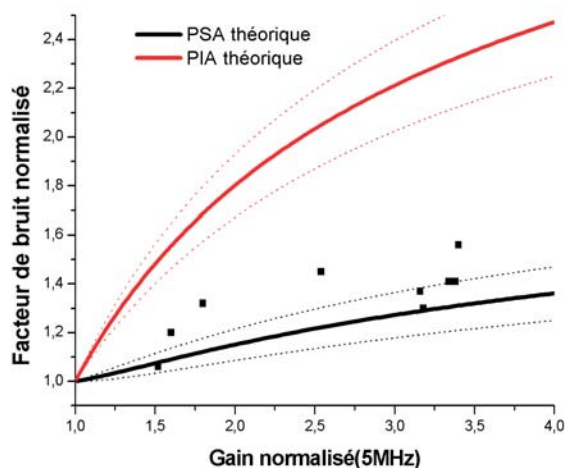


Fig. 11.21: Facteur de bruit de l'OPO hémiconfocal lors du passage d'une image: résultats expérimentaux. Les courbes théoriques de facteurs de bruit pour l'amplification sensible (PSA) et insensible (PIA) à la phase sont représentées

du gain dans le cas sensible (courbe PSA) et insensible à la phase (courbe PIA), ces courbes étant obtenues grâce au modèle théorique présenté au chapitre 8. Nous avons aussi représenté l'incertitude sur la position de ces deux courbes, incertitude provenant de la mesure des pertes dans la cavité (voir paragraphe A.2.3). Nous obtenons des valeurs de gain allant de 1.5 à 3.5. Le système s'avère stable pour des gains allant jusqu'à 3, ensuite l'augmentation des effets thermiques nous empêche d'obtenir des gains plus élevés. Il est à noter que la valeur du facteur de bruit dépend de la stabilité de l'expérience. Ainsi un mauvais asservissement de la phase relative permet parfois d'obtenir des gains importants, mais le facteur de bruit est fortement dégradé: plus l'asservissement est lâche, plus du bruit est ajouté lors de l'amplification. Ceci explique pourquoi à gain égal, nous avons parfois des valeurs de facteur de bruit bien différentes.

Nous remarquons que les valeurs de facteurs de bruit sont supérieures à la limite théorique d'un amplificateur sensible à la phase (courbe PSA théorique tenant compte des pertes): il semble donc que le modèle théorique présenté au chapitre 8 s'accorde bien avec la réalité expérimentale.

Nous voyons aussi que les valeurs de facteur de bruit sont inférieures à la limite théorique d'un amplificateur insensible à la phase (possédant les mêmes pertes): notre processus d'amplification peut donc être qualifié de "sans bruit", puisque le bruit ajouté lors du processus d'amplification est inférieur à celui d'un processus classique, indépendant de la phase.

A notre connaissance, cette expérience est la première preuve à ce jour de la possibilité

d'amplifier sans bruit des images en continu.

## Conclusion

Cette expérience est l'aboutissement de ce travail de thèse.

D'un point de vue classique, elle a permis de montrer qu'on avait amplification sensible à la phase d'une image en cavité. La figure de gain spatial est la preuve classique que cette amplification n'est pas monomode. On a montré expérimentalement pour la première fois qu'il est possible de réaliser l'amplification d'une image de manière continue dans une cavité dégénérée.

Nous avons montré le caractère quantique des images produites lors de l'amplification sensible à la phase. En phase d'amplification, nous avons montré que les images signal et complémentaire possèdent des corrélations ne pouvant s'expliquer par un modèle classique. (30% de réduction sous le BQS). En phase de déamplification, nous avons montré que l'image peut être déamplifiée (30% sous le BQS). Nous disposons donc d'un système permettant de générer des faisceaux jumeaux et du vide comprimé de différentes formes transverses. Pour le moment, la forme des images jumelles et du vide est limitée par le fait d'utiliser une cavité héli-confocale: seules des images auto-transformes peuvent être générées. Ces résultats sont tout de même très encourageants avant d'utiliser une cavité de degré de dégénérescence plus élevé (cavité confocale ou auto-imageante).

En ce qui concerne l'étude du rapport signal-à-bruit, nous avons prouvé que notre amplificateur ajoute moins de bruit qu'un amplificateur équivalent en termes de pertes, mais fonctionnant en régime insensible à la phase: notre expérience constitue la première preuve expérimentale d'amplification sans bruit d'images en régime continu à l'aide d'un OPO dégénéré transversalement. Lors de cette étude, nous avons amplifié des faisceaux de formes transverses complexes. Pour le moment nous avons été limités par la géométrie de la cavité: seules des images auto-transformes pour la transformée de Fourier peuvent être transmises par notre système. Ces résultats sont une première étape encourageante en vue d'une étude avec un système vraiment optimisé pour l'amplification (par exemple une cavité auto-imageante possédant des miroirs optimisés pour l'amplification sans bruit (voir chapitre 9)).



---

# Etude de l'amplification multimode à l'aide d'un OPO confocal

---

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Contexte de l'étude</b> . . . . .	<b>212</b>
A.1	Contexte au laboratoire . . . . .	212
A.2	Contexte théorique . . . . .	213
<b>B</b>	<b>Configuration expérimentale</b> . . . . .	<b>213</b>
B.1	Schéma général . . . . .	213
B.2	La cavité . . . . .	215
B.3	Le cristal . . . . .	216
B.4	Injections . . . . .	216
B.5	Réglages . . . . .	217
B.6	Mesure du rapport signal-à-bruit . . . . .	219
<b>C</b>	<b>Résultats expérimentaux et discussion</b> . . . . .	<b>219</b>
C.1	Injection à 1064 nm . . . . .	219
C.2	Résultats classiques . . . . .	219
C.3	Résultats quantiques . . . . .	222
C.4	Discussion . . . . .	222

---

## Introduction

Dans le dernier chapitre nous avons étudié l'amplification d'images dans une cavité hémiconfocale triplement résonnante, avec un cristal de type I. Cette étude a été facilitée par l'utilisation d'une double cavité qui permet de régler indépendamment la pompe à 532 nm

ainsi que le signal à 1064 nm. Pour une première approche des cavités dégénérées, cette cavité s'est révélée fructueuse mais elle a le désavantage, d'un point de vue classique, de déformer l'image (voir chapitre 2), et d'un point de vue quantique d'imposer une symétrie non triviale sur la partie du champ en sortie dont les fluctuations sont réduites. Ainsi dans cette configuration une étude sur les fluctuations locales semble difficile. Nous avons voulu étudier une cavité de degré de dégénérescence plus élevé, la cavité confocale. Cette cavité déforme moins l'image que la cavité héli-confocale, puisque si l'on injecte une image paire (ou impaire) par rapport à l'axe optique, cette image est totalement transmise. La structure paire (ou impaire) des fluctuations réduites en sortie permet d'envisager une étude locale plus aisée que dans le chapitre précédent.

Dans ce chapitre nous présentons une expérience d'amplification sans bruit d'images dans un *OPO* confocal de type I sous le seuil. Comme dans le chapitre précédent, nous caractérisons le facteur de bruit de ce système et montrons que plusieurs modes transverses peuvent être amplifiés dans un régime d'amplification "sans bruit".

## A Contexte de l'étude

### A.1 Contexte au laboratoire

Ce travail fait suite à de nombreuses études réalisées au laboratoire en cavité confocale.

Classiquement, l'émission de structures transverses spontanées dans un *OPO* dégénéré en modes transverses au dessus du seuil a été observée pour la première fois dans [Ducci01, Vaupel99]. Ce type de structure est bien connu et compris classiquement comme résultat de l'interaction non-linéaire. Des structures similaires ont été observées dans de nombreux domaines de la physique, et étaient prédites théoriquement dans l'*OPO* multimode ([Gatti95, Gatti97, SuretPhD, Staliunas95]).

Par la suite, notre équipe s'est intéressée aux propriétés quantiques dans de tels systèmes. Une étude spatiale des fluctuations de faisceaux jumeaux émis au dessus du seuil d'un *OPO* confocal a démontré la génération de faisceaux "multimodes transverse" [Martinelli03]. Après ces travaux au dessus du seuil, notre équipe c'est attaché à démontrer un fonctionnement multimode transverse sous le seuil. Dans le cas d'un *OPO* confocal de type II triplement résonnant sous le seuil (voir [Gigan]), la configuration s'est révélée trop compliquée et instable: il est très difficile d'atteindre la triple dégénérescence. C'est pour cela que nous sommes passés à une configuration en type I, qui à l'avantage par rapport au type II d'avoir un degré de liberté en moins pour atteindre la triple dégénérescence (signal et complémentaire sont maintenant dégénérés).

## A.2 Contexte théorique

Comme déjà mentionné dans le chapitre 4, l'étude des fluctuations quantiques spatiales d'un OPO confocal sous le seuil a donné lieu à une multitude d'articles théoriques, permettant de comprendre au mieux les paramètres clés pour obtenir un fonctionnement multimode.

La génération sous le seuil de vide multimode comprimé a été le sujet de nombreux articles. Dès la fin des années 80, Lugiato et Grangier [Grangier85] proposent un OPO confocal pour générer du vide comprimé quelle que soit la taille du détecteur utilisé. Ce modèle idéal (on considère une pompe plane et un cristal infiniment fin) est peu à peu modifié pour tenir compte de la taille finie de la pompe [Petsas03], puis de la taille finie du cristal (voir chapitre 5 ou [Lopez05]).

