



HAL
open science

Méthodes d'analyse et de synthèse robustes pour les systèmes linéaires périodiques

Christophe Farges

► **To cite this version:**

Christophe Farges. Méthodes d'analyse et de synthèse robustes pour les systèmes linéaires périodiques. Mathématiques [math]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2006. Français. NNT: . tel-00132343

HAL Id: tel-00132343

<https://theses.hal.science/tel-00132343>

Submitted on 21 Feb 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Préparée au
Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS

En vue de l'obtention du
Doctorat de l'Université Paul Sabatier de Toulouse

Spécialité
Automatique

Par
Christophe FARGES

MÉTHODES D'ANALYSE ET DE SYNTHÈSE ROBUSTES POUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES PÉRIODIQUES

Soutenue le 6 décembre 2006 devant le jury :

Président	Michel COURDESSES	Professeur, UPS, Toulouse
Directeurs de thèse	Denis ARZELIER	Chargé de recherche CNRS
	Dimitri PEAUCELLE	Chargé de recherche CNRS
Rapporteurs	Patrizio COLANERI	Professeur, Politecnico di Milano, Italie
	Gilles DUC	Professeur, SUPELEC, Paris
Examineurs	Régis BERTRAND	Ingénieur de recherche, CNES, Toulouse
	Jamal DAAFOUZ	Professeur, INP de Lorraine, Nancy
Membre invité	Alain THERON	Professeur agrégé, Lycée Fermat, Toulouse

LAAS-CNRS
7, Avenue du Colonel Roche
31077 Toulouse Cedex 4
France

A ma famille et mes amis...

石の上にも三年

Trois ans assis sur une pierre...

Avant Propos

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués au Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (*LAAS*) du Centre National de la Recherche Scientifique (*CNRS*), au sein du groupe Méthodes et Algorithmes de Commande (*MAC*). Je tiens tout d'abord à remercier M. Malik Ghallab, directeur du *LAAS*, pour m'avoir accueilli dans ce laboratoire et avoir mis à ma disposition les ressources nécessaires à l'aboutissement de cette thèse.

Je souhaite exprimer toute ma reconnaissance à MM. Patrizio Colaneri, Professeur à l'Université Polytechnique de Milan en Italie, et Gilles Duc, Professeur à l'Ecole Supérieure d'Electricité, pour avoir été les rapporteurs de ce travail et pour leur participation au jury en compagnie de MM. Michel Courdesses, Professeur à l'Université Paul Sabatier de Toulouse, président du Jury, Régis Bertrand, Ingénieur de Recherche au Centre National d'Etudes Spatiales de Toulouse, Jamal Daafouz, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Lorraine et Alain Théron, Professeur agrégé au Lycée Pierre de Fermat à Toulouse. Je les remercie, ainsi que Alain Lamy, Ingénieur au *CNES*, pour leur lecture attentive du manuscrit, leurs critiques, leurs suggestions et leurs compliments.

J'exprime mes plus sincères remerciements à mes responsables de thèse Denis Arzelier et Dimitri Peaucelle, chargés de recherche au *CNRS*, pour avoir assuré l'encadrement de ce travail et plus particulièrement pour la grande disponibilité et le soutien dont ils ont fait preuve tout au long de ces trois années.

Je remercie M. Philippe Esteban, Maître de Conférences à l'Université Paul Sabatier, pour m'avoir confié mes premiers enseignements. Merci aux enseignants de l'*INSA* Bernard Pradin, Germain Garcia, Audine Subias et Jacques Erschler pour m'avoir intégré au sein de l'équipe pédagogique et pour la confiance qu'ils m'ont toujours témoignée. Un merci particulier à Elodie avec qui j'ai le plaisir de préparer mes enseignements depuis quelques mois. Merci également aux techniciens de la salle de TP d'Automatique de l'*INSA*, Bernard Fauré (dit Fofo) et José Martin, pour leur efficacité et pour les bons moments passés ensemble lors de mes préparations de TP.

Je remercie également tous les membres du groupes *MAC* pour leur accueil et tous mes collègues de pause café devenus de véritables amis au fil des mois, à commencer par mon collègue de bureau Wilfried (maître inégalable du "*c'est toi le...*"), François (mon coach personnel), Yassine (le "*réseau-man de l'Autom*"), Thomas, Bo, Julien, Luc et les petits nouveaux Ixbalank et Giorgio.

Enfin, pour avoir partagé les bons moments, pour leur soutien inconditionnel et pour leurs encouragements, je remercie mes parents, mes grands-parents et mes amis. Dédicace spéciale à Sébastien, Titi, Momo, Fabrice et Aniss.

Introduction générale

L'Automatique est une discipline empruntant ses outils à la fois aux sciences et technologies de l'information et de la communication et aux mathématiques appliquées mais qui puise ses origines dans les questions d'ingénierie et y trouve la majorité de ses applications. Sa caractéristique principale est de traiter des systèmes dynamiques autant expérimentalement que conceptuellement. Fondée sur la notion centrale de contre-réaction, son objectif principal est la synthèse de correcteurs permettant d'améliorer les propriétés du système sans pour autant remettre en cause sa constitution interne. La démarche classique de développement du correcteur fait intervenir trois étapes essentielles. La première est la modélisation qui vise à associer au processus physique étudié un modèle mathématique rendant compte le plus fidèlement possible de son comportement. Une fois le modèle obtenu, il s'agit de proposer des méthodes systématiques permettant d'évaluer ses performances. Cette étape porte le nom d'analyse et étudie le comportement dynamique du système (stabilité, rapidité de convergence vers l'équilibre, dépassement...) ainsi que sa capacité à rejeter des perturbations. Vient enfin l'étape de synthèse qui consiste à déterminer un correcteur permettant d'améliorer les performances du système.

L'étape de modélisation est essentielle puisque les résultats des méthodes d'analyse et de synthèse sont conditionnées par la qualité du modèle utilisé. La tentation est alors de développer un modèle le plus complet possible et rendant compte au mieux du comportement du système dans tous ses modes de fonctionnement. Mathématiquement, cela conduit généralement à l'utilisation d'outils non-linéaires, en dimension infinie... Afin de ne pas rendre inutilement complexes les méthodes d'analyse et de synthèse, il est alors nécessaire d'effectuer certaines approximations de sorte à obtenir un modèle simplifié. Généralement, les dits systèmes sont conçus ou définis vis-à-vis d'une utilité précise qui caractérise un régime de fonctionnement souhaité. Pour une majorité de systèmes, ce régime de fonctionnement correspond à un état statique qui est défini par un point d'équilibre des équations dynamiques non-linéaires. En première approximation, le modèle peut alors être simplifié par linéarisation autour de ce point d'équilibre et un modèle linéaire invariant dans le temps (LTI) est obtenu. Cette approche est justifiée par la première méthode de Lyapunov [LYA 92] qui permet de conclure sur la stabilité locale du système non-linéaire en fonction de la stabilité du modèle linéarisé. Du fait de sa simplicité et de la puissance des outils de l'algèbre linéaire permettant de la manipuler, la classe des modèles LTI fut une des premières étudiées et de nombreux outils d'analyse et de synthèse lui sont dédiés [ZAD 63, BRO 91, SKO 05]. Pour certains systèmes (satellites, machines tournantes, etc...), le fonctionnement en régime nominal se traduit par un comportement qui n'est

pas statique mais dynamique avec une certaine périodicité. Si l'on s'intéresse au comportement de ces systèmes dans ce régime de fonctionnement, il convient alors d'effectuer la linéarisation autour d'une trajectoire de référence et non plus d'un point. Le modèle obtenu est alors un modèle linéaire variant dans le temps (LTV) dont les paramètres évoluent périodiquement au cours du temps.

Il est ainsi légitime de s'intéresser aux processus périodiques de manière générale et aux équations mathématiques capables de rendre compte de leur comportement. Ainsi, dès 1868, Émile Mathieu [MAT 68] propose de modéliser les vibrations d'une membrane elliptique à l'aide d'une équation différentielle d'ordre deux à coefficient périodiques. Gaston Floquet [FLO 83] puis Aleksandr Lyapunov [LYA 92] s'intéressent à ce type d'équations et proposent la forme fondamentale de leurs solutions en 1883 et 1892 respectivement. Hill en 1886 [HIL 86] ouvre la voie à de nombreux travaux de mécanique céleste en proposant des modèles capables de rendre compte du mouvement des satellites (naturels). Du fait des avancées dans la théorie de la commande et du traitement du signal, l'étude des systèmes périodiques connaît un regain d'intérêt depuis la fin des années 70 (voir par exemple les ouvrages [MAR 72, YAK 75, VAI 93, FEU 96, GAR 94] et les articles [BIT 86, BIT 99, COL 00, COL 05] proposant un état de l'art). Outre les exemples cités précédemment, des dynamiques périodiques apparaissent naturellement dans de nombreux domaines des sciences de l'ingénieur tels que l'aéronautique, l'espace et les systèmes de télécommunication. Les exemples du contrôle de vibrations d'un hélicoptère [BIT 96b, BIT 02] et du contrôle d'attitude de satellites équipés de magnétotorqueurs [LOV 01, WIS 04] sont désormais classiques et largement commentés dans la littérature. Une autre application intéressante et originale de la théorie de la commande pour les systèmes périodiques est en train d'émerger en mécanique céleste : le maintien à poste autonome d'un satellite sur une orbite spécifique [PAR 98]. Lorsque des orbites elliptiques sont considérées, les équations linéarisées du mouvement relatif donnent lieu à un modèle périodique [INA 02, SCH 01, TIL 02, TIL 02, YAM 02]. Ces derniers exemples correspondent à des systèmes gouvernés par des lois physiques périodiques. D'autres systèmes de nature non périodique peuvent également être modélisés sous forme périodique. Ainsi, lorsqu'un système linéaire invariant dans le temps est commandé numériquement à l'aide d'échantillonneurs et de bloqueurs présentant des périodes d'échantillonnage variées, le système discret obtenu peut être exprimé sous forme périodique. De tels systèmes sont appelés systèmes multiéchantillonnés et sont étudiés dans de nombreuses références [MEY 90, DAH 92, SAG 00, TOR 01].

L'utilisation d'un modèle linéaire (LTI ou périodique) pour approximer le comportement d'un système non-linéaire dans un régime de fonctionnement particulier est un bon outil pour apprécier en première approximation les performances du système. Par ailleurs, les propriétés de robustesse naturellement apportées par la structure de commande à contre réaction permettent d'espérer pouvoir réguler le système malgré les différences entre le modèle linéarisé utilisé pour la synthèse et la réalité non-linéaire du système. Mais plus fondamentalement la robustesse se doit d'être garantie par des méthodes d'analyse et de synthèse tenant compte explicitement des différences entre le système réel et son modèle mathématique simplifié. Afin de rendre compte de cet écart, il convient de

considérer non plus un modèle unique, mais un ensemble de modèles, le comportement du système réel étant supposé être retranscrit par l'un d'eux. Cet ensemble de modèles est appelé modèle incertain. Outre la linéarisation, les incertitudes peuvent résulter d'une méconnaissance des valeurs numériques du modèle (incertitudes paramétriques) ou de dynamiques négligées (incertitudes non paramétriques). La branche de l'Automatique qui étudie les modèles incertains est appelée commande robuste. Le problème d'analyse consiste alors à garantir que l'ensemble des réalisations d'un modèle incertain vérifie une propriété donnée. Celui de synthèse est de choisir une loi de commande garantissant ou optimisant les performances robustes du système bouclé [ZHO 96, DUL 00, SKO 05].

Alors que les questions de robustesse introduisent une complexité nouvelle due au nombre infini de valeurs que peut prendre l'incertitude, la reformulation de nombreux résultats existants sous forme de problème d'optimisation convexe a permis des avancées significatives ces vingt dernières années. En effet, la théorie de Lyapunov permet d'écrire naturellement bon nombre de problèmes d'Automatique à l'aide d'inégalités matricielles linéaires (\mathcal{LMI}). Ces inégalités matricielles peuvent alors être résolues efficacement à l'aide des outils mathématiques de la programmation semi-définie positive (SDP). De plus, comparée aux méthodes analytiques (comme les équations de Riccati par exemple), l'approche \mathcal{LMI} présente une plus grande flexibilité lui permettant d'aborder des problèmes de commande robuste complexes [BOY 94, SKE 98, ELG 00].

L'objectif général de cette thèse est de fournir des méthodes systématiques pour l'analyse et la synthèse robuste des systèmes linéaires périodiques. Le cadre de travail choisi est celui de la théorie de Lyapunov et fait appel principalement à des outils \mathcal{LMI} pour la résolution des problèmes.

Parmi les différentes questions que nous nous sommes posées au cours de cette thèse, la première était de savoir s'il est possible d'étendre aux systèmes périodiques les méthodes d'analyse robuste disponibles dans le cas des systèmes LTI. Parmi les différents types d'incertitudes pouvant affecter le modèle, notre attention s'est portée sur les incertitudes paramétriques structurées de types polytopique. Nous avons montré avec succès que les nouvelles méthodes développées dans le cadre LTI peuvent être appliquées et permettent d'améliorer les résultats concernant les systèmes périodiques publiés dans la littérature [De 00].

Nous nous sommes par la suite plus particulièrement intéressés aux différents aspects liés à la structure du correcteur. Le correcteur doit-il nécessairement être de même périodicité que le système ? Est-il possible de réduire le nombre de paramètres à mémoriser ? Ces questionnements nous ont amené à définir des structures temporelles sur le correcteur. L'utilisation de ces structures nous a conduit à développer des méthodes spécifiques de synthèse originales dédiées à cette classe de correcteurs. Un autre aspect lié à la nature du correcteur qui a retenu notre attention est la résilience. La résilience désigne la robustesse du système bouclé vis-à-vis d'incertitudes affectant non plus le système en boucle ouverte mais le correcteur. Ces incertitudes résultent de l'imprécision et des tolérances admises lors de la fabrication du correcteur. Si conclure a posteriori (une fois le correcteur calculé) ne présente pas de difficulté spécifique, intégrer des aspects de résilience dès l'étape

de synthèse est un problème difficile. Une méthode originale pour résoudre ce problème consiste à synthétiser des ensembles convexes de correcteurs ayant les mêmes propriétés garanties de performances pour le système bouclé [PEA 02, PEA 05]. Cette méthode était jusqu'alors développée dans le cas du retour de sortie et nécessitait la résolution d'inégalités matricielles bilinéaires (\mathcal{BMI}). Nous avons montré que cette méthode peut être étendue au cas du retour d'état et du retour de sortie et que, dans ces cas, des formulations \mathcal{LMI} peuvent être obtenues. Ceci constitue un résultat nouveau, même dans le cas des modèles LTI.

La thèse est découpée selon les trois problématiques de modélisation, d'analyse et de synthèse. Une partie applicative vient ensuite compléter ces développements théoriques.

Le premier chapitre est consacré à la modélisation des systèmes linéaires périodiques. Nous présentons dans un premier temps différents modèles capables de rendre compte de leur comportement dynamique. Ces modèles appartenant à la classe des modèles linéaires variant dans le temps sont de dimension infinie. Or l'emploi de méthodes \mathcal{LMI} nécessite un passage en dimension finie. Nous décidons d'effectuer ce passage dès l'étape de modélisation en travaillant sur des modèles à temps discret décrits par leur représentation d'état. Les incertitudes retenues sont quand à elles de type polytopique.

Le second chapitre présente différentes méthodes basées sur la théorie de Lyapunov permettant d'analyser la stabilité et les performances de ces modèles. Les méthodes d'analyses robuste proposées peuvent être classées en deux catégories. Les premières sont issues de la théorie de la stabilité quadratique alors que les secondes font appel à des matrices de Lyapunov dépendant des paramètres. Nous démontrons d'un point de vue théorique et nous confirmons sur différents exemples que ce second cadre de travail, appelé cadre de travail étendu, est moins pessimiste que le premier.

Ces méthodes d'analyse sont la base des méthodes de synthèse proposées dans le troisième chapitre. L'aspect résilience est traité par la synthèse non plus d'un correcteur unique mais d'ensembles ellipsoïdaux de correcteurs. Le problème est abordé sous sa forme la plus générale du calcul de lois de commandes par retour de sortie statique. Les méthodes de synthèse développées permettent de traiter le problème de robustesse et de résilience simultanément. Elles font cependant intervenir des inégalités matricielles non linéaires et n'offrent pas de garantie de convergence. Afin d'obtenir des méthodes de synthèse formulées à l'aide d'inégalités matricielles linéaires, nous proposons de simplifier le problème initial et de rechercher des correcteurs par retour d'état et par retour de sortie dynamique d'ordre plein. Pour chacun des résultats, la question de la structure temporelle du correcteur est abordée et résolue avec plus ou moins de pessimisme.

Le dernier chapitre s'appuie sur les résultats précédemment obtenus pour proposer une solution originale au problème de maintien à poste autonome d'un satellite en orbite basse. L'objectif est de proposer des lois de commande permettant de maintenir un satellite sur une orbite de référence excentrique malgré les différentes forces perturbatrices pouvant l'en écarter. Parmi ces forces perturbatrices, nous modélisons explicitement le frottement atmosphérique et l'effet du second harmonique zonal J_2 traduisant la distribution non-sphérique de la masse de la Terre. Le modèle à temps continu obtenu est

périodique. Sa période est la période orbitale. Après discrétisation du modèle, nous proposons différentes lois de commande permettant par exemple de minimiser la quantité de carburant consommée ou l'influence d'accélération perturbatrices modélisées par des bruits blancs. Des simulations non-linéaires permettent d'évaluer la qualité des lois de commande calculées.

Table des matières

Introduction générale	1
I Modélisation des systèmes linéaires périodiques	13
I.1 Introduction	14
I.2 Les systèmes linéaires périodiques	14
I.2.1 Propriété de linéarité	15
I.2.2 Propriété de périodicité	16
I.3 Modélisation des systèmes périodiques	16
I.3.1 Matrice de réponse impulsionnelle	17
I.3.2 Matrice de transfert harmonique	17
I.3.3 Représentation d'état des systèmes périodiques	18
I.4 Choix d'un cadre de travail en temps discret	20
I.4.1 Motivations	20
I.4.2 Représentation d'état discrète	21
I.4.3 Représentations LTI équivalentes	22
I.4.4 Matrice de réponse impulsionnelle et matrice de transfert harmonique dans le cas discret	26
I.5 Erreurs et approximations dans la modélisation : modèles incertains	27
I.5.1 Principe	27
I.5.2 Incertitudes bornées en norme N -périodiques	28
I.5.3 Incertitudes polytopiques N -périodiques	28
I.6 Conclusion	29
II Analyse de stabilité et de performances	31
II.1 Introduction	32
II.2 Stabilité des modèles discrets périodiques	33
II.2.1 La stabilité au sens de Lyapunov	33
II.2.2 Les multipliers caractéristiques	35
II.2.3 La seconde méthode de Lyapunov	38
II.3 Performances des systèmes discrets périodiques	43
II.3.1 Norme \mathcal{H}_∞ des modèles discrets périodiques	44
II.3.2 Norme \mathcal{H}_2 des modèles discrets périodiques	46
II.4 Analyse robuste en stabilité et performances	50
II.4.1 Analyse de la stabilité robuste	50

II.4.2	Exemple numérique	54
II.4.3	Analyse en performances robustes	56
II.4.4	Exemple Numérique	59
II.5	Conclusion	61
III	Synthèse de lois de commande	63
III.1	Introduction	64
III.2	Problématique	65
III.2.1	Nature du correcteur	65
III.2.2	Propriétés attendues pour le système bouclé	72
III.3	Formulations \mathcal{BMT} pour la synthèse par retour de sortie statique	76
III.3.1	Retour de sortie statique résilient	77
III.3.2	Retour de sortie statique résilient et robuste	79
III.3.3	Spécifications additionnelles sur le correcteur	83
III.3.4	Réduction de la complexité numérique	85
III.3.5	Exemple numérique	88
III.4	Méthodes \mathcal{LMI} pour la synthèse par retour d'état et par retour de sortie dynamique d'ordre plein	89
III.4.1	Retour d'état	90
III.4.2	Retour de sortie dynamique d'ordre plein	100
III.4.3	Correcteurs structurés	104
III.5	Conclusion	106
IV	Maintien à poste autonome de satellites en orbite basse	107
IV.1	Introduction	108
IV.2	Modélisation	109
IV.2.1	Equations non linéaires du mouvement	110
IV.2.2	Modèle linéarisé	112
IV.2.3	Modèle périodique à temps discret	119
IV.3	Comparaison des différents modèles en simulation	120
IV.3.1	Validation de l'étape de discrétisation	120
IV.3.2	Validation de l'étape de linéarisation	125
IV.4	Synthèse de correcteurs	127
IV.4.1	Définition de l'orbite de référence	127
IV.4.2	Synthèse d'une loi de maintien à poste par retour d'état	128
IV.4.3	Simulations en boucle fermée sur le modèle non-linéaire	131
IV.5	Conclusion	134
	Conclusions et Prospectives	135
	Références bibliographiques	137

Annexes	i
A Inégalités Matricielles	iii
A.1 Inégalités Matricielles	iii
A.2 Problèmes à base d'inégalités matricielles	v
B Théorèmes utiles	vii
B.1 Complément de Schur	vii
B.2 Lemme de Finsler	vii
B.3 Lemme d'élimination	viii
B.4 \mathcal{S} -procédure	ix
C $\{XYZ\}$-ellipsoïdes de matrices	xi
C.1 Définition	xi
C.2 Propriétés	xi
D Paramètres orbitaux	xiii
D.1 Paramètres orbitaux classiques	xiii
D.1.1 Orientation de l'orbite dans l'espace : Ω, ω, i	xiii
D.1.2 Dimension et forme de l'orbite a, e	xiv
D.1.3 Position du satellite sur l'orbite ν, E ou M	xiv
D.2 Paramètres orbitaux osculateurs	xv
D.3 Passage des paramètres orbitaux aux paramètres cartésiens	xv
D.4 Passage des paramètres cartésiens aux paramètres orbitaux	xvi
D.4.1 Calcul du demi-grand axe a	xvii
D.4.2 Calcul de l'excentricité e	xvii
D.4.3 Calcul de la longitude du noeud ascendant Ω	xvii
D.4.4 Calcul de l'inclinaison	xvii
D.4.5 Calcul de l'anomalie vraie ν	xvii
D.4.6 Calcul de l'argument du périégée ω	xviii
E Obtention du modèle linéarisé du mouvement relatif	xxi
E.1 Accélération différentielle	xxi
E.2 Accélération gravitationnelle différentielle	xxiii
E.3 Accélération différentielle due au frottement atmosphérique	xxiv
F Simulateurs	xxvii
F.1 Simulateur non-linéaire	xxvii
F.2 Simulateur linéaire	xxx
F.3 Passage des coordonnées absolues aux coordonnées relatives locales	xxxii
Glossaire	xxxiii
Index	xxxv

Table des figures

I.1	Système multivariable	15
I.2	Système échantillonné	22
I.3	Méthodologie adoptée	29
II.1	Modèle standard pour l'analyse des systèmes de commande à contre- réaction	32
II.2	Evolution de l'état pour une condition initiale non nulle	37
II.3	Multiplieurs caractéristiques du système bouclé pour différentes valeurs de α et β	56
II.4	Analyse de performance \mathcal{H}_2 robuste	61
III.1	Modèle standard pour le problème de synthèse	64
III.2	Correcteur variant ou non dans le temps	66
III.3	Dualité pour le problème de synthèse	72
III.4	Synthèse d'un ensemble ellipsoïdal de correcteurs stabilisants	77
III.5	Synthèse d'un ensemble ellipsoïdal de correcteurs stabilisant robustement un système polytopique	80
III.6	Ensembles de correcteurs stabilisants	89
III.7	Synthèse d'un ensemble ellipsoïdal de correcteurs stabilisant robustement un système polytopique	90
III.8	Synthèse de correcteurs par retour d'état performants	93
III.9	Norme \mathcal{H}_2 du système bouclé avec $\{K_k^q\}_{k \in \mathbb{N}}$ et $\{K_k^e(\Upsilon_0)\}_{k \in \mathbb{N}}$	98
III.10	Réponses impulsionnelles du système bouclé par les correcteurs $\{K_k\}_{k \in \mathbb{N}}^q$ et $\{K_k^e(\Upsilon_0)\}_{k \in \mathbb{N}}$	98
III.11	Coûts \mathcal{H}_2 étendus à chaque pas de l'Algorithme III.1	100
III.12	Synthèse d'ensemble ellipsoïdaux de correcteurs stabilisants par retour de sortie dynamique	100
IV.1	Repérage des satellites dans l'espace (source : [NAS 02])	110
IV.2	Paramétrage du mouvement différentiel	114
IV.3	Mouvement relatif périodique pour des conditions initiales particulières ($e = 0.7$ - cas képlérien)	122
IV.4	Influence de l'excentricité e et du nombre d'échantillons N sur l'erreur de discrétisation (cas képlérien)	123

IV.5	Influence du nombre d'échantillons N sur l'erreur de discrétisation (cas perturbé)	125
IV.6	Système non-linéaire bouclé	126
IV.7	Comparaison entre le modèle non-linéaire, le modèle linéaire à temps continu et le modèle à temps discret	127
IV.8	Mouvement relatif en boucle ouverte avec prise en compte des perturbations	128
IV.9	Système non-linéaire bouclé	131
IV.10	Mouvement relatif dans le plan orbital pour une condition initiale correspondant à un écart de position radiale de 100 m (cas perturbé)	132
IV.11	Norme de la commande pour les différents correcteurs synthétisés (cas perturbé)	133
IV.12	Détail de la Figure IV.11 : Norme de la commande pour $\alpha = 10$	133
D.1	Orientation de l'orbite dans l'espace	xiv
D.2	Forme de l'orbite et repérage de la position du satellite	xv
D.3	Angle de longitude du nœud ascendant	xviii
D.4	Angle d'inclinaison	xix
D.5	Argument du périhélie	xix
F.1	Bloc satellite	xxvii
F.2	Bloc satellite (détails)	xxviii
F.3	Protocole de simulation en boucle fermée	xxix
F.4	Simulateur linéaire	xxx
F.5	Simulateur linéaire (détails du bloc "Continuous-time Periodic System") .	xxx

Chapitre I

Modélisation des systèmes linéaires périodiques

Sommaire

I.1	Introduction	14
I.2	Les systèmes linéaires périodiques	14
I.2.1	Propriété de linéarité	15
I.2.2	Propriété de périodicité	16
I.3	Modélisation des systèmes périodiques	16
I.3.1	Matrice de réponse impulsionnelle	17
I.3.2	Matrice de transfert harmonique	17
I.3.3	Représentation d'état des systèmes périodiques	18
I.4	Choix d'un cadre de travail en temps discret	20
I.4.1	Motivations	20
I.4.2	Représentation d'état discrète	21
I.4.3	Représentations LTI équivalentes	22
I.4.4	Matrice de réponse impulsionnelle et matrice de transfert har- monique dans le cas discret	26
I.5	Erreurs et approximations dans la modélisation : modèles incertains	27
I.5.1	Principe	27
I.5.2	Incertitudes bornées en norme N -périodiques	28
I.5.3	Incertitudes polytopiques N -périodiques	28
I.6	Conclusion	29

I.1 Introduction

Ce premier chapitre est consacré à la modélisation des systèmes linéaires périodiques. Les techniques d'analyse et de synthèse de tout système de commande dépendent naturellement des choix effectués à l'étape de modélisation. L'objectif principal de ce chapitre n'est donc pas simplement de dresser une liste des modèles capables de rendre compte du comportement dynamique des systèmes périodiques mais surtout d'aider au choix d'un modèle en fonction du type de problèmes que l'on souhaite résoudre et des techniques numériques à mettre en oeuvre pour y parvenir.

Dans une première partie (Section I.2), nous définissons la classe particulière des systèmes linéaires périodiques sans faire appel à la notion de modèle. Les propriétés particulières de ces systèmes sont donc définies en termes d'entrées-sorties, le système étant vu comme une boîte noire. Ce n'est que dans la Section I.3 que différents modèles capables de retranscrire leurs spécificités sont présentés : matrice de réponse impulsionnelle, matrice de transfert harmonique et représentation d'état.

Ces modèles faisant partie de la classe des modèles linéaires variant dans le temps sont de dimension infinie. Or l'emploi de méthodes numériques basées sur la programmation semi-définie positive présentées en Annexe A nécessite un passage en dimension finie. Nous décidons d'effectuer ce passage dès l'étape de modélisation en travaillant sur des modèles en temps discret. En effet, de l'échantillonnage de modèles périodiques à temps continu résultent des modèles discrets de dimension finie. La Section I.4 est consacrée à la description de ces derniers modèles.

Enfin, différents types d'incertitudes pouvant affecter le modèle sont présentés en Section I.5. Ces incertitudes permettent de rendre compte des différentes erreurs et approximations effectuées lors de l'établissement du modèle final et en particulier, celles dues à la discrétisation.

I.2 Les systèmes linéaires périodiques

Un système peut être décrit comme un ensemble arbitraire d'éléments interconnectés entre eux et en interaction avec leur environnement extérieur. Cette définition suppose la connaissance de la topologie interne du système ainsi que celle de la frontière délimitant ses interfaces avec l'extérieur. Les échanges avec l'environnement sont caractérisés par un ensemble de variables externes. Les variables d'entrée (contrôlées ou non contrôlées), regroupées dans un vecteur $u \in \mathbb{R}^m$, représentent l'action de l'environnement extérieur sur le système alors que les variables de sortie (mesurées ou contrôlées), regroupées dans un vecteur $y \in \mathbb{R}^p$, décrivent l'influence du système sur l'extérieur.

Tout système évoluant au cours du temps de manière causale (son comportement à l'instant t , caractérisé par le vecteur $y(t)$, dépend des entrées passées et présentes) est appelé système dynamique, en opposition avec les systèmes statiques ($y(t)$ ne dépend que de $u(t)$). Le principe de causalité associé à la définition de la classe des systèmes dynamiques repose sur la notion d'état. En effet, le comportement dynamique interne du

système peut être décrit par un ensemble de variables internes regroupées dans le vecteur d'état usuellement noté $x(t) \in \mathbb{R}^n$ dont les composantes doivent contenir la quantité minimale d'information nécessaire pour décrire l'effet de la totalité des causes passées ($\{u(t), t_1 \geq t \geq 0\}$) sur le futur comportement du système (caractérisé par $\{y(t), t \geq t_1\}$).

Définition I.1 (Etat)

Le vecteur d'état $x(t) \in \mathbb{R}^n$ contient le nombre minimal de variables telles que, si pour t_0 , $x(t_0)$ est connu alors $y(t_1)$ et $x(t_1)$ peuvent être déterminés de manière unique pour tout $t_1 \geq t_0$ si $u(t)$ est connu sur l'intervalle $[t_0, t_1]$.

Pour une formalisation mathématique plus précise, le lecteur intéressé pourra se référer à [HIN 05]. L'ensemble des variables $u(t)$, $y(t)$ et $x(t)$ décrivant le comportement dynamique du système sont représentées sur la Figure I.1.

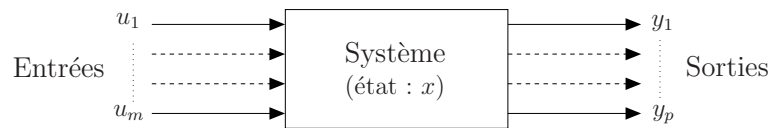


FIG. I.1 – Système multivariable

Les travaux présentés dans ce manuscrit concernent une classe particulière de systèmes dynamiques : les systèmes dynamiques multivariables linéaires périodiques. L'objectif de cette première partie est de décrire les spécificités de cette classe de systèmes.

I.2.1 Propriété de linéarité

La linéarité d'un système peut être mise en évidence à l'aide du principe de superposition et du principe d'homogénéité. Toute trajectoire d'état et de sortie, en réponse à une combinaison linéaire d'entrées élémentaires, peut être représentée comme une combinaison linéaire des trajectoires d'état et de sortie élémentaires.

Définition I.2 (Système Linéaire)

Soient $y_i(t)$ et $x_i(t)$ la sortie et l'état d'un système en réponse à une entrée $u_i(t)$. Ce système est dit linéaire si, pour une combinaison linéaire des entrées :

$$u(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i u_i(t) \quad (\text{I.1})$$

les réponses $y(t)$ et $x(t)$ sont une combinaison linéaire des réponses élémentaires à chacune des entrées appliquées individuellement :

$$y(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i(t) \quad , \quad x(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i(t) \quad , \quad \forall \alpha_i \in \mathbb{R} \quad (\text{I.2})$$

En pratique, la majorité des systèmes physiques sont non-linéaires. Cependant, leur comportement au voisinage d'un point de fonctionnement donné peut être considéré en première approximation comme linéaire (on parle alors de linéarisation autour d'un point de fonctionnement). Le point de fonctionnement est génériquement défini par $x = 0$ pour la classe des systèmes linéaires. Dans cette thèse, nous faisons l'hypothèse que les systèmes évoluent dans des domaines où l'hypothèse de linéarité est vérifiée (x proche d'un point d'équilibre).

I.2.2 Propriété de périodicité

De manière générale, la réponse d'un système linéaire dépend de l'instant initial où les entrées sont appliquées. De tels systèmes sont dits non stationnaires ou variant dans le temps (LTV). Les systèmes linéaires périodiques constituent une classe particulière de système LTV présentant la propriété suivante :

Définition I.3 (Système périodique)

Soient $y(t)$ et $x(t)$ la sortie et l'état d'un système en réponse à une entrée $u(t)$. Ce système est dit périodique si, pour tout $u(t)$, il existe $T \geq 0$ tel que la même entrée décalée d'un temps T :

$$u_d(t) = u(t + T) \quad (\text{I.3})$$

produit les mêmes sortie et état décalés de T :

$$y_d(t) = y(t + T) \quad , \quad x_d(t) = x(t + T) \quad (\text{I.4})$$

T est alors appelée période du système et le système résultant est dit T -périodique.

Si T est le plus petit nombre positif tel que la propriété précédente est vérifiée, alors T est appelé période minimale du système.

Remarque Si la propriété précédente est vérifiée pour tout T , alors le système est dit linéaire invariant dans le temps (LTI). La période minimale d'un système LTI est donc $T = 0$. Un système LTI peut ainsi être considéré comme un cas particulier d'un système périodique dont la période T tend vers 0.

I.3 Modélisation des systèmes périodiques

Ayant défini le système concret qu'il souhaite étudier, le premier travail de l'Automaticien est de lui associer une abstraction sur laquelle il va pouvoir raisonner : un modèle. Ce modèle doit rendre compte au mieux du comportement dynamique du système caractérisé par l'évolution des variables internes (vecteur d'état) du système (comportement autonome) et par l'évolution des grandeurs de sortie en réponse à des variations sur les grandeurs d'entrée (comportement forcé).

Différents types de modèles mathématiques directement inspirés du cadre de travail LTI et capables de rendre compte du comportement des systèmes linéaires périodiques sont maintenant présentés.

I.3.1 Matrice de réponse impulsionnelle

La réponse temporelle $y(t) \in \mathbb{R}^p$ d'un système LTV à une entrée $u(t) \in \mathbb{R}^m$ appliquée à partir de l'instant t_0 peut s'écrire de la manière suivante :

$$y(t) = \int_{t_0}^t h(t, \tau) u(\tau) d\tau \quad (\text{I.5})$$

où $h(t, \tau) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ est la matrice de réponse impulsionnelle considérée comme causale [SAN 05] : $h(t, \tau) = 0, \forall t < \tau$. Chaque colonne i de $h(t, \tau)$ est la réponse à une impulsion de Dirac $\delta(t - \tau)$ appliquée à l'instant τ sur l'entrée u_i .

S'il existe un réel positif T tel que :

$$h(t + T, \tau + T) = h(t, \tau) \quad \forall t \geq \tau \quad (\text{I.6})$$

alors, le système est T -périodique. Cette représentation, utilisée par exemple dans les articles [COL 05, SAN 05, VAN 02] est généralement introduite pour définir la matrice de transfert harmonique présentée dans la section suivante.

I.3.2 Matrice de transfert harmonique

Un autre type de modèle, basé sur une approche fréquentielle, est souvent utilisé pour représenter les systèmes LTI : la matrice de transfert. La généralisation de cet outil pour représenter des systèmes variant dans le temps n'est pas aisée.

Dans le cas des systèmes périodiques, la propriété de périodicité de la réponse impulsionnelle (I.6) permet d'écrire sa décomposition en série de Fourier [SAN 05] :

$$h(t, \tau) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} h_q(t - \tau) e^{jq\omega_T t} \quad (\text{I.7})$$

avec $\omega_T = \frac{2\pi}{T}$. Les fonctions $h_q(\tau)$ sont appelées les réponses impulsionnelles harmoniques du système :

$$h_q(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T h(t, \tau) e^{-jq\omega_T t} dt \quad (\text{I.8})$$

En substituant cette expression dans (I.5), la réponse temporelle du système s'écrit :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^t \sum_{q=-\infty}^{+\infty} h_q(t - \tau) e^{jq\omega_T t} u(\tau) d\tau \\ &= \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^t h_q(t - \tau) e^{jq\omega_T(t-\tau)} u(\tau) e^{jq\omega_T \tau} d\tau \end{aligned} \quad (\text{I.9})$$

Il s'agit d'une série d'intégrales de convolution dont la transformée de Laplace s'écrit :

$$\begin{aligned} Y(s) &= \mathcal{L}[y(t)] \\ &= \mathcal{L} \left[\sum_{q=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^t h_q(t - \tau) e^{jq\omega_T(t-\tau)} u(\tau) e^{jq\omega_T \tau} d\tau \right] \\ &= \sum_{q=-\infty}^{+\infty} H_q(s - jq\omega_T) U(s - jq\omega_T) \end{aligned} \quad (\text{I.10})$$

où $Y(s)$, $H_q(s)$ et $U(s)$ désignent respectivement les transformées de Laplace de $y(t)$, $h_q(t)$ et $u(t)$.

En définissant les vecteurs de dimension infinie suivants :

$$\begin{aligned} \hat{U}(s) &= \left(\cdots \ U(s+2j\omega_T) \ U(s+j\omega_T) \ U(s) \ U(s-j\omega_T) \ U(s-2j\omega_T) \ \cdots \right)' \\ \hat{Y}(s) &= \left(\cdots \ Y(s+2j\omega_T) \ Y(s+j\omega_T) \ Y(s) \ Y(s-j\omega_T) \ Y(s-2j\omega_T) \ \cdots \right)' \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

il est possible d'écrire une relation de la forme :

$$\hat{Y}(s) = \hat{H}(s)\hat{U}(s) \quad (\text{I.12})$$

où $\hat{H}(s)$ est une matrice de dimension infinie appelée matrice de transfert harmonique :

$$\hat{H}(s) = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \cdots & H_0(s+j\omega_T) & H_1(s) & H_2(s-j\omega_T) & \cdots \\ \cdots & H_{-1}(s+j\omega_T) & H_0(s) & H_1(s-j\omega_T) & \cdots \\ \cdots & H_{-2}(s+j\omega_T) & H_{-1}(s) & H_0(s-j\omega_T) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \end{bmatrix} \quad (\text{I.13})$$

Cette représentation a été proposée pour la première fois par N. M. Wereley dans sa thèse [WER 91]. Il existe cependant d'autres représentations fréquentielles des systèmes linéaires périodiques. En particulier, nous pouvons citer la fonction de transfert paramétrique introduite par L. A. Zadeh dans [ZAD 50]. Il s'agit d'une fonction scalaire dépendant de deux variables : le temps et la fréquence. Une autre représentation est l'opérateur de transfert introduit par P. Colaneri [COL 00] qui est un opérateur de dimension infinie. Ces deux dernières représentations sont équivalentes à la fonction de transfert harmonique. Le lecteur intéressé pourra se référer à [SAN 05] où un historique des représentations fréquentielles des systèmes périodiques est proposé.

Si la connaissance des fonctions de transfert harmoniques $H_i(s)$ est un outil adapté pour caractériser le comportement fréquentiel des systèmes périodiques, la manipulation de matrices de dimension infinie limite l'intérêt de l'approche. Il est cependant possible d'effectuer une troncature lors de la décomposition en série de Fourier (I.7) de la réponse impulsionnelle, la matrice de transfert harmonique correspondante étant alors de dimensions finie. Les erreurs dues à cette troncature peuvent alors être évaluées au sens de la norme \mathcal{L}_2 comme proposé dans [SAN 05].

De par leur compacité d'écriture, les modèles d'états présentés dans la section suivante sont plus simples à manipuler.

I.3.3 Représentation d'état des systèmes périodiques

La représentation d'état d'un système dynamique est un modèle dynamique interne fondé sur le concept d'état tel qu'il est défini en Section I.2. Introduite par W.R. Hamilton en mécanique et H. Poincaré en thermodynamique puis généralisée par R. Kalman en 1960 [KAL 60a], cette représentation permet de décrire aussi bien les systèmes LTI, LTV ou

non linéaires. A partir de la Définition I.1, il est possible de postuler l'existence d'une fonction g telle que :

$$\begin{aligned} g : \quad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathcal{E} \times \mathcal{U} &\rightarrow \mathcal{E} \\ (t_0, t_1, x(t_0), u_{[t_0, t_1]}) &\rightarrow x(t_1) = g(t_0, t_1, x(t_0), u_{[t_0, t_1]}) \end{aligned}$$

avec $x(t_1)$ unique. \mathcal{E} est l'espace d'état et \mathcal{U} l'espace des fonctions d'entrée. De plus, il existe une fonction h définie par :

$$\begin{aligned} h : \quad \mathbb{R}^+ \times \mathcal{E} \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ (t_1, x(t_1), u(t_1)) &\rightarrow y(t_1) = h(t_1, x(t_1), u(t_1)) \end{aligned}$$

avec $y(t_1)$ unique.

La fonction g est causale et la fonction h n'a pas de mémoire. Elles vérifient les propriétés suivantes :

Propriétés I.1

1 - Propriété d'identité :

$$x(t_0) = g(t_0, t_0, x(t_0), u(t_0))$$

2 - Propriété de transition d'état : si $u(t) = v(t)$ pour $t \in [t_0, t_1]$, alors :

$$g(t_0, t_1, x(t_0), u_{[t_0, t_1]}) = g(t_0, t_1, x(t_0), v_{[t_0, t_1]})$$

3 - Propriété de semi-groupe : pour $t_0 < t_1 < t_2$:

$$\begin{aligned} x(t_2) &= g(t_0, t_2, x(t_0), u_{[t_0, t_2]}) \\ &= g(t_1, t_2, x(t_1), u_{[t_1, t_2]}) \\ &= g(t_1, t_2, g(t_0, t_1, x(t_0), u_{[t_0, t_1]}), u_{[t_1, t_2]}) \end{aligned}$$

Dans le cas des systèmes dynamiques linéaires à paramètres localisés et en temps continu, une représentation d'état est donnée par une équation différentielle ordinaire linéaire du premier ordre et une équation algébrique linéaire. Dans le cas T -périodique, la représentation d'état s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \quad (\text{I.14})$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de commande et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. Les matrices $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ et $D(t)$ apparaissant dans (I.14) sont des opérateurs linéaires T -périodiques :

$$A(t+T) = A(t), \quad B(t+T) = B(t), \quad C(t+T) = C(t), \quad D(t+T) = D(t), \quad \forall t \geq t_0 \quad (\text{I.15})$$

L'intégration de l'équation d'état (I.14), pour une condition initiale $(x(t_0) = x_0)$, permet d'écrire :

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (\text{I.16})$$

où $\Phi(t, \tau)$ est la matrice de transition d'état, solution de l'équation différentielle homogène à coefficients périodiques :

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}(t, \tau) &= A(t)\Phi(t, \tau) \quad \forall t > \tau \\ \Phi(\tau, \tau) &= \mathbb{1}_n\end{aligned}\tag{I.17}$$

Ceci permet d'écrire la relation entrées-sorties suivante :

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0 + C(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t)\tag{I.18}$$

Des équations de la forme (I.17) ont été étudiées par Gaston Floquet dès 1883 [FLO 83] puis par Aleksandr Lyapunov [LYA 92]. Ces travaux sont au coeur de ce qui est à présent connu sous le nom de *théorie de Floquet-Lyapunov*. Si, dans le cas général, il est difficile d'établir l'expression littérale de la solution, il est cependant possible de montrer [FLO 83] qu'elle possède un certain nombre de propriétés, en particulier :

$$\Phi(t + T, \tau + T) = \Phi(t, \tau)\tag{I.19}$$

Cette propriété permet de prouver que l'équation (I.18) traduit bien un comportement entrées-sorties périodique. Une autre propriété essentielle de la matrice de transition d'état sera présentée dans le chapitre II. Celle-ci permet de conclure sur la stabilité du système.

Outre sa simplicité d'écriture par rapport à la matrice de transfert harmonique, l'utilisation d'une représentation interne telle que la représentation d'état présente différents avantages. Elle permet :

- de considérer des conditions initiales non nulles et d'étudier ainsi le comportement du système autonome,
- d'étudier les variations de grandeurs internes non mesurables par l'intermédiaire des sorties,
- d'étudier la stabilité du système à l'aide de la théorie de Lyapunov qui est basée sur la notion d'état.

Pour ces différentes raisons, la représentation d'état sera privilégiée dans cette thèse.

I.4 Choix d'un cadre de travail en temps discret

I.4.1 Motivations

Les différents modèles à temps continu présentés dans la section précédente sont de dimension infinie :

- la matrice de transfert harmonique (I.13) est à coefficients constants mais de dimension infinie,
- les matrices de la représentation d'état (I.14) et la matrice de réponse impulsionnelle définie à la Section I.3.1 sont à coefficients variant dans le temps et peuvent donc prendre un nombre infini de valeurs.

Or les méthodes numériques utilisées dans cette thèse (voir Annexe A) nécessitent l'emploi de modèles de dimension finie. Des modèles de dimension finie peuvent être obtenus par échantillonnage des modèles à temps continu. Il s'agit d'une spécificité des systèmes périodiques qui n'est pas vraie dans le cas plus général des systèmes LTV non périodiques.

De plus, d'un point de vue pratique, cette étape d'échantillonnage n'est pas pénalisante puisque la commande est très souvent mise en oeuvre à l'aide d'un ordinateur. Le système est alors échantillonné et un modèle à temps discret peut toujours être associé au système continu.

I.4.2 Représentation d'état discrète

La représentation d'état d'un système linéaire N -périodique à temps discret s'écrit :

$$\begin{cases} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k \\ y_k &= C_k x_k + D_k u_k \end{cases} \quad (\text{I.20})$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u_k \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de commande et $y_k \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. Les matrices A_k , B_k , C_k et D_k apparaissant dans (I.20) sont N -périodiques :

$$A_{k+N} = A_k, \quad B_{k+N} = B_k, \quad C_{k+N} = C_k, \quad D_{k+N} = D_k, \quad \forall k \geq k_0 \quad (\text{I.21})$$

Un nombre fini de matrices suffit donc à décrire le comportement dynamique du système discret périodique.

La relation entrées-sorties associée à cette représentation d'état s'écrit :

$$y_k = C_k \sum_{l=k_0+1}^k \Phi_{k,l} B_{l-1} u_{l-1} + D_k u_k \quad (\text{I.22})$$

où $\Phi_{k,l}$ est la matrice de transition d'état :

$$\begin{aligned} \Phi_{k,l} &= A_{k-1} A_{k-2} \cdots A_l & \forall k > l \\ \Phi_{l,l} &= \mathbb{1}_n \end{aligned} \quad (\text{I.23})$$

Le système (I.20) peut être de nature discrète ou issu de l'échantillonnage d'un système à temps continu. Cet échantillonnage est nécessaire lorsque le système continu est commandé à l'aide d'un ordinateur numérique ne pouvant assimiler que des signaux se présentant sous forme de suites. L'échantillonnage fait intervenir essentiellement deux éléments. Le premier est un convertisseur analogique-numérique prenant des échantillons du signal de sortie $y(t)$ à divers instants. Ces instants d'échantillonnage sont notés $T_s(k)$. L'intervalle de temps entre deux échantillons, noté $\Delta T_s(k) = T_s(k+1) - T_s(k)$, est appelé période d'échantillonnage. Dans cette thèse, le temps de codage et les erreurs de quantification sont supposés négligeables : $y_k \equiv y(T_s(k))$. Le second élément est un convertisseur numérique-analogique bloquant les signaux numériques u_k générés par le ordinateur avec

la même période $\Delta T_s(k)$ que celle choisie pour l'échantillonnage. Ces deux étapes sont représentées sur la Figure I.2.

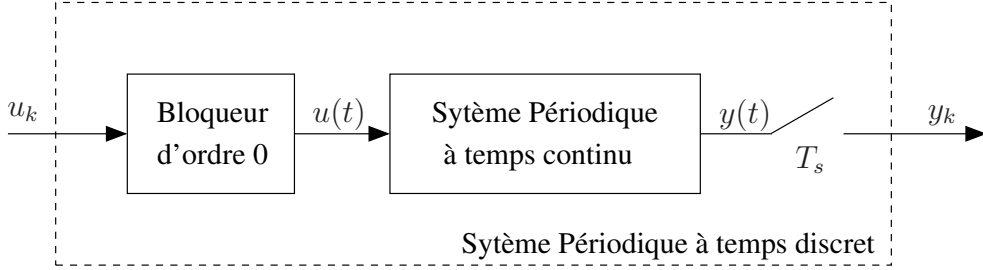


FIG. I.2 – Système échantillonné

L'intégration des équations d'état (I.14) entre deux instants d'échantillonnage $T_s(k)$ et $T_s(k+1)$ est donnée par (I.16) avec $t_0 = T_s(k)$ et $t = T_s(k+1)$:

$$\begin{cases} x(T_s(k+1)) = \Phi(T_s(k+1), T_s(k))x(T_s(k)) + \int_{T_s(k)}^{T_s(k+1)} \Phi(T_s(k+1), \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\ y(T_s(k)) = C(T_s(k))x(T_s(k)) + D(T_s(k))u(T_s(k+1)) \end{cases}$$

Puisque, du fait du bloqueur d'ordre 0, $u(t)$ est constant sur une période d'échantillonnage, la représentation d'état du système échantillonné est donnée par les matrices :

$$\begin{cases} A_k = \Phi(T_s(k+1), T_s(k)) \\ B_k = \int_{T_s(k)}^{T_s(k+1)} \Phi(T_s(k+1), \tau)B(\tau)d\tau \\ C_k = C(T_s(k)) \\ D_k = D(T_s(k)) \end{cases} \quad (\text{I.24})$$

Etant donné N le nombre d'échantillons relevés sur une période, si l'échantillonnage $T_s(k)$ vérifie la relation suivante :

$$T_s(k+N) - T_s(k) = T \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (\text{I.25})$$

alors le système échantillonné est N -périodique. En effet, d'après les relation (I.25) et (I.19), nous avons :

$$A_{k+N} = \Phi(T_s(k+N+1), T_s(k+N)) = \Phi(T_s(k+1)+T, T_s(k)+T) = \Phi(T_s(k+1), T_s(k)) = A_k$$

De même, nous obtenons $B_{k+N} = B_k$, $C_{k+N} = C_k$ et $D_{k+N} = D_k$.

I.4.3 Représentations LTI équivalentes

La représentation d'état discrète d'un système périodique étant de dimension finie, il est possible de construire des représentations LTI équivalentes à (I.20) d'un point

de vue entrées-sorties. Plus précisément, il s'agit d'associer au système périodique une représentation LTI équivalente.

Dans cette partie sont décrites les deux représentations à coefficients constants les plus utilisées dans la littérature : la représentation liftée et la représentation cyclique. D'autres représentations à coefficients constants existent. Le lecteur intéressé pourra se reporter à la référence [BIT 00] qui répertorie et compare l'ensemble de ces représentations.

1.4.3.1 La représentation liftée

Cette représentation fait apparaître l'évolution de l'état non plus entre deux instants discrets mais sur une période complète. Les vecteurs d'entrée et de sortie sont alors constitués de l'ensemble des valeurs prises par l'entrée et la sortie sur l'ensemble de la période. Cette représentation est probablement la plus classique. Introduite dans [KRA 57] pour les systèmes multiéchantillonnés puis dans [JUR 59] pour les systèmes périodiques, elle a souvent été utilisée depuis (dans des contextes variés tels que la définition des zéros périodiques [BOL 86], la commande optimale des systèmes périodiques [DAH 92] et l'analyse des systèmes d'atténuation de vibrations pour les hélicoptères [GAI 04]).

La représentation liftée du système (I.20) s'écrit :

$$\begin{cases} \bar{x}_{i+1,k_0} &= \mathcal{A}_{k_0}^l \bar{x}_{i,k_0} + \mathcal{B}_{k_0}^l \bar{u}_{i,k_0} \\ \bar{y}_{i,k_0} &= \mathcal{C}_{k_0}^l \bar{x}_{i,k_0} + \mathcal{D}_{k_0}^l \bar{u}_{i,k_0} \end{cases} \quad (\text{I.26})$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{x}_{i,k_0} &= x_{iN+k_0} \\ \bar{u}_{i,k_0} &= [u'_{iN+k_0} \quad u'_{iN+k_0+1} \quad \cdots \quad u'_{iN+k_0+N-1}]' \\ \bar{y}_{i,k_0} &= [y'_{iN+k_0} \quad y'_{iN+k_0+1} \quad \cdots \quad y'_{iN+k_0+N-1}]' \\ \mathcal{A}_{k_0}^l &= \Phi_{k_0+N,k_0} = A_{k_0+N-1} A_{k_0+N-2} \cdots A_{k_0} \\ \mathcal{B}_{k_0}^l &= [\Phi_{k_0+N,k_0+1} B_{k_0} \quad \Phi_{k_0+N,k_0+2} B_{k_0+1} \quad \cdots \quad B_{k_0+N-1}] \\ \mathcal{C}_{k_0}^l &= [C'_{k_0} \quad \Phi'_{k_0+1,k_0} C'_{k_0+1} \quad \cdots \quad \Phi'_{k_0+N-1,k_0} C'_{k_0+N-1}]' \\ \mathcal{D}_{k_0}^l &= \begin{bmatrix} D_{k_0} & 0 & \cdots & 0 \\ C_{k_0+1} B_{k_0} & D_{k_0+1} & & \vdots \\ C_{k_0+2} A_{k_0+1} B_{k_0} & C_{k_0+2} B_{k_0+1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ C_{k_0+N-1} \Phi_{k_0+N-1,k_0+1} B_{k_0} & C_{k_0+N-1} \Phi_{k_0+N-1,k_0+2} B_{k_0+1} & \cdots & D_{k_0+N-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La valeur de l'état de ce système n'étant mise à jour qu'à chaque période, la valeur de l'état à chaque instant n'est pas directement accessible. En effet, considérons le cas où l'ensemble de l'état est mesurable : $y_k = x_k$ ($C_k = \mathbf{1}$ et $D_k = 0 \forall k \in \mathbb{N}$). La sortie de la représentation liftée (pour $i = 0$ et $k_0 = 0$) vaut alors :

$$\bar{y}_0 = [x'_0 \quad x'_1 \quad \cdots \quad x'_{N-1}]'$$

L'ensemble des valeurs de l'état sur la période est donc accessible, mais seulement une fois la période terminée (par exemple, il n'est pas possible de connaître la valeur de x_1 avant l'instant N). Cette représentation liftée est donc moins riche que la représentation d'état du système périodique (I.20).

1.4.3.2 La représentation cyclique

Cette reformulation fait apparaître des vecteurs d'état, de commande et de sortie cycliques. Ces vecteurs cycliques, constitués de N sous-vecteurs, sont définis de telle sorte qu'à chaque instant un seul sous vecteur est non nul et que ce sous vecteur non nul se déplace de façon cyclique dans la colonne au cours d'une période. Cette représentation fut introduite dans [PAR 89] et [FLA 91], puis appliquée à différents problèmes tel que l'assignation de modèles [COL 97].

$$\begin{cases} \hat{x}_{i+1,k_0} &= \mathcal{A}_{k_0}^c \hat{x}_{i,k_0} + \mathcal{B}_{k_0}^c \hat{u}_{i,k_0} \\ \hat{y}_{i,k_0} &= \mathcal{C}_{k_0}^c \hat{x}_{i,k_0} + \mathcal{D}_{k_0}^c \hat{u}_{i,k_0} \end{cases} \quad (\text{I.27})$$

avec :

$$\hat{v}_{i,k_0} = \begin{pmatrix} \hat{v}_{i,k_0}^{(1)} \\ \vdots \\ \hat{v}_{i,k_0}^{(l)} \\ \vdots \\ \hat{v}_{i,k_0}^{(N)} \end{pmatrix}, \quad \hat{v}_{i,k_0}^{(l)} = \begin{cases} v_i & \text{si } i = k_0 + l - 1 + kN, \quad k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{I.28})$$

où v représente l'état x , l'entrée u ou la sortie y , et :

$$\mathcal{A}_{k_0}^c = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_{k_0+N-1} \\ A_{k_0} & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{k_0+N-2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_{k_0}^c = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & B_{k_0+N-1} \\ B_{k_0} & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & B_{k_0+N-2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C}_{k_0}^c = \begin{bmatrix} C_{k_0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_{k_0+1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & C_{k_0+N-1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}_{k_0}^c = \begin{bmatrix} D_{k_0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_{k_0+1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & D_{k_0+N-1} \end{bmatrix}$$

Contrairement à la reformulation liftée, la reformulation cyclique est aussi riche que la représentation d'état du système périodique (I.20). Pour le problème d'analyse de stabilité, la forme particulière du vecteur d'état (I.28) induit une structuration particulière des matrices de Lyapunov (ce point est discuté en Section II.2.3). De même, pour le problème de synthèse de loi de commande, celle-ci doit tenir compte de la structure particulière des vecteurs d'entrée et de sortie.

I.4.3.3 La transformation de Floquet

Lorsque seule la matrice dynamique est considérée, le système s'écrit :

$$x_{k+1} = A_k x_k \quad , \quad A_{k+N} = A_k \quad (I.29)$$

Il est alors possible, dans certains cas, de trouver un changement de base N -périodique inversible $\tilde{x}_k = S_k x_k$ tel que :

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A} \tilde{x}_k \quad (I.30)$$

où \tilde{A} est constant.

Théorème I.1 (Conditions d'existence de la transformation de Floquet) [VAN 94]

Le système (I.29) admet une transformation de Floquet $\tilde{x}_k = S_k x_k$, $S_{k+N} = S_k$, conduisant à un système invariant dans le temps de la forme (I.30) si et seulement si les conditions de rang suivantes sont vérifiées :

$$\text{rang}(\Phi_{k_0+k, k_0}) = r_k \text{ indépendant de } k \quad , \quad \forall k_0 \in \{1 \dots N\} \quad , \quad \forall k \in \{1 \dots n\} \quad (I.31)$$

où Φ est la matrice de transition d'état du système définie en (I.23) et n est l'ordre du système (I.29).

Dans le cas réversible, la transformation de Floquet est toujours possible puisque la condition de rang (I.31) est vérifiée. La matrice \tilde{A} et la suite N -périodique de matrices $\{S_k\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ peuvent alors être déterminées à l'aide des relations suivantes proposées dans l'article [VAN 94] :

$$\tilde{A} = (S_1 \Phi_{1+N, 1} S_1^{-1})^{\frac{1}{N}} \quad (I.32)$$

$$S_i = \tilde{A}^i S_1 \Phi_{i, 1}^{-1} \quad (I.33)$$

où S_1 est une matrice inversible choisie arbitrairement et Φ est la matrice de transition d'état du système : $\Phi_{k,l} = A_{k-1} A_{k-2} \dots A_l$.

Historiquement, ces représentations ont été introduites pour permettre d'appliquer aux systèmes périodiques les méthodes d'analyse et de synthèse développées dans le cadre LTI. Nous leur préférons des approches plus directes basées sur la représentation (I.20) pour les raisons suivantes :

- la représentation liftée est moins riche en information que la représentation périodique (la valeur de l'état par exemple n'est mise à jour qu'au bout d'une période),
- la représentation cyclique implique la prise en compte de la structure particulière des vecteurs du système,
- la transformation de Floquet ne s'applique pas dans tout les cas et ne s'écrit que pour le système autonome.

I.4.4 Matrice de réponse impulsionnelle et matrice de transfert harmonique dans le cas discret

Bien que la représentation d'état soit majoritairement utilisée dans cette thèse, différentes notions présentées par la suite font intervenir les matrices de réponse impulsionnelle et de transfert harmonique. Leur définition pour les modèles en temps discret est donc rappelée dans cette section (le détail des calculs est donné dans [ZHA 00] par exemple).

Soit une impulsion en temps discret (fonction de Kronecker) :

$$\delta_k : \begin{cases} \delta_k = 1 & \text{si } k = 0 \\ \delta_k = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{I.34})$$

La matrice de réponse impulsionnelle du système est notée $h_{k,l}$. Chaque colonne i de $h_{k,l}$ est la réponse à une impulsion δ_{k-l} appliquée à l'instant l sur la i -ème entrée.

La réponse du système peut s'écrire à partir de la réponse impulsionnelle de la manière suivante :

$$y_k = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h_{k,l} u_l = \sum_{l=0}^k h_{k,l} u_l \quad (\text{I.35})$$

En définissant les vecteurs :

$$\begin{aligned} \hat{U}(z) &= \begin{pmatrix} U(z) & U(ze^{j\omega_N}) & U(ze^{2j\omega_N}) & \dots & U(ze^{j(N-1)\omega_N}) \end{pmatrix}' \\ \hat{Y}(z) &= \begin{pmatrix} Y(z) & Y(ze^{j\omega_N}) & Y(ze^{2j\omega_N}) & \dots & Y(ze^{j(N-1)\omega_N}) \end{pmatrix}' \end{aligned} \quad (\text{I.36})$$

où :

$$\omega_N = \frac{2\pi}{N} \quad (\text{I.37})$$

il est possible d'écrire une relation de la forme :

$$\hat{Y}(z) = \hat{H}(z) \hat{U}(z). \quad (\text{I.38})$$

$\hat{H}(z)$ est la matrice de transfert harmonique discrète :

$$\hat{H}(z) = \begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(ze^{j\omega_N}) & \dots & H_0(ze^{j(N-1)\omega_N}) \\ H_1(z) & H_1(ze^{j\omega_N}) & \dots & H_1(ze^{j(N-1)\omega_N}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{N-1}(z) & H_{N-1}(ze^{j\omega_N}) & \dots & H_{N-1}(ze^{j(N-1)\omega_N}) \end{bmatrix} \quad (\text{I.39})$$

où $H_q(z)$ est la transformée en z de la réponse impulsionnelle harmonique :

$$H_q(z) = \mathcal{Z} \left[\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} h_{k+l,l} e^{-jq\omega_N l} \right]$$

I.5 Erreurs et approximations dans la modélisation : modèles incertains

I.5.1 Principe

Quelle que soit la qualité du travail de modélisation, il ne faut pas perdre de vue que le modèle ne peut rendre compte parfaitement du comportement dynamique du système. En effet, un certain nombre de choix, d'approximations et d'erreurs interviennent inévitablement lors de l'établissement de celui-ci. Linéarisation, discrétisation, dynamiques négligées, erreurs d'identification sont autant de sources d'incertitude sur la qualité du modèle obtenu.

Une manière de prendre en compte ces incertitudes est de considérer non plus un modèle unique mais un ensemble de modèles, le comportement du système réel étant supposé être retranscrit par l'un d'eux. Cet ensemble de modèles est appelé modèle incertain.

