HAL
open science

Groupes libres, groupes triangulaires et tore épointé dans PU(2,1)

Pierre Will

To cite this version:

Pierre Will. Groupes libres, groupes triangulaires et tore épointé dans PU(2,1). Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2006. Français. NNT : . tel-00130785

HAL Id: tel-00130785

https://theses.hal.science/tel-00130785

Submitted on 13 Feb 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI

Spécialité : **MATHÉMATIQUES**

présentée par **Pierre Will**

Groupes libres, groupes triangulaires et tore épointé dans PU(2,1)

Soutenue le 10 novembre 2006, devant le jury composé de :

M. Nicolas Bergeron	examinateur
M. Gilles Courtois	rapporteur
M. Martin Deraux	examinateur
M. Elisha Falbel	directeur de thèse
M. John Parker	rapporteur

Remerciements

Je remercie tout d'abord Elisha Falbel pour avoir dirigé ma thèse avec patience, intérêt et gentillesse. Ça a été un plaisir de travailler avec lui.

Gilles Courtois et John Parker ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse et de participer au jury. Je les remercie pour les remarques et suggestions qu'ils ont faites sur mon travail. Merci également à Nicolas Bergeron et Martin Deraux pour avoir accepté de faire partie du jury.

A différents moments de mon travail, Jacques Faraut, Pierre-Vincent Koseleff, John Parker et Patrick Polo m'ont donné des indications qui se sont avérées très utiles. Je voudrais les en remercier ici.

Pour nos nombreuses conversations mathématiques, je voudrais remercier Marcos Diniz, Masseye Gaye, Florent Schaffhauser et Julien Paupert.

Le séminaire de géométrie de contact a joué pour moi un rôle très important dans ces années de thèse. Que tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à sa bonne marche et à son dynamisme soient chaleureusement remerciés ici.

Pour terminer, je voudrais avoir une pensée pour Pierre Bret, sans qui tout ceci n'aurait peut-être pas commencé.

Table des matières

Introduction **6**

1 L'espace hyperbolique complexe **21**
1.1 Introduction 21
1.2 Le plan hyperbolique complexe 22
1.2.1 Deux modèles du plan hyperbolique complexe 22
1.3 Les automorphismes de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. 25
1.3.1 Classification des éléments. 25
1.3.2 Les isométries elliptiques 27
1.3.3 Les isométries loxodromiques 28
1.3.4 Les isométries paraboliques 29
1.3.5 Isotropie des points de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ 31
1.4 Les sous-espaces totalement géodésiques de dimension 2 de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ 31
1.4.1 Les droites complexes de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ 32
1.4.2 Les $\mathbb{R}$-plans 36
1.4.3 Projections orthogonales sur les $\mathbb{R}$-plans et les droites complexes. . 46
1.5 L'invariant angulaire de Cartan 47

2 L'espace de Teichmüller du tore épointé. **49**
2.1 Représentations de F_2 et trace dans SL(2,$\mathbb{C}$) 50
2.2 Décomposition en produits d'involutions. 52
2.3 Tore épointé et groupes triangulaires dans PSL(2,$\mathbb{R}$) 52
2.3.1 L'espace de Teichmüller du tore épointé 52
2.3.2 Groupes triangulaires dans PSL(2,$\mathbb{R}$). 53

3 Représentations du groupe libre F_2 dans SU(2,1) **59**
3.1 Introduction 59
3.2 Représentations de F_2 dans SL(3,$\mathbb{C}$) 61
3.2.1 Cayley-Hamilton dans $M_3(\mathbb{C})$, et conséquences 61
3.2.2 Un analogue du théorème de Fricke-Vogt dans SL(3,$\mathbb{C}$) 66
3.3 Représentations de F_2 dans SU(2,1) 68

3.4 Deux involutions sur Hom(F_2,PU(2,1))/PU(2,1) 71
3.5 Trace et groupes triangulaires 72

4 Birapport complexe et tétraèdres idéaux 77
4.1 Le birapport complexe 78
4.2 Classification des tétraèdres idéaux 80
4.3 Action du groupe symétrique sur les birapports 85
4.4 Groupes de symétries des tétraèdres idéaux 87

5 Traces, birapports et sous-groupes à deux générateurs 93
5.1 Introduction 93
5.2 Coordonnées KR sur les paires de loxodromiques 95
5.2.1 Définition des coordonnées. 95
5.2.2 Paires décomposables 97
5.3 Traces et birapports 99
5.4 Le critère de décomposabilité en coordonnées traces 102
5.5 Représentations du groupe fondamental de la sphère privée de trois disques 105

6 Groupes triangulaires 107
6.1 Introduction 107
6.2 Les triangles idéaux et leurs symétries 109
6.3 Coordonnées sur $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ 112
6.3.1 Les involutions échangeant deux points du bord 112
6.3.2 Groupes triangulaires complexes : coordonnées sur $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$. 113
6.3.3 Le cas $\mathbb{R}$-décomposable : coordonnées sur $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$. 115
6.4 Quand le commutateur est-il parabolique ? 116
6.5 Commutateur elliptique. 124
6.5.1 Représentations $\mathbb{C}$-décomposables. 125
6.5.2 Représentations $\mathbb{R}$-décomposables. 126

7 Tore épointé et groupes triangulaires lagrangiens. 127
7.1 Introduction 127
7.2 Les surfaces spinales 129
7.3 Définition et premières propriétés des $\mathbb{R}$-surfaces spinales 130
7.4 Conditions de disjonction de deux $\mathbb{R}$-surfaces spinales 133
7.5 Preuve du théorème principal 139
7.6 Commentaires et remarques 146

Introduction

Le contexte

Ce travail de thèse se situe dans le domaine de la géométrie hyperbolique complexe. Nous nous intéressons aux sous-groupes discrets de PU(n,1), le groupe d'isométries holomorphes de l'espace hyperbolique complexe $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$. Nous nous intéresserons notamment aux représentations des groupes fondamentaux de surfaces de Riemann dans PU(n,1), notamment dans le cas où la surface est non-compacte et de volume fini.

Notre objectif initial était de décrire l'ensemble des représentations discrètes, fidèles et préservant le type du groupe fondamental du tore épointé dans PU(2,1), c'est à dire de décrire un analogue de l'espace de Teichmüller du tore épointé dans PU(2,1). Le groupe fondamental du tore épointé étant isomorphe au groupe libre à deux générateurs $F_2 = \langle \mathtt{m}, \mathtt{n} \rangle$, nous avons été amenés à étudier l'espace des représentations de F_2 dans PU(2,1). Nos principaux résultats sont les suivants.

Proposition. 3.23 *Soient ρ_1 et ρ_2 deux représentations F_2 dans* SU(2,1)*, telles que $\rho_1(F_2)$ et $\rho_2(F_2)$ sont Zariski-denses. Si*

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\rho_1(\mathtt{m}) &= \operatorname{tr}\rho_2(\mathtt{m}) & \operatorname{tr}\rho_1(\mathtt{n}) &= \operatorname{tr}\rho_2(\mathtt{n}) \\ \operatorname{tr}\rho_1(\mathtt{mn}) &= \operatorname{tr}\rho_2(\mathtt{mn}) & \operatorname{tr}\rho_1(\mathtt{m}^{-1}\mathtt{n}) &= \operatorname{tr}\rho_2(\mathtt{m}^{-1}\mathtt{n}) \\ \operatorname{tr}\rho_1([\mathtt{m},\mathtt{n}]) &= \operatorname{tr}\rho_2([\mathtt{m},\mathtt{n}]) \end{aligned}$$

alors ρ_1 et ρ_2 sont conjuguées dans SU(2,1)*.*

Ce résultat a été obtenu de manière indépendante par Khoi dans [Kho].
Parmis les représentations de F_2 dans PU(2,1), nous nous sommes interessés tout particulièrement à celles qui ont la propriété de $\mathbb{R}$-décomposabilité. Une représentation est dite $\mathbb{R}$-décomposable s'il existe trois isométries involutives et antiholomorphes I_1, I_2 et I_3 telles que $A = I_1 \circ I_2$ et $B = I_3 \circ I_2$. Il existe une notion analogue de $\mathbb{C}$-décomposabilité, pour laquelle les trois involutions sont holomorphes, que nous étudions également. Nous obtenons au chapitre 5 le

Théorème. 5.19 *Soient A et B deux éléments loxodromiques tels que $C = [A, B]$ soit parabolique pur. Alors :*

1. *C est conjugué à une translation de Heisenberg verticale si et seulement si G préserve une droite complexe.*
2. *C est conjugué à une translation de Heisenberg non-verticale si et seulement si (A, B) est $\mathbb{R}$-décomposable.*

L'outil principal est l'utilisation du birapport complexe sur le groupe de Heisenberg qui, comme l'a montré Falbel, permet la classification des tétraèdres idéaux de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Nous relions la décomposabilité d'une paire d'éléments loxodromiques (A, B) à l'existence de symétries du tétraèdre idéal formé par les points fixes de A et B. Dans le chapitre 4, nous avons préalablement énuméré les sous-groupes de S_4 susceptibles d'apparaitre comme groupes de symétrie d'un tétraèdre idéal. C'est le théorème 4.31.
Le chapitre 6 est consacré à l'étude des groupes triangulaires, c'est à dire engendrés par trois involutions I_1, I_2 et I_3, telles que $c = (I_1 I_2 I_3)^2$ est non-elliptique. Notons que si ρ est $\mathbb{R}$-décomposable $\rho([\mathtt{m}, \mathtt{n}]) = c$. Nous décrivons un système de coordonnées permettant de detecter simplement les groupes triangulaires pour lesquels c est parabolique.

Nous consacrons le chapitre 7 à la démonstration de notre résultat principal ($T_{1,1}$ désigne l'espace de Teichmüller du tore épointé) :

Théorème. 7.1 *Il existe une famille à un paramètre $-\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$ d'applications*

$$\phi_\alpha : T_{1,1} \longrightarrow \mathrm{Hom}(F_2, \mathrm{PU}(2,1))/\mathrm{PU}(2,1)$$

satisfaisant aux conditions suivantes.

1. *$\phi_{\alpha_1}([\rho_1]) = \phi_{\alpha_2}([\rho_2])$ si et seulement si $\alpha_1 = \alpha_2$ et $[\rho_1] = [\rho_2]$*
2. *Pour tout $[\rho] \in T_{(1,1)}$ et pour tout $\alpha \in [-\pi/4, \pi/4]$, $\phi_\alpha([\rho])$ est une classe de représentations discrètes, fidèles, préservant le type et $\mathbb{R}$-décomposables du groupe fondamental du tore épointé.*
3. *Pour tout $[\rho] \in T_{(1,1)}$, $\phi_\alpha([\rho])$ stabilise un $\mathbb{R}$-plan si et seulement si $\alpha = 0$.*
4. *Le segment $(\phi_\alpha)_{|\alpha|<\pi/4}$ est maximal : si $\pi/4 < |\alpha| \leqslant \pi/2$, il existe $[\rho] \in T_{(1,1)}$ telle que $\phi_\alpha([\rho])$ contient un élément elliptique, et est par conséquent non-discrète ou non-fidèle.*

Résumons les principales difficultés rencontrées dans ce travail.

– Dans le cas classique de PSL(2,$\mathbb{R}$), la paramétrisation par la trace de l'espace de Teichmüller du tore épointé est donnée par la fameuse équation $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$ (avec x,y et $z > 2$). L'approche similaire dans le cas de PU(2,1) est rendue beaucoup plus lourde par la complexité des calculs (voir par exemple la proposition 3.6 page 63).

- Pour montrer la discrétude d'un sous-groupe de PU(2,1), nous construisons un domaine fondamental. $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ étant de courbure non-constante, il n'existe pas d'hypersurface réelle totalement géodésique, qui constituerait un modèle de face privilégié pour construire un domaine fondamental. Nous définissons donc une famille d'hypersurfaces adaptées à notre problème : les $\mathbb{R}$-surfaces spinales (voir la définition 7.9 page 131), qui nous permettent de prouver le théorème 7.1.
- Il est difficile de contrôler l'apparition d'éléments paraboliques ou elliptiques qui viendraient s'opposer à la discrétude, à la fidélité ou à la préservation de type. La famille de représentations décrite dans le théorème 7.1 est contenue dans une famille connexe contenant des représentations non-discrètes. Nous renvoyons à la section 7.6 page 146.

Soit $\Sigma_{g,n}$ une surface de genre g et privée de n points et de caractéristique d'Euler négative (c'est à dire telle que $2-2g-n<0$). L'espace de Teichmüller de $\Sigma_{g,n}$ est construit à partir des représentations du groupe fondamental de $\Sigma_{g,n}$

$$\rho : \pi_1(\Sigma_{g,n}) \longrightarrow \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \tag{1}$$

satisfaisant aux conditions suivantes

- ρ est discrète : l'image de ρ est un sous-groupe discret de PSL(2,$\mathbb{R}$), le groupe des automorphismes du revêtement universel de $\Sigma_{g,n}$
- ρ et fidèle : ρ est injective
- ρ préserve le type : les seuls éléments non hyperboliques de $\rho\left(\pi_1(\Sigma_{g,n})\right)$ sont paraboliques et sont associés à la classe d'homotopie d'un lacet autour de l'un des n points ôtés.

Une représentation vérifiant ces trois conditions définit une structure hyperbolique sur $\Sigma_{g,n}$, et s'appelle l'*holonomie* de cette structure. Deux structures hyperboliques associées à ρ_1 et ρ_2 sur $\Sigma_{g,n}$ sont dites équivalentes lorsque ρ_1 et ρ_2 sont conjuguées dans PSL(2,$\mathbb{R}$). L'espace de Teichmüller de $\Sigma_{g,n}$ est l'ensemble des classes d'équivalences de structures hyperboliques sur $\Sigma_{g,n}$. Il peut donc être vu comme le sous-ensemble de

$$\mathrm{Hom}\left(\pi_1\left(\Sigma_{g,n}\right), \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})\right)/\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$$

formé des classes de représentations discrètes, fidèles et préservant le type.
Dans le cas des surfaces compactes de genre au moins 2 (c'est à dire pour $n=0$ et $g \geqslant 2$), l'espace de Teichmüller est homéomorphe à une boule de dimension $6g-6$. Goldman a montré dans [Gol88] que la variété des représentations possède $4g-3$ composantes, correspondant aux valeurs possibles du nombre d'Euler de la représentation ρ (qui est entier et vérifie l'inégalité de Milnor-Wood $|e| \leqslant 2g-2$). De plus, les cas d'égalités $|e|=2g-2$ correspondent aux composantes formées de représentations discrètes et fidèles. La variété des représentations d'un groupe de surface compacte de genre au moins 2 dans

PSL(2,$\mathbb{R}$) contient donc deux composantes connexes qui sont des copies de l'espace de Teichmüller.
Cette approche de l'étude de la variété des représentations d'un groupe de surface dans un groupe de Lie G a donné lieu a de très nombreuses généralisations, dont on trouvera un panorama dans [Gol85] et dans [Wie04].

Un premier exemple est celui où $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, le groupe d'isométrie de l'espace hyperbolique réel de dimension 3. PSL(2,$\mathbb{R}$) apparaît en effet comme le stabilisateur d'un plongement totalement géodésique de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$ dans $\mathbf{H}^3_{\mathbb{R}}$. Un sous-groupe discret de PSL(2,$\mathbb{C}$) est dit fuchsien lorsqu'il stabilise une copie de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$, ou, de manière équivalente, lorsque son ensemble limite est contenu dans un cercle de $\overline{\mathbb{C}}$. L'inclusion PSL(2,$\mathbb{R}$)$\subset$PSL(2,$\mathbb{C}$) a donc fourni un point de départ à l'étude des variétés de dimension 3 : l'idée est de partir d'une représentation préservant un sous-espace totalement géodésique, et de la déformer en tentant de conserver si possible le caractère discret et fidèle de la représentation. L'étude des déformations a ainsi commencé par les *groupes quasi-fuchsiens* : les sous-groupes discrets de PSL(2,$\mathbb{C}$) dont l'ensemble limite est une courbe fermée simple. L'approche analytique de ces problèmes utilise de façon importante la théorie des applications quasi-conformes . Une représentation est quasi-fuchsienne si et seulement elle est conjuguée à une représentation fuchsienne par un homéomorphisme quasi-conforme de $\overline{\mathbb{C}}$ (voir [Ber60, Kap]). L'ensemble des représentations quasi-fuchsiennes d'un groupe de surface est isomorphe au produit de deux copies de l'espace de Teichmüller de cette surface (voir [Ota96]). L'étude des variétés de dimension trois a suscité un énorme intérêt durant les 40 dernières années, notamment suite aux travaux de Thurston. Ce dernier a émis plusieurs importantes conjectures, parmi lesquelles on peut citer la « Ending Lamination Conjecture », qui fait partie de son « Programme de Géométrisation » (voir [Thu], [Thu82], et le panorama du sujet dû à Minsky, [Min02]). Minsky a étudié séparément le cas du tore épointé dans [Min99], avant de démontrer cette conjecture dans le cas des groupes de surface Kleiniens en collaboration avec J. Brock et R. Canary dans [BCM]. Une démonstration du cas général des variétés hyperboliques de dimension trois est annoncée dans [BCM] et [Min02].

Un autre généralisation est le cas où $G = \mathrm{PSL}(3,\mathbb{R})$. Dans les deux articles [Gol90] et [CG93], Goldman et Choi ont montré que les holonomies des structures projectives convexes[1] sur une surface compacte forment une composante de la variété des représentations de $\pi_1(\Sigma_{g,0})$ dans PSL(3,$\mathbb{R}$). Le cas de PSL(n,$\mathbb{R}$) avec $n > 2$ a été étudié – entre autres – par Hitchin et par Labourie. Hitchin a identifié dans [Hit92] une composante de l'espace Hom($\pi_1(\Sigma_{g,0})$,PSL(n,$\mathbb{R}$))/PSL(n,$\mathbb{R}$), obtenue par déformation du plongement irréductible de PSL(2,$\mathbb{R}$) dans PSL(n,$\mathbb{R}$). Dans le cas $n = 3$, la composante de Hitchin coïncide avec celle de Choi et Goldman. La composante de Hitchin est homéomorphe à une boule de di-

[1]Une structure projective convexe sur une surface compacte $\Sigma_{g,0}$ est une paire (S, f), où S est une variété projective convexe et $f : \Sigma_{g,0} \to S$ un difféomorphisme. (Une variété projective convexe est le quotient d'un domaine convexe du plan projectif réel $\mathbb{R}P^2$ par l'action d'un sous-groupe discret de PSL(3,$\mathbb{R}$).)

mension $(4g-4)\dim(G)$. Labourie a montré dans [Lab] que toute représentation contenue dans la composante de Hitchin est discrète, fidèle et préserve le type.

L'étude des représentations de groupes de surfaces dans PU(n,1) fait partie de la famille des généralisations hermitiennes de l'espace de Teichmüller (voir [Wie04]). Dans [Tol89], Toledo a défini un invariant qui généralise le nombre d'Euler d'une représentation dans PSL(2,$\mathbb{R}$). A toute représentation ρ du groupe fondamental π d'une surface compacte Σ dans PU(n,1) est associé un fibré plat sur Σ dont la fibre est $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$. La contractibilité de $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$ garantit l'existence d'une application $f : \mathbf{H}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$, ρ-équivariante. $f^*\omega$, pull-back par f de la forme de Kähler sur $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$, définit une forme sur $\mathbf{H}^1_{\mathbb{C}}$ qui est invariante sous l'action de π. Elle induit donc une forme sur Σ. L'invariant de Toledo $\tau(\rho)$ de la représentation ρ est défini comme l'intégrale sur Σ de cette forme (voir [Tol89]) :

$$\tau(\rho) = \int_\Sigma f^*\omega \tag{2}$$

Domic et Toledo ont montré dans [DT87] que l'invariant de Toledo satisfaisait à l'inégalité de Milnor–Wood généralisée $|\tau(\rho)| \leqslant 4\pi(g-1)$, où g désigne le genre de Σ. Le résultat principal de [Tol89] est une caractérisation géométrique des représentations dont l'invariant de Toledo est maximal :

Théorème 0.1 (Toledo)**.** *Si $|\tau(\rho)| = 4\pi(g-1)$, alors ρ laisse une droite complexe de $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$ invariante.*

En corollaire, si $|\tau(\rho)|$ est maximal ρ s'écrit comme somme directe d'une représentation fuchsienne de π et d'une représentation dans U($n-1$) (le stabilisateur d'une droite complexe de $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$ dans PU(n,1) est isomorphe à P(U(1,1)×U(n)), voir par exemple [CG74]). Ceci prouve la rigidité des actions des groupes de surfaces compactes préservant une droite complexe dans $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$. Goldman et Millson avaient auparavant obtenu un théorème de rigidité locale dans [GM87]. Xia a montré dans [Xia00] puis [Xia03] que l'invariant de Toledo distinguait les composantes connexes de l'espace de représentations d'une surface compacte dans PU(n,1). Dans [GKL01], Goldman, Kapovich et Leeb on montré de plus que l'invariant de Toledo d'une représentation du groupe fondamental d'une surface compacte de genre g dans PU(n,1) est soumis à la condition d'intégralité :

$$\tau \in \frac{4\pi}{n+1}\mathbb{Z}.$$

Burger, Iozzi et Wienhard ont généralisé dans [BIW03, BIW06] (voir aussi [Wie04]) l'étude de ces problèmes au cas des espaces symétriques hermitiens (c'est à dire admettant une structure complexe invariante par isométrie). Les exemples les plus classiques sont les espaces symétriques associés au groupes unitaires U(p,q), avec par exemple $p \geqslant q$ (q est le rang de l'espace symétrique associé). Le cas de U(p,2) avait déjà été étudié par

Hernàndez dans [Her91] et celui de U(p,q) par Bradlow, Garcia-Prada et Gothen dans [BGPG03]. L'espace hyperbolique complexe, associé à U(n,1), entre donc dans ce cadre. Des résultats du même type ont été obtenus par Koziarz et Maubon dans [KM04] par des méthodes de géométrie différentielle. Ils montrent ainsi le

Théorème 0.2. *Soit S une surface de Riemann fermée privée d'un nombre fini de points, Γ son groupe fondamental et $\rho : \Gamma \to PU(n,1)$ une représentation. L'invariant de Toledo satisfait $|\tau(\rho)| \leqslant -2\pi\chi$ avec égalité si et seulement si $\rho(\Gamma)$ préserve une droite complexe $\mathbf{H}^1_{\mathbb{C}} \subset \mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$, ρ est discrète et fidèle, et S est difféomorphe au quotient $\mathbf{H}^1_{\mathbb{C}}/\rho(\Gamma)$.*

Dans le cas de PU(n,1), aucun espace de module de représentations de groupes de surfaces discrètes, fidèles et préservant le type n'a été complètement décrit à ce jour. Les seuls groupes de présentation finie dont on connaisse l'espace des modules des représentations discrètes et fidèles dans PU(2,1) sont

1. Les groupes triangulaires idéaux, de présentation $\langle i_1, i_2, i_3 \,|\, i_k^2 = 1, (i_j i_k)^\infty \rangle$ (voir [GP92, Sch01, Sch05b]).
2. Le groupe modulaire PSL(2,$\mathbb{Z}$), (voir [FP03]).

Notons que si l'on remplace PU(2,1) par $\widehat{\mathrm{PU}(2,1)}$ dans le premier cas, autorisant ainsi les i_k à être représentés par des involutions antiholomorphes, on ne connaît qu'un ouvert de l'espace des modules de représentations discrètes et fidèles (voir [FK00]). Dans le cas de PU(2,1), et pour les surfaces compactes, Parker et Platis ont montré dans [PP06] la flexibilité des représentations fuchsiennes stabilisant un $\mathbb{R}$-plan (voir la section 1.4.2). Ils ont décrit des domaines fondamentaux, basés sur un raffinement des $\mathbb{R}$-surfaces spinales définies dans le chapitre 7 (voir aussi [Wil]). Par cette technique, ils peuvent décrire explicitement un voisinage de dimension maximale $(16g - 16)$ formé de représentations discrètes, fidèles et préservant le type. Ce résultat découle également du théorème prouvé par O. Guichard dans [Gui04].

Les représentations de groupes fondamentaux de surfaces compactes dans PU(2,1) préservant une droite complexe ou un $\mathbb{R}$-plan, qui sont les deux types de sous-espaces totalement géodésiques maximaux de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, ont donc un comportement opposé : rigidité pour les représentations préservant une droite complexe, flexibilité pour les représentations préservant un $\mathbb{R}$-plan. Dans le cas où la surface n'est plus compacte, mais reste de type fini, c'est à dire admet un nombre fini de cusps, cette dichotomie n'existe plus, comme le montre le théorème 0.3 énoncé ci-dessous, démontré par Gusevskii et Parker dans [GP00]. Ce résultat est obtenu par un procédé de passage à un sous-groupe d'indice fini à partir de représentations du groupe modulaire PSL(2,$\mathbb{Z}$) dans PU(2,1). Ces représentations ont fait l'objet de nombreux travaux par Falbel et Koseleff d'une part, Gusevskii et Parker d'autre part, et finalement par Falbel et Parker (voir [FK02b, FK00, FK02a, GP00, GP03, FP03]).

Théorème 0.3. *Soit S une surface de Riemann non-compacte, de volume fini (i.e avec un nombre fini de points ôtés), de caractéristique d'Euler χ. Il existe une famille à un*

paramètre $(\rho_t)_{t\in[-1,1]}$ *de représentations du groupe fondamental de* S *dans PU(2,1) satisfaisant aux conditions suivantes.*

- *L'invariant de Toledo de* ρ_t *vaut* $2\pi\chi t$.
- *Pour tout* t, ρ_t *est une représentation discrète, fidèle et préservant le type du groupe fondamental de* S.
- *La représentation* ρ_0 *préserve une* $\mathbb{R}$*-plan.*
- *La représentation* ρ_1 *préserve une droite complexe.*

De plus, Goldman, Kapovich et Leeb ont montré dans [GKL01] que pour tout entier k tel que $4\pi(1-g) \leqslant 2k\pi \leqslant 4\pi(g-1)$, il existe une représentation du groupe fondamental de la surface compacte de genre g dans PU(2,1) qui est convexe-cocompacte, discrète et fidèle, et dont l'invariant de Toledo est $2k\pi$.

Posons la

Définition 0.4. Un groupe triangulaire est une représentation ρ de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{*3}$ dans $\widehat{\mathrm{PU}(2,1)}$.

A ce jour, la plupart des groupes discrets connus en géométrie hyperbolique complexe sont des groupes triangulaires, ou des groupes d'indice fini dans un groupe triangulaire, c'est à dire engendrés par trois involutions. Ainsi, Deraux, Falbel et Paupert ont montré dans [DFP05] que les réseaux obtenus par Mostow dans [Mos80] étaient d'indice 2 dans des groupes engendrés par trois involutions antiholomorphes.
Les exemples se présentent souvent comme des familles de groupes dont on cherche à démontrer la discrétude en construisant des domaines fondamentaux. Le cas typique est le suivant : on étudie une famille à un paramètre de représentations, dont une des extrémités est discrète et fidèle, et préserve un sous-espace totalement géodésique. En général, la déformation devient non-discrète (ou non-fidèle) lorsqu'apparaît un élément elliptique. Goldman et Parker, puis Schwartz ont ainsi étudié la famille des groupes triangulaires idéaux qui est un exemple typique de comportements des groupes triangulaires. Ainsi, dans [Sch01], R. Schwartz a démontré le théorème suivant, conjecturé dans [GP92] :

Théorème 0.5. *Soit* G *un sous-groupe de PU(n,1) engendré par trois réflexions complexes d'ordre deux* I_1, I_2 *et* I_3, *dont les produits deux à deux sont paraboliques (groupe triangulaire idéal).* G *est une représentation discrète et fidèle du groupe* $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{*3}$ *si et seulement si* $I_1I_2I_3$ *est non-elliptique.*

Pour prouver la discrétude d'un sous-groupe Γ de PU(2,1), on essaie en général de construire un polyèdre P dont les faces sont identifiées par des éléments de Γ, et d'utiliser le théorème de Poincaré (voir [FZ99]) pour prouver que P fournit un domaine fondamental. Il s'agit d'une technique classique, illustrée par exemple par la méthode de Dirichlet. Le fait que $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$ soit de courbure non-constante implique qu'il n'y existe pas d'hypersurface totalement géodésique. Pour reprendre l'exemple de la méthode de Dirichlet, si x est un point de $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$ et γ un élément de PU(n,1), la sous variété de $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$ définie par

$$B = \{z \in \mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}\,,\, d(x,z) = d(\gamma \cdot x, z)\}, \tag{3}$$

n'est pas totalement géodésique. La méthode de Dirichlet dans $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ a été étudiée par Mostow dans [Mos80] (voir aussi [Der05]). Les hypersurfaces (3) ont été définies par Mostow dans [Mos80], et s'appellent des *surfaces spinales* ou *bissecteurs* (voir le chapitre 7). Leur caractère non-géodésique conduit à de grandes difficultés techniques, par exemple pour étudier l'intersection de deux telles surfaces (voir [Gol99, DFP05]).

Suite aux travaux de Goldman et Parker sur les groupes triangulaires idéaux, H. Sandler a établi dans [San95] une relation combinatoire permettant d'exprimer la trace d'un élément du groupe en fonction de son type combinatoire. Dans [San98], Sandler a poursuivi l'étude de la trace dans les groupes triangulaires, s'intéressant au problème des mots « trace-équivalents », c'est à dire qui ont la même trace sous toutes les représentations sans être conjugués dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{*3}$. Pratoussevitch, dans [Pra05] a décrit des coordonnées sur l'ensemble des groupes triangulaires complexes. Ces coordonnées généralisent l'invariant de Cartan dans le cas des groupes triangulaires idéaux. Elles sont obtenues en utilisant la notion de vecteur polaire à une droite complexe (voir la définition 1.31). Dans ce même travail, Pratoussevitch a également généralisé la relation des traces de Sandler des groupes engendrés par trois réflexions complexes quelconques, et étudié les propriétés arithmétiques de la trace. Voir aussi le preprint [Pra]. Les travaux de Sandler et Pratoussevitch, ont été la motivation initiale de l'étude de la trace dans les groupes à deux générateurs de SU(2,1), exposée au chapitre 3.

Notre travail s'inscrit dans le cadre de l'étude des représentations discrètes de groupes de surfaces à cusps dans PU(2,1). D'un point de vue algébrique, ces groupes sont libres, avec un nombre fini de générateurs. Si Σ est une surface de Riemann de genre g avec p cusps, son groupe fondamental admet la présentation suivante.

$$\pi_1(\Sigma) \sim \langle a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g, c_1 \cdots c_p \mid \prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i] \prod_{j=1}^{p} c_j = 1\rangle \tag{4}$$

Un objectif à long terme serait de décrire et classifier les représentations de $\rho : \pi_1(\Sigma) \to$ PU(2,1) satisfaisant aux conditions suivantes :

- ρ est discrète et fidèle.
- ρ préserve le type : les seuls éléments non-loxodromiques de $\rho(\pi_1(\Sigma))$ sont paraboliques et sont conjugués dans $\rho(\pi_1(\Sigma))$ à une puissance de l'un des $\rho(c_j)$.

Il s'agit donc de décrire un équivalent de l'espace de Teichmüller dans le cas du plan hyperbolique complexe. Un tel objectif est encore hors de portée pour une surface de type topologique quelconque.

Posons la définition suivante (définition 5.9).

Définition 0.6. Soient A et B deux éléments de $PU(2,1)$. La paire (A,B) est dite *décomposable* s'il existe trois involutions I_1, I_2, I_3 telles que

$$A = I_1 \circ I_2 \text{ et } B = I_3 \circ I_2$$

Plus précisément, (A,B) est dite $\mathbb{R}$-*décomposable* si les I_k sont antiholomorphes, et $\mathbb{C}$-*décomposable* si les I_k sont holomorphes. Une représentation $\rho : F_2 \to$PU(2,1) sera dite $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)-décomposable si la paire $(\rho(\mathtt{m}), \rho(\mathtt{n}))$ est $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)-décomposable.

Les représentations $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$-décomposables sont donc d'indice deux dans un groupe triangulaire. Rappelons maintenant les principaux résultats obtenus dans l'étude des représentations de surfaces à cusps.

- Dans les travaux [GP92, Sch01, Sch05b], Goldman et Parker, puis Schwartz ont décrit complètement l'espace des représentations discrètes, fidèles, préservant le type, et $\mathbb{C}$-décomposables de la sphère moins trois points. Il s'agit un segment (ρ_t) avec $t \in [0,1[$. ρ_0 stabilise un $\mathbb{R}$-plan, et ρ_1 est une représentation discrète et fidèle mais contenant une classe supplémentaire parabolique.

- Dans [FK00], Falbel et Koseleff ont décrit un ouvert de dimension 4 formé de représentations deux à deux non-conjuguées dans PU(2,1), discrètes, fidèles, préservant le type, et $\mathbb{R}$-décomposables de la sphère moins trois points.

- Le cas des représentations du groupe modulaire PSL(2,$\mathbb{Z}$) a été traité dans [FK02a, GP00, FP03, GP03]. Toute représentation du groupe modulaire contient alors avec indice fini une représentation du groupe fondamental d'une surface de Riemann de genre g avec p pointes, g et p étant des entiers quelconques tels que $2-2g-p<0$ (c'est le théorème de Millington, voir [GP03]).

Plan de la thèse

Dans le cas du tore épointé, la relation 4 pour $g=1$ et $p=1$ montre que le groupe fondamental du tore épointé est isomorphe au groupe libre à deux générateurs. Dans tout ce qui suit, nous désignerons par $F_2 = \langle \mathtt{m}, \mathtt{n} \rangle$ le groupe libre à deux générateurs $\mathtt{m}$ et $\mathtt{n}$, et par Hom(F_2,PU(2,1))^{lox} l'ensemble des représentations ρ de F_2 dans PU(2,1) telles que $\rho(\mathtt{m})$ et $\rho(\mathtt{n})$ sont loxodromiques. $T_{g,n}$ désignera l'espace de Teichmüller d'une surface de Riemann de genre g avec p pointes. Précisons maintenant nos objectifs.

1. Donner des coordonnées sur $\mathrm{Hom}(F_2,\mathrm{PU}(2,1))/\mathrm{PU}(2,1)$. En utilisant les traces, nous obtenons de telles coordonnées dans la proposition 3.23.
2. Décrire les représentations de $\mathrm{Hom}(F_2,\mathrm{PU}(2,1))^{\mathrm{lox}}$, et donner un critère de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$-décomposabilité d'une représentation. Nous obtenons ce critère d'abord en termes de birapport complexe (cf chapitre 4), puis nous le traduisons en termes de traces dans la proposition 5.13, et le théorème 5.17.
3. Identifier dans $\mathrm{Hom}(F_2,\mathrm{PU}(2,1))^{\mathrm{lox}}$ les représentations ρ telles que $\rho([\mathtt{m},\mathtt{n}])$ est parabolique. Ce résultat est obtenu dans le chapitre 6, propositions 6.24 et 6.25.
4. Décrire une famille de représentations discrètes, fidèles et préservant le type du groupe fondamental du tore épointé dans PU(2,1). Le théorème 7.1 décrit une famille à un paramètre de plongements de l'espace de Teichmüller du tore épointé dans $\mathrm{Hom}(F_2,\mathrm{PU}(2,1))^{\mathrm{lox}}$. Il est obtenu au chapitre 7.

Notre travail est organisé de la façon suivante :

– **Chapitre 1**. Il s'agit d'un chapitre de préliminaires, où nous décrivons l'espace hyperbolique complexe, ses sous-espaces et ses isométries. La référence principale est le livre de Goldman ([Gol99]).

– **Chapitre 2**. Ce chapitre est consacré à la description des représentations du groupe libre à deux générateurs dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ et $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (théorème de Fricke-Vogt), ainsi qu'à l'espace de Teichmüller du tore épointé.

– **Chapitre 3**. Dans ce chapitre, nous étudions les représentations du groupe libre à deux générateurs dans $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$. Notre présentation est basée sur le chapitre 10 de [Fog02]. Le problème a aussi été étudié par Lawton dans [Law06]. Si A et B sont deux éléments de $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$, les traces des deux commutateurs $[A,B]$ et $[A^{-1},B]$ sont solutions d'une équation

$$T^2 - ST + P$$

où S et P sont des polynômes en 8 variables évalués au point

$$\left(\mathrm{tr}A, \mathrm{tr}B, \mathrm{tr}AB, \mathrm{tr}A^{-1}B, \mathrm{tr}A^{-1}, \mathrm{tr}B^{-1}, \mathrm{tr}A^{-1}B^{-1}, \mathrm{tr}AB^{-1}\right)$$

(voir la proposition 3.6). Ce résultat apparaît déjà dans [Fog02], mais les polynômes S et P n'y sont pas explicités. Pour expliciter S et P, nous avons utilisé le logiciel de calcul formel MAPLE. Nous déduisons de l'étude de $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ le critère suivant de conjugaison pour les sous-groupes Zariski-denses à deux générateurs de PU(2,1). Nous prouvons la proposition 3.23 à ce stade. Dans le cas où la représentation est $\mathbb{C}$-décomposable, ces coordonnées nous permettent de généraliser les coordonnées de Pratoussevitch sur l'ensemble des groupes triangulaires complexes, sans hypothèse géométrique sur la position relative des miroirs.

- **Chapitre 4**. Nous décrivons le birapport complexe, introduit par Koranyi et Reimann sur le groupe de Heisenberg dans [KR87]. Nous décrivons la classification des tétraèdres idéaux de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, obtenue par Falbel dans [Falb] : un tétraèdre est déterminé à isométrie près par trois birapports complexes, satisfaisant deux relations réelles (voir la proposition 4.12, et les relations 4.6 et 4.9). Nous terminons le chapitre par un résultat explicitant les groupes de symétries possibles d'un tétraèdre idéal (théorème 4.31).

- **Chapitre 5**. Nous utilisons le birapport complexe pour paramétrer les représentations du groupe libre F_2 envoyant les générateurs sur des isométries loxodromiques. En utilisant le tétraèdre τ_ρ formé par les points fixes des images de $\mathtt{m}$ et $\mathtt{n}$ par une représentation ρ, nous réinterprétons en termes de birapport le critère de conjugaison obtenu en termes de traces au chapitre 3. Nous relions alors les symétries éventuelles de τ_ρ à la $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ décomposabilité de la représentations ρ (voir la proposition 5.10). Nous en déduisons le résultat suivant, dont le théorème 5.19 énoncé plus haut est un cas particulier.
  Théorème. 5.17 *Soient A et B deux isométries loxodromiques de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, et $G = \langle A, B\rangle$. Supposons que G ne préserve aucun sous espace totalement géodésique. Alors :*

  1. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*
     (a) *L'isométrie $[A, B]$ est de trace réelle.*
     (b) *La paire (A, B) est $\mathbb{R}$-décomposable.*
  2. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*
     (a) *Les isométries A, B, AB et $A^{-1}B$ sont de trace réelle.*
     (b) *L'une des deux paires (A, B), (A^2, B^2) est $\mathbb{C}$-décomposable.*

  Nous verrons de plus que l'ensemble des représentations décomposables apparaît comme lieu des points fixes des deux involutions définies sur l'espace de représentations $\mathrm{Hom}(F_2,\mathrm{PU}(2,1))^{\mathrm{lox}}/\mathrm{PU}(2,1)$. Ce résultat est de même nature que ceux obtenus par F. Schaffhauser dans sa thèse dans le cas de représentations à valeurs dans un groupe de Lie compact connexe (voir [Sch06, Sch05a]). Les ensembles des classes $\mathbb{C}$-décomposables et $\mathbb{R}$-décomposables sont de dimension respectives 4 et 7 dans $\mathrm{Hom}(F_2,\mathrm{PU}(2,1))^{\mathrm{lox}}/\mathrm{PU}(2,1)$, qui est de dimension 8. Si l'on ajoute la condition de parabolicité du commutateur, on obtient alors des dimensions de 3 et 6.

- **Chapitre 6**. L'objet de ce chapitre est de décrire les représentations $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$-décomposables et d'identifier celles pour lesquelles $\rho([\mathtt{m}, \mathtt{n}])$ est parabolique. Notre approche est basée sur la remarque suivante. Si G est groupe triangulaire $\langle I_1, I_2, I_3\rangle$ tel que $\gamma = (I_1I_2I_3)^2 = [I_1I_2, I_3I_2]$ est parabolique, il lui est associé (p_1, p_2, p_3) un triplet de points au bord de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, tel que p_2 est le point fixe de γ, et tel que I_k échange p_{k+1} et p_{k+2}. En étudiant les triangles idéaux de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, nous décrivons des

coordonnées sur ces groupes dans lesquelles la condition de parabolicité s'écrit simplement (propositions 6.24 et 6.25 page 118). Nous pouvons alors expliciter la trace du commutateur (propositions 6.26 et 6.26). Nous en déduisons la

Proposition. ***6.29*** *Soit $\mathcal{C}$ une classe de conjugaison parabolique. Il existe une représentation $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$-décomposable de F_2 dans PU(2,1) telle que $\rho([m,n]) \in \mathcal{C}$.*

– **Chapitre 7**. Ce chapitre est consacré à la preuve du théorème principal 7.1, énoncé plus haut. Jusqu'à présent les seuls exemples de groupes triangulaires discrets $\langle I_1, I_2, I_3\rangle$, où la seule classe non-loxodromique est celle de $(I_1I_2I_3)^2$ et est parabolique sont ceux liés au groupe modulaire PSL(2,$\mathbb{Z}$) (voir [FP03]). Pour démontrer le théorème 7.1, nous définissons les $\mathbb{R}$-surfaces spinales. Ce sont des hypersurfaces de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ similaires aux bissecteurs. Les bissecteurs peuvent être décrits comme les image réciproques des géodésiques par la projection orthogonale sur une droite complexe. De manière analogue, les $\mathbb{R}$-surfaces spinales sont les images réciproques des géodésiques par la projection orthogonales sur un $\mathbb{R}$-plan. Nous construisons un domaine fondamental dont les faces sont des $\mathbb{R}$-surfaces spinales construite sur un triangle idéal. Il y a deux problèmes techniques. Le premier est est de montrer que les faces ne s'intersectent qu'aux sommets du triangle idéal qui forment le cycle parabolique associé à un lacet autour du cusp (voir les propositions 7.18 et 7.21). Le second est de montrer que les représentations impliquées préservent le type, c'est à dire que les seul éléments paraboliques sont associés au lacet autour du cusp. Ce résultat est l'objet principal d'un article à paraître dans *Journal für die reine und angewandte Mathematik* ([Wil05], [Wil]).

Résumons la position relative des différents ensembles de représentations étudiés dans ce travail.

– Hom(F_2,PU(2,1))/PU(2,1) est de dimension 8. Nous donnons dans le chapitre 3 un critère pour que deux représentations irréductibles ρ_1 et ρ_2 soient égales dans ce quotient.

– Hom(F_2,PU(2,1))^{lox} contient les représentations telles que $\rho(\mathtt{m})$ et $\rho(\mathtt{n})$ sont loxodromiques. Hom(F_2,PU(2,1))^{lox}/PU(2,1) est de dimension 8.

– $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ est l'ensemble des groupes triangulaires complexes tels $\langle I_1, I_2, I_3\rangle$ tels que $(I_1I_2I_3)^2$ est loxodromique ou parabolique. $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$/PU(2,1) est de dimension 4. $\mathcal{D}^{\text{par}}_{\mathbb{C}}$ est le sous-ensemble de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ contenant les représentations pour lesquelles $(I_1I_2I_3)^2$ est parabolique.
$\mathcal{D}^{\text{par}}_{\mathbb{C}}$/PU(2,1) est de dimension 3.

- $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des groupes triangulaires lagrangiens $\langle I_1, I_2, I_3\rangle$ tels que $(I_1I_2I_3)^2$ est loxodromique ou parabolique. $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}/\mathrm{PU}(2,1)$ est de dimension 7. $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{par}}$ est le sous-ensemble de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ contenant les représentations pour lesquelles $(I_1I_2I_3)^2$ est parabolique.
  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{par}}/\mathrm{PU}(2,1)$ est de dimension 6.
- Nous montrons dans le chapitre 5 que toute représentation de $\mathrm{Hom}(F_2,\mathrm{PU}(2,1))^{\mathrm{lox}}$ telle que $\rho(\mathtt{m},\mathtt{n})$ est parabolique non-vertical est $\mathbb{R}$-décomposable. L'intersection entre $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{par}}/\mathrm{PU}(2,1)$ et $\mathrm{Hom}(F_2,\mathrm{PU}(2,1))^{\mathrm{lox}}/\mathrm{PU}(2,1)$ est donc de dimension 6.
- Le théorème 7.1 montre que l'intersection de $\mathrm{Hom}(F_2,\mathrm{PU}(2,1))^{\mathrm{lox}}/\mathrm{PU}(2,1)$ et $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{par}}/\mathrm{PU}(2,1)$ contient un sous-ensemble de dimension 3 formé de classes de représentations discrètes, fidèles et préservant le type.

Directions de travail

Nous terminons cette introduction en posant quelques questions qui s'inscrivent dans la continuité de cette thèse.

- Soit $\mathcal{C}$ une classe de conjugaison parabolique dans $\mathrm{PU}(2,1)$, et $\mathrm{Hom}(F_2,\mathrm{PU}(2,1))^{\mathcal{C}}$ l'ensemble des représentations de F_2 dans $\mathrm{PU}(2,1)$ telles que $\rho([\mathtt{m},\mathtt{n}]) \in \mathcal{C}$. Quel est le nombre de composantes connexes de $\mathrm{Hom}(F_2,\mathrm{PU}(2,1))^{\mathcal{C}}/\mathrm{PU}(2,1)$?
- Etudier le cas des représentations du groupe fondamental de surfaces épointées quelconques.
- Décrire la structure symplectique des différents espaces de représentations étudiés.

Chapitre 1

L'espace hyperbolique complexe

1.1 Introduction

L'espace hyperbolique complexe $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$ est l'espace symétrique (de rang un) associé au groupe de Lie PU(n,1). On utilise PU(n,1) plutôt que SU(n,1) pour se débarrasser du centre de SU(n,1). Les sous-groupes compacts maximaux de PU(n,1) étant des copies de U(n), $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$ peut donc être vu comme l'espace symétrique PU(n,1)/U(n). On peut également voir $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$ comme un sous-ensemble de $\mathbb{C}P^n$ via la projectivisation du cône associé à la forme de signature $(n,1)$. Nous exposons cette construction de l'espace dans le cas de la dimension $n = 2$ (le plan hyperbolique complexe) au début de la partie 1.2. Cette description se généralise sans difficultés au cas de la dimension n.

En utilisant par exemple la forme hermitienne associée à la matrice diagonale

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}$$

on constate que l'on peut voir $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$ comme la boule unité de $\mathbb{C}^n$ (une carte affine de $\mathbb{C}P^n$). A ce titre, $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$ possède donc une structure de Kähler, qui induit une structure riemannienne et une structure symplectique. Toutes ces structures peuvent s'exprimer en utilisant l'algèbre linéaire de $\mathbb{C}^{n,1}$ ($\mathbb{C}^{n+1}$ muni de la forme J). Ainsi, la distance riemannienne sur $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$, qui correspond à la métrique de Bergman de la boule, s'écrit après normalisation de la courbure holomorphe à -1 :

$$\cosh^2 \frac{\mathrm{d}(p_1, p_2)}{2} = \frac{|\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle|^2}{\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1 \rangle \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2 \rangle}, \tag{1.1}$$

où p_1 et p_2 sont deux points de $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$ et $\mathbf{p}_i$ un relèvement de p_i.
Il existe bien entendu autant de modèles pour $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$ que de formes hermitiennes de signature $(n,1)$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$. Cette remarque peut être utile dans certains cas, pour choisir le modèle

le plus adapté à une situation donnée. Les applications de passage d'un modèle à l'autre sont appelées des transformations de Cayley. Nous en donnerons un exemple dans le paragraphe 1.2, où nous exposerons les deux modèles les plus utilisés de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.

PU(n,1) et la conjugaison complexe agissent clairement par isométries sur $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$. Ils épuisent en fait toutes les isométries de $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$:

Théorème 1.1. *Le groupe d'isométries de* $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$ *est* $\widehat{PU(n,1)}$*, engendré par* PU(n,1) *et la conjugaison complexe.*

Nous renvoyons par exemple à [Gol99] pour une preuve. Passons maintenant à une étude plus systématique du cas du plan hyperbolique complexe $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.

1.2 Le plan hyperbolique complexe

1.2.1 Deux modèles du plan hyperbolique complexe

Parmi les différentes formes hermitiennes utilisées pour donner des coordonnées sur $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, nous décrivons les deux suivantes, qui nous seront les plus utiles. Dans les deux cas, les produits hermitiens seront pris antilinéaires par rapport à la seconde variable.

Le modèle de la boule

Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ le produit hermitien sur $\mathbb{C}^3$ associé à la matrice :

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A ce produit hermitien sont naturellement associés les trois sous-ensembles de $\mathbb{C}^3$ suivant

$$\begin{aligned} V_1^+ &= \left\{v \in \mathbb{C}^3 | \langle v,v\rangle_1 > 0\right\} \\ V_1^0 &= \left\{v \in \mathbb{C}^3 | \langle v,v\rangle_1 = 0\right\} \\ V_1^- &= \left\{v \in \mathbb{C}^3 | \langle v,v\rangle_1 < 0\right\} \end{aligned}$$

Dans ce modèle, $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} = \mathbf{P}\left(V_1^-\right)$ est entièrement contenu dans la carte affine $z_3 = 1$ de $\mathbb{C}P^2$, et peut-être vu comme la boule unité de $\mathbb{C}^2$:

$$\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} = \left\{(w_1, w_2), |w_1|^2 + |w_2|^2 < 1\right\}$$

Ce modèle est une généralisation du modèle du disque de Poincaré pour la droite hyperbolique complexe.

Le modèle de Siegel.

Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ le produit hermitien sur $\mathbb{C}^3$ associé à la matrice :

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Notons que si v est le vecteur $\begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}^T$, $\langle v, v\rangle_2 = 2\mathrm{Re}\,(z_1\bar{z}_3) + |z_2|^2$
De nouveau, définissons les trois sous-ensembles de $\mathbb{C}^3$:

$$\begin{aligned} V_2^+ &= \left\{v \in \mathbb{C}^3 | \langle v, v\rangle_1 > 0\right\} \\ V_2^0 &= \left\{v \in \mathbb{C}^3 | \langle v, v\rangle_1 = 0\right\} \\ V_2^- &= \left\{v \in \mathbb{C}^3 | \langle v, v\rangle_1 < 0\right\} \end{aligned}$$

Dans ce modèle, $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} = \mathbf{P}\left(V_2^-\right)$ est de nouveau entièrement contenu dans la carte affine $z_3 = 1$ de $\mathbb{C}P^2$, et peut donc être vu comme le domaine suivant de $\mathbb{C}^2$.

$$\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} = \left\{(z_1, z_2)\,, 2\mathrm{Re}\,(z_1) < -|z_2|^2\right\}.$$

Dans ces coordonnées, tout point m de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ admet un unique relèvement à $\mathbb{C}^3$ de la forme

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} -|z|^2 - u + it \\ \sqrt{2}z \\ 1 \end{bmatrix} \text{ avec } z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R} \text{ et } u > 0.$$

Le triplet (z, t, u) définit les *coordonnées horosphériques* du point m. En effet, les sous-ensembles du type $\{u = \text{cste}\}$ sont des exemples d'horosphères, centrées à l'infini.

La transformation de Cayley associée à ces deux modèles.

De même que le disque et le demi-plan sont biholomorphiquement échangés par l'homographie

$$z \longmapsto -\frac{iz+1}{z+i},$$

les deux modèles de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ décrits ci-dessus sont échangés par l'homographie c dont un relèvement à GL(3,$\mathbb{C}$) est

$$\mathbf{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{c}$ conjugue J_1 et J_2, et vérifie $\mathbf{c}^2 = Id$. Nous avons vu que les deux modèles ci-dessus sont contenus dans la même carte affine $z_3 = 1$ de $\mathbb{C}P^2$. Dans cette carte, c se lit

$$c : (w_1, w_2) \longmapsto (z_1, z_2) = \left(\frac{w_1+1}{w_1-1}, \sqrt{2}\frac{w_2}{w_1-1}\right)$$

La métrique $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ est équipé de la métrique de Bergman (voir [Cha76]). Dans les deux modèles décrits ci-dessus, si v et w sont deux points de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, leur distance $d(v,w)$ pour est donnée par

$$\cosh^2\left(\frac{d(v,w)}{2}\right) = \frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle_i \langle \mathbf{w},\mathbf{v}\rangle_i}{\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle_i \langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle_i}, \qquad i=1,2$$

où $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ sont des relèvements de v et w à $\mathbb{C}^3$. (L'expression ci-dessus ne dépend pas du choix des relèvements.)

Proposition 1.2. *Voir [Gol99], pages 54 et 76*

- *La courbure sectionnelle holomorphe de la métrique de Bergman sur* $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ *est constante et égale à* -1.
- *La courbure sectionnelle de de la métrique de Bergman de* $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ *est pincée entre* -1 *et* $-1/4$.

Le bord de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Le bord de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ vu dans le modèle de la boule est la sphère S^3. Dans le modèle de Siegel, le bord de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ correspond en coordonnées horosphériques à l'ensemble $(z,t,0)\cup\infty$, c'est à dire au compactifié de $\mathbb{R}^3$. Le point à l'infini se relève à $\mathbb{C}^3$ en $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$, et correspond au point de coordonnées $(1,0)$ du modèle de la boule. Dans un modèle comme dans l'autre, ce point est le seul du bord à n'être pas contenu dans la carte affine $z_3=1$. La transformation de Cayley c induit une projection stéréographique π de $S^3\setminus(1,0)$ sur $\mathbb{R}^3$, donnée par

$$\pi(w_1,w_2) = \left[\frac{w_2}{w_1-1}; \frac{-2\mathrm{Im}(w_1)}{|w_1-1|^2}\right] \quad \text{et} \quad \pi^{-1}([z,t]) = \left(\frac{-|z|^2+it+1}{-|z|^2+it-1}, \frac{2z}{-|z|^2+it-1}\right).$$

Le bord de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ s'identifie à l'ensemble des éléments unipotents de PU(2,1) fixant un point du bord (voir page 29). il peut être vu comme le groupe de Heisenberg $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ muni du produit

$$[w,\tau].[z,t] = [w+z, \tau+t+2\mathrm{Im}(w\bar{z})].$$

Posons la

Définition 1.3.
- La translation de Heisenberg par $[w,\tau]$ est l'application définie sur le groupe de Heisenberg par $[z,t]\longmapsto[w,\tau].[z,t]$. Elle est dite verticale lorsque $w=0$.
- La dilatation de Heisenberg de facteur $\lambda\in\mathbb{C}$ est l'application définie sur le groupe de Heisenberg par $[z,t]\longmapsto[\lambda z, |\lambda|^2 t]$.

