



HAL
open science

Résolution numérique des équations de Saint-Venant par la technique de projection en utilisant une méthode des volumes finis dans un maillage non structuré

Yu-E Shi

► **To cite this version:**

Yu-E Shi. Résolution numérique des équations de Saint-Venant par la technique de projection en utilisant une méthode des volumes finis dans un maillage non structuré. Sciences de la Terre. Université de Caen, 2006. Français. NNT: . tel-00130539v2

HAL Id: tel-00130539

<https://theses.hal.science/tel-00130539v2>

Submitted on 6 Jul 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université de Caen - Basse Normandie
U.F.R. de sciences
Ecole doctorale SIMEM

T H È S E

présentée par

Mme **SHI Yu-e**

et soutenue le 22 novembre 2006

en vue de l'obtention du

DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ de CAEN

Spécialité : Mécanique des milieux fluides
(Arrêté du 7 août 2006)

Titre :

**Résolution numérique des équations de Saint-Venant
par la technique de projection en utilisant une méthode
des volumes finis dans un maillage non structuré**

MEMBRES du JURY

M. Kim Dan NGUYEN	Professeur à l'Université de Caen	Directeur de la thèse
M. Olivier THUAL	Professeur à l'INPT	Rapporteur
M. Philippe FRAUNIE	Professeur à l'Université de Toulon et Var	Rapporteur
M. Jean-Michel TANGUY	Directeur, H.D.R., SCHAPI	Examineur
M. Jean-Michel HERVOUET	H.D.R., LNHE/EDF	Examineur
M. Michel BELORGEY	Professeur émérite à l'Université de Caen	Examineur
M. Sylvain GUILLOU	MCF, H.D.R., Université de Caen	Examineur

Table des Matières

Table des Matières	i
Liste des figures	v
Liste des tables	viii
Chapitre 1 Introduction	1
1.1 Introduction générale.....	1
1.2 Contenu de ce travail.....	5
Partie I Formulation mathématique et numérique du problème des écoulements à surface libre	9
Chapitre 2 Equations de Saint-Venant	11
2.1 Equations de Navier-Stokes	15
2.1.1 Equations de base	15
2.1.2 Equation de continuité	15
2.1.3 Equation de quantité de mouvement	16
2.2 Hypothèses et approximations.....	18
2.2.1 Hypothèse de pression hydrostatique	18
2.2.2 Hypothèse de l'imperméabilité du fond et de la surface libre	19
2.2.3 Hypothèse de Boussinesq.....	19
2.3 Moyenne des équations de Navier-Stokes.....	20
2.3.1 Principe	20
2.3.2 Règle de Leibnitz.....	20
2.3.3 Moyenne de l'équation de continuité	20
2.3.4 Moyenne de l'équation de quantité de mouvement.....	21
2.4 Equations de Saint-Venant	30
2.4.1 Formes conservative et non conservative des équations de Saint-Venant	30
2.4.2 Relations de ressauts des équations de Saint-Venant	32
2.4.3 Choix de formulations des équations de Saint-Venant.....	33
2.4.4 Equations de base de Saint-Venant.....	34
Chapitre 3 Résolution numérique de l'équation de transport.....	37
3.1 Equation de transport.....	37
3.2 Techniques de discrétisation de l'équation de transport.....	37
3.2.1 MVF en maillage structuré	37
3.2.2 MVF en maillage non structuré	39
3.3 Approximations des termes d'advection et de diffusion dans un maillage non structuré.....	39
3.3.1 Terme de Convection.....	39
3.3.2 Approximation du terme de Diffusion.....	48
3.4 Construction du système des équations linéaires	50
Chapitre 4 Techniques Numériques pour les équations de Saint-Venant.....	51
4.1 Techniques de résolution des équations de Saint-Venant	51
4.1.1 Etat de l'art	51

4.1.2	Solveur de l'approximation Riemann de Roe.....	53
4.1.3	Méthode de projection.....	56
4.2	Conditions aux limites.....	63
4.2.1	Frontières solides.....	63
4.2.2	Frontières ouvertes.....	63
4.2.3	Méthode des caractéristiques.....	64
4.2.4	Méthode de Radiation.....	66
4.3	Organigramme.....	67
Partie II	Validations.....	69
Chapitre 5	Validations du modèle : Cas des écoulements à surface libre en eaux peu profondes.....	71
5.1	Ecoulement dans un canal horizontal avec une bosse au fond.....	71
5.1.1	Objectifs.....	71
5.1.2	Ecoulement sous critique.....	72
5.1.3	Ecoulement transcritique avec choc.....	74
5.1.4	Conclusion.....	76
5.2	Propagation de marée dans un bassin polaire.....	76
5.2.1	Objectifs.....	76
5.2.2	Description du problème et solution analytique.....	76
5.2.3	Paramètres numériques.....	79
5.2.4	Résultats et discussions.....	80
5.2.5	Conclusion.....	84
5.3	Ecoulement forcé par un jet dans un bassin circulaire.....	86
5.3.1	Objectifs.....	86
5.3.2	Description du problème.....	86
5.3.3	Paramètres numériques.....	88
5.3.4	Résultats et discussions.....	89
5.3.5	Conclusion.....	99
5.4	Ecoulement dans un canal à élargissement brusque.....	100
5.4.1	Objectifs.....	100
5.4.2	Description du problème.....	100
5.4.3	Paramètres numériques.....	102
5.4.4	Résultats et discussions.....	106
5.4.5	Conclusion.....	107
5.5	Ecoulement permanent dans un canal de topographie irrégulière.....	108
5.5.1	Objectifs.....	108
5.5.2	Description du problème.....	109
5.5.3	Paramètres numériques.....	110
5.5.4	Résultats et discussions.....	111
5.5.5	Conclusion.....	116
5.6	Terrain découvrant/recouvrant : Bassin au fond en pente variable soumis à une marée sinusoïdale.....	117
5.6.1	Objectifs.....	117
5.6.2	Description du problème.....	117
5.6.3	Paramètres numériques.....	119
5.6.4	Résultats et discussions.....	119
5.6.5	Conclusion.....	124

Chapitre 6 Validations du modèle : Cas des problèmes de rupture de barrages	125
6.1 Problème idéal de rupture de barrage.....	126
6.1.1 Objectifs.....	126
6.1.2 Description du problème	126
6.1.3 Paramètres numériques.....	127
6.1.4 Résultats et discussions.....	127
6.1.5 Conclusion.....	129
6.2 Problème de rupture partielle de barrage.....	135
6.2.1 Objectifs.....	135
6.2.2 Description du problème	135
6.2.3 Paramètres numériques.....	136
6.2.4 Résultats et discussions.....	136
6.2.5 Conclusion.....	149
6.3 Rupture de barrage dans un canal du WES	149
6.3.1 Objectifs.....	149
6.3.2 Description du problème	149
6.3.3 Paramètres numériques.....	151
6.3.4 Résultats et discussions.....	151
6.3.5 Conclusion.....	158
6.4 Rupture de barrage dans un canal de rétrécissement.....	159
6.4.1 Objectifs.....	159
6.4.2 Description du problème	159
6.4.3 Paramètres numériques.....	161
6.4.4 Résultats et discussions.....	162
6.4.5 Conclusion.....	164
Partie III Applications	167
Chapitre 7 Rupture du barrage de Malpasset.....	169
7.1 Objectif.....	169
7.2 Histoire du barrage de Malpasset.....	170
7.3 Topographie de Malpasset.....	172
7.4 Application	173
7.4.1 Conditions initiales	173
7.4.2 Conditions aux limites	173
7.4.3 Paramètres numériques et physiques.....	174
7.5 Données disponibles.....	175
7.5.1 Mesures après l'accident.....	175
7.5.2 Modèle physique.....	177
7.6 Résultats et discussions	179
7.6.1 Résultats numériques aux différents instants.....	179
7.6.2 Temps d'arrivée de la propagation de l'onde	193
7.6.3 Cote maximale de la dénivellation de la surface libre.....	197
7.6.4 Influence du coefficient de frottement.....	200
7.6.5 Performances numériques.....	201
7.6.6 Conclusion.....	201
Chapitre 8 La simulation de l'inondation dans la ville de Dongchuan	203
8.1 Objectif.....	203
8.2 Description géographique.....	204

8.3 Simulation numérique	206
8.3.1 Données disponibles	206
8.3.2 Domaine de calcul	206
8.3.3 Conditions initiales	208
8.3.4 Conditions aux limites	208
8.3.5 Paramètres numériques	210
8.4 Résultats et discussion	211
8.4.1 Résultats numériques aux différents instants	211
8.4.2 Cartes de vitesse et de profondeur de l'eau maximum	222
8.5 Conclusion	225
Partie IV Conclusions et perspectives	227
Bibliographie	233
Glossaire	244

Liste des Figures

Figure 2-1 Notations des variables.....	12
Figure 2-2 Ressaut hydraulique	33
Figure 3-1 Maillage structuré pour une MVF	38
Figure 3-2 Volume de contrôle pour les flux convectifs traversant les faces	41
Figure 3-3 Définition du volume de contrôle (a) et l'opérateur MLG (b)	42
Figure 3-4 Schéma de discrétisation de convection	44
Figure 3-5 Etat initial du cône $\Phi_{max}=1.0$	45
Figure 3-6 Résultats numériques par le schéma ULSS et l'opérateur de MLG.....	46
Figure 3-7 Volume de contrôle pour le flux diffusif traversant la face (1-2)	48
Figure 3-8 Interpolation de la valeur de aux sommets	49
Figure 4-1 Schéma des lignes caractéristiques.....	65
Figure 4-2 Organigramme du programme de calcul	67
Figure 5-1 Topographie du canal	72
Figure 5-2 Profil longitudinal de la surface d'eau (cas de l'écoulement sous critique).....	73
Figure 5-3 Erreur relative de la solution numérique	74
Figure 5-4 Profil longitudinal de la surface libre calculé avec les différentes valeurs de dt ..	75
Figure 5-5 Géométrie du bassin polaire	77
Figure 5-6 Bathymétrie du bassin polaire	77
Figure 5-7 Maillage du bassin polaire.....	79
Figure 5-8 Surface libre en 3D après 199 cycles de marée.....	81
Figure 5-9 Contours de dénivellation après 199 cycles de marée.....	81
Figure 5-10 Surface libre sur fond après 199 cycles de marée	82
Figure 5-11 Champs de vitesse après 199 cycles de marée	83
Figure 5-12 Contours de norme de vitesse après 199 cycles de marée.....	83
Figure 5-13 Profil longitudinal de la dénivellation au point de référence	85
Figure 5-14 Erreur relative sur la dénivellation au point de référence.....	85
Figure 5-15 Profil longitudinal de la vitesse radiale au point de référence.....	85
Figure 5-16 Erreur relative sur la vitesse radiale au point de référence.....	85
Figure 5-17 Géométrie du bassin	87
Figure 5-18 Maillage de 31x31	88
Figure 5-19 Maillage de 61x61	88
Figure 5-20 Champs de vitesse avec un maillage 31x31 pour $Re=10$	92
Figure 5-21 Iso valeurs de vitesse à $t = 80$ sec avec un maillage 31x31 pour $Re=10$	93
Figure 5-22 Lignes de courant à $t = 80$ sec avec un maillage 31x31 pour $Re=10$	93
Figure 5-23 Contours de dénivellation à $t = 80$ sec avec un maillage 31x31 pour $Re=10$	94
Figure 5-24 Profil de vitesse au milieu du bassin avec un maillage de 31x31	94
Figure 5-25 Champs de vitesse avec un maillage 61x61 pour $Re=10$	95
Figure 5-26 Iso valeurs de vitesse à $t = 80$ sec avec un maillage 61x61 pour $Re=10$	96
Figure 5-27 Lignes de courant à $t = 80$ sec avec un maillage 61x61 pour $Re=10$	96
Figure 5-28 Contours de dénivellation à $t = 80$ sec avec un maillage 61x61 pour $Re=10$	97
Figure 5-29 Profil de vitesse au milieu du bassin avec un maillage de 61x61 pour $Re=10$...	97
Figure 5-30 Comparaison du profil de vitesse au milieu du bassin	98
Figure 5-31 Champs de vitesse à $t = 160$ sec avec un maillage 61x61 pour $Re=200$	98
Figure 5-32 Lignes de courant à $t = 160$ sec avec un maillage 61x61 pour $Re=200$	99
Figure 5-33 Géométrie du problème et schéma de la zone de re-circulation.....	102
Figure 5-34 Champs de vitesse a) $t = 15$ s, b) $t = 25$ s, c) $t = 35$ s.....	103

Figure 5-35 Champs de vitesse d) $t = 45$ s, e) $t = 55$ s, f) $t = 65$ s, g) $t = 75$ s	104
Figure 5-36 Lignes de courant	105
Figure 5-37 Topographie et géométrie du canal	109
Figure 5-38 Résultats numériques avec le maillage grossier $\Delta=10$ m	113
Figure 5-39 Résultats numériques avec le maillage moyen $\Delta=5$ m	114
Figure 5-40 Résultats numériques avec le maillage fin $\Delta=2.5$ m	115
Figure 5-41 Erreurs relatives du débit unitaire avec les différents maillages	116
Figure 5-42 Géométrie et topographie du canal avec une pente variable	118
Figure 5-43 Profil longitudinal de la surface libre et de vitesse à $t = 0, 6, 12$ min	121
Figure 5-44 Profil longitudinal de la surface libre et de vitesse à $t = 18, 24, 30$ min	122
Figure 5-45 Profil longitudinal de la surface libre et de vitesse à $t = 36, 42, 48$ min	123
Figure 5-46 Profil longitudinal de la surface libre et de vitesse à $t = 54$ min	124
Figure 6-1 Condition initiale du problème	126
Figure 6-2 Comparaison des résultats pour $h_2/h_1=0.5$ à $t = 0.1$ s.....	130
Figure 6-3 Comparaison des résultats pour $h_2/h_1=0.1$ à $t = 0.1$ s.....	131
Figure 6-4 Comparaison des résultats pour $h_2/h_1=0.05$ à $t = 0.1$ s.....	132
Figure 6-5 Comparaison des résultats pour $h_2/h_1=0.04$ à $t = 0.1$ s.....	133
Figure 6-6 Résultats numériques pour tous rapports $h_2/h_1=0.5, 0.1, 0.05$ et 0.04	134
Figure 6-7 Rupture partielle de barrage : Géométrie du bassin	135
Figure 6-8 Résultats obtenus par le modèle à $t = 2.2$ s.....	138
Figure 6-9 Résultats obtenus par le modèle à $t = 4.2$ s.....	139
Figure 6-10 Résultats obtenus par le modèle à $t = 6.2$ s.....	140
Figure 6-11 Résultats obtenus par le modèle à $t = 7.1$ s.....	141
Figure 6-12 Résultats obtenus par le modèle à $t = 7.2$ s.....	142
Figure 6-13 Résultats obtenus par le modèle à $t = 8.2$ s.....	143
Figure 6-14 Résultats obtenus par le modèle à $t = 10.2$ s.....	144
Figure 6-15 Position des points de référence	145
Figure 6-16 Profils transversaux calculés à $t = 7.1$ s et passés par $x = 75, 95, 115$ m	146
Figure 6-17 Profils longitudinaux calculés à $t=7.1$ s et passés aux différents endroits.....	147
Figure 6-18 Evolution de la hauteur d'eau aux points 1 et 2	148
Figure 6-19 Conditions initiales du problème.....	150
Figure 6-20 Surface libre de l'écoulement sur un fond incliné.....	152
Figure 6-21 Surface libre de l'écoulement sur un fond incliné.....	153
Figure 6-22 Contours de vitesse à $t = 32$ sec superposés sur la surface libre	154
Figure 6-23 Champs de vitesse à $t = 32$ sec	154
Figure 6-24 Position des stations de mesurée	155
Figure 6-25 Comparaison de la hauteur d'eau calculée avec les données expérimentales ...	156
Figure 6-26 Comparaison de la solution numérique avec les données expérimentales à STA225	157
Figure 6-27 Comparaison des solutions numériques avec les données expérimentales sur STA350	158
Figure 6-28 Géométrie du canal et positions des points de mesure.....	160
Figure 6-29 Conditions Initiales.....	161
Figure 6-30 Raffinement du maillage dans le segment rétréci du canal	162
Figure 6-31 Champs de vitesses sur la constriction	163
Figure 6-32 Elévation de la profondeur de l'eau à : a) S1 ; b) S2.....	165
Figure 6-33 Elévation de la profondeur de l'eau à : a) S3 ; b) S4.....	166
Figure 7-1 Carte géographie de Malpasset.....	171
Figure 7-2 Topographie de Malpasset.....	172

Figure 7-3 Maillage de Malpasset.....	174
Figure 7-4 Positions des transformateurs, des points de mesure et des relevés.....	178
Figure 7-5 Champ de vitesses tracé sur les contours de la profondeur d'eau à $t = 60$ s.....	180
Figure 7-6 Champ de vitesses tracé sur les contours de la profondeur d'eau à $t=20$ min.....	181
Figure 7-7 Champ de vitesses tracé sur les contours de la profondeur d'eau à $t=30$ min.....	182
Figure 7-8 Rupture du barrage de Malpasset à $t = 0$ s.....	183
Figure 7-9 Rupture du barrage de Malpasset à $t = 100$ s.....	184
Figure 7-10 Rupture du barrage de Malpasset à $t = 5$ minutes.....	185
Figure 7-11 Rupture du barrage de Malpasset à $t = 10$ minutes.....	186
Figure 7-12 Rupture du barrage de Malpasset à $t = 20$ minutes.....	187
Figure 7-13 Rupture du barrage de Malpasset à $t = 30$ minutes.....	188
Figure 7-14 Rupture du barrage de Malpasset à $t = 40$ minutes.....	189
Figure 7-15 Rupture du barrage de Malpasset à $t = 50$ minutes.....	190
Figure 7-16 Rupture du barrage de Malpasset à $t = 60$ minutes.....	191
Figure 7-17 Rupture du barrage de Malpasset à $t = 4000$ s.....	192
Figure 7-18 Temps d'arrivée aux stations de mesure définies dans le modèle physique.....	197
Figure 7-19 Cote maximum de la surface libre aux points d'observation en rive droite.....	197
Figure 7-20 Cote maximum de la surface libre aux points d'observation en rive gauche.....	199
Figure 7-21 Cote maximum de la surface libre aux points de mesure sur le modèle physique.....	199
Figure 7-22 Influence du coefficient de Chézy sur la cote maximale de la surface libre aux points d'observation.....	200
Figure 7-23 Influence du coefficient de Chézy sur la cote maximale de la surface libre aux points de mesure du modèle physique.....	201
Figure 8-1 Carte topographique de la province de Yunnan.....	204
Figure 8-2 Carte digitale de Dongchuan.....	205
Figure 8-3 Domaine de calcul de Dongchuan.....	207
Figure 8-4 Maillage de calcul de Dongchuan.....	207
Figure 8-5 Entrées et sorties des trois fossés de Dongchuan.....	208
Figure 8-6 Topographie du domaine étudié.....	210
Figure 8-7 Profondeur de l'eau et champ de vitesse à $t = 30$ sec.....	212
Figure 8-8 Profondeur de l'eau et champ de vitesse à $t = 60$ sec.....	213
Figure 8-9 Profondeur de l'eau et champ de vitesse à $t = 90$ sec.....	214
Figure 8-10 Profondeur de l'eau et champ de vitesse à $t = 120$ sec.....	215
Figure 8-11 Profondeur de l'eau et champ de vitesse à $t = 180$ sec.....	216
Figure 8-12 Profondeur de l'eau et champ de vitesse à $t = 240$ sec.....	217
Figure 8-13 Profondeur de l'eau et champ de vitesse à $t = 300$ sec.....	218
Figure 8-14 Profondeur de l'eau et champ de vitesse à $t = 420$ sec.....	219
Figure 8-15 Profondeur de l'eau et champ de vitesse à $t = 30$ min.....	220
Figure 8-16 Profondeur de l'eau et champ de vitesse à $t = 2$ h.....	221
Figure 8-17 Définition des critères de risque statique et dynamique dû à l'inondation.....	222
Figure 8-18 Risque statique de Dongchuan en profondeur de l'eau.....	223
Figure 8-19 Risque dynamique de Dongchuan en vitesses.....	224
Figure 8-20 Image du fossé d'écoulement de débris.....	226

Liste des Tableaux

Tableau 2-1 Comparaisons de la formulation des équations de Saint-Venant.....	33
Tableau 3-1 Valeurs maximum au pic par ECOMOD-UFVM	47
Tableau 3-2 Valeurs maximum au pic par des schémas différents.....	47
Tableau 5-1 Longueur de zone de re-circulation L_s (m) par rapport au point P (1,0)	106
Tableau 5-2 Coordonnées (x_c, y_c) du centre du premier tourbillon	107
Tableau 5-3 Coordonnées (x_c, y_c) du centre de deuxième tourbillon par rapport au point P(1,0)	107
Tableau 5-4 Fond variable du canal rectangulaire	109
Tableau 5-5 Fond et pente du canal	118
Tableau 7-1 Coordonnées des trois transformateurs électriques.....	175
Tableau 7-2 Coordonnées de points examinés par la police	176
Tableau 7-3 Coordonnées de 9 points de mesure en aval du barrage par le modèle physique	177
Tableau 7-4 - Influence du coefficient de diffusion $C_h = 25 m^{1/2}/s$	193
Tableau 7-5 Influence du coefficient de Chézy avec un coefficient de diffusion $A_H = 15 m^2/s$	194
Tableau 7-6 Temps d'arrivée de l'onde aux points de mesure avec $A_H = 15 m^2/s$	195
Tableau 7-7 Temps de coupure des transformateurs.....	196
Tableau 7-8 Cote maximale de la surface libre aux points observés par la police	198
Tableau 8-1 Débit et vitesse déterminés aux fréquences de retour 50 et 100 ans.....	209

Chapitre 1

Introduction

1.1 Introduction générale

L'eau est un problème clé pour la réduction de la pauvreté, pour le développement durable et pour atteindre les MDG (Millennium Development Goals). Cependant, au début du nouveau millénaire, 1.1 milliard de personnes (17% de la population mondiale) n'ont pas encore accès à l'alimentation d'eau sécurisée. Le changement climatique et les activités humaines incontrôlables font que les risques des inondations deviennent plus fréquents dans ces dernières décennies. En conséquence, des aménagements intégrés des ressources en eau sont nécessaires, voire indispensables pour la prévention des inondations et des sécheresses. Dans un aménagement des ressources en eau, la modélisation numérique reste toujours un moyen essentiel. En effet, par définition le modèle est un outil qui permet de décrire un phénomène physique. Si celui-ci s'est réalisé, on peut, par simulation, le reconstruire et apporter des informations sur les conditions qui furent nécessaires à son déroulement. Par contre, si le phénomène doit avoir lieu, la description est alors une prédiction qui devra tenir compte, par exemple, dans le cas de modification de l'environnement marin, de l'activité humaine et des « forcings naturels » pouvant exister dans le futur. Il faut souligner cependant que la simulation et la prédiction ne sont valables que dans la mesure où le modèle est validé. La validation du modèle est une procédure dans laquelle les paramètres libres doivent être corrigés, afin d'avoir une bonne coïncidence entre les résultats obtenus par le modèle et ceux d'un nombre d'observations suffisantes. Cette procédure s'appelle la calibration du modèle.

On peut citer de nombreuses applications de la modélisation numérique des écoulements à surface libre à l'aménagement des ressources en eau, à la protection de l'environnement et de l'écosystème : simulation des écoulements dus à la rupture d'un barrage, des diversions de crues d'un fleuve vers une zone de rétention d'eau, simulation du processus de changement du lit d'une rivière, simulation des écoulements et du transport sédimentaire ou des polluants en milieux estuariens et côtiers, etc.

Dans les rivières, les estuaires, et les zones côtières, les écoulements sont caractérisés

par :

- une grande complexité topographique et morphologique
- des frontières d'écoulement très ouvertes
- un passage d'une zone sèche à une zone mouillée et inversement. On rencontre ce problème soit dans les écoulements tidaux soit dans la propagation des ondes dues à la rupture d'un barrage, ou encore dans la diversion des crues.
- une forte advection, voire une pure advection dans le cas de rupture de barrage sur un fond plat et glissant (sans frottement)
- une échelle variable dans l'espace (d'une dizaine à quelques milliers de mètres) et dans le temps (de quelques minutes à quelques mois, voire quelques années)

En conséquence, on rencontre, lors du développement d'un modèle numérique des écoulements à surface libre, des difficultés majeures qui résultent autant de la complexité physique du milieu que des calculs numériques. Ainsi :

- La complexité géomorphologique des rivières, des estuaires et des zones côtières exige souvent une grille de calcul de haute résolution. La condition de stabilité numérique impose alors un pas de temps de calcul très petit car il est proportionnel à la taille du pas d'espace de la maille de calcul.

Par ailleurs, il est probable que l'instabilité numérique soit provoquée par les variations rapides de bathymétrie de la rivière, de l'estuaire ou du plateau continental (rupture de pente, de talus). De toute évidence, pour une simulation sur une longue durée qui peut aller jusqu'à plusieurs années, le coût du calcul sera élevé, à moins qu'un schéma numérique efficace soit utilisé, permettant ainsi de diminuer le temps de calcul tout en préservant la précision désirée.

- En général, les informations sur les frontières ouvertes sont insuffisantes. Des traitements numériques spéciaux doivent être développés afin d'assurer que le problème soit bien posé.
- Le problème de terrain découvrant et recouvrant est un problème délicat à résoudre. Il peut provoquer des instabilités numériques indésirables ou une perte de la conservation de la masse d'eau.
- L'écoulement fortement convectif, probablement avec la présence d'un front de

choc, provoque essentiellement des oscillations numériques ou des diffusions artificielles qui sont dues au traitement des termes d'advection dans les équations qui gouvernent le transport de la masse d'eau, par une méthode standard d'approximation. Le choix d'un schéma numérique approprié au problème d'advection pose donc un problème préalable qu'il faut d'abord résoudre pour éviter ces inconvénients.

Lors du développement d'un modèle numérique, le choix d'une méthode de discrétisation est primordial. Il existe trois méthodes principales de discrétisation des équations aux dérivées partielles (EDP) :

- Méthodes aux différences finies (MDF) : Les méthodes aux différences finies consistent à discrétiser, moyennant un maillage de calcul prédéfini, chaque dérivée partielle d'une variable dans l'EDP à l'aide du développement en série de Taylor de la valeur de cette variable. Ainsi, la discrétisation de l'EDP permet d'obtenir des relations linéaires entre la valeur de la variable en un nœud et les valeurs de cette même variable aux nœuds voisins du maillage de calcul.

Les méthodes aux différences finies apportent, grâce à leur simplicité, la possibilité de construire des schémas numériques d'ordre élevé à faible coût. Cependant, elles semblent plus difficiles à mettre en œuvre pour les problèmes à géométrie complexe où la construction d'un seul maillage structuré est difficile. Elles sont donc mal adaptées aux écoulements en géométries complexes.

- Méthodes aux éléments finis (MEF) : La technique des éléments finis discrétise l'espace à l'aide des éléments géométriques simples (triangles ou quadrilatères en général). Comme elle permet de modéliser des géométries très complexes, elle est parfois préférée à la méthode des volumes finis. Abondamment utilisées dans l'étude du système de Saint-Venant et validées, ces méthodes fournissent aujourd'hui encore des algorithmes rapides et des résultats souvent satisfaisants, (i.e. le logiciel TELEMAC (Hervouet 2000) par EDF, SMS (King I.P. et al., 1978), Brigham Young University), CCHE2D par NCCHE (Wang S.S.Y et al., 1989), et les autres (Katsaounis T. and Makridakis C., 2003) et (Dawson C.N. and Proft J., 2002). Cette méthode offre à la fois un cadre théorique rigoureux et une grande souplesse pour discrétiser les domaines de calcul (Hervouet J.M., 2001). Cependant, les méthodes classiques d'éléments finis ne sont pas naturellement très bien

adaptées ni au caractère discontinu des solutions, ni au caractère conservatif du système (Audusse E., 2004).

- Méthodes des volumes finis (MVF) : La méthode des volumes finis consiste à discrétiser le domaine de l'écoulement en une multitude de volumes (ou cellules) de contrôle, puis d'effectuer des bilans de masse et de quantité de mouvement sur ces petits volumes. Les avantages déterminants des volumes finis par rapport aux autres méthodes [voir Zhao D.H. et al., 1994), et (Tan W., 1992)] sont :
 - + Découper l'espace en cellules, construites par exemple à partir d'un maillage d'éléments finis classique.
 - + Intégrer l'équation considérée sur chaque cellule à chaque pas de temps. Il est facile de construire les fronts de choc en une forme de conservation : le flux sortant d'une cellule est égal à celui qui rentre dans la cellule voisine d'où un algorithme conservatif (Hirsch C., 1988).

L'intérêt de la méthode des volumes finis réside dans le fait qu'elle représente une loi de conservation physique, et permet de réduire d'un ordre de dérivée les EDPs. La méthode des volumes finis non structurés assure donc non seulement la conservation de la masse - une propriété importante dans le calcul des écoulements de fluides - mais permet également une prise en compte parfaite de la géométrie complexe du domaine de calcul. Pour ces raisons, on se propose d'utiliser la méthode des volumes finis dans un maillage non structuré.

Au cours d'un séjour de travail d'un an (01/08/2001-31/07/2002) comme professeur invité au NCCHE (National Center for Computational Hydroscience and Engineering), Université de Mississippi - Etat-Unis, K.D. Nguyen a proposé une base scientifique pour développer un code de calcul d'écoulements à surface libre par la méthode aux volumes finis non structuré (Nguyen K.D. et al., 2002). Deux méthodes aux volumes finis en maillage non structuré (UFVM-Unstructured Finite Volume Methods) pour les écoulements à surface libre en eau peu profonde sont développés : Solveur de Roe pour l'approximation de Riemann et la technique de projection pour les équations de Saint-Venant. (Hoang V.L. and Nguyen K.D., 2003) présent deux schémas de RARS (Roe's Approximate Riemann Solver) utilisant la profondeur d'eau h et la dénivellation de la surface libre d'eau Z_s . Les travaux de collaboration entre le groupe de Mécanique des Fluides du M2C (UMR CNRS 6341, Université de Caen) et le NCCHE en 2001-2002 nous permettent de construire le premier

noyau d'un modèle numérique bidimensionnel utilisant la UFVM couplé avec la technique de projection. Deux cas tests préliminaires ont été effectués : la propagation d'une onde de forme Gaussienne dans un bassin fermé sur les quatre côtés et l'établissement de la surface libre d'un volume d'eau stagnant dans un bassin de fond très irrégulier (Nguyen K.D. et al., 2002).

Ce mémoire présente le développement des nouveaux modules et le perfectionnement du modèle numérique 2D **ECOMOD-UFVM** (Estuary COastal MODel-Unstructured Finite Volumes Method), qui est la suite du travail effectué en 2001-2002 par Nguyen et ses collaborateurs du M2C et du NCCHE.

En tenant compte des difficultés rencontrées lors du développement d'un modèle d'écoulement à surface libre mentionnées ci-dessus, les objectifs de ce travail sont :

- Développer un modèle numérique 2D efficace et robuste des écoulements à surface libre en eaux peu profondes sur un fond irrégulier dans une géométrie arbitraire. Ce modèle vise des applications diverses telle que : écoulements dans les rivières, les estuaires et les zones côtières, écoulements dus à une rupture de barrage, de digue, diversion des crues à une zone de rétention d'eau. Ce travail comprend :
 - + le développement d'une technique de projection appliquée à la résolution des équations de Saint-Venant par une méthode aux volumes finis dans un maillage non structuré.
 - + le développement d'une méthode de calcul des termes d'advection permettant d'éviter les oscillations ainsi que la diffusion numérique
- Appliquer ce modèle à deux cas grandeur nature : rupture du barrage de Malpasset (France) et inondation dans la ville de Dongchuan (Chine).

Au cours de ce travail, plusieurs nouveaux modules ont été développés : Traitement des conditions aux limites, traitement de terrains secs/mouillés, schéma ULSS en second ordre, schéma implicite pour les termes d'advection-diffusion, conservation de masse. Ces nouveaux développements ont permis de réaliser une série de dix cas-tests et deux applications grandeur nature.

1.2 Contenu de ce travail

Le présent mémoire est composé de 8 chapitres qui sont regroupés en trois parties

comme suit :

Partie I Formulation mathématique et numérique du problème des écoulements à surface libre

Chapitre 2 Equations de Saint-Venant

Ce chapitre présente une étude mathématique des équations de Navier-Stokes et des équations de Saint-Venant. Les équations de Saint-Venant, qui constituent la base de notre étude, sont obtenues à partir d'une intégration verticale des équations de Navier-Stokes en utilisant un certain nombre des hypothèses.

Chapitre 3 Résolution numérique de l'équation de transport

Ce chapitre détaille les schémas numériques pour la résolution numérique de l'équation de transport.

Chapitre 4 Technique numérique pour les équations de Saint-Venant

Ce chapitre est une description du modèle numérique proposé, en insistant particulièrement sur le choix des techniques et des méthodes numériques utilisées.

Partie II Validations

Une dizaine de nouveaux cas-tests par rapport à deux cas tests déjà réalisés en période 2001-2002 par (Nguyen K.D. et al., 2002) sont présentés. Ces cas-tests auxquels est soumis le modèle pour sa validation sont classés en deux catégories : cas d'écoulements à surface libre en eaux peu profondes et cas de problèmes de rupture de barrage. Dans cette partie, les difficultés précédemment citées ont été abordées avec rigueur au cas par cas, en fonction de conditions physiques relatives au cas-test étudié.

Chapitre 5 Validations du modèle : Cas des écoulements à surface libre en eau peu profondes

Une série de six cas-tests est utilisée pour vérifier les propriétés et le comportement du modèle en comparant avec des solutions exactes ou des données expérimentales. Chacun de ces cas-tests a un objectif particulier afin de détecter la ou les propriétés du modèle le concernant.

Chapitre 6 Validations du modèle : Cas des problèmes de rupture de barrages

Afin de valider le modèle proposé pour des problèmes liés aux ruptures de barrages, nous avons effectué une série de cas-tests d'écoulements 1D ou 2D dus à la rupture de barrage sur fond mouillé ou sec, plat ou irrégulier, sans ou avec frottement.

Partie III Applications

Chapitre 7 Rupture du barrage de Malpasset

Ce chapitre fournit un nouvel exemple de l'application du modèle à la rupture du barrage de Malpasset, un rare exemple d'un écoulement dû à une rupture de barrage, sur un fond de topographie très complexe, avec problème de terrain découvrant/recouvrant. Une étude comparative entre les résultats numériques obtenus par le modèle et les données recueillies lors de la catastrophe de Malpasset est présentée.

Chapitre 8 Simulation de l'inondation dans la ville de Dongchuan

Il s'agit ici d'une nouvelle application du modèle à la simulation des crues éclair dans Dongchuan, une ville de montagne en Chine. Les débris qui se produisent souvent suite aux crues éclair représentent une menace sérieuse pour cette ville. La simulation numérique de crues éclair est très délicate en présence d'une topographie extrêmement complexe.

Partie IV Conclusions et perspectives.

En conclusion, cette partie sera la synthèse des acquis de cette étude et proposera des axes de recherche future.

Partie I

Formulation mathématique et numérique du problème des écoulements à surface libre

Chapitre 2

Equations de Saint-Venant

Les équations dites “de Barré de Saint-Venant”, publiées en 1871 (SAINT-VENANT A.J.C., 1871), occupent encore aujourd’hui une place primordiale dans les études en hydraulique maritime ou fluviale. Ces équations décrivent les écoulements à surface libre en eaux peu profondes, d’où leur appellation anglaise “Shallow Water Equations”. Elles sont obtenues à partir d’une intégration verticale des équations de Navier-Stokes en utilisant un certain nombre d’hypothèses (voir la section 2.2). Les lecteurs peuvent trouver les détails de la dérivation des équations de Saint-Venant dans les littératures. On peut citer, parmi elles, les travaux de Hervouet [(Hervouet J.M., 2003), (Hervouet J.M., 2001)], Thual (Thual O., 2003b), Tan (Tan W.Y., 1992), Ryhming (Ryhming I.L., 1985). C’est pourquoi, pour une compréhension plus approfondie sur les hypothèses et les conditions auxquelles les équations de Saint-Venant sont intégrées, nous allons d’abord présenter les équations de Navier-Stokes.

Définitions des notations

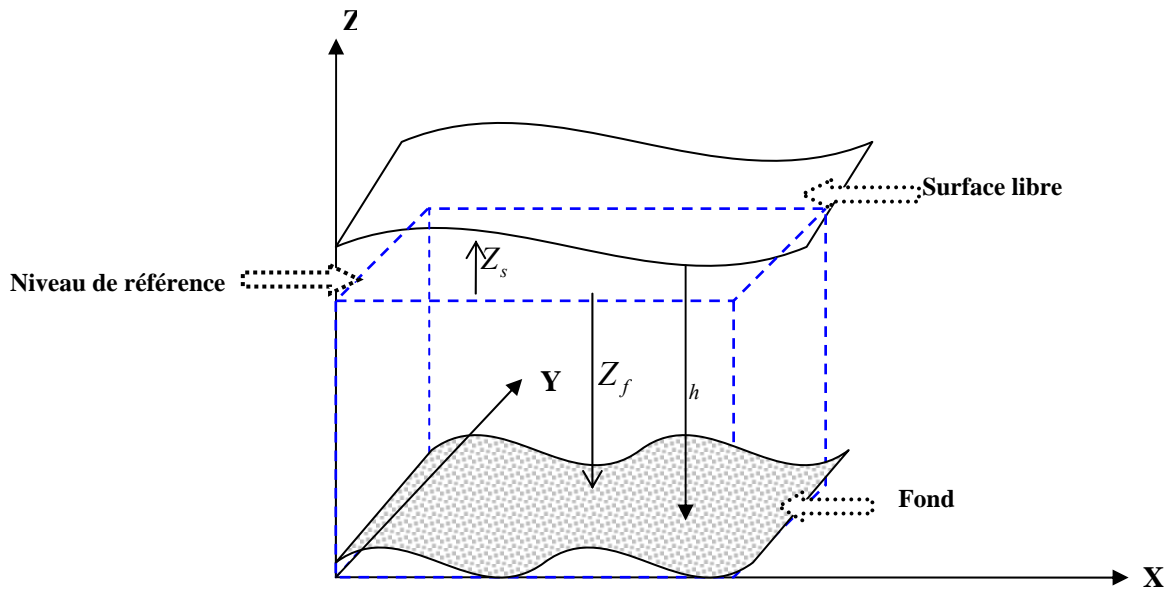


Figure 2-1 Notations des variables

La Figure 2-1 présente les repères de travail et les notations des variables physiques.

Dans les équations ci-dessous,

A_H	Coefficient de diffusion (m^2/s) dans l'équation de Saint-Venant
C_h	Coefficient de Chézy ($m^{1/2}/s$)
C_f	Coefficient de frottement
c	Célérité, $c = \sqrt{gh}$
C_{0-m}	Flux massifs sur les faces $0-m$, $C_{0-1} = u_{0-1}\Delta y_{12} - v_{0-1}\Delta x_{12}$, $C_{0-2} = u_{0-2}\Delta y_{23} - v_{0-2}\Delta x_{23}$, $C_{0-3} = u_{0-3}\Delta y_{31} - v_{0-3}\Delta x_{31}$
$\overline{\overline{D}}$	Tenseur des taux de déformation
$d\ell$	Elément élémentaire de la frontière du domaine de calcul
$\partial\Omega$	Frontière du domaine de calcul Ω
ε	Valeur tolérance
F	Facteur de frottement sur le fond
F_r	Nombre de Froude
\vec{F}	Vecteur force
\vec{F}_M	Force massique
\vec{F}_s	Force surfacique
\vec{f}_c	Force de Coriolis $\vec{f}_c = -2\vec{\Omega} \wedge \vec{U}$

f	Paramètre de Coriolis ($N \cdot s/m$)
$\phi(x, y, t)$	Valeur scalaire
ϕ_{0-m}	Valeur de ϕ à la face m du volume de contrôle
ϕ_i, ϕ_j	Valeur ϕ au centre du volume i et j respectivement
ϕ_i^v	Valeur de ϕ au sommet i du volume de contrôle
ϕ_I^c	Valeur de ϕ au centre du volume de contrôle I
$\bar{\phi}_i$	Valeur de ϕ moyennée sur le volume de contrôle i
\vec{g}	Vecteur accélération de la gravité
g	Accélération de la gravité ($g = 9.81 m/s^2$)
Γ	Coefficient de diffusion dans l'équation de transport
h_z	Hauteur d'immersion $h_z = Z_s - Z$ (m)
h	Profondeur totale d'eau $h = Z_s - Z_f$ (m)
H_ε	Tolérance pour la profondeur d'eau
η	Dénivellation de la surface libre d'eau (m)
\bar{I}	Tenseur unitaire
I, II, III	Volume de contrôle I, II, III
$i_\tau = \{I, II, III\}$	Ensemble des volumes adjacents à τ
K_s	Coefficient de Strickler ($m^{1/3}/s$)
M	Masse de fluide
M_s	Flux de masse
n	Coefficient de Manning ($s/m^{1/3}$)
\bar{n}	Vecteur unitaire normal
$\vec{\nabla}$	Vecteur nabla $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$
Δ	Opérateur Laplacien $\Delta = \vec{\nabla}^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \right)$
Ω	Domaine de calcul
$\Omega_{i,j}$	Volume de contrôle élémentaire
$\vec{\Omega}$	Vecteur de rotation terrestre
p	Pression (N/m^2)
p_{atm}	Pression atmosphérique (N/m^2)
q_x, q_y	Composantes du vecteur débit unitaire \vec{q} dans la direction x et y (m^2/s)
q_x^*, q_y^*	Débits unitaires au t^{n+1} après l'étape de « advection-diffusion » dans les directions x et y
$R = (O, x, y, z)$	Repère cartésien
$\vec{\gamma}$	Vecteur accélération $\vec{\gamma} = \vec{g} + \vec{f}_c$

γ	Coefficient de pondération
$\underline{\underline{\sigma}}$	Tenseur des contraintes
$\vec{\tau}_f$	Vecteur contrainte dû au frottement sur fond
τ_{fx}, τ_{fy}	Composantes du vecteur contrainte $\vec{\tau}_f$ dues au frottement sur le fond dans la direction x et y , respectivement
$\vec{\tau}_s$	Vecteur contrainte dû au vent en surface (N/m^2)
τ_{sx}, τ_{sy}	Composantes du vecteur contrainte $\vec{\tau}_s$ dues au vent en surface dans la direction x et y respectivement (N/m^2)
t	Temps
$\Delta t, dt$	Pas de temps
T_f	Echelle de temps dans la technique de radiation
\vec{t}	Vecteur unitaire tangentiel
ρ	Densité de l'eau $\rho = \rho_0 + \Delta\rho$ (g/m^3)
ρ_0	Densité de référence de l'eau (g/m^3)
$\Delta\rho$	Variation de densité de l'eau (g/m^3)
μ	Viscosité dynamique ($N \cdot s/m^2$)
$\vec{U} = (U, V, W)$	Vecteur vitesse (m/s)
U, V, W	Composante de vecteur vitesse \vec{U} dans les directions x, y et z
U^s, V^s, W^s	Composantes du vecteur vitesse en surface
U^f, V^f, W^f	Composantes du vecteur vitesse au fond
u_{0-m}, v_{0-m}	Valeur des vitesses u et v pour les trois faces du volume de contrôle
\vec{u}	Vecteur vitesse moyennée sur toute la profondeur $\vec{u} = (u, v, w)$
u, v, w	Composantes du vecteur vitesse moyenne \vec{u} dans la direction x, y et z respectivement (m/s)
ν	Viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho$ (m^2/s)
ν_t	Viscosité turbulente (m^2/s)
ν_d	Coefficient de dispersion, diffusivité due aux fluctuations de vitesses autour de la vitesse moyenne sur la profondeur d'eau
$\Delta x, \Delta y$	Pas d'espace dans les directions x et y respectivement
(x_i^c, y_i^c)	Coordonnées du centre de volume i dans les directions x et y respectivement
(x^i, y^i)	Coordonnées du point $i \in i_\tau$ dans les directions x et y respectivement
(x^I, y^I)	Coordonnées du centre de volume I dans les directions x et y respectivement
Z_f	Dénivellation du fond (m)
Z_s	Dénivellation de la surface libre d'eau (m)
Z_{sk}	Valeur d'équilibre de Z_s

2.1 Equations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes sont composées de l'équation de continuité, qui exprime la conservation de la masse du fluide étudié, et des équations de quantité de mouvement, qui résultent en fait de la relation fondamentale de la dynamique des fluides.

2.1.1 Les équations de base :

Soient \vec{U} le vecteur vitesse dont U , V et W sont ses composantes dans les directions x , y et z d'un repère cartésien, respectivement ; ρ la densité; p la pression. Il s'ensuit que la masse de fluide M à l'intérieur d'un volume de contrôle Ω au temps t est donnée par

$$M(t) = \int_{\Omega} \rho d\Omega \quad (2-1)$$

où Ω dépend des variables x , y , z . et du temps ; $d\Omega$ est un élément de Ω .

L'équation de continuité exige que le taux de variation de la masse totale M soit nul (la loi de conservation de masse)

$$\frac{d}{dt}(M) = 0 \quad (2-2)$$

L'équation de la quantité de mouvement qui traduit la deuxième loi de Newton appliquée à la masse M , est exprimée sous la forme

$$\frac{d}{dt}(M\vec{U}) = \sum \vec{F} \quad (2-3)$$

Le premier membre gauche indique le taux de variation de la quantité de mouvement de la masse M , et $\sum \vec{F}$ est la somme vectorielle des forces qui s'exercent sur M . Pour un fluide newtonien, les équations sont dénommées les équations de Navier-Stokes, d'après Navier (NAVIER C., 1823) et Stokes (STOKES G., 1845) qui furent les premiers à les formuler.

2.1.2 Equation de continuité

La conservation de la masse de fluide contenue dans le domaine Ω s'exprime comme suit:

$$\frac{d}{dt}(M) = \frac{\partial M}{\partial t} + M_s \quad (2-4)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega \quad (2-5)$$

Le deuxième terme du seconde membre dans (2-4) représente le flux M_s net à travers la surface Γ . Ainsi il devient :

$$M_s = \int_{\Gamma} \rho \vec{U} \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (2-6)$$

Par le théorème de Gauss, le flux aux frontières est alors ramené à une intégrale de volume. Il s'en suit que (2-4) s'écrit

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) \right) d\Omega = 0 \quad (2-7)$$

Comme le volume Ω est arbitraire, l'intégrale sur tous points de Ω doit donc être nulle

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \quad (2-8)$$

Ceci représente l'énoncé de la continuité sous une forme différentielle. En utilisant la notion d'une dérivée particulaire, (2-8) devient ainsi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \rho + \rho (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) = \frac{d\rho}{dt} + \rho (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) = 0 \quad (2-9)$$

Si la densité de fluide reste constante, on a par définition un écoulement incompressible, d'où

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (2-10)$$

Comparée à la définition (2-10), l'équation de continuité d'un écoulement incompressible est considérablement simplifiée. On obtient à partir de (2-9).

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (2-11)$$

2.1.3 Equation de quantité de mouvement

Comme pour la masse, le premier membre de (2-2) s'écrit :

$$\frac{d}{dt} (M\vec{U}) = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \rho \vec{U} d\Omega \right) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{U}) d\Omega + \int_{\Gamma} \rho \vec{U} (\vec{U} \cdot \vec{n}) d\Gamma \quad (2-12)$$

Par le théorème de Gauss, il s'en suit que (2-12) s'écrit

$$\frac{d}{dt} (M\vec{U}) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{U}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U} \otimes \vec{U}) \right) d\Omega \quad (2-13)$$

Les forces \vec{F} qui accélèrent le fluide dans le domaine Ω sont les forces massiques \vec{F}_M

et les forces surfaciques \vec{F}_S . Notons que des forces internes peuvent également être induites par des sources extérieures ou intérieures. Une force massique quelconque, \vec{F}_M peut s'écrire sous la forme

$$\vec{F}_M = \int_{\Omega} \rho \vec{\gamma} d\Omega \quad (2-14)$$

où $\vec{\gamma}$ a la dimension d'une accélération. Les forces de ce type sont par exemple la pesanteur \vec{g} , la force de Coriolis \vec{f}_c et etc.

$$\vec{\gamma} = \vec{g} + \vec{f}_c = \vec{g} - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{U} \quad (2-15)$$

où $\vec{\Omega}$ est le vecteur de rotation terrestre.

Les forces surfaciques sont représentées par les tenseurs des contraintes. Sur la surface Γ , le tenseur σ fournit la contribution \vec{F}_S où

$$\vec{F}_S = \int_{\Gamma} \vec{n} \cdot \overline{\overline{\sigma}} d\Gamma = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{\sigma}} d\Omega \quad (2-16)$$

Pour un fluide newtonien et incompressible, le tenseur des contraintes visqueuses s'exprime sous la forme

$$\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{I}} + 2\rho\nu\overline{\overline{D}} \quad (2-17)$$

où p est la pression, $\overline{\overline{I}}$ est le tenseur unitaire, ν est le coefficient de viscosité cinématique (en m^2/s).

$$\overline{\overline{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2-18)$$

$\overline{\overline{D}}$ est le tenseur des taux de déformation :

$$\overline{\overline{D}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) & \frac{\partial W}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2-19)$$

Le cas particulier de l'écoulement incompressible et à coefficient de viscosité cinématique ν constant conduit à une simplification considérable. On obtient

$$\frac{d}{dt}(m\vec{U}) = \rho \frac{d\vec{U}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{\gamma} + \rho \nu \Delta \vec{U} \quad (2-20)$$

On peut en déduire la forme "conservative" de l'équation de quantité de mouvement:

$$\frac{\partial(\rho\vec{U})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{U} \otimes \vec{U}) = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{\gamma} + \rho\nu\Delta\vec{U} \quad (2-21)$$

L'équation de quantité de mouvement en forme "non conservative" s'écrit :

$$\frac{\partial(\vec{U})}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{\gamma} + \nu\Delta\vec{U} \quad (2-22)$$

La variation de la masse volumique est due soit à la température, soit à la présence de substances dans l'eau, sel ou sédiments. Dans tous les cas, nous considérerons que cette variation est suffisamment faible pour que l'on puisse utiliser seulement la forme incompressible de l'équation de continuité. Nous arrivons finalement à l'écriture suivante des équations en coordonnées cartésiennes :

Equation de continuité :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (2-23)$$

Equation de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} + \frac{\partial UW}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta(U) + fV \quad (2-24)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial VU}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y} + \frac{\partial VW}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta(V) - fU \quad (2-25)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial WU}{\partial x} + \frac{\partial WV}{\partial y} + \frac{\partial W^2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta(W) - g \quad (2-26)$$

où f est le paramètre de Coriolis, $f = 2\Omega \sin \phi$.

2.2 Hypothèses et approximations

Les équations de Saint-Venant peuvent être déduites de l'intégration des équations de Navier-Stokes sur toute la profondeur, avec les hypothèses suivantes :

2.2.1 Hypothèse de pression hydrostatique

Nous supposons ici que l'accélération du mouvement sur la verticale est négligeable devant l'accélération due à la gravité. (2-26) devient donc :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (2-27)$$

(2-27) exprime une distribution linéaire et donc hydrostatique de la pression sur la verticale. Cette hypothèse nous permet de traduire la pression en termes de la hauteur d'immersion.

En effet, par l'intégration de (2-27) sur la verticale en choisissant la constante telle que $p_{atm} = 0$, on obtient l'expression de la pression à une coordonnée verticale ascendante z quelconque:

$$p(x, y, z) = \rho g (Z_s - Z) = \rho g h_z \quad (2-28)$$

où Z_s est le niveau de la surface libre et $h_z = Z_s - Z$ est la hauteur d'immersion.

2.2.2 Hypothèse de l'imperméabilité du fond et de la surface libre

On suppose qu'il n'y a pas de transfert de masse à travers le fond et la surface libre, et qu'une particule d'eau située sur une de ces deux surfaces y restera au cours du temps. D'après les remarques faites plus haut et en incluant ces hypothèses, nous pouvons donc écrire :

$$U^s \frac{\partial Z_s}{\partial x} + V^s \frac{\partial Z_s}{\partial y} + \frac{\partial Z_s}{\partial t} - W^s = 0 \quad (2-29)$$

$$U^f \frac{\partial Z_f}{\partial x} + V^f \frac{\partial Z_f}{\partial y} + \frac{\partial Z_f}{\partial t} - W^f = 0 \quad (2-30)$$

où $U^s = U(x, y, Z_s)$, $V^s = V(x, y, Z_s)$, et $W^s = W(x, y, Z_s)$ sont des composantes du vecteur vitesse en surface et $U^f = U(x, y, Z_f)$, $V^f = V(x, y, Z_f)$, et $W^f = W(x, y, Z_f)$ sont celles du vecteur vitesse au fond. (2-29) et (2-30) assurent que la surface libre ou le fond soit une ligne de courants.

2.2.3 Hypothèse de Boussinesq

L'hypothèse de Boussinesq nous permet de négliger, dans les équations de quantités de mouvements, les variations de densité de l'eau $\Delta\rho$ par rapport à la densité de référence ρ_0 ($\Delta\rho \ll \rho_0$), à l'exception de celles rencontrées dans le terme de gravitation (terme de flottabilité). On se place de plus dans le cadre de l'hypothèse d'un fluide incompressible.

$$\rho = \rho_0 + \Delta\rho \approx \rho_0 \quad (2-31)$$

2.3 Moyenne des équations de Navier-Stokes

2.3.1 Principe

Les équations de Navier-Stokes vont maintenant être moyennées sur la verticale par intégration entre le fond de cote Z_f et la surface de cote Z_s en utilisant l'hypothèse de pression hydrostatique et l'approximation de Boussinesq. Outre la hauteur d'eau déjà définie, nous noterons u et v les vitesses moyennes sur une verticale suivant x et y . Deux nouvelles variables vont apparaître :

$$u = \frac{1}{h} \int_{Z_f}^{Z_s} U dz \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{h} \int_{Z_f}^{Z_s} V dz \quad (2-32)$$

ici, $h = Z_s - Z_f$ est la profondeur d'eau totale.

Ces moyennes sur la verticale des composantes horizontales du vecteur vitesse seront appelées vitesses moyennes, ou "composantes du vecteur vitesse moyennes".

2.3.2 Règle de Leibnitz

La formule de Leibnitz est alors appliquée pour intervertir les opérateurs différentiels et d'intégration. Cette règle dit que la dérivée d'une intégrale aux bornes variables fait apparaître une dérivée à l'intérieur de l'intégrale et des termes de flux suivant la formule :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{Z_s} F dz = \int_{Z_f}^{Z_s} \frac{\partial F}{\partial x} dz + F(x, y, Z_s) \frac{\partial Z_s}{\partial x} - F(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial x} \quad (2-33)$$

2.3.3 Moyenne de l'équation de continuité

L'intégration de l'équation de continuité (2-23) sur toute la profondeur totale donne :

$$\int_{Z_f}^{Z_s} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) dz = 0 \quad (2-34)$$

En utilisant les règles de Leibniz (2-33) elle devient :

$$\int_{Z_f}^{Z_s} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{Z_s} U dz - U(x, y, Z_s) \frac{\partial Z_s}{\partial x} + U(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial x} \\ + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} V dz - V(x, y, Z_s) \frac{\partial Z_s}{\partial y} + V(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial y} \\ + W(Z_s) - W(Z_f) \quad (2-35)$$

Soit, en tenant compte des hypothèses d'imperméabilité (2-29) et (2-30), nous avons :

- **pour la surface libre**

$$-U(x, y, Z_s) \frac{\partial Z_s}{\partial x} - V(x, y, Z_s) \frac{\partial Z_s}{\partial y} = \frac{\partial Z_s}{\partial t} - W(Z_s) \quad (2-36)$$

- **pour le fond**

$$-U(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial x} - V(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial y} = \frac{\partial Z_f}{\partial t} - W(Z_f) \quad (2-37)$$

En remplaçant l'équation (2-35) par les formules (2-36) et (2-37), nous obtenons l'équation de continuité suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x}(hu) + \frac{\partial}{\partial y}(hv) + \frac{\partial Z_s}{\partial t} - \frac{\partial Z_f}{\partial t} = 0 \quad (2-38)$$

Soit enfin :

$$\vec{\nabla} \cdot (h\vec{u}) + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \cdot (h\vec{u}) + \frac{\partial Z_s}{\partial t} = 0 \quad (2-39)$$

2.3.4 Moyenne de l'équation de quantité de mouvement

Nous allons maintenant moyenner verticalement les équations de quantité de mouvement, trouvées au paragraphe 2.1.3 :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} + \frac{\partial UW}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta(U) + fV \quad (2-40)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial VU}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y} + \frac{\partial V^2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta(V) - fU \quad (2-41)$$

en appliquant l'hypothèse de pression hydrostatique $p(x, y, z) = \rho g(Z_s - z)$ Pour les deux équations correspondant aux projections sur x , et y respectivement, nous ne donnons en exemple qu'un des deux développements, l'autre s'effectuant de la même façon. Donc l'équation en U une fois développée et intégrée devient :

$$\int_{Z_f}^{Z_s} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} + \frac{\partial UW}{\partial z} \right) dz = \int_{Z_f}^{Z_s} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} [\rho g(Z_s - z)] + \nu \Delta(U) + fV \right) dz \quad (2-42)$$

En utilisant une fois encore les règles de Leibniz pour évaluer la moyenne de chacun des termes, nous obtenons les expressions suivantes pour la composante U .

2.3.4.1 Dérivée en temps

$$\int_{Z_f}^{Z_s} \frac{\partial U}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} (hu) - U(x, y, Z_s) \frac{\partial Z_s}{\partial t} + U(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial t} \quad (2-43)$$

2.3.4.2 Termes d'advection

Il s'agit ici d'une démarche de modélisation des écoulements en eau peu profonde, qui ne repose pas sur une déduction exacte des équations de Navier-Stokes. En effet, tout la modélisation résulte d'une succession de paramétrisations de phénomènes physiques (Thual O., 2003b). En posant

$$\begin{cases} u'' = U - u \\ v'' = V - v \end{cases} \quad (2-44)$$

Nous avons

$$\int_{Z_f}^{Z_s} \frac{\partial(UW)}{\partial z} dz = U(x, y, Z_s)W(x, y, Z_s) - U(x, y, Z_f)W(x, y, Z_f) \quad (2-45)$$

$$\int_{Z_f}^{Z_s} \frac{\partial U^2}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{Z_s} U^2 dz - U^2(x, y, Z_s) \frac{\partial Z_s}{\partial x} + U^2(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial x} \quad (2-46)$$

$$\int_{Z_f}^{Z_s} \frac{\partial(UV)}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} UV dz - U(x, y, Z_s)V(x, y, Z_s) \frac{\partial Z_s}{\partial y} + U(x, y, Z_f)V(x, y, Z_s) \frac{\partial Z_f}{\partial y} \quad (2-47)$$

Dans (2-46) et (2-47), il apparaît des termes *non linéaires*. Nous développons l'expression en UV :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} UV dz &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} (u + U - u)(v + V - v) dz \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (huv) + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} (U - u)(V - v) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} (uV + vU - 2uv) dz \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (huv) + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} u''v'' dz + \frac{\partial}{\partial y} \left[u \int_{Z_f}^{Z_s} V dz + v \int_{Z_f}^{Z_s} U dz - 2uvh \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (huv) + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} u''v'' dz + \frac{\partial}{\partial y} [uvh + uvh - 2uvh] \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (huv) + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} u''v'' dz \end{aligned} \quad (2-48)$$

Nous développons l'expression en U^2 :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_f}^{z_s} U^2 dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_f}^{z_s} (u + U - u)(u + U - u) dz \\
&= \frac{\partial}{\partial x} (hu^2) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_f}^{z_s} (U - u)^2 dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_f}^{z_s} (2uU - 2u^2) dz \\
&= \frac{\partial}{\partial x} (hu^2) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_f}^{z_s} u''^2 dz + \frac{\partial}{\partial x} \left[2u \left(\int_{z_f}^{z_s} U dz - \int_{z_f}^{z_s} u dz \right) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x} (hu^2) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_f}^{z_s} u''^2 dz + \frac{\partial}{\partial x} [2u(uh - uh)] \\
&= \frac{\partial}{\partial x} (hu^2) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_f}^{z_s} u''^2 dz
\end{aligned} \tag{2-49}$$

Après l'intégration, le premier membre de l'équation de quantité de mouvement (2-42) devient

$$\begin{aligned}
&\int_{z_f}^{z_s} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} + \frac{\partial UW}{\partial z} \right) dz \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (hu) - U^s \frac{\partial Z_s}{\partial t} + U^f \frac{\partial Z_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hu^2) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_f}^{z_s} (U - u)^2 dz - U^{s2} \frac{\partial Z_s}{\partial x} + U^{f2} \frac{\partial Z_f}{\partial x} \\
&+ \frac{\partial}{\partial y} (huv) + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_f}^{z_s} (U - u)(V - v) dz - U^{s2} \frac{\partial Z_s}{\partial y} + U^{f2} \frac{\partial Z_f}{\partial y} + U^s W^s - U^f W^f \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (hu) + \frac{\partial}{\partial x} (hu^2) + \frac{\partial}{\partial y} (huv) - U^s \left(\frac{\partial Z_s}{\partial t} + U^s \frac{\partial Z_s}{\partial x} + V^s \frac{\partial Z_s}{\partial y} - W^s \right) \\
&+ U^f \left(\frac{\partial Z_f}{\partial t} + U^f \frac{\partial Z_f}{\partial x} + V^f \frac{\partial Z_f}{\partial y} - W^f \right) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_f}^{z_s} u''^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_f}^{z_s} u''v'' dz \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (hu) + \frac{\partial}{\partial x} (hu^2) + \frac{\partial}{\partial y} (huv) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_f}^{z_s} u''^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_f}^{z_s} u''v'' dz
\end{aligned} \tag{2-50}$$

Les deux derniers termes du second membre de (2-50) deviennent :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_f}^{z_s} (U - u)^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_f}^{z_s} (U - u)(V - v) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_f}^{z_s} u''^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_f}^{z_s} u''v'' dz \tag{2-51}$$

Ces termes représentent la fluctuation des composantes de vitesses (U , V) autour de sa valeur moyennée (u , v) sur la profondeur h . Ces termes, dits de dispersion, sont en général interprétés comme une diffusion supplémentaire (Hervouet J.M., 2003). La paramétrisation de cette fluctuation de vitesses est basée sur le concept de dispersion, qui est analogue au concept de la viscosité turbulente proposé par Boussinesq [voir (Simon L., 1994)] :

$$\int_{z_f}^{z_s} u''^2 dz = \nu_d \frac{\partial hu}{\partial x} \quad \text{et} \quad \int_{z_f}^{z_s} u''v'' dz = \nu_d \frac{\partial hu}{\partial y} \tag{2-52}$$

ν_d est le coefficient de dispersion que nous allons déterminer plus tard dans la prochaine section. L'équation (2-50) s'écrit donc comme suit :

$$\begin{aligned}
& \int_{z_f}^{z_s} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} + \frac{\partial UW}{\partial z} \right) dz \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (hu) + \frac{\partial}{\partial x} (hu^2) + \frac{\partial}{\partial y} (huv) + \frac{\partial}{\partial x} \left(v_d \frac{\partial hu}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_d \frac{\partial hu}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (hu) + \frac{\partial}{\partial x} (hu^2) + \frac{\partial}{\partial y} (huv) + \vec{\nabla} \cdot \left[v_d \vec{\nabla} (hu) \right]
\end{aligned} \tag{2-53}$$

D'une manière identique, pour la composante de vitesse dans la direction y, on a:

$$\begin{aligned}
& \int_{z_f}^{z_s} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial VU}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y} + \frac{\partial VW}{\partial z} \right) dz \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (hv) + \frac{\partial}{\partial x} (huv) + \frac{\partial}{\partial y} (hv^2) + \frac{\partial}{\partial x} \left(v_d \frac{\partial hv}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_d \frac{\partial hv}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (hv) + \frac{\partial}{\partial x} (huv) + \frac{\partial}{\partial y} (hv^2) + \vec{\nabla} \cdot \left[v_d \vec{\nabla} (hv) \right]
\end{aligned} \tag{2-54}$$

2.3.4.3 Gradient de pression

En appliquant l'hypothèse de pression hydrostatique, nous obtenons l'intégration du gradient de pression :

$$\int_{z_f}^{z_s} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} [\rho g (Z_s - z)] \right) dz = -gh \frac{\partial Z_s}{\partial x} \tag{2-55}$$

$$\int_{z_f}^{z_s} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} [\rho g (Z_s - z)] \right) dz = -gh \frac{\partial Z_s}{\partial y} \tag{2-56}$$

Le fluide est supposé Newtonien et les équations de départ sont constituées par les équations de Navier-Stokes à masse volumique constante.

2.3.4.4 Termes de diffusion

Pour le terme de diffusion, nous supposons que la masse volumique ne varie pas suivant la verticale, elle peut alors être sortie des intégrales en utilisant la formule de Leibnitz :

$$\begin{aligned}
\int_{z_f}^{z_s} \nu \Delta(U) dz &= \int_{z_f}^{z_s} \nu \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} U) dz \\
&= \vec{\nabla} \cdot \int_{z_f}^{z_s} \nu \vec{\nabla} U dz - \nu \vec{\nabla} U^s \frac{\partial Z_s}{\partial x} + \nu \vec{\nabla} U^f \frac{\partial Z_f}{\partial x} \\
&= \vec{\nabla} \cdot (\nu \vec{\nabla} (hu)) - \nu \vec{\nabla} U^s \frac{\partial Z_s}{\partial x} + \nu \vec{\nabla} U^f \frac{\partial Z_f}{\partial x}
\end{aligned} \tag{2-57}$$

où $\nu = \mu/\rho$. Les deux derniers termes du second membre de l'équation (2-57) représentent les contraintes dues au vent à la surface et au frottement sur le fond. Ils seront détaillés plus tard.

2.3.4.5 Termes de Coriolis

L'intégration suivant z des termes de Coriolis donne :

$$\int_{z_f}^{z_s} fV dz = f(hv), \quad \int_{z_f}^{z_s} fU dz = f(hu) \quad (2-58)$$

2.3.4.6 Forces de volume

Les deux derniers termes de l'équation (2-57) représentent les contraintes de cisaillement à la surface dues au vent et au frottement sur le fond. On note que $\vec{\tau}_f$ est la contrainte au fond et $\vec{\tau}_s$ est la contrainte à la surface. Ces forces sont en fait superficielles, mais apparaissent dans les équations de Saint-Venant comme des termes sources appliquées à toute la masse d'eau, puisque les équations représentent une moyenne sur la verticale.

Contrainte due au frottement sur le fond

Soit $\vec{\tau}_f$ la contrainte de cisaillement de fluide agissant sur le fond et déterminée par la loi de Newton:

$$\vec{\tau}_f = \mu \frac{\partial \vec{U}}{\partial n} \Big|_{z_f} = \rho \nu \frac{\partial \vec{U}}{\partial n} \Big|_{z_f} \quad (2-59)$$

La contrainte exercée par le fond sur le fluide est opposée au vecteur vitesse du fluide :

$$-\frac{1}{\rho h} \vec{\tau}_f \quad (2-60)$$

En hydrodynamique, on détermine la contrainte de frottement comme suit :

$$\vec{\tau}_f (\tau_{fx}, \tau_{fy}) = \frac{1}{2} \rho C_f \sqrt{u^2 + v^2} \vec{u} \quad (2-61)$$

où C_f est un coefficient de frottement. On peut encore écrire :

$$\nu \frac{\partial \vec{U}}{\partial n} \Big|_{z_f} = -\frac{1}{2} \rho C_f \sqrt{u^2 + v^2} \vec{u} \quad (2-62)$$

Le coefficient C_f est souvent déterminé par les formules de Chézy, de Strickler, et de Manning.

Formule de Chézy :

$$C_f = \frac{2g}{C_h^2} \quad (2-63)$$

Formule de Strickler :

$$C_f = \frac{2g}{R_h^{1/3} K_s^2} \quad (2-64)$$

Formule de Manning :

$$C_f = \frac{2gn^2}{R_h^{1/3}} \quad (2-65)$$

où C_h ($m^{1/2}/s$) est coefficient de Chézy, K_s le coefficient de Strickler ($m^{1/3}/s$), n le coefficient de Manning ($s/m^{1/3}$), R_h le rayon hydraulique. Par ailleurs, la formule de Manning-Strickler nous permet d'établir une relation entre ces coefficients :

Formule de Manning-Strickler :

$$C_h = K_s R_h^{1/6} = \frac{1}{n} R_h^{1/6} \quad (2-66)$$

où approximativement $R_h = h$. Cette approximation n'est justifiée que pour des canaux de très grandes largeurs.

Remarque :

Deux types de paramétrisations de la contrainte de frottement sur le fond sont présentés dans ce mémoire :

- La paramétrisation de Chézy pour laquelle la condition de frottement dépend seulement de la rugosité du fond. Le coefficient de Chézy reste donc inchangé ;
- La paramétrisation de Manning-Strickler pour laquelle le coefficient de Chézy dépend à la fois de la rugosité du fond et de la hauteur d'eau.

Dans la majorité de ce mémoire, la paramétrisation de Chézy est utilisée. Celle-ci (valeur du coefficient de frottement constante), nous permet d'examiner plus clairement la sensibilité du modèle développé à la rugosité du fond.

Ainsi, les composantes de la contrainte de frottement sur le fond sont déterminées par :

$$\tau_{fx} = \rho \frac{g}{C_h^2} \sqrt{u^2 + v^2} u \quad (2-67)$$

$$\tau_{fy} = \rho \frac{g}{C_h^2} \sqrt{u^2 + v^2} v \quad (2-68)$$

En posant

$$F = \frac{g}{h C_h^2} \sqrt{u^2 + v^2} \quad (2-69)$$

les expressions des termes τ_{fx} et τ_{fy} sont simplifiées:

$$\tau_{fx} / \rho h = Fu \quad (2-70)$$

$$\tau_{fy} / \rho h = Fv \quad (2-71)$$

Finalement, on peut écrire le dernier terme du second membre de l'équation (2-57) comme suit :

$$v \vec{\nabla} U^f \frac{\partial Z_f}{\partial x} = \int_{Z_f}^{Z_s} -\frac{1}{\rho h} \vec{\tau}_f dz = -\frac{\vec{\tau}_f}{\rho} = -\frac{1}{2} C_f \sqrt{u^2 + v^2} \vec{u} = -\frac{g}{C_h^2} \sqrt{u^2 + v^2} \vec{u} \quad (2-72)$$

Contrainte due au vent en surface libre

La contrainte due au vent $\vec{\tau}_s$ est habituellement exprimée avec une formule analogue à (2-61) excepté le fait que la vitesse du fluide est remplacée par la vitesse du vent. On note $\vec{\tau}_s / \rho$ la contrainte du vent de l'équation (2-57) :

$$-v \vec{\nabla} U^s \frac{\partial Z_s}{\partial x} = \frac{\vec{\tau}_s}{\rho} \quad (2-73)$$

2.3.4.7 Conclusions

L'intégration des *termes du second membre* de l'équation de quantité de mouvement dans la direction x donne :

$$\int_{Z_f}^{Z_s} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} [\rho g (Z_s - z)] + v \Delta U + fV \right) dz = -gh \frac{\partial Z_s}{\partial x} + f(hv) + \vec{\nabla} \cdot (v \vec{\nabla} (hu)) + \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{\tau_{fx}}{\rho} \quad (2-74)$$

Avec les équations de (2-42), (2-53) et (2-74), l'équation de quantité de mouvement pour la composante u, moyennée sur toute la profondeur est la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} (hu) + \frac{\partial}{\partial x} (hu^2) + \frac{\partial}{\partial y} (huv) = -gh \frac{\partial Z_s}{\partial x} + f(hv) + \vec{\nabla} \cdot [(v + v_d) \vec{\nabla} (hu)] + \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{\tau_{fx}}{\rho} \quad (2-75)$$

En posant

$$A_H = v + v_d \quad (2-76)$$

et au cas où A_H varie peu en espace, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) &= -gh \frac{\partial Z_s}{\partial x} + f(hv) + \vec{\nabla} \cdot [A_H \vec{\nabla}(hu)] + \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{\tau_{fx}}{\rho} \\ &= -gh \frac{\partial Z_s}{\partial x} + f(hv) + A_H \Delta(hu) + \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{\tau_{fx}}{\rho} \end{aligned} \quad (2-77)$$

A_H s'appelle coefficient de diffusion. De la même façon, la moyenne de l'équation de quantité de mouvement en dans la direction y donne :

$$\frac{\partial}{\partial t}(hv) + \frac{\partial}{\partial x}(huv) + \frac{\partial}{\partial y}(hv^2) = -gh \frac{\partial Z_s}{\partial y} - f(hu) + A_H \Delta(hv) + \frac{\tau_{sy}}{\rho} - \frac{\tau_{fy}}{\rho} \quad (2-78)$$

Evaluation du coefficient de diffusion A_H

L'application du modèle de turbulence et de dispersion aux écoulements à surface libre nous permet d'évaluer du coefficient de diffusion A_H . Une première étude bibliographique sur l'état de l'art concernant la modélisation de la turbulence dans les écoulements à surface libre a été donnée par ASCE Task Committee (ASCE Task Committee on Turbulence Models in Hydraulic Computations, 1988). Cette étude remarque :

- Il existe très peu de modèles de turbulence pour les écoulements à surface libre. Les modèles de turbulence utilisés pour ces écoulements sont en général empruntés du développement pour les écoulements de mécanique des fluides industriels et aéronautiques.
- Les modèles appliqués font souvent partie de la famille $k-\varepsilon$. Dans ces modèles, pas du tout ou très peu de coefficients empiriques ont été ajustés.

Un modèle de turbulence de la famille $k-\varepsilon$ moyenné sur la verticale a été proposé par Rastogi et Rodi (Rastogi A.K. and Rodi W., 1978). Selon ASCE Task Committee, « *un modèle $k-\varepsilon$ moyenné sur la verticale est en général suffisamment adéquat pour la modélisation des écoulements dans un champ proche (near-field)* ». Cependant, l'application de ce modèle aux cas d'écoulements transitoires dans un canal avec la présence des segments courbés est contestable (Pavlovic R.N and Rodi W., 1985).

Comme cela a été évoqué par Rodi (Rodi W., 1980), la turbulence dans un écoulement à surface libre, est principalement générée près du fond. La dispersion est donc en corrélation avec la vitesse de frottement u_* et la profondeur h , c'est-à-dire $\nu_d \propto u_* d$. La formule d'Elder (Elder J.W., 1959) est de cette forme :

$$v_d = 6u_*h \text{ avec } u_* = \frac{\sqrt{g(u^2 + v^2)}}{C_h} \quad (2-79)$$

Selon Simon (Simon L., 1994) la formule d'Elder est la seule permettant de déterminer le coefficient de dispersion dans un modèle 2D moyenné sur la verticale.

Un autre problème de nature numérique concerne l'évaluation du coefficient de diffusion : le problème de l'échelle de temps et de l'espace. Les processus physiques qui se produisent à une échelle de temps ou d'espace plus petite que le maillage de calcul ou le pas du temps utilisé, seront filtrés par le modèle. Il est donc nécessaire d'introduire cet effet de « sous échelle ». Le problème de sous-échelle cité au dessus est analogue au problème de fermeture de la turbulence mais à une échelle de temps et d'espaces très différente (Simon L., 1994). Afin de prendre en compte ce problème, (Hervouet J.M., 2003) suggère le modèle de Smagorinski [référence (Smagorinski J., 1963)] pour l'approximations de coefficient de diffusion. L'idée est d'ajouter au coefficient de dispersion, une viscosité supplémentaire $v_{d,subgrid}$ déduite d'un modèle de longueur de mélange, cette longueur de mélange correspondant à la taille des tourbillons inférieure à celle de la maille. On arrive donc simplement à la formulation suivante :

$$v_{d,subgrid} = C_s^2 \Delta^2 \sqrt{2D_{ij}D_{ij}} \quad (2-80)$$

où C_s est un coefficient adimensionnel à régler et Δ est la taille de mailles. Les valeurs de C_s vont de 0.1 (écoulement en canal) à 0.2 (turbulence isotrope). La valeur de $v_{d,subgrid}$ est plus importante lorsque la taille de maille est plus grande.

2.4 Equations de Saint-Venant

L'équation de continuité (2-39) et les équations de quantité de mouvement (2-75)-(2-78) constituent les équations de Barré de Saint-Venant bidimensionnelles :

Equation de Continuité :

$$\frac{\partial}{\partial x}(hu) + \frac{\partial}{\partial y}(hv) + \frac{\partial Z_s}{\partial t} = 0 \quad (2-81)$$

Equations de quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) &= -gh \frac{\partial Z_s}{\partial x} + f(hv) + A_H \Delta(hu) + \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{\tau_{fx}}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial t}(hv) + \frac{\partial}{\partial x}(huv) + \frac{\partial}{\partial y}(hv^2) &= -gh \frac{\partial Z_s}{\partial y} - f(hu) + A_H \Delta(hv) + \frac{\tau_{sy}}{\rho} - \frac{\tau_{fy}}{\rho} \end{aligned} \quad (2-82)$$

2.4.1 Formes conservative et non conservative des équations de Saint-Venant

Les variables dépendantes dans les équations de Saint-Venant peuvent être choisies selon les formulations suivantes :

- formulation « vitesse-hauteur d'eau » : profondeur d'eau h et vecteur de vitesse \vec{u} comme variables dépendantes ;
- formulation « débit-hauteur d'eau » : profondeur d'eau h et vecteur débit unitaire $\vec{q} = (q_x, q_y) = (hu, hv)$ comme variables dépendantes ;
- formulation « vitesse-dénivellation » : dénivellation de la surface libre Z_s et vecteur vitesse \vec{u} comme variables dépendantes ;
- formulation « débit-dénivellation » : la dénivellation de la surface libre Z_s et vecteur débit unitaire \vec{q} comme variables dépendantes.

Nous allons par la suite étudier les différentes formulations des équations de Saint-Venant sous forme conservative et non conservative.

2.4.1.1 Equation sous forme conservative :

- **Formulation « vitesse - hauteur d'eau » :**

La formulation « vitesse-hauteur d'eau » des équations de Saint-Venant sous *forme conservative* se présente alors de la manière suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = H \quad (2-83)$$

$$U = \begin{pmatrix} h \\ u \\ v \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} hu \\ \frac{u^2}{2} + gh \\ uv \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} hv \\ uv \\ \frac{v^2}{2} + gh \end{pmatrix} \quad (2-84)$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ -Fu + fv + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_H \frac{\partial(u)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_H \frac{\partial(u)}{\partial y} \right) \\ -Fv - fu + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_H \frac{\partial(v)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_H \frac{\partial(v)}{\partial y} \right) \end{pmatrix} \quad (2-85)$$

- **Formulation « débit unitaire - hauteur d'eau »**

La formulation débit unitaire - hauteur d'eau se présente alors de la manière suivante avec (q_x, q_y) et h :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = H \quad (2-86)$$

$$U = \begin{pmatrix} h \\ q_x \\ q_y \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} q_x \\ \frac{q_x^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \\ \frac{q_x q_y}{h} \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} q_y \\ \frac{q_x q_y}{h} \\ \frac{q_y^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \end{pmatrix} \quad (2-87)$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ -Fq_x + fq_y + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_H \frac{\partial q_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_H \frac{\partial q_x}{\partial y} \right) \\ -Fq_y - fq_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_H \frac{\partial q_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_H \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) \end{pmatrix} \quad (2-88)$$

On peut remarquer que la formulation « débit-hauteur » sous forme conservative (2-86)-(2-88) est identique à la formulation « vitesse-hauteur » (2-83)-(2-85).

2.4.1.2 Equation sous forme non conservative

- Formulation «vitesse - dénivellation »:

La formulation vitesse - dénivellation se présente alors de la manière suivante avec (u, v) et Z_s :

$$\frac{\partial Z_s}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (h\vec{u}) = 0 \quad (2-89)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) u &= -g \frac{\partial Z_s}{\partial x} + A_H \Delta u + fv + \frac{\tau_{sx}}{h\rho} - \frac{\tau_{fx}}{h\rho} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) v &= -g \frac{\partial Z_s}{\partial y} + A_H \Delta v - fu + \frac{\tau_{sy}}{h\rho} - \frac{\tau_{fy}}{h\rho} \end{aligned} \quad (2-90)$$

- Formulation «débit unitaire - dénivellation »:

La formulation débit unitaire - dénivellation se présente alors de la manière suivante avec (q_x, q_y) et Z_s :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} = 0 \quad (2-91)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(q_x) + \frac{\partial}{\partial x}(q_x u) + \frac{\partial}{\partial y}(q_x v) &= -gh \frac{\partial Z_s}{\partial x} + A_H \Delta(q_x) + fq_y + \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{\tau_{fx}}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial t}(q_y) + \frac{\partial}{\partial x}(q_y u) + \frac{\partial}{\partial y}(q_y v) &= -gh \frac{\partial Z_s}{\partial y} + A_H \Delta(q_y) - fq_x + \frac{\tau_{sy}}{\rho} - \frac{\tau_{fy}}{\rho} \end{aligned} \quad (2-92)$$

2.4.2 Relations de ressauts des équations de Saint-Venant

Les équations de Saint-venant, en raison de leur caractère hyperbolique, admettent des solutions discontinues, que l'on nomme ressauts (Hervouet J.M., 2003).