Un modèle incertain est décrit par un modèle nominal affecté par un opérateur d'incertitude noté Δ . La valeur de Δ n'est pas précisément connue, mais appartient à un domaine de valeurs admissibles noté \mathcal{A} . Dans le cas des systèmes LTV périodiques, le modèle d'état incertain peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_k(\Delta_k) & B_k(\Delta_k) \\ C_k(\Delta_k) & D_k(\Delta_k) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ u_k \end{pmatrix} = M_k(\Delta_k) \begin{pmatrix} x_k \\ u_k \end{pmatrix} \quad (\text{I.40})$$

où $M_k(\Delta_k)$ est la matrice du modèle appartenant à chaque instant à un certain domaine noté \mathcal{M}_k . La valeur de $M_k(\Delta_k)$ pour Δ_k fixé est appelée réalisation du modèle et \mathcal{M}_k est appelé **domaine de réalisabilité** de M_k . Les suites de domaines $\{\mathcal{M}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ étudiées ici sont N -périodiques :

$$M_k(\Delta_k) \in \mathcal{M}_k \quad \mathcal{M}_{k+N} = \mathcal{M}_k \quad (\text{I.41})$$

Remarque *L'objectif d'un modèle incertain n'est pas de retranscrire plus fidèlement le comportement entrées-sorties du système qu'un modèle certain. Son objectif est de rendre compte du comportement du système mais aussi de ses propres limitations.*

Généralement, deux types d'incertitude sont distinguées selon leur origine :

- les incertitudes paramétriques correspondant à une méconnaissance des valeurs numériques du modèle,
- les incertitudes non paramétriques résultant de dynamiques négligées.

Dans ce mémoire, seules les incertitudes de type paramétrique sont considérées. Le lecteur intéressé pourra se reporter à l'ouvrage [ARZ 02b] qui présente différents types d'incertitudes paramétriques pouvant affecter les systèmes LTI.

D'autres éléments de classification des incertitudes peuvent être mis en avant, selon la nature de l'incertitude Δ : réelle ou complexe, structurée ou non structurée. Enfin, Δ peut varier ou non dans le temps et trois cas peuvent alors être distingués :

- l'incertitude ne varie pas ou elle varie lentement vis-à-vis de la dynamique du système. Dans ce cas elle sera supposée constante et notée : $\Delta_k = \Delta$.

- l'incertitude peut varier infiniment vite (sa dérivée n'est pas bornée).
- l'incertitude peut varier mais sa vitesse de variation est bornée.

Deux classes d'incertitudes paramétriques réelles sont décrites dans ce mémoire : les incertitudes bornées en norme N -périodiques et les incertitudes polytopiques N -périodiques.

I.5.2 Incertitudes bornées en norme N -périodiques

Dans le cas d'une incertitude bornée en norme, la matrice du modèle $M_k(\Delta_k)$ peut s'écrire :

$$M_k(\Delta_k) = M_k + \Delta M_k \quad \Delta M_k = D_k \Delta_k E_k \quad (\text{I.42})$$

Pour chaque k , Δ_k appartient au domaine suivant :

$$\Delta_k = \left\{ \Delta_k \in \mathbb{R}^{r \times l} \quad : \quad \|\Delta_k\|_2 \leq \alpha_k \right\} \quad \alpha_{k+N} = \alpha_k$$

L'incertitude Δ_k est donc une incertitude non structurée variant dans le temps. Δ_k n'est pas nécessairement périodique. Par contre, elle doit appartenir à chaque instant à un domaine incertain périodique : $\Delta_{k+N} = \Delta_k$.

A chaque instant k , le domaine de réalisabilité \mathcal{M}_k de $M_k(\Delta_k)$ est donc un ellipsoïde de matrices (Annexe C) dont le centre est la matrice nominale M_k . La séquence d'ellipsoïdes $\{\mathcal{M}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est N -périodique.

I.5.3 Incertitudes polytopiques N -périodiques

Dans ce cas, la matrice du modèle $M_k(\Delta)$ s'écrit :

$$M_k(\Delta) = \sum_{i=1}^L \xi_i M_k^{[i]} \quad : \quad \xi \in \Xi \quad (\text{I.43})$$

avec :

$$\Xi = \left\{ \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_L \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^L \quad : \quad \sum_{i=1}^L \xi_i = 1, \quad 0 \leq \xi_i \leq 1 \quad \forall i = 1 \dots L \right\} \quad (\text{I.44})$$

où les scalaires ξ_i sont les coordonnées barycentriques de la matrice $M_k(\Delta)$ dans le domaine :

$$\mathcal{M}_k = \text{co} \left\{ M_k^{[1]}, \dots, M_k^{[L]} \right\} \quad , \quad M_{k+N}^{[i]} = M_k^{[i]} \quad , \quad \forall i \in \{1, \dots, L\} \quad , \quad \forall k \geq 0 \quad (\text{I.45})$$

A chaque instant k , le domaine de réalisabilité \mathcal{M}_k de $M_k(\Delta)$ est donc un polytope dont l'enveloppe convexe est décrite par L sommets $M_k^{[1]}, \dots, M_k^{[L]}$. D'après (I.43-I.44), la séquence de polytopes $\{\mathcal{M}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est N -périodique.

Ce type de modèle incertain résulte généralement de constantes mal connues dans les équations physiques permettant d'établir le modèle (dans ce cas, le modèle polytopique est établi à partir de bornes sur les paramètres) ou d'identifications à des points de fonctionnement différents (dans ce cas, le modèle polytopique est obtenu sans faire apparaître explicitement les paramètres).

Remarque

Il ne faut pas confondre la nature, périodique ou non, du domaine de réalisabilité et celle de l'incertitude. En effet, une incertitude paramétrique affine constante donne lieu à un domaine de réalisabilité variant dans le temps (périodique) pour la matrice du système.

I.6 Conclusion

Ce chapitre a présenté différents types de modèles capables de rendre compte du comportement dynamique des systèmes linéaires périodiques.

Etant donné les problèmes d'analyse et de synthèse que nous voulons résoudre par la suite et les méthodes numériques que nous souhaitons employer, notre choix s'est porté sur la représentation d'état à temps discret. Parmi les différents types d'incertitudes pouvant affecter ce type de modèles, nous ne considérons dans cette thèse que les incertitudes paramétriques réelles et invariantes dans le temps.

Les chapitres suivants proposent donc différentes méthodes permettant d'un part d'analyser le comportement dynamique de ces modèles et d'autre part de modifier ce comportement afin d'atteindre des objectifs donnés à l'aide de correcteurs.

L'ensemble de la démarche adoptée dans cette thèse est récapitulée dans la Figure I.3.

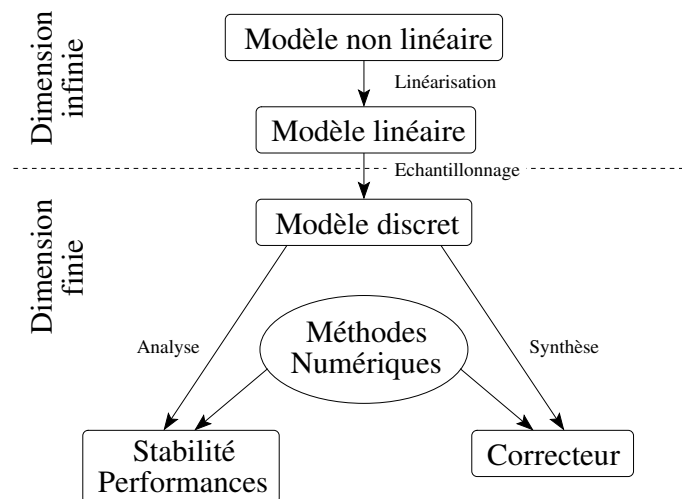


FIG. I.3 – Méthodologie adoptée

Chapitre II

Analyse de stabilité et de performances

Sommaire

II.1	Introduction	32
II.2	Stabilité des modèles discrets périodiques	33
II.2.1	La stabilité au sens de Lyapunov	33
II.2.2	Les multiplieurs caractéristiques	35
II.2.3	La seconde méthode de Lyapunov	38
II.3	Performances des systèmes discrets périodiques	43
II.3.1	Norme \mathcal{H}_∞ des modèles discrets périodiques	44
II.3.2	Norme \mathcal{H}_2 des modèles discrets périodiques	46
II.4	Analyse robuste en stabilité et performances	50
II.4.1	Analyse de la stabilité robuste	50
II.4.2	Exemple numérique	54
II.4.3	Analyse en performances robustes	56
II.4.4	Exemple Numérique	59
II.5	Conclusion	61

II.1 Introduction

Initialement défini par John Doyle en 1983 [DOY 83], le modèle standard représenté sur la Figure II.1 et élaboré dans le cadre de la théorie de la commande robuste a permis de définir un paradigme formel précis pour l'analyse et la synthèse des systèmes de commande à contre-réaction.

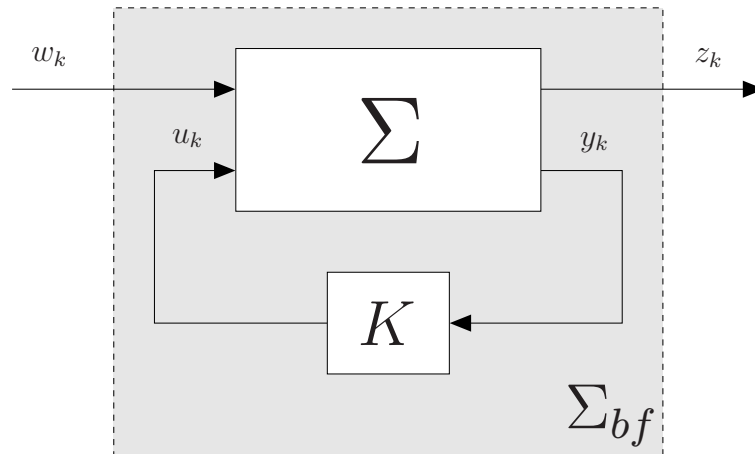


FIG. II.1 – Modèle standard pour l'analyse des systèmes de commande à contre-réaction

Le modèle standard propose ainsi de clairement séparer les signaux exogènes d'entrée liés aux perturbations $w_k \in \mathbb{R}^{m_w}$ et les signaux de commande $u_k \in \mathbb{R}^m$. De même, les signaux de sortie sont séparés en signaux de sortie mesurés sur le système $y_k \in \mathbb{R}^p$ et signaux contrôlés $z_k \in \mathbb{R}^{p_z}$.

Remarque

Pour ne pas alourdir l'exposé, les dimensions des vecteurs d'entrée et de sortie sont supposées constantes. Le cas des systèmes dont les dimensions varient dans le temps (comme les systèmes multiéchantillonnés) peut néanmoins être traité à l'aide des méthodes présentées dans ce chapitre.

Le transfert ainsi défini entre w_k et z_k doit permettre d'analyser les performances du système de commande en termes de norme système \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ par exemple. La définition mathématique de ces normes, ainsi que leur sens physique, sont décrits dans la suite de ce chapitre.

L'étude des caractéristiques du système bouclé Σ_{bf} pour un correcteur K donné porte le nom d'analyse. Celle-ci peut porter sur la stabilité, propriété fondamentale du système bouclé, ou sur différents types de performances (placement de pôles dans des régions données du plan complexe, atténuation \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ ...).

Si le modèle du système Σ ou du correcteur K sont affectés par des incertitudes Δ , on parle alors d'analyse robuste. Il s'agit donc de garantir les propriétés du système bouclé quelle que soit la valeur des incertitudes Δ appartenant à un certain domaine Δ .

Le but de ce chapitre est de présenter différentes conditions d'analyse permettant d'évaluer la qualité des correcteurs dans le cadre des systèmes périodiques à temps discret.

Ces résultats servent également de base au développement des méthodes de synthèse présentées au chapitre suivant.

Dans les deux sections suivantes sont traités les problèmes d'analyse de stabilité (Section II.2) et de performances (Section II.3) du système nominal. Le problème plus complexe d'analyse robuste est traité en Section II.4.

II.2 Stabilité des modèles discrets périodiques

La notion de stabilité est fondamentale dans le développement des systèmes de commande et particulièrement pour les architectures de commande à contre-réaction comme nous le verrons dans le Chapitre III. En effet, en l'absence de cette propriété, aucun système n'est utilisable en pratique.

Dans le cas général de l'analyse d'un système non linéaire variant dans le temps, le concept de stabilité est complexe et sa définition n'est pas univoque. Celle-ci varie en premier lieu suivant que l'on se place dans une perspective entrées-sorties [DES 75] ou que l'on souhaite utiliser les outils de la théorie de Lyapunov [LYA 92]. Dans ce dernier cadre de travail que nous privilégions dans ce mémoire, il est encore possible de s'intéresser suivant les cas à différents types de stabilité [NAR 73].

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la stabilité interne (ou stabilité au sens de Lyapunov) des modèles appartenant à la classe des modèles LTV pour lesquels quelques précautions doivent être prises. La notion de stabilité au sens de Lyapunov, intimement liée à celle d'état et de trajectoire d'état est décrite en Section II.2.1 dans un cas général pour être ensuite spécifiquement définie pour la classe particulière étudiée ici. Différents outils permettant d'attester la stabilité d'un système donné sont ensuite présentés en Section II.2.2 et II.2.3.

II.2.1 La stabilité au sens de Lyapunov

La stabilité au sens de Lyapunov s'intéresse à la convergence de l'état du système vers des points (ou états) d'équilibre. Par définition, un état d'équilibre est un état que le système peut occuper indéfiniment en l'absence de modification de ses entrées. L'analyse de stabilité au sens de Lyapunov consiste en l'étude des trajectoires du système pour un état initial proche d'un état d'équilibre.

Considérons le cas général d'un système variant dans le temps dont la représentation d'état est :

$$\tilde{x}_{k+1} = f_k(\tilde{x}_k) \quad (\text{II.1})$$

Définition II.1 (Point d'équilibre) [NAR 73]

Un point \tilde{x}^* de l'espace d'état est un point d'équilibre (ou état d'équilibre) du système (II.1) si :

$$\tilde{x}^* = f_k(\tilde{x}^*) \quad \forall k \geq 0 \quad (\text{II.2})$$

Par la suite, il est supposé que le point d'équilibre est unique et localisé à l'origine de l'espace d'état : $\tilde{x}^* = 0$. Cette dernière hypothèse n'est pas restrictive puisque le point d'équilibre peut toujours être ramené à l'origine par translation.

Le point d'équilibre $\tilde{x}^* = 0$ est simplement stable si, pour une condition initiale \tilde{x}_{k_0} suffisamment proche de \tilde{x}^* , la trajectoire d'état $\tilde{x}_k(\tilde{x}_{k_0}, k_0)$ peut être gardée arbitrairement proche de \tilde{x}^* .

Définition II.2 (Stabilité simple) [NAR 73]

Le point d'équilibre $\tilde{x}^* = 0$ du système (II.1) est simplement stable si pour tout réel $\epsilon > 0$ et pour tout k_0 , il existe un réel $\eta(\epsilon, k_0) > 0$ tel que :

$$\|\tilde{x}_{k_0}\| < \eta \Rightarrow \|\tilde{x}_k(\tilde{x}_{k_0}, k_0)\| < \epsilon \quad \forall k \geq k_0 \quad (\text{II.3})$$

Le point d'équilibre $\tilde{x}^* = 0$ est asymptotiquement stable s'il est simplement stable et que toute trajectoire d'état issue d'un voisinage de \tilde{x}^* converge asymptotiquement vers \tilde{x}^* .

Définition II.3 (Stabilité asymptotique) [NAR 73]

Le point d'équilibre $\tilde{x}^* = 0$ du système est asymptotiquement stable s'il est simplement stable et s'il existe un réel $\alpha(k_0) > 0$ tel que :

$$\|\tilde{x}_{k_0}\| < \alpha \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{x}_k(\tilde{x}_{k_0}, k_0) = 0 \quad (\text{II.4})$$

Le voisinage $\|\tilde{x}_{k_0}\| < \alpha$ est appelé région de stabilité. Ainsi, la stabilité simple est aussi appelée stabilité locale. Si par contre la propriété précédente est vérifiée quel que soit \tilde{x}_{k_0} alors la stabilité est dite globale.

Définition II.4 (Stabilité asymptotique globale) [PAR 81]

Le point d'équilibre $\tilde{x}^* = 0$ est globalement asymptotiquement stable si la propriété de stabilité asymptotique est vérifiée pour tout \tilde{x}_{k_0} .

Les définitions précédentes caractérisent la stabilité d'un point d'équilibre. Or un certain nombre de modèles périodiques résultent de l'étude de systèmes autour d'une trajectoire de référence et non d'un point d'équilibre (voir les nombreux exemples cités dans [MON 04]). Les définitions précédentes peuvent cependant être étendues à l'étude de la stabilité d'une trajectoire de référence. En effet, il est montré dans [NAR 73] que l'étude de la stabilité autour d'une trajectoire de référence peut toujours être reformulée comme l'étude de la stabilité du point d'équilibre 0. Cette preuve est rappelée ici.

Preuve

Toute trajectoire d'état vérifiant (II.1) peut être choisie comme trajectoire de référence. Considérons une trajectoire de référence \tilde{x}_k^* solution de (II.1) pour une condition initiale $\tilde{x}_{k_0}^*$. Soit \tilde{x}_k une autre trajectoire d'état solution de (II.1) pour une condition initiale \tilde{x}_{k_0} proche de $\tilde{x}_{k_0}^*$ dans le sens $\|\tilde{x}_{k_0} - \tilde{x}_{k_0}^*\| \leq \mu$. Si l'on étudie la différence $\epsilon_k = \tilde{x}_k - \tilde{x}_k^*$, alors ϵ_k satisfait l'équation différentielle :

$$\epsilon_{k+1} = f_k(\tilde{x}_k + \epsilon_k) - f_k(\tilde{x}_k) = g_k(\epsilon_k) \quad (\text{II.5})$$

Puisque $g_k(0) = 0$, la solution $\epsilon_k = 0$ est un point d'équilibre pour le système (II.5). Ainsi, le comportement du système (II.1) au voisinage de la trajectoire \tilde{x}_k^* correspond au comportement du système (II.5) au voisinage du point d'équilibre 0. Le problème général de l'étude de la stabilité autour d'une trajectoire de référence peut donc toujours être reformulé comme l'étude de la stabilité autour du point d'équilibre 0 d'un système particulier. ■

Dans la suite de ce mémoire, les systèmes étudiés sont issus d'une linéarisation autour d'une trajectoire de référence \tilde{x}_k^* . L'équation d'évolution d'état au voisinage de cette trajectoire peut être approximée par son développement de Taylor au premier ordre :

$$\tilde{x}_{k+1} = f_k(\tilde{x}_k) \simeq f_k(\tilde{x}_k^*) + \left. \frac{\partial f_k(\tilde{x}_k)}{\partial \tilde{x}_k} \right|_{\tilde{x}_k = \tilde{x}_k^*} (\tilde{x}_k - \tilde{x}_k^*) \quad (\text{II.6})$$

En posant $x_k = \tilde{x}_k - \tilde{x}_k^*$, l'équation précédente s'écrit :

$$x_{k+1} = A_k x_k \quad (\text{II.7})$$

où A_k est la matrice Jacobienne de f_k évaluée en $\tilde{x}_k = \tilde{x}_k^*$.

Le point d'équilibre du système linéarisé sera donc considéré comme unique et égal à l'origine : $x_e = 0$. D'après la première méthode de Lyapunov [VID 78], si le point d'équilibre $x_e = 0$ du système linéarisé est asymptotiquement stable, alors il s'agit également d'un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système non linéaire.

Remarque

Pour que la linéarisation soit valide et pour que la première méthode de Lyapunov puisse être appliquée, certaines précautions doivent être prises. En particulier, $f_k(\tilde{x}_k)$ doit vérifier différentes propriétés présentées dans [DES 75].

Par principe d'homothétie des systèmes linéaires, la stabilité du système (II.7) est toujours globale. Ainsi, le terme *global* sera éladé par simplicité. De plus, par abus de langage, un système linéaire sera dit stable lorsque le point d'équilibre $x_e = 0$ est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable car nous recherchons avant tout à caractériser des systèmes convergeant vers ce point d'équilibre.

Le concept de stabilité au sens de Lyapunov étant défini, il s'agit à présent de formuler des critères permettant de conclure sur la stabilité ou l'instabilité du système linéaire périodique certain :

$$x_{k+1} = A_k x_k \quad A_{k+N} = A_k \quad (\text{II.8})$$

II.2.2 Les multipliers caractéristiques

Dans le cas des systèmes LTI certains à temps discret, la stabilité du système peut être caractérisée par la localisation des pôles (valeurs propres de la matrice dynamique A) dans le plan complexe. Si l'ensemble des pôles appartient au disque unité ouvert alors le système est stable asymptotiquement.

Dans le cas des systèmes périodiques, un résultat similaire a été établi dans le cadre de la théorie de Floquet-Lyapunov [FLO 83, LYA 92]. Ce résultat repose sur une propriété particulière de la matrice de transition d'état $\Phi_{k,l}$.

La matrice de transition d'état entre un instant k et un instant $k + N$, notée Ψ_k , est appelée matrice monodromique du système à l'instant k .

Définition II.5 (Matrice monodromique)

La valeur de la matrice de transition d'état du système (II.8) après une période est appelée matrice monodromique :

$$\Psi_k = \Phi_{k+N,k} = A_{k+N-1}A_{k+N-2} \cdots A_k \quad (\text{II.9})$$

Les valeurs propres de la matrice monodromique Ψ_k portent le nom de multipliers caractéristiques du système et sont notés Λ_k .

Définition II.6 (Multipliers caractéristiques) [BRO 70]

Les multipliers caractéristiques (également connus sous le nom de multipliers de Floquet, multipliers de Poincaré ou racines caractéristiques) sont les valeurs propres de la matrices monodromique :

$$\Lambda_k = \lambda(\Psi_k) \quad (\text{II.10})$$

Les multipliers caractéristiques sont indépendants de l'instant k où la matrice monodromique est évaluée et peuvent être comparés aux pôles d'un système LTI. Ainsi, un système discret périodique est stable asymptotiquement si et seulement si ses multipliers caractéristiques appartiennent au disque unité ouvert.

Théorème II.1 (Stabilité et multipliers caractéristiques) [BRO 70]

Les multipliers caractéristiques sont uniques et indépendants de l'instant k :

$$\Lambda_k = \Lambda \quad \forall k \geq 0 \quad (\text{II.11})$$

De plus, le système périodique (II.8) est stable asymptotiquement si et seulement si tous ses multipliers caractéristiques appartiennent au disque unité ouvert :

$$\Lambda \subset \mathcal{D}(0, 1) \quad (\text{II.12})$$

Dans le cas général, la stabilité du système ne peut donc être déduite de la stabilité des matrices A_k . En particulier, il est possible que toutes les matrices A_k soient stables mais que le système périodique soit instable.

Exemple

Considérons le système 2-périodique suivant :

$$x_{k+1} = A_k x_k \quad , \quad A_{k+2} = A_k$$

avec :

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les matrices A_0 et A_1 sont stables :

$$\lambda(A_0) = \{0.5, 0.5\} \quad \lambda(A_1) = \{0.5, 0\}$$

Calculons les valeurs de la matrice de transition d'état du système sur une période à partir d'un instant initial $k = 0$ puis $k = 1$:

$$\Psi_0 = A_1 A_0 = \begin{bmatrix} 2.25 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Psi_1 = A_0 A_1 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Les matrices Ψ_0 et Ψ_1 sont les matrices monodromiques du système. Leurs valeurs propres sont identiques et constituent les multipliers caractéristiques du système :

$$\Lambda = \lambda(\Psi_0) = \lambda(\Psi_1) = \{2.25, 0\}$$

Le système 2-périodique est donc instable, comme illustré sur la Figure II.2 représentant l'évolution de l'état pour des conditions initiales non nulles : $x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}'$.

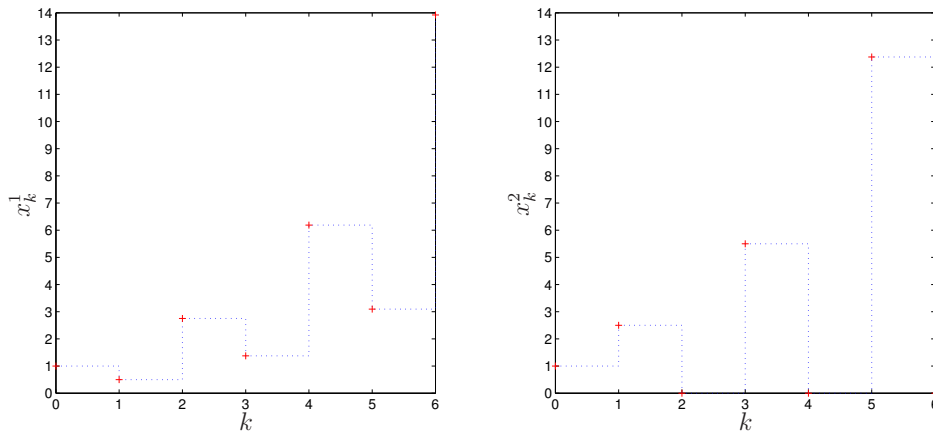


FIG. II.2 – Evolution de l'état pour une condition initiale non nulle

Remarque

Dans le premier chapitre (Section I.4.3) ont été introduites différentes représentations à coefficients constants. D'après le Théorème II.1, le système périodique et sa représentation liftée sont équivalents du point de vue de leur stabilité. En effet, la matrice dynamique du système lifté est la matrice monodromique du système périodique.

De même, le système périodique est stable si et seulement si sa représentation cyclique (I.27) est stable. En effet, du fait de la structure particulière de la matrice $\mathcal{A}_{k_0}^c$, ses valeurs propres sont les racines N -ièmes des multipliers caractéristiques du système périodique :

$$\det(\lambda \mathbb{1}_{nN} - \mathcal{A}_{k_0}^c) = \det(\lambda^N \mathbb{1}_n - \Psi_{k_0}). \quad (\text{II.13})$$

Preuve

Soit $v = (v'_1 \ \cdots \ v'_N)'$ le vecteur propre associé à la valeur propre λ de $\mathcal{A}_{k_0}^c$. Alors, par définition, $\mathcal{A}_{k_0}^c v = \lambda v$, soit :

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_{k_0+N-1} \\ A_{k_0} & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{k_0+N-2} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N-1} \\ v_N \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N-1} \\ v_N \end{pmatrix}$$

En développant, le système d'équations suivant est obtenu :

$$\begin{cases} \lambda v_1 = A_{k_0+N-1} v_N \\ \lambda v_2 = A_{k_0} v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_N = A_{k_0+N-2} v_{N-1} \end{cases}$$

Par remplacements successifs, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \lambda v_1 &= A_{k_0+N-1} v_N \\ \lambda^2 v_1 &= A_{k_0+N-1} \lambda v_N = A_{k_0+N-1} A_{k_0+N-2} v_{N-1} \\ &\vdots \\ \lambda^N v_1 &= A_{k_0+N-1} A_{k_0+N-2} \cdots A_{k_0} v_1 = \Psi_{k_0} v_1 \end{aligned}$$

v_1 est donc le vecteur propre de la matrice monodromique Ψ_{k_0} associé à la valeur propre λ^N . ■

Ainsi, les valeurs propres de $\mathcal{A}_{k_0}^c$ appartiennent donc au disque unité si et seulement si les multipliers caractéristiques du système périodique appartiennent au disque unité.

Bien qu'intéressante dans le cas certain, l'étude de la stabilité à l'aide des multipliers caractéristiques montre ses limitations dans le cas incertain. La méthode de Lyapunov présentée dans la section suivante se révèle plus adaptée au problème d'analyse de stabilité robuste.

II.2.3 La seconde méthode de Lyapunov

Partant de l'étude des systèmes mécaniques, Lyapunov développa une théorie mathématique [LYA 92] permettant de déterminer la stabilité d'un point d'équilibre sans pour autant devoir intégrer les équations différentielles associées au système. Cette méthode est basée sur la constatation intuitive suivante : si l'énergie du système se dissipe au cours du temps, alors le système tend vers un état d'équilibre.

Considérons le système $x_{k+1} = f_k(x_k)$ supposé avoir un état d'équilibre unique $x_e = 0$.

Théorème II.2 (Seconde méthode de Lyapunov)

L'état d'équilibre $x_e = 0$ est globalement asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une fonction $V_k(x_k)$ à valeurs réelles telle que :

$$V_k(0) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (\text{II.14})$$

$$V_k(x_k) > 0, \quad \forall x_k \neq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (\text{II.15})$$

$$\lim_{\|x_k\| \rightarrow \infty} V_k(x_k) = \infty \quad (\text{II.16})$$

$$V_{k+1}(x_{k+1}) - V_k(x_k) < 0, \quad \forall x_k \neq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (\text{II.17})$$

Une fonction vérifiant les conditions (II.14-II.16) est appelée **fonction candidate de Lyapunov**. Si elle vérifie également la condition (II.17), alors il s'agit d'une **fonction de Lyapunov** prouvant la stabilité asymptotique globale du système.

Sauf cas particuliers (modèles LTI par exemple), imposer une classe particulière de fonctions de Lyapunov conduit à n'obtenir qu'une condition suffisante en lieu et place de la condition nécessaire et suffisante du Théorème II.2.

Dans le cas des systèmes linéaires périodiques, l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique périodique est une condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique. Ce résultat fondamental pour l'analyse des systèmes périodiques est énoncé dans le lemme suivant.

Lemme II.3 (Lemme de Lyapunov périodique) [BOL 88]

Le système N -périodique (II.8) est stable asymptotiquement si et seulement s'il existe une suite N -périodique de matrices définies positives $\{P_k \in \mathcal{S}^{n^+}\}_{k \in \{1 \dots N\}}$:

$$P_{k+N} = P_k > \mathbb{0}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (\text{II.18})$$

telle que la fonction candidate de Lyapunov :

$$V_k(x_k) = x_k' P_k x_k \quad (\text{II.19})$$

vérifie (II.17).

Dans le cas des systèmes LTV, le choix d'une fonction de Lyapunov quadratique conduit à une condition nécessaire et suffisante de stabilité. Une démonstration de ce résultat peut être trouvée dans la référence [KAL 60b]. Ce choix d'une fonction de Lyapunov $V_k(x_k) = x_k' P_k x_k$ est donc non pessimiste.

L'équation de Lyapunov associée à ce choix de fonction candidate est étudiée dans [BOL 88]. Il est démontré que le système est stable si et seulement si la solution associée à l'équation de Lyapunov périodique est unique et N -périodique. $P_{k+N} = P_k$ est donc non pessimiste.

Remarque

D'après le lemme précédent, l'analyse de stabilité de la représentation cyclique (I.27) passe donc par la recherche d'une fonction de Lyapunov $\mathcal{V}^c(\hat{x})$ bloc diagonale. Tous les résultats suivants peuvent ainsi être réinterprétés pour les représentations cycliques à l'aide de matrices de Lyapunov structurées (diagonales).

Dans le cas d'une fonction candidate de Lyapunov de la forme (II.18-II.19), la condition de stabilité (II.17) peut s'écrire sous forme d'une inégalité matricielle linéaire (\mathcal{LMI}) de la manière suivante :

Lemme II.4 (Lemme de Lyapunov périodique - Formulation \mathcal{LMI})

Le système N -périodique (II.8) est stable si et seulement s'il existe N matrices \mathbf{P}_k , $\{\mathbf{P}_k \in \mathcal{S}^{n+}\}_{k \in \{1 \dots N\}}$, telles que :

$$A'_k \mathbf{P}_{k+1} A_k - \mathbf{P}_k < 0 \quad , \quad \forall k \in \{1 \dots N\} \quad (\text{II.20})$$

$$\mathbf{P}_{N+1} = \mathbf{P}_1 \quad (\text{II.21})$$

Preuve de suffisance

Considérons le système N -périodique autonome :

$$x_{k+1} = A_k x_k \quad , \quad A_{k+N} = A_k \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (\text{II.22})$$

et une fonction candidate de Lyapunov périodique quadratique de la forme (II.18-II.19).

D'après le lemme de Lyapunov périodique II.3, le système est stable si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$V_{k+1}(x_{k+1}) - V_k(x_k) = x'_{k+1} P_{k+1} x_{k+1} - x'_k P_k x_k < 0$$

En remplaçant x_{k+1} par son expression (II.22), on obtient, $\forall k \in \mathbb{N}$ et $\forall x_k \in \mathbb{R}^n \neq 0$:

$$x'_k A'_k P_{k+1} A_k x_k - x'_k P_k x_k = x'_k (A'_k P_{k+1} A_k - P_k) x_k < 0$$

Ceci est équivalent à :

$$A'_k P_{k+1} A_k - P_k < 0$$

pour tout $k \geq 0$. Du fait de la périodicité des matrices A_k et P_k , il est nécessaire et suffisant de tester les conditions précédentes pour tout $k \in \{1 \dots N\}$ ■

Preuve de nécessité [BIT 01a]

Supposons que le système (II.8) est stable et définissons la suite de matrices P_k comme suit :

$$P_k = \sum_{i=0}^{+\infty} \Phi'_{k+i,k} \Phi_{k+i,k}$$

où Φ est la matrice de transition d'état du système. Cette suite de matrices est convergente. En effet, pour tout entier positif r ,

$$\sum_{i=0}^{rN-1} \Phi'_{k+i,k} \Phi_{k+i,k} = \sum_{l=0}^{r-1} \Psi'^l M \Psi^l_k$$

où Ψ désigne la matrice monodromique et :

$$M = \sum_{j=0}^{N-1} \Phi'_{k+j,k} \Phi_{k+j,k}$$

L'hypothèse de stabilité implique que $\|\Psi_k^l\| \leq K\lambda^l$ pour tout $K > 0$ et $\lambda < 1$. Ainsi :

$$\left\| \sum_{i=0}^{rN-1} \Phi'_{k+i,k} \Phi_{k+i,k} \right\| \leq K^2 \|M\| \sum_{l=0}^{r-1} \lambda^{2l}$$

Ainsi, la quantité

$$\sum_{i=0}^{\tau} \Phi'_{k+i,k} \Phi_{k+i,k}$$

est bornée pour tout τ et également monotonement décroissante en τ . Par conséquent P_k existe. De plus, P_k est N -périodique et semi-définie positive. Enfin, d'après la définition de P_k :

$$\begin{aligned} P_k &= \sum_{i=0}^{+\infty} \Phi'_{k+i,k} \Phi_{k+i,k} = \mathbb{1} + \sum_{i=1}^{+\infty} \Phi'_{k+i,k} \Phi_{k+i,k} \\ &= \mathbb{1} + \sum_{i=1}^{+\infty} A'_k \Phi'_{k+i,k+1} \Phi_{k+i,k+1} A_k = \mathbb{1} + A'_k P_{k+1} A_k \end{aligned}$$

Les inégalités matricielles (II.20-II.21) sont donc satisfaites. ■

Remarque

Le Lemme II.4 fait intervenir N \mathcal{LMI} s (II.20) et une contrainte égalité (II.21). En pratique, seules les N \mathcal{LMI} s suivantes sont nécessaires :

$$\begin{aligned} A'_k \mathbf{P}_{k+1} A_k - \mathbf{P}_k &< 0 \quad , \quad \forall k \in \{1 \dots N-1\} \\ A'_N \mathbf{P}_1 A_N - \mathbf{P}_N &< 0 \end{aligned}$$

Pour plus de lisibilité, les résultats de ce mémoire sont présentés en utilisant la notation du Lemme II.4. Puisque tous les solveurs \mathcal{LMI} n'acceptent pas les contraintes égalité et puisqu'il est toujours préférable de coder un problème avec moins de contraintes et moins de variables, les problèmes rencontrés par la suite seront toujours codés comme proposé ci-dessus.

La stabilité du système peut donc être prouvée par l'existence d'une suite N -périodique de matrices $\{P_k \in \mathcal{S}^{n^+}\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ vérifiant simultanément N \mathcal{LMI} s. Le lien entre ce résultat et la stabilité au sens des multipliers caractéristiques peut être établi de la manière suivante. Supposons qu'il existe N matrices P_k vérifiant les N \mathcal{LMI} s (II.20-II.21). Multiplions la dernière inégalité à droite par A_{N-1} et à gauche par son transposé :

$$A'_{N-1} A'_N P_1 A_N A_{N-1} - A'_{N-1} P_N A_{N-1} < 0$$

L'avant dernière inégalité ($k = N-1$) s'écrit :

$$A'_{N-1} P_N A_{N-1} - P_{N-1} < 0$$

En combinant les deux \mathcal{LMI} s précédentes, on obtient :

$$A'_{N-1} A'_N P_1 A_N A_{N-1} < A'_{N-1} P_N A_{N-1} < P_{N-1}$$

soit :

$$A'_{N-1}A'_N P_1 A_N A_{N-1} - P_{N-1} < 0$$

En appliquant cette démarche $N - 1$ fois, il vient finalement :

$$A'_1 \cdots A'_{N-1} A'_N P_1 A_N A_{N-1} \cdots A_1 - P_1 < 0$$

soit :

$$\Psi'_1 P_1 \Psi_1 - P_1 < 0$$

Ainsi, la matrice de Lyapunov P_1 prouve la stabilité au sens de Schur de la matrice monodromique Ψ_1 et donc l'appartenance des multipliers caractéristiques au disque unité.

Le Lemme II.4 peut être énoncé de manière équivalente sous la forme suivante :

Lemme II.5 (Lemme de Lyapunov périodique - Formulation \mathcal{LMI} duale)

Le système N -périodique (II.8) est stable si et seulement s'il existe N matrices \mathbf{W}_k , $\{\mathbf{W}_k \in \mathcal{S}^{n+}\}_{k \in \{0 \dots N-1\}}$, telles que :

$$A_k \mathbf{W}_{k-1} A'_k - \mathbf{W}_k < 0 \quad , \quad \forall k \in \{1 \dots N\} \quad (\text{II.23})$$

$$\mathbf{W}_N = \mathbf{W}_0 \quad (\text{II.24})$$

Preuve

Appliquons la transformation de Schur (Annexe B.1) aux \mathcal{LMI} s (II.20-II.21), on obtient :

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{P}_k & A'_k \\ A_k & -\mathbf{P}_{k+1}^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad , \quad \forall k \in \{1 \dots N\}$$

$$\mathbf{P}_{N+1}^{-1} = \mathbf{P}_1^{-1}$$

En appliquant à nouveau la transformation de Schur, il vient :

$$A_k \mathbf{P}_k^{-1} A'_k - \mathbf{P}_{k+1}^{-1} < 0 \quad , \quad \forall k \in \{1 \dots N\}$$

$$\mathbf{P}_{N+1}^{-1} = \mathbf{P}_1^{-1}$$

Enfin, les \mathcal{LMI} s (II.23-II.24) sont obtenues en posant $\mathbf{W}_{k-1} = \mathbf{P}_k^{-1} \forall k \in \{1 \dots N\}$. ■

Ce résultat peut être également obtenu en étudiant la stabilité d'un autre système, appelé système dual.

Lemme II.6 (Stabilité et dualité)

Le système primal :

$$x_{k+1} = A_k x_k \quad , \quad A_{k+N} = A_k \quad (\text{II.25})$$

est stable si et seulement si le système dual à temps inverse suivant est stable :

$$x_{k-1}^d = A'_k x_k^d \quad , \quad A_{k+N} = A_k \quad (\text{II.26})$$

où $x_k^d \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état du système dual.

Preuve

Soit la fonction candidate de Lyapunov :

$$V_k(x_k^d) = x_k^{d'} W_k x_k^d \quad (\text{II.27})$$

D'après le lemme de Lyapunov périodique II.3, le système (II.26) est stable si et seulement s'il existe une suite N -périodique de matrices $\{W_k \in \mathcal{S}^{n^+}\}_{k \in \{0 \dots N-1\}}$ telle que la fonction candidate de Lyapunov (II.27) soit décroissante le long des trajectoires du système. Le système (II.26) étant à temps inverse, la décroissance de la fonction de Lyapunov s'écrit :

$$V_{k-1}(x_{k-1}^d) - V_k(x_k^d) = x_{k-1}^{d'} W_{k-1} x_{k-1}^d - x_k^{d'} W_k x_k^d < 0$$

En remplaçant x_{k-1}^d par son expression (II.26), on obtient, $\forall k \in \mathbb{N}$ et $\forall x_k^d \in \mathbb{R}^n \neq 0$:

$$x_k^{d'} A_k W_{k-1} A_k' x_k^d - x_k^{d'} W_k x_k^d = x_k^{d'} (A_k W_{k-1} A_k' - W_k) x_k^d < 0$$

Ceci est équivalent aux \mathcal{LMIs} (II.23-II.24) pour tout $k \in \{1 \dots N\}$. ■

Outre le fait que, comme dans le cadre LTI, le système dual (II.26) fait intervenir la transposée de la matrice dynamique, celui-ci présente également la particularité d'évoluer en temps inversé. Ce résultat est cohérent avec la théorie de la dualité pour les systèmes LTV à temps discret étudiée par exemple dans [WYM 80].

Par ailleurs, écrivons l'évolution de l'état du système dual sur une période, en choisissant comme instant initial $k_0 = k + N - 1$:

$$x_k^d = A_k' A_{k+1}' \cdots A_{k+N-1}' x_{k+N-1}^d = \Psi_k' x_{k+N-1}^d$$

La matrice monodromique du système dual est donc la transposée de celle du système primal. Les multipliers caractéristiques du système dual (II.26) et du système primal (II.25) sont donc les mêmes. Ces systèmes sont donc bien équivalents du point de vue de leur stabilité.

II.3 Performances des systèmes discrets périodiques

La caractéristique élémentaire attendue d'un système est qu'il soit stable. Comme nous venons de le voir, la stabilité indique la capacité du système à converger vers un état d'équilibre. Une première façon d'évaluer les performances d'un système est de caractériser la manière dont l'état rejoint l'équilibre, et en particulier à quelle vitesse il le rejoint. Cet aspect de performances temporelles n'est pas traité dans cette thèse. Les performances sont évaluées en terme de capacité du système à rejeter des perturbations. L'action de l'environnement est modélisée sous la forme de signaux perturbateurs w dont l'influence est évaluée à l'aide de critères de coût sur les sorties exogènes z (voir le modèle standard de la Figure II.1). Les critères les plus fréquemment rencontrés sont exprimés à l'aide des normes \mathcal{H}_∞ et \mathcal{H}_2 . Ces normes, ainsi que des méthodes numériques permettant de les calculer sont présentées en Section II.3.1 et II.3.2.

Dans cette partie, les performances sont évaluées pour un modèle certain stable dont la représentation d'état est :

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_{wk} w_k \\ z_k = C_{zk} x_k + D_{zwk} w_k \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

II.3.1 Norme \mathcal{H}_∞ des modèles discrets périodiques

Introduit au début des années 80 par G. Zames dans [ZAM 81], le cadre de travail \mathcal{H}_∞ a permis de considérer simultanément les questions relatives aux incertitudes de modélisation et celles liées aux perturbations externes. Ainsi, garantir que la norme \mathcal{H}_∞ est inférieure à γ équivaut à assurer la stabilité robuste du système bouclé par une incertitude non structurée bornée en norme par γ^{-1} . Dans cette thèse, les incertitudes considérées sont de type paramétrique et la norme \mathcal{H}_∞ sera utilisée comme un critère de performances en terme de rejet de perturbations.

De la même manière que pour les systèmes LTI, la norme \mathcal{H}_∞ est définie comme la norme \mathcal{L}_2 induite du système :

Définition II.7 (Norme \mathcal{H}_∞ - Domaine temporel) [BIT 96a]

La norme \mathcal{H}_∞ du système stable (II.28) est le réel positif suivant :

$$\|\Sigma\|_\infty = \sup_{w_k \neq 0} \frac{\|z_k\|_2}{\|w_k\|_2} = \sup_{\|w_k\|_2=1} \|z_k\|_2 \quad (\text{II.29})$$

La norme \mathcal{H}_∞ représente l'énergie maximale au sens de la norme \mathcal{L}_2 du signal de sortie pour toute entrée d'énergie unité. Ainsi, la norme \mathcal{H}_∞ fournit une information de gain énergétique dans le pire des cas.

La norme \mathcal{H}_∞ peut également être définie de manière fréquentielle comme suit :

Définition II.8 (Norme \mathcal{H}_∞ - Domaine fréquentiel) [ZHA 97]

La norme \mathcal{H}_∞ du système stable (II.28) est le réel positif suivant :

$$\|\Sigma\|_\infty = \sup_{\omega \in [0, \frac{2\pi}{N}]} \bar{\sigma} \left[\hat{H}(e^{j\omega}) \right] \quad (\text{II.30})$$

où \hat{H} est la fonction de transfert harmonique définie en (I.39).

La norme \mathcal{H}_∞ est donc le gain dans le pire des cas pour un signal d'entrée sinusoïdal dont la fréquence varie sur l'ensemble du spectre.

Le calcul de la norme \mathcal{H}_∞ telle que définie précédemment est un problème de dimension infinie. Dans le cas des systèmes LTI, le lemme borné réel [BOY 94] montre que ce problème peut être reformulé comme un problème d'optimisation convexe en dimension finie à l'aide du formalisme \mathcal{LMI} . Ce résultat peut être étendu aux systèmes périodiques et porte le nom de lemme borné réel périodique [BIT 01b].

Lemme II.7 (Norme \mathcal{H}_∞ - Formulation \mathcal{LMI}) [BIT 01b]

La norme \mathcal{H}_∞ du système stable (II.28) est solution du problème d'optimisation suivant :

$$\|\Sigma\|_\infty^2 = \min_{\{\mathbf{P}_k \in \mathcal{S}^{n^+}\}_{k \in \{1 \dots N\}}} \gamma \quad (\text{II.31})$$

$$\begin{bmatrix} A'_k \mathbf{P}_{k+1} A_k - \mathbf{P}_k + C'_{zk} C_{zk} & A'_k \mathbf{P}_{k+1} B_{wk} + C'_{zk} D_{zwk} \\ B'_{wk} \mathbf{P}_{k+1} A_k + D'_{zwk} C_{zk} & B'_k \mathbf{P}_{k+1} B_k + D'_{zwk} D_{zwk} - \gamma \mathbb{1} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall k \in \{1 \dots N\} \quad (\text{II.32})$$

$$\mathbf{P}_{N+1} = \mathbf{P}_1 \quad (\text{II.33})$$

Preuve

Supposons que les matrices $\{P_k\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ sont solutions des \mathcal{LMI} s (II.32-II.33). En multipliant (II.32) à gauche par $\begin{bmatrix} x'_k & w'_k \end{bmatrix}$ et à droite par son transposé, on obtient :

$$x'_{k+1} P_{k+1} x_{k+1} - x'_k P_k x_k + z'_k z_k - \gamma w'_k w_k < 0 \quad (\text{II.34})$$

Soit la fonction candidate de Lyapunov $V_k(x_k) = x'_k P_k x_k$. L'inégalité (II.34) peut s'écrire :

$$V_{k+1}(x_{k+1}) - V_k(x_k) + z'_k z_k - \gamma w'_k w_k < 0 \quad (\text{II.35})$$

En prenant w_k nul, l'inégalité précédente devient $V_{k+1}(x_{k+1}) - V_k(x_k) < 0$. $V_k(x_k)$ est donc une fonction de Lyapunov prouvant la stabilité du système. Ecrivons la somme de (II.35) de $k = 0$ à $k = \infty$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} (V_{k+1}(x_{k+1}) - V_k(x_k) + z'_k z_k - \gamma w'_k w_k) < 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{k=0}^{\infty} (V_{k+1}(x_{k+1}) - V_k(x_k)) + \sum_{k=0}^{\infty} z'_k z_k - \gamma \sum_{k=0}^{\infty} w'_k w_k < 0 \\ \Leftrightarrow & V_\infty(x_\infty) - V_0(x_0) + \|z_k\|_2^2 - \gamma \|w_k\|_2^2 < 0 \end{aligned}$$

Pour une condition initiale nulle $x_0 = 0$, $V_0(x_0) = 0$. De plus, $V_k(x_k)$ étant une fonction de Lyapunov prouvant la stabilité du système, $V_\infty(x_\infty) = 0$. Finalement, l'inégalité précédente s'écrit :

$$\frac{\|z_k\|_2^2}{\|w_k\|_2^2} < \gamma$$

D'après la Définition II.7, la norme \mathcal{H}_∞ du système est donc $\sqrt{\gamma}$. ■

Le lemme précédent peut être énoncé de manière équivalente comme suit :

Lemme II.8 (Norme \mathcal{H}_∞ - Formulation \mathcal{LMI} duale)

La norme \mathcal{H}_∞ du système stable (II.28) est solution du problème d'optimisation suivant :

$$\|\Sigma\|_\infty^2 = \min_{\{\mathbf{W}_k \in \mathcal{S}^{n^+}\}_{k \in \{0 \dots N-1\}}} \gamma \quad (\text{II.36})$$

$$\begin{bmatrix} A_k \mathbf{W}_{k-1} A'_k - \mathbf{W}_k + B_{wk} B'_{wk} & A_k \mathbf{W}_{k-1} C'_{zk} + B_{wk} D'_{zwk} \\ C_{zk} \mathbf{W}_{k-1} A'_k + D_{zwk} B'_{wk} & C_{zk} \mathbf{W}_{k-1} C'_{zk} + D_{zwk} D'_{zwk} - \gamma \mathbf{1} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall k \in \{1 \cdots N\}$$
(II.37)

$$\mathbf{W}_N = \mathbf{W}_0 \quad \text{(II.38)}$$

Preuve

Par transformation de Schur, les \mathcal{LMI} s (II.32-II.33) peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} A_k \mathbf{P}_k^{-1} A'_k - \mathbf{P}_{k+1}^{-1} + \gamma^{-1} B_{wk} B'_{wk} & A_k \mathbf{P}_k^{-1} C'_{zk} + \gamma^{-1} B_{wk} D'_{zwk} \\ C_{zk} \mathbf{P}_k^{-1} A'_k + \gamma^{-1} D_{zwk} B'_{wk} & C_{zk} \mathbf{P}_k^{-1} C'_{zk} + \gamma^{-1} D_{zwk} D'_{zwk} - \mathbf{1} \end{bmatrix} < 0$$

$$\forall k \in \{1 \cdots N\}$$

$$\mathbf{P}_{N+1}^{-1} = \mathbf{P}_1^{-1}$$

En multipliant les inégalités précédentes par γ et en posant $\mathbf{W}_{k-1} = \gamma \mathbf{P}_k^{-1} \forall k \in \{1 \cdots N\}$, les \mathcal{LMI} s (II.37-II.38) sont obtenues. ■

Comme dans le cas de la stabilité, le résultat précédent peut être obtenu en faisant intervenir un système dual à temps inverse.

Lemme II.9 (Performances \mathcal{H}_∞ et dualité)

La norme \mathcal{H}_∞ du système stable (II.28) est identique à celle du système dual suivant :

$$\begin{cases} x_{k-1}^d = A'_k x_k^d + C'_{zk} w_k^d \\ z_k^d = B'_{wk} x_k^d + D'_{zwk} w_k^d \end{cases} \quad \text{(II.39)}$$

où $x_k^d \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état du système dual, $w_k^d \in \mathbb{R}^p$ son entrée et $z_k^d \in \mathbb{R}^m$ sa sortie.

Preuve

En appliquant le Lemme II.7 au système dual (II.39) et en posant $\mathbf{W}_{k-1} = \mathbf{P}_k^{-1}$, les \mathcal{LMI} s du Lemme II.8 sont obtenues. ■

II.3.2 Norme \mathcal{H}_2 des modèles discrets périodiques

Un autre critère de performances entrées-sorties est défini à partir de la norme système \mathcal{H}_2 . Dans le cas des systèmes LTI, la norme \mathcal{H}_2 est définie comme la somme des normes \mathcal{L}_2 des réponses à des impulsions appliquées sur chaque entrée indépendamment. La réponse impulsionnelle d'un système périodique dépendant de l'instant d'application de l'impulsion, cette définition a été généralisée de la manière suivante :

Définition II.9 (Norme \mathcal{H}_2 généralisée - Domaine temporel) [BAM 92, BIT 96a]

La norme \mathcal{H}_2 du système asymptotiquement stable (II.28) est le réel positif suivant :

$$\|\Sigma\|_2 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \|h_{k,l}\|_2^2} \quad \text{(II.40)}$$

La norme \mathcal{H}_2 généralisée est donc la moyenne des réponses du système correspondant à des impulsions appliquées à chaque instant l sur chacune des m_w entrées. La norme \mathcal{H}_2 donne donc une information sur les performances moyennes du système, contrairement à la norme \mathcal{H}_∞ qui caractérise les performances dans le pire des cas.

Une autre définition possible de la norme \mathcal{H}_2 est basée sur une approche fréquentielle. La norme \mathcal{H}_2 désigne alors l'énergie de la sortie en réponse à un bruit blanc unitaire en entrée. Elle se révèle donc être un bon outil pour évaluer l'aptitude du système à rejeter les bruits engendrés par les capteurs ou les actionneurs. Dans le cas des systèmes périodiques, la définition suivante peut être donnée ($\hat{H}(z)$ est la fonction de transfert harmonique définie précédemment (I.39)).

Définition II.10 (Norme \mathcal{H}_2 généralisée - Domaine fréquentiel) [ZHA 97]

La norme \mathcal{H}_2 du système asymptotiquement stable (II.28) est le réel positif suivant :

$$\|\Sigma\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Trace} \left[\hat{H}^*(e^{j\omega}) \hat{H}(e^{j\omega}) \right] d\omega} \quad (\text{II.41})$$

Le calcul du coût \mathcal{H}_2 d'un système LTI certain est lié au calcul des grammien de commandabilité et d'observabilité. Ainsi, la valeur de la norme \mathcal{H}_2 peut être déterminée exactement par la solution d'une équation de Lyapunov. Ce résultat est également valable dans le cas des systèmes périodiques :

Théorème II.10 (Norme \mathcal{H}_2 généralisée - Calcul par le grammien d'observabilité)

La norme \mathcal{H}_2 du système asymptotiquement stable (II.28) est égale à :

$$\|\Sigma\|_2 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \text{Trace} [D_l' D_l + B_l' W_l^O B_l]} \quad (\text{II.42})$$

où W_l^O est le grammien d'observabilité périodique :

$$W_l^O = \sum_{k=1}^{\infty} A_{l+1}' \cdots A_{k-1}' C_k' C_k A_{k-1} \cdots A_{l+1} \quad (\text{II.43})$$

solution de l'équation de Lyapunov :

$$A_l' W_{l+1}^O A_l - W_l^O + C_l' C_l = 0 \quad (\text{II.44})$$

Preuve

La réponse impulsionnelle du système définie en Section I.4.4 peut être obtenue par récurrence à partir des équations (II.28) :

$$\begin{cases} h_{k,l} = C_k \Phi_{k,l+1} B_l & \text{si } k \neq l \\ h_{l,l} = D_l \end{cases}$$

En remplaçant $h_{k,l}$ par son expression dans l'équation (II.40), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\|\Sigma\|_2^2 &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \|h_{k,l}\|_2^2 \\
&= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{\infty} \text{Trace} [h'_{k,l} h_{k,l}] \\
&= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \text{Trace} \left[D'_l D_l + \sum_{k=1}^{\infty} B'_l \Phi'_{k,l+1} C'_k C_k \Phi_{k,l+1} B_l \right] \\
&= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \text{Trace} [D'_l D_l + B'_l W_l^O B_l]
\end{aligned}$$

■

La norme \mathcal{H}_2 peut également être calculée à partir du grammien de commandabilité de la manière suivante :

Théorème II.11 (Norme \mathcal{H}_2 généralisée - Calcul par le grammien de commandabilité)

La norme \mathcal{H}_2 du système asymptotiquement stable (II.28) est égale à :

$$\|\Sigma\|_2 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \text{Trace} [D_l D'_l + C_l W_l^C C'_l]} \quad (\text{II.45})$$

où W_l^C est le grammien de commandabilité périodique :

$$W_l^C = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{k,l+1} B_k B'_k \Phi'_{k,l+1} \quad (\text{II.46})$$

solution de l'équation de Lyapunov :

$$A_l W_l^C A'_l - W_{l+1}^C + B_l B'_l = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (\text{II.47})$$

Preuve

La preuve est basée sur la propriété de permutation de la fonction Trace : $\text{Trace}[AB] = \text{Trace}[BA]$. En effet, l'équation (II.42) peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
\|\Sigma\|_2^2 &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \text{Trace} [D'_l D_l + B'_l W_l^O B_l] \\
&= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \left(\text{Trace} [D'_l D_l] + \sum_{k=1}^{\infty} \text{Trace} [B'_l \Phi'_{k,l+1} C'_k C_k \Phi_{k,l+1} B_l] \right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \left(\text{Trace} [D_l D'_l] + \sum_{k=1}^{\infty} \text{Trace} [C_k \Phi_{k,l+1} B_l B'_l \Phi'_{k,l+1} C'_k] \right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \text{Trace} [D_l D'_l + C_l W_l^C C'_l]
\end{aligned}$$

■

Remarque

Le grammien de commandabilité W_l^C du système (II.28) est égal au grammien d'observabilité du système dual (II.39) et réciproquement.

La norme \mathcal{H}_2 généralisée peut également être calculée comme la solution du problème d'optimisation \mathcal{LMI} suivant :

Lemme II.12 (Norme \mathcal{H}_2 - Formulation \mathcal{LMI}) [BIT 01b]

Le carré de la norme \mathcal{H}_2 du système asymptotiquement stable (II.28) est la solution du problème d'optimisation suivant :

$$\|\Sigma\|_2^2 = \min_{\{\mathbf{P}_k \in \mathcal{S}^{n^+}\}_{k \in \{1 \dots N\}}} \gamma \quad (\text{II.48})$$

$$A'_k \mathbf{P}_{k+1} A_k - \mathbf{P}_k + C'_k C_k < 0, \quad \forall k \in \{1 \dots N\} \quad (\text{II.49})$$

$$\text{Trace} \left[\sum_{k=1}^N B'_k \mathbf{P}_k B_k + D'_k D_k \right] < N\gamma \quad (\text{II.50})$$

$$\mathbf{P}_{N+1} = \mathbf{P}_1 \quad (\text{II.51})$$

Pour une valeur de γ donnée, toute suite N -périodique de matrices $\{P_k \in \mathcal{S}^{n^+}\}_{k \in \mathbb{N}}$ solution du problème de faisabilité associé aux inégalités (II.49-II.51) définit une borne supérieure sur le grammien d'observabilité : $W_k^O \leq P_k$. A l'optimum, la suite $\{P_k \in \mathcal{S}^{n^+}\}_{k \in \mathbb{N}}$ est égale au grammien d'observabilité. De plus, $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite N -périodique de matrices de Lyapunov certifiant la stabilité du système.

Le lemme suivant présente la formulation duale du Lemme II.12.

Lemme II.13 (Norme \mathcal{H}_2 - Formulation \mathcal{LMI} duale) [BIT 01b]

Le carré de la norme \mathcal{H}_2 du système stable (II.28) est la solution du problème d'optimisation suivant :

$$\|\Sigma\|_2^2 = \min_{\{\mathbf{W}_k \in \mathcal{S}^{n^+}\}_{k \in \{0 \dots N-1\}}} \gamma \quad (\text{II.52})$$

$$A_k \mathbf{W}_{k-1} A'_k - \mathbf{W}_k + B_k B'_k < 0, \quad \forall k \in \{1 \dots N\} \quad (\text{II.53})$$

$$\text{Trace} \left[\sum_{k=1}^N C_k \mathbf{W}_{k-1} C'_k + D_k D'_k \right] < N\gamma \quad (\text{II.54})$$

$$\mathbf{W}_N = \mathbf{W}_0 \quad (\text{II.55})$$

Toute suite N -périodique de matrices $\{W_k \in \mathcal{S}^{n^+}\}_{k \in \mathbb{N}}$ solution du problème de faisabilité associé aux inégalités (II.53-II.55) définit une borne supérieure sur le grammien de commandabilité et certifie la stabilité du système.

Remarque

Ce dernier résultat peut être obtenu en appliquant le Lemme II.12 au système dual (II.39). En effet, W_k est une borne sur le grammien de commandabilité du système (II.28) donc également une borne du grammien d'observabilité du système dual (II.39).

II.4 Analyse robuste en stabilité et performances

Les modèles incertains tels que nous les avons présentés au premier chapitre sont définis par une loi dynamique faisant intervenir une incertitude Δ appartenant à un domaine admissible \mathbb{A} . A chaque valeur de $\Delta \in \mathbb{A}$ peut donc être associé un modèle certain appelé réalisation du modèle incertain. Le problème d'analyse robuste est de garantir que l'ensemble des réalisations d'un modèle incertain vérifie une propriété donnée.

Dans le cas de l'analyse de stabilité robuste, il s'agit de garantir la stabilité de l'ensemble des réalisations du modèle incertain. Ce problème est abordé en Section II.4.1. Le problème de l'analyse de performances robustes est ensuite traité en Section II.4.3. L'objectif est alors de garantir que toute réalisation atteigne un niveau de performances désiré (ici évalué par les normes systèmes \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞).

Dans cette partie est étudiée la classe particulière des modèles incertains périodiques polytopiques tels que définis dans le Chapitre I :

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_k(\Delta) & B_{wk}(\Delta) \\ C_{zk}(\Delta) & D_{zwk}(\Delta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ w_k \end{pmatrix} = M_k(\Delta) \begin{pmatrix} x_k \\ w_k \end{pmatrix} \quad (\text{II.56})$$

avec :

$$M_k(\Delta) = \sum_{i=1}^L \xi_i M_k^{[i]} \quad : \quad \xi \in \Xi$$

$$\Xi = \left\{ \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_L \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^L : \sum_{i=1}^L \xi_i = 1, 0 \leq \xi_i \leq 1 \quad \forall i = 1 \dots L \right\}$$

Ce modèle fait intervenir des paramètres incertains ξ_i regroupés dans un vecteur $\xi \in \Xi$.

II.4.1 Analyse de la stabilité robuste

Un modèle incertain est dit robustement stable si toutes ses réalisations admissibles sont stables.

Définition II.11 (Stabilité robuste)

Le système (II.56) est robustement stable si, pour toute valeur admissible des paramètres $\xi \in \Xi$, le système est stable.

Les méthodes de synthèse par retour d'état proposées au Chapitre III font intervenir les versions duales des conditions \mathcal{LMIs} d'analyse. Nous choisissons donc de présenter les résultats d'analyse robuste sur le système dual suivant :

$$\begin{pmatrix} x_{k-1}^d \\ w_k \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A'_k(\Delta) & C'_{zk}(\Delta) \\ B'_{wk}(\Delta) & D'_{zwk}(\Delta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k^d \\ z_k \end{pmatrix} = M'_k(\Delta) \begin{pmatrix} x_k^d \\ z_k \end{pmatrix} \quad (\text{II.57})$$

Remarque

Comme dans le cas certain, le système (II.56) et le système dual (II.57) sont équivalents du point de vue stabilité et performances robustes. Cependant, les méthodes d'analyse

robuste présentées par la suite faisant intervenir des relaxations, les résultats obtenus sur le système primal et le système dual peuvent différer. Nous nous limitons à la présentation des résultats sur le système dual car cette forme est adaptée à la résolution des problèmes de synthèse par retour d'état présentés au Chapitre III.

S'il est aisé de prouver la stabilité d'une réalisation (correspondant à un choix particulier de ξ) à l'aide du calcul des multiplieurs caractéristiques, comment garantir que ces derniers appartiennent au disque unité pour tout $\xi \in \Xi$?

