



HAL
open science

Modélisation asymptotique et analyse numérique d'un problème de couplage fluide-structure

Cécile Poutous

► **To cite this version:**

Cécile Poutous. Modélisation asymptotique et analyse numérique d'un problème de couplage fluide-structure. Mathématiques [math]. Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2006. Français. NNT : . tel-00131977

HAL Id: tel-00131977

<https://theses.hal.science/tel-00131977>

Submitted on 19 Feb 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ de PAU et des PAYS de l'ADOUR

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES EXACTES ET DE LEURS APPLICATIONS

par

Cécile POUTOUS

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Modélisation asymptotique et analyse numérique d'un problème de couplage fluide-structure

Soutenue le 25 octobre 2006

Après avis de :

M. CARSTENSEN Carsten	Professeur, Université Humboldt de BERLIN	Rapporteur
M. CHAPELLE Dominique	Directeur de Recherche, INRIA, ROCQUENCOURT	Rapporteur

Devant la Commission d'examen formée de :

M. LABORDE Patrick	Professeur, Université Paul Sabatier, TOULOUSE	Président
M. CARSTENSEN Carsten	Professeur, Université Humboldt de BERLIN	Rapporteur
M. CHAPELLE Dominique	Directeur de Recherche, INRIA, ROCQUENCOURT	Rapporteur
M. AMARA Mohamed	Professeur, Université de PAU	Examineur
M. BLOUZA Adel	Maître de Conférences, Université de ROUEN	Examineur
M. LE DRET Hervé	Professeur, Université Pierre et Marie Curie, PARIS 6	Examineur
M. LUCE Robert	Maître de Conférences, Université de PAU	Co-directeur
M. THOMAS Jean-Marie	Professeur Émérite, Université de PAU	Directeur

Les travaux effectués dans cette thèse ont été réalisés au

Laboratoire de Mathématiques Appliquées UMR 5142

de

l'Université de Pau et des Pays de l'Adour

et commandités par le

Conseil Régional d'Aquitaine.

Remerciements

En tout premier lieu, je remercie Jean-Marie Thomas et Robert Luce d'avoir co-dirigé ma thèse. J'ai beaucoup aimé leurs enseignements en Maîtrise et DEA. J'ai encore plus aimé travailler avec eux ces quatre dernières années. Ce fut une grande aventure intellectuelle et humaine. J'ai tout particulièrement apprécié la grande disponibilité de Robert et la qualité du temps que nous avons passé à construire et « déconstruire » de nouvelles théories. J'ai été très heureuse que Jean-Marie accepte une dernière étudiante, sans lui, sans son enthousiasme, ses idées et son extraordinaire curiosité scientifique ça n'aurait pas été tout à fait pareil. Je leur suis très reconnaissante d'avoir accepté de me suivre dans un sujet qu'ils n'avaient pas proposé, c'est un cadeau magnifique.

Je remercie le Conseil Régional d'Aquitaine d'avoir proposé et financé cette thèse, pour ce soutien concret qu'ils apportent à la recherche et monsieur Mohamed Amara d'avoir soutenu ma candidature.

Je remercie messieurs Carsten Carstensen et Dominique Chapelle d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse et de s'être libérés pour assister à ma soutenance. Mon manuscrit a beaucoup gagné de leurs lectures en profondeur, de leurs commentaires constructifs et des échanges que nous avons pu avoir.

Je suis très reconnaissante à monsieur Patrick Laborde d'avoir accepté de présider le jury ainsi que pour l'enthousiasme qu'il a manifesté pour mes travaux.

Je remercie monsieur Adel Blouza pour son soutien et sa participation à mon jury. Je regrette de n'avoir pas réussi à trouver une date de soutenance qui convienne à tout le monde et que monsieur Hervé Le Dret qui avait accepté de faire partie du jury n'ait pas pu venir.

Je remercie également les membres du labo qui m'ont aidée, et plus particulièrement monsieur Tahar Zamène Boulmézaoud qui le premier m'a mise sur la « voie Ciarlet ».

Enfin, je remercie Gonzalo Robledo Veloso pour tous ses conseils et ses encouragements, pour sa relecture attentive de mon manuscrit et pour son amitié fidèle.

Pour finir, je tire mon chapeau à tous mes amis non matheux venus aussi nombreux me soutenir par leur présence dans l'amphi le jour J.

A Violette, Carine, Jean et Jacqueline,

Table des matières

0	Notations	7
0.1	Table des notations par ordre alphabétique	7
0.2	Table des espaces fonctionnels	15
0.3	Table des produits scalaires et normes associées	16
0.4	Table des normes	17
0.5	Table des formulations variationnelles dans l'ordre d'apparition	17
1	Introduction	21
1.1	Contexte	21
1.2	Objectifs, méthodologie et résultats	21
1.3	Plan de l'exposé	22
1.4	Conventions générales	22
1.5	Hypothèses pour la modélisation	23
1.5.1	Présentation d'un lobe	23
1.5.2	Hypothèses mécaniques	24
1.5.3	Elasticité linéaire	25
2	Modélisation	27
2.1	Etude de l'état perturbé	27
2.1.1	Couplage fluide-structure	27
2.1.2	Equations de la mécanique et de la dynamique	28
2.2	Choix des espaces et des normes	29
2.3	Formulation variationnelle	32
2.4	Existence et unicité de \mathbf{u}_ε solution de $\mathcal{P}(\Omega^\varepsilon)$	33
2.5	Conclusion	34
3	Etude asymptotique	35
3.1	Eléments de géométrie différentielle dans l'ouvert Ω^ε de \mathbb{R}^3	35
3.1.1	Bases locales	36
3.1.2	Tenseurs métriques	37
3.1.3	Symboles de Christoffel	38
3.1.4	Tenseur linéarisé symétrique de changement de métrique	38
3.1.5	Tenseur d'élasticité	39
3.2	Formulation variationnelle dans l'ouvert Ω^ε de \mathbb{R}^3	39
3.3	Normalisation du domaine en 3D	40
3.3.1	Tenseur d'élasticité normalisé	41
3.3.2	Tenseur des déformations normalisé	41
3.4	Formulation variationnelle normalisée en 3D	41
3.5	Eléments de géométrie différentielle sur la surface S de \mathbb{R}^3	42
3.5.1	Bases locales	42
3.5.2	Tenseur métrique et tenseur de courbure	43
3.6	Développements asymptotiques	44
3.6.1	Tenseur d'élasticité	44
3.6.2	Tenseur de déformation	44
3.6.3	Tenseur de déformation solution	45
3.7	Analyse pré-asymptotique	46

3.7.1	Objectif	46
3.7.2	Méthode d'obtention	46
3.7.3	Modèle asymptotique, normes et espaces asymptotiques	52
3.8	Etude asymptotique	54
3.8.1	Choix des espaces fonctionnels et des normes en 2D	54
3.8.2	Choix des espaces fonctionnels et des normes en 3D	59
3.8.3	Forces admissibles	61
3.8.4	Convergence de la suite des déplacements normalisés $(\mathbf{u}(\varepsilon))_\varepsilon$	65
3.8.5	Identification des forces admissibles	80
3.8.6	Propriétés du tenseur d'élasticité équivalent	82
4	Analyse numérique du modèle asymptotique	85
4.1	Première formulation du modèle asymptotique, \mathcal{P}^{AP1}	85
4.2	Formulation découplée du modèle asymptotique, \mathcal{P}^{AP2}	86
4.3	Approximation de la solution de \mathcal{P}^{AP1}	89
4.4	Simulations numériques	90
4.4.1	Résultats pour le système \mathcal{P}^{AP2}	90
4.4.2	Résultats pour le système \mathcal{P}^{AP1}	99
5	Etude asymptotique, géométrie elliptico-hyperbolique	103
5.1	Motivation	103
5.2	Eléments de géométrie différentielle dans l'ouvert Ω^ε de \mathbb{R}^3	103
5.2.1	Bases locales	105
5.2.2	Tenseurs métriques	106
5.2.3	Symboles de Christoffel	107
5.2.4	Tenseur linéarisé de changement de métrique	107
5.2.5	Tenseur d'élasticité	108
5.3	Formulation variationnelle dans l'ouvert Ω^ε de \mathbb{R}^3	109
5.4	Normalisation du domaine en 3D	110
5.4.1	Tenseur d'élasticité normalisé	110
5.4.2	Symboles de Christoffel normalisés	111
5.4.3	Tenseur linéarisé de changement de métrique	112
5.5	Formulation variationnelle normalisée en 3D	113
5.6	Eléments de géométrie différentielle sur la surface S de \mathbb{R}^3	113
5.6.1	Bases locales	113
5.6.2	Tenseur métrique et tenseur de courbure	114
5.7	Développements asymptotiques	116
5.7.1	Tenseur d'élasticité	116
5.7.2	Tenseur de déformation	116
5.7.3	Tenseur de déformation solution	117
5.8	Etude pré-asymptotique	118
5.8.1	Hypothèses	118
5.8.2	Recherche du modèle asymptotique	118
5.8.3	Modèle asymptotique, normes et espaces asymptotiques	126
5.9	Etude asymptotique	129
5.9.1	Choix des espaces fonctionnels et des normes en 2D	129
5.9.2	Choix des espaces fonctionnels et des normes en 3D	138

5.9.3	Convergence de la suite des déplacements normalisés $(\mathbf{u}(\varepsilon))_\varepsilon$ quand $f^{i-} = 0$	138
6	Résultats numériques	159
7	Conclusions et perspectives	165
7.1	Conclusions	165
7.2	perspectives	165
8	Annexe I : Etude de l'état quasi-naturel	167
9	Annexe II : Etude du lobe lors de la mise sous pression	169
9.1	Hypothèses	169
9.2	Mécanique du continu	169
9.3	Equations aux dérivées partielles en contrainte	170
9.4	Equations aux dérivées partielles en déplacement	171
9.5	Résolution en déplacement	173
9.6	Détermination des constantes	174
9.7	Précontrainte	175
9.8	Géométrie de la surface moyenne précontrainte	176
9.9	Etude de la variation d'épaisseur	177
10	Annexe III : Théorèmes fréquemment cités	179
10.1	Théorèmes préliminaires	179
10.2	Inégalités de Korn en coordonnées curvilignes	180
10.2.1	Inégalité de type Korn pour une famille de coques en membranes	180
10.2.2	Quelques propriétés des valeurs moyennes	180

Table des figures

1	Lobe	24
2	Coupe d'un lobe dans le plan $x_3 = 0$	35
3	Coupe d'un lobe dans le plan $x_1 = 0$	36
4	Profils des matrices C et B après renumérotation	91
5	Courbe de convergence des déplacements pour un maillage structuré	92
6	Courbe de convergence des déplacements pour un maillage destructuré	93
7	Courbes de convergence pour la norme $\ \cdot \ _{110,\omega}$	93
8	Courbe de convergence des contraintes pour un maillage structuré	94
9	Courbe de convergence des contraintes pour un maillage destructuré	94
10	Solution pour un maillage structuré	95
11	Solution pour un maillage destructuré	95
12	Contraintes principales pour un maillage structuré	96
13	Contraintes principales pour un maillage destructuré	96
14	Solution avec un maillage structuré $h = 0.005$	97
15	Solution avec un maillage structuré $h = 0.0025$	97
16	Solution avec un maillage destructuré $1/\sqrt{N_t} = 0.0056$	98
17	Solution avec un maillage destructuré $1/\sqrt{N_t} = 0.0026$	98
18	Profil de A après renumérotation	100
19	Lobe à géométrie elliptico-hyperbolique	103
20	Coupe d'un lobe dans le plan $x_1 = 0$	104
21	Coupe d'un lobe dans le plan $x_3 = 0$	104
22	Solution avec un maillage structuré $R_L = 400$	161
23	Solution avec un maillage destructuré $R_L = 400$	161
24	Solution pour maillage structuré $R_L = 300$	162
25	Solution pour un maillage destructuré $R_L = 300$	162
26	Solution sur ω^+ pour un maillage structuré	163
27	Solution sur ω^- pour un maillage structuré	163
28	Solution sur ω^+ pour un maillage destructuré	164
29	Solution sur ω^- pour un maillage destructuré	164

0 Notations

0.1 Table des notations par ordre alphabétique

$\underline{\mathbf{a}}$:= tenseur métrique, := $[a_{\alpha\beta}] := [a^{\alpha\beta}]$, $a_{\alpha\beta} := \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta$, $a^{\alpha\beta} := \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta$,
a	:= $\det [a_{\alpha\beta}]$,
$(\mathbf{a}_1^\pm, \mathbf{a}_2^\pm, \mathbf{a}_3^\pm)$:= base covariante complétée du plan tangent,
\mathbf{a}_1^\pm	:= $\frac{\partial \theta^\pm}{\partial \xi_1}$,
\mathbf{a}_2^\pm	:= $\frac{\partial \theta^\pm}{\partial \xi_2}$,
\mathbf{a}_3^\pm	:= $\frac{\mathbf{a}_1^\pm \wedge \mathbf{a}_2^\pm}{\ \mathbf{a}_1^\pm \wedge \mathbf{a}_2^\pm\ }$,
$(\mathbf{a}^{1\pm}, \mathbf{a}^{2\pm}, \mathbf{a}^{3\pm})$:= base contravariante complétée du plan tangent,
$\mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta$:= δ_β^α ,
$\mathbf{a}^{3\pm}$:= $\frac{\mathbf{a}^{1\pm} \wedge \mathbf{a}^{2\pm}}{\ \mathbf{a}^{2\pm} \wedge \mathbf{a}^{2\pm}\ }$,
$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)$:= forme bilinéaire du problème discret, := $\int_\omega \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega) : \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}^{P\pm}(\mathbf{u}_h) : \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}^{P\pm}(\mathbf{v}_h) d\xi_\omega$,
$\underline{\underline{\mathbf{A}}}$:= tenseur d'élasticité linéaire 3D du quatrième ordre, := $[A_{ijkl}] = [A^{ijkl}]$,
$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\varepsilon\pm}$:= tenseur d'élasticité linéaire 3D dans la base covariante,
$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(\varepsilon)$:= tenseur d'élasticité linéaire 3D du modèle elliptico-hyperbolique dans la base covariante, après normalisation du domaine,
$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(0)$:= premier terme du développement asymptotique tenseur d'élasticité linéaire 3D du modèle elliptico-hyperbolique dans la base covariante après normalisation du domaine,
$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(\omega)$:= tenseur équivalent d'élasticité linéaire 2D du modèle asymptotique elliptico-hyperbolique, := $\left[\begin{array}{cc cc} \lambda_{11}(\omega) & 0 & 0 & \mu_{12}(\omega) \\ 0 & \lambda_{12}(\omega) & \mu_{12}(\omega) & 0 \\ \hline - & - & + & - \\ 0 & \mu_{12}(\omega) & \lambda_{12}(\omega) & 0 \\ \mu_{12}(\omega) & 0 & 0 & \lambda_{22}(\omega) \end{array} \right]$
$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\varepsilon)$:= tenseur d'élasticité linéaire 3D du modèle parabolique dans la base covariante, après normalisation du domaine,

$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(0) :=$ premier terme du développement asymptotique tenseur d'élasticité linéaire 3D ,
du modèle parabolique dans la base covariante après normalisation du domaine,

$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega) :=$ tenseur équivalent d'élasticité linéaire 2D du modèle asymptotique parabolique,

$$:= \left[\begin{array}{cc|cc} 2\frac{\lambda_{11}\lambda_{33}-(\lambda_{13})^2}{\lambda_{33}} & 0 & 0 & 2\mu_{12} \\ 0 & 2\frac{\lambda_{12}\lambda_{33}-\lambda_{23}\lambda_{13}}{\lambda_{33}} & 2\mu_{12} & 0 \\ \hline - & - & + & - \\ 0 & 2\mu_{12} & 2\frac{\lambda_{12}\lambda_{33}-\lambda_{23}\lambda_{13}}{\lambda_{33}} & 0 \\ 2\mu_{12} & 0 & 0 & \frac{2(\lambda_{22}\lambda_{33}-(\lambda_{23})^2)}{\lambda_{33}} \end{array} \right],$$

$\underline{\mathbf{b}}$:= tenseur de courbure de la surface S ,
 $:= [b_{\alpha\beta}] := [b_{\alpha}^{\beta}]$,

$b_{\alpha\beta} :=$ composantes covariantes du tenseur de courbure,
 $:= \mathbf{a}^{3\pm} \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_{\alpha}^{\pm}}{\partial \xi_{\beta}}$,

$[b_{\alpha\beta}^-] := \left[\begin{array}{cc} -\frac{1}{R_l} & 0 \\ 0 & \frac{-d^-}{R_L} \cos\left(\frac{\xi_1+l}{R_l}\right) \end{array} \right]$, dans le cas elliptico-hyperbolique,

$b_{\alpha}^{\beta} :=$ composantes mixtes du tenseur de courbure,
 $:= b_{\sigma\alpha}^{\pm} a^{\beta\sigma\pm}$,

$B_{\omega}^{EH}(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}) :=$ forme bilinéaire du modèle asymptotique elliptico-hyperbolique,
 $:= \int_{\omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(\omega) : [\boldsymbol{\gamma}_{\alpha\beta}^{EH\pm}(\boldsymbol{\zeta})] : [\boldsymbol{\gamma}_{\alpha\beta}^{EH\pm}(\boldsymbol{\eta})] d\xi_{\omega}$,

$B_{\omega}^{MEH} :=$ prolongement continu de B_{ω}^{EH} ,

$B_{\omega}^{P\pm}(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}) :=$ forme bilinéaire du modèle asymptotique parabolique,
 $:= \frac{1}{2} \int_{\omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega) : \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{P\pm}(\boldsymbol{\zeta}) : \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) d\xi_{\omega}$,

$B_{\omega}^{MP} :=$ prolongement continu de B_{ω}^P ,

$B_{u_3} :=$ base élément fini pour $L_0^2(\omega)$,

$c_{\alpha}^{\pm}(\xi_{\omega}) :=$ courbures de la surface S en un point M de coordonnées $\theta^{\pm}(\xi_{\omega})$,

$C_{\omega}^{EH}(\mathbf{v}) :=$ forme linéaire de couplage elliptico-hyperbolique,
 $:= \int_{\omega^{\pm}} |d^{\pm}| v_3 d\xi_{\omega}$

$C_{\omega}^{MEH} :=$ prolongement continu de C_{ω}^{EH} ,

$$\begin{aligned}
C_\omega^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) &:= \text{forme linéaire de couplage parabolique,} \\
&:= \int_\omega \eta_3 |d^\pm| \xi_\omega, \\
C_\omega^{MP} &:= \text{unique extension continue de } C_\omega^{P\pm}, \\
\underline{\underline{C}}(\omega) &:= \text{tenseur équivalent d'élasticité linéaire 2D du 2^{ème} modèle asymptotique} \\
&\quad \text{parabolique,} \\
&:= \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} & 0 \\ \hline - & - & + & - \\ 0 & \frac{1}{2G_{12}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2G_{12}} & 0 & 0 & 2E_2 \end{array} \right], \\
d^\pm &:= \text{fonction de } \xi_1 \text{ paramètre de calcul dans le cas elliptico-hyperbolique,} \\
d^+ &:= d^+(\xi_1) := 1 - \frac{R_l}{R_L} \cos\left(\frac{l}{R_l}\right) + \frac{R_l}{R_L} \cos\left(\frac{\xi_1 - l}{R_l}\right), \\
d^- &:= d^-(\xi_1) := -1 - \frac{R_l}{R_L} \cos\left(\frac{l}{R_l}\right) + \frac{R_l}{R_L} \cos\left(\frac{\xi_1 + l}{R_l}\right), \\
\underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) &:= \text{tenseur linéarisé des déformations provoqué par un déplacement } \mathbf{u}, \\
&:= \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \mathbf{u} + \underline{\nabla} \mathbf{u}^T), \\
\underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{\varepsilon\pm}(\mathbf{v}^{\varepsilon\pm}) &:= \text{tenseur linéarisé des déformations en composantes covariantes,} \\
&:= \left[e_{i\parallel j}^{\varepsilon\pm}(\mathbf{v}^{\varepsilon\pm}) \right] := \left[\frac{1}{2} (v_{i\parallel j}^{\varepsilon\pm} + v_{j\parallel i}^{\varepsilon\pm}) \right], \\
\underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}^\pm) &:= \text{tenseur linéarisé normalisé des déformations du modèle elliptico-hyperbolique,} \\
&:= \left[e_{i\parallel j}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}^\pm) \right], \text{ avec } e_{i\parallel j}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}^\pm(\xi_1, \xi_2, \xi_3)) = e_{i\parallel j}^{\varepsilon\pm}(\mathbf{v}^\pm(\xi_1, \xi_2, \varepsilon \xi_3)), \\
e_{i\parallel j}^{kEH\pm}(\mathbf{v}) &:= \text{coefficient du terme d'ordre } k \text{ du développement asymptotique de } e_{i\parallel j}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}^\pm) \\
e_{i\parallel j}^{kEH\pm} &:= \text{coefficient du terme d'ordre } k \text{ du développement asymptotique de} \\
&\quad e_{i\parallel j}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{u}^\pm(\varepsilon)), \\
\underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) &:= \text{tenseur linéarisé normalisé des déformations parabolique,} \\
&:= \left[e_{i\parallel j}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}^\pm) \right], \text{ avec } e_{i\parallel j}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}^\pm(\xi_1, \xi_2, \xi_3)) = e_{i\parallel j}^{\varepsilon\pm}(\mathbf{v}^\pm(\xi_1, \xi_2, \varepsilon \xi_3)), \\
&:= \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial v_1^\pm}{\partial \xi_1} + \frac{R_l + \varepsilon \xi_3}{R_l^2} v_3 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1^\pm}{\partial \xi_2} + \frac{\partial v_2^\pm}{\partial \xi_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_1^\pm}{\partial \xi_3} + \frac{\partial v_3}{\partial \xi_1} \right) - \frac{1}{R_l + \varepsilon \xi_3} v_1^{\varepsilon\pm} \\ \text{sym} & \frac{\partial v_2^\pm}{\partial \xi_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_2^\pm}{\partial \xi_3} + \frac{\partial v_3}{\partial \xi_2} \right) \\ \text{sym} & \text{sym} & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_3} \end{array} \right],
\end{aligned}$$

$e_{i j}^{kP\pm}(\mathbf{v})$	$:=$	coefficient du terme d'ordre k du développement asymptotique de $e_{i j}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}^\pm)$,
$e_{i j}^{kP\pm}$	$:=$	coefficient du terme d'ordre k du développement asymptotique de $e_{i j}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{u}^\pm(\varepsilon))$,
E_i	$:=$	coefficient de Young,
$\underline{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta})$	$:=$	tenseur linéarisé usuel des déformations en 2D, $:= \begin{bmatrix} \frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \eta_2^\pm}{\partial \xi_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \eta_2^\pm}{\partial \xi_1} \right) & \frac{\partial \eta_2^\pm}{\partial \xi_2} \end{bmatrix},$
ε	$:=$	demi épaisseur du tissu,
\mathbf{f}^ε	$:=$	densité surfacique des forces appliquées, $\mathbf{f}^\varepsilon = (f^{i\pm})$,
$\mathbf{f}(\varepsilon)$	$:=$	densité surfacique des forces normalisées appliquées, $\mathbf{f}(\varepsilon) = (f^{i\pm}(\varepsilon))$
$\bar{\mathbf{f}}^\omega$	$:=$	valeur moyenne de $\bar{\mathbf{f}}^\omega$ sur ω , $:= \frac{1}{mes(\omega)} \int_\omega \mathbf{f} d\xi_1 d\xi_2$
$[F^{ij\pm}(\varepsilon)]$	$:=$	tenseur des forces admissibles,
$(\mathbf{g}_1^{\varepsilon\pm}, \mathbf{g}_2^{\varepsilon\pm}, \mathbf{g}_3^{\varepsilon\pm})$	$:=$	base covariante,
$\mathbf{g}_i^{\varepsilon\pm}$	$:=$	$\frac{\partial \boldsymbol{\theta}^\pm}{\partial \xi_i^\varepsilon}$,
$(\mathbf{g}^{\varepsilon 1\pm}, \mathbf{g}^{\varepsilon 2\pm}, \mathbf{g}^{\varepsilon 3\pm})$	$:=$	base contravariante,
$\mathbf{g}^{\varepsilon i\pm} \cdot \mathbf{g}_j^{\varepsilon\pm}$	$:=$	δ_j^i ,
G_{ij}	$:=$	modules de cisaillement,
$\underline{\gamma}^{EH\pm}$	$:=$	tenseur linéarisé équivalent des déformations en 2D, modèle elliptico-hyperbolique,
$\underline{\gamma}^{EH-}(\boldsymbol{\eta})$	$:=$	$\begin{bmatrix} \frac{\partial \eta_1^-}{\partial \xi_1} + \frac{1}{R_l} \eta_3^- & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_1^-}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \eta_2^-}{\partial \xi_1} \right) + \frac{1}{R_L d^-} \sin \left(\frac{\xi_1 + l}{R_l} \right) \eta_2^- \\ sym & \frac{\partial \eta_2^-}{\partial \xi_2} - \frac{d^-}{R_L} \left(\sin \left(\frac{\xi_1 + l}{R_l} \right) \eta_1^- - \cos \left(\frac{\xi_1 + l}{R_l} \right) \eta_3^- \right) \end{bmatrix},$
$\underline{\gamma}^{EH+}(\boldsymbol{\eta})$	$:=$	$\begin{bmatrix} \frac{\partial \eta_1^+}{\partial \xi_1} + \frac{1}{R_l} \eta_3^+ & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_1^+}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \eta_2^+}{\partial \xi_1} \right) + \frac{1}{R_L d^+} \sin \left(\frac{\xi_1 - l}{R_l} \right) \eta_2^+ \\ sym & \frac{\partial \eta_2^+}{\partial \xi_2} - \frac{d^+}{R_L} \left(\sin \left(\frac{\xi_1 - l}{R_l} \right) \eta_1^+ - \cos \left(\frac{\xi_1 - l}{R_l} \right) \eta_3^+ \right) \end{bmatrix},$

$$\begin{aligned}
\underline{\gamma}^{P\pm} &:= \text{tenseur linéarisé équivalent des déformations en 2D, modèle parabolique,} \\
&:= \begin{bmatrix} \frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_1} + \frac{1}{R_l} \eta_3 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \eta_2^\pm}{\partial \xi_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \eta_2^\pm}{\partial \xi_1} \right) & \frac{\partial \eta_2^\pm}{\partial \xi_2} \end{bmatrix}, \\
\Gamma_{ij}^{\varepsilon p\pm} &:= \text{symbole de Christoffel associé au paramétrage volumique } \Theta, \\
&:= \mathbf{g}^{\varepsilon p\pm} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_i^{\varepsilon\pm}}{\partial \xi_j^\varepsilon}, \\
\Gamma_{\alpha\beta}^{S\sigma\pm} &:= \text{symbole de Christoffel associé au paramétrage surfacique } \theta, \\
&:= \mathbf{a}^{\sigma\pm} \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_\alpha^\pm}{\partial \xi_\beta}, \\
\text{Ker} \underline{\gamma}^{P\pm} &:= \text{noyau de la forme linéaire } \underline{\gamma}^{P\pm}, \\
&:= \{ \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega), \underline{\gamma}^{P\pm}(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \}, \\
l &:= \text{demi largeur du tissu,} \\
l_h(\boldsymbol{\eta}_h) &:= \text{forme linéaire dans la formulation variationnelle discrète,} \\
&:= \int_{\omega} (f^{1\pm} \eta_{h1}^\pm + f^{2\pm} \eta_{h2}^\pm + f^{3\pm} \eta_{h3}) d\xi_\omega, \\
L &:= \text{demi longueur du tissu,} \\
L_0^2(|d^\pm| \omega) &:= \text{ensemble des fonctions de } L^2(\omega) \text{ à moyenne pondérée par } |d^\pm| \text{ nulle sur } \omega, \\
&:= \{ \eta \in L^2(\omega), \int_{\omega} |d^\pm| \eta d\xi_\omega = 0 \}, \\
L^{EH}(\varepsilon)(\mathbf{v}) &:= \text{forme linéaire de la formulation normalisée 3D du modèle elliptico-hyperbolique,} \\
&:= \int_{\omega_1} f^{i\pm} v_i |d_\varepsilon^\pm| d\xi_\omega, \\
L_\omega^{EH}(\boldsymbol{\eta}) &:= \text{forme linéaire de la formulation 2D du modèle asymptotique elliptico-hyperbolique,} \\
&:= \frac{1}{2} \int_{\omega} (f^{1+} \eta_1^+ + f^{2+} \eta_2^+ + f^{3+} \eta_3^+) |d^+| d\xi_\omega, \\
L_\omega^{MEH} &:= \text{prolongement continu de } L_\omega^{EH}, \\
L^P(\varepsilon)(\mathbf{v}) &:= \text{forme linéaire de la formulation variationnelle normalisée 3D du modèle parabolique,} \\
&:= \int_{\omega_1} \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l} \right) f^{i\pm} v_i d\xi_\omega,
\end{aligned}$$

- $L_\omega^{P^\pm}(\boldsymbol{\eta})$:= forme linéaire de la formulation variationnelle 2D du modèle asymptotique parabolique,

$$:= \frac{1}{2} \int_\omega (f^{1^\pm} \eta_1^\pm + f^{2^\pm} \eta_2^\pm + f^{3^\pm} \eta_3) d\xi_\omega,$$
- L_ω^{MP} := prolongement continu de $L_\omega^{P^\pm}$,
- λ_{il} := coefficients d'élasticité,
- $\lambda_{\alpha\beta}(\omega)$:= coefficients d'élasticité équivalents en 2D,

$$\lambda_{11}(\omega) := \frac{2|d^\pm|}{\lambda_{33}} \left(\lambda_{11} \lambda_{33} - \left(\frac{\lambda_{13}}{d^{\pm 2}} \right)^2 \right)$$
- $$\lambda_{22}(\omega) := \frac{2|d^\pm|}{\lambda_{33} d^{\pm 4}} \left(\lambda_{22} \lambda_{33} - (\lambda_{23})^2 \right)$$
- $$\lambda_{12}(\omega) := \frac{2|d^\pm|}{\lambda_{33} d^{\pm 2}} \left(\lambda_{12} \lambda_{33} - \frac{\lambda_{23} \lambda_{13}}{d^{\pm 2}} \right)$$
- μ_{kl} := coefficients d'élasticité,
- $\mu_{12}(\omega)$:= coefficient d'élasticité équivalent en 2D,

$$:= \frac{2|d^\pm|}{d^{\pm 2}} \mu_{12},$$
- \mathbf{n} := vecteur normal orienté vers l'extérieur,
- ν_{ij} := modules de Poisson,
- ω^+ := ouvert de paramérisation 2D du tissu extérieur,

$$:=]0, 2l[\times]-L, +L[,$$
- ω^- := ouvert de paramérisation 2D du tissu intérieur,

$$:=]-2l, 0[\times]-L, +L[,$$
- ω := ouvert de paramétrisation 2D du tissu,

$$:= \omega^+ \cup \omega^-,$$
- ω_0^+ := ouvert connexe de paramétrisation de la surface moyenne du tissu extérieur, S^+ ,

$$:=]0, 2l[\times]-L, +L[\times \{0\},$$
- ω_{-1}^+ := ouvert de paramétrisation de la surface intérieure normalisée du tissu extérieur, S_{-1}^+ ,

$$:=]0, 2l[\times]-L, +L[\times \{-1\},$$
- $\omega_{-\varepsilon}^+$:= ouvert connexe de paramétrisation de la surface intérieure du tissu extérieur, $S_{-\varepsilon}^+$,

$$:=]0, 2l[\times]-L, +L[\times \{-\varepsilon\},$$
- ω_{+1}^+ := ouvert de paramétrisation de la surface extérieure normalisée du tissu extérieur, S_{+1}^+ ,

$$:=]0, 2l[\times]-L, +L[\times \{+1\},$$

- $\omega_{+\varepsilon}^+$:= ouvert connexe de paramétrisation de la surface extérieure du tissu extérieur, $S_{+\varepsilon}^+$,
:= $]0, 2l[\times]-L, +L[\times \{+\varepsilon\}$,
- ω_0^- := ouvert connexe de paramétrisation de la surface du tissu intérieur, S^- ,
:= $] -2l, 0[\times]-L, +L[\times \{0\}$,
- ω_{-1}^- := ouvert de paramétrisation de la surface intérieure normalisée du tissu intérieur, S_{-1}^- ,
:= $] -2l, 0[\times]-L, +L[\times \{-1\}$,
- $\omega_{-\varepsilon}^-$:= ouvert connexe de paramétrisation de la surface intérieure du tissu intérieur, $S_{-\varepsilon}^-$,
:= $] -2l, 0[\times]-L, +L[\times \{-\varepsilon\}$,
- ω_{+1}^- := ouvert de paramétrisation de la surface extérieure normalisée du tissu intérieur, S_{+1}^- ,
:= $] -2l, 0[\times]-L, +L[\times \{+1\}$,
- $\omega_{+\varepsilon}^-$:= ouvert de paramétrisation de la surface extérieure normalisée du tissu intérieur, $S_{+\varepsilon}^-$,
:= $] -2l, 0[\times]-L, +L[\times \{+\varepsilon\}$,
- $\Omega^{\varepsilon+}$:= ouvert connexe occupé par le tissu extérieur,
:= $S^+ \times]-\varepsilon, +\varepsilon[$,
- $\Omega^{\varepsilon-}$:= ouvert connexe occupé par le tissu intérieur,
:= $S^- \times]-\varepsilon, +\varepsilon[$,
- Ω^ε := ouvert connexe occupé par le tissu,
:= $\Omega^{\varepsilon+} \cup \Omega^{\varepsilon-}$,
- Ω^+ := ouvert de paramétrisation en coordonnées curvilignes normalisées du tissu extérieur,
:= $\omega^+ \times]-1, +1[$,
- Ω^- := ouvert de paramétrisation en coordonnées curvilignes normalisées du tissu intérieur,
:= $\omega^- \times]-1, +1[$,
- Ω := ouvert connexe de paramétrisation en coordonnées curvilignes normalisées du tissu,
:= $\Omega^+ \cup \Omega^-$,
- P^ε := matrice de passage de la base cartésienne à la base covariante, $P^\varepsilon := (p_{ij}^\varepsilon)$,
- π := pression intérieure,
- R_l := rayon des axes de fixation transverses,
- R_L := rayon des axes de fixation longitudinaux,
- ρ := densité volumique du matériau,

S	:= surface moyenne du tissu := $S^+ \cup S^-$,
S^+	:= surface moyenne du tissu extérieur,
$S_{-\varepsilon}^+$:= surface intérieure du tissu extérieur,
S_{-1}^+	:= surface intérieure normalisée du tissu extérieur,
$S_{+\varepsilon}^+$:= surface extérieure du tissu extérieur,
S_{+1}^+	:= surface extérieure normalisée du tissu extérieur,
S^-	:= surface moyenne du tissu intérieur,
$S_{-\varepsilon}^-$:= surface intérieure du tissu intérieur,
S_{-1}^-	:= surface intérieure normalisée du tissu intérieur,
$S_{+\varepsilon}^-$:= surface extérieure du tissu intérieur,
S_{+1}^-	:= surface extérieure normalisée du tissu intérieur,
S_1^\pm	:= première contrainte principale,
S_2^\pm	:= deuxième contrainte principale,
$\underline{\Sigma}$:= tenseur 3D des contraintes, := $\underline{\underline{\mathbf{A}}} : \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \mathbf{u} + \underline{\nabla} \mathbf{u}^T) + \underline{\Sigma}^p$,
$\underline{\Sigma}^p$:= tenseur 3D des précontraintes,
$\underline{\Sigma}_\omega^{MP}(\mathbf{u})$:= tenseur des contraintes asymptotiques du modèle parabolique, := $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P^\pm}(\omega) : \underline{\gamma}^{P^\pm}(\mathbf{u})$,
θ^+	:= difféomorphisme de paramétrisation de S^+ ,
θ^-	:= difféomorphisme de paramétrisation de S^- ,
Θ^+	:= difféomorphisme de paramétrisation de Ω^+ ,
Θ^-	:= difféomorphisme de paramétrisation de Ω^- ,
\mathbf{u}	:= déplacement 3D solution,

\mathbf{v}	:=	champ vectoriel de déplacement,
$\bar{\mathbf{v}}$:=	valeur moyenne de \mathbf{v} dans l'épaisseur, := $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{v} d\xi_3$,
$\frac{\mathbf{v}^{\varepsilon\pm}}{\ \cdot\ }$:=	tenseur des dérivées covariantes d'un champ vectoriel covariant, := $\left[v_{i\ j}^{\varepsilon\pm} \right] := \left[\frac{\partial}{\partial \xi_j^\varepsilon} (v_i^{\varepsilon\pm}) - \Gamma_{ij}^{\varepsilon p\pm} v_p^{\varepsilon\pm} \right]$,
V	:=	volume intérieur d'un lobe,
ξ^ε	:=	coordonnées curvilignes dans l'espace, := $(\xi_1^\varepsilon, \xi_2^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon)$,
ξ_ω^ε	:=	coordonnées curvilignes sur ω , := $(\xi_1^\varepsilon, \xi_2^\varepsilon)$,
ξ	:=	coordonnées curvilignes normalisées dans l'espace, := (ξ_1, ξ_2, ξ_3) .

0.2 Table des espaces fonctionnels

$L_0^2(d^\pm \omega)$:=	ensemble des fonctions de $L^2(\omega)$ à moyenne pondérée par $ d^\pm $ nulle sur ω , := $\left\{ \eta \in L^2(\omega), \int_\omega d^\pm \eta d\xi_\omega = 0 \right\}$,
\mathcal{V}_0	:=	ensemble des fonctions vectorielles \mathcal{C}^∞ à support compact := $\mathcal{D}(\omega^+)^2 \times \mathcal{D}(\omega^-)^2 \times \mathcal{D}(\omega)$,
$\mathcal{V}(\Omega^\varepsilon)$:=	espace dans lequel on cherche la solution 3D, := $\left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega^{\varepsilon+})^2 \times H^1(\Omega^{\varepsilon-})^2 \times H^1(\Omega^\varepsilon), \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial S^\varepsilon \times]-\varepsilon, \varepsilon[\right\}$,
$\mathcal{V}(\Omega)$:=	espace dans lequel on cherche la solution normalisée 3D, := $\left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega^+)^2 \times H^1(\Omega^-)^2 \times H^1(\Omega), \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\omega \times]-1, 1[\right\}$,
$\mathcal{V}(\Omega)_3$:=	sous espace de $\mathcal{V}(\Omega)$ des vecteurs indépendants de ξ_3 , := $\left\{ \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega), \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi_3} = 0 \right\}$,
$\mathcal{V}^{MEH}(\Omega)$:=	complété de $\mathcal{V}(\Omega)$ pour la norme $\ \cdot\ _\Omega^{EH}$,
$\mathcal{V}^{MP}(\Omega)$:=	complété de $\mathcal{V}(\Omega)$ pour la norme $\ \cdot\ _\Omega^M$,
$\mathcal{V}^P(\omega)$:=	complété de \mathcal{V}_0 pour la norme $\ \cdot\ _{110,\omega}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}^P(\omega) &:= \text{espace dans lequel on cherche naturellement la solution 2D du modèle parabolique,} \\
&:= H_0^1(\omega^+)^2 \times H_0^1(\omega^-)^2 \times L^2(\omega), \\
\mathcal{V}^{MP}(\omega) &:= \text{complété de } \mathcal{V}^P(\omega) \text{ pour la norme } \|\cdot\|_\omega^M, \\
\mathcal{V}_0^{MP}(\omega) &:= \text{sous espace de } \mathcal{V}^{MP}(\omega) \text{ dans lequel se trouve la solution du problème asymptotique} \\
&\quad \text{parabolique,} \\
&:= \{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}^{MP}(\omega), C_\omega^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) = 0\}, \\
\mathcal{V}^{EH}(\omega) &:= \text{espace où on cherche naturellement la solution 2D du modèle elliptico-hyperbolique,} \\
&:= H_0^1(\omega^+)^2 \times H_0^1(\omega^-)^2 \times L^2(\omega), \\
\mathcal{V}^{MEH}(\omega) &:= \text{complété de } \mathcal{V}^{EH}(\omega) \text{ pour la norme } \|\cdot\|_\omega^{EH}, \\
\mathcal{V}_0^{MEH}(\omega) &:= \text{espace auquel appartient la solution asymptotique du problème elliptico-hyperbolique,} \\
&:= \{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}^{MEH}(\omega), C_\omega^{MEH}(\boldsymbol{\eta}) = 0\}, \\
\mathcal{W}_1 &:= \text{espace de discrétisation pour le problème parabolique,} \\
&:= \left\{ \boldsymbol{\eta} \in H^2(\omega^+)^2 \times H^2(\omega^-)^2 \times H^1(\omega), \eta_1^\pm = \eta_2^\pm = 0 \text{ sur } \partial\omega^\pm \text{ et } \int_\omega \eta_3 d\omega = 0 \right\}, \\
\mathcal{W}_{0,h}^{PAP1} &:= \text{espace de discrétisation pour le problème parabolique,} \\
&:= \{\mathbf{u}_h \in H_0^1(\omega^\pm) \times H_0^1(\omega^\pm) \times L_0^2(\omega), \mathbf{u}_h|_T \in P_1(T) \times P_1(T) \times P_0(T)\}, \\
\mathcal{W}_{0,h}^{PAP2} &:= \text{espace de discrétisation pour le problème parabolique,} \\
&:= \{\mathbf{u}_h \in H_0^1(\omega^\pm) \times H_0^1(\omega^\pm), \mathbf{u}_h|_T \in P_1(T) \times P_1(T)\}, \\
\mathcal{W}_{0,h}^P &:= \text{espace de discrétisation du problème elliptico-hyperbolique,} \\
&:= \{\mathbf{u}_h \in H_0^1(\omega^\pm) \times H_0^1(\omega^\pm) \times L_0^2(\omega), \mathbf{u}_h|_T \in P_1(T) \times P_1(T) \times P_0(T)\}.
\end{aligned}$$

0.3 Table des produits scalaires et normes associées

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_a &:= \int_{\Omega^\varepsilon} \underline{\mathbf{A}} : \underline{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{u}) : \underline{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{v}) d\Omega^\varepsilon, \quad \text{et, } \|\mathbf{v}\|_a^2 &:= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_a, \\
\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta} \rangle_\omega &:= \int_\omega (\underline{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\zeta}) : \underline{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\eta}) + \zeta_3 \eta_3) d\xi_\omega, \quad \text{et, } \|\boldsymbol{\eta}\|_\omega^2 &:= \sum_{\alpha,\beta} \|\epsilon(\boldsymbol{\eta})\|_{0,\omega}^2 + \|\eta_3\|_{0,\omega}^2, \\
\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta} \rangle_\omega^M &:= \int_\omega \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{P\pm}(\boldsymbol{\zeta}) : \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) d\xi_\omega, \quad \text{et, } \left(\|\boldsymbol{\eta}\|_\omega^M\right)^2 &:= \langle \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta} \rangle_\omega^M, \\
\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta} \rangle_\omega^{EH} &:= \int_\omega \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{EH\pm}(\boldsymbol{\zeta}) : \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{EH\pm}(\boldsymbol{\eta}) d\xi_\omega, \quad \text{et, } \left(\|\boldsymbol{\eta}\|_\omega^{EH}\right)^2 &:= \langle \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta} \rangle_\omega^{EH}.
\end{aligned}$$

0.4 Table des normes

$$\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 := \|v_1\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 + \|v_2\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 + \|v_3\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2,$$

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_{110,\omega}^2 := \|\eta_1\|_{1,\omega}^2 + \|\eta_2\|_{1,\omega}^2 + \|\eta_3\|_{0,\omega}^2,$$

$$\|\mathbf{v}\|_{\Omega}^{EH} := \sqrt{\left\| \frac{\partial \mathbf{v}^\pm}{\partial \xi_3} \right\|_{0,\Omega}^2 + \left(\|\bar{\mathbf{v}}^-\|_{\omega}^{EH} \right)^2},$$

$$\|\mathbf{v}\|_{\Omega}^M := \sqrt{\left\| \frac{\partial \mathbf{v}^\pm}{\partial \xi_3} \right\|_{0,\Omega}^2 + \left(\|\bar{\mathbf{v}}^-\|_{\omega}^M \right)^2}.$$

0.5 Table des formulations variationnelles dans l'ordre d'apparition

$\mathcal{P}(\Omega^\varepsilon)$:= formulation variationnelle 3D,

$$:= \begin{cases} \mathbf{u}_\varepsilon \in \mathcal{V}(\Omega^\varepsilon), \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega^\varepsilon), \\ \int_{\Omega^\varepsilon} \underline{\mathbf{A}} : \underline{\nabla} \mathbf{u}_\varepsilon : \underline{\nabla} \mathbf{v} d\Omega^\varepsilon + \frac{\pi^p}{V} \int_{S_{-\varepsilon}^{\varepsilon\pm}} \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{n} ds^{-\varepsilon} \int_{S_{-\varepsilon}^{\varepsilon\pm}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds^{-\varepsilon} = \int_{S_{-\varepsilon}^{\varepsilon\pm}} \boldsymbol{\delta} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} ds^{+\varepsilon}, \end{cases}$$

\mathcal{P}^ε := formulation variationnelle 3D en coordonnées curvilignes modèle parabolique,

$$:= \begin{cases} \forall \mathbf{u}^\varepsilon \in \mathcal{V}(\Omega^\varepsilon), \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega^\varepsilon), \\ \int_{\omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[} \underline{\mathbf{A}}^{\varepsilon\pm} : \mathbf{e}_{\parallel}^{P\varepsilon\pm}(\mathbf{u}^{\varepsilon\pm}) : \mathbf{e}_{\parallel}^{P\varepsilon\pm}(\mathbf{v}) \sqrt{g^{\varepsilon\pm}} d\xi^\varepsilon + \frac{\pi}{V} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R_l}\right)^2 \int_{\omega_{-\varepsilon}} u_3^\varepsilon d\xi_\omega^\varepsilon \int_{\omega_{-\varepsilon}} v_3 d\xi_\omega^\varepsilon = \\ \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l}\right) \int_{\omega_\varepsilon} f^{\varepsilon i} v_i d\xi_\omega^\varepsilon. \end{cases}$$

$\mathcal{P}^P(\varepsilon)$:= formulation variationnelle 3D normalisée en coordonnées curvilignes paraboliques,

$$:= \begin{cases} \forall \mathbf{u}(\varepsilon) \in \mathcal{V}(\Omega), \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega), \\ \int_{\omega \times]-1, 1[} \underline{\mathbf{A}}^{P\pm}(\varepsilon) : \mathbf{e}_{\parallel}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{u}^\pm(\varepsilon)) : \mathbf{e}_{\parallel}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) \sqrt{g^{P\varepsilon\pm}(\xi_3)} d\xi + \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\pi}{V} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R_l}\right)^2 \int_{\omega_{-1}} u_3(\varepsilon) d\xi_\omega \int_{\omega_{-1}} v_3 d\xi_\omega = \frac{1}{\varepsilon} \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l}\right) \int_{\omega_1} f^i(\varepsilon) v_i d\xi_\omega. \end{cases}$$

$\mathcal{P}^P(\varepsilon, \Omega) :=$ formulation variationnelle parabolique 3D avec hypothèses asymptotiques,

$$:= \begin{cases} \forall \mathbf{u}(\varepsilon) \in \mathcal{V}(\Omega), \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega), \\ \int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\varepsilon) : \underline{\underline{\mathbf{e}}}_{\parallel}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{u}^{\pm}(\varepsilon)) : \underline{\underline{\mathbf{e}}}_{\parallel}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) \left(1 + \varepsilon \frac{\xi_3}{R_l}\right) d\xi + \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\pi}{V} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R_l}\right)^2 \int_{\omega_{-1}} u_3(\varepsilon) d\xi_{\omega} \int_{\omega_{-1}} v_3 d\xi_{\omega} = \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l}\right) \int_{\omega_1} f^{i\pm} v_i d\xi_{\omega}. \end{cases}$$

$\mathcal{P}_{\omega}^{MP} :=$ formulation variationnelle asymptotique 2D modèle parabolique,

$$:= \begin{cases} \zeta \in \mathcal{V}_0^{MP}(\omega), \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_0^{MP}(\omega) \\ B_{\omega}^{MP}(\zeta, \boldsymbol{\eta}) = L_{\omega}^{MP}(\boldsymbol{\eta}). \end{cases}$$

$\mathcal{P}^{AP1} :=$ première formulation du modèle asymptotique parabolique,

$$:= \begin{cases} \varsigma \in \mathcal{V}_0^P(\omega), \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_0^P(\omega), \\ \int_{\omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega) : \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}^{P\pm}(\varsigma) : \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) d\xi_{\omega} = \int_{\omega} (f^{1\pm} \eta_1^{\pm} + f^{2\pm} \eta_2^{\pm} + f^{3\pm} \eta_3) d\xi_{\omega}. \end{cases}$$

$\mathcal{P}^{AP2} :=$ formulation découplée du modèle asymptotique parabolique,

$$:= \begin{cases} \zeta \in H_0^1(\omega^{\pm}) \times H_0^1(\omega^{\pm}), \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\omega^{\pm}) \times H_0^1(\omega^{\pm}), \\ \int_{\omega} \underline{\underline{\mathbf{C}}}(\omega) : \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}(\zeta) : \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}(\boldsymbol{\eta}) d\xi_{\omega} = \int_{\omega} f^{1\pm} \eta_1^{\pm} + f^{2\pm} \eta_2^{\pm} - R_l f^{3\pm} \left(\frac{\partial \eta_1^{\pm}}{\partial \xi_1} + \frac{\nu_{12} E_2}{E_1} \frac{\partial \eta_2^{\pm}}{\partial \xi_2} \right) d\xi_{\omega}. \end{cases}$$

$\mathcal{P}_h^{AP2} :=$ formulation variationnelle asymptotique discrète 2D de \mathcal{P}^{AP2}

$$:= \begin{cases} \mathbf{u}_h \in \mathcal{W}_{0,h}^{\mathcal{P}^{AP2}}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{0,h}^{\mathcal{P}^{AP2}} \\ \int_{\omega} \underline{\underline{\mathbf{C}}}(\omega) : \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}(\mathbf{u}_h) : \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}(\mathbf{v}_h) d\xi_{\omega} = \int_{\omega} f^{1\pm} v_{1,h}^{\pm} + f^{2\pm} v_{2,h}^{\pm} - R_l f^{3\pm} \left(\frac{\partial v_{1,h}^{\pm}}{\partial \xi_1} + \frac{\nu_{12} E_2}{E_1} \frac{\partial v_{2,h}^{\pm}}{\partial \xi_2} \right) d\xi_{\omega}. \end{cases}$$

$\mathcal{P}_h^{AP1} :=$ formulation variationnelle asymptotique discrète 2D de \mathcal{P}^{AP1}

$$:= \begin{cases} \mathbf{u}_h \in \mathcal{W}_{0,h}^{\mathcal{P}^{AP1}}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{0,h}^{\mathcal{P}^{AP1}}, \\ \int_{\omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega) : \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}^{P\pm}(\mathbf{u}_h) : \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}^{P\pm}(\mathbf{v}_h) d\xi_{\omega} = \int_{\omega} (f^{1\pm} v_{1,h}^{\pm} + f^{2\pm} v_{2,h}^{\pm} + f^{3\pm} v_{3,h}^{\pm}) d\xi_{\omega}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^\varepsilon &:= \text{formulation variationnelle 3D en coordonnées curvilignes modèle elliptico-hyperbolique,} \\
&:= \begin{cases} \mathbf{u}^\varepsilon \in \mathcal{V}(\Omega^\varepsilon), \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega^\varepsilon) \\ \int_{\omega \times [-\varepsilon, \varepsilon]} \underline{\mathbf{A}}^{\varepsilon\pm} : \underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{\varepsilon\pm}(\mathbf{u}^{\varepsilon\pm}) : \underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{\varepsilon\pm}(\mathbf{v}^{\varepsilon\pm}) \left(1 + \frac{\xi_3^\varepsilon}{R_l}\right) |d^\pm(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon)| d\xi^\varepsilon \\ + \frac{\pi}{V} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R_l}\right)^2 \int_{\omega_{-\varepsilon}} |d^\pm(\xi_1^\varepsilon, -\varepsilon)| v_3^\varepsilon d\xi_\omega^\varepsilon \int_{\omega_{-\varepsilon}} |d^\pm(\xi_1^\varepsilon, -\varepsilon)| u_3^\varepsilon d\xi_\omega^\varepsilon \\ = \int_{\omega_{+\varepsilon}} \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l}\right) |d^\pm(\xi_1^\varepsilon, +\varepsilon)| f^{\varepsilon i\pm} v_i^{\varepsilon\pm} d\xi_\omega^\varepsilon. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^{EH}(\varepsilon) &:= \text{formulation variationnelle 3D normalisée en coordonnées curvilignes elliptico-hyperbolique,} \\
&:= \begin{cases} \mathbf{u}(\varepsilon) \in \mathcal{V}(\Omega), \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega), \\ \int_{\Omega} A^{EH\pm}(\varepsilon)^{ijkl} e_{k||l}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{u}^\pm(\varepsilon)) e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}^\pm) \left(1 + \frac{\varepsilon \xi_3}{R_l}\right) |d_{\varepsilon \xi_3}^\pm| d\xi + \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\pi}{V} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R_l}\right)^2 \int_{\omega_{-1}} |d_{-\varepsilon}^\pm| v_3 d\xi_\omega \int_{\omega_{-1}} |d_{-\varepsilon}^\pm| u_3(\varepsilon) d\xi_\omega = \\ \frac{1}{\varepsilon} \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l}\right) \int_{\omega_1} f^{\pm i}(\varepsilon) v_i^\pm |d_\varepsilon^\pm| d\xi_\omega. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^{EH}(\varepsilon, \Omega) &:= \text{formulation variationnelle parabolique 3D avec hypothèses asymptotiques,} \\
&:= \begin{cases} \forall \mathbf{u}(\varepsilon) \in \mathcal{V}(\Omega), \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega), \\ \int_{\Omega} \underline{\mathbf{A}}^{EH\pm}(\varepsilon) : \underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{u}^\pm(\varepsilon)) : \underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) |d_{\varepsilon \xi_3}^\pm| d\xi + \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\pi}{V} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R_l}\right)^2 \int_{\omega_{-1}} u_3(\varepsilon) |d_{-\varepsilon}^\pm| d\xi_\omega \int_{\omega_{-1}} v_3 |d_{-\varepsilon}^\pm| d\xi_\omega = \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l}\right) \int_{\omega_1} f^{i\pm} v_i |d_\varepsilon^\pm| d\xi_\omega. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\omega 0}^{EHM} &:= \text{formulation variationnelle asymptotique 2D modèle elliptico-hyperbolique,} \\
&:= \begin{cases} \boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{V}_0^{MEH}(\omega), \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_0^{MEH}(\omega) \\ B_\omega^{MEH}(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}) = L_\omega^{MEH}(\boldsymbol{\eta}). \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\omega 0, h}^{MEH} &:= \text{formulation variationnelle discrète de } \mathcal{P}_{\omega 0}^{EHM}, \\
&:= \begin{cases} \mathbf{u}_h \in \mathcal{W}_{0, h}^P, \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{0, h}^P, \\ \int_{\omega} \underline{\mathbf{A}}^{EH\pm}(\omega) : \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{EH\pm}(\mathbf{u}_h) : \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{EH\pm}(\mathbf{v}_h) d\xi_\omega = \\ \int_{\omega} (f^{1\pm} v_{1, h}^\pm |d| + f^{2\pm} v_{2, h}^\pm |d| + f^{3\pm} v_{3, h}^\pm) d\xi_\omega. \end{cases}
\end{aligned}$$

1 Introduction

1.1 Contexte

Cette thèse est une contribution à l'étude de faisabilité d'un dirigeable gros porteur. Il s'agit plus précisément d'étudier le comportement de son enveloppe extérieure lorsqu'elle est soumise à des perturbations de son environnement.

Cette enveloppe est constituée d'une succession de lobes longitudinaux indépendants les uns des autres, fixés sur leurs longueurs à la structure métallique du dirigeable. Ces lobes sont composés de deux pièces de tissu précontraintes par un gonflage sous pression de l'espace délimité par les deux épaisseurs de tissu. L'objectif de cette précontrainte est d'aider à maintenir une géométrie fixe du dirigeable et de maintenir au mieux des conditions de pression et de température constantes à l'intérieur du dirigeable où se trouvent les poches d'Hélium.

Dans cette perspective, on étudie le comportement d'un lobe, en supposant que le régime est stationnaire et que l'environnement est connu. Il s'agit donc, dans un premier temps de modéliser ce problème, puis d'en réaliser l'étude numérique et enfin, d'effectuer quelques essais numériques.

La modélisation à elle seule suppose de réunir au moins quatre problématiques : des coques, un matériau non isotrope, une précontrainte et un couplage fluide-structure. En effet, la géométrie des tissus constituant l'enveloppe est telle que l'on peut assimiler le tissu à une coque de faible épaisseur, le matériau, avec ses trois directions privilégiées orthogonales, suppose d'utiliser une loi de comportement orthotrope. Quand aux deux autres problématiques, elles résultent directement du cas étudié.

De nombreux auteurs se sont intéressés à l'une voire à plusieurs de ces problématiques, sans jamais les réunir. Sans prétendre à l'exhaustivité, citons, pour les problèmes de coques, [Akian, 2005], [Chapelle-Bathe, 2003], [Ciarlet, 2000] et [Faou, 2000], pour les matériaux non isotropes, [Faré, 2002], [Gasser-Boisse-Hanklar, 2000], [Giroud, 1999], [Muttin, 1989], [Reese-Raible-Wriggers, 2001], [Shanahan-Lloyd-Hearle, 1978] et [Valette, 2001], pour les matériaux précontraints, [Gil-Bonet, 2006], [Giroud, 1998] et [Salençon, 1995], enfin, en ce qui concerne les interactions fluide-structure, [Chen-Bian-Ding, 2004], [Crolet-Murea, 2002], [Grandmont-Maday, 2000], [Métier, 2003], [Renardy, 1997] et [Stein-Benney-Tezduyar-Potvin, 2001].

1.2 Objectifs, méthodologie et résultats

Il s'agit d'établir, avec une justification mathématique rigoureuse, des modèles de coque en membrane dans le cas où le matériau est orthotrope et précontraint. Il est à noter, que ces deux propriétés à elles seules imposent de travailler localement avec une contrainte de conservation du volume global. A cette première difficulté s'ajoute celle d'un couplage avec le fluide intérieur de gonflage.

Dans la perspective d'essais numériques, l'élaboration d'un modèle 3D n'est pas satisfaisante. En effet, son traitement serait trop coûteux en temps et en mémoire. Or, pour être rigoureux d'un point de vue purement mathématique, les modèles d'élasticité sont établis en 3D. Il s'agit donc, après avoir établi ces modèles tri-dimensionnels, de se ramener à un modèle bi-dimensionnel.

Ceci peut se faire en posant des hypothèses a priori sur la déformation de la structure, en considérant des modèles de coques de Koiter [Koiter, 1970] ou de Naghdi [Naghdi, 1972] par exemple, ou en effectuant un développement asymptotique de la solution du problème 3D par rapport à l'épaisseur, [Akian, 2000], [Ciarlet, 2000], [Giroud, 1998], [Fox-Raoult-Simo, 1992]. Quelque soit la méthode retenue, elle suppose de connaître, et donc de déterminer préalablement, la géométrie de la

coque précontrainte [Luce-Poutous-Thomas, 2004].

Compte tenu de l'allure du déplacement obtenu lors du calcul explicite de la précontrainte (annexe II), nous avons choisi de réaliser une étude asymptotique. Elle aboutit à un modèle dit "parabolique" en référence à la géométrie du lobe lorsque les axes de fixation sont rectilignes. Ce problème est bien posé dans des espaces fonctionnels abstraits obtenus par complétion d'espaces de Sobolev. Les essais numériques alors réalisés montrent que la solution n'est pas stable en déplacement. Ce phénomène peut s'expliquer par le fait que l'on travaille dans des espaces complétés dont la norme n'est pas équivalente à la norme usuelle.

Pour tenter d'y remédier nous avons légèrement modifié la géométrie en courbant un peu les axes de fixation. Ceci afin de rendre la surface extérieure (celle où sont appliquées les forces extérieures) elliptique. La surface intérieure devient alors hyperbolique. Dans cette configuration, l'étude asymptotique aboutit alors à un deuxième modèle dit "elliptico-hyperbolique". La géométrie impose une nouvelle fois de travailler dans des espaces complétés. Mais cette fois-ci, les normes étant équivalentes sur la surface extérieure, les résultats numériques sont comme prévu plus satisfaisants.

1.3 Plan de l'exposé

Cette thèse comporte deux grandes parties, l'étude d'un modèle parabolique, puis celle d'un modèle elliptico-hyperbolique.

La première partie se compose des chapitres 2, 3 et 4. Dans le chapitre 2, on modélise le problème 3D puis on montre que sous cette forme, le problème est bien posé. Dans le chapitre 3, on réalise l'étude asymptotique du modèle parabolique. Cette étude permet d'obtenir des résultats de convergence forte des déplacements 3D et des déplacements moyens vers la solution d'un problème 2D bien posé dans des espaces complétés (paragraphe 3.8). On démontre également, dans ce même chapitre, que l'on peut considérablement affaiblir la définition de "forces admissibles" donnée dans [Ciarlet, 2000]. dans le cas où les forces appliquées sont surfaciques. Pour clore cette partie, l'analyse numérique du modèle 2D met en évidence chapitre 4, que les estimations d'erreur a priori se font uniquement dans la norme de l'énergie, ce qui peut poser problème. Quelques essais numériques viennent confirmer les limites du travail dans cette norme. La solution numérique en déplacement dépend du maillage.

La deuxième partie, se compose des chapitres 5 et 6. Elle a pour vocation d'améliorer les résultats numériques obtenus dans la première partie. Le chapitre 5 est donc consacré à l'étude asymptotique du modèle elliptico-hyperbolique obtenu après avoir légèrement modifié la géométrie de l'état quasi-naturel. On y redémontre la convergence forte de la solution 3D et de sa valeur moyenne dans l'épaisseur. Les solutions numériques obtenues chapitre 6 sont plus stables, comme espéré.

Trois annexes viennent compléter cette étude. La première, consacrée à l'étude de l'état quasi-naturel détermine la géométrie initiale de la structure. La seconde, consacrée à l'état précontraint permet le calcul explicite de la précontrainte et fixe l'état de référence. La troisième regroupe quelques résultats régulièrement utilisés lors de l'étude.

1.4 Conventions générales

Les indices et exposants en caractères latins, i, j, k, p, \dots , prennent leurs valeurs dans $\{1, 2, 3\}$, sauf indications contraires ou s'ils indiquent des suites.

Les indices et exposants en caractères grecs, à l'exception de ε, ν et ∂_ν prennent leurs valeurs dans $\{1, 2\}$. ε désigne un paramètre strictement positif qui tend vers zéro.

La convention de sommation des indices répétés est appliquée.

$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) :=$ base orthonormale fixe,

$x := (x_1, x_2, x_3)$ coordonnées cartésiennes,

$\xi^\varepsilon := (\xi_1^\varepsilon, \xi_2^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon)$ coordonnées curvilignes,

$\xi := (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ coordonnées curvilignes normalisées,

$\mathbf{u}, \mathbf{v} :=$ champs de déplacement "3D", c'est à dire qui dépendent de 3 variables, généralement (ξ_1, ξ_2, ξ_3) ,

$\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} :=$ champs de déplacement "2D", c'est à dire qui dépendent de 2 variables, généralement (ξ_1, ξ_2) ,

$\mathbf{n} :=$ vecteur normal orienté vers l'extérieur,

$\delta_j^i :=$ symbole de Kronecker.

Les tenseurs sont notés entre [] quand ils sont utilisés sous forme matricielle. Ils sont soulignés deux fois pour un tenseur du 4^{ème} ordre et une fois pour un tenseur du second ordre.

Les variables de l'état quasi-naturel sont éventuellement signalées par l'exposant q , celles de l'état précontraint par l'exposant p .

Les variables du modèle elliptico-hyperbolique sont éventuellement signalées par l'exposant EH , celles du modèle parabolique par l'exposant P .

Les exposants $+$ et $-$ caractérisent respectivement la partie extérieure et la partie intérieure du lobe par rapport au dirigeable. L'exposant \pm signifie que lorsque domaine où l'on se place est à l'extérieur, la variable correspond à celle de l'extérieur et réciproquement. Par exemple

$$x_1^\pm = \begin{cases} -(R_l + \xi_3^\varepsilon) \sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) & \text{pour } \xi_\omega^\varepsilon \in \omega^+ \\ (R_l + \xi_3^\varepsilon) \sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right) & \text{pour } \xi_\omega^\varepsilon \in \omega^- \end{cases}$$

ou encore

$$\int_{\omega_{-1}^\pm} v_3 d\xi_\omega^\varepsilon = \int_{\omega_{-1}^+} v_3^+ d\xi_\omega^\varepsilon + \int_{\omega_{-1}^-} v_3^- d\xi_\omega^\varepsilon.$$

1.5 Hypothèses pour la modélisation

1.5.1 Présentation d'un lobe

Description géométrique : chaque lobe est constitué de deux épaisseurs de tissu d'une longueur $2L$ très grande devant la largeur $2l$ elle même très grande devant l'épaisseur 2ε .

Le tissu est fixé sur ses longueurs à deux axes parallèles rectilignes et sur ses largeurs à deux arcs de cercle de rayon à déterminer. Par convention, la direction des axes de fixation est celle du 2^{ème} vecteur de base.

Choix dun repère fixe : à chaque lobe, on associe le repère orthonormé direct fixe $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ tel que :

l'axe (Ox_3) de vecteur directeur \mathbf{e}_3 est parallèle à la direction des axes de fixation,

l'axe (Ox_1) de vecteur directeur \mathbf{e}_1 relie les axes de fixation et $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$.

Enfin, le point O est choisi de telle sorte que les axes de fixation soient les segments $\{-d\} \times \{0\} \times \{-L \leq x_3 \leq L\}$ et $\{+d\} \times \{0\} \times \{-L \leq x_3 \leq L\}$ où $2d$ est la distance qui sépare les deux axes.

Fluide intérieur : le fluide utilisé pour le gonflage est un gaz parfait. Lors du gonflage, la pression intérieure est supposée uniforme.

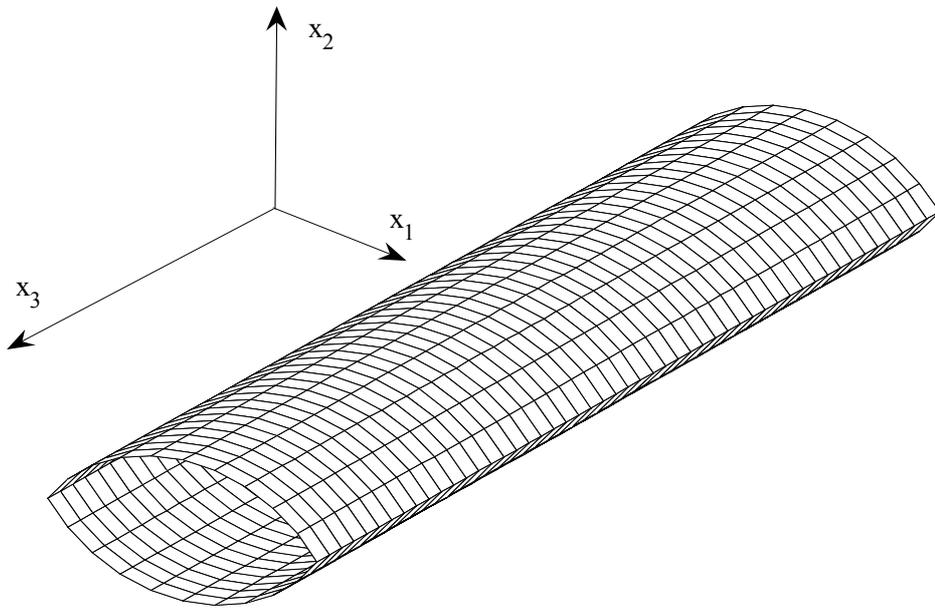


Figure 1: Lobe

Matériaux : les matériaux sont supposés élastiques orthotropes. Ils sont modélisés en trois dimensions même si l'une d'elles, l'épaisseur est très petite devant les deux autres.

1.5.2 Hypothèses mécaniques

On suppose que chaque lobe connaît trois états d'équilibre successifs

Etat d'équilibre quasi-naturel : cet état correspond physiquement à l'état d'équilibre obtenu en gonflant tout doucement le lobe avant que le tissu ne commence à s'étirer. Dans cet état, le tenseur des contraintes est négligeable devant les constantes de l'élasticité. Les variables de cette configuration sont identifiées par un exposant q .

Etat d'équilibre précontraint : on obtient cet état à partir du précédent en augmentant la pression à l'intérieur du lobe. Il est identifié par l'exposant p , et correspond à un déplacement \mathbf{u}^q , à une déformation φ^q du matériau.

Etat d'équilibre perturbé : cet état est obtenu après que le lobe ait été soumis à une perturbation. Il correspond par rapport à l'état précédent à un déplacement \mathbf{u} et à une déformation φ . Les variables de cet état n'ont pas d'exposant.

1.5.3 Elasticité linéaire

Notations :

Ω^ε := ouvert connexe occupé par le tissu,

$S_{-\varepsilon}$:= surface intérieure du tissu,

$S_{+\varepsilon}$:= surface extérieure du tissu,

λ_{il} := coefficients d'élasticité,

μ_{kl} := coefficients d'élasticité,

$\underline{\underline{\Sigma}}$:= tenseur des contraintes,

$\underline{\underline{\mathbf{A}}}$:= tenseur d'élasticité, avec,

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} := \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 & | & 0 & \mu_{12} & 0 & | & 0 & 0 & \mu_{13} \\ 0 & \lambda_{12} & 0 & | & \mu_{12} & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{13} & | & 0 & 0 & 0 & | & \mu_{13} & 0 & 0 \\ - & - & - & + & - & - & - & + & - & - & - \\ 0 & \mu_{12} & 0 & | & \lambda_{12} & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{12} & 0 & 0 & | & 0 & \lambda_{22} & 0 & | & 0 & 0 & \mu_{23} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \lambda_{23} & | & 0 & \mu_{23} & 0 \\ - & - & - & + & - & - & - & + & - & - & - \\ 0 & 0 & \mu_{13} & | & 0 & 0 & 0 & | & \lambda_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \mu_{23} & | & 0 & \lambda_{23} & 0 \\ \mu_{13} & 0 & 0 & | & 0 & \mu_{23} & 0 & | & 0 & 0 & \lambda_{33} \end{bmatrix}.$$

Remarque 1.5.1 Le tenseur $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ est défini positif. C'est à dire qu'il existe une constante c strictement positive telle que pour tout tenseur symétrique $\underline{\mathbf{t}} := [t_{ij}]$, on a

$$\sum_{i,j} |t_{ij}|^2 \leq c A^{ijkl} t_{kl} t_{ij}.$$

Compte tenu de l'effet escompté de la précontrainte, on suppose que les hypothèses des petites perturbations [Salençon, 1995] sont valides. Par conséquent, on peut confondre, dans les équations d'équilibre, les tenseurs de contrainte de Cauchy et ceux de Piola-Kirchoff respectivement notés $\underline{\mathbf{C}}$, $\underline{\mathbf{B}}$, $\underline{\mathbf{T}}$ et $\underline{\underline{\Sigma}}$ et on peut également confondre, dans la loi de comportement d'un matériau élastique orthotrope, le tenseur des déformations de Green-Lagrange $\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{C}} - \underline{\mathbf{I}})$ et le tenseur des déformations linéarisé $\underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \mathbf{u} + \underline{\nabla} \mathbf{u}^T)$ [Duvaut, 1990].

Linéarisation de la loi de comportement : dans la loi de comportement, on identifie le tenseur des déformations de Green-Lagrange $\underline{\mathbf{E}}$ et le tenseur des déformations linéarisé $\underline{\mathbf{e}}$. Par conséquent, les tenseurs des contraintes et des déformations des états précontraints et perturbés, dans les axes d'orthotropie, vérifient respectivement les équations linéarisées suivantes:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\Sigma}}^p &= \underline{\underline{\mathbf{A}}} : \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \mathbf{u}^q + \underline{\nabla} \mathbf{u}^{qT}) + \underline{\underline{\Sigma}}^q &= \underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}^q) + \underline{\underline{\Sigma}}^q \\ \underline{\underline{\Sigma}} &= \underline{\underline{\mathbf{A}}} : \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \mathbf{u} + \underline{\nabla} \mathbf{u}^T) + \underline{\underline{\Sigma}}^p &= \underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) + \underline{\underline{\Sigma}}^p \end{cases}$$

où $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ est le tenseur du quatrième ordre d'élasticité linéaire.

Linéarisation des équations d'équilibre :
à l'état quasi-naturel,

$$\begin{cases} -\mathbf{div}(\underline{\Sigma}^q) = \rho \mathbf{g} & \text{dans } \Omega^{\varepsilon q} \\ \underline{\Sigma}^q \mathbf{n} = -P \mathbf{n} & \text{sur } S_\varepsilon^q \\ \underline{\Sigma}^q \mathbf{n} = -\pi^q \mathbf{n} & \text{sur } S_{-\varepsilon}^q \end{cases}$$

où $\rho \mathbf{g}$ est la densité volumique du poids, P est la pression extérieure et π^q est la pression d'équilibre.
à l'état précontraint,

$$\begin{cases} -\mathbf{div}(\underline{\Sigma}^p) = \rho \mathbf{g} & \text{dans } \Omega^{\varepsilon p} \text{ (ou } \Omega^{\varepsilon q}) \\ \underline{\Sigma}^p \mathbf{n} = -P \mathbf{n} & \text{sur } S_\varepsilon^p \text{ (ou } S_\varepsilon^q) \\ \underline{\Sigma}^p \mathbf{n} = -\pi^p \mathbf{n} & \text{sur } S_{-\varepsilon}^p \text{ (ou } S_{-\varepsilon}^q) \end{cases}$$

où $\rho \mathbf{g}$ est la densité volumique du poids, P est la pression extérieure et π^p est la pression de gonflage.
à l'état déformé,

$$\begin{cases} -\mathbf{div}(\underline{\Sigma}) = \rho \mathbf{g} & \text{dans } \Omega^{\varepsilon p} \\ \underline{\Sigma} \mathbf{n} = -P \mathbf{n} + \delta \mathbf{F} & \text{sur } S_\varepsilon^p \\ \underline{\Sigma} \mathbf{n} = -(\pi^p + \delta \pi) \mathbf{n} & \text{sur } S_{-\varepsilon}^p \end{cases}$$

où $\rho \mathbf{g}$ est la densité volumique du poids, P est la pression extérieure, π^p est la pression de gonflage, $\delta \mathbf{F}$ est la perturbation subie par le lobe et $\delta \pi$ la variation de pression intérieure qui en résulte. En effet, la pression intérieure dépend directement du volume intérieur, qui lui-même dépend de la déformation subie par le lobe.

2 Modélisation

2.1 Etude de l'état perturbé

Notations :

$$\begin{aligned} S_r^\pm &:= \text{surface du tissu située à la distance } r \text{ de la surface moyenne,} \\ \omega^\pm &:= \text{ouvert de paramétrisation de la surface moyenne du tissu,} \\ \partial S^\pm &:= \text{bord du tissu dans l'épaisseur.} \end{aligned}$$

On suppose que l'état précontraint est parfaitement déterminé (voir Annexe II). C'est à dire que la géométrie et la précontrainte sont connues. On le choisit comme état de référence.

Compte tenu des résultats obtenus lors du calcul explicite approché de la précontrainte, l'ouvert Ω^ε est choisi de la forme

$$\Omega^\varepsilon = \bigcup_{r \in]-\varepsilon, \varepsilon[} S_r^\pm$$

où, mathématiquement, S_r^\pm est la réunion des deux ouverts S_r^+ et S_r^- décrits par

$$S_r^+ = \left\{ \left(- (R_l + r) \sin \left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l} \right), (R_l + r) \cos \left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l} \right) - R_l + R_l \cos \left(\frac{\xi_1^\varepsilon}{R_l} \right), \xi_2^\varepsilon \right), (\xi_1^\varepsilon, \xi_2^\varepsilon) \in \omega^+ \right\}$$

et

$$S_r^- = \left\{ \left(- (R_l + r) \sin \left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l} \right), (R_l + r) \cos \left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l} \right) + R_l - R_l \cos \left(\frac{\xi_1^\varepsilon}{R_l} \right), \xi_2^\varepsilon \right), (\xi_1^\varepsilon, \xi_2^\varepsilon) \in \omega^- \right\}$$

avec

$$\omega^+ =]0, 2l[\times]-L, +L[\text{ et } \omega^- =]-2l, 0[\times]-L, +L[.$$

et où $S_0^\pm = S^\pm$ représente physiquement la surface moyenne du tissu.