La conservation du débit et de la quantité de mouvement de part et d'autre du ressaut s'écrivent (Thual O., 2003a) :

$$\begin{aligned} h_G (U_G - w) &= h_D (U_D - w) \\ h_G U_G (U_G - w) + \frac{1}{2} gh_G^2 &= h_D U_D (U_D - w) + \frac{1}{2} gh_D^2 \end{aligned} \quad (2-93)$$

où w est la vitesse du choc. De la première équation on tire $w = \frac{h_G U_G - h_D U_D}{h_G - h_D}$ qui donne la

vitesse du ressaut en fonction des caractéristiques amont et aval de l'écoulement. Dans (2-93) la discontinuité entre les valeurs à droite (D) et à gauche (G) du choc est présentée.

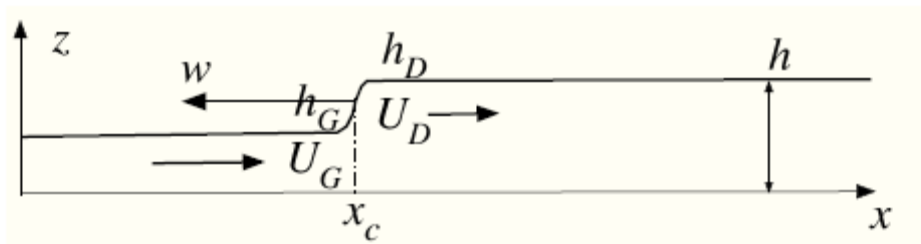


Figure 2-2 Ressaut hydraulique [d'après (Thual O., 2003a)]

On peut voir ces relations de ressaut comme un système de deux équations pour les cinq inconnues (U_G, U_D, h_G, h_D, w) . Il suffit donc de connaître trois paramètres pour en déduire les deux autres.

2.4.3 Choix de formulations des équations de Saint-Venant

Tableau 2-1 présente et compare les différentes formulations des équations de Saint-Venant.

Tableau 2-1

Comparaisons de la formulation des équations de Saint-Venant

Sous forme	Formulation	Application	Remarque
Conservative	u, v, h	Ecoulement hyperbolique, ressaut hydraulique	Front discontinu avec problème des termes source
	q_x, q_y, h		
Non conservative	u, v, Z_s	Ecoulements dans des rivières, des estuaires ou des zones côtières, Fond irrégulier	Conservation de masse
	q_x, q_y, Z_s		Meilleure conservation de masse

La formulation des équations de Saint-Venant sous forme conservative (2-83)-(2-85) et (2-86)-(2-88) permet d'utiliser un solveur de Riemann tel que RARS (Roe's Approximate Riemann Solver, (Roe P.L., 1981)) pour la résolution de ces équations. Ce solveur est initialement construit pour la résolution d'une équation hyperbolique homogène appliquée aux problèmes aéronautiques dont la solution peut être représentée par une discontinuité. Cependant, l'utilisation de ce solveur dans le cas d'un écoulement sur un fond très irrégulier avec une discrétisation non adéquate des termes source qui est principalement en fonction de

la pente du fond, peut conduire à des instabilités numériques importantes. Un traitement particulier de ce terme doit être requis. C'est pourquoi, durant ces dernières années, un grand nombre de chercheurs avaient consacré leur travail au traitement des termes source tels que (Bermúdez A. et al., 1998), (Vázquez-Cendón M.E., 1999), (Monthé L.A., 2001), (Brufau P. et al., 2002), et etc.

Afin d'échapper à ce problème, on s'oriente vers la formulation des équations de Saint-Venant sous forme non conservative. Ce choix est justifié par le fait que les écoulements dans des rivières, des estuaires ou des zones côtières sont souvent sur des fonds très irréguliers.

Concernant la formulation non conservative, (Simon L., 1994) a testé deux formulations : « vitesse-hauteur d'eau » et « débit-dénivellation ». Les résultats de plusieurs cas-tests réalisés par Simon montrent que le modèle numérique basé sur la formulation « débit-dénivellation » donne une meilleure conservation de la masse d'eau que celle du modèle basé sur la formulation « vitesse-hauteur d'eau ». Nous faisons donc notre choix sur la formulation « débit-dénivellation » (2-91)- (2-92) afin de développer un modèle numérique pour des écoulements en eau peu profonde dans une géométrie complexe et sur des fonds irréguliers.

2.4.4 Equations de base de Saint-Venant

Désormais nous utilisons la formulation « débit unitaire - dénivellation » des équations de Saint-Venant tout au long de cette étude :

$$\frac{\partial Z_s}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \quad (2-94)$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(q_x)}_I + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(q_x u) + \frac{\partial}{\partial y}(q_x v)}_{II} = \underbrace{-gh \frac{\partial Z_s}{\partial x}}_{III} + \underbrace{A_H \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} \right) + A_H \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial q_x}{\partial y} \right)}_{IV} + \underbrace{f q_y + \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{\tau_{fx}}{\rho}}_V \quad (2-95)$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(q_y)}_I + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(q_y u) + \frac{\partial}{\partial y}(q_y v)}_{II} = \underbrace{-gh \frac{\partial Z_s}{\partial y}}_{III} + \underbrace{A_H \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial q_y}{\partial x} \right) + A_H \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial q_y}{\partial y} \right)}_{IV} - \underbrace{f q_x + \frac{\tau_{sy}}{\rho} - \frac{\tau_{fy}}{\rho}}_V \quad (2-96)$$

Dans les équations (2-94)-(2-96), nous classons les termes en six groupes dont les significations physiques sont :

I : Accélération locale de l'écoulement

II : Termes d'advection, transport de la quantité de mouvement par l'écoulement moyen

III : Termes de gradients de surface libre

IV : Termes de diffusion

V : Effet de la force de Coriolis, des contraintes dues au vent en surface et au frottement sur le fond

Les termes source sont l'ensemble des groupes I, III et V.

Remarques :

En enlevant les termes III et V, (2-95) et (2-96) ont la forme d'une équation de transport. En conséquence, la présentation des techniques numériques des équations de Saint-Venant passe d'abord par celle d'une équation de transport d'une variable scalaire quelconque.

Chapitre 3

Résolution numérique de l'équation de transport

3.1. Equation de transport

Dans cette section, nous essayons de donner une description de la technique basée sur l'utilisation du théorème de Green pour résoudre l'équation de transport comme cela a été proposé par Lien (Lien F.S., 2000), avant de l'appliquer aux équations de Saint-Venant. Considérons l'équation de transport suivante :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial(u\phi)}{\partial x} + \frac{\partial(v\phi)}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right) d\Omega \quad (3-1)$$

où, $\phi = \phi(x, y, t)$ est une valeur scalaire et Γ est le coefficient de diffusion.

3.2. Techniques de discrétisation de l'équation de transport -Méthode des volumes finis (MVF)

3.2.1. MVF en maillage structuré

Dans la méthode des volumes finis, la zone d'intégration est divisée en un nombre fini de volumes de contrôle. Les points du maillage se trouvent au centre de gravité des volumes de contrôle. Afin de simplifier la procédure numérique, il semble assez naturel de vouloir calculer l'ensemble des variables au centre des volumes de contrôle et donc d'intégrer l'équation de transport sur ce même volume.

Les Figure 3-1 et Figure 3-2 présentent un maillage structuré et un maillage non structuré, respectivement.

Dans un maillage structuré (Figure 3-1-a), soit (x_i, y_i) un maillage de calcul, où $x_i = i\Delta x$ et $y_i = i\Delta y$ avec Δx , Δy le pas d'espace dans les directions x et y respectivement. La variable ϕ au point (x_i, y_j) est notée par une forme bidimensionnelle $\phi(i, j)$. Ses quatre

voisins peuvent être identifiés facilement comme : $\phi(i-1, j)$, $\phi(i, j-1)$, $\phi(i+1, j)$, $\phi(i+1, j+1)$.

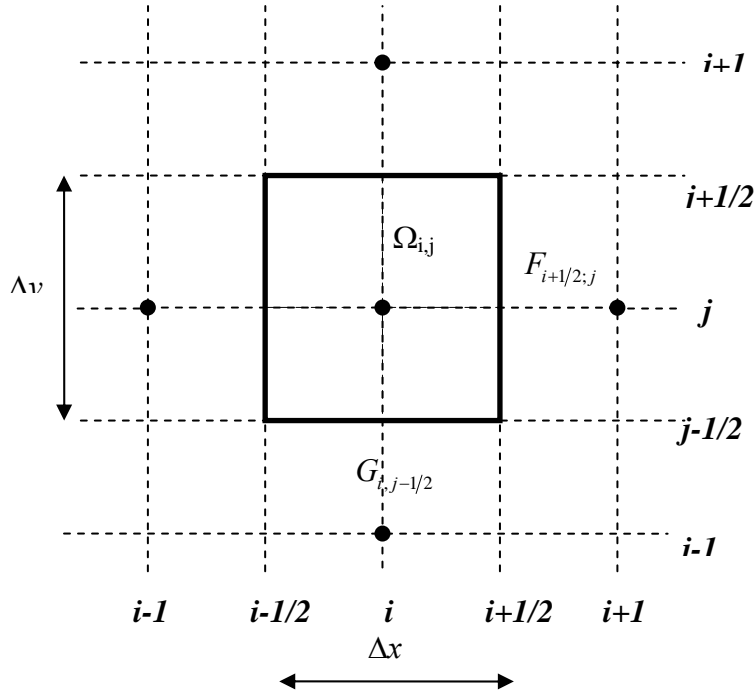


Figure 3-1 Maillage structuré pour une MVE

Nous reprenons l'équation (3-1), et l'intégrons sur un domaine Ω quelconque. Nous obtenons:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega + \iint_{\partial\Omega} (\phi \vec{u} \cdot \vec{n}) dl = \iint_{\partial\Omega} (\Gamma \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n}) dl \quad (3-2)$$

où dl représente un élément élémentaire de la frontière $\partial\Omega$ du domaine de calcul Ω , \vec{n} est le vecteur normal à $\partial\Omega$.

Nous nous plaçons dans un système de coordonnées orthogonales où le volume de contrôle élémentaire $\Omega_{i,j}$ est un quadrilatère centré en l'un des sommets d'une grille orthogonale. Nous pouvons alors introduire la valeur moyenne suivante pour le volume $\Omega_{i,j}$:

$$\phi_{i,j} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \iint_{\Omega_{i,j}} \phi dx dy \quad (3-3)$$

et définir le flux de ϕ traversant la face $x = x_{i+1/2}$, $y_{j-1/2} \leq y \leq y_{j+1/2}$ comme :

$$F_{i+1/2,j}\Delta y = \oint_{\partial\Omega_{i,j}} F dy \quad \text{où } F = \left(u\phi - \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) \quad (3-4)$$

D'une manière analogue, le flux de ϕ traversant la face $y = y_{j+1/2}$, $x_{i-1/2,j+1/2} \leq x \leq x_{i+1/2,j+1/2}$ est déterminé par :

$$G_{i+1/2,j}\Delta x = \oint_{\partial\Omega_{i,j}} G dx \quad \text{où } G = \left(v\phi - \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) \quad (3-5)$$

En définissant de la même manière $F_{i-1/2,j}$, $G_{i,j-1/2}$ et en reportant ces expressions dans (3-2), nous obtenons :

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right)_{i,j} + \frac{F_{i+1/2,j} - F_{i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{G_{i,j+1/2} - G_{i,j-1/2}}{\Delta y} \quad (3-6)$$

Les parts convectives des flux $F^* = u\phi$ et $G^* = v\phi$ seront calculées par des schémas spéciaux dans un maillage structuré. Ces schémas ne sont pas examinés dans cette thèse.

3.2.2. MVF en maillage non structuré

Dans un maillage non structuré (Figure 3-2) la variable ϕ au centre du $n^{\text{ième}}$ volume de contrôle est notée par $\phi(n)$. On désigne par X_1 , X_2 et X_3 la valeur de ϕ aux trois sommets de ce volume de contrôle (X_1, X_2, X_3) qui sont numérotés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Les valeurs de ϕ au centre de trois volumes de contrôle voisins peuvent être également identifiées comme : $\phi(1)$, $\phi(2)$ et $\phi(3)$ numérotées toujours dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. La résolution de l'équation de transport selon une méthode aux volumes finies dans un maillage non structuré se décompose en deux étapes de calcul : advection et diffusion.

3.3. Approximations des termes d'advection et de diffusion dans un maillage non structuré

3.3.1. Terme d'advection :

L'application du théorème de Green, pour la fonction ϕ , au moins une fois dérivable, donne :

:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{1}{\Omega} \oint_{\partial \Omega} \phi dy \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= -\frac{1}{\Omega} \oint_{\partial \Omega} \phi dx\end{aligned}\quad (3-7)$$

Par conséquent, le terme d'advection de l'équation (3-1) peut être calculé par la relation suivante :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \left(\frac{\partial(u\phi)}{\partial x} + \frac{\partial(v\phi)}{\partial y} \right) d\Omega &= \frac{1}{\Omega} \oint_{\partial \Omega} u\phi dy - \frac{1}{\Omega} \oint_{\partial \Omega} v\phi dx \\ &= (\phi_{0-1}u_{0-1}\Delta y_{12} + \phi_{0-2}u_{0-2}\Delta y_{23} + \phi_{0-3}u_{0-3}\Delta y_{13}) - (\phi_{0-1}v_{0-1}\Delta x_{12} + \phi_{0-2}v_{0-2}\Delta x_{23} + \phi_{0-3}v_{0-3}\Delta x_{13}) \\ &= \sum_{m=1}^3 C_{0-m}\phi_{0-m}\end{aligned}\quad (3-8)$$

où les flux massifs peuvent être déterminés par :

$$\begin{cases} C_{0-1} = u_{0-1}\Delta y_{12} - v_{0-1}\Delta x_{12} \\ C_{0-2} = u_{0-2}\Delta y_{23} - v_{0-2}\Delta x_{23} \\ C_{0-3} = u_{0-3}\Delta y_{31} - v_{0-3}\Delta x_{31} \end{cases}\quad (3-9)$$

$$\begin{cases} \Delta x_{12} = x_2 - x_1 \\ \Delta y_{12} = y_2 - y_1 \\ \Delta x_{01} = x_1^c - x_0^c \\ \Delta y_{01} = y_1^c - y_0^c \end{cases}\quad (3-10)$$

u_{0-m} , v_{0-m} et ϕ_{0-m} ($m = 1, 2$ et 3) désignent la valeur des vitesses u , v et de ϕ pour trois faces du volume de contrôle. Les valeurs de u_{0-m} , v_{0-m} sont déterminées par une méthode qui sera présentée dans la section 4.1.3.1. Les valeurs de ϕ_{0-m} sont calculées selon différents schémas numériques permettant d'éviter les oscillations et la diffusion numérique.

Dans un schéma du 1er ordre, la valeur de la variable ϕ à gauche et à droite de la face $i-j$ des volumes i et j sont $\phi_L = \phi_i$ et $\phi_R = \phi_j$, respectivement. ϕ_i et ϕ_j sont la solution au centre du volume i et j (Figure 3-3-a). Il existe quelques schémas d'ordre plus élevé pour calculer le terme d'advection.

Les schémas numériques unidimensionnels d'ordre élevé sont souvent construits en utilisant des formes différentes de limiteurs de TVD afin d'obtenir une précision d'ordre plus élevé évitant des oscillations non physiques (LeVeque R.J., 1992), (Sweby P.K., 1984). Une approche fréquemment utilisée est la technique de MUSCL (Monotonic Upwind Scheme for

Conservation Laws) de Van Leer (Van Leer B, 1977) dans laquelle le limiteur est géométriquement appliqué au gradient d'une reconstruction linéaire de la solution par morceaux pour créer un schéma monotone. Plusieurs recherches ultérieures se sont orientées vers les schémas numériques multidimensionnels et monotones, qui sont basés sur la positivité des coefficients, une propriété simple pour être définie dans n'importe quel nombre de dimension. Plus récemment, il y a eu un grand nombre de travaux se focalisant sur les maillages non structurés. Perthame et Qiu (Perthame B. and Qiu Y., 1994) limitent la valeur de la solution interpolée seulement pour pouvoir éviter les valeurs négatives et donc non physiques de la solution (la densité ou la pression). Batten (Batten P. et al., 1996), Liu (Liu X.D., 1993) et Hubbard (Hubbard M.E, 1999) présentent les procédures limitant la pente pour des maillages triangulaires et non structurés : schéma LCD (Limited Central Difference), schéma LCD Projeté, opérateur de MLG (Maximum Limiter Gradient). Kobayashi (Kobayashi M.H et al., 1999) utilisent des schémas ULSS (Upwind Least Squares Scheme) en maillage non structuré. Ici, nous allons présenter et tester deux de ces schémas : MLG et ULSS.

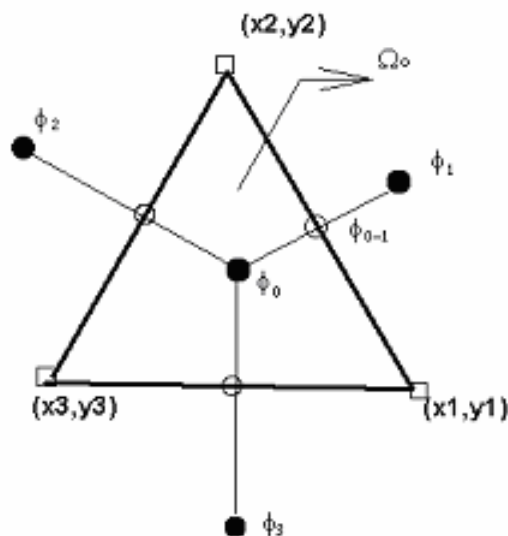


Figure 3-2 Volume de contrôle pour les flux convectifs traversant les faces

3.3.1.1. Opérateur MLG (Maximum Limiter Gradient)

Afin d'obtenir un schéma d'ordre plus élevé, les valeurs de ϕ_L et ϕ_R sont calculées par :

$$\phi_L = \phi_i + \bar{\tau}_{LR} \bar{L}_L \quad \text{et} \quad \phi_R = \phi_j + \bar{\tau}_{RL} \bar{L}_R \quad (3-11)$$

où $\vec{\tau}_{LR}$ (ou $\vec{\tau}_{RL}$) est le vecteur de position comptée depuis le centre du volume L (ou du volume R) jusqu'au point se trouvant au milieu de la face RL (voir la Figure 3-3-a). \vec{L} est un opérateur de gradient qui sera défini ci-après : Considérons le volume O et ses volumes voisins A, B et C (voir la Figure 3-3-b). Les centres des volumes A, B et C forment un triangle dont les sommets sont numérotés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Un vecteur unique \vec{L} du triangle ΔABC est défini par :

$$\vec{L}(\Delta ABC) = \begin{cases} \begin{pmatrix} -\frac{n_1}{n_3} \\ n_3 \\ -\frac{n_2}{n_3} \end{pmatrix} & \text{Si } n_3 \geq \varepsilon \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{Si } n_3 < \varepsilon \end{cases} \quad (3-12)$$

Ici, $\varepsilon = 10^{-10}$ est une valeur de tolérance spécifique, et (n_1, n_2, n_3) sont les composantes du vecteur \vec{n} qui est défini par :

$$\vec{n} = (\vec{P}_C - \vec{P}_A) \wedge (\vec{P}_C - \vec{P}_B) \quad \text{où } \vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \phi \end{pmatrix} \quad (3-13)$$

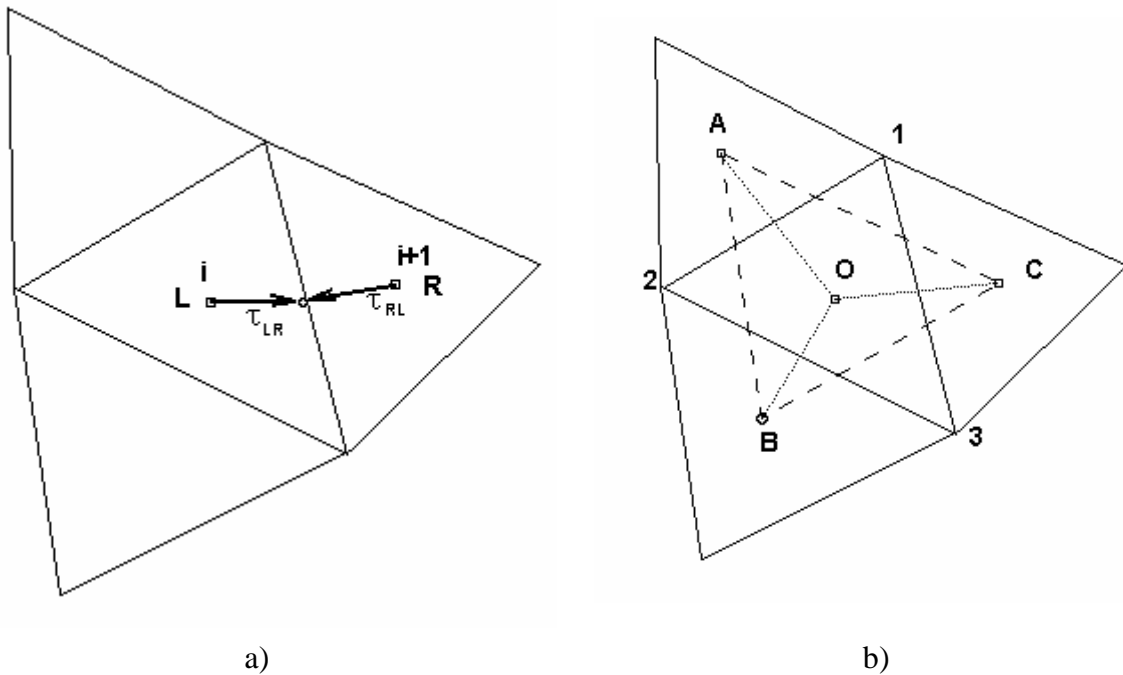


Figure 3-3 Définition du volume de contrôle (a) et l'opérateur MLG (b)

L'algorithme de calcul est le suivant (pour les détails, voir (Batten P. et al., 1996) et (Hubbard M.E, 1999)):

- Construction des opérateurs :
 $\vec{L}^1 = \vec{L}(\Delta 123)$, $\vec{L}^2 = \vec{L}(\Delta ABO)$, $\vec{L}^3 = \vec{L}(\Delta BCO)$ et $\vec{L}^4 = \vec{L}(\Delta CAO)$. Sélection $|\vec{L}^i|$ maximum parmi \vec{L}^i ($i=1, 2$ et 3).
- Limitation de \vec{L} par un facteur α , où $0 \leq \alpha \leq 1$, c'est-à-dire $\vec{L} = \alpha \vec{L}^i$, afin que la solution sur les faces du volume de contrôle ne souffre aucune oscillation .

3.3.1.2. Schéma « Upwind » aux moindres carrés (ULSS)

Le schéma « Upwind » aux moindres carrés (ULSS : Upwind Least Squares Scheme) est basé sur la reconstruction de la variable ϕ par une fonction polynomiale par morceaux, qui est identique à celui du schéma de ENO (Essential Non Oscillation).

Considérons P un polynôme, $P \in R^3$. Pour une paire $(x, y) \in \tau$ où τ est un volume de contrôle triangulaire, nous avons :

$$P(x, y; \phi) = \bar{\phi}_\tau + ax + by \quad (3-14)$$

où $\bar{\phi}_\tau$ est une valeur de ϕ moyennée sur τ (voir Figure 3-4), a et b sont des coefficients à déterminer par un problème de minimisation décrit comme suit.

Trouvez a et b tels que

$$J(a, b) = \sum_{i \in i_\tau} (P(x^i, y^i; \phi) - \bar{\phi}_i)^2 = \sum_{i \in N_f} (\bar{\phi}_\tau + ax^i + by^i - \bar{\phi}_i)^2 \quad (3-15)$$

Dans (3-15), $i_\tau = \{I, II, III\}$ est l'ensemble des volumes adjacents à τ , $\bar{\phi}_i$ est la valeur de ϕ moyennée sur le volume i (Figure 3-4) ; et (x^i, y^i) sont les coordonnées du point $i \in i_\tau$. Les coordonnées du point O sont (0, 0). (x^i, y^i) sont donc aussi les distances du point i au point O dans les directions de x et y , respectivement. La solution de ce problème peut être obtenue en résolvant l'ensemble des équations linéaires de

$$\nabla J(a, b) = 0 \quad (3-16)$$

Cela nous donne :

$$a = \frac{\sum_{i \in i_\tau} (\bar{\phi}_i - \bar{\phi}_\tau) x^i \sum_{i \in i_\tau} (y^i)^2 - \sum_{i \in i_\tau} (\bar{\phi}_i - \bar{\phi}_\tau) y^i \sum_{i \in i_\tau} x^i y^i}{\Delta} \quad (3-17)$$

$$b = \frac{\sum_{i \in i_\tau} (\bar{\phi}_i - \bar{\phi}_\tau) y^i \sum_{i \in i_\tau} (x^i)^2 - \sum_{i \in i_\tau} (\bar{\phi}_i - \bar{\phi}_\tau) x^i \sum_{i \in i_\tau} x^i y^i}{\Delta} \quad (3-18)$$

où Δ est déterminé par :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_{i \in i_\tau} (x^i)^2 & \sum_{i \in i_\tau} x^i y^i \\ \sum_{i \in i_\tau} x^i y^i & \sum_{i \in i_\tau} (y^i)^2 \end{vmatrix} \quad (3-19)$$

soit :

$$\Delta = (x^I y^{II} - x^{II} y^I)^2 + (x^I y^{III} - x^{III} y^I)^2 + (x^{II} y^{III} - x^{III} y^{II})^2 \quad (3-20)$$

(Voir (Kobayashi M.H et al., 1999) pour les détails de ce schéma).

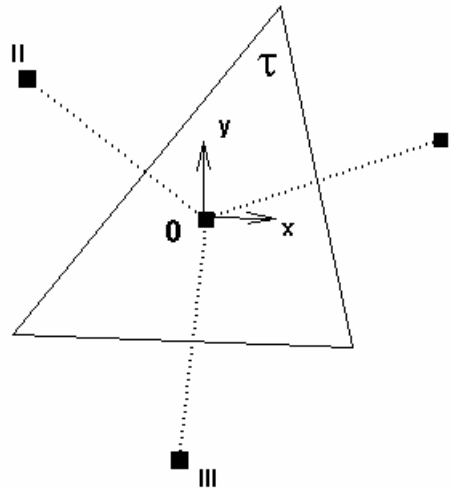


Figure 3-4 Schéma de discrétisation d'advection

Finalement la valeur de ϕ_{0-i} ($i \in i_\tau$) est calculée grâce au schéma « upwind » du deuxième ordre, comme suit :

$$\phi_{0-i} = \begin{cases} \bar{\phi}_\tau + (\nabla \phi)_0 \cdot \frac{\vec{r}_{0-i}}{2} & \text{si } u_{0-i} > 0 \\ \bar{\phi}_i - (\nabla \phi)_i \cdot \frac{\vec{r}_{0-i}}{2} & \text{si } u_{0-i} < 0 \end{cases} \quad \text{où } \vec{r}_{0-i} = (x_i, y_i) \quad \text{et} \quad \nabla \phi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (3-21)$$

3.3.1.3. Cas-test pour valider l'opérateur MLG et le schéma ULSS

Afin de comparer les schémas d'ordre plus élevé, l'opérateur MLG et le schéma ULSS, nous présentons ici un cas-test de problème d'advection pure. Il s'agit du cas-test proposé par Hubbard (Hubbard M.E, 1999). L'advection circulaire d'une variable scalaire ϕ dont la distribution est en forme conique, est prise en considération dans ce cas-test dont la condition initiale (à $t = 0$, voir Figure 3-5) est :

$$\phi = \begin{cases} \cos^2(2\pi r) & \text{pour } r \leq 0.25 \\ 0 & \text{pour } r > 0.25 \end{cases} \quad (3-22)$$

où $r^2 = (x + 0.5)^2 + y^2$.

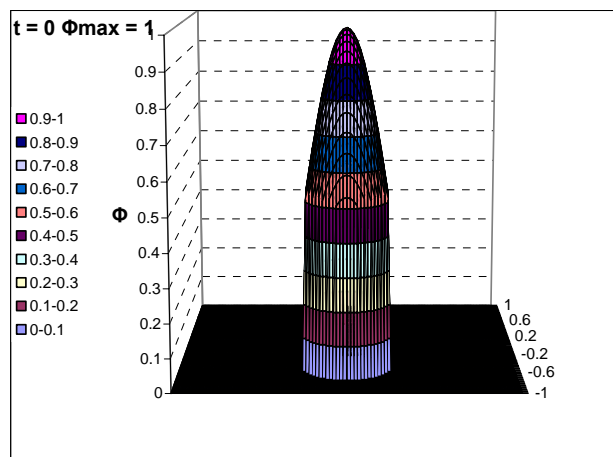


Figure 3-5 Etat initial du cône $\Phi_{max} = 1.0$ [D'après (Seille B., 2002)]

D'après (3-22), $\phi = 1$ est la valeur maximum de au pic. Le champ convecteurs est donné par son vecteur vitesse $\vec{u} = (-2\pi y, 2\pi x)^T$ partout dans le domaine de $[-1.0, 1.0] \times [-1.0, 1.0]$, où $T = 1.0s$ est la période de révolution. A cette condition, la variable scalaire ϕ sera advectée dans un mouvement de révolution en gardant sa forme de distribution initiale jusqu'à ce qu'elle retourne à la position originale à $t = 1.0s$.

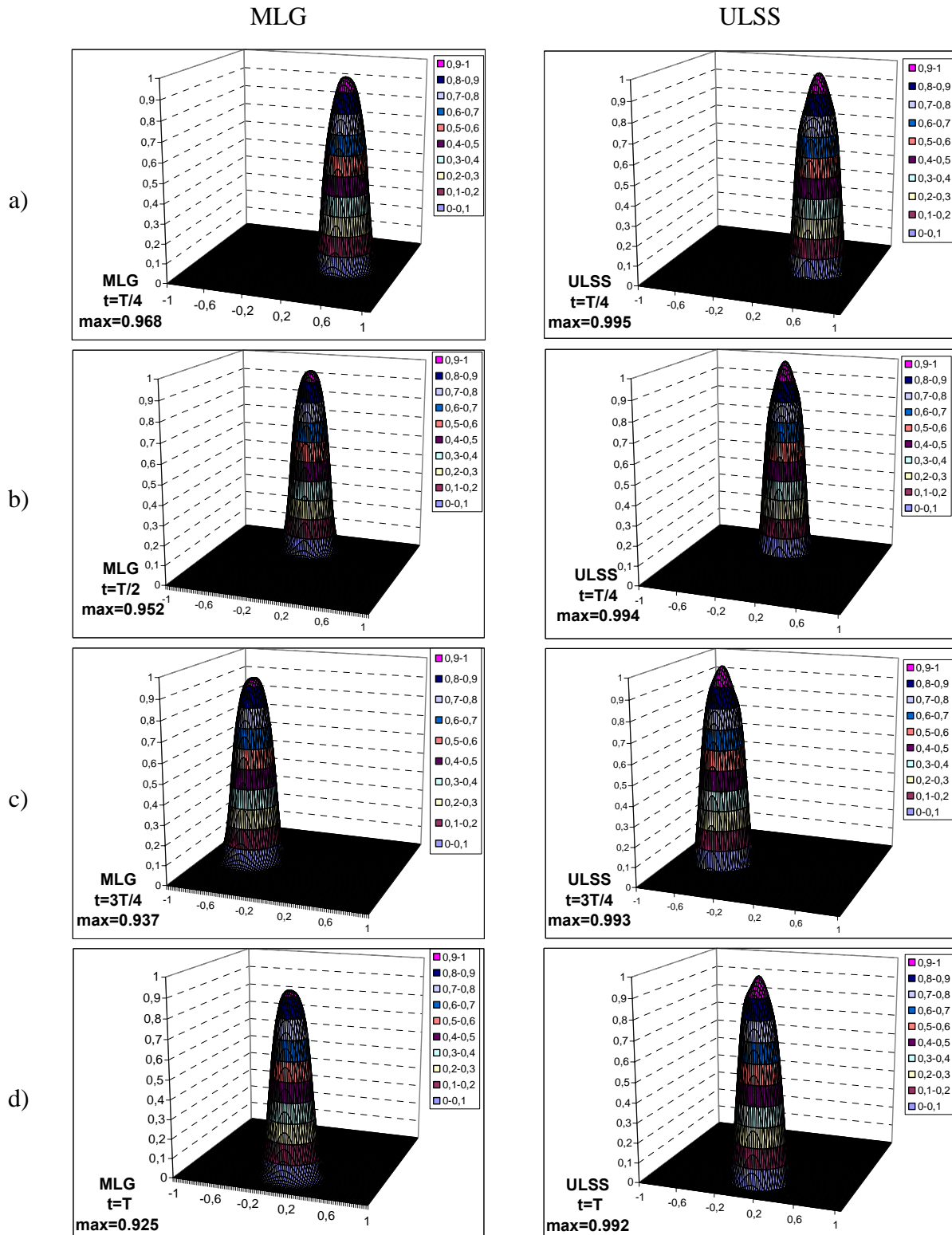


Figure 3-6 Résultats numériques par le schéma ULSS et l'opérateur de MLG

a) $t = T/4$, b) $t = T/2$, c) $t = 3T/4$, d) $t = T$ [D'après (Seille B., 2002)]

La Figure 3-6 et le Tableau 3-1 présentent les résultats numériques obtenus par l'opérateur MLG et le schéma de ULSS à l'instant $t = T/4, T/2, 3T/4$ et T (Seille 2002 (Seille B., 2002)). Les résultats numériques montrent que ces deux schémas ne provoquent aucune oscillation numérique.

Tableau 3-2 compare des valeurs maximum au pic à $t = T$, utilisant des schémas différents par Hubbard (Hubbard M.E, 1999). Le Tableau 3-1 montre que les ordres de précisions des schémas numériques : $LCD < LCD \text{ Projet}2 < MLG$. La valeur maximum au pic obtenue par l'utilisation de l'opérateur MLG combiné avec RARS, est de 0.93. Cette valeur est identique à celle obtenue par Seille (Seille B., 2002) 0.937, utilisant ce même opérateur MLG dans le modèle de ECOMOD-UFVM. Seille (Seille B., 2002) utilise également le schéma ULSS pour calculer ce cas-test et obtient la valeur maximum au pic de 0.992, qui est plus proche de la solution exacte $\phi = 1.0$ que celle obtenue par l'opérateur MLG. Après une révolution complète, l'erreur de la valeur maximum au pic obtenue à $t = 1.0$ s par MLG est -7.5% alors que celle obtenue par ULSS est seulement -0.8%. On note que le schéma ULSS s'avère donc meilleur que le MLG.

Tableau 3-1 : Valeurs maximum au pic par ECOMOD-UFVM

Temps (s)	t = 0.0	t = 0.25	t = 0.50	t = 0.75	t = 1.0	Erreur
MLG	1.0	0.968	0.952	0.937	0.925	-7.5%
ULSS	1.0	0.995	0.994	0.993	0.992	-0.8%

Tableau 3-2 : Valeurs maximum au pic par des schémas différents

Schéma	Par Hubbard 1999			Par Seille 2002	
	LCD	LCD Projeté	MLG	MLG	ULSS
Valeur maximum au pic	0.52	0.85	0.93	0.952	0.992

3.3.1.4. ULSS dans le présent modèle ECOMOD-UFVM

Connaissant les composantes du gradient de ϕ , $\nabla\phi$ par le schéma ULSS, on peut

donc calculer la valeur de ϕ_{0-m} au milieu de la face 0-m grâce au schéma « upwind » du deuxième ordre comme suit (Figure 3-2):

$$\phi_{0-m} = \begin{cases} \phi_0 + (\nabla \phi)_0 \cdot \frac{\Delta \vec{r}_{0-m}}{2} & \text{si } C_{0-m} > 0 \\ \phi_m - (\nabla \phi)_m \cdot \frac{\Delta \vec{r}_{0-m}}{2} & \text{si } C_{0-m} < 0 \end{cases} \quad \text{où } \Delta \vec{r} = (\Delta x, \Delta y) \quad (3-23)$$

En substituant (3-23) dans (3-8), on a :

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial(u\phi)}{\partial x} + \frac{\partial(v\phi)}{\partial y} \right) d\Omega = \sum_{m=1}^3 (C_{0-m}^+ \phi_0 - C_{0-m}^- \phi_m) \quad (3-24)$$

$$\text{où } C_{0-m}^{\pm} = \frac{1}{2} (C_{0-m} \pm |C_{0-m}|)$$

3.3.2. Approximation du terme de Diffusion :

L'application du théorème de Green au volume de contrôle pour le flux diffusif traversant la face (1-2) donne:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{0-1} = \frac{1}{2\Omega_{0-1}} \left[(\phi_1^c - \phi_0^c) \Delta y_{12} - (\phi_2^v - \phi_1^v) \Delta y_{01} \right] \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{0-1} = \frac{-1}{2\Omega_{0-1}} \left[(\phi_1^c - \phi_0^c) \Delta x_{12} - (\phi_2^v - \phi_1^v) \Delta x_{01} \right] \end{cases} \quad (3-25)$$

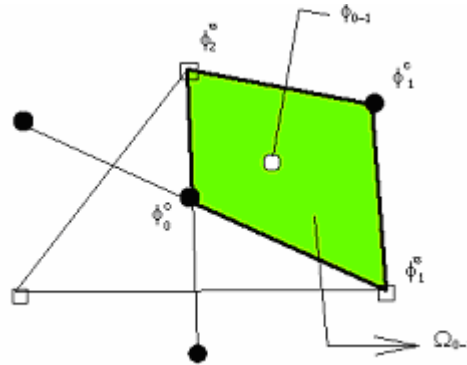


Figure 3-7 Volume de contrôle pour le flux diffusif traversant la face (1-2)

La valeur du ϕ^v à n'importe quel sommet (nœud) est obtenue en faisant l'interpolation de toutes les valeurs au centre des cellules qui ont ce nœud pour sommet. L'interpolation de la valeur de ϕ^v se fait dans la proportion inverse de la distance entre le centre du volume de contrôle et le sommet en question, d'où :

$$\phi_0^v = \frac{\sum(\phi_i/l_i)}{\sum(1/l_i)} \quad (3-26)$$

où l_i est la distance entre le sommet et le centre de volume de contrôle i .

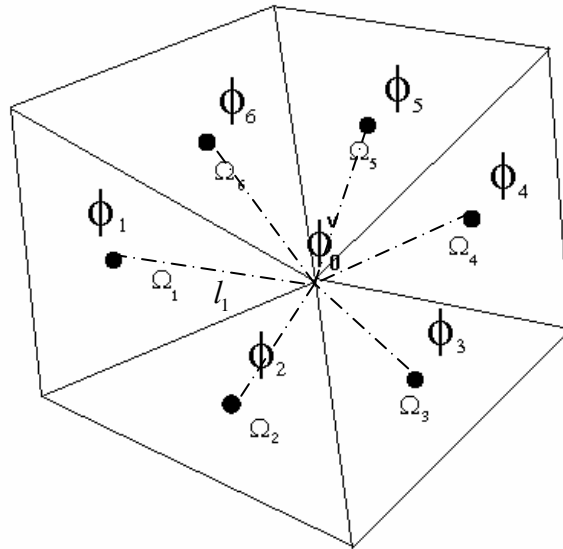


Figure 3-8 Interpolation de la valeur de ϕ aux sommets

Le résultat final de l'intégration des termes de diffusion est :

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\Gamma \phi_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\Gamma \phi_y) \right] d\Omega = \frac{\Gamma_{0-1}}{2\Omega_{0-1}} \left[(\phi_1 - \phi_0) (\Delta x_{12}^2 + \Delta y_{12}^2) - (\phi_2^v - \phi_1^v) (\Delta x_{01} \Delta x_{12} + \Delta y_{01} \Delta y_{12}) \right] \\ + \frac{\Gamma_{0-2}}{2\Omega_{0-2}} \left[(\phi_2 - \phi_0) (\Delta x_{23}^2 + \Delta y_{23}^2) - (\phi_3^v - \phi_2^v) (\Delta x_{02} \Delta x_{23} + \Delta y_{02} \Delta y_{23}) \right] \quad (3-27) \\ + \frac{\Gamma_{0-3}}{2\Omega_{0-3}} \left[(\phi_3 - \phi_0) (\Delta x_{31}^2 + \Delta y_{31}^2) - (\phi_1^v - \phi_3^v) (\Delta x_{03} \Delta x_{31} + \Delta y_{03} \Delta y_{31}) \right]$$

3.4. Construction les équations linéaires

La substitution de (3-8) et de (3-27) en (3-1) donne :

$$A_0 \phi_0^{n+1} = \sum_m^3 A_m \phi_m + S_\phi \quad (3-28)$$

où,

$$\begin{cases} A_1 = \frac{dt}{\Omega_0} \left[-C_{0-1}^- + \frac{\Gamma_{0-1} (\Delta x_{12}^2 + \Delta y_{12}^2)}{2\Omega_{0-1}} \right] \\ A_2 = \frac{dt}{\Omega_0} \left[-C_{0-2}^- + \frac{\Gamma_{0-2} (\Delta x_{23}^2 + \Delta y_{23}^2)}{2\Omega_{0-2}} \right] \\ A_3 = \frac{dt}{\Omega_0} \left[-C_{0-3}^- + \frac{\Gamma_{0-3} (\Delta x_{31}^2 + \Delta y_{31}^2)}{2\Omega_{0-3}} \right] \end{cases} \quad (3-29)$$

$$A_0 = 1 + \frac{dt}{\Omega_0} \left[\sum_{m=1}^3 C_{m-0}^+ + \frac{\Gamma_{0-1} (\Delta x_{12}^2 + \Delta y_{12}^2)}{2\Omega_{0-1}} + \frac{\Gamma_{0-2} (\Delta x_{23}^2 + \Delta y_{23}^2)}{2\Omega_{0-2}} + \frac{\Gamma_{0-3} (\Delta x_{31}^2 + \Delta y_{31}^2)}{2\Omega_{0-3}} \right]$$

avec le terme source S_ϕ qui est déterminé par :

$$\begin{aligned} S_\phi = \phi_0^n + \frac{dt}{\Omega_0} & \left\{ -\frac{\Gamma_{0-1}}{2\Omega_{0-1}} \left[(\phi_2^y - \phi_1^y) (\Delta x_{01} \Delta x_{12} + \Delta y_{01} \Delta y_{12}) \right] \right\} \\ & + \frac{dt}{\Omega_0} \left\{ -\frac{\Gamma_{0-2}}{2\Omega_{0-2}} \left[(\phi_3^y - \phi_2^y) (\Delta x_{02} \Delta x_{23} + \Delta y_{02} \Delta y_{23}) \right] \right\} \\ & + \frac{dt}{\Omega_0} \left\{ -\frac{\Gamma_{0-3}}{2\Omega_{0-3}} \left[(\phi_1^y - \phi_3^y) (\Delta x_{03} \Delta x_{31} + \Delta y_{03} \Delta y_{31}) \right] \right\} \\ & + \frac{dt}{\Omega_0} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_m^3 \left[C_{0-m}^+ (\nabla \phi)_0 \cdot \Delta \vec{r}_{0-m} - C_{0-m}^- (\nabla \phi)_m \cdot \Delta \vec{r}_{0-m} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3-30)$$

$$\text{où } C_{0-m}^\pm = \frac{1}{2} (C_{0-m} \pm |C_{0-m}|).$$

Le système d'équation du type (3-28) peut être résolu implicitement par la technique de SOR (Successive Over Relaxation, voir (Tannehill J.C. et al., 1997)).

Chapitre 4 Techniques Numériques pour les équations de Saint-Venant

4.1 Techniques de résolution des équations de Saint-Venant

4.1.1 Etat de l'art

La Méthode de Projection (MP) proposée indépendamment par Chorin [(Chorin A.J., 1969)] et Temam [(Temam R., 1968), (Temam R., 1977)] est la technique fréquemment utilisée pour la résolution numérique des équations de Navier-Stokes en variables primitives. Cette méthode, est basée sur l'utilisation d'un champ de vecteurs vitesses auxiliaires (en ôtant les termes de pression des équations de Navier-Stokes), et sur l'aboutissement à une équation de Poisson pour la pression (comme la seule inconnue) par un couplage entre l'équation de continuité et celle de quantité de mouvement. Une fois la pression obtenue, le champ des vecteurs vitesses à divergence nulle est déterminé par la correction du champ de vitesses auxiliaire avec la prise en compte, cette fois, des termes de pression.

Dans le cas d'un maillage non structuré, Guermond (Guermond J.L. and Quartapelle L., 1997) ont proposé, dans le cadre de la MEF, une MP pour les maillages triangulaires. Dans un même contexte, Gresho (Gresho P., 1990) a dérivé plusieurs types de MP qui inclut une discussion complète sur les aspects théoriques relatifs à cette méthode.

Kobayashi (Kobayashi M.H et al., 1999) proposent une résolution de Navier-Stokes avec une MP dans un schéma conservatif de MVF en maillages hybrides non structurés.

L'algorithme SIMPLE (Semi Implicit Methode for Pressure-Linked Equations) fut initialement développé par Patankar (Patanekar S.V., 1980). Le principe de SIMPLE consiste à partir d'un champ de pression arbitraire P^* , qui par le biais des équations de conservation de la quantité de mouvement, conduit à un champ de vitesse approché U^* . Des corrections

successives sont ensuite apportées à l'un et à l'autre de façon à se rapprocher petit à petit

d'une solution de l'équation de continuité. La procédure itérative de résolution est décrite dans (Patankar S.V., 1980). Les différentes étapes sont répétées jusqu'à ce que l'erreur sur chaque équation de conservation, sur chaque volume de contrôle et sur le domaine tout entier, soit inférieure à une valeur préalablement définie. L'algorithme SIMPLE est similaire à celui de la MP. Lien (Lien F.S., 2000) présente l'algorithme SIMPLE sur les équations de Saint-Venant avec MVF sur les maillages non structurés collocatifs.

Dans les modèles de volumes finis existants, qui sont basés sur la résolution des équations de Saint-Venant, deux techniques ont été principalement utilisées : le solveur de l'approximation Riemann de Roe (RARS : Roe's Approximate Riemann Solver) et la technique de projection. Dans les sections suivantes, nous décrivons le contenu de ces deux techniques. Nous allons voir brièvement ci-après l'évolution du développement des RARS, de la technique de projection ainsi que celle des autres méthodes numériques dans la résolution du problème d'écoulements à surface libre.

En 1992, Alcrudo & Garcia-Navarro (Alcrudo F. and Garcia-Navarro P, 1993), (Garcia-Navarro P. et al., 1992) sont parmi les premiers qui utilisent un RARS pour résoudre les équations de Saint-Venant unidimensionnelles en formulation conservative par un schéma de TVD (Total Variation Diminishing) couplé avec la MVF dans un maillage structuré. Le RARS est ensuite développé pour les problèmes de rupture de barrage bidimensionnels en MVF dans les travaux de Fennema et Chaudhry (Fennema R. and Chaudhry M.H, 1989) avec un schéma de McCormack et de Gabutti, de Hanich (Hanich L., 1996) avec un schéma TVD. Les MVF utilisées dans ces travaux restent en maillage structuré.

Sleigh (Sleigh P.A. et al., 1998), Chan (Chan C.T. and Anastasiou K., 1999) ont étendu le RARS en MVF à des maillages non structurés. Sleigh et al. ont introduit un limiteur du type Van Leer (Van Leer B, 1977) dans son schéma « Upwind » pour traiter les termes d'advection. Chan et Anastasiou 1999 ont développé un schéma « Upwind » du 2nd ordre du type Godunov. Cependant, le traitement des termes source n'a pas encore pris une place appropriée dans ces travaux.

En 2001, dans leur modèle utilisant un RARS en volumes finis non structurés, Zhou et al. (Zhou J.G. et al., 2001) commencent à prêter toute leur attention au traitement des termes source. Nguyen (Nguyen K.D. et al., 2002) utilisent un RARS pour résoudre les équations de Saint-Venant en formulation (débits, dénivellation) dans un maillage non structuré afin de simuler un écoulement dû à la rupture d'une série de barrages successivement construits sur

des vallées de niveaux différents. Brufau (Brufau P. et al., 2002) ont présenté un traitement spécial qui décompose les termes source en deux termes « inward » et « outward ». Restant fidèles au RARS en volumes finis non structurés, Brufau (Brufau P. et al., 2002; Brufau P et al., 2004) ont proposé des techniques numériques pour traiter le problème lié aux terrains découvrant et recouvrant en respectant la conservation de la masse d'eau. Murillo J et al. 2005 (Murillo J. et al., 2005) ont proposé l'extension du RARS développé par Brufau et al. (Brufau P. et al., 2002; Brufau P et al., 2004) à des grands pas de temps de calcul qui peuvent aller jusqu'à une valeur du nombre de CFL de 4. Calfeffi et al. (Caleffi V. et al., 2006), Harten (Harten A. et al., 1987), Vukovic (Vukovic S and Sopta L., 2002) calculent les termes source par le reconstructions ENO (Essentially Non-Oscillatory) et WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory). Cependant, les méthodes développées pour traiter les termes source restent très complexes.

Le code TELEMAC-2D développé par LNHE/EDF (Hervouet J.M., 2001) utilise une Méthode de Projection (MP) pour résoudre les équations de Saint-Venant avec la MEF. Ce code est largement utilisé en France et dans le monde pour des applications très diverses : écoulements côtiers et estuariens, transport sédimentaire, rupture de barrages, etc. Le code REFLUX a été développé conjointement par UTC (Université de Technologie de Compiègne) et CETMEF (Centre d'Etudes Techniques Maritimes Et Fluviales) (Dhatt G. and SERGENT P., 2005). Ce code est basé sur la résolution des équations de Saint-Venant par une MEF avec un schéma implicite de type Euler. Pour des problèmes avec front mobile, un schéma explicite de type Kawahara ou Lax-Wendroff est utilisé (Kawahara M. and Umetsu T., 1986).

Dans le modèle de Casulli et Walters 2000, les équations de Navier-Stokes 3D pour des écoulements en eaux peu profondes avec l'approximation hydrostatique, sont discrétisées par un schéma semi-implicite en différences finies non structurées. Cette technique permet de résoudre un système d'équations linéaires de très grande taille contenant toutes les variables (dénivellation et les composantes de vecteurs vitesses).

4.1.2 Solveur de l'approximation Riemann de Roe (Roe P.L., 1981)

La formulation « débit unitaire - hauteur d'eau » des équations de Saint-Venant sous forme conservative est donnée comme suit :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = H \quad (2-86)$$

$$U = \begin{pmatrix} h \\ q_x \\ q_y \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} q_x \\ \frac{q_x^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \\ \frac{q_x q_y}{h} \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} q_y \\ \frac{q_x q_y}{h} \\ \frac{q_y^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \end{pmatrix} \quad (2-87)$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ -Fq_x + fq_y + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_H \frac{\partial q_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_H \frac{\partial q_x}{\partial y} \right) \\ -Fq_y - fq_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_H \frac{\partial q_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_H \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) \end{pmatrix} \quad (2-88)$$

La forme intégrale de (2-86) est :

$$\int_S \frac{\partial U}{\partial t} dS + \int_S \vec{\nabla} \cdot (E, G) dS = \int_S H dS \quad (4-1)$$

où Ω_i est le $i^{\text{ème}}$ volume de contrôle.

L'application du théorème de Green à (4-1) sur le volume Ω_i de frontière $\partial\Omega$, donne:

$$\frac{dU_i}{dt} S_i + \oint_{\partial\Omega} (E, G) \cdot \vec{n} dC = \int_{S_i} H dS \quad (4-2)$$

Ici, Ω_i est supposé inchangé au cours du calcul. Le deuxième terme du premier membre de l'équation (4-2) peut être déterminé par :

$$\oint_{\partial\Omega_i} (E, G) \cdot \vec{n} dC = \sum_{k=1}^3 (E, G)_{wk} \vec{n}_{wk} dC_{wk} \quad (4-3)$$

où wk représente la frontière k du domaine de calcul, $n_{wk} = (n_x, n_y)$ est le vecteur unitaire normal à la frontière k , dC_{wk} est la longueur de frontière wk .

Posons

$$(E, G)_{wk} \cdot \vec{n}_{wk} = F_{i+1/2} \quad (4-4)$$

où $F_{i+1/2}$ représente le flux normal traversant la face $i+1/2$.

L'application de RARS à (4-4) pour calculer le flux $F_{i+1/2}$, donne :

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2} [F_{i+1} + F_i - |\tilde{A}_{i+1/2}| (U_{i+1} - U_i)] = \frac{1}{2} [F_R + F_L - |\tilde{A}_{RL}| (U_R - U_L)] \quad (4-5)$$

où R et L désignent les côtés gauche et droit de la frontière wk , A_{RL} est l'approximation du Jacobien du flux normal. \tilde{A}_{RL} a la même forme que A_{RL} , qui est défini par Roe (Roe P.L., 1981) comment suit:

$$A = \frac{\partial F}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & n_x & n_y \\ (c^2 - u^2)n_x - uvn_y & 2un_x - vn_y & un_y \\ -uvn_x + (c^2 - v^2)n_y & vn_x & un_x + 2vn_y \end{bmatrix} \quad (4-6)$$

La matrice \tilde{A}_{RL} peut être déterminée selon (4-6), en remplaçant les valeurs de u , v et c par les valeurs moyennes $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{c})$, proposées par Roe :

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{\sqrt{h_R}u_R + \sqrt{h_L}u_L}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L}} \\ \tilde{v} &= \frac{\sqrt{h_R}v_R + \sqrt{h_L}v_L}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L}} \\ \tilde{c} &= \sqrt{\frac{g(h_R + h_L)}{2}} \end{aligned} \quad (4-7)$$

Les valeurs propres de la matrice \tilde{A}_{RL} sont de la forme :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \tilde{u} \cdot \vec{n} + \tilde{c} = \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y + \tilde{c} \\ \lambda_2 &= \tilde{u} \cdot \vec{n} = \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y \\ \lambda_3 &= \tilde{u} \cdot \vec{n} - \tilde{c} = \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y - \tilde{c} \end{aligned} \quad (4-8)$$

Les vecteurs propres de la matrice \tilde{A}_{RL} sont :

$$\vec{e}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{c}n_x \\ \tilde{v} + \tilde{c}n_y \end{pmatrix}, \vec{e}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{c}n_y \\ \tilde{c}n_x \end{pmatrix}, \vec{e}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \tilde{c}n_x \\ \tilde{v} - \tilde{c}n_y \end{pmatrix} \quad (4-9)$$

A l'aide de RARS, nous avons:

$$U_R - U_L = \Delta U = \sum_{m=1}^3 \tilde{\alpha}_m \vec{e}^m = (\tilde{\alpha}_1 \vec{e}^1 + \tilde{\alpha}_2 \vec{e}^2 + \tilde{\alpha}_3 \vec{e}^3) \quad (4-10)$$

avec

$$\tilde{\alpha}^{1,3} = \frac{\Delta h_{RL}}{2} \pm \frac{1}{2\tilde{c}} [\Delta q_{x,RL} n_x + \Delta q_{y,RL} n_y - (\tilde{u} \cdot n_x + \tilde{v} n_y) \Delta h_{RL}] \quad (4-11)$$

$$\tilde{\alpha}^2 = \frac{1}{\tilde{c}} [(\Delta q_{y,RL} - \tilde{v} \Delta h_{RL}) n_x - (\Delta q_{x,RL} - \tilde{u} \Delta h_{RL}) n_y] \quad (4-12)$$

et

$$F_R - F_L = \Delta F = \left| \tilde{A}_{RL} \right| (U_R - U_L) = \left| \tilde{A}_{RL} \right| \sum_{m=1}^3 \tilde{\alpha}_m \vec{e}^m \quad (4-13)$$

(4-5) est finalement déterminé par

$$F_{1+1/2} = \frac{1}{2} \left[F_R + F_L - \sum_{m=1}^3 \tilde{\alpha}_m \left| \lambda_m \right| \vec{e}^m \right] \quad (4-14)$$

(4-3) devient donc:

$$\oint_{C_i} (E, G) \cdot \vec{n} dC = \left(\sum_{k=1}^{N_f} F_k \cdot dC_k \right) \quad (4-15)$$

où chaque flux normal F_k est déterminé par (4-14) avec $N_f = 3$ ou $N_f = 4$ dans les cas d'élément triangle ou quadrangle, respectivement.

Le RARS a été initialement proposé pour la résolution de l'équation d'Euler (Roe P.L., 1981). Bien que le RARS puisse correctement simuler les écoulements discontinus et les chocs, des oscillations indésirables peuvent cependant se produire si les termes sources sont importants.

Actuellement, il n'existe aucun travail abordant la résolution des équations de Saint-Venant par une méthode de projection en volumes finis non structurés. Le choix de la technique de projection a été motivé en prévision des applications de ce code à des problèmes qui représentent des termes sources importants dus principalement à une variation rapide et à une forte irrégularité du fond, car la technique de projection ne nécessite aucun traitement spécial pour des termes source.

4.1.3 Méthode de projection

4.1.3.1 Traitement des oscillations de surface libre

Afin d'éviter les oscillations numériques surgissant lors de l'utilisation de la méthode de projection dans une grille collocative, les composantes de vitesse u_{0-m} et v_{0-m} ($m = 1, 2$ et 3) aux faces sont évaluées par l'interpolation de vitesse proposée par Guillou et Nguyen (Guillou S. and Nguyen K.D., 1999) ou par l'interpolation pondérée de la pression proposée par Rhie et Chow (Rhie C.M. and Chow W.L., 1983). La dernière interpolation se compose d'une moyenne arithmétique de deux vitesses adjacentes et d'un terme du 3^{ème} ordre permettant d'arrondir les valeurs singulières de la pression. Elle est comme suit :

$$\begin{aligned}
 u_{0-1} &= \frac{1}{2} \left[u_o + u_1 + g \left(\frac{\Omega \left(\frac{\partial Z_s}{\partial x} \right)}{A_u} \right)_o + g \left(\frac{\Omega \left(\frac{\partial Z_s}{\partial x} \right)}{A_u} \right)_1 \right] - \frac{2g \left(\Omega \left(\frac{\partial Z_s}{\partial x} \right)_{0-1} \right)}{(A_u)_o + (A_u)_1} \\
 v_{0-1} &= \frac{1}{2} \left[v_o + v_1 + g \left(\frac{\Omega \left(\frac{\partial Z_s}{\partial y} \right)}{A_v} \right)_o + g \left(\frac{\Omega \left(\frac{\partial Z_s}{\partial y} \right)}{A_v} \right)_1 \right] - \frac{2g \left(\Omega \left(\frac{\partial Z_s}{\partial y} \right)_{0-1} \right)}{(A_v)_o + (A_v)_1}
 \end{aligned} \quad (4-16)$$

Les gradients de pression au centre de la cellule $\left[\left(\frac{\partial Z_s}{\partial x} \right)_o, \left(\frac{\partial Z_s}{\partial x} \right)_1, \left(\frac{\partial Z_s}{\partial y} \right)_o, \left(\frac{\partial Z_s}{\partial y} \right)_1 \right]$ sont discrétisés en utilisant le théorème de Green. Les gradients de pression aux faces sont calculés par :

$$\begin{aligned}
 \frac{2 \left(\Omega \left(\frac{\partial Z_s}{\partial x} \right)_{0-1} \right)}{(A_u)_o + (A_u)_1} &\approx \frac{2 \Delta y_{12} (Z_{s1} - Z_{s0})}{(A_u)_o + (A_u)_1} \\
 \frac{2 \left(\Omega \left(\frac{\partial Z_s}{\partial y} \right)_{0-1} \right)}{(A_v)_o + (A_v)_1} &\approx \frac{-2 \Delta x_{12} (Z_{s1} - Z_{s0})}{(A_v)_o + (A_v)_1}
 \end{aligned} \quad (4-17)$$

où

$$\begin{aligned}
 A_u &= \frac{\Omega_0}{dt} A_0 \\
 A_v &= \frac{\Omega_0}{dt} A_0
 \end{aligned} \quad (4-18)$$

A_0 est un coefficient des équations linéaires donné par (3-30).

4.1.3.2 Méthode de projection pour les équations de Saint-Venant

La résolution numérique des équations de Saint-Venant consiste à déterminer les variables indépendantes Z_s , q_x et q_y à l'instant $t^{n+1} = (n+1)\Delta t$. Cette résolution doit être faite pour chaque centre des volumes de contrôle. Elle nécessite donc une discrétisation en espace et en temps.

La méthode de projection de Chorin a été appliquée ici pour résoudre les équations de Saint-Venant (Guillou S. and Nguyen K.D., 1999), (Nguyen K.D. and Ouahsine A., 1997) en trois étapes successives : Advection-Diffusion, propagation de l'onde de surface et correction de vitesse. Elles sont expliquées dans les trois paragraphes suivants.

4.1.3.2.1 Etape d'advection et diffusion

Dans les équations de quantité de mouvement (2-95) et (2-96), en omettant les termes

de V et III :

$$\begin{cases} -gh \frac{\partial Z_s}{\partial x} + fq_y + \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{\tau_{fx}}{\rho} = 0 \\ -gh \frac{\partial Z_s}{\partial y} - fq_x + \frac{\tau_{sy}}{\rho} - \frac{\tau_{fy}}{\rho} = 0 \end{cases} \quad (4-19)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{q}_x}{\partial t} + \frac{\partial (uq_x^*)}{\partial x} + \frac{\partial (vq_x^*)}{\partial y} &= A_H \left[\frac{\partial^2 q_x^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q_x^*}{\partial y^2} \right] \\ \frac{\partial \bar{q}_y}{\partial t} + \frac{\partial (uq_y^*)}{\partial x} + \frac{\partial (vq_y^*)}{\partial y} &= A_H \left[\frac{\partial^2 q_y^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q_y^*}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (4-20)$$

où l'indice supérieur * est purement symbolique. Il représente les valeurs obtenues au nouveau pas de temps t^{n+1} après l'étape de « advection-diffusion ». q_x^* et q_y^* représentent donc les débits unitaires à un instant intermédiaire après cette étape, dans les directions x et y , \bar{q}_x , et \bar{q}_y sont les valeurs moyennes de q_x^{n+1} et q_x^n , et de q_y^{n+1} et q_y^n respectivement.

(4-20) est en fait une équation de transport. En appliquant le « théorème de Green » à (4-20), nous obtenons un système linéaire d'équations (4-32) avec q_x et q_y comme inconnues à déterminer.

4.1.3.2.2 Etape de propagation des ondes

Le couplage entre l'équation de continuité (2-94) et les équations de quantité de mouvement (2-95) et (2-96) sans les termes d'advection et de diffusion, nous donnent

$$\frac{\partial Z_s}{\partial t} + \frac{\partial \bar{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{q}_y}{\partial y} = 0 \quad (4-21)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial q_x}{\partial t} = -gh \frac{\partial \bar{Z}_s}{\partial x} + fq_y + \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{\tau_{fx}}{\rho} \\ \frac{\partial q_y}{\partial t} = -gh \frac{\partial \bar{Z}_s}{\partial y} - fq_x + \frac{\tau_{sy}}{\rho} - \frac{\tau_{fy}}{\rho} \end{cases} \quad (4-22)$$

où \bar{q}_x , \bar{q}_y et \bar{Z}_s sont les valeurs moyennes de q_x^{n+1} et q_x^n , de q_y^{n+1} et q_y^n , et de Z_s^{n+1} et Z_s^n , respectivement.

Dérivées en espace

Pour les dérivées partielles, on utilise le schéma de pondération, suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{q}_x}{\partial x} = \gamma \frac{\partial q_x^{n+1}}{\partial x} + (1 - \gamma) \frac{\partial q_x^n}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{q}_y}{\partial y} = \gamma \frac{\partial q_y^{n+1}}{\partial y} + (1 - \gamma) \frac{\partial q_y^n}{\partial y} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{Z}_s}{\partial x} = \gamma \frac{\partial Z_s^{n+1}}{\partial x} + (1 - \gamma) \frac{\partial Z_s^n}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{Z}_s}{\partial y} = \gamma \frac{\partial Z_s^{n+1}}{\partial y} + (1 - \gamma) \frac{\partial Z_s^n}{\partial y} \end{array} \right. \quad (4-23)$$

où γ est un coefficient d'implicitation:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \gamma = 0 & \text{schéma explicite} \\ 0 < \gamma < 1 & \text{schéma semi-implicite} \\ \gamma = 1 & \text{schéma implicite} \end{array} \right. \quad (4-24)$$

Dérivées en temps

Les dérivées en temps pour la méthode de projection sont discrétisées par

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial q_x}{\partial t} = \frac{q_x^{n+1} - q_x^*}{\Delta t} \\ \frac{\partial q_y}{\partial t} = \frac{q_y^{n+1} - q_y^*}{\Delta t} \end{array} \right. \quad (4-25)$$

$$\frac{\partial Z_s}{\partial t} = \frac{Z_s^{n+1} - Z_s^n}{\Delta t} \quad (4-26)$$

Termes de frottement

Les équations (2-67) et (2-68) nous permettent de traiter les termes de frottement sur le fond par pondération. Ils sont linéarisés par un coefficient de frottement F , qui est calculé par les valeurs de vitesses déjà connues au pas de temps précédent, t^n . On a :

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{fx}}{\rho} &= F(hu) = F\bar{q}_x = \gamma Fq_x^{n+1} + (1 - \gamma) Fq_x^n \\ \frac{\tau_{fy}}{\rho} &= F(hv) = F\bar{q}_y = \gamma Fq_y^{n+1} + (1 - \gamma) Fq_y^n \end{aligned} \quad (4-27)$$

En remplaçant les termes de (4-21) et (4-22) par (4-23), (4-25), (4-26), et (4-27), (4-21) et (4-22), nous obtenons une équation de Poisson pour une seule variable inconnue à déterminer, qui est la surface libre.

$$\left[1 - \frac{\gamma^2 gh}{A} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right] \delta Z_s = \frac{B}{A} \quad \text{where} \quad \delta Z_s = Z_s^{n+1} - Z_s^n \quad (4-28)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l}
 B = \gamma gh \left(\frac{\partial^2 Z_s^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z_s^n}{\partial y^2} \right) - \frac{\gamma}{dt} \left(\frac{\partial q_x^*}{\partial x} + \frac{\partial q_y^*}{\partial y} \right) - \gamma \left(\frac{\partial L_x}{\partial x} + \frac{\partial L_y}{\partial y} \right) - \frac{1-\gamma}{dt} \left(\frac{\partial q_x^n}{\partial x} + \frac{\partial q_y^n}{\partial y} \right) \\
 A = dt^{-1} (dt^{-1} + \gamma F) \\
 F = \frac{g}{C_h^2 h^2} \sqrt{(q_x^n)^2 + (q_y^n)^2} \\
 L_x = f q_y^n + \frac{\tau_{sx}}{\rho} \\
 L_y = -f q_x^n + \frac{\tau_{sy}}{\rho}
 \end{array} \right. \quad (4-29)$$

On pose :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 D_{0-m} = \left(\frac{\gamma^2 gh}{A} \right)_{0-m} \\
 E_{0-m} = \left(\frac{\gamma gh}{A} \right)_{0-m} \\
 G_{0-m} = \left(\frac{\gamma}{Adt} \right)_{0-m} \\
 F_{0-m} = \left(\frac{\gamma}{A} \right)_{0-m} \\
 P_{0-m} = \left(\frac{1-\gamma}{Adt} \right)_{0-m}
 \end{array} \right. \quad (4-30)$$

(4-28) devient

$$\left[1 - D \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right] \delta Z_s = E \left(\frac{\partial^2 Z_s^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z_s^n}{\partial y^2} \right) - G \left(\frac{\partial q_x^*}{\partial x} + \frac{\partial q_y^*}{\partial y} \right) - F \left(\frac{\partial L_x}{\partial x} + \frac{\partial L_y}{\partial y} \right) - P \left(\frac{\partial q_x^n}{\partial x} + \frac{\partial q_y^n}{\partial y} \right) \quad (4-31)$$

L'application du théorème de Green à (4-31) donne un système d'équations linéaire comme suit :

$$A_{Z_0} \delta Z_{s_0} = \sum_m^3 A_{Z_m} \delta Z_{s_m} + S_Z \quad (4-32)$$

où $\delta Z_s = Z_s^{n+1} - Z_s^n$.

$$\begin{cases} A_1 = \frac{D_{0-1} (\Delta x_{12}^2 + \Delta y_{12}^2)}{2\Omega_{0-1}} \\ A_2 = \frac{D_{0-2} (\Delta x_{23}^2 + \Delta y_{23}^2)}{2\Omega_{0-2}} \\ A_3 = \frac{D_{0-3} (\Delta x_{31}^2 + \Delta y_{31}^2)}{2\Omega_{0-3}} \end{cases} \quad (4-33)$$

$$A_0 = \Omega_0 + (A_1 + A_2 + A_3)$$

Le terme source S_z est déterminé par :

$$\begin{aligned} S_z = & -\frac{D_{0-1}}{2\Omega_{0-1}} \left[(\delta Z_2^v - \delta Z_1^v) (\Delta x_{01} \Delta x_{12} + \Delta y_{01} \Delta y_{12}) \right] \\ & -\frac{D_{0-2}}{2\Omega_{0-2}} \left[(\delta Z_3^v - \delta Z_2^v) (\Delta x_{02} \Delta x_{23} + \Delta y_{02} \Delta y_{23}) \right] \\ & -\frac{D_{0-3}}{2\Omega_{0-3}} \left[(\delta Z_1^v - \delta Z_3^v) (\Delta x_{03} \Delta x_{31} + \Delta y_{03} \Delta y_{31}) \right] \\ & +\frac{E_{0-1}}{2\Omega_{0-1}} \left[(Z_1^n - Z_0^n) (\Delta x_{12}^2 + \Delta y_{12}^2) - (Z_2^v - Z_1^v) (\Delta x_{01} \Delta x_{12} + \Delta y_{01} \Delta y_{12}) \right] \\ & +\frac{E_{0-2}}{2\Omega_{0-2}} \left[(Z_2^n - Z_0^n) (\Delta x_{23}^2 + \Delta y_{23}^2) - (Z_3^v - Z_2^v) (\Delta x_{02} \Delta x_{23} + \Delta y_{02} \Delta y_{23}) \right] \\ & +\frac{E_{0-3}}{2\Omega_{0-3}} \left[(Z_3^n - Z_0^n) (\Delta x_{31}^2 + \Delta y_{31}^2) - (Z_1^v - Z_3^v) (\Delta x_{03} \Delta x_{31} + \Delta y_{03} \Delta y_{31}) \right] \\ & -G_{0-1} (q_{x,0-1} \Delta y_{12} - q_{y,0-1} \Delta x_{12}) - G_{0-2} (q_{x,0-2} \Delta y_{23} - q_{y,0-2} \Delta x_{23}) - G_{0-3} (q_{x,0-3} \Delta y_{31} - q_{y,0-3} \Delta x_{31}) \\ & -F_{0-1} (L_{x,0-1} \Delta y_{12} - q_{y,0-1} \Delta x_{12}) - F_{0-2} (L_{x,0-2} \Delta y_{23} - L_{y,0-2} \Delta x_{23}) - F_{0-3} (L_{x,0-3} \Delta y_{31} - L_{y,0-3} \Delta x_{31}) \end{aligned} \quad (4-34)$$

L'équation (4-32) peut être résolue par une technique de SOR implicite.

4.1.3.2.3 Etape de correction de vitesse

En appliquant (4-23) et (4-27) à (4-22), on obtient :

$$\begin{aligned} q_x^{n+1} (1 + \gamma F dt) &= q_x^* - \gamma gh^{n+1} \Delta t \frac{\partial (\delta Z_s)}{\partial x} - gh \Delta t \frac{\partial Z_s^n}{\partial x} + L_x \Delta t - (1 - \gamma) F \Delta t q_x^n \\ q_y^{n+1} (1 + \gamma F dt) &= q_y^* - \gamma gh^{n+1} \Delta t \frac{\partial (\delta Z_s)}{\partial y} - (1 - \gamma) gh \Delta t \frac{\partial Z_s^n}{\partial y} + L_y \Delta t - (1 - \gamma) F q_y^n \Delta t \end{aligned} \quad (4-35)$$

(4-35) est déduite des équations de la quantité de mouvement sans terme d'advection et diffusion.

Une fois la surface libre connue, les débits unitaires peuvent être corrigés comme suit :

$$q_x^{n+1} = \frac{q_x^n - \gamma gh dt \frac{\partial Z_s^{n+1}}{\partial x} - (1 - \gamma) gh dt \frac{\partial Z_s^n}{\partial x} + L_x dt - (1 - \gamma) F q_x^n dt}{1 + \gamma F dt} \quad (4-36)$$

$$q_y^{n+1} = \frac{q_y^n - \gamma g h dt \frac{\partial Z_s^{n+1}}{\partial y} - (1-\gamma) g h dt \frac{\partial Z_s^n}{\partial y} + L_y dt - (1-\gamma) F q_y^n dt}{1 + \gamma F dt} \quad (4-37)$$

La discrétisation de (4-36) et de (4-37) par (3-26) donne :

$$\begin{aligned} q_x^{n+1} = & \frac{1}{(1 + \gamma F dt)} \left[q_x^n + L_{x0} dt - (1-\gamma) F q_x^n dt \right] \\ & - \frac{\gamma g dt}{(1 + \gamma F dt)} \left[\frac{h_{0-1}^{n+1}}{2\Omega_{0-1}} \left((Z_s^{n+1} - Z_s^{n+1}) \Delta y_{12} - (Z_s^{n+1v} - Z_s^{n+1v}) \Delta y_{01} \right) \right] \\ & - \frac{\gamma g dt}{(1 + \gamma F dt)} \left[\frac{h_{0-2}^{n+1}}{2\Omega_{0-2}} \left((Z_s^{n+1} - Z_s^{n+1}) \Delta y_{23} - (Z_s^{n+1v} - Z_s^{n+1v}) \Delta y_{02} \right) \right] \\ & - \frac{\gamma g dt}{(1 + \gamma F dt)} \left[\frac{h_{0-3}^{n+1}}{2\Omega_{0-3}} \left((Z_s^{n+1} - Z_s^{n+1}) \Delta y_{31} - (Z_s^{n+1v} - Z_s^{n+1v}) \Delta y_{03} \right) \right] \\ & - \frac{(1-\gamma) g dt}{(1 + \gamma F dt)} \left[\frac{h_{0-1}^{n+1}}{2\Omega_{0-1}} \left((Z_s^n - Z_s^n) \Delta y_{12} - (Z_s^{nv} - Z_s^{nv}) \Delta y_{01} \right) \right] \\ & - \frac{(1-\gamma) g dt}{(1 + \gamma F dt)} \left[\frac{h_{0-2}^{n+1}}{2\Omega_{0-2}} \left((Z_s^n - Z_s^n) \Delta y_{23} - (Z_s^{nv} - Z_s^{nv}) \Delta y_{02} \right) \right] \\ & - \frac{(1-\gamma) g dt}{(1 + \gamma F dt)} \left[\frac{h_{0-3}^{n+1}}{2\Omega_{0-3}} \left((Z_s^n - Z_s^n) \Delta y_{31} - (Z_s^{nv} - Z_s^{nv}) \Delta y_{03} \right) \right] \end{aligned} \quad (4-38)$$

$$\begin{aligned} q_y^{n+1} = & \frac{1}{(1 + \gamma F dt)} \left[q_y^n + L_{y0} dt - (1-\gamma) F q_y^n dt \right] \\ & + \frac{\gamma g dt}{(1 + \gamma F dt)} \left[\frac{h_{0-1}^{n+1}}{2\Omega_{0-1}} \left((Z_s^{n+1} - Z_s^{n+1}) \Delta x_{12} - (Z_s^{n+1v} - Z_s^{n+1v}) \Delta x_{01} \right) \right] \\ & + \frac{\gamma g dt}{(1 + \gamma F dt)} \left[\frac{h_{0-2}^{n+1}}{2\Omega_{0-2}} \left((Z_s^{n+1} - Z_s^{n+1}) \Delta x_{23} - (Z_s^{n+1v} - Z_s^{n+1v}) \Delta x_{02} \right) \right] \\ & + \frac{\gamma g dt}{(1 + \gamma F dt)} \left[\frac{h_{0-3}^{n+1}}{2\Omega_{0-3}} \left((Z_s^{n+1} - Z_s^{n+1}) \Delta x_{31} - (Z_s^{n+1v} - Z_s^{n+1v}) \Delta x_{03} \right) \right] \\ & + \frac{(1-\gamma) g dt}{(1 + \gamma F dt)} \left[\frac{h_{0-1}^{n+1}}{2\Omega_{0-1}} \left((Z_s^n - Z_s^n) \Delta x_{12} - (Z_s^{nv} - Z_s^{nv}) \Delta x_{01} \right) \right] \\ & + \frac{(1-\gamma) g dt}{(1 + \gamma F dt)} \left[\frac{h_{0-2}^{n+1}}{2\Omega_{0-2}} \left((Z_s^n - Z_s^n) \Delta x_{23} - (Z_s^{nv} - Z_s^{nv}) \Delta x_{02} \right) \right] \\ & + \frac{(1-\gamma) g dt}{(1 + \gamma F dt)} \left[\frac{h_{0-3}^{n+1}}{2\Omega_{0-3}} \left((Z_s^n - Z_s^n) \Delta x_{31} - (Z_s^{nv} - Z_s^{nv}) \Delta x_{03} \right) \right] \end{aligned} \quad (4-39)$$

4.2 Conditions aux limites

Dans un problème d'écoulement à surface libre, les frontières sont classées en deux types : frontières solides et frontières ouvertes.

4.2.1 Frontières solides

Sur cette frontière, aucun flux ne doit traverser. La composante normale du vecteur vitesse ainsi que le gradient de la surface libre doivent y être nuls (effet « miroir » de la paroi) :

$$\frac{\partial Z_s}{\partial n} = 0 \text{ et } U_n = 0 \quad (4-40)$$

Concernant la composante tangentielle du vecteur vitesse, elle peut être nulle ou non, c'est-à-dire que la paroi peut être glissante ou non.

4.2.1.1 Condition aux parois non glissantes

On impose que la composante tangentielle du vecteur vitesse U_t à la frontière est nulle :

$$U_t = 0 \quad (4-41)$$

4.2.1.2 Condition aux parois glissantes

Cette condition implique que la vitesse normale et le gradient normal à la paroi de la vitesse tangentielle soient nuls.

$$\frac{\partial U_t}{\partial n} = 0 \text{ et } \frac{\partial Z_s}{\partial n} = 0 \quad (4-42)$$

4.2.2 Frontières ouvertes

Les conditions aux frontières ouvertes sont les plus délicates à traiter car elles supposent l'existence d'un domaine fluide qui n'appartient pas au domaine de calcul mais qui peut l'influencer (Hervouet J.M., 2001). Dans la pratique, on compose de façon modulaire les différents types de conditions aux limites adaptés aux 4 types de frontières :

- Débit unitaire et surface libre imposés (écoulement torrentiel à l'entrée)
- Débit unitaire ou surface libre imposé (écoulement fluvial à l'entrée)
- Frontière libre de toute contrainte, aucune condition imposée (écoulement torrentiel à la sortie)
- Surface libre imposée (écoulement fluvial à la sortie)

4.2.2.1 Débit unitaire imposé

A l'entrée du domaine de calcul, en général, un débit unitaire ou une vitesse normale à la frontière est imposé. Une condition supplémentaire sur la hauteur de la surface libre est donc nécessaire afin que le problème 2D d'écoulement soit bien posé. L'information sur cette condition manquante peut être déterminée soit par une méthode de caractéristiques soit par une méthode de radiation que nous présenterons plus tard.

4.2.2.2 Dénivellation de la surface libre imposée

Dans un problème 2D d'écoulement à surface libre, on impose souvent, à la sortie du domaine de calcul, une condition sur les dénivellations de la surface libre. Cette information est suffisante pour l'écoulement sortant. Par contre, lorsque l'écoulement est entrant, une condition supplémentaire sur le débit ou la vitesse à la sortie peut être nécessaire pour que le problème soit bien posé. Encore une fois, on doit faire appel, soit à une méthode de caractéristiques, soit à celle de radiation afin de déterminer l'information manquante.

4.2.3 Méthode des caractéristiques

On fait le choix de l'axe ox afin que la direction x soit parallèle au vecteur normal de la frontière ouverte. On reprend l'équation de Saint-Venant unidimensionnelle :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (4-43)$$

où le sens positif de l'axe ox coïncide avec la direction de l'écoulement sortant.

Il est bien connu que les invariants de Riemann de (4-43) sont :

$$R^- = u - 2c, R^+ = u + 2c \quad (4-44)$$

où c la célérité, $c = \sqrt{gh}$.

De plus, nous avons :

$$\frac{d}{dt}(u - 2c) = 0 \quad \text{sur} \quad \frac{dx}{dt} = u - c \quad (4-45)$$

$$\frac{d}{dt}(u + 2c) = 0 \quad \text{sur} \quad \frac{dx}{dt} = u + c \quad (4-46)$$

Sur la Figure 4-1, le côté droit de la frontière est à l'extérieur du domaine de calcul. L'invariant R^- est remplacé par la condition imposée à la frontière (Voir Figure 4-1). Soient LP' et RP' les lignes caractéristiques.

