



HAL
open science

**MESURE DE COUPLAGE STATISTIQUE ENTRE
SIGNAUX EEG : APPLICATION A L'EVALUATION
QUANTITATIVE DES RELATIONS
FONCTIONNELLES ENTRE STRUCTURES
CEREBRALES EN EPILEPSIE**

Karim Ansari-Asl

► **To cite this version:**

Karim Ansari-Asl. MESURE DE COUPLAGE STATISTIQUE ENTRE SIGNAUX EEG : APPLICATION A L'EVALUATION QUANTITATIVE DES RELATIONS FONCTIONNELLES ENTRE STRUCTURES CEREBRALES EN EPILEPSIE : MESURE DE COUPLAGE STATISTIQUE ENTRE SIGNAUX EEG : APPLICATION A L'EVALUATION QUANTITATIVE DES RELATIONS FONCTIONNELLES ENTRE STRUCTURES CEREBRALES EN EPILEPSIE. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Rennes 1, 2005. Français. NNT : . tel-00130596

HAL Id: tel-00130596

<https://theses.hal.science/tel-00130596>

Submitted on 12 Feb 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° Ordre : 3321

THESE

présentée

DEVANT L'UNIVERSITE DE RENNES 1

pour obtenir

Le grade de : **DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE RENNES 1**

Mention : **TRAITEMENT DU SIGNAL ET TELECOMMUNICATIONS**

Par

Karim ANSARI ASL

Equipe d'accueil : **LTSI - UMR Inserm 642**

Ecole doctorale : **MATISSE**

Composante Universitaire : **UFR Structure et Propriétés de la Matière**

Titre de la thèse :

**MESURE DE COUPLAGE STATISTIQUE ENTRE SIGNAUX EEG : APPLICATION
A L'EVALUATION QUANTITATIVE DES RELATIONS FONCTIONNELLES
ENTRE STRUCTURES CEREBRALES EN EPILEPSIE**

Soutenue le 14 décembre 2005 devant la commission d'examen

COMPOSITION DU JURY :

Président :	Jean-Marc BOUCHER
Rapporteurs :	Catherine MARQUE Olivier MESTE
Examineurs :	Fabrice BARTOLOMEI Lotfi SENHADJI Fabrice WENDLING

Remerciements

Il m'est difficile de remercier toutes les personnes qui m'ont aidé pour arriver à ce point et accomplir cette thèse, parce qu'il y a tant de gens qui ont contribué à cela soit directement soit par le « Butterfly effect ».

Tout d'abord, je voudrais exprimer toute ma gratitude à Monsieur Jean-Louis COATRIEUX Directeur de Recherche Inserm, ancien Directeur du LTSI, pour m'avoir accepté dans son laboratoire.

J'adresse tous mes remerciements sincères au Professeur Lotfi SENHADJI, mon Directeur de thèse, qui m'a aidé sans cesse, tant sur le plan scientifique que humain, avec ses compétences inestimables et son humanité exemplaire.

Je remercie Fabrice WENDLING et Jean-Jacques BELLANGER membres du projet EPIC au LTSI pour leurs disponibilités et leurs aides incontournables dans l'accomplissement de cette thèse et les publications associées.

Je remercie Monsieur Jean-Marc BOUCHER, Professeur à l'ENSTB, pour avoir accepté de présider le Jury. Je remercie Madame Catherine MARQUE, Professeur à l'UTC, et Monsieur Olivier MESTE, Maître de Conférences à l'Université de Nice, pour leurs contributions à la qualité de cette thèse comme rapporteurs et par leurs remarques pertinentes. Je remercie également Monsieur Fabrice BARTOLOMEI, Maître de Conférences et Praticien Hospitalier à l'Université de la Méditerranée, d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Je remercie tous les membres du LTSI, les permanents et les passagers (les doctorants et les stagiaires durant des années 2001-2005), pour avoir su créer une ambiance chaleureuse et pour l'amitié sincère qui m'ont témoigné tout au long de mon séjour enrichissant à Rennes.

Un grand merci à mes compatriotes iraniens de Rennes pour leurs aides et leurs amitiés.

J'adresse mes remerciements sincères aux membres de ma famille ; leurs soutiens sont toujours sans failles et permanents.

Les mots me manquent pour exprimer combien je suis redevable à mon épouse Zeinab pour sa patience, son aide et son soutien durant ces dernières années, pour tous les sacrifices endurés et les moments de solitudes qu'elle a traversée ; sans oublier mes sources d'espoir : mon fils Shayan et ma fille Shamim.

Table des matières

Chapitre 1 : Introduction	1
1.1 Épilepsie	1
1.1.1 Réseau épileptogène	2
1.1.2 Classification des crises	2
1.1.3 Traitements d'épilepsie	3
1.2 Méthode d'acquisition des données cérébrales	4
1.3 Mesures d'interdépendance entre signaux	8
1.4 Objectifs de la thèse et organisation du manuscrit	10
Chapitre 2 : Méthodes de mesure de couplage statistique entre signaux	
2.1 Introduction	13
2.2 Méthodes linéaires	13
2.2.1 Coefficient de corrélation linéaire	14
2.2.2 La cohérence	15
2.3 Méthodes non linéaires	16
2.3.3 Coefficient de régression non linéaire	17
2.3.4 Information mutuelle	19
2.3.5 Synchronisation de phase	20
2.3.5.1 Extraction de la phase	21
2.3.5.2 Indices de synchronisation de phase	23
2.3.5.2.1 Entropie de phase	23
2.3.5.2.2 Cohérence de la phase moyenne (Mean Phase Coherence)	24
2.3.6 Synchronisation généralisée	24
2.3.6.1 Reconstruction de l'espace d'états	25
2.3.6.1.1 Choix du retard pour l'espace d'états reconstruit	27
2.3.6.1.2 Choix de la dimension de l'espace d'états reconstruit	29

2.3.6.2	Interdépendances entre systèmes dynamiques	31
2.3.6.3	La vraisemblance de synchronisation (SL)	35
2.4	Discussion	37

Chapitre 3 : Evaluation quantitative des méthodes d'estimation de couplage

3.1	Introduction	39
3.2	Modèles de simulation proposé	40
3.2.1	Les modèles des processus stochastiques	42
3.2.2	Modèles des signaux chaotiques	44
3.2.2.1	Systèmes de Hénon couplés	44
3.2.2.2	Systèmes de Rössler couplés	46
3.2.3	Signaux EEG simulés	47
3.2.3.1	Description du modèle d'EEG	49
3.3	Critères de comparaison des méthodes	54
3.4	Résultats	55
3.4.4	Modèle M_1	55
3.4.5	Modèle M_2	56
3.4.6	Modèle M_3	58
3.4.7	Modèle M_4	58
3.4.8	Résultats pour le modèle M_5	61
3.4.9	Analyse globale des résultats par groupe de méthodes	62
3.5	Discussion	67

Chapitre 4 : Approches temps-fréquence pour l'analyse statistique d'une relation entre deux voies

4.1	Introduction	71
4.2	Définitions d'une cohérence temps fréquence	75
4.2.1	Cohérence temps fréquence définie à partir de la transformée de Fourier à court terme	75
4.2.2	Une approche de la densité spectrale dans le cas non stationnaire à partir de la décomposition de Wold-Cramer	76

4.2.3	Définition d'une cohérence non stationnaire à partir des transformées de Fourier des fonctions de covariances.....	79
4.2.4	Définition d'une cohérence d'ondelettes.....	80
4.2.5	Cohérence définie à partir d'un modèle paramétrique.....	81
4.3	Méthodes de mesure pour les cohérences temps fréquence.....	84
4.3.1	Méthode multi fenêtre.....	84
4.3.2	Estimation spectrale temps-fréquence à partir de la fonction de transfert généralisée.....	86
4.3.3	Approche par la distribution de Wigner-Ville.....	89
4.3.4	Cohérence d'ondelettes.....	90
4.3.5	Approches paramétriques.....	91
4.3.6	Conclusion sur les différentes mesures.....	93
4.4	Nouvelle méthode.....	94
4.4.1	Comparaison théorique des méthodes R^2 et MCFC.....	95
4.4.2	Banc de filtres utilisé pour le calcul de R^2 en temps fréquence.....	97
4.4.3	Forme des estimateurs.....	98
4.4.4	Performances comparées des méthodes R^2 et MCFC.....	99
4.4.4.1	Modèle M_1 : cas stationnaire.....	99
4.4.4.2	Modèle M_1 : cas non stationnaire.....	100
4.4.4.3	Modèle M_6 (utilisation d'un signal déterministe commun).....	101
4.4.4.3.1	Modèle M_6 synthétique.....	102
4.4.4.3.2	Modèle M_6 avec signal SEEG réel commun.....	103
4.4.4.4	Signaux SEEG réels critiques.....	106
4.5	Discussion.....	107
4.6	Conclusions.....	109
Chapitre 5 : Conclusions et perspectives		111
Annexe A		115
Bibliographie		135

Chapitre 1

Introduction

1.1 Épilepsie

Le terme *épilepsie* a une étymologie grecque. Il dérive du verbe *epilambanien* qui signifie surprendre, saisir, attaquer par surprise. Dans la médecine antique, l'épilepsie était considérée comme une "maladie sacrée" plutôt qu'un trouble neurofonctionnel, même si Hippocrate (médecin Grec, 460 av. J.-C. - v. 370 av. J.-C.) en avait déjà souligné l'origine (cerveau).

En France, le nombre de personnes atteintes d'épilepsie se situe entre 450 000 et 500 000 (près de 1% de la population, seconde cause d'hospitalisation en neurologie [1]). Les causes de l'épilepsie sont diverses : atteintes cérébrales consécutives à un traumatisme, lésions cérébrales, tumeurs, maladies vasculaires, anomalies métaboliques ou intoxications. L'épilepsie n'est héréditaire que dans un faible pourcentage de cas. Cependant, dans la moitié des cas, les causes de la maladie restent inconnues.

L'épilepsie résulte d'un dysfonctionnement cérébral. Cette pathologie est caractérisée par la répétition de crises inopinées dont les symptômes (ou signes cliniques) dépendent directement des zones impliquées à l'origine et lors de la propagation d'activités anormales, dites *paroxystiques* (un phénomène d'apparition brutale, atteignant rapidement son maximum en amplitude ou en fréquence, et se terminant de façon soudaine). Il existe normalement un équilibre entre les milliards de neurones excitateurs et inhibiteurs qui composent le tissu cérébral. Bien que la notion d'équilibre entre excitation et inhibition soit peu apte à rendre

compte de la complexité des mécanismes sous-jacents, l'hypothèse d'une rupture de cet équilibre dans le tissu épileptogène est communément admise. Cette rupture entraîne des décharges électriques synchrones dans des larges populations de neurones, interconnectées et souvent localisées dans des régions distantes.

1.1.1 Réseau épileptogène

Les travaux de P. Chauvel [2, 3] ont introduit le concept de réseau épileptogène, à partir d'une longue expérience de la sémiologie des crises. En effet, on observe souvent, chez les patients, des suites reproductibles de signes cliniques, lors du déroulement des crises [4]. Cette reproductibilité, confirmée sur les signaux intracérébraux par la mise en correspondance des observations (Wendling et al. [5]), correspond nécessairement à une organisation spatiale et temporelle de la zone épileptogène. De plus, ce sont souvent des régions distantes qui sont mises en jeu, presque simultanément au début des crises. Par conséquent, la zone épileptogène peut difficilement être réduite à un foyer bien circonscrit dans l'espace cérébral. Elle correspond plutôt à un « réseau » d'ensembles neuronaux interconnectés et distribués dans différentes structures cérébrales, capable d'initier puis de propager les crises. La compréhension de cette organisation, chez un patient donné, pourrait aboutir à une délimitation plus fine de la zone épileptogène.

1.1.2 Classification des crises

La volonté de classer et d'établir une terminologie permettant de décrire les différentes crises et syndromes épileptiques date depuis longtemps. L'objectif d'une telle classification est de faciliter la communication entre cliniciens et d'établir une base taxonomique pour les recherches cliniques et fondamentales sur l'épilepsie [6]. La classification actuelle des crises d'épilepsie d'après la ligue internationale contre l'épilepsie (ILAE) publiée en 1981 et revue par la suite [7], les divise en deux catégories [8]:

- i)* Les crises généralisées dans lesquelles la décharge paroxystique, étendue aux deux hémisphères, envahit la totalité du cortex cérébral. Classiquement, les crises sont subdivisées en deux groupes : celles dites « convulsives » qui peuvent être très brutales avec une perte rapide de la conscience et celles dites « non convulsives »,

appelées également « absences », qui ont une durée généralement brève et qui sont caractérisées par une atténuation ou une suspension de la conscience.

- ii)* Les crises partielles ou focales, dans lesquelles la décharge paroxystique intéresse initialement un nombre limité de structures corticales. Selon la localisation initiale et les voies de propagation de la décharge, on peut observer une très grande variété de crises. La décharge peut rester localisée dans une région ou intéresser une partie plus vaste jusqu'à la totalité d'un hémisphère, voire l'ensemble des deux hémisphères (on parle alors de généralisation secondaire de la crise).

1.1.3 Traitements de l'épilepsie

On a recours à deux types de traitement pour l'épilepsie : pharmaceutique et chirurgical. Après diagnostic d'une épilepsie, le traitement médicamenteux, consiste en un ou plusieurs anti-épileptiques selon le cas. Il est systématiquement prescrit. Ce type de traitement est avant tout symptomatique et non étiologique, dans le sens où il vise à supprimer les crises et non leur(s) cause(s). Au niveau neuronal, les agents anti-épileptiques agissent sur l'équilibre excitation-inhibition par différents moyens comme la stabilisation de la membrane cellulaire ou la réduction du nombre de potentiels d'action générés en réponse à une excitation. Au niveau des populations de neurones, ils visent à limiter les phénomènes d'hypersynchronisation (le terme "hypersynchronisation" est utilisé pour la première fois par Penfield et Jasper [9]).

Dans les pays développés, 75% des patients sont traités avec succès grâce aux médicaments anti-épileptiques. Pour les 25% restant, (épilepsies dites pharmaco-résistantes), un traitement chirurgical peut être indiqué après une longue analyse des données anatomiques, cliniques et physiologiques effectuée lors du bilan pré-chirurgical [10]. Il consiste généralement en la résection d'un volume cérébral défini à partir d'un compromis entre l'étendue de la zone épileptogène et le maintien des capacités fonctionnelles telles que le langage, par exemple, dans certaines épilepsies temporales.

La chirurgie de l'épilepsie a donc deux objectifs principaux [11]. Le premier est curatif : l'intervention a pour but d'opérer la zone épileptogène en pratiquant une résection des sites

cérébraux impliqués dans l'initiation des crises. Cette solution est surtout adaptée aux épilepsies partielles. La chirurgie curative est prescrite si le volume cérébral est limité anatomiquement et si le déficit fonctionnel lié à l'ablation est acceptable pour le patient (maximiser les chances de guérison en minimisant les risques de séquelles). Le second est palliatif : l'intervention a pour objectif de sectionner les voies de propagation. Cette solution est notamment appliquée dans les épilepsies généralisées (accompagnées de chutes graves et handicapantes, par exemple) pour lesquelles des callosotomies (section totale ou partielle du corps calleux) sont requises. Les résultats de la chirurgie sont encourageants puisque les crises sont contrôlées chez 67 à 85% des patients.

1.2 Méthode d'acquisition des données cérébrales

De nombreuses méthodes d'investigation sont utilisées dans le cadre du bilan pré-chirurgical, souvent classées selon la nature des données qu'elles fournissent. Les méthodes d'imagerie anatomique (tomographie à rayons X – ou scanner-, imagerie par résonance magnétique – IRM-), permettent d'examiner le cerveau sur un plan structurel. Elles peuvent révéler certaines anomalies liées à l'épilepsie comme les dysplasies, les tumeurs, les lésions. Les méthodes d'imagerie fonctionnelle (l'IRMf, TEP, SPECT) renseignent sur l'activité métabolique du cerveau. Enfin, les méthodes électrophysiologiques (électroencéphalographie de scalp ou intracérébrale, magnétoencéphalographie) fournissent des données directement liées à l'activité électrique cérébrale ou aux champs magnétiques induits par cette activité. Bien que son développement soit moins récent que celui des méthodes d'imagerie, l'électrophysiologie occupe encore une place primordiale pour la localisation de la zone épileptogène ou pour la compréhension des mécanismes de déclenchement et de propagation des crises.

Chaque méthode est sensible à la variation de grandeur spécifique et possède sa propre résolution temporelle et spatiale. Fig. 1.1 compare quelques méthodes d'investigation selon ces deux paramètres. On remarque, par exemple, que l'EEG de surface a une résolution temporelle excellente (de l'ordre de la milliseconde) mais que sa résolution spatiale est inférieure à celle des méthodes d'imagerie.

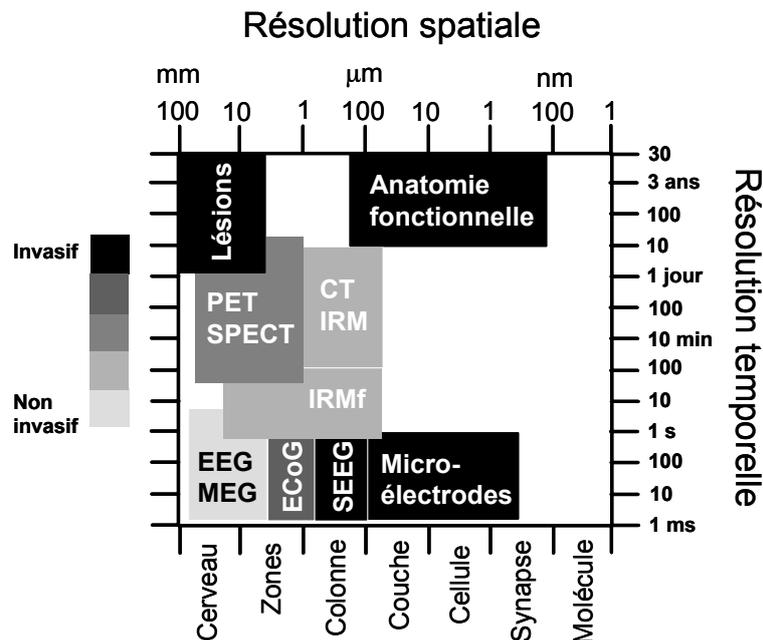


Fig. 1.1. Schéma comparatif des résolutions temporelles et spatiales des différentes techniques de recueil de l'activité cérébrale. Les échelles non linéaires permettent d'apprécier les caractéristiques de chacune d'elles (adapté de [12], inspiré de [13]).

Dans cette thèse, nous nous intéressons plus particulièrement à une méthode électrophysiologique utilisée lors de l'évaluation pré-chirurgicale des patients épileptiques atteints d'épilepsies partielles pharmaco-résistants : la stéréoelectroencéphalographie (SEEG) (Talairach et Bancaud [14]). Cette méthode fournit, à partir d'électrodes intracérébrales (Fig. 1.2), un enregistrement direct de l'activité électrique des structures potentiellement impliquées dans la zone épileptogène. L'implantation des électrodes et le geste chirurgical qui découlent de l'analyse des signaux sont réalisés en 5 étapes principales :

- i)* Dans un premier temps, à partir des hypothèses émises sur l'organisation de la zone épileptogène basées sur les données non invasives (sémiologie des crises, monitoring vidéo-EEG de surface, SPECT critique ou intercritique, ...) mises en relation avec les connaissances sur l'organisation anatomo-fonctionnelle de la région impliquée, le nombre d'électrodes et leur localisation respective sont définis.
- ii)* Une IRM pré-opératoire est effectuée et la position des électrodes est alors simulée sur une représentation 3D des sillons corticaux.

-
- iii)* Pendant l'opération, la position du patient est contrôlée à chaque instant grâce à la mise en correspondance de la forme tridimensionnelle des sillons corticaux obtenue par IRM et d'une angiographie biplan. Cette dernière technique utilise les rayons X, et un produit de contraste à base d'iode qui permet de rendre visible les vaisseaux sanguins (le système vasculaire devient visible sur les clichés radiologiques grâce aux propriétés radio-opaques de l'iode). La présence des vaisseaux permet éventuellement de modifier très légèrement les trajectoires des électrodes pour éviter les risques d'hémorragie. Les électrodes multicapteurs (0.8 mm de diamètre, 10 ou 15 plots de 2 mm de longueur de chacun, 1.5 mm entre deux plots, voir Fig. 1.2(a)) sont introduites orthogonalement dans la double grille courante de l'atlas stéréotaxique de Talairach [14, 15].
- iv)* Après l'implantation, la localisation anatomique réelle de chaque plot est vérifiée sur des images de scanner, superposées aux vues IRM correspondantes. Une reconstruction 3D précise peut être calculée (précision de l'ordre du millimètre).
- v)* Des enregistrements intracérébraux sont ensuite réalisés pendant plusieurs jours (typiquement une semaine) à partir des électrodes profondes. Après analyse de ces enregistrements (corrélations électro-anatomo-cliniques), une cortectomie localisée de la région responsable des crises est planifiée. Cette région est définie précisément par rapport aux repères sulco-gyreaux. Après cette définition, le retrait des électrodes est effectué. Une IRM de contrôle est ensuite réalisée et recalée avec la première IRM afin de vérifier les limites de la cortectomie et de les corrélérer avec les conséquences neurophysiologiques éventuelles pour le patient.

Une photo d'une électrode (15 plots d'enregistrement) intracérébrale est présentée Fig. 1.2 (a). L'implantation d'électrodes intracérébrales est illustrée Fig. 1.2 (b) sur une dissection. Dans cet exemple, la localisation des électrodes correspondrait à l'exploration d'une épilepsie partielle du lobe temporal (ELT). Un exemple de signaux SEEG enregistrés le long d'une électrode pendant une crise est présenté Fig. 1.2 (c).

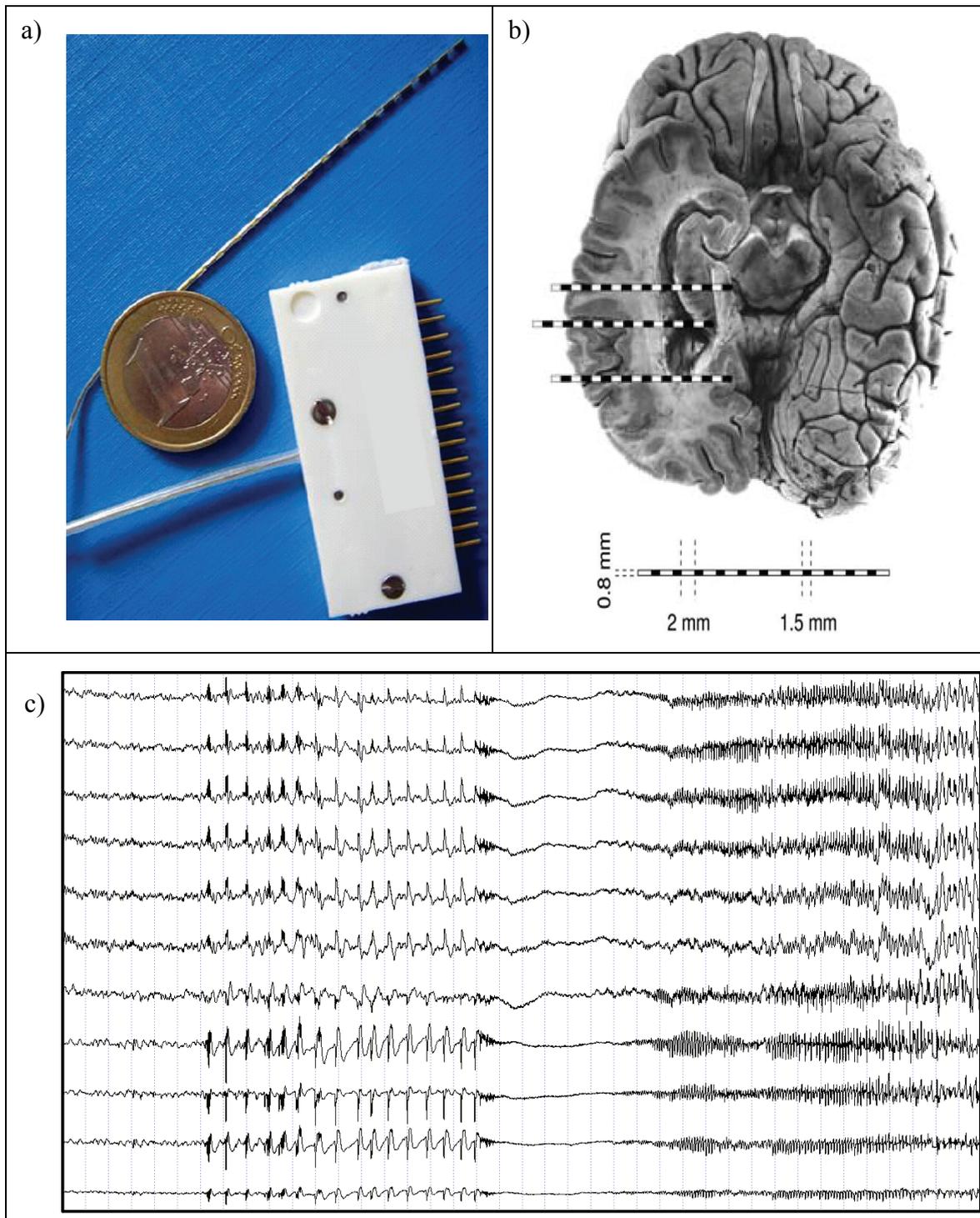


Fig. 1.2. Exploration stéréo-électro-encéphalographique (SEEG) : (a) une photo d'une électrode intracérébrale, (b) un exemple d'implantation d'électrodes dans le lobe temporal, et (c) un exemple des signaux SEEG enregistrés sur 11 plots adjacents d'une même électrode lors du démarrage d'une crise.

1.3 Mesures d'interdépendance entre signaux

En routine clinique, l'analyse des signaux SEEG reste essentiellement visuelle. Or, comme nous l'avons montré dans de nombreuses situations [16], les méthodes de traitement du signal, lorsqu'elles sont bien adaptées aux problèmes posés, peuvent apporter un complément substantiel à l'analyse visuelle. Ceci est particulièrement vrai dans le cadre de l'étude de l'organisation de la zone épileptogène et dans l'analyse de signaux épileptiques résultant d'une hypersynchronisation anormale au sein des populations de neurones ou entre populations distantes [17, 18]. En effet, les méthodes de mesure de relation entre signaux (au sens large) se sont considérablement développées dans le domaine. Les recherches sont finalisées autour de deux thèmes principaux :

- i)* La prédiction des crises, dans laquelle la quantité mesurée par les méthodes de caractérisation d'interdépendance est utilisée comme un indicateur de l'avènement d'une crise. A long terme, l'espoir est d'utiliser cet indicateur dans un système de prévention des crises (par exemple par stimulation électrique ou injection locale de certains médicaments).
- ii)* L'étude des relations interstructures dans la zone explorée par la SEEG. L'objectif est de localiser la zone épileptogène et de comprendre son organisation. A terme, l'objectif est de mieux définir le geste opératoire.

Concernant la prédiction des crises, plusieurs études ont montré la supériorité des méthodes de mesures d'interdépendance entre signaux (les méthodes dites 'bi-' ou 'multivariées') par rapport aux méthodes univariées, c'est-à-dire les méthodes qui caractérisent les propriétés (comme la complexité et la non stationnarité) des signaux pris individuellement [19]. Plus précisément, sans aborder ici les problèmes de sensibilité et de spécificité inhérents à tout problème de détection et les problèmes liés à la sélection des données, il a été montré que les mesures univariées peuvent caractériser des changements se produisant peu de temps avant la crise (quelques secondes), alors que les mesures bivariées pourraient refléter des changements de dynamique plus longtemps avant la crise (de quelques minutes à quelques heures).

Concernant le localisation de la zone épileptogène, de nombreuses études [19] ont été publiées. Elles mesurent le couplage statistique entre les signaux issus de différentes structures cérébrales pour caractériser leurs relations fonctionnelles (voir illustration Fig. 1.3).

A partir de cette caractérisation de la connectivité, des hypothèses peuvent ensuite être émises sur le rôle de chaque structure cérébrale et sur ses interactions avec les autres structures du réseau, pendant une activité normale (cognitive, par exemple) ou une activité pathologique (épileptique, par exemple).

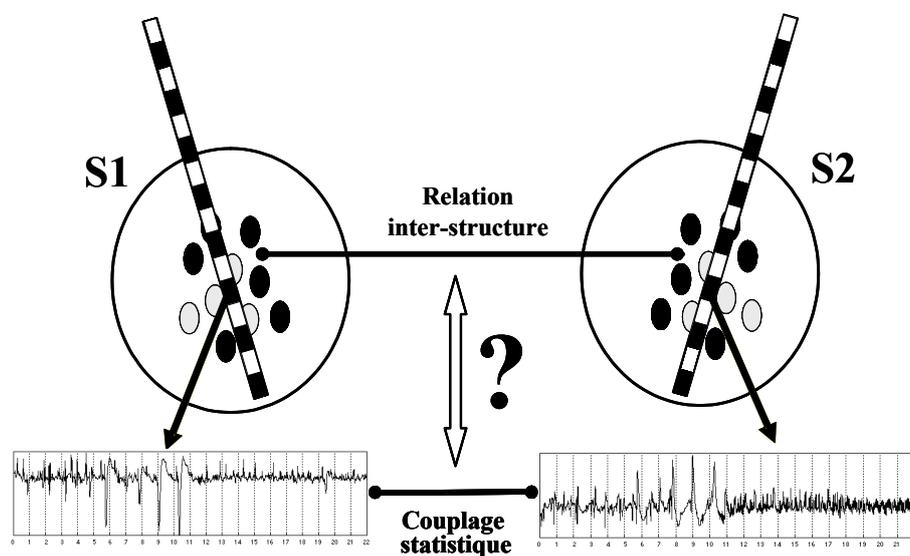


Fig. 1.3. Schéma général d'utilisation des méthodes de caractérisation des relations fonctionnelles entre les différentes structures cérébrales à partir de la mesure du couplage statistique entre les signaux qu'elles génèrent.

Ces méthodes peuvent être regroupées dans deux catégories : les méthodes linéaires et les méthodes non linéaires.

Les méthodes linéaires ont été développées au milieu du 20^e siècle [20]. Les plus utilisées dans le domaine de l'analyse des signaux EEG sont la fonction d'intercorrélacion normalisée, et la fonction de cohérence basée sur l'interspectre des signaux [21, 22]. A partir de ces travaux, des méthodes ont été proposées plus récemment, visant à améliorer les performances statistiques et la résolution temporelle d'estimation de relation, particulièrement en utilisant des modèles paramétriques pour le signal [23, 24].

Depuis une vingtaine d'années, beaucoup d'efforts ont porté sur l'utilisation des méthodes de mesure d'interdépendance non linéaire. Ces efforts sont justifiés par le fait que la relation entre les signaux peut être de nature non linéaire et par l'incapacité (par définition) des méthodes linéaires à mettre en évidence une telle relation. Les méthodes non linéaires peuvent elles-mêmes être divisées en deux catégories. La première regroupe celles basées sur l'information mutuelle [25] ou la régression non linéaire [26, 27]. Dans la seconde catégorie, on trouve des méthodes utilisées dans l'étude des systèmes dynamiques non linéaires et dans la théorie du chaos [28, 29]. Leur application à l'analyse des signaux EEG est très récente.

1.4 Objectifs de la thèse et organisation du manuscrit

L'objectif général de cette thèse est d'évaluer les méthodes de mesure des relations entre signaux utilisées (ou utilisables) dans un contexte d'étude de la connectivité cérébrale. Cet objectif répond à plusieurs besoins.

Tout d'abord, le nombre de méthodes disponibles a considérablement augmenté. Pour chaque méthode, on dispose également de plusieurs estimateurs du degré de relation. Certes, plusieurs tentatives de comparaison des performances de différentes méthodes ont été décrites ces dernières années. Cependant, la plupart d'entre elles ne donne que des résultats qualitatifs [30, 31] et aucune d'entre elles n'a fait intervenir la notion de « modèle de relation » dans un contexte applicatif où précisément, on ne dispose pas d'information *a priori* sur la nature de la relation. Ainsi, ces études ne donnent que des résultats partiels et souvent dans une application spécifique [19, 32].

Par ailleurs, étant donnée la nature oscillatoire des activités reflétées dans les signaux EEG, il est naturel de poser la question de la dépendance par rapport à la fréquence de ces méthodes de caractérisation des relations inter-structures. C'est la raison pour laquelle nous avons consacré une partie importante des travaux effectués durant cette thèse à l'étude des méthodes d'estimation de la relation conservant l'information fréquentielle.

Enfin, il est très probable que la relation qui lie les signaux soit non stationnaire, notamment lorsque ceux-ci sont enregistrés durant les crises d'épilepsie. Nous avons donc également

consacré une partie des travaux à certaines méthodes paramétriques capables d'estimer la relation dans le cas non stationnaire.

Ce manuscrit est organisé de la manière suivante : le chapitre 2 présente un état de l'art sur des méthodes de mesure de relation. Sont abordées et décrites les méthodes linéaires (paramétriques et non paramétriques), les méthodes non linéaires (régression, information mutuelle, relation de phase et synchronisation généralisée). Ces méthodes ont toutes été utilisées dans le cadre de l'analyse des signaux EEG, soit pour des études cognitives, soit dans des pathologies telles que l'épilepsie ou la maladie d'Alzheimer. Dans le chapitre 3, nous proposons une méthodologie d'évaluation et de comparaison des différentes méthodes présentées dans le chapitre précédent qui utilise à la fois des modèles de génération de signaux et différents critères statistiques tels que le biais, la variance, l'erreur quadratique moyenne, et la sensibilité des mesures par rapport aux changements du degré de relation. Les modèles mathématiques proposés permettent de simuler des paires de signaux liés par des relations linéaires ou non linéaires (dont le degré est paramétré) et couvrent un large éventail de situations (stochastique bande-étroite ou large bande, déterministe ou chaotique). De plus, afin d'approcher les propriétés des signaux réels, nous avons également utilisé un modèle réaliste (populations neuronales couplées) de génération de signaux EEG. Le quatrième chapitre est consacré à l'étude des méthodes de mesure de relation en temps et en fréquence. Les travaux effectués, s'appuyant sur des méthodes existantes, ont conduit à la proposition d'un nouvel estimateur de la cohérence et donc à une caractérisation de la relation linéaire entre signaux, dans le plan temps-fréquence.

Chapitre 2

Méthodes de mesure de couplage statistique entre signaux

2.1 Introduction

Un état de l'art sur des méthodes de mesure de couplage statistique entre signaux est présenté dans ce chapitre. Nous passons en revue les méthodes les plus répandues dans le domaine de l'étude des activités cérébrales. Ces méthodes comprennent les méthodes linéaires, non paramétriques et paramétriques, et les méthodes non linéaires. D'une façon générale ces méthodes peuvent être réparties en trois groupes: (i) les méthodes de régression linéaire et non linéaire; (ii) les méthodes de synchronie de phase; (iii) les méthodes de synchronisation généralisée.

Dans ce chapitre, les bases théoriques de chaque méthode étudiée ainsi que les considérations pratiques pour sa mise en œuvre sont présentées.

2.2 Méthodes linéaires

Plusieurs méthodes ont été proposées afin de caractériser les interactions entre différentes structures cérébrales. Dès les années cinquante, les méthodes linéaires, et notamment la fonction d'intercorrélation, ou corrélation croisée (CC), ont été déployées pour l'étude de ces interactions à partir des corrélations mesurées entre signaux EEG. La mise au point de

l'algorithme de la transformée de Fourier rapide (FFT) a ouvert la porte à l'analyse spectrale de signaux EEG. L'équivalent de la CC dans le domaine fréquentiel, c'est-à-dire la fonction de cohérence (FC), a été appliquée aux signaux EEG par Brazier [21]. Depuis, sur la base de ces deux approches, plusieurs méthodes ont été développées pour améliorer la caractérisation des relations entre signaux EEG [20, 33-40] que ce soit dans le domaine temporel, fréquentiel ou conjointement en temps et en fréquence.

En termes statistiques, ces deux manières d'appréhender une relation linéaire entre deux signaux peuvent s'assimiler à des méthodes de régression linéaire calculées sans aucune hypothèse *a priori* sur le modèle éventuel de relation entre les signaux. Elles ont été intensivement exploitées sur de nombreux problèmes. Deux d'entre elles sont présentées ci-après : dans le domaine temporel, la méthode de régression linéaire qui fournit un coefficient de corrélation entre signaux, et dans le domaine de Fourier, la fonction de cohérence dont le module permet de caractériser la linéarité de la relation entre signaux.

2.2.1 Coefficient de corrélation linéaire

Le coefficient de corrélation est une quantité qui représente la qualité de l'ajustement d'une courbe, par la méthode des moindres carrés, sur des données présentées sous forme d'un nuage de points. Le coefficient de corrélation est également connu comme le coefficient de corrélation de "produit de moment" ou de corrélation de Pearson [41].

Pour l'ajustement au sens des moindres carrés, d'une droite sur des données, le coefficient b dans l'équation ci-dessous :

$$\hat{y} = bx + a$$

est donné par :

$$b = \frac{\text{cov}(x, y)}{\text{var}(x)} = \frac{\sum_{i=1}^N (x[i] - \bar{x})(y[i] - \bar{y})}{\sum_{i=1}^N (x[i] - \bar{x})^2}$$

où \bar{x} et \bar{y} sont les moyennes de x et y . De la même manière, on peut estimer b' dans l'équation suivante,

$$\hat{x} = b'y + a'$$

par

$$b' = \frac{\text{cov}(x, y)}{\text{var}(y)}$$

Le coefficient de corrélation r entre x et y peut alors être défini de la façon suivante :

$$r = \sqrt{bb'} = \frac{\sum_{i=1}^N (x[i] - \bar{x})(y[i] - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x[i] - \bar{x}) \cdot \sum_{i=1}^N (y[i] - \bar{y})}}$$

Ce qui peut être plus simplement écrit :

$$r^2 = \frac{\text{cov}^2(x, y)}{\text{var}(x) \cdot \text{var}(y)}$$

Si les signaux x et y sont centrés, on peut écrire l'équation ci-dessus de la manière suivante :

$$r^2(\tau) = \frac{\gamma_{xy}^2(\tau)}{\gamma_{xx}(0) \cdot \gamma_{yy}(0)} \quad (2.1)$$

où $\gamma_{xx}(\tau)$ et $\gamma_{yy}(\tau)$ sont les auto-corrélations de x et de y , et $\gamma_{xy}(\tau)$ l'intercorrélacion entre x et y retardé de temps τ .

2.2.2 La cohérence

Elle permet d'explorer les relations statistiques entre signaux en fonction de la fréquence. La fonction de cohérence est analogue à la méthode précédente mais dans le domaine de Fourier [42-45]. Elle est classiquement définie [46-48] par :

$$|\rho_{xy}(f)|^2 = \frac{|S_{xy}(f)|^2}{S_{xx}(f) \cdot S_{yy}(f)} \quad (2.2)$$

où $S_{xx}(f)$ et $S_{yy}(f)$ sont les densités spectrales de x et y et $S_{xy}(f)$ est leur densité interspectrale. La fonction de cohérence mesure le degré de la linéarité de la relation entre deux signaux. Elle vaut zéro pour deux signaux complètement indépendants et prend la valeur 1 pour module, si et seulement si l'un est décrit linéairement en fonction de l'autre.

Après l'introduction de la transformée de Fourier rapide [49], les premières applications d'analyse spectrale dans le domaine ont vu le jour, avec en particulier les travaux de Walter et Adey [50]. L'utilisation combinée de la fonction de cohérence et de la phase ont permis à

Brazier [21] d'étudier, dès 1968, la propagation de l'activité épileptique critique enregistrée avec des électrodes intracrâniennes. Depuis, plusieurs études portant sur la génération et la propagation des activités dans le cerveau ont été menées [5, 22, 37, 51, 52].

La qualité, en termes de biais et de variance, des estimations non paramétriques des spectres et de l'interspectre intervenant dans la fonction de cohérence, est conditionnée par le nombre d'échantillons disponibles. De fait, pour des observations de courte durée, les erreurs d'estimation deviennent critiques. Par exemple, l'étude des phénomènes de synchronisation de l'activité cérébrale lors de certaines tâches cognitives, nécessite une analyse locale du signal EEG. Pour répondre à ce besoin, il faut disposer de méthodes qui puissent estimer la relation entre signaux sur un horizon d'observation court, compatible avec les changements induits dans l'EEG. Le recours à des modèles paramétriques pour les estimations spectrales peut alors s'avérer intéressant.

2.3 Méthodes non linéaires

On constate un intérêt croissant au cours de ces dernières années pour les méthodes de mesure d'interdépendance non linéaire afin de caractériser les dynamiques spatio-temporelles de signaux cérébraux comme l'EEG et la MEG. Cet intérêt repose sur le fait que le mécanisme de génération des signaux cérébraux est non linéaire.

Par ailleurs, les résultats des traitements mathématiques traditionnelles, qui sont presque tous linéaires, ne sont pas entièrement satisfaisants. En effet, dans le cas où les quantités calculées avec les méthodes linéaires sont faibles, on peut difficilement conclure sur la non existence d'une interaction entre structures, celles-ci pouvant résulter d'un processus non linéaire qui se traduirait également, au niveau des signaux, par une relation non linéaire.

C'est pourquoi, plusieurs méthodes de caractérisation de relation ont récemment vu le jour pour mieux répondre aux besoins (par exemple, dans le cas de l'épilepsie, mieux connaître les mécanismes d'initiation et de propagation des crises et des événements paroxystiques intercritiques). Les méthodes de mesure d'interdépendance non linéaire qui ont été explorées en premier dans ce domaine sont l'information mutuelle [25] et la régression non linéaire [26,

53]. Les méthodes issues des systèmes dynamiques non linéaires et de la théorie du chaos [28, 29] ont été introduites dans ce domaine plus récemment.

Dans ce qui suit, nous présentons succinctement les méthodes non linéaires les plus répandues pour la caractérisation de relation entre différentes structures cérébrales dans la perspective de l'estimation de leurs couplages fonctionnels.

2.3.3 Coefficient de régression non linéaire

Le coefficient de régression non linéaire permet de mesurer une dépendance statistique (linéaire ou non) entre deux séries d'observation [54]. Si on considère deux variables aléatoires x et y , l'espérance conditionnelle de y étant donné x , $\mu_{y|x}$, c'est-à-dire la courbe de régression de y en fonction de x , est définie par:

$$\mu_{y|x}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(y|x) dy$$

où $f(y|x)$ est la loi de probabilité conditionnelle de y à x fixée. Le coefficient de régression non linéaire $\eta_{y|x}^2$ qui explique la réduction de la variance de y quand elle est prédite à partir des valeurs de x peut s'écrire :

$$\eta_{y|x}^2 = \frac{\text{var}(y) - E\left\{\left(y - \mu_{y|x}(x)\right)^2\right\}}{\text{var}(y)} = 1 - \frac{E\left\{\left(y - \mu_{y|x}(x)\right)^2\right\}}{\text{var}(y)}$$

Il représente le complément à 1 du rapport de la portion de la variance de y qui est expliquée par x et de la variance de y .

Ce coefficient est, par construction, compris dans l'intervalle $[0,1]$ puisque $\text{var}(y) \geq E\left\{\left(y - \mu_{y|x}(x)\right)^2\right\}$. $\eta_{y|x}^2 = 0$ correspond au cas où les deux signaux x et y sont indépendants. Pour $\eta_{y|x}^2 = 1$, le comportement de y peut être complètement prédit à partir de celui de x . Si la liaison est parfaitement linéaire, on a $h_{y|x}^2 \approx \eta_{y|x}^2 = r^2$. La mesure h^2 est une quantité asymétrique dans le sens où $h_{y|x}^2 \neq h_{x|y}^2$, et peut donc être porteuse d'une information sur la directionalité du couplage entre les observations [53]. L'estimée de ce coefficient est notée par la suite $h_{y|x}^2$.

De nombreuses méthodes ont été proposées dans la littérature pour estimer une régression non linéaire (le lecteur peut se référer aux ouvrages abordant cette question par exemple [55-57]). Pijn [26, 58, 59] a proposé d'approcher la courbe de régression $\mu_{y|x}^2(x)$ par une fonction continue affine par morceaux. On a ainsi une régression localement linéaire construite en imposant une contrainte de continuité sur $\mu_{y|x}(x)$. Pour cela, l'axe des abscisses x est divisé en L intervalles adjacents et de même largeur. Conditionnellement à x dans un intervalle i , la valeur moyenne q_i de y est calculée, ainsi que l'abscisse p_i donnée par le point milieu de l'intervalle considéré. La courbe de régression $\mu_{y|x}^2(x)$ est approchée en joignant les points (p_i, q_i) , la fonction correspondante à ce graphe étant alors :

$$\hat{\mu}_{y|x}(x) = \sum_{i=1}^{L-1} s_i(x) g_i(x)$$

où

$$g_i(x) = \frac{q_{i+1} - q_i}{p_{i+1} - p_i} (x - p_i) + q_i$$

et

$$s_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq p_2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad s_i = \begin{cases} 1 & \text{si } p_i < x \leq p_{i+1} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad s_{L-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > p_{L-1} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Dans le cas des séries de longueur finie N , l'estimée du coefficient est donnée par :

$$h_{y|x}^2 = \frac{\sum_{n=1}^N (y_n - \bar{y})^2 - \sum_{n=1}^N (y_n - \hat{\mu}_{y|x}(x_n))^2}{\sum_{n=1}^N (y_n - \bar{y})^2}$$

Le recours à cette mesure a été envisagé dans de nombreux travaux. On peut citer par exemple l'étude de la dynamique spatio-temporelle des signaux EEG avant les crises néocorticales [60], l'interprétation basée-modèle des interdépendances entre signaux en épilepsie [53], l'identification de réseaux épileptogènes par analyse des signaux SEEG [61], l'interprétation des décharges épileptiques généralisées [62], la propagation des activités électriques dans le cerveau [26], la recherche du rôle de la commissure hippocampique dans le transfert interhémisphérique des décharges épileptiques chez le rat [63].

2.3.4 Information mutuelle

L'information mutuelle permet de mesurer des dépendances linéaires ou non linéaires. Sa valeur est nulle si et seulement si les deux séries temporelles considérées sont strictement indépendantes.