Nous allons voir dans la section suivante que ces deux types d'applications sont en fait les restrictions à $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ d'isométries de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ (cf page 29).

1.3 Les automorphismes de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Le groupe d'isométries de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ est PU(2,1), le groupe projectif associé à U(2,1). U(2,1) est l'ensemble des matrices vérifiant

$$\overline{A}^T JA = J \tag{1.2}$$

Autrement dit, U(2,1) est l'ensemble des points fixes de l'involution de Cartan $A \longmapsto J\overline{A}^T J$, définie sur GL(3,$\mathbb{C}$). SU(2,1) est un revêtement triple de PU(2,1). PU(2,1) agit transitivement sur chacune des trois composantes de $\mathbb{C}P^2$ associées au cône isotrope de la forme hermitienne, $\mathbf{P}(V^+)$, $\mathbf{P}(V^-)$ et $\mathbf{P}(V^0)$.

Lemme 1.4. *Soit A une matrice de SU(2,1). Le spectre de A est invariant par la transformation $z \longmapsto \bar{z}^{-1}$*

Démonstration. C'est une conséquence directe de la relation 1.2. □

Lemme 1.5. *Soit A une matrice de SU(2,1). Le polynôme caractéristique de A est $X^3 - \operatorname{tr} AX^2 + \overline{\operatorname{tr} A}X - Id$.*

Démonstration. A étant dans SL(3,$\mathbb{C}$), son polynôme caractéristique est $X^3 - \operatorname{tr} AX^2 + (v_1v_2 + v_2v_3 + v_1v_3)X - Id$, où le spectre de A est $\{v_1, v_2, v_3\}$. Le produit $v_1v_2v_3$ vaut 1, donc, en utilisant le lemme précédent

$$\begin{aligned} v_1v_2 + v_2v_3 + v_1v_3 &= \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} \\ &= \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3. \end{aligned}$$

□

1.3.1 Classification des éléments.

Les isométries de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ sont classées en trois types. Si h est une isométrie de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, on dit que

1. h est *elliptique* si elle a un point fixe dans $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$
2. h est *loxodromique* si elle a exactement deux points fixes dans $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$
3. h est *parabolique* si elle a exactement un point fixe dans $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$

Nous allons exposer deux critères qui permettent de distinguer ces trois types d'isométries. Le premier est dû à Chen et Greenberg ([CG74]), et est basé sur la forme de Jordan d'un relèvement de h à U(2,1).

Proposition 1.6. *Soient h une isométrie holomorphe de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, et A un relèvement de h à U(2,1).*

1. *h est elliptique si A est semi-simple et que ses valeurs propres sont toutes de module 1.*
2. *h est loxodromique si A est semi-simple et admet une valeur propre de module différent de 1.*
3. *h est parabolique si A n'est pas semi-simple. Dans ce cas, ses valeurs propres sont de module 1.*

Posons la

Définition 1.7.
- Une isométrie elliptique de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ sera dite régulière si elle admet un relèvement à $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ admettant trois valeurs propres distinctes. Dans le cas contraire, elle sera dite spéciale.
- Une isométrie parabolique sera dite parabolique pure si elle admet un relèvement unipotent à SU(2,1). Dans le cas contraire, elle sera dite ellipto-parabolique

Le second critère est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 1.8 (Voir [Gol99], chapitre 6)**.** *Soit A une matrice de SU(2,1), et τ sa trace. A possède une valeur propre double si et seulement si $|\tau|^4 - 8Re(\tau^3) + 18|\tau|^2 - 27 = 0$.*

Démonstration. Soit χ le polynôme caractéristique de A. A possède une valeur propre double si et seulement si le résultant $\mathrm{Res}(\chi, \chi')$ est nul. On obtient le résultat en utilisant la forme du polynôme caractéristique obtenue dans le lemme 1.5. □

Remarque 1.9. Si une matrice de SU(2,1) a une valeur propre double, alors ses trois valeur propres sont de module 1. C'est une conséquence de la stabilité du spectre de A par $z \mapsto \bar{z}^{-1}$.

Définition 1.10. Soit f le polynôme

$$f(z) = |z|^4 - 8\mathrm{Re}(z^3) + 18|z|^2 - 27.$$

Désignons par $\mathbb{U}_3$ l'ensemble des racines troisièmes de l'unité.

Lemme 1.11 (Voir [Gol99], chapitre 6)**.** *Soit A une matrice de* SU(2,1)*, τ sa trace, et h l'isométrie de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ associée à A. Alors,*
- *Si $f(\tau) < 0$, h est elliptique régulière.*
- *Si $f(\tau) > 0$, h est loxodromique.*
- *Si $f(\tau) = 0$, alors*
  - *soit $\tau \in 3\mathbb{U}_3$, auquel cas h est unipotente*
  - *soit $\tau \notin 3\mathbb{U}_3$, auquel cas h est parabolique non-unipotente ou elliptique spéciale.*

Remarque 1.12. Nous appellerons $\mathbf{\Delta}$ le lieu des zéros de f. $\mathbf{\Delta}$ est paramétré par la fonction $\varphi : \alpha \to e^{-2i\alpha} + 2e^{i\alpha}$ pour $-\pi \leqslant \alpha < \pi$. Ce paramétrage traduit le fait que si si $A \in$ SU(2,1), tr$A$ est sur $\mathbf{\Delta}$ si et seulement si A a deux valeurs propres de module 1 égales.

Nous allons maintenant nous intéresser de plus près à chacun de ces trois types d'isométries.

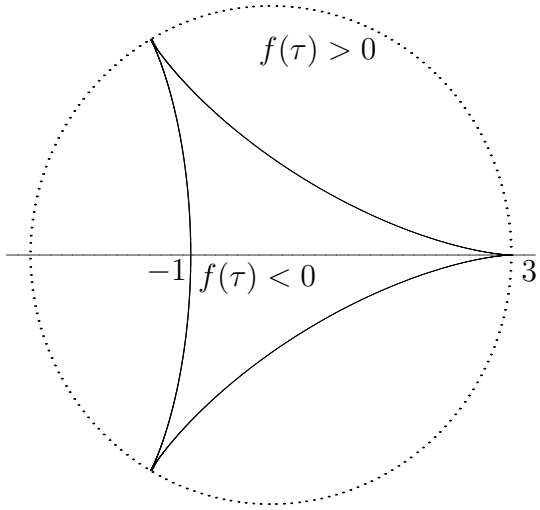


FIG. 1.1 – Classification des éléments par la trace.

1.3.2 Les isométries elliptiques

Les isométries elliptiques régulières Si $A \in \mathrm{SU}(2,1)$ est un relèvement d'un élément elliptique régulier, l'homographie associée a trois points fixes dans $\mathbb{C}P^2$, qui sont les images des droites propres de A par la projectivisation.

- L'un de ces points fixes est dans $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.
- Les deux autres sont dans $\mathbf{P}(V^+)$ et sont polaires[1] à des droites complexes stables orthogonales, qui se coupent au point fixe dans $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Utilisons le modèle de la boule. Les éléments elliptiques sont conjugués dans SU(2,1) à un élément admettant le relèvement à SU(2,1) :

$$A = \begin{bmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha_3} \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas le point fixe est le centre de la boule, correspondant au vecteur $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, et les droites complexes stables sont les deux axes de coordonnées. La classe de conjugaison d'un élément elliptique est déterminée par les deux quantités $\alpha_1 - \alpha_3$ et $\alpha_2 - \alpha_3$, que nous appellerons les *angles* d'un élément elliptique.

Les elliptiques spéciaux Les isométries elliptiques spéciales ont deux valeurs propres égales. Leur spectre est donc du type $\{e^{i\alpha_1}, e^{i\alpha_1}, e^{i\alpha_2}\}$. En conservant les notations du paragraphe précédent, on constate que les angles d'un elliptique spécial E sont de l'un des trois types :

[1] Voir la section 1.4.1

- $\{0, \varphi\}$, auquel cas on parle de *réflexion complexe* : E fixe une droite complexe D et agit dans les droites complexes orthogonales à D comme une rotation d'angle θ.
- $\{\varphi, \varphi\}$, auquel cas on parle de *réflexion complexe par rapport à un point* : E stabilise toutes les droites complexes contenant son point fixe, et agit sur chacune d'entre elles comme une réflexion d'angle φ.

Remarque 1.13. Parmi les réflexions complexes par rapport à un point, il y a des involutions : les réflexions dont les angles sont $\{\pi, \pi\}$. Ces involutions sont aussi appelées demi-tours. A tout point p de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ est associé un unique demi-tour qui fixe p et dont la différentielle en p est $-Id$. Ces involutions munissent donc $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ d'une structure d'espace symétrique riemannien (Voir [Gol99], page 82, et [Jos98]).

1.3.3 Les isométries loxodromiques

Soit h un élément loxodromique, et A un relèvement de h à SU(2,1). Soient p_h et q_h les deux points fixes de h situés au bord de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Définition 1.14. La géodésique σ_h, joignant p_h et q_h est appelée l'*axe* de h. La droite complexe C_h engendrée par σ_h est appelée l'*axe complexe* de h.

La géodésique σ_h et la droite complexe C_h sont stables par h. Par conséquent, le point $r_h = C_h^{\perp}$ est fixé par h. On en déduit la proposition suivante.

Proposition 1.15. *Tout élément loxodromique de* PU(2,1) *a trois points fixes dans* $\mathbb{C}P^2$*, dont deux sont situés au bord de* $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$*, et le troisième dans* $\mathbf{P}(V^+)$.

Remarque 1.16. Si $\mathbf{p}_h$ et $\mathbf{q}_h$ sont des relèvements de p_h et q_h, le point fixe de h situé dans $\mathbf{P}(V^+)$ admet le relèvement $\mathbf{p}_h \boxtimes \mathbf{q}_h$ (voir la définition du produit vectoriel hermitien dans la section 1.4.1). Le vecteur $\mathbf{p}_h \boxtimes \mathbf{q}_h$ est polaire à la droite complexe C_h (voir encore la section 1.4.1).

Remarque 1.17. Soit h une isométrie loxodromique, et A un relèvement à SU(2,1). Quitte à conjuguer A par un élément de SU(2,1), on peut supposer que p_h, q_h et r_h admettent les relèvements à $\mathbb{C}^3$ suivants :

$$\mathbf{p}_h = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{r}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{q_h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A est alors la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\bar{\mu}}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mu}^{-1} \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Dans le groupe de Heisenberg, A induit la transformation

$$[z,t] \longmapsto [z\frac{\bar{\mu}^2}{\mu}, |\mu|^2 t]$$

La restriction de A est donc une dilatation de Heisenberg. Si $|\mu| > 1$, alors p_h est un point fixe attractif et q_h un point fixe répulsif. Dans le cas contraire, les rôles sont inversés.

La quantité $d(\omega, h(\omega))$ atteint son minimum en tout point de σ_h. Ce minimum est appelé la *longueur de translation* de h. On la notera l_h. Les grandeurs l_h et μ sont liées par la relation

$$\cosh\left(\frac{l_h}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(|\mu|^2 + \frac{1}{|\mu|^2}\right)$$

Cette expression est invariante par le changement $\mu \leftrightarrow \bar{\mu}^{-1}$.

Remarque 1.18. La forme normalisée 1.3 montre que μ détermine sans ambiguïté la classe de conjugaison de A. Or μ est obtenu par résolution du polynôme caractéristique de A, qui s'écrit dans SU(2,1)

$$X^3 - \mathrm{tr}AX^2 + \overline{\mathrm{tr}A}X - 1.$$

Par conséquent, la classe de conjugaison de A est entièrement déterminée par sa trace. Ceci est faux pour les isométries elliptiques : il y a trois classes de conjugaisons elliptique par trace elliptique.

Proposition 1.19. *Deux isométries loxodromiques commutent si et seulement si elles ont les mêmes points fixes.*

Démonstration. Deux isométries loxodromiques commutent si et seulement si elles admettent des relèvements qui sont diagonaux dans une base commune. D'où le résultat. □

1.3.4 Les isométries paraboliques

Les isométries paraboliques purs Soit h un élément parabolique pur. Dans le modèle de Siegel, on peut supposer que le point fixe de h est ∞. L'élément parabolique h admet alors pour relèvement à SU(2,1) la matrice

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 1 & -\bar{w}\sqrt{2} & -|w|^2 + i\tau \\ 0 & 1 & w\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ avec } w \in \mathbb{C} \text{ et } \tau \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

La restriction de h à $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ est la translation de Heisenberg

$$[z,t] \longmapsto [w,\tau][z,t].$$

Si $w = 0$, h est une translation verticale. Rappelons que l'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente N est le plus petit entier p tel que $N^p = 0$.

Proposition 1.20. *1. L'ensemble des isométries paraboliques pures h admettant un relèvement H à SU(2,1) tel que $(H - Id)$ est nilpotent d'indice 2 forme une classe de conjugaison dans* PU(2,1).

2. L'ensemble des isométries paraboliques pures h admettant un relèvement H à SU(2,1) tel que $(H - Id)$ est nilpotent d'indice 3 forme une classe de conjugaison dans PU(2,1).

Les isométries paraboliques pures qui appartiennent à la classe de conjugaison du premier type (indice de nilpotence 2) sont caractérisées géométriquement par le fait qu'elles stabilise une droite complexe (voir la section 1.4.1)

Remarque 1.21. Comme nous l'avons vu, l'horosphère de niveau u_0 centrée en ∞ (modèle de Siegel) est formée des points de coordonnées horoshériques (z, t, u_0) avec $z \in \mathbb{C}$ et $t \in \mathbb{R}$. On vérifie facilement en utilisant la matrice ci dessus qu'elle est préservée par toute translation de Heisenberg. On peut donc voir toute horosphère comme une copie du groupe de Heisenberg.

Les isométries ellipto-paraboliques Les éléments ellipto-paraboliques ont une valeur propre double. La valeur propre « seule » correspond à un vecteur propre contenu dans V^+, polaire à une droite complexe stable.

Soit h un élément ellipto-parabolique. Quitte à conjuguer, on peut supposer que le vecteur propre positif est $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$, et que les points fixes, en coordonnées de Heisenberg sont ∞ et $[0, 0]$. Dans ces conditions,

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} e^{-i\theta} & 0 & e^{-i\theta} i\tau \\ 0 & e^{2i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix} \text{ avec } \tau \in \mathbb{R} \text{ et } \theta > 0$$

En coordonnées de Heisenberg, h correspond a une translation de Heisenberg verticale de $[0, \tau]$, suivie d'une dilatation de Heisenberg de facteur $e^{3i\theta}$. La classe de conjugaison de h est entièrement déterminée par θ.

Remarque 1.22. Toute matrice triangulaire supérieure de SU(2,1) qui n'est pas le relèvement d'une isométrie loxodromique s'écrit

$$M = e^{-i\theta/3} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2}\bar{z}e^{i\theta} & -|z|^2 + it \\ 0 & e^{i\theta} & \sqrt{2}z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

Un calcul montre que l'homographie associée à M stabilise la droite verticale D de groupe de Heisenberg paramétrée par

$$[w, \tau], \tau \in \mathbb{R}, w = \frac{-z}{e^{i\theta} - 1}.$$

Cette droite verticale est le bord d'une droite complexe C, qui est fixée point par point si et seulement si D l'est (D est un exemple de $\mathbb{C}$-cercle [2]). La translation verticale (i.e. le long de D) est donnée par

$$\frac{|z|^2\,(1+\cos\theta)}{\sin\theta} - t. \tag{1.6}$$

L'isométrie associée à M est parabolique si et seulement si cette translation est non-nulle. Dans le cas contraire, c'est une réflexion complexe de miroir C. On constate donc qu'à z et θ fixé l'isométrie associée à M est parabolique, sauf pour une seule valeur de t.

1.3.5 Isotropie des points de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$

Lemme 1.23. *L'isotropie G_p dans PU(2,1) d'un point de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ contient exactement l'ensemble des isométries elliptiques qui le fixent. G_p est un plongement de U(2) dans PU(2,1).*

Démonstration. Les seules isométries qui fixent p sont elliptiques, puisque p est intérieur à $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Quitte à conjuguer, on peut supposer que p est le point $(0,0)$, dans le modèle de la boule. On vérifie alors que les éléments de PU(2,1) qui fixent ce point correspondent aux éléments de SU(2,1) de la forme

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \det A^{-1} \end{bmatrix}, \text{ avec } A \in \mathrm{U}(2). \tag{1.7}$$

□

1.4 Les sous-espaces totalement géodésiques de dimension 2 de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$

$\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ étant un espace symétrique riemannien, ses sous espaces totalement géodésiques sont soit totalement réels, soit des sous-espaces linéaires complexes (voir par exemple [Gol99], chapitre 3 page 82). Il y a quatre types de sous-espaces totalement géodésiques :

- les points
- les géodésiques
- les *droites complexes* (voir le paragraphe suivant)
- les $\mathbb{R}$-plans (voir le paragraphe 1.4.2).

Remarque 1.24. $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ étant de courbure négative, il existe une unique géodésique contenant deux points donnés. Nous reviendrons sur les géodésiques au début du chapitre 6. Voir également [Par03].

[2] voir la section 1.4.1

Remarque 1.25. $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ n'a pas d'hypersurface totalement géodésique. C'est une conséquence du fait que sa courbure sectionnelle réelle est variable.

Nous allons maintenant nous intéresser aux deux derniers types : les droites complexes et les $\mathbb{R}$-plans.

1.4.1 Les droites complexes de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$

Définitions et exemples

Rappelons que les droites complexes de $\mathbb{C}P^2$ sont les projections des plans complexes de $\mathbb{C}^3$.

Définition 1.26. Une droite complexe de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ est l'intersection d'une droite complexe de $\mathbb{C}P^2$ avec $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, lorsqu'elle est non-triviale.

Exemple 1.27. Utilisons le modèle de la boule. Le plan de $\mathbb{C}^3$ d'équation $z_2 = 0$ se projette sur la droite complexe vue comme $\mathbb{C} \times \{0\}$ dans la carte affine $\{(z_1, z_2, 1)\}$, qui intersecte $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ selon le disque $\{(z_1, 0)\}, |z_1| < 1$.

Lemme 1.28. *Soient p_1 et p_2 deux points de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Il existe une unique droite complexe contenant p_1 et p_2.*

Démonstration. Relevons p_1 et p_2 à $\mathbb{C}^{2,1}$ en $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$. Il existe un unique plan complexe contenant $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$: le sous espace vectoriel engendré sur $\mathbb{C}$, qui ne dépend pas du choix des relèvements. Son image dans $\mathbb{C}P^2$ contient p_1 et p_2. □

En utilisant la dualité associée à la structure hermitienne, on associe à toute droite complexe de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ un point de $\mathbb{C}P^2$ situé dans $P(V^+)$ de la façon suivante.

Définition 1.29. Soit m un point $\mathbb{C}P^2$ appartenant à $P(V^+)$, et $\mathbf{m}$ un relèvement de m. Nous appellerons $m^\perp$ le sous-ensemble de $\mathbb{C}P^2$ défini par

$$\left\{\mathbf{P}(Z) \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}, \langle \mathbf{m}, Z\rangle = 0\right\}.$$

Proposition 1.30.
- *$m^\perp$ est une droite complexe de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, qui ne dépend pas du choix de $\mathbf{m}$.*
- *A toute droite complexe C de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ est associé un unique point m_C de $\mathbf{P}(V^+)$ tel que $C = m_C^\perp$.*
- *La correspondance $C \longmapsto m_C$ est bijective.*

Définition 1.31. Soit C une droite complexe de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Un vecteur v de V^+ tel que $\mathbf{P}(v)^\perp = C$ est appelé un *vecteur polaire à C*.

La transitivité de l'action de PU(2,1) sur $\mathbf{P}(V^+)$ a pour conséquence la

Proposition 1.32. PU(2,1) *agit transitivement sur l'ensemble des droites complexes de* $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$

Exemple 1.33.
1. Dans les coordonnées de la boule, le vecteur $v = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ est polaire à la droite complexe $C_1 = \{(w, 0), |w| < 1\}$.
2. v est fixé par la transformation de Cayley. Dans les coordonnées de Siegel, le vecteur $v = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ est associé à la droite complexe paramétrée en coordonnées horosphériques par $\{(0, t, u), t \in \mathbb{R}, u < 0\}$, qui est donc l'image de C_1 par la transformation de Cayley.

Les $\mathbb{C}$-cercles

Il est souvent utile d'utiliser la version « dans le bord » des droites complexes.

Proposition 1.34 (cf [Gol99], théorème 4.3.2)**.** *Soit C une droite complexe de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. L'intersection de l'adhérence de C avec le bord de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ est homéomorphe à un cercle.*

Démonstration. D'après la proposition 1.32, il suffit de la vérifier sur le cas de l'exemple 1.27, pour lequel on obtient la courbe contenue dans S^3, paramétrée par $\{\left(e^{i\theta}, 0\right), 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$. □

Définition 1.35. Soit C une droite complexe de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. L'intersection $\overline{C} \cap \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ s'appelle un $\mathbb{C}$-cercle.

Rappelons que le groupe de Heisenberg est muni d'une structure de contact, associée à la 1-forme $\theta = dt + xdy - ydx$ (voir par exemple [Gol99]).
Utilisons le modèle de Siegel. Soit C une droite complexe.

- Si $\overline{C}$ ne contient pas le point à l'infini, le $\mathbb{C}$-cercle ∂C est une ellipse, contenue dans un plan de contact (i.e. le noyau de la forme θ en un point).
- Si $\overline{C}$ contient le point à l'infini, le $\mathbb{C}$-cercle ∂C est une droite verticale, du type $\{[z_0, t], t \in \mathbb{R}\}$.

La position relative de deux $\mathbb{C}$-cercles traduit celle des droites complexes associées. Ainsi, deux droites complexes de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$

- s'intersectent si et seulement si les $\mathbb{C}$-cercles associés sont disjoints et enlacés.
- sont asymptotiques si et seulement les $\mathbb{C}$-cercles associés s'intersectent.
- sont disjointes si et seulement si les $\mathbb{C}$-cercles associés sont disjoints et non-enlacés.

A toute droite complexe C de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ est associé un élément d'ordre deux de PU(2,1) qui fixe C : la *réflexion par rapport à C*.

Précision : Comme nous l'avons vu au paragraphe 1.3.2, il existe des réflexions complexes fixant C qui ne sont pas d'ordre deux, mais en l'absence d'indication, nous entendrons par réflexion par rapport à C une involution.

Proposition 1.36. *Soit C une droite complexe de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, et c un vecteur polaire à C. En coordonnées vectorielles, la réflexion par rapport à C est donnée par*

$$Z \longmapsto -Z + 2\frac{\langle Z, c\rangle}{\langle c, c\rangle}c. \tag{1.8}$$

Le produit vectoriel hermitien dans $\mathbb{C}^{2,1}$.

Définition 1.37. Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{C}^3$ et J une forme hermitienne sur $\mathbb{C}^3$. Le produit vectoriel hermitien de u et v pour la forme J est le vecteur

$$u \boxtimes_J v = J \cdot \bar{u} \wedge \bar{v}$$

où $\wedge$ désigne le produit vectoriel.

Le lemme suivant se vérifie par un calcul direct.

Lemme 1.38. *Soient u et v deux vecteurs de C^3 et $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$ le produit hermitien associé à la forme hermitienne J. Alors*

$$\langle u, u \boxtimes_J v\rangle = \langle v, u \boxtimes_J v\rangle = 0.$$

Par la suite, nous omettrons l'indice $_J$, la forme hermitienne étant toujours celle associée au modèle de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ que nous utilisons. Le produit vectoriel hermitien est une manière simple de calculer un vecteur polaire à une droite complexe. Ainsi,

Proposition 1.39. *Soient m_1 et m_2 deux points distincts de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Fixons $\mathbf{m}_1$ et $\mathbf{m}_2$ deux relèvements à $\mathbb{C}^3$. Le vecteur $\mathbf{m}_1 \boxtimes \mathbf{m}_2$ est polaire à la droite complexe contenant m_1 et m_2.*

Démonstration. D'après le lemme 1.38, $\langle \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_1 \boxtimes \mathbf{m}_2\rangle = \langle \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_1 \boxtimes \mathbf{m}_2\rangle = 0$. □

On peut aussi utiliser le produit vectoriel hermitien pour relier la position relative de deux droites complexes au produit hermitien de leurs vecteurs polaires.

Proposition 1.40. *Soient C_1 et C_2 deux droites complexes de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, et $\mathbf{c}_1$ et $\mathbf{c}_2$ des vecteurs polaires associés. Alors*

- *$\mathbf{c}_1 \boxtimes \mathbf{c}_2$ est dans V^+ si et seulement si C_1 et C_2 sont disjointes. Dans ce cas $\mathbf{c}_1 \boxtimes \mathbf{c}_2$ est polaire à leur orthogonale commune.*
- *$\mathbf{c}_1 \boxtimes \mathbf{c}_2$ est dans V^0 si et seulement si C_1 et C_2 sont asymptotiques, et dans ce cas $\mathbf{c}_1 \boxtimes \mathbf{c}_2$ est un relèvement leur de intersection dans $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.*

– *Si* $\mathbf{c}_1 \boxtimes \mathbf{c}_2$ *est dans* V^-*,* C_1 *et* C_2 *sont sécantes, et* $\mathbf{c}_1 \boxtimes \mathbf{c}_2$ *est un relèvement leur de intersection.*

Pour déterminer le type de $\mathbf{c}_1 \boxtimes \mathbf{c}_2$, on dispose du lemme suivant, qui se prouve par un calcul direct :

Lemme 1.41. *Soient* $\mathbf{a}$*,* $\mathbf{b}$*,* $\mathbf{c}$ *et* $\mathbf{d}$ *quatre vecteurs de* $\mathbb{C}^{2,1}$*. On a*

$$\langle \mathbf{a} \boxtimes \mathbf{b}, \mathbf{c} \boxtimes \mathbf{d} \rangle = \langle \mathbf{d}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle - \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{d}, \mathbf{b} \rangle.$$

En particulier, dans le cas où $\mathbf{a} = \mathbf{c}$ et $\mathbf{b} = \mathbf{d}$, on en déduit que

$$\langle \mathbf{a} \boxtimes \mathbf{b}, \mathbf{a} \boxtimes \mathbf{b} \rangle = |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle.$$

La proposition suivante est une application directe de cette relation et de la proposition 1.40.

Proposition 1.42. *Soient* C_1 *et* C_2 *deux droites complexes de* $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$*, dont les vecteurs polaires sont* $\mathbf{c}_1$ *et* $\mathbf{c}_2$*. Posons*

$$k = \frac{|\langle \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \rangle|^2}{\langle \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_1 \rangle \langle \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_2 \rangle}.$$

Alors

– *Si* $k > 1$*,* C_1 *et* C_2 *sont disjointes et leur distance* ρ *est donnée par* $k = \cosh^2 \rho/2$*.*
– *Si* $k = 1$*,* C_1 *et* C_2 *sont confondues ou asymptotiques.*
– *Si* $k < 1$*,* C_1 *et* C_2 *s'intersectent, et leur angle* ϕ *est donné par* $k = \cos^2 \phi$*.*

Décomposition des loxodromiques de trace réelle

Nous terminons cette section en décrivant les isométries loxodromiques qui sont le produit de deux réflexions complexes.

Lemme 1.43. *Soit* A *une isométrie loxodromique dont un relèvement à* SU(2,1) *est de trace réelle. Alors* A *(ou* A^2*) est produit de deux réflexions complexes d'ordre deux par rapport à des droites complexes.*

Démonstration. Sous ces hypothèses il y a deux possibilités. Soit la trace de A est plus grande que 3, soit elle est plus petite que -1. Utilisons la forme normalisée des éléments loxodromiques donnée par la relation 1.3. Dans le premier cas, A est conjuguée à une isométrie se relevant en

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/x & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ avec } x > 1.$$

Les deux matrices impliquées dans le membre de droite représentant des réflexions complexes d'ordre deux par rapport à des droites complexes.

Dans le second cas A est conjuguée à une isométrie se relevant en

$$\begin{bmatrix} -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/x \end{bmatrix} \text{ avec } x > 1.$$

A^2 est donc de trace plus grande que 3. □

Proposition 1.44. *Soit A une isométrie loxodromique, admettant un relèvement à* SU(2,1) *de trace réelle et plus grande que 3. Il existe une famille à un paramètre de décompositions de A sous la forme $I_1 \circ I_2$, où I_1 et I_2 sont des réflexions complexes d'ordre deux. De plus, une fois fixé I_1 (resp. I_2), I_2 (resp. I_1) est entièrement déterminé.*

Démonstration. Si A s'écrit $I_1 \circ I_2$, où I_1 et I_2 sont des réflexions complexes d'ordre deux, alors I_1 et I_2 échangent p_A et q_A, les points fixes de A. Si cela n'était pas le cas, comme A fixe p_A, il existerait un point $p' \neq q_A$ situé sur $\partial \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, tel que

$$I_1(p_A) = I_2(p_A) = p'.$$

Par conséquent, I_1 et I_2 échangeraient p_A et p', et donc A stabiliserait la géodésique $p_A p'$. C'est absurde car la seule géodésique stabilisée par un élément loxodromique est son axe.

Toute réflexion complexe d'ordre deux qui échange p_A et q_A a son miroir orthogonal à la géodésique $p_A q_A$. Par ailleurs, toute droite complexe orthogonales à la géodésique $p_A q_A$ est le miroir d'une unique réflexion complexe qui échange p_A et q_A. Par conséquent, il existe autant de décompositions que de points de la géodésique $p_A q_A$. Finalement, si I_1 est fixé, le miroir de I_2 (donc I_2) est entièrement déterminé par la longueur de translation de A. □

Remarque 1.45. Les isométries loxodromiques A dont un relèvement $\mathbf{A}$ à SU(2,1) est de trace réelle se lisent dans le bord de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ de la façon suivante :

- Si $\mathrm{tr}\mathbf{A} > 3$, A est conjuguée à une dilatation de Heisenberg de facteur réel positif.
- Si $\mathrm{tr}\mathbf{A} < -1$, A est conjuguée à une dilatation de Heisenberg de facteur réel λ, négatif. A est alors la composée d'une dilatation de Heisenberg de facteur $-\lambda > 0$ et de la rotation d'angle π autour de la droite verticale

1.4.2 Les $\mathbb{R}$-plans

Définitions et exemples

Définition 1.46. Un sous-espace vectoriel réel V de $\mathbb{C}^{2,1}$ est dit lagrangien s'il satisfait aux deux conditions

1. $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 3$.

2. Il est totalement réel : pour tous vecteurs a et b de V, le produit hermitien $\langle a, b\rangle$ est réel.

Définition 1.47. Un $\mathbb{R}$-plan est un sous-espace de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ de la forme $\mathbf{P}(V) \cap \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, où V est un sous espace lagrangien de $\mathbb{C}^{2,1}$.

Exemple 1.48. Le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^{2,1}$ est lagrangien. Il lui est associé le $\mathbb{R}$-plan $\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}} = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^2\}$

Proposition 1.49. PU(2,1) *agit transitivement sur l'ensemble des* $\mathbb{R}$*-plans de* $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Démonstration. Ce résultat provient du fait que U(2,1) agit transitivement sur l'ensemble des lagrangiens de $\mathbb{C}^{2,1}$. Voir par exemple [Ber00] pages 29–30. □

Les $\mathbb{R}$-plans sont donc les images isométriques de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$, qui est le lieu des points fixes de la conjugaison complexe sur $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. On en déduit alors la

Proposition 1.50. *Tout* $\mathbb{R}$*-plan est le lieu des points fixes d'une unique isométrie antiholomorphe d'ordre 2 de* $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Définition 1.51. L'isométrie antiholomorphe fixant un $\mathbb{R}$-plan P s'appelle l'inversion par rapport à P. On appellera aussi une inversion par rapport à un $\mathbb{R}$-plan une *réflexion lagrangienne.*

Dans une variété riemannienne, le lieu des points fixes d'une isométrie est totalement géodésique.

Corollaire 1.52 (cf [Par03])**.** *Les* $\mathbb{R}$*-plans sont des sous espaces totalement géodésiques de* $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$

Les $\mathbb{R}$-plans sont des sous-espaces lagrangiens de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ pour la forme symplectique associée à la métrique de Bergman (voir le paragraphe 1.2).

Exemple 1.53. Dans le modèle de Siegel, $\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$ est paramétré en coordonnées horosphériques par

$$\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}} = \{(x, 0, u), x \in \mathbb{R}, u > 0\}.$$

Proposition 1.54 (voir [Gol99] ou [Par03])**.** *Tout* $\mathbb{R}$*-plan est un plongement isométrique du plan hyperbolique réel dans* $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Les $\mathbb{R}$-cercles

De même que pour les droites complexes, on utilise souvent la version « dans le bord » des $\mathbb{R}$-plans.

Proposition 1.55. *L'intersection avec* $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ *de l'adhérence d'un* $\mathbb{R}$*-plan dans* $\overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}}$ *est homéomorphe à un cercle.*

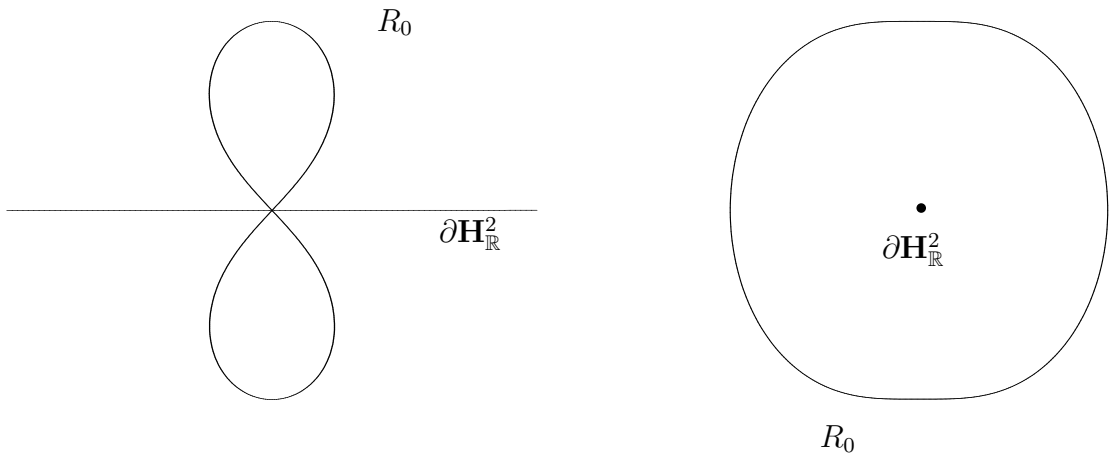


FIG. 1.2 – Projections sur $\mathbb{C}$ et sur le plan $(x, 0, t)$ de R_0 et ∂L_0

Démonstration. Il suffit de traîter le cas de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$. En utilisant le modèle de Siegel, on obtient dans ce cas que $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$ est la droite de $\mathbb{R}^3$ donnée par $y = t = 0$, complétée par le point à l'infini. □

Définition 1.56. Soit P un $\mathbb{R}$-plan de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. L'intersection $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} \cap \overline{P}$ s'appelle un $\mathbb{R}$-cercle.

Exemple 1.57. Soit P_0 le $\mathbb{R}$-plan paramétré dans le modèle de la boule par

$$P_0 = \left\{(ix_1, ix_2) \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}, x_k \in \mathbb{R}\right\} = i\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$$

Soit R_0 le $\mathbb{R}$-cercle associé à P_0. En coordonnées de Heisenberg, R_0 est paramétré par

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sin 2\theta}{2 + 2\sin^2\theta} \\ y &= \frac{\cos\theta}{1 + \sin^2\theta} \qquad \text{avec } 0 \leqslant \theta < 2\pi. \\ t &= \frac{2\sin\theta}{1 + \sin^2\theta} \end{aligned}$$

Les deux $\mathbb{R}$-cercles R_0 et $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$ sont représentés sur la figure 1.2.

Remarque 1.58.
1. La correspondance $\mathbb{R}$-cercle $\leftrightarrow$ $\mathbb{R}$-plan est bijective.
2. Les $\mathbb{R}$-cercles ont la propriété remarquable d'être des courbes legendriennes pour la structure de contact du groupe de Heisenberg (donnée par la 1-forme $\theta = dt + xdy - ydx$), c'est à dire qu'elles sont en tout point tangentes au plan de contact, le noyau de θ.

Nous allons maintenant définir le centre et le rayon d'un $\mathbb{R}$-cercle. Jusqu' à la fin de ce paragraphe nous n'utiliserons que le modèle de Siegel.

Définition 1.59. Soit P un $\mathbb{R}$-plan et R le $\mathbb{R}$-cercle correspondant et I_P l'inversion associée. Le point $I_P(\infty)$ est appelé le centre de R.

Si R contient ∞, il est dit infini, et son centre est ∞. Dans le cas contraire, il existe un unique élément parabolique T fixant ∞ et une unique dilatation de Heisenberg

$$d : [z, t] \longrightarrow [re^{i\theta}z, r^2 t]$$

tels que $T(R) = d(R_0)$.

Définition 1.60. Soit R un $\mathbb{R}$-cercle fini. Le nombre $r^2 e^{2i\theta}$ défini ci-dessus est le *rayon* de R.

Exemple 1.61. R_0, vu à l'exemple 1.57 est le $\mathbb{R}$-cercle de centre $[0, 0]$ et de rayon 1. Pour cette raison, R_0 sera souvent appelé le $\mathbb{R}$-*cercle standard*.

Remarque 1.62. Notons que l'on peut lire dans le bord l'éventuelle intersection de deux $\mathbb{R}$-plans : deux $\mathbb{R}$-plan se coupent en un unique point (resp. le long d'une géodésique) si et seulement si les deux $\mathbb{R}$-cercles associés sont entrelacés (resp. se coupent en deux points.)

Inversions par rapport aux $\mathbb{R}$-plans

Les inversions par rapport aux $\mathbb{R}$-plans jouent un rôle très important dans l'étude des isométries de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Définition 1.63. Soit P un $\mathbb{R}$-plan, et I_P l'inversion associée. Nous dirons que $M \in U(2, 1)$ est un *relèvement* de I_P si pour tout $z \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ et pour tout relèvement $\tilde{z}$ de z à $\mathbb{C}^3$,

$$\mathbf{P}\left(M.\bar{\tilde{z}}\right) = I_P(z). \tag{1.9}$$

(Rappelons que $\mathbf{P}$ est la projection $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^2$.)

Remarque 1.64. Si h est une isométrie de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, c'est à dire un élément de $\widehat{\mathrm{PU}(2,1)}$ (voir le théormème 1.1 page 22). Nous entendrons par « une matrice pour h » ou « un relèvement de h » tout relèvement de h à U(2,1) si h est holomorphe, ou toute matrice vérifiant la relation (1.9) si h est antiholomorphe.

Dans un modèle comme dans l'autre, l'inversion par rapport à $\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$ admet pour matrice l'identité. Dans le modèle de Siegel, l'inversion par rapport au $\mathbb{R}$-plan P_0 peut être vue, en coordonnées vectorielles comme

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \longmapsto J_2 \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, J_2 est un relèvement de I_{P_0}. Il y a donc une légère ambiguïté sur J_2, à laquelle nous penserons à la fois comme la matrice de la forme hermitienne, et comme celle de l'inversion par rapport à P_0.

Remarque 1.65.
1. Si h est une isométrie admettant $M \in U(2,1)$ comme relèvement, alors $I_{P_0} \circ h$, qui est antiholomorphe, se relève en $J_2\overline{M}$.
2. Si M est un relèvement d'une inversion I_P par rapport à un $\mathbb{R}$-plan P, le fait que I_P soit une involution se traduit par la relation $M\overline{M} = Id$. Cette relation caractérise les matrices des réflexions lagrangiennes.

Nous utiliserons le lemme suivant au chapitre 6 pour étudier des groupes engendrés par trois réflexions lagrangiennes.

Lemme 1.66. *Soit P un $\mathbb{R}$-plan. Soit R le $\mathbb{R}$-cercle associé. Supposons que R ait le point $[z,t]$ pour centre et soit de rayon $r^2e^{2i\theta}$. Alors l'inversion par rapport à I_P admet le relèvement à* SU(2,1) *donné par la matrice :*

$$J_P = -\exp\left(-2i\theta/3\right)\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & f & b \\ g & d & a \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

avec

$$a = \frac{-|z|^2 + it}{r^2} \quad b = \sqrt{2}\left(az - \bar{z}e^{2i\theta}\right) \quad c = r^2a^2 + 2\bar{z}^2e^{2i\theta}$$

$$d = \frac{z\sqrt{2}}{r^2} \qquad f = \frac{2z^2}{r^2} + e^{2i\theta} \qquad g = \frac{1}{r^2}$$

Démonstration. C'est un calcul direct à partir de la définition des centres et rayons de R et de la forme donnée dans la section 1.3 pour les dilatations et translations de Heisenberg :

$$I_P = T^{-1} \circ d \circ I_{P_0} \circ d^{-1} \circ T$$

où d et T sont comme dans la discussion précédant la définition 1.60. □

Nous aurons également besoin d'une forme matricelle pour les réflexions lagrangiennes par rapport à un $\mathbb{R}$-plan contenant l'infini.

Lemme 1.67. *Soit P un $\mathbb{R}$-plan dont l'adhérence contient le point ∞ de $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Il existe $z \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, tels que la réflexion par rapport à P admette le relèvement à SU(2,1) donné par la matrice :*

$$J_{z,t,\theta} = -\exp\left(-2i\theta/3\right)\begin{bmatrix} 1 & b & c \\ 0 & f & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

avec

$$b = \sqrt{2}\,(z - \bar{z}\exp(2i\theta)) \quad c = 2\left(-|z|^2 + it + \bar{z}^2 \exp 2i\theta\right)$$

$$\textit{et } f = \exp 2\imath\theta$$

Démonstration. La preuve est analogue à celle du lemme 1.66 : il suffit de conjuguer la réflexion lagrangienne par rapport à $\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$, par un élément parabolique quelconque fixant $\infty \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$. La réflexion par rapport à $\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$ admet pour matrice l'identité. Il suffit donc de calculer $M\overline{M}$, où M est un relèvement à SU(2,1) d'un élément parabolique de l'isotropie de ∞. Un tel relèvement s'écrit (cf 1.22 page 30)

$$\exp(-i\theta/3)\begin{bmatrix} 1 & -\bar{z}\sqrt{2}\exp(i\theta) & -|z|^2 + it \\ 0 & \exp(i\theta) & z\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ avec } \theta \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C} \text{ et } t \in \mathbb{R}.$$

□

Toute isométrie de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ se décompose comme un produit d'au plus trois réflexions lagrangiennes :

Lemme 1.68. *Soit h une isométrie de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.*

1. *Si h est holomorphe, il existe deux réflexions lagrangiennes ι_1 et ι_2 telles que $h = \iota_1 \circ \iota_2$.*
2. *Si h est antiholomorphe, il existe trois réflexions lagrangiennes ι_1, ι_2 et ι_3 telles que $h = \iota_1 \circ \iota_2 \circ \iota_3$.*

Démonstration.

1. Dans le cas où h est holomorphe, supposons d'abord h loxodromique, et utilisons le modèle de Siegel. Quitte à conjuguer, on peut supposer que h admet le relèvement diaginal $\mathbf{h}$ donné par la relation 1.3 page 28. Alors, $\mathbf{h}$ s'écrit $M_1\overline{M_2}$ avec

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\mu^{-1} \\ 0 & -\mu\bar{\mu}^{-1} & 0 \\ -\bar{\mu} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   M_1 et M_2 sont dans SU(2,1) et vérifient $M_k\overline{M}_k = Id$. Ce sont donc les matrices d'inversions lagrangiennes. Les cas où h est elliptique ou parabolique se traitent exactement de la même façon.

2. Si h est antiholomorphe, alors soit ι une réflexion lagrangienne. $h \circ \iota$ est holomorphe, et on applique le cas précédent.

□

Nous donnerons des précisions sur la décomposition des éléments holomorphes dans le paragraphe suivant. La proposition suivante est due à Falbel et Zocca (voir [FZ99]).

Lemme 1.69. *Soient P_1 et P_2 deux $\mathbb{R}$-plans. Alors,*

1. *$I_{P_1} \circ I_{P_2}$ est parabolique si et seulement si P_1 et P_2 ont exactement un point d'intersection situé dans $\partial \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.*
2. *$I_{P_1} \circ I_{P_2}$ est loxodromique si et seulement si P_1 et P_2 sont disjoints.*
3. *$I_{P_1} \circ I_{P_2}$ est elliptique régulier si et seulement si P_1 et P_2 ont exactement un point d'intersection dans $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.*
4. *$I_{P_1} \circ I_{P_2}$ est une réflexion complexe si et seulement si P_1 et P_2 s'intersectent le long d'une géodésique de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.*

Pour finir, énonçons la

Proposition 1.70. *[CG74] Le stabilisateur d'un $\mathbb{R}$-plan est isomorphe à* PSO(2,1).

$\mathbb{R}$-plans disjoints et décomposition des éléments loxodromiques.

Nous aurons besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 1.71. *Soit f une isométrie antiholomorphe de $\mathbf{H}^1_{\mathbb{C}}$. Si f a un point fixe dans $\mathbf{H}^1_{\mathbb{C}}$, alors c'est une réflexion par rapport à une géodésique.*

Démonstration. Soit p le point fixe de f. Il existe $w_0 \in \mathbf{H}^1_{\mathbb{C}}$ tel que w_0, p, et $f(w_0)$ ne sont pas alignés dans cet ordre (sinon f serait un demi-tour, holomorphe). L'une des deux bissectrices de l'angle $(p, w_0, f(w_0))$ est fixée par f. L'isométrie f est la réflexion par rapport à cette géodésique. □

Lemme 1.72. *Soit φ une isométrie antiholomorphe de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Supposons qu'il existe deux points p et q de $\partial \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ tels que $\varphi(p) = q$ et $\varphi(q) = p$. Alors φ est une réflexion lagrangienne.*

Démonstration. Comme φ échange p et q, elle stabilise la géodésique $\sigma = (pq)$ et la droite complexe C engendrée par p et q. De plus, φ a un point fixe m sur σ. Soit C' la droite complexe orthogonale à C en m. C' est stable par φ. Le lemme 1.71 nous indique alors que les deux restrictions $\varphi_{|C}$ et $\varphi_{|C'}$ de φ à C et C' sont des réflexions par rapports à des géodésiques $\gamma \subset C$ et $\gamma' \subset C'$. Comme γ et γ' sont contenues dans deux droites complexes orthogonales, elles engendrent un plan lagrangien P, qui est fixé point par point par φ. φ^2 fixant point par point deux droites complexes orthogonales, c'est l'identité sur $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. φ est donc l'inversion par rapport à P. □

Nous en déduisons alors la proposition suivante.

Proposition 1.73. *Soit A une isométrie loxodromique. Il existe une famille à deux paramètres de décompositions de A sous la forme $A = \iota_1 \circ \iota_2$ où ι_1 et ι_2 sont des réflexions lagrangiennes. De plus, ι_1 (resp. ι_2) est uniquement déterminée par la donnée de ι_2 (resp. ι_1).*

Démonstration. Supposons donnée une telle décomposition : $A = \iota_1 \circ \iota_2$. Montrons alors que ι_1 et ι_2 échangent p_A et q_A, les points fixes de A. Si cela n'était pas le cas, comme A fixe p_A, il existerait un point $p' \neq q_A$ situé sur $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, tel que

$$\iota_1(p_A) = \iota_2(p_A) = p'.$$

Par conséquent, ι_1 et ι_2 échangeraient p_A et p', et donc A stabiliserait la géodésique $p_A p'$. C'est absurde car la seule géodésique stabilisée par un élément loxodromique est son axe.

Soit ι_1 une réflexion lagrangienne échangeant p_A et q_A. Posons $\iota_2 = \iota_1 \circ A$. ι_2 est anti-holomorphe, et échange p_A et q_A. D'après le lemme 1.72 ι_2 est une réflexion lagrangienne.

Par suite, une décomposition lagrangienne de A est entièrement déterminée par le choix d'un $\mathbb{R}$-plan P tel que I_P échange les points fixes de A. Il existe une famille à 2 paramètres $\mathbb{R}^+ \times S^1$ de tels $\mathbb{R}$-plans. Pour le voir, on peut supposer que les points fixes de A sont (dans le modèle de Siegel) $[0,0]$ et ∞. Un $\mathbb{R}$-plan convient alors si et seulement si le $\mathbb{R}$-cercle associé a pour centre $[0,0]$. Un tel $\mathbb{R}$-cercle est alors entièrement déterminé par son rayon $r^2 e^{2i\theta}$. □

Angle entre deux $\mathbb{R}$-plans sécants.

Définition 1.74. Soient (L_1, L_2) et (L'_1, L'_2) deux paires de $\mathbb{R}$-plans sécants. On dit qu'elles ont le même angle si et seulement s'il existe un élément de g de PU(2,1) tel que

$$L'_i = g(L_i), i = 1, 2.$$

Pour mesurer l'angle entre deux $\mathbb{R}$-plans, on utilise le lemme suivant :

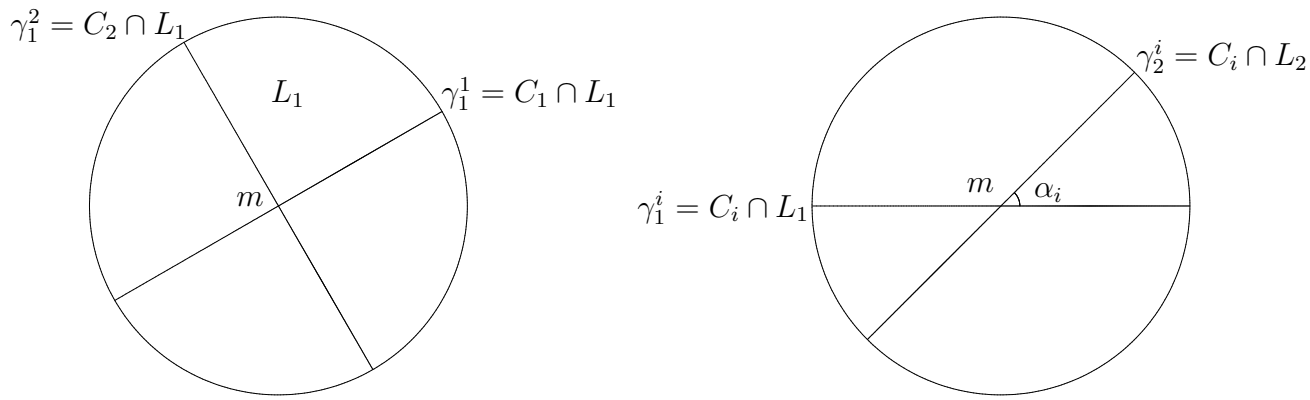
Lemme 1.75. *Soient deux $\mathbb{R}$-plans L_1 et L_2, s'intersectant en un point p dans $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Il existe une isométrie $g \in PU(2,1)$ telle que $g(L_1) = \mathbf{H}^2_{\mathbb{R}} = \{(x,y), x, y \in \mathbb{R}\}$, et $g(L_2) = \{(e^{i\alpha_1}x, e^{i\alpha_2}y), x, y \in \mathbb{R}\}$, avec $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 < \pi$.*

Démonstration. PU(2,1) agissant transitivement sur l'ensemble des $\mathbb{R}$-plans, il existe une isométrie g_1 telle que $g_1(L_1) = \mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$. Par ailleurs, le stabilisateur de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$ agit transitivement sur $\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$, il existe donc une isométrie g_2 telle que $g_2 \circ g_1(L_1) = \mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$ et $g_2 \circ g_1(p) = (0,0)$. Les isométries holomorphes qui fixent $(0,0)$ et stabilisent $\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$ s'écrivent

$$\begin{bmatrix} O & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{avec } O \in \mathrm{O}(2).$$

(cf le lemme1.7 page 31).
On peut alors choisir g_3 dans PU(2,1) qui préserve $\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$, fixe $(0,0)$ et envoie les deux espaces propres de $I_{L_1} \circ I_{L_2}$ sur les axes de coordonnées de la boule. L'isométrie $g = g_3 \circ g_2 \circ g_1$ convient. □

Définition 1.76. Soit (L_1, L_2) une paire de $\mathbb{R}$-plans sécants. Notons $(\widehat{L_1, L_2})$ l'angle entre L_1 et L_2. La mesure de l'angle $(\widehat{L_1, L_2})$ est la paire (α_1, α_2) fournie par le lemme 1.75.



Intersection de C_1 et C_2 avec L_1. Intersection de L_1 et L_2 avec C_i

FIG. 1.3 – Angle entre L_1 et L_2, droites complexes stables de $I_1 \circ I_2$.

Remarque 1.77. L'élément elliptique $E = I_{L_2} \circ I_{L_1}$ a deux droites complexes orthogonales stables C_1 et C_2, polaires à ses points fixes situés dans $\mathbf{P}(V^+)$. E agit sur C_1 (resp. C_2) comme une rotation d'angle $2\alpha_1$ (resp. $2\alpha_2$). En conséquence, nous appellerons α_1 (resp. α_2) l'angle entre L_1 et L_2 *lu dans* C_1 (resp. *lu dans* C_2). Cette terminologie est justifiée par le fait que L_1 et L_2 intersectent C_i le long de géodésiques γ_1^i et γ_2^i. L'angle entre γ_1^i et γ_2^i a pour mesure α_i.

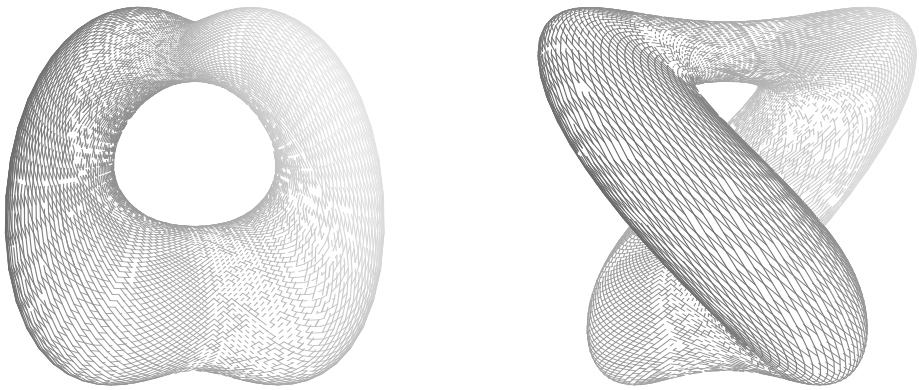
De même que pour les droites complexes, la position relative de deux $\mathbb{R}$-plans peut se lire dans le bord comme suit (voir [FZ99]). Deux $\mathbb{R}$-plans

- se coupent en un point si et seulement si les $\mathbb{R}$-cercles associés sont disjoints et enlacés.
- se coupent le long d'une géodésique si et seulement si les $\mathbb{R}$-cercles associés se coupent en deux points
- sont disjoints si et seulement les deux $\mathbb{R}$-cercles associés sont disjoints et non enlacés.