Remarque

La stabilité des sommets d'un polytope n'implique pas la stabilité de l'ensemble des matrices du polytope. Différents contre-exemples appuyant cette conjecture sont donnés dans [BAR 84] pour le cas des matrices par intervalles qui constituent un cas particulier des polytopes de matrices. Ainsi, tester la stabilité des sommets du polytope ne permet pas de conclure sur sa stabilité.

La seconde méthode de Lyapunov se révèle la plus adaptée pour aborder le problème d'analyse robuste. En effet, le Théorème II.2 peut être étendu au cas incertain en considérant des fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres :

$$V_k(x_k^d, \xi) \quad (\text{II.58})$$

A partir de ce choix de fonction de Lyapunov, la condition de stabilité suivante peut être formulée.

Théorème II.14 (Stabilité robuste - Formulation par inégalités matricielles)

Le système (II.56) est robustement stable si et seulement s'il existe N matrices de Lyapunov dépendant de paramètres $\{\mathbf{W}_k(\xi) \in \mathcal{S}^{n+}\}_{k \in \{0 \dots N-1\}}$, telles que $\forall \xi \in \Xi$:

$$A_k(\xi) \mathbf{W}_{k-1}(\xi) A_k'(\xi) - \mathbf{W}_k(\xi) < \mathbf{0}, \quad \forall k \in \{1 \dots N\} \quad (\text{II.59})$$

$$\mathbf{W}_N(\xi) = \mathbf{W}_0(\xi) \quad (\text{II.60})$$

Ce résultat est l'extension directe au cas incertain du Lemme II.4. Cependant, même dans le cas plus simple où le système (II.56) est LTI, ce problème est difficile à résoudre. En effet, il s'agit d'un problème de dimension infinie puisque les \mathcal{LMI} (II.59-II.60) doivent être vérifiées pour tout $\xi \in \Xi$. A l'exception de cas particuliers, il est nécessaire de faire intervenir certaines relaxations permettant de ramener ce problème en dimension finie. Dans le cas LTI, une relaxation couramment employée consiste à utiliser une fonction de Lyapunov indépendante des paramètres. Ce cas particulier, initialement proposé par [HOL 80, BAR 85], est connu dans la littérature sous l'appellation de stabilité quadratique. La stabilité quadratique est à la base de très nombreux travaux (par exemple [BER 89, KHA 90, GER 91]). Ce résultat peut être étendu aux systèmes périodiques comme proposé dans [De 00]. La fonction de Lyapunov s'écrit alors :

$$V_k(x_k^d, \xi) = V_k(x_k^d) = x_k^{d'} W_k x_k^d \quad (\text{II.61})$$

Un tel choix de fonction de Lyapunov conduit à la formulation \mathcal{LMI} suivante :

Théorème II.15 (Stabilité quadratique) [De 00]

Le système (II.56) est quadratiquement stable si et seulement s'il existe N matrices de Lyapunov $\{\mathbf{W}_k \in \mathcal{S}^{n^+}\}_{k \in \{0 \dots N-1\}}$, telles que $\forall i \in \{1 \dots L\}$:

$$A_k^{[i]} \mathbf{W}_{k-1} A_k^{[i]'} - \mathbf{W}_k < \mathbb{0}, \quad \forall k \in \{1 \dots N\} \quad (\text{II.62})$$

$$\mathbf{W}_N = \mathbf{W}_0 \quad (\text{II.63})$$

Preuve

Supposons qu'il existe N matrices $\{W_k\}_{k \in \{0 \dots N-1\}}$ solutions de (II.62-II.63). Appliquons la transformation de Schur aux inégalités (II.62-II.63), on obtient, $\forall i \in \{1 \dots L\}$:

$$\begin{bmatrix} -W_k & A_k^{[i]} W_{k-1} \\ W_{k-1} A_k^{[i]'} & -W_{k-1} \end{bmatrix} < \mathbb{0}, \quad \forall k \in \{1 \dots N\}$$

$$W_N = W_0$$

Le calcul des combinaisons convexes sur les L sommets permet d'écrire, $\forall \xi \in \Xi$:

$$\begin{bmatrix} -W_k & A_k(\xi) W_{k-1} \\ W_{k-1} A_k'(\xi) & -W_{k-1} \end{bmatrix} < \mathbb{0}, \quad \forall k \in \{1 \dots N\}$$

$$W_N = W_0$$

En appliquant à nouveau la transformation de Schur aux N inégalités précédentes, les inégalités (II.62-II.60) sont obtenues avec $W_k(\xi) = W_k$. L'équivalence entre le système dual et le système original conclut la preuve. ■

Imposer à la fonction de Lyapunov d'être indépendante des paramètres incertains ξ introduit clairement un certain pessimisme. Ainsi, la condition de stabilité quadratique du Théorème II.15 est une condition simplement suffisante de stabilité robuste. Ce pessimisme reste problématique, même si pour un nombre non négligeable d'applications, l'approche est concluante [GAR 97, MAG 97, ELG 00].

Une méthode pour réduire ce pessimisme consiste à rechercher des fonctions de Lyapunov dépendant de paramètres [FER 96, FU 00, GAH 96, IWA 99]. Même si le système incertain présente une structure polytopique, il est évidemment impossible de connaître *a priori* la forme de la dépendance de la fonction candidate de Lyapunov envers les paramètres incertains. Cependant, il semble naturel de rechercher des fonctions de Lyapunov polytopiques de la forme :

$$V_k(x_k^d, \xi) = x_k^{d'} W_k(\xi) x_k^d \quad (\text{II.64})$$

avec :

$$W_k(\xi) = \sum_{i=1}^N \xi_i W_k^{[i]} \quad (\text{II.65})$$

A partir de ce choix de fonction candidate de Lyapunov, la condition suffisante de stabilité robuste suivante peut être formulée.

Théorème II.16 (Stabilité étendue) [ARZ 05, FAR 05b]

S'il existe $N \cdot L$ matrices de Lyapunov $\{\mathbf{W}_k^{[i]} \in \mathcal{S}^{n+}\}_{k \in \{0 \dots N-1\}}$ et N matrices $\{\mathbf{H}_k \in \mathbb{R}^{n \times 2n}\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ telles que, $\forall i \in \{1 \dots L\}$:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{W}_k^{[i]} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_{k-1}^{[i]} \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} A_k^{[i]} \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} \mathbf{H}_k \right\rangle < \mathbf{0}, \quad \forall k \in \{1 \dots N\} \quad (\text{II.66})$$

$$\mathbf{W}_N^{[i]} = \mathbf{W}_0^{[i]} \quad (\text{II.67})$$

alors, le système (II.56) est robustement stable.

Preuve

Supposons qu'il existe $N \cdot L$ matrices $\{W_k^i\}_{k \in \{0 \dots N-1\}}$ et N matrices $\{H_k\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ solutions de (II.66-II.67), alors le calcul des combinaisons convexes sur les L sommets permet d'écrire :

$$\begin{bmatrix} -W_k(\xi) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W_{k-1}(\xi) \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} A_k(\xi) \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} H_k \right\rangle < \mathbf{0}, \quad \forall k \in \{1 \dots N\}, \quad \forall \xi \in \Xi$$

$$W_N(\xi) = W_0(\xi), \quad \forall \xi \in \Xi$$

En appliquant le lemme d'élimination à chacune des N inégalités précédentes, les inégalités (II.59-II.60) sont obtenues. ■

Les nouvelles variables \mathbf{H}_k introduites dans le Théorème II.16 à l'aide du lemme d'élimination sont des variables de relaxation (ou variables additionnelles). L'augmentation du nombre de variables induit des degrés de liberté supplémentaires. Ici, elles sont utilisées pour découpler les matrices de Lyapunov $\mathbf{W}_k^{[i]}$ et les matrices du système $A_k^{[i]}$. Ce découplage permet l'utilisation de fonctions de Lyapunov dépendant de paramètres de la forme (II.64-II.65) où les matrices de Lyapunov $\mathbf{W}_k^{[i]}$ sont définies à chaque sommet du polytope. Il est ainsi possible de prouver que cette nouvelle condition de stabilité robuste est toujours moins pessimiste que celle développée dans le cadre de l'approche quadratique.

Lemme II.17 (Relation entre la stabilité quadratique et la stabilité étendue)

Si le système (II.56) est quadratiquement stable alors il existe $N \cdot L$ matrices $\{W_k^{[i]} \in \mathcal{S}^{n+}\}_{k \in \{0 \dots N-1\}}$ et N matrices $\{H_k \in \mathbb{R}^{n \times 2n}\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ solutions de (II.66-II.67).

Preuve

S'il existe N matrices W_k solutions de (II.62-II.63), alors les matrices

$$W_k^{[i]} = W_k, \quad k \in \{1 \dots N\}, \quad i \in \{1 \dots L\}$$

$$H_k = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & W_k \end{bmatrix}, \quad k \in \{1 \dots N\}$$

sont des solutions des \mathcal{LMI} s (II.66-II.67). ■

Remarque

La réduction du pessimisme apportée par l'approche étendue passe par l'augmentation du nombre de variables de décision dans le problème \mathcal{LMI} . Ces nouvelles variables \mathbf{H}_k sont au nombre de N et de dimension $n \times 2n$. Lorsque l'ordre et/ou la période du système sont importants, l'approche étendue entraîne donc une augmentation non négligeable de la complexité numérique du problème.

II.4.2 Exemple numérique

L'efficacité des méthodes d'analyse de stabilité robuste présentées dans la section précédente est illustrée sur un exemple numérique académique tiré de la littérature [De 00]. Soit le système 3-périodique incertain défini par les matrices :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 - \alpha & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 - \alpha & 2 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & 2 \\ 2.5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B_{u1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B_{u2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} \quad B_{u3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_k = [1 \ 0] \quad D_k = 0 \quad \forall k = 1, 2, 3$$

Le paramètre incertain $|\alpha| \leq \bar{\alpha}$ définit un polytope à 2 sommets pour les matrices du système. Le calcul des multiplieurs caractéristiques montrent que le système certain ($\alpha = 0$) est instable en boucle ouverte :

$$\Lambda = \lambda(\Phi_{4,1}) = \{-0.7720, 7.7720\}$$

Dans [De 00], un retour de sortie stabilisant est proposé :

$$u_k = K_k y_k \quad K_{k+3} = K_k$$

où :

$$K_1 = 3 \quad K_2 = 1 \quad K_3 = -2.49206 \quad (\text{II.68})$$

Puis, le Théorème II.15 est utilisé pour calculer la plus grande valeur de $\bar{\alpha}$ assurant la stabilité quadratique du système bouclé par le correcteur ci-dessus. Ainsi, le système bouclé est quadratiquement stable pour tout $\bar{\alpha} \leq \bar{\alpha}_{max}^q$ avec :

$$\bar{\alpha}_{max}^q = 0.6614$$

Utilisons à présent le Théorème II.16 pour calculer par itérations la plus grande valeur de $\bar{\alpha}$ assurant la stabilité étendue du système bouclé. Le système en boucle fermée est robustement stable pour tout $\bar{\alpha} \leq \bar{\alpha}_{max}^e$ avec :

$$\bar{\alpha}_{max}^e = 0.6893$$

L'utilisation de fonctions de Lyapunov dépendant de paramètres conduit donc à une amélioration de 4.22% dans l'estimation de la plus grande incertitude admissible pour le paramètre α .

Remarque

Dans la référence [De 00], la borne quadratique trouvée est égale à 0.67765, c'est-à-dire légèrement meilleure que celle que nous avons calculée. Cette différence peut être due à une troncature effectuée sur les paramètres du correcteur donnés en (II.68). Ce type de problème est discuté en Section III.2.2.3 du chapitre de synthèse.

L'amélioration apportée par le cadre de travail étendu peut être encore plus marquée dans le cas de systèmes polytopiques présentant un nombre plus important de sommets. Ajoutons un paramètre incertain β affectant les matrices de commande B_{uk} . Les matrices de la représentation d'état du système en boucle ouverte sont :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 - \alpha & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 - \alpha & 2 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & 2 \\ 2.5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B_{u1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix} \quad B_{u2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3\beta+2}{10} \end{bmatrix} \quad B_{u3} = \begin{bmatrix} 0.5(\beta+1) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_k = [1 \quad 0] \quad D_k = 0 \quad \forall k = 1, 2, 3$$

Les deux paramètres incertains $|\alpha| \leq \bar{\alpha}$ et $0 \leq \beta \leq 1$ définissent un polytope à 4 sommets pour les matrices du système. Une méthode de synthèse développée dans le Chapitre III a permis de calculer le correcteur par retour d'état suivant :

$$u_k = K_k x_k \quad K_{k+3} = K_k$$

où :

$$K_1 = [0.0167 \quad -0.0175] \quad K_2 = [0.8495 \quad -2.6782] \quad K_3 = [-4.9538 \quad -3.6797]$$

De la même manière que précédemment, calculons la plus grande valeur de $\bar{\alpha}$ assurant la stabilité quadratique du système bouclé dans le cadre de travail quadratique et étendu. Nous obtenons :

$$\bar{\alpha}_{max}^q = 0.014 \quad \bar{\alpha}_{max}^e = 0.033$$

La borne sur $\bar{\alpha}$ est ici améliorée de 135.7% à l'aide de l'analyse de stabilité étendue.

La Figure II.3 montre la localisation des multipliers caractéristiques du système bouclé pour des valeurs de (α, β) variant dans une grille de 900 points. Ces derniers appartiennent bien au disque unité ouvert.

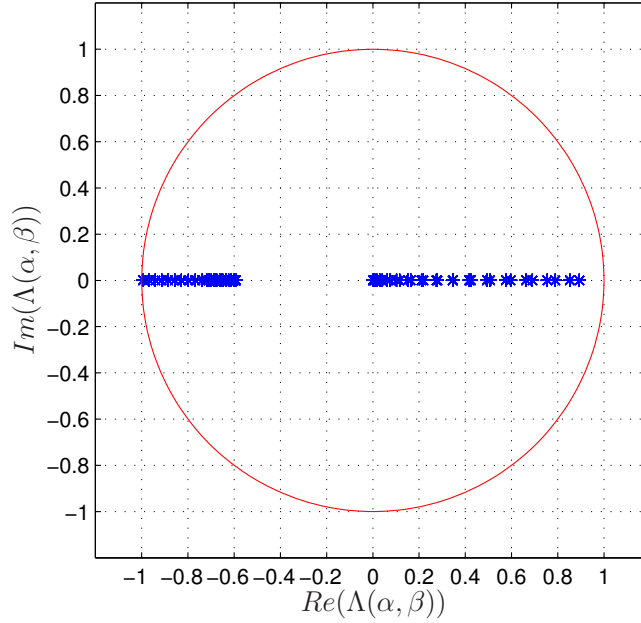


FIG. II.3 – Multiplieurs caractéristiques du système bouclé pour différentes valeurs de α et β

II.4.3 Analyse en performances robustes

Dans cette section, le problème de performances robustes est étudié de manière détaillée au travers de la norme \mathcal{H}_2 . Un raisonnement similaire peut cependant être tenu pour la norme \mathcal{H}_∞ et les méthodes \mathcal{LMI} correspondantes sont présentées en fin de section.

Pour une réalisation du vecteur de paramètres incertains $\xi \in \Xi$ donnée, la norme \mathcal{H}_2 du système (II.56) peut être calculé à l'aide du Lemme II.13. Cette valeur dépendant de la valeur des paramètres incertains ξ , les performances \mathcal{H}_2 du système seront évaluées en terme de pire des cas. Le problème d'analyse dans le pire des cas consiste à évaluer la valeur de la norme \mathcal{H}_2 dans le cas le plus défavorable (i.e. pour la valeur de $\xi \in \Xi$ correspondant à la plus grande valeur de la norme \mathcal{H}_2).

Définition II.12 (Norme \mathcal{H}_2 dans le pire des cas)

La norme \mathcal{H}_2 dans le pire des cas du système est la solution du problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \gamma_{pc}^2 &= \max_{\xi \in \Xi} \|\Sigma(\xi)\|_2^2 \\ &= \max_{\xi \in \Xi} \min_{\mathbf{W}_k(\xi) \in \mathcal{S}^{n+}} \gamma \end{aligned} \quad (\text{II.69})$$

$$A_k(\xi) \mathbf{W}_{k-1}(\xi) A_k^{cl'}(\xi) - \mathbf{W}_k(\xi) + B_{wk}(\xi) B_{wk}'(\xi) < 0, \quad \forall k \in \{1 \dots N\} \quad (\text{II.70})$$

$$\text{Trace} \sum_{k=1}^N \left\{ C_{zk}(\xi) \mathbf{W}_{k-1}(\xi) C_{zk}^{cl'}(\xi) + D_{zwk}(\xi) D_{zwk}'(\xi) \right\} < N\gamma \quad (\text{II.71})$$

$$\mathbf{W}_N(\xi) = \mathbf{W}_0(\xi) \quad (\text{II.72})$$

Ainsi, pour toute incertitude $\xi \in \Xi$, on a : $\|\Sigma(\xi)\|_2 \leq \gamma_{pc}$.

Même dans le cas plus simple des systèmes LTI, le calcul exact de la norme \mathcal{H}_2 dans le pire des cas est un problème difficile à résoudre. Comme pour le problème d'analyse de stabilité robuste, nous proposons donc différentes relaxations conduisant à des conditions calculables à l'aide d'outils SDP. Le coût \mathcal{H}_2 associé à ces problèmes sous-optimaux est appelée coût \mathcal{H}_2 garanti.

Définition II.13 (Coût \mathcal{H}_2 garanti)

Le coût \mathcal{H}_2 garanti du système est défini comme :

$$\gamma_{pc} \leq \gamma_g \quad (\text{II.73})$$

Ainsi, pour toute incertitude $\xi \in \Xi$, on a : $\|\Sigma(\xi)\|_2 \leq \gamma_{pc} \leq \gamma_g$.

L'objectif est de trouver une relaxation qui conduise à une valeur de γ_g la plus proche possible de γ_{pc} . Comme pour le problème d'analyse de stabilité robuste, un premier type de relaxation consiste à utiliser une fonction de Lyapunov indépendante des paramètres. Une borne supérieure de γ_{pc} peut alors être calculée par résolution du problème d'optimisation \mathcal{LMI} suivant :

Théorème II.18 (Coût \mathcal{H}_2 quadratique garanti)

Soit le problème d'optimisation suivant :

$$\gamma_g^q = \min_{\mathbf{W}_k \in \mathcal{S}^{n+}, \mathbf{J}_k \in \mathcal{S}^{pz}} \left(\frac{1}{T} \text{Trace} \sum_{k=1}^N \mathbf{J}_k \right) \quad (\text{II.74})$$

sous les \mathcal{LMI} s ($k \in \{1 \dots N\}$, $i \in \{1 \dots L\}$)

$$A_k^{[i]} \mathbf{W}_{k-1} A_k^{[i]'} - \mathbf{W}_k + B_{wk}^{[i]} B_{wk}^{[i]'} < 0 \quad (\text{II.75})$$

$$C_{zk}^{[i]} \mathbf{W}_{k-1} C_{zk}^{[i]'} + D_{zwk}^{[i]} D_{zwk}^{[i]'} < \mathbf{J}_k \quad (\text{II.76})$$

$$\mathbf{W}_N = \mathbf{W}_0 \quad (\text{II.77})$$

γ_g^q est le coût \mathcal{H}_2 quadratique garanti du système et $\gamma_{pc} \leq \gamma_g^q$.

Preuve

Supposons que les matrices $\{W_k\}_{k \in \{0 \dots N-1\}}$ et $\{J_k\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ sont solutions de (II.75-II.77). En appliquant le complément de Schur, les inégalités (II.75) et (II.77) s'écrivent respectivement :

$$\begin{bmatrix} -W_k & A_k^{[i]} W_{k-1} & B_{wk}^{[i]} \\ W_{k-1} A_k^{[i]'} & -W_{k-1} & 0 \\ B_{wk}^{[i]'} & 0 & -\mathbf{1} \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} -J_k & C_{zk}^{[i]} W_{k-1} & D_{zwk}^{[i]} \\ W_{k-1} C_{zk}^{[i]'} & -W_{k-1} & 0 \\ D_{zwk}^{[i]'} & 0 & -\mathbf{1} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.78})$$

Le calcul des combinaisons convexes sur les L sommets et l'application du complément de Schur permet d'écrire, pour $k \in \{1 \dots N\}$ et tout $\xi \in \Xi$:

$$A_k(\xi) W_{k-1} A_k'(\xi) - W_k + B_{wk}(\xi) B_{wk}'(\xi) < 0 \quad (\text{II.79})$$

$$C_{zk}(\xi) W_{k-1}(\xi) C_{zk}'(\xi) + D_{zwk}(\xi) D_{zwk}'(\xi) < J_k \quad (\text{II.80})$$

où $W_k > \mathbb{0}$ et $W_N = W_0$. En posant $\gamma_g^q = \frac{1}{N} \text{Trace} \sum_{k=1}^N J_k$ et en additionnant les inégalités (II.80) sur une période, les inégalités (II.70-II.72) sont obtenues avec $W_k(\xi) = W_k$. Enfin, l'inégalité $\gamma_{pc} \leq \gamma_g^q$ vient de la relaxation du max-min par un min-max. ■

Une relaxation plus fine consiste à utiliser une fonction de Lyapunov dépendant des paramètres de la forme (II.64). Un tel choix de paramétrisation de la fonction de Lyapunov conduit à une nouvelle borne sous optimale appelée coût \mathcal{H}_2 polytopique garanti. Le théorème suivant présente une formulation \mathcal{LMI} permettant de calculer une borne supérieure sur ce coût \mathcal{H}_2 polytopique garanti. Cette borne est appelée coût \mathcal{H}_2 étendu garanti.

Théorème II.19 (Coût \mathcal{H}_2 étendu garanti) [FAR 05b]

Soit le problème d'optimisation suivant :

$$\gamma_g^e = \min_{\mathbf{W}_k^{[i]} \in \mathcal{S}^{n+}, \mathbf{J}_k \in \mathcal{S}^{pz}, \mathbf{H}_k \in \mathbb{R}^{n \times 2n}, \mathbf{S}_k \in \mathbb{R}^{n \times (pz+n)}} \left(\frac{1}{T} \text{Trace} \sum_{k=1}^T \mathbf{J}_k \right) \quad (\text{II.81})$$

sous les \mathcal{LMI} s ($k \in \{1 \dots N\}$, $i \in \{1 \dots L\}$)

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{W}_k^{[i]} + B_{wk}^{[i]} B_{wk}^{[i]'} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbf{W}_{k-1}^{[i]} \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} A_k^{[i]} \\ -\mathbb{1} \end{bmatrix} \mathbf{H}_k \right\rangle < \mathbb{0} \quad (\text{II.82})$$

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{J}_k + D_{zvk}^{[i]} D_{zvk}^{[i]'} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbf{W}_{k-1}^{[i]} \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} C_{zk}^{[i]} \\ -\mathbb{1} \end{bmatrix} \mathbf{S}_k \right\rangle < \mathbb{0} \quad (\text{II.83})$$

$$\mathbf{W}_N^{[i]} = \mathbf{W}_0^{[i]} \quad (\text{II.84})$$

$$(\text{II.85})$$

alors γ_g^e est le coût \mathcal{H}_2 étendu du système et $\gamma_{pc} \leq \gamma_g^e$.

Preuve

Supposons que les matrices $\{W_k^{[i]}\}_{k \in \{0 \dots N-1, i \in \{1 \dots L\}}$ et $\{J_k, H_k, S_k\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ sont solutions de (II.82-II.84), alors le calcul des combinaisons convexes sur les N sommets permet d'écrire (les termes quadratiques $B_{wk}(\xi)B_{wk}'(\xi)$ sont traités à l'aide de la transformation de Schur comme dans la preuve du Théorème II.18), pour $k \in \{1 \dots N\}$ et tout $\xi \in \Xi$:

$$\begin{bmatrix} -W_k(\xi) + B_{wk}(\xi)B_{wk}'(\xi) & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & W_{k-1}(\xi) \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} A_k(\xi) \\ -\mathbb{1} \end{bmatrix} H_k \right\rangle < \mathbb{0}$$

En appliquant le lemme d'élimination à l'inégalité précédente, l'inégalité (II.70) est obtenue. L'inégalité (II.71) est obtenue en appliquant la même démarche à (II.83). ■

Il est alors possible de montrer que :

Lemme II.20 (Relation entre les coûts \mathcal{H}_2 quadratique et étendu)

La borne étendue γ_g^e est toujours meilleure que la borne quadratique γ_g^q :

$$\gamma_{pc} \leq \gamma_g^e \leq \gamma_g^q \quad (\text{II.86})$$

Preuve

S'il existe N matrices W_k et N matrices J_k solutions de (II.75-II.77), alors les matrices

$$W_k^{[i]} = W_k \quad , \quad k \in \{1 \cdots N\} \quad i \in \{1 \cdots L\}$$

$$H_k = \begin{bmatrix} 0 & W_k \end{bmatrix} \quad S_k = \begin{bmatrix} 0 & W_k \end{bmatrix} \quad , \quad k \in \{1 \cdots N\}$$

sont des solutions des \mathcal{LMI} s (II.82-II.84). ■

Le cadre de travail étendu que nous venons de présenter peut également être utilisé pour évaluer les performances \mathcal{H}_∞ du système. En particulier, le coût \mathcal{H}_∞ étendu garanti peut être calculé à l'aide du théorème suivant :

Théorème II.21 (Coûts \mathcal{H}_∞ quadratique et étendu)

Le coût \mathcal{H}_∞ quadratique du système (II.56) est la solution du problème d'optimisation suivant :

$$\gamma_g^{\infty a} = \min_{\mathbf{W}_k \in \mathcal{S}^{n+}} \gamma \quad (\text{II.87})$$

sous les \mathcal{LMI} s ($k \in \{1 \cdots N\}$, $i \in \{1 \cdots L\}$)

$$\begin{bmatrix} A_k^{[i]} \mathbf{W}_{k-1} A_k^{[i]'} - \mathbf{W}_k + B_{wk}^{[i]} B_{wk}^{[i]'} & A_k^{[i]} \mathbf{W}_{k-1} C_{zk}^{[i]'} + B_{wk}^{[i]} D_{zwk}^{[i]'} \\ C_{zk}^{[i]} \mathbf{W}_{k-1} A_k^{[i]'} + D_{zwk}^{[i]} B_{wk}^{[i]'} & -\gamma \mathbb{1} + C_{zk}^{[i]} \mathbf{W}_{k-1} C_{zk}^{[i]'} + D_{zwk}^{[i]} D_{zwk}^{[i]'} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.88})$$

$$\mathbf{W}_N = \mathbf{W}_0 \quad (\text{II.89})$$

Le coût \mathcal{H}_∞ étendu du système (II.56) est la solution du problème d'optimisation suivant :

$$\gamma_g^{\infty e} = \min_{\mathbf{W}_k^{[i]} \in \mathcal{S}^{n+}, \mathbf{H}_k \in \mathbb{R}^{n \times (2n+pz)}} \gamma \quad (\text{II.90})$$

sous les \mathcal{LMI} s ($k \in \{1 \cdots N\}$, $i \in \{1 \cdots L\}$)

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{W}_k^{[i]} + B_{wk}^{[i]} B_{wk}^{[i]'} & B_{wk}^{[i]} D_{zwk}^{[i]'} & 0 \\ D_{zwk}^{[i]} B_{wk}^{[i]'} & -\gamma \mathbb{1} + D_{zwk}^{[i]} D_{zwk}^{[i]'} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{W}_{k-1}^{[i]} \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} A_k^{[i]} \\ C_{zk}^{[i]} \\ -\mathbb{1} \end{bmatrix}, \mathbf{H}_k \right\rangle < 0 \quad (\text{II.91})$$

$$\mathbf{W}_N^{[i]} = \mathbf{W}_0^{[i]} \quad (\text{II.92})$$

Comme dans le cas de la norme \mathcal{H}_2 , le cadre de travail étendu permet d'obtenir un coût \mathcal{H}_∞ garanti plus proche du coût \mathcal{H}_∞ dans le pire des cas que celui obtenu par l'approche quadratique :

$$\gamma_{pc}^\infty \leq \gamma_g^{\infty e} \leq \gamma_g^{\infty a} \quad (\text{II.93})$$

II.4.4 Exemple Numérique

Reprenons l'exemple de la Section II.4.2 avec une borne sur le paramètre incertain $\alpha \leq \bar{\alpha} = 0.01$. La représentation d'état du système 3-périodique incertain est donnée par les matrices :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 - \alpha & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 - \alpha & 2 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & 2 \\ 2.5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B_{u1} = B_{w1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix} \quad B_{u2} = B_{w2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3\beta+2}{10} \end{bmatrix} \quad B_{u3} = B_{w3} = \begin{bmatrix} 0.5(\beta+1) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{zk} = [1 \ 0] \quad D_{zuk} = D_{zwk} = 0 \quad \forall k = 1, 2, 3$$

Les deux paramètres incertains $|\alpha| \leq 0.01$ et $0 \leq \beta \leq 1$ définissent un polytope à 4 sommets pour les matrices du système. Une méthode de synthèse a permis de calculer le correcteur par retour d'état suivant :

$$u_k = K_k x_k \quad K_{k+3} = K_k$$

où :

$$K_1 = [0.0167 \ -0.0175] \quad K_2 = [0.8495 \ -2.6782] \quad K_3 = [-4.9538 \ -3.6797]$$

La performance du système bouclé par ce correcteur est maintenant évaluée par le calcul de bornes sous optimales du coût \mathcal{H}_2 . La borne quadratique, correspondant à un choix de fonction de Lyapunov indépendante des paramètres, est calculée à l'aide du Théorème II.18 :

$$\gamma_g^q = 25.6046$$

La borne étendue, correspondant à une fonction de Lyapunov de type polytopique, est calculée à l'aide du Théorème II.19 :

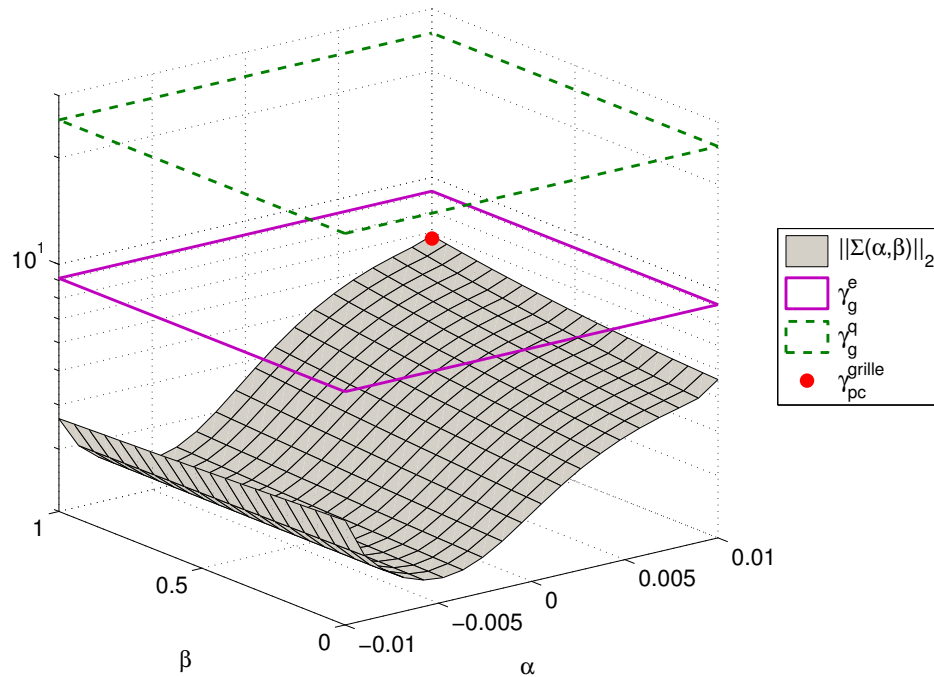
$$\gamma_g^e = 9.1374$$

Ces résultats montrent clairement l'avantage du cadre de travail étendu sur le cadre de travail quadratique. Afin d'évaluer la qualité de la borne \mathcal{H}_2 étendue par rapport au pire des cas réel, la valeur de la norme \mathcal{H}_2 est calculée pour une grille de 400 points sur les paramètres incertains α et β . Le pire des cas est obtenu pour $\alpha = 0.01$ et $\beta = 1$. La norme \mathcal{H}_2 du système pour ces valeurs de α et β vaut alors :

$$\gamma_{pc}^{grille} = 6.8430$$

La Figure II.4 illustre ces différents résultats. La surface ondulée représente la valeur de la norme \mathcal{H}_2 en fonction des paramètres incertains α et β . Le pire cas correspondant à la valeur de la norme \mathcal{H}_2 la plus élevée sur cette surface est indiqué par un point. Les deux surfaces planes en trait plein et en pointillés représentent respectivement le coût \mathcal{H}_2 quadratique garanti et le coût \mathcal{H}_2 étendu garanti. La distance entre ces surfaces et le coût \mathcal{H}_2 dans le pire des cas illustre le pessimisme associé à chaque méthode.

Remarque Ici, le pire des cas semble être atteint sur un des sommets du polytope. Il s'agit bien entendu d'un cas particulier. Evaluer la norme \mathcal{H}_2 (ou la stabilité) sur les sommets d'un polytope ne permet pas de conclure sur la valeur dans le pire des cas de la borne \mathcal{H}_2 sur l'ensemble du polytope.

FIG. II.4 – Analyse de performance \mathcal{H}_2 robuste

II.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre différentes méthodes basées sur la théorie de Lyapunov permettant d'analyser la stabilité et les performances des systèmes linéaires périodiques à temps discret.

Dans un premier temps, nous avons considéré le cas certain. Les méthodes font alors intervenir des inégalités matricielles linéaires. Le cas plus complexe du problème d'analyse robuste est ensuite traité pour des incertitudes paramétriques de type polytopique. Les méthodes d'analyse robuste proposées peuvent être classées en deux catégories. Les premières sont issues de la théorie de la stabilité quadratique alors que les secondes font appel à des matrices de Lyapunov dépendant des paramètres. Nous démontrons d'un point de vue théorique et nous confirmons sur différents exemples que ce second cadre de travail, appelé cadre de travail étendu, est moins pessimiste que le premier. Cette approche fait intervenir des variables additionnelles permettant de découpler les matrices du système des matrices de Lyapunov. La réduction du pessimisme se fait donc au dépend d'une augmentation du nombre de variables de décision et de la taille des $\mathcal{LMI}s$.

Ces méthodes d'analyse sont la base des méthodes de synthèse développées dans le chapitre suivant. Par ailleurs, nous verrons comment mettre à profit le découplage offert par l'utilisation des variables additionnelles, non plus seulement pour résoudre des problèmes de robustesse, mais aussi pour résoudre certains problèmes particuliers de synthèse.

Chapitre III

Synthèse de lois de commande

Sommaire

III.1	Introduction	64
III.2	Problématique	65
III.2.1	Nature du correcteur	65
III.2.2	Propriétés attendues pour le système bouclé	72
III.3	Formulations \mathcal{BMT} pour la synthèse par retour de sortie statique	76
III.3.1	Retour de sortie statique résilient	77
III.3.2	Retour de sortie statique résilient et robuste	79
III.3.3	Spécifications additionnelles sur le correcteur	83
III.3.4	Réduction de la complexité numérique	85
III.3.5	Exemple numérique	88
III.4	Méthodes \mathcal{LMI} pour la synthèse par retour d'état et par retour de sortie dynamique d'ordre plein	89
III.4.1	Retour d'état	90
III.4.2	Retour de sortie dynamique d'ordre plein	100
III.4.3	Correcteurs structurés	104
III.5	Conclusion	106

III.1 Introduction

Dans le chapitre précédent ont été présentées différentes méthodes permettant d'analyser les propriétés d'un système. Si ce dernier n'atteint pas les performances désirées, un dispositif spécifique, appelé **système de commande** ou **correcteur**, est utilisé afin de modifier le comportement dynamique du système étudié. Le but du système de commande est d'exercer des actions entraînant une amélioration du comportement du système et de ses performances.

En présence de perturbations non mesurées et d'incertitudes affectant le modèle, cette commande doit tenir compte des mesures effectuées sur le système. Ce type de commande est alors appelée commande en boucle fermée (Figure III.1).

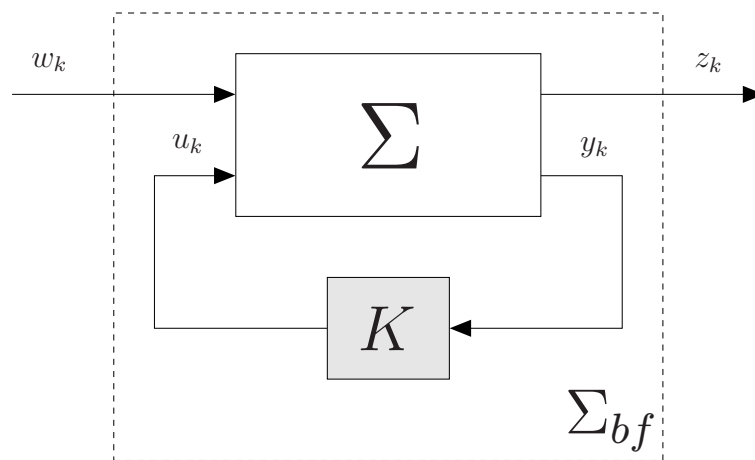


FIG. III.1 – Modèle standard pour le problème de synthèse

La problématique de synthèse est de concevoir un correcteur permettant au système bouclé Σ_{bf} d'atteindre un certain nombre d'objectifs ou spécifications. Cette conception peut se faire en plusieurs étapes comme suit.

La première est le choix du type de correcteur utilisé. Ce choix, conditionné en partie par les décisions prises à l'étape de modélisation, est discuté dans la Section III.2.1. Les différents aspects abordés sont la périodicité, l'ordre du correcteur et l'utilisation d'un retour d'état ou de sortie.

Il s'agit ensuite de spécifier les propriétés attendues pour le système bouclé : robustesse vis-à-vis d'incertitudes affectant le modèle (stabilité et performances robustes) et robustesse vis-à-vis d'incertitudes affectant le correcteur (résilience). Ces aspects sont étudiés en Section III.2.2.

Enfin, une fois la nature du correcteur choisie et les objectifs à atteindre spécifiés, il s'agit de fournir des méthodes de synthèse permettant de calculer les paramètres du correcteur. Le calcul de ces paramètres est basé sur les méthodes d'analyse de la boucle fermée présentées au chapitre précédent. Le problème de synthèse est alors formulé comme un problème d'analyse dont une partie des données du modèle en boucle fermée est à rechercher. Ces problèmes sont d'abord écrits dans leur forme la plus générale à l'aide d'inégalités matricielles bilinéaires (*BMLs*) en Section III.3. Ensuite, différentes relaxa-

tions du problème initial permettant d'obtenir des formulations \mathcal{LMI} s sont présentées en Section III.4.

III.2 Problématique

Avant de développer une méthode de synthèse, il est nécessaire d'établir un cahier des charges définissant le problème à résoudre. L'établissement de ce cahier des charges passe par deux étapes : le choix de la nature du correcteur (Section III.2.1) et des performances attendues pour le système bouclé (Section III.2.2).

III.2.1 Nature du correcteur

Le correcteur doit-il nécessairement être de même périodicité que le système ? Comment réduire le nombre de paramètres à mémoriser ? Quelle est l'influence de l'ordre du correcteur sur les méthodes de synthèse ? Ces différentes questions relatives à la nature du correcteur sont abordées dans cette section.

III.2.1.1 Correcteurs N_K -périodiques

Généralement, l'étape de modélisation du système conditionne le choix de la classe de correcteurs recherchée. Ainsi, il est naturel de rechercher des correcteurs variant dans le temps et de même périodicité que le système.

Cependant, il est également possible de considérer la synthèse de correcteurs présentant une périodicité différente de celle du système. Un tel correcteur sera appelé **correcteur N_K -périodique** où $N_K \in \mathbb{N}$ est la période du correcteur.

Le système bouclé résultant de l'interconnexion d'un système N -périodique et d'un correcteur N_K -périodique est un système N_{bf} -périodique où N_{bf} est le plus petit commun multiple de N et de N_K :

$$N_{bf} = \text{ppcm}(N, N_K) \quad (\text{III.1})$$

Différents cas particuliers peuvent être étudiés :

- Cas $N_K < N$:

La synthèse d'un correcteur de période inférieure à celle du système présente l'avantage de nécessiter la mémorisation dans le correcteur d'un nombre restreint de paramètres. Si la période N et/ou l'ordre n du système sont importants, ce type de synthèse permet de réduire le coût de fabrication du correcteur.

- Cas $N_K = 1$:

Ce cas correspond à la synthèse d'un correcteur invariant dans le temps pour un système périodique. Outre le fait d'avoir un seul lot de paramètres à mémoriser, un tel correcteur présente l'avantage de ne pas nécessiter une synchronisation (au sens d'une horloge commune) entre le correcteur et le système comme l'illustre la Figure III.2.

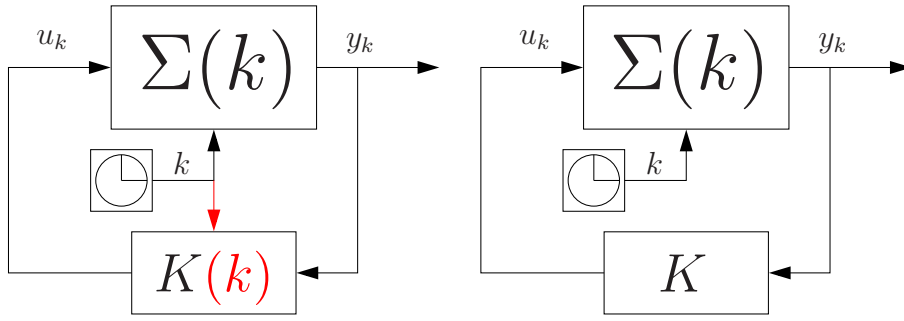


FIG. III.2 – Correcteur variant ou non dans le temps

Ce type de correcteur est utilisé dans certaines applications spatiales comme le contrôle d'attitude de satellites [VAR 98, PUL 05, LOV 05]. La boîte à outils Periodic Systems Toolbox [VAR 05] développée pour MATLAB[®] inclut des outils pour la synthèse de ce type de correcteurs.

- Cas $N_K > N$:

Si un correcteur N -périodique ne permet pas d'atteindre un objectif de synthèse donné (par exemple stabiliser le système), alors la synthèse d'un correcteur de période plus grande peut être envisagée.

Ainsi, un exemple bien connu est celui de la synthèse d'un correcteur N_K -périodique par retour de sortie pour un système 1-périodique (c'est-à-dire de la synthèse d'un correcteur périodique pour un système invariant dans le temps) [KHA 85, COL 98, COL 06]. Nous reprenons ici l'exemple de P. Colaneri paru dans [COL 98] montrant qu'un système LTI non stabilisable par retour de sortie statique LTI est stabilisable par un retour de sortie statique 2-périodique.

Soit le système LTI :

$$\begin{cases} x_{k+1} = A x_k + B u_k \\ y_k = C x_k \end{cases}$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 1]$$

Le calcul des pôles montre que ce système est instable en boucle ouverte :

$$\lambda(A) = \{0.6180, -1.6180\}$$

Considérons une loi de commande de la forme $u_k = K y_k$. La représentation d'état du système bouclé est :

$$x_{k+1} = (A + BKC)x_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ K+1 & K-1 \end{bmatrix} x_k = A^{bf} x_k$$

Le polynôme caractéristique du système bouclé est donc :

$$P(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{1} - A_{bf}) = \lambda^2 - (K-1)\lambda - (1+K) = a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$$

D'après le critère de Jury [JUR 64], ce polynôme a toutes ses racines de module inférieur à 1 si et seulement si les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 > 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 > 0 \\ a_2 - a_0 > 0 \end{cases}$$

La deuxième condition s'écrit : $-(1 + K) + (K - 1) + 1 > 0 \iff -1 > 0$ et n'est donc jamais vérifiée. Il n'existe donc pas de correcteur LTI permettant de stabiliser ce système.

Considérons à présent une loi de commande 2-périodique de la forme :

$$u_k = K_k y_k \quad K_{k+2} = K_k$$

avec :

$$K_1 = 3 \quad K_2 = -1$$

La représentation d'état du système bouclé est :

$$x_{k+1} = (A + BK_k C)x_k = A_k^{bf} x_k \quad A_{k+2}^{bf} = A_k^{bf}$$

avec :

$$A_1^{bf} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad A_2^{bf} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Le calcul des multipliers caractéristiques prouve la stabilité du système bouclé 2-périodique :

$$\Lambda = \lambda(\Psi_0) = \lambda(A_1^{bf} A_0^{bf}) = \lambda\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}\right) = \{0, 0\}$$

Pour résoudre le problème plus général de la synthèse de correcteurs N_K -périodiques pour un système N -périodique, nous avons développé la méthodologie suivante. Il s'agit dans un premier temps de construire un système N_{bf} -périodique en répétant la séquence des matrices du système N_{bf}/N fois. La seconde étape consiste à synthétiser un correcteur N_{bf} -périodique pour ce système présentant une structure temporelle particulière. Ce correcteur N_{bf} -périodique fait apparaître une séquence de N_K gains répétée N_{bf}/N_K fois. Cette structure temporelle peut être définie à l'aide de la fonction temporelle \mathbb{T}_1 en escalier suivante :

$$\begin{aligned} \{1 \cdots N_{bf}\} &\rightarrow \{1 \cdots N_K\} \\ k &\mapsto \mathbb{T}_1(k) = 1 + \text{mod}(k - 1, N_K) \end{aligned} \tag{III.2}$$

où $\text{mod}(k - 1, N_K)$ est le reste de la division euclidienne de $k - 1$ par N_K .

Nous appelons le correcteur structuré obtenu **correcteur** $(N_{bf}, N_K, \mathbb{T}_1)$ -**périodique**.

Considérons par exemple, la synthèse d'un correcteur 2-périodique $u_k = K_k y_k$, $K_{k+2} = K_k$, pour le système 3-périodique :

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & \mathbb{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ u_k \end{pmatrix} = M_k \begin{pmatrix} x_k \\ u_k \end{pmatrix} \quad M_{k+3} = M_k$$

Le système bouclé est le système périodique de période $N_{bf} = \text{ppcm}(2, 3) = 6$ suivant :

$$x_{k+1} = (A_k + B_k K_k C_k) x_k = A_k^{bf} x_k \quad A_{k+6}^{bf} = A_k^{bf}$$

La synthèse d'un correcteur 2-périodique pour le système 3-périodique est équivalente à la synthèse pour le système 6-périodique :

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & \mathbb{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ u_k \end{pmatrix} = M_k \begin{pmatrix} x_k \\ u_k \end{pmatrix} \quad M_{k+6} = M_k$$

d'un correcteur $(6, 3, \mathbb{T}_1)$ -périodique $u_k = \tilde{K}_k y_k$, $\tilde{K}_{k+6} = \tilde{K}_k$ où \mathbb{T}_1 est définie en (III.2). Ce choix de fonction temporelle impose la structure suivante aux matrices du correcteur 6-périodique :

$$\tilde{K}_5 = \tilde{K}_3 = \tilde{K}_1 \quad \tilde{K}_6 = \tilde{K}_4 = \tilde{K}_2$$

Les matrices du correcteur 2-périodique sont alors données par :

$$K_1 = \tilde{K}_1 \quad K_2 = \tilde{K}_2$$

III.2.1.2 Correcteurs (N_1, N_2, \mathbb{T}) -périodiques structurés

Dans la section précédente, nous avons vu que l'utilisation de correcteurs $(N_{bf}, N_K, \mathbb{T}_1)$ -périodiques structurés permet de résoudre le problème de synthèse de correcteurs de périodicité différente de celle du système. Un autre avantage d'utiliser des correcteurs structurés est qu'ils font intervenir un nombre réduit de paramètres par rapport à des correcteurs non structurés (dans le cas précédent N_K au lieu de $N > N_K$).

Nous proposons dans cette partie de généraliser ce résultat pour des fonctions temporelles quelconques et nous définissons la classe des correcteurs (N_1, N_2, \mathbb{T}) -périodiques structurés où :

- N_1 est la période du correcteur,
- $N_2 < N_1$ est le nombre de jeux de paramètres utilisés,
- \mathbb{T} est une application de $\{1 \cdots N_1\}$ dans $\{1 \cdots N_2\}$ définissant la structure temporelle.

Parmi les différentes structures temporelles possibles pour le correcteur, une structure particulièrement intéressante est celle qui fige les paramètres du correcteur à une valeur donnée pendant plusieurs instants. En effet, lorsque le système discret est issu de l'échantillonnage d'un système continu, ses coefficients évoluent relativement faiblement d'un instant à l'autre. L'existence d'un correcteur dont les paramètres n'évoluent pas à chaque instant d'échantillonnage est donc probable et permet de réduire le nombre de paramètres à mémoriser.

Soit \tilde{N}_K le nombre d'instant pendant lesquels les paramètres du correcteur n'évoluent pas (\tilde{N}_K doit être un diviseur de N). Alors, les correcteurs que nous venons de présenter sont des correcteurs $(N, \tilde{N}_K, \mathbb{T}_2)$ -périodiques dont la structure temporelle est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \{1 \cdots N\} &\rightarrow \{1 \cdots \tilde{N}_K\} \\ k &\mapsto \mathbb{T}_2(k) = 1 + \text{quo}(k - 1, \tilde{N}_K) \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

où $\text{quo}(k-1, \tilde{N}_K)$ est le quotient de la division entière de $k-1$ par \tilde{N}_K .

Par exemple, pour un système 4-périodique, il est possible de rechercher un correcteur $(4, 2, \mathbb{T}_2)$ -périodique, $u_k = K_k y_k$, $K_{k+4} = K_k$. Ce correcteur présente la structure suivante :

$$K_2 = K_1 \quad K_4 = K_3$$

Ses paramètres sont figés pendant 2 instants discrets.

III.2.1.3 Correcteurs statiques et dynamiques

Un autre choix concernant la nature du correcteur est celui de l'ordre du système de commande.

Par souci de lisibilité, les définitions présentées dans cette section sont données dans le cas certain. La représentation d'état du système en boucle ouverte est donc :

$$\Sigma : \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ z_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & B_{wk} & B_k \\ C_{zk} & D_{zwk} & D_{zuk} \\ C_k & D_{ywk} & D_k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ w_k \\ u_k \end{pmatrix} = M_k \begin{pmatrix} x_k \\ w_k \\ u_k \end{pmatrix} \quad M_{k+N} = M_k \quad (\text{III.4})$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $w_k \in \mathbb{R}^{m_w}$ le vecteur d'entrées exogènes, $z_k \in \mathbb{R}^{p_z}$, $u_k \in \mathbb{R}^m$ le vecteur d'entrées de commande et $y_k \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de sortie.

Dans le cas le plus général, un correcteur est un système dynamique interconnecté avec le système (III.4) et défini comme suit :

Définition III.1 (Retour de sortie dynamique)

Un correcteur par retour de sortie dynamique est un système dynamique dont la représentation d'état est la suivante :

$$\begin{pmatrix} x_{k+1}^K \\ u_k^K \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_k^K & B_k^K \\ C_k^K & D_k^K \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k^K \\ y_k \end{pmatrix} = K_k \begin{pmatrix} x_k^K \\ y_k \end{pmatrix} \quad (\text{III.5})$$

où $x_k^K \in \mathbb{R}^{n_K}$ est le vecteur d'état du correcteur.

Généralement, l'ordre n_K du correcteur est donné. Il est cependant possible d'intégrer le choix de l'ordre du correcteur au problème de synthèse. Se pose alors la question de la minimalité de la commande : trouver le correcteur d'ordre minimal qui permet au système bouclé d'atteindre les performances attendues. Dans le cas LTI, ce problème est abordé dans [ELG 97, SYR 94, GRI 96, MES 98].

Dans cette thèse, l'ordre du correcteur est fixé a priori. Différents cas peuvent alors être distingués :

- Correcteurs d'ordre 0 :

Il s'agit du correcteur le plus simple à implémenter puisqu'il ne fait intervenir qu'un simple gain matriciel (constant dans le cas d'un correcteur 1-périodique ou variant dans le temps dans le cas d'un correcteur N_K -périodique ou $N_K^{\mathbb{T}}$ -périodique). Un tel correcteur est appelé correcteur par retour de sortie statique :

Définition III.2 (Retour de sortie statique)

Un correcteur par retour de sortie statique est un gain matriciel K_k tel que :

$$u_k = K_k y_k \quad (\text{III.6})$$

Si les matrices $(\mathbb{1} - D_k K_k)$ sont inversibles pour tout $k \in \mathbb{N}$, le problème de retour de sortie est bien posé et la représentation d'état du système bouclé s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_k + B_k K_k (\mathbb{1} - D_k K_k)^{-1} C_k & B_{wk} + B_k K_k (\mathbb{1} - D_k K_k)^{-1} D_{ywk} \\ C_{zk} + D_{zuk} K_k (\mathbb{1} - D_k K_k)^{-1} C_k & D_{zwk} + D_{zuk} K_k (\mathbb{1} - D_k K_k)^{-1} D_{ywk} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ w_k \end{pmatrix} \quad (\text{III.7})$$

Dans le cas particulier où l'ensemble de l'état est mesurable, la sortie s'écrit : $y_k = x_k$ ($C_k = \mathbb{1}$, $D_{ywk} = 0$ et $D_k = 0$). La loi de commande est alors appelée retour d'état :

Définition III.3 (Retour d'état)

Un correcteur par retour d'état est un gain matriciel K_k tel que :

$$u_k = K_k x_k \quad (\text{III.8})$$

La représentation d'état du système bouclé s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_k + B_k K_k & B_{wk} \\ C_{zk} + D_{zuk} K_k & D_{zwk} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ w_k \end{pmatrix} \quad (\text{III.9})$$

- Correcteurs d'ordre $n_K < n$:

Lorsque un correcteur statique ne permet pas d'atteindre les spécifications désirées, un correcteur d'ordre plus élevé peut être mis en oeuvre. Si l'ordre du correcteur n_K est inférieur à celui du système n le correcteur est appelé correcteur par retour de sortie dynamique d'ordre réduit. La représentation d'état du système bouclé s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+1}^K \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_k + B_k D_k^K (\mathbb{1} - D_k D_k^K)^{-1} C_k & B_k C_k^K + B_k D_k^K (\mathbb{1} - D_k D_k^K)^{-1} D_k C_k^K \\ B_k^K (\mathbb{1} - D_k D_k^K)^{-1} C_k & A_k^K + B_k^K (\mathbb{1} - D_k D_k^K)^{-1} D_k C_k^K \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ x_k^K \end{pmatrix} \\ \quad + \begin{bmatrix} B_{wk} + B_k D_k^K (\mathbb{1} - D_k D_k^K)^{-1} D_{ywk} \\ B_k^K (\mathbb{1} - D_k D_k^K)^{-1} D_{ywk} \end{bmatrix} w_k \\ \\ z_k = \begin{bmatrix} C_{zk} + D_{zuk} D_k^K (\mathbb{1} - D_k D_k^K)^{-1} C_k & D_{zuk} D_k^K (\mathbb{1} - D_k D_k^K)^{-1} D_k C_k^K \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ x_k^K \end{pmatrix} \\ \quad + (D_{zwk} + D_{zuk} D_k^K (\mathbb{1} - D_k D_k^K)^{-1} D_{ywk}) w_k \end{array} \right. \quad (\text{III.10})$$

Dans ce cas, la condition de bien posé est que la matrice $(\mathbb{1} - D_k D_k^K)$ doit être inversible.

Même si sa complexité théorique n'est actuellement pas connue [BLO 97], le problème de stabilisation par retour de sortie statique est un problème difficile. En effet, contrairement aux méthodes d'analyse présentées au Chapitre II, il n'existe pas de formulation \mathcal{LMI} pour résoudre ce problème de synthèse.

- Correcteurs d'ordre plein $n_K = n$:

Si l'ordre du correcteur est le même que celui du système, $n_K = n$, alors K est un correcteur d'ordre plein. Ce type de correcteur fait l'objet d'une attention particulière puisque,

dans le cas LTI, le problème de synthèse associé peut être formulé de manière \mathcal{LMI} (à l'aide du changement de variable linéarisant proposé dans [SCH 97]). La synthèse de ce type de correcteur n'est cependant adaptée qu'aux systèmes d'ordre et de période relativement faibles.

Nous rappelons à présent un résultat classique montrant que ces différents problèmes peuvent se ramener à la synthèse d'un retour de sortie statique.

Lemme III.1 (Reformulation du problème de synthèse d'un retour de sortie dynamique en un problème de synthèse d'un retour de sortie statique)

Le problème de synthèse d'un retour de sortie dynamique (III.5) pour le système (III.4) est équivalent à celui de la synthèse d'un correcteur par retour de sortie statique $u_k^{aug} = K_k y_k^{aug}$ sur le système augmenté suivant :

$$\Sigma_{aug} \quad \begin{cases} x_{k+1}^{aug} = \mathcal{A}_k x_k^{aug} + \mathcal{B}_k u_k^{aug} \\ y_k^{aug} = \mathcal{C}_k x_k^{aug} + \mathcal{D}_k u_k^{aug} \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

où :

$$x_k^{aug} = \begin{pmatrix} x_k^K \\ x_k \end{pmatrix} \quad u_k^{aug} = \begin{pmatrix} x_{k+1}^K \\ u_k \end{pmatrix} \quad y_k^{aug} = \begin{pmatrix} x_k^K \\ y_k \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_k \end{bmatrix} \quad \mathcal{B}_k = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & B_k \end{bmatrix} \quad \mathcal{C}_k = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & C_k \end{bmatrix} \quad \mathcal{D}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_k \end{bmatrix}$$

Les matrices du correcteur dynamique peuvent alors être déterminées à partir de la matrice de retour de sortie statique de la manière suivante :

$$K_k = \begin{bmatrix} A_k^K & B_k^K \\ C_k^K & D_k^K \end{bmatrix}$$

III.2.1.4 Conclusion

Puisque, comme nous venons de le montrer, la synthèse d'un retour de sortie statique englobe les autres problèmes de synthèse, c'est ce problème qui est abordé dans un premier temps. Les cas particuliers du retour d'état et de sortie dynamique d'ordre plein seront abordés à part dans la Section III.4.

Certains résultats que nous allons présenter font intervenir le système dual de (III.4). Nous définissons donc, de la même manière qu'au Chapitre II, le système dual suivant :

$$\Sigma_d \quad \begin{cases} x_{k-1}^d = A'_k(\Delta) x_k^d + C'_{zk}(\Delta) w_k^d + C'_k(\Delta) u_k^d \\ z_k^d = B'_{wk}(\Delta) x_k^d + D'_{zwk}(\Delta) w_k^d + D'_{ywk}(\Delta) u_k^d \\ y_k^d = B'_k(\Delta) x_k^d + D'_{zuk}(\Delta) w_k^d + D'_k(\Delta) u_k^d \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

où $x_k^d \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état du système dual, $w_k^d \in \mathbb{R}^{p_z}$ le vecteur d'entrées exogènes, $z_k^d \in \mathbb{R}^{m_w}$, $u_k^d \in \mathbb{R}^p$ le vecteur d'entrées de commande et $y_k^d \in \mathbb{R}^m$ le vecteur de sortie.

Lemme III.2 (Dualité et synthèse)

Les systèmes bouclés $\Sigma \star K_k$ et $\Sigma_d \star K'_k$ ont les mêmes propriétés de stabilité et de performances :

$$\Sigma \star K_k \equiv (\Sigma \star K_k)_d \equiv \Sigma_d \star K'_k \quad (\text{III.13})$$

où K_k est un retour de sortie statique pour le système (III.4), $u_k = K_k y_k$, et K'_k est un retour de sortie statique pour le système dual (III.12), $u'_k = K'_k y'_k$.

Preuve

Calculons la représentation d'état du système dual bouclé par le correcteur $u'_k = K'_k y'_k$:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1}^d \\ z_k^d \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A'_k + C'_k(\mathbb{1} - K'_k D'_k)^{-1} K'_k B'_k & C'_k + C'_k(\mathbb{1} - K'_k D'_k)^{-1} K'_k D'_{zuk} \\ B'_{wk} + D'_{yw k}(\mathbb{1} - K'_k D'_k)^{-1} K'_k B'_k & D'_{zw k} + D'_{yw k}(\mathbb{1} - K'_k D'_k)^{-1} K'_k D'_{zuk} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k^d \\ w_k^d \end{pmatrix}$$

Nous obtenons bien le système dual du système original bouclé par le correcteur $u_k = K_k y_k$ (III.7). L'équivalence du point de vue de la stabilité et des performances entre ces systèmes est prouvée par les Lemmes II.6 et II.9 ■

Le résultat précédent est également valable dans le cas du retour d'état et du retour de sortie dynamique. En effet, nous avons montré que ces problèmes de synthèse peuvent être reformulés comme celui de la synthèse d'un retour de sortie statique. Ainsi, le résultat précédent peut être généralisé de la manière suivante :

$$\Sigma \star K \equiv (\Sigma \star K)_d \equiv \Sigma_d \star K_d \quad (\text{III.14})$$

comme illustré sur la Figure III.3.

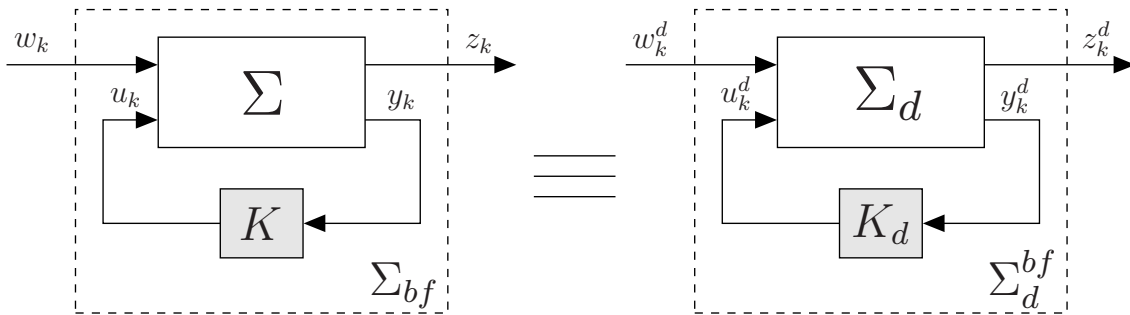


FIG. III.3 – Dualité pour le problème de synthèse

III.2.2 Propriétés attendues pour le système bouclé

Une fois le type de correcteur choisi, il s'agit de formuler les propriétés que doit conférer ce correcteur au système bouclé. Les propriétés attendues sont celles qui ont été étudiées dans le chapitre d'analyse : stabilité, performances et robustesse. Dans cette partie sont énoncés les différents problèmes de synthèse associés à ces propriétés. Une attention particulière est portée au problème de robustesse du système bouclé vis-à-vis d'incertitudes affectant le correcteur.

III.2.2.1 Stabilité robuste

La caractéristique minimale attendue des correcteurs est d'assurer la stabilité de la boucle fermée. Pour un type de correcteur donné, la stabilité de la boucle fermée n'est pas nécessairement atteignable. Ainsi, la stabilisabilité est définie relativement à la classe de correcteurs choisie. Notons \mathbb{K} l'ensemble des correcteurs (stabilisants ou non) pour une loi de commande donnée : \mathbb{K}^{re} pour le retour d'état, \mathbb{K}^{rss} pour le retour de sortie statique et \mathbb{K}^{rsd} pour le retour de sortie dynamique.

