



HAL
open science

Modélisation du comportement vibratoire des structures par des méthodes énergétiques: formulation moyennée spatialement pour des systèmes unidimensionnels

Cédric Devaux

► **To cite this version:**

Cédric Devaux. Modélisation du comportement vibratoire des structures par des méthodes énergétiques: formulation moyennée spatialement pour des systèmes unidimensionnels. Acoustique [physics.class-ph]. Université du Maine, 2006. Français. NNT: . tel-00132382

HAL Id: tel-00132382

<https://theses.hal.science/tel-00132382>

Submitted on 21 Feb 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Académie de Nantes

ÉCOLE DOCTORALE DE L'UNIVERSITÉ DU MAINE

Le Mans, FRANCE

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : ACOUSTIQUE

Présentée par

Cédric DEVAUX

pour obtenir le titre de Docteur d'Université

**MODÉLISATION DU COMPORTEMENT VIBRATOIRE
DES STRUCTURES PAR DES MÉTHODES ÉNERGÉTIQUES :
FORMULATION MOYENNÉE SPATIALEMENT
POUR DES SYSTÈMES UNIDIMENSIONNELS**

soutenue le 30 novembre 2006

devant le jury composé de

L. JEZEQUEL	Professeur (LTDS) Ecole Centrale de Lyon	Rapporteur
G. PAVIC	Professeur (LVA) INSA de Lyon	Rapporteur
J.-M. GENEVAUX	Professeur (LAUM) Université du Maine	Président de jury
L. GAVRIC	Docteur, Ingénieur PSA Peugeot Citroën	Examineur
N. JOLY	Maître de Conférences (LAUM) Université du Maine	Directeur de thèse
J.-C. PASCAL	Professeur (LAUM) Université du Maine	Directeur de thèse

Remerciements

Ce travail de thèse a été effectué au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, UMR CNRS 6613, situé au Mans et dirigé par M. Yves Aurégan, Chargé de Recherche CNRS, que je remercie de m'avoir accueilli au Laboratoire.

Une grande partie du travail a été réalisée au sein de l'Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs du Mans, dirigée par M. Yves Guillotin, à qui je suis reconnaissant des moyens mis à ma disposition pour mener à bien ce projet.

L'encadrement de ce travail a été assuré par M. Nicolas Joly, Maître de Conférences à l'Université du Maine, et M. Jean-Claude Pascal, Professeur à l'Université du Maine, que je tiens à remercier pour leurs précieux conseils et leur soutien permanent.

Je suis très reconnaissant à M. Louis Jézéquel, Professeur à l'Ecole Centrale de Lyon, et M. Goran Pavić, Professeur à l'INSA de Lyon, d'avoir consacré le temps nécessaire à l'établissement d'un rapport sur ce travail, ainsi qu'à M. Léon Gavrić, Docteur, Ingénieur chez PSA Peugeot Citroën, et M. Jean-Michel Gènevaux, Professeur à l'Université du Maine, d'avoir accepté de participer au jury.

Je ne peux évidemment pas oublier de citer l'ensemble du personnel du LAUM, et en particulier les doctorants participant à l'Opération de Recherche VibroAcoustique des structures, pour l'accueil chaleureux et les nombreuses discussions que nous avons pu avoir, qu'il s'agisse de travaux de recherche, d'enseignements, d'informatique... ou de sport.

Enfin je voudrais remercier ma famille pour son soutien inconditionnel.

Table des matières

Remerciements	i
Table des matières	iii
Notations	vii
Table des figures	ix
Liste des tableaux	xi
Introduction	1
1 Acoustique et vibrations en moyennes et hautes fréquences : état de l’art	3
1.1 Approches déterministes	3
1.1.1 Type de problème à résoudre	3
1.1.2 Limites des méthodes basées sur la notion d’éléments	4
1.1.3 Approche par synthèse modale	5
1.1.4 Amélioration de méthodes déterministes	6
1.2 Approches statistiques	7
1.2.1 Méthode SEA (Statistical Energy Analysis)	7
1.2.2 Amélioration de la SEA	11
1.2.3 Méthode VCA (Vibrational Conductivity Approach) : équation de base	12
1.2.4 Méthodes GEM (General Energy Method) et SEM (Simplified Energy Model)	14
1.2.5 Limites de la méthode VCA	14
1.2.6 Autres méthodes locales	15
1.2.7 Utilisation de données expérimentales	16
1.3 Synthèse et introduction de la modélisation dynamique par variables quadratiques	16
2 Caractéristiques des variables quadratiques	19
2.1 Introduction	19
2.2 Superposition quadratique pour des cas généraux	19
2.3 Superposition quadratique pour des ondes planes interférant	23
2.4 Echelles spatiales des variables énergétiques en ondes planes	25
2.5 Types d’ondes considérés	28
2.6 Conclusion	28
3 Cas des ondes planes unidimensionnelles	29
3.1 Introduction	29
3.2 Echelles de variation des grandeurs énergétiques	29
3.2.1 A petite échelle : structure locale des interférences	29
3.2.2 A grande échelle : transferts énergétiques globaux et dissipation	30
3.3 Exemple unidimensionnel illustrant la présence des deux types d’échelles	31

3.3.1	Configuration et formulation en déplacement	31
3.3.2	Formulation quadratique exacte	32
4	Transferts énergétiques dans les plaques : analyse de différents types d'ondes	39
4.1	Introduction	39
4.2	Equations locales et modèle de plaque	39
4.2.1	Equations locales	39
4.2.2	Modèle de plaque	40
4.3	Ondes régies par une équation d'ordre 2	42
4.3.1	Modèle exact pour les ondes SH dans les plaques	42
4.3.2	Modèle approché pour les ondes QL dans les plaques	45
4.3.3	Discussion sur les équations et cas unidimensionnel	48
4.4	Ondes de flexion régies par une équation d'ordre 4	51
4.4.1	Modèle de Kirchhoff pour les plaques en flexion	51
4.4.2	Expressions quadratiques pour les quantités énergétiques	53
4.4.3	Formulation quadratique pour les ondes de flexion unidimensionnelles	54
4.5	Application : solution quadratique pour les ondes de flexion unidimensionnelles	58
4.5.1	Formulation en déplacement	58
4.5.2	Formulation quadratique	59
4.5.3	Résultats numériques	60
4.6	Conclusion	63
5	Formulation quadratique moyenne	65
5.1	Introduction	65
5.2	Variables quadratiques moyennées spatialement en ondes planes	65
5.2.1	Cas bidimensionnel : interférences de deux ondes planes	65
5.2.2	Cas unidimensionnel : équation différentielle pour l'intensité de structure moyennée $\langle I \rangle$	66
5.2.3	Obtention des densités d'énergie moyennées spatialement à partir de $\langle I \rangle$	67
5.3	Conditions limites énergétiques en ondes planes longitudinales unidimensionnelles	68
5.3.1	Cas des jonctions actives	68
5.3.2	Jonctions passives : cas des conditions d'impédance	71
5.3.3	Jonctions passives : cas d'un changement de milieu de propagation	73
5.3.4	Jonctions passives : cas des jonctions à réaction localisée	75
5.4	Exemples de résultats	76
5.4.1	Un premier exemple portant sur des jonctions actives et passives	76
5.4.2	Un second exemple portant sur une discontinuité de masse volumique	81
5.5	Extension de la formulation moyennée spatialement : perspectives et difficultés	82
5.5.1	Extension à d'autres types d'ondes dans le cas unidimensionnel	82
5.5.2	Extension à des systèmes bidimensionnels	82
5.6	Conclusion	82
	Conclusion générale	83

Annexes	85
A Impédance ramenée de $x = L$ à $x = x_0$	85
B Formules	87
C Solution analytique de maximisation des transferts énergétiques entre deux sources pour des ondes longitudinales 1D	89
Bibliographie	93

Principales notations utilisées

Notations mathématiques

\cdot	dérivée par rapport au temps
$*$	quantité conjuguée
\otimes	produit tensoriel
$\overline{\otimes}$	produit tensoriel contracté
$\overline{\overline{\otimes}}$	produit tensoriel doublement contracté
\times	produit vectoriel
\cdot	produit scalaire
$-$	moyenne spatiale sur l'épaisseur de la plaque (chapitre 4)
$\langle \rangle$	moyenne spatiale selon la direction de propagation (chapitre 5)
$u_{i,j}$	composante ij du gradient du vecteur \mathbf{u}
$g_{,x}$	dérivée de la fonction g par rapport à la variable x

Caractères latins

k	nombre d'onde
E	module d'Young
f_x	force extérieure (par unité de volume)
H_0	fonction de Heaviside
\mathbf{I}	intensité de structure (moyennée temporellement)
s_i ($i = 0 \dots 2$)	sauts liés aux discontinuités des densités d'énergies ou de leurs dérivées spatiales
T	densité d'énergie cinétique (moyennée temporellement)
U	densité d'énergie potentielle (moyennée temporellement)
\mathbf{u}	vecteur déplacement
x, y, z	coordonnées dans un repère cartésien
z_i ($i = 1, 2$)	impédances spécifiques

Caractères grecs

δ_0	fonction de Dirac
ϵ	tenseur des déformations
η	coefficient d'amortissement structural
λ, μ	coefficients de Lamé
ν	coefficient de Poisson
ρ	masse volumique
σ	tenseur des contraintes

ϕ	potentiel du vecteur déplacement
ω	pulsation
Δ	opérateur laplacien

Table des figures

1.1	Exemple de structure divisée en trois sous-systèmes SEA	10
1.2	Quantités d'informations en entrée et en sortie pour les méthodes FEM-BEM et SEA, en fonction de la fréquence f	11
2.1	Intensité totale I développée par deux monopôles A et B	20
2.2	Intensité I_{AA} du monopôle A	21
2.3	Intensité I_{BB} du monopôle B	21
2.4	Intensité "d'interférences" $I_{AB} + I_{BA}$	22
2.5	Diagrammes de directivité en champ lointain	22
2.6	Champ d'ondes planes : a) interférence d'ondes propagatives, b) cellule de pseudo-periodicité du potentiel du déplacement	24
2.7	Densité d'énergie cinétique.	26
2.8	Module de la densité d'énergie de déformation.	26
2.9	Intensité de structure et lignes de flux.	27
2.10	Rotationnel de l'intensité de structure et lignes de flux.	27
3.1	Ondes unidimensionnelles contre-propagatives en espace libre : a) partie réelle du déplacement ; b) densité d'énergie cinétique.	30
3.2	Représentation des nombres d'ondes du déplacement et des variables quadratiques dans le plan complexe, pour deux ondes unidimensionnelles contre-propagatives.	30
3.3	Exemple unidimensionnel : système étudié.	31
3.4	Champ de déplacement : a) partie réelle ; b) partie imaginaire.	35
3.5	Densités d'énergie cinétique et parties réelles des densités d'énergie de déformation obtenues à partir de la formulation en déplacement et de la formulation quadratique exacte.	36
3.6	Parties réelles et imaginaires des intensités de structure obtenues à partir de la formulation en déplacement et de la formulation quadratique exacte.	36
4.1	Ondes de flexion unidimensionnelles dans une plaque : géométrie de la plaque	41
4.2	Représentation, dans le plan complexe, des nombres d'ondes du déplacement et des variables quadratiques pour des ondes de flexion unidimensionnelles dans une plaque	56
4.3	Plaque semi-infinie considérée pour des ondes de flexion unidimensionnelles	58
4.4	Partie réelle et partie imaginaire du déplacement.	61
4.5	Densités d'énergie cinétique et parties réelles des densités d'énergie de déformation obtenues à partir de la formulation en déplacement et de la formulation quadratique exacte.	61