Soient x et y deux variables aléatoires. Si on désigne par p_x , p_y et $p_{x,y}$ respectivement les lois marginales de x et y et la loi du couple (x, y) , on peut définir les entropies selon Shannon de ces variables de la manière suivantes [64] :

$$H(x) = -\int p_x(u) \log p_x(u) du$$

$$H(y) = -\int p_y(u) \log p_y(u) du$$

$$H(x, y) = -\iint p_{xy}(u, v) \log p_{xy}(u, v) dudv$$

L'information mutuelle moyenne est alors définie comme étant [65, 66]:

$I(x, y) = H(x) + H(y) - H(x, y)$ (en prenant les logarithmes à base 2, toutes ces quantités se mesurent en bits). Elle peut aussi se mettre sous la forme :

$$I(x, y) = \iint p_{xy}(u, v) \log \frac{p_{xy}(u, v)}{p_x(u) p_y(v)} dudv$$

Les différentes entropies mesurent la teneur en information des espaces probabilisés marginaux x , y et l'espace joint (x, y) tandis que, l'information mutuelle moyenne mesure la quantité d'information obtenue sur x (resp. y) sachant y (resp. x).

L'information mutuelle moyenne est nulle si et seulement si les deux variables aléatoires sont indépendantes. Pour des variables corrélées, elle prend des valeurs positives et atteint son maximum ($H(x) = H(y)$) pour des variables liées. Cette mesure, contrairement au coefficient de régression non linéaire, est insensible à la direction de couplage. En effet, l'information mutuelle moyenne est symétrique c'est-à-dire $I(x, y) = I(y, x)$.

L'approche la plus répandue pour estimer l'information mutuelle entre deux processus aléatoires $x(t)$ et $y(t)$ stationnaires s'appuie sur l'estimation des distributions de probabilité par des histogrammes à pas fixe. Des méthodes plus sophistiquées [67, 68] employant des pas

adaptatifs pour améliorer la qualité de l'estimation des histogrammes ont été envisagées. Cependant, ces estimations souffrent toujours d'erreurs systématiques [69]. Une autre approche pour évaluer l'information mutuelle emploie les intégrales de corrélation pour l'estimation des entropies (de Shannon) [70]. Elle implique le calcul des probabilités dans des voisinages, de rayon fixe donné, autour de chaque point.

Schreiber a étendu le concept d'information mutuelle en définissant une mesure asymétrique, basée sur l'entropie, pour quantifier le "transfert" d'information entre deux systèmes pour, en principe, distinguer le système pilote du système répondeur [71]. Palus a aussi proposé une mesure asymétrique mais basée sur le concept d'information mutuelle [72].

2.3.5 Synchronisation de phase

Classiquement, deux oscillateurs sont synchrones lorsque leurs phases sont accordées. En général quand il y a synchronisation entre deux processus temporels x et y , la relation suivante entre leurs phases $\phi_x(t)$ et $\phi_y(t)$ est vérifiée [73] :

$$n\phi_x(t) - m\phi_y(t) = \text{const.}$$

où n et m sont des nombres entiers indiquant le rapport des fréquences d'accord ou de verrouillage. Par exemple si $m=1$ et $n=2$, on peut s'attendre à ce que ces deux processus soient liés par une relation quadratique.

Plusieurs méthodes récentes dédiées à l'analyse des liens entre des séries temporelles, font explicitement usage de leurs phases [74]. Les travaux rencontrés dans la littérature visent la mise au point de tests pour la synchronisation unidirectionnelle [75] ou mutuelle [76] d'oscillateurs chaotiques, basés sur des données bruitées ou non [77], d'indicateurs de la synchronisation généralisée [78], ou l'identification de la direction de couplage [79, 80]. Ces approches ont été notamment appliquées en neurologie [81, 82], cardiologie [83], écologie [84], astronomie [85], et dans la physique des lasers [86] (pour une revue récente et complète, voir [87, 88]).

La première étape dans la mesure de synchronisation entre deux processus temporels x et y est la détermination de leur phase $\phi_x(t)$ et $\phi_y(t)$. Cette opération peut être réalisée de différentes

manières [89]. Dans ce manuscrit, l'accent est mis sur deux méthodes d'estimation de la phase. La première s'appuie sur la représentation analytique du signal et se fonde naturellement sur la transformée de Hilbert [89], la seconde estime celle-ci après filtrage en sous-bande et s'appuie sur une décomposition en ondelettes continues de type Morlet [90, 91].

2.3.5.1 Extraction de la phase

La première méthode présentée ici considère le signal analytique [89, 92, 93]. Classiquement, pour une série temporelle $x(t)$, le signal analytique est défini par :

$$Z_x(t) = x(t) + i\tilde{x}(t) = A_x^H(t) e^{i\phi_x^H(t)},$$

où $A_x^H(t)$ et $\phi_x^H(t)$ sont l'amplitude et la phase de $x(t)$, et où $\tilde{x}(t) = \text{H} [x(t)]$ est la transformée de Hilbert de $x(t)$ donnée par :

$$\tilde{x}(t) = \text{H} [x(t)] = \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t')}{t-t'} dt'$$

où *v. p.* désigne la valeur principale au sens de Cauchy et est donnée par cette relation :

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \cdot = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ A \rightarrow \infty}} \left(\int_{-A}^{-\varepsilon} \cdot + \int_{+\varepsilon}^{+A} \cdot \right)$$

Dans domaine fréquentiel, le signal analytique s'écrit [94] :

$$Z_x(f) = \begin{cases} 2X(f) & \text{pour } f > 0 \\ X(0) & \text{pour } f = 0 \\ 0 & \text{pour } f < 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

où $X(f)$ est la transformée de Fourier de $x(t)$. Le signal analytique ne contient donc que les composantes fréquentielles du signal $x(t)$ qui sont à support dans \mathbb{R}^+ . Pour un signal $x(t)$ réel, sa transformée de Fourier est symétrie hermitienne ce qui signifie que $X(-f) = X^*(f)$, où * désigne le complexe conjugué, le signal analytique associé intègre toutes les informations du signal réel.

La phase instantanée du signal $x(t)$ est alors donnée par :

$$\phi_x^H(t) = \arctan \frac{\tilde{x}(t)}{x(t)}$$

De manière analogue, $\phi_y^H(t)$ et $A_y^H(t)$ peuvent être définies à partir de $y(t)$.

La deuxième méthode employée pour extraire les phases à partir des séries temporelles est basée sur la transformée en ondelettes [90, 91]. Dans cette approche la phase est déterminée par la convolution du signal avec une ondelette complexe de type Morlet [95] :

$$\psi(t) = C(1 + \cos 2\pi f_0 t) e^{2i\pi k f_0 t}$$

où f_0 est une fréquence normalisée et k un entier différent de 0 et ± 1 . La fréquence centrale de l'ondelette est alors kf_0 et C est une constante de normalisation de sorte que l'énergie de ψ soit égale 1.

La convolution de $x(t)$ par $\psi(t)$ fournit les coefficients d'ondelettes :

$$W_x(t) = (\psi * x)(t) = \int \psi(u)x(t-u) du = A_x^W(t) \cdot e^{i\phi_x^W(t)},$$

la phase de $x(t)$ est donnée par :

$$\phi_x^W(t) = \arctan \frac{\text{Im } W(t)}{\text{Re } W(t)}.$$

On procède d'une manière similaire pour déterminer $\phi_y^W(t)$ à partir de $y(t)$.

Bien que basé sur des approches différentes, ces deux définitions de la phase sont en effet étroitement liées, comme cela a été vérifié pratiquement [96] et expliqué théoriquement [30]. Brièvement, la méthode d'extraction de la phase basée sur la transformée en ondelettes correspond approximativement à celle basée sur la transformée Hilbert appliquée à la série temporelle après passage dans un filtre linéaire passe bande. Dans l'approche « ondelette », la fréquence centrale f_0 et k jouent le rôle de paramètres d'ajustement de la bande de fréquence d'intérêt.

2.3.5.2 Indices de synchronisation de phase

Dans l'élaboration de cet indice, la distribution de probabilité de la phase relative modulo 2π ($\phi = \phi_x - \phi_y [2\pi]$) pour des processus aléatoires indépendants est supposée uniforme. Le couplage entre les processus est présumé modifier cette distribution. De ce fait, l'intensité d'interaction entre systèmes peut être estimée par l'intermédiaire d'indices qui quantifient l'écart de cette distribution par rapport à une loi uniforme ayant le même support.

En se basant sur les distributions des phases $\phi_x(t)$ et $\phi_y(t)$ extraites dans la première étape, deux indices différents de synchronisation de phase sont considérés. Le premier s'appuie sur l'entropie de Shannon [73] et le deuxième est basé sur la fonction caractéristique de la distribution de la différence de phase entre deux signaux [97].

2.3.5.2.1 Entropie de phase

Dans cette méthode, après le calcul de la phase relative modulo 2π ($\phi \equiv (\phi_x - \phi_y)[2\pi]$), sa distribution est estimée. Pour caractériser la synchronisation de phase, la déviation de cette distribution par rapport à la distribution uniforme doit être statistiquement mesurée. Afin d'atteindre ce but, un indice basé sur l'entropie de Shannon a été proposé comme suit :

$$\rho = \frac{H_{\max} - H}{H_{\max}}$$

où H est l'entropie de la distribution de ϕ estimée par :

$$\hat{H} = -\sum_{i=1}^M p_i \ln p_i,$$

M est le nombre d'intervalles utilisés pour obtenir une estimation de la distribution, et p_i est la probabilité estimée pour que la phase relative se trouve dans i -ième intervalle. L'entropie maximale H_{\max} est donnée par $\ln M$ (entropie d'une variable aléatoire uniforme discrète prenant M valeurs) ; le nombre optimal d'intervalles (M_{op}) est une fonction du nombre d'échantillons des séries temporelles L [98] :

$$M_{op} = e^{0.626+0.4\ln(L-1)}$$

2.3.5.2.2 Cohérence de la phase moyenne (Mean Phase Coherence)

La cohérence de la phase moyenne, qui représente le premier mode de Fourier de la distribution de phase relative [99], est définie comme suit [97] :

$$R = \left| \mathbb{E} \left[e^{i\phi(t)} \right] \right|$$

En disposant de L échantillons de la différence de phase et sous l'hypothèse de stationnarité à

l'ordre 1, cette quantité est estimée, par : $\hat{R} = \left| \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} e^{i\phi(t_k)} \right|$

Que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$\hat{R} = \sqrt{\left(\frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} \sin(\phi(kT_e)) \right)^2 + \left(\frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} \cos(\phi(kT_e)) \right)^2}$$

où T_e est la période d'échantillonnage des signaux.

Les valeurs de ρ et R sont comprises entre 0 (pas de synchronie) et 1 (synchronisation parfaite) et ces deux indices croissent de façon monotone avec le degré de synchronisation de phase [81].

2.3.6 Synchronisation généralisée

Le concept de la synchronisation généralisée (SG) a été introduit dans des études faites sur les systèmes chaotiques. Vu que les trajectoires voisines de systèmes chaotiques divergent rapidement, ce qui rend leurs comportements imprévisibles, la notion de "synchronisation" est presque un oxymore. Cependant il est très facile de créer des situations dans lesquelles la synchronisation s'établit entre deux signaux ayant chacun un comportement chaotique (par exemple, [100-102]).

Pour deux systèmes, les cas les plus simples de synchronisation sont les synchronisations à l'identique ou complètes et les synchronisations retardées ou avec délais (Lag synchronization). L'un des deux systèmes agit comme système chaotique pilote (driver ou initiateur), et l'autre est le système de réponse ou suiveur. Ce dernier système est identique au premier pour un couplage nul. Quand un degré approprié de couplage est introduit dans le modèle, les deux systèmes présentent des oscillations synchrones.

La présence de synchronisation généralisée entre les systèmes de réponse $X_r(t)$ et le pilote $X_d(t)$ signifie qu'il y a une sorte de relation fonctionnelle $X_r(t) = F[X_d(t)]$ entre les états des systèmes une fois que le régime permanent est atteint [103]. Cette relation $F[\cdot]$ peut être lisse ou fractale. Selon les propriétés de cette relation, la SG peut être forte ou faible [104]. Il y a plusieurs méthodes pour détecter la présence d'une SG entre des oscillateurs chaotiques. Parmi elles, on peut citer : l'approche dite du système auxiliaire [105], la méthode des voisins les plus proches [78, 106] ou encore l'estimation des exposants conditionnels de Lyapunov [104, 107].

En fait, toutes les techniques qui visent la mesure de la synchronisation généralisée, d'une manière ou d'une autre, quantifient la similarité des trajectoires des systèmes dans l'espace d'état. Comme on peut le voir Fig. 2.1, les méthodes de mesure d'interdépendance comparent la taille d'un voisinage (à base d'une métrique comme, par exemple, la distance Euclidienne) dans l'espace d'état du système pilote avec la taille de son image dans l'espace d'état du système de réponse. L'exemple présenté dans cette figure montre un couplage entre un système de Rössler, comme pilote, et un système de Lorenz, comme réponse. Quand la relation entre ces deux systèmes est forte, la transformation d'un voisinage (ou un ensemble de points voisins) dans l'espace d'état du système pilote est un voisinage dans l'espace d'état du système de réponse (Fig. 2.1, en bas) c'est-à-dire que les trajectoires des deux systèmes ont des comportements voisins ou similaires pour les mêmes indices temporels. Au contraire, si la relation est faible l'image d'un voisinage dans l'espace d'état du système pilote sera un ensemble de points dispersés dans l'espace d'état du système de réponse (Fig. 2.1, en haut); plus la relation est faible plus ces points seront dispersés.

2.3.6.1 Reconstruction de l'espace d'états

Pour que la dynamique d'un système puisse être décrite, il faut disposer des trajectoires dans son espace d'état, ou dans un espace équivalent, présentant les mêmes propriétés topologiques que le système d'origine. Dans la pratique, pour la majorité des cas, nous n'avons pas accès à toutes les variables indépendantes du système c'est-à-dire que l'on ne peut pas directement construire l'espace d'état d'un système à partir des observations. Dans ce cas, on observe une mesure scalaire en fonction des variables du système sur un intervalle du temps. La

reconstruction de l'espace d'état à partir de cette série temporelle se fait au moyen de l'opération de *plongement* (embedding).

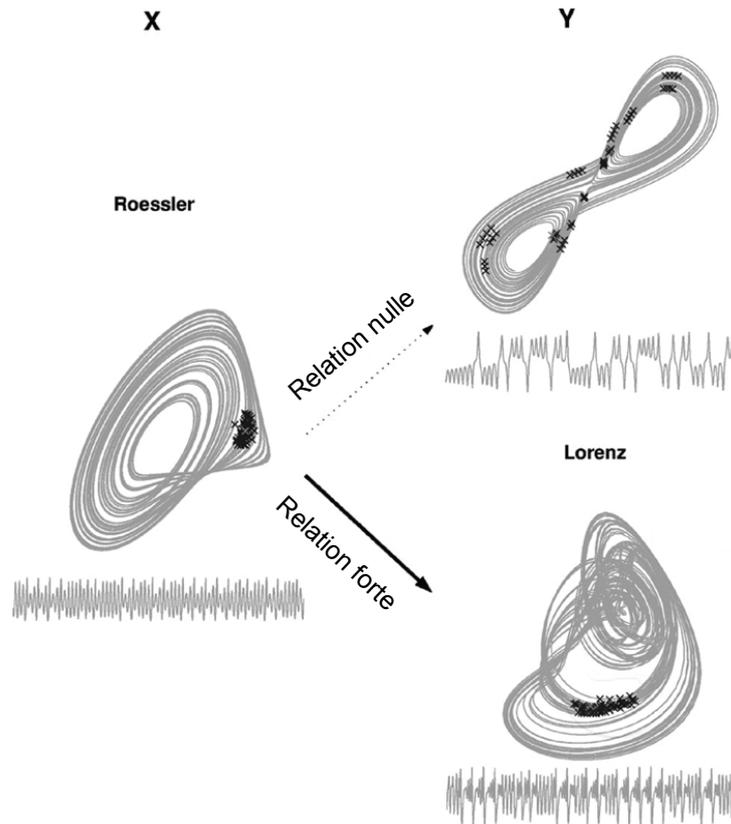


Fig. 2.1. Idée fondamentale des mesures non linéaires d'interdépendance (figure adaptée de [30]). La taille du voisinage dans l'espace d'état d'un des systèmes, par exemple X, est comparée à la taille de son image (mapping) dans l'espace d'état de l'autre système, par exemple Y. Cet exemple montre un système de Lorenz guidé par un système Rössler avec un degré de couplage zéro (en haut) et avec un couplage fort (en bas). Au-dessous de chaque attracteur, la série temporelle correspondante est tracée. Chaque \times représente un point temporel de trajectoire.

Pour la reconstruction de l'espace d'état, plusieurs méthodes de plongement ont été proposées. La méthode la plus répandue est le plongement par le retard temporel [108, 109]. Dans cette méthode, à partir d'une série temporelle $\{x_n, n=1,2,\dots,N\}$, pour chaque instant n , on

construit un vecteur correspondant à un point sur la trajectoire du système dans l'espace d'état de la façon suivante

$$X_n = \left(x_n, x_{n-\tau}, \dots, x_{n-(d-1)\tau} \right)^t$$

où τ est un retard temporel entre deux éléments de la série temporelle et d est la dimension de l'espace d'état reconstruit. Les paramètres τ et d jouent des rôles déterminants et de fait ils doivent être convenablement sélectionnés.

2.3.6.1.1 Choix du retard pour l'espace d'états reconstruit

Etant donné que dans la pratique on ne connaît pas les détails du système générateur du signal étudié, on ne peut pas définir avec certitude le retard τ afin de reconstruire l'espace d'états. On doit donc concevoir des méthodes appropriées d'estimation de celui-ci. Si le retard τ est trop petit, les coordonnées sont fortement corrélées. Cette redondance fait que l'espace d'états reconstruit se confine le long de la diagonale dans \mathbb{R}^d . Au contraire, si le retard est trop grand, les coordonnées des vecteurs d'états reconstruits sont complètement décorréées. En conséquence, l'attracteur reconstruit ne représente plus la dynamique du système puisqu'il remplit la totalité de l'espace d'état comme s'il s'agissait d'un bruit plongé dans un espace d -dimensionnel.

L'importance du choix du retard dans la reconstruction est illustrée Fig. 2.2. Fig. 2.2 (a) montre une trajectoire d'état d'un système de Rössler. La reconstruction de Fig. 2.2 (b) est faite à partir de la première variable du système pour un retard convenable qui correspond à l'indépendance des coordonnées. Fig. 2.2 (c) correspond à la reconstruction avec un retard faible : l'attracteur est compact et est réduit à la diagonale, et Fig. 2.2 (d) correspond à un retard trop élevé qui conduit à une décorrélation quasi-totale des coordonnées.

La méthode la plus *naturelle* pour choisir τ est basée sur la fonction d'autocorrélation. D'un point de vue pratique, ce choix est très satisfaisant. La taille des axes principaux du nuage de points dans l'espace reconstruit est étroitement liée aux valeurs propres de la matrice de covariance. Les valeurs propres sont égales (le nuage est une hypersphère et son volume maximal) lorsque la fonction d'autocorrélation devient nulle pour tout retard supérieur à τ .

Ceci donnerait comme résultat des coordonnées complètement indépendantes (ou du moins décorréliées), ce qui est à éviter. Un choix raisonnable consiste à prendre comme retard l'abscisse du premier zéro de la fonction d'autocorrélation. Un autre choix proposé pour le retard τ est celui correspondant à l'écart temporel amenant à une valeur de la fonction de corrélation normalisée inférieure à $1/e$ [110].

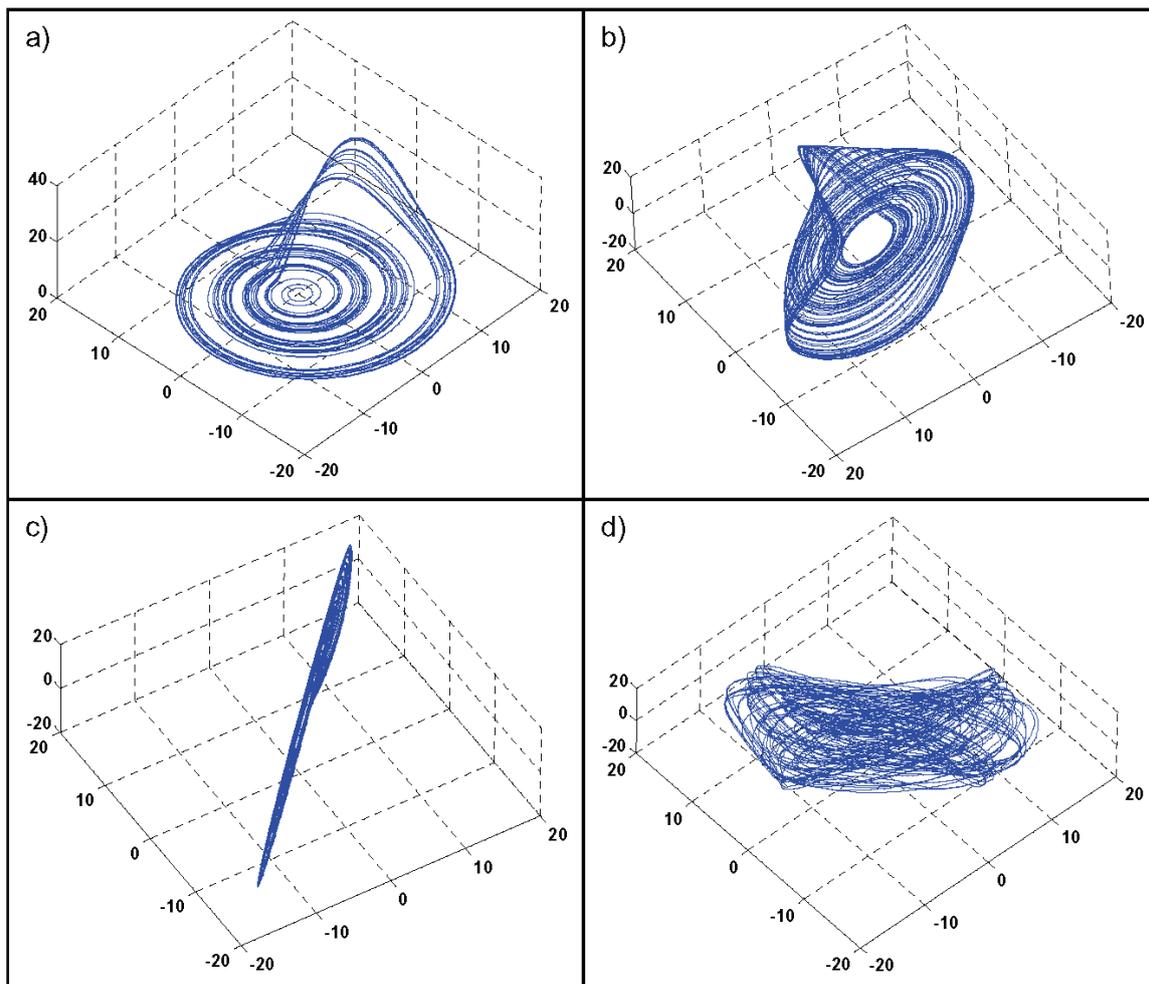


Fig. 2.2. Choix optimal du retard. (a) Trajectoire originale d'un attracteur de type Rössler. (b) Trajectoire reconstruite en utilisant le retard optimal. (c) Trajectoire reconstruite en utilisant un retard trop faible. (d) Trajectoire reconstruite en utilisant un retard trop élevé.

L'inconvénient des méthodes basées sur la fonction d'autocorrélation est que celle-ci ne prend en compte que les dépendances linéaires des données. Le τ estimé est pour ainsi dire, l'optimum linéaire. Afin d'introduire les relations non linéaires entre les données, Fraser [68,

[111] a proposé d'utiliser l'information mutuelle moyenne $I(\tau)$ du couple $(x_n, x_{n+\tau})$. Cette méthode propose d'utiliser comme retard l'abscisse du premier minimum de la fonction $I(\tau)$. Bien qu'il n'y ait pas de raison théorique pour ce choix, il se justifie puisque cette valeur indique le retard pour lequel $x_{n+\tau}$ fournit le moins d'information sur x_n , c'est-à-dire le premier décalage qui conduit à une redondance minimale. Dans le cas où la fonction $I(\tau)$ n'a pas de minimum, une règle proposée consiste à prendre comme retard la valeur de τ telle que $I(\tau)/I(0) \approx 1/5$ [112].

2.3.6.1.2 Choix de la dimension de l'espace d'états reconstruit

Il y a eu beaucoup de travaux sur la façon de déterminer la dimension optimale pour la reconstruction de l'espace d'états à partir d'une série temporelle scalaire basée sur le théorème de Takens [108] ou son extension [109] (pour une vue générale sur cette question on peut se référer par exemple à [113]). Trois méthodes de base sont habituellement employées pour choisir la dimension minimale pour la méthode de plongement :

- Calcul d'un paramètre donné sur l'attracteur [114]. L'augmentation de la dimension de plongement employée modifie ce paramètre et on constate qu'après une certaine valeur de cette dimension le paramètre se stabilise. Le problème typique de ces approches est qu'elles sont souvent trop coûteuses en temps de calcul et requièrent des séries de données de longue durée. De plus, elles sont subjectives.
- Décomposition en valeurs singulières [115]. La procédure identifie les principales directions orthogonales dans l'espace de plongement et les ordonne selon la valeur de la variance de la projection de la trajectoire sur chaque direction. Le nombre de directions explorées par la trajectoire reconstruite, indiqué par des valeurs singulières grandes, est une estimation de la dimension du plus petit espace qui contient la trajectoire. Cette approche est également subjective. Comme précisé dans [116], le nombre de valeurs singulières grandes peut être dépendant aussi bien du retard considéré dans la procédure de plongement, de la valeur initiale retenue pour d et des bruits qui peuvent entacher les données, que de la dynamique de système.

- La méthode des faux voisins [117]. Elle a été développée en se basant sur le constat que le choix d'une dimension de plongement trop faible a comme conséquence le rapprochement de points, initialement lointains dans l'espace original, dans l'espace de reconstruction. Cette méthode est une bonne approche ; mais le critère utilisé dans [117] reste subjectif pour la détermination des faux voisins et différents jeux de paramètres pour ce critère conduisent à des dimensions « optimales » sensiblement différentes pour une même série temporelle.

La méthode proposée par Cao [118] permet de surmonter certaines imperfections des méthodes ci-dessus. Elle présente les avantages suivants : elle ne dépend pas de paramètres subjectifs à l'exception du retard de plongement ; elle est peu sensible à la taille des données ; elle reste opérationnelle pour les séries temporelles d'attracteurs de grande dimension et est efficace en termes de coût de calcul.

A partir de la série temporelle $\{x_i, i = 1, 2, \dots, N\}$, pour chaque instant i , le vecteur

$$y_i(d) = \left(x_i, x_{i+\tau}, \dots, x_{i+(d-1)\tau} \right)^t, \quad i = 1, 2, \dots, N - (d-1)\tau$$

$y_i(d)$ est le i ième vecteur reconstruit à la dimension de plongement d . En s'inspirant de l'idée de la méthode des faux voisins [117], on calcule le rapport des distances dans les espaces de dimension d et $(d+1)$ comme suit :

$$a(i, d) = \frac{\|y_i(d+1) - y_{n(i,d)}(d+1)\|}{\|y_i(d) - y_{n(i,d)}(d)\|}, \quad i = 1, 2, \dots, N - d\tau \text{ et } 1 \leq n(i, d) \leq N - d\tau$$

où $\|\bullet\|$ est la norme du sup c'est-à-dire $\|y_k(m) - y_l(m)\| = \max_{0 \leq j \leq m-1} |x_{k+j\tau} - x_{l+j\tau}|$; $n(i, d)$ est un nombre entier tel que $y_{n(i,d)}(d)$ est le voisin le plus proche de $y_i(d)$, dans l'espace de dimension d reconstruit, au sens de la norme $\|\bullet\|$. Si $y_{n(i,d)}(d)$ est égal à $y_i(d)$, le deuxième voisin le plus proche est considéré.

Si d est la dimension de l'espace reconstruit grâce aux théorèmes de plongement [108, 109], deux points voisins dans cet espace et qui le restent lorsque la dimension de celui-ci est incrémenté de 1 sont qualifiés de vrais voisins sinon, ils sont appelés faux voisins.

Pour réduire l'effet des problèmes rencontrés lors de l'utilisation de la méthode des faux voisins (réglage des seuils), la moyenne temporelle de $a(i, d)$, notée $E(d)$ et ses variations relatives, après incrémentation de la valeur de d , sont observées :

$$E(d) = \frac{1}{N - d\tau} \sum_{i=1}^{N-d\tau} a(i, d), \quad E_1(d) = E(d+1)/E(d)$$

En augmentant la dimension d au-delà d'un certain seuil d_0 , les valeurs de $E_1(d)$ varient peu. Donc, d_0 peut être considérée comme la dimension minimale de l'espace d'états reconstruit.

À titre d'exemple, la reconstruction de l'espace d'états pour un oscillateur de type Colpitts (système d'ordre 3) [119] est décrite Fig. 2.3. Un extrait de la série temporelle en sortie de l'oscillateur Colpitts est présenté Fig. 2.3 (a). Pour définir le retard τ utilisé pour construire le vecteur correspondant à un point sur la trajectoire dans l'espace d'états, l'information mutuelle, en fonction des valeurs de τ , est tracée. Comme on peut le constater (Fig. 2.3 (b)), le premier minimum est atteint pour $\tau = 4$. Cette valeur sera considérée comme le premier élément de la reconstruction de l'espace d'états. Afin de déterminer la dimension de celui-ci, la méthode de Cao a été exploitée. Fig. 2.3 (c) montre qu'en augmentant la dimension au delà de 3, $E_1(d)$ ne change pas sensiblement et que donc $d=3$ est un bon choix pour l'espace d'états. L'espace d'états de l'oscillateur Colpitts peut maintenant être reconstruit par la méthode de Takens (Fig. 2.3 (d)).

2.3.6.2 Interdépendances entre systèmes dynamiques

Les interdépendances non linéaires S et H ont été présentées par Arnhold dans [120] comme des mesures de synchronisation généralisée entre deux séries temporelles. Elles rejoignent des tentatives précédentes pour détecter la synchronisation généralisée [78] [121] sur des données biologiques [122, 123]. Contrairement aux mesures présentées dans la section précédente, les interdépendances non linéaires S et H ne présupposent pas un rapport fonctionnel strict entre les dynamiques des deux systèmes.

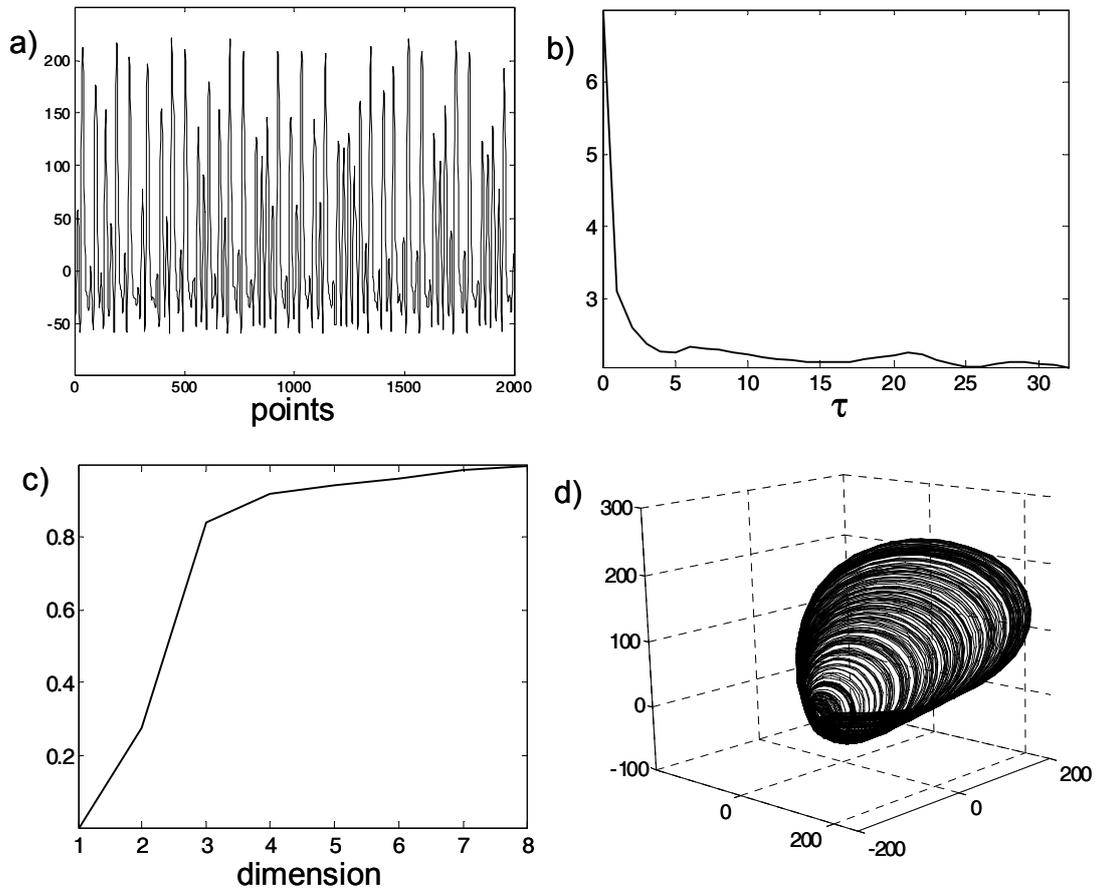


Fig. 2.3. Reconstruction de l'espace d'états de l'oscillateur de Colpitts. (a) Un tracé de la série temporelle en sortie de l'oscillateur. (b) L'information mutuelle pour différentes valeurs de τ . (c) Évolution de la courbe $E_1(d)$. (d) Espace reconstruit avec la dimension « optimale ».

Soient $\{x_n, n=1,2,\dots,N\}$ et $\{y_n, n=1,2,\dots,N\}$ deux séries temporelles données observées simultanément et correspondant, par exemple, à des sorties observables du même système complexe. La dynamique interne du système n'est généralement pas connue. En particulier, ceci est vrai pour les systèmes déterministes ou stochastiques. Les systèmes qui nous intéressent sont vraisemblablement stochastiques, ou du moins il est peu probable que la dynamique de leur attracteur soit si basse que les méthodes développées spécifiquement pour les systèmes déterministes chaotiques soient applicables.

La reconstruction de l'espace de phase comme décrit précédemment conduit à l'élaboration des vecteurs d'états reconstruits de la forme $X_n = (x_n, x_{n-\tau}, \dots, x_{n-(d-1)\tau})^t$ et

$Y_n = (y_n, y_{n-\tau}, \dots, y_{n-(d-1)\tau})^t$. La collection de tous ces vecteurs conduit à deux matrices $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ et $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$. Notons par $r_{n,j}$ et $s_{n,j}$, $j = 1, \dots, k$ respectivement les indices temporels des k plus proches voisins de X_n et Y_n . Pour définir ces indices, la norme Euclidienne est utilisée comme critère de voisinage, et on procède de la façon suivante : le premier plus proche voisin est situé à une distance $d(X)_n^1 \triangleq \|X_n - X_{r_{n,1}}\| = \min_q \|X_n - X_q\|$, le second est à $d(X)_n^2 \triangleq \|X_n - X_{r_{n,2}}\| = \min_{q \neq r_{n,1}} \|X_n - X_q\|$ et ainsi de suite. Une procédure analogue est menée avec les Y_n . La moyenne des distances au carré entre X_n et ses k plus proches voisins est donnée par :

$$R_n^{(k)}(X) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \|X_n - X_{r_{n,j}}\|^2$$

La moyenne conditionnelle (par rapport aux indices temporels des k voisins de Y_n) des carrés des distances est :

$$R_n^{(k)}(X|Y) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \|X_n - X_{s_{n,j}}\|^2$$

De façon similaire, les distances ci-dessus peuvent être définies pour Y_n :

$$R_n^{(k)}(Y) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \|Y_n - Y_{s_{n,j}}\|^2$$

et

$$R_n^{(k)}(Y|X) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \|Y_n - Y_{r_{n,j}}\|^2$$

Si le rayon au carré moyen, du nuage de point correspondant à X , est noté $R(X)$ alors pour $k \ll N$: $R_n^{(k)}(X)/R(X) \sim (k/N)^{2/d} \ll 1$. Ceci reste vrai pour $R_n^{(k)}(X|Y)$ si X et Y sont parfaitement corrélés c'est-à-dire s'il y a une transformation lisse qui les lie ($X_n = \psi(Y_n)$). D'autre part, si X et Y sont complètement indépendants, alors $R_n^{(k)}(X|Y) \gg R_n^{(k)}(X)$. Nous

pouvons définir des mesures locales et globales d'interdépendance $S_n^{(k)}(X|Y)$ et $S^{(k)}(X|Y)$ comme suit :

$$S_n^{(k)}(X|Y) \equiv \frac{R_n^{(k)}(X)}{R_n^{(k)}(X|Y)}$$

et

$$S^{(k)}(X|Y) \equiv \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N S_n^{(k)}(X|Y) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{R_n^{(k)}(X)}{R_n^{(k)}(X|Y)} \quad (2.4)$$

Étant donné que $R_n^{(k)}(X|Y) \geq R_n^{(k)}(X)$ par construction, nous aurons $0 < S^{(k)}(X|Y) \leq 1$.

Lorsque $S^{(k)}(X|Y) \approx (k/N)^{2/d} \ll 1$, X et Y sont indépendants et $S^{(k)}(X|Y) \gg (k/N)^{2/d}$, nous indique que X dépend de Y , cette dépendance devient maximale quand $S^{(k)}(X|Y) \rightarrow 1$.

La seconde mesure d'interdépendance est définie en introduisant une modification à partir de l'Eq. (2.4). Dans cette équation, nous comparons essentiellement le carré moyen des distances conditionnelles par rapport à Y avec le carré moyen des distances des k voisins les plus proches. Au lieu de prendre cette dernière quantité, c'est la moyenne des carrés des distance de X_n aux autres points de l'espace reconstruit qui est considérée :

$$R_n(X) = (N-1)^{-1} \sum_{j \neq n} \|X_n - X_j\|^2$$

Par analogie avec d'Eq. (2.4), compte tenu du fait que pour les signaux ergodiques la moyenne géométrique est souvent plus robuste et plus facile à interpréter que la moyenne arithmétique, la mesure suivante est définie :

$$H^{(k)}(X|Y) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln \frac{R_n(X)}{R_n^{(k)}(X|Y)}$$

$H^{(k)}(X|Y)$ est très proche de zéro si X et Y sont complètement indépendants, et est positive si les voisinages dans Y correspondent à des voisinages dans X pour les mêmes indices temporels. Elle serait négative si les points proches dans Y correspondent principalement aux points éloignés en X , ceci est très peu probable mais non impossible. Par conséquent

$H^{(k)}(X|Y)$ est une mesure asymétrique qui peut indiquer si X et Y sont indépendants, mais sans toutefois le prouver. $H^{(k)}(X|Y)$ semble être plus sensible aux dépendances faibles, ce qui pourrait la rendre utile dans certaines applications. $H^{(k)}(X|Y)$ est plus robuste face au bruit et est plus facile à interpréter que S mais cependant, elle n'est pas normalisée. Par conséquent une nouvelle mesure N est proposée en employant la moyenne arithmétique :

$$N^{(k)}(X|Y) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{R_n(X) - R_n^{(k)}(X|Y)}{R_n(X)}$$

Elle est normalisée, mais comme pour $H^{(k)}(X|Y)$, elle peut être légèrement négative. En principe elle est également plus robuste que S .

X et Y ne jouent pas des rôles identiques dans les expressions de ces différentes mesures de relation. En générale, $S(Y|X)$, $H(Y|X)$, $N(Y|X)$ et $S(X|Y)$, $H(X|Y)$, $N(X|Y)$ ne sont pas égales deux à deux. Cette asymétrie des mesures S , H et N est leur principal avantage par rapport aux autres mesures non linéaires de relation telles que l'information mutuelle ou les méthodes de synchronisation de phase. Elles peuvent correctement refléter la directionnalité d'une relation de type pilote-répondant [120, 124, 125]. Cependant, il faut nuancer cette idée car plusieurs études ont également montré que l'asymétrie peut également être due aux différences de propriétés dynamiques des séries temporelles différentes [120, 124, 126, 127].

2.3.6.3 La vraisemblance de synchronisation (SL) [127]

Un ensemble de M enregistrements simultanés $x_{k,i}$ sont considérés, où k représente le numéro de l'enregistrement (série temporelle), $k = 1, \dots, M$, et i correspond au numéro de l'échantillon (indice de temps), $i = 1, \dots, N$. Pour chaque série k , le vecteur d'état $X_{k,i}$ est reconstruit :

$$X_{k,i} = (x_{k,i}, x_{k,i+\tau}, x_{k,i+2\tau}, \dots, x_{k,i+(d-1)\tau})$$

où τ est le retard et d la dimension du plongement.

A chaque instant i est associée une probabilité $P_{k,i}^\varepsilon$ pour que les vecteurs $X_{k,j}$ soient à une distance inférieure à ε de $X_{k,i}$ donnée par :

$$P_{k,i}^\varepsilon = \frac{1}{2(\omega_2 - \omega_1 - 1)} \sum_{\substack{\omega_1 < |i-j| < \omega_2 \\ 1 \leq j \leq N}} U(\varepsilon - \|X_{k,i} - X_{k,j}\|) \quad (2.5)$$

soient $\|\cdot\|$ la norme euclidienne et U l'échelon unité : $U(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $U(x) = 1$ si $x > 0$. Ici ω_1 et ω_2 sont deux bornes ; ω_1 est la correction de Theiler pour réduire les effets de l'autocorrélation de la série et devrait être de l'ordre de la durée de l'autocorrélation [128]; ω_2 est une fenêtre qui permet d'affiner la résolution temporelle de la mesure de synchronisation et est choisie de sorte que $\omega_1 \ll \omega_2 \ll N$ (en prenant la moyenne sur les i de $P_{k,i}^\varepsilon$ on aboutit à l'intégrale de corrélation définie dans [129]).

A une probabilité arbitraire de référence $P_{ref} \ll 1$ donnée, est associée la distance critique $\varepsilon_{k,i}$ qui permet de réaliser : $P_{k,i}^{\varepsilon_{k,i}} = P_{ref}$. Pour cette distance et pour chaque paire d'instant (i, j), vérifiant la contrainte $\omega_1 < |i - j| < \omega_2$, le nombre de séries temporelles $H_{i,j}$ où les vecteurs d'états reconstruits $X_{k,i}$ et $X_{k,j}$ sont à une distance inférieure à $\varepsilon_{k,i}$ l'un de l'autre est donné par :

$$H_{i,j} = \sum_{k=1}^M U(\varepsilon_{k,i} - \|X_{k,i} - X_{k,j}\|)$$

Ce nombre est à valeurs dans $\{1, 2, \dots, M\}$ et reflète combien des signaux « plongés » se « ressemblent ». Une vraisemblance de synchronisation $S_{k,i,j}$ pour chaque série temporelle k et pour chaque paire (i, j) est définie de la manière suivante :

$$S_{k,i,j} = \begin{cases} \frac{H_{i,j} - 1}{M - 1} & \text{si } \|X_{k,i} - X_{k,j}\| < \varepsilon_{k,i} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En moyennant sur les instants j , la vraisemblance de synchronisation $S_{k,i}$ est obtenue :

$$S_{k,i} = \frac{1}{2(\omega_2 - \omega_1 - 1)} \sum_{\substack{\omega_1 < |i-j| < \omega_2 \\ 1 \leq j \leq N}} S_{k,i,j}$$

La vraisemblance de synchronisation $S_{k,i}$ est une mesure qui indique à quel degré la série temporelle k au temps i est synchronisée avec les $M-1$ autres séries. La vraisemblance de synchronisation prend des valeurs entre P_{ref} et 1. $S_{k,i} = P_{ref}$ correspond au cas où les M séries temporelles sont non corrélées et $S_{k,i} = 1$ correspond à la synchronisation maximale de toutes les séries temporelles. On peut attribuer une valeur faible arbitraire à P_{ref} qui ne dépend ni des propriétés de la série temporelle ni des paramètres de plongement. Des versions modifiées de $S_{k,i}$ peuvent être obtenues en moyennant sur le temps i et/ou l'indice de série k , selon que la relation recherchée est indépendante du temps et/ou de la série retenue. Le concept de la vraisemblance de synchronisation décrit ici est étroitement lié à la définition de l'information mutuelle basée sur l'intégrale de corrélation introduite dans [129]. Dans le cas spécial de deux séries temporelles, cette information mutuelle dépendant du temps, notée M_i , est liée à la vraisemblance de synchronisation par :

$$M_i = \log_2 \frac{S_{k,i}}{P_{ref}}$$

Une différence entre M_i et $S_{k,i}$ est que cette dernière est normalisée, contrairement à la première. De plus, $S_{k,i}$ présente l'avantage d'être exploitable pour des observations recueillies sur plus de deux canaux.

La vraisemblance de synchronisation a été utilisée pour mesurer la relation entre signaux cérébraux afin de caractériser la connectivité fonctionnelle de différentes structures. On peut citer quelques applications de cette méthode pour l'étude de la synchronisation de l'EEG de repos dans le cas de la maladie d'Alzheimer [130], la recherche de synchronisation dans les épilepsies du lobe frontal pendant les crises [131], la détection des crises d'épilepsies sur l'EEG néonatal [132] et l'interdépendance entre la variabilité de la fréquence cardiaque et l'EEG du sommeil [133].

2.4 Discussion

Un aperçu des principales méthodes de mesure de couplage statistique entre systèmes a été présenté dans ce chapitre. Ces méthodes comprennent des approches linéaires et d'autres non

linéaires. D'une façon générale ces méthodes sont regroupées en trois classes : (i) les méthodes de régression linéaire et non linéaire; (ii) les méthodes de synchronisation de phase; (iii) les méthodes de synchronisation généralisée.

Ces méthodes sont mises au point pour être fonctionnelles sous certaines hypothèses à la fois sur les signaux et sur la nature de la relation qui lierait les systèmes ou sous-systèmes qui en sont à l'origine. Les performances de ces méthodes, pour « découvrir » d'éventuelles dépendances, sont donc indirectement tributaires du type de relation. Il est donc nécessaire d'évaluer ces méthodes dans des contextes variables par le biais de simulations contrôlées pour appréhender leur performance et leur sensibilité vis-à-vis des hypothèses de leur application. Ces évaluations quantitatives font l'objet du prochain chapitre.

Chapitre 3

Évaluation quantitative des méthodes d'estimation de couplage

3.1 Introduction

Ce chapitre présente les résultats issus de l'évaluation des méthodes de mesure de relation décrites dans le chapitre précédent.