A partir de cette configuration, on applique une perturbation extérieure, supposée elle aussi connue, représentée par la densité surfacique de force $\delta \mathbf{F}$. On veut connaître la nouvelle géométrie du lobe ainsi que les nouvelles contraintes. Pour cela, on calcule le déplacement \mathbf{u} de chaque point du lobe. On suppose que la précontrainte limite le mouvement et que par conséquent, les hypothèses des petites perturbations restent valides. Enfin, on modélise la fixation du tissu sur la structure rigide par $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ sur ∂S^\pm avec

$$\partial S^\pm := \bigcup_{r \in]-\varepsilon, \varepsilon[} \partial S_r^\pm.$$

2.1.1 Couplage fluide-structure

On établit la relation entre la pression intérieure et la forme des lobes. Le gaz utilisé pour gonfler les lobes est un gaz parfait, par conséquent à température constante et nombre de moles constant, la pression exercée par le gaz sur le tissu est inversement proportionnel au volume occupé par le gaz. On considère deux états d'équilibres successifs, l'état précontraint et l'état perturbé. Le second étant obtenu par un déplacement \mathbf{u} du premier. Il s'en suit une variation de volume intérieur δV et une variation de pression $\delta \pi$. Les densités de forces surfaciques sont donc :

$$\boldsymbol{\pi}^p = -\frac{nRT}{V}\mathbf{n}_{ext}^p,$$

à l'état précontraint, et

$$\boldsymbol{\pi}^p + \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\pi} = -\frac{nRT}{V+\delta V}\mathbf{n}_{ext},$$

à l'état perturbé. Or, dans l'hypothèse des petites perturbations, on confond les normales extérieures \mathbf{n}_{ext}^p et \mathbf{n}_{ext} , si bien que

$$\boldsymbol{\pi}^p + \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\pi} \simeq -\frac{nRT}{V+\delta V}\mathbf{n}_{ext}^p$$

et par conséquent, par soustraction des égalités précédentes,

$$\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\pi} = -\left(\frac{nRT}{V+\delta V} - \frac{nRT}{V}\right)\mathbf{n}_{ext}^p.$$

On développe au premier ordre en $\frac{\delta V}{V}$ et on obtient

$$\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\pi} = \left(\frac{nRT}{V}\frac{\delta V}{V}\right)\mathbf{n}_{ext}^p$$

soit,

$$\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\pi} = -\frac{\delta V}{V}\boldsymbol{\pi}^p.$$

La variation de volume est reliée au déplacement par

$$\delta V = -\int_{S_{-\varepsilon}^{\pm}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{ext}^p d\gamma.$$

Au final, en réunissant les deux dernières égalités, on obtient le couplage fluide-structure

$$\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\pi} = -\frac{\pi^p}{V} \left(\int_{S_{-\varepsilon}^{\pm}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{ext}^p d\gamma \right) \mathbf{n}_{ext}^p$$

sur la surface intérieure d'un lobe.

2.1.2 Equations de la mécanique et de la dynamique

On rappelle que la précontrainte $\underline{\Sigma}^p$ vérifie dans le volume Ω^ε l'équation aux dérivées partielles

$$-\mathbf{div}(\underline{\Sigma}^p) = \rho\mathbf{g} \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon$$

où $\rho\mathbf{g}$ est la densité volumique du poids. Elle vérifie également les conditions aux limites posées sur les surfaces intérieures et extérieures du lobe

$$\begin{cases} \underline{\Sigma}^p \mathbf{n}_{ext}^p = -P\mathbf{n}_{ext}^p & \text{sur } S_{\varepsilon}^{\pm} \\ \underline{\Sigma}^p \mathbf{n}_{ext}^p = -\pi^p \mathbf{n}_{ext}^p & \text{sur } S_{-\varepsilon}^{\pm} \end{cases}$$

où P est la pression extérieure et π^p est la pression de gonflage et \mathbf{n}_{ext}^p est le vecteur unitaire dirigé vers l'extérieur normal à S_ε^\pm ou à $S_{-\varepsilon}^\pm$. La contrainte obtenue à la suite de la perturbation $\delta\mathbf{F}$ vérifie quant à elle l'équation

$$-\mathbf{div}(\underline{\Sigma}) = \rho\mathbf{g} \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon$$

ainsi que les conditions aux limites

$$\begin{cases} \underline{\Sigma}\mathbf{n}_{ext}^p = -P\mathbf{n}_{ext}^p + \delta\mathbf{F} & \text{sur } S_\varepsilon^\pm \\ \underline{\Sigma}\mathbf{n}_{ext}^p = -(\pi^p + \delta\pi)\mathbf{n}_{ext}^p & \text{sur } S_{-\varepsilon}^\pm. \end{cases}$$

On soustrait les équations des deux systèmes d'EDP et des conditions aux limites, on note $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{ext}^p$ et on obtient le système

$$\begin{cases} -\mathbf{div}(\underline{\Sigma} - \underline{\Sigma}^p) = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega^\varepsilon \\ (\underline{\Sigma} - \underline{\Sigma}^p)\mathbf{n} = \delta\mathbf{F} & \text{sur } S_\varepsilon^\pm \\ (\underline{\Sigma} - \underline{\Sigma}^p)\mathbf{n} = -\delta\pi\mathbf{n} & \text{sur } S_{-\varepsilon}^\pm. \end{cases}$$

Les lois de comportement linéarisées des matériaux relient contrainte, précontrainte et déplacement par

$$\underline{\Sigma} - \underline{\Sigma}^p = \underline{\mathbf{A}}:\underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon$$

enfin, l'immobilité de la fixation impose

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial S.$$

si bien qu'en tenant compte du couplage, et après avoir remplacé $\delta\pi$ par son expression en fonction de \mathbf{u}

$$\delta\pi = -\frac{\pi^p}{V} \left(\int_{S_{-\varepsilon}^\pm} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{ext}^p d\gamma \right) \mathbf{n}_{ext}^p,$$

le système linéarisé d'équations aux dérivées partielles vérifié par \mathbf{u} devient

$$\begin{cases} \mathbf{div}(\underline{\mathbf{A}}:\underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u})) = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega^\varepsilon \\ \underline{\mathbf{A}}:\underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u})\mathbf{n} = \delta\mathbf{F} & \text{sur } S_\varepsilon^\pm \\ \underline{\mathbf{A}}:\underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u})\mathbf{n} = -\frac{\pi^p}{V} \left(\int_{S_{-\varepsilon}^\pm} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\gamma \right) \mathbf{n} & \text{sur } S_{-\varepsilon}^\pm \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial S^\pm \end{cases}$$

2.2 Choix des espaces et des normes

Notations :

$$\mathcal{V}(\Omega^\varepsilon) := \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega^{\varepsilon+})^2 \times H^1(\Omega^{\varepsilon-})^2 \times H^1(\Omega^\varepsilon), \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial S^\varepsilon \times]-\varepsilon, \varepsilon[\right\}.$$

Le lobe présente la particularité d'être composé de deux parties physiquement distinctes, $\Omega^{\varepsilon+}$ et $\Omega^{\varepsilon-}$, reliées par le bord uniquement. Pour rendre compte de cette géométrie, on choisit de chercher le déplacement qui nous intéresse dans un espace qui différencie, pour les composantes tangentielles (u_1 et u_2), ce qui se passe sur $\Omega^{\varepsilon+}$ et ce qui se passe sur $\Omega^{\varepsilon-}$. C'est pourquoi, compte tenu des conditions aux limites sur u_1 et u_2 , on les cherche sous la forme $(u_1^+, u_2^+, u_1^-, u_2^-) \in H^1(\Omega^{\varepsilon+})^2 \times H^1(\Omega^{\varepsilon-})^2$. Ce choix est validé a posteriori par les modèles asymptotiques obtenus dans les deux géométries étudiées (avec les axes longitudinaux légèrement incurvés ou non). En revanche, pour la composante normale u_3 , le choix de ne pas découpler se justifie, a posteriori, par les études asymptotiques. En effet, celles-ci conduisent à transformer les conditions imposées au déplacement normal. De $u_3 \in H_0^1(\omega)$, on passe à u_3 est à "moyenne nulle" sur ω , condition qui assure le couplage entre les déplacements du haut et ceux du bas. C'est pourquoi on cherche u_3 dans l'espace $H^1(\Omega^\varepsilon)$. L'espace 3D retenu pour chercher les déplacements en 3D est donc $\mathcal{V}(\Omega^\varepsilon)$. Quant aux déplacements 2D, on les cherchera en discret dans des sous-espaces de $H_0^1(\omega^+)^2 \times H_0^1(\omega^-)^2 \times L^2(\omega)$.

Proposition 2.2.1 *L'application définie de $\mathcal{V}(\Omega^\varepsilon)$ dans \mathbb{R}^+ par*

$$\mathbf{v} \mapsto \left(\int_{\Omega^\varepsilon} \underline{\mathbf{A}} : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{v}) : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{v}) \, d\Omega^\varepsilon \right)^{1/2}$$

est une norme sur $\mathcal{V}(\Omega^\varepsilon)$, notée $\|\cdot\|_a$.

Démonstration. Soit la forme bilinéaire symétrique positive sur $\mathcal{V}(\Omega^\varepsilon) \times \mathcal{V}(\Omega^\varepsilon)$.

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_a := \int_{\Omega^\varepsilon} \underline{\mathbf{A}} : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{v}) \, d\Omega^\varepsilon.$$

Pour montrer le résultat, il suffit de montrer que pour tout $\mathbf{u} \in \mathcal{V}(\Omega^\varepsilon)$,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_a = 0 \implies \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Or, d'après l'ellipticité du tenseur d'élasticité

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_a = 0 \implies \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) = \underline{\mathbf{0}}.$$

Il reste donc à montrer que

$$(\underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) = \underline{\mathbf{0}} \text{ et } \mathbf{u} \in \mathcal{V}(\Omega^\varepsilon)) \implies \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ce qui est vrai puisqu'il s'agit d'un mouvement rigide nul sur une partie du bord. ■

Proposition 2.2.2 *Les normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_{1,\Omega^\varepsilon}$ sont équivalentes sur $\mathcal{V}(\Omega^\varepsilon)$. Les constantes d'équivalence ne dépendent que des coefficients d'élasticité.*

Démonstration. La démonstration reprend celle donnée dans [Duvaut-Lions, 1972] pour prouver l'inégalité de Korn. On se place dans une base d'orthotropie pour la démonstration, c'est à dire en coordonnées cylindriques du fait de la géométrie cylindrique. On rappelle qu'en coordonnées

cylindriques le gradient d'un champ vectoriel exprimé en coordonnées cylindriques $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$, vaut

$$\underline{\nabla} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) &= \lambda_{11} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + 2\lambda_{12} \frac{\partial u_r}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r \right) + \mu_{12} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)^2 + \\ &\lambda_{22} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r \right)^2 + 2\lambda_{23} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \\ &\mu_{23} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right)^2 + \lambda_{33} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + 2\lambda_{13} \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \mu_{13} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 \text{ et,} \\ \underline{\nabla} \mathbf{u} : \underline{\nabla} \mathbf{u} &= \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta \right)^2 + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)^2 + \\ &\left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2. \end{aligned}$$

On majore la première égalité à l'aide des relations

$$2ab \leq a^2 + b^2 \quad \text{et} \quad (a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$$

et on obtient l'inégalité

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) \leq c \underline{\nabla} \mathbf{u} : \underline{\nabla} \mathbf{u}$$

où il suffit de choisir c vérifiant

$$c \geq \max(\lambda_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{13}, \lambda_{12} + \lambda_{22} + \lambda_{23}, \lambda_{13} + \lambda_{23} + \lambda_{33}, 2\mu_{12}, 2\mu_{13}, 2\mu_{23}),$$

et donc ne dépendant que des coefficients d'élasticité. On intègre sur Ω^ε pour obtenir

$$\|\mathbf{u}\|_a^2 \leq c \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2.$$

Cette inégalité nous assure la continuité de l'application linéaire surjective

$$\begin{array}{ccc} id : \left(\mathcal{V}(\Omega^\varepsilon), \|\cdot\|_{1,\Omega^\varepsilon} \right) & \longrightarrow & \left(\mathcal{V}(\Omega^\varepsilon), \|\cdot\|_a \right) \\ \mathbf{u} & \longmapsto & \mathbf{u} \end{array}$$

Par conséquent, d'après le théorème du graphe fermé, id est un isomorphisme de réciproque continue, ce qui entraîne l'équivalence des normes. La deuxième constante ne dépend également que des coefficients d'élasticité. Il s'agit en effet de la constante d'ellipticité de $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, puisque $\underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) = \underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\nabla} \mathbf{u} : \underline{\nabla} \mathbf{u}$. ■

2.3 Formulation variationnelle

Notations :

$$\mathcal{P}(\Omega^\varepsilon) := \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_\varepsilon \in \mathcal{V}(\Omega^\varepsilon), \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega^\varepsilon), \\ \int_{\Omega^\varepsilon} \underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\nabla} \mathbf{u}_\varepsilon : \underline{\nabla} \mathbf{v} d\Omega^\varepsilon + \frac{\pi^p}{V} \int_{S_{-\varepsilon}^\pm} \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{n} ds^{-\varepsilon} \int_{S_{-\varepsilon}^\pm} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds^{-\varepsilon} = \int_{S_\varepsilon^\pm} \delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} ds^{+\varepsilon}. \end{array} \right.$$

Pour obtenir la formulation variationnelle associée au système

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(\underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u})) = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega^\varepsilon \\ \underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) \mathbf{n} = \delta \mathbf{F} & \text{sur } S_\varepsilon^\pm \\ \underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) \mathbf{n} = -\frac{\pi^p}{V} \left(\int_{S_{-\varepsilon}^\pm} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\gamma \right) \mathbf{n} & \text{sur } S_{-\varepsilon}^\pm \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial S^\pm \end{array} \right.$$

on multiplie par une fonction test $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega^\varepsilon)$, puis on intègre chaque équation. On se ramène alors à l'étude du problème : trouver $\mathbf{u} \in \mathcal{V}(\Omega^\varepsilon)$, $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega^\varepsilon)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega^\varepsilon} -\operatorname{div}(\underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} d\Omega^\varepsilon = 0 \\ \int_{S_\varepsilon^\pm} (\underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} ds^{+\varepsilon} = \int_{S_\varepsilon^\pm} \delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} ds^{+\varepsilon} \\ \int_{S_{-\varepsilon}^\pm} (\underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} ds^{-\varepsilon} = -\frac{\pi^p}{V} \int_{S_{-\varepsilon}^\pm} \left(\int_{S_{-\varepsilon}^\pm} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds^{-\varepsilon} \right) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} ds^{-\varepsilon}. \end{array} \right.$$

Par symétrie du tenseur $\underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u})$, on a la double égalité tensorielle

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) : \underline{\nabla} \mathbf{v} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{v}) = \underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\nabla} \mathbf{u} : \underline{\nabla} \mathbf{v}$$

si bien que la formule de divergence composée tensorielle

$$\operatorname{div}(\mathbf{S}^T) \cdot \mathbf{v} = \operatorname{div}(\mathbf{S}\mathbf{v}) - \mathbf{S} : \underline{\nabla} \mathbf{v}$$

appliquée à $\mathbf{S} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u})$ devient

$$\operatorname{div}(\underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} = \operatorname{div}(\underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) \mathbf{v}) - \underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\nabla} \mathbf{u} : \underline{\nabla} \mathbf{v}.$$

Par symétrie toujours, on a

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$$

Enfin, on rappelle que

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \operatorname{div}(\underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) \mathbf{v}) d\Omega^\varepsilon = \int_{\delta\Omega^\varepsilon} \underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds.$$

On en déduit donc

$$\int_{\Omega^\varepsilon} -\operatorname{div}(\underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} d\Omega^\varepsilon = \int_{\Omega^\varepsilon} \underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\nabla} \mathbf{u} : \underline{\nabla} \mathbf{v} d\Omega^\varepsilon - \int_{\delta\Omega^\varepsilon} \underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} ds.$$

Sachant que $\partial\Omega^\varepsilon = S_{-\varepsilon}^\pm \cup S_\varepsilon^\pm \cup \partial S^\pm$ et que $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$ sur ∂S^\pm , on a, en séparant les intégrales de bord,

$$\int_{\partial\Omega^\varepsilon} \underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} ds = \int_{S_\varepsilon^\pm} \delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} ds^{+\varepsilon} - \frac{\pi^p}{V} \int_{S_{-\varepsilon}^\pm} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds^{-\varepsilon} \int_{S_{-\varepsilon}^\pm} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds^{-\varepsilon}$$

Désormais, pour marquer la dépendance du déplacement et de l'épaisseur, on indice \mathbf{u} par ε . On a alors le problème variationnel suivant

$$\mathcal{P}(\Omega^\varepsilon) : \begin{cases} \mathbf{u}_\varepsilon \in \mathcal{V}(\Omega^\varepsilon), \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega^\varepsilon), \\ \int_{\Omega^\varepsilon} \underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\nabla} \mathbf{u}_\varepsilon : \underline{\nabla} \mathbf{v} d\Omega^\varepsilon + \frac{\pi^p}{V} \int_{S_{-\varepsilon}^\pm} \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{n} ds^{-\varepsilon} \int_{S_{-\varepsilon}^\pm} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds^{-\varepsilon} = \int_{S_\varepsilon^\pm} \delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} ds^{+\varepsilon}. \end{cases}$$

2.4 Existence et unicité de \mathbf{u}_ε solution de $\mathcal{P}(\Omega^\varepsilon)$

Théorème 2.4.1 *Le problème $\mathcal{P}(\Omega^\varepsilon)$ admet une solution unique.*

Démonstration. On vérifie successivement les hypothèses du théorème de Lax-Milgram. L'espace $\mathcal{V}(\Omega^\varepsilon)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{1,\Omega^\varepsilon}$ est un espace de Hilbert. La forme linéaire

$$\mathbf{v} \mapsto \int_{S_\varepsilon^\pm} \delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} ds^{+\varepsilon}$$

est continue, par continuité de l'opérateur trace partielle sur S_ε^\pm .

La forme bilinéaire

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \int_{S_{-\varepsilon}^\pm} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds^{-\varepsilon} \int_{S_{-\varepsilon}^\pm} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds^{-\varepsilon}$$

est continue car, en appliquant l'inégalité de Hölder on a la majoration

$$\left| \int_{S_{-\varepsilon}^\pm} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds^{-\varepsilon} \right| \leq \sqrt{\int_{S_{-\varepsilon}^\pm} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^2 ds^{-\varepsilon}} \sqrt{\int_{S_{-\varepsilon}^\pm} 1 ds^{-\varepsilon}}$$

dont on déduit, en remarquant que l'inégalité $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^2 \leq \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ est toujours vraie, que

$$\int_{S_{-\varepsilon}^\pm} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds^{-\varepsilon} \leq \sqrt{\operatorname{mes}(S_{-\varepsilon}^\pm)} \|\mathbf{v}\|_{0,S_{-\varepsilon}^\pm}$$

puis, par continuité de l'opérateur trace sur $S_{-\varepsilon}^{\pm}$ et équivalence des normes $|\cdot|_{1,\Omega^\varepsilon}$ et $\|\cdot\|_{1,\Omega^\varepsilon}$ sur $\mathcal{V}(\Omega^\varepsilon)$, qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\int_{S_{-\varepsilon}^{\pm}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds^{-\varepsilon} \leq c |\mathbf{v}|_{1,\Omega^\varepsilon}.$$

Cette dernière inégalité assure la continuité de la forme bilinéaire car elle entraîne que

$$\left| \int_{S_{-\varepsilon}^{\pm}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds^{-\varepsilon} \int_{S_{-\varepsilon}^{\pm}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds^{-\varepsilon} \right| \leq c^2 |\mathbf{v}|_{1,\Omega^\varepsilon} |\mathbf{u}|_{1,\Omega^\varepsilon}.$$

La forme bilinéaire

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \longmapsto \int_{\Omega^\varepsilon} \underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\nabla} \mathbf{u} : \underline{\nabla} \mathbf{v} d\Omega^\varepsilon$$

est continue. Il suffit d'appliquer successivement l'inégalité de Cauchy Schwarz et l'équivalence des normes $\|\cdot\|_a$ et $|\cdot|_{1,\Omega^\varepsilon}$ pour obtenir l'existence d'une constante $c > 0$ vérifiant

$$\left| \int_{\Omega^\varepsilon} \underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\nabla} \mathbf{u} : \underline{\nabla} \mathbf{v} d\Omega^\varepsilon \right| \leq c^2 |\mathbf{u}|_{1,\Omega^\varepsilon} |\mathbf{v}|_{1,\Omega^\varepsilon}.$$

Enfin, la forme quadratique

$$\mathbf{u} \longmapsto \int_{\Omega^\varepsilon} \underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\nabla} \mathbf{u} : \underline{\nabla} \mathbf{u} d\Omega^\varepsilon + \frac{\pi^p}{V} \left(\int_{S_{-\varepsilon}^{\pm}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds^{-\varepsilon} \right)^2 = \|\mathbf{u}\|_a^2 + \frac{\pi^p}{V} \left(\int_{S_{-\varepsilon}^{\pm}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds^{-\varepsilon} \right)^2$$

est $\mathcal{V}(\Omega^\varepsilon)$ -elliptique car le terme dû au couplage fluide-structure vient renforcer l'ellipticité de $\|\cdot\|_a^2$. ■

2.5 Conclusion

Nous venons d'établir, à partir d'un modèle d'élasticité en trois dimensions, l'existence et l'unicité du déplacement causé par une petite perturbation de l'environnement extérieur. Toutefois, il est numériquement peu envisageable de mailler l'enveloppe en trois dimensions. Compte tenu de la très faible épaisseur d'un tissu, on envisage de se ramener à un problème posé sur la surface du tissu. Pour le faire, nous aurions pu exploiter l'expression explicite du déplacement 3D que nous avons obtenu en annexe II, dans une démarche proche de celle proposée dans [Chapelle-Bathe, 2003] qui suppose de se donner un comportement a priori du déplacement dans l'épaisseur. Nous avons préféré suivre la démarche asymptotique proposée dans [Ciarlet, 2000] sans formuler d'hypothèses sur le déplacement 3D et obtenir ainsi des résultats sur le déplacement moyen uniquement.

3 Etude asymptotique

Afin d'obtenir une formulation exploitable pour la résolution numérique, on réalise une étude asymptotique du problème en faisant tendre le paramètre ε vers 0. Il s'agit de se ramener au final à un problème posé sur la surface moyenne du lobe. Pour mener à bien cette étude, on choisit de se mettre en conformité avec ce qui se fait classiquement dans les problèmes de coques et on reformule le problème 3D en coordonnées curvilignes.

3.1 Eléments de géométrie différentielle dans l'ouvert Ω^ε de \mathbb{R}^3

Dans cette partie, on se propose de calculer les valeurs de quelques éléments incontournables de géométrie différentielle, dans le cas particulier d'un ouvert Ω^ε de la forme $S \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ où S est la réunion de deux nappes de cylindre, $S = S^+ \cup S^-$.

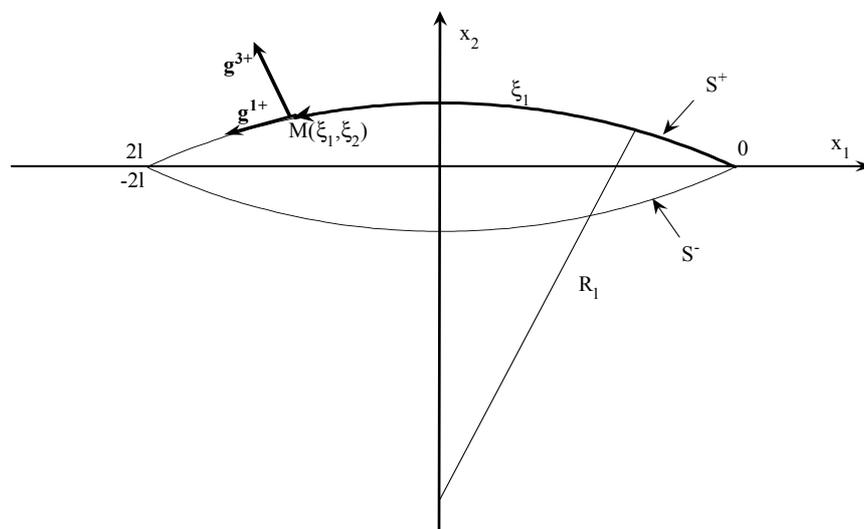


Figure 2: Coupe d'un lobe dans le plan $x_3 = 0$.

Définition 3.1.1 On définit un paramétrage du volume Ω^ε par

$$\Theta^+ : \begin{cases} \omega^+ \times]-\varepsilon, \varepsilon[& \longmapsto \Omega^{+\varepsilon} \\ \xi^\varepsilon & \longrightarrow \Theta^+(\xi^\varepsilon) = \begin{pmatrix} -(R_l + \xi_3^\varepsilon) \sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) \\ (R_l + \xi_3^\varepsilon) \cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) - x_0 \\ \xi_2^\varepsilon \end{pmatrix}, \end{cases}$$

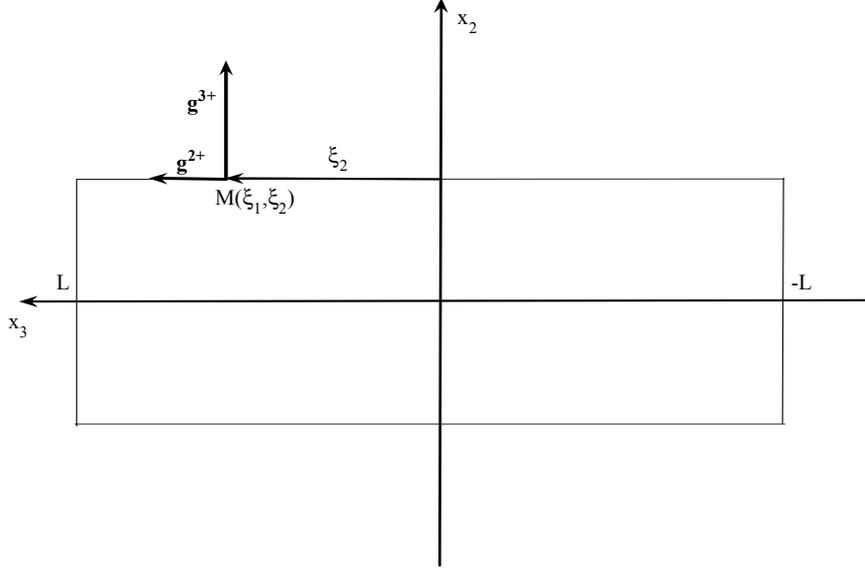


Figure 3: Coupe d'un lobe dans le plan $x_1 = 0$.

et

$$\Theta^- : \begin{cases} \omega^- \times]-\varepsilon, \varepsilon[& \longmapsto \Omega^{-\varepsilon} \\ \xi^\varepsilon & \longrightarrow \Theta^-(\xi^\varepsilon) = \begin{pmatrix} (R_l + \xi_3^\varepsilon) \sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right) \\ -(R_l + \xi_3^\varepsilon) \cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right) + x_0 \\ \xi_2^\varepsilon \end{pmatrix} \end{cases}$$

avec,

$$x_0 = R_l \left(1 - \cos\left(\frac{l}{R_l}\right)\right).$$

Ces applications sont des difféomorphismes de classe \mathcal{C}^∞ et, de manière évidente, on a

$$\begin{aligned} S^+ &= \Theta^+(\omega^+ \times \{0\}) \quad \text{et} \quad \Omega^{+\varepsilon} = \Theta^+(\omega^+ \times]-\varepsilon, \varepsilon[) \\ S^- &= \Theta^-(\omega^- \times \{0\}) \quad \text{et} \quad \Omega^{-\varepsilon} = \Theta^-(\omega^- \times]-\varepsilon, \varepsilon[) \end{aligned}$$

3.1.1 Bases locales

Notations :

$$\begin{aligned} (\mathbf{g}_1^{\varepsilon\pm}, \mathbf{g}_2^{\varepsilon\pm}, \mathbf{g}_3^{\varepsilon\pm}) &:= \text{base covariante associée au paramétrage } \Theta^\pm, \\ (\mathbf{g}^{\varepsilon 1\pm}, \mathbf{g}^{\varepsilon 2\pm}, \mathbf{g}^{\varepsilon 3\pm}) &:= \text{base contravariante associée au paramétrage } \Theta^\pm. \end{aligned}$$

Les bases covariantes $(\mathbf{g}_1^{\varepsilon\pm}, \mathbf{g}_2^{\varepsilon\pm}, \mathbf{g}_3^{\varepsilon\pm})$, associées au paramétrage Θ^\pm précédant sont définies par

$$\mathbf{g}_i^{\varepsilon+} := \frac{\partial \Theta^\pm}{\partial \xi_i},$$

elles valent donc

$$\mathbf{g}_1^{\varepsilon+} = \frac{R_l + \xi_3^\varepsilon}{R_l} \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) \\ -\sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_2^{\varepsilon+} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_3^{\varepsilon+} = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) \\ \cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{g}_1^{\varepsilon-} = \frac{R_l + \xi_3^\varepsilon}{R_l} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right) \\ \sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_2^{\varepsilon-} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_3^{\varepsilon-} = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right) \\ -\cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.1.1 *Les bases covariantes sont orthogonales. Elles coïncident avec les directions d'orthotropie du tissu.*

On détermine ensuite les bases contravariantes $(\mathbf{g}^{\varepsilon 1\pm}, \mathbf{g}^{\varepsilon 2\pm}, \mathbf{g}^{\varepsilon 3\pm})$ définies par $\mathbf{g}^{\varepsilon i\pm} \cdot \mathbf{g}_j^{\varepsilon\pm} := \delta_j^i$,

$$\mathbf{g}^{\varepsilon 1+} = \frac{R_l}{R_l + \xi_3^\varepsilon} \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) \\ -\sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}^{\varepsilon 2+} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}^{\varepsilon 3+} = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) \\ \cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{g}^{\varepsilon 1-} = \frac{R_l}{(R_l + \xi_3^\varepsilon)} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right) \\ \sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}^{\varepsilon 2-} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}^{\varepsilon 3-} = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right) \\ -\cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3.1.2 Tenseurs métriques

Les composantes covariantes du tenseur métrique valent $g_{ij}^{\varepsilon\pm} = \mathbf{g}_i^{\varepsilon\pm} \cdot \mathbf{g}_j^{\varepsilon\pm}$, tandis que les composantes contravariantes du même tenseur métrique valent $g^{ij\pm} = \mathbf{g}^{\varepsilon i\pm} \cdot \mathbf{g}^{\varepsilon j\pm}$, soit, avec une notation matricielle,

$$[g_{ij}^{\varepsilon\pm}] = \begin{bmatrix} \frac{(R_l + \xi_3^\varepsilon)^2}{R_l^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [g^{ij\pm}] = \begin{bmatrix} \frac{R_l^2}{(R_l + \xi_3^\varepsilon)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Enfin, le déterminant du tenseur métrique exprimé en composantes covariantes vaut

$$g^{\varepsilon\pm} = \frac{(R_l + \xi_3^\varepsilon)^2}{R_l^2}$$

3.1.3 Symboles de Christoffel

Notations :

$$\Gamma_{ij}^{\varepsilon p \pm} := \text{symboles de Christoffel.}$$

On calcule maintenant les symboles de Christoffel, définis par $\Gamma_{ij}^{\varepsilon p \pm} = \mathbf{g}^{\varepsilon p \pm} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_i^{\varepsilon \pm}}{\partial \xi_j^{\varepsilon}}$.

Remarque 3.1.2 Les seuls symboles non nuls sont $\Gamma_{13}^{\varepsilon 1 \pm}$, $\Gamma_{31}^{\varepsilon 1 \pm}$ et $\Gamma_{11}^{\varepsilon 3 \pm}$. Ils valent

$$\Gamma_{13}^{\varepsilon 1 \pm} = \frac{1}{(R_l + \xi_3^{\varepsilon})} = \Gamma_{31}^{\varepsilon 1 \pm} \text{ et } \Gamma_{11}^{\varepsilon 3 \pm} = -\frac{(R_l + \xi_3^{\varepsilon})}{R_l^2}$$

3.1.4 Tenseur linéarisé symétrique de changement de métrique

Notations :

$$\underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{\varepsilon \pm}(\mathbf{v}^{\varepsilon \pm}) := \text{tenseur linéarisé symétrique de changement de métrique.}$$

Soit $\mathbf{v}^{\varepsilon \pm}$, un champ vectoriel exprimé en coordonnées covariantes $\mathbf{v}^{\varepsilon \pm} = v_i^{\varepsilon \pm} \mathbf{g}^{\varepsilon i \pm}$. On lui associe le tenseur de ses dérivées covariantes $\underline{\mathbf{v}}_{\parallel}^{\varepsilon \pm}$ dont les coordonnées covariantes sont définies par

$$\underline{\mathbf{v}}_{\parallel}^{\varepsilon \pm} = \left[v_{i\parallel j}^{\varepsilon \pm} \right] := \left[\frac{\partial}{\partial \xi_j^{\varepsilon}} (v_i^{\varepsilon \pm}) - \Gamma_{ij}^{\varepsilon p \pm} v_p^{\varepsilon \pm} \right].$$

Après calculs,

$$\left[v_{i\parallel j}^{P\varepsilon \pm} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1^{\varepsilon \pm}}{\partial \xi_1^{\varepsilon}} + \frac{R_l + \xi_3^{\varepsilon}}{R_l^2} v_3^{\varepsilon} & \frac{\partial v_1^{\varepsilon \pm}}{\partial \xi_2^{\varepsilon}} & \frac{\partial v_1^{\varepsilon \pm}}{\partial \xi_3^{\varepsilon}} - \frac{1}{R_l + \xi_3^{\varepsilon}} v_1^{\varepsilon \pm} \\ & \frac{\partial v_2^{\varepsilon \pm}}{\partial \xi_1^{\varepsilon}} & \frac{\partial v_2^{\varepsilon \pm}}{\partial \xi_2^{\varepsilon}} & \frac{\partial v_2^{\varepsilon \pm}}{\partial \xi_3^{\varepsilon}} \\ \frac{\partial v_3^{\varepsilon}}{\partial \xi_1^{\varepsilon}} - \frac{1}{R_l + \xi_3^{\varepsilon}} v_1^{\varepsilon \pm} & \frac{\partial v_3^{\varepsilon}}{\partial \xi_2^{\varepsilon}} & \frac{\partial v_3^{\varepsilon}}{\partial \xi_3^{\varepsilon}} \end{bmatrix}.$$

A partir du tenseur des dérivées covariantes, on définit $\underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{\varepsilon \pm}(\mathbf{v}^{\varepsilon \pm})$, le tenseur linéarisé symétrique de changement de métrique associé au champ de déplacement $\mathbf{v}^{\varepsilon \pm}$. Les composantes covariantes du tenseur linéarisé symétrique de changement de métrique sont

$$e_{i\parallel j}^{\varepsilon \pm}(\mathbf{v}^{\varepsilon \pm}) = \frac{1}{2} (v_{i\parallel j}^{\varepsilon \pm} + v_{j\parallel i}^{\varepsilon \pm}).$$

Dans le cas que nous étudions, nous allons voir que la surface moyenne génératrice du volume est dite parabolique puisque sa courbure de Gauss est nulle. Ce vocabulaire peut paraître surprenant dans la mesure où la surface est elle-même engendrée par des arcs de cercle, mais il est adapté à la situation, c'est pourquoi désormais nous faisons figurer en exposant la lettre P pour y faire référence. Ainsi, dans le cas parabolique, la matrice des composantes covariantes du tenseur linéarisé de changement de métrique est

$$\left[e_{i\parallel j}^{P\varepsilon \pm}(\mathbf{v}^{\varepsilon \pm}) \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1^{\varepsilon \pm}}{\partial \xi_1^{\varepsilon}} + \frac{R_l + \xi_3^{\varepsilon}}{R_l^2} v_3^{\varepsilon} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1^{\varepsilon \pm}}{\partial \xi_2^{\varepsilon}} + \frac{\partial v_2^{\varepsilon \pm}}{\partial \xi_1^{\varepsilon}} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1^{\varepsilon \pm}}{\partial \xi_3^{\varepsilon}} + \frac{\partial v_3^{\varepsilon}}{\partial \xi_1^{\varepsilon}} \right) - \frac{1}{R_l + \xi_3^{\varepsilon}} v_1^{\varepsilon \pm} \\ \text{sym} & \frac{\partial v_2^{\varepsilon \pm}}{\partial \xi_2^{\varepsilon}} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2^{\varepsilon \pm}}{\partial \xi_3^{\varepsilon}} + \frac{\partial v_3^{\varepsilon}}{\partial \xi_2^{\varepsilon}} \right) \\ \text{sym} & \text{sym} & \frac{\partial v_3^{\varepsilon}}{\partial \xi_3^{\varepsilon}} \end{bmatrix}.$$

3.1.5 Tenseur d'élasticité

Notations :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\varepsilon\pm} &:= \text{tenseur d'élasticité linéaire en coordonnées contravariantes,} \\ \underline{\underline{P}}^\varepsilon &:= \text{matrice de passage de la base d'orthotropie à la base contravariante.}\end{aligned}$$

On rappelle que $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ est le tenseur d'élasticité linéaire du quatrième ordre exprimé dans une base d'orthotropie. La matrice de passage de la base d'orthotropie à la base contravariante est

$$P^\varepsilon = (p_{ij}^\varepsilon) = \begin{pmatrix} \frac{R_l}{R_l + \xi_3^\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir la représentation, notée $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\pm\varepsilon}$, du tenseur d'élasticité en coordonnées contravariantes, on applique la formule de changement de base

$$A^{\pm\varepsilon,ijkl} = p_{iq}^\varepsilon p_{jr}^\varepsilon p_{ks}^\varepsilon p_{lt}^\varepsilon A_{qrst}.$$

On obtient

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\pm\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_{11}}{(g^{\varepsilon\pm})^2} & 0 & 0 & | & 0 & \frac{\mu_{12}}{g^{\varepsilon\pm}} & 0 & | & 0 & 0 & \frac{\mu_{13}}{g^{\varepsilon\pm}} \\ 0 & \frac{\lambda_{12}}{g^{\varepsilon\pm}} & 0 & | & \frac{\mu_{12}}{g^{\varepsilon\pm}} & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_{13}}{g^{\varepsilon\pm}} & | & 0 & 0 & 0 & | & \frac{\mu_{13}}{g^{\varepsilon\pm}} & 0 & 0 \\ - & - & - & + & - & - & - & + & - & - & - \\ 0 & \frac{\mu_{12}}{g^{\varepsilon\pm}} & 0 & | & \frac{\lambda_{12}}{g^{\varepsilon\pm}} & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu_{12}}{g^{\varepsilon\pm}} & 0 & 0 & | & 0 & \lambda_{22} & 0 & | & 0 & 0 & \mu_{23} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \lambda_{23} & | & 0 & \mu_{23} & 0 \\ - & - & - & + & - & - & - & + & - & - & - \\ 0 & 0 & \frac{\mu_{13}}{g^{\varepsilon\pm}} & | & 0 & 0 & 0 & | & \frac{\lambda_{13}}{g^{\varepsilon\pm}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \mu_{23} & | & 0 & \lambda_{23} & 0 \\ \frac{\mu_{13}}{g^{\varepsilon\pm}} & 0 & 0 & | & 0 & \mu_{23} & 0 & | & 0 & 0 & \lambda_{33} \end{bmatrix},$$

avec, rappelons le,

$$g^{\varepsilon\pm} = \frac{(R_l + \xi_3^\varepsilon)^2}{R_l^2} = \left(1 + \frac{\xi_3^\varepsilon}{R_l}\right)^2.$$

Remarque 3.1.3 Le tenseur $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\varepsilon\pm}$ reste défini positif.

3.2 Formulation variationnelle dans l'ouvert Ω^ε de \mathbb{R}^3

Notations :

$$\begin{aligned}\omega_{-\varepsilon} &:= \text{ouvert de paramétrisation en coordonnées curvilignes de la surface intérieure,} \\ \omega_\varepsilon &:= \text{ouvert de paramétrisation en coordonnées curvilignes de la surface extérieure,} \\ \pi &:= \text{pression de gonflage } (= \pi^p), \\ \mathbf{u}^{\varepsilon\pm} &:= \text{solution en coordonnées curvilignes du problème } \mathcal{P}^\varepsilon, \\ \mathcal{P}^\varepsilon &:= \text{problème variationnel formulé en coordonnées curvilignes.}\end{aligned}$$

avec,

$$\begin{aligned}\omega_{-\varepsilon} &:= (]-2l, 0[\cup]0, 2l[) \times]-L, L[\times \{-\varepsilon\}, \\ \omega_{\varepsilon} &:= (]-2l, 0[\cup]0, 2l[) \times]-L, L[\times \{\varepsilon\},\end{aligned}$$

$$\mathcal{P}^{\varepsilon} := \begin{cases} \forall \mathbf{u}^{\varepsilon} \in \mathcal{V}(\Omega^{\varepsilon}), \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega^{\varepsilon}), \\ \int_{\omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[} \underline{\mathbf{A}}^{\varepsilon \pm} : \underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{P\varepsilon \pm}(\mathbf{u}^{\varepsilon \pm}) : \underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{P\varepsilon \pm}(\mathbf{v}) \sqrt{g^{\varepsilon \pm}} d\xi^{\varepsilon} + \frac{\pi}{V} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R_l}\right)^2 \int_{\omega_{-\varepsilon}} u_3^{\varepsilon} d\xi_{\omega}^{\varepsilon} \int_{\omega_{-\varepsilon}} v_3 d\xi_{\omega}^{\varepsilon} = \\ \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l}\right) \int_{\omega_{\varepsilon}} f^{\varepsilon i} v_i d\xi_{\omega}^{\varepsilon}. \end{cases}$$

On a déjà vu, paragraphe **2.3** que la formulation variationnelle 3D du problème étudié est

$$\int_{\Omega^{\varepsilon}} \underline{\mathbf{A}} : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}_{\varepsilon}) : \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{v}) d\Omega^{\varepsilon} + \frac{\pi^p}{V} \int_{S_{-\varepsilon}^{\varepsilon \pm}} \mathbf{u}_{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} ds^{-\varepsilon} \int_{S_{-\varepsilon}^{\varepsilon \pm}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds^{-\varepsilon} = \int_{S_{\varepsilon}^{\varepsilon \pm}} \delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} ds^{+\varepsilon} \text{ avec,}$$

$$\underline{\mathbf{e}}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \mathbf{v} + \underline{\nabla} \mathbf{v}^T).$$

A l'aide des coordonnées curvilignes cette formulation variationnelle s'écrit

$$\int_{\omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[} \underline{\mathbf{A}}^{\varepsilon \pm} : \underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{P\varepsilon \pm}(\mathbf{u}^{\varepsilon \pm}) : \underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{P\varepsilon \pm}(\mathbf{v}) \sqrt{g^{\varepsilon \pm}} d\xi^{\varepsilon} + \frac{\pi}{V} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R_l}\right)^2 \int_{\omega_{-\varepsilon}} u_3^{\varepsilon} d\xi_{\omega}^{\varepsilon} \int_{\omega_{-\varepsilon}} v_3 d\xi_{\omega}^{\varepsilon} =$$

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l}\right) \int_{\omega_{\varepsilon}} f^{\varepsilon i} v_i d\xi_{\omega}^{\varepsilon},$$

et on cherche maintenant à résoudre le problème $\mathcal{P}^{\varepsilon}$. Compte tenu du changement de système de coordonnées, il est utile de rappeler le résultat du théorème **2.4.1**, sous sa nouvelle forme :

Proposition 3.2.1 *Le problème $\mathcal{P}^{\varepsilon}$ admet une unique solution dans $(\mathcal{V}(\Omega^{\varepsilon}), \|\cdot\|_{1, \Omega^{\varepsilon}})$.*

3.3 Normalisation du domaine en 3D

Notations :

$\pi^{\varepsilon} :=$ *changement de variable,*

$\Omega :=$ *ouvert de paramétrisation du volume du tissu en coordonnées curvilignes normalisées.*

Dans la formulation variationnelle $\mathcal{P}^{\varepsilon}$, le domaine d'intégration $\omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ ainsi que les fonctions à intégrer dépendent du paramètre ε . Pour éviter cette double dépendance, on décide de faire le changement de variable π^{ε}

$$\pi^{\varepsilon} : \begin{cases} \Omega & \longmapsto \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[\\ \xi & \longrightarrow \pi^{\varepsilon}(\xi) = \xi^{\varepsilon} = (\xi_1, \xi_2, \varepsilon \xi_3) \end{cases}$$

qui permet de se ramener à l'étude d'un problème posé sur le domaine d'intégration $\Omega := \omega \times]-1, 1[$ indépendant du paramètre ε .

3.3.1 Tenseur d'élasticité normalisé

Notations:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\varepsilon) &:= \text{représentation en coordonnées contravariantes normalisées du tenseur d'élasticité,} \\ g^{P\varepsilon\pm}(\xi_3) &:= \left(1 + \frac{\varepsilon\xi_3}{R_l}\right)^2. \end{aligned}$$

Après le changement de variable π^ε , la "matrice $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\pm\varepsilon}$ " du tenseur d'élasticité s'écrit $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\varepsilon)$ avec,

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\varepsilon) := \begin{bmatrix} \frac{\lambda_{11}}{(g^{P\varepsilon\pm}(\xi_3))^2} & 0 & 0 & | & 0 & \frac{\mu_{12}}{g^{P\varepsilon\pm}(\xi_3)} & 0 & | & 0 & 0 & \frac{\mu_{13}}{g^{P\varepsilon\pm}(\xi_3)} \\ 0 & \frac{\lambda_{12}}{g^{P\varepsilon\pm}(\xi_3)} & 0 & | & \frac{\mu_{12}}{g^{P\varepsilon\pm}(\xi_3)} & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_{13}}{g^{P\varepsilon\pm}(\xi_3)} & | & 0 & 0 & 0 & | & \frac{\mu_{13}}{g^{P\varepsilon\pm}(\xi_3)} & 0 & 0 \\ - & - & - & + & - & - & - & + & - & - & - \\ 0 & \frac{\mu_{12}}{g^{P\varepsilon\pm}(\xi_3)} & 0 & | & \frac{\lambda_{12}}{g^{P\varepsilon\pm}(\xi_3)} & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu_{12}}{g^{P\varepsilon\pm}(\xi_3)} & 0 & 0 & | & 0 & \lambda_{22} & 0 & | & 0 & 0 & \mu_{23} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \lambda_{23} & | & 0 & \mu_{23} & 0 \\ - & - & - & + & - & - & - & + & - & - & - \\ 0 & 0 & \frac{\mu_{13}}{g^{P\varepsilon\pm}(\xi_3)} & | & 0 & 0 & 0 & | & \frac{\lambda_{13}}{g^{P\varepsilon\pm}(\xi_3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \mu_{23} & | & 0 & \lambda_{23} & 0 \\ \frac{\mu_{13}}{g^{P\varepsilon\pm}(\xi_3)} & 0 & 0 & | & 0 & \mu_{23} & 0 & | & 0 & 0 & \lambda_{33} \end{bmatrix}.$$

3.3.2 Tenseur des déformations normalisé

Notations :

$$\underline{\underline{\mathbf{e}}}_{\parallel}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) := \text{tenseur des déformations normalisé.}$$

Après le changement de variable π^ε , la matrice du tenseur des déformations normalisé s'écrit

$$\underline{\underline{\mathbf{e}}}_{\parallel}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) := \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1^\pm}{\partial \xi_1} + \frac{R_l + \varepsilon \xi_3}{R_l^2} v_3 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1^\pm}{\partial \xi_2} + \frac{\partial v_2^\pm}{\partial \xi_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_1^\pm}{\partial \xi_3} + \frac{\partial v_3}{\partial \xi_1} \right) - \frac{1}{R_l + \varepsilon \xi_3} v_1^{\varepsilon\pm} \\ \text{sym} & \frac{\partial v_2^\pm}{\partial \xi_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_2^\pm}{\partial \xi_3} + \frac{\partial v_3}{\partial \xi_2} \right) \\ \text{sym} & \text{sym} & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix}.$$

3.4 Formulation variationnelle normalisée en 3D

Notations :

- ω_{-1} := ouvert de paramétrisation en coordonnées curvilignes normalisées de la surface intérieure du tissu,
- ω_1 := ouvert de paramétrisation en coordonnées curvilignes normalisées de la surface extérieure du tissu,
- $\mathcal{V}(\Omega)$:= espace de recherche de la solution 3D normalisée,
- $\mathcal{P}^P(\varepsilon)$:= problème variationnel formulé en coordonnées curvilignes normalisées.

avec,

$$\begin{aligned}\omega_{-1} &:= (]-2l, 0[\cup]0, 2l[) \times]-L, L[\times \{-1\}, \\ \omega_1 &:= (]-2l, 0[\cup]0, 2l[) \times]-L, L[\times \{+1\}, \\ \mathcal{V}(\Omega) &:= \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega^+)^2 \times H^1(\Omega^-)^2 \times H^1(\Omega), \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\omega \times]-1, 1[\right\},\end{aligned}$$

$$\mathcal{P}^P(\varepsilon) := \begin{cases} \forall \mathbf{u}(\varepsilon) \in \mathcal{V}(\Omega), \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega), \\ \int_{\omega \times]-1, 1[} \underline{\mathbf{A}}^{P\pm}(\varepsilon) : \underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{u}^{\pm}(\varepsilon)) : \underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) \sqrt{g^{P\varepsilon\pm}(\xi_3)} d\xi + \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\pi}{V} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R_l}\right)^2 \int_{\omega_{-1}} u_3(\varepsilon) d\xi_{\omega} \int_{\omega_{-1}} v_3 d\xi_{\omega} = \frac{1}{\varepsilon} \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l}\right) \int_{\omega_1} f^i(\varepsilon) v_i d\xi_{\omega}. \end{cases}$$

Après le changement de variable π^ε , le problème \mathcal{P}^ε s'écrit $\mathcal{P}^P(\varepsilon)$. Pour passer de \mathcal{P}^ε à $\mathcal{P}^P(\varepsilon)$, on a simplement effectué un changement de variable, c'est pourquoi, de manière évidente, on a

Proposition 3.4.1 *Le problème $\mathcal{P}^P(\varepsilon)$ admet une solution unique, notée $\mathbf{u}^\pm(\varepsilon)$, dans $\mathcal{V}(\Omega)$ muni de la norme $\| \cdot \|_{1,\Omega}$.*

3.5 Éléments de géométrie différentielle sur la surface S de \mathbb{R}^3

Soit les déformation θ^\pm qui transforment ω en S

$$\theta^+ : \begin{cases} \omega^+ \mapsto S^+ \\ \xi_\omega \mapsto \theta^+(\xi_\omega) = \left(-R_l \sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right), R_l \cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) - x_0, \xi_2^\varepsilon \right) \end{cases}$$

et

$$\theta^- : \begin{cases} \omega^- \mapsto S^- \\ \xi_\omega \mapsto \theta^-(\xi_\omega) = \left(R_l \sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right), -R_l \cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right) + x_0, \xi_2^\varepsilon \right) \end{cases}$$

3.5.1 Bases locales

Notations :

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}_1^\pm, \mathbf{a}_2^\pm) &:= \text{base covariante du plan tangent,} \\ (\mathbf{a}^{1\pm}, \mathbf{a}^{2\pm}) &:= \text{base contravariante du plan tangent.}\end{aligned}$$

Les bases covariantes $(\mathbf{a}_1^\pm, \mathbf{a}_2^\pm)$ du plan tangent à S en un point de coordonnées $\theta^\pm(\xi_\omega)$ sont définies par

$$\mathbf{a}_1^\pm = \frac{\partial \theta^\pm}{\partial \xi_1}, \quad \mathbf{a}_2^\pm = \frac{\partial \theta^\pm}{\partial \xi_2}.$$

Dans le cas étudié, ces vecteurs valent

$$\mathbf{a}_1^+ = \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) \\ -\sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1^- = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right) \\ \sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir une base covariante de l'espace, on complète $(\mathbf{a}_1^\pm, \mathbf{a}_2^\pm)$ par le vecteur \mathbf{a}_3^\pm orthonormal direct à $(\mathbf{a}_1^\pm, \mathbf{a}_2^\pm)$ défini par

$$\mathbf{a}_3^\pm = \frac{\mathbf{a}_1^\pm \wedge \mathbf{a}_2^\pm}{\|\mathbf{a}_1^\pm \wedge \mathbf{a}_2^\pm\|}.$$

Ces vecteurs ont pour coordonnées

$$\mathbf{a}_3^+ = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) \\ \cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3^- = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right) \\ -\cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.5.1 *La base covariante est orthonormale en tout point de S .*

La base contravariante du plan tangent est définie à partir de la base covariante par les relations

$$\mathbf{a}^{\pm\alpha} \cdot \mathbf{a}_\beta^\pm = \delta_\beta^\alpha,$$

puis,

$$\mathbf{a}^{\pm 3} = \frac{\mathbf{a}^{\pm 1} \wedge \mathbf{a}^{\pm 2}}{\|\mathbf{a}^{\pm 1} \wedge \mathbf{a}^{\pm 2}\|}.$$

Puisque la base covariante est orthonormale, les bases covariantes et contravariantes sont identiques.

3.5.2 Tenseur métrique et tenseur de courbure

Les composantes covariantes $a_{\alpha\beta}^\pm$ du tenseur métrique $\underline{\mathbf{a}}^\pm$ et les composantes contravariantes de ce même tenseur, $a^{\alpha\beta\pm}$, sont définies par

$$a_{\alpha\beta}^\pm = \mathbf{a}_\alpha^\pm \cdot \mathbf{a}_\beta^\pm \text{ et } a^{\alpha\beta\pm} = \mathbf{a}^{\alpha\pm} \cdot \mathbf{a}^{\beta\pm}.$$

Soit,

$$[a_{\alpha\beta}^\pm] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [a^{\alpha\beta\pm}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

enfin le déterminant du tenseur métrique exprimé en composantes covariantes est,

$$a^\pm = \det [a_{\alpha\beta}^\pm] = 1.$$

On définit ensuite le tenseur $\underline{\mathbf{b}}^\pm$ de courbure de la surface S par ses composantes covariantes

$$b_{\alpha\beta}^\pm = \mathbf{a}^{3\pm} \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_\alpha^\pm}{\partial \xi_\beta}$$

ou par ses composantes mixtes

$$b_\alpha^{\beta\pm} = b_{\sigma\alpha}^\pm a^{\beta\sigma\pm}.$$

Soit,

$$[b_{\alpha\beta}^{\pm}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_l} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [b_{\alpha}^{\beta\pm}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_l} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On calcule ensuite les symboles de Christoffel liés à la surface S ,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{S\sigma\pm} = \mathbf{a}^{\sigma\pm} \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_{\alpha}^{\pm}}{\partial \xi_{\beta}}$$

et on constate qu'ils sont tous nuls.

Les courbures $c_1^{\pm}(\xi_{\omega})$ et $c_2^{\pm}(\xi_{\omega})$ de la surface S en un point M de coordonnées $\theta^{\pm}(\xi_{\omega})$ sont solution du système

$$\begin{cases} c_1^{\pm}(\xi_{\omega}) + c_2^{\pm}(\xi_{\omega}) & = b_1^{1\pm} + b_2^{2\pm} \\ c_1^{\pm}(\xi_{\omega}) c_2^{\pm}(\xi_{\omega}) & = b_1^{1\pm} b_2^{2\pm} - b_1^{2\pm} b_2^{1\pm} \end{cases}$$

et valent donc

$$c_1^{\pm}(\xi_{\omega}) = 0, \quad c_2^{\pm}(\xi_{\omega}) = -\frac{1}{R_l}.$$

Le produit de ces courbures, dit courbure de Gauss, est donc nul.

Remarque 3.5.2 *Puisque la courbure de Gauss est nulle, la surface S est parabolique. C'est un point crucial pour la suite de l'étude, car, contrairement à ce qui se passe dans le cas plus favorable des surfaces elliptiques [Ciarlet, 2000], [Chapelle-Bathe, 2003] on ne peut pas espérer obtenir de formulation asymptotique bien posée dans les espaces classiques de Sobolev. Il faut rechercher la solution dans des espaces abstraits, obtenus en complétant des espaces classiques, pour avoir des résultats d'existence et d'unicité.*

3.6 Développements asymptotiques

Dans le but de réaliser l'étude asymptotique, on calcule maintenant les premiers termes des développements asymptotiques ou de Taylor des différents termes intervenant dans la formulation variationnelle normalisée.

3.6.1 Tenseur d'élasticité

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$ on a au premier ordre $\sqrt{g^{P\varepsilon\pm}(\xi_3)} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\varepsilon) = \underline{\underline{\mathbf{A}}} + \underline{\underline{\mathbf{O}}}(\varepsilon)$.

3.6.2 Tenseur de déformation

Notations :

$e_{i||j}^{kP\pm}(\mathbf{v}) :=$ coefficient du terme d'ordre k du développement asymptotique de $e_{i||j}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}^{\pm})$.

On effectue un développement de Taylor de l'expression de $e_{i||j}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v})$, puis on regroupe par puissance de ε soit,

$$e_{i||j}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) = \frac{1}{\varepsilon} e_{i||j}^{-1P\pm}(\mathbf{v}) + e_{i||j}^{0P\pm}(\mathbf{v}) + \varepsilon e_{i||j}^{1P\pm}(\mathbf{v}) + \dots$$

Après calculs, on obtient

$$\left[e_{i||j}^{-1P\pm}(\mathbf{v}) \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_1^\pm}{\partial \xi_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_2^\pm}{\partial \xi_3} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_1^\pm}{\partial \xi_3} & \frac{1}{2} \frac{\partial v_2^\pm}{\partial \xi_3} & \frac{\partial v_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix},$$

et,

$$\left[e_{i||j}^{0P\pm}(\mathbf{v}) \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1^\pm}{\partial \xi_1} + \frac{1}{R_l} v_3 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1^\pm}{\partial \xi_2} + \frac{\partial v_2^\pm}{\partial \xi_1} \right) & \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_1} - \frac{1}{R_l} v_1^\pm \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1^\pm}{\partial \xi_2} + \frac{\partial v_2^\pm}{\partial \xi_1} \right) & \frac{\partial v_2^\pm}{\partial \xi_2} & \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_1} - \frac{1}{R_l} v_1^\pm & \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_2} & 0 \end{bmatrix}.$$

3.6.3 Tenseur de déformation solution

Notations :

$e_{i||j}^{kP\pm} :=$ coefficient du terme d'ordre k du développement asymptotique de $e_{i||j}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{u}^\pm(\varepsilon))$.

On suppose qu'il existe un développement asymptotique formel de l'inconnue normalisée $\mathbf{u}^\pm(\varepsilon)$

$$\mathbf{u}^\pm(\varepsilon) = \mathbf{u}^{0\pm} + \varepsilon \mathbf{u}^{1\pm} + \dots \quad \text{avec } \mathbf{u}^{0\pm} \neq \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{u}^{k\pm} \in \mathcal{V}(\Omega).$$

On effectue simultanément le développement de Taylor de $e_{i||j}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{u}^\pm(\varepsilon))$ et le développement asymptotique de $\mathbf{u}^\pm(\varepsilon)$. On ordonne par puissances croissantes de ε . On obtient

$$e_{i||j}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{u}^\pm(\varepsilon)) = \frac{1}{\varepsilon} e_{i||j}^{-1P\pm} + e_{i||j}^{0P\pm} + \varepsilon e_{i||j}^{1P\pm} + \dots$$

avec

$$\left[e_{i||j}^{-1P\pm} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_1^{0\pm}}{\partial \xi_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_2^{0\pm}}{\partial \xi_3} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u_1^{0\pm}}{\partial \xi_3} & \frac{1}{2} \frac{\partial u_2^{0\pm}}{\partial \xi_3} & \frac{\partial u_3^0}{\partial \xi_3} \end{bmatrix},$$

et,

$$\left[e_{i||j}^{0P\pm} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1^{0\pm}}{\partial \xi_1} + \frac{1}{R_l} u_3^0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1^{0\pm}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2^{0\pm}}{\partial \xi_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3^0}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u_1^{1\pm}}{\partial \xi_3} \right) - \frac{u_1^{0\pm}}{R_l} \\ sym & \frac{\partial u_2^{0\pm}}{\partial \xi_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3^0}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2^{1\pm}}{\partial \xi_3} \right) \\ sym & sym & \frac{\partial u_3^1}{\partial \xi_3} \end{bmatrix}.$$

3.7 Analyse pré-asymptotique

3.7.1 Objectif

On réalise une étude asymptotique afin de se ramener à l'étude d'un problème posé sur une surface, en l'occurrence sur la surface moyenne du tissu. Dans un premier temps, afin de déterminer l'allure du problème $2D$, on cherche à obtenir une formulation variationnelle qui ne porte que sur $\mathbf{u}^{0\pm}$, le premier terme du développement asymptotique de $\mathbf{u}(\varepsilon)$. Pour y parvenir, on suppose que

1. la densité surfacique de force $\mathbf{f}(\varepsilon)^\pm$ est de la forme

$$f^{i\pm}(\varepsilon)(\xi) = \varepsilon^{p+1} f^{pi\pm}(\xi_\omega)$$

où $f^{i\pm} \in L^2(S_1^\pm)$ et p est un entier à déterminer,

2. il existe un développement asymptotique formel de l'inconnue normalisée $\mathbf{u}^\pm(\varepsilon)$,

$$\mathbf{u}^\pm(\varepsilon) := \mathbf{u}^{0\pm} + \varepsilon \mathbf{u}^{1\pm} + \dots \quad \text{avec } \mathbf{u}^{0\pm} \neq \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{u}^{k\pm} \in \mathcal{V}(\Omega).$$

On injecte ces expressions dans le problème $\mathcal{P}^P(\varepsilon)$ puis on regroupe les puissances de ε . On annule successivement les coefficients des puissances croissantes de ε pour en déduire des propriétés vérifiées par $\mathbf{f}^{pi\pm}$ et $\mathbf{u}^{k\pm}$. Ceci dans le but d'obtenir une équation qui ne fasse intervenir que $\mathbf{u}^{0\pm}$, ou à défaut deux équations couplant $\mathbf{u}^{0\pm}$ et $\mathbf{u}^{1\pm}$. En fait, contrairement à ce qui se passe dans le cas général traité dans [Ciarlet, 2000], le terme de couplage entre la pression et le déplacement, qui apparaît dans la formulation variationnelle, ne permet pas d'obtenir une équation en $\mathbf{u}^{0\pm}$ uniquement. Il reste un terme en $\mathbf{u}^{1\pm}$, et si l'on pousse plus loin, alors $\mathbf{u}^{2\pm}$ intervient. Mais, si on y regarde de plus près, c'est uniquement en valeur moyenne sur la surface moyenne que $\mathbf{u}^{1\pm}$ apparaît. Cette particularité permet d'aboutir en la prenant en compte dans l'espace de recherche de la solution.

3.7.2 Méthode d'obtention

Notations :

$$\zeta^{0\pm}(\xi_\omega) := \mathbf{u}^{0\pm}(\xi),$$

$$\mathcal{V}(\Omega)_3 := \{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega) \text{ indépendants de } \xi_3\},$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega) := \text{tenseur équivalent d'élasticité linéaire 2D du modèle asymptotique parabolique,}$$

$$\underline{\underline{\gamma}}^{P\pm} := \text{tenseur linéarisé équivalent des déformations en 2D du modèle parabolique,}$$

avec,

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega) := \left[\begin{array}{cc|cc} 2 \frac{\lambda_{11}\lambda_{33} - (\lambda_{13})^2}{\lambda_{33}} & 0 & 0 & 2\mu_{12} \\ 0 & 2 \frac{\lambda_{12}\lambda_{33} - \lambda_{23}\lambda_{13}}{\lambda_{33}} & 2\mu_{12} & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 2\mu_{12} & 2 \frac{\lambda_{12}\lambda_{33} - \lambda_{23}\lambda_{13}}{\lambda_{33}} & 0 \\ 2\mu_{12} & 0 & 0 & \frac{2(\lambda_{22}\lambda_{33} - (\lambda_{23})^2)}{\lambda_{33}} \end{array} \right],$$

$$\underline{\underline{\gamma}}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) := \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_1} + \frac{1}{R_i} \eta_3 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \eta_2^\pm}{\partial \xi_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \eta_2^\pm}{\partial \xi_1} \right) & \frac{\partial \eta_2^\pm}{\partial \xi_2} \end{array} \right].$$

Tout au long de cette partie on utilisera trois propriétés remarquables des éléments \mathbf{v} de $\mathcal{V}(\Omega)_3$:

1. $\left[e_{i||j}^{-1P\pm}(\mathbf{v}) \right] = [0]$
2. si on pose $\boldsymbol{\eta}(\xi_\omega) := \mathbf{v}(\xi)$, alors, $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)_3 \iff \eta_i^\pm \in H_0^1(\omega^\pm)$
3. $\int_{\omega_{-1}} v_i d\xi_\omega = \int_{\omega_1} v_i d\xi_\omega = \int_{\omega_0} v_i d\xi_\omega = \int_{\omega} v_i d\xi_\omega$.

On remplace chaque terme de la formulation variationnelle du problème $\mathcal{P}^P(\varepsilon)$ par son développement de Taylor ou son développement asymptotique.

$$\int_{\Omega} [\underline{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{Q}}(\varepsilon)] : \left[\frac{1}{\varepsilon} e_{i||j}^{-1P\pm} + e_{i||j}^{0P\pm} + \varepsilon e_{i||j}^{1P\pm} \dots \right] : \left[\frac{1}{\varepsilon} e_{i||j}^{-1P\pm}(\mathbf{v}) + e_{i||j}^{0P\pm}(\mathbf{v}) \dots \right] d\xi + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\pi}{V} \left(1 - 2\frac{\varepsilon}{R_i} + \frac{\varepsilon^2}{R_i^2} \right) \int_{\omega_{-1}} v_3 d\xi_\omega \int_{\omega_{-1}} (u_3^0 + \varepsilon u_3^1 + \dots) d\xi_\omega = \varepsilon^p \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_i} \right) \int_{\omega_1} f^{pi\pm} v_i d\xi_\omega.$$

Puis, on ordonne par puissances croissantes de ε et on annule successivement chaque coefficient. On appelle $\mathcal{P}_p^P(\varepsilon)$ le problème obtenu en annulant le coefficient de ε^p .

Annulation du coefficient de $\frac{1}{\varepsilon^2}$

Cette première étape permet d'obtenir des informations sur $\mathbf{f}^{-2\pm}$, $\mathbf{u}^{0\pm}$ et $\left[e_{i||j}^{-1\pm} \right]$. Le problème $\mathcal{P}_{-2}^P(\varepsilon)$ a pour formulation variationnelle

$$\int_{\omega \times]-1,1[} \underline{\mathbf{A}} : \left[e_{i||j}^{-1P\pm} \right] : \left[e_{i||j}^{-1P\pm}(\mathbf{v}) \right] d\xi = \int_{\omega_1} f^{-2i\pm} v_i d\xi_\omega, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega).$$

Proposition 3.7.1 *Pour annuler le coefficient de $\frac{1}{\varepsilon^2}$ dans la formulation variationnelle de $\mathcal{P}_{-2}^P(\varepsilon)$, on doit avoir*

$$\mathbf{f}^{-2} = \mathbf{0}.$$

Démonstration. La formulation variationnelle du problème $\mathcal{P}_{-2}^P(\varepsilon)$ est vérifiée par tous les éléments de $\mathcal{V}(\Omega)$. Puisque $\mathcal{V}(\Omega)_3$ est inclus dans $\mathcal{V}(\Omega)$, ses éléments la vérifient également. Soit \mathbf{v} appartenant à $\mathcal{V}(\Omega)_3$, d'après la propriété **1**, $\left[e_{i||j}^{-1P\pm}(\mathbf{v}) \right] = [0]$. La formulation variationnelle de $\mathcal{P}_{-2}^P(\varepsilon)$ s'écrit alors

$$\int_{\omega_1} f^{-2i\pm} v_i d\xi_\omega = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)_3.$$

Posons $\boldsymbol{\eta}(\xi_\omega) = \mathbf{v}(\xi)$. d'après la propriété **2**, $\eta_i^\pm \in H_0^1(\omega^\pm)$. Si bien que l'on a,

$$\forall \eta_i^\pm \in H_0^1(\omega^\pm), \quad \int_{\omega} f^{-2i\pm} \eta_i^\pm d\xi_\omega = 0.$$

Par conséquent, par densité de $H_0^1(\omega^\pm)$ dans $L^2(\omega^\pm)$, on en déduit $f^{-2i\pm} = 0$. ■

Proposition 3.7.2 *Le premier terme du développement asymptotique de $\mathbf{u}^\pm(\varepsilon)$, $\mathbf{u}^{0\pm}$, est indépendant de la variable transverse ξ_3 , ce qui implique que*

$$\frac{\partial \mathbf{u}^{0\pm}}{\partial \xi_3} = 0$$

et,

$$\left[e_{i||j}^{-1P\pm} \right] = [0].$$

On pose alors $\zeta^{0\pm}(\xi_\omega) := \mathbf{u}^{0\pm}(\xi)$.

Démonstration. Puisque $f^{-2i\pm} = 0$, $\mathcal{P}_{-2}^P(\varepsilon)$ s'écrit,

$$\int_{\Omega} \underline{\mathbf{A}} : \left[e_{i||j}^{-1P\pm} \right] : \left[e_{i||j}^{-1P\pm}(\mathbf{v}) \right] d\xi = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$$

c'est à dire en remplaçant $\left[e_{i||j}^{-1P\pm} \right]$, $\left[e_{i||j}^{-1P\pm}(\mathbf{v}) \right]$ et $\underline{\mathbf{A}}$ par leurs valeurs respectives

$$\int_{\Omega} \left(\mu_{13} \frac{\partial u_1^{0\pm}}{\partial \xi_3} \frac{\partial v_1^\pm}{\partial \xi_3} + \mu_{23} \frac{\partial u_2^{0\pm}}{\partial \xi_3} \frac{\partial v_2^\pm}{\partial \xi_3} + \lambda_{33} \frac{\partial u_3^0}{\partial \xi_3} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_3} \right) d\xi = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega).$$

On choisit comme fonctions tests $\mathbf{v} = (v_1^+, 0, 0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 0, v_1^-, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (0, v_2^+, 0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 0, 0, v_2^-, 0)$ et $\mathbf{v} = (0, 0, 0, 0, v_3)$ successivement. Ce choix entraîne, en appliquant le théorème 10.1.1 (Annexe III), que

$$\frac{\partial \mathbf{u}^{0\pm}}{\partial \xi_3} = 0,$$

et, par conséquent, puisque

$$\left[e_{i||j}^{-1P\pm} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_1^{0\pm}}{\partial \xi_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_2^{0\pm}}{\partial \xi_3} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u_1^{0\pm}}{\partial \xi_3} & \frac{1}{2} \frac{\partial u_2^{0\pm}}{\partial \xi_3} & \frac{\partial u_3^0}{\partial \xi_3} \end{bmatrix}$$

on a bien le résultat annoncé. ■

Remarque 3.7.1 *Puisque $\mathbf{u}^{0\pm}$ ne dépend pas de ξ_3 , on a*

$$\int_{\omega_{-1}} u_i^{0\pm} d\xi_\omega = \int_{\omega_1} u_i^{0\pm} d\xi_\omega = \int_{\omega_0} u_i^{0\pm} d\xi_\omega$$

En tenant compte des précédents résultats, le problème $\mathcal{P}^P(\varepsilon)$ s'écrit,

$$\int_{\Omega} \left[\underline{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{O}}(\varepsilon) \right] : \left[e_{i||j}^{0P\pm} + \varepsilon e_{i||j}^{1P\pm} + \dots \right] : \left[\frac{1}{\varepsilon} e_{i||j}^{-1P\pm}(\mathbf{v}) + e_{i||j}^{0P\pm}(\mathbf{v}) + \dots \right] d\xi + \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\pi}{V} \left(1 - 2 \frac{\varepsilon}{R_i} + \frac{\varepsilon^2}{R_i^2} \right) \int_{\omega_{-1}} v_3 d\xi_\omega \int_{\omega_{-1}} (\zeta_3^0 + \varepsilon u_3^1 + \dots) d\xi_\omega = \varepsilon^P \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_i} \right) \int_{\omega_1} f^{Pi\pm} v_i d\xi_\omega.$$

Annulation du coefficient de $\frac{1}{\varepsilon}$

On obtient cette fois-ci des informations sur $\left[e_{i||j}^{0P\pm} \right]$. Le problème $\mathcal{P}_{-1}^P(\varepsilon)$, obtenu en annulant le coefficient de $\frac{1}{\varepsilon}$ est

$$\int_{\Omega} \underline{\mathbf{A}}^{\pm} : \left[e_{i||j}^{0\pm} \right] : \left[e_{i||j}^{-1\pm}(\mathbf{v}) \right] d\xi + \frac{\pi}{V} \int_{\omega_{-1}} v_3 d\xi_{\omega} \int_{\omega} \zeta_3^0 d\xi_{\omega} = \int_{\omega_1} f^{-1i\pm} v_i d\xi_{\omega}.$$

Proposition 3.7.3 *Dans le problème $\mathcal{P}_{-1}^P(\varepsilon)$, les forces $f^{-1i\pm}$ ne peuvent pas être choisies arbitrairement. On a nécessairement*

$$\begin{aligned} f^{-1,1\pm} &= f^{-1,2\pm} = 0 \\ f^{-1,3\pm} &= \frac{\pi}{V} \int_{\omega} \zeta_3^0 d\xi_{\omega}. \end{aligned}$$

Démonstration. La formulation variationnelle de $\mathcal{P}_{-1}^P(\varepsilon)$ est vérifiée par tous les éléments $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)_3$. Si bien que, en posant $\boldsymbol{\eta}(\xi_1, \xi_2) := \mathbf{v}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, on a

$$\frac{\pi}{V} \int_{\omega} \eta_3 d\xi_{\omega} \int_{\omega} \zeta_3^0 d\xi_{\omega} = \int_{\omega} f^{-1i\pm} \eta_i d\xi_{\omega}, \quad \forall \eta_i^{\pm} \in H_0^1(\omega^{\pm})$$

c'est à dire

$$\int_{\omega} (f^{-1,1\pm} \eta_1^{\pm} + f^{-1,2\pm} \eta_2^{\pm}) d\xi_{\omega} + \int_{\omega} \left(f^{-1,3\pm} - \frac{\pi}{V} \int_{\omega} \zeta_3^0 d\xi_{\omega} \right) \eta_3 d\xi_{\omega} = 0, \quad \forall \eta_i^{\pm} \in H_0^1(\omega^{\pm})$$

dont on déduit, par densité de $H_0^1(\omega^{\pm})$ dans $L^2(\omega^{\pm})$, le résultat énoncé. ■

On reporte ces valeurs dans la formulation variationnelle de $\mathcal{P}_{-1}^P(\varepsilon)$ qui s'écrit alors, $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \underline{\mathbf{A}} : \left[e_{i||j}^{0P\pm} \right] : \left[e_{i||j}^{-1P\pm}(\mathbf{v}) \right] d\xi + \frac{\pi}{V} \int_{\omega} (v_3(\xi_{\omega}, -1) - v_3(\xi_{\omega}, 1)) d\xi_{\omega} \int_{\omega} \zeta_3^0 d\xi_{\omega} = 0.$$

Proposition 3.7.4 *Le tenseur $\left[e_{i||j}^{0P\pm} \right]$ est de la forme*

$$\left[e_{i||j}^{0P\pm} \right] = \begin{bmatrix} e_{1||1}^{0P\pm} & e_{1||2}^{0P\pm} & 0 \\ e_{1||2}^{0P\pm} & e_{2||2}^{0P\pm} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{33}} e_{1||1}^{0P\pm} - \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{33}} e_{2||2}^{0P\pm} \end{bmatrix}.$$

et par conséquent, il ne dépend ni de ξ_3 , ni de $\mathbf{u}^{1\pm}$.