4.6	Densités d'énergie cinétique et parties réelles des densités d'énergie de déformation obtenues à partir de la formulation en déplacement et de la formulation quadratique exacte : détail.	62
4.7	Parties réelles et parties imaginaires des intensités de structure obtenues à partir de la formulation en déplacement et de la formulation quadratique exacte.	62
4.8	Parties réelles et parties imaginaires des intensités de structure obtenues à partir de la formulation en déplacement et de la formulation quadratique exacte : détail.	63
5.1	Changement de milieu de propagation : configuration du système étudié.	73
5.2	Jonction à réaction localisée.	75
5.3	Système étudié dans la partie 5.4.1.	76
5.4	Intensité de structure active moyennée spatialement pour une densité de force concentrée unitaire	78
5.5	Impédance d'entrée : module et argument	78
5.6	Parties réelles des intensités de structure	79
5.7	Densités d'énergie à 3750 Hz	80
5.8	Discontinuité de masse volumique : configuration du système étudié.	81
5.9	Parties réelles des intensités de structure pour une discontinuité de masse volumique	81
5.10	Maximisation des transferts énergétiques entre deux sources : système étudié.	89

Liste des tableaux

- 2.1 Variables énergétiques 24
- 3.1 Expressions des conditions de réflexion totale. 34
- 3.2 Propriétés du milieu de propagation 35
- 4.1 Variables énergétiques complexes 40
- 5.1 Cas particuliers de conditions mixtes pour des impédances spécifiques réelles. 72
- 5.2 Définitions des impédances et des impédances spécifiques pour la jonction active en $x = a$. 74
- 5.3 Définitions des impédances et des impédances spécifiques pour la jonction active en $x = b$. 75
- 5.4 Définitions des impédances et des impédances spécifiques pour la jonction passive en $x = d$ 75
- 5.5 Définitions des impédances et des impédances spécifiques pour une jonction à réaction localisée. 76
- 5.6 Propriétés des milieux de propagation 77

Introduction

Au delà de la pression réglementaire visant à limiter les niveaux sonores dans l'environnement du travail et de l'habitation, l'attitude des consommateurs oblige les industriels à tenir compte de la qualité acoustique de leurs produits. D'ailleurs il en va dans certains cas (discrétion des sous-marins par exemple) du bon fonctionnement du produit. La réduction des nuisances sonores est donc actuellement un enjeu à la fois économique et social. Les solutions pour la mettre en oeuvre peuvent être classées en trois catégories :

- action sur les sources, avant que le son ne se propage, par exemple par amortissement des vibrations ou encore par amélioration de la géométrie ;
- mise en place d'un système de contrôle actif afin de diminuer l'amplitude du son ou des vibrations une fois propagés, cette technique étant réservée aux basses fréquences ;
- utilisation de matériaux isolants (parois en matériaux composites) et absorbants (matériaux poreux).

La mise en place de telles solutions, et plus particulièrement de la première d'entre elles, nécessite de disposer d'outils de modélisation permettant de prédire les changements de niveau vibratoire d'un système en fonction de ses caractéristiques mécaniques ou de sa géométrie. Depuis plusieurs dizaines d'années, de nombreuses recherches ont été menées dans ce sens.

Le travail présenté dans ce document contribue à ces recherches.

La prédiction du comportement vibratoire d'une structure complexe sur toute la gamme de fréquence audible n'étant malheureusement pas réalisable par un seul et même type de méthode, il convient de distinguer les méthodes adaptées aux basses fréquences de celles adaptées aux hautes fréquences. Les méthodes basses fréquences reposent sur la résolution de l'équation des ondes à l'aide d'une méthode de type Eléments Finis (FEM pour Finite Element Method) ou Eléments de Frontière (BEM pour Boundary Element Method) dans lesquelles le problème est discrétisé. Par exemple la mise en oeuvre d'une méthode FEM nécessite d'effectuer un maillage de la structure étudiée. Si les méthodes FEM et BEM sont utilisées avec succès en basses fréquences, lorsque la fréquence augmente, la longueur d'onde devient tellement petite qu'elle requiert l'utilisation d'un maillage très fin d'une part, et qu'elle rend le système très sensible aux différentes imperfections, notamment géométriques, d'autre part. La méthode SEA (pour Statistical Energy Analysis), qui appartient à la catégorie des approches statistiques, a donc été développée pour fournir une réponse vibroacoustique de systèmes complexes en hautes fréquences. Cette réponse est quadratique et moyennée tant fréquentiellement que spatialement, autrement dit les résultats fournis par la méthode SEA sont des niveaux d'énergie vibratoire décrivant uniquement le comportement d'une population de modes des différents sous-systèmes. De plus la SEA repose sur un modèle de diffusion de l'énergie qui n'est adéquat que si la densité modale, autrement dit la fréquence, est suffisamment élevée.

Les objectifs de ce travail sont donc les suivants :

- analyser, pour différents types d’ondes, les caractéristiques des grandeurs énergétiques issues de la solution de l’équation d’onde classique, sans faire d’hypothèse réductrice a priori ;
- développer une formulation moyenne en temps et en espace permettant de traduire les transferts d’énergie dans les structures pour un domaine de moyennes fréquences dans lequel résoudre l’équation des ondes par une approche de type FEM n’est plus possible.

Ce document s’articule en cinq parties.

Dans le premier chapitre, une revue non exhaustive des approches utilisées pour modéliser les phénomènes vibratoires en moyennes et hautes fréquences est présentée. En particulier ce chapitre souligne qu’une voie envisageable pour modéliser les phénomènes vibratoires lorsque la fréquence augmente consiste à considérer des variables quadratiques telles que des grandeurs énergétiques.

Le chapitre 2 est consacré à la présentation des grandeurs énergétiques en tant que variables quadratiques, lesquelles seront utilisées pour développer une formulation adaptée aux moyennes fréquences. Le concept de superposition pour ces variables quadratiques est présenté, et leurs échelles de variation spatiale sont analysées dans le cas particulier d’ondes planes.

Le chapitre 3 se focalise sur les ondes planes unidimensionnelles. Une analyse portant sur les nombres d’ondes des grandeurs énergétiques est présentée, ainsi qu’une application numérique portant sur une formulation quadratique exacte. Ce chapitre se termine par l’évocation de la possibilité d’effectuer des moyennes spatiales pour obtenir une formulation adaptée à une augmentation de la fréquence.

Dans le chapitre 4, différents types d’ondes de plaque sont considérés. Le cas particulier d’ondes de flexion unidimensionnelles est détaillé à la fin de ce chapitre : une analyse portant sur les nombres d’ondes est présentée, de manière similaire à celle effectuée au chapitre 3.

Enfin dans le dernier chapitre, une formulation moyenne pour des ondes planes unidimensionnelles est développée. La redéfinition des conditions limites pour les grandeurs énergétiques moyennées spatialement est détaillée. Des exemples d’application d’une telle formulation sont donnés.

Chapitre 1

Acoustique et vibrations en moyennes et hautes fréquences : état de l'art

Un des challenges actuels en ingénierie consiste à dimensionner des structures à niveaux de vibrations réduits, et ce notamment afin de satisfaire des critères de plus en plus exigeants en terme de bruit rayonné. Pour une structure donnée, le domaine des hautes fréquences est défini par le fait que la longueur d'onde des vibrations considérées est beaucoup plus petite qu'une longueur caractéristique, ce qui se traduit par une densité modale élevée. Les vibrations des structures dans le domaine des hautes fréquences prennent d'autant plus d'importance qu'elles peuvent avoir un fort potentiel de génération de fatigue et d'endommagement (c'est le cas dans les industries automobile et aéronautique par exemple). Afin de résoudre les problèmes posés par les vibrations de hautes fréquences, il est impératif de disposer de méthodes efficaces permettant de prévoir le comportement vibratoire des structures en hautes fréquences et par là-même de s'affranchir de tests expérimentaux coûteux en temps et en argent.

Les difficultés posées par les vibrations de hautes fréquences peuvent être imputées à la complexité d'une part, et aux incertitudes d'autre part, qu'elles impliquent. La complexité provient du fait qu'une augmentation de la fréquence s'accompagne d'une augmentation de la densité modale, si bien qu'à une fréquence donnée, la réponse vibratoire d'une structure contient la contribution d'un grand nombre de ses modes, lesquels sont par ailleurs mal identifiés dans la pratique. Les incertitudes sur ces modes proviennent de la sensibilité, accrue en hautes fréquences, des paramètres physiques de la structure mais également de la prise en compte des conditions limites. Afin de s'affranchir de ces difficultés, de nombreuses méthodes ont été développées. Elles peuvent être classées en deux grandes catégories : les méthodes reposant sur une approche déterministe et celles reposant sur une approche statistique. Le but de ce chapitre est donc de passer en revue ces différentes méthodes afin de donner le contexte bibliographique de ce travail de thèse.

1.1 Approches déterministes

1.1.1 Type de problème à résoudre

Les méthodes reposant sur une approche déterministe permettent de trouver la solution, dans les domaines spatial et temporel, d'un problème défini par une équation aux dérivées partielles et les conditions limites associées. Par exemple il peut s'agir, pour des ondes acoustiques, de trouver la solution de l'équation d'onde, connue en régime harmonique sous le nom d'équation de Helmholtz

inhomogène. La pression acoustique p , fonction des coordonnées spatiales \mathbf{r} et du temps t , s'écrit alors

$$p(\mathbf{r}, t) = \underline{p}(\mathbf{r})e^{j\omega t} \quad (1.1)$$

et \underline{p} vérifie

$$(\Delta + k^2) \underline{p}(\mathbf{r}) = s, \quad (1.2)$$

où k est le nombre d'onde et s représente les sources extérieures, par exemple $s = -j\omega\rho_0q(\mathbf{r})$ pour une source ponctuelle pulsante créant un débit de masse $q(\mathbf{r})$ à la pulsation ω dans un milieu de propagation de masse volumique ρ_0 .

Les conditions limites associées, portant sur p et/ou sa dérivée normale $\partial_{\mathbf{n}}p$ peuvent alors être de trois types :

- $p = \mathbf{d}$ sur $\partial\Omega_D$ (condition de Dirichlet) ;
- $\partial_{\mathbf{n}}p = \mathbf{g}$ sur $\partial\Omega_N$ (condition de Neumann) ;
- $\alpha \partial_{\mathbf{n}}p + \beta p = \gamma$ sur $\partial\Omega_R$ (condition de Robin).

Dans le cas des vibrations de structures complexes, les solutions numériques des équations aux dérivées partielles sont obtenues à partir de méthodes approchées pouvant être classées en deux catégories. La première catégorie concerne les méthodes basées sur la notion d'éléments correspondant à une discrétisation de la structure entière dans le cas des Eléments Finis (FEM de l'anglais Finite Element Method) ou de sa frontière dans le cas des Eléments de Frontière (BEM de l'anglais Boundary Element Method). La deuxième catégorie concerne les méthodes basées sur une approche modale (NMA de l'anglais Normal Modes Analysis).