En effet, l'interprétation des quantités fournies par les différents estimateurs est directement liée à leurs performances statistiques. Cependant, la comparaison quantitative de ces performances reste un problème difficile, principalement du fait du contexte applicatif dans lequel on ne dispose pas d'information *a priori* sur la nature de la relation. Ceci explique pourquoi peu d'études ont été rapportées sur l'évaluation des méthodes de mesure de relation. A notre connaissance, dans le domaine de l'analyse des signaux EEG ou MEG, seuls les travaux récemment décrits dans [30, 31] ont abordé ce problème, mais pour un nombre restreint de méthodes et surtout de manière qualitative. Les autres études [19, 32], utilisant les signaux réels comme unique base de comparaison, donnent difficilement lieu à des conclusions générales dans la mesure où les résultats obtenus sont très dépendants des données.

Aussi, nous avons souhaité aborder ce problème de la manière la plus large possible en proposant une méthodologie d'évaluation basée sur un ensemble de modèles de génération de

signaux couplés afin de couvrir la plupart des situations rencontrées : signaux stochastiques larges bandes et bandes étroites, signaux déterministes non linéaires, signaux EEG réalistes générés par un modèle de populations neuronales neurophysiologiquement pertinent [134, 135].

Les modèles utilisés dans ce chapitre sont, par nature, différents les uns des autres. Ils possèdent néanmoins un point commun en intégrant tous un paramètre permettant de « contrôler » le degré de couplage entre les signaux générés. Ainsi, la variation de la valeur de ce paramètre (d'une valeur nulle à une valeur maximale qui est fonction du modèle) permet de balayer un ensemble de situations allant de l'indépendance des signaux jusqu'à la dépendance complète (l'un des signaux est expliqué par la connaissance de l'autre signal).

Par ailleurs, la comparaison quantitative des performances des méthodes étudiées s'appuie sur trois critères statistiques. Les deux premiers, classiques, sont le biais ou erreur quadratique moyenne (EQM) sur l'hypothèse de d'indépendance (c'est-à-dire pour un degré de couplage nul dans les modèles) et la variance moyenne (VM) pour toutes les valeur du degré de couplage. Le troisième a été introduit afin de tester la sensibilité de chaque estimateur par rapport au degré de couplage. Il correspond à la pente de la courbe représentative de la quantité fournie par chaque estimateur en fonction des valeurs de couplage, normalisée par l'écart-type afin de tenir compte de la variance.

Dans ce chapitre, les méthodes évaluées sont désignées par des abréviations particulières données Tab. 3.1.

3.2 Modèles de simulation proposés

Cette section présente les modèles de relation utilisés pour évaluer les méthodes listées Tab. 3.1. Ces modèles peuvent être regroupés en deux catégories en fonction des considérations faites sur la nature de la relation.

D'une manière générale, les hypothèses physiologiques conduisent à considérer deux populations neuronales P_i et P_j appartenant à deux structures cérébrales distinctes et dont les activités électriques, enregistrées respectivement par les capteurs S_i et S_j , se reflètent dans

les signaux $x_i[t]$ et $x_j[t]$. Au sein de chacune de ces populations, on peut distinguer deux sous-populations $P_i = P_{i1} \cup P_{i2}$ et $P_j = P_{j1} \cup P_{j2}$. Les sous-populations P_{i1} et P_{j1} sont reliées par des fibres neuronales (les axones des cellules pyramidales, cf. Martin [136]). Leurs activités peuvent se synchroniser, notamment durant les crises, avec un retard τ généralement faible (Nunez et Cuttillo [137]). Les sous-populations P_{i2} et P_{j2} participent, quant à elles, à la génération de l'activité de fond sans relation statistique avec l'activité de P_{i1} et P_{j1} . Ces hypothèses nous ont conduit à introduire trois modèles M_1 , M_2 et M_5 . Les deux premiers (M_1 et M_2 , §3.2.1) sont des modèles simples de signaux stochastiques dans lesquels le degré et la nature de la corrélation (en amplitude et phase, en phase seulement et en amplitude seulement) sont contrôlés. Le troisième (M_5) est argumenté physiologiquement. Il représente deux populations de neurones couplées. L'activité de chaque population dépend de ses afférences spécifiques (en provenant de l'autre population) et de ses afférences non spécifiques (représentées par un bruit gaussien indépendant d'une population à l'autre).

Groupe de méthodes	Nom complet de méthode	Abréviation
Régression	Coefficient de corrélation linéaire	R²
	Fonction de cohérence	CF
	Coefficient régression non linéaire	h²
Synchronisation de phase	L'entropie appliquée à la phase estimée par la transformée de Hilbert	HE
	L'entropie appliquée à la phase estimée par la transformée en ondelettes	WE
	La cohérence de phase moyennée appliquée à la phase estimée par la transformée de Hilbert	HR
	La cohérence de phase moyennée appliquée à la phase estimée par la transformée en ondelettes	WR
Synchronisation généralisée	Les indices de similarité	S, H, N
	La vraisemblance de synchronisation	SL

Tab. 3.1. Méthodes de mesure de relation évaluées sur différents modèles, classées par groupes.

Par ailleurs, plusieurs travaux ont décrit la nature chaotique des activités électriques cérébrales pendant les crises d'épilepsie [138-145]. Afin d'évaluer le comportement des méthodes de mesure de relation dans un tel contexte, nous avons également introduit deux modèles (M_3 et M_4) de systèmes dynamiques non linéaires n'ayant pas de fondement physiologique. Sous certaines conditions liées à leur paramétrage, ces deux systèmes qui génèrent des signaux déterministes, ont un comportement chaotique (on parle de « chaos déterministe »). Ceci signifie que, malgré la connaissance des équations gouvernant ces systèmes, leur évolution, très sensible aux conditions initiales, est imprédictible à long terme.

Les modèles de relation utilisés dans cette étude sont résumés dans le Tab. 3.2.

Modèles de signaux stochastiques couplés	M_1	Génération de signaux large-bande
	M_2	Génération de signaux bande-étroite (relation de phase, relation d'amplitude)
Systèmes dynamiques non linéaires couplés	M_3	Systèmes de Hénon couplés. Génération de signaux déterministes
	M_4	Systèmes de Rössler couplés. Génération de signaux déterministes
Populations neuronales couplées	M_5	Génération de signaux EEG (activité de fond et activité épileptique)

Tab. 3.2. Modèles de simulation.

3.2.1 Les modèles des processus stochastiques

Le premier modèle (M_1) s'écrit de la manière suivante [146] :

$$x_1[n] = (1 - C[n]) B_1[n] + C[n] B_3[n]$$

$$x_2[n] = (1 - C[n]) B_2[n] + C[n] B_3[n]$$

où B_1 , B_2 , et B_3 sont trois bruits indépendants centrés, stationnaires au sens large, et de même fonction d'autocorrélation. Le paramètre $C[n]$, compris entre 0 et 1, permet de couvrir

toutes les situations depuis l'indépendance des signaux large bande x_1 et x_2 jusqu'à la dépendance complète ($x_1 = x_2$).

Le second modèle (M_2) est introduit pour étudier le cas où deux signaux x_1 et x_2 à bande étroite (autour d'une fréquence centrale f_0) sont liés par une relation de phase uniquement, ou une relation d'amplitude uniquement.

Dans ce modèle, les signaux x_1 et x_2 sont générés en deux étapes.

Tout d'abord, comme illustré Fig. 3.1, un signal S_1 est produit à partir de deux bruits blancs gaussiens filtrés passe-bas b_{f_1} et b_{f_2} :

$$S_1[n] = \cos(2\pi f_0 n) \cdot b_{f_1}[n] - \sin(2\pi f_0 n) \cdot b_{f_2}[n] = A_1[n] \cdot \cos(2\pi f_0 n + \varphi_1[n])$$

où

$$A_1[n] = \sqrt{b_{f_1}^2[n] + b_{f_2}^2[n]} \quad \text{et} \quad \varphi_1[n] = \arctan\left(\frac{b_{f_2}[n]}{b_{f_1}[n]}\right).$$

Un signal S_2 est obtenu de la même manière que S_1 à partir de deux bruits blancs gaussiens filtrés passe-bas b_{f_3} et b_{f_4} , indépendants de b_{f_1} et b_{f_2} :

$$S_2[n] = A_2[n] \cdot \cos(2\pi f_0 n + \varphi_2[n]) \quad \text{où} \quad A_2[n] = \sqrt{b_{f_3}^2[n] + b_{f_4}^2[n]} \quad \text{et} \quad \varphi_2[n] = \arctan\left(\frac{b_{f_4}[n]}{b_{f_3}[n]}\right).$$

Ensuite, on choisit $x_1 = S_1$ et on génère le signal x_2 à partir de S_2 et de x_1 .

Dans le cas où x_1 et x_2 sont liés par une relation de phase, x_2 est donné par :

$$RP: \quad x_2[n] = A_2[n] \cdot \cos(2\pi f_0 n + C[n]\varphi_2[n] + (1-C[n])\varphi_1[n]) \quad (3.1)$$

Dans le cas où x_1 et x_2 sont liés par une relation d'amplitude, x_2 est donné par :

$$RA: \quad x_2[n] = (C[n]A_2[n] + (1-C[n])A_1[n]) \cdot \cos(2\pi f_0 n + \varphi_2[n]) \quad (3.2)$$

Comme dans le modèle précédent, le signal x_2 dans l'Eq. (3.1) est en relation de phase avec x_1 selon le degré de relation $C[n]$, $0 \leq C[n] \leq 1$; pour $C[n] = 0$, les deux signaux ont des

phases indépendantes et pour $C[n] = 1$, ils ont des phases identiques. De façon similaire, dans l'Eq. (3.2), ce facteur permet de régler le degré de relation en amplitude des signaux x_1 et x_2 .

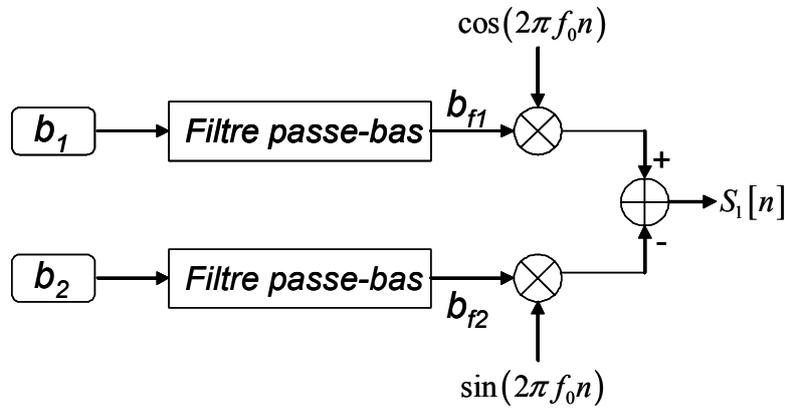


Fig. 3.1. Obtention du signal bande étroite $S_1[n]$ dans le modèle M_2 . b_1 et b_2 sont des bruits blancs gaussiens. Leur filtrage passe-bas permet d'obtenir respectivement b_{f1} et b_{f2} .

3.2.2 Modèles des signaux chaotiques

3.2.2.1 Systèmes de Hénon couplés

Le système de Hénon a été proposé en 1976 (mathématicien Michel Hénon, [147]). Il est décrit par deux équations différentielles ordinaires non linéaires :

$$\begin{aligned} x_1[n+1] &= a_x - x_1^2[n] + b_x x_2[n] \\ x_2[n+1] &= x_1[n] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dans cette section, nous utilisons deux systèmes de Hénon couplés de manière unidirectionnelle (Modèle M_3). Le premier système (ou pilote) est décrit par l'Eq. (3.3). Le second système (ou réponse) s'écrit de la manière suivante [121, 124, 125, 127, 148] :

$$\begin{aligned} y_1[n+1] &= a_y - (C x_1[n] y_1[n] + (1-C) y_1^2[n]) + b_y y_2[n] \\ y_2[n+1] &= y_1[n] \end{aligned}$$

où C est le degré de couplage. Les deux signaux sur lesquels sont évaluées les méthodes de mesure de relation sont x_1 et y_1 .

Pour $a_x = a_y > 1.2$, il a été montré que le comportement de ces 2 systèmes est chaotique [147]. Dans ce travail, nous donc avons fixé $a_x = a_y = 1.4$.

Pour les valeurs de b_x et b_y , nous nous sommes basés sur l'étude décrite dans [124] dont l'objectif était d'étudier la relation des systèmes pilote et réponse.

Pour $b_x = b_y = 0.3$, on obtient deux systèmes chaotiques identiques (modèle M_{3a}). Afin d'étudier également le cas de deux systèmes chaotiques non identiques (modèle M_{3b}), nous avons choisi $b_x = 0.3$ et $b_y = 0.1$.

Par ailleurs, l'influence du paramètre de couplage C dans le modèle de systèmes de Hénon couplés est illustrée Fig. 3.2 qui donne la trajectoire de la réponse (y_2 par rapport à y_1) ainsi que tracé de y_1 par rapport à x_1 . On note que ces trajectoires sont identiques pour des valeurs de couplage $C = 0$ et $C \geq 0.8$ (cadrans supérieurs). On remarque également que pour $C = 0$, les deux systèmes sont indépendants et que pour $C \geq 0.8$ les signaux x_1 et y_1 sont synchronisés (cadrans inférieurs).

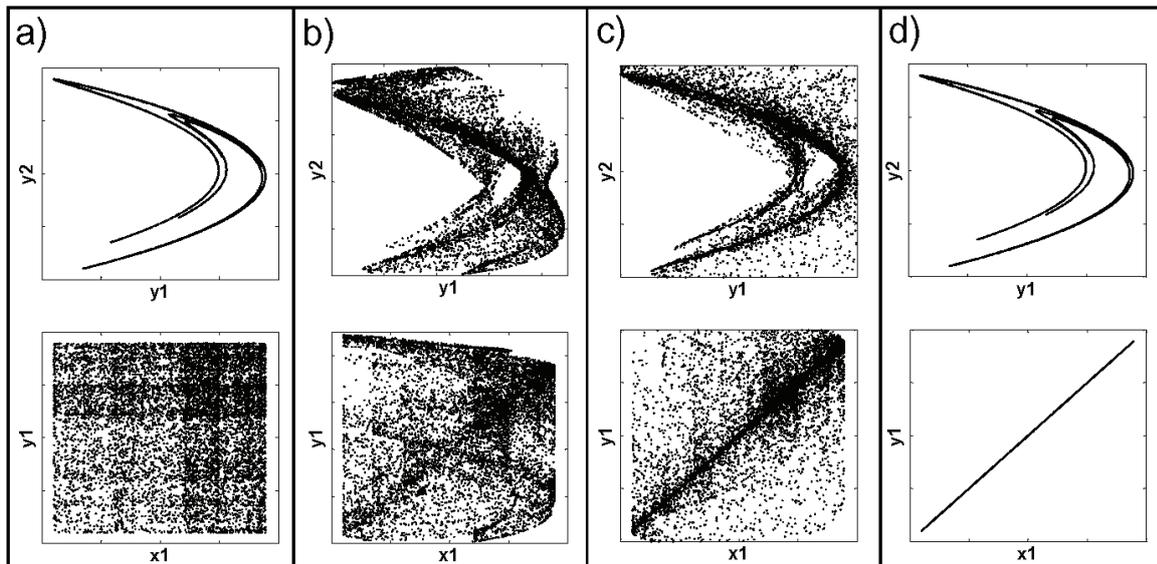


Fig. 3.2. Systèmes de Hénon couplés, en haut l'attracteur du système de réponse et en bas le nuage de points entre deux systèmes couplés qui montre la relation existante entre ces deux systèmes : (a) $C = 0$, (b) $C = 0.6$, (c) $C = 0.7$, (d) $C = 0.8$.

Enfin, dans les deux modèles mentionnés ci-dessus (M_{3a} et M_{3b}), nous avons ajouté des bruits de mesure afin d'examiner l'influence du rapport de signal/bruit (S/B, défini comme le rapport de l'écart-type du signal sur l'écart-type du bruit) sur la robustesse des estimateurs de relation.

3.2.2.2 Systèmes de Rössler couplés

Un second modèle basé sur deux systèmes dynamiques non linéaires couplés a été introduit afin d'étudier le comportement des méthodes de mesure de relation sur des signaux issus de systèmes chaotiques d'ordre plus élevé que celui du système de Hénon. Ce modèle (modèle M_4) est construit à partir du couplage unidirectionnel de deux systèmes de Rössler [75, 76, 149-151].

Dans ce modèle, la trajectoire du pilote est décrite par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -\omega_x x_2 - x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \omega_x x_1 + 0.15x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= 0.2 + x_3(x_1 - 10)\end{aligned}$$

Celle de la réponse est donnée par :

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= -\omega_y y_2 - y_3 + C(x_1 - y_1) \\ \frac{dy_2}{dt} &= \omega_y y_1 + 0.15y_2 \\ \frac{dy_3}{dt} &= 0.2 + y_3(y_1 - 10)\end{aligned}$$

où C désigne le degré de couplage. Comme dans le modèle précédant, les deux signaux sur lesquels sont évaluées les méthodes de mesure de relation sont x_1 et y_1 .

Conformément à l'étude décrite dans [76] qui utilisait ce modèle dans le même contexte, une différence mineure entre les deux systèmes pilote et réponse a été introduite en prenant deux valeurs différentes pour les paramètres de fréquence naturelle $\omega_x = 0.95$ et $\omega_y = 1.05$. De plus, comme dans les modèles présentés précédemment, le degré de couplage C varie entre de 0 à 1. La Fig. 3.3 donne une projection de la trajectoire de la réponse (dans le plan (y_2, y_3) ,

y_1)) ainsi que trace de y_1 par rapport à x_1 pour des valeurs croissantes de C . Sur cette figure, on observe l'évolution des systèmes de Rössler couplés depuis leur indépendance ($C = 0$) jusqu'à leur synchronisation, bien que cette dernière ne soit jamais totale du fait de la disparité des paramètres ω_x et ω_y .

3.2.3 Signaux EEG simulés

En complément des modèles génériques qui ne reflètent pas complètement la nature du signal EEG, nous avons utilisé, dans ce travail d'évaluation des méthodes de mesure de relation, des signaux EEG générés à partir d'un modèle réaliste de l'activité électrique de populations neuronales couplées (modèle M_5).

Cette classe de modèles macroscopiques a été proposée depuis le début des années 70. Des progrès substantiels ont été apportés par Freeman [152, 153] et ses collègues (Eeckman et al. [154]) dans leur étude et modélisation du système olfactif. A partir d'une longue expérience à partir des travaux utilisant des données réelles, ils ont montré que le système olfactif central composé de trois parties (le bulbe olfactif, le noyau antérieur et le cortex prépyriforme) peut être modélisé comme un système d'ensembles interconnectés de neurones excitateurs et inhibiteurs. La dynamique de chaque ensemble est décrite par une équation différentielle ordinaire du second ordre. Freeman souligne que la simplicité et la généralité rendent ce modèle utilisable pour d'autres systèmes neuronaux. Parallèlement, des idées similaires ont été développées par le groupe de Lopes Da Silva et al. [155] et ont conduit au développement d'un modèle macroscopique capable de représenter le rythme alpha de l'EEG. Les travaux qui ont suivi se sont intéressés à la stabilité de ce modèle (Zetterberg et al. [156]) ou à son adaptation à des systèmes spécifiques telle que la région CA1 de l'hippocampe (Leung [157]). Plus récemment, en utilisant le même type de modèle, Jansen et al. [158, 159] ont étudié la génération de l'EEG spontané et des potentiels évoqués dans le cortex visuel. Au LTSI, cette même approche a été suivie dans le cadre de l'interprétation des signaux EEG de profondeur. Elle a conduit au développement de plusieurs modèles de populations neuronales (éventuellement couplées) capables de générer des signaux EEG épileptiformes réalistes à partir de données sur l'organisation cellulaire des

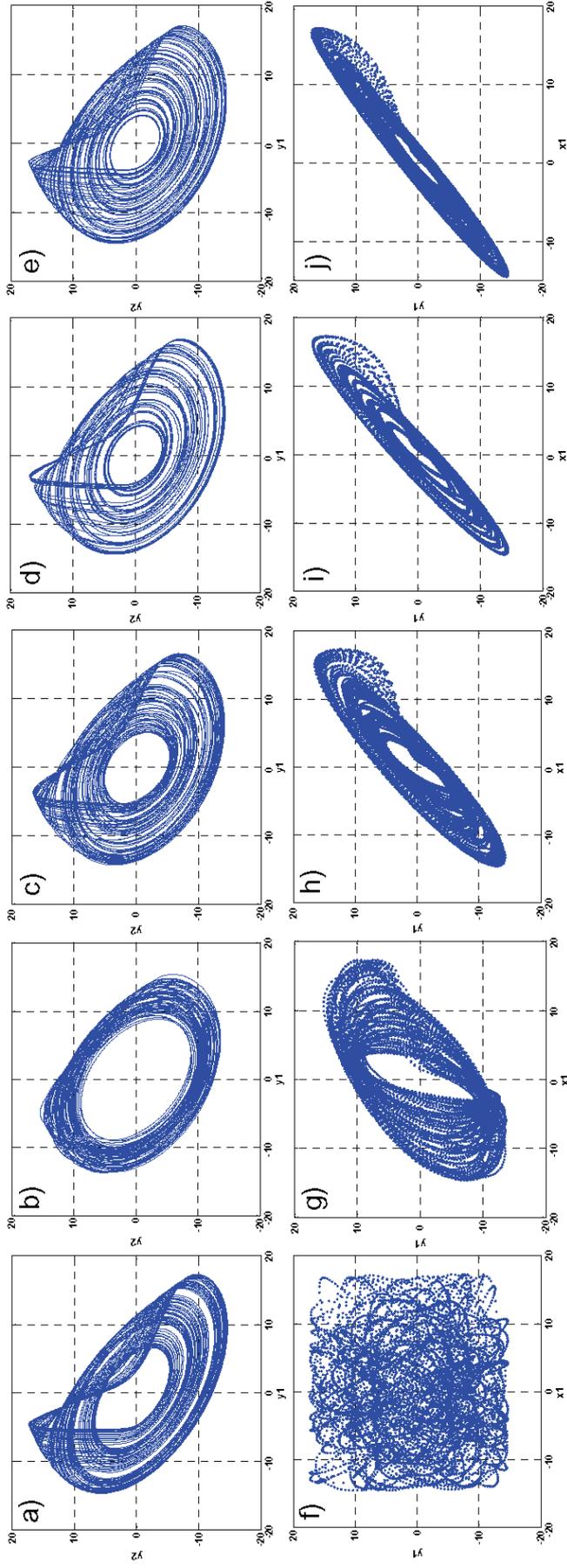


Fig. 3.3. Systèmes de Rössler couplés. En haut : trajectoire de la réponse et en bas le nuage de points entre deux systèmes couplés qui montre la relation existante entre ces deux système : (a) et (f) $C=0$, (b) et (g) $C=0.4$, (c) et (h) $C=0.6$, (d) et (i) $C=0.8$, (e) et (j) $C=1.0$.

structures cérébrales représentées et à partir d'hypothèses macroscopiques sur les mécanismes liés à l'épileptogénèse [53, 160, 161]. Par ailleurs, ce modèle d'EEG a déjà été utilisé pour interpréter les mesures d'interdépendance entre signaux neurophysiologiques [27] par la méthode de régression non linéaire. Il est présenté ici de manière succincte.

3.2.3.1 Description du modèle d'EEG

a) Modèle de population simple

Le modèle représente l'activité électrique moyenne d'une population de cellules neuronales composée de sous-ensembles de neurones excitateurs et inhibiteurs. L'idée principale de ce modèle est que le signal EEG enregistré par électrode intracérébrale ne résulte pas de l'activité d'un petit groupe de neurones, mais plutôt de l'activité moyenne de larges assemblées de neurones principaux interconnectés (les cellules pyramidales) interagissant avec les interneurones locaux (soit inhibiteurs, soit excitateurs). Il produit donc un signal d'EEG (principalement reflet de la sommation des potentiels post-synaptiques des cellules pyramidales activées).

Dans cette étude, nous avons considéré un modèle simple correspondant à un groupe de neurones, formé de deux sous-ensembles : le premier est composé de cellules principales (cellules pyramidales) qui reçoivent un feedback (soit excitateur, soit inhibiteur) du second sous-ensemble composé des interneurones locaux (les cellules non pyramidales, les cellules stellaires, ...). L'influence du voisinage et celle des populations plus distantes sont modélisées par une entrée excitatrice qui représente globalement la densité moyenne des potentiels d'action afférents. Le premier sous-ensemble est caractérisé par : (i) deux fonctions de transfert linéaires, h_e et h_i , qui transforment l'information pré-synaptique (densité moyenne des trains de potentiels d'action) en une information post-synaptique (potentiel membranaire post-synaptique excitateur – PPSE - ou inhibiteur – PPSI -) et (ii) par une fonction non linéaire statique qui relie le potentiel membranaire moyen d'un sous-ensemble à la densité moyenne des potentiels d'action générés par les neurones. Le second sous-ensemble est modélisé de manière similaire, exceptée qu'une seule fonction de transfert est nécessaire puisque l'entrée des interneurones est uniquement excitatrice. Le modèle de population simple est illustré sur Fig. 3.4 (rectangle en trait plein). L'influence non spécifique du voisinage est représentée par le signal excitateur $p(t)$ (bruit gaussien non centré), correspondant à une densité moyenne de potentiels d'action afférents.

La réponse impulsionnelle des fonctions de transfert linéaires est donnée, dans le cas exciteur et dans le cas inhibiteur, respectivement, par :

$$\begin{aligned} h_e(t) &= U(t) A a t e^{-at} \\ h_i(t) &= U(t) B b t e^{-bt} \end{aligned}$$

où $U(t)$ désigne la fonction échelon. Les paramètres a et b sont liés à la constante de temps moyenne de la membrane et aux retards moyens distribués dans l'arbre dendritique. Les gains sont donnés par Aa^2 et Bb^2 respectivement. Les constantes de temps $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ ainsi que les gains des filtres sont donc étroitement liés à la sensibilité des synapses excitatrices et inhibitrices respectivement.

Les potentiels de membrane sont eux mêmes transformés en une densité moyenne d'impulsions par la fonction non linéaire,

$$S(v) = \frac{2e_0}{(1 + e^{r(v_0 - v)})}$$

où $2e_0$ est le taux maximal d'activation de neurones, v_0 le potentiel moyen post-synaptique correspondant à un taux de e_0 , et r est la raideur de la pente de la sigmoïde. Les nombres moyens de contacts synaptiques impliqués entre les cellules principales et les interneurones sont quantifiés par quatre constantes de connectivité C_1, \dots, C_4 .

Avec les variables indiquées Fig. 3.4, l'ensemble d'équations différentielles pour une population est donné par :

$$\begin{aligned} \dot{y}_0(t) &= y_3(t) \\ \dot{y}_1(t) &= A a S(y_1(t) - y_2(t)) - 2a y_3(t) - a^2 y_0(t) \\ \dot{y}_2(t) &= y_4(t) \\ \dot{y}_3(t) &= A a \{p(t) - C_2 S(C_1 y_0(t))\} - 2a y_4(t) - a^2 y_1(t) \\ \dot{y}_4(t) &= y_5(t) \\ \dot{y}_5(t) &= B b \{C_4 S(C_3 y_0(t))\} - 2b y_5(t) - b^2 y_2(t) \end{aligned} \tag{3.4}$$

où on n'a pas reporté l'indice de population i .

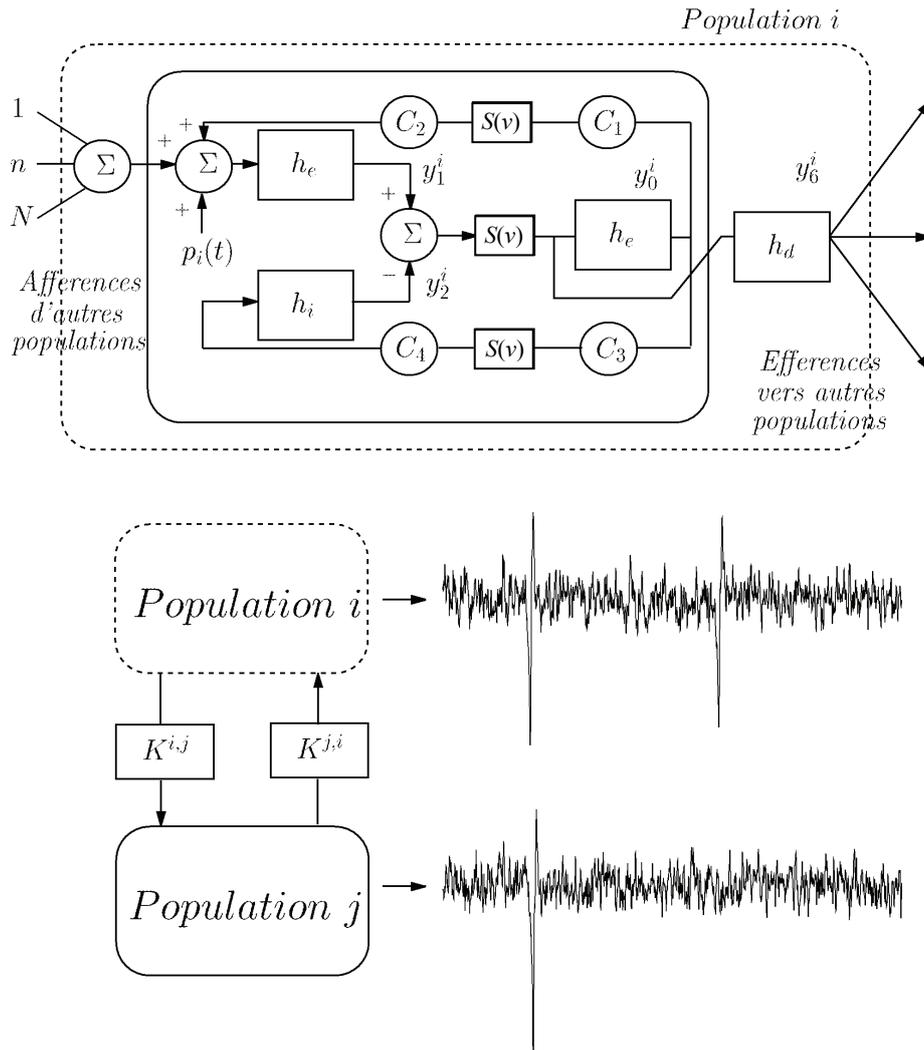


Fig. 3.4. Structure du modèle d'une population (en haut de la figure), et schéma général de la version étendue du modèle (en bas de la figure).

Le système d'équations (3.4) est de la forme $\dot{Y}(t) = F(Y(t), p(t)), Y(t) \in \mathfrak{R}^6$. La dynamique de l'EEG simulé correspond à celle d'un processus aléatoire parcourant l'espace des états autour d'un point fixe stable Y_0 solution de l'équation $F(Y_0, 0) = 0$.

Si le rapport excitation-inhibition est modifié ainsi que la valeur moyenne de l'entrée $p(t)$, le modèle peut présenter une dynamique anormale comme par exemple un cycle limite caractéristique de l'activité EEG pendant les crises [155, 156]. En fait, l'activité de fond pourrait être associée à celle d'un système avec un attracteur ponctuel tandis que la dynamique des pointes paroxystiques ou des pointes ondes peut être associée à un cycle limite perturbé par un bruit [162]. Le point de

bifurcation, ou la région (dans le domaine des paramètres du système) qui permet le passage d'un état à un autre, est donné dans le modèle par l'ensemble des paramètres lié au rapport excitation-inhibition de chaque population.

b) Modèle de populations couplées (modèle M₅)

Au niveau local, une excitabilité anormale liée au rapport excitation-inhibition peut être responsable des décharges de pointes inter-critiques ou critiques dans des crises partielles ou focales, alors qu'au niveau global, ou en réseau, des connexions anormalement renforcées entre les structures cérébrales sont étroitement impliquées dans l'épileptogenèse [2]. Cette idée est à la base de la version étendue du modèle qui consiste à intégrer plusieurs populations par des couplages multidirectionnels prenant en compte des retards associés aux connexions biologiques.

Partant du principe selon lequel les cellules pyramidales sont des neurones excitateurs qui projettent leurs axones vers les autres régions (Martin [136]), cette version étendue du modèle utilise la densité moyenne de potentiels d'action générée par le sous-ensemble de cellules principales d'une population donnée comme afférence excitatrice sur le sous-ensemble de cellules principales d'une autre population. Cependant, comme ces populations peuvent appartenir à des structures distinctes et distantes, de nouveaux paramètres ont été introduits pour prendre en compte des retards relatifs aux interconnexions. Ainsi, comme le montre Fig. 3.4 (rectangle en pointillés), une constante de connectivité K^{ij} est utilisée pour définir le degré de couplage entre une population i et une population j tandis qu'un filtre, de réponse impulsionnelle h_d est utilisé pour modéliser le retard lié à la connexion entre les populations i et j :

$$h_d(t) = U(t) A a_d t e^{-a_d t}$$

Ces nouvelles considérations permettent d'établir les équations différentielles ordinaires pour une population i dans le modèle à N populations :

$$\begin{aligned}
\dot{y}_0^i(t) &= y_3(t) \\
\dot{y}_1^i(t) &= AaS(y_1^i(t) - y_2^i(t)) - 2ay_3^i(t) - a^2y_0^i(t) \\
\dot{y}_2^i(t) &= y_4^i(t) \\
\dot{y}_3^i(t) &= Aa\left\{p^i(t) - C_2S(C_1y_0^i(t)) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N K^{j,i}y_6^j(t)\right\} - 2ay_4^i(t) - a^2y_1^i(t) \\
\dot{y}_4^i(t) &= y_5^i(t) \\
\dot{y}_5^i(t) &= Bb\left\{C_4S(C_3y_0^i(t))\right\} - 2by_5^i(t) - b^2y_2^i(t) \\
\dot{y}_6^i(t) &= y_7^i(t) \\
\dot{y}_7^i(t) &= Aa_dS(y_1^i(t) - y_2^i(t)) - 2a_dy_7^i(t) - a_d^2y_6^i(t)
\end{aligned}$$

Chaque population possède ses propres constantes de connectivité locale (C_1, \dots, C_4), gains de filtres (A, B) et constantes de temps ($\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$). Les bruits $p^i(t)$ sont indépendants. Les valeurs standard des différents paramètres utilisés pour générer une activité dite « normale » sont données Tab. 3.3 [158].

Dans ce modèle étendu, les principaux paramètres sont les suivants :

- le nombre de populations couplées,
- le rapport excitation/inhibition au sein de chaque population,
- le degré de couplage entre les populations,
- le sens de ces couplages (uni-directionnels et bi-directionnels).

Le modèle M_5 , utilisé dans l'évaluation des méthodes de mesures de relations, se compose de deux populations (1 et 2) couplées de manière unidirectionnelle. Comme dans les autres modèles, le degré de couplage ($K^{1,2}$) est variable. Enfin, concernant le rapport excitation/inhibition au sein de chaque population, deux situations ont été considérées dans lesquelles les deux signaux générés correspondent à une activité EEG normale (dite « de fond ») (M_5 (FND)) et à une activité épileptique à type de pointes rythmiques (M_5 (PNT)).

Paramètre	Valeur standard
A	3.25 mV
B	22 mV
a	100 s^{-1}
b	50 s^{-1}
C_1, C_2	C et $0.8C$ respectivement
C_3, C_4	$0.25C, C=135$
v_0, e_0, r	$6 \text{ mV}, 2.5 \text{ s}^{-1}$ et 0.56 mV^{-1} respectivement
a_d	33 s^{-1}
$K^{i,j}$	dépend du degré de couplage

Tab. 3.3. Les valeurs standard des différents paramètres permettant de générer une activité EEG de fond (d'après [158]).

3.3 Critères de comparaison des méthodes

Des simulations de Monte-Carlo ont été effectuées pour chaque modèle afin de comparer les quantités estimées par chaque méthode sur la plage de variation du degré de couplage.

Toutes ces quantités ont été estimées sur une fenêtre glissante de 512 échantillons (correspondant à 2 secondes de signal échantillonné à 256 Hz) qui se déplace sur des longues séries temporelles (20000 échantillons) avec un pas de 10 échantillons (taux de recouvrement égal à 98%).

Les valeurs moyennes et les variances de ces quantités sont présentées sur les figures 3.5-10.

Par ailleurs, afin de comparer, quantitativement, les performances des méthodes évaluées, nous avons introduit trois critères statistiques sur les quantités qu'elles fournissent :

- i.* L'erreur quadratique moyenne (EQM) sous l'hypothèse H_0 (indépendance entre les deux signaux analysés), qui peut être interprétée comme un biais, et dont l'expression est donnée

par $E\left\{\left(\hat{\theta}_0 - \theta_0\right)^2\right\}$ ou E désigne l'espérance mathématique, $\theta_0 = 0$ et $\hat{\theta}_0$ est l'estimation de θ_0 ;

ii. La variance moyenne (VM) sur toutes les valeurs du degré de couplage, donnée par $\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I E\left\{\left(\hat{\theta}_i - E\left(\hat{\theta}_i\right)\right)^2\right\}$ ou I est le nombre de valeurs du degré de couplage et $\hat{\theta}_i$ est la relation estimée pour une valeur C_i du degré de couplage;

iii. En plus des deux critères précédents, nous en avons proposé un troisième permettant de quantifier la sensibilité d'une méthode par rapport au changement du degré de couplage. Ce critère est basé sur le calcul de la médiane de la sensibilité relative locale (MSRL) :

$$MSRL = \text{Médiane}(S_i/\bar{\sigma}_i), \quad S_i = \frac{\hat{\theta}_{i+1} - \hat{\theta}_i}{C_{i+1} - C_i}, \quad \bar{\sigma}_i = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{i+1}^2 + \hat{\sigma}_i^2}{2}}$$

où S_i est le taux d'augmentation de la relation estimée et $\bar{\sigma}_i$ est la moyenne des écart-types $\hat{\sigma}_i$ et $\hat{\sigma}_{i+1}$ associés aux degrés de couplage C_i et C_{i+1} . La médiane de la distribution de la sensibilité relative locale a été choisie (au lieu de la moyenne) parce que nous avons constaté, expérimentalement, que la distribution était dissymétrique (étalée vers la droite). Inversement à EQM et à VM, plus la valeur de MSRL est grande, meilleure est la performance.

3.4 Résultats

3.4.4 Modèle M_1

Les résultats de l'application des différentes méthodes de mesure de relation sur les signaux générés par le modèle M_1 pour les différentes valeurs du degré de couplage C sont présentés Fig. 3.6. On constate que toutes les quantités atteignent la valeur 1 pour $C = 1$, à l'exception de celle fournie par la méthode N_{xy} . De plus, nous pouvons constater que les méthodes R^2 et h^2 se comportent de façon similaire puisque la relation dans le modèle M_1 est linéaire. Par ailleurs, les courbes correspondant aux deux estimateurs de la synchronisation de phase basés sur l'entropie de Shannon (HE, WE) sont très voisines. Cette constatation est également vraie pour les deux autres estimateurs de la synchronisation de phase (HR, WR). Dans ce modèle, l'estimateur correspondant à la méthode SL a la variance maximale, en particulier pour des degrés de couplage élevés. Ce résultats est inattendu

dans la mesure où la variance des autres estimateurs diminue généralement pour les valeurs plus élevées de C . Enfin, dans ce modèle, les méthodes S et CF sont nettement biaisées (elles indiquent des valeurs de couplages relativement élevées pour des valeurs faibles du paramètre C), ce qui est indiqué par les valeurs de EQM reportées dans le tableau 3.2 (1^{ère} colonne).

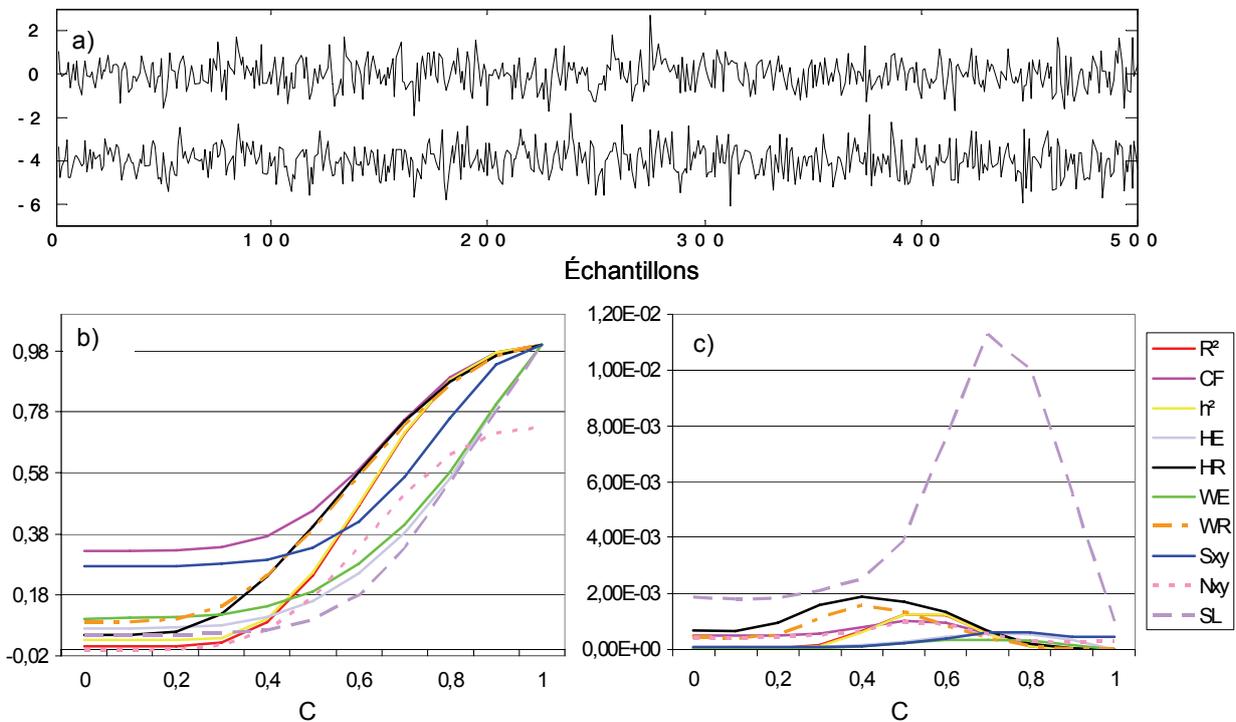


Fig. 3.6. Résultats obtenus pour le modèle M_1 . (a) Signaux produits par le modèle M_1 (b) Quantités estimées par les différentes méthodes (simulations de Monte-Carlo) en fonction du degré de couplage (c) Variances des estimateurs en fonction du degré de couplage.

3.4.5 Modèle M_2

Pour le modèle M_2 , les résultats sont présentés figure 3.7. Dans le cas d'une relation de phase seulement (RP), nous pouvons constater que les performances des méthodes de synchronisation de phase (HE , HR , WE , WR) sont supérieures à celles des autres méthodes (Fig. 3.7 (a)-(c)), ce qui était attendu. Par ailleurs, les méthodes de régression (R^2 , h^2) ont des performances acceptables. Enfin, les méthodes de synchronisation généralisée et la fonction de cohérence montrent, quant à elles, de moins bonnes performances, avec un biais élevé et une sensibilité aux variations de couplage faible (voir tableaux 3.2 et 3.4, 2^{ème} colonne).

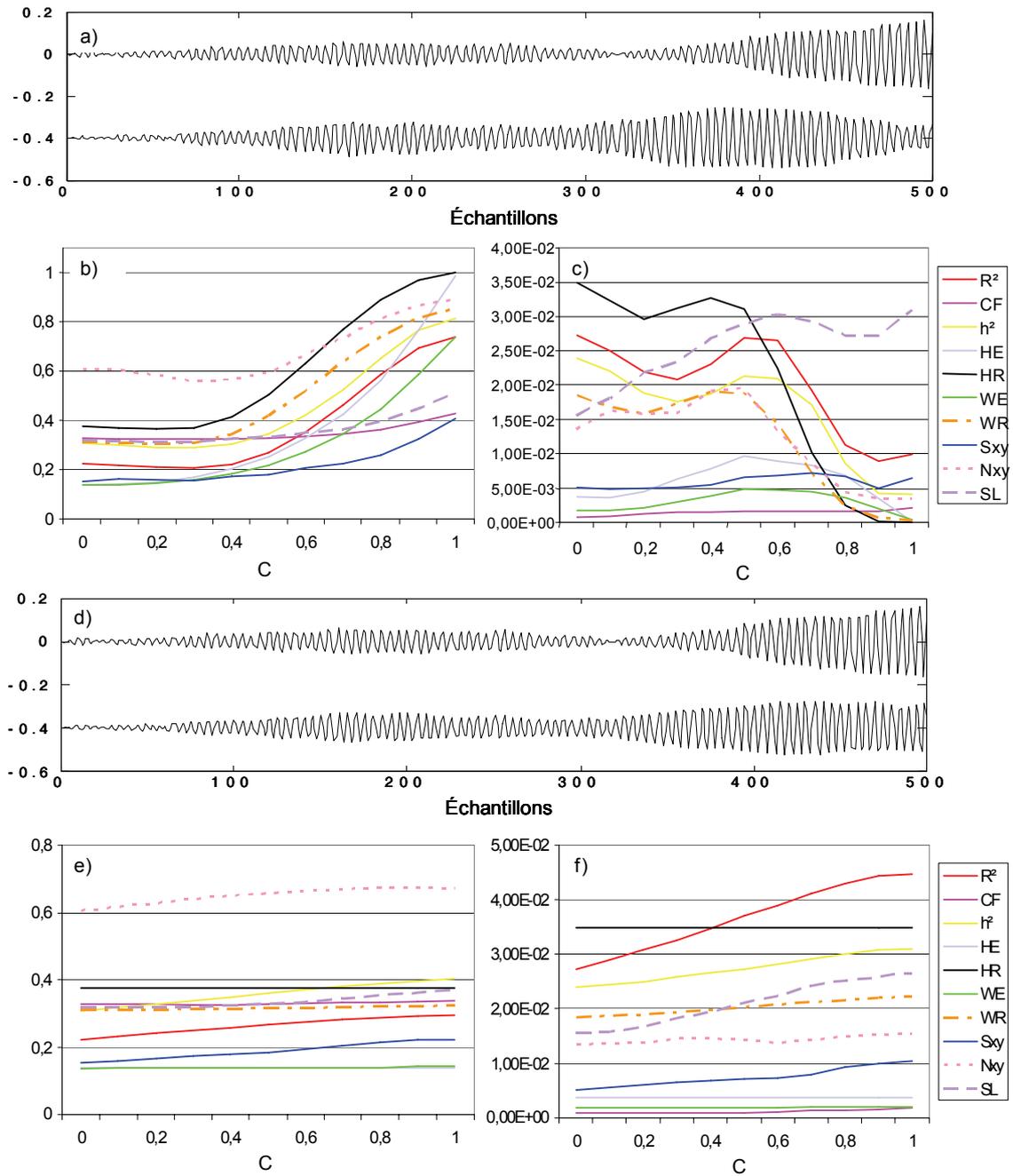


Fig. 3.7. Résultats obtenus pour le modèle M_2 . Signaux produits par le modèle M_2 dans le cas d'une relation de phase (RP) seulement (a) et d'une relation d'amplitude (RA) seulement (d). (b, e) Quantités estimées par les différentes méthodes (simulations de Monte-Carlo) en fonction du degré de couplage dans les cas RP et RA (c, f) Variances des estimateurs en fonction du degré de couplage dans les cas RP et RA.