Dans [FZ99], Falbel et Zocca ont défini la notion d'angle entre deux $\mathbb{R}$-cercles entrelacés. Cette notion coïncide avec celle d'angle entre deux $\mathbb{R}$-plans définie ci-dessus.
Le lemme 1.75 et la remarque 1.77 montrent l'existence d'un cercle de $\mathbb{R}$-plans passant par un point $m \in L_1$ d'angle avec L_1 donné. Si $\alpha_1 = \alpha_2$, le cercle dégénère en un point car alors le produit des deux inversions commute avec tous les éléments du stabilisateur de m.

Proposition 1.78. *Soient P un $\mathbb{R}$-plan et m un point de P.*

1. *Si $\alpha \neq \beta$, il existe un cercle de $\mathbb{R}$-plans Q passant par m et tels que la mesure de l'angle entre P et Q soit (α, β).*
2. *Pour tout α, il existe un unique $\mathbb{R}$-plan Q tel que l'angle entre P et Q soit de mesure (α, α).*



vue depuis l'axe $x = t = 0$ vue depuis l'axe $y = t = 0$

FIG. 1.4 – Tore associé aux $\mathbb{R}$-plans d' angle $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ avec $\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$ passant par l'origine.

Démonstration. 1. Si $\alpha \neq \beta$, $E = I_P \circ I_Q$ est un élément elliptique régulier. La seule indétermination est la paire de droites complexes stables par E et contenant m. Il existe un cercle de telles droites.

2. Dans ce cas, $E = I_P \circ I_Q$ est une réflexion complexe par rapport au point m, d'angle 2α. Elle est entièrement déterminée par son point fixe et son angle.

□

Exemple 1.79. Supposons que $L_1 = \mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$ et $m = (0, 0)$. L'ensemble des $\mathbb{R}$-cercles correspondant aux $\mathbb{R}$-plans dont l'angle avec L_1 a pour mesure $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ est représenté sur la figure 1.4. C'est un tore feuilleté par des $\mathbb{R}$-cercles deux à deux entrelacés (voir le lemme 1.82).

Exemple 1.80. L'angle entre $i\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$ et $\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$ a pour mesure $(\pi/2, \pi/2)$.

Exemple 1.81. Soit P, un $\mathbb{R}$-plan intersectant $\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$. Le $\mathbb{R}$-cercle ∂P est centré au point p de coordonnées Heisenberg $[x, 0]$ avec $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $I_P(\infty) = p$. Dans ce cas I_P stabilise la droite complexe C contenant ∞ et p, et son angle avec $\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$ lu dans C a pour mesure $\pi/2$.

Nous terminons ce chapitre par les deux lemmes suivants.

Lemme 1.82. *Soient trois $\mathbb{R}$-plans P, P_1 et P_2 deux à deux disjoints, contenant un point m, et tels que les angles entre P_1 et P et l'angle entre P_2 et P soient égaux, de mesure (α, β) avec $\alpha \neq \beta$.*

Alors l'intersection de P_1 et P_2 est réduite à $\{m\}$.

La preuve est une conséquence directe de la normalisation donnée dans le lemme 1.75.

Lemme 1.83. *Soient P et Q deux $\mathbb{R}$-plans sécants, d'angle (α, β). I_P stabilise Q si et seulement si l'une des conditions suivante est réalisée :*

1. *$\alpha = \beta = 0$. Dans ce cas, P et Q sont confondus.*
2. *$\alpha = 0$ est $\beta = \frac{\pi}{2}$. Dans ce cas, $I_P|_Q$ est la réflexion par rapport à la géodésique $P \cap Q$.*
3. *$\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$. Dans ce cas, $I_P|_Q$ est le demi-tour de point fixe $P \cap Q$.*

Démonstration. Utilisons le modèle de la boule. Sans perte de généralité, on peut supposer que $Q = \mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$, et $P \bigcap Q \ni (0,0)$, et que P est paramétré par

$$P = \left\{ \left(e^{i\alpha} x_1, e^{i\beta} x_2 \right), x_1^2 + x_2^2 < 1 \right\}$$

Dans ces conditions I_P s'écrit

$$(w_1, w_2) \longrightarrow \left(\bar{w_1} e^{2i\alpha}, \bar{w_2} e^{2i\beta} \right).$$

Le résultat suit. □

1.4.3 Projections orthogonales sur les $\mathbb{R}$-plans et les droites complexes.

Le plan hyperbolique complexe est un exemple d'espace CAT(0) (voir par exemple [BH99]). A ce titre, à tout sous-ensemble convexe V de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ est associé une projection orthogonale Π_V. Les $\mathbb{C}$-plans et les $\mathbb{R}$-plans étant totalement géodésiques, ils rentrent dans ce cadre. La proposition suivante décrit les fibres de ces projections. Voir par exemple [Gol99] ou [PP06]

Proposition 1.84. *1. Soit C un droite complexe et m un point de C. La fibre de Π_C au dessus de m est une droite complexe. De plus, si C est polaire à $\mathbf{c}$ et si m se relève en $\mathbf{m}$, $\Pi_C^{-1}(m)$ et polaire à $\mathbf{m} \boxtimes \mathbf{c}$.*

2. Soit P un $\mathbb{R}$-plan, et m un point de P. La fibre de Π_P au dessus de m est le $\mathbb{R}$-plan passant par m d'angle $(\pi/2, \pi/2)$ avec P.

Nous renvoyons de nouveau à [Gol99] ou [PP06] (pour le point *2*) pour la preuve de la proposition suivante.

Proposition 1.85. *Soit m un point de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ et Z un relèvement de m tel que $\langle Z, Z \rangle = -1$.*

1. *Soit C une droite complexe, polaire à $\mathbf{c}$ tel que $\langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle = 1$. $\Pi_C(m)$ admet le relèvement à $\mathbb{C}^3$ donné par*
$$Z - \langle Z, \mathbf{c} \rangle c.$$
2. *Soit P un $\mathbb{R}$-plan, et I_P un relèvement de la réflexion par rapport à P. La projection de m sur P admet le relèvement à $\mathbb{C}^3$ donné par*
$$Z - \frac{\langle Z, I_P(Z) \rangle}{|\langle Z, I_P(Z) \rangle|} I_P(Z)$$

1.5 L'invariant angulaire de Cartan

Définition 1.86. Soient p_1, p_2 et p_3 trois points de $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. L'invariant de Cartan du triplet (ordonné) (p_1, p_2, p_3) est défini par

$$\mathbb{A}\left(p_1, p_2, p_3\right) = -\arg\left(\langle p_1, p_2\rangle\langle p_2, p_3\rangle\langle p_3, p_1\rangle\right)$$

L'invariant de Cartan admet l'interprétation géométrique suivante : (Théorème 7.1.2 de [Gol99]) :

Théorème 1.87. *Soient p_1, p_2 et p_3 trois points de $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Appelons C (resp. σ) la droite complexe (resp. géodésique) contenant p_1 et p_2, et Π la projection orthogonale sur C. Alors :*

$$|\tan\left(\mathbb{A}(x_1, x_2, x_3)\right)| = \sinh\left(\mathrm{d}(\Pi(x_3), \sigma)\right).$$

Voir figure 1.5.

Remarque 1.88. Le signe de l'invariant de Cartan est déterminé par les deux composantes connexes de $C \setminus \sigma$: $\mathbb{A}(x_1, x_2, x_3)$ et $\mathbb{A}(x_1, x_2, x_4)$ ont même signe si et seulement si x_3 et x_4 se projettent dans la même composante.

Nous utiliserons le résultat suivant de manière importante dans le chapitre 6 (Théorème 7.1.1 de [Gol99] :

Théorème 1.89. *Soient (p_1, p_2, p_3) et (q_1, q_2, q_3) deux triplets de points de $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ tels que*

$$\mathbb{A}\left(p_1, p_2, p_3\right) = \mathbb{A}\left(q_1, q_2, q_3\right)$$

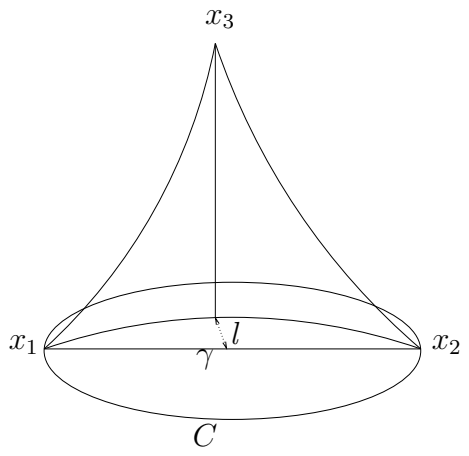
Dans ces conditions, il existe $g \in PU(2,1)$ tel que $g(p_i) = q_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

Remarque 1.90. Pour $n > 2$, trois points situés au bord de $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$ sont contenus dans un unique plan hyperbolique complexe, copie de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ plongée dans $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$. L'invariant de Cartan classifie donc les triplets de points dans le bord de $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$.

Remarque 1.91.
- $\mathbb{A}(p_1, p_2, p_3) = 0$ si et seulement si les trois points sont contenus dans un $\mathbb{R}$-plan. $\mathbb{A}(p_1, p_2, p_3) = \pm\pi/2$ si et seulement si les trois point sont contenus dans une droite complexe.
- Si $n = 2$, l'élément g fourni par le théorème 1.89 est unique sauf si les trois points sont contenus dans une droite complexe.
- Si $n > 2$, l'élément g est unique modulo le stabilisateur du plan complexe engendré par p_1, p_2 et p_3.

L'invariant de Cartan satisfait de plus à la relation de cocycle suivante (voir le chapitre 7 de [Gol99]). Si p_1, p_2, p_3 et p_4 sont quatre points de $\partial\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$, alors

$$\mathbb{A}(x_1, x_2, x_3) - \mathbb{A}(x_1, x_2, x_4) + \mathbb{A}(x_1, x_3, x_4) - \mathbb{A}(x_2, x_3, x_4) = 0. \tag{1.12}$$



$$l = d(\Pi(x_3), \gamma) = \sinh^{-1}\left(|\tan\left(\mathbb{A}(x_1, x_2, x_3)\right)|\right)$$

FIG. 1.5 – Interprétation géométrique de l'invariant de Cartan.

Chapitre 2

L'espace de Teichmüller du tore épointé.

$\mathbf{H}^1_{\mathbb{C}}$ a été défini dans le chapitre précédent. Rappelons que son groupe d'isométries est PSL(2,$\mathbb{R}$), qui est conjugué dans PSL(2,$\mathbb{C}$) à PU(1,1). Dans PSL(2,$\mathbb{R}$), les éléments loxodromiques sont appelés *hyperboliques*. Nous noterons $\widehat{\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})}$ le groupe complet d'isométries de $\mathbf{H}^1_{\mathbb{C}}$, engendré par PSL(2,$\mathbb{R}$) et les involutions antiholomorphes, qui sont les symétries par rapport aux géodésiques. Les groupes discrets d'isométries de la droite hyperbolique complexe $\mathbf{H}^1_{\mathbb{C}}$ sont souvent appelés *fuchsiens*. Dans ce chapitre, nous allons donner une description de $T_{1,1}$, l'espace de Teichmüller du tore épointé. Rappelons que $\Gamma = \pi_1(\Sigma_{1,1})$, le groupe fondamental du tore épointé, admet la présentation

$$\langle a, b, c \,|\, [a, b] \cdot c = 1 \rangle.$$

Il s'agit donc de décrire l'ensemble des représentations ρ discrètes, fidèles et préservant le type du groupe fondamental de $\Sigma_{1,1}$ dans PSL(2,$\mathbb{R}$). Rappelons par soucis de clarté qu'une représentation est dite discrète si son image est un sous-groupe discret de PSL(2,$\mathbb{R}$) - et fidèle si elle est injective. Dans le cas d'un sous-groupe G de PSL(2,$\mathbb{R}$) la discrétude est équivalente au fait que G agit proprement discontinûment sur $\mathbf{H}^1_{\mathbb{C}}$: pour tout compact K de $\mathbf{H}^1_{\mathbb{C}}$, l'ensemble de éléments g de G tels que $g \cdot K \cap K \neq \emptyset$ est de cardinal fini. Cette équivalence est l'idée de base du théorème de Poincaré. Pour un énoncé précis de ce théorème, et une discussion sur les propriétés des domaines fondamentaux, voir [Bea83]. Dans ce chapitre nous allons seulement utiliser une version simple du théorème de Poincaré, connue sous le nom de « lemme des colliers de perles », ou « lemme du ping-pong ». Nous reportons au chapitre 7 une discussion plus précise de ces résultats. La condition de préservation du type revient à demander que les seuls éléments de Γ dont les images par ρ sont non hyperboliques ont des images paraboliques, et sont conjugués dans Γ à c (ou à $[a, b]$). Cette condition traduit le fait que les classes de conjugaison dans G d'éléments pa-

raboliques primitifs[1] d'un groupe fuchsien G sont en bijection avec les cusps de la surface de Riemann $\mathbf{H}^1_{\mathbb{C}}/G$.

Le groupe fondamental du tore épointé, Γ, est isomorphe au groupe libre à deux générateurs, que nous noterons $F_2 = \langle \mathtt{m}, \mathtt{n} \rangle$. SL(2,$\mathbb{R}$) étant une forme réelle de SL(2,$\mathbb{C}$), notre premier paragraphe est consacré à la description de la classification des représentations de F_2 dans SL(2,$\mathbb{C}$) à conjugaison près. Le résultat de classification est dû à indépendamment à Fricke ([Fri96]) et Vogt ([Vog86]). Il est prouvé de manière élémentaire dans le preprint en ligne [Gol] (Voir également la discussion dans [Gol88]). Une conséquence simple de ce résultat est le fait que deux représentations ρ_1 et ρ_2 de F_2 dans SL(2,$\mathbb{R}$) telles que

$$\operatorname{tr} \rho_1(\mathtt{m}) = \operatorname{tr} \rho_2(\mathtt{m}) \,, \operatorname{tr} \rho_1(\mathtt{n}) = \operatorname{tr} \rho_2(\mathtt{n}) \text{ et } \operatorname{tr} \rho_1(\mathtt{mn}) = \operatorname{tr} \rho_2(\mathtt{mn}) \tag{2.1}$$

sont conjuguées.

L'objet du deuxième paragraphe est un résultat de décomposabilité des groupes à deux générateurs dans PSL(2,$\mathbb{R}$). Si A et B sont deux isométries de $\mathbf{H}^1_{\mathbb{C}}$, on dit que la paire (A, B) est décomposable s'il existe trois involutions I_1, I_2 et I_3 telles que

$$A = I_1 \circ I_2 \text{ et } B = I_3 \circ I_2.$$

Cette propriété est le point de départ de la classification des groupes à deux générateurs dans PSL(2,$\mathbb{R}$). En effet, « presque » toutes les représentations de F_2 dans SL(2,$\mathbb{C}$) sont décomposables (voir la proposition 2.6).

Nous exposons ensuite la description classique de l'espace de Teichmüller du tore épointé : en utilisant le critère de conjugaison donné par la relation 2.1, on peut voir l'espace de Teichmüller comme l'hypersurface de $\mathbb{R}^3$ définie par la relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz$$

avec x, y et z réels et supérieurs à 2.

Nous utilisons ensuite la décomposition en produits d'involutions pour donner une description différente de l'espace de Teichmüller basée sur l'étude des groupes engendrés par trois demi tours. Nous généraliserons ce point de vue au cas du plan hyperbolique complexe dans les chapitres 6 et 7.

2.1 Représentations de F_2 et trace dans SL(2,$\mathbb{C}$)

Commençons par énoncer un critère de conjugaison des représentations de F_2 dans PSL(2,$\mathbb{R}$).

Proposition 2.1. *Soient ρ_1 et ρ_2 deux représentations irréductibles de F_2 dans* PSL(2,$\mathbb{R}$)*, telles que*

$$\operatorname{tr} \rho_1(\mathtt{m}) = \operatorname{tr} \rho_2(\mathtt{m}) \,, \operatorname{tr} \rho_1(\mathtt{n}) = \operatorname{tr} \rho_2(\mathtt{n}) \text{ et } \operatorname{tr} \rho_1(\mathtt{mn}) = \operatorname{tr} \rho_2(\mathtt{mn}).$$

[1] c'est à dire engendrant le stabilisateur d'un point au bord de $\mathbf{H}^1_{\mathbb{C}}$ dans G.

Alors, ρ_1 et ρ_2 sont conjuguées dans PSL(2,$\mathbb{R}$).

Ce résultat découle du théorème de Fricke-Vogt (voir [Gol]), qui traite du cas de SL(2,$\mathbb{C}$) :

Théorème 2.2. – *Soit P un polynôme sur* SL*(2,$\mathbb{C}$)×*SL*(2,$\mathbb{C}$) invariant par conjugaison. Il existe $Q \in \mathbb{C}[x, y, z]$ tel que*

$$P(A, B) = Q(\mathrm{tr}A, \mathrm{tr}B, \mathrm{tr}AB)$$

– *L'application*

$$\begin{array}{rcl} SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \\ (A, B) & \longmapsto & (\mathrm{tr}A, \mathrm{tr}B, \mathrm{tr}AB) \end{array}$$

est surjective.

– *Soient (A_1, B_1) et (A_2, B_2) deux éléments de SL(2,$\mathbb{C}$)×SL(2,$\mathbb{C}$) tels que*

$$\mathrm{tr}A_1 = \mathrm{tr}A_2 = x,\ \mathrm{tr}B_1 = \mathrm{tr}B_2 = y,\ \mathrm{tr}A_1B_1 = \mathrm{tr}A_2B_2 = z.$$

Si $x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 2 \neq 2$, il existe $g \in$ SL(2,$\mathbb{C}$) tel que $(A_2, B_2) = g \cdot (A_1, B_1)$.

Notons que si $x = \mathrm{tr}A$, $y = \mathrm{tr}B$ et $z = \mathrm{tr}AB$, alors

$$x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 2 = \mathrm{tr}[A, B]. \tag{2.2}$$

Cette relation est obtenue grâce au Théorème de Cayley-Hamilton, qui s'écrit dans SL(2,$\mathbb{C}$) :

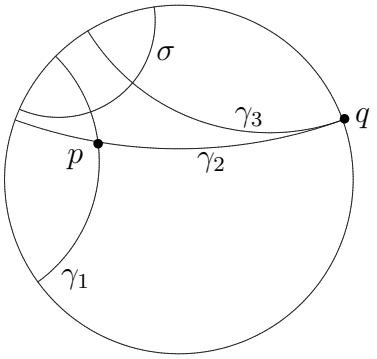
$$A^2 - \mathrm{tr}\, A \cdot A + Id = 0, \text{ pour } A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}).$$

Remarque 2.3. Le cas $x^2+y^2+z^2-xyz-2 = 2$ correspond aux représentations réductibles, pour lesquelles $[A, B]$ est l'identité.

Remarque 2.4. Le théorème 2.2 exprime le fait que le quotient catégorique de SL(2,$\mathbb{C}$)×SL(2,$\mathbb{C}$) par SL(2,$\mathbb{C}$) agissant par conjugaison diagonale est $\mathbb{C}^3$ (voir [Dol03]).

Remarque 2.5. La proposition 2.1 reste valable si l'on remplace SL(2,$\mathbb{R}$) par SU(2). Si ρ est une représentation d'un groupe de type fini dans SL(2,$\mathbb{C}$), dont caractère est réel, alors ρ est conjuguée à une représentation dans l'une des deux formes réelles de SL(2,$\mathbb{C}$) : SL(2,$\mathbb{R}$) et SU(2). Dans [Gol88], Goldman donne un critère sur x, y et z pour distinguer celle des deux formes réelles qui est atteinte, dans le cas d'une représentation du groupe libre à deux générateurs.

Nous suivrons au chapitre 3 la même démarche que dans cette section pour obtenir un critère de conjugaison des représentations de F_2 dans SU(2,1) à partir d'une critère dans SL(3,$\mathbb{C}$).



I_k est la réflexion par rapport à γ_k
$A = I_1 \circ I_2$ est elliptique et fixe p
$B = I_2 \circ I_3$ est parabolique et fixe q
$AB = I_1 \circ I_3$ est loxodromique, d'axe σ

FIG. 2.1 – Décomposition d'un groupe engendré par un elliptique et un parabolique.

2.2 Décomposition en produits d'involutions.

Cette proposition est l'outil de base de la classification des sous-groupes à deux générateurs de PSL(2,$\mathbb{R}$)(voir [Mat82, Gil95]).

Proposition 2.6. *Soient A et B deux éléments de* PSL*(2,$\mathbb{R}$). Supposons que si A et B sont tous deux hyperboliques, ils n'ont pas de point fixe en commun. Alors*

1. *Si A et B sont hyperboliques et que leurs axes s'intersectent, il existe trois demi-tours I_1, I_2 et I_3 tels que*
$$A = I_1 \circ I_2 \text{ et } B = I_2 \circ I_3.$$
2. *Dans tous les autres cas, il existe trois réflexions par rapport à des géodésiques (donc antiholomorphes) ι_1, ι_2 et ι_3 telles que*
$$A = \iota_1 \circ \iota_2 \text{ et } B = \iota_2 \circ \iota_3.$$

Nous traiterons le premier cas plus en détail dans le paragraphe 2.3.

La figure 2.1 représente la décomposition d'un groupe engendré par un élément parabolique et un élément elliptique. L'impossibilité de décomposer les groupes engendrés par deux loxodromiques dont les axes se croisent en utilisant des réflexions antiholomorphes est liée au théorème de Gauss-Bonnet : il est impossible de trouver une géodésique simultanément orthogonale à deux géodésiques qui s'intersectent.

2.3 Tore épointé et groupes triangulaires dans PSL(2,$\mathbb{R}$)

2.3.1 L'espace de Teichmüller du tore épointé

Nous commençons par rappeler une proposition classique, qui décrit les sous-groupes G de PSL(2,$\mathbb{R}$) uniformisant un tore épointé, c'est à dire tels que le quotient de $\mathbf{H}^1_{\mathbb{C}}$ par l'action de G soit un tore épointé. Posons la

Définition 2.7. Un *groupe de tore épointé* est une représentation $\rho : F_2 \longrightarrow \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ telle $A = \rho(a)$ et $B = \rho(b)$ vérifient les conditions suivante.

1. A et B sont hyperboliques, et leurs axes s'intersectent en un point de $\mathbf{H}^1_{\mathbb{C}}$.
2. Le commutateur $[A, B]$ de A et B est parabolique.

Proposition 2.8. *Tout groupe de tore épointé G est discret et sans points fixes, et la surface de Riemann associée, $\mathbf{H}^1_{\mathbb{C}}/G$, est un tore épointé. Réciproquement, tout tore épointé est uniformisé par un groupe de tore épointé.*

D'après la proposition 2.8, l'espace de Teichmüller du tore épointé est l'ensemble des classes de conjugaison sous $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ de groupes de tores épointés. Soient A, B et C les images respectives de a, b et c par ρ. Supposons choisis des relèvements $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ et $\tilde{C}$ de A, B et C à SL(2,$\mathbb{R}$) vérifiant

$$x = \mathrm{tr}\tilde{A} > 2,\ y = \mathrm{tr}\tilde{B} > 2 \text{ et } z = \mathrm{tr}\tilde{A}\tilde{B} > 2.$$

Alors le groupe engendré par A et B est un groupe de tore épointé si et seulement si x, y et z satisfont à la relation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz \quad x > 2,\ y > 2,\ z > 2. \tag{2.3}$$

La relation ci-dessus est une paramétrisation de l'espace de Teichmüller du tore épointé. Une démonstration peut être trouvée dans [Kee71].

Dans le cas d'un groupe de tore épointé, les axes des deux générateurs hyperboliques s'intersectent. D'après la proposition 2.6, il existe un groupe $G^\star$ engendré par trois demi-tours, et tel que G soit d'indice deux dans $G^\star$. De manière plus explicite :

Lemme 2.9. *Soient A et B deux éléments de* PSL(2,$\mathbb{R}$) *satisfaisant à la condition 1 de la definition 2.7. Il existe un unique triplet de demi-tours (E_1, E_2, E_3) tel que $A = E_1 \circ E_2$ et $B = E_3 \circ E_2$.*

Remarquons qu'avec les notations du lemme 2.9, on a $[A, B] = (E_1E_2E_3)^2$

2.3.2 Groupes triangulaires dans PSL(2,$\mathbb{R}$).

Soient i_1 i_2 et i_3 les générateurs du groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{*3}$, qui admet donc la présentation $\langle i_1, i_2, i_3 \mid i_k^2 = 1\rangle$.

Définition 2.10. Un groupe triangulaire est une représentation $\rho : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{*3} \longrightarrow \widehat{\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})}$

Dans le reste de ce chapitre, nous ne nous intéresserons qu'aux groupes triangulaires ayant des générateurs holomorphes, c'est à dire, ceux dont l'image est incluse dans PSL(2,$\mathbb{R}$). Ceci revient à supposer que $\rho(i_k)$ est un demi-tour, pour $k = 1, 2, 3$. Un groupe triangulaire engendré par trois demi-tours est déterminé par les points fixes de chacun des $\rho(i_k)$. Une analyse systématique de ce type de groupes est effectuée dans [Bea83] et [Gil95].

Posons la

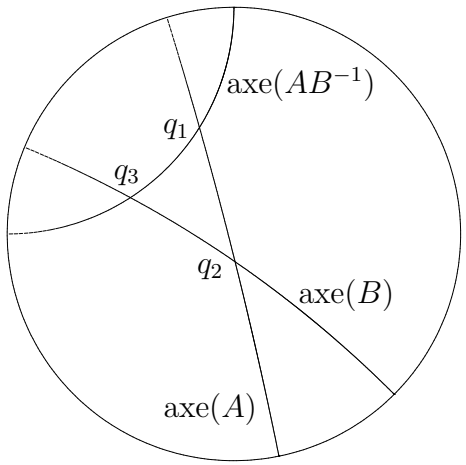


FIG. 2.2 – Décomposition de A et B, deux isométries hyperboliques dont les axes se coupent.

Définition 2.11. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble défini par

$$\mathcal{T} = \left\{ \rho \text{ groupe triangulaire} \left| \begin{array}{l} \text{les } \rho(i_k) \text{ sont des demi-tours distincts} \\ \rho(\gamma) \text{ est parabolique} \end{array} \right. \right\} / \widehat{\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})}$$

où γ désigne l'élément $(i_1 i_2 i_3)^2$ de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{*3}$.

Nous allons maintenant décrire une famille de groupe triangulaires qui, par normalisation, nous fournira des coordonnées sur $\mathcal{T}$. Pour plus de commodité, nous allons utiliser le modèle du demi-plan supérieur pour $\mathbf{H}^1_{\mathbb{C}}$. Soient p_1, p_2 et p_3 les trois points de $\partial\mathbf{H}^1_{\mathbb{C}}$ ayant pour coordonnées dans ce modèle :

$$p_1 = 1,\ p_3 = -1 \text{ et } p_2 = \infty.$$

Soit γ_{kl} la géodésique reliant p_k à p_l $(k \neq l)$ et Δ le triangle idéal $p_1p_2p_3$, orienté comme suit : γ_{12} vers p_2, γ_{32} vers p_3, et γ_{13} vers p_1. Fixons les notations suivantes :

- Pour k, l, m distincts, soit s_k la projection orthogonale de p_k sur γ_{lm} (en coordonnées : $s_2 = i$, $s_1 = -1 + 2i$ et $s_3 = 1 + 2i$).
- Pour $r > 0$ et $r \neq 1$, soit h^r_{kl} l'élément hyperbolique fixant p_k et p_l et ayant pour multiplicateur r. Supposons de plus que $r > 1$ si et seulement si h^r_{kl} translate le long de γ_{kl} dans la direction positive. Si $r = 1$, posons $h^1_{kl} = Id$.
- Posons $q^r_k = h^r_{lm}(s_k)$ pour k, l, m distincts et $r > 0$. Soit E^r_k le demi-tour fixant q^r_k.

Les trois points s_1, s_2 et s_3 vont jouer le rôle d'une configuration de référence. Ces différents objets sont représentés sur la figure 2.3 dans le modèle du disque pour $\mathbf{H}^1_{\mathbb{C}}$.

Définition 2.12. Pour tout triplet (r_1, r_2, r_3) de nombres positifs, soit $T(r_1, r_2, r_3)$ le groupe triangulaire défini par $\rho(i_k) = E^{r_k}_k$ $(k = 1, 2, 3)$.

Par construction, les trois demi-tours $E_1^{r_1}$, $E_2^{r_2}$ et $E_3^{r_3}$ sont distincts. Le lemme suivant fournit donc une condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe triangulaire $T(r_1, r_2, r_3)$ représente un point de $\mathcal{T}$.

Lemme 2.13. *Soit (r_1, r_2, r_3) un triplet de nombres positifs. L'isométrie $(E_1^{r_1} E_2^{r_2} E_3^{r_3})^2$ est parabolique si et seulement si $r_1 r_2 r_3 = 1$.*

Démonstration. Pour tout point du demi-plan supérieur $m = u + iv$, avec $u \in \mathbb{R}$ et $v > 0$, le demi tour fixant m admet le relèvement à SL(2,ℝ) donné par la matrice

$$d_{u,v} = \begin{bmatrix} -u/v & (u^2 + v^2)/v \\ -1/v & u/v \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Un calcul simple montre que dans la normalisation ci-dessus,

$$q_1^{r_1} = -1 + \frac{2i}{r_1^2},\ q_3^{r_3} = 1 + 2ir_3^2,\ \text{et } q_2^{r_2} = \frac{r_2^4 - 1}{r_2^4 + 1} + i\frac{2r_2^2}{r_2^4 + 1}. \tag{2.5}$$

Il s'en suit que $(E_1^{r_1} \circ E_2^{r_2} \circ E_3^{r_3})^2$ admet le relèvement à SL(2,ℝ)

$$\begin{bmatrix} (r_1 r_2 r_3)^{-4} & \tau \\ 0 & (r_1 r_2 r_3)^4 \end{bmatrix}$$

où l'on a posé

$$\tau = -\left(2 + (r_1 r_2 r_3)^4 + (r_1 r_2 r_3)^{-4} + 2r_2^4 r_3^4 + 2r_3^4 + \frac{2}{r_1^4} + \frac{2}{r_1^4 r_2^4}\right).$$

Le coefficient τ n'étant jamais nul, $(E_1^{r_1} \circ E_2^{r_2} \circ E_3^{r_3})^2$ est parabolique si et seulement si les coefficients diagonaux de la matrice ci-dessus valent 1. □

Remarque 2.14. Il aurait été plus léger de calculer $E_1^{r_1} \circ E_2^{r_2} \circ E_3^{r_3}$ au lieu de son carré. Cependant, pour généraliser cette construction à PU(2,1), nous allons remplacer au chapitre 6 les demi-tours E_k par des involutions anti-holomorphes I_k. Dans ce cadre, $I_1 I_2 I_3$ est anti-holomorphe, et l'étude de son carré, qui est holomorphe est plus aisée.

Proposition 2.15. *Tout point de $\mathcal{T}$ est représenté par un unique triplet (r_1, r_2, r_3) vérifiant $r_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$ et $r_1 r_2 r_3 = 1$.*

Démonstration. Soient E_1, E_2 et E_3 trois demi-tours distincts. $(E_1 E_2 E_3)^2$ est parabolique si et seulement si $E_1 E_2 E_3$ l'est aussi. Dans ces conditions, soit m_2 *le* point fixe de $E_1 E_2 E_3$. Au point m_2 est associé le cycle de longueur 3, obtenu par :

$$m_2 \xrightarrow{E_3} m_1 \xrightarrow{E_2} m_3 \xrightarrow{E_1} m_2.$$

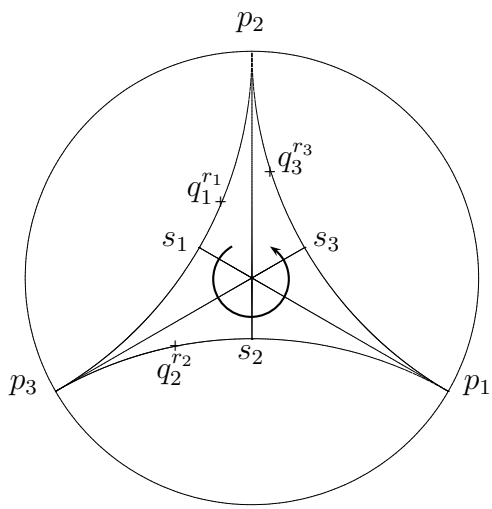


FIG. 2.3 – Δ et $T(r_1, r_2, r_3)$ pour $r_1 < 1$, $r_2 < 1$ et $r_3 > 1$.

Ce cycle est non-dégénéré. En effet si, par exemple, m_1 et m_2 étaient confondus, E_1, E_2 et E_3 stabiliseraient la géodésique reliant m_1 à m_3, le groupe engendré par E_1E_2 et E_3E_2 serait abélien, et le commutateur $(E_1E_2E_3)^2 = [E_1E_2, E_3E_2]$ serait l'identité. En conjuguant les E_k par l'unique élément de PSL(2,$\mathbb{R}$) vérifiant $g(m_k) = p_k$ pour $i = 1, 2, 3$, on obtient le résultat. $\square$

Le lemme 2.9 montre que tout groupe de tore épointé est d'indice deux dans un groupe triangulaire conjugué à un unique $T(r_1, r_2, r_3)$ avec $r_1r_2r_3 = 1$. Réciproquement, si ρ est un point de $\mathcal{T}$ représenté par $T(r_1, r_2, r_3)$, le sous-groupe engendré par $E_1^{r_1} \circ E_2^{r_2}$ et $E_3^{r_3} \circ E_2^{r_2}$ est un groupe de tore épointé. En effet, le triangle $p_1p_2p_3$ est un domaine fondamental pour $T(r_1, r_2, r_3)$, qui permet de montrer la discrétude et la fidélité de la représentation, ainsi que le fait qu'elle préserve le type. Nous verrons une preuve plus détaillée dans le chapitre 7 dans un cas analogue dans $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Par suite, à tout groupe de tore épointé G est associé un unique couple (r_1, r_3) de nombres positifs tels que G est conjugué au sous-groupe d'indice deux de $\langle E_1^{r_1}, E_2^{(r_1r_3)^{-1}}, E_3^{r_3}\rangle$ engendré par $E_{r_1}^1 \circ E_2^{(r_1r_3)^{-1}}$ et $E_3^{r_3} \circ E_2^{(r_1r_3)^{-1}}$. Par conséquent, le couple (r_1, r_3) fournit des coordonnées sur l'espace de Teichmüller du tore épointé.

Les coordonnées (x, y, z) décrites au paragraphe 2.3.1 décrivent la structure d'un tore épointé via la longueur des géodésiques représentant les générateurs du groupe fondamental. Le lien entre trace du représentant et longueur de la géodésique est donné par

$$\cosh^2(l/2) = \mathrm{tr}(g)^2/4,$$

où l est la longueur de translation de g, relèvement à SL(2,$\mathbb{R}$) de l'isométrie représentant la géodésique. Le tore épointé symétrique est celui pour lequel $x = y = z = 3$. Il est d'indice deux dans le groupe triangulaire $T(1, 1, 1)$.

Remarque 2.16. En utilisant le relèvement des demi-tours donné par (2.4), ainsi que les formes normalisées des $q_i^{r_i}$ données par (2.5), on vérifie que, dans le cas d'un groupe de

tore épointé, les trois traces x, y et z sont données par :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1+r_2^4+r_2^4r_1^4}{r_1^2r_2^2} \\ y &= \frac{1+r_2^4+r_1^4r_2^4}{r_1^2r_2^4} \\ z &= \frac{(1+r_2^4+r_1^4r_2^4)\,(1+r_2^4)}{r_1^4r_2^6} \end{aligned}$$

On en déduit les formules inverses :

$$\begin{aligned} r_1^2 &= \frac{x^2+y^2}{xz} \\ r_2^2 &= \frac{x}{y} \\ r_3^2 &= \frac{yz}{x^2+y^2} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Remarque 2.17.

1. Δ est un domaine fondamental pour le groupe $T(r_1, r_2, r_3)$ lorsque $r_1r_2r_3 = 1$. Un domaine fondamental pour le groupe de tore épointé associé est obtenu en considérant $\Delta \cup E_2^{r_2}(\Delta)$, muni des identifications $A = E_1^{r_1} \circ E_2^{r_2}$ et $B = E_3^{r_3} \circ E_2^{r_2}$ (voir figure 2.5).
2. Lorsque $r_1r_2r_3 \neq 1$, bien que Δ soit un polygone dont les faces sont identifiées par des éléments de $T\,(r_1, r_2, r_3)$, et ayant la propriété que pour tout $g \in T\,(r_1, r_2, r_3)$ différent de l'identité, $g(\Delta) \cap \Delta = \emptyset$, il n'est pas un domaine fondamental pour $T(r_1, r_2, r_3)$. Dans ce cas, la transformation $E_1E_2E_3$, associée au cycle $p_1p_2p_3$ est hyperbolique et les images de Δ ne pavent pas $\mathbf{H}^1_{\mathbb{C}}$. Les images $g\,(\Delta)$ s'accumulent sur les axes de $E_1E_2E_3$ et de ses conjugués (voir la figure 2.4). Dans ce cas, Δ permet de montrer que la représentation est discrète, fidèle, mais pas qu'elle préserve le type.
3. En utilisant Δ comme domaine fondamental, nous avons décrit une famille à deux paramètres de groupes de tore épointé.

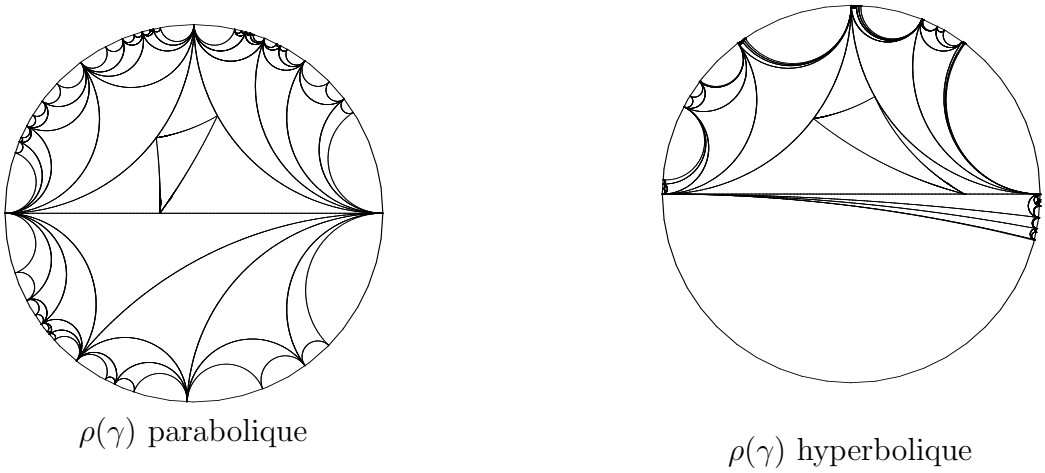


FIG. 2.4 – Translatés de Δ par les mots de longueur$\leqslant 4$

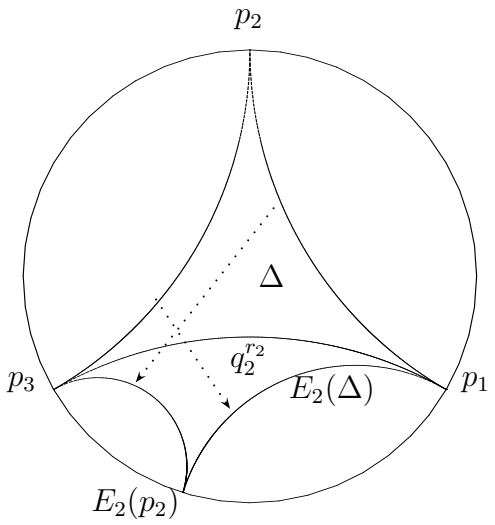


FIG. 2.5 – Tore épointé associé à un groupe triangulaire.

Chapitre 3

Représentations du groupe libre F_2 dans SU(2,1)

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à une étude algébrique des représentations du groupe libre à deux générateurs F_2 dans PU(2,1). Plus précisément, nous nous intéressons au caractère d'une telle représentation. Dans tout le chapitre, nous noterons $\mathtt{m}$ et $\mathtt{n}$ les deux générateurs de F_2.

Notre démarche est la suivante :

1. Comprendre le comportement des traces dans le cas d'une représentation dans SL(3,$\mathbb{C}$). Nous donnons dans ce but une description effective de l'anneau des invariants de SL(3,$\mathbb{C}$)×SL(3,$\mathbb{C}$) sous l'action diagonale de SL(3,$\mathbb{C}$) par conjugaison. Pour cela, nous suivons la méthode exposée par J. Peyrière dans le chapitre 10 de [Fog02] (voir aussi [Wen94]).
2. Passer de SL(3,$\mathbb{C}$) à SU(2,1), forme réelle de SL(3,$\mathbb{C}$) fixée par l'involution $A \longmapsto \left(J\,\bar{A}^T J\right)^{-1}$.

Notre objectif principal dans ce chapitre est de montrer la proposition suivante. Elle a été indépendamment démontrée par V. T. Khoi dans [Kho].

Proposition. *Soient ρ_1 et ρ_2 deux représentations de F_2 dans* SU(2,1)*, telles que $\rho_1(F_2)$ et $\rho_2(F_2)$ sont Zariski-denses. Si*

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\rho_1(\mathtt{m}) &= \operatorname{tr}\rho_2(\mathtt{m}) & \operatorname{tr}\rho_1(\mathtt{n}) &= \operatorname{tr}\rho_2(\mathtt{n}) \\ \operatorname{tr}\rho_1(\mathtt{mn}) &= \operatorname{tr}\rho_2(\mathtt{mn}) & \operatorname{tr}\rho_1(\mathtt{m}^{-1}\mathtt{n}) &= \operatorname{tr}\rho_2(\mathtt{m}^{-1}\mathtt{n}) \\ \operatorname{tr}\rho_1([\mathtt{m},\mathtt{n}]) &= \operatorname{tr}\rho_2([\mathtt{m},\mathtt{n}]) \end{aligned}$$

alors ρ_1 et ρ_2 sont conjuguées dans SU(2,1)*.*

La démonstration est faite dans le paragraphe 3.3. Elle est basée sur le cas des représentations dans SL(3,$\mathbb{C}$), étudiées au cours du paragraphe 3.2.

Dans le cas d'une représentation dans SL(n,$\mathbb{C}$), si deux représentations irréductibles ρ_1 et ρ_2 ont même caractère (i.e. si $\mathrm{tr}\rho_1(\mathtt{w}) = \mathrm{tr}\rho_2(\mathtt{w})$ quel que soit $\mathtt{w} \in F_2$), elles sont conjuguées (voir par exemple [Lan93] p. 648–651). Un critère effectif de conjugaison est la donnée d'une famille finie de mots $\mathcal{F}_n = \{\mathtt{f}_1, \ldots, \mathtt{f}_{p_n}\}$ ayant la propriété suivante :

pour tout $\mathtt{w} \in F_2$ *il existe un polynôme* $P_{\mathtt{w}} \in \mathbb{C}[X_1, \ldots X_{p_n}]$ *tel que*
$\mathrm{tr}\rho(\mathtt{w}) = P_{\mathtt{w}}\left(\mathrm{tr}(\mathtt{f}_1), \ldots, \mathrm{tr}(\mathtt{f}_{p_n})\right)$ pour tout $\rho \in \mathrm{Hom}\left(F_2, \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})\right)$

Le théorème suivant, dû à Procesi, garantit l'existence d'une telle famille, et donne une borne supérieure pour son cardinal (voir [Pro76]). Le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ agit sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ par conjugaison : si $g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ et $(\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_k) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$

$$g \cdot (\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_k) = \left(g\mathrm{M}_1 g^{-1}, \ldots, g\mathrm{M}_k g^{-1}\right) \tag{3.1}$$

Soit alors $T_{k,n}$ l'anneau des fonctions polynomiales sur $(\mathrm{M}_n(\mathbb{C}))^k$ invariantes par l'action 3.1.

Théorème 3.1 (Procesi)**.** *$T_{k,n}$ est engendré sur $\mathbb{C}$ par les fonctions* $\mathrm{tr}\left(\mathrm{M}_{i_1}\mathrm{M}_{i_2}\cdots\mathrm{M}_{i_j}\right)$, *avec $j \leqslant 2^n - 1$.*

D'après ce résultat, il suffit donc de prendre pour $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des mots de longueur inférieure ou égale à $2^n - 1$, qui dans le cas où $n = 3$ est de cardinal 255. SL(3,$\mathbb{C}$) étant de dimension (complexe) 8, la dimension de $\mathbb{C}[\mathrm{SL}(3\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})]^{\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})}$ est 8 aussi. La différence est due à l'existence de relations entre les produits de puissances de deux matrices. Nous verrons au cours du paragraphe 3.2 que ces relations proviennent toutes de la relation obtenue par le théorème de Cayley-Hamilton.

Pour passer de SL(3,$\mathbb{C}$) à SU(2,1), nous utiliserons les deux lemmes suivants.

Lemme 3.2. *Soient ρ_1 et ρ_2 deux représentations d'un groupe G dans* SU(2,1)*, telles que $\rho_1(G)$ et $\rho_2(G)$ soient Zariski-denses. Si* $\mathrm{tr}(\rho_1(g)) = \mathrm{tr}(\rho_2(g))$ *pour tout g dans G alors ρ_1 et ρ_2 sont conjugués dans* SU(2,1)*.*

Démonstration. Sous ces hypothèses, ρ_1 et ρ_2 sont conjuguées dans SL(3,$\mathbb{C}$). Il existe donc $A \in$ SL(3,$\mathbb{C}$) tel que pour tout g dans G,

$$\rho_2(g) = A\rho_1(g)A^{-1}$$

Sur $\mathbb{C}^3$, considérons la forme hermitienne associée à $N(x) = ||Ax||$, $||y|| = \langle y, y\rangle$. Pour tout g dans G, $\rho_1(g)$ préserve N : $N(\rho_1(g)x) = ||A\rho_1(g)x|| = ||\rho_2(g)Ax|| = N(x)$ car $\rho_2(g)$ appartient à SU(2,1). Comme $\rho_1(G)$ est Zariski-dense, N est SU(2,1)-invariant. La conclusion résulte du lemme suivant $\square$

Lemme 3.3. *Soit h une forme hermitienne* SU(2,1)*-invariante. h est proportionelle à* $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Démonstration. Soit SU(h) le groupe spécial unitaire associé à h. SU(h) contient SU$(2,1)$, donc n'est pas compact. h a donc signature $(2,1)$. □

Nous terminons ce chapitre en appliquant le critère de conjugaison 3.23 à l'étude des groupes triangulaires complexes, qui apparaissent lorsqu'une représentation est $\mathbb{C}$-décomposable (voir la définition 5.9 page 97).

3.2 Représentations de F_2 dans SL(3,$\mathbb{C}$)

Soient M et N deux éléments de SL(3,$\mathbb{C}$). Nous allons montrer que $\mathrm{tr}[\mathrm{M},\mathrm{N}]$ et $\mathrm{tr}[\mathrm{M}^{-1},\mathrm{N}]$ sont les deux racines d'un polynôme

$$T^2 - ST + P$$

où S et P sont deux polynômes en les traces des éléments de l'ensemble $t_{\mathrm{M,N}}$ (voir définition 3.4).

Pour effectuer ce calcul nous suivrans la méthode exposée par J. Peyrière dans le chapitre 10 de [Fog02]. La proposition 3.6 semble avoir été explicitée indépendament dans plusieurs travaux, parmis lesquels [ADS05] et [Wen94]. S. Lawton expose ce même résultat dans [Law06]. A. Sikora a obtenu le résultat de génération de l'anneau des invariants de SL(3,$\mathbb{C}$)×SL(3,$\mathbb{C}$) par des méthodes différentes, liées à la théorie de graphes, dans [Sik01].

3.2.1 Cayley-Hamilton dans $M_3(\mathbb{C})$, et conséquences

Dans toute cette section, M et N désigneront deux éléments de SL(3,$\mathbb{C}$).

Définition 3.4. Soit $t_{\mathrm{M,N}}$ l'ensemble ordonné de traces :

$$\left(\mathrm{trM}, \mathrm{trN}, \mathrm{trMN}, \mathrm{trM}^{-1}\mathrm{N}, \mathrm{trM}^{-1}, \mathrm{trN}^{-1}, \mathrm{tr}(\mathrm{MN})^{-1}, \mathrm{tr}(\mathrm{M}^{-1}\mathrm{N})^{-1}\right)$$

Dans ce qui suit, nous désignerons par x l'octuplet $(x_1, \cdots, x_8)$. Si $P \in \mathbb{C}[x]$, $P(t_{\mathrm{M,N}})$ désignera donc l'évaluation du polynôme P au point $x_1 = \mathrm{trM}, \ldots, x_8 = \mathrm{tr}(\mathrm{M}^{-1}\mathrm{N})^{-1}$.

Notre premier but est d'exprimer les deux quantités

$$s = \mathrm{tr}\,[\mathrm{M},\mathrm{N}] + \mathrm{tr}\,[\mathrm{M}^{-1},\mathrm{N}] \text{ et } p = \mathrm{tr}\,[\mathrm{M},\mathrm{N}]\mathrm{tr}\,[\mathrm{M}^{-1},\mathrm{N}]$$

en fonction des éléments de $t_{\mathrm{M,N}}$. L'outil essentiel est l'identité matricielle fournie par le théorème de Cayley-Hamilton : si $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$, qui s'écrit en terme de traces

$$\begin{aligned}\chi(A) &= A^3 - \mathrm{tr}(A)A^2 + \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(A)^2 - \mathrm{tr}(A^2)\right)A - \frac{1}{6}(\mathrm{tr}(A)^3) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A)(\mathrm{tr}A^2) - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(A^3) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

En trilinéarisant l'identité (3.2), on obtient une relation liant trois matrices quelconques A_1, A_2 et A_3 de $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$. En posant alors $A_1 = \mathrm{M}$, $A_2 = \mathrm{N}$ et $A_3 = \mathrm{M}^{-1}$, on obtient une relation liant M et N, qui n'est autre que

$$\begin{aligned} &\chi\left(\mathrm{M} + \mathrm{M}^{-1} + \mathrm{N}\right) \\ -&\left(\chi\left(\mathrm{M} + \mathrm{M}^{-1}\right) + \chi\left(\mathrm{M}^{-1} + \mathrm{N}\right) + \chi\left(\mathrm{M} + \mathrm{N}\right)\right) \\ &+\chi(\mathrm{M}) + \chi(\mathrm{N}) + \chi\left(\mathrm{M}^{-1}\right) = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

En utilisant la forme explicite de χ donnée ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathrm{N} + \mathrm{MNM}^{-1} + \mathrm{M}^{-1}\mathrm{NM} &= \mathrm{trM}\cdot\left(\mathrm{M}^{-1}\mathrm{N} + \mathrm{NM}^{-1}\right) + \mathrm{trM}^{-1}\cdot(\mathrm{MN} + \mathrm{NM}) \\ &-\mathrm{trM}\,\mathrm{trM}^{-1}\cdot\mathrm{N} - \mathrm{trM}\,\mathrm{trN}\cdot\mathrm{M}^{-1} - \mathrm{trM}^{-1}\,\mathrm{trN}\cdot\mathrm{M} \\ &+\mathrm{trMN}\cdot\mathrm{M}^{-1} + \mathrm{trM}^{-1}\mathrm{N}\cdot\mathrm{M} \\ &-\left(\mathrm{trM}\,\mathrm{trM}^{-1}\,\mathrm{trN} - \mathrm{trM}\,\mathrm{trM}^{-1}\mathrm{N} - \mathrm{tr}\,\mathrm{M}^{-1}\,\mathrm{trMN} + \mathrm{trN}\right)\cdot\mathrm{Id}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Seules les traces contenues dans $t_{\mathrm{M,N}}$ apparaissent dans le membre de droite de 3.4.

