



**HAL**  
open science

# Commande et observation des systèmes à retards variables: Théorie et applications

Alexandre Seuret

► **To cite this version:**

Alexandre Seuret. Commande et observation des systèmes à retards variables: Théorie et applications. Automatique / Robotique. Ecole Centrale de Lille; Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, 2006. Français. NNT: . tel-00132099

**HAL Id: tel-00132099**

**<https://theses.hal.science/tel-00132099>**

Submitted on 20 Feb 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

No d'ordre : 26

ÉCOLE CENTRALE DE LILLE  
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

## THÈSE

présentée en vue d'obtenir le grade de

## DOCTEUR

Spécialité : Automatique, Génie Informatique et Signal

par

**Alexandre Seuret**

Ingénieur École Centrale de Lille

### **Commande et observation des systèmes à retards variables : théorie et applications**

Doctorat délivré conjointement par l'École Centrale de Lille  
et l'Université de Sciences et Technologies de Lille

Soutenue le 4 Octobre 2006 devant le jury constitué de :

M. J.-F. Lafay	Professeur <i>École Centrale de Nantes</i>	<i>Président</i>
M. C. Canudas de Wit	Directeur de Recherche <i>Laboratoire d'Automatique de Grenoble</i>	<i>Rapporteur</i>
M. S.-I. Niculescu	Directeur de Recherche <i>Laboratoire des Signaux et Systèmes - CNRS - Supélec</i>	<i>Rapporteur</i>
M. W. Perruquetti	Professeur <i>École Centrale de Lille</i>	<i>Examineur</i>
M. J.-P. Richard	Professeur <i>École Centrale de Lille</i>	<i>Directeur</i>
M. M. Dambrine	Professeur <i>Laboratoire d'Automatique, de Mécanique et d'Informatique Industrielles et Humaines</i>	<i>Directeur</i>



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>1</b>
<b>Notations</b>	<b>3</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>5</b>
<b>1 Stabilité des systèmes à retards</b>	<b>9</b>
1.1 Introduction . . . . .	9
1.2 Modélisation des systèmes à retards . . . . .	12
1.2.1 Les systèmes de type retardé . . . . .	12
1.2.2 Systèmes de type neutre . . . . .	12
1.2.3 Modèles linéaires invariants à retards discrets . . . . .	13
1.2.4 Modèles non linéaires, non stationnaires . . . . .	14
1.2.5 Modèles de retards . . . . .	15
1.3 Stabilité des systèmes à retards par la seconde méthode de Lyapunov . . . . .	16
1.3.1 Seconde méthode de Lyapunov . . . . .	16
1.3.2 Approche par fonctions de Razumikhin . . . . .	17
1.3.3 Approche par fonctionnelles de Krasovskii . . . . .	18
1.3.4 Extensions des théorèmes de Lyapunov . . . . .	19
1.3.5 Deux transformations sur le modèle . . . . .	19
1.3.6 Stabilité asymptotique des systèmes à retards <i>majorés</i> . . . . .	20
1.3.7 Stabilité asymptotique des systèmes à retards <i>bornés</i> . . . . .	21
1.4 Conclusion . . . . .	22
<b>2 Stabilité exponentielle des systèmes linéaires</b>	<b>25</b>
2.1 Préliminaires . . . . .	25
2.2 Cas des retards constants . . . . .	26
2.3 Cas des retards variables <i>majorés</i> . . . . .	28
2.3.1 Stabilité exponentielle . . . . .	28
2.3.2 Exemple de comparaison . . . . .	34
2.3.3 Application au cas des retards multiples . . . . .	35
2.3.4 Application à la stabilisation exponentielle . . . . .	38
2.3.5 Stabilisation à coût quadratique garanti . . . . .	42

2.3.6	Optimisation de l'ensemble des conditions initiales admissibles . . . . .	45
2.4	Cas des retards variables <i>bornés</i> . . . . .	45
2.4.1	Etude de la stabilité . . . . .	46
2.4.2	Stabilisation des systèmes linéaires . . . . .	50
2.4.3	Exemple . . . . .	52
2.5	Cas particulier des systèmes neutres à retard constant . . . . .	53
2.5.1	Stabilité exponentielle . . . . .	53
2.5.2	Exemple . . . . .	54
2.6	Conclusion . . . . .	55
<b>3</b>	<b>Stabilité des systèmes non linéaires à retards</b>	<b>57</b>
3.1	Introduction . . . . .	57
3.2	Systèmes affines en l'entrée . . . . .	58
3.2.1	Notations et formulation du problème . . . . .	58
3.2.2	Transformations du système initial . . . . .	58
3.2.3	Exemple du pendule et du chariot . . . . .	59
3.3	Approches par modèles polytopiques . . . . .	61
3.3.1	Présentation du problème . . . . .	61
3.3.2	Stabilité exponentielle . . . . .	62
3.3.3	Stabilisation exponentielle de systèmes polytopiques . . . . .	65
3.3.4	Exemple . . . . .	67
3.3.5	Conclusion . . . . .	67
3.4	Stabilisation exponentielle robuste . . . . .	68
3.4.1	Présentation du problème . . . . .	68
3.4.2	Stabilité exponentielle de systèmes soumis à des incertitudes . . . . .	68
3.4.3	Application à la stabilisation exponentielle . . . . .	74
3.4.4	Exemples . . . . .	78
3.4.5	Conclusion . . . . .	79
3.5	Introduction à la commande saturée . . . . .	80
3.6	Approche polytopique pour l'étude des systèmes à entrée saturée et retardée . . . . .	81
3.6.1	Systèmes à entrée saturée et retardée . . . . .	81
3.6.2	Résultats préliminaires . . . . .	82
3.6.3	Stabilisation Locale . . . . .	83
3.6.4	Exemple . . . . .	84
3.6.5	Conclusion . . . . .	84
3.7	Systèmes à entrée saturée et à état retardé . . . . .	85
3.7.1	Position du Problème . . . . .	85
3.7.2	Conditions de stabilité . . . . .	86
3.7.3	Etude du cas retardé . . . . .	89
3.7.4	Optimisation des résultats . . . . .	92
3.7.5	Exemples . . . . .	93
3.7.6	Conclusion . . . . .	94

3.8	Conclusion . . . . .	95
<b>4</b>	<b>Systèmes à entrée échantillonnée</b>	<b>97</b>
4.1	Introduction . . . . .	97
4.2	Une approche fréquentielle . . . . .	98
4.2.1	Condition nécessaire et suffisante de stabilité . . . . .	98
4.2.2	Cas du double intégrateur . . . . .	100
4.2.3	Une première approche par retard variable . . . . .	100
4.3	Une approche par retard variable . . . . .	101
4.3.1	Stabilité d'un système à entrée échantillonnée . . . . .	102
4.3.2	Etude de la robustesse . . . . .	104
4.3.3	Stabilité d'un système neutre à entrée échantillonnée retardée . . . . .	105
4.3.4	Stabilisation exponentielle . . . . .	106
4.3.5	Stabilisation des systèmes à entrée saturée et échantillonnée . . . . .	108
4.4	Conclusion . . . . .	111
<b>5</b>	<b>Observation des systèmes à retards</b>	<b>113</b>
5.1	Introduction . . . . .	113
5.2	Observation de systèmes à retards connus . . . . .	114
5.2.1	Présentation du problème . . . . .	114
5.2.2	Retard connu sur l'état et la sortie . . . . .	114
5.2.3	Conclusion . . . . .	115
5.3	Observation de systèmes à retards inconnus . . . . .	115
5.3.1	Introduction . . . . .	115
5.3.2	Observateurs à modes glissants . . . . .	116
5.3.3	Retour de sortie sur la partie non-mesurable . . . . .	121
5.4	$\alpha$ -stabilité des observateurs à modes glissants . . . . .	125
5.4.1	Observateur $\alpha$ -stable . . . . .	125
5.4.2	Observateur à retour de sorties . . . . .	127
5.5	Exemples . . . . .	129
5.5.1	Exemple 1 . . . . .	129
5.5.2	Exemple 2 . . . . .	130
5.6	Conclusion . . . . .	132
<b>6</b>	<b>Applications</b>	<b>135</b>
6.1	Etude de la barre de torsion . . . . .	135
6.2	Application à la télé-opération . . . . .	137
6.2.1	Introduction . . . . .	137
6.2.2	Conception de la commande du système . . . . .	141
6.2.3	Application au cas d'un robot mobile . . . . .	149
6.2.4	Conception informatique . . . . .	150
6.2.5	Conclusion . . . . .	153
6.3	Commande d'un chariot utilisant un capteur caméra . . . . .	153

6.3.1	Déplacement motorisé d'un chariot . . . . .	153
6.3.2	Modèle du système à commander . . . . .	154
6.3.3	Système de vision artificielle . . . . .	154
6.3.4	Utilisation d'un observateur prédictif . . . . .	155
6.3.5	Validation expérimentale . . . . .	156
6.3.6	Conclusion . . . . .	158
6.4	Commande retardée d'un pendule inverse . . . . .	159
6.4.1	Position du problème . . . . .	159
6.4.2	Modélisation sous forme systèmes de paramètres incertains . . . . .	160
6.4.3	Etude de la stabilisation du pendule inverse . . . . .	161
6.4.4	Résultats . . . . .	162
6.4.5	Conclusion . . . . .	162
6.5	Conclusion . . . . .	162
<b>Conclusion</b>		<b>164</b>
<b>A Inégalités matricielles linéaires</b>		<b>165</b>
A.1	Définitions et notations . . . . .	165
A.2	Programmation semi-définie . . . . .	165
A.3	Les théorèmes classiques . . . . .	166
<b>B Commande d'un pulvérisateur [3]</b>		<b>167</b>
B.1	Introduction . . . . .	167
B.2	Description of the system . . . . .	168
B.3	Modelling of the system . . . . .	168
B.4	Control law . . . . .	170
B.5	Stability analysis . . . . .	171
B.6	Implementation . . . . .	177
B.7	Conclusions . . . . .	178
<b>C Contrôle d'un moteur par capteur visuel [20]</b>		<b>179</b>
<b>D Observateurs à modes glissants et observateurs d'Utkin</b>		<b>191</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>193</b>

# Remerciements

Le travail que nous présentons dans ce mémoire a été effectué au LAGIS sous la direction de Monsieur Jean-Pierre Richard, Professeur à l'Ecole Centrale de Lille et de Monsieur Michel Dambrine, Professeur au LAMIH.

Je tiens à remercier très vivement Monsieur Jean-Pierre Richard et Monsieur Michel Dambrine de m'avoir accepté dans leur équipe, de leur enthousiasme envers mon travail, de leur disponibilité. Les judicieux conseils qu'ils m'ont prodigués tout au long de ces trois années de thèse m'ont permis de progresser dans mes études et d'achever ce travail dans les meilleures conditions.

Je suis très honoré que Monsieur Carlos Canudas de Witt, Directeur de Recherche CNRS au Laboratoire d'Automatique de Grenoble et Monsieur Silviu-Iulian Niculescu, Directeur de Recherche CNRS à l'Heudiasyc aient accepté de rapporter mon travail.

Je tiens aussi à assurer de ma reconnaissance Monsieur Jean-François Lafay, Professeur à l'IRCYN, qui a accepté de juger mon travail.

Je suis aussi très reconnaissant à Monsieur Wilfrid Perruquetti, Professeur à l'Ecole Centrale de Lille, pour avoir accepté d'examiner mon travail. Je tiens aussi à le remercier, pour tous les conseils et avis qu'il m'a donnés lors de nos nombreuses discussions.

C'est avec sympathie que je souhaite témoigner ma reconnaissance à Monsieur Thierry Floquet, Chargé de Recherche au CNRS et au LAGIS pour la pertinence de ses remarques et ses conseils et à Jan Anthonis, Docteur à l'Université de Leuven en Belgique, pour les nombreuses discussions et collaborations que nous avons eu tout au long de mon doctorat.

J'aimerais exprimer aussi toute ma gratitude envers tous les membres du LAGIS pour leur sympathie. Ils ont rendu très agréables ces trois années. Je pense particulièrement à Philippe Vanheeghe, Professeur à l'Ecole Centrale de Lille et Directeur du LAGIS, mais aussi Hilaire, Gilles, Bernard, Jacques, Brigitte, Régine et Patrick.

Bien sûr je souhaite aussi remercier les doctorants qui sont devenus plus que des collègues de travail. Un grand merci à Romain, Nima, François, Michaël, Mohammed, Afzal, Emmanuel et tous les autres.

Je souhaite aussi dire un grand merci à tous mes amis Lillois, Parisiens, Seine-et-Marnais et tous les autres pour leur soutien.

Je terminerai cet avant-propos en remerciant chaleureusement ma famille, Stéphane et Agnès pour leur implication dans mes choix tant au niveau professionnel que personnel, et bien sûr ma mère qui m'a énormément soutenu. Je voulais aussi remercier le petit Eliott et la petite Camille pour leurs nombreux et chaleureux sourires.





# Notations

Notations relatives aux ensembles :

- $\mathbb{R}$  : ensemble des nombres réels
- $\mathbb{C}$  : ensemble des nombres complexes
- $\mathbb{R}^+$  : ensemble des nombres réels ou nuls
- $\mathbb{R}^n$  : espace vectoriel de dimension  $n$  construit sur le corps des réels.
- $[a, b]$  : intervalle fermé de  $\mathbb{R}$  d'extrémités  $a$  et  $b$
- $]a, b[$  : intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  d'extrémités  $a$  et  $b$
- $[a, b[$  : intervalle semi-fermé de  $\mathbb{R}$  d'extrémités  $a$  et  $b$
- $N_r = \{1, \dots, r\}$  : ensemble des  $r$  premiers nombres entiers positifs
- $\mathcal{C} = \mathcal{C}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$  ensemble des fonctions continues de  $[-\tau, 0]$  dans  $\mathbb{R}^n$
- $x_t \in \mathcal{C}$  est définie par  $x_t(\theta) = x(t - \theta)$ ,  $\forall \theta \in [-\tau, 0]$
- $\mathcal{C}^1 = \mathcal{C}^1([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$  ou  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$  : ensemble des fonctions continûment différentiables de  $[-\tau, 0]$  dans  $\mathbb{R}^n$
- $\mathcal{D}$  : sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$
- $\mathcal{C}(\mathcal{D})$  : sous-ensemble de  $\mathcal{C}$  défini par  $\mathcal{C}(\mathcal{D}) = \{\phi \in \mathcal{C} : \phi(\theta) \in \mathcal{D}, \forall \theta \in [-\tau, 0]\}$
- $|\cdot|$  : valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe
- $\|\cdot\|$  : une norme sur  $\mathbb{R}^n$
- $\|\cdot\|_{\mathcal{C}}$  : norme sur  $\mathcal{C}$  définie par  $\forall \phi \in \mathcal{C} : \|\phi\|_{\mathcal{C}} = \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} \{\|\phi(\theta)\|\}$
- $t \in \mathbb{R}^+$  : variable temporelle

- $x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$  : vecteur d'état instantané
- $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$  : dérivée temporelle de l'état  $x$
- $x^{(i)}$  :  $i^{\text{ème}}$  dérivée de  $x$  par rapport au temps

Notations relatives aux vecteurs :

- $x^T$  : transposé du vecteur  $x$
- $\|x\|$  : norme Euclidienne de  $x$

Notations relatives aux matrices

- $[a_{ij}]$  : matrice dont le coefficient de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et  $j^{\text{ème}}$  colonne est  $a_{ij}$
- $A^T$  : transposé de la matrice  $A$
- $\|x\|$  : norme Euclidienne de  $x$
- $A < B$  (resp.  $A > B$ ) : signifie que  $A - B$  est une matrice définie négative ( resp. définie positive)
- $\|A\|$  : norme Euclidienne de la matrice  $A$
- $I_n$  : matrice identité de  $\mathbb{R}^{n \times n}$
- $\|A\|_e$  où  $A$  est une matrice carrée est le plus grand module des valeurs propres de la matrice  $A$ .
- $\lambda_{\min}(A)$ , où  $A$  est une matrice symétrique, est la plus petite valeur propre de  $A$ .
- $\lambda_{\min}(A)$ , où  $A$  est une matrice carrée est la plus petite de valeur absolue de la partie réelle des valeurs propres de  $A$ .

# Introduction générale

Ce travail de doctorat a été préparé au sein de l'équipe SyNeR<sup>1</sup> (Systèmes Non linéaires et à Retards) du Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal (LAGIS, UMR CNRS 8146). Mon travail de recherche s'inscrit dans le cadre du projet ROBOCOOP<sup>2</sup>, soutenu par le Conseil Régional Nord-Pas de Calais et l'Union Européenne. Ce projet concerne le développement de robots autonomes et collaboratifs. Un robot autonome est un système automoteur, disposant à la fois de moyens de traitement de l'information permettant une capacité décisionnelle suffisante et de moyens matériels adaptés, de façon à pouvoir exécuter, sous contrôle humain réduit, un certain nombre de tâches précises, dans un environnement variable non complètement connu à l'avance. Ces robots autonomes devront réaliser une action commune. Cette collaboration suppose un partage de tâches et d'informations, ce qui implique la présence d'un réseau de communication. Les objectifs principaux du projet ROBOCOOP sont de proposer et de mettre en œuvre des outils pour la modélisation, l'analyse et la synthèse de lois de commande spécifiques à la coopération de robots distants.

Dans ce mémoire, l'accent va être porté sur l'analyse des problèmes apparaissant dans les communications entre les différents agents coopérants et le développement de solutions dédiées. La principale difficulté rencontrée pour ce type de problèmes est l'existence de retards induits par la transmission des informations. En outre — difficulté supplémentaire, — pour différentes raisons comme la variation de la distance séparant les robots mobiles, les valeurs de ces retards sont fonction du temps. Mon travail de recherche est consacré au développement d'outils d'analyse et de synthèse de lois de commande qui s'appliquent aux systèmes à retards variables de lois connues ou non.

Considérons l'exemple d'une flotte de  $N$  robots coopérants. Pour représenter son évolution, on peut suivre l'hypothèse classique dans la modélisation mathématique qui suppose que le comportement futur peut être caractérisé uniquement à l'instant présent (noté  $t$ ) par un vecteur  $x(t)$  appartenant à un espace vectoriel de dimension finie  $\mathbb{R}^n$ . On appelle alors  $x(t)$  le vecteur d'état de l'ensemble des robots se déplaçant dans un espace donné. Ce vecteur  $x(t)$  rend compte de l'état de chacun des  $N$  robots pris individuellement, c'est-à-dire  $x(t) = [x_1(t), \dots, x_i(t), \dots, x_N(t)]$ . La composante  $x_i(t)$  du  $i^{\text{ème}}$  robot contient notamment sa position et sa vitesse. L'évolution de l'état de chacune des entités est alors décrite par le système d'équations :

$$\forall i = 1, \dots, N, \quad \dot{x}_i(t) = f(x_1(t), \dots, x_i(t), \dots, x_N(t)). \quad (\text{I})$$

Pour de nombreux systèmes, l'hypothèse d'un modèle à état de dimension finie (I) n'est plus valable. Dans l'exemple précédent, les retards induits par le réseau de communication impliquent que cette représentation est

---

<sup>1</sup>Le site de l'équipe SyNeR est disponible sur <http://syner.free.fr/>

<sup>2</sup>Le site du projet ROBOCOOP est disponible sur <http://syner.ec-lille.fr/robocoop/>

peu réaliste. En effet, les informations provenant des autres robots ne parviennent qu'un certain laps de temps après leur émission. Cette situation conduit alors à modifier le système (I) en un système plus complexe :

$$\forall i = 1, \dots, N, \quad \dot{x}_i(t) = f(x_1(t - \tau_1), \dots, x_{i-1}(t - \tau_{i-1}), x_i(t), x_{i+1}(t - \tau_{i+1}), \dots, x_N(t - \tau_N)). \quad (\text{II})$$

Les retards de transmission  $\tau_i$  dépendent souvent du temps  $t$  et sont fréquemment la cause d'une dégradation de performances.

Plus généralement, les systèmes à retards (ou "héréditaires") sont des systèmes dont la dynamique ne dépend plus uniquement de la valeur du vecteur  $x$  exprimée à l'instant présent  $t$ , mais aussi des valeurs passées de  $x(t)$  prises sur un certain horizon temporel. Les équations différentielles "décrivant" l'évolution du système dépendent de  $x_i(t - \tau_i)$ , avec  $\tau_i \geq 0$ . Dans ce cas, l'état à l'instant  $t$  est "décrit" par une fonction, notée  $x_t$ , définie sur l'intervalle  $[-\tau, 0]$ . Cette fonction  $x_t$  représente ainsi un état distribué et non plus localisé dans le temps. On retrouve de tels exemples de systèmes dans une multitude de domaines (chimie, biologie, transport, communication, mécanique, mécanique des fluides,...). Remarquons que les systèmes "à états de dimension finie" ne sont finalement en pratique que des modèles simplifiés de systèmes à état fonctionnel.

L'analyse de la stabilité des systèmes à retards peut être menée à l'aide de techniques issues de la seconde méthode de Lyapunov. Dans la littérature, on trouve de nombreux résultats concernant des retards constants ou variables, simples ou multiples. La pertinence des conditions obtenues dépend du type de systèmes considéré, du domaine d'application, mais aussi de leur conservatisme. Bien que focalisé sur l'aspect retard, l'objectif de ce mémoire est multiple. Il s'agit principalement de :

- déterminer des lois de commande stabilisante garantissant certaines caractéristiques (bornes de retards admissibles, performances en stabilité/stabilisation, robustesse) ;
- déduire également des techniques de reconstruction d'état (avec le même type de caractéristiques) ;
- trouver des situations concrètes dans lesquelles ces méthodes montrent leur intérêt ;
- contribuer à la réduction du conservatisme des théorèmes et à les utiliser pour résoudre des problèmes expérimentaux.

Le premier chapitre de ce mémoire est consacré à la présentation de bases théoriques sur les systèmes à retards. On y présentera les principaux outils pour l'étude de la stabilité ou de la stabilisation asymptotique basés sur les extensions aux systèmes à retards de la théorie des fonctions de Lyapunov.

Le deuxième chapitre traite du problème théorique de la stabilité et de la stabilisation exponentielles des systèmes linéaires à retards. Nous présenterons diverses méthodes qui assurent non seulement la convergence mais aussi une certaine rapidité de convergence.

Le troisième chapitre porte sur l'extension des résultats proposés au chapitre précédent à deux classes de systèmes non linéaires à retards. En particulier, on considérera les deux problèmes pratiques de l'incertitude provenant de l'identification de paramètres et la saturation de commande.

Dans le quatrième chapitre, on procède à l'étude des systèmes continus à commande échantillonnée. Une approche par retard variable est proposée qui permet d'utiliser les approches classiques des systèmes à retards au cas des systèmes échantillonnés. L'objectif pratique de ce chapitre est d'étudier qualitativement et quantitativement l'effet de la période d'échantillonnage sur le comportement asymptotique des solutions.

Le cinquième chapitre concerne l'observation des systèmes à retards. Nous présentons des résultats concernant le cas, fréquent dans la littérature, de retards connus mais aussi le cas, plus délicat, des retards inconnus.

Le dernier chapitre présente quelques problèmes expérimentaux pour lesquels les résultats théoriques présentés tout au long de ce mémoire trouvent finalement leur justification. En effet les retards ou les échantillonnages apparaissent fréquemment sur des plates-formes expérimentales. Nous nous pencherons particulièrement sur le problème de la commande d'un robot à distance et à travers un réseau internet , celui de la commande d'un pendule 2D dont les informations de sortie proviennent d'un capteur visuel induisant un retard et un phénomène d'échantillonnage et à la synthèse d'une loi de commande qui stabilise un pendule inversée malgré la présence d'un retard variable en entrée.



# Chapitre 1

## Stabilité des systèmes à retards

### 1.1 Introduction

Les phénomènes de retard apparaissent naturellement dans la modélisation de nombreux processus physiques. La biologie, l'écologie, les sciences de l'ingénieur ou les télécommunications sont des domaines où interviennent des équations différentielles dont l'évolution dépend non seulement de la valeur de leurs variables à l'instant présent  $t$ , mais aussi d'une partie de leur "histoire", c'est-à-dire des valeurs à un instant  $t' < t$ . Ces équations différentielles sont ainsi dites "héréditaires" ou "à arguments (ici temporels) différés" ou plus simplement "à retard".

En sciences de l'ingénieur, on constate que la plupart des commandes actuellement implantées le sont sur des calculateurs numériques. Par conséquent, même si un processus à réguler ne contient pas de retard intrinsèque, bien souvent des retards apparaissent dans la boucle de commande par l'intermédiaire des temps de réaction des capteurs ou des actionneurs (1), des temps de transmissions des informations (2) ou des temps de calculs (3). La Figure 1.1 permet de localiser les lieux où apparaissent ces retards. Ces retards peuvent quelquefois être négligés, mais lorsque leur taille devient significative au regard des performances temporelles du système (dynamiques en boucles ouverte et fermée) il n'est plus possible de les ignorer. On retrouve ici la problématique classique de la "dynamique des actionneurs", mais avec une complexité supplémentaire provenant, nous le verrons, de la nature des équations des systèmes héréditaires.

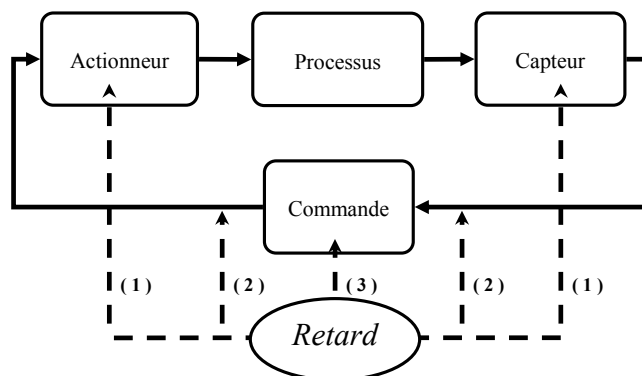


FIG. 1.1 – Illustration de la provenance des retards dans une boucle de contrôle.



Par ailleurs, les commandes implantées ne peuvent être vues comme des fonctions continues du temps du fait que le ordinateur travaille avec une fréquence limitée. Le temps d'échantillonnage correspond ainsi au temps nécessaire aux ordinateurs et aux convertisseurs analogique-numérique pour passer d'une valeur à la suivante. L'impact des périodes d'échantillonnage sur les performances d'un processus doit également être évalué. De plus la périodicité de l'échantillonnage n'est qu'une première approximation, qui ne peut pas être fondée dans le cas d'un processus à dynamiques rapides commandé par un système temps réel. Dans ce cas, l'ordonnancement des tâches peut aussi créer des variations de cadence non négligeables. Ici encore, une garantie des performances est souhaitable. Nous aborderons ce point au Chapitre 4.

### Exemple d'un processus commandé par retour visuel

Considérons un premier exemple de système où le retard apparaît dans la boucle de commande. Le développement des technologies dans le domaine de l'imagerie a motivé l'utilisation de caméras comme capteurs ([83], Chapitre 1). La Figure 1.2 est un exemple de plateforme expérimentale disponible au LAGIS [19], [20].

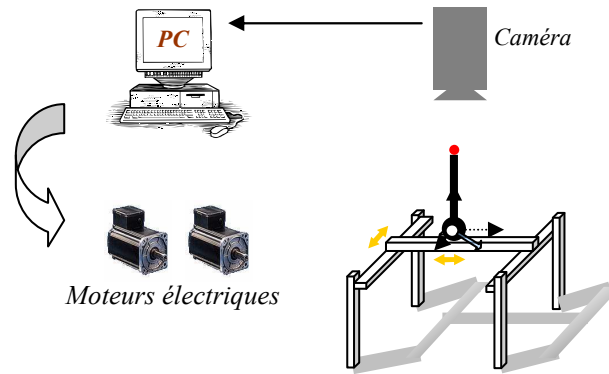


FIG. 1.2 – Système à retour visuel

Il s'agit d'un pendule inversé dont le point bas se déplace sur le plan horizontal. Sur le point haut de la barre du pendule sont disposés des émetteurs reconnus par la caméra. Dans une première phase, les informations échantillonnées issues du capteur caméra doivent être interprétées et modifiées en vue de délivrer des données utilisables par le contrôleur. Cette opération nécessite des temps de calcul non négligeables qui introduisent des retards dans la boucle de commande. La Figure 1.3a présente une modélisation de cette partie. La Figure 1.3b montre la différence entre la sortie réelle mais indisponible  $y$  et la sortie retardée et échantillonnée  $z$ .

Il est évident que l'utilisation de la sortie  $z$  peut poser des problèmes dans le calcul de la commande. On en déduit la nécessité de l'analyse de ces systèmes et de trouver des solutions garantissant un meilleur contrôle. Nous reviendrons sur cet exemple dans le Chapitre 6 où une solution a été développée en collaboration avec A. Chamroo [20].

### Exemple d'un système commandé à travers un réseau de communication

Dans un autre registre, le contrôle à distance est un moyen de réaliser sans danger des tâches en environnement hostile (déminage, dépollution par exemple), d'admettre des utilisateurs délocalisés (enseignement, chirurgie...) ou encore de faire collaborer plusieurs applications d'un système informatique distribué. Bien-sûr, le

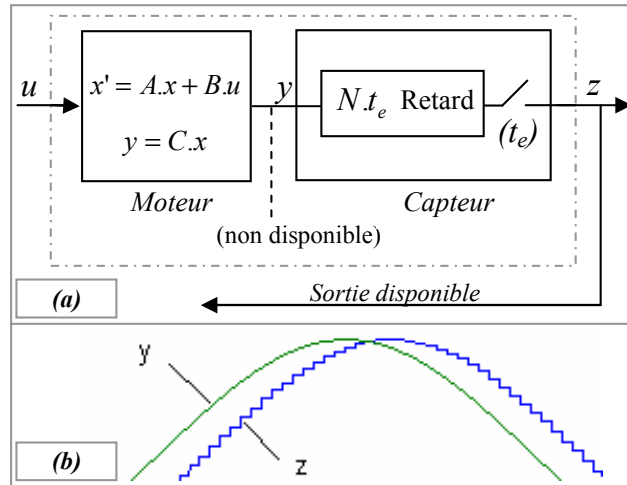


FIG. 1.3 – Sortie du pendule 2D [19]

transfert informatique des données (capteurs ou commande) par le réseau nécessite l'échantillonnage des sorties capteur et des commandes générées. Il faut ajouter à cela l'apparition de retards intervenant dans une ligne de communication [14], [107], [134] et [135]. Dans des communications à travers un réseau *internet*, ces retards sont généralement variables et constituent un facteur non négligeable de dégradation des performances.

Le nombre croissant d'articles concernant la commande de systèmes en réseau ("Networked Control Systems") montre l'intérêt porté à ce domaine<sup>1</sup>. Cette problématique pose des problèmes dans l'analyse de la stabilité d'un système tel que le système Maître-Esclave présenté Figure 1.4. C'est pourquoi le problème de la commande à distance constitue un enjeu actuel de l'automatique des systèmes à retards. Il sera également l'objet d'une étude au Chapitre 6.

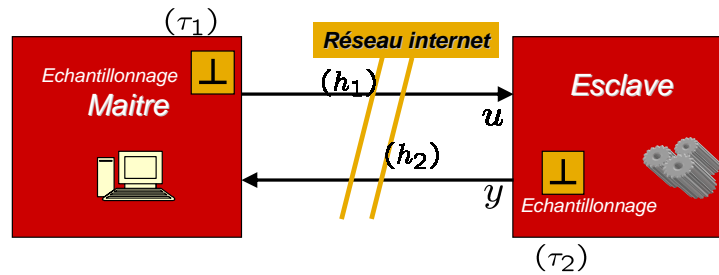


FIG. 1.4 – Système commandé à distance

Ce mémoire concerne la stabilité, la commande et l'observation des systèmes à retards ainsi que quelques unes des applications qui en découlent. La suite de ce premier chapitre s'articule en deux parties visant à situer nos travaux fondamentaux dans un cadre relativement général.

La partie 1.2 est consacrée à la modélisation. Nous y présenterons les différentes classes de systèmes et de retards que l'on rencontre dans la littérature.

<sup>1</sup>On pourra consulter à ce sujet les chapitres d'introduction de [153]

La partie 1.3 concerne les approches de type Lyapunov et rappelle quelques résultats concernant la stabilité des systèmes à retards. Ces méthodes récentes permettent de réduire le conservatisme inhérent à cette approche (conditions suffisantes et non nécessaires) et de prendre aussi en compte le fait que le retard est une fonction variant dans le temps.

## 1.2 Modélisation des systèmes à retards

Dans cette partie, nous allons présenter les différents types de systèmes à retards rencontrés dans la littérature. Nous n'exposerons pas le problème de Cauchy associé aux différents classes de systèmes, initialement étudié par Mishkis [108]. Le lecteur se référera aux ouvrages [10], [85] ou [126] sur les conditions d'existence et d'unicité des solutions.

### 1.2.1 Les systèmes de type retardé

Comme nous l'avons dit, les systèmes retardés sont des systèmes dynamiques régis par des équations différentielles fonctionnelles portant à la fois sur des valeurs présentes et passées du temps. Si nous supposons que la dérivée du vecteur d'état peut être explicitée à chaque instant  $t$ , de tels systèmes sont régis par des équations différentielles de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t, u_t), \\ x_{t_0} = \phi(\theta) \text{ pour } \theta \in [t_0 - \tau, t_0], \\ u_{t_0} = \zeta(\theta) \text{ pour } \theta \in [t_0 - \tau, t_0], \end{cases} \quad (1.2.1)$$

où  $\tau > 0$  et les fonctions  $x_t$  et  $u_t$  sont définies par (notation de Shimanov, [137]) :

$$x_t : \begin{cases} [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \theta \mapsto x_t(\theta) = x(t + \theta), \end{cases} \quad (1.2.2)$$

$$u_t : \begin{cases} [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \theta \mapsto u_t(\theta) = u(t + \theta). \end{cases} \quad (1.2.3)$$

Nous noterons par la suite  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^0([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$  l'ensemble des fonctions continues de  $[-\tau, 0]$  dans  $\mathbb{R}^n$ . La fonction  $x_t \in \mathcal{C}$  représente l'état du système à l'instant  $t$ ,  $u_t$  est l'entrée (commande et perturbations<sup>2</sup>) du système. Les conditions initiales  $\phi$  et  $\zeta$  à l'instant  $t_0$  sont des fonctions de  $[t_0 - \tau, t_0]$  vers  $\mathbb{R}^n$  et supposées continues par morceaux.

Les systèmes héréditaires appartiennent donc à la classe des systèmes de dimension infinie ou systèmes fonctionnels.

### 1.2.2 Systèmes de type neutre

Les systèmes neutres sont aussi des systèmes héréditaires. La différence avec le cas des systèmes retardés vient des arguments du champ de vecteur  $f$ , qui, cette fois-ci, font aussi intervenir la dérivée de l'état  $x_t$  et, par conséquent, des dérivées retardées de  $x(t)$ . On les représente alors par des équations différentielles de la forme :

---

<sup>2</sup>Les perturbations peuvent aussi être modélisées par la présence du premier argument de la fonction  $f$ , sous forme d'un système non stationnaire.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(t, x_t, \dot{x}_t, u_t), \\ x_{t_0} &= \phi(\theta) \text{ pour } \theta \in [-\tau, 0], \\ u_{t_0} &= \zeta(\theta) \text{ pour } \theta \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (1.2.4)$$

La présence de l'argument  $\dot{x}_t$  rend l'analyse de ces systèmes plus complexe. Une autre formulation possible est celle définie par Hale et Lunel [73] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}x_t = f(t, x_t, u_t), \end{array} \right. \quad (1.2.5)$$

où  $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un opérateur régulier. On peut citer le cas particulier linéaire qui s'écrit :

$$\mathcal{F}x_t = x(t) - Dx(t - g), \quad (1.2.6)$$

où  $D$  est une matrice constante et  $g > 0$  un retard.

La stabilité d'un tel système nécessite que l'opérateur  $\mathcal{F}$  vérifie des conditions restrictives du fait de l'équation aux différences par rapport à  $\dot{x}(t)$ , soit  $\mathcal{F}x_t = 0$  [85][108]. Pour reprendre l'exemple de l'opérateur linéaire (1.2.6), il est nécessaire que les valeurs propres de la matrice  $D$  soient incluses à l'intérieur du cercle unité (critère de Schur-Cohn, critère de Jury [111],[125]) pour obtenir des propriétés de convergence de (1.2.5).

### 1.2.3 Modèles linéaires invariants à retards discrets

Les retards discrets correspondent au cas où le support de  $x_t$  et  $u_t$  a une mesure nulle et peut se réduire à un nombre fini de point. Dans le cas des systèmes linéaires invariants (en anglais "Linear Time-Invariant", LTI), les équations différentielles à retards discrets sont de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^q D_i \dot{x}(t - \omega_i) + \sum_{j=0}^r (A_j x(t - \tau_j) + B_j u(t - \tau_j)), \\ y(t) &= \sum_{j=0}^r C_j x(t - \tau_j), \end{cases} \quad (1.2.7)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  et  $y \in \mathbb{R}^p$  représentent respectivement le "vecteur d'état instantané" [87], le vecteur de commande et le vecteur de sortie du système,  $\tau_0 = 0$  et les matrices d'état  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , de commande  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , des termes neutres  $D_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et de sortie  $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$  sont des matrices constantes. Les retards  $\tau_j > 0$  et  $\omega_i > 0$ , bien que pouvant éventuellement varier<sup>3</sup> dans le temps, sont des retards discrets (ou "ponctuels") en ce sens que le système différentiel (1.2.7) ne nécessite, pour le calcul de  $\dot{x}(t)$  à l'instant  $t$ , qu'une information discrète sur l'état fonctionnel  $x_t$  et de sa dérivée, dans le cas neutre.

**Remarque 1.2.1** *Le retard peut intervenir d'une autre manière dans les équations d'états. On mentionne les retards distribués qui font intervenir dans le système d'équation (1.2.7) des termes de la forme  $\int_{t-\sigma}^t G(\theta)x(\theta)d\theta$ . Dans ce mémoire, l'analyse de ces retards ne sera pas abordée. On pourra par exemple se référer à [111] pour quelques critères concernant les systèmes à retards distribués et à [153] pour leur application en tant que prédicteurs.*

Dans le cas "simplement" retardé, le système (1.2.7) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \sum_{i=0}^r (A_i x(t - \tau_i) + B_i u(t - \tau_i)), \\ y(t) &= \sum_{i=0}^r C_i x(t - \tau_i). \end{cases} \quad (1.2.8)$$

<sup>3</sup>Si le retard varie, le système n'est plus à proprement parler "invariant" (LTI) mais nous avons préféré cet abus de langage à une appellation plus lourde comme "systèmes linéaires à gains constants et à retards variables"

### 1.2.4 Modèles non linéaires, non stationnaires

Afin de se rapprocher du comportement des processus réels, il nous paraît intéressant de proposer des modèles dont les paramètres peuvent varier au cours du temps et avec l'état. Les modèles non linéaires autorisent un plus grand domaine d'analyse puisque leur validité ne se réduit pas à un voisinage du point d'équilibre ou de la trajectoire de référence. Ils permettent, après transformations, de considérer des fonctionnements plus globaux.

La différence avec les systèmes linéaires est que les matrices  $A_i$ ,  $B_i$  et  $C_i$  deviennent des fonctions du temps et/ou de l'état et généralement continues (ou continues par morceaux) en leurs arguments. Les équations définissant ces modèles, dans le cas d'un retard simple (c'est-à-dire  $r = 1$ ) sur l'état et sur l'entrée, se présentent de la manière suivante [69] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(t, x_t)x(t) + B(t, x_t)u(t) + A_\tau(t, x_t)x(t - \tau) + B_\tau(t, x_t)u(t - \tau), \\ y(t) &= C(t, x_t)x(t), \end{cases} \quad (1.2.9)$$

Afin de faciliter l'étude de ces systèmes, nous utiliserons deux modélisations sensiblement différentes. La première est la modélisation polytopique. Elle consiste à exprimer les fonctions matricielles comme une somme pondérée de matrices constantes. La seconde est la modélisation par systèmes à paramètres incertains.

#### Les modèles polytopiques

La modélisation polytopique [140] transforme un système de la forme (1.2.9) en un système multimodèle, c'est-à-dire une somme de modèles linéaires pondérés de façon non constante [140]. Ceci s'exprime de la manière suivante [69] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \sum_{i=0}^r \lambda_i(t, x_t) \{A_i x(t) + B_i u(t) + A_{\tau,i} x(t - \tau) + B_{\tau,i} u(t - \tau)\}, \\ y(t) &= \sum_{i=0}^r \lambda_i(t, x_t) \{C_i x(t)\}, \end{cases} \quad (1.2.10)$$

où les fonctions scalaires  $\lambda_i(t, x_t)$ , pour  $i = 1, \dots, r$ , sont des fonctions de pondération vérifiant les conditions de convexité :

$$\sum_{i=0}^r \lambda_i(t, x_t) = 1 \quad \text{et} \quad \forall i = 1, \dots, r, \quad \lambda_i(t, x_t) \geq 0. \quad (1.2.11)$$

Si les fonctions matricielles  $A(t, x_t)$ ,  $A_\tau(t, x_t)$ ,  $B(t, x_t)$ ,  $B_\tau(t, x_t)$  sont continues, les fonctions  $\lambda_i(t, x_t)$  le sont elles aussi. Par la suite, l'objectif sera de faire ressortir des propriétés communes à tous les sous-modèles linéaires<sup>4</sup> pour en déduire celles du système (1.2.10). Cette modélisation va notamment permettre d'élaborer des conditions de stabilité exponentielle pour les systèmes à retards variables.

#### Les modèles à paramètres incertains bornés en norme

La modélisation par paramètres incertains considère que chaque fonction matricielle définissant le système (1.2.9) est la somme d'une matrice constante représentant le comportement nominal et d'une matrice dépendant de  $t$  et de  $x_t$  représentant les perturbations par rapport au système nominal. Il s'exprime alors de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (A + \Delta A(t, x_t))x(t) + (A_\tau + \Delta A_\tau(t, x_t))x(t - \tau) \\ &\quad + (B + \Delta B(t, x_t))u(t) + (B_\tau + \Delta B_\tau(t, x_t))u(t - \tau), \\ y(t) &= (C + \Delta C(t, x_t))x(t), \end{cases} \quad (1.2.12)$$

<sup>4</sup>Le sous-modèle  $S_i$  correspond au cas  $\lambda_i = 1$

où les matrices  $A$ ,  $A_\tau$ ,  $B$ ,  $B_\tau$  et  $C$  sont des matrices constantes de dimension appropriée. Les matrices représentant les perturbations sont généralement présentées sous la forme [69] :

$$\begin{aligned}\Delta A(t, x_t) &= G\Delta(t, x_t)D, & \Delta A_\tau(t, x_t) &= G_\tau\Delta(t, x_t)D_\tau, \\ \Delta B(t, x_t) &= H\Delta(t, x_t)E, & \Delta B_\tau(t, x_t) &= H_\tau\Delta(t, x_t)E_\tau, \\ \Delta C(t, x_t) &= J\Delta(t, x_t)F,\end{aligned}\tag{1.2.13}$$

où  $\Delta(t, x_t)$  est une matrice qui vérifie :

$$\forall t, \quad \Delta^T(t, x_t)\Delta(t, x_t) \leq I_n.\tag{1.2.14}$$

Les amplitudes de variation des coefficients de perturbations sont ainsi reportées dans les matrices  $(G, D)$ ,  $(G_\tau, D_\tau)$ ,  $(H, E)$ ,  $(H_\tau, E_\tau)$ ,  $(J, F)$ . Cette représentation est généralement utilisée dans le problème de la synthèse de lois de commande [35]. Elle permet en effet de caractériser la robustesse par rapport à des incertitudes paramétriques. De plus, cette modélisation sera elle-aussi utile pour établir d'autres conditions de stabilité exponentielle pour les systèmes à retards variables.

### 1.2.5 Modèles de retards

Dans cette partie, nous présenterons succinctement les différents modèles de retards discrets que l'on rencontre dans la littérature.

- a) Retards *constants* :** Les premières études sur la stabilité des systèmes à retards concernaient principalement des retards *constants*. On compte de nombreux critères fréquentiel [24], LMI [69], [111] développés pour des retards constants connus ou inconnus (à borne connue ou non). Depuis le milieu des 90, différentes conditions, présentées sous forme LMI, de stabilité robuste de systèmes linéaires à retards constants mais incertains ont été développées [86],[92] et [111]. Dans la plupart des cas réellement rencontrés, seule une partie récente du passé exerce une influence sur le comportement du système. On parle alors d'équations à retards majorés ou bornés s'il existe un nombre réel  $\tau > 0$  tel que dans les équations (1.2.1) et (1.2.4) les fonctionnelles  $x_t$  et  $\dot{x}_t$  sont définies sur l'intervalle  $[-\tau, 0]$ .
- b) Retards variables *majorés* :** Comme la constance du retard est une hypothèse rarement vérifiée dans la réalité (communications *internet* [99] et modèles de vannes [4] pour ne citer que deux exemples), le cas des retards variables (connus ou inconnus) a fait lui aussi l'objet de nombreuses recherches. On définit les retards *majorés* pour lesquels il existe un réel connu  $\tau_2 > 0$  tel que [79] :

$$0 \leq \tau(t) \leq \tau_2.\tag{1.2.15}$$

Certains auteurs rajoutent des conditions de régularité sur ces fonctions de retards, comme nous le verrons dans cette description.

- c) Retards variables *bornés* :** Une grande partie des résultats existant supposent que les retards varient dans un intervalle  $[0, \tau_2]$ . Or les retards apparaissant dans des processus réels sont le plus souvent dus à des phénomènes de transfert d'information ou de matière. Le fait d'autoriser le retard à prendre la valeur 0 revient à supposer qu'à un moment ce transfert se fait de manière instantanée. Dans ce contexte et à condition bien sûr que cela conduise à des critères moins restrictifs, il paraît intéressant de se donner une borne inférieure du retard pour ensuite se donner les moyens de mesurer son impact sur la stabilité du

système. On définit alors les retards *bornés*, les retards  $\tau(t)$  pour lesquels il existe deux réels  $\tau_1$  et  $\tau_2$  tels que :

$$0 < \tau_1 \leq \tau(t) \leq \tau_2. \quad (1.2.16)$$

Ce n'est que récemment que des chercheurs ont obtenus des solutions à ce problème [49], [54], [80]. La méthode proposée dans ces articles est identique. Elle consiste à transformer le retard  $\tau(t)$  en une somme de deux retards. Le premier peut être assimilé à un retard nominal et le second comme étant une perturbation bornée par rapport au retard nominal.

**d) Retards variables avec contrainte sur la dérivée :** De nombreux résultats nécessitent une condition sur la dérivée de la fonction retard. On suppose alors qu'il existe un réel  $d$  tel que :

$$\dot{\tau}(t) \leq d < 1. \quad (1.2.17)$$

Si l'on regarde la fonction  $f(t) = t - \tau(t)$ , la condition précédente implique que  $f$  est une fonction strictement croissante. Cela signifie que les informations retardées arrivent dans un ordre chronologique.

**e) Retards variables *continus par morceaux* :** Ces retards apparaissent notamment lors de l'échantillonnage d'un signal. Ce cas particulier autorise notamment la dérivée du retard à prendre la valeur 1 : (critique au vu de la contrainte précédente).

$$\dot{\tau}(t) \leq 1. \quad (1.2.18)$$

Ce cas sera traité dans le Chapitre 4.

Généralement, les contraintes faites sur les retards sont des combinaison des différents modèles présentés. On trouve dans la littérature des résultats qui allient

Dans ce mémoire, on évitera le plus souvent possible la contrainte **d)**. Généralement notre travail s'adressera aux cas alliant **b)**, **c)** et **e)**

## 1.3 Stabilité des systèmes à retards par la seconde méthode de Lyapunov

Dans cette partie, nous allons rappeler quelques résultats concernant la stabilité asymptotique des systèmes à retards en se focalisant sur l'approche temporelle liée à la seconde méthode de Lyapunov.

### 1.3.1 Seconde méthode de Lyapunov

Considérons le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), x_t), \\ x_{t_0}(\theta) &= \phi(\theta), \text{ pour } \theta \in [-\tau, 0], \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

dont nous supposons qu'il admet une solution unique et un état d'équilibre  $x_t = 0$  (si le système admet un autre point d'équilibre, nous pouvons nous ramener par un changement de variables).

La seconde méthode de Lyapunov repose sur l'existence d'une fonction  $V$  définie positive telle que le long des trajectoires de (1.3.1), on ait  $\frac{dV}{dt} < 0$ , si  $x \neq 0$ . Cette méthode directe n'est valable que pour une classe

restreinte de systèmes héréditaires car  $\frac{dV}{dt}$  dépend des valeurs passées  $x_t$ . Elle est donc très difficile à appliquer dans le cas général des systèmes à retards. Deux extensions à la seconde méthode de Lyapunov ont alors été développées dans le cadre des équations différentielles à retards. Dans le cas des équations ordinaires (c'est-à-dire sans retard), la fonction  $V = V(t, x(t))$  ne dépend que d'arguments présents. Dans le cas retardé, deux types d'approches sont possibles :  $V = V(t, x(t))$  ou  $V = V(t, x_t)$ . Le premier cas conduit à une difficulté d'analyse liée au fait que la dérivée dépend des instants passés. Le second cas reporte cette difficulté dans la conception de la fonction  $V$ . Ces deux approches, respectivement développées par Razumikhin et Krasovskii, vont être brièvement rappelées dans les deux paragraphes suivants.

### 1.3.2 Approche par fonctions de Razumikhin

Dans cette approche, nous nous placerons dans  $\mathbb{R}^n$  en considérant une fonction de Lyapunov  $V(t, x(t))$  classiques pour les équations différentielles ordinaires. Toutefois le théorème suivant montre qu'il est inutile de vérifier que  $\dot{V}(t, x(t)) \leq 0$  le long de toutes les trajectoires du système. Effectivement, ce test peut se restreindre aux solutions qui ont tendance à quitter un voisinage de  $V(t, x(t)) \leq c$  du point d'équilibre.

**Théorème 1.3.1** [85] *Soient  $u, v$  et  $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  des fonctions croissantes, telles que  $u(\theta)$  et  $v(\theta)$  soient strictement positives pour tout  $\theta > 0$ . Supposons que le champ de vecteur  $f$  de (1.3.1) est borné pour des valeurs bornées de ses arguments.*

*S'il existe une fonction continue  $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que :*

$$a) u(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi\|),$$

$$b) \dot{V}(t, \phi) \leq -w(\|\phi(0)\|) \text{ pour toutes les trajectoires de (1.3.1) vérifiant :}$$

$$V(t + \theta, \phi(t + \theta)) \leq V(t, \phi(t)), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0], \quad (1.3.2)$$

*alors la solution nulle de (1.3.1) est uniformément stable.*

*De plus si  $w(\theta) > 0$  pour tout  $\theta > 0$  et s'il existe une fonction  $p : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  strictement croissante avec  $p(\theta) > \theta$  pour tout  $\theta > 0$  telle que :*

$$i) u(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi\|),$$

$$ii) \dot{V}(t, \phi) \leq -w(\|\phi(0)\|), \text{ pour toutes les trajectoires de (1.3.1) vérifiant :}$$

$$V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq p(V(t, x(t))), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0], \quad (1.3.3)$$

*alors une telle fonction  $V$  est appelée fonction de Lyapunov-Razumikhin et la solution nulle de (1.3.1) est uniformément asymptotiquement stable.*

Dans la pratique, les fonctions  $p$  les plus souvent utilisées sont celles de la forme  $p = q\theta$  où  $q$  est une constante strictement supérieure à 1. de plus les fonctions de Lyapunov recherchées dans l'approche de Razumikhin sont souvent des fonctions quadratiques de la forme :

$$V(t) = x^T P x(t), \quad (1.3.4)$$

où  $P$  est une matrice symétrique définie positive. L'équation (1.3.3) devient la plupart du temps :

$$x^T(t + \theta) P x(t + \theta) \leq q x^T(t) P x(t), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0], \quad \text{et } q > 1. \quad (1.3.5)$$



Ainsi dans l'approche de Lyapunov-Razumikhin, la négativité n'est requise que pour les trajectoires qui, à l'instant  $t$ , appartiennent à un certain espace défini par l'évolution du système sur l'intervalle  $[t - \tau, t]$ .

Même si l'approche Lyapunov-Razumikhin conduit généralement à des résultats plus conservatifs que ceux tirés de l'approche de Lyapunov-Krasovskii, présentée au paragraphe suivant, elle permet de prendre en compte des retards variables sans restriction sur la dérivée du retard (1.2.17). Il a par ailleurs été montré que, pour des retards constants, l'existence d'une fonction de Lyapunov-Razumikhin entraîne celle d'une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii [34]. Cependant, dans la littérature, la stabilité des systèmes à retards fait plus généralement appel à des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii.

### 1.3.3 Approche par fonctionnelles de Krasovskii

La méthode de Krasovskii est une extension de la seconde méthode de Lyapunov pour les équations différentielles fonctionnelles. Elle consiste à rechercher des fonctionnelles  $\mathcal{V}(t, x_t)$  qui décroissent le long des solutions de (1.3.1).

**Théorème 1.3.2** [85] *Soient  $u, v, w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  des fonctions continues croissantes;  $u(\theta)$  et  $v(\theta)$  sont strictement positives pour  $\theta > 0$  et  $u(0) = v(0) = 0$ . Supposons que le champ de vecteur  $f$  de (1.3.1) soit borné pour des valeurs bornées de ses arguments.*

*S'il existe une fonctionnelle continue  $\mathcal{V} : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que :*

$$a) u(\|\phi(0)\|) \leq \mathcal{V}(t, \phi) \leq v(\|\phi\|),$$

$$b) \dot{\mathcal{V}}(t, \phi) \leq -w(\|\phi(0)\|) \text{ pour tout } t \geq t_0 \text{ le long des trajectoires de (1.3.1),}$$

*alors la solution nulle de (1.3.1) est uniformément stable. Si de plus  $w(\theta) > 0$  pour tout  $\theta > 0$ , alors la solution nulle de (1.3.1) est uniformément asymptotiquement stable.*

*Si  $\mathcal{V}$  vérifie plutôt les conditions :*

$$i) u(\|\phi(0)\|) \leq \mathcal{V}(t, \phi) \leq v(\|\phi\|),$$

$$ii) \dot{\mathcal{V}}(t, \phi) \leq -w(\|\phi(0)\|), \text{ pour tout } t \geq t_0 \text{ et } w(\theta) > 0 \text{ pour tout } \theta > 0,$$

$$iii) \mathcal{V} \text{ est lipschitzienne par rapport à son second argument,}$$

*alors la solution nulle de (1.3.1) est exponentiellement stable.*

$$\dot{\mathcal{V}}(t, \phi) \text{ est ici une dérivée au sens de Dini, } \dot{\mathcal{V}}(t, \phi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sup \frac{\mathcal{V}(t+\epsilon, x_{t+\epsilon}) - \mathcal{V}(t, x_t)}{\epsilon}.$$

*Une telle fonctionnelle  $\mathcal{V}$  est appelée fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii.*

L'idée principale de ce théorème est donc de déterminer une fonctionnelle  $\mathcal{V}$  définie positive dont la dérivée le long des trajectoires de (1.3.1) est définie négative. Le principal problème dans l'application de ce théorème est la conception, lorsqu'elle existe, de la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii  $\mathcal{V}$ . Les fonctionnelles recherchées sont généralement de la forme suivante ([88], section 2.2.2) :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(t, \phi) = & \phi^T(0)P(t)\phi(0) + \phi^T(0) \left( \int_{-\tau}^0 Q(t, \sigma)\phi(\sigma)d\sigma \right) + \left( \int_{-\tau}^0 \phi^T(\sigma)Q^T(t, \sigma)d\sigma \right) \phi(0) \\ & + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \phi^T(\sigma)R(t, \sigma, \rho)\phi(\rho)d\sigma d\rho + \int_{-\tau}^0 \phi^T(\zeta)S(\zeta)\phi(\zeta)d\zeta, \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

où  $P, Q, R$  et  $S$  sont des matrices carrées de dimension  $n \times n$ .  $P(t)$  et  $S(\zeta)$  sont symétriques définies positives.  $R$  vérifie  $R(t, \sigma, \rho) = R^T(t, \rho, \sigma)$ . On suppose que chacun des éléments de ces matrices est borné et admet une dérivée continue par morceaux et bornée.

Dans la pratique, la recherche de ces fonctions pose des problèmes difficiles à résoudre. On préfère se restreindre aux fonctionnelles dont les fonctions matricielles  $P$ ,  $Q$  et  $R$  sont des matrices constantes. On se propose alors de trouver une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii de la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(t, \phi) = & \phi^T(0)P\phi(0) + \int_{-\tau}^0 \phi^T(\sigma)S\phi(\sigma)d\sigma + \phi^T(0) \int_{-\tau}^0 Q\phi(\sigma)d\sigma \\ & + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \phi^T(\sigma)R\phi(\rho)d\sigma d\rho, \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

où les matrices  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  et  $S$  sont symétriques définies positives.

**Remarque 1.3.3** *Des récents travaux [54], [50], [68], [69] ont permis de réduire le conservatisme relatif au choix des matrices  $P, Q$  et  $R$  constantes. La méthode consiste à définir des fonctions matricielles continues par morceaux .*

Tout au long de ce mémoire, les problèmes qui seront résolus feront intervenir une fonctionnelle de la forme (1.3.7) pour des systèmes de la forme (1.2.7), (1.2.10) et (1.2.12).

### 1.3.4 Extensions des théorèmes de Lyapunov

Les deux approches temporelles basées sur le second théorème de Lyapunov, combinées avec des méthodes d'optimisation convexe appelées inégalités matricielles linéaires (voir les ouvrages généraux [13],[63] et l'annexe A), permettent d'établir des critères systématiques de stabilité et de stabilisation pour les systèmes à retard. De nombreuses applications et extensions ont été proposées :

- Les problèmes de la stabilité et de la stabilisation robuste vis-à-vis d'incertitudes paramétriques sur les modèles peuvent être traités d'une manière analogue en utilisant des systèmes de la forme (1.2.10) ou (1.2.12).
- Le cas de la commande  $H^\infty$ , quelquefois traité en fréquentiel [151], peut être aussi étudié dans un cadre temporel. Une loi de commande est construite pour assurer la stabilité robuste avec un certain taux d'atténuation des perturbations exogènes [56], [91], [92].
- La finesse de ces critères est largement dépendante du choix des fonctions, des fonctionnelles de Lyapunov ou des diverses méthodes de majoration conduisant à des LMI.
- La stabilisation à coût garanti.
- La stabilisation en temps fini [106].
- La stabilité entrée-état (ISS) [157], [69].

### 1.3.5 Deux transformations sur le modèle

Il est bien évident que notre objectif n'est pas de présenter une liste exhaustive de critères de stabilité et de stabilisation de systèmes à retards. Cependant, nous présenterons dans la suite de ce chapitre, quelques critères de stabilité asymptotique et quelques techniques qui auront retenu notre attention.

Nous rappellerons des conditions permettant de caractériser la stabilité asymptotique du système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_\tau x(t - \tau(t)), \\ x(\theta) &= \phi(\theta), \quad \forall \theta \in [\tau_2, 0]. \end{cases} \quad (1.3.8)$$

Dans (1.3.8), le retard  $\tau(t)$  sera considéré comme constant, puis variant dans le temps *majoré* et enfin *borné*. Les critères que nous exposerons utilisent l'outil LMI.

### Modèle descripteur

La “modélisation descripteur” (en anglais “descriptor form”) est une technique développée en 2001 par E. Fridman [47], [56], [57]. L'idée consiste à réécrire le système (1.3.8) de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = z(t), \\ 0 \times \dot{z}(t) = -z(t) + Ax(t) + A_\tau(t, x_t)x(t - \tau(t)). \end{cases} \quad (1.3.9)$$

En considérant maintenant la variable élargie  $\bar{x}(t) = \text{col}\{x(t), z(t)\}$ , on remarque que cette transformation augmente la dimension du système étudiées sans rajouter de dynamiques additionnelles. .

Ensuite, en utilisant une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii adaptée, on montre la stabilité asymptotique du système décrit par l'équation (1.3.9) qui est équivalente à celle décrite par l'équation (1.3.8). Pour le cas des systèmes à retards constants, la modélisation descripteur conduit aux conditions de stabilité asymptotique que nous rappellerons dans le lemme 1.3.4. Nous présenterons alors les avantages sur l'intérêt d'une telle transformation dans la section suivante.

### Transformation de Leibniz

Cette transformation [66], [67] est très utile dans la construction de critères de stabilité dépendent du retard. Elle permet d'écrire le système (1.3.8) comme un système à retard distribué :

$$x(t - \tau(t)) = x(t) - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds. \quad (1.3.10)$$

La dérivée  $\dot{x}$  peut ensuite être exprimée selon (1.3.8) et ce genre de transformations peut conduire à des modifications importantes du système. Il est nécessaire de s'assurer de sa bonne utilisation. Par exemple, si l'on remplace  $\dot{x}(s)$  dans (1.3.10) par son expression dans (1.3.8), on introduit des dynamiques additionnelles [70][71] et on transforme le système initial soumis à un retard variant dans  $[-\tau_2, 0]$  à un nouveau système soumis à un retard variant dans  $[-2\tau_2, 0]$ . La définition des conditions initiales étant différente, il faut s'assurer de la justification de cette modification. Pour plus de détails, on se référera à [111]. D'autre part, même si de nombreux efforts ont été menés pour étudier le conservatisme introduit lors des calculs [127], [160], les théorèmes rencontrés peuvent être *conservatifs*.

### 1.3.6 Stabilité asymptotique des systèmes à retards *majorés*

**Lemme 1.3.4** [57] *Le système (1.3.8) est asymptotiquement stable pour tout retard  $\tau$  constant inférieur à  $\tau_2$ , s'il existe des matrices de dimension  $n \times n$ , symétriques définies positives  $P_1, S$  et  $R$ , et des matrices de dimension  $n \times n$ ,  $P_2, P_3, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$  et  $Z_3$  telles que les conditions LMI suivantes soient satisfaites :*

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 & P^T \begin{bmatrix} 0 \\ A_1 \end{bmatrix} - Y_1^T \\ * & -S_1 \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} R & Y \\ * & Z \end{bmatrix} \geq 0, \quad (1.3.11)$$

où les matrices  $Y, Z$  et  $\Psi_1$  sont données par :

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= P^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 & -I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 & -I_n \end{bmatrix}^T P + \tau_2 Z + \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & \tau_2 R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix}^T, \\ Y &= [Y_1 \ Y_2], \quad Z = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_2^T & Z_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

**Démonstration.** La démonstration utilise une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii de la forme :

$$V(t) = \bar{x}^T(t)EP\bar{x}(t) + \int_{t-\tau_2}^t x^T(s)Sx(s)ds + \int_{-\tau_2}^0 \int_{t+\theta}^t z^T(s)Rz(s)dsd\theta, \quad (1.3.13)$$

où  $E = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  et où le vecteur  $\bar{x}(t)$  est donné par  $\text{col}\{x(t), z(t)\}$ . Pour plus de détails, nous invitons le lecteur à se référer à [57]. ■

Dans le cas de systèmes à retards variables, on introduit la condition supplémentaire  $\dot{\tau}(t) \leq d < 1$ . On obtient alors le lemme suivant :

**Lemme 1.3.5** [57] *Le système (1.3.8) est asymptotiquement stable pour tout retard variable vérifiant  $\tau(t) \leq \tau_2$  et  $\dot{\tau}(t) \leq d < 1$ , s'il existe des matrices de dimension  $n \times n$ , symétriques définies positives  $P_1$ ,  $S$  et  $R$ , et des matrices de dimension  $n \times n$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$  et  $Z_3$  telles que les conditions LMI suivantes soient satisfaites :*

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 & P^T \begin{bmatrix} 0 \\ A_1 \end{bmatrix} - Y_1^T \\ * & -(1-d)S_1 \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} R & Y \\ * & Z \end{bmatrix} \geq 0, \quad (1.3.14)$$

où les matrices  $Y$ ,  $Z$  et  $\Psi_1$  sont données par (1.3.12).

Il est possible de réduire le conservatisme des conditions de stabilité asymptotique et aussi d'éliminer la condition sur la dérivée du retard  $\dot{\tau}(t) \leq d < 1$ . Ceci sera illustré dans le paragraphe suivant.

### 1.3.7 Stabilité asymptotique des systèmes à retards bornés

Considérons le système neutre à retard :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - F\dot{x}(t - g(t)) &= A_0x(t) + A_1x(t - \tau_1(t)) + BKx(t - \tau_2(t)), \\ \tau_i(t) &\in [\delta_i - \mu_i, \delta_i + \mu_i]. \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

où les retards  $\tau_i$  sont de la forme  $\tau_i(t) = \delta_i + \eta_i(t)$ , pour  $i = 1, 2$  avec  $|\eta_i(t)| \leq \mu_i$ . Les retards constants  $\delta_i$  sont les valeurs nominales des retards  $\tau_i$ . Les fonctions  $\eta_i(t)$  représentent des perturbations bornées autour du retard nominal. Le retard  $g(t)$  du terme neutre satisfait à la condition  $\dot{g}(t) \leq d_0 < 1$ .

**Lemme 1.3.6** [49] *Pour une matrice  $K$  donnée et sous réserve que la matrice  $F$  ait tous les modules de ses valeurs propres strictement inférieurs à 1, le système (1.3.15) est asymptotiquement stable pour tous retards  $\tau_i(t)$  variant dans l'intervalle  $[\delta_i - \mu_i, \delta_i + \mu_i]$ , s'il existe des matrices symétriques définies positives, de dimension  $n \times n$ ,  $P_1$ ,  $S_i$ ,  $U$ ,  $R_i$  et  $R_{ia}$  et des matrices de dimension  $n \times n$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $Y_{i1}$ ,  $Y_{i2}$ ,  $Z_{i1}$ ,  $Z_{i2}$  et  $Z_{i3}$ , pour  $i = 1, 2$ , telles que les conditions LMI suivantes soient satisfaites :*

$$\begin{bmatrix} \Psi_2 & P^T \begin{bmatrix} 0 \\ A_1 \end{bmatrix} - Y_1^T & P^T \begin{bmatrix} 0 \\ BK \end{bmatrix} - Y_2^T & P^T \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} & \mu_1 P^T \begin{bmatrix} 0 \\ A_1 \end{bmatrix} & \mu_2 P^T \begin{bmatrix} 0 \\ BK \end{bmatrix} \\ * & -S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -S_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -(1-d_0)U & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\mu_1 R_{1a} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\mu_2 R_{2a} \end{bmatrix} < 0, \quad (1.3.16)$$

$$\begin{bmatrix} R_i & Y_i \\ * & Z_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (1.3.17)$$

où les matrices  $Y_i$ ,  $Z_i$  et  $\Psi_2$  sont données par :

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= \Psi_n + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^2 2\mu_i R_{ia} \end{bmatrix}, \\ \Psi_n &= P^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 & -I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 & -I_n \end{bmatrix}^T P + \sum_{i=1}^2 \delta_i Z_i \\ &\quad + \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^2 S_i & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^2 \delta_i R_i + U \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^2 \begin{bmatrix} Y_i \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^2 \begin{bmatrix} Y_i \\ 0 \end{bmatrix}^T, \\ Y_i &= [Y_{i1} \ Y_{i2}], \quad Z_i = \begin{bmatrix} Z_{i1} & Z_{i2} \\ * & Z_{i3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.3.18)$$

**Démonstration.** La preuve de ce lemme utilise la modélisation descripteur et une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii adaptée. Elle peut se diviser en deux parties. La première consiste à tester la stabilité asymptotique du système soumis au retard nominal en utilisant la fonctionnelle suivante provenant du Lemme 1.3.4 :

$$V_n(t) = \bar{x}^T(t)EP\bar{x}(t) + \sum_{i=1}^2 \int_{-\delta_i}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)R_i\dot{x}(s)dsd\theta + \sum_{i=1}^2 \int_{t-\delta_i}^t x^T(s)S_i x(s)ds. \quad (1.3.19)$$

La seconde étape consiste à tester la robustesse de la précédente par rapport aux perturbations  $\eta_i(t)$  du retard nominal. On ajoute alors la fonctionnelle suivante :

$$V_a(t) = \sum_{i=1}^2 \int_{-\mu_i}^{\mu_i} \int_{t+\theta-\delta_i}^t \dot{x}^T(s)R_{ia}\dot{x}(s)dsd\theta. \quad (1.3.20)$$

Les conditions de stabilité asymptotique du système complet sont déterminées à l'aide de la fonctionnelle :

$$V(t) = V_n(t) + V_a(t). \quad (1.3.21)$$

■

On remarque que dans ce lemme, les conditions sur les retards sont différentes. Les retards sur l'état sont *bornés* mais ne sont soumis à aucune contrainte sur leur dérivée. En revanche, le retard du terme neutre n'est pas *majoré* mais n'est soumis qu'à une contrainte classique sur la dérivée du retard. Ceci montre la diversité des contraintes sur les retards et, par conséquent, des critères que l'on peut rencontrer dans la littérature.

## 1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le contexte des systèmes à retards. Leur apparition fréquente dans la modélisation des phénomènes physiques a suscité l'intérêt de nombreux chercheurs. Après avoir présenté les modèles de systèmes à retards liés à notre travail, nous avons rappelé des conditions de stabilité asymptotique qui permettent d'en tester la convergence.

Nous pouvons remarquer que, dans le cas des retards variables, ces résultats concernent la stabilité asymptotique. Même si, dans le cas des systèmes linéaires à retards sans incertitudes sur les retards et sur les paramètres, les notions de stabilité asymptotique et exponentielle sont équivalentes [87]<sup>5</sup>, dans le cas général (non linéaire,

<sup>5</sup>De plus dans ce cas, il faut remarquer que le taux de convergence exponentielle n'est pas connu a priori, même si son existence est garantie.

non stationnaire, retard variable) cette équivalence ne tient plus. Or l' $\alpha$ -stabilité (ou stabilité exponentielle à taux  $\alpha$  garanti) est une propriété de performance en rapidité et il convient de pouvoir l'étudier dans des cas réalistes de fonctionnement. C'est cette lacune que nous tenterons de combler dans le chapitre suivant.



## Chapitre 2

# Stabilité exponentielle des systèmes linéaires

### 2.1 Préliminaires

La plupart des résultats existants concerne la stabilité asymptotique des systèmes à retards variables ou constants [127]. Mais il peut être plus pertinent pour des problèmes d'observations, de systèmes contrôlés à travers un réseau ou à distance, de garantir une convergence exponentielle car elle permet d'assurer une rapidité de convergence. Récemment, quelques auteurs se sont investis dans l'élaboration de critères garantissant une convergence exponentielle pour les systèmes à retards [82], [98],[104], [110], [113]. Cependant ces résultats sont bien souvent limités au cas des retards constants ou conduisent à des résultats conservatifs. Or dans la majorité des cas, par exemple dans les lignes de communications à travers des réseaux internet, le retard ne peut être réduit au seul cas du retard constant.

La motivation de ce chapitre qui se consacre à l' $\alpha$ -stabilité, la stabilité et à la stabilisation exponentielle à taux garanti de systèmes linéaires à retards est donc claire. Les approches présentées utilisent les techniques des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii et le modèle descripteur qui ont été présentés dans le chapitre précédent mais aussi dans [57], [58] pour la stabilité et la stabilisation asymptotique. L'idée principale de ce chapitre est de réécrire le système en utilisant une nouvelle variable. Ce changement de variables ajoute des incertitudes sur le système provenant des incertitudes sur le retard. Afin de déterminer des conditions de stabilité exponentielle, différentes approches seront proposées. Une modélisation du système sous forme polytopique introduite dans [130] permettra d'élaborer des premières conditions de stabilité et de stabilisation exponentielle. Ensuite une approche par des incertitudes bornées en norme ("Norm-Bounded Uncertainties") permettra d'obtenir d'autres conditions de stabilité exponentielle. Ce chapitre s'organise de la manière suivante.

Une première partie concernant la stabilité exponentielle à taux de convergence garanti des systèmes linéaires à retards *constants*. Elle nous permettra de situer les différentes approches existant dans la littérature. Une seconde partie est consacrée au cas des systèmes linéaires à retards variables et *majorés* avec des extensions au cas des systèmes à retards multiples et au problème de la stabilisation à coût quadratique garanti. Une troisième partie correspond à l'étude des systèmes à retards *bornés*. Enfin le cas particulier des systèmes neutres à retards constants sera le sujet de la dernière partie.



Reprenons la définition de [113], pour tout  $\alpha > 0$ , un système à retards est dit  $\alpha$ -stable, ou “exponentiellement stable et de degré de convergence  $\alpha$ ”, s’il existe un réel  $\beta \geq 1$  tel que les solutions  $x(t; t_0, \phi)$ , pour toute condition initiale  $\phi$ , vérifient :

$$|x(t, t_0, \phi)| \leq \beta |\phi| e^{-\alpha(t-t_0)}. \quad (2.1.1)$$

Cela revient à déterminer une enveloppe exponentielle des trajectoires d’un système.

## 2.2 Cas des retards constants

Cette section est consacrée à la classe des systèmes définis par des équations différentielles aux différences de type retardé à coefficients et à retards constants. Sans perte de généralité, nous considérons le système soumis à un seul retard suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau), \\ x(s) = \phi(s), \quad \forall s \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (2.2.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  sont respectivement les vecteurs d’état, de commande.  $\phi \in \mathcal{C}_\tau = C^0([-\tau_2, 0], \mathbb{R}^n)$  représente la fonction des conditions initiales. Les matrices  $A_0$  et  $A_1$  sont supposées connues, constantes et de dimension appropriée. Il est connu que, pour un tel système, les propriétés de stabilité asymptotique et exponentielle sont équivalentes. Cependant il est souvent important en pratique de se fixer un cahier des charges. Parmi ces spécifications, on peut se donner un degré de convergence minimal. L’idée directrice de cette partie est de savoir si pour une valeur de  $\alpha > 0$ , un système à retard est  $\alpha$ -stable. Dans ce cadre, il existe différentes techniques qui permettent de déterminer si un système à retards possède un degré de convergence  $\alpha$  fixé a priori. Nous donnerons dans cette section trois exemples de telles techniques.

**Première technique : Théorie de Lyapunov et comparaison.** L’ $\alpha$ -stabilité du système (2.2.1) est prouvée s’il existe une fonctionnelle de Lyapunov  $V$  vérifiant les propriétés suivantes : Il existe des réels positifs  $r$ ,  $a_m$  et  $a_M$  tels que :

$$a_m |\phi(0)|^r \leq V(\phi) \leq a_M \|\phi\|^r, \quad (2.2.2)$$

et

$$\dot{V}(\phi) \leq r\alpha V(\phi).$$

En effet en appliquant le principe de comparaison, le long des trajectoires de (2.2.1),  $V$  est majorée exponentiellement :

$$V(x_t) \leq V(\phi) e^{r\alpha(t-t_0)}.$$

En utilisant la condition (2.2.2), il vient

$$a_m |x(t)|^r \leq V(\phi) e^{r\alpha(t-t_0)} \leq a_M \|\phi\|^r e^{r\alpha(t-t_0)}.$$

On retrouve alors la condition (2.1.1) avec  $\beta = (a_M/a_m)^{1/r}$ .

Cette approche a été exploitée par [82] et [104] pour les systèmes à retards constants et les systèmes neutres.

**Deuxième technique : Méthode du changement de variable.** L’idée de cette technique est de faire intervenir une nouvelle variable  $x_\alpha(t) = x(t)e^{\alpha(t-t_0)}$ . L’objectif est alors de montrer que si la solution  $x_\alpha(t)$  est asymptotiquement stable pour  $\alpha$  fixé, alors le système est  $\alpha$ -stable. La preuve suit les étapes suivantes :

Si le système en  $x_\alpha(t)$  est uniformément stable alors, pour tout  $\epsilon > 0$  quelconque, il existe un réel  $\delta > 0$  tel que :

$$\|\phi\| < \delta \rightarrow |x_\alpha(t, \phi)| < \epsilon.$$

Il suffit alors d'utiliser la propriété de linéarité du système :

$$x_\alpha(t, \phi) = \frac{2\|\phi\|}{\delta} x_\alpha(t, \delta \frac{\phi}{2\|\phi\|})$$

Comme  $\delta \frac{\phi}{2\|\phi\|}$  est de norme inférieure à  $\delta$ , on a

$$|x_\alpha(t, \phi)| < \frac{2\|\phi\|}{\delta} \epsilon,$$

et donc

$$|x(t, \phi)| < \frac{2\|\phi\|}{\delta} \epsilon e^{-\alpha(t-t_0)}.$$

On remarque l'importance de l'uniformité de la stabilité de  $x_\alpha$

**Troisième technique : Modèle de comparaison & inégalité différentielle.** [9], [24], [109] Cette technique utilise des modèles simplifiés auxquels seront comparés les performances du système à étudier. Elle requière les notions de mesures et de normes de matrices.

Dans la suite de ce mémoire nous utiliserons la méthode du changement de variables pour obtenir des propriété d' $\alpha$ -stabilité. Ainsi en utilisant le changement de variable  $x_\alpha(t) = x(t)e^{\alpha t}$ , le système s'écrit alors :

$$\dot{x}_\alpha(t) = (A_0 + \alpha I_n)x_\alpha(t) + e^{\alpha\tau} A_1 x_\alpha(t - \tau). \quad (2.2.3)$$

On peut directement appliquer les théorèmes de stabilité asymptotique des systèmes à retards constants. Ainsi, le théorème suivant est une application directe de [57] :

**Théorème 2.2.1** *Le système (2.2.1) est exponentiellement stable avec un taux  $\alpha$  de convergence, s'il existe des matrices de dimension  $n \times n$ ,  $P_1$ ,  $S$  et  $R$  symétriques définies positives et  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$ , telles que les conditions LMI suivantes soient satisfaites :*

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \Psi & P^T \begin{bmatrix} 0 \\ e^{\alpha\tau} A_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_1^T \\ Y_2^T \end{bmatrix} \\ * & -S \end{bmatrix} < 0, \quad (2.2.4)$$

et

$$\begin{bmatrix} R & Y_1 & Y_2 \\ * & Z_1 & Z_2 \\ * & * & Z_3 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.2.5)$$

où on définit la matrice  $P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}$  et :

$$\Psi = P^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 + \alpha I_n & -I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 + \alpha I_n & -I_n \end{bmatrix}^T P + \tau Z + \begin{bmatrix} S + Y_1 + Y_1^T & Y_2 \\ Y_2^T & \tau R \end{bmatrix}, \quad (2.2.6)$$

**Démonstration.** La démonstration est basée sur le Théorème 1.3.4 [57] présenté dans le Chapitre 1 appliqué au système à retard et à coefficients constants (2.2.3). ■

## 2.3 Cas des retards variables *majorés*

Considérons le système à retard sur l'état et sur l'entrée :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t - \tau(t)) \\ x(s) = \phi(s), \quad \forall s \in [-\tau_2, 0] \end{cases} \quad (2.3.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  sont respectivement les vecteurs d'état, de commande.  $\phi \in \mathcal{C}_{\tau_2}$  représente le vecteur des conditions initiales. Les matrices  $A_0$  et  $A_1$  sont supposées connues, constantes et de dimension appropriée. Nous supposons que le retard est *majorée* et vérifie la relation suivante :

$$0 \leq \tau(t) \leq \tau_2. \quad (2.3.2)$$

### 2.3.1 Stabilité exponentielle

Dans cette partie nous étudierons uniquement l' $\alpha$ -stabilité du système libre, c'est-à-dire sans commande (2.3.1). Le changement de variable  $x_\alpha = x(t)e^{\alpha t}$  conduit à l'équation différentielle :

$$\dot{x}_\alpha(t) = (A_0 + \alpha I_n)x_\alpha(t) + e^{\alpha\tau(t)}A_1x_\alpha(t - \tau(t)). \quad (2.3.3)$$

La principale difficulté du développement d'un critère de convergence pour (2.3.3) provient de la matrice associée au terme retardé  $e^{\alpha\tau(t)}A_1$ . En effet le changement de variables  $x_\alpha = x(t)e^{\alpha t}$  transforme le système initial en un système à coefficients variant dans le temps. Les résultats sur la convergence de systèmes linéaires à retards ne sont plus désormais applicables. Cependant, comme les éléments variant dans le temps sont uniquement des fonctions scalaires, il est possible réécrire autrement, ce qui permettra d'élaborer des conditions de stabilité du système (2.3.3).