Dans le cas d'une relation d'amplitude (RA) entre les deux signaux seulement (Fig. 3.7 (d)-(f)), les méthodes de synchronisation de phase ne présentent aucune sensibilité aux changements du degré

de couplage, comme attendu. Les quantités estimées par les méthodes de synchronisation généralisée et par les méthodes R^2 et h^2 augmentent légèrement avec l'augmentation du degré de couplage. Enfin, la fonction de cohérence ne montre qu'une légère sensibilité à la co-variation des amplitudes des deux signaux.

3.4.6 Modèle M_3

Dans ce travail, les systèmes déterministes non linéaires (M_3 et M_4) ont été employés uniquement pour comparer les performances des méthodes de mesure de relation entre signaux. Leurs propriétés, qui ont déjà fait l'objet de nombreuses études [149], n'ont pas été étudiées en détails.

Dans le cas des systèmes de Hénon couplés identiques (modèle M_{3a}), les méthodes de mesure de synchronisation généralisée N montrent des performances supérieures à celles des autres méthodes (Fig. 3.8) avec un biais très faible, un accroissement quasi-linéaire de la quantité estimée en fonction du degré de couplage (excellente sensibilité), sur la plage $[0, 0,7]$ et une variance faible. Dans le cas des systèmes couplés non-identiques (M_{3b}), les méthodes de synchronisation généralisée conservent des performances supérieures à celles des autres méthodes (Fig. 3.9). Par ailleurs, l'ajout du bruit de mesure sur les signaux produits par les deux modèles M_{3a} et M_{3b} conduit, pour toutes les méthodes, à une réduction des quantités estimées. Dans le cas bruité, ce sont les performances des méthodes de synchronisation de phase (HE, WE) qui chutent le plus, les autres méthodes (et notamment celles de régression) conservent une relative sensibilité aux variations de couplage. L'analyse du biais montre, quant à elle, que les effets de l'ajout de bruit sont variables d'une méthode à l'autre.

3.4.7 Modèle M_4

Les résultats obtenus pour les systèmes Rössler couplés (modèle M_4) sont présentés Fig. 3.10. Nous pouvons constater que la méthode SL est caractérisée par une erreur quadratique moyenne (MSE) faible par rapport aux autres méthodes (et donc un biais faible) et une meilleure sensibilité par rapport aux changements du degré de couplage. Cependant la variance d'estimation reste élevée par rapport à celle des autres méthodes. En général, les méthodes de synchronisation de phase ont également des performances correctes dans ce modèle. Par ailleurs, on peut également souligner un résultat inattendu : certaines méthodes (R^2 , h^2 , et WE) fournissent des quantités qui accroissent et puis décroissent pour une augmentation du paramètre de couplage dans une plage de valeurs faibles ($0 < C < 0.14$).

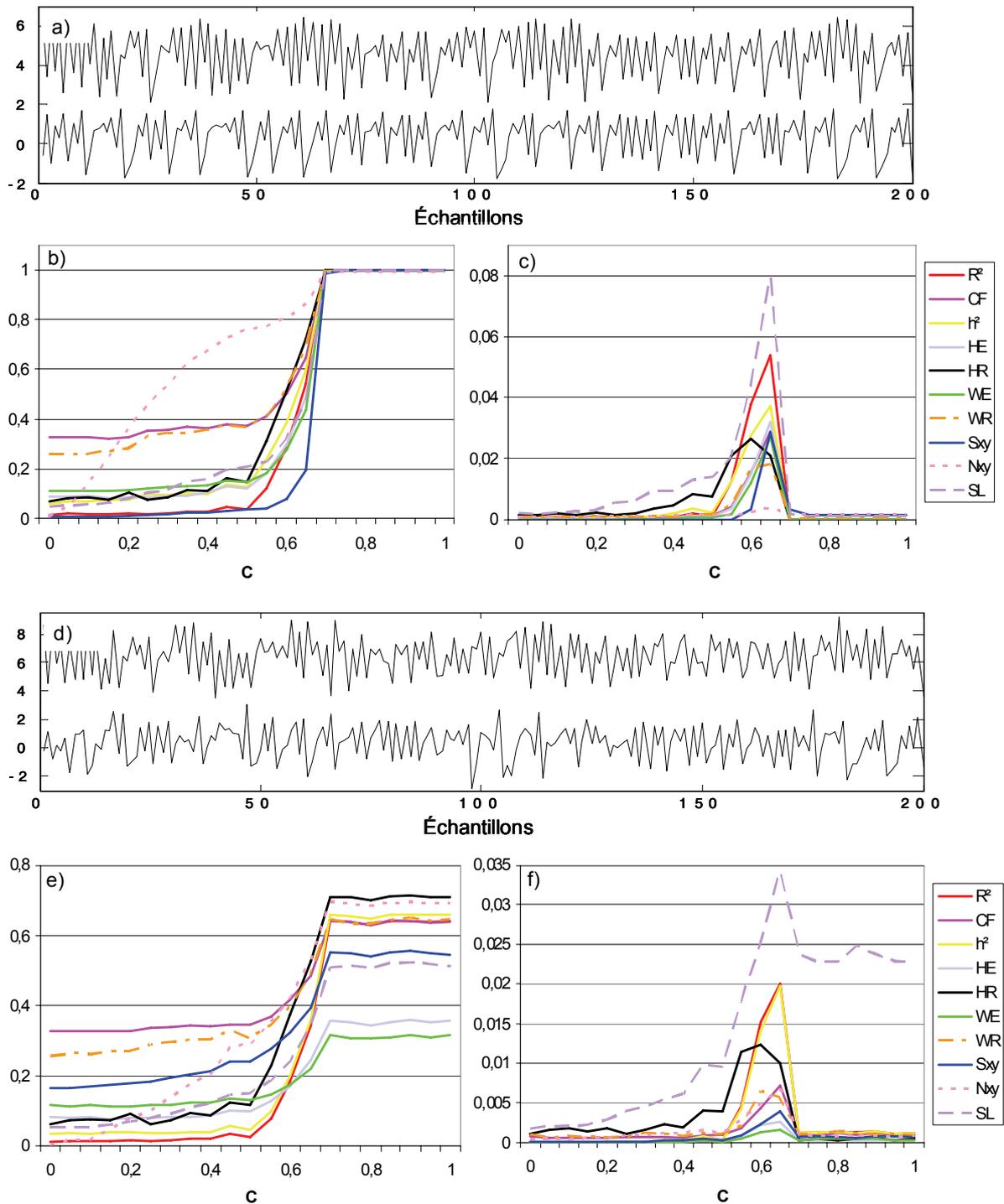


Fig. 3.8. (a) Signaux produits par le modèle M_{3a} (systèmes de Hénon identiques couplés sans ajout de bruit de mesure). (b) Quantités estimées par les différentes méthodes (simulations de Monte-Carlo) (c) Variances des estimateurs en fonction du degré de couplage. (d) Signaux produits par le modèle M_{3a} (systèmes de Hénon identiques couplés avec ajout d'un bruit de mesure, $S/B=2$). (e-f) Quantités estimées et variances en fonction du degré de couplage dans le modèle.

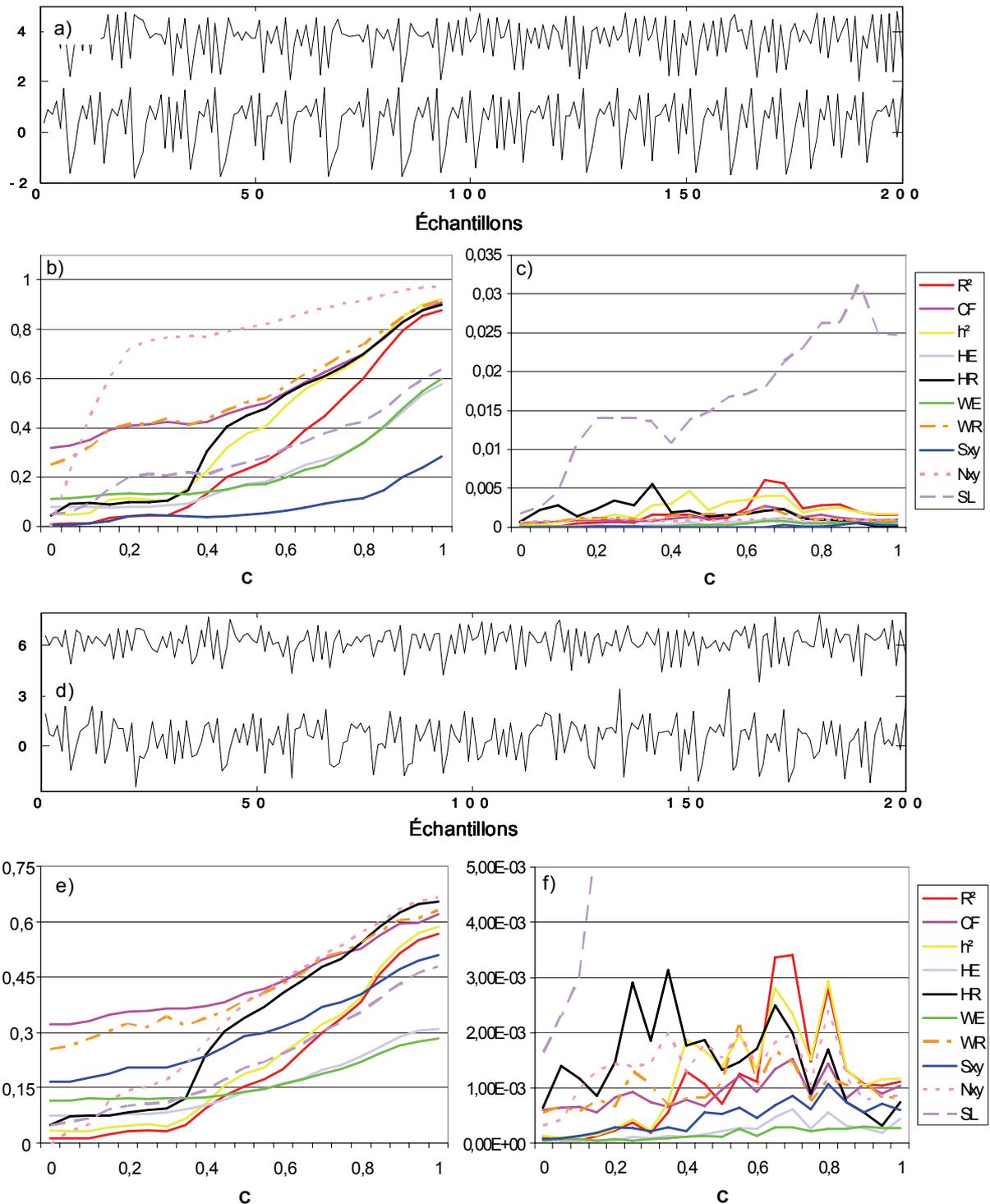


Fig. 3.9. (a) Signaux produits par le modèle M_{3b} (systèmes de Hénon non identiques couplés sans ajout de bruit de mesure). (b) Quantités estimées par les différentes méthodes (simulations de Monte-Carlo) (c) Variances des estimateurs en fonction du degré de couplage. (d) Signaux produits par le modèle M_{3b} (systèmes de Hénon non identiques couplés avec ajout d'un bruit de mesure, $S/B=2$). (e-f) Quantités estimées et variances en fonction du degré de couplage dans le modèle.

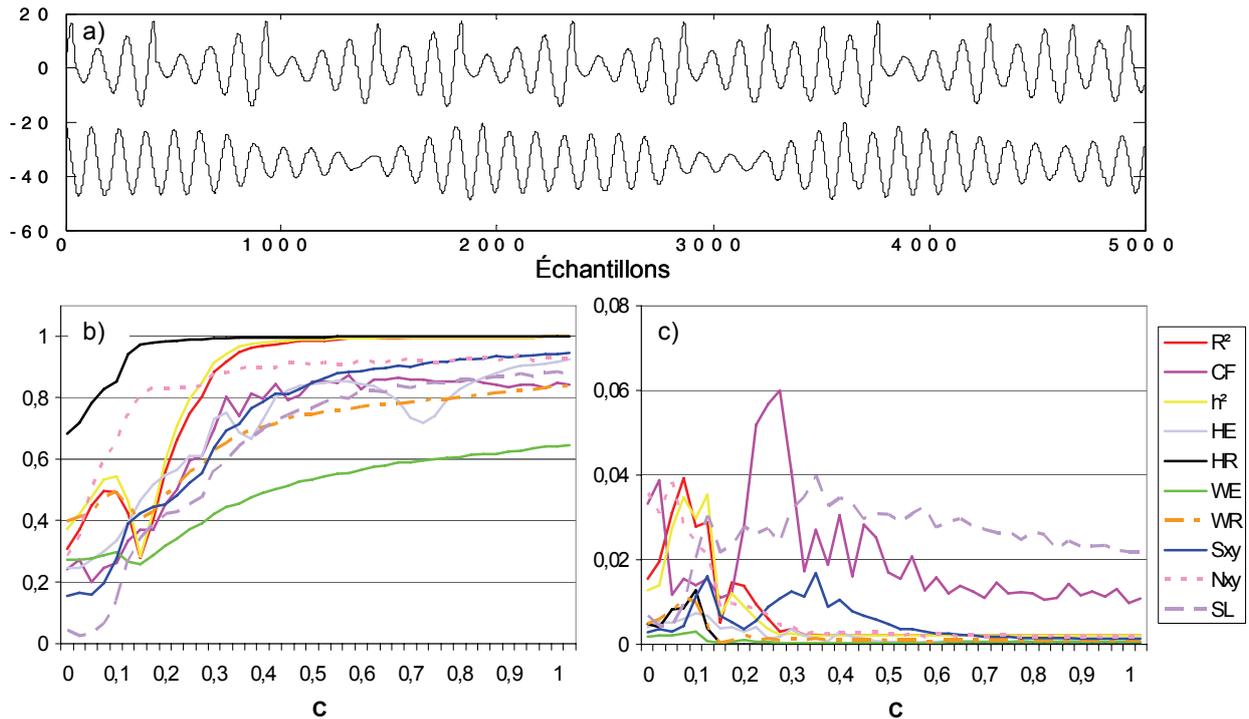


Fig. 3.10. Résultats obtenus pour M_4 (les systèmes de Rössler couplés). (a) Signaux produits par le modèle. (b) Quantités estimées et (c) variances en fonction du degré de couplage.

3.4.8 Résultats pour le modèle M_5

Les résultats obtenus avec le modèle M_5 (deux populations neuronales couplées de manière unidirectionnelle) dans le cadre d'une activité EEG de fond (M_5 (FND)) et d'une activité épileptique à type de pointes rythmiques (M_5 (PNT)) sont présentés Fig. 3.11 (a-c) et (d-f).

Dans le cas d'une activité EEG de fond, il a été montré [31] dans ce modèle, en utilisant des techniques de ré-échantillonnage des données (surrogate data), que la relation entre les populations est principalement linéaire. Les résultats montrent que l'augmentation du degré de couplage ne mène pas à une augmentation significative des quantités calculées par les méthodes, comme on peut le constater Fig. 3.11 (a)-(c). Si certaines méthodes comme celles de régression conservent une certaine sensibilité à la variation du couplage, il faut souligner que d'autres méthodes comme la fonction de cohérence et les méthodes de synchronisation de phase (excepté la méthode HR) ne détectent aucune augmentation du degré de relation.

Les résultats obtenus, dans le cas d'une activité épileptique de type pointes rythmiques, sont illustrés Fig. 3.11 (d)-(f). Plusieurs résultats intéressants ont été obtenus dans ce cas. Tout d'abord, plusieurs méthodes sont soit complètement insensibles (WE et CF) soit faiblement sensibles (HE et WR) à l'augmentation du degré de couplage dans le modèle, ce qui explique, par ailleurs leur faible variance. Ce sont les méthodes de régression (R^2 , h^2) et celle de synchronisation de phase (HR) qui montrent la meilleure sensibilité. Cependant, pour cette dernière, l'EQM sous l'hypothèse nulle (biais) reste élevée.

3.4.9 Analyse globale des résultats par groupe de méthodes

Tous les résultats présentés dans les figures 3.6-3.11 sont récapitulés dans les tableaux 3.2 à 3.4 qui donnent respectivement les valeurs de EQM, de MV et de MSRL pour toutes les méthodes de mesure et tous les modèles de simulation. Pour chaque situation étudiée, la méthode offrant les meilleures performances selon ces trois critères est surlignée en gris. Les méthodes qui sont insensibles aux changements du degré de couplage ont été marquées par une astérisque ("*").

A partir de ces tableaux, nous pouvons déduire que pour le modèle M_1 , la méthode de régression linéaire (R^2) est la plus appropriée. Pour le modèle M_2 (RP), les méthodes de synchronisation de phase (particulièrement WE) donnent de meilleurs résultats que les autres méthodes. Dans le cas de M_2 (RA), il n'y a pas de méthode qui se dégage selon les critères fixés, ce qui s'explique par le fait que toutes les méthodes sont plus sensibles à la phase des signaux qu'à leur enveloppe. Dans le cas des systèmes Hénon couplés (M_4), en général, les méthodes de synchronisation généralisée (S et N) ont des performances supérieures. La méthode de régression R^2 se montre plus robuste par rapport au bruit de mesure. Pour les systèmes de Rössler couplés (M_5), les méthodes de synchronisation de phase sont les plus appropriées, comme dans le cas du modèle M_2 (RP). Enfin, pour le modèle de population neuronale (M_5), dans la situation d'activité de fond, les méthodes de régression (R^2 et h^2) détectent une relation et montrent des performances supérieures à celles des autres méthodes ; dans la situation d'activité épileptique, la même tendance a été confirmée. Cependant, il est difficile de déterminer globalement la meilleure méthode dans ce dernier cas puisque les critères ne mènent pas à des résultats convergents.

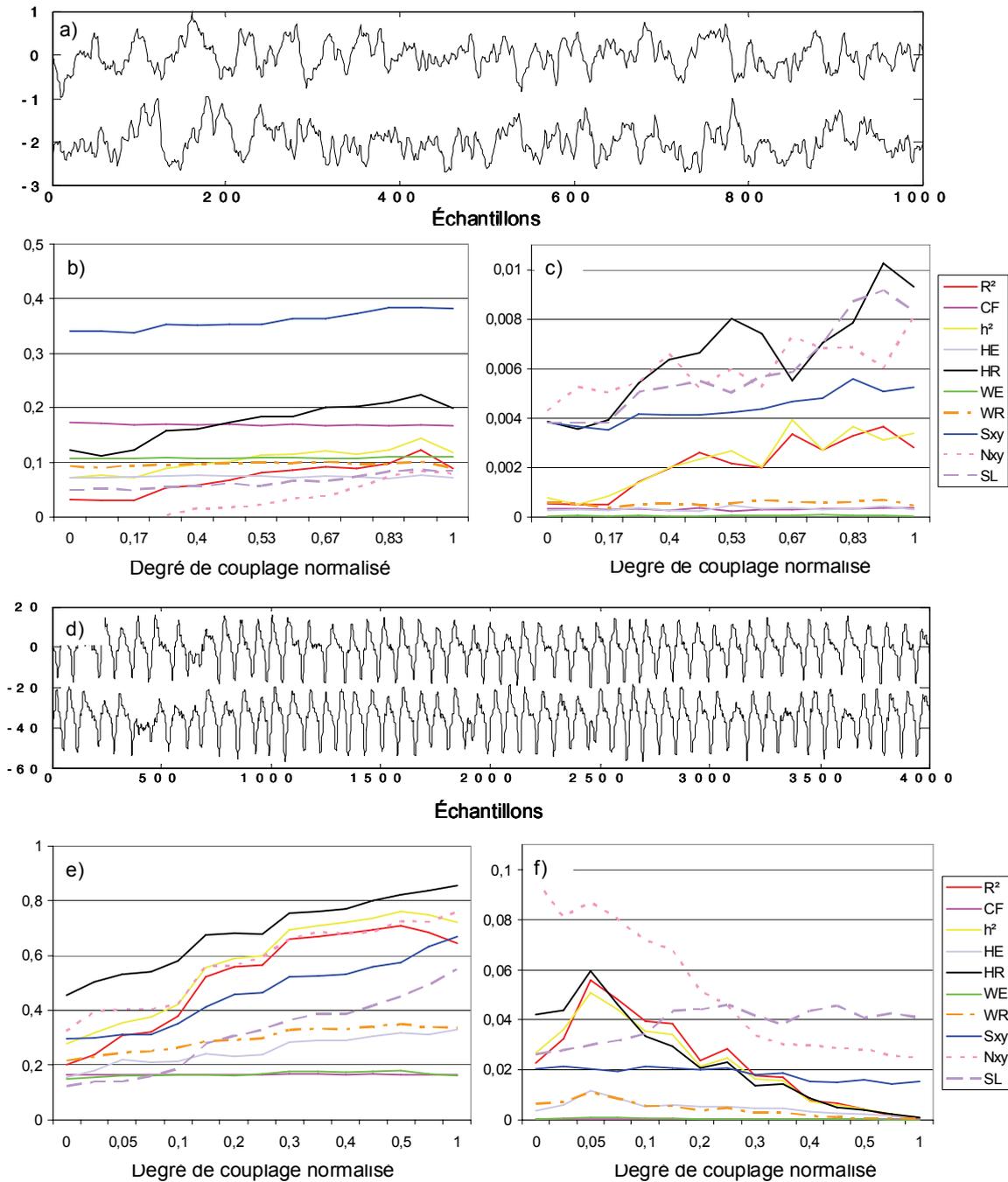


Fig. 3.11. Résultats obtenus pour le modèle de populations neuronales couplées (M_5) dans le cas d'une activité EEG de fond (a) et dans le cas d'une activité épileptique (d). (b, e) Quantités estimées par les différentes méthodes (simulations de Monte-Carlo) et (c, f) variances des estimateurs en fonction du degré de couplage, dans les deux cas.

	M ₁	M ₂	M _{3a} (S/B=inf)	M _{3a} (S/B=2)	M _{3b} (S/B=inf)	M _{3b} (S/B=2)	M ₄	M ₅ (PNT)	M ₅ (FND)
R ²	0.0001	0.0764	0.0003	0.0002	0.0003	0.0002	0.1095	0.0632	0.0015
CF	0.1045	0.1082	0.1071	0.1078	0.1025	0.1042	0.0914	*	*
h ²	0.0010	0.1174	0.0034	0.0013	0.0027	0.0011	0.1511	0.1038	0.0060
HE	0.0050	0.0231	0.0081	0.0069	0.0060	0.0057	0.0638	0.0287	*
HR	0.0030	0.1756	0.0063	0.0050	0.0027	0.0030	0.4731	0.2493	0.0190
WE	0.0105	0.0205	0.0130	0.0133	0.0130	0.0128	0.0765	*	*
WR	0.0088	0.1136	0.0690	0.0658	0.0623	0.0642	0.1615	0.0534	*
S	0.0753	0.0284	0.00003	0.0275	0.00003	0.0274	0.0266	0.1075	0.1200
H	0.0004	2.2281	0.0019	0.0005	0.0010	0.0004	0.4420	0.6512	0.0042
N	0.0004	0.3782	0.0006	0.0003	0.0005	0.0003	0.1168	0.2015	0.0049
SL	0.0043	0.1152	0.0042	0.0045	0.0038	0.0037	0.0085	0.0413	0.0062

Tab. 3.4. Valeurs de l'erreur quadratique moyenne (EQM) pour les différentes méthodes étudiées et pour les différents modèles de relation entre signaux. Les valeurs surlignées en gris sont les plus faibles et correspondent donc aux plus faibles valeurs du biais sous l'hypothèse d'indépendance entre les signaux. Les astérisques repèrent les méthodes insensibles aux changements du degré de couplage sur lesquelles les critères de comparaison ne peuvent pas être appliqués.

	M ₁	M ₂ (RP)	M ₂ (RA)	M _{3a} (S/B=inf)	M _{3a} (S/B=2)	M _{3b} (S/B=inf)	M _{3b} (S/B=2)	M ₄	M ₅ (PNT)	M ₅ (FND)
R ²	0.0040	0.0200	0.0367	0.0052	0.0024	0.0017	0.0011	0.0065	0.0216	0.0021
CF	0.0055	0.0014	*	0.0027	0.0013	0.0012	0.0009	0.0200	*	*
h ²	0.0040	0.0160	0.0275	0.0042	0.0023	0.0021	0.0012	0.0060	0.0205	0.0022
HE	0.0026	0.0057	*	0.0025	0.0004	0.0004	0.00023	0.0019	0.0045	*
HR	0.0096	0.0207	*	0.0050	0.0028	0.0018	0.0015	0.0010	0.0217	0.0066
WE	0.0016	0.0029	*	0.0020	0.0003	0.0003	0.00016	0.0006	*	*
WR	0.0066	0.0119	*	0.0023	0.0014	0.0011	0.0010	0.0018	0.0038	*
S	0.0031	0.0058	0.0075	0.0021	0.0007	0.0001	0.0005	0.0049	0.0184	0.0044
H	0.0107	0.2033	0.2441	0.0701	0.0055	0.0182	0.0046	0.3408	0.2942	0.0071
N	0.0055	0.0120	0.0142	0.0013	0.0014	0.0008	0.0013	0.0068	0.0501	0.0060
SL	0.0492	0.0250	0.0209	0.0104	0.0138	0.0163	0.0139	0.0254	0.0384	0.0059

Tab. 3.5. Valeurs de la variance moyenne (VM) pour les différentes méthodes étudiées et pour les différents modèles de relation entre signaux. Les valeurs surlignées en gris correspondent aux plus faibles valeurs de la variance. Les astérisques repèrent les méthodes insensibles aux changements du degré de couplage sur lesquelles les critères de comparaison ne peuvent pas être appliqués.

	M ₁	M ₂ (RP)	M ₂ (RA)	M _{3a} (S/B=inf)	M _{3a} (S/B=2)	M _{3b} (S/B=inf)	M _{3b} (S/B=2)	M ₄	M ₅ (PNT)	M ₅ (FND)
R ²	57.6	3.94	0.41	6.99	2.93	21.31	16.85	1.38	0.0013	0.00012
CF	56.4	1.30	*	5.68	1.94	17.17	9.41	2.20	*	*
h ²	35.6	4.06	0.36	6.91	0.56	20.62	16.42	0.98	0.0018	0.00011
HE	40.9	6.58	*	7.16	3.98	20.54	15.58	15.5	0.0012	*
HR	42.5	6.5	*	6.79	4.77	21.45	15.38	8.87	0.0012	0.00007
WE	47.0	6.69	*	11.18	5.07	19.20	11.75	13.8	*	*
WR	46.6	6.76	*	10.27	4.68	20.05	14.80	8.83	0.0012	*
S	31.1	2.23	0.84	19.40	10.26	31.51	18.03	6.91	0.0009	5e-6
H	30.3	2.84	0.77	25.07	15.28	24.56	16.59	3.53	0.0007	9e-5
N	29.0	3.02	0.60	25.42	15.70	12.32	17.04	3.46	0.0004	9e-5
SL	8.32	0.772	0.41	2.41	2.61	4.90	3.84	3.52	0.0013	7e-7

Tab. 3.6. Valeurs de la médiane de la sensibilité relative locale (MSRL) pour les différentes méthodes étudiées et pour les différents modèles de relation entre signaux. Les valeurs surlignées en gris sont les plus élevées et correspondent donc aux meilleures sensibilités par rapport aux variations du degré de couplage dans les modèles. Les astérisques repèrent les méthodes insensibles aux changements du degré de couplage sur lesquelles les critères de comparaison ne peuvent pas être appliqués.

Afin de comparer globalement les trois groupes de méthodes (régression, synchronisation de phase, et synchronisation généralisée), nous avons fait la moyenne des résultats pour chaque critère dans chaque simulation (Fig. 3.12). Pour le modèle M_1 , ce sont les méthodes de régression qui permettent d'obtenir les meilleurs résultats. Pour le modèle M_2 , dans le cas d'une relation de phase, les méthodes de synchronisation de phase sont plus appropriées ; dans les cas d'une relation d'amplitude, les résultats montrent qu'il est difficile de définir une méthode « optimale ». Pour le modèle M_3 , nous avons constaté que les méthodes de synchronisation généralisée conduisent à des valeurs faibles d'EQM, et que les estimateurs utilisés dans les méthodes de synchronisation de phase ont la plus faible variance. En ce qui concerne la sensibilité, les résultats sont partagés entre ces deux groupes de méthodes. Ainsi, dans ce type de modèle (signaux chaotiques générés à partir de modèles de Hénon couplés), nous avons conclu que ce sont ces deux groupes de méthodes qui offrent les meilleures performances. Pour le modèle M_4 (signaux chaotiques générés à partir de modèles de Rössler couplés), les méthodes de synchronisation de phase conduisent aux meilleurs résultats, bien que leur EQM reste élevée. Pour le modèle de populations neuronales couplées, dans le cas d'une activité épileptique (pointes rythmiques, M_5 (PNT)), les méthodes de régression et de synchronisation de phase se comportent globalement de la même manière et ont des performances supérieures à celles des méthodes de synchronisation généralisée. Dans le cas d'une activité de fond (M_5 (FND)), les méthodes de régression surpassent les autres méthodes.

3.5 Discussion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les méthodes les plus répandues de mesure de la relation entre signaux pour la caractérisation de la connectivité fonctionnelle dans le cerveau. Les quantités fournies par ces méthodes jouent un rôle important car elles renseignent sur les interactions entre structures cérébrales pendant des activités normales (par exemple, cognitives) ou des activités pathologiques (par exemple, celles rencontrées durant les crises d'épilepsie). Dans un contexte difficile où l'on ne dispose pas d'information sur la nature des relations entre structures, il est donc crucial d'analyser le comportement de chaque méthode, d'étudier les propriétés statistiques des quantités qu'elles fournissent et d'essayer de comparer leurs performances selon des critères objectifs.

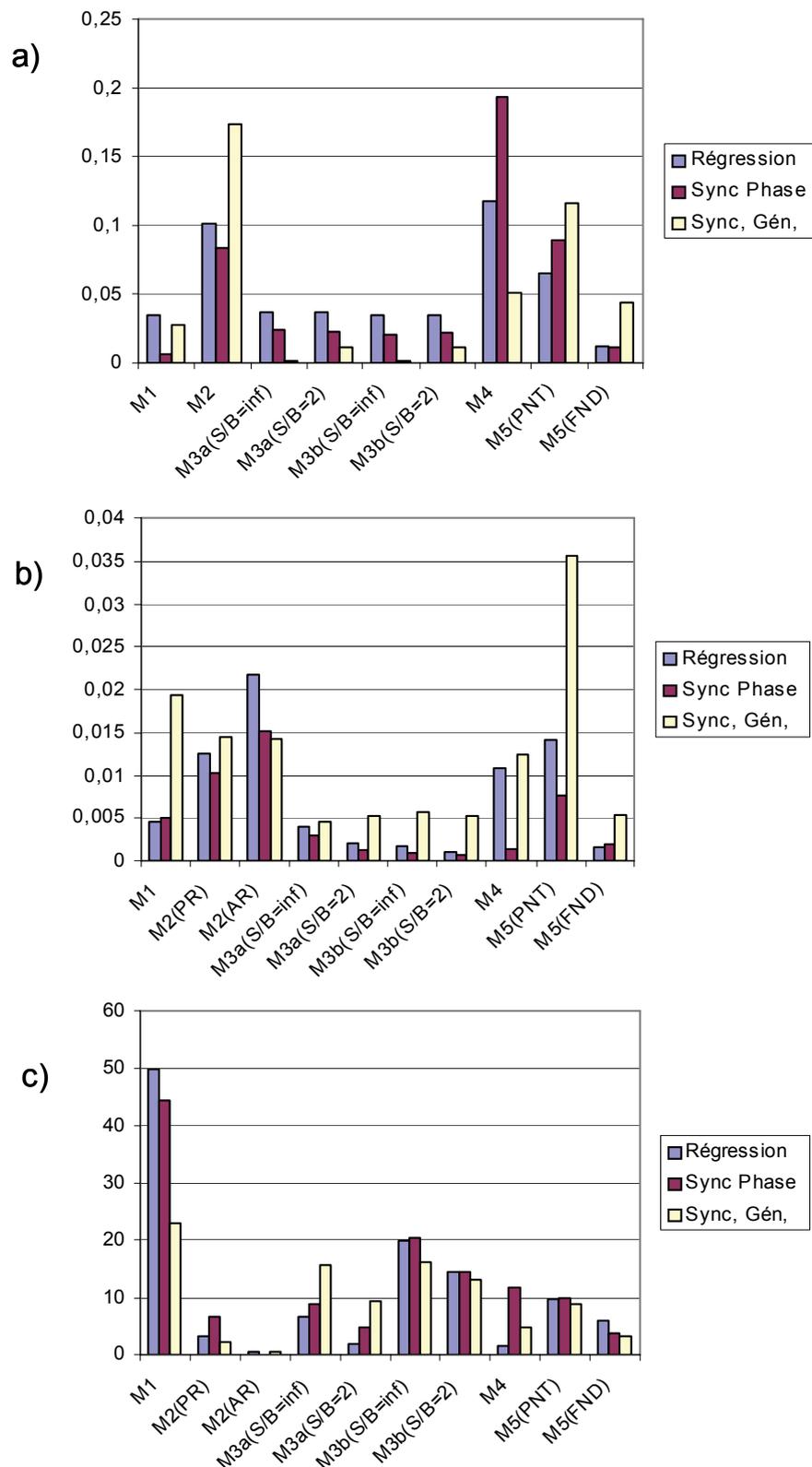


Fig. 3.12. Synthèse des résultats. Valeurs moyennes de (a) EQM, (b) VM et (c) MSRL pour les trois groupes de méthodes : régression, synchronisation de phase et synchronisation généralisée.

Les travaux décrits dans ce chapitre ont conduit à cette comparaison des méthodes de mesure de relation. Ils complètent plusieurs tentatives rapportées dans la littérature [30] et s'en distinguent sur plusieurs points. Tout d'abord, dans ce travail, un cadre méthodologique basé sur l'utilisation de modèles de relation entre signaux a été proposé et utilisé. A notre connaissance, les autres études publiées n'ont abouti qu'à des résultats qualitatifs et souvent dans un cadre plus restreint limité aux seuls signaux réels où à l'utilisation d'un seul modèle. Ensuite, nous avons introduit des critères statistiques permettant de comparer quantitativement les estimateurs étudiés pour chaque modèle. L'un des ces critères, permettant de caractériser la sensibilité de chaque méthode par rapport aux variations du degré de couplage, est original. Ces critères ont également permis de synthétiser les résultats en proposant une comparaison plus globale, c'est-à-dire par famille de méthodes.

Enfin, nous souhaitons conclure ce chapitre par les éléments principaux découverts dans cette étude : *(i)* plusieurs méthodes sont insensibles aux variations de couplage dans certains modèles ; *(ii)* les résultats sont très dépendants des propriétés des signaux (bande large ou bande étroite) ; *(iii)* d'une façon générale, il n'y pas de méthode universelle, c'est-à-dire qu'aucune des méthodes étudiées n'est plus performante que les autres dans toutes les situations étudiées ; *(iv)* les méthodes de régression se montrent sensibles aux variations de couplage dans tous les modèles de relation avec des performances moyennes ou correctes. Nous proposons donc d'appliquer ces méthodes plus "robustes" avant de mettre en œuvre d'autres méthodes plus sophistiquées.

Les méthodes comparées ici cherchent à caractériser la relation qui lie deux signaux indépendamment de la manière avec laquelle celle-ci s'établit. La notion de fréquence ou bande de fréquence privilégiée pour la mise en place d'une relation entre signaux n'est pas directement prise en compte dans ces approches. Elles sont de fait dédiées à la caractérisation d'une relation statique et globale. Le besoin d'analyser localement (en temps et en fréquence) la relation qui existerait entre deux observations est ici important compte tenu de la nature des signaux qui fait apparaître des rythmes spécifiques dans certaines phases d'enregistrement de l'EEG. Ce dernier point nous a amené à entreprendre, dans le chapitre 4, une démarche visant l'analyse temporo-fréquentielle des liens statistiques entre des paires de signaux électroencéphalographiques.

Chapitre 4

Approches temps-fréquence pour l'analyse statistique d'une relation entre deux voies

4.1 Introduction

Pour mesurer le couplage entre deux signaux stationnaires, le calcul classique de la cohérence, qui s'appuie sur l'analyse de Fourier, s'avère souvent satisfaisant. Malheureusement, à de rares exceptions près, les signaux EEG sont non stationnaires, particulièrement dans le cas de l'épilepsie [163-165]. Par exemple, considérant la décomposition fréquentielle de certains enregistrements EEG épileptiques, on peut y constater la présence de chirps, c'est-à-dire de composantes à bande-étroite dont la fréquence centrale évolue plus ou moins rapidement, [166, 167]. Pour analyser un éventuel couplage entre de tels signaux, on doit opter pour des méthodes qui relaxent l'hypothèse de stationnarité et il faut s'attendre à devoir recourir pratiquement, à une méthode d'analyse temps-fréquence (TF) [168-170] déjà proposée par ailleurs dans la littérature pour l'étude de signaux EEG [171-174].

Partant de deux signaux observés, nous considérons donc dans ce chapitre le problème de caractériser une relation du type dépendance statistique, mais en s'intéressant ici à sa localisation sur l'axe des fréquences qui est évolutive, non stationnaire. Nous sommes donc intéressés par une mesure, effectuée conjointement en temps et en fréquence, et pouvant renseigner sur l'éventuelle relation entretenue par deux populations neuronales, produisant chacune l'un des deux signaux disponibles. Cette dépendance peut le cas échéant s'interpréter comme une synchronisation, si on appréhende plutôt sous un angle déterministe que sous un angle probabiliste les dynamiques sous-jacentes. Mais ces nuances ne seront pas discutées, la modélisation aléatoire classique à l'ordre deux étant la seule considérée. Ainsi, les

caractéristiques non linéaires de la dépendance entre les deux observations ne sont pas étudiées ici. Classiquement, l'analyse non linéaire de signaux peut reposer, entre autres, sur des techniques de régression paramétriques ou non paramétriques ou encore sur l'analyse des cumulants d'ordre supérieur à deux, analyse qui passe dans le domaine des fréquences par celle des polyspectres. Ces techniques sont complexes et essentiellement utilisées dans le cadre stationnaire, sur des durées d'observation ne devant pas être trop courtes. Une autre raison pour ne pas s'investir ici dans ces méthodes est que l'analyse restreinte à des bandes de fréquence étroites aura tendance à estomper, en intra-bande, la non linéarité éventuelle du signal. En résumé, les aspects non linéaires ne sont pas considérés dans ce chapitre où les méthodes présentées peuvent toutes être assimilées à des méthodes dédiées à une analyse à d'ordre deux.

D'un point de vue physiologique, la détection d'une relation statistique ou d'une synchronisation, plus marquée sur des intervalles fréquentiels étroits, peut être la trace d'une co-activité de deux (ou plus) sous populations neuronales. Cette dernière peut être du type « quasi périodique en quasi synchronie », bien que restant généralement aléatoirement perturbée. La détection d'une co-activation répartie sur des bandes plus larges peut être la trace d'une dépendance plus complexe, statistique ou du type synchronisation chaotique, ou encore d'un mélange des deux.

La méthode la plus usitée pour caractériser en fonction de la fréquence cette co-activité est de procéder à des mesures de la fonction de cohérence classique. Elle a été utilisée par exemple pour localiser en fréquence des phénomènes de synchronisation dans des structures neuronales susceptibles de traiter l'information durant des tâches cognitives. Mais en raison de rapides changements de dynamique pouvant intervenir dans les signaux EEG, l'estimation de la fonction de cohérence doit se faire sur une fenêtre temporelle relativement courte, bien positionnée sur le phénomène à étudier, pour éviter que les résultats ne soient trop fortement biaisés par l'interférence avec les portions de signal non pertinentes. Résoudre ce problème nécessite l'introduction de méthodes permettant d'estimer une fonction de cohérence sur un support suffisamment court, du même ordre de grandeur que la durée attendue des modifications pertinentes du signal EEG.

Cependant, en matière de statistique comme ailleurs, « à l'impossible nul n'est tenu ». Ainsi toute procédure d'estimation d'un paramètre caractéristique correspondant à une valeur de cohérence à une fréquence donnée nécessite de disposer de l'équivalent d'un nombre suffisant

de tranches d'observation approximativement indépendantes (problème de variance), pas trop courtes (problème de biais) et pour lesquelles la valeur du paramètre reste théoriquement la même. Pour atteindre ce nombre, la collecte peut s'envisager soit en répétant des expériences indépendamment (une nouvelle tranche par expérience), soit en prélevant les tranches dans une même réalisation, soit encore en cumulant les deux procédés. Cependant utiliser plusieurs tranches décalées dans une même réalisation n'est évidemment pertinent que dans le cas où la quantité à estimer est stationnaire (et où naturellement la mémoire statistique du signal observé est limitée, pour pouvoir se placer dans l'hypothèse ergodique). Dans le cadre des travaux en cognition concernant la réponse cérébrale à une stimulation parfaitement datée (réponse généralement non stationnaire), et dans la limite des coûts d'expérimentation, la répétition de l'expérience peut permettre de recueillir suffisamment d'informations. Mais dans d'autres cas où, comme souvent pour l'analyse des signaux épileptiques, on ne dispose que d'une seule réalisation (ou du moins de très peu de réalisations sur un patient donné) l'estimation de toute caractéristique non stationnaire pose problème.

En fait deux attitudes sont possibles dans ce dernier cas. La première, *a priori* la plus simple, est celle qui a été considérée dans les chapitres précédents. Pour une durée T fixée (pas trop grande) elle consiste à supposer que la stationnarité au sens large (en se limitant à l'ordre deux puisque la fonction de cohérence est définie par des caractéristiques à cet ordre) est exactement vérifiée sur tout intervalle de cette durée, étant entendu que la covariance, stationnaire en intra-intervalle, peut différer d'un intervalle à un autre (pour pouvoir coller à la réalité non stationnaire). Ceci ne correspond évidemment qu'à une hypothèse « de facilité » puisque pour deux intervalles se recouvrant, la fonction covariance doit, suivant cette hypothèse, être strictement la même sur leur intersection. Pour une suite d'intervalles se recouvrant 2 à 2 et dont l'union est un intervalle long, on aboutit ainsi à une contradiction. Malgré cela on procède généralement sur une telle suite d'intervalles, à une estimation du paramètre supposé invariant temporellement sur chacun d'entre eux. Son suivi temporel s'effectue alors par ré-estimation sur les intervalles successifs.

La deuxième attitude est de ne pas ignorer la difficulté liée à la non stationnarité de la quantité à estimer. Pour cela il faut redéfinir le paramètre d'intérêt non plus seulement en fonction de la fréquence, mais aussi en fonction du temps, afin de positionner le problème d'estimation relativement à une « cible théorique » soit bien identifiée. Il est possible pour y parvenir de recourir à une modélisation explicite de la non stationnarité. Le nombre de paramètres

supplémentaires (hyperparamètres) introduit à cet effet (pour caractériser la variation du paramètre d'intérêt) ne doit évidemment pas être trop élevé afin de limiter les variances d'erreur d'estimation, mais il devra être suffisant pour caractériser efficacement la non stationnarité.

L'estimation *des* fonctions de cohérence temps fréquence a été envisagée sous différentes formes dans la littérature. On peut en particulier distinguer les méthodes du type non paramétrique, directes, et qui mènent dans le cas stationnaire au calcul de périodogrammes moyennés (marginaux et croisés). D'autres approches, indirectes, consistent à passer par des modèles paramétriques, le plus souvent des modèles AR ou ARMA, avec des paramètres dépendants du temps. Les fonctions du temps représentant leur évolution peuvent être, elles mêmes, paramétrées par décomposition linéaire sur une base de fonctions. Pour ce type d'approche il est évidemment nécessaire de définir la fonction de cohérence temps fréquence en fonction des paramètres du modèle.

Il faut, en toute généralité, distinguer deux problèmes :

- La définition théorique d'un indicateur statistique étendant la notion de fonction de cohérence, définie classiquement pour des signaux stationnaires au sens large, à un indicateur similaire, mais défini en temps et en fréquence, pour le cas de signaux d'ordre 2 non stationnaires. Elle fait l'objet de la section 4.2.
- L'introduction d'estimateurs pour mesurer la valeur de l'indicateur retenu qui, en suivant la littérature, est proposée dans la section 4.3.

Enfin, nous proposons en § 4.4 une approche alternative à l'utilisation d'une fonction de cohérence qui peut s'avérer plus efficace dans le cas particulier où une contrainte peut être introduite, conditionnellement à l'existence d'une dépendance entre les deux voies, sur un temps de propagation physiologique.

4.2 Définitions d'une cohérence temps fréquence

4.2.1 Cohérence temps fréquence définie à partir de la transformée de Fourier à court terme

Considérons deux signaux aléatoires d'ordre deux $x_1[n]$, $x_2[n]$, $n \in \mathbb{Z}$ et leurs transformées de Fourier à court terme, pour une fenêtre de pondération (enveloppe) h_p de support limité :

$$X_{h_p,i}(t, f) = \sum_k h_p[k-t] x_i[k] e^{-2\pi jfk}, \quad i = 1, 2$$

Une manière intuitivement satisfaisante de définir localement (i. e. en fonction non seulement de f mais aussi de t) les densités spectrales de puissance marginale et croisée sont de poser :

$$S_{x_i}(t, f) = E(|X_{h_p,i}(t, f)|^2), \quad |f| \leq 1/2, \quad i = 1, 2$$

$$S_{x_1, x_2}(t, f) = E(X_{h_p,1}(t, f) X_{h_p,2}^*(t, f)), \quad |f| \leq 1/2$$

On peut ainsi définir une cohérence fonction de la fréquence et du temps :

$$C_{x_1, x_2}(t, f) = \frac{S_{x_1, x_2}(t, f)}{\sqrt{S_{x_1}(t, f) S_{x_2}(t, f)}}, \quad |f| \leq 1/2$$

Cette approche est conforme dans l'esprit à ce qui est proposé par Haykin dans [24] (où les espérances mathématiques ci-dessus sont remplacées par une moyenne sur un ensemble de réalisations).