Remarque 3.5. D'une manière analogue nous aurions pu obtenir :

$$\begin{aligned}\mathrm{MNM} + \mathrm{M}^2\mathrm{N} + \mathrm{NM}^2 &= \mathrm{trM}\cdot(\mathrm{MN} + \mathrm{NM}) + \mathrm{trN}\cdot\mathrm{M}^2 \\ &+\mathrm{trMN}\cdot\mathrm{M} + \frac{1}{2}\left(\mathrm{trM}^2 - (\mathrm{trM})^2\right)\cdot\mathrm{N} - tr\mathrm{M}\,\mathrm{trN}\cdot\mathrm{M} \\ &+\left(\mathrm{trM}^2\mathrm{N} - \mathrm{trM}\,\mathrm{trMN} - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathrm{M}^2)\,\mathrm{trN} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathrm{M})^2\,\mathrm{trN}\right)\cdot\mathrm{Id}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

En multipliant (3.4) par N^{-1} à droite et en prenant la trace dans la relation ainsi obtenue, il vient

$$\begin{aligned} s &= \mathrm{trM}\,\mathrm{trM}^{-1} + \mathrm{trN}\,\mathrm{trN}^{-1} + \mathrm{trMN}\,\mathrm{tr}(\mathrm{MN})^{-1} + \mathrm{trM}^{-1}\mathrm{N}\,\mathrm{tr}(\mathrm{M}^{-1}\mathrm{N})^{-1} \\ &-\mathrm{trM}\,\mathrm{trN}\,\mathrm{tr}(\mathrm{MN})^{-1} - \mathrm{trM}^{-1}\mathrm{N}\,\mathrm{trM}^{-1}\,\mathrm{trN}^{-1} - \mathrm{trN}\,\mathrm{trM}^{-1}\,\mathrm{tr}(\mathrm{M}^{-1}\mathrm{N})^{-1} - \mathrm{trM}\,\mathrm{trM}^{-1}\mathrm{N}\,\mathrm{trN}^{-1} \\ &+\mathrm{trM}\,\mathrm{trM}^{-1}\,\mathrm{trN}\,\mathrm{trN}^{-1} - 3. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Pour exprimer p, multiplions (3.4) à droite par une matrice L quelconque, et effectuons le changement

$$\mathrm{M} \to \mathrm{MN}, \mathrm{N} \to \mathrm{M}^{-1}\mathrm{N}^{-1} \text{ et } \mathrm{L} \to \mathrm{NM}.$$

Après avoir appliqué la trace, il vient

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}[\mathrm{M},\mathrm{N}]\mathrm{tr}[\mathrm{M}^{-1},\mathrm{N}] \;=\; & 2\mathrm{trMNtr}(\mathrm{MN})^{-1} + \mathrm{trM}^2\mathrm{M}^2\mathrm{trM}^{-2}\mathrm{N}^{-2} - (\mathrm{trMN})^2\mathrm{trM}^{-2}\mathrm{N}^{-2} \\
& - \left(\mathrm{tr}(\mathrm{MN})^{-1}\right)^2 \mathrm{trM}^2\mathrm{N}^2 + (\mathrm{trMN})^2 \left(\mathrm{tr}(\mathrm{MN})^{-1}\right)^2 \\
& -\underbrace{\mathrm{tr}[\mathrm{M},\mathrm{N}][\mathrm{N}^{-1},\mathrm{M}^{-1}]}_{:(\mathrm{I})} - \underbrace{\mathrm{tr}[\mathrm{N},\mathrm{M}][\mathrm{M}^{-1},\mathrm{N}^{-1}]}_{(\mathrm{II})} \\
& -\mathrm{trMNtr}(\mathrm{MN})^{-1}\underbrace{\left(\mathrm{tr}[\mathrm{M},\mathrm{N}] + \mathrm{tr}[\mathrm{M}^{-1},\mathrm{N}]\right)}_{= s,\ \text{calculé en (3.6)}}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Pour terminer le calcul, nous devons exprimer les termes (I) et (II). (II) s'obtient à partir de (I) par le changement $\mathrm{M} \leftrightarrow \mathrm{N}$. Il suffit donc de calculer la quantité

$$(\mathrm{I}) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{MNM}^{-1}\mathrm{N}^{-1}\mathrm{N}^{-1}\mathrm{M}^{-1}\mathrm{NM}\right) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{M}^2\mathrm{NM}^{-1}\mathrm{N}^{-2}\mathrm{M}^{-1}\mathrm{N}\right).$$

Nous le faisons en deux étapes :

- Dans un premier temps, nous utilisons l'identité de Cayley-Hamilton dans SL(3,$\mathbb{C}$), qui se réduit à
$$A^2 = \mathrm{tr}A \cdot A - \mathrm{tr}A^{-1} \cdot \mathrm{Id} + A^{-1}, \tag{3.8}$$
pour remplacer M^2 et N^{-2}, et casser le mot $\mathrm{M}^2\mathrm{NM}^{-1}\mathrm{N}^{-2}\mathrm{M}^{-1}\mathrm{N}$ en une somme de mot plus courts.
- Dans un second temps, nous utilisons les relations (3.4) et (3.5) pour casser les mots obtenus après l'étape 1 et obtenir une relation polynomiale en les $t_{\mathrm{M},\mathrm{N}}$.

Les calculs sont assez lourds, et sont facilités par l'utilisation d'un logiciel de calcul formel (ici, MAPLE). Les résultats sont rassemblés dans la proposition suivante. Les polynômes S et P apparaissent également dans [Law06].

Proposition 3.6. *Soient* M *et* N *deux matrices dans* SL(3,$\mathbb{C}$). *Soient S et P les deux polynômes de $\mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_8]$ définis par*

$$S = x_1x_5 + x_2x_6 + x_3x_7 + x_4x_8 - x_1x_2x_7 - x_5x_6x_3 - x_5x_2x_8 - x_1x_6x_4 + x_1x_2x_5x_6 - 3$$

et

$$\begin{aligned}
P \;=\;& x_5^2\,x_6\,x_1^2\,x_2 + x_5\,x_6^2\,x_1\,x_2^2 \\
&+x_4\,x_5^2\,x_2^2 + x_5^2\,x_6^2\,x_7 + x_6^2\,x_8\,x_1^2 + x_1^2\,x_2^2\,x_3 \\
&-x_4\,x_5\,x_6\,x_1^2 - x_4\,x_6^2\,x_1\,x_2 - x_5^2\,x_6\,x_1\,x_3 - x_5^2\,x_8\,x_1\,x_2 \\
&-x_5\,x_6^2\,x_2\,x_3 - x_5\,x_6\,x_8\,x_2^2 - x_5\,x_7\,x_1^2\,x_2 - x_6\,x_7\,x_1\,x_2^2 \\
&-x_5^3\,x_6\,x_2 - x_5\,x_6^3\,x_1 - x_5\,x_1\,x_2^3 - x_6\,x_1^3\,x_2 \\
&-x_4\,x_5\,x_6\,x_7\,x_2 - x_4\,x_5\,x_1\,x_2\,x_3 - x_5\,x_6\,x_7\,x_8\,x_1 - x_6\,x_8\,x_1\,x_2\,x_3 \\
&+x_4^2\,x_6\,x_7 + x_4^2\,x_1\,x_3 + x_4\,x_5^2\,x_6 + x_4\,x_5\,x_3^2 + x_4\,x_6^2\,x_3 \\
&+x_4\,x_7^2\,x_2 + x_4\,x_7\,x_1^2 + x_4\,x_1\,x_2^2 + x_5^2\,x_7\,x_2 + x_5^2\,x_8\,x_3 \\
&+x_5\,x_6^2\,x_8 + x_5\,x_7\,x_8^2 + x_5\,x_2^2\,x_3 + x_6^2\,x_7\,x_1 + x_6\,x_8\,x_3^2 \\
&+x_6\,x_1^2\,x_3 + x_7^2\,x_8\,x_1 + x_7\,x_8\,x_2^2 + x_8^2\,x_2\,x_3 + x_8\,x_1^2\,x_2 \\
&-2\,x_4^2\,x_5\,x_2 - 2\,x_5\,x_6\,x_7^2 - 2\,x_6\,x_8^2\,x_1 - 2\,x_1\,x_2\,x_3^2 \\
&+x_4\,x_5\,x_8\,x_1 + x_4\,x_6\,x_8\,x_2 + x_4\,x_7\,x_8\,x_3 + x_5\,x_6\,x_1\,x_2 + x_5\,x_7\,x_1\,x_3 + x_6\,x_7\,x_2\,x_3 \\
&+x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 + x_7^3 + x_8^3 \\
&-3\,x_4\,x_5\,x_7 - 3\,x_4\,x_2\,x_3 - 3\,x_6\,x_7\,x_8 - 3\,x_8\,x_1\,x_3 \\
&+3\,x_4\,x_6\,x_1 + 3\,x_5\,x_6\,x_3 + 3\,x_5\,x_8\,x_2 + 3\,x_7\,x_1\,x_2 \\
&-6\,x_4\,x_8 - 6\,x_5\,x_1 - 6\,x_6\,x_2 - 6\,x_7\,x_3 + 9.
\end{aligned}$$

$\mathrm{tr}[\mathrm{M},\mathrm{N}]$ *et* $\mathrm{tr}[\mathrm{M}^{-1},\mathrm{N}]$ *sont les deux racines du polynôme*

$$\Pi = T^2 - S\left(t_{\mathrm{M},\mathrm{N}}\right)\cdot T + P\left(t_{\mathrm{M},\mathrm{N}}\right).$$

Remarque 3.7. Si M et N ont une direction fixe commune dans $\mathbb{C}^3$, et un supplémentaire stable commun, alors on peut supposer que

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{M}_1 \end{bmatrix} \text{ et } \mathrm{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{N}_1 \end{bmatrix} \text{ avec } \mathrm{M}_1, \mathrm{N}_1 \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}).$$

Dans ce cas, S et P deviennent

$$S = 2\left((\mathrm{tr}\mathrm{M}_1)^2 + (\mathrm{tr}\mathrm{N}_1)^2 + (\mathrm{tr}\mathrm{M}_1\mathrm{N}_1)^2 - \mathrm{tr}\mathrm{M}_1\mathrm{tr}\mathrm{N}_1\mathrm{tr}\mathrm{M}_1\mathrm{N}_1 - 1\right) \text{ et } P = \frac{S^2}{4},$$

qui sont prévus par la relation dans SL(2,$\mathbb{C}$) (relation 2.2). Dans ce cas, $\mathrm{tr}[\mathrm{M},\mathrm{N}] = 1 + \mathrm{tr}[\mathrm{M}_1,\mathrm{N}_1]$.

Remarque 3.8. Les transformations de Nielsen

$$n_1 : (\mathrm{M},\mathrm{N}) \longrightarrow \left(\mathrm{M}^{-1},\mathrm{N}\right)$$

$$n_2 : (\mathrm{M},\mathrm{N}) \longrightarrow (\mathrm{N},\mathrm{M})$$

$$n_3 : (\mathrm{M}, \mathrm{N}) \longrightarrow (\mathrm{MN}, \mathrm{N})$$

engendrent le groupe d'automorphismes de F_2 (voir [LS01]). Elles laissent invariant l'ensemble $\{\mathrm{tr}[\mathrm{M}, \mathrm{N}], \mathrm{tr}[\mathrm{M}^{-1}, \mathrm{N}]\}$ Les transformations correspondantes en coordonnées x laissent donc invariants les deux polynômes S et P. Elles sont données par

$$\begin{aligned}
\tilde{n}_1 &: (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \longrightarrow (x_5, x_2, x_3, x_4, x_1, x_6, x_7, x_8) \\
\tilde{n}_2 &: (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \longrightarrow (x_2, x_1, x_3, x_4, x_6, x_5, x_7, x_8) \\
\tilde{n}_3 &: (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \longrightarrow \\
&\quad (x_3, x_2, x_2x_3 - x_6x_1 + x_8, x_5, x_7, x_6, x_6x_7 - x_2x_5 + x_4, x_1)
\end{aligned}$$

$\tilde{n}_1, \tilde{n}_2$ et $\tilde{n}_3$ sont des exemples de « trace map » (voir [Fog02], ainsi que [Wol83]). Elles traduisent en termes de traces l'action du groupe modulaire PSL(2,$\mathbb{Z}$) sur la variété des représentations de F_2 dans SL(3,$\mathbb{C}$).

Proposition 3.9. *Soit* $\mathtt{w}$ *un élément de* F_2*. Il existe un polynôme* $Q_{\mathtt{w}} \in \mathbb{C}[x, T]$ *tel que*

$$\mathrm{tr}\rho(\mathtt{w}) = Q_{\mathtt{w}}\,(t_{\mathrm{M,N}}, \mathrm{tr}[\mathrm{M}, \mathrm{N}]) \ \textit{pour tout } \rho \in \mathrm{Hom}(F_2, \mathrm{SU}(2,1))$$

où M *et* N *désignent respectivement* $\rho(\mathtt{m})$ *et* $\rho(\mathtt{n})$*.*

La démonstration de cette proposition suit exactement la même méthode que celle que nous avons utilisée pour calculer s et p. Bien qu'une preuve simple se trouve dans [Fog02], nous résumons l'argument. Ce résultat a été prouvé par A. Sikora dans [Sik01] par des moyens différents.

Démonstration. Le théorème de Cayley-Hamilton implique que la k-ième puissance d'une matrice $A \in$ SL(3,$\mathbb{C}$) s'écrit

$$A^k = \lambda_k A + \mu_k \mathrm{Id} + \nu_k A^{-1}, \tag{3.9}$$

où λ_k, μ_k et ν_k sont des polynômes en $\mathrm{tr}A$ et $\mathrm{tr}A^{-1}$. (Ces polynômes généralisent les polynômes de Chebyshev obtenus dans le cas de SL(2,$\mathbb{C}$), voir [Gol, San95]). Une utilisation répétée de la relation (3.9) pour M et N montre que $W = \rho(\mathtt{w})$ peut se développer sous la forme

$$W = p_1 \cdot W_1 + \cdots p_n \cdot W_n$$

où les p_i sont des polynômes en $t_{\mathrm{M,N}}$ et les W_i sont des mots en M et N de la forme

$$\mathrm{M}^{\epsilon_1}\mathrm{N}^{\sigma_1} \cdots \mathrm{M}^{\epsilon_k}\mathrm{N}^{\sigma_k} \text{ avec } \epsilon_i = \pm 1 \text{ et } \sigma_j = \pm 1.$$

On utilise alors les deux relations (3.4) et (3.5) pour casser ces mots. On en déduit alors que W s'écrit sous la forme

$$W = \sum_{V \in \mathrm{M}} p_V(t_{\mathrm{M,N}})V,$$

où l'ensemble M est

$$\mathcal{M} = \{\mathrm{M}, \mathrm{N}, \mathrm{MN}, \mathrm{M}^{-1}\mathrm{N}, \mathrm{M}^{-1}, \mathrm{N}^{-1}, \mathrm{M}^{-1}\mathrm{N}^{-1}, \mathrm{MN}^{-1}, [\mathrm{M}, \mathrm{N}], [\mathrm{M}^{-1}, \mathrm{N}]\}$$

et les p_V sont des polynômes en les $t_{\mathrm{M},\mathrm{N}}$. Comme $\mathrm{tr}[\mathrm{M}, \mathrm{N}] + \mathrm{tr}[\mathrm{M}^{-1}, \mathrm{N}]$ est un polynôme en les $t_{\mathrm{M},\mathrm{N}}$ (proposition 3.6), on obtient le résultat. □

Le corollaire suivant est une conséquence simple de la proposition 3.9, et du fait qu'une représentation semi-simple est déterminée à conjugaison près par son caractère (voir [Lan93] p. 648–651).

Corollaire 3.10. *Soient ρ_1 et ρ_2 deux représentations semi-simples de F_2 dans SL(3,$\mathbb{C}$), définies par deux paires $(\mathrm{M}_1, \mathrm{N}_1)$ et $(\mathrm{M}_2, \mathrm{N}_2)$. Si les deux ensembles ordonnés*

$$\{t_{\mathrm{M}_1,\mathrm{N}_1}, \mathrm{tr}[\mathrm{M}_1, \mathrm{N}_1]\} \text{ et } \{t_{\mathrm{M}_2,\mathrm{N}_2}, \mathrm{tr}[\mathrm{M}_2, \mathrm{N}_2]\}$$

sont égaux, alors ρ_1 et ρ_2 sont conjuguées.

Remarque 3.11. Il existe donc deux classes de conjugaisons $[\rho_1]$ et $[\rho_2]$ de représentations de F_2 dans SL(3,$\mathbb{C}$), qui ne diffèrent « que par la trace du commutateur des générateurs » . Ces deux classes de conjugaison sont associées chacune à l'une des racines de Π (cf proposition 3.6) .

3.2.2 Un analogue du théorème de Fricke-Vogt dans SL(3,$\mathbb{C}$)

Commençons par la proposition suivante.

Proposition 3.12. *Le polynôme $\Pi \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_8]$ est irréductible sur $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Si Π était réductible, alors le discriminant $S^2 - 4P$ serait un carré. Dans le cas où

$$\mathrm{M} = \rho(\mathtt{m}) = \begin{bmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1/t \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \mathrm{N} = \rho(\mathtt{n}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

on obtient $S^2 - 4P = -(y+1)(y-3)^3$ avec $y = 1 + t + 1/t$, qui n'est pas carré. □

$\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ est l'ensembles des matrices carrées de taille 3 à coefficients complexes. Le groupe SL(3,$\mathbb{C}$) peut être vu comme la sous-variété algébrique de $\mathbb{C}^9 \sim \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ associée à l'équation $\det \mathrm{M} = 1$, avec

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C}).$$

Un polynôme sur SL(3,$\mathbb{C}$) est donc un élément de l'anneau des fonctions des cette variété, qui est le quotient

$$\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_9]/(\det \mathrm{M} = 1).$$

Les polynômes sur SL(3,$\mathbb{C}$)×SL(3,$\mathbb{C}$) sont définis de manière analogue.

Théorème 3.13. *Soit f un polynôme sur* SL(3,$\mathbb{C}$)×SL(3,$\mathbb{C}$) *invariant par conjugaison. Il existe un polynôme Q tel que pour toute paire* $(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \in$ SL(3,$\mathbb{C}$)×SL(3,$\mathbb{C}$)

$$f(\mathrm{M}, \mathrm{N}) = Q(t_{\mathrm{M},\mathrm{N}}, \mathrm{tr}[\mathrm{M}, \mathrm{N}]).$$

De plus, si f est fixé, Q ainsi déterminé est unique modulo l'idéal engendré par Π.

Démonstration. La proposition 3.9 montre que l'ensemble de traces $t_{\mathrm{M},\mathrm{N}}$ suffit à engendrer $\mathbb{C}[\mathrm{SL}(3,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})]^{\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})}$.
Par conséquent,$\mathbb{C}[\mathrm{SL}(3,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})]^{\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})}$ est un quotient de l'algèbre de type fini $\mathcal{R} = \mathbb{C}[x, T]\big/ (\Pi)$ par un idéal $\mathcal{I}$. Comme Π est irréductible, R est intègre, et donc, si $\mathcal{I}$ est différent de 0

$$\dim \left(\mathbb{C}[\mathrm{SL}(3,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})]^{\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})}\right) < \dim \mathcal{R}.$$

La variété algébrique V associée à Π est de dimension 8 et est irréductible. $R(V)$, l'ensemble des points réguliers de V est un ouvert de Zariski.
Soit Φ l'application

$$\begin{array}{ccc} SL(3,\mathbb{C}) \times SL(3,\mathbb{C}) & \longrightarrow & V \\ (A, B) & \longmapsto & (t_{A,B}, \mathrm{tr}[A, B]) \,. \end{array} \tag{3.10}$$

Le rang de Φ en un point (A, B) est au plus 8. L'ensemble $\mathcal{M}$ des points où Φ est de rang maximal est un ouvert de Zariski. Comme V est irréductible, $\mathcal{M} \bigcap R(V)$ est non-vide. Il suffit donc d'exhiber un point (A, B) où Φ est de rang 8 pour conclure que I est (0). Le point donné par

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

convient. Pour le vérifier, on peut écrire la matrice de l'application tangente à Φ au point (A, B) dans une base de l'espace tangent à SL(3,$\mathbb{C}$)×SL(3,$\mathbb{C}$) en (A, B), obtenue par transport d'une base de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$. On trouve alors un mineur d'ordre 8 non-nul. □

Remarque 3.14. Par une étude plus détaillée de l'application Φ on constate :

1. $d\Phi_{A,B}$ est de rang au plus 4 si la représentation est totalement réductible, i.e. si A et B sont simultanément diagonalisables.

2. $d\Phi_{A,B}$ est de rang au plus 7 si A et B ont une direction propre commune.

Ce phénomène est dû à l'apparition de relations supplémentaires entre les traces lorsque A et B ont un drapeau commun stable. Ces relations additionnelles sont détaillées dans [Wen94].

Remarque 3.15. Le théorème 3.13 montre que la variété V associée au polynôme Π est le quotient catégorique de SL(3,$\mathbb{C}$)×SL(3,$\mathbb{C}$) par SL(3,$\mathbb{C}$) agissant par conjugaison (voir [Dol03]).

3.3 Représentations de F_2 dans SU(2,1)

Rappelons que M si est un élément de U(2,1), $J\overline{\mathrm{M}}^T J = \mathrm{M}^{-1}$, et donc,

$$\mathrm{tr}(\mathrm{M}^{-1}) = \overline{\mathrm{trM}}. \tag{3.11}$$

Posons la

Définition 3.16. Pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{SU}(2,1)$, soit $\mathrm{M}^\star = \overline{\mathrm{M}^{-1}} = J\mathrm{M}^T J$

Remarque 3.17. i Usuellement, la notation M^* désigne la « transconjuguée » $\overline{M}^T$ de M. La notation $M^\star$, qui est assez proche, peut prêter à confusion, mais comme nous n'utiliserons jamais $M^* = \overline{M}^T$ dans ce travail, nous nous autorisons cet abus.

Rappelons que $\mathtt{m}$ et $\mathtt{n}$ désignent les générateurs de F_2. Nous désignerons par $z = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$ les coordonnées sur $\mathbb{C}^5$.

Définition 3.18. 1. Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des représentations ρ de F_2 dans SU(2,1) telles que $\rho(F_2)$ est Zariski dense.

2. Si $\rho \in \mathcal{V}$, posons

$$T_\rho = \big(\mathrm{tr}\,\rho(\mathtt{m}), \mathrm{tr}\,\rho(\mathtt{n}), \mathrm{tr}\,\rho(\mathtt{mn}), \mathrm{tr}\,\rho(\mathtt{m}^{-1}\mathtt{n})\big)$$

et

$$\tilde{T}_\rho = (T_\rho, \mathrm{tr}\,\rho([\mathtt{m}, \mathtt{n}]))$$

Rappelons qu'un sous-groupe de SU(2,1) est Zariski-dense si et seulement si il ne fixe pas un point de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} \cup \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, et ne stabilise aucune droite complexe. C'est en fait vrai dans les espaces symétriques de type non compact. I. Kim donne une preuve dans [Kim01]. Dans notre cas, ceci est équivalent à dire que le sous-groupe agit sur $\mathbb{C}P^2$ sans point fixe global.

En utilisant le fait que $\mathrm{trM}^{-1} = \overline{\mathrm{trM}}$ dans SU(2,1), et la proposition 3.9, qui exprime $\mathrm{tr}\rho(\mathtt{w})$ dans le cas où ρ est à valeurs dans SL(3,$\mathbb{C}$), on obtient le

Lemme 3.19. *Soit* $\mathtt{w}$ *un élément* F_2*. Il existe un polynôme* $Q_{\mathtt{w}} \in \mathbb{R}[z, \bar{z}]$ *tel que pour toute représentation* ρ *de* F_2 *dans* SU(2,1)*,*

$$\mathrm{tr}\ (\rho(\mathtt{w})) = Q_{\mathtt{w}}\left(\tilde{T}_\rho, \overline{\tilde{T}_\rho}\right)$$

Remarque 3.20. Comme dans le cas de SL(3,$\mathbb{C}$) les variables ne sont pas indépendantes. En effet, si A et B sont deux éléments de SU(2,1) alors $[A, B]$ est conjugué par A à $[A^{-1}, B]^{-1}$. La relation 3.11 implique alors que ces deux commutateurs sont conjugués :

$$\mathrm{tr}[A, B] = \overline{\mathrm{tr}[A^{-1}, B]}$$

Le produit et la somme des traces des ces deux commutateurs sont donc réels :

$$\mathrm{tr}[A, B] + \mathrm{tr}[A^{-1}, B] = 2\mathrm{Re}\ (\mathrm{tr}[A, B]) \text{ et } \mathrm{tr}[A, B]\mathrm{tr}[A^{-1}, B] = |\mathrm{tr}[A, B]|^2$$

On obtient donc à partir des deux polynômes S et P explicités dans la proposition 3.6 deux polynômes $\tilde{S}$ et $\tilde{P}$ éléments de $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_8]$ tels que pour toute représentation ρ,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\,\rho\,([\mathtt{m}, \mathtt{n})]) + \mathrm{tr}\,\rho\left([\mathtt{m}^{-1}, \mathtt{n}]\right) &= \tilde{S}\,(\mathrm{Re}\,T_\rho, \mathrm{Im}\,T_\rho) \\ \mathrm{tr}\,\rho\,([\mathtt{m}, \mathtt{m}])\,\mathrm{tr}\,\rho\left([\mathtt{m}^{-1}, \mathtt{n}]\right) &= \tilde{P}\,(\mathrm{Re}\,T_\rho, \mathrm{Im}\,T_\rho) \end{aligned}$$

On en déduit les deux relations suivantes, valables pour toute représentation ρ de F_2 dans SU(2,1) :

$$2\mathrm{Re}\ \mathrm{tr}\,\rho\,([\mathtt{m}, \mathtt{n}]) = \tilde{S}\,(\mathrm{Re}\,T_\rho, \mathrm{Im}\,T_\rho) \tag{3.12}$$

$$4\,(\mathrm{Im}\,\mathrm{tr}\,\rho([\mathtt{m}, \mathtt{n}]))^2 = \left(4\tilde{P} - \tilde{S}^2\right)(\mathrm{Re}\,T_\rho, \mathrm{Im}\,T_\rho) \tag{3.13}$$

Par suite, T_ρ détermine entièrement la partie réelle de $\mathrm{tr}\,\rho\,([\mathtt{m}, \mathtt{n}])$, et sa partie imaginaire au signe près.

Définition 3.21. Soit V' la sous-variété algébrique de $\mathbb{R}^9$ associée au polynôme $\Pi = x_9^2 - \left(4\tilde{P} - \tilde{S}^2\right)$. Soit $\mathbb{R}[V']$ l'anneau des polynômes sur V'.

En application de la remarque 3.20, on a une description un peu plus précise du polynôme $Q_{\mathtt{w}}$ ci-dessus : pour tout $\mathtt{w} \in F_2$, la trace de $\rho(\mathtt{w})$ s'écrit

$$Q_{\mathtt{w}}^{(1)}\,(\mathrm{Re}\,T_\rho, \mathrm{Im}\,T_\rho, \mathrm{Im}\,\mathrm{tr}\rho([\mathtt{m}, \mathtt{n}])) + iQ_{\mathtt{w}}^{(2)}\,(\mathrm{Re}\,T_\rho, \mathrm{Im}\,T_\rho, \mathrm{Im}\,\mathrm{tr}\rho([\mathtt{m}, \mathtt{n}]))$$

En d'autres termes, nous obtenons une application

$$\begin{aligned} F_2 &\longrightarrow \mathbb{R}[V'] \times \mathbb{R}[V'] \\ \mathtt{w} &\longmapsto \left(Q_{\mathtt{w}}^{(1)}, Q_{\mathtt{w}}^{(2)}\right) \end{aligned}$$

Si $\mathtt{w}$ et $\mathtt{w'}$ sont conjugués dans F_2, alors $Q_{\mathtt{w}}^{(i)} = Q_{\mathtt{w'}}^{(i)}$ pour $i = 1, 2$. La réciproque est fausse : H. Sandler a montré dans [San98] l'existence d'éléments non-conjugués de F_2 ayant la même trace sous toutes les représentations dans SU(2,1).

Notons que $\mathbb{R}[V']$ est un anneau intègre :

Lemme 3.22. *Le polynôme* Π *est irréductible dans* $\mathbb{R}[x_1 \dots x_9]$.

Démonstration. Soient A et B les deux éléments de SU(2,1) :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

La trace de $[A, B]$ est réelle. Par suite, d'après la relation 3.13, $F = 4\tilde{P} - \tilde{S}^2$ s'annule au point $\tilde{t}_{A,B}$. Cependant, on vérifie qu'en ce point dF est non-nulle. En conséquence, F n'est pas un carré, et $4y_5^2 - F$ est irréductible. □

D'après la proposition 3.9, il suffit de connaître les 9 traces $t_{\mathrm{M,N}}$ et $\mathrm{tr}\,[\mathrm{M}, \mathrm{N}]$ pour connaître une représentation dans SU(2,1) modulo conjugaison dans SL(3,$\mathbb{C}$). En utilisant le fait que $\mathrm{tr}\,\mathrm{M}^{-1} = \overline{\mathrm{trM}}$, on peut réduire ces neuf traces aux 5 traces intervenant dans $\tilde{T}_\rho$. Finalement, le lemme 3.2, vu dans l'introduction du chapitre, permet d'obtenir la proposition annoncée dans l'introduction :

Proposition 3.23. *Soient* ρ_1 *et* ρ_2 *deux représentations* F_2 *dans* SU(2,1)*, telles que* $\rho_1(F_2)$ *et* $\rho_2(F_2)$ *sont Zariski-denses. Si*

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\,\rho_1(\mathtt{m}) &= \mathrm{tr}\,\rho_2(\mathtt{m}) & \mathrm{tr}\,\rho_1(\mathtt{n}) &= \mathrm{tr}\,\rho_2(\mathtt{n}) \\ \mathrm{tr}\,\rho_1(\mathtt{mn}) &= \mathrm{tr}\,\rho_2(\mathtt{mn}) & \mathrm{tr}\,\rho_1(\mathtt{m}^{-1}\mathtt{n}) &= \mathrm{tr}\,\rho_2(\mathtt{m}^{-1}\mathtt{n}) \\ \mathrm{tr}\,\rho_1([\mathtt{m},\mathtt{n}]) &= \mathrm{tr}\,\rho_2([\mathtt{m},\mathtt{n}]) \end{aligned}$$

alors ρ_1 *et* ρ_2 *sont conjuguées dans* SU(2,1).

Remarque 3.24. L'application $\rho \longmapsto (\mathrm{Re}\,T_\rho, \mathrm{Im}\,T_\rho, \mathrm{Im}\,\mathrm{tr}\rho([\mathtt{m},\mathtt{n}]))$, à valeurs dans V', n'est pas surjective. Fixons par exemple trois classes de conjugaisons d'éléments elliptiques C_1, C_2 et C_3. Dans [Pau05], Julien Paupert donne des conditions sur les C_i garantissant l'existence de $A \in C_1$ et $B \in C_2$ tels que $AB \in C_3$. Par ailleurs, Falbel et Wentworth ont montré dans [FW] que si les C_i sont des classes de conjugaison loxodromiques, il existe toujours $A \in C_1$ et $B \in C_2$ tels que $AB \in C_3$. Nous retrouverons ce résultat au chapitre 5 par une méthode différente.

Remarque 3.25. Supposons la représentation ρ décomposable : il existe trois involutions I_1, I_2 et I_3 telles que $\rho(\mathtt{m}) = I_1 \circ I_2$ et $\rho(\mathtt{n}) = I_3 \circ I_2$. Le groupe engendré par $\rho(\mathtt{m})$ et $\rho(\mathtt{n})$ est d'indice deux dans le groupe triangulaire engendré par I_1, I_2 et I_3. Les traces impliquées dans la proposition 3.23 sont donc $\mathrm{tr}\,(I_1 \circ I_2)$, $\mathrm{tr}\,(I_3 \circ I_2)$, $\mathrm{tr}\,(I_1 \circ I_2 \circ I_3 \circ I_2)$, $\mathrm{tr}\,(I_1 \circ I_3)$ et $\mathrm{tr}\left((I_1 \circ I_2 \circ I_3)^2\right)$. Cette famille de traces joue un rôle déterminant dans l'étude des groupes triangulaires, et la plupart des résultats de discrétude de groupes triangulaires connus proviennent d'une analyse de cette famille de mots. Dans [Sch02] (2002) R. Schwartz donne un panorama de ces groupes. Nous renvoyons également au paragraphe 3.5.

3.4 Deux involutions sur Hom(F_2,PU(2,1))/PU(2,1)

Définition 3.26. Soit ρ une représentation de F_2 dans SU(2,1) donnée par

$$\rho(\mathtt{m}) = A \text{ et } \rho(\mathtt{n}) = B.$$

Définissons alors les deux représentations
- $\rho^\star$ donnée par $\rho^\star(\mathtt{m}) = A^\star$ et $\rho^\star(\mathtt{n}) = B^\star$.
- ρ' donnée par $\rho'(\mathtt{m}) = A^{-1}$ et $\rho'(\mathtt{n}) = B^{-1}$.

(cf la remarque 3.17 page 68).
Les deux applications $\rho \to \rho^\star$ et $\rho \to \rho'$ sont des involutions sur $\mathcal{V}$. Elles induisent des involutions $I^\star$ et I' sur $\mathcal{V}$/PU(2,1), données par

$$I^\star([\rho]) = [\rho^\star] \text{ et } I'([\rho]) = [\rho']$$

Proposition 3.27. *Soit ρ un point de $\mathcal{V}$. Posons $\tilde{T}_\rho = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$.*
Alors :

$$\tilde{T}_{\rho^\star} = (z_1, z_2, z_3, z_4, \bar{z}_5)$$

et

$$\tilde{T}_{\rho'} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4, z_5)$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la définition de SU(2,1). □

$T_\rho = T_{\rho^\star}$ et $\mathrm{tr}\rho^\star([\mathtt{m},\mathtt{n}]) = \overline{\mathrm{tr}\rho([\mathtt{m},\mathtt{n}])}$. Ainsi, ρ et $\rho^\star$ correspondent aux deux traces possibles pour le commutateur une fois fixées les traces de $\rho(\mathtt{m})$, $\rho(\mathtt{n})$, $\rho(\mathtt{mn})$ et $\rho(\mathtt{m}^{-1}\mathtt{n})$.

Remarque 3.28. Si $\rho(F_2)$ est Zariski dense, la proposition 3.23 montre que $\tilde{T}_\rho = \tilde{T}_{\rho^\star}$ si et seulement si ρ et $\rho^\star$ sont conjuguées, c'est à dire si $[\rho]$ est fixée par l'involution $I^\star$. Nous verrons dans le chapitre 5 que si $\rho(\mathtt{m})$ et $\rho(\mathtt{n})$ sont loxodromiques, ceci est équivalent au fait que la paire $(\rho(\mathtt{m}), \rho(\mathtt{n}))$ est $\mathbb{R}$-décomposable, c'est à dire qu'il existe trois réflexions lagrangiennes telles que

$$\rho(\mathtt{m}) = I_1 \circ I_2 \text{ et } \rho(\mathtt{n}) = I_3 \circ I_2$$

(Voir la définition 5.9 et la proposition 5.13).

Remarque 3.29. En conservant toujours l'hypothèse que $\rho(F_2)$ est Zariski dense, la proposition 3.23 montre que $\tilde{T}_\rho = \tilde{T}_{\rho'}$ si et seulement si ρ et ρ' sont conjuguées, c'est à dire si $[\rho]$ est fixe par I'. Nous verrons que si ρ est $\mathbb{C}$-décomposable, c'est à dire s'il existe trois réflexions d'ordre deux telles que

$$\rho(\mathtt{m}) = I_1 \circ I_2 \text{ et } \rho(\mathtt{n}) = I_3 \circ I_2$$

alors $[\rho]$ est fixe par I'. (Voir la définition 5.9 et la proposition 5.13).

En général, ρ et $\rho^\star$ sont deux représentations non-conjuguées de F_2, qui correspondent aux deux racines de l'équation $4x_9^2 - F = 0$. Dans le cas où $\mathtt{m}$ et $\mathtt{n}$ ont des images loxodromiques, Parker et Platis ont remarqué dans [PP] qu'il existait des représentations non-conjuguées ρ_1 et ρ_2 telles que $\operatorname{tr}\rho_1(\mathtt{m}) = \operatorname{tr}\rho_2(\mathtt{m})$, $\operatorname{tr}\rho_1(\mathtt{n}) = \operatorname{tr}\rho_2(\mathtt{n})$, $\operatorname{tr}\rho_1(\mathtt{mn}) = \operatorname{tr}\rho_2(\mathtt{mn})$ et $\operatorname{tr}\rho_1(\mathtt{m}^{-1}\mathtt{n}) = \operatorname{tr}\rho_2(\mathtt{m}^{-1}\mathtt{n})$.

3.5 Trace et groupes triangulaires

Commençons par le définition suivante :

Définition 3.30. Un *groupe triangulaire complexe* est un groupe engendré par trois réflexions complexes d'ordre deux.

Nous appellerons *miroir* d'une réflexion complexe la droite complexe de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ qu'elle fixe. Suivant la terminologie de Pratoussevitch, nous dirons qu'un groupe triangulaire complexe $\langle I_1, I_2, I_3\rangle$ est *ultra-parallèle* si les miroirs de I_1, I_2 et I_3 sont deux à deux disjoints. Si les trois miroirs sont deux à deux asymptotiques, le groupe triangulaire est dit *idéal*. Nous qualifierons d'*elliptique* un groupe triangulaire dont les miroirs sont deux à deux sécants (c'est à dire tel que les trois isométries I_1I_2, I_2I_3 et I_1I_3 sont elliptiques).

Dans [Pra05], Pratoussevitch a donné des critères pour déterminer quand deux groupes triangulaires ultraparallèles ou elliptique sont conjugués. Ces critères généralisent la classification des groupes triangulaires idéaux par l'invariant de Cartan (voir [GP92] ou [San95]). Nous allons voir dans ce paragraphe que ces critères découlent de la proposition 3.23 et sont en fait valables sans hypothèses sur la position relative des trois miroirs.

Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des triplets de réflexions complexes. Via la dualité entre les droites complexes de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ et leurs vecteurs polaires, la donnée d'un élément de $\mathcal{G}$ est équivalente à celle d'un triplet de vecteurs (n_1, n_2, n_3) tels que

$$\langle n_k, n_k\rangle = 1. \tag{3.14}$$

Notons que la réflexion I_k est donnée alors par

$$I_k(Z) = -Z + 2\langle Z, n_k\rangle n_k.$$

Nous allons utiliser les notations suivantes :

- $z_k = \langle n_{k+1}, n_{k+2}\rangle$, les indices étant pris modulo 3.
- $r_k = |z_k|$
- $\alpha = \arg\left(\prod_{k=1}^3 \langle n_{k+1}, n_{k+2}\right)$

α est appelé *l'invariant angulaire* du triplet (I_1, I_2, I_3). Si l'on pose $\theta_k = \arg(z_k)$, $\alpha = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \quad [2\pi]$. Les quatre quantités r_1, r_2, r_3 et α sont indépendantes des relèvements vérifiant (3.14) choisis.

Définissons alors sur l'ensemble des triplets de réflexions complexes d'ordre deux l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \times S^1 \\ & & (I_1, I_2, I_3) & \longrightarrow & (r_1, r_2, r_3, \alpha) \end{array}$$

Tous les points de $\mathbb{R}^3 \times S^1$ ne sont pas atteints par φ. Plus précisément, le lemme suivant est dû à Anna Pratoussevitch dans [Pra05]

Lemme 3.31. *L'image de φ est l'ensemble*

$$\left\{(r_1, r_2, r_3, \alpha)\,, 2r_1r_2r_3\cos\alpha < r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - 1\right\}.$$

Démonstration. L'existence d'un triplet de réflexions complexes satisfaisant $\varphi(I_1, I_2, I_3) = (r_1, r_2, r_3, \alpha)$ est équivalente à celle d'un triplet de vecteurs (n_1, n_2, n_3) satisfaisant (3.14). Ces valeurs sont réalisées par un triplet de vecteurs si et seulement si la matrice de Gram associée à ces trois vecteurs, $Q = (\langle n_i, n_j\rangle)_{(i,j)}$ est de signature $(2, 1)$. Q est de trace 3. Elle a donc une seule valeur propre négative si et seulement si son déterminant est négatif. On vérifie alors que

$$\det Q = 2r_1r_2r_3\cos\alpha - \left(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2\right) + 1.$$

□

Il existe donc un groupe triangulaire pour les paramètres (r_1, r_2, r_3, α) si et seulement ces paramètres satisfont la relation

$$2r_1r_2r_3\cos\alpha < r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - 1. \tag{3.15}$$

Vu le lemme 1.42 les paramètres r_k s'interprètent de la manière suivante :

- $r_k > 1$ si et seulement si les droites complexes C_{k+1} et C_{k+2} sont disjointes i.e. si et seulement si $I_{k+1}I_{k+2}$ est loxodromique.
- $r_k = 1$ si et seulement si C_{k+1} et C_{k+2} sont asymptotiques ou confondues, i.e. si et seulement si $I_{k+1}I_{k+2}$ est parabolique ou l'identité.
- $r_k < 1$ si et seulement si C_{k+1} et C_{k+2} se coupent en un point de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, i.e. si et seulement si $I_{k+1}I_{k+2}$ est elliptique régulier.

Un groupe triangulaire est donc idéal (resp. ultra-parallèle, resp. elliptique) si et seulement si $r_k = 1$ (resp. $r_k > 1$, resp. $r_k < 1$) pour $k = 1, 2, 3$. Dans le cas des groupes triangulaires idéaux, où les trois miroirs sont deux à deux asymptotiques (i.e. $r_1 = r_2 = r_3 = 1$), α est relié à l'invariant de Cartan $\mathbb{A}$ du triplet de points de $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ formé par les points d'intersections $\{q_{k+2}\} = \overline{C_k} \cap \overline{C_{k+1}}$ par

$$\mathbb{A} = \frac{\alpha - \pi}{2}[2\pi].$$

$\mathbb{A}$ classifie les groupe triangulaires idéaux à conjugaison près dans PU(2,1), il en est de même pour α (voir [GP92, San95]).

Proposition 3.32. *Soient (I_1, I_2, I_3) et (I'_1, I'_2, I'_3) deux triplets de réflexions complexes, et G et G' les groupes triangulaires associés. Supposons que G et G' soient Zariski denses. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

1. $\varphi(I_1, I_2, I_3) = \varphi(I'_1, I'_2, I'_3)$
2. *Il existe une isométrie holomorphe $g \in \mathrm{PU}(2,1)$ telle que $I'_k = gI_kg^{-1}$, $k = 1, 2, 3$.*

Démonstration.
- 2. $\Rightarrow$ 1. est clair car les quantités r_1, r_2, r_3 et α sont des invariants de conjugaisons.
- Pour l'autre implication nous utilisons le calcul des traces dans les groupes triangulaires complexes effectué dans [San95] et [Pra05]. Il est basé sur les deux remarques suivantes :
  - Soit c vecteur de $\mathbb{C}^{2,1}$ polaire à une droite complexe C de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, vérifiant $\langle c, c\rangle = 1$. La réflexion complexe par rapport à C s'écrit $-\mathrm{Id} + 2cc^*$, où c^* désigne la forme linéaire duale de c.
  - Si c_1, c_2, $\ldots, c_n \in \mathbb{C}^{2,1}$,

$$\mathrm{tr}\left((c_1c_1^*)(c_2c_2^*)\cdots(c_nc_n^*)\right) = \langle c_2, c_1\rangle\langle c_3, c_2\rangle\cdots\langle c_1, c_n\rangle.$$

Notons $A = I_1I_2$ et $B = I_3I_2$. Alors :

$$\mathrm{tr}A = 4r_3^2 - 1,\ \mathrm{tr}B = 4r_1^2 - 1 \text{ et } \mathrm{tr}A^{-1}B = \mathrm{tr}I_1I_3 = 4r_2^2 - 1$$

$$\mathrm{tr}AB = \mathrm{tr}I_1I_2I_3I_2 = 16r_1r_3\left(r_1r_3 - r_1\cos\alpha\right) + 4r_2^2 - 1$$

$$\mathrm{tr}I_1I_2I_3 = 8r_1r_2r_3e^{i\alpha} - 4\left(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2\right) + 3.$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, si $\mathrm{M} \in \mathrm{SU}(2,1)$

$$\mathrm{M}^2 = \mathrm{tr}(\mathrm{M})\cdot\mathrm{M} - \mathrm{tr}\mathrm{M}^{-1}\cdot\mathrm{Id} + \mathrm{M}^{-1}.$$

Par suite,

$$\mathrm{tr}[A, B] = \mathrm{tr}\left(I_1I_2I_3\right)^2 = \left(\mathrm{tr}I_1I_2I_3\right)^2 - 2\overline{\mathrm{tr}I_1I_2I_3}.$$

Les quantités r_1, r_2, r_3 et α déterminent donc les traces de A, B, AB, $A^{-1}B$ et $[A, B]$. La proposition 3.23 permet alors de conclure.

□

Remarque 3.33. Dans [San95], Sandler a démontré une formule combinatoire permettant un calcul récursif des traces dans un groupe triangulaire idéal. Dans [Pra05], Pratoussevitch a généralisé cette formule au cas des groupes engendrés par trois réflexions complexes quelconques.

Remarque 3.34. Reformulons les invariants r_1, r_2, r_3 et α en termes de traces, en posant $A = I_1 I_2$ et $B = I_3 I_2$:

$$r_1^2 = \frac{1 + \operatorname{tr} B}{4},\ r_2^2 = \frac{1 + \operatorname{tr} A^{-1}B}{4} \text{ et } r_3^2 = \frac{1 + \operatorname{tr} A}{4}.$$

Il s'en suit que

$$\operatorname{tr} AB = (1 + \operatorname{tr} A)\,(1 + \operatorname{tr} B) - 16 r_1 r_2 r_3 \cos\alpha + \operatorname{tr} A^{-1}B.$$

Et finalement,

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\frac{(1 + \operatorname{tr} A)(1 + \operatorname{tr} B) + \operatorname{tr} A^{-1}B - \operatorname{tr} AB}{\sqrt{(1 + \operatorname{tr} A)\,(1 + \operatorname{tr} B)\,(1 + \operatorname{tr} A^{-1}B)}}.$$

En remplaçant dans 3.15 r_1^2, r_2^2, r_3^2 et $r_1 r_2 r_3 \cos\alpha$, par les valeurs obtenues ci-dessus, on peut récrire la condition d'existence d'un groupe triangulaire uniquement en termes de traces :

$$\operatorname{tr} A \operatorname{tr} B - \big(\operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B + \operatorname{tr} AB + \operatorname{tr} A^{-1}B\big) + 3 < 0. \tag{3.16}$$

Chapitre 4

Birapport complexe et tétraèdres idéaux

Les birapports sont des invariants géométriques classiques utilisés depuis longtemps en géométrie projective. Ainsi, les transformations de Möbius sont caractérisées par le fait qu'elles préservent le birapport.

L'utilisation du birapport est donc naturelle dans le cadre du modèle projectif de la géométrie hyperbolique. Le birapport permet par exemple d'exprimer la distance hyperbolique et classifie à isométrie près les tétraèdres idéaux de $\mathbf{H}^3_{\mathbb{R}}$. A ce titre, il joue un rôle important dans l'étude des triangulations des variétés hyperboliques de dimension 3 (voir [Thu]).

Durant les vingt dernières années, la notion de birapport a été généralisée à des classes d'espaces plus larges.

Otal a ainsi élargi la notion de birapport aux variétés riemanniennes simplement connexes de courbure négative dans [Ota92]. Il a défini la notion de birapport symplectique de quatre points dans $\overline{M}$, où M est une variété riemannienne de courbure négative. Le caractère symplectique de ce birapport vient de ce qu'il est obtenu d'abord dans le cas de quatre points au bord d'un disque muni d'une métrique à courbure négative via la structure symplectique sur l'espace des géodésiques d'un tel disque.

Dans [Bou96], Bourdon a étudié le birapport au bord des espaces CAT(-1), qui constituent une généralisation des variétés à courbure négative (voir par exemple [BH99]). De même que dans le cas particulier de l'espace hyperbolique, le birapport au bord d'un espace CAT(-1) détermine la métrique de l'espace (voir le théorème 0.1 de [Bou96]).

Ce chapitre est consacré à l'étude du birapport complexe, défini sur le groupe de Heisenberg par Korányi et Reimann dans [KR87], et qui est une version hermitienne du birapport projectif. Le birapport étudié par Bourdon et Otal coïncide dans le cas de l'espace hyperbolique avec le logarithme du module du birapport projectif (voir par exemple [Ota92], ou [Kim01] qui traite le cas des espaces symétriques de rang 1, et fait le lien avec la version hermitienne). Nous allons voir dans ce chapitre et dans le suivant que

le caractère complexe du birapport joue un rôle important.

Comme dans le cas de $\mathbf{H}^3_{\mathbb{R}}$, nous utiliserons le birapport pour classifier les tétraèdres idéaux. Nous allons voir que contrairement au cas de $\mathbf{H}^3_{\mathbb{R}}$, un seul ne suffit pas. La classification des tétraèdres idéaux de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ sous l'action de $\widehat{\mathrm{PU}(2,1)}$ a été obtenue par Falbel dans [Falb].

Rappelons que les triangles idéaux sont classifiés à isométrie holomorphe près par l'invariant de Cartan, que nous avons décrit au chapitre 1.

4.1 Le birapport complexe

Par abus de notation, nous appellerons *tétraèdre idéal* tout quadruplet ordonné de points de $\partial\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$. Usuellement, ce terme désigne un simplexe, qui donc, possède des arrêtes et des faces. Nous n'aurons pas besoin de considérer faces et arêtes, c'est pourquoi nous nous autorisons cette approximation.

Définition 4.1. Soit (x_1, x_2, x_3, x_4) un tétraèdre idéal de $\partial\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$. Soient X_1, X_2, X_3, X_4 des relèvements des x_i à $\mathbb{C}^{n,1}$. La quantité

$$\mathbf{X}\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \frac{\langle X_3, X_1\rangle\langle X_4, X_2\rangle}{\langle X_4, X_1\rangle\langle X_3, X_2\rangle} \in \mathbb{C}^\star \tag{4.1}$$

est indépendante du choix des relèvements, et s'appelle le *birapport complexe* du tétraèdre idéal (x_1, x_2, x_3, x_4).

$\mathbf{X}$ est invariant sous l'action de $PU(n,1)$, et est changé en $\bar{\mathbf{X}}$ sous l'action des isométries antiholomorphes. On vérifie simplement que le birapport complexe satisfait aux relations

$$\mathbf{X}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \mathbf{X}(p_2, p_1, p_3, p_4)^{-1} = \mathbf{X}(p_1, p_2, p_4, p_3)^{-1} = \overline{\mathbf{X}(p_3, p_4, p_1, p_2)}. \tag{4.2}$$

Remarque 4.2. Par un calcul direct, on vérifie la relation suivante.

$$\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\langle X_1, X_2\rangle\langle X_2, X_3\rangle\langle X_3, X_1\rangle}{\langle X_1, X_2\rangle\langle X_2, X_4\rangle\langle X_4, X_1\rangle} \cdot \frac{|\langle X_2, X_4\rangle|^2}{|\langle X_2, X_3\rangle|^2}.$$

Le birapport complexe est donc relié à l'invariant de Cartan par

$$\begin{aligned}\arg\left(\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, x_4)\right) &= \arg\left(\langle X_1, X_2\rangle\langle X_2, X_3\rangle\langle X_3, X_1\rangle\right) - \arg\left(\langle X_1, X_2\rangle\langle X_2, X_4\rangle\langle X_4, X_1\rangle\right)\\ &\equiv \mathbb{A}(x_1, x_2, x_4) - \mathbb{A}(x_1, x_2, x_3).\end{aligned}$$

On pourrait exprimer d'une manière analogue $\arg\left(\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, x_4)\right)$ grâce à $\mathbb{A}(x_1, x_3, x_4)$ et $\mathbb{A}(x_2, x_3, x_4)$. Les termes extrémaux de la relation (4.2) montrent que le produit

$$\mathbf{X}(p_1, p_2, p_3, p_4)\mathbf{X}(p_3, p_4, p_1, p_2)$$

est réel et positif. Par conséquent, l'argument de ce produit est nul. En utilisant, la relation (4.2), on retrouve ainsi la relation de cocyle de l'invariant de Cartan (relation (1.12)).

Le lemme suivant donne une interprétation géométrique de $\mathbf{X}$ (voir [Gol99], chapitre 7).

Proposition 4.3. *Soit C la droite complexe contenant x_1 et x_2, et Π la projection orthogonale sur C. Soit $z_{12} : C \longrightarrow \mathbb{C}$ une coordonnée complexe telle que $z_{12}(C) \subset \mathbb{C}$ est le demi-plan $\operatorname{Re} z > 0$, et satisfaisant $z_{12}(x_1) = \infty$ et $z_{12}(x_2) = 0$. Alors*

$$\boldsymbol{X}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{z_{12}\left(\Pi(x_4)\right)}{z_{12}\left(\Pi(x_3)\right)}$$

Voir la figure 4.1.

Démonstration. Soit c un vecteur polaire à C de norme unité. Soient X_1 et X_2 des relèvements de x_1 et x_2. Utilisons la base (X_1, X_2, c) pour décrire les relèvement de x_3 et x_4 à $\mathbb{C}^{2,1}$. Il existe des scalaires λ_i et μ_i tels que

$$X_3 = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 c \text{ et } X_4 = \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 c.$$

La projection orthogonale sur C est l'homographie associée à

$$Z \longrightarrow Z - \langle Z, c\rangle c$$

L'image de z_{12} étant le demi-plan droit, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que l'application z_{12} s'écrive

$$z_{12} : \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma c \longrightarrow e^{i\theta}\frac{\alpha}{\beta}.$$

En utilisant le fait que $\langle X_i, X_i\rangle = \langle X_i, c\rangle = 0$ pour $i = 1, 2$, on obtient

$$\Pi(x_3) = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 = \frac{\langle X_3, X_2\rangle}{\langle X_1, X_2\rangle} X_1 + \frac{\langle X_3, X_1\rangle}{\langle X_2, X_1\rangle} X_2$$

et

$$\Pi(x_4) = \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 = \frac{\langle X_4, X_2\rangle}{\langle X_1, X_2\rangle} X_1 + \frac{\langle X_4, X_1\rangle}{\langle X_2, X_1\rangle} X_2.$$

Le résultat en découle. □

On en déduit directement le

Corollaire 4.4. *Soient x_1, x_2, x_3 et x_4 quatre points de $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ tels que $\boldsymbol{X}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ soit réel et négatif. Alors les quatre points sont situés dans une droite complexe, et x_1 et x_2 séparent x_3 et x_4.*

Remarque 4.5. La proposition 4.3 a pour conséquence que pour x_1 et x_2 fixés, l'application

$$\begin{array}{rcl} \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} \times \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x_3, x_4) & \longmapsto & \mathbf{X}\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) \end{array}$$

est surjective.

4.2 Classification des tétraèdres idéaux

Définition 4.6. (Voir [Fala]). Soient p_1, p_2, p_3 et p_4 quatre points distincts de $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Définissons

$$[[p_1, p_2, p_3, p_4]] = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(p_1, p_2, p_3, p_4) \\ \mathbf{X}(p_1, p_4, p_2, p_3) \\ \mathbf{X}(p_1, p_3, p_4, p_2) \end{bmatrix}.$$

Exprimons maintenant $[[p_1, p_2, p_3, p_4]]$ dans une situation normalisée.

Exemple 4.7. Quatre points distincts de $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ sont images par un élément de PU(2,1) de quatre points p_1, p_2,p_3 p_4 admettant, dans le modèle de Siegel, les relèvements suivants :

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_3, = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix},$$

où z_1, z_2, w_2, w_3 satisfont aux relations traduisant la nullité de $\langle \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_k \rangle$:

$$z_1 + \bar{z}_1 + |z_2|^2 = 0 \text{ et } w_3 + \bar{w}_3 + |w_2|^2 = 0.$$

Dans ce cas

$$\omega_a = \mathbf{X}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{1 + w_2\bar{z}_2 + w_3\bar{z}_1}{w_3\bar{z}_1} \tag{4.3}$$

$$\omega_b = \mathbf{X}(p_1, p_4, p_2, p_3) = \frac{1}{1 + z_2\bar{w}_2 + z_1\bar{w}_3} \tag{4.4}$$

$$\omega_c = \mathbf{X}(p_1, p_3, p_4, p_2) = w_3 z_1 \tag{4.5}$$

En faisant le produit de ces trois nombres, on vérifie que

$$|\omega_a\omega_b\omega_c| = 1. \tag{4.6}$$

Si z_2 est non-nul, c'est à dire si p_2 n'appartient pas à la droite complexe engendrée par p_1 et p_3, on peut préciser la normalisation, et écrire

$$z_1 = -1 + it, z_2 = \sqrt{2}, w_2 = \sqrt{2}w \text{ et } w_3 = |w|^2(-1 + is)$$

avec $s, t \in \mathbb{R}$ et $w \in \mathbb{C}$. Tout tétraèdre idéal est alors équivalent à un unique tétraèdre tel que celui-ci sous l'action de SU(2,1).