1.1.2 Limites des méthodes basées sur la notion d'éléments

La réponse vibratoire d'une structure à une fréquence donnée peut être estimée à l'aide d'une méthode de type FEM par exemple. Il s'agit alors d'utiliser un nombre fini de fonctions de forme, définies sur les éléments constituant la discrétisation du domaine, pour résoudre la forme variationnelle du problème. Les fonctions de forme permettent une reconstruction de la solution sur tout le domaine par interpolation entre les noeuds du maillage. Le problème à résoudre devient un système linéaire de type

$$(\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M} + j\omega \mathbb{C}) \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\}, \quad (1.3)$$

où j est le nombre complexe tel que $j^2 = -1$, \mathbb{K} est la matrice de raideur, \mathbb{M} la matrice de masse, \mathbb{C} la matrice d'amortissement, $\{\mathbf{F}\}$ le vecteur des forces extérieures, le vecteur déplacement inconnu $\{\mathbf{u}\}$ contenant les valeurs nodales de la solution approchée.

Les méthodes de type FEM permettent d'obtenir une solution précise en basses fréquences. En revanche ces méthodes, tout comme les méthodes de type BEM, se révèlent impossibles à mettre en oeuvre en hautes fréquences [1, 2]. Ceci est dû à deux raisons principalement :

- une impossibilité technique d'une part. Les méthodes de type éléments finis requièrent une discrétisation en petits éléments des milieux continus ou de leurs surfaces frontières. Les variables sont alors approximées à l'aide de fonctions de formes et le nombre d'éléments à utiliser doit être suffisant pour limiter l'erreur due à cette approximation. A une fréquence donnée, la taille des éléments utilisés doit être très inférieure à la longueur d'onde afin de minimiser l'erreur [3, 4]. De plus ce nombre d'éléments augmente avec la complexité de la structure étudiée. Dans le cas de structures complexes, le nombre de modes mis en jeu peut atteindre des millions, par exemple 400 000 modes structuraux et 8 millions de modes acoustiques intérieurs dans la bande de fréquence 0 – 10 kHz pour un fuselage typique (de 2 mètres de diamètre) d'un avion commercial [5], ce qui rend le calcul informatique prohibitif. La

solution à ce problème réside dans l'amélioration de la vitesse de calcul et de la capacité de stockage des ordinateurs.

- Des incertitudes inévitables d'autre part. La réponse en fréquence en chaque point d'une structure complexe comportant de nombreux modes est d'autant plus sensible aux petites perturbations (de géométrie, de matériau ou de conditions limites) que la longueur d'onde diminue, autrement dit que la fréquence augmente. Cette sensibilité induit la possibilité de différences très importantes entre les résultats obtenus par les méthodes FEM et le comportement réel de la structure [6, 7, 8, 9]. Un modèle déterministe basé sur des valeurs nominales de propriétés du système étudié ne peut donc pas être représentatif du comportement en moyennes et hautes fréquences de ce système.

1.1.3 Approche par synthèse modale

Le comportement dynamique d'un système discret ayant de multiples degrés de liberté peut être décrit par l'équation matricielle suivante :

$$\mathbb{M}\{\ddot{u}\} + \mathbb{C}\{\dot{u}\} + \mathbb{K}\{u\} = \{F(t)\}, \quad (1.4)$$

les vecteurs $\{u(t)\} = \{u_1(t), \dots, u_{n_m}(t)\}^T$ et $\{F(t)\} = \{F_1(t), \dots, F_n(t)\}^T$, tous deux de dimension n , représentant respectivement le déplacement en un point donné et les forces extérieures.

Le déplacement physique $\{u(t)\}$ et le déplacement associé dans l'espace modal $\{q(t)\}$ sont liés par

$$\{u(t)\} = \Phi\{q(t)\}, \quad (1.5)$$

où Φ est une matrice de dimension $n \times m$ dont les coefficients ϕ_{ik} sont appelés coefficients modaux. Par prémultiplication matricielle, l'équation (1.4) se réécrit

$$\tilde{\mathbb{M}}\{\ddot{q}\} + \tilde{\mathbb{C}}\{\dot{q}\} + \tilde{\mathbb{K}}\{q\} = \Phi^T\{F(t)\}q, \quad (1.6)$$

où $\{q(t)\} = \{q_1(t), \dots, q_{n_q}(t)\}^T$ est le vecteur déplacement dans la base modale et $\tilde{\mathbb{M}}$, $\tilde{\mathbb{K}}$, et $\tilde{\mathbb{C}}$ dans le cas d'un modèle d'amortissement proportionnel, sont les matrices diagonales, respectivement de masse, de raideur et d'amortissement, avec $\tilde{\mathbb{M}} = \Phi^T\mathbb{M}\Phi$, $\tilde{\mathbb{K}} = \Phi^T\mathbb{K}\Phi$ et $\tilde{\mathbb{C}} = \Phi^T\mathbb{C}\Phi$.

L'équation (1.5) peut alors s'écrire, pour $i = 1 \dots n_m$:

$$u_i(t) = \sum_{q=1}^{n_q} \phi_{iq} q_q(t). \quad (1.7)$$

Le système d'équations découplées (1.6) est constitué de n_q équations linéaires et les composantes $\hat{q}_q(\omega)$, $q = 1 \dots n_q$ du vecteur $\{\hat{q}(\omega)\}$ sont les transformées de Fourier des composantes $q_q(t)$, $q = 1 \dots n_q$ du vecteur $\{q(t)\}$, données par :

$$\hat{q}_q(\omega) = \sum_{m=1}^{n_m} \frac{\phi_{mq} \hat{F}_m(\omega)}{(\omega_q^2 - \omega^2) + 2j\omega\omega_q\zeta_q}, \quad (1.8)$$

avec $\omega_q = \sqrt{k_q/m_q}$ et $\zeta_q = c_q/(2\sqrt{k_q m_q})$, m_q , c_q et k_q désignant les termes diagonaux respectifs de $\tilde{\mathbb{M}}$, $\tilde{\mathbb{C}}$ et $\tilde{\mathbb{K}}$.

Utiliser (1.8) dans la transformée de Fourier de (1.5) permet d'écrire la fonction de réponse en fréquence (FRF) $\hat{u}_i(\omega)$ pour $i = 1 \dots n_m$:

$$\hat{u}_i(\omega) = \sum_{m=1}^{n_m} \sum_{q=1}^{n_q} \frac{\phi_{iq} \phi_{mq} \hat{F}_m(\omega)}{(\omega_q^2 - \omega^2) + 2j\omega\omega_q\zeta_q}. \quad (1.9)$$

En supposant le problème aux valeurs propres complètement résolu, la matrice modale Φ contient autant de vecteurs propres qu'il y a de degrés de liberté dans la formulation du problème mais dans la pratique un procédé de troncature modale est appliqué : les modes conservés englobent une bande de fréquence plus large que celle sur laquelle la solution est recherchée, tandis que les modes d'ordre supérieur sont pris en compte uniquement comme une rigidité additionnelle. L'influence de ces modes d'ordre élevés doit d'ailleurs être prise en compte pour l'obtention de grandeurs énergétiques telles que l'intensité de structure [10]. Bien qu'elle fournisse des résultats fonctions à la fois de la fréquence et de l'espace, l'approche par synthèse modale requiert donc une détermination précise des fréquences propres de la structure étudiée ainsi que des déformées associées, ce qui n'est possible que si le maillage est suffisamment fin. Or cette détermination, effectuée expérimentalement ou numériquement (par une méthode de type FEM), s'avère d'autant plus imprécise que l'ordre des modes augmente. L'approche par synthèse modale est donc une méthode destinée aux basses fréquences.

1.1.4 Amélioration de méthodes déterministes

Les méthodes basées sur la notion d'éléments étant en pratique restreintes au domaine des basses fréquences, elles doivent être améliorées pour progresser vers le domaine des hautes fréquences. Les solutions envisagées pour cette amélioration sont notamment présentées dans [11]. Ces solutions peuvent être résumées comme suit :

- rechercher des solveurs numériques efficaces en terme de coût de calcul ;
- optimiser la densité du maillage pour obtenir une répartition uniforme de l'erreur ;
- décomposer le système étudié par Eléments Finis en plusieurs sous-systèmes afin de mettre en place un calcul parallèle ;
- développer des méthodes n'utilisant pas de maillage afin de s'affranchir du coût de la génération de celui-ci. Parmi les méthodes relevant de ce dernier point se trouvent la Méthode des Eléments Spectraux [12] qui combine méthode FEM et analyse spectrale. Son principal avantage sur les méthodes FEM tient au fait que la matrice de raideur est calculée dans le domaine fréquentiel, ce qui évite de devoir raffiner le maillage lorsque la longueur d'onde diminue. La Méthode des Eléments Spectraux est pour l'instant applicable à des structures présentant une géométrie et des conditions limites simples [13, 14, 15]. Ainsi elle permet d'obtenir par exemple des FRF de barres couplées et des plaques raidies [16].
- Utiliser une approche basée sur des développements en série de la solution, ces expansions vérifiant les équations du problème. C'est le cas de la méthode WBM (pour Wave Based Method) [17] qui est basée sur l'approche indirecte de Trefftz [18]. La méthode WBM ne requiert pas de discrétisation fine du domaine et a donc pu être appliquée avec succès en basses et moyennes fréquences [19, 20], et parfois en hautes fréquences [21].

Cependant, comme il l'est indiqué dans [11], si les solutions énumérées précédemment sont capables de diminuer le coût de calcul, elles ne sont pour le moment pas applicables à des géométries complexes.

L'une des premières méthodes constituant une amélioration des méthodes déterministes est celle développée par Skudrzyk, appelée *Mean-Value Method* [22], qui fournit une réponse moyenne, autrement dit une ligne médiane entre résonnances et anti-résonnances. L'idée sous-jacente est de décrire la réponse dynamique de systèmes complexes en utilisant seulement quelques paramètres significatifs, entre autres la masse, la densité modale et la localisation de l'excitation. Il existe également d'autres approches déterministes, comme par exemple la Méthode Modale Moyennée [23, 24] (AMM pour Averaged Modal Method) qui consiste à sélectionner un nombre réduit de modes d'une structure pour

représenter le comportement dynamique de l'ensemble des modes. Un autre exemple est l'Analyse Modale Asymptotique [25, 26] (AMA pour Asymptotic Modal Analysis) pour laquelle la méthode SEA (pour Statistical Energy Analysis) présentée par la suite peut être vue comme l'approximation au premier ordre. La principale conclusion de [25] est que lorsque le nombre de modes (en l'occurrence d'une plaque) est suffisamment grand, l'AMA donne un résultat précis : il y a alors concordance entre l'AMA et la SEA sous la même hypothèse de densité modale suffisamment élevée dans la bande de fréquence considérée.