Ces différentes quantités peuvent clairement s'écrire en fonction de ω au lieu de f si on le désire et le tout peut être défini de manière strictement analogue en temps continu en introduisant

$$X_{h_p,i}(t, f) = \int_{\mathbb{R}} h_p(u-t) x_i(u) e^{-2\pi jfu} du, \quad f \in \mathbb{R}$$

en place de

$$X_{h_p,i}(t, f) = \sum_k h_p[k-t] x_i[k] e^{-2\pi jfk}$$

Les densités spectrales ainsi définies (en temps continu ou discret) peuvent tout aussi bien s'interpréter comme des densités d'énergie dans une fenêtre. De plus elles peuvent également être mises sous la forme :

$$S_{x_1, x_2}(t, f) = E(X_{h_p, 1}(t, f) X_{h_p, 2}^*(t, f)) = \int_{\tau \in \mathbb{R}} \int_{\theta \in \mathbb{R}} e^{-2\pi j f \tau} h_p(\theta) h_p^*(\theta - \tau) K_{x_1, x_2}(\theta + t, \theta + t - \tau) d\theta d\tau, \quad (t, f) \in \mathbb{R}^2$$

qui fait apparaître la transformée de Fourier de la covariance K_{x_1, x_2} moyennée localement (intégration en θ) : la densité spectrale (croisée ou non) locale (à t fixé) correspond à la transformée de Fourier d'une moyenne locale de la covariance. Cette intégrale double correspond à l'espérance mathématique de la quantité aléatoire :

$$X_{h_p, 1}(t, f) X_{h_p, 2}^*(t, f) = \int_{\tau \in \mathbb{R}} \int_{\theta \in \mathbb{R}} e^{-2\pi j f \tau} h_p(\theta) h_p^*(\theta - \tau) x_1(\theta + t) x_2^*(\theta + t - \tau) d\theta d\tau$$

(les relations analogues se vérifiant évidemment en temps discret).

Notons enfin que les densités spectrales marginales ainsi définies sont obligatoirement, pour tout t , positives ou nulles.

4.2.2 Une approche de la densité spectrale dans le cas non stationnaire à partir de la décomposition de Wold-Cramer

Selon la décomposition de Wold-Cramer [175], un processus aléatoire scalaire en temps discret $x[n]$, non stationnaire et non singulier (i.e. ne comportant pas de composante exactement prédictible), peut être représenté comme la sortie d'un système causal, linéaire et non stationnaire, de réponse impulsionnelle $h[n, m]$:

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^n h[n, m] \varepsilon[m] \quad (4.1)$$

où $\varepsilon[m]$ est un processus du type bruit blanc stationnaire de moyenne nulle et de variance unité. Ce dernier peut être représenté spectralement par une somme (intégrale de Fourier Stieltjes en moyenne quadratique) de « sinusoïdes » d'amplitudes et phases aléatoires,

$$\varepsilon[m] = \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega m} dZ(\omega) \quad (4.2)$$

où $Z(\omega)$ est un processus à accroissements orthogonaux,

$$\omega_1 \neq \omega_2 \Rightarrow E\{dZ(\omega_1)dZ^*(\omega_2)\} = 0, \quad E\{|dZ(\omega)|^2\} = \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Substituant (4.2) dans (4.1), on peut exprimer le processus non stationnaire $x[n]$ de façon suivante :

$$x[n] = \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n} H(n, \omega) dZ(\omega) \quad (4.3)$$

où

$$H(n, \omega) = \sum_{m=-\infty}^n h[n, m] e^{-j\omega(n-m)}$$

est la fonction de transfert généralisée de Zadeh [176] pour un système linéaire temps-variable de réponse impulsionnelle $h[n, m]$.

Dans l'équation (4.3) le processus non stationnaire est lui aussi exprimé comme une somme de « sinusoides » présentant chacune une amplitude et une phase dépendantes du temps. Considérant la relation $dX(\omega) = H(n, \omega) dZ(\omega)$ impliquée par (4.3), l'équation

$$E\{|x[n]|^2\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(n, \omega)|^2 d\omega.$$

explique la distribution de puissance du processus non stationnaire $x[n]$ en fonction du temps n et de la fréquence ω . Le spectre évolutionnaire de Wold-Cramer peut alors être défini par :

$$S(n, \omega) = |H(n, \omega)|^2 \quad (4.4)$$

Cette dernière relation est évidemment utilisable dans le cas particulier où $h[n, m]$ correspond à un représentant d'une classe paramétrique (AR, ARMA) aussi bien que pour une forme libre. Cette analyse peut être généralisée au cas des signaux aléatoires vectoriels à $K > 1$ composantes (et donc en particulier pour deux voies d'observation, $K=2$), les $h[n, m]$ correspondants alors à des $K \times K$ matrices, et les modèles paramétriques AR ou ARMA, si utilisés, devant l'être sous forme vectorielle. Le spectre $S(n, \omega)$ en fonction de n correspond alors à une suite de matrices dont les éléments sont les spectres évolutionnaires, non croisés sur la diagonale principale et croisés en dehors de cette diagonale.

Considérons plus en détail la situation $K=2$ avec deux composantes x et y :

$$(x, y)^T [n] = \sum_{m=-\infty}^n h[n, m] (\varepsilon_x, \varepsilon_y)^T [m]$$

où les $h[n, m]$ sont des 2×2 matrices et où ε_x et ε_y sont deux bruits blancs centrés indépendants de variance unité avec les décompositions spectrales :

$$\varepsilon_x [m] = \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega m} dZ_{\varepsilon_x}(\omega), \quad \varepsilon_y [m] = \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega m} dZ_{\varepsilon_y}(\omega)$$

La décomposition spectrale de $(x, y)^T$ est donnée par

$$(x, y)^T [n] = \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n} H(n, \omega) (dZ_{\varepsilon_x}, dZ_{\varepsilon_y})^T(\omega) \quad \text{où } H(n, \omega) = \sum_{m=-\infty}^n h[n, m] e^{-j\omega(n-m)}$$

et la matrice des densités spectrales simples et croisées s'écrit

$$S(n, \omega) = H(n, \omega) H^H(n, \omega)$$

où H^H est la transposée conjuguée de H et où on a tenu compte de ($I =$ matrice unité) :

$$E\{(dZ_{\varepsilon_x}, dZ_{\varepsilon_y})^T(\omega) (dZ_{\varepsilon_x}, dZ_{\varepsilon_y})^*(\omega)\} = I$$

et de

$$(dZ_x, dZ_y)^T(n, \omega) = H(n, \omega) (dZ_{\varepsilon_x}, dZ_{\varepsilon_y})^T(\omega)$$

La fonction de cohérence évolutionnaire peut alors être introduite en posant

$$C_{xy}(n, \omega) d\omega = \frac{E(dZ_x(n, \omega) dZ_y^*(n, \omega))}{(E(|dZ_x(n, \omega)|^2) E(|dZ_y^*(n, \omega)|^2))^{1/2}} = \frac{S_{xy}(n, \omega)}{\sqrt{S_x(n, \omega) \cdot S_y(n, \omega)}} d\omega$$

où $S_x(n, \omega)$, $S_y(n, \omega)$ sont les éléments de la diagonale principale de S (Eq. (4.4)) et $S_{x,y}(n, \omega)$, $S_{y,x}(n, \omega)$ les éléments extra diagonaux.

Dans le cas où la paire (x, y) est conjointement stationnaire $h[n, m] = h[n - m]$,

$$H(n, \omega) = \sum_{m \geq 0}^n h[n - m] e^{-j\omega(n-m)} = H(\omega) \quad \text{et on retrouve la définition classique de la fonction de}$$

cohérence $C_{xy}(\omega)$:

$$C_{xy}(\omega) d\omega = \frac{E(dZ_x(\omega) dZ_y^*(\omega))}{(E(|dZ_x(\omega)|^2) E(|dZ_y^*(\omega)|^2))^{1/2}} = \frac{S_{xy}(\omega)}{\sqrt{S_x(\omega) \cdot S_y(\omega)}} d\omega$$

4.2.3 Définition d'une cohérence non stationnaire à partir des transformées de Fourier des fonctions de covariances

Dans le cas stationnaire, la fonction de cohérence étant définie par

$$C_{xy}(\omega) = \frac{S_{xy}(\omega)}{\sqrt{S_x(\omega) \cdot S_y(\omega)}} = \frac{\hat{\Gamma}_{xy}(\omega)}{\sqrt{\hat{\Gamma}_x(\omega) \cdot \hat{\Gamma}_y(\omega)}}$$

avec $\Gamma_{xy}[p] = E(x[n]y^*[n-p])$, $\Gamma_x[p] = E(x[n]x^*[n-p])$, $\Gamma_y[p] = E(y[n]y^*[n-p])$ et où $\hat{\Gamma}$ désigne la transformée de Fourier de Γ , une définition analogue peut être proposée dans le cas non stationnaire où il faut considérer les covariances non stationnaires (dépendance en n et p et non pas seulement en p)

$$\Gamma_{xy}[n, n-p] = E(x[n]y^*[n-p]),$$

$$\Gamma_x[n, n-p] = E(x[n]x^*[n-p]),$$

$$\Gamma_y[n, n-p] = E(y[n]y^*[n-p])$$

et leurs transformées de Fourier relativement à la variable p , $S_{x,y}(n, \omega) = \hat{\Gamma}_{xy}(n, \omega)$, $S_x(n, \omega) = \hat{\Gamma}_x(n, \omega)$, $S_y(n, \omega) = \hat{\Gamma}_y(n, \omega)$. On aboutit à :

$$C_{xy}(n, \omega) = \frac{S_{xy}(n, \omega)}{\sqrt{S_x(n, \omega) \cdot S_y(n, \omega)}}$$

(en admettant la positivité du terme dont on prend la racine au dénominateur)

Un lien peut être établi avec les représentations du type Wigner-Ville en temps discret :

$$WV_{x,y}(n, \omega) = \sum_k x[n]y^*[n-k]e^{-j\omega k}, \quad WV_x(n, \omega) = \sum_k x[n]x^*[n-k]e^{-j\omega k} \quad \text{et}$$

$$WV_y(n, \omega) = \sum_k y[n]y^*[n-k]e^{-j\omega k}$$

car on a

$$C_{xy}(n, \omega) = \frac{E(WV_{x,y}(n, \omega))}{\sqrt{E(WV_x(n, \omega)) \cdot E(WV_y(n, \omega))}}$$

Le lien entre fonction de cohérence et transformée de Wigner-Ville a été abordé dans la littérature [177-179]. Certaines études concernant des aspects théoriques [180, 181] aboutissent à une définition d'une cohérence temps-fréquence généralisant la cohérence classique [44, 45]. Ainsi la cohérence temps-fréquence, pour deux signaux x et y aléatoires d'ordre deux, est définie dans [180] par :

$$C_{xy}(t, f) = \frac{S_{xy}(t, f)}{\sqrt{S_x(t, f) \cdot S_y(t, f)}}$$

où $S_{xy}(t, f)$, $S_x(t, f)$, et $S_y(t, f)$ sont respectivement le spectre de Wigner-Ville, ou DSPI (densité spectrale de puissance instantanée, dépendante du temps), croisée entre les deux signaux et les DSPI marginales, définies par :

$$S_{u,v}(t, f) = \int_{\mathbb{R}} K_{u,v}(t + \frac{\tau}{2}, t - \frac{\tau}{2}) e^{-2\pi i f \tau} d\tau, (t, f) \in \mathbb{R}^2$$

où $K_{u,v}(t + \frac{\tau}{2}, t - \frac{\tau}{2}) = E(u(t + \frac{\tau}{2})v^*(t - \frac{\tau}{2}))$, $(t, \tau) \in \mathbb{R}^2$ est la fonction covariance calculée en $(t + \frac{\tau}{2}, t - \frac{\tau}{2})$ pour (u, v) correspondant respectivement à (x, y) , (x, x) , ou (y, y) .

Certaines conditions sont cependant introduites dans [180] pour que $C_{xy}(t, f)$ soit bien définie et présente effectivement les caractéristiques d'une fonction de cohérence. Elles concernent la possibilité d'approximer sur un intervalle court la covariance non stationnaire par une covariance stationnaire. Ceci correspond à une condition de semi-stationnarité du signal qui garantit la positivité de sa distribution [182]. Il est en fait difficile de garantir ce type de condition dans le cas des signaux SEEG épileptiques, particulièrement aux alentours des crises [165, 183].

4.2.4 Définition d'une cohérence d'ondelettes

Certains auteurs [177, 184, 185] ont utilisé une forme particulière de cohérence dans le domaine temps-fréquence, dite cohérence d'ondelettes et qui peut être présentée comme suit.

La transformée en ondelettes d'un signal x est une fonction du temps τ et de la fréquence f obtenue par corrélation de ce signal avec une famille d'ondelettes [95] :

$$W_x(\tau, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \cdot \psi_{\tau, f}^*(u) du, (\tau, f) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$$

où $\psi_{\tau, f}$ est la famille d'ondelettes et où * désigne l'opérateur de conjugaison complexe. Dans le cas où x est aléatoire et en analogie avec la densité spectrale classique un spectre d'ondelettes peut être défini pour x par :

$$SW_x(t, f) = E(|W_x(t, f)|^2)$$

et de manière identique pour y .

De même, le spectre croisé d'ondelettes pour deux signaux x et y peut être défini en fonction du temps t et de la fréquence f par :

$$SW_{x,y}(t, f) = E(W_x(t, f) \cdot W_y^*(t, f))$$

Une cohérence d'ondelettes, en analogie avec la cohérence classique, peut être enfin introduite, en module, à partir des spectres calculés ci-dessus de la manière suivante :

$$WCoh(t, f) = \frac{|SW_{x,y}(t, f)|}{\sqrt{SW_x(t, f) \cdot SW_y(t, f)}}$$

Étant donné que $SW_{x,y}(t, f)$ est un produit scalaire entre la transformée en ondelettes de x et celle de y , l'inégalité de Schwartz assure que $WCoh(t, f)$ prend ses valeurs entre 0 et 1.

En prenant pour $\psi_{\tau, f}(\tau, f)$, au lieu d'une famille d'ondelettes, une famille $\psi_{\tau, f}(t) = P(\tau - t)e^{2\pi j f \tau}$, $(\tau, f) \in \mathbb{R}^2$ où P correspond à une fenêtre de pondération locale du signal, de support borné symétrique par rapport à t , $WCoh(t, f)$ pourra encore être considérée comme une cohérence temps-fréquence et on retrouve les définitions introduites en § 4.2.1.

4.2.5 Cohérence définie à partir d'un modèle paramétrique

Les méthodes paramétriques appliquées à la modélisation des processus stochastiques stationnaires scalaires (un seul capteur) ou vectoriels (au moins deux capteurs) ont déjà une longue histoire [186] (avec en particulier les travaux de Box et Jenkins [187]). De nombreux processus stationnaires peuvent être efficacement caractérisés au 2^{ème} ordre par un petit ensemble de paramètres qui permet, d'une part, de calculer le spectre de puissance (ou la

matrice spectrale) et, d'autre part, de synthétiser un signal ayant cette même caractérisation spectrale [188] à partir d'algorithmes de simulation causaux, récurrents (modèles AR) ou non récurrents (modèles MA) ou mixtes (modèles ARMA). Les méthodes paramétriques ont été, et sont toujours, employées dans une grande variété d'applications comprenant la compression de la parole et d'images, la reconnaissance de signaux, l'identification de systèmes, et l'estimation de fréquences [43, 189]. Cette modélisation paramétrique stationnaire a été naturellement étendue au cas non stationnaire, de manière très simple, en rendant dépendants du temps les paramètres dans les algorithmes de simulation, qui correspondent alors à des opérateurs linéaires (en négligeant l'effet des conditions initiales) causaux non stationnaires. Se pose cependant dans ce cas le problème de la définition d'une densité spectrale évolutive, consistante avec la définition du cas stationnaire. De fait, l'usage des paramètres du modèle pour en déduire la densité spectrale, complètement banalisé dans le cas stationnaire, est moins évident dans le cas non stationnaire [186].

Dans le cas où le signal $x[n]$ est un processus stationnaire ARMA qui satisfait l'équation récurrente suivante :

$$x[n] = -\sum_{i=1}^p a(i)x[n-i] + \sum_{i=0}^q b(i)e[n-i], \quad n \in \mathbb{Z}$$

où $e[n]$ est un bruit blanc centré de variance unité, et où les $a(i)$ et $b(i)$ sont respectivement les paramètres des parties AR et MA. Les ordres des parties AR et MA sont respectivement égales à p et à q . Introduisant les polynômes :

$$\begin{aligned} A(z) &= 1 + a(1)z^{-1} + \dots + a(p)z^{-p} \\ B(z) &= b(0) + b(1)z^{-1} + \dots + b(q)z^{-q} \end{aligned}$$

La fonction de transfert en Z du filtre linéaire équivalent, sa réponse en fréquence, et sa réponse impulsionnelle (causale et supposée stable) sont :

$$\frac{B(z)}{A(z)}, \quad H(\omega) = \frac{B(e^{j\omega})}{A(e^{j\omega})}, \quad h[n] = TZ^{-1}\left(\frac{B(z)}{A(z)}\right)[n]$$

où TZ^{-1} est la transformée en Z inverse, tandis que densité spectrale de puissance s'écrit :

$$S(\omega) = \frac{B(e^{j\omega})B^*(e^{j\omega})}{A(e^{j\omega})A^*(e^{j\omega})}$$

Considérons à présent l'extension non stationnaire de ce modèle :

$$x[n] = -\sum_{i=1}^p a_n(i)x[n-i] + \sum_{i=1}^q b_n(i)e[n-i], n \in \mathbb{Z}$$

Dans le domaine temporel, le signal $x[n]$ correspond à présent à la sortie d'un système causal, linéaire, de réponse impulsionnelle non stationnaire $h[n, m]$ qui reçoit sur son entrée le même bruit blanc que précédemment. La sortie du système s'écrit alors [186]:

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^n h[n, m]e[m]$$

Il est alors assez naturel d'introduire comme étant la densité spectrale dépendante du temps la fonction de n et de ω :

$$S(n, \omega) = \frac{B_n(e^{j\omega})B_n^*(e^{j\omega})}{A_n(e^{j\omega})A_n^*(e^{j\omega})} \quad (4.5)$$

où

$$\begin{aligned} A_n(z) &= 1 + a_n(1)e^{-j\omega} + \dots + a_n(p)e^{-j\omega p} \\ B_n(z) &= b_n(0) + b_n(1)e^{-j\omega} + \dots + b_n(q)e^{-j\omega q} \end{aligned}$$

Cependant ce n'est pas là la seule définition candidate puisque dans la section 4.2.2 il a été proposé de définir $S(n, \omega)$ par :

$$S(n, \omega) = |H(n, \omega)|^2$$

avec

$$H(n, \omega) = \sum_{m=-\infty}^n h[n, m]e^{-j\omega(n-m)}$$

ce qui correspond à une définition distincte de celle de l'Eq. (4.5). Ceci est évident si on remarque que la première n'utilise que les coefficients du modèle à l'instant n alors que clairement, $h[n, m]$ représente la réponse à l'instant n du filtre non stationnaire à une impulsion placée en $m \leq n$ et dépend donc obligatoirement des valeurs des coefficients pour les instants entre m et n . La première définition a été désignée par P. Flandrin comme un modèle tangent [190].

Une autre approche pour modéliser paramétriquement une densité spectrale non stationnaire, est d'introduire non pas un modèle temporel (ARMA non stationnaire) mais un modèle paramétrique fréquentiel de forme rationnelle avec les coefficients des polynômes dépendant du temps [191]. Ces deux types de modélisation ne sont pas généralement équivalents.

4.3 Méthodes de mesure pour les cohérences temps fréquence

Ce chapitre concerne la mesure pratique (c'est-à-dire l'estimation en ce sens qu'on a dégagé une cible théorique claire) de la relation en fonction du temps et de la fréquence. Nous avons vu que la cohérence temps-fréquence, quelle que soit la définition adoptée, est une généralisation (au risque de perdre au passage certaines propriétés) de la cohérence classique et qu'elle prend la forme

$$C_{xy}(t, f) = \frac{S_{xy}(t, f)}{\sqrt{S_x(t, f) \cdot S_y(t, f)}}$$

où $S_{xy}(t, f)$, $S_x(t, f)$, et $S_y(t, f)$ sont les DSP (densité spectrale de puissance définie d'une manière ou d'une autre) croisée et marginale. Ces densités spectrales peuvent être estimées de différentes façons, suivant que l'on se base, par exemple, sur une décomposition en ondelettes ou une distribution de Wigner-Ville.

Nous présentons dans les sous sections qui suivent le calcul de la cohérence effectué en estimant les DSP, mentionnées ci-dessus, par la méthode multi-fenêtres [192], par les ondelettes, et enfin par la distribution de Wigner-Ville [177-179].

4.3.1 Méthode multi fenêtres

Cette méthode considère comme cible la définition de la cohérence temps-fréquence proposée en § 4.2.1. Rappelons que le périodogramme (module au carré de la transformée de Fourier d'une tranche de signal) est un mauvais estimateur spectral pour les signaux stationnaires. Sur une durée longue le biais est faible mais la variance ne diminue pas. La variance peut être réduite en segmentant le signal, en calculant un périodogramme sur chaque segment, et en faisant la moyenne des différents périodogrammes. Ce procédé augmente cependant le biais de l'estimation spectrale. Quand la durée d'observation est suffisante il est possible d'obtenir

une estimation spectrale présentant un biais et une variance satisfaisants. Cependant, quand les données sont limitées, un compromis entre le biais et la variance est inévitable.

Pour les signaux courts et limités en durée, Thomson a suggéré d'utiliser un certain nombre de fenêtres orthogonales distinctes pour calculer autant de périodogrammes du signal entier et en faire la moyenne pour construire une estimation spectrale. Les fenêtres doivent être orthogonales pour réduire au mieux la variance et concentrées de façon optimale en fréquence (pour minimiser le biais). Récemment la méthode multi-fenêtres de Thomson a été utilisée pour analyser des signaux aléatoires non stationnaires (biblio dans [192]), en construisant une estimation de la DSP fonction du temps, et présentant un bon compromis biais-variance.

Une estimation du spectre d'un signal stationnaire $x(n)$ de taille N , en utilisant une fenêtre v_k , est faite de façon suivante :

$$X_k(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) v_n^k e^{-j2\pi fn}$$

où $X_k(f)$ et $|X_k(f)|^2$ sont respectivement nommés le k ième coefficient propre (eigen-coefficient) et le k ième spectre propre (eigen-spectrum).

Le spectre multi-fenêtres est obtenu en moyennant K spectres propres :

$$\hat{S}(f) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} |x_k(f)|^2$$

K , nombre total des fenêtres utilisées, dépend de la nature du signal en question.

On peut étendre cette approche multi-fenêtres vers une analyse temps-fréquence et définir la fonction de cohérence multi-fenêtres entre deux signaux $x(n)$ et $y(n)$:

$$\Gamma_{MF}(t, f) = \frac{\left| \sum_{k=0}^{K-1} X_k(t, f) Y_k^*(t, f) \right|^2}{\sum_{k=0}^{K-1} |X_k(t, f)|^2 \sum_{k=0}^{K-1} |Y_k(t, f)|^2}$$

pour cela les fenêtres sont prises de la forme v_{n-t}^k .

N'importe quel ensemble de fenêtres orthogonales et concentrées en fréquence peut être utilisé pour cette analyse. La comparaison entre deux ensembles, c'est-à-dire les suites de Slepian et les fonctions de Hermite, montre qu'ils mènent à des performances plus ou moins équivalentes malgré l'optimalité des suites de Slepian. D'autre part la mise en œuvre des fonctions de Hermite est beaucoup plus simple. Si des fenêtres de taille variable sont nécessaires pour mettre en évidence des non stationnarités dans le signal, la simplicité du calcul des fonctions de Hermite compense la perte d'optimalité.

Malgré la faible variance de la méthode multi fenêtres, sa résolution fréquentielle n'est pas satisfaisante. Comme on peut le constater Fig. 4.1 pour réduire la variance d'estimation, il faut augmenter le nombre des fenêtres mais ceci au détriment de la résolution fréquentielle. Les résultats présentés Fig. 4.1 ont été obtenus en utilisant des fonctions de Hermite (qui ont plus ou moins la même efficacité que les séquences Slepian). La Fig. 4.1 (a) montre les 6 premières de ces fonctions. Les Fig. 4.1 (b), (c), et (d) présentent respectivement les estimations de la cohérence, pour deux signaux partageant une sinusoïde de fréquence 51Hz, en utilisant 1, 3, et 6 fonctions Hermite pour calculer les spectres. Sur ces figures, on remarque que la variance de la cohérence diminue en augmentant le nombre des fonctions de Hermite mais que, d'autre part, la bande fréquentielle correspondant à la relation détectée s'élargit.

4.3.2 Estimation spectrale temps-fréquence à partir de la fonction de transfert généralisée

Nous considérons essentiellement ici un estimateur pour la densité spectrale de puissance non stationnaire en correspondance avec la définition donnée en § 4.2.2. Cette définition, partant de la décomposition de Wold-Cramer $x[n] = \sum_{m=-\infty}^n h[n,m]\varepsilon[m]$, introduit

$$H(n, \omega) = \sum_{m=-\infty}^n h[n,m]e^{-j\omega(n-m)} \text{ et la densité spectrale } S(n, \omega) = |H(n, \omega)|^2.$$

A notre connaissance, le seul estimateur proposé dans la littérature prenant en compte explicitement cette définition qui semble *a priori* très naturelle, est le périodogramme évolutionnaire (Evolutionary Periodogram) proposé par Kayhan dans [193].

Partant de

$$x[n] = \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n} H(n, \omega) dZ(\omega)$$

où la densité spectrale

$$\frac{1}{d\omega} E\{|dZ(\omega)|^2\} = \frac{1}{2\pi}$$

ne dépend pas de ω , Kayhan considère pour une fréquence ω_0 fixée, la décomposition :

$$x[n] = x_0[n] + y_{\omega_0}[n] = A(n, \omega_0) e^{j\omega_0 n} + y_{\omega_0}[n] \quad (4.6)$$

où $A(n, \omega_0) = H(n, \omega_0) dZ(\omega_0)$ est tel que $E(|A(n, \omega_0)|^2) = S(n, \omega_0) \frac{d\omega_0}{2\pi}$.

L'idée est alors d'estimer $A(n, \omega_0)$ à partir du signal observé.

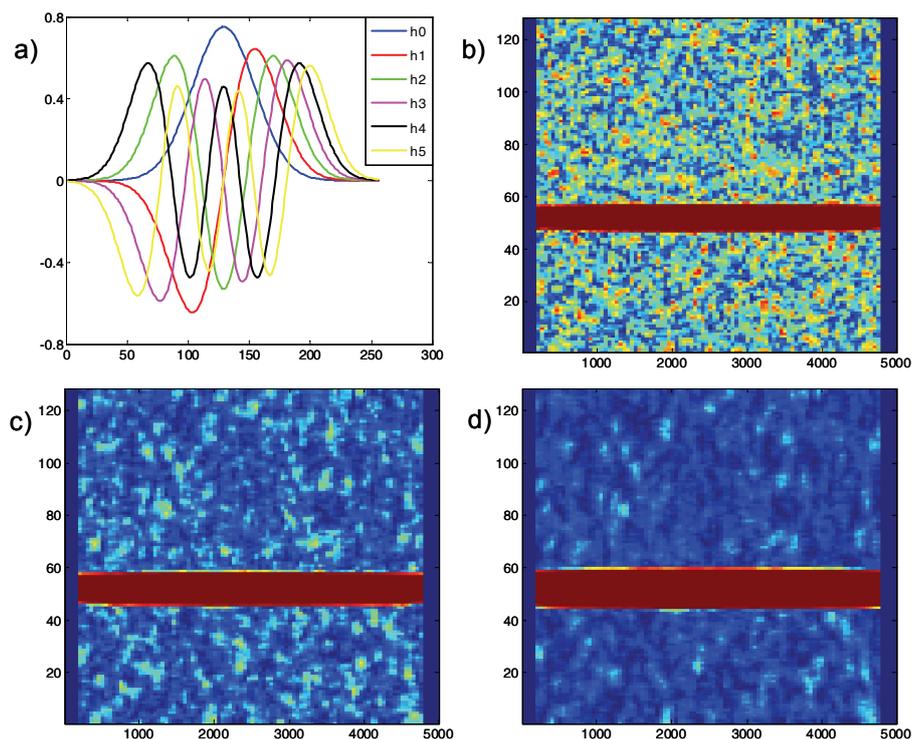


Fig. 4.1. La cohérence multi-fenêtres (pour toutes les figures sauf (a) l'abscisse et l'ordonnée correspondent respectivement au temps et à la fréquence). (a) Les six premières fonctions Hermite de taille 256 points. (b), (c), et (d) présentent respectivement les estimations de la cohérence, pour deux signaux qui partagent une sinusoïde de 51Hz, en utilisant 1, 3, et 6 fonctions Hermite dans le calcul des spectres.

Cette estimation est rendue paramétrique en imposant

$$A(n, \omega_0) = \sum_{k=0}^{M(\omega_0)-1} \beta_k [n] a_k = b^H [n] a \quad (H \text{ transpose et conjugué})$$

où les β_k sont des fonctions de base et où le vecteur aléatoire a regroupe les M (M peut dépendre de la fréquence) coefficients pour la décomposition de $A(n, \omega_0)$ sur cette base. La décomposition (Eq. (4.6) plus haut) se réécrit en exprimant vectoriellement la dépendance en n :

$$X = Fa + Y$$

Un estimateur linéaire est recherché pour $A(n, \omega_0)$, de la forme

$$\hat{A}(n, \omega_0) = \sum_{k=0}^{N-1} \omega_k^* [n] x[k] = W^H [n] X$$

ce qui permet d'écrire $\hat{A}(n, \omega_0) = W^H [n] Fa + W^H [n] Y$ et l'erreur quadratique moyenne :

$$E(|A(n, \omega_0) - \hat{A}(n, \omega_0)|^2) = W^H [n] E(Y Y^H) W [n] = W^H [n] R_{Y,Y} W [n]$$

Faisant l'hypothèse simplificatrice $E(Y Y^H) = I$ et tenant compte de la contrainte

$$W^H [n] Fa = b^H [n] a \Rightarrow W^H [n] F = b^H [n]$$

qui revient à imposer un biais nul, la minimisation de l'erreur aboutit à

$$\hat{A}(n, \omega_0) = b^H [n] F^H X,$$

soit encore :

$$\hat{A}(n, \omega_0) = \sum_{i=0}^{M-1} \beta_i^* [n] \sum_{k=0}^{N-1} \beta_i [k] x[k] e^{-j\omega_0 k}$$

De l'estimateur ci-dessus, Kayhan déduit alors l'estimateur (qu'il appelle 'Evolutionary Periodogram') de la densité spectrale fonction de n :

$$\hat{S}_{EP}(n, \omega) = \frac{2\pi}{d\omega_0} \left| \hat{A}(n, \omega_0) \right|^2 = \frac{N}{M} \left| \sum_{l=0}^{M-1} \beta_l^* [n] \sum_{k=0}^{N-1} \beta_l [k] x[k] e^{-j\omega_0 k} \right|^2$$

Kayhan n'a pas cependant proposé à notre connaissance et pour l'instant une version vectorielle de son estimateur d'où l'on pourrait tirer une estimation de cohérence fonction du temps.

4.3.3 Approche par la distribution de Wigner-Ville

La classe de Cohen comprend l'ensemble des distributions quadratiques énergétiques invariantes relativement aux translations temporelles et fréquentielles. Cette transformation bilinéaire peut être formulée par :

$$T_x(t, f; \varphi) = \iiint \varphi(\tau, \nu) x\left(s + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(s - \frac{\tau}{2}\right) e^{j2\pi(\nu(s-t) - f\tau)} d\nu ds d\tau$$

où t et τ sont des variables temporelles, f et ν sont des variables fréquentielles, et φ est une fonction arbitraire appelée noyau ou fonction de paramétrisation.

Une distribution particulière de la classe de Cohen, en prenant le noyau $\varphi(\tau, \nu) = 1$, est la distribution de Wigner-Ville (DWV), qui s'écrit :

$$WV_x(t, f) = \int x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{j2\pi f\tau} d\tau$$

Malgré sa meilleure résolution de représentation dans le plan temps-fréquence, la DWV souffre d'un inconvénient important car elle introduit des termes d'interférence (des termes croisés) lors de l'analyse de signaux multi-composantes. Ces termes d'interférences sont dus au caractère bilinéaire de la DWV et ils gênent la lisibilité de l'image temps-fréquence. L'atténuation de ces termes peut être menée en deux étapes : la première consiste à utiliser le signal analytique pour éliminer les termes croisés entre les composantes portées par les fréquences négatives et celles portées par les fréquences positives, et la seconde à lisser la DWV : les termes croisés ayant une structure oscillatoire, un lissage dans le plan temps-fréquence (un filtrage passe-bas 2D) permet de les atténuer. Une méthode de lissage, qui peut répondre en partie au problème de l'antagonisme entre résolution temporelle et résolution fréquentielle, consiste à effectuer un lissage séparable en temps et en fréquence [194] en choisissant le noyau :

$$\varphi(\tau, \nu) = G(\nu)q(\tau) = G(\nu)h(\tau/2)h^*(-\tau/2)$$

Un tel lissage définit la distribution Pseudo WV Lissée (DPWVL):

$$DWVL_x(t, f) = \int e^{-j2\pi f\tau} q(\tau) \left(\int x(s + \frac{\tau}{2}) x^*(s - \frac{\tau}{2}) g(t-s) ds \right) d\tau$$

Le terme Pseudo fait référence à l'intégration sur une région limitée dans le plan temps-fréquence (imposée par la fenêtre g qui détermine le lissage temporel, et par h qui correspond au lissage fréquentiel) au lieu de l'intégration sur tout le plan effectuée pour la DWV. La DPWVL s'avère efficace en pratique pour la représentation temps-fréquence des signaux non stationnaires [167].

Quant à l'estimation de la cohérence à base de la DPWVL, la condition pour qu'elle soit applicable est que les distributions des signaux étudiés soient positives [180]. Comme déjà indiqué la semi-stationnarité d'un signal garantit la positivité de sa distribution [182] mais cette condition ne peut être assurément remplie dans le cas des signaux SEEG épileptiques, particulièrement aux alentours des crises [165, 183]. Pour ce qui est de la réduction de la variance et du biais (et donc de la résolution), quand on considère que la cible (quantité à estimer) définie sur le plan temps fréquence correspond à celle décrite en 4.2.2, le rôle joué par le noyau de lissage et son support est clair. Plus le support est étendu plus la variance sera réduite au détriment de la résolution.

4.3.4 Cohérence d'ondelettes

Le spectre croisé d'ondelettes pour deux signaux x et y , à partir de leurs transformées en ondelettes, peut être calculé comme suit [177, 184, 185], en fonction du temps t et de la fréquence f :

$$\overline{SW}_{xy}(t, f) = \frac{1}{\delta} \int_{t-\delta/2}^{t+\delta/2} W_x(\tau, f) \cdot W_y^*(\tau, f) d\tau$$

où δ est la taille d'une fenêtre temporelle utilisée pour estimer l'espérance mathématique $E[W_x(t, f) \cdot W_y^*(t, f)]$ en effectuant un moyennage. Les quantités $\overline{SW}_{xx}(t, f)$ et $\overline{SW}_{yy}(t, f)$ sont calculées de manière similaire.

La cohérence d'ondelettes estimée, en analogie avec la cohérence classique, est calculée à partir des spectres estimés ci-dessus de manière suivante :

$$\overline{WCoh}(t, f) = \frac{|\overline{SW}_{xy}(t, f)|}{\sqrt{\overline{SW}_{xx}(t, f) \cdot \overline{SW}_{yy}(t, f)}}$$

Étant donné que $\overline{SW}_x(t, f)$ est là encore un produit scalaire entre les transformées en ondelettes de x et de y , l'inégalité de Schwartz assure toujours que $\overline{WCoh}(t, f)$ prend ses valeurs entre 0 et 1. Il faut souligner que pour $\delta \rightarrow 0$, la valeur de $\overline{WCoh}(t, f)$ tendra vers 1 partout où il y a de l'énergie dans le plan temps fréquence pour chacun des signaux.

On peut s'attendre *a priori*, quand on utilise la cohérence d'ondelettes, à certaines limitations liées à la propriété de multi-résolutions qui fait que les atomes temps fréquence d'ondelettes sont localisés dans "des boîtes de Heisenberg", c'est-à-dire des rectangles de largeurs et de longueurs différentes (Fig. 4.2 (a)). En particulier :

(i) Quand les deux signaux en question se partagent seulement une impulsion, la relation sera détectée par la cohérence d'ondelettes sur une plage temporelle plus large en basse fréquence (les boîtes de Heisenberg en basse fréquence sont plus larges) qu'en haute fréquence (Fig. 4.2 (b)), ce qui ne facilite pas l'interprétation.

(ii) Quand les signaux se partagent une sinusoïde en haute fréquence, la relation sera détectée dans une bande fréquentielle assez large, ce qui détruit la résolution fréquentielle (comparer les Fig. 4.2 (c) et (d)).

4.3.5 Approches paramétriques

A titre d'illustration de ce qui a été proposé dans la littérature dans le cadre de modélisation paramétrique non stationnaire, nous nous restreignons ici à trois approches présentées respectivement dans [191, 195], [196, 197], et [198, 199], pour l'estimation de la densité spectrale et de la fonction de cohérence non stationnaire dans un cadre paramétrique. Précisons cependant que la première n'a été appliquée, dans les références citées, qu'en dimension $K=1$ (signal scalaire). La deuxième et la troisième approches, ont par contre été développées pour une paire de signaux scalaires afin de mener au calcul d'une fonction de cohérence. Nous ne détaillons pas dans ce chapitre les trois méthodes qui sont explicitées dans

l'annexe A. Des simulations ont été effectuées pour la première méthode, avec des résultats décevants, ce qui fait que l'extension à $K=2$ n'a pas été envisagée. Pour la troisième approche, des résultats de simulation sont présentés et commentés dans l'annexe A.

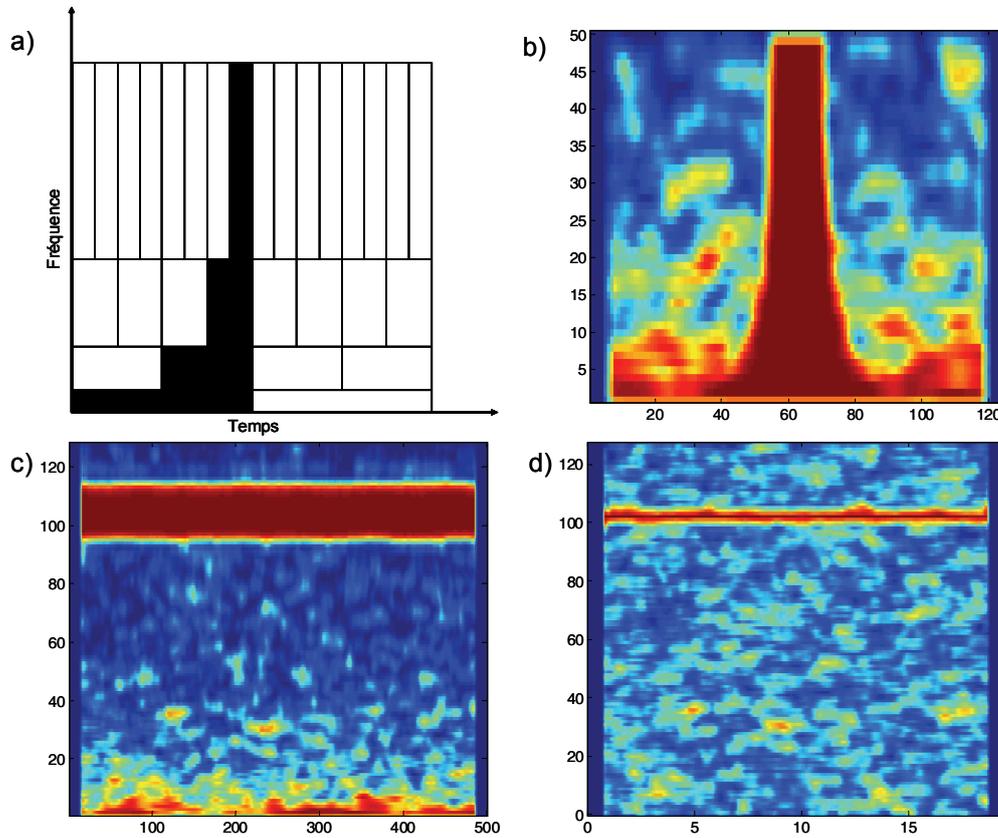


Fig. 4.2. Utilisation de la cohérence d'ondelettes (pour toutes les figures l'abscisse et l'ordonnée correspondent respectivement au temps et à la fréquence). (a) Les « boîtes de Heisenberg » dans lesquelles les atomes d'ondelettes sont localisés. (b) La cohérence d'ondelettes entre deux signaux qui se partagent seulement une impulsion. (c) La cohérence d'ondelettes entre deux signaux qui se partagent seulement une sinusoïde en haute fréquence. (d) R^2 temps-fréquence entre deux signaux qui se partagent seulement une sinusoïde en haute fréquence.

Les deux premières méthodes ont en commun de confiner la variabilité temporelle des paramètres dans un espace vectoriel : chaque paramètre dépendant du temps est défini comme une combinaison linéaire (à découvrir) de fonctions de base présélectionnées. L'ensemble des coefficients intervenant dans les combinaisons devient le paramètre (vectoriel) à déterminer pour instancier le modèle. D'un autre point de vue, la deuxième et la troisième méthodes ont en commun d'ajuster les paramètres par minimisation d'une erreur de prédiction dans le

domaine temporel, tandis que la première passe par un coût d'erreurs de modélisation évalué par comparaison de fonctions définies sur le plan temps-fréquence. Ainsi, pour préciser :

- La première, qui ne traite qu'une voie, est basée sur l'hypothèse qu'une « bonne » représentation temps-fréquence pouvant servir de cible pour ajuster (identifier) les paramètres d'un modèle de type spectre rationnel non stationnaire [191, 195], est disponible. Une distance entre la distribution TF (Temps-Fréquence) cible et une distribution TF calculée à partir du modèle est alors minimisée.
- La deuxième méthode est similaire à la première, dans sa manière de contourner le problème de la non stationnarité des paramètres par développement sur des fonctions de base. Les différences sont cependant que dans ce cas : (i) deux voies sont traitées, interprétées respectivement comme l'entrée et la sortie d'un modèle ARX non stationnaire, dont l'identification débouche sur l'estimation d'une fonction de transfert dépendante du temps, le même traitement effectué en échangeant les rôles de l'entrée et de la sortie débouchant sur une deuxième fonction de transfert, dont le produit avec la première correspond à la cohérence temps-fréquence estimée ; (ii) il n'est pas nécessaire, ni de disposer d'une cible TF, ni d'une connaissance *a priori* sur l'ordre exact du modèle.
- La troisième introduit un modèle du type ARMA vectoriel ($K=2$) non stationnaire, sans modéliser explicitement l'évolution temporelle des coefficients. La prise en compte de leur non stationnarité passe par l'utilisation d'un algorithme adaptatif classique (moindre carrés récurrents) avec un facteur d'oubli dont le rôle (implicite) est de n'autoriser qu'une évolution relativement lente des paramètres en fonction du temps.

Plus de détails sur ces trois méthodes sont donnés dans l'annexe A.

4.3.6 Conclusion sur les différentes mesures

En conclusion partielle sur ces différents types de mesures, on peut dire qu'étant donné les inconvénients concernant des méthodes citées ci-dessus, et à la suite de travaux effectués dans notre laboratoire [5], nous considérons que l'utilisation du module au carré de la fonction de cohérence calculée avec des spectres estimés par la méthode du périodogramme moyenné

(pour que la relation soit caractérisée en fonction du temps et la fréquence la cohérence est recalculée sur une suite de fenêtres décalées) reste une bonne méthode, la cohérence cible étant celle de § 4.2.1. Nous reconsidérons dans la section suivante l'utilisation de cette méthode en la comparant à une autre méthode que nous proposons.

Comme souligné par Zaveri dans [200] où est donnée une revue sur l'utilisation de la cohérence dans le domaine de l'EEG, les estimateurs proposés ont généralement un biais et une variance élevés, ce qui rend difficile l'interprétation des résultats obtenus pour des données réelles. Pour contourner ces difficultés, des bandes de fréquence d'intérêt peuvent être définies *a priori* pour y orienter l'analyse. Par exemple, des bandes classiques delta, thêta, alpha, bêta et gamma définies depuis longtemps pour l'EEG peuvent être employées pour y moyenner la fonction de cohérence [201] ou pour y calculer l'intercorrélation des signaux pré-filtrés (dans ces mêmes bandes) [18, 202]. Bien sûr, cette approche n'est pas entièrement satisfaisante puisque le choix intangible de ces bandes de fréquence, qui est souvent raisonnable dans les cas non pathologiques, peut devenir problématique dans le cadre de pathologies où, par définition, les choses ne se déroulent pas normalement (les phénomènes appropriés peuvent recouvrir partiellement deux bandes disjointes du «catalogue»).

4.4 Nouvelle méthode

Cette section concerne la comparaison de deux méthodes d'estimation de la relation entre les deux signaux dans le plan temps fréquence :

- (1) calcul du module au carré de la fonction de cohérence (MCFC) estimée dans une fenêtre temporelle glissante, et
- (2) calcul du module au carré d'un coefficient de corrélation (R^2) estimé entre les deux signaux préfiltrés par un même filtre à bande étroite, pour différentes valeurs de la fréquence centrale, également sur une fenêtre temporelle glissante.

La méthode (2) correspond à un nouvel estimateur pour caractériser l'évolution de la relation linéaire entre les signaux dans les domaines temporel et fréquentiel. Cet estimateur est basé sur le calcul de la fonction d'intercorrélation normalisée entre les signaux d'EEG filtrés par un même filtre à bande étroite. C'est le maximum du module relativement au décalage temporel de cette intercorrélation normalisée, qui est retenu, après élévation au carré. Cette procédure

est renouvelée pour un ensemble de bandes étroites de fréquences, de même largeur et se recouvrant partiellement, en utilisant une batterie continue de filtres. Asymptotiquement, pour une durée d'observation longue et une largeur de bande étroite, est obtenue la même valeur que celle donnée par l'estimateur classique du module au carré de la fonction de cohérence obtenu par la méthode du périodogramme. Cependant, l'application à des signaux simulés montre que ses performances (en termes de biais et de variance) peuvent être meilleures si l'on dispose d'une contrainte sur les valeurs à considérer pour le retard. La méthode a été également appliquée à des signaux réels SEEG intracérébraux enregistrés chez des patients épileptiques candidats à la chirurgie. Les résultats montrent qu'elle permet de suivre, avec une bonne résolution, l'évolution dans le plan temps-fréquence de la relation entre les signaux et qu'elle peut aider à mieux analyser les phénomènes paroxysmaux qui se produisent au début des crises.