#### Modélisation polytopique

Il est possible de passer outre la difficulté du au terme  $e^{\alpha\tau(t)}$  en remarquant que la fonction  $e^{\alpha\tau(t)}$  est bornée. En effet, sachant que le retard  $\tau(t)$  est borné car il vérifie (2.3.2), on déduit que le terme  $e^{\alpha\tau(t)}$  s'écrit comme une somme convexe de ses bornes qui sont  $\beta_1 = e^{\alpha 0} = 1$  et  $\beta_2 = e^{\alpha\tau_2}$  :

$$\begin{aligned} e^{\alpha\tau(t)} &= \lambda_1(t)\beta_1 + \lambda_2(t)\beta_2 \\ \lambda_1(t), \lambda_2(t) &\geq 0 \text{ et } \lambda_1(t) + \lambda_2(t) = 1. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Les fonctions scalaires  $\lambda_1 = (e^{\alpha\tau(t)} - \beta_1)/(\beta_2 - \beta_1)$  et  $\lambda_2 = (\beta_2 - e^{\alpha\tau(t)})/(\beta_2 - \beta_1)$  dépendent uniquement de la valeur du retard inconnu  $\tau(t)$ . Ainsi ces fonctions sont elles aussi inconnues. On sait juste qu'elles vérifient la condition de convexité (2.3.4). En utilisant la modélisation polytopique de la fonction  $e^{\alpha\tau(t)}$ , le système (2.3.3) est représenté par un modèle polytopique :

$$\dot{x}_\alpha(t) = (A_0 + \alpha I_n)x_\alpha(t) + \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t)\beta_i A_1 x_\alpha(t - \tau(t))$$

ou encore

$$\dot{x}_\alpha(t) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t) \{(A_0 + \alpha I_n)x_\alpha(t) + \beta_i A_1 x_\alpha(t - \tau(t))\} \quad (2.3.5)$$

La formule de Leibniz, qui, pour tout signal continue et dérivable  $y$ , permet d'écrire  $y(t - \tau(t)) = y(t) - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{y}(s)ds$ , conduit à :

$$\dot{x}_\alpha(t) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t) \left\{ (A_0 + \alpha I_n + \beta_i A_1)x_\alpha(t) - \beta_i A_1 \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}_\alpha(s)ds \right\} \quad (2.3.6)$$

Afin d'analyser la stabilité exponentielle, le système (2.3.6) est présenté sous forme polytopique et maintenant descripteur :

$$E\dot{\bar{x}}_\alpha(t) = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t)\Lambda_i & -I_n \end{bmatrix} \bar{x}_\alpha(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t)\beta_i A_1 \end{bmatrix} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}_\alpha(s) ds \quad (2.3.7)$$

avec  $\bar{x}_\alpha(t) = \text{col}\{x_\alpha(t), \dot{x}_\alpha(t)\}$ ,  $E = \text{diag}\{I_n, 0\}$ . En utilisant cette représentation polytopique et descripteur, on peut donner le résultat suivant :

**Théorème 2.3.1** *Le système (2.3.1) est  $\alpha$ -stable pour tout retard variable  $\tau(t)$  vérifiant (2.3.2), s'il existe des matrices de dimension  $n \times n$   $P_1$ ,  $R$  symétriques définies positives et des matrices  $P_2$ ,  $P_3$ , satisfaisant les conditions LMI suivantes pour  $i = 1, 2$  :*

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} \Psi_0^i & \tau_2 P^T \begin{bmatrix} 0 \\ A_1 \beta_i \end{bmatrix} \\ * & -\tau_2 R \end{bmatrix} < 0, \quad (2.3.8)$$

où

$$\Psi_0^i = P^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \Lambda_i & -I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \Lambda_i & -I_n \end{bmatrix}^T P + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 R \end{bmatrix}, \quad (2.3.9)$$

et où

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}, \quad \beta_1 = 1, \beta_2 = e^{\alpha\tau_2}, \\ \Lambda_i = A_0 + \alpha I_n + \beta_i A_1.$$

**Démonstration.** On introduit alors la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$V(\bar{x}_\alpha(t)) = \bar{x}_\alpha^T(t) EP \bar{x}_\alpha(t) + \int_{-\tau_2}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}_\alpha^T(s) R \bar{x}_\alpha(s) ds d\theta, \quad (2.3.10)$$

Cette fonctionnelle est bien définie positive car on remarque que  $\bar{x}_\alpha^T(t) EP \bar{x}_\alpha(t) = x_\alpha^T(t) P_1 x_\alpha(t)$ . Sachant que  $EP = P^T E$ , le calcul de la dérivée temporelle de la fonctionnelle donne :

$$\dot{V}(t) = \bar{x}_\alpha^T(t) \Psi_0(t) \bar{x}_\alpha(t) + \eta_0(t) + \tau_2 \dot{x}_\alpha^T(t) R \dot{x}_\alpha(t) - \int_{t-\tau_2}^t \dot{x}_\alpha^T(s) R \dot{x}_\alpha(s) ds, \quad (2.3.11)$$

où

$$\Psi_0(t) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t) \left\{ P^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \Lambda_i & -I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \Lambda_i & -I_n \end{bmatrix}^T P \right\}, \\ \eta_0(t) = -2 \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t) \left\{ \int_{t-\tau(t)}^t \bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i A_1 \end{bmatrix} \dot{x}_\alpha(s) ds \right\}.$$

En utilisant la majoration classique, qui, pour toute matrice de dimension  $n \times n$   $R$  définie positive et pour tous vecteurs  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}^n$ , permet d'écrire :

$$\pm 2a^T b \leq a^T R^{-1} a + b^T R b.$$

Ainsi en utilisant le fait que le retard  $\tau_2$  est majoré (2.3.2), on obtient :

$$\eta_0(t) \leq \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t) \left\{ \tau_2 \bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i A_1 \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i A_1 \end{bmatrix}^T P \bar{x}_\alpha(t) + \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}_\alpha^T(s) R \dot{x}_\alpha(s) ds \right\}.$$

On en déduit la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \bar{x}_\alpha^T(t) \left[ \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t) \left\{ P^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \Lambda_i & -I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \Lambda_i & -I_n \end{bmatrix}^T P \right. \right. \\ & \left. \left. + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 R \end{bmatrix} + \tau_2 P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i A_1 \end{bmatrix} (\tau_2 R)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i A_1 \end{bmatrix}^T P \tau_2 \right\} \bar{x}_\alpha(t) \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t) \left\{ \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}_\alpha^T(s) R \dot{x}_\alpha(s) ds \right\} - \int_{t-\tau_2}^t \dot{x}_\alpha^T(s) R \dot{x}_\alpha(s) ds \right]. \end{aligned}$$

Or la condition de convexité des fonctions  $\lambda_i$  (2.3.4) et la condition sur le retard (2.3.2) permettent d'éliminer les termes intégrales, ce qui permet d'écrire finalement :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \bar{x}_\alpha^T(t) \left[ \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t) \left\{ P^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \Lambda_i & -I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \Lambda_i & -I_n \end{bmatrix}^T P \right. \right. \\ & \left. \left. + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 R \end{bmatrix} + \tau_2 P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i A_1 \end{bmatrix} (\tau_2 R)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i A_1 \end{bmatrix}^T P \tau_2 \right\} \bar{x}_\alpha(t) \right]. \end{aligned}$$

Ensuite, en appliquant le complément de Schur au dernier terme de l'inégalité, le problème de la négativité de la dérivée de la fonctionnelle est exprimée à l'aide des conditions LMI (2.3.8). Ainsi si ces conditions sont satisfaites, la dérivée de la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii est définie négative. Le système (2.3.3) est alors asymptotiquement stable. Le système (2.3.1) est donc  $\alpha$ -stable. ■

Le résultat suivant utilise la même fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii mais présente une autre technique de majoration de la fonction  $\eta_0(t)$ .

**Théorème 2.3.2** *Le système (2.3.1) est  $\alpha$ -stable pour tout retard variable  $\tau(t) \leq \tau_2$ , s'il existe des matrices de dimension  $n \times n$ ,  $P_2, P_3, Z_1^i, Z_2^i, Z_3^i$ , pour  $i = 1, 2$ , et deux matrices symétriques définies positives  $P_1 > 0$  et  $R > 0$  qui vérifient les conditions LMI suivantes pour  $i = 1, 2$  :*

$$\Psi_i < 0 \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} R & \begin{bmatrix} 0 & \beta_i A_1^T \end{bmatrix} P \\ * & Z^i \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.3.12)$$

avec

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}, \quad Z^i = \begin{bmatrix} Z_1^i & Z_2^i \\ Z_2^{iT} & Z_3^i \end{bmatrix},$$

et

$$\Psi_i = P^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \Lambda_i & -I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \Lambda_i & -I_n \end{bmatrix}^T P + \tau_2 Z^i + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 R \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_i = \alpha I_n + A_0 + \beta_i A_1.$$

**Démonstration.** La fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii candidate est toujours la fonctionnelle définie dans (2.3.10). Le raisonnement est identique à la démonstration du Théorème 2.3.1 jusqu'à l'équation (2.3.11). Le terme  $\eta_0$  doit être majoré pour garantir la négativité de  $\dot{V}$ . Une majoration, a priori moins conservative utilise la condition :

$$\begin{bmatrix} R & N \\ N^T & Z \end{bmatrix} \geq 0,$$

qui permet d'écrire que, pour tous vecteurs  $a$  et  $b$  et pour toutes matrices  $N$ ,  $R$  et  $Z$  de dimension appropriée, les inégalités suivantes :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R & N \\ N^T & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \geq 0, \quad \pm 2a^T N^T b \leq a^T R a + b^T Z b,$$

Sachant que  $\eta_0$  s'écrit sous forme polytopique, il est alors nécessaire de déterminer une majoration de chacun des polytopes, des sous modèles du système. En posant  $N = \begin{bmatrix} 0 & \beta_i A_1^T \end{bmatrix} P$  :

$$\begin{bmatrix} R & \begin{bmatrix} 0 & \beta_i A_1^T \end{bmatrix} P \\ * & Z^i \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, 2,$$

qui, avec les conditions de convexité (2.3.4),  $a = \dot{x}_\alpha(s)$  et  $b = \bar{x}_\alpha(t)$ , donne

$$\eta_0(t) \leq \int_{t-\tau(t)}^t \left\{ \bar{x}_\alpha^T(s) \left( \sum_{i=1}^2 \lambda_i(s) Z^i \right) \bar{x}_\alpha(t) + \dot{x}_\alpha^T(s) R \dot{x}_\alpha(s) \right\},$$

puis, en intégrant par rapport à la variable "s" entre  $t-\tau_2$  et  $t$  et en majorant le retard avec (2.3.2), conduit :

$$\eta_0(t) \leq \tau_2 \bar{x}_\alpha^T(t) \left( \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t) Z^i \right) \bar{x}_\alpha(t) + \int_{t-\tau_2}^t \dot{x}_\alpha^T(s) R \dot{x}_\alpha(s) ds,$$

avec  $R$ ,  $Z_1$  et  $Z_2$  satisfaisant à (2.3.12b). On en déduit une autre majoration de (2.3.11) :

$$\dot{V}(t) \leq \bar{x}_\alpha^T(t) \Psi(t) \bar{x}_\alpha(t),$$

avec

$$\Psi(t) = \Psi_0(t) + \tau_2 \left( \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t) Z^i \right) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 R \end{bmatrix}.$$

Le système (2.3.3) est asymptotiquement stable si la matrice  $\Psi(t)$  est symétrique définie négative. En écrivant  $\Psi(t)$  sous forme polytopique, la négativité de  $\dot{V}$  nécessite :

$$\sum_{i=1}^2 \lambda_i(t) \Psi_i < 0.$$

L'ensemble des matrices symétriques définies négatives étant convexe, si chacune des matrices  $\Psi_i$  est définie négative, il en sera de même pour  $\Psi(t)$ . La stabilité asymptotique du système transformé (2.3.3) est prouvée, car  $V$  est une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii. Il s'en suit que le système initial (2.3.1) est exponentiellement stable de degré  $\alpha$ . ■

A ce stade, on remarque que les Théorèmes (2.3.1) et (2.3.2) d' $\alpha$ -stabilité nécessitent la résolution d'un problème double de conditions LMI. Du fait que la modélisation polytopique transforme le système initial en la somme de deux systèmes linéaires à paramètres constants. Il faut tester la stabilité de chacun de ces deux sous-systèmes.

### Modélisation avec incertitudes paramétriques

Reprenons l'équation différentielle (2.3.3) exprimée à l'aide de la variable  $x_\alpha$ . On écrit le terme exponentielle sous forme d'un modèle incertain, c'est-à-dire comme la somme d'un terme constant représentant la valeur nominale et d'un terme variant dans le temps mais borné représentant la perturbation par rapport à cette valeur nominale. On obtient alors :

$$e^{\alpha\tau(t)} = \beta_m + \Delta(t)\beta_d,$$

où  $\Delta(t)$  est une fonction réelle inconnue et dépendant de la valeur du retard vérifiant  $\|\Delta(t)\| \leq 1$  et où les paramètres sont donnés par  $\beta_m = (e^{\alpha\tau_2} + 1)/2$  et  $\beta_d = (e^{\alpha\tau_2} - 1)/2$ . La formule de Leibniz permet de transformer le terme retardé en intégrale de la manière suivante :

$$\dot{x}_\alpha(t) = (A_0 + \alpha I_n + (\beta_m + \Delta(t)\beta_d)A_1)x_\alpha(t) - (\beta_m + \Delta(t)\beta_d)A_1 \int_{t-\tau(t)}^t x_\alpha(s)ds. \quad (2.3.13)$$

On écrit alors le système (2.3.13) sous la forme descripteur en définissant la variable élargie  $\bar{x}_\alpha = \text{col}\{x_\alpha, \dot{x}_\alpha\}$  :

$$E\dot{\bar{x}}_\alpha(t) = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 + \alpha I_n + \beta_m A_1 & -I_n \end{bmatrix} \bar{x}_\alpha(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta(t)\beta_d A_1 \end{bmatrix} x_\alpha(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_m A_1 \end{bmatrix} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}_\alpha(s)ds - \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta(t)\beta_d A_1 \end{bmatrix} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}_\alpha(s)ds. \quad (2.3.14)$$

On introduit alors la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii :

$$V^\alpha(t) = \bar{x}_\alpha^T(t)EP\bar{x}_\alpha(t) + \int_{-\tau_2}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}_\alpha^T(s)(R_m + R_d)\dot{x}_\alpha(s)dsd\theta. \quad (2.3.15)$$

qui, en différenciant (2.3.15) le long des trajectoires de (3.3.14) conduit alors à l'inégalité :

$$\dot{V}^\alpha(t) = \bar{x}_\alpha^T(t) \left\{ P^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 + \alpha I_n + \beta_m A_1 & -I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 + \alpha I_n + \beta_m A_1 & -I_n \end{bmatrix}^T P \right\} \bar{x}_\alpha(t) + \eta_0(t) + \eta_1(t) + \eta_2(t) + \dot{x}_\alpha^T(t)(R_m + R_d)\dot{x}_\alpha(t) - \int_{t-\tau_2}^t \dot{x}_\alpha^T(s)(R_m + R_d)\dot{x}_\alpha(s)ds.$$

où

$$\begin{aligned} \eta_0(t) &= 2\bar{x}_\alpha^T(t)P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta(t)\beta_d A_1 \end{bmatrix} x_\alpha(t), \\ \eta_1(t) &= -2\bar{x}_\alpha^T(t)P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_m A_1 \end{bmatrix} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}_\alpha(s)ds, \\ \eta_2(t) &= -2\bar{x}_\alpha^T(t)P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta(t)\beta_d A_1 \end{bmatrix} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}_\alpha(s)ds. \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

En utilisant les deux techniques de majoration des fonctions  $\eta_i$ , pour  $i = 1, 2, 3$ , présentées dans l'approche par modèles polytopiques, on obtient deux théorèmes de stabilité exponentielle :

**Théorème 2.3.3** *Le système (2.3.1) est  $\alpha$ -stable pour tout retard  $\tau(t)$  satisfaisant (2.3.2), s'il existe des matrices de  $\mathbb{R}^{n \times n}$   $P_1, R_0, R_m$  et  $R_d$ , symétriques définies positives et  $P_2$  et  $P_3$  telles que la condition LMI suivante soit réalisée :*

$$\begin{bmatrix} \Psi_0 & P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_d A_1 \end{bmatrix} & \tau_2 P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_m A_1 \end{bmatrix} & \tau_2 P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_d A_1 \end{bmatrix} \\ * & -R_0 & 0 & 0 \\ * & * & -\tau_2 R_m & 0 \\ * & * & * & -\tau_2 R_d \end{bmatrix} < 0 \quad (2.3.17)$$

où

$$\Psi_0 = P^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 + \alpha I_n + \beta_m A_1 & -I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 + \alpha I_n + \beta_m A_1 & -I_n \end{bmatrix}^T P \\ + \begin{bmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & \tau_2(R_m + R_d) \end{bmatrix},$$

$$\beta_m = (e^{\alpha\tau_2} + 1)/2, \quad \beta_d = (e^{\alpha\tau_2} - 1)/2.$$

**Démonstration.** En appliquant la majoration standard, les fonctions  $\eta_0$ ,  $\eta_1$  et  $\eta_2$  vérifient les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \eta_0(t) &\leq \bar{x}_\alpha(t)^T P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta(t)\beta_d A_1 \end{bmatrix} R_0^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta(t)\beta_d A_1 \end{bmatrix}^T P \bar{x}_\alpha(t) + x_\alpha^T(t) R_0 x_\alpha(t), \\ \eta_1(t) &\leq \tau_2 \bar{x}_\alpha(t)^T P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_m A_1 \end{bmatrix} R_m^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_m A_1 \end{bmatrix}^T P \bar{x}_\alpha(t) + \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}_\alpha^T(s) R_m \dot{x}_\alpha(s) ds, \\ \eta_2(t) &\leq \tau_2 \bar{x}_\alpha(t)^T P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta(t)\beta_d A_1 \end{bmatrix} R_d^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta(t)\beta_d A_1 \end{bmatrix}^T P \bar{x}_\alpha(t) + \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}_\alpha^T(s) R_d \dot{x}_\alpha(s) ds. \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

On en déduit finalement :

$$\begin{aligned} \dot{V}^\alpha(t) &\leq \bar{x}_\alpha^T(t) \left\{ \Psi_0 + P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_d A_1 \end{bmatrix} R_0^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_d A_1 \end{bmatrix}^T P + \tau_2 P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_m A_1 \end{bmatrix} R_m^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_m A_1 \end{bmatrix}^T P \right. \\ &\quad \left. + \tau_2 P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_d A_1 \end{bmatrix} R_d^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_d A_1 \end{bmatrix}^T P \right\} \bar{x}_\alpha(t). \end{aligned}$$

Enfin en appliquant le lemme de Schur aux trois derniers termes de l'inégalité, on retrouve la condition (2.3.17). Ainsi le système (2.3.3) est asymptotiquement stable et par conséquent que le système initial (2.3.1) est exponentiellement stable avec un degré de convergence  $\alpha$  garanti. ■

De la même manière que dans l'approche par modèle polytopique, il est possible d'aboutir à d'autres conditions avec de nouvelles majorations des fonctions  $\eta_i(t)$  pour  $i = 1, 2$  et  $3$ .

**Théorème 2.3.4** *Le système (2.3.1) est  $\alpha$ -stable pour tout retard  $\tau(t)$  satisfaisant (2.3.2), s'il existe des matrices de dimension  $n \times n$ ,  $P_1$ ,  $R_m$ ,  $R_d$ , symétriques définies positives, des matrices  $P_2$  et  $P_3$  et deux matrices symétriques de dimension  $2n \times 2n$ ,  $Z_m$  et  $Z_d$ , telles que les conditions LMI suivantes soient réalisées :*

$$\Psi_1 < 0, \quad (2.3.19)$$

et

$$\begin{bmatrix} R_i & \begin{bmatrix} 0 & \beta_i A_1^T \end{bmatrix} P \\ * & Z_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = m, d, \quad (2.3.20)$$



où

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= P^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 + \alpha I_n + \beta_m A_1 & -I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 + \alpha I_n + \beta_m A_1 & -I_n \end{bmatrix}^T P \\ &+ \begin{bmatrix} R_d & 0 \\ 0 & \tau_2(R_m + R_d) \end{bmatrix} + Z_d + \tau_2(Z_m + Z_d), \\ \beta_m &= (1 + e^{\alpha\tau_2})/2, \quad \beta_d = (e^{\alpha\tau_2} - 1)/2.\end{aligned}$$

### Démonstration.

La démonstration suit le même cheminement que pour le Théorème 2.3.3 mais utilise une autre majoration. Les LMI (2.3.20) permettent de majorer les fonctions  $\eta_i$  pour  $i = 0, 1, 2$  dans (3.3.17). On obtient alors :

$$\begin{aligned}\eta_0(t) &\leq \bar{x}_\alpha(t)^T Z_d \bar{x}_\alpha(t) + x_\alpha^T(t) R_d x_\alpha(t), \\ \eta_1(t) &\leq \tau_2 \bar{x}_\alpha(t)^T Z_m \bar{x}_\alpha(t) + \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}_\alpha^T(s) R_m \dot{x}_\alpha(s) ds, \\ \eta_2(t) &\leq \tau_2 \bar{x}_\alpha(t)^T Z_d \bar{x}_\alpha(t) + \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}_\alpha^T(s) R_d \dot{x}_\alpha(s) ds.\end{aligned}$$

Si les conditions LMI (2.3.20) sont vérifiées, on obtient alors

$$\dot{V}^\alpha(t) \leq \bar{x}_\alpha^T(t) \Psi_1 \bar{x}_\alpha(t).$$

Ainsi, si les conditions (2.3.19) est vérifiée, la stabilité du système (2.3.3) et la stabilité exponentielle de (2.3.1) sont démontrées. ■

On remarque que lorsqu'on choisit  $\alpha = 0$  dans les théorèmes précédents, on montre que le système est asymptotiquement stable.

Par rapport à l'approche par modèle polytopique, on remarque quelques différences. L'approche polytopique impose aux mêmes variables matricielles de satisfaire à deux conditions LMI distinctes. D'autre part, l'approche par modèle incertain augmente la dimension de l'unique condition LMI.

## 2.3.2 Exemple de comparaison

Considérons le système suivant ([97],[154]) :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -0.5 & 0.1 \\ 0.3 & 0 \end{bmatrix} x(t - \tau(t)). \quad (2.3.21)$$

On teste l' $\alpha$ -stabilité de ce système en utilisant les Théorèmes 2.3.1, 2.3.2, 2.3.4 et 2.3.3. Les résultats sont donnés dans le Tableau 2.1 où l'on recherche la plus grande valeur de  $\tau_2$  qui vérifie les conditions du théorème considéré : Le Tableau 2.1 présente les résultats des conditions de stabilité exponentielle du système (2.3.22).

On peut déjà remarquer que les Théorèmes 2.3.1 et 2.3.2 donnent des résultats identiques. L'approche par modèles polytopiques paraît moins conservative. Il est possible de trouver des solutions aux quatre problèmes jusqu'à  $\alpha = 1$ . Cela correspond au cas critique où la matrice  $A_0 + \alpha I_n + \beta_1 A_1$ , dans l'approche polytopique, et  $A_0 + \alpha I_n + \beta_m A_1$ , dans l'approche par modèle incertain, n'est plus de Hurwitz (c'est-à-dire quand la partie réelle d'une valeur propre de cette matrice devient nulle). D'autre part, le critère de [104] (pour des retards constants) ne permet pas de garantir l' $\alpha$ -stabilité du système (2.3.21). Cela vient du fait que la matrice  $A_0$  n'est pas de Hurwitz. Ainsi les résultats présentés dans cette partie ont un champ applicatif plus important que ceux trouvés dans la littérature dans la mesure où il prend en compte les variations du retard.

$\alpha$	delay type	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
Mondié et al [104]	C	0.911	0.861	0.800	0.734	0.671	0.614	0.564	0.5202	0.4818	0.4481
Liu [97]	C	*	*	*	*	0.590	0.340	0.181	0.0752	0.0014	0
Xu et al [154]	C	0.972	0.963	0.951	0.936	0.919	0.899	0.811	0.6990	0.6148	0.5494
Théorème 2.3.1	V	0.972	0.963	0.950	0.935	0.590	0.340	0.181	0.0752	0.014	0
Théorème 2.3.2	V	0.972	0.963	0.950	0.935	0.590	0.340	0.181	0.0752	0.014	0
Théorème 2.3.3	V	0.972	0.963	0.950	0.925	0.583	0.338	0.180	0.0751	0.014	0
Théorème 2.3.4	V	0.971	0.957	0.946	0.901	0.520	0.298	0.140	0.0513	0.014	0

TAB. 2.1 – Valeurs maximales de  $\tau_2$  en fonction de  $\alpha$ .

D'autre part, on remarque que pour des petites bornes supérieures du retard, les résultats de stabilité exponentielle sont équivalents au cas de retard constant développé par [154] et supérieure à ceux de Mondié et al [104]. Pour des valeurs plus importantes de  $\tau_2$ , les degrés de convergence exponentielle déterminé par les Théorèmes 2.3.2 et 2.3.3 sont plus faibles. Cela paraît naturel du fait que nous considérons des retards variables contrairement aux autres conditions. Toute fois les résultats sont équivalents à ceux de Lui [97].

### 2.3.3 Application au cas des retards multiples

Ce paragraphe est consacré à l'étude de la stabilité et de la stabilisation exponentielle de systèmes linéaires à retards multiples.

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^N A_i x(t - \tau_i(t)). \quad (2.3.22)$$

Les retards sont supposés variables et vérifient les conditions de majoration (2.3.23) :

$$0 \leq \tau_i(t) \leq \tau_{i2}, \quad \forall t \geq 0, \forall i = 1 \dots N. \quad (2.3.23)$$

En utilisant le changement de variable  $x_\alpha(t) = e^{\alpha t} x(t)$ , le système (2.3.22) exprimé en fonction de  $x_\alpha$  est régi par :

$$\dot{x}_\alpha(t) = (A_0 + \alpha I_n) x(t) + \sum_{i=1}^N e^{\alpha \tau_i(t)} A_i x_\alpha(t - \tau_i(t)), \quad (2.3.24)$$

Les conditions de stabilité qui seront déterminées sont issues d'une adaptation des théorèmes précédents.

#### Modélisation polytopique

On se propose dans un premier temps d'écrire les termes exponentiels sous la forme polytopique (2.3.4).

**Définition 2.3.5** On note  $\sigma$ , une bijection de  $\{1, \dots, 2^N\}$  vers  $\{1, 2\}^N$  telle que, pour tout entier  $j$  de  $\{1, \dots, 2^N\}$ , on associe  $\sigma(j)$  défini par :

$$j \mapsto \sigma(j) = [\sigma_1(j), \dots, \sigma_N(j)], \quad (2.3.25)$$

où  $\sigma_i(j) \in \{1, 2\}$

On peut alors énoncer le théorème suivant :

**Théorème 2.3.6** *Le système linéaire à retards multiples (2.3.22) est  $\alpha$ -stable s'il existe des matrices de dimension  $n \times n$ ,  $P_1 > 0$ ,  $P_2, P_3, R_i > 0, i = 1, \dots, N$  et des matrices de dimension  $2n \times 2n$ ,  $Z_{ik}$ , pour  $i = 1, \dots, N$  et  $k = 1, 2$ , telles que les conditions LMI suivantes soient satisfaites pour  $j = 1, \dots, 2^N$  :*

$$\Psi_j = P^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \Lambda_j & -I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \Lambda_j & -I_n \end{bmatrix}^T P + \sum_{i=1}^N \tau_{i2} \left( Z_{i\sigma_i(j)} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_i \end{bmatrix} \right) < 0, \quad (2.3.26)$$

et pour  $i = 1, \dots, N$  et  $k = 1, 2$  :

$$\begin{bmatrix} R_i & \begin{bmatrix} 0 & e^{\alpha\tau_{ik}} A_i^T \end{bmatrix} P \\ * & Z_{ik} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.3.27)$$

où

$$\Lambda_j = \alpha I_n + A_0 + \sum_{i=1}^N e^{\alpha\tau_{i\sigma_i(j)}} A_i.$$

**Démonstration.** Ce théorème est une adaptation du Théorème 2.3.2 au cas des systèmes à retards multiples. La démonstration suit les mêmes lignes et utilise la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$V(t) = \bar{x}_\alpha^T(t) E P \bar{x}_\alpha(t) + \sum_{i=1}^N \int_{-\tau_{2i}}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}_\alpha^T(s) R_i \dot{x}_\alpha(s) ds d\theta.$$

La dérivée par rapport au temps de cette fonctionnelle donne :

$$\dot{V}(t) = \bar{z}^T(t) \Psi_0(t) \bar{z}(t) + \eta(t) + \sum_{i=1}^N \tau_{2i} \dot{x}_\alpha^T(t) R_i \dot{x}_\alpha(t) - \sum_{i=1}^N \int_{t-\tau_{2i}}^t \dot{x}_\alpha^T(s) R_i \dot{x}_\alpha(s) ds,$$

où

$$\begin{aligned} \Psi_0(t) &= P^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \Lambda(t) & -I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \Lambda(t) & -I_n \end{bmatrix}^T P, \\ \Lambda(t) &= \alpha I_n + A_0 + \sum_{i=1}^N e^{\alpha\tau_i(t)} A_i, \\ \eta(t) &= -2 \sum_{i=1}^N \int_{t-\tau_i(t)}^t \bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ e^{\alpha\tau_i(t)} A_i \end{bmatrix} \dot{x}_\alpha(s) ds. \end{aligned}$$

En utilisant le même formalisme que dans la partie 2.3.1 et sachant que chacun des retards  $\tau_i$  est majoré par  $\tau_{2i}$ , le terme  $e^{\alpha\tau_i(t)}$  peut s'écrire comme une somme convexe de ses bornes à savoir qu'il existe des fonctions scalaires  $\lambda_{ik}$ , pour  $i = 1, \dots, N$  et  $k = 1, 2$  telle que :

$$e^{\alpha\tau_i(t)} = \lambda_{i1}(t) + \lambda_{i2} e^{\alpha\tau_{2i}}$$

Ainsi, on peut définir les fonctions scalaires  $\mu_j$  afin de déterminer une écriture polytopique du terme variant  $\Lambda(t)$  et  $\eta(t)$  grâce aux fonctions de permutations  $\sigma$  définies dans (3.2.7).

$$\mu_j(t) = \prod_{i=1}^N \lambda_{i\sigma_i(j)}(t).$$

On déduit, après calcul, les conditions de convexité liées aux fonctions  $\mu_j$  :

$$\begin{aligned} \mu_j(t) &\geq 0, & \forall t \geq 0 & \quad \forall j = 1, \dots, 2^N \\ \sum_{j=1}^{2^N} \mu_j(t) &= 1 & \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

Ensuite la démonstration est identique à celle du Théorème 2.3.2. ■

**Remarque 2.3.7** *Il est possible de simplifier les conditions de stabilité exponentielle en introduisant la borne supérieure de tous les retards  $\bar{\tau}_2 = \max_{i=1,\dots,N}(\tau_{i2})$ .*

On remarque que le nombre de conditions LMI à résoudre augmente géométriquement avec le nombre de retards. En effet dans le cas d'un système à  $N$  retards distincts, le nombre de conditions LMI à satisfaire est de  $2^N + 2N$ . De plus le nombre de variables augmente lui aussi puisque l'on doit déterminer  $8N + 3$  matrices de dimension  $n \times n$ . Plus le nombre de retards est important, moins il sera possible de satisfaire les conditions LMI du Théorème 2.3.6.

Il serait donc intéressant de réduire le nombre de conditions et de variables qui définissent le critère de stabilité exponentielle, même s'il est possible que le conservatisme des conditions augmente.

### Modélisation avec incertitudes paramétriques

Les précédentes conditions utilisant une modélisation polytopique des termes  $e^{\alpha\tau_i(t)}$  ont conduit à des conditions de stabilité exponentielle qui deviennent difficiles à résoudre dans le cas où le nombre de retards est élevé. L'avantage de l'approche par modèles incertains est de réduire considérablement le nombre de conditions à satisfaire et de variables à déterminer. Dans cette partie, nous allons présenter le système (2.3.22) sous forme de système à paramètres incertains :

$$\dot{x}_\alpha(t) = (\alpha I_n + A_0)x_\alpha(t) + \sum_{i=1}^N (\beta_{mi}A_i + \Delta_i(t)\beta_{di}A_i)x_\alpha(t - \tau_i(t)), \quad (2.3.28)$$

où  $\Delta_i(t)$  est une fonction inconnue dépendant de la valeur du retard  $\tau_i(t)$  et vérifiant  $\|\Delta_i\| \leq 1$

**Théorème 2.3.8** *Le système (2.3.22) est  $\alpha$ -stable, pour tout réel  $\alpha > 0$ , s'il existe des matrices de dimension  $n \times n$ ,  $P_1 > 0$  et  $R_i > 0$ , pour  $i = 1, \dots, N$ , et  $P_2, P_3$  ainsi que des matrices  $Z_{ij}$  de dimension  $2n \times 2n$ , pour  $i = 1, \dots, N$  et  $j = m, d$  telles que les conditions LMI suivantes soient satisfaites :*

$$\begin{aligned} \Psi_N = & P^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 + \alpha I_n + \sum_{i=1}^N \beta_{im}A_i & -I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 + \alpha I_n + \sum_{i=1}^N \beta_{im}A_i & -I_n \end{bmatrix}^T P \\ & + \sum_{i=1}^N \left\{ \begin{bmatrix} R_{id} & 0 \\ 0 & \tau_{2i}(R_{im} + R_{id}) \end{bmatrix} + Z_{id} + \tau_{2i}(Z_{im} + Z_{id}) \right\} < 0, \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

et

$$\begin{bmatrix} R_{ij} & \begin{bmatrix} 0 & \beta_{ij}A_i \end{bmatrix} \\ * & Z_{ij} \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = m, d, \quad (2.3.30)$$

où  $\beta_m = (1 + e^{\alpha\tau_2})/2$  et  $\beta_d = (e^{\alpha\tau_2} - 1)/2$ .

**Démonstration.** Le Théorème 2.3.8 est une adaptation du Théorème 2.3.4 aux cas des systèmes à retards multiples. Considérons le système (2.3.28) et la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii

$$V(\bar{x}_\alpha(t)) = \bar{x}_\alpha^T(t)EP\bar{x}_\alpha(t) + \sum_{i=1}^N \int_{-\tau_{i2}}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\bar{x}}_\alpha^T(s)(R_{id} + R_{im})\dot{\bar{x}}_\alpha(s)dsd\theta,$$

où  $\bar{x}_\alpha(t) = \text{col}\{x_\alpha(t), \dot{x}_\alpha(t)\}$ . La suite de la démonstration utilise le même développement que pour le Théorème 2.3.4. ■

On remarque que le Théorème 2.3.8 conduit à des conditions LMI plus réduites. Le nombre de LMI à résoudre est maintenant de  $1 + 2N$  avec  $4 + 14N$  matrices de dimension  $n \times n$  à déterminer.

**Exemple**

On souhaite montrer la différence entre les deux Théorèmes 2.3.6 et 2.3.8 dans le cas d'un système soumis à deux retards. Considérons le système (2.3.22) avec les valeurs suivantes :

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Le Tableau 2.2 présente les résultats des conditions de stabilité exponentielle du système (2.3.22).

$\alpha$	0	0.5	1	1.5	1.9	2
Th 2.3.6	0.471	0.402	0.364	0.330	0.302	0
Th 2.3.8	0.381	0.300	0.253	0.222	0.119	0

TAB. 2.2 – Valeurs maximales de  $\tau_2$  en fonction de  $\alpha$ .

On remarque que l'approche polytopique aboutit encore une fois à des valeurs de  $\tau_2$  plus importantes que par l'approche par modèle incertain. Cela dit, il faut tout de même rappeler que le nombre de conditions LMI à résoudre par l'approche polytopique est beaucoup plus important que dans l'approche par modèle incertain. Cette seconde approche trouve donc son intérêt dans le cas d'un grand nombre de retards.

**2.3.4 Application à la stabilisation exponentielle**

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_\tau x(t - \tau(t)) + Bu(t) + B_\tau u(t - \tau(t)), \\ x(s) = \phi(s), \quad \forall s \in [-\tau_2, 0]. \end{cases} \quad (2.3.31)$$

Après avoir déterminé des critères de stabilité exponentielle en boucle ouverte de systèmes linéaires à retards, l'étape suivante consiste à définir des algorithmes autorisant la synthèse d'un gain  $K$  tel que la commande par retour d'état  $u(t) = Kx(t)$  stabilise exponentiellement le système avec un taux de convergence  $\alpha$  garanti. On considérera le système linéaire à retard simple suivant :

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + (A_\tau + B_\tau K)x(t - \tau(t)); \quad (2.3.32)$$

Les matrices  $A, A_\tau \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B, B_\tau \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , sont les matrices d'états supposées constantes. Ainsi en remplaçant les matrices  $A_0$  par  $A + BK$  et  $A_1$  par  $A_\tau + B_\tau K$  dans les théorèmes de la partie précédente, on obtient des critères LMI caractérisant la stabilité exponentielle du système en boucle fermée. L'étape suivante consiste à modifier ses critères pour qu'ils permettent une synthèse "systématique" d'un gain  $K$  qui stabilise exponentiellement le système en boucle fermée. Pour le moment les conditions obtenues ne sont pas linéaires. En effet, comme les matrices  $A_0$  et  $A_1$  sont multipliées par les variables des LMI. Il existe alors des termes bilinéaires en  $K$  et en les autres variables du système qu'il faut transformer pour obtenir des conditions linéaires.

Il existe plusieurs méthodes permettant ce calcul. Certaines conduisent à des conditions restrictives. En effet, certaines techniques de synthèse du gain nécessitent de lier les paramètres des critères. Pour éviter de trop alourdir ce mémoire, nous allons simplement exposer trois techniques en utilisant uniquement le Théorème 2.3.2, sachant il est possible de les appliquer aux autres théorèmes d' $\alpha$ -stabilité.

### Modélisation polytopique

D'après le Théorème 2.3.2, il faut que les conditions suivantes (qui ne sont plus linéaires mais bilinéaires à cause de produit  $K.P$ ) soient satisfaites pour  $i = 1, 2$  pour que le système en boucle fermée avec la commande  $u(t) = Kx(t)$  soit  $\alpha$ -stable :

$$\Psi_i < 0 \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} R & \begin{bmatrix} 0 & \beta_i(A_\tau + BK)^T \end{bmatrix} P \\ * & Z^i \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.3.33)$$

avec

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}, \quad Z^i = \begin{bmatrix} Z_1^i & Z_2^i \\ Z_2^{iT} & Z_3^i \end{bmatrix},$$

et

$$\begin{aligned} \Psi_i &= P^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \Lambda_i & -I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \Lambda_i & -I_n \end{bmatrix}^T P + \tau_2 Z^i + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 R \end{bmatrix}, \\ \Lambda_i &= \alpha I_n + A + BK + \beta_i(A_\tau + B_\tau K). \end{aligned}$$

La première technique de synthèse de gain, proposée dans [139], utilise la contrainte liante sur les variables de la condition de stabilité  $P_3 = \varepsilon P_2$ , où  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  est un paramètre de réglage. On remarque dans un premier temps que  $P_2$  est nécessairement non singulière car sinon le second bloc diagonal de (2.3.33a), c'est-à-dire  $-\varepsilon(P_2 + P_2^T) + \tau_2 R$  ne pourrait être défini négatif. On définit alors :

$$\bar{P} = P_2^{-1}.$$

Ensuite, on définit les nouvelles variables  $\bar{P}_1, \bar{R}, \bar{Z}_j^i$ , pour  $i = 1, 2$  et  $j = 1, 2, 3$ , et  $Y$  par  $\bar{P}_1 = \bar{P}^T P_1 \bar{P}$ ,  $\bar{R} = \bar{P}^T R \bar{P}$ ,  $\bar{Z}_j^i = \bar{P}^T Z_j^i \bar{P}$  et  $Y = K \bar{P}$ . On multiplie les conditions (2.3.33a) à droite (respectivement à gauche) par la matrice  $\Delta_3 = \text{diag}\{\bar{P}, \bar{P}\}$  (par la matrice  $\Delta_3^T$  à gauche) et on multiplie les conditions LMI (2.3.33b) à droite (respectivement à gauche) par la matrice  $\Delta = \text{diag}\{\bar{P}, \bar{P}, \bar{P}\}$  (par la matrice  $\Delta^T$  à gauche) On obtient finalement les conditions LMI de stabilisation du Théorème 2.3.9.

**Théorème 2.3.9** *Le système (2.3.32) est  $\alpha$ -stabilisable pour un réel  $\varepsilon > 0$  et pour tout retard variable  $\tau(t)$  vérifiant (2.3.2), s'il existe des matrices de dimension  $n \times n$   $\bar{P}_1 > 0, \bar{R} > 0, \bar{P}, \bar{Z}_1^i, \bar{Z}_2^i, \bar{Z}_3^i$  et  $Y$  une matrice de dimension  $m \times n$ , satisfaisant les conditions LMI suivantes pour  $i = 1, 2$  :*

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \Phi_{11}^i & \Phi_{12}^i \\ * & \Phi_{22}^i \end{bmatrix} < 0, \\ & \begin{bmatrix} \bar{R} & \beta_i(\bar{P}^T A_\tau^T + Y^T B_\tau^T) & \varepsilon \beta_i(\bar{P}^T A_\tau^T + Y^T B_\tau^T) \\ * & \bar{Z}_1^i & \bar{Z}_2^i \\ * & * & \bar{Z}_3^i \end{bmatrix} \geq 0, \end{aligned} \quad (2.3.34)$$

où

$$\begin{aligned} \Phi_{11}^i &= (A + \alpha I_n + \beta_i A_\tau) \bar{P} + \bar{P}^T (A + \alpha I_n + \beta_i A_\tau)^T + (B + \beta_i B_\tau) Y + Y^T (B + \beta_i B_\tau)^T + \tau_2 \bar{Z}_1^i, \\ \Phi_{12}^i &= \bar{P}_1 - \bar{P} + \varepsilon \bar{P}^T (A + \alpha I_n + \beta_i A_\tau)^T + \varepsilon Y^T (B + \beta_i B_\tau)^T + \tau_2 \bar{Z}_2^i, \\ \Phi_{22}^i &= -\varepsilon(\bar{P} + \bar{P}^T) + \bar{R} + \tau_2 \bar{Z}_3^i. \end{aligned}$$

Le gain du retour d'état est alors donné par :

$$K = Y \bar{P}^{-1}.$$

Une autre technique, utilisée dans [51] consiste à faire apparaître le produit  $KQ_1$  dans les conditions LMI du Théorème 2.3.2 appliqué au système bouclé (2.3.32) avec la commande  $u(t) = Kx(t)$  et avec, cette fois-ci,  $\Lambda_i = A + \alpha I_n + \beta_i A_\tau + (B + \beta_i B_\tau)K$  et  $A_1 = A_\tau + B_\tau K$ . Premièrement on remarque que la matrice composant le bloc de la seconde colonne et de la seconde ligne de  $\Psi_0^i$  est  $-P_3 - P_3^T$  doit être défini négatif pour qu'il existe une solution au problème LMI (2.3.12). La matrice  $P_3$  est donc non singulière. On peut alors définir la matrice  $Q$  telle que :

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ Q_2 & Q_3 \end{bmatrix} = P^{-1}.$$

La seconde étape consiste à développer le dernier terme de  $\Psi_0^i$  qui peut aussi s'écrire :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 R \end{bmatrix} = \tau_2 \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix} (\tau_2 R)^{-1} \tau_2 \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix}^T. \quad (2.3.35)$$

Ainsi le complément de Schur, appliqué une première fois à l'expression précédente et une seconde fois à la seconde colonne et la seconde ligne, permet d'obtenir une condition de stabilité exponentielle du système en boucle fermée équivalente à (2.3.33). Ensuite la multiplication à droite par  $\Delta_1 = \text{diag}\{Q, I_{2n \times 2n}\}$  et à gauche par  $\Delta_1^T$  conduit à la condition :

$$\left[ \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \Lambda_i & -I_n \end{bmatrix} Q + Q^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \Lambda_i & -I_n \end{bmatrix}^T + \tau_2 Q^T Z^i Q \quad \tau_2 Q^T \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix} \\ * \\ -\tau_2 R^{-1} \end{array} \right] < 0.$$

On introduit alors les matrices  $W = Q^T Z^i Q = \begin{bmatrix} W_1^i & W_2^i \\ * & W_3^i \end{bmatrix}$  et  $S = R^{-1}$ . En développant, on obtient :

$$\left[ \begin{array}{ccc} Q_2 + Q_2^T + W_1^i & \Theta_{21} & \tau_2 Q_2^T \\ * & -Q_3 - Q_3^T + W_3^i & \tau_2 Q_3^T \\ * & * & -\tau_2 S \end{array} \right] < 0,$$

où

$$\Theta_{21} = Q_1(A + \alpha I_n + \beta_i A_\tau)^T + Q_1 K^T (B + \beta_i B_\tau)^T - Q_2^T + Q_3 + W_2^i.$$

La deuxième condition LMI du Théorème 2.3.2 doit être, elle aussi, exprimée en fonction des nouvelles variables définies ci-dessus. Pour cela, on multiplie (2.3.12b) par  $\text{diag}\{Q_1, Q^T\}$  à gauche et par sa transposée à droite, ce qui conduit à la condition bilinéaire (BMI) suivante :

$$\left[ \begin{array}{ccc} Q_1^T S^{-1} Q_1 & 0 & \beta_i Q_1 (A_\tau + B_\tau K)^T \\ * & W_1^i & W_2^i \\ * & * & W_3^i \end{array} \right] \geq 0 \quad (2.3.36)$$

L'élément  $Q_1^T S^{-1} Q_1$  pose problème dans la résolution. Les deux dernières techniques que nous proposerons permettent de résoudre les difficultés causées par ces non-linéarités. Une première piste consiste à introduire une condition liante telle que  $Q_1 = \epsilon S$  pour rendre le problème linéaire.

**Théorème 2.3.10** *Le système (2.3.32) est  $\alpha$ -stabilisable pour tout retard variable  $\tau(t)$  vérifiant (2.3.2), s'il existe un réel  $\epsilon > 0$  et des matrices de dimension  $n \times n$   $Q_1 > 0$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$ ,  $W_1^i$ ,  $W_2^i$ ,  $W_3^i$  et  $Y$  une matrice de*

dimension  $m \times n$ , satisfaisant les conditions LMI suivantes pour  $i = 1, 2$  :

$$\begin{bmatrix} Q_2 + Q_2^T + \tau_2 W_1^i & \Phi_{12}^i & \tau_2 Q_2^T \\ * & -(Q_3 + Q_3^T) + \tau_2 W_3^i & \tau_2 Q_3^T \\ * & * & -\tau_2 \epsilon Q_1 \end{bmatrix} < 0, \quad (2.3.37)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon Q_1 & 0 & \beta_i(Q_1 A_\tau^T + Y^T B_\tau^T) \\ * & W_1^i & W_2^i \\ * & * & W_3^i \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.3.38)$$

où

$$\Phi_{12}^i = Q_1(A + \alpha I_n + \beta_i A_\tau)^T + Y^T(B + \beta_i B_\tau) - Q_2^T + Q_3 + \tau_2 W_2^i.$$

Le gain du retour d'état est alors donné par :

$$K = Y Q_1^{-1}.$$

**Remarque 2.3.11** On comprend bien que le fait d'imposer la relation liante  $S = \epsilon Q_1$  ou  $P_2 = \epsilon P_3$  augmente le conservatisme des conditions.

Une autre méthode développée dans [72] est envisageable pour éviter cette restriction en utilisant l'inégalité suivante pour :

$$(Q_1 - S)^T S^{-1} (Q_1 - S) \geq 0,$$

qui, en la développant, assure que  $-Q_1 S^{-1} Q_1 \leq -2Q_1 + S$ . Le lemme de Schur permet ensuite d'écrire la condition (2.3.36) sous la forme :

$$-Q_1 S Q_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i(A_\tau + B_\tau K)Q_1 \end{bmatrix}^T (W^i)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i(A_\tau + B_\tau K)Q_1 \end{bmatrix} < 0. \quad (2.3.39)$$

On remarque alors que si la condition :

$$-2Q_1 + S + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i(A_\tau + B_\tau K)Q_1 \end{bmatrix}^T (W^i)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i(A_\tau + B_\tau K)Q_1 \end{bmatrix} < 0,$$

est satisfaite, alors (2.3.39) sera satisfaite. En appliquant le lemme de Schur, on retrouve alors la condition (2.3.41). Ainsi, en posant  $Y = K Q_1$ , les conditions (2.3.40) et (2.3.41) garantissent que le système (2.3.32) est  $\alpha$ -stabilisable. On obtient alors le résultat suivant :

**Théorème 2.3.12** Le système (2.3.32) est  $\alpha$ -stabilisable pour tout retard variable  $\tau(t)$  vérifiant (2.3.2), s'il existe des matrices de dimension  $n \times n$   $Q_1 > 0$ ,  $S > 0$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$ ,  $W_1^i$ ,  $W_2^i$ ,  $W_3^i$  et  $Y$  une matrice de dimension  $m \times n$ , satisfaisant les conditions LMI suivantes pour  $i = 1, 2$  :

$$\begin{bmatrix} Q_2 + Q_2^T + \tau_2 W_1^i & \Phi_{12}^i & \tau_2 Q_2^T \\ * & -(Q_3 + Q_3^T) + \tau_2 W_3^i & \tau_2 Q_3^T \\ * & * & -\tau_2 S \end{bmatrix} < 0, \quad (2.3.40)$$

$$\begin{bmatrix} 2Q_1 - S & 0 & \beta_i(Q_1 A_\tau^T + Y^T B_\tau^T) \\ * & W_1^i & W_2^i \\ * & * & W_3^i \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.3.41)$$



où

$$\Phi_{12}^i = Q_1(A + \alpha I_n + \beta_i A_\tau)^T + Y^T(B + \beta_i B_\tau) - Q_2^T + Q_3 + \tau_2 W_2^i.$$

Le gain du retour d'état est alors donné par :

$$K = YQ_1^{-1}.$$

**Remarque 2.3.13** Comme nous l'avons dit en début de section, nous n'avons présenté que quelques résultats, sachant qu'il est possible d'énoncer plusieurs théorèmes en se basant sur les théorèmes 2.3.1, 2.3.3 et 2.3.4. De plus les approches par modèle incertain et par modèles polytopiques peuvent être employées avec d'autres théorèmes de stabilité et de stabilisation à partir du moment où les conditions obtenues sont linéaires par rapport aux matrices définissant le système.

**Remarque 2.3.14** Comme pour le problème de l' $\alpha$ -stabilité il est possible de déterminer des conditions de stabilisation exponentielle avec un degré de convergence  $\alpha$  garanti pour les systèmes à retards multiples.

### 2.3.5 Stabilisation à coût quadratique garanti

#### Présentation du problème

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à la stabilité et à la stabilisation exponentielle sous contrainte. Ce problème de stabilité ou stabilisation à coût garanti trouve sa justification dans le domaine pratique. Généralement, la fonction coût représente l'énergie mise en oeuvre dans le système. Dans un contexte de stabilisation des systèmes à retards avec un degré de convergence exponentielle, l'idée du "coût énergétique" d'une expérimentation n'est pas à négliger. Le fait d'ajouter une contrainte de stabilisation exponentielle laisse penser que l'énergie que doit fournir le contrôleur augmente avec le degré de convergence  $\alpha$ . D'où l'idée d'ajouter un critère permettant d'inclure une "limite" énergétique dans la détermination de la loi de commande.

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_\tau x(t - \tau(t)) + Bu(t) + B_\tau u(t - \tau(t)), \\ x(s) = \phi(s), \quad \forall s \in [-\tau_2, 0], \end{cases} \quad (2.3.42)$$

où  $x$ ,  $u$  représente respectivement l'état et la commande du système. Les matrices  $A$ ,  $A_\tau$ ,  $B$  et  $B_\tau$  sont des matrices de dimension appropriée. D'autrepart, on suppose qu'il existe un réel positif  $\tau_2$  tel que le retard  $\tau$  vérifie la condition  $0 \leq \tau(t) \leq \tau_2$  pour tout  $t \geq 0$ .

Dans ce paragraphe, nous étudierons la performance du système (2.3.42) en utilisant une fonction de coût du type intégral quadratique, que l'on retrouve fréquemment dans la littérature ([35], Chapitre 13). L'objectif sera de déterminer un ensemble de conditions initiales qui garantissent que la fonction coût est inférieure à une valeur donnée.

Dans [35], la fonction quadratique de coût est de la forme :

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty x^T(s)Jx(s)ds, \quad (2.3.43)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  représente bien-entendu l'état du système et  $J$  est une matrice symétrique définie positive de dimension  $n \times n$ .

Une définition sensiblement différente est aussi utilisée. La fonction coût est :

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty [x^T(s)Jx(s) + u^T(s)Tu(s)] ds, \quad (2.3.44)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  représente l'état du système,  $u \in \mathbb{R}^m$  la commande,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$  sont des matrices symétriques définies positive. Cette définition est différente de (2.3.43) dans la mesure où la commande apparaît explicitement dans la fonction coût.

Une dernière définition peut être utilisée. Elle consiste à définir un vecteur de mesure  $z$ , de la même manière que lors de la résolution du problème  $H^\infty$ . Le vecteur de mesure  $z$  de dimension  $p$  est de la forme :

$$z(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (2.3.45)$$

La fonction coût associée est alors :

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty z^T(s)S z(s)ds, \quad (2.3.46)$$

où  $S$  est une matrice symétrique définie positive de  $\mathbb{R}^{p \times p}$ .

Par la suite, nous n'utiliserons que la dernière formulation (2.3.43), sachant que la résolution sera quasiment identique pour (2.3.44) et (2.3.46).

### Résolution du problème

Ici nous ne procéderons pas de la manière habituelle qui consiste à déterminer des conditions garantissant que la dérivée de la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii du système (2.3.42) vérifie :

$$\dot{V}(t) + x^T(t)Jx(t) < 0.$$

La méthode proposée ici utilise uniquement la stabilité exponentielle pour prouver la convergence à coût garanti.

**Théorème 2.3.15** *Le système (2.3.42) est  $\alpha$ -stabilisable pour tout retard variable  $\tau(t)$  vérifiant (2.3.2), s'il existe des matrices de dimension  $n \times n$  matrices  $Q_1 > 0$ ,  $S > 0$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$ ,  $W_1^i$ ,  $W_2^i$ ,  $W_3^i$  et  $Y$  une matrice de dimension  $m \times n$ , satisfaisant les conditions LMI suivantes pour  $i = 1, 2$  :*

$$\begin{bmatrix} Q_2 + Q_2^T + \tau_2 W_{11}^i & \Phi_{12}^i & \tau_2 Q_2^T \\ * & -(Q_3 + Q_3^T) + \tau_2 W_{22}^i & \tau_2 Q_3^T \\ * & * & -\tau_2 S \end{bmatrix} < 0, \quad (2.3.47)$$

$$\begin{bmatrix} 2Q_1 - S & 0 & \beta_i(Q_1 A_\tau^T + Y^T B_\tau^T) \\ * & W_1^i & W_2^i \\ * & * & W_3^i \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.3.48)$$

où

$$\Phi_{12}^i = Q_1(A + \alpha I_n + \beta_i A_\tau)^T + Y^T(B + \beta_i B_\tau) - Q_2^T + Q_3 + \tau_2 W_2^i.$$

Le gain du retour d'état est alors donné par :

$$K = YQ_1^{-1}.$$

L'ensemble  $\mathcal{D}_0$  des conditions initiales  $\phi$  qui satisfont à la condition  $\mathcal{J} \leq \gamma$ , où  $\gamma$  est un réel strictement positif, est défini par :

$$\lambda_{\max}(J) \left[ \frac{\lambda_{\max}(Q_1^{-1})}{\alpha \lambda_{\min}(Q_1^{-1})} \|\phi(s)\|^2 + \frac{e^{-2\alpha\tau_2} - 1 + 2\alpha\tau_2}{4\alpha^3 \lambda_{\min}(Q_1^{-1})} \lambda_{\max}(S^{-1})(\alpha \|\phi\| + \|\dot{\phi}\|)^2 \right] \leq \gamma \quad (2.3.49)$$

**Démonstration.** La preuve de ce théorème se fait en deux étapes. La première consiste à déterminer une commande par retour d'état  $u(t) = Kx(t)$  qui stabilise exponentiellement le système (2.3.42) avec un degré de convergence  $\alpha > 0$ . La démonstration est identique à celle du Théorème (2.3.12).

La seconde étape consiste à déterminer une borne de la fonction coût (2.3.43). Pour cela on va dans un premier temps déterminer une majoration de la solution  $x(t)$  de (2.3.42). Les conditions LMI (2.3.47) et (2.3.48) assurent que la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii (2.3.50) :

$$V_\alpha(t) = \bar{x}_\alpha(t)'EQ^{-1}\bar{x}_\alpha(t) + \int_{-\tau_2}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}_\alpha^T(s)S^{-1}\dot{x}_\alpha(s)dsd\theta, \quad (2.3.50)$$

est décroissante. Ce qui implique :

$$x_\alpha^T(t)Q_1^{-1}x_\alpha(t) \leq V_\alpha(t) \leq V_\alpha(0), \quad \forall t \geq 0,$$

ou encore, revenant à la variable  $x$  :

$$\lambda_{\min}(Q_1^{-1})\|x(t)\|^2 \leq V_\alpha(0)e^{-2\alpha t}, \quad \forall t \geq 0,$$

On détermine ensuite une borne supérieure de  $V_\alpha(0)$  en remarquant que  $e^{\alpha t}\dot{x}(t - \tau) = e^{\alpha\tau}\dot{x}_\alpha(t - \tau) - \alpha e^{\alpha\tau}x_\alpha(t - \tau)$  :

$$\begin{aligned} V_\alpha(0) &\leq \lambda_{\max}(Q_1^{-1})\|\phi(s)\|^2 + \lambda_{\max}(S^{-1})(\alpha\|\phi\| + \|\dot{\phi}\|)^2 \int_{-\tau_2}^0 \int_\theta^0 e^{2\alpha s}dsd\theta, \\ &\leq \lambda_{\max}(Q_1^{-1})\|\phi(s)\|^2 + \frac{e^{-2\alpha\tau_2} - 1 + 2\alpha\tau_2}{4\alpha^2} \lambda_{\max}(S^{-1})(\alpha\|\phi\| + \|\dot{\phi}\|)^2. \end{aligned}$$

Ainsi on en déduit que pour tout  $t \geq 0$  :

$$\begin{aligned} \|x(t)\|^2 &\leq x^T(t) \frac{Q_1}{\lambda_{\min}(Q_1^{-1})} x(t) \\ \|x(t)\|^2 &\leq \left[ \frac{\lambda_{\max}(Q_1^{-1})}{\lambda_{\min}(Q_1^{-1})} \|\phi(s)\|^2 + \frac{e^{-2\alpha\tau_2} - 1 + 2\alpha\tau_2}{4\alpha^2 \lambda_{\min}(Q_1^{-1})} \lambda_{\max}(S^{-1})(\alpha\|\phi\| + \|\dot{\phi}\|)^2 \right] e^{-2\alpha t}, \end{aligned}$$

On peut maintenant déterminer une borne de  $\mathcal{J}$  :

$$\mathcal{J} \leq \lambda_{\max}(J) \left[ \frac{\lambda_{\max}(Q_1^{-1})}{\alpha \lambda_{\min}(Q_1^{-1})} \|\phi(s)\|^2 + \frac{e^{-2\alpha\tau_2} - 1 + 2\alpha\tau_2}{4\alpha^3 \lambda_{\min}(Q_1^{-1})} \lambda_{\max}(S^{-1})(\alpha\|\phi\| + \|\dot{\phi}\|)^2 \right].$$

Donc si la condition (2.3.49) est vérifiée, la fonction de coût  $\mathcal{J}$  est bien inférieure à  $\gamma$ . ■

Les conditions initiales  $\phi$  satisfaisant à la condition (2.3.49) sont donc caractérisées par la norme sur  $\mathcal{C}$  de la fonction  $\phi$  dans l'intervalle  $[-\tau_2, 0]$  et par celle de sa dérivée  $\dot{\phi}$  sur le même intervalle.

**Remarque 2.3.16** Pour exposer le lien entre stabilisation exponentielle et stabilisation à coût garanti, nous avons choisi d'utiliser le Théorème 2.3.12 pour des raisons de clarté de l'exposé. Il est aussi possible d'appliquer ce résultat à chacun des théorèmes de stabilisation présentés dans ce chapitre.

**Remarque 2.3.17** Lorsque la fonction coût est (2.3.44) ou (2.3.46), l'ensemble des conditions initiales satisfaisant la condition  $\mathcal{J} \leq \gamma$  est légèrement modifiée. En effet, il faut alors remplacer  $\lambda_{\min}(J)$  par  $\lambda_{\min}(J + K^T TK)$ , dans le cas (2.3.44) ou par  $\lambda_{\min}((C + DK)^T S(C + DK))$ , dans le cas (2.3.46).

### 2.3.6 Optimisation de l'ensemble des conditions initiales admissibles

Considérons le cas du système (2.3.42) où le retard est majoré par une valeur  $\tau_2$  imposée. Le Théorème 2.3.15 permet alors de déterminer un ensemble de conditions initiales qui satisfont au problème de coût quadratique garanti  $\mathcal{J} \leq \gamma$ . Cependant, il ne permet pas de maximiser cet ensemble. Ce que nous proposons dans ce paragraphe est une procédure de maximisation de  $\mathcal{D}_0$  dans le cas d'une fonction de coût de la forme (2.3.43).

Premièrement, on remarque que  $\mathcal{D}_0$  est de la forme :

$$\mathcal{D}_0 = \{\phi \in \mathcal{C}_\tau : a_\phi \|\phi\| + a_{\dot{\phi}} \|\dot{\phi}\| \leq \gamma\}.$$

Pour que l'ensemble  $\mathcal{D}_0$  soit plus grand, il faut minimiser les coefficients  $a_\phi$  et  $a_{\dot{\phi}}$ . Pour cela, on remarque que dans (2.3.49), ces coefficients sont divisés par  $\alpha$ . La première étape consiste donc à déterminer le plus grand taux de convergence exponentielle  $\alpha$ . La seconde étape consiste à minimiser les valeurs propres des matrices  $Q_1^{-1}$  et  $S^{-1}$ . Pour introduire ces propriétés dans le problème LMI, on ajoute les conditions suivantes :

$$\begin{bmatrix} \lambda_{Q_1} I_n & I_n \\ \star & Q_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \lambda_S I_n & I_n \\ \star & S \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.3.51)$$

En utilisant le complément de Schur, les conditions (3.7.26) deviennent équivalentes à  $\lambda_{Q_1} \geq \lambda_{max}(Q_1^{-1})$ ,  $\lambda_S \geq \lambda_{max}(S^{-1})$  (comme  $Q_1$  et  $S$  sont des matrices symétriques leurs valeurs propres sont réelles). On définit alors le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} & \min \beta_1 \lambda_{Q_1} + \beta_2 \lambda_S \\ & \text{soumis à} \\ & (2.3.47) \text{ et } (2.3.48) \end{aligned}$$

où  $\beta_1$  et  $\beta_2$  représentent des poids qui doivent être réglés pour satisfaire certains compromis entre les valeurs maximales de  $\|\phi\|$  et  $\|\dot{\phi}\|$ .

## 2.4 Cas des retards variables *bornés*

Dans cette section, nous allons nous intéresser à l'étude des systèmes soumis à des retards dont la borne minimale est non nulle. c'est-à-dire qu'il existe une valeur  $\tau_1$  telle que le retard variable  $\tau$  vérifie la relation :

$$\tau_1 \leq \tau(t) \leq \tau_2. \quad (2.4.1)$$

Ce cas de retard est très fréquemment rencontrés en pratique. Dans un contexte de retards liés à une transmission d'informations, un écoulement de liquide, le cas du retard nul ou proche de 0 n'est pas réalisable. En effet, dans ce contexte, un retard quasi-nul s'interprète comme une transmission quasi-instantanée. Or il est évident que le retard dû à une communication induit des retards dont la borne inférieure correspond au temps minimum de transport d'information ou de matière. Ce temps est limité par les caractéristiques du systèmes (par le réseaux dans le cas de la commande à distance). Il paraît alors intéressant de mesurer l'influence de la borne inférieure du retard.

Dans la littérature, on trouve énormément de résultats portant sur les systèmes dont les retards sont seulement strictement positifs. Seulement quelques auteurs [49], [80] ont déterminé des conditions de stabilité asymptotique pour les systèmes soumis à ce type de retard. L'idée principale est de considérer que le retard variable

$\tau$  est la somme d'un retard constant,  $\delta$ , qu'on pourrait appelé retard nominal et d'une perturbation bornée de ce retard  $\eta(t)$  caractérisée par un paramètre  $\mu > 0$  représentant l'amplitude maximale du retard autour de sa valeur nominale :

$$\tau(t) = \delta + \eta(t), \quad \|\eta(t)\| \leq \mu. \quad (2.4.2)$$

### 2.4.1 Etude de la stabilité

Considérons le système linéaire à retard sans commande :

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau(t)). \quad (2.4.3)$$

Notre objectif est de déterminer des conditions de stabilité pour cette classe de systèmes où le retard vérifie (2.4.2). Considérons le système à retards variables (2.4.3). Afin de déterminer des conditions de convergence exponentielle, on introduit la nouvelle variable  $x_\alpha(t) = e^{\alpha t} x(t)$ , avec  $\alpha > 0$ . Le système (2.4.3) devient :

$$\dot{x}_\alpha(t) = (A_0 + \alpha I_n) x_\alpha(t) + e^{\alpha \tau(t)} A_1 x_\alpha(t - \tau(t)) \quad (2.4.4)$$

#### Modélisation polytopique

Il y a une difficulté à surmonter. Le système (2.4.4) est à paramètres variants à cause du gain scalaire  $e^{\alpha \tau(t)}$ . Ceci ne permet pas d'appliquer directement les théorèmes classiques démontrant la stabilité asymptotique d'un système linéaire stationnaire. Heureusement, cette difficulté peut être surmontée en introduisant une modélisation polytopique du système (2.4.4). En fait, sachant que le retard est *borné* (2.4.1) et en reprenant la définition des paramètres  $\beta_i$ , on sait que le gain linéaire  $e^{\alpha \tau(t)}$  vérifie les inégalités :

$$\beta_1 = e^{\alpha(\delta - \mu)} \leq e^{\alpha \tau(t)} \leq e^{\alpha(\delta + \mu)} = \beta_2, \quad \forall t \geq 0.$$

Cela signifie aussi qu'il existe des fonctions scalaires positives mais aussi inconnues  $\lambda_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , qui satisfont la condition de convexité :

$$\forall t \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad \lambda_i(t) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t) = 1,$$

et permettant d'écrire le système (2.4.4) sous la forme polytopique suivante :

$$\dot{x}_\alpha(t) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t) \{ (A_0 + \alpha I_n) x_\alpha(t) + \beta_i A_1 x_\alpha(t - \tau(t)) \}. \quad (2.4.5)$$

En utilisant la formule de Leibniz qui permet d'écrire :

$$x_\alpha(t - \delta) - x_\alpha(t - \delta + \eta(t)) = \int_{t - \delta + \eta(t)}^{t - \delta} \dot{x}_\alpha(s) ds,$$

on obtient finalement l'écriture suivante :

$$E \dot{\bar{x}}_\alpha(t) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t) \left\{ \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ (A_0 + \alpha I_n) & -I_n \end{bmatrix} \bar{x}_\alpha(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i A_1 \end{bmatrix} x_\alpha(t - \delta) - \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i A_1 \end{bmatrix} \int_{t - \delta - \eta(t)}^{t - \delta} \dot{\bar{x}}_\alpha(s) ds \right\},$$

où  $\bar{x}_\alpha(t) = \text{col}\{x_\alpha(t), \dot{x}_\alpha(t)\}$  et  $E = \text{diag}\{I, 0_{(2 \times 2)}\}$ . On propose alors le théorème suivant :

**Théorème 2.4.1** [132] *Le système (2.4.3) est  $\alpha$ -stable s'il existe des  $(n \times n)$ -matrices  $0 < P_1, P_2, P_3, S, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2, Z_3, R$  et  $R_a$  qui satisfont aux conditions LMI pour tout couple  $(i, j) \in \{1, 2\}^2$  :*

$$\Gamma_1^i = \begin{bmatrix} \Psi_1 & P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i A_1 \end{bmatrix} - Y_1^T & \mu P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i A_1 \end{bmatrix} \\ * & -S_1 & 0 \\ * & * & -\mu R_{1a} \end{bmatrix} < 0, \quad (2.4.6)$$

$$\begin{bmatrix} R & Y_1 & Y_2 \\ * & Z_1 & Z_2 \\ * & * & Z_3 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.4.7)$$

avec

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_2^T & Z_3 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix}, \quad (2.4.8)$$

$$\Psi_1 = P^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 + \alpha I_n & -I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 + \alpha I_n & -I_n \end{bmatrix}^T P + \begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix}^T + \delta Z + \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & \delta R + 2\mu R_a \end{bmatrix}.$$

**Démonstration.** Considérons donc la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii qui est présentée en deux parties :

$$V_\alpha(t) = V_n(t) + V_a(t), \quad (2.4.9)$$

où les deux fonctionnelles sont définies comme suit :

$$V_n(t) = \bar{x}_\alpha^T(t) E P \bar{x}_\alpha(t) + \int_{-\delta}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}_\alpha^T(s) R \dot{x}_\alpha(s) ds d\theta + \int_{t-\delta}^t x_\alpha^T(s) S x_\alpha(s) ds, \quad (2.4.10)$$

$$V_a(t) = \int_{-\mu}^\mu \int_{t+\theta-\delta}^t \dot{x}_\alpha^T(s) R_a \dot{x}_\alpha(s) ds d\theta.$$

$V_n$  correspond au contrôle de la stabilité du système soumis au seul retard nominal  $\delta$ . La seconde fonctionnelle  $V_a$  contrôle les variations du retard  $\tau(t)$  autour de leur valeur nominale  $\delta$ . En suivant la démonstration du Lemme 1 dans [56], si les conditions LMI (2.4.7) sont satisfaites, la majoration suivante est vérifiée :

$$\dot{V}_n(t) \leq \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t) \{ \xi^T(t) \Gamma_{1n}^i \xi(t) + \Delta_i(t) \}, \quad (2.4.11)$$

où  $\xi(t) = \text{col}\{x_\alpha(t), \dot{x}_\alpha(t), \bar{x}_\alpha(t - \delta_1)\}$  et les autres termes sont définis par :

$$\Gamma_{1n}^i = \begin{bmatrix} \Psi_1^0 & P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i A_1 \end{bmatrix} - Y^T \\ * & -S \end{bmatrix},$$

avec

$$\Psi_1^0 = \Psi_1 - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\mu R_a \end{bmatrix},$$

$$\Delta_i(t) = -2\bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i A_1 \end{bmatrix} \int_{t-\delta-\eta(t)}^{t-\delta} \dot{x}_\alpha(s) ds,$$

En utilisant la majoration classique qui, pour toute matrice symétrique définie positive  $R$  de dimension  $n$  et pour tous vecteurs  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}^n$ , assure que la relation  $2a^T b \leq a^T R a + b^T R^{-1} b$  est satisfaite, on obtient :

$$\Delta_i(t) \leq \mu \bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i A_1 \end{bmatrix} R_a^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i A_1 \end{bmatrix}^T P \bar{x}_\alpha(t) + \left| \int_{t-\delta-\eta(t)}^{t-\delta} \dot{x}_\alpha^T(s) R_a \dot{x}_\alpha(s) ds \right|.$$

Ensuite, en introduisant la variable  $\xi_1(t) = \text{col}\{\xi(t), \dot{x}_\alpha(t), \dot{x}_\alpha(t)\}$ , la combinaison de (2.4.11) et (2.4.1) permet d'écrire :

$$\dot{V}_\alpha(t) \leq \sum_{i,j=1}^2 \lambda_{ij}(t) \{ \xi_1^T(t) \Gamma_1^i \xi_1(t) \}.$$

Ainsi, on remarque que si les conditions (2.4.6) et (2.4.7) sont satisfaites,  $\dot{V}_\alpha(t)$  est une somme convexe de termes négatifs. Ceci permet de conclure que le système (2.4.4) est asymptotiquement stable et, par conséquent que le système initial (2.4.3) est exponentiellement stable avec un degré de convergence  $\alpha$ . ■

### Modélisation avec incertitudes paramétriques

Dans cette partie, nous utiliserons la modélisation du système (2.4.4) en mettant le terme  $e^{\alpha\tau(t)}$  sous forme d'un système à paramètres incertains. Nous écrirons ce terme comme une somme d'un terme constant  $\beta_m$ , représentant la valeur moyenne de la fonction et d'un terme variable d'amplitude bornée par  $\beta_d$  représentant la perturbation dépendant du retard inconnu.

$$e^{\alpha\tau(t)} = \beta_m + \Delta(t)\beta_d, \quad (2.4.12)$$

où  $\beta_m = (e^{\alpha(\delta+\mu)} + e^{\alpha(\delta-\mu)})/2$ ,  $\beta_d = (e^{\alpha(\delta+\mu)} - e^{\alpha(\delta-\mu)})/2$  et où  $\Delta$  est une fonction inconnue dépendant de la valeur du retard  $\tau$  et vérifiant la condition  $|\Delta(t)| \leq 1$ , pour tout  $t \geq 0$ . En utilisant la modélisation descripteur et la formule de Leibniz, le système (2.4.4) s'écrit alors :

$$E \dot{\bar{x}}_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 + \alpha I_n & -I_n \end{bmatrix} \bar{x}_\alpha(t) + (\beta_m + \Delta(t)\beta_d) \begin{bmatrix} 0 \\ A_1 \end{bmatrix} x_\alpha(t - \delta) - (\beta_m + \Delta(t)\beta_d) \begin{bmatrix} 0 \\ A_1 \end{bmatrix} \int_{t-\delta-\eta(t)}^{t-\delta} \dot{x}_\alpha(t - \delta).$$

On en déduit le théorème suivant :

**Théorème 2.4.2** *Le système (2.4.3) est  $\alpha$ -stable s'il existe des matrices de dimension  $n \times n$   $P_1$ ,  $R > 0$ ,  $S$  et  $R_i > 0$  symétriques définies positives et  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$ ,  $Z_{1i}$ ,  $Z_{2i}$  et  $Z_{3i}$  pour  $i = m, d$  qui satisfont aux conditions LMI :*

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} \Psi_2 & P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_m A_1 \end{bmatrix} - Y^T \\ * & -S + R_d \end{bmatrix} < 0, \quad (2.4.13)$$

$$\begin{bmatrix} R & Y \\ * & Z \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} R_i & \begin{bmatrix} 0 & \beta_i A_1^T \end{bmatrix} P \\ * & Z_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.4.14)$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_2^T & Z_3 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix}, \quad Z_i = \begin{bmatrix} Z_{1i} & Z_{2i} \\ Z_{2i}^T & Z_{3i} \end{bmatrix}, \quad (2.4.15)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2 = & P^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 + \alpha I_n & -I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 + \alpha I_n & -I_n \end{bmatrix}^T P + \delta Z + (1 + \mu)Z_d + \mu Z_m \\ & + \begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & \delta R + 2\mu(R_m + R_d) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

**Démonstration.** La démonstration de ce théorème utilise toujours le changement de variable  $x_\alpha(t) = e^{\alpha t}x(t)$ . Cette transformation introduit le gain scalaire  $e^{\alpha\tau(t)}$  dans (2.4.4). La suite de la démonstration est basée sur les techniques de Lyapunov-Krasovskii. Considérons donc la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii qui est présentée en deux parties :

$$V_\alpha(t) = V_n(t) + V_a(t), \quad (2.4.17)$$

où  $V_n$  est toujours la même fonctionnelle définie par (2.4.10) et la seconde fonctionnelle est définie par :

$$V_a(t) = \int_{-\mu}^{\mu} \int_{t+\theta-\delta}^t \dot{x}_\alpha^T(s)(R_m + R_d)\dot{x}_\alpha(s)dsd\theta. \quad (2.4.18)$$

En suivant la démarche de la démonstration du Théorème 2.4.1,  $V_n$  correspond au contrôle de la stabilité du système soumis au seul retard nominal  $\delta$ . La seconde fonctionnelle  $V_a$  contrôle les variations du retard  $\tau(t)$  autour de leur valeur nominale  $\delta$ . En suivant la démonstration de la preuve du Lemme 1 dans [56], si la condition LMI (2.4.14a) est satisfaite, la majoration suivante est vérifiée :

$$\dot{V}_n(t) \leq \xi^T(t)\Gamma_{2n}\xi(t) + \sum_{k=1}^3 \Delta_k(t), \quad (2.4.19)$$

où  $\xi(t) = \text{col}\{x_\alpha(t), \dot{x}_\alpha(t), \bar{x}_\alpha(t - \delta_1)\}$  et les autres termes sont définis par :

$$\Gamma_{3n}^i = \begin{bmatrix} \Psi_2^0 & P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i A_1 \end{bmatrix} - Y^T \\ * & -S \end{bmatrix},$$

$$\Psi_2^0 = \Psi_2 - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\mu(R_m + R_d) \end{bmatrix}$$

et où les fonctions  $\Delta_i$  sont définies par :

$$\begin{aligned} \Delta_1(t) &= -2\bar{x}_\alpha^T(t)P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta(t)\beta_d A_1 \end{bmatrix} x_\alpha(t - \delta), \\ \Delta_2(t) &= -2\bar{x}_\alpha^T(t)P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_m A_1 \end{bmatrix} \int_{t-\delta-\eta(t)}^{t-\delta} \dot{x}_\alpha(s)ds, \\ \Delta_3(t) &= -2\bar{x}_\alpha^T(t)P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta(t)\beta_d A_1 \end{bmatrix} \int_{t-\delta-\eta(t)}^{t-\delta} \dot{x}_\alpha(s)ds. \end{aligned}$$

A fin de majorer les éléments  $\Delta_k$ , on dispose de la méthode basée sur les conditions LMI (2.4.14) conduisant à :

$$\begin{aligned} \Delta_1(t) &\leq \bar{x}_\alpha^T(t)Z_d\bar{x}_\alpha(t) + x_\alpha^T(t - \delta)R_d x_\alpha(t - \delta), \\ \Delta_2(t) &= \mu\bar{x}_\alpha^T(t)Z_m\bar{x}_\alpha(t) + \left| \int_{t-\delta-\eta(t)}^{t-\delta} \dot{x}_\alpha^T(s)R_m\dot{x}_\alpha(s)ds \right|, \\ \Delta_3(t) &= \mu\bar{x}_\alpha^T(t)Z_d\bar{x}_\alpha(t) + \left| \int_{t-\delta-\eta(t)}^{t-\delta} \dot{x}_\alpha^T(s)R_d\dot{x}_\alpha(s)ds \right|. \end{aligned}$$



Ainsi, on remarque que, si les conditions (2.4.13) à (2.4.14) du Théorème 2.4.2 sont satisfaites, alors on a

$$\begin{aligned} \dot{V}_\alpha(t) \leq & \xi^T(t)\Gamma_{3n}\xi(t) + \sum_{k=1}^3 \Delta_k(t) + \bar{x}_\alpha^T(t)Z_d\bar{x}_\alpha(t) + x_\alpha^T(t-\delta)R_dx_\alpha(t-\delta) \\ & \mu\bar{x}_\alpha^T(t)Z_m\bar{x}_\alpha(t) + \left| \int_{t-\delta-\eta(t)}^{t-\delta} \dot{x}_\alpha^T(s)R_m\dot{x}_\alpha(s)ds \right| - \int_{t-\delta-\mu}^{t-\delta+\mu} \dot{x}_\alpha^T(s)R_m\dot{x}_\alpha(s)ds \\ & \mu\bar{x}_\alpha^T(t)Z_d\bar{x}_\alpha(t) + \left| \int_{t-\delta-\eta(t)}^{t-\delta} \dot{x}_\alpha^T(s)R_d\dot{x}_\alpha(s)ds \right| - \int_{t-\delta-\mu}^{t-\delta+\mu} \dot{x}_\alpha^T(s)R_d\dot{x}_\alpha(s)ds, \end{aligned}$$

En remarquant que la somme des termes intégrales est négative, on conclut que la dérivée de la fonctionnelle  $V_\alpha$  est définie négative si les conditions LMI du Théorème 2.4.2 sont vérifiées. On démontre ainsi que le système (2.4.4) est asymptotiquement stable et, par conséquent, que le système linéaire (2.4.3) soumis au retard défini dans (2.4.1) est  $\alpha$ -stable. ■

## 2.4.2 Stabilisation des systèmes linéaires

Dans cette partie, nous nous intéresserons à la stabilisation de systèmes linéaires à retard de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_\tau x(t - \tau(t)) + Bu(t) + B_\tau u(t - \tau(t)) \\ x(s) = \phi(s), \quad \forall s \in [-\tau_2, 0] \end{cases} \quad (2.4.20)$$

où le retard variable  $\tau(t)$  appartient à  $[\tau_1, \tau_2]$ .

La loi de commande que nous désirons utiliser est une commande par retour d'état  $u = Kx(t)$ , où  $K$  est un gain matriciel à déterminer pour garantir la stabilité exponentielle du système bouclé :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + (A_\tau + B_\tau K)x(t - \tau(t)) \\ x(s) = \phi(s), \quad \forall s \in [-\tau_2, 0] \end{cases} \quad (2.4.21)$$

Les mêmes méthodes proposées dans la partie 2.3.4 permettront aussi de déterminer des conditions LMI de stabilisation. Nous ne présenterons cependant que quelques théorèmes permettant de déterminer le gain linéaire  $K$  du retour d'état pour ne pas alourdir la présentation.