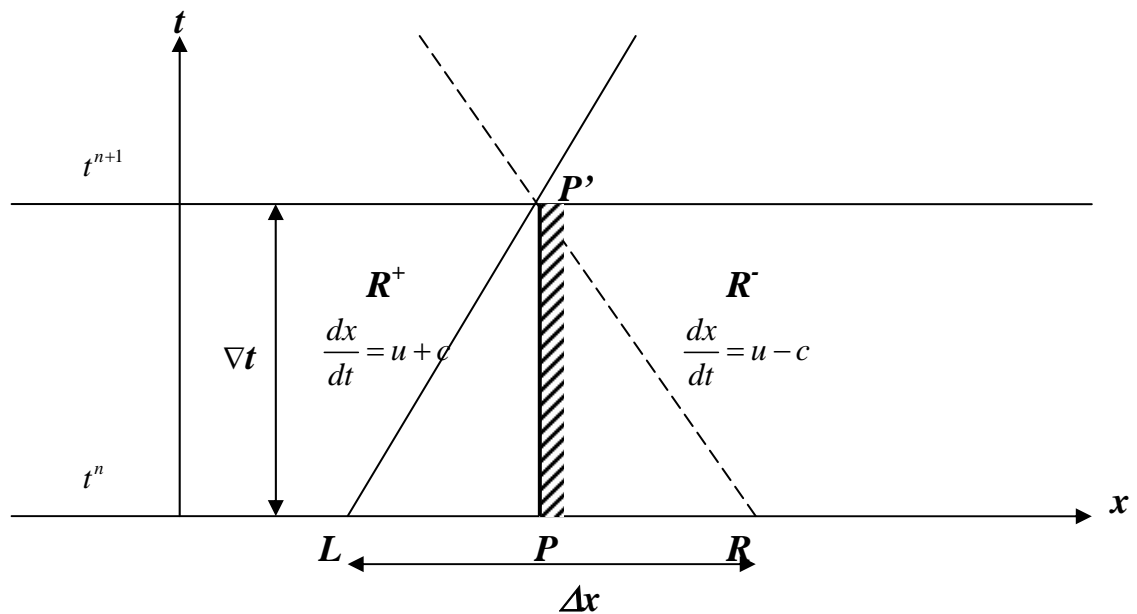


Figure 4-1 Schéma des lignes caractéristiques

Sachant que les invariants de Riemann sont constants le long des lignes caractéristiques, R^+ peut être écrit par :

$$u_L + 2c_L = u^* + 2c^* \quad (4-47)$$

où l'indice * désigne la solution au point P' . Les valeurs des variables aux points L et R sont déterminées pour chercher la solution au point P' à t^{n+1} .

(4-47) est maintenant combinée avec les conditions aux limites pour obtenir la solution u^* et c^* au point P' comme suit:

- **Débit imposé :**

La condition de débit est déterminée par

$$q^* = h^* u^* \quad (4-48)$$

Lorsque (4-48) est combiné avec la relation de $c^2 = gh$, l'équation (4-47) donne

$$2c^* - (u_L + 2c_L)c^{*2} + gq^* = 0 \quad (4-49)$$

c^* peut être maintenant calculé par (4-49) avec une procédure itérative.

- **Dénivellation imposée :**

On a $c^* = \sqrt{gh^*}$, où h^* est connu. Les composantes tangentielle et normale du vecteur vitesse sur la frontière sont évaluées par :

$$u_{Ln} = u_L n_x + v_L n_y, \quad u_{Lt} = -u_L n_y + v_L n_x \quad (4-50)$$

Lorsque u_{Ln} est connu, on peut obtenir u_n^* directement par (4-47).

La vitesse transversale est convective passivement, donc $u_t^* = u_{Lt}$. Le système cartésien est :

$$u^* = u_n^* n_x - u_t^* n_y, \quad v^* = u_n^* n_y + u_t^* n_x \quad (4-51)$$

4.2.4 Méthode de Radiation

La condition de radiation a été proposée par Orlandi (Orlandi I., 1976). Elle est très utilisée en modélisation océanique, apparemment avec un certain succès, par exemple dans (Blumberg A.F. and Kantha L.H., 1985), (Nguyen K.D., 1993), (Simon L., 1994) etc.

$$\frac{\partial Z_s}{\partial t} + c \frac{\partial Z_s}{\partial n} = -\frac{Z_s - Z_{sk}}{T_f} \quad (4-52)$$

où n est le vecteur unité normal à la frontière. Le terme du second membre implique que Z_s est forcé autour d'une valeur d'équilibre Z_{sk} avec une échelle de temps de l'ordre de T_f . Avec des faibles valeurs de T_f , Z_s ne peut pas s'écarter trop de Z_{sk} . Ceci correspond à une condition de hauteur *a priori* figée. Inversement, pour des valeurs de T_f suffisamment grandes, (4-52) tend vers une condition de pure radiation, i.e. la frontière est transparente à tout passage d'ondes.

4.3 Organigramme

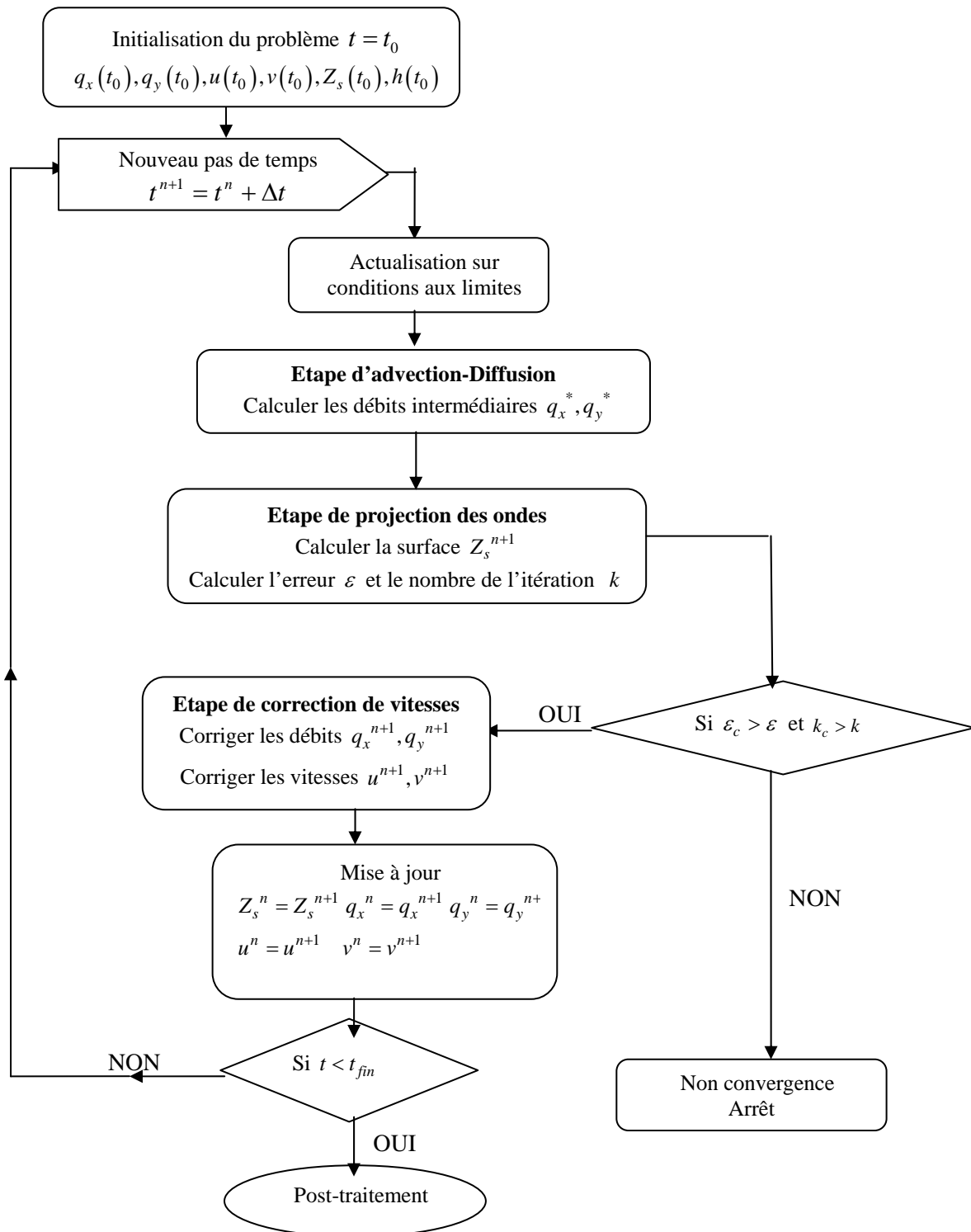


Figure 4-2 Organigramme du programme de calcul

Partie II Validation

Chapitre 5

Validations du modèle : Cas des écoulements à surface libre en eaux peu profondes

5.1 Ecoulement dans un canal horizontal avec une bosse au fond

5.1.1 Objectifs :

Afin de valider le modèle développé pour simuler les écoulements en eau peu profonde, nous présentons ici trois cas-tests d'écoulements stationnaires dans un canal horizontal en présence d'une bosse au fond. Ces cas tests sont proposés dans le projet européen CADAM (Concerted Action on Dam Break Modelling, (Goutal N. and Maurel F., 1997a).

Plusieurs auteurs ont également utilisé ces cas-tests pour valider leur modèle. On peut citer parmi eux : (Hanich L., 1996), (Le Fessant A.-L., 2001), (Vázquez-Cendón M.E., 1999), (Zhou J.G. et al., 2001), (Valiani A. et al., 2002), (Ying X.Y. et al., 2004).

La présence d'une bosse au fond peut provoquer des changements du régime de l'écoulement en aval de la bosse. Il sera donc intéressant de vérifier la capacité du modèle développé à simuler ces changements. Selon le rapport entre la hauteur de la bosse et la hauteur de la colonne d'eau sur la bosse, l'écoulement en aval peut être sous critique, transcritique et super critique avec probablement l'apparition d'un ressaut hydraulique.

La bosse est située à mi-distance entre $x = 8m$ et $x = 12m$. Sa hauteur maximum est de 0.2 m. Les dimensions du canal sont 25.0 m de long et 1.0 m de large. Le fond du canal est défini par (Figure 5-1):

$$Z_f = \begin{cases} 0 & x \leq 8m \text{ or } x \geq 12m \\ 0.2 - 0.05(x-10.)^2 & 8m < x < 12m \end{cases} \quad (5-1)$$

La bosse a donc une forme parabolique qui s'étend de $x = 8\text{m}$ à $x = 12\text{m}$ avec une hauteur de 0.2m .

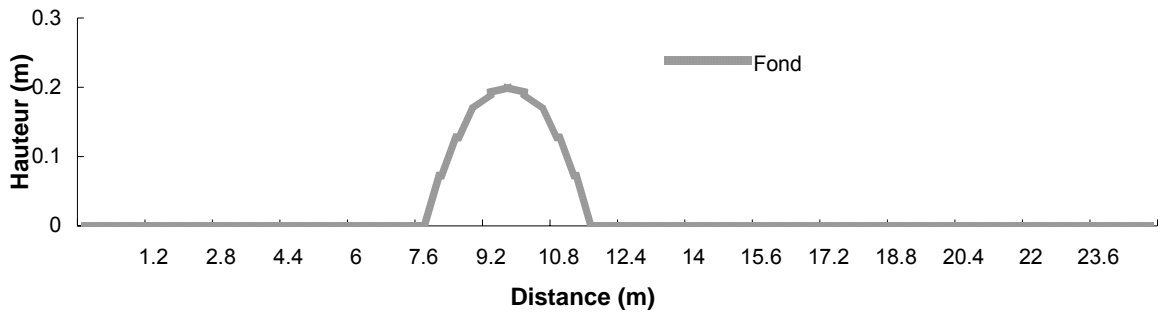


Figure 5-1 Topographie du canal

5.1.2 Ecoulement sous critique

Ce cas test concerne un écoulement en régime sous critique dans un canal horizontal rectiligne avec la présence d'une bosse de forme parabolique au fond. On suppose que le fond est parfaitement lisse (sans frottement).

5.1.2.1 Conditions initiales

Initialement l'eau est au repos avec une dénivellation de l'eau de 2.0m et un débit nul partout.

5.1.2.2 Conditions aux limites

Conditions aux limites amont (à l'entrée): débit unitaire imposé $4.42\text{m}^2/\text{s}$ à tout moment.

Conditions aux limites aval (en sortie): dénivellation imposée 2.0m

Conditions aux parois imperméables: $u = 0, v = 0$

5.1.2.3 Paramètres numériques

Le domaine de calcul est discrétisé par une grille de 10000 triangles dont la taille est régulière de 0.05m dans la direction x et de 0.1m dans la direction y . La durée de simulation est de 100s . Le pas de temps $\Delta t = 0.01\text{s}$.

5.1.2.4 Résultats et discussion

La solution analytique est obtenue à l'aide de l'équation de Bernoulli (Goutal N. and Maurel F., 1997b) :

$$\frac{q^2}{2g\eta^2} + (\eta + Z_f) = H_0 \quad (5-2)$$

où η est la surface libre. La valeur de H_0 est déterminée grâce aux valeurs connues à la sortie du canal ($q = 4.42 \text{ m}^2/\text{s}$, $Z_f = 0$ et $\eta = 2.0 \text{ m}$).

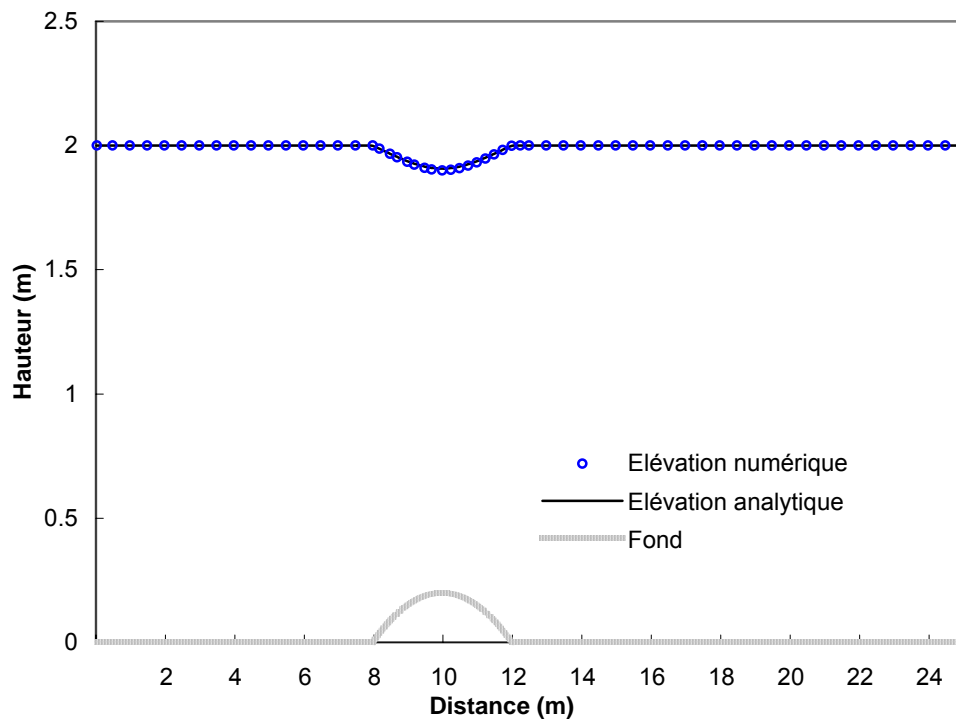


Figure 5-2 Profil longitudinal de la surface d'eau (cas de l'écoulement sous critique)

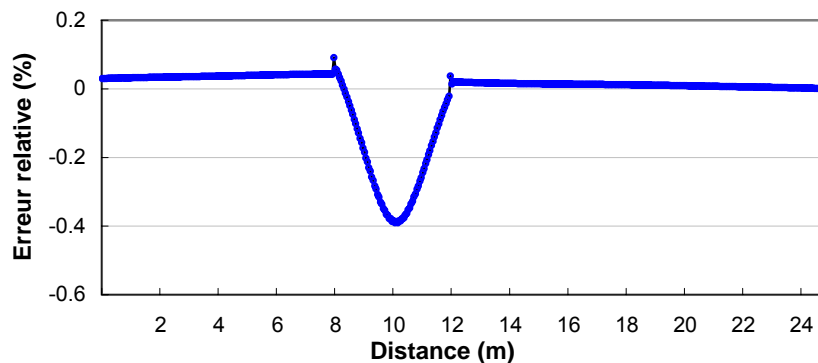


Figure 5-3 Erreur relative de la solution numérique

La Figure 5-2 compare les profils longitudinaux de la surface d'eau analytique et numérique avec la présence du profil du fond. Figure 5-3 montre que l'erreur relative entre la solution numérique et la solution analytique reste toujours inférieure à 0.4%. Les résultats sont donc très satisfaisants.

5.1.3 Ecoulement transcritique avec choc

Ce cas-test représente un écoulement en régime transcritique dans un canal horizontal rectiligne avec la présence d'une bosse de forme parabolique au fond. On suppose que le fond est parfaitement lisse (sans frottement).

5.1.3.1 Conditions initiales

Initialement l'eau est au repos avec une dénivellation de l'eau de $0.33m$ et un débit nul partout.

5.1.3.2 Conditions aux limites

Conditions aux limites amont (à l'entrée): débit unitaire imposé $0.18 m^2/s$ à tout moment.

Conditions aux limites aval (en sortie): dénivellation imposée $0.33m$

Conditions aux parois imperméables: $u = 0, v = 0$

5.1.3.3 Paramètres numériques

Le domaine de calcul est discrétisé par une grille de 10000 triangles dont la taille est régulière

de 0.05 m dans la direction x et de 0.1 m dans la direction y . La durée de simulation est de 100 s. Plusieurs pas de temps, $\Delta t = 0.001$ s, 0.005 s et 0.01 s, sont utilisés dans le calcul

5.1.3.4 Résultats et discussion

La solution analytique est également obtenue à l'aide de l'équation de Bernoulli (Goutal N. and Maurel F., 1997b) (5-2) avec la valeur de H_o déterminée grâce aux valeurs connues à la sortie du canal ($q = 0.18 \text{ m}^2/\text{s}$, $Z_f = 0$ et $\eta = 0.33 \text{ m}$).

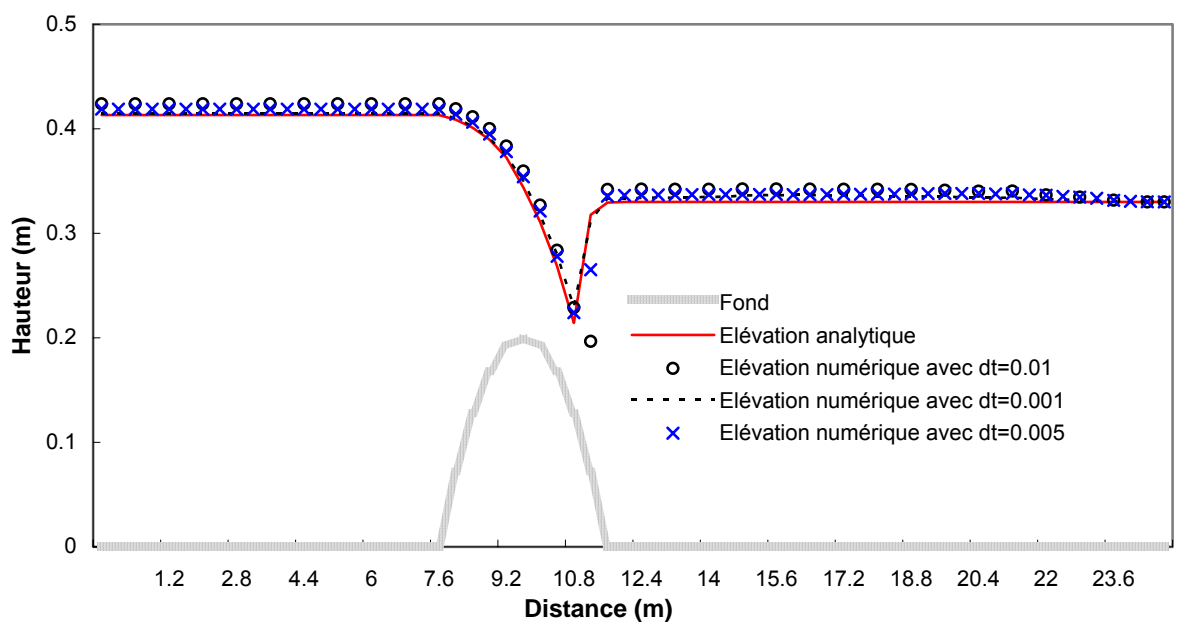


Figure 5-4 Profil longitudinal de la surface libre calculé avec les différentes valeurs de Δt

Ce modèle est un code pour calculer des écoulements instationnaires. L'application du code aux écoulements stationnaires nous permet de valider le comportement du code. Lorsque la solution numérique se stabilise, on voit que plus le pas de temps est petit, mieux approchent les résultats numériques de la solution analytique.

La Figure 5-4 compare les profils longitudinaux de la surface libre analytique et numériques, calculés avec les différents valeurs de $\Delta t = 0.001$ s, 0.005 s et 0.01 s. On peut constater que plus la valeur de Δt est petite, meilleur sera l'accord entre les solutions numérique et analytique. L'écart entre ces deux solutions se réduit nettement lorsque Δt diminue de 0.01 à 0.005 s. L'utilisation de $\Delta t = 0.005$ s donne une parfaite coïncidence entre

la solution numérique et l'analytique. Cependant, il semblerait qu'il y a un seuil au-delà duquel la diminution de Δt n'affecte plus le résultat numérique: l'utilisation de $\Delta t = 0.005$ s et de $\Delta t = 0.001$ s donne des résultats que l'on ne peut plus distinguer à l'œil nu.

5.1.4 Conclusion

Une bonne concordance entre les résultats analytiques et numériques est obtenue. Les précédents cas-tests prouvent que notre modèle qui est basé sur l'utilisation des volumes finis non structurés et la méthode de projection, traite correctement les problèmes de changements du régime d'écoulement unidimensionnel: écoulement sous critique et écoulement transcritique engendré par la présence d'une bosse au fond.

5.2 Propagation de marée dans un bassin polaire

5.2.1 Objectifs

En milieux estuariens et côtiers, la marée est le moteur principal qui crée des mouvements horizontaux, responsables du transport sédimentaire et des polluants. La simulation des écoulements dus à la marée constitue un objectif préalable à toutes les études concernant la gestion et la protection de l'environnement marin.

Dans plupart des écoulements estuariens et côtiers, la géométrie et la bathymétrie ont une grande influence sur la circulation de la masse d'eau. Leur irrégularité et leur variation rapide peuvent provoquer des instabilités indésirables dans les résultats numériques. L'objectif dans ce cas est donc de simuler une propagation des ondes de marée sur un fond en grande pente dans un bassin de géométrie polaire, pour une très longue période.

5.2.2 Description du problème et solution analytique

Nous considérons un bassin en forme de quart de cercle, fermé sur trois côtés. La Figure 5-5 donne la géométrie du problème étudié. Le rayon interne du bassin polaire est $r_1 = 100\text{km}$, et le rayon externe du bassin est $r_2 = 200\text{km}$. La Figure 5-6 présente la bathymétrie du bassin qui est donnée en fonction du rayon r ,

$$h(r) = h_0 r^{-2} \tag{5-3}$$

avec $h_0 = 8 \times 10^{11}$. Les effets atmosphériques et de frottement sont ignorés. Lynch (Lynch D.R. and Gray W.G., 1978), Chen (Chen C.L., 1989), Guillou (Guillou S., 1996) et Chae (Chae H.S., 1996) ont étudié ce même problème.

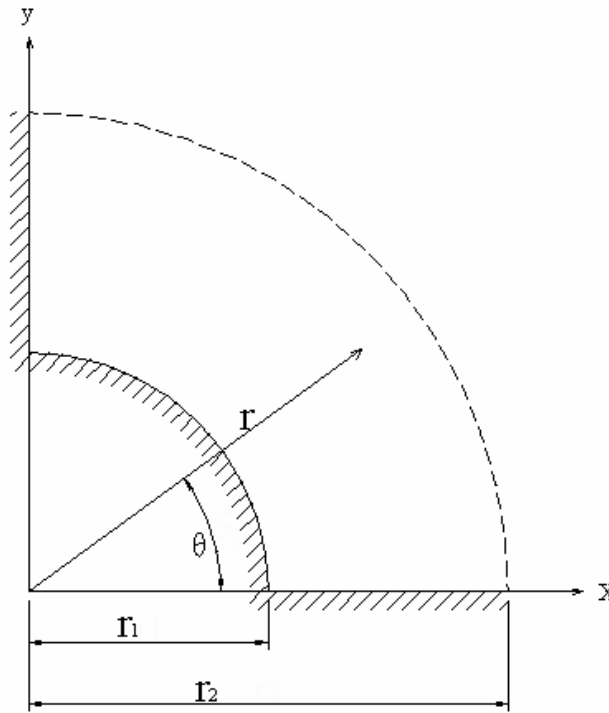


Figure 5-5 Géométrie du bassin polaire

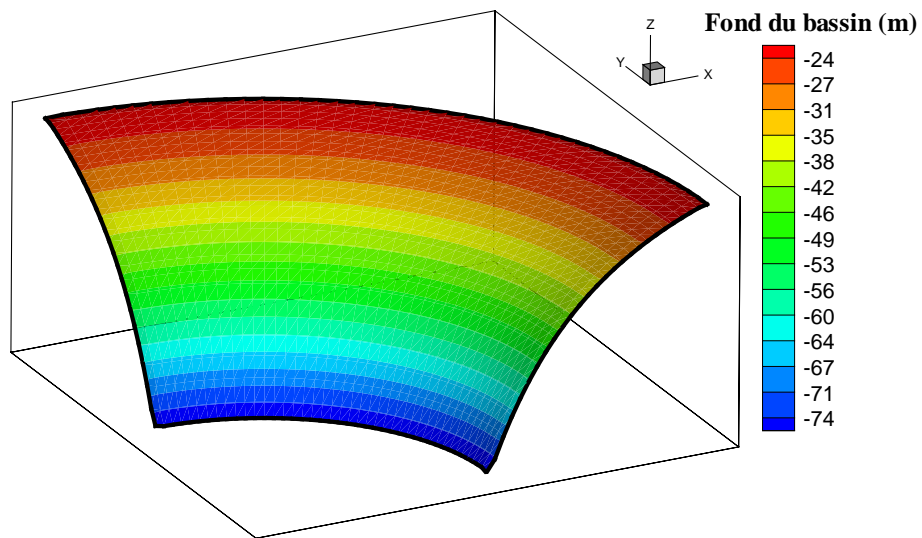


Figure 5-6 Bathymétrie du bassin polaire

5.2.2.1 Conditions aux limites

Aucun flux ne peut traverser la paroi solide au fond $r = r_1$. Une condition de non glissement $\frac{\partial \eta}{\partial r} = 0$ y est imposée. Cette condition est également donnée sur les parois latérales $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$.

A la frontière ouverte $r = r_2$ une marée sinusoïdale est imposée :

$$\eta(r_2, \theta, t) = \text{Re}(\eta_0 e^{i\omega t}) \quad (5-4)$$

où $\eta_0 = 0.1m$. La période d'un cycle de marée est $T = 12.4h$.

5.2.2.2 Conditions initiales

Initialement à $t=0$, la dénivellation de la surface libre et la vitesse sont données par

$$\eta(r) = \text{Re} \left\{ \eta_0 \frac{\cos \left[\frac{1}{2} \beta (r^2 - r_1^2) \right]}{\cos \left[\frac{1}{2} \beta (r_2^2 - r_1^2) \right]} \right\} \quad (5-5)$$

$$U_r(r, 0) = \text{Re} \left\{ -\eta_0 \frac{i\omega r \sin \left[\frac{1}{2} \beta (r^2 - r_1^2) \right]}{h_0 \beta \cos \left[\frac{1}{2} \beta (r_2^2 - r_1^2) \right]} \right\} \quad (5-6)$$

$$\text{où } \beta^2 = \frac{\omega^2 - i\omega\tau}{gh_0} \quad \text{with } \tau = 4.0 \times 10^{-7}$$

5.2.2.3 Solution analytique

Chen (Chen C.L., 1989) a donné la solution analytique de ce problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta(r,t) = \operatorname{Re} \left\{ \eta_0 \frac{\cos\left[\frac{1}{2}\beta(r^2 - r_1^2)\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}\beta(r_2^2 - r_1^2)\right]} e^{i\omega t} \right\} \\ U_r(r,t) = \operatorname{Re} \left\{ -\eta_0 \frac{i\omega r \sin\left[\frac{1}{2}\beta(r^2 - r_1^2)\right]}{h_0 \beta \cos\left[\frac{1}{2}\beta(r_2^2 - r_1^2)\right]} e^{i\omega t} \right\} \\ \beta^2 = \frac{\omega^2 - i\omega\tau}{gh_0} \quad \text{with} \quad \tau = 4.0 \times 10^{-7} \end{array} \right. \quad (5-7)$$

La solution de Chen n'a pris en compte que le terme de gradient de la surface d'eau. Les termes d'advection, la force de Coriolis et les effets de frottement sont ignorés. Dans ces conditions, la solution analytique ne dépend que du rayon r et du temps t .

5.2.3 Paramètres numériques

Le maillage de calcul se compose de 2132 triangles (Figure 5-7). Nous avons pris les mêmes paramètres que (Guillou et Nguyen, 1999). Le pas de temps est de 200s, correspondant à un nombre de Courant 1.44. La durée de simulation est de 200 périodes de marée.

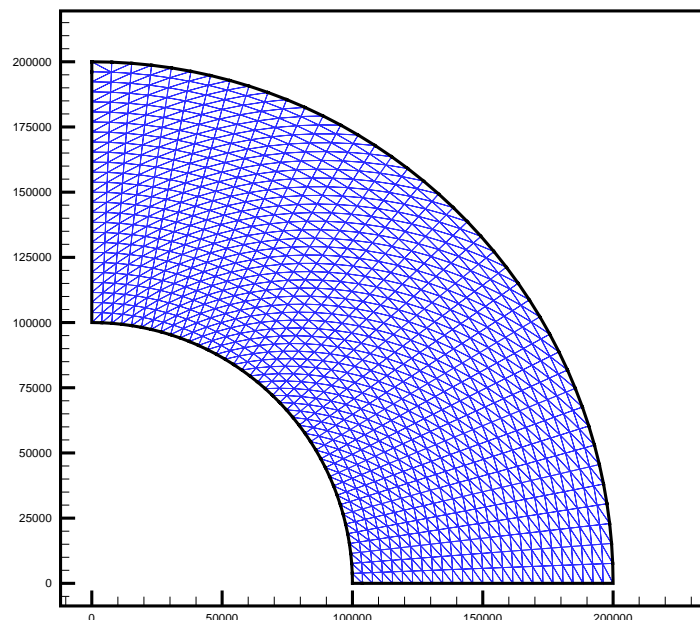


Figure 5-7 Maillage du bassin polaire

5.2.4 Résultats et discussions

Les Figure 5-8 et Figure 5-9 présentent, en image de 3D et de 2D respectivement, la surface libre calculée par le modèle à l'instant $t = T/2$ et $t = T$ après 199 cycles de marée.

La Figure 5-10 présente la surface libre calculée à $t=T/4$, $T/2$, $3T/4$ et T . Les figures ont été faites de manière que la surface libre soit superposée sur le fond. On peut donc remarquer que le fond du bassin est à la fois en très grande pente et en grande profondeur. Cela rend le calcul difficile à effectuer. L'amplitude de la marée est faible devant la profondeur du bassin.

Les Figure 5-11 et Figure 5-12 présentent les champs de vecteurs vitesse et de normes de vitesses calculées par le modèle. A l'instant $t = T/4$, l'écoulement est en jusant et $t=3T/4$ il est en flot. Nous observons que la solution numérique est effectivement indépendante de l'angle polaire θ . La dénivellation et les vitesses varient selon les coordonnées radiales r .

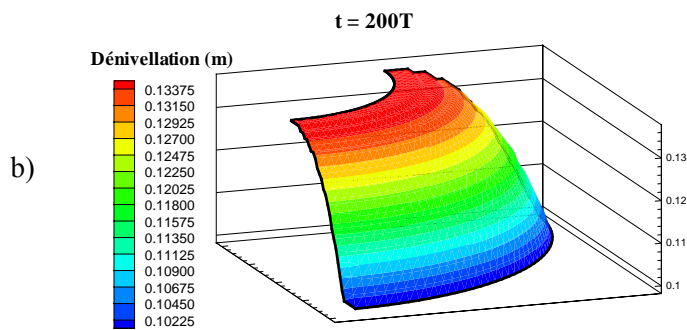
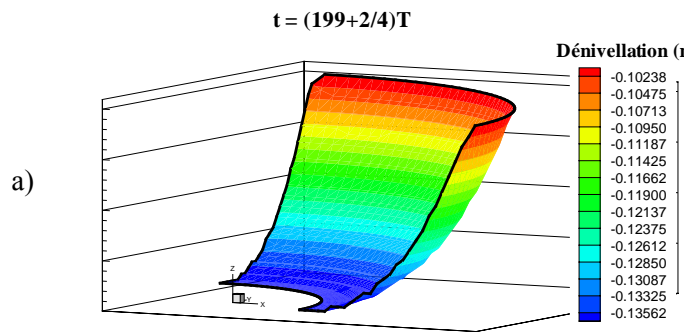


Figure 5-8 Surface libre en 3D après 199 cycles de marée : a) $t = T/2$; b) $t = T$

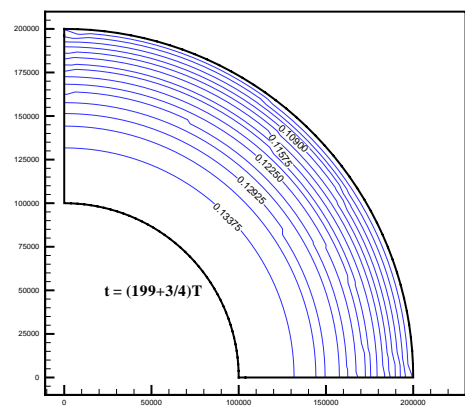
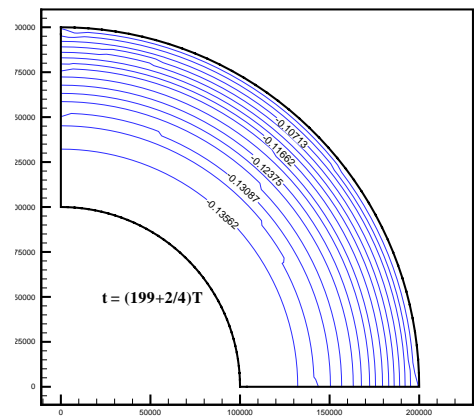


Figure 5-9 Contours de dénivellation après 199 cycles de marée : a) $t = T/2$; b) $t = T$

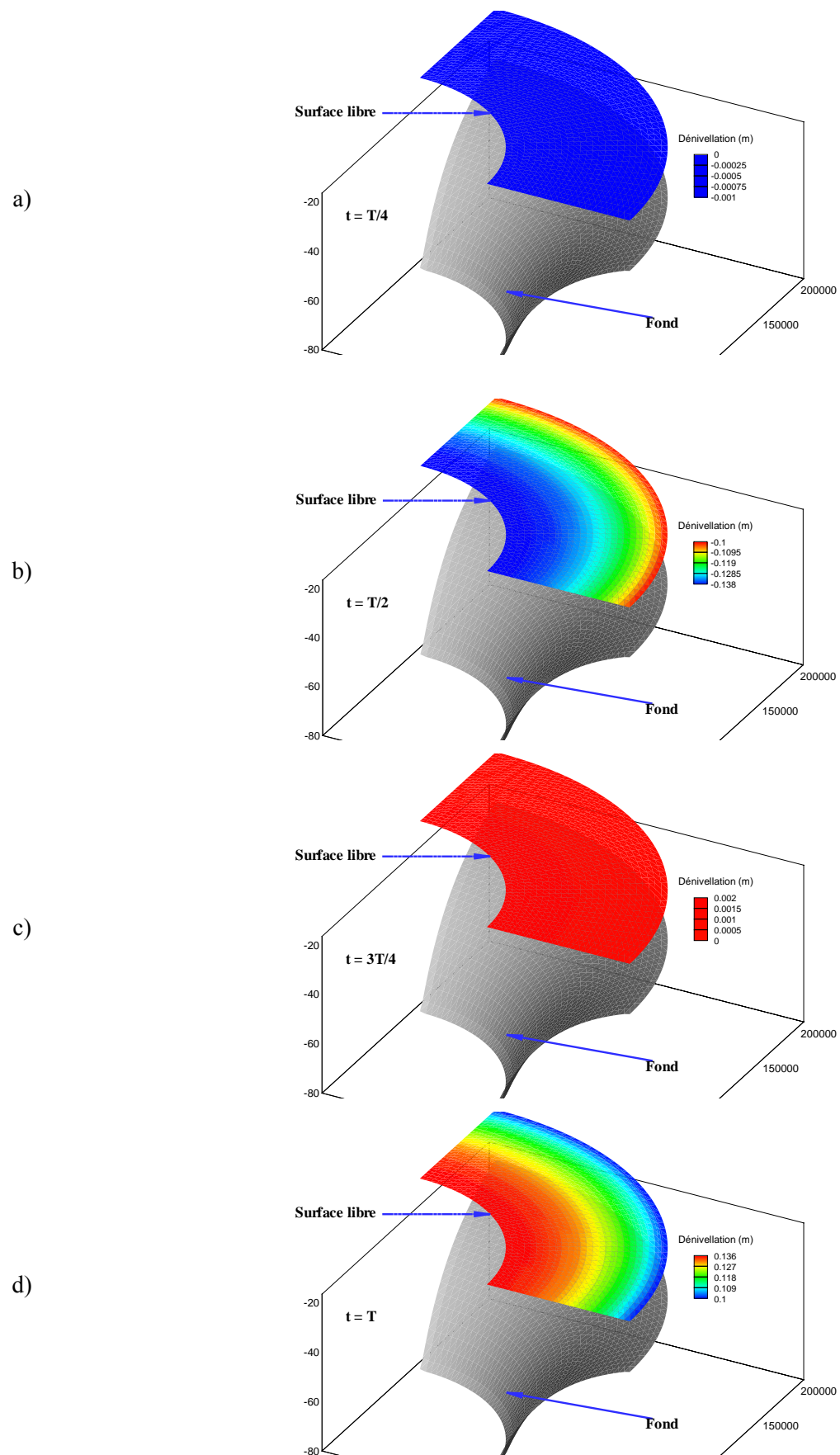


Figure 5-10 Surface libre sur fond après 199 cycles de marée :
 a) $t = T/4$; b) $t = T/2$; c) $t = 3T/4$; d) $t = T$

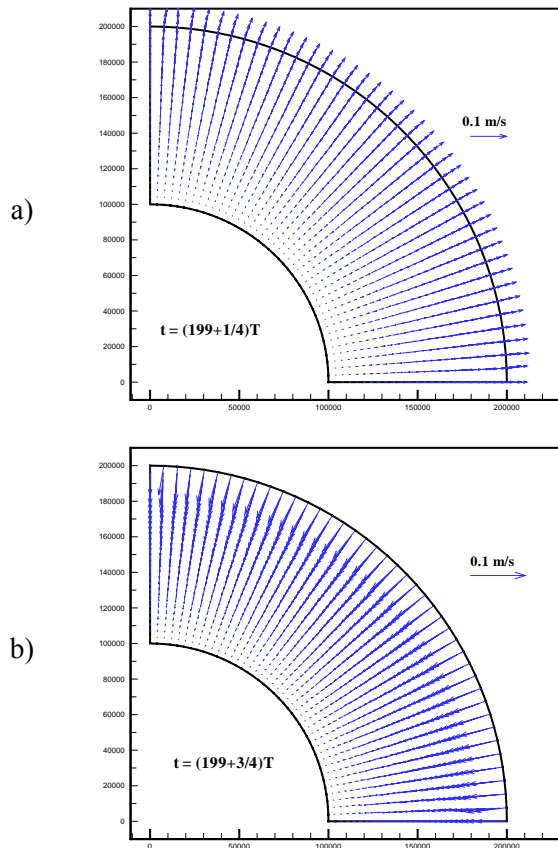


Figure 5-11 Champs de vitesse après 199 cycles de marée :
a) $t = T/4$; b) $t = 3T/4$

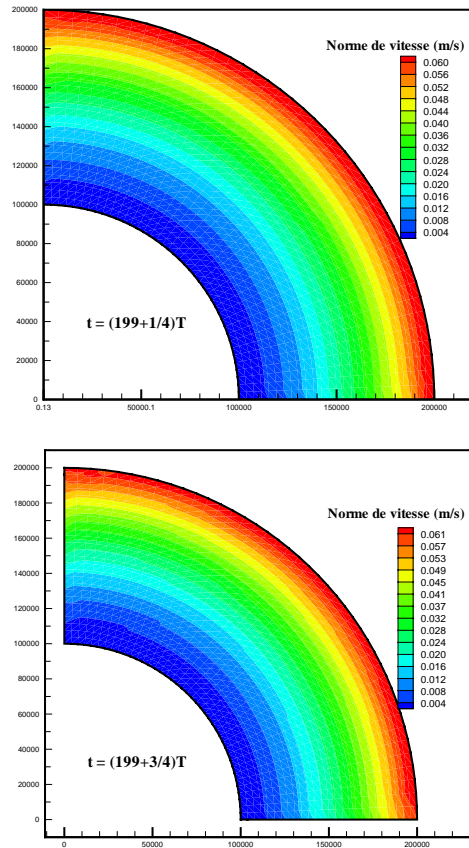


Figure 5-12 Contours de norme de vitesse après 199 cycles de marée :
a) $t = T/4$; b) $t = 3T/4$

Une comparaison quantitative entre les solutions analytiques et numériques au point de référence ($x = 98.41km, y = 106km$) est effectuée. Les Figure 5-13 et Figure 5-15 confrontent les courbes de la dénivellation de surface libre et de la vitesse analytiques et numériques, respectivement en fonction du temp. On constate que ces courbes convergent toujours, même après une période assez longue (200 cycles de marée).

Afin de vérifier la précision des résultats numériques au point de référence, les erreurs relatives sur la dénivellation η et sur la vitesse radiale U_r sont calculées par

$$Errr(\eta) = \frac{(\eta - \eta_{ex})}{\max(\eta_{ex}(t))} \times 100\% \text{ et } Errr(U) = \frac{(U - U_{ex})}{\max(U_{ex}(t))} \times 100\% , \text{ respectivement.}$$

Figure 5-14 et Figure 5-16 tracent ces erreurs relatives au cours de la simulation. On constate que, avec un pas de temps $dt = 200s$, la valeur maximale des erreurs relatives est de 0.87% pour la dénivellation et 4.8 % pour la vitesse. Guillou (Guillou S. and Nguyen K.D., 1999) utilisent une technique volumes finis sur curviligne avec un maillage distordu pour simuler ce même cas-test. Le pas de temps est pris identique à celui choisi par nous-même, soit $dt = 200s$. Ils obtiennent des erreurs relatives maximales de 2.6% sur la dénivellation, de 4.4% sur la vitesse radiale.

5.2.5 Conclusion

Un écoulement instationnaire sur un fond en grande pente dans un bassin de géométrie complexe a été simulé par notre modèle. La comparaison entre la solution numérique et analytique donne des résultats satisfaisants même pour une très longue simulation de 200 cycles de marée. La fiabilité et la robustesse du modèle à simuler les écoulements de marée sur un fond en grande pente et à grande profondeur, ont donc été prouvées. Cependant, les perturbations numériques engendrées par l'utilisation de la méthode de projection dans un maillage non décalé comme le notre, peuvent passer inaperçues dans un écoulement instationnaire mais re-apparaître dans un écoulement stationnaire de géométrie complexe (Guillou, 1996). C'est pour cette raison que dans la section suivante nous nous proposons d'étudier un écoulement permanent forcé par un jet dans un bassin circulaire afin de tester la technique de projection utilisée dans notre modèle.

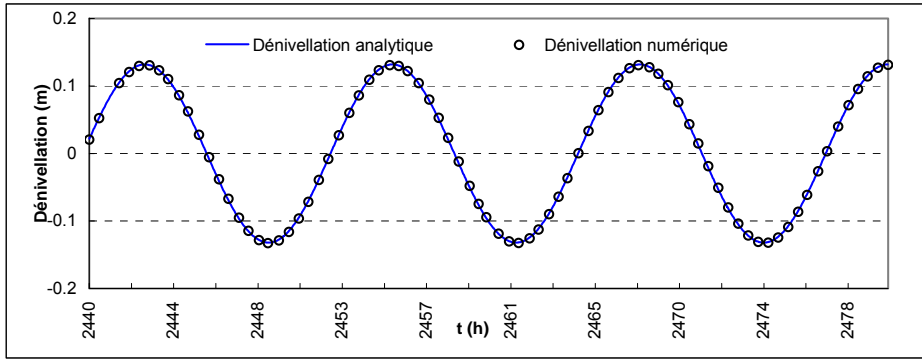


Figure 5-13 Profil longitudinal de la dénivellation au point de référence

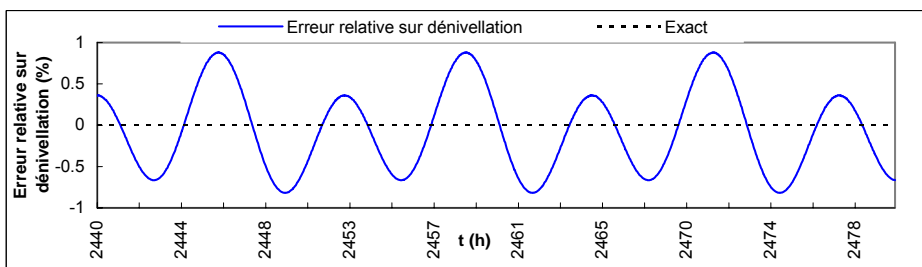


Figure 5-14 Erreur relative sur la dénivellation au point de référence

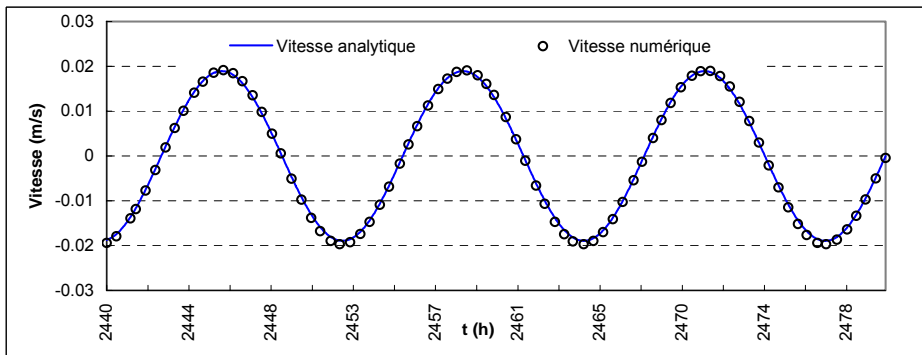


Figure 5-15 Profil longitudinal de la vitesse radiale au point de référence

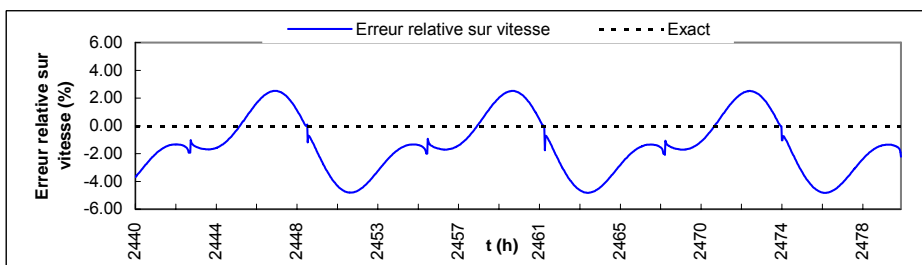


Figure 5-16 Erreur relative sur la vitesse radiale au point de référence

5.3 Écoulement forcé par un jet dans un bassin circulaire

5.3.1 Objectifs

Il s'agit d'un jet stationnaire induit dans un bassin circulaire. Le jet force un écoulement à surface libre étroit mais intense le long de l'axe du bassin et en même temps sépare le milieu fluide en deux zones symétriques de re-circulation. L'effet d'advection y est donc dominant. Le cas-test nous permettra de vérifier l'ensemble de la technique de projection ainsi que le traitement des termes d'advection par un schéma « Upwind » du 2nd ordre développé dans le modèle pour le calcul d'un écoulement à surface libre en eau peu profonde, fortement convectif dans une géométrie complexe.

5.3.2 Description du problème

La Figure 5-17 représente la forme géométrique du bassin circulaire. Le bassin a un rayon de $R = 0.75 \text{ m}$ à fond plat sans frottement. Les canaux d'entrée et de sortie se situent de part et d'autre du bassin. Chacun de ces deux canaux est de longueur $L = 0.3 \text{ m}$ et de largeur $b = 0.157 \text{ m}$. La géométrie considérée est identique à celle utilisée par Dennis (Dennis S.C.R., 1974) afin de calculer un écoulement de Navier-Stokes pour les nombres de Reynolds de 2.5 et de 10. Borthwick & Barber (Borthwick A.G.L. and Barber R.W., 1990) ont repris le problème de Denis pour un nombre de Reynolds de 10. Ils ont utilisé une méthode aux différences finies pour discrétiser les équations de Navier-Stokes en formulation « vorticité-fonction de courant » et obtenu presque les mêmes résultats que ceux de Denis. Plus tard, Borthwick & Karr (Borthwick A.G.L. and Karr E.T., 1993), Guillou (Guillou S., 1996) et Chae (Chae H.S., 1996) ont calculé les écoulements en eau peu profonde décrits par les équations de Saint-Venant dans la même géométrie que celle utilisée par Dennis (Dennis S.C.R., 1974).

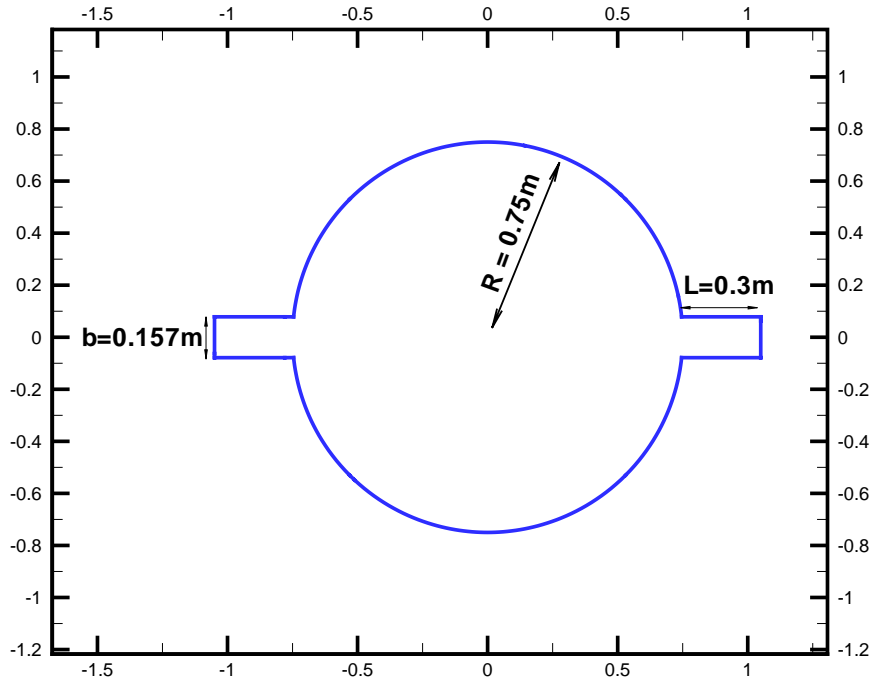


Figure 5-17 Géométrie du bassin

5.3.2.1 Conditions initiales

Initialement la profondeur est uniforme $h_0 = 0.1 \text{ m}$. et la vitesse longitudinale est $U_0 = 0.1 \text{ m/s}$.

5.3.2.2 Conditions aux limites

Conditions aux limites à l'entrée : On impose le profil parabolique de vitesses suivant :

$$U = \frac{3}{2}U_0 \left(1 - 4\frac{y^2}{b^2}\right) \quad (5-8)$$

où $U_0 = 0.1 \text{ m/s}$ est la vitesse moyenne d'entrée et y est la distance entre le point calculé et l'axe du bassin.

Conditions aux limites à la sortie : Hauteur d'eau $h = 0.1 \text{ m}$ reste constante pendant la durée de simulation.

Conditions aux parois imperméables: Condition de non glissement est imposée. Les vitesses sont $u = 0, v = 0$.

5.3.3 Paramètres numériques

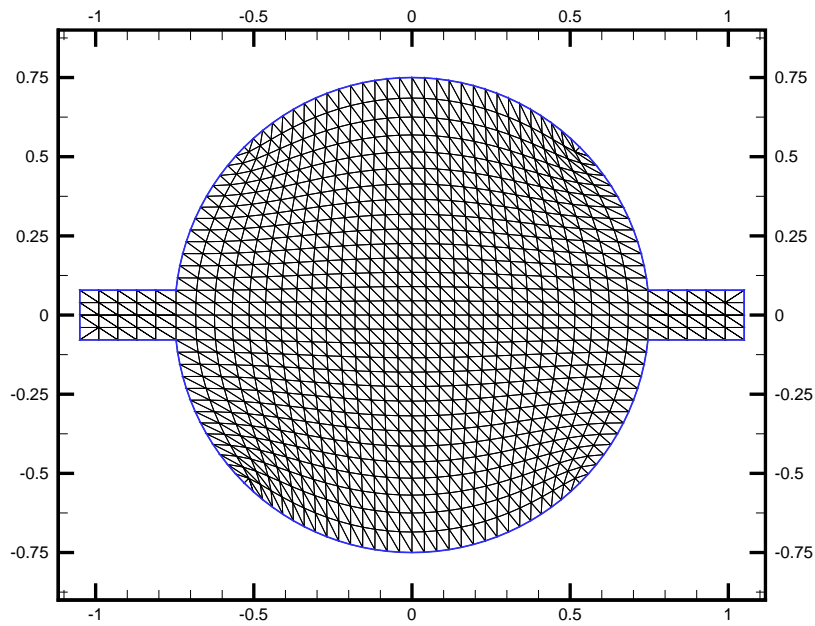


Figure 5-18 Maillage de 31x31

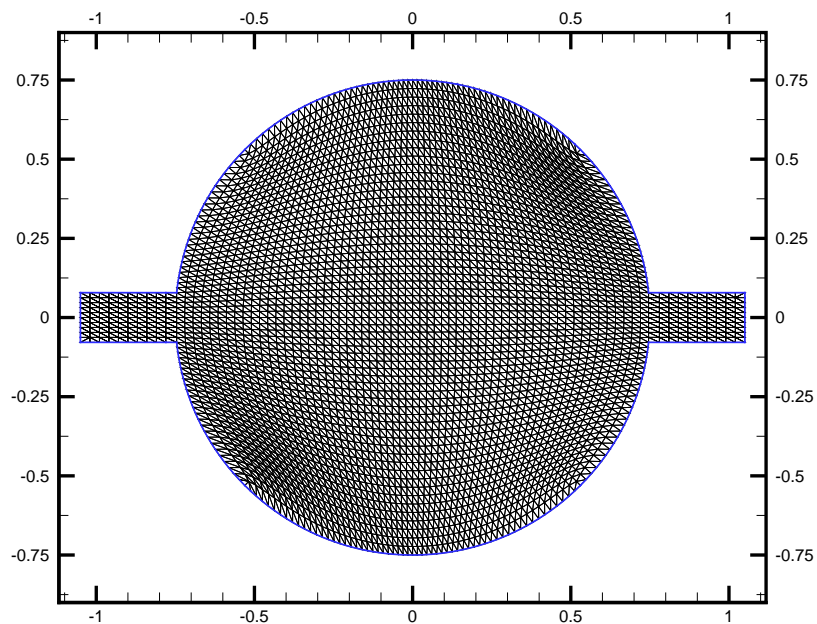


Figure 5-19 Maillage de 61x61

Nous définissons le nombre de Reynolds par(Guillou S., 1996),

$$\text{Re} = \frac{U_0 b}{2\nu} \quad (5-9)$$

où $U_0 = 0.1 \text{ m/s}$ est la valeur moyenne de la vitesse à l'entrée, b est la largeur de l'entrée, et ν le coefficient de viscosité cinématique.

Deux maillages de résolution différente (grossière et fine) sont utilisés. Les positions des nœuds sont identiques à ceux de Guillou (Guillou, 1996). La Figure 5-18 présente le maillage de taille grossière composé de 1800 éléments triangulaires, qui est équivalent au maillage de 31×31 points utilisé par B&K (Borthwick A.G.L. and Karr E.T., 1993). La Figure 5-19 donne le maillage de taille fine composé de 7600 éléments triangulaires, qui est équivalent au maillage de 61×61 points de B&K.

Dans ce cas-test, on cherche la solution numérique pour deux nombres de Reynolds $\text{Re} = 10$ et $\text{Re} = 200$. Les pas de temps sont de 0.035 s et 0.01 s pour le maillage (31×31) et (61×61), respectivement. L'état stationnaire de l'écoulement est atteint après 80 s.

5.3.4 Résultats et discussion

Dennis (Dennis S.C.R., 1974) résout les équation de Navier-Stokes en formulation « vorticité-fonction de courant » (ω, Ψ) dans un système des coordonnées polaires. Il a ainsi obtenu une solution analytique pour $\text{Re} = 10$. Borthwick & Barber (Borthwick A.G.L. and Barber R.W., 1992) ont vérifié leur modèle en formulation (ω, Ψ) sur ce cas test ($\text{Re}=10$) et obtenu des résultats identiques. Borthwick & Karr (Borthwick A.G.L. and Karr E.T., 1993) vérifient leur modèle des équations de St-Venant en formulation (ω, Ψ) au Reynolds $\text{Re} = 10$ pour cette géométrie, qui nécessite un maillage non-orthogonal.

Nous reproduisons d'abord l'écoulement forcé par le jet dans le bassin circulaire pour un nombre de Reynolds de 10.

Les Figure 5-20 et Figure 5-25 présentent les champs de vitesse en utilisant les maillages de 31×31 et de 61×61 , respectivement. Les figures montrent que dès la sortie du canal d'entrée, le jet se disperse progressivement dans le bassin circulaire avant de se recentrer dans le canal de sortie. L'écoulement est caractérisé par deux zones symétriques de recirculation qui se situent de chaque côté du jet. Les champs de vitesse à l'instant de 30 s, 60 s et 80 s, sont présentés dans les figures a), b) et c), respectivement. On remarque que, pour les

deux maillages, l'état stationnaire commence à s'établir dès $t = 60$ s.

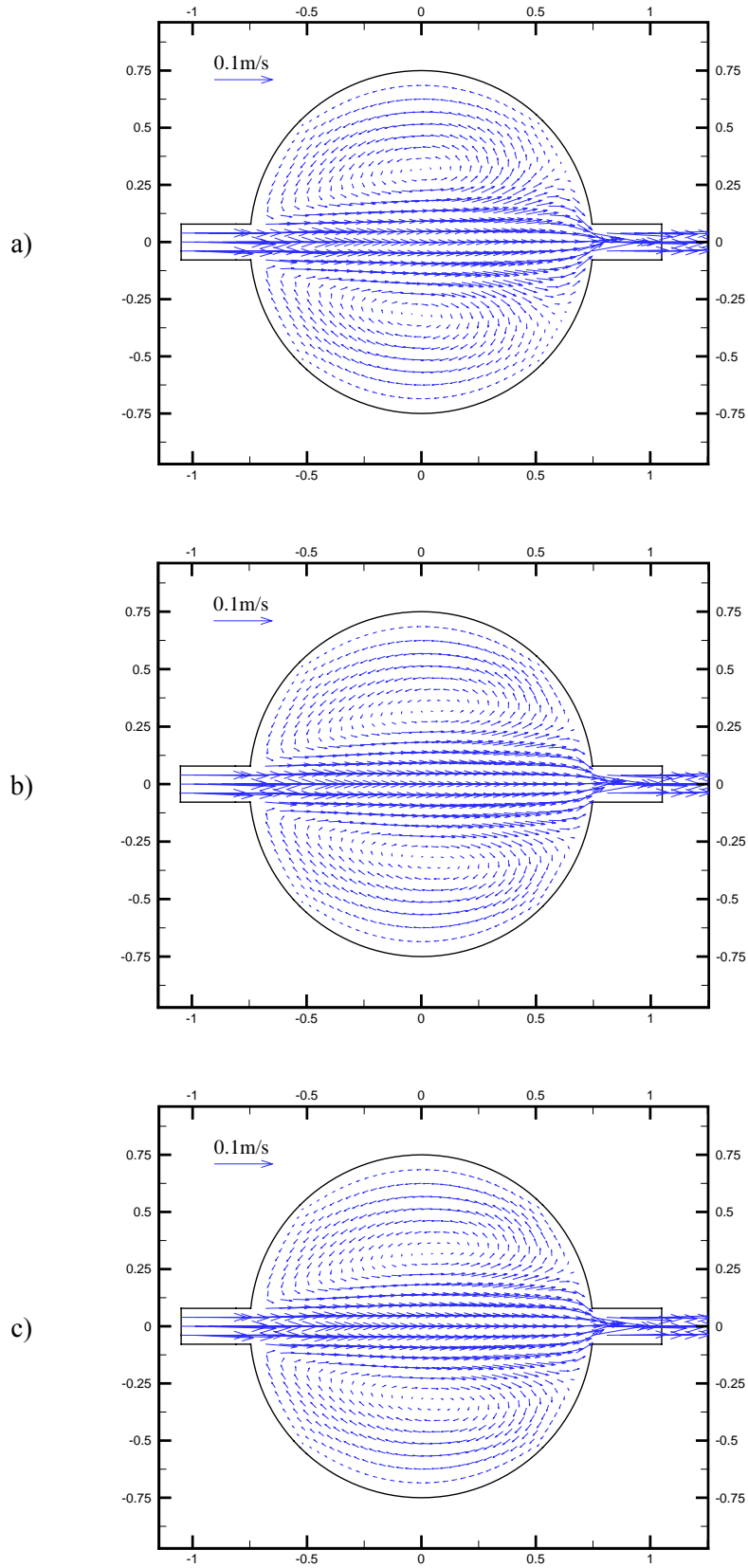
Les contours des normes de vitesses à l'état stationnaire, $t = 80$ s, sont représentés dans la Figure 5-21 et la Figure 5-26 pour les maillages de 31×31 et 61×61 , respectivement. Une symétrie de l'écoulement satisfaisante apparaît dans tout le domaine fluide. On peut voir de forts gradients de vitesse au voisinage du jet. Les normes de vitesses calculées pour le maillage 31×31 sont légèrement plus importantes que celles pour le maillage 61×61 . Ceci est particulièrement évident dans la zone à proximité du canal de sortie : la norme de vitesse y est de 0.052 pour le maillage 31×31 au lieu de 0.040 pour le maillage de 61×61 .

Les Figure 5-22 et Figure 5-27 présentent les lignes de courants obtenues avec les maillages de 31×31 et 61×61 , respectivement. A l'œil nu, ces lignes de courants sont complètement identiques pour les deux maillages. Nous constatons, encore une fois, deux zones symétriques de re-circulation de chaque côté du jet. Comparés aux résultats de B&K (Borthwick A.G.L. and Karr E.T., 1993), les lignes de courants sont de la même forme sauf que les centres des tourbillons calculés par notre modèle avancent un peu plus vers l'aval que ceux calculés par B&K. Cela signifie que les tourbillons sont portés plus loin vers l'aval, et donc l'effet d'advection simulé par notre modèle semblerait plus marqué que celui calculé par B&K.

Les Figure 5-23 et Figure 5-28 représentent les contours de la dénivellation de surface libre à $t=80$ s avec deux maillages différents. Ces contours sont presque identiques pour les deux maillages. Les contours de dénivellations obtenues par notre modèle sont très proches de ceux donnés par Guillou (Guillou S., 1996) qui a développé une méthode basée sur le schéma CPI (Deng G.B. et al., 1994) afin d'éliminer les pollutions numériques dues à l'utilisation d'un maillage non décalé.

Une comparaison quantitative plus approfondie entre nos résultats et ceux de B&K a été réalisée. Les Figure 5-24 et Figure 5-29 présentent le profil transversal de la composante longitudinale de la vitesse adimensionnelle $u_{adm} = U/U_o$ au milieu du bassin, pour les deux maillages de 31×31 et de 61×61 . La Figure 5-24 montre que, pour le maillage 31×31 , la vitesse à l'axe du jet, en $y/R = 0.7m$ et $y/R = -0.7m$, obtenue par notre modèle est bien supérieure à celle obtenue par B&K. Pour le maillage 61×61 , nos résultats du profil transversal de vitesse approchent mieux les valeurs calculées par B&K (Figure 5-29). La Figure 5-30 confronte les résultats obtenus par les deux modèles pour les deux maillages de 31×31 et de 61×61 . Comme cela a été noté dans le paragraphe précédent, on constate que nos

valeurs de vitesse pour le maillage de 31x31 sont bien supérieures à celles du maillage de 61x61. Les résultats donnés par (Borthwick A.G.L. and Karr E.T., 1993) et par (Chae H.S., 1996) montrent également cette tendance. Cela s'explique par le fait que la dispersion de sous maille, qui prend en compte les fluctuations de vitesses autour de la valeur moyenne du volume de contrôle, a été sous estimée pour le maillage moyen 31x31 lorsque l'on maintient la même valeur de coefficient de diffusion utilisé dans le modèle pour les deux maillages. En fait, un maillage de taille plus grande nécessite une valeur du coefficient de diffusion plus importante afin d'obtenir des résultats corrects [voir la formule (2-80)].

Figure 5-20 Champs de vitesse avec un maillage 31×31 pour $Re = 10$ a) $t = 30 \text{ s}$, b) $t = 60 \text{ s}$, c) $t = 80 \text{ s}$

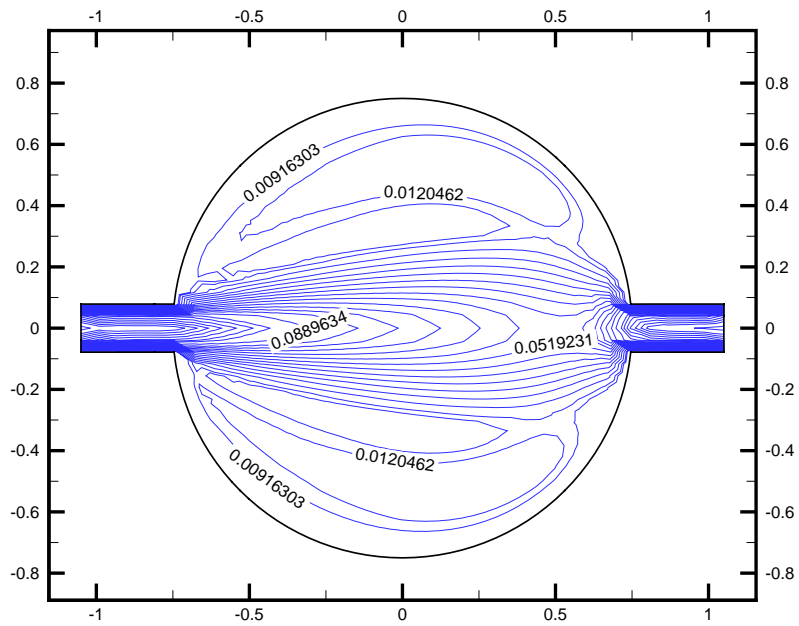


Figure 5-21 Iso valeurs de vitesse à $t = 80$ s avec un maillage 31×31 pour $Re = 10$

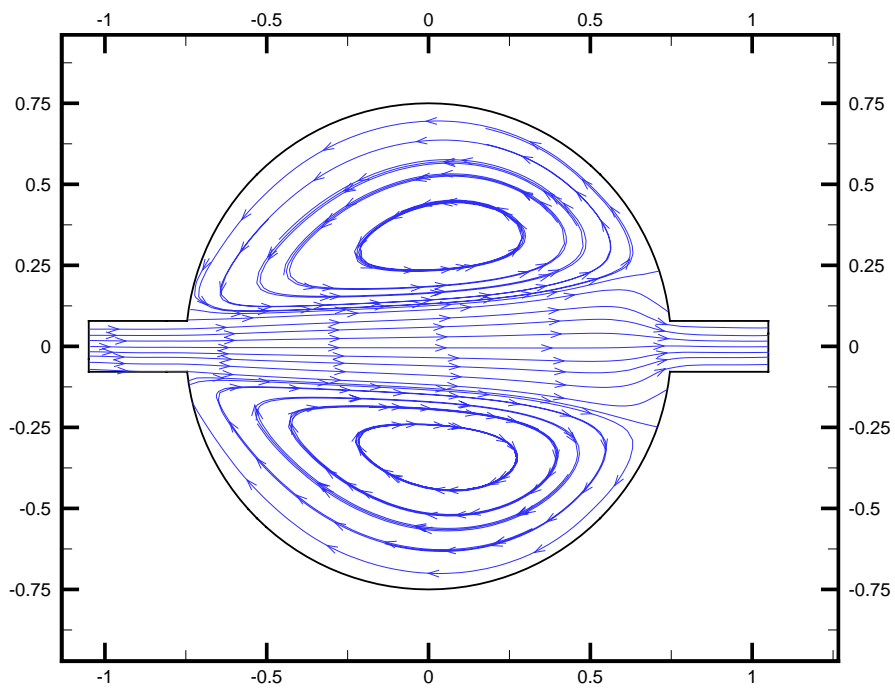


Figure 5-22 Lignes de courant à $t = 80$ s avec un maillage 31×31 pour $Re = 10$

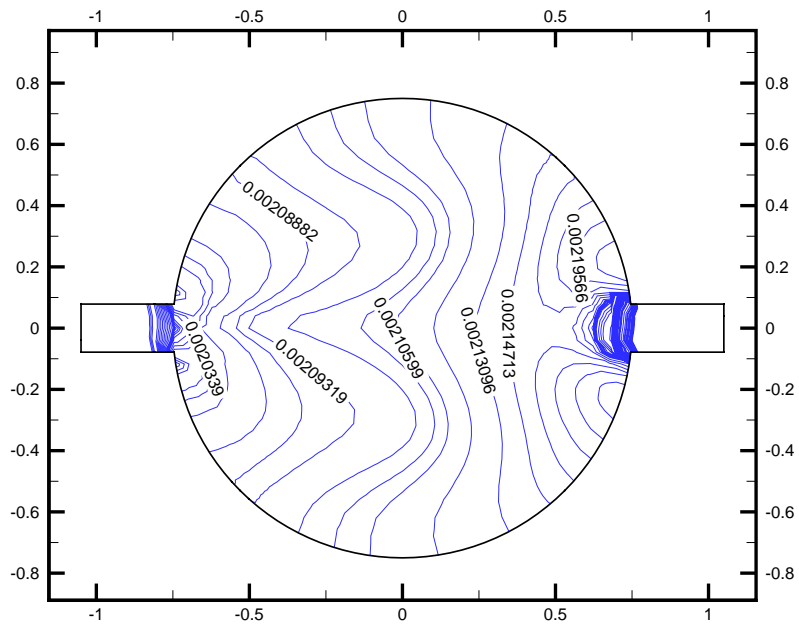


Figure 5-23 Contours de dénivellation à $t = 80$ s avec un maillage 31×31 pour $Re = 10$

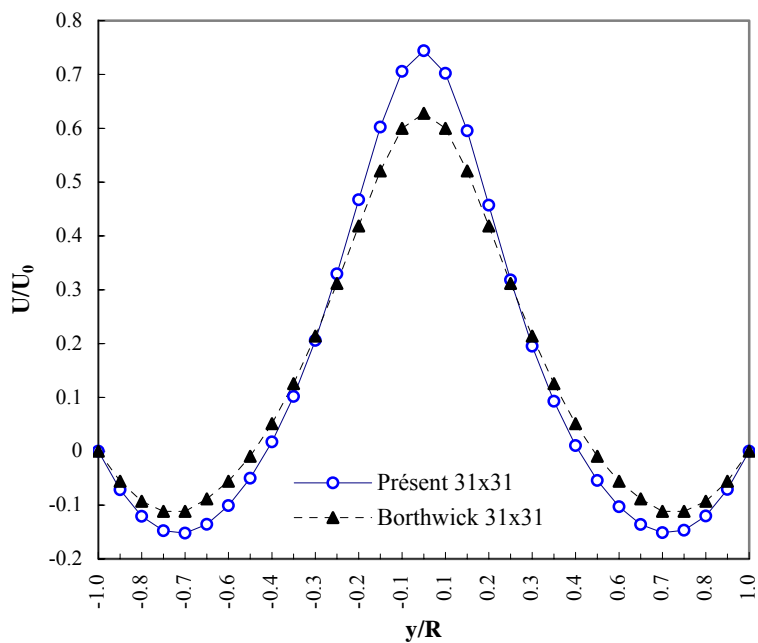
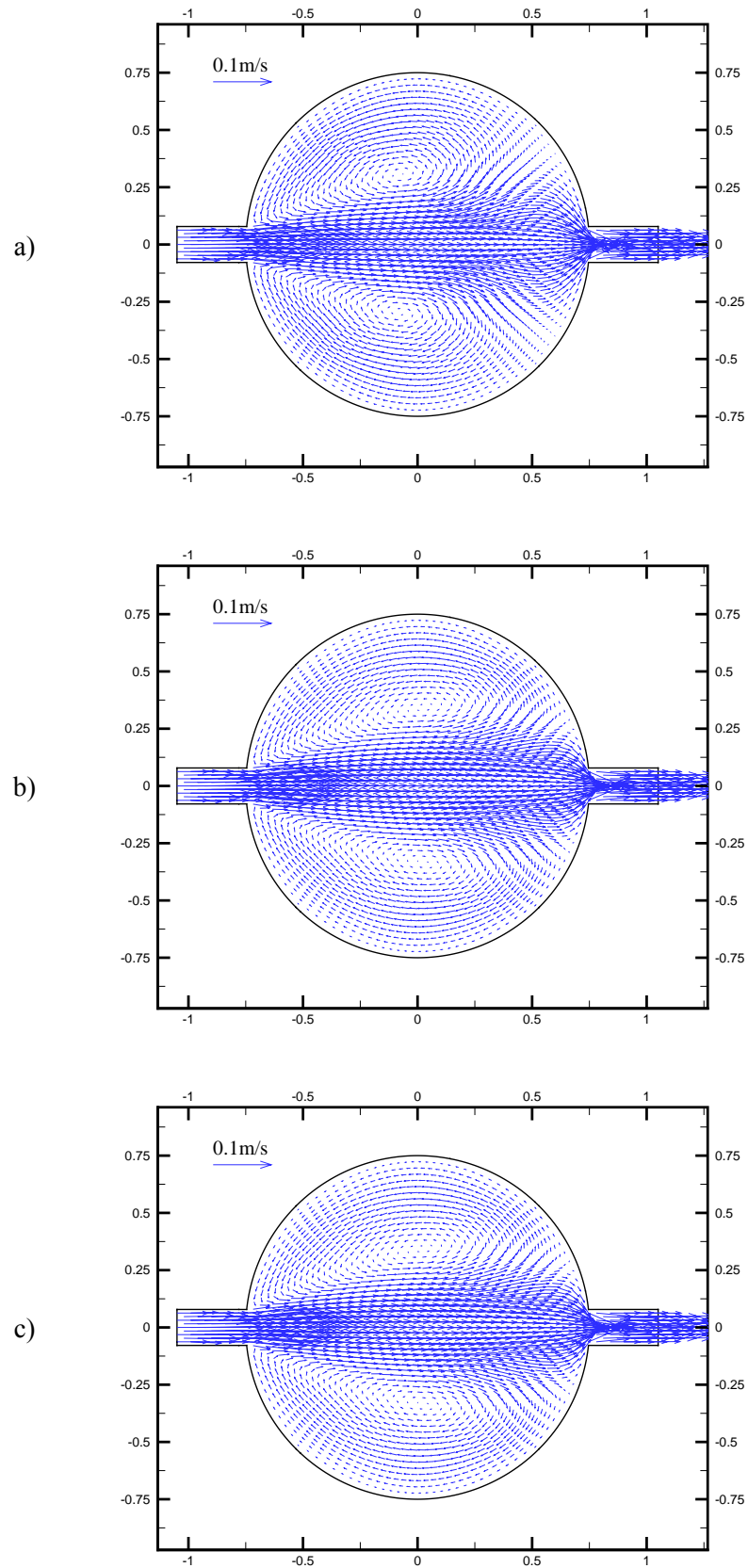


Figure 5-24 Profil de vitesse au milieu du bassin avec un maillage de 31×31

Figure 5-25 Champs de vitesse avec un maillage 61x61 pour $Re = 10$ a) $t = 30$ s, b) $t = 60$ s, c) $t = 80$ s

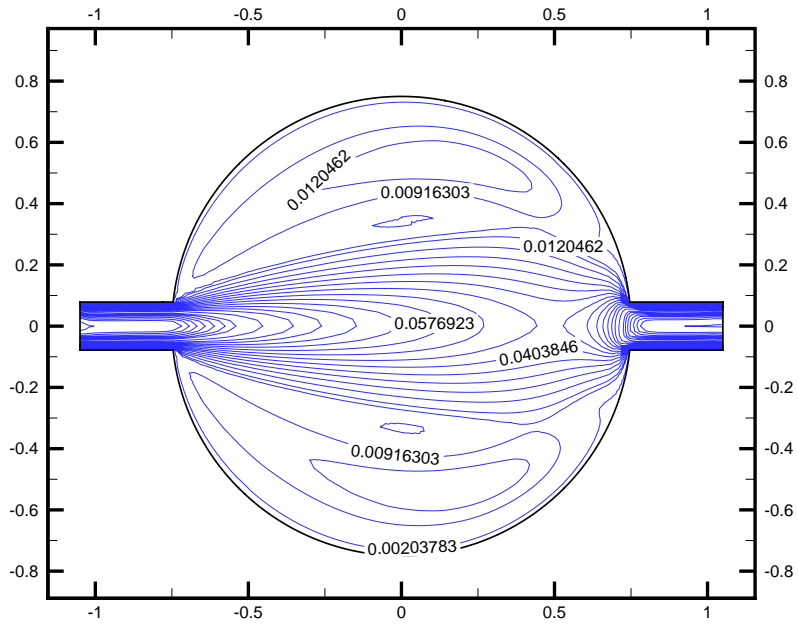


Figure 5-26 Iso valeurs de vitesse à $t = 80$ s avec un maillage 61x61 pour $Re = 10$

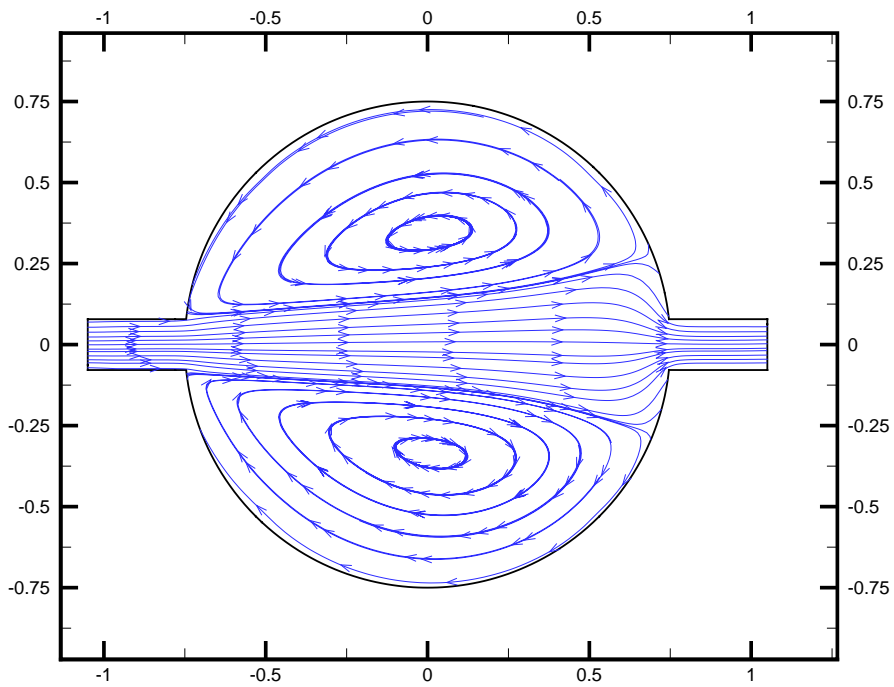


Figure 5-27 Lignes de courant à $t = 80$ s avec un maillage 61x61 pour $Re = 10$

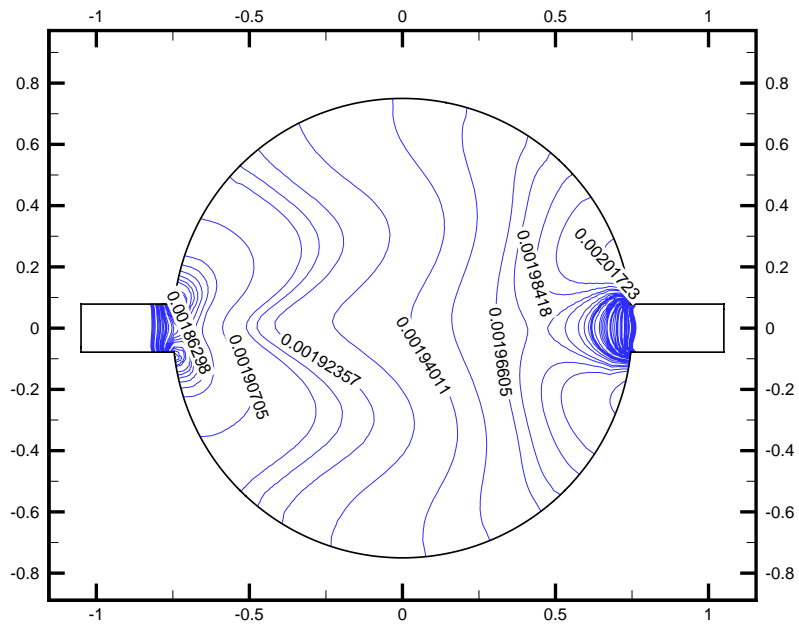


Figure 5-28 Contours de dénivellation à $t = 80$ s avec un maillage 61×61 pour $Re = 10$

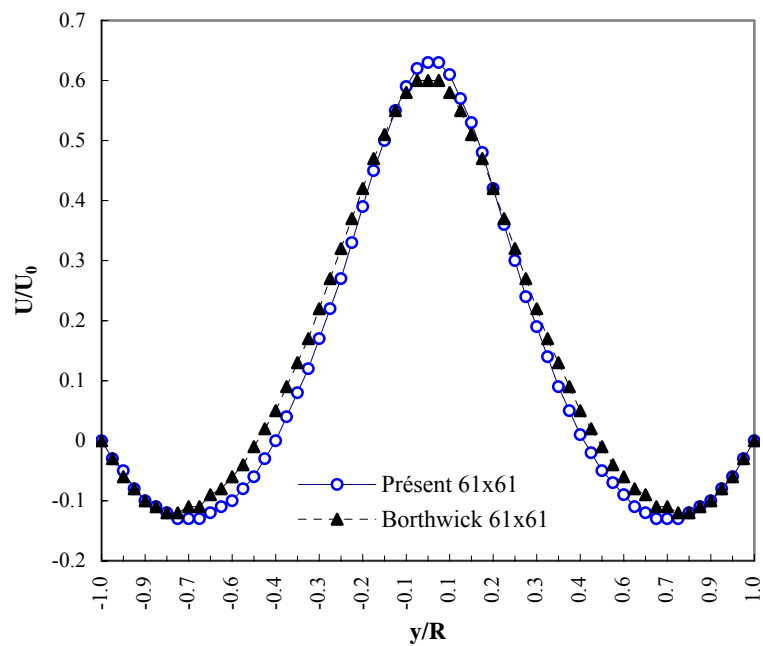


Figure 5-29 Profil de vitesse au milieu du bassin avec un maillage de 61×61

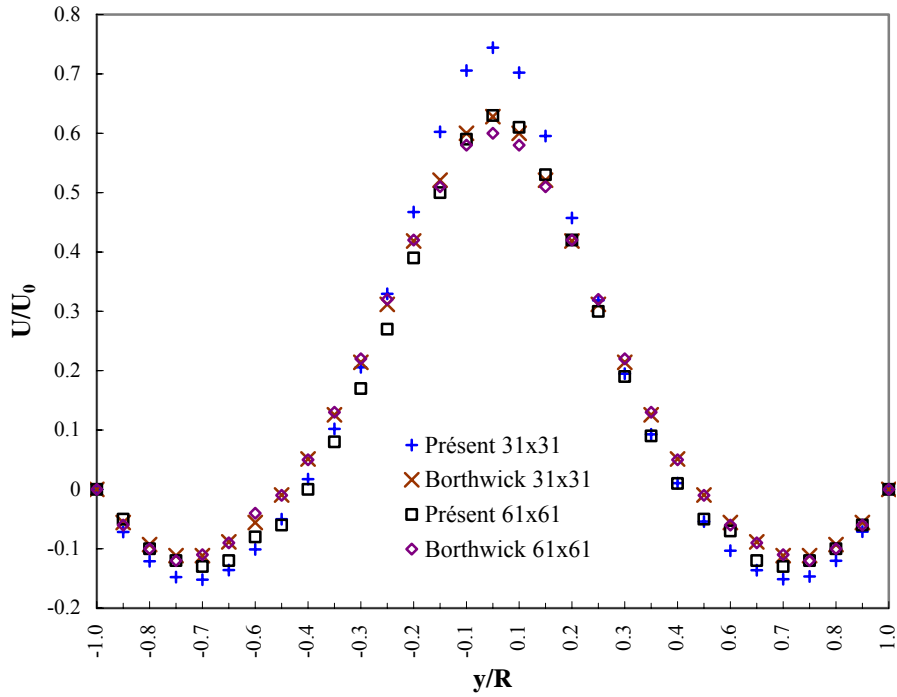
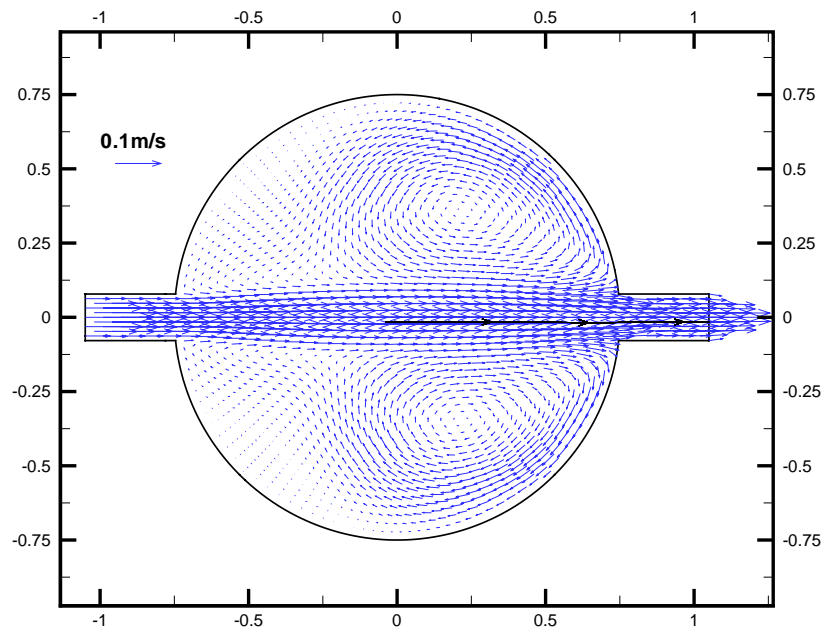


Figure 5-30 Comparaison du profil de vitesse au milieu du bassin

Figure 5-31 Champs de vitesse à $t = 160$ s avec un maillage 61x61 pour $R_e = 200$

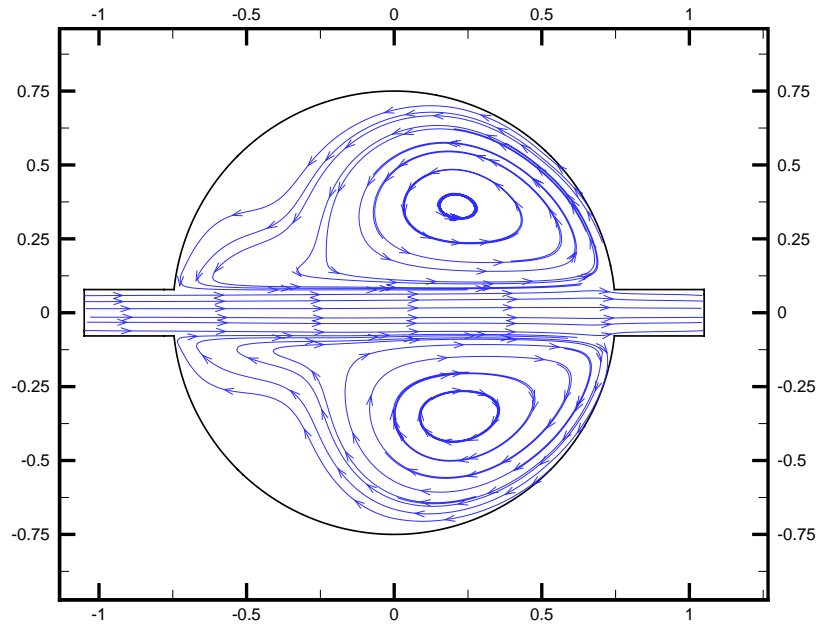


Figure 5-32 Lignes de courant à $t = 160$ s avec un maillage 61×61 pour $Re = 200$

Nous simulons ensuite l'écoulement au $Re = 200$ pour cette même géométrie. Les Figure 5-31 et Figure 5-32 présentent le champ de vitesse et les lignes de courants de cette simulation. On peut remarquer que l'allure de ces champs est identique à celle donnée par B&K pour la même valeur de Re .