4.4.1 Comparaison théorique des méthodes R^2 et MCFC

Dans cette sous-section on définit la statistique R^2 et on démontre mathématiquement son équivalence asymptotique avec la fonction de cohérence classique.

Supposons que x_1 et x_2 soient deux processus stochastiques centrés stationnaires au sens large avec les fonctions de covariance :

$$C_{x_1, x_2}(\tau) = E(x_1(t)x_2(t - \tau)), \quad \tau \in \mathbb{R};$$

et les densités spectrales correspondantes :

$$\gamma_{x_1, x_2}(f) = TF(C_{x_1, x_2})(f), \quad f \in \mathbb{R}$$

où TF désigne la transformée de Fourier.

La fonction de cohérence entre x_1 et x_2 est défini par :

$$\rho_{x_1, x_2}(f) = \frac{\gamma_{x_1, x_2}(f)}{\sqrt{\gamma_{x_1, x_1}(f) \cdot \gamma_{x_2, x_2}(f)}}$$

Considérons un filtre passe-bande de largeur de bande Δf et de fréquence centrale f_0 dont la réponse en fréquence s'écrit $G(f) = 1$ si $|f - f_0| < \Delta f/2$ ou $|f + f_0| < \Delta f/2$ (et zéro ailleurs)

Soient d'autre part les sorties z_1 et z_2 d'un tel filtre lorsque l'entrée est respectivement x_1 ou x_2 . La valeur absolue de l'intercorrélacion normée entre z_1 et z_2 , maximisée par rapport au retard τ , est donnée par :

$$|r(\tau^*)| = \max_{\tau} \frac{|E(z_1(t)z_2(t-\tau))|}{\sqrt{E(z_1^2(t))E(z_2^2(t))}}$$

où $\tau = \tau^*$ est la valeur permettant d'atteindre l'optimum.

Nous allons montrer que si Δf est petit et si γ_{x_i, x_j} est une fonction continue en $f = f_0$ on a alors :

$$|r(\tau^*)| \approx |\rho_{x_1, x_2}(f_0)|$$

D'après le théorème de Wiener-Khinchin on peut réécrire $|r(\tau^*)|$ de la façon suivante :

$$|r(\tau^*)| = \max_{\tau} \frac{C_{z_1, z_2}(\tau)}{\sqrt{C_{z_1, z_1}(0)C_{z_2, z_2}(0)}} = \max_{\tau} \frac{|\int \gamma_{z_1, z_2}(f) e^{j2\pi f\tau} df|}{\sqrt{\int \gamma_{z_1, z_1}(f) df \int \gamma_{z_2, z_2}(f) df}} \quad (4.7)$$

Pour de valeurs petites de Δf on a :

$$\begin{aligned} \int \gamma_{z_1, z_2}(f) e^{j2\pi f\tau} df &= \int_{-f_0-\Delta f}^{-f_0+\Delta f} \gamma_{x_1, x_2}(f) e^{j2\pi f\tau} df + \int_{f_0-\Delta f}^{f_0+\Delta f} \gamma_{x_1, x_2}(f) e^{j2\pi f\tau} df \\ &= \Delta f \gamma_{x_1, x_2}(-f_0) e^{-j2\pi f_0\tau} + \Delta f \gamma_{x_1, x_2}(f_0) e^{j2\pi f_0\tau} \end{aligned}$$

$$\int \gamma_{z_1, z_1}(f) df = \int_{-f_0-\Delta f}^{-f_0+\Delta f} \gamma_{x_1, x_1}(f) df + \int_{f_0-\Delta f}^{f_0+\Delta f} \gamma_{x_1, x_1}(f) df = 2\Delta f \gamma_{x_1, x_1}(f_0),$$

et de même manière $\int \gamma_{z_2, z_2}(f) df = 2\Delta f \gamma_{x_2, x_2}(f_0)$.

Donc on peut récrit Eq. (4.7) de façon suivante :

$$\begin{aligned} |r(\tau^*)| &\approx \max_{\tau} \frac{|\left(\gamma_{x_1, x_2}(f_0) e^{j2\pi f_0\tau} + \gamma_{x_1, x_2}(-f_0) e^{-j2\pi f_0\tau}\right)| 2\Delta f}{\sqrt{2\gamma_{x_1, x_1}(f_0) \Delta f \cdot 2\gamma_{x_2, x_2}(f_0) \Delta f}} \\ &= \max_{\tau} \frac{|\operatorname{Re}(\gamma_{x_1, x_2}(f_0) e^{j2\pi f_0\tau})|}{\sqrt{\gamma_{x_1, x_1}(f_0) \cdot \gamma_{x_2, x_2}(f_0)}} \end{aligned}$$

puisque $C_{x_1, x_2}(\tau) \in \mathbb{R}$ et que donc $\gamma_{x_1, x_2}(f_0) = \gamma_{x_1, x_2}^*(-f_0)$. Étant donné que d'autre part pour une complexe z et un réel θ on a $\max_{\theta} \operatorname{Re}(ze^{j\theta}) = |z|$, on en déduit l'approximation annoncée :

$$|r(\tau^*)| = \frac{|\gamma_{x_1, x_2}(f_0)|}{\sqrt{\gamma_{x_1, x_1}(f_0) \cdot \gamma_{x_2, x_2}(f_0)}} = |\rho_{x_1, x_2}(f_0)|$$

Donc, si on filtre des signaux dans des bandes assez étroites avant de calculer le coefficient de corrélation et si les paramètres temporels sont équivalents pour les deux méthodes, l'équivalence des deux méthodes est acquise.

4.4.2 Banc de filtres utilisé pour le calcul de R^2 en temps fréquence

Le filtrage dans les bandes étroites peut être réalisé de différentes manières. Dans cette thèse on a opté pour une méthode basée sur la transformée de Fourier à court terme (TFCT). La TFCT peut être considérée comme un banc de filtres avec largeur de bande fine, fixée par l'enveloppe.

Soit $h(t)$ une réponse impulsionnelle paire correspondant à un filtre passe-bas. On peut lui associer un filtre passe-bande avec fréquence centrale $f = f_0$ dont la réponse impulsionnelle est :

$$h_{f_0}(t) = h(t) \cdot \cos 2\pi f_0 t$$

où $h_{f_0}(t)$ est la partie réelle du filtre complexe $\tilde{h}_{f_0}(t) = h(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t}$. Donc pour un signal réel $x(t)$, on a $x * h_{f_0} = \text{Re}(x * \tilde{h}_{f_0})$ et en conséquence :

$$(x * \tilde{h}_{f_0})(t) = \left(\int_{\mathfrak{R}} x(u) \cdot h(t-u) \cdot e^{-j2\pi f_0 u} du \right) \cdot e^{j2\pi f_0 t}$$

Étant donné que h est une fonction paire, on peut re-écrire l'équation ci-dessus comme suit :

$$(x * \tilde{h}_{f_0})(t) = \left(\int_{\mathfrak{R}} x(u) \cdot h(u-t) \cdot e^{-j2\pi f_0 u} du \right) \cdot e^{j2\pi f_0 t}$$

Considérant enfin la définition de la TFCT, on aboutit à :

$$(x * \tilde{h}_{f_0})(t) = TFCT_x(t, f_0) \cdot e^{j2\pi f_0 t}$$

Notons que h dans la définition de la TFCT s'interprète comme une fenêtre temporelle qui pondère un morceau de signal et qui détermine les résolutions temporelle et fréquentielle.

4.4.3 Forme des estimateurs

En vue d'une utilisation sur signaux échantillonnés, des estimateurs définis sur de tels signaux doivent être introduits. Le module carré de la fonction de cohérence est estimé sur une fenêtre glissante d'horizon N_0 centrée sur t (divisée en Nb blocs avec recouvrement) par la méthode du périodogramme :

$$\left| \hat{\rho}_{ij}[t, f] \right|^2 = \frac{\sum_{k=1}^{Nb} |X_i^k(f, t) X_j^{k*}(f, t)|^2}{\sum_{k=1}^{Nb} |X_i^k(f, t)|^2 \sum_{k=1}^{Nb} |X_j^k(f, t)|^2}$$

où $X^k(f, t)$ désigne la transformée de Fourier rapide du signal discret x pondéré avec une fenêtre de Hanning correspondant au bloc d'indice k dans la fenêtre d'analyse. Le taux de recouvrement retenu entre deux blocs successifs est celui qui a conduit à la plus faible erreur quadratique moyenne entre les valeurs théoriques et estimées du module au carré de la fonction de cohérence. Sur la base de plusieurs simulations, on a retenu un taux de recouvrement optimal égal à 80% bien que, à partir de 50%, l'erreur moyenne décroisse peu (ce qui confirme les résultats de [47]).

Pour l'estimation de $R_{ij}^2(t, f)$, les signaux discrets $x_{i,f}$ et $x_{j,f}$, résultant de l'application d'un banc de filtres sur respectivement x_i et x_j , sont exploités :

$$\hat{R}_{ij}^2[t, f] = \max_{\tau_m < \tau < \tau_M} \left(\frac{\left(\sum_{k=-H/2}^{H/2} (x_{i,f}[t+k] - \bar{x}_{i,f})(x_{j,f}[t+k+\tau] - \bar{x}_{j,f}) \right)^2}{\sum_{k=-H/2}^{H/2} (x_{i,f}[t+k] - \bar{x}_{i,f})^2 \cdot \sum_{k=-H/2}^{H/2} (x_{j,f}[t+k+\tau] - \bar{x}_{j,f})^2} \right)$$

où $\bar{x}_{i,f}$ est la moyenne, sur l'horizon H centrée sur t , de $x_{i,f}$. La taille de la fenêtre temporelle (Hanning) utilisée dans le calcul de $TFCT$ étant L on a ici $H=N_0-L$. Cette taille de H a été choisie pour qu'une même quantité d'informations soit utilisée par les deux estimateurs (pour être plus précis mentionnons que nous avons négligé les effets de bord introduits par les décalages τ_m et τ_M qui restent petits comparés à L).

4.4.4 Performances comparées des méthodes R^2 et MCFC

Dans cette section, on va procéder à une comparaison statistique entre des résultats obtenus en simulation avec les deux méthodes en considérant qu'elles correspondent à deux procédures d'estimation d'une même quantité théorique définie sur le plan temps fréquence : le module carré de la fonction de cohérence (MCFC) défini sur une fenêtre temporelle glissante. Pour cela sont utilisés des signaux simulés par le modèles stationnaire M_1 déjà décrit dans le chapitre 3 et un modèle M_6 non stationnaire introduit plus bas. L'évaluation est faite classiquement en termes de biais et de variance ou d'erreur quadratique moyenne (EQM). Elle est effectuée pour différents types de signaux comme décrit dans la suite.

4.4.4.1 Modèle M_1 : cas stationnaire

La première expérimentation concernait le cas stationnaire et a été conduite en utilisant le modèle M_1 avec le paramètre α indépendant du temps. Les signaux x_1 et x_2 sont alors stationnaires et l'expression théorique de $|\rho[t, f]|^2$ peut être dérivée :

$$|\rho[t, f]|^2 = \frac{C^4 \tilde{\gamma}_{B_3}^2(f)}{\left((1-C)^2 \tilde{\gamma}_{B_1}(f) + C^2 \tilde{\gamma}_{B_3}(f) \right) \left((1-C)^2 \tilde{\gamma}_{B_2}(f) + C^2 \tilde{\gamma}_{B_3}(f) \right)}$$

où $\tilde{\gamma}_{B_i}(f)$ est la densité spectrale du bruit B_i utilisé dans M_1 . Comme les trois bruits utilisés sont identiques, on peut simplifier l'équation ci-dessus. On aura donc, en considérant également R^2 ,

$$|\rho[t, f]|^2 = R^2[t, f] = \frac{C^4}{((1-C)^2 + C^2)^2}.$$

Pour les estimateurs définis plus haut, nous avons évalué les biais et EQMs pour différentes valeurs de l'horizon H et du paramètre C . Pour des considérations pratiques liées à l'application visée, la taille des blocs pour les calculs de FFT pour estimer la cohérence, et la taille de la fenêtre temporelle a été fixée à 256 points.

Les résultats sont présentés Fig. 4.3. Ces courbes correspondent à des estimations du biais et de la variance obtenus par la méthode de Monte-Carlo. Pour chaque valeur de C , on a généré des signaux de durée importante, par exemple 300×10^3 points. Le pas de translation de la fenêtre glissante était égal à 10 pour les deux méthodes. Précisons que chaque point de ces

courbes a été obtenu par moyennage sur le plan temps-fréquence, puisque la relation, dans ce cas, est indépendante du temps et de la fréquence.

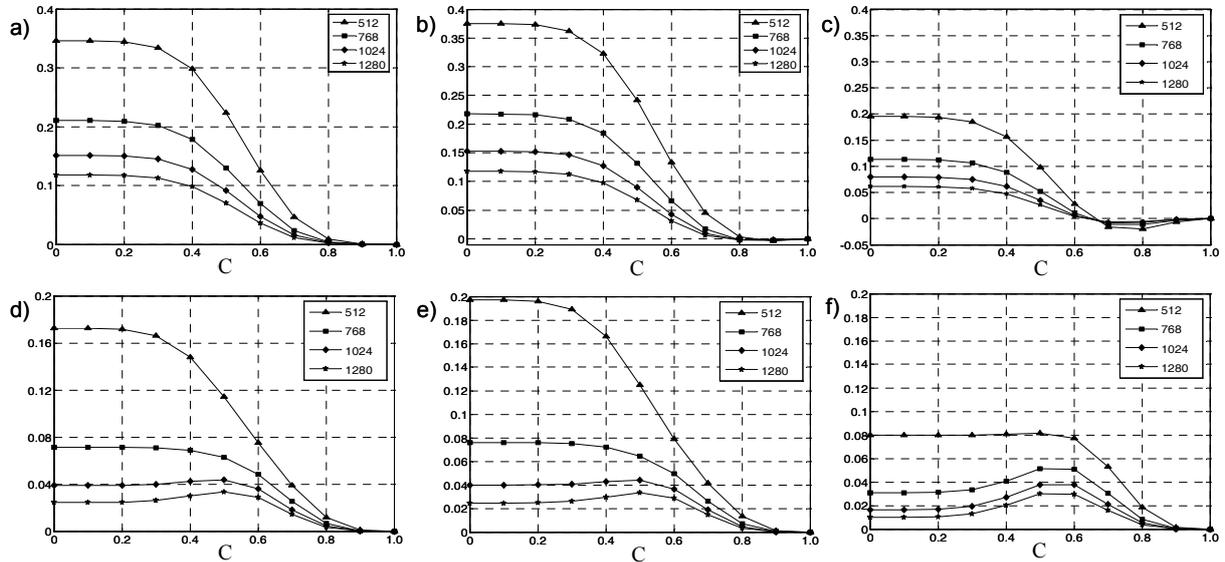


Fig. 4.3. Biais et EQM des deux estimateurs pour le modèle M_1 (cas stationnaire, $C[t]$ constant dans le temps), pour différentes longueurs N_0 de la fenêtre glissante. a) Biais de $|\hat{\rho}[t, f]|^2$. b) Biais de $\hat{R}^2[t, f]$ avec $\tau_M = -\tau_m = 5$. c) Biais of $\hat{R}^2[t, f]$ avec $\tau_m = \tau_M = 0$. d) EQM de $|\hat{\rho}[t, f]|^2$. e) EQM de $\hat{R}^2[t, f]$ avec $\tau_M = -\tau_m = 5$. f) EQM de $\hat{R}^2[t, f]$ avec $\tau_m = \tau_M = 0$.

4.4.4.2 Modèle M_1 : cas non stationnaire

Pour le modèle M_1 et avec différents profils de relation évolutive (C variant dans le temps), les critères statistiques ont été estimés. La Fig. 4.4 (a) (la courbe en pointillés) représente un exemple d'estimation de la relation entre les signaux pour un profil C particulier où $C[t]$ évolue en quatre périodes successives, avec une forte discontinuité entre les troisième et quatrième périodes et entre la quatrième et la cinquième : croissance linéaire de zéro jusqu'à 1, valeur constante $C[t] = 1$, valeur constante $C[t] = 0$, décroissance linéaire de 1 vers 0. Les bruits utilisés ici sont blancs centrés gaussiens et la relation théorique est de ce fait indépendante de la fréquence. Un moyennage sur l'axe des fréquences a en conséquence été pratiqué pour évaluer le biais et la variance des estimateurs. La courbe cible (courbe en trait plein, Fig. 4.4 (a)), qui a servi de référence dans l'analyse (biais, variance) des estimateurs, a été obtenue par [24] :

$$|\rho[t, f]|^2 = \frac{\left| \sum_{n=1}^N X_1^{(n)}[t, f] X_2^{*(n)}[t, f] \right|^2}{\sum_{n=1}^N |X_1^{(n)}[t, f]|^2 \sum_{n=1}^N |X_2^{(n)}[t, f]|^2} \quad (4.8)$$

où $X_i^{(n)}[t, f]$ désigne la TFCT de signal x_i et (n) fait référence à la n ième des $N=10000$ réalisations pour chacun des deux signaux. Dans le calcul de la TFCT, on a choisi une fenêtre de Hanning de taille 256 afin d'assurer l'égalité de résolution fréquentielle pour la cible et les deux estimateurs.

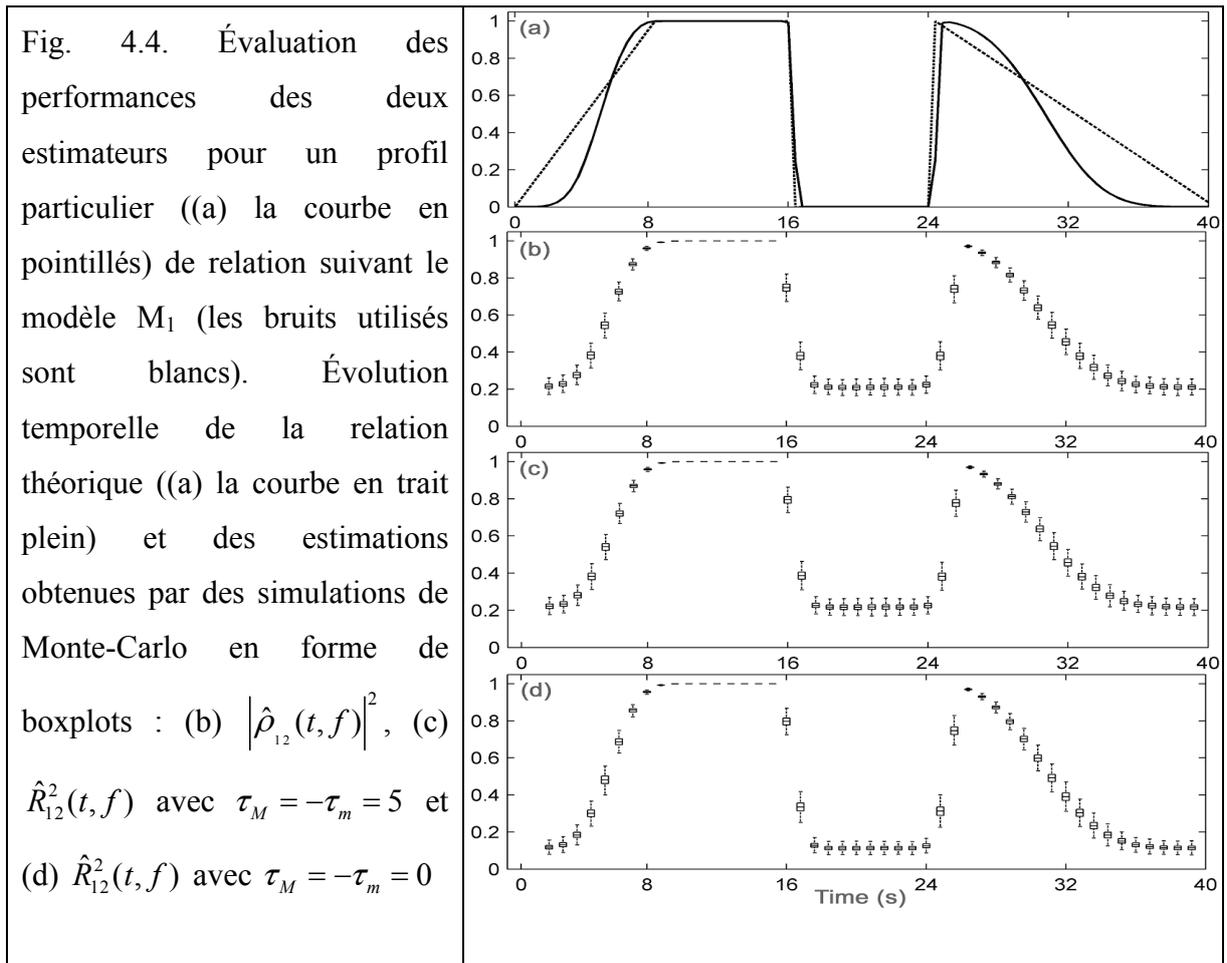
Les résultats quantitatifs sont présentés dans Fig. 4.4 (b)-(d) sous la forme de boxplots (un boxplot est constitué d'une « boîte » recouvrant verticalement l'espace entre le premier et le troisième quartiles, la moyenne étant indiquée (généralement entre ces deux extrémités) ainsi que les premiers et derniers 5 % de la distribution empirique, par des traits horizontaux). On peut constater que $\hat{R}^2[t, f]$ présente des faibles valeurs de biais et de variance relativement à $|\hat{\rho}[t, f]|^2$ dans le cas où le retard entre les deux signaux est égal à une valeur connue τ_0 ($\tau_m = \tau_M = \tau_0$; ici $\tau_0 = 0$). Les deux estimateurs ont des performances plus ou moins égales quand on relâche la contrainte sur les retards admissibles pour maximiser $\hat{R}^2[t, f]$ (ici $\tau_M = -\tau_m = 5$). Cependant, $\hat{R}^2[t, f]$ se comporte mieux aux alentours des instants des changements brutaux à 16s et après 24s.

4.4.4.3 Modèle M_6 (utilisation d'un signal déterministe commun)

Le second modèle (modèle M_6), où intervient cette fois un signal commun déterministe $s_c[t]$ a la forme suivante :

$$x_1[t] = B_1[t] + S_c[t] ; x_2[t] = B_2[t] + S_c[t]$$

Deux variantes de ce modèle sont ici utilisées. La première, entièrement synthétique et déjà proposée [203], est utilisée pour considérer le cas de signaux multi-composantes et la deuxième utilise une portion de signal EEG réel critique [204].



4.4.4.3.1 Modèle M_6 synthétique

Sa forme générale est la suivante :

$$x_1[t] = B_1[t] + \sum_{k=1}^K \alpha_k[t] C_k[t] ; x_2[n] = B_2[t] + \sum_{k=1}^K \alpha_k[t] C_k[t]$$

où B_1 et B_2 sont deux bruits blancs indépendants. Les C_i et les α_i représentent respectivement les composantes fréquentielles (K sinusoïdes modulées en fréquence) et leurs pondérations qui élèvent le degré de couplage théorique quand on les augmente, K étant le nombre de composantes.

Les mesures ont été effectuées pour S_c constitué par la somme des différentes composantes fréquentielles spécifiées Fig. 4.5 (a) : les C_i et les α_i représentent respectivement l'évolution au cours du temps des fréquences instantanées et celle des pondérations. Sont représentées

Fig. 4.5 (b) et (c) les évolutions respectives de $|\hat{\rho}_{12}(t, f)|^2$ et de $\hat{R}_{12}^2(t, f)$ ($\tau_M = -\tau_m = 0$). Globalement, le deuxième estimateur est plus performant que le premier en termes de biais et de variance.

4.4.4.3.2 Modèle M_6 avec signal SEEG réel commun

Afin de mieux approcher la réalité, dans cette deuxième version du modèle M_6 , on utilise pour S_c un morceau de signal SEEG enregistré pendant une crise d'épilepsie. Ce signal correspond à un motif quasi-déterministe, reproductible, observé dans différents épisodes critiques d'un même patient. En outre les activités indépendantes de fond B_1 et B_2 ont été générées (méthode des surrogate datas, randomisation de la phase de la transformée de Fourier d'un même signal [205]) à partir d'un segment de signal SEEG de fond enregistré chez ce même patient. Un grand nombre de réalisations a été utilisé pour les simulations de Monte-Carlo.

Les résultats de cette simulation sont présentés Fig. 4.6. Pour le calcul de la cible (Fig. 4.6 (a)) on a utilisé l'Eq. (4.8) avec $N=10000$, et chaque estimation a été calculée par la moyenne de 1000 réalisations. On peut constater que pour $\tau_M = -\tau_m = 5$ les deux estimateurs de $\hat{R}_{12}^2(t, f)$ et $|\hat{\rho}_{12}(t, f)|^2$ ont plus ou moins des comportements équivalents ; mais dans le cas de connaissance *a priori* du retard entre des signaux (ici $\tau_M = -\tau_m = 0$), $\hat{R}_{12}^2(t, f)$ montre un biais plus faible que $|\hat{\rho}_{12}(t, f)|^2$. Dans cet exemple $N_0 = 512$, $L = 256$ et le pas de déplacement de la fenêtre glissante était égal à 10.

Pour quantifier des différences de performance entre les deux estimateurs, la moyenne de la valeur absolue du biais, la moyenne de la variance, et la moyenne d'EQM ont été calculées sur le plan temps fréquence. Les résultats obtenus, présentés Tab. 4.1, témoignent d'un meilleur comportement de $\hat{R}_{12}^2(t, f)$.

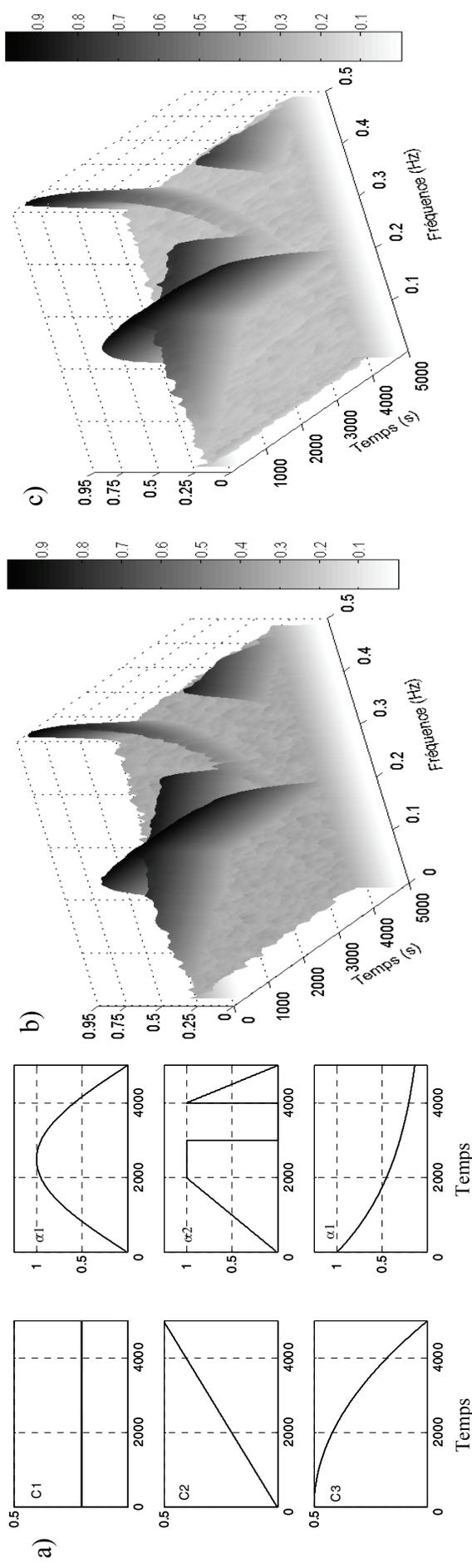


Fig. 4.5. Exemple d'évolution des estimateurs dans le cas du modèle M_6 synthétique (a) Allure des paramètres utilisés dans le modèle (l'axe des ordonnées est l'axe des fréquences pour les composantes C_i) (b) et (c) sont montrant respectivement l'évolution de $|\hat{\rho}_{12}(t, f)|^2$ et de $\hat{R}_{12}^2(t, f)$ ($\tau_M = -\tau_m = 0$). Qualitativement, le deuxième estimateur est plus performant que le premier en termes de biais et de variance.

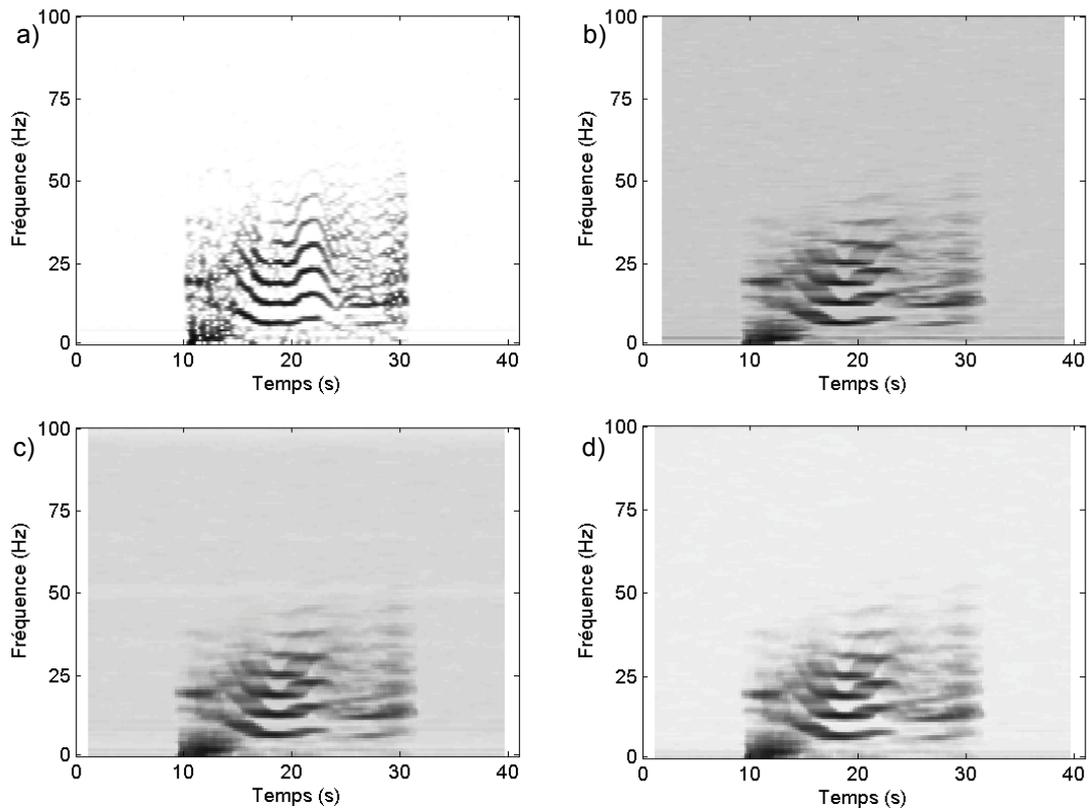


Fig. 4.6. Modèle M_6 avec un morceau de SEEG réel d'un épisode critique comme partie commune. a) La cible calculée par la méthode de Haykin. b) $|\hat{\rho}_{12}(t, f)|^2$. c) $\hat{R}_{12}^2(t, f)$ avec $\tau_M = -\tau_m = 5$. d) $\hat{R}_{12}^2(t, f)$ avec $\tau_M = -\tau_m = 0$.

Estimation	Moyenne de la valeur absolue de biais	Moyenne de variance	Moyenne d'EQM
$ \hat{\rho}[t, f] ^2$	0.19014	0.0261	0.0702
$\hat{R}^2[t, f], \tau_m = \tau_M = 0$	0.09135	0.01278	0.02627
$\hat{R}^2[t, f], \tau_M = -\tau_m = 5$	0.1539	0.0178	0.04746

Tab. 4.1. Moyenne de la valeur absolue du biais, Moyenne de la variance, et Moyenne de l'EQM calculées sur le plan temps fréquence pour le modèle M_6 utilisant un segment de signal SEEG réel en partie commune.

4.4.4.4 Signaux SEEG réels critiques

Afin de vérifier si les résultats obtenus sur des simulations valent un tant soit peu pour des signaux SEEGs réels, nous avons choisi un exemple de deux signaux SEEG enregistrés à partir des deux structures du lobe temporal (Fig. 4.7 (a)). On peut constater qu'après une période d'activité de fond des pointes apparaissent sur les deux signaux. L'amplitude de cette activité à bande étroite baisse soudainement et s'accroît de nouveau progressivement quand sa fréquence diminue. Les deux signaux sont non stationnaires comme on peut le constater dans Fig. 4.7 (b) qui présente leurs spectrogrammes.

La caractérisation temps-fréquence de la relation entre ces deux signaux est présentée dans Fig. 4.7 (c). Les estimations ont été effectuées par mesure de la fonction de cohérence (en haut) et par le coefficient de corrélation maximisé (au milieu, le retard variant entre -20 et 20 ms). Comme déjà remarqué sur les signaux simulés, les deux estimateurs se comportent plus ou moins de la même manière. Ils révèlent une signature similaire caractérisée par une relation forte établie dans une bande fréquentielle étroite (autour de 30Hz) qui a pu être mise en évidence précédemment sur les spectrogrammes.

Cependant, pour un retard τ fixe (ici, $\tau_m = \tau_M = 4$ ms), $\hat{R}_{12}^2(t, f)$ fournit une représentation temps-fréquence plus lisible que celle basée sur la fonction de cohérence pour des résolutions temporelle et fréquentielle identiques. Ce résultat, présenté Fig. 4.7 (c), encadré inférieur, montre que la transition brutale de dynamique dans le signal SEEG (d'une activité de fond vers une décharge rapide) est aussi associée à un changement brutal de la localisation fréquentielle de la relation linéaire.

Nous avons remarqué déjà qu'il pouvait être crucial de tenir compte de la localisation fréquentielle pour caractériser une relation entre signaux. En fait, des méthodes fréquence-indépendantes ne sont pas capables de mettre en évidence des phénomènes du type synchronisation dans une bande étroite de fréquence en début de crise. Nous avons tracé (Fig. 4.7 (d)) les courbes obtenues par deux méthodes n'utilisant pas un paramétrage en fréquence (pas de préfiltrage, pas de calcul de spectre) : 1) un estimateur linéaire (coefficient de corrélation maximisé relativement au temps retard, c'est-à-dire R^2 calculé sans pré-filtrage), en haut) et 2) un indicateur non linéaire (le coefficient de corrélation non linéaire maximisé

relativement au le temps retard, h^2 , en bas), sur les mêmes signaux. On peut constater que ces deux estimateurs ne présentent pas de changements significatifs pendant la transition de dynamique de l'EEG au début d'une crise et par conséquent ils ne fournissent pas les informations pertinentes (c'est-à-dire l'établissement d'une relation forte dans une bande étroite de fréquence, autour de 30Hz, et le saut brutal de sa localisation, depuis des fréquences basses vers des hautes fréquences, quand l'activité de fond avec pointes évolue vers une décharge rapide).

4.5 Discussion

Dans l'étude de l'activité cérébrale, la question naturelle de l'existence d'un couplage fonctionnel entre différentes structures dans lesquelles des signaux EEG sont enregistrés, se pose dans de nombreux cas. Elle est examinée ici par la caractérisation des interdépendances linéaires entre des signaux SEEG dans le contexte des processus épileptiques. Il y a trois résultats principaux dans cette étude :

Premièrement, caractériser la relation dans les deux domaines, du temps et de la fréquence, peut être essentiel dans quelques situations où cette relation est justement circonscrite dans une région particulière du plan temps-fréquence, les méthodes non paramétrées en fréquence pouvant être aveugles aux relations établies dans une bande de fréquence étroite.

Deuxièmement, a été proposé un nouvel estimateur de relation linéaire en fonction du temps et de la fréquence pour les signaux non stationnaires. Pour diverses simulations, cet estimateur a montré de meilleures performances statistiques (biais et EQM) en comparaison d'un estimateur standard basé sur la fonction de cohérence quand une information *a priori* est fournie au sujet de la valeur d'un retard moyen entre les signaux.

Troisièmement, l'estimateur proposé a été utilisé sur des données SEEG réelles et il s'est avéré utile pour augmenter la lisibilité de la représentation temps-fréquence pour un retard fixé. L'interprétation des interdépendances non stationnaires entre les signaux de SEEG peut ainsi être améliorée.

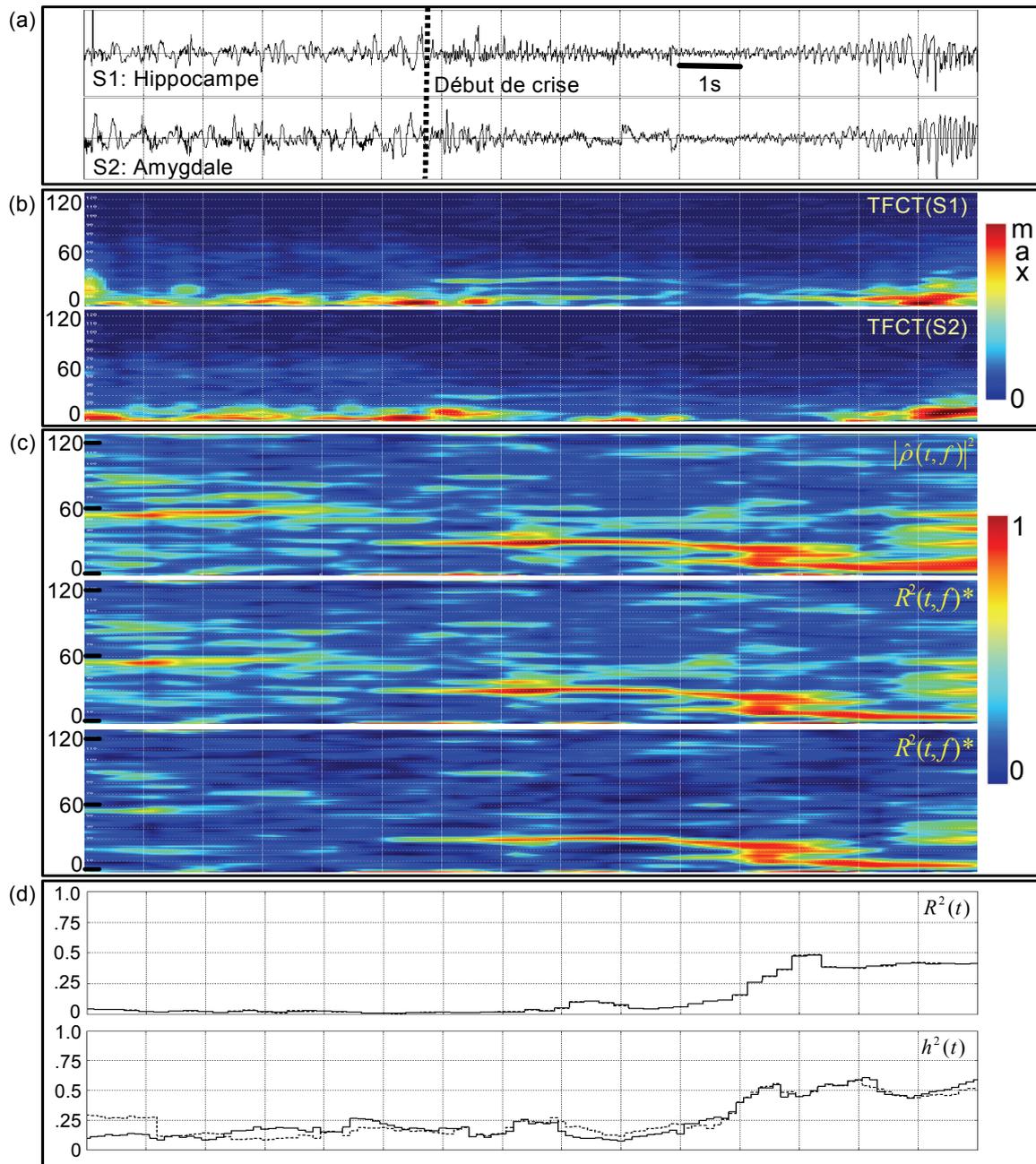


Fig. 4.7. Résultats obtenus sur les données critiques réelles. (a) Deux signaux SEEGs enregistrés à partir de Hippocampe (en haut) et à partir de Amygdale (en bas). (b) Spectrogrammes des deux signaux. (c) Estimations de la relation entre deux signaux dans le plan temps fréquence par : $|\hat{\rho}_{12}(t, f)|^2$ (en haut), $\hat{R}_{12}^2(t, f)$ maximisé pour le temps retard τ (au milieu, plage du retard: -20-20 ms), et $\hat{R}_{12}^2(t, f)$ pour un τ fixe (en bas, $\tau_M = -\tau_m = 4ms$). (d) Estimation de relation par deux méthodes fréquence-indépendantes : une linéaire (R^2 , en haut) et une non linéaire (h^2 , en bas)

Le choix de la valeur appropriée de τ dans un intervalle temporel donné et le choix d'une bande de fréquence particulière pourront être un sujet d'étude dans le futur. L'idée serait de s'appuyer sur des connaissances anatomiques et physiologiques *a priori* (des voies neurales et leurs activations), et sur des résultats statistiques concernant les valeurs plausibles des délais de propagation entre structures obtenues sur un nombre suffisant de patients : si des informations fiables génériques sur des valeurs possibles de retard sont disponibles, ces informations pourront être employées pour améliorer les performances des méthodes d'analyse de relation en temps fréquence.

4.6 Conclusions

Ce chapitre a été consacré à l'étude des méthodes de caractérisation, en temps et en fréquence, de la relation entre deux signaux non stationnaires. Quelques méthodes existantes comme la cohérence multi-fenêtres, la cohérence d'ondelettes, et la cohérence temps fréquence de la classe de Cohen ont été présentées, en montrant qu'elles présentaient des inconvénients.

Étant donné des problèmes rencontrés pour utiliser ces méthodes, on a proposé un nouvel estimateur temps fréquence qui s'avère être équivalent à un estimateur classique de la cohérence, calculé par périodogramme sur une fenêtre glissante. Les comportements de ces deux estimateurs ont été comparés au moyen de simulations faisant intervenir différents types de relation entre signaux. Les résultats obtenus ont montré la supériorité du nouvel estimateur quand on a des connaissances, *a priori*, au sujet d'un retard moyen entre les deux signaux en question. Ces connaissances peuvent être acquises par l'étude de l'anatomie des structures dans lesquelles les signaux sont enregistrés. Par exemple le nombre de relais synaptiques existant pour un chemin d'activation entre deux structures est un paramètre important, car le retard engendré par les activations synaptiques est beaucoup plus important en moyenne que le temps de propagation des potentiels d'action dans les axones.

Le nouvel estimateur a été appliqué à des signaux SEEG enregistrés chez un patient épileptique candidat à une résection d'une partie de son cerveau. La caractérisation dans le plan temps fréquence des relations entre signaux SEEG enregistrés dans des structures d'intérêt montre, qu'en dépit d'une absence relative de synchronisation avant la crise, il peut exister des relations dans une bande très étroite pendant la crise. Cette sorte de relation peut

échapper à une analyse effectuée au moyen de méthodes ne discernant pas les phénomènes en fonction de la fréquence. L'image temps fréquence de la relation estimée par la nouvelle méthode, en cas d'une connaissance *a priori* sur le retard éventuel entre deux signaux, est plus lisible par rapport à celle estimée par la méthode classique. Cette lisibilité facilite l'interprétation de relations entre signaux réels qui sont stochastiques, non stationnaires, et perturbés par des artéfacts.

Chapitre 5

Conclusions et perspectives

Le contexte général de ce travail est l'étude de la connectivité fonctionnelle entre différentes structures cérébrales. La caractérisation de cette connectivité est un problème difficile mais important, ce qui explique l'intérêt croissant pour ce sujet [206] dans différents domaines tels que la neurologie, la neurophysiologie et, d'une manière plus générale, les neurosciences.

Mieux caractériser cette connectivité fonctionnelle ouvre la voie vers une meilleure compréhension du fonctionnement cérébral pendant des activités normales (par exemple cognitives) ou des activités pathologiques (par exemple épileptiques). Afin d'adresser ce problème, un grand nombre de méthodes statistiques dédiées à l'estimation de « corrélations » entre signaux ont été proposées et appliquées sur des observations reflétant l'activité électrique du cerveau. Pour chaque méthode, une mesure statistique sur les données électrophysiologiques est produite, mesure à partir de laquelle on tente de caractériser les couplages entre structures cérébrales et d'interpréter leurs variations par rapport à certaines hypothèses (patho)physiologiques.

Dans cette thèse, les méthodes les plus répandues dans le domaine de l'analyse de l'EEG ont été étudiées et comparées. Nous avons effectué cette comparaison selon des critères objectifs et quantitatifs afin d'évaluer à la fois les performances des méthodes et leurs sensibilités aux hypothèses et conditions de mise en œuvre. Cette évaluation fait donc appel à des simulations exhaustives qui s'appuient sur différentes classes de modèle. Chaque modèle est bâti sur des considérations statistiques et dynamiques semblables à celles rencontrées dans différentes

situations d'enregistrement de l'EEG (occupation spectrale, caractère aléatoire, dynamique non linéaire, ...). Il permet de générer des paires de signaux pour lesquelles l'intensité du couplage peut être modulée par un simple coefficient scalaire d'interaction. Cependant, dans la plupart des modèles mis en œuvre, la relation mathématique (déterministe ou statistique) entre les trajectoires d'état associables aux signaux étudiés est non connue. Dans toutes les simulations effectuées, les signaux générés sont de durée suffisamment longue pour permettre une comparaison statistique des mesures fournies par les méthodes évaluées. Trois critères de comparaison ont également été définis : (i) l'erreur quadratique moyenne (EQM) sous l'hypothèse nulle, c'est-à-dire sous l'hypothèse d'indépendance entre signaux, qui peut être interprétée comme un biais, (ii) la variance moyenne (VM) évaluée sur un ensemble de valeurs du coefficient d'interaction, degrés de relation, et un nouveau critère que nous avons introduit qui est (iii) la médiane de la sensibilité relative locale (MSRL). Ce dernier quantifie la réactivité de chaque méthode par rapport à un changement du degré de couplage.