Démonstration. En choisissant successivement comme fonction test $\mathbf{v} = (v_1^+, 0, 0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (0, v_2^+, 0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 0, v_1^-, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 0, 0, v_2^-, 0)$ dans la formulation variationnelle de $\mathcal{P}_{-1}^P(\varepsilon)$ on montre que

$$e_{1||3}^{0P\pm} = e_{2||3}^{0P\pm} = 0.$$

Puis, pour $\mathbf{v} = (0, 0, 0, 0, v_3) \in \mathcal{V}(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_3} \left(\lambda_{13} e_{1\|1}^{0P\pm} + \lambda_{23} e_{2\|2}^{0P\pm} + \lambda_{33} e_{3\|3}^{0P\pm} \right) d\xi + \frac{\pi}{V} \int_{\omega} (v_3(\xi_{\omega}, -1) - v_3(\xi_{\omega}, 1)) d\xi_{\omega} \int_{\omega} \zeta_3^0 d\xi_{\omega} = 0$$

En particulier quand $v_3 \in H_0^1(\Omega)$ (ce qui entraîne $v_3(\xi_{\omega}, -1) = 0$ et $v_3(\xi_{\omega}, 1) = 0$), il reste

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_3} \left(\lambda_{13} e_{1\|1}^{0P\pm} + \lambda_{23} e_{2\|2}^{0P\pm} + \lambda_{33} e_{3\|3}^{0P\pm} \right) d\xi = 0, \quad \forall v_3 \in H_0^1(\Omega)$$

soit, à l'aide du théorème **10.1.1** (Annexe III),

$$\lambda_{13} e_{1\|1}^{0P\pm} + \lambda_{23} e_{2\|2}^{0P\pm} + \lambda_{33} e_{3\|3}^{0P\pm} = 0,$$

c'est à dire,

$$e_{3\|3}^{0P\pm} = -\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{33}} e_{1\|1}^{0P\pm} - \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{33}} e_{2\|2}^{0P\pm}.$$

De plus, comme

$$e_{1\|1}^{0P\pm} = \frac{\partial u_1^{0\pm}}{\partial \xi_1} + \frac{1}{R_l} u_3^{0\pm}$$

et par construction,

$$e_{2\|2}^{0P\pm} = \frac{\partial u_2^{0\pm}}{\partial \xi_2}$$

et comme on a précédemment montré que $\mathbf{u}^{0\pm}$ est indépendant de ξ_3 , on a bien, $\left[e_{i\|j}^{0P\pm} \right]$ indépendant de ξ_3 et de $\mathbf{u}^{1\pm}$. ■

Corollaire 3.7.1 *La valeur moyenne de $\zeta_3^{0\pm}$ sur ω ,*

$$\overline{\zeta_3^{0\pm}}^{\omega} = \frac{1}{\text{mes}(\omega)} \int_{\omega} \zeta_3^0 d\xi_{\omega},$$

est nulle, tout comme l'est $f^{-1,3\pm}$.

Démonstration. Puisque $\lambda_{13} e_{1\|1}^{0P\pm} + \lambda_{23} e_{2\|2}^{0P\pm} + \lambda_{33} e_{3\|3}^{0P\pm} = 0$, en prenant comme fonction test $\mathbf{v} = (0, 0, 0, 0, v_3) \in \mathcal{V}(\Omega)$ dans la formulation variationnelle de $\mathcal{P}_{-1}^P(\varepsilon)$, il reste

$$\frac{\pi}{V} \int_{\omega} (v_3(\xi_{\omega}, -1) - v_3(\xi_{\omega}, 1)) d\xi_{\omega} \int_{\omega} \zeta_3^0 d\xi_{\omega} = 0, \quad \forall v_3 \in H^1(\Omega), \quad v_3 = 0 \text{ sur } \partial S$$

ce qui entraîne

$$\int_{\omega} \zeta_3^0 d\xi_{\omega} = 0.$$

Par conséquent comme

$$f^{-1,3\pm} = \frac{\pi}{V} \int_{\omega} \zeta_3^0 d\xi_{\omega}$$

on a bien $f^{-1,3\pm} = 0$. ■

Remarque 3.7.2 *Le premier terme du développement asymptotique du déplacement moyen est donc à moyenne nulle sur la surface médiane. C'est une propriété très importante dans la suite de l'étude puisqu'elle interviendra dans le choix de l'espace de recherche de la solution asymptotique. C'est à cause de cette particularité qu'intervient l'espace $L_0^2(\omega)$ dans le modèle asymptotique numérique final.*

Annulation du terme de degré 0 en ε

Lors de cette étape, on aboutit à une équation posée sur ω , couplant $\mathbf{u}^{0\pm}$ et $\mathbf{u}^{1\pm}$. En effet, compte tenu des résultats précédents, la formulation variationnelle du problème $\mathcal{P}_0^P(\varepsilon)$ s'écrit

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}} : \left[e_{i||j}^{0P\pm} \right] : \left[e_{i||j}^{0P\pm}(\mathbf{v}) \right] d\xi + \int_{\Omega} \left[\underline{\underline{\mathbf{A}}} : \left[e_{i||j}^{1P\pm} \right] + \underline{\underline{\mathbf{Q}}}(\varepsilon) : \left[e_{i||j}^{0P\pm} \right] \right] : \left[e_{i||j}^{-1P\pm}(\mathbf{v}) \right] d\xi \\ + \frac{\pi}{V} \int_{\omega_{-1}} v_3 d\xi_{\omega} \int_{\omega_{-1}} u_3^1 d\xi_{\omega} = \int_{\omega_1} f^{0i\pm} v_i d\xi_{\omega} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$$

Les éléments \mathbf{v} de $\mathcal{V}(\Omega)_3$ annulent $\int_{\Omega} \left[\underline{\underline{\mathbf{A}}} : \left[e_{i||j}^{1P\pm} \right] + \underline{\underline{\mathbf{Q}}}(\varepsilon) : \left[e_{i||j}^{0P\pm} \right] \right] : \left[e_{i||j}^{-1P\pm}(\mathbf{v}) \right] d\xi$ puisque

$\left[e_{i||j}^{-1P\pm}(\mathbf{v}) \right] = [0]$. Donc, pour tous les éléments \mathbf{v} de $\mathcal{V}(\Omega)_3$, la formulation variationnelle du problème $\mathcal{P}_0^P(\varepsilon)$ s'écrit,

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}} : \left[e_{i||j}^{0P\pm} \right] : \left[e_{i||j}^{0P\pm}(\mathbf{v}) \right] d\xi + \frac{\pi}{V} \int_{\omega_0} v_3 d\xi_{\omega} \int_{\omega_{-1}} u_3^1 d\xi_{\omega} = \int_{\omega_0} f^{0i\pm} v_i d\xi_{\omega}.$$

Posons $\boldsymbol{\eta}(\xi_{\omega}) := \mathbf{v}(\xi)$ et calculons $\int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}} : \left[e_{i||j}^{0P\pm} \right] : \left[e_{i||j}^{0P\pm}(\mathbf{v}) \right] :$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} : \left[e_{i||j}^{0P\pm} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_{11}\lambda_{33} - \lambda_{13}^2}{\lambda_{33}} e_{1||1}^{0P\pm} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{33} - \lambda_{13}\lambda_{23}}{\lambda_{33}} e_{2||2}^{0P\pm} & 2\mu_{12} e_{1||2}^{0P\pm} & 0 \\ 2\mu_{12} e_{1||2}^{0P\pm} & \frac{\lambda_{12}\lambda_{33} - \lambda_{13}\lambda_{23}}{\lambda_{33}} e_{1||1}^{0P\pm} + \frac{\lambda_{22}\lambda_{33} - \lambda_{23}^2}{\lambda_{33}} e_{2||2}^{0P\pm} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Puis remarquons que

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}^{P\pm}(\boldsymbol{\zeta}^{0\pm}) = \begin{bmatrix} e_{1||1}^{0P\pm} & e_{1||2}^{0P\pm} \\ e_{1||2}^{0P\pm} & e_{2||2}^{0P\pm} \end{bmatrix}$$

et que

$$\left[e_{i||j}^{0P\pm}(\mathbf{v}) \right] = \begin{bmatrix} \gamma_{11}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) & \gamma_{12}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) & \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_1} - \frac{1}{R_l} v_1^{\pm} \\ \gamma_{12}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) & \gamma_{22}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) & \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_1} - \frac{1}{R_l} v_1^{\pm} & \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_2} & 0 \end{bmatrix}.$$

On obtient donc,

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}} : \left[e_{i||j}^{0P\pm} \right] : \left[e_{i||j}^{0P\pm}(\mathbf{v}) \right] d\xi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega) : \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}^{P\pm}(\boldsymbol{\zeta}^{0\pm}) : \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) d\xi.$$

$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega)$, $\underline{\gamma}^{P\pm}(\zeta^{0\pm})$ et $\underline{\gamma}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta})$ sont indépendants de la variable transverse ξ_3 , par conséquent,

$$\int_{-1}^1 \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega) : \underline{\gamma}^{P\pm}(\zeta^{0\pm}) : \underline{\gamma}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) d\xi_3 = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega) : \underline{\gamma}^{P\pm}(\zeta^{0\pm}) : \underline{\gamma}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) \int_{-1}^1 d\xi_3$$

aussi,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}} : \left[e_{i||j}^{0P\pm} \right] : \left[e_{i||j}^{0P\pm}(\mathbf{v}) \right] d\xi &= \frac{1}{2} \int \left(\int_{-1}^1 \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega) : \underline{\gamma}^{P\pm}(\zeta^{0\pm}) : \underline{\gamma}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) d\xi_3 \right) d\xi_{\omega} \\ &= \int_{\omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega) : \underline{\gamma}^{P\pm}(\zeta^{0\pm}) : \underline{\gamma}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) d\xi_{\omega} \end{aligned}$$

On ne peut pas aller plus loin dans l'annulation des coefficients des puissances de ε . Le meilleur résultat que l'on puisse espérer est donc

$$\int_{\omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega) : \underline{\gamma}^{P\pm}(\zeta^{0\pm}) : \underline{\gamma}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) d\xi_{\omega} + \frac{\pi}{V} \int_{\omega} \eta_3 d\xi_{\omega} \int_{\omega_{-1}} u_3^1 d\xi_{\omega} = \int_{\omega} f^{0i\pm} \eta_i d\xi_{\omega}.$$

3.7.3 Modèle asymptotique, normes et espaces asymptotiques

Notations :

$$\text{Ker} \underline{\gamma}^{P\pm} := \{ \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega), \underline{\gamma}^{P\pm}(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \}.$$

L'étude pré-asymptotique aboutit à une équation couplant $\mathbf{u}^{0\pm}$ et $\mathbf{u}^{1\pm}$. Ce couplage ne doit plus apparaître dans la formulation asymptotique finale. Nous n'avons donc pas encore identifié le modèle asymptotique. Pourtant cette dernière formulation fixe le cadre fonctionnel du modèle asymptotique. La forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\omega}^M$ qu'elle induit, selon qu'elle est un produit scalaire ou non, selon que ce produit scalaire induit une norme équivalente ou non à la norme usuelle, détermine s'il s'agit d'un problème de coque en membrane ou non. C'est pourquoi on s'intéresse tout particulièrement au noyau de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\omega}^M$.

Théorème 3.7.1 *Le noyau $\text{Ker} \underline{\gamma}^{P\pm}$ de la forme linéaire $\underline{\gamma}^{P\pm}$ est réduit à $\{\mathbf{0}\}$.*

Démonstration. Soit $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$ tel que $\underline{\gamma}^{P\pm}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ dans Ω alors, dans Ω ,

$$\frac{\partial v_1^{\pm}}{\partial \xi_1} + \frac{1}{R_l} v_3 = 0, \quad \frac{\partial v_1^{\pm}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial v_2^{\pm}}{\partial \xi_1} = 0, \quad \text{et}, \quad \frac{\partial v_2^{\pm}}{\partial \xi_2} = 0.$$

Posons $\boldsymbol{\eta}^{\xi_3}(\xi_1, \xi_2) := \mathbf{v}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Alors $\boldsymbol{\eta}^{\xi_3}$ appartient à $H_0^1(\omega^{\pm})^5$ et vérifie $\frac{\partial \eta_2^{\xi_3\pm}}{\partial \xi_2} = 0$. Montrons que dans ces conditions, $\eta_2^{\xi_3\pm} = 0$ dans $H_0^1(\omega^{\pm})$. On a

$$\int_{\omega} \left(\eta_2^{\xi_3\pm} \right)^2 d\xi_{\omega} = - \int_{\omega} 2\eta_2^{\xi_3\pm} \frac{\partial \eta_2^{\xi_3\pm}}{\partial \xi_2} \xi_2 d\xi_{\omega} + \int_{\partial\omega} \left(\eta_2^{\xi_3\pm} \right)^2 \xi_2 n_2 dl.$$

Or,

$$\frac{\partial \eta_2^{\xi_3^\pm}}{\partial \xi_2} = 0 \implies \int_{\omega} 2\eta_2^{\xi_3^\pm} \frac{\partial \eta_2^{\xi_3^\pm}}{\partial \xi_2} \xi_2 d\xi_{\omega} = 0$$

et

$$\eta_2^{\xi_3^\pm} \in H_0^1(\omega^\pm) \implies \int_{\partial\omega} \left(\eta_2^{\xi_3^\pm}\right)^2 \xi_2 n_2 dl = 0$$

donc

$$\left\| \eta_2^{\xi_3^\pm} \right\|_{0,\omega}^2 = 0$$

soit

$$\eta_2^{\xi_3^\pm} = 0 \text{ et } v_2^\pm = 0.$$

L'égalité

$$\frac{\partial v_1^\pm}{\partial \xi_2} + \frac{\partial v_2^\pm}{\partial \xi_1} = 0$$

devient

$$\frac{\partial v_1^\pm}{\partial \xi_2} = 0.$$

Par conséquent, de la même manière que

$$\left(\eta_2^{\xi_3^\pm} \in H_0^1(\omega^\pm) \text{ et } \frac{\partial \eta_2^{\xi_3^\pm}}{\partial \xi_2} = 0 \right) \implies \eta_2^{\xi_3^\pm} = 0$$

on a $\eta_1^{\xi_3^\pm} = 0$ dans ω^\pm et $v_1 = 0$ dans Ω . Enfin, comme

$$\frac{\partial v_1^\pm}{\partial \xi_1} + \frac{1}{R_l} v_3 = 0$$

on a $v_3 = 0$ dans Ω . ■

Conclusion 1 On déduit la formulation variationnelle du problème de "coque en membrane" $\mathcal{P}_0^P(\varepsilon)$,

$$\int_{\omega} \underline{\mathbf{A}}^{P^\pm}(\omega) : \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{P^\pm}(\boldsymbol{\zeta}^{0^\pm}) : \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{P^\pm}(\boldsymbol{\eta}) d\xi_{\omega} + \frac{\pi}{V} \int_{\omega} \eta_3 d\xi_{\omega} \int_{\omega_{-1}} u_3^1 d\xi_{\omega} = \int_{\omega} f^{0i^\pm} \eta_i d\xi_{\omega}.$$

Cette formulation n'est pas une formulation asymptotique puisqu'elle fait intervenir le terme du premier ordre u_3^1 . Elle fixe pourtant le cadre fonctionnel de l'étude asymptotique. En effet, pour montrer la convergence des suites $(\mathbf{u}^\pm(\varepsilon))_{\varepsilon}$ et $(\overline{\mathbf{u}^\pm(\varepsilon)})_{\varepsilon}$ on utilise deux normes construites à l'aide du produit scalaire $\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\omega}^M$ induit par cette formulation.

3.8 Etude asymptotique

Notations :

$\mathcal{P}^P(\varepsilon, \Omega)$:= problème variationnel parabolique 3D avec hypothèses asymptotiques,

$$\mathcal{P}^P(\varepsilon, \Omega) := \begin{cases} \forall \mathbf{u}(\varepsilon) \in \mathcal{V}(\Omega), \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega), \\ \int_{\Omega} \underline{\mathbf{A}}^{P\pm}(\varepsilon) : \underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{u}^{\pm}(\varepsilon)) : \underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) \left(1 + \varepsilon \frac{\xi_3}{R_l}\right) d\xi + \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\pi}{V} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R_l}\right)^2 \int_{\omega_{-1}} u_3(\varepsilon) d\xi_{\omega} \int_{\omega_{-1}} v_3 d\xi_{\omega} = \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l}\right) \int_{\omega_1} f^{i\pm} v_i d\xi_{\omega}. \end{cases}$$

L'objet de cette partie est d'identifier et de justifier mathématiquement les équations posées sur la surface ω . Pour cela, on prouve, dans des espaces fonctionnels adéquats (choisis à l'aide des indications fournies par l'étude pré-asymptotique), la convergence de la suite des déplacements $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon}$ solutions du problème 3D, quand l'épaisseur de la membrane tend vers zéro. On se place dans le cas où :

1. les membranes ont toutes la même surface médiane $S = \theta(\omega)$,
2. les conditions aux limites sont toutes posées sur $\theta(\partial\omega)$,
3. les constantes d'élasticité des membranes ne dépendent pas de l'épaisseur,
4. les forces extérieures $f^{\varepsilon i\pm}$ vérifient, il existe $\mathbf{f}^{\pm} = (f^{i\pm}) \in \mathbf{L}^2(\omega)$ indépendante de ε ,

$$f^{\varepsilon i\pm}(\xi_{\omega}^{\varepsilon}) = \varepsilon f^{i\pm}(\xi_{\omega}).$$

Sous ces hypothèses, le problème $\mathcal{P}^P(\varepsilon)$ devient $\mathcal{P}^P(\varepsilon, \Omega)$,

3.8.1 Choix des espaces fonctionnels et des normes en 2D

Notations :

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\eta}) &:= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_{\alpha}}{\partial \xi_{\beta}} + \frac{\partial \eta_{\beta}}{\partial \xi_{\alpha}} \right) \right] & \text{et,} & \|\boldsymbol{\eta}\|_{110, \omega}^2 &:= \|\eta_1\|_{1, \omega}^2 + \|\eta_2\|_{1, \omega}^2 + \|\eta_3\|_{0, \omega}^2, \\ \langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\omega} &:= \int_{\omega} (\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\zeta}) : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\eta}) + \zeta_3 \eta_3) d\xi_{\omega} & \text{et,} & \|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega}^2 &:= \langle \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\omega}, \\ \langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\omega}^M &:= \int_{\omega} \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{P\pm}(\boldsymbol{\zeta}) : \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) d\xi_{\omega}, & \text{et,} & \left(\|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega}^M \right)^2 &:= \langle \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\omega}^M, \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0 &:= \mathcal{D}(\omega^+)^2 \times \mathcal{D}(\omega^-)^2 \times \mathcal{D}(\omega), \\ \mathcal{V}^P(\omega) &:= H_0^1(\omega^+)^2 \times H_0^1(\omega^-)^2 \times L^2(\omega^{\pm}), \\ \mathcal{V}^{MP}(\omega) &:= \text{complété de } \mathcal{V}^P(\omega) \text{ pour la norme } \|\cdot\|_{\omega}^M. \end{aligned}$$

Afin de fixer le cadre variationnel, on étudie les normes induites par les produits scalaires

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega^M : \begin{cases} \mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_0 & \longmapsto \mathbb{R} \\ (\zeta, \eta) & \longrightarrow \langle \zeta, \eta \rangle_\omega^M = \int_\omega \underline{\gamma}^{P\pm}(\zeta) : \underline{\gamma}^{P\pm}(\eta) d\xi_\omega \end{cases}$$

et

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega : \begin{cases} \mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_0 & \longmapsto \mathbb{R} \\ (\zeta, \eta) & \longrightarrow \langle \zeta, \eta \rangle_\omega = \int_\omega (\underline{\epsilon}(\zeta) : \underline{\epsilon}(\eta) + \zeta_3 \eta_3) d\xi_\omega \end{cases}$$

On se limite dans un premier temps à une étude sur \mathcal{V}_0 ,

Afin d'établir des résultats d'équivalence, démontrons un lemme préliminaire et son corollaire.

Lemme préliminaire : Soit \mathcal{O} un ouvert, on a

$$\begin{cases} \forall \eta_1 \in H_0^1(\mathcal{O}), \quad \forall \eta_2 \in H^1(\mathcal{O}), & \int_\omega \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_1} d\xi_\omega = \int_\omega \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_2} d\xi_\omega \\ \forall \eta_1 \in H^1(\mathcal{O}), \quad \forall \eta_2 \in H_0^1(\mathcal{O}), & \int_\omega \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_1} d\xi_\omega = \int_\omega \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_2} d\xi_\omega \end{cases}$$

Démonstration. Soient $\eta_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ et $\eta_2 \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})$,

$$\begin{aligned} \int_\omega \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_1} d\xi_\omega &= - \int_\omega \eta_1 \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} d\xi_\omega \\ &= \int_\omega \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_2} d\xi_\omega \end{aligned}$$

d'où les résultats souhaités par densité de $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ et $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})$ dans $H_0^1(\mathcal{O})$ et $H^1(\mathcal{O})$. ■

Corollaire 3.8.1 Pour $\eta_1 \in H_0^1(\mathcal{O})$ et $\eta_2 \in H^1(\mathcal{O})$, ou pour $\eta_1 \in H^1(\mathcal{O})$ et $\eta_2 \in H_0^1(\mathcal{O})$,

$$\left\| \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_1} \right\|_{0,\mathcal{O}}^2 = \left\| \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_1} \right\|_{0,\mathcal{O}}^2 + \left\| \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_2} \right\|_{0,\mathcal{O}}^2 + 2 \int_\omega \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_2} d\xi_\omega.$$

Proposition 3.8.1 Sur l'espace \mathcal{V}_0 , la norme $\| \cdot \|_\omega$ est équivalente à $\| \cdot \|_{110,\omega}$. $\mathcal{V}^P(\omega)$ est égal topologiquement et algébriquement à $H_0^1(\omega^+)^2 \times H_0^1(\omega^-)^2 \times L^2(\omega^\pm)$.

Démonstration. Soit $\eta = (\eta_1^+, \eta_2^+, \eta_1^-, \eta_2^-, \eta_3) \in \mathcal{V}_0$. Calculons et minorons $\|\eta\|_\omega^2$ en utilisant le corollaire précédant puis l'inégalité de Poincaré

$$\begin{aligned} \|\eta\|_\omega^2 &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1,2} \left(|\eta_\alpha^\pm|_{1,\omega}^2 + 3 \left\| \frac{\partial \eta_\alpha^\pm}{\partial \xi_\alpha} \right\|_{0,\omega}^2 \right) + \frac{1}{2} \int_\omega \frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_1} \frac{\partial \eta_2^\pm}{\partial \xi_2} d\xi_\omega + \|\eta_3\|_{0,\omega}^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1,2} \left(|\eta_\alpha^\pm|_{1,\omega}^2 + 2 \left\| \frac{\partial \eta_\alpha^\pm}{\partial \xi_\alpha} \right\|_{0,\omega}^2 \right) + \frac{1}{4} \left\| \frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \eta_2^\pm}{\partial \xi_2} \right\|_{0,\omega}^2 + \|\eta_3\|_{0,\omega}^2 \\ &\geq \frac{1}{4} \left(|\eta_1^\pm|_{1,\omega}^2 + |\eta_2^\pm|_{1,\omega}^2 \right) + \|\eta_3\|_{0,\omega}^2 \\ &\geq c \left(\|\eta_1^\pm\|_{1,\omega}^2 + \|\eta_2^\pm\|_{1,\omega}^2 + \|\eta_3\|_{0,\omega}^2 \right). \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_{\omega} \frac{\partial \eta_1^{\pm}}{\partial \xi_2} \frac{\partial \eta_2^{\pm}}{\partial \xi_1} d\xi_{\omega} \leq \left\| \frac{\partial \eta_2^{\pm}}{\partial \xi_1} \right\|_{0,\omega} \left\| \frac{\partial \eta_1^{\pm}}{\partial \xi_2} \right\|_{0,\omega}$$

et, comme

$$\left\| \frac{\partial \eta_2^{\pm}}{\partial \xi_1} \right\|_{0,\omega} \left\| \frac{\partial \eta_1^{\pm}}{\partial \xi_2} \right\|_{0,\omega} \leq \frac{1}{2} \left(\left\| \frac{\partial \eta_2^{\pm}}{\partial \xi_1} \right\|_{0,\omega}^2 + \left\| \frac{\partial \eta_1^{\pm}}{\partial \xi_2} \right\|_{0,\omega}^2 \right)$$

on a la majoration de $\|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega}^2$

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega}^2 &\leq \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1,2} \left(\|\eta_{\alpha}^{\pm}\|_{1,\omega}^2 + 3 \left\| \frac{\partial \eta_{\alpha}^{\pm}}{\partial \xi_{\alpha}} \right\|_{0,\omega}^2 \right) + \frac{1}{4} \left(\left\| \frac{\partial \eta_2^{\pm}}{\partial \xi_1} \right\|_{0,\omega}^2 + \left\| \frac{\partial \eta_1^{\pm}}{\partial \xi_2} \right\|_{0,\omega}^2 \right) + \|\eta_3\|_{0,\omega}^2 \\ &\leq \|\eta_1^{\pm}\|_{1,\omega}^2 + \|\eta_2^{\pm}\|_{1,\omega}^2 + \|\eta_3\|_{0,\omega}^2. \end{aligned}$$

Les normes sont bien équivalentes. Le complété de \mathcal{V}_0 pour $\|\cdot\|_{\omega}$ est donc algébriquement et topologiquement égal au complété de \mathcal{V}_0 pour $\|\cdot\|_{110,\omega}$, c'est à dire $\mathcal{V}^P(\omega) = H_0^1(\omega^+)^2 \times H_0^1(\omega^-)^2 \times L^2(\omega^{\pm})$. ■

On montre maintenant un résultat crucial pour l'étude asymptotique.

Proposition 3.8.2 *Les normes $\|\cdot\|_{\omega}^M$ et $\|\cdot\|_{\omega}$ ne sont pas équivalentes sur $\mathcal{V}^P(\omega)$.*

Démonstration. La preuve se fait en deux temps, on montre d'abord qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}^P(\omega)$ on a

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega}^M \leq c \|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega},$$

puis on montre par l'absurde que l'inégalité

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega} \leq c' \|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega}^M$$

est fautive pour tout $c' > 0$, ce qui suppose de montrer un résultat intermédiaire de non comparabilité des normes des dérivées partielles.

En appliquant l'inégalité triangulaire, on a

$$\left\| \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1} + \frac{1}{R_l} \eta_3 \right\|_{0,\omega} \leq \left\| \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1} \right\|_{0,\omega} + \frac{1}{R_l} \|\eta_3\|_{0,\omega},$$

on en déduit la majoration

$$\begin{aligned} \left(\|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega}^M \right)^2 &\leq 2 \left\| \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1} \right\|_{0,\omega}^2 + 2 \frac{1}{R_l^2} \|\eta_3\|_{0,\omega}^2 + \frac{1}{4} \left\| \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_1} \right\|_{0,\omega}^2 + \left\| \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_2} \right\|_{0,\omega}^2 \\ &\leq \max\left(2, \frac{2}{R_l^2}\right) \|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega}^2 \end{aligned}$$

Supposons que l'on ait,

$$\exists c > 0, \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{W}(\omega), \|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega}^2 \leq c \left(\|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega}^M \right)^2,$$

alors, pour tout $\eta_2^\pm \in H_0^1(\omega^\pm)$, comme $\boldsymbol{\eta} = (0, \eta_2^+, 0, \eta_2^-, 0) \in \mathcal{V}^P(\omega)$, on aurait

$$c \left(\frac{1}{4} \left\| \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_1} \right\|_{0,\omega}^2 + \left\| \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_2} \right\|_{0,\omega}^2 \right) \geq \frac{1}{4} \left\| \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_1} \right\|_{0,\omega}^2 + \left\| \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_2} \right\|_{0,\omega}^2$$

et par conséquent $c \geq 1$.

De même, pour tout $\eta_1 \in H_0^1(\omega^\pm)$, puisque

$$\boldsymbol{\eta} = \left(\eta_1^+, 0, \eta_1^-, 0, -R_l \frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_1} \right) \in \mathcal{V}^P(\omega),$$

on aurait,

$$\left\| \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1} \right\|_{0,\omega}^2 + \frac{1}{4} \left\| \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_2} \right\|_{0,\omega}^2 + R_l^2 \left\| \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1} \right\|_{0,\omega}^2 \leq \frac{c}{4} \left\| \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_2} \right\|_{0,\omega}^2$$

soit,

$$(1 + R_l^2) \left\| \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1} \right\|_{0,\omega}^2 \leq \frac{c-1}{4} \left\| \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_2} \right\|_{0,\omega}^2$$

cette inégalité n'est pas vraie dans $H_0^1(\omega)$.

En effet, supposons qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall \eta_1 \in H_0^1(\omega), \quad \left\| \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1} \right\|_{0,\omega}^2 \leq C \left\| \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_2} \right\|_{0,\omega}^2.$$

Soient $(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2) \in \omega$, $\alpha > 0$ tel que $\pi :=]\tilde{\xi}_1 - \alpha, \tilde{\xi}_1 + \alpha[\times]\tilde{\xi}_2 - \alpha, \tilde{\xi}_2 + \alpha[\subset \omega$ et $\tilde{\eta}(\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{D}(\pi) \subset \mathcal{D}(\omega)$ non indépendant de ξ_2 . Pour tout $m > 1$, on construit l'élément de $\mathcal{D}(\omega)$ suivant

$$\eta_m(\xi_1, \xi_2) = \begin{cases} \tilde{\eta}(\tilde{\xi}_1 + m(\xi_1 - \tilde{\xi}_1), \xi_2) & \text{si } |\xi_1 - \tilde{\xi}_1| < \frac{\alpha}{m} \text{ et } |\xi_2 - \tilde{\xi}_2| < \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

par construction, le support de η_m est contenu dans $\pi_m =]\tilde{\xi}_1 - \frac{\alpha}{m}, \tilde{\xi}_1 + \frac{\alpha}{m}[\times]\tilde{\xi}_2 - \alpha, \tilde{\xi}_2 + \alpha[$ et $mes(\pi_m) = \frac{1}{m} mes(\pi)$. Calculons les dérivées partielles de η_m dans π_m .

$$\frac{\partial \eta_m}{\partial \xi_1} = m \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \xi_1}(\tilde{\xi}_1 + m(\xi_1 - \tilde{\xi}_1), \xi_2)$$

et

$$\frac{\partial \eta_m}{\partial \xi_2} = \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \xi_2}(\tilde{\xi}_1 + m(\xi_1 - \tilde{\xi}_1), \xi_2).$$

Les normes vérifient donc

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \eta_m}{\partial \xi_1} \right\|_{0,\omega}^2 &= \int m^2 \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \xi_1}(\tilde{\xi}_1 + m(\xi_1 - \tilde{\xi}_1), \xi_2)^2 d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \int_{\omega} m^2 \left(\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \xi_1}(\xi'_1, \xi_2) \frac{1}{m} \right)^2 d\xi'_1 d\xi_2 = \left\| \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \xi_1} \right\|_{0,\omega}^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \eta_m}{\partial \xi_2} \right\|_{0,\omega}^2 &= \int \left(\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \xi_2} \left(\tilde{\xi}_1 + m \left(\xi_1 - \tilde{\xi}_1 \right), \xi_2 \right) \right)^2 d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \int_{\omega} \left(\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \xi_2} \left(\xi'_1, \xi_2 \right) \frac{1}{m} \right)^2 d\xi'_1 d\xi_2 = \frac{1}{m^2} \left\| \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \xi_2} \right\|_{0,\omega}^2 \end{aligned}$$

et donc C vérifie,

$$\forall m > 0, m^2 \left\| \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \xi_1} \right\|_{0,\omega}^2 \leq C \left\| \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \xi_2} \right\|_{0,\omega}^2$$

ce qui est impossible puisque

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} m^2 \left\| \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \xi_1} \right\|_{0,\omega}^2 = +\infty$$

Ainsi, $\| \cdot \|_{110,\omega}$, la norme naturelle sur $\mathcal{V}^P(\omega)$ n'est pas équivalente sur $\mathcal{V}^P(\omega)$ à $\| \cdot \|_{\omega}^M$. ■

Proposition 3.8.3 *On déduit de cette étude les propriétés suivantes*

1. L'espace $\mathcal{V}^P(\omega)$ est un sous-espace propre de $\mathcal{V}^{MP}(\omega)$.
2. $\mathcal{V}^P(\omega)$ n'est pas fermé pour la norme $\| \cdot \|_{\omega}^M$.
3. L'injection canonique de $\mathcal{V}^P(\omega)$ dans $\mathcal{V}^{MP}(\omega)$ est continue.
4. Par construction, $\mathcal{V}^P(\omega)$ est dense dans $\mathcal{V}^{MP}(\omega)$.

Démonstration. 1. $\mathcal{V}^P(\omega)$ n'est pas réduit au $\{0\}$. Par construction $\mathcal{V}^{MP}(\omega)$ est complet pour $\| \cdot \|_{\omega}^M$, $\mathcal{V}^P(\omega)$ ne l'est pas (puisque $\mathcal{V}^P(\omega)$ est complet pour $\| \cdot \|_{110,\omega}$ et que les normes ne sont pas équivalentes) donc $\mathcal{V}^P(\omega) \neq \mathcal{V}^{MP}(\omega)$.

2. Si $\mathcal{V}^P(\omega)$ était fermé dans $(\mathcal{V}^P(\omega), \| \cdot \|_{\omega}^M)$ espace de Hilbert, il serait complet.

3. On a montré dans la preuve de la proposition précédente que $\forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}^P(\omega), \|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega}^M \leq c \|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega}$, d'où la continuité. ■

Conséquences Une forme linéaire continue sur $(\mathcal{V}^P(\omega), \| \cdot \|_{110,\omega})$ ne se prolonge pas nécessairement par continuité en une forme linéaire continue sur $(\mathcal{V}^{MP}(\omega), \| \cdot \|_{\omega}^M)$. Or, le préliminaire à l'étude asymptotique introduit naturellement la norme $\| \cdot \|_{\omega}^M$. Pour que les conditions du théorème de Lax-Milgram (qui assure l'existence et l'unicité de la solution du problème asymptotique) soient vérifiées, on doit donc se placer dans l'espace complet pour cette norme, à savoir $\mathcal{V}^{MP}(\omega)$.

3.8.2 Choix des espaces fonctionnels et des normes en 3D

Notations :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{v}} &:= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{v} d\xi_3, \\ \left(\|\mathbf{v}\|_{\Omega}^M \right)^2 &:= \left\| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3} \right\|_{0,\Omega}^2 + \left(\|\bar{\mathbf{v}}\|_{\omega}^M \right)^2, \\ \mathcal{V}^{MP}(\Omega) &:= \text{complété de } \mathcal{V}(\Omega) \text{ pour la norme } \| \cdot \|_{\Omega}^M.\end{aligned}$$

Pour obtenir des résultats de convergence en 3D, il faut munir $\mathcal{V}(\Omega)$ d'une norme adaptée. Formellement, la restriction de cette norme à $\mathcal{V}(\Omega)_3$ doit coïncider avec $\| \cdot \|_{\omega}^M$. Un procédé naturel pour transformer un élément \mathbf{v} de $\mathcal{V}(\Omega)$ en un élément de $\mathcal{V}^{MP}(\omega)$ consiste à prendre sa moyenne $\bar{\mathbf{v}}$ suivant l'épaisseur.

Remarque 3.8.1 Pour tout $v \in L^2(\Omega)$, $\|\bar{v}\|_{0,\omega} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|v\|_{0,\Omega}$.

En effet,

$$\begin{aligned}\int_{\omega} \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 v d\xi_3 \right)^2 d\xi_{\omega} &\leq \frac{1}{4} \int_{\omega} \left(\left(\int_{-1}^1 v^2 d\xi_3 \right)^{1/2} \left(\int_{-1}^1 1 d\xi_3 \right)^{1/2} \right)^2 d\xi_{\omega} \\ &\leq \frac{1}{4} \int_{\omega} 2 \left(\int_{-1}^1 v^2 d\xi_3 \right) d\xi_{\omega}.\end{aligned}$$

A partir de la moyenne dans l'épaisseur et de $\| \cdot \|_{\omega}^M$, on définit la norme $\| \cdot \|_{\Omega}^M$ sur $\mathcal{V}(\Omega)$ qui coïncide avec $\| \cdot \|_{\omega}^M$ sur $\mathcal{V}(\Omega)_3$ par

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega), \quad \left\| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3} \right\|_{0,\Omega}^2 + \left(\|\bar{\mathbf{v}}\|_{\omega}^M \right)^2.$$

Proposition 3.8.4 La norme $\| \cdot \|_{\Omega}^M$ n'est pas équivalente sur $\mathcal{V}(\Omega)$ à la norme hilbertienne $\| \cdot \|_{1,\Omega}$.

Démonstration. Pour montrer que les deux normes ne sont pas équivalentes sur $\mathcal{V}(\Omega)$, il suffit de montrer qu'elles ne le sont pas sur $\mathcal{V}(\Omega)_3$. Ce que l'on fait par l'absurde.

Soit $\eta \in H_0^1(\omega)$, alors $\mathbf{v} := (0, 0, 0, \eta) \in \mathcal{V}(\Omega)_3$. Par construction, $\|\mathbf{v}\|_{\Omega}^M = R_l \|\eta\|_{0,\omega}$ et $\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} = \|\eta\|_{1,\omega}$. Si les normes étaient équivalentes, il existerait donc $c > 0$ tel que $\forall \eta \in H_0^1(\omega)$, $\|\eta\|_{1,\omega} \leq c \|\eta\|_{0,\omega}$. En utilisant le même contre exemple que dans la démonstration de la proposition 3.8.2 de l'étude en 2D, on aurait alors

$$\exists c > 0, \forall m \in \mathbb{N}, \forall \eta \in H_0^1(\omega), \quad m^2 \left\| \frac{\partial \eta}{\partial \xi_1} \right\|_{0,\omega}^2 + \left\| \frac{\partial \eta}{\partial \xi_1} \right\|_{0,\omega}^2 \leq c^2 \|\eta\|_{0,\omega}^2$$

ce qui est impossible. Il n'y a donc pas équivalence des normes. ■

Proposition 3.8.5 La norme $\|\cdot\|_{\Omega}^M$ vérifie,

$$\exists c > 0, \forall \varepsilon > 0 \text{ et } \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega), \|\mathbf{v}\|_{\Omega}^M \leq c \left(\sum_{i,j} \|e_{i||j}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v})\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}.$$

Démonstration. Soit $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$, par définition de la norme $\|\cdot\|_{\Omega}^M$

$$\left(\|\mathbf{v}\|_{\Omega}^M \right)^2 = \left\| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi_3} \right\|_{0,\Omega}^2 + \left(\|\bar{\mathbf{v}}\|_{\omega}^M \right)^2.$$

Majorons séparément chaque terme de la somme. D'après la définition de la norme $\|\cdot\|_{\omega}^M$ et la remarque **3.8.1** :

$$\left(\|\bar{\mathbf{v}}\|_{\omega}^M \right)^2 = \sum_{\alpha,\beta} \left\| \overline{\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\mathbf{v})} \right\|_{0,\omega}^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \left\| \gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\mathbf{v}) \right\|_{0,\Omega}^2.$$

On remplace chaque $\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\mathbf{v})$ par son expression en fonction de $e_{\alpha||\beta}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v})$ et on obtient

$$\left(\|\bar{\mathbf{v}}\|_{\omega}^M \right)^2 \leq \frac{1}{2} \left\| e_{1||1}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) - \frac{\varepsilon \xi_3}{R_l^2} v_3 \right\|_{0,\Omega}^2 + \left\| e_{1||2}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) \right\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \left\| e_{2||2}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) \right\|_{0,\Omega}^2.$$

Majorons $\frac{1}{2} \left\| e_{1||1}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) - \frac{\varepsilon \xi_3}{R_l^2} v_3 \right\|_{0,\Omega}^2$ en supposant de plus que $\varepsilon < 1$ et que $R_l \geq 1$ et sachant que ξ_3 appartient à $] -1, 1[$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\| e_{1||1}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) - \frac{\varepsilon \xi_3}{R_l^2} v_3 \right\|_{0,\Omega}^2 &\leq \left\| e_{1||1}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) \right\|_{0,\Omega}^2 + \varepsilon^2 \left\| \frac{\xi_3}{R_l^2} v_3 \right\|_{0,\Omega}^2 \\ &\leq \left\| e_{1||1}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) \right\|_{0,\Omega}^2 + \left\| \frac{\xi_3}{R_l^2} v_3 \right\|_{0,\Omega}^2 \\ &\leq \left\| e_{1||1}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) \right\|_{0,\Omega}^2 + \|v_3\|_{0,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Majorons maintenant $\left\| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi_3} \right\|_{0,\Omega}^2$. Puisque

$$\frac{\partial v_1^{\pm}}{\partial \xi_3} = \varepsilon \left(e_{1||3}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) + e_{3||1}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) + \frac{2v_1^{\pm}}{R_l + \varepsilon \xi_3} - \frac{\partial v_3}{\partial \xi_1} \right)$$

et que, comme $\frac{2}{R_l + \varepsilon \xi_3}$ appartient à $L^2(\Omega)$, il existe une constante strictement positive c telle que

$$\left\| \frac{2}{R_l + \varepsilon \xi_3} v_1^{\pm} \right\|_{0,\Omega}^2 \leq c \|v_1^{\pm}\|_{0,\Omega}^2,$$

on en déduit la majoration

$$\left\| \frac{\partial v_1^{\pm}}{\partial \xi_3} \right\|_{0,\Omega}^2 \leq \varepsilon^2 c \left(\left\| e_{1||3}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) \right\|_{0,\Omega}^2 + \left\| e_{3||1}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) \right\|_{0,\Omega}^2 + \|v_1\|_{0,\Omega}^2 + \left\| \frac{\partial v_3}{\partial \xi_1} \right\|_{0,\Omega}^2 \right).$$

De même, en remarquant que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial v_2^{\pm}}{\partial \xi_3} \right\|_{0,\Omega}^2 &= \varepsilon^2 \left\| e_{2||3}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) + e_{3||2}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) - \frac{\partial v_3}{\partial \xi_2} \right\|_{0,\Omega}^2 \\ &\leq 2\varepsilon^2 \left(\left\| e_{2||3}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) \right\|_{0,\Omega}^2 + \left\| e_{3||2}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) \right\|_{0,\Omega}^2 + \left\| \frac{\partial v_3}{\partial \xi_2} \right\|_{0,\Omega}^2 \right) \end{aligned}$$

et que

$$\left\| \frac{\partial v_3}{\partial \xi_3} \right\|_{0,\Omega}^2 = \varepsilon^2 \left\| e_{3\|3}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) \right\|_{0,\Omega}^2$$

puis en réinjectant ces inégalités dans la majoration de $\left(\|\mathbf{v}\|_{\Omega}^M \right)^2$, on montre l'existence d'une constante positive c telle que

$$\left(\|\mathbf{v}\|_{\Omega}^M \right)^2 \leq \sum_{\alpha,\beta} \left\| e_{\alpha\|\beta}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) \right\|_{0,\Omega}^2 + c \sum_i \left\| e_{i\|3}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) \right\|_{0,\Omega}^2 + c\varepsilon^2 \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2.$$

Enfin, à l'aide de l'inégalité de type Korn du théorème **10.2.1** (voir Annexe III) on a le résultat. ■

Pour se placer dans le cadre d'application du théorème de Lax-Milgram, on complète $\mathcal{V}(\Omega)$ pour la norme $\| \cdot \|_{\Omega}^M$.

3.8.3 Forces admissibles

Notations :

$$L^P(\varepsilon) := \text{forme linéaire correspondant au problème } \mathcal{P}^P(\varepsilon, \Omega).$$

On a

$$L^P(\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}(\Omega) \longmapsto \mathbb{R} \\ \mathbf{v} \longrightarrow L^P(\varepsilon)(\mathbf{v}) = \int_{\omega_1} \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l} \right) f^{i\pm} v_i d\xi_{\omega} \end{array} \right. .$$

On souhaite que les conditions d'application du théorème de Lax-Milgram soient vérifiées. Les forces extérieures déjà supposée L^2 (paragraphe **3.7.2**) doivent appartenir à un sous espace de $L^2(\omega)$ tel que la forme linéaire

$$L^P(\varepsilon)(\mathbf{v}) := \int_{\omega_1} \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l} \right) f^{i\pm} v_i d\xi_{\omega}$$

soit continue pour la norme $\| \cdot \|_{\Omega}^M$ dans l'espace complété $\mathcal{V}^{MP}(\Omega)$.

Définition 3.8.1 Les forces extérieures $f^{i\pm}$ sont dites admissibles, au sens donné dans [Ciarlet, 2000] si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists F^{ij\pm}(\varepsilon) \in L^2(\Omega)$ et $\exists F^{ij\pm} \in L^2(\Omega)$ telles que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$,

$$L^P(\varepsilon)(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} [F^{ij\pm}(\varepsilon)] : \left[e_{i\|j}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) \right] \left(1 + \frac{\varepsilon \xi_3}{R_l} \right) d\xi$$

et,

$$F^{ij\pm}(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} F^{ij\pm} \text{ dans } L^2(\Omega) .$$

Remarque 3.8.2 Les formes linéaires $L^P(\varepsilon)$ sont continues sur $(\mathcal{V}(\Omega), \|\cdot\|_{1,\Omega})$ et uniformément continues par rapport à ε .

Proposition 3.8.6 Si les forces sont admissibles au sens de la définition 3.8.1, alors elles vérifient, il existe $[f^{\alpha\beta}] \in [L^2(\omega)]$ tel que

$$\forall \boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\omega^+)^2 \times H_0^1(\omega^-)^2 \times L^2(\omega), \quad \int_{\omega} f^i \eta_i d\xi_{\omega} = \int_{\omega} [f^{\alpha\beta}] : [\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta})] d\xi_{\omega}$$

Démonstration. La démonstration se fait en deux temps, on montre d'abord que

$$F^{13\pm} = 0, \quad F^{23\pm} = 0 \quad \text{et} \quad F^{33\pm} = 0$$

puis que

$$\int_{\omega} f^i \eta_i d\xi_{\omega} = \int_{\omega} 2 [F^{\alpha\beta}] : [\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta})] d\xi_{\omega}.$$

Pour montrer le premier point, prenons comme fonction test dans $\mathcal{P}(\varepsilon, \Omega)$ la fonction $\mathbf{w} = \varepsilon \mathbf{v}$ où $\mathbf{v} = (v_1^+, v_2^+, v_1^-, v_2^-, v_3) \in \mathcal{V}(\Omega)$. Puisque

$$\int_{\omega_1} \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l}\right) f^{i\pm} w_i d\xi_{\omega} = \int_{\Omega} [F^{ij\pm}(\varepsilon)] : [e_{i||j}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{w})] \left(1 + \frac{\varepsilon \xi_3}{R_l}\right) d\xi,$$

et que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\omega_1} \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l}\right) f^{i\pm} w_i d\xi_{\omega} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{\omega_1} \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l}\right) f^{i\pm} v_i d\xi_{\omega} = 0$$

alors on a,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} [F^{ij\pm}(\varepsilon)] : [e_{i||j}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{w})] \left(1 + \frac{\varepsilon \xi_3}{R_l}\right) d\xi = 0.$$

Or,

$$[F^{ij\pm}(\varepsilon)] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} [F^{ij\pm}] \quad \text{et} \quad [e_{i||j}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{w})] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_1^{\pm}}{\partial \xi_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_2^{\pm}}{\partial \xi_3} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_1^{\pm}}{\partial \xi_3} & \frac{1}{2} \frac{\partial v_2^{\pm}}{\partial \xi_3} & \frac{\partial v_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \quad \text{dans} \quad [L^2(\Omega)].$$

par conséquent,

$$\int_{\Omega} \left(F^{13\pm} \frac{\partial v_1^\pm}{\partial \xi_3} + F^{23\pm} \frac{\partial v_2^\pm}{\partial \xi_3} + F^{33\pm} \frac{\partial v_3^\pm}{\partial \xi_3} \right) d\xi = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$$

donc d'après le théorème **10.1.1** (annexe III)

$$F^{13\pm} = 0, \quad F^{23\pm} = 0 \quad \text{et} \quad F^{33\pm} = 0.$$

Montrons maintenant le deuxième point. Soit $\mathbf{v} = (v_1^+, v_2^+, v_1^-, v_2^-, v_3) \in \mathcal{V}(\Omega)_3$. Passons à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ dans l'égalité

$$\int_{\omega_1} \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l} \right) f^{i\pm} v_i d\xi_\omega = \int_{\Omega} [F^{ij\pm}(\varepsilon)] : \left[e_{i||j}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) \right] \left(1 + \frac{\varepsilon \xi_3}{R_l} \right) d\xi$$

On obtient,

$$\int_{\omega_1} f^i v_i d\xi_\omega = \int_{\Omega} \left(F^{11} \left(\frac{\partial v_1}{\partial \xi_1} + \frac{1}{R_l} v_3 \right) + F^{12} \left(\frac{\partial v_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial v_2}{\partial \xi_1} \right) + F^{22} \frac{\partial v_2}{\partial \xi_2} \right) d\xi.$$

ce qui, puisque \mathbf{v} est indépendant de ξ_3 , s'écrit aussi

$$\int_{\omega} f^i v_i d\xi_\omega = 2 \int_{\omega} \left(\left(\frac{\partial v_1}{\partial \xi_1} + \frac{1}{R_l} v_3 \right) \overline{F^{11}} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial v_2}{\partial \xi_1} \right) \overline{F^{12}} + \frac{\partial v_2}{\partial \xi_2} \overline{F^{22}} \right) d\xi_1 d\xi_2.$$

D'où le résultat en choisissant $[f^{\alpha\beta}] = 2 \left[\overline{F^{\alpha\beta}} \right]$. ■

Réciproquement, montrons que

Proposition 3.8.7 *Soit $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\omega)$, s'il existe $[f^{\alpha\beta}] \in [L^2(\omega)]$, tel que*

$$\forall \boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\omega^+)^2 \times H_0^1(\omega^-)^2 \times L^2(\omega), \quad \int_{\omega} f^i \eta_i d\xi_\omega = \int_{\omega} [f^{\alpha\beta}] : [\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta})] d\xi_\omega$$

alors, $\forall \varepsilon > 0$, il existe $[F^{ij\pm}(\varepsilon)] \in [L^2(\Omega)]$ tel que pour tout $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$,

$$L^P(\varepsilon)(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} [F^{ij\pm}(\varepsilon)] : \left[e_{i||j}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) \right] \left(1 + \frac{\varepsilon \xi_3}{R_l} \right) d\xi.$$

Démonstration. Soit $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$, on remarque formellement que

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{v} d\xi_3 = \frac{1}{2} [(1 + \xi_3) \mathbf{v}]_{-1}^1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 + \xi_3) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi_3} d\xi_3 = \mathbf{v}_{/\omega_1} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 + \xi_3) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi_3} d\xi_3.$$

Par conséquent, puisque

$$L^P(\varepsilon)(\mathbf{v}) = \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l} \right) \int_{\omega_1} \mathbf{f}^\pm \mathbf{v} d\xi_\omega = \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l} \right) \int_{\omega} \mathbf{f}^\pm \mathbf{v}_{/\omega_1} d\xi_\omega,$$

on obtient en remplaçant \mathbf{v}/ω_1

$$L^P(\varepsilon)(\mathbf{v}) = \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l}\right) \int_{\omega} \mathbf{f}^{\pm} \left(\bar{\mathbf{v}} + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 + \xi_3) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi_3} d\xi_3 \right) d\xi_{\omega}.$$

Or, $\bar{\mathbf{v}} \in H_0^1(\omega^+)^2 \times H_0^1(\omega^-)^2 \times L^2(\omega)$ donc par hypothèse,

$$\int_{\omega} f^i \bar{v}_i d\xi_{\omega} = \int_{\omega} [f^{\alpha\beta}] : [\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\bar{\mathbf{v}})] d\xi_{\omega}$$

et \mathbf{f}^{\pm} ne dépend pas de ξ_3 donc

$$\int_{\omega} \mathbf{f}^{\pm} \int_{-1}^1 (1 + \xi_3) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi_3} d\xi_3 d\xi_{\omega} = \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l}\right) \int_{\Omega} \mathbf{f}^{\pm} (1 + \xi_3) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi_3} d\xi.$$

On en déduit donc, puisque $\mathbf{f}^{\pm} (1 + \xi_3) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ et que $[f^{\alpha\beta}] \in [L^2(\omega)]$, qu'il existe $c > 0$ tel que

$$|L^P(\varepsilon)(\mathbf{v})| \leq c \left(\|\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\bar{\mathbf{v}})\|_{0,\omega} + \left\| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi_3} \right\|_{0,\Omega} \right) \leq c \|\mathbf{v}\|_{\Omega}^M.$$

or d'après la proposition **3.8.5**,

$$\|\mathbf{v}\|_{\Omega}^M \leq c \left(\sum_{i,j} \left\| e_{i\|j}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}$$

donc $L^P(\varepsilon)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{V}(\Omega)$ pour la norme induite par le produit scalaire

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_e = \int_{\Omega} \left[e_{i\|j}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{u}) \right] : \left[e_{i\|j}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) \right] \left(1 + \frac{\varepsilon \xi_3}{R_l}\right) d\xi.$$

L'espace $(\mathcal{V}(\Omega), \|\cdot\|_e)$ est un espace de Hilbert, donc d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe $\mathbf{w}_{\varepsilon} \in \mathcal{V}(\Omega)$ tel que

$$|L^P(\varepsilon)(\mathbf{v})| = \langle \mathbf{w}_{\varepsilon}, \mathbf{v} \rangle_e$$

Posons $F^{ij\pm}(\varepsilon) := e_{i\|j}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{w}_{\varepsilon})$. Alors, $[F^{ij\pm}(\varepsilon)] \in [L^2(\Omega)]$ et vérifie $L^P(\varepsilon)(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} [F^{ij\pm}(\varepsilon)] :$

$$\left[e_{i\|j}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) \right] \left(1 + \frac{\varepsilon \xi_3}{R_l}\right) d\xi. \quad \blacksquare$$

Définition 3.8.2 Soit $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\omega)$, on dit que \mathbf{f} est admissible s'il existe $[f^{\alpha\beta}] \in [L^2(\omega)]$, tel que

$$\forall \boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\omega^+)^2 \times H_0^1(\omega^-)^2 \times L^2(\omega), \quad \int_{\omega} f^i \eta_i d\xi_{\omega} = \int_{\omega} [f^{\alpha\beta}] : [\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta})] d\xi_{\omega}$$

Remarque 3.8.3 Si \mathbf{f} est admissible, alors $L^P(\varepsilon)$ est continue pour la norme $\|\cdot\|_{\Omega}^M$. En effet on montre dans la démonstration de la proposition **3.8.7** que

$$|L^P(\varepsilon)(\mathbf{v})| \leq c \|\mathbf{v}\|_{\Omega}^M.$$

Remarque 3.8.4 Dans le cas où les forces extérieures sont exclusivement surfacique, on peut donc affaiblir par rapport à [Ciarlet, 2000] les conditions d'admissibilité des forces.

3.8.4 Convergence de la suite des déplacements normalisés $(\mathbf{u}(\varepsilon))_\varepsilon$

Notations :

$$\begin{aligned} B_\omega^{MP} &:= \text{unique extension continue pour } \|\cdot\|_\omega^M \text{ de } B_\omega^{P\pm} \text{ à } \mathcal{V}^{MP}(\omega), \\ C_\omega^{MP} &:= \text{unique extension continue pour } \|\cdot\|_\omega^M \text{ de } C_\omega^{P\pm} \text{ à } \mathcal{V}^{MP}(\omega), \\ L_\omega^{MP} &:= \text{unique extension continue pour } \|\cdot\|_\omega^M \text{ de } L_\omega^{P\pm} \text{ à } V^{MP}(\omega), \end{aligned}$$

avec,

$$\begin{aligned} B_\omega^{P\pm}(\zeta, \boldsymbol{\eta}) &:= \frac{1}{2} \int \underline{\mathbf{A}}^{P\pm}(\omega) : \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{P\pm}(\boldsymbol{\varsigma}) : \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) d\xi_\omega, \\ C_\omega^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) &:= \int_\omega \eta_3 d\xi_\omega, \\ L_\omega^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) &:= \frac{1}{2} \int [f^{\alpha\beta}] : [\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta})] d\xi_\omega, \\ \mathcal{V}_0^{MP}(\omega) &:= \{ \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}^{MP}(\omega), C_\omega^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) = 0 \}, \\ \mathcal{P}_\omega^{MP} &:= \begin{cases} \zeta \in \mathcal{V}_0^{MP}(\omega), \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_0^{MP}(\omega) \\ B_\omega^{MP}(\zeta, \boldsymbol{\eta}) = L_\omega^{MP}(\boldsymbol{\eta}). \end{cases} \end{aligned}$$

La forme linéaire sur $\mathcal{V}^P(\omega)$, $L_\omega^{P\pm}$, peut aussi s'exprimer sous la forme

$$L_\omega^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2} \int_\omega (f^{1\pm} \eta_1^\pm + f^{2\pm} \eta_2^\pm + f^{3\pm} \eta_3) d\xi_\omega.$$

Proposition 3.8.8 La forme linéaire $L_\omega^{P\pm}$ est continue sur $\mathcal{V}^P(\omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_\omega^M$.

Démonstration. Soit $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1^\pm, \eta_2^\pm, \eta_1^-, \eta_2^-, \eta_3) \in \mathcal{V}^P(\omega)$, alors, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |L_\omega^{P\pm}(\boldsymbol{\eta})| &= \left| \int [f^{\alpha\beta}] : [\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta})] d\xi_\omega \right| \\ &\leq \left\| f^{\alpha\beta} \right\|_{0,\omega} \left\| \gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) \right\|_{0,\omega} \\ &\leq \left\| f^{\alpha\beta} \right\|_{0,\omega} \left\| \boldsymbol{\eta} \right\|_\omega^M, \end{aligned}$$

d'où la continuité. ■

Corollaire 3.8.2 La forme linéaire $L_\omega^{P\pm}$, continue pour $\|\cdot\|_\omega^M$ admet une unique extension continue sur $\mathcal{V}^{MP}(\omega)$, notée L_ω^{MP} .

De même,

Proposition 3.8.9 La forme linéaire $C_\omega^{P\pm}$ est continue sur $\mathcal{V}^P(\omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_\omega^M$.

Démonstration. Soit $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1^\pm, \eta_2^\pm, \eta_1^-, \eta_2^-, \eta_3) \in \mathcal{V}^P(\omega)$, alors, en appliquant l'inégalité triangulaire puis de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |C_\omega^{P\pm}(\boldsymbol{\eta})| &= \left| \int_\omega \eta_3 d\xi_\omega \right| = \left| \int_\omega R_l \left(\gamma_{11}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) - \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1} \right) d\xi_\omega \right| \\ &\leq R_l \left| \int_\omega \gamma_{11}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) d\xi_\omega \right| + R_l \left| \int_\omega \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1} d\xi_\omega \right| \\ &\leq R_l \text{mes}(\omega) \|\gamma_{11}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta})\|_{0,\omega} \\ &\leq R_l \text{mes}(\omega) \|\boldsymbol{\eta}\|_\omega^M, \end{aligned}$$

d'où la continuité. ■

Corollaire 3.8.3 La forme linéaire $C_\omega^{P\pm}$, continue pour $\|\cdot\|_\omega^M$, admet une unique extension continue sur $\mathcal{V}^{MP}(\omega)$, notée C_ω^{MP} .

De même,

Proposition 3.8.10 La forme bilinéaire $B_\omega^{P\pm}$ est continue sur $\mathcal{V}^P(\omega) \times \mathcal{V}^P(\omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_\omega^M$, elle admet donc une unique extension continue à $\mathcal{V}^{MP}(\omega)$, notée B_ω^{MP} .

Théorème 3.8.1 Soit \mathbf{f} admissible au sens de la définition 3.8.2. Il existe $\mathbf{u} \in \mathcal{V}^{MP}(\Omega)$ et il existe $\boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{V}_0^{MP}(\omega)$ tels que

$$\mathbf{u}(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{u} \text{ dans } \mathcal{V}^{MP}(\Omega) \text{ et } \overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \boldsymbol{\zeta} \text{ dans } \mathcal{V}_0^{MP}(\omega)$$

et $\boldsymbol{\zeta}$ est l'unique solution du problème bi-dimensionnel

$$\mathcal{P}_\omega^{MP} : \begin{cases} \boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{V}_0^{MP}(\omega), \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_0^{MP}(\omega) \\ B_\omega^{MP}(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}) = L_\omega^{MP}(\boldsymbol{\eta}). \end{cases}$$

Démonstration. La preuve se décompose en 14 points successifs.

1. Majorations a priori et extraction de sous suites faiblement convergentes. Dans ce premier point, on montre que les normes $\|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_\Omega^M$, $\|\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}\|_\omega^M$, $\|\varepsilon \mathbf{u}(\varepsilon)\|_{1,\Omega}$ et $\|e_{i||j}^{P\pm}(\varepsilon)\|_{0,\Omega}$ sont bornées. Puis on en déduit l'existence d'une sous-suite extraite de $\mathbf{u}(\varepsilon)$, notée $\mathbf{u}(\varepsilon')$, l'existence de $\mathbf{u} \in \mathcal{V}^{MP}(\Omega)$, de $\mathbf{u}^{-1} = (u_i^{-1}) \in \mathcal{V}(\Omega)$, de $e_{i||j}^{P\pm} \in L^2(\Omega)$, de $\boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{V}^{MP}(\omega)$ et de $\kappa \in \mathbb{R}$ telles que

$$\begin{array}{lll} \mathbf{u}(\varepsilon') & \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} \mathbf{u} & \text{dans } \mathcal{V}^{MP}(\Omega) \\ \varepsilon' \mathbf{u}(\varepsilon') & \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} \mathbf{u}^{-1} & \text{dans } \mathcal{V}(\Omega) \\ e_{i||j}^{P\pm}(\varepsilon') & \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} e_{i||j}^{P\pm} & \text{dans } L^2(\Omega) \\ \overline{\mathbf{u}(\varepsilon')} & \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} \boldsymbol{\zeta} & \text{dans } \mathcal{V}^{MP}(\omega) \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon'}} \int_{\omega_{-1}} u_3(\varepsilon') \left(1 - \frac{\varepsilon'}{R_l}\right) d\xi_\omega & \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} \kappa & \text{dans } \mathbb{R} \end{array}$$

Appliquons la proposition **3.8.5** à la fonction particulière $\mathbf{v} = \mathbf{u}(\varepsilon)$,

$$\left(\|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_{\Omega}^M \right)^2 \leq c \sum_{i,j} \left\| e_{i||j}^{P\pm}(\varepsilon) \right\|_{0,\Omega}^2.$$

Le tenseur d'élasticité normalisé, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\varepsilon)$, est uniformément défini positif donc il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\sum_{i,j} \left\| e_{i||j}^{P\pm}(\varepsilon) \right\|_{0,\Omega}^2 \leq c \int_{\Omega} A^{P\pm}(\varepsilon)^{ijkl} e_{k||l}^{P\pm}(\varepsilon) e_{i||j}^{P\pm}(\varepsilon) \sqrt{g^{\pm}(\varepsilon)} d\xi.$$

On en déduit donc

$$\left(\|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_{\Omega}^M \right)^2 \leq c \int_{\Omega} A^{P\pm}(\varepsilon)^{ijkl} e_{k||l}^{P\pm}(\varepsilon) e_{i||j}^{P\pm}(\varepsilon) \sqrt{g^{\pm}(\varepsilon)} d\xi.$$

Donc

$$\left(\|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_{\Omega}^M \right)^2 \leq c \left(\int_{\Omega} A^{P\pm}(\varepsilon)^{ijkl} e_{k||l}^{P\pm}(\varepsilon) e_{i||j}^{P\pm}(\varepsilon) \sqrt{g^{\pm}(\varepsilon)} d\xi + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\pi}{V} \left(1 - \frac{\varepsilon'}{R_l} \right)^2 \left(\int_{\omega_{-1}} u_3^{\pm}(\varepsilon) d\xi_{\omega} \right)^2 \right) = c L^P(\varepsilon) (\mathbf{u}(\varepsilon)).$$

Les forces sont admissibles, par conséquent d'après la remarque **3.8.3**, il existe $c > 0$ tel que

$$L^P(\varepsilon) (\mathbf{u}(\varepsilon)) \leq c \|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_{\Omega}^M.$$

La suite $\left(\|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_{\Omega}^M \right)_{\varepsilon}$ est donc bornée, et puisqu'on a les inégalités

$$\begin{aligned} \left(\|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_{\Omega}^M \right)^2 &\leq c \sum_{i,j} \left\| e_{i||j}^{P\pm}(\varepsilon) \right\|_{0,\Omega}^2 \leq c \left(\int_{\Omega} A^{P\pm}(\varepsilon)^{ijkl} e_{k||l}^{P\pm}(\varepsilon) e_{i||j}^{P\pm}(\varepsilon) \sqrt{g^{\pm}(\varepsilon)} d\xi + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\pi}{V} \left(1 - \frac{\varepsilon'}{R_l} \right)^2 \left(\int_{\omega_{-1}} u_3^{\pm}(\varepsilon) d\xi_{\omega} \right)^2 \right) \\ &\leq c \|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_{\Omega}^M, \end{aligned}$$

les suites $\left(\left\| e_{i||j}^{P\pm}(\varepsilon) \right\|_{0,\Omega} \right)_{\varepsilon}$ et $\left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\pi}{V} \left(1 - \frac{\varepsilon'}{R_l} \right)^2 \left(\int_{\omega_{-1}} u_3^{\pm}(\varepsilon) d\xi_{\omega} \right)^2 \right)_{\varepsilon}$ le sont également. Grâce à l'inégalité de type Korn du théorème **10.2.1** (Annexe III), on a également

$$\varepsilon \|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_{1,\Omega} \leq c$$

enfin,

$$\left(\left\| \frac{\partial \mathbf{u}(\varepsilon)}{\partial \xi_3} \right\|_{0,\Omega}^2 + \left(\left\| \overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} \right\|_{\omega}^M \right)^2 = \left(\|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_{\Omega}^M \right)^2 \text{ et } \|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_{\Omega}^M \leq c \right) \implies \left(\left\| \overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} \right\|_{\omega}^M \leq c \right).$$

Ces cinq majorations assurent l'existence de suites extraites et de limites faibles dans les espaces respectifs.

2. On montre les convergences fortes suivantes

$$\begin{aligned} \varepsilon' \mathbf{u}(\varepsilon') &\xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} \mathbf{u}^{-1} && \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega), \\ \frac{\partial u_3(\varepsilon')}{\partial \xi_3} &\xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} 0 && \text{dans } L^2(\Omega), \end{aligned}$$

puis celles de,

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \left(1 - \frac{\varepsilon'}{R_l}\right) u_3(\varepsilon') d\xi_\omega &\xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} 0 && \text{dans } \mathbb{R}, \\ \int_{\omega_{-1}} \left(1 - \frac{\varepsilon'}{R_l}\right) \overline{u_3(\varepsilon')} d\xi_\omega &\xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} 0 && \text{dans } \mathbb{R}, \\ \int_{\omega_{+1}} \left(1 - \frac{\varepsilon'}{R_l}\right) u_3(\varepsilon') d\xi_\omega &\xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} 0 && \text{dans } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

et en conséquence,

$$C_\omega^{P\pm} \left(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon')} \right) \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} 0.$$

La première convergence forte provient de la convergence faible $\varepsilon' \mathbf{u}(\varepsilon') \rightharpoonup \mathbf{u}^{-1}$ dans $\mathcal{V}(\Omega)$ montrée au point **1**, et de l'injection compacte de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Pour la seconde, on remarque que

$$\left(\frac{\partial u_3(\varepsilon')}{\partial \xi_3} = \varepsilon' e_{3\|3}^{P\pm}(\varepsilon') \right) \implies \left(\left\| \frac{\partial u_3(\varepsilon')}{\partial \xi_3} \right\|_{0,\Omega}^2 = \varepsilon' \left\| e_{3\|3}^{P\pm}(\varepsilon') \right\|_{0,\Omega}^2 \leq \varepsilon' c \right).$$

Pour la suivante,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon'}} \int_{\omega_{-1}} u_3(\varepsilon') \left(1 - \frac{\varepsilon'}{R_l}\right) d\xi_\omega &\xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} \kappa \implies \exists c > 0, \left| \int_{\omega_{-1}} \left(1 - \frac{\varepsilon'}{R_l}\right) u_3(\varepsilon') d\xi_\omega \right| \leq \sqrt{\varepsilon'} c \\ &\implies \int_{\omega_{-1}} \left(1 - \frac{\varepsilon'}{R_l}\right) u_3(\varepsilon') d\xi_\omega \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

On remarque ensuite que

$$\int_{\omega} \left(1 - \frac{\varepsilon'}{R_l}\right) \overline{u_3(\varepsilon')} d\xi_\omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(1 - \frac{\varepsilon'}{R_l}\right) u_3(\varepsilon') d\xi_\Omega.$$

On intègre par parties en choisissant pour primitive de 1 la fonction $\xi_3 \mapsto \xi_3 - 1$ (cette primitive s'annule sur ω_1) et on obtient

$$\int_{\omega} \left(1 - \frac{\varepsilon'}{R_l}\right) \overline{u_3(\varepsilon')} d\xi_\omega = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\xi_3 - 1) \left(1 - \frac{\varepsilon'}{R_l}\right) \frac{\partial u_3(\varepsilon')}{\partial \xi_3} d\xi_\Omega + \frac{1}{2} \int_{\omega_{-1}} \left(1 - \frac{\varepsilon'}{R_l}\right) u_3(\varepsilon') n_3 d\xi_\omega$$

Ces deux intégrales tendent vers 0.

Pour établir la dernière convergence forte, on utilise le même procédé en choisissant cette fois ci $\xi_3 \mapsto \xi_3 + 1$ comme primitive de 1 dans l'intégration par parties.

3. On montre dans ce point que les limites faibles trouvées dans le point 1 vérifient

$$e_{1\parallel 3}^{P\pm} = 0, \quad e_{2\parallel 3}^{P\pm} = 0, \quad e_{3\parallel 3}^{P\pm} = -\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{33}} e_{1\parallel 1}^{P\pm} - \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{33}} e_{2\parallel 2}^{P\pm}$$

On prend comme fonction test $\mathbf{w} = \varepsilon' \mathbf{v}$ dans $\mathcal{P}(\varepsilon', \Omega)$, et on passe à la limite terme à terme en remarquant d'abord que

$$e_{i\parallel j}^{P\pm}(\varepsilon', \mathbf{w}) = \varepsilon' e_{i\parallel j}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{v})$$

et que par conséquent,

$$\left[e_{i\parallel j}^{P\pm}(\varepsilon', \mathbf{w}) \right] \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_1^\pm}{\partial \xi_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_2^\pm}{\partial \xi_3} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_1^\pm}{\partial \xi_3} & \frac{1}{2} \frac{\partial v_2^\pm}{\partial \xi_3} & \frac{\partial v_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \text{ dans } [L^2(\Omega)].$$

On en déduit donc

$$\int_{\Omega} A^{P\pm}(\varepsilon')^{ijkl} e_{k\parallel l}^{P\pm}(\varepsilon') e_{i\parallel j}^{P\pm}(\varepsilon, \mathbf{w}) \sqrt{g^{P\pm}(\varepsilon')} d\xi \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left(2\mu_{13} e_{1\parallel 3}^{P\pm} \frac{\partial v_1^\pm}{\partial \xi_3} + 2\mu_{23} e_{2\parallel 3}^{P\pm} \frac{\partial v_2^\pm}{\partial \xi_3} + \left(\lambda_{13} e_{1\parallel 1}^{P\pm} + \lambda_{23} e_{2\parallel 2}^{P\pm} + \lambda_{33} e_{3\parallel 3}^{P\pm} \right) \frac{\partial v_3}{\partial \xi_3} \right) d\xi$$

Par ailleurs, puisque $\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{\omega_{-1}} \left(1 - \frac{\varepsilon'}{R_l} \right) u_3(\varepsilon') d\xi_\omega = 0$, et que, par construction de la fonction test,

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\varepsilon'} \frac{\pi}{V} \int_{\omega_{-1}} \left(1 - \frac{\varepsilon'}{R_l} \right) w_3^\pm d\xi_\omega \right| = \left| \frac{\pi}{V} \int_{\omega_{-1}} \left(1 - \frac{\varepsilon'}{R_l} \right) v_3 d\xi_\omega \right| \in \mathbb{R}$$

on a en multipliant les deux limites

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon'} \frac{\pi}{V} \int_{\omega_{-1}} \left(1 - \frac{\varepsilon'}{R_l} \right) w_3^\pm d\xi_\omega \int_{\omega_{-1}} \left(1 - \frac{\varepsilon'}{R_l} \right) u_3(\varepsilon') d\xi_\omega = 0$$

Enfin, le choix de \mathbf{w} entraîne également que

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{\omega_{-1}} f^{i\pm} w_i \left(1 + \frac{\varepsilon'}{R_l} \right) d\xi_\omega = 0$$

On passe maintenant à la limite dans la formulation variationnelle,

$$\int_{\Omega} \left(2\mu_{13} e_{1\parallel 3}^{P\pm} \frac{\partial v_1^\pm}{\partial \xi_3} + 2\mu_{23} e_{2\parallel 3}^{P\pm} \frac{\partial v_2^\pm}{\partial \xi_3} + \left(\lambda_{13} e_{1\parallel 1}^{P\pm} + \lambda_{23} e_{2\parallel 2}^{P\pm} + \lambda_{33} e_{3\parallel 3}^{P\pm} \right) \frac{\partial v_3}{\partial \xi_3} \right) d\xi = 0$$

d'où le résultat en appliquant le théorème **10.1.1** (Annexe III).

4. Dans ce point, on montre que toute la suite $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ vérifie

$$\left[\overline{e_{\alpha\|\beta}^{P\pm}(\varepsilon)} - \gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}) \right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} [0] \text{ dans } [L^2(\omega)]$$

et que par conséquent la sous-suite $(\mathbf{u}(\varepsilon'))_{\varepsilon'}$, définie dans le point **1** vérifie

$$\left[\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon')}) \right] \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} \left[\overline{e_{\alpha\|\beta}^{P\pm}} \right] \text{ dans } [L^2(\omega)].$$

ce qui permettra le moment venu (point **8**) de passer à la limite dans une variante du second membre.

Puisque

$$\left[\overline{e_{\alpha\|\beta}^{P\pm}(\varepsilon)} - \gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}) \right] = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{R_l^2} \overline{\xi_3 u_3(\varepsilon)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

il suffit de montrer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{R_l^2} \left\| \overline{\xi_3 u_3(\varepsilon)} \right\|_{0;\omega} = 0.$$

Ce qui est vrai car :

$$\overline{\xi_3 u_3(\varepsilon)} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \xi_3 u_3(\varepsilon) d\xi_3,$$

on intègre par parties

$$\overline{\xi_3 u_3(\varepsilon)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (\xi_3^2 - 1) u_3(\varepsilon) \right]_{-1}^1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (\xi_3^2 - 1) \frac{\partial u_3(\varepsilon)}{\partial \xi_3} d\xi_3 = \frac{1}{2} (1 - \xi_3^2) \frac{\partial u_3(\varepsilon)}{\partial \xi_3}.$$

De cette égalité on déduit les majorations

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{R_l^2} \left\| \overline{\xi_3 u_3(\varepsilon)} \right\|_{0;\omega} &\leq \frac{\varepsilon}{2R_l^2} \left\| (1 - \xi_3^2) \frac{\partial u_3(\varepsilon)}{\partial \xi_3} \right\|_{0;\omega} \leq \frac{\varepsilon}{R_l^2} \left\| (1 - \xi_3^2) \frac{\partial u_3(\varepsilon)}{\partial \xi_3} \right\|_{0,\Omega} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{R_l^2} \|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_{\Omega}^M \leq c\varepsilon \end{aligned}$$

donc,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{R_l^2} \left\| \overline{\xi_3 u_3(\varepsilon)} \right\|_{0;\omega} = 0.$$

et en conséquence

$$\left[\overline{e_{\alpha\|\beta}^{P\pm}(\varepsilon)} - \gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}) \right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} [0] \text{ dans } [L^2(\omega)].$$

Si bien que pour montrer que

$$\left[\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon')}) \right] \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} \left[\overline{e_{\alpha\|\beta}^{P\pm}} \right] \text{ dans } [L^2(\omega)],$$

il suffit de montrer que

$$\left[e_{\alpha\|\beta}^{P\pm}(\varepsilon') \right] \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} \left[e_{\alpha\|\beta}^{P\pm} \right] \text{ dans } [L^2(\omega)]$$

Or, on sait depuis le point **1** que

$$\left[e_{i\|j}^{P\pm}(\varepsilon') \right] \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} \left[e_{i\|j}^{P\pm} \right] \text{ dans } [L^2(\Omega)]$$

Par définition de la convergence faible on a donc

$$\forall \varphi \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} e_{\alpha\|\beta}^{P\pm}(\varepsilon') \varphi d\xi \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{\Omega} e_{\alpha\|\beta}^{P\pm} \varphi d\xi$$

ce qui entraîne,

$$\forall \varphi \in L^2(\omega), \int_{\omega} \left(\int_{-1}^1 e_{\alpha\|\beta}^{P\pm}(\varepsilon') d\xi_3 \right) \varphi d\xi_{\omega} \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{\omega} \left(\int_{-1}^1 e_{\alpha\|\beta}^{P\pm} d\xi_3 \right) \varphi d\xi_{\omega}$$

c'est à dire

$$\overline{e_{\alpha\|\beta}^{P\pm}(\varepsilon')} \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} \overline{e_{\alpha\|\beta}^{P\pm}} \text{ dans } L^2(\omega)$$

5. Dans ce point, on montre une propriété importante qui permet d'éliminer le terme de couplage dans le modèle asymptotique, à savoir, qu'il existe un réel k tel que

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon'} \frac{\pi}{V} \int_{\omega_{-1}} \left(1 - \frac{\varepsilon'}{R_l} \right) u_3(\varepsilon') d\xi_{\omega} = k.$$

Remarquons tout d'abord que

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^P(\varepsilon') \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \text{ et } \left[e_{i\|j}^{P\pm}(\varepsilon') \right] \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} \begin{bmatrix} e_{1\|1}^{P\pm} & e_{1\|2}^{P\pm} & 0 \\ e_{1\|2}^{P\pm} & e_{2\|2}^{P\pm} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{33}} e_{1\|1}^{P\pm} - \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{33}} e_{2\|2}^{P\pm} \end{bmatrix}.$$

Soit $\mathbf{v} = (0, 0, 0, 0, v_3) \in \mathcal{V}(\Omega)_3$, indépendante de la variable transverse ξ_3 , alors

$$\left[e_{i\|j}^{P\pm}(\varepsilon', \mathbf{v}) \right] \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_l} v_3 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_1} & \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Passons à la limite terme à terme dans $\mathcal{P}(\varepsilon', \Omega)$ pour ce choix de \mathbf{v} .