5.3.5 Conclusion

Ce cas-test concerne un écoulement fortement convectif dans une géométrie complexe. Dans ce cas-test, le schéma «upwind» du deuxième ordre est utilisé pour traiter les termes d'advection. Nos résultats sont cohérents avec ceux obtenus par les études existantes telles que celles de : (Borthwick A.G.L. and Karr E.T., 1993), (Guillou S., 1996) et (Chae H.S., 1996). La capacité du modèle dans le calcul d'écoulements fortement convectifs dans une géométrie complexe est donc prouvée.

Par ailleurs, le cas-test montre comment la résolution de maillage peut affecter les résultats numériques et donc la nécessité d'utiliser un maillage suffisamment fin dans chaque simulation.

5.4 Ecoulement dans un canal à élargissement brusque

5.4.1 Objectifs

Les cas-tests précédents concernent soit l'écoulement instationnaire dans un domaine dont la géométrie ne présente aucune singularité, soit l'écoulement permanent dans une géométrie irrégulière. Le cas-test suivant a pour objectif de confirmer la fiabilité du fonctionnement de l'ensemble du modèle à simuler un écoulement instationnaire dans une géométrie à élargissement brusque et donc irrégulière.

Il s'agit d'un essai expérimental concernant un cas d'écoulement instationnaire, qui a été réalisé au Laboratoire de Mécanique des Fluides, Université de Technologie de Delft (Pays Bas) en 1981 et 1982 par Koppel & Wang. Plusieurs mesures de champs de courants et de dénivellations de la surface libre ont été effectuées. (Stelling G.S. and Wang L.X., 1984), (Nguyen K.D., 1993) et (Simon L., 1994) ont utilisé ce cas-test pour valider leur modèle. Le modèle de Stelling et Wang (Stelling G.S. and Wang L.X., 1984) est basé sur un schéma ADI, utilisant une grille de calcul rectangulaire et décalée. Nguyen (Nguyen K.D., 1993) et Simon (Simon L., 1994) utilisent la méthode de projection de Chorin combinée avec une technique à pas fractionnaire dans la résolution de l'équation de propagation d'ondes. Guillou [(Guillou S., 2005) et (Guillou S. et al., 1999)] utilise une technique de multi-domaines afin de traiter les problèmes de géométrie complexe.

5.4.2 Description du problème

Le canal est de 5.0 m de long, à fond plat. Le niveau du fond est $Z_b = -0.10m$. Le canal se compose de deux parties : une étroite et une élargie. La partie étroite est de 1m de long et de 0.40 m de large. La partie élargie est de 4m de long et de 0.80m de large. La Figure 5-33 donne la géométrie du problème.

5.4.2.1 Conditions expérimentales aux limites :

Conditions à l'entrée ($x = 0m$) :

Les vitesses sont imposées comme suit :

$$\begin{cases} u(t) = \sum_{j=1}^3 u_j \sin \omega_j t & \text{pour } 0 \leq t \leq 75s \\ v(t) = 0 \end{cases} \quad (5-10)$$

où

$$\begin{cases} \omega_j = \frac{2\pi}{150} j (j=1, 2, 3) \\ u_1 = 0.375 \text{ m/s} \\ u_2 = 0.05 \text{ m/s} \\ u_3 = 0.01 \text{ m/s} \end{cases} .$$

Conditions à la sortie ($x = 5m$):

La dénivellation de la surface libre est imposée de la manière suivante :

$$\begin{cases} \eta(t) = 0 & \text{pour } 0 \leq t \leq 5s \\ \eta(t) = \sum_{j=1}^3 h_j \sin \omega_j (t-5) & \text{pour } 5 \leq t \leq 75s \end{cases} \quad (5-11)$$

où

$$\begin{cases} \omega_j = \frac{2\pi}{150} j (j=1, 2, 3) \\ h_1 = 0.021m \\ h_2 = 0.001m \\ h_3 = 0.0005m \end{cases}$$

Il est évident que la condition à l'entrée $x = 0m$ donnée uniquement en débits unitaires par (5-10), est insuffisante. Comme dans (Nguyen K.D., 1993) et (Simon L., 1994), nous utilisons une condition de radiation proposée par (Orlanski I., 1976) pour déterminer les valeurs de dénivellation de la surface libre sur cette frontière :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial n} = -\frac{\eta - \eta_k}{T_f} \quad (5-12)$$

où c est la célérité, $c = \sqrt{gh}$. Le terme du second membre implique que η est forcé autour d'une valeur d'équilibre η_k avec une échelle de temps de l'ordre de T_f . Nous utilisons les mêmes paramètres que Nguyen (Nguyen K.D., 1993) : $\eta_k = 0$ et $T_f = 10800s$.

Conditions aux parois imperméables:

Simon (Simon L., 1994) et Stelling et Wang (Stelling G.S. and Wang L.X., 1984) imposent les composantes de vitesses sur les parois de la manière suivante :

$$\begin{cases} U_n = 0 \\ (1 - \alpha)U_t + \alpha\delta l \frac{\partial U_t}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad (5-13)$$

où U_n représente la vitesse normale, U_t est la vitesse tangentielle, n est le vecteur normal à la paroi, δl est la distance entre la paroi et le point de calcul le plus proche, α est le paramètre de glissement. Nguyen (Nguyen K.D., 1993) impose une condition de non glissement sur les parois.

Dans le modèle présent, une condition de non glissement est utilisée sur les parois imperméables, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} u_n = 0 \\ u_t = 0 \end{cases} \quad (5-14)$$

5.4.2.2 Conditions initiales

Initialement, l'écoulement dans le canal est au repos. Les conditions initiales pour le calcul sont : $u(0) = v(0) = 0$ et $\eta(0) = 0$ partout.

5.4.3 Paramètres numériques

Le domaine de calcul est discrétisé par un maillage de 2880 triangles de taille régulière de 0.05m. Nguyen (Nguyen K.D., 1993) et Simon (Simon L., 1994) utilisent un maillage rectangulaire de même taille, $\Delta x = \Delta y = 0.05m$. Stelling et Wang (Stelling G.S. and Wang L.X., 1984) utilisent un maillage de taille plus fine, $\Delta x = \Delta y = 0.025m$.

Le temps de simulation est de 75 s. La profondeur moyenne $h_0 = 0.1m$. Le coefficient de frottement est imposé par $C_h = 62.64 m^{1/2}/s$. Le coefficient de diffusion est $A_H = 2.3 \times 10^{-4} m^2/s$.

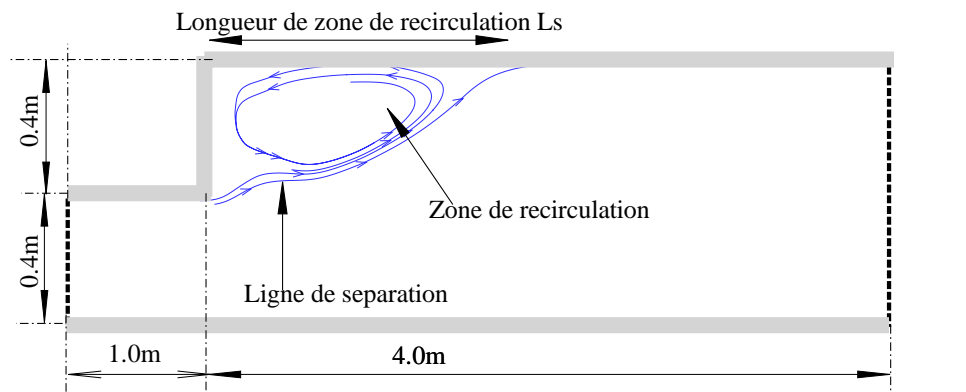
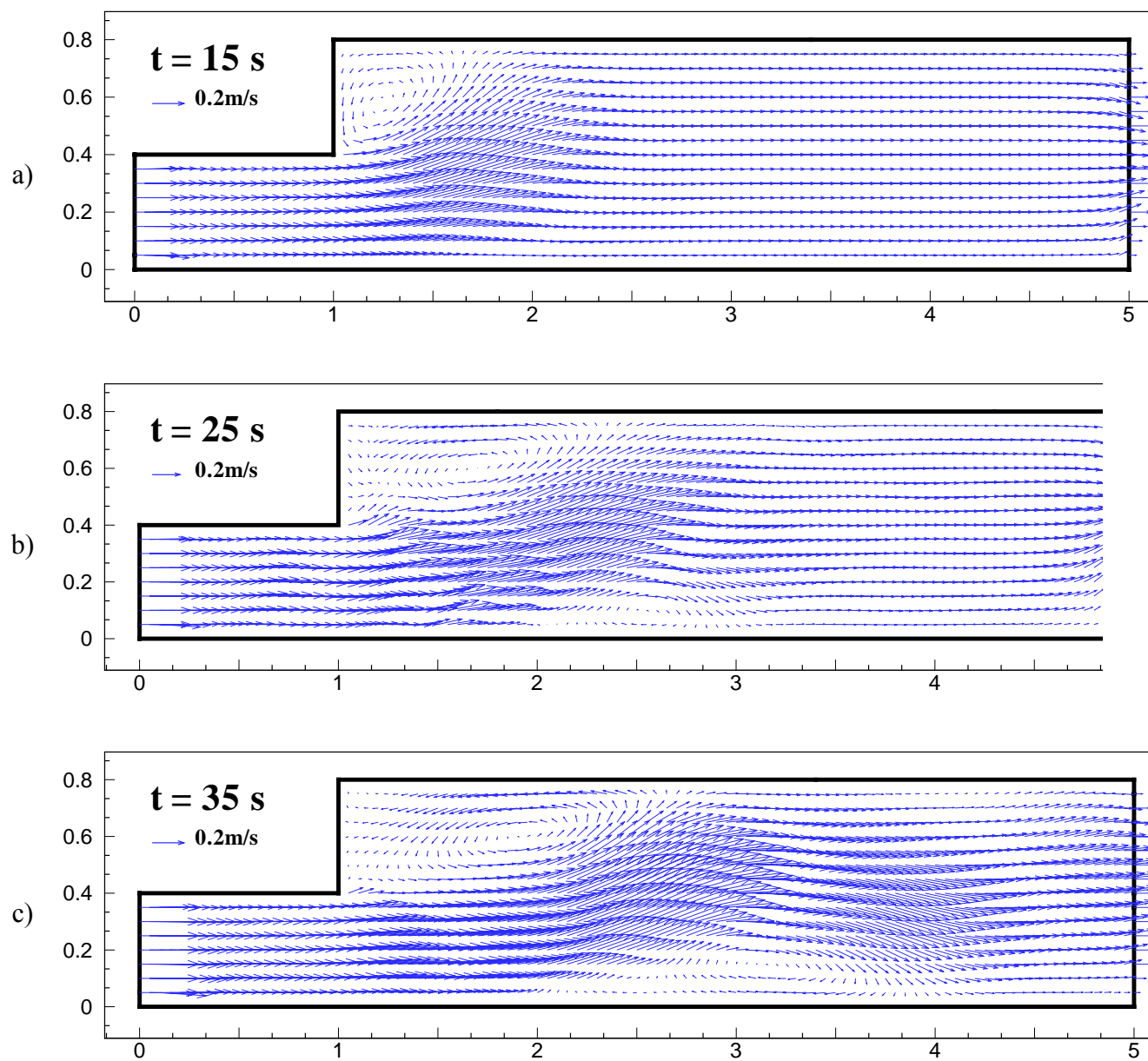
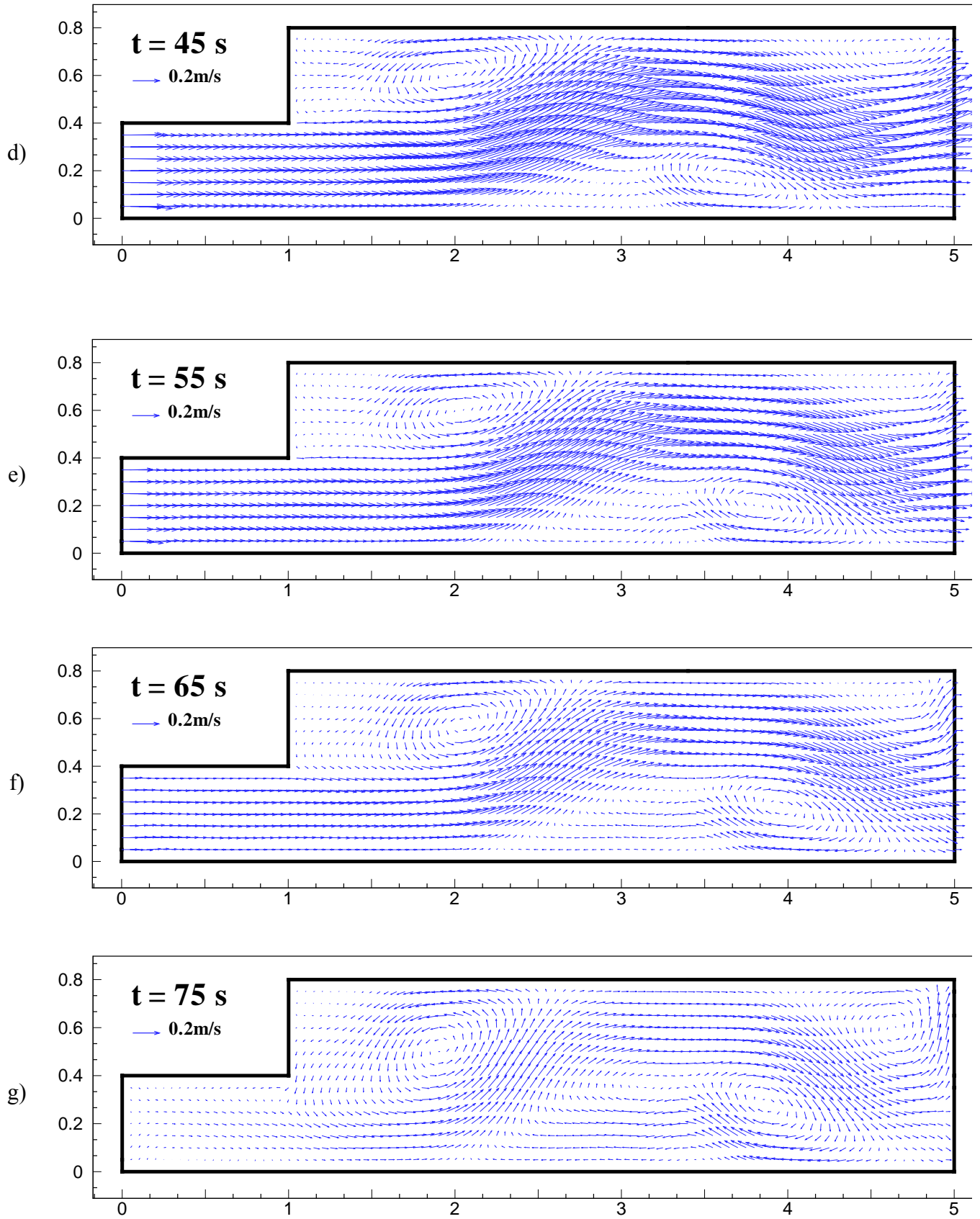


Figure 5-33 Géométrie du problème et schéma de la zone de re-circulation

Figure 5-34 Champs de vitesse a) $t = 15$ s, b) $t = 25$ s, c) $t = 35$ s

Figure 5-35 Champs de vitesse d) $t = 45 \text{ s}$, e) $t = 55 \text{ s}$, f) $t = 65 \text{ s}$, g) $t = 75 \text{ s}$

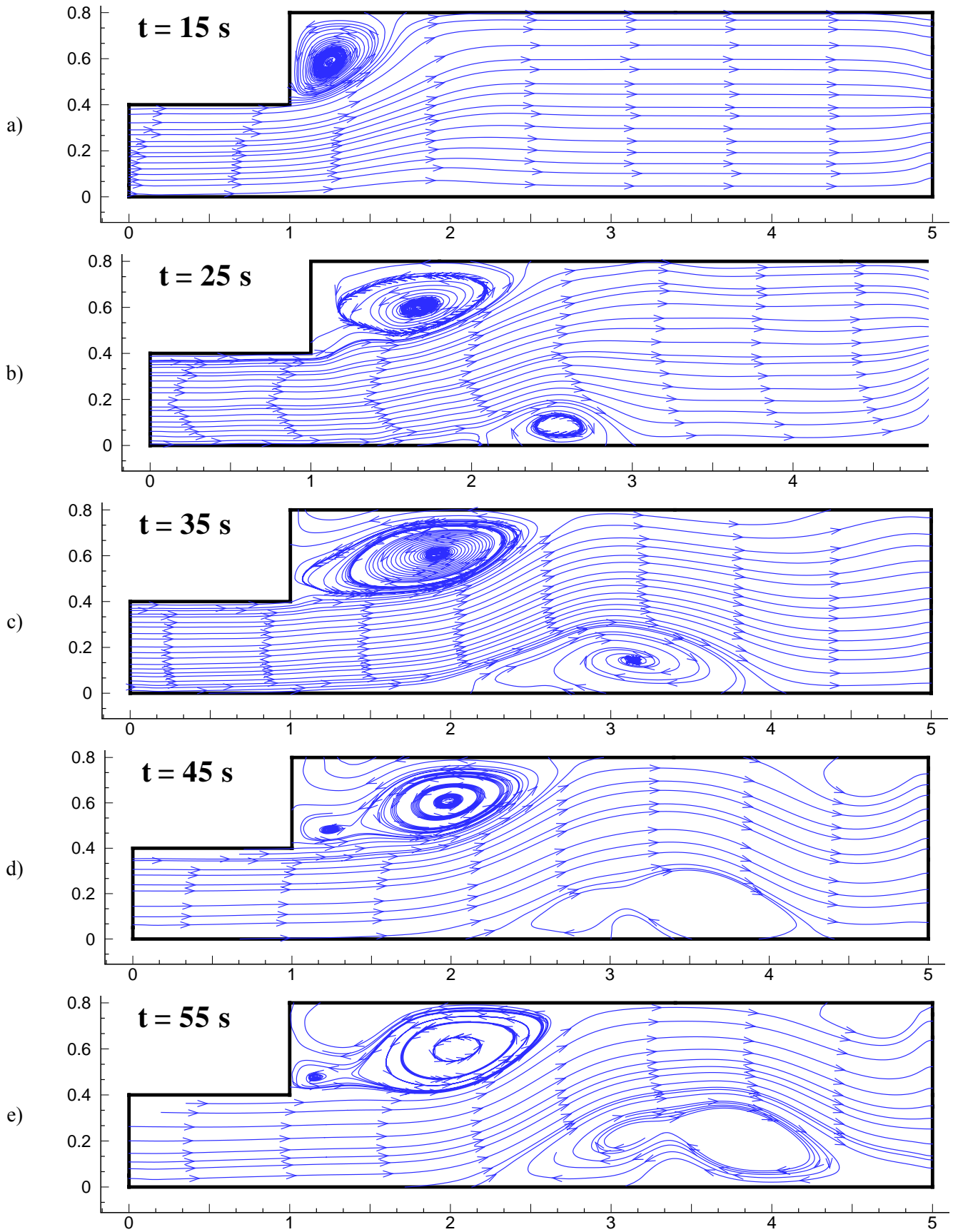


Figure 5-36 Lignes de courant

a) $t = 15$ s, b) $t = 25$ s, c) $t = 35$ s, d) $t = 45$ s, e) $t = 55$ s, f) $t = 65$ s, g) $t = 75$ s

5.4.4 Résultats et discussion

Les Figure 5-34 et Figure 5-35 représentent les champs de vitesse calculés aux différents instants $t = 15, 25, 35, 45, 55, 65$ et 75 s. La Figure 5-36 donne des lignes de courant aux même instants $t = 15, 25, 35, 45$ et 55 s. On remarque que le premier tourbillon se produit juste après l'élargissement. Une zone de re-circulation due à l'élargissement brusque se développe en fonction du temps. La taille du tourbillon augmente au fur et à mesure que son centre se déplace vers l'aval. Stelling et Wang considèrent que le deuxième tourbillon est perceptible dès que $t \geq 45s$. Les résultats de notre modèle montrent qu'à partir de $t = 45s$, le deuxième tourbillon apparaît.

Stelling et Wang (1984) observent que les résultats numériques sont considérablement modifiés par les conditions aux parois et par le coefficient de diffusion. Un coefficient de diffusion de $A_H = 2.3 \times 10^{-4} m^2/s$ et une condition de non glissement sont utilisés dans ce cas-test, comme Nguyen 1993 et Simon 1994.

Tableau 5-1

Longueur de zone de re-circulation L_s (m) par rapport au point P (1,0)

Temps(s)	t = 15 s	t = 25 s	t = 35 s	t = 45 s	t = 55 s
Mesures	0.70	1.40	1.90	2.30	2.40
Stelling and Wang		1.27	1.85	2.22	2.50
Nguyen		1.36	1.79	2.34	2.60
Simon	0.72	1.38	1.72	2	2.15
ECOMOD-UFVM	0.71	1.34	1.79	1.95	2.08

[D'après (SHI Y.E. and Nguyen K.D., 2006)]

Le Tableau 5-1 permet de comparer les valeurs mesurées de la longueur L_s de la zone de re-circulation (zone de décollement) à celles qui sont calculées par notre modèle, par (Stelling & Wang 1984, Simon 1994 et Nguyen 1993) et par les résultats expérimentaux. Les valeurs de L_s calculées par notre modèle sont plus proches des valeurs obtenues par Simon, utilisant les mêmes coefficients de diffusion de $2.3 \times 10^{-4} m^2/s$ et conditions de non glissement sur parois, $\alpha = 0$.

Tableau 5-2 Coordonnées (x_c, y_c) du centre du premier tourbillon

Temps(s)	t = 15 s	t = 25 s	t = 35 s	t = 45 s	t = 55 s
Mesurées	(0.33, 0.58)	(0.58, 0.58)	(0.96, 0.58)	(1.38, 0.58)	(1.88, 0.58)
Nguyen		(0.65, 0.58)	(1.076, 0.58)	(1.38, 0.58)	(1.75, 0.57)
Simon	(0.35, 0.58)	(0.75, 0.62)	(1.02, 0.62)	(1.38, 0.62)	(1.45, 0.60)
Stelling and Wang		(0.72, 0.61)	(0.91, 0.59)	(1.17, 0.57)	(1.17, 0.54)
ECOMOD-UFVM	(0.24, 58)	(0.67, 0.59)	(0.93, 0.61)	(1.10, 0.61)	(1.17, 0.59)

Tableau 5-3 Coordonnées (x_c, y_c) du centre de deuxième tourbillon par rapport au point P(1,0)

Temps(s)	t = 15 s	t = 25 s	t = 35 s	t = 45 s	t = 55 s
Mesurées				(0.53,0.50)	(0.68,0.48)
Nguyen				(0.46, 0.32)	(0.60, 0.30)
Simon				(0.70,0.52)	(0.60,0.40)
Stelling and Wang				(0.15,0.47)	(0.17,0.47)
ECOMOD-UFVM				(0.25,0.48)	(0.18,0.48)

Les Tableau 5-2 et Tableau 5-3 présentent les coordonnées du centre du premier tourbillon et du deuxième tourbillon, respectivement, calculées par notre modèle et par Stelling & Wang 1984, Simon 1994 et Nguyen 1993, en comparant avec les valeurs mesurées aux différents instants. De ces tableaux, on peut remarquer que nos résultats numériques sont plus près de ceux de Stelling et Wang. Les coordonnées des deux centres sont correctement reconstituées par notre modèle, sauf aux instants $t = 45$ et 55 s. A ces instants ($t = 45$ et 55 s), les tourbillons calculés par notre modèle n'avancent pas assez loin par rapport aux mesures. Ils restent cependant très proches des résultats obtenus par Stelling & Wang.

5.4.5 Conclusion

Le modèle proposé reproduit correctement les caractéristiques principales de l'écoulement dans un canal à l'élargissement brusque, où les vitesses varient rapidement.

L'utilisation de la technique de radiation est satisfaisante pour déterminer les dénivellations de la surface libre à la frontière ouverte $x = 0$.

Le modèle proposé réussit également à reproduire le développement du deuxième tourbillon. Cependant, Simon 1994 note : les expériences numériques mettent en évidence le fait que les propriétés et la dynamique de l'écoulement, principalement le rythme et le mécanisme du développement du deuxième tourbillon, son extension, la vitesse et la position de son centre, sont fortement modifiés par les conditions aux parois et les coefficients de diffusion. Les mesures disponibles sont insuffisantes pour permettre une compréhension complète de l'évolution de l'écoulement et, plus particulièrement, le mécanisme responsable de la naissance du deuxième tourbillon ne peut pas être identifié.

5.5 Ecoulement permanent dans un canal de topographie irrégulière

5.5.1 Objectif

On se propose d'étudier ici un écoulement permanent sur un fond très irrégulier. Ce cas-test est proposé par F. Maurel (EDF-LNH) [voir (Goutal N. and Maurel F., 1997a)]. Chacun sait que dans les équations de Saint-Venant décrivant un écoulement sur un fond très irrégulier, les termes source deviennent dominants et peuvent provoquer des instabilités numériques indésirables. Un traitement inadéquat des termes source peut mener à une perte importante de la qualité des résultats : l'écoulement initial au repos qui se déplace artificiellement, l'impossibilité de converger vers un état stationnaire réel même avec un débit et une hauteur constants, etc.

Ce cas-test nous permet donc de tester la fiabilité et la robustesse du modèle proposé lorsque la variation du fond est rapide et irrégulière.

5.5.2 Description du problème

Maurel propose un canal avec les variations rapides du fond et de la largeur. (Vázquez-Cendón M.E., 1999), (Hubbard M.E. and Garcia-Navarro P., 2000), (Zhou J.G. et al., 2001), (Vukovic S and Sopta L., 2002) et (Crnjaric-Žic N. et al., 2004) (Crnjaric-Žic N. et

al., 2004) utilisent la même topographie, pour tester leurs modèles. Dans son solveur de Riemann, Vázquez-Cendón (Vázquez-Cendón M.E., 1999) utilise un traitement spécial pour les termes source (décomposition en deux termes « inward » and « outward ») pour un fond très irrégulier. Tseng (Tseng M.H., 2004) développe une approche dans laquelle les termes source sont discrétisés de la même manière que les gradients de flux. Cette approche est combinée avec un schéma TVD pour simuler un écoulement sur la même topographie.

On considère maintenant un canal rectangulaire de 1500 m de long et de 40 m de large, à fond irrégulier. La pente du fond est d'environ 10 % avec des gradients renversés. Le Tableau 5-4 donne la définition du fond. La Figure 5-37 présente la topographie et la géométrie du canal.

Tableau 5-4 Fond variable du canal rectangulaire

x (m)	0	50	100	150	250	300	350	400	425	435	450	475	500	505
Zb (m)	0	0	2.5	5	5	3	5	5	7.5	8	9	9	9.1	9
x (m)	530	550	565	575	600	650	700	750	800	820	900	950	1000	1500
Zb (m)	9	6	5.5	5.5	5	4	3	3	2.3	2	1.2	0.4	0	0

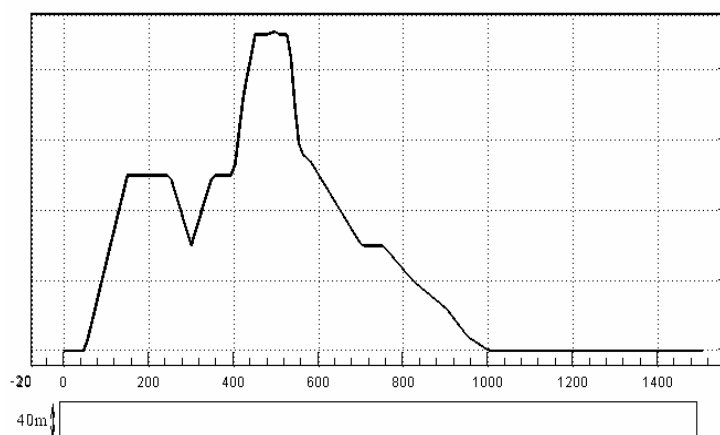


Figure 5-37 Topographie et géométrie du canal

5.5.2.1 Conditions initiales

Initialement, la dénivellation de la surface libre est de 15 m. Le débit unitaire est $0.75 \text{ m}^2/\text{s}$ à tout moment et partout dans le canal.

5.5.2.2 Conditions aux limites

Conditions à l'entrée :

A l'entrée, $x = 0$, un débit unitaire $q = 0.75 \text{ m}^2/\text{s}$ est imposé et inchangé au cours du calcul.

Conditions à la sortie :

A la sortie, $x = 1500 \text{ m}$, la dénivellation de la surface libre $\eta = 15 \text{ m}$ est imposée.

Conditions aux parois imperméables :

Sur les parois du canal, une condition de glissement est imposée :

$$\begin{aligned} \vec{U} \cdot \vec{n} = 0 \quad \vec{U} \cdot \vec{t} \neq 0 \quad \text{avec} \quad \vec{U} = (u, v) \\ \Rightarrow \begin{cases} u_n = 0 \\ u_t \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5-15)$$

où u_n est la composante normale du vecteur vitesse \vec{U} , et u_t est sa composante tangentielle à la paroi.

5.5.3 Paramètres numériques

Trois maillages de tailles différentes, $\Delta = 10, 5$ et 2.5 m , sont utilisés afin d'identifier l'influence de la taille du maillage sur les résultats numériques.

La durée de simulation est de 1500 s afin d'établir un état permanent de l'écoulement. Le pas de temps de 0.005 s est constant pour tous les maillages.

Le frottement est négligé pour bien vérifier le traitement des termes source dus seulement à l'irrégularité du fond. Une valeur de tolérance pour la profondeur, $H_\epsilon = 0.01 \text{ m}$ est imposée. Le fond sera déclaré sec pour les profondeurs inférieures à cette valeur.

5.5.4 Résultats et discussion

L'écoulement est permanent. La solution exacte est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_0(x,t) = 0.75 \text{ m}^2/\text{s} \\ u_0(x,t) = \frac{q_0(x,t)}{h_0(x,t)} \\ \eta_0(x,t) + \frac{u_0^2(x,t)}{2g} = \text{const} \end{array} \right. \quad (5-16)$$

où $q_0(x,t)$ est le débit unitaire restant inchangé au cours du calcul, $u_0(x,t)$ est la composante longitudinale de vitesse, $h_0(x,t)$ est la profondeur totale de l'écoulement, $\eta_0(x,t)$ la dénivellation de la surface libre qui est déterminée par le théorème de Bernoulli (Tannehill J.C. et al., 1997) :

$$\text{const} = \eta_0(1500,t) + \frac{u_0^2(1500,t)}{2g} \quad (5-17)$$

avec $\eta_0(1500,t) = 15\text{m}$ et $u_0(1500,t) = \frac{0.75}{15} \text{ m/s}$.

Les Figure 5-38, Figure 5-39 et la Figure 5-40 confrontent les profils longitudinaux de la dénivellation de surface libre, de la vitesse horizontale et du débit unitaire calculés, aux profils de la solution exacte, avec la taille du maillage $\Delta = 10, 5$ et 2.5 m, respectivement. Une très bonne coïncidence est obtenue entre les solutions numériques et exactes pour les trois maillages.

On note que plus le maillage est fin plus les résultats sont précis (Voir la Figure 5-40).

Une comparaison quantitative est effectuée. L'erreur relative est définie par:

$$\text{Err}_q(x) = \frac{q(x,t) - q_0(x,t)}{q_0(x,t)} * 100\% \quad (5-18)$$

où $q(x,t)$ est le débit numérique, $q_0(x,t)$ est le débit exact.

La Figure 5-41 présente le profil longitudinal des erreurs relatives du débit unitaire calculé avec trois tailles de mailles différentes.

La valeur maximale des erreurs relatives est de 0.15%, 0.13% et 0.03% pour les tailles $\Delta = 10, 5$ et 2.5 m, respectivement. Ces erreurs sont très faibles. On note que le résultat numérique présenté pour le même cas-test par Le Dissez (Le Dissez A. et al., 2005; Le Dissez A., 2006), qui utilise une méthode de volumes finis implicite sur un maillage décalé, donne une oscillation du débit de l'ordre 7-8% par rapport à la solution exacte. Nos résultats donnent, même pour une résolution grossière $\Delta = 10$ m, la valeur maximum d'erreur relative du débit est de 0.15%, restant très faible. Il est clair que nos erreurs relatives sont beaucoup plus

petites que ceux de Le Dissez 2006 (Le Dissez A. et al., 2005; Le Dissez A., 2006).

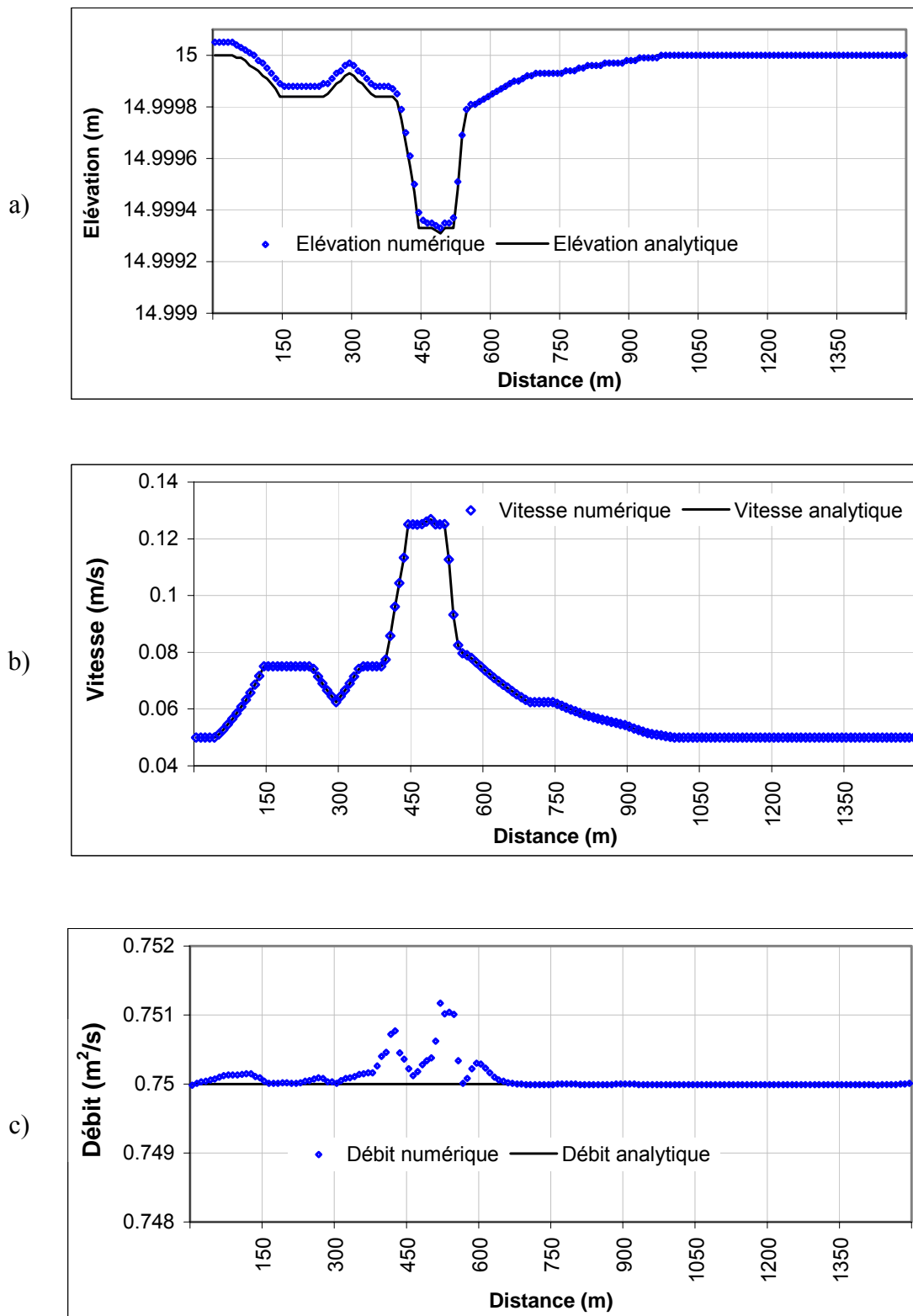


Figure 5-38 Résultats numériques avec le maillage grossier, $\Delta = 10\text{ m}$

a) Elévation de la surface libre, b) Vitesse, c) Débit unitaire

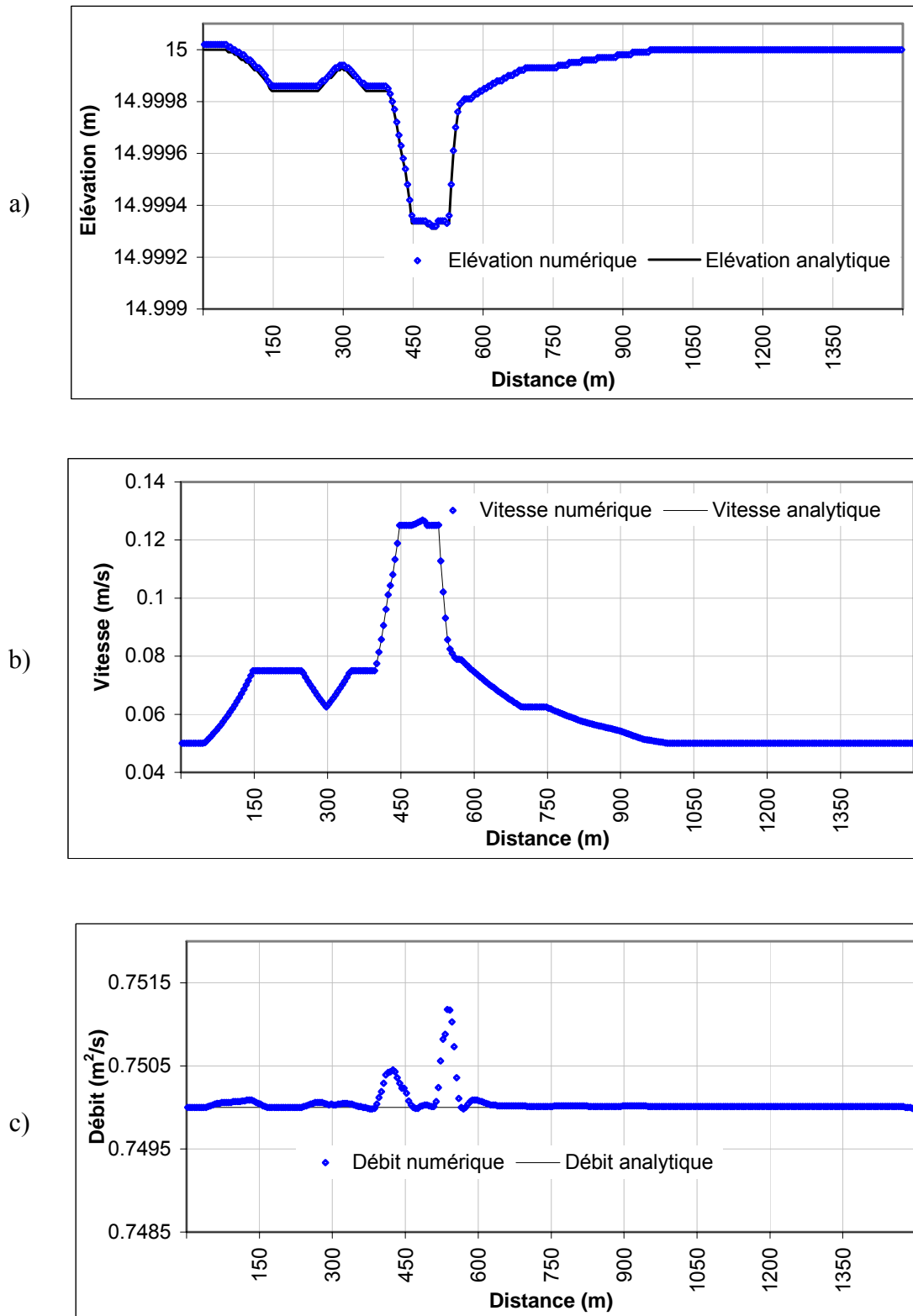


Figure 5-39 Résultats numériques avec le maillage moyen, $\Delta = 5 m$:

a) Elévation de la surface libre, b) Vitesse, c) Débit unitaire

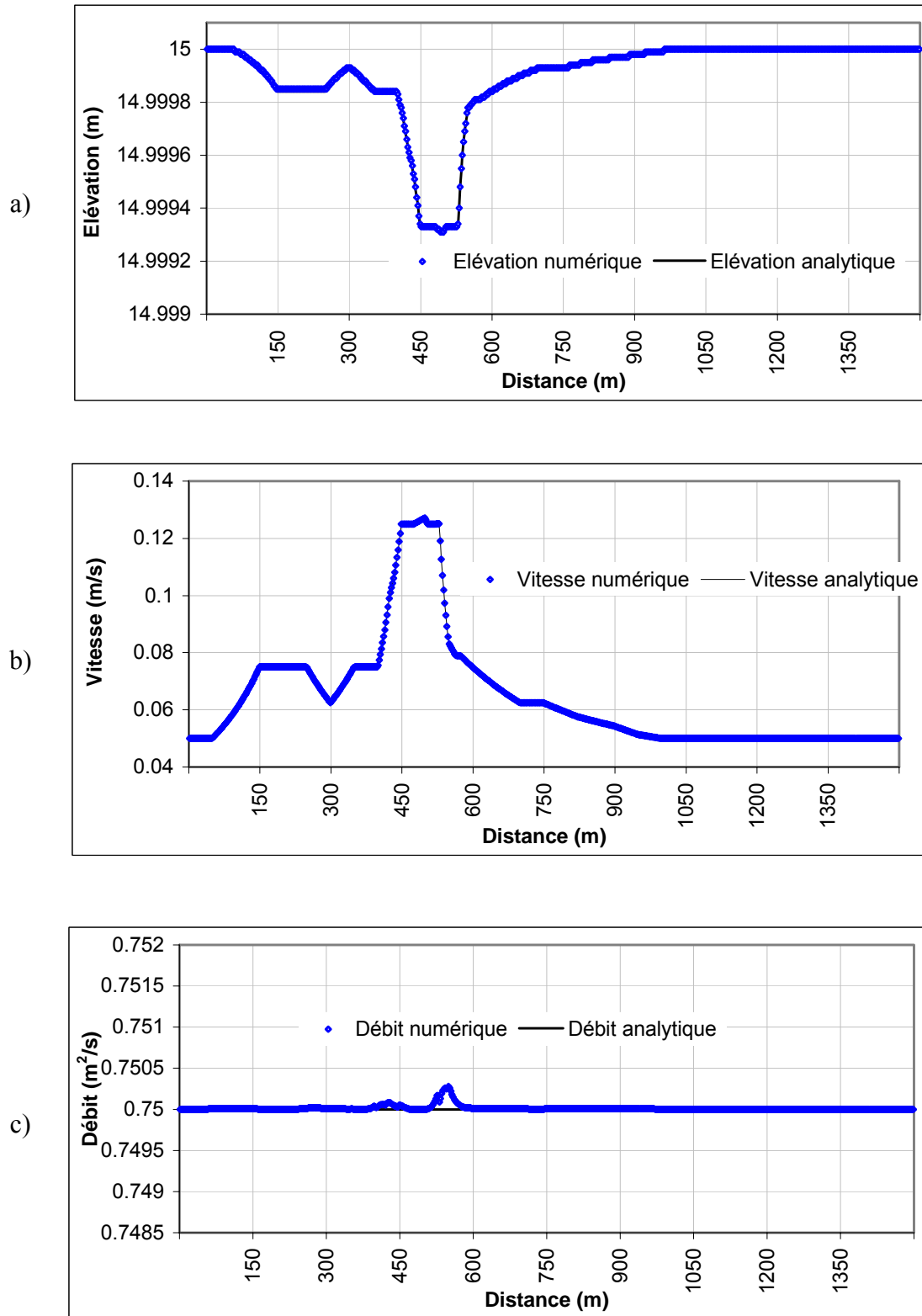


Figure 5-40 Résultats numériques avec le maillage fin, $\Delta = 2.5\text{ m}$:

a) Elévation de la surface libre, b) Vitesse, c) Débit unitaire

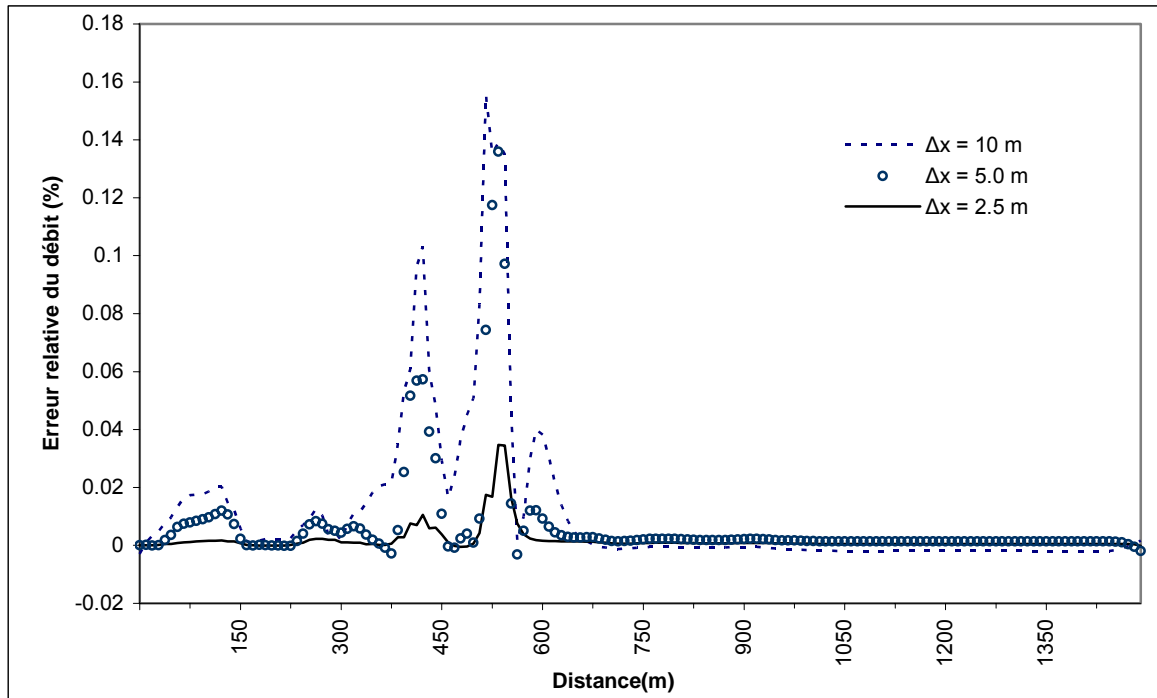


Figure 5-41 Erreurs relatives du débit unitaire avec les différents maillages

5.5.5 Conclusion

La précision du modèle proposé dans le traitement des termes source a été identifiée. Les erreurs numériques produites par le modèle restent très faibles : moins de 0.2% pour une taille de maillage grossière, même pour un écoulement sur un fond très irrégulier.

Les résultats de ce cas-test confirment le bon fonctionnement du modèle proposé dans le traitement des termes source, tout en évitant les erreurs numériques indésirables dues à la variation rapide du fond.

5.6 Terrain découvrant/recouvrant : Bassin au fond en pente variable soumis à une marée sinusoïdale

5.6.1 Objectifs

Dans la simulation des écoulements en milieux estuariens et côtiers, en particulier des écoulements tidaux, on rencontre souvent le problème de fonds découvrants et recouvrants. Un fond peut être sec à un instant précis (le découvrant), mais quelques temps après, le fond peut redevenir mouillé (le recouvrant). Le phénomène découvrant/recouvrant peut se produire lors de diversion des crues d'une rivière et d'un fleuve vers une zone de rétention d'eau. Ce problème est très délicat à traiter. En effet, un traitement inadéquat du problème peut provoquer l'instabilité numérique et le non-respect de la conservation de la masse d'eau.

On se propose de vérifier la capacité de notre modèle à simuler un écoulement sur un fond découvrant/recouvrant. On étudie ici un écoulement instationnaire, engendré par une marée sinusoïdale dans un canal au fond en grande pente. Selon la période de la marée (Pleine Mer ou Basse Mer) le fond sera découvrant ou recouvrant. L'essai est proposé initialement par (Leclerc M. et al., 1990).

5.6.2 Description du problème

Ce cas d'essai a lieu dans un canal rectangulaire avec une pente variable et la surface libre soumise à une marée macro-tidale. Les dimensions du canal sont: 500 m de long et 25 m de large. La Figure 5-42 présente le profil longitudinal du fond du canal. Les coordonnées de ce profil ainsi que les pentes du fond sont données dans le Tableau 5-5.

Ce cas test est utilisé dans (Leclerc M. et al., 1990), (Heniche M. et al., 2000) et (Jiang Y.W. and Wai O.W.H., 2005) afin de valider leur modèle.

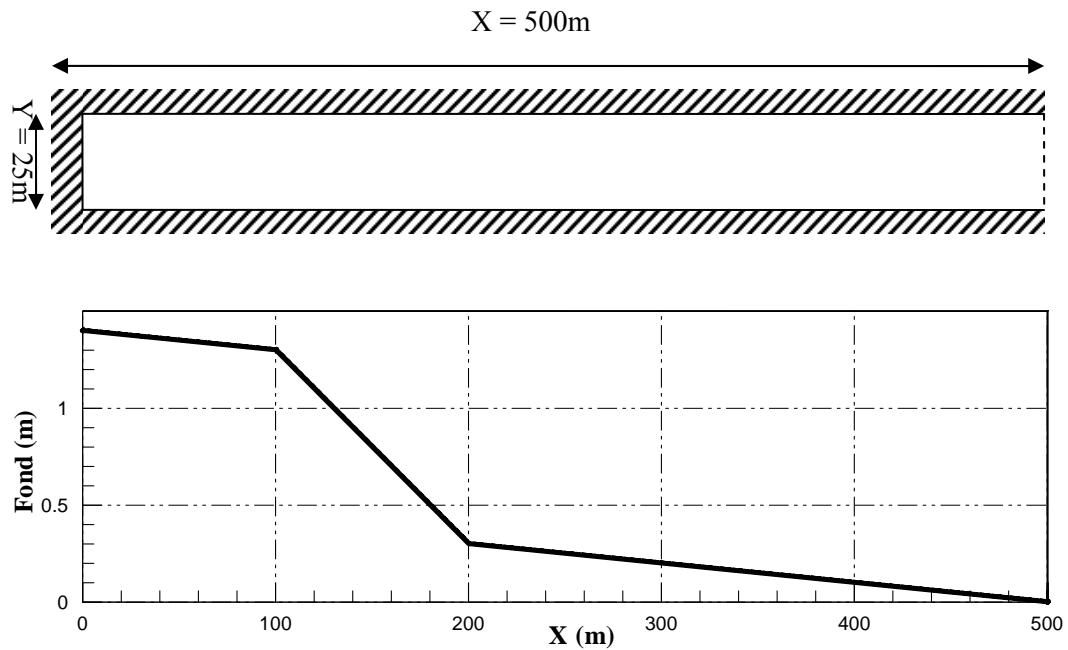


Figure 5-42 Géométrie et topographie du canal avec une pente variable

Tableau 5-5

Fond et pente du canal

x (m)	0	100	200	500
Fond (m)	1.4	1.3	0.3	0.0
x (m)	0-100	100-200	200-500	
Pente (m/m)	-0.001	-0.01	-0.001	

5.6.2.1 Conditions initiales

Initialement l'écoulement est au repos. La surface libre est de 1.75 m. La vitesse est nulle partout dans le canal.

5.6.2.2 Conditions aux limites

Conditions à la frontière ouverte:

La frontière ouverte se situe à $x = 500\text{ m}$. La surface libre est soumise à une marée

sinusoïdale définie par:

$$\eta(500, t) = \eta_0 + 0.75 \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \quad (5-19)$$

où $\eta_0 = 1.0m$ est la surface de référence. L'amplitude de la marée est de 0.75 m. La période de marée est $T = 60$ min.

Conditions aux parois imperméables:

Une condition de glissement est imposée sur toutes les parois :

$$\begin{aligned} \vec{U} \cdot \vec{n} &= 0 \quad \text{avec} \quad \vec{U} = (u, v) \\ \Rightarrow \begin{cases} u_n = 0 \\ u_t \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5-20)$$

5.6.3 Paramètres numériques

Le canal est discrétisé par un maillage de 3200 triangles de taille uniforme de 2.50 m. La durée de simulation est de 60 minutes. Le pas de temps est de 0.25 s, correspondant à un nombre de Courant de $C_r = 0.345$.

Afin de comparer nos résultats aux ceux obtenus dans (Leclerc M. et al., 1990), (Heniche M. et al., 2000) et (Jiang Y.W. and Wai O.W.H., 2005), nous prendrons les mêmes valeurs du coefficient de Manning $n = 0.03 \text{ s}/\text{m}^{1/3}$ et du coefficient de diffusion $A_H = 5 \text{ m}^2/\text{s}$. D'après McDowell et O'Connor (McDowell D.M. and O'Connor B.A., 1977), la valeur de coefficient de Manning n peut être reliée au coefficient de Chézy par l'expression (2-67) :

$$Ch = \frac{1}{n} h^{1/6} \quad (5-21)$$

où h est la profondeur d'eau. Une valeur de tolérance, $H_\varepsilon = 0.002 \text{ m}$ pour la profondeur est imposée. Le fond sera considéré sec pour toutes les profondeurs inférieures à cette valeur.

5.6.4 Résultats et discussion

Les Figure 5-43, Figure 5-44 et la Figure 5-45 présentent les profils longitudinaux de la surface libre et de la vitesse, calculés par notre modèle et par Jiang et al 2005 (Jiang Y.W. and Wai O.W.H., 2005), aux différents instants. On note que, globalement, nos résultats sont

très proches de ceux obtenus par de Jiang et al. 2005

A $t = 12$ min, autour du point $x = 100$ m, où la profondeur est presque nulle, la vitesse calculée par Jiang et al croît significativement, atteint une valeur de 0.40 m.s^{-1} approximativement, tandis que notre valeur de vitesse y reste très faible. Leclerc (Leclerc M. et al., 1990), Heniche (Heniche M. et al., 2000) constatent ce même phénomène dans leurs résultats. Cependant, Heniche (Heniche M. et al., 2000) supposent que ce phénomène est lié à des oscillations fausses et artificielles de la surface libre, étant du même ordre de grandeur que les valeurs de profondeur. Il semblerait bien que nos résultats soient plus raisonnables et corrects.

Les Figure 5-43, Figure 5-44 et Figure 5-45 présentent, par ailleurs, l'avancement et la récession du front entre la zone sèche et mouillée sur un fond en pente variable au cours d'une marée. Ces résultats, obtenus avec le traitement de terrain découvrant/recouvrant, sont comparés favorablement à ceux obtenus par Leclerc et al. 1990, Heniche et al. 2000 et Jiang et Wai 2005, qui utilisent des techniques numériques de nature très différente de la nôtre.

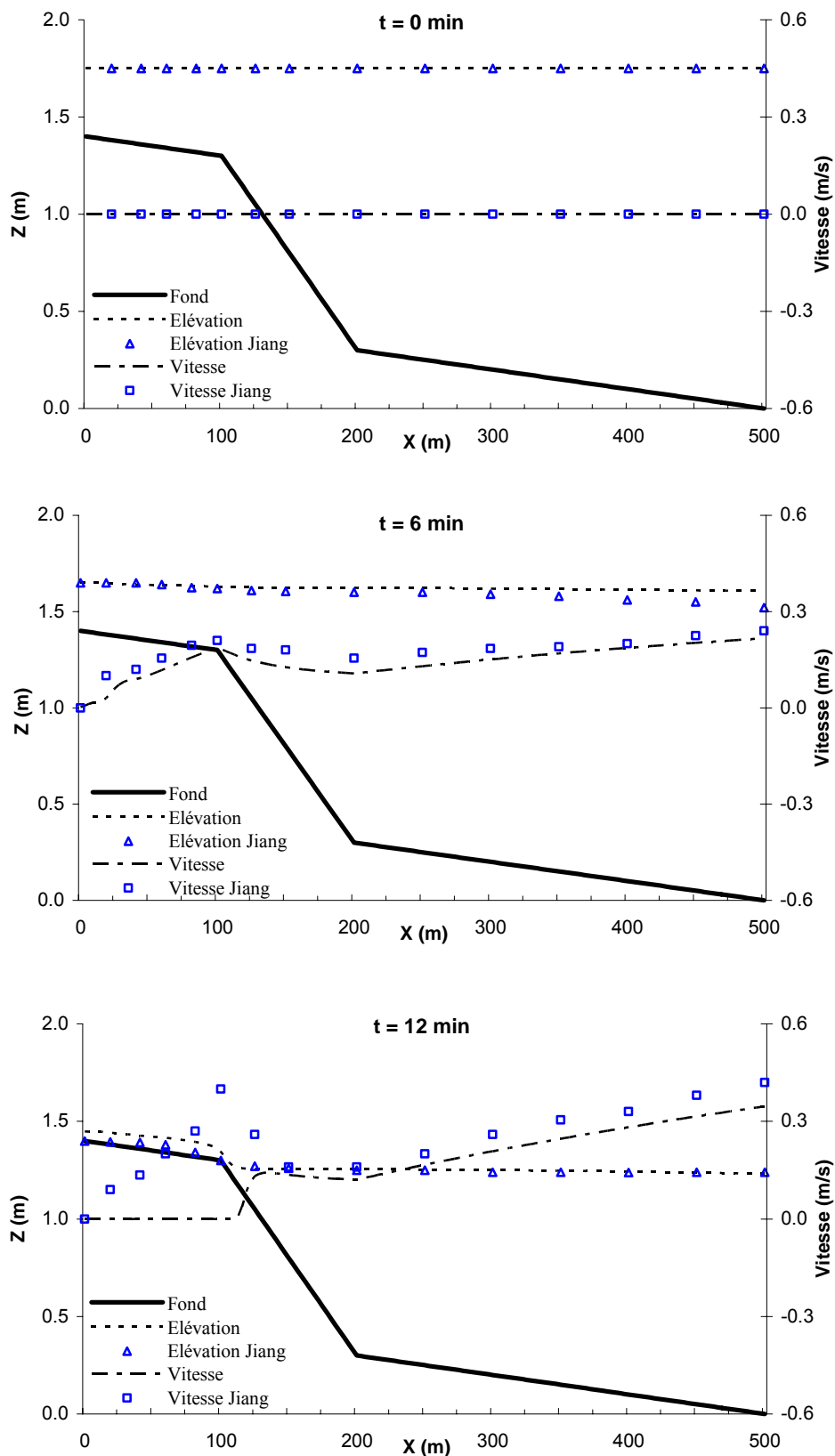
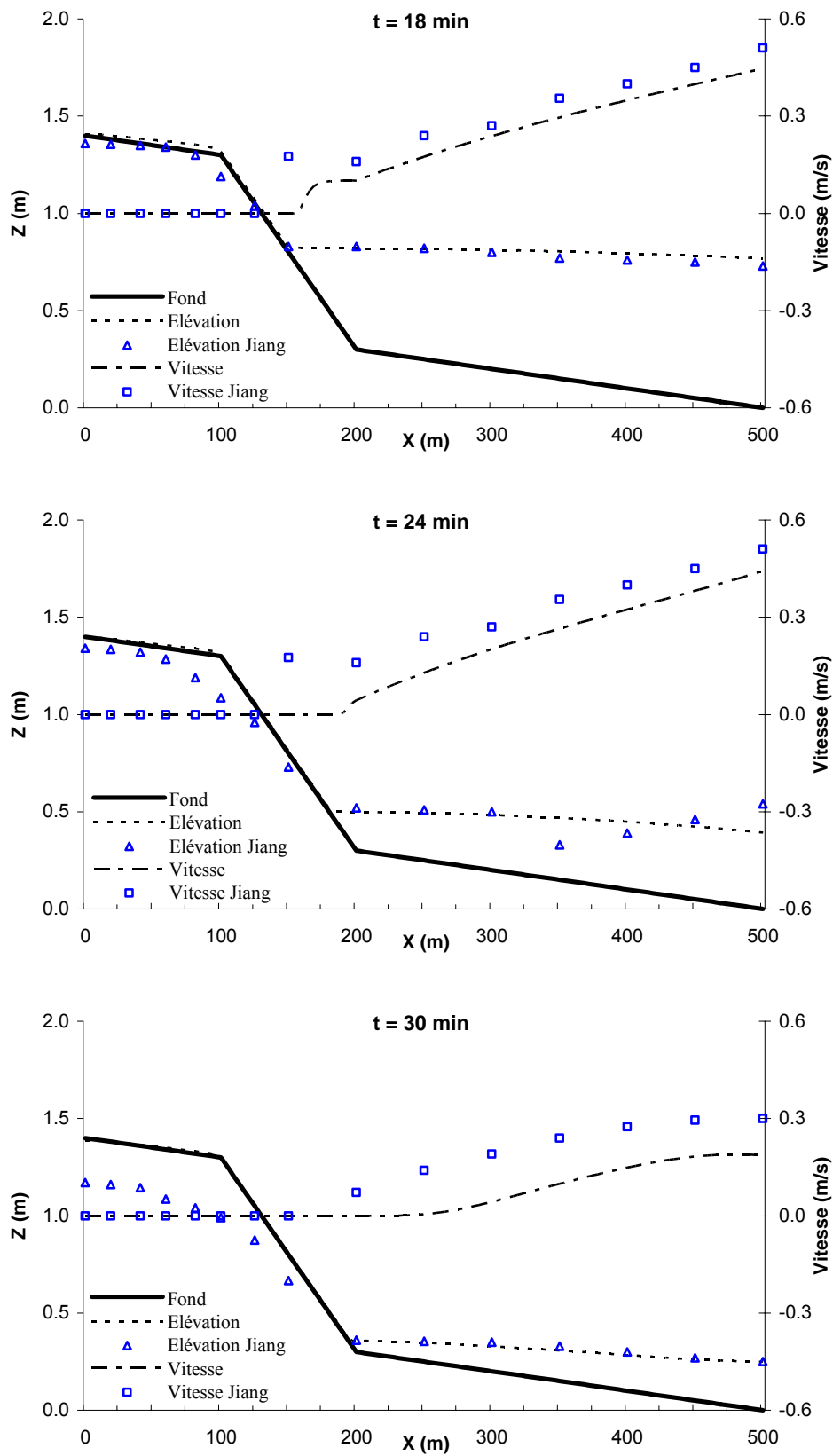


Figure 5-43 Profil longitudinal de la surface libre et de vitesse à $t = 0, 6, 12 \text{ min}$

Figure 5-44 Profil longitudinal de la surface libre et de vitesse à $t = 18, 24, 30$ min

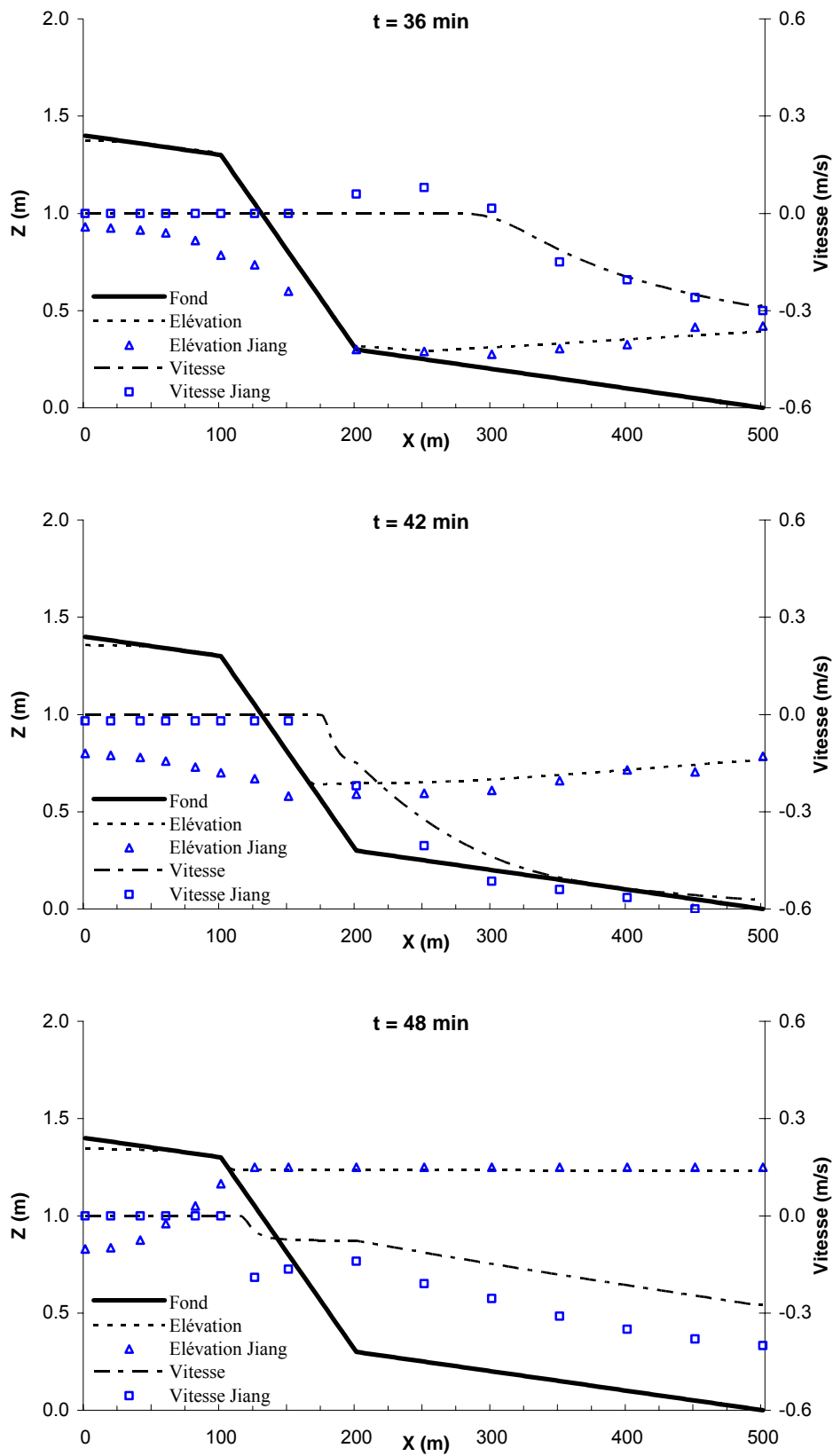


Figure 5-45 Profil longitudinal de la surface libre et de vitesse à $t = 36, 42, 48 \text{ min}$

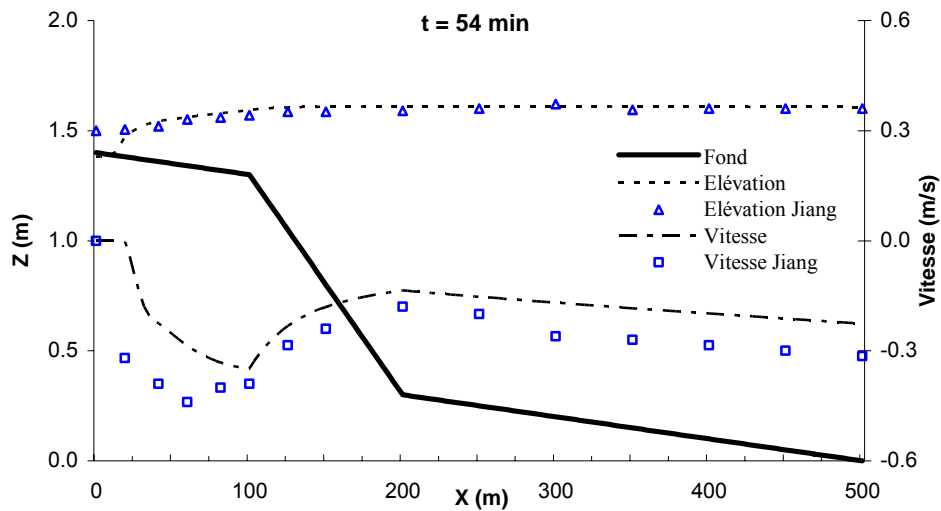


Figure 5-46 Profil longitudinal de la surface libre et de vitesse à $t = 54$ min

5.6.5 Conclusion

Nous avons reproduit un écoulement instationnaire ayant la surface libre soumise à une marée sinusoïdale, sur un fond en pente variable. Les résultats numériques sont en très bonne coïncidence avec les résultats numériques obtenus par les autres modèles. La fiabilité du modèle en général et du traitement de terrain découvrant/recouvrant en particulier est confirmée par ce cas-test.

Chapitre 6

Validations du modèle : Cas des problèmes de rupture de barrages

Les écoulements dus aux crues produites par la rupture d'un barrage, de segments de digues, ou d'autres structures sont de nature torrentielle avec la présence d'un front discontinu qui se propage vers l'aval et une onde de raréfaction (de dépression) qui se propage vers l'amont. Les caractéristiques de ces écoulements tels que la vitesse, le niveau d'eau ainsi que le temps d'arrivée de crues doivent être déterminés en avance pour une gestion des crues et une réduction de leur impact sur l'environnement et l'infrastructure économique.

Afin de valider le modèle proposé pour des problèmes liés aux ruptures de barrages, nous avons effectué une série de cas-tests proposés dans la littérature de (Goutal N. and Maurel F., 1997), (Hanich L., 1996), (Le Fessant A.-L., 2001), (Bradford S.F. and Sanders, 2002), (Ying X.Y. et al., 2004), (Brufau P and García-Navarro P., 2003), et etc. :

-Ecoulement dû à la rupture de barrage sur un fond mouillé, plat et sans frottement dans un canal rectangulaire de largeur constante (problème 1D) ;

-Ecoulement dû à la rupture de barrage sur un fond mouillé, plat et sans frottement dans un canal rectangulaire de largeur variable (problème 2D) ;

-Ecoulement dû à la rupture de barrage sur un fond sec dans un canal rectangulaire de largeur constante (problème 1D) ;

-Ecoulement dû à la rupture de barrage sur un fond sec dans un canal rectangulaire de largeur variable (problème 2D).

La solution donnée à tous ces problèmes est soit analytique soit issue des résultats expérimentaux ou d'observations réelles.

6.1 Problème idéal de rupture de barrage

6.1.1 Objectifs

Le modèle proposé n'est pas basé sur une technique de Solveur de Riemann (Roe P.L., 1981), qui est très appropriée à un problème hyperbolique dont la solution est souvent représentée par un front discontinu. Ainsi il sera intéressant d'identifier la limite du modèle proposé en capturant les ondes de chocs, et d'examiner la précision du modèle en simulant des écoulements torrentiels avec la présence d'une discontinuité du profil de vitesse et de la surface libre.

6.1.2 Description du problème

Etudier un canal rectangulaire à fond plat $Z_b = 0$ et sans frottement, c'est-à-dire qu'il n'y a aucun terme source, le problème est purement hyperbolique. Un barrage est placé au milieu du canal. Les dimensions sont :

- Longueur du canal: 1.6 m ($-1.0m \leq x \leq 0.6m$)
- Largeur du canal : 0.1 m ($0 \leq y \leq 0.1m$)
- Position du barrage : $x = -0.2m$

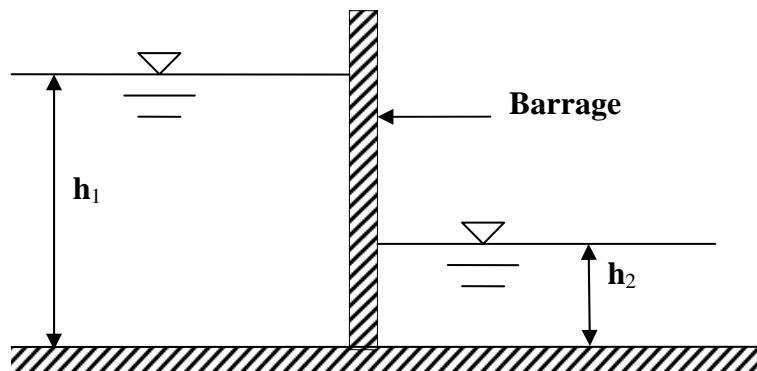


Figure 6-1 Condition initiale du problème

Conditions initiales :

La Figure 6-1 présente la condition initiale du problème : en amont du barrage, l'eau est retenue à une profondeur h_1 . La partie en aval représente une fine lame d'eau d'épaisseur

h_2 au repos avec $h_1 > h_2$.

$$h_0(x) = \begin{cases} h_1 & \text{if } x < -0.2m \\ h_2 & \text{if } x > -0.2m \end{cases} \quad (6-1)$$

$$u_0(x) = 0$$

Ceci correspond à un problème de Riemann homogène. Initialement, l'eau est en repos. La hauteur h_1 reste 1.0 m pour toutes les simulations. La hauteur en aval h_2 prend, selon chaque simulation, des valeurs différentes : 0.5 m, 0.1 m, 0.05 m et 0.04 m. La nature de l'écoulement torrentiel dû à la rupture de barrage dépend essentiellement du rapport h_2/h_1 . Une instabilité numérique risque de se produire pour des faibles valeurs du rapport h_2/h_1 . A $t = 0$, on suppose que le barrage est brusquement retiré en provoquant une onde de choc avec la présence d'un front discontinu de la surface d'eau qui se propage vers l'aval.

Conditions aux limites

Le bassin est fermé sur les quatre côtés. Une condition dite de « non glissement » est imposée à toutes les parois.

6.1.3 Paramètres numériques

Le domaine de calcul est discrétisé par un maillage de 51200 triangles dont les tailles sont fixées à 0.0025 m. Le pas de temps $\Delta t = 0.0001$ s pour toutes les simulations. La durée de chaque simulation est de 0.1 s.