1.2 Approches statistiques

Afin de s'affranchir des limites inhérentes aux méthodes déterministes, de nombreuses recherches se sont portées sur le développement de techniques de prédiction alternatives basées sur un point de vue statistique. Ces méthodes statistiques traitent de variables quadratiques telles que l'énergie ou l'intensité acoustique ou vibratoire (autrement dit le vecteur densité de flux d'énergie), ces variables étant soumises à des hypothèses statistiques [27]. En fonction des différentes échelles de description de la dynamique des structures, les méthodes statistiques peuvent faire l'objet d'un premier classement en deux catégories :

- les méthodes SEA (pour Statistical Energy Analysis) [28, 29] et WIA (pour Wave Intensity Analysis) [30] décomposent le système en sous-systèmes et prédisent des niveaux énergétiques à l'échelle macroscopique, autrement dit des niveaux moyens pour chaque sous-système,
- les méthodes VCA (pour Vibrational Conductivity Approach) prédisent des niveaux énergétiques moyens à l'échelle mésoscopique, c'est-à-dire en conservant une description spatiale pour chaque sous-système.

Les paragraphes qui suivent concernent une présentation de ces différentes méthodes.

1.2.1 Méthode SEA (Statistical Energy Analysis)

La méthode SEA [28, 29] est une méthode reconnue et appliquée dans l'industrie pour la modélisation en hautes fréquences des problèmes vibratoires, acoustiques ou de couplage fluide-structure. Apparue dans les années 1960, la SEA a trouvé son origine dans la mise en commun de recherches menées indépendamment par Lyon et Smith. La SEA repose sur beaucoup de concepts fondamentaux ayant trait à la mécanique statistique, l'acoustique des salles, la propagation des ondes et l'analyse modale. Bien que des raffinements aient été apportés et que des méthodes complémentaires aient été développées, la théorie de la SEA a très peu changé depuis sa formulation initiale.

La SEA modélise un système vibroacoustique comme un ensemble de sous-systèmes, où un sous-système est défini comme un ensemble de modes ayant des propriétés énergétiques similaires, ce qui permet par conséquent de calculer des densités d'énergie moyennées à l'échelle de ces sous-systèmes. Contrairement aux méthodes déterministes, la SEA repose sur différents types de moyennes :

- la méthode SEA prédit des niveaux d'énergie moyennés spatialement à l'échelle des sous-systèmes ;
- les niveaux d'énergie prédits sont également moyennés temporellement ainsi que par bandes de fréquence. L'énergie vibratoire E_i du sous-système i est définie comme la somme des moyennes temporelles de ses énergies cinétique et potentielle, et le niveau prédit est une moyenne par bandes de fréquence ;
- les paramètres du modèle SEA sont liés à la notion de moyenne. Par exemple le facteur de perte par couplage lie la moyenne de l'énergie stockée dans un sous-système au flux d'énergie traversant

l'interface avec un autre sous-système. Le facteur de dissipation d'un sous-système est quant à lui la moyenne arithmétique des facteurs de pertes des modes de ce sous-système ayant une fréquence de résonance dans la bande de fréquence considérée.

Vue d'ensemble de la méthode SEA

Dans la méthode SEA, le système analysé est divisé en sous-systèmes, chaque sous-système représentant un groupe de modes aux caractéristiques similaires. La SEA cherche à calculer la réponse moyenne de chaque sous-système en considérant l'équilibre des puissances entre la puissance injectée, la puissance dissipée et la puissance échangée. L'hypothèse fondamentale de la SEA concerne la relation linéaire entre la puissance moyennée P_{ij} échangée entre les sous-systèmes i et j et les niveaux d'énergie, respectivement E_i et E_j , de chaque sous-système :

$$P_{ij} = \omega(\eta_{ij}E_i - \eta_{ji}E_j), \quad (1.10)$$

où η_{ij} et η_{ji} sont les facteurs de perte par couplage, généralement déterminés expérimentalement [31], en particulier par SEA inverse [32, 33]. Toutefois des méthodes de prédiction de ces facteurs de perte par couplage, basées sur des approches extérieures au modèle SEA, ont également été développées [34], certaines d'entre elles faisant d'ailleurs appel aux Eléments Finis [35, 36, 37, 38] ou aux Eléments Spectraux [39] précédemment évoqués.

A l'origine, l'hypothèse (1.10) a été appliquée au cas d'un système conservatif constitué de deux oscillateurs couplés [40]. Cette hypothèse n'est pas vraie en général, puisqu'a priori les puissances échangées par les sous-systèmes i et j dépendent aussi des énergies des autres sous-systèmes [41]. L'hypothèse (1.10) peut toutefois être étendue aux cas de systèmes comportant de nombreux sous-systèmes couplés en y ajoutant une hypothèse de couplage faible [42]. Le couplage est considéré comme faible si la fonction de Green de chaque sous-système pris indépendamment des autres n'est pas modifiée de manière significative une fois les sous-systèmes couplés. Les implications de l'hypothèse (1.10) pour un système général ont été discutées dans [43].

Les équations de base de la SEA peuvent être obtenues en écrivant le bilan des puissances pour chaque sous-système i :

$$P_i^{inj} = P_i^{diss} + \sum_{i \neq j}^n \omega(\eta_{ij}E_i - \eta_{ji}E_j), \quad (1.11)$$

où P_i^{inj} et P_i^{diss} sont respectivement la puissance injectée et la puissance dissipée dans le sous-système i . La puissance dissipée P_i^{diss} dans le sous-système i est modélisée par une relation de proportionnalité avec l'énergie E_i :

$$P_i^{diss} = \eta_i \omega E_i, \quad (1.12)$$

où η_i est le facteur de perte interne du sous-système i .

Comme le suggère la Figure (1.1) dans le cas d'une structure composée de trois sous-systèmes, une structure complexe est usuellement représentée par un réseau de sous-systèmes. Les équations de la SEA peuvent alors être mises sous forme matricielle :

$$\mathbb{L}\{\mathbf{E}\} = \{\mathbf{P}\}, \quad (1.13)$$

où $\{\mathbf{P}\}$ est le vecteur constitué des puissances injectées P_i^{inj} , $\{\mathbf{E}\}$ est le vecteur constitué des énergies E_i et \mathbb{L} est la matrice de couplage constituée de la pulsation ω , des facteurs de perte interne η_i et des

facteurs de perte par couplage η_{ij} . Dans le cas simple des trois sous-systèmes de la Figure (1.1), les équations correspondantes de la SEA s'écrivent

$$\omega \begin{bmatrix} \eta_1 + \sum_{i \neq 1}^3 \eta_{1i} & -\eta_{21} & -\eta_{31} \\ -\eta_{12} & \eta_2 + \sum_{i \neq 2}^3 \eta_{2i} & -\eta_{32} \\ -\eta_{13} & -\eta_{23} & \eta_3 + \sum_{i \neq 3}^3 \eta_{3i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1^{inj} \\ P_2^{inj} \\ P_3^{inj} \end{Bmatrix}. \quad (1.14)$$

De manière générale, les facteurs de perte par couplage utilisés dans la méthode SEA ne sont pas réciproques, autrement dit $\eta_{ij} \neq \eta_{ji}$. Cependant une relation de réciprocité peut être obtenue en supposant l'équirépartition de l'énergie entre les modes d'un sous-système ainsi que la décorrélation des réponses de ces différents modes. Si N_i est le nombre de modes du sous-système i dans la bande de pulsation centrée en ω et de largeur $\Delta\omega$, alors la densité modale n_i de ce sous-système est

$$n_i = \frac{N_i}{\Delta\omega}. \quad (1.15)$$

La relation de réciprocité de la SEA relie les facteurs de perte par couplage par le biais des densités modales :

$$n_i(\omega)\eta_{ij} = n_j(\omega)\eta_{ji}. \quad (1.16)$$

Cette relation permet d'écrire (1.14) sous une forme symétrique. Pour être appliquée avec succès, la méthode SEA requiert donc les conditions suivantes :

- la décorrélation des puissances injectées. Les forces extérieures doivent être statistiquement indépendantes afin de conserver la linéarité des équations de la SEA ;
- la modélisation de la puissance dissipée P_i^{diss} dans un sous-système i par la relation de proportionnalité (1.12) avec le niveau d'énergie E_i ;
- la condition de couplage conservatif et faible. Un couplage conservatif suppose qu'il n'y a aucune perte d'énergie aux connexions entre sous-systèmes. Un couplage faible signifie que chaque sous-système dissipe plus d'énergie qu'il n'en échange avec les autres sous-systèmes, ce qui se traduit pour les facteurs de perte par la condition $\eta_{ij} \ll \eta_i$. La définition du couplage faible est traitée dans [44, 45] ;
- la présence dans chaque sous-système d'un champ vibratoire (ou acoustique) réverbéré, ce qui suppose une réflexion importante des ondes aux interfaces entre sous-systèmes ;
- l'équirépartition de l'énergie entre les modes d'un sous-système. Cette hypothèse n'est pas vérifiée par les premiers modes résonnants d'une structure vibrante ou d'une cavité acoustique.

Limites de la méthode SEA

Actuellement la méthode SEA est largement appliquée aux problèmes vibratoires en hautes fréquences bien qu'elle ne fasse pas l'unanimité pour plusieurs raisons reconnues dans [46, 47]. En particulier l'hypothèse qu'entre sous-systèmes la puissance échangée est une fonction linéaire de la différence de densités d'énergie, comme en thermique le flux de chaleur est proportionnel à la différence

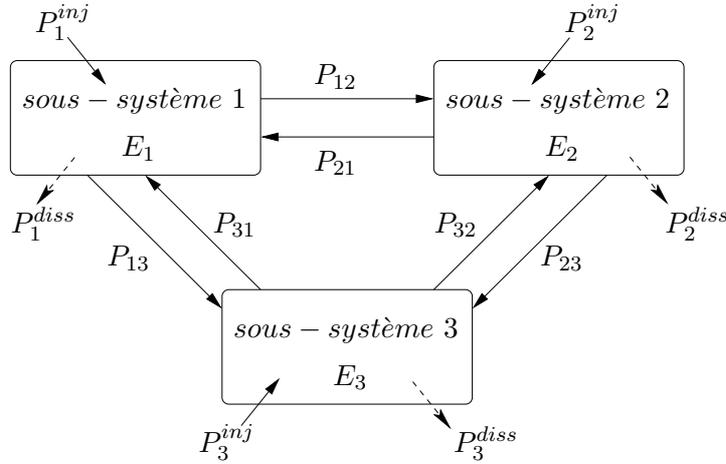


FIG. 1.1 – Un exemple de structure divisée en trois sous-systèmes couplés.

de température, est douteuse, avec pour conséquence une incertitude sur la bonne définition des sous-systèmes et des couplages correspondants. La méthode SEA doit donc être vue plutôt comme un bon indicateur de l'influence des paramètres d'un système sur sa réponse vibroacoustique que comme un outil très précis pour la prédiction de la distribution spatiale de l'énergie vibratoire. Les facteurs limitant les bonnes performances de la SEA peuvent être résumés comme suit [46, 48] :

- un nombre insuffisant de modes résonnants dans les bandes de basses fréquences ;
- la difficulté de bien différencier les éléments d'une structure afin de diviser celle-ci en sous-systèmes ;
- des sous-systèmes ayant une densité modale trop faible dans la bande de fréquence considérée ;
- un couplage fort entre sous-systèmes, comme par exemple dans le cas d'éléments raidis fortement connectés et présentant peu de pertes internes par amortissement ;
- la difficulté de déterminer les facteurs de perte par couplage.