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\varepsilon') : \left[e_{k\|l}^{P\pm}(\varepsilon') \right] : \left[e_{i\|j}^{P\pm}(\varepsilon', \mathbf{v}) \right] \sqrt{g^{P\pm}(\varepsilon')} d\xi \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{R_l} v_3 \left(A^{P\pm}(\omega)^{1111} e_{1\|1}^{P\pm} + A^{P\pm}(\omega)^{1122} e_{2\|2}^{P\pm} \right) d\xi \\ &= \int_{\omega} \frac{1}{R_l} \left(A^{P\pm}(\omega)^{1111} \overline{e_{1\|1}^{P\pm}} + A^{P\pm}(\omega)^{1122} \overline{e_{2\|2}^{P\pm}} \right) v_3 d\xi_{\omega}, \end{aligned}$$

pour le second membre, on obtient

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{\omega_1} \left(1 + \frac{\varepsilon'}{R_l}\right) f^3 v_3 d\xi_\omega = \int_{\omega} f^3 v_3 d\xi_\omega.$$

Par conséquent, en remplaçant dans l'égalité limite, on obtient pour tout v_3 élément de $H_0^1(\omega^\pm)$,

$$\int_{\omega} \left(\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon'} \frac{\pi}{V} \int_{\omega_{-1}} u_3(\varepsilon') d\xi_\omega \right) v_3 d\xi_\omega = \int_{\omega} \left(f^3 - \frac{1}{R_l} A^{P\pm}(\omega)^{1111} \overline{e_{1\|1}^{P\pm}} - \frac{1}{R_l} A^{P\pm}(\omega)^{1122} \overline{e_{2\|2}^{P\pm}} \right) v_3 d\xi_\omega.$$

Soit, par densité de $H_0^1(\omega^\pm)$ dans $L^2(\omega^\pm)$,

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \frac{\pi}{\varepsilon' V} \int_{\omega_{-1}} \left(1 - \frac{\varepsilon'}{R_l}\right) u_3(\varepsilon') d\xi_\omega = f^3 - \frac{1}{R_l} A^{P\pm}(\omega)^{1111} \overline{e_{1\|1}^{P\pm}} - \frac{1}{R_l} A^{P\pm}(\omega)^{1122} \overline{e_{2\|2}^{P\pm}}.$$

Pour conclure, puisque la limite de l'intégrale existe, alors elle appartient à \mathbb{R} .

6. Dans ce point, on montre que les limites faibles $\overline{e_{\alpha\|\beta}^{P\pm}}$ vérifient

$$\int_{\omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega) : \left[\overline{e_{\sigma\|\tau}^{P\pm}} \right] : [\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta})] d\xi_\omega = \int_{\omega} [f^{\alpha\beta}] : [\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta})] d\xi_\omega - \int_{\omega} k \eta_3 d\xi_\omega \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}^P(\omega).$$

cette propriété permettra d'établir au point 9 la convergence forte du tenseur $\left[\overline{e_{i\|j}^{P\pm}}(\varepsilon') \right]$.

Pour $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)_3$, on passe à la limite terme à terme dans $\mathcal{P}(\varepsilon', \Omega)$, en remarquant qu'on a la convergence forte

$$\left[\overline{e_{i\|j}^{P\pm}}(\varepsilon', \mathbf{v}) \right] \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} \begin{bmatrix} \gamma_{11}^{P\pm}(\mathbf{v}) & \gamma_{12}^{P\pm}(\mathbf{v}) & \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_1} - \frac{1}{R_l} v_1^\pm \\ \gamma_{12}^{P\pm}(\mathbf{v}) & \gamma_{22}^{P\pm}(\mathbf{v}) & \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_1} - \frac{1}{R_l} v_1^\pm & \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_2} & 0 \end{bmatrix}$$

si bien que

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{\Omega} A^{P\pm}(\varepsilon')^{ijkl} \overline{e_{k\|l}^{P\pm}}(\varepsilon') e_{i\|j}^{P\pm}(\varepsilon', \mathbf{v}) \sqrt{g^{P\pm}(\varepsilon')} d\xi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega) : \left[\overline{e_{\alpha\|\beta}^{P\pm}} \right] : [\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\mathbf{v})] d\xi.$$

D'après le point 5,

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon'} \frac{\pi}{V} \int_{\omega} \left(1 - \frac{\varepsilon'}{R_l}\right) v_3 d\xi_\omega \int_{\omega_{-1}} \left(1 - \frac{\varepsilon'}{R_l}\right) u_3(\varepsilon') d\xi_\omega = \int_{\omega} k v_3 d\xi_\omega$$

Au second membre, puisque $\mathbf{v} \in H_0^1(\omega^+)^2 \times H_0^1(\omega^-)^2 \times L^2(\omega)$, le passage à la limite donne

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{\omega_1} \left(1 + \frac{\varepsilon'}{R_l}\right) \mathbf{f}^\pm \mathbf{v} d\xi_\omega = \int_{\omega} [f^{\alpha\beta}] : [\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\mathbf{v})] d\xi_\omega$$

L'égalité limite est donc

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega) : \left[e_{\alpha\|\beta}^{P\pm} \right] : [\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\mathbf{v})] d\xi = \int_{\omega} [f^{\alpha\beta}] : [\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\mathbf{v})] d\xi_{\omega} - \int_{\omega} kv_3 d\xi_{\omega}.$$

Il ne reste plus qu'à passer en valeurs moyennes

$$\int_{\omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega) : \left[\overline{e_{\sigma\|\tau}^{P\pm}} \right] : [\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\mathbf{v})] d\xi_{\omega} = \int_{\omega} [f^{\alpha\beta}] : [\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\mathbf{v})] d\xi_{\omega} - \int_{\omega} kv_3 d\xi_{\omega}.$$

7. Dans cette partie, en vue de montrer la convergence forte de la suite $(\mathbf{u}(\varepsilon'))_{\varepsilon'}$, on montre que cette vérifie

$$\begin{aligned} \varepsilon' \mathbf{u}(\varepsilon') &\rightharpoonup \mathbf{0} \quad \text{dans } \mathbf{H}^1(\Omega), \\ \varepsilon' \mathbf{u}(\varepsilon') &\longrightarrow \mathbf{0} \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega), \\ \frac{\partial u_1^{\pm}(\varepsilon')}{\partial \xi_3} &\rightharpoonup 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega), \\ \frac{\partial u_2^{\pm}(\varepsilon')}{\partial \xi_3} &\rightharpoonup 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega), \end{aligned}$$

et que $\left[e_{\alpha\|\beta}^{P\pm} \right]$ est indépendant de la variable transverse ξ_3 i.e

$$\left[\frac{\partial e_{\alpha\|\beta}^{P\pm}}{\partial \xi_3} \right] = [0].$$

Soit $\mathbf{u}^{-1}(\varepsilon') := \varepsilon' \mathbf{u}(\varepsilon')$. Par construction, $(\mathbf{u}^{-1}(\varepsilon'))_{\varepsilon'}$ définit une suite de $\mathcal{V}(\Omega)$, faiblement convergente dans $\mathcal{V}(\Omega)$ et fortement convergente dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ vers \mathbf{u}^{-1} . Cette suite vérifie de plus

$$\frac{1}{\varepsilon'} \left[e_{i\|j}^{P\pm}(\varepsilon', \mathbf{u}^{-1}(\varepsilon')) \right] = \left[e_{i\|j}^{P\pm}(\varepsilon') \right] \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} \left[e_{i\|j}^{P\pm} \right] \quad \text{dans } [L^2(\Omega)].$$

D'après le théorème **10.1.3** (Annexe III), on a alors

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{-1} &: = (u_i^{-1}) \text{ indépendant de la variable transverse } \xi_3 \\ \overline{\mathbf{u}^{-1+}} &\in H_0^1(\omega^+) \times H_0^1(\omega^+) \times H_0^1(\omega^+) \cap H^2(\omega^+) \\ \overline{\mathbf{u}^{-1-}} &\in H_0^1(\omega^-) \times H_0^1(\omega^-) \times H_0^1(\omega^-) \cap H^2(\omega^-) \\ \partial_\nu \overline{u_3^{-1}} &= 0 \text{ sur } \partial\omega^\pm \\ \gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\overline{\mathbf{u}^{-1}}) &= 0 \\ [\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^{-1})] &\in [L^2(\Omega)] \\ [\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^{-1})] &= \left[-\frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\lim \text{faible} \frac{1}{\varepsilon'} e_{i\|j}^{P\pm}(\varepsilon', \mathbf{u}^{-1}(\varepsilon')) \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

on déduit de $\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\overline{\mathbf{u}^{-1}}) = 0$ que $\overline{\mathbf{u}^{-1}}$ appartient au noyau $\text{Ker} \underline{\underline{\gamma}}^{P\pm}$. Comme ce noyau se réduit au singleton $\{\mathbf{0}\}$, nécessairement $\overline{\mathbf{u}^{-1}} = \mathbf{0}$. Enfin, puisque \mathbf{u}^{-1} est indépendant de la variable transverse ξ_3 ,

$$\overline{\mathbf{u}^{-1}} = \mathbf{0} \implies \mathbf{u}^{-1} = \mathbf{0}.$$

Comme

$$\mathbf{u}^{-1} = \mathbf{0} \implies [\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^{-1})] = [0] \text{ et } [\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^{-1})] = \left[-\frac{\partial e_{\alpha\|\beta}^{P\pm}}{\partial \xi_3} \right]$$

on en déduit $\left[e_{\alpha\|\beta}^{\pm} \right]$ est indépendant de la variable transverse ξ_3 .

Enfin, on revient à la définition de $e_{1\|\beta}^{P\pm}(\varepsilon')$ pour exprimer $\frac{\partial u_1^{\pm}(\varepsilon')}{\partial \xi_3}$ on a :

$$\frac{\partial u_1^{\pm}(\varepsilon')}{\partial \xi_3} = 2\varepsilon' e_{1\|\beta}^{P\pm}(\varepsilon') + \frac{2\varepsilon'}{R_l + \varepsilon' \xi_3} u_1^{\pm}(\varepsilon') - \varepsilon' \frac{\partial u_3(\varepsilon')}{\partial \xi_1}$$

et par conséquent, comme $\mathbf{u}^{-1} = \mathbf{0}$, chaque terme de la somme converge fortement ou faiblement vers 0. Si bien que

$$\frac{\partial u_1^{\pm}(\varepsilon')}{\partial \xi_3} \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} 0 \text{ dans } L^2(\Omega).$$

De même, en revenant à la définition de $e_{2\|\beta}^{P\pm}(\varepsilon')$, on a

$$\frac{\partial u_2^{\pm}(\varepsilon')}{\partial \xi_3} = 2\varepsilon' e_{2\|\beta}^{P\pm}(\varepsilon') - \varepsilon' \frac{\partial u_3(\varepsilon')}{\partial \xi_2}$$

et, puisque les deux termes convergent vers 0,

$$\frac{\partial u_2^{\pm}(\varepsilon')}{\partial \xi_3} \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} 0 \text{ dans } L^2(\Omega).$$

8. Dans ce point on montre que

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \sum_{i,j} \left\| e_{i\|\beta}^{P\pm}(\varepsilon') - e_{i\|\beta}^{P\pm} \right\|_{0,\Omega}^2 \leq c \int_{\omega} \left([f^{\alpha\beta\pm}] : \left[e_{\alpha\|\beta}^{\pm} \right] - \underline{\mathbf{A}} : \left[e_{i\|\beta}^{P\pm} \right] : \left[e_{i\|\beta}^{P\pm} \right] \right) d\xi_{\omega}$$

en vue d'établir ultérieurement la convergence forte dans $[L^2(\Omega)]$ de la sous-suite $\left(\left[e_{i\|\beta}^{P\pm}(\varepsilon') \right] \right)_{\varepsilon'}$.

Comme $\underline{\mathbf{A}}^P(\varepsilon)$ est uniformément définie positive, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \left\| e_{i\|\beta}^{P\pm}(\varepsilon') - e_{i\|\beta}^{P\pm} \right\|_{0,\Omega}^2 &\leq c \int_{\Omega} \underline{\mathbf{A}}^{P\pm}(\varepsilon') : \left[e_{i\|\beta}^{P\pm}(\varepsilon') - e_{i\|\beta}^{P\pm} \right] : \left[e_{i\|\beta}^{P\pm}(\varepsilon') - e_{i\|\beta}^{P\pm} \right] \sqrt{g^{P\pm}(\varepsilon')} d\xi \\ &\leq c \left(\int_{\Omega} \underline{\mathbf{A}}^{P\pm}(\varepsilon') : \left[e_{i\|\beta}^{P\pm}(\varepsilon') \right] : \left[e_{i\|\beta}^{P\pm}(\varepsilon') \right] \sqrt{g^{P\pm}(\varepsilon')} d\xi - \right. \\ &\quad \left. 2 \int_{\Omega} \underline{\mathbf{A}}^{P\pm}(\varepsilon') : \left[e_{i\|\beta}^{P\pm}(\varepsilon') \right] : \left[e_{i\|\beta}^{P\pm} \right] \sqrt{g^{P\pm}(\varepsilon')} d\xi + \right. \\ &\quad \left. \int_{\Omega} \underline{\mathbf{A}}^{P\pm}(\varepsilon') : \left[e_{i\|\beta}^{P\pm} \right] : \left[e_{i\|\beta}^{P\pm} \right] \sqrt{g^{P\pm}(\varepsilon')} d\xi \right) \end{aligned}$$

Passons à la limite terme à terme,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{\Omega} \underline{\mathbf{A}}^{P\pm}(\varepsilon') : \left[e_{i\|\beta}^{P\pm}(\varepsilon') \right] : \left[e_{i\|\beta}^{P\pm}(\varepsilon') \right] \sqrt{g^{P\pm}(\varepsilon')} d\xi &= \int_{\Omega} \underline{\mathbf{A}} : \left[e_{i\|\beta}^{P\pm} \right] : \left[e_{i\|\beta}^{P\pm} \right] d\xi \\ \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{\Omega} \underline{\mathbf{A}}^{P\pm}(\varepsilon') : \left[e_{i\|\beta}^{P\pm}(\varepsilon') \right] : \left[e_{i\|\beta}^{P\pm} \right] \sqrt{g^{P\pm}(\varepsilon')} d\xi &= \int_{\Omega} \underline{\mathbf{A}} : \left[e_{i\|\beta}^{P\pm} \right] : \left[e_{i\|\beta}^{P\pm} \right] d\xi \end{aligned}$$

Remarquons que $e_{\alpha\|\beta}^{P\pm} = \overline{e_{\alpha\|\beta}^{P\pm}}$ puisque indépendant de ξ_3 et par conséquent,

$$\int_{\Omega} \underline{\mathbf{A}} : [e_{i\|j}^{P\pm}] : [e_{i\|j}^{P\pm}] d\xi = 2 \int_{\omega} \underline{\mathbf{A}} : [\overline{e_{i\|j}^{P\pm}}] : [\overline{e_{i\|j}^{P\pm}}] d\xi_{\omega}.$$

Reste à étudier le passage à la limite dans le terme

$$\int_{\Omega} \underline{\mathbf{A}}^{P\pm}(\varepsilon') : [e_{i\|j}^{P\pm}(\varepsilon')] : [e_{i\|j}^{P\pm}(\varepsilon')] \sqrt{g^{P\pm}(\varepsilon')} d\xi$$

dont on remarque qu'il s'agit du premier terme du problème $\mathcal{P}^P(\varepsilon', \Omega)$ quand on a choisi comme fonction test $\mathbf{u}(\varepsilon')$. Aussi, pour calculer cette limite, il suffit d'étudier la limite de

$$\left(1 + \frac{\varepsilon'}{R_l}\right) \int_{\omega_1} f^{i\pm} u_i^{\pm}(\varepsilon') d\xi_{\omega} - \frac{1}{\varepsilon'} \frac{\pi}{V} \left(1 - \frac{\varepsilon'}{R_l}\right)^2 \int_{\omega_{-1}} u_3(\varepsilon') d\xi_{\omega} \int_{\omega_{-1}} u_3(\varepsilon') d\xi_{\omega}$$

On a montré au point **5** que

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon'} \frac{\pi}{V} \int_{\omega_{-1}} \left(1 - \frac{\varepsilon'}{R_l}\right) u_3(\varepsilon') d\xi_{\omega} = k$$

et au point **2** que

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{\omega_{-1}} \left(1 - \frac{\varepsilon'}{R_l}\right) u_3(\varepsilon') d\xi_{\omega} = 0,$$

ces deux limites sont finies, aussi, en les multipliant on obtient,

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon'} \frac{\pi}{V} \int_{\omega_{-1}} \left(1 - \frac{\varepsilon'}{R_l}\right) u_3(\varepsilon') d\xi_{\omega} \int_{\omega_{-1}} \left(1 - \frac{\varepsilon'}{R_l}\right) u_3(\varepsilon') d\xi_{\omega} = 0.$$

Etudions maintenant la limite de $\left(1 + \frac{\varepsilon'}{R_l}\right) \int_{\omega_1} f^{i\pm} u_i^{\pm}(\varepsilon') d\xi_{\omega}$. En utilisant la même décomposition que lors de la démonstration de la proposition **3.8.7**, on a

$$\int_{\omega_1} f^{i\pm} u_i^{\pm}(\varepsilon') d\xi_{\omega} = \int_{\omega} [f^{\alpha\beta}] : [\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon')})] d\xi_{\omega} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{f}^{\pm} (1 + \xi_3) \frac{\partial \mathbf{u}(\varepsilon')}{\partial \xi_3} d\xi.$$

Or, d'après le point **4**

$$[\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon')})] \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} [\overline{e_{\alpha\|\beta}^{P\pm}}] \text{ dans } [L^2(\omega)]$$

donc

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\varepsilon'}{R_l}\right) \int_{\omega} [f^{\alpha\beta}] : [\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon')})] d\xi_{\omega} = \int_{\omega} [f^{\alpha\beta}] : [\overline{e_{\alpha\|\beta}^{P\pm}}] d\xi_{\omega}.$$

Enfin, d'après les points **2** et **7**,

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\varepsilon')}{\partial \xi_3} \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} \mathbf{0} \text{ dans } \mathbf{L}^2(\Omega)$$

donc

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon'}{R_l}\right) \int_{\Omega} \mathbf{f}^{\pm} (1 + \xi_3) \frac{\partial \mathbf{u}(\varepsilon')}{\partial \xi_3} d\xi = 0.$$

On vient de montrer

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\varepsilon'}{R_l}\right) \int_{\omega_1} f^{i\pm} u_i^{\pm}(\varepsilon') d\xi_{\omega} = \int_{\omega} [f^{\alpha\beta}] : [e_{\alpha\|\beta}^{P\pm}] d\xi_{\omega}.$$

Et par soustraction de ces limites, on déduit

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\varepsilon') : [e_{i\|j}^{P\pm}(\varepsilon')] : [e_{i\|j}^{P\pm}(\varepsilon')] \sqrt{g^{P\pm}(\varepsilon')} d\xi = \int_{\omega} [f^{\alpha\beta}] : [e_{\alpha\|\beta}^{P\pm}] d\xi_{\omega}.$$

Il ne reste plus qu'à réunir toutes les limites pour conclure.

9. Dans ce point, on montre que la convergence forte du tenseur

$$[e_{i\|j}^{P\pm}(\varepsilon')] \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} [e_{i\|j}^{P\pm}] \text{ dans } [L^2(\Omega)]$$

et en conséquence celles des tenseurs

$$\begin{aligned} [e_{i\|j}^{P\pm}(\varepsilon')] &\xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} [e_{i\|j}^{P\pm}] && \text{dans } [L^2(\omega)], \\ [\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\mathbf{u}(\varepsilon'))] &\xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} [e_{\alpha\|\beta}^{P\pm}] && \text{dans } [L^2(\omega)]. \end{aligned}$$

Pour cela, d'après la majoration en norme obtenue au point **8**, il suffit de montrer que

$$\int_{\omega} \left([f^{\alpha\beta\pm}] : [e_{\alpha\|\beta}^{P\pm}] - \underline{\underline{\mathbf{A}}} : [e_{i\|j}^{P\pm}] : [e_{i\|j}^{P\pm}] \right) d\xi_{\omega} = 0.$$

En effet, puisque $\mathbf{u}(\varepsilon') \in \mathcal{V}(\Omega)$, $\overline{\mathbf{u}(\varepsilon')} \in \mathcal{V}^P(\omega)$. En prenant $\boldsymbol{\eta} = \overline{\mathbf{u}(\varepsilon')}$, le point **6** devient

$$\int_{\omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega) : [e_{\alpha\|\beta}^{P\pm}] : [\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon')})] d\xi_{\omega} = \int_{\omega} \left([f^{\alpha\beta\pm}] : [\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon')})] - k \overline{u_3(\varepsilon')} \right) d\xi_{\omega}.$$

D'après le point **2**,

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{\omega} \overline{u_3(\varepsilon')} d\xi_{\omega} = 0$$

par conséquent,

$$\int_{\omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega) : [e_{\alpha\|\beta}^{P\pm}] : [e_{\alpha\|\beta}^{P\pm}] d\xi_{\omega} = \int_{\omega} [f^{\alpha\beta\pm}] : [e_{\alpha\|\beta}^{P\pm}] d\xi_{\omega}.$$

Comme par ailleurs

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} : \left[e_{i||j}^{P\pm} \right] : \left[e_{i||j}^{P\pm} \right] = \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm} (\omega) : \left[e_{\alpha||\beta}^{P\pm} \right] : \left[e_{\alpha||\beta}^{P\pm} \right],$$

on a bien

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \sum_{i,j} \left\| e_{i||j}^{P\pm} (\varepsilon') - e_{i||j}^{P\pm} \right\|_{0,\Omega}^2 = 0.$$

On sait également que

$$\forall v \in, \quad \|\bar{v}\|_{0,\omega}^2 \leq \frac{1}{2} \|v\|_{0,\Omega}^2,$$

aussi, pour la valeur particulière $v = e_{i||j}^{P\pm} (\varepsilon') - e_{i||j}^{P\pm}$ appartenant à $L^2 (\Omega)$ on obtient

$$\sum_{i,j} \left\| \overline{e_{i||j}^{P\pm} (\varepsilon')} - \overline{e_{i||j}^{P\pm}} \right\|_{0,\omega}^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left\| e_{i||j}^{P\pm} (\varepsilon') - e_{i||j}^{P\pm} \right\|_{0,\Omega}^2,$$

d'où, en passant à la limite, la convergence forte de $\left(\left[\overline{e_{i||j}^{P\pm} (\varepsilon')} \right] \right)_{\varepsilon'}$ vers $\left[\overline{e_{i||j}^{P\pm}} \right]$ dans $[L^2 (\omega)]$. Enfin,

$$\left\| \gamma_{\alpha\beta}^{P\pm} \left(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon')} \right) - \overline{e_{\alpha||\beta}^{P\pm}} \right\|_{0,\omega}^2 \leq 2 \left\| \gamma_{\alpha\beta}^{P\pm} \left(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon')} \right) - \overline{e_{\alpha||\beta}^{P\pm} (\varepsilon')} \right\|_{0,\omega}^2 + 2 \left\| \overline{e_{\alpha||\beta}^{P\pm} (\varepsilon')} - \overline{e_{\alpha||\beta}^{P\pm}} \right\|_{0,\omega}^2$$

donc d'après le point 4 et la convergence forte précédente, on a bien la convergence forte dans $[L^2 (\omega)]$ de $\left(\left[\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm} \left(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon')} \right) \right] \right)_{\varepsilon'}$ vers $\left[\overline{e_{\alpha||\beta}^{P\pm}} \right]$.

10. Dans ce point, on montre la convergence forte de la sous suite $\left(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon')} \right)_{\varepsilon'}$ dont la convergence faible a été montrée au point 1.

$$\overline{\mathbf{u}(\varepsilon')} \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} \zeta \text{ dans } \mathcal{V}^{MP} (\omega)$$

Pour cela, montrons que $\overline{\mathbf{u}(\varepsilon')}$ est une suite de Cauchy de $\left(\mathcal{V}^{MP} (\omega), \|\cdot\|_{\omega}^M \right)$. Soient $\varepsilon'_1 > 0$ et $\varepsilon'_2 > 0$, par définition de la norme $\|\cdot\|_{\omega}^M$,

$$\left\| \overline{\mathbf{u}(\varepsilon'_1)} - \overline{\mathbf{u}(\varepsilon'_2)} \right\|_{\omega}^M = \left(\left\| \gamma_{\alpha\beta}^{P\pm} \left(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon'_1)} \right) - \gamma_{\alpha\beta}^{P\pm} \left(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon'_2)} \right) \right\|_{0,\omega}^2 \right)^{1/2}$$

ce qui signifie que $\left(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon')} \right)_{\varepsilon'}$ est une suite de Cauchy de $\left(\mathcal{V}^{MP} (\omega), \|\cdot\|_{\omega}^M \right)$, puisque la suite $\left(\left[\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm} \left(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon')} \right) \right] \right)_{\varepsilon'}$ est une suite de Cauchy de $\left(L^2 (\omega), \|\cdot\|_{0,\omega} \right)^4$.

11. On montre ici que ζ est l'unique solution du problème $\mathcal{P}_{\omega}^{MP}$ et que toute la suite $\left(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} \right)_{\varepsilon}$ converge fortement vers ζ dans $\mathcal{V}^{MP} (\omega)$.

Pour cela, calculons de deux manières différentes $\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} B_\omega^{P\pm} \left(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon')}, \boldsymbol{\eta} \right)$ pour $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}^P(\omega)$.

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} B_\omega^{P\pm} \left(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon')}, \boldsymbol{\eta} \right) &= \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_\omega \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega) : \left[\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm} \left(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon')} \right) \right] : \left[\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) \right] d\xi_\omega \\ &= \frac{1}{2} \int_\omega \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega) : \left[e_{\alpha\|\beta}^{P\pm} \right] : \left[\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) \right] d\xi_\omega \\ &= L_\omega^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}). \end{aligned}$$

Et, puisque $\overline{\mathbf{u}(\varepsilon')} \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} \boldsymbol{\zeta}$ dans $\mathcal{V}^{MP}(\omega)$ on a, par définition du prolongement continu,

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} B_\omega^{P\pm} \left(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon')}, \boldsymbol{\eta} \right) = B_\omega^{MP}(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}).$$

Par unicité de la limite, on en déduit

$$B_\omega^{MP}(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}) = L_\omega^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}), \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}^P(\omega),$$

et, par prolongement continu de l'opérateur $L_\omega^{P\pm}$,

$$B_\omega^{MP}(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}) = L_\omega^{MP}(\boldsymbol{\eta}), \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}^{MP}(\omega).$$

On a vu au point **2** que la suite de terme général $\overline{\mathbf{u}(\varepsilon')}$ vérifie de plus

$$C_\omega^{P\pm} \left(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon')} \right) = 0.$$

et par conséquent

$$C_\omega^{MP}(\boldsymbol{\zeta}) = 0.$$

Aussi, $\boldsymbol{\zeta}$ vérifie le problème variationnel

$$\begin{cases} \boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{V}_0^{MP}(\omega), \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}^{MP}(\omega) \\ B_\omega^{MP}(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}) = L_\omega^{MP}(\boldsymbol{\eta}) \end{cases}$$

et plus précisément, comme l'existence de $\boldsymbol{\zeta}$ est assurée, $\boldsymbol{\zeta}$ est l'unique solution de \mathcal{P}_ω^{MP} . En effet, le problème \mathcal{P}_ω^{MP} est bien posé puisque, par construction, B_ω^{MP} est bilinéaire coercive continue et L_ω^{MP} est linéaire continue sur l'espace complet $(\mathcal{V}_0^{MP}(\omega), \|\cdot\|_\omega^M)$. Comme $\boldsymbol{\zeta}$ est l'unique solution du problème \mathcal{P}_ω^{MP} , on en déduit que toutes les sous-suites extraites de $\left(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} \right)_\varepsilon$ convergentes, convergent vers la même limite $\boldsymbol{\zeta}$. L'unicité de la limite de toutes les suites extraites convergentes assure que toute la suite $\left(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} \right)_\varepsilon$ converge fortement vers $\boldsymbol{\zeta}$ dans $\mathcal{V}_0^{MP}(\omega)$.

12. On montre dans ce point que

$$\varepsilon' \mathbf{u}(\varepsilon') \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} \mathbf{0} \text{ dans } \mathcal{V}(\Omega)$$

Pour cela, on applique le théorème **10.1.2** (Annexe III) à $\mathbf{v} = \varepsilon' \mathbf{u}(\varepsilon')$. Il existe une constante $c > 0$ telle que ,

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\varepsilon'} \frac{\partial e_{\alpha\|\beta}^{P\pm}(\varepsilon', \varepsilon' \mathbf{u}(\varepsilon'))}{\partial \xi_3} + \rho_{\alpha\beta}(\varepsilon' \mathbf{u}(\varepsilon')) \right\|_{-1, \Omega} \\ & \leq c \varepsilon' \left(\sum_i \left\| e_{i\|\beta}^{P\pm}(\varepsilon', \mathbf{u}(\varepsilon')) \right\|_{0, \Omega} + \sum_{\alpha} \left\| \varepsilon' u_{\alpha}^{\pm}(\varepsilon') \right\|_{0, \Omega} + \left\| \varepsilon' u_3(\varepsilon') \right\|_{1, \Omega} \right) \end{aligned}$$

or, d'après le point **1**, la suite $(\varepsilon \mathbf{u}(\varepsilon))$ est bornée pour la norme $\| \cdot \|_{1, \Omega}$, si bien que

$$\varepsilon' \left(\sum_{\alpha} \left\| \varepsilon' u_{\alpha}^{\pm}(\varepsilon') \right\|_{0, \Omega} + \left\| \varepsilon' u_3(\varepsilon') \right\|_{1, \Omega} \right) \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} 0$$

et, d'après le point **9**

$$\varepsilon' e_{i\|\beta}^{P\pm}(\varepsilon', \mathbf{u}(\varepsilon')) \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} 0 \text{ dans } L^2(\Omega).$$

on déduit donc la convergence forte,

$$\frac{\partial e_{\alpha\|\beta}^{P\pm}(\varepsilon')}{\partial \xi_3} + \rho_{\alpha\beta}(\varepsilon' \mathbf{u}(\varepsilon')) \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega).$$

Comme on a établi au point **9** la convergence forte

$$\left[e_{i\|\beta}^{P\pm}(\varepsilon') \right] \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} \left[e_{i\|\beta}^{P\pm} \right] \text{ dans } [L^2(\Omega)]$$

on en déduit la convergence forte

$$\frac{\partial e_{\alpha\|\beta}^{P\pm}(\varepsilon')}{\partial \xi_3} \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} \frac{\partial e_{\alpha\|\beta}^{P\pm}}{\partial \xi_3} \text{ dans } H^{-1}(\Omega)$$

Comme on a montré au point **7** que $\left[\frac{\partial e_{\alpha\|\beta}^{P\pm}}{\partial \xi_3} \right] = [0]$, on a donc

$$\rho_{\alpha\beta}(\varepsilon' \mathbf{u}(\varepsilon')) \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega).$$

on peut maintenant appliquer le théorème **10.1.3** (Annexe III) avec $\chi_{\alpha\beta} = 0$ et conclure.

13. *On montre dans ce point les convergences fortes suivantes*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1^{\pm}(\varepsilon')}{\partial \xi_3} & \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} 0 \text{ dans } L^2(\Omega), \\ \frac{\partial u_2^{\pm}(\varepsilon')}{\partial \xi_3} & \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} 0 \text{ dans } L^2(\Omega), \\ \mathbf{u}(\varepsilon') & \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} \mathbf{u} \text{ dans } \mathcal{V}^{MP}(\Omega). \end{aligned}$$

Puisque

$$\frac{\partial u_1^{\pm}(\varepsilon')}{\partial \xi_3} = 2\varepsilon' e_{1\|\beta}^{P\pm}(\varepsilon') + \frac{2\varepsilon'}{R_1 + \varepsilon' \xi_3} u_1^{\pm}(\varepsilon') - \frac{\partial}{\partial \xi_1}(\varepsilon' u_3(\varepsilon'))$$

et que chaque terme de cette expression tend fortement vers 0 dans $L^2(\Omega)$, on en déduit

$$\frac{\partial u_1^\pm(\varepsilon')}{\partial \xi_3} \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} 0 \text{ dans } L^2(\Omega).$$

De même, puisque

$$\frac{\partial u_2^\pm(\varepsilon')}{\partial \xi_3} = 2\varepsilon' e_{2\|3}^{P\pm}(\varepsilon') - \frac{\partial}{\partial \xi_2}(\varepsilon' u_3(\varepsilon'))$$

on a

$$\frac{\partial u_2^\pm(\varepsilon')}{\partial \xi_3} \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} 0 \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Enfin, pour montrer la convergence forte de $\mathbf{u}(\varepsilon')$ vers \mathbf{u} dans $\mathcal{V}^{MP}(\Omega)$, il suffit de montrer que c'est une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_\Omega^M$.

Soient $\varepsilon'_1 > 0$ et $\varepsilon'_2 > 0$, par définition de la norme $\|\cdot\|_\Omega^M$, on a

$$\|\mathbf{u}(\varepsilon'_1) - \mathbf{u}(\varepsilon'_2)\|_\Omega^M = \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{u}(\varepsilon'_1)}{\partial \xi_3} - \frac{\partial \mathbf{u}(\varepsilon'_2)}{\partial \xi_3} \right\|_{0,\Omega}^2 + \left(\left\| \overline{\mathbf{u}(\varepsilon'_1)} - \overline{\mathbf{u}(\varepsilon'_2)} \right\|_\omega^M \right)^2 \right)^{1/2}$$

où $\left(\frac{\partial \mathbf{u}(\varepsilon')}{\partial \xi_3} \right)_{\varepsilon'}$ et $\left(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon')} \right)_{\varepsilon'}$ sont deux suites de Cauchy de $L^2(\Omega)$ et $\mathcal{V}^{MP}(\omega)$ respectivement puisque fortement convergentes dans ces espaces.

14. Dans ce point, on montre que toute la suite $(\mathbf{u}(\varepsilon))_\varepsilon$ converge fortement vers \mathbf{u} .

On a montré, point **11**, que toute la suite $\left(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} \right)_\varepsilon$ converge fortement vers ζ dans $\mathcal{V}^{MP}(\omega)$. On a montré par ailleurs, points **13** et **2**, qu'il y a unicité de la limite des sous-suites convergentes $\left(\frac{\partial \mathbf{u}(\varepsilon')}{\partial \xi_3} \right)_{\varepsilon'}$, puisqu'elles convergent toutes vers $\mathbf{0}$. On a donc la convergence forte

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\varepsilon)}{\partial \xi_3} \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} \mathbf{0} \text{ dans } \mathbf{L}^2(\Omega)$$

si bien que toute la suite $(\mathbf{u}(\varepsilon))_\varepsilon$ est de Cauchy dans l'espace de Hilbert $(\mathcal{V}^{MP}(\Omega), \|\cdot\|_\Omega^M)$.

■

3.8.5 Identification des forces admissibles

Le "relèvement" de \mathbf{f} par $[f^{\alpha\beta}]$ est un artifice de calcul qui permet de conclure à l'existence, l'unicité et la convergence forte des déplacements. Mais dans la formulation finale, seules figurent les données initiales. On peut s'interroger sur les conditions qui rendent \mathbf{f} admissible dans le sens de la définition **3.8.2**.

Pour savoir si \mathbf{f} est admissible, on se ramène donc à identifier des conditions sur f^1, f^2, f^3 , pour que le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \int \left(f^{12} \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_1} + f^{22} \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_2} \right) d\xi_\omega = \int f^2 \eta_2 d\xi_\omega \\ \int \left(f^{11} \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1} + f^{12} \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_2} \right) d\xi_\omega = \int f^1 \eta_1 d\xi_\omega, \\ \int \frac{\eta_3}{R_l} f^{11} d\xi_\omega = \int f^3 \eta_3 d\xi_\omega \end{array} \right.$$

obtenu en choisissant successivement comme fonctions test $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1^+, 0, \eta_1^-, 0, 0)$, $\boldsymbol{\eta} = (0, \eta_2^+, 0, \eta_2^-, 0)$, $\boldsymbol{\eta} = (0, 0, 0, 0, \eta_3)$, admette au moins une solution.

Les équations étant vérifiées par tout $\eta_3 \in L^2(\omega)$, on en déduit

$$f^{11} = R_l f^3 \text{ dans } L^2(\omega).$$

Puis, on remplace f^{11} par sa valeur, et, formellement (on suppose que l'on peut intégrer par parties, les termes de bord sont nuls puisque η_1^\pm et η_2^\pm appartiennent à $H_0^1(\omega^\pm)$), on obtient

$$\begin{cases} \int_{\omega} - \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} (f^{12}) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (f^{22}) \right) \eta_2 d\xi_\omega = \int_{\omega} f^2 \eta_2 d\xi_\omega \\ \int_{\omega} - \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} (f^{11}) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (f^{12}) \right) \eta_1 d\xi_\omega = \int_{\omega} f^1 \eta_1 d\xi_\omega \end{cases}$$

On cherche donc les conditions sur f^1 , f^2 et f^3 , d'existence de solutions dans $L^2(\omega)$ au système d'inconnues f^{12} et f^{22}

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial \xi_1} (f^{12}) = f^2 + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (f^{22}) & \text{dans } H^{-1}(\omega) \\ -\frac{\partial}{\partial \xi_2} (f^{12}) = f^1 + R_l \frac{\partial}{\partial \xi_1} (f^3) & \text{dans } H^{-1}(\omega). \end{cases}$$

Proposition 3.8.11 *Des conditions suffisantes pour que la force $\mathbf{f} = (f^i) \in \mathbf{L}^2(\omega)$ soit admissible sont*

$$f^1 + R_l \frac{\partial}{\partial \xi_1} (f^3) \in L^2(\omega), \quad \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(f^1 + R_l \frac{\partial}{\partial \xi_1} (f^3) \right) \in L^2(\omega), \quad \frac{\partial}{\partial \xi_2} (f^2) \in L^2(\omega).$$

Démonstration. On doit avoir

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} (f^{12}) = \frac{\partial^2}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} (f^{12}).$$

On dérive dans $H^{-1}(\omega)$ les équations par rapport à ξ_2 et ξ_1 respectivement, puis on les soustrait

$$-\frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} (f^{22}) = -\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(f^1 + R_l \frac{\partial}{\partial \xi_1} (f^3) \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (f^2).$$

Si

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(f^1 + R_l \frac{\partial}{\partial \xi_1} (f^3) \right) \in L^2(\omega)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \xi_2} (f^2) \in L^2(\omega)$$

ce problème admet une solution unique dans l'espace

$$H_0^{0,1}(\omega) := \left\{ u \in L^2(\omega), \quad \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \in L^2(\omega) \text{ et } u = 0 \text{ pour } \xi_2 = \pm L \right\}.$$

Soit f^{22} cette solution. On cherche maintenant f^{12} . Soit $g \in H_0^1(\omega^\pm)$, multiplions la première équation

$$-\frac{\partial}{\partial \xi_1}(f^{12}) = f^2 + \frac{\partial}{\partial \xi_2}(f^{22})$$

par $\frac{\partial}{\partial \xi_1}(g)$ et la seconde

$$-\frac{\partial}{\partial \xi_2}(f^{12}) = f^1 + R_l \frac{\partial}{\partial \xi_1}(f^3)$$

par $\frac{\partial}{\partial \xi_2}(g)$, puis intégrons sur ω . Enfin, additionnons les deux équations obtenues. f^{12} vérifie donc,

$$\begin{aligned} \forall g \in H_0^1(\omega^\pm), \\ - \int_{\omega} \frac{\partial f^{12}}{\partial \xi_1} \frac{\partial g}{\partial \xi_1} d\xi_{\omega} - \int_{\omega} \frac{\partial f^{12}}{\partial \xi_2} \frac{\partial g}{\partial \xi_2} d\xi_{\omega} = \int_{\omega} \left(f^2 + \frac{\partial f^{22}}{\partial \xi_2} \right) \frac{\partial g}{\partial \xi_1} d\xi_{\omega} + \int_{\omega} \left(f^1 + R_l \frac{\partial f^3}{\partial \xi_1} \right) \frac{\partial g}{\partial \xi_2} d\xi_{\omega} \end{aligned}$$

Ce problème admet une solution dès que $f^1 + R_l \frac{\partial f^3}{\partial \xi_1} \in L^2(\omega)$. ■

3.8.6 Propriétés du tenseur d'élasticité équivalent

Proposition 3.8.12 *Dans le cas d'un matériau orthotrope, les propriétés du matériau dans l'épaisseur n'interviennent plus dans le modèle asymptotique.*

Démonstration. On rappelle que dans le cas d'un matériau orthotrope le tenseur linéarisé des contraintes, $\underline{\Sigma}$, peut s'exprimer en fonction du tenseur linéarisé des déformations $\underline{\mathbf{E}}$ et du tenseur d'élasticité $\underline{\mathbf{A}}$.

$$\underline{\Sigma} = \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{E}}.$$

Réciproquement le tenseur $\underline{\mathbf{E}}$ s'exprime en fonction du tenseur $\underline{\Sigma}$ et du tenseur $\underline{\mathbf{B}}$ des modules de Young, E_i , des coefficients de Poisson, ν_{ij} , et des modules de cisaillement G_{ij} selon la loi

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{B}} \underline{\Sigma},$$

où,

$$\underline{\mathbf{B}} := \left[\begin{array}{ccc|ccc|cc} \frac{1}{E_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4G_{12}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4G_{13}} \\ 0 & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 & \frac{1}{4G_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4G_{13}} & 0 & 0 \\ - & - & - & + & - & - & - & + & - \\ 0 & \frac{1}{4G_{12}} & 0 & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4G_{12}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4G_{23}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & \frac{1}{4G_{23}} & 0 \\ - & - & - & + & - & - & - & + & - \\ 0 & 0 & \frac{1}{4G_{13}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4G_{23}} & 0 & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 \\ \frac{1}{4G_{13}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4G_{23}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E_3} \end{array} \right]$$

Ces relations permettent de calculer les coefficients d'élasticité en fonction des coefficients de Poisson, Young et cisaillement. On remplace dans le tenseur équivalent asymptotique

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega) = \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{2E_1^2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} & 0 & 0 & 2G_{12} \\ 0 & \frac{2\nu_{12}E_1E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} & 2G_{12} & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 2G_{12} & \frac{2\nu_{12}E_1E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} & 0 \\ 2G_{12} & 0 & 0 & \frac{2E_1E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \end{array} \right].$$

$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega)$ est bien indépendant des coefficients transverses. ■

Remarque 3.8.5 Dans le cas où le matériau est orthotrope de révolution, c'est à dire quand ses propriétés sont identiques dans toutes les directions perpendiculaires à l'épaisseur, le tenseur $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega)$ se simplifie davantage

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega) = \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{2E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & \frac{E}{(1+\nu)} \\ 0 & \frac{2\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{(1+\nu)} & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & \frac{E}{(1+\nu)} & \frac{2\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E}{(1+\nu)} & 0 & 0 & \frac{2E}{1-\nu^2} \end{array} \right].$$

4 Analyse numérique du modèle asymptotique

4.1 Première formulation du modèle asymptotique, \mathcal{P}^{AP1}

Notations :

$$\mathcal{V}_0^P(\omega) : = H_0^1(\omega^+)^2 \times H_0^1(\omega^-)^2 \times L_0^2(\omega),$$

$$\mathcal{P}^{AP1} : = \begin{cases} \varsigma \in \mathcal{V}_0^P(\omega), \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_0^P(\omega), \\ \int_{\omega} \underline{\mathbf{A}}^{P\pm}(\omega) : \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{P\pm}(\varsigma) : \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) d\xi_{\omega} = \int_{\omega} (f^{1\pm}\eta_1^{\pm} + f^{2\pm}\eta_2^{\pm} + f^{3\pm}\eta_3) d\xi_{\omega}. \end{cases}$$

On se propose de réaliser l'étude numérique du problème asymptotique suivant

$$\mathcal{P}^{MP} : \begin{cases} \varsigma \in \mathcal{V}_0^{MP}(\omega), \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_0^{MP}(\omega), \\ B_{\omega}^{MP}(\varsigma, \boldsymbol{\eta}) = L_{\omega}^{MP}(\boldsymbol{\eta}) \end{cases}$$

où, rappelons le, $\mathcal{V}^{MP}(\omega)$ est le complété de $\mathcal{V}^P(\omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{\omega}^M$, et où cette norme vaut

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega}^M = \left(\sum_{\alpha, \beta} \|\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta})\|_{0, \omega}^2 \right)^{1/2},$$

avec

$$[\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta})] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \eta_1^{\pm}}{\partial \xi_1} + \frac{1}{R_l} \eta_3 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_1^{\pm}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \eta_2^{\pm}}{\partial \xi_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_1^{\pm}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \eta_2^{\pm}}{\partial \xi_1} \right) & \frac{\partial \eta_2^{\pm}}{\partial \xi_2} \end{bmatrix},$$

où, B_{ω}^{MP} , C_{ω}^{MP} et L_{ω}^{MP} sont les prolongements continus pour $\|\cdot\|_{\omega}^M$ à $\mathcal{V}^{MP}(\omega)$ de $B_{\omega}^{P\pm}$, $C_{\omega}^{P\pm}$, et $L_{\omega}^{P\pm}$ avec

$$B_{\omega}^{P\pm}(\varsigma, \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2} \int_{\omega} \underline{\mathbf{A}}^{P\pm}(\omega) : \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{P\pm}(\varsigma) : \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) d\xi_{\omega},$$

$$C_{\omega}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) = \int_{\omega} \eta_3 d\xi_{\omega},$$

$$L_{\omega}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2} \int_{\omega} (f^{1\pm}\eta_1^{\pm} + f^{2\pm}\eta_2^{\pm} + f^{3\pm}\eta_3) d\xi_{\omega}.$$

et,

$$\underline{\mathbf{A}}^{P\pm}(\omega) = \begin{bmatrix} 2 \frac{E_1^2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} & 0 & | & 0 & 2 \frac{1}{4G_{12}} \\ 0 & 2 \frac{\nu_{12} E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} & | & 2 \frac{1}{4G_{12}} & 0 \\ - & - & + & - & - \\ 0 & 2 \frac{1}{4G_{12}} & | & 2 \frac{\nu_{12} E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} & 0 \\ 2 \frac{1}{4G_{12}} & 0 & | & 0 & 2 \frac{E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \end{bmatrix}$$

et enfin, $\mathcal{V}_0^{MP}(\omega) = \{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}^{MP}(\omega), C_\omega^{MP}(\boldsymbol{\eta}) = 0\}$.

Le problème (\mathcal{P}^{MP}) n'est bien posé que sous cette forme. En effet, sous la forme

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varsigma} \in \mathcal{V}_0^P(\omega), \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_0^P(\omega), \\ B_\omega^{MP}(\boldsymbol{\varsigma}, \boldsymbol{\eta}) = L_\omega^{MP}(\boldsymbol{\eta}) \end{cases}$$

le problème est mal posé car si on munit $\mathcal{V}_0^P(\omega)$ de la norme $\|\cdot\|_{110,\omega}$, alors $(\mathcal{V}_0^P(\omega), \|\cdot\|_{110,\omega})$ est un espace de Hilbert, mais la forme bilinéaire B_ω^{MP} n'est pas $\mathcal{V}_0^P(\omega)$ -elliptique pour cette norme, tandis que si on munit $\mathcal{V}_0^P(\omega)$ de la norme $\|\cdot\|_\omega^M$, B_ω^{MP} est $\mathcal{V}_0^P(\omega)$ -elliptique, mais $(\mathcal{V}_0^P(\omega), \|\cdot\|_\omega^M)$ n'est pas un espace de Hilbert.

En revanche, puisque $\mathcal{V}_0^P(\omega)$ est dense dans $\mathcal{V}_0^{MP}(\omega)$, le problème bien posé (\mathcal{P}^{MP}) est équivalent au problème bien posé

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varsigma} \in \mathcal{V}_0^{MP}(\omega), \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_0^P(\omega), \\ B_\omega^{MP}(\boldsymbol{\varsigma}, \boldsymbol{\eta}) = L_\omega^{MP}(\boldsymbol{\eta}). \end{cases}$$

Si on suppose que $\boldsymbol{\varsigma}$ a la régularité $\mathcal{V}_0^P(\omega)$, alors $\boldsymbol{\varsigma}$ est l'unique solution du problème mal posé

$$\mathcal{P}^{AP1} : \begin{cases} \boldsymbol{\varsigma} \in \mathcal{V}_0^P(\omega), \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_0^P(\omega), \\ \int_\omega \underline{\mathbf{A}}^{P\pm}(\omega) : \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{P\pm}(\boldsymbol{\varsigma}) : \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) d\xi_\omega = \int_\omega (f^{1\pm}\eta_1^\pm + f^{2\pm}\eta_2^\pm + f^{3\pm}\eta_3) d\xi_\omega. \end{cases}$$

4.2 Formulation découplée du modèle asymptotique, \mathcal{P}^{AP2}

Notations :

$$\underline{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\eta}) := \begin{bmatrix} \frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \eta_2^\pm}{\partial \xi_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \eta_2^\pm}{\partial \xi_1} \right) & \frac{\partial \eta_2^\pm}{\partial \xi_2} \end{bmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{C}}(\omega) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \\ 0 & 0 & | & \frac{1}{2G_{12}} & 0 \\ - & - & + & - & - \\ 0 & \frac{1}{2G_{12}} & | & 0 & 0 \\ \frac{1}{2G_{12}} & 0 & | & 0 & 2E_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{P}^{AP2} := \begin{cases} \boldsymbol{\zeta} \in H_0^1(\omega^\pm) \times H_0^1(\omega^\pm), \forall \boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\omega^\pm) \times H_0^1(\omega^\pm), \\ \int_\omega \underline{\mathbf{C}}(\omega) : \underline{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\zeta}) : \underline{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\eta}) d\xi_\omega = \int_\omega f^{1\pm}\eta_1^\pm + f^{2\pm}\eta_2^\pm - R_l f^{3\pm} \left(\frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_1} + \frac{\nu_{12} E_2}{E_1} \frac{\partial \eta_2^\pm}{\partial \xi_2} \right) d\xi_\omega. \end{cases}$$

Dans le modèle \mathcal{P}^{AP1} , on remarque qu'en développant la forme bilinéaire $B_\omega^{M\pm}$, on peut découpler le problème.

Théorème 4.2.1 On peut éliminer ζ_3 de la formulation variationnelle et résoudre le problème variationnel à deux inconnues ζ_1^\pm et ζ_2^\pm

$$\mathcal{P}^{AP2} : \begin{cases} \zeta \in H_0^1(\omega^\pm) \times H_0^1(\omega^\pm), \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\omega^\pm) \times H_0^1(\omega^\pm), \\ \int_{\omega} \underline{\mathbf{C}}(\omega) : \underline{\boldsymbol{\epsilon}}(\zeta) : \underline{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\eta}) d\xi_\omega = \int_{\omega} f^{1\pm} \eta_1^\pm + f^{2\pm} \eta_2^\pm - R_l f^{3\pm} \left(\frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_1} + \frac{\nu_{12} E_2}{E_1} \frac{\partial \eta_2^\pm}{\partial \xi_2} \right) d\xi_\omega, \end{cases}$$

puis recalculer ζ_3 en appliquant la formule

$$\zeta_3 = R_l \left(\frac{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}{2E_1^2} \left(R_l \left(f^{3\pm} - \overline{f^{3\pm}}^\omega \right) - \frac{2\nu_{12} E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \frac{\partial \zeta_2^\pm}{\partial \xi_2} - \frac{2E_1^2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \frac{\partial \zeta_1^\pm}{\partial \xi_1} \right) \right).$$

Démonstration. Soit $\eta_3 \in L_0^2(\omega)$, prenons dans (\mathcal{P}^{AP1}) la fonction test $\boldsymbol{\eta} = (0, 0, 0, 0, \eta_3)$, alors,

$$[\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta})] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_l} \eta_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et par conséquent

$$\int_{\omega} \left(\frac{2E_1^2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \left(\frac{\partial \zeta_1^\pm}{\partial \xi_1} + \frac{1}{R_l} \zeta_3 \right) + \frac{2\nu_{12} E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \frac{\partial \zeta_2^\pm}{\partial \xi_2} \right) \frac{1}{R_l} \eta_3 d\xi_\omega = \int_{\omega} f^{3\pm} \eta_3 d\xi_\omega.$$

Cette équation étant vraie pour tout $\eta_3 \in L_0^2(\omega)$, cela impose,

$$\left(\frac{2E_1^2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \left(\frac{\partial \zeta_1^\pm}{\partial \xi_1} + \frac{1}{R_l} \zeta_3 \right) + \frac{2\nu_{12} E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \frac{\partial \zeta_2^\pm}{\partial \xi_2} \right) \frac{1}{R_l} = f^{3\pm} + k$$

où k est un réel. On tire la valeur de $\frac{\zeta_3}{R_l}$,

$$\frac{\zeta_3}{R_l} = \frac{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}{2E_1^2} \left(R_l (f^{3\pm} + k) - \frac{2\nu_{12} E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \frac{\partial \zeta_2^\pm}{\partial \xi_2} - \frac{2E_1^2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \frac{\partial \zeta_1^\pm}{\partial \xi_1} \right)$$

On détermine la constante en appliquant à ζ_3 la condition $\int_{\omega} \zeta_3 d\xi_\omega = 0$ puisque $\zeta_3 \in L_0^2(\omega)$. On a

$$\left(\frac{2\nu_{12} E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \text{ constant et } \zeta_2^\pm \in H_0^1(\omega^\pm) \right) \implies \int_{\omega} \frac{2\nu_{12} E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \frac{\partial \zeta_2^\pm}{\partial \xi_2} d\xi_\omega = 0$$

et

$$\left(\frac{2E_1^2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \text{ constant et } \zeta_1^\pm \in H_0^1(\omega^\pm) \right) \implies \int_{\omega} \frac{2E_1^2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \frac{\partial \zeta_1^\pm}{\partial \xi_1} d\xi_\omega = 0$$

donc

$$\int_{\omega} \zeta_3 d\xi_\omega = 0 \implies \frac{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}{2E_1^2} \int_{\omega} (f^{3\pm} + k) d\xi_\omega = 0$$

et par conséquent

$$k = -\overline{f^{3\pm\omega}}.$$

Pour éliminer ζ_3 de la formulation finale, on procède en trois temps. D'abord on remplace $\frac{\zeta_3}{R_l}$ par son expression dans $[\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\zeta)]$

$$[\gamma_{\alpha\beta}^{P\pm}(\zeta)] = \begin{bmatrix} \frac{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}{2E_1^2} R_l \left(f^{3\pm} - \overline{f^{3\pm\omega}} \right) - \frac{\nu_{12} E_2}{E_1} \frac{\partial \zeta_2^\pm}{\partial \xi_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta_1^\pm}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \zeta_2^\pm}{\partial \xi_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta_1^\pm}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \zeta_2^\pm}{\partial \xi_1} \right) & \frac{\partial \zeta_2^\pm}{\partial \xi_2} \end{bmatrix}$$

puis on calcule $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega) : \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}^{P\pm}(\zeta)$ terme à terme

$$\begin{aligned} [\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega) : \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}^{P\pm}(\zeta)]^{11} &= \frac{2E_1^2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \left(\frac{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}{2E_1^2} R_l \left(f^{3\pm} - \overline{f^{3\pm\omega}} \right) - \frac{\nu_{12} E_2}{E_1} \frac{\partial \zeta_2^\pm}{\partial \xi_2} \right) + \frac{2\nu_{12} E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \frac{\partial \zeta_2^\pm}{\partial \xi_2} \\ &= R_l \left(f^{3\pm} - \overline{f^{3\pm\omega}} \right) \end{aligned}$$

$$[\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega) : \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}^{P\pm}(\zeta)]^{12} = \frac{1}{2G_{12}} \left(\frac{\partial \zeta_1^\pm}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \zeta_2^\pm}{\partial \xi_1} \right)$$

$$\begin{aligned} [\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega) : \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}^{P\pm}(\zeta)]^{22} &= \frac{2\nu_{12} E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \left(\frac{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}{2E_1^2} R_l \left(f^{3\pm} - \overline{f^{3\pm\omega}} \right) - \frac{\nu_{12} E_2}{E_1} \frac{\partial \zeta_2^\pm}{\partial \xi_2} \right) + \frac{2E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \frac{\partial \zeta_2^\pm}{\partial \xi_2} \\ &= \frac{\nu_{12} E_2}{E_1} R_l \left(f^{3\pm} - \overline{f^{3\pm\omega}} \right) + \frac{\partial \zeta_2^\pm}{\partial \xi_2} \left(\frac{2E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} - \frac{2\nu_{12} E_2 \nu_{12} E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \right) \\ &= \frac{\nu_{12} E_2}{E_1} R_l \left(f^{3\pm} - \overline{f^{3\pm\omega}} \right) + 2E_2 \frac{\partial \zeta_2^\pm}{\partial \xi_2} \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega) : \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}^{P\pm}(\zeta) = \underline{\underline{\mathbf{C}}}(\omega) : \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}(\zeta) + R_l \left(f^{3\pm} - \overline{f^{3\pm\omega}} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\nu_{12} E_2}{E_1} \end{bmatrix}.$$

Enfin, on choisit pour fonction test dans la formulation variationnelle du problème \mathcal{P}^{AP1}

$\boldsymbol{\eta} = (\eta_1^\pm, \eta_2^\pm, \eta_1^-, \eta_2^-, 0)$ où η_1^\pm et η_2^\pm sont des éléments de $H_0^1(\omega^\pm)$. Avec ce choix, $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_0^P(\omega)$ et $\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) = \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}(\boldsymbol{\eta})$. Calculons d'abord $\int_\omega \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega) : \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}^{P\pm}(\zeta) : \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) d\xi_\omega$

$$\begin{aligned} &\int_\omega \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{P\pm}(\omega) : \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}^{P\pm}(\zeta) : \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}^{P\pm}(\boldsymbol{\eta}) d\xi_\omega \\ &= \int_\omega \underline{\underline{\mathbf{C}}}(\omega) : \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}(\zeta) : \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}(\boldsymbol{\eta}) d\xi_\omega + \int_\omega R_l \left(f^{3\pm} - \overline{f^{3\pm\omega}} \right) \left(\frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_1} + \frac{\nu_{12} E_2}{E_1} \frac{\partial \eta_2^\pm}{\partial \xi_2} \right) d\xi_\omega. \end{aligned}$$

Remplaçons maintenant dans la formulation variationnelle du problème (\mathcal{P}^{AP1}) . On obtient ainsi

$$\int_\omega \underline{\underline{\mathbf{C}}}(\omega) : \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}(\zeta) : \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}(\boldsymbol{\eta}) d\xi_\omega = \int_\omega f^{1\pm} \eta_1^\pm + f^{2\pm} \eta_2^\pm - R_l \left(f^{3\pm} - \overline{f^{3\pm\omega}} \right) \left(\frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_1} + \frac{\nu_{12} E_2}{E_1} \frac{\partial \eta_2^\pm}{\partial \xi_2} \right) d\xi_\omega$$

comme $\overline{f^{3\pm\omega}}$ est une constante, on a de plus,

$$\int_\omega \overline{f^{3\pm\omega}} \left(\frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_1} + \frac{\nu_{12} E_2}{E_1} \frac{\partial \eta_2^\pm}{\partial \xi_2} \right) d\xi_\omega = 0,$$

d'où la forme annoncée. ■

Remarque 4.2.1 *Le résultat du théorème 4.2.1 met en évidence que le couplage entre les déplacements de la membrane extérieure et ceux de la membrane intérieure (dû au couplage fluide-structure) n'agit que sur la composante normale du déplacement.*

4.3 Approximation de la solution de \mathcal{P}^{AP1}

Notations :

$$\begin{aligned} \underline{\Sigma}_\omega^{MP} &:= \text{tenseur des contraintes asymptotiques du modèle parabolique,} \\ S_1^\pm \text{ et } S_2^\pm &:= \text{contraintes principales,} \end{aligned}$$

$$\mathcal{W}_1 := \left\{ \mathbf{v} \in H^2(\omega^+)^2 \times H^2(\omega^-)^2 \times H^1(\omega), v_1^\pm = v_2^\pm = 0 \text{ sur } \partial\omega^\pm \text{ et } \int_\omega v_3 d\omega = 0 \right\}$$

Dans tout ce paragraphe on note \mathbf{u} et \mathbf{v} les champs de déplacement et \mathbf{u}_h et \mathbf{v}_h leurs approximations.

Soit \mathcal{V}_h , un sous espace de dimension finie de $\mathcal{V}_0^P(\omega)$, soit

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \int_\omega \underline{\mathbf{A}}^{P^\pm}(\omega) : \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{P^\pm}(\mathbf{u}_h) : \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{P^\pm}(\mathbf{v}_h) d\xi_\omega$$

le restriction \mathcal{V}_h -elliptique de $B_\omega^{P^\pm}$ à \mathcal{V}_h et soit,

$$l_h(\mathbf{v}_h) = \int_\omega (f^{1^\pm} v_{h1}^\pm + f^{2^\pm} v_{h2}^\pm + f^{3^\pm} v_{h3}) d\xi_\omega$$

la restriction de $L_\omega^{P^\pm}$ à \mathcal{V}_h . Alors, le problème bien posé

$$(\mathcal{P}_h) : \begin{cases} \mathbf{u}_h \in \mathcal{V}_h, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h, \\ a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = l_h(\mathbf{v}_h) \end{cases}$$

admet une unique solution \mathbf{u}_h . Cette solution vérifie naturellement

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_\omega^M \leq c \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_\omega^M.$$

Cependant, même si \mathbf{u}_h apparait comme étant l'approximation conforme de \mathbf{u} dans \mathcal{V}_h , on ne peut pas espérer de majoration d'erreur de la forme

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{110,\omega} \leq c \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{110,\omega}$$

puisque le problème (\mathcal{P}^{AP1}) est mal posé.

Considérons une triangulation régulière de ω^+ et ω^- à base de triangles : $\omega^+ = \bigcup_{i=1}^{N_t} T_i^+$ et $\omega^- = \bigcup_{i=1}^{N_t} T_i^-$. Si on suppose que $\mathbf{u} \in \mathcal{W}_1$, alors, une approximation continue, affine par triangle pour u_1 et u_2 et une

approximation constante par triangle pour u_3 (tout comme une approximation continue, affine par triangle pour u_1, u_2 et u_3) conduit à l'estimation d'erreur

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_\omega^M = \mathcal{O}(h).$$

Cette estimation est peu satisfaisante car elle est dans la norme $\|\cdot\|_\omega^M$ et on en verra les conséquences numériques. Cependant, même si cette estimation ne permet pas de prédire avec fiabilité les déformations de la membrane, on peut malgré tout approcher en $\mathcal{O}(h)$ dans $[L^2(\omega)]$ le tenseur des contraintes et les contraintes principales.

Proposition 4.3.1 $\|\underline{\Sigma}_\omega^{MP}(\mathbf{u}) - \underline{\Sigma}_\omega^{MP}(\mathbf{u}_h)\|_{0,\omega} = \mathcal{O}(h)$ et $|S_\alpha^\pm(\mathbf{u}) - S_\alpha^\pm(\mathbf{u}_h)| = \mathcal{O}(h)$.

Démonstration. Les contraintes asymptotiques $\underline{\Sigma}_\omega^{MP}(\mathbf{u})$ sont calculées à partir de $\underline{\gamma}^{P^\pm}(\mathbf{u})$ selon la formule de l'élasticité

$$\underline{\Sigma}_\omega^{MP}(\mathbf{u}) := \underline{\mathbf{A}}^{P^\pm}(\omega) : \underline{\gamma}^{P^\pm}(\mathbf{u})$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} \|\underline{\Sigma}_\omega^{MP}(\mathbf{u}) - \underline{\Sigma}_\omega^{MP}(\mathbf{u}_h)\|_{0,\omega} &= \|\underline{\mathbf{A}}^{P^\pm}(\omega) : (\underline{\gamma}^{P^\pm}(\mathbf{u}) - \underline{\gamma}^{P^\pm}(\mathbf{u}_h))\|_{0,\omega} \\ &\leq c \|\underline{\gamma}^{P^\pm}(\mathbf{u}) - \underline{\gamma}^{P^\pm}(\mathbf{u}_h)\|_{0,\omega} \\ &= c \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_\omega^M \\ &= \mathcal{O}(h). \end{aligned}$$

Les contraintes principales étant par définition les valeurs propres du tenseur des contraintes, l'erreur d'approximation est du même ordre. ■

4.4 Simulations numériques

Notations :

Dans toute cette partie, on note \mathbf{u} et \mathbf{v} les champs de déplacement et \mathbf{u}_h et \mathbf{v}_h leurs approximations.

Le problème asymptotique que nous avons obtenu n'est pas classique dans le sens où l'unique solution du problème est dans un espace complété non identifiable muni d'une norme non usuelle.

Pour bien mettre en évidence les problèmes numériques spécifiques que ce cadre peut générer, nous allons garder une géométrie réaliste mais considérer des coefficients d'élasticité "normalisés".

4.4.1 Résultats pour le système \mathcal{P}^{AP2}

Notations :

$$\mathcal{W}_{0,h}^{\mathcal{P}^{AP2}} := \{\mathbf{u}_h \in H_0^1(\omega^\pm) \times H_0^1(\omega^\pm), \mathbf{u}_h|_T \in P_1(T) \times P_1(T)\}$$

$$\mathcal{P}_h^{AP2} := \begin{cases} \mathbf{u}_h \in \mathcal{W}_{0,h}^{\mathcal{P}^{AP2}}, \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{0,h}^{\mathcal{P}^{AP2}} \\ \int_\omega \underline{\mathbf{C}}(\omega) : \underline{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{u}_h) : \underline{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{v}_h) d\xi_\omega = \int_\omega f^{1\pm} v_{1,h}^\pm + f^{2\pm} v_{2,h}^\pm - R_l f^{3\pm} \left(\frac{\partial v_{1,h}^\pm}{\partial \xi_1} + \frac{\nu_{12} E_2}{E_1} \frac{\partial v_{2,h}^\pm}{\partial \xi_2} \right) d\xi_\omega. \end{cases}$$

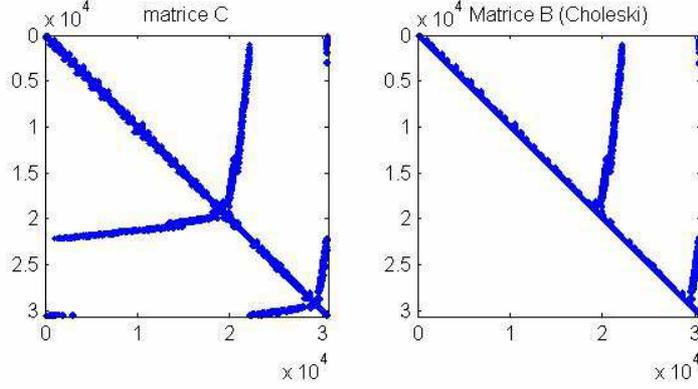


Figure 4: Profils des matrices C et B après renumérotation

Soit \mathcal{P}_h^{AP2} la formulation discrète du système \mathcal{P}^{AP2} et $\frac{u_{3,h}}{R_l}$ l'approximation de $\frac{u_3}{R_l}$ qui en résulte,

$$\frac{u_{3,h}}{R_l} = \frac{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}{2E_1^2} \left(R_l \left(f_h^{3\pm} - \overline{f^{3\pm\omega}} \right) - \frac{2\nu_{12} E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \frac{\partial u_{2,h}^\pm}{\partial \xi_2} - \frac{2E_1^2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \frac{\partial u_{1,h}^\pm}{\partial \xi_1} \right)$$

\mathcal{P}_h^{AP2} correspond alors à deux systèmes linéaires découplés

$$\begin{pmatrix} C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,h}^+ \\ U_{2,h}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1,h}^+ \\ F_{2,h}^+ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,h}^- \\ U_{2,h}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1,h}^- \\ F_{2,h}^- \end{pmatrix}$$

où le vecteur $F_{1,h}^+$ correspond au terme $\int_{\omega} \left(f^{1+} v_{1,h}^+ - R_l f^{3+} \frac{\partial v_{1,h}^+}{\partial \xi_1} \right) d\xi_{\omega}$ et le vecteur $F_{2,h}^+$ au terme $\int_{\omega} \left(f^{2+} v_{2,h}^+ - R_l f^{3+} \frac{\nu_{12} E_2}{E_1} \frac{\partial v_{2,h}^+}{\partial \xi_2} \right) d\xi_{\omega}$. Il en va de même pour $F_{1,h}^-$ et $F_{2,h}^-$. Les systèmes linéaires peuvent être résolus par une méthode directe de type Cholesky car la structure creuse de la matrice C est conservée lors de la factorisation (voir Figure 4) ou par une méthode de gradient conjugué préconditionné.

Remarque 4.4.1 Si on suppose que les forces extérieures f^{1-} , f^{2-} et f^{3-} sont nulles alors

$$U_{1,h}^- = U_{2,h}^- = 0$$

et $u_{3,h}^-$ est constant. Il vaut

$$u_{3,h}^- = -\frac{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}{2E_1^2} R_l^2 \overline{f^{3\pm\omega}}.$$

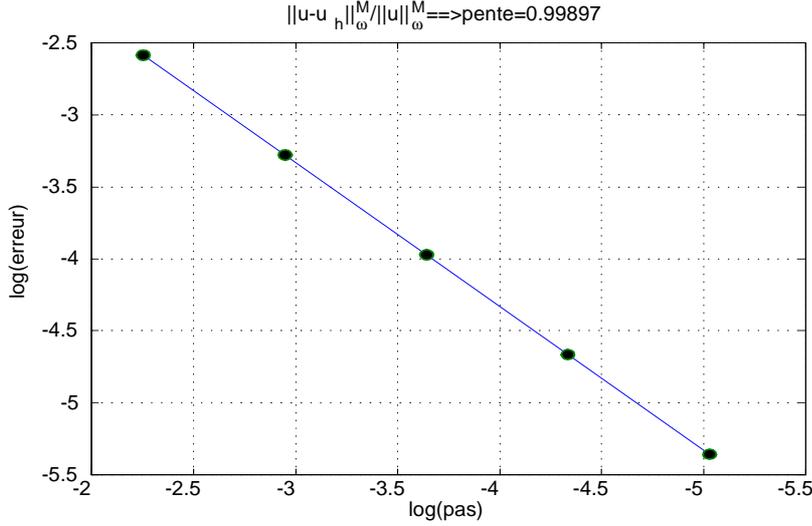


Figure 5: Courbe de convergence des déplacements pour un maillage structuré

Vérifions numériquement l'estimation d'erreur $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_\omega^M = \mathcal{O}(h)$. On choisit les forces extérieures de sorte que

$$u_1^+(\xi_1, \xi_2) = \sin\left(\frac{\pi(\xi_1 - 2l)}{2l}\right) \sin\left(\frac{\pi(\xi_2 - L)}{2L}\right), \quad u_2^+(\xi_1, \xi_2) = u_1^+(\xi_1, \xi_2),$$

$$u_3^+(\xi_1, \xi_2) = \frac{\pi R_l L L_1}{L_2} \sin\left(\frac{\pi \xi_2}{2L}\right) \sin\left(\frac{\pi \xi_1}{2l}\right) - \frac{\pi R_l}{2L} \cos\left(\frac{\pi \xi_2}{2L}\right) \cos\left(\frac{\pi \xi_1}{2l}\right),$$

$$u_1^-(\xi_1, \xi_2) = u_2^-(\xi_1, \xi_2) = u_3^-(\xi_1, \xi_2) = 0$$

Les figures 5 et 9 représentent les courbes d'erreur pour la norme $\|\cdot\|_\omega^M$ en utilisant un maillage triangulaire structuré puis destructuré. Et comme prévu, les déplacements ne convergent pas dans la norme $\|\cdot\|_{110,\omega}$ que le maillage soit structuré ou non (voir Figure 7). Par contre, on a la convergence des contraintes en norme L^2 pour les deux types de maillage (voir Figures 8 et 9).

Mais comme la norme $\|\cdot\|_{0,\omega}$ n'est équivalente à aucune norme usuelle et que (\mathcal{P}_h^{AP2}) n'est qu'une approximation de (\mathcal{P}^{AP2}) , les solutions obtenues en utilisant des maillages différents (structurés et destructurés) peuvent être différentes (au sens de la norme L^2 par exemple). Dans le test suivant, les forces extérieures ont été choisies de sorte que la solution exacte soit

$$u_1^+(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{(2l)^6} \xi_1^3 (\xi_1 - 2l)^3 \left(1 - \frac{\xi_2^2}{L^2}\right)^3,$$

$$u_2^+(\xi_1, \xi_2) = 0,$$

$$u_3^+(\xi_1, \xi_2) = \frac{3R_l}{32l^6 L^6} \xi_2^2 (\xi_1 - 2l)^2 (L^2 - \xi_2^2)^3 (l - \xi_1).$$

Les figures 10 et 11 illustrent ce problème, on obtient graphiquement deux solutions différentes selon que le maillage est structuré ou destructuré. Par contre ces déplacements différents donnent des contraintes "identiques" (voir Figures 12 et 13). Supposons maintenant que $f_1^+ = 1$ et que les autres forces extérieures sont nulles. Le comportement des solutions est très différent selon le maillage. Pour un maillage structuré, u_3^+ semble diverger en norme L^2 alors que les contraintes restent stables (voir Figures 14 et 15). En revanche, avec un maillage destructuré, u_3^+ semble converger en norme L^2 et les contraintes restent stables (voir Figures 16 et 17).