6.1.4 Résultats et discussion

Nous allons comparer la hauteur d'eau et la vitesse obtenues par le modèle avec la solution analytique qui est calculée selon la méthode de Stoker (Stoker J.J., 1958) et également donnée par Fraccarollo & Toro (Fraccarollo L. and Toro E.F., 1995), Hanich (Hanich L., 1996) et Le Fessant (Le Fessant A.-L., 2001).

$$h(x,t) = \begin{cases} h_1 & \text{si } \frac{x}{t} \leq -\sqrt{gh_1} \\ \frac{1}{9g} \left(2\sqrt{gh_1} - \frac{x}{t} \right)^2 & \text{si } -\sqrt{gh_1} \leq \frac{x}{t} \leq (u_m - \sqrt{gh_m}) \\ h_m & \text{si } (u_m - \sqrt{gh_m}) \leq \frac{x}{t} \leq s \\ h_2 & \text{si } s \leq \frac{x}{t} \leq \infty \end{cases} \quad (6-2)$$

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{x}{t} \leq -\sqrt{gh_1} \\ \frac{2}{3} \left(2\sqrt{gh_1} + \frac{x}{t} \right)^2 & \text{si } -\sqrt{gh_1} \leq \frac{x}{t} \leq (u_m - \sqrt{gh_m}) \\ u_m & \text{si } (u_m - \sqrt{gh_m}) \leq \frac{x}{t} \leq s \\ 0 & \text{si } s \leq \frac{x}{t} \leq \infty \end{cases} \quad (6-3)$$

où h_m et u_m sont exprimés en termes de vitesse de propagation du choc s . Les équations suivantes sont résolues afin d'obtenir s , h_m et u_m .

$$h_m = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{8s^2}{gh^2}} - 1 \right) h_2 \quad (6-4)$$

$$u_m = s - \frac{gh_2}{4s} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8s^2}{gh^2}} \right) \quad (6-5)$$

$$u_m + 2\sqrt{gh_m} - 2\sqrt{gh_1} = 0 \quad (6-6)$$

(6-4) et (6-5) décrivent les équations de Rankine Hugoniot à la front de choc discontinuité. (6-6) est la conservation invariable de Riemman.

Différentes valeurs du rapport h_2/h_1 : 0.5, 0.1, 0.05 et 0.04, correspondant à $h_2 = 0.5, 0.1, 0.05$ et 0.04 m, sont utilisées. L'évolution du profil de la surface d'eau sert à examiner le comportement du modèle dans la capture du front de choc discontinu. Henderson 1966 note que, quand le rapport h_2/h_1 est plus grand que 0,138, l'écoulement est sous critique dans l'ensemble du bassin. Lorsque le rapport h_2/h_1 est plus petit que 0.138, l'écoulement est super critique en aval et sous critique en amont du barrage. Pour des très faibles valeurs du rapport h_2/h_1 , le régime d'écoulement en amont devient fortement supercritique, et il peut être difficile de capturer numériquement une telle onde de choc. En plus, dans ces conditions la hauteur, la forme et la célérité du front de choc sont déviées d'une manière significative de la solution exacte (Hsu C.T and Yeh K.C, 2002).

La première simulation concerne un écoulement fluvial avec $h_2/h_1 = 0.5$. Les Figure 6-2-a et Figure 6-2-b montrent respectivement l'évolution de la profondeur d'eau et de la vitesse longitudinale. Une excellente concordance est obtenue entre les résultats numériques et analytiques. La comparaison montre que, à cette condition, le modèle proposé, qui utilise la technique de projection, peut prévoir exactement l'onde choc sans créer d'oscillations

numériques.

Fennema et Chaudhry (Fennema R.J. and Chaudhry M.H, 1987) ont montré que pour un rapport h_2/h_1 plus petit que 0.05, la plupart des modèles numériques existants ne peuvent pas donner des résultats précis en particulier sur le front. Les dernières simulations, avec $h_2/h_1 = 0.1, 0.05$ et 0.04 (voir Figure 6-3, Figure 6-4 et Figure 6-5), créent des écoulements supercritiques en aval et sous critiques en amont. Pour $h_2/h_1 = 0.05$, la solution numérique est légèrement décalée de la solution analytique. Lorsque $h_2/h_1 = 0.04$, une oscillation légère et non physique se produit sur le front de choc. A partir de la valeur $h_1/h_2 = 0.01$, le modèle actuel n'est plus assez bon pour capturer les ondes discontinues (Nguyen K.D. et al., 2006). Ces résultats rejoignent les remarques précédemment citées de (Fennema R.J. and Chaudhry M.H, 1987). On remarque par ailleurs que, par rapport à la solution analytique, la propagation du front de choc calculée s'avance plus vite et la hauteur d'eau ainsi que la vitesse calculées sont légèrement inférieures.

Nous étudions également l'influence du rapport h_2/h_1 sur la célérité de l'onde choc. La Figure 6-6 a) et b) présentent l'évolution de la hauteur d'eau et de la vitesse longitudinale pour les valeurs $h_2/h_1 = 0.5$ et $h_2/h_1 < 0.5$. On note qu'en régime d'écoulement super critique ($h_2/h_1 \leq 0.138$), la décroissance du rapport h_2/h_1 fait augmenter la célérité du front de choc. Cependant, ce phénomène n'est pas évident pour les écoulements sous critiques. Les résultats obtenus par (Tseng M.H. and Chu C.R., 2000), qui valident ce cas-test en utilisant un schéma TVD, approuvent également ces remarques.

6.1.5 Conclusion

Le rapport h_2/h_1 est en grande partie responsable du problème d'instabilités numériques qui se produisent dans la simulation de l'écoulement torrentiel dus à la rupture de barrage. La difficulté du problème augmente avec la décroissance du rapport h_2/h_1 . Pour des valeurs de $h_2/h_1 > 0.05$, les résultats numériques donnent une bonne coïncidence avec la solution analytique. Il est évident que, en l'état actuel du développement, le modèle proposé, qui utilise la technique de projection, est bien capable de simuler les écoulements torrentiels avec une bonne capture du front de choc pour le rapport $h_2/h_1 > 0.05$. Il ne l'est plus lorsque ce rapport passe en dessous de cette valeur.

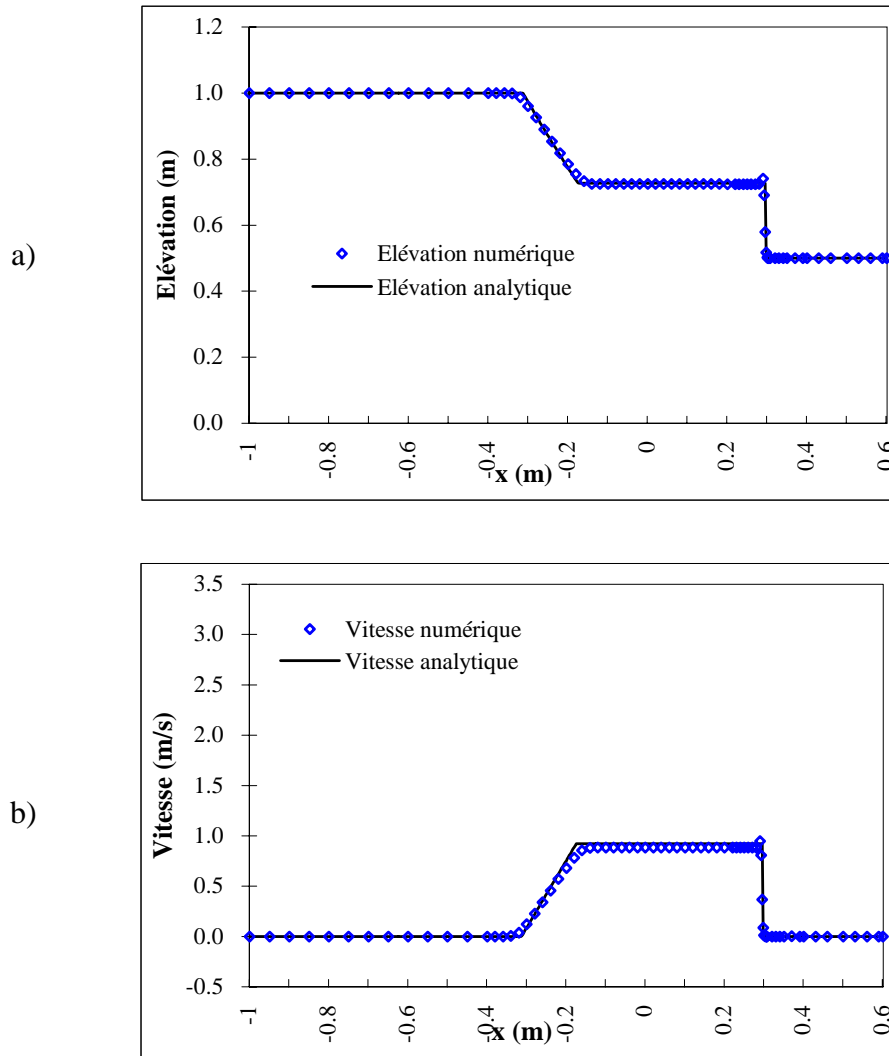


Figure 6-2 Comparaison des résultats pour $h_2/h_1 = 0.5$ à $t = 0.1$ s ($h_1 = 1.0$ m $h_2 = 0.5$ m):

a) Hauteur d'eau ; b) Vitesse longitudinale

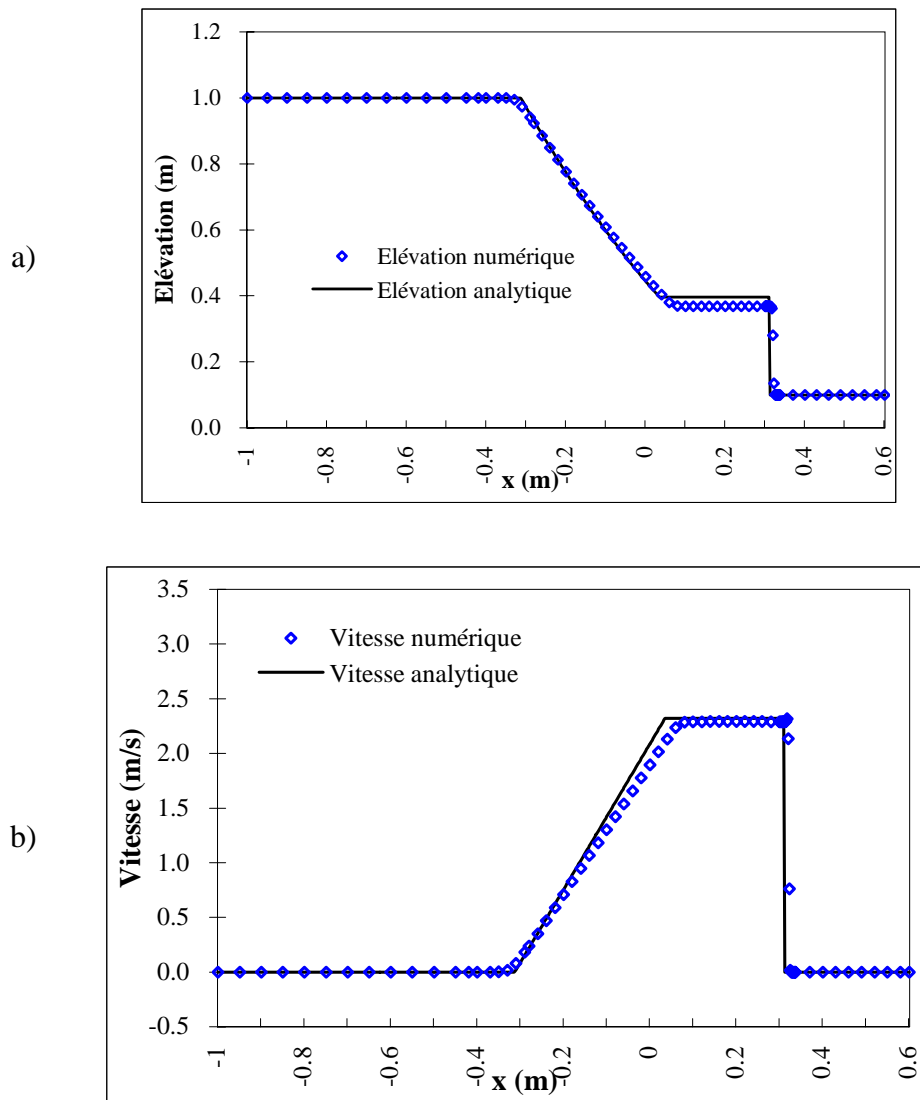


Figure 6-3 Comparaison des résultats pour $h_2/h_1 = 0.1$ à $t = 0.1$ s ($h_1 = 1.0$ m $h_2 = 0.1$ m):

a) Hauteur d'eau ; b) Vitesse longitudinale

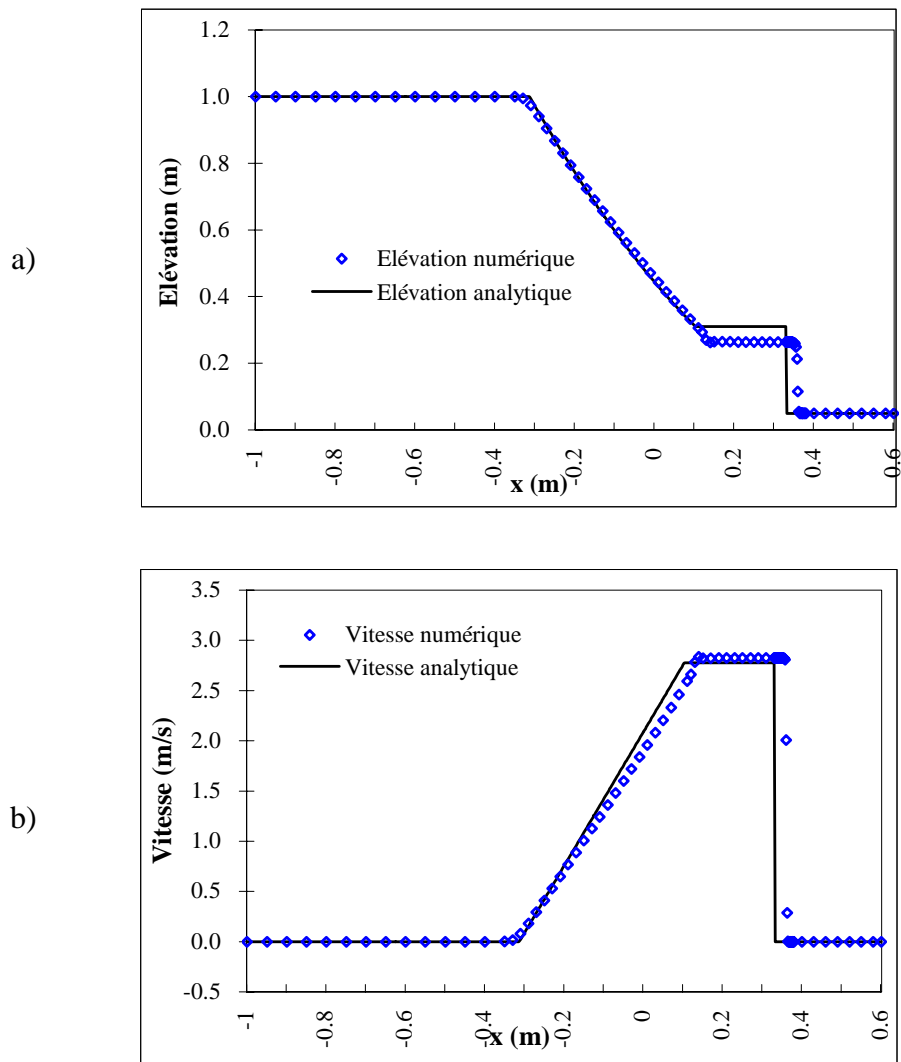


Figure 6-4 Comparaison des résultats pour $h_2/h_1 = 0.05$ à $t = 0.1$ s

$$(h_1 = 1.0m \quad h_2 = 0.05m):$$

a) Hauteur d'eau ; b) Vitesse horizontale

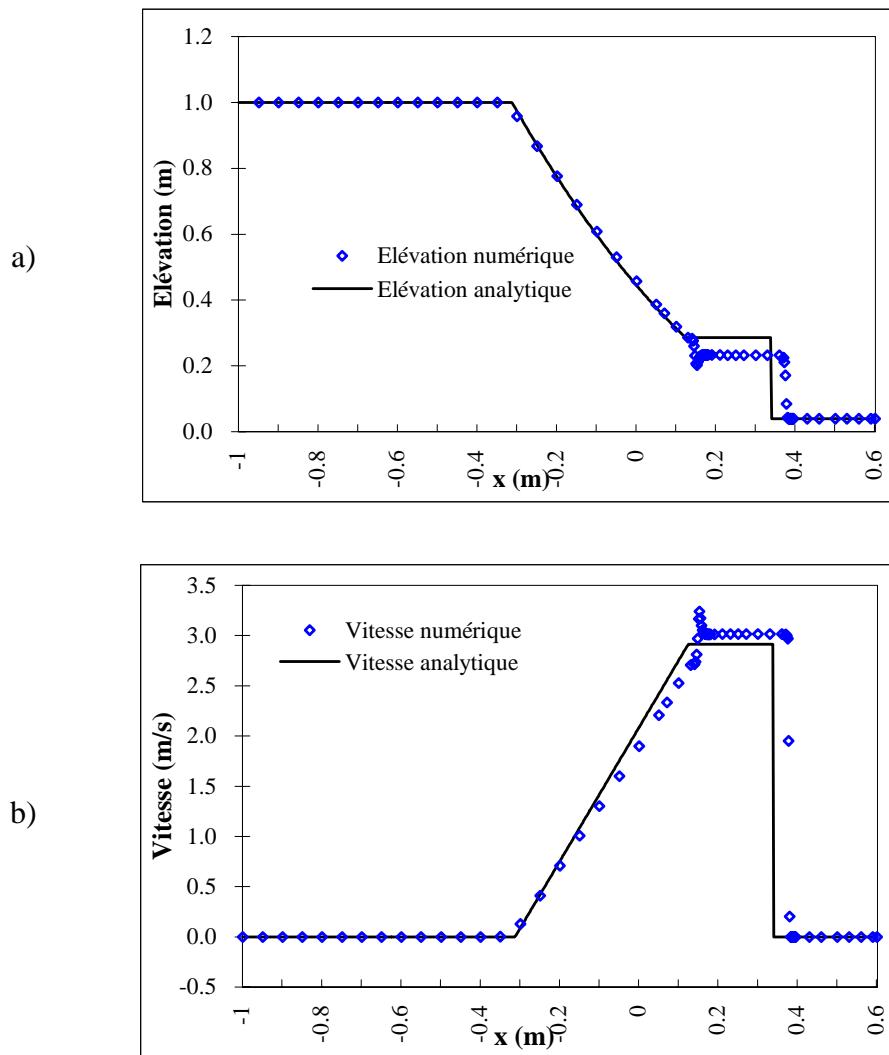


Figure 6-5 Comparaison de résultat pour $h_2/h_1 = 0.04$ à $t = 0.1$ s ($h_1 = 1.0$ m $h_2 = 0.04$ m):

a) Hauteur d'eau ; b) Vitesse horizontale

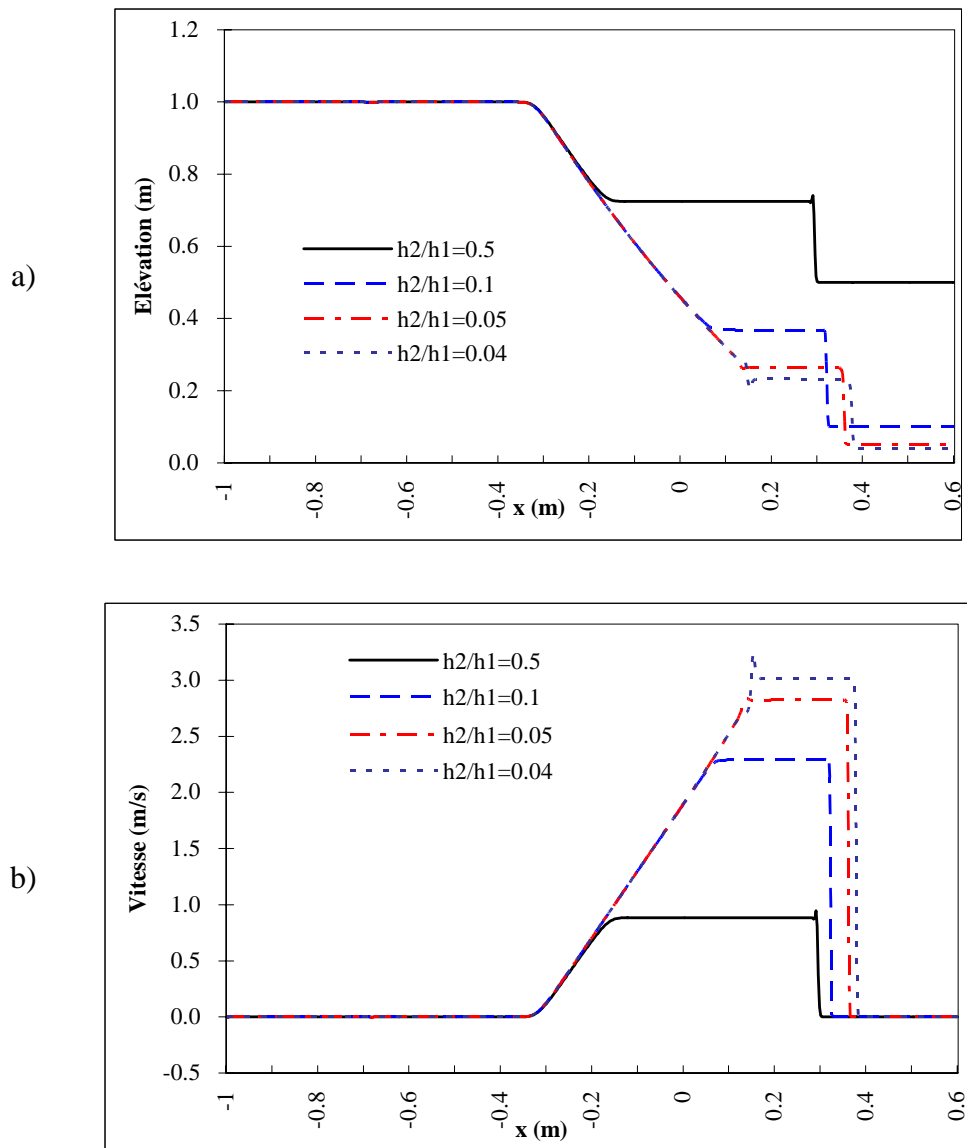


Figure 6-6 Résultats numériques pour tous rapports $h_2/h_1 = 0.5, 0.1, 0.05$ et 0.04

a) Hauteur d'eau ; b) Vitesse longitudinale

6.2 Problème de rupture partielle de barrage

6.2.1 Objectifs

Le cas-test précédent était unidimensionnel. Dans la réalité, les écoulements torrentiels dus à une rupture de barrage et de segments de digues sont souvent de nature bidimensionnelle. Par conséquent, l'objectif de ce cas-test est de vérifier la capacité du modèle proposé à reproduire la propagation bidimensionnelle de crues en la présence d'un front discontinu de la hauteur d'eau et de la vitesse sur un fond mouillé.

6.2.2 Description du problème

Ce cas-test consiste à étudier l'écoulement torrentiel dû à une rupture partielle et asymétrique de barrage. Ce cas-test, qui a été proposé par Fennema et Chaudhry (Fennema R.J. and Chaudhry M.H, 1990), est largement utilisé par de nombreux modélisateurs pour valider leurs modèles de rupture de barrage. L'intérêt particulier de ce problème est que sa solution est caractérisée par i) une onde de choc qui se propage vers l'aval en y augmentant brusquement la hauteur d'eau et se modifie par une onde de réflexion (lorsqu'elle se heurte à la paroi) ; et par ii) une onde de raréfaction (de dépression), qui se déplace vers l'amont en y diminuant la hauteur d'eau, souvent décrite comme choc de raréfaction (Erduran K.S. et al., 2002).

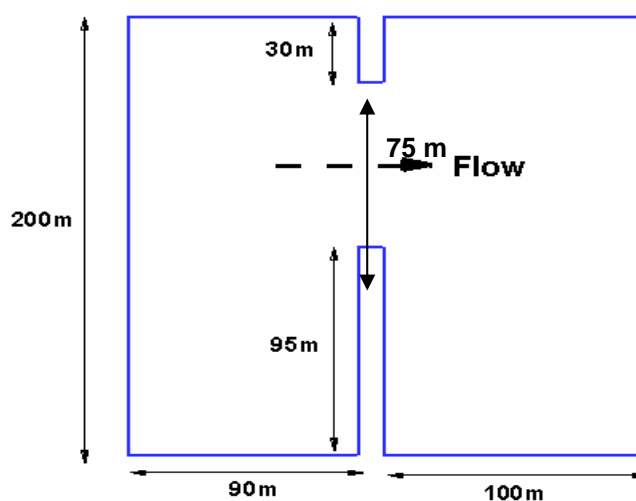


Figure 6-7 Rupture partielle de barrage : Géométrie du bassin

Etudions un bassin de 200 m de large, 200 m de long et de fond plat, sans frottement. L'eau est retenue dans la partie gauche du bassin. On suppose qu'à $t = 0$, brusquement le barrage du réservoir est en rupture partielle et non symétrique sur une longueur de 75 m. L'épaisseur du barrage est de 10 m sur la direction des écoulements. La Figure 6-7 donne une description géométrique de ce problème.

Conditions initiales:

Un rapport de $h_2/h_1 = 0.5$ est initialement fixé avec $h_1 = 10$ m comme hauteur d'eau dans le réservoir et $h_2 = 5$ m comme hauteur d'eau en aval du barrage. L'eau dans le bassin est en repos à $t = 0$, c'est-à-dire $u = v = 0$ partout.

Conditions aux limites:

Le bassin est fermé sur les quatre côtés. Une condition dite de « non glissement » est imposée à toutes les parois.

6.2.3 Paramètres numériques

Le domaine étudié a été discrétisé en 3100 triangles dont les tailles sont régulièrement fixées à 5 m. Le pas de temps $\Delta t = 0.01s$ pour toutes les simulations. La durée de simulation est de 10.2 s comptée à partir de la rupture de barrage. Dans ce même cas-test, Fennema et Chaudhry (Fennema R.J. and Chaudhry M.H, 1990) (désormais cette référence sera notée par F&C) ont utilisé une grille de calcul rectangulaire dont le pas d'espace est également de 5m.

6.2.4 Résultats et discussion

De nombreux chercheurs ont également réalisé ce cas-test. On peut citer parmi eux : (Alcrudo F. and Garcia-Navarro P, 1993), (Glaister P.A., 1993) ,(Hanich L., 1996), (Zhao D.H. et al., 1996), (Anastasiou K. and Chan C.T., 1997), (Mingham C.G. and Causon D.M., 1998), (Louaked M. and Hanich L., 1998), (Tseng M.H. and Chu C.R., 2000), (Le Fessant A.-L., 2001), (Erduran K.S. et al., 2002), (SHI Y.E. and Nguyen K.D., 2005).

Les Figure 6-8, Figure 6-9, Figure 6-10, Figure 6-11, Figure 6-12, Figure 6-13 et Figure 6-14 représentent les résultats obtenus par le modèle proposé à $t = 2.2$ s, 4.2 s, 6.2 s, 7.1 s, 7.2 s, 8.2 s et 10.2 s, respectivement. Les résultats sont visualisés en trois types de figures : surface libre en trois dimensions (section a) ; contour de dénivellation (section b) et

champs de vecteurs vitesses (section c). A $t = 7.1$ s, le front d'onde est parvenu jusqu'à la paroi gauche du bassin ; le front est bien développé dans la partie centrale en aval. Ces résultats semblent très similaires à ceux présentés par les études existantes et précédemment mentionnées.

Nous remarquons unhaussement très léger de la surface libre au niveau du front d'onde. On observe également cehaussement dans F&C, sans viscosité artificielle [voir la fig. 4 dans (Fennema R.J. and Chaudhry M.H, 1990)]. Les résultats obtenus par le modèle proposé sont très comparables aux résultats de F&C.

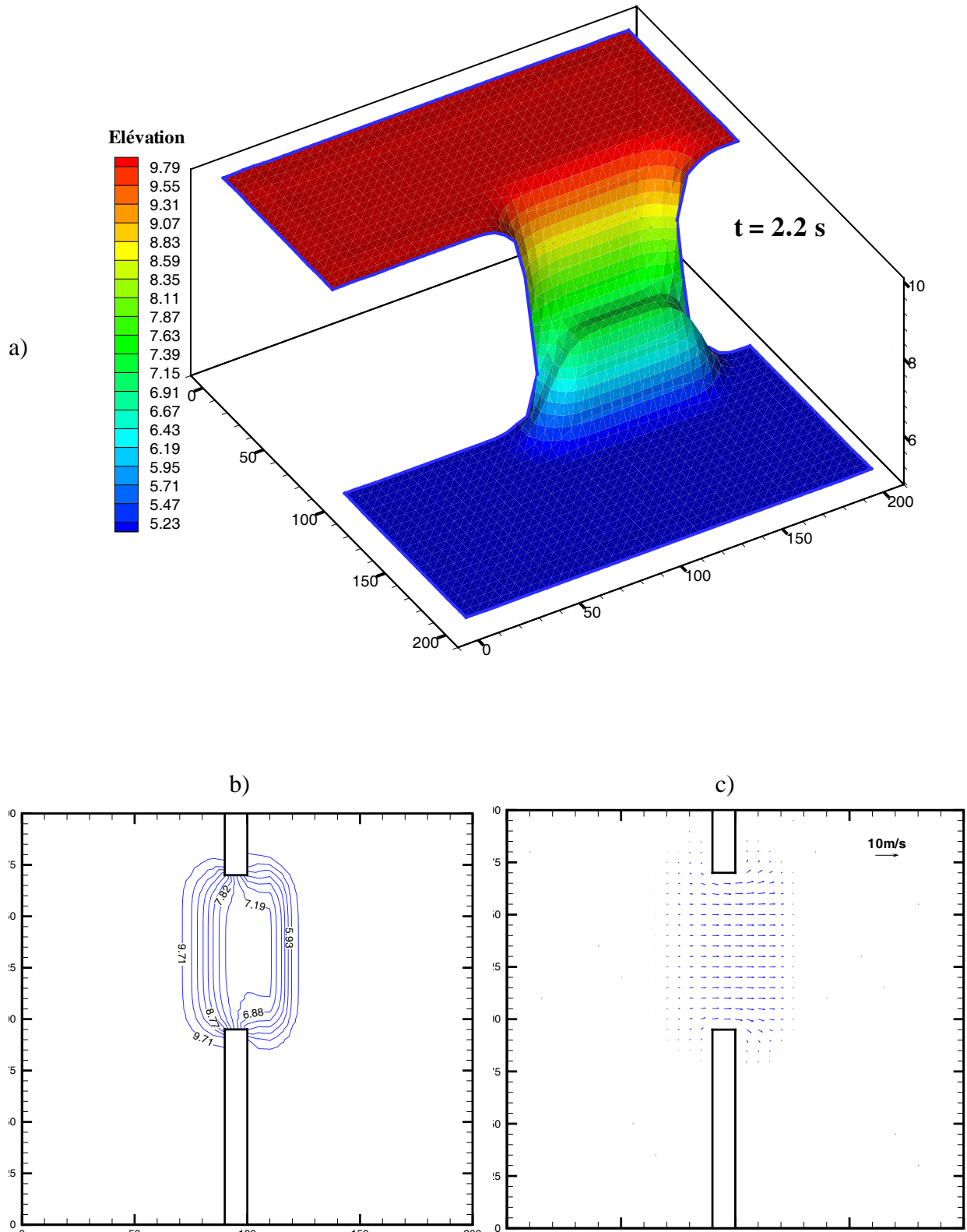


Figure 6-8 Résultats obtenus par le modèle à $t = 2.2$ s :

a) Surface libre en 3D ; b) Contour de dénivellation ; c) Champ de vecteurs vitesses

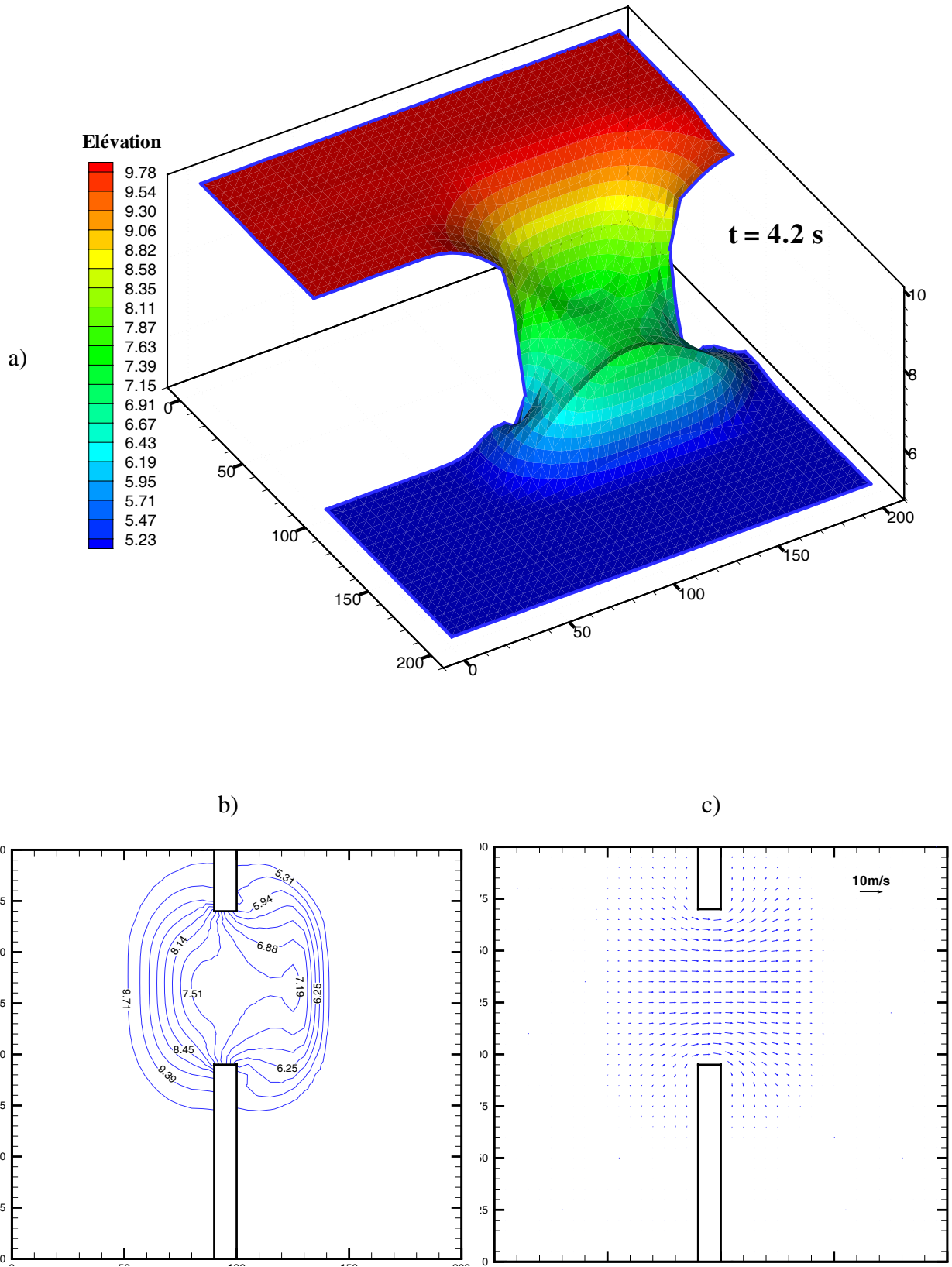
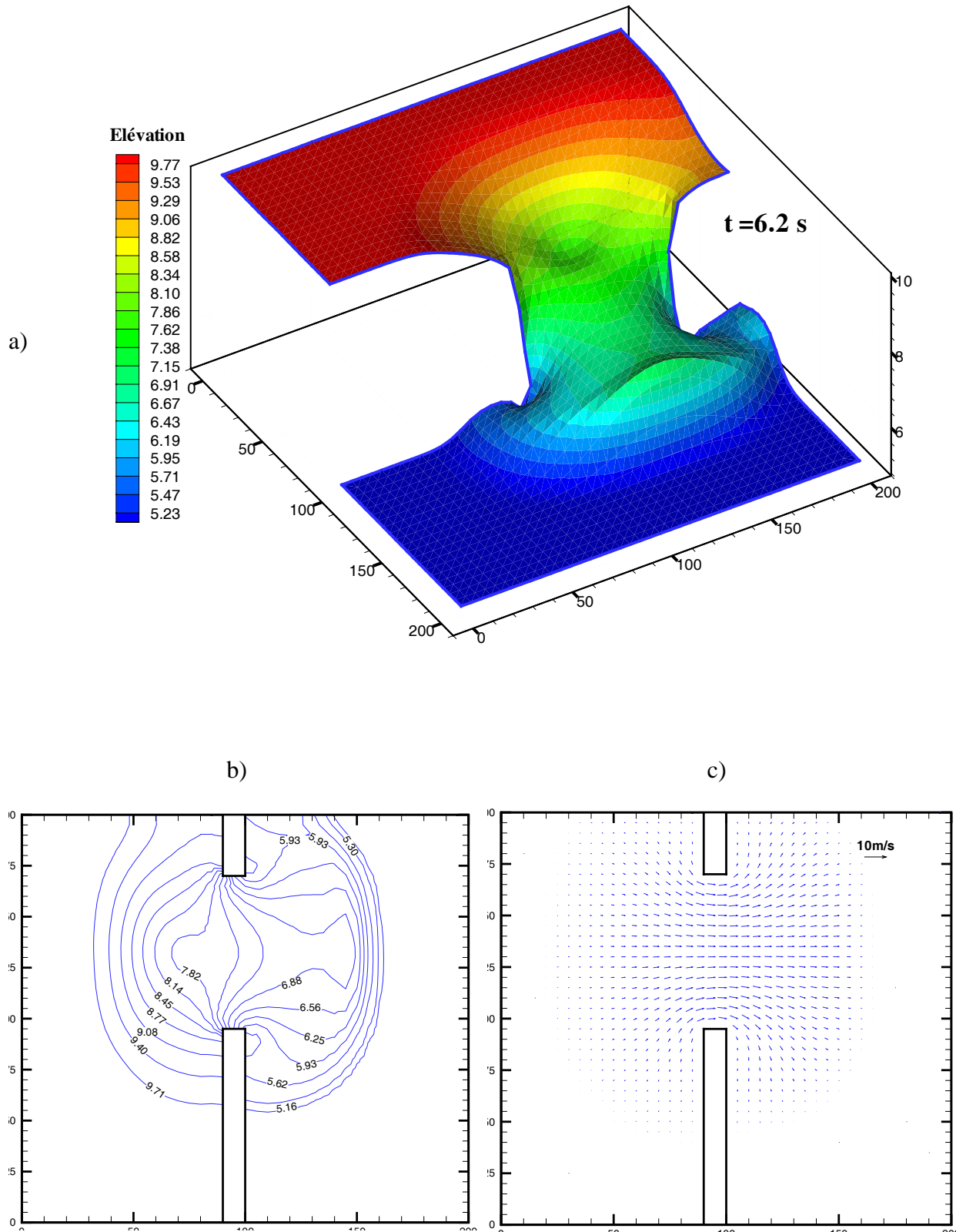


Figure 6-9 Résultats obtenus par le modèle à $t = 4.2$ s :

a) Surface libre en 3D ; b) Contour de dénivellation ; c) Champ de vecteurs vitesses

Figure 6-10 Résultats obtenus par le modèle à $t = 6.2$ s :

a) Surface libre en 3D ; b) Contour de dénivellation ; c) Champ de vecteurs vitesses

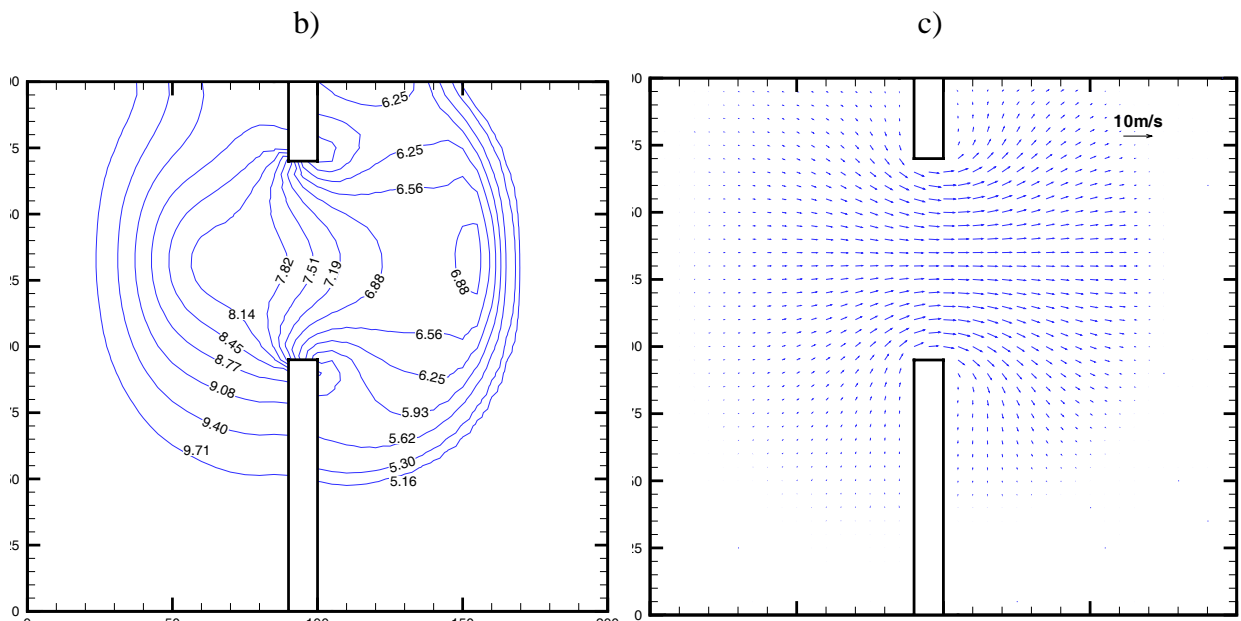
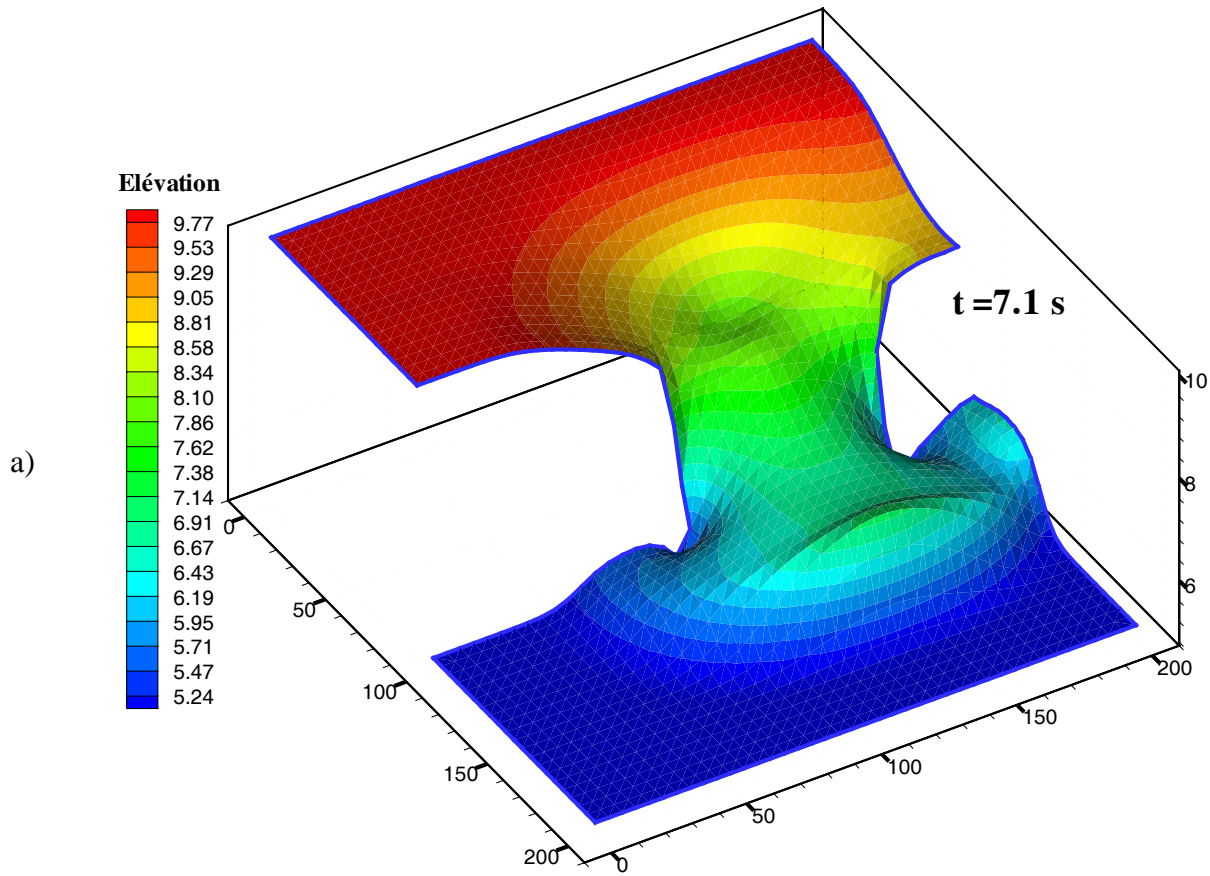
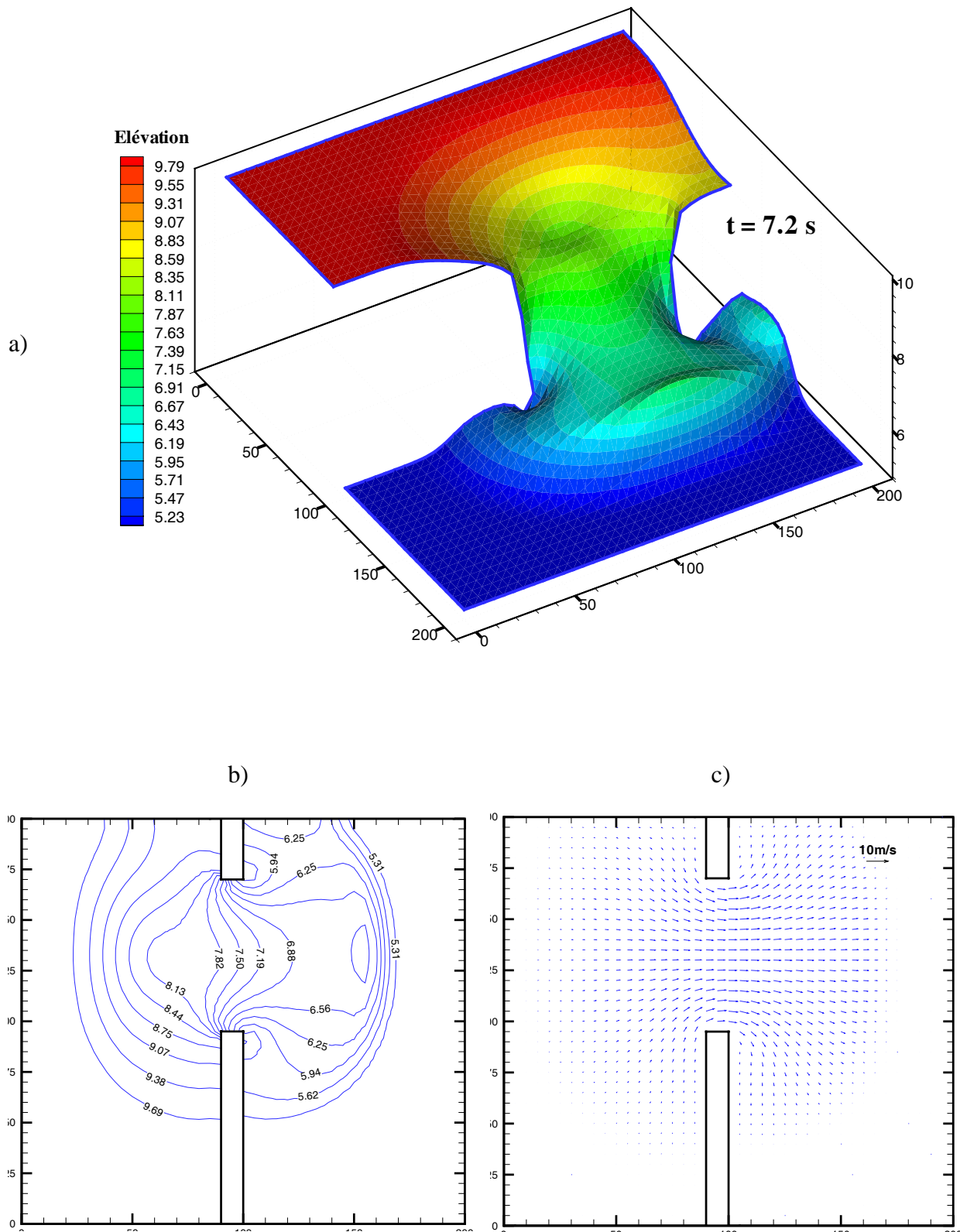


Figure 6-11 Résultats obtenus par le modèle à $t = 7.1$ s :

a) Surface libre en 3D ; b) Contour de dénivellation ; c) Champ de vecteurs vitesses

Figure 6-12 Résultats obtenus par le modèle à $t = 7.2$ s :

a) Surface libre en 3D ; b) Contour de dénivellation ; c) Champ de vecteurs vitesses

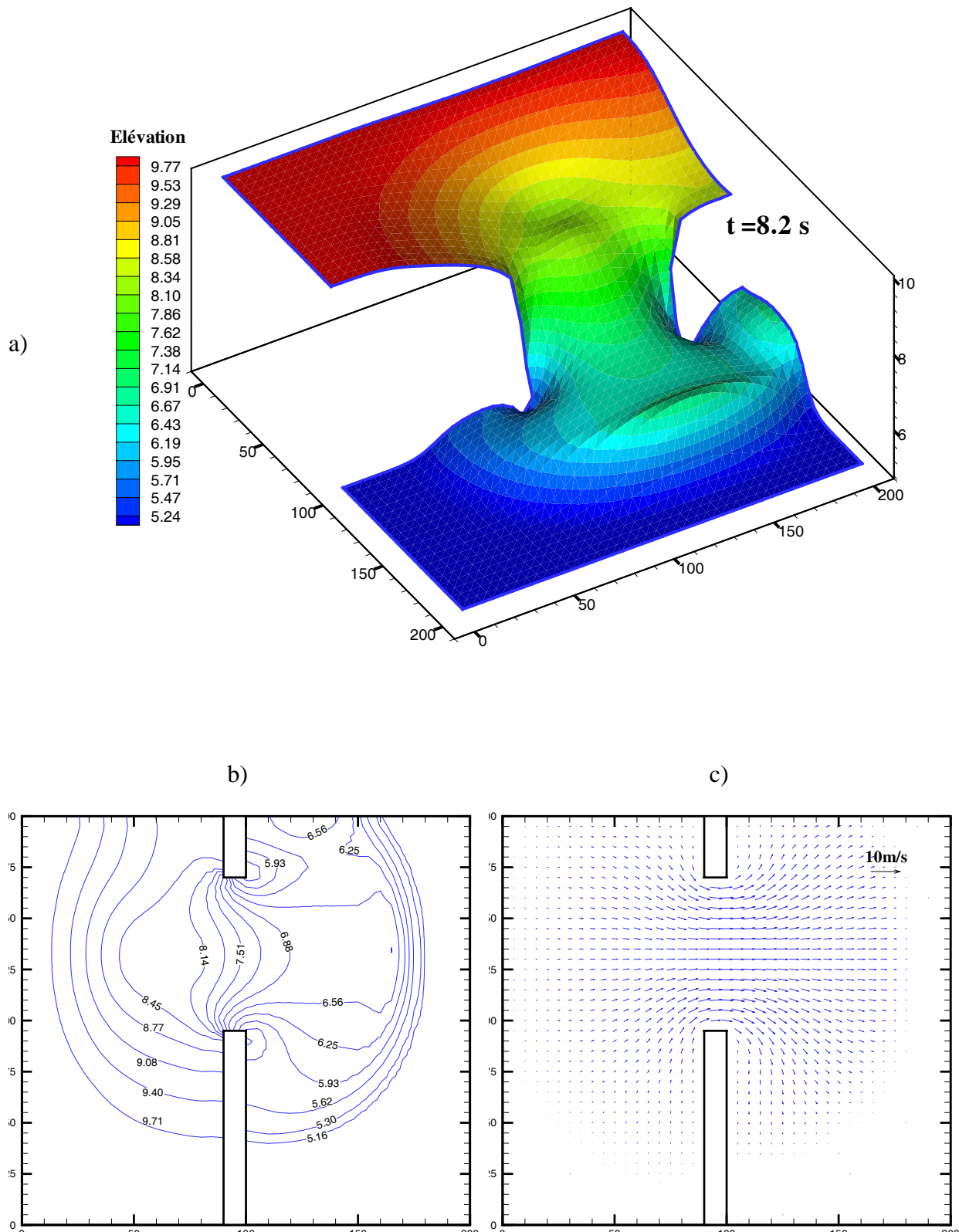


Figure 6-13 Résultats obtenus par le modèle à $t = 8.2$ s :

a) Surface libre en 3D ; b) Contour de dénivellation ; c) Champ de vecteurs vitesses

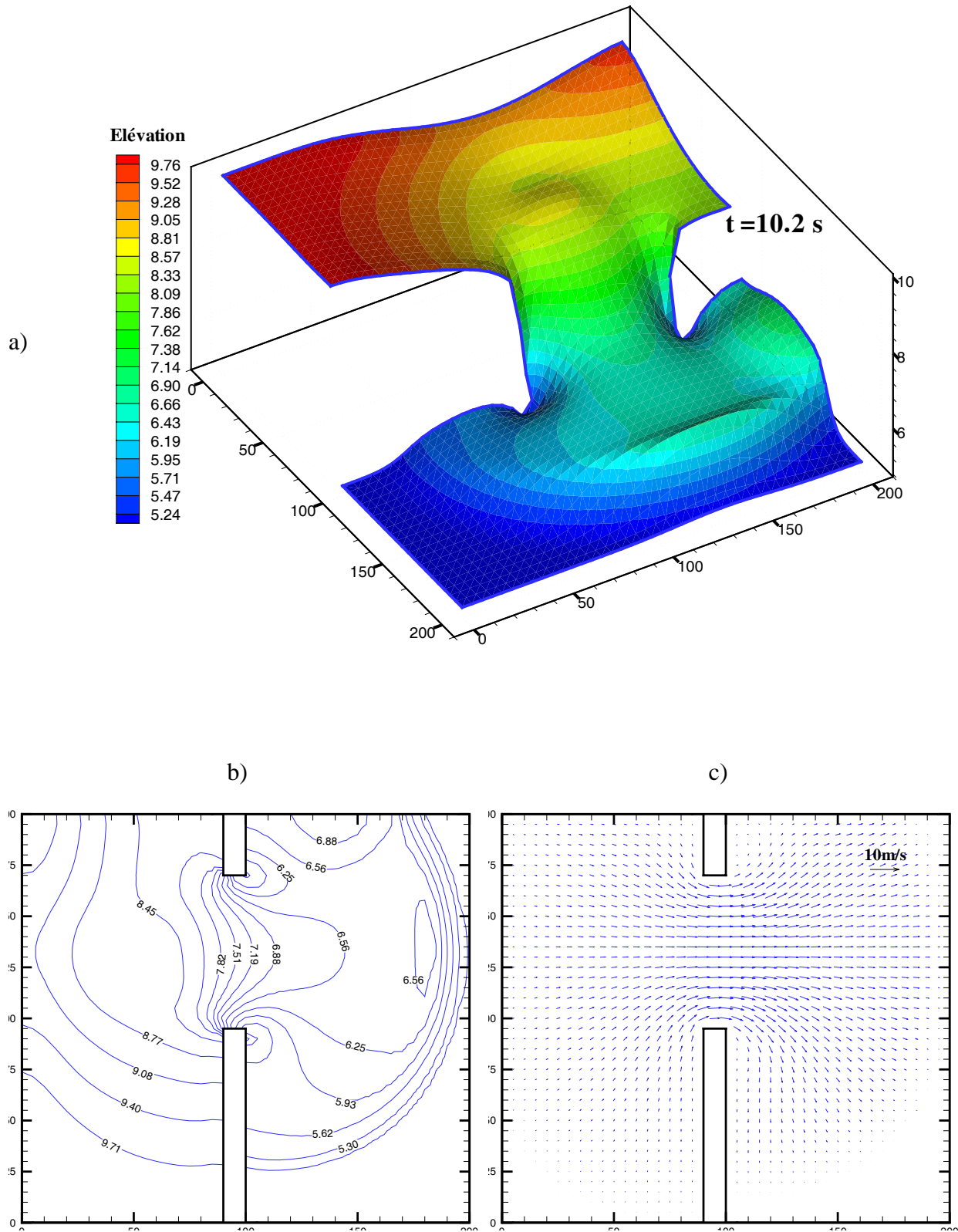


Figure 6-14 Résultats obtenus par le modèle à $t = 10.2$ s :

a) Surface libre en 3D ; b) Contour de dénivellation ; c) Champ de vecteurs vitesses

Nous effectuons une comparaison quantitative entre les résultats obtenus par notre modèle et ceux par F&C (Fennema R.J. and Chaudhry M.H, 1990). Dans le modèle de F&C, deux schémas numériques ont été utilisés : MacCormack et Gabutti. Le schéma MacCormack consiste à résoudre directement les équations de Saint-Venant en formulation « débit-hauteur » (2-86) à (2-88) en deux étapes : Prédicteur et Correcteur. Le schéma de différences finies pour l'étape de « prédicteur » est « backward » (en arrière). Il est « forward » (en avant) pour l'étape de « correcteur ». Le schéma de Gabutti diagonalise les Jacobiens de la matrice \mathbf{E} et \mathbf{G} des équations de Saint-Venant (2-86) à (2-88) en matrices des valeurs propres. Celles-ci sont ensuite décomposées en deux parties : positive et négative. Avec cette technique, la propagation du signal est correctement simulée le long des lignes caractéristiques quel que soit le régime d'écoulement (sous critique ou supercritique). D'après F&C, le schéma de Gabutti est légèrement plus robuste que celui de MacCormack. Ce dernier a échoué pour le même cas-test lorsque le rapport $h_2/h_1 < 0.25$ tandis que le schéma de Gabutti défaille seulement pour des valeurs de $h_2/h_1 < 0.20$.

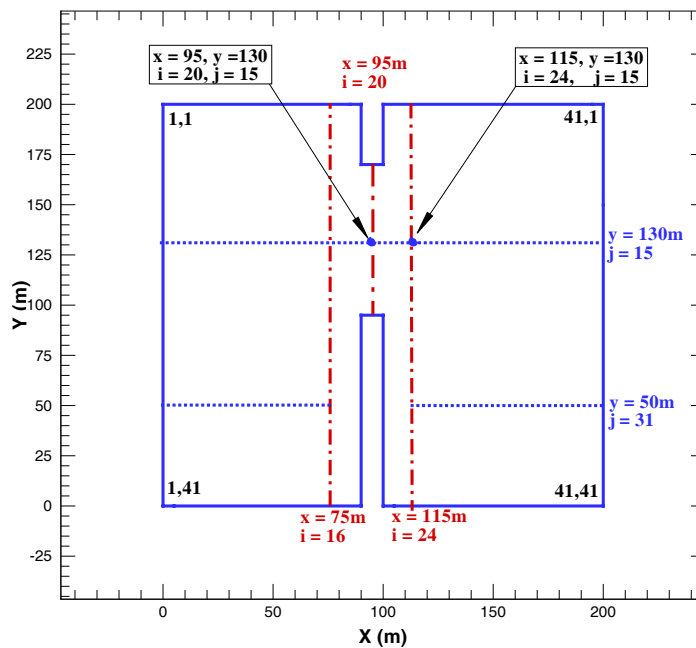


Figure 6-15 Position des points de référence

La Figure 6-15 donne les coordonnées des points de référence utilisés dans l'étude comparative de ces deux résultats. La Figure 6-16 présente les profils en travers de la surface libre calculés par notre modèle et par F&C, est l'instant $t = 7.1$ s. La Figure 6-16 trace le profil en travers de la surface libre passant : a) par $x = 75$ m (en amont du barrage, qui

correspond à la position $i = 16$ dans F&C) ; b) par $x = 95 \text{ m}$ (juste à la brèche du barrage, $i = 20$) ; et c) par $x = 115 \text{ m}$ (en aval du barrage, $i = 24$).

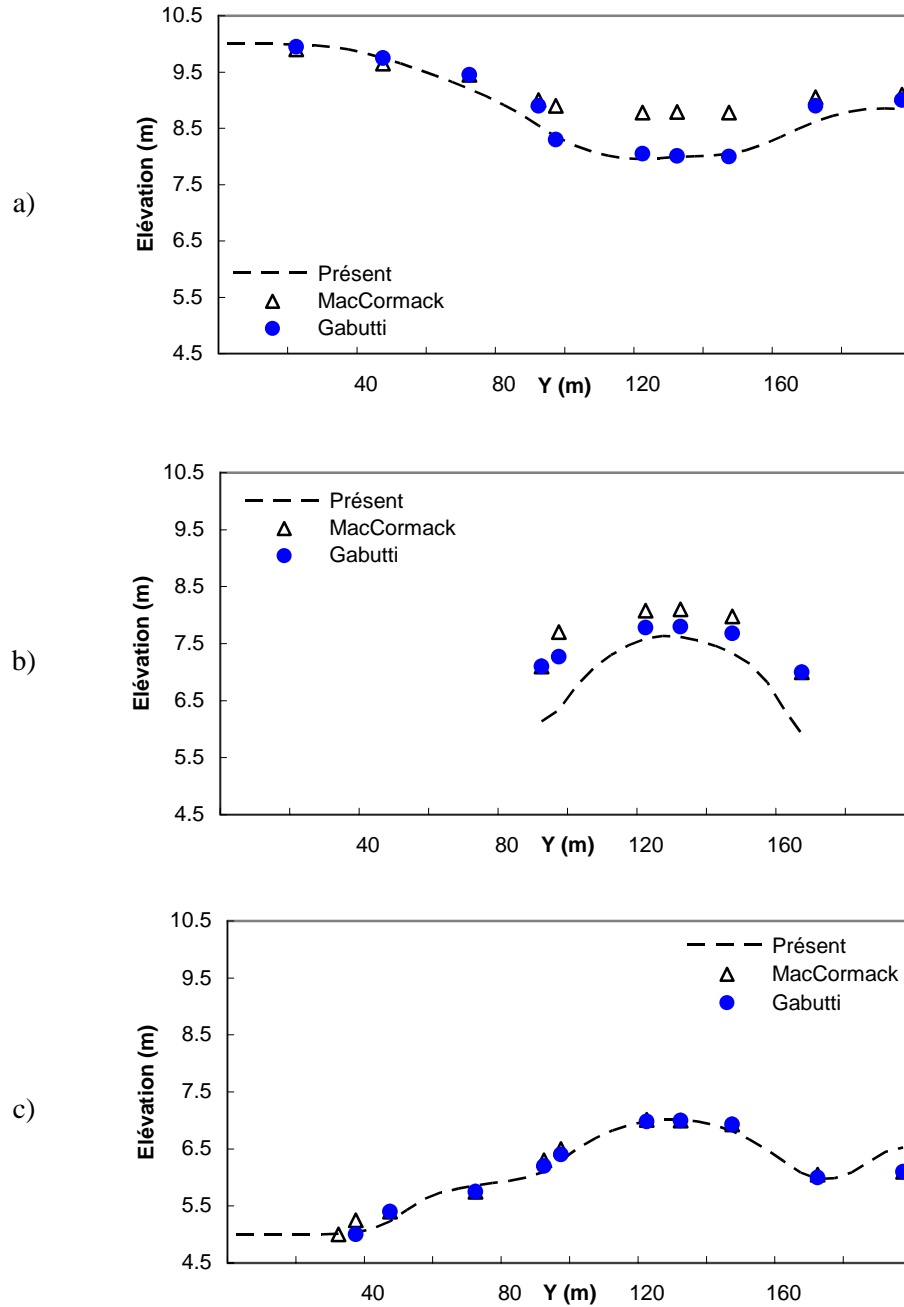


Figure 6-16 Profils transversaux calculés à $t = 7.1 \text{ s}$ et passés par :

a) $x = 75 \text{ m}$; b) $x = 95 \text{ m}$; c) $x = 115 \text{ m}$

La Figure 6-16 montre que nos résultats sont plus proches de ceux donnés par le schéma de Gabutti que ceux obtenus par le schéma de MacCormack. Cependant, les écarts maximaux

sont assez faibles.

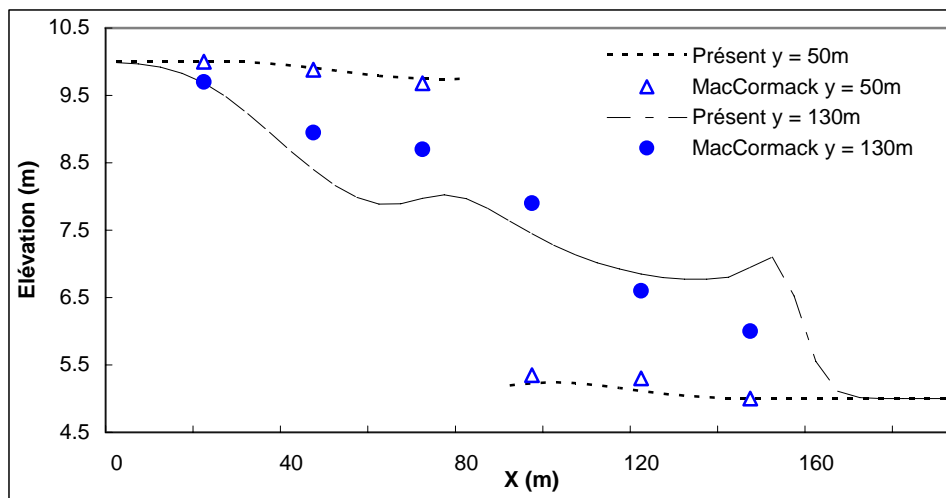


Figure 6-17 Profils longitudinaux calculés à $t=7.1$ s et passés aux différents endroits

On compare ensuite les profils longitudinaux calculés à $t=7.1$ s par notre modèle et par F&C et passés par différents endroits : ($y = 50$ m et $y = 130$ m). La Figure 6-17 présente les résultats obtenus par F&C avec le schéma de MacCormack. Les profils longitudinaux passant par $y = 50$ m, qui se compose en deux parties amont et aval du barrage, obtenus par deux modèles sont bien rapprochés l'un de l'autre. De légers écarts ont été constatés entre les deux profils calculés par notre modèle et par F&C avec le schéma de MacCormack, et passés par $y = 130$ m (au milieu de la brèche du barrage).

Finalement, l'évolution de la hauteur d'eau à deux points précis : point 1 $x = 95$ m, $y = 130$ m et point 2 $x = 115$ m, $y = 130$ m a été étudiée. La Figure 6-18 présente l'évolution de la surface libre en fonction du temps : a) au point 1, juste au milieu de la brèche du barrage ; et b) au point 2, en aval du barrage. Les courbes de F&C ont été obtenues en introduisant une viscosité artificielle afin d'effectuer un lissage de la surface libre. Nous remarquons que, à $t = 3$ s, la surface libre calculée au point 2 est plus élevée par rapport aux résultats de F&C et plus élevée que la surface libre au point 1 (voir la Figure 6-18 c). Ceci s'explique par le fait que le front de choc est passé par le point 2 juste à $t = 3$ s et y provoque unhaussement de la surface libre, comme nous l'avons précédemment mentionné.

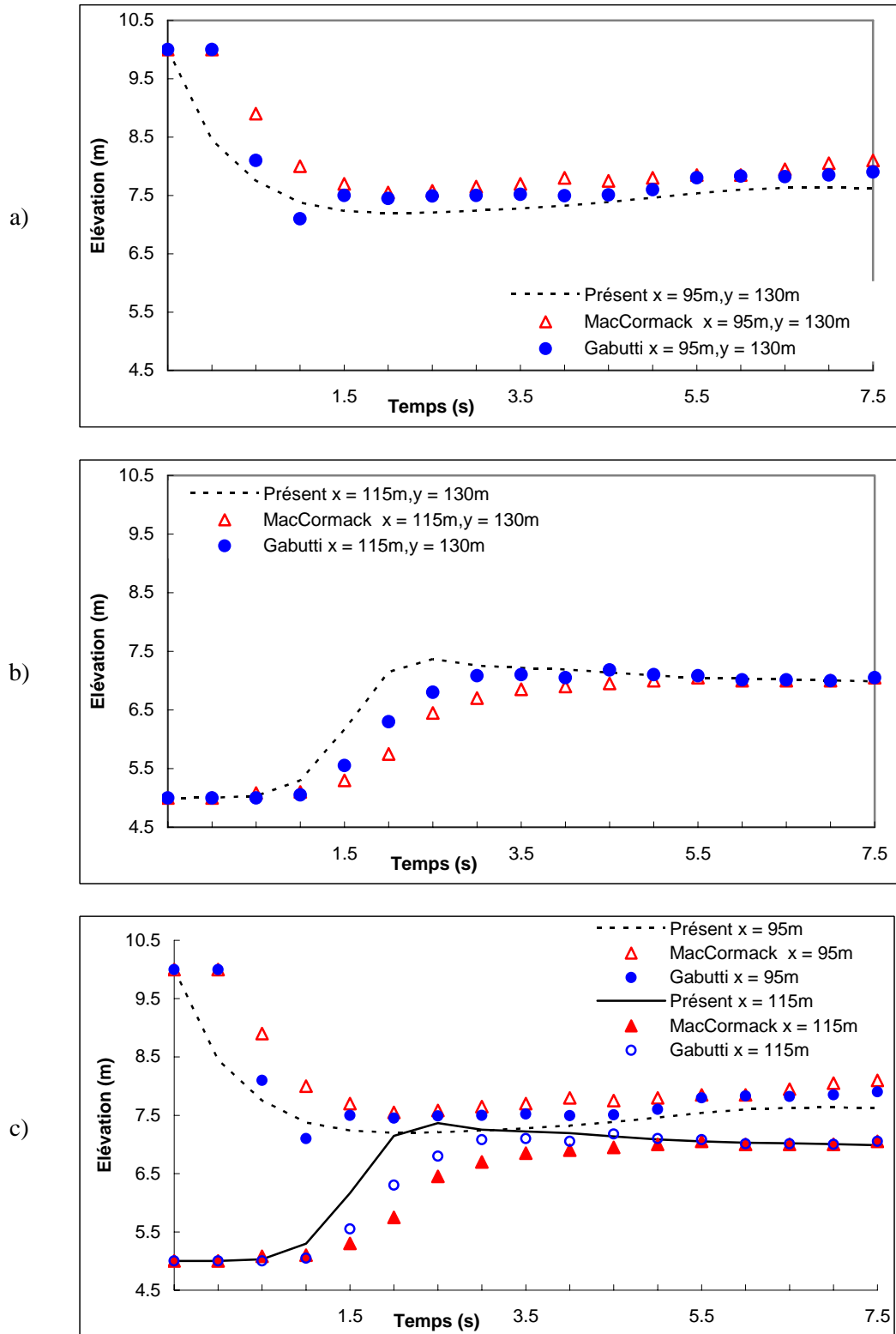


Figure 6-18 Evolution de la hauteur d'eau aux points 1 et 2 :

a) point 1 (x = 95, y = 130) ; b) point 2 (x = 115, y = 130) ; c) Ensemble de deux points

6.2.5 Conclusion

Dans l'ensemble, les résultats numériques obtenus par notre modèle sont en bonne cohérence avec les études existantes. La comparaison quantitative montre que nos résultats sont plus proches de ceux obtenus par F&C avec le schéma Gabutti que ceux avec le schéma de MacCormack. Bien que notre modèle soit basé sur la technique de projection, les résultats de ce cas-test prouvent indéniablement la capacité de notre modèle à capturer l'onde choc dans un problème bidimensionnel. Les différences maximales, qui restent très acceptables, sont observées dans la partie aval du barrage.

6.3 Rupture de barrage dans un canal du WES

6.3.1 Objectifs

Les deux cas-tests précédents concernent les écoulements dus à une rupture de barrage sur un fond plat, mouillé et sans frottement. Dans ces conditions, les termes source sont nuls et le problème est homogène. Dans le cas du fond sec et en grande pente, la modélisation des écoulements dus à une rupture de barrage se heurte à de nouvelles difficultés : termes source importants, frontière de l'écoulement ouverte, passage d'une zone sèche à une zone mouillée. Ces difficultés risquent de provoquer des instabilités numériques si elles ne sont pas traitées par des techniques numériques appropriées.

Le présent cas-test sert à évaluer la capacité du modèle proposé à calculer les écoulements torrentiels bidimensionnels sur un fond sec en grande pente ainsi que le traitement du passage d'une zone sèche à une zone mouillée. Il s'agit ici des expériences physiques conduites au WES (Waterways Experiment Stations (WES), 1960), de l'U. S. Army Corps of Engineers, pour lesquels on possède un certain nombre de mesures de vitesses et de hauteurs d'eau dans un canal de laboratoire.

6.3.2 Description du problème

Le canal étudié est de 122 m de long, 1.22 m de large. Le fond en pente de 0.005 est relativement lisse avec un coefficient de frottement de Manning $n = 0.009 \text{ s/m}^{1/3}$. Un barrage d'épaisseur infiniment petite, de 0.305 m de hauteur est situé à mi-longueur du canal. La brèche dont la largeur est de 0.122 m, se trouve juste au milieu du barrage.

Bradford et Sanders (Bradford S.F. and Sanders, 2002) ont utilisé ce cas-test pour valider leur modèle numérique, qui est basé sur la résolution des équations de Saint-Venant par un solveur de Riemann proposé par Roe (Roe P.L., 1981) en utilisant une méthode de volumes finis.

Conditions initiales :

Initialement la surface d'eau en amont du barrage est aussi haute que le barrage (0.305 m) et le fond en aval est sec. On suppose que, à $t = 0$ s'ouvre brusquement une brèche dont la position et la dimension ont été citées en dessus. La Figure 6-19 présente le canal et les conditions initiales.

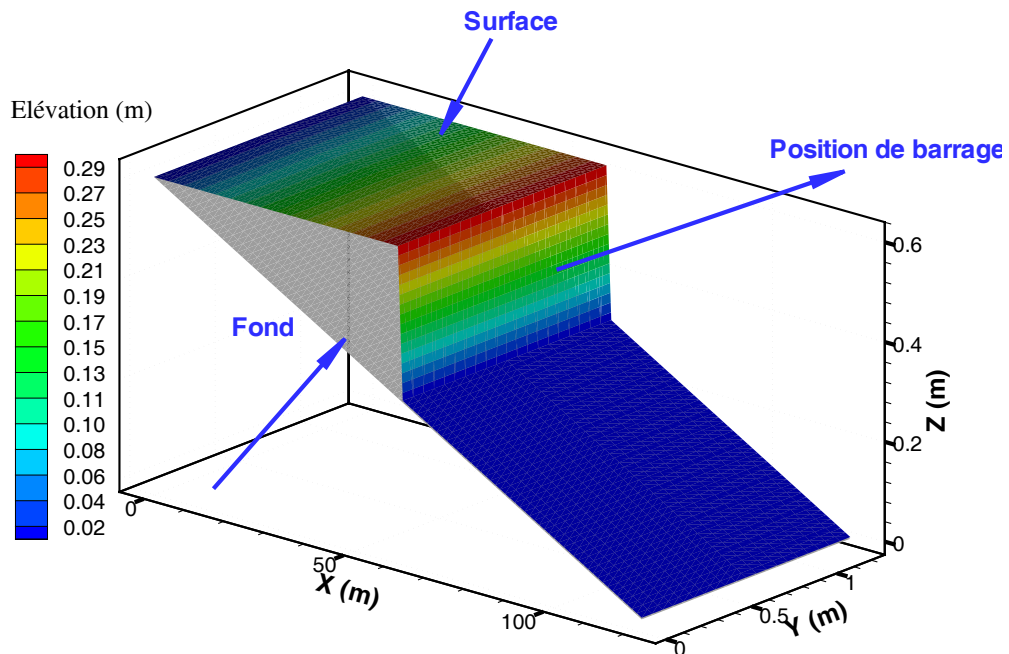


Figure 6-19 Conditions initiales du problème

Conditions aux limites :

A l'extrémité amont $x = 0$, le niveau de la surface libre $\eta = 0.61 \text{ m}$ est imposé et inchangé en cours de calcul. Comme l'écoulement est supercritique dans toute la partie aval du barrage, à l'extrémité aval $x = 122 \text{ m}$, la dénivellation de la surface libre et la vitesse sont déterminées par une méthode de caractéristiques. Sur les deux côtés latéraux du canal, une condition de non glissement est imposée.

6.3.3 Paramètres numériques

Le domaine est discrétisé par une grille de 4000 triangles, qui correspond parfaitement à la grille de calcul rectangulaire dont les pas d'espace sont $\Delta x = 1.22 \text{ m}$, $\Delta y = 0.061 \text{ m}$, utilisée par (Bradford S.F. and Sanders, 2002) (désormais notés par B&S). La durée de simulation est de 160 s. Le pas de temps est de 0.01 s.

Afin de maintenir une solution stable, une valeur de tolérance pour la profondeur d'eau $h_c = 0.005 \text{ m}$ est définie. La zone sera déclarée sèche lorsque la profondeur d'eau $h < h_c$.

6.3.4 Résultats et discussion

Les Figure 6-20 et Figure 6-21 présentent la surface libre en 3D, obtenue par notre modèle, à $t = 10, 32, 40, 80, 120$ et 160 s , respectivement.

La Figure 6-22 présente les contours de vitesse superposés sur la surface libre en 3D, à $t = 32 \text{ s}$. Dans cette figure, la zone ayant des vitesses élevées se trouve en aval du barrage. La Figure 6-23 donne le champ de vitesses au même instant, $t = 32 \text{ s}$.