L'étude de l'amplification sans bruit d'images à l'aide d'un OPO a commencé par la proposition de Kolobov *et al.* en cavité plane [Kolobov95]. Mancini [Mancini00] a ensuite généralisé ces calculs au cas de l'OPO en cavité confocale. Ces modèles théoriques s'intéressent uniquement aux propriétés spatiales du gain et du facteur de bruit de l'amplificateur, en se plaçant dans un modèle idéal (pas de pertes autres que celles à la détection). Ces calculs ne sont donc que d'un faible recours pour nos expériences actuelles. Pour confronter théorie et expérience, on utilise le modèle introduit au chapitre 8.

# B Configuration expérimentale

## B.1 Schéma général

Le schéma général de l'expérience est présenté sur la figure 12.1. La partie source est la même que dans le chapitre 11. Le signal haute fréquence (5 MHz), amplifié par la suite par l'OPO, est créé comme précédemment grâce à un modulateur d'intensité Newfocus.

L'asservissement de l'OPO se fait sur l'infra-rouge grâce à la méthode Pound-Drever-Hall, présentée précédemment. En sortie de la cavité de filtrage, un modulateur électro-optique New-Focus résonnant crée une modulation de phase à la fréquence de 8.5 Mhz. Le signal d'erreur obtenu après démodulation du signal haute fréquence (sur la photodiode infra-rouge en transmission) permet d'asservir la cavité de l'OPO. Cette technique permet d'asservir la cavité à résonance plusieurs heures. Pour isoler l'OPO des vibrations acoustiques celui-ci est placé sous une boîte en plexiglas.

L'asservissement de la phase relative est effectué lui aussi comme dans l'expérience en cavité héli-confocale. Le signal d'erreur est obtenu en démodulant le signal haute fréquence de la photodiode infrarouge à la fréquence de 12 Mhz, fréquence de modulation initialement portée par le vert.

La figure 12.2 montre une configuration expérimentale où la phase relative entre le signal et la pompe est balayée, la cavité infra-rouge étant asservie. Le signal d'erreur correspondant à la dérivée de la courbe d'amplification-déamplification est représenté. Ce signal d'erreur nous





sert par la suite pour asservir la phase relative.

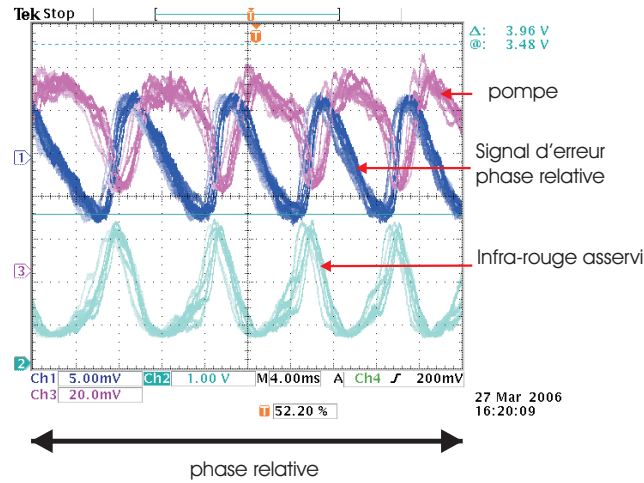


Fig. 12.2: Amplification-déamplification lors du balayage de la phase relative dans un OPO confocal de type I. Le signal d'erreur de la phase relative ainsi que la pompe sont représentés

## B.2 La cavité

La cavité optique est maintenant une simple cavité à deux miroirs (voir figure 12.3), notés  $M_1$  et  $M_2$ , hautement réfléchissants pour les deux longueurs d'ondes (1064 nm et 532 nm) et dont les caractéristiques (mesurées expérimentalement) sont résumées sur le tableau 12.1. Les faces arrières des miroirs sont traitées anti-reflet pour les deux longueurs d'ondes. Nous reviendrons sur les caractéristiques de ces miroirs lors de l'analyse du rapport signal-à-bruit, puisque comme nous l'avons déjà vu, le rapport signal-à-bruit dépend des pertes sur les miroirs.

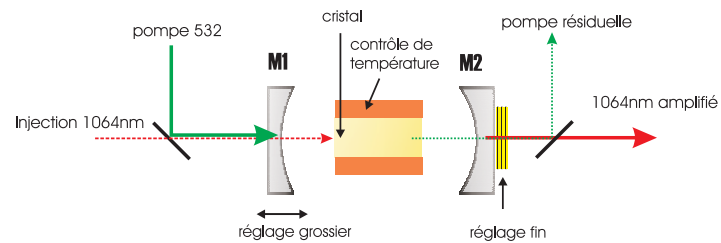


Fig. 12.3: L'oscillateur paramétrique optique confocal: schéma technique

	532 nm	1064 nm
Coefficient de réflexion $R_1$	0.9	0.99
Coefficient de réflexion $R_2$	0.9	0.983
Finesse cavité vide	55	260

TAB. 12.1: *Caractéristiques des miroirs de l'OPO.*

La cavité est donc triplement résonnante, c'est-à-dire qu'elle est résonnante pour les trois faisceaux : la pompe à 532 nm, et les faisceaux signal et complémentaire qui sont dégénérés puisque l'on utilise un cristal de type  $I$ . Le miroir  $M_1$  est le miroir d'entrée pour le faisceau pompe à 532 nm ainsi que pour le signal à 1064 nm. Les faisceaux signal et complémentaire amplifiés, émis autour de 1064 nm, sortent principalement par le miroir  $M_2$ .

Géométriquement les miroirs sont concaves, de rayon de courbure 50 mm, la cavité confocale vide aura donc une longueur  $L = 50\text{mm}$ . Les miroirs sont placés sur des platines de translation permettant un positionnement précis macroscopique (précision d'environ  $10\ \mu\text{m}$ ). Le miroir de sortie est monté sur une cale piézo-électrique permettant une excursion d'environ  $5\ \mu\text{m}$ , et un réglage à l'échelle du nanomètre afin d'asservir la longueur de la cavité sur une résonance d'une des longueurs d'onde.

### B.3 Le cristal

Le cristal utilisé est un cristal de  $Mg : LiNbO_3$ , d'accord de phase non critique et de "type I", dont les faces sont traitées anti-reflet pour les longueurs d'onde à 1064 et 532 nm. La température optimale de fonctionnement, correspondant à l'optimisation de la condition d'accord de phase est d'environ  $120^\circ\text{C}$ . Lorsque l'on s'écarte de cette température, le couplage non-linéaire reste important sur une plage d'environ  $0,5^\circ\text{C}$ .

La précision en température dans cette expérience est un élément crucial, car c'est en variant la température du cristal que l'on fait résonner en même temps signal et complémentaire. Un grand effort a été réalisé, tant dans l'électronique que dans la géométrie du four pour obtenir un asservissement convenable. Pour les détails de ce travail on peut se reporter à [Chalopin06].

### B.4 Injections

La pompe à 532 nm est injectée grâce à un télescope dans la cavité. Pour garantir un fonctionnement multimode de l'OPO, la pompe n'est pas injectée sur le mode  $TEM_{00}$ , mais elle est défocalisée pour pomper plusieurs modes à la fois. La taille du waist propre de la cavité est donnée par:

$$w_{532\text{nm}} = \sqrt{\frac{\lambda R}{2\pi}} \simeq 65\ \mu\text{m} \quad (12.1)$$

Nous avons choisi de travailler avec un waist du faisceau vert d'environ  $200\mu m$ . Dans cette configuration le seuil de l'OPO reste raisonnable ( $\simeq 90mW$ ). Pour caractériser le degré de multimodicité de cette injection, nous pouvons introduire le paramètre

$$b = \frac{w_p^2}{l_{coh}^2} \quad (12.2)$$

déjà introduit dans l'article [Lopez05] ainsi que dans le chapitre 5. Il correspond au nombre de modes transverses pouvant être amplifiés indépendamment. Expérimentalement la longueur de cohérence vaut  $l_{coh} = \sqrt{\frac{\lambda_c}{\pi n_s}} \simeq 50\mu m$ , donc  $b = 16$ . Nous sommes donc bien dans un régime de fonctionnement multimode. La figure 12.4 montre les pics en transmission à 532 nm lorsque l'on balaye la longueur de la cavité. Cette figure est obtenue en s'écartant de la confocalité. Nous voyons bien la présence de plusieurs modes transverses, correspondant à une injection multimode. Lorsque l'on fait varier la longueur de la cavité grâce à la platine de

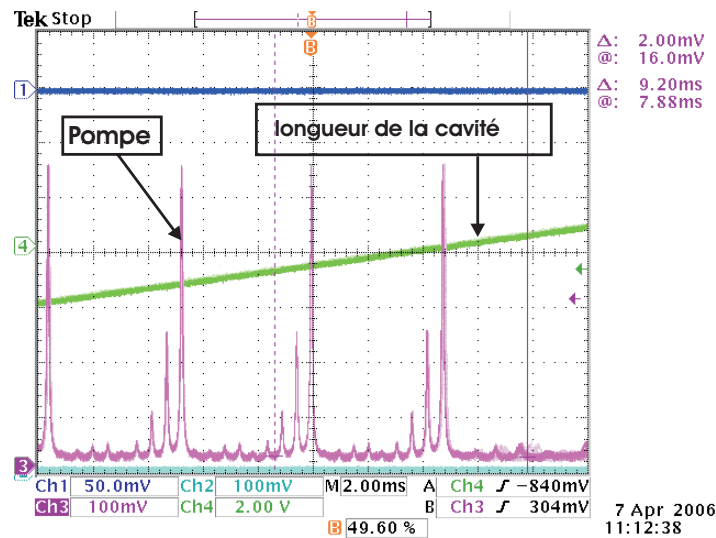


Fig. 12.4: Pics de transmission à 532nm lors du balayage de la cavité hors confocalité

translation, nous arrivons dans une situation où tous les modes résonnent en même temps: c'est la dégénérescence transverse. Ceci est représenté sur la figure 12.5.