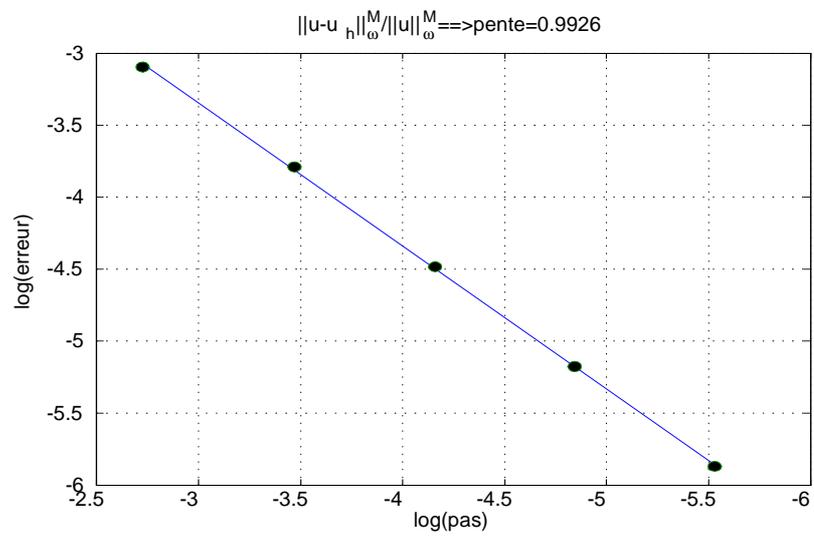


Figure 6: Courbe de convergence des déplacements pour un maillage déstructuré

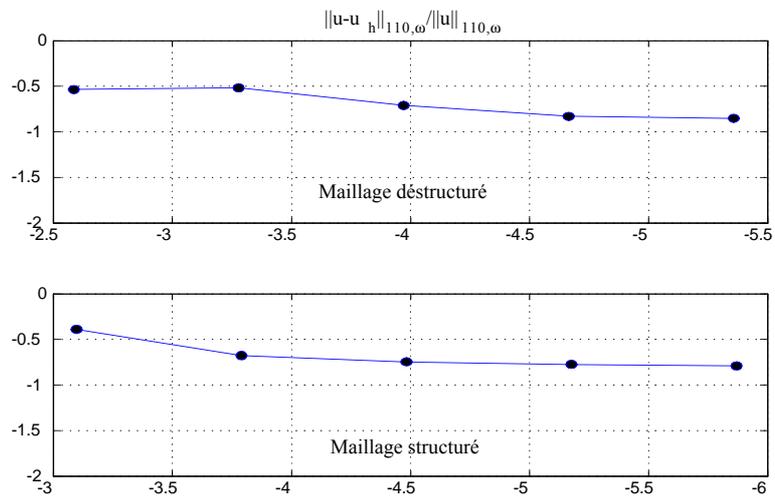


Figure 7: Courbes de convergence pour la norme $\| \cdot \|_{110,\omega}$

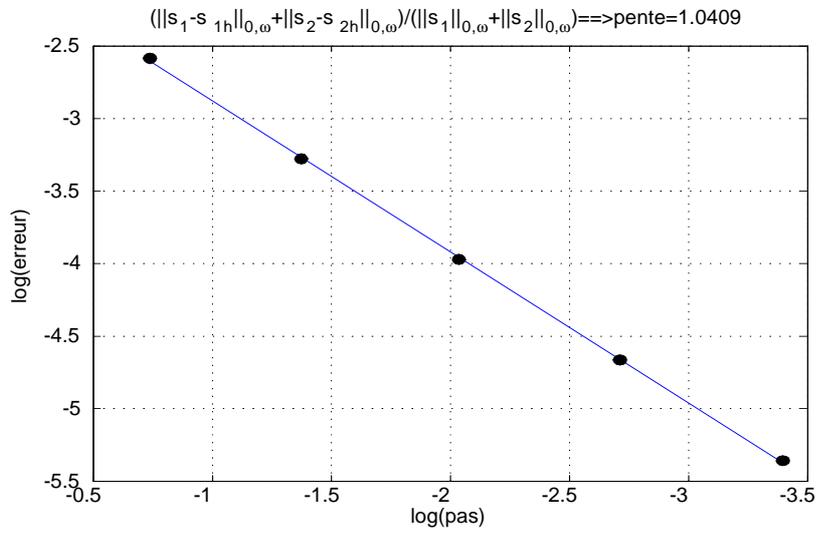


Figure 8: Courbe de convergence des contraintes pour un maillage structuré

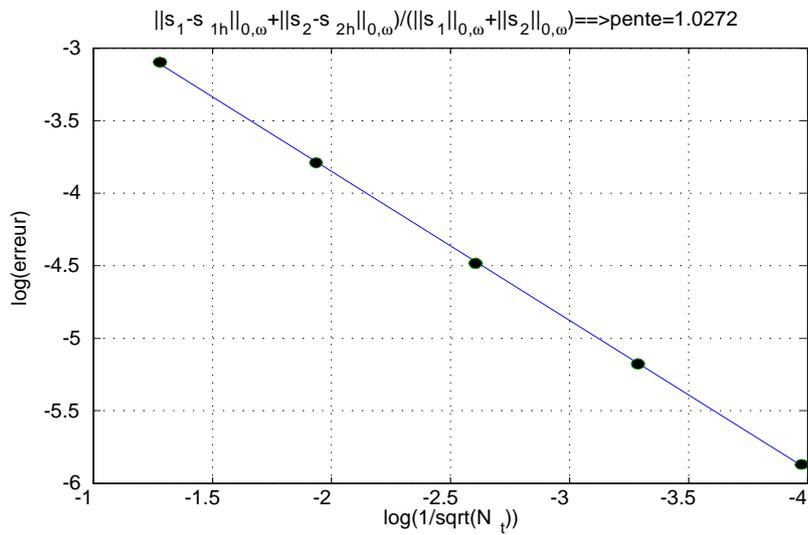


Figure 9: Courbe de convergence des contraintes pour un maillage destructuré

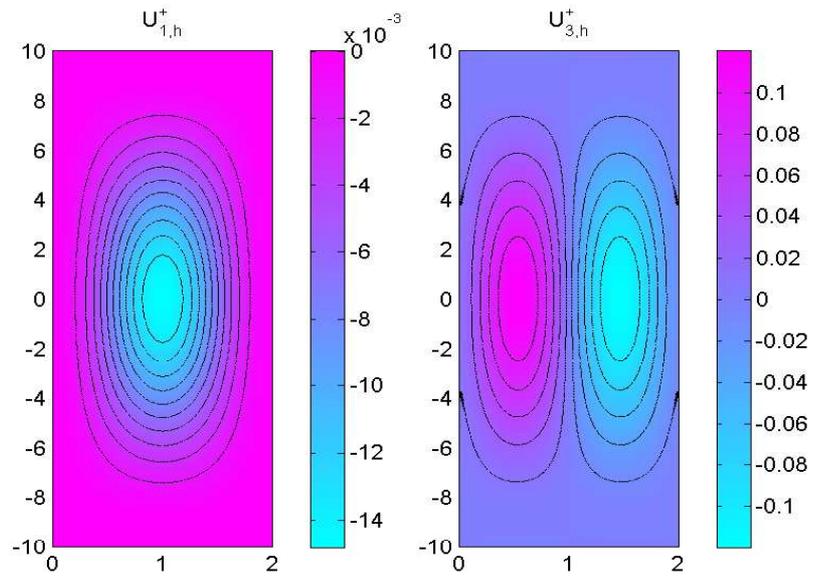


Figure 10: Solution pour un maillage structuré

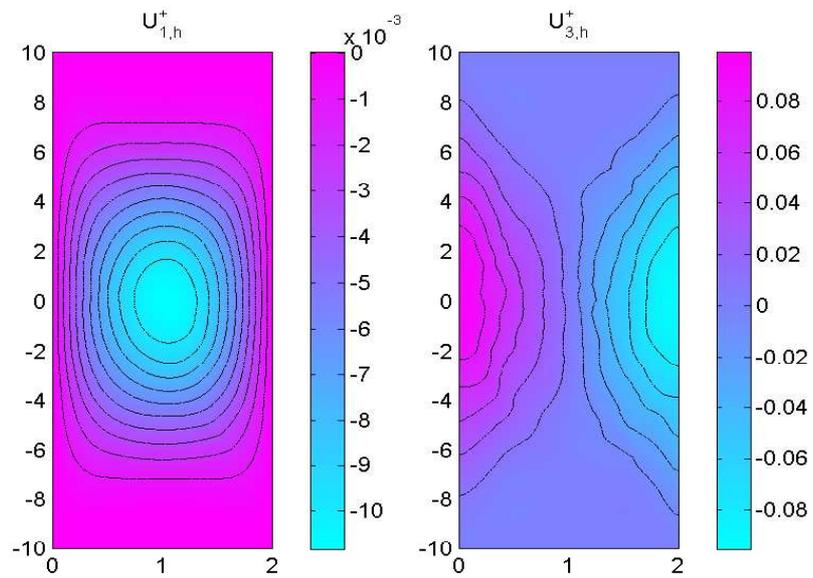


Figure 11: Solution pour un maillage destructuré

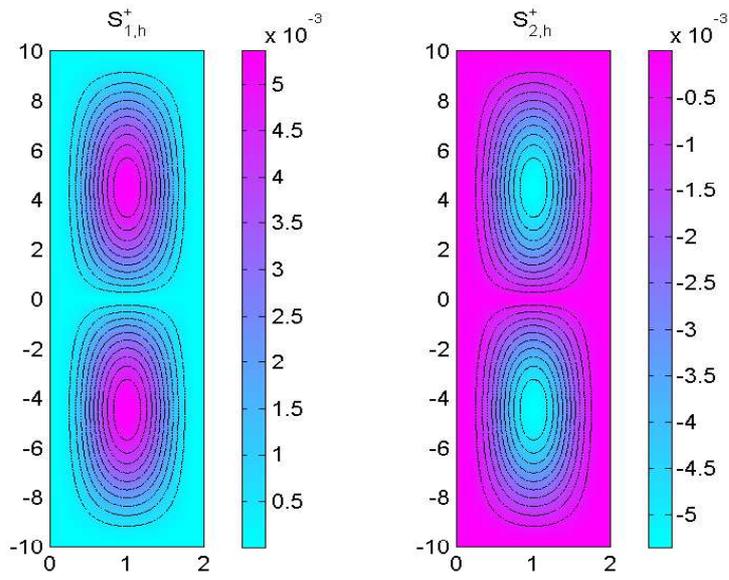


Figure 12: Contraintes principales pour un maillage structuré

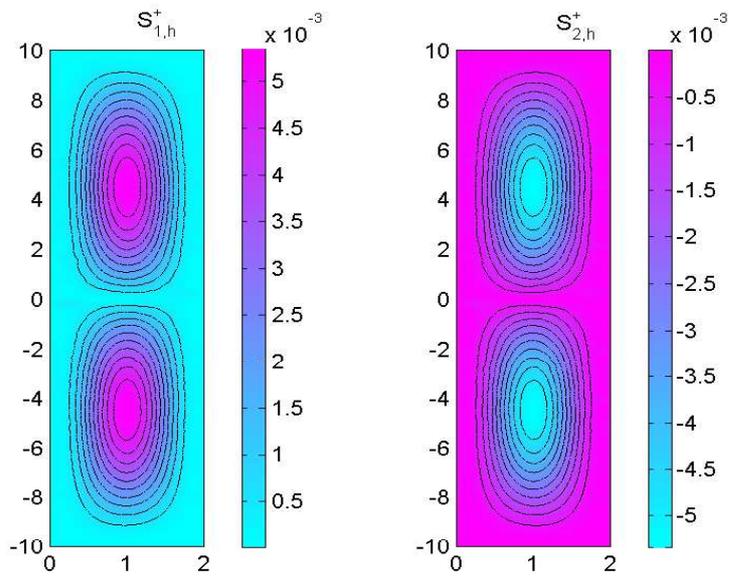


Figure 13: Contraintes principales pour un maillage destructuré

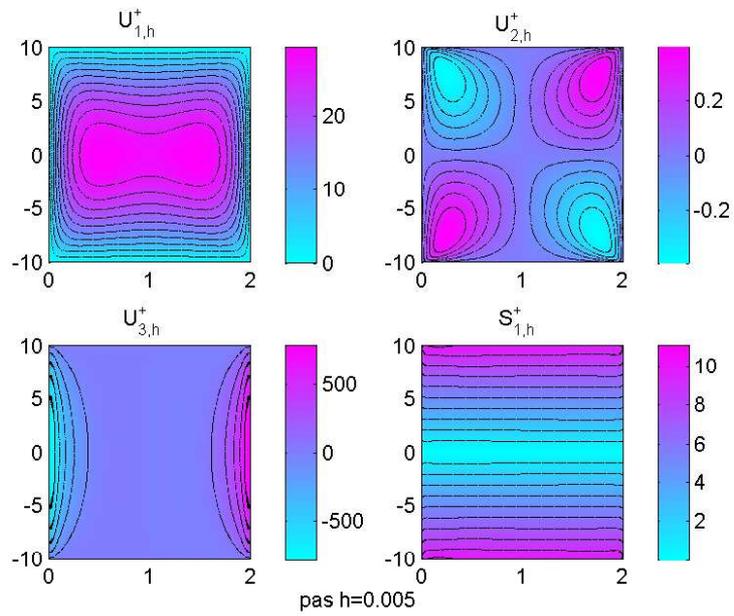


Figure 14: Solution avec un maillage structuré $h = 0.005$

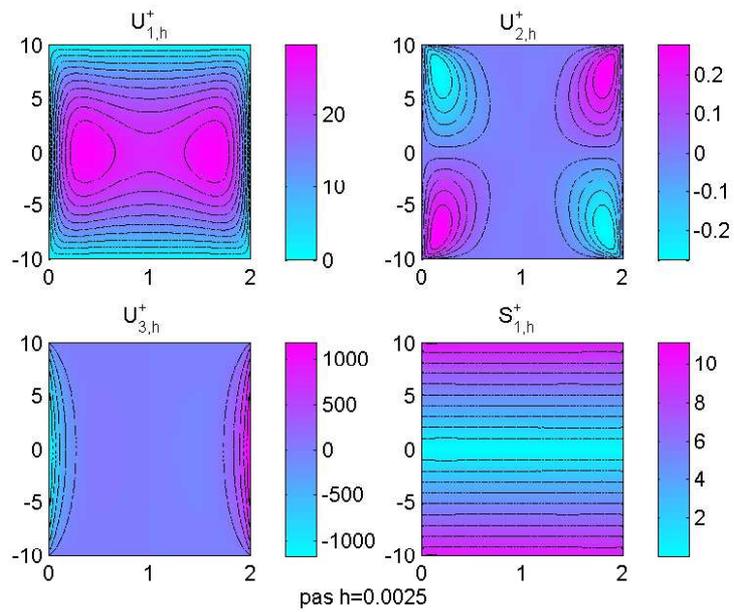


Figure 15: Solution avec un maillage structuré $h = 0.0025$

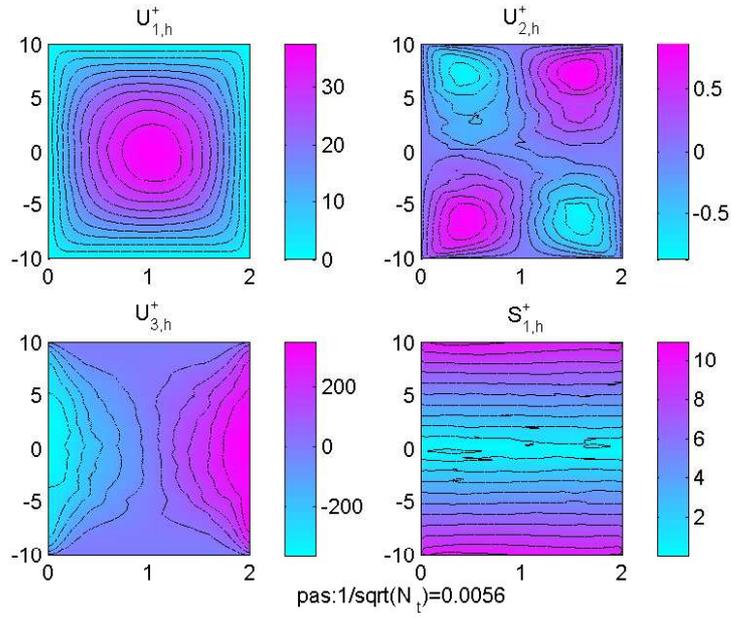


Figure 16: Solution avec un maillage déstructuré $1/\sqrt{N_t} = 0.0056$

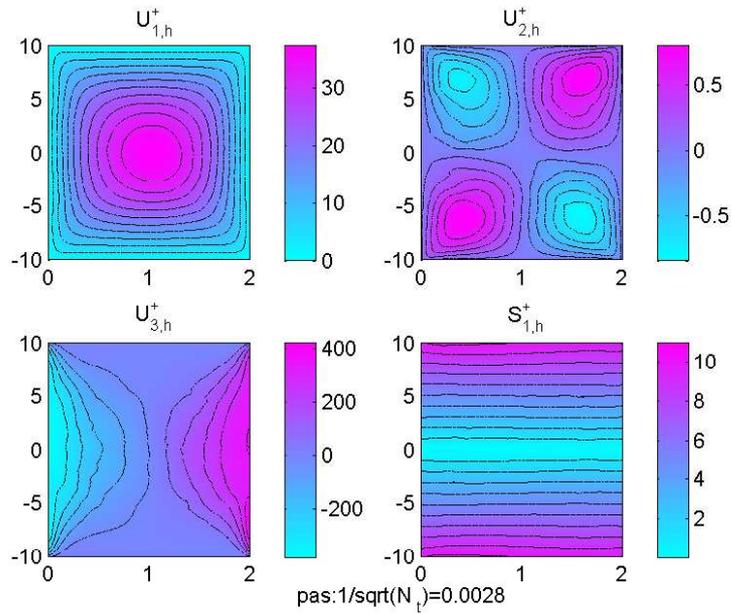


Figure 17: Solution avec un maillage déstructuré $1/\sqrt{N_t} = 0.0026$

4.4.2 Résultats pour le système \mathcal{P}^{AP1}

Notations :

$$\mathcal{W}_{0,h}^{\mathcal{P}^{AP1}} := \{ \mathbf{u}_h \in H_0^1(\omega^\pm) \times H_0^1(\omega^\pm) \times L_0^2(\omega), \mathbf{u}_h|_T \in P_1(T) \times P_1(T) \times P_0(T) \},$$

$$(\mathcal{P}_h^{AP1}) := \begin{cases} \mathbf{u}_h \in \mathcal{W}_{0,h}^{\mathcal{P}^{AP1}}, \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{0,h}^{\mathcal{P}^{AP1}}, \\ \int_\omega \underline{\mathbf{A}}^{P^\pm}(\omega) : \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{P^\pm}(\mathbf{u}_h) : \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{P^\pm}(\mathbf{v}_h) d\xi_\omega = \int_\omega (f^{1\pm} v_{1,h}^\pm + f^{2\pm} v_{2,h}^\pm + f^{3\pm} v_{3,h}^\pm) d\xi_\omega, \end{cases}$$

$$B_{u_3} := \{ \varphi_1^+, \dots, \varphi_{N_t-1}^+, \varphi_1^-, \dots, \varphi_{N_t-1}^-, \varphi_{N_t} \}.$$

Pour $u_{1,h}$ et $u_{2,h}$ on utilise une approximation $P1$ conforme classique. Mais, comme $u_{3,h} \in L_0^2(\omega)$, il couple les systèmes posés sur ω^+ et ω^- . A moins de choisir une base judicieuse, notée B_{u_3} , qui permette de découpler les systèmes. Ainsi, pour le choix

$$B_{u_3} = \{ \varphi_1^+, \dots, \varphi_{N_t-1}^+, \varphi_1^-, \dots, \varphi_{N_t-1}^-, \varphi_{N_t} \}$$

avec

$$\varphi_i^\pm := \begin{cases} 1 & \text{sur } T_i^\pm \\ -\frac{|T_i^\pm|}{|T_{i+1}^\pm|} & \text{sur } T_{i+1}^\pm \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \text{ pour } 1 \leq i \leq N_t - 1, \text{ et,}$$

$$\varphi_{N_t} := \begin{cases} 1 & \text{sur } \omega^+ \\ -1 & \text{sur } \omega^- \end{cases}$$

considérons (\mathcal{P}_h^{AP1}) correspondant au problème (\mathcal{P}^{AP1}) discrétisé. Les équations sur ω^+ et ω^- sont uniquement couplées par la fonction de base φ_{N_t} . Lorsque l'on prend dans (\mathcal{P}_h^{AP1}) la fonction test $(0, 0, 0, 0, \varphi_{N_t})$ on obtient :

$$\frac{A^{1111, P^\pm}(\omega)}{R_l^2} \int_\omega u_{3,h} \varphi_{N_t} d\xi_\omega = \frac{A^{1111, P^\pm}(\omega)}{R_l^2} \int_{\omega^+} u_{3,h}^+ d\xi_\omega - \frac{A^{1111, P^\pm}(\omega)}{R_l^2} \int_{\omega^-} u_{3,h}^- d\xi_\omega = \int_\omega f^{3\pm} \varphi_{N_t} d\xi_\omega$$

car les termes de la forme $\int_\omega \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} \varphi_{N_t}$ sont nuls. D'autre part, comme $u_{3,h} \in L_0^2(\omega)$ on a

$$\int_{\omega^+} u_{3,h}^+ d\xi_\omega + \int_{\omega^-} u_{3,h}^- d\xi_\omega = 0.$$

On en déduit les valeurs

$$\int_{\omega^+} u_{3,h}^+ d\xi_\omega = \frac{1}{2} \frac{R_l^2}{A^{1111, P^\pm}(\omega)} \int_\omega f^{3\pm} d\xi_\omega$$

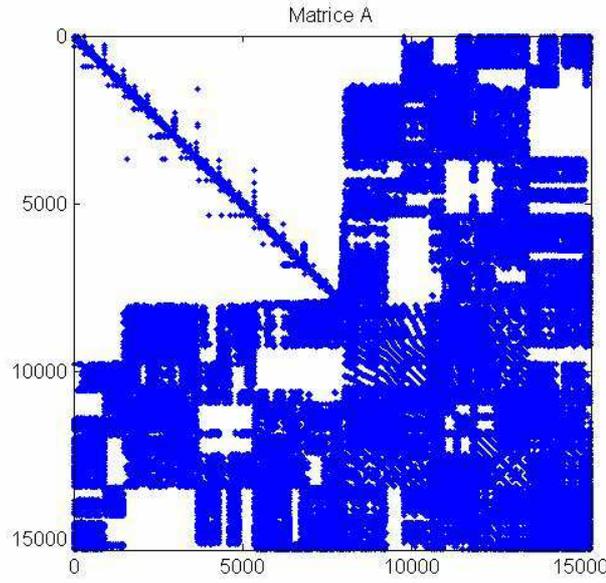


Figure 18: Profil de A après renumérotation

et

$$\int_{\omega^-} u_{3,h}^- d\xi_\omega = -\frac{1}{2} \frac{R_l^2}{A^{1111, P^\pm(\omega)}} \int_{\omega} f^{3\pm} d\xi_\omega,$$

et les problèmes sur ω^+ et ω^- sont découplés. On obtient alors les systèmes linéaires

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,h}^+ \\ U_{2,h}^+ \\ U_{3,h}^+ \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} U_{1,h}^- \\ U_{2,h}^- \\ U_{3,h}^- \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1,h}^+ \\ F_{2,h}^+ \\ F_{3,h}^+ \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,h}^- \\ U_{2,h}^- \\ U_{3,h}^- \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} U_{1,h}^+ \\ U_{2,h}^+ \\ U_{3,h}^+ \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1,h}^- \\ F_{2,h}^- \\ F_{3,h}^- \end{pmatrix},$$

$$\int_{\omega^+} u_{3,h}^+ d\xi_\omega = \frac{1}{2} \frac{R_l^2}{A^{1111, P^\pm(\omega)}} \int_{\omega} f^{3\pm} d\xi_\omega,$$

$$\int_{\omega^-} u_{3,h}^- d\xi_\omega = -\frac{1}{2} \frac{R_l^2}{A^{1111, P^\pm(\omega)}} \int_{\omega} f^{3\pm} d\xi_\omega.$$

où $U_{3,h}^+$ est le vecteur des composantes de $\varphi_1^+, \dots, \varphi_{N_t-1}^+$ de $u_{3,h}$ et $U_{3,h}^-$ est le vecteur des composantes de $\varphi_1^-, \dots, \varphi_{N_t-1}^-$ de $u_{3,h}$. La matrice A_{11} a la même structure que la matrice C précédente, la matrice A_{22} est bidiagonale et la matrice A_{12} est creuse mais casse la structure compacte de la matrice globale (voir Figure 18) empêchant la résolution par une méthode directe et rendant difficile l'obtention de bons préconditionneurs.

C'est pourquoi nous proposons de résoudre le système en utilisant une méthode Cholesky par blocs :

$$\left| \begin{array}{l} U_{3,h}^{+,0} \text{ donné} \\ A_{11} \begin{pmatrix} U_{1,h}^{+,n+1} \\ U_{2,h}^{+,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1,h}^+ \\ F_{2,h}^+ \end{pmatrix} - A_{12} U_{3,h}^{+,n} \\ A_{22} U_{3,h}^{+,n+1} = F_{3,h}^+ - A_{12}^T \begin{pmatrix} U_{1,h}^{+,n+1} \\ U_{2,h}^{+,n+1} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Les résultats numériques obtenus, sont en tout point identiques à ceux obtenus pour le problème \mathcal{P}_h^{AP2} .

5 Etude asymptotique, géométrie elliptico-hyperbolique

5.1 Motivation

Les applications numériques font apparaître une dépendance entre la solution en déplacement et le maillage utilisé ce qui n'est pas satisfaisant. Aussi, pour supprimer ce problème, on modifie légèrement la géométrie du lobe en "arrondissant" les axes de fixation. Le lobe qui était cylindrique devient alors un arc de tore de révolution de surface génératrice composée de deux arcs de cercles de même rayon R_l (voir Figures 20 et 21). Ce rayon est petit devant R_L le rayon de révolution. A chaque étape des calculs, si on fait tendre R_L vers $+\infty$ on retrouve les résultats du calcul en géométrie parabolique.

Les conventions et notations de l'étude asymptotique sur une géométrie parabolique restent les mêmes. On mème les mêmes calculs que dans le cas précédant.

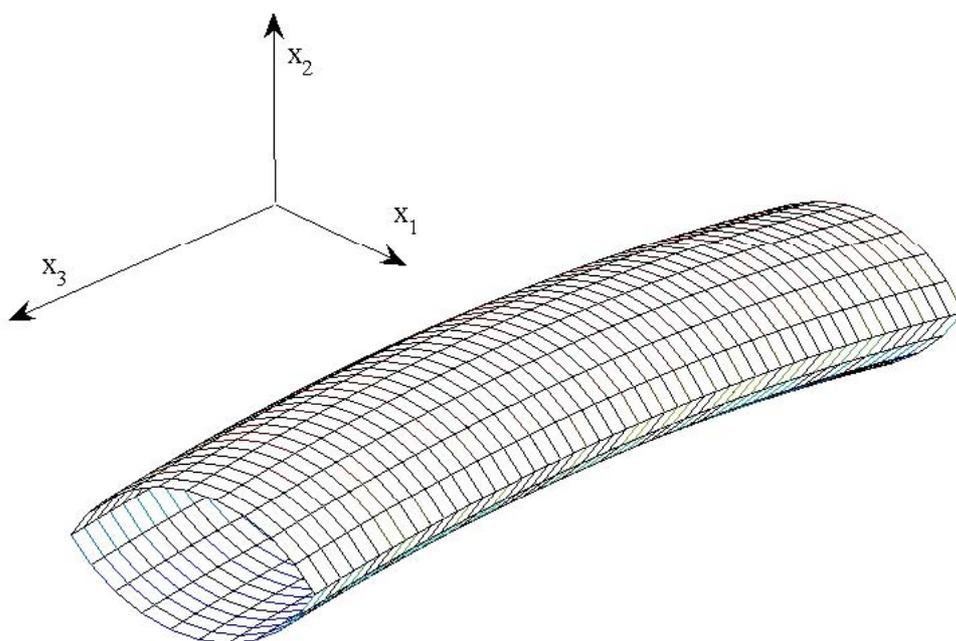


Figure 19: Lobe à géométrie elliptico-hyperbolique

5.2 Eléments de géométrie différentielle dans l'ouvert Ω^ε de \mathbb{R}^3

Notations :

$$\begin{aligned} d^+(\xi_1, \xi_3) &:= 1 - \frac{R_l}{R_L} \cos\left(\frac{l}{R_l}\right) + \frac{R_l + \xi_3}{R_L} \cos\left(\frac{\xi_1 - l}{R_l}\right), \\ d^-(\xi_1, \xi_3) &:= -1 - \frac{R_l}{R_L} \cos\left(\frac{l}{R_l}\right) + \frac{R_l + \xi_3}{R_L} \cos\left(\frac{\xi_1 + l}{R_l}\right). \end{aligned}$$

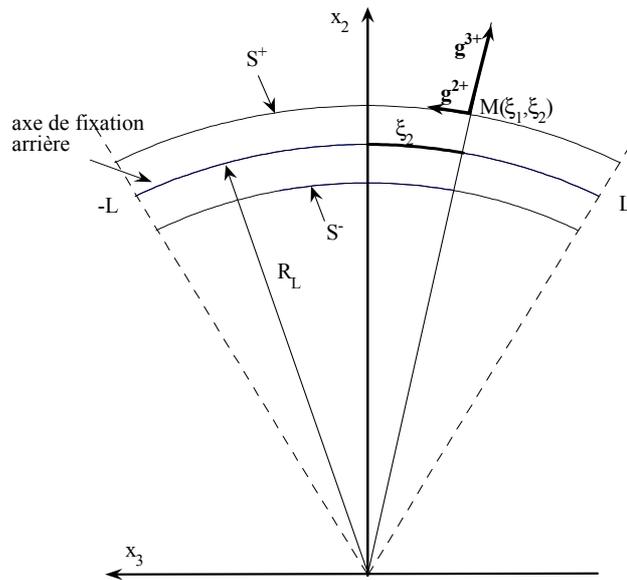


Figure 20: Coupe d'un lobe dans le plan $x_1 = 0$

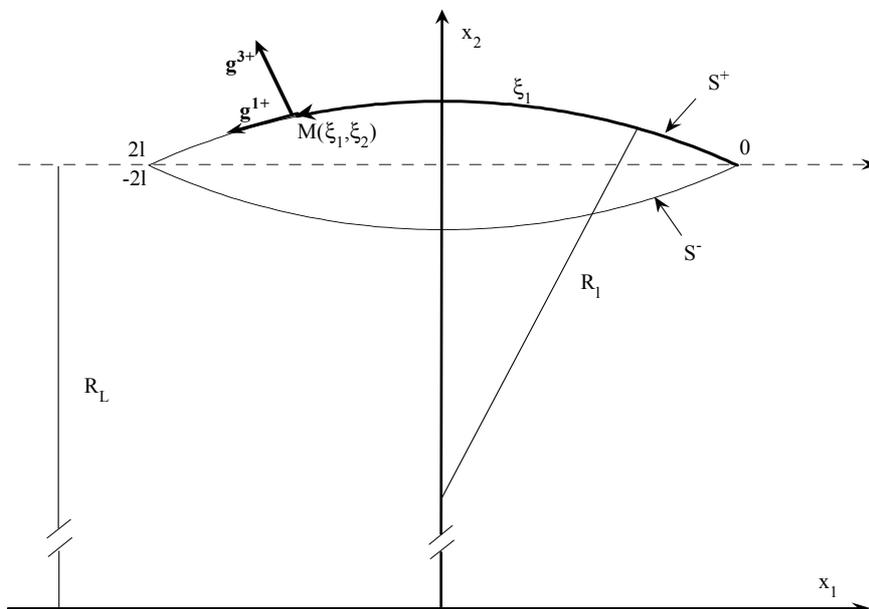


Figure 21: Coupe d'un lobe dans le plan $x_3 = 0$

Définition 5.2.1 On définit un paramétrage du volume Ω^ε par

$$\Theta^+ : \begin{cases} \omega^+ \times]-\varepsilon, \varepsilon[\mapsto \Omega^{+\varepsilon} \\ \xi^\varepsilon \longrightarrow \Theta^+(\xi^\varepsilon) = \begin{pmatrix} -(R_l + \xi_3^\varepsilon) \sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) \\ R_L \cos\left(\frac{\xi_2^\varepsilon}{R_L}\right) d^+(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon) - R_L \\ R_L \sin\left(\frac{\xi_2^\varepsilon}{R_L}\right) d^+(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon) \end{pmatrix}, \end{cases}$$

et

$$\Theta^- : \begin{cases} \omega^- \times]-\varepsilon, \varepsilon[\mapsto \Omega^{-\varepsilon} \\ \xi^\varepsilon \longrightarrow \Theta^-(\xi^\varepsilon) = \begin{pmatrix} (R_l + \xi_3^\varepsilon) \sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right) \\ -R_L \cos\left(\frac{\xi_2^\varepsilon}{R_L}\right) d^-(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon) - R_L \\ -R_L \sin\left(\frac{\xi_2^\varepsilon}{R_L}\right) d^-(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Ces applications sont des difféomorphismes de classe C^∞ et, de manière évidente, on a

$$\begin{aligned} S^+ &= \Theta^+(\omega^+ \times \{0\}) \quad \text{et} \quad \Omega^{+\varepsilon} = \Theta^+(\omega^+ \times]-\varepsilon, \varepsilon[), \\ S^- &= \Theta^-(\omega^- \times \{0\}) \quad \text{et} \quad \Omega^{-\varepsilon} = \Theta^-(\omega^- \times]-\varepsilon, \varepsilon[). \end{aligned}$$

5.2.1 Bases locales

Les bases covariantes $(\mathbf{g}_1^{\varepsilon\pm}, \mathbf{g}_2^{\varepsilon\pm}, \mathbf{g}_3^{\varepsilon\pm})$, associées à ce paramétrage, sont définies par $\mathbf{g}_i^{\varepsilon\pm} = \frac{\partial \Theta^\pm}{\partial \xi_i^\varepsilon}$. Dans le cas traité, ces vecteurs valent

$$\mathbf{g}_1^{\varepsilon+} = -\frac{(R_l + \xi_3^\varepsilon)}{R_l} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) \\ \sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) \cos\left(\frac{\xi_2^\varepsilon}{R_L}\right) \\ \sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) \sin\left(\frac{\xi_2^\varepsilon}{R_L}\right) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g}_2^{\varepsilon+} = d^+(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon) \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\left(\frac{\xi_2^\varepsilon}{R_L}\right) \\ \cos\left(\frac{\xi_2^\varepsilon}{R_L}\right) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_3^{\varepsilon+} = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) \\ \cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) \cos\left(\frac{\xi_2^\varepsilon}{R_L}\right) \\ \cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) \sin\left(\frac{\xi_2^\varepsilon}{R_L}\right) \end{pmatrix}.$$

et

$$\mathbf{g}_1^{\varepsilon-} = \frac{(R_l + \xi_3^\varepsilon)}{R_l} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right) \\ \sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right) \cos\left(\frac{\xi_2^\varepsilon}{R_L}\right) \\ \sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right) \sin\left(\frac{\xi_2^\varepsilon}{R_L}\right) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g}_2^{\varepsilon-} = -d^-(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon) \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\left(\frac{\xi_2^\varepsilon}{R_L}\right) \\ \cos\left(\frac{\xi_2^\varepsilon}{R_L}\right) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_3^{\varepsilon-} = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right) \\ -\cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right) \cos\left(\frac{\xi_2^\varepsilon}{R_L}\right) \\ -\cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right) \sin\left(\frac{\xi_2^\varepsilon}{R_L}\right) \end{pmatrix}.$$

Remarque 5.2.1 Les bases covariantes sont orthogonales. Elles coincident avec les directions d'orthotropie du tissu.

On détermine ensuite les bases contravariantes $(\mathbf{g}^{\varepsilon 1\pm}, \mathbf{g}^{\varepsilon 2\pm}, \mathbf{g}^{\varepsilon 3\pm})$ définie par $\mathbf{g}^{\varepsilon i\pm} \cdot \mathbf{g}_j^{\varepsilon\pm} = \delta_j^i$ et on obtient

$$\mathbf{g}^{\varepsilon 1+} = -\frac{R_l}{(R_l + \xi_3^\varepsilon)} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) \\ \sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) \cos\left(\frac{\xi_2^\varepsilon}{R_L}\right) \\ \sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) \sin\left(\frac{\xi_2^\varepsilon}{R_L}\right) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g}^{\varepsilon 2+} = \frac{1}{d^+(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon)} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\left(\frac{\xi_2^\varepsilon}{R_L}\right) \\ \cos\left(\frac{\xi_2^\varepsilon}{R_L}\right) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}^{\varepsilon 3+} = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) \\ \cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) \cos\left(\frac{\xi_2^\varepsilon}{R_L}\right) \\ \cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) \sin\left(\frac{\xi_2^\varepsilon}{R_L}\right) \end{pmatrix}.$$

et,

$$\mathbf{g}^{\varepsilon 1-} = \frac{R_l}{(R_l + \xi_3^\varepsilon)} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right) \\ \sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right) \cos\left(\frac{\xi_2^\varepsilon}{R_L}\right) \\ \sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right) \sin\left(\frac{\xi_2^\varepsilon}{R_L}\right) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g}^{\varepsilon 2-} = \frac{-1}{d^-(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon)} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\left(\frac{\xi_2^\varepsilon}{R_L}\right) \\ \cos\left(\frac{\xi_2^\varepsilon}{R_L}\right) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}^{\varepsilon 3-} = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right) \\ -\cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right) \cos\left(\frac{\xi_2^\varepsilon}{R_L}\right) \\ -\cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right) \sin\left(\frac{\xi_2^\varepsilon}{R_L}\right) \end{pmatrix}.$$

5.2.2 Tenseurs métriques

Les composantes covariantes du tenseur métrique valent $g_{ij}^{\varepsilon\pm} = \mathbf{g}_i^{\varepsilon\pm} \cdot \mathbf{g}_j^{\varepsilon\pm}$ soit, avec une notation matricielle,

$$[g_{ij}^{\varepsilon+}] = \begin{bmatrix} \frac{(R_l + \xi_3^\varepsilon)^2}{R_l^2} & 0 & 0 \\ 0 & d^+(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [g_{ij}^{\varepsilon-}] = \begin{bmatrix} \frac{(R_l + \xi_3^\varepsilon)^2}{R_l^2} & 0 & 0 \\ 0 & d^-(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

tandis que les composantes contravariantes de ce même tenseur métrique valent $g^{ij\varepsilon\pm} = \mathbf{g}^{\varepsilon i\pm} \cdot \mathbf{g}^{\varepsilon j\pm}$, ce qui donne

$$[g^{ij\varepsilon+}] = \begin{bmatrix} \frac{R_l^2}{(R_l + \xi_3^\varepsilon)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d^+(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [g^{ij\varepsilon-}] = \begin{bmatrix} \frac{R_l^2}{(R_l + \xi_3^\varepsilon)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d^-(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le déterminant du tenseur métrique exprimé en composantes covariantes est

$$g^{\varepsilon+} = \left(1 + \frac{\xi_3^\varepsilon}{R_l}\right)^2 d^+ (\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon)^2, \quad g^{\varepsilon-} = \left(1 + \frac{\xi_3^\varepsilon}{R_l}\right)^2 d^- (\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon)^2.$$

5.2.3 Symboles de Christoffel

On calcule maintenant les symboles de Christoffel, définis par

$$\Gamma_{ij}^{\varepsilon p \pm} = \mathbf{g}^{\varepsilon p \pm} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_i^{\varepsilon \pm}}{\partial \xi_j^\varepsilon}.$$

Les symboles non nuls sont

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^{\varepsilon 3+} &= -\frac{(R_l + \xi_3^\varepsilon)}{R_l^2} & \Gamma_{11}^{\varepsilon 3-} &= -\frac{(R_l + \xi_3^\varepsilon)}{R_l^2} \\ \Gamma_{12}^{\varepsilon 2+} = \Gamma_{21}^{\varepsilon 2+} &= -\frac{(R_l + \xi_3^\varepsilon)}{R_l R_L d^+(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon)} \sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) & \Gamma_{12}^{\varepsilon 2-} = \Gamma_{21}^{\varepsilon 2-} &= -\frac{(R_l + \xi_3^\varepsilon)}{R_l R_L d^-(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon)} \sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right) \\ \Gamma_{13}^{\varepsilon 1+} = \Gamma_{31}^{\varepsilon 1+} &= \frac{1}{(R_l + \xi_3^\varepsilon)} & \Gamma_{13}^{\varepsilon 1-} = \Gamma_{31}^{\varepsilon 1-} &= \frac{1}{(R_l + \xi_3^\varepsilon)} \\ \\ \Gamma_{22}^{\varepsilon 1+} &= \frac{R_l d^+(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon)}{R_L (R_l + \xi_3^\varepsilon)} \sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) & \Gamma_{22}^{\varepsilon 1-} &= \frac{R_l d^-(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon)}{R_L (R_l + \xi_3^\varepsilon)} \sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right) \\ \Gamma_{22}^{\varepsilon 3+} &= -\frac{d^+(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon)}{R_L} \cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) & \Gamma_{22}^{\varepsilon 3-} &= -\frac{d^-(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon)}{R_L} \cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right) \\ \Gamma_{23}^{\varepsilon 2+} = \Gamma_{32}^{\varepsilon 2+} &= \frac{1}{R_L d^+(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon)} \cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) & \Gamma_{23}^{\varepsilon 2-} = \Gamma_{32}^{\varepsilon 2-} &= \frac{1}{R_L d^-(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon)} \cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon + l}{R_l}\right). \end{aligned}$$

5.2.4 Tenseur linéarisé de changement de métrique

Soit $\mathbf{v}^{\varepsilon \pm}$, un champ vectoriel exprimé en coordonnées covariantes $\mathbf{v}^{\varepsilon \pm} = v_i^{\varepsilon \pm} \mathbf{g}^{\varepsilon i \pm}$. On lui associe le tenseur de ses dérivées covariantes $\mathbf{v}_{\parallel}^{\varepsilon \pm}$ dont les coordonnées covariantes sont définies par

$$\mathbf{v}_{\parallel}^{\varepsilon \pm} = \left[v_{i\parallel j}^{\varepsilon \pm} \right] := \left[\frac{\partial v_i^{\varepsilon \pm}}{\partial \xi_j^\varepsilon} - \Gamma_{ij}^{\varepsilon p \pm} v_p^{\varepsilon \pm} \right].$$

Puis, on lui associe le tenseur linéarisé symétrique de changement de métrique dont les composantes covariantes sont

$$\left[e_{i\parallel j}^{\varepsilon \pm}(\mathbf{v}^{\varepsilon \pm}) \right] = \frac{1}{2} \left[v_{i\parallel j}^{\varepsilon \pm} + v_{j\parallel i}^{\varepsilon \pm} \right]$$

Soit, après calculs,

$$\left[e_{i\parallel j}^{\varepsilon+}(\mathbf{v}^{\varepsilon+}) \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1^{\varepsilon+}}{\partial \xi_1^\varepsilon} + \frac{(R_l + \xi_3^\varepsilon)}{R_l^2} v_3^{\varepsilon+} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1^{\varepsilon+}}{\partial \xi_2^\varepsilon} + \frac{\partial v_2^{\varepsilon+}}{\partial \xi_1^\varepsilon} \right) + \frac{(R_l + \xi_3^\varepsilon)}{R_l R_L d^+(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon)} \sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) v_2^{\varepsilon+} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1^{\varepsilon+}}{\partial \xi_3^\varepsilon} + \frac{\partial v_3^{\varepsilon+}}{\partial \xi_1^\varepsilon} \right) - \frac{1}{(R_l + \xi_3^\varepsilon)} v_1^{\varepsilon+} \\ sym & \frac{\partial v_2^{\varepsilon+}}{\partial \xi_2^\varepsilon} + \frac{d^+(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon)}{R_L} \cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) v_3^{\varepsilon+} - \frac{R_l d^+(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon)}{R_L (R_l + \xi_3^\varepsilon)} \sin\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) v_1^{\varepsilon+} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2^{\varepsilon+}}{\partial \xi_3^\varepsilon} + \frac{\partial v_3^{\varepsilon+}}{\partial \xi_2^\varepsilon} \right) - \frac{1}{R_L d^+(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon)} \cos\left(\frac{\xi_1^\varepsilon - l}{R_l}\right) v_2^{\varepsilon+} \\ sym & sym & \frac{\partial v_3^{\varepsilon+}}{\partial \xi_3^\varepsilon} \end{bmatrix},$$

et,

$$\left[e_{i||j}^{\varepsilon-}(\mathbf{v}^{\varepsilon\pm}) \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1^{\varepsilon-}}{\partial \xi_1^{\varepsilon}} + \frac{(R_l + \xi_3^{\varepsilon})}{R_l^2} v_3^{\varepsilon-} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1^{\varepsilon-}}{\partial \xi_2^{\varepsilon}} + \frac{\partial v_2^{\varepsilon-}}{\partial \xi_1^{\varepsilon}} \right) + \frac{(R_l + \xi_3^{\varepsilon})}{R_l R_L d^-(\xi_1^{\varepsilon}, \xi_3^{\varepsilon})} \sin \left(\frac{\xi_1^{\varepsilon} + l}{R_l} \right) v_2^{\varepsilon-} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1^{\varepsilon-}}{\partial \xi_3^{\varepsilon}} + \frac{\partial v_3^{\varepsilon-}}{\partial \xi_1^{\varepsilon}} \right) - \frac{1}{(R_l + \xi_3^{\varepsilon})} v_1^{\varepsilon-} \\ sym & \frac{\partial v_2^{\varepsilon-}}{\partial \xi_2^{\varepsilon}} + \frac{d^-(\xi_1^{\varepsilon}, \xi_3^{\varepsilon})}{R_L} \cos \left(\frac{\xi_1^{\varepsilon} + l}{R_l} \right) v_3^{\varepsilon-} - \frac{R_l d^-(\xi_1^{\varepsilon}, \xi_3^{\varepsilon})}{R_L (R_l + \xi_3^{\varepsilon})} \sin \left(\frac{\xi_1^{\varepsilon} + l}{R_l} \right) v_1^{\varepsilon-} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2^{\varepsilon-}}{\partial \xi_3^{\varepsilon}} + \frac{\partial v_3^{\varepsilon-}}{\partial \xi_2^{\varepsilon}} \right) - \frac{1}{R_L d^-(\xi_1^{\varepsilon}, \xi_3^{\varepsilon})} \cos \left(\frac{\xi_1^{\varepsilon} + l}{R_l} \right) v_2^{\varepsilon-} \\ sym & sym & \frac{\partial v_3^{\varepsilon-}}{\partial \xi_3^{\varepsilon}} \end{bmatrix}.$$

5.2.5 Tenseur d'élasticité

$\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ est le tenseur d'élasticité linéaire du quatrième ordre. Quand on l'exprime en coordonnées contravariantes, on le note $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\varepsilon\pm}$. La matrice de passage de la base d'orthotropie à la base contravariante est

$$P^{\varepsilon} = (p_{ij}^{\varepsilon}) = \begin{pmatrix} \frac{R_l}{(R_l + \xi_3^{\varepsilon})} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d^{\pm}(\xi_1^{\varepsilon}, \xi_3^{\varepsilon})} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par application de la formule de changement de base $A^{\pm\varepsilon,ijkl} = p_{iq}^{\varepsilon} p_{jr}^{\varepsilon} p_{ks}^{\varepsilon} p_{lt}^{\varepsilon} A_{qrst}$, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\varepsilon\pm}$ vaut, par blocs,

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\varepsilon\pm,11} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\left(1 + \frac{\xi_3^{\varepsilon}}{R_l}\right)^4} \lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\left(1 + \frac{\xi_3^{\varepsilon}}{R_l}\right)^2 d^{\pm}(\xi_1^{\varepsilon}, \xi_3^{\varepsilon})^2} \lambda_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\left(1 + \frac{\xi_3^{\varepsilon}}{R_l}\right)^2 d^{\pm}(\xi_1^{\varepsilon}, \xi_3^{\varepsilon})^2} \lambda_{13} \end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\varepsilon\pm,21} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\varepsilon\pm,12} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\left(1 + \frac{\xi_3^{\varepsilon}}{R_l}\right)^2 d^{\pm}(\xi_1^{\varepsilon}, \xi_3^{\varepsilon})^2} \mu_{12} & 0 \\ \frac{1}{\left(1 + \frac{\xi_3^{\varepsilon}}{R_l}\right)^2 d^{\pm}(\xi_1^{\varepsilon}, \xi_3^{\varepsilon})^2} \mu_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\varepsilon\pm,31} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\varepsilon\pm,13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\left(1+\frac{\xi_3^\varepsilon}{R_l}\right)^2} \mu_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\left(1+\frac{\xi_3^\varepsilon}{R_l}\right)^2} \mu_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\varepsilon\pm,22} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\left(1+\frac{\xi_3^\varepsilon}{R_l}\right)^2} \frac{\lambda_{12}}{d^\pm(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d^\pm(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon)^4} \lambda_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d^\pm(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon)^2} \lambda_{23} \end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\varepsilon\pm,23} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\varepsilon\pm,32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d^\pm(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon)^2} \mu_{23} \\ \frac{1}{d^\pm(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon)^2} \mu_{23} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

et,

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\varepsilon\pm,33} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\left(1+\frac{\xi_3^\varepsilon}{R_l}\right)^2} \frac{\lambda_{13}}{d^\pm(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d^\pm(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon)^2} \lambda_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33} \end{bmatrix}.$$

5.3 Formulation variationnelle dans l'ouvert Ω^ε de \mathbb{R}^3

Notations :

$$\mathcal{P}^\varepsilon := \begin{cases} \mathbf{u}^\varepsilon \in \mathcal{V}(\Omega^\varepsilon), \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega^\varepsilon) \\ \int_{\omega \times [-\varepsilon, \varepsilon]} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\varepsilon\pm} : \mathbf{e}_\parallel^{\varepsilon\pm}(\mathbf{u}^{\varepsilon\pm}) : \mathbf{e}_\parallel^{\varepsilon\pm}(\mathbf{v}^{\varepsilon\pm}) \left(1 + \frac{\xi_3^\varepsilon}{R_l}\right) |d^\pm(\xi_1^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon)| d\xi^\varepsilon \\ + \frac{\pi}{V} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R_l}\right)^2 \int_{\omega_{-\varepsilon}} |d^\pm(\xi_1^\varepsilon, -\varepsilon)| v_3^\varepsilon d\xi_\omega^\varepsilon \int_{\omega_{-\varepsilon}} |d^\pm(\xi_1^\varepsilon, -\varepsilon)| u_3^\varepsilon d\xi_\omega^\varepsilon \\ = \int_{\omega_{+\varepsilon}} \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l}\right) |d^\pm(\xi_1^\varepsilon, +\varepsilon)| f^{\varepsilon i \pm} v_i^{\varepsilon\pm} d\xi_\omega^\varepsilon. \end{cases}$$

En coordonnées curvilignes le problème $\mathcal{P}(\Omega^\varepsilon)$ s'écrit \mathcal{P}^ε . On a montré sous une forme différente (voir théorème **2.4.1**), le résultat suivant qu'il n'est toutefois pas inutile de rappeler compte tenu du changement de système de coordonnées et de géométrie.

Proposition 5.3.1 *Le problème \mathcal{P}^ε admet une unique solution dans $(\mathcal{V}(\Omega^\varepsilon), \|\cdot\|_{1,\Omega^\varepsilon})$.*

5.4 Normalisation du domaine en 3D

Dans la formulation variationnelle \mathcal{P}^ε , le domaine d'intégration Ω^ε ainsi que les fonctions à intégrer dépendent du paramètre ε . Pour éviter cette double dépendance, on fait, comme dans le cas d'une géométrie parabolique, le changement de variable π^ε

$$\pi^\varepsilon : \begin{cases} \Omega & \longmapsto \Omega^\varepsilon \\ \xi & \longrightarrow \pi^\varepsilon(\xi) = \xi^\varepsilon = (\xi_1, \xi_2, \varepsilon\xi_3) \end{cases}$$

qui permet de se ramener à l'étude d'un problème posé sur le domaine d'intégration $\Omega := S \times]-1, 1[$ indépendant du paramètre ε .

5.4.1 Tenseur d'élasticité normalisé

Notations :

$$\begin{aligned} d_{\varepsilon\xi_3}^\pm &:= d^\pm(\xi_1, \varepsilon\xi_3), \\ d^\pm &:= d^\pm(\xi_1, 0). \end{aligned}$$

Après le changement de variable π^ε , le tenseur d'élasticité devient $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(\varepsilon)$ dont les composantes bloc par bloc valent

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(\varepsilon)^{11} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\left(1+\frac{\varepsilon}{R_l}\xi_3\right)^4}\lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\left(1+\frac{\varepsilon}{R_l}\xi_3\right)^2 d_{\varepsilon\xi_3}^{\pm 2}}\lambda_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\left(1+\frac{\varepsilon}{R_l}\xi_3\right)^2 d_{\varepsilon\xi_3}^{\pm 2}}\lambda_{13} \end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(\varepsilon)^{21} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(\varepsilon)^{12} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\left(1+\frac{\varepsilon}{R_l}\xi_3\right)^2 d_{\varepsilon\xi_3}^{\pm 2}}\mu_{12} & 0 \\ \frac{1}{\left(1+\frac{\varepsilon}{R_l}\xi_3\right)^2 d_{\varepsilon\xi_3}^{\pm 2}}\mu_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(\varepsilon)^{31} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(\varepsilon)^{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\left(1+\frac{\varepsilon}{R_l}\xi_3\right)^2}\mu_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\left(1+\frac{\varepsilon}{R_l}\xi_3\right)^2}\mu_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(\varepsilon)^{22} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\left(1+\frac{\varepsilon}{R_l}\xi_3\right)^2 d_{\varepsilon\xi_3}^{\pm 2}} \lambda_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_{\varepsilon\xi_3}^{\pm 4}} \lambda_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d_{\varepsilon\xi_3}^{\pm 2}} \lambda_{23} \end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(\varepsilon)^{23} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(\varepsilon)^{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d_{\varepsilon\xi_3}^{\pm 2}} \mu_{23} \\ \frac{1}{d_{\varepsilon\xi_3}^{\pm 2}} \mu_{23} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

et,

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(\varepsilon)^{33} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\left(1+\frac{\varepsilon}{R_l}\xi_3\right)^2 d_{\varepsilon\xi_3}^{\pm 2}} \lambda_{13} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_{\varepsilon\xi_3}^{\pm 2}} \lambda_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33} \end{bmatrix}.$$

5.4.2 Symboles de Christoffel normalisés

Pour obtenir les symboles de Christoffel normalisés, que l'on note $\Gamma_{ij}^{k\pm}(\varepsilon)$, on écrit que

$$\Gamma_{ij}^{k\pm}(\varepsilon)(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \Gamma_{ij}^{\varepsilon k\pm}(\xi_1^\varepsilon, \xi_2^\varepsilon, \xi_3^\varepsilon) = \Gamma_{ij}^{\varepsilon k\pm}(\xi_1, \xi_2, \varepsilon\xi_3),$$

et on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^{3+}(\varepsilon) &= -\frac{(R_l + \varepsilon\xi_3)}{R_l^2} & \Gamma_{11}^{3-}(\varepsilon) &= -\frac{(R_l + \varepsilon\xi_3)}{R_l^2} \\ \Gamma_{12}^{2+}(\varepsilon) &= -\frac{(R_l + \varepsilon\xi_3)}{R_l R_L d_{\varepsilon\xi_3}^+} \sin\left(\frac{\xi_1 - l}{R_l}\right) & \Gamma_{12}^{2-}(\varepsilon) &= -\frac{(R_l + \varepsilon\xi_3)}{R_l R_L d_{\varepsilon\xi_3}^-} \sin\left(\frac{\xi_1 + l}{R_l}\right) \\ \Gamma_{21}^{2+}(\varepsilon) &= -\frac{(R_l + \varepsilon\xi_3)}{R_l R_L d_{\varepsilon\xi_3}^+} \sin\left(\frac{\xi_1 - l}{R_l}\right) & \Gamma_{21}^{2-}(\varepsilon) &= -\frac{(R_l + \varepsilon\xi_3)}{R_l R_L d_{\varepsilon\xi_3}^-} \sin\left(\frac{\xi_1 + l}{R_l}\right) \\ \Gamma_{13}^{1+}(\varepsilon) &= \frac{1}{(R_l + \varepsilon\xi_3)} & \Gamma_{13}^{1-}(\varepsilon) &= \frac{1}{(R_l + \varepsilon\xi_3)} \\ \Gamma_{31}^{1+}(\varepsilon) &= \frac{1}{(R_l + \varepsilon\xi_3)} & \Gamma_{31}^{1-}(\varepsilon) &= \frac{1}{(R_l + \varepsilon\xi_3)} \\ \Gamma_{22}^{1+}(\varepsilon) &= \frac{R_l d_{\varepsilon\xi_3}^+}{R_L (R_l + \varepsilon\xi_3)} \sin\left(\frac{\xi_1 - l}{R_l}\right) & \Gamma_{22}^{1-}(\varepsilon) &= \frac{R_l d_{\varepsilon\xi_3}^-}{R_L (R_l + \varepsilon\xi_3)} \sin\left(\frac{\xi_1 + l}{R_l}\right) \\ \Gamma_{22}^{3+}(\varepsilon) &= -\frac{d_{\varepsilon\xi_3}^+}{R_L} \cos\left(\frac{\xi_1 - l}{R_l}\right) & \Gamma_{22}^{3-}(\varepsilon) &= -\frac{d_{\varepsilon\xi_3}^-}{R_L} \cos\left(\frac{\xi_1 + l}{R_l}\right) \\ \Gamma_{23}^{2+}(\varepsilon) &= \frac{1}{R_L d_{\varepsilon\xi_3}^+} \cos\left(\frac{\xi_1 - l}{R_l}\right) & \Gamma_{23}^{2-}(\varepsilon) &= \frac{1}{R_L d_{\varepsilon\xi_3}^-} \cos\left(\frac{\xi_1 + l}{R_l}\right) \\ \Gamma_{32}^{2+}(\varepsilon) &= \frac{1}{R_L d_{\varepsilon\xi_3}^+} \cos\left(\frac{\xi_1 - l}{R_l}\right) & \Gamma_{32}^{2-}(\varepsilon) &= \frac{1}{R_L d_{\varepsilon\xi_3}^-} \cos\left(\frac{\xi_1 + l}{R_l}\right). \end{aligned}$$

5.4.3 Tenseur linéarisé de changement de métrique

Le tenseur des déformations normalisé $\underline{e}_{\parallel}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}^{\pm})$ se calcule à l'aide de la relation

$$e_{i\parallel j}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}^{\pm}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)) = e_{i\parallel j}^{\varepsilon\pm}(\mathbf{v}^{\pm}(\xi_1^{\varepsilon}, \xi_2^{\varepsilon}, \xi_3^{\varepsilon})) = e_{i\parallel j}^{\varepsilon\pm}(\mathbf{v}^{\pm}(\xi_1, \xi_2, \varepsilon\xi_3)).$$

Il vaut donc

$$\underline{e}_{\parallel}^{EH+}(\varepsilon, \mathbf{v}^+) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1^+}{\partial \xi_1} + \frac{1}{R_l} v_3^+ & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1^+}{\partial \xi_2} + \frac{\partial v_2^+}{\partial \xi_1} \right) + \frac{1}{R_L d_{\varepsilon\xi_3}^+} \sin\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) v_2^+ + \xi_3 \frac{\varepsilon}{R_l} \frac{1}{R_L d_{\varepsilon\xi_3}^+} \sin\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) v_2^+ & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_1^+}{\partial \xi_3} + \frac{\partial v_3^+}{\partial \xi_1} \right) - \frac{1}{(R_l + \varepsilon\xi_3)} v_1^+ \\ \text{sym} & \frac{\partial v_2^+}{\partial \xi_2} + \frac{d_{\varepsilon\xi_3}^+}{R_L} \cos\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) v_3^+ - \frac{R_l d_{\varepsilon\xi_3}^+}{R_L(R_l + \varepsilon\xi_3)} \sin\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) v_1^+ & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_2^+}{\partial \xi_3} + \frac{\partial v_3^+}{\partial \xi_2} \right) - \frac{1}{R_L d_{\varepsilon\xi_3}^+} \cos\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) v_2^+ \\ \text{sym} & \text{sym} & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_3^+}{\partial \xi_3} \end{bmatrix}$$

pour la partie supérieure et,

$$\underline{e}_{\parallel}^{EH-}(\varepsilon, \mathbf{v}^-) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1^-}{\partial \xi_1} + \frac{1}{R_l} v_3^- & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1^-}{\partial \xi_2} + \frac{\partial v_2^-}{\partial \xi_1} \right) + \frac{1}{R_L d_{\varepsilon\xi_3}^-} \sin\left(\frac{\xi_1+l}{R_l}\right) v_2^- + \xi_3 \frac{\varepsilon}{R_l} \frac{1}{R_L d_{\varepsilon\xi_3}^-} \sin\left(\frac{\xi_1+l}{R_l}\right) v_2^- & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_1^-}{\partial \xi_3} + \frac{\partial v_3^-}{\partial \xi_1} \right) - \frac{1}{(R_l + \varepsilon\xi_3)} v_1^- \\ \text{sym} & \frac{\partial v_2^-}{\partial \xi_2} + \frac{d_{\varepsilon\xi_3}^-}{R_L} \cos\left(\frac{\xi_1+l}{R_l}\right) v_3^- - \frac{R_l d_{\varepsilon\xi_3}^-}{R_L(R_l + \varepsilon\xi_3)} \sin\left(\frac{\xi_1+l}{R_l}\right) v_1^- & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_2^-}{\partial \xi_3} + \frac{\partial v_3^-}{\partial \xi_2} \right) - \frac{1}{R_L d_{\varepsilon\xi_3}^-} \cos\left(\frac{\xi_1+l}{R_l}\right) v_2^- \\ \text{sym} & \text{sym} & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_3^-}{\partial \xi_3} \end{bmatrix}$$

pour la partie inférieure.

5.5 Formulation variationnelle normalisée en 3D

Notations :

$$\begin{aligned} d_{-\varepsilon}^{\pm} &:= d^{\pm}(\xi_1, -\varepsilon), \\ d_{\varepsilon}^{\pm} &:= d^{\pm}(\xi_1, \varepsilon), \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}^{EH}(\varepsilon) := \begin{cases} \mathbf{u}(\varepsilon) \in \mathcal{V}(\Omega), \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega), \\ \int_{\Omega} A^{EH\pm}(\varepsilon)^{ijkl} e_{k||l}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{u}^{\pm}(\varepsilon)) e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}^{\pm}) \left(1 + \frac{\varepsilon \xi_3}{R_l}\right) |d_{\varepsilon \xi_3}^{\pm}| d\xi + \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\pi}{V} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R_l}\right)^2 \int_{\omega_{-1}} |d_{-\varepsilon}^{\pm}| v_3 d\xi_{\omega} \int_{\omega_{-1}} |d_{-\varepsilon}^{\pm}| u_3(\varepsilon) d\xi_{\omega} = \\ \frac{1}{\varepsilon} \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l}\right) \int_{\omega_1} f^{\pm i}(\varepsilon) v_i^{\pm} |d_{\varepsilon}^{\pm}| d\xi_{\omega}. \end{cases}$$

Après le changement de variable π^{ε} , le problème $\mathcal{P}^{\varepsilon}$ s'écrit $\mathcal{P}^{EH}(\varepsilon)$. Pour passer de $\mathcal{P}^{\varepsilon}$ à $\mathcal{P}^{EH}(\varepsilon)$, on a effectué un changement de variable, c'est pourquoi, de manière évidente, on a

Proposition 5.5.1 *Le problème $\mathcal{P}^{EH}(\varepsilon)$ admet une solution unique $\mathbf{u}^{\pm}(\varepsilon)$ dans $\mathcal{V}(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{1,\Omega}$.*

5.6 Éléments de géométrie différentielle sur la surface S de \mathbb{R}^3

Soient les déformations θ^{\pm} qui transforment ω en S

$$\theta^+ : \begin{cases} \omega^+ \mapsto S^+ \\ \xi_{\omega} \longrightarrow \theta^+(\xi_{\omega}) = \begin{pmatrix} -R_l \sin\left(\frac{\xi_1 - l}{R_l}\right) \\ R_L \cos\left(\frac{\xi_2}{R_L}\right) d^+ - R_L \\ R_L \sin\left(\frac{\xi_2}{R_L}\right) d^+ \end{pmatrix} \end{cases}$$

et

$$\theta^- : \begin{cases} \omega^- \mapsto S^- \\ \xi_{\omega} \longrightarrow \theta^-(\xi_{\omega}) = \begin{pmatrix} R_l \sin\left(\frac{\xi_1 + l}{R_l}\right) \\ -R_L \cos\left(\frac{\xi_2}{R_L}\right) d^- - R_L \\ -R_L \sin\left(\frac{\xi_2}{R_L}\right) d^- \end{pmatrix}. \end{cases}$$

5.6.1 Bases locales

Les bases covariantes $(\mathbf{a}_1^{\pm}, \mathbf{a}_2^{\pm})$ du plan tangent à S en un point de coordonnées $\theta^{\pm}(\xi_{\omega})$ sont définies par

$$\mathbf{a}_1^{\pm} = \frac{\partial \theta^{\pm}}{\partial \xi_1}, \quad \mathbf{a}_2^{\pm} = \frac{\partial \theta^{\pm}}{\partial \xi_2}.$$

Dans le cas étudié, ces vecteurs valent sur ω^+

$$\mathbf{a}_1^+ = \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) \\ -\cos\left(\frac{\xi_2}{R_L}\right) \sin\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) \\ -\sin\left(\frac{\xi_2}{R_L}\right) \sin\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2^+ = d^+ \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\left(\frac{\xi_2}{R_L}\right) \\ \cos\left(\frac{\xi_2}{R_L}\right) \end{pmatrix}$$

et, sur ω^-

$$\mathbf{a}_1^- = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\xi_1+l}{R_l}\right) \\ \cos\left(\frac{\xi_2}{R_L}\right) \sin\left(\frac{\xi_1+l}{R_l}\right) \\ \sin\left(\frac{\xi_2}{R_L}\right) \sin\left(\frac{\xi_1+l}{R_l}\right) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2^- = d^- \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\left(\frac{\xi_2}{R_L}\right) \\ -\cos\left(\frac{\xi_2}{R_L}\right) \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir une base covariante de l'espace, on complète la famille $(\mathbf{a}_1^\pm, \mathbf{a}_2^\pm)$ par le vecteur

$$\mathbf{a}_3^\pm = \frac{\mathbf{a}_1^\pm \wedge \mathbf{a}_2^\pm}{\|\mathbf{a}_1^\pm \wedge \mathbf{a}_2^\pm\|},$$

orthonormal direct à $(\mathbf{a}_1^\pm, \mathbf{a}_2^\pm)$. Ces vecteurs ont pour coordonnées

$$\mathbf{a}_3^+ = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) \\ \cos\left(\frac{\xi_2}{R_L}\right) \cos\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) \\ \sin\left(\frac{\xi_2}{R_L}\right) \cos\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3^- = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\xi_1+l}{R_l}\right) \\ -\cos\left(\frac{\xi_2}{R_L}\right) \cos\left(\frac{\xi_1+l}{R_l}\right) \\ -\sin\left(\frac{\xi_2}{R_L}\right) \cos\left(\frac{\xi_1+l}{R_l}\right) \end{pmatrix}.$$

Remarque 5.6.1 *La base covariante est orthogonale en tout point de S .*

La base contravariante du plan tangent est définie à partir de la base covariante par les relations $\mathbf{a}^{\pm\alpha} \cdot \mathbf{a}_\beta^\pm = \delta_\beta^\alpha$, puis,

$$\mathbf{a}^{\pm 3} = \frac{\mathbf{a}^{\pm 1} \wedge \mathbf{a}^{\pm 2}}{\|\mathbf{a}^{\pm 1} \wedge \mathbf{a}^{\pm 2}\|}.$$

Puisque la base covariante est orthogonale, seuls les vecteurs non normés sont à changer. On a donc

$$\mathbf{a}^{2+} = \frac{1}{d^+} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\left(\frac{\xi_2}{R_L}\right) \\ \cos\left(\frac{\xi_2}{R_L}\right) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}^{2-} = \frac{1}{d^-} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\left(\frac{\xi_2}{R_L}\right) \\ -\cos\left(\frac{\xi_2}{R_L}\right) \end{pmatrix},$$

et la base contravariante est orthogonale.

5.6.2 Tenseur métrique et tenseur de courbure

Notations :

\mathbf{b}^\pm := tenseur de courbure de la surface S ,

$b_{\alpha\beta}^-$:= composantes covariantes du tenseur de courbure, $b_{\alpha\beta}^- = \mathbf{a}^{3-} \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_\alpha^-}{\partial \xi_\beta}$,

$$[b_{\alpha\beta}^-] := \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_l} & 0 \\ 0 & \frac{-d^-}{R_L} \cos\left(\frac{\xi_1+l}{R_l}\right) \end{bmatrix}$$

Les composantes covariantes $a_{\alpha\beta}^{\pm}$ du tenseur métrique \mathbf{a}^{\pm} sont définies par

$$a_{\alpha\beta}^{\pm} = \mathbf{a}_{\alpha}^{\pm} \cdot \mathbf{a}_{\beta}^{\pm}.$$

Les composantes contravariantes de ce même tenseur, $a^{\alpha\beta\pm}$, sont définies par

$$a^{\alpha\beta\pm} = \mathbf{a}^{\alpha\pm} \cdot \mathbf{a}^{\beta\pm}.$$

Ce qui donne après calculs pour la surface extérieure,

$$[a_{\alpha\beta}^+] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (d^+)^2 \end{bmatrix}, \quad [a^{\alpha\beta+}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(d^+)^2} \end{bmatrix}, \quad a^+ = \det [a_{\alpha\beta}^+] = (d^+)^2$$

et pour la surface intérieure

$$[a_{\alpha\beta}^-] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (d^-)^2 \end{bmatrix}, \quad [a^{\alpha\beta-}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(d^-)^2} \end{bmatrix}, \quad a^- = \det [a_{\alpha\beta}^-] = (d^-)^2.$$

On définit ensuite le tenseur \mathbf{b}^{\pm} de courbure de la surface S par ses composantes covariantes

$$b_{\alpha\beta}^{\pm} = \mathbf{a}^{\beta\pm} \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_{\alpha}^{\pm}}{\partial \xi_{\beta}}$$

ou par ses composantes mixtes

$$b_{\alpha}^{\beta\pm} = b_{\sigma\alpha}^{\pm} a^{\beta\sigma\pm}.$$

Après calculs on obtient à l'extérieur,

$$[b_{\alpha\beta}^+] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_l} & 0 \\ 0 & \frac{-d^+}{R_L} \cos\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) \end{bmatrix}, \quad [b_{\alpha}^{\beta+}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_l} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_L d^+} \cos\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) \end{bmatrix},$$

et à l'intérieur

$$[b_{\alpha\beta}^-] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_l} & 0 \\ 0 & \frac{-d^-}{R_L} \cos\left(\frac{\xi_1+l}{R_l}\right) \end{bmatrix}, \quad [b_{\alpha}^{\beta-}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_l} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_L d^-} \cos\left(\frac{\xi_1+l}{R_l}\right) \end{bmatrix}.$$

Remarque 5.6.2 Les courbures de la surface S^+ en un point M^+ de coordonnées θ^+ (ξ_{ω}) sont $-\frac{1}{R_l}$ et $-\frac{1}{R_L d^+} \cos\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right)$. Elles sont non nulles et de même signe. La surface extérieure est donc elliptique, ce qui représente le cas de coque en membrane le plus favorable.

Les courbures de la surface S^- en un point M^- de coordonnées θ^- (ξ_{ω}) sont $-\frac{1}{R_l}$ et $-\frac{1}{R_L d^-} \cos\left(\frac{\xi_1+l}{R_l}\right)$. Elles sont non nulles et de signe contraire. La surface intérieure est donc hyperbolique. Le déplacement de la membrane supérieure étant couplé à celui de la membrane inférieure, on se retrouve à nouveau dans l'obligation de compléter les espaces de Sobolev classiques pour résoudre un problème bien posé.

Malgré cette obligation qui pourrait laisser penser qu'on a uniquement compliqué le problème précédent, le modèle se comporte mieux numériquement comme on le verra dans la partie **6** consacrée aux simulations numériques. En effet, les forces surfaciques sont exclusivement appliquées sur la partie extérieure du lobe, c'est à dire sur la partie où la norme liée aux contraintes est équivalente à la norme de Sobolev. L'étude purement mathématique est plus difficile car contrairement au cas parabolique les coefficients des tenseurs asymptotiques équivalents dépendent de ξ_1 .

5.7 Développements asymptotiques

Comme dans le cas parabolique, on calcule maintenant les premiers termes des développements asymptotiques ou de Taylor des termes intervenant dans la formulation variationnelle normalisée.