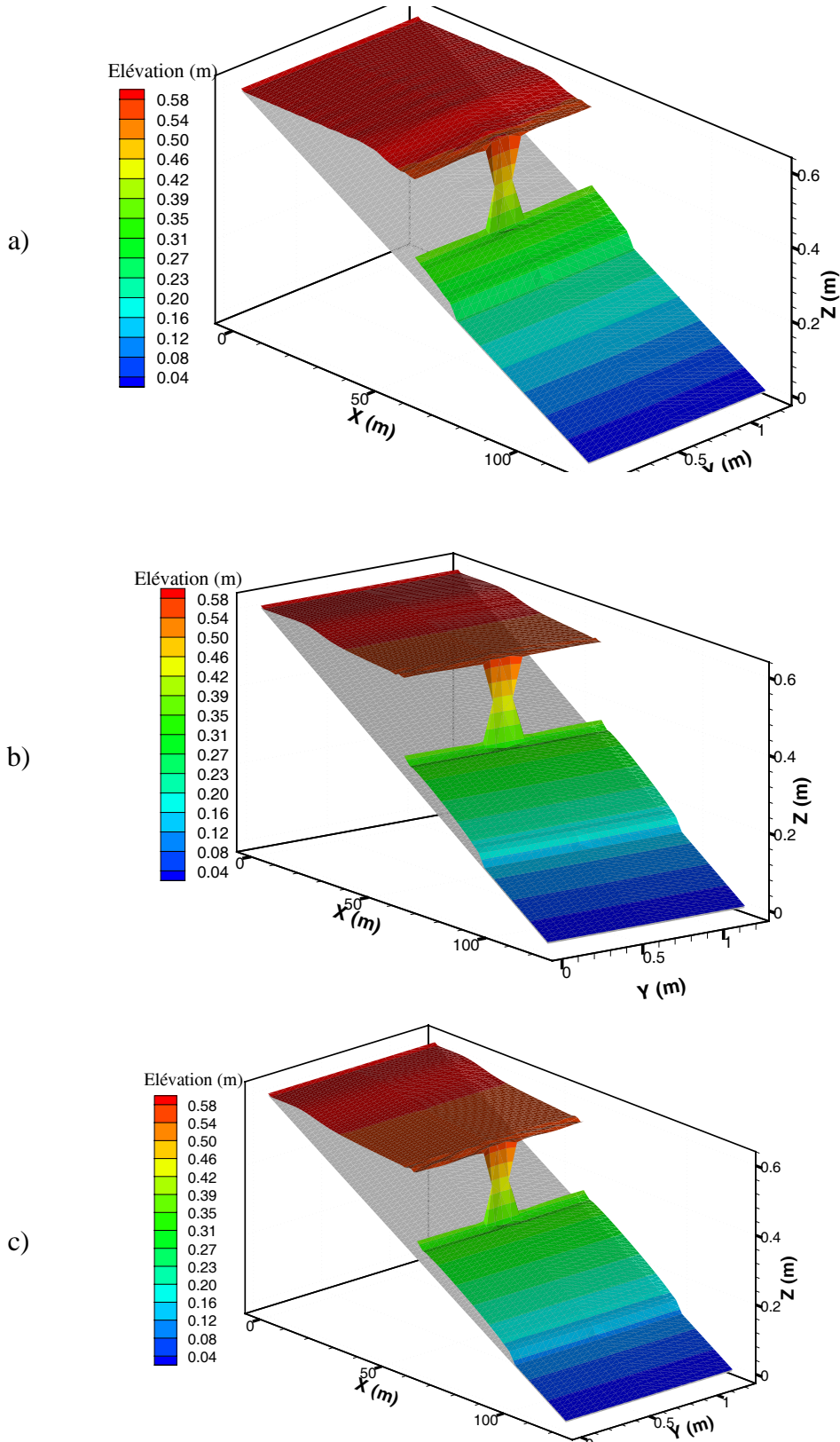


Figure 6-20 Surface libre de l'écoulement sur un fond incliné :

a) $t = 10 \text{ s}$; b) $t = 32 \text{ s}$; c) $t = 40 \text{ s}$

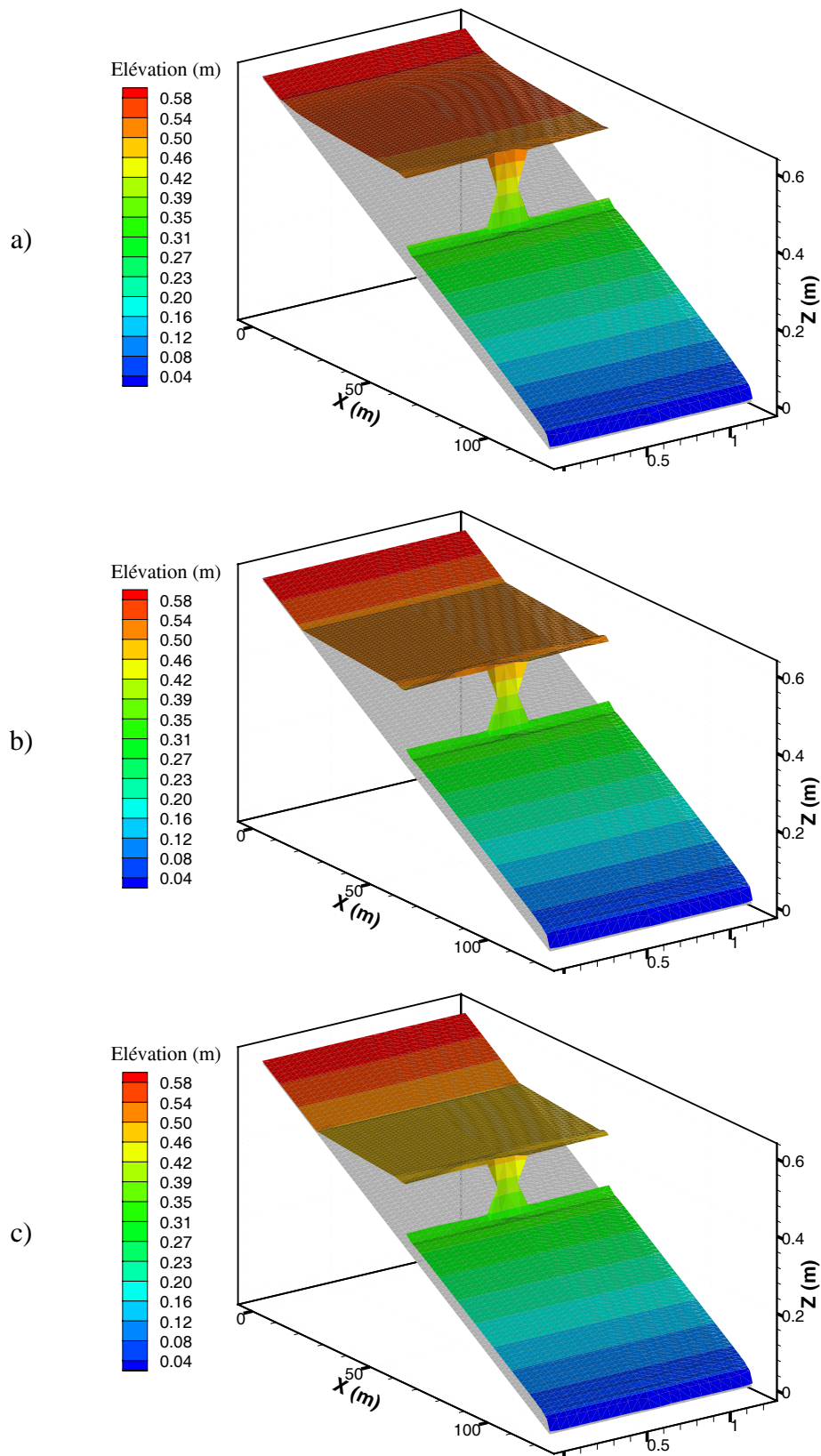


Figure 6-21 Surface libre de l'écoulement sur un fond incliné :

a) $t = 80$ s ; b) $t = 120$ s ; c) $t = 160$ s

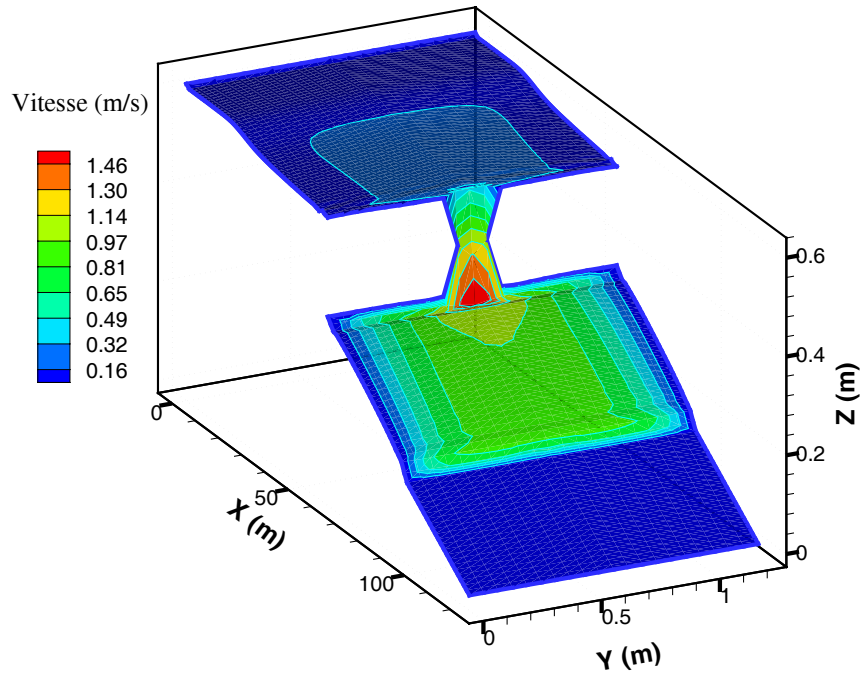


Figure 6-22 Contours de vitesse à $t = 32$ s superposés sur la surface libre

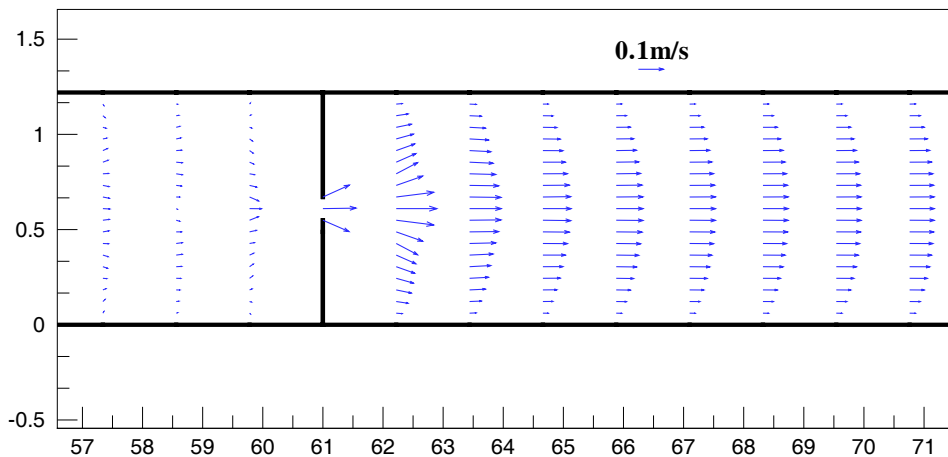


Figure 6-23 Champ de vitesse à $t = 32$ s

Ying (Ying X.Y. et al., 2004) testent ce problème pour vérifier leur schéma « upwind » conservatif, combiné avec une méthode de volumes finis dans un maillage structuré. Nous comparons nos résultats aux données expérimentales obtenues par WES (Waterways Experiment Stations (WES), 1960).

Les niveaux d'eau ont été mesurés aux stations : STA100, STA150, STA225 et STA350 tandis que les vitesses ont été seulement mesurées aux stations en aval du barrage

STA225 et STA350. Les positions des stations de mesure sont données dans la Figure 6-24. Les distances entre ces stations et l'extrémité gauche du bassin sont 30.5, 45.75, 68.625, et 106.75 m, respectivement.

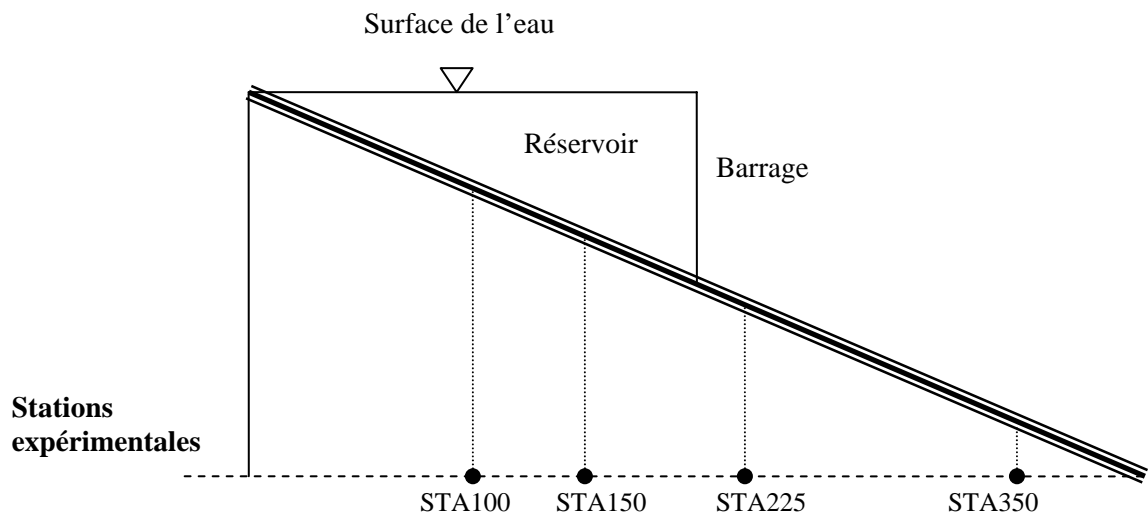


Figure 6-24 Position des stations de mesurée

La Figure 6-25 nous permet de comparer la hauteur d'eau $h(m)$ obtenue par notre modèle avec les mesures, sur deux stations en amont du barrage, STA100 et STA150. Le modèle numérique donne des valeurs de h presque identiques aux valeurs mesurées. Sur la Figure 6-25 nous pouvons constater que le modèle numérique prévient exactement l'arrivée de l'onde de dépression aux deux stations STA100 et STA150, bien que par la suite, la hauteur d'eau soit légèrement inférieure aux valeurs de mesures à la station STA150.

La Figure 6-25 a et b présente respectivement la hauteur d'eau et la vitesse obtenues par le modèle à la station STA225, en aval du barrage. La hauteur d'eau en très faibles valeurs (0.04m au maximal) est légèrement inférieure aux valeurs expérimentales. A $t = 6$ s, un front discontinu de la hauteur d'eau et de la vitesse se dresse. Dès lors la vitesse augmente brusquement et atteint, dans les 2 s qui suivent, sa valeur maximale qui est supérieure à la valeur mesurée. Nous observons ce même phénomène dans les travaux de B&S (Bradford S.F. and Sanders, 2002) et Ying (Ying X.Y. et al., 2004). A la Station STA350, les valeurs calculées de la hauteur d'eau se rapprochent bien des valeurs de mesures tandis que les valeurs de vitesses sont bien supérieures aux valeurs mesurées (Figure 6-27). Les résultats de B&S affichent exactement le même phénomène avec un écart plus important par rapport aux mesures que le nôtre. En fait d'après B&S, selon les données mesurées, l'écoulement à la

Station 225 et 350 reste encore transitoire et n'est pas complètement en régime « rugueux ». En conséquence, la formule de Manning utilisée permettait sous estime le coefficient de frottement sur le fond et donc surestime la valeur de la vitesse. Par ailleurs, B&S indiquent que cet écart n'est probablement pas dû à la performance de leur modèle mais plutôt lié aux techniques de mesures dans les expériences de WES. En effet, la vitesse a été simplement mesurée par chronométrage du mouvement des particules en surface et ensuite convertie en valeur moyenne sur la profondeur en la multipliant par 0.8. Ce facteur ne peut être justifiable comme le rapport entre la vitesse moyenne sur la profondeur et celle en surface que dans un écoulement stationnaire et uniforme.

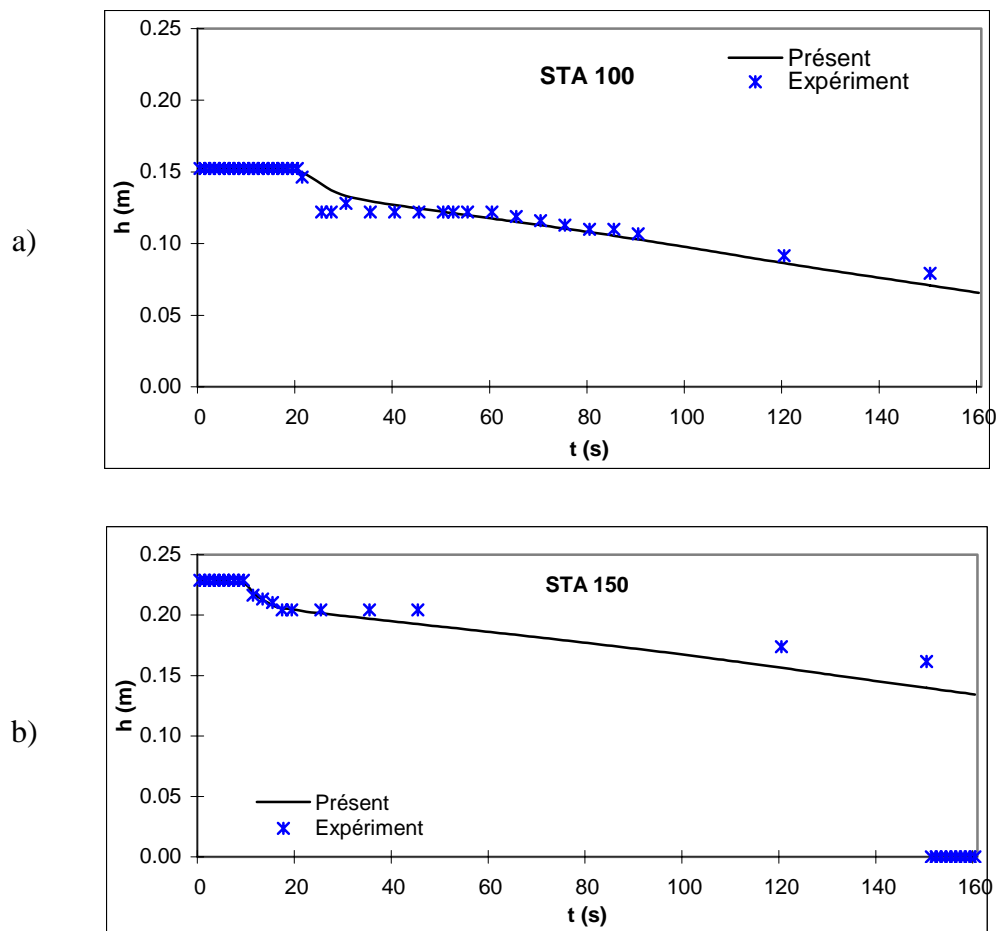


Figure 6-25 Comparaison de la hauteur d'eau calculée avec les données expérimentales :

a) STA100 ; b) STA150

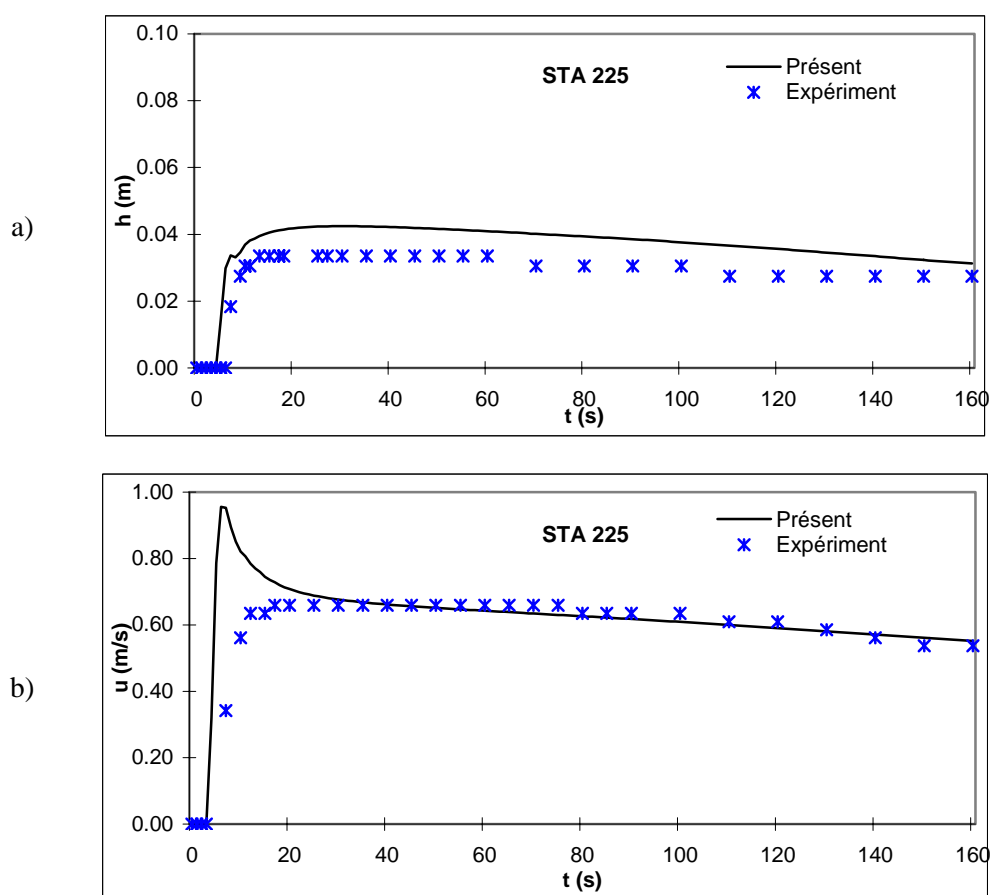


Figure 6-26 Comparaison de la solution numérique avec les données expérimentales à STA225: a) Hauteur d'eau h ; b) Vitesse u

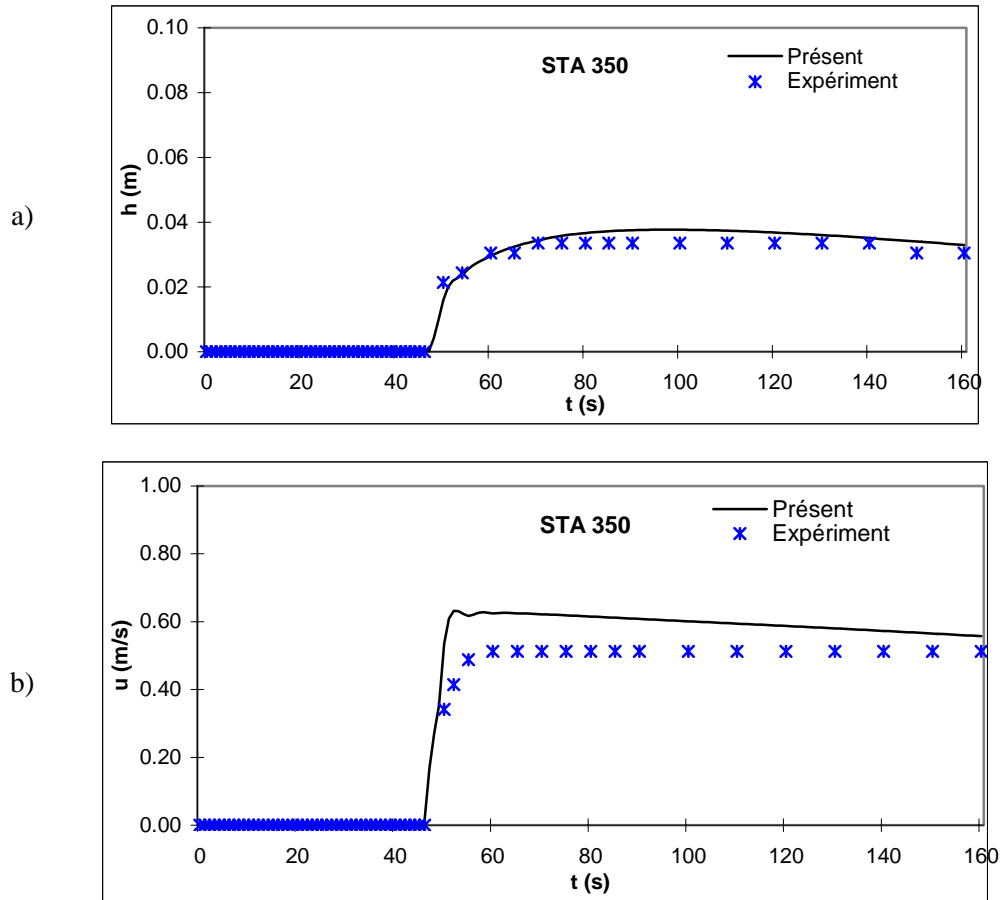


Figure 6-27 Comparaison des solutions numériques avec les données expérimentales sur STA350: a) Profondeur d'eau h ; b) Composante de vitesse u

6.3.5 Conclusion

Dans cette section, nous avons étudié un écoulement dû à une rupture de barrage sur un fond rugueux et en grande pente. A la sortie du bassin, l'écoulement reste torrentiel. La frontière ouverte est donc supposée libre de toute contrainte, ni sur la hauteur d'eau ni sur la vitesse ou débit sortant. Un accord global entre les valeurs calculées et mesurées est obtenu. Le cas-test confirme la capacité du modèle à reproduire les écoulements bidimensionnels en présence d'un front discontinu sur un fond incliné avec frottement. Les domaines découvrants et recouvrants sont bien traités par le modèle.

Par ailleurs, ce cas-test montre que l'utilisation de la méthode des caractéristiques dans notre modèle pour déterminer à la fois les dénivellations de la surface libre et la vitesse à la frontière ouverte a bien fonctionné. Elle nous permet de réaliser un calcul qui exclut des oscillations numériques et qui est donc stable.

6.4 Rupture de barrage dans un canal de rétrécissement

6.4.1 Objectifs

Dans cette section, le problème de l'écoulement bidimensionnel dû à la rupture de barrage dans un canal d'abord rétrécissant puis s'élargissant, est étudié. Cette configuration provoque : i) une onde de choc qui se propage depuis la brèche vers l'aval et une onde de raréfaction qui se propage vers l'amont ; ii) une onde de réflexion due au rétrécissement du canal. En effet, lorsque l'onde de choc arrive au niveau du rétrécissement, elle se réfléchit partiellement et crée l'onde de réflexion qui fait monter le niveau d'eau et y dresse, à nouveau, un front d'onde se propageant vers l'amont. Dans ce contexte, l'écoulement peut passer, à plusieurs reprises, d'un régime à l'autre : de fluvial à torrentiel avec la propagation de l'onde de choc, de super critique à sous critique (ressaut hydraulique) avec la propagation vers l'amont du front de réflexion et ensuite l'élargissement brusque après le rétrécissement fait changer encore le régime d'écoulement. Ce phénomène physiquement compliqué rend la modélisation plus complexe et crée **probablement** des oscillations numériques inattendues.

Ce cas-test nous permet donc de vérifier la capacité du présent modèle à reproduire un tel phénomène bidimensionnel et complexe : changement du régime de l'écoulement, et capture des fronts discontinus dans une géométrie arbitraire.

6.4.2 Description du problème

Un modèle physique a été établi au sein du LNEC (Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisbonne, Portugal) en collaboration avec IST (Instituto Superior Técnico) par (Bento Franco A. et al., 1997). Afin d'étudier les écoulements dus à une rupture de barrage dans un canal de rétrécissement puis d'élargissement sur un fond sec et rugueux (avec frottement)

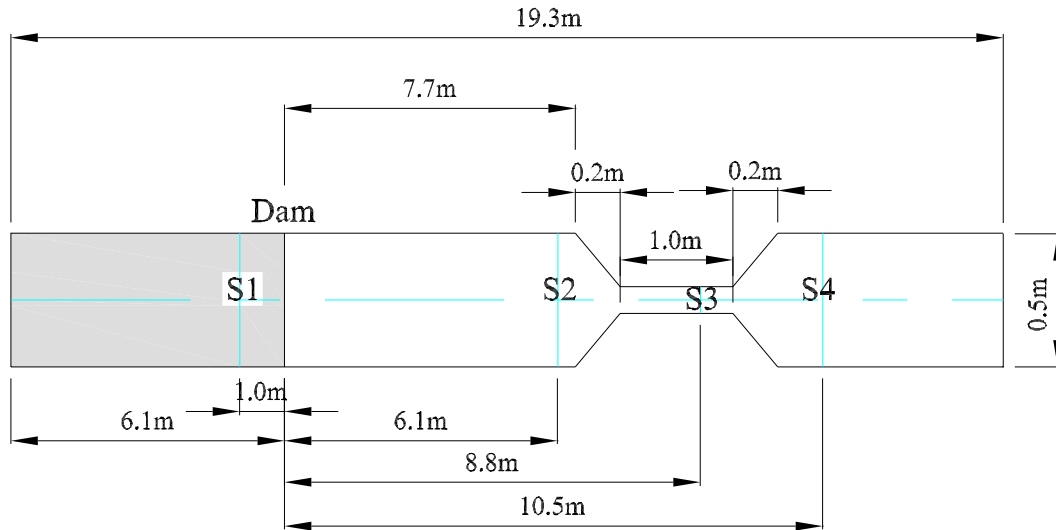


Figure 6-28 Géométrie du canal et positions des points de mesure

Une configuration simple du canal est présentée dans la Figure 6-28. Le canal est rectangulaire de 19.3 m de long avec un fond plat. La section transversale est rectangulaire de 0.50 m de large. Une écluse démontable est posée dans le canal à 6.1 m de l'extrémité gauche pour créer un réservoir qui maintient l'eau initialement au repos. Un segment de canal rétréci est situé à 7.70 m en aval de l'écluse. Ce segment se compose de : i) une partie de rétrécissement de 0.2 m de long qui ramène la largeur du canal de 0.50 m à 0.20 m. Les deux parois latérales de cette partie sont symétriques par rapport à l'axe du canal avec lequel elles font donc un angle de 45 degré ; ii) une partie rectangulaire de 1.00 m de long et de 0.20 m de large ; et iii) une partie d'élargissement de 0.20 m de long qui augmente la largeur de 0.20 m à 0.50 m (voir la Figure 6-28). En aval de l'écluse, le fond est sec. On enlève l'écluse en 0.2 seconde approximativement pour simuler la rupture du barrage.

Brufau et Garcia-Navarro 2003 (Brufau P and García-Navarro P., 2003) ont validé leur modèle par ce cas-test, en utilisant une technique « upwind » multidimensionnelle. Murillo et al. 2005 (Murillo J. et al., 2005) ont également appliqué le modèle explicite de volumes finis développé par (Brufau P and García-Navarro P., 2003) à ce cas-test.

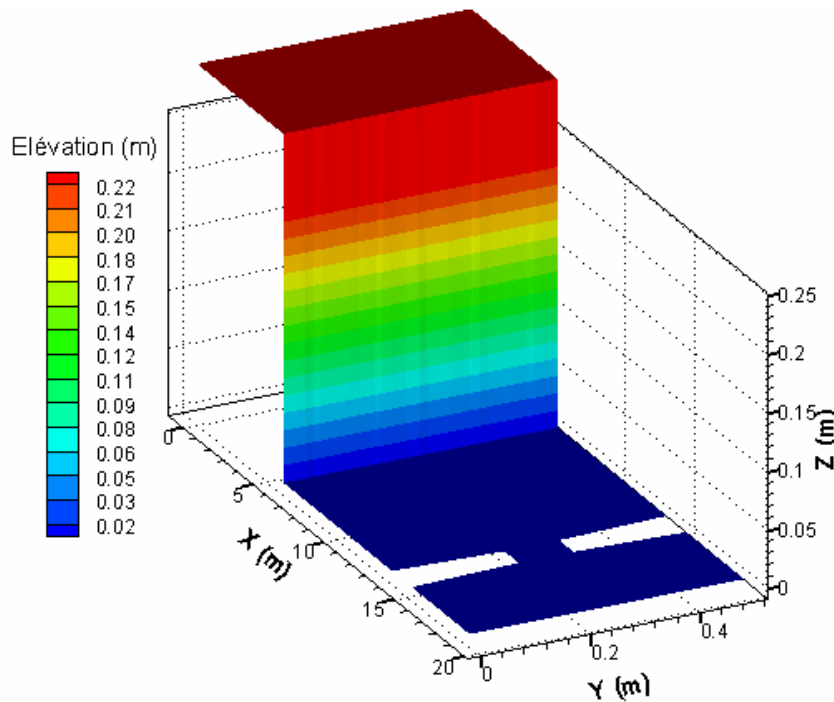


Figure 6-29 Conditions Initiales

Conditions initiales :

La hauteur d'eau initiale est de 0.3m dans le réservoir, et de 0.003 m en aval de l'écluse. L'eau est initialement au repos, la vitesse est donc imposée zéro partout dans le canal (Figure 6-29).

Conditions aux limites :

Dans la partie en aval du segment rétréci, l'écoulement est en régime torrentiel. En conséquence, à la frontière ouverte à l'extrémité droite du canal, $x = 19.3m$, aucune contrainte ni sur la hauteur d'eau ni sur la vitesse n'est imposée. La dénivellation de la surface libre et la vitesse sont calculées par la méthode des caractéristiques. Une condition de glissement a été imposée sur toutes les parois du canal.

6.4.3 Paramètres numériques

Le domaine de calcul est discrétisé par une grille non structurée de 39067 triangles de tailles différentes et de 20193 nœuds. La grille est plus raffinée à l'entrée et à la sortie du segment rétréci. Murillo et al. (Murillo J. et al., 2005) utilisent une grille de 42621 triangles. La durée de simulation est de 10s. Le pas de temps est de 0.001 s.

Afin de maintenir une solution stable, une valeur de tolérance de profondeur d'eau

$h_\varepsilon = 0.003 \text{ m}$ est définie. La zone sera déclarée sèche lorsque la profondeur d'eau $h < h_\varepsilon - 0.0001$.

Le même coefficient de Manning $n = 0.01 \text{ s/m}^{1/3}$ est utilisé dans Murillo et al. 2005 (Murillo J. et al., 2005) pour le frottement sur fond.

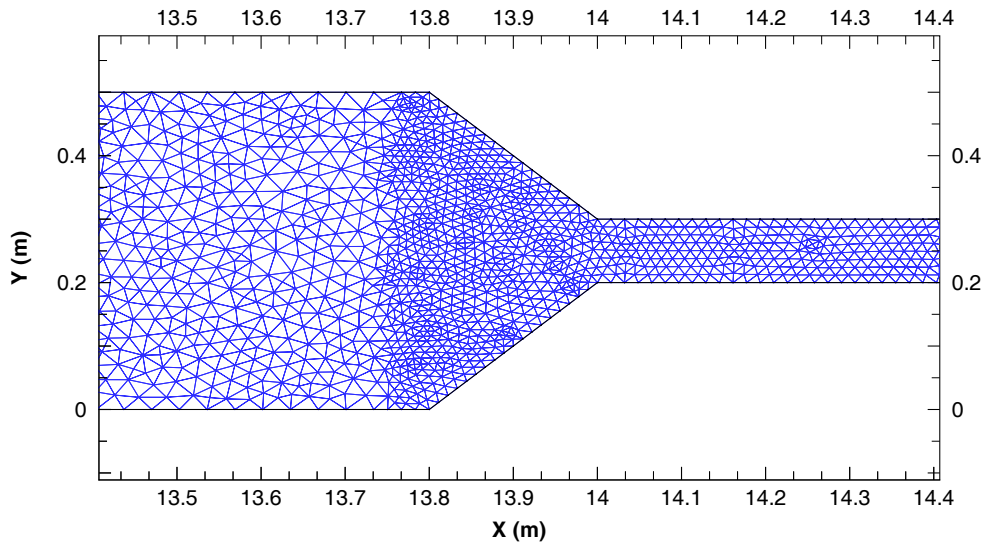


Figure 6-30 Raffinement du maillage dans le segment rétréci du canal

6.4.4 Résultats et discussion

La Figure 6-31 présente les champs de vitesses dans le segment rétréci du canal à $t = 4.5, 5.0, 5.5$ et 6.0 s , respectivement.

L'évolution de la hauteur d'eau a été mesurée par quatre sondes dont les positions sont données dans la Figure 6-28 : La sonde S1 se trouve à l'intérieur du réservoir à 1.0 m en amont de l'écluse ; la sonde S2 se situe à 6.10 m en aval de l'écluse, avant le rétrécissement ; la sonde S3 est à 8.8 m en aval de l'écluse, à l'intérieur même du segment rétréci ; la sonde S4 se trouve dans la partie d'élargissement à 10.50 m en aval de l'écluse.

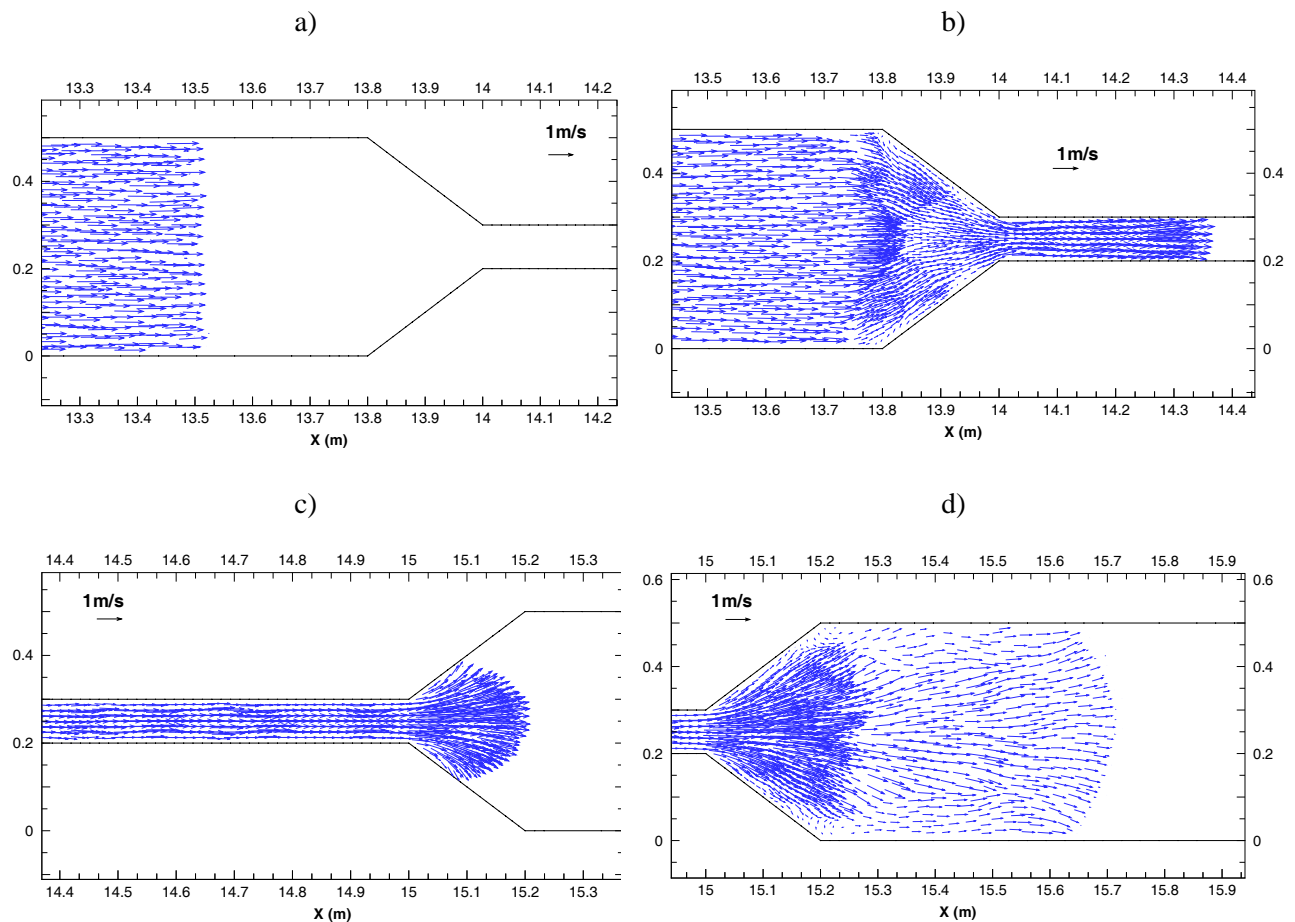


Figure 6-31 Champs de vitesses sur la constriction :

a) $t = 4.5$ s ; b) $t = 5.0$ s ; c) $t = 5.5$ s ; d) $t = 6.0$ s

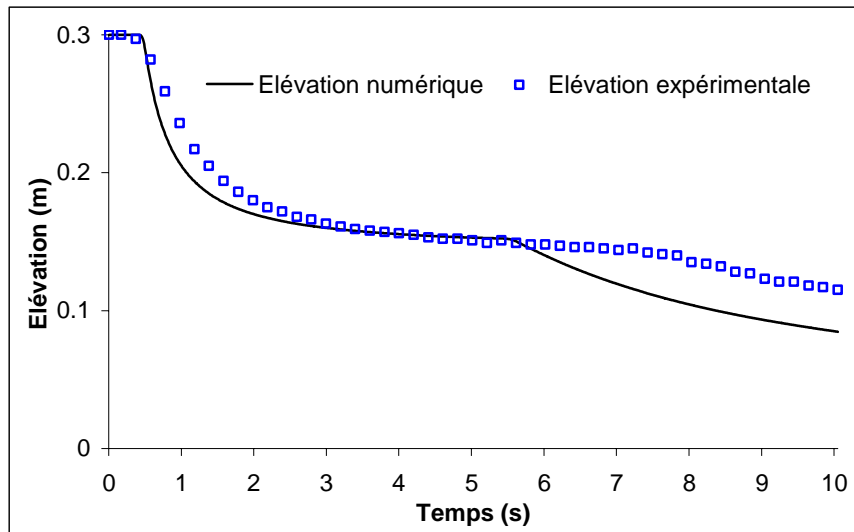
Les Figure 6-32 et Figure 6-33 confrontent les valeurs numériques et expérimentales de la hauteur d'eau pendant 10 s aux sondes S1 à S4. La Figure 6-32 a) présente l'évolution de la hauteur d'eau dans le réservoir à la sonde S1. Jusqu'à la 6^{ème} seconde, les valeurs numérique et expérimentale se rapprochent bien. Elles se décalent après avec une descente nette de la surface libre calculée par rapport à celle de mesures. A la sonde S1, les résultats de (Brufau P and García-Navarro P., 2003) affichent le même phénomène. La Figure 6-32-b montre clairement l'arrivée à S2 de l'onde de choc due au l'enlèvement de l'écluse, qui crée à 4 secondes plus tard, une onde de réflexion marquée par une montée d'eau (front de choc). On remarque que l'arrivée de l'onde de choc à S2 calculée par le modèle est en retard d'une seconde par rapport aux mesures. On constate également un léger décalage entre les deux profils calculés et mesurés à cette position. La Figure 6-33 montre l'arrivée du front de choc aux sondes S3 et S4. La valeur de la hauteur d'eau est correctement estimée. Cependant, un

retard du temps d'arrivée de l'onde de choc calculée, par rapport aux mesures, de 1 et 2 secondes a été constaté respectivement à la sonde S3 et S4. Ce même retard est également présent dans les résultats de (Brufau P and García-Navarro P., 2003).

6.4.5 Conclusion

Bien que ce cas-test soit complexe et difficile à réaliser, un accord global entre nos résultats numériques et les valeurs expérimentales a été obtenu. Le phénomène physique a été bien reproduit par le modèle : la création et la propagation d'une onde de choc due à l'enlèvement de l'écluse et ensuite d'une onde de réflexion due au rétrécissement. Un certain écart entre les valeurs numériques et expérimentales est constaté mais ceci est également le cas dans les études existantes.

a) S1



b) S2

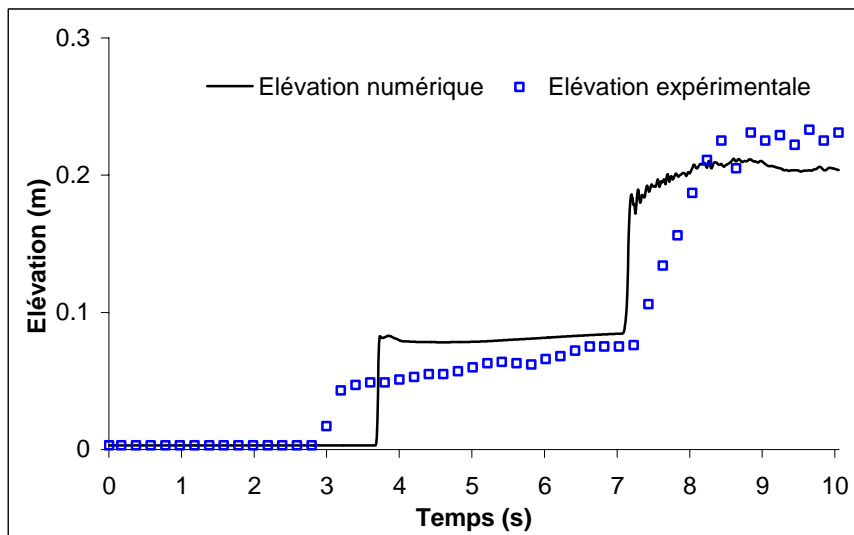
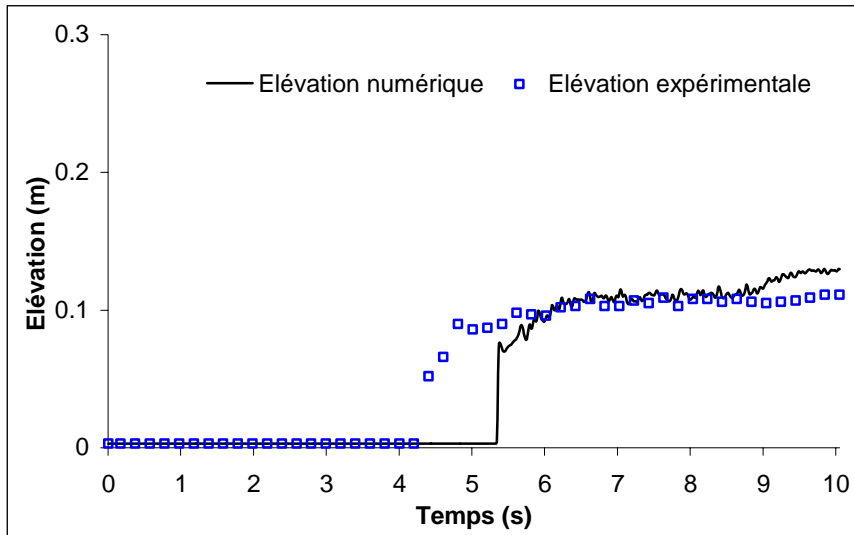


Figure 6-32 Elévation de la profondeur d'eau à :

a) S1 ; b) S2

c) S3



d) S4

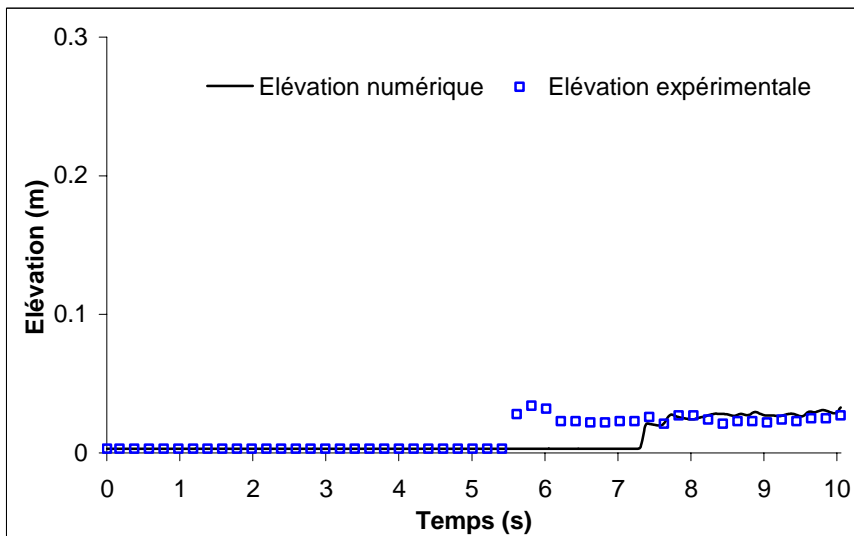


Figure 6-33 Elévation de la profondeur d'eau à :

a) S3 ; b) S4

Partie III Applications

Dans cette partie, nous appliquons notre modèle aux cas suivants : rupture du barrage de Malpasset (France) et inondation dans la ville de Dongchuan (Chine). Ces applications nous permettent, en premier lieu, de valider le modèle sur un cas réel de bathymétrie et topographie complexes ; et en deuxième lieu, de prédire et d'analyser le comportement des écoulements sur un fond irrégulier et en très grande pente (plus de 10%), et en dernier lieu, de fournir des informations indispensables aux autorités de la ville de Dongchuan dans la lutte contre les inondations. Le modèle peut donc être un élément important d'un outil d'aide à la décision.

Chapitre 7

Rupture du barrage de Malpasset

7.1 Objectif

A cause de la complexité de sa topographie et la disponibilité des données observées, le problème de la rupture du barrage de Malpasset est proposé par CADAM (Concerted Action on Dam Break Modelling) comme un cas-test typique de grandeur nature pour les modèles numériques qui ont pour but de simuler les écoulements dus à une rupture de barrage (Goutal N., 1999). Ce chapitre présente les résultats de l'application du modèle proposé au cas du barrage de Malpasset. L'accident de Malpasset est un rare exemple de rupture totale et instantanée d'un barrage-voûte.

Les données recueillies lors de l'accident de Malpasset, ainsi que les mesures issues d'un modèle physique réalisé par le LNHE/EDF à la suite de cet évènement, permettront une validation du présent modèle. Cette validation pourrait prouver la robustesse du modèle mais aussi le bon fonctionnement de la technique traitant les zones sèches et mouillées.

Le cas de Malpasset fournira, par ailleurs, une occasion d'étudier l'influence des paramètres physiques, par exemple le coefficient de frottement et celui de diffusion, afin d'établir une fourchette des valeurs possibles de ces paramètres pour ce cas-test.

Les modèles numériques qui ont déjà été appliqués au cas de Malpasset dévoilent une grande variété de techniques numériques. Excepté le code TELEMAC, la plupart de ces modèles sont basés sur la méthode des volumes finis : par exemple, (Goutal N, 1999), (Alcrudo F. and Gil E., 1999), (Brufau P et al., 2004) avec le solveur de Roe pour l'approximation de Riemann ; (Soares-Fraza S. and Alcrudo F., 1999) avec le schéma de vecteur flux de Boltzmann ; (Valiani A. et al., 1999), (Ying X.Y. and Wang S.S.Y, 2004) avec un schéma « upwind » en volumes finis.

7.2 Histoire du barrage de Malpasset

Le barrage de Malpasset a été construit pour l'irrigation et pour approvisionner la réserve d'eau potable. Il était situé dans un rétrécissement de la vallée du Reyran (Département du Var, France), à 12 kilomètres de Fréjus sur la Côte d'Azur avec une capacité de stockage de l'eau de $55 \times 10^6 m^3$ (Voir Figure 7-1). La voûte du barrage était en forme de courbure double avec une crête de 66.5 m de hauteur maximale et de 223 m de long. Le 2 Décembre 1959 à 21h14, après une période de pluies violentes qui remplissaient rapidement la retenue, raison pour laquelle une vanne de fond avait été ouverte, le barrage céda brutalement (Hervouet J.M., 2001).

A 1.5 km, on nota de fortes vibrations du sol et on entendit un bref grondement, suivi d'un fort courant d'air. Puis une première vague descendant vers la vallée de Reyran, suivie d'un véritable mur d'eau. La marque de trace d'élévation d'inondation a monté à un niveau jusqu'à 20 m au-dessus du niveau original de lit. La vague se répandit sur des zones habitées et l'on dénombra 433 victimes, modifiant la morphologie des lieux et détruisit des constructions civiles. Un kilomètre et demi en aval, l'autoroute de l'Esterel fut détruite sur 800 m et un pont fut emporté.

Les investigations ont montré que la principale cause de l'accident est une faille dans le sous-sol à l'aval du barrage. Sous le poids de l'eau, la voûte s'est séparée de ses fondations et a pivoté en bloc sur sa partie droite, tandis que la partie gauche s'effondrait, puis la partie centrale (Hervouet J.M., 2001).

Après cet accident, le décret de mai 1968 stipule que chaque barrage de plus de 20 m et d'une contenance dépassant 15 millions de mètres cube doit être inspecté par le CTPB (Comité Technique Permanent des Barrages) en France. Parmi d'autres mesures, une simulation de l'onde due à la rupture de barrage et un plan des zones inondables en cas d'accident doivent être fournis. Une enquête de terrains a été faite par la police locale. En outre, un modèle physique a été réalisé par LNHE/EDF pour étudier l'écoulement de rupture de barrage en 1964.

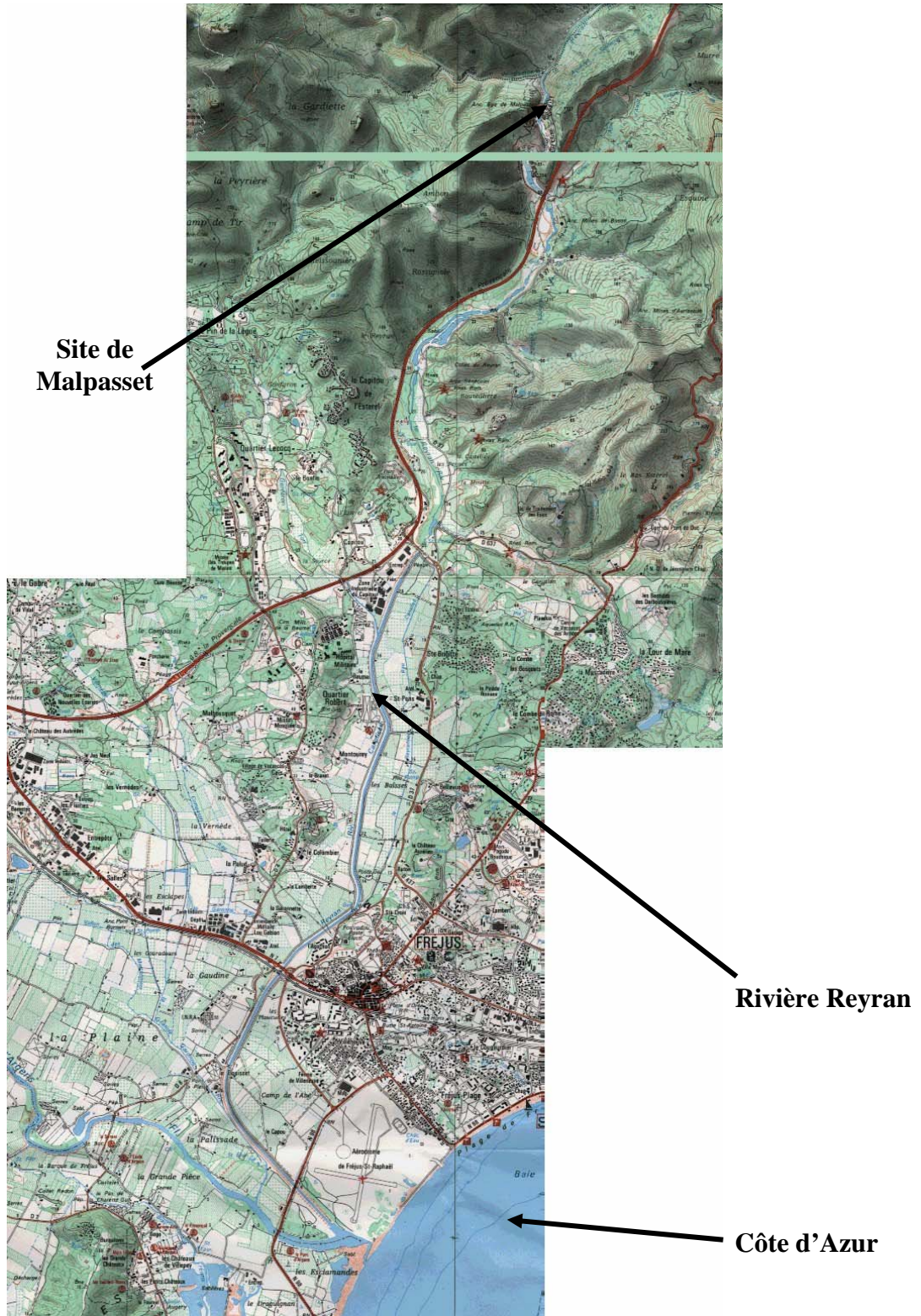


Figure 7-1 Carte géographique de Malpasset

7.3 Topographie de Malpasset

Les changements drastiques de morphologie dans la vallée de Reyran, ont rendu nécessaire l'utilisation d'une carte antérieure à l'accident. En conséquence, l'élévation de fond est dérivée la carte IGN (Institut Géographique National) à l'échelle de 1 :20000 de Saint-Tropez n°3, 1931, et numérisée par LNHE (Alcrudo F. and Gil E., 1999) (Figure 7-1).

La vallée est très encaissée en aval du barrage, avec deux courbes à angle droit. Elle s'élargit ensuite en recevant quelques petits affluents, puis se rétrécit à nouveau avant d'atteindre finalement la plaine côtière.

La dimension du domaine étudié est de $17500\text{ m} \times 9000\text{ m}$. La cote du fond va de -20 m (fond de la mer) à 100 m . La dernière valeur est estimée de la cote de la surface libre initiale dans le réservoir, sur la quelle il existe une incertitude de $\pm 50\text{ cm}$, mais des tests ont cependant montré que cette erreur n'avait qu'une incidence de 1% sur le temps de propagation de l'onde (Hervouet J.M., 2001). La Figure 7-2 présente la topographie de Malpasset.

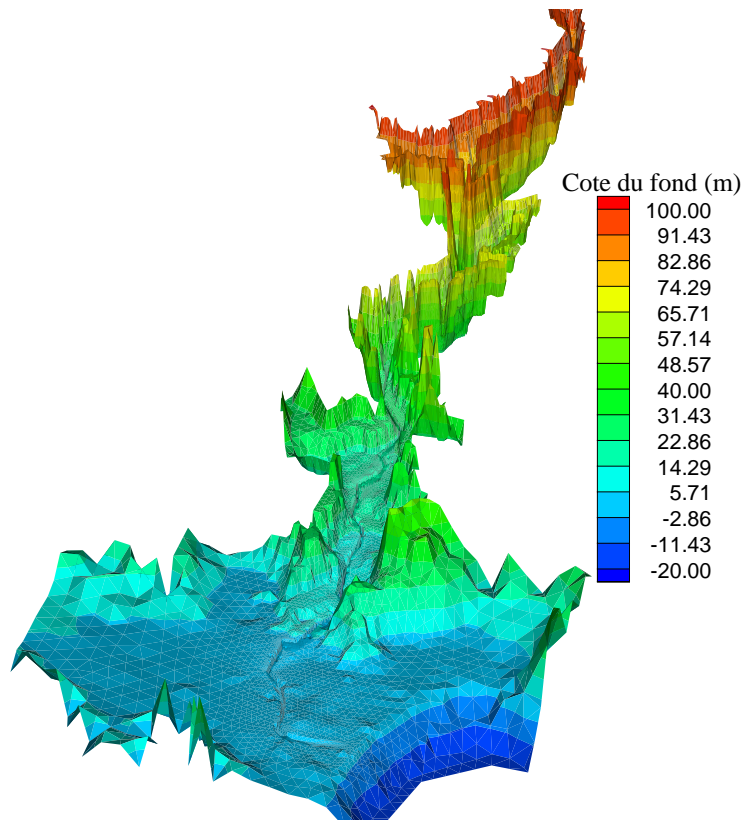


Figure 7-2 Topographie de Malpasset

7.4 Application

7.4.1 Conditions initiales

Initialement, une masse d'eau à la cote de 100 m est retenue dans le réservoir. Le niveau de la mer est égal à zéro. Excepté dans le réservoir et en mer, le fond est sec bien que la porte de sortie ait été ouverte au départ du calcul. Au temps $t = 0$ s, il y a ainsi un mur d'eau de 55 m de haut à l'emplacement du barrage. Les vitesses sont nulles partout dans le domaine.

7.4.2 Conditions aux limites

7.4.2.1 Conditions dans le réservoir

Le débit propre du fleuve de Reyran de $20 - 40 \text{ m}^3/\text{s}$ est négligeable en comparaison du débit d'inondation de $45,000 \text{ m}^3/\text{s}$ provoquée par la rupture de barrage. La rupture fut totale et instantanée. En conséquence, en amont du réservoir, un débit constant égal à zéro est imposé.

7.4.2.2 Conditions à la mer

A la mer, les frontières sont libres et donc 'transparentes'. Une condition de radiation est utilisée pour déterminer les dénivellations de la surface libre sur ces frontières ouvertes à l'entrée ou à la sortie vers la mer.

7.4.2.3 Conditions aux parois imperméables

Les deux côtés de la vallée sont considérés comme des parois imperméables. Une condition de non glissement est imposée :

$$\begin{aligned} \vec{U} \cdot \vec{n} = 0 \quad \vec{U} \cdot \vec{t} = 0 \quad \text{avec} \quad \vec{U} = (u, v) \\ \Rightarrow \begin{cases} u_n = 0 \\ u_t = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (7-1)$$

où u_n et u_t sont respectivement la composante normale et tangentielle du vecteur vitesse \vec{U} .

7.4.3 Paramètres numériques et physiques

Le domaine est discrétisé par un maillage de 26000 triangles et de 13541 points, utilisé par le LNHE (Hervouet J.M., 2001). La taille des mailles varie de 5 m à 300 m (Figure 7-3).

La brèche du barrage est modélisée par une ligne droite entre les points de coordonnées (4701.18 m, 4143.41 m) et (4655.5 m, 4392.10 m).

La durée de simulation est de 4000 s, après la rupture du barrage. Les différentes valeurs du coefficient de diffusion et du coefficient de frottement sont utilisées pour étudier la sensibilité de ces paramètres à la propagation du front de choc et le temps de transit entre les transformateurs. Nous les présenterons plus tard.

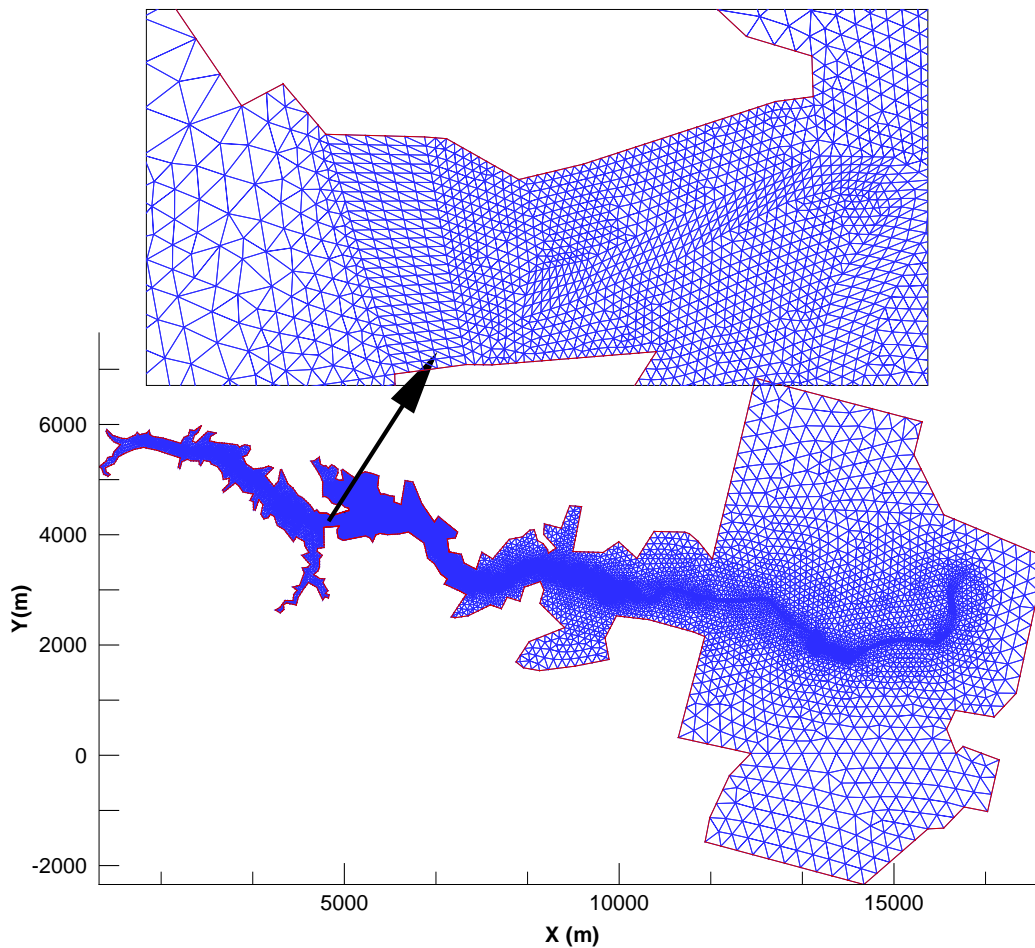


Figure 7-3 Maillage de Malpasset

7.5 Données disponibles

La Figure 7-4 [d'après (Shi Y.E., 2007)] présente une carte des points où les données sont disponibles : les positions des transformateurs (A - C), des points d'observations par la police (P1-P17) et des points de mesures issues du modèle physique (S6- S14).

7.5.1 Mesures après l'accident

7.5.1.1 Temps de propagation de l'onde de rupture

Après l'accident, des données d'observations ont été rendues disponibles par l'Electricité De France (EDF). Parmi elles, la propagation de l'onde de crue a pu être repérée à l'aide des positions de trois transformateurs électriques. En effet, l'onde a successivement détruit sur son passage trois transformateurs, A, B et C, et l'instant de la coupure électrique de chacun de ses trois transformateurs a été précisément enregistré.

Le Tableau 7-1 donne les coordonnées des trois transformateurs électriques. Le transformateur A, qui se trouvait dans la vallée près du barrage, a été frappé environ 100 s après la rupture. L'instant de la frappe peut représenter le temps d'arrivée de l'onde de crue. Ce chiffre est cependant entaché d'erreurs sur l'heure de la rupture à 21h14. Les transformateurs B et C étaient en aval de vallée. Les instants des frappes sont probablement entre le temps d'arrivée de l'onde et le temps auquel l'onde a atteint son sommet. Le temps de transit entre A et B est beaucoup mieux connu : 1140 s, et servira pour la validation. L'onde de crue a atteint la mer à 21h50 environ.

Tableau 7-1 Coordonnées des trois transformateurs électriques.

Transformateurs électriques	Coordonnées X (m)	Coordonnées Y (m)
A	5550	4400
B	11900	3250
C	13000	2700

7.5.1.2 Cote maximale de la surface libre

Après l'accident, une enquête a été effectuée par la police locale. Les cotes maximales de la surface libre atteintes en rives gauche et droite de la vallée ont été recueillies. Les points examinés les plus significatifs sont notés comme P1-P17. Le Tableau 7-2 donne les coordonnées de 17 points examinés par la police.

Tableau 7-2 Coordonnées de points examinés par la police

	Points Examinés par la	Coordonnées X (m)	Coordonnées Y (m)
Rive Droite	Police		
	P1	4913.1	4244.0
	P3	5790.6	4177.7
	P5	6763.0	3429.6
	P7	7326.0	2948.7
	P9	8735.9	3264.6
	P12	9832.9	2414.7
	P13	10957.2	2651.9
	P15	11689.0	2592.3
	P17	12333.7	2269.7
Rive Gauche	P2	5159.7	4369.6
	P4	5886.5	4503.9
	P6	6929.9	3591.8
	P8	7451.0	3232.1
	P10	8628.6	3604.6
	P11	9761.1	3480.3
	P14	1115.7	3800.7
	P16	11626.0	3406.8

7.5.2 Modèle physique

En outre, un modèle physique à l'échelle 1/400 a été réalisé par le Laboratoire National d'Hydraulique et Environnement (LNHE) de l'EDF en 1964 et calibré avec les données d'observations. On dispose donc des mesures effectuées sur ce modèle, dont la calibration a amené à estimer que le coefficient de Strickler dans la vallée était dans l'intervalle de 30-40. Dans le modèle, ont été recueillis 14 points de mesure des cotes de la surface libre, dont 5 dans le réservoir. Les coordonnées de 9 points de mesure en aval du barrage sont données dans le Tableau 7-3. La cote maximum de la surface libre sur chaque point de mesure a été relevée.

Tableau 7-3 Coordonnées de 9 points de mesure en aval du barrage par le modèle physique

Points de mesure par le modèle physique	Coordonnées X (m)	Coordonnées Y (m)
S6	4947.4	4289.7
S7	5717.30	4407.6
S8	6775.1	3869.2
S9	7128.2	3162.00
S10	8585.3	3443.1
S11	9675.	3085.9
S12	10939.1	3044.8
S13	11724.4	2810.4
S14	12723.7	2485.1

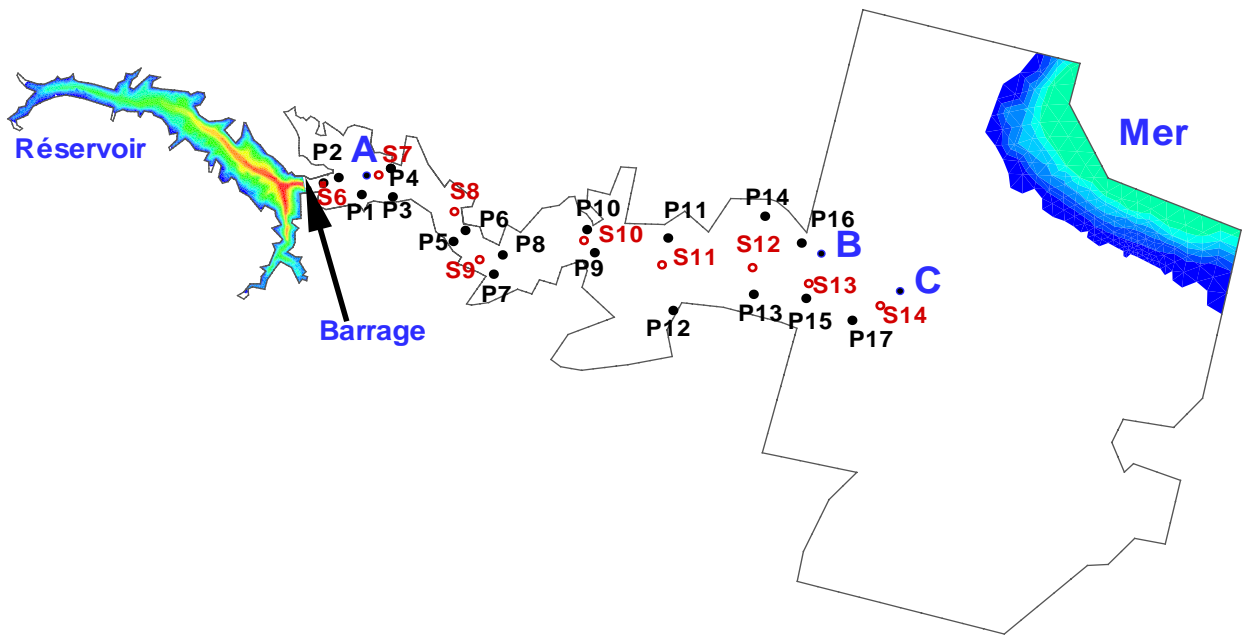


Figure 7-4 Positions des transformateurs, des points de mesure et des relevés

7.6 Résultats et discussions

Nous présentons ici le cas sans débit initial dans la rivière, avec un coefficient de Chézy de $25 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$ et un coefficient de diffusion $A_H = 15 \text{ m}^2/\text{s}$.

7.6.1 Résultats numériques aux différents instants

Les Figure 7-8 à Figure 7-17 présentent les résultats calculés par le modèle proposé à $t=0 \text{ s}$, 100 s , 5 min , 10 min , 20 min , 30 min , 40 min , 50 min , 60 min et 4000 s , respectivement. Dans ces figures, les résultats sont donnés en : surface libre imposée sur le fond de la vallée en 3D (a), profondeur d'eau en 2D (b) et champ de vitesses (c).

La Figure 7-5 donne le champ de vitesse à l'aval du barrage, une minute après la rupture. L'écoulement de crue est dévié avec le début d'une re-circulation en rive droite. La vitesse maximum est de 31 m/s , indiquant une accélération due à la pente et au rétrécissement de la vallée, car une rupture unidimensionnelle sur le fond plat donnerait une vitesse de 23.2 m/s (Hervouet J.M., 2001). Les vitesses à $t = 20 \text{ minutes}$ sont représentées dans la Figure 7-6. Sur cette figure, nous observons que, au niveau de deux virages en rive droite, l'écoulement n'occupe pas toute la section transversale. Au premier virage, il se concentre en rive droite, et en rive gauche au deuxième virage. Ceci est dû aux importantes pentes transversales. Ces phénomènes sont aussi notés par le modèle physique et par Hervouet (Hervouet J.M., 2001). Les Figure 7-7 et Figure 7-13 représentent la profondeur d'eau et les contours de vitesses à $t = 30 \text{ min}$, quand l'onde commence à atteindre la mer.