### Modélisation polytopique

**Théorème 2.4.3** *La commande par retour d'état de gain stabilise exponentiellement le système (2.4.3) avec un degré de convergence  $\alpha > 0$  si, pour un réel positif  $\epsilon$ , il existe des matrices de dimension  $n \times n$  définies positives  $Q_1, T, U$  et  $U_a$  et des matrices de dimension  $n \times n$   $Q_2, Q_3, W_1^i, W_2^i, W_3^i, W_{1a}^i, W_{2a}^i, W_{3a}^i$ , pour  $i = 1, 2$  et une matrice  $W$ , de dimension  $n \times m$ , telles que les conditions LMI suivantes soient satisfaites pour  $i = 1, 2$  :*

$$\begin{bmatrix} \Phi_{21}^i & \Phi_{21}^i & 0 & \delta Q_2^T & 2\mu Q_2^T \\ * & \Phi_{23}^i & (1-\epsilon)\beta_i(A_\tau Q_1 + B_\tau Y) & \delta Q_3^T & 2\mu Q_3^T \\ * & * & -T & 0 & 0 \\ * & * & * & -\delta U & 0 \\ * & * & * & * & -2\mu U_a \end{bmatrix} < 0, \quad (2.4.22)$$

et

$$\begin{bmatrix} -2Q_1 + U & 0 & \epsilon\beta_i(A_\tau Q_1 + B_\tau Y)^T \\ * & W_1 & W_2 \\ * & * & W_3 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.4.23)$$

$$\begin{bmatrix} -2Q_1 + U_a & 0 & \beta_i(A_\tau Q_1 + B_\tau Y)^T \\ * & W_{1a}^i & W_{2a}^i \\ * & * & W_{3a}^i \end{bmatrix} \geq 0$$

où

$$\begin{aligned} \Phi_{21}^i &= Q_1(A + \alpha I_n + \epsilon\beta_i A_\tau)^T + (A + \alpha I_n + \epsilon\beta_i A_\tau)Q_1 \\ &\quad + (B + \epsilon\beta_i B_\tau)Y + Y^T(B + \epsilon\beta_i B_\tau)^T + T + \delta W_1^i + \delta W_{1a}^i \\ \Phi_{22}^i &= Q_3 - Q_2^T + Q_1(A + \alpha I_n + \epsilon\beta_i A_\tau)^T + \delta W_2^i + \delta W_{2a}^i, \\ \Phi_{23}^i &= -(Q_3 + Q_3^T) + \delta W_3^i + \delta W_{3a}^i. \end{aligned} \quad (2.4.24)$$

Le gain du retour d'état est alors donnée par :

$$K = YQ_1^{-1} \quad (2.4.25)$$

**Démonstration.** La preuve de ce théorème est basée sur le Théorème de stabilité exponentielle 2.4.1 et suit la méthode proposée pour la démonstration du Théorème 2.3.12. Cependant quelques étapes nécessitent d'être présentée.

On définit la matrice  $Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ Q_2 & Q_3 \end{bmatrix} = P^{-1}$ . On remplace les matrices  $A_0$  par  $A + BK$  et  $A_1$  par  $A_\tau + B_\tau K$ . Notre objectif consiste à faire apparaître le produit  $KQ_1$ . Pour cela nous commençons par imposer la contrainte suivante :

$$Y_i = \epsilon \begin{bmatrix} 0 & \beta_i A_1 \end{bmatrix} P.$$

On remarque, dans un premier temps que l'on a dédoublé la matrice  $Y$  en deux matrices  $Y_i$  pour que cette contrainte liante ne rende les conditions conservatives. De la même manière, on définit les matrices  $Z_i$  de dimension  $2n \times 2n$  telles que les conditions (2.4.7) deviennent :

$$\begin{bmatrix} R & \begin{bmatrix} 0 & \epsilon\beta_i(A_\tau + B_\tau K)^T \end{bmatrix} P \\ * & Z^i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.4.26)$$

Ensuite en utilisant la même technique que dans la démonstration du Théorème 2.3.12, en multipliant les conditions LMI (2.4.7) par  $\text{diag}\{Q_1, Q\}$  à droite et par sa transposée à gauche. Pour obtenir les conditions :

$$\begin{bmatrix} Q_1 R Q_1 & \begin{bmatrix} 0 & \epsilon\beta_i Q_1 (A_\tau + B_\tau K)^T \end{bmatrix} \\ * & Q^T Z^i Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} Q_1 R_a Q_1 & \begin{bmatrix} 0 & \beta_i Q_1 (A_\tau + B_\tau K)^T \end{bmatrix} \\ * & Q^T Z_a^i Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.4.27)$$

En posant  $W^i = Q^T Z^i Q$ ,  $W_a^i = Q^T Z_a^i Q$ ,  $U = R^{-1}$  et  $U_a = R_a^{-1}$  et en utilisant la même majoration que dans la démonstration du Théorème 2.3.12, on retrouve les conditions LMI (2.4.23).

D'autre part, dans l'équation (2.4.6), on peut appliquer le complément de Schur aux termes  $R$  et  $R_a$  à la manière de (2.3.35). On obtient alors :

$$\begin{bmatrix} \Psi_2^i & (1-\epsilon)P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i A_1 \end{bmatrix} & \delta \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix} & \delta \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix} \\ * & -S & 0 & 0 \\ * & * & -\delta R^{-1} & 0 \\ * & * & * & -2\mu R_a^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (2.4.28)$$

avec

$$\begin{aligned} \Psi_2^i = & P^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 + \alpha I_n & -I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 + \alpha I_n & -I_n \end{bmatrix}^T P + \delta Z^i + \mu Z_a^i \\ & + \epsilon \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i A_1 \end{bmatrix}^T P + \epsilon P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

On multiplie alors la condition (2.4.28) à droite par  $\text{diag}\{Q, Q_1, I_n, I_n\}$  et par sa transposée à gauche. Ainsi, en posant  $U = S^{-1}$  et  $U_a = S_a^{-1}$  la condition de stabilité exponentielle devient :

$$\begin{bmatrix} \Phi_2^i & (1-\epsilon) \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i A_1 \end{bmatrix} Q_1 & \delta Q^T \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix} & \delta Q^T \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix} \\ * & -Q_1 S Q_1 & 0 & 0 \\ * & * & -\delta U & 0 \\ * & * & * & -2\mu U_a \end{bmatrix} < 0,$$

où

$$\begin{aligned} \Psi_2^i = & \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 + \alpha I_n & -I_n \end{bmatrix} Q + Q^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 + \alpha I_n & -I_n \end{bmatrix}^T P + \delta Q^T Z^i Q + \mu Q^T Z_a^i Q \\ & + \epsilon Q^T \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i A_1 \end{bmatrix}^T + \epsilon \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}^T Q + Q^T \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q. \end{aligned}$$

On pose alors  $T = Q_1 S Q_1$ ,  $W^i = Q^T Z^i Q$ ,  $W_a^i = Q^T Z_a^i Q$  et  $Y = K Q_1$ . On retrouve ainsi la LMI (2.4.22). ■

D'autres résultats peuvent être développés à partir des techniques et théorèmes des parties proposées dans les paragraphes précédents.

### 2.4.3 Exemple

Afin de montrer la pertinence des résultats de stabilisation exponentielle dans le cas des systèmes à retard *borné*, nous proposons l'exemple suivant :

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -0.5 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}. \quad (2.4.29)$$

Les conditions LMI du Théorème 2.4.1 donnent les valeurs de retard maximal admissible suivant pour des valeurs différentes de  $\tau_1$ . Ces valeurs sont répertoriées dans le Tableau 2.3.

On remarque que lorsque le retard varie dans un intervalle de longueur petite le taux de convergence exponentielle est plus important.

$\alpha$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$\tau_1 = 0$	1.259	0.974	0.822	0.727	0.660	0.609
$\tau_1 = 0.5\tau_2$	2.519	1.576	1.176	0.985	0.871	0.790
$\tau_1 = 0.9\tau_2$	12.550	2.888	1.719	1.324	1.123	0.992

TAB. 2.3 – Valeurs maximales de  $\tau_2$  en fonction de  $\alpha$ .

## 2.5 Cas particulier des systèmes neutres à retard constant

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser au cas des systèmes neutres. Ce type de systèmes intervient notamment lors de phénomènes de propagation d'onde [44]. Sans perte de généralité, le système que nous allons considérer ici est le suivant :

$$\dot{x}(t) - F\dot{x}(t - \tau) = A_0x(t) + A_1x(t - \tau), \quad (2.5.1)$$

où  $x$  représente respectivement l'état. Les matrices  $A_0$ ,  $A_1$  et  $F$  sont des matrices constantes de dimension appropriée. D'autrepart, on suppose que le retard  $\tau$  est constant. Nous considérons pour simplifier le problème que les retards des termes neutre et retardé sont égaux.

### 2.5.1 Stabilité exponentielle

Nous introduisons la nouvelle variable  $x_\alpha(t) = e^{\alpha t}x(t)$  qui conduit à l'équation :

$$\dot{x}_\alpha(t) = (A_0 + \alpha I_n)x_\alpha(t) + Fe^{\alpha t}\dot{x}(t - \tau) + e^{\alpha t}A_1x_\alpha(t - \tau). \quad (2.5.2)$$

Cette équation n'est pas encore exprimée correctement puisqu'il subsiste un terme en fonction de la solution  $x$ . Or en remarquant que :

$$e^{\alpha t}\dot{x}(t - \tau) = e^{\alpha t}\dot{x}_\alpha(t - \tau) - \alpha e^{\alpha t}x_\alpha(t - \tau), \quad (2.5.3)$$

on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x}_\alpha(t) = (A_0 + \alpha I_n)x_\alpha(t) + e^{\alpha t}F\dot{x}_\alpha(t - \tau) + (A_1 - \alpha F)e^{\alpha t}x_\alpha(t - \tau). \quad (2.5.4)$$

La transformation qui consiste à remplacer  $x$  par  $x_\alpha$  dans le cas d'un éléments neutre introduit un terme retardé supplémentaire dont il faut tenir compte pour caractériser la stabilité exponentielle. Notre objectif est de déterminer des conditions qui garantissent la stabilité asymptotique du système 2.5.4. D'après [85], une condition nécessaire de stabilité des systèmes neutres est que la matrice correspondant au terme neutre ait des valeurs propres strictement incluses dans le cercle unité, c'est-à-dire :

$$\rho(e^{\alpha\tau}F) < 1. \quad (2.5.5)$$

où  $\rho(\cdot)$  est le rayon spectral. En d'autres termes, cela signifie que les valeurs propres de la matrice  $F$  sont incluses dans le cercle de centre l'origine et de rayon  $e^{-\alpha\tau}$ .

**Théorème 2.5.1** [132] *Le système (2.5.1) est exponentiellement stable, avec un taux de convergence  $\alpha > 0$  vérifiant (2.5.5), pour le retard constant  $\tau > 0$ , s'il existe des matrices de dimension  $n \times n$ ,  $P_1$ ,  $S$ ,  $U$  et  $R$  symétriques définies positives et  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$ , telles que les conditions LMI suivantes soient*

satisfaites :

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \Psi_1 & P^T \begin{bmatrix} 0 \\ (A_1 - \alpha F)e^{\alpha\tau} \end{bmatrix} - Y^T & P^T \begin{bmatrix} 0 \\ e^{\alpha\tau} F \end{bmatrix} \\ * & -S & 0 \\ * & * & -U \end{bmatrix} < 0, \quad (2.5.6)$$

et

$$\begin{bmatrix} R & Y \\ * & Z \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.5.7)$$

avec

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_2^T & Z_3 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix}, \quad (2.5.8)$$

où la matrice  $\Psi_1$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \Psi_1 = & P^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 + \alpha I_n & -I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 + \alpha I_n & -I_n \end{bmatrix}^T P \\ & + \tau Z + \begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & \tau R + U \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

**Démonstration.** La démonstration de ce théorème utilise une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii définie par :

$$\begin{aligned} V_\alpha(t) = & \bar{x}_\alpha^T(t) E P \bar{x}_\alpha(t) + \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}_\alpha^T(s) R \dot{x}_\alpha(s) ds d\theta \\ & + \int_{t-\tau}^t x_\alpha^T(s) S x_\alpha(s) ds + \int_{t-\tau}^t \dot{x}_\alpha^T(s) U \dot{x}_\alpha(s) ds, \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

D'après le Théorème 2.2.1, la dérivation de la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii conduit à l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}_\alpha(t) \leq & \xi(t)^T \begin{bmatrix} \Psi'_1 & P^T \begin{bmatrix} 0 \\ (A_1 - \alpha F)e^{\alpha\tau} \end{bmatrix} - Y^T \\ * & -S \end{bmatrix} \xi(t) + \bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ e^{\alpha\tau} F \end{bmatrix} \dot{x}_\alpha(t - \tau) \\ & + \dot{x}_\alpha^T(t) U \dot{x}_\alpha(t) - \dot{x}_\alpha^T(t - \tau) U \dot{x}_\alpha(t - \tau), \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

où  $\xi(t) = \text{col}\{x_\alpha(t), \dot{x}_\alpha(t), x_\alpha(t - \tau)\}$ , la matrice  $A_1$  est remplacée par  $A_1 - \alpha e^{\alpha\tau} F$  et où  $\Psi'_1 = \Psi_1 - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix}$ .

Ainsi en introduisant le nouveau vecteur  $\xi'(t) = \text{col}\{x_\alpha(t), \dot{x}_\alpha(t), x_\alpha(t - \tau), \dot{x}_\alpha(t - \tau)\}$ , on obtient :

$$\dot{V}_\alpha(t) \leq \xi'^T(t) \Gamma_1 \xi'(t) \quad (2.5.12)$$

Si les conditions LMI du Théorème 2.5.1 sont satisfaites, le système transformé (2.5.2) est asymptotiquement stable, et par conséquent le système initial (2.5.1) est exponentiellement stable. ■

## 2.5.2 Exemple

Afin de montrer la pertinence des résultats de stabilisation exponentielle dans le cas des systèmes neutres à retard simple constant, nous proposons l'exemple suivant :

$$A_0 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.5.13)$$

La Figure 2.1 permet de comparer les courbes représentant le degré de convergence exponentielle  $\alpha$  en fonction du retard maximal admissible. La Figure 2.1 montre que les conditions du Théorème 2.5.1 sont moins conservatives que les résultats de Mondié et al. [82] pour  $\tau_2 \leq 1.08$  :

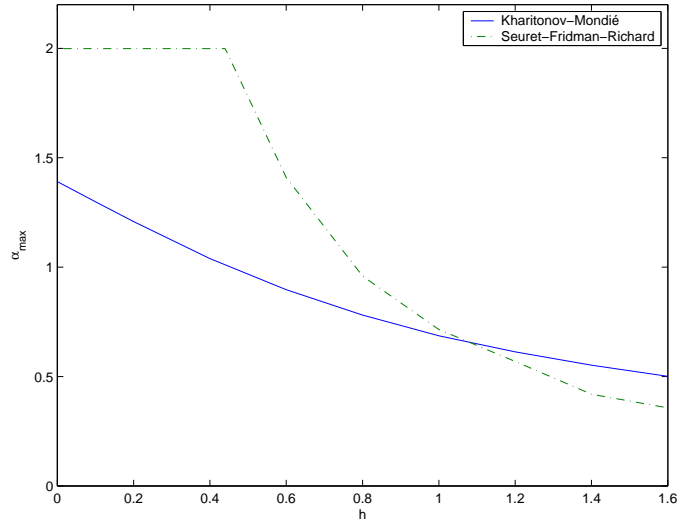


FIG. 2.1 – Relation entre le degré de convergence exponentielle  $\alpha$  et le retard maximal admissible  $\tau$

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé diverses techniques qui permettent de développer des critères de stabilité exponentielle à taux de convergence  $\alpha$  garanti pour le cas des systèmes linéaires à coefficients constants et à retard. Nous avons aussi montré que ces critères tiennent compte du type de retards (constants, variables majorés ou bornée, multiples). Dans le cas des retards variables, les résultats sont robustes par rapport au retard, puisqu'ils ne nécessitent pas la connaissance du retard. Puis à partir de ces théorèmes de stabilité nous avons proposé des résultats concernant la stabilisation exponentielle à taux garanti en proposant une loi de commande par retour d'état. Une autre extension a été proposée pour résoudre le problème de la stabilisation à coût garanti. Les résultats obtenus peuvent être améliorés en utilisant les récents résultats concernant la stabilité asymptotique des systèmes à retards et les fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii discrétisées.

Cependant il reste plusieurs points à développer. Le premier point concerne la robustesse de ces résultats. Il reste à considérer une classe de systèmes plus large que les systèmes linéaires. En effet ils ne représentent généralement des modèles simplifiés visant à rendre compte du comportement d'un système au voisinage d'un point de fonctionnement ou d'une trajectoire de référence. On peut donc se demander s'il est possible d'élargir ces résultats au cas non-linéaire ou en présence d'incertitudes paramétriques. Nous proposons une étude de stabilité et de stabilisation exponentielle de systèmes non linéaires dans le chapitre suivant.



## Chapitre 3

# Stabilité des systèmes non linéaires à retards

### 3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons proposé des critères de stabilité et des lois de commande pour les systèmes linéaires à retards sur l'état et l'entrée. Il nous a paru intéressant d'étendre ces résultats aux cas des systèmes dont la dynamique ne peut se réduire à des équations linéaires.

Les systèmes non linéaires sont en effet des modèles plus proches de la réalité en ce sens que leur validité n'est pas nécessairement limitée à un voisinage immédiat d'un point de fonctionnement ou d'une trajectoire de référence. Les modèles linéaires étudiés au chapitre précédent ne constituent donc qu'une approximation et il est important en pratique d'étudier les effets des non-linéarités négligées sur le comportement du système bouclé. Ceci peut être réalisé à travers une étude de la robustesse de la stabilité vis-à-vis d'incertitudes paramétriques.

Un autre phénomène devant être pris en compte en pratique est celui de saturation de la commande. Du fait que les actionneurs ne peuvent délivrer une puissance infinie, une saturation devient un facteur d'instabilité qu'il est important de considérer dans la synthèse de la loi de commande.

Nous avons donc choisi de distinguer deux parties dans ce chapitre :

- La première est composée des sections 3.2, 3.3 et 3.4. Elle concerne la stabilité et la stabilisation de systèmes dont les non-linéarités sont pris en compte de deux manières différentes. La première consiste à émerger la classe des systèmes non linéaires affines en l'entrée en modèles polytopiques. La seconde traite les non-linéarités comme des incertitudes paramétriques qu'une synthèse de loi de commande robuste permet d'absorber.
- La seconde, composée des sections 3.5, 3.6 et 3.7, traite du problème de la stabilisation de systèmes pour lesquels la commande est soumise à des contraintes d'amplitude.



## 3.2 Systèmes affines en l'entrée

### 3.2.1 Notations et formulation du problème

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons aux systèmes non linéaires affines en la commande de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t) + g(t, x_t)u(t) + h(t, x_t)u(t - \tau), \\ x(t) = \phi(t) \text{ pour } t \in [-\tau_2, 0], \end{cases} \quad (3.2.1)$$

où  $\tau_2$  représente la borne supérieure du retard qui peut être variable dans le temps.  $f$  est une fonctionnelle à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  dépendant du temps et de la fonction  $x_t$  associée à la solution par  $x_t(\theta) = x(t + \theta)$  où  $\theta \in [-\tau_2, 0]$ .  $g$  et  $h$  sont des fonctionnelles à valeurs dans  $\mathbb{R}^{n \times m}$ . La fonction  $\phi$  définie sur l'intervalle  $[-\tau_2, 0]$  représente les conditions initiales .

**Remarque 3.2.1** *Nous considérons ici une classe restreinte de systèmes non linéaires à retards. En effet, les systèmes que nous allons étudier ici sont affines en la commande.*

Afin d'étendre les résultats du chapitre précédent au cas non linéaire, nous nous proposons de transformer le système (3.2.1) en un système plus simple à étudier, même si cette transformation introduit un certain conservatisme.

### 3.2.2 Transformations du système initial

Le but de cette partie est de présenter des transformations qui permettent d'analyser plus facilement les systèmes non linéaires de la forme (3.2.1). Dans un premier cas, le système (3.2.1) peut s'écrire comme un système multimodèle (c'est à dire un ensemble de modèles linéaires pondérés de façon non linéaire [140]). Ceci s'exprime de la manière suivante :

$$\dot{z}(t) = \sum_{i \in I^r} h_i(z_t) (A_i z(t) + A_{i\tau} z(t - \tau(t)) + B_i u(t) + B_{i\tau} u(t - \tau(t))), \quad (3.2.2)$$

où  $z$  représente les variables d'état du système dans la nouvelle représentation. L'ensemble  $I^r$  est l'ensemble des entiers  $\{1, \dots, r\}$  où  $r$  représente le nombre de sous-systèmes nécessaires à la description du système multimodèle. Les fonctions  $h_i(\cdot)$  sont des fonctions scalaires de pondération vérifiant les conditions de convexité :

$$\sum_{i \in I^r} h_i(z_t) = 1 \quad \forall i = 1, \dots, r, \quad h_i(z_t) \geq 0.$$

Il est également possible d'utiliser une autre formulation. Celle-ci utilise la modélisation des systèmes à paramètres incertains, c'est-à-dire soumis à des perturbations sur les matrices d'états. Cette modélisation considère que les équations du systèmes sont de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) = & (A + \Delta A(z_t))z(t) + (A_\tau + \Delta A_\tau(z_t))z(t - \tau(t)) \\ & + (B + \Delta B(z_t))u(t) + (B_\tau + \Delta B_\tau(z_t))u(t - \tau(t)), \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Ces deux transformations apportent un certain conservatisme. En effet, il est réducteur de dire que tous les systèmes non linéaires du type (3.2.1) peuvent s'écrire sous la forme (3.2.2) ou (3.2.3). Ces transformations nécessitent généralement des conditions supplémentaires, comme par exemple de supposer que l'état du système reste dans une partie bornée de l'espace d'état [140].

Dans la suite de ce chapitre, nous verrons que ces deux représentations permettent déterminer des critères de stabilité et de stabilisation exponentielles pour une classe de systèmes non linéaires.

### 3.2.3 Exemple du pendule et du chariot

On considère le système mécanique du pendule inverse présenté Figure 3.1.

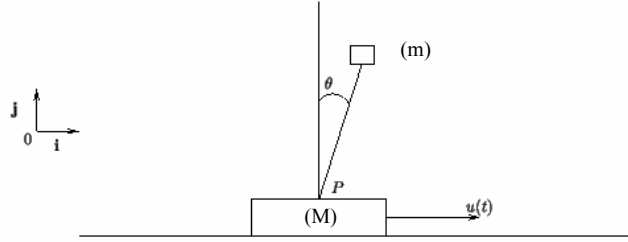


FIG. 3.1 – Présentation du pendule inverse

Les écritures des équations d'Euler-Lagrange nous permettent alors d'obtenir les équations du mouvement :

$$\begin{cases} u - f\dot{x} &= (M + m)\ddot{x} + \frac{ml}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{ml}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta, \\ -K\dot{\theta} &= \frac{ml^2}{4}\ddot{\theta} + \frac{ml}{2}\ddot{x}\cos\theta - \frac{mgl}{2}\sin\theta, \end{cases} \quad (3.2.4)$$

où  $x$  est la position du chariot et  $\theta$ , l'angle que forme la barre avec la verticale ascendante.  $l$  est la longueur de la barre et  $m$  sa masse,  $M$  est la masse du chariot,  $f\dot{x}$  et  $K\dot{\theta}$  représente respectivement la force et le couple résistant exercés par les frottements. Afin d'exprimer l'équation (3.2.4) sous forme de modèle d'état, on écrit ces deux équations différentielles du second ordre couplées et implicites sous forme d'un système différentiel du premier ordre explicite. Ainsi (3.2.4) devient :

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4(M + m) & 2ml\cos\theta \\ 2ml\cos\theta & ml^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2u - 2f\dot{x} + ml\dot{\theta}^2\sin\theta \\ -K\dot{\theta} + mgl\sin\theta \end{pmatrix}, \quad (3.2.5)$$

que l'on peut encore écrire

$$\ddot{x} = \frac{2ul - 2mgl\cos\theta\sin\theta - 2f\dot{x} + 4K\dot{\theta}\cos\theta + ml^2\dot{\theta}^2\sin\theta}{2l(M + m - m\cos^2\theta)}$$

$$\ddot{\theta} = -4 \frac{(M + m)(\dot{\theta} - \frac{1}{2}mgl\sin\theta) - \frac{1}{2}ml\cos\theta(f\dot{x} - u - \frac{1}{2}ml\dot{\theta}^2\sin\theta)}{ml^2(M + m - m\cos^2\theta)}.$$

Nous allons utiliser une base de vecteur d'état suggérée par le Lagrangien décrit dans l'équation (3.2.5). On propose le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} z_1 &= \frac{1}{2}ml\cos\theta\dot{x} + \frac{1}{4}ml^2\dot{\theta}, \\ z_2 &= \theta, \\ z_3 &= (M + m)lx + \frac{1}{4}ml^2\sin\theta, \\ z_4 &= (M + m)l\dot{x} + \frac{1}{4}ml^2\dot{\theta}\cos\theta. \end{cases}$$

Ce changement de variables est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^4$  car la jacobienne de la matrice de changement de base est toujours de déterminant non nul. Ainsi on peut inverser ces relations. On obtient alors

pour  $x$ ,  $\dot{x}$  et  $\dot{\theta}$  les équations suivantes :

$$\begin{cases} x &= \frac{z_3 - 1/4ml^2 \sin z_2}{(M+m)l}, \\ \dot{x} &= \frac{lz_4 - 2 \cos(z_2)z_1}{lD(z_2)}, \\ \dot{\theta} &= \frac{4(1 + \frac{M}{m})z_1 - 2l \cos(z_2)z_4}{l^2 D(z_2)}, \end{cases},$$

et avec

$$D(z_2) = M + m - m \cos^2 \theta.$$

Ainsi dans cette base, l'équation différentielle du premier ordre qui régit le système est :

$$\dot{z}(t) = A(z)z(t) + B_1 u(t - \tau(t)), \quad (3.2.6)$$

où

$$A(z) = \begin{bmatrix} F_{11}(z) & mgl \operatorname{sinc}(z_2) & 0 & F_{14}(z) \\ \frac{4(1+M/m)}{l^2 D(z_2)} & 0 & 0 & -\frac{2 \cos z_2}{l^2 D(z_2)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2f \cos z_2}{D(z_2)} & 0 & 0 & \frac{-f}{D(z_2)} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Les fonctions  $F_{ij}$  dépendent de l'état  $z$  et sont définies par :

$$\begin{aligned} F_{11}(z) &= -\left(\frac{1}{2}ml \sin(z_2)\dot{x} + K\right) \frac{4(1+M/m)}{l^2 D(z_2)}, \\ F_{14}(z) &= \left(\frac{1}{2}ml \sin(z_2)\dot{x} + K\right) \frac{2 \cos z_2}{l^2 D(z_2)}. \end{aligned}$$

L'intérêt de cette modélisation est premièrement que la matrice de commande est constante. D'autre part, on élimine les termes en  $\dot{\theta}^2$  par rapport à la représentation classique.

Notre objectif est d'appliquer les transformations présentées dans la partie précédente. Pour cela, il faut que la fonction  $A(z)$  soit une fonction bornée de l'espace d'état. Or le facteur  $\frac{1}{2}ml \sin z_2 \dot{x} + K$  n'est visiblement pas borné. C'est pourquoi nous allons utiliser les caractéristiques physiques du système. On peut, par exemple, considérer que le moteur qui agit sur le chariot possède une certaine vitesse angulaire maximale. Ainsi, on peut considérer que la vitesse  $\dot{x}$  du chariot est bornée. De même, on peut supposer que l'amplitude du déplacement angulaire de la barre est limitée en se restreignant à un espace défini par  $\theta \leq \theta_{max}$ .

Si, par exemple, on se donne  $\dot{x}_{max} = 2.5$ , on peut supposer que l'espace d'état admissible est borné. De là, nous supposons que la fonction  $A(z)$  est effectivement bornée sur cet espace d'état. Ainsi chacune des fonctions  $A_{ij}(z)$  est bornée, on peut déterminer une représentation polytopique de  $A(z)$  de la forme :

$$A(z) = \sum_{i \in I_r} h_i(z_t) A_i,$$

les matrices  $A_i$  sont des matrices à coefficients constants. Il y a cinq fonctions indépendantes qui composent la matrice  $A(z)$ . Le cardinal de l'ensemble  $I_r$  est de  $2^5 = 32$ . La valeur de ces coefficients, par exemple  $A_{i,j,k}$  le coefficient de la ligne  $j$  et de la colonne  $k$  de la matrice  $A_i$ , est égale soit à la valeur maximale soit à la valeur minimale de la fonction  $A_{j,k}(z)$ . Ainsi en reprenant la Définition 2.3.5 du Chapitre 2, on note  $\sigma$ , une bijection de  $\{1, \dots, 2^5\}$  vers  $\{1, 2\}^5$  telle que, pour tout entier  $i$  de  $\{1, \dots, 2^5\}$ , on associe  $\sigma(i)$  défini par :

$$i \mapsto \sigma(i) = [\sigma_1(i), \dots, \sigma_5(i)], \quad (3.2.7)$$

où  $\sigma_j(i) \in \{1, 2\}$  pour  $j = 1, \dots, 5$ . La matrice  $A_i$  se présente finalement de la manière suivante :

$$A_i = \begin{bmatrix} F_{11}^{\sigma_1(i)} & F_{12}^{\sigma_2(i)} & 0 & F_{14}^{\sigma_3(i)} \\ \frac{4(1+M/m)}{l^2} D^{\sigma_4(i)} & 0 & 0 & -\frac{2}{l^2} CD^{\sigma_4(i)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2fCD^{\sigma_5(i)} & 0 & 0 & -fD^{\sigma_4(i)} \end{bmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} F_{11}^1 &\leq F_{11}(z) \leq F_{11}^2, \\ F_{12}^1 &\leq mgl \operatorname{sinc}(z_2) \leq F_{12}^2, \\ F_{14}^1 &\leq F_{14}(z) \leq F_{14}^2, \\ CD^1 &\leq \frac{\cos(z_2)}{D(z_2)} \leq CD^2, \\ D^1 &\leq \frac{1}{D(z_2)} \leq D^2. \end{aligned}$$

Les fonctions  $h_i(z_t)$ ,  $i \in I_r$  sont des fonctions scalaires de pondération, non nécessairement connues, qui satisfont la propriété de convexité :

$$h_i(z_t) \leq 0, \quad i \in I_r, \quad \sum_{i \in I_r} h_i(z_t) = 1.$$

L'équation différentielle (3.2.6) peut donc s'écrire :

$$\dot{z}(t) = \sum_{i \in I_r} h_i(z_t) \{A_i z(t) + B_1 u(t - \tau(t))\}.$$

Pour la modélisation par modèle incertain, il faut isoler les fonctions de perturbation. Si l'on se place sur une partie bornée de l'espace d'état, les fonctions  $F_{11}(z)$ ,  $\operatorname{sinc}(z_2)$ ,  $F_{14}(z)$ ,  $1/D(z_2)$  et  $\cos(z_2)/D(z_2)$  sont bornées. En les décomposant en la somme d'une constante représentant la valeur nominale et d'un terme variant en fonction de  $z$  et représentant des incertitudes bornées, on peut transformer l'équation différentielle (3.2.6) en un système perturbé de la forme (3.2.3). Nous reviendrons sur cet exemple dans le Chapitre 6.

### 3.3 Approches par modèles polytopiques

#### 3.3.1 Présentation du problème

Cette partie est consacrée à l'analyse de la stabilité d'un système représenté par le modèle polytopique suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i \in I_r} \lambda_i(t, x_t) \{A_i x(t) + A_{\tau i} x(t - \tau(t)) + B_i u(t) + B_{\tau i} u(t - \tau(t))\}, \\ x(\theta) &= \phi(\theta), \quad \forall \theta \in [-\tau_2, 0], \\ u(\theta) &= \psi(\theta), \quad \forall \theta \in [-\tau_2, 0], \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  représente le vecteur de commande. Les matrices  $A_i$ ,  $A_{i\tau} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B_i$ ,  $B_{i\tau} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , pour tout  $i \in I_r$ , sont les matrices d'état supposées constantes. Les fonctions  $\lambda_i(t)$  sont des fonctions continues de pondération qui vérifient la condition de convexité :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_r} \lambda_i(t, x_t) &= 1, \quad \forall t \geq 0, \quad et \\ \lambda_i(t, x_t) &\geq 0, \quad \forall i \in I_r, \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Notre objectif est de déterminer des conditions de stabilité exponentielle du système en boucle fermée avec une loi de commande par retour d'état de la forme :

$$u(t) = Kx(t).$$

Dans la suite de cette partie, nous supposons que le retard  $\tau(t)$  est majoré et vérifie l'inégalité suivante :

$$0 \leq \tau(t) \leq \tau_2. \quad (3.3.2)$$

### 3.3.2 Stabilité exponentielle

Dans un premier temps, nous allons nous concentrer sur le problème de la stabilisation du système en boucle ouverte (avec  $u(t) = 0$ ). Considérons alors le système suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i \in I^r} \lambda_i(t, x_t) \{A_{0i}x(t) + A_{1i}x(t - \tau(t))\}, \quad (3.3.3)$$

Comme dans le chapitre précédent, nous allons introduire la nouvelle variable  $x_\alpha(t) = e^{\alpha t}x(t)$ . Ainsi, si on détermine des conditions de stabilité asymptotique de la solution nulle du système décrit par la variable  $x_\alpha(t)$ , alors ces conditions garantissent simultanément la convergence exponentielle de la solution nulle du système initial. Le système (3.3.3), après changement de variables, devient :

$$\dot{x}_\alpha(t) = \sum_{i \in I^r} \lambda_i(t, x_t) \{(A_{0i} + \alpha I_n)x_\alpha(t) + e^{\alpha\tau(t)}A_{1i}x_\alpha(t - \tau(t))\}, \quad (3.3.4)$$

On se propose de déterminer des conditions de  $\alpha$ -stabilité en utilisant les approches par modèle polytopique et par modèle incertain du terme  $e^{\alpha\tau(t)}$ .

#### Modélisation polytopique

Le terme exponentiel est présenté sous forme polytopique, c'est-à-dire :

$$e^{\alpha\tau(t)} = \mu_1(t)\beta_1 + \mu_2(t)\beta_2, \quad (3.3.5)$$

où  $\beta_1 = 1$  et  $\beta_2 = e^{\alpha\tau_2}$ . Les fonctions  $\mu_i(t)$  sont des fonctions scalaires de pondération qui ne dépendent que de la valeur du retard  $\tau(t)$  et vérifient les conditions de convexité suivantes :

$$\forall t \geq t_0, \quad \mu_1(t) + \mu_2(t) = 1, \quad \mu_1(t) \geq 0 \text{ et } \mu_2(t) \geq 0.$$

On propose le théorème suivant :

**Théorème 3.3.1** *La solution  $x(t) = 0$  du système (3.3.3) est  $\alpha$ -stable pour tout retard variable  $\tau(t) \leq \tau_2$ , s'il existe des matrices de dimension  $n \times n$ ,  $P_2, P_3, Z_1^{ij}, Z_2^{ij}, Z_3^{ij}$  (pour  $i \in I^r$ , et pour  $j \in I^2$  et deux matrices symétriques définies positives de dimension  $n \times n$ ,  $P_1$  et  $R$  qui vérifient les conditions LMI suivantes :*

$$\Psi_{ij} < 0 \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} R & \begin{bmatrix} 0 & \beta_j A_{1i}^T \end{bmatrix} P \\ * & Z^{ij} \end{bmatrix} P \geq 0, \quad (3.3.6)$$

$$\forall (i, j) \in I^r \times I^2$$

avec

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}, \quad Z^{ij} = \begin{bmatrix} Z_1^{ij} & Z_2^{ij} \\ Z_2^{ijT} & Z_3^{ij} \end{bmatrix} \quad (3.3.7)$$

et

$$\Psi_{ij} = P^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \Lambda_{ij} & -I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \Lambda_{ij} & -I_n \end{bmatrix}^T P + \tau_2 Z^{ij} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 R \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_{ij} = \alpha I_n + A_{0i} + \beta_j A_{1i}.$$

**Démonstration.** La décomposition (3.3.5) du terme  $e^{\alpha\tau(t)}$  permet de décrire le système (3.3.3) sous une forme polytopique et descripteur en introduisant la variable augmentée  $\bar{x}_\alpha(t) = \text{col}\{x_\alpha(t), \dot{x}_\alpha(t)\}$ . La fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii candidate est la suivante :

$$V_\alpha(t) = \bar{x}_\alpha^T(t) E P \bar{x}_\alpha(t) + \int_{-\tau_2}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\bar{x}}_\alpha^T(s) R \dot{\bar{x}}_\alpha(s) ds d\theta, \quad (3.3.8)$$

où  $E = \text{diag}\{I_n, 0\}$  et  $P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}$ ,  $P_1 > 0$ .

Dans un premier temps, le système (3.3.4) est présenté sous une forme polytopique globale, c'est-à-dire en comprenant les modifications dues au terme  $e^{\alpha\tau(t)}$ . On a alors :

$$\dot{x}_\alpha(t) = \sum_{(i,j) \in I^r \times I^2} \bar{\lambda}_{ij}(t) \{ (A_{0i} + \alpha I_n) x_\alpha(t) + \beta_j A_{1i} x_\alpha(t - \tau(t)) \},$$

où  $\bar{\lambda}_{ij}(t) = \lambda_i(t) \mu_j(t)$ . On remarque aisément que ces fonctions  $\bar{\lambda}_{ij}(t)$  satisfont à la conditions de convexité :

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in I^r \times I^2} \bar{\lambda}_{ij}(t) &= 1, \quad \forall t \geq 0, \quad \text{et} \\ \bar{\lambda}_{ij}(t) &\geq 0, \quad \forall (i,j) \in I^r \times I^2, \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

En utilisant la formule de Leibniz, on transforme le système en :

$$\dot{x}_\alpha(t) = \sum_{(i,j) \in I^r \times I^2} \bar{\lambda}_{ij}(t) \left\{ (A_{0i} + \alpha I_n + \beta_j A_{1i}) x_\alpha(t) - \beta_j A_{1i} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}_\alpha(s) ds \right\},$$

Le raisonnement est identique à la démonstration du Théorème 2.3.2. La fonctionnelle  $V_\alpha$  est bien définie positive car on remarque que  $\bar{x}_\alpha^T(t) E P \bar{x}_\alpha(t) = x_\alpha^T(t) P_1 x_\alpha(t)$ . Sachant que  $EP = P^T E$ , le calcul de la dérivée par rapport au temps de la fonctionnelle (3.3.8) aboutit à :

$$\dot{V}(t) = \bar{x}_\alpha^T(t) \Psi_0(t) \bar{x}_\alpha(t) + \eta_0(t) + \tau_2 \dot{\bar{x}}_\alpha^T(t) R \dot{\bar{x}}_\alpha(t) - \int_{t-\tau_2}^t \dot{\bar{x}}_\alpha^T(s) R \dot{\bar{x}}_\alpha(s) ds, \quad (3.3.10)$$

où

$$\begin{aligned} \Psi_0(t) &= \sum_{i \in I^r, j=1}^2 \bar{\lambda}_{ij}(t) \left\{ P^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \Lambda_i & -I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \Lambda_i & -I_n \end{bmatrix}^T P \right\} \\ \eta_0(t) &= -2 \sum_{i \in I^r, j=1}^2 \bar{\lambda}_{ij}(t) \left\{ \int_{t-\tau(t)}^t \bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_j A_{1i} \end{bmatrix} \dot{x}_\alpha(s) ds \right\}. \end{aligned}$$

Sachant que  $\eta_0$  s'écrit sous forme polytopique, il est alors nécessaire de déterminer une majoration de chacun des sous-modèles du système.

$$\begin{bmatrix} R & \begin{bmatrix} 0 & \beta_j A_{1i}^T \end{bmatrix} P \\ * & Z_{ij} \end{bmatrix} \geq 0, \quad i \in I^r \text{ et } j = 1, 2.$$

En combinant (3.3.2) et (3.3.9), on obtient :

$$\eta_0(t) \leq \tau_2 \bar{x}_\alpha^T(t) \left( \sum_{i \in I^r, j=1}^2 \bar{\lambda}_{ij}(t) Z_{ij} \right) \bar{x}_\alpha(t) + \int_{t-\tau_2}^t \dot{\bar{x}}_\alpha^T(s) R \dot{\bar{x}}_\alpha(s) ds,$$

avec  $R$  et  $Z_{ij}$  satisfaisant à (3.3.6b). On en déduit une majoration de (3.3.10) :

$$\frac{d}{dt}V(t) \leq \bar{x}_\alpha^T(t)\Psi(t)\bar{x}_\alpha(t),$$

avec

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= \Psi_0(t) + \left( \sum_{i \in I^r, j=1}^2 \bar{\lambda}_{ij}(t) Z_{ij} \right) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 R \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i \in I^r, j=1}^2 \bar{\lambda}_{ij}(t) (\Psi_{ij})\end{aligned}$$

L'ensemble des matrices définies négatives étant convexe, le système (3.3.4) est asymptotiquement stable si chacune des matrices  $\Psi_{ij}$  est définie négative, c'est-à-dire si les conditions (3.3.1) sont satisfaites. On en déduit alors la convergence exponentielle de degré  $\alpha$  du système (3.3.3) vers la solution nulle. ■

### Modélisation avec incertitudes paramétriques

La décomposition du terme exponentiel sous la forme

$$e^{\alpha\tau(t)} = \beta_m + \Delta(t)\beta_d$$

(où  $\Delta(t)$  est une fonction réelle inconnue, dépendant de la valeur du retard et vérifiant  $|\Delta(t)| \leq 1$ ) conduit au nouveau résultat :

**Théorème 3.3.2** *Le système (3.3.3) est  $\alpha$ -stable pour tout retard  $\tau(t)$  satisfaisant (3.3.2), s'il existe des matrices de  $\mathbb{R}^{n \times n}$   $P_1, R_m, R_d$ , symétriques définies positives, des matrices  $P_2, P_3, Z_1^{ij}, Z_1^{ij}$  et  $Z_1^{ij}$  pour tout  $i \in I^r$  et  $j = 1, 2$ , telles que les conditions LMI suivantes soient réalisées :*

$$\Psi_i < 0, \quad (3.3.11)$$

et

$$\begin{bmatrix} R_i & \begin{bmatrix} 0 & \beta_j A_{1i}^T \end{bmatrix} P \\ * & Z_{ij} \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = m, d, \quad (3.3.12)$$

où

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \quad Z^{ij} = \begin{bmatrix} Z_1^{ij} & Z_2^{ij} \\ Z_2^{ijT} & Z_3^{ij} \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{aligned}\Psi_i &= P^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_{0i} + \alpha I_n + \beta_m A_{1i} & -I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_{0i} + \alpha I_n + \beta_m A_{1i} & -I_n \end{bmatrix}^T P \\ &\quad + \begin{bmatrix} R_d & 0 \\ 0 & \tau_2(R_m + R_d) \end{bmatrix} + Z_{id} + \tau_2(Z_{im} + Z_{id}), \\ \beta_m &= (1 + e^{\alpha\tau_2})/2, \quad \beta_d = (e^{\alpha\tau_2} - 1)/2\end{aligned}$$

### Démonstration.

La formule de Leibniz permet de transformer le terme retardé en intégrale de la manière suivante :

$$\dot{x}_\alpha(t) = \sum_{i \in I^r} \lambda_i(t, x_t) \left\{ (A_{0i} + \alpha I_n + (\beta_m + \Delta(t)\beta_d)A_{1i})x_\alpha(t) - (\beta_m + \Delta(t)\beta_d)A_{1i} \int_{t-\tau(t)}^t x_\alpha(s) ds \right\} \quad (3.3.13)$$

On écrit alors le système (3.3.13) sous la forme descripteur en définissant la variable augmentée  $\bar{x}_\alpha = \text{col}\{x_\alpha, \dot{x}_\alpha\}$  :

$$E\dot{\bar{x}}_\alpha(t) = \sum_{i \in I^r} \lambda_i(t, x_t) \left\{ \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_{0i} + \alpha I_n + \beta_m A_{1i} & -I_n \end{bmatrix} \bar{x}_\alpha(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta(t)\beta_d A_{1i} \end{bmatrix} x_\alpha(t) \right. \\ \left. - \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_m A_{1i} \end{bmatrix} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}_\alpha(s) ds - \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta(t)\beta_d A_{1i} \end{bmatrix} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}_\alpha(s) ds \right\}. \quad (3.3.14)$$

On introduit alors la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii :

$$V^\alpha(t) = \bar{x}_\alpha^T(t) E P \bar{x}_\alpha(t) + \int_{-\tau_2}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}_\alpha^T(s) (R_m + R_d) \dot{x}_\alpha(s) ds d\theta. \quad (3.3.15)$$

En dérivant la fonctionnelle (3.3.15) le long des trajectoires du système (3.3.14), on obtient :

$$\dot{V}^\alpha(t) = \sum_{i \in I^r} \lambda_i(t, x_t) \left\{ \bar{x}_\alpha^T(t) \left( P^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_{0i} + \alpha I_n + \beta_m A_{1i} & -I_n \end{bmatrix} \right. \right. \\ \left. \left. + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_{0i} + \alpha I_n + \beta_m A_{1i} & -I_n \end{bmatrix}^T P \right) \bar{x}_\alpha(t) \right\} + \eta_0(t) + \eta_1(t) + \eta_2(t) \quad (3.3.16)$$

où

$$\eta_0(t) = 2 \sum_{i \in I^r} \lambda_i(t, x_t) \left\{ \bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta(t)\beta_d A_{1i} \end{bmatrix} x_\alpha(t) \right\}, \\ \eta_1(t) = -2 \sum_{i \in I^r} \lambda_i(t, x_t) \left\{ \bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_m A_{1i} \end{bmatrix} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}_\alpha(s) ds \right\}, \\ \eta_2(t) = -2 \sum_{i \in I^r} \lambda_i(t, x_t) \left\{ \bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta(t)\beta_d A_{1i} \end{bmatrix} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}_\alpha(s) ds \right\}. \quad (3.3.17)$$

Si les inégalités (3.3.12) sont satisfaites, alors il est possible de majorer les fonctions  $\eta_k$  pour  $k = 0, 1, 2$  dans (3.3.17) de la façon suivante :

$$\eta_0(t) \leq \sum_{i \in I^r} \lambda_i(t, x_t) \left\{ \bar{x}_\alpha(t)^T Z_{id} \bar{x}_\alpha(t) + x_\alpha^T(t) R_d x_\alpha(t) \right\}, \\ \eta_1(t) \leq \tau_2 \sum_{i \in I^r} \lambda_i(t, x_t) \left\{ \bar{x}_\alpha(t)^T Z_{im} \bar{x}_\alpha(t) + \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}_\alpha^T(s) R_m \dot{x}_\alpha(s) ds \right\}, \\ \eta_2(t) \leq \sum_{i \in I^r} \lambda_i(t, x_t) \left\{ \bar{x}_\alpha(t)^T Z_{id} \bar{x}_\alpha(t) + \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}_\alpha^T(s) R_d \dot{x}_\alpha(s) ds \right\}, .$$

Ainsi, en réinjectant ces majorations dans (3.3.16), on obtient :

$$\dot{V}^\alpha(t) \leq \sum_{i \in I^r} \lambda_i(t, x_t) \left\{ \bar{x}_\alpha^T(t) \Psi_i \bar{x}_\alpha(t) \right\}.$$

Ainsi, si les conditions LMI (3.3.11) et (3.3.12) sont vérifiées, la stabilité asymptotique du système (3.3.4) et, donc, la stabilité exponentielle de (3.3.3) sont démontrées. ■

### 3.3.3 Stabilisation exponentielle de systèmes polytopiques

Nous allons maintenant revenir à la stabilisation du système (3.3.1). Pour cela, nous allons considérer une loi de commande par retour d'état de la forme :

$$u(t) = Kx(t), \quad (3.3.18)$$



où  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  est le gain matriciel du retour d'état que l'on doit déterminer pour que le système en boucle fermée soit exponentiellement stable avec un degré de convergence  $\alpha$  garanti. Le système bouclé est de la forme :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i \in I^r} \lambda_i(t, x_t) \{(A_i + B_i K)x(t) + (A_{\tau i} + B_{\tau i} K)x(t - \tau(t))\}.$$

Dans la suite de cette partie, nous allons proposer deux théorèmes permettant de construire un tel gain  $K$  en utilisant les approches par modèles polytopiques et par modèle incertain.

### Modélisation polytopique

**Théorème 3.3.3** *La solution  $x(t) = 0$  du système (3.3.1) est  $\alpha$ -stabilisable avec la loi de commande (3.3.18) pour tout retard variable  $\tau(t)$  vérifiant (3.3.2), s'il existe des matrices de dimension  $n \times n$  symétriques définies positives  $Q_1, S$ , des matrices de dimension  $n \times n$   $Q_2, Q_3, W_1^{ij}, W_2^{ij}, W_3^{ij}$  pour  $i \in I^r$  et pour  $j = 1, 2$  et une matrice de dimension  $m \times n$   $Y$ , telles que les conditions LMI suivantes soient satisfaites pour  $i \in I^r$  et pour  $j = 1, 2$  :*

$$\begin{bmatrix} Q_2 + Q_2^T + \tau_2 W_{11}^{ij} & \Phi_{12}^{ij} & \tau_2 Q_2^T \\ * & -(Q_3 + Q_3^T) + \tau_2 W_{22}^{ij} & \tau_2 Q_3^T \\ * & * & -\tau_2 S \end{bmatrix} < 0, \quad (3.3.19)$$

$$\begin{bmatrix} 2Q_1 - S & 0 & \beta_j(Q_1 A_{\tau i}^T + Y^T B_{\tau i}^T) \\ * & W_1^{ij} & W_2^{ij} \\ * & * & W_3^{ij} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (3.3.20)$$

où

$$\Phi_{12}^{ij} = Q_1(A_i + \alpha I_n + \beta_j A_{\tau i})^T + Y^T(B_i + \beta_j B_{\tau i}) - Q_2^T + Q_3 + \tau_2 W_{12}^{ij},$$

et où

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = e^{\alpha \tau_2}.$$

Le gain  $K$  du retour d'état est alors donné par :

$$K = YQ_1^{-1}.$$

**Démonstration.** La preuve de ce théorème est basée sur le Théorème 3.3.1 et utilise la méthode proposée dans le Théorème 2.3.12. La démonstration consiste à appliquer à chacun des sous-modèles les conditions LMI de stabilisation du Théorème 2.3.12 présenté au chapitre précédent. ■

### Modélisation avec incertitudes paramétriques

**Théorème 3.3.4** *La solution  $x(t) = 0$  du système (3.3.1) est  $\alpha$ -stabilisable avec la loi de commande (3.3.18) pour tout retard variable  $\tau(t)$  vérifiant (3.3.2) s'il existe des matrices de dimension  $n \times n$  symétriques définies positives  $Q_1, S_m$  et  $S_d$ , des matrices de dimension  $n \times n$   $Q_2, Q_3, W_1^{ij}, W_3^{ij}$  et  $W_3^{ij}$  pour  $i \in I^r$  et  $j = m, d$  et  $Y$  une matrice de dimension  $m \times n$ , satisfaisant aux conditions LMI suivantes pour  $i \in I^r$  et pour  $j = m, d$  :*

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11}^i & \Psi_{12}^i & Q_1 & \tau_2 Q_2^T & \tau_2 Q_2^T \\ * & \Psi_{22}^i & 0 & \tau_2 Q_3^T & \tau_2 Q_3^T \\ * & * & -S_d & 0 & 0 \\ * & * & * & -\tau_2 S_m & 0 \\ * & * & * & * & -\tau_2 S_d \end{bmatrix} < 0, \quad (3.3.21)$$

et

$$\begin{bmatrix} 2Q_1 - S_j & 0 & \beta_j(Q_1 A_{i\tau}^T + Y^T B_{i\tau}^T) \\ * & W_1^{ij} & W_2^{ij} \\ * & * & W_3^{ij} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (3.3.22)$$

où

$$\begin{aligned} \Psi_{11}^i &= Q_2 + Q_2^T + \tau_2 W_1^{im} + (1 + \tau_2) W_1^{id}, \\ \Psi_{12}^i &= Q_1(A_i + \alpha I_n + \beta_m A_{i\tau})^T + Y^T(B_i + \beta_m B_{i\tau})^T - Q_2^T + Q_3 + \tau_2 W_2^{im} + (1 + \tau_2) W_2^{id}, \\ \Psi_{22}^i &= -(Q_3 + Q_3^T) + \tau_2 W_3^{im} + (1 + \tau_2) W_3^{id}, \end{aligned}$$

et

$$\beta_m = (1 + e^{\alpha\tau_2})/2, \quad \beta_d = (e^{\alpha\tau_2} - 1)/2.$$

Le gain du retour d'état est alors donné par :

$$K = YQ^{-1}.$$

**Démonstration.** Les techniques utilisées dans la démonstration sont similaires à celle du Théorème 3.3.3 et du Théorème 2.3.12 ■

### 3.3.4 Exemple

Prenons le système polytopique (3.3.1) dans le cas  $r = 2$

:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -1.9 & 1 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}, & A_{\tau 1} &= \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ -0.9 & .65 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}, & B_{\tau 1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} -2.1 & 1 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}, & A_{\tau 2} &= \begin{bmatrix} -0.3 & 0.1 \\ -0.9 & .45 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}, & B_{\tau 2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

Le Tableau 3.1 expose les résultats de la résolution des conditions LMI des Théorèmes 3.3.3 et 3.3.4.

$\alpha$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4
Th 3.3.3	4.999	1.917	1.326	1.044	0.872	0.755	0.669	0.551
Th 3.3.4	2.221	1.443	1.102	0.905	0.744	0.680	0.609	0.507

TAB. 3.1 –

On voit bien que les résultats du Théorème 3.3.3, qui utilise l'approche par modèles polytopiques, sont une nouvelle fois moins conservatifs que ceux du Théorème 3.3.4.

Le Théorème 3.3.3 garanti pour pour  $\alpha = 2$  le système est  $\alpha$ -stabilisable pour tout retard majoré par 0.872s. Le gain de retour d'état est alors  $K = \begin{bmatrix} -0.5171 & -1.5918 \\ 4.9995 & -3.5004 \end{bmatrix}$ .

### 3.3.5 Conclusion

Dans cette première partie sur la robustesse par rapport aux paramètres, nous avons proposé plusieurs critères de stabilité et de stabilisation exponentielles des systèmes soumis à un retard variable et *majorés*. Ces critères sont adaptables aux cas des retards multiples et des retards bornés en utilisant les approches proposées dans le Chapitre 2.

## 3.4 Stabilisation exponentielle robuste

### 3.4.1 Présentation du problème

Dans cette partie, nous allons nous focaliser sur les systèmes non linéaires à un retard variable qui se mettent sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & (A + \Delta A(t, x_t))x(t) + (A_\tau + \Delta A_\tau(t, x_t))x(t - \tau(t)) \\ & + (B + \Delta B(t, x_t))u(t) + B_\tau u(t - \tau(t)). \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Les incertitudes paramétriques ont les structures suivantes :

$$\Delta A(t, x_t) = H\Delta(t)E, \quad \Delta A_\tau(t, x_t) = H_\tau\Delta(t)E_\tau, \quad \Delta B(t, x_t) = H\Delta(t)D, \quad (3.4.2)$$

où la matrice contenant les incertitudes  $\Delta(t) \in \mathbb{R}^{q \times p}$  est telle que :

$$\forall t, \quad \Delta^T(t)\Delta(t) \leq I_p. \quad (3.4.3)$$

Le vecteur  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur de commande et  $\tau(t)$  représente le retard variant dans le temps et vérifiant les inégalités

$$0 \leq \tau(t) \leq \tau_2, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.4.4)$$

Les matrices  $A, A_\tau, E, E_\tau, H, H_\tau \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B, B_\tau, D$  sont supposées constantes et de dimensions appropriées. L'objectif de cette section est de déterminer un gain  $K$  du retour d'état

$$u(t) = Kx(t), \quad (3.4.5)$$

qui stabilise exponentiellement le système (3.4.1).

Nous présenterons successivement le problème de la stabilité puis de la stabilisation du système en boucle fermée (3.4.1) avec la loi de commande (3.4.5). Dans la résolution de chacun de ces deux problèmes nous proposerons des résultats utilisant les approches polytopique et par modèle incertain présentées dans le chapitre précédent.

**Remarque 3.4.1** *Contrairement à la partie 3.3, la matrice  $B_\tau$  du système (3.4.1) est supposée constante.*

### 3.4.2 Stabilité exponentielle de systèmes soumis à des incertitudes

Premièrement, nous allons nous intéresser au problème de la stabilité du système sans commande. Pour cela, nous allons nous focaliser sur les systèmes à retard variable et avec des incertitudes paramétriques régis par des équations de la forme :

$$\dot{x}(t) = (A_0 + H_0\Delta(t, x_t)E_0)x(t) + (A_1 + H_1\Delta(t, x_t)E_1)x(t - \tau(t)). \quad (3.4.6)$$

où

$$\Delta A_0(t) = H_0\Delta(t, x_t)E_0, \quad \Delta A_1(t) = H_1\Delta(t, x_t)E_1. \quad (3.4.7)$$

Dans ce paragraphe, nous allons donner des conditions de stabilité exponentielle avec un taux de décroissance exponentielle  $\alpha$  garanti. Par définition, la stabilité exponentielle de la solution nulle de (3.4.6) est équivalente à l'existence d'un nombre positif  $\alpha > 0$  tel que  $e^{\alpha t}x(t; t_0, x_0)$  converge asymptotiquement vers la solution nulle. Il

est ainsi naturel d'introduire la nouvelle variable  $x_\alpha(t) = e^{\alpha t}x(t)$ . On en déduit le nouveau système décrit par les équations différentielles :

$$\dot{x}_\alpha(t) = (A_0 + \alpha I_n + H_0\Delta(t, x_t)E_0)x_\alpha(t) + e^{\alpha\tau(t)}(A_1 + H_1\Delta(t, x_t)E_1)x_\alpha(t - \tau(t)), \quad (3.4.8)$$

et comme dans le chapitre 2, la stabilité asymptotique du système décrit par l'équation (3.4.8) pour un  $\alpha > 0$  implique l' $\alpha$ -stabilité du système initial (3.4.6).

### Modélisation polytopique

En utilisant une représentation polytopique du terme exponentiel  $e^{\alpha\tau(t)}$ , on obtient le théorème suivant :

**Théorème 3.4.2** [130] *La solution  $x(t) = 0$  du système (3.4.6) est  $\alpha$ -stable pour tout retard variable  $\tau(t)$  vérifiant (3.4.4), s'il existe des matrices symétriques définies positives de dimension  $n \times n$ ,  $P_1$  et  $R > 0$ , des matrices de dimension  $n \times n$ ,  $P_2, P_3$ , et des réels positifs  $\delta_0$  and  $\delta_1$  telles que les inégalités matricielles suivantes soient satisfaites pour  $i = 1, 2$  :*

$$\Gamma^i = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^i & \tau_2 P^T \begin{bmatrix} 0 \\ A_1 \beta_i \end{bmatrix} & \delta_0 P^T \begin{bmatrix} 0 \\ H_0 \end{bmatrix} & \delta_1 P^T \begin{bmatrix} 0 \\ H_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} E_0^T \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} E_1^T \beta_i \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_2 \beta_2 E_1^T \end{bmatrix} \\ * & -\tau_2 R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\delta_0 I_q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\frac{\delta_1}{(1+\tau_2)} I_q & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\delta_0 I_p & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\delta_1 I_p & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\delta_1 \tau_2 I_p \end{bmatrix} < 0, \quad (3.4.9)$$

où

$$\Gamma_{11}^i = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \mathcal{A}_i & -I_n \end{bmatrix}^T P + P^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \mathcal{A}_i & -I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 R \end{bmatrix}, \quad (3.4.10)$$

et où

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = e^{\alpha\tau_2}, \\ \mathcal{A}_i = A_0 + \alpha I_n + \beta_i A_1. \end{array} \quad (3.4.11)$$

**Démonstration.** La principale difficulté provient du terme  $e^{\alpha\tau(t)}$  du système transformé (3.4.8). Comme dans le chapitre précédent, nous proposons une modélisation polytopique de ce terme variant en utilisant ces bornes (3.4.4) afin d'exprimer le système (3.4.8) comme une somme pondérée de systèmes linéaires à coefficients constants. On obtient alors :

$$e^{\alpha\tau(t)} = \lambda_1(t)\beta_1 + \lambda_2(t)\beta_2,$$

où les fonctions scalaires  $\lambda_i(t)$  dépendent de la valeur du retard  $\tau(t)$  et vérifient les conditions de convexité suivantes :

$$\lambda_1(t), \lambda_2(t) \geq 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1(t) + \lambda_2(t) = 1.$$

En utilisant cette approche, l'équation du système (3.4.8) devient :

$$\dot{x}_\alpha(t) = (A_0 + \alpha I_n + H_0 \Delta(t, x_t) E_0) x_\alpha(t) + \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t) (A_1 + \beta_i H_1 \Delta(t, x_t) E_1) x_\alpha(t - \tau(t)) \quad (3.4.12)$$

Afin d'analyser la stabilité du système (3.4.12), On écrit le système sous sa forme descripteur :

$$E \dot{\bar{x}}_\alpha(t) = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t) [A_i + H_0 \Delta(t, x_t) E_0 + \beta_i H_1 \Delta(t, x_t) E_1] & -I_n \end{bmatrix} \bar{x}_\alpha(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t) (A_1 + \beta_i H_1 \Delta(t, x_t) E_1) \end{bmatrix} \int_{t-\tau}^t \dot{x}_\alpha(s) ds$$

avec  $\bar{x}_\alpha(t) = \text{col}\{x_\alpha(t), \dot{x}_\alpha(t)\}$ ,  $E = \text{diag}\{I_n, 0\}$ .

Soit la fonctionnelle  $V$  définie par

$$V(t) = \bar{x}_\alpha^T(t) E P \bar{x}_\alpha(t) + \int_{-\tau_2}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}_\alpha^T(s) (R + \delta_1^{-1} e^{2\alpha\tau_2} E_1^T E_1) \dot{x}_\alpha(s) ds d\theta,$$

où  $P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}$ ,  $P_1 > 0$ .

La fonctionnelle  $V(t)$  est définie positive puisque  $\bar{x}_\alpha^T(t) E P \bar{x}_\alpha(t) = 2x_\alpha^T(t) P_1 x_\alpha(t)$ , ainsi. De plus, comme  $EP = P^T E$ , on obtient l'expression de la dérivée temporelle de  $V(t)$  :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \bar{x}_\alpha^T(t) \Psi_0(t) \bar{x}_\alpha(t) + \eta_0(t) + \eta_1(t) + \eta_2(t) + \eta_3(t) \\ &\quad + \tau_2 \dot{x}_\alpha^T(t) (R + \delta_1^{-1} e^{2\alpha\tau_2} E_1^T E_1) \dot{x}_\alpha(t) - \int_{t-\tau_2}^t \dot{x}_\alpha^T(s) (R + \delta_1^{-1} e^{2\alpha\tau_2} E_1^T E_1) \dot{x}_\alpha(s) ds, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \Psi_0(t) &= P^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t) \mathcal{A}_i & -I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t) \mathcal{A}_i & -I_n \end{bmatrix}^T P, \\ \eta_0(t) &= -2 \int_{t-\tau(t)}^t \bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ e^{\alpha\tau(t)} A_1 \end{bmatrix} \dot{x}_\alpha(s) ds, \\ \eta_1(t) &= 2 \bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ H_0 \end{bmatrix} \Delta(t) E_0 x_\alpha(t), \\ \eta_2(t) &= 2 \bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ H_1 \end{bmatrix} e^{\alpha\tau(t)} \Delta(t) E_1 x_\alpha(t), \\ \eta_3(t) &= 2 \int_{t-\tau(t)}^t \bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ H_1 \end{bmatrix} \Delta(t) e^{\alpha\tau(t)} E_1 \dot{x}_\alpha(s) ds. \end{aligned}$$

En appliquant la majoration classique qui, pour toute matrice  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  définie positive et pour tous vecteurs  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}^n$ , on obtient :

$$\pm 2a^T b \leq a^T R^{-1} a + b^T R b,$$

qui associée aux inégalités (3.4.3) et (3.4.4) conduit aux inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}\eta_0(t) &\leq \tau_2 \bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_1(t) \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_1(t) \end{bmatrix}^T P \bar{x}_\alpha(t) + \int_{t-\tau_2}^t \dot{x}_\alpha^T(s) R \dot{x}_\alpha(s) ds, \\ \eta_1(t) &\leq \delta_0 \bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ H_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & H_0 \end{bmatrix} P \bar{z}(t) + \delta_0^{-1} x_\alpha^T(t) E_0^T E_0 x_\alpha(t), \\ \eta_2(t) &\leq \delta_1 \bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ H_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & H_1 \end{bmatrix} P \bar{x}_\alpha(t) + \delta_1^{-1} x_\alpha^T(t) \bar{E}_1^T(t) \bar{E}_1(t) x_\alpha(t), \\ \eta_3(t) &\leq \tau_2 \delta_1 \bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ H_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & H_1 \end{bmatrix} P \bar{x}_\alpha(t) + \delta_1^{-1} \int_{t-\tau_2}^t \dot{x}_\alpha^T(s) \bar{E}_1^T(t) \bar{E}_1(t) \dot{x}_\alpha(s) ds,\end{aligned}$$

où  $\delta_0, \delta_1$  sont deux réels positifs et où  $\bar{A}_1(t) = e^{\alpha\tau(t)} A_1$  et  $\bar{E}_1(t) = e^{\alpha\tau(t)} E_1$ .

En combinant ces inégalités dans l'expression de  $\dot{V}$ , on en déduit :

$$\frac{d}{dt} V(t) \leq \bar{x}_\alpha^T(t) \left\{ \sum_{i=0}^6 \Psi_i(t) \right\} \bar{x}_\alpha(t),$$

avec

$$\begin{aligned}\Psi_1(t) &= \text{diag}(0, \tau_2 R) + \Psi_0(t), \\ \Psi_2(t) &= \tau_2 P^T \begin{bmatrix} 0 & \bar{A}_1(t) \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_1(t) \end{bmatrix}^T P, \\ \Psi_3(t) &= \delta_0^{-1} P^T \begin{bmatrix} 0 \\ H_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ H_0 \end{bmatrix}^T P, \\ \Psi_4(t) &= \delta_1^{-1} (1 + \tau_2) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ H_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ H_1 \end{bmatrix}^T P, \\ \Psi_5(t) &= \begin{bmatrix} \delta_0 E_0^T E_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Psi_6(t) &= \begin{bmatrix} \delta_1 \bar{E}_1^T(t) \bar{E}_1(t) & 0 \\ 0 & \tau_2 \delta_1 E_1^T E_1 e^{2\alpha\tau_2} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Le système (3.4.12) est donc asymptotiquement stable si  $\bar{\Gamma}(t)$  est définie négative. Avec le complément de Schur, ceci est équivalent à :

$$\lambda_1(t) \Gamma^1 + \lambda_2(t) \Gamma^2 < 0,$$

L'ensemble des matrices définies négatives étant convexe, si les matrices  $\Gamma^i$  sont définies négatives, alors  $\Gamma(t)$  l'est aussi. Le système (3.4.12) est asymptotiquement stable car  $V(t)$  est alors une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii. Par conséquent, le système (3.4.6) est exponentiellement stable avec un degré de convergence  $\alpha$ .

■

**Remarque 3.4.3** *Le Théorème 3.4.2 est un exemple de conditions de stabilité exponentielle. En utilisant des raisonnements similaires à ceux du chapitre précédent, il est possible d'établir d'autres conditions de stabilité qui utilisent l'approche par modèles polytopiques.*

### Modélisation avec incertitudes paramétriques

En utilisant un modélisation par modèle incertain du terme exponentiel  $e^{\alpha\tau(t)}$ , on obtient le théorème suivant :

**Théorème 3.4.4** *La solution  $x(t) = 0$  du système (3.4.6) est  $\alpha$ -stable pour tout retard  $\tau(t)$  satisfaisant (3.4.4), s'il existe deux nombres réels positifs  $\delta_0$  et  $\delta_1$ , des matrices de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  symétriques définies positives  $P_1, R_m, R_d$ , des matrices de  $\mathbb{R}^{n \times n}$   $P_2, P_3, Z_1^i, Z_2^i$  et  $Z_3^i$  pour  $i = m, d$ , telles que les inégalités matricielles suivantes soient réalisées :*

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 & \delta_0 P^T \begin{bmatrix} 0 \\ H_0 \end{bmatrix} & 2\delta_1(1 + \tau_2)P^T \begin{bmatrix} 0 \\ H_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} E_0^T \\ 0 \end{bmatrix} & (\beta_m^2 + \beta_d^2) \begin{bmatrix} E_1^T \\ 0 \end{bmatrix} & (\beta_m^2 + \beta_d^2) \begin{bmatrix} 0 \\ E_1^T \end{bmatrix} \\ * & -\delta_0 I_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -2\delta_1(1 + \tau_2)I_n & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\delta_0 I_n & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \delta_1(\beta_m^2 + \beta_d^2)I_n & 0 \\ * & * & * & * & * & \delta_1(\beta_m^2 + \beta_d^2)I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (3.4.13)$$

et

$$\begin{bmatrix} R_i & \begin{bmatrix} 0 & \beta_i A_1^T \end{bmatrix} P \\ * & Z_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = m, d, \quad (3.4.14)$$

où

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \quad Z_i = \begin{bmatrix} Z_1^i & Z_2^i \\ Z_2^{iT} & Z_3^i \end{bmatrix}$$

et où

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= P^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 + \alpha I_n + \beta_m A_1 & -I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 + \alpha I_n + \beta_m A_1 & -I_n \end{bmatrix}^T P \\ &+ \begin{bmatrix} R_d & 0 \\ 0 & \tau_2(R_m + R_d) \end{bmatrix} + Z_d + \tau_2(Z_m + Z_d), \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

$$\beta_m = (1 + e^{\alpha\tau_2})/2, \quad \beta_d = (e^{\alpha\tau_2} - 1)/2.$$

**Démonstration.** On écrit alors le système (3.4.8) sous la forme du modèle descripteur en écrivant  $e^{\alpha\tau(t)} = \beta_m + \Lambda(t)\beta_d$  où  $\Lambda(t)$  est une fonction scalaire inconnue vérifiant la condition  $|\Lambda(t)| \leq 1$  :

$$\begin{aligned} E\dot{\bar{x}}_\alpha(t) &= \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 + \alpha I_n + \beta_m A_1 & -I_n \end{bmatrix} \bar{x}_\alpha(t) + \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \Lambda(t)\beta_d A_1 \end{bmatrix} \right. \\ &+ \left. \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta A_0(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_m \Delta A_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Lambda(t)\beta_d \Delta A_1(t) \end{bmatrix} \right\} x_\alpha(t) - \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_m A_1 \end{bmatrix} \right. \\ &+ \left. \begin{bmatrix} 0 \\ \Lambda(t)\beta_d A_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_m \Delta A_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Lambda(t)\beta_d \Delta A_1(t) \end{bmatrix} \right\} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}_\alpha(s) ds. \end{aligned}$$

Considérons la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii :

$$\begin{aligned} V^\alpha(t) &= V_1^\alpha(t) + V_2^\alpha(t), \\ V_1^\alpha(t) &= \bar{x}_\alpha^T(t) E P \bar{x}_\alpha(t) + \int_{-\tau_2}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}_\alpha^T(s) (R_m + R_d) \dot{x}_\alpha(s) ds d\theta, \\ V_2^\alpha(t) &= 2\delta_1^{-1}(\beta_m^2 + \beta_d^2) \int_{-\tau_2}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}_\alpha^T(s) E_1^T E_1 \dot{x}_\alpha(s) ds d\theta. \end{aligned}$$

La première partie de  $V^\alpha(t)$  permet de tester la stabilité exponentielle du système nominal, c'est-à-dire sans prendre en compte les perturbations paramétriques du système (3.4.8) (en d'autres termes  $\Delta A_0 = \Delta A_1 = \Delta B_1 = 0$ ). Dans ce cas, le Théorème 2.3.4 permet d'écrire l'inégalité suivante :

$$\dot{V}_1^\alpha(t) \leq \bar{x}_\alpha^T(t) \Psi_1 \bar{x}_\alpha(t).$$

La seconde partie permet quant à elle de "contrôler" la robustesse de la stabilité par rapport à ces perturbations. On obtient alors l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}^\alpha(t) \leq & \bar{x}_\alpha^T(t) \Psi_1 \bar{x}_\alpha(t) + 2\bar{x}_\alpha^T(t) P^T \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta A_0(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_m \Delta A_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Lambda(t) \beta_d \Delta A_1(t) \end{bmatrix} \right\} x_\alpha(t) \\ & - 2\bar{x}_\alpha^T(t) P^T \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_m \Delta A_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Lambda(t) \beta_d \Delta A_1(t) \end{bmatrix} \right\} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}_\alpha(s) ds \\ & + 2\delta_1^{-1} (\beta_M^2 + \beta_d^2) \dot{x}_\alpha^T(t) E_1^T E_1 \dot{x}_\alpha(t) - 2\delta_1^{-1} (\beta_M^2 + \beta_d^2) \int_{t-\tau_2}^t \dot{x}_\alpha^T(s) E_1^T E_1 \dot{x}_\alpha(s) ds. \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

En revenant aux définitions des matrices de perturbations (3.4.7) et le fait que  $\Delta^T(t)\Delta(t) \leq I_n$ , la majoration matricielle classique permet d'obtenir pour les trois premiers termes de (3.4.16) les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} 2\bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ H_0 \Delta(t) E_0 \end{bmatrix} x_\alpha(t) & \leq \bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ H_0 \end{bmatrix} \delta_0 I_n \begin{bmatrix} 0 \\ H_0 \end{bmatrix}^T P \bar{x}_\alpha(t) + x_\alpha^T(t) E_0^T \delta_0^{-1} E_0 x_\alpha(t), \\ 2\bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_m H_1 \Delta(t) E_1 \end{bmatrix} x_\alpha(t) & \leq \bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ H_1 \end{bmatrix} \delta_1 I_n \begin{bmatrix} 0 \\ H_1 \end{bmatrix}^T P \bar{x}_\alpha(t) + \delta_1^{-1} \beta_m^2 x_\alpha^T(t) E_1^T E_1 x_\alpha(t), \\ 2\bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_d \Lambda(t) H_1 \Delta(t) E_1 \end{bmatrix} x_\alpha(t) & \leq \bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ H_1 \end{bmatrix} \delta_1 I_n \begin{bmatrix} 0 \\ H_1 \end{bmatrix}^T P \bar{x}_\alpha(t) + \delta_1^{-1} \beta_d^2 x_\alpha^T(t) E_1^T E_1 x_\alpha(t). \end{aligned}$$

De même, pour les termes retardés de (3.4.17), on obtient les majorations :

$$\begin{aligned} -2\bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_m H_1 \Delta(t) E_1 \end{bmatrix} \dot{x}_\alpha(s) & \leq \bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ H_1 \end{bmatrix} \delta_1 I_n \begin{bmatrix} 0 \\ H_1 \end{bmatrix}^T P \bar{x}_\alpha(t) + \delta_1^{-1} \beta_m^2 \dot{x}_\alpha^T(s) E_1^T E_1 \dot{x}_\alpha(s), \\ -2\bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_d \Lambda(t) H_1 \Delta(t) E_1 \end{bmatrix} \dot{x}_\alpha(s) & \leq \bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ H_1 \end{bmatrix} \delta_1 I_n \begin{bmatrix} 0 \\ H_1 \end{bmatrix}^T P \bar{x}_\alpha(t) + \delta_1^{-1} \beta_d^2 \dot{x}_\alpha^T(s) E_1^T E_1 \dot{x}_\alpha(s). \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à la variable  $s$  de  $t - \tau(t)$  à  $t$ , et en utilisant le fait que le retard  $\tau(t)$  est borné par  $\tau_2$ , on obtient :

$$\begin{aligned} -2\bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_m H_1 \Delta(t) E_1 \end{bmatrix} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}_\alpha(s) ds & \leq \tau_2 \bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ H_1 \end{bmatrix} \delta_1 I_n \begin{bmatrix} 0 \\ H_1 \end{bmatrix}^T P \bar{x}_\alpha(t) \\ & \quad + \delta_1^{-1} \beta_m^2 \int_{t-\tau_2}^t \dot{x}_\alpha^T(s) E_1^T E_1 \dot{x}_\alpha(s) ds, \\ -2\bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_d \Lambda(t) H_1 \Delta(t) E_1 \end{bmatrix} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}_\alpha(s) ds & \leq \tau_2 \bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ H_1 \end{bmatrix} \delta_1 I_n \begin{bmatrix} 0 \\ H_1 \end{bmatrix}^T P \bar{x}_\alpha(t) \\ & \quad + \delta_1^{-1} \beta_d^2 \int_{t-\tau_2}^t \dot{x}_\alpha^T(s) E_1^T E_1 \dot{x}_\alpha(s) ds. \end{aligned}$$



En réinjectant ces majorations dans l'inégalité (3.4.17), on déduit alors la majoration suivante :

$$\begin{aligned}
\dot{V}^\alpha(t) \leq & \bar{x}_\alpha^T(t) \Psi_1 \bar{x}_\alpha(t) \bar{x}_\alpha(t) + \bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ H_0 \end{bmatrix} \delta_0 I_n \begin{bmatrix} 0 \\ H_0 \end{bmatrix}^T P \bar{x}_\alpha(t) + x_\alpha^T(t) E_0^T \delta_0^{-1} E_0 x_\alpha(t) \\
& + \bar{x}_\alpha^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ H_1 \end{bmatrix} \delta_1 (1 + \tau_2) I_n \begin{bmatrix} 0 \\ H_1 \end{bmatrix}^T P \bar{x}_\alpha(t) + \delta_1^{-1} (\beta_m^2 + \beta_d^2) x_\alpha^T(t) E_1^T E_1 x_\alpha(t) \\
& + \delta_1^{-1} (\beta_m^2 + \beta_d^2) \int_{t-\tau_2}^t \dot{x}_\alpha^T(s) E_1^T E_1 \dot{x}_\alpha(s) ds + \delta_1^{-1} (\beta_m^2 + \beta_d^2) \dot{x}_\alpha^T(t) E_1^T E_1 \dot{x}_\alpha(t) \\
& - \delta_1^{-1} (\beta_m^2 + \beta_d^2) \int_{t-\tau_2}^t \dot{x}_\alpha^T(s) E_1^T E_1 \dot{x}_\alpha(s) ds,
\end{aligned} \tag{3.4.17}$$

qui, en appliquant le complément de Schur de manière adéquate, permettent de retrouver la condition (3.4.13). Ainsi, si les conditions (3.4.13) et (3.4.14) sont vérifiées, alors la stabilité asymptotique du système (3.4.8) et la stabilité exponentielle de (3.4.6) pour  $\alpha > 0$  sont démontrées. ■

**Remarque 3.4.5** *Il est possible de donner d'autres théorèmes en utilisant des raisonnements similaires à ceux présentés au chapitre précédents.*

**Remarque 3.4.6** *Il est aussi possible d'étendre ces résultats aux cas des systèmes à retards multiples ou à retards bi-bornée.*

### 3.4.3 Application à la stabilisation exponentielle

Nous allons maintenant revenir au problème de la stabilisation. On cherche à déterminer un gain  $K$  de retour d'état (3.4.5) tel que le système en boucle fermée (3.4.1) soit exponentiellement stable avec un taux de convergence garanti. Le système (3.4.1) avec la commande (3.4.5) s'écrit alors :

$$\dot{x}(t) = (A + BK + \Delta A(t) + \Delta B(t)K)x(t) + (A_\tau + B_\tau K + \Delta A_\tau(t))x(t - \tau(t)) \tag{3.4.18}$$

#### Modélisation polytopique

Le théorème suivant utilise le Théorème de stabilité exponentielle 3.4.2

**Théorème 3.4.7** [130] *La loi de commande par retour d'état (3.4.5) stabilise exponentiellement, avec un degré de convergence  $\alpha$ , la solution  $x(t) = 0$  du système (3.4.1), avec un degré de convergence  $\alpha$ , pour tout retard  $\tau(t)$  satisfaisant (3.4.4) s'il existe une matrice symétrique définie positive, de dimension  $n \times n$ ,  $Q_1$  et des matrices, de dimension  $n \times n$ ,  $Q_2$  et  $Q_3$  de dimension  $n \times n$ ,  $Y$  de dimension  $m \times n$  et trois réels positifs  $\varepsilon$ ,  $\delta_0$  et  $\delta_1$  qui satisfont aux inégalités matricielles :*

$$\begin{bmatrix}
Q_2 + Q_2^T & \Psi_{12}^i & 0 & \tau_2 Q_2^T & 0 & 0 & Q_1 E^T + Y^T D^T & Q_1 E_\tau^T \beta_i & Q_3^T E_\tau^T \beta_2 \\
* & -Q_3 - Q_3^T & \Psi_{23}^i & \tau_2 Q_3^T & \delta_0 H_0 & \delta_1 H_1 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & -\tau_2 \varepsilon Q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & -\tau_2 \varepsilon Q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & -\delta_0 I_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & -\frac{\delta_1}{1+\tau_2} I_n & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & -\delta_0 I_n & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & -\delta_1 I_n & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & -\delta_1 \tau_2 I_n
\end{bmatrix} < 0, \tag{3.4.19}$$

pour  $i = 1, 2$  et où

$$\begin{aligned}\Psi_{12}^i &= Q_1^T \mathcal{A}_i + Y^T (B + B_\tau \beta_i)^T - Q_2^T + Q_3, \\ \Psi_{23}^i &= \tau_2 \varepsilon \beta_i (A_1 \cdot Q_1 + B_1 Y),\end{aligned}\tag{3.4.20}$$

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = e^{\alpha \tau_2}, \quad \mathcal{A}_i = A_0 + \alpha I_n + \beta_i A_1.\tag{3.4.21}$$

Le gain du retour d'état est alors donné par :

$$K = Y Q_1^{-1}.\tag{3.4.22}$$

**Démonstration.** La preuve de ce théorème vient des conditions de stabilité exponentielle du Théorème 3.4.2. Dans un premier temps, on définit les matrices  $A_0 = A + BK$ ,  $A_1 = A_\tau + B_\tau K$ ,  $\Delta A_0(t) = \Delta A(t) + \Delta B(t)K$  et  $\Delta A_1(t) = \Delta A_\tau(t)$ . Le système bouclé (3.4.18) est  $\alpha$ -stable s'il vérifie les conditions LMI du Théorème 3.4.2 pour les matrices  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $\Delta A_0(t)$  et  $\Delta A_1(t)$  précédemment définies. On développe alors le terme  $\text{diag}(\tau_2 R, 0)$ , présent dans le bloc (2, 2) de la LMI (3.4.9), de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \tau_2 I_n \end{bmatrix} \left( \frac{1}{\tau_2} R \right) \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_2 I_n \end{bmatrix}^T.$$

Concernant la deuxième colonne, on l'écrit de la manière suivante (application directe du complément de Schur) :

$$\begin{aligned}\Phi_{12}^i &= \tau_2 P^T \begin{bmatrix} 0 \\ A_1 \beta_i R^{-1} \end{bmatrix}, \\ \Phi_{22}^i &= -\tau_2 R^{-1},\end{aligned}$$

En supposant alors que  $P_1$  et  $(P_3^T + P_3)$  sont des matrices symétriques définies positives ( $(P_3^T + P_3)$  est, au signe près, la composante d'un bloc diagonal de (3.4.9)), la matrice  $P$  est alors non singulière. On définit les matrices  $Q$ , l'inverse de la matrice  $P$ , et  $M$  de la manière suivante :

$$P^{-1} = Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ Q_2 & Q_3 \end{bmatrix} \text{ et } M = \text{diag}\{Q, I_{7n}\}.$$

Pour terminer la démonstration, on multiplie les conditions LMI développées par  $M^T$  à gauche et par  $M$  à droite. On impose la condition liante  $R^{-1} = Q_1 \varepsilon$  où  $\varepsilon$  est un réel positif, et enfin, en revenant à la définition des matrices  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $\Delta A_0(t)$  et  $\Delta A_1(t)$  en fonction des matrices de (3.4.1), on pose  $Y = K Q_1$ .