Définition III.4 (Stabilisabilité)

Un système Σ est stabilisable par une loi de commande de classe \mathbb{K} si et seulement s'il existe une valeur des paramètres du correcteur tel que le système bouclé soit stable :

$$\Sigma \text{ stabilisable} \iff \exists K \in \mathbb{K} : \Sigma \star K \text{ stable}$$

Lorsque le modèle étudié est incertain, le correcteur doit garantir la stabilité de toute réalisation du modèle. Le problème de stabilisabilité robuste se formule donc de la manière suivante :

Définition III.5 (Stabilisabilité robuste)

Un système incertain $\Sigma(\Delta)$, $\Delta \in \Delta$, est stabilisable robustement par une loi de commande de classe \mathbb{K} si et seulement s'il existe une valeur des paramètres du correcteur telle que le système bouclé soit robustement stable :

$$\Sigma(\Delta) \text{ stabilisable robustement} \iff \exists K \in \mathbb{K} : \Sigma(\Delta) \star K \text{ stable} \quad \forall \Delta \in \Delta$$

Définition III.6 (Ensemble des correcteurs robustement stabilisants)

L'ensemble des correcteurs robustement stabilisants pour une structure de commande donnée est noté $\mathbb{K}_{st} \subset \mathbb{K}$:

$$\mathbb{K}_{st} = \{ K \in \mathbb{K} : \Sigma(\Delta) \star K \text{ stable} \}$$

Ainsi, l'ensemble des correcteurs robustement stabilisants par retour d'état sera noté \mathbb{K}_{st}^{re} .

III.2.2.2 Performances robustes

Comme au Chapitre II, les problèmes de performances seront étudiés à l'aide de la norme \mathcal{H}_2 . Un raisonnement similaire peut cependant être tenu dans le cas de la norme \mathcal{H}_∞ .

Comme précédemment, les problèmes de performances robustes sont envisagés pour des systèmes incertains polytopiques de la forme :

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_k(\Delta) & B_{wk}(\Delta) & B_k(\Delta) \\ C_{zk}(\Delta) & D_{zwk}(\Delta) & D_{zuk}(\Delta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ w_k \\ u_k \end{pmatrix} = M_k(\Delta) \begin{pmatrix} x_k \\ w_k \\ u_k \end{pmatrix} \quad (\text{III.15})$$

avec :

$$M_k(\Delta) = \sum_{i=1}^L \xi_i M_k^{[i]} \quad : \quad \xi \in \Xi$$

$$\Xi = \left\{ \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_L \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^L : \sum_{i=1}^L \xi_i = 1, 0 \leq \xi_i \leq 1 \quad \forall i = 1 \cdots L \right\}$$

Pour un correcteur stabilisant $K \in \mathbb{K}_{st}$ donné, nous avons montré au Chapitre II que le calcul du coût \mathcal{H}_2 dans le pire des cas du système bouclé incertain revient à résoudre le problème max-min suivant :

$$\begin{aligned} \gamma_{pc}^2(K) &= \max_{\xi \in \Xi} \|\Sigma_{bf}(\xi)\|_2^2 \\ &= \max_{\xi \in \Xi} \min_{\mathbf{w}_k(\xi) \in \mathcal{S}^n} \gamma \\ &\quad t.q.(II.70 - II.71 - II.72) \end{aligned} \quad (III.16)$$

Ainsi, pour toute incertitude, nous avons :

$$\|\Sigma_{bf}(\xi)\|_2^2 \leq \gamma_{pc}(K)$$

Le problème de synthèse robuste performante est de calculer un correcteur minimisant $\gamma_{pc}(K)$.

Problème III.1 (Synthèse \mathcal{H}_2 dans le pire des cas)

Le calcul du correcteur optimal K^{opt} au sens du coût \mathcal{H}_2 passe par la résolution du problème de min-max-min suivant :

$$\begin{aligned} K^{opt} &= \arg \left\{ \min_{\mathbf{K} \in \mathbb{K}} \gamma_{pc}(\mathbf{K}) \right\} \\ &= \arg \left\{ \min_{\mathbf{K} \in \mathbb{K}} \max_{\xi \in \Xi} \|\Sigma_{bf}(\xi)\|_2^2 \right\} \\ &= \arg \left\{ \min_{\mathbf{K} \in \mathbb{K}} \max_{\xi \in \Xi} \min_{\mathbf{w}_k(\xi) \in \mathcal{S}^n} \gamma \right\} \\ &\quad t.q.(II.70 - II.72) \end{aligned} \quad (III.17)$$

et peut être énoncé comme suit :

Trouver $K^{opt} \in \mathbb{K}_{st}$ tel que $\gamma_{pc}(K^{opt})$ est minimum.

La valeur du coût \mathcal{H}_2 à l'optimum du Problème III.1 est défini de la manière suivante :

$$\lambda_{pc}^* = \min_{\mathbf{K} \in \mathbb{K}_{st}} \gamma_{pc}(\mathbf{K}) \quad (III.18)$$

Tout au long de ce chapitre, γ désigne un coût \mathcal{H}_2 obtenu en analyse (solution ou relaxation d'un problème d'optimisation max-min) et χ désigne un coût \mathcal{H}_2 obtenu en synthèse (solution ou relaxation d'un problème d'optimisation min-max-min).

Il n'existe pas de méthode permettant de résoudre le Problème III.1 exactement. Il est donc nécessaire de mettre en oeuvre des relaxations (correspondant à des sous-ensembles de correcteurs $\mathbb{K}_{sub} \subset \mathbb{K}_{st}$ et à une solution sous-optimale du Problème III.1) pour obtenir des solutions associées à des procédures de résolution numérique SDP.

Problème III.2 (Synthèse \mathcal{H}_2 à coût garanti)

$$K^{sub} = \arg \left\{ \min_{\mathbf{K} \in \mathbb{K}_{sub}} \max_{\xi \in \Xi} \|\Sigma_{bf}(\xi)\|_2^2 \right\} \quad (\text{III.19})$$

où \mathbb{K}_{sub} est un sous-ensemble convexe de correcteurs stabilisants et défini par un ensemble de \mathcal{LMI} s.

Soit $\chi_{sub} = \gamma(K^{sub})$. L'objectif est d'obtenir une borne χ_{sub} la plus proche possible de χ_{pc}^* .

III.2.2.3 Résilience

Dans les problèmes de synthèse que nous venons de formuler, une hypothèse implicite a été faite : le correcteur peut être implémenté avec une précision infinie. Cette hypothèse n'est pas aberrante dans le sens où l'incertitude sur le modèle du système est souvent prépondérante par rapport aux erreurs d'implémentation. Cependant, ces erreurs d'implémentation existent toujours et il est important d'en tenir compte. En effet, le correcteur est soumis à une imprécision résultant :

- des conversions analogique-numérique et numérique-analogique,
- de la mémorisation des paramètres du correcteur dans des éléments ayant une précision finie,
- des erreurs d'arrondis lors du calcul de la loi de commande,
- des erreurs intervenant lors de l'implémentation physique du correcteur. En effet, lors de la fabrication industrielle du correcteur, une certaine tolérance est admise sur la valeur de ses paramètres.

Ainsi, il est important que le correcteur admette une certaine incertitude sur ses paramètres, même si celle-ci est assez faible. Un tel correcteur est dit résilient :

Définition III.7 (Résilience)

Un correcteur K est dit résilient (ou non fragile) à une incertitude $\Delta_K \in \Delta_K$ si le système Σ bouclé par ce correcteur est robustement stable :

$$K(\Delta_K) \text{ résilient} \iff \Sigma \star K(\Delta_K) \text{ stable} \quad \forall \Delta_K \in \Delta_K$$

Conclure a posteriori (une fois le correcteur calculé) sur sa résilience se formule comme un problème d'analyse de robustesse de la boucle fermée. Ce problème ne présente donc pas de difficulté spécifique.

Un problème plus intéressant est d'intégrer ces aspects de résilience dès l'étape de synthèse. Il s'agit alors de garantir a priori la résilience du correcteur vis-à-vis d'une incertitude donnée. Ce problème s'appelle le problème de synthèse résiliente. Il est alors envisageable de calculer un correcteur présentant une tolérance plus importante sur ces paramètres. Outre les avantages cités précédemment, cette tolérance donne des marges de réglage pour l'ingénieur permettant d'ajuster les paramètres du correcteur lorsque ce dernier est utilisé sur le système réel.

Remarque

*Dans l'article *Robust, Fragile, or Optimal* [KEE 97], une discussion est menée sur le lien entre la méthode de synthèse (\mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ ...) et la fragilité du correcteur. Différents exemples semblent indiquer que les correcteurs optimaux sont souvent très fragiles. Il s'agit donc de faire un compromis entre robustesse, fragilité et optimalité. Par exemple, nous proposons des méthodes permettant de synthétiser un correcteur garantissant simultanément la stabilité du système bouclé vis-à-vis d'incertitudes paramétriques et une performance \mathcal{H}_2 dans le pire des cas et possédant certaines propriétés de résilience.*

Différentes techniques sont proposées dans la littérature pour traiter le problème de fragilité. Certaines [YEE 01, TAK 00] supposent que les incertitudes sont connues et que seule la loi de commande doit être synthétisée. D'autres [YAN 01] choisissent une structure multiplicative pour l'incertitude. La valeur de l'incertitude dépend alors des paramètres du correcteur. Dans tous les cas, la méthodologie employée pour résoudre le problème de synthèse résiliente est similaire aux méthodes de synthèse robuste.

Le problème de résilience est abordé ici selon l'approche proposée dans [PEA 02] et [PEA 05]. Il s'agit de synthétiser non plus un correcteur unique mais des ensembles de correcteurs ayant les mêmes propriétés garanties de performances pour le système bouclé. Ces ensembles de correcteurs, appelés $\{XYZ\}$ -ellipsoïdes de matrices, sont décrits en Annexe C. Tout correcteur appartenant à un $\{XYZ\}$ -ellipsoïde solution présente les mêmes propriétés vis-à-vis du système bouclé. Ainsi, tout correcteur appartenant à l'ellipsoïde présente naturellement des propriétés de résilience.

Le centre, le rayon et la géométrie étant libres, le but de cette approche est d'approximer l'ensemble de tous les correcteurs stabilisants \mathbb{K}_{st} de l'intérieur par un ensemble convexe : un $\{XYZ\}$ -ellipsoïde dont un sous-cas est la modélisation bornée en norme.

III.3 Formulations \mathcal{BMI} pour la synthèse par retour de sortie statique

Dans cette partie sont présentées différentes méthodes permettant de calculer des correcteurs par retour de sortie statique résilients. Le problème est d'abord traité pour un modèle certain dans la Section III.3.1 puis pour un modèle incertain polytopique en Section III.3.2. Dans la Section III.3.3, nous montrons comment modifier les méthodes précédentes pour répondre à différentes spécifications sur le correcteur : taille des incertitudes admissibles et structure temporelle. Enfin, l'ensemble de ces méthodes de synthèse faisant intervenir des inégalités matricielles non-linéaires, nous proposons différentes solutions pour réduire leur complexité numérique en Section III.3.4.

Pour ne pas alourdir les notations et pour alléger la présentation, les problèmes de performance ne sont pas considérés dans cette partie. En effet, l'ajout d'un critère de performances (\mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞) ne présente pas de difficulté particulière. Ces problèmes seront abordés par la suite dans le cas plus simple de la synthèse d'un retour d'état.

III.3.1 Retour de sortie statique résilient

Dans cette partie est considéré le problème de la synthèse d'un correcteur résilient K pour un système certain Σ dont la représentation d'état est :

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ u_k \end{pmatrix} = M_k \begin{pmatrix} x_k \\ u_k \end{pmatrix} \quad M_{k+N} = M_k \quad (\text{III.20})$$

Comme annoncé en Section III.2.2.3, le problème de résilience est traité par la synthèse d'ensembles ellipsoïdaux de correcteurs (voir Figure III.4).

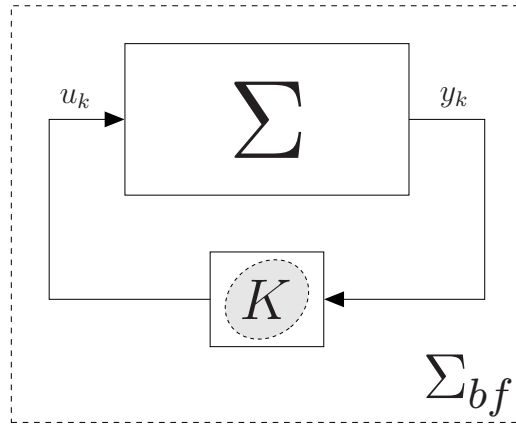


FIG. III.4 – Synthèse d'un ensemble ellipsoïdal de correcteurs stabilisants

Le Théorème III.3 présente l'extension au cas périodique de la méthode de synthèse proposée dans [PEA 02] pour les systèmes LTI.

Ce théorème permet de calculer une séquence N -périodique d'ensembles ellipsoïdaux. Tout correcteur par retour de sortie statique dont le gain à chaque instant k appartient au $k^{\text{ème}}$ ellipsoïde de cette séquence stabilise le système. Les correcteurs ainsi obtenus ne sont donc pas nécessairement périodiques.

Il est bien sûr toujours possible d'obtenir un correcteur périodique en choisissant de répéter une même séquence N -périodique de gains appartenant aux ellipsoïdes. Ceci est illustré sur un exemple dans la Section III.3.5.

Théorème III.3 (Synthèse d'ensembles ellipsoïdaux de correcteurs par retour de sortie statique) [FAR 06b]

Le système (III.20) est stabilisable par retour de sortie statique si et seulement s'il existe N matrices de Lyapunov $\{\mathbf{P}_k \in \mathcal{S}^{n+}\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ et N triplés de matrices $\{\mathbf{X}_k \in \mathcal{S}^p, \mathbf{Y}_k \in \mathbb{R}^{p \times m}, \mathbf{Z}_k \in \mathcal{S}^{m+}\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ satisfaisant simultanément les \mathcal{LMI} s :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ A_k & B_k \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} -\mathbf{P}_k & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbf{P}_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ A_k & B_k \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} C_k & D_k \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{X}_k & \mathbf{Y}_k \\ \mathbf{Y}_k' & \mathbf{Z}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_k & D_k \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{bmatrix} \quad (\text{III.21})$$

$$\forall k \in \{1 \dots N\}$$

$$\mathbf{P}_{N+1} = \mathbf{P}_1 \quad (\text{III.22})$$

et les contraintes non linéaires :

$$\mathbf{X}_k \leq \mathbf{Y}_k \mathbf{Z}_k^{-1} \mathbf{Y}_k' \quad (\text{III.23})$$

Soient des matrices $\{P_k, X_k, Y_k, Z_k\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ solutions des inégalités (III.21-III.23). Alors, les matrices $\{X_k, Y_k, Z_k\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ définissent une séquence N -périodique d'ensembles ellipsoïdaux. Toute suite de matrices $\{K_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ telle que, à chaque instant k , K_k appartient à l' $\{X_k Y_k Z_k\}$ -ellipsoïde de cette séquence définit un correcteur stabilisant.

Preuve de suffisance Supposons qu'il existe N quadruplés $\{P_k, X_k, Y_k, Z_k\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ tels que les inégalités (III.21-III.23) sont satisfaites pour tout $k \in \{1 \dots N\}$. Multiplions les inégalités (III.21) à gauche par le vecteur $(x_k' \ u_k')$ et à droite par son transposé :

$$\begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix}' \begin{bmatrix} -P_k & 0 \\ 0 & P_{k+1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} y_k \\ u_k \end{pmatrix}' \begin{bmatrix} X_k & Y_k \\ Y_k' & Z_k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_k \\ u_k \end{pmatrix} \quad (\text{III.24})$$

Soit la fonction candidate de Lyapunov $V_k(x_k) = x_k' P_k x_k$. L'inégalité (III.24) peut s'écrire :

$$V_{k+1}(x_{k+1}) - V_k(x_k) < \begin{pmatrix} y_k \\ u_k \end{pmatrix}' \begin{bmatrix} X_k & Y_k \\ Y_k' & Z_k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_k \\ u_k \end{pmatrix}$$

Considérons un correcteur K_k , $u_k = K_k y_k$, appartenant à l' $\{X_k Y_k Z_k\}$ -ellipsoïde. D'après (C.1), il est alors possible d'écrire :

$$V_{k+1}(x_{k+1}) - V_k(x_k) < y_k' \begin{bmatrix} \mathbb{1} & K_k' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k & Y_k \\ Y_k' & Z_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ K_k \end{bmatrix} y_k \leq 0$$

Ainsi, $V_{k+1}(x_{k+1}) - V_k(x_k) < 0$. $V_k(x_k)$ est donc une fonction de Lyapunov prouvant la stabilité du système bouclé. ■

Preuve de nécessité Soit une loi de commande de la forme $u_k = \mathbf{K}_k y_k$. L'équation de sortie du système (III.20) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_k & -\mathbb{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_k & D_k \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ u_k \end{pmatrix} = 0$$

D'après le lemme de Lyapunov périodique (II.3), la stabilité implique l'existence d'une fonction de Lyapunov $V_k(x_k) = x_k' \mathbf{P}_k x_k$, $\mathbf{P}_k > 0$, $\mathbf{P}_{k+N} = \mathbf{P}_k$ telle que $V_{k+1}(x_{k+1}) - V_k(x_k) < 0$. Pour le système bouclé, ceci s'écrit comme une inégalité quadratique :

$$\begin{pmatrix} x_k \\ u_k \end{pmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ A_k & B_k \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} -\mathbf{P}_k & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ A_k & B_k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ u_k \end{pmatrix} < 0$$

devant être vérifiée sous la contrainte suivante :

$$\forall \begin{pmatrix} x_k \\ u_k \end{pmatrix} \neq 0 : \begin{bmatrix} \mathbf{K}_k & -\mathbb{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_k & D_k \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ u_k \end{pmatrix} = 0$$

Par application du Lemme de Finsler pour chaque $k \in \{1 \dots N\}$, les équations précédentes impliquent l'existence de N scalaires positifs τ_k tels que :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ A_k & B_k \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} -\mathbf{P}_k & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ A_k & B_k \end{bmatrix} < \tau_k \begin{bmatrix} C_k & D_k \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_k \\ -\mathbb{1} \end{bmatrix} [\mathbf{K}_k \quad -\mathbb{1}] \begin{bmatrix} C_k & D_k \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}$$

Les inégalités précédentes sont également vraies avec $\tau = \max(\tau_k)$. En posant $\mathbf{P}_k = \frac{1}{\tau} \mathbf{P}_k$, il est alors possible d'écrire :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ A_k & B_k \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} -\mathbf{P}_k & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ A_k & B_k \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} C_k & D_k \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_k \\ -\mathbb{1} \end{bmatrix} [\mathbf{K}_k \quad -\mathbb{1}] \begin{bmatrix} C_k & D_k \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}$$

Finalement, l'inégalité (III.21) est obtenue en posant $\mathbf{X}_k = \mathbf{K}'_k \mathbf{K}_k$, $\mathbf{Y}_k = -\mathbf{K}'_k$ et $\mathbf{Z}_k = \mathbb{1}$.

■

Le problème défini par les inégalités (III.21-III.23) est non convexe. Il fait intervenir N contraintes \mathcal{LMT} (III.21-III.22) et N contraintes non-linéaires (III.23). Dans [PEA 02], la non-linéarité introduite par les inégalités (III.23) est traitée à l'aide d'un algorithme basé sur la méthode du cône complémentaire [ELG 97]. Cette méthode permet de ramener un problème \mathcal{LMT} avec une contrainte matricielle non-linéaire à une minimisation d'un objectif scalaire non-linéaire sous des contraintes \mathcal{LMT} . La non-linéarité apparaissant dans l'objectif est alors traitée par un algorithme de type *Frank and Wolfe* ne présentant pas de garantie de convergence.

III.3.2 Retour de sortie statique résilient et robuste

Nous allons voir dans cette partie comment la méthode de synthèse résiliente présentée dans la section précédente peut être modifiée pour prendre en compte une incertitude paramétrique affectant le système à corriger. Comme au Chapitre II, l'incertitude affectant le système est de type polytopique. La représentation d'état du système en boucle ouverte est :

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_k(\Delta) & B_k(\Delta) \\ C_k(\Delta) & D_k(\Delta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ u_k \end{pmatrix} = M_k(\Delta) \begin{pmatrix} x_k \\ w_k \\ u_k \end{pmatrix} \quad (\text{III.25})$$

avec :

$$M_k(\Delta) = \sum_{i=1}^L \xi_i M_k^{[i]} \quad : \quad \xi \in \Xi$$

$$\Xi = \left\{ \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_L \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^L \quad : \quad \sum_{i=1}^L \xi_i = 1, \quad 0 \leq \xi_i \leq 1 \quad \forall i = 1 \dots L \right\}$$

Le problème de synthèse que nous cherchons à résoudre est donc celui de la synthèse d'ensembles ellipsoïdaux de correcteurs pour un système incertain polytopique (voir Figure III.5).

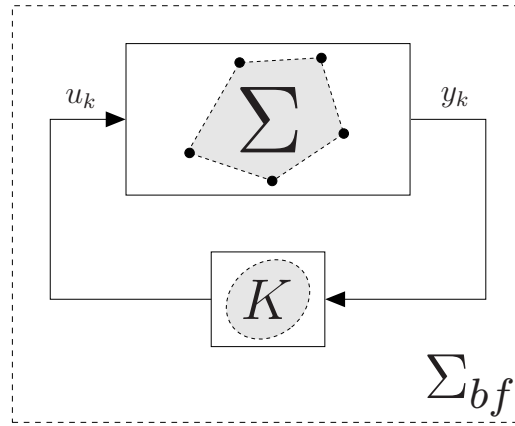


FIG. III.5 – Synthèse d'un ensemble ellipsoïdal de correcteurs stabilisant robustement un système polytopique

Comme nous l'avons vu au Chapitre II, le résultat du Théorème III.3 peut être étendu au cas incertain en considérant des fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres de la forme suivante :

$$V_k(x_k, \xi) = x_k' P_k(\xi) x_k$$

Comme en analyse, l'utilisation de ce type de fonction de Lyapunov transforme les \mathcal{LMI} s (III.21-III.22) en inégalités matricielles non-linéaires. Pour conserver une formulation faisant apparaître une partie des contraintes sous forme \mathcal{LMI} et une autre partie sous forme d'inégalités non-linéaires, il est nécessaire de faire intervenir certaines relaxations. Une première relaxation consiste à utiliser une fonction de Lyapunov indépendante des paramètres de la forme :

$$V_k(x_k, \xi) = V_k(x_k) = x_k' P_k x_k \quad (\text{III.26})$$

Un tel choix de fonction de Lyapunov permet d'obtenir le théorème suivant :

Théorème III.4 (Synthèse robuste d'ensemble ellipsoïdaux de correcteurs par retour de sortie statique - Fonction de Lyapunov quadratique)

Le système (III.25) est stabilisable par retour de sortie statique s'il existe N matrices de Lyapunov $\{\mathbf{P}_k\}_{k \in \{1 \dots N\}}$, N triplés de matrices $\{\mathbf{X}_k \in \mathcal{S}^p, \mathbf{Y}_k \in \mathbb{R}^{p \times m}, \mathbf{Z}_k \in \mathcal{S}^{m+}\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ et N matrices $\{\mathbf{H}_k \in \mathbb{R}^{(n+m+p) \times p}\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ satisfaisant simultanément les \mathcal{LMI} s suivantes ($k \in \{1 \dots N\}, i \in \{1 \dots L\}$) :

$$\begin{bmatrix} A_k^{[i]'} \mathbf{P}_{k+1} A_k^{[i]} - \mathbf{P}_k & A_k^{[i]'} \mathbf{P}_{k+1} B_k^{[i]} & 0 \\ B_k^{[i]'} \mathbf{P}_{k+1} A_k^{[i]} & B_k^{[i]'} \mathbf{P}_{k+1} B_k^{[i]} - \mathbf{Z}_k & -\mathbf{Y}_k' \\ 0 & -\mathbf{Y}_k & \mathbf{X}_k \end{bmatrix} + \mathcal{S} \left\{ \mathbf{H}_k \begin{bmatrix} -C_k^{[i]} & -D_k^{[i]} & \mathbf{1}_p \end{bmatrix} \right\} < 0 \quad (\text{III.27})$$

$$\mathbf{P}_{N+1} = \mathbf{P}_1 \quad (\text{III.28})$$

et les contraintes non linéaires ($k \in \{1 \dots N\}$) :

$$\mathbf{X}_k \leq \mathbf{Y}_k \mathbf{Z}_k^{-1} \mathbf{Y}_k' \quad (\text{III.29})$$

Soient des matrices $\{P_k, X_k, Y_k, Z_k, H_k\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ solutions des inégalités (III.27-III.29). Alors, les matrices $\{X_k, Y_k, Z_k\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ définissent une séquence N -périodique d'ensemble ellipsoïdaux. Toute suite de matrices $\{K_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ telle que, à chaque instant k , K_k appartient à l' $\{X_k Y_k Z_k\}$ -ellipsoïde de cette séquence définit un correcteur stabilisant robustement le système.

Preuve

Appliquons le complément de Schur aux inégalités (III.27), nous obtenons ($k \in \{1 \dots N\}$, $i \in \{1 \dots L\}$) :

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{P}_k & 0 & 0 & A_k^{[i]'} \mathbf{P}_{k+1} \\ 0 & -\mathbf{Z}_k & -\mathbf{Y}'_k & B_k^{[i]'} \mathbf{P}_{k+1} \\ 0 & -\mathbf{Y}_k & \mathbf{X}_k & 0 \\ \mathbf{P}_{k+1} A_k^{[i]} & \mathbf{P}_{k+1} B_k^{[i]} & 0 & -\mathbf{P}_{k+1} \end{bmatrix} + \mathcal{S} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k \\ \mathbf{0}_{n \times p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -C_k^{[i]} & -D_k^{[i]} & \mathbb{1}_p & \mathbf{0}_{p \times n} \end{bmatrix} \right\} < 0 \quad (\text{III.30})$$

Supposons que les matrices $\{P_k, X_k, Y_k, Z_k, H_k\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ sont solutions de (III.30) et (III.28-III.29). Alors, le calcul des combinaisons convexes sur les N sommets permet d'écrire pour tout $k \in \{1 \dots N\}$ et tout $\xi \in \Xi$:

$$\begin{bmatrix} -P_k & 0 & 0 & A'_k(\xi) P_{k+1} \\ 0 & -Z_k & -Y'_k & B'_k(\xi) P_{k+1} \\ 0 & -Y_k & X_k & 0 \\ P_{k+1} A_k(\xi) & P_{k+1} B_k(\xi) & 0 & -P_{k+1} \end{bmatrix} + \mathcal{S} \left\{ \begin{bmatrix} H_k \\ \mathbf{0}_{n \times p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -C_k(\xi) & -D_k(\xi) & \mathbb{1}_p & \mathbf{0}_{p \times n} \end{bmatrix} \right\} < 0$$

En multipliant les inégalités précédentes à gauche par le vecteur $(x'_k \ u'_k \ y'_k \ x'_{k+1})$ et à droite par son transposé, l'inégalité suivante est obtenue :

$$\begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix}' \begin{bmatrix} -P_k & 0 \\ 0 & P_{k+1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} y_k \\ u_k \end{pmatrix}' \begin{bmatrix} X_k & Y_k \\ Y'_k & Z_k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_k \\ u_k \end{pmatrix} \quad (\text{III.31})$$

Il s'agit de l'inégalité (III.24). Ainsi, $V_k(x_k) = x'_k P_k x_k$ est une fonction de Lyapunov prouvant la stabilité du système bouclé. ■

Les variables $\{\mathbf{H}_k\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ apparaissant dans le Théorème III.4 permettent de découpler les variables du correcteur $\{X_k, Y_k, Z_k\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ de celles du système. Ce découplage permet d'obtenir la formulation \mathcal{LMT} des inégalités (III.27-III.28).

Comme en analyse, le pessimisme introduit par l'utilisation d'une fonction de Lyapunov indépendante des paramètres de la forme (III.26) peut être réduit en considérant des fonctions de Lyapunov polytopiques de la forme :

$$V_k(x_k, \xi) = x'_k P_k(\xi) x_k \quad (\text{III.32})$$

où :

$$P_k(\xi) = \sum_{i=1}^L \xi_i P_k^{[i]} \quad (\text{III.33})$$

Ce choix de fonction de Lyapunov permet de formuler la condition suffisante de stabilité suivante :

Théorème III.5 (Synthèse robuste d'ensemble ellipsoïdaux de correcteurs par retour de sortie statique - Fonction de Lyapunov polytopique)

Le système (III.25) est stabilisable par retour de sortie statique s'il existe $N \cdot L$ matrices de Lyapunov $\{\mathbf{P}_k^{[i]}\}_{k \in \{1 \dots N\}, i \in \{1 \dots L\}}$, N triplés de matrices $\{\mathbf{X}_k \in \mathcal{S}^p, \mathbf{Y}_k \in \mathbb{R}^{p \times m}, \mathbf{Z}_k \in \mathcal{S}^{m+p}\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ et N matrices $\{\mathbf{H}_k \in \mathbb{R}^{(2n+m+p) \times (n+p)}\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ satisfaisant simultanément les \mathcal{LMI} s suivantes ($k \in \{1 \dots N\}, i \in \{1 \dots L\}$) :

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{P}_k^{[i]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_{k+1}^{[i]} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{X}_k & -\mathbf{Y}_k \\ 0 & 0 & -\mathbf{Y}'_k & -\mathbf{Z}_k \end{bmatrix} + \mathcal{S} \left\{ \mathbf{H}_k \begin{bmatrix} C_k^{[i]} & 0 & -\mathbf{1} & D_k^{[i]} \\ A_k^{[i]} & -\mathbf{1} & 0 & B_k^{[i]} \end{bmatrix} \right\} < 0 \quad (\text{III.34})$$

$$\mathbf{P}_{N+1}^{[i]} = \mathbf{P}_1^{[i]} \quad (\text{III.35})$$

et les contraintes non linéaires ($k \in \{1 \dots N\}$) :

$$\mathbf{X}_k \leq \mathbf{Y}_k \mathbf{Z}_k^{-1} \mathbf{Y}_k' \quad (\text{III.36})$$

Soient des matrices $\{P_k^{[i]}\}_{k \in \{1 \dots N\}, i \in \{1 \dots L\}}$ et $\{X_k, Y_k, Z_k, H_k\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ solutions des inégalités (III.34-III.36). Alors, les matrices $\{X_k, Y_k, Z_k\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ définissent une séquence N -périodique d'ensembles ellipsoïdaux. Toute suite de matrices $\{K_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ telle que, à chaque instant k , K_k appartient à l' $\{X_k Y_k Z_k\}$ -ellipsoïde de cette séquence définit un correcteur stabilisant robustement le système.

Preuve

Supposons que les matrices $\{P_k^{[i]}\}_{k \in \{1 \dots N\}, i \in \{1 \dots L\}}$ et $\{X_k, Y_k, Z_k, H_k\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ sont des solutions de (III.34-III.36). Alors, le calcul des combinaisons convexes sur les N sommets permet d'écrire pour $k \in \{1 \dots N\}$ et tout $\xi \in \Xi$:

$$\begin{bmatrix} -P_k(\xi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{k+1}(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -X_k & -Y_k \\ 0 & 0 & -Y'_k & -Z_k \end{bmatrix} + \mathcal{S} \left\{ H_k \begin{bmatrix} C_k(\xi) & 0 & -\mathbf{1} & D_k(\xi) \\ A_k(\xi) & -\mathbf{1} & 0 & B_k(\xi) \end{bmatrix} \right\} < 0$$

Multiplions les inégalités précédentes à gauche par le vecteur $(x'_k \ x'_{k+1} \ y'_k \ u'_k)$ et à droite par son transposé :

$$\begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix}' \begin{bmatrix} -P_k(\xi) & 0 \\ 0 & P_{k+1}(\xi) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} y_k \\ u_k \end{pmatrix}' \begin{bmatrix} X_k & Y_k \\ Y'_k & Z_k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_k \\ u_k \end{pmatrix} \quad (\text{III.37})$$

Il s'agit de l'inégalité (III.24). Ainsi, $V_k(x_k, \xi) = x'_k P_k(\xi) x_k$ est une fonction de Lyapunov dépendant des paramètres prouvant la stabilité du système bouclé. ■

Le Théorème III.5 fournit des résultats moins pessimistes que le Théorème III.4. Il fait cependant intervenir davantage de matrices de Lyapunov ($N \cdot L$ au lieu de N) et les variables additionnelles $\{\mathbf{H}_k\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ sont de taille plus importante : $(2n+m+p) \times (n+p)$ au lieu de $(n+m+p) \times p$. Lorsque le problème est de grande dimension, il peut donc être préférable d'utiliser le Théorème III.4.

III.3.3 Spécifications additionnelles sur le correcteur

Nous montrons dans cette partie comment modifier les méthodes de synthèse que nous venons de présenter afin de prendre en compte différentes spécifications sur le correcteur. Ces spécifications concernent la taille des ensembles de correcteurs synthétisés ainsi que leur structure temporelle.

III.3.3.1 Exigences a-priori sur la taille des ensembles synthétisés

Dans les Théorèmes III.3, III.4 et III.5, il n'existe pas de contrainte sur la taille des ellipsoïdes synthétisés. Cette taille peut simplement être vérifiée a posteriori à l'aide du corollaire suivant.

Corollaire III.6 (Détermination a posteriori de la résilience du correcteur vis-à-vis d'une incertitude additive)

Soient les matrices $\{X_k, Y_k, Z_k\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ solutions des inégalités (III.21-III.23), (III.27-III.29) ou (III.34-III.36). Alors le correcteur central $\{K_k^0 = -Z_k^{-1}Y_k'\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ est résilient à une incertitude additive bornée en norme Δ_k^K telle que :

$$K_k = K_k^0 + \Delta_k^K \quad \Delta_k^{K'} \Delta_k^K \leq \bar{\delta}_k^2 \mathbb{1} \quad (\text{III.38})$$

avec :

$$\bar{\delta}_k = \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(R_k)}{\lambda_{\max}(Z_k)}} \quad (\text{III.39})$$

où R_k et Z_k sont le rayon et la géométrie de l' $\{X_k Y_k Z_k\}$ -ellipsoïde.

Preuve

Soit un correcteur $\{K_k\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ satisfaisant (III.38-III.39). Il est possible d'écrire :

$$(K_k - K_k^0)' Z_k (K_k - K_k^0) \leq \lambda_{\max}(Z_k) (K_k - K_k^0)' (K_k - K_k^0) \leq \lambda_{\min}(R_k) \leq R_k$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$(K_k - K_k^0)' Z_k (K_k - K_k^0) \leq R_k$$

Ainsi, le correcteur K_k appartient à chaque instant à l' $\{X_k Y_k Z_k\}$ -ellipsoïde de rayon R_k et de centre K_k^0 . ■

Il est cependant possible d'aller plus loin en formulant des exigences a priori sur la taille des ensembles. Ces exigences se traduisent par une modification des contraintes non-linéaires (III.23), (III.29) ou (III.36) de la manière suivante :

Corollaire III.7 (Exigence a priori sur la résilience du correcteur vis-à-vis d'une incertitude additive bornée en norme)

S'il existe une solution au problème de faisabilité constitué par les \mathcal{LMT} s (III.21-III.22), (III.27-III.28) ou (III.34-III.35) avec $Z_k = \mathbb{1} \forall k \in \{1 \dots N\}$, $\forall i \in \{1 \dots L\}$ et par les contraintes non linéaires ($k \in \{1 \dots N\}$) :

$$0 < \rho \mathbb{1} \leq \mathbf{Y}_k \mathbf{Y}_k' - \mathbf{X}_k \quad (\text{III.40})$$

alors le correcteur central est résilient à une incertitude additive Δ_k^K telle que :

$$K_k = K_k^0 + \Delta_k^K \quad \Delta_k^{K'} \Delta_k^K \leq \rho \mathbb{1} \quad (\text{III.41})$$

Preuve

La preuve est obtenue par le Lemme III.6 dans le cas où $Z_k = \mathbb{1} \forall k \in \{1 \cdots N\}$. ■

Corollaire III.8 (Exigence a priori sur la résilience du correcteur vis-à-vis d'une incertitude multiplicative)

S'il existe une solution au problème de faisabilité constitué par les \mathcal{LMIs} (III.21-III.22), (III.27-III.28) ou (III.34-III.35) avec $Z_k = \mathbb{1} \forall k \in \{1 \cdots N\}$, $\forall i \in \{1 \cdots L\}$) et par les contraintes non linéaires ($k \in \{1 \cdots N\}$) :

$$\mathbf{X}_k \leq (1 - \bar{\delta}^2) \mathbf{Y}_k \mathbf{Y}_k' \quad (\text{III.42})$$

alors le correcteur central est résilient à une incertitude multiplicative telle que :

$$K_k = K_k^0 + \delta K_k^0 \quad |\delta| \leq \bar{\delta} \quad (\text{III.43})$$

Preuve

La preuve est directe en écrivant que la condition (C.2) est vraie pour tout $K_k = K_k^0 + \delta K_k^0$ où la valeur absolue du scalaire δ est bornée par $\bar{\delta}$. ■

Les contraintes non-linéaires (III.40) ou (III.42) définissent une taille minimale pour les incertitudes admissibles et donc pour la taille des ensembles de correcteurs synthétisés. Les $\{X_k Y_k Z_k\}$ -ellipsoïdes synthétisés seront toujours plus grands que l'ensemble défini par l'incertitude Δ_K affectant le correcteur central :

$$K_k^0(\Delta_K) \subset \{X_k Y_k Z_k\}\text{-ellipsoïde}$$

III.3.3.2 Synthèse de correcteurs structurés

L'extension des Théorèmes III.3, III.4 et III.5 à la synthèse d'un correcteur (N_1, N_2, \mathbb{T}) -périodique structuré ne présente pas de difficulté particulière. Il suffit en effet d'imposer la structure temporelle choisie aux matrices du correcteur comme le montre le corollaire suivant.

Corollaire III.9 (Synthèse d'ensemble ellipsoïdaux de correcteurs structurés par retour de sortie statique)

Supposons qu'il existe une solution au problème de faisabilité associé aux inégalités (III.21-III.23), (III.27-III.29) ou (III.34-III.36) avec :

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{X}_{\mathbb{T}(k)} \quad , \quad \mathbf{Y}_k = \mathbf{Y}_{\mathbb{T}(k)} \quad , \quad \mathbf{Z}_k = \mathbf{Z}_{\mathbb{T}(k)} \quad \forall k \in \{1 \cdots N\} \quad (\text{III.44})$$

où $\mathbb{T}(k)$ est une fonction définissant la structure temporelle choisie pour le correcteur (voir Section III.2.1.2).

Alors tout correcteur (N_1, N_2, \mathbb{T}) -périodique structuré dont les matrices K_k appartiennent à chaque instant à l'ellipsoïde défini par les matrices $\{\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k, \mathbf{Z}_k\}$ est un correcteur stabilisant (robustement) le système.

Remarquons que le découplage entre les matrices $\{\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k, \mathbf{Z}_k\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ définissant le correcteur et les matrices de Lyapunov $\{\mathbf{P}_k\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ permet de préserver la recherche de fonctions de Lyapunov périodiques non-structurées.

Outre les avantages cités dans la Section III.2.1.2, la synthèse d'un correcteur structuré fait intervenir moins de variables de décision. Selon la structure temporelle choisie, le nombre de matrices $\{\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k, \mathbf{Z}_k\}$ définissant le correcteur ainsi que le nombre de contraintes non linéaires peuvent être considérablement réduits.

Par ailleurs, le Corollaire III.9 peut également être utilisé pour résoudre le problème de synthèse d'un correcteur N_K -périodique pour un système N -périodique lorsque $N_K \neq N$. En effet, il est montré dans la Section III.2.1.2 que ce problème peut être résolu par la synthèse d'un correcteur $(N_{bf}, N_K, \mathbb{T}_1)$ -périodique structuré où \mathbb{T}_1 est la fonction temporelle définie en (III.2).

III.3.4 Réduction de la complexité numérique

Les inégalités matricielles apparaissant dans les Théorèmes III.3, III.4 et III.5 sont non-linéaires. Une méthode de résolution de ces inégalités est proposée en Section III.3.1. Cette partie présente différentes méthodes permettant de réduire la complexité numérique associée à ces inégalités.

III.3.4.1 Formulations \mathcal{BMI}

Une première méthode pour réduire la complexité numérique [FAR 06b] consiste à fixer la valeur de la géométrie $\mathbf{Z}_k = \mathbf{1}$ dans les inégalités matricielles (III.21-III.23), (III.27-III.29) ou (III.34-III.36). Le problème devient alors \mathcal{BMI} et peut être traité à l'aide de solveurs dédiés tels que PENBMI [KOC 04] interfacé avec MATLAB[®] par YALMIP [LöF 01]. Ces solveurs ne présentent pas de garantie de convergence mais se montrent efficaces en pratique [FAR 06b].

Le fait de choisir a priori la géométrie n'est pas un choix restrictif au sens où, s'il existe une solution pour $\mathbf{Z}_k \neq \mathbf{1}$, alors il existe une solution pour $\mathbf{Z}_k = \mathbf{1}$. L'ellipsoïde trouvé étant cependant de plus petite dimension.

Lemme III.10

S'il existe une solution au problème de faisabilité associé aux \mathcal{LMIs} (III.21-III.22), (III.27-III.28) ou (III.34-III.35) et aux inégalités non-linéaires (III.23), (III.29) ou (III.36), alors il existe une solution au problème de faisabilité associé aux mêmes \mathcal{LMIs} avec $\mathbf{Z}_k = \mathbf{1} \forall k \in \{1 \dots N\}$ et aux \mathcal{BMIs} ($\forall k \in \{1 \dots N\}$) :

$$\mathbf{X}_k \leq \mathbf{Y}_k \mathbf{Y}_k' \quad (\text{III.45})$$

Preuve

La preuve est faite uniquement pour le Théorème III.3. La même démarche peut cependant être appliquée aux Théorèmes III.4 et III.5.

Supposons qu'il existe N quadruplés $\{P_k, X_k, Y_k, Z_k\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ tels que les inégalités (III.21-III.23) sont satisfaites pour tout $k \in \{1 \dots N\}$. Soit λ la plus grande valeur propre

des matrices symétriques définies positives Z_k :

$$\lambda = \max_{k \in \{1 \dots N\}} \lambda_{\max}(Z_k) > 0$$

Posons :

$$\begin{aligned} \bar{X}_k &= \frac{1}{\lambda} (X_k - Y_k Z_k^{-1} Y_k' + \lambda Y_k Z_k^{-1} Y_k') \\ \bar{Y}_k &= Y_k Z_k^{-1} \\ \bar{P}_k &= \frac{1}{\lambda} P_k \end{aligned}$$

Alors, \bar{X}_k et \bar{Y}_k vérifient ($\forall k \in \{1 \dots N\}$) :

$$\frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} X_k & Y_k \\ Y_k' & Z_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{X}_k & \bar{Y}_k \\ \bar{Y}_k' & \mathbb{1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} Y_k Z_k^{-1} \\ \mathbb{1} \end{bmatrix} (Z - \lambda \mathbb{1}) \begin{bmatrix} Z_k^{-1} Y_k' & \mathbb{1} \end{bmatrix} \leq 0$$

Multiplions les \mathcal{LMI} s (III.21) par $1/\lambda$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ A_k & B_k \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} -\bar{P}_k & 0 \\ 0 & \bar{P}_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ A_k & B_k \end{bmatrix} &= \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ A_k & B_k \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} -P_k & 0 \\ 0 & P_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ A_k & B_k \end{bmatrix} \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} C_k & D_k \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X_k & Y_k \\ Y_k' & Z_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_k & D_k \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} C_k & D_k \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \bar{X}_k & \bar{Y}_k \\ \bar{Y}_k' & \mathbb{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_k & D_k \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De plus, les contraintes non-linéaires s'écrivent :

$$\bar{X}_k - \bar{Y}_k \bar{Y}_k' = \frac{1}{\lambda} (X_k - Y_k Z_k^{-1} Y_k') \leq 0$$

Ainsi, les N quadruplés $\{\bar{P}_k, \bar{X}_k, \bar{Y}_k, \bar{Z}_k = \mathbb{1}\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ vérifient les inégalités (III.21-III.23) pour tout $k \in \{1 \dots N\}$. ■

Remarque Une interprétation géométrique de ce lemme peut être donnée. Supposons qu'il existe une séquence d' $\{X_k Y_k Z_k\}$ -ellipsoïdes de correcteurs stabilisant le système. Alors, il est toujours possible de trouver une séquence de sphères ($\{\bar{X}_k \bar{Y}_k \mathbb{1}\}$ -ellipsoïdes) de correcteurs stabilisants contenues dans ces ellipsoïdes. Ces sphères ont le même centre que les ellipsoïdes mais sont de dimension plus faible (voir aussi Corollaire III.6).

III.3.4.2 Formulation duale

Une autre méthode permettant de diminuer la complexité numérique consiste à réduire la taille des contraintes non-linéaires (III.23), (III.29) ou (III.36). Ceci est possible lorsque le nombre d'entrée est inférieur au nombre de sorties $m < p$ en utilisant la formulation duale des Théorèmes III.3, III.4 et III.5.

A titre d'exemple, nous présentons ici la version duale du Théorème III.3. La même méthodologie peut être employée pour obtenir les versions duales des Théorèmes III.4 et III.5.

Corollaire III.11 (Synthèse d'ensemble ellipsoïdaux de correcteurs par retour de sortie statique - Formulation duale)

Le système (III.20) est stabilisable par retour de sortie statique si et seulement s'il existe N matrices de Lyapunov $\{\mathbf{W}_k \in \mathcal{S}^{n^+}\}_{0 \in \{1 \dots N-1\}}$ et N triplés de matrices $\{\mathbf{X}_k^d \in \mathcal{S}^m, \mathbf{Y}_k^d \in \mathbb{R}^{m \times p}, \mathbf{Z}_k^d \in \mathcal{S}^{p^+}\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ satisfaisant simultanément les \mathcal{LMI} s :

$$\begin{bmatrix} A_k & \mathbb{1} \\ C_k & \mathbb{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{k-1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & -\mathbf{W}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_k & \mathbb{1} \\ C_k & \mathbb{0} \end{bmatrix}' < \begin{bmatrix} B_k & \mathbb{0} \\ D_k & \mathbb{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_k^d & \mathbf{Y}_k^d \\ \mathbf{Y}_k^{d'} & \mathbf{Z}_k^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_k & \mathbb{0} \\ D_k & \mathbb{1} \end{bmatrix}' \quad (\text{III.46})$$

$$\forall k \in \{1 \dots N\}$$

$$\mathbf{W}_N = \mathbf{W}_0 \quad (\text{III.47})$$

et les contraintes non linéaires :

$$\mathbf{X}_k^d \leq \mathbf{Y}_k^d \mathbf{Z}_k^{d-1} \mathbf{Y}_k^{d'} \quad (\text{III.48})$$

Soient des matrices $\{W_k\}_{k \in \{0 \dots N-1\}}$ et $\{X_k^d, Y_k^d, Z_k^d\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ solutions des inégalités (III.46-III.48). Alors, les matrices $\{X_k^d, Y_k^d, Z_k^d\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ définissent une séquence N -périodique d'ensembles ellipsoïdaux. Toute suite de matrices $\{K_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ telle que, à chaque instant k , K_k' appartient à l' $\{X_k^d Y_k^d Z_k^d\}$ -ellipsoïde de cette séquence définit un correcteur stabilisant.

Preuve de suffisance Supposons qu'il existe N matrices $\{W_k\}_{k \in \{0 \dots N-1\}}$ et N triplés $\{X_k^d, Y_k^d, Z_k^d\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ tels que les inégalités (III.46-III.48) sont satisfaites pour tout $k \in \{1 \dots N\}$. Multiplions les inégalités (III.46) à gauche par le vecteur $[x_k^{d'} \ u_k^{d'}]$ et à droite par son transposé :

$$\begin{bmatrix} x_{k-1}^d \\ x_k^d \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} W_{k-1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & W_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-1}^d \\ x_k^d \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} y_k^d \\ u_k^d \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X_k & Y_k \\ Y_k' & Z_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k^d \\ u_k^d \end{bmatrix} \quad (\text{III.49})$$

Soit la fonction candidate de Lyapunov $V_k(x_k) = x_k^d W_k x_k^d$. L'inégalité (III.49) peut s'écrire :

$$V_{k-1}(x_{k-1}^d) - V_k(x_k^d) < \begin{bmatrix} y_k^d \\ u_k^d \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X_k & Y_k \\ Y_k' & Z_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k^d \\ u_k^d \end{bmatrix}$$

Considérons un correcteur $K_k', u_k^d = K_k' y_k^d$, appartenant à l' $\{X_k^d Y_k^d Z_k^d\}$ -ellipsoïde. D'après (C.1), il est alors possible d'écrire :

$$V_{k-1}(x_{k-1}^d) - V_k(x_k^d) < y_k^{d'} \begin{bmatrix} \mathbb{1} & K_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k^d & Y_k^d \\ Y_k^{d'} & Z_k^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ K_k' \end{bmatrix} y_k^d \leq 0$$

Ainsi, $V_{k-1}(x_{k-1}^d) - V_k(x_k^d) < 0$. $V_k(x_k^d)$ est une fonction de Lyapunov prouvant la stabilité du système dual. L'équivalence du point de vue de la stabilité entre le système et son dual présentée dans le Lemme III.2 conclut la preuve. ■

Ainsi, il est préférable d'utiliser le Corollaire III.11 par rapport au Corollaire III.3 lorsque $m < p$. En effet, les N contraintes non linéaires (III.48) sont de dimension m alors que les contraintes (III.23) sont de dimension p . Les algorithmes de résolution numérique sont alors plus efficaces en pratique.

III.3.5 Exemple numérique

Soit le système 3-périodique certain défini dans l'espace d'état par les matrices :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0.95 & 0.49 & 0.46 \\ 0.23 & 0.89 & 0.02 \\ 0.61 & 0.76 & 0.82 \end{bmatrix} & A_2 &= \begin{bmatrix} 0.06 & 0.01 & 0.20 \\ 0.35 & 0.14 & 0.60 \\ 0.81 & 0.20 & 0.27 \end{bmatrix} & A_3 &= \begin{bmatrix} 0.84 & 0.38 & 0.71 \\ 0.02 & 0.83 & 0.43 \\ 0.68 & 0.50 & 0.30 \end{bmatrix} \\
 B_1 &= \begin{bmatrix} 0.44 & 0.92 \\ 0.62 & 0.74 \\ 0.79 & 0.18 \end{bmatrix} & B_2 &= \begin{bmatrix} 0.20 & 0.45 \\ 0.02 & 0.93 \\ 0.75 & 0.47 \end{bmatrix} & B_3 &= \begin{bmatrix} 0.19 & 0.30 \\ 0.19 & 0.54 \\ 0.68 & 0.15 \end{bmatrix} \\
 C_1 &= [0.41 & 0.94 & 0.92] & C_2 &= [0.42 & 0.85 & 0.53] & C_3 &= [0.70 & 0.38 & 0.86] \\
 D_1 &= [0.41 & 0.89] & D_2 &= [0.20 & 0.67] & D_3 &= [0.85 & 0.59]
 \end{aligned}$$

Les multipliers caractéristiques du système sont :

$$\Lambda_1 = \lambda(\Phi_{4,1}) = \{2.6760, 0.0417, 0.0094\}$$

Ce système est donc instable en boucle ouverte.

Nous cherchons à stabiliser ce système à l'aide d'un correcteur par retour de sortie statique résilient à une incertitude multiplicative telle que 30% de variations sur chaque gain du correcteur ne déstabilise pas le système. Nous appliquons donc le corollaire III.3 en remplaçant les contraintes non-linéaires par celles proposées au Corollaire III.8. De plus, nous choisissons de fixer la géométrie comme proposé au Lemme III.10 pour obtenir des contraintes $\mathcal{BML}s$. Ainsi, nous résolvons le problème de faisabilité associé aux $\mathcal{LML}s$ (III.21-III.22) et aux $\mathcal{BML}s$ (III.42) avec $Z_k = \mathbb{1} \forall k \in \{1 \dots N\}$.

Après 7 itérations du solveur PENBMI, une séquence 3-périodique d'ensembles ellipsoïdaux stabilisants est trouvée. Les centres de ces 3 ensembles sont :

$$K_1^0 = \begin{bmatrix} -2.0551 \\ -1.7886 \end{bmatrix} \quad K_2^0 = \begin{bmatrix} -0.9507 \\ -2.3825 \end{bmatrix} \quad K_3^0 = \begin{bmatrix} -3.5297 \\ -2.5556 \end{bmatrix}$$

Les multipliers caractéristiques attestent de la stabilité du système bouclé : $\Lambda_1^{bf} = \lambda(\Phi_{4,1}^{bf}) = \{0.0945 \pm 0.1208i, 0.1176\}$.

Toute suite de gains matriciels dont la valeur à l'instant k appartient au k -ième ellipsoïde de la Figure III.6 définit un correcteur stabilisant. Les correcteurs stabilisants ainsi obtenus ne sont donc pas nécessairement périodiques. Afin d'obtenir des correcteurs périodiques, il suffit de choisir une séquence de gains pour les instants 1 à 3 et de la répéter.

Remarque

Les correcteurs étant implémentés numériquement, chaque gain occupe un certain espace mémoire. Il est donc préférable de choisir un correcteur périodique, et en particulier le correcteur dont les gains correspondent aux centres des ellipsoïdes car il présente la plus forte résilience.

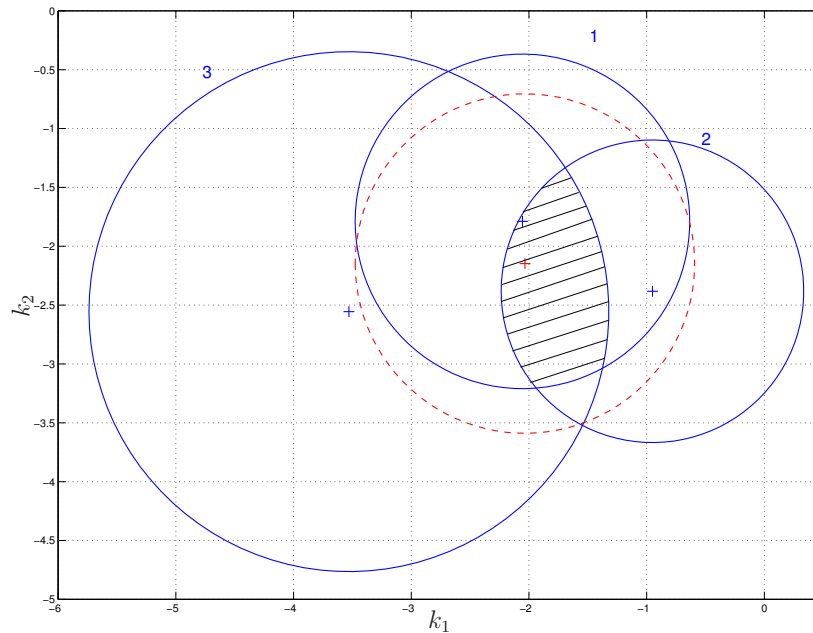


FIG. III.6 – Ensembles de correcteurs stabilisants

La Figure III.6 montre que, sur cet exemple particulier, les 3 ensembles ont une intersection commune (cette intersection est hachurée). Par conséquent, tout correcteur appartenant à cette région est un correcteur non-périodique stabilisant.

Le Corollaire III.9 permet de calculer directement un ensemble de correcteurs non-périodiques stabilisants (en pointillés sur la Figure III.6). Ici, cet ensemble est plus grand que celui correspondant à l'intersection des ellipsoïdes du retour de sortie périodique.

Remarque *Cet exemple a été choisi dans un but explicatif. La répétition de la procédure décrite ci-dessus sur des exemples générés aléatoirement montre qu'un tel recouvrement entre les ellipsoïdes est rare. Ce recouvrement pourrait plus probablement avoir lieu pour des systèmes analogiques échantillonnés car leurs coefficients évoluent relativement faiblement d'un instant à l'autre. Pour autant, le Corollaire III.9 donne de bons résultats pour la synthèse non-périodique sur ces mêmes exemples.*

III.4 Méthodes \mathcal{LMI} pour la synthèse par retour d'état et par retour de sortie dynamique d'ordre plein

Les résultats précédents concernant la synthèse de correcteurs par retour de sortie statique sont formulés à l'aide d'inégalités matricielles bilinéaires. Même si les méthodes de résolution numérique associées présentent certaines propriétés de convergence, elles ne garantissent pas de trouver l'optimum global en temps polynomial.

Afin d'obtenir des méthodes de synthèse formulées à l'aide d'inégalités matricielles linéaires, il est nécessaire de simplifier le problème à résoudre. Une première solution consiste à multiplier les capteurs et à effectuer non plus un retour de sortie mais un

retour d'état. Les résultats \mathcal{LMI} s correspondants sont présentés en Section III.4.1. Il n'est cependant pas toujours possible d'avoir accès à l'ensemble de l'état d'une part, et d'autre part la multiplication des capteurs entraîne un surcoût à prendre en compte. Une autre solution consiste alors à utiliser non plus un correcteur par retour de sortie statique mais un correcteur par retour de sortie dynamique d'ordre plein. Les méthodes \mathcal{LMI} s de synthèse associées à ce problème sont présentées en Section III.4.2.

Enfin, une discussion concernant la synthèse de correcteurs structurés par retour d'état et par retour de sortie dynamique est proposée en Section III.4.3.

III.4.1 Retour d'état

Dans un premier temps, nous montrons qu'un changement de variable linéarisant permet d'écrire le résultat du Théorème III.4 sous forme \mathcal{LMI} dans le cas d'un retour d'état. Il est ainsi possible de calculer un correcteur par retour d'état robuste et résilient à l'aide d'outils SDP. Ce changement de variables a été proposé pour les systèmes LTI certains dans la référence [PEA 04]. Son extension aux systèmes incertains périodiques polytopiques et à la synthèse de correcteurs résilients est présentée en Section III.4.1.1.

Pour ne pas alourdir l'exposé, les problèmes de performances sont traités sur le cas plus simple de la synthèse d'un retour d'état sans prise en compte de l'aspect résilience en Section III.4.1.2.

III.4.1.1 Retour d'état résilient et robuste

Le problème de synthèse considéré dans cette partie est le calcul d'un ensemble ellipsoïdal de correcteurs stabilisant un système incertain polytopique (voir Figure III.7).

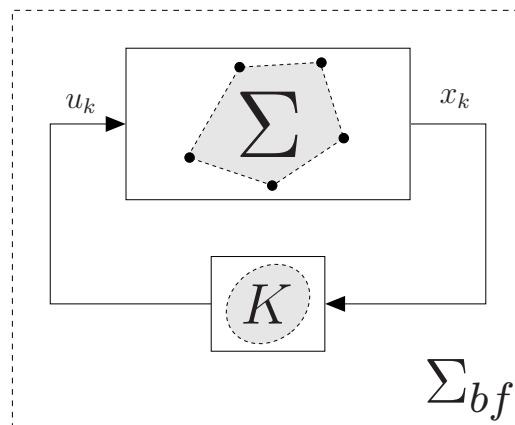


FIG. III.7 – Synthèse d'un ensemble ellipsoïdal de correcteurs stabilisant robustement un système polytopique

La représentation d'état du système en boucle ouverte est :

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} A_k(\Delta) & B_k(\Delta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ u_k \end{pmatrix} = M_k(\Delta) \begin{pmatrix} x_k \\ u_k \end{pmatrix} \quad (\text{III.50})$$

avec :

$$M_k(\Delta) = \sum_{i=1}^L \xi_i M_k^{[i]} \quad : \quad \xi \in \Xi$$

$$\Xi = \left\{ \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_L \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^L \quad : \quad \sum_{i=1}^L \xi_i = 1, \quad 0 \leq \xi_i \leq 1 \quad \forall i = 1 \cdots L \right\}$$

Théorème III.12 (Synthèse robuste d'ensemble ellipsoïdaux de correcteurs par retour d'état - Fonction de Lyapunov quadratique)

Le système (III.50) est stabilisable par retour d'état s'il existe N matrices de Lyapunov $\{\mathbf{W}_k \in \mathcal{S}^{n^+}\}_{k \in \{0 \cdots N-1\}}$ et N triplés de matrices $\{\hat{\mathbf{X}}_k \in \mathcal{S}^{m^-}, \hat{\mathbf{Y}}_k \in \mathbb{R}^{m \times n}, \hat{\mathbf{Z}}_k \in \mathcal{S}^{n^+}\}_{k \in \{1 \cdots N\}}$ telles que ($k \in \{1 \cdots N\}, i \in \{1 \cdots L\}$) :

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{W}_k - B_k^{[i]} \hat{\mathbf{X}}_k B_k^{[i]'} & A_k^{[i]} \mathbf{W}_{k-1} - B_k^{[i]} \hat{\mathbf{Y}}_k \\ \mathbf{W}_{k-1} A_k^{[i]'} - \hat{\mathbf{Y}}_k' B_k^{[i]'} & -\mathbf{W}_{k-1} + \hat{\mathbf{Z}}_k \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{III.51})$$

$$\mathbf{W}_N = \mathbf{W}_0 \quad (\text{III.52})$$

Soient les matrices $\{W_k\}_{k \in \{0 \cdots N-1\}}$ et $\{\hat{X}_k, \hat{Y}_k, \hat{Z}_k\}_{k \in \{1 \cdots N\}}$ solutions des \mathcal{LMI} s (III.51-III.52). Définissons les matrices X_k^d, Y_k^d et Z_k^d de la manière suivante :

$$X_k^d = \hat{X}_k + \hat{Y}_k \hat{Z}_k^{-1} \hat{Y}_k' \quad (\text{III.53})$$

$$Y_k^d = \hat{Y}_k \hat{Z}_k^{-1} W_{k-1} \quad (\text{III.54})$$

$$Z_k^d = W_{k-1} \hat{Z}_k^{-1} W_{k-1} \quad (\text{III.55})$$

$$\forall k \in \{1 \cdots N\}$$

Ces matrices $\{X_k^d, Y_k^d, Z_k^d\}_{k \in \{1 \cdots N\}}$ définissent une séquence N -périodique d'ensembles ellipsoïdaux. Toute suite de matrices $\{K_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ telle que, à chaque instant k , K_k appartient à l'ellipsoïde $\{X_k^d Y_k^d Z_k^d\}$ -ellipsoïde de cette séquence définit un correcteur stabilisant robustement le système.