5.7.1 Tenseur d'élasticité

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$ on a au premier ordre

$$\left(1 + \frac{\varepsilon \xi_3}{R_l}\right) \left| d_{\varepsilon \xi_3}^{\pm} \right| \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(\varepsilon) = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(0) + \underline{\underline{\mathbf{O}}}(\varepsilon)$$

avec,

$$\frac{1}{|d^{\pm}|} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(0) = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 & | & 0 & \frac{\mu_{12}}{d^{\pm 2}} & 0 & | & 0 & 0 & \mu_{13} \\ 0 & \frac{\lambda_{12}}{d^{\pm 2}} & 0 & | & \frac{\mu_{12}}{d^{\pm 2}} & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_{13}}{d^{\pm 2}} & | & 0 & 0 & 0 & | & \mu_{13} & 0 & 0 \\ - & - & - & + & - & - & - & + & - & - & - \\ 0 & \frac{\mu_{12}}{d^{\pm 2}} & 0 & | & \frac{\lambda_{12}}{d^{\pm 2}} & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu_{12}}{d^{\pm 2}} & 0 & 0 & | & 0 & \frac{\lambda_{22}}{d^{\pm 4}} & 0 & | & 0 & 0 & \frac{\mu_{23}}{d^{\pm 2}} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \frac{\lambda_{23}}{d^{\pm 2}} & | & 0 & \frac{\mu_{23}}{d^{\pm 2}} & 0 \\ - & - & - & + & - & - & - & + & - & - & - \\ 0 & 0 & \mu_{13} & | & 0 & 0 & 0 & | & \frac{\lambda_{13}}{d^{\pm 2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \frac{\mu_{23}}{d^{\pm 2}} & | & 0 & \frac{\lambda_{23}}{d^{\pm 2}} & 0 \\ \mu_{13} & 0 & 0 & | & 0 & \frac{\mu_{23}}{d^{\pm 2}} & 0 & | & 0 & 0 & \lambda_{33} \end{bmatrix}.$$

5.7.2 Tenseur de déformation

On effectue un développement de Taylor de $e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{v})$ et on note $e_{i||j}^{kEH\pm}(\mathbf{v})$, le coefficient de la puissance $k^{\text{ème}}$ de ε , soit,

$$e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) = \frac{1}{\varepsilon} e_{i||j}^{-1EH\pm}(\mathbf{v}) + e_{i||j}^{0EH\pm}(\mathbf{v}) + \dots$$

Après calculs, on obtient

$$\underline{\underline{\mathbf{e}}}_{||}^{-1EH\pm}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_1^{\pm}}{\partial \xi_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_2^{\pm}}{\partial \xi_3} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_1^{\pm}}{\partial \xi_3} & \frac{1}{2} \frac{\partial v_2^{\pm}}{\partial \xi_3} & \frac{\partial v_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix},$$

puis

$$\underline{\underline{\mathbf{e}}}_{||}^{0EH+}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1^+}{\partial \xi_1} + \frac{1}{R_l} v_3 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1^+}{\partial \xi_2} + \frac{\partial v_2^+}{\partial \xi_1} \right) + \frac{1}{R_L d^+} \sin \left(\frac{\xi_1 - l}{R_l} \right) v_2^+ & \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_1} - \frac{1}{R_l} v_1^+ \\ sym & \frac{\partial v_2^+}{\partial \xi_2} - \frac{d^+}{R_L} \sin \left(\frac{\xi_1 - l}{R_l} \right) v_1^+ + \frac{d^+}{R_L} \cos \left(\frac{\xi_1 - l}{R_l} \right) v_3 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_2} - \frac{1}{R_L d^+} \cos \left(\frac{\xi_1 - l}{R_l} \right) v_2^+ \\ sym & sym & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{0EH-}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1^-}{\partial \xi_1} + \frac{1}{R_l} v_3 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1^-}{\partial \xi_2} + \frac{\partial v_2^-}{\partial \xi_1} \right) + \frac{1}{R_L d^-} \sin \left(\frac{\xi_1 + l}{R_l} \right) v_2^- & \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_1} - \frac{1}{R_l} v_1^- \\ sym & \frac{\partial v_2^-}{\partial \xi_2} - \frac{d^-}{R_L} \sin \left(\frac{\xi_1 + l}{R_l} \right) v_1^- + \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_2} - \frac{1}{R_L d^-} \cos \left(\frac{\xi_1 + l}{R_l} \right) v_2^- & \\ sym & \frac{d^-}{R_L} \cos \left(\frac{\xi_1 + l}{R_l} \right) v_3 & 0 \end{bmatrix}$$

5.7.3 Tenseur de déformation solution

On continue de procéder comme dans le cas parabolique et on suppose qu'il existe un développement asymptotique formel de l'inconnue normalisée $\mathbf{u}^{\pm}(\varepsilon)$

$$\mathbf{u}^{\pm}(\varepsilon) = \mathbf{u}^{0\pm} + \varepsilon \mathbf{u}^{1\pm} + \dots \quad \text{avec } \mathbf{u}^{0\pm} \neq \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{u}^{k\pm} \in \mathcal{V}(\Omega).$$

On effectue simultanément le développement de Taylor de $e_{i\parallel j}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{u}^{\pm}(\varepsilon))$, et le développement asymptotique de $\mathbf{u}^{\pm}(\varepsilon)$. On ordonne par puissance de ε . On note $e_{i\parallel j}^{kEH\pm}$ le coefficient de la puissance $k^{\text{ème}}$ de ε .

$$e_{i\parallel j}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{u}^{\pm}(\varepsilon)) = \frac{1}{\varepsilon} e_{i\parallel j}^{-1EH\pm} + e_{i\parallel j}^{0EH\pm} + \dots$$

Après calculs, on obtient

$$\underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{-1EH\pm} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_1^{0\pm}}{\partial \xi_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_2^{0\pm}}{\partial \xi_3} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u_1^{0\pm}}{\partial \xi_3} & \frac{1}{2} \frac{\partial u_2^{0\pm}}{\partial \xi_3} & \frac{\partial u_3^0}{\partial \xi_3} \end{bmatrix},$$

puis,

$$\underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{0EH+} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1^{0+}}{\partial \xi_1} + \frac{u_3^0}{R_l} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1^{0+}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2^{0+}}{\partial \xi_1} \right) + \frac{1}{R_L d^+} \sin \left(\frac{\xi_1 - l}{R_l} \right) v_2^{0+} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3^0}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u_1^{1+}}{\partial \xi_3} \right) - \frac{u_1^{0+}}{R_l} \\ sym & \frac{\partial u_2^{0+}}{\partial \xi_2} - \frac{d^+}{R_L} \sin \left(\frac{\xi_1 - l}{R_l} \right) v_1^{0+} + \frac{1}{R_L} \cos \left(\frac{\xi_1 - l}{R_l} \right) v_3^0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3^0}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2^{1+}}{\partial \xi_3} \right) - \frac{1}{R_L d^+} \cos \left(\frac{\xi_1 - l}{R_l} \right) v_2^{0+} \\ sym & sym & \frac{\partial u_3^1}{\partial \xi_3} \end{bmatrix},$$

et

$$\underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{0EH-} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1^{0-}}{\partial \xi_1} + \frac{u_3^0}{R_l} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1^{0-}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2^{0-}}{\partial \xi_1} \right) + \frac{1}{R_L d^-} \sin \left(\frac{\xi_1 + l}{R_l} \right) v_2^{0-} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3^0}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u_1^{1-}}{\partial \xi_3} \right) - \frac{u_1^{0-}}{R_l} \\ sym & \frac{\partial u_2^{0-}}{\partial \xi_2} - \frac{d^-}{R_L} \sin \left(\frac{\xi_1 + l}{R_l} \right) v_1^{0-} + \frac{d^-}{R_L} \cos \left(\frac{\xi_1 + l}{R_l} \right) v_3^0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3^0}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2^{1-}}{\partial \xi_3} \right) - \frac{1}{R_L d^-} \cos \left(\frac{\xi_1 + l}{R_l} \right) v_2^{0-} \\ sym & sym & \frac{\partial u_3^1}{\partial \xi_3} \end{bmatrix}.$$

5.8 Etude pré-asymptotique

5.8.1 Hypothèses

On suppose dans toute cette étape que

1. la densité surfacique de force est de la forme

$$f^{i\pm}(\varepsilon)(\xi) = \varepsilon^{p+1} f^{p,i\pm}(\xi_\omega)$$

où $f^{i\pm} \in L^2(\Gamma)$ et p est un entier,

2. il existe un développement asymptotique formel de l'inconnue normalisée $\mathbf{u}^\pm(\varepsilon)$

$$\mathbf{u}^\pm(\varepsilon) = \mathbf{u}^{0\pm} + \varepsilon \mathbf{u}^{1\pm} + \dots \quad \text{avec } \mathbf{u}^{0\pm} \neq \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{u}^{k\pm} \in \mathcal{V}(\Omega).$$

5.8.2 Recherche du modèle asymptotique

Notations :

- $\underline{\gamma}^{EH\pm}$:= tenseur linéarisé équivalent des déformations en 2D, modèle elliptico-hyperbolique,
- $\underline{\mathbf{A}}^{EH\pm}(\omega)$:= tenseur équivalent d'élasticité 2D du modèle asymptotique elliptico-hyperbolique,
- $\overline{\mathcal{V}}^{EH}(\omega)$:= espace où on cherche naturellement la solution 2D du modèle elliptico-hyperbolique,
- $\mathcal{V}_0^{EH}(\omega)$:= espace où se trouve la solution 2D du modèle asymptotique elliptico-hyperbolique,

avec,

$$\begin{aligned} L_0^2(|d^\pm|\omega) &:= \left\{ \eta \in L^2(\omega), \int_\omega |d^\pm| \eta d\xi_\omega = 0 \right\}, \\ \mathcal{V}^{EH}(\omega) &:= H_0^1(\omega^+)^2 \times H_0^1(\omega^-)^2 \times L^2(\omega), \\ \mathcal{V}_0^{EH}(\omega) &:= H_0^1(\omega^+)^2 \times H_0^1(\omega^-)^2 \times L_0^2(|d^\pm|\omega), \end{aligned}$$

$$\underline{\gamma}^{EH^-}(\boldsymbol{\eta}) := \begin{bmatrix} \frac{\partial \eta_1^-}{\partial \xi_1} + \frac{1}{R_L} \eta_3^- & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_1^-}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \eta_2^-}{\partial \xi_1} \right) + \frac{1}{R_L d^-} \sin\left(\frac{\xi_1+l}{R_L}\right) \eta_2^- \\ \text{sym} & \frac{\partial \eta_2^-}{\partial \xi_2} - \frac{d^-}{R_L} \left(\sin\left(\frac{\xi_1+l}{R_L}\right) \eta_1^- - \cos\left(\frac{\xi_1+l}{R_L}\right) \eta_3^- \right) \end{bmatrix},$$

$$\underline{\gamma}^{EH^+}(\boldsymbol{\eta}) := \begin{bmatrix} \frac{\partial \eta_1^+}{\partial \xi_1} + \frac{1}{R_L} \eta_3^+ & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_1^+}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \eta_2^+}{\partial \xi_1} \right) + \frac{1}{R_L d^+} \sin\left(\frac{\xi_1-l}{R_L}\right) \eta_2^+ \\ \text{sym} & \frac{\partial \eta_2^+}{\partial \xi_2} - \frac{d^+}{R_L} \left(\sin\left(\frac{\xi_1-l}{R_L}\right) \eta_1^+ - \cos\left(\frac{\xi_1-l}{R_L}\right) \eta_3^+ \right) \end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH^\pm}(\omega) := \begin{bmatrix} \lambda_{11}(\omega) & 0 & | & 0 & \mu_{12}(\omega) \\ 0 & \lambda_{12}(\omega) & | & \mu_{12}(\omega) & 0 \\ - & - & + & - & - \\ 0 & \mu_{12}(\omega) & | & \lambda_{12}(\omega) & 0 \\ \mu_{12}(\omega) & 0 & | & 0 & \lambda_{22}(\omega) \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \lambda_{11}(\omega) &:= \frac{2|d^\pm|}{\lambda_{33}} \left(\lambda_{11} \lambda_{33} - \left(\frac{\lambda_{13}}{d^{\pm 2}} \right)^2 \right), \\ \lambda_{22}(\omega) &:= \frac{2|d^\pm|}{\lambda_{33} d^{\pm 4}} \left(\lambda_{22} \lambda_{33} - (\lambda_{23})^2 \right), \\ \lambda_{12}(\omega) &:= \frac{2|d^\pm|}{\lambda_{33} d^{\pm 2}} \left(\lambda_{12} \lambda_{33} - \frac{\lambda_{23} \lambda_{13}}{d^{\pm 2}} \right), \\ \mu_{12}(\omega) &:= \frac{2|d^\pm|}{d^{\pm 2}} \mu_{12}. \end{aligned}$$

Remarque 5.8.1 Les coefficients du tenseur d'élasticité asymptotique dépendent cette fois-ci des propriétés du matériau dans l'épaisseur et de la variable ξ_1 . Ce phénomène complique le calcul intégral sur la surface ω . Toutefois, si on fait tendre R_L vers l'infini, on retrouve les coefficients du cas parabolique qui sont indépendants de l'épaisseur.

Dans le problème $\mathcal{P}^{EH}(\varepsilon)$, on remplace chaque terme par son développement de Taylor ou son développement asymptotique. La formulation variationnelle devient ainsi,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\pi}{V} \left(1 - 2 \frac{\varepsilon}{R_L} \right) \int_{\omega_{-1}} v_3 |d^\pm| \left(1 - \frac{\varepsilon}{R_L} \cos\left(\frac{\xi_1 \pm l}{R_L}\right) \right) \int_{\omega_{-1}} (u_3^{0^\pm} + \dots) |d^\pm| \left(1 - \frac{\varepsilon}{R_L} \cos\left(\frac{\xi_1 \pm l}{R_L}\right) \right) d\xi_\omega \\ & + \int_{\Omega} \left[\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH^\pm}(0) + \underline{\underline{\mathbf{O}}}(\varepsilon) \right] : \left[\frac{1}{\varepsilon} e_{i||j}^{-1EH^\pm} + e_{i||j}^{0EH^\pm} + \dots \right] : \left[\frac{1}{\varepsilon} e_{i||j}^{-1EH^\pm}(\mathbf{v}) + e_{i||j}^{0EH^\pm}(\mathbf{v}) + \dots \right] d\xi = \\ & \varepsilon^p \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_L} \right) \int_{\omega_1} f^{p,i^\pm} v_i |d^\pm| \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_L} \cos\left(\frac{\xi_1 \pm l}{R_L}\right) \right) d\xi_\omega. \end{aligned}$$

où d^\pm dépend de ξ_1 . Puis, on ordonne les termes de l'égalité par puissances croissantes de ε et on annule successivement leurs coefficients. On appelle $\mathcal{P}_p^{EH}(\varepsilon)$ le problème obtenu en annulant le coefficient de ε^p .

On rappelle trois propriétés remarquables des éléments de $\mathcal{V}(\Omega)_3 = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega) \text{ indépendants de } \xi_3\}$

1. $\left[e_{i||j}^{-1EH\pm}(\mathbf{v}) \right] = [0]$,
2. si on pose $\boldsymbol{\eta}(\xi_\omega) := \mathbf{v}(\xi)$, alors $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)_3 \iff \eta_i^\pm \in H_0^1(\omega^\pm)$,
3. $\int_{\omega_{-1}} v_i |d^\pm| d\xi_\omega = \int_{\omega_1} v_i |d^\pm| d\xi_\omega = \int_{\omega_0} v_i |d^\pm| d\xi_\omega = \int_{\omega} v_i |d^\pm| d\xi_\omega$.

Annulation du coefficient de $\frac{1}{\varepsilon^2}$. Cette première étape permet d'obtenir des informations sur $\mathbf{f}^{-2\pm}$, $\mathbf{u}^{0\pm}$ et $\left[e_{i||j}^{-1EH\pm} \right]$. Le problème $\mathcal{P}_{-2}^{EH}(\varepsilon)$ a pour formulation variationnelle

$$\int_{\omega \times]-1,1[} \underline{\mathbf{A}}^{EH\pm}(0) : \left[e_{i||j}^{-1EH\pm} \right] : \left[e_{i||j}^{-1EH\pm}(\mathbf{v}) \right] d\xi = \int_{\omega_1} f^{-2,i\pm} v_i |d^\pm| d\xi_\omega, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$$

Proposition 5.8.1 *La force \mathbf{f}^{-2} doit vérifier*

$$\mathbf{f}^{-2\pm} = \mathbf{0}.$$

Démonstration. Soit $\boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\omega^+) \times H_0^1(\omega^-) \times H_0^1(\omega)$. Posons $\mathbf{v}(\xi) := \boldsymbol{\eta}(\xi_\omega)$, alors $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)_3$. La formulation variationnelle du problème $\mathcal{P}_{-2}^{EH}(\varepsilon)$ étant vérifiée par tous les éléments de $\mathcal{V}(\Omega)$, elle est vérifiée en particulier par \mathbf{v} . Or,

$$\left[e_{i||j}^{-1EH\pm}(\mathbf{v}) \right] = [0].$$

Il reste donc

$$\int_{\omega_1} f^{-2,i\pm} v_i |d^\pm| d\xi_\omega = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)_3$$

c'est à dire,

$$\int_{\omega} f^{-2,i\pm} \eta_i^\pm |d^\pm| d\xi_\omega = 0, \quad \forall \eta_i^\pm \in H_0^1(\omega)$$

et par conséquent, par densité de $H_0^1(\omega)$ dans $L^2(\omega)$, on a, $|d^\pm| f^{-2,i\pm} = 0$. Enfin, puisque $|d^\pm| \neq 0$, il reste $f^{-2,i\pm} = 0$. ■

Remarque 5.8.2 *Ce résultat met en évidence un phénomène physique intuitif : la force "n'explose pas" quand ε diminue.*

Proposition 5.8.2 *Le premier terme du développement asymptotique de $\mathbf{u}^\pm(\varepsilon)$, $\mathbf{u}^{0\pm}$, est indépendant de la variable transverse ξ_3 . On a donc*

$$\frac{\partial \mathbf{u}^{0\pm}}{\partial \xi_3} = \mathbf{0}$$

et par conséquent,

$$\left[e_{i||j}^{-1EH\pm} \right] = [0].$$

Démonstration. Puisque $f^{-2,i\pm} = 0$, on déduit en remplaçant dans la formulation variationnelle de $\mathcal{P}_{-2}^{EH}(\varepsilon)$ que

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(0) : \left[e_{i||j}^{-1EH\pm} \right] : \left[e_{i||j}^{-1EH\pm}(\mathbf{v}) \right] d\xi = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega),$$

c'est à dire en remplaçant $\left[e_{i||j}^{-1EH\pm} \right]$, $\left[e_{i||j}^{-1EH\pm}(\mathbf{v}) \right]$ et $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(0)$ par leurs valeurs respectives,

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega), \quad \int_{\Omega} \left(\mu_{13} |d^\pm| \frac{\partial u_1^{0\pm}}{\partial \xi_3} \frac{\partial v_1^\pm}{\partial \xi_3} + \frac{\mu_{23}}{|d^\pm|} \frac{\partial u_2^{0\pm}}{\partial \xi_3} \frac{\partial v_2^\pm}{\partial \xi_3} + \lambda_{33} |d^\pm| \frac{\partial u_3^0}{\partial \xi_3} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_3} \right) d\xi = 0.$$

Soit $(v_1^+, v_2^+, v_1^-, v_2^-, v_3) \in \mathcal{V}(\Omega)$. On choisit successivement comme fonctions tests dans $\mathcal{P}_{-2}^{EH}(\varepsilon)$: $\mathbf{v} = (v_1^+, 0, 0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 0, v_1^-, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (0, v_2^+, 0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 0, 0, v_2^-, 0)$ et $\mathbf{v} = (0, 0, 0, 0, v_3)$, ce qui entraîne, d'après le théorème **10.1.1** (Annexe III),

$$\frac{\partial \mathbf{u}^{0\pm}}{\partial \xi_3} = \mathbf{0}$$

et par conséquent, puisque

$$\left[e_{i||j}^{-1EH\pm} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_1^{0\pm}}{\partial \xi_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_2^{0\pm}}{\partial \xi_3} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u_1^{0\pm}}{\partial \xi_3} & \frac{1}{2} \frac{\partial u_2^{0\pm}}{\partial \xi_3} & \frac{\partial u_3^0}{\partial \xi_3} \end{bmatrix}$$

on a bien, $\left[e_{i||j}^{-1EH\pm} \right] = [0]$. ■

Remarque 5.8.3 *Puisque $\mathbf{u}^{0\pm}$ ne dépend pas de ξ_3 , on a*

$$\int_{\omega_{-1}} u_i^{0\pm} |d^\pm| d\xi_\omega = \int_{\omega_1} u_i^{0\pm} |d^\pm| d\xi_\omega = \int_{\omega_0} u_i^{0\pm} |d^\pm| d\xi_\omega = \int_{\omega} u_i^{0\pm} |d^\pm| d\xi_\omega.$$

En tenant compte des précédents résultats, la formulation variationnelle du problème $\mathcal{P}^{EH}(\varepsilon)$ s'écrit

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [\underline{\mathbf{A}}^{EH\pm}(0) + \underline{\mathbf{O}}(\varepsilon)] : [e_{i||j}^{0EH\pm} + \varepsilon e_{i||j}^{1EH\pm} \dots] : \left[\frac{1}{\varepsilon} e_{i||j}^{-1EH\pm}(\mathbf{v}) + e_{i||j}^{0EH\pm}(\mathbf{v}) + \dots \right] d\xi + \\ & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\pi}{V} \left(1 - 2\frac{\varepsilon}{R} + \frac{\varepsilon^2}{R^2} \right) \int_{\omega_{-1}} v_3 |d^\pm| d\xi_\omega \int_{\omega_{-1}} (\zeta_3^0 + \varepsilon u_3^1 + \dots) |d^\pm| d\xi_\omega \\ & = \varepsilon^p \left(1 + \frac{\varepsilon}{R} \right) \int_{\omega_1} f^{p,i\pm} v_i |d^\pm| d\xi_\omega \end{aligned}$$

Annulation du coefficient de $\frac{1}{\varepsilon}$. On obtient cette fois-ci des informations sur $\left[e_{i||j}^{0EH\pm} \right]$. En effet, la formulation variationnelle du problème $\mathcal{P}_{-1}^{EH}(\varepsilon)$, obtenue en annulant le coefficient de $\frac{1}{\varepsilon}$ est

$$\int_{\Omega} \underline{\mathbf{A}}^{EH\pm}(0) : \left[e_{i||j}^{0EH\pm} \right] : \left[e_{i||j}^{-1EH\pm}(\mathbf{v}) \right] d\xi + \frac{\pi}{V} \int_{\omega_{-1}} v_3 |d^\pm| d\xi_\omega \int_{\omega} \zeta_3^0 |d^\pm| d\xi_\omega = \int_{\omega_1} \mathbf{f}^{-1}\mathbf{v} |d^\pm| d\xi_\omega.$$

Proposition 5.8.3 *Les forces $f^{-1,i\pm}$ vérifient*

$$\begin{aligned} f^{-1,1\pm} &= f^{-1,2\pm} = 0, \\ f^{-1,3\pm} &= \frac{\pi}{V} \int_{\omega} \zeta_3^0 |d^\pm| d\xi_\omega. \end{aligned}$$

Démonstration. L'équation variationnelle de $\mathcal{P}_{-1}^{EH}(\varepsilon)$ est vérifiée par tous les éléments de $\mathcal{V}(\Omega)_3$. Or, comme on l'a vu, ces éléments ont la particularité d'annuler $\left[e_{i||j}^{-1EH\pm}(\mathbf{v}) \right]$, et donc d'annuler l'intégrale sur Ω . En choisissant une fonction test \mathbf{v} dans $\mathcal{V}(\Omega)_3$ et en posant $\boldsymbol{\eta}(\xi_1, \xi_2) := \mathbf{v}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, on a $\boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\omega^\pm)$, puis en remplaçant dans la formulation variationnelle de $\mathcal{P}_{-1}^{EH}(\varepsilon)$, il reste

$$\frac{\pi}{V} \int_{\omega} \eta_3^\pm |d^\pm| d\xi_\omega \int_{\omega} \zeta_3^0 |d^\pm| d\xi_\omega = \int_{\omega} f^{-1,i\pm} \eta_i |d^\pm| d\xi_\omega, \quad \forall \boldsymbol{\eta}_i^\pm \in H_0^1(\omega^+)^2 \times H_0^1(\omega^-)^2 \times H_0^1(\omega)$$

c'est à dire $\forall \eta_i^\pm \in H_0^1(\omega^\pm)$,

$$\int_{\omega} \left(f^{-1,3\pm} - \frac{\pi}{V} \int_{\omega} \zeta_3^0 |d^\pm| d\xi_\omega \right) \eta_3 |d^\pm| d\xi_\omega + \int_{\omega} f^{-1,1\pm} \eta_1^\pm |d^\pm| d\xi_\omega + \int_{\omega} f^{-1,2\pm} \eta_2^\pm |d^\pm| d\xi_\omega = 0$$

dont on déduit, par densité de $H_0^1(\omega^\pm)$ dans $L^2(\omega^\pm)$, les résultats énoncés. ■

On reporte ces valeurs dans la formulation variationnelle de $\mathcal{P}_{-1}^{EH}(\varepsilon)$ qui s'écrit alors,

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega) \\ \int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(0) : \left[e_{i||j}^{0EH\pm} \right] : \left[e_{i||j}^{-1EH\pm}(\mathbf{v}) \right] d\xi + \frac{\pi}{V} \int_{\omega} \zeta_3^0 |d^\pm| d\xi_{\omega} \int_{\omega} (v_3(\xi_{\omega}, -1) - v_3(\xi_{\omega}, 1)) |d^\pm| d\xi_{\omega} = 0.$$

Cette formulation permet d'établir le corollaire suivant,

Corollaire 5.8.1 *Le tenseur $\left[e_{i||j}^{0EH\pm} \right]$ est de la forme*

$$\left[e_{i||j}^{0EH\pm} \right] = \begin{bmatrix} e_{1||1}^{0EH\pm} & e_{1||2}^{0EH\pm} & 0 \\ e_{1||2}^{0EH\pm} & e_{2||2}^{0EH\pm} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda_{13}}{d^{\pm 2} \lambda_{33}} e_{1||1}^{0EH\pm} - \frac{\lambda_{23}}{d^{\pm 2} \lambda_{33}} e_{2||2}^{0EH\pm} \end{bmatrix},$$

et par conséquent, il ne dépend ni de ξ_3 , ni de $\mathbf{u}^{1\pm}$.

Démonstration. Soit $(v_1^+, v_2^+, v_1^-, v_2^-, v_3) \in H_0^1(\omega^+)^2 \times H_0^1(\omega^-)^2 \times H_0^1(\omega)$ et $\mathbf{v} = (v_1^+, v_2^+, v_1^-, v_2^-, 0)$. Ce choix de fonction test annule le terme de couplage. Il reste donc

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(0) : \left[e_{i||j}^{0EH\pm} \right] : \left[e_{i||j}^{-1EH\pm}(\mathbf{v}) \right] d\xi = 0, \quad \forall \mathbf{v} = (v_1^+, v_2^+, v_1^-, v_2^-, 0).$$

Pour $\mathbf{v} = (v_1^+, 0, 0, 0, 0)$ ou $\mathbf{v} = (0, 0, v_1^-, 0, 0)$, on a

$$\left[e_{i||j}^{-1EH\pm}(\mathbf{v}) \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_1^\pm}{\partial \xi_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_1^\pm}{\partial \xi_3} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

et par conséquent, puisque

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(0) : \left[e_{i||j}^{0EH\pm} \right] : \left[e_{i||j}^{-1EH\pm}(\mathbf{v}) \right] d\xi = 0,$$

on en déduit, après avoir remplacé $\left[e_{i||j}^{-1EH\pm}(\mathbf{v}) \right]$ par son expression et effectué les calculs, que,

$$\int_{\Omega} \mu_{13} |d^\pm| e_{1||3}^{0EH\pm} : \frac{\partial v_1^\pm}{\partial \xi_3} d\xi = 0, \quad \forall v_1^\pm \in H_0^1(\omega^\pm).$$

On applique le théorème 10.1.1 (Annexe III) et on conclut

$$e_{1||3}^{0EH\pm} = 0.$$

De même, pour $\mathbf{v} = (0, v_2^+, 0, 0, 0)$, et $\mathbf{v} = (0, 0, 0, v_2^-, 0)$, on a

$$\left[e_{i||j}^{-1EH\pm}(\mathbf{v}) \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_2^\pm}{\partial \xi_3} \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_2^\pm}{\partial \xi_3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\int_{\Omega} \frac{\mu_{23}}{|d^\pm|} e_{2||3}^{0\pm} : \frac{\partial v_2^\pm}{\partial \xi_3} d\xi = 0, \quad \forall v_2^\pm \in H_0^1(\omega^\pm).$$

On applique à nouveau le théorème **10.1.1** (Annexe III) et pour conclure

$$e_{2||3}^{0EH\pm} = 0.$$

On choisit maintenant $\mathbf{v} = (0, 0, 0, 0, v_3)$ comme fonction test dans la formulation variationnelle de $\mathcal{P}_{-1}^{EH}(\varepsilon)$ et on obtient,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_3} \left(\frac{\lambda_{13}}{d^{\pm 2}} e_{1||1}^{0EH\pm} + \frac{\lambda_{23}}{d^{\pm 2}} e_{2||2}^{0EH\pm} + \lambda_{33} e_{3||3}^{0EH\pm} \right) |d^\pm| d\xi + \frac{\pi}{V} \int_{\omega} (v_3(-1) - v_3(1)) |d^\pm| d\xi_\omega \int_{\omega} \zeta_3^0 |d^\pm| d\xi_\omega = 0.$$

Pour annuler l'intégrale de surface, il suffit de choisir v_3 dans $H_0^1(\Omega)$. En effet, on a ainsi $v_3(-1) = 0$ et $v_3(1) = 0$. Il reste alors

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_3} \left(\frac{\lambda_{13}}{d^{\pm 2}} e_{1||1}^{0EH\pm} + \frac{\lambda_{23}}{d^{\pm 2}} e_{2||2}^{0EH\pm} + \lambda_{33} e_{3||3}^{0EH\pm} \right) d\xi = 0, \quad \forall v_3 \in H_0^1(\Omega)$$

soit, en appliquant le théorème **10.1.1** (Annexe III),

$$\left(\frac{\lambda_{13}}{d^{\pm 2}} e_{1||1}^{0EH\pm} + \frac{\lambda_{23}}{d^{\pm 2}} e_{2||2}^{0EH\pm} + \lambda_{33} e_{3||3}^{0EH\pm} \right) |d^\pm| = 0,$$

c'est à dire,

$$e_{3||3}^{0EH\pm} = -\frac{\lambda_{13}}{d^{\pm 2} \lambda_{33}} e_{1||1}^{0EH\pm} - \frac{\lambda_{23}}{d^{\pm 2} \lambda_{33}} e_{2||2}^{0EH\pm}.$$

Pour conclure, il ne reste plus qu'à constater que $e_{1||1}^{0EH\pm}$ et $e_{2||2}^{0EH\pm}$ sont indépendants de la variable transverse. En effet, ce sont des combinaisons linéaires de $u_1^{0\pm}$, $u_2^{0\pm}$, u_3^0 et de leurs dérivées partielles. Or, on a montré proposition **5.8.2** que $\mathbf{u}^{0\pm}$ est indépendant de ξ_3 . Pour les mêmes raisons, $e_{3||3}^{0EH\pm}$ est indépendant de ξ_3 . Par conséquent le tenseur $\left[e_{i||j}^{0EH\pm} \right]$ indépendant de ξ_3 . On montre avec les mêmes arguments que le tenseur $\left[e_{i||j}^{0EH\pm} \right]$ est indépendant de $\mathbf{u}^{1\pm}$. ■

Corollaire 5.8.2 *La valeur moyenne de ζ_3^0 sur S , $\frac{1}{\text{mes}(\omega)} \int_{\omega} \zeta_3^0 |d^\pm| d\xi_\omega$, est nulle, tout comme l'est $f^{-1,3^\pm}$.*

Démonstration. On revient à la formulation obtenue avec la fonction test $\mathbf{v} = (0, 0, 0, 0, v_3)$ dans $\mathcal{P}_{-1}^{EH}(\varepsilon)$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_3} \left(\frac{\lambda_{13}}{d^{\pm 2}} e_{1||1}^{0EH^\pm} + \frac{\lambda_{23}}{d^{\pm 2}} e_{2||2}^{0EH^\pm} + \lambda_{33} e_{3||3}^{0EH^\pm} \right) |d^\pm| d\xi + \frac{\pi}{V} \int_{\omega} (v_3(-1) - v_3(1)) |d^\pm| d\xi_\omega \int_{\omega} \zeta_3^0 |d^\pm| d\xi_\omega = 0$$

Puisqu'on vient de montrer que

$$\frac{\lambda_{13}}{d^{\pm 2}} e_{1||1}^{0EH^\pm} + \frac{\lambda_{23}}{d^{\pm 2}} e_{2||2}^{0EH^\pm} + \lambda_{33} e_{3||3}^{0EH^\pm} = 0,$$

il reste

$$\frac{\pi}{V} \int_{\omega} (v_3(-1) - v_3(1)) |d^\pm| d\xi_\omega \int_{\omega} \zeta_3^0 |d^\pm| d\xi_\omega = 0$$

pour tout $v_3 \in H_0^1(\omega)$, ce qui entraîne

$$\int_{\omega} \zeta_3^0 |d^\pm| d\xi_\omega = 0.$$

Or, on a montré, proposition 5.8.3, que

$$f^{-1,3^\pm} = \frac{\pi}{V} \int_{\omega} \zeta_3^0 |d^\pm| d\xi_\omega$$

et par conséquent on a $f^{-1,3^\pm} = 0$. ■

Remarque 5.8.4 *Le premier terme du développement asymptotique du déplacement moyen est donc à moyenne nulle sur la surface médiane. C'est une propriété très importante dans la suite de l'étude puisqu'elle interviendra dans le choix de l'espace pour que le problème asymptotique soit bien posé. C'est à cause de cette particularité qu'intervient l'espace $L_0^2(|d^\pm|_\omega)$ dans le modèle asymptotique final.*

Annulation du terme de degré 0 en ε . On aboutit ici à une équation posée sur ω , couplant \mathbf{u}^{0^\pm} et \mathbf{u}^{1^\pm} . Compte tenu des résultats précédents, le problème $\mathcal{P}_0^{EH}(\varepsilon)$ s'écrit

$$\mathcal{P}_0^{EH}(\varepsilon) : \begin{cases} \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega) \\ \int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH^\pm}(0) : \underline{\mathbf{e}}_{||}^{0EH^\pm} : \underline{\mathbf{e}}_{||}^{0EH^\pm}(\mathbf{v}) d\xi + \frac{\pi}{V} \int_{\omega_{-1}} v_3 |d^\pm| d\xi_\omega \int_{\omega_{-1}} u_3^{1^\pm} |d^\pm| d\xi_\omega \\ + \int_{\Omega} \left[\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH^\pm}(0) : \underline{\mathbf{e}}_{||}^{1EH^\pm} + \underline{\underline{\mathbf{Q}}}(\varepsilon) : \underline{\mathbf{e}}_{||}^{0EH^\pm} \right] : \underline{\mathbf{e}}_{||}^{-1EH^\pm}(\mathbf{v}) d\xi = \int_{\omega_1} f^{0,i^\pm} v_i |d^\pm| d\xi_\omega. \end{cases}$$

Le terme $\int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{Q}}}(\varepsilon) : \underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{0EH\pm} : \underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{-1EH\pm}(\mathbf{v}) d\xi$ pose problème, aussi on choisit de travailler uniquement avec des fonctions test dans $\mathcal{V}(\Omega)_3$. Pour ces éléments la formulation variationnelle de $\mathcal{P}_0^{EH}(\varepsilon)$ s'écrit

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(0) : \underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{0EH\pm} : \underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{0EH\pm}(\mathbf{v}) d\xi + \frac{\pi}{V} \int_{\omega} v_3 |d^{\pm}| d\xi_{\omega} \int_{\omega_{-1}} u_3^{1\pm} |d^{\pm}| d\xi_{\omega} = \int_{\omega} f^{0,i\pm} v_i |d^{\pm}| d\xi_{\omega}.$$

Le but de l'étude asymptotique est d'aboutir à une formulation variationnelle posée sur la surface génératrice, c'est pourquoi on interprète l'intégrale de volume comme

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(0) : \underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{0EH\pm} : \underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{0EH\pm}(\mathbf{v}) d\xi = \int_{\omega} \left(\int_{-1}^1 \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(0) : \underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{0EH\pm} : \underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{0EH\pm}(\mathbf{v}) d\xi_3 \right) d\xi_{\omega}$$

chaque terme est indépendant ξ_3 , on a donc

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \int_{-1}^1 \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(0) : \underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{0EH\pm} : \underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{0EH\pm}(\mathbf{v}) d\xi_3 d\xi_{\omega} &= \int_{-1}^1 d\xi_3 \int_{\omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(0) : \underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{0EH\pm} : \underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{0EH\pm}(\mathbf{v}) d\xi_{\omega} \\ &= 2 \int_{\omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(0) : \underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{0EH\pm} : \underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{0EH\pm}(\mathbf{v}) d\xi_{\omega}. \end{aligned}$$

Posons $\boldsymbol{\eta}(\xi_{\omega}) := \mathbf{v}(\xi)$, et développons la double contraction $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(0) : \underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{0EH\pm} : \underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{0EH\pm}(\mathbf{v})$. On obtient

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(0) : \underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{0EH\pm} : \underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{0EH\pm}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(\omega) : \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{EH\pm}(\boldsymbol{\zeta}^{0\pm}) : \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{EH\pm}(\boldsymbol{\eta})$$

et par conséquent

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(0) : \left[e_{i\parallel j}^{0EH\pm} \right] : \left[e_{i\parallel j}^{0EH\pm}(\mathbf{v}) \right] d\xi = \int_{\omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(\omega) : \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{EH\pm}(\boldsymbol{\zeta}^{0\pm}) : \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{EH\pm}(\boldsymbol{\eta}) d\xi_{\omega}.$$

5.8.3 Modèle asymptotique, normes et espaces asymptotiques

On ne pourra pas aller plus loin dans l'annulation des coefficients des puissances successives de ε puisqu'on n'a pas pu annuler le coefficient de ε^0 pour tous les éléments de $\mathcal{V}(\Omega)$.

On aboutit ainsi à l'équation vérifiée par $\boldsymbol{\zeta}^{0\pm} := \mathbf{u}^{0\pm}$ et par $\mathbf{u}^{1\pm}$

$$\int_{\omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(\omega) : \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{EH\pm}(\boldsymbol{\zeta}^{0\pm}) : \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{EH\pm}(\boldsymbol{\eta}) d\xi_{\omega} + \frac{\pi}{V} \int_{\omega} \eta_3 |d^{\pm}| d\xi_{\omega} \int_{\omega_{-1}} u_3^1 |d^{\pm}| d\xi_{\omega} = \int_{\omega} f^{0,i\pm} \eta_i |d^{\pm}| d\xi_{\omega}.$$

Afin de déterminer la nature du problème étudié, et de déterminer la norme que l'on va utiliser, on cherche le noyau

$$\text{Ker} \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{EH\pm}(\omega) := \{ \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}^{EH}(\omega), \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{EH\pm}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{0} \text{ dans } \omega \}.$$

Si $\text{Ker} \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{EH\pm} = \{ \mathbf{0} \}$, alors il s'agit d'un problème de "coque en membrane".

Théorème 5.8.1 *Le noyau de $\underline{\gamma}^{EH\pm}$ est réduit à $\{\mathbf{0}\}$.*

Démonstration. Le comportement d'un problème hyperbolique et celui d'un problème elliptique étant très différents, on fait la preuve en deux temps. On montre dans un premier temps que

$$\underline{\gamma}^{EH+}(\boldsymbol{\eta}) = \underline{\mathbf{0}} \implies \boldsymbol{\eta}^+ = \mathbf{0}$$

puis dans un deuxième temps que

$$\underline{\gamma}^{EH-}(\boldsymbol{\eta}) = \underline{\mathbf{0}} \implies \boldsymbol{\eta}^- = \mathbf{0}.$$

1. Soit $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}^{EH}(\omega)$ tel que $\underline{\gamma}^{EH\pm}(\boldsymbol{\eta}) = \underline{\mathbf{0}}$ alors, dans ω^+ ,

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta_1^+}{\partial \xi_1} + \frac{\eta_3}{R_l} = 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_1^+}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \eta_2^+}{\partial \xi_1} \right) + \sin\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) \frac{1}{R_L d^+} \eta_2^+ = 0 \\ \frac{\partial \eta_2^+}{\partial \xi_2} - \frac{d^+}{R_L} \left(\sin\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) \eta_1^+ - \cos\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) \eta_3 \right) = 0. \end{cases}$$

On élimine η_3 entre la première et la dernière équation. On se ramène ainsi au système

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_1^+}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \eta_2^+}{\partial \xi_1} \right) + \sin\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) \frac{1}{R_L d^+} \eta_2^+ = 0 \\ \frac{\partial \eta_2^+}{\partial \xi_2} - \frac{d^+}{R_L} \left(\sin\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) \eta_1^+ + \cos\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) R_l \frac{\partial \eta_1^+}{\partial \xi_1} \right) = 0. \end{cases}$$

On explicite ensuite $\frac{\partial \eta_2^+}{\partial \xi_2}$ à partir de la seconde équation et on dérive la première équation par rapport à ξ_2 . On obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \eta_1^+}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 \eta_2^+}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} + 2 \sin\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) \frac{1}{R_L d^+} \frac{\partial \eta_2^+}{\partial \xi_2} = 0 \\ \frac{\partial \eta_2^+}{\partial \xi_2} = \frac{R_l d^+}{R_L} \cos^2\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\eta_1^+ / \cos\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) \right) \right) = 0. \end{cases}$$

On élimine η_2^+ dans la première équation et on pose $\tilde{\eta} = \eta_1^+ / \cos\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right)$.

$$\frac{R_L^2}{R_l} \cos\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) \frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(d^+ R_L \cos^2\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \xi_1} \right) + 2 \sin\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) \cos^2\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \xi_1} = 0$$

enfin, on multiplie par η et on intègre, puis on intègre par parties en remarquant que

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\sin\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) \cos^2\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) \right) = \frac{1}{R_l} \cos\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) \left(\cos^2\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) - 2 \sin^2\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) \right)$$

$$\int_{\omega} \cos\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) \left(R_L^2 \left(\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \xi_2} \right)^2 + R_L R_l d^+ \cos\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) \left(\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \xi_1} \right)^2 + \tilde{\eta}^2 \left(3 \cos^2\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) - 2 \right) \right) d\xi_{\omega} = 0$$

Tous les coefficients sont positifs dès que

$$\frac{l}{R_l} \leq \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$$

et par conséquent

$$\tilde{\eta} = 0, \text{ puis } \eta_1^+ = 0, \eta_2^+ = 0, \eta_3^+ = 0.$$

2. Considérons maintenant

$$Ker \underline{\gamma}^{EH-}(\omega^-) = \left\{ \boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\omega^-)^2 \times H_0^1(\omega^-)^2 \times L^2(\omega^-), \underline{\gamma}^{EH-}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{0} \text{ dans } \omega^- \right\}.$$

Pour montrer que $Ker \underline{\gamma}^{EH-}(\omega^-) = \{\mathbf{0}\}$ il suffit de montrer qu'en chaque point M_0^- de S^- le plan P_T tangent à S^- coupe la frontière ∂S^- [Ciarlet, 2000]. Par raisons de symétrie, il suffit de le montrer pour $(\xi_1^0, \xi_2^0) \in [-l, 0] \times [-L, 0]$. Pour $(\xi_1, \xi_2) \in [-2l, 0] \times [-L, +L]$, posons

$$\theta := \frac{\xi_1 + l}{R_l}$$

Soit $(\xi_1^0, \xi_2^0) \in [-l, 0] \times [-L, 0]$, le plan P_T tangent en $M_0^- (\xi_1^0, \xi_2^0)$ à S^- a pour équation

$$\begin{aligned} & \sin(\theta_0) R_l (\sin(\theta) - \sin(\theta_0)) + \cos\left(\frac{\xi_2^0}{R_L}\right) \cos(\theta_0) R_L \left(\cos\left(\frac{\xi_2}{R_L}\right) d^-(\theta) - \cos\left(\frac{\xi_2^0}{R_L}\right) d^-(\theta_0) \right) \\ & + \sin\left(\frac{\xi_2^0}{R_L}\right) \cos(\theta_0) R_L \left(\sin\left(\frac{\xi_2}{R_L}\right) d^-(\theta) - \sin\left(\frac{\xi_2^0}{R_L}\right) d^-(\theta_0) \right) = 0. \end{aligned}$$

Un point de la frontière a pour coordonnées $(\xi_1, \pm L)$ ou $(0, \xi_2)$ ou $(-2l, \xi_2)$ avec $(\xi_1, \xi_2) \in [-2l, 0] \times [-L, +L]$. Montrons donc que l'équation d'inconnue θ obtenue en remplaçant ξ_2 par $\pm L$ dans P_T

$$\begin{aligned} & \sin(\theta_0) R_l \sin(\theta) + d^-(\theta) \cos(\theta_0) R_L \left(\cos\left(\frac{\xi_2^0}{R_L}\right) \cos\left(\frac{\pm L}{R_L}\right) + \sin\left(\frac{\xi_2^0}{R_L}\right) \sin\left(\frac{\pm L}{R_L}\right) \right) = \\ & \sin(\theta_0) R_l \sin(\theta_0) + d^-(\theta_0) \cos(\theta_0) R_L \left(\cos^2\left(\frac{\xi_2^0}{R_L}\right) + \sin^2\left(\frac{\xi_2^0}{R_L}\right) \right) \end{aligned}$$

admet au moins une solution θ appartenant à $[-l, +l]$. On remplace $d^-(\theta)$ et $d^-(\theta_0)$ par leurs expressions respectives

$$\begin{aligned} & \sin(\theta_0) R_l \sin(\theta) + \cos(\theta_0) R_L \cos\left(\frac{\xi_2^0 - \pm L}{R_L}\right) \left(-1 - \frac{R_l}{R_L} \cos\left(\frac{l}{R_l}\right) + \frac{R_l}{R_L} \cos(\theta) \right) = \\ & \sin(\theta_0) R_l \sin(\theta_0) + \cos(\theta_0) R_L \left(-1 - \frac{R_l}{R_L} \cos\left(\frac{l}{R_l}\right) + \frac{R_l}{R_L} \cos(\theta_0) \right). \end{aligned}$$

On suppose R_L suffisamment grand pour considérer $\cos\left(\frac{\xi_2^0 - \pm L}{R_L}\right)$ proche de 1. Il reste alors

$$\sin(\theta_0) \sin(\theta) + \cos(\theta_0) \cos(\theta) = 1$$

soit $\theta = \theta_0$.

Pour R_L suffisamment grand, le noyau de $\underline{\gamma}^{EH\pm}$ est réduit à $\{\mathbf{0}\}$. ■

Conclusion 2 *L'étude pré-asymptotique débouche sur un problème de "coque en membrane".*

5.9 Etude asymptotique

Notations :

$$\mathcal{P}^{EH}(\varepsilon, \Omega) := \begin{cases} \forall \mathbf{u}(\varepsilon) \in \mathcal{V}(\Omega), \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega), \\ \int_{\Omega} \underline{\mathbf{A}}^{EH\pm}(\varepsilon) : \underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{u}^{\pm}(\varepsilon)) : \underline{\mathbf{e}}_{\parallel}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) \left| d_{\varepsilon\xi_3}^{\pm} \right| d\xi + \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\pi}{V} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R_l}\right)^2 \int_{\omega_{-1}} u_3(\varepsilon) \left| d_{-\varepsilon}^{\pm} \right| d\xi_{\omega} \int_{\omega_{-1}} v_3 \left| d_{-\varepsilon}^{\pm} \right| d\xi_{\omega} = \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l}\right) \int_{\omega_1} f^{i\pm} v_i \left| d_{\varepsilon}^{\pm} \right| d\xi_{\omega}. \end{cases}$$

Dans cette partie, et comme dans le cas parabolique, on se place dans le cas où :

1. les membranes ont toutes la même surface médiane $S = \theta(\omega)$,
2. les conditions aux limites sont toutes posées sur $\theta(\delta\omega)$,
3. les constantes d'élasticité des membranes ne dépendent pas de l'épaisseur,
4. les forces extérieures $f^{\varepsilon i\pm}$ vérifient, il existe $\mathbf{f}^{\pm} = (f^{i\pm}) \in \mathbf{L}^2(\omega)$ indépendante de ε , $f^{\varepsilon i\pm}(\xi_{\omega}^{\varepsilon}) = \varepsilon f^{i\pm}(\xi_{\omega})$.

Sous ces hypothèses, le problème $\mathcal{P}^{EH}(\varepsilon)$ devient $\mathcal{P}^{EH}(\varepsilon, \Omega)$.

5.9.1 Choix des espaces fonctionnels et des normes en 2D

Notations :

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi_0, \alpha\beta}^{EH-}(\boldsymbol{\eta}) &:= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_{\alpha}}{\partial \xi_{\beta}} + \frac{\partial \eta_{\beta}}{\partial \xi_{\alpha}} \right) - b_{\alpha\beta}^{-}(\xi_0) \eta_3, \\ \underline{\gamma}_{\xi_0}^{EH-}(\boldsymbol{\eta}) &:= \begin{bmatrix} \frac{\partial \eta_1^-}{\partial \xi_1} + \frac{\eta_3}{R_l} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_1^-}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \eta_2^-}{\partial \xi_1} \right) \\ sym & \frac{\partial \eta_2^-}{\partial \xi_2} + \frac{1}{R_l} \left(-1 + \frac{R_l}{R_L} - \frac{R_l}{R_L} \cos\left(\frac{l}{R_l}\right) \right) \eta_3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} \langle \zeta, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\omega}^{EH} &:= \int_{\omega} \underline{\gamma}^{EH\pm}(\zeta) : \underline{\gamma}^{EH\pm}(\boldsymbol{\eta}) d\xi_{\omega}, & \|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega}^{EH} &:= \sqrt{\langle \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\omega}^{EH}}, \\ \langle \zeta, \boldsymbol{\eta} \rangle_{0, \omega}^{EH} &:= \langle \zeta, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\omega}^{EH} + \int_{\omega} \zeta \cdot \boldsymbol{\eta} d\xi_{\omega}, & \|\boldsymbol{\eta}\|_{0, \omega}^{EH} &:= \sqrt{\langle \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta} \rangle_{0, \omega}^{EH}}, \\ \langle \zeta, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\omega} &:= \int_{\omega} (\underline{\boldsymbol{\epsilon}}(\zeta) : \underline{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\eta}) + \zeta_3 \eta_3) d\xi_{\omega}, & \|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega} &:= \sqrt{\langle \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\omega}}. \end{aligned}$$

La formulation du problème pré-asymptotique conduit à étudier la norme $\| \cdot \|_{\omega}^{EH}$ induite par le produit scalaire

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\omega}^{EH} : \begin{cases} \mathcal{V}^{EH}(\omega) \times \mathcal{V}^{EH}(\omega) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\zeta, \boldsymbol{\eta}) & \longmapsto \langle \zeta, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\omega}^{EH} = \int_{\omega} \underline{\gamma}^{EH\pm}(\zeta) : \underline{\gamma}^{EH\pm}(\boldsymbol{\eta}) d\xi_{\omega} \end{cases}$$

avec rappellons le,

$$\underline{\gamma}^{EH+}(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \eta_1^+}{\partial \xi_1} + \frac{\eta_3}{R_l} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_1^+}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \eta_2^+}{\partial \xi_1} \right) + \sin \left(\frac{\xi_1 - l}{R_l} \right) \frac{1}{R_L d^+} \eta_2^+ \\ sym & \frac{\partial \eta_2^+}{\partial \xi_2} - \frac{d^+}{R_L} \left(\sin \left(\frac{\xi_1 - l}{R_l} \right) \eta_1^+ - \cos \left(\frac{\xi_1 - l}{R_l} \right) \eta_3 \right) \end{bmatrix}$$

et,

$$\underline{\gamma}^{EH-}(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \eta_1^-}{\partial \xi_1} + \frac{\eta_3}{R_l} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_1^-}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \eta_2^-}{\partial \xi_1} \right) + \sin \left(\frac{\xi_1 + l}{R_l} \right) \frac{1}{R_L d^-} \eta_2^- \\ sym & \frac{\partial \eta_2^-}{\partial \xi_2} - \frac{d^-}{R_L} \left(\sin \left(\frac{\xi_1 + l}{R_l} \right) \eta_1^- - \cos \left(\frac{\xi_1 + l}{R_l} \right) \eta_3 \right) \end{bmatrix}$$

et à la comparer avec une norme complète sur $\mathcal{V}^{EH}(\omega)$, par exemple $\| \cdot \|_{110, \omega}$ ou avec la norme $\| \cdot \|_{\omega}$ induite par le produit scalaire

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\omega} : \begin{cases} \mathcal{V}^{EH}(\omega) \times \mathcal{V}^{EH}(\omega) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\zeta, \boldsymbol{\eta}) & \longmapsto \langle \zeta, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\omega} = \int_{\omega} (\underline{\epsilon}(\zeta) : \underline{\epsilon}(\boldsymbol{\eta}) + \zeta_3 \eta_3) d\xi_{\omega} \end{cases}$$

avec

$$\underline{\epsilon}(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_1} \right) & \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix}.$$

Proposition 5.9.1 *Sur $\mathcal{V}^{EH}(\omega)$, les normes $\| \cdot \|_{110, \omega}$ et $\| \cdot \|_{0, \omega}^{EH}$ sont équivalentes.*

Pour le prouver, on démontre d'abord un lemme préliminaire dont la preuve utilise le résultat suivant démontré dans [Duvaut-Lions, 1972].

Résultat : *Soit ω un domaine de \mathbb{R}^2 et v une distribution sur ω , si v , $\frac{\partial v}{\partial \xi_1}$ et $\frac{\partial v}{\partial \xi_2}$ appartiennent à $H^{-1}(\omega)$, alors $v \in L^2(\omega)$.*

Lemme préliminaire : Les ensembles $\left\{ \boldsymbol{\eta} \in L^2(\omega^+)^2 \times L^2(\omega^-)^2 \times L^2(\omega), \underline{\gamma}^{EH\pm}(\boldsymbol{\eta}) \in [L^2(\omega^{\pm})] \right\}$ et $\mathcal{V}^{EH}(\omega)$ sont égaux.

Démonstration. Posons $\mathcal{W}^{EH} := \left\{ \boldsymbol{\eta} \in L^2(\omega^+)^2 \times L^2(\omega^-)^2 \times L^2(\omega), \boldsymbol{\gamma}^{EH\pm}(\boldsymbol{\eta}) \in [L^2(\omega^\pm)] \right\}$, on a évidemment $\mathcal{V}^{EH}(\omega) \subset \mathcal{W}^{EH}$. Pour montrer l'inclusion inverse, il suffit de montrer que $\frac{\partial \eta_\alpha^\pm}{\partial \xi_\beta} \in L^2(\omega^\pm)$.

L'appartenance de $\frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_1}$ et de $\frac{\partial \eta_2^\pm}{\partial \xi_2}$ à $L^2(\omega^\pm)$ est directe. En effet,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}_{11}^{EH\pm}(\boldsymbol{\eta}) \in L^2(\omega^\pm) \text{ et } \eta_3 \in L^2(\omega) &\implies \frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_1} \in L^2(\omega^\pm) \text{ et} \\ \boldsymbol{\gamma}_{22}^{EH\pm}(\boldsymbol{\eta}) \in L^2(\omega^\pm), \eta_1^\pm \in L^2(\omega^\pm) \text{ et } \eta_3 \in L^2(\omega) &\implies \frac{\partial \eta_2^\pm}{\partial \xi_2} \in L^2(\omega^\pm) \end{aligned}$$

en revanche on a seulement

$$\boldsymbol{\gamma}_{12}^{EH\pm}(\boldsymbol{\eta}) \in L^2(\omega^\pm) \text{ et } \eta_2^\pm \in L^2(\omega^\pm) \implies \frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \eta_2^\pm}{\partial \xi_1} \in L^2(\omega^\pm).$$

Pour conclure on applique le lemme précédant à $\frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_2}$. On a

- a) $\eta_1^\pm \in L^2(\omega^\pm)$ donc $\frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_2} \in H^{-1}(\omega^\pm)$,
- b) $\frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_1} \in L^2(\omega^\pm)$ donc $\frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_1} \right) \in H^{-1}(\omega^\pm)$, c'est à dire $\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_2} \right) \in H^{-1}(\omega^\pm)$,
- c) $\frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \eta_2^\pm}{\partial \xi_1} \in L^2(\omega^\pm)$ et $\frac{\partial \eta_2^\pm}{\partial \xi_2} \in L^2(\omega^\pm)$, donc $\frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \eta_2^\pm}{\partial \xi_1} \right) \in H^{-1}(\omega^\pm)$ et $\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{\partial \eta_2^\pm}{\partial \xi_2} \right) \in H^{-1}(\omega^\pm)$, soit, par soustraction, $\frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_2} \right) \in H^{-1}(\omega^\pm)$.

Par conséquent, $\frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_2} \in L^2(\omega^\pm)$. Enfin,

$$\frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_2} \in L^2(\omega^\pm) \text{ et } \frac{\partial \eta_1^\pm}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \eta_2^\pm}{\partial \xi_1} \in L^2(\omega^\pm) \implies \frac{\partial \eta_2^\pm}{\partial \xi_1} \in L^2(\omega^\pm).$$

Les ensembles sont bien égaux. ■

On peut maintenant prouver la proposition **5.9.1**.

Démonstration. Puisque de manière évidente $\| \cdot \|_{0,\omega}^{EH} \leq c \| \cdot \|_{110,\omega}$, l'injection entre les espaces de Hilbert

$$id : \left(\mathcal{V}^{EH}(\omega), \| \cdot \|_{110,\omega} \right) \longrightarrow \left(\mathcal{W}^{EH}, \| \cdot \|_{0,\omega}^{EH} \right)$$

est continue. Par conséquent, pour montrer l'équivalence des normes, il suffit d'appliquer le théorème du graphe fermé puisque $\mathcal{W}^{EH} = \mathcal{V}^{EH}(\omega)$ ■

Malgré ce résultat, on montre qu'il n'y a pas équivalence des normes $\| \cdot \|_\omega^{EH}$ et $\| \cdot \|_\omega$ sur ω tout entier, mais qu'il y a l'équivalence partielle suivante

Proposition 5.9.2 *Les normes $\| \cdot \|_{\omega^+}^{EH}$ et $\| \cdot \|_{110,\omega^+}$ sont équivalentes sur $H_0^1(\omega^+) \times H_0^1(\omega^+) \times L^2(\omega^+)$.*

Démonstration. La démonstration reprend celle donnée dans [Ciarlet, 2000]. On sait d'une part qu'il existe une constante c telle que

$$\forall \boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\omega^+) \times H_0^1(\omega^+) \times L^2(\omega^+), \quad \|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega^+}^{EH} \leq c \|\boldsymbol{\eta}\|_{110, \omega^+}$$

et on vient de montrer d'autre part qu'il existe une constante c telle que

$$\forall \boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\omega^+) \times H_0^1(\omega^+) \times L^2(\omega^+), \quad \|\boldsymbol{\eta}\|_{110, \omega^+} \leq c \|\boldsymbol{\eta}\|_{0, \omega^+}^{EH}$$

il reste donc à établir l'existence d'une constante c telle que

$$\forall \boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\omega^+) \times H_0^1(\omega^+) \times L^2(\omega^+), \quad \|\eta_1\|_{0, \omega^+}^2 + \|\eta_2\|_{0, \omega^+}^2 + \|\eta_3\|_{0, \omega^+}^2 \leq c \|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega^+}^{EH}$$

pour obtenir l'équivalence. On le fait par l'absurde. Si l'inégalité était fausse, il existerait une suite $(\boldsymbol{\eta}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $H_0^1(\omega^+)^2 \times L^2(\omega^+)$ telle que

i- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\boldsymbol{\eta}^n\|_{0, \omega^+} = 1$

ii- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\alpha, \beta} \|\gamma_{\alpha\beta}^{EH+}(\boldsymbol{\eta}^n)\|_{0, \omega^+}^2 = 0.$

Cette suite serait bornée pour la norme $\|\cdot\|_{110, \omega}$ et on en déduirait donc l'existence de $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ appartenant à $H_0^1(\omega^+)^2 \times L^2(\omega^+)$ et d'une sous-suite $(\boldsymbol{\eta}^{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ faiblement convergente dans $H_0^1(\omega^+)^2 \times L^2(\omega^+)$ vers $\boldsymbol{\eta}$. On montre que dans ces conditions, on a nécessairement $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$, puis on montre qu'il y a convergence forte de $(\boldsymbol{\eta}^{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ vers $\mathbf{0}$ ce qui est incompatible avec la condition **i**.

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\eta}^{\varphi(n)} \rightharpoonup \boldsymbol{\eta} \text{ dans } H_0^1(\omega^+)^2 \times L^2(\omega^+) \\ \implies & \begin{cases} \eta_1^{\varphi(n)} \rightharpoonup \eta_1 & \text{dans } L^2(\omega^+) \\ \eta_2^{\varphi(n)} \rightharpoonup \eta_2 & \text{dans } L^2(\omega^+) \\ \eta_3^{\varphi(n)} \rightharpoonup \eta_3 & \text{dans } L^2(\omega^+) \\ \frac{\partial \eta_\alpha^{\varphi(n)}}{\partial \xi_\beta} \rightharpoonup \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\beta} & \text{dans } L^2(\omega^+) \end{cases} \\ \implies & \gamma_{\alpha\beta}^{EH+}(\boldsymbol{\eta}^{\varphi(n)}) \rightharpoonup \gamma_{\alpha\beta}^{EH+}(\boldsymbol{\eta}) \text{ dans } L^2(\omega^+). \end{aligned}$$

Comme la condition **ii** entraîne la convergence forte de $\gamma_{\alpha\beta}^{EH+}(\boldsymbol{\eta}^{\varphi(n)})$ vers 0, on en déduit que $\gamma_{\alpha\beta}^{EH+}(\boldsymbol{\eta}) = 0$ et donc que $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$. On montre maintenant que $\boldsymbol{\eta}^{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbf{0}$.

$$\begin{aligned} & [\gamma_{\alpha\beta}^{EH+}(\boldsymbol{\eta}^{\varphi(n)})] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbf{0} \text{ dans } L^2(\omega^+) \\ \implies & \begin{cases} \frac{\partial \eta_1^{\varphi(n)}}{\partial \xi_1} + \frac{1}{R_l} \eta_3^{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_1^{\varphi(n)}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \eta_2^{\varphi(n)}}{\partial \xi_1} \right) + \frac{1}{R_L d^+} \sin\left(\frac{\xi_1 - l}{R_l}\right) \eta_2^{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ \frac{\partial \eta_2^{\varphi(n)}}{\partial \xi_2} - \frac{d^+}{R_L} \left(\sin\left(\frac{\xi_1 - l}{R_l}\right) \eta_1^{\varphi(n)} - \cos\left(\frac{\xi_1 - l}{R_l}\right) \eta_3^{\varphi(n)} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On élimine $\eta_3^{\varphi(n)}$ entre la première et la dernière équation et on utilise les convergences fortes déjà obtenues pour en déduire le système

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta_1^{\varphi(n)}}{\partial \xi_1} + \frac{1}{R_l} \eta_3^{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 & \text{dans } L^2(\omega^+) \\ \frac{\partial \eta_1^{\varphi(n)}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \eta_2^{\varphi(n)}}{\partial \xi_1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 & \text{dans } L^2(\omega^+) \\ \frac{\partial \eta_2^{\varphi(n)}}{\partial \xi_2} - \frac{R_l d^+}{R_L} \cos\left(\frac{\xi_1 - l}{R_l}\right) \frac{\partial \eta_1^{\varphi(n)}}{\partial \xi_1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 & \text{dans } L^2(\omega^+) \end{cases}$$

puis on multiplie la seconde par $\frac{\partial \eta_1^{\varphi(n)}}{\partial \xi_2}$, la troisième par $\frac{\partial \eta_1^{\varphi(n)}}{\partial \xi_1}$ et on intègre sur ω^+ . On obtient alors

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta_1^{\varphi(n)}}{\partial \xi_1} + \frac{1}{R_l} \eta_3^{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 & \text{dans } L^2(\omega^+) \\ \int_{\omega^+} \frac{\partial \eta_1^{\varphi(n)}}{\partial \xi_2} \frac{\partial \eta_1^{\varphi(n)}}{\partial \xi_2} + \int_{\omega^+} \frac{\partial \eta_2^{\varphi(n)}}{\partial \xi_1} \frac{\partial \eta_1^{\varphi(n)}}{\partial \xi_2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 & \text{dans } \mathbb{R} \\ \int_{\omega^+} \frac{\partial \eta_2^{\varphi(n)}}{\partial \xi_2} \frac{\partial \eta_1^{\varphi(n)}}{\partial \xi_1} - \int_{\omega^+} \frac{R_l d^+}{R_L} \cos\left(\frac{\xi_1 - l}{R_l}\right) \frac{\partial \eta_1^{\varphi(n)}}{\partial \xi_1} \frac{\partial \eta_1^{\varphi(n)}}{\partial \xi_1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 & \text{dans } \mathbb{R} \end{cases}$$

de plus, comme

$$\eta_1^{\varphi(n)} = \eta_2^{\varphi(n)} = 0 \text{ sur } \partial\omega^+,$$

on a

$$\int_{\omega^+} \frac{\partial \eta_2^{\varphi(n)}}{\partial \xi_2} \frac{\partial \eta_1^{\varphi(n)}}{\partial \xi_1} = \int_{\omega^+} \frac{\partial \eta_2^{\varphi(n)}}{\partial \xi_1} \frac{\partial \eta_1^{\varphi(n)}}{\partial \xi_2}$$

et par conséquent, en soustrayant les deux équations

$$\int_{\omega^+} \left(\frac{\partial \eta_1^{\varphi(n)}}{\partial \xi_2} \right)^2 + \int_{\omega^+} \frac{R_l d^+}{R_L} \cos\left(\frac{\xi_1 - l}{R_l}\right) \left(\frac{\partial \eta_1^{\varphi(n)}}{\partial \xi_1} \right)^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

le coefficient de $\left(\frac{\partial \eta_1^{\varphi(n)}}{\partial \xi_1} \right)^2$ est positif sur tout le domaine ω^+ par conséquent, nécessairement

$$\frac{\partial \eta_1^{\varphi(n)}}{\partial \xi_2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ et } \frac{\partial \eta_1^{\varphi(n)}}{\partial \xi_1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ dans } L^2(\omega^+).$$

On en déduit successivement à partir du système de limites que

$$\frac{1}{R_l} \eta_3^{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad \frac{\partial \eta_2^{\varphi(n)}}{\partial \xi_1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ et } \frac{\partial \eta_2^{\varphi(n)}}{\partial \xi_2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ dans } L^2(\omega^+).$$

Ceci permet de conclure que

$$\boldsymbol{\eta}^{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbf{0} \text{ dans } H_0^1(\omega^+)^2 \times L^2(\omega^+)$$

or,

$$\|\boldsymbol{\eta}^{\varphi(n)}\|_{0,\omega^+} = 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|\boldsymbol{\eta}^{\varphi(n)}\|_{0,\omega^+} = 1 \implies \|\boldsymbol{\eta}\|_{0,\omega^+} = 1$$

ce qui est impossible. ■

Proposition 5.9.3 *Les normes $\|\cdot\|_{\omega^-}^{EH}$ et $\|\cdot\|_{110,\omega^-}$ sont comparables mais elles ne sont pas équivalentes sur $\mathcal{V}^{EH}(\omega^-) = H_0^1(\omega^-) \times H_0^1(\omega^-) \times L^2(\omega^-)$.*

Démonstration. La démonstration adapte celle donnée dans le cas général dans [Slicaru, 1997]. Puisque les normes $\|\cdot\|_{\omega^-}$ et $\|\cdot\|_{110,\omega^-}$ sont équivalentes sur $\mathcal{V}^{EH}(\omega^-)$ et que par application des inégalités triangulaires, on montre que

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega^-}^{EH} \leq c \|\boldsymbol{\eta}\|_{110,\omega^-}$$

on en déduit que les normes $\|\cdot\|_{\omega^-}^{EH}$ et $\|\cdot\|_{\omega^-}$ sont comparables avec

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega^-}^{EH} \leq c \|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega^-}.$$

Aussi suffit-il, pour montrer que les normes $\|\cdot\|_{\omega^-}^{EH}$ et $\|\cdot\|_{\omega^-}$ ne sont pas équivalentes, de montrer que la proposition

$$\exists c > 0, \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}^{EH}(\omega^-), \|\boldsymbol{\eta}\|_{110,\omega^-} \leq c \|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega^-}^{EH}$$

est fautive. Pour le faire, on la suppose vraie, on se place au point $\xi_0(-l, 0) \in \omega^-$ et à l'aide du tenseur $\underline{\gamma}_{\xi_0}^{EH-}(\boldsymbol{\eta})$ on arrive à une contradiction.

1. Montrons dans un premier temps qu'il existe un voisinage $\omega_0^- \subset \omega^-$ de ξ_0 dans lequel pour tout $\boldsymbol{\eta}_0 \in \mathcal{V}(\omega_0^-) := H_0^1(\omega^-) \times H_0^1(\omega^-) \times L^2(\omega^-)$ on a

$$\left\| \gamma_{\xi_0,11}^{EH-}(\boldsymbol{\eta}_0) \right\|_{0,\omega_0^-}^2 + 2 \left\| \gamma_{\xi_0,12}^{EH-}(\boldsymbol{\eta}_0) \right\|_{0,\omega_0^-}^2 + \left\| \gamma_{\xi_0,22}^{EH-}(\boldsymbol{\eta}_0) \right\|_{0,\omega_0^-}^2 \geq \frac{1}{2c^2} \left(\|\boldsymbol{\eta}_0\|_{110,\omega_0^-} \right)^2.$$

Supposons qu'un tel voisinage existe et identifions ses caractéristiques. Soit $\boldsymbol{\eta}_0 \in \mathcal{V}^{EH}(\omega_0^-)$ et soit $\boldsymbol{\eta}$ le prolongement de $\boldsymbol{\eta}_0$ à ω^- défini par,

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{cases} \boldsymbol{\eta}_0 & \text{sur } \omega_0^- \\ \mathbf{0} & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Ainsi construit, $\boldsymbol{\eta}$ appartient à $\mathcal{V}^{EH}(\omega^-)$. et par conséquent vérifie

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_{110,\omega^-} \leq c \|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega^-}^{EH}.$$

Or,

$$\left(\|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega^-}^{EH} \right)^2 = \left\| \gamma_{11}^{EH-}(\boldsymbol{\eta}_0) \right\|_{0,\omega_0^-}^2 + 2 \left\| \gamma_{12}^{EH-}(\boldsymbol{\eta}_0) \right\|_{0,\omega_0^-}^2 + \left\| \gamma_{22}^{EH-}(\boldsymbol{\eta}_0) \right\|_{0,\omega_0^-}^2$$

et,

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_{110,\omega^-} = \|\boldsymbol{\eta}_0\|_{110,\omega_0^-}.$$

On exprime les composantes de $\underline{\gamma}^{EH^-}(\boldsymbol{\eta}_0)$ (qui apparaissent dans le calcul de $\|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega^-}^{EH}$) en fonction de celles de $\underline{\gamma}_{\xi_0}^{EH^-}(\boldsymbol{\eta})$

$$\gamma_{11}^{EH^-}(\boldsymbol{\eta}_0) = \gamma_{\xi_0,11}^{EH^-}(\boldsymbol{\eta}_0)$$

$$\gamma_{12}^{EH^-}(\boldsymbol{\eta}_0) = \gamma_{\xi_0,12}^{EH^-}(\boldsymbol{\eta}_0) + \frac{1}{R_L d^-} \sin\left(\frac{\xi_1+l}{R_l}\right) \eta_{0,2}$$

$$\gamma_{22}^{EH^-}(\boldsymbol{\eta}_0) = \gamma_{\xi_0,22}^{EH^-}(\boldsymbol{\eta}_0) - \frac{d^-}{R_L} \sin\left(\frac{\xi_1+l}{R_l}\right) \eta_{0,1} + (b_{22}(\xi_0) - b_{22}(\xi)) \eta_{0,3}.$$

On vérifie ensuite que

$$\sup_{\xi_1 \in [-2l, 0]} \left| \frac{d^-}{R_L} \sin\left(\frac{\xi_1+l}{R_l}\right) \right| \leq \sup_{\xi_1 \in [-2l, 0]} \left| \frac{1}{R_L d^-} \sin\left(\frac{\xi_1+l}{R_l}\right) \right| := s.$$

et on en déduit les majorations suivantes

$$\left\| \frac{1}{R_L d^-} \sin\left(\frac{\xi_1+l}{R_l}\right) \eta_{0,2} \right\|_{0, \omega_0^-}^2 \leq s^2 \|\eta_{0,2}\|_{0, \omega_0^-}^2$$

$$\left\| \frac{d^-}{R_L} \sin\left(\frac{\xi_1+l}{R_l}\right) \eta_{0,1} \right\|_{0, \omega_0^-}^2 \leq s^2 \|\eta_{0,1}\|_{0, \omega_0^-}^2$$

dont on se sert, après applications des inégalités

$$(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2, \quad (a+b+c)^2 \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2,$$

pour majorer $\|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega^-}^{EH}$. En effet, on a

$$\begin{aligned} \left(\|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega^-}^{EH}\right)^2 &= \left\| \gamma_{\xi_0,11}^{EH^-}(\boldsymbol{\eta}_0) \right\|_{0, \omega_0^-}^2 + 2 \left\| \gamma_{\xi_0,12}^{EH^-}(\boldsymbol{\eta}_0) + \frac{1}{R_L d^-} \sin\left(\frac{\xi_1+l}{R_l}\right) \eta_{0,2} \right\|_{0, \omega_0^-}^2 + \\ &\quad \left\| \gamma_{\xi_0,22}^{EH^-}(\boldsymbol{\eta}_0) - \frac{d^-}{R_L} \sin\left(\frac{\xi_1+l}{R_l}\right) \eta_{0,1} + (b_{22}(\xi_0) - b_{22}(\xi)) \eta_{0,3} \right\|_{0, \omega_0^-}^2 \\ &\leq \left\| \gamma_{\xi_0,11}^{EH^-}(\boldsymbol{\eta}_0) \right\|_{0, \omega_0^-}^2 + 4 \left\| \gamma_{\xi_0,12}^{EH^-}(\boldsymbol{\eta}_0) \right\|_{0, \omega_0^-}^2 + 3 \left\| \gamma_{\xi_0,22}^{EH^-}(\boldsymbol{\eta}_0) \right\|_{0, \omega_0^-}^2 + \\ &\quad 2s^2 \|\eta_{0,2}\|_{0, \omega_0^-}^2 + 3s^2 \|\eta_{0,1}\|_{0, \omega_0^-}^2 + \sup_{\xi \in \omega_0^-} |b_{22}(\xi_0) - b_{22}(\xi)| \|\eta_{0,3}\|_{0, \omega_0^-}^2 \\ &\leq 3 \left(\left\| \gamma_{11}^{EH^-}(\boldsymbol{\eta}_0) \right\|_{0, \omega_0^-}^2 + 2 \left\| \gamma_{12}^{EH^-}(\boldsymbol{\eta}_0) \right\|_{0, \omega_0^-}^2 + \left\| \gamma_{22}^{EH^-}(\boldsymbol{\eta}_0) \right\|_{0, \omega_0^-}^2 \right) + \\ &\quad 3s^2 \left(\|\eta_{0,2}\|_{0, \omega_0^-}^2 + \|\eta_{0,1}\|_{0, \omega_0^-}^2 \right) + \sup_{\xi \in \omega_0^-} |b_{22}(\xi_0) - b_{22}(\xi)| \|\eta_{0,3}\|_{0, \omega_0^-}^2. \end{aligned}$$

Il reste maintenant à choisir ω_0^- de telle sorte que

$$3s^2 \left(\|\eta_{0,2}\|_{0, \omega_0^-}^2 + \|\eta_{0,1}\|_{0, \omega_0^-}^2 \right) \leq \frac{1}{2c^2} \left(|\eta_{0,1}^2|_{1, \omega_0^-} + |\eta_{0,2}^2|_{1, \omega_0^-} \right) \quad \text{et} \\ \sup_{\xi \in \omega_0^-} |b_{22}(\xi_0) - b_{22}(\xi)| \leq \frac{1}{2c^2}$$

On choisit $\omega_0^- =]-l - \delta, -l + \delta[\times]-L, L[$ où δ vérifie les trois propriétés suivantes :

$$\delta \leq l$$

pour que $\omega_0^- \subset \omega^-$.

$$|\xi_1 + l| \leq \delta \implies \sup_{\xi \in \omega_0^-} |b_{22}(\xi_0) - b_{22}(\xi)| \leq \frac{1}{2c^2},$$

ce qui est possible car b_{22} est continue en $-l$, et enfin

$$3s^2 \|\eta_{0,\alpha}\|_{0,\omega_0^-}^2 \leq \frac{1}{2c^2} \|\eta_{0,\alpha}\|_{1,\omega_0^-}^2$$

ce qui est possible du fait de l'inégalité de Poincaré sur ω_0^- : $\|\eta_{0,\alpha}\|_{0,\omega_0^-}^2 \leq (2\delta)^2 \|\eta_{0,\alpha}\|_{1,\omega_0^-}^2$.

Dans ces conditions, on a

$$\left\| \gamma_{\xi_0,11}^{EH-}(\boldsymbol{\eta}_0) \right\|_{0,\omega_0^-}^2 + 2 \left\| \gamma_{\xi_0,12}^{EH-}(\boldsymbol{\eta}_0) \right\|_{0,\omega_0^-}^2 + \left\| \gamma_{\xi_0,22}^{EH-}(\boldsymbol{\eta}_0) \right\|_{0,\omega_0^-}^2 \geq \frac{1}{2c^2} \left(\|\boldsymbol{\eta}_0\|_{110,\omega_0^-} \right)^2.$$

2. On établit maintenant la contradiction en prouvant que sous l'hypothèse

$$\exists c > 0, \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}^{EH}(\omega^-), \quad \|\boldsymbol{\eta}\|_{110,\omega^-} \leq c \|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega^-}^{EH}$$

on a

$$\forall \theta \in H_0^1(\omega^-), \quad \left\| \frac{\partial \theta}{\partial \varkappa_1} \right\|_{0,\omega_0^-} \geq C \|\theta\|_{1,\omega_0^-}$$

où on a effectué le changement de variable $\xi_1 = \varkappa_1 + \varkappa_2$ et $\xi_2 = \varkappa_1 - \varkappa_2$.

Soit $\theta \in H_0^1(\omega^-)$, notons

$$X := \sqrt{\frac{-b_{22}(\xi_0)}{b_{11}(\xi_0)}} = \sqrt{\left(1 - \frac{R_l}{R_L} + \frac{R_l}{R_L} \cos\left(\frac{l}{R_l}\right)\right) \frac{R_l}{R_L}} \leq 1$$

et considérons les éléments $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}^{EH}(\omega_0^-)$ définis par $\boldsymbol{\eta} := \left(-\frac{1}{R_l}\theta, -\frac{X}{R_l}\theta, \frac{\partial \theta}{\partial \varkappa_1}\right)$. Ces éléments vérifient

$$\left\| \gamma_{\xi_0,11}^{EH-}(\boldsymbol{\eta}) \right\|_{0,\omega_0^-}^2 + 2 \left\| \gamma_{\xi_0,12}^{EH-}(\boldsymbol{\eta}) \right\|_{0,\omega_0^-}^2 + \left\| \gamma_{\xi_0,22}^{EH-}(\boldsymbol{\eta}) \right\|_{0,\omega_0^-}^2 \geq \frac{1}{2c^2} \left(\|\boldsymbol{\eta}\|_{110,\omega_0^-} \right)^2$$

c'est à dire, en remplaçant $\boldsymbol{\eta}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2c^2} \left(\left\| -\frac{1}{R_l}\theta \right\|_{1,\omega_0^-}^2 + \left\| -\frac{X}{R_l}\theta \right\|_{1,\omega_0^-}^2 + \left\| \frac{\partial \theta}{\partial \varkappa_1} \right\|_{0,\omega_0^-}^2 \right) &\leq \frac{1}{2} \left\| -\frac{1}{R_l} \frac{\partial \theta}{\partial \varkappa_2} - \frac{X}{R_l} \frac{\partial \theta}{\partial \varkappa_1} \right\|_{0,\omega_0^-}^2 + \\ &\quad \left\| -\frac{X}{R_l} \frac{\partial \theta}{\partial \varkappa_2} - \frac{X^2}{R_l} \frac{\partial \theta}{\partial \varkappa_1} \right\|_{0,\omega_0^-}^2 \end{aligned}$$

soit

$$\left(\frac{1}{2} + X^2\right) \left\| \frac{\partial \theta}{\partial \varkappa_2} + X \frac{\partial \theta}{\partial \varkappa_1} \right\|_{0,\omega_0^-}^2 \geq \frac{1}{2c^2} \left(\|\theta\|_{1,\omega_0^-}^2 + X^2 \|\theta\|_{1,\omega_0^-}^2 + R_l^2 \left\| \frac{\partial \theta}{\partial \varkappa_1} \right\|_{0,\omega_0^-}^2 \right)$$

d'où le résultat annoncé avec

$$C = \frac{3X^2}{2c^2\left(\frac{1}{2}+X^2\right)}.$$

L'inégalité

$$\left\| \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \right\|_{0, \omega_0^-} \geq C \|\theta\|_{1, \omega_0^-}$$

obtenue pour tout $\theta \in H_0^1(\omega^-)$ est fautive. On le montre en utilisant le même type de fonctions tests que dans la partie parabolique.