La méthode SEA présente donc à la fois des avantages et des inconvénients. De prime abord, la SEA apparaît comme une méthode très simple d'analyse des phénomènes vibratoires en hautes fréquences. Contrairement aux Eléments Finis, les coûts en terme de calcul d'un modèle SEA sont très faibles et les résultats obtenus, autrement dit des réponses quadratiques moyennées en fréquence et en espace, paraissent appropriés aux cas de structures complexes présentant une densité modale suffisamment importante [48, 49]. Ainsi la SEA a pu être mise en oeuvre pour prédire des vibrations de lanceurs spatiaux notamment [50]. Cependant, le rapport du nombre de résultats en sortie (une densité d'énergie moyenne par sous-système) aux données en entrée (notamment les facteurs de perte interne η_i et les facteurs de perte par couplage η_{ij}) est faible en comparaison de celui des méthodes basées sur la notion d'éléments finis (Figure 1.2). En particulier les facteurs de perte par couplage η_{ij} peuvent, comme évoqué précédemment, être obtenus par une modélisation de type FEM local de la jonction [51], ce qui introduit la notion d'approche hybride développée plus loin. De plus, en raison de la diversité des concepts mis en jeu dans la formulation des équations de la SEA, celle-ci s'avère complexe à mettre en oeuvre et la qualité d'un modèle SEA dépend beaucoup de l'expérience de la personne qui le construit, même s'il existe des critères objectifs, notamment pour le point crucial que représente la décomposition de la structure en sous-structures [52, 53, 54]. La SEA apparaît donc comme une méthode semi-empirique, dont une revue plus détaillée se trouve dans [55].

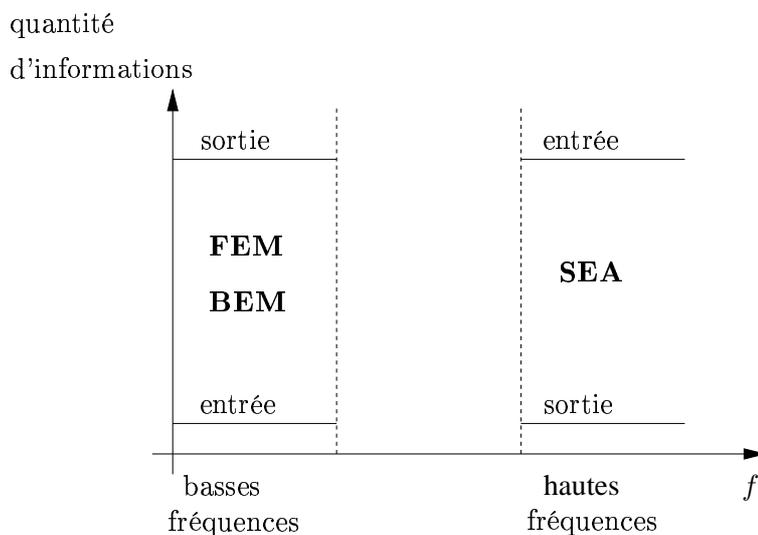


FIG. 1.2 – Quantités d'informations en entrée et en sortie pour les méthodes FEM-BEM et SEA, en fonction de la fréquence f .

1.2.2 Amélioration de la SEA

Méthode WIA (Wave Intensity Analysis)

La contribution de nombreux modes au champ vibratoire de sous-systèmes bidimensionnels ou tridimensionnels pour une bande de fréquence donnée implique l'existence de nombreuses trajectoires d'ondes. La méthode SEA repose sur un modèle modal couplé à un modèle statistique supposant l'équiprobabilité de ces trajectoires, ce qui n'est pas toujours approprié. Langley a proposé la méthode WIA (pour Wave Intensity Analysis) [30] pour l'analyse des vibrations en hautes fréquences dans laquelle un champ aléatoire homogène représente les vibrations de chaque sous-système. La dépendance directionnelle de l'intensité est représentée par une série de Fourier dont les coefficients sont calculés par la méthode de Galerkin. La limitation au premier terme de la série de l'intensité équivaut à l'hypothèse de champ diffus. Dans ce cas la méthode WIA se réduit à la méthode SEA. Cette idée que les résultats fournis par la SEA constituent une approximation au premier ordre de la puissance moyenne d'un système était déjà apparue [40] dans un calcul, à l'aide d'une méthode de perturbation, du transfert d'énergie entre deux oscillateurs faiblement couplés. Dans le cas du niveau d'énergie vibratoire en hautes fréquences pour un assemblage de panneaux, il a été montré dans [30] que la méthode WIA constitue une amélioration significative de la SEA pour un effort de calcul relativement peu important. Toutefois la méthode SEA conserve tout son intérêt dans le cas de structures très complexes où les nombreuses connexions entre sous-systèmes induisent une faible dépendance directionnelle des coefficients de transmission énergétiques et où par conséquent l'hypothèse d'équiprobabilité des trajectoires est réaliste.

Approches hybrides

Valables en hautes fréquences, les hypothèses sur lesquelles repose la méthode SEA ne le sont plus lorsque la fréquence d'excitation diminue : les prédictions de la SEA en moyennes fréquences ne sont pas précises. Une des raisons de ce problème est qu'en moyennes fréquences, le rapport de la longueur d'onde de déformation à la dimension du sous-système peut être petit pour certains d'entre eux

(comme le requiert la SEA) quand il est grand pour d'autres sous-systèmes. Le problème des moyennes fréquences a déjà fait l'objet de nombreuses recherches dans le but de combiner en un seul modèle des méthodes déterministes et des méthodes statistiques. Belyaev et Palmov [56] ont été parmi les premiers à inclure le comportement statistique d'un système dans un modèle déterministe global. Ce type d'approche a ensuite été développé à travers les travaux originaux de Soize [57] sur la théorie du flou structural. Langley et Bremner [58] ont développé une méthode hybride FEM-SEA basée sur ces idées combinées avec un processus de partitionnement des longueurs d'ondes. Mace et Shorter [59] ont proposé une approche basée sur des moyennes fréquentielles dans laquelle le système est décomposé en sous-systèmes globaux et locaux, les deux types étant traités par des méthodes FEM. Idéalement, une méthode hybride FEM-SEA allie les performances de la méthode FEM en basses fréquences et celles de la méthode SEA en hautes fréquences afin d'être appliquée de manière robuste sur toute la gamme de fréquences. Cependant le couplage des Eléments Finis et de la SEA en un seul modèle est difficile à réaliser car les deux méthodes diffèrent en deux points :

- les Eléments Finis sont basés sur les équations de la dynamique tandis que la SEA est basée sur la conservation de l'énergie,
- les Eléments Finis constituent une méthode déterministe tandis que la SEA est par définition une méthode statistique.

Plus récemment Shorter et Langley [60] ont développé une nouvelle méthode effectuant ce couplage. Cette méthode repose sur des concepts d'onde plutôt que sur une approche de type modale utilisée dans [58]. Au coeur de la méthode se trouve un résultat de réciprocité [61] concernant les forces exercées aux frontières d'un sous-système SEA. Enfin les Eléments Finis peuvent être utilisés pour calculer les FRF utilisés en SEA expérimentale. Il en résulte une méthode SEA à la fois numérique et expérimentale pouvant être vue comme une amélioration de la SEA analytique [62] ou comme une extension en fréquence des Eléments Finis [63].

Enfin il faut également signaler le développement d'approches visant à donner une formulation transitoire à la SEA (TSEA pour Transient Statistical Energy Analysis). En particulier l'application de la TSEA à un système constitué de deux oscillateurs est étudiée dans [64].

1.2.3 Méthode VCA (Vibrational Conductivity Approach) : équation de base

Il a été montré au cours des dernières années que les problèmes d'acoustique et de vibrations en hautes fréquences peuvent être modélisés à l'aide d'une équation aux dérivées partielles aisément soluble, en particulier par des méthodes de type FEM, et permettant d'obtenir, contrairement à la SEA, une information spatiale sur la réponse de chaque sous-système [65]. Cette équation aux dérivées partielles (équation différentielle dans le cas d'un système unidimensionnel) est à la base de la méthode VCA (pour Vibrational Conductivity Approach). Dans cette approche du problème, la moyenne temporelle de l'intensité acoustique ou de l'intensité de structure \mathbf{I} est supposée proportionnelle à la moyenne du gradient de la densité d'énergie totale W :

$$\mathbf{I} = -\frac{c_g^2}{\eta\omega} \mathbf{grad} W, \tag{1.17}$$

où c_g et ω désignent respectivement la vitesse de groupe et la pulsation des ondes considérées et η le facteur d'amortissement. Cette loi énergétique (1.17), de type gradient a été souvent proposée [66, 67, 68] et formellement démontrée dans le cas d'ondes planes [69] de la manière suivante : une onde plane d'amplitude $A(\mathbf{r}, t)$ fonction des coordonnées de l'espace et du temps s'écrit dans le cas général :

$$A(\mathbf{r}, t) = \hat{A} e^{-jk(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-ct)} \tag{1.18}$$

où \hat{A} désigne l'amplitude complexe, k le nombre d'onde et c la célérité de l'onde plane, \mathbf{n} désignant le vecteur normal au front d'onde. La relation (1.18) implique la proportionnalité entre le gradient de l'onde plane et le vecteur normal :

$$\mathbf{grad} A = \frac{\partial A}{\partial n} \mathbf{n}. \quad (1.19)$$

Les ondes propagatives étant supposées toutes de même nature, la relation entre les grandeurs énergétiques \mathbf{I} et W ne fait appel qu'à la vitesse de groupe c_g :

$$\mathbf{I} = c_g W \mathbf{n}. \quad (1.20)$$

En l'absence de source extérieure, la loi de conservation énergétique s'écrit :

$$\mathit{div} \mathbf{I} + \eta \omega W = 0. \quad (1.21)$$

L'introduction de (1.20) dans (1.21) donne

$$\mathit{div} (c_g W \mathbf{n}) + \eta \omega W = 0. \quad (1.22)$$

Or pour toute fonction scalaire S :

$$\mathit{div}(S \mathbf{n}) = S \mathit{div} \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{grad} S. \quad (1.23)$$

La combinaison de (1.22) et (1.23) donne

$$c_g W \mathit{div} \mathbf{n} + c_g \mathbf{n} \cdot \mathbf{grad} W + \eta \omega W = 0. \quad (1.24)$$

En tenant compte de (1.19), (1.24) se réécrit :

$$c_g \frac{\partial W}{\partial n} + \eta \omega W = 0, \quad (1.25)$$

ce qui finalement donne, en multipliant par le vecteur normal \mathbf{n} et en utilisant (1.20) :

$$c_g \mathbf{grad} W + \frac{\eta \omega}{c_g} \mathbf{I} = 0, \quad (1.26)$$

autrement dit la relation (1.17).