## B.5 Réglages

La procédure de réglage à suivre est la suivante:

1. Régler la cavité avec cristal pour le vert et l'infra-rouge.
2. Déterminer la température optimale du couplage non linéaire. Comme nous l'avons déjà mentionné, la plage de fonctionnement en température du cristal de  $MgO : LiNbO_3$

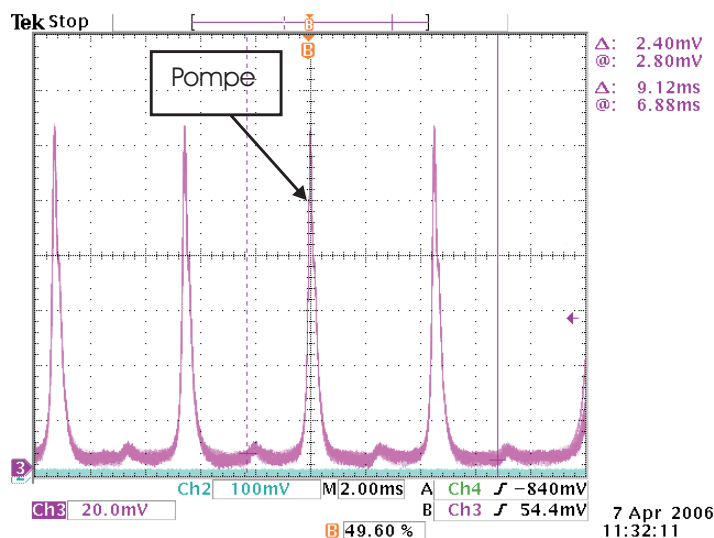


Fig. 12.5: Pics de transmission à 532nm lors du balayage de la cavité confocale

est plus restreinte que celle du *KTP*. Pour déterminer la température optimale, nous essayons de baisser au maximum le seuil d'oscillation du système en balayant en température.

3. Ayant trouvé la température optimale de fonctionnement, régler la cavité à la longueur de confocalité.
4. Tout en balayant la longueur de la cavité, et en changeant finement la température ( $\simeq mC$ ) déterminer une température de double résonance du vert et de l'infra-rouge.
5. Asservir la cavité infra-rouge tout en balayant la phase relative.
6. Changer légèrement la température de manière à avoir le maximum de amplification-déamplification. Lorsque le signal d'erreur est important, on déclenche l'asservissement de la phase relative.
7. Lorsque l'asservissement de la phase relative est enclenché, en jouant légèrement sur la température du cristal, augmenter la résonance de pompe de manière à augmenter l'amplification.

Cette expérience en simple cavité s'avère moins stable que la configuration de double cavité présentée dans le chapitre précédent. En effet il est très difficile d'obtenir une grande stabilité lorsque l'on cherche à faire résonner conjointement l'infra-rouge et le vert. Ceci s'explique par les énormes effets thermiques dans le vert (13% d'absorption). Ces effets sont peut-être dus aux puissances importantes utilisées. Un autre phénomène observé dans le vert est la modification rapide des propriétés optiques du cristal. L'absorption peut augmenter rapidement: le seuil peut augmenter énormément (le seuil devient inaccessible pour nos puissances disponibles) sur des temps de l'ordre de 10 mn. Cette dégradation ressemble à un

phénomène connu pour le *KTP*, le gray-tracking. Ces modifications nous obligent à changer régulièrement de point de fonctionnement dans le cristal.

## B.6 Mesure du rapport signal-à-bruit

En sortie de l'OPO une lame dichroïque permet de séparer le vert et l'infrarouge. Le vert est focalisé sur une photodiode permettant de mesurer l'intensité transmise à 532 nm. L'infrarouge est lui aussi focalisé sur une photodiode. La voie haute fréquence de cette photodiode est relié à un analyseur de spectre qui permet l'étude du rapport signal à bruit. Comme dans l'expérience précédente, nous mesurons un facteur de bruit "normalisé". Pour le calculer nous opérons comme suit:

1. Dans un premier temps on doit déterminer le rapport signal à bruit sans amplification. Pour cela on injecte une extrêmement faible puissance de vert, (le fait de garder une faible puissance de vert nous permet de conserver une cavité "chaude"), on asservi l'infrarouge et l'on fait une acquisition à l'analyseur de spectre.
2. Ensuite, nous nous mettons en configuration d'amplification en augmentant la puissance de pompe incidente et après asservissement de la phase relative nous réalisons de nouvelles acquisitions.

## C Résultats expérimentaux et discussion

### C.1 Injection à 1064 nm

Nous avons réussi à amplifier plusieurs modes dans la cavité confocale. Nous injectons à l'aide d'un télescope un mode dont le waist est trois fois plus gros que la taille du waist propre de la cavité. La figure 12.6 représente la transmission de l'infra-rouge lorsque la longueur de la cavité est balayée et lorsque l'on s'est éloigné de la confocalité. Nous voyons que le mode se décompose sur une dizaine de modes transverses dans la cavité confocale. C'est ce mode que nous avons réussi à amplifier. La figure montre ensuite le type de pics en transmission pour la cavité infra-rouge lorsque l'on ramène la cavité à la confocalité.

### C.2 Résultats classiques

La figure 12.8 fait un récapitulatif de puissances transmises dans l'infra-rouge et dans le vert pour différents niveaux d'amplification. La figure du haut montre la transmission de l'infrarouge sans amplification. Les figures suivantes montrent la transmission d'infra-rouge pour différents niveaux d'amplification. Pour augmenter le niveau d'amplification, nous jouons très légèrement sur la température du cristal pour augmenter la résonance de pompe. Il est à noter que de par l'instabilité de l'expérience, nous avons travaillé avec des puissances de pompe inférieures ou égales à la moitié du seuil d'oscillation de l'OPO. Au-delà de ces puissances, l'asservissement de la phase relative n'est plus stable.

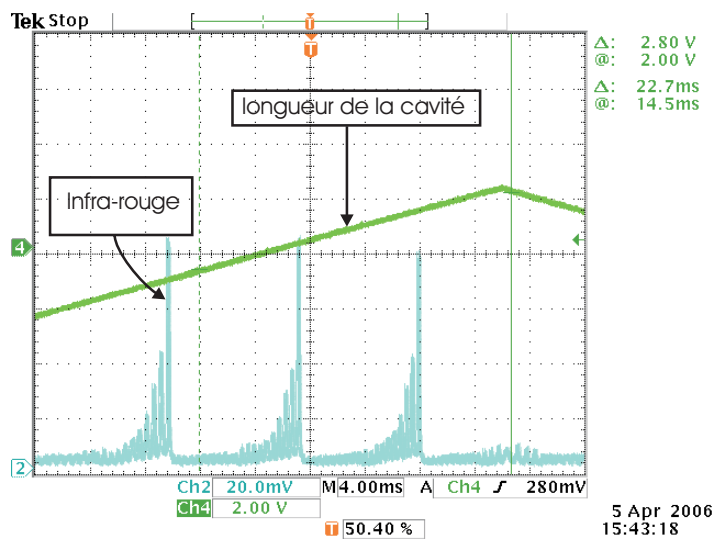


Fig. 12.6: Pics de transmission IR lors du balayage de la longueur de la cavité hors confocalité

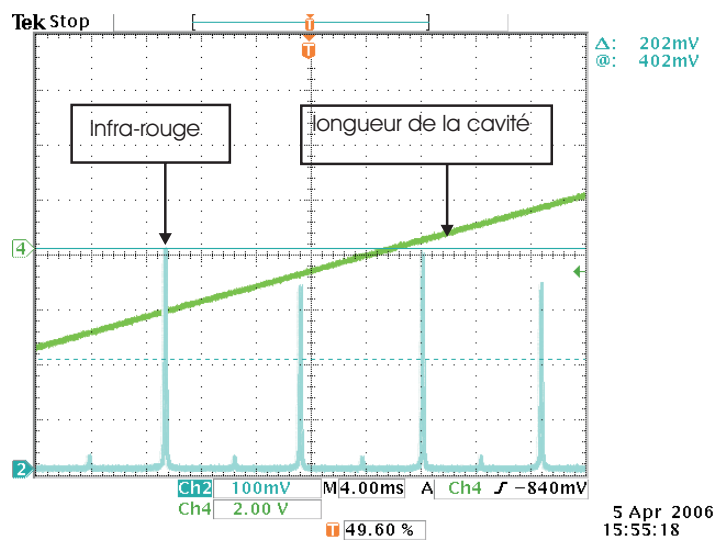


Fig. 12.7: Pics de transmission IR lors du balayage de la longueur de la cavité confocale