Preuve

Le résultat du Corollaire III.11 peut être particularisé au cas du retour d'état ($y_k = x_k$) pour un modèle polytopique en prenant $C_k(\xi) = \mathbf{1}$ et $D_k(\xi) = 0, \forall \xi \in \Xi$. L'inégalité (III.46) peut alors s'écrire :

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{W}_k - B_k(\xi) \mathbf{X}_k^d B_k'(\xi) & -B_k(\xi) \mathbf{Y}_k^d \\ -\mathbf{Y}_k^{d'} B_k'(\xi) & -\mathbf{Z}_k^d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_k(\xi) \mathbf{W}_{k-1} \\ \mathbf{W}_{k-1} \end{bmatrix} (-\mathbf{W}_{k-1}^{-1}) \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{k-1} A_k' & \mathbf{W}_{k-1} \end{bmatrix} < 0$$

En appliquant le complément de Schur sur le terme $-\mathbf{W}_{k-1}$, l'inégalité précédente s'écrit :

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{W}_k - B_k(\xi) \mathbf{X}_k^d B_k'(\xi) & -B_k(\xi) \mathbf{Y}_k^d & A_k(\xi) \mathbf{W}_{k-1} \\ -\mathbf{Y}_k^{d'} B_k'(\xi) & -\mathbf{Z}_k^d & \mathbf{W}_{k-1} \\ \mathbf{W}_{k-1} A_k'(\xi) & \mathbf{W}_{k-1} & -\mathbf{W}_{k-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{III.56})$$

Le système où $y_k^d = x_k^d$ est donc stabilisable quadratiquement par retour d'état s'il existe N matrices de Lyapunov $\{\mathbf{W}_k \in \mathcal{S}^{n^+}\}_{k \in \{0 \dots N-1\}}$ et N triplés de matrices $\{\mathbf{X}_k^d \in \mathcal{S}^m, \mathbf{Y}_k^d \in \mathbb{R}^{m \times p}, \mathbf{Z}_k^d \in \mathcal{S}^{p^+}\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ satisfaisant les inégalités (III.56-III.48). Supposons qu'il existe N matrices $\{W_k\}_{k \in \{0 \dots N-1\}}$ et N triplés $\{X_k^d, Y_k^d, Z_k^d\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ satisfaisant les inégalités précédentes. Alors tout retour d'état dont les matrices K_k^l appartiennent à chaque instant k à l'ellipsoïde $\{X_k^d Y_k^d Z_k^d\}$ -ellipsoïde est un retour d'état stabilisant.

Le résultat final est alors obtenu en deux étapes. D'abord le complément de Schur est appliqué au terme $-\mathbf{Z}_k^d$ de (III.56). Les inégalités suivantes sont alors obtenues :

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{W}_k - B_k(\xi)(\mathbf{X}_k^d - \mathbf{Y}_k^d \mathbf{Z}_k^{d-1} \mathbf{Y}_k^{d'}) B_k'(\xi) & A_k(\xi) \mathbf{W}_{k-1} - B_k(\xi) \mathbf{Y}_k^d \mathbf{Z}_k^{d-1} \mathbf{W}_{k-1} \\ \mathbf{W}_{k-1} A_k'(\xi) - \mathbf{W}_{k-1} \mathbf{Z}_k^{d-1} \mathbf{Y}_k^{d'} B_k'(\xi) & -\mathbf{W}_{k-1} + \mathbf{W}_{k-1} \mathbf{Z}_k^{d-1} \mathbf{W}_{k-1} \end{bmatrix} < \mathbb{0}$$

Ensuite, en appliquant le changement de variables :

$$\hat{\mathbf{Z}}_k = \mathbf{W}_{k-1} \mathbf{Z}_k^{d-1} \mathbf{W}_{k-1} \quad \hat{\mathbf{Y}}_k = \mathbf{Y}_k^d \hat{\mathbf{Z}}_k^{-1} \mathbf{W}_{k-1} \quad \hat{\mathbf{X}}_k = \mathbf{X}_k^d - \hat{\mathbf{Y}}_k \hat{\mathbf{Z}}_k^{-1} \hat{\mathbf{Y}}_k'$$

aux inégalités précédentes, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{W}_k - B_k(\xi) \hat{\mathbf{X}}_k B_k'(\xi) & A_k(\xi) \mathbf{W}_{k-1} - B_k(\xi) \hat{\mathbf{Y}}_k \\ \mathbf{W}_{k-1} A_k'(\xi) - \hat{\mathbf{Y}}_k' B_k'(\xi) & -\mathbf{W}_{k-1} + \hat{\mathbf{Z}}_k \end{bmatrix} < \mathbb{0}$$

Un complément de Schur appliqué sur le terme $\hat{\mathbf{X}}_k$ permet de montrer que les inégalités précédentes peuvent être testées uniquement sur les sommets du polytope. Les inégalités (III.51) sont ainsi obtenues avec $\hat{\mathbf{X}}_k \in \mathcal{S}^{m^-}$. L'équivalence du point de vue de la stabilité entre le système et son dual présentée dans le Lemme III.2 conclut la preuve. ■

Comme dans le cas du retour de sortie statique, il est possible de modifier le théorème précédent pour obtenir des conditions garantissant une taille minimale pour les ensembles de correcteurs synthétisés. Ainsi, il est possible de garantir a priori la résilience du système bouclé vis-à-vis d'une incertitude bornée en norme donnée ou vis-à-vis d'une incertitude multiplicative donnée. Pour ce faire, il est nécessaire de rajouter des contraintes \mathcal{LMIs} supplémentaires aux \mathcal{LMIs} (III.51-III.52). Ces contraintes sont détaillées dans le cas LTI dans la référence [PEA 04].

Dans le Théorème III.12, la stabilité du système bouclé est certifiée par une fonction de Lyapunov quadratique. Il n'est pas possible d'étendre directement ce résultat à la recherche de fonctions de Lyapunov polytopiques de la forme :

$$V_k(x_k^d, \xi) = x_k^{d'} W_k(\xi) x_k^d \quad (III.57)$$

où :

$$W_k(\xi) = \sum_{i=1}^L \xi_i W_k^{[i]} \quad (III.58)$$

tout en conservant une formulation \mathcal{LMI} . En effet, les matrices du contrôleur données par le changement de variable linéarisant (III.53-III.55) sont des fonctions des matrices de Lyapunov W_k . Ces dernières ne peuvent donc pas dépendre des paramètres.

III.4.1.2 Retour d'état robuste et performant

Lorsque l'aspect résilience du contrôleur est abandonné, il est possible d'utiliser des fonctions de Lyapunov polytopiques pour le problème de synthèse par retour d'état. Le Théorème III.13 fait appel à ce type de fonctions de Lyapunov et traite également le problème des performances \mathcal{H}_2 . La représentation d'état du système à corriger est :

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_k(\Delta) & B_{wk}(\Delta) & B_k(\Delta) \\ C_{zk}(\Delta) & D_{zwk}(\Delta) & D_{zuk}(\Delta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ w_k \\ u_k \end{pmatrix} = M_k(\Delta) \begin{pmatrix} x_k \\ w_k \\ u_k \end{pmatrix} \quad (\text{III.59})$$

avec :

$$M_k(\Delta) = \sum_{i=1}^L \xi_i M_k^{[i]} \quad : \quad \xi \in \Xi$$

$$\Xi = \left\{ \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_L \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^L : \sum_{i=1}^L \xi_i = 1, 0 \leq \xi_i \leq 1 \quad \forall i = 1 \dots L \right\}$$

Le problème considéré ici est donc celui de la synthèse d'un correcteur par retour d'état stabilisant minimisant la norme \mathcal{H}_2 du système bouclé (voir Figure III.8).

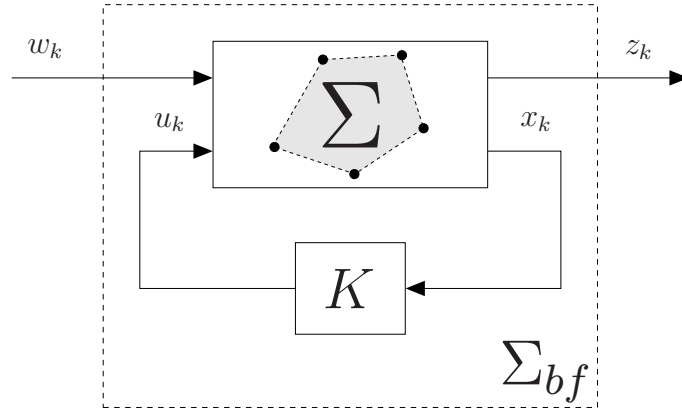


FIG. III.8 – Synthèse de correcteurs par retour d'état performants

Théorème III.13 (Synthèse robuste d'un correcteur par retour d'état performant - Fonction de Lyapunov polytopique) [FAR 05b]

Soit un couple de séquences de matrices $\Upsilon = (\{A_k^0 \in \mathbb{R}^{n \times n}, C_{zk}^0 \in \mathbb{R}^{p_z \times n}\}_{k \in \mathbb{N}}$. Définissons le problème d'optimisation convexe suivant :

$$\chi_{sub}^e(\Upsilon) = \min_{\mathbf{W}_k^{[i]} \in \mathcal{S}^n, \mathbf{J}_k \in \mathcal{S}^{p_z}, \mathbf{G}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{T}_k \in \mathbb{R}^{m \times n}} \left(\frac{1}{N} \text{Trace} \sum_{k=1}^N \mathbf{J}_k \right) \quad (\text{III.60})$$

contraint par les \mathcal{LMI} s dépendantes de Υ suivantes : ($k \in \{1 \dots N\}$, $i \in \{1 \dots L\}$)

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{W}_k^{[i]} + B_{wk}^{[i]} B_{wk}^{[i]'} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_{k-1}^{[i]} \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} -A_k^{[i]} \mathbf{G}_k - B_{uk}^{[i]} \mathbf{T}_k \\ \mathbf{G}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_k^{0'} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \right\rangle < 0 \quad (\text{III.61})$$

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{J}_k + D_{zwk}^{[i]} D_{zwk}^{[i]'} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_{k-1}^{[i]} \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} -C_{zk}^{[i]} \mathbf{G}_k - D_{zuk}^{[i]} \mathbf{T}_k \\ \mathbf{G}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{zk}^{0'} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \right\rangle < 0 \quad (\text{III.62})$$

$$\mathbf{W}_k^{[i]} > \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{W}_N^{[i]} = \mathbf{W}_0^{[i]} \quad (\text{III.63})$$

Si ce problème admet une solution $\{W_k\}_{k \in \{0 \dots N-1\}}$ et $\{J_k, G_k, T_k\}_{k \in \{1 \dots N\}}$, alors le correcteur N -périodique $u_k = K_k^e(\Upsilon)x_k$ défini par $K_k^e(\Upsilon) = T_k G_k^{-1}$ pour $k \in \{1 \dots N\}$ assure que $\chi_{sub}^e(\Upsilon)$ est un coût \mathcal{H}_2 étendu garanti pour (III.9) et :

$$\chi_{pc}^* \leq \gamma_{sub}^e(\{K_k^e(\Upsilon)\}_{k \in \mathbb{N}}) \leq \chi_{sub}^e(\Upsilon) .$$

Preuve

Supposons que les matrices $\{W_k^{[i]}\}_{k \in \{0 \dots N-1\}, i \in \{1 \dots L\}}$ et $\{J_k, G_k, T_k\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ sont des solutions des \mathcal{LMI} s (III.60-III.63). Alors, puisque d'après la définition du correcteur $U_k = K_k^e(\Upsilon)G_k$, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} -W_k^{[i]} + B_{wk}^{[i]} B_{wk}^{[i]'} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W_{k-1}^{[i]} \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} A_k^{[i]} + B_{uk}^{[i]} K_k^e(\Upsilon) \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} (-G_k) \begin{bmatrix} A_k^{0'} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \right\rangle < 0$$

$$\begin{bmatrix} -J_k + D_{zwk}^{[i]} D_{zwk}^{[i]'} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W_{k-1}^{[i]} \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} C_{zk}^{[i]} + D_{zuk}^{[i]} K_k^e(\Upsilon) \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} (-G_k) \begin{bmatrix} C_{zk}^{0'} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \right\rangle < 0$$

En posant $S_k = -G_k \begin{bmatrix} C_{zk}^{0'} & -\mathbf{1} \end{bmatrix}$ et $H_k = -G_k \begin{bmatrix} A_k^{0'} & -\mathbf{1} \end{bmatrix}$, les inégalités suivantes sont obtenues :

$$\begin{bmatrix} -W_k^{[i]} + B_{wk}^{[i]} B_{wk}^{[i]'} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W_{k-1}^{[i]} \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} A_k^{[i]} + B_{uk}^{[i]} K_k^e(\Upsilon) \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} H_k \right\rangle < 0 \quad (\text{III.64})$$

$$\begin{bmatrix} -J_k + D_{zwk}^{[i]} D_{zwk}^{[i]'} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W_{k-1}^{[i]} \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} C_{zk}^{[i]} + D_{zuk}^{[i]} K_k^e(\Upsilon) \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} S_k \right\rangle < 0 \quad (\text{III.65})$$

Le Théorème II.19 prouve que le problème d'optimisation défini par les équations (III.60-III.63) et (III.64), III.65) implique que $\gamma_{sub}^e(\{K_k^e(\Upsilon)\}_{k \in \mathbb{N}})$ est un coût \mathcal{H}_2 étendu garanti pour le système bouclé. De plus, $\chi_{sub}^e(\Upsilon)$ est toujours supérieur ou égal à $\gamma_{sub}^e(\{K_k^e(\Upsilon)\}_{k \in \mathbb{N}})$ puisque les matrices S_k and H_k ne sont pas libres mais contraintes par le choix de Υ . ■

La caractéristique principale du Théorème III.13 réside dans les degrés de liberté offerts par le choix de Υ . En considérant ces matrices comme variables de décision, le problème d'optimisation du Théorème III.13 devient non convexe. L'interprétation simple et systématique de ces matrices donnée dans le lemme suivant pourra être utilisée pour faire un choix approprié de Υ .

Lemme III.14

$\chi_{sub}^e(\Upsilon) \geq \gamma_0$ où γ_0 est le coût \mathcal{H}_2 du système N -périodique stable suivant :

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k^0 & B_{wk}(\xi) \\ C_{zk}^0 & D_{zwk}(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} \quad (\text{III.66})$$

Preuve Le lemme d'élimination appliqué aux \mathcal{LMI} s (III.64) et (III.65) implique que les matrices A_k^0 et C_{zk}^0 doivent vérifier :

$$\begin{aligned} A_k^0 W_{k-1}^{[i]} A_k^{0'} - W_k^{[i]} + B_{wk}^{[i]} B_{wk}^{[i]'} &< 0 \\ C_{zk}^0 W_{k-1}^{[i]} C_{zk}^{0'} + D_{zwk}^{[i]} D_{zwk}^{[i]'} &< J_k \end{aligned}$$

pour tout $k \in \{1 \dots N\}$ et tout $i \in \{1 \dots L\}$. D'après le Lemme II.13, les combinaisons convexes sur les L sommets montrent que ces \mathcal{LMI} s couplées avec (III.60-III.63) impliquent que $\frac{1}{N} \text{Trace} \sum_{k=1}^N J_k$ est une borne supérieure du coût \mathcal{H}_2 du système (III.66) pour un choix de fonction de Lyapunov polytopique $X_k(\xi)$. \blacksquare

Ce dernier résultat montre que la séquence $\{A_k^0\}_{k \in \mathbb{N}}$ doit être stable. De plus, la paire de séquences de matrices Υ conduit à une borne inférieure du coût $\chi_{sub}^e(\Upsilon)$ et ne doit pas être choisie trop importante. Par exemple, un choix particulier de paramétrisation de Υ est :

$$\Upsilon_\rho = (\{A_k^0 = \rho \mathbf{1}\}_{k \in \mathbb{N}}, \{C_{zk}^0 = \mathbf{0}\}_{k \in \mathbb{N}}) \quad (\text{III.67})$$

Un autre choix particulier intéressant pour Υ est donné par la paire hyper-stable :

$$\Upsilon_0 = (\{A_k^0 = \mathbf{0}\}_{k \in \mathbb{N}}, \{C_{zk}^0 = \mathbf{0}\}_{k \in \mathbb{N}}) \quad (\text{III.68})$$

La borne inférieure associée est bien évidemment la plus faible possible : $\gamma_0 = 0$. La condition du Théorème III.13 utilisant la paire Υ_0 peut être comparée à l'approche quadratique comme montré dans le théorème suivant :

Théorème III.15 (Synthèse robuste d'un correcteur par retour d'état performant - Fonction de Lyapunov quadratique)

Soit le problème d'optimisation convexe suivant :

$$\chi_{sub}^q = \min_{\mathbf{W}_k \in \mathcal{S}^n, \mathbf{J}_k \in \mathcal{S}^{pz}, \mathbf{U}_k \in \mathbb{R}^{m \times n}} \left(\frac{1}{N} \text{Trace} \sum_{k=1}^N \mathbf{J}_k \right) \quad (\text{III.69})$$

contraint par les \mathcal{LMI} s ($k \in \{1 \dots N\}$, $i \in \{1 \dots L\}$)

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{W}_k + B_{wk}^{[i]} B_{wk}^{[i]'} & A_k^{[i]} \mathbf{W}_{k-1} + B_{uk}^{[i]} \mathbf{U}_k \\ (A_k^{[i]} \mathbf{W}_{k-1} + B_{uk}^{[i]} \mathbf{U}_k)' & -\mathbf{W}_{k-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{III.70})$$

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{J}_k + D_{zwk}^{[i]} D_{zwk}^{[i]'} & C_{zk}^{[i]} \mathbf{W}_{k-1} + D_{zuk}^{[i]} \mathbf{U}_k \\ (C_{zk}^{[i]} \mathbf{W}_{k-1} + D_{zuk}^{[i]} \mathbf{U}_k)' & -\mathbf{W}_{k-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{III.71})$$

$$\mathbf{W}_k > 0 \quad , \quad \mathbf{W}_N = \mathbf{W}_0 \quad (\text{III.72})$$

Alors, le correcteur N -périodique $u_k = K_k^q x_k$ défini par $K_k^q = U_k W_k^{-1}$ pour $k \in \{1 \cdots N\}$ assure que χ_{sub}^q est le coût \mathcal{H}_2 quadratique du système (III.9). De plus :

$$\chi_{pc}^* \leq \chi_{sub}^e(\Upsilon_0) \leq \chi_{sub}^q = \gamma_{sub}^q(\{K_k^q\}_{k \in \mathbb{N}}) \quad (\text{III.73})$$

Preuve

La preuve est directe. Remarquons d'abord que les \mathcal{LMI} s (III.70-III.72) sont un cas particulier de (III.61-III.63) lorsque $A_k^0 = 0$ et $C_{zk}^0 = 0$, pour un choix de fonction de Lyapunov indépendante des paramètres : $\mathbf{W}_k^{[i]} = \mathbf{W}_k$, $\forall i \in \{1 \cdots L\}$, $\mathbf{G}_k = \mathbf{W}_{k-1}$ et $\mathbf{T}_k = \mathbf{U}_k$. Ainsi, les \mathcal{LMI} s (III.61-III.63) sont nécessairement vérifiées si les \mathcal{LMI} s (III.70-III.72) ont une solution. Ceci prouve que le correcteur étendu $K_k^e(\Upsilon_0)$ est toujours meilleur (au sens de la norme \mathcal{H}_2) que le correcteur quadratique : $\chi_{sub}^e(\Upsilon_0) \leq \chi_{sub}^q$. ■

Actuellement, il n'existe pas d'autre méthodologie pour faire un bon choix a priori des paires de séquences Υ en terme de pessimisme de la borne obtenue. Il est cependant possible de montrer que, dans certains cas, le choix Υ_0 n'est pas forcément le meilleur. Une autre idée simple associée à la paramétrisation (III.67) de Υ est de faire une recherche de $|\rho| < 1$ (pour assurer la stabilité de (III.66)) sur une grille, une optimisation \mathcal{LMI} étant réalisée à chaque itération. Malheureusement, une telle procédure est généralement lourde à mettre en oeuvre numériquement. Plutôt que de restreindre la recherche des matrices $\{A_k^0\}_{k \in \mathbb{N}}$ de la forme $\{\rho \mathbf{1}\}$, un algorithme simple basé sur des étapes itératives d'analyse et de synthèse (une variation des D-K itérations [DOY 83]) est proposé :

Algorithme III.1

- **Pas 0** - Calculer un correcteur stabilisant (soit $\{K_k^q\}_{k \in \mathbb{N}}$ en utilisant le Théorème III.15, soit $\{K_k^e(\Upsilon_0)\}_{k \in \mathbb{N}}$ en utilisant le Théorème III.13).
- **Pas 1** - Mettre en oeuvre l'analyse robuste de la boucle fermée en utilisant le Théorème II.19 et mémoriser les séquences $\{H_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ et $\{S_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.
- **Pas 2** - Partitionner H_k et S_k de la manière suivante : $H_k = \begin{bmatrix} F_k & G_k \end{bmatrix}$ et $S_k = \begin{bmatrix} Q_k & R_k \end{bmatrix}$. Soit Υ la séquence de matrices $A_k^0 = -F_k' G_k^{-T}$ et $C_{zk}^0 = -Q_k' G_k^{-T}$.
- **Pas 3** - Calculer un nouveau correcteur $\{K_k^e(\Upsilon)\}_{k \in \mathbb{N}}$ à l'aide du Théorème III.13.
- **Pas 4** - Revenir au Pas 1 pour améliorer le coût \mathcal{H}_2 ou arrêter si le coût \mathcal{H}_2 robuste du système bouclé n'est pas amélioré de manière significative.

Sous de faibles hypothèses sur le Pas 1, il est possible de prouver que la séquence de coûts \mathcal{H}_2 générée par l'algorithme est toujours décroissante et bornée. Remarquons que seuls les Pas 0, 1 et 3 font intervenir une optimisation \mathcal{LMI} .

III.4.1.3 Exemple Numérique

Reprenons l'exemple numérique du Chapitre II. La représentation d'état du système 3-périodique en boucle ouverte est donnée en Section II.4.4. Les deux paramètres incertains $|\alpha| \leq \bar{\alpha}$ et $0 \leq \beta \leq 1$ définissent un polytope à 4 sommets pour les matrices du

système. L'objectif est de synthétiser un correcteur stabilisant robustement ce système et minimisant le coût \mathcal{H}_2 entre w_k et z_k .

Les résultats des Théorèmes III.13 et III.15 sont appliqués pour trouver un correcteur \mathcal{H}_2 stabilisant sous-optimal pour différentes valeurs de la borne $\bar{\alpha}$ sur le paramètre incertain α . Pour chaque méthode de synthèse, un correcteur robustement stabilisant ($\{K_k\}_{k \in \mathbb{N}}^q$ ou $\{K_k^e(\Upsilon_0)\}_{k \in \mathbb{N}}$) est calculé et le coût \mathcal{H}_2 garanti à l'optimum du problème d'optimisation (χ_{sub}^q ou $\chi_{sub}^e(\Upsilon_0)$) est présenté dans le Tableau III.1. De plus, l'analyse du système bouclé est effectuée à l'aide du Théorème II.19 permettant de calculer le coût \mathcal{H}_2 étendu γ_{sub}^e .

Méthode \ $\bar{\alpha}$	0	0.01	0.015775	0.1	0.3	0.497629
Théorème III.15	$\chi_{sub}^q = 17.57$	25.60	$2.5 \cdot 10^3$	échec	échec	échec
Théorème II.19	$\gamma_{sub}^e = 7.43$	9.14	11.64	échec	échec	échec
Théorème III.13	$\chi_{sub}^e(\Upsilon_0) = 1.56$	1.57	1.58	1.71	2.49	$1.3 \cdot 10^3$
Théorème II.19	$\gamma_{sub}^e = 1.28$	1.29	1.29	1.38	1.61	2.04

TAB. III.1 – Coûts \mathcal{H}_2 garantis

Le tableau confirme à nouveau les avantages du cadre de travail étendu sur le cadre quadratique pour le problème de synthèse robuste.

Remarque

Puisque les matrices C_{zk} et D_{zwk} ne dépendent pas des paramètres incertains et que la matrice D_{zuk} est nulle, les matrices C_{zk}^0 apparaissant dans le Théorème III.13 sont inutiles ici. Pour réduire le nombre de variables de décision, la \mathcal{LMI} (III.62) a donc été remplacée par la \mathcal{LMI} suivante : ($k \in \{1 \cdots N\}$, $i \in \{1 \cdots L\}$)

$$C_{zk} \mathbf{W}_{k-1}^{[i]} C'_{zk} + D_{zwk} D'_{zwk} < \mathbf{J}_k$$

Considérons à présent une valeur particulière de $\bar{\alpha} = 0.015775$. Les correcteurs suivants sont calculés à l'aide des approches quadratique et étendue :

$$\begin{aligned} K_1^q &= 10^{-5} \cdot \begin{bmatrix} 0.1648 & -0.1722 \end{bmatrix} & K_1^e(\Upsilon_0) &= \begin{bmatrix} 3.0286 & -2.3929 \end{bmatrix} \\ K_2^q &= \begin{bmatrix} 0.8529 & -2.6864 \end{bmatrix} & K_2^e(\Upsilon_0) &= \begin{bmatrix} 0.9825 & -2.2140 \end{bmatrix} \\ K_3^q &= \begin{bmatrix} -5.0225 & -3.7207 \end{bmatrix} & K_3^e(\Upsilon_0) &= \begin{bmatrix} -2.3053 & -2.3518 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ces correcteurs sont ensuite appliqués au système et la norme \mathcal{H}_2 du système bouclé est calculée pour une grille sur les paramètres α et β . Le résultat est donné sur la Figure III.9 et confirme les valeurs de γ_{sub}^e données dans le tableau.

La Figure III.9 semble indiquer que le pire des cas est atteint pour $\alpha = 0.015775$ et $\beta = 1$. Pour ces valeurs de α et β , la Figure III.10 représente les réponses impulsionnelles du système bouclé par les correcteurs $\{K_k\}_{k \in \mathbb{N}}^q$ et $\{K_k^e(\Upsilon_0)\}_{k \in \mathbb{N}}$ pour différents instants d'application de l'impulsion.

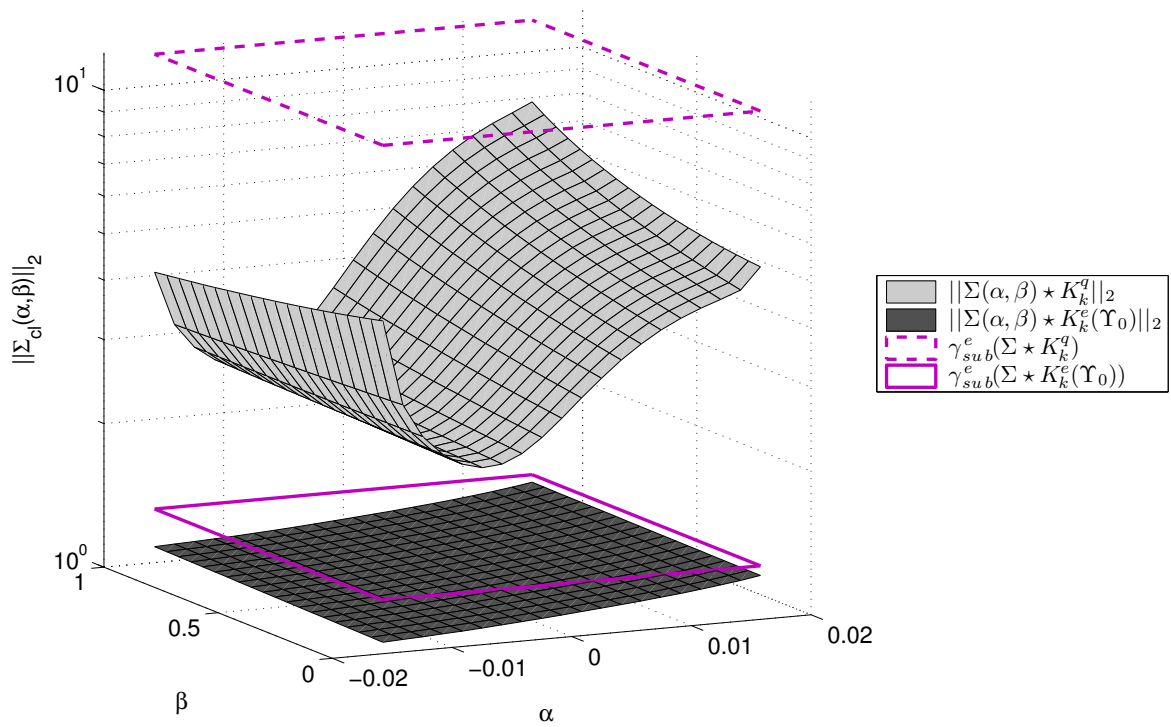


FIG. III.9 – Norme \mathcal{H}_2 du système bouclé avec $\{K_k^q\}_{k \in \mathbb{N}}$ et $\{K_k^e(\Upsilon_0)\}_{k \in \mathbb{N}}$

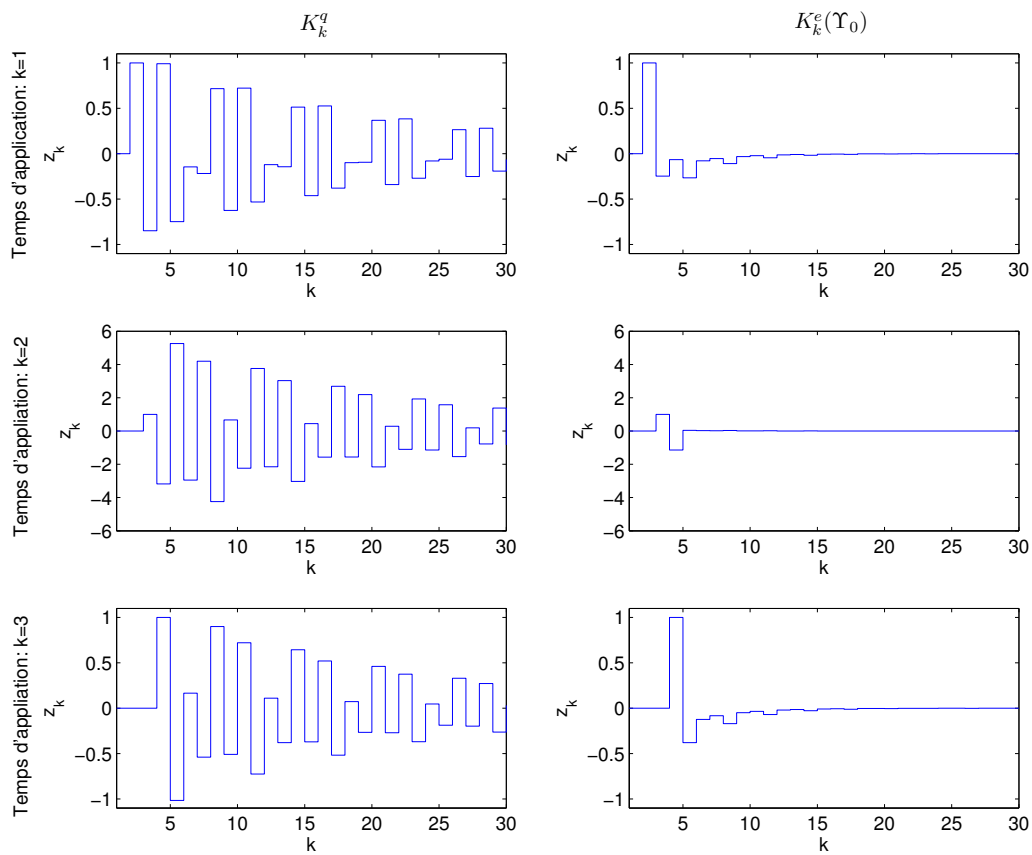


FIG. III.10 – Réponses impulsionnelles du système bouclé par les correcteurs $\{K_k\}_{k \in \mathbb{N}}^q$ et $\{K_k^e(\Upsilon_0)\}_{k \in \mathbb{N}}$

Pour la même valeur de $\bar{\alpha}$, les résultats peuvent encore être améliorés à l'aide du Théorème III.13. Choisissons $\Upsilon_\rho = \{A_k^0 = \rho \mathbb{1}\}_{k \in \mathbb{N}}$ et effectuons une recherche de ρ sur l'intervalle $[0.9, 0.9]$ avec un pas de 0.1. Les conditions \mathcal{LMI} du Théorème III.13 sont faisables pour l'intervalle $[-0.4, 0.5]$. Le meilleur coût $\chi_{sub}^e(\Upsilon_\rho) = 1.5308$ est obtenu pour $\rho = 0.1$ et le correcteur correspondant est :

$$\begin{aligned} K_1^e(\Upsilon_{0.1}) &= \begin{bmatrix} 3.0120 & -2.3841 \\ 0.9747 & -2.1660 \end{bmatrix} \\ K_2^e(\Upsilon_{0.1}) &= \begin{bmatrix} 0.9747 & -2.1660 \\ -2.1790 & -2.3687 \end{bmatrix} \\ K_3^e(\Upsilon_{0.1}) &= \begin{bmatrix} -2.1790 & -2.3687 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

L'analyse robuste du système bouclé par ce correcteur montre que ce dernier améliore le coût \mathcal{H}_2 étendu pour atteindre $\gamma_{sub}^e = 1.2489$, à comparer avec $\gamma_{sub}^e = 1.29$ pour le choix Υ_0 . Cependant, trouver $\rho = 0.1$ n'est pas trivial puisque environ 20 optimisations \mathcal{LMI} sont nécessaires sur cet exemple.

Appliquons maintenant l'algorithme III.1 initialisé avec le correcteur $\{K_k^e(\Upsilon_0)\}_{k \in \mathbb{N}}$. A la première itération, il donne au pas 2 un autre choix pour Υ tel que :

$$\begin{aligned} A_1^0 &= \begin{bmatrix} -0.1739 & -0.1949 \\ 0.2713 & 0.3614 \end{bmatrix} \\ A_2^0 &= \begin{bmatrix} -0.0405 & 0.0202 \\ -0.0691 & 0.3459 \end{bmatrix} \\ A_3^0 &= \begin{bmatrix} -0.6365 & 0.1926 \\ -0.3830 & -0.0025 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et au pas 3 un nouveau correcteur est calculé :

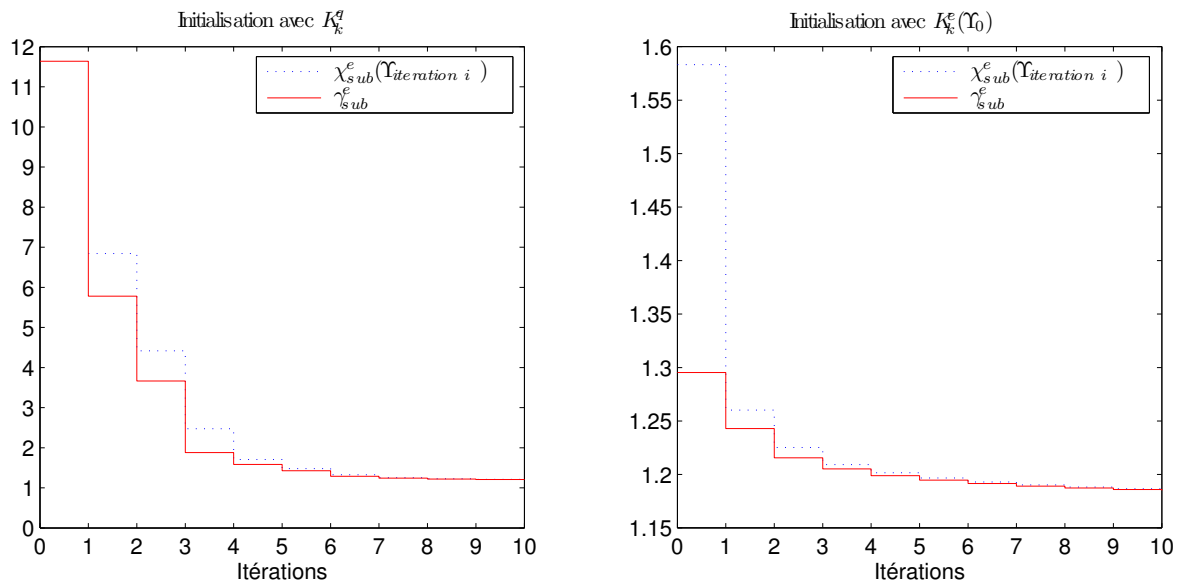
$$\begin{aligned} K_1^e(\Upsilon) &= \begin{bmatrix} 3.0294 & -2.3603 \\ 0.9379 & -2.1529 \end{bmatrix} \\ K_2^e(\Upsilon) &= \begin{bmatrix} 0.9379 & -2.1529 \\ -2.3123 & -2.4278 \end{bmatrix} \\ K_3^e(\Upsilon) &= \begin{bmatrix} -2.3123 & -2.4278 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec un coût étendu associé $\chi_{sub}^e(\Upsilon) = 1.2602 < \chi_{sub}^e(\Upsilon_{0.1}) = 1.5308$.

En lançant une seconde itération, le pas 1 d'analyse fournit $\gamma_{sub}^e(\{K_k^e(\Upsilon)\}_{k \in \mathbb{N}}) = 1.2429$. En répétant cette procédure, il est possible d'obtenir après 9 itérations (c'est-à-dire après avoir résolu 19 optimisations \mathcal{LMI}) un nouveau correcteur tel que $\gamma_{sub}^e(\{K_k^e(\Upsilon)\}_{k \in \mathbb{N}}) = 1.1850$. Ainsi, l'algorithme permet d'améliorer le coût \mathcal{H}_2 du système bouclé. La valeur du coût étendu associé au problème de synthèse $\chi_{sub}^e(\Upsilon)$ ainsi que le coût étendu du système bouclé γ_{sub}^e à chaque itération de l'algorithme est présenté dans la Figure III.11 pour une initialisation avec le correcteur quadratique et avec le correcteur étendu (la valeur du coût quadratique au pas 0, $\chi_{sub}^q = 2.5 \cdot 10^3$, n'est pas représentée).

Remarque

19 itérations sont nécessaires à l'Algorithme III.1 initialisé avec le correcteur quadratique $\{K_k^q\}_{k \in \mathbb{N}}$ pour atteindre le coût \mathcal{H}_2 de 1.1850 pour le système bouclé contre seulement 9 pour une initialisation avec le correcteur étendu $\{K_k^e(\Upsilon_0)\}_{k \in \mathbb{N}}$.

FIG. III.11 – Coûts \mathcal{H}_2 étendus à chaque pas de l'Algorithme III.1

III.4.2 Retour de sortie dynamique d'ordre plein

Dans cette partie est considéré le problème de la synthèse d'ensembles ellipsoïdaux de correcteurs par retour de sortie dynamique d'ordre plein pour un système certain périodique (voir Figure III.12).

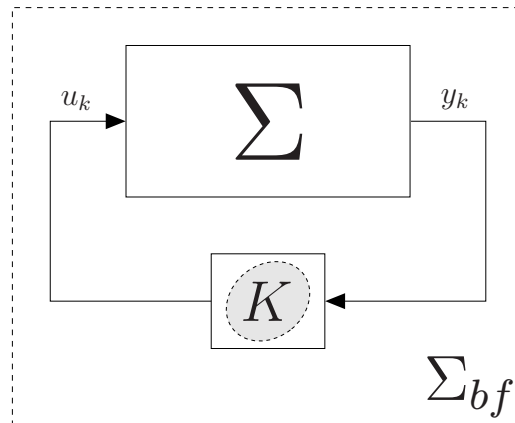


FIG. III.12 – Synthèse d'ensemble ellipsoïdaux de correcteurs stabilisants par retour de sortie dynamique

La représentation d'état du système en boucle ouverte Σ est :

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ u_k \end{pmatrix} = M_k \begin{pmatrix} x_k \\ u_k \end{pmatrix} \quad M_{k+N} = M_k \quad (\text{III.74})$$

Sans considérer le problème de résilience, il a été prouvé pour les systèmes LTI qu'un changement de variables linéarisant permet de formuler le problème de synthèse d'un retour de sortie dynamique d'ordre plein de manière \mathcal{LMI} [SCH 97]. Le théorème suivant montre que ce résultat peut être étendu aux systèmes périodiques et au problème de résilience.

Théorème III.16 (Synthèse d'ensemble ellipsoïdaux de correcteurs par retour de sortie dynamique d'ordre plein) [FAR 06a]

Le système (III.74) est stabilisable par retour de sortie dynamique d'ordre plein si et seulement s'il existe N 12-uplés de matrices $(\bar{\mathbf{P}}_k \in \mathcal{S}^{n+}, \underline{\mathbf{P}}_k \in \mathcal{S}^{n+}, \hat{\mathbf{A}}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}, \hat{\mathbf{B}}_k \in \mathbb{R}^{n \times p}, \hat{\mathbf{C}}_k \in \mathbb{R}^{m \times n}, \hat{\mathbf{D}}_k \in \mathbb{R}^{m \times p}, \mathbf{X}_{4k} \in \mathcal{S}^{n-}, \mathbf{X}_{5k} \in \mathbb{R}^{n \times p}, \mathbf{X}_{6k} \in \mathcal{S}^p, \mathbf{Z}_{4k} \in \mathcal{S}^{n+}, \mathbf{Z}_{5k} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \mathbf{Z}_{6k} \in \mathcal{S}^m$ satisfaisant les \mathcal{LMI} s ($k \in \{1 \dots N\}$) :

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc} \bar{\mathbf{P}}_k + \mathbf{X}_{4k} & \mathbb{1} & * & * & * & * \\ \mathbb{1} & \underline{\mathbf{P}}_k & * & * & * & * \\ \hline A_k \bar{\mathbf{P}}_k + B_k \hat{\mathbf{C}}_k & A_k + B_k \hat{\mathbf{D}}_k C_k & \bar{\mathbf{P}}_{k+1} & \mathbb{1} & * & * \\ \hat{\mathbf{A}}_k & \underline{\mathbf{P}}_{k+1} A_k + \hat{\mathbf{B}}_k C_k & \mathbb{1} & \underline{\mathbf{P}}_{k+1} - \mathbf{Z}_{4k} & * & * \\ \hline 0 & 0 & B'_k & B'_k \underline{\mathbf{P}}_{k+1} - \mathbf{Z}'_{5k} & \mathbf{Z}_{6k} & 0 \\ C_k \bar{\mathbf{P}}_k - \mathbf{X}'_{5k} & C_k & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{X}_{6k} \end{array} \right] > 0 \quad (\text{III.75})$$

$$\underline{\mathbf{P}}_{T+1} = \underline{\mathbf{P}}_1, \quad \bar{\mathbf{P}}_{T+1} = \bar{\mathbf{P}}_1 \quad (\text{III.76})$$

Soient les matrices $\{\bar{\mathbf{P}}_k, \underline{\mathbf{P}}_k, \hat{\mathbf{A}}_k, \hat{\mathbf{B}}_k, \hat{\mathbf{C}}_k, \hat{\mathbf{D}}_k, \mathbf{X}_{4k}, \mathbf{X}_{5k}, \mathbf{X}_{6k}, \mathbf{Z}_{4k}, \mathbf{Z}_{5k}, \mathbf{Z}_{6k}\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ solutions des inégalités (III.75-III.76). Alors, le système bouclé est stable pour tout retour de sortie dynamique d'ordre plein dont les matrices satisfont à chaque instant k :

$$\mathbf{K}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k^K & \mathbf{B}_k^K \\ \mathbf{C}_k^K & \mathbf{D}_k^K \end{bmatrix} \quad \left[\mathbb{1} \quad \mathbf{K}_k' \right] \begin{bmatrix} \mathcal{X}_k & \mathcal{Y}_k \\ \mathcal{Y}'_k & \mathcal{Z}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \mathbf{K}_k \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{III.77})$$

où les matrices $\mathcal{X}_k, \mathcal{Y}_k$ et \mathcal{Z}_k définissent une suite N -périodique d' $\{\mathcal{X}_k \mathcal{Y}_k \mathcal{Z}_k\}$ -ellipsoïdes. Ces matrices sont construites par manipulation algébrique à partir des matrices solutions des \mathcal{LMI} s (III.75-III.76) de la manière suivante :

1. Choisir des matrices carrées M_k et N_k telles que $N_k M_k' = \mathbb{1} - \underline{\mathbf{P}}_k \bar{\mathbf{P}}_k$ et définir $\mathcal{N}_k, \mathcal{M}_k$ de la manière suivante :

$$\mathcal{N}_k = \begin{bmatrix} N_k & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{m_{k-1}} \end{bmatrix} \quad \mathcal{M}_k = \begin{bmatrix} M_k & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{p_k} \end{bmatrix} \quad (\text{III.78})$$

2. Choisir des matrices \hat{X}_k and Z_k telles que :

$$\hat{X}_k = \begin{bmatrix} \hat{X}_{1k} & \hat{X}_{2k} \\ \hat{X}'_{2k} & \hat{X}_{3k} \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} \hat{X}_{1k} = X_{4k}^{-1} \\ \hat{X}_{2k} = \hat{X}_{1k} X_{5k} \\ \hat{X}_{3k} = X_{6k} + \hat{X}'_{2k} \hat{X}_{1k}^{-1} \hat{X}_{2k} \end{cases} \quad (\text{III.79})$$

$$Z_k = \begin{bmatrix} Z_{1k} & Z_{2k} \\ Z'_{2k} & Z_{3k} \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} Z_{1k} = Z_{4k}^{-1} \\ Z_{2k} = Z_{1k} Z_{5k} \\ Z_{3k} = Z_{6k} + Z'_{2k} Z_{1k}^{-1} Z_{2k} \end{cases}$$

3. Prendre $X_k, Y_k, \mathcal{X}_k, \mathcal{Y}_k$ et Z_k telles que :

$$X_k = \hat{X}_k^{-1} + Y_k Z_k^{-1} Y_k'$$

$$Y_k' = Z_k \left\{ \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{P}}_{k+1} \\ 0 \end{bmatrix} A_k \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_k & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbb{1} & -\underline{\mathbf{P}}_{k+1} B_k \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_k & \hat{\mathbf{B}}_k \\ \hat{\mathbf{C}}_k & \hat{\mathbf{D}}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -C_k \bar{\mathbf{P}}_k & \mathbb{1} \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{X}_k = \mathcal{M}_k^{-1} X_k \mathcal{M}_k^{-T} \quad \mathcal{Y}_k = \mathcal{M}_k^{-1} Y_k \mathcal{N}_{k+1} \quad \mathcal{Z}_k = \mathcal{N}'_{k+1} Z_k \mathcal{N}_{k+1} \quad (\text{III.80})$$

Preuve

Soit la séquence faisable de 12-uplés $\{\bar{P}_k, \underline{P}_k, \hat{A}_k, \hat{B}_k, \hat{C}_k, \hat{D}_k, X_{4k}, X_{5k}, X_{6k}, Z_{4k}, Z_{5k}, Z_{6k}\}$. Soit les matrices M_k et N_k telles que $N_k M_k' = \mathbb{1} - \underline{P}_k \bar{P}_k$. Un choix possible pour ces matrices est de prendre $M_k = -N_k'$ et N_k la racine carrée matricielle de la matrice définie positive $\underline{P}_k \bar{P}_k - \mathbb{1}$. Définissons les matrices $\mathcal{N}_k, \mathcal{M}_k$ telles que (III.78) et \mathcal{P}_k telle

$$\text{que : } \mathcal{P}_k^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ N_k & \underline{P}_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M_k & \bar{P}_k \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}.$$

Définissons les matrices \hat{X}_k, Z_k et \mathcal{Z}_k telles que (III.79) et (III.80).

Une transformation de Schur appliquée à $-\hat{X}_{1k}$ et Z_{1k} transforme l'inégalité (III.75) en :

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} \bar{P}_k & \mathbb{1} & * & * & * & * & * & * \\ \mathbb{1} & \underline{P}_k & * & * & * & * & * & * \\ \hline A_k \bar{P}_k + B_k \hat{C}_k & A_k + B_k \hat{D}_k C_k & \bar{P}_{k+1} & \mathbb{1} & * & * & * & * \\ \hat{A}_k & \underline{P}_{k+1} A_k + \hat{B}_k C_k & \mathbb{1} & \underline{P}_{k+1} & * & * & * & * \\ \hline \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 & -\hat{X}_{1k} & -\hat{X}_{2k} & * & * \\ C_k \bar{P}_k & C_k & 0 & 0 & -\hat{X}'_{2k} & -\hat{X}'_{3k} & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & \mathbb{1} & 0 & 0 & Z_{1k} & Z_{2k} \\ 0 & 0 & B'_k & B'_k \underline{P}_{k+1} & 0 & 0 & Z'_{2k} & Z'_{3k} \end{array} \right] > 0 \quad (\text{III.81})$$

Remarquons que \hat{X}_k est symétrique définie négative et Z_k, \mathcal{Z}_k sont définies positives. Il est possible d'identifier dans cette LMI des termes satisfaisant les égalités suivantes :

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ N_k & \underline{P}_k \end{bmatrix} \mathcal{P}_k^{-1} \begin{bmatrix} 0 & N'_k \\ \mathbb{1} & \underline{P}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_k & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \underline{P}_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ N_{k+1} & \underline{P}_{k+1} \end{bmatrix} (A_k - B_k \mathcal{Z}_k^{-1} \mathcal{Y}'_k C_k) \mathcal{P}_k^{-1} \begin{bmatrix} 0 & N'_k \\ \mathbb{1} & \underline{P}_k \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} A_k \bar{P}_k + B_k \hat{C}_k & A_k + B_k \hat{D}_k C_k \\ \hat{A}_k & \underline{P}_{k+1} A_k + \hat{B}_k C_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ N_k & \underline{P}_k \end{bmatrix} \mathcal{P}_k^{-1} C'_k \mathcal{M}_k^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \bar{P}_k C'_k \\ 0 & C'_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ N_{k+1} & \underline{P}_{k+1} \end{bmatrix} B_k \mathcal{N}_{k+1}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & B_k \\ \mathbb{1} & \underline{P}_{k+1} B_k \end{bmatrix}$$

Les transformations de congruence par les matrices $\begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ N_k & \underline{P}_k \end{bmatrix}^{-1}$, $\begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ N_{k+1} & \underline{P}_{k+1} \end{bmatrix}^{-1}$, \mathcal{M}_k^{-T} et \mathcal{N}_{k+1}^{-T} appliquées aux lignes et colonnes appropriées impliquent :

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc} \mathcal{P}_k^{-1} & * & * & * & & & & \\ (A_k - B_k \mathcal{Z}_k^{-1} \mathcal{Y}'_k C_k) \mathcal{P}_k^{-1} & \mathcal{P}_{k+1}^{-1} & * & * & & & & \\ C_k \mathcal{P}_k^{-1} & 0 & -\mathcal{M}'_k \hat{X}_k \mathcal{M}_k & * & & & & \\ 0 & B'_k & 0 & \mathcal{N}'_{k+1} Z_k \mathcal{N}_{k+1} & & & & \end{array} \right] > 0$$

Le complément de Schur appliqué à $\mathcal{Z}_k = \mathcal{N}'_{k+1} \mathcal{Z}_k \mathcal{N}_{k+1}$ et $-\mathcal{M}'_k \hat{X}_k \mathcal{M}_k$ conduit aux inégalités :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_k^{-1} + \mathcal{P}_k^{-1} \mathcal{C}'_k \mathcal{M}_k^{-1} \hat{X}_k^{-1} \mathcal{M}_k^{-T} \mathcal{C}_k \mathcal{P}_k^{-1} & * \\ (\mathcal{A}_k - \mathcal{B}_k \mathcal{Z}_k^{-1} \mathcal{Y}'_k \mathcal{C}_k) \mathcal{P}_k^{-1} & \mathcal{P}_{k+1}^{-1} - \mathcal{B}_k \mathcal{Z}_k^{-1} \mathcal{B}'_k \end{bmatrix} > 0$$

$$\mathcal{Z}_k > 0, \mathcal{P}_k > 0$$

$$(\mathcal{M}'_k \hat{X}_k \mathcal{M}_k)^{-1} < 0$$

De par la définition de \hat{X}_k et \mathcal{X}_k , ces inégalités s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_k^{-1} + \mathcal{P}_k^{-1} \mathcal{C}'_k \mathcal{X}_k \mathcal{C}_k \mathcal{P}_k^{-1} - \mathcal{P}_k^{-1} \mathcal{C}'_k \mathcal{Y}_k \mathcal{Z}_k^{-1} \mathcal{Y}'_k \mathcal{C}_k \mathcal{P}_k^{-1} & * \\ (\mathcal{A}_k - \mathcal{B}_k \mathcal{Z}_k^{-1} \mathcal{Y}'_k \mathcal{C}_k) \mathcal{P}_k^{-1} & \mathcal{P}_{k+1}^{-1} - \mathcal{B}_k \mathcal{Z}_k^{-1} \mathcal{B}'_k \end{bmatrix} > 0$$

$$\mathcal{Z}_k > 0, \mathcal{P}_k > 0$$

$$\mathcal{X}_k < \mathcal{Y}_k \mathcal{Z}_k^{-1} \mathcal{Y}'_k \quad (\text{III.82})$$

Un complément de Schur appliqué à \mathcal{Z}_k^{-1} et à \mathcal{P}_{k+1} suivi d'une transformation de congruence par la matrice $\begin{bmatrix} \mathcal{P}_k^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}$ conduit à :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ \mathcal{A}_k & \mathcal{B}_k \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} -\mathcal{P}_k & 0 \\ 0 & \mathcal{P}_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ \mathcal{A}_k & \mathcal{B}_k \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} \mathcal{C}_k & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathcal{X}_k & \mathcal{Y}_k \\ \mathcal{X}'_k & \mathcal{Z}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_k & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{Z}_k > 0, \mathcal{P}_k > 0$$

$$\mathcal{X}_k < \mathcal{Y}_k \mathcal{Z}_k^{-1} \mathcal{Y}'_k$$

D'après le Corollaire III.3, $\mathcal{V}_k(x_k^{aug}) = x_k^{aug'} \mathcal{P}_k x_k^{aug} > 0$ est donc une fonction de Lyapunov quadratique prouvant la stabilité du système augmenté. Ainsi, tout retour de sortie statique périodique $\{K_k\}$ dont les matrices K_k appartiennent à chaque instant k à l'ellipsoïde stabilise le système augmenté Σ_{aug} . L'équivalence entre un retour de sortie statique appliqué sur le système augmenté Σ_{aug} et un retour de sortie dynamique appliqué sur le système de départ Σ énoncée au Lemme III.1 termine la preuve. ■

Seule la preuve de suffisance est donnée ici. Il n'y a en effet pas de difficulté particulière à construire la preuve de nécessité comme cela est fait dans la référence [SCH 97] pour le cas LTI.

Le Théorème III.16 montre que le problème de synthèse d'un retour de sortie dynamique résilient admet une formulation \mathcal{LMI} . Ce résultat est nouveau, même dans le cas des systèmes LTI.

Remarque

Contrairement au cas du retour d'état, il semble difficile de formuler des exigences a priori sur la taille des ensembles de correcteurs synthétisés tout en conservant une formulation \mathcal{LMI} . Nous avons développé une heuristique permettant d'augmenter la taille des ellipsoïdes. Il s'agit d'ajouter les contraintes \mathcal{LMI} s suivantes ($k \in \{1 \dots N\}$) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{6k} + \epsilon \mathbb{1} & \mathbf{X}'_{5k} \\ \mathbf{X}_{5k} & -\mathbf{X}_{4k} - \epsilon^{-1} \mathbb{1} \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{6k} - \epsilon \mathbb{1} & \mathbf{Z}'_{5k} \\ \mathbf{Z}_{5k} & -\mathbf{Z}_{4k} + \epsilon^{-1} \mathbb{1} \end{bmatrix} < 0$$

aux \mathcal{LMIs} (III.75-III.76). Ces contraintes sont équivalentes à ($k \in \{1 \dots N\}$) :

$$\hat{\mathbf{X}}_k > -\epsilon \mathbf{1} \quad , \quad \mathbf{Z}_k < \epsilon \mathbf{1}$$

D'après la définition des matrices \mathcal{X}_k , \mathcal{Y}_k , \mathcal{Z}_k et \hat{X}_k , le rayon de l' $\{\mathcal{X}_k \mathcal{Y}_k \mathcal{Z}_k\}$ -ellipsoïde est $\mathcal{Y}_k \mathcal{Z}_k^{-1} \mathcal{Y}_k' - \mathcal{X}_k = -\mathcal{M}_k^{-1} \hat{X}_k^{-1} \mathcal{M}_k^{-T}$. Le Lemme III.6 montre que de petites valeurs du scalaire ϵ influencent la taille de la plus grande incertitude bornée en norme admissible sur le correcteur central K_k^0 .

En considérant le cas particulier où les ellipsoïdes se réduisent à des singletons, nous obtenons une condition nécessaire et suffisante pour la synthèse de correcteurs par retour de sortie dynamique d'ordre plein sans considérations de résilience.

Théorème III.17 (Synthèse d'un correcteur par retour de sortie dynamique d'ordre plein) [FAR 06a]

Le système (III.74) est stabilisable par retour de sortie dynamique d'ordre plein si et seulement s'il existe N quadruplés de matrices ($\bar{\mathbf{P}}_k \in \mathcal{S}^{n+}$, $\underline{\mathbf{P}}_k \in \mathcal{S}^{n+}$, $\hat{\mathbf{A}}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{\mathbf{B}}_k \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\hat{\mathbf{C}}_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\hat{\mathbf{D}}_k \in \mathbb{R}^{m \times p}$ satisfaisant les \mathcal{LMIs} ($k \in \{1 \dots N\}$) :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \bar{\mathbf{P}}_k & \mathbf{1} & * & * \\ \mathbf{1} & \underline{\mathbf{P}}_k & * & * \\ \hline A_k \bar{\mathbf{P}}_k + B_k \hat{\mathbf{C}}_k & A_k + B_k \hat{\mathbf{D}}_k C_k & \bar{\mathbf{P}}_{k+1} & \mathbf{1} \\ \hat{\mathbf{A}}_k & \underline{\mathbf{P}}_{k+1} A_k + \hat{\mathbf{B}}_k C_k & \mathbf{1} & \underline{\mathbf{P}}_{k+1} \end{array} \right] > 0 \quad (\text{III.83})$$

$$\mathbf{P}_{T+1} = \mathbf{P}_1, \quad \mathbf{Q}_{T+1} = \mathbf{Q}_1 \quad (\text{III.84})$$

Soient les matrices $\{\bar{\mathbf{P}}_k, \underline{\mathbf{P}}_k, \hat{\mathbf{A}}_k, \hat{\mathbf{B}}_k, \hat{\mathbf{C}}_k, \hat{\mathbf{D}}_k\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ solutions des inégalités (III.83-III.84). Alors, les matrices du correcteur peuvent être construites de la manière suivante :

$$K_k = \begin{bmatrix} A_k^K & B_k^K \\ C_k^K & D_k^K \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} N_{k+1}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_m \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{P}}_{k+1} \\ 0 \end{bmatrix} A_k \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_k & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\underline{\mathbf{P}}_{k+1} B_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_k & \hat{\mathbf{B}}_k \\ \hat{\mathbf{C}}_k & \hat{\mathbf{D}}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ -C_k \bar{\mathbf{P}}_k & \mathbf{1} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} M_k^{-T} & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_p \end{bmatrix} \quad (\text{III.85})$$

où les matrices carrées M_k et N_k sont choisies de telle sorte que $N_k M_k' = \mathbf{1} - \underline{\mathbf{P}}_k \bar{\mathbf{P}}_k$ $\forall k \in \{1 \dots N\}$.

III.4.3 Correcteurs structurés

Nous avons vu dans la Section III.3.3.2 que les résultats relatifs à la synthèse d'un correcteur par retour de sortie statique peuvent être étendus sans difficulté à la synthèse d'un correcteur structuré tout en préservant la recherche d'une fonction de Lyapunov périodique non structurée.

Parmi les résultats \mathcal{LMIs} présentés dans cette section, seul celui du Théorème III.13 relatif à la synthèse robuste d'un correcteur par retour d'état peut être étendu directement à la synthèse de correcteurs structurés. Ceci est rendu possible grâce au découplage entre les matrices $\{G_k, T_k\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ permettant de reconstruire le correcteur et les matrices de Lyapunov $\{W_k\}_{k \in \{0 \dots N-1\}}$.

Corollaire III.18 (Synthèse robuste de correcteurs structurés par retour d'état - Fonction de Lyapunov polytopique)

Supposons qu'il existe une solution au problème de faisabilité associé aux inégalités (III.60-III.63) avec :

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{T}_{\mathbb{T}(k)} \quad , \quad \mathbf{G}_k = \mathbf{G}_{\mathbb{T}(k)} \quad , \quad \forall k \in \{1 \dots N\} \quad (\text{III.86})$$

où $\mathbb{T}(k)$ est une fonction définissant la structure temporelle choisie pour le correcteur (voir Section III.2.1.2).

Alors le correcteur par retour d'état (N_1, N_2, \mathbb{T}) -périodique $u_k = K_k x_k$ défini par $K_k = T_k G_k^{-1}$ assure que $\chi_{sub}^{e, \mathbb{T}}(\Upsilon)$ est un coût \mathcal{H}_2 garanti pour (III.9) et :

$$\chi_{pc}^* \leq \gamma_{sub}^e(\{K_k^e(\Upsilon)\}_{k \in \mathbb{N}}) \leq \chi_{sub}^e(\Upsilon) \leq \chi_{sub}^{e, \mathbb{T}}(\Upsilon) .$$

Le résultat du Théorème III.13 faisant intervenir une fonction de Lyapunov polytopique est particularisé à la synthèse quadratique dans le Théorème III.15. Dans ce cas, les matrices additionnelles $\{G_k\}_{k \in \{1 \dots N\}}$ assurant le découplage entre les matrices de Lyapunov et les matrices du correcteur sont éliminées. De ce fait, le résultat du Théorème III.15 ne peut pas être directement étendu à la synthèse de correcteurs structurés. Ce problème peut être résolu en conservant ces matrices additionnelles et en particularisant le résultat du Théorème III.13 de la manière suivante :

Corollaire III.19 (Synthèse robuste de correcteurs structurés par retour d'état - Fonction de Lyapunov quadratique)

Supposons qu'il existe une solution au problème de faisabilité associé aux inégalités (III.60-III.63) avec :

$$\mathbf{W}_k^{[i]} = \mathbf{W}_k \quad , \quad \forall k \in \{0 \dots N-1\} \quad \forall i \in \{1 \dots L\} \quad (\text{III.87})$$

$$A_k^0 = 0 \quad , \quad C_k^0 = 0 \quad , \quad \mathbf{T}_k = \mathbf{T}_{\mathbb{T}(k)} \quad , \quad \mathbf{G}_k = \mathbf{G}_{\mathbb{T}(k)} \quad , \quad \forall k \in \{1 \dots N\} \quad (\text{III.88})$$

où $\mathbb{T}(k)$ est une fonction définissant la structure temporelle choisie pour le correcteur (voir Section III.2.1.2).

Alors le correcteur par retour d'état (N_1, N_2, \mathbb{T}) -périodique $u_k = K_k x_k$ défini par $K_k = T_k G_k^{-1}$ assure que $\chi_{sub}^{q, \mathbb{T}}$ est un coût \mathcal{H}_2 garanti pour (III.9) et :

$$\chi_{pc}^* \leq \chi_{sub}^e(\Upsilon_0) \leq \chi_{sub}^q \leq \chi_{sub}^{q, \mathbb{T}} .$$

Un résultat similaire est présenté dans [FAR 05a] pour le problème de stabilisation par retour d'état non-périodique (sans prise en compte des problèmes de robustesse et de performances). Il est montré sur différents exemples que la préservation de la recherche d'une fonction de Lyapunov périodique non-structurée permet d'améliorer de manière substantielle les résultats par rapport à une méthode qui consisterait à choisir une matrice de Lyapunov unique $\mathbf{W}_k = \mathbf{W} \forall k \in \{0 \dots N-1\}$.

Les résultats des Théorèmes III.12, III.16 et III.17 ne peuvent pas être directement étendus à la synthèse d'un correcteur structuré du fait des changements de variables linéarisants (III.53-III.55), (III.80) et (III.85). En effet, ces changements de variables font intervenir les matrices de Lyapunov $\{W_k\}_{k \in \{0 \dots N-1\}}$. Il n'est donc pas possible d'étendre directement ces théorèmes à la synthèse de correcteurs structurés tout en préservant la recherche d'une fonction de Lyapunov périodique non-structurée.