La stabilité exponentielle, avec un degré de convergence  $\alpha > 0$ , du système (3.4.1) avec la loi de commande par retour d'état (3.4.5) de gain  $K = Y Q_1^{-1}$  est alors garantie si les conditions LMI (3.4.19) sont satisfaites. ■

### Modélisation avec incertitudes paramétriques

**Théorème 3.4.8** *La solution  $x(t) = 0$  du système (3.4.1) est  $\alpha$ -stabilisable pour tout retard variable  $\tau(t)$  vérifiant (3.4.4) s'il existe des nombres réels positifs  $\varepsilon$ ,  $\delta_0$  et  $\delta_1$ , des matrices symétriques définies positives de dimension  $n \times n$ ,  $Q_1 > 0$ ,  $S_i > 0$   $Q_2, Q_3, W_1^i, W_2^i, W_3^i$  et  $Y$  une matrice de dimension  $n \times m$  satisfaisant les*

inégalités matricielles suivantes pour  $i = m, d$  :

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \tau_2 Q_2^T & \tau_2 Q_2^T & 0 & 0 & \Phi_{16} & \eta Q_1 E_1^T & \eta Q_2^T E_1^T \\ * & \Phi_{22} & \tau_2 Q_3^T & \tau_2 Q_3^T & \delta_0 H_0 & \epsilon H_1 & 0 & 0 & \eta Q_3^T E_1^T \\ * & * & \tau_2 S_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \tau_2 S_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\delta_0 I_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\epsilon I_n & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\delta_0 I_n & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \eta \delta_1 I_n & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & \eta \delta_1 I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (3.4.23)$$

et

$$\begin{bmatrix} 2Q_1 - S_i & \left[ 0 \quad \beta_i(Q_1 A_\tau^T + Y^T B_\tau^T) \right] \\ * & W_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = m, d, \quad (3.4.24)$$

où

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= Q_2 + Q_2^T + 2Q_1 - S_d + \tau_2 W_{1m} + (1 + \tau_2)W_{1d}, \\ \Phi_{12} &= \alpha Q_1 + Q_1 A^T + Y^T B^T + \beta_m(Q_1 A_\tau^T + Y^T B_\tau^T) - Q_2^T + Q_3 + \tau_2 W_{2m} + (1 + \tau_2)W_{2d}, \\ \Phi_{22} &= -Q_3 - Q_3^T + \tau_2 W_{3m} + (1 + \tau_2)W_{3d}, \\ \Phi_{16} &= Q_1 E^T + Y^T D_0^T, \end{aligned} \quad (3.4.25)$$

et où  $\epsilon = 2\delta_1(1 + \tau_2)$  et  $\eta = (\beta_m^2 + \beta_d^2)$

**Démonstration.** On développe alors les termes  $\text{diag}(\tau_2 R_m, 0)$  et  $\text{diag}(\tau_2 R_d, 0)$  présents dans  $\Psi_1$  (3.4.15), de la manière suivante pour  $i = m, d$  :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \tau_2 I_n \end{bmatrix} \left( \frac{1}{\tau_2} R_i \right) \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_2 I_n \end{bmatrix}^T.$$

En supposant alors que les matrices  $P_1$  et  $(P_3^T + P_3)$  sont symétriques définies positives ( $(P_3^T + P_3)$  est, au signe près, la composante d'un bloc diagonal de (3.4.13)), la matrice  $P$  est alors non singulière. On définit les matrices  $Q$ , l'inverse de la matrice  $P$  et  $M$  de la manière suivante :

$$P^{-1} = Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ Q_2 & Q_3 \end{bmatrix} \text{ et } M = \text{diag}\{Q, I_{8n}\}.$$

On multiplie alors la condition (3.4.13) transformé par  $M^T$  à gauche et par  $M$  à droite, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \Phi_n & \begin{bmatrix} \tau_2 Q_2^T \\ \tau_2 Q_3^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \tau_2 Q_2^T \\ \tau_2 Q_3^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_0 H_0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ \epsilon H_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Q_1 E_0^T \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \eta Q_1 E_1^T \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \eta Q_2^T E_1^T \\ \eta Q_3^T E_1^T \end{bmatrix} \\ * & \tau_2 R_m^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \tau_2 R_d^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\delta_0 I_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\epsilon I_n & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\delta_0 I_n & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \delta_1 \eta I_n & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \delta_1 \eta I_n \end{bmatrix} < 0,$$

où

$$\begin{aligned}\Phi_n &= Q^T \Psi_1 Q \\ &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_0 + \alpha I_n + \beta_m A_1 & -I_n \end{bmatrix} Q + Q^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 + \alpha I_n + \beta_m A_1 & -I_n \end{bmatrix}^T \\ &\quad + \begin{bmatrix} Q_1^T R_d Q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + Q^T (Z_d + \tau_2 (Z_m + Z_d)) Q,\end{aligned}$$

On pose alors  $S_m = R_m^{-1}$ ,  $S_d = R_d^{-1}$ ,  $W_m = Q^T Z_m Q$ ,  $W_d = Q^T Z_d Q$  et  $N = \text{diag}\{Q_1, Q\}$ . On peut maintenant modifier les conditions LMI (3.4.14) en multipliant par  $N^T$  à gauche et par  $N$  à droite. On obtient alors les conditions :

$$\begin{bmatrix} Q_1 R_i Q_1 & \begin{bmatrix} 0 & \beta_i (Q_1 A_\tau^T + Y^T B_\tau^T) \end{bmatrix} \\ * & W_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = m, d, \quad (3.4.26)$$

Une première piste consisterait à introduire une condition liante de la forme  $Q_1 = \epsilon S$  pour rendre le problème linéaire. Cependant cette relation augmente le conservatisme des conditions. Une autre méthode est envisageable : on utilise l'inégalité

$$(Q_1 - S)^T S^{-1} (Q_1 - S) \geq 0,$$

qui, en la développant, assure que  $-Q_1 S^{-1} Q_1 \leq -2Q_1 + S$ . Le lemme de Schur permet ensuite d'écrire la condition (3.4.26) sous la forme :

$$-Q_1 S Q_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i (A_\tau + B_\tau K) Q_1 \end{bmatrix}^T (W^i)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i (A_\tau + B_\tau K) Q_1 \end{bmatrix} < 0.$$

On remarque alors que si la condition suivante :

$$-2Q_1 + S + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i (A_\tau + B_\tau K) Q_1 \end{bmatrix}^T (W^i)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i (A_\tau + B_\tau K) Q_1 \end{bmatrix} < 0, \quad (3.4.27)$$

est satisfaite, alors (3.4.26) sera satisfaite. En appliquant le lemme de Schur à (3.4.27), on retrouve alors la condition (3.4.24). On effectue la même opération pour le terme  $Q_1 R_d Q_1$  présent dans le bloc (1,1). Ainsi, en posant  $Y = K Q_1$ , les conditions (3.4.23) et (3.4.24) garantissent que le système (3.4.1) est  $\alpha$ -stabilisable. ■

**Remarque 3.4.9** Les Théorèmes (3.4.7) (3.4.8) permettent aussi de caractériser la convergence exponentielle du système en boucle ouverte (3.4.6), c'est-à-dire dans le cas où les matrices  $B_0, B_1$  et  $D_0$  sont nulles).

**Remarque 3.4.10** Ces résultats peuvent être facilement adaptés au cas des systèmes à retards multiples et bi-bornés.

**Remarque 3.4.11** Les théorèmes présentés dans cette partie peuvent être étendus au cas des retards bi-bornés en considérant un retard variable vérifiant la condition  $\tau_1 \leq \tau(t) \leq \tau_2$ . En effet dans ce cas, on change la condition  $\beta_1 = 1$  en  $\beta_1 = e^{\alpha \tau_1}$ .

### 3.4.4 Exemples

#### Exemples de stabilité exponentielle

Considérons le système non commandé suivant :

$$\dot{x}(t) = (A_0 + H_0\Delta(t)E_0)x(t) + (A_1 + H_1\Delta(t)E_1)x(t - \tau(t)). \quad (3.4.28)$$

avec les valeurs (cf. [65], [77], [84], [93], [113] ou encore [130]) :

$$A_0 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$H_0 = E_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{1.6} & 0 \\ 0 & \sqrt{0.05} \end{bmatrix}, \quad H_1 = E_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{0.1} & 0 \\ 0 & \sqrt{0.3} \end{bmatrix},$$

et où l'on suppose que le retard considéré est du type *bi-borné*. Il satisfait aux inégalités  $0 \leq \tau_1 \leq \tau(t) \leq \tau_2$ . Nous avons choisi ces retards pour montrer l'influence de la borne inférieure  $\tau_1$  sur le degré de convergence de stabilité exponentielle.

Notre objectif sera de déterminer la borne supérieure  $\tau_2$  du retard telle que le système (3.4.28) soit  $\alpha$ -stable pour plusieurs valeurs de  $\alpha$  et pour des valeurs de  $\tau_1$  différentes. Nous avons choisi  $\tau_1 = 0, 0.5\tau_2$  et  $0.9\tau_2$ .

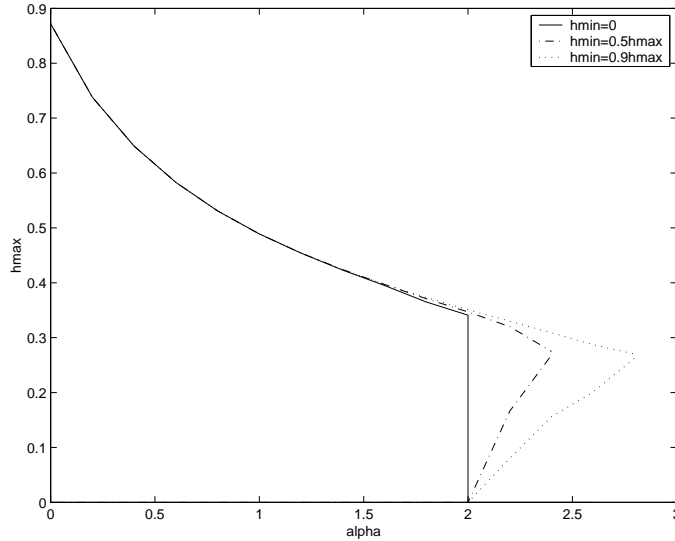


FIG. 3.2 – Relation entre  $\tau_2$  et  $\alpha$  selon la valeur de  $\tau_1$

La figure 3.2 montre la dépendance de la stabilité exponentielle par rapport à la valeur de  $\tau_1$ . Ces résultats sont obtenus en appliquant le Théorème 3.4.2. La stabilité exponentielle dépend effectivement de la borne inférieure du retard. La figure 3.2 montre aussi que lorsque le retard est quasi constant (pour  $\tau_1 = 0.9\tau_2$ ), le système est  $\alpha$ -stable, avec  $\alpha = 2.5$ , pour une certaine valeur du retard mais ne l'est pas forcément pour des valeurs inférieures. Ce qui laisse penser qu'il existe une valeur optimale du retard qui rend le système plus performant au sens de la stabilité exponentielle.

Un autre exemple proposé dans [148] est le suivant :

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1.6 & 3 \\ 0 & -1.4 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$H_0 = H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_0 = \begin{bmatrix} 0.28 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix},$$

Dans [148], il a été montré que pour un retard constant  $\tau = 0.8$  le système est  $\alpha$ -stable avec  $\alpha = 0.5$ . Le théorème 3.4.2 garantit quant à lui que pour un retard variable majoré par  $\tau_2 = 0.8$ , le système est  $\alpha$ -stable avec  $\alpha \leq 0.805$  et que pour  $\alpha = 0.5$ , il l'est pour tout retard variable inférieur à  $\tau_2 = 1.305$ .

### Exemple de stabilisation exponentielle

On s'intéresse maintenant au système (3.4.1) soumis à un retard inconnu et à des incertitudes paramétriques. Les valeurs des matrices d'états sont les suivantes [98] :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_\tau = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 \\ -0.9 & .55 \end{bmatrix}, \quad H = H_\tau = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_\tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad E_0 = E_1 = D_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

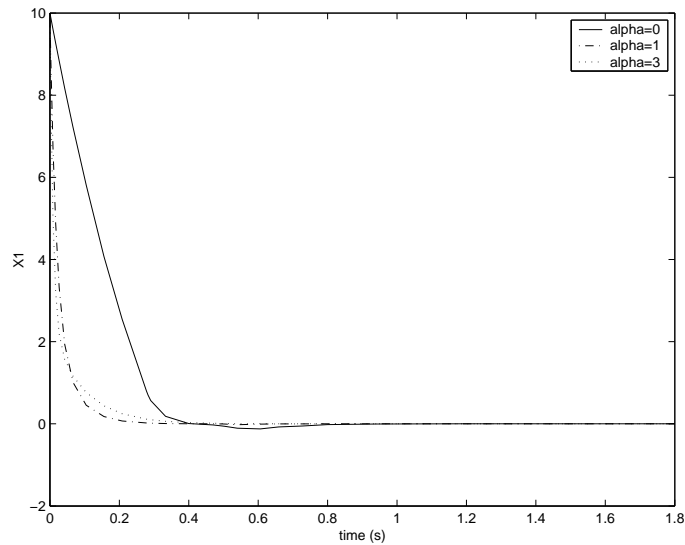
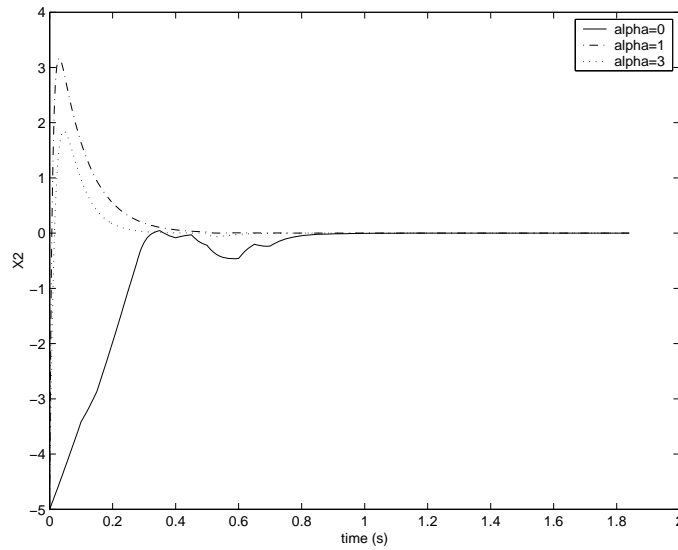
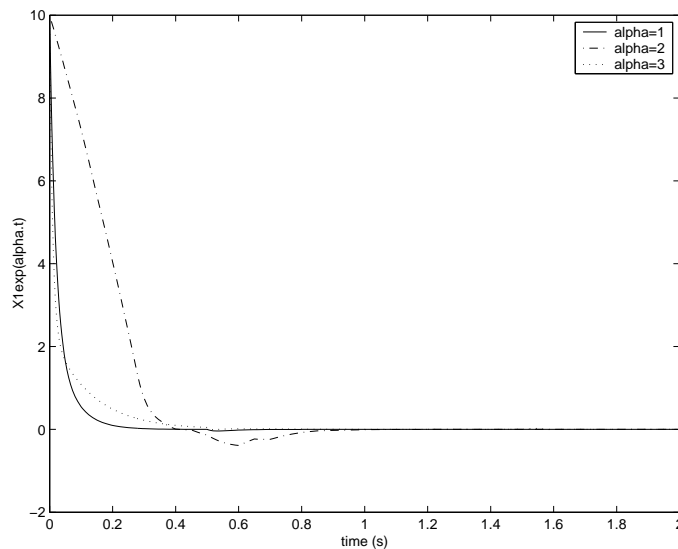


FIG. 3.3 – Convergence de  $x_1$  pour différentes valeurs de  $\alpha$

Les Figures 3.3 et 3.4 sont obtenues pour  $\alpha = 0, 1, 3$ , et  $\tau_2 = 0.5$  et pour  $\tau(t) = \frac{\tau_2 + \tau_1}{2} + \frac{\tau_2 - \tau_1}{2} \sin(4t)$ . La Figure 3.5 permet de vérifier la stabilité exponentielle pour  $\alpha = 1, 2$  et 3.

### 3.4.5 Conclusion

Le problème qui consiste à déterminer une loi de commande par retour d'état garantissant la stabilité exponentielle robuste d'un système en boucle fermée a été résolu en utilisant une approche du type Lyapunov-Krasovskii. Ces résultats peuvent être adaptés aux cas des retards constants ou variables *bi-bornés* ou à la stabilité asymptotique.

FIG. 3.4 – Convergence de  $x_2$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ FIG. 3.5 – Convergence de  $x_1 e^{\alpha t}$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ 

### 3.5 Introduction à la commande saturée

Comme nous l'avons mentionné auparavant, les retards sont, la plupart du temps, des facteurs d'instabilité. Cependant la stabilité peut aussi être altérée par d'autres phénomènes. Ainsi, en pratique, les contrôleurs sont souvent sujet à des contraintes de limitation d'énergie. Il est alors nécessaire de prendre en compte le fait que leur commande est bornée. Les systèmes à entrée saturée ont fait l'objet de nombreuses études dans le cas non retardé (méthodes d'“anti-emballement”, ou “anti-windup”). En effet, un contrôleur peut être dans l'impossibilité de suivre un signal d'amplitude ou d'énergie trop élevée. Cela conduit à considérer des systèmes de la forme :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B \text{sat}(u(t), \bar{u}),$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  représente l'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ , l'entrée. Les matrices  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  sont supposées constantes. Le vecteur  $sat(u(t), \bar{u})$  de  $\mathbb{R}^m$  a pour  $i^{\text{e}}$  coordonnée  $\text{sign}(u_i) \min(|u_i|, \bar{u}_i)$ . Un exemple de fonction de saturation “*sat*” dans le cas  $m = 1$  est présenté figure 3.6.

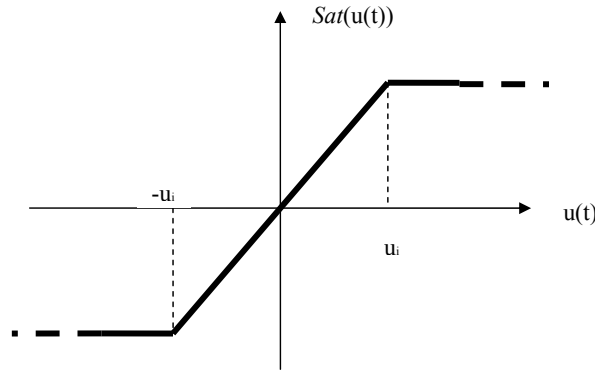


FIG. 3.6 – Fonction de saturation

Dans le cas des systèmes à retards, plusieurs travaux concernant la stabilisation en présence saturation peuvent être trouvés. Dans [114] et [120], des lois de commande stabilisantes ont été proposées par retour d'état continu et échantillonné. Cependant, dans ces articles, le domaine d'attraction (c'est-à-dire l'ensemble des conditions initiales admissibles) en présence de saturation n'est pas explicitement défini. Dans [16] et [143], des estimations du domaine d'attraction ont été déterminées en utilisant une modélisation polytopique décrivant les effets de la saturation. Par ailleurs, dans le cadre de l'étude des systèmes neutres, très peu d'auteurs ont déterminé des estimations du domaine d'attraction. On peut tout de même citer [23] et [142].

Dans la suite de ce chapitre, nous allons proposer deux approches. La première, présentée dans la partie 3.6, permet, par le biais d'une représentation polytopique, de caractériser la stabilité asymptotique d'un système dont la commande est retardée et saturée.

La partie 3.7 présente la méthode d'“anti-emballement” (ou en anglais “anti-windup”) pour aboutir à des conditions de stabilité asymptotique et exponentielle de systèmes neutres à retard variable et dont l'entrée est soumise à des saturations. Dans les deux cas, une estimation du domaine d'attraction sera donnée.

## 3.6 Approche polytopique pour l'étude des systèmes à entrée saturée et retardée

### 3.6.1 Systèmes à entrée saturée et retardée

Considérons le système linéaire à entrée retardée et saturée suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bsat(u(t - \tau(t)), \bar{u}), \\ x(\theta) &= \phi(\theta), \quad \forall \theta \in [-\tau_2, 0], \end{aligned} \tag{3.6.1}$$



où  $x \in \mathbb{R}^n$  représente l'état du système,  $u \in \mathbb{R}^m$ , son entrée. Le retard  $\tau(t)$  varie dans le temps. On suppose qu'il existe une borne supérieure  $\tau_2$  telle que :

$$0 \leq \tau(t) \leq \tau_2, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.6.2)$$

On suppose que la commande  $u$  du système (3.6.1) est soumise à des contraintes de saturation en amplitude de la forme

$$|u_i(t)| \leq \bar{u}_i, \quad 0 < \bar{u}_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.6.3)$$

On définit  $x(t, \phi)$  l'état de la solution du système (3.6.1) qui a pour condition initiale  $\phi$ , une fonction de  $[-\tau_2, 0]$  vers  $\mathbb{R}^n$ . Ainsi on peut définir le domaine d'attraction du système en boucle fermée (3.6.1) vers l'origine :

$$\mathcal{A} = \{\phi : [-\tau_2, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, \phi) = 0\}.$$

Notre objectif est alors de déterminer des conditions d'existence d'un gain matriciel  $K$  tel que la commande par retour d'état :

$$u(t) = \begin{cases} Kx(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (3.6.4)$$

stabilise le système (3.6.1). De plus, nous souhaitons donner une estimation  $\mathcal{X}_\beta \subset \mathcal{A}$  du domaine d'attraction. On se propose alors d'étudier l'ensemble  $\mathcal{X}_\beta$  défini par :

$$\mathcal{X}_\beta = \{\phi, \phi^T(0)P_1\phi(0) \leq \beta^{-1}\}, \quad (3.6.5)$$

où  $\beta > 0$  est un réel positif et  $P_1 > 0$  une matrice symétrique définie positive de dimension  $n \times n$ .  $\mathcal{X}_\beta$  est un ensemble défini en fonction des variables  $\beta$  et  $P_1$  et qui devra être le plus grand possible tout en étant inclus dans le domaine d'attraction  $\mathcal{A}$ .

### 3.6.2 Résultats préliminaires

Le système en boucle fermée (3.6.1) avec la commande par retour d'état  $u(t) = Kx(t)$  s'écrit :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B \text{sat}(Kx(t - \tau(t)), \bar{u}), \quad (3.6.6)$$

On définit aussi  $k_i$ , la  $i^{\text{ième}}$  colonne du gain matriciel  $K$  et l'ensemble  $\mathcal{L}(K, \bar{u})$  défini par :

$$\mathcal{L}(K, \bar{u}) = \{x \in \mathbb{R}^n : |k_i x| \leq \bar{u}_i, \quad i = 1, \dots, m\}.$$

Si la commande est telle que l'état  $x(t)$  est dans le domaine d'attraction  $\mathcal{L}(K, \bar{u})$ , alors le système (3.6.6) peut se représenter par un modèle linéaire. En utilisant les résultats de [16], on introduit de nouvelles matrices qui permettent d'écrire la fonction de saturation comme une somme polytopique de termes linéaires. Ces matrices de  $\mathbb{R}^{m \times m}$  sont diagonales et les éléments diagonaux sont dans  $\{0, 1\}$ . Ainsi l'ensemble de ces matrices  $\Upsilon$  est composé de  $2^m$  éléments distincts. On note  $D_i$ , où  $i = 1, \dots, 2^m$ , les éléments de  $\Upsilon$  et on définit  $D_i^- \triangleq I_m - D_i$  qui est aussi dans  $\Upsilon$ . Le lemme suivant permet d'écrire la fonction de saturation comme une somme pondérée d'éléments de  $\Upsilon$ .

**Lemme 3.6.1** [16] Pour des gains matriciels donnés  $K$  et  $H$  de  $\mathbb{R}^{m \times n}$  on a :

$$\text{sat}(Kx(t), \bar{u}) \in \text{Co}\{D_i Kx + D_i^- Hx, \quad i = 1, \dots, 2^m\},$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  qui vérifie  $|h_i x| \leq \bar{u}_i, \quad i = 1, \dots, 2^m$ .

Le Lemme 3.6.1 permet ensuite d'établir le lemme suivant :

**Lemme 3.6.2** *Pour tout réel  $\beta > 0$ , on suppose qu'il existe une matrice  $H$  de  $\mathbb{R}^{m \times n}$  telle que  $|h_i x| \leq \bar{u}_i$  pour tout  $x(t) \in \mathbb{R}_\beta$ . Alors, pour tout  $x(t) \in \mathcal{X}_\beta$ , le système (3.6.6) admet la représentation suivante :*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j(t) A_j x(t - \tau(t)), \quad (3.6.7)$$

où

$$A_j = B(D_j K + D_j^- H) \quad j = 1, \dots, 2^m, \quad \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j(t) = 1, \quad 0 \leq \lambda_j(t), \quad \forall 0 < t,$$

On note

$$\Omega_\alpha = \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j \Omega_j \quad \text{pour tout } 0 \leq \lambda_j \leq 1, \quad \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j = 1,$$

où les éléments du polytope sont décrits par  $\Omega_j = \begin{bmatrix} A_j \end{bmatrix}$  pour  $j = 1, \dots, 2^m$ . Le problème devient alors celui de déterminer  $\mathcal{X}_\beta$  et un gain  $H$  tels que  $|h_i x| \leq \bar{u}_i$ ,  $i = 1, \dots, 2^m$  pour tout  $x \in \mathcal{X}_\beta$  et que l'état du système

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_j x(t - \tau(t)),$$

appartienne et reste  $\mathcal{X}_\beta$ .

### 3.6.3 Stabilisation Locale

En appliquant la transformation en modèle descripteur et la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii appropriée et en utilisant la méthode de résolution du problème de stabilisation avec l'introduction du paramètre  $\epsilon$ , on obtient le théorème suivant :

**Théorème 3.6.3** [53] *Considérons le système (3.6.6) avec la commande (3.6.4) soumise à la contrainte en amplitude (3.6.3). Le système est stable avec  $\mathcal{X}_\beta$  inclus dans le domaine d'attraction pour tout retard vérifiant  $\tau(t) \leq \tau_2$ , s'il existe des matrices de dimension  $n \times n$   $0 < Q_1, Q_2^{(j)}, Q_3^{(j)}, Z_1^{(j)}, Z_2^{(j)}, Z_3^{(j)}$ , pour  $j = 1, \dots, 2^m$ , deux matrices de dimension  $m \times n$ ,  $Y$  et  $G$  et un réel  $\beta > 0$  qui satisfont aux conditions LMI suivantes :*

$$\begin{bmatrix} Q_2^{(j)} + Q_2^{T(j)} + \tau_2 Z_1^{(j)} & \Sigma_j & \tau_2 Q_2^{(j)} \\ * & -Q_3^{(j)} - Q_3^{T(j)} + \tau_2 Z_3^{(j)} & \tau_2 Q_3^{(j)} \\ * & * & -\epsilon \tau_2 Q_1 \end{bmatrix} < 0, \quad (3.6.8)$$

$j = 1, \dots, 2^m$

$$\begin{bmatrix} \epsilon Q_1 & 0 & \epsilon(Y^T D_j + G^T D_j^-) B^T \\ * & Z_1^{(j)} & Z_2^{(j)} \\ * & * & Z_3^{(j)} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (3.6.9)$$

$j = 1, \dots, 2^m$

$$\begin{bmatrix} \beta & g_i \\ * & \bar{u}_i^2 Q_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.6.10)$$

où

$$\Sigma_j = Q_3^{(j)} - Q_2^{T(j)} + Q_1 A^T + (Y^T D_j + G^T D_j^-) B^T + \tau_2 Z_2^{(j)}. \quad (3.6.11)$$

Le gain du retour d'état stabilisant localement le système est alors donnée par :

$$K = Y Q_1^{-1}.$$

**Démonstration.** Considérons la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii donnée par :

$$V(t) = \bar{x}^T(t)EP\bar{x}(t) + \int_{-\tau_2}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)dsd\theta,$$

Ainsi, en utilisant les résultats présentés dans [52], les inégalités (3.6.10) garantissent, par application du complément de Schur, que  $|h_i x| \leq \bar{u}_i, \forall x \in \mathcal{X}_\beta, i = 1, \dots, m$ , où  $g_i \triangleq h_i Q_1, i = 1, \dots, m$  et où  $Q_1 \triangleq P_1^{-1}$ . Par conséquent, la représentation polytopique du système (3.6.7) est valable. De plus, (3.6.8) et (3.6.9) garantissent la négativité de  $\dot{V} < 0$  (cf. Théorème 2.3.10 dans le Chapitre 1 appliqué au cas de systèmes polytopiques).

Sachant maintenant que la fonctionnelle  $V$  est une fonction décroissante, il s'en suit que  $V(t) < V(0)$  et qu'avec la condition initiale  $\phi$  (3.6.1) on obtient :

$$x^T(t)P_1x(t) \leq V(t) < V(0) = x^T(0)P_1x(0) + \int_{-\tau_2}^0 \int_{-\tau_2+\theta}^0 \phi^T(s)R\phi(s)dsd\theta \leq \beta^{-1}.$$

Or les termes retardées n'interviennent que dans la commande. Cela signifie que pour  $t < 0$  la commande du système n'est pas encore calculée et par conséquent  $\phi(t) = 0$ . On en déduit

$$x^T(t)P_1x(t) \leq V(t) < V(0) = x^T(0)P_1x(0) \leq \beta^{-1}.$$

Ainsi pour des conditions initiales  $x(0) \in \mathcal{X}_\beta$ , les solutions  $x(t)$  restent dans  $\mathcal{X}_\beta$ , et la représentation polytopique du système (3.6.7) avec saturation reste toujours alors validée. Finalement la solution  $x(t)$  est une solution du système (3.6.6) et  $\dot{V} < 0$  le long de ces solutions, ce qui garantit la stabilité asymptotique de la solution  $x(t)$ . ■

### 3.6.4 Exemple

Considérons le système suivant ([16], avec  $\tau_2 \neq 0$ ) défini par :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B \text{sat}(Kx(t - \tau(t)), \bar{u}), \\ A &= \begin{bmatrix} 1.1 & -0.6 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

et où  $\bar{u} = 5$ .

Les conditions du Théorème 3.6.3 sont faisables pour tout retard  $\tau(t) \leq 0.75$ . Pour  $\tau_2 = 0.75$ , le Théorème 3.6.3 assure que le gain de retour d'état  $K = [-1.6964 \ 0.5231]$  (avec  $\epsilon = 0.325, \beta = 0.1261$ , et  $P_1 = \begin{bmatrix} 0.9132 & -0.2816 \\ -0.2816 & 0.0868 \end{bmatrix}$ ) stabilise localement le système pour toute conditions initiales dans  $\mathcal{X}_\beta$  avec  $\beta = 0.1261$ .

### 3.6.5 Conclusion

Dans [142], une approche polytopique modélisant les effets de la saturation a permis, pour un système donné, de déterminer un retour d'état stabilisant le système pour un ensemble de conditions initiales maximisé. Malheureusement il faut noter que cette méthode n'est utile que pour les systèmes linéaires à retard constant et aussi que les conditions obtenues sont indépendantes des caractéristiques du retard. D'autre part, plusieurs critiques peuvent être faites sur l'approche polytopique. La stabilité asymptotique est prouvée en résolvant un grand nombre de conditions LMI ( $2^{m+1} + m$ ). Pour une commande de dimension  $m$  assez grande, il devient difficile de résoudre toutes ces conditions, d'autant plus que l'extension au problème de la stabilisation exponentielle double le nombre de conditions à satisfaire. Ensuite elle ne permet d'obtenir que des conditions de stabilité locale. L'approche proposée dans le paragraphe suivant permis de réduire ce conservatisme.

## 3.7 Systèmes à entrée saturée et à état retardé

### 3.7.1 Position du Problème

Considérons le système linéaire neutre à retard suivant :

$$\dot{x}(t) - F\dot{x}(t - \tau(t)) = Ax(t) + A_d x(t - \tau(t)) + B \text{sat}(u(t), \bar{u}), \quad (3.7.1)$$

où les conditions initiales sont données par :

$$x(t_0 + \theta) = \phi(\theta), \forall \theta \in [-\tau_2, 0], \quad t_0 \in \mathbb{R}_+, \phi(\theta) \in \mathcal{C}_{\tau_2}^v,$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  et  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  sont respectivement les vecteurs d'état et de commande,  $\tau(t)$  correspond à un retard variable qui vérifie :

$$0 \leq \tau(t) \leq \tau_2, \quad \dot{\tau}(t) \leq d < 1.$$

La fonction  $\phi(\theta)$  est supposée continue et dérivable.  $A$ ,  $A_d$ ,  $B$  et  $F$  sont des matrices réelles à coefficients constants de dimension appropriée. Afin de garantir la stabilité d'un tel système il est nécessaire, d'après [85], que les valeurs propres de  $F$  soient strictement incluses dans le cercle unité, autrement dit  $\|F\|_e < 1$ .

Nous supposons aussi que la commande est soumise aux contraintes de saturation en amplitude suivantes :

$$|u_i| \leq \bar{u}_i, \bar{u}_i > 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.7.2)$$

La loi de commande que nous recherchons pour stabiliser le système est une commande par retour d'état  $u(t) = Kx(t)$ . En prenant en compte les saturations (3.7.2), la commande est de la forme :

$$u(t) = \text{sat}(Kx(t), \bar{u}),$$

où chacune des composantes de  $u$  est définie par  $u_i(t) = \text{sat}(K_i x(t), \bar{u}) = \text{sign}(|K_i x(t)|) \min\{\bar{u}_i, |K_i x(t)|\}$  et  $i^{\text{ème}}$  composante de  $\bar{u}$  est  $\bar{u}_i$ .

Ainsi le système en boucle fermée est régi par :

$$\dot{x}(t) - F\dot{x}(t - \tau(t)) = Ax(t) + A_d x(t - \tau(t)) + B \text{sat}(Kx(t), \bar{u}), \quad (3.7.3)$$

Ce système (3.7.3) est dit *globalement* asymptotiquement stable si, pour toutes conditions initiales  $\phi(\theta) \in \mathcal{C}_{\tau_2}$ , les solutions du système convergent asymptotiquement vers l'origine [114], [121]. Similairement au cas de système sans retard ( $\tau(t) = 0$ ), la détermination d'une commande stabilisant globalement le système (3.7.3) est possible lorsque des conditions de stabilité sont vérifiées pour le système en boucle ouverte (c'est-à-dire avec  $u(t) = 0$ ) [96]. Lorsque ces conditions ne sont pas satisfaites, il est simplement possible de stabiliser localement le système. Dans ce cas, on définit un domaine d'attraction associé au gain  $K$  pour lequel les solutions incluses dans ce domaine convergent vers l'origine. Le domaine d'attraction correspond alors à l'ensemble des conditions initiales  $\phi(\theta) \in \mathcal{C}_{\tau_2}$  telles que les solutions du système (3.7.5) convergent asymptotiquement vers l'origine. Sachant que la détermination exacte de ce domaine est pratiquement impossible, notre objectif est définir un espace de fonctions initiales admissibles [16], [52], [143]. Bien sûr cet ensemble est inclus dans le domaine d'attraction. Les problèmes que nous allons résoudre dans cette partie sont les suivants :

1. Pour des valeurs de  $\tau_2$  et  $d$  et un gain  $K$  donnés, déterminer un ensemble de conditions initiales, le plus grand possible, tel que le système bouclé soit stable pour toutes ces conditions initiales.

2. Pour des valeurs de  $\tau_2$  et  $d$  données et un ensemble de conditions initiales donné, déterminer un gain  $K$  tel que la stabilité du système bouclé soit assurée.
3. Pour un retard du terme neutre  $d$  et un ensemble de conditions initiales donnés, déterminer la plus grande valeur de  $\tau_2$  telle qu'il existe un gain  $K$  de retour d'état tel que la stabilité du système bouclé soit assurée.

Lorsque que cela sera possible, l'objectif sera bien sûr de déterminer une commande qui stabilise globalement et asymptotiquement (ou exponentiellement) le système. Sinon l'estimation du domaine d'attraction sera donnée en fonction de  $\|\phi(\theta)\|^2$  et  $\|\dot{\phi}(\theta)\|^2$ . Les théorèmes qui sont présentés dans cette partie utilisent une condition de secteur (3.7.4), qui introduit la méthode dite d'“anti-emballement”.

### 3.7.2 Conditions de stabilité

On définit la fonction  $\psi$  :

$$\psi(Kx(t)) = Kx(t) - \text{sat}(Kx(t), \bar{u}). \quad (3.7.4)$$

Cette fonction  $\psi(Kx(t))$  correspond à une non-linéarité du type “zone morte”. En utilisant cette fonction, le système bouclé peut se mettre sous la forme :

$$\dot{x}(t) - F\dot{x}(t - \tau(t)) = (A + BK)x(t) + A_d x(t - \tau(t)) - B\psi(Kx(t)). \quad (3.7.5)$$

On introduit une matrice  $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$  qui définit le polyèdre :

$$\mathcal{S} \subset \{x \in \mathbb{R}^n ; |(K_i - G_i)x| \leq \bar{u}_i, i = 1, \dots, m\}. \quad (3.7.6)$$

Le lemme 3.7.1 permet de relier la définition du polyèdre (3.7.6) à la fonction  $\psi$  :

**Lemme 3.7.1** [144] *Soit la fonction  $\psi(Kx)$  définie dans (3.7.4). Si  $x \in \mathcal{S}$  alors la relation (3.7.7) est vérifiée pour toute matrice  $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$  diagonale, définie et positive.*

$$\psi^T(Kx)T[\psi(Kx) - Gx] \leq 0. \quad (3.7.7)$$

La condition (3.7.7) peut être vue comme une condition de secteur généralisée. Comme il le sera proposé par la suite, cette condition permet d'aboutir à des conditions de stabilité présentées sous forme de LMI plus simples qu'en utilisant l'approche polytopique précédente.

**Théorème 3.7.2** [23] *S'il existe des matrices  $Q_1, H, L, J, X$ , de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  symétriques définies positives, des matrices  $Q_2, Q_3$  de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y, W$  de  $\mathbb{R}^{m \times n}$  et une matrice diagonale  $S$  de  $\mathbb{R}^{m \times m}$  et un réel  $\epsilon$  tels que les conditions LMI suivantes soient satisfaites :*

$$\begin{bmatrix} \Gamma_0 & (\epsilon - 1) \begin{bmatrix} 0 \\ A_d X \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ FL \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Y^T \\ -BS \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Q_1^T \\ 0 \end{bmatrix} & \tau_2 \begin{bmatrix} Q_2^T \\ Q_3^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Q_2^T \\ Q_3^T \end{bmatrix} \\ * & (d-1)X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & (d-1)L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -2S & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -X & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\tau_2 J & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -L \end{bmatrix} < 0, \quad (3.7.8)$$

$$\begin{bmatrix} J & J[0 \ \epsilon A'_d] \\ * & H \end{bmatrix} \geq 0, \quad (3.7.9)$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 & (W - Y)_j^T \\ * & \bar{u}_j^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.7.10)$$

avec

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} Q_2 + Q_2^T & Q_1(A' + \epsilon A'_d) + W^T B^T - Q_2^T + Q_3 \\ * & -Q_3 - Q_3^T \end{bmatrix} + \tau_2 H,$$

alors, pour le gain de retour d'état  $K = WQ_1^{-1}$  et pour toute condition initiale  $\phi$  qui vérifie :

$$\delta = (\lambda_{\max}(Q_1^{-1}) + \tau_2 \lambda_{\max}(X^{-1})) \|\phi(\theta)\|^2 + \left(\frac{\tau_2^2}{2} \lambda_{\max}(J^{-1}) + \tau_2 \lambda_{\max}(L^{-1})\right) \|\dot{\phi}(\theta)\|^2 \leq 1. \quad (3.7.11)$$

Les solutions du système (3.7.5) convergent asymptotiquement vers l'origine.

**Démonstration.** Le système (3.7.5) est équivalent au système suivant, représentant sa forme descripteur [57] :

$$E \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ (A + BK + A_d) & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} y(t - \tau(t)) - \begin{bmatrix} 0 \\ A_d \end{bmatrix} \int_{t-\tau(t)}^t y(s) ds - \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} \psi(Kx(t)).$$

On remarque que si (3.7.8) est satisfaite, il est nécessaire d'avoir  $-Q_3^T - Q_3 < 0$ . Ainsi, sachant que  $Q_1 > 0$ , il s'en suit que la matrice  $Q$  est inversible. On peut maintenant définir les matrices et variables suivantes :

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ Q_2 & Q_3 \end{bmatrix}^{-1} = Q^{-1}.$$

On propose alors la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$V(t) = \bar{x}(t)' E P \bar{x}(t) + \int_{t-\tau(t)}^t x(s)' M x(s) ds + \int_{t-\tau(t)}^t y(s)' U y(s) ds + \int_{-\tau_2}^0 \int_{t+\theta}^t y(s)' R y(s) ds d\theta, \quad (3.7.12)$$

où  $R, M$  et  $U$  sont des matrices symétriques définies positives de dimension  $n \times n$  et où  $P$  est l'inverse de la matrice  $Q$ . La dérivée par rapport au temps de la fonctionnelle est :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \bar{x}^T(t) \mathcal{L} \bar{x}(t) - 2\bar{x}^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ A_d \end{bmatrix} \int_{t-\tau(t)}^t y(s) ds - 2\bar{x}^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} \psi(Kx(t)) + x^T(t) M x(t) \\ & + y^T(t) U y(t) + 2\bar{x}^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} y(t - \tau(t)) - (1 - \dot{\tau}(t)) x^T(t - \tau(t)) M x(t - \tau(t)) \\ & - (1 - \dot{\tau}(t)) y(t - \tau(t))' U y(t - \tau(t)) + \tau_2 y^T(t) R y(t) - \int_{-\tau_2}^0 y^T(t + \theta) R y(t + \theta) d\theta, \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ (A + BK + A_d) & -I_n \end{bmatrix}^T P + P^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ (A + BK + A_d) & -I_n \end{bmatrix}.$$

Si la condition  $\begin{bmatrix} R & N \\ * & Z \end{bmatrix} \geq 0$  est satisfaite, on peut alors en déduire [105] :

$$\begin{aligned}
-2\bar{x}^T P^T \begin{bmatrix} 0 \\ A_d \end{bmatrix} \int_{t-\tau(t)}^t y(s) ds &\leq \int_{t-\tau(t)}^t \begin{bmatrix} y(s) \\ \bar{x} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R & N - [0 \ A_d^T]P \\ * & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(s) \\ \bar{x} \end{bmatrix} ds \\
&\leq \int_{t-\tau_2}^t y^T(s) R y(s) ds + \tau_2 \bar{x}^T(t) Z \bar{x}(t) \\
&\quad + 2 \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T(s) (N - [0 \ A_d^T]P) \bar{x}(t) ds \\
&= \int_{t-\tau_2}^t y^T(s) R y(s) ds + 2x^T(t) (N - [0 \ A_d^T]P) \bar{x}(t) \\
&\quad - 2x^T(t - \tau(t)) (N - [0 \ A_d^T]P) \bar{x}(t) + \tau_2 \bar{x}^T(t) Z \bar{x}(t).
\end{aligned} \tag{3.7.13}$$

En choisissant maintenant  $N = \epsilon[0 \ A_d^T]P$  [57], on obtient  $N - [0 \ A_d^T]P = (\epsilon - 1)[0 \ A_d^T]P$ . Par conséquent, en imposant  $KQ_1 = W$  et  $H = Q^T Z Q$ , dans les équations (3.7.12), (3.7.13) et dans le Lemme 3.7.1, à condition que  $x \in \mathcal{S}$ , on en déduit :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) \leq &\bar{x}(t)^T P^T \Gamma_0 P \bar{x}(t) + \bar{x}^T(t) \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \tau_2 R + U \end{bmatrix} \bar{x}(t) + 2\bar{x}^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} y(t - \tau(t)) \\
&- 2\bar{x}(t)^T P^T \psi(Kx(t)) - y(t - \tau(t))^T (1 - d) U y(t - \tau(t)) - 2x^T(t - \tau(t)) (\epsilon - 1) [0 \ A_d^T] P \bar{x}(t) \\
&- x^T(t - \tau(t)) (1 - d) M x(t - \tau(t)) - 2\psi(Kx(t))^T T [\psi(Kx(t)) - [G \ 0] \bar{x}],
\end{aligned}$$

où  $T$  est une matrice diagonale définie positive.

On en déduit ensuite que  $\dot{V}(t) \leq \xi^T \Gamma \xi$ , où  $\Gamma$  est donnée par :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} P^T \Gamma_0 P + \Phi & (\epsilon - 1) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ A_d \end{bmatrix} & P^T \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} G^T T \\ 0 \end{bmatrix} - P^T \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} \\ * & (d - 1) M & 0 & 0 \\ * & * & (d - 1) U & 0 \\ * & * & * & -2T \end{bmatrix},$$

avec  $\Phi = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \tau_2 R + U \end{bmatrix}$ , and  $\xi = [\bar{x}^T(t) \ x^T(t - \tau(t)) \ y^T(t - \tau(t)) \ \psi^T(Kx(t))]^T$ .

En appliquant le complément de Schur au terme  $\Phi$  et en multipliant à droite par  $\Xi_1 = \text{diag}\{P^{-1}, M^{-1}, U^{-1}, T^{-1}, I, I, I\}$  et par  $\Xi^T$  à gauche, on trouve (3.7.8) qui est équivalente à la condition  $\Gamma < 0$ , avec  $X = M^{-1}$ ,  $J = R^{-1}$ ,  $L = U^{-1}$ ,  $S = T^{-1}$  et  $G = Y P_1$ . En multipliant maintenant l'équation (3.7.9) par  $\Xi_2 = \text{diag}\{R, P\}$  à droite et par  $\Xi_2^T$  à gauche, on obtient la condition (3.7.9) qui est équivalente à  $\begin{bmatrix} R & N \\ * & Z \end{bmatrix} \geq 0$ .

Ainsi si les inégalités matricielles linéaires (3.7.8) et (3.7.9) sont vérifiées, la dérivée  $\dot{V}(t)$  est négative à condition bien sûr que  $x(t) \in \mathcal{S}$ ,  $t > 0$ .

On va maintenant s'intéresser à l'estimation du domaine d'attraction et notamment à l'ellipse définie par  $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n ; x^T P_1 x \leq 1\}$ , where  $P_1 = Q_1^{-1}$ . D'après [143], la condition (3.7.10) implique que  $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}$  définie dans (3.7.6). En supposant alors que les conditions initiales  $\phi$  vérifient (3.7.11) et que les conditions (3.7.8) - (3.7.10) sont satisfaites, on peut écrire :

$$x(0)^T P_1 x(0) \leq V(0) \leq \delta \leq 1.$$

Dans ce cas, cela signifie que  $x(0) \in \mathcal{E} \subset \mathcal{S}$  et, par conséquent, que  $\dot{V}(0) < 0$ . On peut donc conclure en constatant que :

$$x^T(t) P_1 x(t) \leq V(t) \leq V(0) \leq \delta \leq 1, \quad \forall t \geq 0,$$

ce qui implique que l'état  $x(t)$  appartient au domaine d'attraction  $\mathcal{S}$  et que  $\dot{V}(t) < 0, \forall t > 0$  pour toute condition initiale vérifiant l'équation (3.7.11). ■

Le Théorème 3.7.2 concerne le problème de la stabilisation locale, en ce sens que le gain  $K$  ainsi déterminé permet de stabiliser le système pour un ensemble de conditions initiales vérifiant la condition (3.7.11). Si le système en boucle ouverte est déjà asymptotiquement stable, il est possible de déterminer un gain  $K$  de retour d'état qui stabilise globalement le système. Le théorème suivant est un cas particulier du Théorème 3.7.2 qui se consacre à ce problème.

**Théorème 3.7.3** [23] *S'il existe des matrices symétriques définies positives  $Q_1, H, L, J, X$ , des matrices  $Q_2, Q_3, W$ , une matrice diagonales  $S$  de dimension appropriée, et un réel  $\epsilon$  qui satisfont aux conditions (3.7.8) et (3.7.9) avec  $Y = W$ , alors le gain de retour d'état  $K = WQ_1^{-1}$  rend le système (3.7.5) globalement asymptotiquement stable.*

**Démonstration.** La preuve de ce théorème se base sur celle du Théorème 3.7.2. Dans ce cas, on remarque premièrement que  $G = WP_1 = WQ_1^{-1} = K$  et ensuite que la condition de secteur (3.7.7) est vérifiée pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . La stabilité asymptotique globale se déduit directement. ■

### 3.7.3 Etude du cas retardé

#### Stabilisation asymptotique

Dans cette partie, nous allons nous focaliser sur un cas particulier du système (3.7.1), où l'élément neutre  $F$  est nul. Nous omettrons aussi la condition sur la dérivée du retard  $\tau(t)$ . Finalement, le système que nous étudierons ici est :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau(t)) + Bu(t), \quad (3.7.14)$$

où le retard  $\tau(t)$  est supposé majoré et vérifie  $0 \leq \tau(t) \leq \tau_2$ .

**Théorème 3.7.4** [23] *S'il existe des matrices de  $\mathbb{R}^{n \times n}$   $Q_1, J$ , symétriques définies positives, des matrices de  $\mathbb{R}^{n \times n}$   $Q_2, Q_3, Y, W$ , une matrice diagonale de  $\mathbb{R}^{n \times n}$   $S$  et une matrice de  $\mathbb{R}^{2n \times 2n}$   $H$  qui vérifient les conditions LMI suivantes :*

$$\begin{bmatrix} \Gamma_0 + \tau_2 H & \begin{bmatrix} Y^T \\ -BS \end{bmatrix} & \tau_2 \begin{bmatrix} Q_2^T \\ Q_3^T \end{bmatrix} \\ * & -2S & 0 \\ * & * & -\tau_2 J \end{bmatrix} < 0, \quad (3.7.15)$$

$$\begin{bmatrix} J & J[0 \ A_d^T] \\ * & H \end{bmatrix} \geq 0, \quad (3.7.16)$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 & (W - Y)_j^T \\ * & \bar{u}_j^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.7.17)$$

où

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} Q_2 + Q_2^T & Q_1(A + A_d)^T + W^T B^T - Q_2^T + Q_3 \\ * & -Q_3 - Q_3^T \end{bmatrix},$$

alors pour  $K = WQ_1^{-1}$  et si les conditions initiales vérifient :

$$\lambda_{\max}(Q_1^{-1}) \|\phi(\theta)\|^2 + \frac{\tau_2^2}{2} \lambda_{\max}(J^{-1}) \|\dot{\phi}(\theta)\|^2 \leq 1, \quad (3.7.18)$$



les solutions du système (3.7.14) convergent asymptotiquement vers l'origine.

**Démonstration.** On propose la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$V(t) = \bar{x}^T(t)EP\bar{x}(t) + \int_{-\tau_2}^0 \int_{t+\theta}^t y^T(s)Ry(s)dsd\theta,$$

avec  $R > 0$ . La suite de la démonstration reprend étape par étape celle du théorème 3.7.2 avec  $\epsilon = 1$ . ■

De même que dans la partie précédente, on propose le théorème suivant qui caractérise la stabilisation asymptotique globale du système.

**Théorème 3.7.5** [23] *S'il existe des matrices de  $\mathbb{R}^{n \times n}$   $Q_1, J$ , symétriques définies positives, des matrices de  $\mathbb{R}^{n \times n}$   $Q_2, Q_3, W$  et une matrice diagonale de  $\mathbb{R}^{n \times n}$   $S$  et une matrice de  $\mathbb{R}^{2n \times 2n}$   $H$  telles que les conditions LMI (3.7.15) et (3.7.16) avec  $Y = W$  soient satisfaites, alors la commande par retour d'état de gain  $K = WQ_1^{-1}$  est telle que le système bouclé (3.7.14) est globalement asymptotiquement stable.*

### Application à la stabilisation exponentielle

Des propriétés de stabilisation exponentielle représentent un moyen de caractériser le degré de convergence et les performances d'un système. Pour un réel  $\alpha > 0$ , un système (3.7.14) est dit exponentiellement stable de degré  $\alpha$  ou  $\alpha$ -stable, s'il existe un réel  $\beta \geq 1$  tel que la solution  $x(t; t_0, \phi(\theta))$ , pour toute condition initiale  $\phi$ , vérifie :

$$\|x(t, t_0, \phi(\theta))\| \leq \beta \|\phi(\theta)\| e^{-\alpha(t-t_0)}.$$

En utilisant les méthodes présentés de stabilité et de stabilisation exponentielle, on propose le théorème suivant concernant la stabilisation exponentielle de systèmes à entrée saturée :

**Théorème 3.7.6** *Si, pour un réel  $\alpha > 0$  donné, il existe des matrices de  $\mathbb{R}^{n \times n}$   $Q_1, J$ , symétriques définies positives, des matrices de  $\mathbb{R}^{n \times n}$   $Q_2, Q_3, Y, W$  et une matrice diagonale de  $\mathbb{R}^{n \times n}$   $S$  et deux matrices de  $\mathbb{R}^{2n \times 2n}$   $H_1$  et  $H_2$  telles que les conditions LMI suivantes soient satisfaites :*

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{0i} + \tau_2 H_i & \begin{bmatrix} Y^T \\ -BS \end{bmatrix} & \tau_2 \begin{bmatrix} Q_2^T \\ Q_3^T \end{bmatrix} \\ * & -2S & 0 \\ * & * & -\tau_2 J \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.7.19)$$

$$\begin{bmatrix} J & J[0 \quad b_i A_d^T] \\ * & H_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.7.20)$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 & (W - Y)_j^T \\ * & \bar{u}_j^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.7.21)$$

avec

$$\Gamma_{0i} = \begin{bmatrix} Q_2 + Q_2^T & Q_1(A + \alpha I + \beta_i A_d)^T + W^T B^T - Q_2^T + Q_3 \\ * & -Q_3 - Q_3^T \end{bmatrix},$$

et

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = e^{\alpha \tau_2},$$

alors, pour  $K = WQ_1^{-1}$  et pour toutes conditions initiales vérifiant :

$$\lambda_{max}(Q_1^{-1})\|\phi(\theta)\|^2 + \frac{e^{-2\alpha\tau_2} - 1 + 2\alpha\tau_2}{4\alpha^2} \lambda_{max}(J^{-1})(\alpha\|\phi\| + \|\dot{\phi}\|)^2 \leq 1, \quad (3.7.22)$$

les solutions du système (3.7.14) convergent exponentiellement vers l'origine avec un degré de convergence exponentielle  $\alpha$ .

**Démonstration.** La commande du système est toujours  $u(t) = sat(Kx(t), \bar{u})$ . En introduisant la nouvelle variable  $x_\alpha(t) = e^{\alpha t}x(t)$  pour exprimer le système (3.7.14), la stabilité asymptotique de la solution  $x_\alpha$  implique l' $\alpha$ -stabilité de la solution  $x$ . Les équations définissant le système (3.7.14) deviennent alors :

$$\dot{x}_\alpha(t) = (A + \alpha I_n)x_\alpha(t) + e^{\alpha\tau(t)}A_d x_\alpha(t - \tau(t)) + e^{\alpha t}Bsat(K e^{-\alpha t}x_\alpha(t), \bar{u}),$$

qui peut s'écrire comme le système à paramètres variables suivant :

$$\dot{x}_\alpha(t) = (A + \alpha I_n + BK)x_\alpha(t) + e^{\alpha\tau(t)}A_d x_\alpha(t - \tau(t)) + B\psi_\alpha(Kx(t)), \quad (3.7.23)$$

où  $\psi_\alpha(Kx(t)) \triangleq e^{\alpha t}\psi(Kx(t))$ .

Supposons maintenant que l'état  $x(t)$  appartiennent à  $\mathcal{S}$ . Sachant que  $e^{\alpha t} > 0, \forall t$ , le Lemme 3.7.1 permet toujours de garantir l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} \psi^T(Kx(t))e^{\alpha t}T e^{\alpha t}[\psi(Kx(t)) - Gx(t)] &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \\ \psi_\alpha^T(Kx(t))T[\psi_\alpha(Kx(t)) - Gx_\alpha(t)] &\leq 0, \end{aligned} \quad (3.7.24)$$

pout toute matrice diagonale positive  $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

En tenant en compte que le retard variable  $\tau(t)$  est borné par  $\tau_2$ , on peut écrire :

$$\beta_1 = 1 \leq e^{\alpha\tau(t)} \leq e^{\alpha\tau_2} = \beta_2.$$

On en déduit qu'il existe une représentation polytopique du terme  $e^{\alpha\tau(t)}$  en définissant des fonctions scalaires  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  satisfaisant les conditions de convexité suivantes :

$$\forall t \geq 0, \quad \lambda_1(t) + \lambda_2(t) = 1, \quad \lambda_1(t) \geq 0, \quad \lambda_2(t) \geq 0.$$

et telles que :

$$e^{\alpha\tau(t)} = \lambda_1(t)\beta_1 + \lambda_2(t)\beta_2.$$

Par conséquent, le système (3.7.23) s'écrit en utilisant une représentation polytopique :

$$\dot{x}_\alpha(t) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t, x_t) [(A + \alpha I_n)x_\alpha(t) + \beta_i A_d x_\alpha(t - \tau(t)) + BKx_\alpha(t) - B\psi_\alpha(Kx(t))]. \quad (3.7.25)$$

Ensuite, la preuve du théorème suit les étapes du Théorème 3.7.4 appliqué aux cas du système (3.7.25) avec  $\epsilon = 1$ . En utilisant la représentation descripteur  $\bar{x}_\alpha = col\{x_\alpha(t), \dot{x}_\alpha(t)\}$ , on propose la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii :

$$V_\alpha(t) = \bar{x}_\alpha^T(t)EP\bar{x}_\alpha(t) + \int_{-\tau_2}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}_\alpha^T(s)R\dot{x}_\alpha(s)dsd\theta,$$

avec  $R > 0$ .

Afin de déterminer une estimation du domaine d'attraction, la preuve suit celle du Théorème 3.7.2, mais dans ce cas, on obtient :

$$x_\alpha^T(t)P_1x_\alpha(t) \leq V_\alpha(t) \leq V_\alpha(0) \leq \delta \leq 1, \quad \forall t \geq 0,$$

ce qui permet d'avoir :

$$\begin{aligned} V_\alpha(0) &\leq \lambda_{max}(Q_1^{-1})\|\phi(\theta)\|^2 + \lambda_{max}(J^{-1})(\alpha\|\phi\| + \|\dot{\phi}\|)^2 \int_{-\tau_2}^0 \int_\theta^0 e^{2\alpha s} ds d\theta, \\ &\leq \lambda_{max}(Q_1^{-1})\|\phi\|^2 + \frac{e^{-2\alpha\tau_2} - 1 + 2\alpha\tau_2}{4\alpha^2} \lambda_{max}(J^{-1})(\alpha\|\phi\| + \|\dot{\phi}\|)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que l'état  $x_\alpha(t)$  appartient à  $\mathcal{E}$ ,  $\forall t \leq 0$ . Sachant que la relation (3.7.21) implique que  $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}$ , l'inégalité  $|(K - G)_j x_\alpha(t)| \leq u_j$  est satisfaite et, par conséquent, que  $|(K - G)_j x(t)| \leq e^{-\alpha t} u_j \leq u_j$ ,  $\forall t > 0$ , autrement dit que  $x(t) \in \mathcal{S}$ ,  $\forall t > 0$ . On conclut en remarquant que la condition de secteur modifiée (3.7.24) est vérifiée et qu'ensuite  $\dot{V}_\alpha(t) < 0$ ,  $\forall t > 0$  pour toutes les conditions initiales vérifiant (3.7.22). ■

**Remarque 3.7.7** Sachant que la fonction  $e^\theta$  est convexe, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\frac{e^{-2\alpha\tau_2} - 1 + 2\alpha\tau_2}{4\alpha^2} \geq \frac{\tau_2^2}{2},$$

ce qui assure que l'ensemble des conditions initiales pour lesquelles il est possible de déterminer un gain  $K$  qui stabilise asymptotiquement le système est plus grand que celui défini dans le cas exponentiel. De plus lorsque  $\alpha$  tend vers 0, le terme  $\frac{e^{-2\alpha\tau_2} - 1 + 2\alpha\tau_2}{4\alpha^2}$  tend vers  $\frac{\tau_2^2}{2}$ , ce qui assure la continuité du résultat par rapport au paramètre  $\alpha$ .

**Remarque 3.7.8** Il est faisable d'étendre ces résultats au cas des systèmes à paramètres incertains présentés sous forme polytopique. En effet les conditions LMI des Théorèmes 3.7.2, 3.7.3, 3.7.4, 3.7.5 et 3.7.6 sont affines par rapport aux matrices  $A$ ,  $A_d$ ,  $B$  et  $F$  définissant le système. Pour caractériser la stabilité d'un système mis sous forme polytopique, il suffit que chacun des polytopes vérifient les conditions LMI de stabilité. Afin de diminuer le conservatisme de ces conditions, on peut introduire différentes matrices  $Q_2$  et  $Q_3$  pour chacun des polytopes.

### 3.7.4 Optimisation des résultats

#### Maximisation de la borne supérieure du retard garantissant la stabilité globale

Dans le cas où le système étudié sans retard est asymptotiquement stabilisable, un problème intéressant consiste à déterminer la borne supérieure maximale,  $\tau_2^*$ , du retard,  $\tau_2(t)$ , telle que le système (3.7.5) est globalement asymptotiquement stabilisable. On résout le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} &\max \tau_2 \\ &\text{soumis à} \\ (3.7.8) \text{ et } (3.7.9) \text{ avec } Y = W. \end{aligned}$$

Si l'on considère  $\tau_2$  comme une variable du problème, les conditions obtenues ne sont plus des LMI mais des inégalités matricielles bilinéaires (dont l'abréviation anglaise est BMI). Pour résoudre ce problème, il suffit de tester itérativement des valeurs de  $\tau_2$  jusqu'à ce que les conditions LMI (3.7.8) et (3.7.9) deviennent infaisables.

### Optimisation de l'ensemble des conditions initiales admissibles

Pour des valeurs  $\tau_2$  et  $d$  données, pour assurer la stabilité du système (3.7.5) en utilisant le Théorème 3.7.2, l'ensemble des conditions initiales admissibles doit satisfaire à la condition (3.7.11). On suppose alors que qu'il existe deux réels positifs  $\delta_1$  et  $\delta_2$  tels que  $\|\phi(\theta)\|^2 = \delta_1$  et  $\|\dot{\phi}(\theta)\|^2 = \delta_2$ . Dans ce cas, notre objectif est de déterminer les bornes maximales  $\delta_1$  et  $\delta_2$  pour lesquelles la condition (3.7.11) est toujours satisfaite. Le problème se présente de la manière suivante.

Premièrement, on remarque que plus les valeurs propres des matrices  $Q_1^{-1}$ ,  $X^{-1}$ ,  $J^{-1}$  et  $L^{-1}$  sont petites, plus les bornes  $\delta_1$  et  $\delta_2$  pour lesquelles la condition (3.7.11) est vérifiée sont grandes. Pour introduire ces propriétés dans le problème LMI, on ajoute les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \lambda_{Q_1} I_n & I_n \\ \star & Q_1 \end{bmatrix} \geq 0, & \begin{bmatrix} \lambda_X I_n & I_n \\ \star & X \end{bmatrix} \geq 0, \\ \begin{bmatrix} \lambda_J I_n & I_n \\ \star & J \end{bmatrix} \geq 0, & \begin{bmatrix} \lambda_L I_n & I_n \\ \star & L \end{bmatrix} \geq 0. \end{aligned} \quad (3.7.26)$$

En utilisant le complément de Schur, les conditions (3.7.26) deviennent équivalentes à  $\lambda_{Q_1} \geq \lambda_{\max}(Q_1^{-1})$ ,  $\lambda_X \geq \lambda_{\max}(X^{-1})$ ,  $\lambda_J \geq \lambda_{\max}(J^{-1})$  et  $\lambda_L \geq \lambda_{\max}(L^{-1})$ . On définit alors le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma_1 \lambda_{Q_1} + \gamma_2 \lambda_X + \gamma_3 \lambda_J + \gamma_4 \lambda_L \\ \text{soumis à} \quad & \\ & (3.7.8), (3.7.9), (3.7.10) \text{ et } (3.7.26), \end{aligned} \quad (3.7.27)$$

où  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  et  $\gamma_4$  représentent des poids qui doivent être réglés pour satisfaire certains compromis entre  $\delta_1$  et  $\delta_2$ .

### Maximisation possible dans le cas d'un ensemble de conditions initiales données

On se place cette fois-ci dans le cas où l'on se donne un ensemble de conditions initiales. On souhaite alors optimiser les résultats selon plusieurs critères. Le fait de se donner un ensemble de conditions initiales impose les valeurs de  $\delta_1 > 0$  et  $\delta_2 > 0$ . L'objectif est alors de déterminer le gain  $K$  du retour d'état. Dans ce problème, on considère le problème suivant :

$$(\lambda_{Q_1} + \tau_2 \lambda_X) \delta_1 + (0.5 \tau_2^2 \lambda_J + \tau_2 \lambda_L) \delta_2 - 1 \leq 0,$$

associé aux conditions LMI auxiliaires (3.7.26)

D'autre part, on peut introduire les nouvelles contraintes :

- maximiser la borne supérieure  $\tau_2$  du retard  $\tau(t)$  pour laquelle la synthèse d'un gain  $K$  de retour d'état stabilisant est possible.
- maximiser le degré de convergence exponentiel  $\alpha$  pour une borne supérieure du retard  $\tau_2$  donnée.
- minimiser la borne supérieure  $\tau_2$  du retard  $\tau(t)$  pour une fonction de coût donnée (c'est-à-dire résoudre un problème de stabilisation à coût garanti).

### 3.7.5 Exemples

On considère le système (3.7.1) avec :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad d = 0.5, \quad \tau_2 = 1.$$

D'après le Théorème 3.7.3, et en prenant  $\epsilon = 0.1$ , il est alors possible d'assurer la stabilité asymptotique globale du système en boucle fermée avec, par exemple,  $K = [-0.138 \quad -0.381]$ . De plus cette stabilité peut être assurée pour des retards vérifiant  $\tau_2 \leq 23 \times 10^3$  et  $d \leq 0.6$ .

On considère maintenant le même système (3.7.1) mais avec les valeurs suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ 0.3 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad u_0 = 15, \quad \tau_2 = 1; \quad d = 0.1.$$

Le problème d'optimisation (3.7.27) avec  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 1$  conduit au gain de retour d'état  $K = [-0.278 \quad -0.139]$ . Cette commande assure la stabilité asymptotique pour toutes les conditions initiales  $\phi$  vérifiant :

$$51\|\phi(\theta)\|^2 + 9.34\|\dot{\phi}(\theta)\|^2 \leq 10^4$$

ce qui revient dans un cas particulier à  $\|\phi(\theta)\| = \|\dot{\phi}(\theta)\| < 12.88$ .

On remarque, d'autre part, que l'ensemble des conditions initiales déterminé pour la plus grande valeur  $\tau_2 = 2$ , est plus petit que le précédent. En effet le gain  $K = [-0.248 \quad -0.136]$  obtenu pour  $\epsilon = 0.11$ , ne stabilise le système que pour des conditions initiales vérifiant  $\|\phi(\theta)\| = \|\dot{\phi}(\theta)\| < 2.21$ .

On s'intéresse maintenant au même exemple mais avec  $F = 0$ , qui correspond au cas retardé.

Il est possible d'assurer la stabilité asymptotique pour des conditions initiales vérifiant  $\|\phi(\theta)\| = \|\dot{\phi}(\theta)\| < 79.546$  avec le gain  $K = [-7.005 \quad 0.652]$ . On remarque que cet ensemble est sensiblement plus important que celui déterminé dans [52] (79.43) ou que dans [16] (58.40). Cependant il faut rappeler que les théorèmes présentés ici ne nécessitent aucune contrainte sur la dérivée du retard  $\dot{\tau}$  et que le nombre de conditions LMI à résoudre est moins important. Ceci laisse penser que cette approche conduit à des résultats moins conservatifs que les précédents.

Toujours pour le même exemple, on cherche à résoudre le problème d'optimisation proposé dans la partie 3.7.4. Pour des conditions initiales vérifiant  $\|\phi(\theta)\|^2 = \|\dot{\phi}(\theta)\|^2 < 50$ , le gain  $K = [-0.524 \quad 0.867]$  de retour d'état stabilise asymptotiquement le système pour tout retard borné par  $\tau_2 \leq 7.015$ .

### 3.7.6 Conclusion

La synthèse de gains stabilisant des systèmes neutres linéaires en présence de retard et de saturation a été résolue dans cette partie. Des conditions LMI qui permettent de déduire le gain du retour d'état caractérisent la stabilité du système bouclé. Des critères de stabilité asymptotique et exponentielle ont été développés pour les systèmes neutres et/ou à retards. D'autre part nous avons présenté une phase d'optimisation permettant d'obtenir soit les valeurs maximales de la borne supérieure du retard soit une plus grande estimation du domaine d'attraction.

## 3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étendu les résultats du Chapitre 2 au cas de systèmes soumis à des non-linéarités. Plus particulièrement, nous nous sommes penchés sur la stabilité et la stabilisation exponentielle à taux de convergence garanti d'une classe de systèmes non-linéaires admettant une représentation par modèles polytopiques ou par modèle à paramètres incertains bornés. Enfin une extension a été proposée pour les systèmes soumis à des saturations. Nous avons notamment étudié les systèmes à retards sur l'état et à entrée saturée et les systèmes à entrée saturée et retardée. Dans ces deux cas, nous avons proposé une estimation du domaine d'attraction. Nous allons voir dans le prochain chapitre que ces théorèmes peuvent être étendus au cas des systèmes à retards continus par morceaux.



## Chapitre 4

# Systemes à entrée échantillonnée

### 4.1 Introduction

La plupart des commandes actuellement implantées le sont sur des calculateurs numériques via un convertisseur analogique numérique pouvant être modélisé par un échantillonneur bloqueur d'ordre 0. Bien sûr, de telles commandes ne sont pas des fonctions continues du temps puisqu'un contrôleur travaille avec une fréquence limitée. On définit alors le temps d'échantillonnage comme le temps nécessaire au calculateur pour passer d'une valeur de la commande à la suivante. La Figure 4.1 présente le schéma-bloc de l'échantillonneur et son effet sur un signal continu. L'effet de cet échantillonneur est de bloquer la valeur du signal continue  $u$  à un instant donné et pendant une période déterminée.

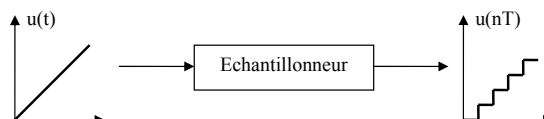


FIG. 4.1 – Schéma-Bloc d'un échantillonneur ou bloqueur d'ordre 0.

La Figure 4.2 montre un signal continu et le même signal échantillonné :

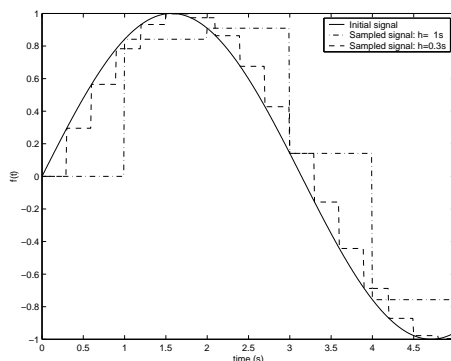


FIG. 4.2 – Échantillonnages de la fonction sinus



Deux approches sont utilisées pour la synthèse du correcteur. La première est une approche numérique pour laquelle on détermine un correcteur à partir d'un modèle en temps discret du processus. Dans ce cas, les lois de commande sont synthétisées à partir des théorèmes sur les systèmes discrets [126]. La seconde est une approche continue qui permet de construire des lois de commande à partir d'un modèle en temps continu du processus. Dans ce cas, la synthèse de la loi de commande fait appel aux théorèmes sur les modèles continus.

Dans le cadre de notre étude, nous allons considérer des systèmes dont l'entrée est une fonction du temps continue par morceaux. Plus précisément, ces fonctions seront des fonctions continues sauf sur un ensemble dénombrable de points et telles que, à tout instant  $t$ , les limites à droite et à gauche soient finies. Ces commandes seront appliquées sur des systèmes continus. Le problème qui apparaît ici, est un problème hybride car on ne se situe dans aucune des deux approches présentées ci-dessus.

Une commande échantillonnée est équivalente à une commande continue au sens où la différence des effets sur le processus est négligeable si le temps d'échantillonnage est très faible par rapport au dynamique de ce processus. Même si aujourd'hui les calculateurs et les ordinateurs possèdent une grande rapidité de calcul, il est intéressant de quantifier cette approximation et de vérifier pour quelles fréquences d'échantillonnage la stabilité asymptotique peut être garantie. Aussi l'objectif de ce chapitre est de déterminer l'influence de la période d'échantillonnage d'un signal d'entrée sur les performances d'un processus. En particulier, nous tenterons de donner une borne supérieure de la période d'échantillonnage pour laquelle les performances espérées sont atteintes. Ainsi, du point de vue de l'ingénieur, nous pourrons dimensionner la fréquence des calculateurs en fonction de la dynamique du processus étudié.

Sachant que la difficulté de cette étude provient de la discontinuité de la commande (on pourrait plutôt parler de variations brutales de celle-ci), l'idée de mêler en quelques sortes les deux études est apparue en faisant appel à la modélisation de l'échantillonnage à l'aide de retard variable. Cette approche permet d'utiliser l'approche tout continu mais en considérant un système à retard variable. Nous allons considérer qu'un signal échantillonné est un signal continu sur lequel on applique un retard variable. Ainsi nous pourrons appliquer des critères de stabilité spécifiques aux systèmes à retards.

## 4.2 Une approche fréquentielle

### 4.2.1 Condition nécessaire et suffisante de stabilité

Dans ce paragraphe sera brièvement rappelée une condition nécessaire et suffisante de stabilité pour les systèmes mono-entrée et mono-sortie (SISO). Les systèmes étudiés sont modélisés par un schéma-bloc présenté Figure 4.3.

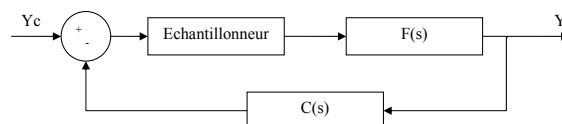


FIG. 4.3 – Système SISO

où  $C$  est un correcteur prédéterminé et où la fonction de transfert  $F$  est de la forme :

$$F(s) = \frac{\sum_{i=1}^m b_i s^i}{\sum_{i=1}^n a_i s^i}, m < n,$$

On calcule alors la fonction de transfert en  $z$  du système sur une période d'échantillonnage  $T$  :

$$F(z) = \frac{Z(B_{o(s)}F(s))}{Z(1 + B_{o(s)}F(s)C(s))}$$

Après la discrétisation du modèle, le dénominateur de cette fonction de transfert s'écrit :

$$D(z) = \sum_{i=1}^n c_i(T)z^i. \quad (4.2.1)$$

On sait que la stabilité asymptotique du système est déterminée par le dénominateur de cette fonction de transfert en la variable  $z$ . Il faut et il suffit que le dénominateur  $D(z)$  ait des zéros de module strictement inférieur à 1. D'autres critères équivalents apparaissent dans la littérature. Dans cet exposé il n'en figurera qu'un seul car les théorèmes utilisés dans le domaine discret n'en sont pas l'objet principal. Celui qui sera présenté est le critère de Jury [126]. Ce dernier nécessite la construction du tableau suivant :

$$\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \cdot \\ \cdot \\ 2n-5 \\ 2n-4 \\ 2n-3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad c_{n-1} \quad c_n \\ c_n \quad c_{n-1} \quad c_{n-2} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad c_1 \quad c_0 \\ d_0 \quad d_1 \quad d_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad d_{n-1} \\ d_{n-1} \quad d_{n-2} \quad d_{n-3} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad d_0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p_0 \quad p_1 \quad p_2 \quad p_3 \\ p_3 \quad p_2 \quad p_1 \quad p_0 \\ q_0 \quad q_1 \quad q_2 \end{array} \right. \quad (4.2.2)$$

où

$$d_0 = \begin{vmatrix} c_0 & c_n \\ c_n & c_0 \end{vmatrix}, \quad d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-k} \\ c_{n-k} & c_0 \end{vmatrix} \\ q_0 = \begin{vmatrix} p_0 & p_n \\ p_n & p_0 \end{vmatrix}, \quad q_k = \begin{vmatrix} p_0 & p_{n-k} \\ p_{n-k} & p_0 \end{vmatrix}.$$

Les coefficients qui apparaissent dans le critère de Jury font implicitement apparaître la période d'échantillonnage. Le critère de Jury certifie que le système est asymptotiquement stable si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\left\{ \begin{array}{l} D(1) > 0, \\ (-1)^n D(-1) > 0, \\ |c_0| < |c_n|, \\ |d_0| < |d_{n-1}|, \\ \cdot \\ \cdot \\ |p_0| < |p_3|, \\ |q_0| < |q_2|. \end{array} \right.$$

Ayant des conditions de stabilité sur les coefficients du polynôme  $D(z)$ , il est possible de remonter à la condition sur la période d'échantillonnage.

### 4.2.2 Cas du double intégrateur

Considérons alors l'exemple du double intégrateur et un réseau correcteur du type proportionnel dérivé défini de telle manière que le modèle corrigé ait ses pôles égaux à  $-1$  :  $C(s) = 2s + 1$ . Le critère de Jury nous donne la condition de stabilité sur la période d'échantillonnage  $T < 1$ . Pour un système correcteur choisi de telle sorte que le système ait pour pôles  $-p_1$  et  $-p_2$ , la condition devient :

$$T < \frac{2}{p_1 + p_2}. \quad (4.2.3)$$

Ce critère permet donc de trouver la période d'échantillonnage maximale admissible pour un couple  $(F, C)$  donné qui est aussi la période d'échantillonnage  $T$ , au-delà de laquelle le système devient instable (condition nécessaire et suffisante). Cependant ce critère est limité dans son application. En effet, pour un système linéaire à une entrée et une sortie (même si dans le cas d'un double intégrateur la solution est simple), la complexité de la solution devient importante lorsque le degré du dénominateur est grand. De plus il s'avère difficile de l'appliquer à des systèmes à plusieurs entrées et plusieurs sorties.

### 4.2.3 Une première approche par retard variable

Une solution intéressante a été trouvée [15] pour les systèmes régis par une équation différentielle à retard de la forme :

$$\dot{Z}(t) = AZ(t) + BZ(t - \tau(t)),$$

où  $A$  et  $B$  sont des matrices carrées de dimension  $n \times n$  et où  $A$  est inversible.  $\tau(t)$  représente un retard variable tel que  $t - \tau(t)$  est constant et égal à  $kT$  sur l'intervalle de temps  $[kT, (k+1)T]$ . L'équation différentielle devient alors :

$$\dot{Z}(t) = AZ(t) + BZ(kT). \quad (4.2.4)$$

Ce système peut être associé à une équation différentielle matricielle du premier ordre qu'on peut résoudre sur chaque intervalle :

$$Z(t) = [(I + A^{-1}B) \exp(A(t - \tau(t)) + A^{-1}B]Z(k.T).$$

Si l'on se place au temps  $t = (k + 1)T$ , on obtient une relation de récurrence simple. Il apparaît alors un critère de convergence. Pour que le système soit asymptotiquement stable, il est suffisant que :

$$\|(I + A^{-1}B) \exp(AT) + A^{-1}B\| < 1. \quad (4.2.5)$$

Dans le cas où  $A$  est la matrice nulle la condition devient :

$$\|I - BT\| < 1. \quad (4.2.6)$$

Grâce aux équations (4.2.5) ou (4.2.6), on peut finalement déterminer la borne supérieure  $\tau_2$  de la période d'échantillonnage telle que le système (4.2.4) soit stable.