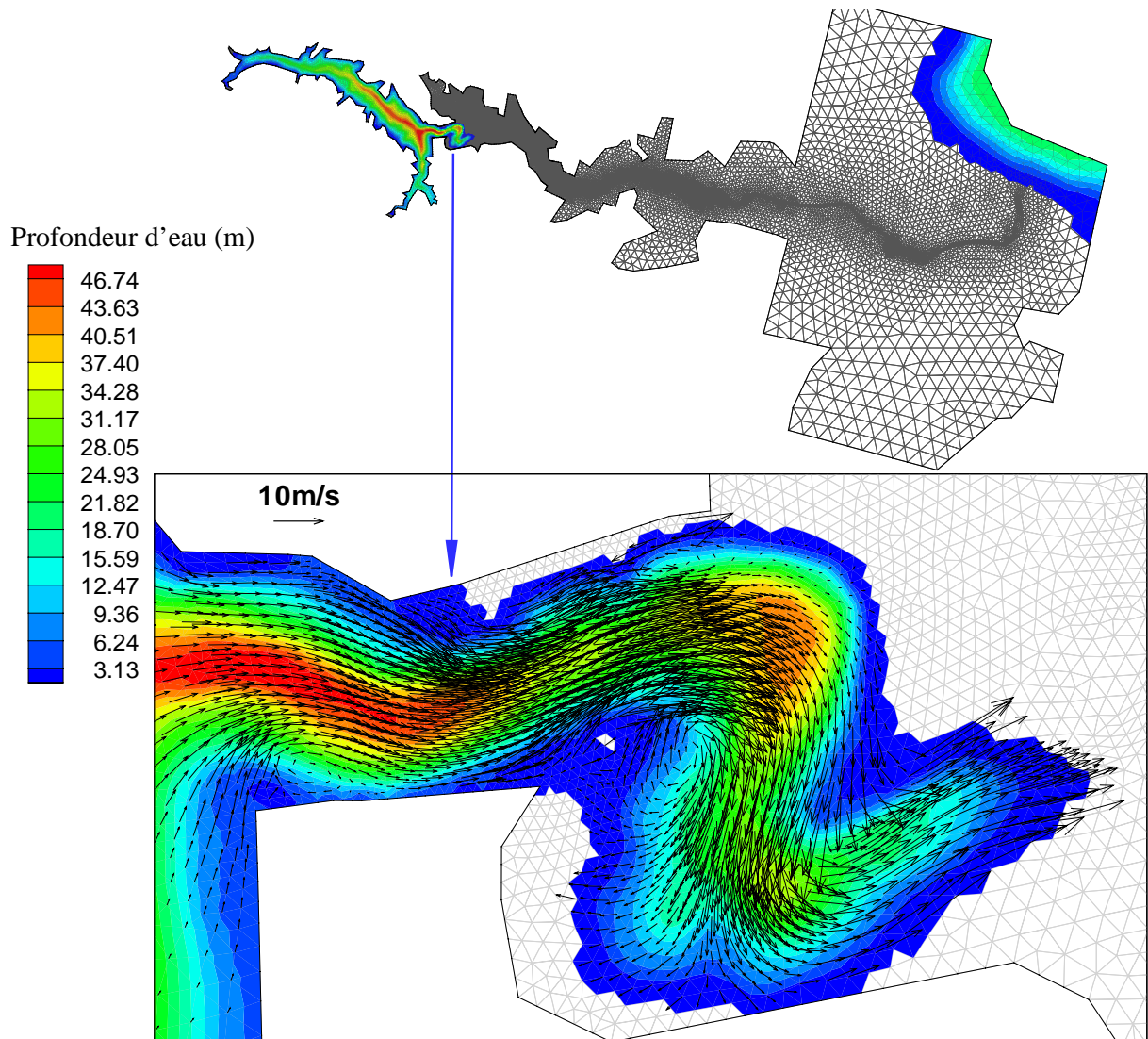


Figure 7-5 Champ de vitesses tracé sur les contours de la profondeur d'eau à $t = 60$ s

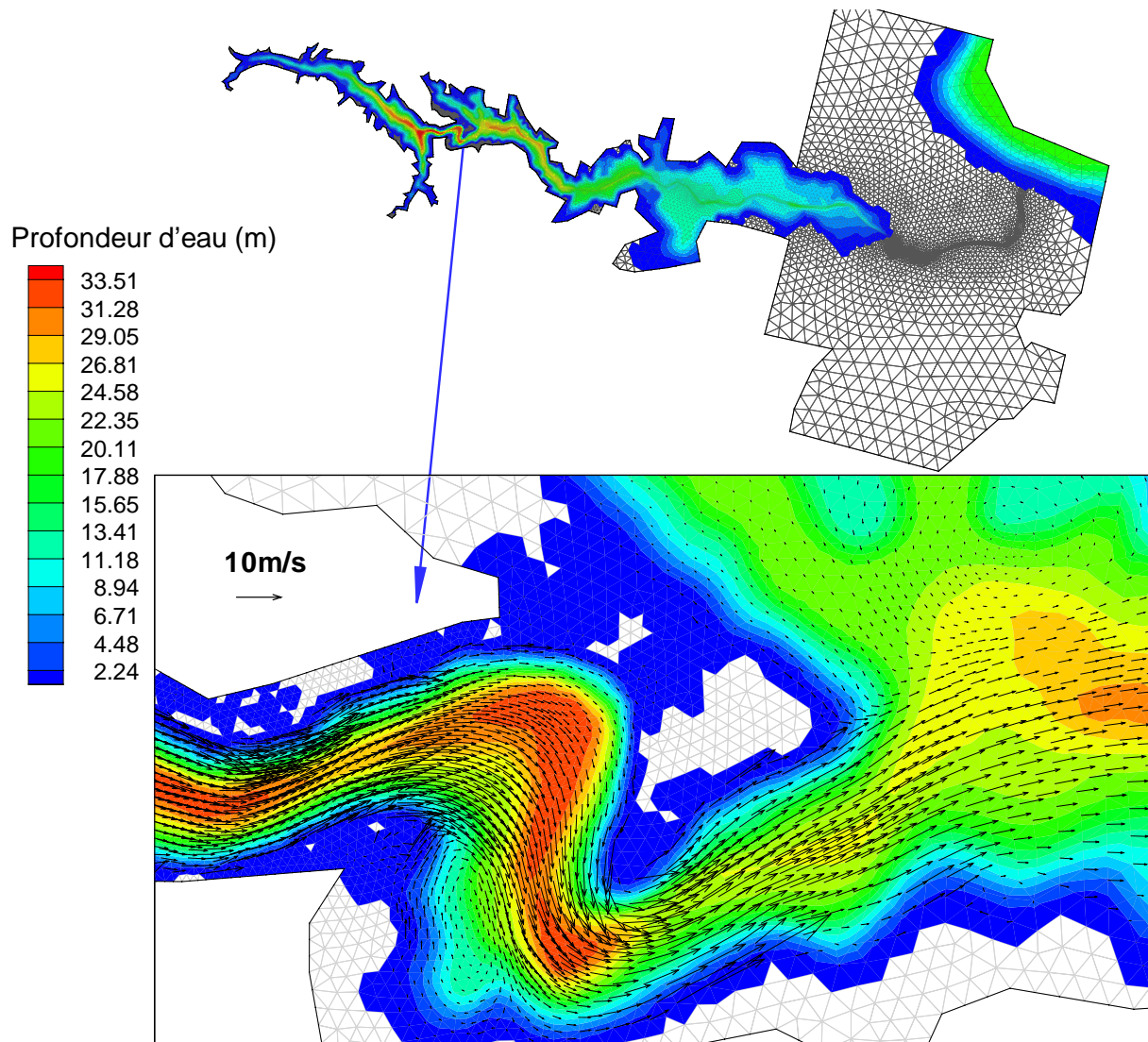


Figure 7-6 Champ de vitesses tracé sur les contours de la profondeur d'eau à $t = 20$ min

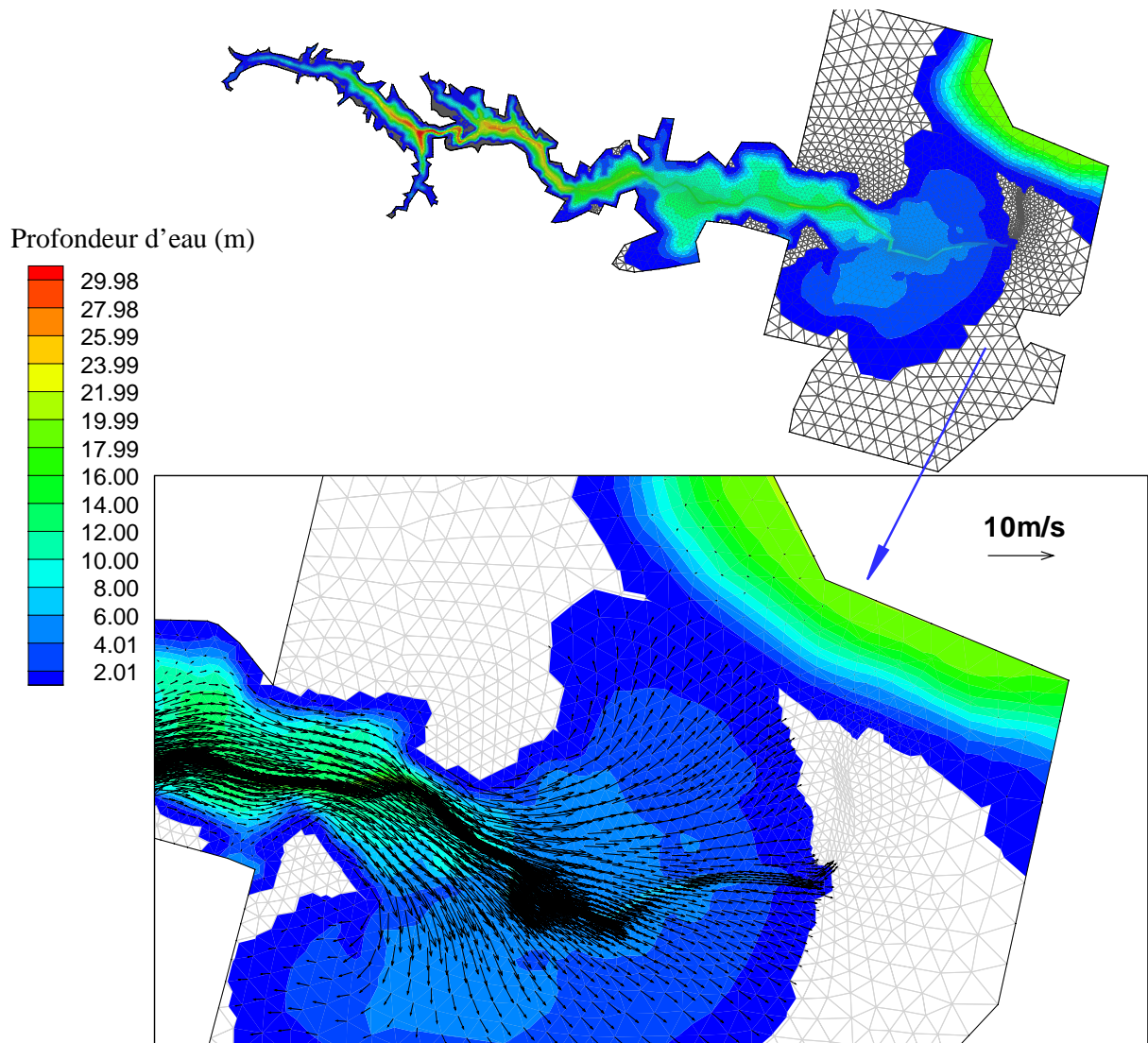


Figure 7-7 Champ de vitesses tracé sur les contours de la profondeur d'eau à $t = 30$ mins

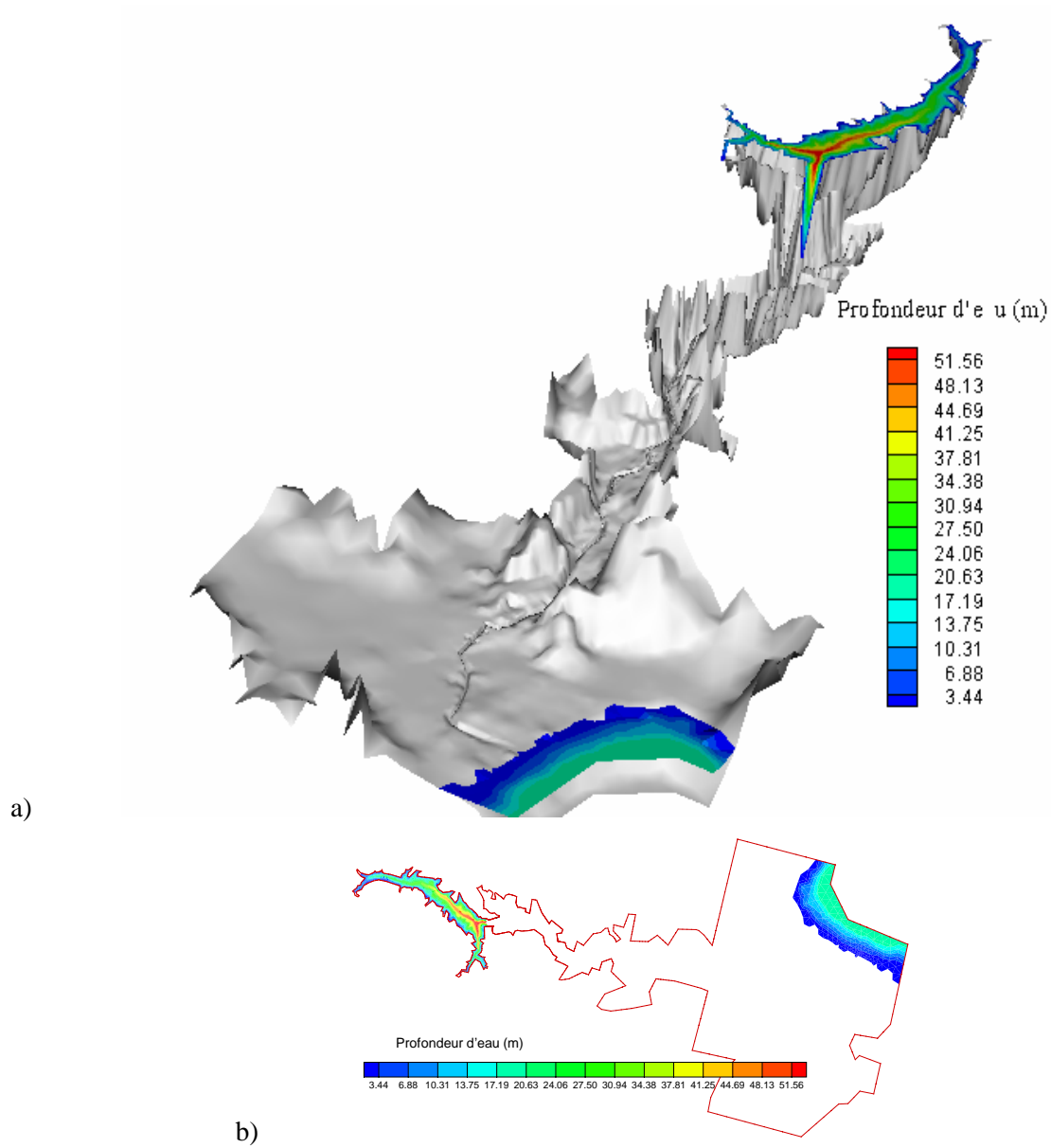
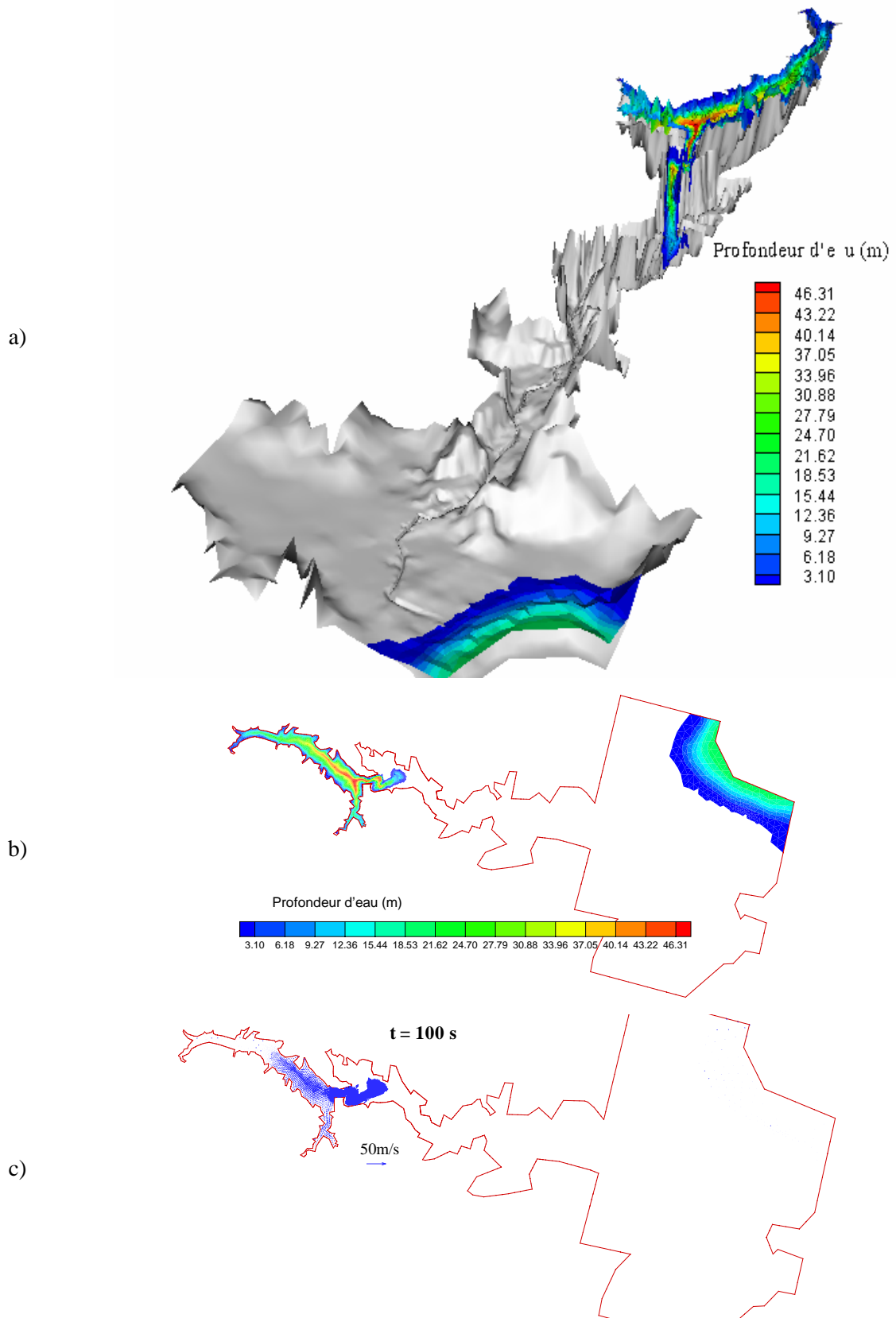


Figure 7-8 Rupture du barrage de Malpasset à $t = 0$ s
 a) Surface libre d'eau en 3D ; b) Profondeur d'eau en 2D

Figure 7-9 Rupture du barrage de Malpasset à $t = 100 \text{ s}$

a) Surface libre d'eau en 3D ; b) Profondeur d'eau en 2D ; c) Champ de vitesses

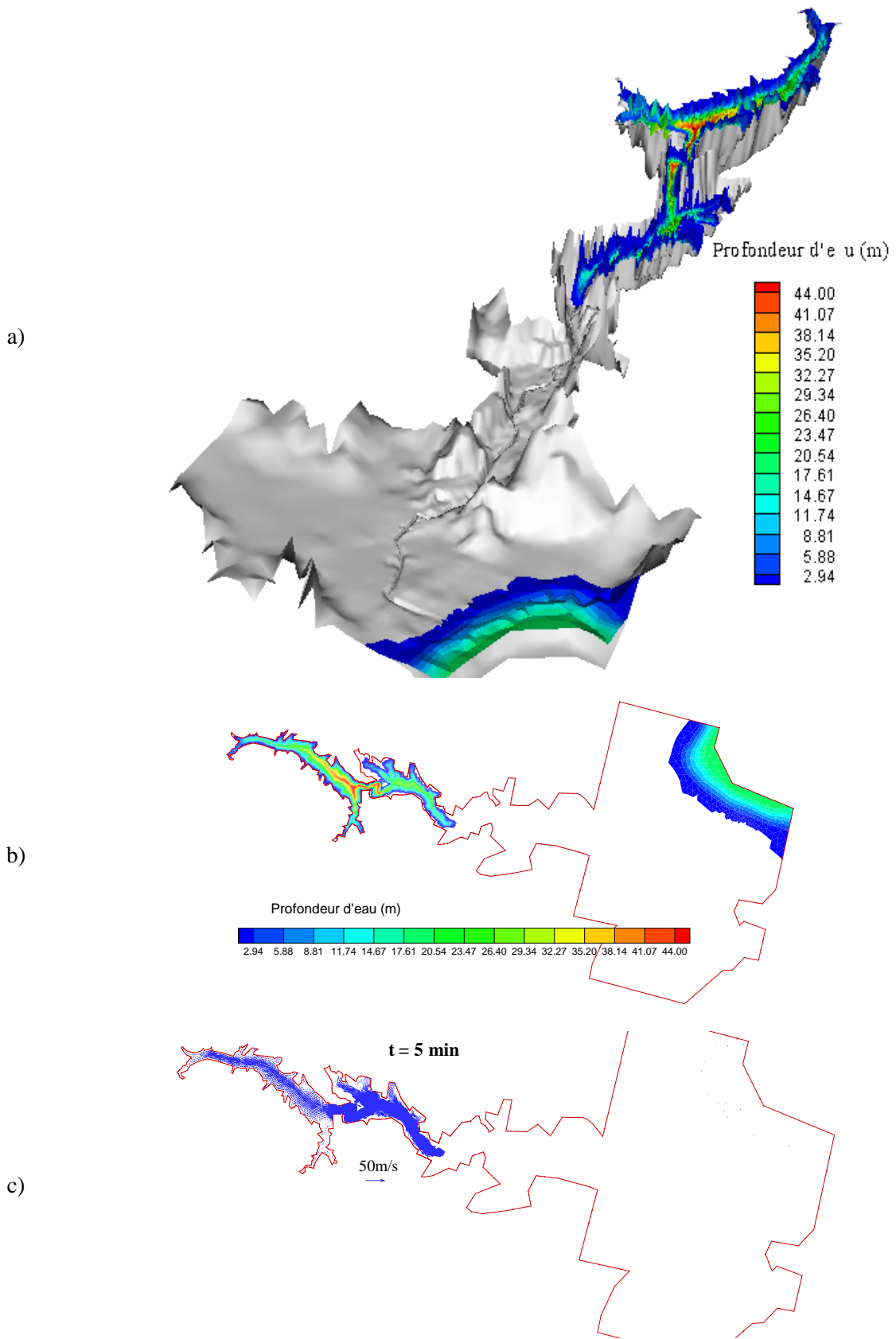
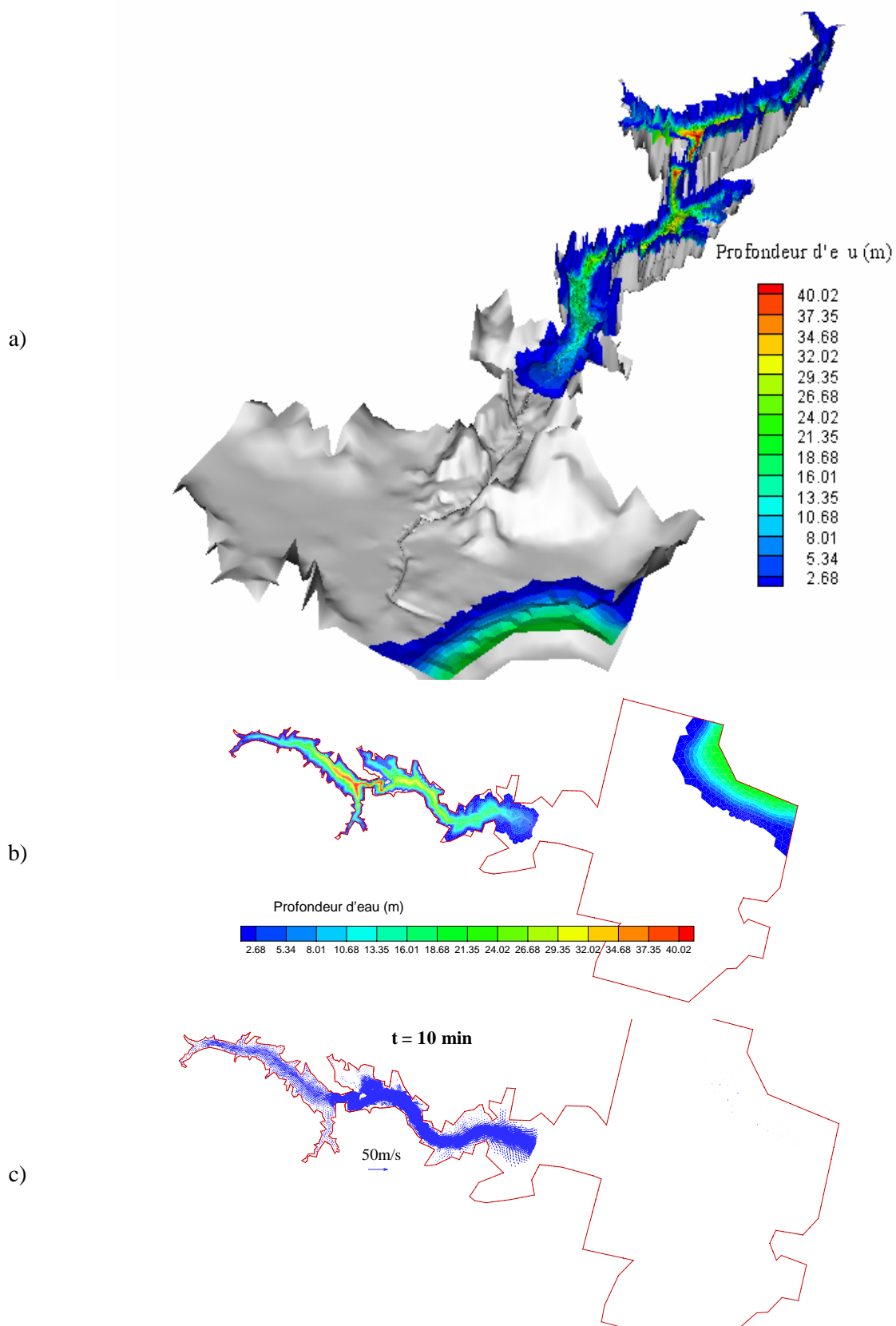


Figure 7-10 Rupture du barrage de Malpasset à $t = 5$ min

a) Surface libre d'eau en 3D ; b) Profondeur d'eau en 2D ; c) Champ de vitesses

Figure 7-11 Rupture du barrage de Malpasset à $t = 10 \text{ min}$

a) Surface libre d'eau en 3D ; b) Profondeur d'eau en 2D ; c) Champ de vitesses

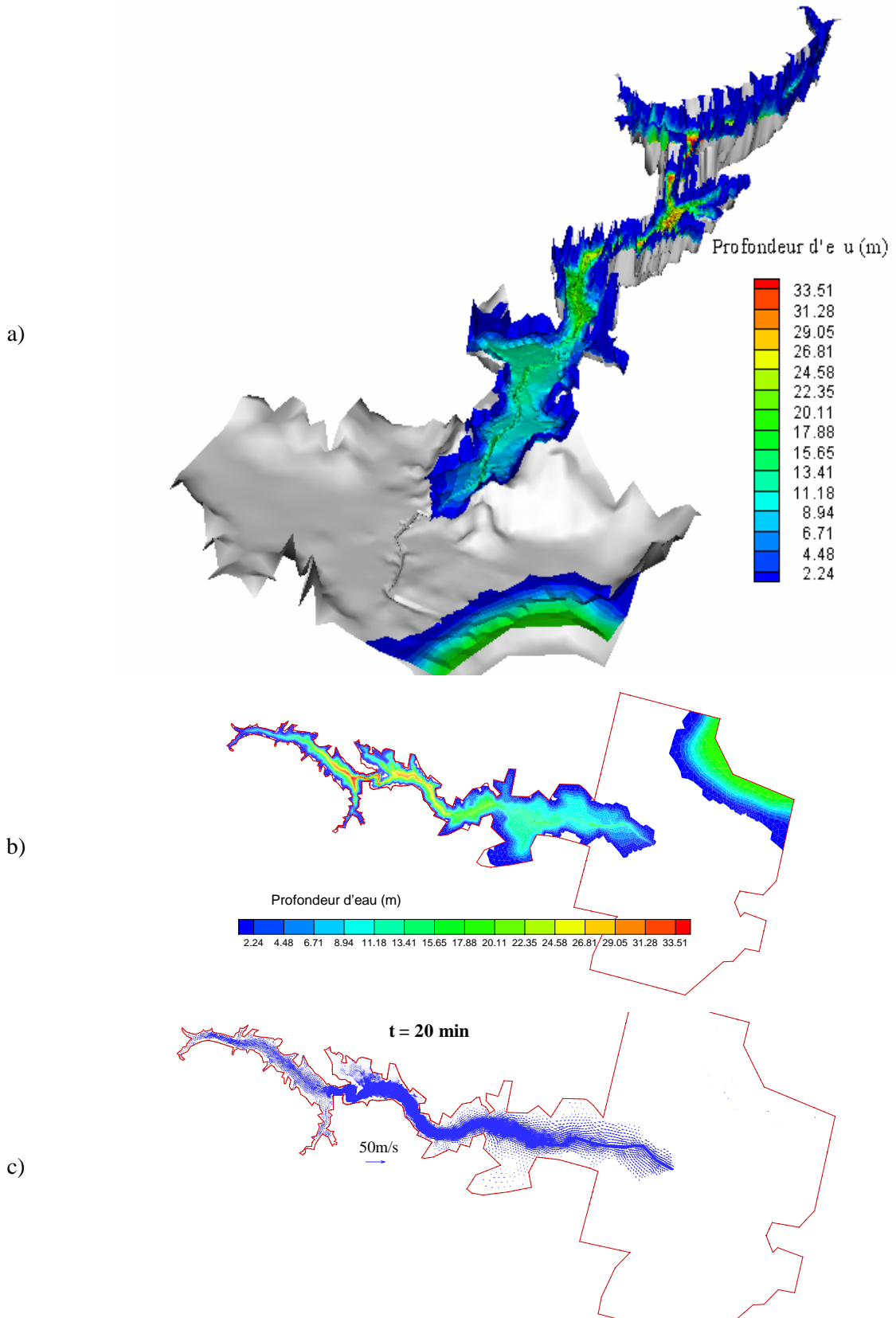
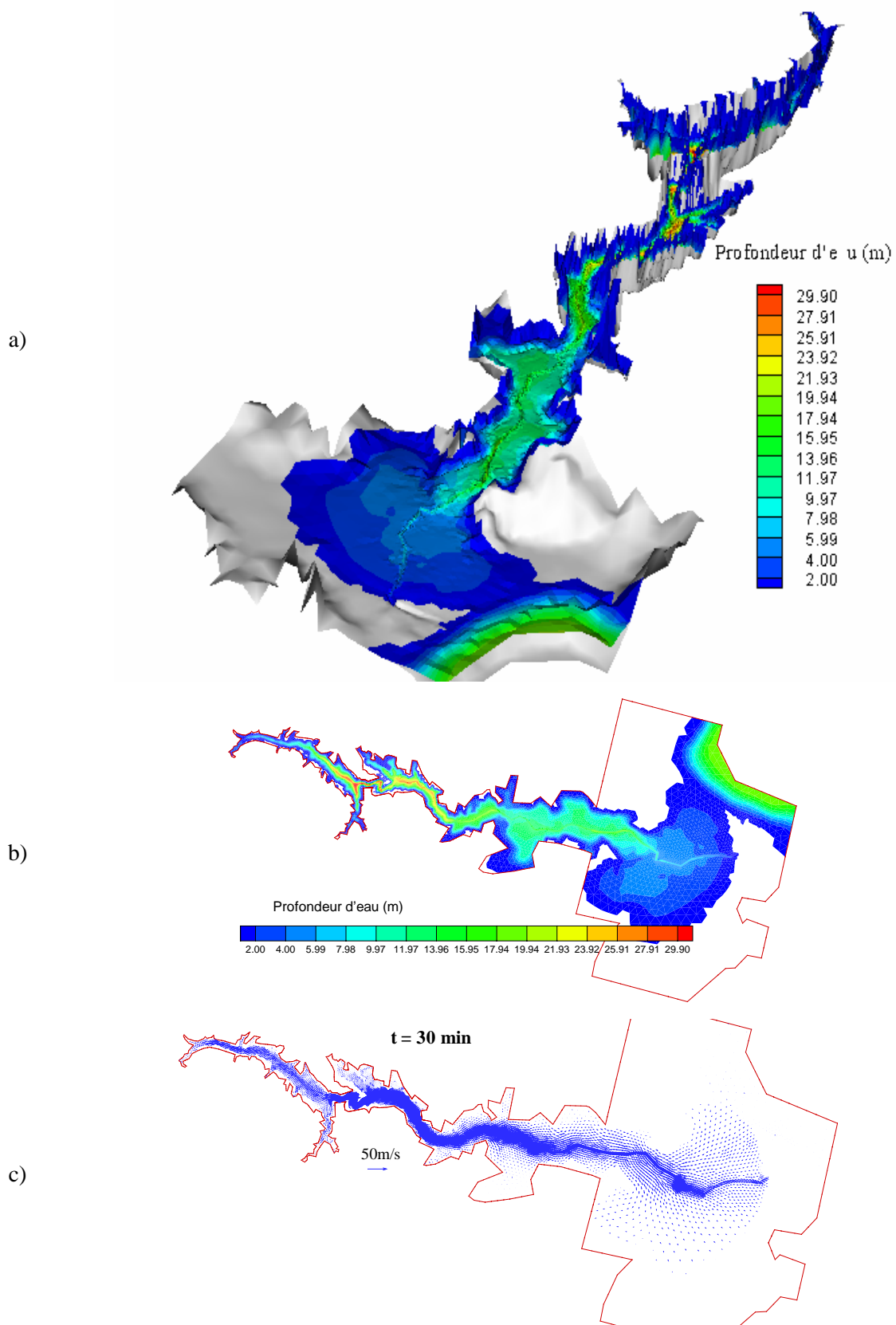


Figure 7-12 Rupture du barrage de Malpasset à $t = 20$ min

a) Surface libre d'eau en 3D ; b) Profondeur d'eau en 2D ; c) Champ de vitesses

Figure 7-13 Rupture du barrage de Malpasset à $t = 30 \text{ min}$

a) Surface libre d'eau en 3D ; b) Profondeur d'eau en 2D ; c) Champ de vitesses

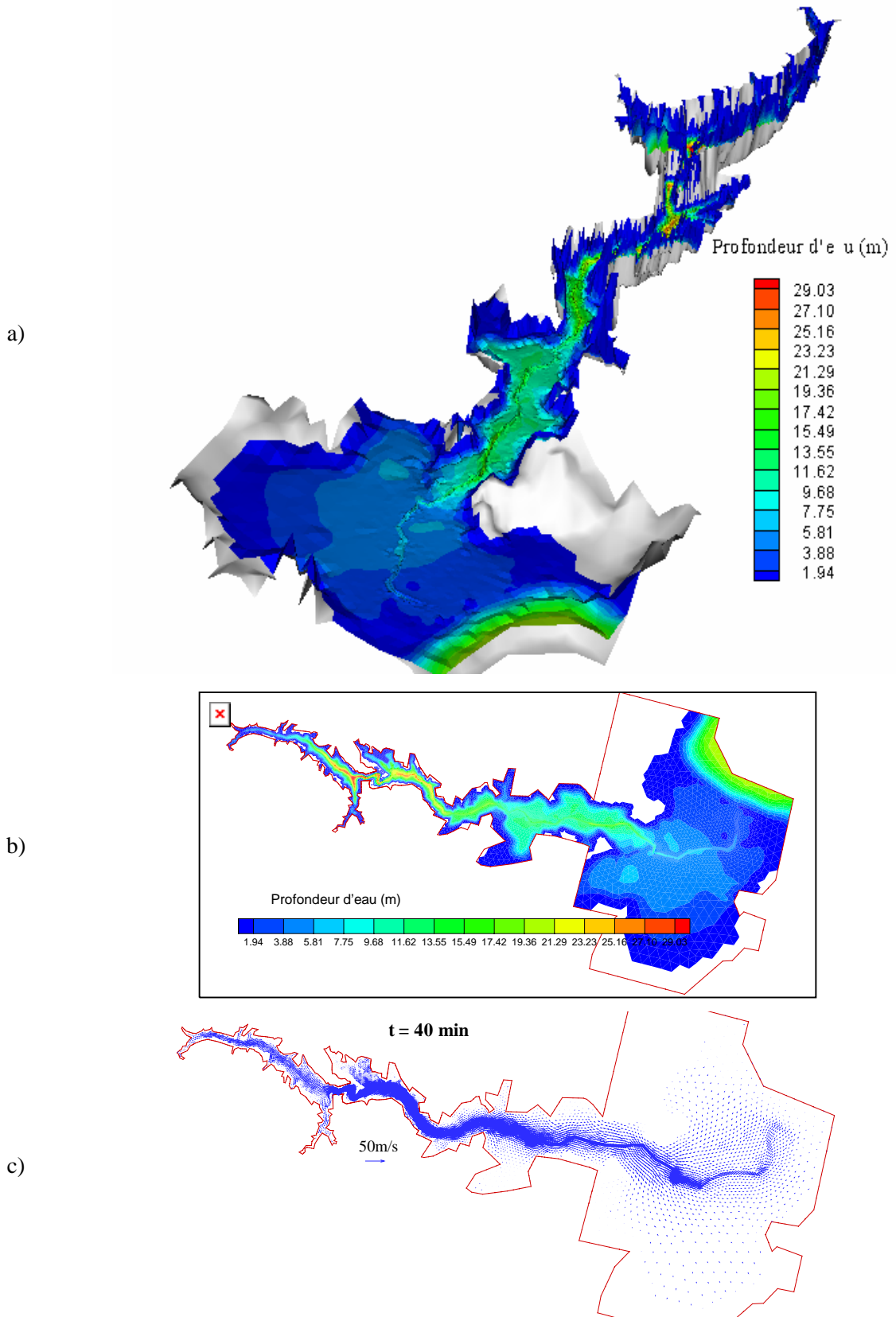
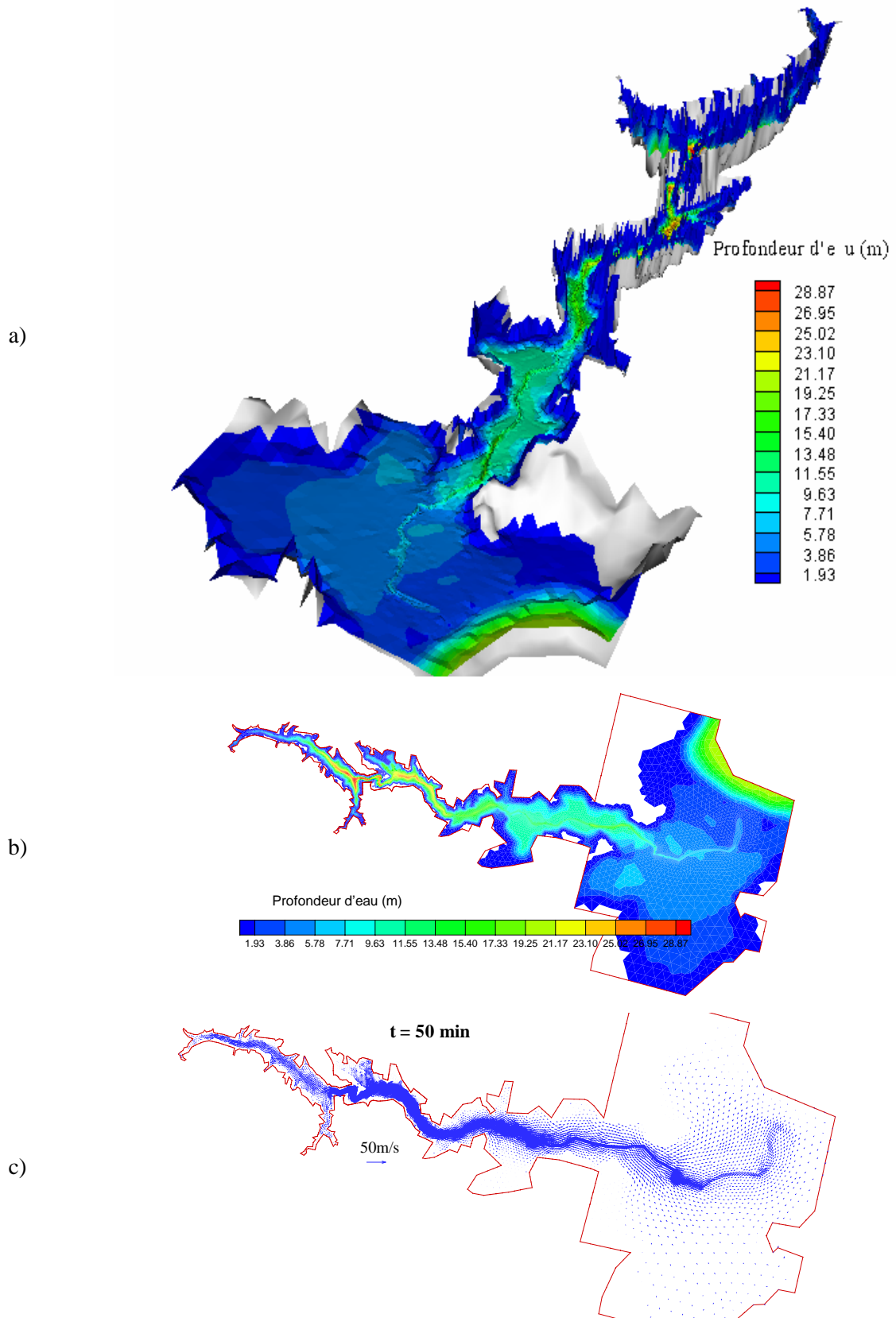


Figure 7-14 Rupture du barrage de Malpasset à t = 40 min

a) Surface libre d'eau en 3D ; b) Profondeur d'eau en 2D ; c) Champ de vitesses

Figure 7-15 Rupture du barrage de Malpasset à $t = 50 \text{ min}$

a) Surface libre d'eau en 3D ; b) Profondeur d'eau en 2D ; c) Champ de vitesses

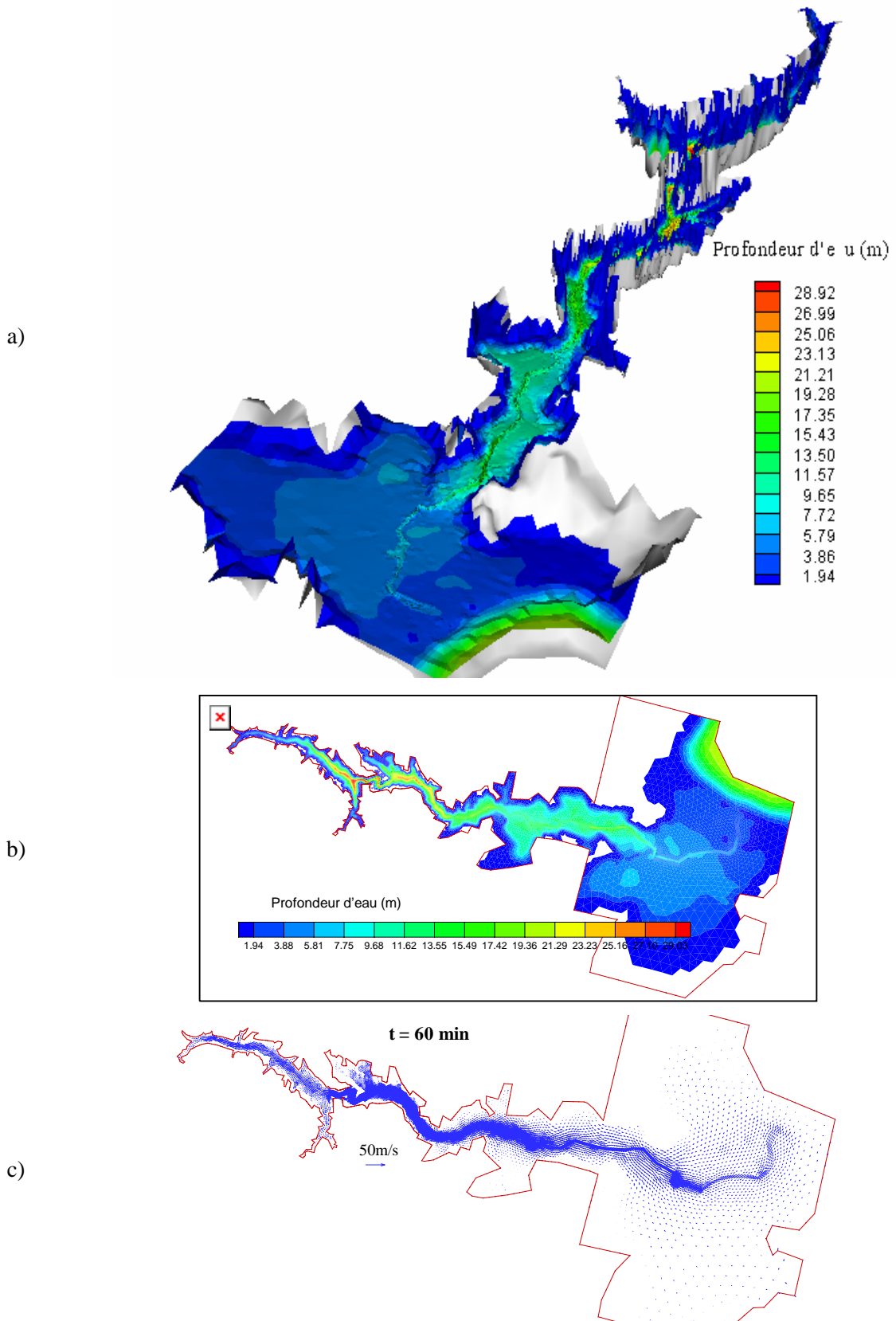
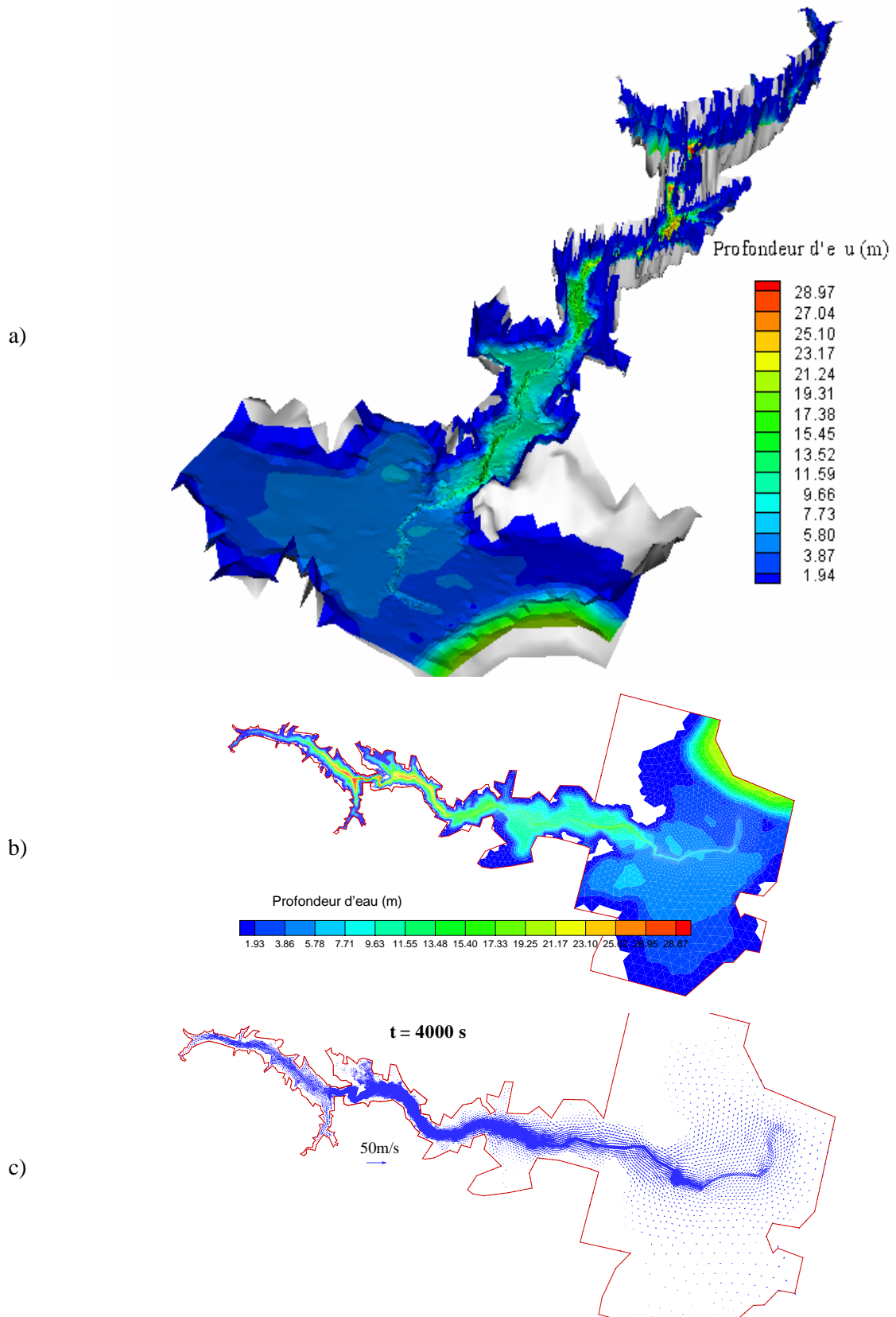


Figure 7-16 Rupture du barrage de Malpasset à t = 60 min

a) Surface libre d'eau en 3D ; b) Profondeur d'eau en 2D ; c) Champ de vitesses

Figure 7-17 Rupture du barrage de Malpasset à $t = 4000 \text{ s}$

a) Surface libre d'eau en 3D ; b) Profondeur d'eau en 2D ; c) Champ de vitesses

7.6.2 Temps d'arrivée de la propagation de l'onde

La prévision de temps d'arrivée de l'onde sur les trois transformateurs électriques n'est pas une tâche facile car le moment auquel la profondeur d'eau à ces endroits devient non nulle ne peut pas être considéré comme un critère rigoureux. Il est nécessaire de proposer un critère clair concernant le temps d'arrivée de l'onde. Le temps d'arrivée de l'onde à un endroit est marqué quand la profondeur d'eau y atteint à une hauteur préalablement définie. Elle est de 0.5 m dans (Alcrudo F. and Gil E., 1999) et 0.2 m dans cette application. Une analyse de sensibilité sur le coefficient de diffusion et le coefficient de frottement a été effectuée.

Tableau 7-4 - Influence du coefficient de diffusion $C_h = 25 m^{1/2}/s$

Transformateurs Electriques		Temps d'arrivée en A (s)	Durée transit entre A et B (s)	Durée transit entre A et C (s)
Observations		100	1140	1320
$A_H (m^2/s)$	15	85	1145	1311
	10	89	1269	1434
	1	95	1092	1268

Le Tableau 7-4 présente l'influence du coefficient de diffusion sur les temps de transit entre les transformateurs. Le coefficient de diffusion horizontale A_H est pris égal à 15, 10 et $1 m^2/s$, respectivement, avec un coefficient de Chézy fixé à $C_h = 25 m^{1/2}/s$. Nous observons les écarts relatifs entre les valeurs calculées et observées du temps d'arrivée allant de -15 % à -6 % en A, les écarts entre les valeurs du temps de transit sont de -4 % à 11 % entre A et B, et de -0.6 % à 8 % entre A et C. Clairement, le coefficient de diffusion affecte le temps de transit entre les transformateurs lorsque la valeur de A_H est supérieure à $5 m^2/s$. De façon générale, les meilleures concordances entre les données observées et les résultats calculés sont obtenues avec $A_H = 15 m^2/s$.

Nous observons que les résultats du temps d'arrivée au transformateur A s'écartent légèrement de celui d'observation, et qu'ils sont également éloignés du temps de transit entre B, et C. Il en est de même pour les résultats de Hervouet (Hervouet J.M., 2000). Ces écarts peuvent être dus à l'incertitude sur l'instant exact de la rupture du barrage (Alcrudo F. and Gil

E., 1999).

Tableau 7-5

Influence du coefficient de Chézy avec un coefficient de diffusion $A_H = 15 \text{ m}^2/\text{s}$

Transformateurs Electriques		Temps d'arrivée en A (s)	Durée entre A et B (s)	Durée entre A et C (s)
Observations		100	1140	1320
$C_h (m^{1/2}/s)$	50	80	600	700
	35	83	898	1033
	30	85	1000	1140
	25	85	1145	1311
	20	85	1010	1182

Le Tableau 7-5 présente l'influence du coefficient de frottement Chézy lorsque le coefficient de diffusion est fixe $A_H = 15 \text{ m}^2/\text{s}$. Clairement, le coefficient de diffusion affecte en grande partie les temps de transit entre les transformateurs A et B d'une part, A et C d'autre part. Cependant, quand le coefficient de Chézy est égal à $25 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$, l'erreur de calculs sur le temps de transit de A à B est seulement de 0.4 %, et de -0.7 % de A à C. L'accordance entre les résultats calculés et les observations est très satisfaisante lorsque $C_h = 25 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$

Le Tableau 7-6 compare les temps d'arrivée de l'onde calculés par le présent modèle à ceux obtenus à partir du modèle physique (points S6 - S14), avec un coefficient de diffusion $A_H = 1 \text{ m}^2/\text{s}$. Une série de 30 valeurs du coefficient de Chézy a été utilisée, afin d'étudier la sensibilité du modèle à la variation du coefficient de frottement. Dans le Tableau 7-6, excepté pour $C_h = 25 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$, on note que plus la valeur de Chézy est grande, plus tardive sera l'arrivée de l'onde. La valeur de $C_h = 25 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$ donne une meilleure estimation entre le temps d'arrivée calculé et celui observé.

Tableau 7-6

Temps d'arrivée de l'onde aux points de mesure avec $A_H = 15m^2/s$

Points de mesure dans le modèle physique	Modèle physique (s)	Présent modèle avec $A_H = 15m^2/s$				
		$C_h (m^{1/2}/s)$				
		20	25	30	40	50
S6	10.2	11	13	12	12	10.5
S7	102	90	90	88	85	81.5
S8	182	199	217	204	198	166
S9	263	286	318	299	285	231
S10	404	464	525	482	453	349.5
S11	600	645	728	662	616	455
S12	845	875	975	877	806	580
S13	972	1011	1124	1004	918	654
S14	1139	1242	1373	1214	1102	771

Le Tableau 7-7 compare les temps de coupure électrique aux transformateurs avec les temps d'arrivée de l'onde jusqu'aux transformateurs obtenus par le présent modèle et par les autres travaux tels que : TELEMAC (Hervouet J.M. and Petitjean A., 1999), (Valiani A. et al., 2002). Les temps d'arrivée aux transformateurs obtenus par Hervouet et Petitjean en utilisant TELEMAC avec un coefficient de diffusion de $1 m^2/s$ et un coefficient de Strickler de $K_s = 30 m^{1/3}/s$, qui correspond à un coefficient de Manning de $n = 0.033 s/m^{1/3}$. Valiani et al. (2002) (Valiani A. et al., 2002) utilisent un solveur de Riemann et une grille de calcul de 10696 éléments avec le même coefficient de Manning de $n = 0.033 s/m^{1/3}$. Les résultats numériques obtenus par ECOMOD-UFVM en utilisant le coefficient de Strickler K_s et le coefficient de Chézy C_h avec le coefficient de diffusion $A_H = 1m^2/s$ sont également présentés dans ce tableau. L'arrivée de l'onde obtenue par ECOMOD-UFVM pour les coefficients de $K_s = 30m^{1/3}/s, A_H = 1m^2/s$ est plus tôt que celle obtenue par TELEMAC. On note que ECOMOD-UFVM donne le temps d'arrivée calculé avec le coefficient de Strickler $K_s = 30m^{1/3}/s$ est plus tôt que celui obtenu avec le coefficient de Chézy $C_h = 30m^{1/2}/s$. Cela nous permet de confirmer le choix du coefficient de frottement. Clairement, l'accord entre nos

résultats calculés et les observations est très satisfaisant lorsque $C_h = 25 m^{1/2}/s$ et $A_H = 1 m^2/s$.

L'erreur relative sur le temps de coupure au point A obtenue par ECOMOD-UFVM utilisant $C_h = 25 m^{1/2}/s$ et par TELEMAC utilisant $K_s = 30 m^{1/3}/s$, est de -5 %, et de 11 %, respectivement.

Tableau 7-7

Temps d'arrivée de crues

Transformateurs électriques	Coefficient		Temps de coupure (s)					
	Frottement	$A_H (m^2/s)$	A	B	C			
Observations			100	Erreur	1240	Erreur	1420	Erreur
Valiani et al.	$n = 0.033 s/m^{1/3}$		98	-2%	1305	5%	1401	-1%
TELEMAC	$K_s = 30 m^{1/3}/s$	1	111	11%	1287	4%	1436	1%
ECOMOD-UFVM	$K_s = 30 m^{1/3}/s$	1	92	-8%	858	-30%	991	-30%
	$C_h = 30 m^{1/2}/s$	1	92.5	-7.5%	1031	-16%	1180	-17%
	$C_h = 25 m^{1/2}/s$	1	95	-5%	1186	-4%	1363	-4%

Afin d'estimer avec précision le temps d'arrivée de l'onde à plusieurs endroits (S6-S14) définis dans le modèle physique, un coefficient $A_H = 15 m^2/s$ et un coefficient de frottement $C_h = 25 m^{1/2}/s$ sont utilisés dans notre modèle

La Figure 7-18 compare l'évolution du temps d'arrivée de l'onde obtenue par ECOMOD-UFVM aux données mesurées à partir du modèle physique. L'erreur maximale est seulement de 5.5 % à la station S13. Une bonne concordance est ainsi obtenue.

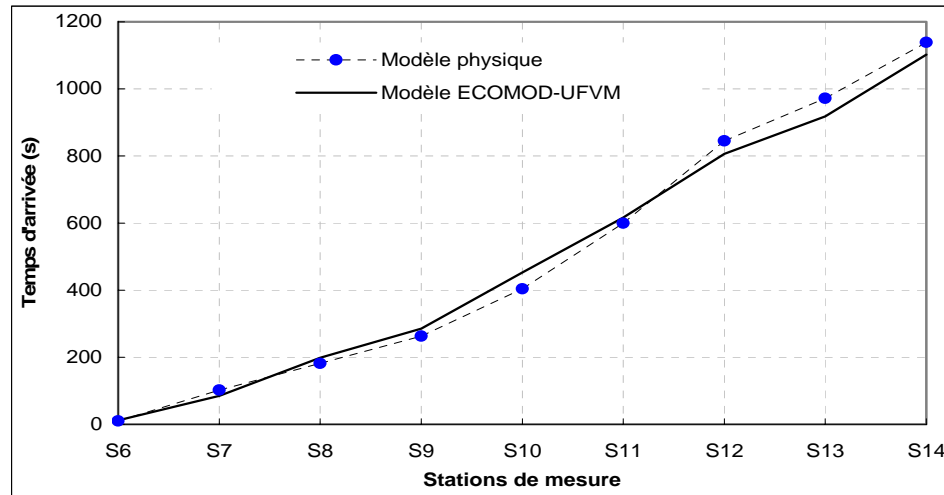


Figure 7-18 Temps d'arrivée aux stations de mesure définies dans le modèle physique

7.6.3 Cote maximale de la dénivellation de la surface libre

Le profil des cotes maximales de la surface libre, passé par les points observés, représente une enveloppe du front de l'onde qui se propage pendant l'accident (Tableau 7-8). Ces profils en rive droite et gauche obtenus par les modèles numériques comparés avec les observations données par la police sont tracés dans les Figure 7-19 et Figure 7-20, respectivement.

Nous observons que la plupart des résultats numériques du ECOMOD-UFVM aux deux rives droite et gauche sont plus près des observations de la police que ceux de Valiani et al. (Valiani A. et al., 2002), sauf aux points P4 et P13.

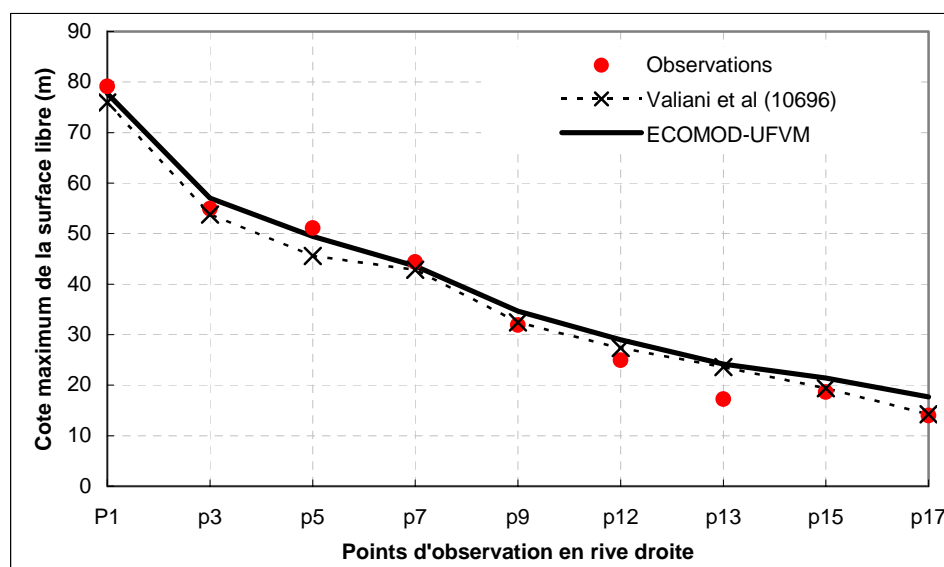


Figure 7-19 Cote maximum de la surface libre aux points d'observation en rive droite

Tableau 7-8

Cote maximale de la surface libre aux points observés par la police

	Points d'observation		Valiani et al.(10696)	ECOMOD-UFVM
	examinés par la Police	Observation (m)	(m)	(m)
Rive Droite	P1	79.15	75.96	77.71
	P3	54.90	53.77	56.99
	P5	51.10	45.56	49.48
	P7	44.35	42.86	43.59
	P9	31.90	32.44	34.62
	P12	24.90	25.37	29.00
	P13	17.25	23.58	24.16
	P15	18.60	19.37	21.44
	P17	14.00	14.23	17.69
Rive Gauche	P2	87.20	89.34	84.67
	P4	64.70	59.64	58.17
	P6	43.75	44.85	46.28
	P8	38.60	34.61	40.35
	P10	40.75	38.12	38.03
	P11	24.15	27.35	27.19
	P14	20.70	23.19	23.56
	P16	17.25	20.39	22.39

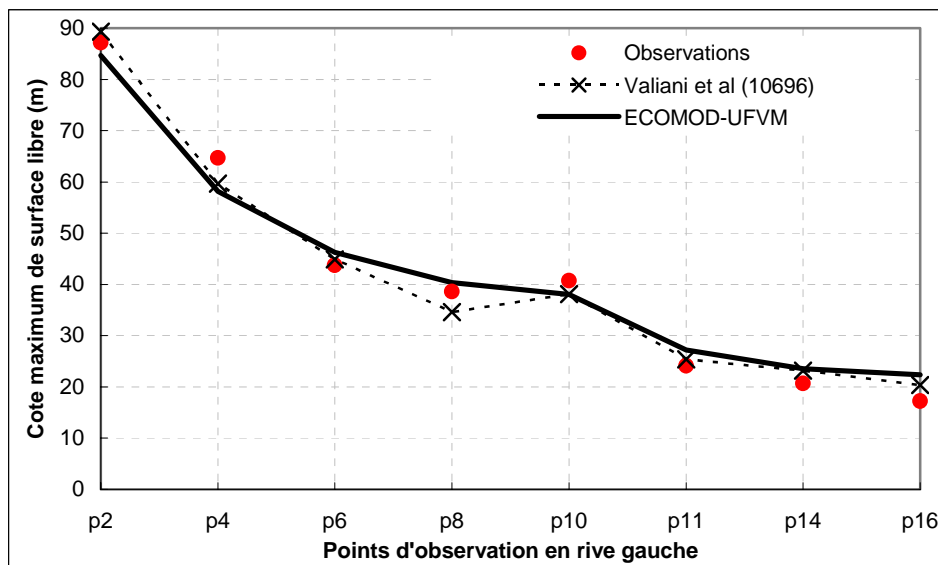


Figure 7-20 Cote maximum de la surface libre aux points d'observation en rive gauche

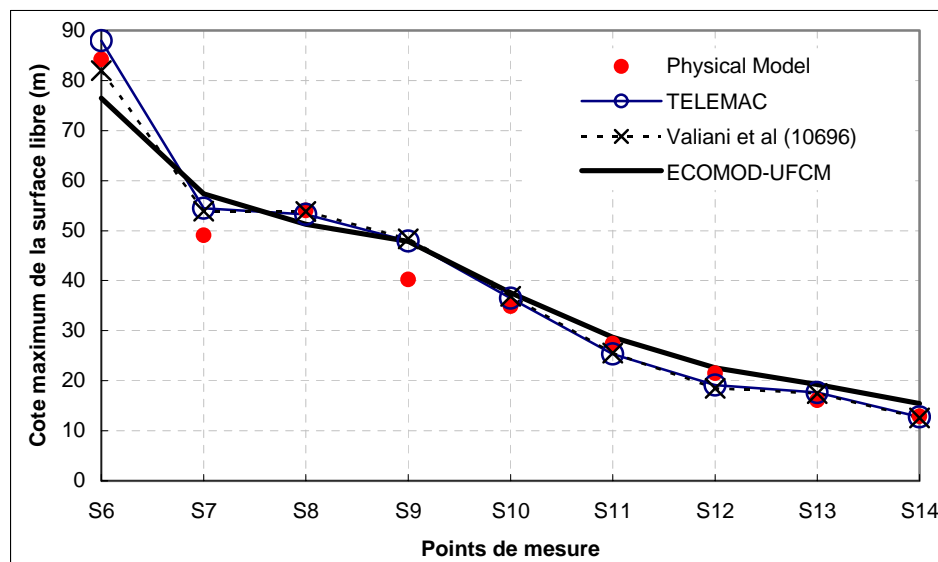


Figure 7-21 Cote maximum de la surface libre aux points de mesure sur le modèle physique

La Figure 7-21 présente la même comparaison mais confrontés, cette fois, aux points de mesure obtenus par le modèle physique. On note qu'aux points S7 et S9, les résultats numériques sont tous défaillants. L'écart entre les résultats numériques et ceux du modèle physique est maximal à ces points. Alcrudo et Gil (Alcrudo F. and Gil E., 1999) font la même remarque dans leurs résultats. Il semble qu'au point S6 (près du barrage), les résultats obtenus par (Valiani A. et al., 2002) et TELEMAC (Hervouet 2000) sont plus près des valeurs mesurées que ceux obtenus par notre modèle. Cependant, aux points S10, S11 et S12, c.-à-d. plus vers l'aval, cette situation est inversée : les résultats de notre modèle approchent mieux

les mesures physiques que les deux précédents modèles.

De façon générale, une bonne concordance entre les résultats des mesures effectuées et les observations, et les résultats calculés par UFVM est obtenue sauf aux points S6, S7 et S9.

7.6.4 Influence du coefficient de frottement

Les cotes maximales de la surface libre calculées par le présent modèle, utilisant le coefficient de Chézy dont la variation est importante de $20 - 50 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$, sont comparées aux observations par la police (Figure 7-23) et aux mesures obtenues par le modèle physique (Figure 7-22). Nous observons que les courbes des cotes maximales de la surface libre calculées avec les coefficients de Chézy de $25 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$, $30 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$ et $35 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$ concordent bien. Un décalage léger est observé entre les résultats calculés et les autres résultats lorsque $C_h = 20 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$ et $C_h = 50 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$. En générale, l'influence du coefficient de frottement reste faible. Les meilleurs résultats sont obtenus avec les coefficients de Chézy de 25, 30 et $35 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$.

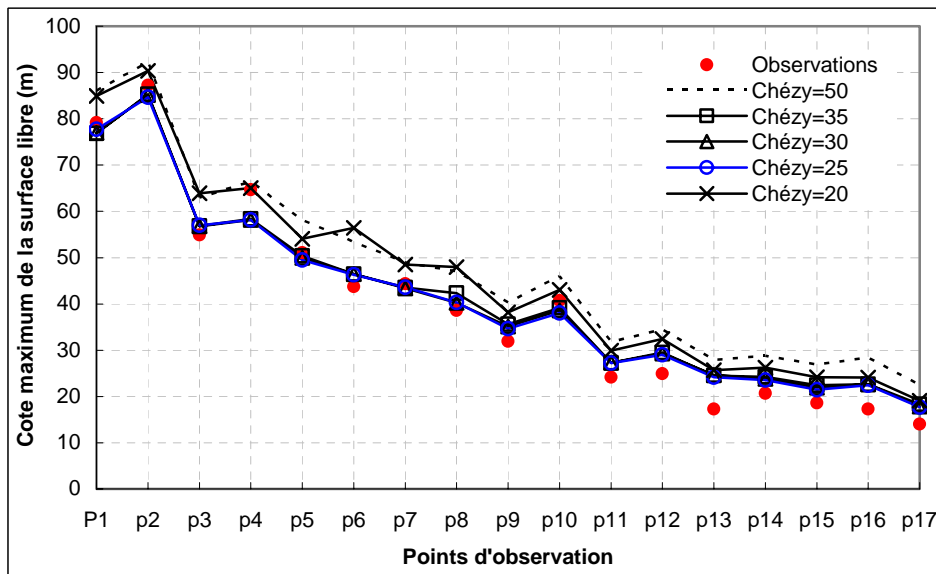


Figure 7-22 Influence du coefficient de Chézy sur la cote maximale de la surface libre aux points d'observation

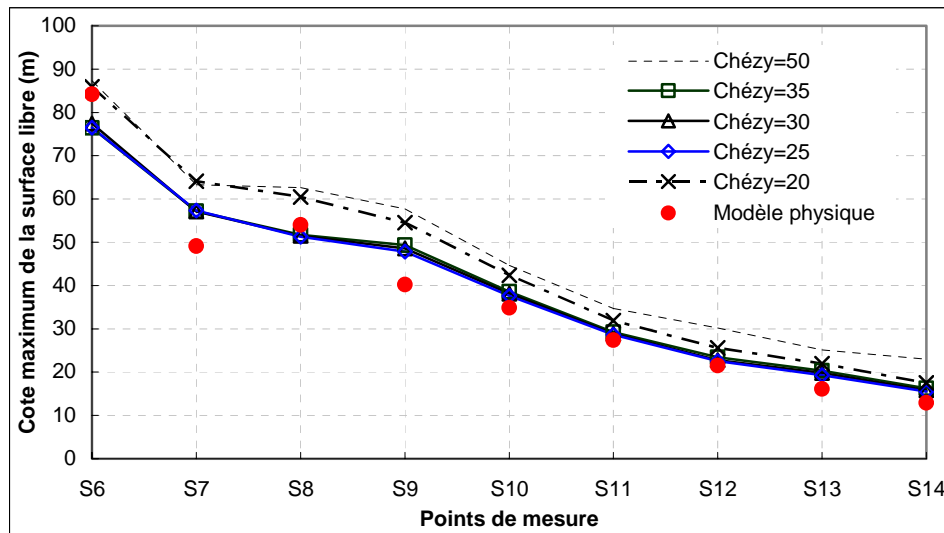


Figure 7-23 Influence du coefficient de Chézy sur la cote maximale de la surface libre aux points de mesure du modèle physique

Les comparaisons précédentes nous indiquent que le coefficient de frottement peut modifier le temps d'arrivée de l'onde (Tableau 7-5) mais n'affecte que peu la cote maximale de la surface libre. La même remarque est également donnée par Alcrudo et Gil (Alcrudo F. and Gil E., 1999) et Valiani et al. (2002) (Valiani A. et al., 2002). Hervouet (Hervouet J.M., 2001) note qu'un étalonnage plus précis nécessiterait de faire varier en espace le coefficient de frottement dans les études d'ondes de rupture. Ce coefficient est en fait fixé par le CTPB, selon un barème qui tient compte de la nature des terrains sur lesquels l'onde se propage (villes, forêts, etc.).

7.6.5 Performances numériques

La durée de simulation est de 4000 s. Le calcul avec le maillage de 26000 éléments, et le pas de temps de 0.1 s a été effectué en mode scalaire. Les temps de calcul sont 7 h 20 min sur un PC (Pentium 4 CPU 1.70 GHz), et 3 h 10 min sous un PC DELL Optiplex GXG620 (Pentium D CPU 3.20 GHz), respectivement.

7.6.6 Conclusion

La précision et la robustesse du présent modèle sont prouvées par le cas-test de la rupture du barrage de Malpasset. Globalement, une bonne concordance entre les résultats numériques du présent modèle, les mesures et les résultats obtenus par les autres modèles, est

obtenue. Le temps d'arrivée de l'onde aux transformateurs électriques et aux points de mesure du modèle physique ainsi que les cotes maximales de la surface libre sont correctement reproduits. Par ailleurs, l'expérience numérique prouve que le coefficient de frottement a une forte influence sur le temps d'arrivée de l'onde mais n'affecte pratiquement guère les niveaux d'eau maximum.

On remarque cependant que les positions réelles des points d'observation et de mesure ne coïncident pas exactement avec les centres des mailles de calcul. Les valeurs numériques sont donc déterminées par une interpolation entre les centres des mailles non structurées dans le présent modèle. Valiani et al. (Valiani A. et al., 2002) utilisent les valeurs au centre de la maille la plus proche du point de mesure étudié. Cette simplification peut être une des causes des écarts entre les résultats numériques et les données observées. Ceci comprend l'interpolation du niveau de la surface libre mais également de la bathymétrie du fond de vallée, qui peut être très grande. Ce dernier effet est accentué par l'interpolation du fond sur les nœuds du maillage de calcul qui n'est pas exempte d'erreurs d'approximations.

Ce cas-test prouve que le modèle est bien capable de reproduire avec précision un événement réel. Le traitement du terrain découvrant et recouvrant, qui est un problème délicat, a bien fonctionné.

Chapitre 8

La simulation de l'inondation dans la ville de Dongchuan

8.1 Objectif

Dans une région montagneuse comme celle de Dongchuan, les pluies torrentielles provoquent souvent des crues éclair sur des talus montagneux de très forte pente. Ces crues éclair, accompagnées souvent de glissements de terrain et des débris, sont sans aucun doute dévastatrices et causent des pertes colossales en matériel et en vies humaines.

Dans le cadre du projet chinois « Etudes d'évaluation des multi objectifs sur les désastres dus aux crues éclair dans les zones montagneuses, causant des inondations urbaines en aval » (Tang C. and SHI Y.E., 2006), les travaux de recherches sont effectués conjointement par l'Institut de Géographie de la province de Yunnan (Chine) et l'Université de Caen, afin de développer un système d'évaluation des désastres dus aux crues éclair dans les centres urbains des régions montagneuses. Ce système qui constitue un outil d'aide à la décision, nous permettra d'évaluer et de réduire les impacts socio-économiques dus aux crues éclair.

L'un des sites d'application est la ville montagneuse de Dongchuan dans la province de Yunnan (Chine). L'un des objectifs est alors d'établir une carte des zones inondables dues aux crues éclair.

L'application du code ECOMOD-UFVM nous permet de prévoir la propagation des crues éclair et leur débordement du lit majeur, et de déterminer les valeurs maximum de la vitesse et de la profondeur de l'eau afin d'établir une carte contenant des informations sur les inondations (vitesse et profondeur d'eau maximum). Cette carte servira dans les analyses des risques d'inondations dans cette ville.

8.2 Description géographique

Dongchuan est une ville montagneuse qui se situe à 165 km au nord-est de la capitale Kunming de la province chinoise de Yunnan (Figure 8-1). Le bassin de Xiaojiang, un bras du fleuve de Rangzi, se trouve dans une zone à haut risque de crues éclair et d'arrivée de débris. Chaque année, en raison de la mousson intertropicale, la quantité de pluie tombant durant la période allant de mai à octobre est supérieure à 90 % de celle de toute l'année. Les crues éclair sont très fréquentes dans cette région, causant des pertes importantes en vies humaines et en infrastructures économiques.

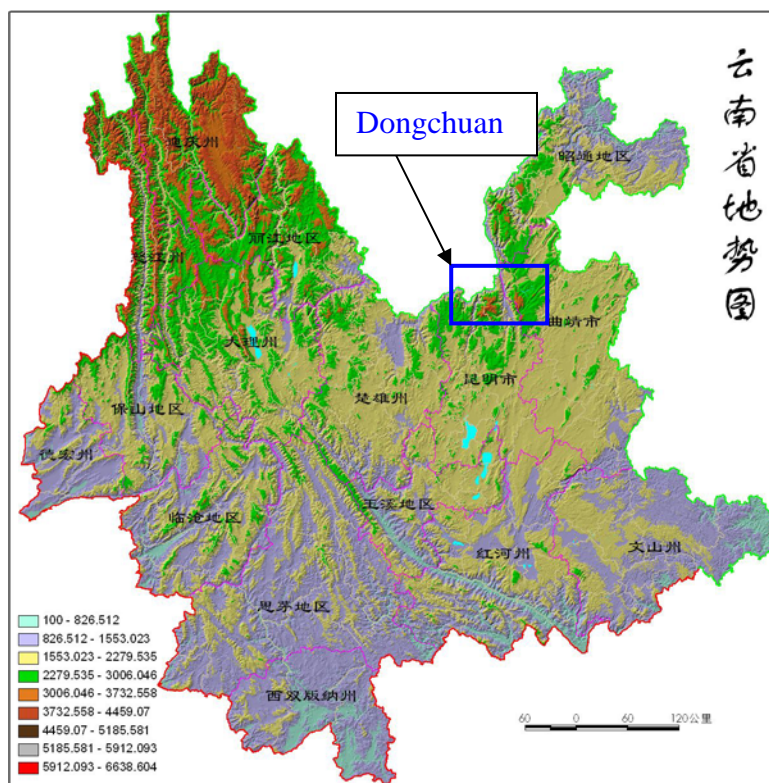


Figure 8-1 Carte topographique de la province de Yunnan

La Figure 8-2 présente la topographie de Dongchuan. La cote du fond de la zone urbaine va de 1200 à 1300 m. Globalement les montagnes de la région tendent à descendre dans la direction est-ouest. Il existe trois vallées qui encerclent la ville (voir la Figure 8-2) :

1. **Shiyanggou** : se situant au sud de Dongchuan. La cote du lit à l'entrée de cette vallée est de 3061 m. Il s'écoule de l'est vers l'ouest avant de rejoindre le fleuve de Xiaojiang. La cote du lit à la sortie de la vallée Shiyanggon est de 1400 m. La pente moyenne du lit est

de 24.7 %. L'autoroute entre Kunming et Dongchuan, et le chemin de fer de Dongchuan traversent cette vallée.

2. **Nigulagou** : se situant à l'est de Dongchuan. La sortie de la vallée Nigulagou est seulement à 1 km de la ville. Les écarts moyens des cotes entre la ville de Dongchuan et la vallée Nigulagou varient de 200 à 400 m environ, avec un écart maximal de 600 m. La vallée Nigulagou représente une menace sérieuse pour la sécurité de la ville de Dongchuan durant les crues éclair car il passe tout près et en hauteur bien au-dessus de cette ville en transportant une grande quantité de débris.
3. **Shengou** : se situant au nord de Dongchuan. La cote du lit à l'entrée de cette vallée est de 4017.3 m. Il s'écoule de l'est vers l'ouest avant de rejoindre le fleuve de Xiaojiang. La pente moyenne du lit de la vallée Shengou est de 16.67 %.

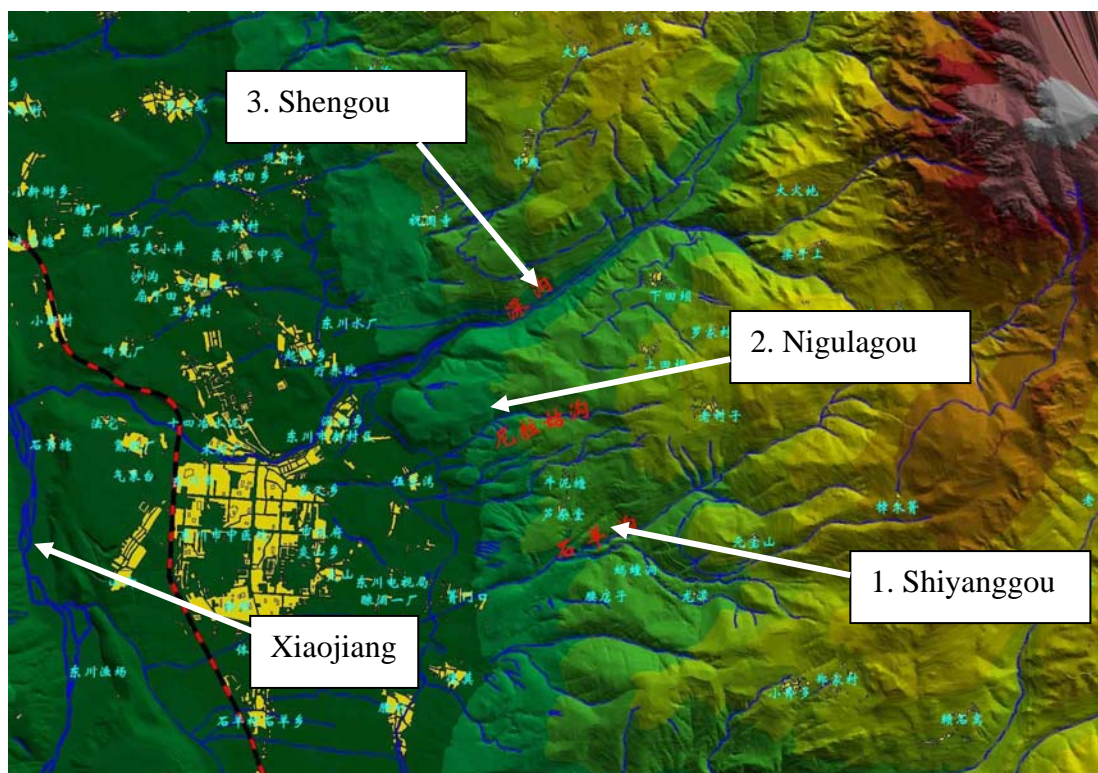


Figure 8-2 Carte digitale de Dongchuan

Les vallées Shiyanggou et Shengou passent tout près l'un de l'autre dans la ville de Dongchuan où elles sont distantes de seulement de 2 km. Les trois vallées se rejoignent dans le fleuve de Xiaojiang après leur passage de la ville de Dongchuan (Tang C. and Zhu J., 2003).

8.3 Simulation numérique

Dans une première configuration, afin de simplifier le calcul, nous ignorons l'existence des immeubles et des maisons dans la ville de Dongchuan. La durée de simulation est de 6 heures. Pendant les deux premières heures, il y a des débits d'eau entrant dans ces trois vallées suite à deux heures de précipitations en leur amont. Pendant les quatre heures qui suivent, il n'y a plus de débits entrant dans ces trois vallées.

8.3.1 Données disponibles

Les cotes du terrain sont issues des cartes digitalisées (DEM) aux échelles 1 :10000, et 1 :2000 de Dongchuan fournies par l'Institut de Géographie de Yunnan à l'aide du logiciel de S. I. G. (Système Informatique de Géographie) (Figure 8-2).

Dans la construction d'un ouvrage contrôlant des crues éclair, la fréquence de retour qui sert à la conception de cet ouvrage, est choisie en fonction des risques, du niveau de développement économique de la région étudiée et des conditions climatiques. Les fréquences de retour, qui servent à évaluer les risques des crues éclair et leurs impacts dans cette étude, sont choisies par les autorités locales et fixées à 50 et 100 ans.

8.3.2 Domaine de calcul

Le domaine de calcul est défini par le cadre rouge dans la Figure 8-3.

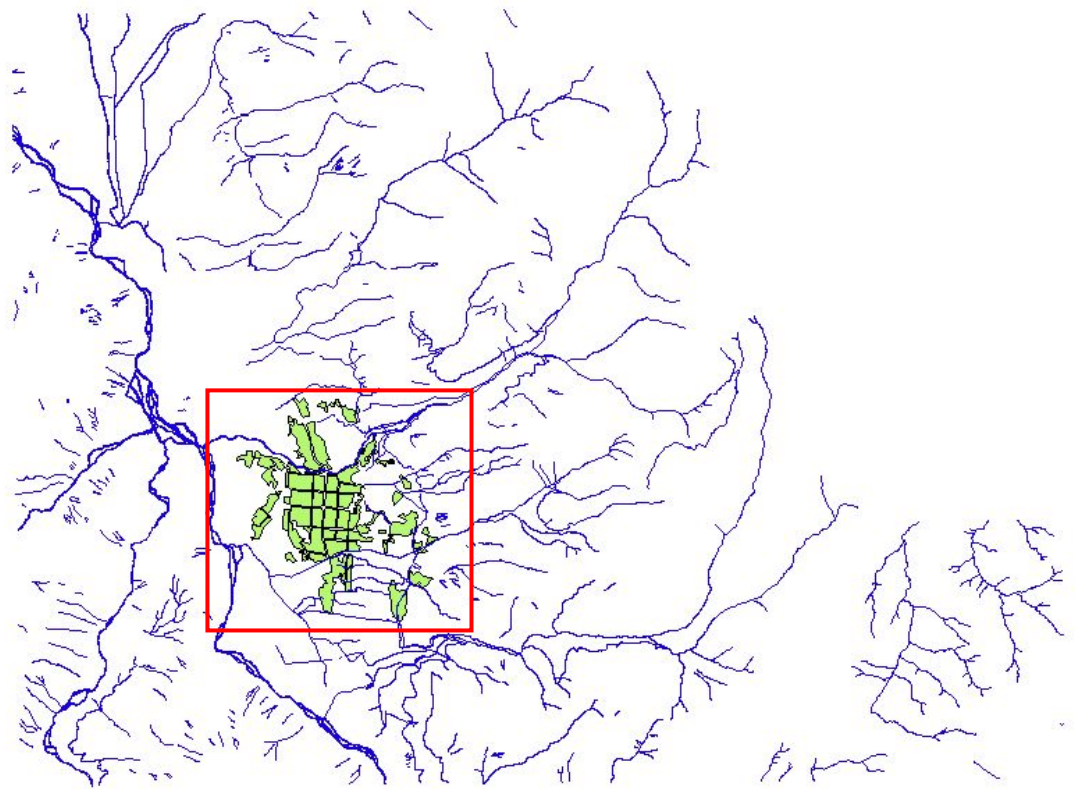


Figure 8-3 Domaine de calcul de Dongchuan

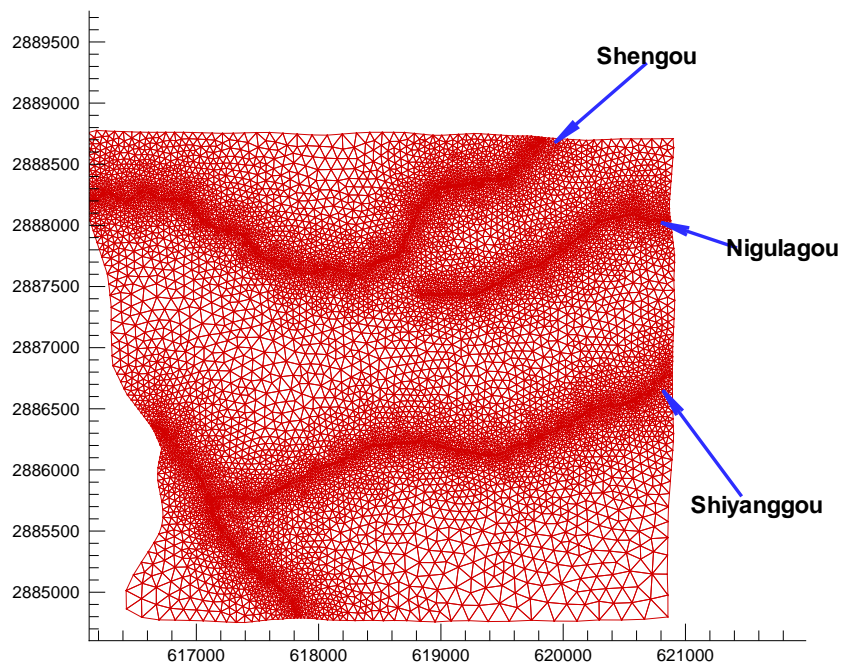


Figure 8-4 Maillage de calcul de Dongchuan

Les dimensions du domaine de calcul sont de 4850 m x 3960 m. Le domaine est discrétisé par un maillage non structuré de 5000 triangles et de 2761 points. La taille des mailles varie de 10 à 200 m.

8.3.3 Conditions initiales

Au temps $t = 0$, nous considérons que tous les terrains du domaine ainsi que les lits des trois vallées sont secs. Les vitesses sont nulles partout dans le domaine.

8.3.4 Conditions aux limites

La Figure 8-5 illustre les entrées et les sorties des trois vallées dans cette application.

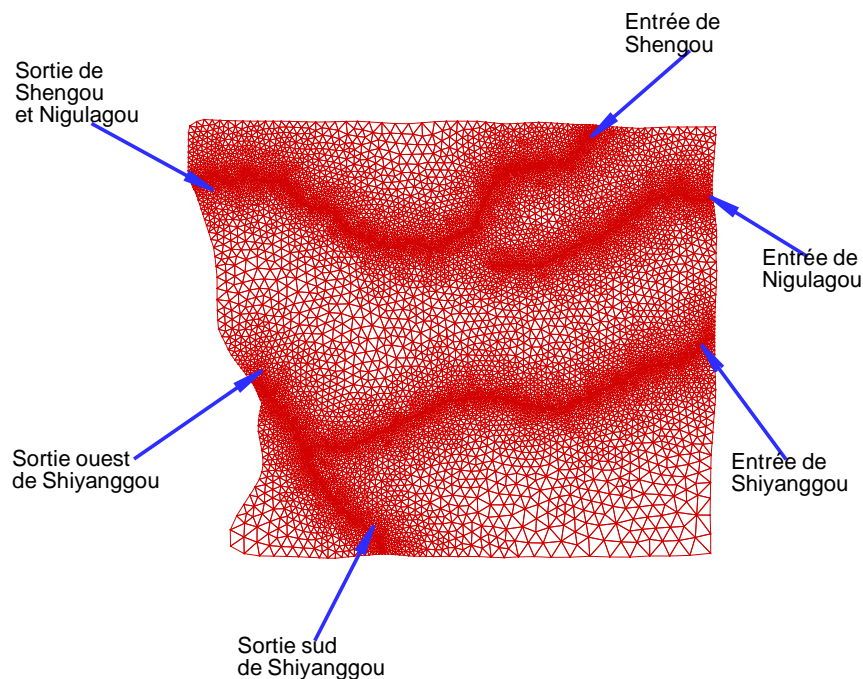


Figure 8-5 Entrées et sorties des trois vallées de Dongchuan

Conditions à l'entrée

Les données disponibles pour les calculs sont les débits donnés selon les fréquences de retour fixées à 50 et 100 ans (Tableau 8-1). La simulation dure deux heures, nous imposons les débits et les vitesses à l'entrée de chacun des trois vallées, qui sont déterminés sur la

fréquence de retour de 50 et 100 ans, respectivement. L'équation (7-1) donne les conditions de débits et de vitesses à l'entrée comme suit :

$$0 < t \leq 2h \begin{cases} q_x(i,t) = \frac{Q50(i)}{B(i)} \\ q_y(i,t) = 0. \quad \text{avec } i = 1, 2 \\ u(i,t) = V50(i) \\ v(i,t) = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} q_x(i,t) = 0. \\ q_y(i,t) = \frac{Q50(i)}{B(i)} \quad \text{avec } i = 3 \\ u(i,t) = 0. \\ v(i,t) = V50(i) \end{cases} \quad (7-1)$$

où $i = 1, 2, 3$ représentent les vallées de Shiyanggou, Nigulagou et Shengou, respectivement, $Q50(i)$ et $V50(i)$ sont le débit et la vitesse déterminés à la fréquence de retour de 50 ans, $Q100(i)$ et $V100(i)$ sont déterminés par la fréquence de retour de 100 ans, $B(i)$ est la largeur de vallée correspondant.