III.5 Conclusion

Ce chapitre a exposé différentes méthodes de synthèse robuste et résiliente. L'aspect résilience est traité d'une manière originale par la synthèse non plus d'un correcteur unique mais d'ensembles ellipsoïdaux de correcteurs. Comme dans les chapitres précédents, l'incertitude affectant le système est paramétrique de type polytopique.

Le problème est abordé sous sa forme la plus générale du calcul de lois de commandes par retour de sortie statique. Les méthodes de synthèse développées permettent de traiter le problème de robustesse et de résilience simultanément. Elles font cependant intervenir des inégalités matricielles non linéaires. Différentes solutions permettant de réduire leur complexité numérique sont alors présentées.

Ces méthodes n'offrent toutefois pas de garantie de convergence. Afin d'obtenir des méthodes de synthèse formulées à l'aide d'inégalités matricielles linéaires, nous proposons de relaxer le problème initial et de rechercher des correcteurs par retour d'état et par retour de sortie dynamique d'ordre plein.

Dans le cas du retour d'état, nous utilisons le cadre de travail étendu proposé en analyse robuste. Une partie des variables additionnelles introduites doit être fixée de sorte à obtenir des conditions \mathcal{LMI} s. Une interprétation simple et systématique de ces matrices est proposée. Elle nous permet de développer un algorithme alternant des étapes d'analyse et de synthèse améliorant les performances du système bouclé à chaque itération. Ces variables additionnelles permettent par ailleurs de découpler les matrices du système de celles permettant de reconstruire le correcteur. Cette propriété est mise à profit pour développer une méthode de synthèse de correcteurs de périodicité différente de celle du système et présentant une structure temporelle souhaitée.

Dans le cas du retour de sortie dynamique d'ordre plein, nous proposons une nouvelle méthode de synthèse permettant de calculer des correcteurs résilients. Il est connu que, dans le cas LTI sans considération de résilience, un changement de variables linéarisant permet de formuler le problème de synthèse de manière \mathcal{LMI} . Nous montrons d'une part que ce résultat peut être étendu aux systèmes périodiques et d'autre part que le problème de résilience peut être résolu tout en conservant une formulation \mathcal{LMI} .

Chapitre IV

Maintien à poste autonome de satellites en orbite basse

Sommaire

IV.1	Introduction	108
IV.2	Modélisation	109
IV.2.1	Equations non linéaires du mouvement	110
IV.2.2	Modèle linéarisé	112
IV.2.3	Modèle périodique à temps discret	119
IV.3	Comparaison des différents modèles en simulation	120
IV.3.1	Validation de l'étape de discrétisation	120
IV.3.2	Validation de l'étape de linéarisation	125
IV.4	Synthèse de correcteurs	127
IV.4.1	Définition de l'orbite de référence	127
IV.4.2	Synthèse d'une loi de maintien à poste par retour d'état	128
IV.4.3	Simulations en boucle fermée sur le modèle non-linéaire	131
IV.5	Conclusion	134

IV.1 Introduction

Ce chapitre propose une solution originale, basée sur les résultats théoriques obtenus dans les chapitres précédents, au problème du maintien à poste autonome d'un satellite en orbite basse. L'objectif est de calculer une loi de commande embarquée à bord du satellite permettant de le maintenir sur une orbite de référence malgré les différentes forces perturbatrices pouvant l'en écarter.

Ces forces peuvent être d'origine gravitationnelle ou non gravitationnelle [CAR 95, ZAR 87]. Les perturbations gravitationnelles sont engendrées par la dissymétrie du potentiel terrestre, par les phénomènes de marées et par l'attraction de la Lune, du Soleil ou des autres planètes. Parmi ces perturbations, nous ne prendrons explicitement en compte dans nos modèles que l'effet du J_2 , premier terme du développement du potentiel terrestre en harmoniques sphériques [ZAR 87]. Ce terme rend compte de l'aplatissement de la Terre au niveau des pôles. Les perturbations non gravitationnelles correspondent principalement aux effets des radiations (ou vents) solaires et du frottement atmosphérique. Ce dernier phénomène étant prépondérant pour les orbites de basse altitude [MON 00], nous choisissons de l'intégrer à notre modèle.

Traditionnellement, la fonction de maintien à poste est téléopérée depuis une station terrestre suivant trois étapes essentielles [SID 97]. La première consiste à suivre le déplacement du satellite depuis des stations terrestres. Ces stations déterminent à partir des informations recueillies les éléments de l'orbite réellement suivie par le satellite. La seconde correspond au calcul de la poussée corrective, de type impulsif, nécessaire pour ramener le satellite sur l'orbite désirée. L'ordre de poussée est alors transmis au satellite qui l'exécute. Enfin, la dernière étape consiste à vérifier la validité de cette manoeuvre en calculant, à partir de nouvelles mesures, l'orbite effective du satellite après la manoeuvre de maintien à poste. La méthodologie utilisée implique donc une charge opérationnelle au sol importante ainsi que de longues périodes de comportement non corrigé interrompues par des étapes de correction de courte durée.

Les calculateurs d'orbite embarqués tels que DIODE (Détermination Immédiate d'Orbite par Doris Embarqué) [JAY 03] développé par le CNES permettent d'avoir accès en permanence à la position et à la vitesse du satellite avec une précision importante (de l'ordre de quelques mètres seulement). La disponibilité à bord du satellite de ces informations permet d'envisager la mise en place d'une stratégie de maintien à poste non plus en boucle ouverte, comme décrite précédemment, mais en boucle fermée. Réaliser un maintien à poste autonome présenterait ainsi de nombreux avantages. Le premier est une diminution des coûts liés à la charge opérationnelle au sol. Ensuite, la précision accrue de localisation permet d'espérer pouvoir positionner le satellite de manière plus fine, à l'aide de manoeuvres plus faibles. Il est alors possible d'envisager l'utilisation d'une propulsion de type électrique délivrant des poussées de faible amplitude de façon continue. Ce type de moteur présente l'avantage d'avoir un rendement bien supérieur à celui des moteurs chimiques, permettant ainsi d'augmenter la durée de vie du satellite.

La méthode proposée dans ce chapitre pour aborder le problème de maintien à poste autonome fait intervenir plusieurs étapes. D'abord, un modèle non-linéaire régissant le

mouvement absolu du satellite est développé. Ce modèle est ensuite linéarisé autour d'une trajectoire de référence. Nous montrons alors qu'un choix de paramètres judicieux permet d'obtenir un modèle linéarisé périodique. Ce modèle est discrétisé pour pouvoir appliquer les différentes méthodes de synthèse présentées au Chapitre III. Pour les différents correcteurs obtenus, les performances du système bouclé sont évaluées à l'aide des méthodes d'analyse présentées au Chapitre II. Enfin, des simulations non-linéaires de la boucle de maintien à poste ainsi constituée permettent d'analyser plus finement la validité de l'approche.

IV.2 Modélisation

L'objectif de cette partie est d'établir un modèle linéarisé décrivant le mouvement d'un satellite M_2 , appelé *chasseur*, par rapport à un satellite de référence M_1 , appelé *cible*, suivant une orbite excentrique. Les équations d'évolution des deux satellites prennent en compte les effets du frottement atmosphérique ainsi que ceux du J_2 .

Il existe différents jeux de paramètres permettant de décrire le mouvement d'un satellite en orbite autour de la Terre. Une première approche fait appel aux paramètres cartésiens (position et vitesse du satellite) dans un repère donné. Une seconde utilise le vecteur des paramètres orbitaux $X_{orb} = (a, e, i, \Omega, \omega, \nu)$. Ces derniers, au nombre de six, décrivent à chaque instant la trajectoire elliptique que suivrait le satellite s'il était soumis à la seule force de gravitation de la Terre considérée comme une masse ponctuelle (le mouvement du satellite est alors dit *képlérien*).

Deux paramètres, le demi-grand axe a et l'excentricité e , décrivent la forme de l'orbite. L'orientation de l'orbite dans l'espace est définie à l'aide de trois angles : l'ascension droite du noeud ascendant Ω , l'inclinaison i et l'argument du périhélie ω . Enfin, la position du satellite sur l'orbite est indiquée par l'anomalie vraie ν . Ces différents paramètres sont décrits plus précisément en Annexe D.

L'ensemble des modèles développés dans ce chapitre utilisent les paramètres cartésiens pour décrire l'état du satellite. Les paramètres orbitaux sont utilisés uniquement dans la description de l'orbite de référence.

L'étape de modélisation se déroule en trois temps. D'abord, un modèle non linéaire, valide pour M_1 ou pour M_2 , prenant en compte l'effet du J_2 et du frottement atmosphérique est proposé dans la Section IV.2.1. Le vecteur d'état est constitué des paramètres cartésiens dans le repère inertiel $\mathcal{R}_i = (O, \vec{X}_i, \vec{Y}_i, \vec{Z}_i)$. Ce repère, lié au centre O de la Terre, dont le vecteur \vec{Z}_i est orienté selon l'axe des pôles et le vecteur \vec{X}_i vers le point vernal, est représenté sur la Figure IV.1. Le modèle non linéaire ainsi obtenu est ensuite linéarisé autour de la trajectoire de référence du satellite M_1 (Section IV.2.2). Un modèle du mouvement relatif entre les deux satellites dans le repère local $\mathcal{R}_1 = (M_1, \vec{R}, \vec{S}, \vec{W})$, également représenté sur la Figure IV.1, est alors obtenu. Le repère \mathcal{R}_1 , représenté sur la Figure IV.1, a pour centre le satellite M_1 . Le vecteur \vec{R} est colinéaire à $\overrightarrow{OM_1}$ et le vecteur \vec{W} est perpendiculaire au plan d'orbite. Le vecteur d'état du modèle linéaire est constitué des paramètres cartésiens dans le repère local \mathcal{R}_1 et la matrice dynamique de ce modèle

fait apparaître les paramètres orbitaux du satellite cible M_1 . En Section IV.2.3, ce modèle linéaire est échantillonné afin d'obtenir le modèle linéaire périodique à temps discret qui sera par la suite utilisé en synthèse.

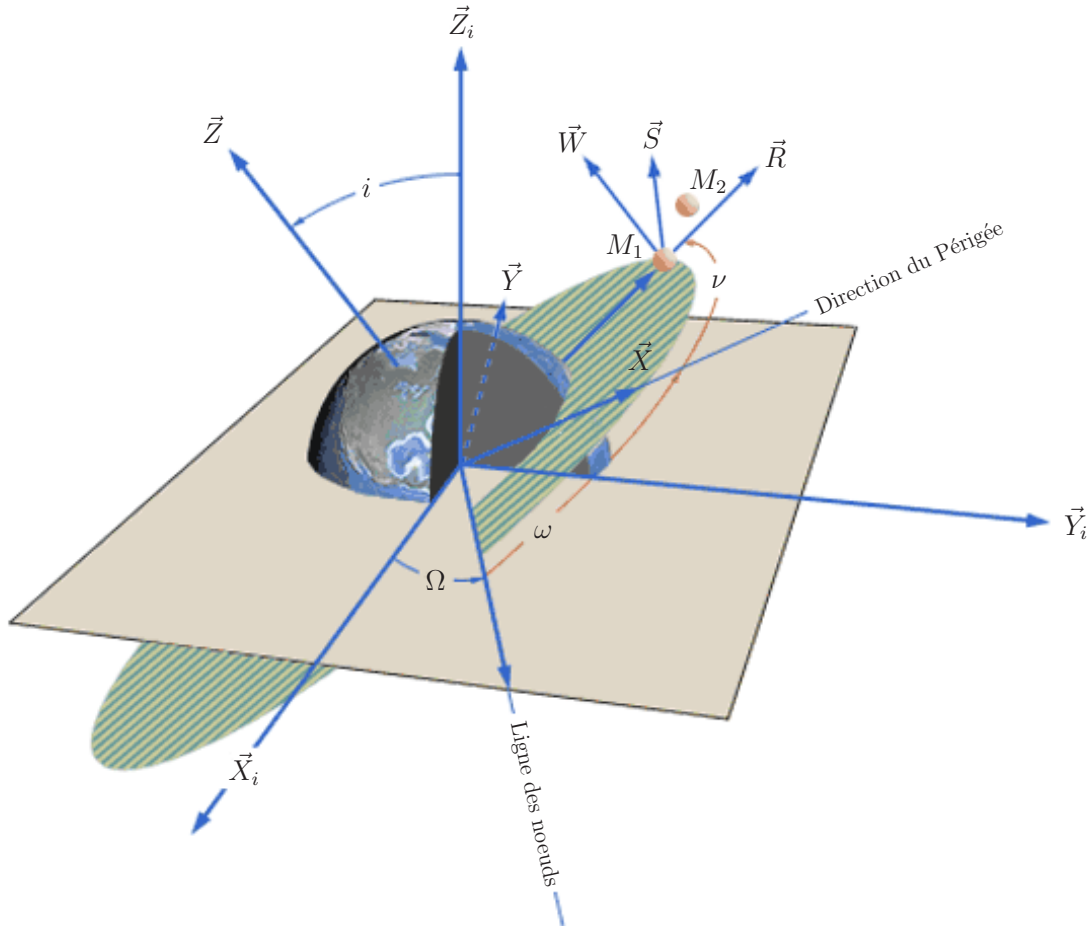


FIG. IV.1 – Repérage des satellites dans l'espace (source : [NAS 02])

IV.2.1 Equations non linéaires du mouvement

Dans cette partie, nous établissons un modèle non-linéaire décrivant la dynamique du mouvement d'un satellite M (M_1 ou M_2) dans le repère inertiel \mathcal{R}_i . Ce modèle sera utilisé d'une part pour développer le modèle linéarisé du mouvement relatif présenté dans la Section IV.2.2 et d'autre part en simulation pour évaluer la validité des correcteurs synthétisés à l'aide du modèle linéarisé.

La position, la vitesse et l'accélération de M par rapport au repère \mathcal{R}_i sont respectivement notées \vec{r} , \vec{v} et \vec{a} . Leur expression en fonction des trois coordonnées x_M , y_M et z_M

dans le repère \mathcal{R}_i est :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x_M \vec{X}_i + y_M \vec{Y}_i + z_M \vec{Z}_i \quad (\text{IV.1})$$

$$\vec{v} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_i} = \dot{x}_M \vec{X}_i + \dot{y}_M \vec{Y}_i + \dot{z}_M \vec{Z}_i \quad (\text{IV.2})$$

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}_i} = \ddot{x}_M \vec{X}_i + \ddot{y}_M \vec{Y}_i + \ddot{z}_M \vec{Z}_i \quad (\text{IV.3})$$

Les normes des vecteurs position et vitesse sont respectivement notées $r = \|\vec{r}\|$ et $v = \|\vec{v}\|$.

Le satellite M est soumis au champ de pesanteur terrestre produisant une accélération gravitationnelle notée \vec{a}_{gra} (qui est une fonction de la position du satellite) et à d'éventuelles forces extérieures dont la somme produit une accélération perturbatrice notée \vec{a}_{per} . Il produit par ailleurs une force de propulsion créant une accélération de poussée notée \vec{a}_{prop} . D'après le principe fondamental de la dynamique, son mouvement est régi par l'équation :

$$\vec{a} = \vec{a}_{gra}(\vec{r}) + \vec{a}_{per} + \vec{a}_{prop} \quad (\text{IV.4})$$

En première approximation, la Terre est souvent considérée comme un corps à répartition de masse homogène et sphérique. Or la Terre n'est pas rigoureusement sphérique et les masses qui la composent ne sont pas uniformément réparties. Afin de prendre en compte ces irrégularités, le potentiel terrestre peut être développé en série d'harmoniques sphériques [ZAR 87]. Le terme prépondérant est appelé J_2 et traduit l'aplatissement du globe terrestre au niveau des pôles. Ainsi, pour une orbite de type SPOT, l'accélération perturbatrice due à ce terme est de l'ordre de 10^{-2} m.s $^{-2}$ alors que l'ensemble des termes suivants produisent une accélération de 10^{-4} m.s $^{-2}$ [CAR 95]. En tenant compte des deux premiers termes de ce développement en série, l'expression suivante de l'accélération gravitationnelle est obtenue [SEN 03] :

$$\vec{a}_{gra}(\vec{r}) = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \mu J_2 R_{eq}^2 \left(\frac{3}{r^4} - \frac{15 (\vec{r} \cdot \vec{Z}_i)^2}{r^6} \right) \frac{\vec{r}}{r} \quad (\text{IV.5})$$

où $\mu = Gm_T$ est la constante gravitationnelle de la Terre, J_2 est le second harmonique zonal et R_{eq} le rayon équatorial de la Terre.

La seule accélération perturbatrice considérée ici est le frottement atmosphérique dont la valeur dépend de la position de M (son altitude) et de sa vitesse [MON 00] :

$$\vec{a}_{per} = \vec{a}_{atm}(\vec{r}, \vec{v}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{2m} S C_D v^2 \frac{\vec{v}}{v} \quad (\text{IV.6})$$

où :

- $\rho(\vec{r}) = \rho(h) \simeq \rho(r - R_{eq})$ est la densité atmosphérique à l'altitude h (R_{eq} est le rayon équatorial de la Terre),
- S est la surface de choc du satellite,

- C_D est le coefficient de traînée décrivant l'interaction entre l'atmosphère et la surface du satellite.

Différents modèles de densité atmosphérique sont proposés dans la littérature. Dans [KEV 66], la densité est supposée constante tandis que dans [HUM 02] sa variation est inversement proportionnelle à l'altitude. Ici, nous choisissons un modèle de densité décrit par une fonction exponentielle de l'altitude [JUP 76, CHA 80, MON 00] :

$$\rho(\vec{r}) = \rho(h) = \rho_0 e^{-h/H_0} = \rho_0 e^{-\frac{r-R_{eq}}{H_0}} \quad (\text{IV.7})$$

où ρ_0 est la densité atmosphérique à une altitude de référence et H_0 est un facteur d'échelle.

En remplaçant \vec{a} , $\vec{a}_{gra}(\vec{r})$ et $\vec{a}_{per} = \vec{a}_{atm}(\vec{r}, \vec{v})$ par leurs expressions respectives (IV.3), (IV.5), et (IV.6) dans l'équation générale du mouvement (IV.4), puis en projetant sur les axes $(\vec{X}_i, \vec{Y}_i, \vec{Z}_i)$, le système d'équations suivant est obtenu :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_M &= -\mu \left[1 - \frac{1}{2} J_2 R_{eq}^2 \left(\frac{3}{(x_M^2 + y_M^2 + z_M^2)} - \frac{15z_M^2}{(x_M^2 + y_M^2 + z_M^2)^2} \right) \right] \frac{x_M}{(x_M^2 + y_M^2 + z_M^2)^{3/2}} \\ &\quad - \frac{\rho_0}{2m} S C_D e^{-\frac{(x_M^2 + y_M^2 + z_M^2)^{1/2} - R_{eq}}{H_0}} (\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2 + \dot{z}_M^2)^{1/2} \dot{x}_M + (a_{prop})_x \\ \ddot{y}_M &= -\mu \left[1 - \frac{1}{2} J_2 R_{eq}^2 \left(\frac{3}{(x_M^2 + y_M^2 + z_M^2)} - \frac{15z_M^2}{(x_M^2 + y_M^2 + z_M^2)^2} \right) \right] \frac{y_M}{(x_M^2 + y_M^2 + z_M^2)^{3/2}} \\ &\quad - \frac{\rho_0}{2m} S C_D e^{-\frac{(x_M^2 + y_M^2 + z_M^2)^{1/2} - R_{eq}}{H_0}} (\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2 + \dot{z}_M^2)^{1/2} \dot{y}_M + (a_{prop})_y \\ \ddot{z}_M &= -\mu \left[1 - \frac{1}{2} J_2 R_{eq}^2 \left(\frac{3}{(x_M^2 + y_M^2 + z_M^2)} - \frac{15z_M^2}{(x_M^2 + y_M^2 + z_M^2)^2} \right) \right] \frac{z_M}{(x_M^2 + y_M^2 + z_M^2)^{3/2}} \\ &\quad - \frac{\rho_0}{2m} S C_D e^{-\frac{(x_M^2 + y_M^2 + z_M^2)^{1/2} - R_{eq}}{H_0}} (\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2 + \dot{z}_M^2)^{1/2} \dot{z}_M + (a_{prop})_z \end{aligned} \quad (\text{IV.8})$$

Les équations (IV.8) peuvent être mises sous la forme générale :

$$\dot{X}_M = f(X_M, U)$$

où :

- $X_M = (x_M \ y_M \ z_M \ \dot{x}_M \ \dot{y}_M \ \dot{z}_M)'$ est le vecteur d'état,
- $U = ((a_{prop})_x \ (a_{prop})_y \ (a_{prop})_z)'$ est le vecteur de commande.

Ces équations constituent un modèle non-linéaire de la dynamique du mouvement du satellite M .

IV.2.2 Modèle linéarisé

Dans cette partie, nous établissons un modèle linéaire décrivant le mouvement relatif du satellite chasseur M_2 par rapport à la cible M_1 . De nombreux modèles linéarisés sont proposés dans la littérature selon le type de l'orbite de référence considérée et les méthodes de linéarisation utilisées. Une grande partie de ces travaux est basée sur les équations

de Clohessy-Wiltshire (ou équations de Hill) qui décrivent le mouvement relatif pour des orbites quasi-circulaires [GUR 00, ALF 00, VAD 01, ROS 02, HUM 02, CAR 02, SCH 03, MIS 04]. Les équations de Clohessy-Wiltshire ont été généralisées au cas des orbites elliptiques, donnant lieu aux équations de Tschauner-Hempel (ou équations de Lawden) [TSC 64]. Ces dernières ont été par la suite modifiées de manière à prendre en compte les effets de perturbations additionnelles [SCH 01, TIL 02, INA 02].

IV.2.2.1 Equation générale du mouvement relatif

Si l'interaction entre M_1 et M_2 est négligée, le mouvement de chaque satellite dans le repère \mathcal{R}_i est régi par une équation de la forme (IV.4). Le mouvement relatif entre les deux satellites peut donc être déterminé à partir de l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\Delta\vec{a} &= \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \\ &= \vec{a}_{gra}(\vec{r}_2) - \vec{a}_{gra}(\vec{r}_1) + \vec{a}_{atm}(\vec{r}_2, \vec{v}_2) - \vec{a}_{atm}(\vec{r}_1, \vec{v}_1) + \vec{a}_{prop2} - \vec{a}_{prop1}\end{aligned}$$

Supposons que le satellite cible M_1 est soumis à une accélération de poussée \vec{a}_{prop1} et que le satellite chasseur M_2 est soumis à cette même accélération complétée par une poussée corrective $\Delta\vec{a}$:

$$\vec{a}_{prop2} = \vec{a}_{prop1} + \Delta\vec{a}_{prop}$$

Alors, l'équation précédente s'écrit :

$$\Delta\vec{a} = \Delta\vec{a}_{gra} + \Delta\vec{a}_{atm} + \Delta\vec{a}_{prop} \quad (\text{IV.9})$$

où :

$$\begin{aligned}\Delta\vec{a}_{gra} &= \vec{a}_{gra}(\vec{r}_2) - \vec{a}_{gra}(\vec{r}_1) \\ \Delta\vec{a}_{atm} &= \vec{a}_{atm}(\vec{r}_2, \vec{v}_2) - \vec{a}_{atm}(\vec{r}_1, \vec{v}_1)\end{aligned}$$

Nous allons dans les quatre sections suivantes expliciter les termes $\Delta\vec{a}$, $\Delta\vec{a}_{gra}$, $\Delta\vec{a}_{atm}$ et $\Delta\vec{a}_{prop}$ de l'équation (IV.9) dans le repère local $\mathcal{R}_1 = (M_1, \vec{R}, \vec{S}, \vec{W})$ associé au satellite M_1 . Ce repère local, déjà indiqué sur la Figure IV.1, est représenté dans le plan d'orbite sur la Figure IV.2. Cette figure fait apparaître le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ dont le vecteur \vec{X} est dirigé vers le périégée et dont le vecteur \vec{Z} est perpendiculaire au plan d'orbite. Le passage du repère inertiel \mathcal{R}_i au repère \mathcal{R} est obtenu par 3 rotations successives d'angles Ω , ω et i comme décrit sur les Figures D.3, D.4 et D.5 de l'Annexe D.

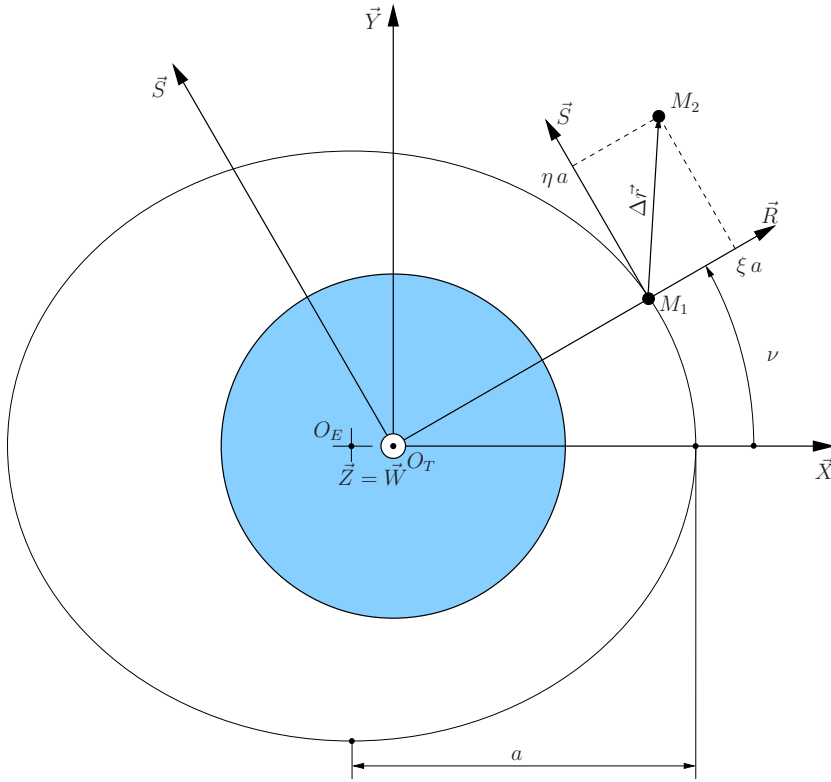


FIG. IV.2 – Paramétrage du mouvement différentiel

IV.2.2.2 Accélération différentielle

L'objectif de ce paragraphe est d'explicitier le terme $\Delta\vec{a}$ dans la base locale \mathcal{R}_1 .

La position relative de M_2 par rapport à M_1 dans \mathcal{R}_1 est décrite par les 3 paramètres $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$ et $\tilde{\zeta}$ comme indiqué sur la Figure IV.2 :

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = a(\tilde{\xi}\vec{R} + \tilde{\eta}\vec{S} + \tilde{\zeta}\vec{W}) \quad (\text{IV.10})$$

En dérivant deux fois l'équation (IV.10) par rapport au temps et en négligeant la variation des angles orbitaux (i , ω , Ω) devant celle de l'anomalie vraie ν , l'expression suivante est obtenue :

$$\Delta\vec{a} \simeq a \left[(\ddot{\xi} - 2\dot{\eta}\dot{\nu} - \tilde{\eta}\ddot{\nu} - \tilde{\xi}\dot{\nu}^2)\vec{R} + (\ddot{\eta} + 2\dot{\xi}\dot{\nu} + \tilde{\xi}\ddot{\nu} - \tilde{\eta}\dot{\nu}^2)\vec{S} + \ddot{\zeta}\vec{W} \right] \quad (\text{IV.11})$$

Le détail des calculs, en particulier la dérivation des vecteurs \vec{R} , \vec{S} et \vec{W} par rapport au temps, est donné en Annexe E.1.

Nous supposons ici que la cible suit une trajectoire proche d'une orbite képlérienne. Alors, la vitesse de variation de l'anomalie vraie et son accélération peuvent être approximées par les lois képlériennes suivantes :

$$\dot{\nu} = n \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} \quad (\text{IV.12})$$

$$\ddot{\nu} = -n^2 \frac{2e \sin \nu (1 + e \cos \nu)^3}{(1 - e^2)^3} \quad (\text{IV.13})$$

où n est le mouvement moyen. Cette hypothèse, classique dans la littérature [SCH 03], peut être validée si l'on considère que le terme de poussée \vec{a}_{prop1} est calculé en boucle ouverte de sorte à maintenir le satellite M_1 suffisamment proche d'une orbite képlérienne.

En remplaçant $\dot{\nu}$ et $\ddot{\nu}$ par leurs expressions dans (IV.11), l'accélération relative est obtenue :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{a} = & a \left(\ddot{\xi} - 2n \frac{(1+e \cos \nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} \dot{\eta} + n^2 \frac{2e \sin \nu (1+e \cos \nu)^3}{(1-e^2)^3} \tilde{\eta} - n^2 \frac{(1+e \cos \nu)^4}{(1-e^2)^3} \tilde{\xi} \right) \vec{R} \\ & + a \left(\ddot{\eta} + 2n \frac{(1+e \cos \nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} \dot{\xi} - n^2 \frac{2e \sin \nu (1+e \cos \nu)^3}{(1-e^2)^3} \tilde{\xi} - n^2 \frac{(1+e \cos \nu)^4}{(1-e^2)^3} \tilde{\eta} \right) \vec{S} \\ & + a \ddot{\zeta} \vec{W} \end{aligned} \quad (IV.14)$$

IV.2.2.3 Accélération gravitationnelle différentielle

Le terme $\Delta \vec{a}_{gra}$ est approximé par le développement de Taylor au premier ordre de $\vec{a}_{gra}(\vec{r})$:

$$\vec{a}_{gra}(\vec{r}_2) \simeq \vec{a}_{gra}(\vec{r}_1) + \left. \frac{\partial \vec{a}_{gra}}{\partial \vec{r}} \right|_{\vec{r}_1} \Delta \vec{r} \quad (IV.15)$$

soit :

$$\Delta \vec{a}_{gra} \simeq \left. \frac{\partial \vec{a}_{gra}}{\partial \vec{r}} \right|_{\vec{r}_1} \Delta \vec{r} \quad (IV.16)$$

où $\left. \frac{\partial \vec{a}_{gra}}{\partial \vec{r}} \right|_{\vec{r}_1}$ est la jacobienne de \vec{a}_{gra} évaluée en \vec{r}_1 .

A l'issue des différents calculs présentés en Annexe E.2, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{a}_{gra} \simeq & an^2 \left(\frac{1+e \cos \nu}{1-e^2} \right)^3 \left[2\tilde{\xi} + 6J_2 \left(\frac{R_{eq}}{a} \right)^2 \left(\frac{1+e \cos \nu}{1-e^2} \right)^2 (G_{\xi\xi}\tilde{\xi} + G_{\xi\eta}\tilde{\eta} + G_{\xi\zeta}\tilde{\zeta}) \right] \vec{R} \\ & + an^2 \left(\frac{1+e \cos \nu}{1-e^2} \right)^3 \left[-\tilde{\eta} + 6J_2 \left(\frac{R_{eq}}{a} \right)^2 \left(\frac{1+e \cos \nu}{1-e^2} \right)^2 (G_{\eta\xi}\tilde{\xi} + G_{\eta\eta}\tilde{\eta} + G_{\eta\zeta}\tilde{\zeta}) \right] \vec{S} \\ & + an^2 \left(\frac{1+e \cos \nu}{1-e^2} \right)^3 \left[-\tilde{\zeta} + 6J_2 \left(\frac{R_{eq}}{a} \right)^2 \left(\frac{1+e \cos \nu}{1-e^2} \right)^2 (G_{\zeta\xi}\tilde{\xi} + G_{\zeta\eta}\tilde{\eta} + G_{\zeta\zeta}\tilde{\zeta}) \right] \vec{W} \end{aligned} \quad (IV.17)$$

où :

$$G = \begin{bmatrix} G_{\xi\xi} & G_{\xi\eta} & G_{\xi\zeta} \\ G_{\eta\xi} & G_{\eta\eta} & G_{\eta\zeta} \\ G_{\zeta\xi} & G_{\zeta\eta} & G_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 3 \cos^2 \varphi & -\sin 2\varphi \cos \psi & -\sin 2\varphi \cos \psi \\ -\sin 2\varphi \cos \psi & \cos^2 \varphi \sin^2 \psi - \frac{\sin^2 \varphi}{4} & \cos^2 \varphi \cos \psi \sin \psi \\ -\sin 2\varphi \cos \psi & \cos^2 \varphi \cos \psi \sin \psi & \cos^2 \varphi \cos^2 \psi - \frac{\sin^2 \varphi}{4} \end{bmatrix} \quad (IV.18)$$

et :

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \sin(\omega + \nu) \sin i \\ \sin \varphi &= \sqrt{\cos^2(\omega + \nu) + \sin^2(\omega + \nu) \cos^2 i} \\ \cos \psi &= -\sin i \cos(2\Omega + \alpha) \\ \sin \psi &= \frac{\sin \alpha}{\sin(\omega + \nu)} \\ \cos \alpha &= \frac{\cos(\omega + \nu)}{\sqrt{\cos^2(\omega + \nu) + \sin^2(\omega + \nu) \cos^2 i}} \\ \sin \alpha &= \frac{\sin(\omega + \nu) \cos i}{\sqrt{\cos^2(\omega + \nu) + \sin^2(\omega + \nu) \cos^2 i}}\end{aligned}$$

IV.2.2.4 Accélération différentielle due au frottement atmosphérique

L'accélération différentielle due au frottement atmosphérique est approximée par le développement de Taylor au premier ordre de \vec{a}_{atm} :

$$\vec{a}_{atm}(\vec{r}_2, \vec{v}_2) = \vec{a}_{atm}(\vec{r}_1, \vec{v}_1) + \left. \frac{\partial \vec{a}_{atm}}{\partial \vec{r}} \right|_{\vec{r}_1} \Delta \vec{r} + \left. \frac{\partial \vec{a}_{atm}}{\partial \vec{v}} \right|_{\vec{v}_1} \Delta \vec{v} \quad (\text{IV.19})$$

où $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$.

Si la variation de densité atmosphérique entre M_1 et M_2 est négligée, alors le terme $\left. \frac{\partial \vec{a}_{atm}}{\partial \vec{r}} \right|_{\vec{r}_1}$ est nul et l'expression précédente s'écrit :

$$\Delta \vec{a}_{atm} = \left. \frac{\partial \vec{a}_{atm}}{\partial \vec{v}} \right|_{\vec{v}_1} \Delta \vec{v} \quad (\text{IV.20})$$

En négligeant la vitesse relative $\Delta \vec{v}$ de M_2 par rapport à M_1 devant la vitesse absolue \vec{v}_1 de M_1 , les calculs présentés en Annexe E.3 permettent d'obtenir l'expression suivante :

$$\Delta \vec{a}_{atm} = -\frac{\rho(h)}{m} a S C_D v_1 \left[\left(t_r^2 \dot{\xi} + t_r t_s \dot{\eta} \right) \vec{R} + \left(t_r t_s \dot{\xi} + t_s^2 \dot{\eta} \right) \vec{S} \right] \quad (\text{IV.21})$$

où t_r et t_s définissent la direction du vecteur vitesse du satellite 1 :

$$\frac{\vec{v}_1}{v_1} = t_r \vec{R} + t_s \vec{S} = \dot{r} \vec{R} + r \dot{\nu} \vec{S} \quad (\text{IV.22})$$

et $\rho(h) = \rho(r)$ désigne la densité atmosphérique à l'altitude h donnée par l'expression (IV.7).

En supposant comme précédemment que la cible évolue sous des conditions képlériennes, les expressions de r , \dot{r} et $r \dot{\nu}$ sont données par :

$$r = a \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \nu} \quad (\text{IV.23})$$

$$\dot{r} = nae \frac{\sin \nu}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (\text{IV.24})$$

$$r \dot{\nu} = an \frac{1 + e \cos \nu}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (\text{IV.25})$$

L'expression de l'accélération différentielle due au frottement atmosphérique est finalement obtenue :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{a}_{atm} = & - \frac{\rho(\nu)}{m} \frac{SC_D}{\sqrt{1-e^2}} \frac{an}{\sqrt{1+e^2+2e\cos\nu}} \left(e^2 \sin^2 \nu \dot{\xi} + e \sin \nu (1+e\cos\nu) \dot{\eta} \right) \vec{R} \\ & - \frac{\rho(\nu)}{m} \frac{SC_D}{\sqrt{1-e^2}} \frac{an}{\sqrt{1+e^2+2e\cos\nu}} \left(e \sin \nu (1+e\cos\nu) \dot{\xi} + (1+e\cos\nu)^2 \dot{\eta} \right) \vec{S} \end{aligned} \quad (IV.26)$$

où :

$$\rho(\nu) = \rho_0 e^{-\frac{a}{H_0} \frac{1-e^2}{1+e\cos\nu} - Req} \quad (IV.27)$$

IV.2.2.5 Accélération de poussée correctrice

L'accélération de poussée correctrice de la cible est notée comme suit :

$$\Delta \vec{a}_{prop} = an^2 (\tilde{u}_\xi \vec{R} + \tilde{u}_\eta \vec{S} + \tilde{u}_\zeta \vec{W}) \quad (IV.28)$$

où \tilde{u}_ξ , \tilde{u}_η et \tilde{u}_ζ sont des signaux de commande adimensionnés.

IV.2.2.6 Représentation d'état du modèle linéarisé

L'introduction des expressions (IV.14), (IV.17) et (IV.26) dans la relation (IV.9) puis la projection sur les axes locaux (\vec{R} , \vec{S} , \vec{W}) conduit au système d'équations :

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} = & 2n \frac{(1+e\cos\nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} \dot{\eta} - 2n^2 e \sin \nu \left(\frac{1+e\cos\nu}{1-e^2} \right)^3 \dot{\eta} + n^2 \left(\frac{1+e\cos\nu}{1-e^2} \right)^3 (3+e\cos\nu) \dot{\xi} \\ & + 6n^2 J_2 \left(\frac{Req}{a} \right)^2 \left(\frac{1+e\cos\nu}{1-e^2} \right)^5 (G_{\xi\xi} \tilde{\xi} + G_{\xi\eta} \tilde{\eta} + G_{\xi\zeta} \tilde{\zeta}) \\ & - \frac{\rho(\nu)}{m} \frac{SC_D}{a\sqrt{1-e^2}} \frac{n}{\sqrt{1+e^2+2e\cos\nu}} \left(e^2 \sin^2 \nu \dot{\xi} + e \sin \nu (1+e\cos\nu) \dot{\eta} \right) + n^2 \tilde{u}_\xi \end{aligned} \quad (IV.29)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\eta} = & - 2n \frac{(1+e\cos\nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} \dot{\xi} + 2ne \sin \nu \left(\frac{1+e\cos\nu}{1-e^2} \right)^3 \dot{\xi} + n \left(\frac{1+e\cos\nu}{1-e^2} \right)^3 (e\cos\nu) \dot{\eta} \\ & + 6n^2 J_2 \left(\frac{Req}{a} \right)^2 \left(\frac{1+e\cos\nu}{1-e^2} \right)^5 (G_{\eta\xi} \tilde{\xi} + G_{\eta\eta} \tilde{\eta} + G_{\eta\zeta} \tilde{\zeta}) \\ & - \frac{\rho(\nu)}{m} \frac{SC_D}{a\sqrt{1-e^2}} \frac{n}{\sqrt{1+e^2+2e\cos\nu}} \left(e \sin \nu (1+e\cos\nu) \dot{\xi} + (1+e\cos\nu)^2 \dot{\eta} \right) + n^2 \tilde{u}_\eta \end{aligned} \quad (IV.30)$$

$$\ddot{\zeta} = -n^2 \left(\frac{1+e\cos\nu}{1-e^2} \right)^3 \dot{\zeta} + 6n^2 J_2 \left(\frac{Req}{a} \right)^2 \left(\frac{1+e\cos\nu}{1-e^2} \right)^5 (G_{\zeta\xi} \tilde{\xi} + G_{\zeta\eta} \tilde{\eta} + G_{\zeta\zeta} \tilde{\zeta}) + n^2 \tilde{u}_\zeta \quad (IV.31)$$

En posant :

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \left(\tilde{\xi} \quad \tilde{\eta} \quad \tilde{\zeta} \quad \dot{\xi} \quad \dot{\eta} \quad \dot{\zeta} \right)' \\ \tilde{u}(t) &= \left(\tilde{u}_\xi \quad \tilde{u}_\eta \quad \tilde{u}_\zeta \right)' \end{aligned}$$

le modèle d'état suivant peut être obtenu :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}(\nu)\tilde{x}(t) + \tilde{B}\tilde{u}(t) \quad (\text{IV.32})$$

Le modèle (IV.32) est linéaire à paramètres variants (LPV). Le seul paramètre variant dans le temps est ici l'anomalie vraie ν . En première approximation, la cible étant supposée évoluer proche d'une orbite képlérienne donnée, ses paramètres orbitaux, à l'exception de l'anomalie vraie, sont supposés constants. Par ailleurs, en considérant la dépendance en ν des équations (IV.29-IV.31), il est clair que le modèle (IV.32) est LPV périodique : $\tilde{A}(\nu + 2\pi) = \tilde{A}(\nu)$.

Pour éliminer la variable temporelle au profit de l'anomalie vraie ν , le changement de variables suivant est appliqué [TSC 64, GAU 04] :

$$\begin{aligned} \frac{d(\cdot)}{dt} &= \frac{d(\cdot)}{d\nu} \frac{d\nu}{dt} = \frac{d(\cdot)}{d\nu} \dot{\nu} \\ \frac{d^2(\cdot)}{dt^2} &= \frac{d^2(\cdot)}{d\nu^2} \dot{\nu}^2 + \frac{d(\cdot)}{d\nu} \ddot{\nu} \end{aligned} \quad (\text{IV.33})$$

où les expressions de $\dot{\nu}$ et $\ddot{\nu}$ sont respectivement données par (IV.12) et (IV.13).

De plus, le changement de variables proposé dans [YAM 02] est appliqué pour simplifier les équations :

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = (1 + e \cos \nu) \begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \\ \tilde{\zeta} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u_\xi \\ u_\eta \\ u_\zeta \end{pmatrix} = \left(\frac{1 - e^2}{1 + e \cos \nu} \right)^3 \begin{pmatrix} \tilde{u}_\xi \\ \tilde{u}_\eta \\ \tilde{u}_\zeta \end{pmatrix} \quad (\text{IV.34})$$

Le modèle d'état suivant est alors obtenu :

$$\frac{dx(\nu)}{d\nu} = A(\nu)x(\nu) + Bu(\nu) \quad (\text{IV.35})$$

où :

$$\begin{aligned} x(\nu) &= \left(\xi \quad \eta \quad \zeta \quad \frac{d\xi}{d\nu} \quad \frac{d\eta}{d\nu} \quad \frac{d\zeta}{d\nu} \right)' \\ u(\nu) &= \left(u_\xi \quad u_\eta \quad u_\zeta \right)' \end{aligned}$$

L'expression de la matrice A est décomposée comme suit de manière à faire apparaître séparément l'influence de la force gravitationnelle képlérienne, de l'aplatissement des pôles et du frottement atmosphérique sur la dynamique du système :

$$A(\nu) = A_{kep}(\nu) + A_{J_2}(\nu) + A_{atm}(\nu) \quad (\text{IV.36})$$

avec :

$$A_{kep}(\nu) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{1 + e \cos \nu} & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.37})$$

$$A_{J_2}(\nu) = 6 J_2 \left(\frac{R_{eq}}{a} \right)^2 \frac{(1 + e \cos \nu)^4}{(1 - e^2)^5} \begin{bmatrix} \mathbb{0}_{3 \times 3} & \mathbb{0}_{3 \times 3} \\ G & \mathbb{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.38})$$

$$A_{atm}(\nu) = -\frac{\rho(\nu)}{m} \frac{SC_D}{(1 - e^2)^2} \frac{a}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \nu}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^3 \sin^3 \nu & (1 + e \cos \nu)e^2 \sin^2 \nu & 0 & (1 + e \cos \nu)e^2 \sin^2 \nu & (1 + e \cos \nu)^2 e \sin \nu & 0 \\ (1 + e \cos \nu)e^2 \sin^2 \nu & (1 + e \cos \nu)^2 e \sin \nu & 0 & (1 + e \cos \nu)e^2 \sin^2 \nu & (1 + e \cos \nu)^2 e \sin \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 + e \cos \nu)^2 e \sin \nu & (1 + e \cos \nu)^3 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.39})$$

Les expressions de $\rho(\nu)$ et G sont respectivement données par (IV.27) et (IV.18).

La matrice de commande est indépendante de l'anomalie vraie :

$$B = \begin{bmatrix} \mathbb{0}_{3 \times 3} \\ \mathbb{1}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.40})$$

D'après l'expression (IV.36) de la matrice dynamique, le modèle (IV.35) est linéaire 2π -périodique : $A(\nu + 2\pi) = A(\nu)$.

Remarque

Dans le cas képlérien ($A(\nu) = A_{kep}(\nu)$), et lorsque l'excentricité de l'orbite de référence est nulle ($e = 0$), le modèle (IV.35) devient LTI. Les équations classiques de Hill-Clohessy-Wiltshire sont alors retrouvées [VAD 01, MIS 04, ROS 02, CAR 02].

IV.2.3 Modèle périodique à temps discret

Le modèle d'état (IV.35) est à présent échantillonné selon la méthodologie indiquée en Section I.4.2. Nous rappelons ici les équations (I.24) permettant d'obtenir les matrices de la représentation d'état discrétisée :

$$\begin{aligned} A_k &= \Phi(T_s(k+1), T_s(k)) \\ B_k &= \int_{T_s(k)}^{T_s(k+1)} \Phi(T_s(k+1), \tau) B(\tau) d\tau \\ C_k &= C(T_s(k)) \\ D_k &= D(T_s(k)) \end{aligned} \quad (\text{IV.41})$$

où $T_s(k)$ est le k -ième instant d'échantillonnage. Le modèle d'état à temps continu (IV.35) étant périodique, le système échantillonné défini par les matrices (IV.41) est périodique.

Le paramètre du modèle (IV.35) étant l'anomalie ν et non le temps, nous choisissons d'effectuer un échantillonnage en ν tel que la période d'échantillonnage soit constante :

$$\Delta T_s(k) = T_s(k+1) - T_s(k) = \Delta\nu = \frac{2\pi}{N}$$

où N est le nombre d'échantillons effectués sur une période $T = 2\pi$. Le modèle à temps discret obtenu est N -périodique.

Ceci correspond à un échantillonnage variant dans le temps lorsque la variable temporelle t est considérée. Comparé à un échantillonnage utilisant un pas constant en temps, l'échantillonnage choisi ici permet d'obtenir une précision accrue lorsque le satellite est proche de la Terre, c'est-à-dire lorsque l'effet de la perturbation atmosphérique est le plus important.

Si nous faisons par ailleurs l'hypothèse que l'échantillonnage est suffisamment fin pour que les matrices du système puissent être considérées constantes sur une période d'échantillonnage, alors le système échantillonné s'écrit :

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k \quad (\text{IV.42})$$

où :

$$\begin{aligned} A_k &= \Phi((k+1)\Delta\nu, k\Delta\nu) = e^{A(k\Delta\nu)\Delta\nu} \\ B_k &= \int_{k\Delta\nu}^{(k+1)\Delta\nu} \Phi((k+1)\Delta\nu, \tau) B(\tau) d\tau = \int_{k\Delta\nu}^{(k+1)\Delta\nu} e^{A(k\Delta\nu)\tau} d\tau B(k\Delta\nu) \\ C_k &= C(k\Delta\nu) \\ D_k &= D(k\Delta\nu) \end{aligned} \quad (\text{IV.43})$$

C'est ainsi que sont calculées les matrices du système N -périodique utilisé par la suite.

IV.3 Comparaison des différents modèles en simulation

Les étapes de linéarisation et de discrétisation introduisent nécessairement des écarts entre le comportement des modèles linéaires à temps continu et à temps discret et celui du modèle non-linéaire de départ. Nous proposons dans cette partie d'évaluer ces différences à l'aide de simulations du comportement dynamique de ces modèles pour des conditions initiales données. Ainsi, des modèles SIMULINK[®] du modèle non-linéaire (IV.8), du modèle linéarisé (IV.35) et du modèle linéaire échantillonné (IV.42) ont été développés comme décrit en Annexe F.

Nous nous intéressons plus particulièrement dans un premier temps à l'erreur introduite par l'étape de discrétisation. En effet, cette étape est liée à la méthodologie de synthèse que nous avons décidé d'employer. Il convient donc de quantifier l'erreur qu'elle engendre en fonction de l'échantillonnage choisi et des paramètres de l'orbite de référence.

IV.3.1 Validation de l'étape de discrétisation

Dans les équations (IV.35-IV.36) explicitant le modèle périodique linéaire à temps continu, nous avons décomposé la matrice $A(\nu)$ en trois matrices $A_{kep}(\nu)$, $A_{J_2}(\nu)$ et $A_{atm}(\nu)$. La matrice $A_{kep}(\nu)$ est celle qui a l'effet le plus important sur la dynamique

du système. En considérant l'équation (IV.37), nous pouvons remarquer qu'outre l'anomalie vraie, le seul paramètre orbital intervenant dans l'expression de A_{kep} est l'excentricité de la cible e . En étudiant plus finement cette expression, nous constatons que plus l'excentricité e est grande, plus la valeur de $A_{kep}(\nu)$ va évoluer au cours d'une période. Or, dans l'établissement du modèle périodique à temps discret (IV.43), nous avons fait l'hypothèse que la matrice dynamique évolue peu entre deux échantillons. Il est donc nécessaire d'évaluer l'influence de e sur l'erreur de discrétisation.

Pour ce faire, nous nous plaçons dans le cas képlérien. Le modèle s'écrit alors :

$$\frac{dx(\nu)}{d\nu} = A_{kep}(\nu)x(\nu)$$

où :

$$A_{kep}(\nu) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{1+e \cos \nu} & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous choisissons par ailleurs des conditions initiales conduisant à un mouvement relatif périodique entre les deux satellites. Au niveau du modèle non linéaire, cela revient à choisir pour les deux satellites des orbites dont seule l'excentricité diffère. Pour le modèle linéarisé, ce dernier choix correspond à prendre un vecteur d'état à l'instant $\nu = 0$ comme suit :

$$x(0) = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{2+e}{1+e}\xi_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.44})$$

Cette condition initiale particulière, proposée dans [INA 02], correspond à un cycle limite pour le système non-linéaire et à un cycle pour le système périodique linéarisé. A titre d'exemple, nous proposons dans la Figure IV.3 le mouvement relatif pour $e = 0.7$ et $\xi_0 = 1$ simulé à l'aide des modèles linéaires à temps continu et à temps discret (pour un choix de $N = 100$ échantillons pour un tour du satellite autour de la Terre).

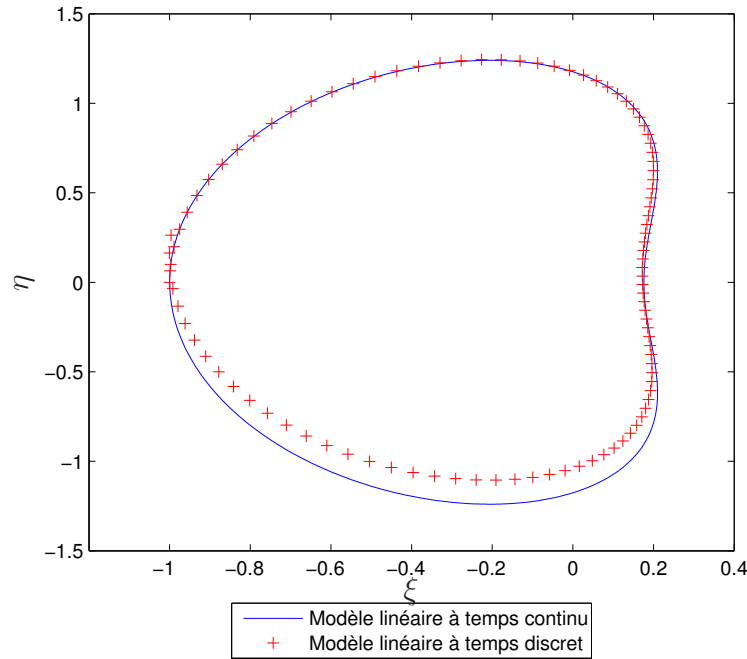


FIG. IV.3 – Mouvement relatif périodique pour des conditions initiales particulières ($e = 0.7$ - cas képlérien)

Nous remarquons que pour ce choix d'excentricité et d'échantillonnage, la dérive entre le modèle à temps continu et celui à temps discret est importante. Afin de quantifier cette erreur, nous introduisons la variable ϵ définie comme suit :

$$\epsilon = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\|x(k\Delta\nu) - x_k\|_2}{\|x(k\Delta\nu)\|_2} \quad (\text{IV.45})$$

où $x(k\Delta\nu)$ est le vecteur d'état du modèle à temps continu à l'instant $k\Delta\nu$ et où x_k est le vecteur d'état du modèle à temps discret à ce même instant. L'erreur ϵ indique donc la moyenne sur une révolution du satellite de l'erreur relative de discrétisation.

La Figure IV.4 présente, dans le cas d'un mouvement périodique déterminé par un même ξ_0 , l'influence du nombre d'échantillons par tour N et de l'excentricité e sur l'erreur de discrétisation.

Remarque

La valeur de N a volontairement été limitée à 150 car les méthodes d'analyse et de synthèse présentées dans les chapitres II et III conduisent à des problèmes \mathcal{LMI} s de dimension trop importante pour des systèmes N -périodiques de période plus grande.

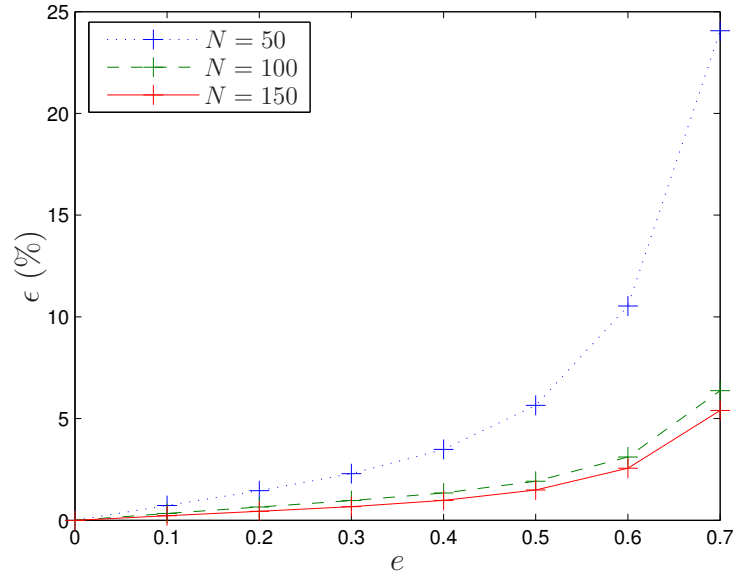


FIG. IV.4 – Influence de l'excentricité e et du nombre d'échantillons N sur l'erreur de discrétisation (cas képlérien)

La Figure IV.4 montre que l'erreur de discrétisation est importante pour des orbites à très forte excentricité ($e > 0.4$). Nous décidons donc d'étudier par la suite une orbite d'excentricité $e = 0.1$.

Les perturbations dues à l'effet du J_2 et du frottement atmosphérique sont à présent réintégrées dans le modèle :

$$\frac{dx(\nu)}{d\nu} = (A_{kep}(\nu) + A_{J_2}(\nu) + A_{atm}(\nu)) x(\nu)$$

L'accélération résultant du frottement atmosphérique dépend de l'altitude du satellite. Afin que cette perturbation ait un effet sensible sur le modèle, nous choisissons une orbite de référence telle que l'altitude du périégée soit relativement faible :

$$h_P = 400 \text{ km}$$

Etant donnée l'excentricité choisie, le demi-grand axe est donc :

$$a = \frac{h_P + R_{eq}}{1 - e} = 7531 \text{ km}$$

Les autres paramètres orbitaux sont fixés à 0 à l'exception de l'inclinaison i et de l'argument du périégée ω pour éviter certains problèmes de singularité lors des futures simulations non-linéaires (ces singularités interviennent au niveau des étapes de conversion entre les paramètres cartésiens et les paramètres orbitaux décrites en Annexe D). L'orbite de référence de la cible et les conditions initiales du chasseur, exprimées en termes de paramètres orbitaux, sont regroupées dans le Tableau IV.1.

Paramètres Orbitaux	Satellite cible	Satellite chasseur	Unité
a	7531	7531	km
e	0.1	$0.1 + 1.33 \cdot 10^{-5}$	-
i	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	deg
Ω	0	0	deg
ω	30	30	deg
ν	0	0	deg

TAB. IV.1 – Conditions initiales de la cible et du chasseur

Les caractéristiques du satellite sont :

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \text{ m}^2 \\
 C_D &= 2 \\
 m &= 100 \text{ kg}
 \end{aligned}
 \tag{IV.46}$$

Le modèle du frottement atmosphérique est défini par :

$$\begin{aligned}
 \rho_0 &= 1.0759 \cdot 10^{-7} \text{ kg.m}^{-3} \\
 H_0 &= -46830 \text{ m}
 \end{aligned}
 \tag{IV.47}$$

La différence d'excentricité entre le chasseur et la cible donnerait lieu à un mouvement relatif périodique dans le cas non perturbé. Pour le système linéarisé, cette condition initiale s'écrit :

$$x(0) = 1 \cdot 10^{-4} \begin{pmatrix} -0.1463 & 0 & 0 & 0 & 0.2793 & 0 \end{pmatrix}'$$

et correspond à l'écart de position radiale suivant :

$$\Delta X(0) = a \tilde{\xi}(0) = \frac{a}{1 + e \cos 0} \xi(0) = -100.16 \text{ m}$$

La variable ϵ définie par l'équation (IV.45) est utilisée afin d'évaluer l'erreur de discrétisation dans le cas perturbé pour différentes valeurs de N . Les résultats obtenus sont présentés dans la Figure IV.5.

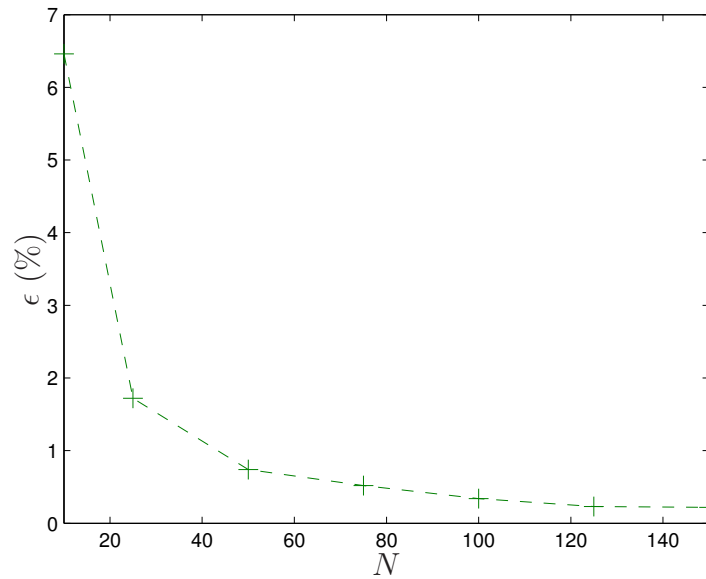


FIG. IV.5 – Influence du nombre d'échantillons N sur l'erreur de discrétisation (cas perturbé)

Nous choisissons un échantillonnage faisant intervenir $N = 100$ échantillons par tour. Ceci permet d'avoir une erreur relative en boucle ouverte entre le modèle à temps discret et le modèle à temps continu inférieure à 0.5%. La boucle fermée apportant naturellement des propriétés de robustesse vis-à-vis de l'erreur de discrétisation, ce choix apparaît valide.

IV.3.2 Validation de l'étape de linéarisation

Afin de valider l'ensemble de la démarche de modélisation, nous comparons dans cette partie le comportement du modèle non-linéaire et du modèle linéarisé pour les conditions initiales données par le Tableau IV.1.

Les vecteurs d'état du modèle non-linéaire et du modèle linéarisé étant différents, une comparaison directe n'est pas possible. Le modèle linéarisé fait en effet apparaître un vecteurs d'état $x(\nu)$ constitué des coordonnées cartésiennes relatives dans le repère local \mathcal{R}_1 alors que le modèle non-linéaire utilise un vecteur d'état $X_M(t)$ constitué des coordonnées absolues dans le repère inertiel \mathcal{R}_i d'un satellite M (M_1 ou M_2). Puisque nous nous intéressons au mouvement relatif, nous décidons de faire apparaître les coordonnées cartésiennes relatives à l'aide du modèle non-linéaire comme indiqué sur la Figure IV.6.

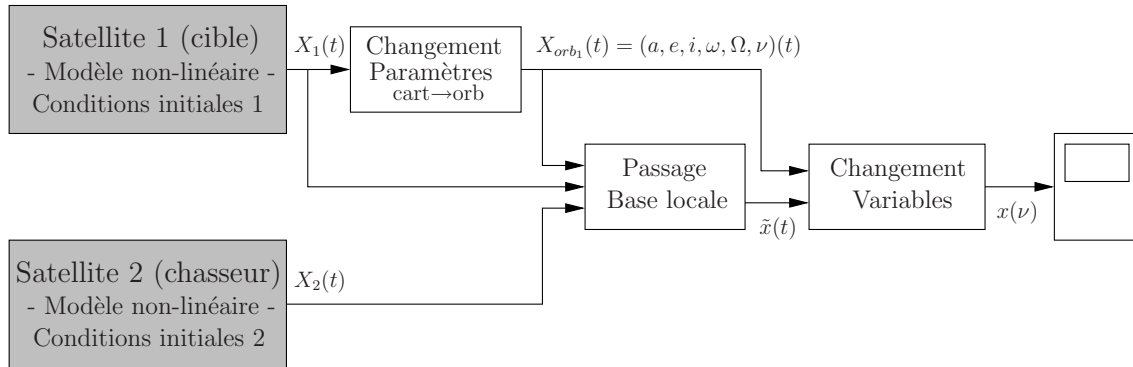


FIG. IV.6 – Système non-linéaire bouclé

Nous utilisons deux blocs non-linéaires : un pour la cible noté *Satellite 1* et un pour le chasseur noté *Satellite 2*. La conversion des coordonnées cartésiennes absolues renvoyées par chaque satellite $X_1(t)$ et $X_2(t)$ en coordonnées relatives $x(\nu)$ est effectuée en deux étapes :

1. projection dans la base locale (le vecteur $\tilde{x}(t)$ est alors obtenu),
2. application des changements de variables (IV.33) et (IV.33) permettant d'obtenir $x(\nu)$.

La première étape de projection dans la base locale est effectuée selon la méthodologie présentée en Annexe F.3. Les deux étapes nécessitent la connaissance à tout instant de la valeur des paramètres orbitaux de la cible, et en particulier de l'anomalie vraie. Le passage des paramètres cartésiens $X_1(t)$ vers les paramètres orbitaux $X_{orb_1}(t) = (a, e, i, \omega, \Omega, \nu)(t)$ est calculé à chaque instant par le simulateur à l'aide des formules présentées en Annexe D.4.

La Figure IV.7 présente, dans le repère local, le mouvement relatif entre M_1 et M_2 pour des conditions initiales données par le Tableau IV.1. Elle confirme la validité de l'ensemble des étapes de modélisation. Nous pouvons remarquer que l'erreur la plus importante est introduite par l'étape de linéarisation et non celle de discrétisation. Ces simulations étant effectuées en boucle ouverte, cet écart sera réduit lorsque nous travaillerons en boucle fermée.