Ainsi, dans le cas linéaire, nous pouvons déterminer de façon certaine la période d'échantillonnage maximale qui n'altère pas la stabilité du système. On peut aisément remarquer que même si les calculs paraissent élémentaires, leur complexité augmente avec l'ordre du système. On notera aussi le conservatisme de ce résultat qui ne peut garantir la stabilité que si la matrice  $A$  est nulle ou inversible. Il faut noter aussi que pour ces dernières approches, la connaissance des instants d'échantillonnage (et la constance de la période d'échantillonnage pour l'application du critère de Jury) est nécessaire. C'est pourquoi il paraît nécessaire de proposer d'autres approches qui ne donnent malheureusement que des conditions suffisantes mais dont les résultats pourraient être appliqués à des systèmes plus complexes comme des systèmes à coefficients perturbés ou à entrée saturée.

### 4.3 Une approche par retard variable

La modélisation de systèmes continus à entrée échantillonnée sous forme de systèmes soumis à un retard pur a été introduite par Mikheev, Sobolev & Fridman [103], Astrom & Wittenmark [6] et développée plus tard par Emilia Fridman [46]. La loi de commande numérique peut donc être représentée par une commande retardée de la forme :

$$u(t) = u_d(t_k) = u_d(t - (t - t_k)) = u_d(t - \tau(t)), \quad \text{pour tout } t \in [t_k, t_{k+1}[, \tau(t) = t - t_k, \quad (4.3.1)$$

où  $u_d$  est un signal de commande discret et le retard variable  $\tau(t) = t - t_k$  est une fonction continue par morceaux dont la dérivée prend la valeur  $\dot{\tau}(t) = 1$  pour  $t \neq t_k$ . De plus, on assure que le retard  $\tau(t)$  est toujours inférieur à la période d'échantillonnage  $t_{k+1} - t_k$ . La Figure 4.4 illustre un signal échantillonné à deux cadences constantes différentes,  $T_1 = 0.2$  et  $T_2 = 0.5$ , et les retards d'échantillonnage associés.

En ce qui concerne les systèmes à retards variables, des conditions sont obtenues en utilisant des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii dans le cas où la dérivée du retard est strictement inférieure à 1 [84]. La question de la stabilité dans le cas de retards variables et sans condition restrictive sur leur dérivée a été traitée principalement à l'aide de fonctions de Lyapunov-Razumikhin, qui conduisent généralement à des résultats conservatifs (*cf.* [64], [73], [85] et [111]). Ce n'est que récemment que, pour la première fois, le problème de stabilité de systèmes à retard sans condition sur la dérivée du retard fut traité par des techniques de Lyapunov-Krasovskii [57]. Ceci est possible en mixant cette technique à la représentation descripteur introduite par E. Fridman dans [47].

La principale approche de la stabilisation robuste des systèmes à entrée échantillonnée est la technique du *lifting* (*cf.* [8], [36], [118], [156]) dans laquelle ce problème est transformé en un problème discret en dimension finie. Cependant cette approche ne permet pas de considérer le cas où il y a des incertitudes sur la période d'échantillonnage (inconnue et/ou variable) et sur les paramètres du système.

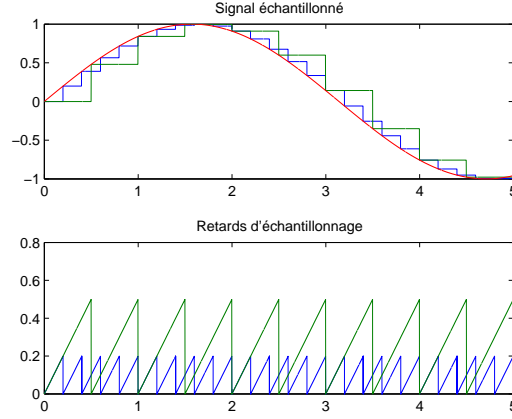


FIG. 4.4 – Exemple de retards d'échantillonnage

Une nouvelle approche pour la stabilisation de systèmes à entrée échantillonnée est suggérée dans [133]. Cette approche permet de résoudre le problème de stabilité et de stabilisation des systèmes à retards continus par morceaux, incertains mais bornés, par la période maximale d'échantillonnage. Le principal problème est de démontrer que les conditions de stabilité et de stabilisation sont toujours valables dans le cas de signal d'entrée continu par morceaux. Les résultats qui sont proposés par la suite garantissent la robustesse par rapport aux instants d'échantillonnage. Leur seule contrainte est que la durée maximale entre deux instants d'échantillonnage consécutifs soit inférieure à une borne connue  $\tau_2$ .

Ce qui rend cette méthode très intéressante est qu'elle permet d'appliquer directement aux systèmes à entrée échantillonnée les différentes méthodes de contrôle utilisées dans le cadre des systèmes à retards. Les conditions LMI sont affines par rapport aux matrices définissant le système, des conditions de stabilisation quadratique sont directement déduites pour des systèmes qui présentent des incertitudes polytopiques. Il est aussi envisageables de considérer une stabilisation locale de systèmes à entrée échantillonnée et saturée par application des résultats existants [16], [25], [52] et [143].

### 4.3.1 Stabilité d'un système à entrée échantillonnée

Considérons le système linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (4.3.2)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  représente l'état et  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  la commande échantillonnée du système. Les matrices  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  sont supposées constantes.

Notre objectif est de déterminer une loi de contrôle discontinue de la forme  $u(t) = u_d(t_k)$ ,  $t_k \leq t < t_{k+1}$ , où  $u_d$  est un signal échantillonné de commande et où  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots$  représentent les instants d'échantillonnage. La loi de commande choisie pour stabiliser le système est un retour d'état donné par :

$$u(t) = Kx(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \quad (4.3.3)$$

Le signal échantillonné est alors assimilé à un signal continu soumis à un retard variable discontinu (mais continu à droite) de la forme  $\tau(t) = t - t_k$  donnée dans (4.3.1). Dans cette configuration la loi de commande

devient une commande retardée :

$$u(t) = Kx(t - \tau(t)). \quad (4.3.4)$$

En introduisant (4.3.4) dans (4.3.2), le système bouclé s'écrit finalement :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t - \tau(t)), \quad \tau(t) = t - t_k, \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \quad (4.3.5)$$

Afin de déterminer des conditions de stabilité d'un tel système, une hypothèse est ajoutée sur la durée séparant deux instants d'échantillonnage :

$$t_{k+1} - t_k \leq \tau_2 \quad \forall k \geq 0. \quad (4.3.6)$$

En d'autres termes, l'équation (4.3.6) impose une borne supérieure au retard d'échantillonnage c'est-à-dire  $\tau(t) \leq \tau_2$ . Cela revient à dire que la durée qui sépare deux instants d'échantillonnage ne peut pas dépasser une certaine borne  $\tau_2$ . En suivant les résultats de [57], où le retard considéré était continu, l'extension au cas de retards discontinus et dont la dérivée  $\dot{\tau}(t)$  peut prendre régulièrement la valeur 1 est obtenue dans le lemme suivant :

**Lemme 4.3.1** [53] *Pour un gain matriciel  $K$  donné, le système bouclé (4.3.5) est stable, pour tout échantillonnage vérifiant la condition (4.3.6), s'il existe des matrices de dimension  $n \times n$   $0 < P_1, P_2, P_3, Z_1, Z_2, Z_3$  et  $R > 0$  telles que les conditions LMI suivantes soient satisfaites :*

$$\Psi_1 < 0, \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} R & [0 \ K^T B^T]P \\ * & Z \end{bmatrix} \geq 0, \quad (4.3.7)$$

où

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ * & Z_3 \end{bmatrix}, \quad \Psi_1 = \Psi_0 + \tau_2 Z + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 R \end{bmatrix},$$

$$\Psi_0 = P^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A + BK & -I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A + BK & -I_n \end{bmatrix}^T P.$$

#### Démonstration.

La preuve est basée sur la représentation descripteur du système (4.3.5) [47] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ 0 = -y(t) + (A + BK)x(t) - BK \int_{t-\tau(t)}^t y(s) ds, \end{cases} \quad (4.3.8)$$

qui est toujours valide dans le cas du retard continu par morceaux  $\tau(t)$  pour  $t > 0$ . Soient un gain  $K$  et une fonction de conditions initiales  $x(t) = \phi(t)$  ( $t \in [-\tau_2, 0]$ ), où  $\phi$  est une fonction continue par morceaux, l'état  $x(t)$  vérifie l'équation (4.3.8) pour tout  $t \geq 0$  si, et seulement si, il vérifie l'équation (4.3.5).

On utilise alors la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii suivante (cf. Théorème 2.3.2, dans le cas asymptotique ( $\alpha = 0$ )) :

$$V(t) = \bar{x}^T(t) E P \bar{x}(t) + \int_{-\tau_2}^0 \int_{t+\theta}^t y^T(s) R y(s) ds d\theta, \quad (4.3.9)$$

où

$$\bar{x}(t) = \text{col}\{x(t), y(t)\}, \quad E = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}, \quad P_1 = P_1^T > 0, \quad (4.3.10)$$

qui vérifie l'inégalité :

$$a|x(t)|^2 \leq V(t) \leq b \sup_{s \in [-\tau_2, 0]} |\bar{x}(t+s)|^2, \quad a > 0, b > 0. \quad (4.3.11)$$

En différenciant  $V(t)$  le long des trajectoires de (4.3.8) pour  $t \geq \tau_2$ , on obtient (c.f. [57]) :

$$\dot{V}(t) < \bar{x}(t)^T \Psi_1 \bar{x}(t) < -c|x(t)|^2, \quad c > 0, \quad (4.3.12)$$

à condition que les équations (4.3.7a,b) soient satisfaites. En intégrant (4.3.12), on obtient :

$$V(t) - V(\tau_2) \leq -c \int_{-\tau_2}^t |x(s)|^2 ds \quad (4.3.13)$$

et, par conséquent, (4.3.11) conduit à  $|x(t)|^2 \leq V(t)/a \leq V(\tau_2)/a < b/a \sup_{s \in [-\tau_2, 0]} |\bar{x}(\tau_2 + s)|^2$ . Sachant que  $\sup_{s \in [-\tau_2, 0]} |\bar{x}(\tau_2 + s)| \leq c_1 \sup_{s \in [-\tau_2, 0]} |\phi(s)|$ ,  $c_1 > 0$  (c.f. Hale & Lunel, [73], p168). On en déduit que  $\dot{x}$ , défini à droite par (4.3.5), vérifie  $\sup_{s \in [-\tau_2, 0]} |\dot{x}(\tau_2 + s)| \leq c_2 \sup_{s \in [-\tau_2, 0]} |\phi(s)|$ ,  $c_2 > 0$ . On obtient :

$$|x(t)|^2 \leq c_3 \sup_{s \in [-\tau_2, 0]} |\phi(s)|^2, \quad c_3 > 0. \quad (4.3.14)$$

Finalement le système décrit par (4.3.5) est stable, (c'est-à-dire  $x(t)$  est borné et "petit" pour une condition initiale  $\phi$  "petite"). Afin de prouver la stabilité asymptotique, on remarque que la solution  $x(t)$  est uniformément continue sur  $[0, \infty)$  car  $\dot{x}(t)$  défini à droite par (4.3.5) est uniformément bornée. De plus, (4.3.13) implique que  $|x(t)|^2$  est intégrable sur  $[0, \infty)$ . Enfin le lemme de Barbalat permet de conclure en montrant que  $x(t) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ . ■

Ce théorème garantit maintenant qu'un système soumis à un retard défini par (4.3.1) est stable s'il satisfait des conditions stabilité classiques issues des Théorèmes de Lyapunov. Cela permet donc d'élargir le champ d'application de tous les théorèmes présentés dans les chapitres précédents au cas des systèmes à entrée et/ou à sortie échantillonnées à partir du moment où l'on autorise la dérivée du retard à être égale à 1,  $\dot{\tau}(t) \leq 1$ .

### 4.3.2 Etude de la robustesse

L'intérêt principal de la modélisation de l'échantillonnage comme un retard pur est qu'il permet d'appliquer les résultats concernant notamment la robustesse par rapport aux paramètres. Dans le cas où les matrices définissant le système ne sont pas identifiées avec certitude, on appelle  $\Omega = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$  et on suppose que  $\Omega \in \mathcal{Co}\{\Omega_j, j = 1, \dots, N\}$ , à savoir,

$$\Omega = \sum_{j=1}^N f_j \Omega_j \quad \text{pour tout} \quad 0 \leq f_j \leq 1, \quad \sum_{j=1}^N f_j = 1, \quad (4.3.15)$$

où les  $N$  éléments du polytopes sont décrit par  $\Omega_j = \begin{bmatrix} A^{(j)} & B^{(j)} \end{bmatrix}$ .

Afin de garantir la stabilité de (4.3.2) pour tout polytope de  $\Omega$ , une extension du Lemme 4.3.1 peut être réalisée directement en utilisant les mêmes matrices  $P_2$  et  $P_3$  pour chacun des points du polytope en résolvant uniquement les conditions LMI (4.3.7a,b) pour les  $N$  éléments de  $\Omega$ . Un critère de stabilité asymptotique du système bouclé est ainsi obtenu :

**Corollaire 4.3.2** *Pour un gain matriciel  $K$  donné, le système (4.3.5) est stable, pour tout élément décrivant l'ensemble  $\Omega$ , s'il existe des matrices, de dimension  $n \times n$ ,  $0 < P_1^{(j)}, P_2, P_3, Z_1^{(j)}, Z_2^{(j)}, Z_3^{(j)}$  et  $R^{(j)} > 0$  telles que les conditions LMI suivantes soient satisfaites :*

$$\Psi_1^{(j)} < 0, \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} R^{(j)} & [0 \ K^T B^{(j)T}] P^{(j)} \\ * & Z^{(j)} \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.3.16)$$

où

$$P^{(j)} = \begin{bmatrix} P_1^{(j)} & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}, \quad Z^{(j)} = \begin{bmatrix} Z_1^{(j)} & Z_2^{(j)} \\ * & Z_3^{(j)} \end{bmatrix}, \quad \Psi_1^{(j)} = \Psi_0^{(j)} + \tau_2 Z^{(j)} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 R^{(j)} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_0^{(j)} = P^{(j)T} \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A^{(j)} + B^{(j)}K & -I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A^{(j)} + B^{(j)}K & -I_n \end{bmatrix}^T P^{(j)}.$$

### 4.3.3 Stabilité d'un système neutre à entrée échantillonnée retardée

Considérons le système neutre linéaire, à retard et à entrée échantillonnée suivant :

$$\dot{x}(t) - F\dot{x}(t - g(t)) = A_0x(t) + A_1x(t - \tau_1(t)) + Bu(t - \tau_2(t)) \quad (4.3.17)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  représente l'état et  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  la loi de commande du système que l'on choisit du type retour d'état de la forme  $u(t) = Kx(t)$  où  $K$  est un gain matriciel à déterminer. Les matrices  $A_0, A_1$  et  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  sont supposées constantes. Le retard  $\tau_1$  est de la forme :

$$\tau_1(t) = \delta_1 + \eta_1(t), \quad |\eta_1(t)| \leq \mu_1, \quad (4.3.18)$$

et le retard  $\tau_2(t)$  se présente de la manière suivante  $\tau_2(t) = h + t - t_k$ , avec  $t_k \leq t < t_{k+1}$  où  $h$  représente un retard pur ici constant mais pouvant très bien être variable. Si on suppose que les instants d'échantillonnage  $t_k$  vérifient  $0 \leq t_{k+1} - t_k \leq T, \forall k \geq 0$ , on a.

$$\tau_2(t) = \delta_2 + \eta_2(t), \quad |\eta_2(t)| \leq \mu_2, \quad (4.3.19)$$

où  $\delta_2 = h + T/2$  et  $\mu_2 = T_2$ . Connaissant maintenant les bornes des retards (4.3.18) et (4.3.19), on peut énoncer le théorème de stabilité exponentielle suivant :

**Lemme 4.3.3 ([49], Cas 1)** *Pour un gain  $K$  donné, le système (4.3.17) est asymptotiquement stable pour tout retard interne  $\tau_1$  vérifiant (4.3.18), tout retard d'échantillonnage  $\tau_2$  vérifiant (4.3.19) et tout retard  $g(t)$  tel que  $\dot{g}(t) \leq d_0$ , si  $\|F\|_e < 1$  et s'il existe des matrices, de dimension  $n \times n$ ,  $0 < P_1, P_2, P_3, S_k, U, Y_{k1}, Y_{k2}, Z_{k1}, Z_{k2}, Z_{k3}, R_k$  et  $R_{ka}, k=1,2$  telles que les conditions LMI suivantes soient satisfaites :*

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 & P^T \begin{bmatrix} 0 \\ A_1 \end{bmatrix} & -Y_1^T & P^T \begin{bmatrix} 0 \\ BK \end{bmatrix} & -Y_2^T & P^T \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} & \mu_1 P^T \begin{bmatrix} 0 \\ A_1 \end{bmatrix} & \mu_2 P^T \begin{bmatrix} 0 \\ BK \end{bmatrix} \\ * & -S_1 & & 0 & & 0 & & 0 \\ * & * & & -S_2 & & 0 & & 0 \\ * & * & & * & & -(1-d_0)U & & 0 \\ * & * & & * & & * & & -\mu_1 R_{1a} \\ * & * & & * & & * & & * & -\mu_2 R_{2a} \end{bmatrix} < 0, \quad (4.3.20)$$



et, pour  $k = 1, 2$  :

$$\begin{bmatrix} R_k & Y_{k1} & Y_{k2} \\ * & Z_{k1} & Z_{k2} \\ * & * & Z_{k3} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (4.3.21)$$

où la matrice  $P$  est définie dans (4.3.10) et  $\Psi_1$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \Psi_1 = & P^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 & -I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 & -I_n \end{bmatrix}^T P + \sum_{k=1}^2 \begin{bmatrix} Y_k \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^2 \begin{bmatrix} Y_k \\ 0 \end{bmatrix}^T \\ & + \sum_{k=1}^2 \delta_k Z_k + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^2 S_k & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^2 (\delta_k R_k + \mu_k R_{ka}) + U \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

#### 4.3.4 Stabilisation exponentielle

Dans la mesure où l'on a déterminé des conditions de stabilité pour les systèmes comprenant des incertitudes polytotiques, il est maintenant possible d'énoncer des théorèmes de stabilité exponentielle inspirés des résultats proposés dans le Chapitre 2 pour les systèmes à retards *bornés* et neutres.

On effectue le changement de variables  $x_\alpha(t) = e^{\alpha t} x(t)$  dans (4.3.17) où l'on impose  $g(t) = \delta_3$ , ce qui conduit à :

$$\dot{x}_\alpha(t) = (A_0 + \alpha I_n)x_\alpha(t) + e^{\alpha\tau_1(t)} A_1 z(t - \tau_1(t)) + e^{\alpha\tau_2(t)} BKx_\alpha(t - \tau_2(t)) + Fe^{\alpha t} \dot{x}(t - \delta_3). \quad (4.3.22)$$

Le dernier terme de (4.3.22) peut être exprimé en fonction de  $x_\alpha$  en écrivant  $e^{\alpha t} \dot{x}(t - \delta_3) = e^{\alpha\delta_3} \dot{x}_\alpha(t - \delta_3) - \alpha e^{\alpha\delta_3} x_\alpha(t - \delta_3)$ . On obtient finalement le système neutre modifié suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_\alpha(t) = & (A_0 + \alpha I_n)x_\alpha(t) + e^{\alpha\tau_1(t)} A_1 x_\alpha(t - \tau_1(t)) + e^{\alpha\tau_2(t)} BKx_\alpha(t - \tau_2(t)) \\ & - \alpha e^{\alpha\delta_3} Fx_\alpha(t - \delta_3) + Fe^{\alpha\delta_3} \dot{x}_\alpha(t - \delta_3). \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

Dans un premier temps nous allons déterminer des conditions de stabilité exponentielle du système bouclé. Une première remarque peut être faite concernant le terme neutre. Pour que la stabilité soit prouvée il faut vérifier la condition suivante [85] :

$$\|e^{\alpha\delta_3} F\|_e < 1. \quad (4.3.24)$$

On transforme maintenant les termes exponentiels  $e^{\alpha\tau_1(t)}$  et  $e^{\alpha\tau_2(t)}$  sous forme polytopique. pour cela on remarque que les définitions des retards (4.3.18) et (4.3.19) impliquent :

$$e^{\alpha(\delta_i - \mu_i)} \leq e^{\alpha\tau_i(t)} \leq e^{\alpha(\delta_i + \mu_i)}, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall i = 1, 2.$$

Cela signifie qu'il existe des fonctions réelles  $\lambda_{ij} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(i, j) \in \{1, 2\}^2$ , telles que :

$$\forall t \geq 0, \quad \forall (i, j) \in \{1, 2\}^2 \quad \lambda_{ij}(t) \geq 0, \quad \text{et} \quad \sum_{i,j=1}^2 \lambda_{ij}(t) = 1 \quad (4.3.25)$$

et pour lesquelles l'équation différentielle (4.3.23) s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{x}_\alpha(t) = & \sum_{i,j=1}^2 \lambda_{ij}(t) \{ (A_0 + \alpha I_n)x_\alpha(t) + \beta_{1i} A_1 x_\alpha(t - \tau_1(t)) + \beta_{2j} BKx_\alpha(t - \tau_2(t)) \\ & - \alpha e^{\alpha\delta_3} Fx_\alpha(t - \delta_3) + Fe^{\alpha\delta_3} \dot{x}_\alpha(t - \delta_3) \}, \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

où  $\beta_{11} = e^{\alpha(\delta_1 - \mu_1)}$ ,  $\beta_{12} = e^{\alpha(\delta_1 + \mu_1)}$ ,  $\beta_{21} = e^{\alpha(\delta_2 - \mu_2)}$  et  $\beta_{22} = e^{\alpha(\delta_2 + \mu_2)}$ .

En appliquant le Lemme 4.3.3 au système polytopique (4.3.26) on obtient le théorème suivant :

**Théorème 4.3.4** [132] *Pour un gain  $K$  donné, le système (4.3.17), avec  $g(t) = \delta_3$  satisfaisant à (4.3.24), est  $\alpha$ -stable pour tous retards vérifiant (4.3.18) et (4.3.19) s'il existe des matrices symétriques définies positives  $P_1, S_l, U, R_l$  et  $R_{ka} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et des matrices  $P_2, P_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}, Y_l \in \mathbb{R}^{n \times 2n}, Z_l \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ , pour  $l = 1, 2, 3$  qui satisfont pour tout  $(i, j) \in \{1, 2\}^2$  à (4.3.21) et à :*

$$\Gamma_1^{ij} = \begin{bmatrix} \Psi_2 & P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_{1i} A_1 \end{bmatrix} & -Y_1^T & P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_{2j} BK \end{bmatrix} & -Y_2^T & P^T \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha e^{\alpha \delta_3} F \end{bmatrix} & -Y_3^T \\ * & -S_1 & & 0 & & 0 \\ * & * & & -S_2 & & 0 \\ * & * & & * & & -S_3 \\ * & * & & * & & * \\ * & * & & * & & * \\ * & * & & * & & * \\ * & * & & * & & * \\ P^T \begin{bmatrix} 0 \\ e^{\alpha \delta_3} F \end{bmatrix} & \mu_1 P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_{1i} A_1 \end{bmatrix} & \mu_2 P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_{2j} BK \end{bmatrix} & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ -U & 0 & 0 & & & \\ * & -\mu_1 R_{1a} & 0 & & & \\ * & * & -\mu_2 R_{2a} & & & \end{bmatrix} < 0, \quad (4.3.27)$$

et

$$\Psi_2 = P^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 + \alpha I_n & -I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 + \alpha I_n & -I_n \end{bmatrix}^T P + \sum_{l=1}^3 \delta_l Z_l \\ + \sum_{l=1}^3 \left( \begin{bmatrix} Y_l \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_l \\ 0 \end{bmatrix}^T \right) + \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^3 S_l & 0 \\ 0 & \sum_{l=1}^3 \delta_l R_l + \sum_{k=1}^2 2\mu_k R_{ka} + U \end{bmatrix}, \quad (4.3.28)$$

**Remarque 4.3.5** *Dans le cas où  $\delta_1 = \delta_3$  dans (4.3.26), les conditions LMI du Théorème 4.3.4 peuvent être simplifiées. En effet, il suffit pour cela de regrouper les termes  $\beta_{1i} A_1$  et  $-\alpha e^{\alpha \delta_3} F$ . Ainsi la dimension de (4.3.27) sera réduite.*

Concernant le problème de la stabilisation, c'est-à-dire au problème de la synthèse du gain  $K$  de retour d'état, on propose ici une méthode issue de [139]. On impose la condition  $P_3 = \epsilon P_2$ , où  $\epsilon \in \mathbb{R}$  est un paramètre de réglage. On remarque que, dans ce cas,  $P_2$  est une matrice inversible puisque la seule matrice qui peut être définie négative dans le deuxième bloc de (4.3.29) est  $-\epsilon(P_2 + P_2^T)$ . On définit alors :

$$\bar{P} = P_2^{-1}.$$

La suite de la démonstration nécessite l'introduction de nouvelles variables. Pour toutes variables matricielles  $V \in \{P_1, Y_l, S_l, U, R_l, R_{ka}, Z_{ll'}\}$  avec  $k = 1, 2, (l, l') = 1, 2, 3$ , on définit  $\bar{V}$  et  $W$  par  $\bar{P}^T V \bar{P}$  et  $W = K \bar{P}$ . En multipliant (4.3.29) par  $\text{diag}\{\bar{P}, \bar{P}, \bar{P}, \bar{P}, \bar{P}, \bar{P}, \bar{P}\}$  à droite et par sa transposée à gauche, et en multipliant (4.3.21) par  $\text{diag}\{\bar{P}, \bar{P}, \bar{P}\}$  à droite et par sa transposée à gauche, on obtient les conditions suivantes :

**Théorème 4.3.6** [132] *La loi de commande par retour d'état (4.3.3) stabilise exponentiellement le système (4.3.17), avec  $g(t) = \delta_3$  satisfaisant à la condition  $\|F\|_e e^{\alpha \delta_3} < 1$  et pour tous retard vérifiant les inégalités*

(4.3.18) et (4.3.18), si, pour les réels positifs  $\alpha$  et  $\epsilon$ , il existe des matrices de dimension  $n \times n$ , symétriques définies positives  $\bar{P}_1, \bar{S}_l, \bar{U}, \bar{R}_l$  et  $\bar{R}_{ak}$ , et des matrices de dimension  $n \times n$ ,  $\bar{P}, \bar{Z}_{l1}, \bar{Z}_{l2}, \bar{Z}_{l3}$  et  $\bar{Y}_{lk}$ , pour  $k = 1, 2$  et  $l = 1, 2, 3$ , et une matrice de dimension  $n \times m$ ,  $W$  telles que les conditions LMI suivantes soient satisfaites pour toute paire  $(i, j) \in \{1, 2\}^2$  :

$$\begin{bmatrix} \Psi_3 & \begin{bmatrix} \beta_{1i}A_1\bar{P} - \bar{Y}_{11}^T \\ \epsilon(\beta_{1i}A_1\bar{P}) - \bar{Y}_{12}^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \beta_{2j}BW - \bar{Y}_{21}^T \\ \epsilon\beta_{2j}BW - \bar{Y}_{22}^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\alpha e^{\alpha\delta_3}F\bar{P} - \bar{Y}_{31}^T \\ -\epsilon\alpha e^{\alpha\delta_3}F\bar{P} - \bar{Y}_{32}^T \end{bmatrix} \\ * & -\bar{S}_1 & 0 & 0 \\ * & * & -\bar{S}_2 & 0 \\ * & * & * & -\bar{S}_3 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \begin{bmatrix} e^{\alpha\delta_3}F\bar{P} \\ \epsilon e^{\alpha\delta_3}F\bar{P} \end{bmatrix} & \mu_1 \begin{bmatrix} \beta_{1i}A_1\bar{P} \\ \epsilon\beta_{1i}A_1\bar{P} \end{bmatrix} & \mu_2 \begin{bmatrix} \beta_{2j}BW \\ \epsilon\beta_{2j}BW \end{bmatrix} & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ -\bar{U} & 0 & 0 & \\ * & -\mu_1\bar{R}_{1a} & 0 & \\ * & * & -\mu_2\bar{R}_{2a} & \end{bmatrix} < 0, \quad (4.3.29)$$

et

$$\begin{bmatrix} \bar{R}_l & \bar{Y}_{l1} & \bar{Y}_{l2} \\ * & \bar{Z}_{l1} & \bar{Z}_{l2} \\ * & * & \bar{Z}_{l3} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall l = 1, 2, 3, \quad (4.3.30)$$

où

$$\begin{aligned} \Psi_{311} &= (A_0 + \alpha I_n)\bar{P} + \bar{P}^T(A_0 + \alpha I_n)^T + \sum_{l=1}^3 (\bar{S}_l + \delta_l \bar{Z}_{l1} + \bar{Y}_{l1} + \bar{Y}_{l1}^T), \\ \Psi_{312} &= \bar{P}_1 - \bar{P} + \epsilon \bar{P}^T(A_0 + \alpha I_n)^T + \sum_{l=1}^3 (\delta_l \bar{Z}_{l2} + \bar{Y}_{l2}), \\ \Psi_{322} &= -\epsilon(\bar{P} + \bar{P}^T) + \sum_{l=1}^3 \delta_l (\bar{Z}_{l3} + \bar{R}_l) + \sum_{k=1}^2 2\mu_k \bar{R}_{ka} + \bar{U}. \end{aligned}$$

### 4.3.5 Stabilisation des systèmes à entrée saturée et échantillonnée

#### Résultats et étude préliminaires

Considérons maintenant le système (4.3.2) avec une loi de commande échantillonnée (4.3.3) et soumise à des contraintes d'amplitude :

$$|u_i(t)| \leq \bar{u}_i, \quad 0 < \bar{u}_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.3.31)$$

On appelle  $x(t, x(0))$  l'état du système (4.3.2) dont la condition initiale est  $x(0) \in \mathbb{R}^n$ . Le domaine d'attraction de l'origine du système décrit par (4.3.2) et (4.3.3) est l'ensemble :

$$\mathcal{A} = \{x(0) \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x(0)) = 0\}.$$

Ce paragraphe concerne la synthèse d'un gain  $K$  de retour d'état qui stabilise exponentiellement le système bouclé. Par la suite, les conditions permettront d'obtenir une estimation  $\mathcal{X}_\beta \subset \mathcal{A}$  du domaine de stabilité de la forme :

$$\mathcal{X}_\beta = \{x(0) \in \mathbb{R}^n : x^T(0)P_1x(0) \leq \beta^{-1}\}, \quad (4.3.32)$$

où  $\beta$  est un réel positif et  $P_1$  une matrice symétrique définie positive de dimension  $n \times n$ . Contrairement à l'ensemble  $\mathcal{X}_\beta$  défini dans (4.3.32) du Chapitre 3, l'estimation du domaine d'attraction est une ellipsoïde.

En utilisant l'approche par retard variable, la commande par retour d'état échantillonnée et saturée se présente sous la forme :

$$u(t) = \text{sat}(Kx(t - \tau(t)), \bar{u}). \quad (4.3.33)$$

où  $\bar{u} = [\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m]$ . Ainsi le problème initial de stabilisation d'un système à entrée échantillonnée et saturée devient équivalent au problème de stabilisation d'un système à retard pur et à entrée saturée que l'on peut résoudre en se référant à [59].

### Représentation polytopique

En appliquant le contrôle (4.3.33), le système bouclé est alors régi par l'équation :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B\text{sat}(Kx(t - \tau(t)), \bar{u}), \\ \tau(t) &= t - t_k, \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \end{aligned} \quad (4.3.34)$$

Une différence importante avec les résultats du Chapitre 3 apparaît. Du fait que le retard variable  $\tau$  considéré dans le système (4.3.34) est du à l'échantillonnage de la commande, la condition initiale est simplement définie à  $t = 0$  et pas sur un intervalle de la forme  $[-\tau_2, 0]$ . En effet, l'approche par retard variable permet de considérer la condition initiale suivante :

$$\phi(0) = x(0), \quad \phi(s) = 0, \quad s \in [-\tau_2, 0). \quad (4.3.35)$$

Comme le retard vient de l'échantillonnage de la commande, cette condition peut simplement s'interpréter par le fait que le système n'est soumis à aucune commande avant l'instant initial  $t = 0$ . D'autre part, on notera  $k_i$ , la  $i^{\text{ième}}$  ligne de  $K$ , ce qui permet de définir l'espace  $\mathcal{L}(K, \bar{u})$  :

$$\mathcal{L}(K, \bar{u}) = \{x \in \mathbb{R}^n : |k_i x| \leq \bar{u}_i, \quad i = 1, \dots, m\}.$$

Ainsi, si la commande est telle que  $x$  est à valeurs dans  $\mathcal{L}(K, \bar{u})$ , le système (4.3.34) n'est soumis à aucune saturation et admet une représentation linéaire. En suivant les résultats décrits dans [16], on introduit l'ensemble  $\Upsilon$  des matrices diagonales de  $\mathbb{R}^{m \times m}$  telles que les éléments de la diagonale soient 0 ou 1.  $\Upsilon$  contient  $2^m$  éléments distincts  $D_i$ . On notera alors  $D_i^-$  la matrice de  $\Upsilon$  définie par  $I_m - D_i$ . En utilisant les lemmes 3.6.1 et 3.6.2 présentés dans le Chapitre 3, pour des gains matriciels  $K$  et  $H$  de  $\mathbb{R}^{m \times n}$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  satisfaisant à  $|h_i x| \leq \bar{u}_i$ ,  $i = 1, \dots, 2^m$ , le système (4.3.34) admet la représentation suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j(t) A_j x(t - \tau(t))$$

où

$$A_j = B(D_j K + D_j^- H) \quad j = 1, \dots, 2^m, \quad \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j(t) = 1, \quad 0 \leq \lambda_j(t), \quad \forall 0 < t,$$

On définit alors l'ensemble de matrices  $\Omega_\alpha$  :

$$\Omega_\alpha = \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j(t) \Omega_j \quad \text{où} \quad 0 \leq \lambda_j(t) \leq 1, \quad \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j(t) = 1 \quad (4.3.36)$$

où les éléments de  $\Omega_\alpha$  sont décrit par  $\Omega_j = [A_j]$ ,  $j = 1, \dots, 2^m$ . Le problème devient donc celui de déterminer l'ensemble  $\mathcal{X}_\beta$  et la matrice  $H$ , telle que  $|\delta_i x| \leq \bar{u}_i$ ,  $i = 1, \dots, 2^m$  pour tout  $x \in \mathcal{X}_\beta$  et telle que l'état du système décrit par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_j x(t - \tau(t)), \quad \tau(t) = t - t_k, \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad (4.3.37)$$

appartienne et reste dans  $\mathcal{X}_\beta$ .

### Stabilisation locale

Dans ces conditions, il est possible de se ramener au problème de stabilisation d'un système représenté par un modèle polytopique avec un retard pur variable. En utilisant la modélisation descripteur et la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii (4.3.9), on obtient le théorème suivant :

**Théorème 4.3.7** [53] *Soit le système (4.3.2) dont la commande est échantillonnée (4.3.3) et sujette à des saturations. Ce système est stabilisable avec  $\mathcal{X}_\beta$  à l'intérieur du domaine d'attraction pour tout échantillonnage non nécessairement uniforme de période maximale inférieure à  $\tau_2$ , s'il existe une matrice, de dimension  $n \times n$ , symétrique définie positive  $0 < Q_1$ , des matrices de dimension  $n \times n$ ,  $Q_2^{(j)}$ ,  $Q_3^{(j)}$ ,  $Z_1^{(j)}$ ,  $Z_2^{(j)}$ , et  $Z_3^{(j)}$ , des matrices de dimension  $m \times n$ ,  $Y$  et  $G$  et un réel positif  $\beta$  tels les conditions LMI suivantes soient satisfaites :*

$$\begin{bmatrix} Q_2^{(j)} + Q_2^{T(j)} + \tau_2 Z_1^{(j)} & \Sigma_j & \tau_2 Q_2^{(j)} \\ * & -Q_3^{(j)} - Q_3^{T(j)} + \tau_2 Z_3^{(j)} & \tau_2 Q_3^{(j)} \\ * & * & -\varepsilon \tau_2 Q_1 \end{bmatrix} < 0, \quad (4.3.38)$$

$$j = 1, \dots, 2^m$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon Q_1 & 0 & \varepsilon(Y^T D_j + G^T D_j^-) B^T \\ * & Z_1^{(j)} & Z_2^{(j)} \\ * & * & Z_3^{(j)} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (4.3.39)$$

$$\begin{bmatrix} \beta & g_i \\ * & \bar{u}_i^2 Q_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.3.40)$$

où

$$\Sigma_j = Q_3^{(j)} - Q_2^{T(j)} + Q_1 A^T + (Y^T D_j + G^T D_j^-) B^T + \tau_2 Z_2^{(j)}. \quad (4.3.41)$$

Le gain  $K$  du retour d'état qui stabilise le système est donné par  $K = Y Q_1^{-1}$ .

**Démonstration.** Considérons la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii  $V$  donnée par (4.3.9), les conditions (4.3.38-4.3.39) ont été déterminées dans le Corollaire 4.3.2 pour assurer la négativité de la dérivée  $\dot{V}$  pour tout  $x(t) \in \mathcal{X}_\beta$ . Ensuite d'après [52], les inégalités (4.3.40) garantissent que  $|\delta_i x| \leq \bar{u}_i, \forall x \in \mathcal{X}_\beta, i = 1, \dots, m$ , où  $\delta_i \triangleq g_i Q_1^{-1}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $Q_1 \triangleq P_1^{-1}$  et où  $g_i$  est la  $i^{\text{ième}}$  ligne de la matrice  $G$ , et la représentation polytopique du système (4.3.37) est par conséquent validée.

Sachant que  $\dot{V} < 0$ , il s'en suit que  $V(t) < V(0)$  et, par conséquent, pour des conditions initiales de la forme (4.3.35), on a :

$$x^T(t)P_1x(t) \leq V(t) < V(0) = x^T(0)P_1x(0) \leq \beta^{-1}. \quad (4.3.42)$$

Ainsi pour toute conditions initiales  $x(0) \in \mathcal{X}_\beta$ , les trajectoires de  $x(t)$  reste dans  $\mathcal{X}_\beta$ , et la représentation polytopique du système (4.3.37) reste valide.  $x(t)$  est finalement une trajectoire du système (4.3.37) et  $\dot{V} < 0$  pour toute solution  $x(t)$ , ce qui implique  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ . ■

### Exemple

Considérons le système (4.3.34) où les valeurs des matrices ([16], avec  $\tau_2 \neq 0$ ) sont :

$$A = \begin{bmatrix} 1.1 & -0.6 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.3.43)$$

et où  $\bar{u} = 5$ . Le Théorème 4.3.7 permet d'obtenir un gain  $K$  stabilisant le système pour tout échantillonnage de non nécessairement uniforme et de période maximale  $\tau_2 = 0.75$ . Afin d'augmenter le volume défini par  $\mathcal{X}_\beta$ , on a imposé une optimisation LMI pour minimiser le réel  $\beta$  (afin d'améliorer le résultat, la condition supplémentaire  $Q_1 > \alpha I_n$  avec  $\alpha > 0$  choisi pour élargir l'ellipse  $\mathcal{X}_\beta$ ). La Figure 4.5 illustre le fait que le volume de l'ellipse augmente lorsque  $\tau_2$  diminue.

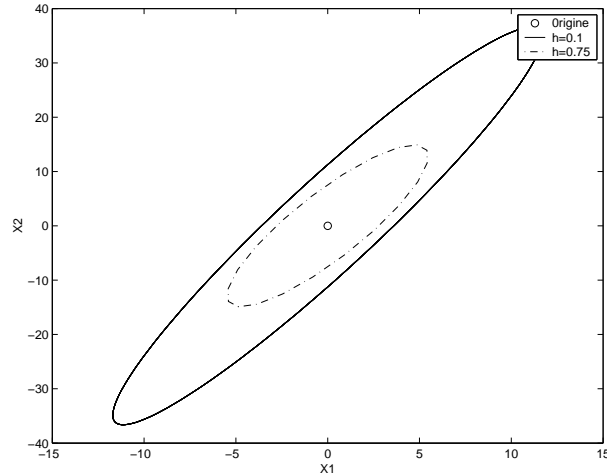
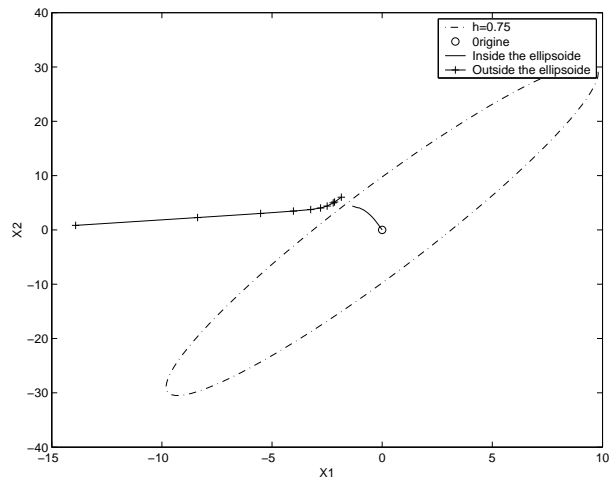


FIG. 4.5 – Borne elliptique du domaine d'attraction

Pour  $\tau_2 = 0.75$ , le Théorème 4.3.7 garantit que le système (4.3.34) est stable avec le gain  $K = [-1.6964 \ 0.5231]$  ( et avec  $\varepsilon = 0.325$ ,  $\beta = 0.1261$ ,  $P_1 = \begin{bmatrix} 0.9132 & -0.2816 \\ -0.2816 & 0.0868 \end{bmatrix}$  et  $\alpha = 1$ ). La Figure 4.6 montre que lorsque la condition initiale est proche du contour mais à l'intérieur de l'ellipse (pour le cas d'un échantillonnage à période constante  $t_{k+1} - t_k = 0.75$ ), la solution  $x(t)$  ne quitte jamais l'ensemble et converge asymptotiquement vers 0. D'autre part, lorsque que la condition est à l'extérieur de l'ensemble  $\mathcal{X}_\beta$ , la solution  $x(t)$  diverge.

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté plusieurs approches permettant de caractériser le problème de la stabilisation de système à entrée échantillonnée. Une première approche qui s'apparente à une étude en temps

FIG. 4.6 – Simulation pour  $\tau_2 = 0.75$ 

discret a été présentée. Il a été montré que cette étude est limitée dans son application. En effet elle nécessite une connaissance parfaite du modèle et de la période d'échantillonnage. Cependant en pratique, cette connaissance n'est pas toujours possible. Une deuxième approche qui consiste à décrire l'effet d'un échantillonnage comme un retard variable a permis d'inclure le cas des échantillonnages à période non constante. Elle permet, par la suite, d'appliquer certains théorèmes concernant la stabilisation des systèmes à retards notamment d'étudier la robustesse, les performances (grâce à la stabilité exponentielle), ou encore au cas des systèmes à entrée saturée. Finalement, ce chapitre constitue une avancée dans le domaine applicatif puisqu'il permet de garantir des conditions de stabilité et de robustesse pour des systèmes réels. Le chapitre suivant montre que ces résultats sont utilisables dans le cadre d'expérimentation réelle.

## Chapitre 5

# Observation des systèmes à retards

### 5.1 Introduction

L'observation est un thème majeur de l'étude des systèmes linéaires et non linéaires. Il trouve sa justification dans le problème du contrôle. En effet, dans la littérature, le contrôle d'un système nécessite souvent la connaissance de l'état complet d'un système alors qu'en pratique la mesure de l'ensemble des variables est difficile. Ces limites proviennent de considérations technologiques, lorsqu'il est impossible de mesurer une donnée, économiques, lorsque la précision de la mesure d'un capteur est nécessaire, le prix devient souvent élevé, ou pratiques, sensibilité au bruit, etc.... De manière générale, on ne dispose que d'une partie de l'état, que l'on appelle la sortie. On confondra ici sorties mesurées et variables à commander. Il est souvent difficile de commander un système en utilisant seulement les sorties mesurables d'un système. De plus, il est légitime de penser que plus on dispose d'information sur l'état d'un système, plus la construction d'une loi de commande sera aisée. Le problème de l'observation consiste à construire une estimation de l'état qui sera utilisée par le contrôleur pour calculer la nouvelle commande.

Comme il a été énoncé auparavant, en pratique très peu de systèmes sont soumis à des retards constants. C'est pourquoi ce chapitre sera consacré à l'observation de systèmes linéaires à retards variables. Une première partie présentera le problème de l'observation de systèmes à retards variables et connus sur l'état, l'entrée et ou la sortie. La seconde partie présentera une étude de l'observation des systèmes à retards inconnus basée sur les techniques de construction des observateurs à modes glissants. Plusieurs auteurs ont déjà abordé l'observation des systèmes à retards (voir les synthèses de [127, 129]) mais, le plus souvent, l'écriture de l'observateur fait intervenir la valeur du retard. En d'autres termes, la connaissance ou la mesure du retard est requise. En outre, les "observateurs sans retard interne" [26, 27, 40, 155] nécessitent la connaissance de la sortie du système aux temps courants et aussi retardés du même temps que les termes retardés dans l'équation de la dynamique.

Néanmoins, dans le cadre d'applications réelles (commande télé-opérée, systèmes en réseau par exemple), les hypothèses d'invariance ou de connaissance du retard sont peu réalistes et proviennent des limites des techniques d'identification et d'analyse disponibles. Seuls quelques articles présentent des résultats qui ne nécessitent pas la connaissance du retard [1, 21, 29, 43, 60, 150]. Ces approches intéressantes concernent les systèmes linéaires et garantissent des performances de type  $H_\infty$  pour le filtrage des erreurs.



## 5.2 Observation de systèmes à retards connus

### 5.2.1 Présentation du problème

Dans le cadre de la synthèse d'observateur pour système à retard, on retrouve beaucoup de travaux consacrés aux systèmes à retards connus, aussi bien constants que variables [11], [12]. Nous proposons ici des techniques de construction d'observateurs de Luenberger [100] pour des systèmes à retards variables et connus. Les matrices définissant les dynamiques du système étudié sont supposées connues.

### 5.2.2 Retard connu sur l'état et la sortie

Soit le système linéaire à retards sur l'état et la sortie :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + A_\tau x(t - \tau_1(t)), \\ y(t) &= Cx(t) + C_\tau x(t - \tau_2(t)), \\ \phi(t) &= x(\theta), \forall \theta \in [-\bar{\tau}, 0],\end{aligned}$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  représente l'état du système,  $y \in \mathbb{R}^p$  est la sortie (qu'on suppose être égale à la mesure). Les matrices  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_\tau \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $C, C_\tau \in \mathbb{R}^{p \times n}$  sont des matrices réelles supposées connues. Nous supposons que la paire  $(A, C)$  est observable. On note  $\bar{\tau} = \max_{i=1,2}(\tau_{2i})$ . Les retards sont supposés *bornés* et vérifient les conditions suivantes :

$$\tau_i(t) \in [\tau_{1i}, \tau_{2i}], \quad \text{et} \quad \forall t, \tau_i(t) = \delta_i + \eta_i(t), \quad |\eta_i(t)| \leq \mu_i. \quad (5.2.1)$$

Nous supposons ici que les retards  $\tau_1$ , sur l'état, et  $\tau_2$ , sur la sortie, sont connus au niveau de l'observateur. On définit alors l'observateur de Luenberger adapté au cas des systèmes à retards sur la sortie :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + A_\tau x(t - \tau_1(t)) - L(y(t - \tau_2(t)) - \hat{y}(t - \tau_2(t))), \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + C_\tau \hat{x}(t - \tau_2(t)). \end{cases}$$

On définit alors l'erreur d'observation  $e(t) = x - \hat{x}(t)$ . La dynamique de cette erreur est alors régie par l'équation différentielle à retard :

$$\dot{e}(t) = (A + LC)e(t) + A_\tau e(t - \tau_1(t)) - LCe(t - \tau_2(t)), \quad (5.2.2)$$

L'objectif sera finalement de garantir la stabilité exponentielle avec un taux  $\alpha$  de convergence garanti du système (5.2.2) vers la solution  $e(t) = 0$  pour déduire la convergence des variables de l'observateur vers l'état du système.

**Théorème 5.2.1** *Si, pour deux réels positifs  $\alpha$  et  $\epsilon$ , il existe des matrices de dimension  $n \times n$   $0 < P_1, P, S_i, Y_{i1}, Y_{i2}, Z_{i1}, Z_{i2}, Z_{i3}, R_i, R_{ia}$  pour  $i = 1, 2$  et une matrice  $W$  de dimension  $n \times q$  telles que les conditions LMI suivantes soient satisfaites pour  $i, j = 1, 2$  :*

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{11}^1 & \Psi_{12}^1 \\ * & \Psi_{22}^1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \beta_{1i}A_\tau - Y_{11} \\ \epsilon\beta_{1i}A_\tau - Y_{12} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \beta_{2j}WC - Y_{21} \\ \epsilon\beta_{2j}WC - Y_{22} \end{bmatrix} & \mu_1 \begin{bmatrix} \beta_{1i}A_\tau \\ \epsilon\beta_{1i}A_\tau \end{bmatrix} & \mu_2 \begin{bmatrix} \beta_{2j}WC \\ \epsilon\beta_{2j}WC \end{bmatrix} \\ * & -S_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -S_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\mu_1 R_{1a} & 0 \\ * & * & * & * & -\mu_2 R_{2a} \end{bmatrix} < 0, \quad (5.2.3)$$

$$\begin{bmatrix} R_i & Y_{i1} & Y_{i2} \\ * & Z_{i1} & Z_{i2} \\ * & * & Z_{i3} \end{bmatrix} \geq 0 \quad i = 1, 2, \quad (5.2.4)$$

où  $\beta_{i1} = e^{\alpha(\delta_i - \mu_i)}$ ,  $\beta_{i2} = e^{\alpha(\delta_i + \mu_i)}$  et :

$$\begin{aligned} \Psi_{11}^1 &= P^T(A + \alpha I_n) + (A + \alpha I_n)^T P + WC + C^T W^T + S + \delta_1 Z_{11} + \delta_2 Z_{21} + Y_{11} + Y_{11}^T + Y_{21} + Y_{21}^T, \\ \Psi_{12}^1 &= P_1 - P^T + \epsilon(A + \alpha I_n)^T P + C^T W^T + \delta_1 \bar{Z}_{12} + \delta_2 \bar{Z}_{22} + \bar{Y}_{21} + \bar{Y}_{22}, \\ \Psi_{22}^1 &= -\epsilon(P + P^T) + \delta_1 \bar{Z}_{13} + \delta_2 \bar{Z}_{23} + 2\mu_1 R_{1a} + 2\mu_2 R_{2a}. \end{aligned}$$

Alors, le gain

$$L = (P^T)^{-1}W,$$

rend l'erreur (5.2.2)  $\alpha$ -stable et converge exponentiellement vers la solution  $e(t) = 0$  pour tout retards satisfaisant (5.2.1).

**Démonstration.** La preuve de ce théorème utilise les conditions d' $\alpha$ -stabilité issues du Théorème 2.4.1 qui prend en compte des retards *bornées*. Les conditions (5.2.3) et (5.2.4) viennent d'une adaptation du Théorème 2.4.1 au cas de deux retards.

On définit par ailleurs la condition liante  $P = P_2 = \epsilon P_3$  et aussi  $W = P^T L$ . ■

**Remarque 5.2.2** *La synthèse d'observateurs de systèmes à retards sur la sortie ou bien l'état sont des cas particuliers d'application du Théorème 5.2.1.*

### 5.2.3 Conclusion

Le type d'observateurs que nous avons proposé dans cette partie s'avère très performant au sens de la convergence exponentielle pour obtenir une atténuation importante et rapide des erreurs d'estimation dans le cas des systèmes à retards variables connus. Il est possible d'étendre ces résultats au cas des observateurs  $H_\infty$  pour permettre d'atténuer des perturbations exogènes.

## 5.3 Observation de systèmes à retards inconnus

### 5.3.1 Introduction

Cette partie concerne plus spécifiquement l'observation de systèmes linéaires à retards inconnus. Cependant toutes présentent les mêmes limites, à savoir que le retard n'intervient que dans l'état et pas dans l'entrée ou la sortie et que les résultats proposés sont indépendants des caractéristiques du retard. Il semble donc pertinent de réduire le conservatisme inhérent aux approches "indépendantes du retard" en proposant un résultat qui prenne en compte des bornes de variation du retard.

Dans un souci de simplicité de l'exposé, nous supposons que le retard inconnu  $\tau(t)$  sur l'état et sur l'entrée du système sont égaux. Par ailleurs nous supposons qu'il n'y a pas de retard sur la sortie et que la seule connaissance sur  $\tau(t)$  est la valeur d'une borne maximale  $\tau_2$  telle que :

$$0 \leq \tau(t) \leq \tau_2, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \quad (5.3.1)$$

Considérons donc le système à retard variable sur l'état et la commande suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_\tau x(t - \tau(t)) + Bu(t) + B_\tau u(t - \tau(t)) + D\zeta(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(s) = \phi(s), \quad \forall s \in [-\tau_2, 0] \end{cases} \quad (5.3.2)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$  and  $\zeta \in \mathbb{R}^q$  sont respectivement le vecteur d'état, de commande, de sortie et de perturbation variable et inconnue. Nous supposons que la commande est une fonction  $\mathcal{C}^1$  morceaux, et que le signal de perturbation vérifie la condition de domination :

$$\|\zeta(t, x, u)\| \leq \alpha_1(t, x, u), \quad (5.3.3)$$

où  $\alpha_1$  est une fonction scalaire positive et connue.  $\phi \in C^0([-\tau_2, 0], \mathbb{R}^n)$  représente les conditions initiales du système.

### 5.3.2 Observateurs à modes glissants

L'objectif est, ici, de déterminer un observateur d'état qui garantisse la robustesse de l'estimation par rapport au retard inconnu et à la perturbation  $\zeta$ . Dans ce but, nous faisons appel à la théorie des observateurs à entrée inconnue et des modes glissants.

Le principe de l'observateur à entrée inconnue consiste à concevoir un observateur tel que l'erreur d'observation soit découplée complètement de l'entrée inconnue du système [28, 38, 42, 75, 128]. L'idée du contrôle par modes glissants et de contraindre les trajectoires du système d'entrer et de rester après un temps fini dans un espace restreint appelé *surface de glissement* par le biais d'une action discontinue [146]. Le comportement résultant appelé *modes glissants* est alors soumis à des dynamiques particulières totalement imposées par les paramètres et l'équation qui détermine la surface de glissement. Le principal avantage d'une telle stratégie est la réduction de la dimension du problème. En effet, l'étude se réduit, dans le cas de l'observation, à l'espace complémentaire aux sorties du système. De plus il garantit des propriétés de robustesse par rapport à une classe de perturbations et d'incertitudes sur les paramètres qui satisfont à la condition de *recouvrement* (en anglais *matching*) [33]. Ce concept a été étendu au cas de l'estimation de l'état par un observateur pour des systèmes linéaires ou non [31, 32, 45, 37].

Plusieurs approches sont proposées dans la suite de ce chapitre. La première permet de construire un observateur indépendant des caractéristiques des retards. La seconde approche définit un premier observateur dont la convergence asymptotique et exponentielle vers le système étudié s'exprime sous forme de conditions LMI où apparaissent des caractéristiques du retard. La troisième présente des conditions LMI garantissant la convergence asymptotique et exponentielle de l'observateur en déterminant un retour de sortie dans la dynamique de l'observateur. Ces trois premières approches nécessitent que le système vérifie des conditions structurelles.

#### Observateur indépendant du retard

Cette approche est une première étape dans la réalisation d'observateur pour des systèmes à retards inconnus. Il nécessite que le système étudié vérifie certaines conditions structurelles qui rendent le résultat restrictif. Nous allons considérer que les termes retardés de (5.3.2) sont des perturbations que l'observateur à modes glissant doit contrôler. Pour cela il faut vérifier les conditions de *recouvrement*, c'est-à-dire que ces perturbations appartiennent à l'espace vectoriel défini par les sorties. Afin de montrer l'efficacité des observateurs à modes

glissants au cas des systèmes à retards inconnus, nous allons utiliser la forme canonique introduite dans [38]. L'erreur est réinjectée à la fois de manière continue et discontinue. Les hypothèses structurelles suivantes sont requises :

- A1.  $\text{rang}(C[A_\tau|B_\tau|D]) = \text{rang}([A_\tau|B_\tau|D]) = q$ ,
- A2.  $q \leq p \leq n$ ,
- A3. Le triplet  $\{A, [A_\tau|B_\tau|D], C\}$  est à minimum de phase.

Avec les hypothèses A1-A3 et en utilisant le même changement de coordonnées que dans [38] (Chapitre 6), le système s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= A_{11}x_1(t) + A_{12}y(t) + B_1u(t), \\ \dot{y}(t) &= A_{21}x_1(t) + A_{22}y(t) + B_2u(t) + G_{x_1}x_1(t - \tau(t)) + G_y y(t - \tau(t)) \\ &+ G_u u(t - \tau(t)) + D_1\zeta(t), \end{cases} \quad (5.3.4)$$

où  $x_1 \in \mathbb{R}^{n-p}$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$  et où la matrice  $A_{11}$  est de Hurwitz. Nous retrouvons ici le fait que les conditions A1 – A2 garantissent que l'état non mesuré  $x_1$  n'est pas affecté par les termes retardés. La condition A3 est une garantie de convergence supplémentaire. Elle requiert que, dans le système (5.3.4), la matrice  $A_{11}$  soit de Hurwitz.

Sous cette forme il est possible de construire un observateur à modes glissants. Il se présente alors de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) &= A_{11}\hat{x}_1(t) + A_{12}y(t) + B_1u(t), \\ \dot{\hat{y}}(t) &= A_{21}\hat{x}_1(t) + A_{22}y(t) + B_2u(t) + G_{x_1}\hat{x}_1(t - \hat{\tau}) + G_y\hat{y}(t - \hat{\tau}) \\ &+ G_u u(t - \hat{\tau}) - H(y(t) - \hat{y}(t)) + \nu, \end{cases} \quad (5.3.5)$$

où le gain linéaire  $H$  est une matrice de Hurwitz et où  $\nu$  correspond à la fonction discontinue qui reste à définir. Le retard qui est implanté dans l'observateur  $\hat{\tau} \leq \tau_2$  est une valeur qui peut être choisie selon les caractéristiques du retard. Par exemple,  $\hat{\tau}$  peut prendre la valeur moyenne du retard réel ou être une fonction variant dans le temps. En définissant les erreurs d'estimation de l'observateur  $e_y = y(t) - \hat{y}(t)$  et  $e_1 = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$ , les dynamiques des erreurs sont alors régies par les équations :

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) &= A_{11}e_1(t), \\ \dot{e}_y(t) &= A_{21}e_1(t) + He_y(t) + \nu + \xi(t) + D_1\zeta(t), \end{cases} \quad (5.3.6)$$

où la perturbation  $\xi' : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^p$  est définie par :

$$\begin{aligned} \xi(t) &= G_{x_1}(x_1(t - \tau(t)) - \hat{x}_1(t - \hat{\tau})) + G_y(y(t - \tau(t)) - \hat{y}(t - \hat{\tau})) \\ &+ G_u(u(t - \tau(t)) - u(t - \hat{\tau})). \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

Dans cette partie, la fonction  $\xi(t)$  est supposée bornée par une fonction scalaire connue  $\alpha_2$  :

$$\|\xi(t)\| \leq \alpha_2(t, y, u).$$

Sachant que la matrice  $H$  est de Hurwitz, Il existe une matrice  $P_y \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , définie positive, telle que :

$$P_y H + H^T P_y < 0.$$

La fonction,  $\nu$ , discontinue et dépendant de la sortie est maintenant définie par :

$$\nu = \begin{cases} -\rho(t, y, u) \frac{P_y e_y(t)}{\|P_y e_y(t)\|} & \text{si } e_y \neq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où le gain  $\rho$  est donnée par :

$$\rho = \|D_1\| \alpha_1(t, y, u) + \alpha_2(t, y, u) + \gamma, \quad \gamma > 0.$$

D'après la Proposition 6.1 de [38], on montre, en utilisant des arguments de stabilité de type Lyapunov, que la surface de glissement est atteinte en temps fini et que l'erreur sur l'état complet est quadratiquement stable. Cette proposition assure donc la stabilité asymptotique de l'observateur (5.3.5) même si le retard est inconnu.

**Remarque 5.3.1** Dans [141], une formulation sous forme de LMI a été introduite pour exploiter les degrés de liberté additionnels dans le choix des gains linéaires et de la fonction discontinue  $\nu$ .

Même si cette première approche introduit le concept d'observateur à modes glissants pour les systèmes à retards inconnus, il n'en reste pas moins que plusieurs problèmes peuvent apparaître. Premièrement, on remarque que le retard estimé,  $\hat{\tau}$ , introduit dans la dynamique de l'observateur, n'apparaît pas dans la condition de stabilité. Cela signifie que cette condition doit être vérifiée quelque soit la forme et la valeur du retard, ce qui préfigure d'un résultat probablement conservatif (cf [111]). Ensuite, la fonction de perturbation  $\xi$ , définie par les équations (5.3.6)-(5.3.7), peut prendre des valeurs importantes, d'autant plus que la fonction  $\alpha_2(t, y, u)$  peut simplement ne pas exister ou être difficile à évaluer dans la mesure où l'on ne dispose pas d'outils théoriques pour la déterminer.

Cette première approche est donc limitée. Cependant, elle a permis de se familiariser avec le concept d'observateur à modes glissants. L'idée principale de l'observation à modes glissants est de considérer les termes retardés comme des perturbations. Cependant avec cette méthode, nous nous contentons simplement de dire que les termes que nous ne connaissons pas sont des perturbations, ce qui, comme nous l'avons déjà mentionné, conduit à des résultats conservatifs. Il serait donc plus pertinent de réduire ce conservatisme en diminuant la taille des perturbations liées au retard inconnu et de faire intervenir des conditions de stabilité faisant intervenir des caractéristiques de celui-ci.

### Observateur dépendant du retard

Dans les prochains paragraphes, nous considérons toujours le même système (5.3.4) et le même observateur (5.3.5) lui est associé. Mais, afin de réduire le conservatisme des conditions de stabilité, une nouvelle fonction discontinue  $\nu$  est introduite. Pour cela une nouvelle fonction de perturbation  $\xi'$ , qui remplace  $\xi$  dans (5.3.7), est définie. Cette fonction est choisie de telle sorte qu'elle dépende uniquement des variables connues au niveau de l'observateur. Ainsi la fonction  $\alpha_2$  qui majore la perturbation  $\xi$  est remplacée par une nouvelle fonction  $\alpha'_2$ , qui est plus simple à mettre en oeuvre. De plus ce second observateur fait apparaître la valeur  $\tau_2$  du retard, ce qui réduit le conservatisme des conditions de stabilité.

La dynamique de l'erreur peut alors être sensiblement modifiée de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = A_{11}e_1(t), \\ \dot{e}_y(t) = A_{21}e_1(t) + G_{x_1}e_1(t - \tau(t)) + G_y e_y(t - \tau(t)) \\ \quad + H e_y(t) + \nu + \xi'(t) + D_1 \zeta(t), \end{cases} \quad (5.3.8)$$

où la perturbation  $\xi' : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^p$  est alors définie par :

$$\begin{aligned} \xi'(t) = & G_{x_1}(\hat{x}_1(t - \tau(t)) - \hat{x}_1(t - \hat{\tau})) + G_y(\hat{y}(t - \tau(t)) - \hat{y}(t - \hat{\tau})) \\ & + G_u(u(t - \tau(t)) - u(t - \hat{\tau})), \end{aligned}$$

et qui peut aussi s'écrire :

$$\xi'(t) = \begin{bmatrix} G_{x_1} & G_y & G_u \end{bmatrix} \int_{t-\hat{\tau}}^{t-\tau(t)} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(s) \\ \dot{\hat{y}}(s) \\ \dot{u}(s) \end{bmatrix} ds. \quad (5.3.9)$$

On suppose que  $\xi'$  est bornée par une fonction scalaire  $\alpha'_2$  :

$$\|\xi'(t)\| \leq \alpha'_2(t, \hat{y}, \hat{x}_1, u). \quad (5.3.10)$$

**Remarque 5.3.2** Comparé à (5.3.7), la seule variable inconnue est le retard qui agit sur (5.3.9) est le retard  $\tau(t)$ . Il est donc plus facile d'obtenir une borne  $\alpha'$  de la perturbation  $\xi'$ .

**Remarque 5.3.3** On remarque, d'autre part, que plus l'estimation du retard  $\hat{\tau}$  est proche de  $\tau(t)$ , plus la valeur de la fonction  $\alpha'_2$  sera petite. Cela vient de l'équation (5.3.9) où l'on remarque que si  $\hat{\tau} = \tau(t)$  alors  $\xi' = 0$ . En d'autres termes, plus l'estimation du retard est juste, plus le gain de l'observateur est réduit.

La fonction discontinue de réinjection des sorties est maintenant donnée par :

$$\nu = \begin{cases} -\rho'(t, y, u) \frac{P_y e_y(t)}{\|P_y e_y(t)\|} & \text{si } e_y \neq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.3.11)$$

où le "gain discontinu"  $\rho'$  de l'observateur à modes glissants, inspiré de celui défini dans la loi de contrôle de [51], est donné par :

$$\rho'(t, y, u) = \|D_1\| \alpha_1(t, x, u) + \alpha'_2(t, \hat{x}_1, \hat{y}, u) + \|G_y\| \sup_{s \in [-\tau_2, 0]} \|e_y(t + s)\| + \gamma', \quad (5.3.12)$$

où  $\gamma'$  est un réel positif.

**Théorème 5.3.4** Sous réserve que les conditions A1-A3 et (5.3.10) soient satisfaites, la solution  $e(t) = 0$  du système (5.3.8) est asymptotiquement stable pour tout retard variable  $\tau(t) \leq \tau_2$  s'il existe des matrices symétriques définies positives  $P_1$  et  $R_1 \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ ,  $P_y \in \mathbb{R}^{p \times p}$  et une matrice symétrique  $Z_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$  telles que les conditions LMI suivantes soient vérifiées :

$$\Psi_0 = \begin{bmatrix} A_{11}^T P_1 + P_1 A_{11} + \tau_2 A_{11}^T R_1 A_{11} & (A_{21} + G_{x_1})^T P_y \\ P_y (A_{21} + G_{x_1}) & H^T P_y + P_y H + \tau_2 Z_2 \end{bmatrix} < 0, \quad (5.3.13)$$

et

$$\begin{bmatrix} R_1 & G_{x_1}^T P_y \\ P_y G_{x_1} & Z_2 \end{bmatrix} \geq 0. \quad (5.3.14)$$

**Démonstration.** Considérons la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$V(t) = e_1^T(t) P_1 e_1(t) + e_y^T(t) P_y e_y(t) + \int_{-\tau_2}^0 \int_{t+\theta}^t e_1^T(s) R_1 \dot{e}_1(s) ds d\theta. \quad (5.3.15)$$

On peut alors utiliser la formule de Leibniz (5.3.16), ce qui permet d'écrire :

$$e_1(t - \tau(t)) = e_1(t) - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{e}_1(s) ds. \quad (5.3.16)$$

Ainsi, par dérivation de (5.3.15) le long des trajectoires de (5.3.8), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & e_1^T(t)[A_{11}^T P_1 + P_1 A_{11}]e_1(t) + e_y^T(t)[H^T P_y + P_y H]e_y(t) + 2e_y^T(t)P_y(A_{21} + G_{x_1})e_1(t) \\ & + \eta_1(t) + \eta_2(t) + \tau_2 \dot{e}_1^T(t)R_1 \dot{e}_1(t) - \int_{t-\tau_2}^t \dot{e}_1^T(s)R_1 \dot{e}_1(s) ds - 2\rho'(t, y, u)\|P_y e_y(t)\|, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \eta_1(t) &= -2e_y^T(t)P_y G_{x_1} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{e}_1(s) ds, \\ \eta_2(t) &= 2e_y^T(t)P_y [D_1 \zeta(t) + \xi'(t) + G_y e_y(t - \tau(t))]. \end{aligned}$$

La condition LMI (5.3.14) permet d'écrire, pour tout vecteur  $X$  :

$$X^T \begin{bmatrix} R_1 & G_{x_1}^T P_y \\ P_y G_{x_1} & Z_2 \end{bmatrix} X \geq 0.$$

En développant cette relation avec  $X = \begin{bmatrix} \dot{e}_1(s) \\ e_y(t) \end{bmatrix}$ , on obtient :

$$-2e_y(t)P_y G_{x_1} \dot{e}_1(s) \leq e_y(t)^T Z_2 e_y(t) + \dot{e}_1^T(s)R_1 \dot{e}_1(s).$$

Ce qui, en intégrant donne :

$$\begin{aligned} \eta_1(t) &\leq \int_{t-\tau(t)}^t e_y^T(t)Z_2 e_y(t) ds + \int_{t-\tau(t)}^t \dot{e}_1^T(s)R_1 \dot{e}_1(s) ds, \\ \eta_2(t) &\leq \tau_2 e_y^T(t)Z_2 e_y(t) + \int_{t-\tau_2}^t \dot{e}_1^T(s)R_1 \dot{e}_1(s) ds. \end{aligned} \quad (5.3.17)$$

Sachant que  $\xi'$  et  $\zeta$  sont des fonctions bornées par  $\alpha'_2$  et  $\alpha_1$ , on a :

$$\eta_2(t) \leq 2\|P_y e_y(t)\| (\|D_1\|\alpha_1(t, x, u) + \alpha'(t, \hat{x}_1, \hat{y}, u) + \|G_y\| \|e_y(t - \tau(t))\|),$$

et la définition (5.3.12) de  $\rho'$  conduit finalement à la majoration :

$$\eta_2(t) - 2\rho'(t, y, u)\|P_y e_y(t)\| \leq -2\gamma'\|P_y e_y(t)\|. \quad (5.3.18)$$

En prenant en compte (5.3.17), (5.3.18) et en sachant que  $\dot{e}_1(t) = A_{11}e_1(t)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & e_1^T(t)[A_{11}^T P_1 + P_1 A_{11}]e_1(t) + e_y^T(t)[H^T P_y + P_y H]e_y(t) + 2e_y^T(t)P_y(A_{21} + G_{x_1})e_1(t) \\ & + \tau_2 \dot{e}_1^T(t)A_{11}^T R_1 A_{11} e_1(t) + \tau_2 e_y^T(t)Z_2 e_y(t) - 2\gamma'\|P_y e_y(t)\|, \end{aligned}$$

qui s'écrit aussi :

$$\dot{V}(t) \leq \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_y(t) \end{bmatrix}^T \Psi_0 \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_y(t) \end{bmatrix} - 2\gamma'\|P_y e_y(t)\|.$$

Si (5.3.13) est vérifiée, la dérivée temporelle de (5.3.15) est définie négative. La dynamique de l'erreur est donc asymptotiquement stable. ■

### Convergence en temps fini vers la surface de glissement

**Corollaire 5.3.5** *En supposant que l'observateur vérifie le Théorème 5.3.4, le système entre en régime glissant sur la surface  $S_0 = \{e_y = 0\}$  en temps fini.*

**Démonstration.** On considère la fonction :

$$V_2(t) = e_y^T(t)P_y e_y(t).$$

La différenciation de  $V_2$  le long des trajectoires de (5.3.8) conduit à :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) = & e_y^T(t)(H^T P_y + P_y H)e_y(t) + 2e_y^T(t)P_y A_{21}e_1(t) \\ & + 2e_y^T(t)P_y [G_{x_1}e_1(t - \tau(t)) + G_y e_y(t - \tau(t)) + D_1\zeta(t) + \xi'(t) + \nu]. \end{aligned}$$

Sachant que  $H$  est une matrice de Hurwitz qui vérifie (5.3.13), on sait que la matrice  $H^T P_y + P_y H$  est définie négative et (5.3.11), on peut écrire la majoration suivante :

$$\dot{V}_2(t) \leq 2\|P_y e_y(t)\| [\|A_{21}e_1(t) + G_{x_1}e_1(t - \tau(t))\| - \gamma'].$$

D'après le Théorème 5.3.4, l'erreur  $e_1$  est asymptotiquement stable. Il existe donc un instant  $t_0$  et un réel positif  $\delta$  tels que :

$$\forall t \geq t_0, \quad \|A_{21}e_1(t) + G_{x_1}e_1(t - \tau(t))\| \leq \gamma' - \delta,$$

ce qui conduit à :

$$\forall t \geq t_0, \quad \dot{V}_2(t) \leq -2\delta\|P_y e_y(t)\| \leq -2\delta\sqrt{\lambda_{\min}(P_y)}\sqrt{V_2(t)}.$$

où  $\lambda_{\min}(P_y)$  est la plus petite valeur propre de  $P_y$ . En intégrant cette dernière inégalité différentielle, on constate que le système entre en régime glissant sur la surface  $S_0$  en temps fini. ■

### 5.3.3 Retour de sortie sur la partie non-mesurable

#### Présentation du Problème

Pour la synthèse de l'observateur précédent, les conditions de *recouvrement*  $A$  ont permis de transformer le système initial (5.3.2) pour l'exprimer sous la forme (5.3.4). Une condition nécessaire de la convergence de l'observateur vers le système réel est que la matrice  $A_{11}$  soit de Hurwitz. Il est possible de réduire cette condition restrictive en modifiant les conditions de recouvrements  $A$ . L'idée de cette nouvelle approche est de faire intervenir la sortie  $y$  par l'intermédiaire de la fonction discontinue  $\nu$  dans la dynamique des variables  $x_1$ , complémentaires aux sorties. Nous allons donc considérer le système à retard sur l'état et sur l'entrée (5.3.2). Les nouvelles hypothèses structurelles requises pour la synthèse de l'observateur sont les suivantes :

A'1.  $\text{rank}(C[A_\tau|B_\tau|D]) = \text{rank}([A_\tau|B_\tau|D]) \triangleq q,$

A'2.  $q < p \leq n,$

A'3. Le triplet  $(A, [A_\tau|B_\tau|D], C)$  n'a pas de zéros invariants.

La condition A1 garantit qu'en utilisant le même changement de coordonnées que dans [38] (Chapitre 6 et présenté en annexe D) le système (5.3.2) est équivalent à :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t), \\ \dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t) + G_1x_1(t - \tau(t)) \\ \quad + G_2x_2(t - \tau(t)) + G_u u(t - \tau(t)) + D_1\zeta(t), \\ y(t) = Tx_2(t), \end{cases} \quad (5.3.19)$$



où  $x_1 \in \mathbb{R}^{n-p}$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}^p$  et où  $G_1, G_2, G_u$  sont de la forme :

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{G}_1 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{G}_2 \end{bmatrix}, G_u = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{G}_u \end{bmatrix}, A_{21} = \begin{bmatrix} A_{211} \\ A_{212} \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{D}_1 \end{bmatrix},$$

où  $\bar{G}_1 \in \mathbb{R}^{q \times (n-p)}$ ,  $\bar{G}_2 \in \mathbb{R}^{q \times p}$ ,  $\bar{G}_u \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ,  $A_{211} \in \mathbb{R}^{(p-q) \times (n-p)}$ ,  $A_{212} \in \mathbb{R}^{q \times (n-p)}$  et  $T$  est une matrice orthogonale.

Les conditions  $A'$  permettent de décomposer le système en deux sous-parties. La première, représentant les variables non mesurables  $x_1$ , n'est pas affectée par les termes retardés et les perturbations. La seconde correspond aux variables mesurables par la sortie  $y$ . Dans l'approche précédente, les conditions structurelles étaient  $A'1$ ,  $A'2$  et  $\{A, [A_\tau | B_\tau], C\}$  est à minimum de phase. Cette dernière est remplacée par  $A'3$ , moins exigeante.

### Synthèse de l'observateur

L'observateur à mode glissant proposé est :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = A_{11}\hat{x}_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t) - A_{11}Le_2(t) + LT^T(G_1Te_2(t) + \nu(t)), \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = A_{21}\hat{x}_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t) + A_{21}Le_2(t) + G_1\hat{x}_1(t - \hat{\tau}) + G_2x_2(t - \hat{\tau}) \\ \quad + G_uu(t - \hat{\tau}) - T^T(G_1(Te_2(t) - \hat{y}(t)) + \nu) + G_1Le_2(t - \hat{\tau}), \\ \hat{y}(t) = T\hat{x}_2(t), \end{cases} \quad (5.3.20)$$

où le gain linéaire  $G_l$  est une matrice de Hurwitz,  $L$  est de la forme  $[\bar{L} \ 0]$ , avec  $\bar{L} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (p-q)}$ . On remarque dans un premier temps que la matrice  $L$  est orthogonale aux matrices  $G_1, G_2, G_u$  et  $D_1$ . Le retard utilisé dans (5.3.20),  $\hat{\tau} \leq \tau_2$ , est une valeur qui peut-être choisie arbitrairement ou, si possible, en fonction de caractéristiques pressenties du retard. Il se peut aussi que ce retard  $\hat{\tau}$  soit variable au cours du temps. Par exemple,  $\hat{\tau}$  pourrait correspondre à une estimation "nominale" du retard variant. On remarque que les termes non retardés qui dépendent de  $x_2$  sont connus car ils sont proportionnels à la sortie  $y$ . La fonction discontinue  $\nu$  est de la forme :

$$\nu = \begin{cases} -\rho(t, y, u) \frac{P_y e_y(t)}{\|P_y e_y(t)\|} & \text{si } e_y \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le gain  $\rho$  reste à définir. On peut alors introduire les variables d'erreur  $e_y = y(t) - \hat{y}(t)$ ,  $e_1 = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$  et  $e_2 = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$ , qui vérifient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = A_{11}e_1(t) - L(T^T G_1 T e_2(t) + T^T \nu(t)) + A_{11}L e_2(t), \\ \dot{e}_2(t) = A_{21}e_1(t) + G_1 e_1(t - \tau(t)) + D_1 \zeta(t) + (T^T G_1 T + A_{21}L)e_2(t) \\ \quad + \xi_0(t) - G_1 L e_2(t - \hat{\tau}) + T^T \nu, \end{cases}$$

où la fonction de perturbation  $\xi_0 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^q$  est alors égale à :

$$\begin{aligned} \xi_0(t) = & G_1(\hat{x}_1(t - \tau(t)) - \hat{x}_1(t - \hat{\tau})) + G_2(x_2(t - \tau(t)) - x_2(t - \hat{\tau})) \\ & + G_u(u(t - \tau(t)) - u(t - \hat{\tau})). \end{aligned}$$

En utilisant le changement de coordonnées  $T_L$  suivant  $T_L = \begin{bmatrix} I_{n-p} & L \\ 0 & T \end{bmatrix}$ , on définit les nouvelles coordonnées  $\bar{e}_1$  et  $\bar{e}_2 = e_y$  dont les dynamiques sont :

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_1(t) = (A_{11} + LA_{21})\bar{e}_1(t), \\ \dot{\bar{e}}_2(t) = TA_{21}\bar{e}_1(t) + TG_1\bar{e}_1(t - \tau(t)) + TG_1L(e_2(t - \tau(t)) - e_2(t - \hat{\tau})) \\ \quad + G_l\bar{e}_2(t) + T\xi_0(t) + TD_1\zeta(t) + \nu, \end{cases} \quad (5.3.21)$$

Comme précédemment, le terme retardé  $e_2(t - \tau(t)) - e_2(t - \hat{\tau})$  est considéré comme une perturbation. On obtient :

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_1(t) = (A_{11} + LA_{21})\bar{e}_1(t), \\ \dot{\bar{e}}_2(t) = TA_{21}\bar{e}_1(t) + TG_1\bar{e}_1(t - \tau(t)) + G_1\bar{e}_2(t) + \nu + T\xi(t) + TD_1\zeta(t), \end{cases} \quad (5.3.22)$$

où la nouvelle fonction de perturbation due au retard inconnu est  $\xi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^p$ , définie par :

$$\xi(t) = \xi_0(t) + TG_1L(e_2(t - \tau(t)) - e_2(t - \hat{\tau})),$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 & G_1L \end{bmatrix} \int_{t-\hat{\tau}}^{t-\tau(t)} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(s) \\ \dot{x}_2(s) \\ \dot{e}_2(s) \end{bmatrix} ds + G_u(u(t - \tau(t)) - u(t - \hat{\tau})).$$

$\xi$  est une fonction dépendant uniquement de  $\hat{x}_1, \dot{x}_2, \dot{e}_2$  et  $u$  qui sont des variables connues par l'observateur. Il est alors légitime de supposer l'existence d'une fonction scalaire  $\alpha_2$ , connue qui vérifie :

$$\|\xi(t)\| \leq \alpha_2(t, \hat{x}_{1t}, x_{2t}, e_{2t}, u).$$

Il est maintenant possible de donner une expression de la fonction  $\rho$  en se référant aux techniques introduites dans le cadre de la synthèse de loi de commande [51]. Soit  $\gamma$  un réel positif, on pose :

$$\rho(t, \hat{x}_1, x_2, u) = \|D_1\|\alpha_1(t, \hat{x}_1, x_2, u) + \alpha_2(t, \hat{x}_{1t}, x_{2t}, e_{2t}, u) + \gamma, \quad (5.3.23)$$

**Théorème 5.3.6** [131] *Sous les conditions A et (5.3.10) et pour toute matrice de Hurwitz  $G_1$ , le système (5.3.22) est asymptotiquement stable pour tout retard  $\tau(t) \leq \tau_2$  s'il existe des matrices symétriques définies positives  $P_1$  et  $R_1 \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ ,  $P_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , une matrice symétrique  $Z_2 \in \mathbb{R}^{q \times q}$  et une matrice  $W \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (p-q)}$  telles que les conditions LMI suivantes soient réalisées :*

$$\begin{bmatrix} \psi_0 & A_{11}^T P_1 + A_{211}^T W^T & (A_{21} + G_1)^T T^T P_2 \\ * & -2P_1 + \tau_2 R_1 & 0 \\ * & * & G_1^T P_2 + P_2 G_1 + \tau_2 Z_2 \end{bmatrix} < 0, \quad (5.3.24)$$

$$\begin{bmatrix} R_1 & (TG_1)^T P_2 \\ P_2 TG_1 & Z_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (5.3.25)$$

où  $\psi_0 = A_{11}^T P_1 + P_1 A_{11} + A_{211}^T W^T + W A_{211}$ .