Les quantités énergétiques utilisées dans la méthode VCA reposant sur une analyse continue du problème sont donc les mêmes que celles utilisées dans la méthode SEA où l'analyse est discrète. La méthode VCA trouve en réalité ses fondements dans l'application à la mécanique de l'optique géométrique [70], également connue sous le nom de méthode WKB en référence à Wentzel, Kramers et Brillouin, théorie dans laquelle la densité d'énergie d'un champ ondulatoire oscillant à haute fréquence est la solution d'une équation de transport. Ce résultat est également obtenu dans le cadre de la théorie de la diffusion multiple, avec notamment des applications aux ondes électromagnétiques [71], aux milieux élastiques [72] et aux structures élastiques minces [73]. Dans la limite d'un parcours moyen en champ libre, l'équation de transport peut être approximée par une équation de diffusion : c'est le sens du résultat obtenu par Rybak pour des plaques hétérogènes en régime harmonique [74, 75]. Cette approche s'est ensuite développée avec les travaux de Belov et Tartakovski [76, 77] portant sur la propagation d'ondes longitudinales et de flexion, où une équation différentielle de type "équation de la chaleur" est obtenue, caractérisant la diffusion de l'énergie vibratoire dans des plaques. Buvailo et

Ionov [78] ont proposé une méthode FEM appliquée à un modèle énergétique de ce type afin d'obtenir des caractéristiques vibro-acoustiques des structures en hautes fréquences. Nefske et Sung [79] ont appliqué l'"analogie thermique" au cas des poutres en flexion et ont développé une méthode FEM (PFFEM pour Power Flow Finite Element Method) pour la résolution de l'équation énergétique. Wohlever, Bouthier et Bernhard ont fourni des développements au modèle énergétique dans le cas de barres et de poutres d'Euler-Bernoulli [80], de membranes [81] et de plaques [82, 83]. Le cas des vibrations de flexion des plaques orthotropiques est traité dans [84] à l'aide de la densité d'énergie en champ lointain, moyennée temporellement et spatialement.

1.2.4 Méthodes GEM (General Energy Method) et SEM (Simplified Energy Model)

Ichchou, Jezequel, Lase et Le Bot [85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95] ont développé la méthode GEM (pour General Energy Method) qui donne une description énergétique complète des barres et des poutres, en utilisant la puissance active ainsi que la densité d'énergie totale pour représenter le comportement purement propagatif et la puissance réactive ainsi que la densité lagrangienne pour représenter l'aspect modal. Une formulation énergétique locale a également été établie dans le cas de systèmes unidimensionnels faisant intervenir un couplage fluide-structure tels que des guides d'ondes [96]. Le modèle énergétique simplifié SEM (pour Simplified Energy Model) [97, 98] est une simplification de la méthode GEM où les interférences entre ondes propagatives sont négligées. Cette hypothèse, proposée dans le cadre de l'analyse de systèmes en treillis [99, 100], permet d'appliquer le principe de superposition aux variables énergétiques. De plus le modèle énergétique simplifié SEM ne requiert pas de moyennes spatiales et peut ainsi être vu comme une "approche VCA modifiée" [101]. Les équations de la méthode SEM sont également la forme asymptotique d'une formulation stochastique à deux paramètres aléatoires gaussiens [102] si la fréquence et la déviation standard des paramètres sont suffisamment élevées.

Toutes ces méthodes peuvent être regroupées sous la dénomination VCA car les équations de base y sont analogues à l'équation de la chaleur en régime harmonique. Les hypothèses de la VCA permettant d'écrire ces équations peuvent se résumer ainsi :

- système linéaire, élastique, dissipatif et isotrope ;
- amortissement faible ;
- régime permanent ;
- loin des singularités, les ondes évanescentes sont négligées.

L'équilibre des puissances s'écrit

$$\operatorname{div} \mathbf{I} + \eta \omega W = P_{inj}, \tag{1.27}$$

où P_{inj} est la densité de puissance injectée. L'équation de base de la VCA s'obtient en substituant l'équation (1.17) dans l'équation (1.27) :

$$\Delta W - \frac{\eta^2 \omega^2}{c_g^2} W = P_{inj}. \tag{1.28}$$

1.2.5 Limites de la méthode VCA

L'équation (1.28) a été appliquée avec succès à des systèmes unidimensionnels tels que des conduits [103], des barres et des poutres [79, 80, 92, 104]. La généralisation à des systèmes multidimensionnels a été effectuée dans le cas d'ondes planes [82] ou dans le cas d'un champ diffus [105, 106]. Cette

généralisation a été mise en défaut [107, 108, 109, 110], notamment dans le cas semi-infini [111, 112] et dans celui d'une structure bi-dimensionnelle soumise à une excitation ponctuelle [106, 113] : la décroissance de la densité d'énergie en champ lointain prédite par l'approche VCA est en $1/\sqrt{r}$ alors que celle de la densité d'énergie calculée à partir de l'équation d'Helmholtz est en $1/r$. Le Bot, Ichchou et Jezequel [98] ont suggéré une explication de ce paradoxe utilisant la symétrie propre aux systèmes infinis et mettant en lumière une limitation de l'"analogie thermique". Carcaterra et Adamo [114] ont montré que pour des ondes se propageant dans la même direction, le mécanisme énergétique associé tend asymptotiquement vers celui de l'"analogie thermique", ce qui n'est plus le cas pour des ondes interférentes. La méthode VCA reste toutefois appropriée à une prédiction robuste du niveau d'énergie vibratoire des systèmes réverbérants dans lesquels les nombreuses réflexions rendent négligeable la corrélation entre les différentes ondes [115]. La difficulté consiste alors à écrire les conditions limites dans le cas de structures couplées, car la méthode VCA suppose le champ diffus au voisinage de la frontière et de ce fait ne permet pas de prendre en compte la directivité des ondes à cet endroit. En effet si l'écriture de l'équilibre des puissances à la frontière entre structures couplées peut aboutir à l'écriture des conditions limites comme c'est le cas à l'interface entre poutres notamment [116, 117, 118], les résultats obtenus dans le cas de vibrations de plaques [119] montrent un bon accord entre la solution fournie par la méthode VCA et celle fournie par la méthode modale, excepté aux voisinages des frontières et des points d'excitation.

Enfin, comme pour la méthode SEA, il doit être mentionné que des approches récentes, basées sur des équations de transport, ont pour objectif de donner une description temporelle aux modèles énergétiques [120].

1.2.6 Autres méthodes locales

Afin de fournir la réponse vibroacoustique de systèmes complexes tout en contournant les limites théoriques de la méthode VCA, Carcaterra et Sestieri ont développé la méthode CEDA (pour Complex Envelope Displacement Analysis) [121, 122, 123] qui, au lieu du déplacement u , considère sa transformée \hat{u} par un opérateur "enveloppe" :

$$\hat{u} = u + j\tilde{u}, \quad (1.29)$$

où \tilde{u} désigne la transformée de Hilbert de u . Il a été montré dans [123], à la fois pour des ondes longitudinales et des ondes de flexion unidimensionnelles, que l'élimination de la contribution du champ proche, en suivant une procédure décrite dans [124], conduit à l'obtention d'une équation du second ordre. Finalement la méthode CEDA présente l'avantage d'un coût de calcul réduit par rapport aux méthodes FEM. Elle présente également des avantages par rapport à la méthode SEA : possibilité de retrouver le déplacement u par transformation inverse, formulation moins difficile des conditions limites, des conditions de couplage et des termes sources. Toutefois l'extension de la méthode CEDA à des systèmes multidimensionnels n'est pas immédiate [125]. Les difficultés rencontrées pour étendre la méthode VCA aux systèmes multidimensionnels ont engendré des recherches sur la modélisation de structures bidimensionnelles soumises à une force ponctuelle. Ces recherches ont permis le développement d'autres méthodes énergétiques locales, comme la *formulation énergétique en acoustique des salles* [126, 127, 128], la *méthode de tracés de rayons* [129, 130] et le *modèle vibroacoustique pour les hautes fréquences* [131]. L'idée principale de ces méthodes est la différenciation entre champ direct et champ réverbéré. Ceci suppose de représenter le champ direct par des ondes cylindriques (ou sphériques dans un cas tridimensionnel) et le champ réverbéré par des ondes planes issues des réflexions du champ direct par les frontières éventuellement complexes et irrégulières.

La *méthode de transfert radiatif* est une méthode intégrale de frontière basée sur les mêmes hypothèses que la méthode de tracés de rayons. Elle se présente comme une alternative à la SEA dans le cas des vibrations [132, 133] et à la méthode de tracés de rayons dans le cas de l'acoustique [130, 134, 135]. L'approche utilisée pour obtenir les sources acoustiques rappelle celle utilisée dans d'autres méthodes telles que la méthode FAQP (pour Frequency Averaged Quadratic Pressure) [136, 137], la méthode SBEM (pour Simplified Boundary Element Method) [138], ou la méthode EBEA (pour Energy Boundary Element Analysis) [139].

La méthode VTCR (pour Variational Theory of Complex Rays) [140, 141], dont les aspects fondamentaux sont présentés dans [142], est une méthode de rayons pour les vibrations en moyennes fréquences. Elle repose sur une formulation variationnelle dans laquelle toutes les directions d'onde sont prises en compte et sur des approximations à deux échelles de variation spatiale. Seule l'échelle de variation lente des amplitudes liées aux grandeurs mécaniques est discrétisée, l'échelle de variation rapide étant prise en compte analytiquement. Dans le cas des barres et des poutres, la méthode VTCR fournit la solution exacte. Cette méthode a également été appliquée à des assemblages de plaques et de coques à fréquence donnée [143, 144] et a été développée pour donner des résultats par bandes de fréquences [145, 146].

1.2.7 Utilisation de données expérimentales

En parallèle au développement de modèles prédictifs, des recherches ont été menées pour mesurer les flux d'énergie vibratoire. Plusieurs techniques expérimentales ont été développées, certaines utilisant une formulation de type différences finies [147, 148, 149] ou une technique de séparation d'ondes [150, 151, 152], d'autres reposant sur une méthode d'acquisition du champ comme dans l'holographie acoustique [153, 154], l'interférométrie optique [155] ou la vibrométrie laser [156, 157]. Les deux principaux objectifs de ces approches expérimentales sont d'une part la localisation des sources d'énergie vibratoire ainsi que la détermination des directions privilégiées de transfert de cette énergie, et d'autre part la recherche de conditions pouvant conduire à la simplification des formulations utilisées en pratique. Une méthode efficace pour estimer des caractéristiques énergétiques telles que les densités d'énergie cinétique et de déformation le long d'une structure élastique linéaire soumise à des vibrations forcées consiste à utiliser des grandeurs mesurées telles que l'impédance ou la mobilité d'entrée au point d'excitation [158, 159, 160]. Cette méthode ne requiert pas de modèle vibratoire de la structure et repose sur une approximation de Padé pour la représentation de l'impédance d'entrée. Pour des structures simples telles que des barres, des poutres ou des plaques, cette méthode s'avère efficace non seulement en basses mais également en moyennes fréquences, pour peu que l'amortissement ne soit pas trop important. Dans la pratique, l'identification des sources et des puits est rendue difficile par les interférences qui créent des phénomènes de recirculation d'énergie vibratoire. Toutefois des grandeurs telles que la divergence de l'intensité acoustique ou la puissance injectée peuvent être calculées en utilisant des données expérimentales obtenues par holographie acoustique [154], interférométrie optique [155] ou vibrométrie laser [161, 162].

1.3 Synthèse et introduction de la modélisation dynamique par variables quadratiques

Cette revue non exhaustive des méthodes de modélisation développées pour les phénomènes vibratoires en moyennes et hautes fréquences donne un aperçu de l'étendue de la littérature existante. De manière très schématique, la modélisation des phénomènes en moyennes fréquences peut s'effectuer

1.3 Synthèse et introduction de la modélisation dynamique par variables quadratiques¹⁷

soit en introduisant une part déterministe dans les modèles statistiques basés sur des quantités quadratiques (type SEA), soit en ajoutant un aspect statistique dans les méthodes déterministes basées sur la résolution de l'équation des ondes.