L'exemple 4.8 ci-dessous traite du cas ou trois des quatre points sont situés sur une même droite complexe.

Les trois birapports deviennent

$$\begin{aligned} \omega_a &= \frac{1 + 2w + |w|^2(-1 + is)(1 + it)}{|w|^2(-1 + is)(1 + it)} \\ \omega_b &= \frac{1}{|w|^2(-1 + it)(1 + is) + 2\bar{w} + 1} \\ \omega_c &= -|w|^2(-1 + is)(-1 + it) \end{aligned}$$

Dans beaucoup de situations, nous préférerons cependant avoir une normalisation moins précise, et des relations plus légères.

Exemple 4.8. Si trois des quatre points sont dans une même droite complexe – par exemple p_1, p_2 et p_3 – on peut supposer que

$$p_1 = \infty,\ p_2 = [0,0],\ p_3 = [0,1] \text{ et } p_4 = [x,t], \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } x \geqslant 0$$

Un calcul analogue montre que

$$\omega_a = t + ix^2,\ \omega_b = 1 - \frac{1}{\bar{\omega}_a} \text{ et } \omega_c = \frac{1}{1-\omega_a}. \tag{4.7}$$

On constate alors que si $x = 0$, c'est à dire si les quatre points sont sur une même droite complexe les trois birapports sont réels, et valent

$$\omega_a = t,\ \omega_b = 1\frac{1}{t},\ \omega_c = \frac{1}{1-t}.$$

L'un des trois birapports au moins est donc négatif
A l'opposé, si les quatre points sont au bord d'un $\mathbb{R}$-plan, on peut supposer que

$$p_1 = \infty,\ p_2 = [0,0],\ p_3 = [1,0] \text{ et } p_4 = [x,t] \text{ avec } x \in \mathbb{R}$$

Par suite,

$$\omega_a = x^2,\ \omega_b = 1\frac{(1-x)^2}{x^2},\ \omega_c = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Dans ce cas, les trois birapports sont réels et positifs.

Remarque 4.9. En utilisant la normalisation précisée (coordonnées w, s, t), on vérifie que

$$\omega_a\bar{\omega}_b\omega_c = \frac{1-it}{1+it} \text{ et } \omega_a\bar{\omega}_b\bar{\omega}_c = \frac{1+is}{1-is}. \tag{4.8}$$

On peut alors exprimer s et t en termes de ω_a, ω_b et ω_c. Il est ensuite possible d'exprimer séparément w et $|w|^2$ mais il apparaît une relation de compatibilité :

$$2\mathrm{Re}\,(\omega_c) = \frac{1}{|\omega_b|^2}\left(\left|1 - \frac{1}{\omega_a}\right|^2 - 1\right) + \left|1 - \frac{1}{\omega_b}\right|^2. \tag{4.9}$$

Cette relation est équivalente à la nullité du déterminant de la matrice de Gram $(\langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j\rangle)$ $(1 \leqslant i, j \leqslant 4)$ (Voir [Gol99]). Elle a été redécouverte via la compatibilité ci-dessus par Falbel (voir [Fala]). En utilisant la relation (4.6), on pourrait obtenir des relations similaires exprimant ω_a ou ω_b en termes des deux autres birapports. Par exemple :

$$2\mathrm{Re}\ (\omega_a) = \frac{1}{|\omega_c|^2}\left(\left|1 - \frac{1}{\omega_b}\right|^2 - 1\right) + \left|1 - \frac{1}{\omega_c}\right|^2. \tag{4.10}$$

Les deux propositions 4.10 et 4.12 sont dues à Falbel (voir [Fala]).

Proposition 4.10. *Soient ω_a, ω_b et ω_c des nombres complexes. Il existe $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in (\partial \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}})^4$ tel que*

$$[[p_1, p_2, p_3, p_4]] = \begin{bmatrix} \omega_a \\ \omega_b \\ \omega_c \end{bmatrix}$$

si et seulement si ω_a, ω_b et ω_c vérifient les relations (4.6) et (4.10) ci-dessus.

Remarque 4.11. Si ω_b et ω_c sont deux nombres complexes fixés, il existe ω_a tel que ω_a, ω_b et ω_c vérifient (4.6) et (4.10) si et seulement si les valeurs de $\mathrm{Re}\,\omega_a$ et $|\omega_a|^2$ données par ces deux relations sont compatibles, c'est à dire si

$$\text{« } \mathrm{Re}\,(\omega_a)^2 \leqslant |\omega_a|^2 \text{ ».}$$

Cette condition se traduit après un calcul par la double inégalité suivante :

$$\left(|\omega_c| - \frac{1}{|\omega_b|}\right)^2 \leqslant 2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\bar{\omega}_b} + \omega_c\right) - 1 \leqslant \left(|\omega_c| + \frac{1}{|\omega_b|}\right)^2. \tag{4.11}$$

La preuve donnée par Falbel de la proposition suivante utilise la normalisation « w, s, t »ci-dessus. Nous donnons ici une preuve indépendante de la normalisation.

Proposition 4.12 (Falbel)**.** *Soient (p_1, p_2, p_3, p_4) et (q_1, q_2, q_3, q_4) deux tétraèdres idéaux. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe une isométrie $f \in \mathrm{PU}(2,1)$ telle que $f(p_i) = q_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$*
2. $[[p_1, p_2, p_3, p_4]] = [[q_1, q_2, q_3, q_4]]$.

Démonstration. 1. implique *2.* car le birapport complexe est préservé par PU(2,1).
Prouvons donc que *2.* implique *1.*.
Soit $\tau = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ un tétraèdre idéal. Par un calcul direct utilisant la relation 4.2, on vérifie que

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(p_4, p_1, p_2, p_3)\mathbf{X}(p_4, p_3, p_1, p_2)\mathbf{X}(p_4, p_2, p_3, p_1) &= (\bar{\omega}_a \omega_b \bar{\omega}_c)^{-1} \\ &= \exp(-2i\mathbb{A}\,(p_1, p_2, p_3)) \end{aligned}$$

Par conséquent, si la condition 2. est satisfaite, il existe une unique isométrie h telle que $h(p_i^1) = p_i^2$ pour $i = 1, 2, 3$, (où les p_i^1 et les p_i^2 sont respectivement les points de τ_1 et τ_2. Par suite, pour prouver le résultat ci-dessus, nous devons montrer que $h(p_4^1) = p_4^2$. Il est donc suffisant de ne considérer qu'un seul tétraèdre idéal, et de montrer que les trois birapports déterminent p_4 une fois p_1, p_2 et p_3 connus.

Revenons-donc à τ, et choisissons des relèvements de p_1, p_2 et p_3 : $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ et $\mathbf{p}_3$. Nous les utiliserons jusqu'à la fin de la démonstration. Nous devons donc montrer qu'un relèvement de p_4 est déterminé par ω_a, ω_b et ω_c à multiplication par un scalaire complexe près.
Lorsque les quatre points ne sont pas contenus dans une droite complexe, nous pouvons supposer que p_1, p_2 et p_3 ne sont pas contenus dans une droite complexe. Sous cette hypothèse, $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$ est une base de $\mathbb{C}^3$, dans laquelle tout relèvemebt $\mathbf{p}_4$ de p_4 s'écrit

$$\alpha\mathbf{p}_1 + \beta\mathbf{p}_2 + \gamma\mathbf{p}_3 \text{ avec } \alpha, \beta \text{ et } \gamma \in \mathbb{C}.$$

Utilisons cette écriture pour calculer les produits hermitiens $\langle \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_1\rangle$, $\langle \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_2\rangle$ et $\langle \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_3\rangle$. En notant $\langle p_i, p_j\rangle = t_{ij}$, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} 0 & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & 0 & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{41} \\ t_{42} \\ t_{43} \end{bmatrix}$$

La résolution de ce système conduit à

$$\begin{aligned} \alpha &= d^{-1}\left(t_{32}t_{21}t_{34} - t_{32}t_{23}t_{14} + t_{24}t_{23}t_{31}\right) \\ \beta &= d^{-1}\left(t_{31}t_{12}t_{34} - t_{31}t_{13}t_{24} + t_{14}t_{13}t_{32}\right) \\ \gamma &= d^{-1}\left(t_{12}t_{23}t_{14} - t_{12}t_{21}t_{24} + t_{21}t_{13}t_{24}\right) \end{aligned}$$

où $d = 2\mathrm{Re}\,(t_{12}t_{23}t_{31})$ est le déterminant de la matrice ci-dessus.
Ces relations se récrivent en utilisant ω_a, ω_b et ω_c

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{t_{32}t_{23}t_{14}}{d}\left(-1 + \frac{t_{31}}{t_{13}}\omega_b\bar{\omega}_a + \frac{t_{21}}{t_{12}}\omega_b^{-1}\bar{\omega}_c^{-1}\right) \\ \beta &= \frac{t_{31}t_{13}t_{24}}{d}\left(-1 + \frac{t_{32}}{t_{23}}\bar{\omega}_c^{-1}\bar{\omega}_a^{-1} + \frac{t_{12}}{t_{21}}\omega_b\bar{\omega}_c\right) \\ \gamma &= \frac{t_{12}t_{21}t_{34}}{d}\left(-1 + \frac{t_{13}}{t_{31}}\omega_b^{-1}\bar{\omega}_a^{-1} + \frac{t_{23}}{t_{32}}\bar{\omega}_a\bar{\omega}_c\right) \end{aligned}$$

Lorsque γ est non-nul, calculons les quotients α/γ et β/γ :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\gamma} &= \frac{t_{23}}{t_{21}}\bar{\omega}_c\left(-1 + \frac{t_{31}}{t_{13}}\omega_b\bar{\omega}_a + \frac{t_{21}}{t_{12}}\omega_b^{-1}\bar{\omega}_c^{-1}\right)\left(-1 + \frac{t_{13}}{t_{31}}\omega_b^{-1}\bar{\omega}_a^{-1} + \frac{t_{23}}{t_{32}}\bar{\omega}_a\bar{\omega}_c\right)^{-1} \\ \frac{\beta}{\gamma} &= \frac{t_{13}}{t_{12}}\bar{\omega}_b^{-1}\left(-1 + \frac{t_{32}}{t_{23}}\bar{\omega}_c^{-1}\bar{\omega}_a^{-1} + \frac{t_{12}}{t_{21}}\omega_b\bar{\omega}_c\right)\left(-1 + \frac{t_{13}}{t_{31}}\omega_b^{-1}\bar{\omega}_a^{-1} + \frac{t_{23}}{t_{32}}\bar{\omega}_a\bar{\omega}_c\right)^{-1} \end{aligned}$$

Le vecteur $\begin{bmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{bmatrix}^T$ est donc déterminé à dilatation complexe près par ω_a, ω_b et ω_c. Les t_{ij} restant n'impliquent que p_1, p_2 et p_3, et ne dépendent donc que du choix de base effectué ci-dessus.
Lorsque γ est nul, alors α ou β ne l'est pas (sinon p_4 coïnciderait avec p_1 ou p_2). Le même calcul conduit à la même conclusion.
Dans le cas particulier où les quatre points sont contenus dans une droite complexe commune, les 3 birapports sont réels, et liés entre eux par

$$\omega_b = \omega_a^{-1} \text{ et } \omega_c = \frac{1}{1-\omega_a}.$$

Ce cas est analogue à celui des quadruplets de points au bord de $\mathbf{H}^1_{\mathbb{C}}$, qui sont classifiés sous PU(1,1) par le birapport. □

Le corollaire suivant est une conséquence simple.

Corollaire 4.13. *Soient (p_1, p_2, p_3, p_4) et (q_1, q_2, q_3, q_4) deux tétraèdres idéaux. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe une isométrie antiholomorphe $f \in \widehat{\mathrm{PU}(2,1)}$ telle que $f(p_i) = q_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$)*
2. $[[p_1, p_2, p_3, p_4]] = \overline{[[q_1, q_2, q_3, q_4]]}$.

Démonstration. D'après la définition du birapport

$$\overline{[[q_1, q_2, q_3, q_4]]} = [[f(q_1), f(q_2), f(q_3), f(q_4)]].$$

Il existe existe une isométrie holomorphe h telle que $h(p_i) = f(q_i)$, $i = 1 \cdots 4$. D'où le résultat. □

Définition 4.14. On dit qu'un tétraèdre idéal $(p_1, p_2, p_3, p_4) \subset \partial\left(\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}\right)^4$ est *non-plat* s'il n'est contenu dans le bord d'aucun sous-espace totalement géodésique de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Le corollaire suivant est une conséquence directe et de la remarque 4.9, et de l'exemple 4.8 (voir aussi [Gol99] et [PP]).

Corollaire 4.15. *Un tétraèdre idéal $T = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ est plat si et seulement si ω_a, ω_b et ω_c sont réels.*

1. *T est contenu dans une droite complexe si et seulement si l'un des trois birapports ω_a, ω_b et ω_c est négatif.*
2. *T est contenu dans un plan lagrangien si et seulement si les trois birapports ω_a, ω_b et ω_c sont positifs.*

4.3 Action du groupe symétrique sur les birapports

Dans cette section, nous décrivons comment $[[p_1, p_2, p_3, p_4]]$ varie lorsque l'on permute les positions des p_i. Le cas classique de $\mathbb{C}P^1$ est traité dans [Bea83]. Nous désignerons par S_4 le groupe des permutations d'un ensemble à quatre éléments.

Définition 4.16. Soient p_1, p_2, p_3 et p_4 quatre points de $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, et σ un élément de S_4. Définissons Ω^σ, le vecteur

$$\Omega^\sigma = [[p_{\sigma(1)}, p_{\sigma(2)}, p_{\sigma(3)}, p_{\sigma(4)}]] = \begin{bmatrix} \mathbf{X}\left(p_{\sigma(1)}, p_{\sigma(2)}, p_{\sigma(3)}, p_{\sigma(4)}\right) \\ \mathbf{X}\left(p_{\sigma(1)}, p_{\sigma(4)}, p_{\sigma(2)}, p_{\sigma(3)}\right) \\ \mathbf{X}\left(p_{\sigma(1)}, p_{\sigma(3)}, p_{\sigma(4)}, p_{\sigma(2)}\right) \end{bmatrix}.$$

En utilisant les notations de la section précédente,

$$\Omega^{id} = \begin{bmatrix} \omega_a \\ \omega_b \\ \omega_c \end{bmatrix} = [[p_1, p_2, p_3, p_4]].$$

Nous allons exprimer Ω^σ pout toute permutation σ de S_4.
Désignons par $(a_1 \cdots a_n)$ le cycle de S_4 envoyant a_k sur a_{k+1}. Soit G_1 stabilisateur de 1 dans S_4. G_1 est une copie de S_3, et nous identifierons G_1 à $\mathfrak{S}\{a, b, c\} \sim S_3$ via

$$2 \leftrightarrow a,\ 3 \leftrightarrow b \text{ et } 4 \leftrightarrow c.$$

Soit V_4 le sous-groupe (normal) de S_4,

$$V_4 = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

Le groupe S_4 est isomorphe au produit semi-direct $S_3 \ltimes V_4$. Ceci fournit une unique décomposition de tout élément σ de S_4 sous la forme $\sigma = \sigma_1\sigma_2$ avec $\sigma_2 \in V_4$ et $\sigma_1 \in \mathfrak{S}\{a, b, c\}$ modulo l'identification ci-dessus. En notant $Z = \begin{bmatrix} Z_a & Z_b & Z_c \end{bmatrix}^T$ les coordonnées sur $\mathbb{C}^3$, définissons les applications

$$f_{id}(Z) = Z,\ f_{(12)(34)}(Z) = \begin{bmatrix} Z_a \\ \overline{Z}_b \\ \overline{Z}_c \end{bmatrix},\ f_{(13)(24)}(Z) = \begin{bmatrix} \overline{Z}_a \\ \overline{Z}_b \\ Z_c \end{bmatrix},\ f_{(14)(23)}(Z) = \begin{bmatrix} \overline{Z}_a \\ Z_b \\ \overline{Z}_c \end{bmatrix}. \tag{4.12}$$

La relation 4.1 montre que si $\sigma \in V_4$, $\Omega^\sigma = f_\sigma(\Omega)$.

Par un calcul simple utilisant la relation 4.2, on démontre la proposition suivante.

Proposition 4.17. *Soit σ dans S_4.*

$$\Omega^\sigma = f_{\sigma_2}\left(\begin{bmatrix}\omega_{\sigma_1(a)}^{\epsilon(\sigma_1)}\\ \omega_{\sigma_1(b)}^{\epsilon(\sigma_1)}\\ \omega_{\sigma_1(c)}^{\epsilon(\sigma_1)}\end{bmatrix}\right)$$

avec $\sigma = \sigma_1\sigma_2$, $\sigma_1 \in \mathfrak{S}\{a,b,c\}$, $\sigma_2 \in V_4$, et $\epsilon(\sigma_1)$ la signature de σ_1.

La preuve se fait par une utilisation répétée de la relation 4.2. On obtient ainsi pour tout σ une fonction f_σ vérifiant $\Omega^\sigma = f_\sigma(\Omega)$.
Explicitons les fonctions f_σ :

– **transpositions**

$$f_{(12)}(\Omega) = \begin{bmatrix}\omega_a^{-1}\\ \bar{\omega_c}^{-1}\\ \bar{\omega_b}^{-1}\end{bmatrix},\ f_{(13)}(\Omega) = \begin{bmatrix}\bar{\omega_b}^{-1}\\ \bar{\omega_a}^{-1}\\ \omega_c^{-1}\end{bmatrix},\ f_{(14)}(\Omega) = \begin{bmatrix}\bar{\omega_c}^{-1}\\ \omega_b^{-1}\\ \bar{\omega_a}^{-1}\end{bmatrix}$$

$$f_{(34)}(\Omega) = \begin{bmatrix}\omega_a^{-1}\\ \omega_c^{-1}\\ \omega_b^{-1}\end{bmatrix},\ f_{(24)}(\Omega) = \begin{bmatrix}\omega_b^{-1}\\ \omega_a^{-1}\\ \omega_c^{-1}\end{bmatrix},\ f_{(23)}(\Omega) = \begin{bmatrix}\omega_c^{-1}\\ \omega_b^{-1}\\ \omega_a^{-1}\end{bmatrix} \tag{4.13}$$

– **Groupe de Klein**

$$f_{(12)(34)}(\Omega) = \begin{bmatrix}\omega_a\\ \bar{\omega}_b\\ \bar{\omega}_c\end{bmatrix},\ f_{(13)(24)}(\Omega) = \begin{bmatrix}\bar{\omega}_a\\ \bar{\omega}_b\\ \omega_c\end{bmatrix},\ f_{(14)(23)}(\Omega) = \begin{bmatrix}\bar{\omega}_a\\ \omega_b\\ \bar{\omega}_c\end{bmatrix} \tag{4.14}$$

– **Cycles de longueur 3**

$$f_{(234)}(\Omega) = \begin{bmatrix}\omega_c\\ \omega_a\\ \omega_b\end{bmatrix},\ f_{(124)}(\Omega) = \begin{bmatrix}\bar{\omega}_c\\ \omega_a\\ \bar{\omega_b}\end{bmatrix},\ f_{(123)}(\Omega) = \begin{bmatrix}\bar{\omega}_b\\ \bar{\omega}_c\\ \omega_a\end{bmatrix},\ f_{(134)}(\Omega) = \begin{bmatrix}\bar{\omega}_b\\ \omega_c\\ \bar{\omega}_a\end{bmatrix}$$

$$f_{(243)}(\Omega) = \begin{bmatrix}\omega_b\\ \omega_c\\ \omega_a\end{bmatrix},\ f_{(142)}(\Omega) = \begin{bmatrix}\omega_b\\ \bar{\omega}_c\\ \bar{\omega_a}\end{bmatrix},\ f_{(132)}(\Omega) = \begin{bmatrix}\omega_c\\ \bar{\omega}_a\\ \bar{\omega}_b\end{bmatrix},\ f_{(143)}(\Omega) = \begin{bmatrix}\bar{\omega}_c\\ \bar{\omega}_a\\ \omega_b\end{bmatrix} \tag{4.15}$$

– **Cycles de longueur 4**

$$f_{(1234)}(\Omega) = \begin{bmatrix}\bar{\omega}_b^{-1}\\ \omega_a^{-1}\\ \bar{\omega}_c^{-1},\end{bmatrix} f_{(1342)}(\Omega) = \begin{bmatrix}\omega_c^{-1}\\ \bar{\omega}_b^{-1}\\ \bar{\omega}_a^{-1}\end{bmatrix},\ f_{(1423)}(\Omega) = \begin{bmatrix}\bar{\omega}_a^{-1}\\ \bar{\omega}_c^{-1}\\ \omega_b^{-1}\end{bmatrix}$$

$$f_{(1432)}(\Omega) = \begin{bmatrix}\omega_b^{-1}\\ \bar{\omega}_a^{-1}\\ \bar{\omega}_c^{-1},\end{bmatrix} f_{(1243)}(\Omega) = \begin{bmatrix}\bar{\omega}_c^{-1}\\ \bar{\omega}_b^{-1}\\ \omega_a^{-1}\end{bmatrix},\ f_{(1324)}(\Omega) = \begin{bmatrix}\bar{\omega}_a^{-1}\\ \omega_c^{-1}\\ \bar{\omega}_b^{-1}\end{bmatrix} \tag{4.16}$$

4.4 Groupes de symétries des tétraèdres idéaux

Nous désignons par $\mathfrak{S}(\{p_1, p_2, p_3, p_4\})$ le groupe de permutations de $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$.

Définition 4.18. Soit $T = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ un tétraèdre idéal. Une symétrie de T est un isométrie de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ stabilisant T.

Lemme 4.19. *Soient f_1 et f_2 deux symétries d'un tétraèdre idéal non-plat T. f_1 et f_2 sont égales si et seulement si elles sont égales sur T.*

Démonstration. Si f_1 et f_2 sont égales sur T, alors $f_1 \circ f_2^{-1}$ a quatre points fixes qui ne sont pas contenus dans un sous-espace totalement géodésique, car T est non-plat. Donc $f_1 = f_2$. □

Définition 4.20. Le *groupe de symétrie* d'un tétraèdre idéal (p_1, p_2, p_3, p_4) est le plus gros sous-groupe G de S_4 tel qu'il existe une représentation fidèle $\tau : G \longrightarrow \widehat{\mathrm{PU}(2,1)}$ vérifiant la condition que pour tout $\sigma \in G$, $\tau(\sigma)$ stabilise l'ensemble $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$.

Remarque 4.21. Si $\sigma \in S_4$ appartient au groupe de symétrie G d'un tétraèdre, et si τ est la représentation associée, $\tau(\sigma)$ peut-être holomorphe ou antiholomorphe.

Définition 4.22. Soit T un tétraèdre idéal dont le groupe de symétrie est $G \subset S_4$. Soit τ la représentation associée. Nous dirons que $\sigma \in G$ est *holomorphe* (resp. *antiholomorphe*) si $\tau(\sigma)$ est holomorphe (resp. antiholomorphe).

En appliquant la proposition 4.12 et son corollaire 4.13, qui classifient les tétraèdres à isométries holomorphes et antiholomorphes près, on montre la proposition suivante.

Proposition 4.23. *Soit $T = (p_1, p_2, p_3, p_4) \subset (\partial \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}})^4$ un tétraèdre. $[[p_1, p_2, p_3, p_4]] = \Omega$.*

1. *$\sigma \in S_4$ est une symétrie holomorphe de T si et seulement si $\Omega^\sigma = \Omega$.*
2. *σ est une symétrie antiholomorphe si et seulement si $\Omega^\sigma = \overline{\Omega}$.*

Les corollaires qui suivent sont obtenus en analysant les équations fournies par la proposition 4.23 (nous donnons une démonstration différente pour le corollaire 4.25).

Corollaire 4.24. *Soit T un tétraèdre non-plat. Si* (12) *est une symétrie holomorphe de T, alors* (34) *est une symétrie antiholomorphe de T.*

Démonstration. En utilisant les expressions des f_σ données dans la section précédente :

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_a \\ \omega_b \\ \omega_c \end{bmatrix}, \ \Omega^{(12)} = \begin{bmatrix} \omega_a^{-1} \\ \bar{\omega}_c^{-1} \\ \bar{\omega}_b^{-1} \end{bmatrix} \text{ et } \Omega^{(34)} = \begin{bmatrix} \omega_a^{-1} \\ \omega_c^{-1} \\ \omega_b^{-1} \end{bmatrix}.$$

Donc, si $\Omega = \Omega^{(12)}$, alors $\omega_a = \omega_a^{-1}$, et ω_a vaut 1 ou -1. Si ω_a valait -1, T serait plat d'après le corollaire 4.4. Ainsi, ω_a vaut 1.

Par suite, (12) est une symétrie holomorphe de T si et seulement si

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_b \\ \bar{\omega}_b^{-1} \end{bmatrix}.$$

Dans ces conditions, $f_{34}(\Omega) = \overline{\Omega}$. □

Corollaire 4.25. *[Goldman] Soit $T = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ tétraèdre non-plat.* (12)(34) *est une symétrie antiholomorphe de T si et seulement si $\boldsymbol{X}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3, \mathrm{p}_4)$ est réel et strictement positif*

Ce résultat a été prouvé initialement par Goldman dans [Gol99] (chap. 7). Il est possible de le montrer de façon très simple en utilisant les fonctions f_σ ci-dessus, cependant nous allons en donner une démonstration un peu plus lourde, mais plus éclairante.

Démonstration. L'existence de cette symétrie antiholomorphe signifie qu'il existe une isométrie antiholomorphe ϕ telle que $\phi(x_1) = x_2$ et $\phi(x_3) = x_4$. Supposons l'existence d'une telle isométrie. Alors, en utilisant la relation 4.2,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \mathbf{X}(x_2, x_1, x_4, x_3) \\ &= \mathbf{X}(\phi(x_1), \phi(x_2), \phi(x_3), \phi(x_4)) \\ &= \overline{\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, x_4)}. \end{aligned}$$

Par suite, $\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ est réel. Pour déterminer son signe, utilisons la remarque 4.2 :

$$\arg(\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, x_4)) = \mathbb{A}(x_1, x_2, x_4) - \mathbb{A}(x_1, x_2, x_3).$$

ϕ est antiholomorphe, donc change $\mathbb{A}$ en $-\mathbb{A}$. Par suite

$$\begin{aligned} \arg(\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, x_4)) &= \mathbb{A}(\phi(x_1), \phi(x_2), \phi(x_4)) - \mathbb{A}(\phi(x_1), \phi(x_2), \phi(x_3)) && (4.17) \\ &= -\mathbb{A}(x_1, x_2, x_4) + \mathbb{A}(x_1, x_2, x_3). && (4.18) \end{aligned}$$

Par suite $\arg(\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, x_4)) = 0$, et donc $\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ est positif.

Supposons maintenant que $\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, x_4) > 0$. Soient γ la géodésique reliant x_1 et x_2, et C la droite complexe engendrée par γ.
D'après la remarque 4.2, $\mathbb{A}(x_1, x_2, x_3) = \mathbb{A}(x_1, x_2, x_4)$, donc il existe $g \in PU(2,1)$ tel que $g(x_1) = x_1$, $g(x_2) = x_2$ et $g(x_3) = x_4$. Il y a deux possibilités :

- Si $\Pi(x_3) = \Pi(x_4)$, alors g est une réflexion complexe. C et C' (la droite complexe contenant x_3 et x_4) sont orthogonales. Soit σ, la géodésique tracée dans C, orthogonale à γ au point $\Pi(x_3)$, et σ' la géodésique tracée dans C' passant par $\Pi(x_3)$, et telle que la symétrie par rapport à σ' échange x_3 et x_4. Comme C et C' sont orthogonales, σ et σ' sont contenues dans un $\mathbb{R}$-plan P, et la réflexion par rapport à P échange x_1 et x_2 d'une part, et x_3 et x_4 d'autre part.

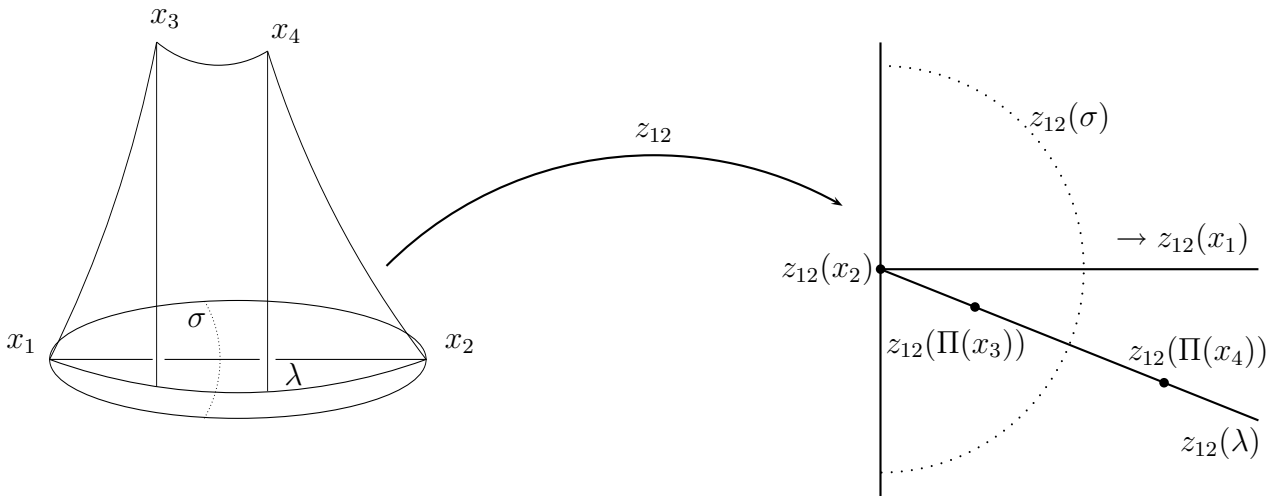


FIG. 4.1 – $\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}$.

– Si $\Pi(x_3) \neq \Pi(x_4)$, g est loxodromique. Dans ce cas, soit σ la géodésique orthogonale à γ dans C en $\Pi(x_3)$, et σ' la géodésique reliant $\Pi(x_3)$ et x_3. σ et σ' engendrent un $\mathbb{R}$-plan P, et la réflexion par rapport à P (I_P) échange x_2 et x_3. Il existe un unique $\mathbb{R}$-plan Q tel que $g = I_Q \circ I_P$. Q convient.

□

Corollaire 4.26. *Soit $T = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ un tétraèdre non-plat. Si* (12)(34) *est une symétrie holomorphe de T, alors* (13)(24) *et* (14)(23) *sont des symétries antiholomorphes de T.*

Démonstration. Si (12)(34) est une symétrie holomorphe, alors ω_b et ω_c sont réels (voir la relation 4.14 page 86). Si l'un d'entre eux était négatif, le tétraèdre serait plat. Donc ils sont positifs, et le résultat est une conséquence de 4.25. □

Remarque 4.27. De plus, si R est la réflexion complexe associée à (12)(34) et si ι_3 (resp. ι_4) est la réflexion lagrangienne associée à (13)(24) (resp. (14)(23)), alors $R = \iota_3 \circ \iota_4$.

Lemme 4.28. *Un tétraèdre dont le groupe de symétrie est S_4 est plat.*

Démonstration. Considérons d'abord les éléments du groupe de Klein (12)(34), (13)(24) et (14)(23). Ils sont tous des symétries de T. Si ω_a, ω_b et ω_c ne sont pas tous réels, la seule possibilité est que une de ces trois symétries soit holomorphe, et les deux autres antiholomorphes. Supposons que (12)(34) soit holomorphe. D'après le lemme 4.24, (12) et (34) sont tous deux antiholomorphes.

Par ailleurs, (13)(24) étant antiholomorphe, (13) et (24) sont de types opposés. Supposons que (13) soit holomorphe. Alors, (12)(13) = (132) est antiholomorphe. La forme donnée ci-dessus pour $\Omega^{(132)}$ montre qu'alors les composantes de Ω doivent être réelles. □

Corollaire 4.29. *Soit $T = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ un tétraèdre non-plat dont le groupe de symétrie G contient un élément holomorphe d'ordre 4. Alors G est une copie du groupe diédral D_4.*

Démonstration. Supposons que G contienne le 4-cycle $c = (1234)$. Alors G contient $c^2 = (13)(24)$, qui est une symétrie holomorphe. D'après le corollaire 4.26, G contient les deux symétries antiholomorphes $(12)(34)$ et $(14)(23)$. Donc G contient $(12)(34)(1234) = (24)$. Par suite, G contient une copie de D_4, engendrée par (13) et (1234). Si $G \neq D_4$ alors $8 = |D_4|$ divise $|G|$, et $|G|$ divise 24. Donc $G = S_4$, ce qui est absurde car T est non-plat. □

Nous étudions maintenant une configuration spéciale.

Corollaire 4.30. *Soit $T = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ un tétraèdre non-plat dont le groupe de symétrie contient un élément d'ordre trois. Alors :*

1. *trois des quatre points sont contenus dans une droite complexe.*
2. *G, le groupe de symétrie de T est isomorphe à S_3.*

Démonstration. Supposons que l'élément d'ordre trois soit le 3-cycle $c = (123)$. c est holomorphe. La relation $f_{(123)}(\Omega) = \Omega$ implique

$$\bar{\omega}_b = \omega_a,\ \bar{\omega}_c = \omega_b,\ \omega_a = \omega_c.$$

Les deux relations 4.6 et 4.10 montrent qu'il n'y a que deux possibilités :

$$\Omega = \Omega_1 = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\pi}{3}} \\ e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ e^{i\frac{\pi}{3}} \end{bmatrix} \text{ ou } \Omega = \Omega_2 = \overline{\Omega}_1.$$

Par suite, il y a exactement deux tels tétraèdres modulo PU(2,1), qui sont identifiés par une isométrie antiholomorphe. Si les quatre points sont distincts, on est dans la situation de l'exemple 4.8 avec $t = 1/2$ et $x = (\sqrt{3}/2)^{1/2}$: p_1, p_2 et p_3 sont dans une même droite complexe. On vérifie alors sur la relation 4.13 que (12), (23) et (13) sont des symétries antiholomorphes de T. Une analyse directe des éléments restant de S_4 montre qu'aucun d'entre eux ne peut être une symétrie de T sauf si T est plat. □

Le théorème suivant énumère les groupes de symétries possibles d'un tétraèdre idéal. La preuve est une application des résultats ci-dessus.

Théorème 4.31. *Soit T tétraèdre idéal non-plat. Le groupe de symétrie de T est l'un des suivants :*

1. *$\{1\}$, dans ce cas, T est dit générique.*
2. *$\langle\sigma\rangle \sim \mathbb{Z}_2$ où $\sigma \in S_4$ est une transposition antiholomorphe.*
3. *$\langle\sigma\rangle \sim \mathbb{Z}_2$ où σ est un élément du groupe de Klein.*

4. *$\langle \sigma, \sigma' \rangle \sim \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ où σ et σ' sont des transpositions à supports disjoints, σ est holomorphe et σ' antiholomorphe.*
5. *Le groupe de Klein, avec une symétrie holomorphe, et deux antiholomorphes.*
6. *S_3 comme dans le corollaire 4.30 (les deux 3-cycles holomorphes, et les transpositions antiholomorphes).*
7. *D_4 le groupe diédral d'ordre 8 , engendré par une transposition antiholomorphe et un 4-cycle holomorphe.*

Chapitre 5

Traces, birapports et sous-groupes à deux générateurs

5.1 Introduction

Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'ensemble suivant.

Définition 5.1. Nous désignerons par $\mathrm{Hom}(F_2,\mathrm{PU}(2,1))^{\mathrm{lox}}$ l'ensemble des représentations de $F_2 = \langle \mathtt{m}, \mathtt{n} \rangle$ dans PU(2,1) telles que $\rho(\mathtt{m})$ et $\rho(\mathtt{n})$ sont loxodromiques.

Notre objectif est de décrire l'ensemble des classes de conjugaisons de telles représentations sous PU(2,1). D'après les résultats du chapitre 3 deux représentations irréductibles ρ_1 et ρ_2 de $\mathrm{Hom}(F_2,\mathrm{PU}(2,1))^{\mathrm{lox}}$ sont conjuguées si et seulement si les cinq éléments de F_2 $\mathtt{m}, \mathtt{n}, \mathtt{mn}, \mathtt{m}^{-1}\mathtt{n}$ et $[\mathtt{m}, \mathtt{n}]$ ont mêmes traces dans ρ_1 et dans ρ_2.

En utilisant le birapport complexe, défini au chapitre précédent, nous allons décrire des coordonnées géométriques sur $\mathrm{Hom}(F_2,\mathrm{PU}(2,1))^{\mathrm{lox}}$. Pour toute représentation ρ de $\mathrm{Hom}(F_2,\mathrm{PU}(2,1))^{\mathrm{lox}}$, nous appellerons τ_ρ le tétraèdre formé par les points fixes de $\rho(\mathtt{m})$ et $\rho(\mathtt{n})$ (voir définition 5.5).

En utilisant l'invariant $[[\tau_\rho]]$ formé de trois birapports, et en l'associant aux classes de conjugaison de $\rho(\mathtt{m})$ et $\rho(\mathtt{n})$, nous allons classifier les représentations de F_2 sous PU(2,1). Nous obtenons ainsi la

Proposition 5.2. *L'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathit{Hom}\ (F_2,PU(2,1))^{lox}/PU(2,1) & \longrightarrow & \mathbb{C}^5 \\ [\rho] & \longmapsto & (\mathrm{tr}\,\rho(\mathtt{m}), \mathrm{tr}\,\rho(\mathtt{n}), [[\tau_\rho]]) \end{array}$$

est injective, et son image est le sous-ensemble de $\mathbb{C}^5$

$$\left\{ (z_A, z_B, \omega_a, \omega_b, \omega_c,) \;\middle|\; \begin{array}{c} |\omega_a\omega_b\omega_c| = 1 \\ 2\mathrm{Re}\,(\omega_c) = \dfrac{1}{|\omega_b|^2}\left(\left|1-\dfrac{1}{\omega_a}\right|^2 - 1\right) + \left|1-\dfrac{1}{\omega_b}\right|^2 \\ f(z_A) > 0 \ et \ f(z_B) > 0 \end{array} \right\}$$

Rappelons que $f(z) = |z|^4 - 8\mathrm{Re}(z^3) + 18|z|^2 - 27$, et que $f(z)$ est positif si et seulement si z est la trace d'un relèvement à SU(2,1) d'une isométrie loxodromique.

En les appliquant au « tétraèdre des points fixes » d'une paire d'isométries loxodromiques (cf définition 5.5), les corollaires 4.25 et 4.26, qui décrivent les éventuelles symétries d'ordre deux des tétraèdres idéaux, se traduisent par un critère de décomposition des paires d'isométries loxodromiques en triplets d'involutions. Le groupe engendré par deux isométries loxodromiques A et B apparaît alors comme un sous-groupe d'indice deux d'un groupe triangulaire $\langle I_1, I_2, I_3\rangle$ via

$$A = I_1 \circ I_2 \text{ et } B = I_3 \circ I_2.$$

On dit alors alors que la paire (A, B) est $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$-décomposable selon que I_1, I_2 et I_3 sont holomorphes ou antiholomorphes (voir la définition 5.9).

Remarque 5.3. Rappelons avant d'aller plus loin qu'une isométrie holomorphe de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ admet trois relèvements à SU(2,1) obtenus les uns à partir des autres par multiplication par une racine cubique de l'unité. Deux isométries seront dites de même trace si elles admettent des relèvements à SU(2,1) de même trace. De même, on dira qu'une isométrie est de trace réelle si elle admet un relèvement à SU(2,1) qui est de trace réelle.

Un des objectifs de ce chapitre est de montrer résultat suivant :

Théorème. *(**5.17**) Soient A et B deux isométries loxodromiques de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, et $G = \langle A, B\rangle$. Supposons que G ne préserve aucun sous espace totalement géodésique. Alors :*

1. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*
   (a) *L'isométrie $[A, B]$ est de trace réelle.*
   (b) *La paire (A, B) est $\mathbb{R}$-décomposable.*
2. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*
   (a) *Les isométries A, B, AB et $A^{-1}B$ sont de trace réelle.*
   (b) *L'une des deux paires (A, B), (A^2, B^2) est $\mathbb{C}$-décomposable.*

Ce critère est exprimé en terme de traces, et les symétries des tétraèdres idéaux sont exprimées en termes de birapport. La traduction « traces–birapports » s'effectue par le biais de la proposition technique 5.15.

Posons la définition suivante.

Définition 5.4. Soit ρ une représentation de $F_2 = \langle \mathtt{m}, \mathtt{n} \rangle$ dans PU(2,1). On appellera ρ^2 la représentation de F_2 dans PU(2,1) définie par $\rho^2(\mathtt{m}) = (\rho(\mathtt{m}))^2$ et $\rho^2(\mathtt{n}) = (\rho(\mathtt{n}))^2$

Le théorème 5.17 se reformule en termes de points fixes des deux involutions $I^\star$ et I' définies au chapitre 3. On obtient ainsi :

Proposition. *Soit $[\rho]$ une classe de représentation Zariski dense du groupe libre à deux générateurs dans* PU(2,1)*, telle que $\rho(\mathtt{m})$ et $\rho(\mathtt{n})$ soient loxodromiques,*
- *$[\rho]$ est fixée par l'involution $I^\star$ si et seulement si ρ est $\mathbb{R}$-décomposable.*
- *$[\rho]$ est fixée par l'involution I' si et seulement si ρ ou ρ^2 est $\mathbb{C}$-décomposable.*

Nous appliquons ensuite le théorème 5.17 au cas où le commutateur de A et B est parabolique pur, pour obtenir le résultat de rigidité suivant.

Proposition. 5.19 *Soient A et B deux éléments loxodromiques tels que $C = [A, B]$ soit parabolique pur. Alors :*

1. *C est conjugué à une translation de Heisenberg verticale si et seulement si G préserve une droite complexe.*
2. *C est conjugué à une translation de Heisenberg non-verticale si et seulement si (A, B) est $\mathbb{R}$-décomposable.*

La dernière section du chapitre est consacrée à l'étude de l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 & \longrightarrow & \mathcal{C}^{\mathrm{lox}} \\ (A, B) & \longmapsto & [AB] \end{array}$$

où $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux classes de conjugaisons loxodromiques, et $\mathcal{C}^{\mathrm{lox}}$ désigne l'ensemble des classes de conjugaison loxodromiques de PU(2,1). Le fait que le passage des traces au birapports soit très simple (affine) nous permet pour finir de montrer que quelles que soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, toute classe de conjugaison loxodromique est atteinte par cette application. De manière équivalente, ceci prouve qu'il existe des représentations du groupe fondamental de la sphère moins trois points à classes de conjugaison prescrites dans PU(2,1) quel que soit le triplet de classes de conjugaison loxodromiques (corollaire 5.22). Ce résultat a été prouvé par des méthodes différentes et dans une plus grande généralité par Falbel et Wentworth dans le preprint [FW].

5.2 Coordonnées KR sur les paires de loxodromiques

5.2.1 Définition des coordonnées.

Rappelons qu'une isométrie loxodromique A a deux points fixes. L'un, noté p_A, est attractif, l'autre, q_A, est répulsif.

Définition 5.5. Soient A et B deux isométries loxodromiques. Soit $\tau(A,B)$ le tétraèdre idéal (p_A, q_A, p_B, q_B). Si ρ est une représentation de F_2 dans PU(2,1), nous appellerons τ_ρ le tétraèdre $\tau(\rho(\mathtt{m}), \rho(\mathtt{n}))$.

La proposition suivante est un critère de conjugaison pour les paires d'isométries loxodromiques.

Lemme 5.6. *Soient (A_1, B_1) et (A_2, B_2) deux paires d'éléments loxodromiques. Sont équivalentes :*

1. *Il existe C tel que $A_2 = CA_1C^{-1}$ et $B_2 = CB_1C^{-1}$*
2. *(a)* $[[p_{A_1}, q_{A_1}, p_{B_1}, q_{B_1}]] = [[p_{A_2}, q_{A_2}, p_{B_2}, q_{B_2}]]$
   (b) $\mathrm{tr}A_1 = \mathrm{tr}A_2$ *et* $\mathrm{tr}B_1 = \mathrm{tr}B_2$

Démonstration.
- *1* entraîne *2* car toutes les quantités impliquées sont des invariants de conjugaison.
- Supposons *(a)* et *(b)* vérifiées. D'après la proposition 4.12, *1* entraîne l'existence de $g \in \mathrm{SU}(2,1)$ envoyant $\tau(A_1, B_1)$ sur $\tau(A_2, B_2)$. La paire (A_2, B_2) est donc conjuguées à une paire ayant les mêmes points fixes que (A_1, B_1). *(b)* montre alors que A_1 et A_2 sont conjugués ainsi que B_1 et B_2 (voir page la remarque 1.18 page 29). Une isométrie loxodromique étant déterminée par sa classe de conjugaison et ses points fixes, ceci prouve le résultat.

□

Prouvons maintenant la proposition 5.2.

Démonstration. Un point de $\mathrm{Hom}(F_2,\mathrm{PU}(2,1))^{\mathrm{lox}}/\mathrm{PU}(2,1)$ est une classe pour l'action diagonale par conjugaison de PU(2,1) sur $4\mathrm{Hom}(F_2,\mathrm{PU}(2,1))^{\mathrm{lox}}$. Il est donc représenté par une paire normalisée $(A,B) \in \mathrm{PU}(2,1)^{\mathrm{lox}} \times \mathrm{PU}(2,1)^{\mathrm{lox}}$ (voir le lemme 5.8 ci-dessous). Le résultat est donc une conséquence du lemme 5.6, en notant

$$\omega_a = \mathbf{X}(p_A, q_A, p_B, q_B) \quad \omega_b = \mathbf{X}(p_A, q_B, q_A, p_B) \quad \omega_c = \mathbf{X}(p_A, p_B, q_B, q_A)$$

$$z_A = \mathrm{tr}A \qquad\qquad z_B = \mathrm{tr}B.$$

□

Remarque 5.7. Les équations décrivant ω_a, ω_b et ω_c montrent qu'une fois fixés deux des trois birapports, le troisième est déterminé modulo conjugaison complexe.

Le lemme technique suivant nous sera utile dans la preuve de la proposition 5.15.

Lemme 5.8. *Toute paire d'isométries loxodromiques est conjuguée à une paire (A,B) donnée par*

$$A = \begin{bmatrix} \bar{\mu}^{-1} & \bar{z}_2 g\left(\bar{\mu}^{-1}\right) & z_1 g(\mu) + \bar{z}_1 g(\mu^{-1}) \\ 0 & \bar{\mu}\mu^{-1} & z_2 g(\mu) \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} \nu & 0 & 0 \\ w_2 g(\nu) & \bar{\nu}\nu^{-1} & 0 \\ w_3 g(\nu) + \bar{w}_3 g(\bar{\nu}^{-1}) & \bar{w}_2 g(\bar{\nu}^{-1}) & \bar{\nu}^{-1} \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

où :

- $\mu, \nu \in \mathbb{C}$ *sont de module inférieur à 1,*
- g *désigne la fonction définie sur* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *par* $z \longmapsto z - \bar{z}z^{-1}$
- *et* z_1, z_2, w_2 *et* w_3 *satisfont aux relations*

$$z_1 + \bar{z}_1 + |z_2|^2 = 0 \text{ et } w_3 + \bar{w}_3 + |w_2|^2 = 0.$$

Démonstration. Quitte à conjuguer, on peut supposer que le point fixe attractif de A (resp. B) est ∞ (resp. $[0,0]$), et que son point fixe répulsif admet le relèvement

$$\mathbf{q}_A = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\text{resp. } \mathbf{q}_B = \begin{bmatrix} 1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \right).$$

Les deux relations $z_1 + \bar{z}_1 + |z_2|^2 = 0$ et $w_3 + \bar{w}_3 + |w_2|^2 = 0$ traduisent l'appartenance des points fixes de A et B à $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. □

Notons que si A et B sont telles que ci-dessus, A^{-1} (resp. B^{-1}) est obtenu à partir de A (resp. B) en changeant μ (resp. ν) en $1/\mu$ (resp. $1/\nu$).

5.2.2 Paires décomposables

Définition 5.9. Soient A et B deux éléments de $\mathrm{PU}(2,1)$. La paire (A,B) est dite *décomposable* s'il existe trois involutions I_1, I_2, I_3 telles que

$$A = I_1 \circ I_2 \text{ et } B = I_3 \circ I_2$$

Plus précisément (A,B) est dite $\mathbb{R}$-*décomposable* si les I_k sont antiholomorphes, et $\mathbb{C}$-*décomposable* si les I_k sont holomorphes. Un représentation $\rho \in$Hom(F_2,PU(2,1)) sera dite $\mathbb{R}$-décomposable (resp. $\mathbb{C}$-décomposable) si la paire $(\rho(\mathtt{m}), \rho(\mathtt{n}))$ est $\mathbb{R}$-décomposable (resp. $\mathbb{C}$-décomposable).

Proposition 5.10. *1. La paire d'éléments loxodromiques* (A,B) *est* $\mathbb{R}$*-décomposable si et seulement si la permutation* $(12)(34)$ *est une symétrie antiholomorphe du tétraèdre* $\tau(A,B)$*.*

2. La paire d'éléments loxodromiques (A,B) *est* $\mathbb{C}$*-décomposable si et seulement si la permutation* $(12)(34)$ *est une symétrie holomorphe du tétraèdre* $\tau(A,B)$*, et si* A *et* B *admettent des relèvements à SU(2,1) de trace réelle et plus grande que 3.*

Démonstration. 1. Si (12)(34) est une symétrie antiholomorphe du tétraèdre $\tau(A, B)$, alors il existe une réflexion lagrangienne qui échange p_A et q_A d'une part, et p_B et q_B d'autre part. Appelons la I_2. Alors $A \circ I_2$ échange les deux points p_A et q_A. D'après le lemme 1.72 page 42, $A \circ I_2$ est une réflexion lagrangienne, que nous appelons I_1. De même, $B \circ I_2 = I_3$ est une réflexion lagrangienne.

2. Réciproquement, si la paire (A, B) est $\mathbb{R}$-décomposable sous la forme $A = I_1 \circ I_2$ et $B = I_3 \circ I_2$, la proposition 1.73 montre que I_2 permute les points fixes de A ainsi que ceux de B. Le tétraèdre $\tau(A, B)$ admet donc une symétrie (12)(34).
3. Supposons que la paire (A, B) soit $\mathbb{C}$-décomposable : $A = I_1 \circ I_2$ et $B = I_3 \circ I_2$. Le lemme 1.43 montre que A et B admettent tous deux des relèvements de traces réelles et plus grandes que 3. D'après la preuve du lemme 1.44 I_2 échange d'une part les points fixes de A, et d'autre part ceux de B. I_2 réalise donc une symétrie holomorphe du tétraèdre $\tau(A, B)$.
4. Réciproquement, si la permutation (12)(34) est une symétrie holomorphe du tétraèdre $\tau(A, B)$, et si A et B admettent des relèvements à SU(2,1) de trace réelle et plus grande que 3, soit I_2 la réflexion complexe réalisant (12)(34). D'après la proposition 1.44 page 36, il existe I_1 et I_3 des réflexions complexes telles que $A = I_1 \circ I_2$ et $B = I_3 \circ I_2$. La paire (A, B) est donc $\mathbb{C}$-décomposable.

□

Lemme 5.11. *Soit $\rho \in Hom(F_2, PU(2,1))^{lox}$, une représentation préservant un $\mathbb{R}$-plan P, et telle que $\rho(\mathtt{m})$ et $\rho(\mathtt{n})$ ne partage aucun point fixe. ρ est $\mathbb{R}$-décomposable, et la décomposition est unique.*

Démonstration. Puisque ρ stabilise un $\mathbb{R}$-plan, le tétraèdre τ_ρ est contenu dans P. Il y a deux possibilités : soit les axes de $\rho(\mathtt{m})$ et $\rho(\mathtt{n})$ sont disjoints, soit ils se coupent en un point $m \in P$.

Dans le premier cas, soit γ l'othogonale commune aux axes des $\rho(\mathtt{m})$ et $\rho(\mathtt{n})$ et P' le $\mathbb{R}$ plan contenant γ, d'angle $\langle(0, \pi/2)\rangle$ avec P. Tout $\mathbb{R}$-plan Q qui permute d'une part les points fixes de $\rho(\mathtt{m})$ et d'autre part ceux de $\rho(\mathtt{n})$ doit contenir γ. Son angle avec P a donc pour mesure $(0, \beta)$. I_Q doit également préserver P. Le lemme 1.83 montre donc que $I_{P'}$ est la seule réflexion lagrangienne décomposant la paire $(\rho(\mathtt{m}), \rho(\mathtt{n}))$.

Dans le second cas, soit p le point d'intersection des axes, et P' le $\mathbb{R}$-plan orthogonal à P en p. De même que ci-dessus, on vérifie en utilisant le lemme 1.83 que $I_{P'}$ est la seule réflexion lagrangienne qui décompose la paire $(\rho(\mathtt{m}), \rho(\mathtt{n})$. □

Corollaire 5.12. *Soit $\rho \in Hom(F_2, PU(2,1))^{lox}$ une représentation $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$-décomposable ne préservant pas une droite complexe. La décomposition est unique.*

Démonstration. D'après le lemme 4.19, page 87, si un tétraèdre idéal non plat admet une symétrie (12)(34), elle est unique. Or, toute décomposition de la paire (A, B) correspond est associée à une symétrie (12)(34) du tétraèdre idéal $\tau(A, B)$. Si le tétraèdre $\tau(A, B)$ est contenu dans un $\mathbb{R}$-plan, on applique le lemme ci-dessus. □

La proposition 5.13 est une réinterprétation en termes de birapport de la proposition 5.10.