Le gain  $\bar{L}$  est donné par  $\bar{L} = P_1^{-1}W$ .

**Démonstration.** Soit la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii :

$$V(t) = \bar{e}_1^T(t)P_1\bar{e}_1(t) + \bar{e}_2^T(t)P_2\bar{e}_2(t) + \int_{-\tau_2}^0 \int_{t+\theta}^t \bar{e}_1^T(s)R_1\dot{\bar{e}}_1(s)dsd\theta. \quad (5.3.26)$$

En utilisant la transformation suivante :

$$\bar{e}_1(t - \tau(t)) = \bar{e}_1(t) - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{\bar{e}}_1(s)ds, \quad (5.3.27)$$

et en dérivant (5.3.26), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \bar{e}_1^T(t)[(A_{11} + LA_{21})^T P_1 + P_1(A_{11} + LA_{21})]\bar{e}_1(t) + \bar{e}_2^T(t)[G_l^T P_2 + P_2 G_l]\bar{e}_2(t) \\ & + 2\bar{e}_2^T(t)P_2 T(A_{21} + G_1)\bar{e}_1(t) + \tau_2 \dot{\bar{e}}_1^T(t)R_1 \dot{\bar{e}}_1(t) + \eta_1(t) + \eta_2(t) - \int_{t-\tau_2}^t \dot{\bar{e}}_1^T(s)R_1 \dot{\bar{e}}_1(s)ds, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \eta_1(t) &= -2\bar{e}_2^T(t)P_2 T G_1 \int_{t-\tau(t)}^t \dot{\bar{e}}_1(s)ds, \\ \eta_2(t) &= 2\bar{e}_2^T(t)P_2 T [D_1 \zeta(t) + \xi(t) - 2\rho(t, y, u)\|P_2 \bar{e}_2(t)\|]. \end{aligned}$$

Les conditions LMI (5.3.25) permettent d'écrire, pour tout vecteur  $X$  :

$$X^T \begin{bmatrix} R_1 & (TG_1)^T P_2 \\ P_2 T G_1 & Z_2 \end{bmatrix} X \geq 0,$$

En particulier, pour  $X = \begin{bmatrix} \dot{\bar{e}}_1(s) \\ \bar{e}_2(t) \end{bmatrix}$ , on a :

$$-2\bar{e}_2(t)P_2 T G_1 \dot{\bar{e}}_1(s) \leq \bar{e}_2(t)^T Z_2 \bar{e}_2(t) + \dot{\bar{e}}_1^T(s)R_1 \dot{\bar{e}}_1(s).$$

Puis, en intégrant cette relation par rapport à la variable  $s$ , on majore  $\eta_1(t)$  :

$$\begin{aligned} \eta_1(t) &\leq \int_{t-\tau(t)}^t \bar{e}_2^T(t)Z_2 \bar{e}_2(t)ds + \int_{t-\tau(t)}^t \dot{\bar{e}}_1^T(s)R_1 \dot{\bar{e}}_1(s)ds, \\ \eta_1(t) &\leq \tau_2 \bar{e}_2^T(t)Z_2 \bar{e}_2(t) + \int_{t-\tau_2}^t \dot{\bar{e}}_1^T(s)R_1 \dot{\bar{e}}_1(s)ds. \end{aligned} \quad (5.3.28)$$

D'après la définition (5.3.23) de  $\rho$  et sachant que  $T$  est orthogonale :

$$\eta_2(t) - 2\rho(t, y, u)\|P_2 \bar{e}_2(t)\| \leq -2\gamma\|P_2 \bar{e}_2(t)\|. \quad (5.3.29)$$

En tenant compte des majorations (5.3.28), (5.3.29) et sachant que  $\dot{\bar{e}}_1(t) = (A_{11} + \bar{L}A_{211})\bar{e}_1(t)$ ,  $\dot{V}$  est majorée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \bar{e}_1^T(t)(P_1(A_{11} + \bar{L}A_{211}) + (A_{11} + \bar{L}A_{211})^T P_1)\bar{e}_1(t) \\ &+ \bar{e}_2^T(t)P_2(A_{21} + G_1)\bar{e}_1(t) + \bar{e}_1^T(t)(A_{21} + G_1)^T P_2 \bar{e}_2(t) \\ &+ \bar{e}_2^T(t)(P_2 G_l + G_l^T P_2)\bar{e}_2(t) + \tau_2 \bar{e}_1^T(t)(A_{11} + LA_{21})^T R_1 (A_{11} + LA_{21})\bar{e}_1(t) \\ &+ \tau_2 \bar{e}_2^T(t)Z_2 \bar{e}_2(t) - 2\gamma\|P_2 \bar{e}_2(t)\|, \end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\dot{V}(t) \leq \begin{bmatrix} \bar{e}_1(t) \\ \bar{e}_2(t) \end{bmatrix}^T \Psi \begin{bmatrix} \bar{e}_1(t) \\ \bar{e}_2(t) \end{bmatrix} - 2\gamma\|P_2 \bar{e}_2(t)\|,$$

avec  $\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 & (A_{21} + G_1)^T T^T P_2 \\ P_2 T(A_{21} + G_1) & G_l^T P_2 + P_2 G_l + \tau_2 Z_2 \end{bmatrix}$  et où

$$\psi_1 = (A_{11} + \bar{L}A_{211})^T P_1 + P_1(A_{11} + \bar{L}A_{211}) + \tau_2(A_{11} + \bar{L}A_{211})^T R_1 (A_{11} + \bar{L}A_{211})$$

Cette condition n'est pas du type LMI car elle comporte des termes non linéaires dans la première ligne et la première colonne. Cependant, il est nécessaire que cette composante soit définie négative pour garantir la négativité de  $\dot{V}$ . En utilisant le Lemme 1, on transforme ce problème en LMI.

$$\begin{bmatrix} \psi_0 & (A_{11} + \bar{L}A_{211})^T Y^T & (A_{21} + G_1)^T T^T P_2 \\ * & -Y - Y^T + \tau_2 R_1 & 0 \\ * & * & G_l^T P_2 + P_2 G_l + \tau_2 Z_2 \end{bmatrix} < 0. \quad (5.3.30)$$

En imposant  $Y = P_1$  et en définissant  $W = P_1 \bar{L}$ , la condition LMI du théorème apparaît. Finalement, si (5.3.24) and (5.3.25) sont satisfaites, (5.3.30) est aussi vérifiée. Ainsi la dynamique de l'erreur est asymptotiquement stable. ■

### Propriétés dynamiques

**Corollaire 5.3.7** *D'après la synthèse de l'observateur du Théorème 1, le système entre en régime glissant sur la surface  $S_0 = \{\bar{e}_2 = 0\}$  en temps fini.*

**Démonstration.** Soit la fonction de Lyapunov candidate :

$$V_2(t) = \bar{e}_2^T(t) P_2 \bar{e}_2(t) \quad (5.3.31)$$

En différenciant (5.3.31) le long de (5.3.21), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) = & \bar{e}_2^T(t) (G_l^T P_2 + P_2 G_l) \bar{e}_2(t) + 2\bar{e}_2^T(t) P_2 T [T^T \nu \\ & + A_{21} \bar{e}_1(t) + G_1 \bar{e}_1(t - \tau(t)) + D_1 \zeta(t) + \xi(t)]. \end{aligned}$$

Le fait que  $G_l$  est de Hurwitz et (5.3.11) conduisent à la majoration suivante :

$$\dot{V}_2(t) \leq 2\|P_2 \bar{e}_2(t)\| [\|A_{21} e_1(t) + G_1 e_1(t - \tau(t))\| - \gamma].$$

D'après le Théorème 1, l'erreur  $\bar{e}_1$  est asymptotiquement stable. Ainsi, il existe un temps  $t_0$  et un réel positif  $\delta$  tels que  $\forall t \geq t_0$ ,  $\|A_{21} e_1(t) + G_1 e_1(t - \tau(t))\| \leq \gamma - \delta$ . Ceci conduit à :

$$\begin{aligned} \forall t \geq t_0, \quad \dot{V}_2(t) & \leq -2\delta \|P_2 \bar{e}_2(t)\| \\ & \leq -2\delta \sqrt{\lambda_{\min}(P_2)} \sqrt{V_2(t)}. \end{aligned}$$

où  $\lambda_{\min}(P_2)$  est la plus petite valeur propre de  $P_2$ . En intégrant cette dernière inégalité différentielle, on conclue que le système entre en régime glissant sur la surface  $S_0$  en temps fini. ■

## 5.4 $\alpha$ -stabilité des observateurs à modes glissants

### 5.4.1 Observateur $\alpha$ -stable

Imposer un critère d' $\alpha$ -stabilité est une technique intéressante pour caractériser la convergence de l'observateur. En effet, généralement l'estimation de l'état est une donnée utilisée par le contrôleur pour déterminer la nouvelle valeur de contrôle. Plus l'estimation est fine, plus la commande calculée sera pertinente. Dans cette partie, la convergence de l'observateur est améliorée en imposant un critère de convergence exponentielle. En dépit du retard variable et inconnu, les théorèmes suivants assurent que la dynamique de l'erreur est  $\alpha$ -stable. La stabilité exponentielle est un moyen d'assurer la rapidité de convergence de l'observateur. Comme dans [113],[130], pour tout  $\alpha > 0$ , le système (5.3.8) est dit  $\alpha$ -stable, ou "exponentiellement stable et de degré de convergence  $\alpha$ ", s'il existe un réel  $\beta \geq 1$  tel que les solutions  $e(t; t_0, \phi)$ , pour toute condition initiale  $\phi$ , vérifient :

$$|e(t, t_0, \phi)| \leq \beta |\phi| e^{-\alpha(t-t_0)}.$$

En introduisant la nouvelle variable  $e_\alpha(t) = e^{\alpha t} e(t)$  dans (5.3.8), où  $\alpha$  est un réel positif, la convergence asymptotique de la variable  $e_\alpha$  implique la convergence exponentielle de la variable initiale  $e$  vers la solution 0,

avec un degré de convergence  $\alpha$ . L'équation (5.3.8) devient :

$$\begin{cases} \dot{e}_{\alpha 1}(t) = (A_{11} + \alpha I_{(n-p)})e_{\alpha 1}(t), \\ \dot{e}_{\alpha y}(t) = (H + \alpha I_p)e_{\alpha y}(t) + e^{\alpha t}G_y e_y(t - \tau(t)) + A_{21}e_{\alpha 1}(t) + G_{x_1}e^{\alpha \tau(t)}e_{\alpha 1}(t - \tau(t)) \\ \quad + e^{\alpha t}[\nu + \xi'(t) + D_1\zeta(t)], \end{cases} \quad (5.4.1)$$

D'après l'hypothèse de bornitude faite sur le retard  $\tau(t)$ , on peut déduire les inégalités suivantes :

$$\beta_1 = 1 \leq e^{\alpha \tau(t)} \leq e^{\alpha \tau_2} = \beta_2.$$

A la manière de l'approche polytopique présentée dans le Chapitre 2, on peut alors définir les fonctions scalaires  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , ne dépendant que de la valeur du retard  $\tau(t)$ . On impose les conditions de convexité suivante :

$$\forall t \geq 0, \quad \lambda_1(t) + \lambda_2(t) = 1, \quad \lambda_1(t) \geq 0, \quad \lambda_2(t) \geq 0.$$

et telles que l'on puisse écrire :

$$e^{\alpha \tau(t)} = \lambda_1(t)\beta_1 + \lambda_2(t)\beta_2.$$

Ainsi les erreurs  $e_{\alpha 1}$  et  $e_{\alpha y}$  sont régies par le système polytopique suivant :

$$\begin{cases} \dot{e}_{\alpha 1}(t) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t) \{ (A_{11} + \alpha I_{(n-p)})e_{\alpha 1}(t) \}, \\ \dot{e}_{\alpha y}(t) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t) \{ (H + \alpha I_p)e_{\alpha y}(t) + A_{21}e_{\alpha 1}(t) + G_{x_1}\beta_i e_{\alpha 1}(t - \tau(t)) \\ \quad + \beta_i [G_y e_y(t - \tau(t)) + \nu + \xi'(t) + D_1\zeta(t)] \}, \end{cases} \quad (5.4.2)$$

**Théorème 5.4.1** *En supposant que les conditions A soient satisfaites, le système décrit par (5.3.8) est  $\alpha$ -stable pour tout réel positif  $\alpha$  et pour tout retard variable  $0 \leq \tau(t) \leq \tau_2$ , s'il existe des matrices symétriques définies positives  $P_1$  et  $R_1 \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ ,  $P_y \in \mathbb{R}^{p \times p}$  et une matrice symétrique  $Z_{2i} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  telles que les conditions LMI suivantes soient satisfaites pour  $i = 1, 2$  :*

$$\Psi_{0i} = \begin{bmatrix} \Psi_1 & (A_{21} + \beta_i G_{x_1})^T P_y \\ P_y (A_{21} + \beta_i G_{x_1}) & \Psi_2 \end{bmatrix} < 0, \quad (5.4.3)$$

$$\begin{bmatrix} R_1 & \beta_i G_{x_1}^T P_y \\ \beta_i P_y G_{x_1} & Z_{2i} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (5.4.4)$$

où

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= A_{11}^T P_1 + P_1 A_{11} + 2\alpha P_1 + \tau_2 (A_{11} + \alpha I_{(n-p)})^T R_1 (A_{11} + \alpha I_{(n-p)}), \\ \Psi_2 &= H^T P_y + P_y H + 2\alpha P_y + \tau_2 Z_2. \end{aligned}$$

**Démonstration.** La preuve de ce théorème est similaire à celle du Théorème 5.3.4. Considérons la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$V_\alpha(t) = e_{\alpha 1}^T(t)P_1 e_{\alpha 1}(t) + e_{\alpha y}^T(t)P_y e_{\alpha y}(t) + \int_{-\tau_2}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{e}_{\alpha 1}^T(s)R_1 \dot{e}_{\alpha 1}(s)dsd\theta. \quad (5.4.5)$$

On remarque que la relation (5.3.27) est toujours valide pour les variables  $e_{\alpha 1}$  et  $e_{\alpha y}$ . Ainsi, en différenciant (5.4.5) le long des trajectoires de (5.4.2), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_\alpha(t) &= \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t) (e_{\alpha 1}^T(t)[A_{11}^T P_1 + P_1 A_{11} + 2\alpha P_1]e_{\alpha 1}(t) + e_{\alpha y}^T(t)[H^T P_y + P_y H + 2\alpha P_y]e_{\alpha y}(t) \\ &\quad + 2e_{\alpha y}^T(t)P_y (A_{21} + \beta_i G_{x_1})e_{\alpha 1}(t) + \eta'_{1i}(t) + \eta'_2(t) - 2\rho'(t, y, u)\|P_y e_y(t)\|e^{\alpha t}) \\ &\quad + \tau_2 \dot{e}_{\alpha 1}^T(t)R_1 \dot{e}_{\alpha 1}(t) - \int_{t-\tau_2}^t \dot{e}_{\alpha 1}^T(s)R_1 \dot{e}_{\alpha 1}(s)ds, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\eta'_{1i}(t) &= -2\beta_i e_{\alpha y}^T(t) P_y G_{x_1} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{e}_{\alpha 1}(s) ds, \\ \eta'_2(t) &= 2e_{\alpha y}^T(t) P_y [D_1 \zeta(t) + \xi'(t) + G_y e_y(t - \tau(t))] e^{\alpha t}.\end{aligned}$$

Les conditions LMI (5.4.4) permettent d'écrire, pour  $i = 1, 2$  :

$$-2e_{\alpha y}(t) P_y \beta_i G_{x_1} \dot{e}_{\alpha 1}(s) \leq e_{\alpha y}^T(t) Z_{2i} e_{\alpha y}(t) + \dot{e}_{\alpha 1}^T(s) R_1 \dot{e}_{\alpha 1}(s).$$

Une intégration donne l'inégalité suivante :

$$\eta'_{1i}(t) \leq \tau_2 e_{\alpha y}^T(t) Z_{2i} e_{\alpha y}(t) + \int_{t-\tau_2}^t \dot{e}_{\alpha 1}^T(s) R_1 \dot{e}_{\alpha 1}(s) ds. \quad (5.4.6)$$

En utilisant la définition de  $\rho'$  et le fait que les fonctions de perturbations  $\xi'$  et  $\zeta$  sont bornées, on majore  $\eta'_2(t)$  de la manière suivante :

$$\eta'_2(t) - 2\rho'(t, y, u) \|P_y e_y(t)\| e^{\alpha t} \leq -2\gamma' \|P_y e_{\alpha y}(t)\|. \quad (5.4.7)$$

Les deux majorations, (5.3.17) et (5.3.18) et l'égalité suivante  $\dot{e}_{\alpha 1}(t) = (A_{11} + \alpha I_p) e_{\alpha 1}(t)$  conduisent à :

$$\dot{V}_\alpha(t) \leq \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t) \left\{ \begin{bmatrix} e_{\alpha 1}(t) \\ e_{\alpha y}(t) \end{bmatrix}^T \Psi_{0i} \begin{bmatrix} e_{\alpha 1}(t) \\ e_{\alpha y}(t) \end{bmatrix} \right\} - 2\gamma' \|P_y e_{\alpha y}(t)\|.$$

Ainsi, si la condition (5.4.3) est satisfaite, la dérivée de la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii est majorée par une combinaison convexe de deux termes définis négatifs.  $\dot{V}_\alpha(t)$  de (5.4.5) est négative. On en déduit que l'erreur (5.4.1) est asymptotiquement stable et le système initial (5.3.8) est  $\alpha$ -stable. ■

**Remarque 5.4.2** Si le Théorème 5.3.4 est vérifié pour un système donné et comme la matrice  $A_{11}$  est de Hurwitz, (5.4.3) et (5.4.4) sont faisables pour des valeurs de  $\alpha$  suffisamment petites.

**Remarque 5.4.3** Le Théorème 5.4.1 nécessite que la matrice  $A_{11}$  rende le sous système  $\dot{e}_1(t) = A_{11} e_1(t)$   $\alpha$ -stable, c'est-à-dire  $\alpha \leq \lambda_{\min}(A_{11})$ . Cela vient de la contrainte LMI (5.4.3).

## 5.4.2 Observateur à retour de sorties

**Théorème 5.4.4** [131] Sous les conditions A' et (5.3.10), le système (5.3.21) est  $\alpha$ -stable pour tout retard  $\tau(t) \leq \tau_2$  s'il existe des matrices symétriques définies positives  $P_1, R_1$  et  $R_2 \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ ,  $P_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , une matrice symétrique  $Z_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$  et une matrice  $W \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (p-q)}$  telles que les conditions LMI suivantes soient réalisées :

$$\begin{bmatrix} \psi_1 & A_{11}^T P_1 + A_{211}^T W^T + \alpha P_1 & (A_{21} + \beta_m G_1)^T T^T P_2 & 0 & 0 \\ * & -2P_1 + 2\tau_2 R_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & Y^T + Y + 2\alpha P_2 + \tau_2 Z_2 & \beta_d P_2 T G_1 & \tau_2 \beta_d P_2 T G_1 \\ * & * & * & -R_1 & 0 \\ * & * & * & * & -\tau_2 R_2 \end{bmatrix} < 0, \quad (5.4.8)$$

$$\begin{bmatrix} R_1 & \beta_m (T G_1)^T P_2 \\ \beta_m P_2 T G_1 & Z_2 \end{bmatrix} \geq 0. \quad (5.4.9)$$

où

$$\begin{aligned}\psi_1 &= A_{11}^T P_1 + P_1 A_{11} + 2\alpha P_1 + A_{211}^T W^T + W A_{211} + R_2 \\ \beta_m &= (1 + e^{\alpha \tau_2})/2, \quad \beta_d = (-1 + e^{\alpha \tau_2})/2\end{aligned}$$

Les gains sont donnés par  $\bar{L} = P_1^{-1} W$  et  $G_l = P_2^{-1} Y$ .

**Démonstration.** En introduisant la nouvelle variable  $\bar{e}_i^\alpha(t) = e^{\alpha t} \bar{e}_i(t)$  dans (5.3.21), la convergence asymptotique de  $\bar{e}^\alpha$  implique que  $\bar{e}$  soit  $\alpha$ -stable. L'équation (5.3.21) devient :

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_1^\alpha(t) = (A_{11} + LA_{21} + \alpha I_{(n-p)})\bar{e}_1^\alpha(t), \\ \dot{\bar{e}}_2^\alpha(t) = TA_{21}\bar{e}_1^\alpha(t) + (\nu + T\xi(t) + TD_1\zeta(t))e^{\alpha t} \\ \quad + e^{\alpha\tau(t)}TG_1\bar{e}_1^\alpha(t - \tau(t)) + (G_l + \alpha I_p)\bar{e}_2^\alpha(t); \end{cases} \quad (5.4.10)$$

En écrivant  $e^{\alpha\tau(t)} = \beta_m + \Delta(t)\beta_d$ , où  $\Delta(t)$  est une fonction réelle inconnue vérifiant  $\|\Delta(t)\| \leq 1$ ,  $\beta_m = (1 + e^{\alpha\tau_2})/2$ , et  $\beta_d = (-1 + e^{\alpha\tau_2})/2$ , La fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii candidate s'écrit :

$$V^\alpha(t) = \bar{e}_1^{\alpha T}(t)P_1\bar{e}_1^\alpha(t) + \bar{e}_2^{\alpha T}(t)P_2\bar{e}_2^\alpha(t) + 2\int_{-\tau_2}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\bar{e}}_1^{\alpha T}(s)R_1\dot{\bar{e}}_1^\alpha(s)dsd\theta. \quad (5.4.11)$$

En différenciant (5.4.11) le long de (5.4.10), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}^\alpha(t) = & \bar{e}_1^{\alpha T}(t)[P_1(A_{11} + \bar{L}A_{211} + \alpha I_{(n-p)}) + P_1(A_{11} + \bar{L}A_{211} + \alpha I_{(n-p)})^T P_1]\bar{e}_1^\alpha(t) \\ & + \bar{e}_2^{\alpha T}(t)[P_2(G_l + \alpha I_p) + (G_l + \alpha I_p)^T P_2]\bar{e}_2^\alpha(t) + 2\tau_2 \dot{\bar{e}}_1^{\alpha T} R_1 \dot{\bar{e}}_1^\alpha(t) \\ & + 2\bar{e}_2^{\alpha T}(t)P_2T(A_{21} + \beta_m G_1)\bar{e}_2^\alpha(t) - 2\int_{t-\tau(t)}^t \dot{\bar{e}}_1^{\alpha T} R_1 \dot{\bar{e}}_1^\alpha(t) \\ & + \eta_1^\alpha(t) + \eta_2^\alpha(t) + \eta_3^\alpha(t) + \eta_4^\alpha(t), \end{aligned}$$

où les fonctions  $\eta_i^\alpha$  sont définies par :

$$\begin{aligned} \eta_1^\alpha(t) &= 2\bar{e}_2^{\alpha T}(t)P_2\beta_m TG_1 \int_{t-\tau(t)}^t \dot{\bar{e}}_1^\alpha(s)ds, \\ \eta_2^\alpha(t) &= 2\bar{e}_2^{\alpha T}(t)P_2\beta_d\Delta(t)TG_1\dot{\bar{e}}_1^\alpha(t), \\ \eta_3^\alpha(t) &= 2\bar{e}_2^{\alpha T}(t)P_2\beta_d\Delta(t)TG_1 \int_{t-\tau(t)}^t \dot{\bar{e}}_1^\alpha(s)ds, \\ \eta_4^\alpha(t) &= 2\bar{e}_2^{\alpha T}(t)P_2(\nu + T\xi(t) + TD_1\zeta(t))e^{\alpha t}. \end{aligned}$$

En utilisant la même méthode que dans le Théorème 5.3.6, (5.4.9) permet de majorer  $\eta_1$  :

$$\eta_1^\alpha(t) \leq \tau_2 \bar{e}_2^{\alpha T}(t)Z_2\bar{e}_2^\alpha(t) + \int_{t-\tau_2}^t \dot{\bar{e}}_1^{\alpha T}(s)R_1\dot{\bar{e}}_1^\alpha(s)ds. \quad (5.4.12)$$

En appliquant la majoration standard qui, pour toute matrice  $R > 0$  de dimension  $n \times n$  et pour tous vecteurs  $a$  et  $b$  de  $R^n$ , assure que  $\pm 2a^T b \leq a^T R^{-1}a + b^T Rb$ , à  $\eta_2^\alpha(t)$  avec  $a^T = \bar{e}_2^{\alpha T}(t)P_2\beta_d TG_1\Delta(t)$ ,  $b = \dot{\bar{e}}_1^\alpha(t)$  et  $R = R_2$ , on obtient :

$$\eta_2^\alpha(t) \leq \bar{e}_2^{\alpha T}(t)\beta_d P_2 TG_1 R_2^{-1} \beta_d (TG_1)^T P_2^T \bar{e}_2^\alpha(t) + \bar{e}_1^{\alpha T}(t)R_2\dot{\bar{e}}_1^\alpha(t). \quad (5.4.13)$$

En utilisant cette même majoration pour  $\eta_3^\alpha(t)$  avec  $a^T = \bar{e}_2^{\alpha T}(t)P_2\beta_d TG_1\Delta(t)$ ,  $b = \dot{\bar{e}}_1^\alpha(s)$  et  $R = R_1$ , on obtient :

$$\eta_3^\alpha(t) \leq \tau_2 \bar{e}_2^{\alpha T}(t)\beta_d P_2 TG_1 R_1^{-1} \beta_d (TG_1)^T P_2^T \bar{e}_2^\alpha(t) + \int_{t-\tau_2}^t \bar{e}_1^{\alpha T}(s)R_1\dot{\bar{e}}_1^\alpha(s)ds. \quad (5.4.14)$$

Les fonctions  $\nu$  et  $\rho$  de (5.3.23) restant inchangées, on a :

$$\eta_4^\alpha(t) \leq -2\gamma\|P_2\bar{e}_2(t)\|. \quad (5.4.15)$$

Puis la combinaison de (5.4.12-5.4.15) avec l'expression de la dérivée de  $V^\alpha$  conduit à :

$$\dot{V}^\alpha(t) \leq \begin{bmatrix} \bar{e}_1(t) \\ \bar{e}_2(t) \end{bmatrix}^T \Psi^\alpha \begin{bmatrix} \bar{e}_1(t) \\ \bar{e}_2(t) \end{bmatrix} - 2\gamma\|P_2\bar{e}_2(t)\|,$$

avec :

$$\Psi^\alpha = \begin{bmatrix} \psi_{11}^\alpha & (A_{21} + G_1)^T T^T P_2 \\ * & \psi_{22}^\alpha \end{bmatrix},$$

et où

$$\psi_{11}^\alpha = P_1(A_{11} + \bar{L}A_{211}) + (A_{11} + \bar{L}A_{211})P_1 + (A_{11} + \bar{L}A_{211})^T R_1(A_{11} + \bar{L}A_{211}),$$

$$\psi_{22}^\alpha = G_l^T P_2 + P_2 G_l + 2\alpha P_1 + \tau_2 Z_2 + \tau_2 \beta_d P_2 T G_1 R_2^{-1} (T G_1)^T P_2 \beta_d$$

$$+ \beta_d P_2 T G_1 R_1^{-1} (T G_1)^T P_2 \beta_d.$$

Le Lemme A.3.2 appliqué de la même manière que dans le Théorème 5.3.6 conduit à :

$$\begin{bmatrix} \psi_1^\alpha & A_{11}^T P_1 + A_{211}^T W^T & (A_{21} + G_1)^T T^T P_2 \\ * & -2P_1 + 2\tau_2 R_1 & 0 \\ * & * & \psi_{22}^\alpha \end{bmatrix} < 0,$$

Enfin, en imposant  $Y = P_2 G_l$ , le complément de Schur permet de retrouver les conditions LMI (5.4.8). Ainsi, si (5.4.8) et (5.4.9) sont satisfaites, la dérivée de la fonctionnelle (5.4.11) est définie négative. ■

**Remarque 5.4.5** *On remarque que lorsqu'on choisi  $\alpha = 0$  dans le Théorème 2, on montre que le système est asymptotiquement stable.*

## 5.5 Exemples

### 5.5.1 Exemple 1

Considérons le système à retard inconnu sur l'état et l'entrée défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_\tau x(t - \tau(t)) + B_\tau u(t - \tau(t)) \\ y(t) = Cx(t), \end{cases}$$

où la loi de commande est  $u(t) = 2 \sin(t)$ , le retard  $\tau(t)$  est défini par la loi  $\tau(t) = 0.15(1 + \cos(t))$  et avec :

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -6.5 & 2 & -0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ -6 & -21 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & -1.5 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad A_\tau = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -9 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_\tau = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

On remarque  $\text{rang}([A_\tau | B_\tau]) = \text{rang}(C[A_\tau | B_\tau]) = 2$ . On en déduit qu'il existe un changement de variables  $Q$  :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$



tel que le système s'écrit sous la forme de (5.3.4) avec  $B_1 = 0$ ,  $B_2 = 0$  et :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0.5 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$G_{x_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

L'observateur par modes glissants (5.3.5) peut alors être utilisé pour le système considéré. On choisit  $\hat{h} = 0.15$  et :

$$H = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}.$$

Le Théorème 5.3.4 prouve la convergence de l'observateur vers le système réel grâce à la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii (5.3.15) avec :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 557.0 & 0 \\ 0 & 2924.3 \end{bmatrix}, \quad P_y = \begin{bmatrix} 36.20 & 0.0216 \\ 0.0216 & 35.97 \end{bmatrix}, \quad R_1 = \begin{bmatrix} 557.00 & 0 \\ 0 & 557.00 \end{bmatrix}.$$

Les Figures 5.1, 5.2 and 5.3 montrent les résultats en simulation. L'observateur converge effectivement vers le système réel. A titre de remarque, la convergence de l'observateur où  $\hat{\tau} = 0$ , (qui n'est pas donnée ici) converge.

Le Théorème 5.4.1 assure la stabilité exponentielle pour tout  $\alpha < 0.5$ .

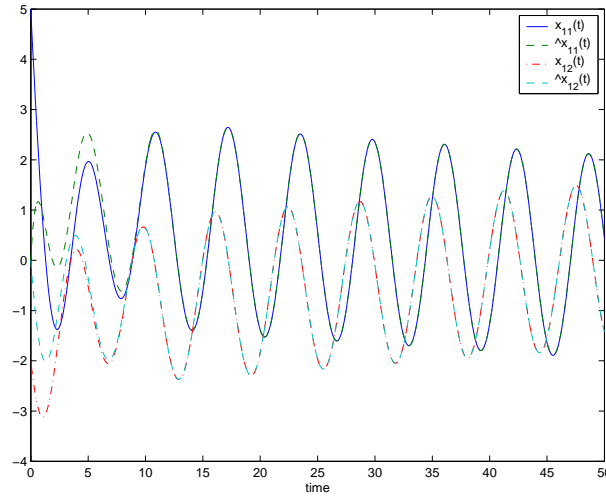


FIG. 5.1 – Trajectoires de  $x_1(t)$  et  $\hat{x}_1(t)$

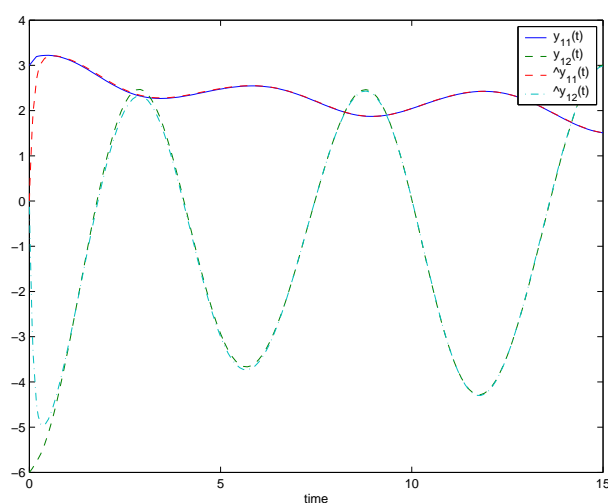
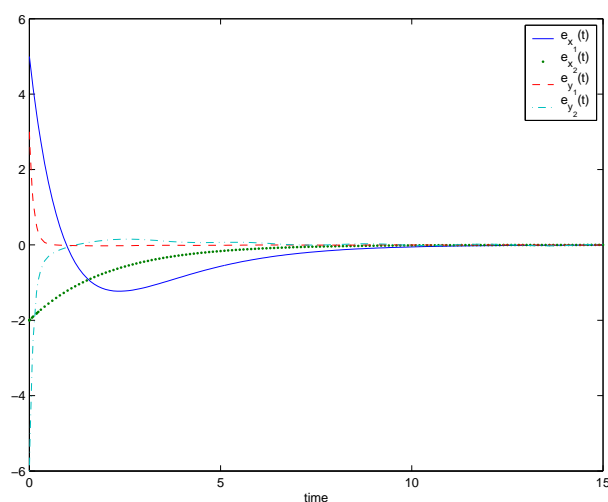
## 5.5.2 Exemple 2

Soit le système (5.3.19) avec :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & 0.21 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$G_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

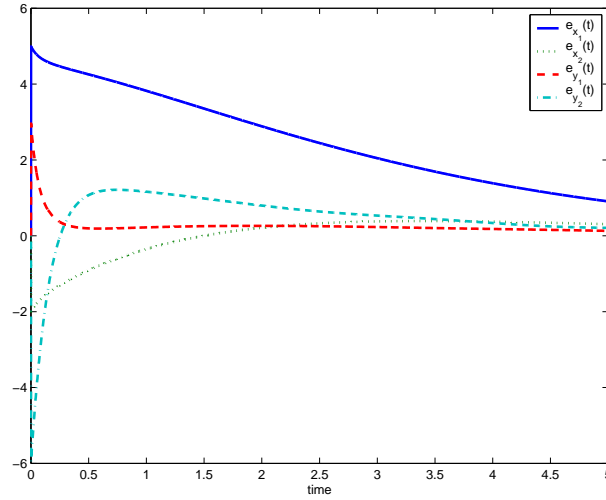
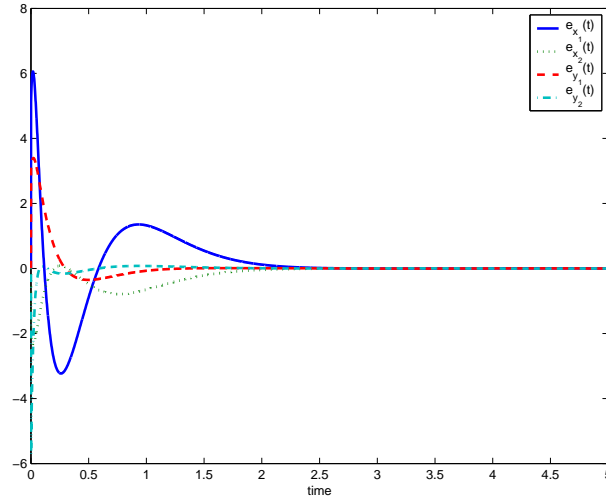
FIG. 5.2 – Trajectoires de  $y(t)$  et  $\hat{y}(t)$ FIG. 5.3 – Evolution de l'erreur  $e(t)$ 

Le retard inconnu du système observé est de la forme  $\tau(t) = \frac{\tau_2}{2}(1 + \sin(\omega t))$ , dont la borne maximale est  $\tau_2 = 0.3s$ , et dont la fréquence est  $\omega = 0.5s^{-1}$ . La commande utilisée est de la forme  $u(t) = u_0 \sin(\omega t)$ , avec  $u_0 = 2$  et  $\omega = 3$ .

Les résultats en simulations sont donnés dans les figures suivantes. Les Figures 5.4 et 5.5 présentent les erreurs d'observation du système pour  $\alpha = 0$  et  $\alpha = 2$ . Les Figures 5.6 et 5.7 montrent la comparaison entre l'état réel et l'état estimé, pour  $\alpha = 2$ .

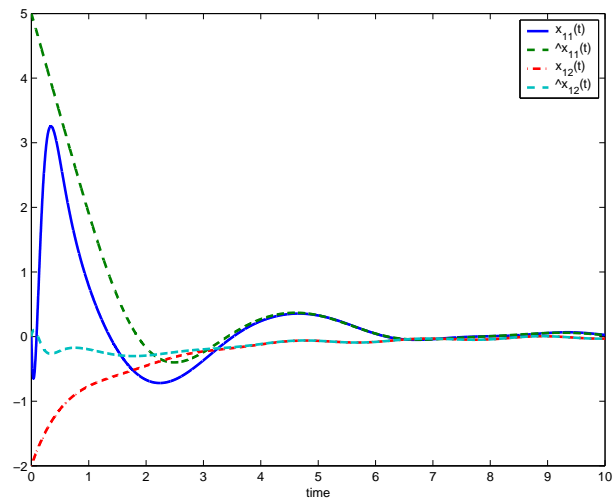
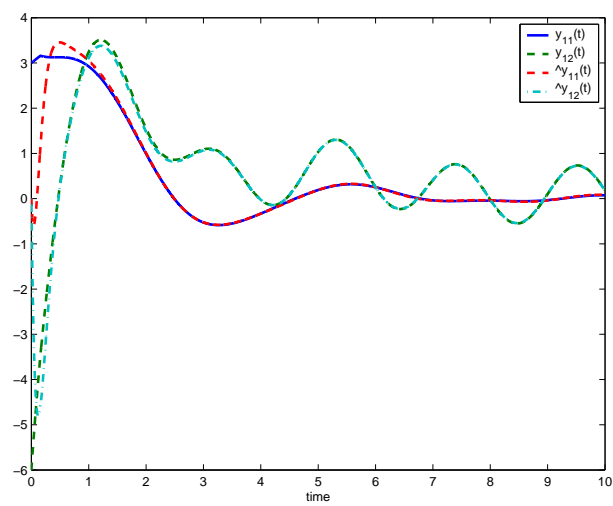
On remarque que le fait d'augmenter le coefficient d'exponentialité  $\alpha$  accélère la rapidité de convergence de l'erreur. Dans ces conditions, le Théorème 5.4.4 assure la convergence exponentielle de l'observateur pour  $\alpha = 2$  vers le système réel. Les gains de l'observateur sont alors :

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} -3.6936 \\ 0.9943 \end{bmatrix}, \quad G_l = \begin{bmatrix} -12.0704 & -5.0757 \\ -24.6079 & -39.8518 \end{bmatrix}$$

FIG. 5.4 – Simulation de l'erreur d'observation pour  $\alpha = 0$  et  $\tau_2 = 0.3$ FIG. 5.5 – Simulation de l'erreur d'observation pour  $\alpha = 0.9$  et  $\tau_2 = 0.3$ 

## 5.6 Conclusion

Le problème de la synthèse d'un observateur de systèmes à retard inconnu, à la fois sur l'état et la commande, a été résolu pour une classe de systèmes à retards. Les théorèmes, présentés sous formes d'inégalités matricielles linéaires (LMI), garantissent la convergence asymptotique (Théorèmes 5.3.4 et 5.3.6), ou exponentielle (Théorèmes 5.4.1 et 5.4.4) connaissant la borne supérieure du retard. Cependant les résultats proposés ne concernent qu'une classe de systèmes linéaires à retards vérifiant les conditions de recouvrements du type A1-3 ou A'1-3 qui sont toutefois restrictives. Ces théorèmes ne représentent donc qu'une première étape dans la recherche d'observateurs de systèmes à retards. Ils serait intéressant de développer ces techniques pour réduire le conservatisme des conditions de recouvrement et pour les adapter aux cas des systèmes sous mis à des incertitudes paramétriques ou non linéaires .

FIG. 5.6 – Comparaison entre les variables  $x_1$  et  $\hat{x}_1$ , pour  $\alpha = 2$ ,FIG. 5.7 – Comparaison entre les variables  $x_2$  et  $\hat{x}_2$ , pour  $\alpha = 2$



# Chapitre 6

## Applications

### 6.1 Etude de la barre de torsion

Cette première application concernent la commande d'une barre de torsion représentée Figure 6.1

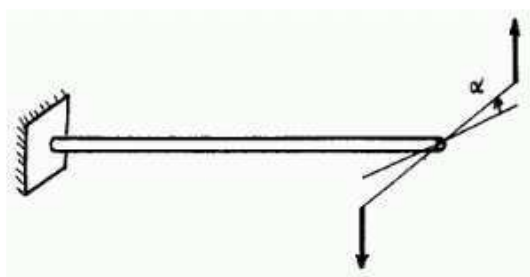


FIG. 6.1 – Barre de torsion

Plusieurs auteurs ont interprété l'équation d'onde décrivant le comportement de la barre de torsion comme un système linéaire à retards. On notera ici  $x_2$  la position angulaire  $\alpha$  de la barre de torsion. Une modélisation proposée par [44] est :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = \dot{x}_2(t-2T) - x_2(t) + x_2(t-2T) + u(t-T), \end{cases} \quad (6.1.1)$$

où  $T$  représente le retard dépendent des paramètres physiques du système, notamment de la longueur de la barre. En introduisant la variable  $x(t) = \text{col}\{x_1(t), x_2(t)\}$ , les équations (6.1.1) s'écrivent :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t-2T) - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{x}(t-2T) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t-T).$$

Dans ce cas de systèmes neutres, on a  $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  et  $\|F\| = 1$ , ce qui signifie que l'opérateur aux différences  $x(t) - Fx(t-g)$  n'est pas asymptotiquement stable au sens de Shur-Cohn. Ainsi, [15] et [44] ont

utilisé une loi de commande de la forme :

$$u(t) = -\lambda \dot{x}_2(t - T) + v(t) \quad (6.1.2)$$

avec  $\lambda \in ]0, 2[$ . Dans [15] et [44],  $v(t)$  est construit sur la base de la mesure de  $x(t - T)$ . Ici, nous supposons que  $\dot{x}_2(t - T)$  est mesuré instantanément mais que  $x$  n'est mesuré avec un retard additionnel  $\eta$ , variable et inconnu, tel que  $\|\eta(t)\| \leq \mu$ . On peut noter que cette situation peut correspondre au cas d'échantillonnage des données capteurs de l'état  $x$ . La loi de commande proposée est alors de la forme :

$$v(t) = Kx(t - T - \eta(t)), \quad (6.1.3)$$

où  $K$  est le gain de retour d'état de dimension appropriée. L'objectif consiste alors à déterminer ce gain afin de garantir la stabilité exponentielle du système. Ainsi, les équations de la barre de torsion sont de la forme :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t - T) - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \dot{x}(t - T) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} Kx(t - 2T - \eta(t)). \quad (6.1.4)$$

Pour  $\lambda = 0.6$ ,  $T = 0.05$ , et  $\mu = 0.08$ , le Théorème 4.3.6 concernant le cas des systèmes neutres à retards constants sur le terme neutre et à retards variables *bornés* sur l'état (avec  $\delta = \tau = 0.1$ , et  $\mu = 0.08$ ) garantit que le système (6.1.4) est  $\alpha$ -stabilisable pour  $\alpha = 0.775$  en prenant  $\epsilon = 3.8$ . Le gain  $K = [-1.2389, -1.9522]$  stabilise exponentiellement le système. Après avoir vérifié la condition  $\|e^{2\alpha T} F\| = 0.4309 < 1$ , les résultats en simulation sont représentés sur la Figure 6.2. Ils montrent la convergence exponentielle à taux garanti par le Théorème.

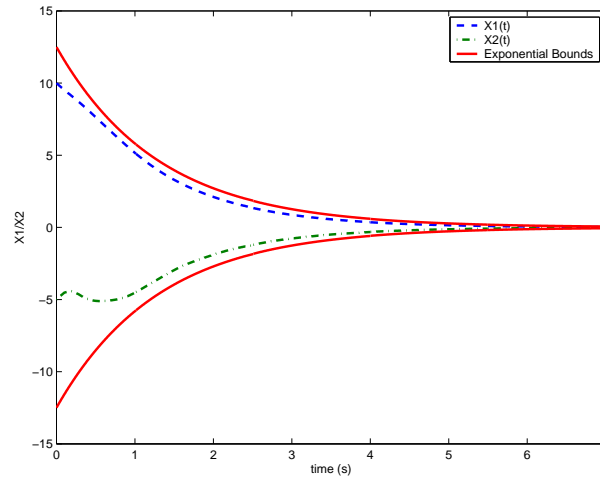


FIG. 6.2 – Simulation de la barre de torsion avec  $\alpha = 1.05$ ,  $h_1 = h_2 = 0.1$ ,  $\mu_1 = 0$  et  $\mu_2 = 0.08$

De plus, dans le cas d'un retard constant (c'est-à-dire sans retard additionnel  $\eta$ ), on peut comparer les résultats avec ceux du Lemme 1 de [82] en prenant le système en boucle fermée avec  $K = [-1.2389, -1.9522]$ . Les conditions LMI de [82] ne sont pas vérifiées.

**Remarque 6.1.1** *Cet exemple reste une application théorique des théorèmes proposés dans ce mémoire. Il est important d'émettre quelques critiques quant à la robustesse d'une telle commande. La commande (6.1.2) n'est pas robuste vis-à-vis du retard  $T$  du terme neutre. Si ce retard n'est pas précisément  $T$  mais  $T + \epsilon$ , où  $\epsilon$  serait une petite perturbation, la commande ne permettrait pas de stabiliser le système et conduirait à un comportement instable de ce dernier.*

## 6.2 Application à la télé-opération

### 6.2.1 Introduction

Ce chapitre concerne le contrôle, l'observation et l'implémentation informatique d'un système de type Maître - Esclave communiquant à distance par le moyen d'un réseau de type *internet*. Un enjeu principal de la synthèse de commande est ici de pouvoir garantir des performances (stabilité, rapidité, robustesse) malgré les perturbations générées par l'utilisation du réseau (retards variables et asymétriques, perte de paquets et échantillonnage).

Le contrôle à distance est le moyen de réaliser sans danger des tâches en environnement hostile (déminage, dépollution par exemple), d'admettre des utilisateurs délocalisés sur une plate-forme (enseignement, chirurgie...), ou encore de faire collaborer plusieurs applications d'un système informatique distribué. Pour des distances importantes, la technologie *internet* apparaît aujourd'hui comme un moyen de communication naturel et peu onéreux. Cependant, la Qualité de Service (QoS ou QoS en anglais) fournie par *internet* semble souvent assez faible au regard de ce genre d'applications [2] et les dynamiques induites par le réseau (retards) doivent être prises en compte dans l'élaboration de la loi de commande.

Si l'énergie et la puissance de calcul embarquées dans l'Esclave n'étaient pas limitées, on pourrait envisager de lui confier toutes les tâches de commande (planification et suivi de trajectoire, gestion capteurs, observation) et le rôle du réseau se réduirait à véhiculer les consignes à atteindre. Ici, nous considérerons le cas moins idéal où l'Esclave ne dispose que d'une puissance de calcul très limitée, que ce soit pour des raisons de limitation de l'énergie embarquée, ou bien pour limiter son coût<sup>1</sup>. Dans ce cas, l'effort de calcul est à déporter au maximum sur le maître. Celui-ci calcule la commande, l'envoie à l'Esclave via le réseau et, réciproquement l'Esclave envoie ses données capteur au Maître à travers ce même réseau.

Bien sûr, le transfert informatique des données (capteurs ou commande) par le réseau nécessite l'échantillonnage des sorties capteur de l'Esclave et des commandes générées par le Maître.

Dans cette situation, deux sources de retards variables se combinent :

- Les liens de communications introduisent des retards variables dans l'ensemble de la boucle (à l'aller comme au retour). Ces retards doivent impérativement être pris en compte lors de la conception de la commande et de l'observation.
- L'échantillonnage, qui n'est généralement pas périodique à cause de l'ordonnancement temps-réel des tâches, mais aussi des pertes de paquets par le réseau, constitue une autre source de retard variable [53] qui devra aussi être pris en compte.

Pour la simplicité de l'exposé, nous considérerons que l'Esclave est représenté par un modèle linéaire. Le contrôle correspondra à un retour d'état basé sur un observateur et devra être calculé par la partie Maître. Le système global devra assurer une performance de rapidité garantie malgré les effets de retard du réseau. Une telle performance est obtenue en assurant une propriété de stabilisation exponentielle (en  $\exp -at$ ,  $a > 0$ ) robuste vis-à-vis des retards<sup>2</sup>. Cette propriété sera démontrée en utilisant une approche de type Lyapunov (fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii) conduisant à la conception des gains du contrôleur et de l'observateur par résolution d'inégalités matricielles linéaires (LMI).

On sait que dans ces conditions, l'élaboration de la commande est facilitée par la connaissance des retards.

---

<sup>1</sup>Par exemple, dans une situation de déminage, les robots esclaves sont souvent voués à la destruction et on essaie de minimiser leur coût unitaire.

<sup>2</sup>Pour ne pas alourdir l'exposé, nous ne considérons pas la robustesse paramétrique vis-à-vis du modèle de l'Esclave. On pourrait pour cela s'inspirer de travaux comme [130].



Dans le cas présent, la solution que nous proposons est basée sur un système GPS qui permet aux parties Maître et Esclave de synchroniser leurs horloges. Ainsi, les paquets échangés contiennent non seulement la loi de commande ou la sortie de l'Esclave, mais aussi la date de leur envoi. Il lui est alors possible de mesurer le retard de transmission variable, non symétrique. "Non symétrique" signifie que les retards Maître-Esclave  $h_1$  et Esclave-Maître  $h_2$  sont séparément reconstruits par le système, sans être considérés comme égaux à la moitié du délai de transport de la boucle de communication complète, appelé RTT pour *Round Trip Time*. Ce chapitre présentera successivement une présentation du problème et des solutions techniques retenues, puis la théorie permettant de garantir une performance globale, des résultats obtenus en simulation sur un exemple de système linéaire d'ordre 2 (correspondant au déplacement d'un moteur sur un rail) et, enfin, une implémentation sur un processus réel.

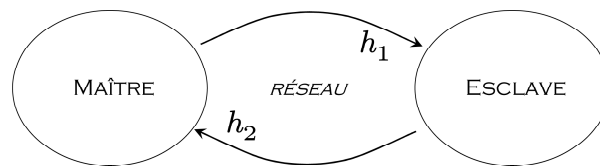


FIG. 6.3 – Principe de la boucle Maître-Esclave.

### Retards et téléopération

La référence [127] donne une synthèse des problématiques liées à la présence de retards. On consultera aussi [69],[111] pour avoir une présentation détaillée de techniques récentes de stabilisation<sup>3</sup> généralisant celles de Lyapunov au cas retardé. Nous pouvons retenir de ces synthèses une première conclusion : même dans le cas linéaire, réputé simple, il est extrêmement rare de pouvoir mettre concrètement en œuvre des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité adaptées à la synthèse de lois de commande dans le cas retardé. L'analyse passe ainsi par des conditions "seulement suffisantes", ce qui explique le grand nombre de publications proposant des conditions techniques sous-optimales mais calculables au moyen de LMI. Une deuxième conclusion concerne la différence à faire selon le type de retard considéré : retard constant  $h$ , variable  $h(t)$ , borné  $0 \leq h_0 \leq h(t) \leq h_m$ , à dérivée bornée :  $|\frac{dh}{dt}| \leq \delta < 1$ ,  $\frac{dh}{dt} < 1$  ou  $\frac{dh}{dt} \leq 1$ , etc.

Pour ce qui concerne plus spécifiquement la téléopération, plusieurs travaux ont tenu compte de retards de transmission  $h$  qui, dans un premier temps, furent considérés comme constants [7, 41, 115]. Dans un contexte de commande par réseau, cette hypothèse n'est pourtant qu'une première approximation : on sait que les retards de réseau varient fortement au cours du temps (phénomène de gigue, ou *jitter*). Mais, jusqu'à récemment, les techniques prédictives classiques (Smith, FSA<sup>4</sup>, etc.), nécessitaient pour la plupart un retard constant, c'est-à-dire  $h(t) = h$ . Elles ont été récemment étendues au cas de retards variables connus (voir chapitre 3), l'hypothèse est alors de disposer de la connaissance du retard en temps réel, ce qui est par exemple envisageable dans le cas d'un réseau *ethernet* géré par l'utilisateur et donc modélisable.

Dans les autres cas, comme *internet* par exemple, la connaissance du (ou des) retard(s) ne peut être qu'une hypothèse d'école. Pour prendre en compte cette méconnaissance, il est alors possible de faire appel à des conditions de stabilité qui sont indépendantes de la valeur du retard (*independent-of-delay* ou "*i.o.d*"). Ces

<sup>3</sup>La stabilité exponentielle est complémentaiement développée dans [130, 132].

<sup>4</sup>Placement fini de spectre, en anglais *Finite Spectrum Assignment*.

conditions *i.o.d* s'avèrent souvent assez conservatives bien que, dans certains cas particuliers comme [39], les résultats puissent permettre de traiter le cas de retards variables *symétriques*. Ce que nous appelons “retards symétriques” correspond au cas où les retards de communication du Maître vers l'Esclave et de l'Esclave vers le Maître sont égaux. On a alors  $h_1(t) = h_2(t) = R(t)/2$ , où  $R(t)$  est le temps mis pour parcourir toute la boucle de communication (RTT, *Round Trip Time*). Une autre référence [61] considère des retards non symétriques, mais dans le cas de retards constants, c'est-à-dire  $h_1(t) = h_1 \neq h_2(t) = h_2$ .

Il est cependant préférable d'utiliser des techniques dépendantes des bornes du retard (“*d.d.*”, *delay-dependent* en anglais), dont les résultats tiennent compte d'une borne maximale du retard ( $h_m$ , telle que  $0 \leq h(t) \leq h_m$ ). Supposer la connaissance d'une telle borne n'est pas trop contraignant en pratique<sup>5</sup>.

Une solution possible [89, 90, 116] consiste à introduire une mémoire tampon (ou *buffer*) qui force l'entité réceptrice de l'information à attendre jusqu'à ce que le retard maximal soit atteint. L'intérêt de cette technique est de compenser la gigue (c'est-à-dire de produire un retard constant). En revanche, il est évident que cette stratégie peut être pénalisante en terme de rapidité, voire même de stabilité, puisque le retard est rendu constamment égal à sa valeur maximale  $h_m$ . Il sera donc souhaitable, si l'on utilise cette stratégie de *buffer*, de pouvoir garantir une performance de rapidité de convergence. Il est préférable que cette performance ne soit pas analysée *a posteriori*, mais qu'elle soit prise en compte dès la phase de conception de la loi de commande. Cette prise en compte n'était pas explicite dans [89, 90]. Par ailleurs, ces travaux se limitaient au cas de retards symétriques.

### Hypothèses sur les retards, protocole et synchronisation GPS

Ce chapitre est dédié à l'utilisation d'*internet* comme lien de communication. Dans cette situation, on se retrouve confronté à des *retards à la fois variables, non symétriques et inconnus*. En effet, il n'existe pas de modèle dynamique représentatif du réseau [112]. Il est seulement possible de supposer que les bornes maximales des retards aller et retour  $h_{im}$  sont connues. L'information correspondante s'écrit :  $0 \leq h_i(t) \leq h_{im}$ , avec  $i = 1$  ou  $2$ .

Nous ferons une deuxième hypothèse qui, elle, concerne la variation des retards, à savoir :  $\dot{h}_i(t) \leq 1$ . Ceci signifie que les paquets seront pris dans l'ordre chronologique de leur émission. Dans un contexte de commande à travers un réseau, cela veut dire que si un paquet de données est perdu, il n'est pas ré-émis. Nous utiliserons pour cela le protocole UDP (*User Datagram Protocol*).

UDP est un protocole de couche transport, donc comparable à TCP (*Transmission Control Protocol*) mais qui, contrairement à TCP, ne garantit pas l'arrivée des données (pas de ré-émission) ni n'assure leur remise dans l'ordre. UDP n'exclut donc pas que des paquets soient perdus. Dans notre situation, les paquets contiennent des échantillons (sorties ou commandes). TCP imposerait d'attendre qu'un paquet perdu soit ré-émis et réceptionné, avant de pouvoir utiliser les paquets suivants, ce qui diminuerait les performances : il est préférable de prendre en compte les données les plus récentes. En termes de retards, UDP sera donc moins pénalisant que TCP. Il faudra par contre que, sous UDP, les paquets soient remis dans l'ordre chronologique par le Maître et par

---

<sup>5</sup>Cette borne n'est pas garantie naturellement sur *internet*, mais vient ici de la stratégie de commande. En effet, si le retard devient trop grand, voire infini, à cause d'une trop forte congestion de réseau, la stratégie Maître-Esclave n'est plus adéquate et on doit utiliser une approche différente, visant à ne pas laisser l'esclave sans contrôle : on doit alors commuter vers un fonctionnement autonome de l'esclave, fonctionnement dégradé mais dont la stabilité sera garantie. La décision de commutation peut être basée sur une mesure de RTT comparée au retard maximal admissible. Dans un tel cas, cette borne maximale constitue l'information souhaitée. Le chapitre 5 considère plus en détail la majoration des retards.

l'Esclave, ce qui implique d'associer à chaque paquet son instant d'émission (par ajout d'une datation, ou *time stamp*).

Cette datation, pour être applicable à la commande, demande la synchronisation temporelle des deux entités Maître et Esclave. La solution technique proposée est basée sur l'utilisation de balises GPS équipant les deux parties et leur donnant accès à la même horloge (c'est la seule fonctionnalité du GPS qui sera utilisée ici). Les paquets contenant les informations de contrôle et de mesure, contiennent aussi un *time stamp* de l'instant auquel ils sont envoyés, cette information prenant le même sens pour les deux entités. Ce dispositif permet la mesure du retard, même *non symétrique*, avec lequel le paquet arrive à destination. Par ce biais, les retards Maître vers Esclave  $h_1(t)$  et Esclave vers Maître  $h_2(t)$  sont séparément reconstruits (et pas seulement le retard de boucle RTT).

### Prise en compte de l'échantillonnage

D'autre part, l'implantation finale des algorithmes est effectuée en temps discret et les effets de l'échantillonnage doivent donc être pris en compte. Des travaux récents [22, 53] ont montré qu'un échantillonnage peut être assimilé à un retard additionnel variable dans le temps, de valeur  $\tau(t) = t - t_k$  pour  $t_k \leq t < t_{k+1}$ , où  $t_k$  représente le  $k^{\text{ième}}$  instant d'échantillonnage. La Figure 6.4 illustre le cas périodique classique ( $t_k = kT$ ) pour deux périodes différentes.

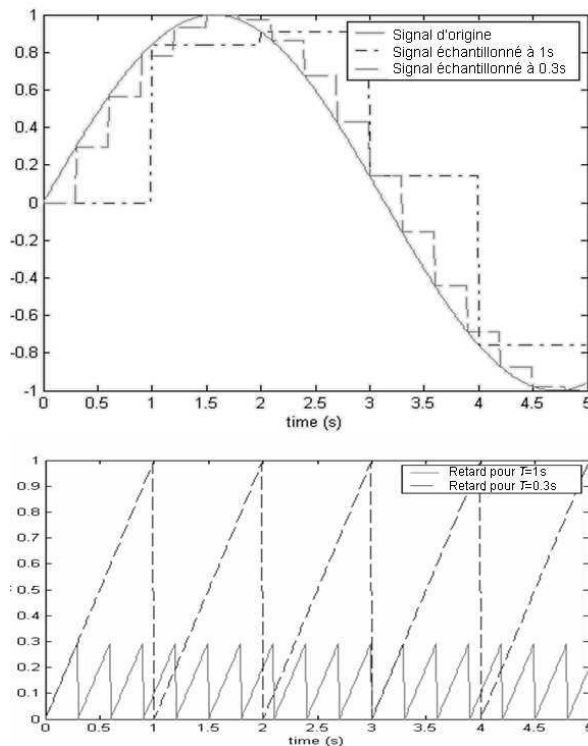


FIG. 6.4 – Échantillonnage périodique et retard  $\tau(t) = t - kT$  associé.

Cette façon de modéliser l'échantillonnage présente trois avantages :

- Elle permet de tenir compte d'une période d'échantillonnage éventuellement non constante (le système informatique peut produire un échantillonnage apériodique), c'est-à-dire de considérer le cas où il n'est

pas où il n'existe pas de période constante  $T$  telle que  $t_k = kT$ .

- Elle permet aussi de tenir compte de la perte de paquets, qui revient à un allongement de l'intervalle d'échantillonnage (si le  $i^{\text{ième}}$  échantillon  $t_i$  est perdu, le retard d'échantillonnage devient  $t - t_{i+1}$  au lieu de  $t - t_i$ ).
- Son écriture reste compatible avec les effets de retard de la ligne de transmission, sans ajouter de complexité supplémentaire.

Ainsi, la seule hypothèse que l'on aura à émettre consiste à *borner la période d'échantillonnage* par une valeur  $T$  que nous supposerons connue, ce qui signifie que la relation  $0 \leq t_{k+1} - t_k \leq T$  est satisfaite.

Le retard global généré par la transmission et l'échantillonnage peut s'écrire sous la forme  $\delta_i(t_k) = h_i(t) + t - t_k$  (avec  $i = 1$  ou  $2$ ). Ainsi on peut remarquer que le cas  $\delta_i = 1$  peut se produire presque partout (sauf aux instants d'échantillonnage où l'on a, en théorie,  $\delta_i = -\infty$ ), comme illustré sur la Figure 6.4.

### Problèmes de commande induits

Les données échangées correspondent à la commande, envoyée du Maître vers l'Esclave, et à la mesure de la sortie, envoyée de l'Esclave vers le Maître. Comme on l'a dit, l'Esclave dispose d'une puissance limitée et c'est la partie Maître qui doit assurer le calcul de la commande et la reconstruction de l'état de l'Esclave. Notre objectif est de garantir des propriétés de robustesse et de performance du système global Maître-Esclave. En particulier, le système global doit converger à une vitesse minimale garantie quelle que soit la valeur des retards de transmission. Cette performance globale du système sera obtenue en montrant la convergence exponentielle ( $\alpha$ -stabilité,  $\alpha$  étant le taux de convergence garanti), robuste vis-à-vis du retard.

Garantir la stabilité exponentielle d'un système de ce type n'est pas une tâche simple. En effet, le Maître reçoit les informations dont il a besoin pour élaborer la commande, seulement après qu'elles aient traversées le réseau. Ainsi le Maître calcule-t-il sa commande avec des valeurs de l'Esclave périmées de  $h_2(t)$ . La commande sera utilisée seulement une fois qu'elle aura été reçue par l'Esclave, c'est-à-dire encore  $h_1(t)$  secondes plus tard. Finalement, l'esclave reçoit une commande calculée à partir d'une donnée retardée de  $h_1(t) + h_2(t)$ , ce RTT variable n'étant pas connu à l'avance.

Dans ces conditions, il devient intéressant d'améliorer l'information servant à élaborer la commande, c'est-à-dire de fournir une estimation de l'état *non retardé*. C'est ici que nous utiliserons l'estimation du retard  $h_2(t)$  (disponible grâce au GPS) pour synthétiser un observateur permettant de reconstruire l'état de l'Esclave à l'instant présent (et non à l'instant où l'information a été envoyée).

## 6.2.2 Conception de la commande du système

### Présentation du système

La Figure 6.5 présente la structure plus détaillée du système Maître-Esclave développé dans [134].

Rappelons les principes de ce système, complétés par quelques hypothèses (sur le modèle de l'Esclave :

- L'Esclave est supposé n'avoir qu'une puissance de calcul limitée et il ne lui est pas possible de calculer sa propre loi de commande. Le Maître calcule et lui transmet la commande à appliquer. La transmission ne se fait pas instantanément, les lignes de communication introduisent un délai  $h_1(t)$ . De même, l'échantillonnage des données génère un retard additionnel  $\tau_1(t)$ . Le retard résultant est noté  $\delta_1(t) = h_1(t) + \tau_1(t)$  et sera précisé ultérieurement (paragraphe 6.2.2).

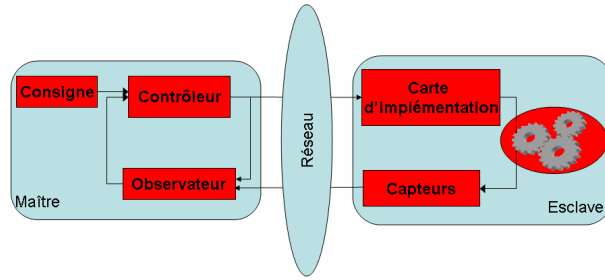


FIG. 6.5 – Structure du système Maître-Esclave.

- Le modèle de l'Esclave est un système linéaire commandable et observable, à entrée retardée et dont le modèle  $(A, B, C)$  est connu, :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \delta_1(t)), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (6.2.1)$$

- L'Esclave mesure sa sortie  $y(t)$  de manière échantillonnée, information que le Maître reçoit après un retard  $h_2(t)$ . Un autre retard  $\tau_2(t)$ , induit par l'échantillonnage, intervient aussi, ce qui signifie que le Maître n'a accès qu'à l'information  $y(t - \delta_2(t))$ , où  $\delta_2(t) = h_2(t) + \tau_2(t)$  correspond au retard résultant. Dans le Maître, un observateur a été implanté ayant pour objectif de calculer une estimation de l'état  $x(t)$  de l'Esclave au temps présent, estimation notée  $\hat{x}(t)$ . Le Maître compose sa loi de commande, de type retour d'état, à partir de cette estimation.
- Les instants d'échantillonnage  $t_k$  ne sont pas forcément périodiques, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de période  $T$  telle que chaque temps d'échantillonnage vérifie  $t_k = kT$ . En revanche, nous supposons que la différence entre deux instants d'échantillonnage consécutifs est bornée par une valeur connue  $T$ , soit :

$$0 < t_{k+1} - t_k \leq T. \quad (6.2.2)$$

- Les deux retards  $\delta_1$  et  $\delta_2$  résultant des transmissions et des effets de l'échantillonnage ont une borne maximale connue  $\delta_i^m = h_i^m + T$ , telle que la relation :

$$0 < \delta_i(t) \leq \delta_i^m \quad (6.2.3)$$

soit satisfaite et la variation de ce retard est contrainte par :

$$\dot{\delta}_i(t) \leq 1, \quad (6.2.4)$$

inégalité dont l'interprétation a été donnée dans l'introduction.

- Chacune des entités Maître et Esclave dispose d'une antenne GPS leur permettant de disposer d'une horloge commune. Chaque paquet envoyé contient l'instant où la commande (ou, respectivement, la mesure de la sortie) a été calculée (ou mesurée). Grâce à cette donnée, l'entité qui reçoit l'information connaît, dès réception, le retard  $h_i(t)$  avec lequel celle-ci a été transmise.

Les parties suivantes présentent les composants du système et les notations qui leur seront appliquées :

- (1) la modélisation des effets de l'échantillonnage sous forme de retard  $\tau_i(t)$  ;
- (2) la loi de commande du type

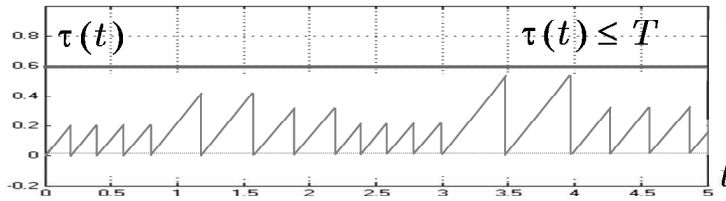


FIG. 6.6 – Echantillonnage non périodique.

retour d'état linéaire statique ; (3) les deux retards de communication  $h_i(t)$  ; et (4) l'observateur linéaire, de type Luenberger, qui prend en compte les retards de transmission.

#### *Retards d'échantillonnage :*

D'un point de vue pratique, le système global (comprenant le contrôleur, l'observateur, le réseau et le processus) ne peut pas être considéré comme un système continu. Si les dynamiques de l'Esclave sont rapides, l'échange continu de données entre l'Esclave et le Maître nécessiterait que le réseau ait une large bande passante pour que le flux de données soit important. Ainsi, les paquets échangés ne peuvent fournir que des informations en temps discret. Les effets de l'échantillonnage résultant peuvent perturber la stabilité du système global et doivent être pris en compte dans la conception du contrôleur et de l'observateur.

A lieu de se concentrer sur une étude en temps discret (équations de récurrence), des travaux récents [22, 53, 132] ont considéré que le processus l'échantillonnage-blocage s'apparente à un phénomène de retard. En effet, l'échantillon  $g(t_k)$  d'un signal  $g(t)$  à l'instant  $t_k$  peut s'écrire :  $g(t_k) = g(t - [t - t_k]) = g(t - \tau(t))$ . Cette notation permet de définir le retard correspondant à l'échantillonnage :  $\tau_k(t) = t - t_k$ ,  $t \in [t_k, t_{k+1}[$ . La Figure 6.6 présente un exemple de retard d'échantillonnage variable.

Ainsi, un échantillonnage apériodique se représente par un retard variable dont la borne supérieure est la valeur  $T$  définie par (6.2.2). Cette notation permet d'appliquer au cas des systèmes échantillonnés, les techniques utilisées dans l'étude des systèmes continus à retards, et notamment l'approche par fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii. Dans notre cas, nous définissons un retard  $\delta(t)$  qui cumule le retard  $\tau_k(t)$  dû à l'échantillonnage et le retard  $h(t_k)$  généré par le réseau sur le paquet contenant le  $k^{\text{ième}}$  échantillon. Pour tout signal  $g(t)$ , ce retard est de la forme :

$$\begin{aligned} g(t_k - h(t_k)) &= g(t - h(t_k) - (t - t_k)), \\ &= g(t - \delta(t)), \\ t_k \leq t < t_{k+1}, \quad \delta(t) &= h(t_k) + t - t_k. \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

#### *Loi de commande :*

Le contrôleur calcule une commande qui sera envoyée et utilisée par l'Esclave. La commande par retour d'état  $u(t)$  est calculée à partir de l'estimation de l'état  $\hat{x}$  délivrée par l'observateur, soit :

$$u(t) = K\hat{x}(t). \tag{6.2.6}$$

La principale difficulté théorique sera de déterminer un gain  $K$  garantissant la stabilité (exponentielle) des dynamiques de l'Esclave en dépit de la valeur du retard variable  $\delta_1(t)$ . Rappelons à nouveau que ce retard n'est pas connu par le Maître à l'instant où il calcule ou envoie cette commande (6.2.6).

*Transmission de la commande :*

Le  $k^{\text{ième}}$  paquet envoyé par le Maître contient la valeur de la commande  $u(t_{1,k})$  qu'il vient juste de calculer, ainsi que la date  $t_{1,k}$  de ce calcul. Ce paquet traverse alors le réseau et est reçu par l'Esclave à un instant noté  $t_{1,k}^r$ . Grâce à la synchronisation des horloges GPS, ce temps possède la même signification pour l'Esclave et pour le Maître. Ainsi  $t_{1,k}^r - t_{1,k}$  correspond au retard de transmission et d'échantillonnage, connu par l'Esclave dès qu'il a reçu le paquet.

*Réception et traitement des données de commande :*

La commande, envoyée par le Maître à l'instant  $t_{1,k}$ , est reçue par l'Esclave à l'instant  $t_{1,k}^r > t_{1,k}$ . Elle sera utilisée par le processus Esclave seulement à l'instant prédéfini, appelé "instant cible"  $t_{1,k}^{\text{cible}} = t_{1,k} + h_1^m$ . La durée d'attente  $h_1^m$  est représentée Figure 6.7. Ceci est réalisable puisque le délai de transmission est borné par une valeur connue. De cette manière, le Maître connaît la commande  $u(t_{1,k})$  effectivement appliquée à l'entrée du processus Esclave à l'instant courant  $t_{1,k}$ .

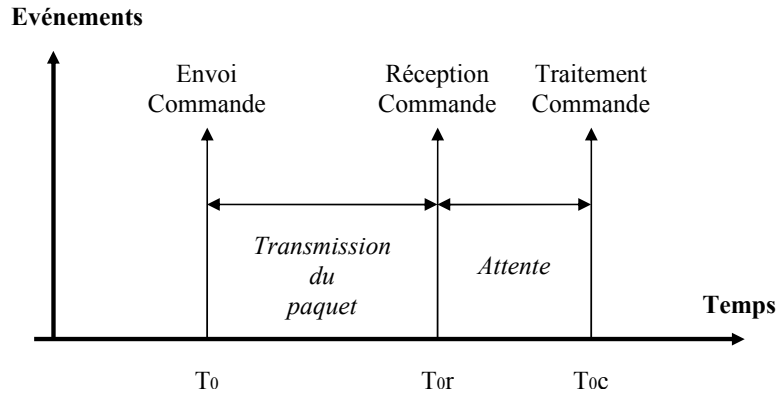


FIG. 6.7 – Traitement de la commande

*Transmission de la sortie capteur :*

L'Esclave a accès à sa sortie  $y$  de façon discrète. On procède de la même manière que pour la commande : un paquet de sortie contient la valeur de la variable  $y(t_{2,k'})$  ainsi que l'instant  $t_{2,k'}$ , qui représente le  $k^{\text{ième}}$  échantillon capté par l'Esclave. Le Maître reçoit ce paquet à l'instant  $t_{2,k'}^r$ . Une fois que le paquet a atteint le Maître, celui-ci connaît la valeur du retard  $t_{2,k'}^r - t_{2,k'}$  grâce à l'horloge GPS.

*Observation du processus :*

Le modèle présent dans le Maître est calculé en temps continu  $t$ , mais sa commande est échantillonnée. Notons  $t_{1,k}$  le  $k^{\text{ième}}$  instant d'échantillonnage de cette commande. L'indexation  $k'$  correspond à l'instant d'échantillonnage  $t_{2,k'}$  le plus récent qu'a reçu le Maître à l'instant  $t$ . L'observateur est alors défini comme suit, pour tout  $t \in [t_{1,k} + h_{1m}, t_{1,k+1} + h_{1m}]$  :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t_{1,k}) - L[y(t_{2,k'}) - \hat{y}(t_{2,k'})], \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t). \end{cases} \quad (6.2.7)$$

On remarque que le Maître connaît le temps  $t_{1,k}$  et la commande  $u(t_{1,k})$  (voir paragraphe 6.2.2), ce qui rend l'observateur réalisable. En utilisant la notation des retards définie dans (6.2.5), on peut écrire :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t - \delta_1(t)) - L[y(t - \delta_2(t)) - \hat{y}(t - \delta_2(t))], \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t), \\ \delta_1(t) = t - t_{1,k}, \quad \delta_2(t) = t - t_{2,k'}. \end{cases} \quad (6.2.8)$$

Les instants  $t_{1,k}$  et  $t_{2,k'}$ , présents dans les équations de l'observateur, sont connus grâce à la synchronisation des horloges des deux entités (et, pour  $t_{1,k}$ , au *buffer* qui permet de prévoir le retard). Les caractéristiques du système permettent de connaître les bornes supérieures des retards intervenant dans (6.2.8), à savoir :  $\delta_1(t) \leq h_1^m + T$  et  $\delta_2(t) \leq h_2^m + T$ .

### Conception des gains du contrôleur et de l'observateur

*Un résultat préliminaire sur la stabilité exponentielle :*

Les gains  $K$  du contrôleur (6.2.6) et  $L$  de l'observateur (6.2.7) doivent être déterminés de façon à garantir un degré de convergence exponentielle  $\alpha$  le plus grand possible. La performance de rapidité sera alors assurée malgré la présence des retards et de l'échantillonnage. Ce paragraphe propose une condition de stabilité exponentielle basée sur une adaptation de [130, 132].

Soit le système linéaire à retards  $\delta_i(t)$  variables et bornés :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t - \delta_1(t)) + Bu(t - \delta_2(t)), \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\bar{h}, 0], \end{cases} \quad (6.2.9)$$

$$\delta_i(t) = \delta_i + \eta_i(t), \quad \text{avec } |\eta_i(t)| \leq \mu_i \text{ et } \dot{\eta}_i(t) \leq 1, \quad \forall i \in \{1, 2\}. \quad (6.2.10)$$

On note que les retards possèdent en général une borne inférieure  $\delta_i - \mu_i > 0$  non nulle (cas appelé "*non small delays*" dans [55]). Le théorème suivant utilise une représentation polytopique dépendant des bornes des retards. Les coefficients qui vont définir les polytopes sont :

$$\begin{cases} \beta_{11} = e^{\alpha(\delta_1 - \mu_1)}, \quad \beta_{12} = e^{\alpha(\delta_1 + \mu_1)}, \\ \beta_{21} = e^{\alpha(\delta_2 - \mu_2)}, \quad \beta_{22} = e^{\alpha(\delta_2 + \mu_2)}. \end{cases} \quad (6.2.11)$$

Un retour d'état  $u(t) = Kx(t)$  conduit au système bouclé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t - \delta_1(t)) + BKx(t - \delta_2(t)), \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\bar{h}, 0]. \end{cases} \quad (6.2.12)$$

**Théorème 6.2.1 (Stabilité exponentielle)** [132] *Pour un gain matriciel  $K$  donné, le système (6.2.9) est  $\alpha$ -stable s'il existe des  $(n \times n)$ -matrices  $0 < P_1, P_2, P_3, S_k, Y_{k1}, Y_{k2}, Z_{k1}, Z_{k2}, Z_{k3}, R_k$  et  $R_{ka}$ , pour  $k = 1, 2$*



qui satisfont aux conditions LMI :

$$\Gamma^{ij} = \begin{bmatrix} \Psi_1 & P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_{1i}A_1 \end{bmatrix} - Y_1^T & P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_{2j}BK \end{bmatrix} - Y_2^T & \mu_1 P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_{1i}A_1 \end{bmatrix} & \mu_2 P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_{2j}BK \end{bmatrix} \\ * & -S_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -S_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\mu_1 R_{1a} & 0 \\ * & * & * & * & -\mu_2 R_{2a} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall (i, j) \in \{1, 2\}^2, \quad (6.2.13)$$

$$\begin{bmatrix} R_k & Y_{1k} & Y_{2k} \\ * & Z_{1k} & Z_{2k} \\ * & * & Z_{3k} \end{bmatrix} \geq 0, \quad k = 1, 2, \quad (6.2.14)$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}, \quad Z_k = \begin{bmatrix} Z_{k1} & Z_{k2} \\ Z_{k2}^T & Z_{k3} \end{bmatrix}, \quad Y_k = \begin{bmatrix} Y_{k1} & Y_{k2} \end{bmatrix}, \quad (6.2.15)$$

$$\Psi_1 = P^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 + \alpha I_n & -I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_0 + \alpha I_n & -I_n \end{bmatrix}^T P + \sum_{k=1}^2 \left\{ \begin{bmatrix} Y_k \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_k \\ 0 \end{bmatrix}^T + \delta_k Z_k + \begin{bmatrix} S_k & 0 \\ 0 & \delta_k R_k + 2\mu_k R_{ka} \end{bmatrix} \right\}. \quad (6.2.16)$$

**Démonstration.** La démonstration est présentée dans le chapitre 2. Ce théorème est une adaptation du Théorème 4.3.6 au cas des systèmes à entrée échantillonnée et à retards bornés. ■

*Conception du gain de l'observateur :*

Sachant que la paire  $(A, C)$  est observable, il est possible de déterminer un gain  $L$  tel que l'état  $\hat{x}(t)$  de l'observateur (6.2.7) converge exponentiellement vers l'état non retardé  $x(t)$  du système. Le théorème qui suit permet d'obtenir ce gain  $L$  de façon à ce que la convergence soit  $\alpha$ -exponentielle et ce, malgré le retard variable  $\delta_2$  sur la sortie. L'erreur d'estimation, définie par  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ , est régie par :

$$\dot{e}(t) = Ae(t) - LCe(t - \delta_2(t)), \quad (6.2.17)$$

**Théorème 6.2.2** [134] *On considère l'observateur (6.2.8) et on suppose que, pour des réels positifs  $\alpha$  et  $\epsilon$ , il existe des  $(n \times n)$ -matrices  $0 < P_1, P, S, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2, Z_3, R, R_a$  et une matrice  $X$  de dimensions appropriées telles que les conditions LMI (6.2.18) et (6.2.19) soient satisfaites pour  $j = 1, 2$  :*

$$\begin{bmatrix} \Psi_2 & \begin{bmatrix} \beta_{2j}XC - Y_1 \\ \epsilon\beta_{2j}XC - Y_2 \end{bmatrix} & \mu_2\beta_{2j} \begin{bmatrix} XC \\ \epsilon XC \end{bmatrix} \\ * & -S & 0 \\ * & * & -\mu_2 R_a \end{bmatrix} < 0, \quad (6.2.18)$$

$$\begin{bmatrix} R & Y_1 & Y_2 \\ * & Z_1 & Z_2 \\ * & * & Z_3 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (6.2.19)$$

où les constantes  $\beta_{2j}$  ( $j = 1, 2$ ) sont définies en (6.2.11) et la matrice symétrique  $\Psi_2$  est définie par :

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= \begin{bmatrix} \Psi_2^{11} & \Psi_2^{12} \\ * & \Psi_2^{22} \end{bmatrix}, \\ \Psi_2^{11} &= P^T(A_0 + \alpha I_n) + (A_0 + \alpha I_n)^T P + S + \delta_2 Z_1 + Y_1 + Y_1^T, \\ \Psi_2^{12} &= P_1 - P + \epsilon P^T(A_0 + \alpha I_n)^T + \delta_2 \bar{Z}_2 + \bar{Y}_2, \\ \Psi_2^{22} &= -\epsilon(P + P^T) + \delta_2(Z_3 + R) + 2\mu_2 R_a. \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

Alors, la convergence exponentielle (vers 0 et à taux  $\alpha$ ) de l'erreur (6.2.17) est assurée grâce au gain :

$$L = (P^T)^{-1}W. \quad (6.2.21)$$

**Démonstration.** La preuve vient du Théorème 6.2.1 appliqué au cas d'un retard simple et pour le choix  $P = P_2 = \epsilon P_3$  et  $X = P_2 L$ . ■

**Remarque 6.2.3** Dans le théorème précédent, le retard  $\delta_2(t)$  (et plus particulièrement les bornes  $\delta_2$  et  $\mu_2$ ) sont des paramètres imposés par le réseau et l'échantillonnage. Notre objectif consiste donc à jouer sur le paramètre  $\epsilon$  pour trouver la plus grande valeur de  $\alpha$  rendant les LMI faisables.