L'approche choisie dans ce travail fait partie de cette deuxième catégorie, puisque la formulation en déplacement du problème considéré est toujours prise comme point de départ pour former les variables quadratiques (chapitre 2).

Il s'agit alors de rechercher des relations linéaires entre ces variables afin d'obtenir des formulations quadratiques exactes, dont les solutions pour des systèmes unidimensionnels se superposent aux grandeurs formées à partir de la formulation en déplacement, qu'il s'agisse d'ondes planes dans un milieu isotrope (chapitre 3) ou de différents types d'ondes dans les plaques (chapitre 4).

L'aspect statistique provient alors des moyennes spatiales effectuées suite à l'analyse des différentes composantes des variables quadratiques, ce qui nécessite une analyse précise des conditions limites que doivent vérifier les grandeurs énergétiques moyennées (chapitre 5).

Chapitre 2

Caractéristiques des variables quadratiques

2.1 Introduction

Comme indiqué au chapitre 1, en particulier dans la partie 1.2 concernant les approches statistiques, une voie envisageable pour modéliser les phénomènes vibratoires lorsque la fréquence augmente consiste à considérer des variables quadratiques telles que des grandeurs énergétiques. Le but de ce chapitre est donc de présenter les variables quadratiques qui seront utilisées pour développer une formulation adaptée aux moyennes fréquences. Dans un premier temps le concept de superposition pour ces variables quadratiques est présenté, d'abord dans des cas généraux, puis dans des cas d'ondes planes. Dans un second temps les échelles de variation spatiale des différentes composantes de ces variables sont analysées dans le cas particulier d'ondes planes. Enfin la dernière partie de ce chapitre présente succinctement les différents types d'ondes qui seront abordés dans les chapitres suivants.

2.2 Superposition quadratique pour des cas généraux

Afin d'illustrer le concept de superposition quadratique, un champ de déplacement \mathbf{u} ayant deux composantes \mathbf{u}_A et \mathbf{u}_B est considéré ici : $\mathbf{u} = \mathbf{u}_A + \mathbf{u}_B$. Les composantes \mathbf{u}_A et \mathbf{u}_B sont par exemple les contributions de deux sources A et B ou les composantes, respectivement longitudinales et de cisaillement, du vecteur déplacement \mathbf{u} dans un milieu 3D. Le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ s'écrit alors $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_A + \boldsymbol{\sigma}_B$, le tenseur des déformations s'écrit $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_A + \boldsymbol{\epsilon}_B$ tandis que le vecteur vitesse \mathbf{v} s'écrit $\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_B$. A partir des deux composantes A et B de chacun des champs \mathbf{u} , $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\epsilon}$ et \mathbf{v} , toute variable quadratique, telle que les densités d'énergie ou l'intensité de structure définies dans le tableau 2.1, peut s'écrire comme la somme de quatre termes. Par exemple l'intensité de structure \mathbf{I} peut être développée sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= -(\boldsymbol{\sigma}_A + \boldsymbol{\sigma}_B) \overline{\otimes} (\mathbf{v}_A + \mathbf{v}_B)/2 \\ &= -\boldsymbol{\sigma}_A \overline{\otimes} \mathbf{v}_A/2 - \boldsymbol{\sigma}_B \overline{\otimes} \mathbf{v}_B/2 - \boldsymbol{\sigma}_A \overline{\otimes} \mathbf{v}_B/2 - \boldsymbol{\sigma}_B \overline{\otimes} \mathbf{v}_A/2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

où $\overline{\otimes}$ désigne le produit tensoriel contracté¹.

Si les variables *linéaires* que sont le déplacement, le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations sont la somme de n composantes différentes, toute variable quadratique peut être

¹Soit \mathbf{P} un tenseur d'ordre $p \geq 1$ et \mathbf{Q} un tenseur d'ordre $q \geq 2$. On appelle *produit tensoriel contracté* des tenseurs \mathbf{P} et \mathbf{Q} le tenseur d'ordre $p + q - 2$ dont les composantes sont obtenues par sommation, selon la convention d'Einstein, du dernier indice de \mathbf{P} avec le premier indice de \mathbf{Q} .

présentée sous la forme de n^2 termes différents. Cette superposition quadratique permet de classer ces termes en deux catégories :

- les composantes construites comme le produit de deux variables linéaires de même indice, par exemple $A - A$ ou $B - B$. C'est le cas des deux premiers termes $\mathbf{I}_{AA} + \mathbf{I}_{BB} = (-\sigma_A \overline{\mathbf{v}}_A / 2 - \sigma_B \overline{\mathbf{v}}_B / 2)$ de l'expression développée (2.1),
- les composantes construites comme le produit de deux variables d'indices différents. C'est le cas des deux derniers termes $\mathbf{I}_{AB} + \mathbf{I}_{BA} = -\sigma_A \overline{\mathbf{v}}_B / 2 - \sigma_B \overline{\mathbf{v}}_A / 2$ de l'expression développée (2.1).

Si les composantes \mathbf{u}_A et \mathbf{u}_B sont les résultats d'excitations par deux sources différentes, respectivement A et B , les intensités \mathbf{I}_{AA} et \mathbf{I}_{BB} sont les densités de puissance développées par chacune des deux sources, tandis que les échanges de puissance entre les deux sources sont représentés par les intensités \mathbf{I}_{AB} et \mathbf{I}_{BA} .

Ceci est illustré ci-après pour deux monopôles A et B dans un espace 3D où les composantes de l'intensité acoustique calculée sont des moyennes temporelles des composantes de l'intensité acoustique instantanée (2.1) : l'intensité totale (Figure 2.1) peut être présentée comme la superposition des intensités développées par les sources A (Figure 2.2) et B (Figure 2.3), et de l'intensité $\mathbf{I}_{AB} + \mathbf{I}_{BA}$ (Figure 2.4) traduisant les interférences entre les deux sources. Pour ce système, en raison de la distance entre les deux monopôles A et B ainsi que des valeurs de modules et de phases de leurs débits respectifs Q_A et Q_B , le monopôle A est une source tandis que le monopôle B est un puits. Ceci explique que toutes les lignes de flux de l'intensité totale (Figure 2.1) sortent du monopôle A et que certaines d'entre elles convergent vers le monopôle B .

Quant aux diagrammes de directivité en champ lointain de la Figure 2.5, ils montrent le rôle joué par les composantes "d'interférences" de la Figure 2.4 : pour des champs vibratoires généraux, leur contribution aux transferts énergétiques ne peut être négligée.

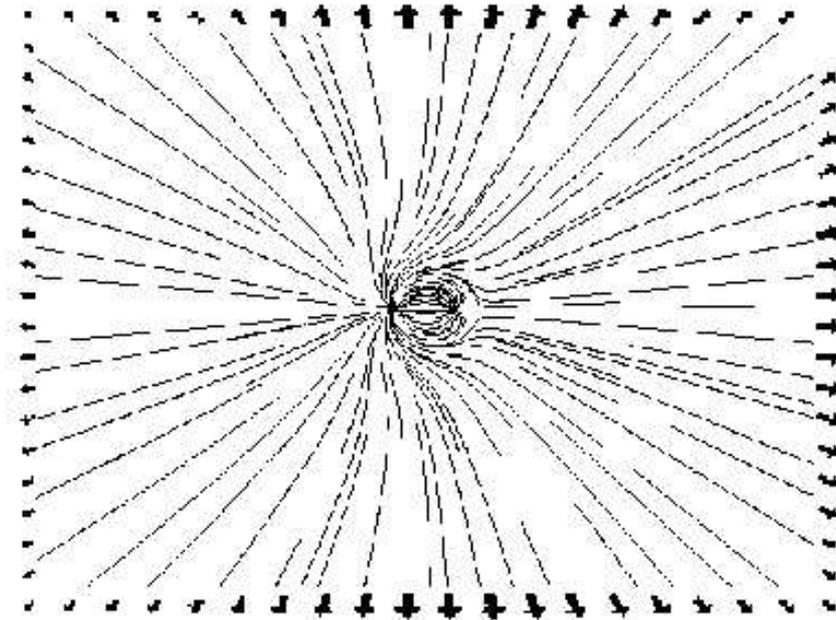
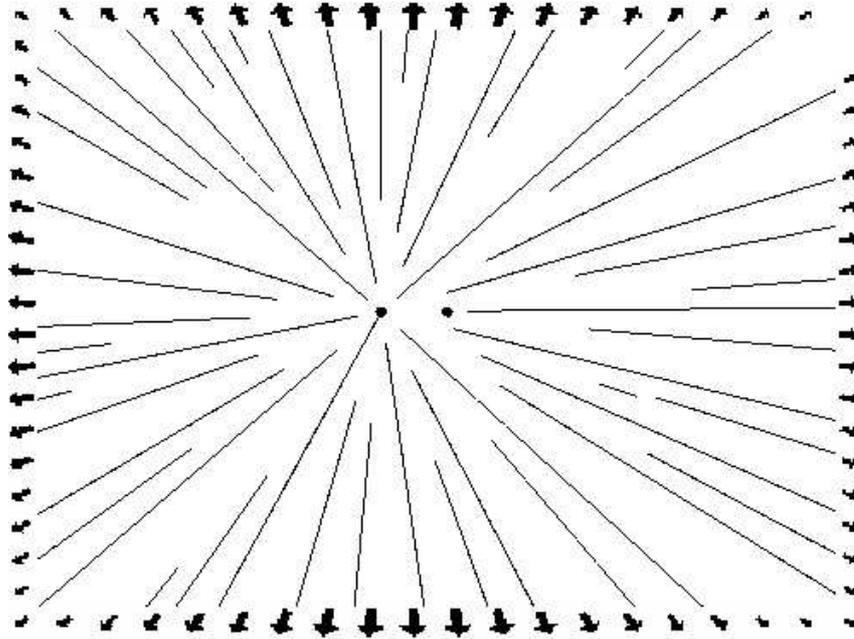
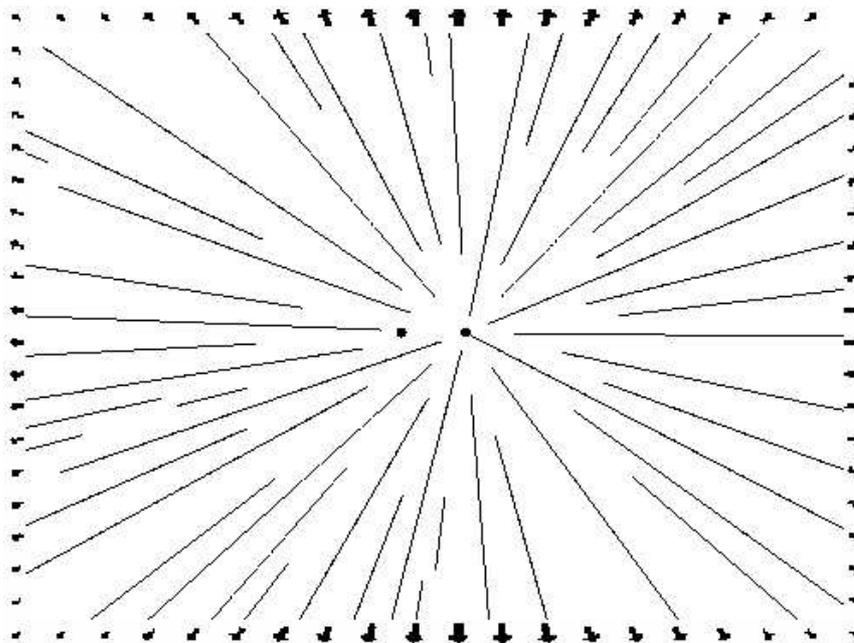


FIG. 2.1 – Intensité totale \mathbf{I} développée par deux monopôles A (à gauche) et B (à droite), de débits respectifs Q_A et Q_B dans un espace 3D : $k r_{AB} = 0.2$, $|Q_B|/|Q_A| = 2.5$ avec une différence de phase de -101.46° .