Tableau 8-1 Débit et vitesse déterminés aux fréquences de retour 50 et 100 ans

Vallées	Vitesse (m/s)		Débit (m^3/s)	
	Fréquence 50 ans	Fréquence 100 ans	Fréquence 50 ans	Fréquence 100 ans
	$V50(i)$	$V100(i)$	$Q50(i)$	$Q100(i)$
1. Shiyanggou	8.51	11.4	57.0	69.5
2. Nigulagou	1.02	1.41	9.9	11.8
3. Shengou	29.87	36.38	169.2	193.9

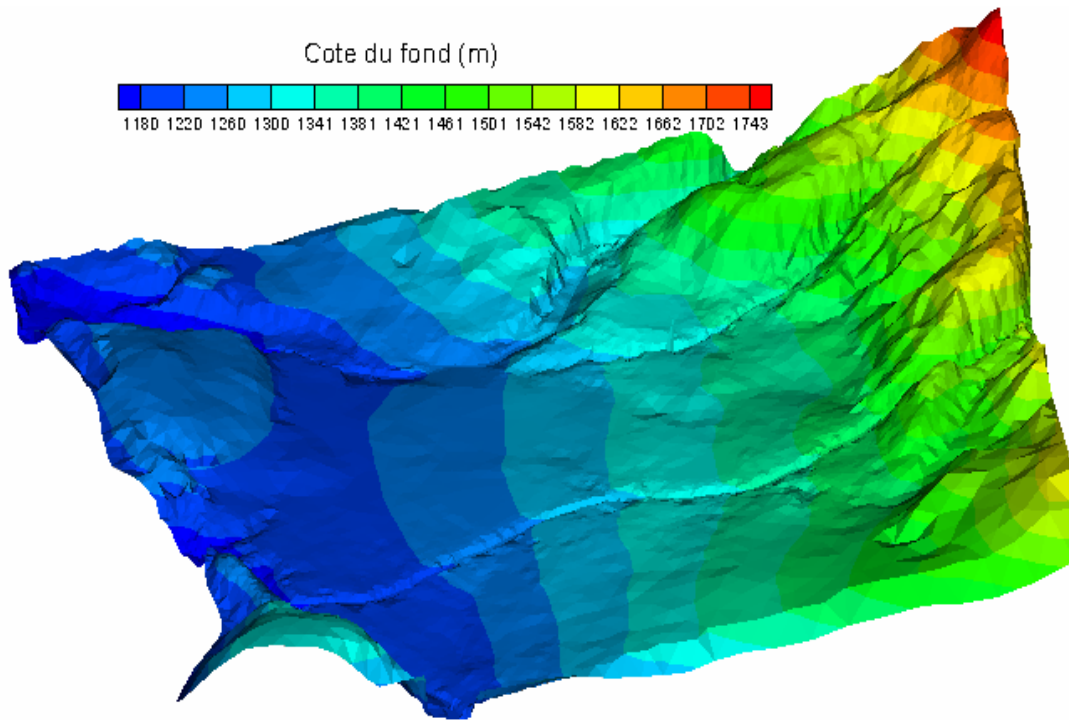


Figure 8-6 Topographie du domaine étudié

Conditions aux frontières libres

La Figure 8-6 présente la topographie du domaine de calcul. Dans ce domaine, la cote du terrain descend de 1800 m à 1120 m sur une distance de 4850 m. Globalement la pente est de 14 %, ce qui est extrêmement grand.

A l'exception de l'entrée de la vallée Shengou, les frontières nord, ouest et sud sont considérées comme libres de toute contrainte : ni la hauteur d'eau ni la vitesse est imposée. La condition de radiation est donc utilisée à ces frontières afin de déterminer les dénivellations de la surface libre.

Conditions aux parois imperméables

Le domaine est limité par des grandes montagnes à la frontière est. Exceptées les entrées des vallées Nigulagou et Shiyanggou, nous considérons que la frontière est une paroi imperméable. Une condition de non glissement y est utilisée.

8.3.5 Paramètres numériques

La simulation est de deux heures avec un pas de temps 0.2 s. Le coefficient de

diffusion $A_H = 5 \text{ m}^2/\text{s}$ est utilisé durant le calcul. Le coefficient de Chézy est imposé $C_h = 30 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$. Une valeur de tolérance pour la profondeur, $H_\varepsilon = 0.1 \text{ m}$ est imposée.

8.4 Résultats et discussion

8.4.1 Résultats numériques aux différents instants

Nous présentons les résultats numériques obtenus par notre modèle, avec le coefficient de diffusion $A_H = 5 \text{ m}^2/\text{s}$, le coefficient de frottement $C_h = 30 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$, pour les débits de fréquence de retour 50 ans aux entrées des vallées.

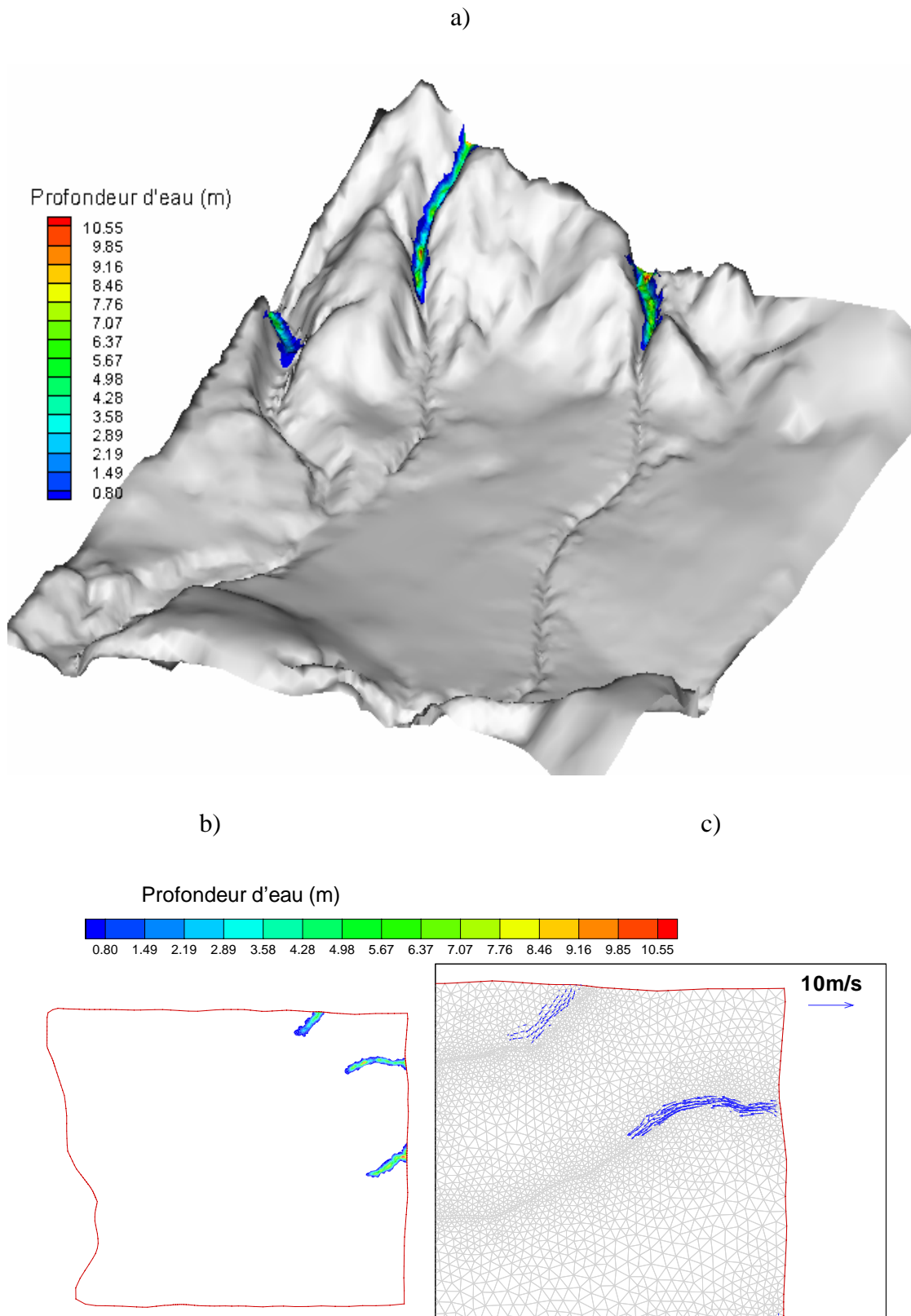


Figure 8-8 Profondeur d'eau et champ de vitesse à $t = 60$ s (fréquence de retour 50 ans)

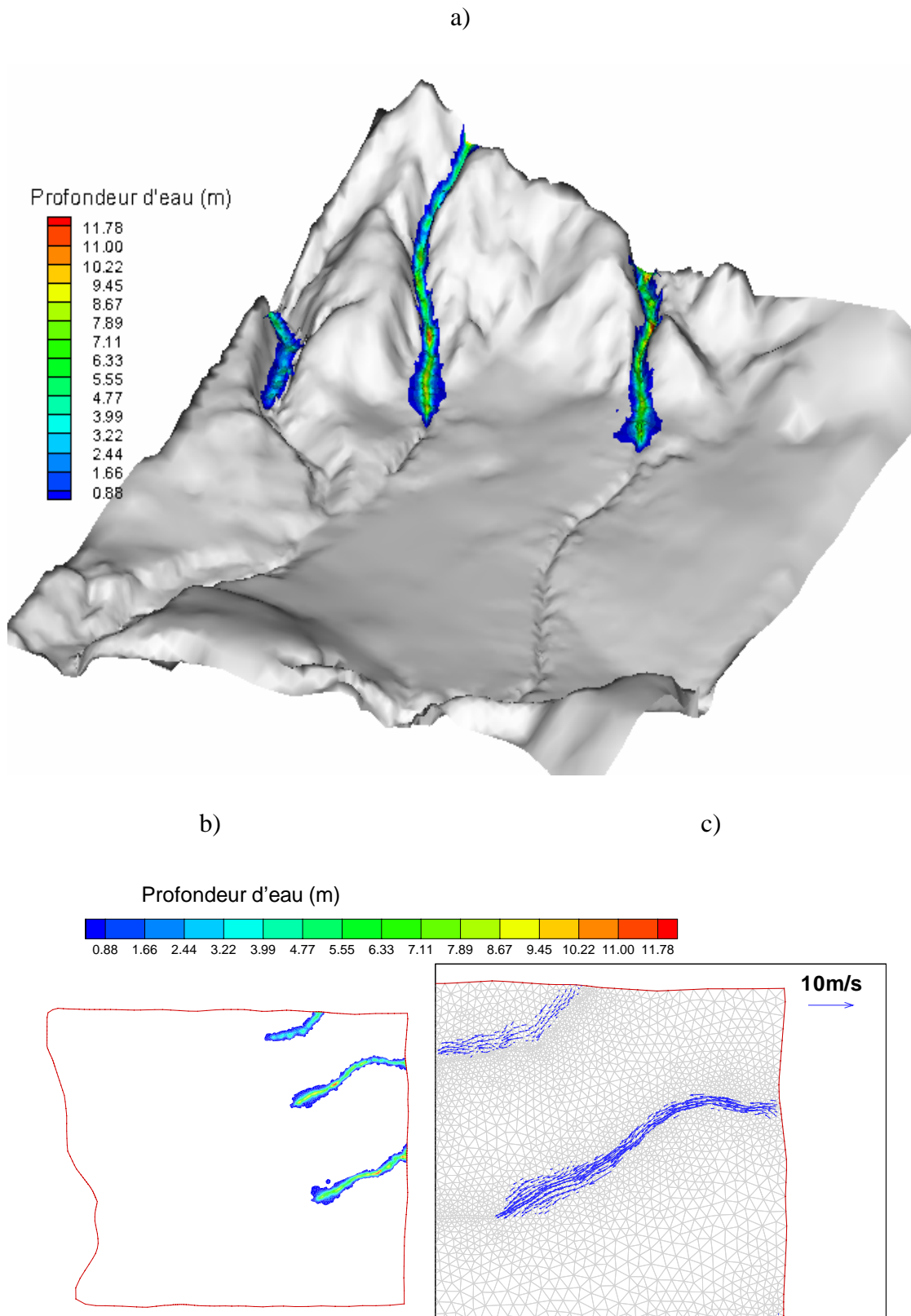


Figure 8-10 Profondeur d'eau et champ de vitesse à $t = 120$ s (fréquence de retour 50 ans)

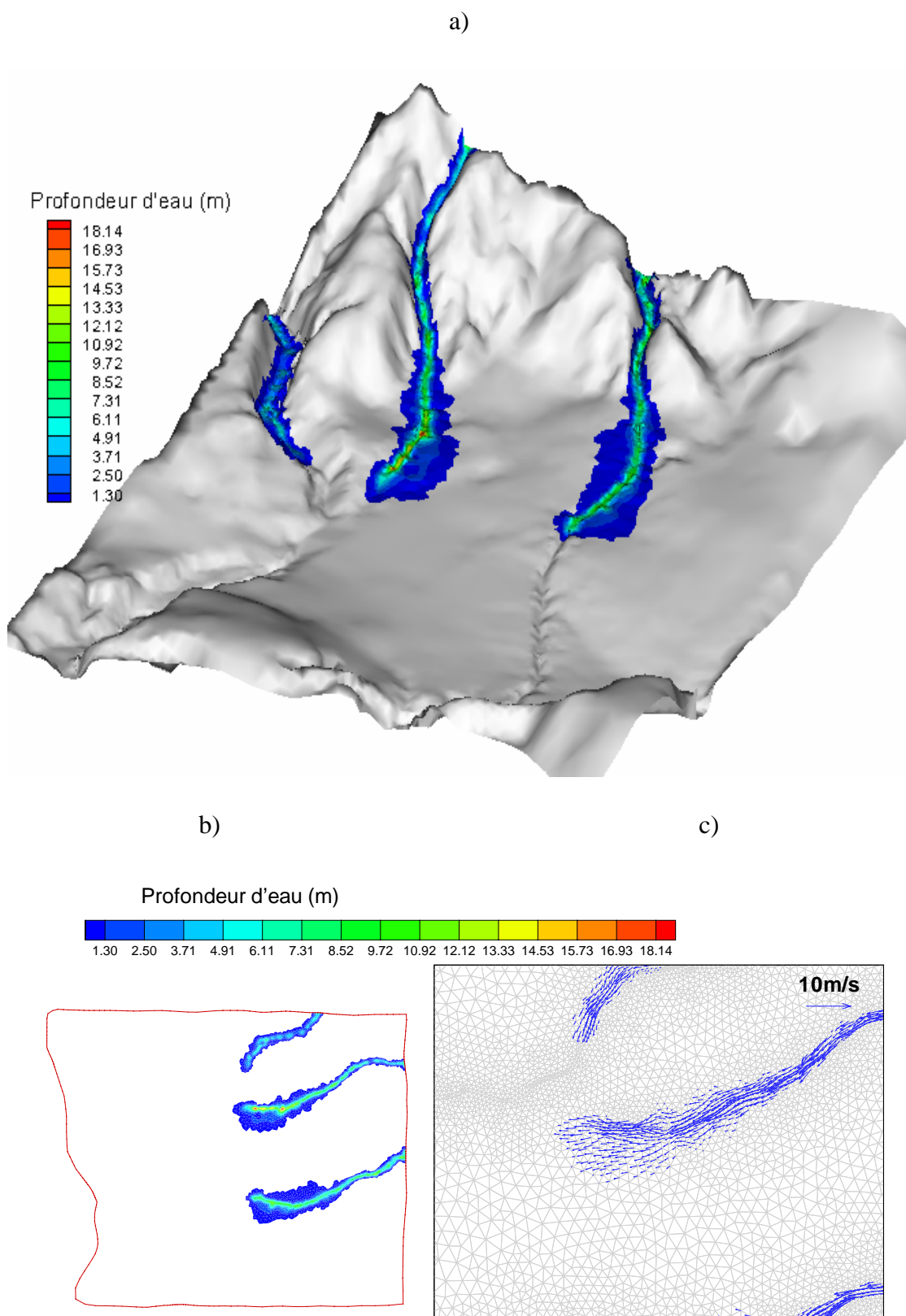


Figure 8-11 Profondeur d'eau et champ de vitesse à $t = 180$ s (fréquence de retour 50 ans)

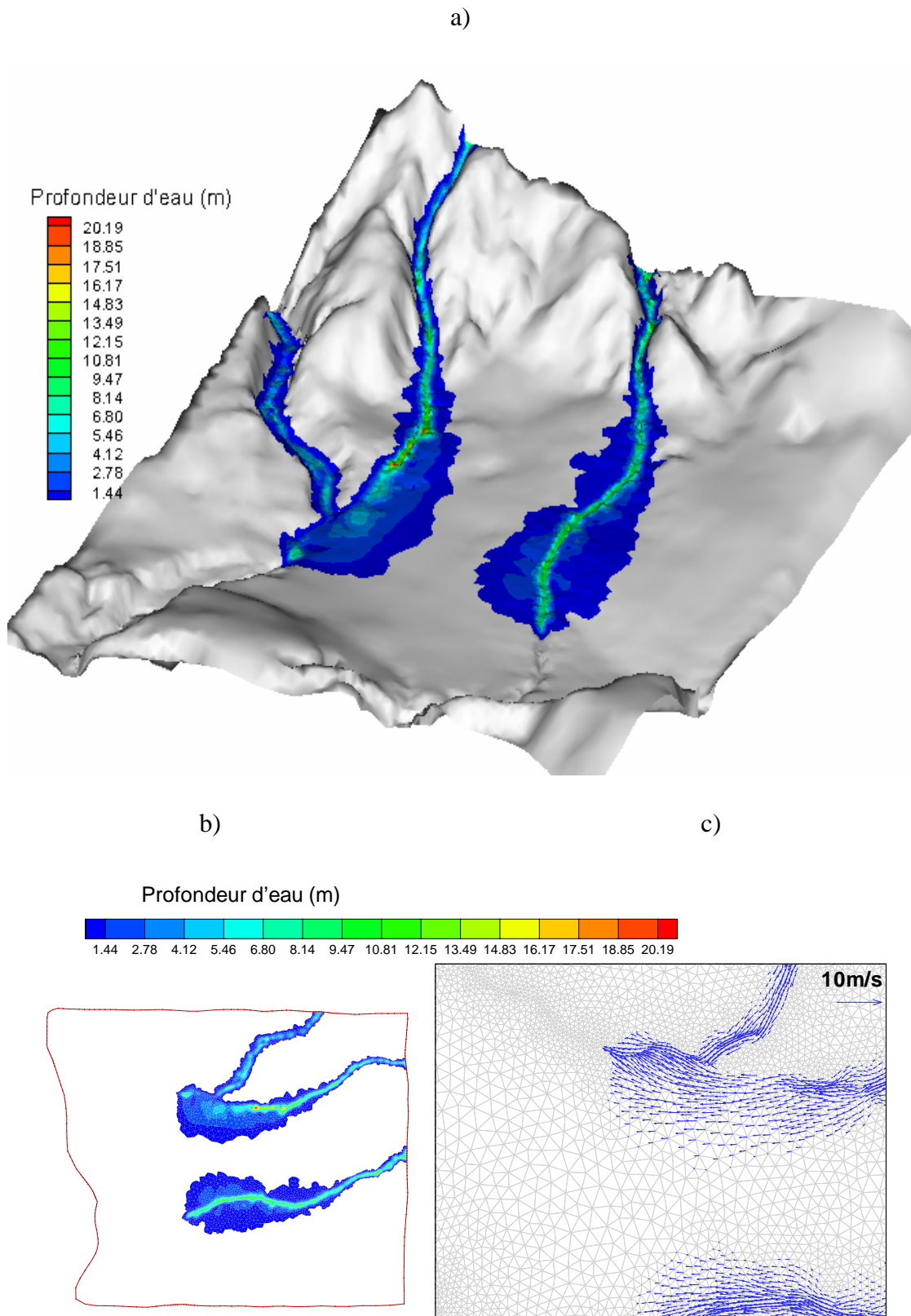


Figure 8-12 Profondeur d'eau et champ de vitesse à $t = 240$ s (fréquence de retour 50 ans)

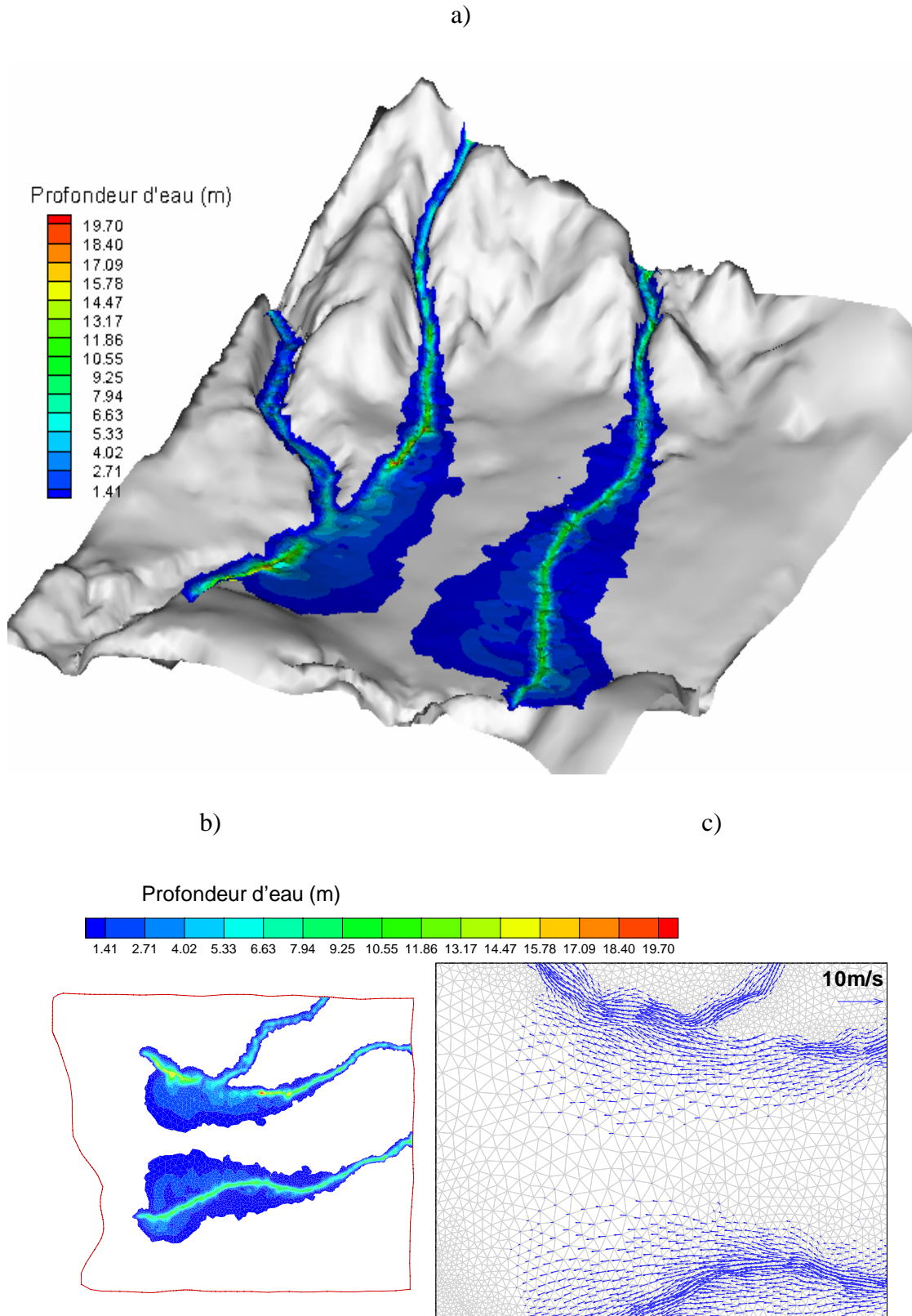


Figure 8-13 Profondeur d'eau et champ de vitesse à $t = 300$ s (fréquence de retour 50 ans)

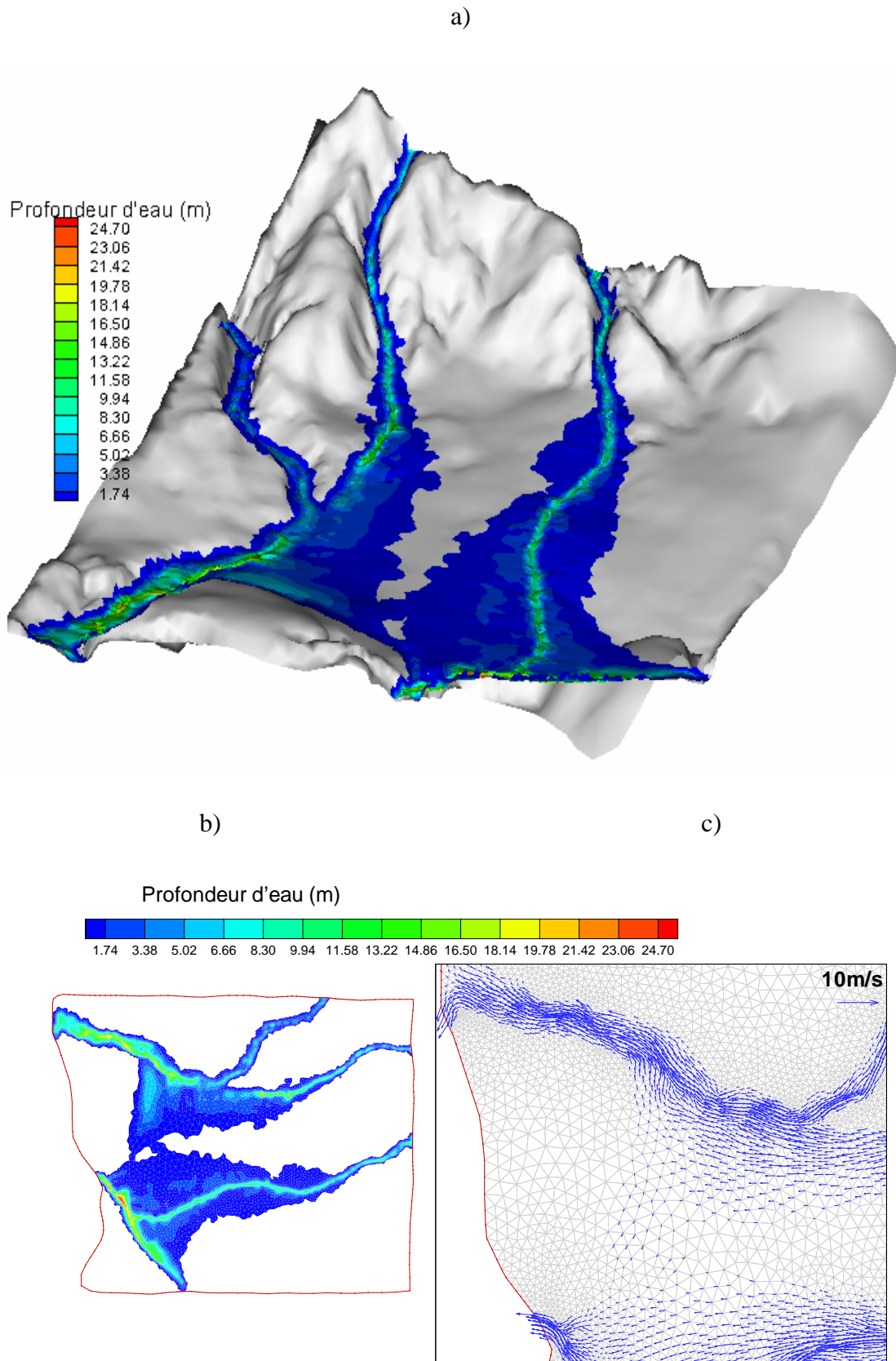


Figure 8-14 Profondeur d'eau et champ de vitesse à $t = 420$ s (fréquence de retour 50 ans)

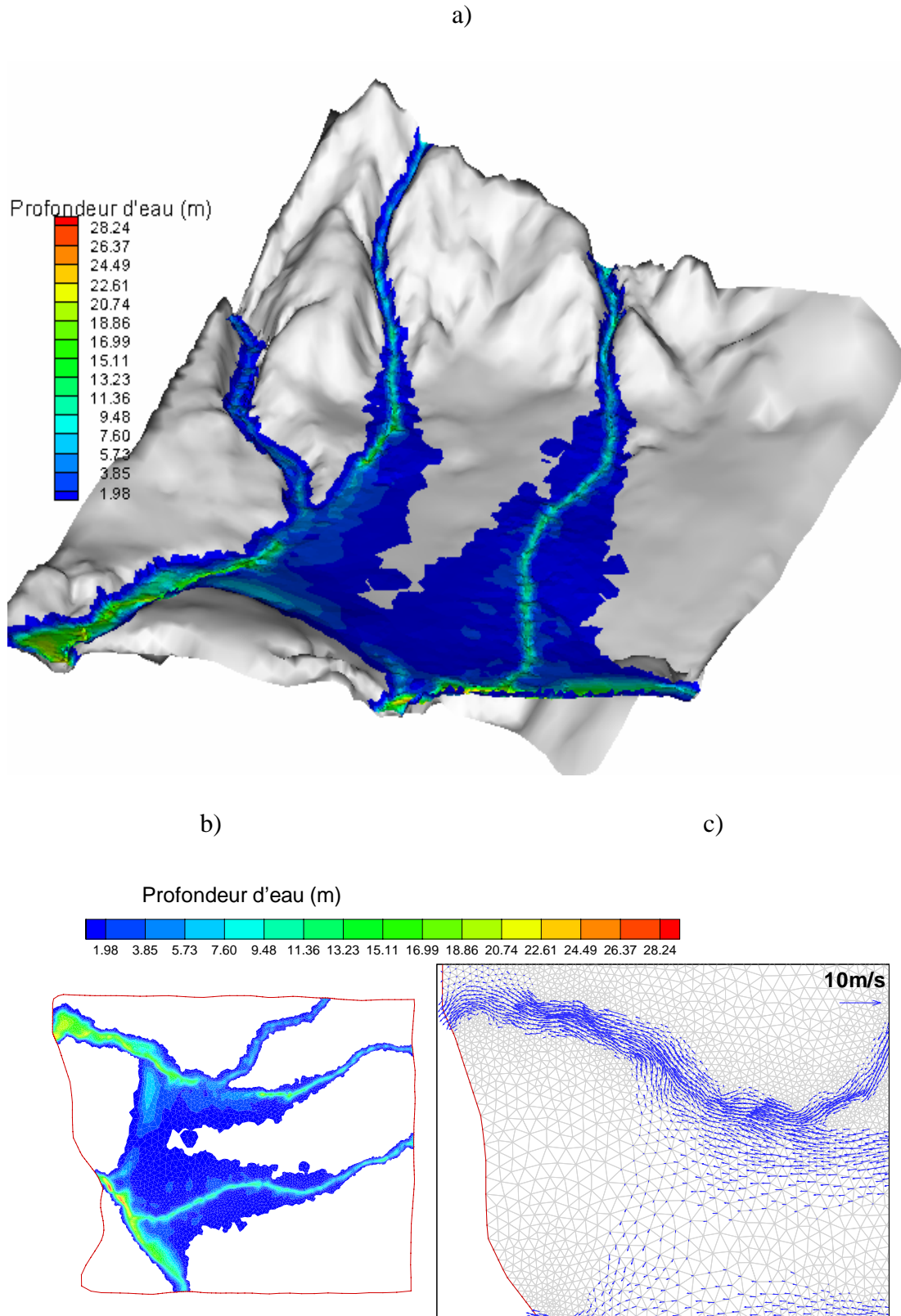


Figure 8-15 Profondeur d'eau et champ de vitesse à $t = 30$ min (fréquence de retour 50 ans)

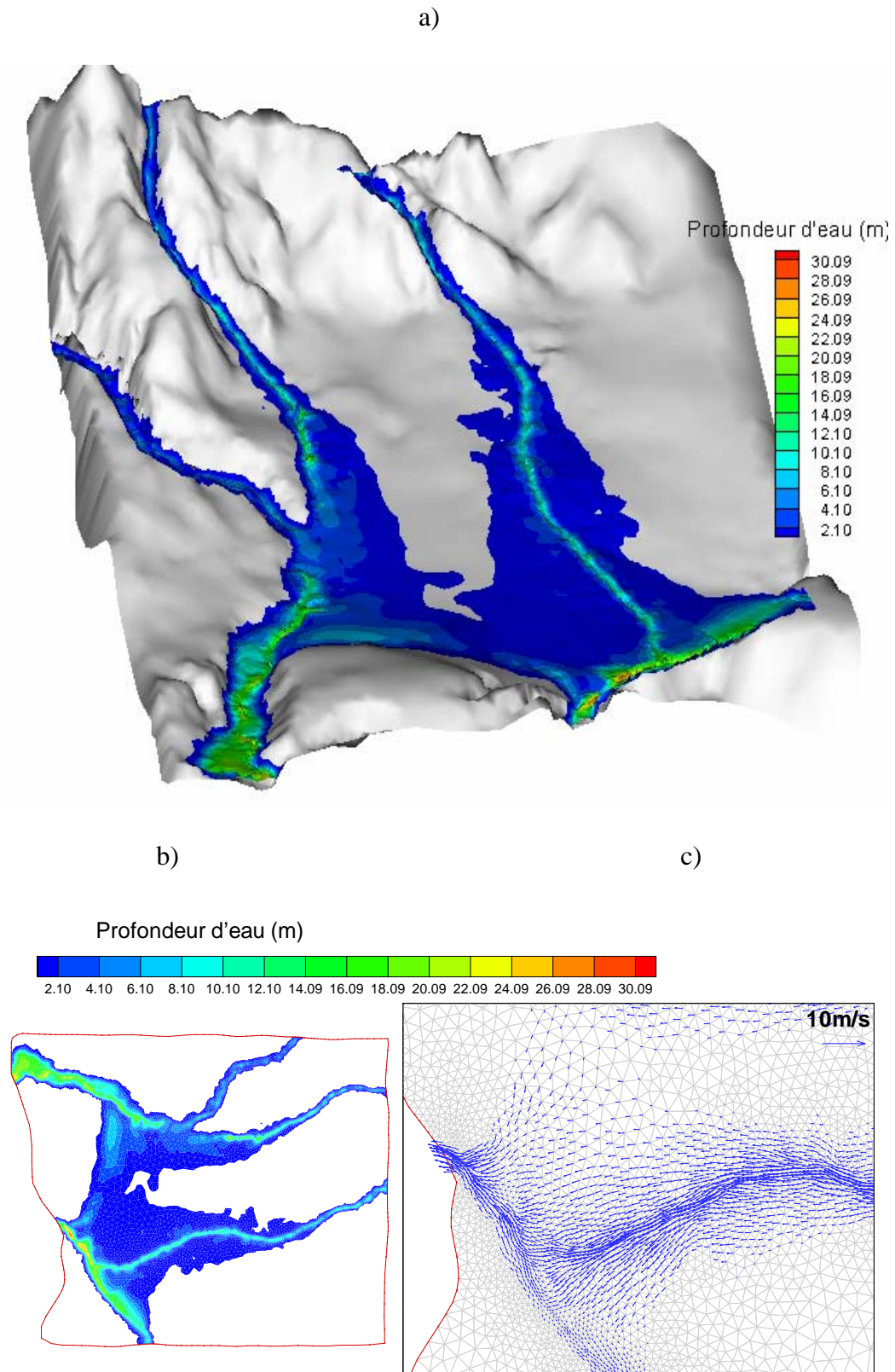


Figure 8-16 Profondeur d'eau et champ de vitesse à $t = 2$ h (fréquence de retour 50 ans)

Les Figure 8-7 à Figure 8-16 présentent la profondeur d'eau et les champs de vitesses obtenus par notre modèle, aux instants $t = 30$ s, 60 s, 90 s, 120 s, 180 s, 240 s, 300 s, 420 s, 30 min et 2 h, respectivement. Une partie de l'écoulement dans la vallée de Shiyanggou atteint la frontière sud vers $t = 390$ s, et l'autre partie de l'écoulement dans la vallée de Shiyanggou atteint la frontière ouest vers $t = 420$ s. Le front de l'onde dans la vallée de Shengou et Nigulagou arrive à la sortie vers $t = 420$ s.

Nous observons que la propagation de l'onde est très rapide. Elle passe toute la longueur du domaine en seulement 7 minutes. A l'instant $t = 2$ h (Figure 8-16), la profondeur d'eau maximale est de 30 m dans la vallée Shiyanggou. L'onde se répand sur les zones d'habitation, et une grande partie de la ville est submergée. La profondeur d'eau dans la ville varie de 0.2 m à 1.9 m. La profondeur d'eau aux rives des vallées est beaucoup plus grande.

8.4.2 Cartes de vitesse et de profondeur d'eau maximum

La Figure 8-17 présente la définition des critères du risque statique dû aux profondeurs d'eau et du risque dynamique dû aux vitesses (Teresa Viseu, 2001). Quand la profondeur d'eau h est supérieure à 1.0 m, le risque statique pour l'homme apparaît ; quand $h > 3.0$ m, il y a risque pour les maisons; lorsque $h > 6.0$ m, c'est dangereux pour des grands bâtiments. Quand la vitesse d'eau u est inférieure à 4.0 m/s, le risque dynamique est faible pour les habitations; pour 4.0 m/s $\leq u < 6.0$ m/s le risque est modéré; mais la maison sera complètement détruite lorsque la vitesse u sera supérieure à 6.0 m/s.

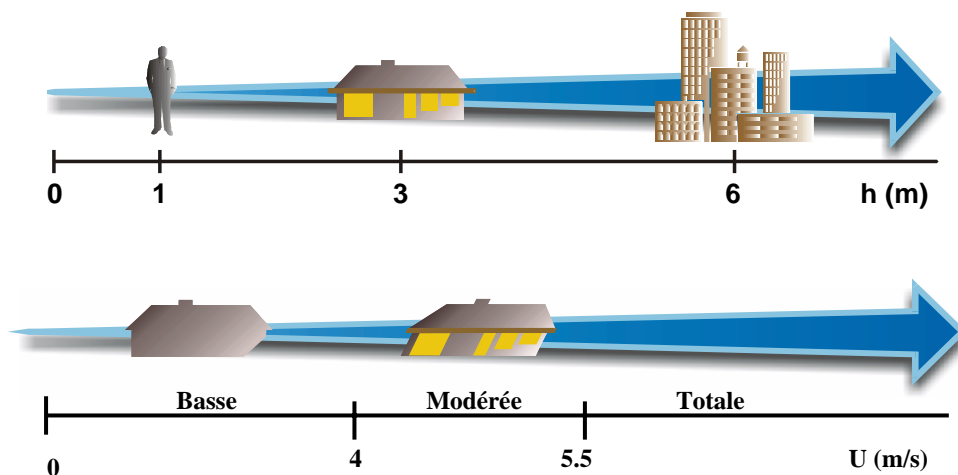


Figure 8-17 Définition des critères de risque statique et dynamique dus à l'inondation

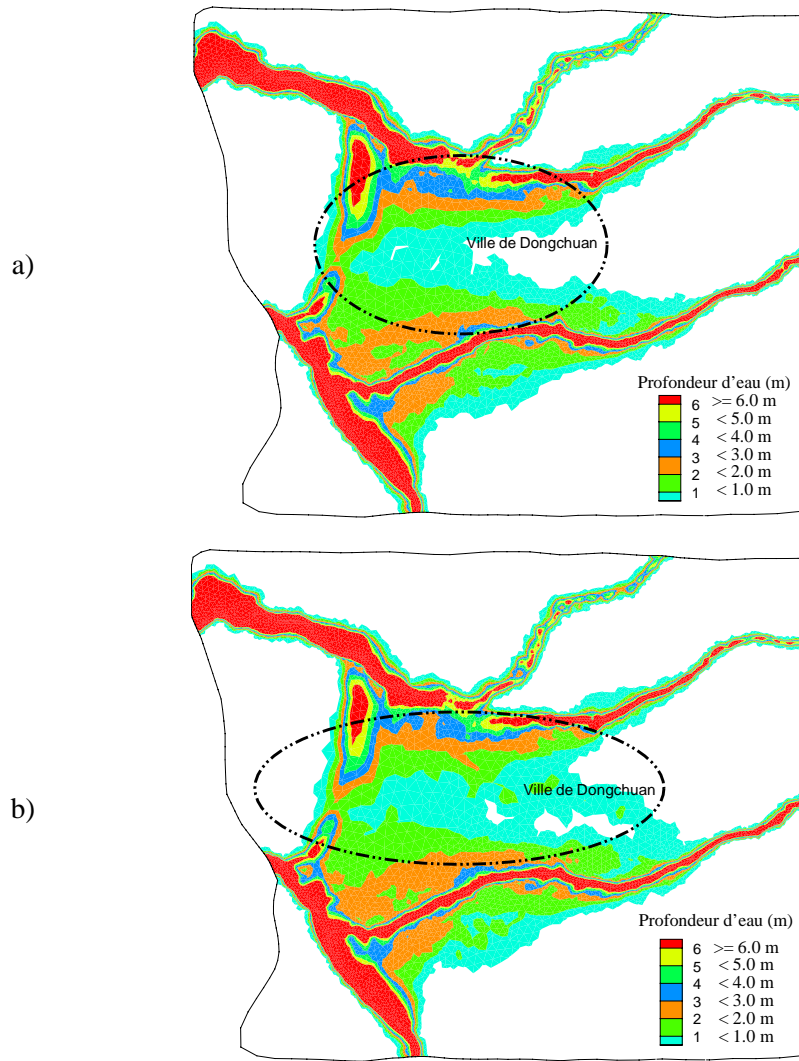


Figure 8-18 Risque statique de Dongchuan en profondeur d'eau
a) fréquence de 50 ans ; b) fréquence de 100 ans

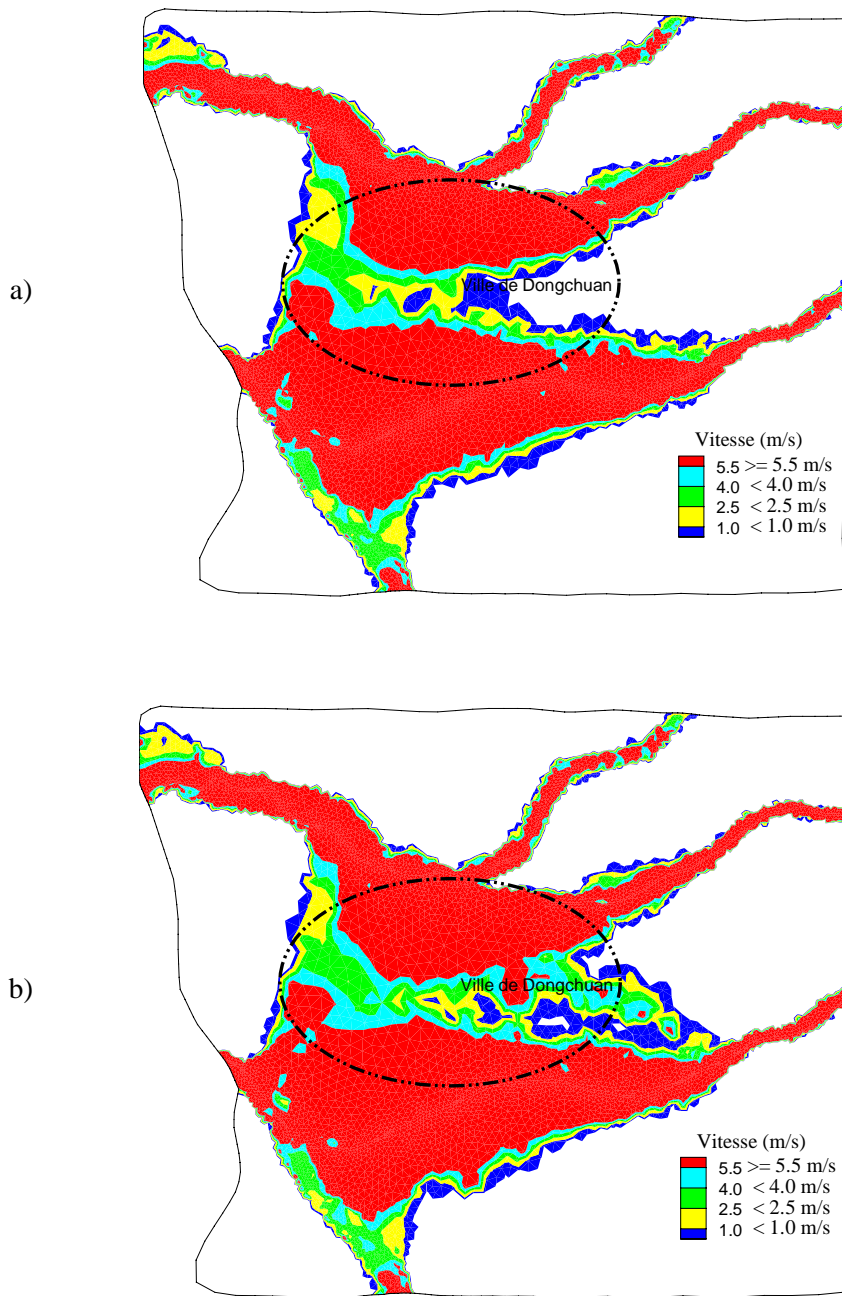


Figure 8-19 Risque dynamique de Dongchuan en vitesses :

a) fréquence de 50 ans ; b) fréquence de 100 ans

Les Figure 8-19 a) et b) donnent une distribution du risque dynamique pour les crues de fréquence de retour 50 ans et 100 ans, respectivement. Nous observons que dans la ville de Dongchuan, pendant 2 heures de simulation, la vitesse atteint une valeur supérieure à 5.5 m/s. La vitesse dans une plus grande partie du centre ville passe au-delà de 4.0 m/s. Dans les vallées et les zones à proximité de leurs rivages, le risque dynamique reste toujours au niveau

rouge (vitesse supérieure à 5.5 m/s). Dans le cas de 100 ans, la zone rouge $u \geq 5.5 \text{ m/s}$ s'étend vers le centre ville.

Les Figure 8-18 a) et b) présentent la carte du risque statique basé sur les définitions données dans la Figure 8-17. Dans le cas de fréquence de retour de 100 ans, la surface de la zone submergée est plus grande que celle au cas de 50 ans. Dans les deux cas, nous observons que, pendant 2 heures de simulation, la profondeur d'eau maximum dans la ville de Dongchuan atteint une valeur supérieure à 6.0 m. La majeure partie du centre ville est submergée sous de 1.0 m d'eau. Dans les vallées, les profondeurs d'eau sont plus grandes. Elles sont supérieures à 6.0 m.

8.5 Conclusion

La simulation de l'inondation dans la ville de Dongchuan a été effectuée en utilisant le modèle numérique de ECOMOD - UFVM sous des conditions de topographie extrêmement irrégulière et d'environnement géologique très complexe. Les résultats du modèle ont fourni une base scientifique pour évaluer les impacts des crues éclair qui pourraient être provoquées par des pluies torrentielles dans la région de Dongchuan. Cependant, le modèle n'a pas pu être calibré et cette simulation reste donc qualitative pour les raisons suivantes :

1. Absence totale des mesures et des données d'observation.

En général, la plupart des crues éclair et des inondations qui se produisirent subitement ou accidentellement dans le passé, n'ont pas été observée et leurs caractéristiques ont été que rarement mesurées. C'est le cas de la ville de Dongchuan. Aucune information sur l'évolution de la surface libre et sur la vitesse durant les inondations qui se sont produites dans le passé, n'a été en notre possession.

2. Manque d'informations sur la bathymétrie des vallées.

Dans des applications réelles, nous serions amenés à nous intéresser aux valeurs de débits et de profondeurs de l'écoulement à un instant indiqué et à un endroit donné le long du cours d'eau, et à connaître le cheminement de la propagation des crues. Les résultats obtenus par un modèle numérique pourraient en général donner ces informations concernant la propagation des crues dans la ville de Dongchuan. Cependant, avec une variation rapide de la topographie du domaine étudié, sans données bathymétriques des vallées, il est très difficile d'obtenir des informations de manière précise, en particulier au début lorsque les crues restent

encore dans le lit majeur des vallées.

Pour la suite de ce travail, afin de bien prévoir des inondations d'une manière détaillée dans la ville de Dongchuan, il faut prendre en compte la présence des bâtiments, des maisons et des rues dans le centre ville de Dongchuan. Par ailleurs, dans la région montagneuse, les crues éclair arrivent souvent avec les écoulements de débris. Il est donc nécessaire de prendre en compte la présence des débris dans le modèle numérique.

En conclusion, bien que l'on ait pu seulement analyser les problèmes d'inondation dans la ville de Dongchuan d'une manière qualitative, l'application ouvre cependant une perspective à utiliser un modèle numérique pour évaluer les impacts des crues éclair dans un centre urbain et montagneux de la province de Yunnan (Chine).

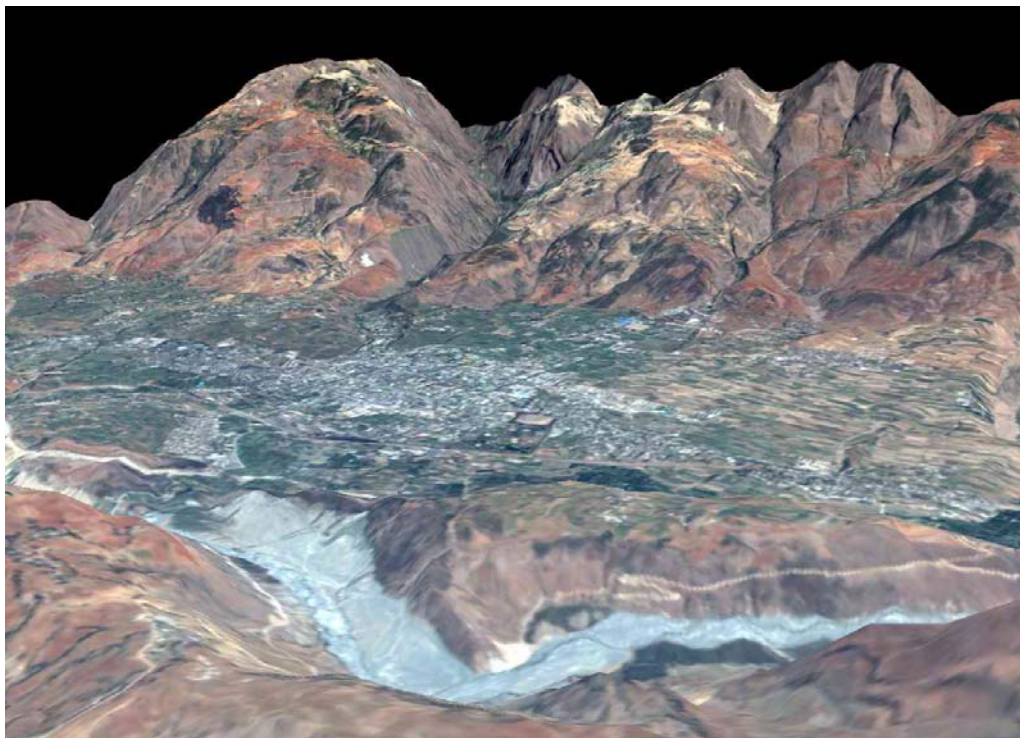


Figure 8-20 Image de vallée d'écoulement de débris

Partie IV Conclusions et perspectives

Dans ce travail, nous avons mis au point un code de calcul des écoulements à surface libre sur un fond irrégulier, et sec ou/et mouillé pour une géométrie complexe. Ce code est basé sur la résolution des équations de Saint-Venant par une méthode de projection couplée à une méthode de discrétisation de type volumes finis dans un maillage non structuré. Ici, nous faisons le choix d'une formulation « débit unitaire-dénivellation » non conservative des équations de Saint-Venant afin de faciliter le développement de la méthode de projection. Ce choix a été motivé en prévision des applications de ce code à des problèmes qui représentent des termes sources importants dus principalement à une variation rapide et à une forte irrégularité du fond. Face à ces problèmes, les méthodes utilisant un solveur d'approximation de Riemann, qui sont bien appropriées à la résolution des équations purement hyperboliques, rencontrent souvent des difficultés dues à l'instabilité de la solution numérique.

Une dizaine de cas-tests proposés dans les études d'écoulements à surface libre précédentes ont été réalisés. Chacun de ces cas-tests a pour objectif de vérifier précisément une ou plusieurs propriétés du code. Le problème d'écoulements sur une bosse permet de vérifier la capacité de ce code à résoudre les équations de Saint-Venant unidimensionnelles dont le terme de source est non négligeable (section 5.1). Le cas-test de l'écoulement fortement convectif, forcé par un jet dans un bassin circulaire à fond plat (section 5.3) vérifie le schéma traitant les termes de convection et le bon fonctionnement de l'ensemble du code. Le cas-test de l'écoulement permanent dans un canal à topographie très irrégulière (section 5.5) permet de vérifier la capacité du code à résoudre les équations de Saint-Venant lorsque les termes sources deviennent dominants et peuvent provoquer des instabilités numériques importantes. Si les précédents cas-tests concernaient les écoulements stationnaires, plusieurs cas-tests abordant les écoulements instationnaires, voire torrentiels, sont également réalisés. Le cas-test de l'écoulement dans un bassin polaire (Section 5.2) examine la capacité du code à calculer pendant une très longue période, la propagation de la marée, sans effet de convection ni de frottement, sur un fond en grande pente dans une géométrie assez complexe. Le cas-test de l'écoulement soumis à une marée sinusoïdale dans un canal à élargissement brusque (section 5.4) a pour but de confirmer la fiabilité du fonctionnement de l'ensemble du code aux cas où la géométrie du domaine étudié est très singulière. Le cas-test de l'écoulement dans un bassin à fond en pente variable, soumis à une marée de haute amplitude (section 5.6) permet de vérifier la technique traitant les zones de terrain découvrant et recouvrant.

Les cas-tests d'écoulements torrentiels ont aussi été réalisés. Si le problème idéal de rupture de barrage dans un canal à fond plat et glissant (section 6.1) permet de vérifier la

capacité du code de résoudre un problème purement hyperbolique 1D, le problème de rupture partielle de barrage sur un fond plat et mouillé (section 6.2) concerne un problème hyperbolique 2D. L'étude au laboratoire WES [1] aux Etats-Unis concernant un écoulement torrentiel dû à une rupture de barrage sur un fond en grande pente avec la sortie ouverte et libre de toute contrainte (section 6.3) a été numériquement reproduite par le code. Ce cas-test permet de vérifier le bon fonctionnement du code, le traitement numérique des zones sèches et mouillées ainsi que la méthode des caractéristiques déterminant les conditions aux limites sur une frontière libre. Les résultats numériques découlant de tous ces cas-tests sont comparés avec soit les solutions analytiques, soit des données expérimentales. Toutes les comparaisons confirment le bon fonctionnement, la précision, la stabilité et la robustesse du code. Elles montrent également l'efficacité des techniques traitant les frontières ouvertes implantées dans le code.

Dans un premier temps et dans le cadre de ce travail de thèse, un seul schéma ULSS (Upwind Least Squares Scheme) du 2^{ème} ordre a été introduit dans le code. Ce schéma a fait preuve de précision, de stabilité et de robustesse dans la plupart des cas-tests réalisés au cours de ce travail. Cependant, des améliorations du schéma traitant les termes de convection sont prévues dans le développement du code dans un futur proche.

Les résultats des cas-tests sont satisfaisants et nous permettent d'envisager avec confiance le passage à deux applications grandeur nature : la rupture du barrage de Malpasset (France) et l'inondation par les crues éclairs dans la ville de Dongchuan (Chine). Dans la première application, les comparaisons très complètes donnent une bonne cohérence entre les résultats numériques et ceux issus du modèle physique ou observé. Elles confirment la fiabilité et le bon fonctionnement du code même pour un cas grandeur nature. L'application du code à l'inondation dans la ville de Dongchuan a pu fournir une carte indiquant les risques statique et dynamique dus aux crues éclairs qui se produisent avec une fréquence de retour de 50 ans ou de 100 ans. Cette carte servira à évaluer les impacts dus aux crues éclairs dans la région montagneuse de Dongchuan. Malheureusement, cette application reste qualitative en absence d'observations pour calibrer le modèle. Cependant elle ouvre une large perspective au développement d'un outil d'aide à la décision dans la lutte contre les inondations dans la province de Yunnan (Chine).

Les résultats du présent travail confirment la fiabilité des MVF en maillage non structuré dans la résolution des équations de Saint-Venant décrivant les écoulements de tout genre : lent, rapide et torrentiel sur tout type du fond : sec/mouillé, plat ou en grande pente,

régulier ou très irrégulier. Des améliorations doivent cependant être envisagées dans un futur proche, concernant :

- Le schéma numérique pour les termes de convection ;
- La stabilité numérique pour des grands pas de temps de calcul afin d'économiser le coût de calcul;
- La parallélisation ou vectorialisation du code.

Bibliographie

- Alcrudo F., Garcia-Navarro P. A high-resolution Godunov-type scheme in finite volumes for the 2D shallow-water equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 1993; 16 (6):489-505
- Alcrudo F., Gil E. The malpasset dam break case study. *The Proceeding of the 4th CADAM meeting* , 95-109. 1999. Zaragoza, Spain.
- Anastasiou K., Chan C.T. Solution of the 2D shallow water equations using the finite volume method on unstructured triangular meshes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 1997; 24 (11):1225-1245
- ASCE Task Committee on Turbulence Models in Hydraulic Computations. Turbulence modeling of surface water flow and transport: Part I to V. *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE* 1988; 114 (9):970-1073
- Audusse E. *Modélisation hyperbolique et analyse numérique pour les écoulements en eaux peu profondes*. Th. D. 2004. Université Paris VI.
- Barber R.W. *Numerical modeling of jet-forced circulation in reservoirs using boundary fitted co-ordinate systems*. Th. D. 1990. UK, Salford University.
- Batten P., Lambert C., Causon D. Positively conservation high-resolution convection scheme for unstructured elements. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 1996; 39:1821-1838
- Bento Franco A., Betâmio de Almeida A., and Viseu T. Dam-Break in a channel with a local constriction. *WGDM Belgium Meeting*. 1997.
- Bermúdez A., Dervieux A., Desideri J.-A., Vázquez-Cendón M.E. Upwind schemes for the two-dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1998; 155 (1-2):49-72
- Blumberg A.F., Kantha L.H. Open boundary condition for circulation models. *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE* 1985; 111 (2):237-255
- Borthwick A.G.L., Barber R.W. Prediction of low Reynolds number jet-forced flow inside a circle using the Navier Stokes equations. *International Journal of Engineering Fluid mechanics* 1990; 3:323-343

- Borthwick A.G.L., Barber R.W. River and reservoir flow modelling using the transformed shallow water equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 1992; 14:1193-1217
- Borthwick A.G.L., Karr E.T. Shallow flow modelling using curvilinear depth-averaged stream function and vorticity transport equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 1993; 17:417-445
- Bradford S.F., Sanders B.F. Finite-volume model for shallow-water flooding of arbitrary topography. *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE* 2002; 128 (3):289-298
- Brufau P, Garcia-Navarro P, Vázquez-Cendón M.E. Zero mass error using unsteady wetting-drying conditions in shallow flows over dry irregular topography. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 2004; 45:1047-1082
- Brufau P, García-Navarro P. Unsteady free surface flow simulation over complex topography with a multidimensional upwind technique. *Journal of Computational Physics* 2003; 186 (2):503-526
- Brufau P., Vázquez-Cendón M.E., García-Navarro P. A numerical model for the flooding and drying of irregular domains. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 2002; 39 (3):247-275
- Caleffi V., Valiani A., Bernini A. Fourth-order balanced source term treatment in central WENO schemes for shallow water equations. *Journal of Computational Physics* 2006; 218:228-245
- Chae H.S. *Modélisation numérique de la circulation en milieux côtiers et estuariens par la méthode des matrices d'interpolation (MMI) en coordonnées généralisées: Application à la Gironde*. Th. D. 1996. Caen, France, Université de Caen.
- Chan C.T., Anastasiou K. Solution of incompressible flows with or without a free surface using the finite volume method on unstructured triangular meshes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 1999; 29:35-57
- Chen C.L. Analytic solutions for tidal model testing. *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE* 1989; 115 (12):1707-1714
- Chorin A.J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Mathematics of Computation* 1968; 22 (745):762

- Chorin A.J. On the convergence of discrete approximations to the Navier-Stokes equations. *Mathematics of Computation* 1969; 23:341-353
- Crnjarić Žic N., Vuković S., Sopta L. Balanced finite volume WENO and central WENO schemes for the shallow water and the open-channel flow equations. *Journal of Computational Physics* 2004; 200 (2):512-548
- Dawson C.N., Proft J. Discontinuous and coupled continuous/discontinuous Galerkin methods for the shallow water equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2002; 191 (41-42):4721-4746
- Deng G.B., Piquet J., Queutey P., Visonneau M. Incompressible flow calculations with a consistent physical interpolation finite volume approach. *Computers and Fluids* 1994; 23 (8):1029-1047
- Dennis S.C.R. Application of the series truncation method to two-dimensional internal flows. *Proceedings, 4th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, 146-151. 1974. University of Colorado, Springer.
- Dhatt G., SERGENT P. Éléments finis et hydraulique numérique: 50 ans de la méthode des éléments finis 1955-2005. *7ème Colloque Nationale en Calcul des Structures*. 2005. Giens (Var), France.
- Elder J.W. The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow. *Journal of Fluid Mechanics* 5, 544-560. 1959.
- Erduran K.S., Kutija V., Hewett J.M. Performance of finite volume solutions to the shallow water equations with shock-capturing schemes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 2002; 40:1237-1273
- Fennema R., Chaudhry M.H. Implicit methods for two-dimensional unsteady free-surface flows. *Journal of Hydraulic Research* 1989; 27:321-332
- Fennema R.J., Chaudhry M.H. Simulation of one-dimensional dam-break flows. *Journal of Hydraulic Research* 1987; 25 (1):25-51
- Fennema R.J., Chaudhry M.H. Explicit methods for 2-D transient free-surface flows. *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE* 1990; 116 (8):1013-1034
- Fraccarollo L., Toro E.F. Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two-dimensional dam-break type problems. *Journal of Hydraulic Research* 1995; 33 (6):843-864

- Garcia-Navarro P., Alcrudo F., Saviron J.M. 1-D open-channel flow simulation using TVD-McCormack scheme. *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE* 1992; 118 (10):1359-1372
- Goutal N. Presentation of 1D and 2D simulation of Malpasset dam break wave propagation. *The Proceeding of the 4th CADAM meeting*, 119-130. 1999. Zaragoza, Spain.
- Goutal N. The Malpasset Dam Failure - An Overview and Test Case Definition. *The Proceeding of the 4th CADAM meeting*. 1999. Zaragoza, Spain. 1999.
- Goutal N., Maurel F. *Proceedings of the 2nd Workshop on Dam-break Wave Simulation*. Electricité de France, Département Laboratoire National d'Hydraulique groupe Hydraulique Fluviale. Technical Report HE-43/97/016/B. 1997. France.
- Gresho P. A semi-implicit fractional step finite element method for viscous incompressible flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 1990; 11:587-659
- Guermond J.L., Quartapelle L. Calculation of incompressible viscous flows by an unconditionally stable projection FEM. *Journal of Computational Physics* 1997; 132: 12
- Guillou S. *Simulations des écoulements de fluides complexes en conduites et en milieux environnementaux*. Thèse Habilitation à diriger des recherches 2005. Caen, France, Université de Caen.
- Guillou S. *Modélisation des écoulement côtiers et estuariens: étude mathématique et applications en coordonnées généralisées*. Th. D. 1996. Paris, France, Université Paris VI.
- Guillou S., Nguyen K.D. An improved technique for solving two-dimensional shallow water problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 1999; 29 (4):465-483
- Guillou S., Popovics B., Nguyen K.D. Numerical simulation of water circulation in marinas of complex geometry by a multi-block technique, *Coastal Engineering and Marinas Managements*. Southampton: WITPRESS. 1999: 513-522
- Hanich L. *Résolution des équations de la mécanique des fluides par des méthodes TVD en coordonnées généralisées*. Th. D. 1996. Caen, France., Université de Caen.
- Harten A., Engquist B., Osher S., Chakravarthy S.R. Uniformly high order accurate non-oscillatory schemes. *Journal of Computational Physics* 1987; 71:231

- Henderson F.M. Open Channel Flow. 1966. MacMillan, New York.
- Heniche M., Secretan Y., Boudreau P., Leclerc M. A two-dimensional finite element drying-wetting shallow water model for rivers and estuaries. *Advanced in Water Resources* 2000; 23 (4):359-372
- Hervouet J.M. Hydrodynamique des écoulements à surface libre: Modélisation numérique avec la méthode des éléments finis, Paris: Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. 2003: 312
- Hervouet J.M. *Hydrodynamique des écoulements à surface libre, modélisation numérique avec la méthode des éléments finis*. Thèse Habilitation à diriger des recherches. 2001. Caen, France, Université de Caen.
- Hervouet J.M. A high resolution 2-D dam-break model using parallelization. *Hydrological Processes* 2000; 14 (13):2211-2230
- Hervouet J.M., Bates P. *The TELEMAC Modelling System*. 2000. WILEY.
- Hervouet J.M., Petitjean A. Malpasset dam break revisited with two-dimensional computations. *Journal of Hydraulic Research* 1999; 37 (6):777-788
- Hirsch C. Numerical computation of internal and external flows, New York, N.Y.: John Wiley & sons, Inc. 1988
- Hoang V.L., Nguyen K.D. A Finite Volume Method for the two-dimensional Shallow Water Equations with Varying Bottom. 2003. *Inter report*
- Hsu C.T, Yeh K.C. Iterative explicit simulation of 1D surges and dam-break flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 2002; 38:647-675
- Hubbard M.E. Multidimensional slope limiter for MUSCL-type finite-volume schemes on unstructured grids. 1999. University of Reading, Dept of Mathematics.
- Hubbard M.E., Garcia-Navarro P. Flux difference splitting and the balancing of source terms and flux gradients. *Journal of Computational Physics* 2000; 165 (1):89-125
- Jiang Y.W., Wai O.W.H. Drying-wetting approach for 3D finite element sigma coordinate model for estuaries with large tidal flats. *Advanced in Water Resources* 2005; 28 (8):779-792

- Katsaounis T., Makridakis C. Relaxation models and finite element schemes for the shallow water equations. In: Anonymous Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications. Springer. 2003: 621-631
- Kawahara M., Umetsu T. Finite element methode for moving boundary problems in river flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 1986; 6: 365-386.
- King I.P., Norton W, et R. Recent application of RMA's finite element models for two-dimensional hydrodynamics and water quality. 1978. In Brebbia, Gray and Pinder.
- Kobayashi M.H, Pereira JMC, Pereira JCF. A conservative finite-volume second-order accurate projection method on hybrid unstructured grids. *Journal of Computational Physics* 1999; 150 (1):40-75
- Le Dissez A. *Modélisation numérique des écoulements tidaux en milieux peu profonds: Application à l'étude de l'hydrodynamique du Bassin d'Arcachon.* Th. D. 2006. Université de Bordeaux I.
- Le Dissez A., Sous D., Vincent S., Caltagirone J.P., Sottolichio A. A novel implicate méthode for coastal hydrodynamics modeling: application to the Arcachon lagoon. *Comptes Rendus Mécanique* 2005; 333 (11):796-803
- Le Fessant A.-L. *Etude des instabilités d'un écoulement à surface libre sur un fond à géométrie périodique.* Th. D. 2001. Toulouse, France, Institut national polytechnique de Toulouse.
- Leclerc M., Bellemare J-F., Dymas G., Dhatt G. A finite element model of estuarian and river flows. *Advanced in Water Resources* 1990; 13 (4):158-168
- LeVeque R.J. *Numerical Mthodes for Conservation Laws*, Birkhäuser. 1992
- Lien F.S. A pressure-based unstructured grid method for all-speed flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 2000; 33 (355):374
- Louaked M., Hanich L. TVD scheme for the shallow water equations. *Journal of Hydraulic Research* 1998; 36 (3):363-378
- Liu X.D. A maximum principle satisfying modification of triangle based adaptive stencils for the solution of scalar hyperbolic conservation laws. *SIAM J.Numer.Anal.* 1993; 30:701-716

- Lynch D.R., Gray W.G. Analytical solutions for computer flow model testing. *Journal of Hydraulic Division, ASCE* 1978; 104 (10):1-10
- Mcdowell D.M., O'Connor B.A. Hydrodynamics of estuaries. In: Anonymous Hydraulic Behaviour of Estuaries. The Macmillan Press LTD. London and Basingstoke: 1977: 30-47
- Mingham C.G., Causon D.M. High-resolution finite volume method for shallow water flows. *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE* 1998; 124:604-614
- Monthé L.A. A study of splitting scheme for hyperbolic conservation laws with source terms. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 2001; 137 (1):1-12
- Murillo J., Garcia-Navarro P, Brufau P, Burguete J. Extension of an explicit finite volume method to large time steps (CFL>1): application to shallow water flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 2005; 50:63-102
- NAVIER C. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. Mémoires de l'Académie des Sciences 1823; 6:389-416
- Nguyen K.D. *Modélisation numérique d'écoulements côtiers et Techniques de résolution des équations de Navier-Stokes en coordonnées généralisées*. Thèse Habilitation à Diriger des Recherches 1993. Lille, France., Université des Sciences et Technologies de Lille.
- Nguyen K.D., Hoang V.L., Shi Y.E., Seille B., and Ying X.Y. A 2-D shallow water models using unstructured finite-volumes methods. *Inter report. 2002*. NCCHE, University of Mississippi, USA.
- Nguyen K.D., Ouahsine A. 2D numerical study on tidal circulation in strait of Dover. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, ASCE* 1997; 123 (1):8-15
- Nguyen K.D., Shi Y.E., Wang S.S.Y, Nguyen T.H. 2-D shallow-water model using unstructured finite-volumes methods. *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE* 2006; 132 (3):258-269
- Orlanski I. A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. *Journal of Computational Physics* 1976; 21:251-269
- Patankar S.V. Numerical heat transfert and fluid flow, Hemisphere Publishing Corporation. 1980

- Perthame B., Qiu Y. A variant of Van Leer's method for multidimensional systems of conservation laws. *Journal of Computational Physics* 1994; 112:370-381
- Rhie C.M., Chow W.L. Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. *American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Journal* 1983; 21 (11):1525-1532
- Roe P.L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes. *Journal of Computational Physics* 1981; 43 (2):357-372
- Rogers B., Fujihara M., Borthwick AGL. Adaptive Q-tree Godunov-type scheme for shallow water equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 2001; 35:247-280
- Ryhming I.L., 1985. Dynamique des fluides. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- SAINT-VENANT A.J.C. Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit. *Compte-Rendu à l'Académie des Sciences de Paris* 1871; 73:147-154
- Seille B. Mémoire de Stage de DAE. 2002. Université de Caen, Caen, France.
- Shi Y.E. Résolution des équations de Saint-Venant par la méthode des volumes finis non structurés. *Revue Européenne de Mécanique Numérique* 2007, Numéro Spécial issu du CFM'2005. (Accepté)
- Shi Y.E., Nguyen K.D. A Projection Method-Based Model for Estuarine and Coastal Flows using Unstructured Finite-Volume Technique. *Second International Conference on Estuaries & Coasts*. 2006. Guangzhou, China. 28-11-2006.
- Simon L. *Contribution to the modelling of surface water flow and transport*. Th. D. 1994. Paris, France, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- Sleigh P.A., Gaskell P.H., Berzins M., Wright N.G. An unstructured finite- volume algorithm for predicting flow in rivers and estuaries. *Computers and Fluids* 1998; 27 (4):479-508
- Soares-Fraza S., Alcrudo F. Conclusion from the 3rd Meeting of the IAHR Working Group on Dam-Break Modelling. *Proceedings of the CADAM meeting Wallingford (CADAM Ed. European Commission)*, 27-34. 1999. United Kingdom, 2 and 3 March 1998, Commission Européenne, Bruxelles, 199.

- Stelling G.S., Wang L.X. Experiments and computation on unsteady separating flow in a expanding flume. *Technical report No 84-2. 1984.* Delft University of Technology, Department of Civil Engineering, Laboratory of Fluid Mechanics.
- Stoker J.J. Water waves: Mathematical theory with applications, Singapore: Wiley-Interscience. 1958
- STOKES G. On the theories of the internal friction of fluids motion and of the equilibrium and motion of elastic solids. *Trans.Cambridge Phil.Soc.* 1845; 8:287-305
- Seille B. *Mémoire de Stage de DAE.* 2002. Université de Caen, Caen, France.
- Sweby P.K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM J. Numer. Anal.* 1984; 21:995-1011
- Tan W.Y. Shallow water hydrodynamics, Amsterdam, The Netherlands: Elsevier. 1992
- Tang C., Zhu J. Study on landslides and debris flow of Yunnan, Beijing, Chine: Commercial Press. 2003
- Tang C., SHI Y.E. Approach to Mutil-objectives Assessment for Urban Torrent Hazard. *Progress in Geography* 2006; 25 (4):13-21 (in Chinese)
- Tannehill J.C., Anderson D.A., Pletcher R.H. Governing equations of fluid mechanics and heat transfer. *In: Anonymous Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer.* Washington D.C.: Taylor&Francis. 1997: 249-350
- Temam R. Une méthode d'approximation de la solution des équations Navier-Stokes. *Bull .Soc.Math.France* 1968; 98:115-152
- Temam R. Navier-Stokes Equations, North-Holland, Amsterdam: 1977
- Teresa Viseu. Decision Support System for ecosystem upgrading and flood control of sustainable development in the Red River System. *1st FLOCODS Meeting.* 2001. 24-9-2001.
- Thual O. Caractéristiques et chocs. <http://www.enseeiht.fr/~thual/otapm/ond-carcho/index.htm> . 2003a.
- Thual O. Dérivation des équations de Saint-Venant. <http://www.enseeiht.fr/~thual/otapm/ond-derisv/index.htm> 2003b.

- Tseng M.H. Improved treatment of source terms in TVD scheme for shallow water equations. *Advanced in Water Resources* 2004; 27 (6):617-629
- Tseng M.H., Chu C.R. The simulation of dam-break flows by an improved predictor-corrector TVD scheme. *Advanced in Water Resources* 2000; 23:637-643
- Valiani A., Caleffi V., et Zanni A. Finite volume scheme for 2D shallow-water equations application to the Malpasset dam-break. *The Proceeding of the 4th CADAM meeting*, 63-93. 1999. Zaragoza, Spain.
- Valiani A., Caleffi V., Zanni A. Case study: Malpasset dam-break simulation using a two-dimensional finite volume method. *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE* 2002; 128 (5):460-472
- Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. IV. A new approach to numerical convection. *Journal of Computational Physics* 1977; 23 (3):276-299
- Vázquez-Cendón M.E. Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channels with irregular geometry. *Journal of Computational Physics* 1999; 148 (2):497-526
- Vukovic S, Sopta L. ENO and WENO schemes with the exact conservation property for one-dimensional shallow water equations. *Journal of Computational Physics* 2002; 179 (2):593-621
- Wang S.S.Y, Alonso V.V., Brebbia C.A., Gray W.G., et Pinder G.F. Finite elements in water resources. *Proceeding of 3th Internation conference*. 1989. Mississippi, USA.
- Waterways Experiment Stations (WES). Floods resulting from suddenly breached dams. Miscellaneous Paper No.2-374. 1960. Vicksburg, Mississippi., U.S. Army Corp of Engineers. Report 1: Conditions of low resistance, Report 2: Conditions of high resistance.
- Ying X.Y., Khan A.A., Wang S.S.Y. Upwind conservative scheme for the Saint Venant equations. *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE* 2004; 130 (10):977-987
- Ying X.Y., Wang S.S.Y. Two-dimensional numerical simulations of Malpasset dam-break wave propagation. *Proceeding of 6th International Conference on Hydrosience and Engineering*. 2004. Brisbane, Australia. 30-5-2004.

- Zhao D.H., Shen H.W., Lai J.S., Tabious G.Q. Approximate Riemann Solvers in FVM for 2D hydraulic shock wave problems. *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE* 1996; 122:692-702
- Zhao D.H., Shen H.W., Tabious G.Q., Lai J.S., Tan W.Y. Finite-volume two-dimensional unsteady-flow model for river basin. *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE* 1994; 120 (7):864-883
- Zhou J.G., Causon D.M., Mingham C.G., Ingram D.M. The surface gradient method for the treatment of source terms in the shallow-water equations. *Journal of Computational Physics* 2001; 168 (1):1-25

Glossaire

CADAM	Concerted Action on Dam Break Modelling
CCHE2D	Center for Computational Hydroscience and Engineering 2D software
CETMEF	Centre d'Etudes Techniques Maritimes Et Fluviales
CTPB	Comité Technique Permanent des Barrages
ECOMOD-UFVM	Estuary COastal MODel-Unstructured Finite Volumes Method
EDF	Electricité De France
EDP	équations aux dérivées partielles
ENO	Essential Non Oscillation
FLOCODS	FLOod COntrol Decision Support
IGN	Institut Géographique National
IST	Instituto Superior Técnico
LNEC	Laboratório Nacional de Engenharia Civil
LCD	Limited Central Difference
LNHE	Laboratoire National d'Hydraulique et Environnement
MDF	Méthodes aux différences finies
MDG	Millennium Development Goals
MEF	Méthodes aux éléments finis
MLG	Maximum Limiter Gradient
MP	Méthode de Projection
MUSUL	Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws
MVF	Méthodes des volumes finis
NCHE	National Center for Computational Hydroscience and Engineering
RARS	Roe's Approximate Riemann Solver
SIMPLE	Semi Implicit Methode for Pressure-Linked Equations
TVD	Total Variation Diminishing
UTC	Université de Technologie de Compiègne
ULSS	Upwind Least Squares Scheme
WES	Waterways Experiment Stations

RESUME: Il n'existe à présent que peu de modèles aux volumes finis non structurés (UFVM: Unstructured Finite-Volumes Methods) développés pour simuler les écoulements à surface libre. La difficulté principale rencontrée durant ce développement est liée à la géométrie complexe du domaine de calcul et aux variations de fonds très irréguliers avec la présence des zones sèches ou/et mouillées. Ce mémoire de thèse présente le développement d'un modèle numérique 2D, baptisé ECOMOD-UFVM, qui est basé sur la résolution des équations de Saint-Venant par une technique de projection couplée à une UFVM. La UFVM permettra une modélisation plus proche de la géométrie souvent complexe des zones côtières et estuariennes. Dans un premier temps, un seul schéma ULSS (Upwind Least Squares Scheme) du 2ème ordre a été introduit dans le code pour traiter les termes de convection, responsables des oscillations et diffusions numériques indésirables. Une dizaine de cas-tests proposés dans les études d'écoulements à surface libre existantes ont été réalisés : écoulements à surface libre; problèmes de rupture de barrages. Les résultats des cas-tests sont satisfaisants et nous permettent d'envisager avec confiance le passage à deux applications grandeur nature: la rupture du barrage de Malpasset (France) et l'inondation par les crues éclairs dans la ville de Dongchuan (Chine). Les résultats du présent travail confirment la fiabilité, la précision, la stabilité, et la robustesse du code développé dans la résolution des équations de Saint-Venant décrivant les écoulements de tout genre : lent, rapide et torrentiel sur tout type de fond : sec/mouillé, plat ou en grande pente, régulier ou très irrégulier.

MOTS-CLES: Modèles mathématiques ; Ecoulement bidimensionnel ; Volumes finis, méthodes de ; Moindres carrés ; Barrages, rupture ; Inondations.

TITLE: 2D Numerical resolution of the Saint-Venant equations based on the projection technique coupled with a unstructured finite-volumes method

ABSTRACT: Recently, several Unstructured Finite-Volumes Methods (UFVM) have been developed to solve Navier-Stokes flows, but there do not exist so many applications of UFVM to the shallow-water problems. The principal difficulty, encountered in the applications of such models, is related to the irregular variation of bed elevation with the presence of wet/dry zones in a complex geometry. This dissertation presents the development of a 2-D numerical model, named ECOMOD-UFVM, which is based on the solving of the Saint-Venant equations by a projection technique coupled with a UFVM. The UFVM will allow a numerical modelling, which can perfectly adapt to the geometry very complex in the coastal and estuarine zones. Initially, in the framework of this thesis, a second order scheme of ULSS (Upwind Least Squares Scheme) is introduced in the code to handle the convection terms in order to prevent undesirable numerical oscillations and diffusions. Ten benchmarked test cases proposed in the existing studies were carried out: shallow water flows; dam-break flows. The results of the case-tests are satisfactory and allow us to make with confidence the passage into two real natural applications: dam-break of Malpasset (France) and flash flood in the city of Dongchuan (China). The results obtained confirm the reliability, the precision, the stability and the robustness of the developed UMVF model in solving the Saint-Venant equations, describing all kinds of flows: slow, fast and torrential on any type of the bottom: wet/dry, flat or great slopes, regular or very irregular.

KEY WORDS: Mathematical models; Two dimensional flow; Finite volumes; Least squares; Dam failures; Floods.

DISCIPLINE: Mécanique des milieux fluides

Laboratoire Morphodynamique Continentale et Côtière
UMR CNRS 6143

Université de Caen Basse-Normandie, U.F.R des Sciences, Campus 2. Bd du Maréchal Juin. 14032 CAEN
Cedex, France

<http://www.geos.unicaen.fr/>