*Conception de la loi de commande :*

Ce paragraphe se concentre sur la détermination du gain de la loi de commande par retour d'état,  $u(t) = Kx(t)$ . Nous considérons pour l'instant que l'observateur est "parfait" et délivre à tout moment l'état du système réel, soit  $e(t) = 0$  ou encore  $x(t) = \hat{x}(t)$ . L'influence des imperfections de l'observateur, qui correspond au cas plus réaliste  $e(t) \neq 0$ , sera étudiée dans le paragraphe suivant dédié à la stabilité globale. On s'intéresse finalement au système en boucle fermé :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t - \delta_1(t)), \quad (6.2.22)$$

**Théorème 6.2.4** [132] Supposons que, pour des réels positifs  $\alpha$  et  $\epsilon$ , il existe des  $(n \times n)$ -matrices symétriques définies positives  $\bar{P}_1, \bar{S}, \bar{R}, \bar{R}_a$  et des matrices  $\bar{P}, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{Z}_3, \bar{Y}_1, \bar{Y}_2, W$  de dimensions appropriées telles que les conditions suivantes soient satisfaites pour  $i = 1, 2$  :

$$\begin{bmatrix} \Psi_3 & \begin{bmatrix} \beta_i BW - \bar{Y}_1^T \\ \epsilon \beta_{1i} BW - \bar{Y}_2^T \end{bmatrix} & \mu_1 \begin{bmatrix} \beta_{1i} BW \\ \epsilon \beta_{1i} BW \end{bmatrix} \\ * & -\bar{S} & 0 \\ * & * & -\mu_1 \bar{R}_a \end{bmatrix} < 0, \quad (6.2.23)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{R} & \bar{Y}_1 & \bar{Y}_2 \\ * & \bar{Z}_1 & \bar{Z}_2 \\ * & * & \bar{Z}_3 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (6.2.24)$$

où les constantes  $\beta_{1i}$  ( $i = 1, 2$ ) sont définies en (6.2.11) et où, similairement à (6.2.20), la matrice symétrique  $\Psi_3$  est définie par les blocs :

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_3^{11} &= (A_0 + \alpha I_n)\bar{P} + \bar{P}^T(A_0 + \alpha I_n)^T + \bar{S} + \delta_1 \bar{Z}_1 + \bar{Y}_1 + \bar{Y}_1^T, \\ \bar{\Psi}_3^{12} &= \bar{P}_1 - \bar{P} + \epsilon \bar{P}^T(A_0 + \alpha I_n)^T + \delta_1 \bar{Z}_2 + \bar{Y}_2, \\ \bar{\Psi}_3^{22} &= -\epsilon(\bar{P} + \bar{P}^T) + \delta_1(\bar{Z}_3 + \bar{R}) + 2\mu_1 \bar{R}_a. \end{aligned}$$

Alors, pour tout retard  $\delta_1(t)$  de la forme (6.2.10), la stabilité exponentielle (à taux  $\alpha$ ) du système (6.2.22) est assurée grâce au gain :

$$K = W\bar{P}^{-1}. \quad (6.2.25)$$

**Démonstration.** Partant du Théorème 6.2.1, on choisit  $P_3 = \varepsilon P_2$ , où  $\varepsilon$  est un paramètre de réglage pouvant améliorer les résultats. On constate alors que la matrice  $P_2$  n'est pas singulière du fait que la seule matrice qui doit être définie négative dans le deuxième terme de la diagonale de (6.2.13) est  $-\varepsilon(P_2 + P_2^T)$ . On définit alors :  $\bar{P} = P_2^{-1}$  et, pour toute matrice  $V \in \{P_1, Y_{i \in \{1,2\}}, S, R, R_a, Z_{k \in \{1,2,3\}}\}$ , on introduit une nouvelle variable  $\bar{V}$  donnée par  $\bar{V} = \bar{P}^T V \bar{P}$ . D'autre part, on pose  $W = K\bar{P}$ . La démonstration se fait alors en multipliant (6.2.13) à droite par la matrice  $\mathcal{P}_7 = \text{diag}\{\bar{P}, \bar{P}, \bar{P}, \bar{P}, \bar{P}, \bar{P}, \bar{P}\}$  et à gauche par sa transposée  $\mathcal{P}_7^T$ . On multiplie aussi (6.2.14) à droite par  $\mathcal{P}_3 = \text{diag}\{\bar{P}, \bar{P}, \bar{P}\}$  et, à gauche, par  $\mathcal{P}_3^T$ . ■

**Remarque 6.2.5** Comme précédemment, on cherchera à maximiser le paramètre  $\alpha$  en jouant sur le paramètre  $\varepsilon$ .

*Stabilité globale du système commandé en réseau :*

La dynamique du système global (Maître, Esclave, réseau, échantillonnage et observateur), intégrant les gains  $K$ ,  $L$  et les retards  $\delta_1(t)$ ,  $\delta_2(t)$ , est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + BK\hat{x}(t - \delta_1(t)), \\ \dot{e}(t) = Ae(t) - LCe(t - \delta_2(t)), \end{cases} \quad (6.2.26)$$

qui se développe sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t - \delta_1(t)) - BKe(t - \delta_1(t)), \\ \dot{e}(t) = Ae(t) - LCe(t - \delta_2(t)). \end{cases} \quad (6.2.27)$$

ou encore, en introduisant la nouvelle variable  $\bar{e}(t) = \text{col}\{x(t), e(t)\}$  :

$$\dot{\bar{e}}(t) = \bar{A}_0 \bar{e}(t) + \bar{A}_1 \bar{e}(t - \delta_1(t)) + \bar{A}_2 \bar{e}(t - \delta_2(t)), \quad (6.2.28)$$

avec

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} BK & -BK \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & LC \end{bmatrix}. \quad (6.2.29)$$

Le Théorème 6.2.1 permettra donc l'analyse de la stabilité exponentielle du système global. La conception des gains  $K$  et  $L$  peut, quant à elle, être menée selon le mode opératoire suivant :

- La première étape consiste en une phase d'analyse et d'identification des paramètres  $h_i^m$ ,  $T$  qui, à leur tour, fournissent les  $\delta_i^m$  et  $\mu_i$  définissant les caractéristiques de retard global.
- Puis, le gain  $L$  de l'observateur se détermine en appliquant le Théorème 6.2.2 au système (6.2.17).
- De la même façon, le gain  $K$  du retour d'état se calcule par application du Théorème 6.2.4 au système (6.2.22).
- Une fois ces deux gains calculés, on vérifie la stabilité exponentielle globale du système Maître-Esclave en utilisant le Théorème 6.2.1 pour le système (6.2.28). Ceci donne le taux  $\alpha$  garanti.

**Remarque 6.2.6** Il est possible d'établir un principe de séparation dans le problème de stabilité du système (6.2.27).

### 6.2.3 Application au cas d'un robot mobile

Cette étude est finalement illustrée par un exemple de système télé-opéré. Un robot mobile, dont les dynamiques sont décrites ci-dessous, est capable de se déplacer dans une direction. Ce robot correspond bien sûr au processus Esclave à commander à distance. Une phase d'identification préalable a conduit au modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -11,32 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 11,32 \end{bmatrix} u(t - \delta_1(t)), \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t). \end{cases} \quad (6.2.30)$$

On suit alors le mode opératoire proposé précédemment. Les caractéristiques du retard de transmission combiné avec l'échantillonnage conduisent aux valeurs (en secondes)  $\delta_1 = \delta_2 = 0.37s$  et  $\mu_1 = \mu_2 = 0.11s$  correspondant à la notation (6.2.10). Le Théorème 6.2.2 appliqué au système (6.2.17) assure la convergence exponentielle de l'observateur vers la solution  $e(t) = 0$  avec un taux  $\alpha = 1.05$  (obtenu pour  $\epsilon = 3.00$ ) pour le gain d'observateur suivant :

$$L = \begin{bmatrix} -0.9173 \\ -0.3187 \end{bmatrix}. \quad (6.2.31)$$

Le Théorème 6.2.4 appliqué à (6.2.22) garantit que la loi de commande par retour d'état stabilisera exponentiellement le système vers sa consigne, avec un taux  $\alpha = 1.05$  (obtenu pour  $\epsilon = 3.43$ ), pour le gain  $K$  suivant :

$$K = \begin{bmatrix} -0.9125 & -0.0801 \end{bmatrix}. \quad (6.2.32)$$

Enfin le Théorème 6.2.1 garantit la stabilité du système complet (6.2.28) avec les gains  $L$  et  $K$  calculés ci-dessus. Le taux garanti par ce théorème est finalement de  $\alpha = 0.7$ .

La Figure 6.8 montre des résultats de simulation obtenus avec des retards de la forme  $\delta_i(t) = \delta_i + 0.5\mu_i \sin(\omega_i t) + \beta_i(t)$ . Les paramètres  $\omega_i$  représentent la fréquence de la partie variable des retards ;  $\beta_i(t)$  est une fonction continue par morceaux représentant les effets de l'échantillonnage et satisfaisant à la condition  $|\beta_i(t)| \leq 0.5\mu_i$ . Sur la Figure 6.8, l'état en continu de l'observateur,  $\hat{x}(t)$ , correspond aux courbes continues, tandis que les informations échantillonnées de l'Esclave sont figurées par les données échantillonnées. La consigne est un créneau. Les deux premières secondes font apparaître l'effet de convergence de l'observateur. Passé ce transitoire, le suivi de consigne est de meilleure qualité. La Figure 6.9 présente la commande échantillonnée qui a stabilisé l'Esclave.

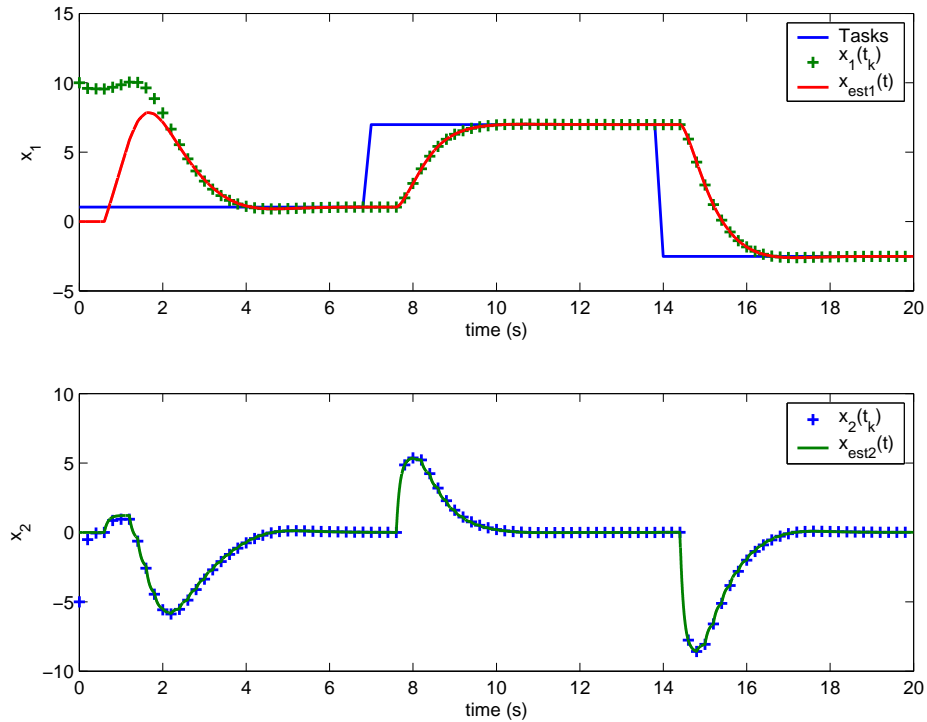


FIG. 6.8 – Résultats en simulation.

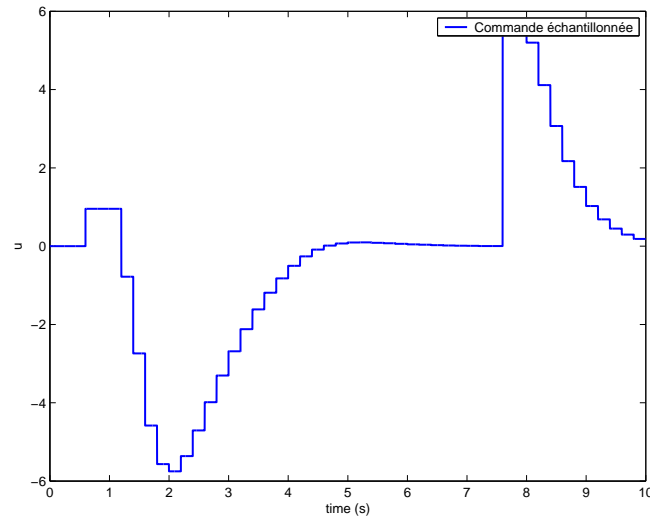


FIG. 6.9 – Commande (échantillonnée et retardée) appliquée à l'Esclave

### 6.2.4 Conception informatique

Cette section présente le programme implanté dans chacune des deux parties, le Maître puis l'Esclave [136]. Le protocole de communication utilisant des *sockets* suit une architecture *Client/Server*. Les deux processus connectés par un lien internet ne sont pas traités de la même manière. Le Maître est le *client* l'Esclave le *server*. D'autre part, les deux entités ont des horloges synchronisées grâce à l'utilisation de card GPS.

### Structure du Maître

Le Maître est composé de quatre threads. Ces threads sont des programmes qui travaillent indépendamment des autres parties du programme. Ils sont utilisés dans cette application car ils permettent d'exécuter des tâches en parallèle dans le même programme. L'architecture du Maître est décrite dans la Figure 6.10.

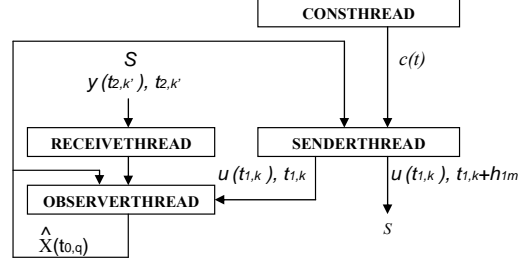


FIG. 6.10 – Structure du Maître

(a) **OBSERVERTHREAD** est consacré au calcul de l'estimation de l'état  $\hat{x}$  à l'instant courant  $t_{0,q}$ . Il travaille avec une cadence rapide  $T_0 \ll T$ . L'instant d'échantillonnage  $t_{0,q}$  correspond à l'échantillonnage de **OBSERVERTHREAD**. Il utilise la dernière valeur de sortie retardée  $y(t_{2,k'})$  qu'il a reçue de l'Esclave et l'instant  $t_{2,k'}$  auquel cette sortie a été délivrée. Il en est de même pour la valeur de la commande  $u(t_{1,k})$  et de l'instant d'implémentation de celle-ci  $t_{1,k}$ . Ces données sont retrouvées dans une liste de valeurs passées de  $\hat{x}$  et  $u$ . Puis, le thread calcule le nouvel état estimé  $\hat{x}(t_{0,q+1})$  grâce à la formulation "discrétisée" (6.2.33) et la rajoute dans la liste précédente.  $T_0$  doit être suffisamment petit pour obtenir des instants de commutation les plus proches de  $t_{2,k'}$ . Le calcul de l'estimation se fait de la manière suivante pour  $i = 1, \dots, n$  et  $r = 1, \dots, p$  :

$$\begin{aligned} \hat{x}_i(t_{0,q+1}) &= \hat{x}_i(t_{0,q}) + \left[ \sum_{j=1}^n A_{(i,j)} \hat{x}_j(t_{0,q}) + \sum_{s=1}^m B_{(i,s)} u_s(t_{1,k} + h_{1m}) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{r=1}^p L_{(i,r)} (y_r(t_{2,k'}) - \hat{y}_r(t_{2,k'})) \right] T_0, \\ \hat{y}_r(0, t_{0,k}) &= \sum_{i=1}^n C_i \hat{x}_i(t_{0,q}) \end{aligned} \quad (6.2.33)$$

(b) **CONSTTHREAD** est un petit programme. Son rôle est de mettre à jour la valeur de la consigne. La consigne utilisée est un signal créneaux. Ainsi il suffit de mettre à jour la valeur de consigne périodiquement avec une période suffisamment large pour permettre au système de se déplacer jusqu'à cette valeur.

(c) **SENDERTHREAD** travaille périodiquement avec une période  $T_0 \ll T_1 \leq T_s$ . L'Esclave n'a pas besoin d'un grand nombre de commandes. Son rôle est de recevoir les dernières valeurs de l'état estimé  $\hat{x}(t_{0,k+1})$  du thread de l'observateur, ensuite il calcule la valeur de commande  $u(t_{1,k+1}) = K\hat{x}(t_{1,k+1})$ . Il regroupe alors cette commande  $u(t_{0,k+1})$  et l'instant du calcul de cette commande  $t_{0,k+1}$  dans une liste qui sera utilisée par **OBSERVERTHREAD**. Puis à l'instant  $t_{1,k+1}$ , il envoie le paquet de commande le plus récent à l'Esclave.

(d) **RECEIVETHREAD** est un programme qui agit de manière événementielle. Cela signifie qu'il n'est sollicité que quand un paquet de sortie venant de l'Esclave lui parvient. Il transmet les informations de l'Esclave à **OBSERVERTHREAD** pour calculer l'estimation de l'état.

### Structure de l'Esclave

Comme nous l'avons mentionné dans le paragraphe 6.2.2, l'Esclave n'a qu'une capacité de calcul réduite. Ainsi son rôle ne consiste simplement qu'à recevoir et à appliquer la commande qu'il reçoit du Maître mais

aussi à récupérer les informations de sortie de l'Esclave puis de les envoyer au Maître. La Figure 6.11 présente la conception information de l'Esclave.

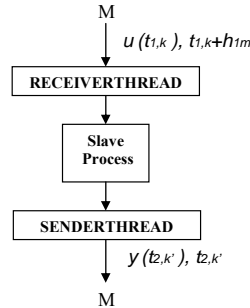


FIG. 6.11 – Structure de l'Esclave

Il est composé de deux threads :

(d) RECEIVERTHREAD est un thread événementiel. De même que pour le thread de réception du Maître, il n'est sollicité que lorsqu'il reçoit un paquet. Il garde dans une liste les données de commande  $u(t_{1,k})$  jusqu'à l'instant cible associé  $t_{1,k} + h_{1m}$  et, ensuite, l'injecte dans l'entrée de l'Esclave jusqu'au prochain instant cible  $t_{1,k+1} + h_{1m}$ .

(b) SENDERTHREAD reçoit la dernière donnée de mesure de l'Esclave grâce au capteurs  $y(t_{2,k'})$  et conserve le temps de réception de cette mesure  $t_{2,k'}$ . Ensuite il envoie ces données au Maître. Ce programme travaille périodiquement avec une période  $T_2 \leq T_s$ .  $T_2$  doit être suffisamment important pour éviter des phénomènes de congestion du réseau, ce qui augmente le retard  $h_{2m}$ , mais aussi suffisamment petit pour garantir les performances de l'observateur. Cependant, on remarque que toutes les valeurs de  $T_2$  comprises entre 0 et  $T_s$  peuvent convenir puisque le gain de l'observateur est calculé à partir des conditions LMI (6.2.2).

### Détails sur le contenu des paquets

Les paquets envoyés d'une entité vers l'autre contiennent plusieurs informations, que nous allons détailler dans cette partie. Les paquets sont des éléments du type *my\_structure.h*, qui correspond à la définition des structures du programme.

– Les paquets de commande se présentent de la manière suivante :

Paquet de commande	
Numéro de séquence	
Heure d'envoi	
Commande :	$\left\{ \begin{array}{l} \textit{Instant cible} \\ \textit{Valeur de la commande} \end{array} \right.$

(6.2.34)

D'autres valeurs de commande prévues pour d'autres instants cibles peuvent être envoyées simultanément dans la même commande.

- Les paquets de sorties se présentent de la manière suivante :

Paquet de sortie
Numéro de séquence
position $x$
(vitesse $\dot{x}$ )
Heure d'envoi
(Instant cible)

(6.2.35)

On peut aussi ajouter d'autres informations telles que l'instant cible de la dernière commande utilisée, la valeur de cette commande et le retard mesuré à l'arrivée d'un paquet de commande.

### 6.2.5 Conclusion

L'idée principale de notre stratégie de commande consiste finalement à concevoir un Maître qui travaille en temps continu alors que l'Esclave, lui, applique une commande discrétisée et délivre une sortie échantillonnée. Avec à cette méthode, l'observateur situé au niveau du Maître produit une estimation de l'état courant du processus Esclave alors qu'il ne reçoit de ce dernier qu'une information échantillonnée et retardée. Cette façon de mettre en avant le fonctionnement en temps continu prolonge tout à fait l'idée que le phénomène d'échantillonnage-blocage peut être traité comme un retard variable.

Une autre caractéristique de notre approche est de considérer des retards dont la borne minimale n'est pas obligatoirement nulle (*bornés*) et pour lesquelles les hypothèses sont peu contraignantes : retards non symétriques, inconnus et variables. Un banc d'essais est actuellement en cours d'élaboration pour contrôler, depuis Lille, un robot mobile situé à Montpellier.

## 6.3 Commande d'un chariot utilisant un capteur caméra

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à l'asservissement d'un moteur en utilisant une caméra en guise de capteur des sorties. Une première partie du problème du contrôle d'une telle application consiste en une phase d'interprétation des données délivrées par la caméra. La camera effectue les captures d'image périodiquement, ce qui induit un échantillonnage de la commande. De plus l'interprétation des données capteurs en données utilisables par le contrôleur induit un retard sur la sortie. Cette phase ne sera pas présentée dans ce mémoire.

Notre objectif dans ce projet consiste à déterminer une commande qui assure un suivi de trajectoire du moteur. L'utilisation de ces informations capteurs échantillonnées et retardées dégrade les performances de la commande pour la poursuite de trajectoire. On en déduit l'idée de déterminer un observateur qui, à partir de données échantillonnées et retardées, permette de délivrer une estimation en temps continu pour que la commande du moteur conserve ces performances.

### 6.3.1 Déplacement motorisé d'un chariot

La maquette du pendule inverse 2D est constituée notamment d'une table XY permettant de faire déplacer un chariot sur un plan horizontal (Figure 6.13). Le déplacement est assuré par deux moteurs de type brushless



avec variateurs, pilotés en +/-10V depuis un PC équipé d'une carte dSpace® à travers un amplificateur de puissance. Chaque motoréducteur brushless de 200W est alimenté en 240V mono, offrant un courant maximal de 15A et délivrant un couple nominal de 3.0Nm.

En ce qui concerne les essais temps réel des méthodes d'identification et de commande, nous considérons le déplacement du chariot uniquement sur un axe en admettant selon le cas considéré :

- soit un retour d'information par les codeurs de position/vitesse disponible sur le moteur (en pointillés sur la Figure 6.12),
- soit par l'information de la position du chariot délivrée par un système de vision artificielle (en trait uni sur la Figure 6.12).

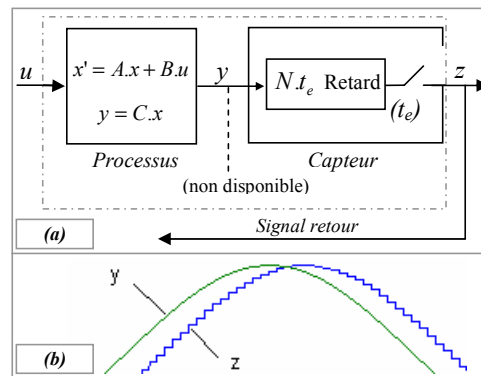


FIG. 6.12 – Présentation du pendule 2D avec capteur caméra

### 6.3.2 Modèle du système à commander

L'ensemble amplificateur-moteur-chariot est approximé à un système linéaire du second ordre défini par le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

où le vecteur d'état,  $x$  est composé de la position et la vitesse du chariot, les matrices d'état étant  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/\tau \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ K/\tau \end{bmatrix}$  et  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ , où  $K$  et  $\tau$  sont respectivement la constante de temps et le gain statique de l'ensemble amplificateur-moteur-chariot.

L'identification des paramètres du processus a donné :  $\tau = 10ms$  et  $K \approx 2.5m/s/V$ .

### 6.3.3 Système de vision artificielle

Dans le cadre d'un asservissement visuel du chariot en position, l'information provenant des codeurs incrémentaux est considérée comme étant inaccessible. La seule information disponible sur l'évolution du processus est alors celle délivrée par un système de vision artificielle qui observe le déplacement du chariot grâce à une LED infrarouge fixée sur celui-ci (Figure 6.13). Le système de vision est constitué d'une caméra CCD doté d'un filtre infrarouge, reliée à un PC équipé d'un logiciel de traitement d'image. Grâce à la caméra située au dessus

du chariot, une opération d'extraction d'objet dans la scène permet au système de vision de fournir sous forme échantillonnée et retardée, la position du chariot. Ainsi nous considérons que la sortie du capteur visuel est :

$$z(t) = x_1^*(t - Nt_e), \quad (6.3.2)$$

où \* représente l'échantillonnage à l'instant  $t_e$  et  $N$  entier positif.

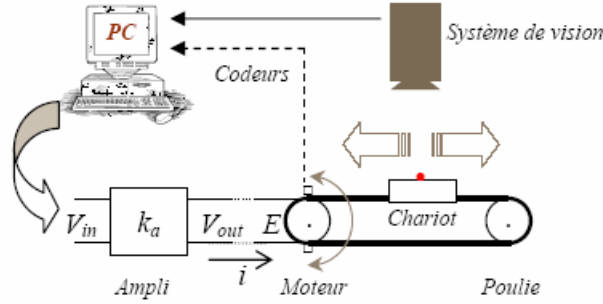


FIG. 6.13 – Présentation du pendule 2D avec capteur caméra

À noter que la période d'échantillonnage  $t_e$  correspond à la durée d'une prise d'image et que le retard  $Nt_e$  est associé au temps requis pour le traitement d'image(s) en admettant qu'il faut  $N$  images pour effectuer un traitement.

#### 6.3.4 Utilisation d'un observateur prédictif

Dans le cas d'un retour de sortie retardée (échantillonnée ou continue), il est possible d'envisager la combinaison de l'observation et de la prédiction pour générer directement l'état actuel à partir de l'information de retour. La commande de ce système sera alors plus adaptée car elle utilisera de meilleures valeurs de l'état. Dans ce sens, nous proposons d'utiliser un observateur/prédictif proposé dans le Chapitre 5 sur l'observation des systèmes à retards connus et dans [134] qui permet d'obtenir une estimation continue de l'état actuel à partir de la sortie retardée du processus.

L'observateur de [134] s'applique dans le cas où la sortie du processus présente un retard et/ou un échantillonnage connu. Le principe de cet observateur est de considérer que l'échantillonnage engendre un retard variable de  $t - t_k$  où  $t_k$  est l'instant d'échantillonnage le plus récent. La méthode prend en compte des échantillonnages apériodiques, mais suppose alors que l'intervalle entre deux échantillons est borné et que la valeur maximale  $T$  est connue. Ainsi,  $0 \leq t - t_k \leq T$  et le phénomène de retard lié à l'échantillonnage est noté  $\tau$ .

Par ailleurs, en considérant un retour par  $z^*(t)$  qui engendre, par définition, un retard de  $R$  sur la mesure de la sortie du processus, il convient d'écrire  $z^*(t) = y(t_\delta(t))$  où  $\delta(t) = R + t - t_k$  représente cette fois-ci le retard global de la sortie. Ainsi, le phénomène d'échantillonnage et celui du retard liés au capteur (par exemple du système de vision artificielle) sont ramenés à un problème de retard variable. L'idée est alors de considérer un observateur Luenberger continu à retard pour le processus :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(y(t - \delta(t)) - \hat{y}(t - \delta(t))), \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t). \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

Sachant que la paire  $(A, C)$  est observable, il est alors possible de déterminer un gain linéaire  $L$  en utilisant le Théorème 6.2.2 tel que l'observateur converge exponentiellement vers le processus en l'absence du retard  $\delta(t) = R+t-t_k$ . L'observateur garantit une estimation continue de l'état  $x(t)$  même entre les instants d'échantillonnage et, en considérant (6.3.1) et (6.3.3), le vecteur d'erreur  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  évolue selon :

$$\dot{e}(t) = Ae(t) - LCe(t - \delta(t)), \quad (6.3.4)$$

Le théorème décrit dans [20] et dans [134] permet poser les conditions des LMI dont la résolution conduit à déterminer le gain  $L$ .

### 6.3.5 Validation expérimentale

#### Exemple de simulation

Considérons un exemple de simulation reflétant la problématique décrite dans l'introduction générale : l'asservissement en position d'un chariot par un retour visuel. Le processus considéré (représentant l'ensemble amplificateur-moteur-chariot) est défini par (6.3.1) avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -120 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 350 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.3.5)$$

Par ailleurs, en considérant que la position du chariot est donnée sous forme retardée et échantillonnée, nous prenons comme grandeur de retour,  $z(t) = x_1^*(t - Nt_e)$ , avec  $R = t_e = 28ms$  ( $N = 1$ ).

Nous utilisons un observateur qui a à la fois le rôle d'un observateur, c'est-à-dire qu'il permet de construire une estimation de l'état complet à partir des données réduites de sorties, mais aussi de prédicteur car il estime l'état courant du système en utilisant des informations de sorties retardées. La résolution des conditions des LMI du Théorème (5.2.1) conduit dans ce cas à :

$$L = \begin{bmatrix} -3.1225 \\ 0.0569 \end{bmatrix} \quad (6.3.6)$$

En ce qui concerne la commande, nous mettons en œuvre un contrôleur continu par morceaux [19], qui ne sera pas détaillé dans ce mémoire. En annexe figure l'article [20] dont sont tirés les résultats suivants. La commande est basée sur les valeurs suivantes :

$$\alpha = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.3.7)$$

La consigne d'état imposée sur le processus est de la forme :

$$c(t) = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \sin(\omega t) \\ r\omega \cos(\omega t) \end{bmatrix}. \quad (6.3.8)$$

Les résultats sont illustrés par la Figure 6.14 pour un contrôleur cadencé à  $T = 10ms$  et par la Figure 6.15 pour  $T = 20ms$  (afin de montrer le fonctionnement). À noter que les composantes de la consigne sont retardées convenablement afin de permettre une meilleure lecture des courbes.

La poursuite de la consigne par l'état du processus est illustrée par les Figures 6.14a et 6.14c et les Figures 6.15a et 6.15b. Nous constatons que cette poursuite est réalisée avec un retard de  $T$  et une coïncidence à chaque  $kT$ .

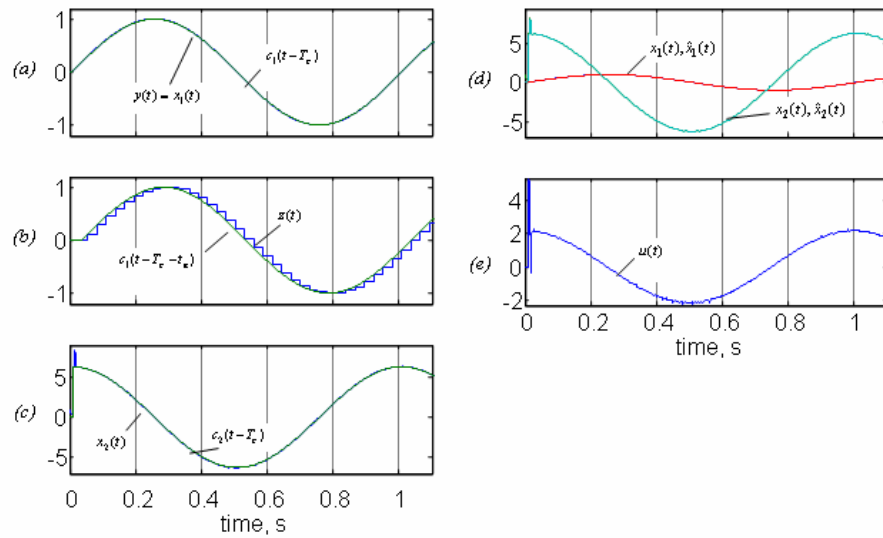
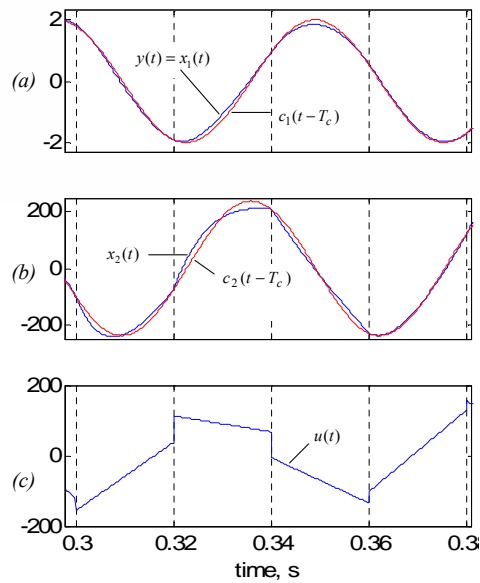


FIG. 6.14 – Simulation de la commande du moteur

FIG. 6.15 – Pursuite  $T = 20ms$ ,  $a = 2$  et  $\omega = 38\pi rad/s$ 

Par ailleurs, la Figure 6.15b présente la sortie du capteur suivant sa consigne avec un retard de  $R$ , et les Figures 6.14e et 6.15c représentent la commande.

Enfin, l'estimation de l'état est représentée dans la Figure 6.14d. Afin de montrer la performance de l'observateur/prédicteur, nous donnons l'évolution de l'état estimé dans un cas où ses conditions initiales sont éloignées de celles du processus Figure 6.16.

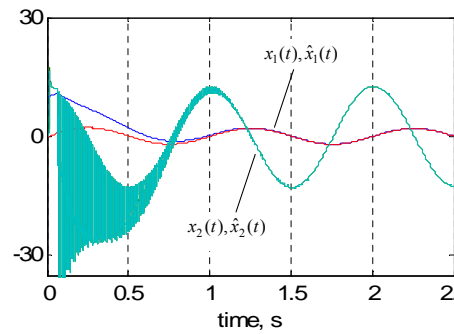


FIG. 6.16 – Estimation de l'état pour  $a = 2$  et  $\omega = 2rad/s$

### Processus réel

Nous avons réalisé le même type d'asservissement sur la maquette, en lui associant le modèle linéaire (6.3.1) et en utilisant un retour par le système de vision, soit  $z(t) = x_1^*(t - Nt_e)$ . En effet, la prise d'image est réalisée par un mode *reset* qui permet de définir une période d'échantillonnage constante suffisamment grande pour entreprendre l'acquisition d'une trame d'image et les calculs de traitement de l'image nécessaires. Ainsi,  $R = t_e = 28ms$  ( $N=1$ ).

Les résultats montrent que la poursuite est réalisée avec quelques déformations (Figures 6.17a et 6.17b).

### 6.3.6 Conclusion

Dans cette application, nous avons développé un observateur d'état pour un système dont la sortie est soumise à un échantillonnage et à un retard connu. Cet observateur d'état permet de délivrer les valeurs courantes de l'état permettant ainsi une meilleure poursuite de trajectoire. En effet, comme évoqué précédemment, le processus réel présente des non-linéarités qui ne sont pas prises en compte par le modèle utilisé pour définir la loi de commande et par l'observateur, ce qui implique les déformations visibles dans les résultats expérimentaux. Une prochaine étape consisterait à prendre en compte ces non-linéarités aussi bien dans la synthèse de la commande et de l'observateur.

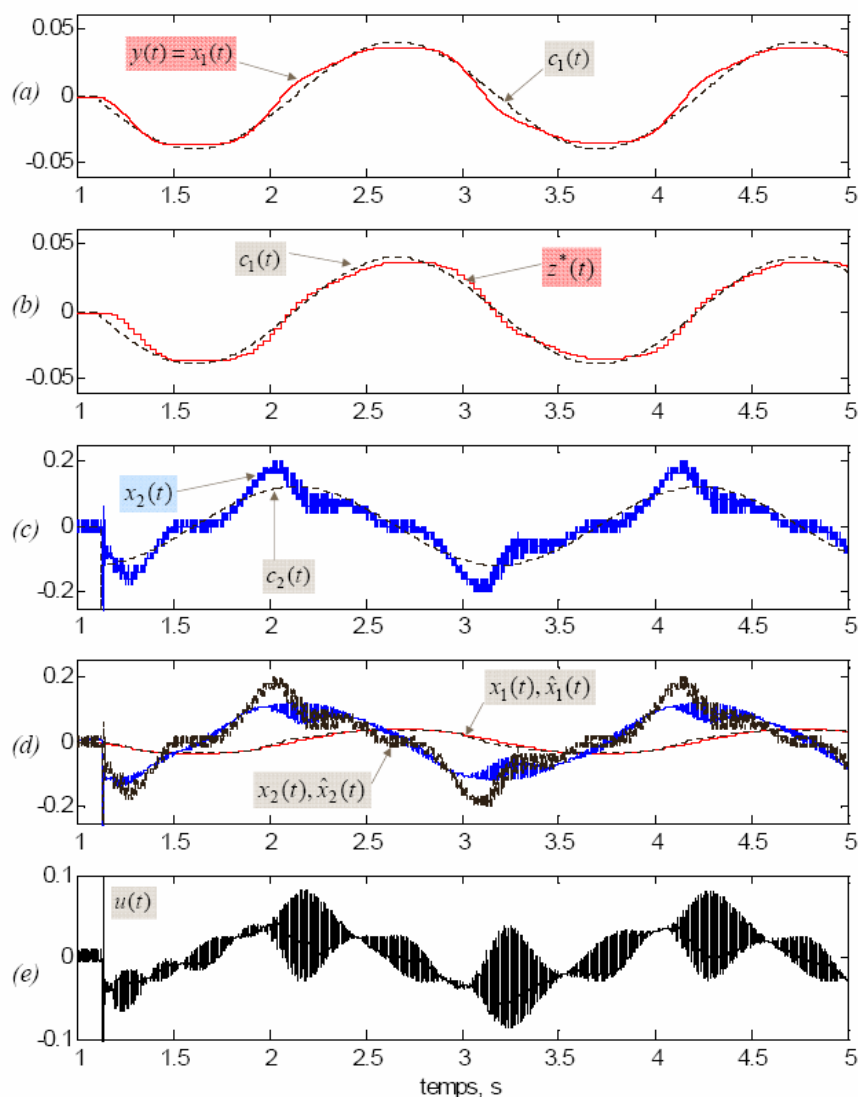


FIG. 6.17 – Test de la commande sur le moteur réel

## 6.4 Commande retardée d'un pendule inverse

### 6.4.1 Position du problème

Dans cette section, nous allons nous intéresser à l'exemple classique du pendule inverse. Nous supposons que le pendule est soumis à un retard pur variable, c'est-à-dire que nous supposons que seule l'entrée du système est retardée. Cela peut s'interpréter comme un échantillonnage de la commande, comme un temps de réponse non négligeable de l'actionneur ou bien par l'envoi de la commande à travers un réseau de communication.

Nous allons reprendre la formulation proposée dans le Chapitre 3 concernant la stabilisation exponentielle des systèmes non linéaires. Dans le paragraphe 3.2.3, nous avons discuté du fait qu'un système non linéaire peut être modélisé soit par un système polytopique ou par un système à paramètres incertains sous réserve que

le système reste dans un espace borné de l'état [140]. Il a été montré que, dans le cas du pendule inverse, il n'existe pas de loi de commande stabilisante globale. Nous proposons alors dans cette section de déterminer une borne supérieure  $\tau_2$  du retard en entrée pour lequel il existe une commande par retour d'état  $u(t) = Kx(t)$  qui stabilise le pendule inverse pour une partie de l'état donnée.

Cette section s'organise alors de la manière suivante. Premièrement, nous proposerons une modélisation de systèmes à paramètres incertains du pendule inverse. Cette modélisation dépendant de la partie de l'espace d'état considéré. Ensuite nous étudierons la stabilisation de ce système à l'aide de théorèmes présentés dans le Chapitre 3.

### 6.4.2 Modélisation sous forme systèmes de paramètres incertains

Reprenons alors les équations du pendule inverse donnée dans (3.2.6) après changement de variables :

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} F_{11}(z) & mgl \sin C(z_2) & 0 & F_{14}(z) \\ \frac{4(1+M/m)}{l^2 D(z_2)} & 0 & 0 & -\frac{2 \cos z_2}{l^2 D(z_2)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2f \cos z_2}{D(z_2)} & 0 & 0 & \frac{-f}{D(z_2)} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t - \tau(t)), \quad (6.4.1)$$

avec  $F_{ij}$  sont des fonctions de l'état  $z$  telles que :

$$\begin{aligned} F_{11}(z) &= -\left(\frac{1}{2}ml \sin z_2 \dot{x} + K\right) \frac{4(1+M/m)}{l^2 D(z_2)}, \\ F_{14}(z) &= \left(\frac{1}{2}ml \sin z_2 \dot{x} + K\right) \frac{2 \cos z_2}{l^2 D(z_2)}. \end{aligned}$$

et avec

$$D(z_2) = M + m - m \cos^2 \theta.$$

On remarque que la matrice définissant la dynamique du système dépendant des paramètres du systèmes et plus particulièrement de l'angle  $z_2$  et de la vitesse  $\dot{x}$  du chariot.

Il est possible d'envisager le fait que la vitesse du chariot est bornée. En effet le chariot est commandé par un moteur qui ne peut délivrer une puissance infinie. On se propose alors de ce donner une borne supérieure  $\dot{x}_{max}$  de la vitesse du chariot dans ces les directions.

On se propose d'écrire les équations du pendule inverse sous forme d'un système à paramètres incertains :

$$\dot{z}(t) = (A_m + \Delta A(z))z(t) + B_1 u(t - \tau(t)), \quad (6.4.2)$$

avec

$$\begin{aligned} A_m &= \begin{bmatrix} F_{11m} & F_{12m} & 0 & F_{14m} \\ \frac{4(1+M/m)}{l^2} D_m & 0 & 0 & -\frac{2}{l^2} E_m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2f E_m & 0 & 0 & -f D_m \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \Delta A(z) &= \begin{bmatrix} \Delta F_{11}(z) & \Delta F_{12}(z_2) & 0 & \Delta F_{14}(z) \\ \frac{4(1+M/m)}{l^2} \Delta D(z_2) & 0 & 0 & -\frac{2}{l^2} \Delta E(z_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2f \Delta E(z_2) & 0 & 0 & -f \Delta D(z_2) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

où les réels  $F_{11m}$ ,  $F_{12m}$ ,  $F_{14m}$ ,  $D_m$  et  $E_m$  correspondent aux valeurs nominales, et les fonctions  $\Delta F_{11}(z) = \Delta_1(z)F_{11d}$ ,  $\Delta F_{12}(z_2) = \Delta_2(z_2)F_{12d}$ ,  $\Delta F_{14}(z) = \Delta_4(z)F_{14d}$ ,  $\Delta D(z_2) = \Delta_5(z_2)D_d$  et  $\Delta E(z_2) = \Delta_5(z_2)E_d$  sont les

perturbations par rapport à ces valeurs nominales. Les fonctions  $\Delta_i(t)$  représentent les perturbations variables normalisées sur les paramètres (c'est-à-dire  $|\Delta_i(t)| \leq 1$ ). Les termes  $F_{11d}$ ,  $F_{12d}$ ,  $F_{14d}$ ,  $D_d$  et  $E_d$  représentent l'amplitude des perturbations. Ils dépendent de la partie de l'espace considéré. Nous supposons ici que les fonctions de perturbations  $\Delta D(z_2)$  et  $\Delta E(z_2)$  varient de la même manière, ce qui se vérifie en regardant leur définition.

Comme dans le Chapitre 3, on propose des matrices  $H_0 \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$ ,  $E_0 \in \mathbb{R}^{5 \times 4}$  et  $\Delta(t) \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$  telles que  $\Delta A(z) = H_0 \Delta(t) E_0$  et telles que :

$$H_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_0 = \begin{bmatrix} F_{11d} & 0 & 0 & 0 \\ F_{12d} & 0 & 0 & 0 \\ F_{14d} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4(1+M/m)}{l^2} D_d & 0 & 0 & -\frac{2}{l^2} E_d \\ 2f E_d & 0 & 0 & -f D_d \end{bmatrix},$$

$$\Delta(z) = \begin{bmatrix} \Delta_1(z) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_2(z_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_4(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta_5(z_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta_5(z_2) \end{bmatrix}.$$

### 6.4.3 Etude de la stabilisation du pendule inverse

Nous nous proposons d'utiliser le Théorème 3.4.2 du Chapitre 3. En introduisant le changement de variable  $z_\alpha(t) = e^{\alpha t} z(t)$  et la commande par retour d'état  $u(t) = Kx(t)$ , les équations du système deviennent :

$$\dot{z}_\alpha(t) = (A_m + \alpha I_4 + \Delta A(z)) z_\alpha(t) + e^{\alpha \tau(t)} B_1 K z_\alpha(t - \tau(t)), \quad (6.4.3)$$

Dans ce cas précis, on dispose du théorème suivant, adapté du Théorème 3.4.2 :

**Théorème 6.4.1** [130] *La loi de commande par retour d'état  $u(t) = Kx(t)$  stabilise exponentiellement, avec un degré de convergence  $\alpha$ , le système (6.4.1), avec un degré de convergence  $\alpha$ , pour tout retard  $\tau(t) \leq \tau_2$ , s'il existe une matrice symétrique définie positive, de dimension  $4 \times 4$ ,  $Q_1$  et des matrices, de dimension  $n \times n$ ,  $Q_2$  et  $Q_3$  de dimension  $n \times n$ ,  $Y$  de dimension  $1 \times 4$  et deux réels positifs  $\varepsilon$  et  $\delta_0$  qui satisfont aux conditions LMI conditions pour  $i = 1, 2$  :*

$$\begin{bmatrix} Q_2 + Q_2^T & \Psi_{12}^i & 0 & \tau_2 Q_2^T & 0 & Q_1 E_0^T \\ * & -Q_3 - Q_3^T & \tau_2 \varepsilon \beta_i B_1 Y & \tau_2 Q_3^T & H_0 & 0 \\ * & * & -\tau_2 \varepsilon Q_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\tau_2 \varepsilon Q_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\delta_0 I_5 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\delta_0 I_5 \end{bmatrix} < 0, \quad (6.4.4)$$

où

$$\begin{aligned} \Psi_{12}^i &= Q_1 (A_m + \alpha I_n)^T + Y^T B_\tau \beta_i^T - Q_2^T + Q_3, \\ \beta_1 &= 1, \quad \beta_2 = e^{\alpha \tau_2} \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

Le gain du retour d'état est alors donné par :

$$K = Y Q_1^{-1}. \quad (6.4.6)$$



### 6.4.4 Résultats

Nous avons choisi pour ces simulations les valeurs suivantes  $l = 0.3m$ ,  $m = 0.6kg$ ,  $M = 4kg$ ,  $g = 9.8m/s^2$ ,  $k = 0.3N.m$ ,  $f = 0.1Ns/m$ .

Premièrement on constate qu'il n'y a pas de solutions possibles pour un choix de  $\dot{x}_{max} \geq 1$  ou pour  $\theta \geq 1.05$ . Le Tableau 6.1 présente les résultats donnés par le Théorème 6.4.1. Les valeurs qui complètent le tableau sont les bornes maximales  $\tau_2$  en ms.

$\theta_{max}$	$\approx 0$	0.01	0.1	0.5	1	1.05
$\alpha = 0$	32.2	31.6	29.6	23.6	2	$\approx 0$
$\alpha = 1$	28.9	28.6	27.4	18.3	X	X
$\alpha = 2$	26.7	26.6	25.2	1.0	X	X

TAB. 6.1 – Borne supérieure maximale  $\tau_2$  du retard en fonction de  $\theta_{max}$  et de  $\alpha$

### 6.4.5 Conclusion

Nous avons développé dans cette section une commande par retour d'état qui stabilise localement le pendule inverse malgré un retard variable et inconnu en entrée.

## 6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu que les résultats théoriques présentés dans les chapitres précédents trouvent leur justification dans la résolution de problèmes physiques. Un critère de stabilisation exponentielle démontrés dans le Chapitre 2 a été utilisé pour stabiliser la barre de torsion dont les équations différentielles sont de types retardée et neutre. Concernant le problème de la commande à distance à travers un réseau de communication, nous avons développé une structure utilisant des informations GPS. Les théorèmes permettant la synthèse d'un gain de commande (Chapitre 2 et 4) et d'un gain de Luenberger (Chapitre 4 et 5) qui assurent la stabilité globale du système malgré les retards variables de communication et d'échantillonnage. Ensuite dans le cadre de la poursuite de trajectoire d'un moteur dont les sorties sont mesurées à l'aide d'un capteur caméra, nous avons développé un observateur/prédicteur en utilisant les résultats sur la stabilisation de systèmes échantillonnés (Chapitre 4) et sur l'observation (Chapitre 5) qui ont permis améliorer les performances de la commande développées pour la poursuite de trajectoires. Enfin les résultats sur la stabilisation des systèmes non linéaires à retards (Chapitre 3) ont permis de développer des lois de commande qui stabilise exponentiellement et localement le pendule inverse.

# Conclusion générale et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons développé des outils pour la commande et l'observation des systèmes à retards variables. Nous avons proposé des critères de stabilité et de stabilisation exponentielles pour les systèmes à retards variables et/ou inconnus, ce qui est encore assez rare dans la littérature. Nous les avons ensuite appliqués à différentes situations : observateurs à vitesse de convergence garantie et différents types de commande : échantillonnée, en réseau, par retour visuel...

- Dans un premier chapitre, nous avons présenté les bases théoriques relatives aux systèmes héréditaires et quelques outils permettant leur analyse. Nous avons notamment rappelé quelques résultats de stabilité asymptotique basés sur une approche temporelle et sur les théorèmes de Lyapunov et valables dans le cas où la borne inférieure des retards n'est pas forcément nulle, cas que nous avons nommé retards "bi-bornés" (*non small delays* dans la littérature anglophone). En l'absence d'informations sur cette borne inférieure, celle-ci est fixée à zéro et on retrouve le cas des retards "majorés".
- Les Chapitres 2 et 3 ont été consacrés au développement de critères de stabilité exponentielle des systèmes à retards variables, respectivement dans les cas linéaire puis non linéaire. Nous avons proposé des résultats qui, dans le cas de retards *constants*, améliorent ceux existants et qui, dans le cas de retards variables *majorés* ou *bi-bornés* ont permis d'étendre leur portée à la stabilisation exponentielle avec un taux de convergence garanti. Ces résultats ont montré notamment l'influence de la borne inférieure des retards variables dans la stabilité. Par la suite, il serait intéressant d'utiliser les récents travaux sur la discrétisation des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii afin de réduire encore le conservatisme des théorèmes énoncés.
- Le Chapitre 4 a proposé une étude des systèmes à entrée échantillonnée. Nous y avons présenté une approche par retard variable qui permet d'assimiler ces systèmes à des systèmes à entrée retardée. Les retards qui en résultent sont représentés par des fonctions continues par morceaux et dont la dérivée prend presque partout la valeur critique 1. Après avoir démontré que les théorèmes classiques peuvent être étendus à cette catégorie de retards, nous avons proposé des critères de stabilisation asymptotique et exponentielle robustes s'appliquant aux systèmes à entrée échantillonnée soumis à des incertitudes paramétriques ou à des non-linéarités du type saturation.
- Après s'être concentré sur le problème de la commande, le chapitre 5 a été consacré à une étude de l'observation des systèmes à retards variables. Dans un premier temps, nous avons proposé des critères de convergence exponentielle pour des observateurs de type Luenberger et des retards variables connus. Pour garantir les performances de l'observateur, un critère de convergence exponentielle à taux garanti a été

énoncé . Ensuite, nous nous sommes intéressé au cas plus délicat des systèmes à retards inconnus. Nous avons présenté une synthèse des outils concernant les observateurs à entrées inconnues et les systèmes à retards. Enfin, nous avons étendu ces résultats en ajoutant à nouveau des critères de stabilité exponentielle. Les résultats obtenus nécessitent que le système à observer vérifie des conditions structurelles restrictives qu'il serait intéressant de réduire. Néanmoins, en l'état, ces résultats sont à notre connaissance les premiers du genre.

- Enfin, dans le chapitre 6, nous avons voulu montrer que nos résultats théoriques trouvent une justification certaine au niveau expérimental.
  - Nous nous sommes notamment penché sur le problème de la commande à distance à travers un réseau *internet*. Dans ce problème, nous avons pris en compte à la fois les problèmes de retards variables (gigue) apparaissant dans les lignes de communication, mais aussi de l'échantillonnage des données échangées à travers le réseau ainsi que les pertes de paquets. Une approche originale, utilisant la synchronisation des horloges par GPS, a permis de concevoir l'ensemble du système Maître-Esclave (commande - observation - réseau).
  - D'autre part, nous avons présenté une application concernant le problème du suivi de trajectoire d'un moteur en utilisant un retour visuel qui induit un retard et échantillonnage des sorties.
  - Enfin, nous avons proposé une brève étude de la commande d'un pendule inversé (modèle non linéaire) dont l'entrée est soumise à un retard. Cette étude a permis de mettre en avant l'effet du retard sur la stabilisation locale du pendule inverse. Aujourd'hui limitée à une validation théorique et par simulation, la commande obtenue devrait aussi être implantée concrètement.

Nous venons de mentionner plusieurs perspectives : affiner les LMIs obtenues en utilisant le principe de discrétisation des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii (Chapitres 2-3), relaxer les hypothèses structurelles dans le cas des observateurs à retards inconnus (Chapitre 5), implanter concrètement la commande du pendule inverse... Mentionnons pour finir une autre perspective qui concerne le sujet très porteur des systèmes contrôlés à travers des réseaux de communication. Notre approche du chapitre 6 en constitue une première étape et, ici encore, plusieurs pistes peuvent être ouvertes, dépendant notamment du type de réseau utilisé. Il serait par exemple possible de mieux tenir compte de la qualité de service disponible : en effet, le principe de la boucle que nous avons conçue demande de connaître le retard maximum du réseau. Plus cette connaissance est fine, plus la commande sera dynamique. Dans le cas d'*internet*, cette borne reste difficile à fixer et il sera plus intéressant de définir des secteurs de variation des retards, conduisant à une adaptation dynamique des gains.

## Annexe A

# Inégalités matricielles linéaires

### A.1 Définitions et notations

L'idée de base de la méthode LMI (abréviation anglaise d'Inégalité Matricielle Linéaire) est de formuler un problème (par exemple, la stabilité en boucle fermée avec ou sans contraintes supplémentaires) comme un problème d'optimisation avec un objectif linéaire et des contraintes LMI.

Une contrainte LMI sur un vecteur variable  $x$  de  $\mathbb{R}^m$  est de la forme [125] :

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \geq 0, \quad (\text{A.1.1})$$

où les matrices symétriques  $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $i = 0, \dots, m$  sont données.

La notation suivante  $F > 0$  (ou  $F \geq 0$ ) signifie que la matrice  $F$  est définie positive (respectivement  $F$  semi-définie positive). La contrainte  $F(x) \geq 0$  est une contrainte convexe en  $x$ , c'est-à-dire que l'ensemble  $\{x \in \mathbb{R}^m : F(x) \geq 0\}$  est convexe. On dit que la LMI (A.1.1) est faisable si et seulement s'il existe au moins un vecteur  $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$  tel que l'inégalité matricielle (A.1.1) est vérifiée.

### A.2 Programmation semi-définie

Grâce à des outils comme Matlab par exemple, il existe des fonctions qui permettent de résoudre plusieurs types de problèmes LMI.

Les trois problèmes de bases sont les suivants :

- La faisabilité d'un problème LMI, comme il a été signalé auparavant, permet de déterminer s'il existe un vecteur  $\bar{x}$ , qui vérifie la contrainte LMI  $F(x) \geq 0$ .
- Minimiser  $c^T x$  par rapport à  $F(x) \geq 0$ , où  $c \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ , et  $F$  est une matrice symétrique et affine en  $x$ , est appelé un programme semi-défini (ou SDP pour semi-definite program). Le vecteur  $c$  définit l'objectif du problème et  $x \in \mathbb{R}^m$  représente la variable de décision.
- Minimiser les valeurs propres généralisées. Il s'agit ici de déterminer le minimum d'un paramètre  $\lambda$ , tel

que le problème LMI suivant soit vérifié :

$$\begin{cases} C(x) < 0 \\ B_j(x) > 0 & \forall j \in [1, 2, \dots, p] \\ A_j(x) < \lambda \times B_j(x) & \forall j \in [1, 2, \dots, p] \end{cases} \quad (\text{A.2.1})$$

où  $x$  correspond à l'ensemble des inconnues de l'inégalité matricielle,  $C$ ,  $B_j$ ,  $A_j$  sont des matrices caractérisant une LMI dépendant libéralement de  $x$ .

L'avantage majeur des SDP est que leur complexité est polynômiale, c'est-à-dire qu'il existe des algorithmes qui permettent d'en calculer l'optimum global (pour une décision fixée a priori) en un temps de calcul polynomial par rapport à la taille du problème.

### A.3 Les théorèmes classiques

La difficulté n'est donc pas de résoudre une LMI. En effet les théorèmes issus des techniques du type Lyapunov conduisent généralement à des contraintes non linéaires qui s'écrivent sous la forme d'équation de Riccati. Les difficultés rencontrées proviennent de la transformation de ses contraintes non linéaires en formulation LMI. Pour cela, nous disposons des lemmes suivants :

La transformation basée sur le complément de Schur est la méthode la plus simple et la plus fréquemment utilisée pour transformer des contraintes non linéaires en des contraintes LMI. Cette transformation est la suivante :

**Lemme A.3.1 (Complément de Schur)** *Soient trois matrices  $Q(x)$ ,  $S(x)$  et  $R(x)$  affines par rapport à la variable  $x$ , les matrices  $Q(x)$  et  $R(x)$  étant symétriques. La LMI :*

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0, \quad (\text{A.3.1})$$

*est équivalente aux inégalités suivantes :*

$$\begin{cases} R(x) > 0 \\ Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0 \end{cases} \quad (\text{A.3.2})$$

Une autre transformation est décrite dans le lemme suivant :

**Lemme A.3.2 [76]** *Pour toutes matrices  $A$ ,  $P_0 > 0$  et  $P_1 > 0$ , l'inégalité*

$$A^T P_1 A - P_0 < 0,$$

*est équivalente à l'existence d'une matrice  $Y$  telle que :*

$$\begin{bmatrix} -P_0 & A^T Y^T \\ Y A & -Y - Y^T + P_1 \end{bmatrix} < 0.$$

## Annexe B

# Commande d'un pulvérisateur [3]

### B.1 Introduction

In applications, a lot of systems exist with dead zones. Dead bands or zones are encountered in for example robots and machine tools [94], [95], [147], hydraulic and pneumatic actuators [30], [124], in servo systems [138], [117], parts of consumer products, like valves in cars [122], [152] etc. They can be put deliberately as for example in so called "overlap" hydraulic or pneumatic valves, to ensure closure. These valves are used in mobile applications such as earth moving equipment and farm machinery [18]. Very often dead zones are introduced by friction phenomena [5] and deteriorate system performance. In the latter case, which is dealt in this paper, the dead zone is mostly introduced by non-linear friction, more specifically stiction. Several methods exist to handle friction in control systems of which an overview is given by Armstrong *et. al* [5] and Olsson *et. al* [119]. They range from friction compensation based on accurate determined models, robust control methods like sliding mode e.g. [74], [158] or adaptive algorithms, identifying on-line the friction e.g. [62], [149]. Typically for friction models is that they contain a discontinuous term, which changes in a discontinuous way with the velocity [5], [119] e.g. a constant multiplied by  $sign(v)$  which is often called Coulomb friction. The function  $sign$  is defined as :

$$sign(v) = 1, \forall v > 0 \quad sign(v) = 0, v = 0 \quad sign(v) = -1, \forall v < 0 \quad (\text{B.1.1})$$

where  $v$  is the velocity (translational or angular) of the mass on which the control input and the friction is acting. Most friction compensation methods that don't require an accurate friction model contain a discontinuous term in the control law in order to obtain one unique equilibrium instead of multiple equilibrium points. Southward [138] added in his control law a term which is discontinuous in the position, which is often performed in position control systems with stick-slip and proved to have only one unique stable equilibrium point. Actually, he created a system with two discontinuities as remarked by Young [159]. Young studied the theoretical implications of such a control law in which the discontinuities were simple  $sign$  functions.

In this paper a pressure control system is studied, containing a dead zone and a discontinuous time varying delay. The control law starts from the same simple methodology, often used in practice, which includes a discontinuous term for dead zone compensation. The discontinuity of the control law changes with the sign of the velocity, resulting in only one discontinuity in the system. Normally, in systems where such simple dead-zone compensation methods are used, after compensation of the dead band, the control law is constructed based on

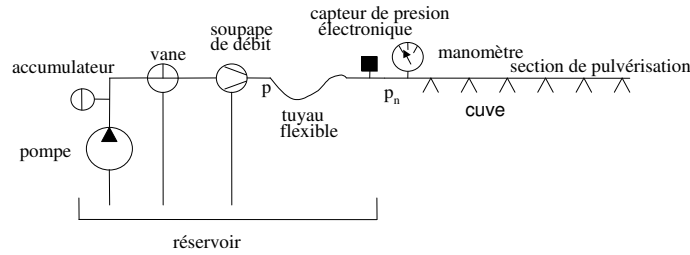


FIG. B.1 – Schematic representation of the pressure control system

rules of linear control. On the example of the pressure control system, it is shown that the rules of thumb, which are used for linear control are not valid anymore in case of dead zone compensation.

In a first section, the pressure control system is presented and described by an elaborate mathematical model. This model is reduced for controller design. The control law, discussed in the next section, is based on a simple dead zone compensation and a Kalman predictor. In next section, stability is analyzed by applying theory of sliding mode control. Stability and attraction of the switching line is proved. The control law is applied to a practical set-up and conclusions are drawn.

## B.2 Description of the system

Figure (B.1) shows the lay out of the system. It is actually one section of an agricultural spray boom for application of herbicides and fertilizer to the plants. A pump, containing two pistons, operating in anti-phase, feeds the circuit. Pressure peaks, resulting from fast activation of valves or originating from the pulsating flow of the pump, are attenuated by the accumulator. The closing valve allows to switch off rapidly spraying without turning off the pump. The pressure at the nozzles is regulated by a flow control valve by adjusting the opening to the return. A long flexible conduct links the pressure control valve with the metal conduct, on which the nozzles are mounted. An electronic transducer measures the pressure at the entrance of the metal conduct. This is the pressure of interest which is measured and should be controlled. The system is secured by a check valve, limiting the pressure to  $7bar$ .

## B.3 Modelling of the system

The flow control valve is operated by an electrical  $12V$  dc motor of which the electrical behavior is governed by :

$$L\dot{i} + Ri + Bl\dot{x}_1 = u \quad (\text{B.3.1})$$

in which  $L$  is the inductance,  $i$  the current,  $R$  the resistance of the wires,  $Bl$  the torque or electromotive force constant,  $x_1$  the position of the valve and  $u$  the input voltage. The flow control valve is actually a ball valve of which the equations of motion of the ball are described by :

$$I\ddot{x}_1 + C\dot{x}_1 = f_{fric}(i, \dot{x}_1) \quad (\text{B.3.2})$$

The ball valve exhibits considerable friction with the housing. This friction is captured in equation (B.3.2) by a simple friction model consisting of a viscous term  $C\dot{x}_1$  and a discontinuous term  $f_{fric}(i, \dot{x}_1)$  including stiction and the Coulomb part of the friction [5], [119] which can be modelled as :

$$\begin{aligned} f_{fric}(i, \dot{x}_1) &= Bli - F_c \text{sign}(\dot{x}_1) & \text{if } |\dot{x}_1| > 0 \\ f_{fric}(i, \dot{x}_1) &= Bli - F_s \text{sign}(i) & \text{if } \dot{x}_1 = 0 \& |Bli| \geq F_s \\ f_{fric}(i, \dot{x}_1) &= 0 & \text{if } \dot{x}_1 = 0 \& |Bli| < F_s \end{aligned} \quad (\text{B.3.3})$$

where  $F_c$  is the constant force counteracting the motion of the valve when it is moving and  $F_s$  the stiction force with  $F_c \leq F_s$ .

Normally, the behavior of a conduct should be described by a partial differential equation. The dynamics of the metal conduct is negligible to the dynamics of the flexible conduct. A description by a set of linear ordinary differential equations provides a reasonable approximation, for the flexible conduct behavior. Such descriptions can be obtained quite easily by for example linear black box identification methodologies :

$$\dot{X}_2 = A_l X_2 + B_l x_3 \quad (\text{B.3.4})$$

where  $X_2$  are the states of the conduct (having no physical meaning),  $x_3$  the pressure directly after the flow control valve (Figure B.1),  $A_l$  and  $B_l$  constant system matrices. The pressure  $y$  at the end of the flexible conduct (Figure B.1) is calculated by :

$$y = C_l X_2 + D_l x_3 \quad (\text{B.3.5})$$

in which  $C_l$  and  $D_l$  constant system matrices. Pressure  $y$  has to be controlled as stated in the previous section.

The accumulator maintains a pressure equilibrium between the fluid pressure and air pressure which are separated by a diaphragm. The behavior of the air can be described by a polytropic process [17] :

$$x_3 V^\kappa = \text{constant} \quad (\text{B.3.6})$$

where  $V$  is the volume occupied by the air. For relatively low pressures, as is the case here, air behaves like an ideal gas such that in case of slow increasing pressure, the change of the state can be considered isothermal with  $\kappa = 1$ . For fast fluctuating pressures around an equilibrium pressure, there is no time for the fluid to exchange heat, such that the change of the state of the air can be considered adiabatic or isentropic with  $\kappa$  equal to the specific heat ratio of air, which equals approximately 1.4. By deriving equation (B.3.6), the fluid flow entering the accumulator can be computed.

Liquid flows  $q$  through restrictions such as valves and nozzles are often turbulent and proportional to the square root of the pressure drop  $p$  [102] :

$$\sqrt{p} = R_{hyd} q \quad (\text{B.3.7})$$

with  $R_{hyd}$  a constant representing the hydraulic resistance. From the conservation of mass, the state equation of the pressure  $x_3$  is derived :

$$\dot{x}_3 = K_{acc} (10^5 + x_3)^{\left(\frac{1}{\kappa} + 1\right)} \left( \frac{-\sqrt{x_3}}{f_{return}(x_1(t-h))} - \frac{\sqrt{C_l x_2 + D_l x_3}}{R_n} + K_p \frac{\pi}{2} |\sin(\omega t + \varphi)| \right) \quad (\text{B.3.8})$$



where  $K_{acc}$  grouping some constants of the accumulator and  $R_n$  the resistance of the nozzles. Function  $f_{return}(x_1(t-h))$  is the resistance of the flow control valve, which is of course dependent on the angle of the ball of the valve. For ease of construction, the motor support of the valve is connected to the housing through pins encapsulated by rubber, resulting in some compliance between the motor support and the housing. This causes a variable but bounded time delay  $h$  of which the value changes whenever the motor switches direction. For one direction, the time delay equals approximately 0.23s and for the other 0.15. Term  $K_p \frac{\pi}{2} |\sin(\omega t + \varphi)|$  represents the flow rate delivered by the piston pump of which the nominal flow equals  $K_p$ .

The entire model, consisting of state equations (B.3.1), (B.3.2), (B.3.4) and (B.3.8) with output (B.3.5) has been validated and is used as an evaluation model.

For controller design a simpler model is derived. Assuming a small inductance  $L$ , small inertia  $I$  and fast accumulator and flexible conduct dynamics, the system described by equations (B.3.1), (B.3.2), (B.3.4) and (B.3.8) is a singular perturbed system [81]. From equations (B.3.1), (B.3.2), (B.3.4) and (B.3.8) the quasi-steady-state or slow model is derived :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= K_m f_d(u) \\ \sqrt{y} &= \frac{\alpha x_1(t-h) + \beta}{x_1(t-h) + \gamma} \quad 0 \leq h_{min} \leq h \leq h_{max} \end{aligned} \quad (\text{B.3.9})$$

in which  $K_m = \frac{Bl}{RC + Bl^2}$ . It is easy to see that when the moment of inertia  $I = 0$ , the angular velocity  $\dot{x}_1$  changes sign with the applied voltage  $u$  and  $\dot{x}_1$  equals zero whenever  $u = 0$ . Based on these considerations  $f_d(u)$  is a simplified version of equation (B.3.3) :

$$\begin{aligned} f_d(u) &= u - c_0 \text{sign}(u) & \text{if} & \quad c_1 \leq |u|, \\ f_d(u) &= 0 & \text{if} & \quad c_1 > |u|, \\ \text{and} & & & \quad 0 \leq c_0 \leq c_1. \end{aligned} \quad (\text{B.3.10})$$

where  $c_0 = F_c R / Bl$  and  $c_1 = F_s R / Bl$ . The lower part of equation (B.3.9) is obtained from equation (B.3.8) by setting  $\dot{x}_3 = 0$  and approximating  $f_{return}(x_1(t-h))$  by a linear function :

$$f_{return}(x_1(t-h)) = b_{return} x_1(t-h) + c_{return} \quad (\text{B.3.11})$$

with  $b_{return}$  and  $c_{return}$  regression constants. In reality  $f_{return}(x_1(t-h))$  is rather quadratic than linear. Table (B.1) clarifies constants  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$ . The average flow rate of the pump  $K_p$  has been taken into account of equation (B.3.9).

Based on the slow dynamics of the system, represented by equation (B.3.9), a control law will be designed. Stability of the control law on the slow model is proved. No hard proof will be provided about the stability of the complete system, only some indications will be given, but practice proves its stability. About, singular perturbed systems with time delay only some results are available for the linear case [48], [78]. For nonlinear systems, nothing was found by the authors of this paper.

## B.4 Control law

In order to stabilize the state equation in (B.3.9), the rotation angle of the valve should be known. The valve doesn't contain a measurement system to determine the rotation angle, such that only the delayed state  $x_1(t-h)$  is available from the output  $\sqrt{y}$ .

TAB. B.1 – Constants,  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$ 

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
$R_n K_p$	$\frac{R_n K_p c_{return}}{b_{return}}$	$\frac{R_n + \sqrt{D_l - C_l A_l^{-1} B_l c_{return}}}{\sqrt{D_l - C_l A_l^{-1} B_l b_{return}}}$

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = K_m f_d(u) + E(x_1(t-h) - \hat{x}_1(t-\hat{h})) \quad (\text{B.4.1})$$

where  $\hat{x}_1$  is an estimate of the state  $x_1$ ,  $\hat{h}$  an average of the real delay  $h$  and  $E$  the Kalman gain. Actually, equation (B.4.1) can only have an interpretation of a Kalman filter if  $h = \hat{h}$ . Normally, in case of a Kalman filter,  $E$  is determined based on the noise properties of the process. As shown later, gain  $E$  is determined on stability considerations.

Other predictor methods have been tested, based on convolution like integral expressions [101] but they lacked stability. In literature [123], it is known that these methods of finite spectrum assignment are sensitive to parametric uncertainties or variations, which is the case for this example.

Based on the prediction of the state  $\hat{x}_1$ , the control law is constructed :

$$u = -u_d \text{sign}\left(\hat{x}_1(t) - \frac{\beta - \gamma\sqrt{p_d}}{\sqrt{p_d} - \alpha}\right) - a\left(\hat{x}_1(t) - \frac{\beta - \gamma\sqrt{p_d}}{\sqrt{p_d} - \alpha}\right) \quad (\text{B.4.2})$$

The term  $\frac{\beta - \gamma\sqrt{p_d}}{\sqrt{p_d} - \alpha}$  is the desired rotation angle, calculated back through the second part of equation (B.3.9) by replacing  $y$  by the desired pressure  $p_d$ . Constants  $a$  and  $u_d$  are design parameters. Note that this is a very simple control law, which is often found back in practical control systems. It is based on the idea of pole placement, in which  $K_m a$  is the final pole location, when the dead zone is compensated perfectly and  $c_1 = c_0$  equal  $u_d$ . With the same train of thought, the location of  $E$  is selected. Following a rule of thumb in observer pole placement  $E$  should be 5 to 10 times faster (larger) than  $a$ . In what follows, it is shown that this way of controller and observer design is far from optimal and that it is better to take, contrary to the rule of thumb,  $E$  smaller than  $a$  in order to avoid instability. Furthermore,  $u_d$  is considered as a design constant rather than a compensation parameter.

## B.5 Stability analysis

The control law of equation (B.4.2) has the nature of a variable structure system, imposing a sliding mode if the sliding surface is attractive and stable. The stability of the system will be analyzed by the method of equivalent control and a Lyapunov function [146].

From equation (B.4.2) the sliding surface  $s(t)$  can be derived :

$$s(t) = \hat{x}_1(t) - \frac{\beta - \gamma\sqrt{p_d}}{\sqrt{p_d} - \alpha} \quad (\text{B.5.1})$$

It is important to note that the control law of equation (B.4.2) imposes a sliding mode on the predictor instead of the real system. The equivalent control is deduced from equation (B.5.1) by deriving  $s(t)$  and assuming sliding such that  $\dot{s}(t)$  is zero :

$$u_{eq} = -\frac{E}{K_m}(x_1(t-h) - \hat{x}_1(t-\hat{h})) \quad (\text{B.5.2})$$

In case the system is in sliding mode at time  $t - \hat{h}$ ,  $\hat{x}_1(t - \hat{h})$  can be replaced by  $\hat{x}_d$  where  $\hat{x}_d$  is the desired pressure, which is the second term of the right hand side of equation (B.5.1). In the application, for which the system is used, it may be assumed that the desired pressure is at least piecewise constant or changes so slowly that the derivative of  $\hat{x}_d$  is zero. Note that it is tempting to write the equivalent control as :

$$u_{eq} - c_0 \text{sign}(u_{eq}) = -\frac{E}{K_m}(x_1(t-h) - \hat{x}_1(t-\hat{h})) \quad (\text{B.5.3})$$

which is wrong. Once on the sliding manifold, the control takes on two values  $u_d$  and  $-u_d$  and has the character of a pulse width modulated (PWM) signal [38]. The equivalent control  $u_{eq}$  gets the interpretation of the slow continuous component or the filtered version of the PWM signal. As the *sign* function depends on the sum of the fast and slow components of the control signal, it just lowers the amplitude of the PWM signal  $u_d$  by  $c_0$ . Therefore, during sliding the following relation is valid [146] :

$$-u_d + c_0 \leq u_{eq} \leq u_d - c_0 \quad (\text{B.5.4})$$

The control law of equation (B.4.2) guarantees that the relation  $c_1 \leq |u|$  is always satisfied, such that the state equation in (B.3.9) reduces to :

$$\dot{x}_1 = -E(x_1(t-h) - \hat{x}_1(t-\hat{h})) \quad (\text{B.5.5})$$

It is striking that during sliding, the dynamics of the system is governed by gain  $E$  of the predictor and not by gain  $a$  of the control law in equation (B.4.2). By the simple reasoning of perfect compensation and pole placement,  $a$  was faulty thought to determine the closed loop pole. In order to ensure a stable sliding mode, constant  $E$  should be determined such that equation (B.5.5) is stable. The state in equation (B.5.5) contains a time delay  $h$ , which changes by altering the direction of  $x_1(t)$ . In the worst case,  $h$  may change discontinuously such that proper selection of gain  $E$  is not straightforward. Next theorem provides a necessary and sufficient condition for  $E$  such that equation (B.5.5) is stable.

**Theorem B.5.1** *Assuming  $E \geq 0$ , the system in equation (B.5.5) is stable with bounded delay :  $h \leq h_{max}$  if and only if :*

$$\frac{\pi}{2h_{max}} > E, \quad (\text{B.5.6})$$

*Proof :*

The poles  $\sigma$  of equation (B.5.5), determining the stability of the system, are obtained by solving following equation :

$$\sigma = -Ee^{-\sigma h} \quad (\text{B.5.7})$$

Splitting  $\sigma$  in its real  $\sigma_r$  and its imaginary part  $\sigma_i$  and filling in in equation (B.5.7) delivers :

$$\sigma_r + j\sigma_i = -Ee^{-\sigma_r h} (\cos(\sigma_i h) - j \sin(\sigma_i h)) \quad (\text{B.5.8})$$

Equating the real and imaginary parts of  $\sigma$  from equation (B.5.8) renders :

$$\sigma_r = -Ee^{-\sigma_r h} \cos(\sigma_i h) \quad (\text{B.5.9})$$

$$\sigma_i = Ee^{-\sigma_r h} \sin(\sigma_i h) \quad (\text{B.5.10})$$

The system is stable if and only if  $\sigma_r < 0$  and marginally stable if and only if  $\sigma_r = 0$ . Marginal stability is obtained from equation (B.5.10) when  $\cos(\sigma_i h) = 0$  or :

$$\sigma_i h = \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (\text{B.5.11})$$

where  $k$  is an integer number. The larger  $h$ , the smaller  $\sigma_i$  should be in order to preserve stability. So the worst case is when  $h = h_{max}$ . Filling in the pole with smallest imaginary part in absolute value in equation (B.5.10), enables to compute  $E$ , which gives rise to marginal stability :

$$E = \frac{\pi}{2h_{max}} \quad (\text{B.5.12})$$

Therefore, in order to avoid marginal stability and assure stability,  $E$  should satisfy equation (B.5.6).

□

*Comment 1 :* Very often, stability of time delay systems is proved by using Lyapunov-Krasovskii functionals [86] from which LMI constraints are derived, which should be satisfied in order to guarantee stability. From these LMI's, controller gains are calculated, providing conservative controllers as the LMI constraints are sufficient but mostly not necessary for stability. This is for example performed by Fridman *et al.* [53]. Solving their LMI conditions renders a more conservative condition on  $E$  :

$$\frac{1}{h_{max}} > E \quad (\text{B.5.13})$$

*Comment 2 :* Stability of equation (B.5.5) is only a necessary condition for staying on the switching line. During sliding, the relationship of equation (B.5.4) needs to be satisfied. Because of overshoot and large past values ( $x_1(t-h) - \hat{x}_d(t-\hat{h})$ ), the system may jump from the sliding line. Later on, it is shown that once the system is in sliding mode, it remains in sliding mode whenever equation (B.5.13) is fulfilled.

*Comment 3 :* As the observer is in sliding regime, the equivalent control  $u_{eq}$  was calculated from the observer equations (B.4.1), which is based on a model of the system. A model is never an exact representation of reality, such that dead zone parameter  $c_0$ , defined in equation (B.3.10), may differ by  $\Delta_{c_0}$  from the dead zone parameter  $c'_0$  of the real system :

$$c'_0 = c_0 + \Delta_{c_0} \quad (\text{B.5.14})$$

In case there is a mismatch  $\Delta_{c_0}$ , the following theorem indicates how to adopt the gain parameter  $E$  in order to assure stability.

**Theorem B.5.2** *In case a mismatch  $\Delta_{c_0}$  exists,  $E$  needs to satisfy :*

$$E < \frac{\pi(u_d - c_0)}{2h_{max}(u_d - c_0 + |\Delta_{c_0}|)} \quad (\text{B.5.15})$$

*Proof :* During sliding, the predictor as well as the real system get the same PWM signal as input varying between  $\pm u_d$ . After the dead zone of the predictor and the real system, the PWM signal is lowered by  $c_0$  respectively  $c'_0$ . As the predictor is in sliding mode, the intended equivalent control  $u_{eq}$ , given in equation (B.5.2), is the slow component of the PWM signal after the dead zone of the predictor. The slow signal entering the real system after the dead zone, which is actually the effectively applied equivalent control  $u'_{eq}$ , is apart from its amplitude exactly the same as  $u_{eq}$  and is given by :

$$u'_{eq} = -\frac{E(u_d - c'_0)}{K_m(u_d - c_0)}(x_1(t - h) - \hat{x}_d(t - \hat{h})) \quad (\text{B.5.16})$$

By comparing equation (B.5.2) and (B.5.16), the effectively applied feedback gain  $E'$  can be calculated :

$$E' = \frac{E(u_d - c'_0)}{(u_d - c_0)} \quad (\text{B.5.17})$$

To ensure stability of the system during sliding, instead of equation (B.5.6), the following equation needs to be satisfied :

$$E' < \frac{\pi}{2h_{max}} \quad (\text{B.5.18})$$

Note that  $c'_0$  is not known such that  $\Delta_{c_0}$  is only a guess of the size of the mismatch between  $c'_0$  and  $c_0$ . Consequently the worst case  $c'_0$  needs to be investigated which is  $c_0 - |\Delta_{c_0}|$ . Combining the worst case  $c'_0$  and the equations (B.5.17) and (B.5.18) renders (B.5.15).