Proposition 5.13. *Soient A et B deux isométries loxodromiques. Supposons que le groupe $\langle A, B\rangle$ ne stabilise aucune droite complexe.*
Alors :

1. *(A, B) est $\mathbb{R}$-décomposable si et seulement si $\omega_a = \boldsymbol{X}(p_A, q_A, p_B, q_B)$ est réel et positif.*
2. *(A, B) est $\mathbb{C}$-décomposable si et seulement si*
   (a) *$\omega_b = \boldsymbol{X}(p_A, q_B, q_A, p_B)$ et $\omega_c = \boldsymbol{X}(p_A, p_B, q_B, q_A)$ sont tous deux réels et positifs.*
   (b) *$\operatorname{tr} A$ et $\operatorname{tr} B$ sont réelles et vérifient $\operatorname{tr} A > 3$ et $\operatorname{tr} B > 3$.*

Proposition 5.14. *Soient A et B deux éléments loxodromiques ayant un point fixe en commun. La paire (A, B) n'est ni $\mathbb{R}$ ni $\mathbb{C}$-décomposable*

Démonstration. A et B ayant un point fixe en commun, leurs axes sont asymptotiques. Si la paire (A, B) était décomposable, il existerait un plan totalement géodésique simmultanément orthogonal aux deux axes, donc un triangle ayant un anle nul et deux angles droits. C'est en contradiction avec la courbure négative de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. □

5.3 Traces et birapports

Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux classes de conjugaison loxodromiques. La proposition 5.2 implique qu'un point de $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ est déterminé à conjugaison près dans SU(2,1) par $(\omega_a, \omega_b, \omega_c)$. D'après la proposition 3.23 (page 70), il est également déterminé à conjugaison près les trois de traces

$$\left(\operatorname{tr} AB, \operatorname{tr} A^{-1}B, \operatorname{tr}[A, B]\right).$$

($\operatorname{tr}A$ et $\operatorname{tr}B$ sont fixées par le choix de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
Nous allons maintenant expliciter la relation entre ces deux ensembles de coordonnées. Les trois relations 5.3, 5.4 et 5.7 sont apparues dans [PP].

Proposition 5.15. *Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux classes de conjugaison loxodromiques dans* SU(2,1)*. Il existe une bijection affine $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ déterminée par $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ telle que pour tout $(A, B) \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$,*

$$\left(\operatorname{tr} AB, \operatorname{tr} A^{-1}B\right) = \Phi\left(\frac{1}{\omega_b}, \omega_c\right).$$

Démonstration. Rappelons que g est définie sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ par $g(z) = z - \bar{z}z^{-1}$ (cf page 97).

Soit h la fonction définie sur $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^2$ par $h(x,y)=g(x)g(y)$. Notons que h vérifie :

$$h(x,y)h\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)-h\left(\frac{1}{x},y\right)h(x,\frac{1}{y})=0 \tag{5.2}$$

pour tout $x,y\in\mathbb{C}$. En utilisant la normalisation (5.1) fournie par le lemme 5.8, exprimons $\operatorname{tr} AB$ et $\operatorname{tr} A^{-1}B$ en termes de μ, ν, z_1, z_2, w_2 et w_3. Dans cette normalisation, les birapports ω_a, ω_b et ω_c sont fournis par les trois relations (4.3), (4.4). Nous obtenons les relations

$$\operatorname{tr} AB = \omega_c h(\mu,\nu)+\bar{\omega}_c h(\bar{\mu}^{-1},\bar{\nu}^{-1})+\frac{1}{\omega_b}h(\mu,\bar{\nu}^{-1})+\frac{1}{\bar{\omega}_b}h(\bar{\mu}^{-1},\nu)+\alpha \tag{5.3}$$

$$\operatorname{tr} A^{-1}B = \omega_c h(\mu^{-1},\nu)+\bar{\omega}_c h(\bar{\mu},\bar{\nu}^{-1})+\frac{1}{\omega_b}h(\mu^{-1},\bar{\nu}^{-1})+\frac{1}{\bar{\omega}_b}h(\bar{\mu},\nu)+\beta \tag{5.4}$$

où

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\bar{\mu}}{\mu}\left(\nu+\bar{\nu}^{-1}\right)+\frac{\bar{\nu}}{\nu}\left(\mu+\bar{\mu}^{-1}\right)-\frac{\bar{\nu}\bar{\mu}}{\mu\nu}\\ \beta &= \frac{\mu}{\bar{\mu}}\left(\nu+\bar{\nu}^{-1}\right)+\frac{\bar{\nu}}{\nu}\left(\mu^{-1}+\bar{\nu}\right)-\frac{\bar{\nu}\mu}{\nu\bar{\mu}}.\end{aligned}$$

Appliquons la relation (5.2) vérifiée par h pour calculer les combinaisons linéaire suivantes.

$$\begin{gathered}(5.3)\cdot h(\bar{\mu},\bar{\nu}^{-1})-(5.4)\cdot h(\bar{\mu}^{-1},\bar{\nu}^{-1})\\ \overline{(5.3)}\cdot h(\bar{\mu}^{-1},\bar{\nu})-\overline{(5.4)}\cdot h(\bar{\mu},\bar{\nu}),\end{gathered}$$

où $\overline{(5.3)}$ et $\overline{(5.4)}$ désignent les relations obtenues en conjuguant (5.3) et (5.4). Nous obtenons de cette manière :

$$\begin{aligned}&\omega_c\left(h(\mu,\nu)h(\bar{\mu},\bar{\nu}^{-1})-h(\mu^{-1},\nu)h(\bar{\mu}^{-1},\bar{\nu}^{-1})\right)\\ +\ &\frac{1}{\omega_b}\left(h(\mu,\bar{\nu}^{-1})h(\bar{\mu},\bar{\nu}^{-1})-h(\mu^{-1},\bar{\nu}^{-1})h(\bar{\mu}^{-1},\bar{\nu}^{-1})\right)\\ =\ &\left(\operatorname{tr} AB-\alpha\right)h(\bar{\mu},\bar{\nu}^{-1})-\left(\operatorname{tr} A^{-1}B-\beta\right)h(\bar{\mu}^{-1},\bar{\nu}^{-1})\end{aligned} \tag{5.5}$$

et

$$\begin{aligned}&\omega_c\left(h(\mu^{-1},\nu^{-1})h(\bar{\mu}^{-1},\bar{\nu})-h(\mu,\nu^{-1})h(\bar{\mu},\bar{\nu})\right)\\ +\ &\frac{1}{\omega_b}\left(h(\mu^{-1},\bar{\nu})h(\bar{\mu}^{-1},\bar{\nu})-h(\mu,\bar{\nu})h(\bar{\mu},\bar{\nu})\right)\\ =\ &\left(\overline{\operatorname{tr} AB}-\bar{\alpha}\right)h(\bar{\mu}^{-1},\bar{\nu})-\left(\overline{\operatorname{tr} A^{-1}B}-\bar{\beta}\right)h(\bar{\mu},\bar{\nu})\end{aligned} \tag{5.6}$$

Les birapports complexes ω_b^{-1} et ω_c sont donc solutions d'un système affine. Les coefficients de la partie linéaire de ce système ne dépendent que de μ et ν c'est à dire de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Le déterminant de ce système vaut

$$\delta = \frac{\left(|\mu|^2-1\right)^2 |\mu-\bar{\mu}^2|^4 \left(\nu-\bar{\nu}^2\right)^3 \left(\nu^2-\bar{\nu}\right)\left(|\nu|^2-1\right)}{|\mu|^8|\nu|^6\bar{\nu}}.$$

Les deux facteurs $(\nu^2-\bar{\nu})$ et $(\mu-\bar{\mu}^2)$ s'annulent respectivement si et seulement si $\nu^3=1$ ou $\mu^3=1$. δ est donc nul si et seulement si μ ou ν est de module 1, c'est à dire si A ou B est elliptique spécial. Par suite, lorsque A et B sont loxodromiques, il existe toujours deux nombres complexes ω_b et ω_c satisfaisant les équations ci-dessus. Cependant, ces deux solutions peuvent être vues comme deux birapports si et seulement si elle satisfont l'inégalité (4.11) :

$$\left(|\omega_c| - \frac{1}{|\omega_b|}\right)^2 \leqslant 2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\bar{\omega}_b}+\omega_c\right)-1 \leqslant \left(|\omega_c| + \frac{1}{|\omega_b|}\right)^2.$$

Ceci prouve le résultat. □

Nous avons vu au chapitre 3 qu'une fois fixées $\operatorname{tr} A$, $\operatorname{tr} B$, $\operatorname{tr} AB$, $\operatorname{tr} A^{-1}B$, il y a (génériquement) deux classes de conjugaisons de groupes correspondants. Suivant le choix des coordonnées (traces ou birapports), ces deux classes correspondent à l'indétermination d'ordre deux sur ω_a ou $\operatorname{tr}[A,B]$. Nous montrons maintenant comment relier ω_a et $\operatorname{tr}[A,B]$.

La relation 4.10 procure $\mathrm{Re}(\omega_a)$ en fonction de ω_b et ω_c, qui sont obtenus en fonction des traces en résolvant le système exposé dans la preuve ci-dessus. Pour obtenir $\mathrm{Im}(\omega_a)$, nous calculons la trace du commutateur en utilisant toujours pour A et B la normalisation donnée par le lemme 5.8 :

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}[A,B] \;=\;& 3-2\mathrm{Re}\left(\bar{\omega}_c h(\mu,\nu)\, h\left(\mu^{-1},\nu^{-1}\right) + \frac{1}{\omega_b}\left(h(\bar{\mu},\nu)\, h\left(\bar{\mu}^{-1},\nu^{-1}\right)\right)\right)\\
&+\left|\left(\omega_c h(\bar{\mu},\bar{\nu}) + \bar{\omega}_c h\left(\mu^{-1},\nu^{-1}\right) + \frac{1}{\omega_b} h\left(\bar{\mu},\nu^{-1}\right) + \frac{1}{\bar{\omega}_b} h\left(\bar{\mu}^{-1},\bar{\nu}\right)\right)\right|^2\\
&-|\omega_c|^2\left(|h(\mu,\nu)|^2 + |h\left(\mu^{-1},\nu^{-1}\right)|^2\right) - \frac{1}{|\omega_b|^2}\left(|h\left(\mu,\nu^{-1}\right)|^2 + |h\left(\mu^{-1},\nu\right)|^2\right)\\
&+|\omega_c|^2\left(\omega_a\left(|h\left(\mu,\nu^{-1}\right)|^2 + |h\left(\mu^{-1},\nu\right)|^2\right) + \bar{\omega}_a\left(|h(\mu,\nu)|^2 + |h\left(\mu^{-1},\nu^{-1}|^2\right)\right)\right).
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Nous obtenons alors la relation suivante, qui lie $\mathrm{Im}(\operatorname{tr}[A,B])$ et $\mathrm{Im}(\omega_a)$:

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{Im}\operatorname{tr}[A,B]}{\operatorname{Im}(\omega_a)} &= |\omega_c|^2\left(\left(\left|h\left(\mu,\nu^{-1}\right)\right|^2+\left|h\left(\mu^{-1},\nu\right)\right|^2\right)-\left(\left|h\left(\mu,\nu\right)\right|^2+\left|h\left(\mu^{-1},\nu^{-1}\right|^2\right)\right)\\ &= |\omega_c|^2\left(|g(\mu)|^2-|g(\mu^{-1})|^2\right)\left(|g(\nu)|^2-|g(\nu)^{-1}|^2\right). \qquad (5.8)\end{aligned}$$

Or la relation suivante est vérifiée pour tout nombre complexe z non-nul.

$$|g(z)|^2-|g(z^{-1})|^2=\left(1-|z|^2\right)\left|\frac{z^2}{\bar{z}}+1\right|^2$$

$z^2/\bar{z}+1$ est nul si et seulement si $z^3=-1$. Cette quantité est donc non-nulle si et seulement si $|z|\neq 1$. Comme μ et ν sont de module inférieur à 1 (cf lemme 5.8 page 96), $\operatorname{Im}\operatorname{tr}[A,B]$ et $\operatorname{Im}(\omega_a)$ sont de même signe.

Remarque 5.16. En terminant la résolution du système ci-dessus, nous obtenons les expressions suivantes de ω_b et ω_c :

$$\begin{aligned}\frac{D_b}{|\mu|^2|\nu|^2}\cdot\frac{1}{\omega_b} &= \mu\operatorname{tr}(AB)+\operatorname{tr}(A^{-1}B)+\bar{\nu}\overline{\operatorname{tr}(AB)}+\mu\,\bar{\nu}\overline{\operatorname{tr}(A^{-1}B)}\\ &\quad-\left(\mu^2+\frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{\bar{\nu}}{\nu}+\nu\right)-\left(\bar{\nu}^2+\frac{1}{\bar{\nu}}\right)\left(\frac{\mu}{\bar{\mu}}+\bar{\mu}\right)-\left(\frac{\bar{\nu}}{\nu}+\nu\right)\left(\frac{\mu}{\bar{\mu}}+\bar{\mu}\right)\end{aligned} \qquad (5.9)$$

$$\begin{aligned}\frac{D_c}{|\mu|^2|\nu|^2}\omega_c &= \mu\nu\operatorname{tr}(AB)+\nu\operatorname{tr}(A^{-1}B)+\overline{\operatorname{tr}(AB)}+\mu\,\overline{\operatorname{tr}(A^{-1}B)}\\ &\quad-\left(\mu^2+\frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{\nu}{\bar{\nu}}+\bar{\nu}\right)-\left(\nu^2+\frac{1}{\nu}\right)\left(\frac{\mu}{\bar{\mu}}+\bar{\mu}\right)-\left(\frac{\nu}{\bar{\nu}}+\bar{\nu}\right)\left(\frac{\mu}{\bar{\mu}}+\bar{\mu}\right)\end{aligned} \qquad (5.10)$$

où D_b et D_c désignent les quantités

$$\begin{aligned}D_b &= \left(|\mu|^2-1\right)\left(|\nu|^2-1\right)\left(\mu^2-\bar{\mu}\right)\left(\nu^2-\bar{\nu}\right)\\ D_c &= \left(|\mu|^2-1\right)\left(|\nu|^2-1\right)\left(\mu^2-\bar{\mu}\right)\left(\nu-\bar{\nu}^2\right)\end{aligned}$$

5.4 Le critère de décomposabilité en coordonnées traces

La proposition suivante (5.17) traduit le critère de décomposabilité des paires d'isométries loxodromiques donné par la proposition 5.13 en un critère exprimé en termes de traces.

Théorème 5.17. *Soient A et B deux isométries loxodromiques de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ et $G=\langle A,B\rangle$. Supposons que G ne stabilise aucou sous-espace totalement géodésique de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Alors*

1. *Sont équivalentes :*
   (a) *La trace du commutateur* $[A, B]$ *est réelle.*
   (b) G *stabilise une droite complexe ou la paire* (A, B) *est* $\mathbb{R}$*-décomposable.*
2. *Si* G *ne préserve aucune droite complexe, sont équivalentes*
   (a) *Les quatre traces* $\operatorname{tr} A$, $\operatorname{tr} B$, $\operatorname{tr} AB$, $\operatorname{tr} A^{-1}B$ *sont réelles.*
   (b) G *stabilise un* $\mathbb{R}$*-plan de* $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ *ou la paire* (A, B) *est* $\mathbb{C}$*-décomposable, ou la paire* (A^2, B^2) *est* $\mathbb{C}$*-décomposable.*

Remarque 5.18. Soit A une isométrie loxodromique ou de trace réelle. Les valeurs propres de A sont réelles. En effet, le polynôme caractéristique de A est

$$X^3 - t\,X^2 + t\,X - 1, \text{ avec } t = \operatorname{tr} A.$$

On vérifie simplement que ce polynôme a trois racines réelles si et seulement si $(t+1)(t-3) \geqslant 0$, ce qui est réalisé lorsque A est loxodromique.

Démonstration. (a) Si (A, B) est $\mathbb{R}$-décomposable, alors $\operatorname{tr}[A, B]$ est réelle : nous verrons dans la preuve du théorèe 5.19 ci-dessus proposition que dans ce cas $[A, B]$ s'écrit $M\overline{M}$, avec $M \in \mathrm{SU}(2,1)$. Si G préserve une droite complexe,

(b) La relation (5.7) montre que ω_a est réel si et seulement si $\operatorname{tr}[A, B]$ l'est. On utilise ensuite le corollaire 4.25. Si ω_a est positif, on conclut à la $\mathbb{R}$-décomposabilité de (A, B), s'il est négatif, G préserve une droite complexe, car le tétraèdre formé par les points fixes de A et B est contenu dans une droite complexe.

Si G préserve un $\mathbb{R}$-plan, les traces de tous ses éléments sont réelles. Si la paire (A, B) est $\mathbb{C}$-décomposable, les quatre éléments A, B, AB et $A^{-1}B$ sont des produits de deux réflexions complexes, donc ont de trace réelle. Si la paire (A^2, B^2) alors A^2 et B^2 ont tous deux trace réelle et plus grande que trois (cf le lemme 1.43). Or par Cayley-Hamilton, on obtient $\operatorname{tr} A^2 = (\operatorname{tr} A)^2 - 2\overline{\operatorname{tr} A}$. Cette dernière quantité étant réelle, on en déduit que soit la trace de A est réelle, soit elle est de partie réelle -1. Dans ce dernier cas, on vérifie alors que $\operatorname{tr} A^2$ est inférieure à trois. Donc $\operatorname{tr} A$ est réelle, de même que $\operatorname{tr} B$. On conclut grâce à la remarque 5.18.

(b) D'après, la remarque 5.18, les hypothèses ci-dessus garantissent que μ, ν, $\operatorname{tr} AB$ et $\operatorname{tr} A^{-1}B$ sont réels, où μ et ν sont les valeurs propres de modules plus grand que 1 de A et B. En prenant la partie imaginaire dans les relations (5.3) et (5.4) , on obtient le système linéaire

$$0 = \operatorname{Im}(\omega_c)\left(h(\mu,\nu) - h(\mu^{-1},\nu^{-1})\right) + \operatorname{Im}(\omega_b^{-1})\left(h(\mu,\nu^{-1} - h(\mu^{-1},\nu)\right) \quad (5.11)$$

$$0 = \operatorname{Im}(\omega_c)\left(h(\mu^{-1},\nu) - h(\mu,\nu^{-1})\right) + \operatorname{Im}(\omega_b^{-1})\left(h(\mu^{-1},\nu^{-1}) - h(\mu,\nu)\right) \quad (5.12)$$

Si x et y sont réels, $h(x,y) = (x-1)(y-1)$. Le déterminant du système ci-dessus vaut

$$-\frac{(\mu-1)^3(\nu-1)^3(\mu+1)(\nu+1)}{\mu^2\nu^2}.$$

Il est donc non-nul, car $|\mu| \neq 1$ et $|\nu| \neq 1$. Par suite ω_b et ω_c sont tous deux réels. On obtient alors le résultat grâce à la proposition 5.13 et au lemme 1.43.

□

Notons que les hypothèses de la proposition 5.17 sont des conditions nécessaires :

1. Si (A,B) est $\mathbb{R}$-décomposable, alors $\mathrm{tr}[A,B]$ est réelle : nous verrons dans la preuve de la prochaine proposition que dans ce cas $[A,B]$ s'écrit $M\overline{M}$, avec $M \in \mathrm{SU}(2,1)$
2. Si (A,B) est $\mathbb{C}$-décomposable, alors $\mathrm{tr}\,A$, $\mathrm{tr}\,B$, $\mathrm{tr}\,AB$, $\mathrm{tr}\,A^{-1}B$ sont réels et contenus dans l'intervalle $]-1,\infty[$: dans ce cas A, B, AB $A^{-1}B$ sont produits de deux réflexions complexes d'ordre deux.

De la proposition 5.17, nous allons maintenant déduire un résultat de rigidité pour les groupes engendrés par deux éléments loxodromiques dont le commutateur est parabolique pur (voir page 29).

Théorème 5.19. *Soient A et B deux éléments loxodromiques tels que $C = [A,B]$ soit parabolique pur. Alors :*

1. *C est conjugué à une translation de Heisenberg verticale si et seulement si G préserve une droite complexe.*
2. *C est conjugué à une translation de Heisenberg non-verticale si et seulement si (A,B) est $\mathbb{R}$-décomposable.*

Démonstration. Si $C = [A,B]$ est unipotent, il est de trace 3 et donc, soit la paire (A,B) est $\mathbb{R}$-décomposable, soit G préserve une droite complexe.

1. Si G préserve une droite complexe, C aussi. C est donc conjugué à une translation de Heisenberg préservant une droite complexe, donc à une translation verticale.
2. Si la paire (A,B) est $\mathbb{R}$-décomposable, il existe trois matrices M_1, M_2 et M_3 dans $\mathrm{SU}(2,1)$ telles que $A = M_1\overline{M}_2$, $B = M_3\overline{M}_2$ et $M_k\overline{M}_k = Id$. Par suite C s'écrit $M\overline{M}$ avec $M = M_1\overline{M}_2M_3$. Par conséquent, l'homographie associée à C est le carré de l'isométrie antiholomorphe dont un relèvement est

$$Z \longrightarrow M\overline{Z}.$$

Ces deux isométries ont le même point fixe dans $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. On peut supposer que ce point est ∞ (dans le modèle de Siegel), qui admet le relèvement

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

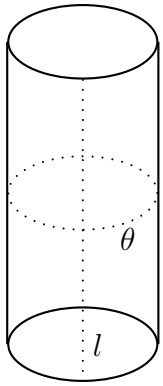


FIG. 5.1 – $\mathcal{C}^{\text{lox}}$

Il s'en suit que C et M sont deux éléments triangulaires supérieurs de SU(2,1). On vérifie alors que tout élément triangulaire supérieur de SU(2,1) M, tel que $M\overline{M}$ est soit unipotent soit une translation non-verticale, soit l'identité. Ce dernier cas ne correspond pas à une isométrie parabolique.

□

5.5 Représentations du groupe fondamental de la sphère privée de trois disques

Désignons par $\mathcal{C}^{\text{lox}}$ l'ensemble des classes de conjugaisons loxodromiques de PU(2,1). $\mathcal{C}^{\text{lox}}$ est un cylindre. En effet, la classe de conjugaison d'un élément loxodromique est entièrement déterminée par μ, sa valeur propre de module plus grand que 1. Le module de μ détermine la longueur de translation l, et son argument détermine l'angle de rotation θ. $\mathcal{C}^{\text{lox}}$ est donc paramétré par $\mathbb{R}\times S^1$. Nous appellerons les sous-ensembles de $\mathcal{C}^{\text{lox}}$ donnés par $\{\theta = \text{constante}\}$ les *génératrices* de $\mathcal{C}^{\text{lox}}$.

Fixons $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux telles classes de conjugaisons, et définissons l'application

$$\begin{array}{rccc} \pi & \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 & \longrightarrow & \mathcal{C}^{\text{lox}} \\ & (A,B) & \longmapsto & [AB] \end{array} \tag{5.13}$$

Nous allons montrer que quelles que soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, π est surjective. Dans ce but, nous commençons par étudier les représentations réductibles, i.e. les groupes engendrés par deux éléments loxodromiques ayant le même axe complexe. Nous noterons $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^{\text{red}}$ l'ensemble des paires d'isométries loxodromiques ayant même axe complexe.

Lemme 5.20. *L'image de la restriction de π à $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^{red}$ est une génératrice du cylindre $\mathcal{C}^{lox}$.*

Démonstration. Soient l_i et θ_i $(i = 1, 2)$ les longueurs de translation et angles de rotation associés à $\mathcal{C}_i$. Si A et B sont respectivement dans $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, on vérifie facilement que l'angle de rotation de AB est $\theta_1 + \theta_2$. (On peut pour cela écrire des relèvements de A et B à SU(2,1) dans une base contenant un vecteur polaire à leur axe complexe commun). C'est un résultat classique qu'il n'y a alors aucune restriction sur la longueur de translation de AB. (En d'autres termes, l'espace de Teichmüller de la sphère privée de trois disques est $\mathbb{R}^3$ tout entier). D'où le résultat. □

Proposition 5.21. *L'application π est surjective.*

Démonstration. $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ déterminent $\operatorname{tr} A$ et $\operatorname{tr} B$. D'après la proposition 5.2, on peut donc voir $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ comme l'ensemble

$$\left\{ (\omega_a, \omega_b, \omega_c) \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} |\omega_a \omega_b \omega_c| = 1 \\ 2\mathrm{Re}\,(\omega_c) = \dfrac{1}{|\omega_b|^2}\left(\left|1 - \dfrac{1}{\omega_a}\right|^2 - 1 \right) + \left|1 - \dfrac{1}{\omega_b}\right|^2 \end{array} \right\}$$

Soit T l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (A, B) & \longmapsto & \operatorname{tr} AB. \end{array}$$

L'image de T contient toutes les traces d'éléments loxodromiques. En effet, d'après la relation (5.3), dans les coordonnées birapport, cette application est affine réelle :

$$\operatorname{tr} AB = \omega_c h(\mu, \nu) + \bar{\omega}_c h(\bar{\mu}^{-1}, \bar{\nu}^{-1}) + \frac{1}{\omega_b} h(\mu, \bar{\nu}^{-1}) + \frac{1}{\bar{\omega}_b} h(\bar{\mu}^{-1}, \nu) + \alpha. \tag{5.14}$$

(Voir la preuve de la proposition 5.15.)

Elle est donc ouverte et fermée. Son image est donc un sous-ensemble ouvert et fermé du cylindre $\mathcal{C}^{\mathrm{lox}}$. Elle contient de plus une génératrice d'après le lemme 5.20 donc est non-vide. D'où le résultat. □

Rappelons que le groupe fondamental de la sphère privée de trois points admet la présentation

$$\langle c_1, c_2, c_3 \,|\, c_1 c_2 c_3 = 1 \rangle$$

On en déduit de la proposition 5.21 le

Corollaire 5.22. *Soient $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ trois classes de conjugaisons loxodromiques dans SU(2,1). Il existe une représentation ρ du groupe fondamental de la sphère moins trois points dans SU(2,1) telle que $\rho(c_i) \in \mathcal{C}_i$ $(i = 1, 2, 3)$.*

Chapitre 6

Groupes triangulaires

6.1 Introduction

Rappelons la

Définition 6.1. Un groupe triangulaire est un représentation ρ du groupe de présentation $\langle i_1, i_2, i_3 | i_k^2 = 1\rangle$ dans $\widehat{\mathrm{PU}(2,1)}$. Un groupe triangulaire est dit lagrangien (resp. complexe) si pour $k = 1, 2, 3$ $\rho(i_k)$ est une réflexion lagrangienne (resp. une reflexion complexe d'ordre deux).

Nous parlerons souvent du groupe triangulaire $\langle I_1, I_2, I_3\rangle$, où $I_k \in \widehat{\mathrm{PU}(2,1)}$ pour dire que $\rho(i_k) = I_k$.

Dans ce chapitre nous nous intéressons aux représentations de $F_2 = \langle \mathtt{m}, \mathtt{n}\rangle$ par des paires décomposables d'éléments d'isométries. Si ρ est une telle représentation, il existe trois involutions isométriques I_1, I_2 et I_3 telles que

$$\rho(\mathtt{m}) = I_1 \circ I_2 \text{ et } \rho(\mathtt{n}) = I_3 \circ I_2. \tag{6.1}$$

I_1, I_2 et I_3 sont soit des réflexions lagrangiennes, soit des réflexions complexes d'ordre deux, fixant point par point une droite complexe.

$$\begin{aligned} \rho([\mathtt{m}, \mathtt{n}]) &= I_1 I_2 I_3 I_2 I_2 I_1 I_2 I_3 \\ &= (I_1 I_2 I_3)^2 \end{aligned}$$

Notre approche est basée sur la remarque suivante. Supposons que l'isométrie $(I_1 I_2 I_3)^2$ soit loxodromique, parabolique ou elliptique régulière. Définissons alors p_2 de la manière suivante :

- Si $(I_1 I_2 I_3)^2$ est elliptique régulier ou parabolique, p_2 est son point fixe.
- Si $(I_1 I_2 I_3)^2$ est loxodromique, p_2 est son point fixe attractif.

Posons $p_3 = I_1(p_2)$ et $p_1 = I_3(p_2)$. Nous sommes alors dans la situation suivante :

$$p_2 \overset{I_1}{\longleftrightarrow} p_3 \overset{I_2}{\longleftrightarrow} p_1 \overset{I_3}{\longleftrightarrow} p_2. \tag{6.2}$$

Remarque 6.2. Avec ces notations, p_1 est le point fixe de $I_2I_1I_3$, et p_3 celui $I_1I_3I_2$.

Définition 6.3. Nous dirons que I_1, I_2 et I_3 vérifient la condition (C) si le cycle décrit ci-dessus est non-dégénéré, c'est à dire si $i \neq j$ implique $p_i \neq p_j$.

Remarque 6.4. Si p_1, p_2 et p_3 sont confondus en un point de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, le groupe $\langle I_1, I_2, I_3\rangle$ est discret si et seulement si il est fini : son sous-groupe d'indice 2 engendré par $\langle I_1I_2, I_3I_2\rangle$ est contenu dans un plongement de U(2) dans PU(2,1). Ces groupes ont été étudiés par Falbel et Paupert dans [FP04].

(p_1, p_2, p_3) est un cycle de longueur trois associé au triplet (I_1, I_2, I_3). Une fois fixés les trois points du cycle, il suffit de connaître les triplets d'involutions tels que $I_k(p_{k+1}) = p_{k+2}$ (indices pris modulo 3) pour décrire les groupes admettant ce cycle. Posons donc les définitions suivantes.

Définition 6.5. Nous appellerons $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ (respectivement $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$) l'ensemble des groupes triangulaires complexes (resp. lagrangiens) $\langle I_1, I_2, I_3\rangle$ satisfaisant aux conditions suivantes.
- L'isométrie $(I_1I_2I_3)^2$ est parabolique ou loxodromique.
- (I_1, I_2, I_3) vérifie la condition (C).

Définition 6.6. Nous appellerons $\mathcal{D}^{\text{par}}_{\mathbb{C}}$ (respectivement $\mathcal{D}^{\text{par}}_{\mathbb{R}}$) l'ensemble des groupes triangulaires dans $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ (respectivement $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$) tels que $(I_1I_2I_3)^2$ est parabolique.

Remarque 6.7. A tout élément de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ est donc associé une représentation $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ décomposable de F_2 dans PU(2,1) en posant

$$\rho(\mathtt{m}) = I_1I_2 \text{ et } \rho(\mathtt{n}) = I_3I_2.$$

Notons que contrairement au chapitre précédent, nous n'imposons aucune restriction sur les éléments $\rho(\mathtt{m})$ et $\rho(\mathtt{n})$. En particulier $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ contiennent des groupes triangulaires pour lesquels $\rho(\mathtt{m})$ et $\rho(\mathtt{n})$ ne sont pas loxodromiques.

En adoptant le point de vue explicité ci-dessus, nous allons définir des coordonnées sur $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$. Dans les deux cas, le cycle (p_1, p_2, p_3) est situé dans $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, car p_2 est un point fixe de $\rho([\mathtt{m}, \mathtt{n}])$, et est donc situé dans $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Ces coordonnées sont obtenues via une construction géométrique permettant de paramétrer les triplets d'involutions vérifiant (6.2).
Nous allons ainsi définir deux applications

$$\begin{aligned} c_{\mathbb{C}} &: \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ c_{\mathbb{R}} &: \mathcal{D}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times (S^1)^3 \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]. \end{aligned}$$

Ces deux applications associent à une représentation des invariants géométriques. Dans les deux cas le facteur $\mathbb{R}^3$ correspond à un triplet de longueurs, mesurées sur les côtés du triangle idéal $p_1p_2p_3$. Le facteur $[-\pi/2, \pi/2]$ correspond à l'invariant de Cartan du triplet (p_1, p_2, p_3), et, dans le cas de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$, le facteur $(S^1)^3$ correspond à un triplet d'angles entre $\mathbb{R}$-plans.
Nous allons montrer les propositions suivantes, qui fournissent des critères de conjugaisons dans $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$.

Proposition 6.8. *L'application $c_{\mathbb{C}}$ a les propriétés suivantes.*

1. *$c_{\mathbb{C}}$ est surjective*
2. *Soient ρ_1 et ρ_2 dans $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$. Sont équivalentes*
   (a) $c_{\mathbb{C}}(\rho_1) = c_{\mathbb{C}}(\rho_2)$
   (b) *ρ_1 et ρ_2 sont conjuguées dans PU(2,1).*

Proposition 6.9. *L'application $c_{\mathbb{R}}$ a les propriétés suivantes.*

1. *$c_{\mathbb{R}}$ est surjective.*
2. *Soient ρ_1 et ρ_2 dans $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$. Sont équivalentes :*
   (a) $c_{\mathbb{R}}(\rho_1) = c_{\mathbb{R}}(\rho_2)$
   (b) *ρ_1 et ρ_2 sont conjuguées dans PU(2,1).*

Notre but est d'identifier les représentations ρ appartenant à $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\text{par}}$ et $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{\text{par}}$. Nous obtenons un critère de parabolicité en termes des deux applications $c_{\mathbb{C}}$ et $c_{\mathbb{R}}$ dans la section 6.4.

Nous terminerons ce chapitre par une brève description du cas où $(I_1I_2I_3)^2$ est elliptique.

6.2 Les triangles idéaux et leurs symétries

Dans cette section, nous allons rappeler quelques faits au sujet des triangles idéaux. Un triangle idéal est un triplet ordonné de points (ses sommets) du bord de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Les arêtes de ce triangles sont les géodésiques reliant les sommets. Nous avons vu dans le chapitre 1 (page 47) que les triangles idéaux étaient classifiés modulo PU(2,1) par l'invariant de Cartan $\mathbb{A} \in [-\pi/2, \pi/2]$ (voir théorème 1.89).

Paramétrisation standard des géodésiques Tout au long de ce chapitre, nous allons utiliser de manière importante la paramétrisation suivante des géodésiques reliant deux points du bord de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Soient p et q deux points au bord de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Choisissons des relèvements $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ de p et q tels que $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = -1$ Dans ces conditions, la géodésique σ reliant p et q est paramétrée – en version relevée – par :

$$\sigma(t) = e^{\frac{t}{2}}\mathbf{p} + e^{-\frac{t}{2}}\mathbf{q}. \tag{6.3}$$

t est la longueur d'arc :

$$d\left(\sigma(t), \sigma(s)\right) = |t - s|.$$

Voir [Par03] pour plus de détails. Nous appellerons ce choix de paramétrisation des géodésiques la *paramétrisation standard associée aux relèvements* $\mathbf{p}$ *et* $\mathbf{q}$ *de* p *et* q. Il faut prendre garde au fait que cette paramétrisation dépend du choix des relèvements.

Les symétries des triangles idéaux Le lemme suivant, dû à Goldman, décrit les symétries des triangles idéaux.

Lemme 6.10. *Soit* (p_1, p_2, p_3) *un triplet de points de* $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$*, non contenu dans une droite complexe. Il existe un unique triplet de* $\mathbb{R}$*-plans* $\mathcal{L}(p_1, p_2, p_3) = (L_1, L_2, L_3)$*, vérifiant*

$$I_{L_i} \text{ échange } p_{i+1} \text{ et } p_{i+2} \text{ et fixe } p_i$$

les indices étant pris modulo trois (voir [Gol99] lemme 7.1.7).

Démonstration. Soit par exemple C_{23} la droite complexe contenant p_2 et p_3, et q_1 le projeté orthogonal de p_1 sur C_{23}. Par hypothèse, p_1 et q_1 sont distincts. Soient donc γ la géodésique reliant p_1 et q_1, et γ' la géodésique tracée dans C_{23} passant par q_1 et orthogonale à la géodésique (p_2p_3). γ et γ' s'intersectent en q_1 et engendrent des droites complexes qui sont orthogonales. γ et γ' sont donc contenues dans un $\mathbb{R}$-plan L_1, qui contient p_1, et intersectent C_{23} le long d'une géodésique orthogonale à (p_2p_3). □

Remarque 6.11. En définissant le groupe de symétrie d'un triangle idéal de la même façon que pour les tétraèdres idéaux (voir le chapitre 4), le lemme 6.10 implique que génériquement, les triangle idéaux admettent S_3 comme groupe de symétrie, les transpositions étant antiholomorphes. Les éléments d'ordre trois du groupe de symétrie sont E et E^{-1}, avec $E = I_{L_1} \circ I_{L_2} = I_{L_2} \circ I_{L_3} = I_{L_3} \circ I_{L_1}$. E est un élément elliptique d'ordre trois qui permute cycliquement p_1, p_2 et p_3. Les trois $\mathbb{R}$-plans L_1, L_2 et L_3 s'intersectent au point fixe de E, qui est en fait le barycentre de p_1, p_2 et p_3.

Etant donné trois points de $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, le lemme 6.10 nous fournit trois réflexions lagrangiennes de référence, vérifiant (6.2). Les $\mathbb{R}$-plans L_1, L_2 et L_3, fixés par ces trois réflexions lagrangiennes vont nous servir de configurations de référence pour définir les application $c_{\mathbb{C}}$ et $c_{\mathbb{R}}$ sur $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$. Le premier pas est donné par le lemme suivant.

Lemme 6.12. *Soient* p_1*,* p_2 *et* p_3 *trois points dans* $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$*. Il existe un choix de relèvements des ces trois points tel que le* $\mathbb{R}$*-plan* L_i *coupe la géodésique* $(p_{i+1}p_{i+2})$ *en son point de paramètre* 0 *pour la paramétrisation standard.*

Démonstration. Relevons p_1, p_2 et p_3 en $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ et $\mathbf{p}_3$ de sorte que

$$\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \rangle = -1 \text{ et } \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_1 \rangle = -e^{i\mathbb{A}} \tag{6.4}$$

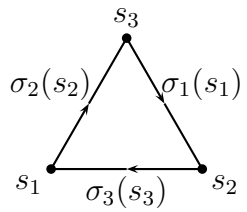


FIG. 6.1 – Orientation des géodésiques reliant les points du cycle.

Les trois géodésiques $\sigma_1 = (p_2p_3)$, $\sigma_2 = (p_3p_1)$ et $\sigma_3 = (p_1p_2)$ admettent les paramétrisations standards

$$\begin{cases} \sigma_1(s_1) &= e^{s_1/2}\mathbf{p}_2 + e^{-s_1/2}\mathbf{p}_3 \\ \sigma_2(s_2) &= e^{-i\mathbb{A}}e^{s_2/2}\mathbf{p}_3 + e^{-s_2/2}\mathbf{p}_1 \text{ avec } s_i \in \mathbb{R} \text{ et } -\frac{\pi}{2} \leqslant \mathbb{A} \leqslant \frac{\pi}{2}. \\ \sigma_3(s_3) &= e^{s_3/2}\mathbf{p}_1 + e^{-s_3/2}\mathbf{p}_2 \end{cases} \tag{6.5}$$

Les géodésiques σ_i sont donc orientées comme indiqué sur la figure 6.1.

Si p et q sont deux points de $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ relevés de sorte de $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q}\rangle = -1$, la projection d'un point z sur la géodésique (pq) admet le relèvement suivant (voir [Par03]).

$$\sqrt{\frac{|\langle \mathbf{z}, \mathbf{q}\rangle|}{|\langle \mathbf{z}, \mathbf{p}\rangle|}} \cdot \mathbf{p} \quad + \quad \sqrt{\frac{|\langle \mathbf{z}, \mathbf{p}\rangle|}{|\langle \mathbf{z}, \mathbf{q}\rangle|}} \cdot \mathbf{q}$$

Dans le cas qui nous intéresse, $|\langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j\rangle| = 1$. Les composantes selon p_{i+1} et p_{i+2} de la projection de p_i sur σ_i sont donc égales. Le résultat en découle. □

Remarque 6.13. Pour écrire cette paramétrisation de σ_2 en utilisant la forme 6.3, nous nous sommes ramenés au cas ou $\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3\rangle = -1$, en multipliant le relèvement initial de $\mathbf{p}_3$ par $e^{-i\mathbb{A}}$.

Notations Par la suite, nous appellerons m_k l'intersection de σ_k et L_k. Nous appellerons L'_k le $\mathbb{R}$-plan passant par m_k, orthogonal à L_k (i.e. d'angle $(\pi/2, \pi/2)$). L'_k contient donc σ_k et m_k.

Dans le cas où les trois points p_1, p_2 et p_3 sont situés dans une droite complexe, les trois $\mathbb{R}$-plans L_i ne sont plus uniques : il existe un cercle de $\mathbb{R}$-plans P tels que $I_P(p_i) = p_i$ et $I_P(p_{i+1}) = p_{i+2}$.

Nous terminons ce paragraphe par le lemme suivant, qui nous servira dans la définition de $c_{\mathbb{R}}$ (voir le paragraphe 6.3.3).

Lemme 6.14. *Soit P un $\mathbb{R}$-plan tel que I_P échange p_{i+1} et p_{i+2}. P intersecte L'_i en un point de σ_i, et l'angle entre P et L'_i a pour mesure $(\pi/2, \theta_i)$ avec $\theta_i \in [0, \pi[$.*

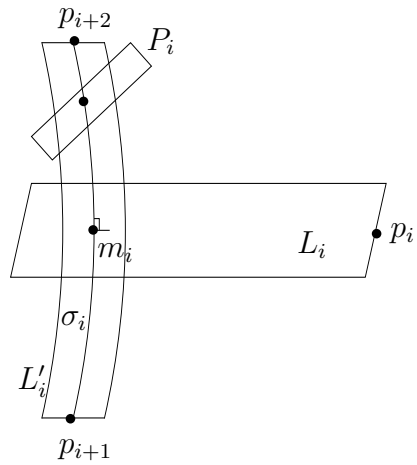


FIG. 6.2 – Positions relatives de P_i et L_i.

Démonstration. I_P échange les extrémités de σ_i, donc admet un point fixe à l'intérieur de σ_i. C'est l'intersection de P avec $\sigma_i \subset L'_i$. Le fait que I_P échange les extrémités de σ_i impose que l'angle entre P et L'_i lu dans la droite complexe engendrée par σ_i a pour mesure $\pi/2$. Voir la figure schématique 6.2. □

Remarque 6.15. Notons que θ_i peut prendre n'importe quelle valeur dans $[0, \pi[$: pour tout $\theta \in [0, \pi[$, il existe un $\mathbb{R}$-plan échangeant p_{i+1} et p_{i+2} dont l'angle avec L'_i a pour mesure $(\pi/2, \theta)$.

6.3 Coordonnées sur $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$

6.3.1 Les involutions échangeant deux points du bord

Commençons par la

Proposition 6.16. *Soient p et q deux points de $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.*

- *Il existe une famille à un paramètre $t \in \mathbb{R}$ de réflexions complexes d'ordre deux R telles que $R(p) = q$.*
- *Il existe une famille à deux paramètres $(t, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, \pi[$ de $\mathbb{R}$-plans P tels que $I_P(p) = q$.*

Démonstration. Soient L la droite complexe contenant p et q, et σ la géodésique reliant p et q. On paramètre σ par l'abscisse curviligne $t \in \mathbb{R}$. Soit Q un $\mathbb{R}$-plan quelconque contenant p et q (donc σ).

- Toute réflexion complexe complexe d'ordre deux échangeant p et q a pour miroir la droite complexe orthogonale à L en un point de paramètre t de σ.

– Tout $\mathbb{R}$-plan P tels que $I_P(p) = q$ contient une géodésique tracée dans L, orthogonale à σ. A tout point de σ, de paramètre $t \in \mathbb{R}$ est associé un cercle de tels $\mathbb{R}$-plans, paramétrés par leur angle avec Q, de mesure $(\pi/2, \theta)$ $(\theta \in [0, \pi[)$.

□

Nous allons maintenant expliciter ces deux familles d'involutions échangeant deux points du bord. Etant donnés p et q, deux points au bord de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, choisissons deux relèvements $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ tels que $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 1$, et munissons la géodésique σ qui les relie de la paramétrisation donné par 6.3. Soit alors pour tout réel t le vecteur

$$\mathbf{c}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{t}{2}} \mathbf{p} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{t}{2}} \mathbf{q} \tag{6.6}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, le vecteur $\mathbf{c}(t)$ vérifie $\langle \mathbf{c}(t), \mathbf{c}(t) \rangle = 1$. En utilisant la proposition 1.36 page 34, on vérifie que la réflexion par rapport à la droite complexe $C(t)$ à laquelle $\mathbf{c}(t)$ est polaire échange p et q.

Pour obtenir des matrices associées aux réflexions lagrangiennes échangeant p et q, travaillons dans la base $(\mathbf{p}, \mathbf{p} \boxtimes \mathbf{q}, \mathbf{q})$. Dans cette base, la forme hermitienne a pour matrice

$$J_{p,q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \langle \mathbf{p} \boxtimes \mathbf{q}, \mathbf{p} \boxtimes \mathbf{q} \rangle & 0. \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient cette fois pour les réflexions échangeant p et q

$$M_{t,\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -e^{-t-i\alpha} \\ 0 & -e^{2i\alpha} & 0 \\ -e^{t-i\alpha} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si l'on travaille dans un modèle associé à une forme J fixée, il est attaché à J et $J_{p,q}$ une transformation de Cayley. Pour obtenir des matrices, dans le modèle dans lequel on travaille, il faut conjuguer $M_{t,\alpha}$ par la transformation de Cayley en respectant l'antiholomorphie des réflexions lagrangienne (voir la remarque 1 page 40). Si P est un relèvement de la transformation de Cayley, la nouvelle matrice s'écrit $PM_{t,\alpha}\overline{P^{-1}}$. On vérifie alors que

$$PM_{t,\alpha}\overline{P^{-1}}\overline{PM_{t,\alpha}\overline{P^{-1}}} = Id.$$

6.3.2 Groupes triangulaires complexes : coordonnées sur $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$.

Définissons maintenant l'application $c_{\mathbb{C}}$.

A tout triplet de réflexions complexes d'ordre deux (I_1, I_2, I_3) tel que $I_1 I_2 I_3$ est non-elliptique on associe le quadruplet

$$c_{\mathbb{C}}(I_1, I_2, I_3) = (t_1, t_2, t_3, \mathbb{A}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \tag{6.7}$$

de la manière suivante :

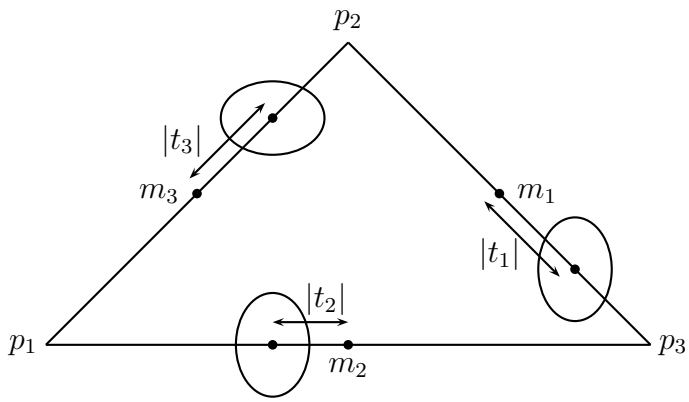


FIG. 6.3 – Coordonnées sur $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$.

- $\mathbb{A}$ est l'invariant de Cartan du triplet (p_1, p_2, p_3).
- Le miroir de I_k coupe σ_k au point de paramètre t_k (en utilisant la paramétrisation des trois géodésiques donnée par la relation 6.5 page 111.) Voir la figure 6.3.

D'après la proposition 6.16 et la relation (6.6), les trois réflexions complexes I_1, I_2 et I_3 ont pour miroirs respectifs les droites complexes polaires aux vecteurs

$$\begin{cases} \mathbf{c}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{t_1/2}\mathbf{p}_2 - e^{-t_1/2}\mathbf{p}_3\right) \\ \mathbf{c}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\mathbb{A}}e^{t_2/2}\mathbf{p}_3 - e^{-t_2/2}\mathbf{p}_1\right) \text{ avec } (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } -\frac{\pi}{2} \leqslant \mathbb{A} \leqslant \frac{\pi}{2}. \\ \mathbf{c_3} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{t_3/2}\mathbf{p}_1 - e^{-t_3/2}\mathbf{p}_2\right) \end{cases} \tag{6.8}$$

Remarque 6.17. La valeur absolue de t_i est la distance $d\left(\sigma_k(t_k), m_k\right)$.

Nous pouvons maintenant prouver la proposition 6.8.

Démonstration. de la proposition 6.8

1. c_C est surjective. En effet, soit $(t_1, t_2, t_3, \mathbb{A}) \in \mathbb{R}^3 \times [-\pi/2, \pi/2]$. Fixons un triplet de points (p_1, p_2, p_3) au bord de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, d'invariant de Cartan $\mathbb{A}$. Pour i, j et k deux à deux distincts, soit σ_i la géodésique joignant p_j et p_k. Munissons σ_1, σ_2 et σ_3 d'un paramétrage standard adapté, tel qu'en (6.5). D'après la proposition 6.16, il existe un unique triplet de réflexions complexes (I_1, I_2, I_3) tel que I_i échange p_j et p_k et fixe le point de paramètre t_i de σ_i. Par construction $c_{\mathbb{C}}(I_1, I_2 I_3) = (t_1, t_2, t_3, \mathbb{A})$.
2. – b implique a car les quantités t_1, t_2, t_3 et $\mathbb{A}$ sont des invariants de conjugaison de la configuration.
   – Prouvons l'autre implication. Soient (I_1, I_2, I_3) et (I'_1, I'_2, I'_3) deux triplets de réflexions complexes tels que
   $$c_{\mathbb{C}}\left(I_1, I_2, I_3\right) = c_{\mathbb{C}}(I'_1, I'_2, I'_3).$$

Soient (p_1, p_2, p_3) et (p'_1, p'_2, p'_3) les triplets de points associés respectivement à (I_1, I_2, I_3) et (I'_1, I'_2, I'_3) comme en (6.2). Par hypothèse, ces deux triplets ont même invariant de Cartan. Il existe donc $g \in \mathrm{PU}(2,1)$ tel que $g(p_i) = p'_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Appelons c_k (resp. c'_k) le miroir de I_k (resp. I'_k). Vu le choix fait pour la paramétrisation des trois géodésiques σ_i, et l'expression ci-dessus pour les c_k, le fait que $t_k = t'_k$ implique que $g(c_k) = c'_k$.

□

6.3.3 Le cas $\mathbb{R}$-décomposable : coordonnées sur $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$.

Dans ce cas, le produit $I_1 I_2 I_3$ est antiholomorphe. Nous dirons qu'il est non-elliptique s'il n'a pas de point fixe à l'intérieur de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Si c'est le cas, $I_1 I_2 I_3$ et son carré $(I_1 I_2 I_3)^2 = \rho([\mathtt{m}, \mathtt{n}])$ ont exactement les mêmes points fixes.
Rappelons qu'au triplet (I_1, I_2, I_3) sont associés canoniquement les objets suivants :

- P_1, P_2 et P_3, les trois $\mathbb{R}$-plans fixés respectivement par I_1, I_2 et I_3.
- le triplet de points (p_1, p_2, p_3) tel que $I_i(p_j) = p_k$, pour i, j et k deux à deux distincts.
- les trois géodésiques σ_1, σ_2 et σ_3 reliant respectivement p_2 et p_3, p_1 et p_3 et p_1 et p_2.
- les trois points ι_k, intersections de P_k avec σ_k.
- les trois $\mathbb{R}$-plans L_1, L_2 et L_3 tels que $I_{L_i}(p_i) = p_i$ et $I_{L_i}(p_j) = p_k$ (voir le lemme 6.10). Nous appellerons m_k l'intersection (orthogonale) de L_k avec σ_k.
- les trois $\mathbb{R}$-plans L'_k intersectant L_k au point $m_k \in \gamma_k$ avec un angle de mesure $(\pi/2, \pi/2)$. Notons que L'_k contient γ_k car il est orthogonal à L_k.

I_k intersecte donc L'_k au point ι_k. P_k échangeant les extrémités de γ_k, le produit $I_k \circ I_{P'_k}$ stabilise la droite complexe engendrée par γ_k. De plus, l'angle entre P_k et L'_k est de la forme $(\pi/2, \beta_k)$. Par conséquent, la donnée de β_k détermine un unique $\mathbb{R}$-plan parmis tous ceux qui intersectent γ_k en ι_k et qui permutent les extémités de γ_k.
Nous supposerons les trois géodésiques σ_1, σ_2 et σ_3 équipées d'un paramétrage standard satisfaisant aux conditions du lemme 6.12. En conséquence m_k est le point de paramètre 0 de σ_k.
Définissons l'application $c_{\mathbb{R}}$.
Soit (I_1, I_2, I_3) un triplet de réflexions lagrangiennes tel que $I_1 I_2 I_3$ est non-elliptique. Au triplet (I_1, I_2, I_3), on associe

$$c_{\mathbb{R}}\,(I_1, I_2, I_3)\,(t_1, \theta_1, t_2, \theta_2, t_3, \theta_3, \mathbb{A}) \in (\mathbb{R} \times [0, \pi[)^3 \times [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \tag{6.9}$$

de la manière suivante :

- $\mathbb{A}$ est l'invariant de Cartan du triplet (p_1, p_2, p_3).
- ι_k, intersection de P_k et L'_k, est le point de paramètre t_k de la géodésique σ_k.
- L'angle entre P_k et L'_k a pour mesure $(\pi/2, \theta_k)$ (voir le lemme 6.14)

Remarque 6.18. La valeur absolue de t_i est exactement la distance séparant $m_i = L_i \cap \sigma_i$ et le point $\iota_i = P_i \cap \sigma_i$

Remarque 6.19. Il n'existe pas d'équivalent des vecteurs polaires pour les réflexions lagrangiennes. Il n'existe donc pas de description aussi simple que 6.8 pou les groupes triangulaires lagrangiens. Il serait possible de donner des matrices de relèvement de I_1, I_2 et I_3, mais leur complexité les rend peu parlantes.

Démonstration. de la proposition 6.9

1. La preuve de la surjectivité de $c_{\mathbb{R}}$ est la même que pour $c_{\mathbb{C}}$, a ceci près qu'il faut utiliser la remarque 6.15 pour montrer que θ_1, θ_2 et θ_3 parcourent $[0, \pi[$.
2. – De même que précédemment, b implique a car toutes les quantités impliquées sont des invariants de conjugaison.
   – Si deux groupes triangulaires lagrangiens (I_1, I_2, I_3) et (I'_1, I'_2, I'_3) ont même image par $c_{\mathbb{R}}$, quitte à conjuguer dans PU(2,1), on peut supposer qu'sls ont le même cycle (p_1, p_2, p_3). Pour tous t_i et θ_i il existe un unique $\mathbb{R}$-plan échangeant p_j et p_k, coupant σ_i en son point de paramètre t_i, ayant un angle de mesure $(\pi/2, \theta_i)$ avec L'_i. Le résultat en découle directement.

□

6.4 Quand le commutateur est-il parabolique ?

Nous nous intéressons dans cette section à l'éventuelle parabolicité du commutateur de $[I_1I_2, I_3I_2] = (I_1I_2I_3)^2$. Nous allons commencer par donner une condition nécessaire de parabolicité du commutateur commune à $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$. Cette condition repose sur le fait que si $(I_1I_2I_3)^2$ est parabolique et fixe p_2, alors $I_1I_2I_3$ stabilise toute horosphère centrée en p_2. Nous commençons donc par le lemme suivant,qui décrit les horosphères centrées en un point p en utilisant le paramétrage standard des géodésiques issue de p.