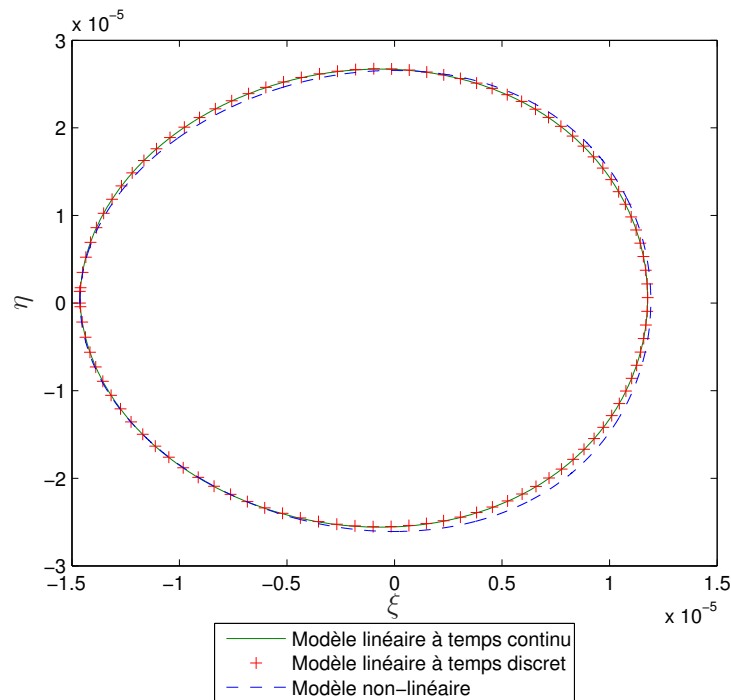


FIG. IV.7 – Comparaison entre le modèle non-linéaire, le modèle linéaire à temps continu et le modèle à temps discret

IV.4 Synthèse de correcteurs

Nous proposons dans cette partie d'utiliser différentes méthodes de synthèse présentées dans le Chapitre III pour calculer un correcteur permettant de maintenir le satellite chasseur sur l'orbite de référence définie par le satellite cible.

IV.4.1 Définition de l'orbite de référence

L'orbite de référence et les conditions initiales sont les mêmes que celles utilisées dans les simulations en boucle ouverte de la Section IV.3. Ces conditions initiales sont regroupées dans le Tableau IV.1. Les caractéristiques du satellite sont données par les équations (IV.46) et le modèle de frottement est défini par (IV.47).

Comme nous l'avons vu précédemment, ces conditions initiales correspondent à un écart de position radiale entre le satellite chasseur et sa cible de -100 m. Dans le cas képlérien, elles conduiraient à un mouvement relatif périodique. Lorsque les effets du frottement atmosphérique et du J_2 sont inclus dans le modèle, une dérive de ce mouvement périodique intervient. La Figure IV.8 illustre cette dérive calculée à l'aide du simulateur non linéaire pour 5 périodes orbitales.

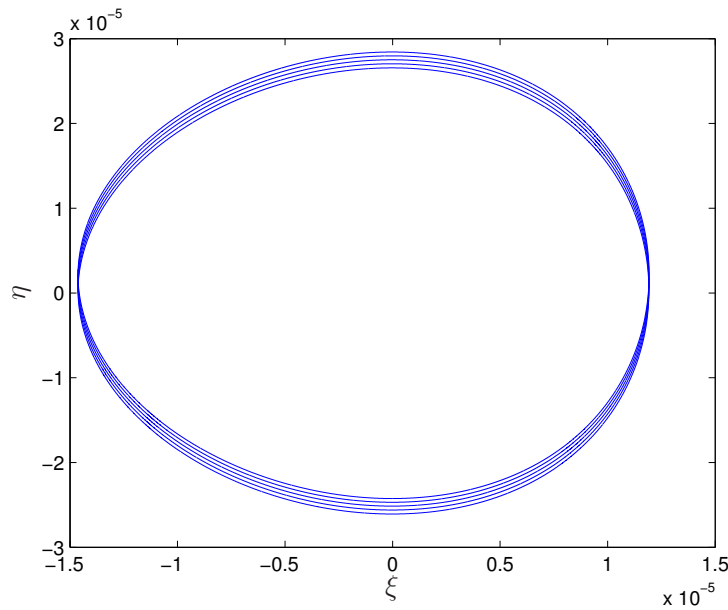


FIG. IV.8 – Mouvement relatif en boucle ouverte avec prise en compte des perturbations

L'écart initial de position radiale de 100 m peut être vu comme une erreur effectuée lors de la mise à poste du satellite. L'objectif de cette partie est de proposer une commande permettant de ramener le satellite depuis cette condition initiale vers l'orbite de référence (c'est à dire à l'origine du repère local).

IV.4.2 Synthèse d'une loi de maintien à poste par retour d'état

Parmi les différents types de structures de commande présentés au Chapitre III, nous décidons d'utiliser le retour d'état. En effet, les calculateurs d'orbite embarqués tels que DIODE [JAY 03] permettent d'obtenir en permanence position et vitesse du satellite. Ainsi, l'ensemble de l'état du système est mesurable à tout instant.

La première étape est de discrétiser le modèle linéaire à temps continu. Pour les raisons données en Section IV.3, un échantillonnage faisant intervenir 100 échantillons pour une période orbitale est utilisé. Le modèle discret obtenu est donc 100-périodique. Ses multiplieurs caractéristiques sont :

$$\Lambda = \{1.504, 0.664, 1.000 \pm 0.001i, 1.000 \pm 0.004i\}$$

Le système est donc instable en boucle ouverte.

Nous décidons d'effectuer une synthèse optimale de type LQG. Il s'agit de trouver une loi de commande $u_k = K_k x_k$ minimisant le critère :

$$J = E \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} x_k' Q x_k + u_k' R u_k \right\}$$

où $Q = Q'$ et $R = R'$ sont des matrices de pondération. Ce problème peut être reformulé comme un problème d'optimisation \mathcal{H}_2 en définissant les matrices de performances comme

suit [SKO 05] :

$$\begin{aligned} B_{wk} &= [W^{1/2}] & C_{zk} &= \begin{bmatrix} Q^{1/2} \\ 0_{m \times n} \end{bmatrix} \\ D_{zuk} &= \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ R^{1/2} \end{bmatrix} & D_{zwk} &= 0 \\ D_{ywk} &= 0 \end{aligned}$$

où W est une matrice de covariance indiquant l'influence d'un bruit blanc gaussien w sur l'état du système. Etant donné que physiquement les perturbations correspondent à des accélérations négligées dans le modèle, nous choisissons une matrice B_{wk} de la forme suivante :

$$B_{wk} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ \mathbb{1}_3 \end{bmatrix}$$

Ainsi, le bruit blanc n'attaque que les composantes de l'état correspondant aux accélérations. Les matrices de pondération Q et R sont choisies comme suit :

$$\begin{aligned} Q &= \mathbb{1}_n \\ R &= \alpha \mathbb{1}_m \end{aligned}$$

où α est un paramètre de réglage.

La méthode de synthèse du Théorème III.15 est utilisée afin de calculer des correcteurs 100-périodiques stabilisants et minimisant le coût \mathcal{H}_2 du système bouclé pour les valeurs du paramètre de réglage $\alpha = 10$ et $\alpha = 150$. Les coûts \mathcal{H}_2 à l'optimum sont :

$$\begin{aligned} \gamma_{(\alpha=10)} &= 2.19 \\ \gamma_{(\alpha=150)} &= 5.79 \end{aligned}$$

Les multiplieurs caractéristiques attestent de la stabilité du système bouclé par ces correcteurs :

$$\begin{aligned} \Lambda_{(\alpha=10)} &= \{0.248 \pm 0.000i, 0.003 \pm 0.018i, 0.000 \pm 0.018i\} \\ \Lambda_{(\alpha=150)} &= \{0.704 \pm 0.002i, 0.198 \pm 0.089i, 0.002 \pm 0.087i\} \end{aligned}$$

Leur valeur nous indique que le système bouclé par le correcteur 100-périodique calculé pour $\alpha = 150$ est plus lent que celui bouclé par le correcteur calculé pour $\alpha = 10$. Ceci est en accord avec les résultats attendus puisque $\alpha = 150$ correspond à une pondération élevée sur la commande.

Dans la Section III.2.1.1 du Chapitre III, nous avons formulé la problématique de synthèse de correcteurs présentant des structures temporelles particulières. Nous avons ainsi défini la classe des correcteurs (N_1, N_2, \mathbb{T}) -périodiques structurés où N_1 est la période du correcteur, $N_2 < N_1$ est le nombre de jeux de paramètres utilisés et \mathbb{T} est une application définissant la structure temporelle. Parmi les différents types de correcteurs structurés

que nous avons présentés, les correcteurs $(N, \tilde{N}_K, \mathbb{T}_2)$ -périodiques dont la structure temporelle est définie par l'équation (III.3) apparaissent particulièrement intéressants. En effet, ces correcteurs voient leurs paramètres figés pendant plusieurs instants d'échantillonnage, réduisant ainsi le nombre de paramètres à mémoriser lors de l'implémentation matérielle du correcteur de N à \tilde{N}_K .

Nous avons proposé dans le Corollaire III.19 une méthode générale permettant la synthèse de correcteurs structurés par retour d'état. Nous appliquons cette méthode dans le cas de correcteurs $(N, \tilde{N}_K, \mathbb{T}_2)$ -périodiques structurés pour différentes valeurs de $\tilde{N}_K < N = 100$ et pour les deux valeurs du paramètre $\alpha = 10$ et $\alpha = 150$. Nous constatons que cette méthode fonctionne pour toutes les valeurs possibles de \tilde{N}_K et en particulier pour $\tilde{N}_K = 1$. Ce cas correspond à la synthèse de correcteurs LTI pour le système périodique. Les correcteurs obtenus sont :

$$K_{(\alpha=10)} = \begin{bmatrix} 2.406 & -0.298 & 0.000 & 1.145 & 0.742 & 0.000 \\ 2.940 & -0.071 & 0.000 & 0.689 & 1.488 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.033 & 0.000 & 0.000 & 0.438 \end{bmatrix}$$

$$K_{(\alpha=150)} = \begin{bmatrix} 1.030 & -0.061 & 0.000 & 0.384 & 0.422 & 0.000 \\ 2.182 & -0.059 & 0.000 & 0.409 & 1.115 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.091 \end{bmatrix}$$

La stabilité du système bouclé par ces correcteurs LTI est attestée par le calcul des multipliers caractéristiques :

$$\Lambda_{(\alpha=10)}^{LTI} = \{0.248 \pm 0.000i, 0.015 \pm 0.002i, -0.007 \pm 0.011i\}$$

$$\Lambda_{(\alpha=150)}^{LTI} = \{0.750 \pm 0.003i, 0.101 \pm 0.155i, 0.029 \pm 0.033i\}$$

En comparant ces valeurs à celles obtenues à l'aide des correcteurs 100-périodiques, nous constatons dans chaque cas une légère augmentation de la valeur des multipliers caractéristiques dominants. Ainsi, comme nous pouvions le prévoir, l'utilisation d'un correcteur invariant dégrade les performances temporelles du système bouclé. Ce résultat est confirmé par le calcul des coûts \mathcal{H}_2 du système bouclé :

$$\gamma_{(\alpha=10)}^{LTI} = 2.24$$

$$\gamma_{(\alpha=150)}^{LTI} = 6.69$$

qui sont légèrement supérieurs à ceux obtenus précédemment.

Cette dégradation de performances reste cependant faible au regard des nombreux avantages apportés par l'utilisation d'un correcteur LTI. En effet, celle-ci permet de réduire de manière importante le nombre de paramètres du contrôleur. De plus, la valeur du gain K étant constante, son implémentation est plus simple que celle d'un correcteur variant dans le temps.

Remarque

L'excentricité de l'orbite de référence est ici égale à 0.1. L'utilisation d'orbites de référence d'excentricité plus importante conduirait à de plus grandes variations au cours du temps de la matrice dynamique. Dans ce cas, la dégradation des performances introduites par l'utilisation d'un correcteur LTI serait vraisemblablement plus grande.

IV.4.3 Simulations en boucle fermée sur le modèle non-linéaire

Les performances des correcteurs calculés dans la section précédente sont à présent évaluées en simulation sur le modèle non-linéaire. Les correcteurs proposés ayant été calculés sur le modèle linéarisé, ils utilisent le vecteur d'état x , constitué des positions et vitesses relatives des deux satellites dans la base locale. La commande u obtenue étant également exprimée dans la base locale, il est nécessaire d'effectuer une conversion pour obtenir la commande U agissant sur le modèle non-linéaire du satellite. Par ailleurs, l'échantillonnage est effectué selon la variation de l'anomalie vraie ν . La valeur de ce paramètre doit par conséquent être connue à tout instant.

Afin de répondre à ces différentes contraintes, nous avons mis en place le protocole de simulation décrit par la Figure IV.9 (le schéma SIMULINK[©] correspondant est présenté sur la Figure F.3 donnée en annexe).

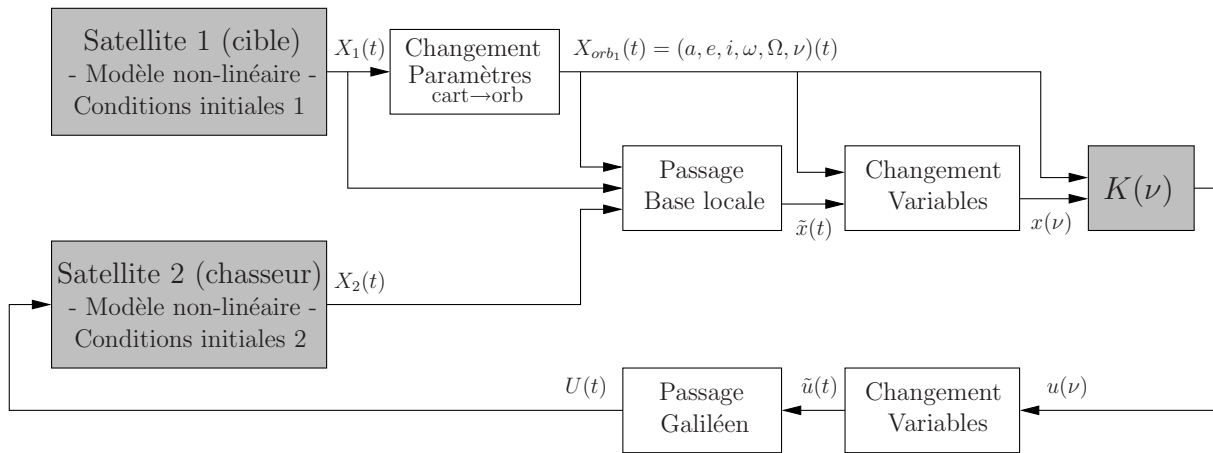


FIG. IV.9 – Système non-linéaire bouclé

Le comportement du système non-linéaire bouclé par les différents correcteurs 100-périodiques et LTI calculés dans la section précédente est simulé pour trois périodes orbitales. Le mouvement relatif du satellite 2 par rapport à la trajectoire de référence définie par le satellite 1 est présenté sur la Figure IV.10 dans le repère local.

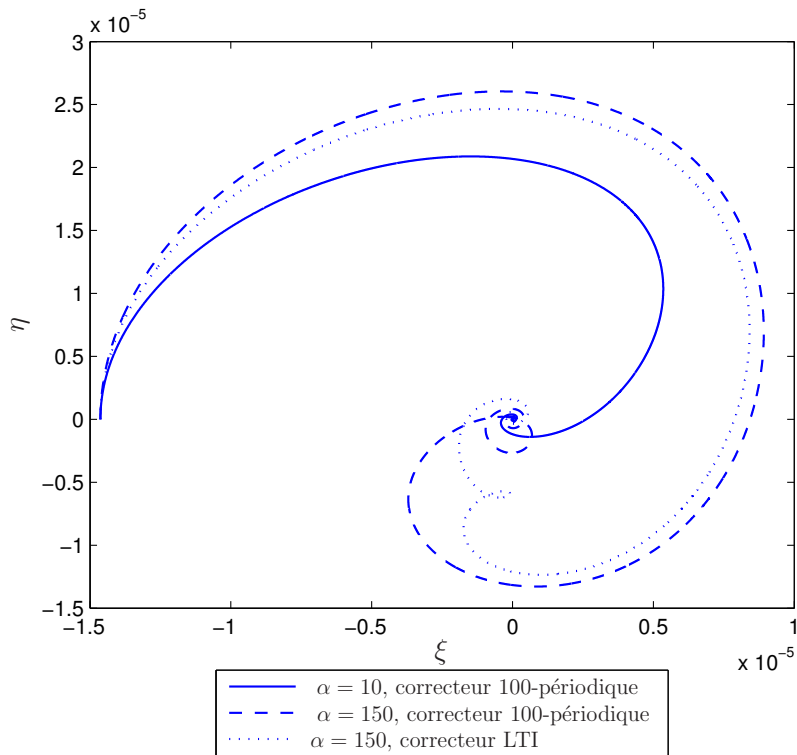


FIG. IV.10 – Mouvement relatif dans le plan orbital pour une condition initiale correspondant à un écart de position radiale de 100 m (cas perturbé)

La Figure IV.10 montre que les différents correcteurs permettent bien de ramener le satellite M_2 autour de la trajectoire de référence (c'est à dire au centre du repère local) depuis sa position initiale correspondant à un écart radial de -100 m. Le satellite oscille en régime permanent autour de l'orbite de référence. Ceci est du principalement aux accélérations perturbatrices introduites par le vecteur de perturbations w . L'amplitude de ces oscillations, pour un bruit blanc de même variance, est de 1.71 m lorsque le correcteur 100-périodique calculé pour $\alpha = 10$ est utilisé et de 4.8 m pour le correcteur 100-périodique calculé pour $\alpha = 150$. Ces résultats sont ceux attendus puisque α est le paramètre permettant de régler la pondération du critère LQG entre l'état et la commande.

Sur la Figure IV.11 est représentée, pour chaque correcteur, l'évolution de la norme du vecteur de commande u en fonction de l'anomalie vraie ν . Nous remarquons que le profil de poussée est semblable dans chaque cas, avec notamment des poussées plus importantes au niveau de l'apogée et du périgée. Bien évidemment, les correcteurs correspondant à une valeur élevée du paramètre de pondération α conduisent à des poussées de plus faible amplitude.

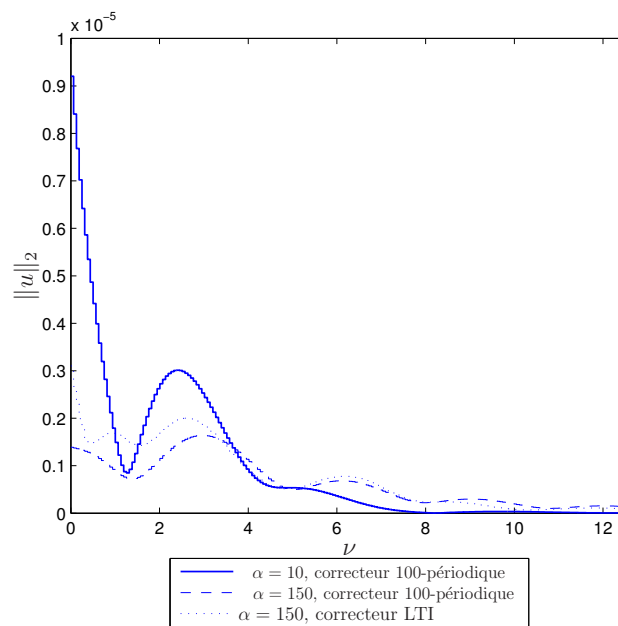


FIG. IV.11 – Norme de la commande pour les différents correcteurs synthétisés (cas perturbé)

La Figure IV.12 permet de mieux visualiser l'évolution de la commande. Celle-ci s'effectue par paliers du fait de la mise en oeuvre du correcteur discret par un bloqueur d'ordre zéro. L'échantillonnage choisi fait intervenir des paliers de largeur constante par rapport à l'anomalie vraie ν mais différente par rapport au temps. Il est possible d'envisager la mise en oeuvre de ce type de commande sur des moteurs électriques effectuant des poussées de type "bang-bang", l'ensemble de l'effort de poussée étant alors appliqué au début d'un échantillon.

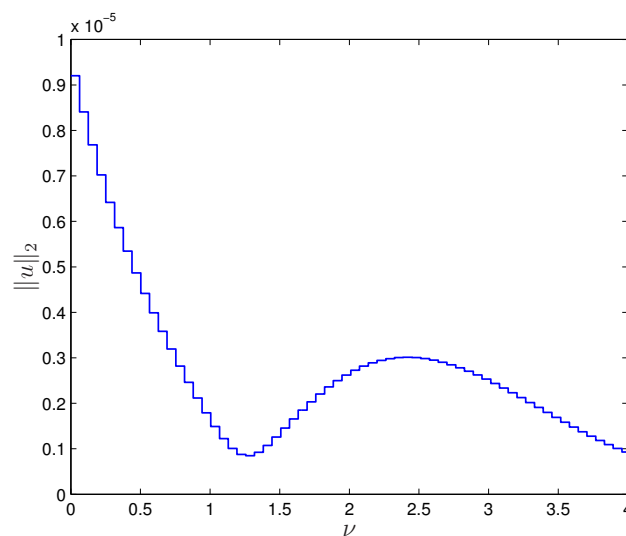


FIG. IV.12 – Détail de la Figure IV.11 : Norme de la commande pour $\alpha = 10$

IV.5 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre que les techniques de commande périodique échantillonnée présentées dans la thèse peuvent être appliquées avec succès au problème de maintien à poste autonome de satellites en orbite basse.

Dans un premier temps, nous avons proposé un modèle non-linéaire régissant le mouvement d'un satellite soumis aux deux premiers termes du champ gravitationnel et subissant le frottement atmosphérique. Ce modèle non-linéaire a été ensuite linéarisé autour d'une trajectoire de référence elliptique. Un changement de variables faisant disparaître le temps au profit de l'anomalie vraie nous a permis d'obtenir un modèle linéaire périodique. À l'aide des méthodes de synthèse présentées au Chapitre III, nous avons calculé des lois de commande périodiques et non-périodiques permettant de maintenir le satellite sur l'orbite de référence souhaitée. Des simulations du comportement du système non-linéaire bouclé par ces correcteurs permettent d'attester de la validité de l'ensemble de la démarche de synthèse proposée dans la thèse : linéarisation, échantillonnage, calcul d'un correcteur discret périodique et implémentation de ce correcteur sur le système réel.

Les résultats obtenus [THE 07] sont prometteurs et nous encourageant à envisager l'application de méthodes de synthèse plus poussées. Parmi elles, la synthèse de correcteurs par retour d'état résilients est l'objet d'études en cours.

Conclusions et Prospectives

L'objectif général de cette thèse est de fournir des méthodes systématiques pour l'analyse et la synthèse robuste des systèmes linéaires périodiques. Le cadre de travail choisi pour résoudre ces problèmes est celui de la théorie de Lyapunov et fait appel principalement à des outils numériques de type \mathcal{LMI} .

Nous avons soulevé dans l'introduction différentes questions relatives à cette problématique. La première était de savoir s'il est possible d'étendre aux systèmes périodiques les méthodes de commande robuste développées dans le cadre LTI. Nous avons vu qu'en temps continu une telle extension est complexe puisqu'elle requiert la manipulation de modèles de dimension infinie. Le passage en temps discret permet de faire apparaître une forte analogie avec le cas temps-invariant. Historiquement, cette similitude a conduit à reformuler les modèles périodiques à temps discret en modèles LTI *équivalents*. On pourrait alors penser que les méthodes LTI peuvent être trivialement appliquées. Or ces reformulations conduisent à des classes particulières de modèles LTI dont les caractéristiques structurelles ne peuvent être négligées. Nous avons donc choisi une approche plus directe, fondée sur le lemme de Lyapunov périodique, afin de prendre en compte ces contraintes structurelles. Cette approche nous a permis d'appliquer aux systèmes périodiques des méthodes avancées d'analyse et de synthèse robustes réduisant le pessimisme des résultats existant dans la littérature.

Nous nous sommes également interrogés sur différents aspects liés à la structure du correcteur. Ce dernier doit-il être de même périodicité que le système ? Est-il possible de réduire le nombre de ses paramètres en vue d'une implémentation matérielle simplifiée ? A notre connaissance, il n'existe pas dans la littérature de réponse satisfaisante à ces questions. Afin de proposer une solution unifiée à ces problèmes, nous avons défini la classe des correcteurs périodiques structurés dans le temps. Nous lui avons associé des méthodes de synthèse peu pessimistes car préservant la structure temporelle de la fonction de Lyapunov.

Afin de simplifier davantage l'implémentation du correcteur, nous nous sommes également intéressés au problème de résilience. Une nouvelle approche, consistant à synthétiser non plus un correcteur unique mais un ensemble de correcteurs, nous est apparue particulièrement pertinente pour résoudre ce problème. Cette approche, jusqu'alors dédiée à la synthèse de correcteurs par retour de sortie statique, est non seulement étendue au cas périodique mais elle est également utilisée pour les problèmes de synthèse de correcteurs par retour d'état et par retour de sortie dynamique d'ordre plein. Nous montrons que

ces problèmes de synthèse résiliente admettent une formulation \mathcal{LMI} . Cela constitue un résultat nouveau, y compris dans le cadre LTI.

En conclusion, cette thèse propose un cadre de travail et des méthodes permettant de traiter efficacement un certain nombre de problèmes de robustesse pour les systèmes périodiques. Ces développements nous amènent à définir des problématiques nouvelles et à améliorer des résultats existant dans le cadre LTI.

En prospective, nous souhaitons approfondir les points théoriques suivants :

– *Commande périodique des systèmes LTI :*

Nous nous sommes intéressés dans la thèse au problème de synthèse de correcteurs de périodicité différente de celle du système. Nous souhaitons étudier les avantages que pourraient apporter nos méthodes dans le cas particulier de la synthèse de correcteurs périodiques pour un système LTI.

– *Modélisation des systèmes périodiques à temps discret :*

Notre étude s'est surtout attachée à développer des méthodes d'analyse et de synthèse robuste peu pessimistes pour une classe donnée de modèles. La même démarche pouvant être appliquée à d'autres types de modèles incertains, nous souhaitons déterminer quel type de modélisation est la plus adaptée à l'étude des systèmes discrets périodiques.

– *Etude des performances temporelles des systèmes périodiques :*

Nous avons considéré dans cette thèse les performances en terme de capacité du système à rejeter des perturbations. Une première approche pour aborder le problème des performances temporelles serait de développer des méthodes de placement des multiplieurs caractéristiques. Il serait également intéressant d'apporter une réponse à la question suivante : les multiplieurs caractéristiques sont-ils l'outil le plus adapté à l'évaluation des performances temporelles d'un système périodique ?

L'application spatiale présentée au Chapitre IV montre l'intérêt de l'ensemble de la démarche proposée dans cette thèse. Les résultats obtenus méritent cependant d'être évalués plus finement au regard des méthodes traditionnellement utilisées dans le domaine.

Enfin, un aspect peu abordé dans ce mémoire est l'implémentation logicielle de nos méthodes. Il nous paraît cependant important de fournir des outils permettant de traiter de manière systématique les problèmes de commande relatifs aux systèmes périodiques. Un travail dans ce sens a été entrepris par l'implémentation de la classe des systèmes périodiques et de certaines méthodes d'analyse et de synthèse associées dans la boîte à outils ROMULOC [PEA 06] implantée sous MATLAB[®]. Celle-ci regroupe de multiples résultats de commande robuste obtenus ces dix dernières années dans le cadre de travail LTI.

Références bibliographiques

- [ALF 00] K. ALFRIEND and H. SCHAUB, “Dynamics and control of spacecraft formations : Challenges and some solutions”, *Journal of the Astronautical Sciences*, vol. 48, no. 2, 2000, pages 249-267.
- [ARZ 02a] D. ARZELIER, “Lecture on semidefinite programming”, LAAS-CNRS - CTUV, Prague, april 2002, URL : <http://www.laas.fr/~sk/cutsdp/>.
- [ARZ 02b] D. ARZELIER, J. BERNUSSOU and D. PEAUCELLE, “Fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres pour l’analyse et la synthèse robuste”, in *Les commandes robustes et inégalités matricielles*, J. BERNUSSOU and A. OUSTALOUP, editors, vol. Conception de commandes robustes of *Traité IC2 - Information - Commande - Communication*, pages 189-228, Hermes Sciences, 2002, (in French).
- [ARZ 05] D. ARZELIER, D. PEAUCELLE and C. FARGES, “Robust analysis and synthesis of linear polytopic discrete-time periodic systems via LMIs”, proceedings of *Conference on Decision and Control*, Seville, Spain, december 2005.
- [BAM 92] B. BAMIEH and J. PEARSON, “The \mathcal{H}_2 problem for sampled data systems”, *Systems & Control Letters*, vol. 19, 1992, pages 1-12.
- [BAR 84] B. R. BARMISH and C. V. HOLLOT, “Counter-example to a recent result on the stability of interval matrices”, *Int. J. Control*, vol. 39, no. 5, 1984, pages 1103-1104.
- [BAR 85] B. BARMISH, “Necessary and Sufficient Condition for Quadratic Stabilizability of an Uncertain System”, *J. Optimization Theory and Applications*, vol. 46, no. 4, 1985.
- [BER 89] J. BERNUSSOU, J. GEROMEL and P. PERES, “A Linear Programming Oriented Procedure for Quadratic Stabilization of Uncertain Systems”, *Systems & Control Letters*, vol. 13, 1989, pages 65-72.
- [BIT 86] S. BITTANTI, “Deterministic and stochastic linear periodic systems”, vol. 86 of *Time series and linear systems*, pages 141-182, Springer-Verlag, 1986, Lecture Notes in Control and Information Science.
- [BIT 96a] S. BITTANTI and P. COLANERI, “Analysis of discrete-time linear periodic systems”, *Control and dynamic systems series*, vol. 78, 1996, pages 313-339.
- [BIT 96b] S. BITTANTI and M. LOVERA, “On the Zero Dynamics of Helicopter Rotor Loads”, *European J. of Control*, vol. 2, no. 1, 1996, pages 57-68.

- [BIT 99] S. BITTANTI and P. COLANERI, “Periodic Control”, *Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering*, vol. 16, 1999, pages 59-73, Wiley, edited by J.G. Webster.
- [BIT 00] S. BITTANTI and P. COLANERI, “Invariant representations of discrete-time periodic systems”, *Automatica*, vol. 36, 2000, pages 1777-1793.
- [BIT 01a] S. BITTANTI and P. COLANERI, “Stabilization of periodic systems : overview and advances”, proceedings of *IFAC Workshop on Periodic Control Systems*, Como, Italy, 2001, pages 153-160.
- [BIT 01b] S. BITTANTI and F. CUZZOLA, “An LMI approach to periodic discrete-time unbiased filtering”, *Systems & Control Letters*, vol. 42, no. 1, 2001, pages 21-35.
- [BIT 02] S. BITTANTI and F. CUZZOLA, “Periodic active control of vibrations in helicopters : A gain-scheduled multi-objective approach”, *Control Engineering Practice*, vol. 10, 2002, pages 1043-157.
- [BLO 97] V. BLONDEL and J. TSITSIKLIS, “NP-Hardness of Some Linear Control Design Problems”, *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 35, no. 6, 1997, pages 2118–2127.
- [BOL 86] P. BOLZERN, P. COLANERI and R. SCATTOLINI, “Zeros of discrete-time linear periodic systems”, *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 31, no. 11, 1986, pages 1057-1058.
- [BOL 88] P. BOLZERN and P. COLANERI, editors, *The periodic Lyapunov equation*, Journal on Matrix Analysis and Applications, SIAM, 1988.
- [BOY 94] S. BOYD, L. E. GHAOUI, E. FERON and V. BALAKRISHNAN, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.
- [BRO 70] R. BROCKET, *Finite Dimensional Linear Systems*, Wiley Interscience, New York, 1970.
- [BRO 91] W. BROGAN, *Modern control theory (3rd ed.)*, Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1991.
- [CAR 95] J. CARROU, *Mécanique Spatiale*, Cépaduès-éditions, Centre Spatial de Toulouse, 1995.
- [CAR 02] T. CARTER and M. HUMI, “Clohessy-Wiltshire equations modified to include quadratic drag”, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 25, no. 6, 2002, pages 1058-1063.
- [CHA 80] A. CHAKRAVARTY, “Orbital decay due to drag in an exponentially varying atmosphere”, *Journal of Guidance and Control*, vol. 3, no. 6, 1980, pages 592-576.
- [COL 97] P. COLANERI and V. KUCERA, “The model matching problem for periodic discrete-time systems”, *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 42, no. 10, 1997, pages 1472-1476.
- [COL 98] P. COLANERI, C. DE SOUZA and KUCERA, “Output stabilizability of periodic systems : necessary and sufficient conditions”, proceedings of *American Control Conference*, Philadelphia, Pennsylvania, june 1998.

- [COL 00] P. COLANERI, “Continuous-Time Periodic Systems in \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ . Part I : Theoretical Aspects”, *Kybernetika*, vol. 36, no. 2, 2000, pages 211-242, ÚTIA, AV ČR, Prague.
- [COL 05] P. COLANERI, “Theoretical aspects of continuous-time periodic systems”, *Annual Reviews in Control*, vol. 29, no. 2, 2005, pages 205-215.
- [COL 06] P. COLANERI and D. HENRION, “Switching and periodic control of the Belgian chocolate problem”, proceedings of *ROCOND - 5th IFAC Symposium on Robust Control Design*, Toulouse, France, july 2006.
- [DAH 92] M. DAHLEH, P. VOULGARIS and L. VALAVANI, “Optimal and robust controllers for periodic and multirate systems”, *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 37, no. 1, 1992, pages 90-99.
- [De 00] C. DE SOUZA and A. TROFINO, “An LMI approach to stabilization of linear discrete-time periodic systems”, *Int. J. Control*, vol. 73, 2000, pages 696-709.
- [DES 75] C. DESOER and M. VIDYASAGAR, *Feedback System : Input-Output Properties*, Electrical Sciences, Academic Press, 1975.
- [DOY 83] J. DOYLE, “Synthesis of Robust Controllers and Filters”, proceedings of *Conference on Decision and Control*, San Antonio, Texas, USA, december 1983, pages 109-114.
- [DUL 00] G. E. DULLERUD and F. PAGANINI, *A Course in Robust Control Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [ELG 97] L. EL GHAOU, F. OUSTRY and M. AITRAMI, “A Cone Complementarity Linearization Algorithm for Static Output-Feedback and Related Problems”, *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 42, no. 8, 1997, pages 1171-1176.
- [ELG 00] L. EL GHAOU and S.-I. NICULESCU, editors, *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*, Advances in Design and Control, SIAM, Philadelphia, 2000.
- [FAR 05a] C. FARGES, D. PEAUCELLE and D. ARZELIER, “Méthodes LMI de stabilisation des systèmes linéaires périodiques”, proceedings of *JDMACS*, Lyon, France, september 2005.
- [FAR 05b] C. FARGES, D. PEAUCELLE, D. ARZELIER and J. DAAFOUZ, “Robust \mathcal{H}_2 performance analysis and synthesis of linear polytopic discrete-time periodic systems”, *Systems & Control Letters*, , 2005, submitted.
- [FAR 06a] C. FARGES, D. PEAUCELLE and D. ARZELIER, “LMI formulation for the resilient dynamic output feedback stabilization of linear periodic systems”, proceedings of *CAO - 13th IFAC Symposium on Control Applications of Optimisation*, Paris, France, april 2006.
- [FAR 06b] C. FARGES, D. PEAUCELLE and D. ARZELIER, “Resilient Static Output Feedback Stabilization of Linear Periodic Systems”, proceedings of *ROCOND - 5th IFAC Symposium on Robust Control Design*, Toulouse, France, july 2006.
- [FER 96] E. FERON, P. APKARIAN and P. GAHINET, “Analysis and Synthesis of Robust Control Systems via Parameter-Dependent Lyapunov Functions”, *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 41, no. 7, 1996, pages 1041-1046.

- [FEU 96] A. FEUER and G. GOODWIN, *Sampling in digital signal processing and control*, Birkhauser Boston Inc., Cambridge, MA, USA, 1996.
- [FLA 91] D. FLAMM, “A new shift-invariant representation for periodic linear systems”, *Systems & Control Letters*, vol. 17, 1991, pages 9-14.
- [FLO 83] G. FLOQUET, “*Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques*”, vol. 12 of *Annales scientifiques de l’Ecole Normale Supérieure*, pages 47-48, 1883.
- [FU 00] M. FU and S. DASGUPTA, “*Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*”, Chapter 5 Parametric Lyapunov Functions for Uncertain Systems : The Multiplier Approach, pages 95-108, *Advances in Design and Control*, SIAM, 2000, edited by L. El Ghaoui and S.-I. Niculescu.
- [GAH 96] P. GAHINET, P. APKARIAN and M. CHILALI, “Affine Parameter-Dependent Lyapunov Functions and Real Parametric Uncertainty”, *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 41, no. 3, 1996, pages 436-442.
- [GAI 04] G. GAIANI, M. LOVERA, P. COLANERI and R. CELI, “Discrete-time analysis of HHC schemes for helicopter vibration attenuation”, proceedings of *IFAC Workshop on Periodic Control Systems*, Yokohama, Japan, 2004, pages 69-74.
- [GAR 94] W. A. GARDNER, *Cyclostationarity in Communications and Signal Processing*, IEEE Press, USA, 1994.
- [GAR 97] G. GARCIA, J. BERNUSSOU, J. DAAFOUZ and D. ARZELIER, “*GARTEUR : Robust Flight Control*”, vol. 224 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Chapter Robust Quadratic Stabilization, Springer, London, 1997.
- [GAU 04] S. GAULOCHER, J. CHÉTIEN, C. PITTET, M. DELPECH and D. ALAZARD, “Closed-loop control of formation flying satellites : time and parameter varying framework”, proceedings of *2nd Int. Symposium on formation flying missions and technologies*, Washington, DC, USA, 2004.
- [GER 91] J. GEROMEL, P. PERES and J. BERNUSSOU, “On a Convex Parameter Space Method for Linear Control Design of Uncertain Systems”, *SIAM J. Control and Optimization*, vol. 29, no. 2, 1991, pages 381-402.
- [GRI 96] K. GRIGORIADIS and R. SKELTON, “Low Order Design for LMI Problems Using Alternating Projection Methods”, *Automatica*, vol. 32, no. 8, 1996, pages 1117-1125.
- [GUR 00] G. GUREVICH, R. BELL and J. WERTZ, “Autonomous on-board orbit control : Flight results and applications”, proceedings of *AIAA conference*, Long Beach, CA, USA, 2000.
- [HIL 86] G. HILL, *On the part of the lunar perigee which is a function of the mean motion of the sun and the moon*, vol. 8, *Acta Mathematica*, 1886.
- [HIN 05] D. HINRICHSSEN and A. PRITCHARD, *Mathematical Systems Theory I - Modelling, State Space Analysis, Stability and Robustness*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2005.
- [HOL 80] C. HOLLOT and B. BARMISH, “Optimal Quadratic Stabilizability of Uncertain Linear Systems”, proceedings of *18th Allerton Conference on Communication and Computing*, University of Illinois, Monticello, 1980, pages 697-706.

- [HUM 02] M. HUMI and T. CARTER, “Models of motion in a central force field with quadratic drag”, *Celestial mechanics and dynamical astronomy*, vol. 84, 2002, pages 245-262.
- [INA 02] G. INALHAN, M. TILLERSON and J. HOW, “Relative dynamics and control of spacecraft formations in eccentric orbits”, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 25, no. 1, 2002, pages 48-59.
- [IWA 99] T. IWASAKI, “LPV System Analysis with Quadratic Separator for Uncertain Implicit Systems”, *LMI Methods in optimisation, identification and control*, Seminar, Compiègne, France, mai 1999.
- [JAY 03] C. JAYLES, F. ROZO and F. BALANDREAUD, “DORIS-DIODE / Jason-1, ENVISAT, SPOT5 : Real-Time on-board Orbit Determination in Space”, proceedings of *54 th International Astronautical Congress*, Bremen, Germany, september 2003.
- [JUP 76] A. JUPP, “Some investigations into the atmospheric drag problem”, *Celestial mechanics*, vol. 14, 1976, pages 335-339.
- [JUR 59] E. I. JURY and F. J. MULLIN, “The analysis of sampled-data control systems with a periodically time-varying sampling rate”, *IRE Transactions on Automatic Control*, vol. 5, 1959, pages 15-21.
- [JUR 64] E. I. JURY, *Theory and Application of the z-Transform Method*, Wiley, New York, 1964.
- [KAL 60a] R. KALMAN, “Contributions to the theory of optimal control”, *Boletín de la Sociedad Matemática*, vol. 5, 1960, pages 102-119.
- [KAL 60b] R. KALMAN and J. BERTRAM, “Control system analysis and design via the second method of Lyapunov”, *Journal of Basic Engineering*, vol. 82, 1960, pages 371-400.
- [KEE 97] L. KEEL and S. BHATTACHARYYA, “Robust, Fragile, or Optimal?”, *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 42, no. 8, 1997, pages 1098-1105.
- [KEV 66] J. KEVORKIAN, “The two variable expansion procedure for the approximate solution of certain nondifferential equations”, vol. 7 of *Space mathematics, Part III*, pages 206-275, American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 1966.
- [KHA 85] P. KHARGONEKAR, K. POOLA and A. TANNENBAUM, “Robust control of linear time-invariant plants using periodic compensation”, *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 30, 1985, pages 1088-1096.
- [KHA 90] P. KHARGONEKAR, I. R. PETERSEN and K. ZHOU, “Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems : Quadratic Stabilizability and H_∞ Control Theory”, *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 35, 1990, pages 356-361.
- [KOC 04] M. KOCVARA and M. STINGL, “PENBMI, Version 2.0”, 2004, URL : <http://www.penopt.com/penbmi.html>.
- [KRA 57] G. KRANC, “Input-output analysis of multirate feedback systems”, *IRE Transactions on Automatic Control*, vol. 3, no. 1, 1957, pages 21-28.
- [LOV 01] M. LOVERA, “Optimal Magnetic Momentum Control for Inertially Pointing Spacecraft”, *European J. of Control*, vol. 7, no. 1, 2001, pages 30-39.

- [LOV 05] M. LOVERA and A. VARGA, “Optimal discrete-time magnetic attitude control of satellites”, proceedings of *16th IFAC World Congress, Prague, Czech Republic*, 2005.
- [LYA 92] A. LYAPUNOV, *Problème général de la stabilité du mouvement*, Annales de la faculté de sciences de Toulouse 1907, 1892, traduit de l’ouvrage original.
- [LÖF 01] J. LÖFBERG, “YALMIP : Yet Another LMI Parser”, august 2001, URL : <http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php>.
- [MAG 97] J. MAGNI, S. BENNANI and J. TERLOUW, *Robust Flight Control : A design challenge*, vol. 224 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer Verlag, Berlin, third revised and enlarged edition, 1997.
- [MAR 72] A. MARZOLLO, *Periodic Optimization*, No. 135 in CISM International Centre for Mechanical Sciences, Springer Verlag, Berlin, 1972.
- [MAT 68] E. MATHIEU, “Mémoire sur le mouvement vibratoire d’une membrane de forme elliptique”, *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. 13, 1868, pages 137-203.
- [MES 98] M. MESBAHI, “Solving a Class of Rank Minimization Problems as Semi-Definite Programs with Applications to Fixed Order Output Feedback Synthesis”, *Systems & Control Letters*, vol. 33, 1998, pages 31-36.
- [MEY 90] D. MEYER, “A parametrization of stabilizing controllers for multirate sampled-data systems”, *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 35, no. 2, 1990, pages 233-236.
- [MIS 04] D. MISHNE, “Formation control of satellites subject to drag variations and J–2 perturbations”, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 27, no. 4, 2004, pages 685-692.
- [MON 00] O. MONTENBRUCK and E. GILL, *Satellite orbits*, Springer, Berlin, Germany, 2000.
- [MON 04] P. MONTAGNIER, R. SPITERI and J. ANGELES, “The control of linear time-periodic systems using Floquet-Lyapunov theory”, *Int. J. Control*, vol. 77, 2004, pages 472-490.
- [NAR 73] K. NARENDRA and J. TAYLOR, *Frequency Domain Criteria for Absolute Stability*, Electrical Sciences, Academic Press, 1973.
- [NAS 02] NASA, “Orbital Elements”, 2002, URL : <http://www.spaceflight.nasa.gov/realdata/elements/graphs.html>.
- [PAR 81] P. PARKS and V. HAHN, *Stability Theory*, Springer-Verlag, 1981.
- [PAR 89] B. PARK and E. VERRIEST, “Canonical forms for discrete linear periodically time-varying systems and application to control”, proceedings of *Conference on Decision and Control*, Tampa, USA, 1989, pages 1220-1225.
- [PAR 98] S. PARVEZ, “Autonomous on-board orbit control/maintenance system for satellites”, Patent PCT/US97/22612, June 1998.

- [PEA 02] D. PEAUCELLE, D. ARZELIER and R. BERTRAND, “Ellipsoidal Sets for Static Output Feedback”, proceedings of *IFAC Workshop on Periodic Control Systems*, Barcelona, Spain, july 2002.
- [PEA 04] D. PEAUCELLE, D. ARZELIER and C. FARGES, “LMI results for resilient state-feedback with \mathcal{H}_∞ performance”, proceedings of *Conference on Decision and Control*, Atlantis, Bahamas, december 2004.
- [PEA 05] D. PEAUCELLE and D. ARZELIER, “Ellipsoidal Sets for Resilient and Robust Static Output-Feedback”, *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 50, no. 6, 2005, pages 899-904.
- [PEA 06] D. PEAUCELLE and D. ARZELIER, “Robust Multi-Objective Control Toolbox”, proceedings of *Proceedings of the CACSD Conference*, Munich, Germany, 2006.
- [PUL 05] T. PULECCHI, M. LOVERA and A. VARGA, “Optimal discrete-time design of magnetic attitude control laws”, proceedings of *Proceedings of the 6th International ESA Conference on Guidance, Navigation and Control Systems*, Loutraki, Greece, 2005.
- [ROS 02] I. ROSS, “Linearized dynamic equations for spacecraft subject to J_2 perturbations”, *Journal of guidance, control and dynamics*, vol. 26, no. 4, 2002, pages 657-659.
- [SAG 00] M. SAGFORS, H. TOIVONEN and B. LENNARTSON, “State-space solution to the periodic multirate \mathcal{H}_∞ control problem : a lifting approach”, *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 45, no. 12, 2000, pages 2345-2350.
- [SAN 05] H. SANDBERG, E. MOLLERSTEDT and B. BERNHARDSSON, “Frequency-Domain Analysis of Linear Time-Periodic Systems”, *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 50, no. 12, 2005, pages 1971- 1983.
- [SCH 97] C. SCHERER, P. GAHINET and M. CHILALI, “Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization”, *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 42, no. 7, 1997, pages 896-911.
- [SCH 01] A. SCHUBERT, “Optimal orbit control for spacecraft on elliptical orbits with atmospheric drag”, proceedings of *ESA Workshop on On board autonomy*, Noordwijk, The Netherlands, October 2001.
- [SCH 03] H. SCHAUB and J. JUNKINS, *Analytical mechanics of space systems*, Education Series, AIAA, Reston, Virginia, USA, 2003.
- [SEN 03] P. SENGUPTA, “Satellite relative motion propagation and control in the presence of J_2 perturbations”, PhD thesis, Texas A& M University, USA, 2003, URL : <http://handle.tamu.edu/1969.1/518/>.
- [SID 97] M. SIDI, *Spacecraft Dynamics and Control - A Practical Engineering Approach*, Cambridge Aerospace Series, USA, 1997.
- [SKE 98] R. SKELTON, T. IWAZAKI and K. GRIGORIADIS, *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design*, Taylor and Francis series in Systems and Control, 1998.
- [SKO 05] S. SKOGESTAD and I. POSTLETHWAITE, *Multivariable Feedback Control : Analysis and Design*, John Wiley & Sons, 2005.

- [SYR 94] V. SYRMOS, C. ABDALLAH and P. DORATO, “Static Output Feedback : A Survey”, proceedings of *Conference on Decision and Control*, december 1994, pages 837-842.
- [TAK 00] R. TAKAHASHI, D. DUTRA, R. PALHARES and P. PERES, “On robust non-fragile static state-feedback controller synthesis”, proceedings of *Conference on Decision and Control*, Sidney, Australia, december 2000, pages 4909-4914.
- [THE 07] A. THERON, C. FARGES, D. PEAUCELLE and D. ARZELIER, “Periodic \mathcal{H}_2 synthesis for spacecraft in elliptical orbits with atmospheric drag and J_2 perturbations”, proceedings of *American Control Conference*, New York City, USA, july 2007, submitted, URL <http://www.laas.fr/~cfarges/publications.html>.
- [TIL 02] M. TILLERSON, G. INALHAN and J. HOW, “Coordination and control of distributed spacecraft systems using convex optimization techniques”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 12, no. 2-3, 2002, pages 207-242.
- [TOK 95] O. TOKER and H. OZBAY, “On the NP-hardness of solving bilinear matrix inequalities and simultaneous stabilization with static output feedback”, proceedings of *American Control Conference*, vol. 4, Seattle, Washington, USA, june 1995, pages 2525-2526.
- [TOR 01] J. TORNERO, P. ALBERTOS and J. SALT, “Periodic optimal control of multirate sampled data systems”, proceedings of *IFAC Workshop on Periodic Control Systems*, Como, Italy, 2001, pages 195-205.
- [TSC 64] J. TSCHAUNER and P. HEMPEL, “Optimale Beschleunigungs-programme fur des rendezvous Manover”, *Astronautica Acta*, vol. 5-6, 1964, pages 296-307.
- [VAD 01] S. VADALI, S. VADDI, K. NAIK and K. ALFRIEND, “Control of satellite formation”, proceedings of *AIAA paper 2001-4028*, August 2001.
- [VAI 93] P. VAIDYANATHAN, *Multirate Systems and Filter Banks*, Prentice Hall, Englewoods Cliffs, NJ, 1993.
- [VAN 94] P. VAN DOOREN and J. SREEDHAR, “When is a periodic discrete-time system equivalent to a time-invariant one?”, *Linear Algebra and its Applications*, vol. 212-213, 1994, pages 131-151.
- [VAN 02] P. VANASSCHE, G. GIELEN and W. SANSEN, “Symbolic modeling of periodically time-varying systems using harmonic transfer matrices”, *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, vol. 21, no. 9, 2002, pages 1011-1024.
- [VAR 98] A. VARGA and S. PIETERS, “Gradient-based approach to solve optimal periodic output feedback control problems”, *Automatica*, vol. 34, no. 4, 1998, pages 477-481.
- [VAR 05] A. VARGA, “A periodic systems toolbox for Matlab”, proceedings of *16th IFAC World Congress, Prague, Czech Republic*, 2005.
- [VID 78] M. VIDYASAGAR, *Nonlinear Systems Analysis*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1978.
- [WER 91] N. M. WERELEY, “Analysis and Control of Linear Periodically Time-Varying Systems”, PhD thesis, Department of Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA, 1991.

- [WIS 04] R. WISNIEWSKI and J. STOUSTRUP, “Periodic H_2 Synthesis for Spacecraft Attitude Control with Magnetorquers”, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 27, no. 5, 2004, pages 696-709.
- [WYM 80] B. WYMAN, “Time varying linear discrete-time systems : II : Duality”, *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 86, no. 1, 1980, pages 361-377.
- [YAK 71] V. YAKUBOVICH, “S-procedure in nonlinear control theory”, *Vestnik Leningradskogo Universiteta*, vol. 1, 1971, pages 62-77.
- [YAK 75] V. YAKUBOVICH and V. STARZHINSKII, *Linear Differential Equations with Periodic Coefficients*, Wiley, New York, 1975.
- [YAM 02] K. YAMANAKA and F. ANDERSEN, “New state transition matrix for relative motion on an arbitrary elliptical orbit”, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 25, no. 1, 2002.
- [YAN 01] G.-H. YANG and J. WANG, “Non-fragile H_∞ control for linear systems with multiplicative controller gain variations”, *Automatica*, vol. 37, 2001, pages 727-737.
- [YEE 01] J.-S. YEE, G.-H. YANG and J. WANG, “Non-fragile guaranteed cost control for discrete-time uncertain linear systems”, *Int. J. Systems Science*, vol. 32, no. 7, 2001, pages 845-853.
- [ZAD 50] L. ZADEH, “Frequency analysis of variable networks”, proceedings of *Proc. of IRE*, vol. 76, march 1950, pages 291-299.
- [ZAD 63] L. A. ZADEH and C. A. DESOER, *Linear System Theory - A State-Space Approach*, McGraw-Hill, New-York, 1963.
- [ZAM 81] G. ZAMES, “Feedback and Optimal Sensitivity : Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses”, *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 26, no. 2, 1981, pages 301-320.
- [ZAR 87] O. ZARROUATI, *Trajectoires spatiales*, Cépaduès-éditions, Imprimerie du Sud, 1987.
- [ZHA 97] C. ZHANG and J. ZHANG, “Analysis of \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ performance of discrete periodically time-varying controllers”, *Automatica*, vol. 33, no. 4, 1997, pages 619-634.
- [ZHA 00] J. ZHANG and C. ZHANG, “Robustness of discrete periodically time-varying control under LTI unstructured perturbations”, *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 45, no. 7, 2000, pages 1370-1374.
- [ZHO 96] K. ZHOU, J. DOYLE and K. GLOVER, *Robust and Opimal Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.

Annexes

Annexe A

Inégalités Matricielles

Les résultats présentés dans cette thèse sont formulés à l'aide d'inégalités matricielles. Les inégalités matricielles permettent de décrire différents problèmes d'optimisation, et comme le montre l'ouvrage de référence [BOY 94], un bon nombre de problèmes d'Automatique se formulent naturellement dans ce cadre. Cette partie est consacrée à la description de ce formalisme mathématique.

A.1 Inégalités Matricielles

Les inégalités matricielles reposent essentiellement sur les notions de définie positivité et semi-définie positivité.

Définition A.1 (Définie Positivité)

Une matrice symétrique $M \in \mathcal{S}^n$ est définie positive (semi-définie positive) si, et seulement si, elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, $x'Ax > (\geq) 0$
2. toutes les valeurs propres λ_i de M sont positives (supérieures ou égales à zéro) :

$$\lambda_i(A) > (\geq) 0 \quad \forall i = 1 \cdots n$$

Bien qu'existant pour des matrices quelconques, cette définition a volontairement été réduite au cas des matrices symétriques. Si les matrices sont quelconques, la définition s'applique uniquement à leur partie symétrique.

Les inégalités matricielles sont définies à l'aide de la relation d'ordre partiel de Löwner.

Définition A.2 (Inégalité Généralisée)

Une matrice $A \in \mathcal{S}^n$ est supérieure (supérieure ou égale) à une matrice $B \in \mathcal{S}^n$ si, et seulement si, la matrice $A - B$ est définie (semi-définie) positive :

$$A > (\geq) B \iff A - B > (\geq) \mathbb{0} \quad (\text{A.1})$$

Définition A.3 (Inégalité Matricielle)

Une inégalité matricielle désigne une contrainte sur une variable $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ de la forme :

$$\mathcal{M}\mathcal{I}(\mathbf{x}) > (\geq) \mathbb{0} \quad (\text{A.2})$$

Selon que la matrice $\mathcal{M}\mathcal{I}(\mathbf{x})$ est définie positive ou semi-définie positive, l'inégalité matricielle sera dite stricte ou non stricte. L'ensemble des variables \mathbf{x} satisfaisant une inégalité matricielle est appelé l'ensemble faisable. Selon que cet ensemble est vide ou non vide, l'inégalité matricielle sera dite faisable ou non faisable.

Si la matrice $\mathcal{M}\mathcal{I}(\mathbf{x})$ est affine en les variables \mathbf{x} , l'inégalité matricielle est linéaire et sera notée $\mathcal{L}\mathcal{M}\mathcal{I}(\mathbf{x})$.

Définition A.4 (Inégalité Matricielle Linéaire - $\mathcal{L}\mathcal{M}\mathcal{I}$)

Une inégalité matricielle linéaire est une inégalité matricielle de la forme :

$$\mathcal{L}\mathcal{M}\mathcal{I}(\mathbf{x}) = F_0 + \sum_{i=1}^m F_i \mathbf{x}_i > (\geq) \mathbb{0} \quad (\text{A.3})$$

où $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_m)' \in \mathbb{R}^m$ est la variable et les matrices $F_i \in \mathcal{S}^n$, $i = 0 \cdots m$ sont des matrices symétriques connues.

Un autre type d'inégalité matricielle apparaissant dans ce mémoire sont les inégalités matricielles bilinéaires, notées $\mathcal{B}\mathcal{M}\mathcal{I}(\mathbf{x})$.

Définition A.5 (Inégalité Matricielle Bilinéaire - $\mathcal{B}\mathcal{M}\mathcal{I}$)

Une inégalité matricielle bilinéaire est une inégalité matricielle de la forme :

$$\mathcal{B}\mathcal{M}\mathcal{I}(\mathbf{x}) = F_0 + \sum_{i=1}^m F_i \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=i}^m G_{ij} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j > (\geq) \mathbb{0} \quad (\text{A.4})$$

où $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_m)' \in \mathbb{R}^m$ est la variable et les matrices $F_i \in \mathcal{S}^n$, $i = 0 \cdots m$ et $G_{ij} \in \mathcal{S}^n$, $i = 1 \cdots m$, $j = 1 \cdots m$ sont des matrices symétriques connues.

Les relations (A.3) et (A.4) utilisées pour décrire la forme générale des $\mathcal{L}\mathcal{M}\mathcal{I}$ et $\mathcal{B}\mathcal{M}\mathcal{I}$ font intervenir des variables regroupées au sein d'un vecteur unique \mathbf{x} . Cette notation est habituellement utilisée par la communauté de l'optimisation.

Les Automatiens préfèrent généralement utiliser des variables matricielles \mathbf{X}_i . Les problèmes $\mathcal{L}\mathcal{M}\mathcal{I}$ et $\mathcal{B}\mathcal{M}\mathcal{I}$ sont alors notés $\mathcal{L}\mathcal{M}\mathcal{I}(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_k)$ et $\mathcal{B}\mathcal{M}\mathcal{I}(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_k)$. Il est toujours possible de reformuler ces problèmes sous la forme (A.3) ou (A.4), les éléments des matrices \mathbf{X}_i étant alors rangés dans le vecteur \mathbf{x} .

A.2 Problèmes à base d'inégalités matricielles

Deux problèmes à base d'inégalités matricielles sont rencontrés dans ce mémoire : les problèmes de faisabilité et d'optimisation sous contraintes d'inégalités matricielles.

Définition A.6 (Problème de faisabilité)

Trouver $x \in \mathbb{R}^m$ satisfaisant l'inégalité matricielle :

$$\mathcal{MI}(\mathbf{x}) > (\geq) \mathbb{0}$$

Définition A.7 (Problème d'optimisation)

Minimiser un objectif linéaire sous des contraintes d'inégalités matricielles :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m} \quad & c' \mathbf{x} \\ \text{sous :} \quad & \mathcal{MI}(\mathbf{x}) > (\geq) \mathbb{0} \end{aligned} \tag{A.5}$$

L'ensemble faisable d'une \mathcal{LMI} étant convexe, les problèmes de faisabilité et d'optimisation sous contraintes \mathcal{LMI} entrent dans la classe des problèmes d'optimisation convexe. Un des intérêts majeurs de ce type de problème d'optimisation est qu'il existe des algorithmes de résolution très efficaces permettant de calculer l'optimum **global** en **temps polynomial** (le problème est résolu avec une précision donnée à l'aide d'un nombre d'opérations n'excédant pas un polynôme des dimensions du problème). Nous citons en particulier les algorithmes basés sur des méthodes de point intérieur et leurs solveurs associés (SeDuMi, LMILab, SDPT3, SDPA, CSDP, DSDP... [ARZ 02a]) permettant de traiter des problèmes de taille relativement importante. Il existe différentes boîtes à outils assurant l'interface de ces solveurs avec MATLAB[®]. Parmi elles, nous citerons en particulier YALMIP [LÖF 01] qui présente l'avantage de pouvoir programmer la plupart des opérateurs linéaires de MATLAB[®] (trace, addition, indexation, concaténation, ...) et d'être compatible la plupart des solveurs \mathcal{LMI} .

Contrairement aux problèmes \mathcal{LMI} , il n'existe pas d'algorithme permettant de calculer systématiquement la solution globale à un problème \mathcal{BMI} . Il est même prouvé [TOK 95] que le problème de faisabilité associé à un ensemble de contraintes \mathcal{BMI} est NP-difficile. Il existe cependant différents algorithmes permettant de traiter les problèmes \mathcal{BMI} de faible taille. Ces algorithmes, bien que ne garantissant pas une convergence vers une solution (locale ou globale), peuvent en pratique fournir de bons résultats. Les \mathcal{BMI} s rencontrées dans cette thèse seront traitées à l'aide du solveur PENBMI [KOC 04] dont l'interfaçage avec MATLAB[®] est assuré par YALMIP.

Il apparaît donc préférable, lorsque cela est possible, de formuler les problèmes de manière \mathcal{LMI} . A cet effet, différents théorèmes sont présentés en Annexe B. Ceux-ci permettent de reformuler certains problèmes \mathcal{BMI} , ou, plus généralement, certains problèmes non linéaires, sous forme \mathcal{LMI} .

Annexe B

Théorèmes utiles

Dans cette partie sont présentés quelques théorèmes relatifs aux inégalités matricielles utilisés dans ce mémoire.

B.1 Complément de Schur

Certaines inégalités matricielles non linéaires peuvent être reformulées en terme de \mathcal{LMI} à l'aide du complément de Schur décrit dans le lemme suivant.

Lemme B.1 (Complément de Schur) [BOY 94]

Soient les matrices $Q(x) \in \mathcal{S}^m$, $R(x) \in \mathcal{S}^n$ et $S(x) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dépendant d'une variable $x \in \mathbb{R}^p$. Alors, les inégalités matricielles :

$$\begin{cases} R(x) > 0 \\ Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S'(x) > 0 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

et :

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S'(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{B.2})$$

sont équivalentes

Si les matrices $Q(x)$, $R(x)$ et $S(x)$ dépendent affinement de la variable x , alors l'inégalité matricielle (B.2) est une \mathcal{LMI} .

B.2 Lemme de Finsler

Le lemme de Finsler faisant intervenir la notion de matrices orthogonales, nous allons donc dans un premier temps préciser ce dont il s'agit.

Définition B.1

Une matrice $V^\perp \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}$ est dite **orthogonale** à une matrice $V \in \mathbb{R}^{n \times m}$ de rang r si elle vérifie :

$$\mathcal{N}(V^\perp) = \mathcal{I}(V) \quad \text{et} \quad V^\perp(V^\perp)' > 0 \quad (\text{B.3})$$

où $\mathcal{N}(V^\perp)$ désigne le noyau de (V^\perp) et $\mathcal{I}(V)$ désigne l'image de V .

Une propriété de ces matrices est que le produit $V^\perp V$ est nul :

$$V^\perp V = 0 \quad (\text{B.4})$$

De plus, V^\perp existe si, et seulement si, V a des lignes linéairement dépendantes : $n > r$. V^\perp n'est pas unique mais par la suite, on considérera que V^\perp désigne une matrice V^\perp particulière, choisie arbitrairement.