■

Remarque 5.9.1 *Puisque les normes $\|\cdot\|_{\omega}^{EH}$ et $\|\cdot\|_{\omega}^M$ sont équivalentes, les espaces complétés pour l'une ou pour l'autre sont identiques. Par conséquent, $\mathcal{V}^{MEH}(\omega)$ est de la forme $H_0^1(\omega^+)^2 \times \mathcal{V}^M(\omega)$. où $\mathcal{V}^M(\omega)$ est un espace vérifiant les propriétés suivantes :*

Proposition 5.9.4

1. *L'espace $H_0^1(\omega^-)^2 \times L^2(\omega)$ est un sous-espace propre de $\mathcal{V}^M(\omega)$.*
2. *$H_0^1(\omega^-)^2 \times L^2(\omega)$ est dense dans $\mathcal{V}^M(\omega)$.*
3. *L'injection canonique de $H_0^1(\omega^-)^2 \times L^2(\omega)$ dans $\mathcal{V}^M(\omega)$ est continue.*

Démonstration. Déjà vu sous une forme différente à la proposition 3.8.3. ■

Conséquences :

Comme dans le cas parabolique, une forme linéaire continue sur $(\mathcal{V}^{EH}(\omega), \|\cdot\|_{110, \omega})$ ne se prolonge pas toujours par continuité en une forme linéaire continue sur $(\mathcal{V}^{MEH}(\omega), \|\cdot\|_{\omega}^{EH})$. Mais, à la différence du cas parabolique, les forces extérieures sont exclusivement appliquées sur une surface elliptique et par conséquent, la forme linéaire correspondant au second membre de la formulation variationnelle du problème normalisé 3D se prolonge par continuité à $\mathcal{V}^{MEH}(\omega)$. Le concept de "forces admissibles" n'est plus utile puisque le problème est bien posé pour toutes les forces de régularité $L^2(\omega^+)$. Cette restriction des forces correspond à la réalité physique étudiée : les perturbations de l'environnement du dirigeable se produisent à l'extérieur.

5.9.2 Choix des espaces fonctionnels et des normes en 3D

Notations :

$$\begin{aligned} \left(\|\mathbf{v}\|_{\Omega}^{EH} \right)^2 &:= \left\| \frac{\partial v_3}{\partial \xi_3} \right\|_{0,\Omega}^2 + \left(\|\bar{\mathbf{v}}^-\|_{\omega}^{EH} \right)^2, \\ \mathcal{V}^{MEH}(\Omega) &:= \text{complété de } \mathcal{V}(\Omega) \text{ pour la norme } \|\cdot\|_{\Omega}^{EH}, \\ L^{EH}(\varepsilon) &:= \text{la forme linéaire correspondant au problème } \mathcal{P}(\varepsilon, \Omega), \end{aligned}$$

Tout comme dans le cas parabolique, sur $\mathcal{V}(\Omega)$ on définit la norme $\|\cdot\|_{\Omega}^{EH}$ par

$$\left(\|\mathbf{v}\|_{\Omega}^{EH} \right)^2 = \left(\left\| \frac{\partial v_3}{\partial \xi_3} \right\|_{0,\Omega} \right)^2 + \left(\|\bar{\mathbf{v}}^-\|_{\omega}^{EH} \right)^2$$

cette norme n'est pas complète sur $\mathcal{V}(\Omega)$. On note $\mathcal{V}^{MEH}(\Omega)$ le complété.

La forme linéaire $L^{EH}(\varepsilon)$ correspondant au problème $\mathcal{P}(\varepsilon, \Omega)$ est,

$$L^{EH}(\varepsilon) \left| \begin{array}{l} \mathcal{V}(\Omega) \longmapsto \mathbb{R} \\ \mathbf{v} \longrightarrow L^{EH}(\varepsilon)(\mathbf{v}) = \int_{\omega_1} f^{i\pm} v_i |d_{\varepsilon}^{\pm}| d\xi_{\omega} \end{array} \right. .$$

5.9.3 Convergence de la suite des déplacements normalisés $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon}$ quand $f^{i-} = 0$

Notations :

$$\begin{aligned} e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon) &:= e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{u}(\varepsilon)), \\ L_{\omega}^{EH}(\boldsymbol{\eta}) &:= \text{forme linéaire au second membre de l'équation asymptotique,} \\ L_{\omega}^{MEH}(\boldsymbol{\eta}) &:= \text{unique prolongement continu de } L_{\omega}^{EH}(\boldsymbol{\eta}) \text{ à } \mathcal{V}^{MEH}(\omega), \\ C_{\omega}^{EH}(\boldsymbol{\eta}) &:= \text{forme linéaire correspondant au terme de couplage,} \\ C_{\omega}^{MEH}(\boldsymbol{\eta}) &:= \text{unique prolongement continu de } C_{\omega}^{EH}(\boldsymbol{\eta}) \text{ à } \mathcal{V}^{MEH}(\omega), \\ B_{\omega}^{EH}(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}) &:= \text{forme bilinéaire de l'équation asymptotique,} \\ B_{\omega}^{MEH}(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}) &:= \text{unique prolongement bicontinuu de } B_{\omega}^{EH}(\boldsymbol{\eta}) \text{ à } \mathcal{V}^{MEH}(\omega), \\ \mathcal{V}_0^{MEH}(\omega) &:= \{ \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}^{MEH}(\omega), C_{\omega}^{MEH}(\boldsymbol{\eta}) = 0 \}, \end{aligned}$$

avec,

$$\begin{aligned} L_{\omega}^{EH}(\boldsymbol{\eta}) &:= \int_{\omega} (f^{1+}\eta_1^+ + f^{2+}\eta_2^+ + f^{3+}\eta_3^+) |d^+| d\xi_{\omega}, \\ C_{\omega}^{EH}(\boldsymbol{\eta}) &:= \int_{\omega} |d^{\pm}| \eta_3 d\xi_{\omega}, \\ B_{\omega}^{EH}(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}) &:= \int_{\omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(\omega) : [\gamma_{\alpha\beta}^{EH\pm}(\boldsymbol{\zeta})] : [\gamma_{\alpha\beta}^{EH\pm}(\boldsymbol{\eta})] d\xi_{\omega}, \\ \mathcal{P}_{\omega_0}^{MEH} &:= \begin{cases} \boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{V}_0^{MEH}(\omega), \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_0^{MEH}(\omega) \\ B_{\omega}^{MEH}(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}) = L_{\omega}^{MEH}(\boldsymbol{\eta}). \end{cases} \end{aligned}$$

Dans toute cette partie, on suppose que $f^{i-} = 0$, ce qui, rappelons-le, correspond physiquement au cas où les perturbations sont toutes appliquées à l'extérieur.

Proposition 5.9.5 *La forme linéaire L_ω^{EH} est continue sur $\mathcal{V}^{EH}(\omega)$ pour la norme $\| \cdot \|_\omega^{EH}$.*

Démonstration. Soit $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1^\pm, \eta_1^-, \eta_2^\pm, \eta_2^-, \eta_3^\pm) \in \mathcal{V}^{EH}(\omega)$,

$$\begin{aligned} 2 |L_\omega^{EH}(\boldsymbol{\eta})| &= \left| \int_\omega (f^{1+} \eta_1^+ + f^{2+} \eta_2^+ + f^{3+} \eta_3^+) |d^+| d\xi_\omega \right| \\ &\leq \|f^{i+} d^+\|_{0,\omega} \|\eta_i^+\|_{0,\omega^+} \text{ d'après Cauchy-Schwarz} \\ &\leq c \|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega^+}^{EH} \quad \text{par équivalence des normes sur } \omega^+ \\ &\leq c \|\boldsymbol{\eta}\|_\omega^{EH} \end{aligned}$$

d'où la continuité. ■

Corollaire 5.9.1 *La forme linéaire L_ω^{EH} , continue sur $\mathcal{V}^{EH}(\omega)$ pour $\| \cdot \|_\omega^{EH}$ admet une unique extension continue sur $\mathcal{V}^{MEH}(\omega)$. On la note L_ω^{MEH} .*

De même,

Proposition 5.9.6 *La forme bilinéaire continue sur $\mathcal{V}^{EH}(\omega) \times \mathcal{V}^{EH}(\omega)$, pour $\| \cdot \|_\omega^{EH}$*

$$B_\omega^{EH}(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}) := \int_\omega \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(\omega) : [\gamma_{\alpha\beta}^{EH\pm}(\boldsymbol{\zeta})] : [\gamma_{\alpha\beta}^{EH\pm}(\boldsymbol{\eta})] d\xi_\omega$$

admet une unique extension continue à $\mathcal{V}^{MEH}(\omega) \times \mathcal{V}^{MEH}(\omega)$ notée B_ω^{MEH} .

Proposition 5.9.7 *La forme linéaire C_ω^{EH} est continue sur $\mathcal{V}^{EH}(\omega)$ pour la norme $\| \cdot \|_\omega^{EH}$.*

Démonstration. On veut montrer que

$$\forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}^{EH}(\omega), |C_\omega^{EH}(\boldsymbol{\eta})| \leq c \|\boldsymbol{\eta}\|_\omega^{EH}.$$

L'étude sur ω^+ qui est triviale car $\| \cdot \|_{\omega^+}^{EH}$ est équivalente à $\| \cdot \|_{110,\omega^+}$. Il reste donc à majorer en valeur absolue $\int_{\omega^-} |d^-| \eta_3^- d\xi_\omega$. Sur ω^- , d^- est de signe constant négatif, et par conséquent

$$\int_{\omega^-} |d^-| \eta_3^- d\xi_\omega = - \int_{\omega^-} d^- \eta_3^- d\xi_\omega.$$

On remplace d^- par sa valeur puis on cherche à exprimer $\int_{\omega^-} d^- \eta_3^- d\xi_\omega$ comme une combinaison linéaire des $\int_{\omega^-} \gamma_{\alpha\beta}^-(\boldsymbol{\eta}) d\xi_\omega$. Pour y parvenir, on utilise deux types d'artifices, soit on ajoute des termes dont

la moyenne nulle comme $\frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{\eta_2^-}{d^-} \right)$ ou $\frac{\partial \eta_1^-}{\partial \xi_1}$, soit on ajoute et on retranche des termes figurant dans $\gamma_{\alpha\beta}^- (\boldsymbol{\eta})$. On remarque également que

$$\int_{\omega^-} \frac{1}{R_L} \sin \left(\frac{\xi_1 + l}{R_L} \right) \eta_1^- d\xi_\omega = - \int_{\omega^-} \eta_1^- \frac{\partial d^-}{\partial \xi_1} d\xi_\omega = \int_{\omega^-} d^- \frac{\partial \eta_1^-}{\partial \xi_1} d\xi_\omega.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{\omega^-} d^- \eta_3^- d\xi_\omega &= \int_{\omega^-} \left(-1 - \frac{R_l}{R_L} \cos \left(\frac{l}{R_L} \right) \right) \eta_3^- d\xi_\omega + \int_{\omega^-} \frac{R_l}{R_L} \cos \left(\frac{\xi_1 + l}{R_L} \right) \eta_3^- d\xi_\omega \\ &= \left(-1 - \frac{R_l}{R_L} \cos \left(\frac{l}{R_L} \right) \right) R_l \int_{\omega^-} \gamma_{11}^{EH-} (\boldsymbol{\eta}) d\xi_\omega + R_l \int_{\omega^-} \frac{1}{d^-} \gamma_{22}^{EH-} (\boldsymbol{\eta}) d\xi_\omega \\ &\quad + \frac{R_l}{R_L} \int_{\omega^-} \sin \left(\frac{\xi_1 + l}{R_L} \right) \eta_1^- d\xi_\omega \\ &= \left(-1 - \frac{R_l}{R_L} \cos \left(\frac{l}{R_L} \right) \right) R_l \int_{\omega^-} \gamma_{11}^{EH-} (\boldsymbol{\eta}) d\xi_\omega + R_l \int_{\omega^-} \frac{1}{d^-} \gamma_{22}^{EH-} (\boldsymbol{\eta}) d\xi_\omega \\ &\quad + R_l \int_{\omega^-} d^- \frac{\partial \eta_1^-}{\partial \xi_1} d\xi_\omega \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} R_l \int_{\omega^-} d^- \frac{\partial \eta_1^-}{\partial \xi_1} d\xi_\omega &= R_l \int_{\omega^-} d^- \frac{\partial \eta_1^-}{\partial \xi_1} d\xi_\omega + \int_{\omega^-} d^- \eta_3^- d\xi_\omega - \int_{\omega^-} d^- \eta_3^- d\xi_\omega \\ &= R_l \int_{\omega^-} d^- \gamma_{11}^{EH-} (\boldsymbol{\eta}) d\xi_\omega - \int_{\omega^-} d^- \eta_3^- d\xi_\omega. \end{aligned}$$

On en déduit donc

$$\int_{\omega^-} d^- \eta_3^- d\xi_\omega = \frac{R_l}{2} \int_{\omega^-} \left(-1 - \frac{R_l}{R_L} \cos \left(\frac{l}{R_L} \right) + d^- \right) \gamma_{11}^{EH-} (\boldsymbol{\eta}) d\xi_\omega + \frac{R_l}{2} \int_{\omega^-} \frac{1}{d^-} \gamma_{22}^{EH-} (\boldsymbol{\eta}) d\xi_\omega,$$

et, par application des inégalités triangulaires et de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\omega^-} |d^-| \eta_3^- d\xi_\omega \right| = \left| \int_{\omega^-} -d^- \eta_3^- d\xi_\omega \right| \\ &\leq \frac{R_l}{2} \left(\left\| -1 - \frac{R_l}{R_L} \cos \left(\frac{l}{R_L} \right) + d^- \right\|_{0,\omega^-} \|\gamma_{11}^{EH-} (\boldsymbol{\eta})\|_{0,\omega^-} \right. \\ &\quad \left. + \left\| \frac{1}{d^-} \right\|_{0,\omega^-} \|\gamma_{22}^{EH-} (\boldsymbol{\eta})\|_{0,\omega^-} \right) \\ &\leq c \|\boldsymbol{\eta}^-\|_{\omega^-}^{EH} \end{aligned}$$

la continuité de $C_{\omega^-}^{EH}$. ■

Corollaire 5.9.2 La forme linéaire C_ω^{EH} continue sur $\mathcal{V}^{EH}(\omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_\omega^{EH}$ admet une unique extension continue sur $\mathcal{V}^{MEH}(\omega)$. On la note C_ω^{MEH} .

Proposition 5.9.8 $(\mathcal{V}_0^{MEH}(\omega), \|\cdot\|_\omega^{EH})$ est un espace de Hilbert.

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mathcal{V}_0^{MEH}(\omega)$ est fermé dans $\mathcal{V}^{MEH}(\omega)$. Pour le faire, on remarque que $\mathcal{V}_0^{MEH}(\omega) = \text{Ker}C_\omega^{MEH}$ et que C_ω^{MEH} est continue. ■

Théorème 5.9.1 Il existe $\mathbf{u} \in \mathcal{V}^{MEH}(\Omega)$ et il existe $\zeta \in \mathcal{V}_0^{MEH}(\omega)$ tels que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\varepsilon) &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{u} && \text{dans } \mathcal{V}^{MEH}(\Omega) \\ \overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \zeta && \text{dans } \mathcal{V}_0^{MEH}(\omega) \end{aligned}$$

et ζ est l'unique solution du problème bi-dimensionnel

$$\mathcal{P}_{\omega_0}^{MEH} := \begin{cases} \zeta \in \mathcal{V}_0^{MEH}(\omega), \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_0^{MEH}(\omega) \\ B_\omega^{MEH}(\zeta, \boldsymbol{\eta}) = L_\omega^{MEH}(\boldsymbol{\eta}). \end{cases}$$

Démonstration. La preuve se décompose en 16 points successifs :

1. On montre dans ce premier point qu'il existe une constante strictement positive c , telle que

$$\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega) \implies \|\mathbf{v}\|_\Omega^{EH} \leq c \left(\sum_{i,j} \left\| e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}.$$

La démonstration de ce point est très proche de celle de la proposition 3.8.5 et ne pose pas de difficulté supplémentaire.

2. Majorations a priori et extraction de sous suites faiblement convergentes. Dans ce deuxième point, on montre que les normes $\|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_\Omega^{EH}$, et $\left\| e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon) \right\|_{0,\Omega}$ sont bornées. Puis on en déduit l'existence d'une sous-suite extraite de $\mathbf{u}(\varepsilon)$, notée $\mathbf{u}(\varepsilon)$, l'existence de $\mathbf{u} \in \mathcal{V}^{MEH}(\Omega)$, de $e_{i||j}^{EH\pm} \in L^2(\Omega)$ et de $\kappa \in \mathbb{R}$ telles que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\varepsilon) &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{u} && \text{dans } \mathcal{V}^{MEH}(\Omega) \\ e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon) &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} e_{i||j}^{EH\pm} && \text{dans } L^2(\Omega) \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\pi}{V} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R_l}\right)^2 \left(\int_{\omega_{\pm 1}} |d_{-\varepsilon}^\pm| u_3(\varepsilon) d\xi_\omega \right)^2 &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \kappa && \text{dans } \mathbb{R} \end{aligned}$$

D'après le premier point appliqué à $\mathbf{u}(\varepsilon)$,

$$\left(\|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_\Omega^{EH} \right)^2 \leq c \sum_{i,j} \left\| e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon) \right\|_{0,\Omega}^2$$

De plus, puisque le tenseur d'élasticité normalisé, $\underline{\mathbf{A}}(\varepsilon)$, est uniformément défini positif, il existe une constante c telle que

$$\sum_{i,j} \left\| e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon) \right\|_{0,\Omega}^2 \leq c \int_{\Omega} A^{EH\pm}(\varepsilon)^{ijkl} e_{k||l}^{EH\pm}(\varepsilon) e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon) \left(1 + \frac{\varepsilon \xi_3}{R_l}\right) \left| d_{\varepsilon \xi_3}^{\pm} \right| d\xi.$$

donc

$$\begin{aligned} \left(\|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_{\Omega}^{EH} \right)^2 &\leq c \int_{\Omega} A^{EH\pm}(\varepsilon)^{ijkl} e_{k||l}^{EH\pm}(\varepsilon) e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon) \left(1 + \frac{\varepsilon \xi_3}{R_l}\right) \left| d_{\varepsilon \xi_3}^{\pm} \right| d\xi \\ &\leq c \int_{\Omega} A^{EH\pm}(\varepsilon)^{ijkl} e_{k||l}^{EH\pm}(\varepsilon) e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon) \left(1 + \frac{\varepsilon \xi_3}{R_l}\right) \left| d_{\varepsilon \xi_3}^{\pm} \right| d\xi + \\ &\quad c \frac{\pi}{V} \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R_l}\right)^2 \left(\int_{\omega_{\pm 1}^{\pm}} \left| d_{-\varepsilon}^{\pm} \right| u_3(\varepsilon) d\xi_{\omega} \right)^2 \end{aligned}$$

et, puisque $\mathbf{u}(\varepsilon)$ est solution de $\mathcal{P}^{EH}(\varepsilon, \Omega)$, on en déduit

$$\begin{aligned} \left(\|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_{\Omega}^{EH} \right)^2 &\leq c \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l}\right) \int_{\omega_1^+} f^{+i} u_i^+(\varepsilon) \left| d^+(\xi_1, \varepsilon) \right| d\xi_{\omega} \\ &\leq c \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l}\right) \|f^{+i} \left| d^+(\xi_1, \varepsilon) \right|\|_{0,\omega_1^+} \|u_i^+(\varepsilon)\|_{0,\omega_1^+} \\ &\leq c \| \mathbf{u}^+(\varepsilon) \|_{0,\Omega^+} \\ &\leq c \| \mathbf{u}^+(\varepsilon) \|_{\Omega^+}^{EH} \\ &\leq c \| \mathbf{u}(\varepsilon) \|_{\Omega}^{EH} \end{aligned}$$

par conséquent, la suite $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon}$ est bornée dans $\mathcal{V}^{MEH}(\Omega)$. Et par suite, les suites $(e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon))_{\varepsilon}$

et $\left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\pi}{V} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R_l}\right)^2 \left(\int_{\omega_{\pm 1}^{\pm}} \left| d_{-\varepsilon}^{\pm} \right| u_3(\varepsilon) d\xi_{\omega} \right)^2 \right)_{\varepsilon}$ le sont également dans $L^2(\Omega)$ et \mathbb{R} respective-

ment. On en déduit alors, par extractions successives, l'existence d'une sous-suite de $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon}$ que l'on note encore $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon}$ vérifiant les convergences faibles annoncées.

3. On montre maintenant l'existence de $\zeta \in V^{MEH}(\omega)$ et de $\mathbf{u}^{-1} = (u_i^{-1}) \in V(\Omega)$ telles que

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}_{\varepsilon \rightarrow 0} &\rightharpoonup \zeta && \text{dans } \mathcal{V}^{MEH}(\omega) \\ \varepsilon \mathbf{u}(\varepsilon) &\rightharpoonup \mathbf{u}^{-1} && \text{dans } \mathcal{V}(\Omega) \\ \varepsilon \mathbf{u}(\varepsilon) &\longrightarrow \mathbf{u}^{-1} && \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega) \end{aligned}$$

Puisque

$$\left(\|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_{\Omega}^{EH} \right)^2 = \left\| \frac{\partial \mathbf{u}(\varepsilon)}{\partial \xi_3} \right\|_{0,\Omega}^2 + \left(\left\| \overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} \right\|_{\omega}^{EH} \right)^2,$$

on a bien $\left\| \overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} \right\|_{\omega}^{EH}$ bornée donc l'existence d'une sous-suite de $\left(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} \right)_{\varepsilon}$ faiblement convergente. Enfin, l'inégalité "de type Korn" (théorème **10.2.1** annexe III) pour une famille de coques en membrane s'écrivant

$$\varepsilon \|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_{1,\Omega} \leq c \left(\sum_{i,j} \left\| e_{i\|j}^{EH\pm}(\varepsilon) \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}$$

on en déduit que la suite $\left(\|\varepsilon \mathbf{u}(\varepsilon)\|_{1,\Omega} \right)_{\varepsilon}$ est bornée dans $\mathcal{V}(\Omega)$ et en conséquence l'existence de \mathbf{u}^{-1} . Et, pour finir, comme il y a injection compacte de $\mathcal{V}(\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, la convergence forte dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

4. *On montre la convergence forte*

$$\frac{\partial u_3(\varepsilon)}{\partial \xi_3} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega),$$

et les convergences dans \mathbb{R}

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\omega_{-1}^{\pm}} |d_{-\varepsilon}^{\pm}| u_3(\varepsilon) d\xi_{\omega} = 0$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_L C_{\omega}^{EH} \left(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} \right) = \int_{\omega_{-1}^+} \cos\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) u_3^{-1} d\xi_{\omega} - \int_{\omega_{-1}^-} \cos\left(\frac{\xi_1+l}{R_l}\right) u_3^{-1} d\xi_{\omega},$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\omega^{\pm}} |d^{\pm}| \overline{u_3(\varepsilon)} d\xi_{\omega} = \frac{1}{R_L} \int_{\omega_{-1}^+} \cos\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) u_3^{-1}(\varepsilon) d\xi_{\omega} - \frac{1}{R_L} \int_{\omega_{-1}^-} \cos\left(\frac{\xi_1+l}{R_l}\right) u_3^{-1}(\varepsilon) d\xi_{\omega}.$$

On remarque que

$$\frac{\partial u_3(\varepsilon)}{\partial \xi_3} = \varepsilon e_{3\|3}^{\pm}(\varepsilon) \implies \left\| \frac{\partial u_3(\varepsilon)}{\partial \xi_3} \right\|_{0,\Omega}^2 = \varepsilon \left\| e_{3\|3}^{\pm}(\varepsilon) \right\|_{0,\Omega}^2 \leq \varepsilon c$$

ce qui implique la convergence forte de $\frac{\partial u_3(\varepsilon)}{\partial \xi_3}$ vers 0. Ensuite, puisque

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\pi}{V} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R_l}\right)^2 \left(\int_{\omega_{-1}^{\pm}} |d_{-\varepsilon}^{\pm}| u_3(\varepsilon) d\xi_{\omega} \right)^2 \in \mathbb{R},$$

nécessairement,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\omega_{-1}^{\pm}} |d_{-\varepsilon}^{\pm}| u_3(\varepsilon) d\xi_{\omega} = 0.$$

Enfin,

$$\int_{\omega^{\pm}} |d^{\pm}| \overline{u_3(\varepsilon)} d\xi_{\omega} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |d^{\pm}| u_3(\varepsilon) d\xi_{\Omega}$$

on intègre par parties en choisissant $(\xi_3 - 1)$ comme primitive de 1 par rapport à ξ_3 si bien que

$$\int_{\Omega} |d^{\pm}| u_3(\varepsilon) d\xi_{\Omega} = - \int_{\Omega} (\xi_3 - 1) |d^{\pm}| \frac{\partial u_3(\varepsilon)}{\partial \xi_3} d\xi_{\Omega} + 2 \int_{\omega_{-1}} |d^{\pm}| u_3(\varepsilon') d\xi_{\omega}.$$

La première intégrale tend vers 0 car $\partial_3 u_3(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. Quant à la seconde, elle vaut

$$\int_{\omega_{-1}^{\pm}} |d_{-\varepsilon}^{\pm}| u_3(\varepsilon) d\xi_{\omega} - \frac{\varepsilon}{R_L} \int_{\omega_{-1}^{-}} \cos\left(\frac{\xi_1+l}{R_l}\right) u_3^{-}(\varepsilon) d\xi_{\omega} + \frac{\varepsilon}{R_L} \int_{\omega_{-1}^{+}} \cos\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) u_3^{+}(\varepsilon) d\xi_{\omega}$$

ce qui donne en passant à la limite

$$\frac{1}{R_L} \int_{\omega_{-1}^{+}} \cos\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) u_3^{-1} d\xi_{\omega} - \frac{1}{R_L} \int_{\omega_{-1}^{-}} \cos\left(\frac{\xi_1+l}{R_l}\right) u_3^{-1} d\xi_{\omega}.$$

et par conséquent

$$C_{\omega}^{EH}(\overline{\mathbf{u}}(\varepsilon)) = \int_{\omega^{\pm}} |d^{\pm}| \overline{u_3(\varepsilon)} d\xi_{\omega} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{R_L} \int_{\omega_{-1}^{+}} \cos\left(\frac{\xi_1-l}{R_l}\right) u_3^{-1} d\xi_{\omega} - \frac{1}{R_L} \int_{\omega_{-1}^{-}} \cos\left(\frac{\xi_1+l}{R_l}\right) u_3^{-1} d\xi_{\omega}.$$

5. On montre dans ce point que les limites faibles trouvées dans le point 2 vérifient

$$e_{1\|3}^{EH\pm} = 0, \quad e_{2\|3}^{EH\pm} = 0, \quad e_{3\|3}^{EH\pm} = -\frac{\lambda_{13}}{d^{\pm 2} \lambda_{33}} e_{1\|1}^{EH\pm} - \frac{\lambda_{23}}{d^{\pm 2} \lambda_{33}} e_{2\|2}^{EH\pm}.$$

On prend comme fonction test $\mathbf{w} = \varepsilon \mathbf{v}$ dans $\mathcal{P}^{EH}(\varepsilon)$, puis on passe à la limite terme à terme. Ce choix permet de faire tendre le terme de couplage et le second membre vers 0. En effet, pour le terme de couplage, on a

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\omega_{-1}} |d_{-\varepsilon}^{\pm}| v_3 d\xi_{\omega} \int_{\omega_{-1}} |d_{-\varepsilon}^{\pm}| u_3(\varepsilon) d\xi_{\omega} = \int_{\omega_{-1}} |d_{-\varepsilon}^{\pm}| v_3 d\xi_{\omega} \int_{\omega_{-1}} |d_{-\varepsilon}^{\pm}| u_3(\varepsilon) d\xi_{\omega}$$

et comme par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\int_{\omega_{-1}} |d_{-\varepsilon}^{\pm}| v_3 d\xi_{\omega} \leq \sqrt{\int_{\omega_{-1}} |d_{-\varepsilon}^{\pm}|^2 d\xi_{\omega}} \sqrt{\int_{\omega_{-1}} |v_3|^2 d\xi_{\omega}},$$

avec,

$$\int_{\omega_{-1}} |d_{-\varepsilon}^{\pm}|^2 d\xi_{\omega} \leq 2 \left(1 + \frac{R_l}{R_L} \cos\left(\frac{l}{R_l}\right)\right)^2 + 2 \left(\frac{R_l - \varepsilon}{R_L}\right)^2 \text{mes}(\omega) < +\infty \quad \text{et} \quad \int_{\omega_{-1}} |v_3|^2 d\xi_{\omega} < +\infty,$$

et que d'après le point 4 on a

$$\int_{\omega_{-1}} |d_{-\varepsilon}^{\pm}| u_3(\varepsilon) d\xi_{\omega} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

Par multiplication on a bien la convergence vers 0 du terme de couplage. Quant au second membre, il vaut

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l}\right) \int_{\omega_1} f^{\pm i} w_i^{\pm} |d_{\varepsilon}^{\pm}| d\xi_{\omega} = \varepsilon \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l}\right) L^{EH}(\varepsilon)(\mathbf{v}),$$

et puisque le terme $\left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l}\right) L^{EH}(\varepsilon)(\mathbf{v})$ est borné, le second membre tend bien vers 0.

Il ne reste plus qu'à remarquer que

$$e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{w}) = \varepsilon e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{v})$$

et que par conséquent,

$$\left[e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{w}) \right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_1^{\pm}}{\partial \xi_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_2^{\pm}}{\partial \xi_3} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_1^{\pm}}{\partial \xi_3} & \frac{1}{2} \frac{\partial v_2^{\pm}}{\partial \xi_3} & \frac{\partial v_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \text{ dans } [L^2(\Omega)].$$

pour en déduire que

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A^{EH\pm}(\varepsilon)^{ijkl} e_{k||l}^{EH\pm}(\varepsilon) e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{w}) \left(1 + \frac{\varepsilon \xi_3}{R_l}\right) |d_{\varepsilon \xi_3}^{\pm}| d\xi = \\ & \int_{\Omega} \left\{ 2\mu_{13} |d^{\pm}| e_{1||3}^{EH\pm} \frac{\partial^{\pm} v_1}{\partial \xi_3} + 2 \frac{\mu_{23}}{|d^{\pm}|} e_{2||3}^{EH\pm} \frac{\partial^{\pm} v_2}{\partial \xi_3} + \left(\frac{\lambda_{13}}{|d^{\pm}|} e_{1||1}^{EH\pm} + \frac{\lambda_{23}}{|d^{\pm}|} e_{2||2}^{EH\pm} + \lambda_{33} |d^{\pm}| e_{3||3}^{EH\pm} \right) \frac{\partial v_3}{\partial \xi_3} \right\} d\xi \end{aligned}$$

et par conséquent, par unicité de la limite que

$$\int_{\Omega} \left\{ 2\mu_{13} |d^{\pm}| e_{1||3}^{EH\pm} \frac{\partial^{\pm} v_1}{\partial \xi_3} + 2 \frac{\mu_{23}}{|d^{\pm}|} e_{2||3}^{EH\pm} \frac{\partial^{\pm} v_2}{\partial \xi_3} + \left(\frac{\lambda_{13}}{|d^{\pm}|} e_{1||1}^{EH\pm} + \frac{\lambda_{23}}{|d^{\pm}|} e_{2||2}^{EH\pm} + \lambda_{33} |d^{\pm}| e_{3||3}^{EH\pm} \right) \frac{\partial v_3}{\partial \xi_3} \right\} d\xi = 0$$

d'où le résultat en appliquant le théorème **10.1.1** (Annexe III).

6. Dans ce point, on montre que toute la suite $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$ vérifie

$$\left[\overline{e_{\alpha||\beta}^{EH\pm}(\varepsilon)} - \gamma_{\alpha\beta}^{EH\pm}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}) \right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} [0] \text{ dans } [L^2(\omega)]$$

et que par conséquent la sous-suite $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon}$ définie dans le point 2 vérifie

$$\left[\gamma_{\alpha\beta}^{EH\pm}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}) \right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\overline{e_{\alpha||\beta}^{EH\pm}} \right] \text{ dans } [L^2(\omega)].$$

Puisque

$$\left[\overline{e_{\alpha||\beta}^{EH\pm}(\varepsilon)} - \gamma_{\alpha\beta}^{EH\pm}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}) \right] = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon \xi_3 u_3(\varepsilon)}{R_l^2} & \frac{1}{R_l} \sin\left(\frac{\xi_1 \pm l}{R_l}\right) \left(\overline{\frac{1}{d_{\varepsilon \xi_3}^{\pm}} \left(1 + \varepsilon \frac{\xi_3}{R_l}\right) u_2^{\pm}(\varepsilon)} - \frac{1}{d^{\pm}} \overline{u_2^{\pm}(\varepsilon)} \right) \\ sym & \frac{1}{R_l} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\xi_1 \pm l}{R_l}\right) \left(\overline{d_{\varepsilon \xi_3}^{\pm} u_3(\varepsilon)} - d^{\pm} \overline{u_3(\varepsilon)} \right) \\ - \sin\left(\frac{\xi_1 \pm l}{R_l}\right) \left(\overline{\frac{R_l d_{\varepsilon \xi_3}^{\pm}}{R_l + \varepsilon \xi_3} u_1^{\pm}(\varepsilon)} - d^{\pm} \overline{u_1^{\pm}(\varepsilon)} \right) \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

montrons que chaque composante tend vers 0. Pour la première,

$$\begin{aligned}
\overline{\xi_3 u_3(\varepsilon)} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \xi_3 u_3(\varepsilon) d\xi_3 \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (\xi_3^2 - 1) u_3(\varepsilon) \right]_{-1}^1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (\xi_3^2 - 1) \frac{\partial u_3(\varepsilon)}{\partial \xi_3} d\xi_3 \\
&= \frac{1}{2} \overline{(1 - \xi_3^2) \frac{\partial u_3(\varepsilon)}{\partial \xi_3}}
\end{aligned}$$

de cette égalité on déduit la majoration

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{R_l^2} \left\| \overline{\xi_3 u_3(\varepsilon)} \right\|_{0,\omega} &\leq \frac{\varepsilon}{2R_l^2} \left\| \overline{(1 - \xi_3^2) \frac{\partial u_3(\varepsilon)}{\partial \xi_3}} \right\|_{0,\omega} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{R_l^2} \left\| (1 - \xi_3^2) \frac{\partial u_3(\varepsilon)}{\partial \xi_3} \right\|_{0,\Omega} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{R_l^2} \|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_{\Omega}^M \\
&\leq \frac{\varepsilon}{R_l^2} c
\end{aligned}$$

donc,

$$\overline{e_{1\|1}^{EH\pm}(\varepsilon)} - \gamma_{11}^{EH\pm}(\mathbf{u}(\varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Pour la deuxième composante, on remarque que

$$\begin{aligned}
\frac{u_2^{\pm}(\varepsilon)}{d_{\varepsilon\xi_3}^{\pm}} \overline{\left(1 + \varepsilon \frac{\xi_3}{R_l}\right)} - \frac{1}{d^{\pm}} \overline{u_2^{\pm}(\varepsilon)} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{d_{\varepsilon\xi_3}^{\pm}} \left(1 + \varepsilon \frac{\xi_3}{R_l}\right) u_2^{\pm}(\varepsilon) - \frac{1}{d^{\pm}} u_2^{\pm}(\varepsilon) \right) \\
&= \pm \frac{1}{2} \frac{1}{d^{\pm}} \left(1 + \frac{R_l}{R_l} \cos\left(\frac{l}{R_l}\right)\right) \varepsilon \int_{-1}^1 \frac{\xi_3}{d_{\varepsilon\xi_3}^{\pm}} u_2^{\pm}(\varepsilon) d\xi_3 \\
&= c\varepsilon \int_{-1}^1 (\xi_3^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{1}{d_{\varepsilon\xi_3}^{\pm}} u_2^{\pm}(\varepsilon) \right) d\xi_3
\end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{d_{\varepsilon\xi_3}^{\pm}} \overline{\left(1 + \varepsilon \frac{\xi_3}{R_l}\right)} u_2^{\pm}(\varepsilon) - \frac{1}{d^{\pm}} \overline{u_2^{\pm}(\varepsilon)} \right\|_{0,\omega} &\leq c\varepsilon \left\| \overline{(\xi_3^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{1}{d_{\varepsilon\xi_3}^{\pm}} u_2^{\pm}(\varepsilon) \right)} \right\|_{0,\omega} \\
&\leq c\varepsilon \left\| (\xi_3^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{1}{d_{\varepsilon\xi_3}^{\pm}} u_2^{\pm}(\varepsilon) \right) \right\|_{0,\Omega} \\
&\leq c\varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{1}{d_{\varepsilon\xi_3}^{\pm}} u_2^{\pm}(\varepsilon) \right) \right\|_{0,\Omega} \\
&\leq c\varepsilon \left\| \frac{1}{d_{\varepsilon\xi_3}^{\pm}} u_2^{\pm}(\varepsilon) \right\|_{0,\Omega}^{EH} \\
&\leq c\varepsilon \left\| u_2^{\pm}(\varepsilon) \right\|_{0,\Omega}^{EH}
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\overline{e_{1\|2}^{EH\pm}(\varepsilon)} - \gamma_{12}^{EH\pm}(\mathbf{u}(\varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

De même pour la troisième composante,

$$\begin{aligned}
\overline{\frac{R_l d_{\varepsilon \xi_3}^{\pm}}{R_l + \varepsilon \xi_3} u_1^{\pm}(\varepsilon)} - d^{\pm} \overline{u_1^{\pm}(\varepsilon)} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{R_l d_{\varepsilon \xi_3}^{\pm}}{R_l + \varepsilon \xi_3} u_1^{\pm}(\varepsilon) - d^{\pm} u_1^{\pm}(\varepsilon) d\xi_3 \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{R_l}{R_L} \cos\left(\frac{\xi_1 \pm l}{R_l}\right) - d^{\pm} \right) \varepsilon \int_{-1}^1 \xi_3 \frac{1}{R_l + \varepsilon \xi_3} u_1^{\pm}(\varepsilon) d\xi_3 \\
&= \pm \left(1 + \frac{R_l}{R_L} \cos\left(\frac{l}{R_l}\right) \right) \frac{1}{2} \varepsilon \int_{-1}^1 (\xi_3^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{1}{R_l + \varepsilon \xi_3} u_1^{\pm}(\varepsilon) \right) d\xi_3
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\overline{d_{\varepsilon \xi_3}^{\pm} u_3(\varepsilon)} - d^{\pm} \overline{u_3(\varepsilon)} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(d_{\varepsilon \xi_3}^{\pm} u_3(\varepsilon) - d^{\pm} u_3(\varepsilon) \right) d\xi_3 \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{R_L} \cos\left(\frac{\xi_1 \pm l}{R_l}\right) \varepsilon \int_{-1}^1 \xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} (u_3(\varepsilon)) d\xi_3
\end{aligned}$$

et en conséquence on a les majorations en norme suivantes

$$\begin{aligned}
\left\| \overline{\frac{R_l d_{\varepsilon \xi_3}^{\pm}}{R_l + \varepsilon \xi_3} u_1^{\pm}(\varepsilon)} - d^{\pm} \overline{u_1^{\pm}(\varepsilon)} \right\|_{0,\omega} &\leq c\varepsilon \left\| \overline{(\xi_3^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{1}{R_l + \varepsilon \xi_3} u_1^{\pm}(\varepsilon) \right)} \right\|_{0,\omega} \\
&\leq c\varepsilon \left\| (\xi_3^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{1}{R_l + \varepsilon \xi_3} u_1^{\pm}(\varepsilon) \right) \right\|_{0,\Omega} \\
&\leq c\varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{1}{R_l + \varepsilon \xi_3} u_1^{\pm}(\varepsilon) \right) \right\|_{0,\Omega} \\
&\leq c\varepsilon \left\| \frac{1}{R_l + \varepsilon \xi_3} u_1^{\pm}(\varepsilon) \right\|_{0,\Omega}^{EH} \\
&\leq c\varepsilon \left\| u_1^{\pm}(\varepsilon) \right\|_{0,\Omega}^{EH} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left\| \overline{d_{\varepsilon \xi_3}^{\pm} u_3(\varepsilon)} - d^{\pm} \overline{u_3(\varepsilon)} \right\|_{0,\omega} &\leq c\varepsilon \left\| \overline{\xi_3 \frac{\partial u_3(\varepsilon)}{\partial \xi_3}} \right\|_{0,\omega} \\
&\leq c\varepsilon \left\| \xi_3 \frac{\partial u_3(\varepsilon)}{\partial \xi_3} \right\|_{0,\Omega} \\
&\leq c\varepsilon \left\| \frac{\partial u_3(\varepsilon)}{\partial \xi_3} \right\|_{0,\Omega} \\
&\leq c\varepsilon \left\| u_3(\varepsilon) \right\|_{0,\Omega}^{EH} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0
\end{aligned}$$

et à l'aide de l'inégalité triangulaire

$$\overline{e_{2\|2}^{EH\pm}(\varepsilon)} - \gamma_{22}^{EH\pm} \left(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

On a donc bien

$$\left[\overline{e_{\alpha\|\beta}^{EH\pm}(\varepsilon)} - \gamma_{\alpha\beta}^{EH\pm} \left(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} \right) \right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} [0] \quad \text{dans } [L^2(\omega)].$$

Il ne reste donc plus qu'à montrer que

$$\left[\overline{e_{\alpha\|\beta}^{EH\pm}(\varepsilon)} \right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\overline{e_{\alpha\|\beta}^{EH\pm}} \right] \quad \text{dans } [L^2(\omega)]$$

pour obtenir le résultat annoncé. Or, on sait depuis le point **2** que

$$\left[e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon) \right]_{\varepsilon \rightarrow 0} \rightharpoonup \left[e_{i||j}^{EH\pm} \right] \quad \text{dans } [L^2(\Omega)].$$

Par définition de la convergence faible on a donc

$$\forall \varphi \in L^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} e_{\alpha||\beta}^{EH\pm}(\varepsilon) \varphi d\xi \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} e_{\alpha||\beta}^{EH\pm} \varphi d\xi$$

ce qui entraîne,

$$\forall \varphi \in L^2(\omega), \quad \int_{\omega} \left(\int_{-1}^1 e_{\alpha||\beta}^{EH\pm}(\varepsilon) d\xi_3 \right) \varphi d\xi_{\omega} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\omega} \left(\int_{-1}^1 e_{\alpha||\beta}^{EH\pm} d\xi_3 \right) \varphi d\xi_{\omega}$$

c'est à dire

$$\overline{e_{\alpha||\beta}^{EH\pm}(\varepsilon)}_{\varepsilon \rightarrow 0} \rightharpoonup \overline{e_{\alpha||\beta}^{EH\pm}} \quad \text{dans } L^2(\omega).$$

7. Dans ce point, on montre une propriété importante qui permet au final d'éliminer le terme de couplage dans le modèle asymptotique, à savoir, qu'il existe un réel k tel que

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\pi}{V} \int_{\omega_{-1}} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R_l} \right) |d_{-\varepsilon}^{\pm}| u_3(\varepsilon) d\xi_{\omega} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} k.$$

Mais contrairement à ce qui se passe dans le cas parabolique on ne peut pas montrer directement que cette constante est nulle.

Soit $v_3 \in H_0^1(\omega)$. On prend pour fonction test dans $\mathcal{P}^{EH}(\varepsilon)$ la fonction de $\mathcal{V}(\Omega)_3 : \mathbf{v} = (0, 0, 0, 0, v_3)$.

On remarque au préalable que

$$\begin{aligned} & \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(\varepsilon) \left(1 + \frac{\varepsilon \xi_3}{R_l} \right) \left| d_{\varepsilon \xi_3}^{\pm} \right| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(0) \\ & \left[e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon) \right]_{\varepsilon \rightarrow 0} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{bmatrix} e_{1||1}^{EH\pm} & e_{1||2}^{EH\pm} & 0 \\ e_{1||2}^{EH\pm} & e_{2||2}^{EH\pm} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda_{13}}{d^{\pm 2} \lambda_{33}} e_{1||1}^{EH\pm} - \frac{\lambda_{23}}{d^{\pm 2} \lambda_{33}} e_{2||2}^{EH\pm} \end{bmatrix} \\ & \left[e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) \right]_{\varepsilon \rightarrow 0} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{bmatrix} \frac{v_3}{R_l} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_1} \\ 0 & \frac{d^{\pm}}{R_L} \cos\left(\frac{\xi_1 \pm l}{R_L}\right) v_3 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_1} & \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_2} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

le passage à la limite terme à terme donne donc

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(\varepsilon) : \left[e_{k||l}^{EH\pm}(\varepsilon) \right] : \left[e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) \right] \left(1 + \frac{\varepsilon \xi_3}{R_l} \right) \left| d_{\varepsilon \xi_3}^{\pm} \right| d\xi = \\
& \frac{1}{2} \int_{\Omega} v_3 \left(\frac{\lambda_{11}(\omega)}{R_l} e_{1||1}^{EH\pm} + \frac{\lambda_{12}(\omega)}{R_l} e_{2||2}^{EH\pm} + \left(\frac{\lambda_{12}(\omega)}{R_L} e_{1||1}^{EH\pm} + \frac{\lambda_{22}(\omega)}{R_L} e_{2||2}^{EH\pm} \right) d^{\pm} \cos \left(\frac{\xi_1 \pm l}{R_l} \right) \right) d\xi = \\
& \int_{\omega} v_3 \left(\frac{\lambda_{11}(\omega)}{R_l} \overline{e_{1||1}^{EH\pm}} + \frac{\lambda_{12}(\omega)}{R_l} \overline{e_{2||2}^{EH\pm}} + \left(\frac{\lambda_{12}(\omega)}{R_L} \overline{e_{1||1}^{EH\pm}} + \frac{\lambda_{22}(\omega)}{R_L} \overline{e_{2||2}^{EH\pm}} \right) d^{\pm} \cos \left(\frac{\xi_1 \pm l}{R_l} \right) \right) d\xi_{\omega}.
\end{aligned}$$

Pour le second membre, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l} \right) \int_{\omega_1^{\pm}} f^{3+} v_3^+ |d_{\varepsilon}^+| d\xi_{\omega} = \int_{\omega_1^+} f^{3+} v_3^+ |d^+| d\xi_{\omega}.$$

On passe ensuite à la limite dans le terme de couplage

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\pi}{V} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R_l} \right)^2 \int_{\omega_{-1}} |d_{-\varepsilon}^{\pm}| v_3 d\xi_{\omega} \int_{\omega_{-1}} |d_{-\varepsilon}^{\pm}| u_3(\varepsilon) d\xi_{\omega} = \\
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\omega_{-1}} |d_{-\varepsilon}^{\pm}| v_3 \left(1 - \frac{\varepsilon}{R_l} \right)^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\pi}{V} \int_{\omega_{-1}} |d_{-\varepsilon}^{\pm}| u_3(\varepsilon) d\xi_{\omega} \right) d\xi_{\omega} = \\
& \int_{\omega_{-1}} |d^{\pm}| v_3 \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\pi}{V} \int_{\omega_{-1}} |d_{-\varepsilon}^{\pm}| u_3(\varepsilon) d\xi_{\omega} \right) d\xi_{\omega}.
\end{aligned}$$

Enfin, en remplaçant dans l'égalité limite, pour tout $v_3 \in H_0^1(\omega^{\pm})$ on a

$$\begin{aligned}
& \int_{\omega} v_3 |d^{\pm}| \left(\frac{\lambda_{11}(\omega)}{R_l |d^{\pm}|} \overline{e_{1||1}^{EH\pm}} + \frac{\lambda_{12}(\omega)}{R_l} \overline{e_{2||2}^{EH\pm}} + \left(\frac{\lambda_{12}(\omega)}{R_L} \overline{e_{1||1}^{EH\pm}} + \frac{\lambda_{22}(\omega)}{R_L} \overline{e_{2||2}^{EH\pm}} \right) \frac{d^{\pm}}{|d^{\pm}|} \cos \left(\frac{\xi_1 \pm l}{R_l} \right) \right) d\xi_{\omega} + \\
& \int_{\omega_{-1}} |d^{\pm}| v_3 \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\pi}{V} \int_{\omega_{-1}} |d_{-\varepsilon}^{\pm}| u_3(\varepsilon) d\xi_{\omega} \right) d\xi_{\omega} = \int_{\omega_1^+} f^{3+} v_3^+ |d^+| d\xi_{\omega}.
\end{aligned}$$

Soit, par densité de $H_0^1(\omega^{\pm})$ dans $L^2(\omega^{\pm})$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\pi}{V} \int_{\omega_{-1}} |d_{-\varepsilon}^{\pm}| u_3(\varepsilon) d\xi_{\omega} = \\
& f^{3\pm} - \left(\frac{\lambda_{11}(\omega)}{R_l |d^{\pm}|} \overline{e_{1||1}^{EH\pm}} + \frac{\lambda_{12}(\omega)}{R_l} \overline{e_{2||2}^{EH\pm}} + \left(\frac{\lambda_{12}(\omega)}{R_L} \overline{e_{1||1}^{EH\pm}} + \frac{\lambda_{22}(\omega)}{R_L} \overline{e_{2||2}^{EH\pm}} \right) \frac{d^{\pm}}{|d^{\pm}|} \cos \left(\frac{\xi_1 \pm l}{R_l} \right) \right)
\end{aligned}$$

et donc il existe une constante k telle que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\pi}{V} \int_{\omega_{-1}} |d_{-\varepsilon}^{\pm}| u_3(\varepsilon) d\xi_{\omega} = k.$$

8. Dans ce point, on montre que les limites faibles $\overline{e_{\alpha\beta}^{EH\pm}}$ vérifient

$$\int_{\omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(\omega) : \left[\overline{e_{\sigma\|\tau}^{EH\pm}} \right] : [\gamma_{\alpha\beta}^{EH\pm}(\mathbf{v})] d\xi_{\omega} = 2L_{\omega}^{EH}(v) - kC_{\omega}^{EH}(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}^{EH}(\omega)$$

Soit $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)_3$. Passons à la limite terme à terme dans $\mathcal{P}^{EH}(\varepsilon)$. La convergence forte

$$\left[e_{i\|j}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) \right]_{\varepsilon \rightarrow 0} \longrightarrow \begin{bmatrix} \gamma_{11}^{EH\pm}(\mathbf{v}) & \gamma_{12}^{EH\pm}(\mathbf{v}) & \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_1} - \frac{v_1^{\pm}}{R_l} \\ \gamma_{12}^{EH\pm}(\mathbf{v}) & \gamma_{22}^{EH\pm}(\mathbf{v}) & \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_2} - \frac{1}{R_L d^{\pm}} \cos\left(\frac{\xi_1 \pm l}{R_l}\right) v_2^{\pm} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_1} - \frac{v_1^{\pm}}{R_l} & \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_2} - \frac{1}{R_L d^{\pm}} \cos\left(\frac{\xi_1 \pm l}{R_l}\right) v_2^{\pm} & 0 \end{bmatrix}$$

entraîne que

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left[A^{EH\pm}(\varepsilon)^{ijkl} \right] : \left[e_{k\|l}^{EH\pm}(\varepsilon) \right] : \left[e_{i\|j}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{v}) \right] \left(1 + \frac{\varepsilon \xi_3}{R_l} \right) |d_{\varepsilon \xi_3}^{\pm}| d\xi = \\ & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(\omega) : \left[\overline{e_{\alpha\|\beta}^{EH\pm}} \right] : [\gamma_{\alpha\beta}^{EH\pm}(\mathbf{v})] d\xi. \end{aligned}$$

D'après le point 7,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\pi}{V} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R_l} \right)^2 \int_{\omega_{-1}} |d_{-\varepsilon}^{\pm}| v_3 d\xi_{\omega} \int_{\omega_{-1}} |d_{-\varepsilon}^{\pm}| u_3(\varepsilon) d\xi_{\omega} = \int_{\omega} k |d^{\pm}| v_3 d\xi_{\omega} = kC_{\omega}^{EH}(\mathbf{v})$$

Au second membre, le passage à la limite donne

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l} \right) \int_{\omega_1^{\pm}} f^{i+} v_i^+ |d^+(\xi_1, \varepsilon)| d\xi_{\omega} = \int_{\omega_1^+} f^{i+} v_i^+ |d^+| d\xi_{\omega} = 2L_{\omega}^{EH}(\mathbf{v}).$$

L'égalité limite est donc

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(\omega) : \left[\overline{e_{\alpha\|\beta}^{EH\pm}} \right] : [\gamma_{\alpha\beta}^{EH\pm}(\mathbf{v})] d\xi = 2L_{\omega}^{EH}(\mathbf{v}) - kC_{\omega}^{EH}(\mathbf{v})$$

il ne reste plus qu'à passer en valeurs moyennes

$$\int_{\omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(\omega) : \left[\overline{e_{\sigma\|\tau}^{EH\pm}} \right] : [\gamma_{\alpha\beta}^{EH\pm}(\mathbf{v})] d\xi_{\omega} = 2L_{\omega}^{EH}(\mathbf{v}) - kC_{\omega}^{EH}(\mathbf{v}).$$

9. Dans cette partie, on montre que la sous-suite $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon}$ définie dans le point 2 vérifie

$$\begin{aligned} \varepsilon \mathbf{u}(\varepsilon) & \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{0} & \text{dans} & \mathbf{H}^1(\Omega) \\ \varepsilon \mathbf{u}(\varepsilon) & \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{0} & \text{dans} & \mathbf{L}^2(\Omega) \\ \frac{\partial u_1^{\pm}(\varepsilon)}{\partial \xi_3} & \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 & \text{dans} & L^2(\Omega) \\ \frac{\partial u_2^{\pm}(\varepsilon)}{\partial \xi_3} & \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 & \text{dans} & L^2(\Omega) \end{aligned}$$

et que par conséquent $\left[e_{\alpha\|\beta}^{EH\pm} \right]$ est indépendant de la variable transverse ξ_3 i.e

$$\left[\frac{\partial e_{\alpha\|\beta}^{EH\pm}}{\partial \xi_3} \right] = [0]$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C_{\omega}^{EH} \left(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} \right) = 0$$

i.e

$$C_{\omega}^{EH}(\boldsymbol{\varsigma}) = 0.$$

Soit $\mathbf{u}^{-1}(\varepsilon) := \varepsilon \mathbf{u}(\varepsilon)$. Par construction, $(\mathbf{u}^{-1}(\varepsilon))_{\varepsilon}$ définit une suite de $\mathcal{V}(\Omega)$, faiblement convergente dans $\mathcal{V}(\Omega)$ et fortement convergente dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ vers \mathbf{u}^{-1} . Cette suite vérifie de plus

$$\frac{1}{\varepsilon} \left[e_{i\|j}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{u}^{-1}(\varepsilon)) \right] = \left[e_{i\|j}^{EH\pm}(\varepsilon) \right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \left[e_{i\|j}^{EH\pm} \right] \quad \text{dans } [L^2(\Omega)].$$

D'après le théorème **10.1.3** (Annexe III), on a alors

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{-1} & : = (u_i^{-1}) \text{ indépendant de la variable transverse } \xi_3 \\ \overline{\mathbf{u}^{-1+}} & \in H_0^1(\omega^+) \times H_0^1(\omega^+) \times H_0^1(\omega^+) \cap H^2(\omega^+) \\ \overline{\mathbf{u}^{-1-}} & \in H_0^1(\omega^-) \times H_0^1(\omega^-) \times H_0^1(\omega^-) \cap H^2(\omega^-) \\ \partial_{\nu} \overline{u_3^{-1}} & = 0 \\ \gamma_{\alpha\beta}^{EH\pm} \left(\overline{\mathbf{u}^{-1}} \right) & = 0 \end{aligned}$$

on en déduit que $\overline{\mathbf{u}^{-1}}$ appartient au noyau $\ker \underline{\gamma}^{EH\pm}(\omega)$ qui se réduit au singleton $\{\mathbf{0}\}$, donc nécessairement $\overline{\mathbf{u}^{-1}} = \mathbf{0}$. Enfin, puisque \mathbf{u}^{-1} est indépendant de la variable transverse ξ_3 ,

$$\overline{\mathbf{u}^{-1}} = \mathbf{0} \implies \mathbf{u}^{-1} = \mathbf{0}.$$

Par définition de $e_{1\|3}^{\pm}(\varepsilon)$ on a

$$\frac{\partial u_1^{\pm}(\varepsilon)}{\partial \xi_3} = 2\varepsilon e_{1\|3}^{EH\pm}(\varepsilon) + \frac{2\varepsilon}{R_l + \varepsilon \xi_3} u_1^{\pm}(\varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial u_3(\varepsilon)}{\partial \xi_1}$$

or on a montré point **5** que

$$e_{1\|3}^{\pm}(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

on vient de montrer que

$$\varepsilon u_1^{EH\pm}(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u_1^{-1} = 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega),$$

et que

$$\varepsilon \frac{\partial u_3(\varepsilon)}{\partial \xi_1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial u_3^{-1}}{\partial \xi_1} = 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

D'où le résultat. De même, puisque

$$\frac{\partial u_2^\pm(\varepsilon)}{\partial \xi_3} = 2\varepsilon e_{2\|3}^{EH\pm}(\varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial u_3(\varepsilon)}{\partial \xi_2} + 2\varepsilon \frac{1}{R_L d_\varepsilon^\pm \xi_3} \cos\left(\frac{\xi_1 \pm l}{R_l}\right) u_2^\pm(\varepsilon)$$

et que

$$e_{2\|3}^{EH\pm}(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega),$$

$$\varepsilon \frac{\partial u_3(\varepsilon)}{\partial \xi_2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega),$$

$$\frac{2\varepsilon}{R_L d_\varepsilon^\pm \xi_3} \cos\left(\frac{\xi_1 \pm l}{R_l}\right) u_2^\pm(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{R_L d^\pm} \cos\left(\frac{\xi_1 \pm l}{R_l}\right) u_2^{-1} = 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

On applique à nouveau le théorème **10.1.3** (Annexe III) qui donne

$$[\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^{-1})] \in [L^2(\Omega)]$$

$$[\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^{-1})] = \left[-\frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\lim \text{faible} \frac{1}{\varepsilon} e_{i\|j}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{u}^{-1}(\varepsilon)) \right) \right] = \left[-\frac{\partial e_{\alpha\| \beta}^{EH\pm}}{\partial \xi_3} \right].$$

Comme

$$\mathbf{u}^{-1} = \mathbf{0} \implies [\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^{-1})] = [0]$$

on en déduit $\left[e_{\alpha\| \beta}^{EH\pm} \right]$ est indépendant de la variable transverse ξ_3 . Enfin, d'après le point **4**

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_L C_\omega^{EH}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}) = \int_{\omega_{-1}^+} \cos\left(\frac{\xi_1 - l}{R_l}\right) u_3^{-1} d\xi_\omega - \int_{\omega_{-1}^-} \cos\left(\frac{\xi_1 + l}{R_l}\right) u_3^{-1} d\xi_\omega$$

d'où, par prolongement continu, le résultat annoncé.

10. Dans ce point on montre que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i,j} \left\| e_{i\|j}^{EH\pm}(\varepsilon) - e_{i\|j}^{EH\pm} \right\|_{0,\Omega}^2 \leq c \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L_\omega^{EH}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}) - \int_\omega \underline{\mathbf{A}}^{EH\pm}(0) : \left[e_{i\|j}^{EH\pm} \right] : \left[e_{i\|j}^{EH\pm} \right] \right)$$

en vue d'établir ultérieurement la convergence forte dans $[L^2(\Omega)]$ de la sous-suite $\left(\left[e_{i\|j}^{EH\pm}(\varepsilon) \right] \right)_\varepsilon$.

Comme $\underline{\mathbf{A}}^{EH\pm}(\varepsilon)$ est uniformément définie positive, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \left\| e_{i\|j}^{EH\pm}(\varepsilon) - e_{i\|j}^{EH\pm} \right\|_{0,\Omega}^2 &\leq c \int_\Omega \underline{\mathbf{A}}^{EH\pm}(\varepsilon) : \left[e_{i\|j}^{EH\pm}(\varepsilon) - e_{i\|j}^{EH\pm} \right] : \left[e_{i\|j}^{EH\pm}(\varepsilon) - e_{i\|j}^{EH\pm} \right] \sqrt{g^\pm(\varepsilon)} d\xi \\ &\leq c \left(\int_\Omega \underline{\mathbf{A}}^{EH\pm}(\varepsilon) : \left[e_{i\|j}^{EH\pm}(\varepsilon) \right] : \left[e_{i\|j}^{EH\pm}(\varepsilon) \right] \sqrt{g^\pm(\varepsilon)} d\xi \right. \\ &\quad \left. - 2 \int_\Omega \underline{\mathbf{A}}^{EH\pm}(\varepsilon) : \left[e_{i\|j}^{EH\pm}(\varepsilon) \right] : \left[e_{i\|j}^{EH\pm} \right] \sqrt{g^\pm(\varepsilon)} d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_\Omega \underline{\mathbf{A}}^{EH\pm}(\varepsilon) : \left[e_{i\|j}^{EH\pm} \right] : \left[e_{i\|j}^{EH\pm} \right] \sqrt{g^\pm(\varepsilon)} d\xi \right). \end{aligned}$$

Passons à la limite terme à terme,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(\varepsilon) : [e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon)] : [e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon)] \sqrt{g(\varepsilon)} d\xi &= \int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(0) : [e_{i||j}^{EH\pm}] : [e_{i||j}^{EH\pm}] d\xi \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH}(\varepsilon) : [e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon)] : [e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon)] \sqrt{g(\varepsilon)} d\xi &= \int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(0) : [e_{i||j}^{EH\pm}] : [e_{i||j}^{EH\pm}] d\xi \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i,j} \left\| e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon) - e_{i||j}^{EH\pm} \right\|_{0,\Omega}^2 \leq c \left(\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(\varepsilon) : [e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon)] : [e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon)] \sqrt{g^{\pm}(\varepsilon)} d\xi - \\ &- \int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(0) : [e_{i||j}^{EH\pm}] : [e_{i||j}^{EH\pm}] d\xi \end{aligned} \right).$$

Remarquons que $e_{\alpha||\beta}^{EH\pm} = \overline{e_{\alpha||\beta}^{EH\pm}}$ puisque indépendant de ξ_3 et que, par conséquent

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(0) : [e_{i||j}^{EH\pm}] : [e_{i||j}^{EH\pm}] d\xi = 2 \int_{\omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(0) : [\overline{e_{i||j}^{EH\pm}}] : [\overline{e_{i||j}^{EH\pm}}] d\xi_{\omega}.$$

Reste à étudier $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(\varepsilon) : [e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon)] : [e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon)] \sqrt{g^{\pm}(\varepsilon)} d\xi$. On remarque qu'il s'agit du premier terme de la formulation variationnelle du problème $\mathcal{P}^{EH}(\varepsilon)$ appliqué à la fonction test $\mathbf{v} = \mathbf{u}(\varepsilon)$. Aussi, pour calculer cette limite, suffit-il de calculer celle de

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l}\right) \int_{\omega} f^{i\pm} \overline{u_i^{\pm}(\varepsilon)} |d_{\varepsilon}^{\pm}| d\xi_{\omega} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\pi}{V} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R}\right)^2 \left(\int_{\omega} |d_{-\varepsilon}^{\pm}| \overline{u_3(\varepsilon)} d\xi_{\omega} \right)^2.$$

Or, on a montré au point **7** que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\pi}{V} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R}\right)^2 \int_{\omega} |d_{-\varepsilon}^{\pm}| \overline{u_3(\varepsilon)} d\xi_{\omega} = k$$

et au point **3** que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\omega} |d_{-\varepsilon}^{\pm}| \overline{u_3(\varepsilon)} d\xi_{\omega} = 0,$$

ces deux limites sont finies, aussi, par multiplication on obtient,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\pi}{V} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R}\right)^2 \left(\int_{\omega} |d_{-\varepsilon}^{\pm}| \overline{u_3(\varepsilon)} d\xi_{\omega} \right)^2 = 0.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l}\right) \int_{\omega} f^{i\pm} \overline{u_i^{\pm}}(\varepsilon) |d_{\varepsilon}^{\pm}| d\xi_{\omega} &= \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l}\right) \int_{\omega} f^{i+} \overline{u_i^+}(\varepsilon) \left|d^+ + \frac{\varepsilon}{R_L} \cos\left(\frac{\xi_1 - l}{R_l}\right)\right| d\xi_{\omega} \\ &= 2L_{\omega}^{EH}(\mathbf{u}(\varepsilon)) + \varepsilon \int_{\omega} f^{i+} \overline{u_i^+}(\varepsilon) |c(\xi_1)| d\xi_{\omega} \end{aligned}$$

avec $c(\xi_1) \in \mathcal{C}^0(\omega)$ donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\varepsilon}{R_l}\right) \int_{\omega} f^{i\pm} \overline{u_i^{\pm}}(\varepsilon) |d_{\varepsilon}^{\pm}| d\xi_{\omega} = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L_{\omega}^{EH}(\mathbf{u}(\varepsilon)).$$

Il ne reste plus qu'à réunir toutes les limites pour conclure.

11. Dans ce point, on montre que la convergence forte du tenseur

$$\left[e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon)\right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \left[e_{i||j}^{EH\pm}\right] \quad \text{dans } [L^2(\Omega)]$$

et en conséquence celles des tenseurs

$$\left[\overline{e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon)}\right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\overline{e_{i||j}^{EH\pm}}\right] \quad \text{dans } [L^2(\omega)]$$

$$\left[\gamma_{\alpha\beta}^{EH\pm}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)})\right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\overline{e_{\alpha||\beta}^{EH\pm}}\right] \quad \text{dans } [L^2(\omega)].$$

Pour cela, d'après la majoration en norme obtenue au point **10**, il suffit de montrer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L_{\omega}^{EH}(\mathbf{u}(\varepsilon)) - \int_{\omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(0) : \left[\overline{e_{i||j}^{EH\pm}}\right] : \left[\overline{e_{i||j}^{EH\pm}}\right] d\xi_{\omega} = 0.$$

En effet, puisque $\mathbf{u}(\varepsilon) \in \mathcal{V}(\Omega)$, $\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} \in \mathcal{V}^{EH}(\omega)$. En prenant $\mathbf{v} = \overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}$, le point **8** devient

$$\int_{\omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(\omega) : \left[\overline{e_{\sigma||\tau}^{EH\pm}}\right] : \left[\gamma_{\alpha\beta}^{EH\pm}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)})\right] d\xi_{\omega} = 2L_{\omega}^{EH}(\mathbf{u}(\varepsilon)) - kC_{\omega}^{EH}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)})$$

et comme on a montré au point **9** que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C_{\omega}^{EH}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}) = 0$$

et que d'après le point **6** on a

$$\gamma_{\alpha\beta}^{EH\pm}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{e_{\alpha||\beta}^{EH\pm}} \quad \text{dans } L^2(\omega),$$

en passant à la limite dans l'égalité, on obtient

$$\frac{1}{2} \int_{\omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(\omega) : \left[\overline{e_{\alpha||\beta}^{EH\pm}}\right] : \left[\overline{e_{\alpha||\beta}^{EH\pm}}\right] d\xi_{\omega} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L_{\omega}^{EH}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}).$$

Comme par ailleurs

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(0) : \left[\overline{e_{i||j}^{EH\pm}} \right] : \left[\overline{e_{i||j}^{EH\pm}} \right] = \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(\omega) : \left[\overline{e_{\alpha||\beta}^{EH\pm}} \right] : \left[\overline{e_{\alpha||\beta}^{EH\pm}} \right],$$

on a bien

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L_{\omega}^{EH}(\mathbf{u}(\varepsilon)) - \int_{\omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{EH\pm}(0) : \left[\overline{e_{i||j}^{EH\pm}} \right] : \left[\overline{e_{i||j}^{EH\pm}} \right] d\xi_{\omega} = 0,$$

et en conséquence,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i,j} \left\| e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon) - e_{i||j}^{EH\pm} \right\|_{0,\Omega}^2 = 0.$$

On sait également que

$$\forall v \in L^2(\Omega), \|\bar{v}\|_{0,\omega}^2 \leq \|v\|_{0,\Omega}^2,$$

aussi, pour la valeur particulière

$$v = e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon) - e_{i||j}^{EH\pm}$$

on obtient

$$\sum_{i,j} \left\| \overline{e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon)} - \overline{e_{i||j}^{EH\pm}} \right\|_{0,\omega}^2 \leq \sum_{i,j} \left\| e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon) - e_{i||j}^{EH\pm} \right\|_{0,\Omega}^2$$

d'où, en passant à la limite, la convergence forte

$$\left[\overline{e_{i||j}^{EH\pm}(\varepsilon)} \right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\overline{e_{i||j}^{EH\pm}} \right] \quad \text{dans } [L^2(\omega)].$$

Enfin,

$$\left\| \gamma_{\alpha\beta}^{EH\pm}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}) - \overline{e_{\alpha||\beta}^{EH\pm}} \right\|_{0,\omega}^2 \leq 2 \left\| \gamma_{\alpha\beta}^{EH\pm}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}) - \overline{e_{\alpha||\beta}^{EH\pm}(\varepsilon)} \right\|_{0,\omega}^2 + 2 \left\| \overline{e_{\alpha||\beta}^{EH\pm}(\varepsilon)} - \overline{e_{\alpha||\beta}^{EH\pm}} \right\|_{0,\omega}^2$$

donc d'après le point **6** et la convergence forte précédente, on a bien la convergence forte dans $[L^2(\omega)]$ de $\left(\left[\gamma_{\alpha\beta}^{EH\pm}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}) \right] \right)_{\varepsilon}$ vers $\left[\overline{e_{\alpha||\beta}^{EH\pm}} \right]$.

12. Dans ce point, on montre la convergence forte de la sous suite $\left(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} \right)_{\varepsilon}$ dont la convergence faible a été montrée au point **2**.

$$\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \zeta \quad \text{dans } \mathcal{V}^{MEH}(\omega)$$

Soit ε_1 et ε_2 deux réels strictement positifs. Par définition de la norme $\| \cdot \|_{\omega}^{EH}$, on a

$$\left\| \overline{\mathbf{u}(\varepsilon_1)} - \overline{\mathbf{u}(\varepsilon_2)} \right\|_{\omega}^{EH} = \left(\left\| \gamma_{\alpha\beta}^{EH\pm}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon_1)}) - \gamma_{\alpha\beta}^{EH\pm}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon_2)}) \right\|_{0,\omega}^2 \right)^{1/2}$$

ce qui signifie, puisque $\left(\left[\gamma_{\alpha\beta}^{EH\pm}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}) \right] \right)_{\varepsilon}$ est une suite de Cauchy de $(L^2(\omega), \| \cdot \|_{0,\omega})^4$, que $\left(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} \right)_{\varepsilon}$ est également une suite de Cauchy de $(\mathcal{V}^{MEH}(\omega), \| \cdot \|_{\omega}^{MEH})$. Cet espace est complet, donc $\left(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} \right)_{\varepsilon}$ converge fortement.

13. On montre ici que ζ est l'unique solution du problème $\mathcal{P}_{\omega_0}^{MEH}$ et que toute la suite $(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)})_\varepsilon$ converge fortement vers ζ dans $\mathcal{V}^{MEH}(\omega)$.

Pour cela, calculons de deux manières différentes $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_\omega^{EH}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}, \boldsymbol{\eta})$ pour $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}^{EH}(\omega)$. Puisque,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_\omega^{EH}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}, \boldsymbol{\eta}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_\omega \underline{\mathbf{A}}^{EH\pm}(\omega) : \left[\gamma_{\alpha\beta}^{EH\pm}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}) \right] : \left[\gamma_{\alpha\beta}^{EH\pm}(\boldsymbol{\eta}) \right] d\xi_\omega \\ &= \frac{1}{2} \int_\omega \underline{\mathbf{A}}^{EH\pm}(\omega) : \left[e_{\alpha\|\beta}^{EH\pm} \right] : \left[\gamma_{\alpha\beta}^{EH\pm}(\boldsymbol{\eta}) \right] d\xi_\omega \end{aligned}$$

d'après le point 8

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_\omega^{EH}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}, \boldsymbol{\eta}) = L_\omega^{EH}(\boldsymbol{\eta}) - \frac{1}{2} k C_\omega^{EH}(\boldsymbol{\eta})$$

mais aussi, puisque

$$\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \zeta \quad \text{dans } \mathcal{V}^{MEH}(\omega)$$

on a, par définition du prolongement continu,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_\omega^{EH}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}, \boldsymbol{\eta}) = B_\omega^{MEH}(\zeta, \boldsymbol{\eta}).$$

Les deux limites étant identiques on obtient

$$B_\omega^{MEH}(\zeta, \boldsymbol{\eta}) = L_\omega^{EH}(\boldsymbol{\eta}) - \frac{1}{2} k C_\omega^{EH}(\boldsymbol{\eta}), \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}^{EH}(\omega)$$

et, une nouvelle fois, par prolongement continu des opérateurs,

$$B_\omega^{MEH}(\zeta, \boldsymbol{\eta}) + \frac{1}{2} k C_\omega^{EH}(\boldsymbol{\eta}) = L_\omega^{MEH}(\boldsymbol{\eta}), \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}^{MEH}(\omega).$$

Donc ζ existe et est solution du problème

$$\mathcal{P}_\omega^{MEH} : \begin{cases} \zeta \in \mathcal{V}^{MEH}(\omega), & C_\omega^{MEH}(\zeta) = 0 \\ \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}^{MEH}(\omega), \\ B_\omega^{MEH}(\zeta, \boldsymbol{\eta}) + \frac{1}{2} k C_\omega^{MEH}(\boldsymbol{\eta}) = L_\omega^{MEH}(\boldsymbol{\eta}). \end{cases}$$

Ce problème admet au plus une solution car le problème

$$\mathcal{P}^{MEH} : \begin{cases} \zeta \in \mathcal{V}^{MEH}(\omega), & \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}^{MEH}(\omega), \\ B_\omega^{MEH}(\zeta, \boldsymbol{\eta}) = L_\omega^{MEH}(\boldsymbol{\eta}) - \frac{1}{2} k C_\omega^{MEH}(\boldsymbol{\eta}), \end{cases}$$

admet une unique solution. En effet, B_ω^{MEH} est bilinéaire coercive continue, $L_\omega^{MEH} - \frac{1}{2} k C_\omega^{MEH}$ est linéaire continue, l'espace complet $(\mathcal{V}^{MEH}(\omega), \|\cdot\|_\omega^{MEH})$ est un espace de Hilbert. On en déduit que ζ est l'unique solution du problème \mathcal{P}^{MEH} . Comme ζ vérifie de plus $C_\omega^{MEH}(\zeta) = 0$, ζ est aussi l'unique solution du problème

$$\mathcal{P}_{\omega_0}^{MEH} : \begin{cases} \zeta \in \mathcal{V}_0^{MEH}(\omega), & \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_0^{MEH}(\omega), \\ B_\omega^{MEH}(\zeta, \boldsymbol{\eta}) = L_\omega^{MEH}(\boldsymbol{\eta}) \end{cases}$$

On en déduit également que toutes les sous-suites extraites de $\left(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}\right)_\varepsilon$ convergentes, convergent vers ζ est l'unique solution de $\mathcal{P}_{\omega_0}^{MEH}$. L'unicité de la limite de toutes les suites extraites convergentes assure que toute la suite $\left(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}\right)_\varepsilon$ converge fortement vers ζ dans $\mathcal{V}_0^{MEH}(\omega)$.