La comparaison générale des méthodes nous a conduit à conclure : (i) plusieurs méthodes sont insensibles aux variations de couplages dans certains modèles ; (ii) les résultats sont très dépendants des propriétés des signaux (par exemple leur étendue spectrale) ; (iii) d'une façon générale, il n'y pas de méthode universelle, c'est-à-dire qu'aucune des méthodes étudiées n'est plus performante que les autres pour toutes les situations étudiées ; (iv) les méthodes de régression se montrent sensibles aux variations de couplage pour tous les modèles de relation avec des performances moyennes ou correctes. Il nous semble donc essentiel, en pratique et en l'absence d'hypothèse particulière, de mettre d'abord en œuvre ces méthodes simples et « robustes » avant de recourir à des méthodes plus spécifiques telles qu'une partie de celles qui ont été comparées dans ce travail.

Le signal EEG peut être vu comme la résultante d'activités de populations neuronales qui peuvent avoir des propriétés oscillatoires. Il est naturel d'évoquer la notion de fréquence dans la caractérisation des couplages entre structures cérébrales, ces derniers pouvant s'établir sur des rythmes particuliers. D'autre part, ce type de signal étant non stationnaire, par nature, la question du recours aux méthodes temps-fréquence pour caractériser dynamiquement la relation entre signaux s'est posée et a été abordée dans le chapitre 4. Différentes définitions concurrentes de la cohérence non stationnaire y ont été rassemblées dans une synthèse

bibliographique en insistant sur leur non équivalence sur le plan théorique, non équivalence qui doit interpeller les utilisateurs. Quelques méthodes d'estimation ont également été présentées dans ce chapitre qui se termine sur la proposition d'un nouvel estimateur de la cohérence temps-fréquence. Une comparaison entre l'estimateur classique basé sur le périodogramme et le nouvel estimateur est menée. Les résultats sur données simulées et sur signaux EEG intracérébraux, montrent que la supériorité du nouvel estimateur se manifeste particulièrement lorsque des hypothèses *a priori* sur les retards entre signaux peuvent être prises en compte. De telles hypothèses peuvent provenir de connaissances anatomiques et physiologiques sur les structures cérébrales qui génèrent les signaux enregistrés.

D'une façon générale, on peut dire que les méthodes non linéaires présentent un avantage de principe par rapport aux méthodes linéaires dans la mesure où elles n'occultent pas la partie non linéaire de la relation. Cependant, elles sont plus sensibles aux bruits [207] de mesure (qui peuvent provenir d'un "bruit de fond neuronal") et peuvent nécessiter une durée d'observation plus grande pour manifester leur éventuelle supériorité. Le caractère non linéaire plus ou moins marqué relativement au niveau du bruit est donc déterminant dans le choix d'une méthode, comme illustré sur Fig. 5.1.

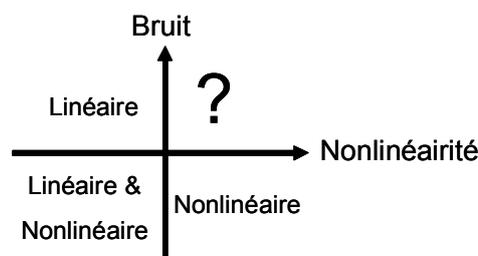


Fig. 5.1. Influence du compromis entre niveau de bruit de mesure et degré de non linéarité de la relation entre signaux sur la sélection d'une méthode de mesure de cette relation

Une question fondamentale qui se pose est que généralement les méthodes non linéaires introduites pour caractériser des relations entre signaux EEG ont été développées spécifiquement pour étudier des systèmes dynamiques déterministes, alors que les signaux EEG présentent plutôt un caractère à dominante stochastique, sauf, par exemple, pour le cas particulier de décharges harmoniques observées pendant les crises. D'autre part, ces méthodes ne sont pas, *a priori*, à considérer comme les plus efficaces pour étudier des couplages

s'instanciant sur une (ou la réunion de plusieurs) plage(s) de fréquences relativement étroites. Or dans l'EEG, la relation entre signaux peut ainsi s'exprimer dans une région spectrale délimitée, d'où l'intérêt de disposer d'approches alliant le temps et la fréquence et possédant une bonne résolution fréquentielle. L'analyse restreinte à des bandes étroites ayant d'autre part tendance à atténuer, en intra bande, la non linéarité éventuelle du signal, limiter cette analyse à l'ordre deux nous semble raisonnable. Dans ce contexte, une première perspective serait cependant d'évaluer l'apport de méthodes basées sur les polyspectres, sans toutefois négliger les difficultés intrinsèques liées à l'estimation des moments d'ordre supérieur (stationnarité) sur des durées relativement courtes. Un autre aspect fondamental dans la caractérisation de la relation entre signaux, qui peut faire l'objet d'une seconde perspective, est la notion de directionnalité (asymétrie) du couplage. En effet, disposer de cette information (peu évidente à analyser) peut s'avérer extrêmement utile dans l'étude de la dynamique des crises (sens de propagation des activités épileptiques), et donc dans l'identification des structures ciblées par les approches thérapeutiques.

Annexe A

Méthodes paramétriques

A.1 Introduction

Dans cette annexe, on présente trois méthodes proposées dans la littérature pour l'estimation de densités spectrales ou de fonctions de cohérence, toutes basées sur un modèle paramétrique non stationnaire, du type spectre rationnel, pour la première, et pour deux autres de type respectivement ARX et ARMA [208] non stationnaire.

Les deux premières ont en commun la méthode de modélisation de la non stationnarité qui consiste à supposer que les paramètres sont des fonctions du temps appartenant à un sous espace vectoriel caractérisé par une base de fonctions choisies par l'utilisateur.

La première méthode est une méthode mono-voie destinée à estimer les paramètres de la densité spectrale, supposée être du type spectre rationnel [186], d'un signal scalaire, les deux autres ayant été développées par leurs auteurs pour une paire de signaux scalaires. Cette méthode se distingue des deux dernières, en ce sens qu'elle utilise une méthode d'identification basée sur la minimisation d'une distance dans l'espace des représentations temps-fréquence, au lieu d'une minimisation de l'énergie de résidus de régression temporelle. Le choix d'un critère d'erreur temps fréquence appelle cependant quelques commentaires du point de vue du problème que l'on cherche à solutionner dans le chapitre 4, qui est justement d'obtenir une représentation temps fréquence. La nécessité de disposer au départ d'une représentation 'de référence' pour identifier le modèle à partir duquel une estimation temps

fréquence finale sera fournie revient à ‘tourner en rond’, sauf à se donner la contrainte de caractériser à tout prix l’observation sous forme spectre rationnel. Nous avons cependant considéré intéressant de présenter cette approche pour donner une vue d’ensemble, les techniques utilisées restant intéressantes à présenter dans une annexe.

Bien que pouvant d’une part paraître « hors sujet », étant donné son caractère mono-voie, la première méthode a été ici considérée également par la raison qu’*a priori*, la substitution d’un modèle ARMA vectoriel (deux voies modélisées) au modèle scalaire utilisé pour étendre l’estimation des densités spectrales marginales à une matrice (dimensions 2x2), était naturelle et pouvait permettre de répondre à un calcul de cohérence temps-fréquence. Mais les résultats obtenus sur l’analyse de signaux scalaires nous ont semblé trop peu convaincants.

La deuxième utilise dans [196] un modèle ARX non stationnaire [208] dans lequel le premier signal correspond à l’entrée d’un système linéaire non stationnaire et le deuxième signal correspond à sa sortie. L’identification du modèle ARX mène alors, après transcription dans le domaine temporel et fréquentiel, à l’estimation d’une fonction de transfert non stationnaire. L’obtention, à partir de cette technique, de l’estimation d’une fonction de cohérence entre les deux signaux analysés, est donnée dans [197] : elle passe par une double identification, celle d’une fonction de transfert du premier vers le second, puis du second vers le premier. Le produit des deux estimations correspond alors à une estimation de la fonction de cohérence.

La troisième méthode utilise les deux signaux observés de manière plus classique pour parvenir également à l’estimation d’une cohérence temps fréquence. Elle introduit un modèle ARMA vectoriel (ici 2 voies) dont les paramètres estimés permettent de calculer des estimations de densités spectrales non stationnaires, marginales et croisée, à partir desquelles une cohérence dépendante du temps peut être calculée.

A.2 Première méthode : mise en correspondance spectrale

Cette méthode monovoie décrite dans [191] pour une première version stationnaire, puis dans [195] pour son extension non stationnaire est donc basée sur l’hypothèse que l’on dispose d’une ‘bonne’ représentation fréquentielle (cas stationnaire) ou en temps fréquence (cas non stationnaire) du signal observé, qui puisse servir d’observation à confronter à une représentation paramétrique du type spectre rationnel en vue de l’identification des paramètres

du modèle. Dans la version non stationnaire, l'évolution temporelle de chacun de ces paramètres est estimée sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions appartenant à une base orthogonale finie. Le principe de l'identification est de minimiser une distance entre les deux descriptions fréquentielles (ou temps fréquence), mesurée d'une part et paramétrique d'autre part.

A.2.1 Mise en correspondance spectrale : cas stationnaire

Dans cette section, nous décrivons l'approche de mise en correspondance spectrale utilisée dans [191] à partir des travaux de [209] pour le cas stationnaire. Le signal $x[n]$ observé est assimilé à un processus à spectre rationnel stationnaire ARMA :

$$x[n] = -\sum_{i=1}^p a(i)x[n-i] + \sum_{i=1}^q b(i)e[n-i]$$

où $e[n]$ est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance un, et où les $a(i)$ et $b(i)$ sont respectivement les paramètres des parties AR et MA, d'ordres respectifs p et q . La fonction de densité spectrale s'écrit alors :

$$S(e^{j\omega}) = \frac{B(e^{j\omega})B^*(e^{j\omega})}{A(e^{j\omega})A^*(e^{j\omega})} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} A(z) &= 1 + a(1)z^{-1} + \dots + a(p)z^{-p} \\ B(z) &= b(0) + b(1)z^{-1} + \dots + b(q)z^{-q} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Supposant disposer d'une référence spectrale notée $\hat{S}(e^{j\omega_l})$ pour les K fréquences $\omega_l = 2\pi l/K$, $0 \leq l \leq K-1$, les paramètres du modèle sont choisis de sorte que la fonction de coût suivante soit minimisée :

$$V = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{K-1} \left[S(e^{j\omega_l}) - \hat{S}(e^{j\omega_l}) \right]^2$$

Aucune solution analytique n'existe pour ce problème de minimisation, mais il peut cependant être résolu au moyen d'algorithmes d'optimisation non linéaires basés sur le calcul exact du gradient de la fonction de coût par rapport aux paramètres du modèle. Les composantes de ce gradient sont :

$$\frac{\partial V}{\partial a(k)} = \sum_{l=0}^{K-1} \frac{\partial S(e^{j\omega_l})}{\partial a(k)} [S(e^{j\omega_l}) - \hat{S}(e^{j\omega_l})]$$

où

$$\frac{\partial S(e^{j\omega_l})}{\partial a(k)} = -2S(e^{j\omega_l}) \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{-jk\omega_l}}{A(e^{j\omega_l})} \right\}$$

et

$$\frac{\partial V}{\partial b(k)} = \sum_{l=0}^{K-1} \frac{\partial S(e^{j\omega_l})}{\partial b(k)} [S(e^{j\omega_l}) - \hat{S}(e^{j\omega_l})]$$

où

$$\frac{\partial S(e^{j\omega_l})}{\partial b(k)} = -2S(e^{j\omega_l}) \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{-jk\omega_l}}{B(e^{j\omega_l})} \right\}$$

($\operatorname{Re}\{\cdot\}$ désigne l'opérateur d'extraction de la partie réelle)

A.2.2 Mise en correspondance spectrale : cas non stationnaire

On suppose à présent que le signal non stationnaire $x[n]$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, peut être modélisé comme un processus rationnel [186] avec des paramètres évoluant au cours du temps. Les coefficients $a(i)$, $b(i)$ dans l'expression (Eq. A.1) du spectre rationnel stationnaire deviennent des coefficients $a_n(i)$, $b_n(i)$ dépendants du temps n . La fonction de densité spectrale non stationnaire est donc supposée de la forme [191] :

$$S(n, e^{j\omega}) = \frac{B_n(e^{j\omega})B_n^*(e^{j\omega})}{A_n(e^{j\omega})A_n^*(e^{j\omega})} \quad (2.7)$$

où

$$\begin{aligned} A_n(z) &= 1 + a_n(1)e^{-j\omega} + \dots + a_n(p)e^{-j\omega p} \\ B_n(z) &= b_n(0) + b_n(1)e^{-j\omega} + \dots + b_n(q)e^{-j\omega q} \end{aligned}$$

Dans le domaine temporel, le signal $x[n]$ peut être assimilé à la sortie d'un système causal, linéaire, non stationnaire, de réponse impulsionnelle $h[n, m]$ dont l'entrée est un bruit blanc stationnaire centré de variance unité [186] :

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^n h[n, m] e[m]$$

La réponse fréquentielle $H(n, e^{j\omega})$ de ce système est telle que :

$$H(n, e^{j\omega}) = \sum_{m=0}^{\infty} h[n, n-m] e^{-j\omega m} = \frac{B_n(e^{j\omega})}{A_n(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^q b_n(k) e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_n(k) e^{-j\omega k}}$$

et la densité spectrale s'écrit :

$$S(n, e^{j\omega}) = \frac{B_n(e^{j\omega}) B_n^*(e^{j\omega})}{A_n(e^{j\omega}) A_n^*(e^{j\omega})} = \left| \frac{B_n(e^{j\omega})}{A_n(e^{j\omega})} \right|^2 = \left| \frac{\sum_{k=0}^q b_n(k) e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_n(k) e^{-j\omega k}} \right|^2$$

Reprenant l'expression de la fonction de coût du cas stationnaire, cette dernière est réécrite en fonction de n :

$$V_n = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{K-1} W_n(e^{j\omega_l}) \left[s(n, e^{j\omega_l}) - \hat{s}(n, e^{j\omega_l}) \right]^2$$

où $\hat{s}(n, e^{j\omega})$ est une estimation non paramétrique du spectre temps fréquence de l'observation. Les coefficients $W_n(e^{j\omega})$ incorporent n'importe quelle connaissance *a priori* sur le plan temps-fréquence, comme par exemple des informations concernant des termes croisés (que l'on peut chercher à masquer) pour la distribution de Wigner-Ville (DWV). En l'absence de connaissance *a priori*, ces pondérations peuvent être prises égales à 1.

L'expression du gradient de la fonction de coût par rapport à $a_n(k)$ est calculé par :

$$\frac{\partial V_n}{\partial a_n(k)} = \sum_{l=0}^{K-1} \frac{\partial S(n, e^{j\omega_l})}{\partial a_n(k)} W_n(e^{j\omega_l}) [S(n, e^{j\omega_l}) - \hat{S}(n, e^{j\omega_l})]$$

où

$$\frac{\partial S(n, e^{j\omega_l})}{\partial a_n(k)} = -2S(n, e^{j\omega_l}) \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{-jk\omega_l}}{A_n(e^{j\omega_l})} \right\}$$

et, de la même manière, le gradient par rapport à $b_n(k)$ est calculé par :

$$\frac{\partial V_n}{\partial b_n(k)} = \sum_{l=0}^{K-1} \frac{\partial S(n, e^{j\omega_l})}{\partial b_n(k)} W_n(e^{j\omega_l}) [S(n, e^{j\omega_l}) - \hat{S}(n, e^{j\omega_l})]$$

avec

$$\frac{\partial S(n, e^{j\omega_l})}{\partial b_n(k)} = -2S(n, e^{j\omega_l}) \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{-jk\omega_l}}{B_n(e^{j\omega_l})} \right\}$$

Pour appliquer un procédé d'optimisation non linéaire [210, 211] au problème ci-dessus, deux problèmes doivent être préalablement résolus. D'abord, il faut construire à partir de l'observation une estimation spectrale non paramétrique du processus. Dans [191] les auteurs proposent d'utiliser la méthode du périodogramme évolutionnaire décrite en § 4.3.2 [193] tout en précisant que toute distribution temps fréquence semi-positive peut être utilisée. Le deuxième problème est de choisir de 'bonnes valeurs initiales' des paramètres pour l'algorithme de minimisation. En suivant Deller [212], si les paramètres du modèle changent lentement au cours du temps, on peut provisoirement supposer que le signal à l'étude est stationnaire afin d'obtenir des estimations initiales. Les paramètres du modèle rationnel sont alors considérés indépendants du temps, et n'importe laquelle des méthodes existantes pour identifier un modèle ARMA peut être utilisée. Les résultats de cette première identification peuvent être interprétés comme une estimation de la moyenne temporelle des paramètres non stationnaires du modèle rationnel.

Les auteurs proposent ensuite d'introduire l'information a priori suivante sur la non stationnarité des paramètres : la variation temporelle des paramètres du modèle rationnel peut

être modélisée comme une combinaison linéaire d'un nombre fini de fonctions de base orthonormales. Autrement dit :

$$b_n(k) = \sum_{i=0}^{L_b} f_i[n] \beta_{ik}, \quad 0 \leq k \leq q$$

$$a_n(k) = \sum_{i=0}^{L_a} f_i[n] \alpha_{ik}, \quad a_n(0) = 1, 1 \leq k \leq p$$

où $\{f_i[n]\}_{i=0}^L$, $0 \leq n \leq N-1$ sont des L fonctions de base orthonormales (par exemple, Fourier, Legendre).

Avec cette représentation, le processus rationnel non stationnaire est re-paramétrisé par les coefficients α_{ik} et β_{ik} indépendants du temps. Ceci mène à une réduction du nombre de paramètres de $N(p+q+1)$ à $p(L_a+1) + (q+1)(L_b+1)$ et la fonction de densité spectrale peut s'écrire :

$$S(e^{j\omega}) = \frac{B_n(e^{j\omega})B_n^*(e^{j\omega})}{A_n(e^{j\omega})A_n^*(e^{j\omega})} = \frac{\left| \sum_{k=0}^q \sum_{i=0}^{L_b} f_i[n] \beta_{ik} e^{-jk\omega} \right|^2}{\left| \sum_{k=0}^p \sum_{i=0}^{L_a} f_i[n] \alpha_{ik} e^{-jk\omega} \right|^2}$$

Ainsi est obtenue une fonction de coût :

$$V = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{K-1} \sum_{n=0}^{N-1} W_n(e^{j\omega_l}) \left[S(n, e^{j\omega_l}) - \hat{S}(n, e^{j\omega_l}) \right]^2$$

où $\hat{S}(n, e^{j\omega})$ est une estimation spectrale non paramétrique de $x[n]$ et $W_n(e^{j\omega})$ des pondérations optionnelles.

Le gradient par rapport aux coefficients du développement est facile à obtenir par rapport à α_{rm} , $0 \leq r \leq L_a$, $1 \leq m \leq p$:

$$\frac{\partial V_n}{\partial \alpha_{rm}(k)} = \sum_{l=0}^{K-1} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial S(n, e^{j\omega_l})}{\partial \alpha_{rm}(k)} W_n(e^{j\omega_l}) \left[S(n, e^{j\omega_l}) - \hat{S}(n, e^{j\omega_l}) \right]$$

où

$$\frac{\partial S(n, e^{j\omega_l})}{\partial \alpha_{rm}(k)} = -2S(n, e^{j\omega_l}) \operatorname{Re} \left\{ \frac{f_r[n] e^{-jm\omega_l}}{A_n(e^{j\omega_l})} \right\}$$

et de même par rapport à β_{rm} , $0 \leq r \leq L_b$, $0 \leq m \leq q$:

$$\frac{\partial V_n}{\partial \beta_{rm}(k)} = \sum_{l=0}^{K-1} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial S(n, e^{j\omega_l})}{\partial \beta_{rm}(k)} W_n(e^{j\omega_l}) [s(n, e^{j\omega_l}) - \hat{S}(n, e^{j\omega_l})]$$

où

$$\frac{\partial S(n, e^{j\omega_l})}{\partial \beta_{rm}(k)} = -2S(n, e^{j\omega_l}) \operatorname{Re} \left\{ \frac{f_r[n] e^{-jm\omega_l}}{B_n(e^{j\omega_l})} \right\}$$

Après usage d'un algorithme de minimisation utilisant ce gradient on aboutit à une estimation des paramètres $a_n(i)$, $b_n(i)$ en chaque instant n et l'estimation du spectre rationnel non stationnaire s'en déduit

A.3 Deuxième méthode (Modèle de Chon)

A.3.1 Principe général

Dans cette méthode [196], les deux signaux considérés, x et y , sont interprétés comme l'entrée d'une part et la sortie bruitée d'autre part d'une fonction de transfert H non stationnaire modélisée par un modèle ARX :

$$y(n) = \sum_{i=1}^P a_{xn}(i) y(n-i) + \sum_{j=0}^Q b_{xn}(j) x(n-j) + e_x(n)$$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^n h_x[n, m] x[m] + \sum_{m=-\infty}^n h_{e_x}[n, m] e_x[m]$$

La paramétrisation s'effectue donc dans le domaine temporel plutôt que dans le domaine fréquentiel. Comme dans la première méthode, les auteurs contraignent l'évolution temporelle des coefficients du modèle à être une combinaison linéaire d'un nombre fixé de fonctions

orthogonales. Une première étape est une procédure de sélection de l'ordre du modèle, ce qui permet à l'utilisateur de ne pas connaître *a priori* cet ordre.

Dans cette étape, les termes inappropriés dans la régression ARX relativement aux Q sorties passées et aux P+1 entrées, P et Q correspondant à des ordres *a priori* maximaux, sont éliminés du modèle initial au moyen d'un critère portant sur des énergies de résidus de régressions linéaires. Une fois que l'ordre du modèle et les coefficients des développements orthogonaux des paramètres ARX sont identifiés par régression temporelle (moindres carrés), la fonction de transfert peut être estimée comme fonction de ω et de n . Pour parvenir à l'obtention d'une fonction de cohérence, toute la procédure est répétée en échangeant les rôles de x et y et en considérant donc :

$$x(n) = \sum_{i=1}^P a_{yn}(i) x(n-i) + \sum_{j=0}^Q b_{yn} y_n(j) y(n-j) + e_y(n)$$

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^n h_y[n, m] x[m] + \sum_{m=-\infty}^n h_{e_y}[n, m] e_y[m]$$

et le module au carré d'une cohérence fonction du temps est calculé, comme proposé dans [197], par :

$$H_x(n, e^{j\omega}) = \frac{B_{xn}(e^{j\omega})}{A_{xn}(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^q b_{xn}(k) e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_{xn}(k) e^{-j\omega k}}$$

$$H_y(n, e^{j\omega}) = \frac{B_{yn}(e^{j\omega})}{A_{yn}(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^q b_{yn}(k) e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_{yn}(k) e^{-j\omega k}}$$

$$|C_{x,y}(n, \omega)|^2 = |H_x(n, e^{j\omega}) H_y(n, e^{j\omega})|$$

A.2.2 Méthode de détermination de l'ordre d'un modèle stationnaire [213]

Dans le cas stationnaire, on part du modèle 'maximal':

$$y(n) = \sum_{i=1}^P a(i) y(n-i) + \sum_{j=0}^Q b(j) x(n-j) + e(n)$$

où P et Q désignent respectivement les valeurs maximales des ordre de la partie AR et de la partie MA, $e(n)$ correspondant à l'innovation. Les paramètres $a(i)$ et $b(j)$ sont respectivement des coefficients de la partie AR et MA que l'on cherche à estimer.

Ce modèle correspondant à une régression de $y(n)$ sur les variables $y(n-j), j=1, \dots, P$ et $x(n-i), i=0, \dots, Q$ (en, moyenne, sur tous les n). Pour le réduire il faut chercher parmi ces variables lesquelles peuvent ne pas être utilisées sans trop perdre en pouvoir de prédiction (ceci revient à sélectionner certaines valeurs de i et certaines valeurs de j). Considérons (N correspond à la durée des enregistrements) la matrice construite à partir des $x(i), i=1-Q, \dots, N$ et des $y(i), i=1-P, \dots, N-1$:

$$\begin{array}{cccccccc} y(0) & x(1) & y(-1) & x(0) & \cdots & y(1-P) & \dots & x(1-Q) \\ y(1) & x(2) & y(0) & x(1) & \cdots & y(2-P) & \dots & x(2-Q) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(n-1) & x(n) & y(n-2) & x(n-1) & \cdots & y(n-P) & \dots & x(n-Q) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(N-1) & x(N) & y(N-2) & x(N-1) & \cdots & y(N-P) & \dots & x(N-Q) \end{array}$$

que l'on peut réécrire en introduisant les vecteurs colonnes :

$$[Y(0), X(1), \dots, Y(1-P), \dots, X(1-Q)] \text{ où } [Y(0), X(1), \dots, X(1-Q), \dots, Y(1-P)]$$

suivant que $P \geq Q$ ou non.

Les colonnes correspondent à un ensemble de vecteurs dont on recherche une combinaison linéaire optimale pour prédire au mieux $Y(1)$. Le but est d'extraire un sous ensemble minimal

de ces colonnes permettant de prédire $Y(1)$ avec une précision presque équivalente relativement au cas où toutes les colonnes sont utilisées.

La procédure proposée dans [213] introduit d'abord une étape destinée à extraire séquentiellement des vecteurs linéairement indépendants. Considérant tout d'abord les vecteurs $Y(0)$ et $X(1)$, on régresse (moindres carrés) le deuxième sur le premier. Avec un signal non bruité, l'indépendance linéaire stricte (au sens algébrique) peut être admise pour une erreur de régression non nulle (même petite) mais dans le cas d'un signal bruité cette valeur ne peut pas être nulle (sauf avec une probabilité nulle pour le dire académiquement). Un seuil est donc être introduit de sorte que si la valeur de l'erreur (quadratique) dépasse ce seuil, le vecteur $X(1)$ peut être choisi comme vecteur candidat indépendant de $Y(0)$. Une fois que l'on a déterminé que $X(1)$ est un vecteur candidat indépendant linéairement, les vecteurs $X(1)$ et $Y(0)$ sont utilisés pour examiner la candidature de l'indépendance linéaire de la colonne $Y(-1)$ relativement à $X(1)$ et $Y(0)$, en utilisant la même approche que ci-dessus. Ce procédé est poursuivi jusqu'à la dernière colonne pour finalement retenir R colonnes formant une matrice $\phi = [\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_R]$.

A partir de ce sous-ensemble de vecteurs candidats 'linéairement indépendants' (approximativement), une étape suivante consiste à sélectionner ceux d'entre eux qui pourront participer le plus efficacement à la prédiction de $Y(1)$. Pour cela une identification aux moindres carrés est effectuée sur le modèle

$$Y(1) = \phi \theta_g + E, \quad Y(1)^T = [y(1), \dots, y(N)], \quad E = [e(1), \dots, e(N)]$$

pour estimer les coefficients de régression regroupés dans le vecteur

$$\theta_g = [g_0, g_1, \dots, g_R]^T$$

(les g_i correspondent aux paramètres du modèle ARX simplifié)

La fonction de coût :

$$J_N(\theta_g) = [Y(1) - \phi\theta_g]^T [Y(1) - \phi\theta_g]$$

peut être minimisée analytiquement relativement à θ_g , la solution (bien connue) étant :

$$\hat{\theta}_g = [\phi^T \phi]^{-1} \phi^T Y(1)$$

Pour les coefficients obtenus, on calcule ensuite les ‘énergies’ $C_m = g_m^2 \|\omega_m\|^2$, et on les ordonne par ordre décroissant. Ne sont gardés alors que les ω_m qui réduisent l'erreur de modélisation de manière significative : on calcule $(C_m - C_{m+1})/C_m$ en fonction de m et on s'arrête au premier maximum. Pour finir les paramètres choisis dans l'étape précédente sont ré-estimés en utilisant la méthode des moindres carrés pour régresser optimalement sur les vecteurs définitivement retenus.

A.3.3 Modélisation et identification ARX non stationnaires

Le processus ARX avec paramètres variables s'écrit à présent :

$$y(n) = \sum_{i=1}^P a(i,n) y(n-i) + \sum_{j=0}^Q b(j,n) x(n-j) + e(n) \quad (\text{A.2})$$

Nous supposons que les ordres maximums P et Q du modèle ne dépendent pas de n et qu'il est possible de développer les paramètres $a(i,n)$ et $b(j,n)$, sur un ensemble de V fonctions de base $\pi_k(n)$:

$$\begin{aligned} a(i,n) &= \sum_{k=0}^V \alpha(i,k) \pi_k(n), \quad i = 1, \dots, P \\ b(j,n) &= \sum_{k=0}^V \beta(j,k) \pi_k(n), \quad j = 0, \dots, Q \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

où $\alpha(i,k)$ et $\beta(j,k)$ désignent les coefficients des développements des paramètres sur les V fonctions de base. On pose $\pi_0(n) = 1$ pour inclure une composante stationnaire dans le modèle. En substituant Éq. (A.3) dans Éq. (A.2) on a :

$$y(n) = \sum_{i=1}^P \sum_{k=0}^V \alpha(i,k) \pi_k(n) y(n-i) + \sum_{j=0}^Q \sum_{k=0}^V \beta(j,k) \pi_k(n) x(n-j) + e(n) \quad (\text{A.4})$$

Le choix des fonctions de base dépend des hypothèses que l'on peut émettre sur la dynamique des paramètres : si leurs variations sont 'lisses', c'est-à-dire s'il n'y a pas de changement brutal dans la caractéristique des signaux modélisés, on peut utiliser des fonctions de base lisses comme des fonctions de Legendre ou des fonctions sphéroïdales (discrete prolate spheroidal sequence). Dans le cas où sont attendus des changements brutaux, on doit utiliser des fonctions de base pouvant reproduire ce type de changements comme les fonctions de Walsh ou les fonctions de Haar. Dans le cas où les deux sortes de changement cités ci-dessus cohabitent, l'utilisation simultanée de différents types de fonctions de base peut être préconisée [214].

Les fonctions de base $\pi_k(n)$ étant choisies, de nouvelles variables sont créées :

$$\begin{aligned} y_k(n-i) &= \pi_k(n) y(n-i) \\ x_k(n-j) &= \pi_k(n) x(n-j) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

En substituant Éq. (A.5) dans Éq. (A.4) et en considérant l'équation ci-dessus, il vient :

$$y(n) = \sum_{i=1}^P \sum_{k=0}^V \alpha(i,k) y_k(n-i) + \sum_{j=0}^Q \sum_{k=0}^V \beta(j,k) x_k(n-j) + e(n)$$

Étant donné que les $\alpha(i,k)$ et les $\beta(j,k)$ ne sont pas dépendants du temps, l'équation ci-dessus peut être assimilée à un modèle ARX stationnaire et être identifiée en tant que tel.

Une fois les paramètres du modèle ainsi estimés pour un signal 'd'entrée' x et un signal 'de sortie' y , une fonction de transfert peut être estimée, et en échangeant les rôles de x et y , on peut calculer une fonction de cohérence dépendante du temps entre les deux signaux observés comme indiqué en A.3.1.

A.4 Troisième méthode : modélisation ARMA non stationnaire bi-voie

A.4.1 Description de la méthode

L'idée de base de la méthode [198, 199] décrite dans cette section est qu'une paire de canaux EEG peut être modélisée par un modèle ARMA bidimensionnel non stationnaire. Le critère utilisé pour l'estimation des paramètres est la minimisation de l'erreur de prédiction temporelle au sens des moindres carrés. La mise à jour du modèle est ici réalisée en temps réel, de manière récursive. Les paramètres du modèle sont re-estimés à chaque instant n ce qui permet le calcul de l'estimation paramétrique de la densité spectrale matricielle instantanée du modèle ARMA. L'estimation d'une fonction de cohérence instantanée en est déduite. Bien que la mise à jour soit effectuée à chaque échantillon, un phénomène de 'smearing' dans l'estimation de cohérence ne peut pas être empêché (mémoire exponentiellement décroissante du passé). La vitesse d'adaptation est principalement influencée par un facteur d'oubli, c_s .

Le procédé adaptatif d'estimation de la fonction de cohérence est conduit en deux étapes, la première consistant en la mise à jour des coefficients du modèle, et la deuxième étant dédiée au calcul des densités spectrales et de la fonction de cohérence instantanées.

Première étape : l'ajustement adaptatif du modèle ARMA

Soit

$$X = \left\{ X_n = (x_n^1, x_n^2)^T, n = 1, 2, \dots \right\} \text{ où } (x_n^1, x_n^2)^T = \begin{pmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \end{pmatrix}$$

la suite des points bidimensionnels échantillonnés sur les deux voies d'observation.

Cette observation est modélisée par un modèle ARMA bidimensionnel pouvant réagir aux changements structurels dans le signal :

$$y_n + \sum_{k=1}^p A^k(n) y_{n-k} = z_n - \sum_{j=1}^q B^j(n) z_{n-j}$$

où y est un processus vectoriel de dimension 2, où p et q sont les ordres du modèle, z est l'innovation bidimensionnelle, et $A^k(n)$ et $B^j(n)$ sont les paramètres matriciels

(dimensions 2×2) associés respectivement à la partie AR et à la partie MA. Les matrices de paramètres sont mises à jour en chaque instant d'observation par l'algorithme adaptatif d'estimation suivant :

$$\begin{aligned}\hat{A}^k(n) &= \hat{A}^k(n-1) - c_n e_n X_{n-k}^T; & k=1, \dots, p \\ \hat{B}^j(n) &= \hat{B}^j(n-1) - c_n e_n e_{n-j}^T; & j=1, \dots, q\end{aligned}\tag{A.6}$$

où c_n est le pas d'adaptation et e_n est l'erreur de prédiction :

$$\begin{aligned}e_0 &= 0 \\ e_n &= X_n - Y_n \\ &= X_n + \sum_{k=1}^p \hat{A}^k(n-1) \cdot X_{n-k}^T \\ &\quad + \sum_{j=1}^q \hat{B}^j(n-j) \cdot e_{n-j}^T\end{aligned}\tag{A.7}$$

L'algorithme ci-dessus (Éq. (A.6) et Éq. (A.7)) est une généralisation de l'algorithme des moindres carrés pour l'identification AR adaptative [215, 216] de signaux unidimensionnels.

Le pas dépendant du temps c_n est calculé par :

$$c_n = \frac{f}{1 + \hat{\sigma}_1^2(n) + \hat{\sigma}_2^2(n)}$$

où le facteur d'adaptation f satisfait la condition :

$$f = \frac{1}{p+q}$$

et où les $\hat{\sigma}_i^2$, $i=1,2$ sont des estimations adaptatives des variances de prédiction, calculées par :

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_i^2(0) &= 0 \\ \hat{\sigma}_i^2(n) &= \hat{\sigma}_i^2(n-1) - c_s \cdot \left(\hat{\sigma}_i^2(n-1) - (x_n)^2 \right), \\ &\quad i=1,2; \quad n=1,2,\dots\end{aligned}$$

où $0 < c_s < 1$. Ce mode de calcul du pas c_n , ici dépendant du signal, garantit la stabilité du procédé d'estimation adaptative.

Deuxième étape : calcul de la matrice de densité spectrale et de la fonction de cohérence instantanée.

La fonction de transfert instantanée $H_n(\omega)$ du modèle ARMA non stationnaire est calculée par :

$$H_n(\omega) = A_n^{-1}(\omega) B_n(\omega)$$

avec les matrices de paramètres momentanés

$$A_n(\omega) = I + \sum_{k=1}^p \hat{A}^k(n) e^{-ik\omega}$$

et

$$B_n(\omega) = I - \sum_{j=1}^q \hat{B}^j(n) e^{-ij\omega}$$

La matrice de covariance instantanée S_n de l'erreur de prédiction e_n bidimensionnelle peut également être estimée de façon adaptative :

$$\begin{aligned} s_{ij}(0) &= 0 \\ s_{ij}(n) &= s_{ij}(n-1) - c_s (s_{ij}(n-1) - e_n^i e_n^j), \\ & \quad i = 1, 2; n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

où c_s est de nouveau une constante $0 < c_s < 1$.

Ensuite il est possible d'estimer la matrice de densité spectrale dépendante du temps :

$$f_n(\omega) = H_n(\omega) S_n H_n^{*T}(\omega) = \begin{pmatrix} f_{11,n}(\omega) & f_{12,n}(\omega) \\ f_{21,n}(\omega) & f_{22,n}(\omega) \end{pmatrix}$$

où $H_n^{*T}(\omega)$ désigne la transposée conjuguée de $H_n(\omega)$.

Enfin, l'estimation du module carré de la cohérence instantanée est définie par :

$$\hat{\rho}_n^2(\omega) = \frac{|f_{12,n}(\omega)|^2}{f_{11,n}(\omega) f_{22,n}(\omega)}$$

Par conséquent, il est possible d'observer l'évolution entière de la fonction de cohérence pour chaque paire de canaux d'EEG en fonction du temps et de la fréquence.

A.4.2 Évaluation sur une simulation simple

Deux signaux $x_1[n]$ et $x_2[n]$, ont été simulés avec un modèle du type M_6 (§ 4.4.4.3.1) et cela suivant deux scénarios :

Première simulation (Fig. A.1 (a)) :

$$x_1[n] = B_1[n] + \sin(\omega[n]n), \quad x_2[n] = B_2[n] + \sin(\omega[n]n)$$

où

$$\omega[n] = \begin{cases} \frac{\pi n}{5000}, & n \leq 5000 \\ 0.2\pi, & n > 5000 \end{cases}$$

où B_1 et B_2 sont deux bruits blancs gaussiens centrés de puissance unité et indépendants.

Deuxième simulation (Fig. A.2 (a))

$n \leq 5000$:

$$x_1[n] = B_1[n] + \sin\left(\frac{\pi n^2}{5000}\right), \quad x_2[n] = B_2[n] + \sin\left(\frac{\pi n^2}{5000}\right)$$

$n > 5000$:

$$x_1[n] = B_1[n] + \sin(0.4\pi n) + \sin(0.5\pi n), \quad x_2[n] = B_2[n] + \sin(0.4\pi n) + \sin(0.5\pi n)$$

avec B_1 et B_2 identiques à ceux de la première simulation.

Interprétation des résultats de la première simulation

Comme on peut le voir Fig. A.1 (b)-(h) pour une même paire $(x_1[n], x_2[n])$, on obtient des résultats différents lorsqu'on modifie l'ordre du modèle et la valeur facteur d'oubli, C_s : d'une part des composantes fréquentielles parasites peuvent apparaître et, d'autre part la variance d'estimation augmente, ce qui est normal, lorsque le facteur d'oubli C_s est plus élevé. Ceci peut rendre difficile l'interprétation des résultats pour des signaux EEG réels dont les propriétés fréquentielles ne sont pas connues *a priori*.

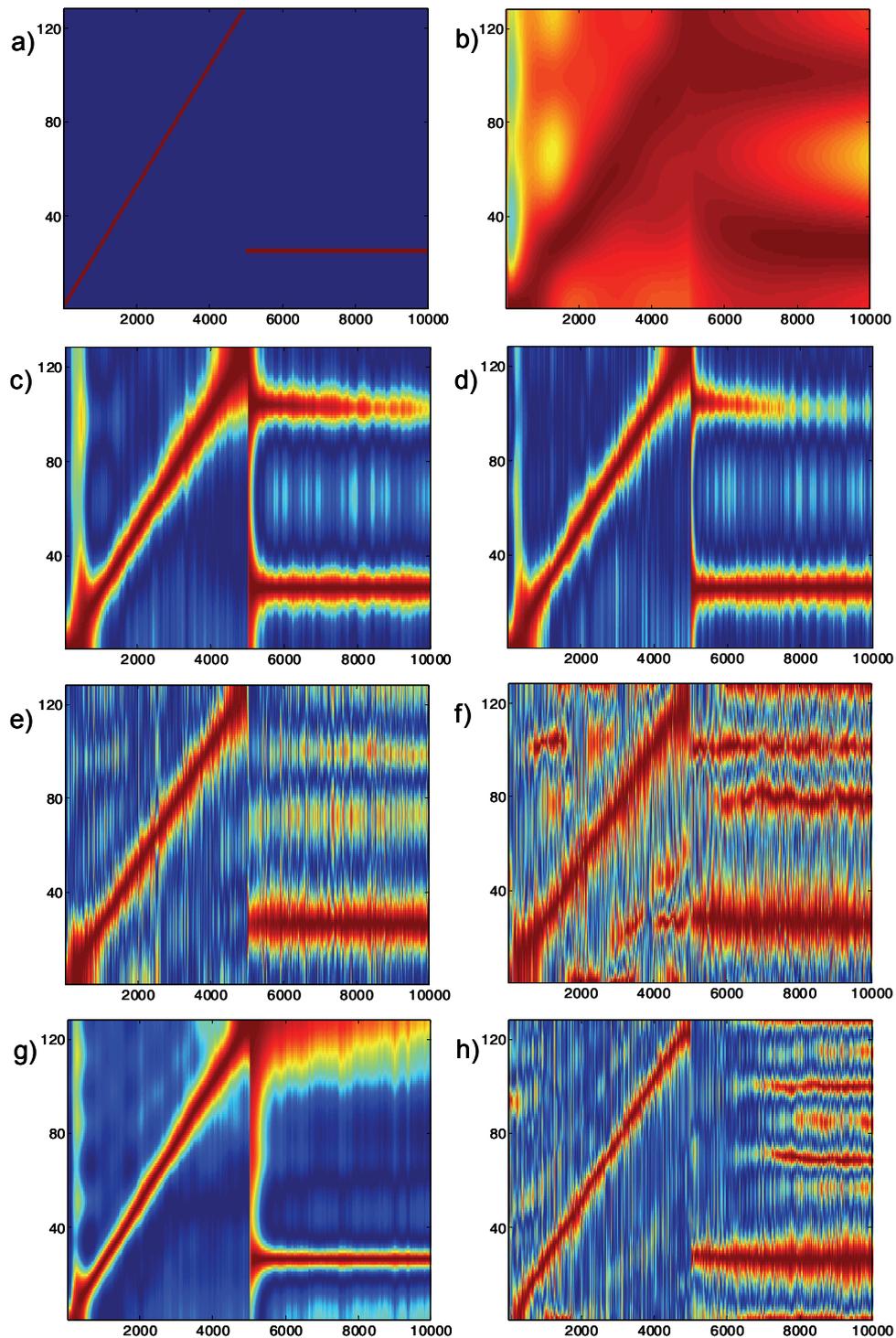


Fig. A.1. Cohérence estimée, par un modèle ARMA- 2 voies, entre deux signaux bruités partageant (a) une même composante déterministe (raie spectrale se déplaçant dans le temps) pour différentes valeurs du facteur d'adaptation et de l'ordre du modèle : (b) $p=4, q=0$, et $C_s=0.00001$; (c) $p=4, q=0$, et $C_s=0.005$; (d) $p=4, q=0$, et $C_s=0.05$; (e) $p=4, q=0$, et $C_s=0.01$; (f) $p=4, q=0$, et $C_s=0.9$; (g) $p=8, q=0$, et $C_s=0.005$; (h) $p=8, q=0$, et $C_s=0.9$.

Interprétation des résultats de la deuxième simulation

Avec cette deuxième simulation il est mis en évidence que la résolution fréquentielle de cet estimateur de la cohérence est très sensible à l'hypothèse sur l'ordre du modèle (Fig. A.2). Pour modéliser le profil fréquentiel ici présent (Fig. A.2 (a)) dans les deux signaux, un modèle ARMA(4,0) est théoriquement suffisant (deux pôles). Mais en pratique, un ordre plus élevé s'avère nécessaire pour bien distinguer les composantes fréquentielle (Fig. A.2 (b)-(d)). On peut donc penser qu'avec ce modèle, il sera difficile de distinguer des activités s'exprimant dans des bandes fréquentielles voisines.

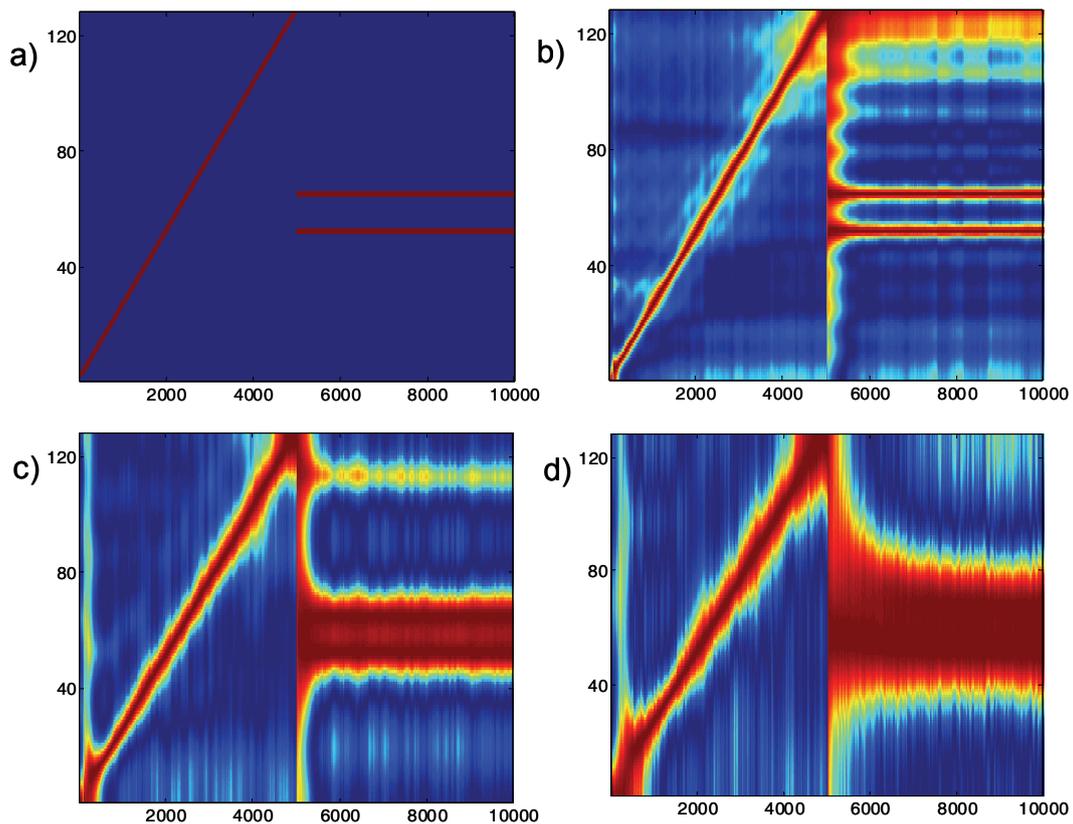


Fig. A.2. Cohérence estimée entre deux signaux bruités qui partagent (a) un même profil temps-fréquence : dépendance de la résolution du modèle ARMA 2-voies relativement à l'ordre du modèle: (b) $p=20$ et $q=0$; (c) $p=8$ et $q=0$; (d) $p=4$ et $q=0$.