Lemme B.2 (Lemme de Finsler) [SKE 98]

Soient deux matrices $V \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $Q \in \mathcal{S}^n$ telles que $\text{rang}(V) = r < n$ et un vecteur $x \in \mathbb{R}^m$, alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :

$$V^\perp Q V^{\perp'} \leq 0 \quad (\text{B.5})$$

$$\exists \tau \in \mathbb{R} : Q \leq \tau V V' \quad (\text{B.6})$$

$$x' Q x \leq 0, \quad \forall x \neq 0 : V' x = 0 \quad (\text{B.7})$$

B.3 Lemme d'élimination**Lemme B.3 (Lemme de Projection - Généralisation de B.2) [SKE 98]**

Soient trois matrices $Q \in \mathcal{S}^n$, $R \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $S \in \mathbb{R}^{p \times n}$ telles que $\text{rang}(R) < n$ et $\text{rang}(S) < n$, alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\exists \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ telle que :

$$R \mathbf{X} S + S' \mathbf{X}' R' + Q < 0 \quad (\text{B.8})$$

2. Les matrices Q , R , S vérifient :

$$\begin{cases} R^\perp Q R^{\perp'} < 0 \\ S'^\perp Q S'^{\perp'} < 0 \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

Lemme B.4 (Lemme d'élimination - Cas particulier de B.3) [SKE 98]

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\exists \mathbf{P} > 0$ telle que :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & N' \end{bmatrix} Q(\mathbf{P}) \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ N \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{B.10})$$

2. $\exists \mathbf{P} > 0$ et \mathbf{G} telles que :

$$Q(\mathbf{P}) + \begin{bmatrix} N' \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} \mathbf{G}' + \mathbf{G} \begin{bmatrix} N & -\mathbf{1} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{B.11})$$

3. $\exists \mathbf{P} > 0, \mathbf{F}$ et \mathbf{N}_0 telles que :

$$Q(\mathbf{P}) + \begin{bmatrix} N' \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} \mathbf{F}' \begin{bmatrix} \mathbf{N}_0 & -\mathbf{1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{N}_0' \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} \mathbf{F} \begin{bmatrix} N & -\mathbf{1} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{B.12})$$

4. $\exists \mathbf{P} > 0$ et \mathbf{N}_0 telles que :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & N' \end{bmatrix} Q(\mathbf{P}) \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ N \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{N}_0' \end{bmatrix} Q(\mathbf{P}) \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{N}_0 \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{B.14})$$

B.4 \mathcal{S} -procédure

Lemme B.5 (\mathcal{S} -procédure - forme quadratique) [YAK 71]

Soit une famille de matrices $\{Q_i \in \mathcal{S}^n\}_{i=1 \dots m}$ et une matrice $P \in \mathcal{S}^n$.

Si :

$$\exists \tau_i \geq 0, i = 1 \dots m \mid P + \sum_{i=1}^m \tau_i Q_i \geq 0 \quad (\text{B.15})$$

Alors :

$$x' P x \geq 0 \forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n \mid x' Q_i x \leq 0, i = 1 \dots m \quad (\text{B.16})$$

Dans le cas où $m = 1$, la condition précédente devient nécessaire et suffisante.

Annexe C

{XYZ}-ellipsoïdes de matrices

Dans cette annexe sont décrits des ensembles particuliers de matrices appelés {XYZ}-ellipsoïdes de matrices. Ces ensembles correspondent à l'extension de la notion d'ellipsoïde de l'espace vectoriel \mathbb{R}^m au cas des matrices de dimension $\mathbb{R}^{m \times p}$.

C.1 Définition

Définition C.1 (Ellipsoïde de matrices)

Soit trois matrices $X \in \mathcal{S}^p$, $Y \in \mathbb{R}^{p \times m}$ et $Z \in \mathcal{S}^{m+}$. L'ensemble des matrices $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ vérifiant l'inégalité matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{K}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{C.1})$$

est appelé {XYZ}-ellipsoïde de $\mathbb{R}^{m \times p}$.

Par définition, $K_0 = -Z^{-1}Y'$ est le centre de l'ellipsoïde et $R = K_0'ZK_0 - X$ est le rayon. L'inégalité précédente peut alors se réécrire sous la forme :

$$(\mathbf{K} - K_0)'Z(\mathbf{K} - K_0) \leq R \quad (\text{C.2})$$

Remarque Si $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^m$ (cas où $p = 1$), l'inégalité (C.2) décrit un ellipsoïde de l'espace vectoriel \mathbb{R}^m de rayon $R \in \mathbb{R}$ et de géométrie $Z \in \mathcal{S}^{m+}$.

C.2 Propriétés

Lemme C.1 (Ellipsoïde non vide)

Un {XYZ}-ellipsoïde est non vide, c'est-à-dire qu'il existe au moins une valeur de \mathbf{K}

vérifiant la relation (C.1), si, et seulement si, son rayon R est semi-défini positif :

$$R \geq 0 \quad (\text{C.3})$$

D'après la définition de R et de K_0 , l'inégalité précédente est équivalente à :

$$X \leq YZ^{-1}Y' \quad (\text{C.4})$$

Lemme C.2 (Convexité d'un $\{XYZ\}$ -ellipsoïde)

Un $\{XYZ\}$ -ellipsoïde est un ensemble convexe.

Preuve Appliquons le complément de Schur à l'inégalité (C.1), on obtient :

$$\begin{bmatrix} X + \mathbf{K}'Y' + Y\mathbf{K} & \mathbf{K}'Z \\ Z\mathbf{K} & -Z \end{bmatrix} \leq 0$$

Il s'agit d'une \mathcal{LMI} en la variable \mathbf{K} . L'ensemble faisable est donc convexe. ■

Annexe D

Paramètres orbitaux

D.1 Paramètres orbitaux classiques

Les paramètres orbitaux, au nombre de 6, permettent de définir entièrement la position du satellite dans l'espace, à partir de :

- l'orientation de l'orbite dans l'espace,
- la forme de l'orbite,
- la position du satellite sur l'orbite.

Ces paramètres sont notés :

$$\{a, e, i, \omega, \Omega, \nu \text{ ou } E \text{ ou } M\}$$

D.1.1 Orientation de l'orbite dans l'espace : Ω, ω, i

L'orientation de l'orbite dans l'espace est définie par trois angles, notés Ω, ω et i , analogues aux angles d'Euler :

- l'angle Ω donne la longitude du noeud ascendant,
- l'angle d'inclinaison i est l'angle entre le plan équatorial terrestre et le plan orbital,
- l'argument du périégée ω est l'angle entre le noeud ascendant et le périégée.

Ces angles sont indiqués sur la Figure D.1 où \vec{X}_i, \vec{Y}_i et \vec{Z}_i sont les axes du repère inertiel \mathcal{R}_i .

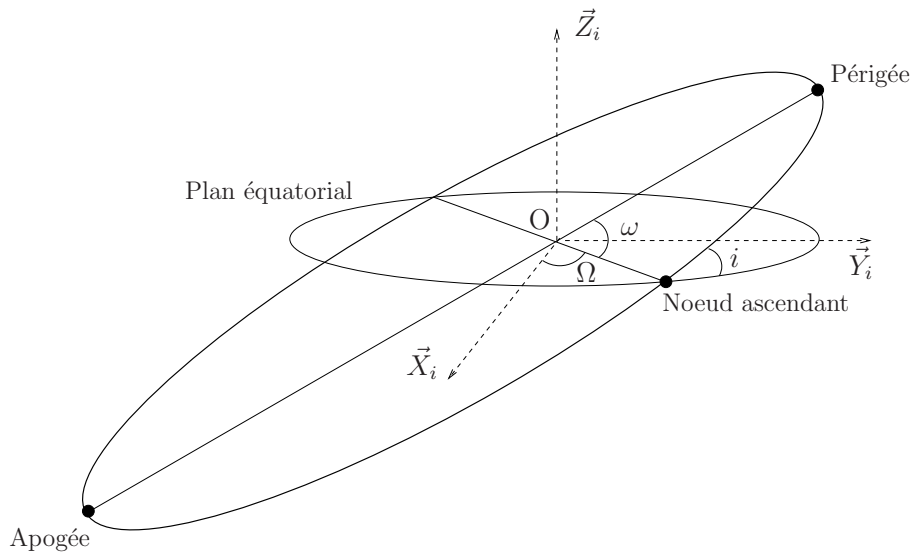


FIG. D.1 – Orientation de l'orbite dans l'espace

D.1.2 Dimension et forme de l'orbite a, e

La forme de l'orbite étant elliptique, elle peut être entièrement définie par deux paramètres :

- son demi-grand axe a ,
- son excentricité e .

Ces paramètres sont indiqués sur la Figure D.2 où :

- O désigne le centre de la Terre,
- O' est le centre du cercle tangent à la trajectoire orbitale.

D.1.3 Position du satellite sur l'orbite ν, E ou M

Pour repérer la position du satellite sur l'orbite un seul angle est nécessaire :

- soit l'anomalie vraie ν ,
- soit l'anomalie excentrique E ,
- soit l'anomalie moyenne $M = E - e \sin(E)$.

Les angles ν et E sont représentés sur la Figure D.2 où :

- S est la position du satellite sur l'orbite,
- S' est la projection orthogonale de S sur le cercle tangent à la trajectoire orbitale.

Dans ce mémoire, seule l'anomalie vraie ν est utilisée.

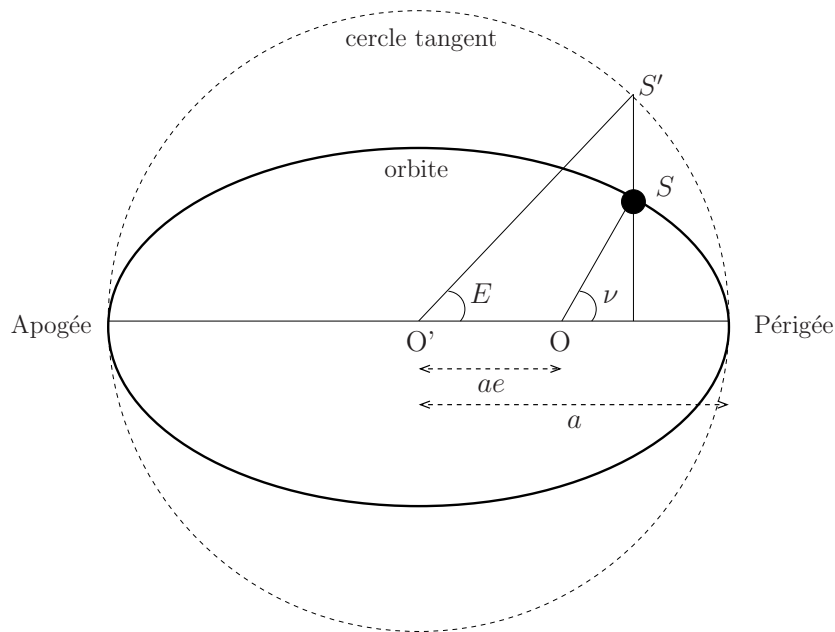


FIG. D.2 – Forme de l'orbite et repérage de la position du satellite

D.2 Paramètres orbitaux osculateurs

Dans le cas d'un mouvement képlérien non perturbé, où le satellite est uniquement soumis au premier terme du potentiel terrestre, les paramètres orbitaux (à l'exception de l'anomalie) sont constants. Mais en réalité un certain nombre de forces perturbatrices agissent sur le satellite et l'écartent de son orbite képlérienne. Du fait de cette dérive, les paramètres orbitaux ne peuvent plus être supposés constants. C'est pour cette raison qu'ont été introduits les paramètres orbitaux osculateurs qui permettent de décrire l'évolution de l'orbite au cours du temps. Plus précisément, ces paramètres décrivent, à chaque instant t , l'orbite képlérienne que suivrait le satellite dans le cas képlérien non perturbé. Ils sont notés :

$$\{a(t), e(t), i(t), \omega(t), \Omega(t), \nu(t) \text{ ou } E(t) \text{ ou } M(t)\}$$

D.3 Passage des paramètres orbitaux aux paramètres cartésiens

Le modèle non-linéaire a pour vecteur d'état les paramètres cartésiens du satellite dans le repère inertiel \mathcal{R}_i . Les paramètres orbitaux permettant de définir plus facilement l'orbite du satellite, les conditions initiales du simulateur non-linéaire que nous avons implémenté sous SIMULINK[©] sont définies à l'aide de ces paramètres. Une conversion est donc nécessaire entre paramètres orbitaux et paramètres cartésiens. Les étapes de cette conversion sont détaillées dans cette partie.

L'équation de la trajectoire dans le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ lié au plan d'orbite est donnée par :

$$(\vec{r})^{(\mathcal{R})} = \begin{pmatrix} r \cos \nu \\ r \sin \nu \\ 0 \end{pmatrix}$$

où :

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu}$$

Le passage du repère Galiléen $\mathcal{R}_i = (O, \vec{X}_i, \vec{Y}_i, \vec{Z}_i)$ au repère \mathcal{R} est obtenu par trois rotations consécutives d'angles Ω , ω et i comme indiqué sur les Figures D.3, D.4 et D.5. Les équations de la trajectoire dans le repère inertiel \mathcal{R}_i sont donc :

$$\begin{aligned} (\vec{r})^{(\mathcal{R}_i)} &= \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (\vec{r})^{(\mathcal{R})} \\ &= r \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos(\nu + \omega) - \sin \Omega \cos i \sin(\nu + \omega) \\ \sin \Omega \cos(\nu + \omega) + \cos \Omega \cos i \sin(\nu + \omega) \\ \sin i \sin(\nu + \omega) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La dérivation temporelle de la relation précédente conduit à :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}^{(\mathcal{R}_i)} &= \dot{r} \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos(\nu + \omega) - \sin \Omega \cos i \sin(\nu + \omega) \\ \sin \Omega \cos(\nu + \omega) + \cos \Omega \cos i \sin(\nu + \omega) \\ \sin i \sin(\nu + \omega) \end{bmatrix} \\ &\quad + r \dot{\nu} \begin{bmatrix} -\cos \Omega \sin(\nu + \omega) - \sin \Omega \cos i \cos(\nu + \omega) \\ -\sin \Omega \sin(\nu + \omega) + \cos \Omega \cos i \cos(\nu + \omega) \\ \sin i \cos(\nu + \omega) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec :

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu} \quad , \quad \dot{r} = \frac{a(1 - e^2)e \sin \nu}{(1 + e \cos \nu)^2} \dot{\nu} \quad , \quad \dot{\nu} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}$$

D.4 Passage des paramètres cartésiens aux paramètres orbitaux

Différents blocs du simulateur non-linéaire nécessitent la connaissance à tout instant des paramètres orbitaux, en particulier de l'anomalie vraie ν . Nous présentons donc dans cette partie les calculs nécessaires permettant de passer des coordonnées cartésiennes aux éléments orbitaux [MON 00].

La position et la vitesse d'un point M dans le repère inertiel \mathcal{R}_i sont notées \vec{r} et \vec{v} . La norme de ces vecteur est notée $r = \|\vec{r}\|$ et $v = \|\vec{v}\|$. Le moment cinétique massique est donné par :

$$\vec{h} = \vec{r} \wedge \vec{v} \quad h = \|\vec{h}\|$$

D.4.1 Calcul du demi-grand axe a

$$a = \left(\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu} \right)^{-1}$$

D.4.2 Calcul de l'excentricité e

$$e = \sqrt{1 - \frac{h^2}{\mu a}}$$

D.4.3 Calcul de la longitude du noeud ascendant Ω

Soit la normale au plan orbital osculateur :

$$\vec{z}_3 = \frac{\vec{h}}{h}$$

et :

$$\vec{x}_1 = \frac{\vec{z}_0 \wedge \vec{z}_3}{\|\vec{z}_0 \wedge \vec{z}_3\|}$$

La projection de \vec{x}_1 dans la base inertielle fournit :

$$\cos \Omega = \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_1$$

$$\sin \Omega = \vec{y}_0 \cdot \vec{x}_1$$

D.4.4 Calcul de l'inclinaison

Soit :

$$\vec{z}_1 = \vec{z}_0$$

et :

$$\vec{y}_1 = \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1$$

Alors :

$$\cos i = \vec{z}_3 \cdot \vec{z}_0$$

$$\sin i = -\vec{z}_3 \cdot \vec{y}_1$$

D.4.5 Calcul de l'anomalie vraie ν

$$\cos \nu = \frac{1}{e} \left(\frac{a(1-e^2)}{r} - 1 \right)$$

Cette relation donne deux valeurs possibles de ν , l'une appartenant à l'intervalle $[0, \pi]$, l'autre appartenant à l'intervalle $[\pi, 2\pi]$. Le signe de \dot{r} permet de déterminer l'intervalle. Ainsi :

$$\nu \in [0, \pi] \Leftrightarrow \dot{r}(t) > 0 \quad \nu \in [\pi, 2\pi] \Leftrightarrow \dot{r}(t) < 0$$

D.4.6 Calcul de l'argument du péricée ω

Soit le vecteur unitaire associé au vecteur position :

$$\vec{x}_3 = \frac{\vec{r}}{r}$$

et :

$$\vec{y}_2 = \vec{z}_2 \wedge \vec{x}_2 = \vec{z}_3 \wedge \vec{x}_1$$

La valeur de ω peut alors être déterminée par la relation suivante :

$$\sin(\omega + \nu) = \vec{x}_3 \wedge \vec{y}_2$$

Remarque

Il existe des singularités dans les équations précédentes. Lorsque i ou e sont nuls, la méthode est caduque. Il est alors nécessaire de passer par un jeu de paramètres ne présentant pas de singularité, par exemple les paramètres équinoxiaux.

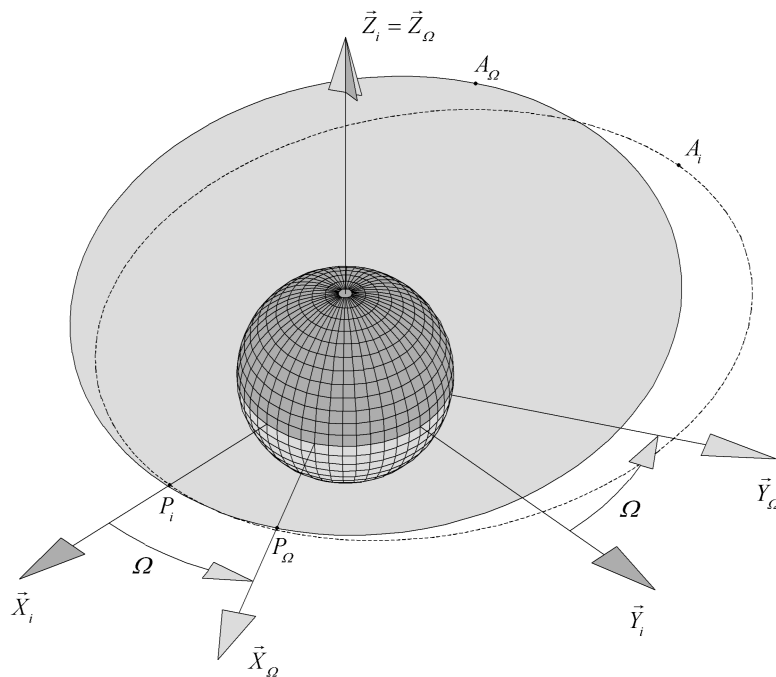


FIG. D.3 – Angle de longitude du nœud ascendant

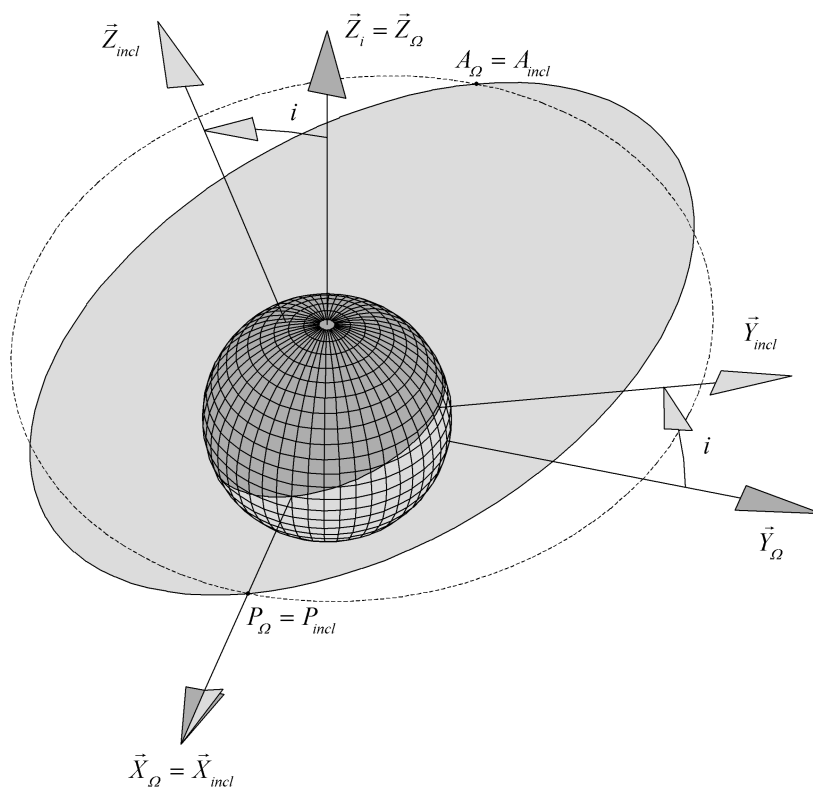


FIG. D.4 – Angle d'inclinaison

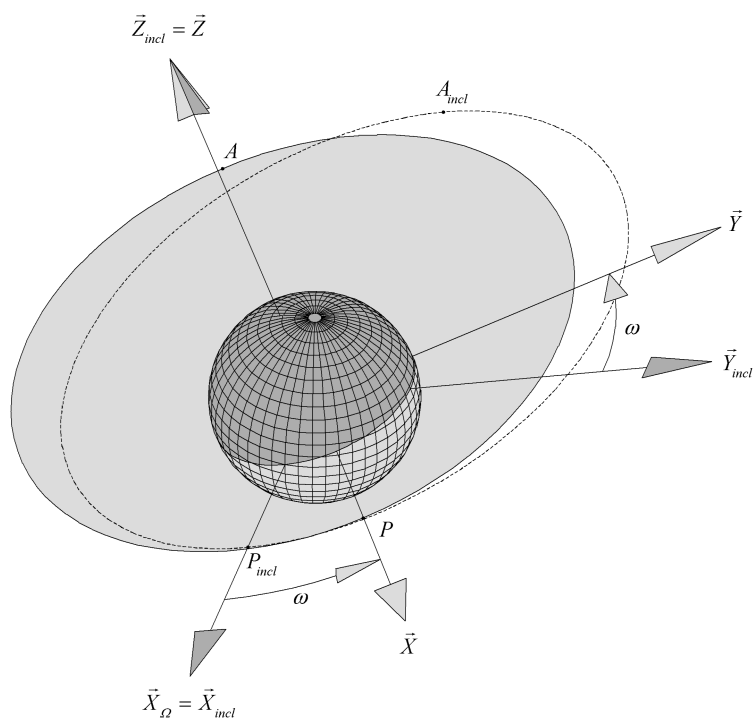


FIG. D.5 – Argument du périégée

Annexe E

Obtention du modèle linéarisé du mouvement relatif

Dans cette annexe est présenté le détail de différents calculs permettant d'établir le modèle linéarisé du mouvement relatif de deux satellites présenté au Chapitre IV.

E.1 Accélération différentielle

L'objectif de ce paragraphe est d'explicitier dans la base locale $\mathcal{R}_1 = (M_1, \vec{R}, \vec{S}, \vec{W})$ le terme $\Delta\vec{a} = \left(\frac{d^2\Delta\vec{r}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}_i}$ apparaissant dans l'équation (IV.9). Le vecteur $\Delta\vec{r}$ décrivant la position relative de M_2 par rapport à M_1 dans \mathcal{R}_1 est noté :

$$\Delta\vec{r} = a(\tilde{\xi}\vec{R} + \tilde{\eta}\vec{S} + \tilde{\zeta}\vec{W}) \quad (\text{E.1})$$

Dérivons l'équation précédente par rapport au temps dans le repère inertiel :

$$\left(\frac{d\Delta\vec{r}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_i} = a \left[\dot{\tilde{\xi}}\vec{R} + \tilde{\xi} \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_i} + \dot{\tilde{\eta}}\vec{S} + \tilde{\eta} \left(\frac{d\vec{S}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_i} + \dot{\tilde{\zeta}}\vec{W} + \tilde{\zeta} \left(\frac{d\vec{W}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_i} \right] \quad (\text{E.2})$$

avec :

$$\left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_i} = \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_i) \wedge \vec{R} = \dot{\nu}\vec{S} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_i) \wedge \vec{R}$$

D'après les figures D.3, D.4 et D.5 :

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_i) = \dot{\Omega}\vec{Z}_\Omega + \dot{i}\vec{X}_{incl} + \dot{\omega}\vec{Z}$$

Donc :

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_i) = \dot{\Omega} (\vec{Z}_\Omega \wedge \vec{R}) + \dot{i} (\vec{X}_{incl} \wedge \vec{R}) + \dot{\omega} (\vec{Z} \wedge \vec{R})$$

où :

$$\begin{aligned} \vec{Z}_\Omega \wedge \vec{R} &= \left(\sin i \sin(\omega + \nu) \vec{R} + \sin i \cos(\omega + \nu) \vec{S} + \cos i \vec{W} \right) \wedge \vec{R} \\ &= \cos i \vec{S} - \sin i \cos(\omega + \nu) \vec{W} \\ \vec{X}_i \wedge \vec{R} &= \left(\cos(\omega + \nu) \vec{R} - \sin(\omega + \nu) \vec{S} \right) \wedge \vec{R} \\ &= \sin(\omega + \nu) \vec{W} \\ \vec{Z} \wedge \vec{R} &= \vec{W} \wedge \vec{R} = \vec{S} \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement :

$$\left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_i} = \left(\dot{\nu} + \dot{\omega} + \dot{\Omega} \cos i \right) \vec{S} + \left(i \sin(\omega + \nu) - \dot{\Omega} \sin i \cos(\omega + \nu) \right) \vec{W}$$

De même, il est possible de montrer que :

$$\left(\frac{d\vec{S}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_i} = - \left(\dot{\nu} + \dot{\omega} + \dot{\Omega} \cos i \right) \vec{R} + \left(i \cos(\omega + \nu) + \dot{\Omega} \sin i \sin(\omega + \nu) \right) \vec{W}$$

et :

$$\left(\frac{d\vec{W}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_i} = \left(-i \sin(\omega + \nu) + \dot{\omega} \sin i \cos(\omega + \nu) \right) \vec{R} - \left(i \cos(\omega + \nu) + \dot{\omega} \sin i \sin(\omega + \nu) \right) \vec{S}$$

Dans la plupart des cas, la variation des angles orbitaux peut être négligée devant la variation de l'anomalie vraie. Les équations précédentes s'écrivent alors :

$$\left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_i} \simeq \dot{\nu} \vec{S} \quad \left(\frac{d\vec{S}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_i} \simeq -\dot{\nu} \vec{R} \quad \left(\frac{d\vec{W}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_i} \simeq \vec{0}$$

L'équation (E.2) devient :

$$\left(\frac{d\Delta\vec{r}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_i} \simeq a \left[(\dot{\xi} - \tilde{\eta}\dot{\nu}) \vec{R} + (\dot{\eta} + \xi\dot{\nu}) \vec{S} + \dot{\zeta} \vec{W} \right]$$

En dérivant une nouvelle fois par rapport au temps, l'expression suivante est obtenue :

$$\Delta\vec{a} = \left(\frac{d^2\Delta\vec{r}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}_i} \simeq a \left[(\ddot{\xi} - 2\dot{\eta}\dot{\nu} - \tilde{\eta}\ddot{\nu} - \tilde{\xi}\dot{\nu}^2) \vec{R} + (\ddot{\eta} + 2\dot{\xi}\dot{\nu} + \tilde{\xi}\ddot{\nu} - \tilde{\eta}\dot{\nu}^2) \vec{S} + \ddot{\zeta} \vec{W} \right] \quad (\text{E.3})$$

Dans le cas d'une orbite elliptique, la vitesse de variation de l'anomalie vraie et son accélération sont données par :

$$\begin{aligned} \dot{\nu} &= n \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} \\ \ddot{\nu} &= -n^2 \frac{2e \sin \nu (1 + e \cos \nu)^3}{(1 - e^2)^3} \end{aligned}$$

En remplaçant $\dot{\nu}$ et $\ddot{\nu}$ par leurs expressions dans (E.3), l'accélération différentielle s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{a} = & a \left(\ddot{\xi} - 2n \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} \dot{\eta} + n^2 \frac{2e \sin \nu (1 + e \cos \nu)^3}{(1 - e^2)^3} \tilde{\eta} - n^2 \frac{(1 + e \cos \nu)^4}{(1 - e^2)^3} \tilde{\xi} \right) \vec{R} \\ & + a \left(\ddot{\eta} + 2n \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} \dot{\xi} - n^2 \frac{2e \sin \nu (1 + e \cos \nu)^3}{(1 - e^2)^3} \tilde{\xi} - n^2 \frac{(1 + e \cos \nu)^4}{(1 - e^2)^3} \tilde{\eta} \right) \vec{S} \\ & + a \ddot{\zeta} \vec{W} \end{aligned}$$

E.2 Accélération gravitationnelle différentielle

Nous présentons dans ce paragraphe le détail des calculs permettant d'obtenir l'expression du terme $\Delta \vec{a}_{gra}$ apparaissant dans l'équation (IV.9) dans la base locale \mathcal{R}_1 . Ce terme correspond à l'accélération produite par le terme fondamental et le premier harmonique du développement en série du potentiel gravitationnel. Son expression peut être obtenue en considérant la différentielle de \vec{a}_{gra} :

$$\Delta \vec{a}_{gra} = \left(\overline{\text{grad}} \vec{a}_{gra} \right)_{\text{local}} \Delta \vec{r} \quad (\text{E.4})$$

L'expression du gradient étant connue en coordonnées sphériques, nous exprimons $\left(\overline{\text{grad}} \vec{a}_{gra} \right)_{\text{local}}$ de la manière suivante :

$$\left(\overline{\text{grad}} \vec{a}_{gra} \right)_{\text{local}} = P^{-1} \left(\overline{\text{grad}} \vec{a}_{gra} \right)_{\text{sph}} P \quad (\text{E.5})$$

où P est la matrice de passage de la base sphérique $(\vec{R}, \vec{\varphi}, \vec{\theta})$ à la base locale $(\vec{R}, \vec{S}, \vec{W})$. Ces bases ayant le vecteur \vec{R} en commun, le passage de la première à la seconde s'effectue par simple rotation d'angle $\psi = (\vec{\varphi}, \vec{S}) = (\vec{\theta}, \vec{W})$. L'expression de la matrice de passage est donc :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}$$

avec :

$$\sin \psi = \frac{\sin \alpha}{\sin(\omega + \nu)} \quad \cos \psi = -\sin i \cos(2\Omega + \alpha) \quad (\text{E.6})$$

où :

$$\cos \alpha = \frac{\cos(\omega + \nu)}{\sqrt{\cos^2(\omega + \nu) + \sin^2(\omega + \nu) \cos^2 i}} \quad \sin \alpha = \frac{\sin(\omega + \nu) \cos i}{\sqrt{\cos^2(\omega + \nu) + \sin^2(\omega + \nu) \cos^2 i}}$$

En coordonnées sphériques, l'expression du gradient est donnée par :

$$\left(\overline{\text{grad}} \vec{a}_{gra} \right)_{\text{sph}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{a_\varphi}{r} & \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{a_\theta}{r} \\ \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{a_r}{r} & \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \theta} - \frac{a_\theta}{r} \cotan \varphi \\ \frac{\partial a_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} & \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{a_r}{r} + \frac{a_\varphi}{r} \cotan \varphi \end{bmatrix}$$

En faisant l'hypothèse d'un corps central homogène et polairement aplati, l'expression de l'accélération gravitationnelle dans la base sphérique est :

$$\begin{aligned} a_R &= -\frac{\mu}{r^2} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{R_{eq}^2 J_2}{r^2} (1 - 3 \cos^2 \varphi) \right) \\ a_\varphi &= \frac{3}{2} \frac{\mu R_{eq}^2 J_2}{r^4} \sin 2\varphi \\ a_\theta &= 0 \end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$\left(\overline{\text{grad } \vec{a}} \right)_{\text{sph}} = -\frac{\mu}{r^3} \begin{bmatrix} -2 \left(1 + 3 \frac{R_{eq}^2 J_2}{r^2} (1 - 3 \cos^2 \varphi) \right) & 6 \frac{R_{eq}^2 J_2}{r^2} \sin 2\varphi & 0 \\ 6 \frac{R_{eq}^2 J_2}{r^2} \sin 2\varphi & \frac{3}{2} \frac{R_{eq}^2 J_2}{r^2} \sin^2 \varphi + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{3}{2} \frac{R_{eq}^2 J_2}{r^2} (1 - 5 \cos^2 \varphi) \end{bmatrix} \quad (\text{E.7})$$

En remplaçant $\left(\overline{\text{grad } \vec{a}} \right)_{\text{sph}}$ par son expression (E.7) dans l'équation (E.5), nous obtenons :

$$\left(\overline{\text{grad } \vec{g}} \right)_{\text{local}} = \frac{\mu}{r^3} \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + 6 \frac{R_{eq}^2 J_2}{r^2} \begin{bmatrix} G_{\xi\xi} & G_{\xi\eta} & G_{\xi\zeta} \\ G_{\eta\xi} & G_{\eta\eta} & G_{\eta\zeta} \\ G_{\zeta\xi} & G_{\zeta\eta} & G_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} \right\} \quad (\text{E.8})$$

où :

$$\begin{bmatrix} G_{\xi\xi} & G_{\xi\eta} & G_{\xi\zeta} \\ G_{\eta\xi} & G_{\eta\eta} & G_{\eta\zeta} \\ G_{\zeta\xi} & G_{\zeta\eta} & G_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 3 \cos^2 \varphi & -\sin 2\varphi \cos \psi & -\sin 2\varphi \cos \psi \\ -\sin 2\varphi \cos \psi & \cos^2 \varphi \sin^2 \psi - \frac{\sin^2 \varphi}{4} & \cos^2 \varphi \cos \psi \sin \psi \\ -\sin 2\varphi \cos \psi & \cos^2 \varphi \cos \psi \sin \psi & \cos^2 \varphi \cos^2 \psi - \frac{\sin^2 \varphi}{4} \end{bmatrix}$$

avec $\sin \psi$ et $\cos \psi$ donnés par (E.6) et :

$$\cos \varphi = \sin(\omega + \nu) \sin i \quad \sin \varphi = \sqrt{\cos^2(\omega + \nu) + \sin^2(\omega + \nu) \cos^2 i}$$

E.3 Accélération différentielle due au frottement atmosphérique

Cette section présente le détail des calculs permettant d'obtenir l'équation (IV.21) exprimant dans la base locale \mathcal{R}_1 l'accélération différentielle due au frottement atmosphérique (ou accélération de traînée).

L'accélération de traînée au niveau de la cible est donnée par une équation de la forme (IV.6) :

$$\vec{a}_{atm_1}(\vec{r}_1, \vec{v}_1) = -\frac{\rho(\vec{r}_1)}{2m} S C_D v_1^2 \frac{\vec{v}_1}{v_1} \quad (\text{E.9})$$

De même, l'accélération de traînée au niveau du chasseur est :

$$\vec{a}_{atm_2}(\vec{r}_2, \vec{v}_2) = -\frac{\rho(\vec{r}_2)}{2m} SC_D v_2^2 \frac{\vec{v}_2}{v_2} \quad (\text{E.10})$$

Si l'on néglige la différence de densité atmosphérique entre le chasseur et la cible, l'équation précédente s'écrit :

$$\vec{a}_{atm_2}(\vec{r}_2, \vec{v}_2) = -\frac{\rho(\vec{r}_1)}{2m} SC_D v_2^2 \frac{\vec{v}_2}{v_2} \quad (\text{E.11})$$

Or

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \Delta\vec{v}$$

Alors :

$$\begin{aligned} v_2^2 &= (\vec{v}_1 + \Delta\vec{v})^2 \\ &= v_1^2 + 2\vec{v}_1 \cdot \Delta\vec{v} + \Delta v^2 \\ &= v_1^2 \left(1 + 2\frac{\vec{v}_1 \cdot \Delta\vec{v}}{v_1^2} + \frac{\Delta v^2}{v_1^2} \right) \end{aligned}$$

En négligeant la vitesse relative Δv par rapport à la vitesse absolue v_1 , l'équation précédente peut être approximée par :

$$v_2^2 \simeq v_1^2 \left(1 + 2\frac{\vec{v}_1 \cdot \Delta\vec{v}}{v_1^2} \right) \quad (\text{E.12})$$

Pour la même raison, il est possible de considérer que les vecteurs vitesse des deux satellites ont la même direction :

$$\frac{\vec{v}_2}{v_2} \simeq \frac{\vec{v}_1}{v_1} \quad (\text{E.13})$$

En remplaçant v_2^2 et $\frac{\vec{v}_2}{v_2}$ par leurs expressions respectives (E.12) et (E.13) dans (E.11), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \vec{a}_{atm_2} &\simeq -\frac{\rho(\vec{r}_1)}{2m} SC_D v_1^2 \left(1 + 2\frac{\vec{v}_1 \cdot \Delta\vec{v}}{v_1^2} \right) \frac{\vec{v}_1}{v_1} \\ &= \vec{a}_{atm_1} - \frac{\rho(\vec{r}_1)}{m} SC_D v_1 \left(\frac{\vec{v}_1}{v_1} \cdot \Delta\vec{v} \right) \frac{\vec{v}_1}{v_1} \end{aligned}$$

soit :

$$\Delta\vec{a}_{atm} = -\frac{\rho(\vec{r}_1)}{m} SC_D v_1 \left(\frac{\vec{v}_1}{v_1} \cdot \Delta\vec{v} \right) \frac{\vec{v}_1}{v_1} \quad (\text{E.14})$$

En définissant dans la base locale \mathcal{R}_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\vec{v}_1}{v_1} &= t_r \vec{R} + t_s \vec{S} \\ \Delta\vec{v} &= \dot{\xi} \vec{R} + \dot{\eta} \vec{S} + \dot{\zeta} \vec{W} \end{aligned}$$

nous obtenons :

$$\left(\frac{\vec{v}_1}{v_1} \cdot \Delta\vec{v} \right) = t_r \dot{\xi} + t_s \dot{\eta}$$

d'où :

$$\left(\frac{\vec{v}_1}{v_1} \cdot \Delta \vec{v} \right) \frac{\vec{v}_1}{v_1} = \left(t_r^2 \dot{\tilde{\xi}} + t_r t_s \dot{\tilde{\eta}} \right) \vec{R} + \left(t_r t_s \dot{\tilde{\xi}} + t_s^2 \dot{\tilde{\eta}} \right) \vec{S}$$

En injectant l'expression précédente dans (E.14), nous retrouvons bien l'équation (IV.21) :

$$\Delta \vec{a}_{atm} = -\frac{\rho(h)}{m} a S C_D v_1 \left[\left(t_r^2 \dot{\tilde{\xi}} + t_r t_s \dot{\tilde{\eta}} \right) \vec{R} + \left(t_r t_s \dot{\tilde{\xi}} + t_s^2 \dot{\tilde{\eta}} \right) \vec{S} \right]$$

Annexe F

Simulateurs

F.1 Simulateur non-linéaire

Le modèle non-linéaire décrivant l'évolution de la position et de la vitesse d'un satellite à partir de conditions initiales données sous forme de paramètres orbitaux a été programmé sous SIMULINK[®] (Figure F.1).

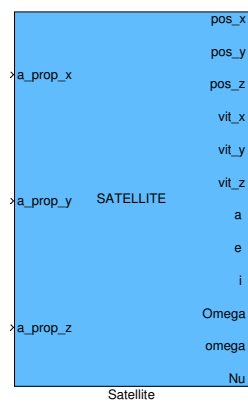


FIG. F.1 – Bloc satellite

Entrées :

- a_{prop-x} , a_{prop-y} , a_{prop-z} : accélérations de poussée dans le repère inertiel \mathcal{R}_i

Sorties :

- pos_x , pos_y , pos_z , vit_x , vit_y , vit_z : position et vitesse du satellite dans le repère inertiel \mathcal{R}_i
- a , e , i , Ω , ω , Nu : paramètres orbitaux osculateurs du satellite

Comme le montre la Figure F.2, le calcul du champ gravitationnel ainsi que l'intégration numérique sont effectués au niveau des paramètres cartésiens. Les conditions initiales fournies, données sous forme de paramètres orbitaux, sont converties en paramètres cartésiens pour initialiser l'intégrateur. Les paramètres orbitaux fournis en sortie du bloc sont obtenus a posteriori par conversion depuis les paramètres cartésiens. Le passage des paramètres cartésiens en paramètres orbitaux et inversement est décrit en Annexe D.

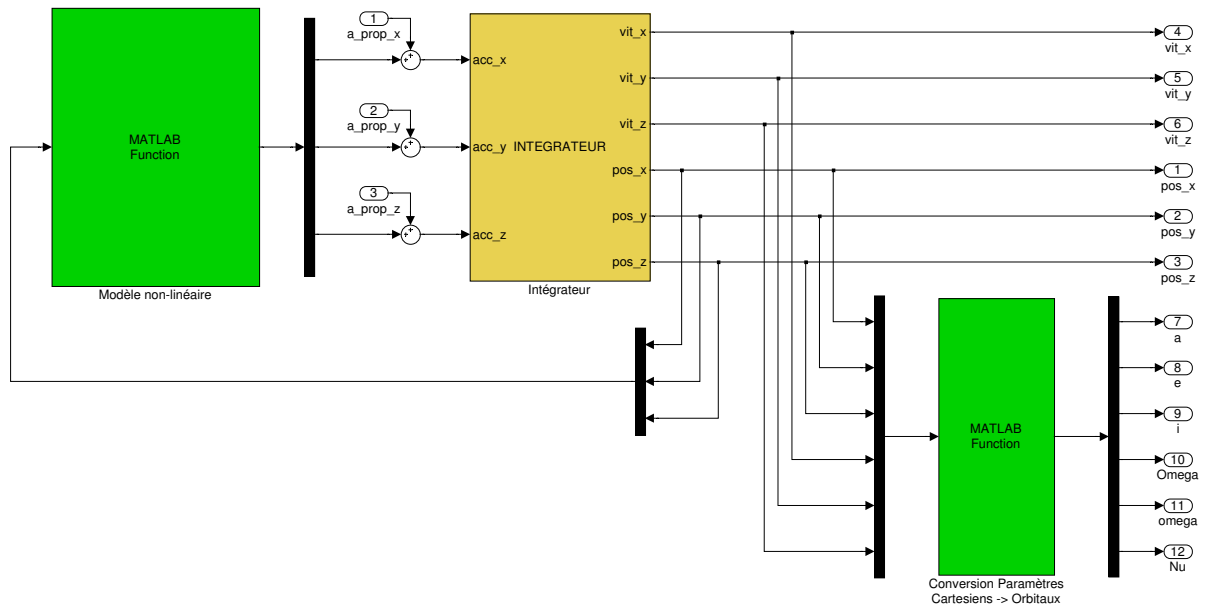


FIG. F.2 – Bloc satellite (détails)

La Figure F.3 présente le schéma SIMULINK[®] utilisé pour effectuer les simulations en boucle fermée sur le modèle non-linéaire.

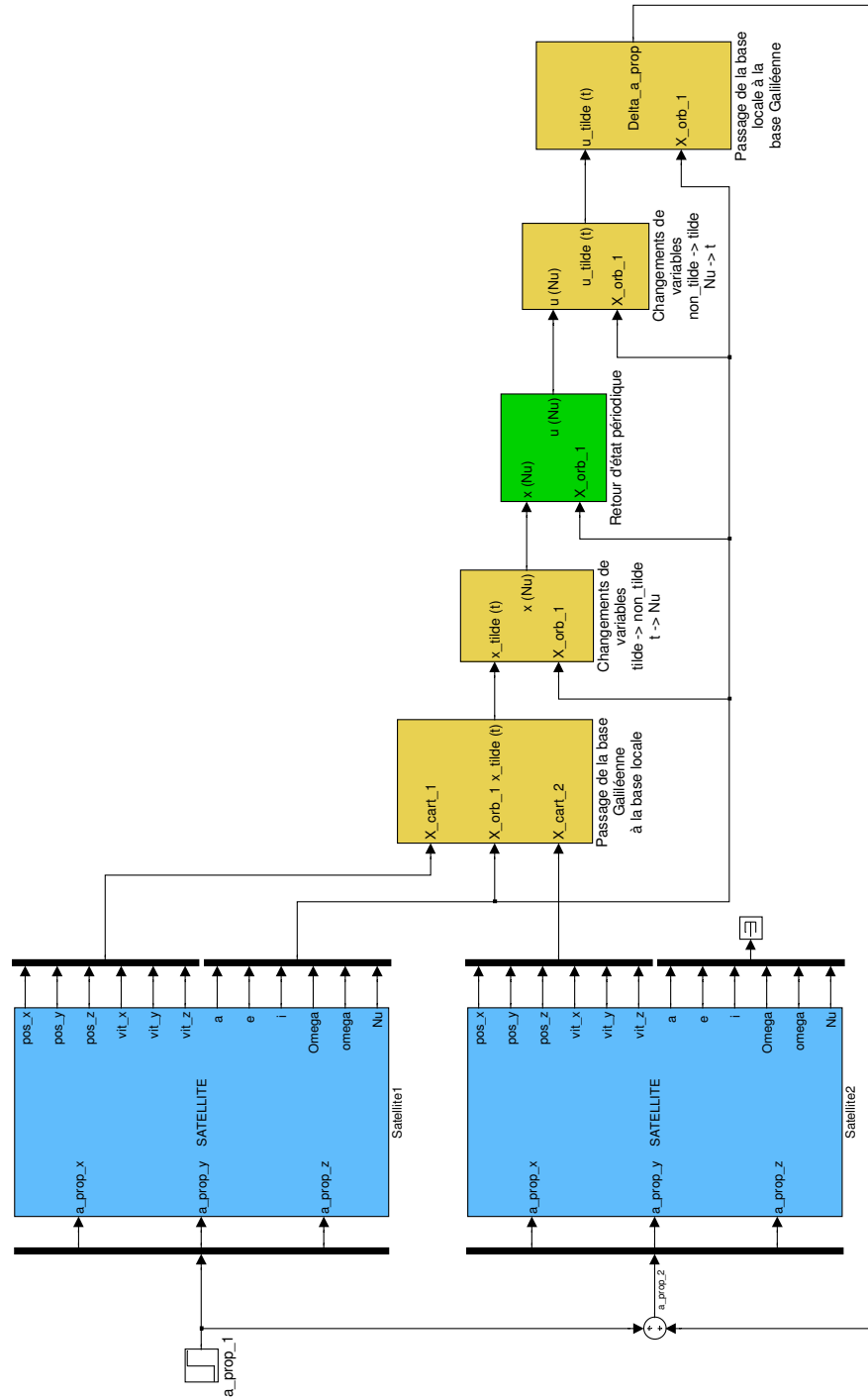


FIG. F.3 – Protocole de simulation en boucle fermée

F.2 Simulateur linéaire

Le modèle linéaire périodique (IV.35) a été programmé selon le schéma SIMULINK[®] de la Figure F.4.

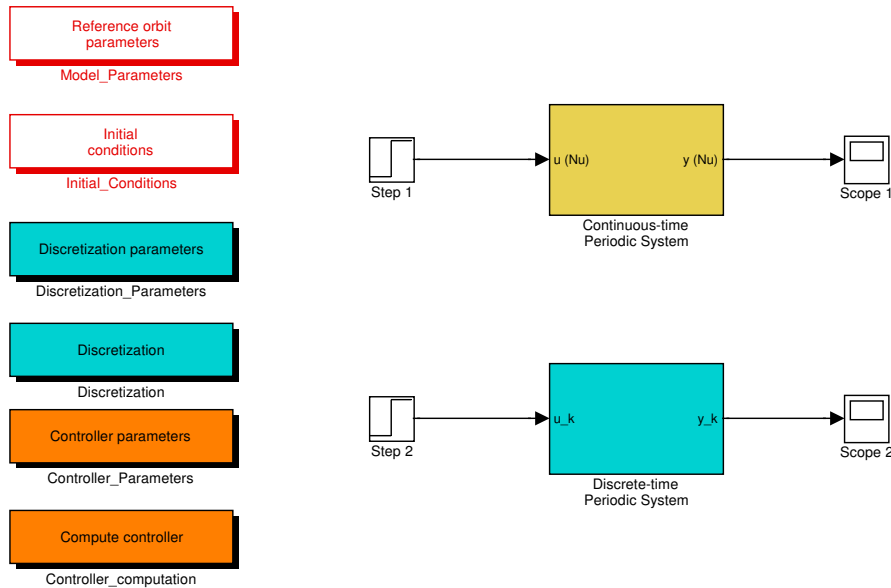


FIG. F.4 – Simulateur linéaire

La variable d'intégration est ici l'anomalie vraie ν et non le temps. L'architecture du bloc modélisant le système périodique à temps continu est présentée sur la Figure F.5.

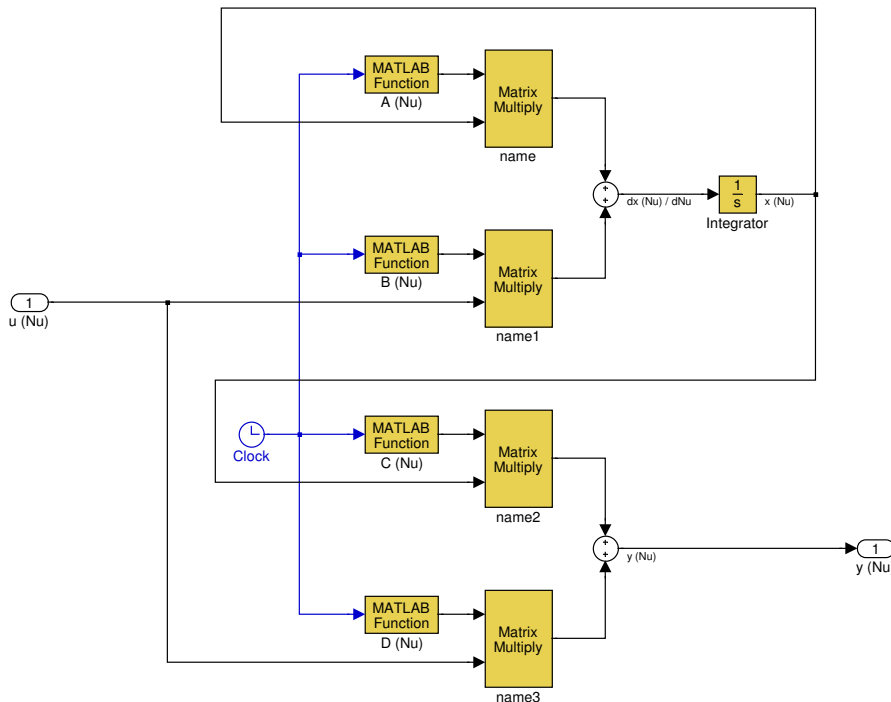


FIG. F.5 – Simulateur linéaire (détails du bloc “Continuous-time Periodic System”)

F.3 Passage des coordonnées absolues aux coordonnées relatives locales

Pour comparer les résultats produits par les modèles non-linéaires de chaque satellite et ceux produits par le modèle linéarisé, il est nécessaire d'effectuer une conversion des coordonnées cartésiennes absolues de chaque satellite (exprimées dans le repère inertiel \mathcal{R}_i) vers les coordonnées relatives locales (exprimées dans le repère \mathcal{R}_1). Nous présentons dans cette section les calculs permettant d'effectuer cette conversion.

D'abord les vecteurs des positions et vitesses relatives des satellites dans le repère inertiel sont obtenues par simple différence :

$$\begin{aligned}(\Delta \vec{r})^{(\mathcal{R}_i)} &= (\vec{r}_2)^{(\mathcal{R}_i)} - (\vec{r}_1)^{(\mathcal{R}_i)} \\ (\Delta \vec{v})_{\mathcal{R}_i}^{(\mathcal{R}_i)} &= (\vec{v}_2)_{\mathcal{R}_i}^{(\mathcal{R}_i)} - (\vec{v}_1)_{\mathcal{R}_i}^{(\mathcal{R}_i)}\end{aligned}$$

Ensuite, ces vecteurs sont projetés dans la base locale \mathcal{R}_1 à l'aide de la matrice de passage P_{1i} selon les équations suivantes :

$$\begin{aligned}(\Delta \vec{r})^{(\mathcal{R}_1)} &= P_{1i} (\Delta \vec{r})^{(\mathcal{R}_i)} \\ (\Delta \vec{v})_{\mathcal{R}_1}^{(\mathcal{R}_1)} &= P_{1i} (\Delta \vec{v})_{\mathcal{R}_i}^{(\mathcal{R}_i)}\end{aligned}$$

Le passage du repère inertiel au repère local faisant intervenir trois rotations successives d'angles Ω , i et $\omega + \nu$, la matrice de passage s'écrit :

$$\begin{aligned}P_{1i} &= \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\omega + \nu) & \sin(\omega + \nu) & 0 \\ -\sin(\omega + \nu) & \cos(\omega + \nu) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos(\omega + \nu) - \sin \Omega \cos i \sin(\omega + \nu) & \cos \Omega \sin(\omega + \nu) + \sin \Omega \cos i \cos(\omega + \nu) & \sin \Omega \sin i \\ -\sin \Omega \cos(\omega + \nu) - \cos \Omega \cos i \sin(\omega + \nu) & -\sin \Omega \sin(\omega + \nu) + \cos \Omega \cos i \cos(\omega + \nu) & \cos \Omega \sin i \\ \sin i \sin(\omega + \nu) & -\sin i \cos(\omega + \nu) & \cos i \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Enfin, la vitesse relative doit être exprimée par rapport au repère local, soit :

$$(\Delta \vec{v})_{\mathcal{R}_1}^{(\mathcal{R}_1)} = (\Delta \vec{v})_{\mathcal{R}_1}^{(\mathcal{R}_1)} + (\Delta \vec{r})^{(\mathcal{R}_1)} \wedge \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_i)$$

Si la variation des angles orbitaux est négligée devant la variation de l'anomalie vraie, le vecteur $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_i)$ est donné par l'expression suivante :

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_i) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ n \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}(\Delta \vec{r})^{(\mathcal{R}_1)} &= P_{1i} (\Delta \vec{r})^{(\mathcal{R}_i)} \\ (\Delta \vec{v})_{\mathcal{R}_1}^{(\mathcal{R}_1)} &= P_{1i} (\Delta \vec{v})_{\mathcal{R}_i}^{(\mathcal{R}_i)} + \left(P_{1i} (\Delta \vec{r})^{(\mathcal{R}_i)} \right) \wedge \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_i)\end{aligned}$$

Glossaire

Notations :

\mathcal{L}	Transformée de Laplace
\mathcal{Z}	Transformée en z
s	Variable de Laplace
z	Variable de la transformée en z
$\mathbb{1}, 0$	Matrice identité et matrice nulle de dimensions appropriées
$\ \Sigma\ _2, \ \Sigma\ _\infty$	Norme \mathcal{H}_2 et Norme \mathcal{H}_∞ du système Σ
Σ_d	Système dual du système primal Σ
$\Sigma_1 \star \Sigma_2$	Système bouclé résultant de l'interconnexion de Σ_1 et Σ_2
γ	Coût \mathcal{H}_2 obtenu en analyse
χ	Coût \mathcal{H}_2 obtenu en synthèse
\det, Trace	Déterminant et trace d'une matrice
$\langle A \rangle$	Partie symétrique d'une matrice carrée $A : \langle A \rangle = A + A'$

Abréviations :

$\mathcal{LMI}, \mathcal{BMI}$	Inégalité Matricielle Linéaire, Bilinéaire
LTI	Linéaire Invariant dans le Temps
LTV	Linéaire Variant dans le Temps

Vecteurs :

x	Etat du système
u, y	Entrées de commande et sorties de mesure
x_d, u_d, y_d, w_d, z_d	Etat, entrées et sorties du système dual
w, z	Entrées exogènes et sorties contrôlées
x_K	Etat du correcteur par retour de sortie dynamique

Dimensions :

m	Nombre d'entrées de commande $u \in \mathbb{R}^m$
p	Nombre de sorties de mesure $y \in \mathbb{R}^p$
m_w	Nombre d'entrées exogènes $w \in \mathbb{R}^{m_w}$
p_z	Nombre de sorties mesurées $z \in \mathbb{R}^{p_z}$
L	Nombre de sommets d'un modèle incertain polytopique

Matrices des systèmes certains et incertains :

A	Matrice dynamique d'un système
B	Matrice de commande d'un système
C	Matrice de mesure d'un système
D	Matrice de transmission directe d'un système
$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$	Matrice définissant la représentation d'état d'un système
$M(\Delta)$	Matrice définissant le modèle incertain d'un système
$M^{[i]}$	Matrice définissant le i^{eme} sommet d'un polytope
Δ	Opérateur incertain

Correcteurs :

K	Correcteur quelconque
$\begin{bmatrix} A^K & B^K \\ C^K & D^K \end{bmatrix}$	Matrices de la représentation d'état d'un correcteur par retour de sortie dynamique

Ensembles :

\mathbb{R} , \mathbb{C}	Ensembles des nombres réels et complexes
Δ	Ensemble de matrices incertaines réelles constantes
\mathbb{K}_{st}	Ensembles des correcteurs stabilisants
\mathbb{K}_{st}^{re}	Ensembles des correcteurs stabilisants par retour d'état

Notations de cinématique :

$\vec{a} \cdot \vec{b}$	Produit scalaire du vecteur \vec{a} et du vecteur \vec{b}
$\vec{a} \wedge \vec{b}$	Produit vectoriel du vecteur \vec{a} et du vecteur \vec{b}
$(\vec{r})^{(\mathcal{R})}$	Vecteur position exprimé dans le repère \mathcal{R}
$(\vec{v})_{\mathcal{R}_1}^{(\mathcal{R}_2)}$	Vecteur vitesse par rapport au repère \mathcal{R}_1 exprimé dans le repère \mathcal{R}_2

Index

- Complément de Schur, vii
- Correcteur
 - (N_1, N_2, \mathbb{T}) -périodique structuré, 68, 84, 104
 - N_K -périodique, 65
 - par retour d'état, 70, 90, 93
 - par retour de sortie dynamique, 69, 100
 - par retour de sortie statique, 70
 - résilient, 75, 77, 79, 90, 100
- Ellipsoïde de matrices, xi
- Inégalités Matricielles
 - Inégalité Matricielle, iv
 - Inégalité Matricielle Bilinéaire - \mathcal{BML} , iv
 - Inégalité Matricielle Linéaire - \mathcal{LML} , iv
- Incertitudes
 - bornées en norme, 28
 - polytopiques, 28
- Lemme d'élimination, viii
- Lemme de Finsler, viii
- Lemme de Lyapunov périodique, 39, 40
- Lemme de Projection, viii
- Matrice de réponse impulsionnelle
 - Cas continu, 17
 - Cas discret, 26
- Matrice de transfert harmonique
 - Cas continu, 17
 - Cas discret, 26
- Matrice monodromique, 36
- Multiplieurs caractéristiques, 36
- Norme des systèmes
 - Norme \mathcal{H}_2 - domaine fréquentiel, 47
 - Norme \mathcal{H}_2 - domaine temporel, 46
 - Norme \mathcal{H}_∞ - domaine fréquentiel, 44
 - Norme \mathcal{H}_∞ - domaine temporel, 44
- Paramètres orbitaux, xiii
- Perturbations orbitales
 - effet gravitationnel du J_2 , 111, 115
 - frottement atmosphérique, 111, 116
- Repère
 - inertiel \mathcal{R}_i , xviii, 110
 - lié au plan d'orbite \mathcal{R} , xviii, 113
 - local \mathcal{R}_1 , 110, 114
- Représentation d'état
 - Cas continu, 18
 - Cas discret, 21
- Représentations LTI équivalentes
 - Représentation cyclique, 24
 - Représentation liftée, 23
 - Transformation de Floquet, 25
- S-Procédure, ix
- Stabilité
 - asymptotique, 34
 - asymptotique globale, 34
 - au sens de Lyapunov, 33
 - simple, 34

Méthodes d'Analyse et de Synthèse Robustes pour les Systèmes Linéaires Périodiques

Cette thèse porte sur la commande robuste des systèmes linéaires périodiques qui constituent une classe particulière de systèmes variant dans le temps. Des dynamiques périodiques apparaissent dans de nombreux domaines des sciences de l'ingénieur tels que l'aéronautique, l'espace ou les systèmes de télécommunication.

Des méthodes systématiques pour l'analyse et la synthèse robuste de ces systèmes sont proposées. Le cadre de travail choisi est celui de la théorie de Lyapunov et fait appel principalement à des outils numériques de type inégalités matricielles linéaires (LMI). La robustesse est envisagée de manière duale par la prise en compte d'incertitudes pouvant non seulement affecter le système à commander mais également le correcteur lui-même. Ce dernier problème est traité par la synthèse d'ensembles convexes de correcteurs assurant un certain niveau de performances garanties vis-à-vis du système bouclé. La question de la structure temporelle du correcteur est également posée. Le correcteur doit-il nécessairement être de même périodicité que le système ? Est-il possible de réduire le nombre de paramètres à mémoriser ? Pour répondre à ces différentes questions, nous avons défini la classe des correcteurs périodiques structurés dans le temps et développé des méthodes de synthèse adaptées.

Les résultats théoriques sont illustrés sur le problème du maintien à poste autonome d'un satellite en orbite basse consistant à maintenir un satellite sur une orbite de référence excentrique malgré les différentes forces perturbatrices pouvant l'en écarter (frottement atmosphérique, effet de la distribution non-sphérique de la masse de la Terre). Différentes lois de commande minimisant certains critères de performances tels que la quantité de carburant consommée ou l'influence d'accélération perturbatrices sont calculées. Leur qualité est ensuite évaluée à l'aide de simulations non-linéaires.

Mots-clés : Automatique, systèmes périodiques, commande, robustesse, théorie de Lyapunov, LMI, BMI, commande de satellites.

Robust analysis and synthesis of linear periodic systems

This thesis addresses robustness problems for a linear periodic systems. These correspond to a special case of linear time-varying systems with periodic dynamics. Such periodic processes arise in numerous domains such as aeronautics, celestial mechanics or communication systems.

Systematic procedures for robust analysis and synthesis are proposed. The adopted framework is based on the Lyapunov theory and uses the linear matrix inequalities (LMI) formalism. Uncertainties are supposed to affect not only the system but the controller itself. This last problem is treated by the synthesis of convex sets of controllers ensuring a given level of performances for the closed-loop system. The question of the time structure of the controller is formulated. Does the controller need to be of the same periodicity as the system ? Is it possible to reduce the number of parameters to be stored inside the controller ? The class of time-structured controller is defined and dedicated synthesis methods are developed.

Theoretical results are illustrated on the problem of the stationkeeping for a spacecraft on a low earth orbit subject to different disturbance accelerations (atmospheric drag, effect of the non spheric mass repartition of the Earth). Different feedback control laws are computed with performance requirements such as minimizing the amount of maneuvering propellant or the effect of additional unknown disturbance accelerations. Their efficiency is evaluated by the mean of non linear simulations.

Keywords : Automatic control, periodic systems, robustness, Lyapunov theory, LMI, BMI, spacecraft control.