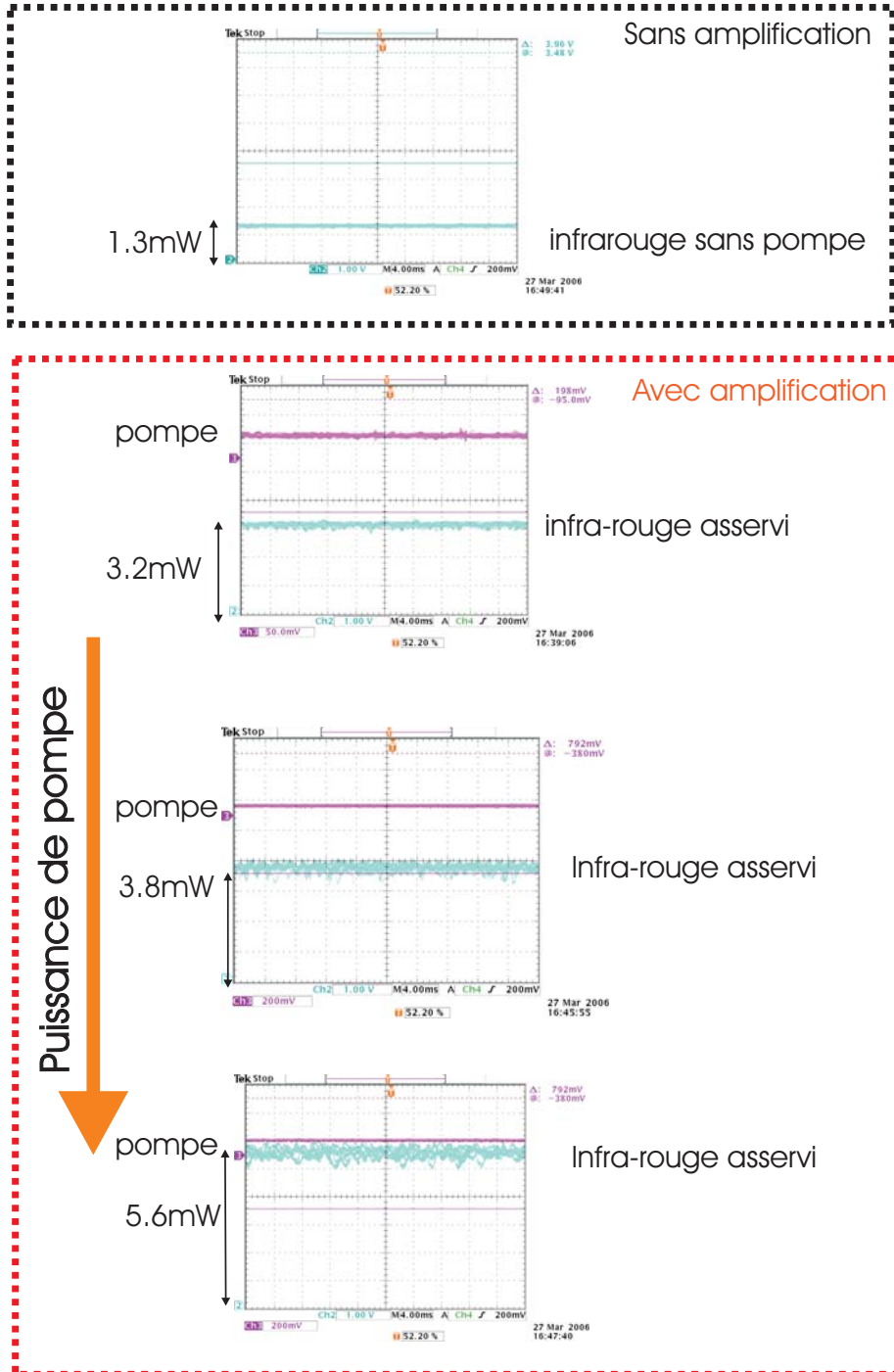


Fig. 12.8: Transmission IR de la cavité confocale: récapitulatif des résultats classiques



Nous voyons sur les figures que le gain normalisé  $\tilde{G}_{DC}$  en intensité de notre amplificateur est d'environ:

$$\tilde{G}_{DC} \simeq 4 \quad (12.3)$$

### C.3 Résultats quantiques

L'analyse des données à l'analyseur de spectre est faite de la même manière qu'au chapitre précédent (paragraphe C.2.3). On ne revient donc pas sur ce point. La figure 12.9 représente les résultats expérimentaux de facteur de bruit normalisés obtenus en cavité confocale, pour l'amplification d'un gros mode (voir C.1). Comme dans le chapitre précédent, sont aussi représentées sur la courbe les bornes inférieures des facteurs de bruit normalisés théoriques attendus dans la même configuration d'OPO (mêmes pertes liées au cristal, mêmes coefficients de transmission des miroirs) dans le cas sensible à la phase (PSA théorique) et insensible à la phase (PIA théorique) (ces formules théoriques ont été établies dans le chapitre 8). L'incertitude sur la position de ces deux courbes (incertitude provenant sur la mesure des pertes) est également mentionnée.

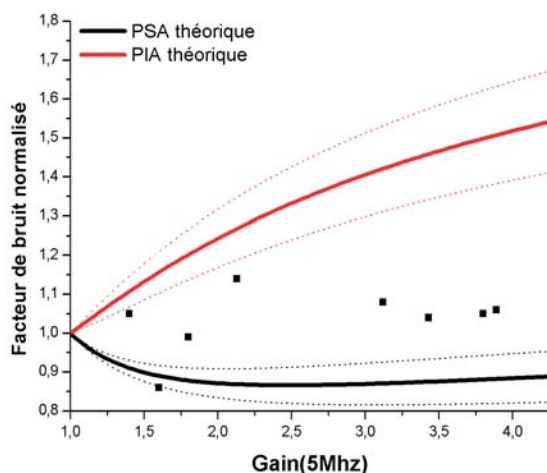


Fig. 12.9: Facteur de bruit de l'amplificateur confocal: résultats expérimentaux

### C.4 Discussion

Les facteurs de bruit normalisés mesurés expérimentalement ont pour la plupart une valeur supérieure à la courbe théorique sensible à la phase: ceci semble valider en partie notre modèle théorique (dans le cas contraire, le désaccord entre théorie et expérience aurait été tel que nous n'aurions pu tirer aucune conclusion).

Les valeurs expérimentales de facteur de bruit normalisé sont inférieures à la courbe théorique insensible à la phase. Notre amplificateur amplifie plusieurs modes transverses (puisque nous amplifions un mode défocalisé composé de nombreux modes transverses) et rajoute moins de bruit lors du processus d'amplification qu'un amplificateur équivalent (en terme de pertes) mais fonctionnant en régime insensible à la phase. Comme dans l'expérience en cavité héli-confocale, c'est donc la preuve que nous sommes dans un régime d'amplification sans bruit pour plusieurs modes transverses.

## Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une expérience d'amplification continue de plusieurs modes sans bruit dans un OPO confocal. Tout comme dans le chapitre précédent en cavité héli-confocale, cette expérience est à notre connaissance la première démonstration expérimentale de la possibilité d'amplifier plusieurs modes transverses dans un régime d'amplification "sans bruit" en cavité dégénérée en modes transverses.

Ces résultats obtenus en fin de thèse ne constituent que les prémices d'une étude sur l'OPO confocal de type I plus générale. Pour le moment, nous avons effectué des mesures sur l'ensemble du faisceau. Une prochaine étape pourrait être maintenant de réaliser des mesures locales. Ces mesures locales sont moins difficiles à réaliser que dans le cas de la cavité héli-confocale puisque maintenant tous les modes pairs sont amplifiés (et non plus un modes pair sur deux comme dans la cavité héli-confocale). La structure spatiale paire des modes comprimés en sortie de l'OPO permet par exemple d'utiliser des photodiodes à quatre quadrants, dont la géométrie paire est adaptée à la détection. Réalisant une détection homodyne avec un oscillateur local plan (comme ceci est prédit dans [Grangier85, Petsas03, Lopez05]), on peut s'attendre là aussi à détecter le maximum de compression locale en sortie de notre système.

Si la cavité confocale ne semble posséder que des avantages, il faut toutefois revenir sur les limitations de sa configuration en simple cavité. Comme nous l'avons vu, comparé à une configuration de double cavité, il est beaucoup plus difficile d'atteindre la double dégénérescence car les effets thermiques sont importants: de manière générale l'expérience en cavité confocale est beaucoup moins stable que sa réplique en cavité héli-confocale. Ne disposant pas d'autres cristaux de type I, nous ne pouvons conclure définitivement si cette situation est inhérente à la configuration de simple cavité ou bien si avec un autre cristal, les effets thermiques peuvent être moins importants, mais il semble que la simple cavité soit bien moins stable.

Dans le futur la construction d'un OPO de type I en cavité auto-imageante semble donc la meilleure voie pour l'amplification d'images. Cette configuration peut en effet être réalisée en double cavité, d'où sa bonne stabilité (voir figure 12.10).