A.5 Conclusion et synthèse sur les méthodes paramétrique

Bien qu'à *priori* les méthodes paramétriques non stationnaires présentées puissent apporter une meilleure résolution temporelle que des méthodes non paramétriques, elles ne sont pas exemptes de critiques. La première méthode requiert une procédure d'optimisation non linéaire et on n'échappe pas aux problèmes (i) des faux minima et (ii) de la dimension importante (de l'ordre des centaines de coefficients de fonctions de base) de l'espace paramétrique à explorer. Nous avons ainsi utilisé plusieurs méthodes de descente (méthodes quasi-Newton, Davidson-Fletcher-Powell, Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) et une méthode d'optimisation stochastique (recuit simulé) sans obtenir de résultats convaincants dans les situations non stationnaires que nous avons simulées (résultats non présentés ici). On peut d'autre part penser que le choix de la cible temps fréquence peut amener des problèmes de biais puisque les représentations temps-fréquence sont obtenues par deux modes de calcul distincts. Des investigations supplémentaires seront nécessaires pour mieux cerner ces difficultés.

De manière générale les procédures d'estimation paramétrique non stationnaire considérées ici étaient tout à fait satisfaisantes lorsque les signaux simulés étaient stationnaires où lorsqu'ils ne présentaient pas de ruptures brutales, sans parler des cas d'école présentés dans les publications. Mais en présence de changements brutaux les performances ne nous ont pas paru satisfaisantes. De ce point de vue, la troisième méthode ne semble pas bien armée du fait du temps de réaction de l'algorithme adaptatif, sans parler de son côté aveugle aux données postérieures à l'instant courant. Cependant pour les deux premières méthodes, il ne semble pas impossible *a priori* d'automatiser, par un prétraitement, un choix parcimonieux de bonnes fonctions de base, certaines aptes à reproduire les dérives lentes, et d'autres autorisant des ruptures. Enfin remarquons que le mode de calcul des spectres en fonction des coefficients ARMA, dans la deuxième et la troisième méthodes, basé sur la formule du 'spectre tangent', reste tout à fait problématique quand à son sens physique.

Bibliographie

- [1] P. Thomas and P. Genton, *Epilepsie*. Paris, 1994.
- [2] P. Chauvel, P. Buser, J. M. Badier, C. Liegeois-Chauvel, P. Marquis, and J. Bancaud, "The "epileptogenic zone" in humans: representation of intercritical events by spatio-temporal maps," *Rev Neurol (Paris)*, vol. 143, pp. 443-50, 1987.
- [3] P. Chauvel, "Indications et méthodes du traitement chirurgical des épilepsies," *Epilepsies*, vol. 1, pp. 258-275, 1989.
- [4] M. Manford, D. R. Fish, and S. D. Shorvon, "An analysis of clinical seizure patterns and their localizing value in frontal and temporal lobe epilepsies," *Brain*, vol. 119 (Pt 1), pp. 17-40, 1996.
- [5] F. Wendling, R. Le Bouquin-Jeannes, J. J. Bellanger, G. Faucon, and P. Chauvel, "Extraction of epileptic signatures and coherence estimation in SEEG observations: a preliminary study," *Innov. Techn. Biol. Med.*, vol. 19, pp. 59-75, 1998.
- [6] "<http://www.ilae-epilepsy.org/Visitors/Centre/ctf/default.html>."
- [7] E. Wyllie, *The treatment of epilepsy : principles and practice*, 3rd ed. Philadelphia, PA: Lippincott Williams & Wilkins, 2001.
- [8] "Proposal for revised clinical and electroencephalographic classification of epileptic seizures. From the Commission on Classification and Terminology of the International League Against Epilepsy," *Epilepsia*, vol. 22, pp. 489-501, 1981.
- [9] W. Penfield and H. H. Jasper, *Epilepsy and the functional anatomy of the human brain*, [1st ed. Boston,: Little, 1954.
- [10] I. A. Awad, J. Rosenfeld, J. Ahl, J. F. Hahn, and H. Luders, "Intractable epilepsy and structural lesions of the brain: mapping, resection strategies, and seizure outcome," *Epilepsia*, vol. 32, pp. 179-86, 1991.
- [11] J. Bourien, "Analyse de distributions spatio-temporelles de transitoires dans des signaux vectoriels. Application à la détection-classification d'activités paroxystiques intercritiques dans des observations EEG." Rennes: Université de Rennes 1, 2003.
- [12] B. Gourévitch, "Etude des mécanismes corticaux auditifs par l'analyse de l'enveloppe temporelle." Rennes: Université de Rennes 1, 2005.

-
- [13] P. S. Churchland and T. J. Sejnowski, "Perspectives on cognitive neuroscience," *Science*, vol. 242, pp. 741-5, 1988.
- [14] J. Talairach and J. Bancaud, "Stereotaxic exploration and therapy in epilepsy," *Handbook of clinical neurology*, vol. The Epilepsies, pp. 758-782, 1974.
- [15] J. Talairach, J. Bancaud, G. Szikla, A. Bonis, S. Geier, and C. Vedrenne, "New approach to the neurosurgery of epilepsy. Stereotaxic methodology and therapeutic results. 1. Introduction and history," *Neurochirurgie*, vol. 20, pp. 1-240, 1974.
- [16] L. Senhadji, A. Hernandez, F. Wendling, and G. Carrault, "Sur les signaux électrophysiologiques : réflexion et quelques perspectives ouvertes.," *GRETSI*, Louvain, Belgique, pp. 241-244, 2005.
- [17] T. I. Netoff and S. J. Schiff, "Decreased neuronal synchronization during experimental seizures," *J Neurosci*, vol. 22, pp. 7297-307, 2002.
- [18] F. Wendling, F. Bartolomei, J. J. Bellanger, J. Bourien, and P. Chauvel, "Epileptic fast intracerebral EEG activity: evidence for spatial decorrelation at seizure onset," *Brain*, vol. 126, pp. 1449-1459, 2003.
- [19] F. Mormann, T. Kreuz, C. Rieke, R. G. Andrzejak, A. Kraskov, P. David, C. E. Elger, and K. Lehnertz, "On the predictability of epileptic seizures," *Clinical Neurophysiology*, vol. 116, pp. 569-587, 2005.
- [20] J. S. Barlow and M. A. Brazier, "A note on a correlator for electroencephalographic work," *Electroencephalogr Clin Neurophysiol Suppl*, vol. 6, pp. 321-5, 1954.
- [21] M. A. Brazier, "Studies of the EEG activity of limbic structures in man," *Electroencephalogr Clin Neurophysiol*, vol. 25, pp. 309-18, 1968.
- [22] G. Pfurtscheller and C. Andrew, "Event-Related changes of band power and coherence: methodology and interpretation," *Journal Of Clinical Neurophysiology: Official Publication Of The American Electroencephalographic Society*, vol. 16, pp. 512-519, 1999.
- [23] P. J. Franaszczuk and G. K. Bergey, "An autoregressive method for the measurement of synchronization of interictal and ictal EEG signals," *Biol Cybern*, vol. 81, pp. 3-9, 1999.
- [24] S. Haykin, R. J. Racine, Y. Xu, and C. A. Chapman, "Monitoring neural oscillation and signal transmission between cortical regions using time-frequency analysis of electroencephalographic activity," *Proceedings of IEEE*, vol. 84, pp. 1295-1301, 1996.
- [25] N. J. Mars and F. H. Lopes da Silva, "Propagation of seizure activity in kindled dogs," *Electroencephalogr Clin Neurophysiol*, vol. 56, pp. 194-209, 1983.
- [26] J. P. Pijn and F. H. Lopes da Silva, "Propagation of electrical activity: nonlinear associations and time delays between EEG signals," in *Basic Mechanisms of the Eeg, Brain Dynamics*, S. Zschocke and E. J. Speckmann, Eds. Boston: Birkhauser, pp. 41-61, 1993.
- [27] F. Wendling, F. Bartolomei, J. J. Bellanger, and P. Chauvel, "Interpretation of interdependencies in epileptic signals using a macroscopic physiological model of the EEG," *Clinical Neurophysiology*, vol. 112, pp. 1201-1218, 2001.
- [28] L. D. Iasemidis, "Epileptic seizure prediction and control," *IEEE Trans Biomed Eng*, vol. 50, pp. 549-58, 2003.
- [29] K. Lehnertz, "Non-linear time series analysis of intracranial EEG recordings in patients with epilepsy--an overview," *Int J Psychophysiol*, vol. 34, pp. 45-52, 1999.

-
- [30] R. Quian Quiroga, A. Kraskov, T. Kreuz, and P. Grassberger, "Performance of different synchronization measures in real data: A case study on electroencephalographic signals," *Physical Review E*, vol. 65, 041903, 2002.
- [31] O. David, D. Cosmelli, and K. J. Friston, "Evaluation of different measures of functional connectivity using a neural mass model," *NeuroImage*, vol. 21, pp. 659-673, 2004.
- [32] E. Pereda, D. M. DelaCruz, L. DeVera, and J. J. Gonzalez, "Comparing Generalized and Phase Synchronization in Cardiovascular and Cardiorespiratory Signals," *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, vol. 52, pp. 578-583, 2005.
- [33] M. A. Brazier and J. S. Barlow, "Some applications of correlation analysis to clinical problems in electroencephalography," *Electroencephalogr Clin Neurophysiol Suppl*, vol. 8, pp. 325-31, 1956.
- [34] W. R. ADEY, D. O. WALTER, and C. E. HENDRIX, "Computer techniques in correlation and spectral analyses of cerebral slow waves during discriminative behavior," *Experimental Neurology*, vol. 3, pp. 501-524, 1961.
- [35] C. M. Clark, R. Kessler, M. S. Buchsbaum, R. A. Margolin, and H. H. Holcomb, "Correlational methods for determining regional coupling of cerebral glucose metabolism: a pilot study," *Biological Psychiatry*, vol. 19, pp. 663-678, 1984.
- [36] B. Horwitz, R. Duara, and S. I. Rapoport, "Intercorrelations of glucose metabolic rates between brain regions: application to healthy males in a state of reduced sensory input," *Journal Of Cerebral Blood Flow And Metabolism: Official Journal Of The International Society Of Cerebral Blood Flow And Metabolism*, vol. 4, pp. 484-499, 1984.
- [37] J. C. Shaw, "Correlation and coherence analysis of the EEG: A selective tutorial review," *International Journal of Psychophysiology*, vol. 1, pp. 255-266, 1984.
- [38] A. S. Gevins, J. C. Doyle, B. A. Cutillo, and a. et, "Neurocognitive pattern analysis of a visuospatial task: Rapidly-shifting foci of evoked correlations between electrodes," *PSYCHOPHYSIOLOGY*, vol. 22, pp. 32-43, 1985.
- [39] E. J. Bartlett, J. W. Brown, A. P. Wolf, and J. D. Brodie, "Correlations between glucose metabolic rates in brain regions of healthy male adults at rest and during language stimulation," *Brain and Language*, vol. 32, pp. 1-18, 1987.
- [40] J.-P. Lachaux, M. Chavez, and A. Lutz, "A simple measure of correlation across time, frequency and space between continuous brain signals," *Journal of Neuroscience Methods*, vol. 123, pp. 175-188, 2003.
- [41] E. W. Weisstein, *CRC concise encyclopedia of mathematics*, 2nd ed. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2003.
- [42] G. M. Jenkins and D. G. Watts, *Spectral analysis and its applications*. San Francisco,: Holden-Day, 1968.
- [43] L. H. Koopmans, *The spectral analysis of time series*, [2nd] ed. San Diego: Academic Press, 1995.
- [44] J. S. Bendat and A. G. Piersol, *Engineering applications of correlation and spectral analysis*, 2nd ed. New York: Wiley, 1993.
- [45] J. S. Bendat and A. G. Piersol, *Random data : analysis and measurement procedures*, 3rd ed. New York: Wiley, 2000.
- [46] G. Carter, C. Knapp, and A. Nuttall, "Estimation of the magnitude-squared coherence function via overlapped fast Fourier transform processing," *Audio and Electroacoustics, IEEE Transactions on*, vol. 21, pp. 337-344, 1973.

-
- [47] G. C. Carter, "Coherence and Time delay Estimation," *Proceedings of IEEE*, vol. 75, pp. 236-255, 1987.
- [48] W. A. Gardner, "A unifying view of coherence in signal processing," *Signal Processing*, vol. 29, pp. 113-140, 1992.
- [49] J. W. Cooley and J. W. Tukey, "An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series," *Math. Comput.*, vol. 19, pp. 297-301, 1965.
- [50] D. O. Walter and W. R. Adey, "Analysis of brain-wave generators as multiple statistical time series.," *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. 12, pp. 8-13, 1965.
- [51] M. A. Brazier, "Spread of seizure discharges in epilepsy: anatomical and electrophysiological considerations," *Exp Neurol*, vol. 36, pp. 263-72, 1972.
- [52] F. Bartolomei, F. Wendling, J.-P. Vignal, S. Kochen, J.-J. Bellanger, J.-M. Badier, R. Le Bouquin-Jeannes, and P. Chauvel, "Seizures of temporal lobe epilepsy: identification of subtypes by coherence analysis using stereo-electroencephalography," *Clinical Neurophysiology*, vol. 110, pp. 1741-1754, 1999.
- [53] F. Wendling, F. Bartolomei, J. J. Bellanger, and P. Chauvel, "Interpretation of interdependencies in epileptic signals using a macroscopic physiological model of the EEG," *Clin Neurophysiol*, vol. 112, pp. 1201-18, 2001.
- [54] B. J. Winer, D. R. Brown, and K. M. Michels, *Statistical principles in experimental design*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1991.
- [55] J. Fox, *Multiple and generalized nonparametric regression*. Thousand Oaks, Calif.: Sage Publications, 2000.
- [56] J. Fox, *Nonparametric simple regression : smoothing scatterplots*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications, 2000.
- [57] T. Hastie and R. Tibshirani, *Generalized additive models*, 1st ed. London ; New York: Chapman and Hall, 1990.
- [58] J. P. Pijn, "Quantitative evaluation of EEG signals in epilepsy, nonlinear associations, time delays and nonlinear dynamics." Amsterdam: University of Amsterdam, 1990.
- [59] F. Lopes da Silva, J. P. Pijn, and P. Boeijinga, "Interdependence of EEG signals: linear vs. nonlinear associations and the significance of time delays and phase shifts," *Brain Topogr*, vol. 2, pp. 9-18, 1989.
- [60] M. Chavez, M. Le Van Quyen, V. Navarro, M. Baulac, and J. Martinerie, "Spatio-temporal dynamics prior to neocortical seizures: amplitude versus phase couplings," *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, vol. 50, pp. 571-583, 2003.
- [61] F. Wendling, F. Bartolomei, J. J. Bellanger, and P. Chauvel, "Identification de reseaux epileptogenes par modelisation et analyse non lineaire des signaux SEEG: Identification of epileptogenic networks from modeling and nonlinear analysis of SEEG signals.," *Neurophysiologie Clinique/Clinical Neurophysiology*, vol. 31, pp. 139-151, 2001.
- [62] D. N. Velis, G. J. F. Brekelmans, J. P. M. Pijn, J. de Vries, and W. van Emde Boas, "Use of nonlinear association-and-delay analysis offers advantages in interpreting generalized epileptiform discharges," *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, vol. 103, pp. 174, 1997.
- [63] V. M. Fernandes de Lima, J. P. Pijn, C. N. Filipe, and F. Lopes da Silva, "The role of hippocampal commissures in the interhemispheric transfer of epileptiform afterdischarges in the rat: a study using linear and non-linear regression analysis," *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, vol. 76, pp. 520-539, 1990.

-
- [64] C. E. Shannon and W. Weaver, *The mathematical theory of communication*. Urbana,: University of Illinois Press, 1949.
- [65] R. M. Gray, *Entropy and information theory*. New York: Springer-Verlag, 1990.
- [66] T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of information theory*. New York: Wiley, 1991.
- [67] G. A. Darbellay and I. Vajda, "Estimation of the information by an adaptive partitioning of the observation space," *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 45, pp. 1315-1321, 1999.
- [68] A. M. Fraser and H. L. Swinney, "Independent coordinates for strange attractors from mutual information," *Physical Review A*, vol. 33, pp. 1134-1140, 1986.
- [69] P. Grassberger, "Finite sample corrections to entropy and dimension estimates," *Physics Letters A*, vol. 128, pp. 369-373, 1988.
- [70] K. Pawelzik and H. G. Schuster, "Generalized dimensions and entropies from a measured time series," *Phys. Rev. A*, vol. 35, pp. 481-4, 1987.
- [71] T. Schreiber, "Measuring Information Transfer," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, 2000.
- [72] M. Palus, V. Komarek, Z. Hrnčir, and K. Sterbova, "Synchronization as adjustment of information rates: detection from bivariate time series," *Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys*, vol. 63, pp. 046211, 2001.
- [73] P. Tass, M. G. Rosenblum, J. Weule, J. Kurths, A. Pikovsky, J. Volkmann, A. Schnitzler, and H.-J. Freund, "Detection of n:m phase locking from noisy data: application to magnetoencephalography," *Physical Review Letters*, vol. 81, pp. 3291-3294, 1998.
- [74] A. G. Rossberg, K. Bartholomé, and J. Timmer, "Data-driven optimal filtering for phase and frequency of noisy oscillations: Application to vortex flow metering," *Phys. Rev. E*, vol. 69, 2004.
- [75] A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, G. V. Osipov, and J. Kurths, "Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 104, pp. 219-238, 1997.
- [76] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, and J. Kurths, "Phase synchronization of chaotic oscillators," *Physical Review Letters*, vol. 76, pp. 1804-1807, 1996.
- [77] P. Ashwin, "Synchronization from chaos," *Nature*, vol. 422, pp. 384-385, 2003.
- [78] F. N. Rulkov, M. M. Sushchik, L. S. Tsimring, and H. D. I. Abarbanel, "Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems," *Phys. Rev. E*, vol. 51, 1995.
- [79] M. G. Rosenblum, L. Cimponeriu, A. Bezerianos, A. Patzak, and R. Mrowka, "Identification of coupling direction: Application to cardiorespiratory interaction," *Phys. Rev. E*, vol. 65, 2002.
- [80] M. G. Rosenblum and A. S. Pikovsky, "Detecting direction of coupling in interacting oscillators," *Phys. Rev. E*, vol. 64, 2001.
- [81] J. Bhattacharya, "Reduced degree of long-range phase synchrony in pathological human brain.," *Acta Neurobiol. Exp.*, vol. 61, pp. 309-318, 2001.
- [82] W. Freeman, B. C. Bruke, and M. D. Holmes, "Aperiodic phase re-setting in scalp EEG of beta-gamma oscillations by state transitions at alpha-theta rates," *Human Brain Mapping*, vol. 19, pp. 248-272, 2003.
- [83] A. Stefanovska, H. Haken, P. V. E. McClintock, M. Hozic, F. Bajrovic, and S. Ribaric, "Reversible Transitions between Synchronization States of the Cardiorespiratory System," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, 2000.

-
- [84] B. Blasius and L. Stone, "Chaos and Phase Synchronization in Ecological Systems," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 10, pp. 2361-2380, 2000.
- [85] J. Bhattacharya, E. Pereda, R. Kariyappa, and P. P. Kanjilal, "Application of Non-linear Analysis to Intensity Oscillations of the Chromospheric Bright Points," *Solar Physics*, vol. 199, pp. 267-290, 2001.
- [86] D. J. DeShazer, R. Breban, E. Ott, and R. R., "Detecting Phase Synchronization in a Chaotic Laser Array," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 87, 2001.
- [87] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. L. Valladares, and C. S. Zhou, "The synchronization of chaotic systems," *Physics Reports*, vol. 366, pp. 1-101, 2002.
- [88] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization : a universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [89] D. Gabor, "Theory of communication," *J. Inst. Electr. Eng. (London)*, vol. 93, pp. 429-457, 1946.
- [90] J.-P. Lachaux, E. Rodriguez, M. Le Van Quyen, A. Lutz, J. Martinerie, and F. J. Varela, "Studying single-trials of phase synchronous activity in the brain," *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.*, vol. 10, pp. 2429-2439, 2000.
- [91] J.-P. Lachaux, E. Rodriguez, J. Martinerie, and F. J. Varela, "Measuring phase synchrony in brain signals," *Human Brain Mapping*, vol. 8, pp. 194-208, 1999.
- [92] P. F. Panter, *Modulation, noise, and spectral analysis, applied to information transmission*. New York,: McGraw-Hill, 1965.
- [93] A. Reilly, G. Frazer, and B. Boashash, "Analytic signal generation-tips and traps," *Signal Processing, IEEE Transactions on [see also Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE Transactions on]*, vol. 42, pp. 3241-3245, 1994.
- [94] L. Marple, Jr., "Computing the discrete-time analytic signal via FFT," *Signal Processing, IEEE Transactions on [see also Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE Transactions on]*, vol. 47, pp. 2600-2603, 1999.
- [95] L. Senhadji, "Approche multiresolution pour l'analyse des signaux non-stationnaires." Rennes: Université de Rennes1, 1993.
- [96] M. Le Van Quyen, J. Foucher, J.-P. Lachaux, E. Rodriguez, A. Lutz, J. Martinerie, and F. J. Varela, "Comparison of Hilbert transform and wavelet methods for the analysis of neuronal synchrony," *Journal of Neuroscience Methods*, vol. 111, pp. 83-98, 2001.
- [97] F. Mormann, K. Lehnertz, P. David, and C. E. Elger, "Mean phase coherence as a measure for phase synchronization and its application to the EEG of epilepsy patients," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 144, pp. 358-369, 2000.
- [98] R. K. Otnes and L. D. Enochson, *Digital time series analysis*. New York,: Wiley, 1972.
- [99] M. Rosenblum, A. Pikovsky, and J. Kurths, "Synchronization approach to analysis of biological signals," *Fluctuation Noise Lett.*, vol. 4, pp. L53-L62, 2004.
- [100] H. Fujisaka and T. Yamada, "Stability theory of synchronized motion in coupled dynamical systems," *Prog. Theor. Phys.*, vol. 69, pp. 32-47, 1983.
- [101] V. S. Afraimovich, N. N. Verichev, and M. I. Rabinovich, "Stochastic synchronization of oscillations in dissipative systems," *Radiophys. Quantum Electron.*, vol. 29, pp. 795, 1986.
- [102] T. L. Carroll and L. M. Pecora, "Cascading synchronized chaotic systems," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 67, pp. 126-140, 1993.

-
- [103] A. E. Hramov and A. A. Koronovskii, "Generalized synchronization: A modified system approach," *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, vol. 71, pp. 067201-4, 2005.
- [104] K. Pyragas, "Weak and strong synchronization of chaos," *Phys. Rev. E*, vol. 54, 1996.
- [105] H. D. Abarbanel, N. F. Rulkov, and M. M. Sushchik, "Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach," *Physical Review. E. Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics*, vol. 53, pp. 4528-4535, 1996.
- [106] L. M. Pecora, T. L. Carroll, and J. F. Heagy, "Statistics for mathematical properties of maps between time series embeddings," *Phys. Rev. E*, vol. 52, pp. 3420, 1995.
- [107] L. M. Pecora and T. L. Carroll, "Driving systems with chaotic signals," *Phys. Rev. A*, vol. 44, 1991.
- [108] F. Takens, "Lecture Notes in Mathematics," *Springer*, vol. 898, pp. 366, 1981.
- [109] T. Sauer, J. A. Yorke, and M. Casdagli, "Embedology," *Journal of Statistical Physics*, vol. 65, pp. 579-616, 1991.
- [110] A. M. Albano, J. Muench, C. Schwartz, A. I. Mees, and P. E. Rapp, "Singular-value decomposition and the Grassberger-Procaccia algorithm," *Physical Review. A*, vol. 38, pp. 3017-3026, 1988.
- [111] A. M. Fraser, "Information and entropy in strange attractors," *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 35, pp. 245-262, 1989.
- [112] H. D. I. Abarbanel, R. Brown, J. J. Sidorowich, and L. S. Tsimring, "The analysis of observed chaotic data in physical systems," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 65, pp. 1331-1392, 1993.
- [113] E. Ott, T. Sauer, and J. A. Yorke, *Coping with chaos : analysis of chaotic data and the exploitation of chaotic systems*. New York: J. Wiley, 1994.
- [114] P. Grassberger and I. Procaccia, "Characterisation of strange attractors," *Physical Review Letters*, vol. 50, pp. 346-349, 1983.
- [115] D. S. Broomhead and G. P. King, "Extracting qualitative dynamics from experimental data," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 20, pp. 217-236, 1986.
- [116] A. I. Mees, P. E. Rapp, and L. S. Jennings, "Singular-value decomposition and embedding dimension," *Physical Review A (General Physics)*, vol. 36, pp. 340-346, 1987.
- [117] M. B. Kennel, R. Brown, and H. D. I. Abarbanel, "Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction," *Physical Review A (Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics)*, vol. 45, pp. 3403-3411, 1992.
- [118] L. Cao, "Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 110, pp. 43-50, 1997.
- [119] H. B. Fotsin and J. Daafouz, "Adaptive synchronization of uncertain chaotic colpitts oscillators based on parameter identification," *Physics Letters A*, vol. 339, pp. 304-315, 2005.
- [120] J. Arnhold, P. Grassberger, K. Lehnertz, and C. E. Elger, "A robust method for detecting interdependences: application to intracranially recorded EEG," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 134, pp. 419-430, 1999.
- [121] S. J. Schiff, P. So, T. Chang, R. E. Burke, and T. Sauer, "Detecting dynamical interdependence and generalized synchrony through mutual prediction in a neural ensemble," *Physical Review. E. Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics*, vol. 54, pp. 6708-6724, 1996.

-
- [122] M. Le Van Quyen, C. Adam, M. Baulac, J. Martinerie, and F. J. Varela, "Nonlinear interdependencies of EEG signals in human intracranially recorded temporal lobe seizures," *Brain Res*, vol. 792, pp. 24-40, 1998.
- [123] M. Le Van Quyen, J. Martinerie, C. Adam, and F. J. Varela, "Nonlinear analyses of interictal EEG map the brain interdependences in human focal epilepsy," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 127, pp. 250-266, 1999.
- [124] R. Quian Quiroga, J. Arnhold, and P. Grassberger, "Learning driver-response relationships from synchronization patterns," *Phys. Rev. E*, vol. 61, 2000.
- [125] A. Schmitz, "Measuring statistical dependence and coupling of subsystems," *Phys. Rev. E*, vol. 62, 2000.
- [126] E. Pereda, R. Rial, A. Gamundi, and J. Gonzalez, "Assessment of changing interdependencies between human electroencephalograms using nonlinear methods," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 148, pp. 147-158, 2001.
- [127] C. J. Stam and B. W. van Dijk, "Synchronization likelihood: an unbiased measure of generalized synchronization in multivariate data sets," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 163, pp. 236-251, 2002.
- [128] J. Theiler, "Spurious dimension from correlation algorithms applied to limited time-series data," *Physical Review. A*, vol. 34, pp. 2427-2432, 1986.
- [129] P. Grassberger and I. Procaccia, "Measuring the strangeness of strange attractors," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 9, pp. 189-208, 1983.
- [130] C. J. Stam, T. Montez, B. F. Jones, S. A. R. B. Rombouts, Y. van der Made, Y. A. L. Pijnenburg, and P. Scheltens, "Disturbed fluctuations of resting state EEG synchronization in Alzheimer's disease," *Clinical Neurophysiology*, vol. 116, pp. 708-715, 2005.
- [131] R. Ferri, C. J. Stam, B. Lanuzza, F. I. I. Cosentino, M. Elia, S. A. Musumeci, and G. Pennisi, "Different EEG frequency band synchronization during nocturnal frontal lobe seizures," *Clinical Neurophysiology*, vol. 115, pp. 1202-1211, 2004.
- [132] J. Altenburg, R. J. Vermeulen, R. L. Strijers, W. P. Fetter, and C. J. Stam, "Seizure detection in the neonatal EEG with synchronization likelihood," *Clin Neurophysiol*, vol. 114, pp. 50-5, 2003.
- [133] M. Dumont, F. Jurysta, J.-P. Lanquart, P.-F. Migeotte, P. van de Borne, and P. Linkowski, "Interdependency between heart rate variability and sleep EEG: linear/non-linear?," *Clinical Neurophysiology*, vol. 115, pp. 2031-2040, 2004.
- [134] K. Ansari-Asl, L. Senhadji, F. Wendling, and J. J. Bellanger, "Quantitative comparison of signal analysis methods for characterization of brain functional connectivity," *3rd European Medical and Biological Engineering Conference EMBEC'05*, Prague, 2005.
- [135] K. Ansari-Asl, L. Senhadji, J.-J. Bellanger, and F. Wendling, "Quantitative evaluation of linear and nonlinear methods characterizing interdependencies between brain signals," *Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys*, en révision, 2005.
- [136] J. H. Martin, "The collective electrical behavior of cortical neurons: the electroencephalogram and the mechanisms of epilepsy," in *Principles of neural science*, E. R. Kandel, J. H. Schwartz, and T. M. Jessel, Eds.: Prentice Hall, 1991, pp. 777-791.
- [137] P. L. Nunez and B. A. Cutillo, *Neocortical dynamics and human EEG rhythms*. New York: Oxford University Press, 1995.

-
- [138] J. P. Pijn, J. Van Neerven, A. Noest, and F. H. Lopes da Silva, "Chaos or noise in EEG signals; dependence on state and brain site," *Electroencephalogr Clin Neurophysiol*, vol. 79, pp. 371-81, 1991.
- [139] S. N. Sarbadhikari and K. Chakrabarty, "Chaos in the brain: a short review alluding to epilepsy, depression, exercise and lateralization," *Med Eng Phys*, vol. 23, pp. 445-55, 2001.
- [140] P. Faure and H. Korn, "Is there chaos in the brain? I. Concepts of nonlinear dynamics and methods of investigation," *C R Acad Sci III*, vol. 324, pp. 773-93, 2001.
- [141] A. Babloyantz and C. Lourenco, "Brain chaos and computation," *Int J Neural Syst*, vol. 7, pp. 461-71, 1996.
- [142] N. Birbaumer, H. Flor, W. Lutzenberger, and T. Elbert, "Chaos and order in the human brain," *Electroencephalogr Clin Neurophysiol Suppl*, vol. 44, pp. 450-9, 1995.
- [143] J. Horgan, "Brain storm. Controlling chaos could help treat epilepsy," *Sci Am*, vol. 271, pp. 24, 1994.
- [144] S. J. Schiff, K. Jerger, D. H. Duong, T. Chang, M. L. Spano, and W. L. Ditto, "Controlling chaos in the brain," *Nature*, vol. 370, pp. 615-20, 1994.
- [145] W. S. Pritchard and D. W. Duke, "Measuring chaos in the brain: a tutorial review of nonlinear dynamical EEG analysis," *Int J Neurosci*, vol. 67, pp. 31-80, 1992.
- [146] K. Ansari-Asl, F. Wendling, J. J. Bellanger, and L. Senhadji, "Comparison of two estimators of time-frequency interdependencies between nonstationary signals: application to epileptic EEG," *Engineering in Medicine and Biology Society, 2004. EMBC 2004. Conference Proceedings. 26th Annual International Conference of the*, San Francisco, pp. 263-266, 2004.
- [147] M. Hénon, "A two-dimensional mapping with a strange attractor.," *Communications in Mathematical Physics*, vol. 50, pp. 69-77, 1976.
- [148] J. Bhattacharya, E. Pereda, and H. Petsche, "Effective detection of coupling in short and noisy bivariate data," *Systems, Man and Cybernetics, Part B, IEEE Transactions on*, vol. 33, pp. 85-95, 2003.
- [149] G. Osipov, A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, "Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators," *Phys. Rev. E*, vol. 55, pp. 2353-2361, 1997.
- [150] L. Brunnet, H. Chate, and P. Manneville, "Long-range order with local chaos in lattices of diffusively coupled ODEs," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 78, pp. 141-154, 1994.
- [151] O. E. Rossler, "An equation for continuous chaos," *Physics Letters A*, vol. 57, pp. 397-398, 1976.
- [152] W. J. Freeman, "Models of the dynamics of neural populations," *Electroencephalogr Clin Neurophysiol Suppl*, pp. 9-18, 1978.
- [153] W. J. Freeman, "Simulation of chaotic EEG patterns with a dynamic model of the olfactory system," *Biol Cybern*, vol. 56, pp. 139-50, 1987.
- [154] F. H. Eeckman and W. J. Freeman, "Asymmetric sigmoid non-linearity in the rat olfactory system," *Brain Research*, vol. 557, pp. 13-21, 1991.
- [155] F. H. Lopes da Silva, A. Hoeks, H. Smits, and L. H. Zetterberg, "Model of brain rhythmic activity. The alpha-rhythm of the thalamus," *Kybernetik*, vol. 15, pp. 27-37, 1974.
- [156] L. H. Zetterberg, L. Kristiansson, and K. Mossberg, "Performance of a model for a local neuron population," *Biol Cybern*, vol. 31, pp. 15-26, 1978.

-
- [157] L. S. Leung, "Nonlinear feedback model of neuronal populations in hippocampal CA1 region," *J Neurophysiol*, vol. 47, pp. 845-68, 1982.
- [158] B. H. Jansen and V. G. Rit, "Electroencephalogram and visual evoked potential generation in a mathematical model of coupled cortical columns," *Biol Cybern*, vol. 73, pp. 357-66, 1995.
- [159] B. H. Jansen, G. Zouridakis, and M. E. Brandt, "A neurophysiologically-based mathematical model of flash visual evoked potentials," *Biol Cybern*, vol. 68, pp. 275-83, 1993.
- [160] F. Wendling, J. J. Bellanger, F. Bartolomei, and P. Chauvel, "Relevance of nonlinear lumped-parameter models in the analysis of depth-EEG epileptic signals," *Biol Cybern*, vol. 83, pp. 367-78, 2000.
- [161] F. Wendling, F. Bartolomei, J. J. Bellanger, and P. Chauvel, "Epileptic fast activity can be explained by a model of impaired GABAergic dendritic inhibition," *Eur J Neurosci*, vol. 15, pp. 1499-508, 2002.
- [162] J. L. Hernandez, P. A. Valdes, and P. Vila, "EEG spike and wave modelled by a stochastic limit cycle," *Neuroreport*, vol. 7, pp. 2246-50, 1996.
- [163] H. Sugimoto, N. Ishii, A. Iwata, and N. Suzumura, "Stationarity and normality test for biomedical data," *Comput Programs Biomed*, vol. 7, pp. 293-304, 1977.
- [164] H. Sugimoto, N. Ishii, A. Iwata, N. Suzumura, and T. Tomita, "On the stationarity and normality of the electroencephalographic data during sleep stages," *Comput Programs Biomed*, vol. 8, pp. 224-34, 1978.
- [165] F. H. Lopes Da Silva, "Analysis of EEG non-stationarities," *Electroencephalogr Clin Neurophysiol Suppl*, pp. 163-79, 1978.
- [166] S. J. Schiff, D. Colella, G. M. Jacyna, E. Hughes, J. W. Creekmore, A. Marshall, M. Bozek-Kuzmicki, G. Benke, W. D. Gaillard, J. Conry, and S. R. Weinstein, "Brain chirps: spectrographic signatures of epileptic seizures," *Clin Neurophysiol*, vol. 111, pp. 953-8, 2000.
- [167] M. B. Shamsollahi, "Contribution à l'analyse temps-fréquence des signaux stéréoelectroencéphalographiques et phonocardiographiques." Rennes: Université de Rennes 1, 1997.
- [168] L. Cohen, *Time-frequency analysis*. Englewood Cliffs, N.J: Prentice Hall PTR, 1995.
- [169] B. Boashash, *Time frequency signal analysis and processing : a comprehensive reference*, 1st ed. Amsterdam ; Boston: Elsevier, 2003.
- [170] B. Boashash, *Time-frequency signal analysis : methods and applications*. Melbourne, New York: Longman Cheshire; Halsted Press, 1992.
- [171] F. Wendling, M. B. Shamsollahi, J. M. Badier, and J. J. Bellanger, "Time-frequency matching of warped depth-EEG seizure observations," *IEEE Trans Biomed Eng*, vol. 46, pp. 601-5, 1999.
- [172] L. Senhadji and F. Wendling, "Epileptic transient detection: wavelets and time-frequency approaches," *Neurophysiologie Clinique/Clinical Neurophysiology*, vol. 32, pp. 175-192, 2002.
- [173] P. J. Durka and K. J. Blinowska, "A unified time-frequency parametrization of EEGs," *IEEE Eng Med Biol Mag*, vol. 20, pp. 47-53, 2001.
- [174] P. Celka, B. Boashash, and P. Colditz, "Preprocessing and time-frequency analysis of newborn EEG seizures," *IEEE Eng Med Biol Mag*, vol. 20, pp. 30-9, 2001.
- [175] M. B. Priestley, *Non-linear and non-stationary time series analysis*. London San Diego: Academic Press, 1988.

-
- [176] L. A. Zadeh, "Frequency analysis of variable networks," *Proc. I.R.E.*, vol. 38, pp. 291-299, 1950.
- [177] J.-P. Lachaux, A. Lutz, D. Rudrauf, D. Cosmelli, M. Le Van Quyen, J. Martinerie, and F. Varela, "Estimating the time-course of coherence between single-trial brain signals: an introduction to wavelet coherence," *Neurophysiologie Clinique/Clinical Neurophysiology*, vol. 32, pp. 157-174, 2002.
- [178] P. Wahlberg and G. Lantz, "Approximate Time-Variable Coherence Analysis of Multichannel Signals," *Multidimensional Systems and Signal Processing*, vol. 13, pp. 237-264, 2002.
- [179] Y.-J. Shin, D. Gobert, S.-H. Sung, E. J. Powers, and J. B. Park, "Application of cross time-frequency analysis to postural sway behavior: the effects of aging and visual systems," *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, vol. 52, pp. 859-868, 2005.
- [180] L. B. White and B. Boashash, "Cross spectral analysis of nonstationary processes," *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 36, pp. 830-835, 1990.
- [181] G. Matz and F. Hlawatsch, "Time-frequency coherence analysis of nonstationary random processes," *Statistical Signal and Array Processing, 2000. Proceedings of the Tenth IEEE Workshop on*, pp. 554-558, 2000.
- [182] P. Flandrin, "On the positivity of the Wigner-Ville spectrum," *Signal Processing*, vol. 11, pp. 187-189, 1986.
- [183] R. Manuca, M. C. Casdagli, and R. S. Savit, "Nonstationarity in epileptic EEG and implications for neural dynamics," *Mathematical Biosciences*, vol. 147, pp. 1-22, 1998.
- [184] K. Müller, G. Lohmann, J. Neumann, M. Grigutsch, T. Mildner, and D. Yves von Cramon, "Investigating the wavelet coherence phase of the BOLD signal," *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, vol. 20, pp. 145-152, 2004.
- [185] B. Cazelles, M. Chavez, A. J. McMichael, and S. Hales, "Nonstationary Influence of El Niño on the Synchronous Dengue Epidemics in Thailand," *PLoS Medicine*, vol. 2, pp. e106, 2005.
- [186] J. A. Sills and E. W. Kamen, "On some classes of nonstationary parametric processes," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 337, pp. 217-249, 2000.
- [187] G. E. P. Box and G. M. Jenkins, *Time series analysis : forecasting and control*, Rev. ed. San Francisco: Holden-Day, 1976.
- [188] Y. Grenier, "Time-dependent ARMA modeling of nonstationary signals," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-31, pp. 899-911, 1983.
- [189] S. M. Kay, *Modern spectral estimation : theory and application*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1988.
- [190] P. Flandrin, *Temps-fréquence*, 2ème ed. Paris: Editions Hermes, 1998.
- [191] A. Kaderli and A. S. Kayhan, "A spectral matching approach for parameter and spectral estimation of nonstationary rational processes," *Signal Processing, IEEE Transactions on [see also Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE Transactions on]*, vol. 49, pp. 2223-2231, 2001.
- [192] Y. Xu, S. Haykin, and R. J. Racine, "Multiple window time-frequency distribution and coherence of EEG using Slepian sequences and Hermite functions," *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, vol. 46, pp. 861-866, 1999.
- [193] A. S. Kayhan, A. El-Jaroudi, and L. F. Chaparro, "Evolutionary periodogram for nonstationary signals," *Signal Processing, IEEE Transactions on [see also Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE Transactions on]*, vol. 42, pp. 1527-1536, 1994.

-
- [194] P. Flandrin and B. Escudié, "Principe et mise en œuvre de l'analyse temps-fréquence par transformation de Wigner-Ville," *Traitement du Signal*, vol. 2, pp. 143-151, 1985.
- [195] A. Kaderli and A. S. Kayhan, "Spectral estimation of nonstationary ARMA processes using the evolutionary cepstrum," *Signal Processing Letters, IEEE*, vol. 9, pp. 130-132, 2002.
- [196] R. Zou and K. H. Chon, "Robust algorithm for estimation of time-varying transfer functions," *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, vol. 51, pp. 219-228, 2004.
- [197] H. Zhao, R. Zou, and K. H. Chon, "Estimation of time-varying coherence function using time-varying transfer functions," *Engineering in Medicine and Biology Society, 2004. EMBC 2004. Conference Proceedings. 26th Annual International Conference of the*, pp. 298-301 Vol.1, 2004.
- [198] B. Schack, G. Grieszbach, and W. Krause, "The sensitivity of instantaneous coherence for considering elementary comparison processing. Part I: the relationship between mental activities and instantaneous EEG coherence," *International Journal of Psychophysiology*, vol. 31, pp. 219-240, 1999.
- [199] B. Schack, G. Grieszbach, H. Nowak, and W. Krause, "The sensitivity of instantaneous coherence for considering elementary comparison processing. Part II: similarities and differences between EEG and MEG coherences," *International Journal of Psychophysiology*, vol. 31, pp. 241-259, 1999.
- [200] H. P. Zaveri, W. J. Williams, J. C. Sackellares, A. Beydoun, R. B. Duckrow, and S. S. Spencer, "Measuring the coherence of intracranial electroencephalograms," *Clin Neurophysiol*, vol. 110, pp. 1717-25, 1999.
- [201] O. M. Razoumnikova, "Functional organization of different brain areas during convergent and divergent thinking: an EEG investigation," *Cognitive Brain Research*, vol. 10, pp. 11-18, 2000.
- [202] A. R. Nikolaev, G. A. Ivanitsky, A. M. Ivanitsky, M. I. Posner, and Y. G. Abdullaev, "Correlation of brain rhythms between frontal and left temporal (Wernicke's) cortical areas during verbal thinking," *Neuroscience Letters*, vol. 298, pp. 107-110, 2001.
- [203] K. Ansari-Asl, F. Wendling, J. J. Bellanger, and L. Senhadji, "Suivi de relation en temps et en fréquence dans les signaux SEEG épileptiques. Evaluation de deux estimateurs linéaires.," *GRETSI*, Paris, pp. 281-284, 2003.
- [204] K. Ansari-Asl, J.-J. Bellanger, F. Bartolomei, F. Wendling, and L. Senhadji, "Time-Frequency Characterization of Interdependencies in Nonstationary Signals: Application to Epileptic EEG," *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, vol. 52, pp. 1218-1226, 2005.
- [205] T. Schreiber and A. Schmitz, "Surrogate time series," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 142, pp. 346-382, 2000.
- [206] P. Celka, "Neuronal coordination in the brain: A signal processing perspective," *Signal Processing*, vol. 85, pp. 2063-2064, 2005.
- [207] T. I. Netoff, L. M. Pecora, and S. J. Schiff, "Analytical coupling detection in the presence of noise and nonlinearity," *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, vol. 69, pp. 017201-4, 2004.
- [208] L. Ljung, *System identification : theory for the user*, 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall PTR, 1999.

-
- [209] B. Friedlander and B. Porat, "A spectral matching technique for ARMA parameter estimation," *Acoustics, Speech, and Signal Processing [see also IEEE Transactions on Signal Processing]*, *IEEE Transactions on*, vol. 32, pp. 338-343, 1984.
 - [210] D. G. Luenberger, *Linear and nonlinear programming*, 2nd ed. Boston: Kluwer Academic, 2003.
 - [211] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, and C. M. Shetty, *Nonlinear programming : theory and algorithms*, 2nd ed. New York: Wiley, 1993.
 - [212] J. Deller, Jr., "Deterministic models for a certain class of autoregressive equations with stochastic coefficients," *Acoustics, Speech, and Signal Processing [see also IEEE Transactions on Signal Processing]*, *IEEE Transactions on*, vol. 29, pp. 312-315, 1981.
 - [213] S. Lu, K. H. Ju, and K. H. Chon, "A new algorithm for linear and nonlinear ARMA model parameter estimation using affine geometry," *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, vol. 48, pp. 1116-1124, 2001.
 - [214] K. H. Chon, H. Zhao, R. Zou, and K. Ju, "Multiple time-varying dynamic analysis using multiple sets of basis functions," *IEEE Trans Biomed Eng*, vol. 52, pp. 956-60, 2005.
 - [215] S. S. Haykin, *Adaptive filter theory*, 3rd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1996.
 - [216] J. G. Proakis and D. G. Manolakis, *Digital signal processing : principles, algorithms, and applications*. Englewood Cliffs, NJ.: Prentice Hall, 1996.

Résumé

La connectivité fonctionnelle cérébrale peut être caractérisée par l'évolution temporelle de la corrélation entre les signaux enregistrés dans des régions spatialement distribuées. Ici, nous proposons une comparaison exhaustive et quantitative pour juger des performances de différentes classes de méthodes pour l'estimation de cette connectivité. Basés sur plusieurs modèles de simulation, les résultats montrent que les performances sont fortement dépendantes des caractéristiques des signaux, aucune méthode ne surpassant les autres dans toutes les situations. La nature non stationnaire et oscillatoire des activités des populations neuronales, nous a amené à proposer un estimateur Temps-Fréquence de relation. La comparaison objective de ce nouvel estimateur avec un estimateur plus classique, basé sur la fonction de cohérence, montre qu'il peut conduire à de meilleures performances. Sur des données réelles, les résultats indiquent que cet estimateur peut augmenter la lisibilité de la représentation TF de la relation et peut ainsi améliorer l'interprétation des relations entre signaux EEG.

Abstract

Cerebral functional connectivity can be characterized by the temporal evolution of the correlation between signals recorded in spatially distributed brain areas. In this thesis, we propose a comprehensive and quantitative comparison for evaluating the performances of various classes of methods aimed at estimating this connectivity. Based on various simulation models, results show that the performances are strongly dependent on the characteristics of signals, i.e. none of the methods outperforms the others in all situations. Considering the non-stationary and oscillatory nature of the activity of neuronal populations, we propose a time-frequency (TF) estimator of the relationship for non-stationary signals. The objective comparison of this new estimator with a more classical one, based on the coherence function, shows that it can lead to better performances. On real data, results indicate that this estimator can also increase the readability of the TF representation of the relationship and can thus improve the interpretation of the interdependences between EEG signals.