14. *On montre dans ce point que*

$$\varepsilon \mathbf{u}(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{0} \text{ dans } \mathcal{V}(\Omega).$$

Pour cela, on applique le théorème **10.1.2** (Annexe III) à $\mathbf{v} = \varepsilon \mathbf{u}(\varepsilon)$. Il existe $c > 0$ tel que,

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(e_{\alpha\|\beta}^{EH\pm}(\varepsilon, \varepsilon \mathbf{u}(\varepsilon)) \right) + \rho_{\alpha\beta}(\varepsilon \mathbf{u}(\varepsilon)) \right\|_{-1, \Omega} \\ & \leq c \left(\varepsilon \sum_i \left\| e_{i\|3}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{u}(\varepsilon)) \right\|_{0, \Omega} + \varepsilon \sum_\alpha \left\| \varepsilon u_\alpha^\pm(\varepsilon) \right\|_{0, \Omega} + \varepsilon \left\| \varepsilon u_3(\varepsilon) \right\|_{1, \Omega} \right) \end{aligned}$$

or, d'après le point **2**, la suite $(\varepsilon \mathbf{u}(\varepsilon))$ est bornée pour la norme $\| \cdot \|_{1, \Omega}$, si bien que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \sum_\alpha \left\| \varepsilon u_\alpha^\pm(\varepsilon) \right\|_{0, \Omega} + \varepsilon \left\| \varepsilon u_3(\varepsilon) \right\|_{1, \Omega} = 0$$

et, d'après le point **11**

$$\varepsilon e_{i\|3}^{EH\pm}(\varepsilon, \mathbf{u}(\varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \text{ dans } L^2(\Omega).$$

on déduit donc la convergence forte,

$$\frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(e_{\alpha\|\beta}^{EH\pm}(\varepsilon) \right) + \rho_{\alpha\beta}(\varepsilon \mathbf{u}(\varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega).$$

Comme on a établi au point **11** la convergence forte

$$\left[e_{i\|j}^{EH\pm}(\varepsilon) \right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \left[e_{i\|j}^{EH\pm} \right] \text{ dans } [L^2(\Omega)]$$

on en déduit la convergence forte

$$\frac{\partial e_{\alpha\|\beta}^{EH\pm}(\varepsilon)}{\partial \xi_3} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial e_{\alpha\|\beta}^{EH\pm}}{\partial \xi_3} \text{ dans } H^{-1}(\Omega).$$

Comme on a montré au point **9** que $\left[\frac{\partial e_{\alpha\|\beta}^{EH\pm}}{\partial \xi_3} \right] = [0]$, on a donc

$$\rho_{\alpha\beta}(\varepsilon \mathbf{u}(\varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega),$$

on peut maintenant appliquer le théorème **10.1.3** (Annexe III) avec $\chi_{\alpha\beta} = 0$ et conclure ainsi.

15. *On montre dans ce point les convergences fortes suivantes*

$$\mathbf{u}(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{u} \quad \text{dans } \mathcal{V}^{MEH}(\Omega)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_3} (u_1^\pm(\varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_3} (u_2^\pm(\varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

Puisque

$$\frac{\partial}{\partial \xi_3} (u_1^\pm(\varepsilon)) = 2\varepsilon e_{1\|3}^{EH\pm}(\varepsilon) + \frac{2}{R+\varepsilon\xi_3} \varepsilon u_1^\pm(\varepsilon) - \frac{\partial}{\partial \xi_1} (\varepsilon u_3(\varepsilon))$$

et que chaque terme de cette expression tend fortement vers 0 dans $L^2(\Omega)$, on en déduit

$$\frac{\partial}{\partial \xi_3} (u_1^\pm(\varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

De même, puisque

$$\frac{\partial}{\partial \xi_3} (u_2^\pm(\varepsilon)) = 2\varepsilon e_{2\|3}^{EH\pm}(\varepsilon) - \frac{\partial}{\partial \xi_2} (\varepsilon u_3(\varepsilon))$$

on a également

$$\frac{\partial}{\partial \xi_3} (u_2^\pm(\varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

Enfin, pour montrer la convergence forte de $\mathbf{u}(\varepsilon)$ vers \mathbf{u} dans $\mathcal{V}^{MEH}(\Omega)$, il suffit de montrer que c'est une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_\Omega^{EH}$. Or, par définition de la norme $\|\cdot\|_\Omega^{EH}$,

$$\|\mathbf{u}(\varepsilon_1) - \mathbf{u}(\varepsilon_2)\|_\Omega^{EH} = \left\{ \left\| \frac{\partial}{\partial \xi_3} (\mathbf{u}(\varepsilon_1)) - \frac{\partial}{\partial \xi_3} (\mathbf{u}(\varepsilon_2)) \right\|_{0,\Omega}^2 + \left(\left\| \overline{\mathbf{u}(\varepsilon_1)} - \overline{\mathbf{u}(\varepsilon_2)} \right\|_\omega^{EH} \right)^2 \right\}^{1/2}$$

où $\left(\frac{\partial}{\partial \xi_3} (\mathbf{u}(\varepsilon)) \right)_\varepsilon$ et $\left(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} \right)_\varepsilon$ sont deux suites de Cauchy de $L^2(\Omega)$ et $\mathcal{V}^{MEH}(\omega)$ respectivement puisque fortement convergentes dans ces espaces.

16. Dans ce point, on montre que toute la suite $(\mathbf{u}(\varepsilon))_\varepsilon$ converge fortement vers \mathbf{u} .

On a montré, point **13**, que toute la suite $\left(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} \right)_\varepsilon$ converge fortement vers ζ dans $\mathcal{V}^{MEH}(\omega)$.

On a montré par ailleurs, points **15** et **3**, qu'il y a unicité de la limite des sous-suites convergentes $\left(\frac{\partial \mathbf{u}(\varepsilon)}{\partial \xi_3} \right)_\varepsilon$, puisqu'elles convergent toutes vers $\mathbf{0}$. On a donc la convergence forte

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\varepsilon)}{\partial \xi_3} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{0} \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega)$$

si bien que toute la suite $(\mathbf{u}(\varepsilon))_\varepsilon$ est de Cauchy dans l'espace de Hilbert $(\mathcal{V}^{MEH}(\Omega), \|\cdot\|_\Omega^{EH})$.

■

6 Résultats numériques

Regardons la formulation discrète du problème asymptotique $\mathcal{P}_{\omega_0}^{MEH}$. L'étude préasymptotique et asymptotique justifie de chercher $|d|u_3$ dans $L_0^2(\omega)$. On fait le changement de variable $\tilde{u}_3 = |d|u_3$, on note $\mathbf{u}_h = (u_{1,h}, u_{2,h}, \tilde{u}_{3,h})$ et

$\mathcal{W}_{0,h}^{\mathcal{P}} = \{\mathbf{u}_h \in H_0^1(\omega^\pm) \times H_0^1(\omega^\pm) \times L_0^2(\omega), \mathbf{u}_h|_T \in P_1(T) \times P_1(T) \times P_0(T)\}$. On obtient le problème :

$$\mathcal{P}_{\omega_0,h}^{MEH} := \begin{cases} \mathbf{u}_h \in \mathcal{W}_{0,h}^{\mathcal{P}}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{0,h}^{\mathcal{P}}, \\ \int_{\omega} \underline{\mathbf{A}}^{EH\pm}(\omega) : \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{EH\pm}(\mathbf{u}_h) : \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{EH\pm}(\mathbf{v}_h) d\xi_{\omega} = \int_{\omega} (f^{1\pm} v_{1,h}^{\pm} |d| + f^{2\pm} v_{2,h}^{\pm} |d| + f^{3\pm} v_{3,h}^{\pm}) d\xi_{\omega} \end{cases}$$

En procédant comme dans le cas parabolique, on peut établir l'estimation d'erreur

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\omega}^{EH} = \mathcal{O}(h).$$

Mais contrairement au cas parabolique, ce problème elliptico-hyperbolique ne peut pas être découplé. On peut limiter ce couplage à une équation en utilisant la même base de $L_0^2(\omega)$ que dans le cas parabolique. On obtient alors un système linéaire de la forme $A^{EH}U = F$ avec

$$A^{EH} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{EH+} & A_{12}^{EH+} \\ A_{21}^{EH+} & A_{22}^{EH+} \\ A_{31}^{EH+} & A_{32}^{EH+} \\ A_{41}^{EH+} & A_{42}^{EH+} \end{bmatrix} & A_{13}^{EH+} & A_{14}^{EH+} & 0 & 0 & 0 \\ A_{23}^{EH+} & A_{24}^{EH+} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{33}^{EH+} & A_{34}^{EH+} & 0 & 0 & A_{44}^{EH-} & A_{43}^{EH-} & A_{41}^{EH-} & A_{42}^{EH-} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{34}^{EH-} & A_{33}^{EH-} & A_{31}^{EH-} & A_{32}^{EH-} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{13}^{EH-} & A_{14}^{EH-} & \begin{bmatrix} A_{11}^{EH-} & A_{12}^{EH-} \\ A_{21}^{EH-} & A_{22}^{EH-} \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} U_{1,h}^+ \\ U_{2,h}^+ \\ U_{3,h}^+ \\ \overline{U}_{3,h}^+ \\ \overline{U}_{3,h}^- \\ U_{3,h}^- \\ U_{1,h}^- \\ U_{2,h}^- \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} F_{1,h}^+ \\ F_{2,h}^+ \\ F_{3,h}^+ \\ \overline{F}_{3,h}^+ - \overline{F}_{3,h}^- \\ F_{3,h}^- \\ F_{1,h}^- \\ F_{2,h}^- \end{pmatrix}$$

Où, pour préserver la symétrie, on dédouble la composante de φ_{N_t} de la base B_{u_3} et on la note $\overline{U}_{3,h}^+$

et $\overline{U}_{3,h}^-$. Pour résoudre le système on peut utiliser l'algorithme de Cholesky par blocs suivant

$$\begin{array}{l}
 U_{3,h}^{+,0}, \overline{U}_{3,h}^{+,0}, U_{1,h}^{-,0}, U_{2,h}^{-,0} \text{ donnés} \\
 \left(\begin{array}{cc} A_{11}^{EH+} & A_{12}^{EH+} \\ A_{21}^{EH+} & A_{22}^{EH+} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} U_{1,h}^{+,n+1} \\ U_{2,h}^{+,n+1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} F_{1,h}^+ \\ F_{2,h}^+ \end{array} \right) - \left(\begin{array}{cc} A_{13}^{EH+} & A_{14}^{EH+} \\ A_{23}^{EH+} & A_{24}^{EH+} \end{array} \right) \begin{array}{c} U_{3,h}^{+,n} \\ \overline{U}_{3,h}^{+,n} \end{array} \\
 \left(\begin{array}{cc} A_{33}^{EH+} & A_{34}^{EH+} \\ A_{43}^{EH+} & A_{43}^{EH+} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} U_{3,h}^{+,n+1} \\ \overline{U}_{3,h}^{+,n+1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} F_{3,h}^+ \\ \overline{F}_{3,h}^+ - \overline{F}_{3,h}^- \end{array} \right) - \left(\begin{array}{cc} A_{31}^{EH+} & A_{32}^{EH+} \\ A_{41}^{EH+} & A_{42}^{EH+} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} U_{1,h}^{+,n+1} \\ U_{2,h}^{+,n+1} \end{array} \right) \\
 \quad - \left(\begin{array}{cccc} & 0 & 0 & 0 \\ A_{41}^{EH-} & A_{42}^{EH-} & A_{43}^{EH-} & A_{43}^{EH-} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} U_{1,h}^{-,n} \\ U_{2,h}^{-,n} \\ U_{3,h}^{-,n} \\ \overline{U}_{3,h}^{-,n} \end{array} \right) \\
 \left(\begin{array}{cc} A_{44}^{EH-} & A_{43}^{EH-} \\ A_{34}^{EH-} & A_{33}^{EH-} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \overline{U}_{3,h}^{-,n+1} \\ U_{3,h}^{-,n+1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} F_{3,h}^- \\ \overline{F}_{3,h}^+ - \overline{F}_{3,h}^- \end{array} \right) - \left(\begin{array}{cc} A_{41}^{EH-} & A_{42}^{EH-} \\ A_{31}^{EH-} & A_{32}^{EH-} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} U_{1,h}^{-,n} \\ U_{2,h}^{-,n} \end{array} \right) \\
 - \left(\begin{array}{cccc} A_{41}^{EH+} & A_{42}^{EH+} & A_{43}^{EH+} & A_{44}^{EH+} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} U_{1,h}^{+,n+1} \\ U_{2,h}^{+,n+1} \\ U_{3,h}^{+,n+1} \\ \overline{U}_{3,h}^{+,n+1} \end{array} \right) \\
 \left(\begin{array}{cc} A_{11}^{EH-} & A_{12}^{EH-} \\ A_{21}^{EH-} & A_{22}^{EH-} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} U_{1,h}^{-,n+1} \\ U_{2,h}^{-,n+1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} F_{1,h}^- \\ F_{2,h}^- \end{array} \right) - \left(\begin{array}{cc} A_{13}^{EH-} & A_{14}^{EH-} \\ A_{23}^{EH-} & A_{24}^{EH-} \end{array} \right) \begin{array}{c} U_{3,h}^{-,n+1} \\ \overline{U}_{3,h}^{-,n+1} \end{array}
 \end{array}$$

Comme la formulation variationnelle ne peut pas être interprétée en terme d'équations aux dérivées partielles, on ne peut pas comparer les solutions discrètes avec une solution exacte. Par contre on peut comparer (pour des R_L assez grand) les solutions à celles obtenues avec le modèle parabolique.

Les figures 22 et 23 représentent les résultats obtenus correspondant à l'exemple des figures 10, 11, 12 et 13 pour le modèle parabolique.

Les figures suivantes 24 et 25 représentent les résultats obtenus correspondant à l'exemple des figures 14 et 15 pour le modèle parabolique. D'une manière générale, lorsque R_L est "petit", les solutions en déplacement dépendent peu du maillage, mais le problème posé sur ω^- est plus difficile à résoudre (le nombre d'itérations pour converger augmente). Lorsque R_L devient très grand, on retrouve les mêmes problèmes que dans le cas parabolique.

Les figures 26, 27, 28 et 29 représentent les solutions sur ω^+ et ω^- pour des forces extérieures $f_1^+ = f_2^+ = f_3^+ = 1$ et $f_1^- = f_2^- = f_3^- = 0$.

Comme on pouvait l'espérer, on remarque que les solutions obtenues avec le modèle ellipto-hyperbolique sont plus stables que celles du modèle parabolique. Même les solutions sur la partie ω^- qui sont théoriquement dans un espace complété, semblent stables par rapport aux différents maillages.

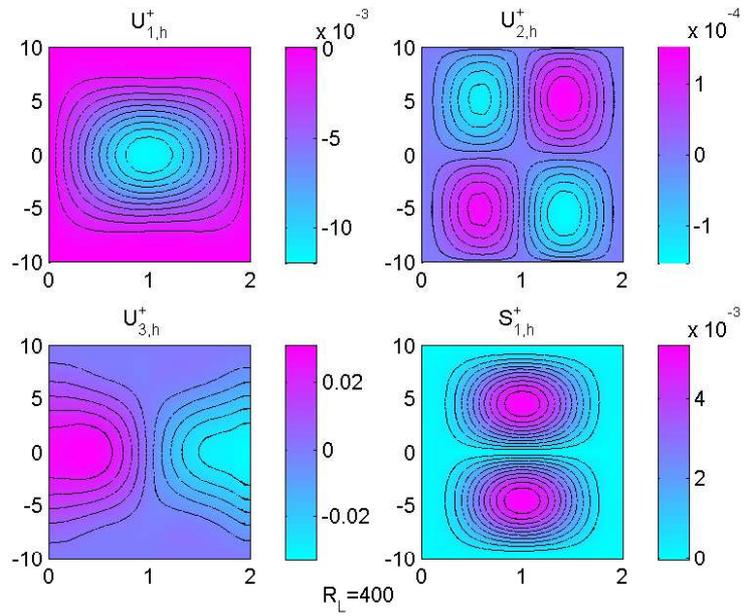


Figure 22: Solution avec un maillage structuré $R_L = 400$

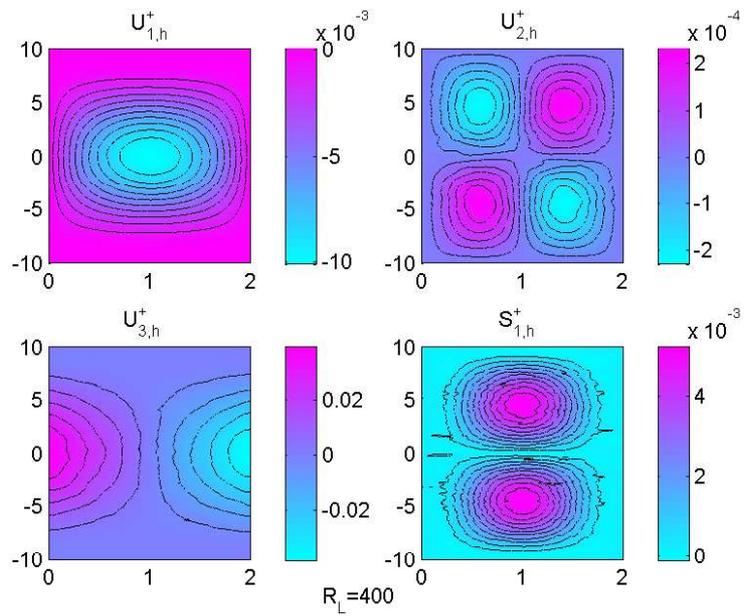


Figure 23: Solution avec un maillage destrué $R_L = 400$

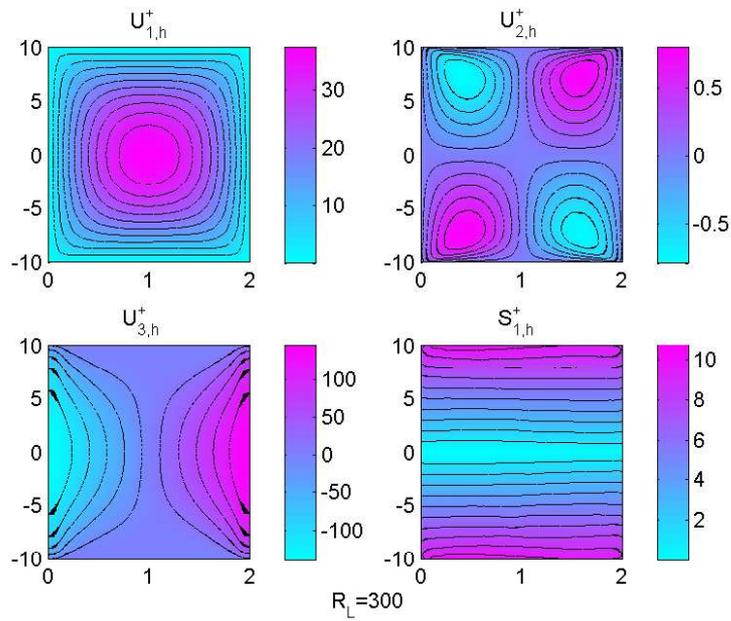


Figure 24: Solution pour maillage structuré $R_L = 300$

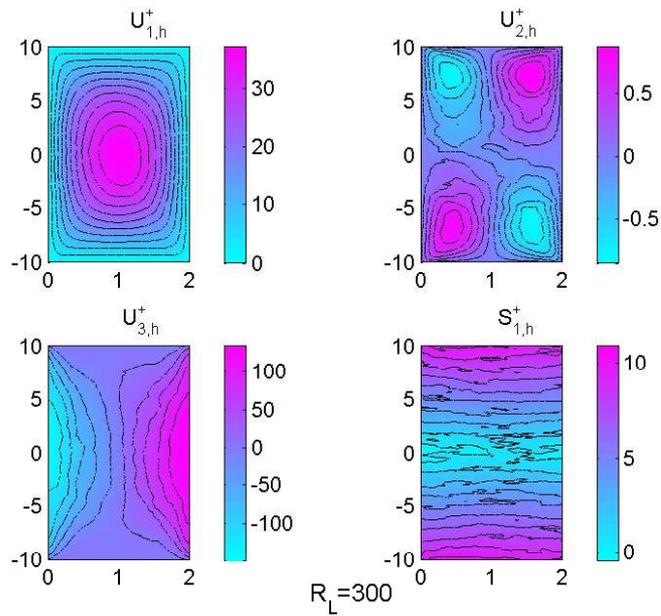


Figure 25: Solution pour un maillage destructuré $R_L = 300$

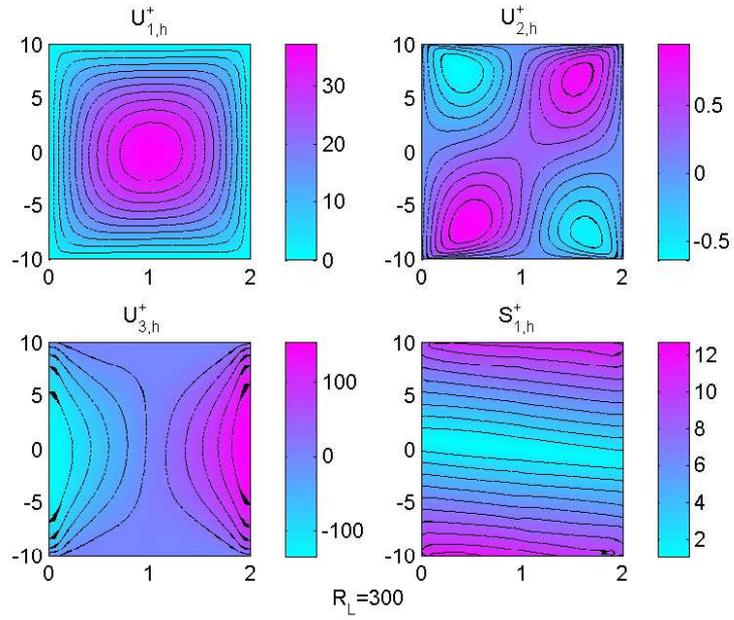


Figure 26: Solution sur ω^+ pour un maillage structuré

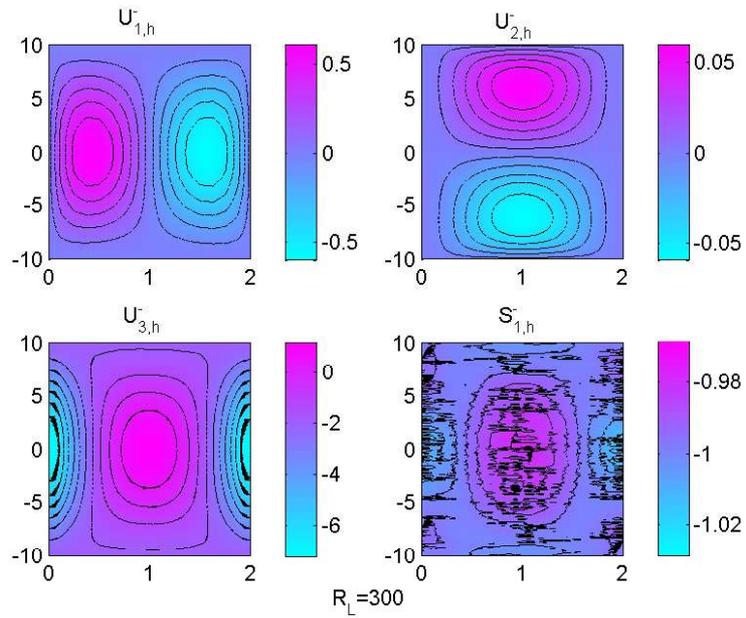


Figure 27: Solution sur ω^- pour un maillage structuré

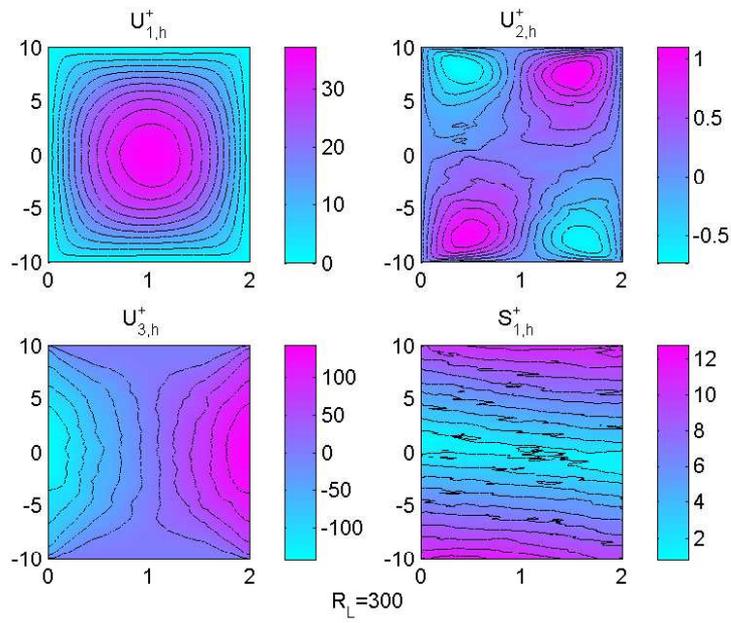


Figure 28: Solution sur ω^+ pour un maillage destructuré

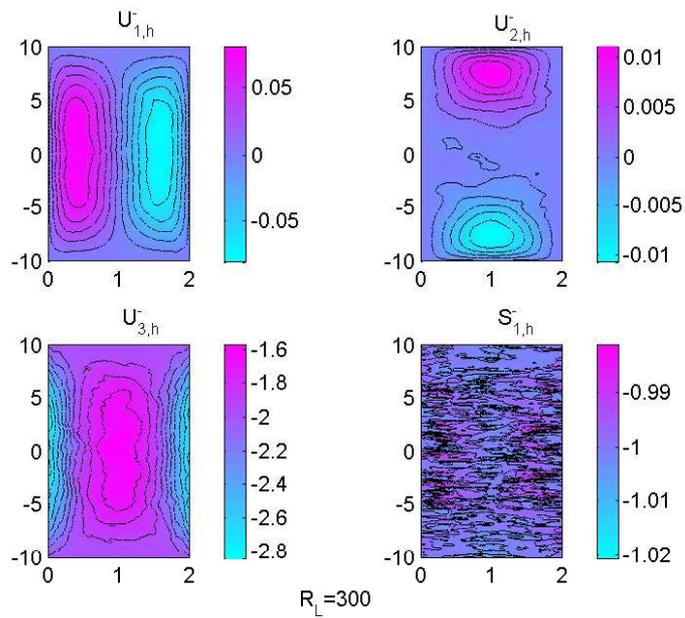


Figure 29: Solution sur ω^- pour un maillage destructuré

7 Conclusions et perspectives

7.1 Conclusions

Dans cette thèse, nous avons rigoureusement élaboré deux modèles asymptotiques pour un problème de couplage-fluide structure dans le cas où la structure est une coque en membrane orthotrope et précontrainte et où le fluide stationnaire est un gaz parfait. Chaque modèle correspond à une famille de surfaces et se traduit par une loi de comportement et un problème variationnel.

Pour chaque modèle, nous avons obtenu des résultats de convergence forte de la valeur moyenne dans l'épaisseur du déplacement vers la solution d'un problème variationnel bi-dimensionnel bien posé dans des espaces obtenus par complétion.

En supposant davantage de régularité au déplacement, nous avons proposé un modèle discret que nous avons mis en oeuvre numériquement. L'étude mathématique a permis de simplifier le couplage entre la partie supérieure et la partie supérieure du lobe. Les résultats numériques obtenus en déplacement ne sont pas très satisfaisants, car dépendants du maillage.

En revanche, les contraintes sont bonnes. Or, ce sont elles qui sont à prendre en compte dans le cadre d'une application industrielle. Pour les améliorer, on pourrait envisager une formulation mixte du problème qui privilégierait les contraintes par rapport aux déplacements.

7.2 perspectives

La démonstration des convergences fortes, qui est très technique, n'a pas pu être généralisée à n'importe quel type de surface. Le point d'achoppement étant de prouver la continuité du terme de couplage. Pour contourner cette difficulté, on pourrait envisager de prendre en compte ce terme dans la norme de l'énergie utilisée pour établir les résultats de convergence forte.

D'un point de vue théorique, ce serait certainement plus satisfaisant. Toutefois, d'un point de vue applicatif, il est à craindre que la difficulté ne se reporte dans l'identification des forces admissibles. En effet dans le cadre de cette étude nous avons mis en évidence des conditions suffisantes d'admissibilité des forces simples et aisément manipulables. Ces conditions ont été obtenues à partir de la norme de l'énergie. Donc en modifiant cette norme on risque de ne plus trouver de conditions suffisantes d'admissibilité.

Du fait de la précontrainte, et de son rôle attendu, nous avons supposé que la déformation se fait à volume constant. Il serait également intéressant d'étudier le modèle obtenu en supprimant la précontrainte.

8 Annexe I : Etude de l'état quasi-naturel

On cherche à déterminer la forme que prend un objet constitué de deux pans de tissus fixés sur leurs longueurs à deux axes rigides quand on gonfle l'espace délimité par les deux couches et avant que l'élasticité du tissu n'entre en jeu.

Hypothèses Dans le cas d'un lobe, la longueur du tissu étant très grande par rapport aux autres dimensions, on suppose qu'elle est infinie.

Le fluide intérieur étant un gaz parfait, il occupe le volume maximal. Par conséquent, on considère que le tissu adopte systématiquement la position qui maximise le volume intérieur.

Formulation Compte tenu de la symétrie du lobe il s'agit donc de résoudre le problème d'optimisation sous contrainte consistant à trouver une fonction f continuellement dérivable telle que

$$\begin{cases} \forall g \in \mathcal{C}^1([-d, +d]), \quad \int_{-d}^{+d} g(x_1) dx_1 \leq \int_{-d}^{+d} f(x_1) dx_1 = A(f) \\ L(f) = \int_{-d}^{+d} \sqrt{1 + (f'(x_1))^2} dx_1 = 2l \end{cases}$$

Méthode de résolution On définit l'opérateur

$$\begin{array}{ccc} B_\lambda & : & \mathcal{C}^1([-d, +d]) \longmapsto \mathbb{R} \\ & & f \longmapsto B_\lambda(f) = A(f) - \lambda L(f) \end{array}$$

et sa dérivée en f quand elle existe par

$$\begin{array}{ccc} B'_\lambda(f) & : & \mathcal{C}^1([-d, +d]) \longmapsto \mathbb{R} \\ & & g \longmapsto \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (B_\lambda(f + tg) - B_\lambda(f)) \end{array}$$

le problème précédant revient donc à trouver f et λ tels que pour tout g on ait

$$B'_\lambda(f)(g) = 0.$$

Solutions Ce problème admet deux solutions (f^+, λ) et (f^-, λ) dont les courbes représentatrices sont symétriques par rapport à l'axe (O, \mathbf{e}_1) et définissent deux arcs de cercle de rayon λ solution de

$$l = \lambda \text{Arc sin}\left(\frac{d}{\lambda}\right)$$

et d'équations

$$\begin{cases} y^- = \sqrt{\lambda^2 - d^2} - \sqrt{\lambda^2 - x^2} \\ y^+ = \sqrt{\lambda^2 - x^2} - \sqrt{\lambda^2 - d^2} \end{cases}$$

Description géométrique de l'état quasi-naturel On déduit de cette étude qu'à l'état quasi-naturel, chaque lobe est un cylindre dont la surface génératrice se trouve dans le plan $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ et se compose de deux arcs de cercles de rayon R symétriques par rapport à l'axe (O, \mathbf{e}_1) . Par conséquent, pour avoir un système de coordonnées locales, on utilisera dans un premier temps des coordonnées cylindriques. Il s'avère que les vecteurs de base $(\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_r)$ correspondent également aux vecteurs d'orthotropie.

9 Annexe II : Etude du lobe lors de la mise sous pression

L'étude de l'état perturbé suppose que l'état pré-contraint est parfaitement connu. C'est pourquoi, sous quelques hypothèses simplificatrices, on recherche explicitement le déplacement qui s'est produit entre l'état quasi-naturel et l'état précontraint. Une fois ce déplacement connu, on en déduit la géométrie de l'état précontraint (choisi comme état de référence pour l'étude des perturbations) et la précontrainte.

9.1 Hypothèses

Pour déterminer explicitement l'état précontraint, on suppose que le tenseur des contraintes de l'état quasi-naturel est négligeable devant celui des précontraintes, c'est à dire que

$$\underline{\Sigma}^q \ll \underline{\Sigma}^p,$$

on suppose également que la précontrainte est uniforme suivant θ et z , c'est à dire que

$$\underline{\Sigma}^p(r, \theta, z) = \underline{\Sigma}^p(r),$$

et on suppose enfin que le déplacement ne dépend pas de z . On rappelle que le rayon de courbure de l'état quasi-naturel (choisi comme état de référence) est constant et vaut R .

9.2 Mécanique du continu

Dans une base orthonormale d'orthotropie du matériau, le tenseur d'élasticité linéaire $\underline{\underline{A}}$ a pour composantes $[A_{ijkl}] = [\lambda_{il}\delta_j^i\delta_l^k + \mu_{kl}(\delta_k^i\delta_l^j + \delta_l^i\delta_k^j)]$ avec $\mu_{kl} = \mu_{lk}$ et $\mu_{kk} = 0$, ainsi que $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ c'est à dire sous une forme plus visuelle

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 & | & 0 & \mu_{12} & 0 & | & 0 & 0 & \mu_{13} \\ 0 & \lambda_{12} & 0 & | & \mu_{12} & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{13} & | & 0 & 0 & 0 & | & \mu_{13} & 0 & 0 \\ - & - & - & + & - & - & - & + & - & - & - \\ 0 & \mu_{12} & 0 & | & \lambda_{12} & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{12} & 0 & 0 & | & 0 & \lambda_{22} & 0 & | & 0 & 0 & \mu_{23} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \lambda_{23} & | & 0 & \mu_{23} & 0 \\ - & - & - & + & - & - & - & + & - & - & - \\ 0 & 0 & \mu_{13} & | & 0 & 0 & 0 & | & \lambda_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \mu_{23} & | & 0 & \lambda_{23} & 0 \\ \mu_{13} & 0 & 0 & | & 0 & \mu_{23} & 0 & | & 0 & 0 & \lambda_{33} \end{bmatrix}.$$

Une condition nécessaire de stabilité isotherme d'un matériau élastique [Salençon, 1995] est que la forme quadratique définie sur l'espace des tenseurs du second ordre symétriques $[e_{ij}] \mapsto \underline{\underline{A}} : [e_{ij}] : [e_{ij}]$ soit définie positive. C'est à dire, que la forme

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{12} & e_{22} & e_{23} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{bmatrix} \mapsto \sum_{1 \leq i \leq 3} \left(\lambda_{ii} e_{ii}^2 + \sum_{1 \leq j \leq 3, i \neq j} (\lambda_{ij} e_{ii} e_{jj} + 2\mu_{ij} e_{ij}^2) \right)$$

soit définie positive. Pour qu'elle le soit, il faut que

$$\begin{aligned}
& \forall [e_{ij}] \text{ symétrique,} \\
& \left\{ 0 = \lambda_{11} \left(e_{11} + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} e_{22} + \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{11}} e_{33} \right)^2 + \frac{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2}{\lambda_{11}} \left(e_{22} + \frac{\lambda_{23}\lambda_{11} - \lambda_{12}\lambda_{13}}{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2} e_{33} \right)^2 \right. \\
& + \frac{\lambda_{11}\lambda_{22}\lambda_{33} + 2\lambda_{12}\lambda_{13}\lambda_{23} - \lambda_{12}^2\lambda_{33} - \lambda_{13}^2\lambda_{22} - \lambda_{23}^2\lambda_{11}}{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2} e_{33}^2 + 4\mu_{12}e_{12}^2 \\
& \left. + 4\mu_{13}e_{13}^2 + 4\mu_{23}e_{23}^2 \right\} \\
\Rightarrow & \{ [e_{ij}] = [0] \}
\end{aligned}$$

Par conséquent, il faut que

$$\begin{aligned}
\forall i, j & \quad \lambda_{ij} > 0, \\
& \quad \mu_{ij} > 0 \\
\forall i \neq j & \quad \lambda_{ii}\lambda_{jj} - \lambda_{ij}^2 > 0 \\
& \quad \lambda_{11}\lambda_{22}\lambda_{33} + 2\lambda_{12}\lambda_{13}\lambda_{23} - \lambda_{12}^2\lambda_{33} - \lambda_{13}^2\lambda_{22} - \lambda_{23}^2\lambda_{11} > 0
\end{aligned}$$

Remarque 9.2.1 Dans ces conditions, il existe une constante c_e telle que

$$\forall [e_{ij}] \text{ symétrique, } \sum_{i,j} |e_{ij}|^2 \leq c_e A_{ijkl} e_{kl} e_{ij}.$$

9.3 Equations aux dérivées partielles en contrainte

Par soustraction des équations d'équilibre

$$\begin{cases} -\mathbf{div}(\underline{\Sigma}^q) = \rho \mathbf{g} & \text{dans } \Omega^{\varepsilon q} \\ \underline{\Sigma}^q \mathbf{n} = -P \mathbf{n} & \text{sur } S_{\varepsilon}^{\varepsilon \pm q} \\ \underline{\Sigma}^q \mathbf{n} = -\pi^q \mathbf{n} & \text{sur } S_{-\varepsilon}^{\varepsilon \pm q} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\mathbf{div}(\underline{\Sigma}^p) = \rho \mathbf{g} & \text{dans } \Omega^{\varepsilon p} \text{ (ou } \Omega^{\varepsilon q}) \\ \underline{\Sigma}^p \mathbf{n} = -P \mathbf{n} & \text{sur } S_{\varepsilon}^{\varepsilon \pm p} \text{ (ou } S_{\varepsilon}^{\varepsilon \pm q}) \\ \underline{\Sigma}^p \mathbf{n} = -\pi^p \mathbf{n} & \text{sur } S_{-\varepsilon}^{\varepsilon \pm p} \text{ (ou } S_{-\varepsilon}^{\varepsilon \pm q}) \end{cases}$$

écrites dans l'état de référence quasi-naturel et compte tenu de l'hypothèse

$$\underline{\Sigma}^q \ll \underline{\Sigma}^p,$$

on obtient le système

$$\begin{cases} \mathbf{div}(\underline{\Sigma}^p) = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega^{\varepsilon q} \\ \underline{\Sigma}^p \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma^{\varepsilon q} \text{ (} r = R + \varepsilon \text{)} \\ \underline{\Sigma}^p \mathbf{n} = (\pi^q - \pi^p) \mathbf{n} & \text{sur } \gamma^{\varepsilon q} \text{ (} r = R - \varepsilon \text{)} \end{cases} .$$

En coordonnées cylindriques, la divergence d'un tenseur $\underline{\Sigma}^p$ est le vecteur

$$\mathbf{div}(\underline{\Sigma}^p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r}(\Sigma_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\Sigma_{r\theta}) + \frac{\partial}{\partial z}(\Sigma_{rz}) + \frac{1}{r}(\Sigma_{rr} - \Sigma_{\theta\theta}) \\ \frac{\partial}{\partial r}(\Sigma_{\theta r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\Sigma_{\theta\theta}) + \frac{\partial}{\partial z}(\Sigma_{\theta z}) + \frac{1}{r}(\Sigma_{r\theta} + \Sigma_{\theta r}) \\ \frac{\partial}{\partial r}(\Sigma_{zr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\Sigma_{z\theta}) + \frac{\partial}{\partial z}(\Sigma_{zz}) + \frac{1}{r}\Sigma_{zr} \end{pmatrix}$$

dans la base $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$. Dans cette expression, on annule les dérivées partielles en θ et en z (puisque l'on a supposé $\underline{\Sigma}^p(r, \theta, z) = \underline{\Sigma}^p(r)$), et, puisque le tenseur des contraintes est symétrique, on déduit de

$$\mathbf{div}(\underline{\Sigma}^p) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega^{\varepsilon q}$$

les trois équations aux dérivées partielles suivantes

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}(\Sigma_{rr}) + \frac{1}{r}(\Sigma_{rr} - \Sigma_{\theta\theta}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial r}(\Sigma_{\theta r}) + \frac{2}{r}\Sigma_{\theta r} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial r}(\Sigma_{zr}) + \frac{1}{r}\Sigma_{zr} = 0. \end{cases}$$

La solution des équations différentielles du premier ordre en $\Sigma_{\theta r}^p(r)$ et $\Sigma_{zr}^p(r)$ est

$$\begin{cases} \Sigma_{\theta r}^p(r) = \frac{k_{\theta r}}{r^2} \quad \text{avec } k_{\theta r} \in \mathbb{R} \\ \Sigma_{zr}^p(r) = \frac{k_{zr}}{r} \quad \text{avec } k_{zr} \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Pour déterminer les constantes, on utilise les conditions aux limites

$$\underline{\Sigma}^p \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{en } r = R + \varepsilon \quad \text{et} \quad \underline{\Sigma}^p \mathbf{n} = (\pi^q - \pi^p) \mathbf{n} \quad \text{en } r = R - \varepsilon$$

et on obtient $k_{\theta r} = k_{zr} = 0$. Soit,

$$\Sigma_{\theta r}^p(r) = \Sigma_{zr}^p(r) = 0.$$

9.4 Equations aux dérivées partielles en déplacement

On cherche le déplacement \mathbf{u}^q solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}(\Sigma_{rr}^p) - \frac{1}{r}(\Sigma_{\theta\theta}^p - \Sigma_{rr}^p) = 0 \\ \underline{\Sigma}^p(r) = \underline{\mathbf{A}} : \frac{1}{2} [\underline{\nabla} \mathbf{u}^q + \underline{\nabla} \mathbf{u}^{qT}] \\ \Sigma_{rr}^p(R + \varepsilon) = 0 \\ \Sigma_{rr}^p(R - \varepsilon) = (\pi^q - \pi^p) \\ \mathbf{u}^q(R, \theta_0) = \mathbf{u}^q(R, \pi - \theta_0) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Multipliée par r , la première équation devient

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \Sigma_{rr}^p) = \Sigma_{\theta\theta}^p$$

ce qui conduit naturellement à introduire la variable auxiliaire

$$\Psi(r) = r \Sigma_{rr}^p$$

qui vérifie par construction

$$\Psi'(r) = \Sigma_{\theta\theta}^p.$$

Dans la suite, pour une plus grande lisibilité des équations faisant intervenir les coefficients d'élasticité, on note

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= \lambda_{rr}, & \lambda_{12} &= \lambda_{\theta r}, & \lambda_{13} &= \lambda_{rz}, \\ \lambda_{22} &= \lambda_{\theta\theta}, & \lambda_{23} &= \lambda_{\theta z}, & \lambda_{33} &= \lambda_{zz}, \\ \mu_{12} &= \mu_{\theta r}, & \mu_{13} &= \mu_{rz}, & \mu_{23} &= \mu_{\theta z}. \end{aligned}$$

Avec ces conventions, l'équation de comportement

$$\underline{\Sigma}^p(r) = \underline{\mathbf{A}} : \frac{1}{2} [\underline{\nabla} \mathbf{u}^q + \underline{\nabla} \mathbf{u}^{qT}]$$

où, puisque \mathbf{u}^q ne dépend pas de z , le tenseur linéarisé des déformations vaut,

$$\frac{1}{2} [\underline{\nabla} \mathbf{u}^q + \underline{\nabla} \mathbf{u}^{qT}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} (u_r^q) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r^q) + \frac{\partial}{\partial r} (u_\theta^q) - \frac{1}{r} u_\theta^q \right) & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (u_z^q) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r^q) + \frac{\partial}{\partial r} (u_\theta^q) - \frac{1}{r} u_\theta^q \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta^q) + \frac{1}{r} u_r^q & \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_z^q) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (u_z^q) & \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_z^q) & 0 \end{bmatrix},$$

s'écrit

$$\begin{cases} \Sigma_{rr}^p = \lambda_{rr} \frac{\partial}{\partial r} (u_r^q) + \lambda_{\theta r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta^q) + \frac{1}{r} u_r^q \right) = \frac{1}{r} \Psi \\ \Sigma_{\theta\theta}^p = \lambda_{\theta r} \frac{\partial}{\partial r} (u_r^q) + \lambda_{\theta\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta^q) + \frac{1}{r} u_r^q \right) = \Psi' \end{cases} \quad (1)$$

et,

$$\Sigma_{zz}^p = \lambda_{zr} \frac{\partial}{\partial r} (u_r^q) + \lambda_{\theta z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta^q) + \frac{1}{r} u_r^q \right)$$

et aussi,

$$\Sigma_{\theta r}^p = \mu_{\theta r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r^q) + \frac{\partial}{\partial r} (u_\theta^q) - \frac{1}{r} u_\theta^q \right) = \mu_{\theta r} r \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r^q) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} u_\theta^q \right) \right) = 0$$

$$\Sigma_{rz}^p = \mu_{rz} \frac{\partial}{\partial r} (u_z^q) = 0 \text{ et } \Sigma_{\theta z}^p = \mu_{\theta z} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_z^q).$$

9.5 Résolution en déplacement

Posons

$$\lambda^2 = \lambda_{\theta\theta}\lambda_{rr} - \lambda_{\theta r}^2$$

et résolvons (1) à la manière d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues, $\frac{\partial u_r^q}{\partial r}$ et $\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta^q}{\partial\theta} + \frac{u_r^q}{r}$. Les solutions de ce système sont

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}(u_r^q) &= \frac{\lambda_{\theta\theta}}{\lambda^2}\frac{1}{r}\Psi - \frac{\lambda_{\theta r}}{\lambda^2}\Psi' \text{ et} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(u_\theta^q) + \frac{1}{r}u_r^q &= \frac{\lambda_{rr}}{\lambda^2}\Psi' - \frac{\lambda_{\theta r}}{\lambda^2}\frac{1}{r}\Psi. \end{cases} \quad (2)$$

Puisque l'expression obtenue pour $\frac{\partial u_r^q}{\partial r}$ ne dépend que de r , on en déduit que nécessairement $\frac{\partial^2 u_r^q}{\partial r \partial \theta} = 0$. Par conséquent, il existe deux fonctions à une variable f et g telles que

$$u_r^q = f(\theta) + g(r).$$

où, compte tenu de la symétrie du déplacement radial, la fonction f vérifie de plus $f(\theta) = f(\pi - \theta)$. On remplace u_r^q par cette expression dans $\Sigma_{\theta r}^p$ et on obtient

$$\frac{1}{r^2}f'(\theta) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta^q}{r}\right) = 0,$$

soit, en intégrant par rapport à r , et en notant $h(\theta)$ la constante d'intégration,

$$u_\theta^q = f'(\theta) + rh(\theta)$$

cette fois-ci, pour raisons d'antisymétrie du déplacement tangentiel, la fonction $h(\theta)$ vérifie $h(\theta) = -h(\pi - \theta)$. Il ne reste plus qu'à injecter ces deux valeurs du déplacement dans (2) pour obtenir le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} g'(r) = \frac{\lambda_{\theta\theta}}{\lambda^2}\frac{1}{r}\Psi - \frac{\lambda_{\theta r}}{\lambda^2}\Psi' \\ f''(\theta) + f(\theta) + rh'(\theta) + g(r) = \frac{\lambda_{rr}}{\lambda^2}r\Psi' - \frac{\lambda_{\theta r}}{\lambda^2}\Psi. \end{cases}$$

Cette dernière équation n'est vérifiée que si les fonctions $f''(\theta) + f(\theta)$ et $h'(\theta)$ sont constantes, c'est à dire si, compte tenu des parités,

$$f(\theta) = a \sin(\theta) + F \text{ et } h(\theta) = H(\theta - \pi/2).$$

Dans ce cas, en remplaçant $f(\theta)$ et $h(\theta)$, on a

$$g(r) = \frac{\lambda_{rr}}{\lambda^2}r\Psi' - \frac{\lambda_{\theta r}}{\lambda^2}\Psi - F - rH.$$

que l'on dérive par rapport à r afin d'obtenir, en éliminant $g'(r)$, l'équation différentielle du second ordre vérifiée par Ψ

$$r\Psi'' + \Psi' - \frac{\lambda_{\theta\theta}}{\lambda_{rr}}\frac{\Psi}{r} = \frac{H\lambda^2}{\lambda_{rr}}$$

Cette équation a pour solution

$$\Psi(r) = \alpha^- r^{-\alpha} + \alpha^+ r^{+\alpha} + \frac{H\lambda^2}{\lambda_{rr} - \lambda_{\theta\theta}} r$$

où α^- et α^+ sont des constantes à déterminer et $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda_{\theta\theta}}{\lambda_{rr}}}$. Par conséquent,

$$\Psi'(r) = \alpha \frac{-\alpha^- r^{-\alpha} + \alpha^+ r^{+\alpha}}{r} + \frac{H\lambda^2}{\lambda_{rr} - \lambda_{\theta\theta}}$$

et

$$g(r) = -\frac{\alpha^-}{\lambda^-} r^{-\alpha} + \frac{\alpha^+}{\lambda^+} r^{+\alpha} + \frac{\lambda_{\theta\theta} - \lambda_{\theta r}}{\lambda_{rr} - \lambda_{\theta\theta}} Hr - F$$

où

$$\lambda^- = \sqrt{\lambda_{\theta\theta}\lambda_{rr}} - \lambda_{\theta r} \text{ et } \lambda^+ = \sqrt{\lambda_{\theta\theta}\lambda_{rr}} + \lambda_{\theta r}.$$

Maintenant que toutes les fonctions auxiliaires sont connues, on connaît également le déplacement puisque, rappelons-le,

$$u_r^q = f(\theta) + g(r), \quad u_\theta^q = f'(\theta) + rh(\theta), \quad \text{et, } u_z^q = 0$$

soit, explicitement,

$$\begin{aligned} u_r^q &= a \sin(\theta) - \frac{\alpha^-}{\lambda^-} r^{-\alpha} + \frac{\alpha^+}{\lambda^+} r^{+\alpha} + \frac{\lambda_{\theta\theta} - \lambda_{\theta r}}{\lambda_{rr} - \lambda_{\theta\theta}} Hr \text{ et} \\ u_\theta^q &= a \cos(\theta) + Hr(\theta - \pi/2). \end{aligned}$$

9.6 Détermination des constantes

Les bords déterminés par $\theta = \theta_0$ et $\theta = \pi - \theta_0$ sont fixes en $r = R$, par conséquent

$$a \cos(\theta_0) + HR(\theta_0 - \pi/2) = 0$$

et

$$a \sin(\theta_0) - \frac{\alpha^-}{\lambda^-} R^{-\alpha} + \frac{\alpha^+}{\lambda^+} R^{+\alpha} + \frac{\lambda_{\theta\theta} - \lambda_{\theta r}}{\lambda_{rr} - \lambda_{\theta\theta}} HR = 0$$

on déduit de ces deux égalités les relations

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha^-}{\lambda^-} R^{-\alpha} + \frac{\alpha^+}{\lambda^+} R^{+\alpha} &= HR \left(\frac{\lambda_{\theta r} - \lambda_{\theta\theta}}{\lambda_{rr} - \lambda_{\theta\theta}} + (\theta_0 - \pi/2) \tan(\theta_0) \right) \text{ et} \\ a &= -HR \frac{(\theta_0 - \pi/2)}{\cos(\theta_0)}. \end{aligned} \quad (3)$$

On utilise ensuite les conditions aux limites sur les contraintes

$$\begin{cases} \Sigma_{rr}^p(R + \varepsilon) = 0 \\ \Sigma_{rr}^p(R - \varepsilon) = (\pi^q - \pi^p) \end{cases}$$

pour déterminer les constantes. On rappelle que

$$\Psi(r) = r \Sigma_{rr}^p = \alpha^- r^{-\alpha} + \alpha^+ r^{+\alpha} - hr.$$

avec

$$h = -\frac{H\lambda^2}{\lambda_{rr} - \lambda_{\theta\theta}}$$

Par conséquent les conditions $\Psi(R + \varepsilon) = 0$ et $\Psi(R - \varepsilon) = (R - \varepsilon)(\pi^q - \pi^p)$ forment un système de deux équations

$$\begin{cases} \alpha^- R^{-\alpha} \left(1 + \frac{\varepsilon}{R}\right)^{-\alpha} + \alpha^+ R^{+\alpha} \left(1 + \frac{\varepsilon}{R}\right)^{+\alpha} = hR \left(1 + \frac{\varepsilon}{R}\right) \\ \alpha^- R^{-\alpha} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R}\right)^{-\alpha} + \alpha^+ R^{+\alpha} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R}\right)^{+\alpha} = hR \left(1 - \frac{\varepsilon}{R}\right) \left(1 + \frac{(\pi^q - \pi^p)}{h}\right) \end{cases}$$

à deux inconnues $\alpha^- R^{-\alpha}$ et $\alpha^+ R^{+\alpha}$ que l'on peut résoudre explicitement. On se contente cependant des premiers termes du développement limité en $\frac{\varepsilon}{R}$. Le déterminant au second ordre est

$$D = -4\alpha \frac{\varepsilon}{R} + o\left(\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2\right).$$

Les solutions exactes étant

$$\begin{aligned} D\alpha^- R^{-\alpha} &= hR \left(\left(1 + \frac{\varepsilon}{R}\right) \left(1 - \frac{\varepsilon}{R}\right)^{+\alpha} - \left(1 - \frac{\varepsilon}{R}\right) \left(1 + \frac{(\pi^q - \pi^p)}{h}\right) \left(1 + \frac{\varepsilon}{R}\right)^{+\alpha} \right) \\ D\alpha^+ R^{+\alpha} &= hR \left(\left(1 + \frac{\varepsilon}{R}\right)^{-\alpha} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R}\right) \left(1 + \frac{(\pi^q - \pi^p)}{h}\right) - \left(1 - \frac{\varepsilon}{R}\right)^{-\alpha} \left(1 + \frac{\varepsilon}{R}\right) \right) \end{aligned}$$

on en déduit

$$\begin{aligned} \alpha^- R^{-\alpha} &= \frac{+R(\pi^q - \pi^p)}{4\alpha} \frac{R}{\varepsilon} - \frac{hR}{4\alpha} (1 - \alpha) \left(2 + \frac{(\pi^q - \pi^p)}{h}\right) \\ \alpha^+ R^{+\alpha} &= \frac{-R(\pi^q - \pi^p)}{4\alpha} \frac{R}{\varepsilon} + \frac{hR}{4\alpha} (1 + \alpha) \left(2 + \frac{(\pi^q - \pi^p)}{h}\right). \end{aligned}$$

On peut maintenant calculer explicitement H à l'aide de (3) soit,

$$H(1 + (\theta_0 - \pi/2) \tan(\theta_0)) = \frac{-(\pi^q - \pi^p)}{2\lambda^2} \left(\lambda_{rr} \frac{R}{\varepsilon} - \lambda_{rr} - \lambda_{\theta r} \right),$$

puis celle de a . Ces expressions permettent de calculer explicitement la précontrainte si besoin. Dans un premier temps on se contente d'évaluer la géométrie précontrainte et la précontrainte grâce à des développements limités en $\frac{\varepsilon}{R}$ des constantes puis à des développements limités en $\frac{r}{R}$ des fonctions.

9.7 Précontrainte

On effectue le développement limité en $\frac{r}{R}$ de $\Sigma_{\theta\theta}$. On rappelle que

$$\Sigma_{\theta\theta}^p(R + r) = \Psi'(R + r)$$

donc,

$$\begin{aligned} \Sigma_{\theta\theta}^p(R + r) &= \alpha \frac{-\alpha^-(R+r)^{-\alpha} + \alpha^+(R+r)^{+\alpha}}{(R+r)} - h \\ &\simeq \frac{\alpha}{R} \left(1 - \frac{r}{R}\right) \left(-\alpha^- R^{-\alpha} \left(1 - \alpha \frac{r}{R}\right) + \alpha^+ R^{+\alpha} \left(1 + \alpha \frac{r}{R}\right)\right) \\ &\simeq \frac{\alpha}{R} \left(\alpha^+ R^{+\alpha} - \alpha^- R^{-\alpha}\right) - \frac{r}{R} \left(\alpha^+ R^{+\alpha} - \alpha^- R^{-\alpha}\right) + \frac{\alpha r}{R} \left(\alpha^+ R^{+\alpha} + \alpha^- R^{-\alpha}\right) \\ &\simeq -(\pi^q - \pi^p) \frac{R}{2\varepsilon} + \frac{(\pi^q - \pi^p)}{2} \left(1 + \frac{r}{\varepsilon}\right) + \frac{r}{R} \left(h + \frac{(\pi^q - \pi^p)}{2}\right) (\alpha^2 - 1) \end{aligned}$$

quand r et ε sont petits devant R , on retrouve la "formule des chaudroniers"

$$\Sigma_{\theta\theta}^p \simeq \frac{(\pi^p - \pi^q)R}{2\varepsilon}.$$

9.8 Géométrie de la surface moyenne précontrainte

On se propose de trouver une équation approchée de la surface moyenne lorsque le lobe est sous pression. Pour cela, on écrit que la surface précontrainte ω^p est l'image par le déplacement $\mathbf{u}^q(R, \theta, z)$ de ω^q , en se rappelant que ω^q est composée de deux arcs de cercles. Evaluons tout d'abord $\mathbf{u}^q(R, \theta, z)$. On a,

$$\begin{cases} u_r^q(R, \theta, z) = a \sin(\theta) - \frac{\alpha^-}{\lambda^-} R^{-\alpha} + \frac{\alpha^+}{\lambda^+} R^{+\alpha} + \frac{\lambda_{\theta\theta} - \lambda_{\theta r}}{\lambda_{rr} - \lambda_{\theta\theta}} H R \\ u_\theta^q(R, \theta, z) = a \cos(\theta) + H R (\theta - \pi/2) \end{cases}$$

et puisque

$$u_r^q(R, \theta_0, z) = u_\theta^q(R, \theta_0, z) = 0$$

on en déduit les expressions simplifiées

$$\begin{cases} u_r^q(R, \theta, z) = a (\sin(\theta) - \sin(\theta_0)) \\ u_\theta^q(R, \theta, z) = a \left(\cos(\theta) - \cos(\theta_0) \frac{\theta - \pi/2}{\theta_0 - \pi/2} \right). \end{cases}$$

Un point M^q de ω^{q+} a pour coordonnées cartésiennes

$$\begin{cases} x^q = R \cos(\theta) \\ y^q = R \sin(\theta) + y_0^+ \end{cases}$$

après la mise sous précontrainte, il se retrouve en M^p de coordonnées cartésiennes

$$\begin{cases} x^p = R \cos(\theta) + u_r^q \cos(\theta) - u_\theta^q \sin(\theta) \\ y^p = R \sin(\theta) + u_r^q \sin(\theta) + u_\theta^q \cos(\theta) + y_0^+ \end{cases}$$

On remarque que

$$(x^p)^2 + (y^p - y_0^+ - a)^2 = (R - a \sin(\theta_0))^2 + a^2 \left(\frac{\theta - \pi/2}{\theta_0 - \pi/2} \right)^2 \cos^2(\theta_0)$$

par conséquent, en considérant que

$$\cos^2(\theta_0) = \sin^2(\pi/2 - \theta_0) \simeq (\pi/2 - \theta_0)^2$$

on obtient

$$(x^p)^2 + (y^p - y_0^+ - a)^2 = (R - a \sin(\theta_0))^2 + a^2 (\theta - \pi/2)^2 + o((\theta - \pi/2)^2).$$

On peut donc considérer que la surface précontrainte est formée de deux arcs de cercles de rayon

$$R^p = R - a \sin(\theta_0).$$

Comme nécessairement $a > 0$, la précontrainte diminue le rayon des lobes et décale les centres des arcs de cercle d'une longueur a vers le haut pour le cercle supérieur, vers le bas pour le cercle inférieur.

9.9 Etude de la variation d'épaisseur

Un point M^+ de la surface extérieure supérieure Γ^{q+} a pour coordonnées cartésiennes dans la configuration quasi-naturelle

$$\begin{cases} x^q(\varepsilon) &= (R + \varepsilon) \cos(\theta) \\ y^q(\varepsilon) &= (R + \varepsilon) \sin(\theta) + y_0^+ \end{cases}$$

quand le lobe est gonflé par la mise sous pré-contrainte, ce point se déplace de

$$\mathbf{u}^q(\varepsilon) := \mathbf{u}^q(R + \varepsilon, \theta, z)$$

et a pour nouvelles coordonnées cartésiennes

$$\begin{cases} x^p(\varepsilon) &= (R + \varepsilon) \cos(\theta) + u_r^q(\varepsilon) \cos(\theta) - u_\theta^q(\varepsilon) \sin(\theta) \\ y^p(\varepsilon) &= (R + \varepsilon) \sin(\theta) + u_r^q(\varepsilon) \sin(\theta) + u_\theta^q(\varepsilon) \cos(\theta) + y_0^+ \end{cases}$$

de même, un point m^+ de la surface intérieure supérieure γ^{q+} de coordonnées cartésiennes

$$\begin{cases} x^q(-\varepsilon) &= (R - \varepsilon) \cos(\theta) \\ y^q(-\varepsilon) &= (R - \varepsilon) \sin(\theta) + y_0^+ \end{cases}$$

se déplace jusqu'aux coordonnées

$$\begin{cases} x^p(-\varepsilon) &= (R - \varepsilon) \cos(\theta) + u_r^q(-\varepsilon) \cos(\theta) - u_\theta^q(-\varepsilon) \sin(\theta) \\ y^p(-\varepsilon) &= (R - \varepsilon) \sin(\theta) + u_r^q(-\varepsilon) \sin(\theta) + u_\theta^q(-\varepsilon) \cos(\theta) + y_0^+. \end{cases}$$

Dans l'hypothèse des petites perturbations, on suppose que les normales ne tournent pas, si bien que deux points pris le long d'une même normale se retrouvent après déformation sur une même normale à nouveau. Par conséquent, pour connaître l'épaisseur du tissu après déformation en fonction de (θ, z) il suffit de calculer

$$(2\varepsilon^p)^2 = (x^p(\varepsilon) - x^p(-\varepsilon))^2 + (y^p(\varepsilon) - y^p(-\varepsilon))^2$$

on trouve ainsi,

$$\begin{aligned} (2\varepsilon^p)^2 &= ((2\varepsilon + (u_r^q(\varepsilon) - u_r^q(-\varepsilon))) \cos(\theta) - (u_\theta^q(\varepsilon) - u_\theta^q(-\varepsilon)) \sin(\theta))^2 \\ &\quad + ((2\varepsilon + (u_r^q(\varepsilon) - u_r^q(-\varepsilon))) \sin(\theta) - (u_\theta^q(\varepsilon) - u_\theta^q(-\varepsilon)) \cos(\theta))^2 \end{aligned}$$

c'est à dire

$$(2\varepsilon^p)^2 = (2\varepsilon + (u_r^q(\varepsilon) - u_r^q(-\varepsilon)))^2 + (2\varepsilon)^2 + (u_\theta^q(\varepsilon) - u_\theta^q(-\varepsilon))^2$$

on remarque alors que

$$u_\theta^q(\varepsilon) - u_\theta^q(-\varepsilon) = 2H\varepsilon(\theta - \pi/2)$$

et que $(u_r^q(\varepsilon) - u_r^q(-\varepsilon))$ ne dépend véritablement ni de θ ni de z si bien que la nouvelle épaisseur a pour expression

$$2\varepsilon^p = 2\varepsilon \sqrt{\left(1 + \frac{(u_r^q(\varepsilon) - u_r^q(-\varepsilon))}{2\varepsilon}\right)^2 + H^2(\theta - \pi/2)^2}$$

et, si $H^2(\theta - \pi/2)^2 \ll 1$ on peut considérer que l'épaisseur du tissu reste constante.

10 Annexe III : Théorèmes fréquemment cités

Tous les théorèmes de cette annexe sont extraits de [Ciarlet, 2000]

10.1 Théorèmes préliminaires

Théorème 10.1.1 Soit ω un domaine de \mathbb{R}^2 de frontière γ , soit $\Omega = \omega \times]-1, 1[$, soit $w \in L^p(\Omega)$, $p > 1$ une fonction telle que

$$\forall v \in \{u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), u = 0 \text{ sur } \gamma \times [-1, 1]\}, \quad \int_{\Omega} w \partial_3 v d\Omega = 0$$

alors

$$w = 0$$

Théorème 10.1.2 Il existe une constante c telle que

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial e_{\alpha\beta}(\varepsilon, \mathbf{v})}{\partial \xi_3} + \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \right\|_{-1, \Omega} \leq c \left\{ \sum_i \|e_{i\|3}(\varepsilon, \mathbf{v})\|_{0, \Omega} + \varepsilon \sum_{\alpha} \|v_{\alpha}\|_{0, \Omega} + \varepsilon \|v_3\|_{1, \Omega} \right\}. \quad \forall \varepsilon > 0, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$$

Théorème 10.1.3 Soit une suite $(\mathbf{v}(\varepsilon))_{\varepsilon}$ de fonctions de $\mathcal{V}(\Omega)$ vérifiant

$$\begin{aligned} & \exists \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega), \exists \varepsilon_{ij} \in L^2(\Omega), \\ \mathbf{v}(\varepsilon) & \rightharpoonup \mathbf{v} \text{ dans } \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ et } \frac{1}{\varepsilon} e_{i\|j}(\varepsilon, \mathbf{v}(\varepsilon)) \rightharpoonup \varepsilon_{ij} \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (v_i) \text{ est indépendant de la variable transverse } \xi_3 \\ \bar{\mathbf{v}} &= (\bar{v}_i) \in H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \cap H^2(\omega) \\ & \partial_{\nu} \bar{v}_3 = 0 \text{ sur } \delta\omega \\ & \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) = 0 \\ \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) & \in L^2(\Omega) \text{ et } \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) = \partial_3 \varepsilon_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Si deplus, il existe des fonctions $\chi_{\alpha\beta}$ de $H^{-1}(\Omega)$ telles que

$$\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{v}(\varepsilon)) \longrightarrow \chi_{\alpha\beta} \text{ dans } H^{-1}(\Omega) \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

alors

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\varepsilon) & \longrightarrow \mathbf{v} \text{ dans } \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0 \text{ et,} \\ \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) & = \chi_{\alpha\beta} \text{ et donc } \chi_{\alpha\beta} \in L^2(\Omega) \end{aligned}$$

10.2 Inégalités de Korn en coordonnées curvilignes

Dans tout ce paragraphe, on suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

1. Ω est un domaine de \mathbb{R}^3 ouvert, borné, connexe de frontière lipschitzienne, Ω se trouve localement d'un seul coté de sa frontière.
2. Θ est un C^2 -difféomorphisme de $\bar{\Omega}$ dans $\Theta(\bar{\Omega})$ telque les trois vecteurs $\mathbf{g}_i = \partial_i \Theta$ soient linéairement indépendants en tout point de $\bar{\Omega}$.

Soit $\mathbf{v} = (v_i) \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ on note $e_{ij}(\mathbf{v}) := \frac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i) - \Gamma_{ij}^p v_p$ les composantes covariantes du tenseur de changement de métrique associé au champ de déplacement $v_i \mathbf{g}^i$.

Proposition 10.2.1 *Il existe une constante C (qui ne dépend que de la géométrie, i.e $C = C(\Omega, \Theta)$) telle que*

$$\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \leq C \left\{ \sum_i \|v_i\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i,j} \|e_{ij}(\mathbf{v})\|_{0,\Omega}^2 \right\}^{1/2}, \quad \forall \mathbf{v} = (v_i) \in \mathbf{H}^1(\Omega)$$

Soit $\mathcal{V}(\Omega)$ l'espace fonctionnel défini par $\mathcal{V}(\Omega) := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_0\}$

Proposition 10.2.2 *Il existe une constante C_0 (qui ne dépend que de la géométrie, i.e $C_0 = C_0(\Omega, \Gamma_0, \Theta)$) telle que*

$$\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \leq C_0 \left\{ \sum_{i,j} \|e_{ij}(\mathbf{v})\|_{0,\Omega}^2 \right\}^{1/2}, \quad \forall \mathbf{v} = (v_i) \in \mathcal{V}(\Omega)$$

10.2.1 Inégalité de type Korn pour une famille de coques en membranes

Théorème 10.2.1 *Pour une famille de coques en membranes, l'inégalité de Korn s'écrit: il existe une constante C , telle que*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega), \quad \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \leq \frac{C}{\varepsilon} \left\{ \sum_{i,j} \|e_{ij}(\varepsilon, \mathbf{v})\|_{0,\Omega}^2 \right\}^{1/2}$$

10.2.2 Quelques propriétés des valeurs moyennes

1. $\bar{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}(\omega) = \mathbf{H}_0^1(\omega)$
2. $\|\bar{\mathbf{v}}\|_{0,\omega} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}$
3. $\gamma_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{v}}) = \overline{\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v})}$

Bibliographie

- [Akian, 2000] Akian, J.L. Analyse asymptotique des jonctions de coques en flexion, Thèse de doctorat, Université de Poitiers
- [Akian, 2005] Akian, J.L. Asymptotic analysis of bending-dominated shell junctions, *J. Math. Pures Appl.*, IX. Sér. 84, No. 6, 667-716
- [Chapelle-Bathe, 2003] Chapelle, D. & Bathe, K.J. *The Finite Element Analysis of Shells Fundamentals*, Springer
- [Chen-Bian-Ding, 2004] Chen, W.Q. & Bian, Z.G & Ding, H.J. 3D vibration analysis of fluid-filled orthotropic FGM cylindrical shells, *International Journal of Mechanical sciences*, **46**, 159-171
- [Ciarlet, 1998] Ciarlet, P.G. *Mathematical Elasticity, Volume I*, North Holland, Amsterdam
- [Ciarlet, 2000] Ciarlet, P.G. *Mathematical Elasticity, Volume III, Theory of shells*, North Holland, Amsterdam
- [Coirier, 2001] Coirier, J. *Mécanique des milieux continus*, Dunod, Paris
- [Crolet-Murea, 2002] Crolet, J.M. & Murea, C.M. Mixed hybrid finite element for a 3D fluid-structure interaction problem, *Commun. Numer. Meth. Engng*, **00** 1-12
- [Dautray-Lions, 1988] Dautrey, R. & Lions, J.L. *Analyse mathématique et calcul numérique*, vol 1, Masson, Paris
- [Destuynder-Salaun, 1996] Destuynder, Ph. & Salaun, M. *Mathematical Analysis of Thin Plate Models*, Springer
- [Duvaut, 1990] Duvaut, G. *Mécanique des milieux continus*, Masson, Paris
- [Duvaut-Lions, 1972] Duvaut, G. & Lions, J.L. *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, Paris
- [Faré, 2002] Faré, N. *Modélisation mathématique et simulation numérique du drapé d'un textile*, Thèse de doctorat, Université de Mulhouse
- [Faou, 2000] Faou, E. *Développements asymptotiques dans les coques minces linéairement élastiques*, Thèse de doctorat, Université de Paris VI
- [Fox-Raoult-Simo, 1992] Fox, D. & Raoult, A. & Simo, J.C. Modèles asymptotiques invariants pour des structures minces élastiques. *C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I*, Vol **315** p235-240
- [Gasser-Boisse-Hanklar, 2000] Gasser, A. & Boisse, P. & Hanklar, S. Mechanical behaviour of dry fabric reinforcements, *Computational Materials Science* **17**, 7-20

- [Gil-Bonet, 2006] Gil, A.J. & Bonet, J. Finite element analysis of prestressed structural membranes, *Finite Elements in Analysis and Design* 42 p683-697
- [Giroud, 1998] Giroud, P. Analyse asymptotique de coques inhomogènes en élasticité linéarisée anisotrope, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 327, Série I, p. 1011-1014
- [Giroud, 1999] Giroud, P. Modélisation asymptotique des coques élastiques : couplage flexion membrane, modèles incrémentaux, Thèse de doctorat, Université de Grenoble I
- [Grandmont, 1998] Analyse mathématique et numérique de quelques problèmes d'interaction fluide-structure, Thèse de doctorat, Université de Paris VI
- [Grandmont-Maday, 2000] Fluid-structure interactions : a theoretical point of view, *Revue européenne des éléments finis*. Vol 9, **6**, 633-653
- [Koiter, 1970] Koiter, W.T. On the foundations of the linear theory of thin elastic shells. *Proc. Ned. Akad. Wetensch.*
- [Lemaitre-Chaboche, 2001] Lemaitre, J. & Chaboche, J.L. *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, Paris
- [Luce-Poutous-Thomas, 2004] Luce, R. & Poutous, C. & Thomas, J.M. Linear elasticity modelling of the behaviour of a pre-stressed material. *Monogr. Semin. Mat. Garcia Galdeano*, **31** 555-565
- [Mendoza Serrano, 2003] Mendoza Serrano, C.A. *Soft Tissue Interactive Simulations for Medical Applications*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble
- [Métier, 2003] Métier, P. Modélisation, analyse mathématique et applications numériques de problèmes d'interaction fluide-structure instationnaires, Thèse de doctorat, Université de Paris 6
- [Muttin, 1989] Muttin, F. Modélisation de membrane. Application à l'analyse mécanique des voiles de bateau, Thèse de doctorat, Université de Nice Sophia Antipolis
- [Naghdi, 1972] Naghdi, P.M. *The theory of shells and plates*, Springer-Verlag
- [Nocent, 2001] Nocent, O. Animation dynamique de corps déformables continus, Thèse de doctorat, Université de Reims Champagne-Ardenne
- [Pantz, 2001] Pantz, O. Quelques problèmes de modélisation en élasticité non linéaire, Thèse de doctorat, Université de Paris VI

- [Raviart-Thomas, 1998] Raviart, P.A. & Thomas, J.M. Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Dunod, Paris
- [Reese-Raible-Wriggers, 2001] Reese, S. & Raible, T. & Wriggers, P. Finite element modelling of orthotropic material behaviour in pneumatic membranes, *International Journal of Solids and Structures*, **38**, 9525-9544
- [Renardy, 1997] Renardy, M. Equilibrium configurations of an inflated cylindrical membrane, *Journal of Elasticity* **46**, 255-261
- [Salençon, 1995] Salençon, J. Mécanique du continu, Ellipses, Paris
- [Shanahan-Lloyd-Hearle, 1978] Shanahan, W.J. & Lloyd, D.W. & Hearle, J.W.S. Characterizing the elastic behaviour of textile fabrics in complex deformations, *Textile Research Journal*, **48**, **9**, 495-505
- [Slicaru, 1997] Slicaru, S. On the ellipticity of the middle surface of a shell and its application to the asymptotic analysis of "membrane shells", *J. Elasticity* **46**, 33-42
- [Stein-Benney-Tezduyar-Potvin, 2001] Stein, K. & Benney, R. & Tezduyar, T & Potvin, J. Fluid-structure interactions of a cross parachute, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **191**, 673-687
- [Valette, 2001] Valette, J. Simulation du comportement mécanique d'un ensemble voiles gréement de bateau, Thèse de doctorat, Université d'Orléans.

Résumé:

Quelles sont les déformations et les contraintes que subissent une structure gonflée précontrainte lorsqu'elle est soumise à des perturbations de son environnement extérieur? Cette thèse répond à cette interrogation dans le cas d'un lobe formé de deux membranes orthotropes, fixées sur leurs longueurs à deux axes rigides, successivement rectilignes puis légèrement arrondis, et sur leurs largeurs à des arcs de cercle également rigides. L'intérieur est gonflé par un gaz supposé parfait.

A partir d'une modélisation mécanique en élasticité linéaire, nous avons établi un modèle mathématique rigoureux en 3D. Puis en faisant tendre l'épaisseur des membranes vers zéro, nous avons obtenu un modèle asymptotique 2D, bien posé pour certaines forces, dites admissibles, dans des espaces obtenus par complétion. Nous avons alors démontré que la suite des valeurs moyennes dans l'épaisseur des solutions des problèmes 3D converge fortement vers l'unique solution du problème asymptotique. Nous avons de plus mis en évidence des conditions suffisantes d'admissibilité des forces extérieures.

L'analyse numérique du modèle asymptotique a montré que les estimations d'erreur a priori se font dans la norme de l'énergie. Ce qui, comme l'ont confirmé quelques essais numériques, ne va pas sans poser de problèmes quand on s'intéresse aux déplacements, mais est tout à fait satisfaisant du point de vue des contraintes.

Mots-clés :

Elasticité linéaire, coques en membrane, matériau orthotrope, précontrainte, structures gonflées, couplage fluide-structure, forces admissibles, géométrie parabolique et elliptico-hyperbolique, analyse numérique, éléments finis, modèle asymptotique.

Asymptotic modelling and numerical analysis of a fluid-structure coupling problem.

Abstract :

How are the stresses and the deformations of an inflated structure when external forces are applied to it. This thesis answers that question when the structure is a long and thin shell composed of two congruent cylindrical orthotropical membranes which are glued together along rigid straight or curved axes and inflated by a perfect gas.

From a mechanical modelling in linearized elasticity, we established a 3D variational problem well posed in classical Sobolev spaces. Then we let the thickness parameter tend to zero, in order to obtain a 2D asymptotic model, well posed as long as the external forces check special properties -they are then called admissible forces- in spaces obtained by completion. We proved that the mean value in the thickness of the 3D solution strongly tends to the solution of the 2D asymptotic problem. We also identified sufficient conditions of admissibility.

The numerical analysis showed that the error is a priori estimated in the energy norm. This, as confirmed by numerical simulations, creates problems as far as displacements are concerned, but is satisfying from the stresses point of view.

Keywords :

Linear elasticity, membrane shells, orthotropic material, prestressed structure, inflated structure, fluid-structure coupling, admissible forces, parabolic and elliptico-hyperbolic geometry, numerical analysis, finite elements, asymptotic modelling.