Comparée à l'expérience en cavité héli-confocale du chapitre précédent, l'utilisation d'un cristal de type I simplifie encore l'expérience puisque l'on a un paramètre de moins à régler

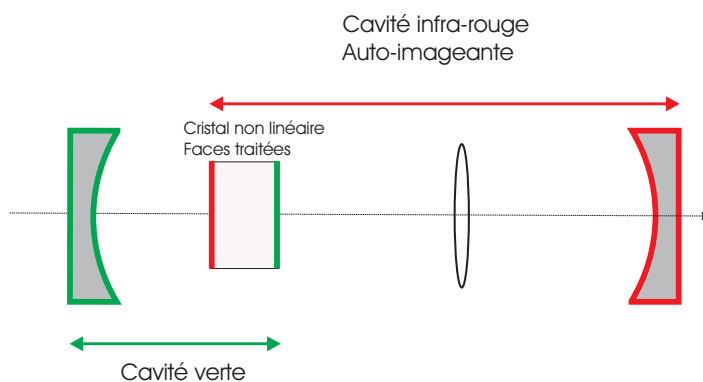


Fig. 12.10: Schéma de l'OPO auto-imageant en double cavité

pour atteindre la triple dégénérescence (signal et complémentaires sont dégénérés). La difficulté provient du réglage de la cavité auto-imageante, mais après nos études classiques (3), nous commençons à avoir une bonne procédure de réglage de cette cavité.

---

## Conclusion

---

**L**ONGTEMPS restée une proposition théorique, l'amplification sans bruit d'images à l'aide d'un oscillateur paramétrique en cavité dégénérée en modes transverses sous le seuil d'oscillation a constitué le coeur de cette thèse. Ce travail s'inscrit dans la continuité du travail de thèse de S. Gigan qui s'était en majeure partie intéressé aux propriétés classiques d'une telle amplification.

Ce travail s'est fait en trois mouvements. Dans une première partie, partiellement commune au travail de thèse de S. Gigan, nous avons cherché à mieux comprendre le comportement "classique" des cavités dégénérées en modes transverses, l'utilisation de telles cavités étant nécessaire pour l'imagerie quantique en cavité. Cette étude s'est révélée concluante, puisque le formalisme nouveau dit des fonctions auto-transformes a permis de comprendre la transmission d'une image à travers une cavité de degré de dégénérescence quelconque. L'étude expérimentale de la cavité hémi-confocale a permis de valider ce formalisme. En termes d'imagerie, une cavité partiellement dégénérée a cependant le désavantage de ne transmettre que partiellement une image de forme transverse quelconque. En vue d'expérience futures, nous avons étudié expérimentalement une cavité totalement dégénérée, la cavité auto-imageante. L'étude de la transmission ainsi que la génération de seconde harmonique d'une image en cavité auto-imageante a été réalisée avec succès, constituant ainsi une première étape avant la construction d'un oscillateur paramétrique optique totalement imageant.

Parallèlement à ce travail sur les propriétés classiques des cavités dégénérées, nous avons envisagé le problème non plus en termes de champ moyen mais en nous intéressant aux fluctuations quantiques en sortie d'un OPO sous le seuil d'oscillation. La question était de comprendre les propriétés spatiales du vide émis par un tel système en fonction de paramètres tels que la géométrie de la cavité, la taille du cristal et du waist de la pompe. Dans un premier temps nous avons développé pour la première fois un nouveau modèle d'OPO tenant compte des effets de diffraction à l'intérieur du cristal non-linéaire afin de nous placer au plus proche de la réalité expérimentale. Nous avons montré que pour observer de la compression de bruit sur plusieurs zones du faisceau, le waist de pompe doit être supérieur à une certaine longueur de cohérence. Ensuite nous avons étendu ces calculs au cas de la cavité auto-imageante, montrant la possibilité dans ce cas d'observer des faisceaux EPR locaux.

La majeure partie de ce travail de thèse a été consacrée à la mise en oeuvre d'une expérience d'amplification sans bruit d'images à l'aide d'un OPO en cavité dégénérée en modes transverses. Cette expérience constitue une première car jusqu'alors elle n'avait été réalisée qu'en simple passage (sans cavité), en utilisant un laser pulsé. Ce travail a commencé par l'étude classique de l'amplification d'images en cavité héli-confocale avec un cristal de type II, étude réalisée avec S. Gigan. Etudiant la répartition spatiale du gain, nous avons montré que plusieurs modes transverses sont amplifiés de façon continue lors du processus. Ne disposant pas d'une source laser assez stable, les propriétés quantiques de l'amplification étaient difficiles à mettre en évidence. A l'époque, nous avons réussi à mettre en évidence la gémellité des faisceaux signal et complémentaire émis en phase d'amplification. Par contre le système n'était pas assez stable pour la mesure du rapport signal à bruit.

Le remplacement de la source laser a permis de remédier à ces problèmes. Nous avons mis tout d'abord en évidence la compression des fluctuations d'intensité de l'image émise par l'OPO en phase de déamplification. Ensuite nous avons mesuré le facteur de bruit normalisé de notre amplificateur, prouvant un régime d'amplification "sans bruit". Par sa configuration en double cavité, la cavité héli-confocale s'est révélée extrêmement stable, mais elle possède le désavantage de déformer grandement l'image. Pour éviter ce problème, il faut donc utiliser des cavités de degré de dégénérescence de plus en plus élevé, c'est pourquoi nous avons étudié la cavité confocale. Cette étude a été réalisée avec un cristal de type I, pour avoir le même nombre de degrés de liberté que la cavité héli-confocale en type II. En cavité confocale, nous avons pu montrer que le régime d'amplification était là aussi sans bruit. Conjointement à ces expériences, un grand effort théorique a été fait pour construire un modèle au plus proche de l'expérience. Nous avons montré que nous réalisons des mesures de quantités "normalisées", et nous avons défini ce que l'on entend par amplification "sans bruit" dans notre expérience. Les modélisations théoriques semblent en bon accord avec l'expérience.

Ces résultats sont majeurs puisqu'ils constituent à notre connaissance la première mise en évidence d'amplification d'images sans bruit réalisée à l'aide d'un OPO. Pour le moment notre expérience est un "démonstrateur", prouvant que les images amplifiées ont des propriétés quantiques et que l'amplificateur ajoute moins de bruit qu'un système équivalent, mais fonctionnant en régime insensible à la phase. Elle constitue une première étape avant la réalisation d'un système "optimisé" pour l'amplification sans bruit, où l'on pourra mesurer directement le gain, le facteur de bruit, sans passer par des quantités "normalisées".

Il est à remarquer que dans ce travail, les mesures de facteur de bruit, de compression ont été réalisées sur l'ensemble du faisceau pour des images de différentes formes transverses. Nous n'avons pas encore fait une étude locale des fluctuations et ceci pour deux raisons principales. La première tient au degré de dégénérescence élevé de la cavité utilisée: en cavité héli-confocale une étude locale des fluctuations nécessite d'utiliser un détecteur adapté au mode comprimé en sortie de la cavité. Nous ne disposons pas de détecteurs possédant une géométrie "auto-transforme" pour la transformée de Fourier. La seconde provient du faible niveau de signal récolté par la photodiode lors d'une détection partielle, directe (sans oscilla-

teur local), nous contraignant à travailler très proche du bruit d'obscurité des détecteurs. Ceci est rédhibitoire pour des mesures quantiques. Pour palier à ces deux problèmes majeurs, il semble que la réalisation d'un OPO auto-imageant en double cavité soit la meilleure solution. La cavité étant auto-imageante, en sortie tous les modes sont comprimés: le problème de la géométrie du détecteur n'intervient plus. Pour contourner les problèmes de faibles puissances, on peut envisager utiliser une détection homodyne: l'utilisation d'un oscillateur local intense permet d'analyser des faisceaux quelle que soit leur puissance.

Pour ce qui est des applications de l'expérience, elles sont multiples. En ce qui concerne l'amplification sans bruit stricto-sensus, on peut penser à la préamplification optique d'une image avant détection, permettant de s'affranchir des problèmes liés à l'efficacité quantique limitée des détecteurs. Dans le domaine de l'information quantique, les images amplifiées possèdent de fortes corrélations locales qui peuvent être utilisées comme autant de vecteurs de l'information. Pour "l'ingénierie quantique", la possibilité de disposer en phase de déamplification de faisceaux comprimés en intensité (pouvant s'apparenter à du vide comprimé) dont la forme transverse peut être choisie, peut avoir à terme des applications diverses: amélioration des mesures locales, application à la super-résolution etc...