□

Attraction of the sliding line, given by equation (B.5.1), is performed in the next theorem.

**Theorem B.5.3** *Let the delay of the system and observer satisfying  $h, \hat{h} \leq h_{max}$ . The sliding line  $s(t)$  given by equation (B.5.1) is attractive for the control law in equation (B.4.2), if the size of the delay  $h$  only changes by the change of the direction of the angle  $x$  of the control valve.*

*Proof :*

In order to prove attraction to the sliding line (B.5.1), a well known ([146]) Lyapunov function  $V$  is employed :

$$V = \frac{1}{2}s^2$$

for which one has to show that the following is satisfied :

$$\dot{V} = s\dot{s} < 0. \quad (\text{B.5.19})$$

Elaboration of equation (B.5.19) combined with equations (B.4.1) and (B.4.2) renders :

$$\dot{V}(t) = (\hat{x}_1(t) - \hat{x}_d)[-K_m(u_d - c_0)\text{sign}(\hat{x}_1(t) - \hat{x}_d) - aK_m(\hat{x}_1(t) - \hat{x}_d) + E(x_1(t - h) - \hat{x}_1(t - \hat{h}))]. \quad (\text{B.5.20})$$

Initially, it is assumed that the set-point  $\hat{x}_d$  is not changed. Afterwards the general case of set-point changes will be discussed.

The case when  $\dot{V}(t) \geq 0$  is satisfied, is only possible if the terms  $(\hat{x}_1(t) - \hat{x}_d)$  and  $(x_1(t-h) - \hat{x}_1(t-\hat{h}))$  have the same sign. Lets assume for the moment that  $\dot{V}(t) > 0$ , it will be shown that there is a time instant when  $\dot{V}(t)$  becomes negative and remains negative until the sliding line is reached.

Assume  $s\dot{s} > 0$  and :

$$(\hat{x}_1(t) - \hat{x}_d) > 0, \quad (x_1(t-h) - \hat{x}_1(t-\hat{h})) > 0. \quad (\text{B.5.21})$$

$$\hat{x}_1(t-\hat{h}) > \hat{x}_d \quad (\text{B.5.22})$$

The situation when equation (B.5.22) is not satisfied but assumption (B.5.21) still holds is not interesting as this implies, by the continuity of  $\hat{x}_1(t)$ , automatically the attraction of  $s(t)$ . As the above assumptions indicate instability, the system diverges from the sliding line, implying by equation (B.4.1) an increase of  $(\hat{x}_1(t) - \hat{x}_d)$ . According to equations (B.5.21), (B.3.9) and (B.4.2),  $\dot{x}_1(t) < 0$ . Knowing that the delay  $h$  is bounded by  $h_{max}$ , there needs to be a time instant  $t_1$  when term  $(x_1(t-h) - \hat{x}_1(t-\hat{h}))$  starts to decrease, rendering  $s\dot{s} < 0$ . In case  $(\hat{x}_1(t) - \hat{x}_d)$  decays faster than  $(x_1(t-h) - \hat{x}_1(t-\hat{h}))$ , there might be again a situation when  $s\dot{s} > 0$ , such that the distance  $(\hat{x}_1(t) - \hat{x}_d)$  enlarges again. However, as

$$x_1(t-h) > \hat{x}_1(t-\hat{h}) > \hat{x}_d \quad (\text{B.5.23})$$

and  $s(t) = 0$  has not been satisfied yet, the time delay  $h$  didn't change such that from  $t_1$ ,  $x_1(t-h)$  is decreasing. Therefore, there needs to be a time instant when  $(x_1(t-h) - \hat{x}_1(t-\hat{h})) < 0$  and therefore  $s\dot{s} < 0$ . By assumption (B.5.22) and equations (B.3.9), (B.4.2) this situation remains until  $s(t) = 0$ .

The case when  $s\dot{s} > 0$  and :

$$(\hat{x}(t) - \hat{x}_d) < 0 \quad (x(t-h) - \hat{x}(t-\hat{h})) < 0, \quad (\text{B.5.24})$$

can be treated in an analogous way.

Now, changing set-points  $x_d$  are tackled. In case the distance  $|\hat{x}(t) - \hat{x}_d|$  is enlarged,  $s\dot{s}$ , given by equation (B.5.20) becomes smaller, which is favorable for the stability. In the other case, the distance to the sliding line is made artificially smaller and equation (B.5.20) becomes larger and probably positive. However, as shown earlier in the proof, when the set-point is not changed, equation (B.5.20) will become by itself smaller, unless the set-point  $x_d$  is changed such that  $|\hat{x}(t) - \hat{x}_d|$  is reduced again, bringing the system closer to the sliding line. This indicates that by changing set-point values, the system cannot be destabilized.

□

*Comment 1 :* The estimation of the delay has no influence on the stability. Based on performance considerations, it is better to have a good estimate of the delay in order to minimize the time interval when  $s\dot{s} > 0$ .

*Comment 2 :* Theorem B.5.3 doesn't provide any advise on the value of design constant  $a$ . From equation (B.5.20), it is clear that  $a$  should be positive and as large as possible in order to satisfy  $s\dot{s} > 0$ . In practice,  $a$  cannot be selected arbitrarily large and should be determined taking into account possible actuator saturation.

*Comment 3 :* The proof of theorem B.5.3 advises in equation (B.5.20) to select constant  $a$  larger than  $E$ . By perfect dead zone compensation, which can never be realized in practice, the control law given by equation (B.4.2) has a pole placement interpretation where  $a$  determines the closed loop poles of the system and  $E$  the poles of the observer. In such a linear pole placement control strategy with observer, selecting  $a$  larger than

TAB. B.2 – Simulation parameters

$u_d = 2.4$ (V)	$K_m = 1.71$ ( $^\circ$ /(Vs))	$c_0 = c_1 = 1.5$ (V)
$h_{min} = 0.15$ (s)	$h_{max} = 0.23$ (s)	$\alpha = 1.5910^3$ ( $\sqrt{Pa}/^\circ$ )
$\beta = -1.0410^5$ ( $\sqrt{Pa}$ )	$\gamma = -53.9$ ( $^\circ$ )	

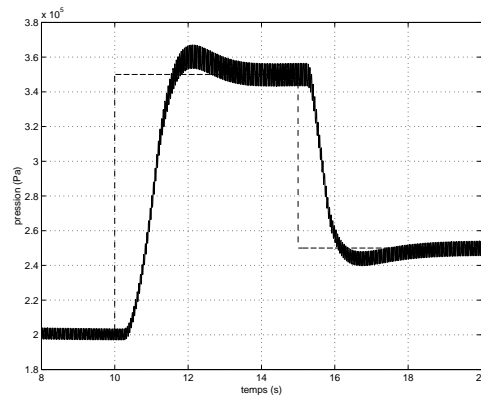


FIG. B.2 – Pressure evolution after a set point change at time = 10s, from 2bar to 3.5bar, (full line :  $E = 0.8$ ,  $a = 4$ , dashed line :  $E = 4$ ,  $a = 0.8$ )

$E$  is very uncommon and is against the intuition. However, the results of this paper indicate the opposite. A simulation on system (B.3.9) with predictor (B.4.1) and control law (B.4.2) illustrates this. Parameters of the simulation are given in table B.2. First  $a$  and  $E$  are selected following the pole placement strategy i.e.  $a = 0.8$  and  $E$  five times larger :  $E = 4$ . Afterwards the values of  $a$  and  $E$  are exchanged :  $a = 4$  and  $E = 0.8$ . Figure B.2 shows the results. After 10s a set-point change of  $\hat{x}_d$  from 2bar to 3.5bar is imposed. The case where  $a > E$  shows the fastest response. This can be explained by examining the evolution of  $s(t)$ , given by equation (B.5.1). For  $a > E$ , the sliding line is reached faster. The dashed curve, which reaches the slowest the set point, even shows some oscillations which is due to the fact that the pole locations in sliding mode are determined by the size of  $E$ . The larger  $E$  the closer to marginal stability.

*Comment 4* : By the attraction of the sliding line, the control law given by equation (B.4.2) leads never to instability but can only cause limit cycle behavior or leads directly to convergence. On the other hand theorems B.5.1 and B.5.3 provide only necessary conditions for stability of the sliding mode. In normal cases, it is desired that once on the sliding line, the system remains on the sliding line. The following theorem provides a sufficient condition on  $E$  such that this is satisfied.

**Theorem B.5.4** *Let the system in sliding mode at a certain time instant  $t_0$  and  $\frac{E}{K_m}|x_1(t_0) - \hat{x}_d| \leq u_d - c_0$ . The system will remain in sliding mode if the following is satisfied :*

$$E \leq \frac{1}{h_{max}} \quad (\text{B.5.25})$$

*Proof* :

If the system is in sliding mode,  $\hat{x}_1(t) = \hat{x}_d$ . In order to guarantee that the condition on the equivalent control (B.5.4) remains satisfied from  $t_0$  on, following condition needs to be valid for all  $t \geq t_0$  :

$$\frac{E}{K_m} |x_1(t) - \hat{x}_d| \leq (u_d - c_0) \quad (\text{B.5.26})$$

In other words, all extreme values of  $x_1(t)$  for  $t \geq t_0$  need to meet equation (B.5.26). Extrema are encountered at time instants when  $\dot{x}_1 = 0$ . From the control law (B.4.2), extrema only occur after sliding when the equivalent control is zero or  $x_1(t - h) = \hat{x}_1(t - \hat{h})$ . Assume at  $t_0$  that  $x_1(t) = \hat{x}_d$  such that, according to equation (B.5.4), at least after  $h_{max}$  an extreme value occurs. By the fact that the system is in sliding mode at time  $t_0$ ,

$$|\dot{x}_1(t_0)| \leq K_m (u_d - c_0) \quad (\text{B.5.27})$$

and according to equation (B.5.27), the largest possible extreme value is  $x_d \pm K_m(u_d - c_0)h_{max}$  which needs to satisfy equation (B.5.26) such that equation (B.5.25) needs to be valid.

□

*Comment* : In case equation (B.5.6) is satisfied but equation (B.5.25) not, it has been observed in simulations, that the system leaves several times the sliding line, but never enters a limit cycle.

## B.6 Implementation

The control law of equation (B.4.2) and the predictor (B.4.1) were programmed on a digital controller (ADWIN Gold, Jaeger GmbH.) In order to transform the equations (B.4.1) and (B.4.2) to discrete time, the zero order hold transformation rule was utilized. A sampling frequency of  $1000\text{Hz}$  was selected, which is reasonably high for this application, but assures that the continuous phenomena are well approximated and that no low pass filter is required, which normally takes care that the Shannon principle is not violated.

The system parameters, used to design the control law, are listed in table B.2. Note that the discontinuous component of the control law  $u_d$  is selected considerably larger than the dead zone  $c_0$ . From equation (B.5.15), it is clear that the larger the gap  $u_d - c_0$ , the smaller the effect of uncertainties  $\Delta_{c_0}$  on the size of  $E$ . On the other hand, the large  $u_d$ , the more severe the switching.

For stability reasons, constant  $a$  should be positive and as large as possible but saturation of the control needs to be avoided. During normal operation, the desired pressure varies between 0 and  $5\text{bars}$ , which corresponds to



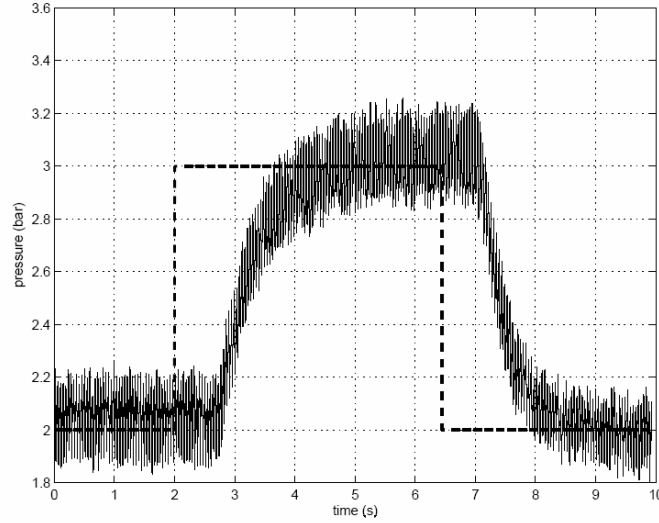


FIG. B.3 – Pressure evolution after a set point change at time =  $2s$ , from  $2bar$  to  $3bar$ , (full line : measured pressure, dashed line : set point)

a change of  $6^\circ$  of the angle of the valve  $x_1$ , if the pressure is at  $2.5bars$ . By selecting  $a = 3.5$ , the maximum voltage is avoided, which is for a normal tractor approximately  $14V$ .

For the selection of  $E$ , inequalities (B.5.6) and (B.5.25) consider only stability and not performance. From previous elaborations, it is clear that  $E < a$ . Based on simulations with the extended model, described in section 'modelling of the system',  $E = 1$  is selected. This value of  $E$  doesn't give overshoot or oscillations.

The controller is evaluated on the real system. Figure B.3 shows the results, after a pressure change from  $2bar$  to  $3bar$ . The vibrations at  $23Hz$  on the measured pressure are caused by the pump, which is a two piston pump, and not by chattering. These vibrations are the reason why such a high sampling frequency has been selected. They are not harmful for the pressure distribution pattern.

## B.7 Conclusions

A pressure control system, used in agricultural applications, has been modeled. By considering only the most important dynamics, the system reduces to an integrator with a dead zone on the input, and an output which depends non-linearly on the delayed state. A control law was proposed with dead zone compensation and which actually originates from a pole placement with observer reasoning. Stability of the control law has been assessed, based on the theory of sliding mode. A necessary and sufficient condition on the controller gain has been derived, such that the system is stable during sliding, despite discontinuous changes of the delay. The effect of perturbation on the dead zone and the controller gain has been investigated. It is proved that the proposed control law never leads to instability but can only result in, by improper selection of the control parameters, limit cycle behavior. Although the control law originates from the idea of perfect dead zone compensation and pole placement, it is shown in the paper that in order to obtain a good performance, the standard rules of thumb for linear systems with observer may not be applied. The control law has been implemented in practice. Good performance has been observed.

## Annexe C

# Contrôle d'un moteur par capteur visuel [20]

Observing and Controlling Plants using their Delayed and Sampled Outputs

A. Chamroo<sup>1</sup>, A. Seuret<sup>2</sup>, C. Vasseur<sup>1</sup>, J.-P. Richard<sup>2</sup> and H.P. Wang<sup>1</sup>

Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique & Signal, LAGIS (UMR CNRS 8146)

<sup>1</sup>Université des Sciences & Technologies de Lille, USTL (Cité Scientifique)

59655 Villeneuve d'Ascq, FRANCE

Phone : +33 3 20 43 48 76, Fax : +33 3 20 43 65 67,

E-mails : [chamroo@i3d.univ-lille1.fr](mailto:chamroo@i3d.univ-lille1.fr), [christian.vasseur@univ-lille1.fr](mailto:christian.vasseur@univ-lille1.fr), [haoping.wang@ed.univ-lille1.fr](mailto:haoping.wang@ed.univ-lille1.fr)

<sup>2</sup>École Centrale de Lille

BP 48, 59651 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

Phone : +33 3 20 67 60 32, Fax : +33 3 20 33 54 99, E-mails : [seuret.alexandre@ec-lille.fr](mailto:seuret.alexandre@ec-lille.fr),  
[jean-pierre.richard@ec-lille.fr](mailto:jean-pierre.richard@ec-lille.fr)

**Abstract** - This article deals with linear plants whose outputs are not available directly, but only via digital sensors which deliver them in a delayed and sampled format. First, we reconstitute the plant's state by using a Lyapunov-Krasovskii based observer. A sampled tracking control strategy is then proposed by combining the observer with a particular controller that belongs to a class of piecewise continuous systems. Computer simulation examples are presented so as to enhance the theoretical aspect. The method shows reliability and robustness against slight time-variations of the plant's parameters.

**Keywords** : Lyapunov-Krasovskii functional, LMI, sampled tracking, delayed output, piecewise continuous systems

### I. INTRODUCTION

The aim of this research work is to develop a control strategy that enables sampled tracking on linear plants in cases where the only available feedback is the plant's delayed and sampled output vector. This is often the case when we deal with control architectures that make use of digital calculators and digital sensors that are time consuming in what concerns step calculations.

Assuming that the linear plant is perfectly identified, an observer is used so as to reconstitute the current state by using the delayed (and sampled) output. This estimated state is necessary for the chosen controller. For the discrete-time implementation, the data-sampling effect has to be taken into account. Following the lines of [FRI, 04], [YU, 04] and [SEU, 05], we consider that it produces an additional, variable delay  $t - t_k$ , where  $t_k$  is the most recent  $k^{\text{th}}$  sampling instant. Generally, due to the computer architecture and operating system, the sampling may be aperiodic, *i.e.* there is no exact period  $T$  such that  $t_k = k.T$ . So, we assume that a maximum sampling interval  $T$  is known, so that  $0 \leq t_{k+1} - t_k \leq T$  holds. The global delay resulting from the computation-plus-sampling phenomena will be denoted by  $\delta = t - t_k$ , and it can be seen that the limit case  $d\delta/dt(t) = 1$ , which represents the worse situation in the study of time-delay systems, occurs almost everywhere. The aim is to generate robust, stable and continuous-time observation with respect to the sampling period or parameters uncertainties. A Luenberger observer for known time-varying delay is proposed using this sampling modelization. The stability results are presented using Linear Matrix Inequality (LMI). Its purpose is to estimate the current state as fast as possible.

In order to achieve sampled tracking, we propose a control unit based on [KON, 01], [KON, 02] and [KON, 03] that establishes a class of control systems whose evolution is described by exogenous switching of their internal state. The chronology of the switching is defined by a set of sampling instants  $S = \{t_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$  called "switching instants". These controllers that extend the notion of sampled control commands [KAB, 87] are referred to as piecewise continuous systems (PCS). In this approach, the control input of the plant is defined from two input spaces : the first space  $U^r$  allows control between switching instants, while the second input space  $V^s$  enables control at the switching instants. Referring to the classification of [TIT, 98], this class of control systems has hybrid properties and extends the concept of compound control realized by [LAU, 72] and [VAS, 72]. According to Branicky's taxonomy of hybrid systems [BRA, 94], these control units are characterized by autonomous switchings and controlled impulses.

It is well established in [KON, 03] that the use of PCS controllers enables sampled tracking on linear plants by undertaking a state feedback. In our case, we make use of the aforementioned observer to feed the PCS controller with an estimate of the state.

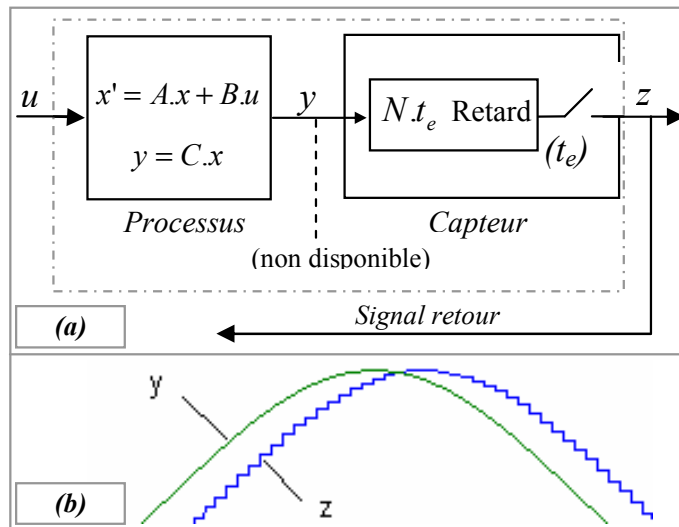
In this paper, we start by defining the particular nature of the output signal considered for feedback. A block diagram of the whole closed loop structure is then given in section III. The observer and controller are then described in the following sections. The reader can find at the end of the paper a typical visual control example raising a delayed and sampled output problem while controlling a mobile cart by camera.

## II. THE PARTICULAR SENSOR OUTPUT

The plant we consider in our study is a usual linear  $n^{\text{th}}$  order system that we represent by its state and output equations as follows :

$$\begin{aligned} x'(t) &= A.x(t) + B.u(t), \\ y(t) &= C.x(t), \end{aligned} \tag{C.0.1}$$

with  $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathfrak{R}^{n \times r}$  and  $C \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  being the real, known characteristic matrix of the system, and  $x(t) \in \Sigma^n$ ,  $u(t) \in U^r$  and  $y(t) \in Y^m$  representing respectively the state, the input and the output of the plant.



We assume that the pair  $(A,C)$  is observable.

In our case, we consider that neither the state  $x(t)$ , nor the output  $y(t)$  of the plant is available. The only data we can access becomes from a digital sensor that delivers the output  $y$  in a sampled and delayed format. The sampling period of the sensor being  $t_e$  and its associated delay being  $D$ , we define the sensor data as such :

$$z(t) = y^*(t - D). \quad (\text{C.0.2})$$

In (C.0.2),  $(*)$  represents a sampling with a known maximal period  $t_e$ . In our study, we assume that  $D$  is bounded with known upper and lower bounds.

An illustrating example can be the case where processed data accessed from a digital camera constitute the output  $z(t)$  of a “visual” sensor. In that case, the  $t_e$  sampling period corresponds to the delivery of image information where  $t_e$  represents the time for an image shooting. Moreover, the time delay  $D$  represents the time necessary for image processing. Usually, in such an example, the delay is a multiple of the sampling period, so that it can be expressed by  $D = N.t_e$  ( $N \in \mathbb{Z}$ ). This means actually that  $N$  snapshots are necessary to obtain the required data.

The whole statement of this section is summarized in Fig. 1, with  $N = 4$  in the example considered in section VI.

### III. PRINCIPLE

The aim is to be able to perform sample tracking of a given state trajectory by the plant’s unavailable state. This is ensured by the PCS controller that necessitates the full state measurement given by the observer. The closed loop structure is given in Fig. 2 below.

### IV. OBSERVER DESIGN

Using the sampling representation proposed in the introduction, the sensor’s output can be written as  $z(t) = y(t - \delta(t))$ , where  $\delta(t) = D + t - t_k$ . Then a continuous-time, delayed Luenberger observer can be

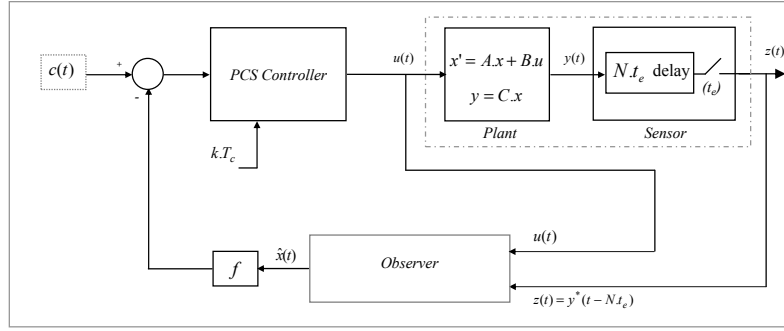


Fig. 2. Block diagram of the whole closed loop structure using delayed output feedback

considered :

$$\begin{aligned}\hat{x}'(t) &= A.\hat{x}(t) + B.u(t) - L(y(t - \delta(t)) - \hat{y}(t - \delta(t))), \\ \hat{y}(t) &= C.\hat{x}(t).\end{aligned}\tag{C.0.3}$$

Since the pair  $(A, C)$  is observable, it is possible to determine a linear gain  $L$  such that the observer exponentially converges to the real system in the non-delayed case. The next theorem allows us to design another  $L$  so that the observer state  $\hat{x}(t)$  converges sufficiently fast (with a guaranteed exponential rate  $\alpha$ ) to the real system state  $x(t)$  despite a variable delay  $\delta$  on the plant's output. The error vector is defined as  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ . From (C.0.1) and (C.0.3), this error is ruled by :

$$e'(t) = Ae(t) + LCe(t - \delta(t))$$

**Theorem1** : Suppose that, for some positive scalars  $\alpha$  and  $\varepsilon$ , there exists a  $n \times n$  positive matrix  $P_1$  and  $n \times n$  matrices  $P, S, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2, Z_3, R, R_a$  and a matrix  $W$  with appropriate dimensions such that the following LMI conditions are satisfied for  $j=1,2$  :

$$\begin{bmatrix} \psi & \begin{bmatrix} \beta_i WC - Y_1^T \\ \varepsilon \beta_i WC - Y_2^T \end{bmatrix} & \mu \beta_i \begin{bmatrix} WC \\ \varepsilon WC \end{bmatrix} \\ * & -S & 0 \\ * & * & -\mu R_a \end{bmatrix} < 0$$

and

$$\begin{bmatrix} R & Y_1 & Y_2 \\ * & Z_1 & Z_2 \\ * & * & Z_3 \end{bmatrix} < 0\tag{C.0.4}$$

where the symbol  $*$  in a matrix represents a symmetrical entry, where  $\beta_1 = e^{\alpha(\delta-\mu)}$ ,  $\beta_2 = e^{\alpha(\delta+\mu)}$  and the symmetric matrix  $\psi$  is given by  $\psi = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{21} \\ \psi_{21}^T & \psi_{22} \end{bmatrix}$  and :

$$\psi_{11} = P^T(A + \alpha I_n) + (A + \alpha I_n)^T P + S + \delta.Z_1 + Y_1 + Y_1^T,$$

$$\psi_{12} = P_1 - P + \varepsilon P^T(A + \alpha I_n)^T + \delta.Z_2 + Y_2,$$

$$\psi_{22} = -\varepsilon.(P + P^T) + \delta.Z_3 + 2\mu.R_a.$$

In the previous theorem, the delay  $\delta(t)$  and then,  $\delta$  and  $\mu$ , are imposed by the maximum the sampling period and the computation delay. The greater  $\alpha$  corresponds to a faster the stabilization. Thus, the objective is to tune  $\varepsilon$  to maximize  $\alpha$ .

The proof is based on Lyapunov-Krasovskii techniques and descriptor representation detailed in [SEU, 06].

## V. PCS CONTROL COMMAND

### A. Principle

The principle of PCS control is to build an associated PCS system whose output constitutes the input of the plant. Note that some of the variables of the controller are  $c$ -indexed so as to be distinguished from those of the observer. According to [KON, 03], we make use of a PCS system to define a particular PCS controller whose behavior can be summarized as follows :

1. The state of the PCS controller is switched to forced values at regular intervals of period  $T_c$ , with  $T_c < t_e$  such that  $t_e = q.T_c$ , with  $q \in \mathfrak{R}$  and  $q \geq 1$ . The corresponding switching set is represented by  $S = \{k.T_c, k = 0, 1, 2, \dots\}$ .
2. The equations describing the behavior of the controller are :

$$\lambda'(t) = \alpha_c \cdot \lambda(t), \forall t \in ]k.T_c, (k+1)T_c], \quad (\text{C.0.5})$$

$$\lambda(k.T_c^+) = \delta_c \cdot \psi_c(k.T_c), \forall k = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{C.0.6})$$

$$w(t) = \gamma_c \cdot \lambda(t), \forall t. \quad (\text{C.0.7})$$

Equation (C.0.5) describes the continuous evolution of the controller's state  $\lambda(t) \in \Sigma^n$  upon  $]k.T_c, (k+1)T_c]$ ,  $\alpha_c \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  being the state matrix of the controller. The only parameter that defines the behavior of the controller's state in this interval of time is  $\alpha_c$  which can take an arbitrary value. Usually, it is fixed such that the PCS is stable between switching instants.

Equation (C.0.6) defines the controller's state at switching instants, by means of a bounded discrete input  $\psi_c \in V^s$ , and according to the linear relationship characterized by the matrix  $\delta_c \in \mathfrak{R}^{n \times s}$ .

Equation (C.0.7) is the output equation of the controller, characterized by the full rank matrix  $\gamma_c \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ . The output  $w(t) \in Y^m$  constitutes the input command to be fed to the plant.

Fig. 3a gives the realization diagram of a PCS controller and Fig. 3b shows its state's evolution.

It is shown in [KON, 03] that if the state of the plant is available, it is possible to define  $\psi_c(t)$  and  $\delta_c$  so as to achieve discrete tracking of a  $c(t)$  state trajectory by the plant's state  $x(t)$  at each switching instant and with one sampling period delay :  $x((k+1)T_c) = c(k.T_c)$ ,  $\forall k = 0, 1, 2, \dots$

Note that from now on, the discrete values of every function will be considered as being sampled at  $T_c$  period and to simplify the notations, any time function  $f(t)$  at a given  $k.T_c$  instant will be written as  $f(k.T_c) = f_k \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$ . Moreover, dealing with PCS gives rise to discontinuous signals. Thus, if any signal  $f(t)$  is discontinuous, we shall consider the right value at the discontinuity since the switching at each  $k.T_c$  imply consequences occurring at every  $k.T_c^+$ . However, for simplification sake, the notation  $f_k$  will be used, instead of the strict one :  $f_k^+ = f(k.T_c^+)$ .

### B. State Feedback PCS Controller

Let's design a PCS controller meant to perform sampled tracking in the case where the state  $x(t)$  of a linear plant (as in (B.1.1)) is available. The aim is to define its matrix  $\psi_c(t)$  and input  $\delta_c$  to achieve  $x_{k+1} = c_k$ . The controller's output is linked to the plant's input, thus  $u(t) = w(t)$ . Then, we only have to rely on the observer

defined above to make use of  $\hat{x}(t)$  instead of  $x(t)$  as in Fig. 2. In this case, the behavior of the closed loop system can be given by the following equation set :

$$x'(t) = A.x(t) + B.u(t), \forall t,$$

$$\lambda'(t) = \alpha_c.\lambda(t), \forall t \in ]k.T_c, (k+1)T_c],$$

$$u(t) = \gamma_c.\lambda(t), \forall t,$$

$$\lambda_k = \delta_c.\psi_{c_k}, \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

By integration, the first three equations allow us to write in a sampled format, the next step value  $x_{k+1}$  of the state as a function of its previous one  $x_k$  :

$$x_{k+1} = f.x_k + M.\lambda_k, \quad (\text{C.0.8})$$

with  $f = e^{AT_c}$  and  $M = f \cdot \int_0^{T_c} e^{-A\tau} B.\gamma_c.e^{\alpha_c\tau} d\tau$ .

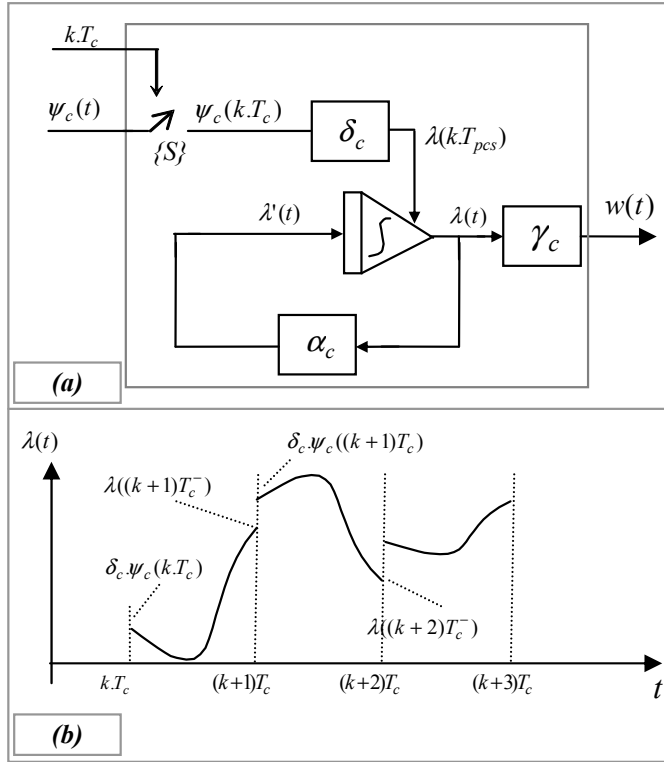


Fig. 3a. Realization diagram,

Fig. 3b. State evolution of a PCS controller

In order to realize the discrete tracking which is defined above, we only have to fix down the tracking condition which is  $x_{k+1} = c_k$ , where  $c(t)$  is the desired state trajectory. Thus, from (C.0.8) we have :

$$\lambda_k = M^{-1} \{c_k - f.x_k\} \quad (\text{C.0.9})$$

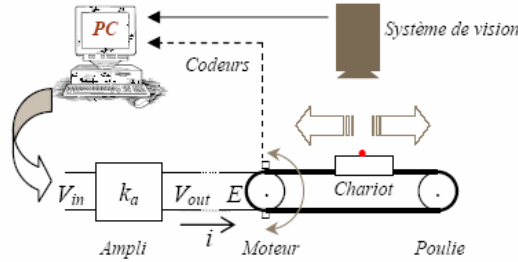
Equation (C.0.9) gives the switching value of the controller's state, under the condition that  $M^{-1}$  exists [KON, 03]. Hence, in this case, we are able to define the PCS controller with :

$$\delta = M^{-1} \text{ and } \psi(t) = c(t) - f.x(t),$$

$\alpha$  and  $\gamma$  chosen arbitrarily.

## VI. COMPUTER SIMULATION EXAMPLE

In view of validating our method we have simulated, by means of Matlab *Simulink*, the behavior of the whole closed loop structure shown in Fig. 2. This computer simulation reflects the control of a real system which is described below. As shown in Fig. 4, this system consists of the visual position control of a moving cart.



### A. The Plant

The plant which is considered here is a cart that moves along a horizontal and straight line segment. The cart is powered by an electric motor by means of a notched belt. The plant's state is composed of the real position and speed of the cart, while its output is given by the real position only :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{real position} \\ \text{real speed} \end{bmatrix}, y = x_1$$

The motor is of a brushless type. It is driven in +/-10V by a dSpace computer input/output card via a power amplifier. Supplied with 240V (mono), it can offer a nominal couple of 3.0Nm with a power of 200W. Identification with a second order approximation of the amplifier-motor-cart set has shown a time constant of 8.3ms and an overall gain of 2.9m/S/V.

Hence, we assume that the plant can be defined as in (C.0.1) by matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -120 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 350 \end{bmatrix} \text{ and } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

### B. The Sensor

The aim of the experiment is to realize a visual position control of the cart. Thus, the sensor is an "artificial vision" system that observes an infrared LED fixed on the cart, as shown in Fig. 4. This vision system is constituted of a motionless digital infrared CCD camera connected to a computer allowing image processing. The camera is positioned above the cart and observes its motion. Thus, after a location operation, the artificial vision system outputs the position of the cart in a  $t_e$ -sampled format, with here a delay equal to  $t_e$  itself. We thus have in this case :

$$z(t) = x_1^*(t - t_e), \text{ with } (*) : \text{ sampling at } t_e.$$

Here,  $t_e = 28$  ms. This corresponds actually to image snapshots with a  $t_e$ -period reset mode ensuring that image acquisition and processing are carried out inside that period.



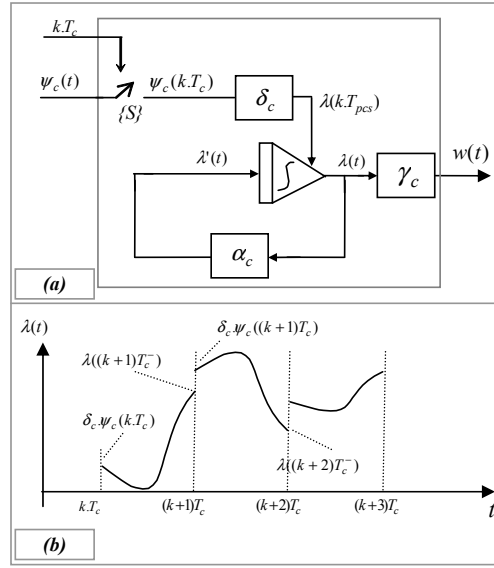


Fig. 3a. Realization diagram,

Fig. 3b. State evolution of a PCS controller

### C. The Observer

In this particular example, the resolution of the LMI conditions (4a,b) leads to the Luenberger gain :

$$L = \begin{bmatrix} -3.1225 \\ 0.0569 \end{bmatrix}$$

### D. The Associated PCS Controller

In order to achieve tracking, the PCS controller uses the estimated state obtained from the observer. The controller is switched at regular intervals with  $T_c = 10ms$  and is defined by :

$$\alpha_c = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix}, \quad \gamma_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

### E. The Aim of the Experiment

In the present example, the goal is to be able to realize sampled position tracking of a desired trajectory by the cart. According to our method's requirement, we have to define a state trajectory, which is here chosen to be :

$$c(t) = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ a \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \end{bmatrix}$$

In this example,  $c_2(t)$  is bound to be the derivative of  $c_1(t)$ , since they represent, respectively, the desired speed and position trajectories.

### F. Results Comment

Figs. 5 and 6 illustrate tracking results for the stated example. Note that for comparison sake, the desired trajectory has been delayed appropriately on those figures. The PCS switching period and parameters of the desired trajectory differ so as to express performance in working conditions (Fig. 5) and functioning demonstration in exaggerated ones (Fig. 6).

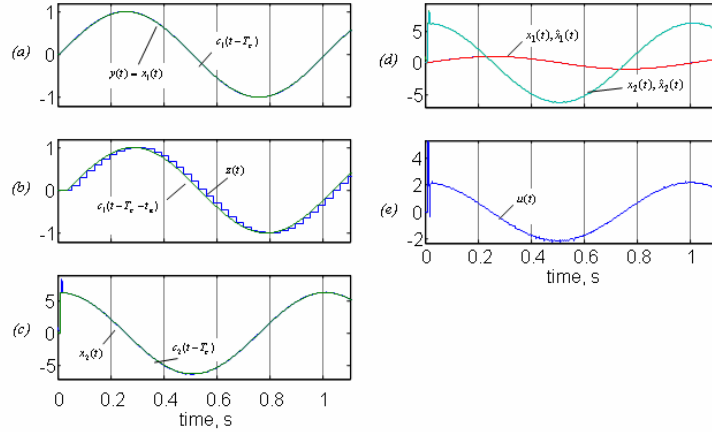


Fig. 5a shows sampled tracking of  $c_1(t)$  by the plant's output  $y(t)$  which is here equal to the real cart position  $x_1(t)$ . Similarly, Fig. 5c shows how the second state variable (speed) reaches its desired trajectory at switching instants.

Note that the  $x_1(t)$  and  $x_2(t)$  curves intersect those of  $c_1(t - T_c)$  and  $c_2(t - T_c)$  respectively at every  $k.T_c$ , thus showing  $T_c$ -sampled tracking with a delay of  $T_c$ . These results can be better appreciated on Figs. 6a and 6b respectively.

In the same way, Fig. 5b represents sampled tracking of  $c_1(t)$  by  $z(t)$  with a delay equal to  $T_c + t_e$  (since  $D = t_e$  in the present example).

Fig. 5e and Fig. 6c illustrate the control command fed to the plant. Coming out of a PCS controller, we can notice its piecewise continuous nature.

On the other hand, Fig. 5d shows how the estimated state follows continuously the actual plant's state. Moreover, to illustrate the high performance of the observer, we consider in Fig. 7 the case where the initial condition of the plant's state is unknown to the observation block.

Note that though we have shown the state's evolution for demonstration sake, we do not use it for feedback, since we assume it to be unavailable.

## VII. CONCLUSION

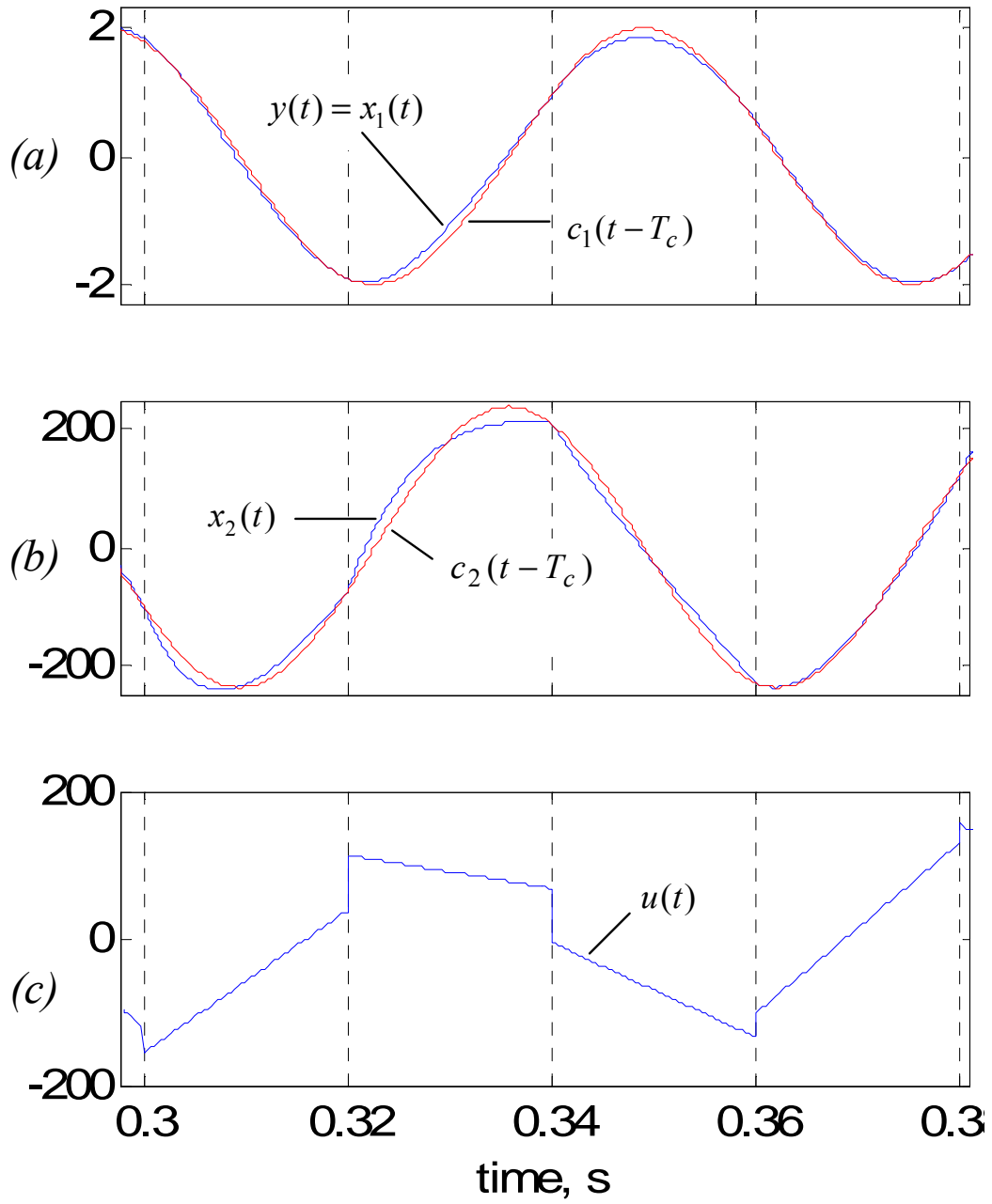
The method that we present in this paper is appropriate for control of linear plants in cases where the only available feedback comes from a sensor delivering the plant's output vector in a delayed (of  $D$ ) and sampled (at  $t_e$ ) format. The proposed observer reconstitutes the current state of the plant from the sensor's output enabling fast convergence of the estimated state towards the actual state, even in cases of unknown initial conditions of the latter. State observation also holds for varying delay and sampling period, given their upper and lower limits.

The control unit is based on a PCS controller which makes use of the estimated state and guarantees sampled tracking of a given state trajectory  $c(t)$ . It ensures at each  $k.T_c$  ( $\forall k = 0, 1, 2, \dots$ ) :

$$\begin{aligned} x(t) &= c(t - T_c), \\ z(t) &= C.c(t - T_c - D). \end{aligned}$$

With our notations, this tracking can be expressed by :

$$x(k.T_c) = c((k - 1).T_c) \forall k = 0, 1, 2, \dots,$$



$$z(k.T_c) = C.c((k - N.q - 1).T_c) \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Computer simulations showed that the method is reliable and moreover robust against slight time-variations of the plant's parameters.

Note that in every case, the PCS controller show better efficiency for small values of  $T_c$ , which is the period at which the PCS controller's state switches.

As a perspective of our study, works are presently being carried out to optimize the PCS controller to ameliorate its behavior between switching instants so as to enhance the tracking in this interval. This optimization is based on that given in [KON, 03]. Moreover, we intend to realize a controller based on the bi-sampled controller [KON, 02] that outputs a sampled command between switching instants.

Furthermore, we are undertaking real time experiments to test the present method on the real system of Fig. 4.

#### ACKNOWLEDGEMENTS

This work is supported by the European Union under Grants 15010/02Y0064/03-04 CAR/Presage N ° 4605 Obj. 2-2004 :2 - 4.1 - N ° 160/4605.

#### REFERENCES

- [BRA, 94] M. S. Branicky, V. Borkar and S. K. Mitter, "A unified framework for hybrid control," in *Proceedings IEEE Conf. Decision Contr.*, Lake Buena Vista, 1994, pp. 4228-4234.
- [FRI, 04] E. Fridman, A. Seuret and J.-P. Richard, "Robust sampled-data stabilization of linear systems : An input delay approach," *Automatica*, vol. 40, No. 8, 2004, pp. 1441-1446.
- [KAB, 87] P. T. Kabamba, "Control of Linear Systems Using Generalized Sampled-Data Hold Functions," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 32, No. 9, 1987, pp. 772-783.
- [KON, 01] V. Koncar and C. Vasseur, "Systèmes à fonctionnement par morceaux et poursuite échantillonnée," *APII-JESA*, Vol. 35, No. 5, 2001, pp. 665-689.
- [KON, 02] V. Koncar and C. Vasseur, "Piecewise functioning systems : bi-sampled controllers," *Studies in Informatics and Control* Vol.11, No.2, 2002.
- [KON, 03] V. Koncar and C. Vasseur, "Control of linear systems using piecewise continuous systems," *IEE Control Theory & Applications* , Vol. 150, n ° 6, pp.565-576, 2003.
- [LAU, 72] F. Laurent, "Sur la commande d'un filtre linéaire par des impulsions multimodulées," *C.R. Acad. Sc*, Paris, t. 270, pp. 288-289, 1972.
- [SEU, 05] A. Seuret, E. Fridman and J.-P. Richard, "Sampled-data exponential stabilization of neutral systems with input and state delays," *IEEE MED 2005, 13th Mediterranean. Conference on Control and Automation*, Cyprus, 2005.
- [SEU, 06] A.Seuret, F. Michaut, J.-P. Richard and T. Divoux, "Networked Control using GPS Synchronization," *American Control, Conference*, 2006.
- [TIT, 98] M. Tittus and B. Egardt, "Control Design for Integrator Hybrid Systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 43, No. 4, 1998, pp. 491-500.
- [VAS, 72] C. Vasseur, "Contribution à l'étude des systèmes échantillonnés commandés par impulsions multimodulées," *Ph.D. Thesis, University Lille 1, Villeneuve d'Ascq, France*, 1972.
- [YU, 04] M. Yu, L. Wang and T. Chu, "An LMI approach to network control systems with data packet dropout and transmission delays," *Mathematical Theory Networks and Systems*, Leuven, 2004.



## Annexe D

# Observateurs à modes glissants et observateurs d'Utkin

Dans les développements théoriques associés aux modes glissants et à la théorie du contrôle, on suppose souvent que l'état complet du système est disponible. Ainsi le développement d'observateurs pour estimer le vecteur d'état permet, dans des cas concrets, d'utiliser ces lois de commande. L'idée d'utiliser les dynamiques du système pour construire un observateur a été développée par Luenberger [100]. Dans ce type d'observateurs l'estimation nécessite la valeur de la commande et de l'erreur entre la sortie mesurée et estimée. L'objectif est finalement de contraindre l'erreur à tendre vers zéro.

Considérons le système linéaire décrit par :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned}\tag{D.0.1}$$

où  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  et  $p \geq m$ . On suppose que les matrices  $B$  et  $C$  sont de rang plein et que la paire  $(A, C)$  est observable.

Comme nous allons considérer les sorties du systèmes, il apparaît assez naturellement que les sorties deviennent des composantes de l'état. Comme dans [38] (Chapitre 5), une possibilité est d'utiliser le changement de variables  $x \mapsto T_c x$  où :

$$T_c = \begin{bmatrix} N_c^T \\ C \end{bmatrix},$$

où les colonnes de  $N_c \in \mathbb{R}^{n \times (n-p)}$  sont dans le noyau de  $C$ . Cette transformation est non singulière, et par rapport à la nouvelle variable, la nouvelle sortie est :

$$CT_c^{-1} = [0 \quad I_p].$$

Si les autres matrices définissant le système s'écrivent :

$$T_c A T_c^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T_c B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

alors le système (D.0.1) s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= A_{11}x_1(t) + A_{12}y(t) + B_1u(t) \\ \dot{y}(t) &= A_{21}x_1(t) + A_{22}y(t) + B_2u(t),\end{aligned}\tag{D.0.2}$$

où

$$T_c x = \begin{bmatrix} x_1 \\ y \end{bmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow n-p \\ \updownarrow p \end{array}$$

L'observateur proposé par Utkin [145] est de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1(t) &= A_{11}\hat{x}_1(t) + A_{12}\hat{y}(t) + B_1u(t) - L\nu \\ \dot{\hat{y}}(t) &= A_{21}\hat{x}_1(t) + A_{22}\hat{y}(t) + B_2u(t) + \nu, \end{aligned} \quad (\text{D.0.3})$$

où  $(\hat{x}_1, \hat{y})$  sont les estimation de l'état  $(x_1, y)$ ,  $L \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p}$  est une matrice constante et les composantes du vecteur discontinu sont définies par :

$$\nu_i = M \operatorname{sgn}(\hat{y}_i - y_i),$$

où  $M \in \mathbb{R}^+$ . S'il les erreurs entre l'estimation et l'état réel sont définies par  $e_1 = \hat{x}_1 - x_1$  et  $e_y = \hat{y} - y$ , alors (D.0.1) et (D.0.3) conduisent aux équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(t) &= A_{11}e_1(t) + A_{12}e_y(t) + L\nu \\ \dot{e}_y(t) &= A_{21}e_1(t) + A_{22}e_y(t) - \nu, \end{aligned} \quad (\text{D.0.4})$$

Sachant que la paire  $(A, C)$  est observable, la paire  $(A_{11}, A_{21})$  est aussi observable. Ainsi  $L$  doit être choisie de telle manière que la matrice  $A_{11} + LA_{21}$  ait des valeurs propres dans  $\mathbb{C}_-$ . On définissant le nouveau changement de variables :

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} I_{n-p} & L \\ 0 & I_p \end{bmatrix},$$

avec la variable  $\tilde{e}_1 = e_1 + Le_y$ . Ainsi la dynamique de l'erreur est régie par les équations différentielles :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{e}}_1(t) &= \tilde{A}_{11}\tilde{e}_1(t) + \tilde{A}_{12}e_y(t) \\ \dot{e}_y(t) &= A_{21}\tilde{e}_1(t) + \tilde{A}_{22}e_y(t) - \nu, \end{aligned} \quad (\text{D.0.5})$$

où  $\tilde{A}_{11} = A_{11} + LA_{21}$ ,  $\tilde{A}_{12} = A_{12} + LA_{22} - \tilde{A}_{11}L$  et  $\tilde{A}_{22} = A_{22} - A_{21}L$ . Il s'en suit que dans le domaine :

$$\Omega = \left\{ (e_1, e_y) : \|A_{21}e_1\| + 1/2\lambda_{\max}(\tilde{A}_{22} + \tilde{A}_{22}^T)\|e_y\| < M - \eta \right\},$$

avec  $\eta < M$  des réels positifs, la condition suivante est réalisée :

$$e_y^T e_y < -\eta \|e_y\|.$$

Ainsi le système entre en régime glissant sur la surface  $\mathcal{S}_0 = \{(e_1, e_y) : e_y = 0\}$ . A partir d'un certain temps fini  $t_s$ , les variables  $e_y$  et  $\dot{e}_y$  sont nulles. L'équation (D.0.5) devient alors :

$$\dot{\tilde{e}}_1(t) = \tilde{A}_{11}e_1(t),$$

qui avec un choix judicieux du gain  $L$  est un système stable et implique que  $\tilde{e}_1 \rightarrow 0$  et par conséquent  $\hat{x}_1 \rightarrow x_1$ .

# Bibliographie

- [1] A. Alif, M. Boutayeb, and M. Darouach, *Observers based control for systems with unknown delays*, IFAC Workshop on Time Delay Systems, September 2003.
- [2] J. Andren, M. Hilding, and D. Veitch, *Understanding end-to-end internet traffic dynamics*, IEEE GLOBECOM'98, November 1998, pp. 1118–1122.
- [3] J. Anthonis, W. Franssens, A. Seuret, J.-P. Richard, and H. Ramon, *Two control laws for a spray system with time varying delay and dead band*, IFAC World Congress (Praha, Rép. Tchèque), July 2005, p. reg. paper 4365.
- [4] J. Anthonis, A. Seuret, J.-P. Richard, and H. Ramon, *Design of a pressure control system with dead band and time delay*, IEEE Trans. Control Syst. Technology **to appear** (2006).
- [5] B. Armstrong-Hélouvry, P. Dupont, and C. Canudas de Wit, *A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction*, Automatica **30** (1994), no. 7, 1083–1138.
- [6] K. Astrom and B. Wittenmark, *Adaptive control*, Prentice Hal publisher, 1989.
- [7] J.M. Azorin, O. Reinoso, J.M. Sabater, R.P. Neco, and R. Aracil, *Dynamic analysis for a teleoperation system with time delay*, Conference on Control Applications (Proceeding of 2003 Conference on Control Applications, ed.), June 2003, pp. 1170–1175.
- [8] B.A. Bamieh, J.B. Jr Pearson, B. Francis, and A. Tannenbaum, *A lifting technique for linear periodic systems*, System and Control Letters **17** (1991), 79–88.
- [9] A. Bartholomeus-Goubet, *Sur la stabilité et la stabilisation des systèmes retardées : Critères dépendant des retards*, Ph.D. thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1996.
- [10] R. Bellman and S.L. Cooke, *Differential difference equations*, Academic Press, New York, 1963.
- [11] K.-E. Bouazza, M. Boutayeb, and M. Darouach, *Observers based stabilization for non linear discrete-time systems*, European Control Conference (United Kingdom), September 2003.
- [12] M. Boutayeb and M. Darouach, *Reduced-order observer for discrete time systems with multiple delays*, IEEE Conference on Decision and Control (CDC) (United States of America, Las Vegas), December 2002.
- [13] S. Boyd, L. ElGhaoui, and E. Feron, *Linear matrix inequalities in system and control theory*, SIAM, 1994.
- [14] L. Bushnell, *Networks and control*, IEEE Trans. Control Systems Magazine **22** (2001), no. 1, 22–29.
- [15] C.I. Byrnes, M.W. Spong, and T.J. Tarn, *A several complex variables approach to feedback stabilization of linear neutral delay-differential systems*, Math. Systems Theory **17** (1984), 97–133.
- [16] Y. Cao, Z. Lin, and T. Hu, *Stability analysis of linear time-delay systems subject to input saturation*, IEEE Trans. on Circ. and Syst. I **49** (2002), 233–240.



- [17] Y.A. Çengel and M.A. Boles, *Thermodynamics, an engineering approach*, fourth edition ed., McGraw-Hill, 1999.
- [18] S. Cetinkunt, U. Pinoson, C. Chen, A. Egelja, and S. Anwar, *Positive flow control of closed-center electrohydraulic implement-by-wire systems for mobile equipment applications*, *Mechatronics* **14** (2004), 403–420.
- [19] A. Chamroo, *Contribution à l'étude des systèmes à fonctionnement par morceau : Application à l'indentification en ligne et à la commande en temps réel*, Ph.D. thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille, 2008.
- [20] A. Chamroo, A. Seuret, C. Vasseur, J.-P. Richard, and H.P. Wang, *Observing and controlling plants using their delayed and sampled outputs*, CESA'06 IMACS-IEEE Multiconference on Computational Engineering in Systems Application (Beijing, China), October, 2006.
- [21] H.H. Choi and M.J. Chung, *Observer-based  $H^\infty$  controller design for state delayed linear systems*, *Automatica* **32** (1996), no. 7, 1073–075.
- [22] M. Chu, L. Wang, and T. Chu, *An LMI approach to network control systems with data packet dropout and transmission delays*, *Mathematical Theory Networks and Systems*, 2004.
- [23] J.M. Gomez da Silva, E. Fridman, A. Seuret, and J.-P. Richard, *Stabilization of neutral systems with saturating inputs*, IFAC World Congress (Praha, Rép. Tchèque), July 2005, p. reg. paper 4091.
- [24] M. Dambrine, *Contribution à l'étude de la stabilité des systèmes à retards*, Ph.D. thesis, Univ. des Sciences et Technologie de Lille, 1994.
- [25] M. Dambrine, J.-P. Richard, and P. Borne, *Feedback control of time-delay systems with bounded control and state*, *J. Mathematical Problems in Engineering* **1** (1995), no. 1, 77–87, Gordon and Breach.
- [26] M. Darouach, *Linear functional observers for systems with delays in the state variables*, *IEEE Trans. Autom. Contr.* **46** (2005), no. 3, 491–497.
- [27] M. Darouach, P. Pierrot, and E. Richard, *Design of reduced-order observers without internal delays*, *IEEE Trans. Autom. Contr.* **44** (1999), no. 9, 1711–1713.
- [28] M. Darouach, M. Zasadzinski, and S.J. Xu, *Full-order observers for linear systems with unknown inputs*, *IEEE Trans. Autom. Contr.* **39** (1994), no. 2, 606–609.
- [29] C.E. de Souza, R.E. Palhares, and P.L.D. Peres, *Robust  $H^\infty$  filtering for uncertain linear systems with multiple time-varying state : An LMI approach*, *Conference on Decision and Control (Proceeding of the 38th Conference on Decision and Control, eds.)*, December 1999, pp. 2023–2028.
- [30] S. Drakunov, G.D. Hanchin, W.C. Su, and Ü. Özgüner, *Nonlinear control of a rodless pneumatic servomotor, or sliding modes versus coulomb friction*, *IEEE* **33** (1997), no. 7, 1401–1408.
- [31] S.V. Drakunov, *Sliding-mode observer based on equivalent control method*, *Conference on Decision and Control (Proceeding of the 31th Conference on Decision and Control, eds.)*, December 1992.
- [32] S.V. Drakunov and V.I. Utkin, *Sliding mode observers. tutorial*, *Conference on Decision and Control (Proceeding of the 34th Conference on Decision and Control, eds.)*, December 1995.
- [33] B. Drazenov, *The invariance conditions in variable structure systems*, *Automatica* **5** (1969), no. 3, 287–295.
- [34] D.R. Driver, *Ordinary and delay differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1977.

- [35] L. Dugard and E.I. Verriest, *Lecture notes in control and information sciences*, Springer, 1997.
- [36] G. Dullerud and K. Glover, *Robust stabilization of sampled-data systems to structured LTI perturbations*, IEEE Transactions on Automatic Control **38** (1993), no. 10, 1497–1508.
- [37] C. Edwards and S.K. Spurgeon, *On the development of discontinuous observers*, Int. J. of Contr. **59** (1994), 1211–1229.
- [38] ———, *Sliding mode control : Theory and applications*, Taylor & Francis, 1998.
- [39] A. Eusebi and C. Melchiorri, *Force-reflecting telemanipulators with time-delay : Stability analysis and control design*, IEEE trans. on Robotics and Automation **14**(4) (1998), 635–640.
- [40] F.W. Fairmar, B. Kumar, and E. Richard, *Design of reduced-order observers without internal delays*, IEEE Trans. Autom. Contr. **44** (1999), no. 9, 1711–1713.
- [41] A. Fattouh and O. Sename,  *$H^\infty$ -based impedance control of teleoperation systems with time delay*, 4th Workshop on Time Delay Systems, September 2003.
- [42] A. Fattouh, O. Sename, and J.-M. Dion, *An unknown input observer design for linear time-delay systems*, 38th IEEE Conference on Decision and Control, vol. 4, December 1999, pp. 4222–4227.
- [43] ———, *Robust observer design for linear uncertain time-delay systems : A factorization approach*, MTNS (Perpignan, France), 2000.
- [44] M. Fleiss, H. Mounier, P. Rouchon, and J. Rudolph, *Controlability and motion planning for linear delay systems with application to flexible rod*, Conference on Decision and Control (Proceeding of the 34th Conference on Decision and Control, eds.), December 1995.
- [45] T. Floquet, J.-P. Barbot, W. Perruquetti, and M. Djemaï, *On the robust fault detection via a sliding mode disturbance observer*, International Journal of control **77** (2004), no. 7, 622–629.
- [46] E. Fridman, *Use of models with aftereffect in the problem of design of optimal digital control*, Autom. Remote Control **53** (1992), 1523–1528.
- [47] ———, *New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems*, System and Control Letters **43** (2001), 309–319.
- [48] ———, *Effects of small delays on stability of singularly perturbed systems*, Automatica **38** (2002), 897–902.
- [49] ———, *Stability of linear functional differential equations : A new Lyapunov technique*, Proceedings of Mathematical Theory of Networks and Systems, September 2004.
- [50] ———, *Stability of systems with uncertain delays : a new "complete" Lyapunov-Krasovskii functional*, IEEE Trans. on Automatic Control **51**(5) (2006), 885 – 890.
- [51] E. Fridman, F. Gouaisbault, M. Dambrine, and J.-P. Richard, *Sliding mode control of systems with time-varying delays via descriptor approach*, proceedings of ECC'03 (Cambridge, England), 2003.
- [52] E. Fridman, A. Pila, and U. Shaked, *Regional stabilization and  $H^\infty$  control of time-delay systems with saturating actuators*, Int. J. of Rob. and Nonlin. Contr. **13** (2003), 885–907.
- [53] E. Fridman, A. Seuret, and J.-P. Richard, *Robust sampled-data stabilization of linear systems : An input delay approach*, Automatica **40** (2004), no. 8, 1141–1446.
- [54] E. Fridman and U. Shaked, *Stability and guaranteed cost control of uncertain discrete delay systems*, International Journal of Control **45** (2000), no. 12, 2406–2411.

- [55] ———, *A new  $H^\infty$  filter design for linear time delay systems*, IEEE Transactions on Signal and Processing **49** (2001), no. 11, 2839–2843.
- [56] ———, *A descriptor system approach to  $H^\infty$  control of linear time-delay systems*, IEEE Trans. on Automatic Control **47** (2002), no. 2, 253–270.
- [57] ———, *An improved stabilization method for linear time-delay systems*, IEEE Transactions on Automatic Control **47** (2002), no. 11, 1931–1937.
- [58] ———, *Parameter dependent stability and stabilization of uncertain time-delay systems*, IEEE Transactions on Automatic Control **48** (2003), no. 5, 861–866.
- [59] ———, *Parameter dependent stability and stabilization of uncertain time-delay systems*, IEEE Trans. on Automatic Control **48** (2003), no. 5, 861–866.
- [60] E. Fridman, U. Shaked, and L. Xie, *Robust  $H^\infty$  filtering of linear systems with time-varying delay*, IEEE Transactions on Automatic Control **48** (2003), no. 1, 159–165.
- [61] C.E. Garcia, B. Morales, R. Carelli, and J. Postigo, *Stability analysis for a teleoperation system with time delay and force feedback*, Conference on Decision and Control (Proceeding of the 39<sup>th</sup> Conference on Decision and Control, eds.), December 2000.
- [62] S.S. Ge, T.H. Lee, and S.X. Ren, *Adaptive friction compensation of servo mechanisms*, International Journal of Systems Science **32** (2001), no. 4, 523–532.
- [63] L. El Ghaoui and S.-I. Niculescu, *Advances in linear matrix inequality methods in control*, Advances in Design and Control. SIAM, 2000.
- [64] F. Gouaisbaut, M. Dambrine, and J.-P. Richard, *Robust control of dealy systems : a sliding mode control design via LMI*, Systems and Control Letters **46** (2002), no. 4, 219–230.
- [65] A. Goubet, M. Dambrine, and J.-P. Richard, *Stability of perturbed systems with time-varying delays*, Systems and Control Letters **31** (1998), 1608.
- [66] A. Goubet-Bartholoméüs, M. Dambrine, and J.-P. Richard, *An extension of stability criteria for linear and nonlinear time-delay systems*, IFAC System, Structure and Control 95 (Nantes, France), 1995, pp. 278–283.
- [67] ———, *Stability of perturbed systems with time-varying delay*, Systems and Control Letters **31** (1997), 155–163.
- [68] K. Gu, *Discretized LMI set in the stability problem of linear uncertain time-delay systems*, Int. J. of Control **68** (1997), 923 – 934.
- [69] K. Gu, V.-L. Kharitonov, and J. Chen, *Stability of time-delay systems*, Birkhauser, 2003.
- [70] K. Gu and S.-I. Niculescu, *Additional dynamics in transformed time-delay systems*, Proc 38<sup>th</sup> IEEE CDC'99 (Phoenix, United-States of America), vol. 4673 - 4677, 1999.
- [71] ———, *Additional dynamics in transformed time-delay systems*, IEEE Trans. on Automatic Control **45** (2000), no. 3, 572–575.
- [72] T.-M. Guerra, A. Kruszewski, L. Vermeiren, and H. Tirmant, *Conditions of output stabilization for nonlinear models in the Takagi-Sugeno's form*, Fuzzy Sets & Systems **157** (2006), no. 9, 1248–1259.
- [73] J. Hale and S. M.V. Lunel, *Introduction to functional differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.

- [74] C. Hatipoğlu and Ü. Özgüner, *Handling stiction with variable structure control*, Lecture Notes in Control and Information Science 247, Variable Structure Systems, Sliding Mode and Nonlinear Control, Springer-Verlag (1999), 143–166.
- [75] M. Hou and P.C. Müller, *Design of observers for linear systems with unknown inputs*, IEEE Trans. Autom. Contr. **37** (1992), 871–875.
- [76] L.-S. Hu, J. Huang, and H.-H. Cao, *Robust digital model predictive control for linear uncertain systems with saturations*, IEEE Trans. on Automatic Control **49** (2004), no. 5, 792–796.
- [77] Y.-P. Huang and K. Zhou, *On the robustness of uncertain time-delay systems with structured uncertainties*, Systems and Control Letters **41** (2000), 367–376.
- [78] A. Ionita and V. Dragan, *Stabilization of singularly perturbed linearly systems with delay and saturation control*, Proc. of the 7th Mediterranean Conference on Control and Automation (Haifa, Israel), 1999, pp. 1855–1869.
- [79] J.Hale, *Theory of functional differential equations*, Springer-Verlag, 1997.
- [80] X. Jiang and Q.-L. Han, *On  $H^\infty$  control for linear systems with interval time-varying delay*, Automatica **41** (2005), 2099–2106.
- [81] H.K. Khalil, *Nonlinear systems*, Prentice Hall, Upper Saddle River, Second Edition, 1996.
- [82] V.L. Kharitonov and S. Mondié, *Exponential estimates for neutral time-delay systems : an LMI approach*, IEEE Transactions on Automatic Control **50** (2005), no. 5, 666–670.
- [83] A. Kheddar and P. Coiffet, *Téléopération et réalité virtuelle*, Hermès-Lavoisier, 2002.
- [84] J.-H. Kim, *Delay and its time-derivative dependent robust stability of time-delayed systems with uncertainty*, IEEE Transactions on Automatic Control **46** (2001), no. 5, 789–792.
- [85] V.B. Kolmanovskii and A.D. Myshkis, *Applied theory of functional differential equations*, Kluwer, 1999.
- [86] V.B. Kolmanovskii, S.-I. Niculescu, and J.-P. Richard, *On the Lyapunov-Krasovskii functionals for stability analysis of linear delay systems*, Int. J. Control **72** (1999), 374–384.
- [87] V.B. Kolmanovskii and V.R. Nosov, *Stability of functional differential equations*, London : Academy Press, 1986.
- [88] V.B. Kolmanovskii and L.E. Shaikhet, *Control of systems with aftereffect*, American Mathematical Society, 1996.
- [89] A. Lelevé, P. Fraise, and P. Dauchez, *Telerobotics over ip networks : Towards a low-level real-time architecture*, Proceedings. IEEE/RSF International Conference, vol. 2, Novembre 2001, pp. 643 – 648.
- [90] A. Lelevé, P. Fraise, P. Dauchez, and F. Pierrot, *Stability analysis for a teleoperation system with time delay and force feedback*, Proceedings. IEEE/ASME International Conference, December 1999, pp. 299 – 304.
- [91] X. Li and C.-E. de Souza, *Robust stabilization and  $H^\infty$  control of uncertain linear time-delay systems*, Proc 13<sup>th</sup> IFAC World Congress (San Francisco, United-States of America), vol. H, 1996.
- [92] ———, *Criteria for robust stability and stabilization of uncertain linear systems with state delay*, Automatica **33** (1997), 1657–1662.
- [93] ———, *Delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems : a linear matrix inequality approach*, IEEE Transactions on Automatic Control **42** (1997), no. 8, 1144–1148.

- [94] Y.-F. Li, *High precision motion control based on a discrete-time sliding mode approach*, Ph.D. Thesis, Available on <http://www.lib.kth.se/Sammanfattningar/li020129.pdf> (1999).
- [95] Y.-F. Li and J. Wikander, *Discrete-time sliding mode control of a dc motor and ball-screw driven positioning table*, Proc. IFAC 15th Triennial World Congress, Barcelona Spain, 2002, pp. 2436–2441.
- [96] Z. Lin and A. Saberi, *Semi-global exponential stabilization of linear systems subject to input saturation via linear feedback*, Syst. & Contr. Lett. **21** (1993), 225–239.
- [97] P.-L. Liu, *Exponential stability for linear time-delay systems with delay dependance*, J. Franklin Inst. **340** (2003), 481–488.
- [98] ———, *Robust exponential stabilization for uncertain systems with state and control delay*, International Journal of Systems Science **34** (October 2003), no. 12-13, 675–682.
- [99] I. Lopez, J.L. Piovesan, C.T. Abdallah, D. Lee, O. M. Palafox, M. Spong, and R. Sandoval, *Practical issues in networked control systems*, ACC'06, June, 2006, pp. 4202 – 4207.
- [100] D.G. Luenberger, *An introduction to observers*, IEEE Trans. on Automatic Control **16** (1971), 596 – 602.
- [101] A.Z. Manitius and A.W. Olbrot, *Finite specturm assignment problem for systems with delays*, IEEE Trans. on Automatic Control **AC-24** (1979), no. 4.
- [102] H.E. Merrit, *Hydraulic control systems*, John Wiley and Sons, 1967.
- [103] Y.V. Mikheev, V.A. Sobolev, and E.M. Fridman, *Asymptotic analysis of digital control systems*, Autom. Remote Control **49** (1988), no. 9, 1175–1180.
- [104] S. Mondié and V.L. Kharitonov, *Exponential estimates for retarded time-delay systems : an LMI approach*, IEEE Trans. on Automatic Control **50** (2005), no. 2, 268–273.
- [105] Y.S. Moon, P. Park, W.H. Kwon, and Y.S. Lee, *Delay-dependent robust stabilization of uncertain state delayed systems*, Int. J. of Contr. **74** (2001), 1447–1455.
- [106] E. Moulay, M. Dambrine, W. Perruquetti, and N. Yeganefar, *Une première approche de la stabilité et de la stabilisation en temps fini des systèmes à retard*, CIFA'06 (Bordeaux, France), 2006.
- [107] H. Mounier and J.-P. Richard, *Special Issue on Delays and Telecommunications*, International Journal of Systems Science **15** (2003), no. 1, 561–561.
- [108] A.D. Myshkis, *General theory of differential equations with delay*, Transl AMS **55** (1955), 1–62.
- [109] S.-I. Niculescu, *Sur la stabilite et la stabilisation des systemes lineaires a etats retardes*, Ph.D. thesis, INPG, 1996.
- [110] ———,  *$H^\infty$  memoryless control with an  $\alpha$ -stability constraint for time-delay systems : An LMI approach*, IEEE Trans. on Automatic Control **43** (1998), no. 5, 739–743.
- [111] ———, *Delay effects on stability. a robust control approach*, Springer-Verlag, 2001.
- [112] S.-I. Niculescu, C.T. Abdallah, and P.F. Hokayem, *Effects of channel dynamics on the stability of teleoperation*, 4th Workshop on Time Delay Systems, September 2003.
- [113] S.-I. Niculescu, C.-E. de Souza, L. Dugard, and J.-M. Dion, *Robust exponential stability of uncertain systems with time-varying delays*, Proceedings of the 33rd IEEE CDC, 1994, p. 431.
- [114] S.-I. Niculescu, J.-M. Dion, and L. Dugard, *Robust stabilization for uncertain time-delay systems containing saturating actuators*, IEEE Trans. on Automatic Control **41** (1996), no. 5, 742 – 747.

- [115] G. Niemeyer and J.-J. Slotine, *Towards force-reflecting teleoperation over the internet*, IEEE Int. Con. on Robotics & Automation, 1998.
- [116] P.A. Kawka N.J. Ploplys and A.G. Alleyne, *Closed-loop control over wireless networks*, IEEE Control Systems Magazine **24** (2004), no. 3, 58–71.
- [117] F. Ohkawa, S. Sagara, T. Yamashita, and M. Tomizuka, *Digital adaptive control of servo system with unknown nonlinear friction*, IEEE **125** (2003), no. 1, 27–32.
- [118] Y. Oishi, *A bound of conservativeness in sampled-data robust stabilization and its dependance on sampling periods*, Systems and Control Letters **32** (1997), no. 1, 11–19.
- [119] H. Olsson, K.J. Åström, C. Canudas de Wit, M. Gäfvert, and P.Lichinsky, *Friction models and friction compensation*, European Journal of Control **4** (1998), 176–195.
- [120] S. Oucheriah, *Global stabilization of a class of linear continuous time delay systems with saturating controls*, IEEE Trans. on Circ. and Syst. I **43** (1996), no. 12, 1012–1015.
- [121] ———, *Exponential stabilization of a class of uncertain time-delay systems with bounded controllers*, IEEE Trans. on Automatic Control **47** (2000), no. 4, 606–609.
- [122] Ü. Özgüner, S. Hong, and Y. Pan, *Discrete-time sliding mode control of electronic throttle valve*, Proc. of the 40th IEEE Conference on Decision and Control (Orlando, Florida), 2001, pp. 1819–1824.
- [123] Z.J. Palmor, *Time-delay compensation - smith predictor and its modifications*, The control handbook, New York : CRC and IEEE Press (1996), 224–237.
- [124] H. Qiu and Q. Zhang, *F-pid control for agricultural vehicles with electrohydraulic steering systems*, Journal of Automobile Engineering **217** (2003), no. 5, 375–382.
- [125] J.-P. Richard, *Algèbre et analyse pour l'automatique*, Hermès - Lavoisier, 2001.
- [126] ———, *Outils mathématiques pour les systèmes dynamiques*, Hermès - Lavoisier, 2002.
- [127] ———, *Time delay systems : an overview of some recent advances and open problems*, Automatica **39** (2003), 1667–1694.
- [128] O. Senname, *Unknown input robust observers for time-delay systems*, Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control, vol. 2, 1997, pp. 1629–1630.
- [129] ———, *New trends in design of observers for time-delay systems*, Kybernetika **37** (2001), no. 4, 427–458.
- [130] A. Seuret, M. Dambrine, and J.-P. Richard, *Robust exponential stabilization for systems with time-varying delays*, 5th Workshop on Time Delay Systems, September 2004.
- [131] A. Seuret, T. Floquet, and J.-P. Richard, *Observateurs pour systèmes à retard variable et inconnu*, CIFA 2006, Bordeaux, France, 2006.
- [132] A. Seuret, E. Fridman, and J.-P. Richard, *Sampled-data exponential stabilization of neutral systems with input and state delays*, IEEE MED 2005, 13<sup>th</sup> Mediterranean Conference on Control and Automation, June 2005.
- [133] ———, *Robust sampled-data control - An input delay approach*, In “Applications of Time-Delay Systems”, Edt. J.-J. Loiseau, LNCIS, Springer, 2006.
- [134] A. Seuret, F. Michaut, J.-P. Richard, and T. Divoux, *Networked control using GPS synchronization*, American Control Conference, Mineapolis, US, June 2006.

- [135] A. Seuret, F. Michaut, J.-P. Richard, and F. Lepage, *Prise en compte des retards de réseau dans la conception de commande*, In “Systèmes comandés en réseau”, J.-P. Richard et Th. Divoux, Hermès Traités IC2, Information, Commande, Communication, 2006.
- [136] A. Seuret, M. Termens-Balester, A. Toguyeni, S. El Khatabi, and J.-P. Richard, *Implementation of an internet-controlled system under variable delays*, ETFA'06, Pragues, Rep Tcheque, September, 2006.
- [137] S.N. Shimanov, *On stability in the critical case of a zero root for systems with time lag*, J. Appl. Math. Mech. **24** (1960), 653 – 668.
- [138] S.C. Southward, C.J. Radcliffe, and C.R. MacCluer, *Robust nonlinear stick-slip friction compensation*, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control **113** (1991), 639–645.
- [139] V. Suplin, E. Fridman, and U. Shaked,  *$H^\infty$  control of linear uncertain time-delay systems - a projection approach*, Proc. of the IEEE Conf. on Dec. and Control (Bahamas), 2004.
- [140] T. Takagi and M. Sugeno, *Fuzzy identification of systems and its applications to modelling and control*, IEEE Trans. on SMC **15** (1985), 1351–1357.
- [141] C. P. Tan and C. Edwards, *An LMI approach for designing sliding mode observers*, International Journal of Control **74** (2001), no. 16, 1559–1568.
- [142] S. Tarbouriech and G. Garcia, *Stabilization of neutral linear time-delay systems with saturating actuators*, Proc. of the 38th IEEE Conf. on Dec. and Contr., 1999, pp. 2011–2016.
- [143] S. Tarbouriech and J.M. Gomes da Silva Jr., *Synthesis of controllers for continuous-time delay systems with saturating controls via LMIs*, IEEE Trans. Autom. Contr. **45** (2000), no. 1, 105–111.
- [144] S. Tarbouriech, J.M. Gomes da Silva Jr., and G. Garcia, *Delay-dependent anti-windup strategy for linear systems with saturating inputs and delayed outputs*, Int. J. of Rob. and Nonlin. Contr. **14** (2004), 665–682.
- [145] V.I. Utkin, *Principles of identification using sliding regimes*, Soviet Physics Doklady (1981), no. 26.
- [146] ———, *Sliding modes in control and optimization*, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1992.
- [147] J. Wang, H. Van Brussel, and J. Swevers, *Robust perfect tracking control with discrete sliding mode controller*, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control **125** (2003), no. 1, 27–32.
- [148] R.-J. Wang and W.-J. Wang,  *$\alpha$ -stability analysis of perturbed systems with multiple noncommensurate time delays*, IEEE Trans. on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications **43** (1996), no. 4, 349 – 352.
- [149] X.-S. Wang, C.-Y. Su, and H. Hong, *Robust adaptive control of a class of nonlinear systems with unknown dead-zone*, International Journal of Systems Science **40** (2004), 407–413.
- [150] Z. Wang, B. Huang, and H. Unbehauen, *Robust  $H^\infty$  observer design for uncertain time-delay systems :(i) the continuous case*, IFAC 14th world congress, December 1999, pp. 231–236.
- [151] K. Watanabe and K. Kojima E. Nobuyama, *Recent advances in control of time-delay systems : A tutorial review*, Proceedings of the 35<sup>th</sup> IEEE CDC (Kobe, Japan), 1996, pp. 2083 – 2089.
- [152] P. Wellstead and M. Readman, *Engine speed control*, Online, Available : <http://www.control-systems-principles.co.uk/engine-speed-control.pdf> (2003).
- [153] E. Witrant, *Stabilisation des systèmes commandés par réseaux*, Ph.D. thesis, INPG, 2005.
- [154] S. Xu, J. Lam, and M. Zhong, *New exponential estimates for time-delay systems*, IEEE Transactions on Automatic Control **51** (2006), no. 9, 1501–1505.

- [155] S. Xu, P. Shi, C. Feng, Y. Guo, and Y. Zou, *Robust observers for a class of uncertain nonlinear stochastic systems with state delay*, *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* **4** (2004), no. 3.
- [156] Y. Yamamoto, *New approach to sampled-data control systems - a function space method*, Conference on Decision and Control (Proceeding of the 29th Conference on Decision and Control, eds.), December 1990.
- [157] N. Yeganefar, *Contribution à la stabilité des systèmes à retards*, Ph.D. thesis, École Centrale de Lille, 2006.
- [158] D.K. Young, V.I. Utkin, and Ü. Özgüner, *A control engineers guide to sliding mode control*, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **7** (1999), no. 3, 482–485.
- [159] K.D. Young, *A tale of two discontinuities*, Londen ltd. ed., *Lecture Notes in Control and Information Science* 247, Variable Structure Systems, Sliding Mode and Nonlinear Control, Springer-Verlag, 351-361 1999.
- [160] J. Zhang, C.R. Knospe, and P. Tsiotras, *Toward less conservative stability analysis of time delay systems*, Proc 38<sup>th</sup> IEEE CDC'99 (Phoenix, United-States of America), vol. 2017 - 2022, 1999.