Lemme 6.20. *Soit p un point de $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ et $\mathbf{p}$ un relèvement fixé de p. Pour tout point $q \in \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, on choisit $\mathbf{q}$ le seul relèvement de q tel que $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 1$, et on munit la géodésique $\gamma_q = (pq)$ du paramétrage standard $t \to \gamma_q(t)$ associé à $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$. Alors, les horosphères centrées en p sont exactement les ensembles*

$$H_s = \left\{ \gamma_q(s), q \in \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} \setminus \{p\} \right\}.$$

Démonstration. Utilisons le modèle de Siegel. Soient alors q_1 et q_2 deux points distincts de $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, distincts de p, et $\mathbb{A}$ l'invariant de Cartan du triplet (q_1, p, q_2) (voir définition 1.86). En normalisant la situation, on peut supposer que p est à l'infini, et que p, q_1 et q_2 admettent les relèvements

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} -e^{-i\mathbb{A}} \\ i\sqrt{2\cos\mathbb{A}}e^{-i\mathbb{A}/2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{6.10}$$

En écrivant les paramétrages standards des deux géodésiques $\mathbf{pq_1}$ et $\mathbf{pq_2}$, puis en les renormalisant de façon à ce que la dernière coordonnée soit 1, on obtient les paramétrages suivants :

$$\gamma_{q_1}(t_1) = \begin{bmatrix} -e^{t_1} - e^{-i\mathbb{A}} \\ i\sqrt{2\cos\mathbb{A}}e^{-i\mathbb{A}/2} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } \gamma_{q_2}(t_2) = \begin{bmatrix} -e^{t_2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{6.11}$$

Les coordonnées horosphériques de $\gamma_{q_1}(t_1)$ et $\gamma_{q_2}(t_2)$ sont donc (voir le chapitre 1 page 23) :

$$\begin{aligned} \gamma_{q_1}(t_1) &: \left(\sqrt{i\cos\mathbb{A}}e^{-i\mathbb{A}/2}, \sin\mathbb{A}, e^{t_1}\right) \\ \gamma_{q_2}(t_2) &: \left(0, 0, e^{t_2}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, les points $\gamma_1(t_1)$ et $\gamma_2(t_2)$ sont situés sur une même horosphère centrée en p si et seulement si $t_1 = t_2$. □

Remarque 6.21. Dans le lemme précédent, il est crucial de fixer un relèvement de p, et d'utiliser le même pour tous les points q de $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Le lemme 6.22 va nous permettre de « suivre » une horosphère le long du cycle p_1– p_2– p_3.

Lemme 6.22. *Soit I une isométrie d'ordre deux échangeant deux points p et q de $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Munissons la géodésique $\gamma = (pq)$ du paramétrage standard. Soit alors $s \in \mathbb{R}$ l'abscisse curviligne du point de γ fixé par I.*

L'image par I de l'horosphère centrée en p et intersectant γ en son point de paramètre t est l'horosphère centrée en q intersectant γ en son point de paramètre $2s - t$.

Démonstration. I agit sur γ comme un demi tour euclidien sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, le point de paramètre t de γ est envoyé par I sur le point de paramètre $2s - t$. Le résultat découle alors de ce qu'une horosphère est entièrement définie par la donnée de son centre et d'un point qu'elle contient. □

Proposition 6.23. *Soient p_1, p_2 et p_3 trois points de $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, et soit γ_i la géodésique reliant p_{i+2} à p_{i+1} munie du paramétrage standard. Soient I_1, I_2 et I_3 trois involutions isométriques telles que I_k échange p_{k+1} et p_{k+2}, et fixe le point de paramètre t_k de γ_k. Si l'élément $I_1I_2I_3$ est parabolique, alors*

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0$$

Voir la figure 6.1.

Démonstration. Soit H une horosphère centrée en p_2. On suppose que H intersecte γ_3 en son point de paramètre $a \in \mathbb{R}$. Vu le lemme 6.22, I_3 envoie H sur H', l'horosphère centrée en p_1, intersectant γ_3 en son point de paramètre $2t_3 - a$. D'après le lemme 6.20, H' intersecte la géodésique $\gamma_2 = (p_1 p_3)$ en son point de paramètre $a - 2t_3$ (on a changé de signe pour tenir compte de l'orientation des géodésiques). En appliquant, ensuite I_2 et I_1, on constate que $I_1 I_2 I_3$ envoie H sur l'horosphère centrée en p, intersectant γ_3 en son point de paramètre $a + 2(t_1 + t_2 + t_3)$. Comme les éléments paraboliques stabilisent les horosphères, on obtient le résultat. □

La proposition 6.23 donne donc une condition nécessaire de parabolicité sur $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$. Elle n'est pas suffisante : une transformation stabilisant une horosphère de centre p peut être parabolique, mais elle peut aussi être une réflexion complexe dont le miroir contient p dans son adhérence. Les deux propositions 6.24 et 6.25 identifient ces cas dégénérés, nous les énonçons avant de les prouver successivement.

Proposition 6.24. *Soit ρ une représentation appartenant à $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$, telle que*

$$c_{\mathbb{C}}(\rho) = (t_1, t_2, t_3, \mathbb{A})\,.$$

ρ appartient à $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{par}$ si et seulement si $t_1 + t_2 + t_3 = 0$ et

$$\cos(\mathbb{A}) \neq \frac{1 + r_1^2\,(1 + r_2^2)}{2r_1(1 + r_2 + r_1 r_2)}$$

où $r_k = e^{t_k}$ $(k = 1, 2)$.

Proposition 6.25. *Soit ρ une représentation appartenant à $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$, telle que*

$$c_{\mathbb{R}}(\rho) = (t_1, \theta_1, t_2, \theta_2, t_3, \theta_3, \mathbb{A}).$$

ρ appartient à $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{par}$ si et seulement si $t_1 + t_2 + t_3 = 0$ et

$$e^{2i(\theta_1 - \theta_2 + \theta_3)} \neq \frac{\tau}{\bar{\tau}} \text{ avec } \tau = r_1^2 r_2^2 - r_2^2 e^{2i\theta_1} + e^{2i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Dans le cas d'égalité, $\rho(\mathtt{m})$ et $\rho(\mathtt{n})$ commutent.

La démonstration de ces deux résultat se fait par le calcul. Nous normalisons le triplet (p_1, p_2, p_3), écrivons des matrices pour les trois involutions associées à un point de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ et déterminons par un calcul direct si le produit $I_1 I_2 I_3$ pour $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ et $(I_1 I_2 I_3)^2$ pour $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ est une réflexion complexe ou l'identité.

– Pour le cas de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$, il faut utiliser la matrice pour l'inversion par rapport à un $\mathbb{R}$-plan donnée en terme de centre et rayon du $\mathbb{R}$-cercle au premier chapitre (voir le lemme 1.66 page 40).

– Pour le cas de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$, il faut utiliser les vecteurs polaires au miroirs des réflexions.
Nous donnons à la fin de la section les éléments nécessaires à ce calcul. En utilisant les matrices que nous donnons, on peut calculer de façon précise la trace de $(I_1I_2I_3)^2$ dans $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$. On montre alors les résultats suivant :

Proposition 6.26. *Soit ρ un point de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ tel que $c_{\mathbb{C}}(\rho) = (t_1, t_2, t_3, \mathbb{A})$. Soit I_1, I_2 et I_3 les trois réflexions complexes associées. On a*

$$\operatorname{tr}\rho\left([\mathtt{m},\mathtt{n}]\right) = \operatorname{tr}(I_1I_2I_3)^2 = e^{-2i\mathbb{A}}\left(e^{2i(t_1+t_2+t_3)} + e^{-2i(t_1+t_2+t_3)}\right) + e^{4i\mathbb{A}}.$$

Proposition 6.27. *Soit ρ un point de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ tel que $c_{\mathbb{R}}(\rho) = (t_1, \theta_1, t_2, \theta_2, t_3, \theta_3\mathbb{A})$. Soit I_1, I_2 et I_3 les trois réflexions lagrangiennes associées. On a*

$$\operatorname{tr}\rho\left([\mathtt{m},\mathtt{n}]\right) = \operatorname{tr}(I_1I_2I_3)^2 = e^{2i(t_1+t_2+t_3)} + e^{-2i(t_1+t_2+t_3)} + 1.$$

On retrouve ainsi le fait que la condition $t_1 + t_2 + t_3 = 0$ est nécessaire. De plus, on constate la différence de comportement pour les points de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ où $(I_1I_2I_3)^2$, le commutateur de I_1I_2 et I_3I_2 est parabolique :

– Si le groupe triangulaire $\langle I_1, I_2, I_3\rangle$ appartient à $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ et est tel que $(I_1I_2I_3)^2$ est parabolique, alors $(I_1I_2I_3)^2$ est une translation de Heisenberg (de trace réelle égale à 3).
– Si le groupe triangulaire $\langle I_1, I_2, I_3\rangle$ appartient à $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$, et est tel que $(I_1I_2I_3)^2$ est parabolique, alors $(I_1I_2I_3)^2$ est ellipto-parabolique et sa trace vaut $2e^{-2i\mathbb{A}} + e^{4i\mathbb{A}}$. Cette dernière quantité paramétrise le « triangle des traces paraboliques », Δ (cf page 26).

Nous déduisons de cette dernière remarque la

Proposition 6.28. *Soit $\mathcal{C}$ une classe de conjugaison ellipto-parabolique. Il existe une représentation ρ, $\mathbb{C}$-décomposable de F_2 dans* PU(2,1) *telle que $\rho([\mathtt{m},\mathtt{n}]) \in \mathcal{C}$.*

D'où

Proposition 6.29. *Soit $\mathcal{C}$ une classe de conjugaison parabolique. Il existe une représentation $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$-décomposable de F_2 dans PU(2,1) telle que $\rho\left([\mathtt{m},\mathtt{n}]\right) \in \mathcal{C}$.*

Preuve des propositions 6.24 et 6.26

Choisissons un représentant particulier d'un point de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ en normalisant les trois points p_1, p_2 et p_3. Quitte à conjuguer, on peut supposer que le cycle est

$$p_1 = \begin{bmatrix} -e^{-i\mathbb{A}} \\ i\sqrt{2\cos\mathbb{A}}e^{-i\mathbb{A}/2} \\ 1 \end{bmatrix}, \; p_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } p_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Soit donc le point de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ de coordonnées $(t_1, t_2, t_3, \mathbb{A})$. Les miroirs des trois réflexions complexes décomposant $\rho(\mathtt{m})$ et $\rho(\mathtt{n})$ sont polaires aux vecteurs c_1, c_2 et c_3 obtenus par les relations 6.8.

Les trois vecteurs étant de norme unité, l'inversion I_k s'écrit $Z \to -Z + 2\langle Z, c_k\rangle c_k$ ou encore, sous forme matricielle

$$-Id + 2c_k c_k^*,$$

où c_k^* désigne la forme linéaire duale de c_k : $c_k^*(Z) = \langle Z, c\rangle$. Matriciellement, $c_k^* = J\bar{c}_k$. Nous obtenons de cette manière les trois matrices suivantes pour I_1, I_2 et I_3.

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{t_1} \\ 0 & -1 & 0 \\ e^{-t_1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} -e^{-(t_2+i\mathbb{A})} & i\sqrt{2\cos\mathbb{A}}e^{-(t_2+i\mathbb{A}/2)} & e^{-t_2} \\ -i\sqrt{2\cos\mathbb{A}}e^{i\mathbb{A}/2}\left(1-e^{-(t_2+i\mathbb{A})}\right) & 2\cos\mathbb{A}e^{-t_2}-1 & -i\sqrt{2\cos\mathbb{A}}e^{-t_2+i\mathbb{A}/2} \\ 2\cosh t_2 - 2\cos\mathbb{A} & i\sqrt{2\cos\mathbb{A}}e^{-i\mathbb{A}/2}\left(1-e^{-(t_2-i\mathbb{A})}\right) & -e^{-(t_2-i\mathbb{A})} \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} -e^{t_3-i\mathbb{A}} & -i\sqrt{2\cos\mathbb{A}}e^{i\mathbb{A}/2}\left(1-e^{-(-t_3+i\mathbb{A})}\right) & 2\cosh t_3 - 2\cos\mathbb{A} \\ i\sqrt{2\cos\mathbb{A}}e^{-(-t_3+i\mathbb{A}/2)} & 2\cos\mathbb{A}e^{t_3}-1 & i\sqrt{2\cos\mathbb{A}}e^{-i\mathbb{A}/2}\left(1-e^{t_3+i\mathbb{A}}\right) \\ e^{t_3} & -i\sqrt{2\cos\mathbb{A}}e^{t_3+i\mathbb{A}/2} & -e^{t_3+i\mathbb{A}} \end{bmatrix}$$

Dans ces conditions, $\rho([\mathtt{m}, \mathtt{n}])$ est parabolique si et seulement si $(I_1 I_2 I_3)$ l'est. L'isométrie $(I_1 I_2 I_3)$ fixant le point à l'infini, elle est représentée par une matrice triangulaire supérieure de SU(2,1) dont la forme est donnée par la relation 1.5 page 30. On vérifie par le calcul

que, dans le cas ou $t_1 + t_2 + t_3 = 0$, les paramètres z, θ et t de la relation 1.5 sont alors donnés par

$$z = i\sqrt{\cos \mathbb{A}} e^{3i\mathbb{A}/2} \left(e^{i\mathbb{A}} - e^{t_1+t_2} + e^{t_1-i\mathbb{A}}\right), \tag{6.12}$$

$$t = -2e^{t_1} \sin \mathbb{A} - |z|^2 \tan \mathbb{A}, \tag{6.13}$$

$$\theta = 3\mathbb{A} + \pi.$$

D'après le critère donné page 30, $I_1 I_2 I_3$ est parabolique si et seulement si

$$\frac{|z|^2 (1 + \cos \theta)}{\sin \theta} - t \neq 0.$$

Cette condition se récrit

$$|z|^2 \frac{\cos (2\mathbb{A}) - \cos \mathbb{A}}{\cos \mathbb{A} \sin 3\mathbb{A}} + 2e^{t_1 \sin \mathbb{A}} \neq 0$$

ou encore

$$|z|^2 \neq 2e^{t_1} \cos \mathbb{A} \frac{\sin \mathbb{A} \sin (3\mathbb{A})}{\cos \mathbb{A} - \cos 2\mathbb{A}}$$

et après simplification

$$|z|^2 \neq 2e^{t_1} \cos \mathbb{A} (\cos \mathbb{A} + \cos 2\mathbb{A})$$

On obtient alors le résultat annoncé dans la proposition 6.24 en injectant dans cette dernière relation la valeur de z donnée ci-dessus.

Lorsque la relation $t_1 + t_2 + t_3$ n'est pas vérifiée, $I_1 I_2 I_3$ est donnée par la matrice

$$I_1 I_2 I_3 = \begin{bmatrix} -w & a & b \\ 0 & \frac{\bar{w}}{w} & c \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\bar{w}} \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned}
w &= \exp (t_1 + t_2 + t_3 - i\mathbb{A}) \\
a &= i\sqrt{2 \cos \mathbb{A}} \left(\exp (t_1 + t_2 + t_3 - i\mathbb{A}/2) - \exp (t_1 + t_2 + i\mathbb{A}/2) + \exp (t_1 + 3i\mathbb{A}/2)\right) \\
b &= \exp(t_1) + \exp (t_1 + t_2 + t_3) + \exp (t_1 + t_2 - t_3) + \exp (t_1 - t_2 - t_3) \\
&\quad -2 \cos \mathbb{A} \left(\exp(t_1 + t_2) + \exp(t_1 - t_3)\right) + \exp(t_1 + 2i\mathbb{A}) \\
c &= -i\sqrt{2 \cos \mathbb{A}} \left(\exp (3i\mathbb{A}/2) - \exp (i\mathbb{A}/2 - t_3) + \exp(-t_2 - t_3 - i\mathbb{A}/2)\right)
\end{aligned}$$

On obtient ainsi la valeur de la trace annoncée dans la proposition 6.26.

Preuve des propositions 6.25 et 6.27

On procède de la même manière que pour la proposition 6.24, mais en utilisant une autre normalisation des trois points p_1, p_2 et p_3. Cette fois,

$$p_1 = \sqrt{\cos \mathbb{A}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad p_2 = \frac{-1}{\sqrt{\cos \mathbb{A}}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } p_3 = \sqrt{\cos \mathbb{A}} \begin{bmatrix} -1 + i \tan \mathbb{A} \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ces trois vecteurs satisfont les conditions 6.4. Dans cette normalisations, les $\mathbb{R}$-plans de référence L_1 L_2 et L_3 sont fixés par les trois involutions lagrangiennes associées aux matrices $I_1^{\mathrm{ref}}(\mathbb{A})$, $I_2^{\mathrm{ref}}(\mathbb{A})$ et $I_3^{ref}(\mathbb{A})$:

$$I_1^{\mathrm{ref}}(\mathbb{A}) = \begin{bmatrix} -e^{-i\mathbb{A}} & 0 & 0 \\ \sqrt{2}\cos \mathbb{A} & e^{i\mathbb{A}} & 0 \\ \cos \mathbb{A} & \sqrt{2}\cos \mathbb{A} & -e^{-i\mathbb{A}} \end{bmatrix} \quad I_2^{\mathrm{ref}}(\mathbb{A}) = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & -1 + i\tan \mathbb{A} \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3^{\mathrm{ref}}(\mathbb{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/\cos \mathbb{A} \\ 0 & -e^{i\mathbb{A}} & 0 \\ \cos \mathbb{A} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Définition 6.30. Soit $P^i_{t_i,\theta_i,\mathbb{A}}$ le $\mathbb{R}$-plan qui intersecte σ_i au point de paramètre t_i et fait un angle $(\pi/2, \theta)$ avec L'_i, tel que dans le lemme 6.14. Soit $I^i_{t_i,\theta,\mathbb{A}}$ l'inversion lagrangienne associée.

Notons $r_k = \exp t_k$. Les inversions $I^i_{t_i,\theta,\mathbb{A}}$ sont associées aux matrices

$$M^1_{t_1,\theta_1,\mathbb{A}} = \begin{bmatrix} -e^{-i\mathbb{A}} r_1^2 & -\sqrt{2}e^{-i\mathbb{A}}\left(r_1^2 - e^{2i\theta_1}\right) & \dfrac{1}{r_1^2 \cos \mathbb{A}}\left(1 - r_1^2 e^{2i\theta_1}(1 + e^{-2i\mathbb{A}}) + r_1^4 e^{-2i\mathbb{A}}\right) \\ \sqrt{2}\cos \mathbb{A} r_1^2 & 2r_1^2 \cos \mathbb{A} - e^{2i(\theta_1 - \mathbb{A})} & -\sqrt{2}e^{-i\mathbb{A}}\left(r_1^2 - e^{2i\theta_1}\right) \\ r_1^2 \cos \mathbb{A} & \sqrt{2}\cos \mathbb{A} r_1^2 & -e^{-i\mathbb{A}} r_1^2 \end{bmatrix}$$

$$M^2_{t_2,\theta_2,\mathbb{A}} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{r^2} & \dfrac{\sqrt{2}}{r_2^2} & \dfrac{(-1 + i\tan \mathbb{A})}{r_2^2} \\ \dfrac{\sqrt{2}\cos \mathbb{A} e^{i\mathbb{A}}\left(r_2^2 e^{2i\theta_2} - 1\right)}{r_2^2} & -\dfrac{1 + e^{2i\mathbb{A}} - r_2^2 e^{2i(\theta_2 + \mathbb{A})}}{r_2^2} & \dfrac{\sqrt{2}}{r_2^2} \\ \dfrac{\cos \mathbb{A}}{r_2^2}\left(2r_2^2 e^{2i\theta_2}\cos \mathbb{A} - e^{i\mathbb{A}} - r_2^4 e^{-i\mathbb{A}}\right) & \sqrt{2}\cos \mathbb{A} e^{i\mathbb{A}}\left(e^{2i\theta_2} - \dfrac{1}{r_2^2}\right) & \dfrac{1}{r_2^2} \end{bmatrix}$$

$$M^3_{t_3,\theta_3,\mathbb{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{r_3^2}{\cos\mathbb{A}} \\ 0 & -e^{i(\mathbb{A}+2\theta_3)} & 0 \\ \dfrac{\cos\mathbb{A}}{r_3^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En calculant le produit $M = M^1\overline{M^2}M^3$, on obtient un relèvement C du commutateur par $C = M\overline{M}$.

Remarque 6.31. Les matrices $M^i_{t_i,\theta_i,\mathbb{A}}$, ci-dessus, ainsi que M ne sont pas dans SU(2,1), mais dans U(2,1). Cependant la matrice $C = M\overline{M}$ est, elle, dans SU(2,1). Nous n'avons pas normalisé ces trois matrices pour ne pas alourdir leur écriture.

Dans le cas où $t_1 + t_2 + t_3 = 0$, C est soit parabolique, soit l'indentité. Si C est l'identité, alors $M^{-1} = \overline{M}$. Nous allons obtenir la condition de la proposition 6.25 en calculant $\overline{M} - M^{-1}$.

Calculons M. On obtient

$$M = \begin{bmatrix} (r_1r_2r_3)^{-2} & \bar{z}\,(r_1r_2r_3)^{-2}\,e^{2i(\theta_1+\theta_3-\theta_2)}\sqrt{2} & (r_1r_2r_3)^{-2}\,(-|z|^2+it) \\ 0 & -e^{2i(\theta_1+\theta_3-\theta_2)} & z\sqrt{2} \\ 0 & 0 & (r_1r_2r_3)^2 \end{bmatrix} \tag{6.14}$$

avec

$$\begin{aligned} z &= r_3^2e^{2i(\theta_1-\theta_2)} - r_3^2r_2^3e^{2i(\theta_1)} + (r_1r_2r_3)^2 \\ \text{et} \quad t &= \tan\mathbb{A}\,((r_1r_2r_3)^4 - (r_2r_3)^4 + r_3^4) + 2r_1^2(r_2r_3)^4\sin(2\theta_1) \\ &\quad +2(r_1r_2)^2r_3^4\sin 2\,(\theta_2-\theta_1) - 2r_2^2r_3^4\sin(2\theta_2) \end{aligned}$$

En supposant vérifiée l'égalité $t_1 + t_2 + t_3 = 0$, qui se traduit par $r_1r_2r_3 = 1$, calculons $\overline{M} - M^{-1}$. Nous obtenons

$$\overline{M} - M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -a\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & a\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où

$$a = -\frac{e^{2i(\theta_2-\theta_1)}}{r_1^2r_2^2} + \frac{e^{-2i\theta_1}}{r_1^2} - 1 + e^{-2i\theta_2}\left(e^{2i(\theta_2-\theta_1)} + \frac{1}{r_1^2r_2^2} - \frac{e^{2i\theta_2}}{r_1^2}\right)$$

Par conséquent, l'isométrie $(I_1I_2I_3)^2$ est parabolique si et seulement si $a \neq 0$, ce qui se traduit par

$$e^{2i\theta_3} \neq e^{2i(\theta_2-\theta_1)} \frac{r_1^2 r_2^2 - r_2^2 e^{2i\theta_1} + e^{2i(\theta_1-\theta_2)}}{r_1^2 r_2^2 - r_2^2 e^{-2i\theta_1} + e^{2i(\theta_2-\theta_1)}}.$$

On en déduit le résultat

Remarque 6.32. La condition donnée par la proposition 6.25x ne fait pas intervenir l'invariant de Cartan $\mathbb{A}$. Dans la forme de M donnée par la relation 6.14, $\mathbb{A}$ n'intervient que dans t, et disparaît lorsque l'on calcule $\overline{M} - M^{-1}$.

6.5 Commutateur elliptique.

Nous terminons ce chapitre par une brève description des cas où $\rho([\mathtt{m}, \mathtt{n}])$ est elliptique régulier. Dans ces conditions, nous appelons toujours p_2 son point fixe, $p_3 = I_1(p_2)$ et $p_1 = I_3(p_2)$. Cette fois, les trois points sont situés à l'intérieur de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Comme dans le cas où le commutateur est non-elliptique, nous commençons par décrire les réflexions complexes qui échangent deux points de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Proposition 6.33. *Soient p et q deux points de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.*
- *Il existe une unique réflexion complexe d'ordre deux R telle que $R(p) = q$.*
- *Il existe un cercle de $\mathbb{R}$-plans P tels que $I_P(p) = q$.*

Démonstration. Soient C la droite complexe contenant p et q, σ la géodésique reliant p et q, et m le milieu du segment géodésique $[pq]$. Toute involution échangeant p et q fixe m et stabilise C. Par conséquent :
- La seule réflexion complexe d'ordre deux échangeant p et q a pour miroir la droite complexe orthogonale à C en m.
- Les seuls $\mathbb{R}$-plans P tels que $I_P(p) = q$ sont ceux qui contiennent la géodésique tracée dans C othogonale à σ en m. Il existe un cercle de tels $\mathbb{R}$-plans.

□

Nous allons maintenant donner une forme explicite de ces involutions dans les deux cas holomorphes et antiholomorphes.

Dans le cadre des hypothèses de la proposition 6.33, on peut choisir des relèvements $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ de p et q tels que

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle = -1 \text{ et } \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle > 0$$

Notons qu'alors $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle^2 = \cosh(\rho(p,q)/2) > 1$. Par suite, le vecteur $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ est de norme positive :

$$\langle \mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{p} + \mathbf{q} \rangle = -2 + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$$

Posons alors

$$\mathbf{u}_{pq} = \frac{1}{2(\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle - 1)} (\mathbf{p} + \mathbf{q}).$$

Le vecteur $\mathbf{u}_{pq}$ est polaire à une droite complexe C_{pq}, et la réflexion complexe d'ordre deux par rapport à C_{pq} échange p et q. Pour ce qui est des réflexions lagrangiennes échangeant p et q, elles ont pour matrices dans la base (non-orthogonale) $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{p} \boxtimes \mathbf{q})$

$$M_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & e^{-i\alpha} & 0 \\ e^{-i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{2i\alpha} \end{bmatrix} \text{ avec } \alpha \in [0, \pi[.$$

M vérifie $M_\alpha \overline{M_\alpha} = Id$. Ecrire la matrice d'une isométrie dans la base $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{p} \boxtimes \mathbf{q})$ revient à travailler dans le modèle de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ associé à la forme de signature (2,1) ayant pour matrice

$$J_{p,q} = \begin{bmatrix} -1 & \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle & 0 \\ \langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \langle \mathbf{p} \boxtimes \mathbf{q}, \mathbf{p} \boxtimes \mathbf{q} \rangle \end{bmatrix}.$$

On obtient ensuite des matrices dans le modèle de travail de même que dans la section 6.3.1.

6.5.1 Représentations $\mathbb{C}$-décomposables.

D'après la proposition 6.33, pour toute paire de point de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, il existe une unique réflexion d'ordre deux par rapport à une droite complexe qui les échange. En conséquence, on obtient directement le lemme suivant

Lemme 6.34. *Soit (p_1, p_2, p_3) un triplet de points distincts de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Il existe un unique triplet de droites complexes (C_1, C_2, C_3), tel que, en notant I_k la réflexion d'ordre deux par rapport à C_k tel que $I_k(p_{k+1}) = p_{k+2}$ (indices pris modulo 3).*

La proposition suivante est une conséquence directe.

Proposition 6.35. *Soient (I_1, I_2, I_3) et (I'_1, I'_2, I'_3) deux triplets de réflexions complexes tels que les produit $I_1 I_2 I_3$ et $I'_1 I'_2 I'_3$ soient elliptiques réguliers. Soient (p_1, p_2, p_3) et (p'_1, p'_2, p'_3) les cycles associés. Les deux conditions suivantes son équivalentes*
- *$g \in$ PU(2,1) vérifie $g I_k g^{-1} = I'_k$ pour $k = 1, 2, 3$.*
- *$g \in$ PU(2,1) vérifie $g(p_k) = p'_k$.*

On peut donc obtenir un ensemble de coordonnées en normalisant le cycle : tout triplet de points de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ est équivalent sous PU(2,1) à un triplet (q_1, q_2, q_3) donné dans le modèle de la boule par

$$q_1 = (0, x_2)\,,\ q_2 = (0, 0) \ \text{ et } q_3 = (x_1, z_2) \ \text{ où } x_1,\ x_2 \in]0, 1[\tag{6.15}$$

6.5.2 Représentations $\mathbb{R}$-décomposables.

Toujours d'après la proposition 6.33, il existe un cercle de réflexions lagrangiennes échangeant deux points donnés de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Nous allons décrire une famille de référence qui nous fournira des coordonnées. q_1, q_2 et q_3 désignent toujours les points définis par 6.15. Fixons un triplet de $\mathbb{R}$-plans Q_1, Q_2 et Q_3 tels que Q_i contienne q_{i+1} et q_{i+2} (indices pris modulo 3). Pour $i = 1, 2, 3$, soit alors $P_i^{\theta_i}$ le $\mathbb{R}$-plan défini de la manière suivante :

- La réflexion par rapport $I_i^{\theta_i}$ par rapport à $P_i^{\theta_i}$ échange q_{i+1} et q_{i+2}.
- L'angle entre $P_i^{\theta_i}$ et Q_i a pour mesure $(\pi/2, \theta_i)$ avec $\theta_i \in [0, \pi[$

Ces conditions définissent un unique $\mathbb{R}$-plan, car le fait que $I_i^{\theta_i}$ échange q_{i+1} et q_{i+2} impose que la composée $I_{Q_i} \circ I_i^{\theta_i}$ stabilise la droite complexe engendrée par q_{i+1} et q_{i+2}.

On en déduit la proposition suivante

Proposition 6.36. *Soit (I_1, I_2, I_3) un triplet de réflexions lagrangiennes tel que $(I_1 I_2 I_3)^2$ est elliptique régulier. Il existe un unique (x_1, x_2, z_2) vérifiant $x_i \in]0, 1[$ et $z_2 \in \mathbb{C}$ tel et un unique triplet $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in [0, \pi[$ tel que le triplet (I_1, I_2, I_3) est conjugué dans* PU(2,1) *à $(I_1^{\theta_1}, I_2^{\theta_2}, I_3^{\theta_3})$.*

Chapitre 7

Tore épointé et groupes triangulaires lagrangiens.

7.1 Introduction

Dans le chapitre 5, nous avons donné un critère de décomposabilité des groupes engendrés par deux éléments loxodromiques en un groupe triangulaire lagrangien. Nous avons vu de plus que si ρ est une représentation telle que $\rho(\mathtt{m})$ et $\rho(\mathtt{n})$ sont loxodromiques, et telle que le commutateur $\rho([\mathtt{m},\mathtt{n}])$ est parabolique pur et conjugué à une translation de Heisenberg non verticale, alors ρ est $\mathbb{R}$-décomposable. Nous allons maintenant décrire une famille de représentations discrètes, fidèles, préservant le type et $\mathbb{R}$-décomposables du groupe fondamental du tore épointé (voir définition 5.9). Nous allons utiliser pour la décrire les coordonnées sur $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ décrites au chapitre précédent. Une telle représentation peut être vue comme la donnée de trois réflexions lagrangiennes I_1, I_2 et I_3 vérifiant

- Le groupe engendré par I_1, I_2 et I_3 est discret et isomorphe au produit libre de trois copies de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- Les deux éléments $A = I_1 \circ I_2$ et $B = I_3 \circ I_2$ sont loxodromiques.
- Leur commutateur $[A, B]$ est parabolique.
- Tout élément non loxodromique du sous-groupe d'indice deux engendré par A et B est parabolique, et conjugué dans $\langle A, B\rangle$ à une puissance de $[A, B]$.

Rappelons que $T_{1,1}$ désigne l'espace de Teichmüller du tore épointé. Notre objectif principal est de démontrer le

Théorème 7.1. *Il existe une famille à un paramètre $-\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$ d'applications*

$$\phi_\alpha : T_{1,1} \longrightarrow \mathrm{Hom}(F_2,\mathrm{PU}(2,1))$$

satisfaisant aux conditions suivantes.

1. $\phi_{\alpha_1}([\rho_1]) = \phi_{\alpha_2}([\rho_2])$ *si et seulement si* $\alpha_1 = \alpha_2$ *et* $[\rho_1] = [\rho_2]$

2. *Pour tout* $[\rho] \in T_{(1,1)}$ *et pour tout* $\alpha \in [-\pi/4, \pi/4]$, $\phi_\alpha([\rho])$ *est une classe de représentations discrètes, fidèles, préservant le type et* $\mathbb{R}$*-décomposables du groupe fondamental du tore épointé.*
3. *Pour tout* $[\rho] \in T_{(1,1)}$, $\phi_\alpha([\rho])$ *stabilise un* $\mathbb{R}$*-plan si et seulement si* $\alpha = 0$.
4. *Le segment* $(\phi_\alpha)_{|\alpha|<\pi/4}$ *est maximal : si* $\pi/4 < |\alpha| \leqslant \pi/2$, *il existe* $[\rho] \in T_{(1,1)}$ *telle que* $\phi_\alpha([\rho])$ *contient un élément elliptique, et est par conséquent non-discrète ou non-fidèle.*

Pour ce faire, nous allons devoir prouver la discrétude de groupes engendrés par des réflexions lagrangiennes. Nous allons dans ce but appliquer le résultat suivant.

Théorème 7.2. *Soit* Γ, $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$ *des sous-groupes de PU(2,1) tels que la réunion des* Γ_i *engendre* Γ. *Supposons qu'il existe des ensembles ouverts* $U_1, \cdots, U_n$ *de* $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ *satisfaisant aux conditions suivantes*

- *Pour tout* g *dans* Γ_i, $g.U_i \cap U_i = \emptyset$
- $U = \bigcap U_i$ *est non-vide*
- $U_i \bigcup U_j = \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ *si* $i \neq j$.

Alors

1. *Le groupe* Γ *est les produit libre des* Γ_i.
2. *Pour tout* g *dans* Γ, $g \cdot D \cap D = \emptyset$
3. Γ *est discret.*

Ce théorème, qui est bien connu pour les groupes de Schottky, est de nature topologique. Il est donc également valable dans $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, et la démonstration est identique (voir [Rat94], page 584). On peut également considérer l'action d'un groupe sur $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ au lieu de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Le résultat reste valable en remplaçant les ouverts de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ par des ouverts de $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Dans notre cas, le groupe Γ est engendré par trois réflexions lagrangiennes I_1, I_2 et I_3, et il y a trois sous-groupes $\langle I_1 \rangle$, $\langle I_2 \rangle$ et $\langle I_3 \rangle$.

Pour appliquer le théorème ci-dessus, nous allons associer à l'involution chaque I_k une hypersurface stable par I_k, séparant l'espace en deux composantes connexes échangées par I_k. Dans ce but, nous allons introduire les $\mathbb{R}$-*surfaces spinales* (voir la définition 7.9). Ce sont des hypersurfaces de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ feuilletées par des $\mathbb{R}$-plans, et stables par l'inversion par rapport à chacune de leurs feuilles. La principale difficulté dans la preuve est de montrer que deux $\mathbb{R}$-surfaces spinales sont disjointes. Les deux propositions 7.18 et 7.21 fournissent des conditions suffisantes pour garantir que deux $\mathbb{R}$-surfaces spinales sont disjointes.

Ces hypersurfaces sont similaires dans leur définition aux surfaces spinales (aussi appelées bissecteurs) définies par Mostow. Nous commençons donc par rappeler quelques faits au sujet des surfaces spinales.

7.2 Les surfaces spinales

Définition 7.3. Soit γ une géodésique de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ et C la droite complexe qu'elle engendre. La surface spinale de spine réelle γ, est l'image réciproque de γ par la projection orthogonale sur C. C est sa *spine complexe*.

De nombreuses propriétés des bissecteurs sont décrites dans le chapitre 5 de [Gol99]. La terminologie de surface spinale est due à Mostow, mais on lui préfère souvent le terme de bissecteur. Dans tout le chapitre, nous allons utiliser le terme de spine. Malgré de longues discussions, il n'existe pas encore de terme satisfaisant pour traduire spine. A défaut, nous continuerons donc à appeler la spine spine.

Remarque 7.4. Soit γ une géodésique de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, et C, l'unique droite complexe contenant γ (voir le lemme 1.28, page 32). L'unicité de C montre qu'il y a une correspondance bijective entre les géodésiques de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ et les surfaces spinales : toute géodésique est contenue dans une unique surface spinale dont elle est la spine réelle. On appelle parfois les extrémités de la spine réelle les *sommets* de la surface spinale.

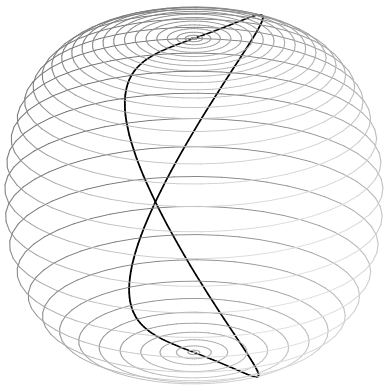
Les surfaces spinales apparaissent naturellement lors de l'utilisation du procédé de Dirichlet pour construire des domaines fondamentaux (voir [Mos80, Der05]), qui nécessite l'utilisation des hypersurfaces de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ formées des points équidistants de deux points donnée (voir [Gol99]) :

Proposition 7.5.
1. *Soient p et q deux points de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, et $\mathcal{E}(p,q)$ l'ensemble des points m de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ équidistants de p et q. $\mathcal{E}(p,q)$ est une surface spinale.*
2. *Toute surface spinale est obtenue comme lieu des points équidistants de deux points de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.*

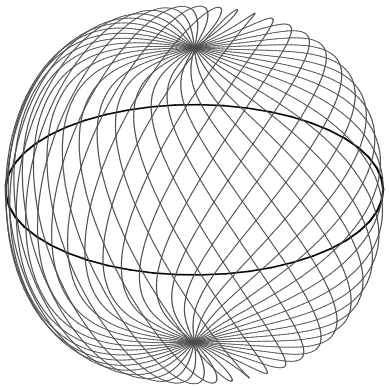
Les bissecteurs ont la remarquable propriété de posséder un double feuilletage par des sous-espaces totalement géodésiques. Ainsi, S, la surface spinale associée à la géodésique γ contenue dans la droite complexe C, possède :

- Un feuilletage en droite complexes, donné par les fibres de la projection sur $\mathbb{C}$ au dessus de γ. Ces fibres s'appellent les *parallèles* de S.
- Un feuilletage singulier en $\mathbb{R}$-plans, dont les feuilles sont les $\mathbb{R}$-plans contenant γ. Ce feuilletage a deux points singuliers, qui sont les extrémités de γ. Ces $\mathbb{R}$-plans s'appellent les *méridiens* de S.

A chacune des feuilles complexes ou réelles est associée une involution, réflexion complexe ou lagrangienne, qui préserve le bissecteur.
Si B est un bissecteur, $\overline{B} \cap \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ est appelée une *sphère spinale*. Les deux feuilletages en $\mathbb{R}$-plans et droites complexes de S se traduisent par deux feuilletages de la sphère spinale associée, en $\mathbb{R}$-cercles et $\mathbb{C}$-cercles, qui sont représentés sur la figure 7.1.
Malgré la simplicité de leur définition, les bissecteurs sont des objets assez complexes. A titre d'exemple, la proposition suivante est due à Goldman (voir [Gol99], théorème 5.5.1).



Feuilletage en $\mathbb{C}$-cercles



Feuilletage singulier en $\mathbb{R}$-cercles

FIG. 7.1 – Les deux feuilletages de la sphère spinale associée à un bissecteur.

Proposition 7.6. *Soient B un bissecteur, et x et y deux points de B. La géodésique reliant x et y est contenue dans B si et seulement si x et y sont contenus dans un parallèle commun ou dans un méridien commun.*

De plus, si B est un bissecteur, aucun des deux demi-espaces définis par B n'est convexe.

7.3 Définition et premières propriétés des $\mathbb{R}$-surfaces spinales

Posons la définition suivante :

Définition 7.7. Une $\mathbb{R}$-*surface* est une hypersurface de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ feuilletée par des $\mathbb{R}$-plans.

Cette définition autorise une grande flexibilité dans la construction d'une $\mathbb{R}$-surface. Le principal objet de cette partie va être l'étude d'un type particulier de $\mathbb{R}$-surface : les $\mathbb{R}$-surfaces spinales (voir définition 7.9).

Lemme 7.8. *Soit P un $\mathbb{R}$-plan et $\gamma \subset P$ une géodésique. Soit Π la projection orthogonale sur P, et S l'image inverse de γ par Π. S est une $\mathbb{R}$-surface.*

Démonstration. Le feuilletage de S est donné par les fibres de Π au-dessus de γ, et S est homéomorphe à $]-1,1[\times D$, où D est le disque ouvert (voir la section 1.4.3). □

Suivant Mostow, posons la

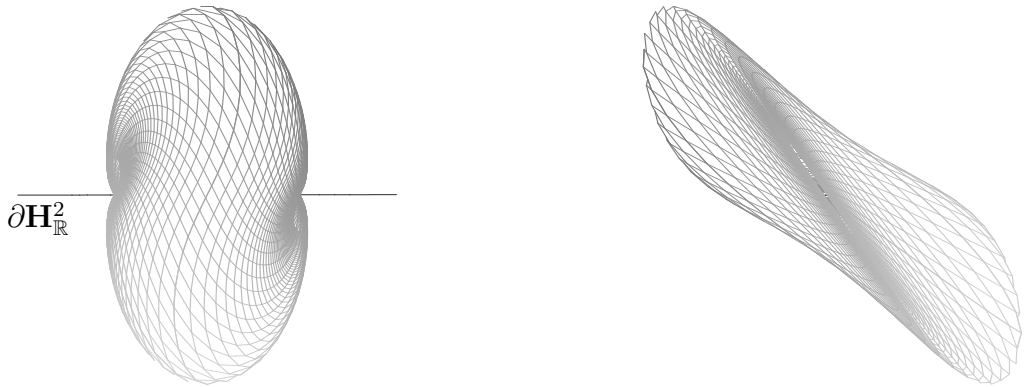


FIG. 7.2 – Vues depuis les axes des $x = y = 0$ et $y = t = 0$ d'une $\mathbb{R}$-sphère spinale orthogonale à $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$.

Définition 7.9. On appellera $\mathbb{R}$-*surface spinale* toute $\mathbb{R}$-surface obtenue comme image réciproque d'une géodésique γ par la projection orthogonale sur un $\mathbb{R}$-plan P. Nous noterons cette $\mathbb{R}$-surface spinale $S_{\gamma,P}$, et l'appellerons la $\mathbb{R}$-*surface spinale construite sur* γ *par rapport à* P.

Si S est une $\mathbb{R}$-surface, il lui est naturellement associé l'hypersurface du bord de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, $\partial\overline{S} = \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} \cap S$. ∂S est appelée la $\mathbb{R}$-*sphère* associée à S. Nous appellerons $\mathbb{R}$-*sphère spinale* une $\mathbb{R}$-sphère associée à une $\mathbb{R}$-surface spinale.

Proposition 7.10. *Soient P un $\mathbb{R}$-plan, et $\gamma = (\gamma(s))_{s>0}$ une géodésique tracée dans P, et C la droite complexe engendrée par γ. Fixons $\beta \in [0, \pi/2]$.*

Pour tout $s > 0$, soit Q_s le $\mathbb{R}$-plan contenant $\gamma(s)$, d'angle $(\pi/2, \beta)$ par rapport à P et tel que $I_{Q_s} \circ I_P$ stabilise C.

Alors, $S = \bigcup_{s>0} Q_s$ est une $\mathbb{R}$-surface spinale.

(Voir le chapitre 1, section 1.4.2 pour la définition des angles entre $\mathbb{R}$-plans sécants.)

Démonstration. Soit P' le $\mathbb{R}$-plan contenant γ, d'angle $(0, \pi/2 - \beta)$ avec P. L'angle 0 signifie que P et P' contiennent tous deux γ. On vérifie simplement que Q_s est orthogonal à P' pour tout $s > 0$ (i.e. d'angle $(\pi/2, \pi/2)$). S est donc l'image réciproque de γ par la projection orthogonale sur P'. □

Dans la preuve du théorème 7.1, nous utiliserons cette description des $\mathbb{R}$-surfaces spinales.

Définition 7.11. Nous appellerons la $\mathbb{R}$-surface spinale construite dans la proposition 7.10 la $\mathbb{R}$-*surface spinale sur* γ *d'angle* β *par rapport à* P. Elle sera notée $S^{\beta}_{\gamma,P}$.

Notons ici pour la cohérence des notations, que $S^{\frac{\pi}{2}}_{\gamma,P} = S_{\gamma,P}$.

Remarque 7.12. **Comparaison des $\mathbb{R}$-surfaces spinales et des bissecteurs**

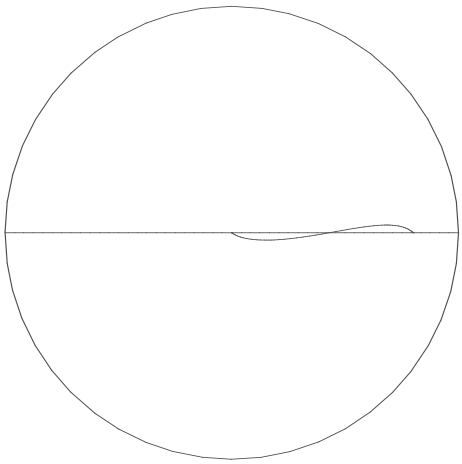


FIG. 7.3 – Projection de la géodésique reliant deux points de $S_{\gamma,P}$ sur P.

1. De même que deux bissecteurs, deux $\mathbb{R}$-surfaces spinales sont isométriques. C'est une conséquence directe de leur définition.
2. Soit $S_{\gamma,P}$ une $\mathbb{R}$-surface spinale. La géodésique γ est l'analogue de la spine réelle, et P l'analogue de la spine complexe. P peut être vu comme la spine lagrangienne.
3. Contrairement, au cas des bissecteurs (voir la remarque 7.4), γ ne détermine pas uniquement P : il existe un cercle de $\mathbb{R}$-plans contenant un géodésique γ donnée, et donc un cercle de $\mathbb{R}$-sphères spinales de spine γ.
4. Une $\mathbb{R}$-surface spinale possède, par définition, un feuilletage régulier par des $\mathbb{R}$-plans, mais en revanche ne contient qu'une seule droite complexe, qui est celle engendrée par γ.

Comme toutes les hypersurfaces d'une variété à courbure non constante, les $\mathbb{R}$-surfaces spinales ne sont pas totalement géodésiques. Plus précisément, le résultat suivant est un équivalent pour les $\mathbb{R}$-surfaces de la proposition 7.6 sur les bissecteurs. Elle découle du fait que la projection orthogonale d'une géodésique sur un $\mathbb{R}$-plan n'est en général pas un segment géodésique.

Proposition 7.13. *Soit S une $\mathbb{R}$-surface spinale. Soient x et y deux points contenus dans S. La géodésique reliant x et y est contenue dans S si et seulement si x et y sont contenus dans une même feuille de S ou dans la droite complexe engendrée par la spine de S.*

La proposition suivante est une conséquence directe de la définition des $\mathbb{R}$-surfaces spinales et du fait qu'une réflexion lagrangienne préserve l'orthogonalité.

Proposition 7.14. *Soit P un $\mathbb{R}$-plan et $\gamma \subset P$ une géodésique. Soit Q une feuille de la $\mathbb{R}$-surface spinale $S_{\gamma,P}$. La réflexion lagrangienne I_Q stabilise $S_{\gamma,P}$, et échange les deux composantes connexes de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} \setminus S_{\gamma,P}$.*

7.4 Conditions de disjonction de deux $\mathbb{R}$-surfaces spinales

Dans la section 7.5, où nous allons montrer le théorème 7.1 annoncé dans l'introduction du chapitre, nous allons construire des domaines fondamentaux dont les faces sont des $\mathbb{R}$-surfaces spinales. Nous aurons besoin de pouvoir garantir que ces faces sont disjointes. Le critère que nous allons obtenir est basé sur le lemme suivant.

Lemme 7.15. *Soient $S_1 = S_{\gamma_1,P_1}$ et $S_2 = S_{\gamma_2,P_2}$ deux $\mathbb{R}$-surfaces spinales, dont les feuilletages sont donnés par*

$$S_1 = \bigcup_{s_1} Q^{(1)}_{s_1} \text{ et } S_2 = \bigcup_{s_2} Q^{(2)}_{s_2}.$$

Soit $I^{(k)}_{s_k}$ l'inversion par rapport au $\mathbb{R}$-plan Q_{s_k}. Alors S_1 et S_2 sont disjointes si et seulement si pour tout couple (s_1, s_2) de paramètres l'isométrie $I^{(1)}_{s_1} \circ I^{(2)}_{s_2}$ est loxodromique.

Démonstration. S_1 et S_2 sont disjointes si et seulement si toute feuille de S_1 est disjointe de toute feuille de S_2. Le résultat est une conséquence directe du lemme 1.69. □

La proposition 7.15 montre la nécessité de pouvoir tester quand le produit de deux réflexions lagrangiennes est loxodromique, donc de calculer sa trace. Nous disposons d'après le chapitre 1, d'une forme matricielle pour les réflexions lagrangiennes en terme des paramètres du $\mathbb{R}$-cercle associé (centre et rayon). Le lemme suivant fait le lien entre ces paramètres et les angles entre $\mathbb{R}$-plans à l'aide desquels nous avons écrit la proposition 7.10.

Lemme 7.16. *Soit P un $\mathbb{R}$-plan vérifiant $I_P([0,0]) = \infty$, d'angle $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ avec le $\mathbb{R}$-plan $\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$. Alors*

- *Le $\mathbb{R}$-cercle associé est centré en $[0,0]$.*
- *Il existe $r > 0$ tel que le rayon de ∂P soit $r^2 e^{2i\alpha}$.*

Démonstration. La première assertion est juste la définition du centre d'un $\mathbb{R}$-cercle (voir définition 1.59). Remarquons que le fait que $I_P([0,0]) = \infty$ impose que l'angle entre P et $\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$ lu dans la géodésique complexe engendrée par ∞ et $[0,0]$ a pour mesure $\pi/2$. Considérons alors le $\mathbb{R}$-cercle centré en $[0,0]$ et de rayon $r^2 e^{2i\alpha}$. D'après le lemme 1.66, la matrice (dans SU(2,1)) de l'inversion associée est

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -u^{-1}r^2 \\ 0 & -u^2 & 0 \\ -u^{-1}r^{-2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ avec } u = e^{\frac{2i\alpha}{3}} \text{ et } r > 0.$$

L'action de I_P s'écrit vectoriellement $Z \to M\overline{Z}$. L'inversion par rapport à $\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$ a pour matrice l'identité. L'application linéaire $Z \to MZ$ est donc un relèvement de $I_P \circ I_{\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}}$. Les angles de l'élément elliptique $I_P \circ I_{\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}}$ sont $\pi/2$ et $\pi/2 + \alpha$.

□

Définition 7.17. Dans la suite de ce chapitre, nous appellerons $M_{r,\beta}$ la matrice ci-dessus pour l'inversion par rapport au $\mathbb{R}$-cercle de centre $[0,0]$ et de rayon $r^2e^{2i\beta}$.

Nous allons maintenant donner une condition de disjonction de deux $\mathbb{R}$-surfaces spinales qui suffira à la preuve du théorème 7.1.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$g(l) = \frac{-\cosh(l) - 3 + \sqrt{9\cosh^2(l) + 70\cosh(l) + 65}}{4\left(\cosh(l) + 1\right)}$$

(Voir la figure 7.5)

Proposition 7.18. *Soient γ_1 et γ_2 deux géodésiques ultraparallèles tracées dans un $\mathbb{R}$-plan P, à distance mutuelle $l > 0$. Soient α_1 et α_2 deux réels satisfaisant aux conditions suivantes.*

1. $-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{2}{3}\left(\alpha_1 + 2\alpha_2\right) < \dfrac{\pi}{2}$ *et* $-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{2}{3}\left(2\alpha_1 + \alpha_2\right) < \dfrac{\pi}{2}$.
2. $g(l) < \cos\dfrac{2}{3}\left(\alpha_1 - \alpha_2\right) < 1$.

Alors

$$S^{\pi/2+\alpha_1}_{\gamma_1,P} \bigcap S^{\pi/2+\alpha_2}_{\gamma_2,P} = \emptyset.$$

Démonstration. Utilisons les coordonnées du modèle de Siegel pour le calcul. Soient Q_{r_1} et Q_{r_2} (avec r_1 et r_2 positifs) les feuilles de $S^{\pi/2+\alpha_1}_{\gamma_1,P}$ et $S^{\pi/2+\alpha_2}_{\gamma_2,P}$ respectivement. En normalisant, on peut se ramener à la situation suivante :

- γ_1 et γ_2 sont tracées dans le $\mathbb{R}$-plan $\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}} \subset \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.
- En coordonnées de Heisenberg, les extrémités de γ_1 sont $[0,0]$ et ∞, les extrémités de γ_2 sont $[1,0]$ et $[x,0]$ avec $x > 1$ (voir la figure) .

Les deux paramètres x et l sont liés par la relation suivante

$$x = \frac{\cosh\left(l/2\right) + 1}{\cosh(l/2) - 1}. \tag{7.1}$$

Nous allons utiliser x, qui est plus commode pour les calculs.
Dans les conditions de la normalisation ci-dessus, les feuilles de $S^{\pi/2+\alpha_1}_{\gamma_1,P}$ correspondent aux $\mathbb{R}$-cercles centrés en $[0,0]$ de rayon $r_1e^{2i\alpha_1}$ avec $r_1 > 0$ (cf lemme 7.16).
La $\mathbb{R}$-sphère spinale $S^{\pi/2+\alpha_2}_{\gamma_2,P}$ est l'image de $S^{\pi/2+\alpha_2}_{\gamma_1,P}$ par un élément loxodromique h vérifiant

- $h([0,0]) = [1,0]$
- $h(\infty) = [x,0]$

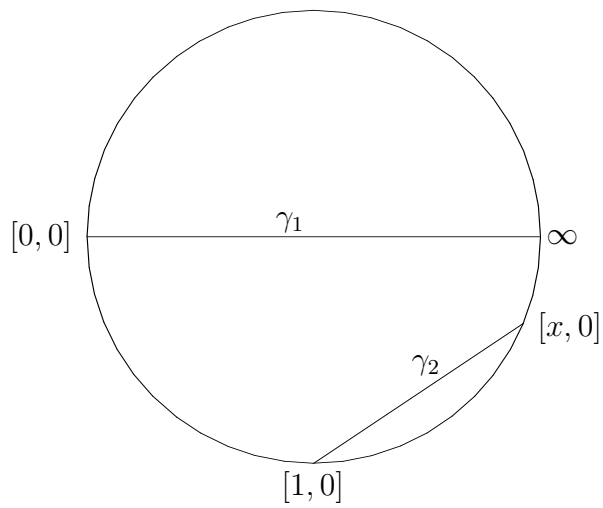


FIG. 7.4 – γ_1 et γ_2 tracées dans $\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$.