---

# Bibliographie

---

- [AbramowitzStegun] Abramowitz and Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Wileys and Son (93)
- [Ahufinger00] V. Ahufinger, J. Mompart, and R. Corbalán, *Lasing without inversion in three-level systems without external coherent driving*, Phys. Rev. A **61**, 053814 (2000)
- [Andersen05] U. L. Andersen, V. Josse, G. Leuchs *Unconditional quantum cloning of coherent states*, Phys. Rev. Lett, **94**, 240503 (2005)
- [Arnaud69] J.A. Arnaud, *Degenerate Optical Cavities*, Applied Optics, Vol **8**. Issue 1, page 189 (1969)
- [Arvind95] Arvind, B. Dutta, N. Mukunda, R. Simon, *Two-mode quantum systems: invariant classification of squeezing transformations and squeezed states* , Phys. Rev. A **52**, 1609 (1995)
- [Bachor] Bachor H., Ralph., *A guide to experiments in quantum optics*, Wiley-VCH.
- [Basov54] N. G. Basov and A. M. Prokhorov, J. Exptl. Theoret. Phys. **27**, 431 (1954)
- [BarracoPhD] Laurent Barraco, *Source Laser tout solide accordables à base de matériau Nd:PPLN*, Thèse de l'école polytechnique (2001)
- [BencheikhPhD] Kamel Bencheikh, *traitement non destructif de signaux optiques*, Thèse de Paris XIII (1996)
- [Black01] Black E.D., *An introduction to Pound-Drever-Hall laser frequency stabilization*, Am. J. Phys. **69** (1) 79 (2001)
- [Boderman98] B. Bodermann, M. Klug, H. Knöckel, E. Tiemann, T. Trebst, H.R. Telle, *Frequency measurement of I2 lines in the NIR using Ca and CH4 optical frequency standards*, Applied Physics B: Lasers and Optics, Volume **67**, Number 1 ,Pages: 95 - 99(1998)
- [Bogoliubov47] N. N. Bogoliubov, J. Phys. (USSR) **11**, 23 (1947)
- [Born&Wolf] *Principles of Optics*, Cambridge Press, Born and Wolf (7th edition)



- [Boyd92] W.Boyd, *Nonlinear Optics*, Academic Press (1992).
- [Boyd68] G.Boyd, D.Kleinman, *J.Applied Physics* **39**, 3597 (1968).
- [Bracewell83] R.N. Bracewell, *Discrete Hartley transform*, *J. Opt. Soc. Am.* **73**, 1832 (1983)
- [Brambilla04] E.Brambilla, A.Gatti, M.Bache and L.A.Lugiato, *Phys.Rev.A* **69**, 023802 (2004).
- [Braunstein98] S. L. Braunstein, H. J. Kimble *Phys.Rev.Lett.* **80**, 869 (1998).
- [Cagnac] *Lasers, Interaction lumière atomes*,EDP Science, CNRS Edition, B. Cagnac, J.P. Faroux
- [Caola91] M.J. Caola, *Self-Fourier functions*, *J.Phys. A: Math. Gen.* **24**, L1143 (1991)
- [Caves82] C.M. Caves, *Quantum limits on noise in linear amplifiers*, *Phys. Rev. D*, **26**, 1817-1839 (1982)
- [Caves85] C.M. Caves, B. L. Schumaker, *Phys. Rev. A*, **31**, 3068 (1985)
- [Chalopin06] B. Chalopin, Rapport de Master, Laboratoire Kastler Brossel (2006).
- [Chen04] Y. F. Chen, C. H. Jiang, Y. P. Lan, and K. F. Huang , *Wave representation of geometrical laser beam trajectories in a hemiconfocal cavity*, *Phys. Rev. A* **69**, 053807 (2004)
- [Chu94] Hong Chu, Dong Hwan Kim, Young Min Jhon, Sang Sam Choi, A.Z.Obidin, Dae Yoon Park, *Injection Locking of a Modified Unstable Resonator XeCl Laser by Using a Line-Narrowed Hemi-Confocal Oscillator*, *Jap.J.Appl.Phys.*, Vol.**33**, pp.4617-4621 (1994), Pt.1.
- [Cohen87] *Photons et atomes : Introduction à l'optique quantique*, C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, et G. Grynberg, *InterÉditions/Éditions du CNRS*, Paris (1987).
- [Colville94] F. G. Colville , M. J. Padgett , and M. H. Dunn , *Cw dual-cavity doubly resonant optical parametric oscillator* , *Appl. Phys. Lett.* **64** , 1490-1492 (1994)
- [Crossland97] WA Crossland, TD Wilkinson, TM Coker, TCB Yu and M. Stanley , *The fast bitplane SLM: A new ferroelectric liquid crystal on silicon spatial light modulator designed for high yield and low cost manufacturability*, *OSA TOPS Vol. 14 Spatial light modulators*, (1997), pp102-106
- [Debuisschert93] *Type-II continuous-wave optical parametric oscillator : oscillation and frequency-tuning characteristics*, T. Debuisschert, A. Sizmann, E. Giacobino et C. Fabre, *J. Opt. Soc. Am. B*, **10** 1668 (1993).
- [Devaux95] *Parametric amplification of a polychromatic image*, F. Devaux, E. Lantz *J. Opt. Soc. Am. B*, **12** 2245 (1995).

- [Dimitriev] Dimitriev V.G., Gurzadyan G.G., Nikogosyan D.N., *Handbook of nonlinear optical crystals*, (1993)
- [DingjanPhD] *Multi-mode optical resonators and wave chaos*, PhD thesis, Leiden University, J. Dingjan (2003)
- [Duan00] *Inseparability criterion for continuous variables systems*, L.-M. Duan, G. Giedke, J. I. Cirac, P. Zoller, Phys. Rev. Lett. **84**,2722 (2000)
- [Drever83] *Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator*, Drever R. W. P, Hall J.L.,Kowalski F.V., Hough J., Ford G.M., Munley A.J. et Ward H., Applied Physics B **31**, 97-105 (1983)
- [Ducci01] *Pattern formation in optical parametric oscillators*, S. Ducci, N. Treps, A. Maître, and C. Fabre, Phys. Rev. **64**,023803 (2001)
- [FabreCours] *Conversion paramétrique et optique quantique*, C. Fabre, notes de cours Laboratoire PHLAM, Université de Lille (14-18/04/02)(disponible sur le site personnel de C. Fabre).
- [Fabre00] *Quantum limits in the measurement of very small displacement*, C. Fabre, J. B. Fouet, A. Maitre, Opt. Lett.,**25**, 76, (2000).
- [FabreLasers] *Introduction aux lasers et à l'optique quantique*, Grynberg G., Aspect A., Fabre C., Ellipse
- [Fabre90] *Squeezing in detuned degenerate optical parametric oscillators*, C Fabre, E Giacobino, A Heidmann, L Lugiato, S Reynaud, M Vaccchino et Wang Kaige, , Quantum Opt. **2** 159-187 (1990)
- [Fabre95] *Quantum fluctuations in Light Beam*, C. Fabre, dans *Quantum fluctuations*, proceedings de l'école d'été des Houches, 1995, éditée par S. Reynaud, E. Giacobino et J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam, 1997).
- [Fouet00] Fabre C., Fouet J.B., Maître A., Optics Letters **25**, 76 (2000)
- [Gardiner85] C.W.Gardiner, M.J.Collet,Phys.Rev.A **31**, 3761 (1985).
- [Gatti95] A.Gatti and L.A.Lugiato, *Quantum images and critical fluctuations in the optical parametric oscillator below threshold* Phys.Rev.A **52**,1675 (1995)
- [Gatti97] Gatti A., Lugiato L.A., Oppo G.L., Martin R., Di Trapani P., Berzanskis A., Optics Express **1**, 21 (1997)
- [Gatti99] A. Gatti, L. A. Lugiato, K. I. Petsas and I. Marzoli *Spatial Einstein-Podolsky-Rosen aspects in the optical parametric oscillator below threshold*, Europhysics Lett. **46**, 461-466 (1999)
- [Gatti99b] A.Gatti, E. Brambilla and L.A.Lugiato, *Quantum Entangled Images* Phys.Rev.Lett. **83**,1763 (1999)

- [Gatti03] A.Gatti, R.Zambrini, M.San Miguel, Multiphoton, multimode polarization entanglement in parametric downconversion, *Phys. Rev. A* **68**, 053807 (2003).
- [Gatti04] A. Gatti, E. Brambilla, M. Bache, and L. A. Lugiato *Correlated imaging, quantum and classical*, *Phys. Rev. A* **70**, 013802 (2004)
- [Gigan05b] S. Gigan, L. Lopez, N. Treps, A. Maitre, C. Fabre *Image transmission through a stable paraxial cavity*, *Phys. Rev. A* **72**, 023804 (2005)
- [Gigan06] S. Gigan, L. Lopez, V. Delaubert, N. Treps, C. Fabre, A. Maitre *CW phase sensitive parametric image amplification* *Journal of Modern Optics*, **53**, Nos 5-6, 809-820 (2006)
- [Gigan] S. Gigan *Amplification paramétrique d'images en cavité: effets classiques et quantiques*, Thèse de l'université PARIS VI.
- [Gouy1891] Gouy, L.G ,*sur la propagation anormale des ondes*, *Annales de Chimie et Physique*, **24**, à145 (1891)
- [Goodman] J. W. Goodman, *Introduction To Fourier Optics*, McGraw-Hill Science.
- [Gordon54] J. P. Gordon, H. J. Zeiger and C. H. Townes, *Molecular microwave oscillator and new hyperfine structure in the microwave spectrum of NH<sub>3</sub>*, *Phys. Rev.***95**, 282 (1954)
- [Grangier87] R. E. Slusher, P. Grangier, A. LaPorta, B. Yurke, and M. J. Potasek, *Pulsed Squeezed Light* ,*Phys. Rev. Lett.* **59**, 2566-2569 (1987)
- [Grangier85] L.A.Lugiato, Ph.Grangier, *J.Opt.Soc.Am.B* **31**, 3761 (1985).
- [Gunning82] William J. Gunning, *Double-cavity electrooptic Fabry-Perot tunable filter*, *Applied Optics*, Volume **21**, Issue 17, 3129- September 1982
- [Haus] H. A. Haus, J. A. Mullen, *Quantum Noise in Linear Amplifiers* ,*Phys. Rev. Lett.* **128**, 2407-2413 (1962)
- [Joobeur96] *Coherence properties of entangled light beams generated by parametric down-conversion: theory and experiment*, A. Joobeur, B. E. A. Saleh, T. S. Larchuk et M. C. Teich, *Phys. Rev. A.* **53**, 5349 (1996)
- [Kane85] Kane T.J., Byer R.L., monolithic, unidirectional single-mode Nd:Yag ring laser, *Opt. Lett.* **10**, 65 (1985)
- [Kogelnik66] H. Kogelnik, T. Li , *Laser beams and resonators*, *Applied Optics*, Vol. **5** Issue 10 Page 1550 (October 1966)
- [Kolobov89b] M. I. Kolobov, I. V. Sokolov, *Phys. Lett. A* **140**, 101 (1989)
- [Kolobov89] M.I.Kolobov,I.V.Sokolov, *Sov.Phys.JETP* **69**, 1097 (1989).
- [Kolobov95] M. Kolobov and L. Lugiato, *Noiseless amplification of optical images* , *Phys. Rev. A* **52**,4930 (1995)

- [Kolobov99] Kolobov M., *The spatial behavior of nonclassical light*, Rev. Mod. Phys, **71**, No. 5, pp. 1539-1589 (1999)
- [Kolobov00] M. Kolobov and C. Fabre, Phys. Rev. Lett. **85**,3789 (2000)
- [Kumar90] O. Aytür and P. Kumar ,*Pulsed twin beams of light* ,Phys. Rev. Lett. **65**, 1551-1554 (1990)
- [Kumar99] S.-K. Choi, M. Vasilyev, and P. Kumar, *Noiseless Optical Amplification of Images* Phys. Rev. Lett. **83**, 1938-1941 (1999)
- [Lantz97] E Lantz and F Devaux*Parametric amplification of images*, Quantum semiclass. Opt. **9** 279-286 (1997)
- [Lantz00] F. Devaux and E. Lantz, *Gain in Phase Sensitive Parametric Image Amplification* , Phys. Rev. Lett. **85**, 2308-2311 (2000)
- [Leuchs05] G. Leuchs, U.L. Andersen and C. Fabre, *The quantum properties of multimode optical amplifiers revisited*
- [Levenson93] J. A. Levenson, I. Abram, T. Rivera, P. Fayolle, J. C. Garreau, and P. Grangier, *Quantum optical cloning amplifier* Phys. Rev. Lett. **70**, 267-270 (1993)
- [Levenson95] K. Bencheikh, E. Huntziger, J. A. Levenson ,*Quantum noise reduction in quasi-phase-matched optical parametric amplification*, JOSA B, Vol. **12** Issue 5 Page 847 (1995)
- [PingKoyLamPhD] Ping Koy Lam, *Applications of quantum electro-optic control and squeezed light*, Thesis of the Australian National University (1998)
- [Lam97] P. K. Lam, T. C. Ralf, E. H. Huntington, and H. A. Bachor *Noiseless Signal Amplification using positive Electro-Optic Feedforward* Phys. Rev.Lett. **79**, 1471 (1997)
- [LauratPhD] J.Laurat, *Etats non-classiques et intrication en variables continues à l'aide d'un oscillateur paramétrique optique*, Thèse de l'université Paris 6 (2004)
- [Leberre99] M. LeBerre, D. Leduc, E. Ressayre, and A. Tallet, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **1**, 153 (1999).
- [Lipson93] S.G. Lipson, *Self-Fourier objects and other self transform objects: comment*, J. Opt. Soc. Am. A Vol **10**, 9, 2088 (1993)
- [Lohmann92a] A. Lohmann and D. Mendlovic, *Self-Fourier objects and other self transform objects*, J. Opt. Soc. Am. A Vol **9**, 11, 2009 (1992)
- [Lohmann92b] A. Lohmann and D. Mendlovic, *An optical self-transform with odd cycles*, Optics Communications **93**, 25 (1992)
- [Lohmann94] A. Lohmann and D. Mendlovic, *Image formation of a self-Fourier object*, Applied Optics **33**,No 2, 153 (1994)

- [Lopez05] L. Lopez, S. Gigan, N. Treps, A. Maître, C. Fabre, A. Gatti *Multimode squeezed vacuum generated by a confocal OPO below threshold: beyond the thin crystal approximation* Phys. Rev. A **67**, 023808 (2005)
- [Loudon87] Special issue on Squeezed light, edited by R. Loudon, P. L. Knight, in J. Mod. Opt. **34**, (6/7) (1987).
- [Louisell60] W. H. Louisell, *coupled modes and parametric electronic*, Wiley and sons, (1960)
- [Lugiato95] L. A. Lugiato, A. Gatti, H. Wiedemann, *Quantum fluctuations and non linear optical patterns*, dans "quantum fluctuations", proceedings de l'école d'été des Houches (1995), édité par S. Reynaud, E. Giacobino et J. Zinn-Justin (North Holland, Amsterdam, 1997)
- [Lugiato97] L. A. Lugiato, Ph. Grangier, *Improving quantum-noise reduction with spatially multimode squeezed light*, JOSA B, Vol. **14** Issue 2 Page 225 (February 1997)
- [MacKenzie02] Kirk McKenzie, Daniel A. Shaddock, David E. McClelland, Ben C. Buchler and Ping Koy Lam, *Experimental Demonstration of a Squeezing-Enhanced Power-Recycled Michelson Interferometer for Gravitational Wave Detection*, Phys. Rev. Lett. **88**, 231102 (2002)
- [Mancini00] S. Mancini, A. Gatti, L. A. Lugiato, Eur. Phys. J. D **12**, 499 (2000)
- [Mancini00b] *Parametric image amplification in optical cavities*, quant-ph/9907083
- [Marable98] *Measurement of quantum noise correlations in parametric image amplification*, M. L. Marable, S.-K. Choi, P. Kumar, Optics Express, **2**, n°3, 84, (1998)
- [Malygin85] *Spatiotemporal grouping of photons in spontaneous parametric scattering of light* A. A. Malygin, A. N. Penin et A. V. Sergienko, Dokl. Akad. Nauk SSSR **281**, 308 (1995)
- [Martinelli03] Martinelli M., Treps N., Ducci S., Gigan S., Maître A., Fabre C., *Experimental study of the spatial distribution of quantum correlations in a confocal optical parametric oscillator* Phys. Rev. A **67**, 023808 (2003)
- [MartinelliNote] Martinelli M., *User's guide to quadrant photodetectors and demodulation circuit*, Document interne à l'équipe. Disponible sur demande à treps@spectro.jussieu.fr
- [Masalov97] A. V. Masalov, A. A. Putilin, *Quantum noise of a modulation optical amplifier*, Optics and Spectroscopy, **82**, 823 (1997)
- [MaurinPhD] I. Maurin, *bruit quantique dans les VCSELS*, Thèse de doctorat de l'université Paris VI (2001).

- [Mendlovic94] D. Mendlovic, H.M. Ozaktas, A.W. Lohmann, *Self-Fourier functions and fractional Fourier transforms*, Optics Communications **105**, 36 (1994)
- [MertzPhD] J. Mertz, *Photon noise reduction using active control on twin beams generated by an optical parametric oscillator*, Thèse de doctorat de l'université Paris VI (1991)
- [Mosset05] A. Mosset, F. Devaux, E. Lantz, *Spatially noiseless optical amplification of images* Phys. Rev.Lett. **94**, 223603 (2005)
- [Navez01] P.Navez, E.Brambilla, A.Gatti, L.A Lugiato *Spatial Entanglement of Twin quantum Images*, Phys. Rev. A **65**, 013813 (2001)
- [Ou93] Z. Y. Ou, S. F. Pereira, and H. J. Kimble *Quantum Noise Reduction in Optical Amplification*, Phys. Rev.Lett. **70**, 3239 (1993)
- [Patorski89] K. Patorski, *the self-imaging phenomenon and its applications*, Progress in optics, Vol **28**, 3 (1989)
- [Petsas03] K.I. Petsas, A. Gatti, L.A. Lugiato, and C. Fabre, *Multimode squeezed states produced by a confocal parametric oscillator*, Eur. Phys. J. D **22**, 501-512 (2003)
- [Pole65] R. V. Pole, J. Opt. Soc. Amer. **55**, 254 (1965)
- [Protsenko95] I. E. Protsenko, L. A. Lugiato, and C. Fabre, *Spectral analysis of the degenerate optical parametric oscillator as a noiseless amplifier*, Phys. Rev. A **50**, 1627-1645 (1994)
- [Reynaud92] Reynaud S. et Al, *Quantum fluctuations in optical systems*, Progress in Optics XXX, 3-81 (1992)
- [Reid88] M. D. Reid, P. Drummond, *Quantum correlations of phase in non-degenerate parametric oscillation* , Phys. Rev. Lett. **60**, 2731 (1988)
- [Rosencher00] Bruno Scherrer, Isabelle Ribet, Antoine Godard, Emmanuel Rosencher, Michel Lefebvre, *Dual-cavity doubly resonant optical parametric oscillators: demonstration of pulsed single-mode operation* JOSA B, Volume **17**, Issue 10, 1716-1729 (2000)
- [SapienzaPhD] *mode-coupling and perturbations in a degenerate optical resonator*, Master thesis, Leiden University, R. Sapienza (2000)
- [Schawlow58] A. L. Schawlow and C. H. Townes, *Infrared and optical masers* Phys. Rev. **112** 1940 (1958)
- [Schiller95] Schiller S., Koher S., Paschotta R., Mlynek J., Applied physics B **60** (1995), 755
- [Schwob98] C.Schwob, P.F.Cohadon, C.Fabre, M.A.Marte, H.Ritsch, A.Gatti, L.Lugiato, Applied.Phys.B **66**, 685 (1998).