– L'axe de h est transverse à γ_1 et γ_2. [1]

Un tel h est fourni par l'élément de SU(2,1) suivant :

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} x^2 & \dfrac{x\sqrt{2}}{1-x} & \dfrac{-1}{(1-x)^2} \\ -x\sqrt{2} & \dfrac{x+1}{x-1} & \dfrac{\sqrt{2}}{(1-x)^2} \\ -1 & \dfrac{\sqrt{2}}{x-1} & \dfrac{1}{(1-x)^2} \end{bmatrix}.$$

Un relèvement à SU(2,1) de $I_{Q_{r_1}} \circ I_{Q_{r_2}}$ est donc donné par la matrice

$$M = M_{r_1,\alpha_1}\, \mathbf{h}\, \overline{M_{r_2,\alpha_2}}\, \mathbf{h}^{-1}.$$

Calculons la trace de M, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathrm{T} \;=\; & \left(r_1^2 r_2^2 + \frac{x^4 r_1^2}{r_2^2} + \frac{1}{r_1^2 r_2^2 (x-1)^4} + \frac{r_2^2}{r_1^2 (x-1)^4}\right) \exp\left(\frac{2i}{3}(\alpha_2 - \alpha_1)\right) \\ & + \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} \exp\left(-\frac{4i}{3}(\alpha_2 - \alpha_1)\right) \\ & + \frac{2}{(x-1)^2}\left(r_1^2 x^2 (x-1)^2 + \frac{1}{(x-1)^2 r_1^2}\right) \exp\left(-\frac{2i}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2)\right) \\ & + \frac{2}{(x-1)^2}\left(r_2^2 + \frac{x^2}{r_2^2}\right) \exp\left(\frac{2i}{3}(2\alpha_1 + \alpha_2)\right). \end{aligned} \tag{7.2}$$

[1] Cette condition garantit que h n'est pas une symétrie glissée. Si c'était le cas, h enverrait $S^{\pi/2+\alpha_2}_{\gamma_1,P}$ sur $S^{\pi/2-\alpha_2}_{\gamma_2,P}$

Si les conditions de l'énoncé sont satisfaites, alors

$$\cos\frac{2}{3}(\alpha_1+2\alpha_2)>0 \quad , \quad \cos\frac{2}{3}(2\alpha_1+\alpha_2)>0$$

$$\cos\frac{2}{3}(\alpha_2-\alpha_1)>0 \quad , \quad \cos\frac{4}{3}(\alpha_2-\alpha_1)>0.$$

Par ailleurs, comme $x>1$, nous avons [2]

$$\begin{aligned}\left(r_1^2r_2^2+\frac{x^4r_1^2}{r_2^2}+\frac{1}{r_1^2r_2^2(x-1)^4}+\frac{r_2^2}{r_1^2(x-1)^4}\right) &= \frac{1}{(x-1)^2}\left(r_1^2r_2^2+\frac{1}{r_1^2r_2^2}\right)\\ &\quad+\frac{x^2}{(x-1)^2}\left(\frac{x^2(x-1)^2r_1^2}{r_2^2}+\frac{r_2^2}{x^2(x-1)^2r_1^2}\right)\\ &\geqslant \frac{2\,(1+x^2)}{(x-1)^2}\\ &= 1+\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} \qquad (7.3)\end{aligned}$$

Nous en déduisons donc une minoration de la partie réelle de T :

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\ (\mathrm{T}) &> \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}\cos(2\alpha)+\left(1+\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}\right)\cos(\alpha)\\ &= 2\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}\cos^2\alpha+\left(1+\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}\right)\cos\alpha-\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}\end{aligned}$$

avec $\alpha=2/3(\alpha_2-\alpha_1)$.

Nous obtenons alors par résolution directe par rapport à $\cos\alpha$ que Re (T) est plus grand que 3 lorsque

$$-\frac{1+F^2}{4}+\frac{1}{4}\left(F^4+26F^2+9\right)^{1/2}<\cos(\alpha)<1 \quad \text{où } F=\frac{x-1}{x+1}=\cosh(l/2)^{-1}.$$

Le membre de gauche de la double inégalité ci-dessus est égal à $g(l)$. □

Remarque 7.19. La zone de non-intersection des deux surfaces $S^{\pi/2+\alpha_1}_{\gamma_1,P}$ et $S^{\pi/2+\alpha_2}_{\gamma_2,P}$ peut-être vue, dans le plan (α_1,α_2) comme l'hexagone délimité par les droites

[2] Je remercie John Parker pour m'avoir suggéré une amélioration dans cette inégalité.

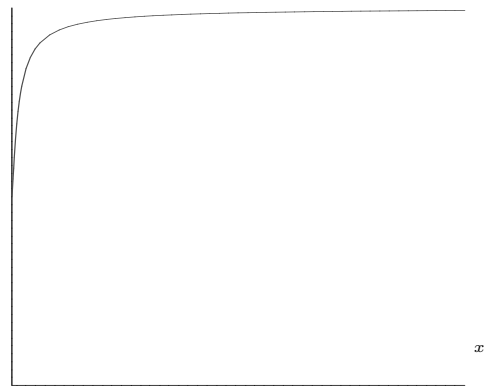


FIG. 7.5 – Graphe de $g = -\dfrac{1+F^2}{4} + \dfrac{1}{2}\left(F^4 + 26F^2 + 9\right)^{1/2}$ en fonction de x.

$$\mathtt{d}_1 : \alpha_1 + 2\alpha_2 = \frac{3\pi}{4} \qquad \mathtt{d'}_1 : \alpha_1 + 2\alpha_2 = -\frac{3\pi}{4}$$

$$\mathtt{d}_2 : 2\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{3\pi}{4} \qquad \mathtt{d'}_2 : 2\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{3\pi}{4}$$

$$\mathtt{d}_l : \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{3}{2}\arccos\left(g(l)\right) \quad \mathtt{d'}_l : \alpha_1 - \alpha_2 = -\frac{3}{2}\arccos\left(g(l)\right).$$

Lorsque x tend vers l'infini, la distance l entre les deux géodésiques décroît vers 0, et $g(l)$ tend vers 1. En conséquence, la zone de non-intersection se ramasse autour de la droite $\delta_\infty : \alpha_1 = \alpha_2$.

Remarque 7.20.

La proposition suivante est un raffinement de la proposition 7.18 à un cas un plus délicat, où les deux géodésiques γ_1 et γ_2 sont asymptotiques. C'est l'outil technique que nous utiliserons dans la preuve du théorème 7.1.

Proposition 7.21. *Soient γ_1 et γ_2 deux géodésiques asymptotiques contenues dans un $\mathbb{R}$-plan P. Les deux $\mathbb{R}$-surfaces spinales $S^{\pi/2+\alpha_1}_{\gamma_1,P}$ et $S^{\pi/2+\alpha_2}_{\gamma_2,P}$ sont disjointes si et seulement si*

$$\frac{-\pi}{4} \leqslant \alpha_1 = \alpha_2 \leqslant \frac{\pi}{4}$$

Démonstration. Le sens ($\Leftarrow$) découle de la preuve de la proposition précédente en passant à la limite quand x tend vers ∞.

Pour prouver l'autre implication, nous devons montrer deux choses :

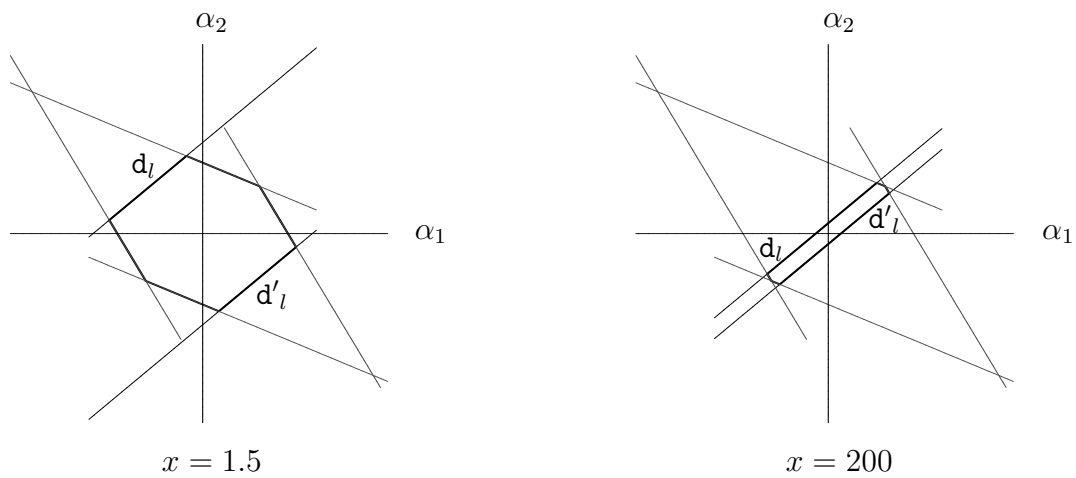


FIG. 7.6 – Zones de non-intersection de $S^{\pi/2+\alpha_1}_{\gamma_1,P}$ et $S^{\pi/2+\alpha_2}_{\gamma_2,P}$

1. Si $\alpha_1 = \alpha_2$ est plus grand (resp. petit) strictement que $\pi/4$ (resp. $-\pi/4$), alors il existe r_1 et r_2 tels que $I_{Q_{r_1}} \circ I_{Q_{r_2}}$ soit elliptique.
2. Si $\alpha_1 \neq \alpha_2$ alors il existe r_1 et r_2 tels que $I_{Q_{r_1}} \circ I_{Q_{r_2}}$ soit elliptique.

On peut cette fois normaliser la situation de sorte que γ_1 relie $[0,0]$ et ∞, et γ_2 relie $[1,0]$ et ∞. De même que dans la preuve de la proposition 7.18, tout se ramène à l'étude de la trace de la matrice, $M = M_{r_1,\alpha_1}\,\mathbf{h}\,\overline{M_{r_2,\alpha_2}}\,\mathbf{h}^{-1}$, où cette fois $\mathbf{h}$ désigne l'élément parabolique unipotent fixant ∞ :

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

L'isométrie parabolique h envoie $[0,0]$ sur $[1,0]$. Ici,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} M &= \exp\left(-\frac{4i}{3}(\alpha_2-\alpha_1)\right) + \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} + \frac{r_2^2}{r_1^2} + \frac{1}{r_1^2 r_2^2}\right)\exp\left(\frac{2i}{3}(\alpha_2-\alpha_1)\right) \\ &\quad \frac{2}{r_2^2}\exp\left(\frac{2i}{3}(2\alpha_1+\alpha_2)\right) + \frac{2}{r_1^2}\exp\left(-\frac{2i}{3}(2\alpha_2+\alpha_1)\right). \end{aligned} \tag{7.4}$$

1. Supposons que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$.
   Alors, si de plus $r_1 = r_2 = r$ et $\cos 2\alpha < 0$

$$\operatorname{tr} M = 3 + \frac{4\cos 2\alpha}{r^2} + \frac{1}{r^4}.$$

   Dans ces conditions, M est elliptique si et seulement si $0 < r < \left(2\sqrt{-\cos 2\alpha}\right)^{-1}$

2. Supposons maintenant que $\alpha_1 \neq \alpha_2$.
   Posons maintenant $r_1 = r_2 = 1/\sqrt{r}$. Après un calcul, $\operatorname{tr} M$ devient en posant $\alpha = 2/3(\alpha_2 - \alpha_1)$

$$\operatorname{tr} M = \varphi(\alpha) + r^2 e^{i\alpha} + 4re^{-i\alpha/2} \cos(\alpha_1 + \alpha_2). \tag{7.5}$$

   Rappelons que $\varphi(\alpha) = 2e^{i\alpha} + e^{-2i\alpha}$, est un paramétrage du bord du « triangle elliptique » $\mathbf{\Delta}$ (voir la remarque 1.12 page 26). De plus la tangente à $\mathbf{\Delta}$ en un point de paramètre α tel que $\alpha_3 \neq 1$ a pour direction $e^{-i\alpha/2}$.
   La relation 7.5 montre donc qu'à α_1 et α_2 fixés, et lorsque $r = r_1^{-2} = r_2^{-2}$ varie, $\operatorname{tr} M$ décrit un arc de parabole $\mathcal{P}$ donc l'origine est au point $\varphi(\alpha)$, et correspond à r nul. De plus, on vérifie que $\mathcal{P}$ et Δ partagent la même tangente T à l'origine de $\mathcal{P}$. Or le contact entre $\mathcal{P}$ et T est d'ordre 2, celui entre Δ et T est d'ordre 1. Il s'en suit qu'au voisinage de $r = 0$, $\mathcal{P}$ est situé entre $\mathbf{\Delta}$ et T.
   Les points de $\mathcal{P}$ situés entre $\mathbf{\Delta}$ et T correspondent à des traces elliptiques, donc à des feuilles des deux $\mathbb{R}$-surfaces spinales qui s'intersectent.

□

7.5 Preuve du théorème principal

Description de la famille ϕ_α

Nous allons utiliser sur l'espace de Teichmüller de tore épointé $T_{(1,1)}$ les coordonnées que nous avons décrites au chapitre 2. Tout point $[\rho]$ de $T_{(1,1)}$ est donc représenté par un unique triplet (t_1, t_2, t_3) tel que $t_1 + t_2 + t_3 = 0$.
Rappelons que la $\mathcal{D}_\mathbb{R}$ est l'ensemble des groupes triangulaires lagrangiens tels que $(I_1 I_2 I_3)^2$ est parabolique ou loxodromique, et qui satisfont à la condition de non-dégénérescence (C) (voir la définition 6.3 page 108).
Supposons fixée une famille Λ de représentants des classes de conjugaison des points de $\mathcal{D}_\mathbb{R}$, par exemple, celle utilisée au chapitre précédant. Tout point de $\mathcal{D}_\mathbb{R}/\mathrm{PU}(2,1)$ est donc représenté par un unique groupe triangulaire $\Lambda(t_1, \theta_1, t_2, \theta_2, t_3, \theta_3, \mathbb{A})$ tel que

$$c_\mathbb{R}(\Lambda(t_1, \theta_1, t_2, \theta_2, t_3, \theta_3, \mathbb{A})) = (t_1, \theta_1, t_2, \theta_2, t_3, \theta_3, \mathbb{A}).$$

Associons finalement à tout groupe triangulaire $G = \langle I_1, I_2, I_3 \rangle$ son sous-groupe d'indice deux $G_2 = \langle I_1 I_2, I_3 I_2 \rangle$. A tout point de $\mathcal{D}_\mathbb{R}/\mathrm{PU}(2,1)$ est donc associée une classe de représentation de F_2 dans PU(2,1), dont un représentant est $\Lambda(t_1, \theta_1, t_2, \theta_2, t_3, \theta_3, \mathbb{A})_2$.

Définissons alors ϕ_α par

$$\begin{array}{rccc} \phi_\alpha & : & T_{(1,1)} & \longrightarrow & \mathcal{D}_\mathbb{R} \\ & & (t_1, t_2, t_3) & \longmapsto & [\Lambda\left(t_1, \frac{\pi}{2} + \alpha, t_2, \frac{\pi}{2} + \alpha, t_3, \frac{\pi}{2} + \alpha, 0\right)_2] \end{array} \tag{7.6}$$

Avant de poursuivre, notons que pour tout α et pour tout triplet $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$ le cycle (p_1, p_2, p_3) associé au groupe $\Lambda\left(t_1, \frac{\pi}{2}+\alpha, t_2, \frac{\pi}{2}+\alpha, t_3, \frac{\pi}{2}+\alpha, 0\right)$ comme en 6.2 (page 108) est contenu dans un $\mathbb{R}$-plan, car la dernière composante, qui correspond à l'invariant de Cartan, est nulle. Nous supposerons dès lors ces trois points fixés jusqu'à la fin du chapitre.

Injectivité de ϕ_α

Vue la définition des coordonnées sur $\mathcal{D}_\mathbb{R}$ donnée au chapitre 6, les paramètres t_i, θ_j et $\mathbb{A}$ (nul ici) sont des invariants, qui d'après la proposition 6.9 déterminent la classe de conjugaison de $\Lambda(t_1, \theta_1, t_2, \theta_2, t_3, \theta_3, \mathbb{A})$. La première assertion du théorème en découle donc : ϕ_α est injective.

Discrétude, fidélité, préservation du type

Nous allons montrer dans ce paragraphe que pour tout $\alpha \in [-\pi/4, \pi/4]$, toute représentation ρ donnée par un triplet de réflexions lagrangiennes I_1, I_2, I_3 telle que

$$c_\mathbb{R}(\rho) = (t_1, \pi/2+\alpha, t_2, \pi/2+\alpha, t_3, \pi/2+\alpha, 0)$$

est discrète et fidèle et que les seuls éléments paraboliques dans le groupe $\langle I_1, I_2, I_3\rangle$ sont conjugués à des puissances d'un produit cyclique $I_iI_jI_k$ avec i, j et k deux à deux distincts. La famille Λ de représentants des classes de conjugaison étant fixée, à tout triplet $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$ est associé par ϕ_α un triplet de réflexions lagrangiennes $\left(I_1^{t_1,\alpha}, I_2^{t_2,\alpha}, I_3^{t_3,\alpha}\right)$. Pour tout réel s, notons $P_k^{s,\alpha}$ le $\mathbb{R}$-plan fixé par $I_k^{s,\alpha}$. Pour $k = 1, 2, 3$, posons alors

$$S_k^\alpha = \bigcup_{s\in\mathbb{R}} P_k^{s,\alpha}.$$

D'après les deux propositions 7.10 et 7.14, S_k est une $\mathbb{R}$-surface spinale stable par $I_k^{t_k\alpha}$ et telle que $I_k^{t_k,\alpha}$ échange les deux composantes de $\mathbf{H}^2_\mathbb{C} \setminus S_k^\alpha$. Comme p_1, p_2 et p_3 sont contenus dans un $\mathbb{R}$-plan commun, la proposition 7.21 s'applique : S_i^α et S_j^α sont disjointes, et leurs adhérences s'intersectent en p_k.

Nous travaillerons jusqu'à la fin de ce paragraphe à α fixé, et à t_1, t_2 et t_3 fixés tels que $t_1 + t_2 + t_3 = 0$.

Pour simplifier l'écriture nous omettrons désormais t_1, t_2, t_3 et α dans les notations : nous noterons les trois réflexions lagrangiennes I_1, I_2 et I_3, et les trois $\mathbb{R}$-surfaces spinales S_1, S_2 et S_3. Nous allons donc montrer que le groupe engendré par I_1I_2 et I_3I_2 est une représentation discrète, fidèle et préservant le type du groupe fondamental du tore épointé. Nous allons utiliser les notations suivantes :

- Pour $k = 1, 2, 3$, soit B_k la composante de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} \setminus S_k$ ne contenant pas p_k et B'_k la composante contenant p_k.
- Soit l'intersection $\Delta = \bigcap_{k=1}^{3} \overline{B'k_k}$.

— Discrétude et fidélité —

Les trois ensembles ouverts B'_1, B'_2 et B'_3, associées respectivement aux sous-groupes $\langle I_1 \rangle$, $\langle I_2 \rangle$, et $\langle I_3 \rangle$ satisfont aux hypothèses du théorème 7.2 (voir page 128). Par suite le groupe engendré par I_1, I_2 et I_3 est discret et admet la présentation $\langle i_1, i_2, i_3 | i_k^2 = 1 \rangle$. De plus, l'ouvert Δ a la propriété suivante

$$g \cdot \Delta \cap \Delta = \emptyset, \text{ pour tout } g \neq Id. \tag{7.7}$$

Le sous-groupe d'indice deux de $\langle I_1, I_2, I_3 \rangle$ engendré par $I_1 I_2$ et $I_3 I_2$ est donc également discret. La représentation ρ de F_2 dans PU(2,1) définie par $\rho(\mathtt{m}) = I_1 I_2$ et $\rho(\mathtt{n}) = I_3 I_2$ est une représentation fidèle du groupe fondamental du tore épointé. En effet, (7.7) contredit l'existence d'un mot non-trivial $w \in F_2$ tel que $\rho(w) = Id$.

Remarque 7.22. Le fait que $I_k(\Delta) \cap \Delta = \emptyset$ montre que Δ est contenu dans un domaine fondamental pour l'action de $\langle I_1, I_2, I_3 \rangle$.

— Préservation du type —

Notons $A = I_1 I_2$ et $B = I_3 I_2$. Nous allons maintenant montrer la proposition suivante.

Proposition 7.23. *Soit g un élément du groupe $\langle A, B \rangle$ différent de l'identité. Alors*
- *ou g est loxodromique*
- *ou g est parabolique, et est alors conjugué à une puissance, éventuellement négative, de $[A, B]$.*

Démonstration. Soit g un mot en A et B, distinct de l'identité. Il s'écrit $g_n \cdots g_1$, où chaque g_k désigne l'une des involutions I_1, I_2 et I_3. Quitte à réduire cycliquement g (dans le groupe $\langle I_1, I_2, I_3 \rangle$), on peut supposer que $g_n \neq g_1$. Soit alors, pour tout k, D_k, celle des trois boules B_1, B_2, B_3 qui est associée à g_k[3].
Dans ces conditions, g a un point fixe dans $\overline{D_1}$ et un point fixe dans $\overline{D_n}$. En effet, soit $x \in D_n$. Nous avons supposé que $g_1 \neq g_n$. Par suite, $D_1 \cap D_n$ est vide, et $g_1 \cdot x \in D_1$. On vérifie alors que pour tout k, $g_k \cdots g_1 \cdot x \in D_k$, et donc que $g \cdot x \in D_n$. Le mot g stabilise donc D_n et admet par conséquent un point fixe dans $\overline{D_n}$. Le même raisonnement appliqué à g^{-1} montre que g admet un point fixe dans D_1. Par conséquent, si g admet un seul point fixe, c'est forcément l'un des p_k : il est dans $\overline{D_1} \cup \overline{D_n}$.
Le groupe $\langle A, B \rangle$ étant une représentation discrète et fidèle de F_2, g ne peut être elliptique. Les points fixes de g sont donc situés au bord de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Il y a donc a priori trois possibilités :

[3] en convenant que B_j est associée à I_j

1. g est loxodromique, admet deux points fixes distincts qui sont respectivement contenus dans D_1 et D_n.
2. g est loxodromique et ses deux points fixes sont : l'un des trois points (p_1, p_2, p_3), ainsi qu'un autre point, contenu dans l'une des boules $\overline{B_k}$.
3. g est parabolique et son point fixe est l'un des p_k.

Nous pouvons d'ores et déjà écarter la seconde possibilité, car elle s'oppose à la discrétude : dans ce cas $\langle A, B\rangle$ contiendrait un sous-groupe non discret car engendré par un élément parabolique et un élément loxodromique ayant un point fixe en commun.
Il nous reste donc à montrer que dans le dernier cas g est conjugué à une puissance de $[A, B]$. Pour ce faire, commençons par étudier l'action du groupe monogène engendré par $[A, B]$, qui fixe p_2. Supposons dorénavant que p_2 est le point ∞ de $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Avant tout, remarquons que $[A, B]$ est parabolique pur, et conjugué à une translation de Heisenberg non-verticale. En effet, la paire (A, B) étant $\mathbb{R}$-décomposable, d'après le théorème 5.19 et la proposition 6.25, si ce n'était pas le cas, A et B commuteraient. D'après la discussion précedente, $A = I_1I_2$ a un point fixe dans B_1 et un dans B_2, et $B = I_3I_2$ a un point fixe dans B_3, et un dans B_2. Ils n'ont donc pas les mêmes points fixes. Or deux élément loxodromiques commutent si et seulement si ils ont les mêmes point fixes (proposition 1.19).

Soit Δ^2 la réunion de $\overline{\Delta}$ et de $I_2(\overline{\Delta})$. Δ^2 est un polyèdre qui a quatre faces : S_1, S_3, $S'_3 = I_2(S_3)$ et $S'_1 = I_2(S_1)$. Comme $I_k(S_k) = S_k$, ces faces sont identifiées de la manière suivante :

$$A(S'_1) = S_1 \text{ et } B(S'_3) = S_3.$$

Remarque 7.24. Appliquons le théorème 7.2 à l'action du groupe $\langle A, B\rangle$ sur $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ en utilisant les deux sous-groupes $\langle A\rangle$ et $\langle B\rangle$, dont l'union engendre $\langle A, B\rangle$. Nous obtenons que $\partial\Delta^2$ est contenu dans un domaine fondamental pour l'action de $\langle A, B\rangle$ sur $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Nous désignons ici par $\partial\Delta^2$ l'intersection de l'adhérence de Δ^2 dans $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ avec $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Considérons alors les quatre images de Δ^2 suivantes :

$$\Delta^2_A = A(\Delta^2),\ \Delta^2_{AB} = AB(\Delta^2),\ \Delta^2_{ABA^{-1}} = ABA^{-1}(\Delta^2),\ \Delta^2_{[A,B]} = [A, B](\Delta^2).$$

Les cinq polyèdres Δ^2, Δ^2_A, Δ^2_{AB}, $\Delta^2_{ABA^{-1}}$ et $\Delta^2_{[A,B]}$, ainsi que les identifications de leurs faces par des éléments du groupe $\langle A, B\rangle$ sont représentés schématiquement sur la figure 7.7. Soit Ω, la partie de $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ comprise entre les $\mathbb{R}$-sphères spinales ∂S_1 et $[A, B]\,(\partial S_1)$ (ces deux $\mathbb{R}$-surfaces spinales sont marquées d'un carré noir ■ sur la figure 7.7). Ω contient la réunion $\mathcal{W} = \partial\Delta^2 \cup \partial\Delta^2_A \cup \partial\Delta^2_{AB} \cup \partial\Delta^2_{ABA^{-1}}$, qui est un voisinage de $p_2 = \infty$ dans Ω.

Les deux $\mathbb{R}$-sphères spinales qui bordent Ω sont identifiées par $[A, B]$. Par ailleurs, la représentation étudiée étant $\mathbb{R}$-décomposable, $[A, B]$ est parabolique pur. Il découle alors du lemme 7.25 ci-dessous que les images de Ω pavent $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Soit alors g un élément du stabilisateur de $p_2 = \infty$ non-inclu dans le groupe engendré par $[A, B]$. L'isométrie g étant parabolique (et fixant ∞), pour tout $x \in \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} \cap \partial\Delta^2$, la suite $g^n(x)$ tend vers ∞. Par ailleurs, comme $\mathcal{W}$ est un voisinage de l'infini dans Ω, $\mathcal{W}'$, défini comme la réunion $\cup_{k\in\mathbb{Z}}[A, B]^k(\mathcal{W})$ est un voisinage de l'infini dans $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Par suite, $g^n(x)$ appartient à $\mathcal{W}'$ pour n assez grand. Par conséquent, il existe $y \in \partial\Delta^2$ et k un entier relatif tels que

$$g^n(x) = [A, B]^k(y)$$

Ceci s'oppose à la remarque 7.24, sauf si g est dans le groupe engendré par $[A, B]$. □

Lemme 7.25. *Soit m un point de $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ et p un élément parabolique fixant m. Supposons données S_1 et S_2, deux $\mathbb{R}$-surfaces spinales adjacentes en m et telles que $p(S_1) = S_2$, et soit U la partie de $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ comprise entre les deux $\mathbb{R}$-sphères spinales ∂S_1 et ∂S_2. Les images de $\overline{U}$ par le groupe engendré par p pavent $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. Quitte à conjuguer, on peut supposer que m est l'infini (dans le modèle de Siegel), et que p admet le relèvement

$$\begin{bmatrix} 1 & x\sqrt{2} & -x^2 \\ 0 & 1 & -x\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ avec } x \in \mathbb{R}$$

Soit alors $q_1 \in \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ un point de ∂S_1, de coordonnées de Heisenberg $[z_1, t_1]$. L'orbite de q_1 sous le groupe engendré par p est l'ensemble $\{[(z_1 + kx, t_1 - 2kx\mathrm{Im}\,(z_1)]), k \in \mathbb{Z}\}$, qui est contenu dans le $\mathbb{R}$-cercle D_{q_1} paramétré par $\{[z_1 + s, t_1 - 2s\mathrm{Im}\,(z_1)], s \in \mathbb{R}\}$. Ce $\mathbb{R}$-cercle est exactement l'orbite de q_1 pour le groupe à un paramètre $G = \{[s, 0], s \in \mathbb{R}\}$.

Par hypothèse, $q_2 = p(q_1)$ appartient à $\partial S_2 \cap D_{q_1}$. Les images de l'intervalle $[q_1, q_2]$ pavent donc le $\mathbb{R}$-cercle D_{q_1}.

Les orbites du groupe à un paramètre G feuillettent le groupe de Heisenberg. Il suffit donc pour conclure de vérifier qu'elles intersectent toutes ∂S_1. Cela découle de la proposition 7.26 et de la remarque qui la suit. □

Proposition 7.26. *Soit S une $\mathbb{R}$-surface spinale de spine γ, et P un $\mathbb{R}$-plan contenant une extrémité de γ, notée $p \in \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. P et S s'intersectent dans $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. Utilisons le modèle de Siegel. Quitte à normaliser la situation, on peut supposer que S est la $\mathbb{R}$-surface spinale construite sur la géodésique reliant $[0, 0]$ et ∞, par rapport au $\mathbb{R}$-plan $\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$, et que p est le point ∞. Les feuilles de S, sont donc orthogonales au $\mathbb{R}$-plan $\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$, et correspondent donc à des $\mathbb{R}$-cercles centrés en $[0, 0]$. Soit I_r la réflexion par rapport à la feuille de paramètre r de S ($r = e^t$, où t désigne l'abscisse curviligne). Les lemmes 7.16 et 1.66 montrent alors que les réflexions lagrangiennes par rapport aux

feuilles de S admettent les relèvements suivant

$$M_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/r^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ avec } r > 0.$$

Par ailleurs, le lemme 1.67 (page 40) fourni un relèvement $J_{z,t,\theta}$ de la réflexion I_P par rapport à P pour pour tout $\mathbb{R}$-plan contenant ∞. Les trois nombres z, t et θ sont les paramètres définissant le $\mathbb{R}$-plan P.
Calculons la trace d'un relèvement à SU(2,1) de $I_P \circ I_r$. Nous obtenons :

$$\operatorname{tr}\left(J_{z,t,\theta}\overline{M_r}\right) = \operatorname{tr}\left(J_{z,t,\theta}M_r\right) = -\left(\frac{2\bar{z}^2}{r^2}+1\right)\exp\left(4i\theta/3\right) - 2\frac{(-|z|^2+it)}{r^2}\exp\left(-2i\theta/3\right).$$

Les trois paramètres z, t et θ étant fixés par le choix de P, lorsque r tend vers l'infini, la trace ci-dessus tend vers $\tau = -\exp\left(4i\theta/3\right)$. τ étant de module 1, en notant f la fonction définie en 1.10

$$f(\tau) = -8\left(1+\operatorname{Re}\left(\tau^3\right)\right) \leqslant 0.$$

Par suite, le lemme 1.11 montre que

- Si $\tau \notin \{-1, \exp\left(i\pi/3\right), \exp\left(-i\pi/3\right)\}$, τ est une « trace elliptique régulière ». Pour r suffisamment grand, la matrice $J_{z,t,\theta}\overline{M_r}$ correspond à une isométrie elliptique régulière.
- Si $\tau = -1$, alors θ est congru à 0 modulo $3\pi/2$. Si $\theta = 0$, alors

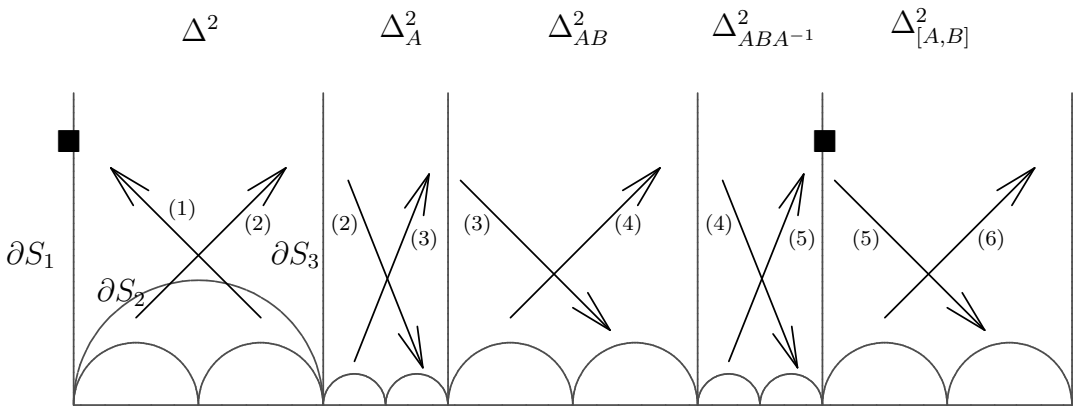
$$\operatorname{tr}\left(J_{z,t,0}\overline{M_r}\right) = -1 + \frac{2(|z|^2-\bar{z}^2)}{r^2} - \frac{2it}{r^2}.$$

  Par conséquent, la partie réelle de cette trace est plus grande que -1, et pour r assez grand, correspond à une trace elliptique régulière (voir la figure 1.1 page 27). On conclut de la même manière si $\theta = 3\pi/2$. Les cas où $\tau = \exp\left(\pm i\pi/3\right)$ s'obtiennent en changeant de relèvement pour $I_P \circ I_r$: il suffit de le multiplier par une racine cubique de 1.

Ceci montre que pour r assez grand, $I_P \circ I_r$ est elliptique, donc que P intersecte la feuille de paramètre r de S. □

Remarque 7.27. En conséquence de la proposition 7.26, tout $\mathbb{R}$-cercle infini intersecte la $\mathbb{R}$-sphère spinale ∂S, où S est une $\mathbb{R}$-surface spinale construite sur une géodésique γ issue de P.

Remarque 7.28. Il existe bien entendu d'autres points fixes d'élements paraboliques dans le groupe $\langle A, B\rangle$, qui correspondent à des conjugués de puissances de $[A, B]$. Ces éléments ne sont pas cyclquement réduits.



(1) : A, (2) : B
(3) : ABA^{-1}, (4) : $ABA^{-1}B^{-1}A^{-1}$
(5) : $ABA^{-1}B^{-1}AB^{-1}A^{-1}$, (6) : $[A,B]A[A,B]^{-1}$

FIG. 7.7 – Représentation schématique de Δ^2 et de ses images. Tous les segments représentent des $\mathbb{R}$-surfaces spinales.

Représentations stabilisant un $\mathbb{R}$-plan

Nous allons montrer que si α est non-nul, le groupe $\langle A, B\rangle$ ne préserve aucun $\mathbb{R}$-plan. Tout découle du lemme suivant.

Lemme 7.29. *Soit G un sous-groupe de PU(2,1) préservant un sous-espace totalement géodésique $\mathcal{E}$, et ne contenant aucun élément elliptique. Soit g un élément de G. Les points fixes de g sont contenus dans $\mathcal{E}$.*

Démonstration. Soit en effet m un point fixe de $g \in G$ qui n'appartient pas à P, soit $\Pi(m)$ la projection de m sur P. Le point $\Pi(m)$ est à l'interieur de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Par ailleurs, $g(Pi(m))$ appartient également à P. Si $\Pi(m)$ n'est pas fixé par g, le triangle géodésique $(m\, Pi(m), g(\Pi(m)))$ a deux angles droits et un angle nul (en m). Ceci s'oppose au fait que $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ soit de courbure négative. Comme g n'est pas elliptique, $\Pi(m)$ ne peut être fixé par g. D'où le résultat. □

Par conséquent, le seul $\mathbb{R}$-plan susceptible d'être stabilisé par $[A, B]$ est celui qui contient les trois points (p_1, p_2, p_3). Appelons-le P. D'après le lemme 1.83 (page 46), si une reflexion lagrangienne I_Q stabilise le $\mathbb{R}$-plan P et que P et Q s'intersectent en exactement un point, alors ils sont orthogonaux (i.e. leur angle a pour mesure $(\pi/2, \pi/2)$. Par conséquent, si $\alpha \neq 0$, aucun des trois points $I_1(p_1)$, $I_2(p_2)$ et $I_3(p_3)$ n'appartient à P. Comme $A(p_3) = I_1 I_2(p_3) = I_1(p_1)$, le groupe $\langle A, B\rangle$ ne préserve aucun $\mathbb{R}$-plan.

Maximalité du segment $(\phi_\alpha)_{|\alpha|\leqslant\pi/4}$

A α fixé, $\phi_\alpha(T_{(1,1)})$ peut être vu comme l'ensemble des groupes engendrés par trois réflexions lagrangiennes fixant chacune une feuille des trois $\mathbb{R}$-surfaces spinales $S^{\pi/2+\alpha}_{\gamma_k}$. Nous avons vu dans la preuve de la proposition 7.21 que si γ_1 et γ_2 sont deux géodésiques asymptotiques tracées dans un $\mathbb{R}$-plan commun P, alors, dès que $|\alpha| > \pi/4$, les deux $\mathbb{R}$-sphères $S^{\pi/2+\alpha}_{\gamma_1,P}$ et $S^{\pi/2+\alpha}_{\gamma_2,P}$ s'intersectent. Par suite, si $|\alpha| > \pi/4$ il existe des valeurs de t_1, t_2 et t_3 pour lesquelles un mot de longueur deux est elliptique.

7.6 Commentaires et remarques

Remarque 7.30. L'existence des trois $\mathbb{R}$-surfaces spinales construite à la section précédente garantit que toutes les représentations ρ, éléments de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ telles que

$$c_{\mathbb{R}}(\rho) = (t_1, \pi/2 + \alpha, t_2, \pi/2 + \alpha, t_3, \pi/2 + \alpha, 0)$$

avec $-\pi/4 < \alpha < \pi/4$ sont discrètes. Cependant, ces trois $\mathbb{R}$-surfaces ne définissent un domaine fondamental que si $\rho\,(\mathtt{m}, \mathtt{n})$ est parabolique, c'est à dire si $t_1 + t_2 + t_3 = 0$. Si le commutateur est loxodromique, alors le polyèdre délimité par les trois $\mathbb{R}$-surfaces et ses images ne pavent pas $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ (voir la figure 2.4 page 58).

FIG. 7.8 – Deux vues du domaine fondamental pour le cas $\alpha = 0$.

Remarque 7.31. On peut considérer des familles moins grosses de représentations pour essayer de comprendre ce qui arrive pour $|\alpha| > \pi/4$ lorsque l'on maintient la parabolicité du commutateur. Si l'on se restreint ainsi à la famille $t_1 = -t_3$ (donc $t_2 = 0$), le mot $I_1 I_3$ est loxodromique tant que $e^{2t_1} + \cos 2\alpha$ est négatif. Si cette dernière condition n'est pas remplie, un autre mot peut devenir elliptique, mais il est difficile de déterminer lequel. Considérons, par exemple la famille à un paramètre pour laquelle $t_1 = -t_3 = \log 2$, et $t_2 = 0$. On vérifie par le calcul que les trois mots de longueur deux restent loxodromiques pour $\alpha \in [0, \dfrac{\pi}{2}[$. Une étude expérimentale montre que le mot de longueur 8 $I_1 I_3 I_1 I_2 I_3 I_2 I_3 I_2$, dont la trace vaut

$$3 + 1154 \cos^4 \alpha - 429 \cos^2 \alpha - 1150\, i \sin \alpha \cos^3 \alpha$$

est elliptique sur le segment $\alpha_0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, avec $0.468\pi < \alpha_0 < 0.469\pi$. C'est le mot le plus court qui devienne elliptique pour ces valeurs de t_1, t_2 et t_3. Pour une valeur donnée de α, il est en général très difficile de déterminer quel mot devient elliptique le premier dans une famille à un paramètre.

Remarque 7.32. En généralisant l'approche du chapitre 6, on peut considérer des groupes « polygonaux » au lieu de triangulaires, c'est à dire engendrés par n involutions $I_1, I_2 \ldots I_n$ telles que le mot $I_1 I_2 \ldots I_n$ soit parabolique. De tels groupes possèdent un cycle de longueur n

$$p_{n-1} \overset{I_n}{\longleftrightarrow} p_n \overset{I_{n-1}}{\longleftrightarrow} p_1 \overset{I_{n-2}}{\longleftrightarrow} p_2 \cdots \overset{I_1}{\longleftrightarrow} p_{n-1}. \tag{7.8}$$

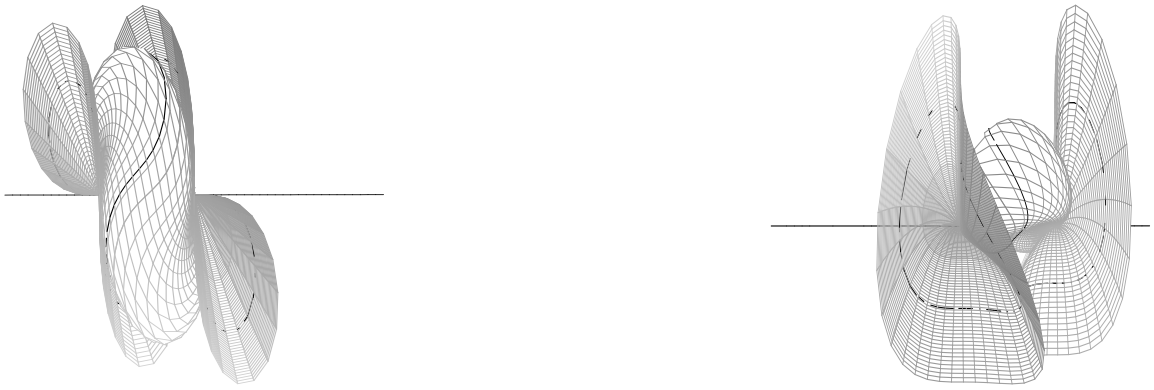


FIG. 7.9 – Deux vues du domaine fondamental pour le cas $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

FIG. 7.10 – La $\mathbb{R}$-sphère ∂S_2 seule, pour $\alpha = \frac{\pi}{10}$.

En munissant toutes les géodésiques ci-dessus de leur paramétrage standard, si $I_1 I_2 \dots I_n$ est parabolique, $t_1 + \cdots + t_n = 0$ (où t_k désigne l'abscisse curviligne le long de la géodésique stabilisée par I_k). Dans le cas où les n involutions sont antiholomorphes, on montre alors que le groupe engendré par I_1, I_2, ... ,I_n est discret si

- les points $p_1 \dots p_n$ sont contenus dans un $\mathbb{R}$-plan P
- les $\mathbb{R}$-plans fixés par les I_k, ont un angle de mesure $(\pi/2, \pi/2 + \alpha)$ avec P, où $|\alpha| < \pi/4$.

Bibliographie

[ADS05] H. Aslaksen, V. Drensky, and L. Sadikova. Defining relations of invariants of two 3×3 matrices. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, 58, 2005.

[BCM] J. Brock, R. Canary, and Y. Minsky. The classification of Kleinian surface groups II : The Ending Lamination Conjecture. *preprint,* `www.math.yale.edu/ yhm3/research/`.

[Bea83] A. Beardon. *The geometry of discrete groups.* Springer, New York, 1983.

[Ber60] L. Bers. Simultaneous uniformization. *Bull. AMS*, 66 :94–97, 1960.

[Ber00] R. Berndt. *An introduction to Symplectic Geometry.* Graduate Sudies in Mathematics. AMS, Providence, Rhode Island, 2000.

[BGPG03] S.B. Bradlow, O. García-Prada, and P.B. Gothen. Surface group representations and $\mathrm{U}(p,q)$-higgs bundles. *J. Diff. Geom.*, 64 :111–170, 2003.

[BH99] M. Bridson and A. Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature.* Springer, New York, 1999.

[BIW03] M. Burger, A. Iozzi, and A. Wienhard. Surface group representations with maximal Toledo invariant. *C. R. Acad. Sci Paris*, 336 :95–104, 2003.

[BIW06] M. Burger, A. Iozzi, and A. Wienhard. Surface group representations with maximal Toledo invariant. *preprint*, 2006.

[Bou96] M. Bourdon. Sur le birapport au bord des CAT(-1)-espaces. *Publ. Math. I.H.E.S.*, 83 :95–104, 1996.

[CG74] S. Chen and L. Greenberg. Hyperbolic spaces. In *Contribution to Analysis*, pages 49–87. Academic Press, New York, 1974.

[CG93] S. Choi and W. M. Goldman. Convex real projective structures on closed surfaces are closed. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 118 :657–661, 1993.

[Cha76] B. Chabat. *Introduction l'analyse complexe II.* Mir, 1976.

[Der05] M. Deraux. Dirichlet Domains for the Mostow Lattices. *Exper. Math.*, 14 :467–490, 2005.

[DFP05] M. Deraux, E. Falbel, and J. Paupert. New constructions of fundamental polyhedra in complex hyperbolic space. *Acta Math.*, 194 :155–201, 2005.

[Dol03] I. Dolgashev. *Lectures on Invariant Theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[DT87] A. Domic and D. Toledo. The Gromov norm of the Kähler class of symmetric domains. *Math. Ann*, 276 :425–432, 1987.

[Fala] E. Falbel. Geometric structures associated to triangulations as fixed point sets of involutions. preliminary version.

[Falb] E. Falbel. Spherical CR structures on the complement of the figure eight knot. preliminary version.

[FK00] E. Falbel and P.V. Koseleff. Flexibility of ideal triangle groups in complex hyperbolic geometry. *Topology*, 39 :1209–1223, 2000.

[FK02a] E. Falbel and P.V. Koseleff. A circle of modular groups in PU(2,1). *Math. Res. Let.*, 9 :379–391, 2002.

[FK02b] E. Falbel and P.V. Koseleff. Rigidity and flexibility of triangle groups in complex hyperbolic geometry. *Topology*, 41, 2002.

[Fog02] N. Pytheas Fogg. *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics.* Springer, Berlin Heidelberg, 2002.

[FP03] E. Falbel and J. Parker. The moduli space of the modular group. *Inv. Math.*, 152, 2003.

[FP04] E. Falbel and J. Paupert. Fundamental domains for finite subgroups in U(2) and configurations of Lagrangians. *Geom. Dedicata*, 109 :221–238, 2004.

[Fri96] R. Fricke. Uber die Theorie der Automorphen Funktionen. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen*, 1896.

[FW] E. Falbel and R. Wentworth. Produit de deux isométries d'un espace symétrique de rang un et compacit la Mumford-Mahler. *In preparation.*

[FZ99] E. Falbel and V. Zocca. A Poincaré polyhedron theorem for complex hyperbolic geometry. *J. reine angew. Math.*, 516 :133–158, 1999.

[Gil95] J. Gilman. Two-generator discrete subgroups of $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. *Mem. of AMS*, 117, 1995.

[GKL01] W. Goldman, M. Kapovich, and B. Leeb. Complex hyperbolic manifolds homotopy equivalent to a Riemann surface. *Comm. Anal. Math.*, 9 :61–95, 2001.

[GM87] W. Goldman and J. Millson. Local rigidity of discrete groups acting on complexe hyperbolic space. *Invent. Math.*, 88 :495–520, 1987.

[Gol] W. Goldman. An exposition of results of Fricke and Vogt, `www.math.umd.edu/ wmg`.

[Gol85] W. Goldman. Representations of fundamental groups of surfaces. In *Geometry and Topology (College Park, Md., 1983/84)*, pages 95–117. Springer, 1985.

[Gol88] W. Goldman. Topological components of spaces of representations. *Invent. math.*, 93 :557–607, 1988.

[Gol90] W. Goldman. Convex real projective structures on compact surfaces. *J. Differential Geometry*, 31, 1990.

[Gol99] W. Goldman. *Complex Hyperbolic Geometry*. Oxford University Press, Oxford, 1999.

[GP92] W. Goldman and J. Parker. Complex hyperbolic ideal triangle groups. *Journal für dir reine und angewandte Math.*, 425 :71–86, 1992.

[GP00] N. Gusevskii and J.R. Parker. Representations of free fuchsian groups in complex hyperbolic space. *Topology*, 39 :33–60, 2000.

[GP03] N. Gusevskii and J.R. Parker. Complex hyperbolic quasi-fuchsian groups and toledo's invariant. *Geom. Ded.*, 97 :151–185, 2003.

[Gui04] O. Guichard. Groupes plongés quasi isométriquement dans un groupe de Lie. *Math. Ann.*, 330 :331–351, 2004.

[Her91] L. Hernàndez. Maximal representations of surface groups in bounded symmetric domains. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 324, 1991.

[Hit92] N.J. Hitchin. Lie groups and Teichmüller space. *Topology*, 31, 1992.

[Jos98] J. Jost. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Springer, Berlin, 1998.

[Kap] M. Kapovich. *Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups*. Progress in Mathematics. Birkhäuser.

[Kee71] L. Keen. On Fricke moduli. In *Advances in the Theory of Riemann Surfaces (Proc. Conf., Stony Brook, N.Y., 1969)*, volume 66 of *Ann. of Math. Studies*, pages 205–224. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971.

[Kho] V. T. Khoi. On the SU(2,1) character variety of the brieskorn homoly spheres. *Preprint*.

[Kim01] Inkang Kim. Marked length rigidity of rank one symmetric spaces and their product. *Topology*, 40 :1295–1323, 2001.

[KM04] V. Koziarz and J. Maubon. Harmonic maps and representations of non-uniform lattices of PU(m,1). *arXiv :math.DG/0309193 v2*, 2004.

[KR87] A. Koranyi and H.M. Reimann. The complex cross-ratio on the Heisenberg group. *L'Enseign. Math.*, 33 :291–300, 1987.

[Lab] F. Labourie. Anosov flows, surface groups and curves in projective space. to appear in. *Invent. Math.*

[Lan93] S. Lang. *Algebra*. Third Edition, Addison-Wesley, 1993.

[Law06] S. Lawton. Relations and Symmetries of $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})^2//\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$. *arXiv :math.AG/0601132v2*, 2006.

[LS01] Roger C. Lyndon and Paul E. Schupp. *Combinatorial Group Theory.* Classics in Mathematics. Springer, Berlin, 2001.

[Mat82] J.Peter Matelski. The classification of discrete 2-generators subgroups of $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. *Israel J. Math.*, 42 :309–317, 1982.

[Min99] Y. Minsky. The classification of punctured-torus groups. *Ann. of Math. (2)*, 149, 1999.

[Min02] Y. Minsky. End invariants and the classification of hyperbolic 3-manifolds. *Curr. dev. in Math.*, 2002.

[Mos80] G. D. Mostow. A remarkable class of polyhedra in complex hyperbolic space. *Pac. J. Math.*, 86 :171–276, 1980.

[Ota92] J.P. Otal. Sur la géométrie symplectique de l'espace des géodésiques d'une variété à courbure négative. *Revista Matematica Iberoamricana*, 3, 1992.

[Ota96] J.P. Otal. *Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension trois.* SMF, Astérisque 235, Paris, 1996.

[Par03] J. Parker. Notes on complex hyperbolic geometry. 2003.

[Pau05] J. Paupert. *Configurations of Lagrangians, fundamental domains and discrete subgroups of PU(2,1).* PhD thesis, Université Paris VI, 2005.

[PP] J. Parker and I. Platis. Complex hyperbolic Fenchel-Nielsen coordinates, *Preprint.* `www.maths.dur.ac.uk/ dma0jrp/`.

[PP06] J. Parker and I. Platis. Open sets of maximal dimension in complex hyperbolic quasi-fuchsian space. *J. Diff. Geom*, 73 :319–350, 2006.

[Pra] A. Pratoussevitch. Non-discrete complex hyperbolic triangle groups of type (m, m, ∞). *preprint,* `www.math.uni-bonn.de/people/anna/publications.html`.

[Pra05] A. Pratoussevitch. Traces in complex hyperbolic triangle groups. *Geometriae Dedicata*, 111 :159–185, 2005.

[Pro76] C. Procesi. The invariant theory of $n \times n$ Matrices. *Advances in Math.*, 19 :306–381, 1976.

[Rat94] John G. Ratcliffe. *Foundations of Hyperbolic Manifolds.* Springer, New York, 1994.

[San95] H. Sandler. Traces on $\mathrm{SU}(2,1)$ and complex hyperbolic ideal triangle groups. *Algebras groups and geometries*, 12 :139–156, 1995.

[San98] H. Sandler. Trace equivalence in $\mathrm{SU}(2,1)$. *Geometriae Dedicata*, 69 :317–327, 1998.

[Sch01] R. E. Schwartz. Ideal triangle groups, dented tori, and numerical analysis. *Ann. of Math. (2)*, 153 :533–598, 2001.

[Sch02] R. E. Schwartz. Complex hyperbolic triangle groups. *Proc. Int. Math. Cong.*, 1 :339–350, 2002.

[Sch05a] F. Schaffhauser. *Decomposable representations and Lagrangian submanifolds of moduli spaces associated to surface groups.* Thèse de l'iniversité Paris VI, 2005.

[Sch05b] R. E. Schwartz. A better proof of the Goldman-Parker conjecture. *Geometry and Topology*, 9, 2005.

[Sch06] F. Schaffhauser. Representations of the fundamental group of an l-punctured sphere generated by products of lagrangian involutions. *Canad. J. Math.*, 2006.

[Sik01] A. S. Sikora. SL_n-character varieties as spaces of graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353 :2773–2804, 2001.

[Thu] W. Thurston. *The Geometry and Topology of Three-Manifold.* `http ://www.msri.org/publications/books/gt3m/`.

[Thu82] W. Thurston. Three dimensionnal manifolds, kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 6 :357–381, 1982.

[Tol89] D. Toledo. Representations of surface groups in complex hyperbolic space. *J. Differ. Geom.*, 29 :125–133, 1989.

[Vog86] H. Vogt. Sur les invariants fondamentaux des équations différentielles linéaires du second ordre. *Ann. Sci. E. N. S. 3ème série*, 1886.

[Wen94] Z.X. Wen. Relations polynomiales entre les traces de produits de matrices. *C.R. Acad. Sci Paris*, 314 :99–104, 1994.

[Wie04] A. Wienhard. A generalisation of teichmüller space in the hermitian context. *Séminaire de Théorie spectrale et géomtrie*, 22 :103–123, 2004.

[Wil] P. Will. Punctured torus and lagrangian triangle groups in PU(2,1), to appear in. *J. reine angew. Math.*

[Wil05] P. Will. Lagrangian decomposability of some two generator subgroup of $PU(2,1)$. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 340 :353–358, 2005.

[Wol83] S. Wolpert. On the Kähler form of the moduli space of once punctured tori. *Comment. Math. Helvetici.*, 58 :246–256, 1983.

[Xia00] E.Z. Xia. The moduli of flat PU(2,1)-strucutres on riemann surfaces. *Pacific. J. Math.*, 195 :231–256, 2000.

[Xia03] E.Z. Xia. The moduli of flat U(p,1)-strucutres on riemann surfaces. *Geom. Dedicata*, 97 :33–43, 2003.