- [Seng-Tiong-Ho] Seng-Tiong Ho, P. Kumar, J. H. Shapiro, *Quantum Theory of nondegenerate multiwave mixing: general formulation* Phys. Rev. Lett. A **37**, 2017 (1988)
- [Shen] Y.R.Shen, The Principles of Nonlinear optics, Wiley Classics Library.
- [Siegman] Siegman A.E., *Lasers*, University Science Books, Mill Valley 1986
- [Simon90] R. Simon, N. Mukunda, *Minimal three-component SU(2) gadget for polarization optics*, Phys. Lett. A **143**, 165 (1990)
- [Sokolov89] M.I. Kolobov and I.V. Sokolov, Sov. Phys. JETP **69**, 1097 (1989)
- [SNLO] **SNLO**, developpé par Sandia National Laboratories, disponible sur <http://www.sandia.gov/imrl/X1118/xtal.htm>
- [Sokolov01] , I. V. Sokolov, M. Kolobov, A. Gatti, L. A. Lugiato , Opt. Comm. 193,175 (2001)
- [Staliunas95] *Transverse pattern formation in optical parametric oscillator*, K. Staliunas, *J. Mod. Opt.*, **42**, 1261 (1995).
- [SuretPhD] *Dynamique temporelle et effets transverse dans les oscillateurs paramétriques optiques continus: observations expérimentale et modélisation*, Pierre Suret, thèse de doctorat de l'Université de Paris Sud (Paris XI) 2000.
- [Svelto] Svelto, *Principles of Laser*, 4th edition, Plenum Press
- [Teich]
- [Tombesi] *Entangling Macroscopic Oscillators Exploiting Radiation Pressure* S. Mancini, V. Giovannetti<sup>2</sup>, D. Vitali, and P. Tombesi, Phys. Rev. Lett. **88**, 120401 (2002)
- [Townes] C. H. Townes, *J. Inst. Elec. Commun. Eng. (Japan)***36**, 650 (1953)
- [TrepsPhD] *Effets quantiques dans les images optiques*, Thèse de doctorat de l'université Paris VI, Treps Nicolas (2001)
- [Treps04] E.Lantz, T.Sylvestre, H.Maillotte, N.Treps, C.Fabre, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* 6 S295-S302, (2004).
- [Treps05] *Quantum noise in multipixel image processing* N. Treps, V. Delaubert, A. Maitre, J-M. Courty, C. Fabre, Phys. Rev. A **71**, 013820 (2005).
- [Turnbull00] G. A. Turnbull, D. McGloin, I. D. Lindsay, M. Ebrahimzadeh, M. H. Dunn, *Extended mode-hop-free tuning by use of a dual-cavity, pump-enhanced optical parametric oscillator* Optics Letters, Vol. **25** Issue 5 Page 341 (March 2000)
- [Vaidman94] Vaidman L., Phys. Rev. Lett. A **49**, 1973 (1994)
- [Vaupel99] Vaupel M., Maître A., Fabre C., Phys. Rev. Lett. **83**, 5278 (1999)

- [Weber53] J. Weber, Inst. Electron. Elec. Engrs, Trans. Electron Devices **3**, 1 (1953)
- [Wilczynski65] J. S. Wilczynski et R. E. Tibbetts J. Opt. Soc. Amer. **55**, 1574 (1965)
- [Wong98] J. Teja and Ngai C. Wong, *Twin-beam generation in a triply resonant dual-cavity optical parametric oscillator* OpticsExpress Vol. **2**, No. 3, Page 65 (1998)
- [Yuen76] Phys. Rev. A **13**, 2226 (1976), H.P. Yuen
- [Yuen86] Phys. Rev. Lett. **56**, 2176 (1986), H.P. Yuen
- [Yurke84] Yurke B., Phys. Rev. A **29**, 408 (1984)
- [ZhangPhD] Zhang K.S, *Intracavity optical nonlinear devices using  $\chi^{(2)}$  quasi-phase-matched material: Classical and quantum properties and application to all-optical regeneration*, Thèse de l'université Paris 6 (2002)
- [Zhang99] Zhang Y., Su H., Xie C., and Peng K., *Quantum variances and squeezing of output field from NOPA*, Phys. Let. A, **259** 171-177 (1999)
- [Zhang:01] K. S. Zhang, T. Coudreau, M. Martinelli, A. Maître, and C. Fabre *Generation of bright squeezed light at  $1.06\mu\text{m}$  using cascaded nonlinearities in a triply resonant cw periodically-poled lithium niobate optical parametric oscillator*, Phys. Rev. A, **64**, 033815 (2001)
- [Zondy99] A. Douillet, J.-J. Zondy, A. Yelisseyev, S. Lobanov, L. Isaenko, *Stability and frequency tuning of thermally loaded continuous-wave AgGaS<sub>2</sub> optical parametric oscillators*, JOSA B, Volume 16, Issue **9**, 1481-1498 (Septembre 1999)
- [review98] L.A Lugiato, M Brambilla, A Gatti, Advances in Atomic Molecular and Optical Physics **40**, 229 (1998)
- [review02] S.Barland, J.R.Tredicce, M.Brambilla, L.A.Lugiato, S.Balle, M.Giudici, T.Maggipinto, L.Spinelli, G.Tissoni, T.Koedl, M.Miller and R.Jaeger, Nature **419**, 699 (2002)
- [Quantim] L.A Lugiato, M. Brambilla, A. Gatti, *Quantum imaging*, J. Opt. B, S1-8 (2002)





## Résumé

Ce mémoire présente une étude théorique et expérimentale de l'amplification continue d'images à l'aide d'un oscillateur paramétrique optique (OPO).

Une première partie est consacrée aux propriétés classiques de cavités nécessaires à l'imagerie, dites "dégénérées en modes transverses". On étudie tout d'abord théoriquement le problème général de la transmission d'une image à travers une cavité quelconque. Ensuite, deux exemples de cavités dégénérées sont abordés: la cavité hémi-confocale puis la cavité auto-imageante.

Ensuite les propriétés quantiques spatiales du vide émis par un oscillateur paramétrique optique sous le seuil d'oscillation sont abordées. On traite tout d'abord l'effet de la taille finie du milieu non-linéaire sur la compression de bruit locale en sortie d'un OPO en cavité confocale. Cette étude est étendue au cas de la cavité auto-imageante où l'on montre la possibilité de générer des faisceaux EPR locaux.

Une troisième partie est consacrée à l'amplification optique au niveau quantique. On construit un modèle théorique d'OPO monomode aussi proche que possible de notre expérience. Nous étudions ensuite le problème de l'optimisation des caractéristiques de l'OPO pour l'amplification sans bruit.

Enfin une partie expérimentale étudie l'amplification d'images à l'aide d'un OPO dégénéré en modes transverses sous le seuil d'oscillation. Cette étude est réalisée tout d'abord en cavité hémi-confocale avec un cristal de type II puis en cavité confocale avec un cristal de type I. Nous prouvons le caractère quantique des images amplifiées. Le facteur de bruit du système est caractérisé, prouvant un régime d'amplification "sans bruit".

**Mots-clefs :** image quantique, oscillateur paramétrique optique, amplification sans bruit, amplification sensible à la phase, dégénérescence transverse, imagerie paraxiale, bruit quantique transverse, corrélations quantiques spatiales, variables continues.

## Abstract

This thesis studies both theoretically and experimentally continuous images amplification thanks to an optical parametric oscillator.

First, we study classically the properties of special optical cavities called transverse degenerate cavities. We develop a formalism to understand the transmission of an image through any paraxial cavity. We illustrate this formalism by studying a particular cavity: the semi-confocal cavity. Then, we study the transmission and the second harmonic generation of an image through a perfect imaging cavity, the self imaging cavity.

Second, we investigate theoretically the spatial features of quantum noise generated by an OPO below threshold. The effect of the finite size of the non-linear crystal on the squeezed vacuum using a confocal cavity is investigated. This study is extended to a self-imaging cavity, showing the possibility of local EPR beams generation.

We then focus on some particularities of image amplification. We built an OPO model as close as possible to the experiment. The features of the cavity are optimized for noiseless amplification.

Finally, in an experimental part we study the amplification of images thanks to a transverse degenerate OPO below threshold. The study is performed with an hemi-confocal cavity with a type II crystal and a confocal one with a type I crystal. The quantum feature of the images is proved. The noise factor of the amplifier is measured, proving a "noiseless" operation.

**Keywords :** quantum images, optical parametric oscillator, noiseless amplification, phase-sensitive amplification, transverse degeneracy, paraxial imaging, transverse quantum noise, spatial quantum correlations, continuous variables.