FIG. 2.2 – Intensité I_{AA} du monopôle A .FIG. 2.3 – Intensité I_{BB} du monopôle B .

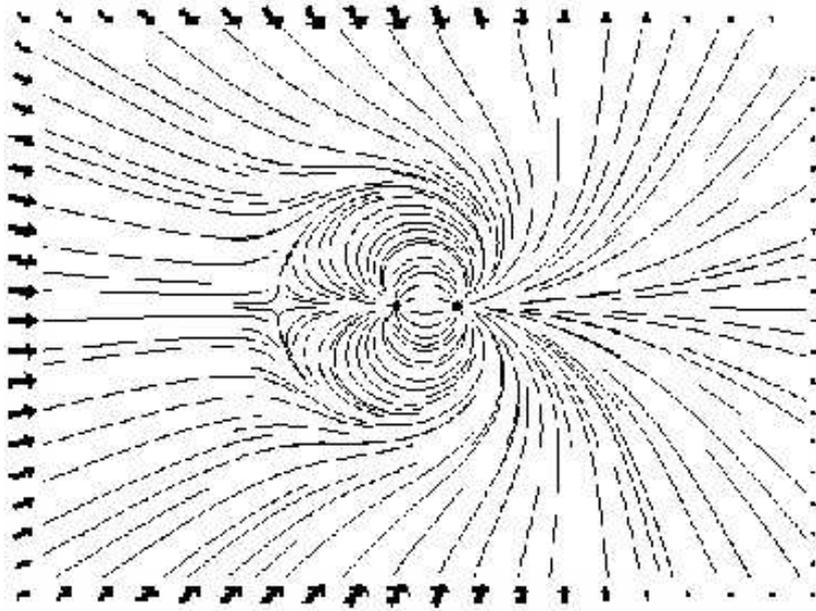


FIG. 2.4 – Intensité "d'interférences" $I_{AB} + I_{BA}$.

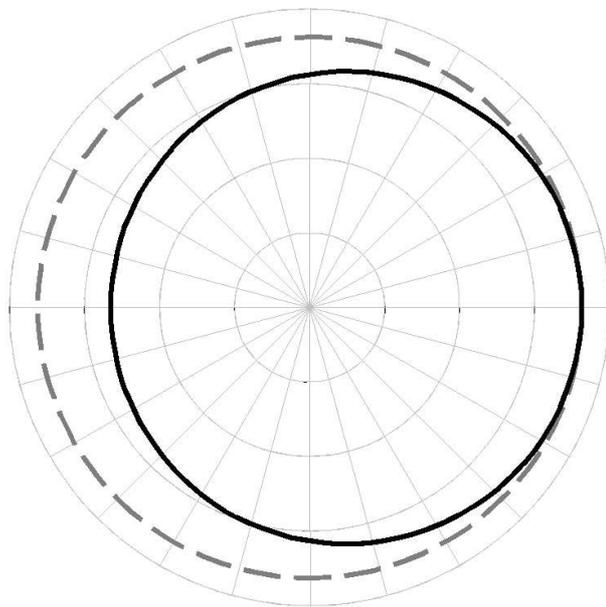


FIG. 2.5 – Diagrammes de directivité en champ lointain : intensité "directe" $I_{AA} + I_{BB}$ (---), intensité totale I (—).

2.3 Superposition quadratique pour des ondes planes interférant

Comme il est apparu dans l'exemple de la partie 2.2, les transferts d'énergie pour des champs généraux sont compliqués. Mais en raison des combinaisons de nombres d'ondes, les transferts globaux sont beaucoup plus simples dans le cas d'ondes planes. La décomposition d'un champ général en une somme infinie d'ondes planes conduit à s'intéresser aux interférences entre celles-ci. C'est donc du problème de base des interférences entre deux ondes planes dont il est question dans ce qui suit. Les hypothèses retenues restent très générales :

- petits déplacements et petites déformations,
- milieu élastique homogène isotrope avec amortissement hystérétique (densité ρ , facteur d'amortissement η , coefficients de Lamé complexes $\lambda = \lambda_0(1 + j\eta)$ et $\mu = \mu_0(1 + j\eta)$),
- régime harmonique de pulsation $\omega = 2\pi f$.

En particulier l'hypothèse de régime harmonique permet de définir la moyenne temporelle ζ d'une fonction $\zeta(t)$ comme $\zeta = \frac{\omega}{2\pi} \int_t^{t+2\pi/\omega} \zeta(t) dt$.

Cette partie traite de la propagation d'ondes planes, et dans un souci de simplifications, seules des ondes longitudinales sont considérées ici. La méthode présentée est donc applicable à l'acoustique en utilisant la vitesse du son comme célérité des ondes liant le nombre d'onde k à la pulsation ω par $k = \omega/c$.

Dans les systèmes considérés ici, le vecteur déplacement \mathbf{u} , fonction du vecteur position \mathbf{r} , dérive du potentiel scalaire ϕ . En dehors des sources, le potentiel scalaire $\phi(\mathbf{r})$ et le déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{grad} \phi(\mathbf{r})$ satisfont l'équation de Helmholtz scalaire et vectorielle, respectivement $(\Delta + k^2)\phi = 0$ et $(\Delta + k^2)\mathbf{u} = \mathbf{0}$, où le nombre d'onde k est défini par

$$k = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}}. \quad (2.2)$$

Ce nombre d'onde peut être écrit sous la forme $k = k_0(1 - j\theta)$, où

$$k_0 = \sqrt{\rho\omega^2\eta^2 / (2(\lambda_0 + 2\mu_0)(1 + \eta^2)(\sqrt{1 + \eta^2} - 1))} \quad (2.3)$$

est la partie réelle de k et où

$$\theta = (\sqrt{1 + \eta^2} - 1) / \eta \quad (2.4)$$

prend en compte la dissipation. Dans le cas de la superposition de deux ondes planes longitudinales (Figure 2.6), le potentiel scalaire $\phi(\mathbf{r})$ s'écrit

$$\phi(\mathbf{r}) = A e^{-j\mathbf{k}_A \cdot \mathbf{r}} + B e^{-j\mathbf{k}_B \cdot \mathbf{r}}, \quad (2.5)$$

où \mathbf{k}_A , \mathbf{k}_B et A , B sont respectivement les vecteurs d'ondes et les amplitudes complexes des deux ondes. Dans le repère $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ (Figure 2.6) où la direction du vecteur de base \mathbf{e}_x est donnée par la bissectrice des directions des ondes d'amplitudes A et B , le vecteur position \mathbf{r} s'écrit $\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y$ et les vecteurs d'ondes \mathbf{k}_A et \mathbf{k}_B s'écrivent

$$\begin{cases} \mathbf{k}_A &= k \cos(\alpha/2) \mathbf{e}_x - k \sin(\alpha/2) \mathbf{e}_y \\ \mathbf{k}_B &= k \cos(\alpha/2) \mathbf{e}_x + k \sin(\alpha/2) \mathbf{e}_y, \end{cases} \quad (2.6)$$

où α est l'angle entre les directions des deux ondes A et B (Figure 2.6a). Le vecteur déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{grad} \phi(\mathbf{r})$ s'écrit alors

$$\mathbf{u} = -jk \cos(\alpha/2) \left(A e^{-j\mathbf{k}_A \cdot \mathbf{r}} + B e^{-j\mathbf{k}_B \cdot \mathbf{r}} \right) \mathbf{e}_x + jk \sin(\alpha/2) \left(A e^{-j\mathbf{k}_A \cdot \mathbf{r}} - B e^{-j\mathbf{k}_B \cdot \mathbf{r}} \right) \mathbf{e}_y. \quad (2.7)$$

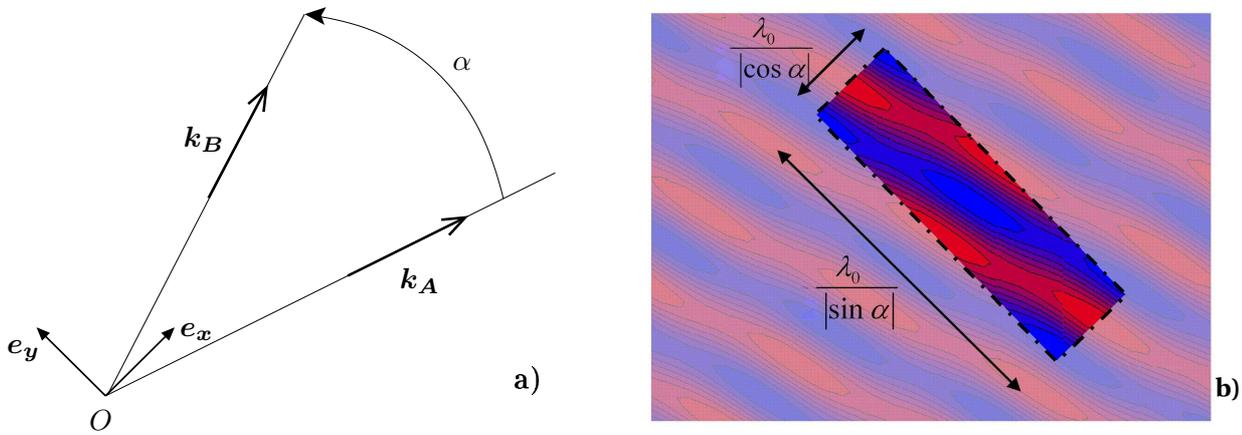


FIG. 2.6 – Champ d’ondes planes : a) interférence d’ondes propagatives, b) cellule de pseudo-périodicité du potentiel du déplacement ϕ , orientée suivant $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$, (O, \mathbf{e}_x) étant la bissectrice des directions des ondes A et B .

A partir du champ de déplacement \mathbf{u} peuvent être obtenues des variables quadratiques complexes dont les parties réelles représentent les moyennes temporelles. Parmi ces variables quadratiques se trouvent des grandeurs énergétiques telles que l’intensité de structure \mathbf{I} , la densité d’énergie cinétique T , la densité d’énergie de déformation U , la densité d’énergie totale W et la densité lagrangienne L . Toutes ces quantités sont définies dans le tableau 2.1 où $*$ désigne la quantité complexe conjuguée, $\overline{\otimes}$ le produit tensoriel contracté et $\overline{\otimes\otimes}$ le produit tensoriel doublement contracté².

intensité de structure	$\mathbf{I} = j\omega\sigma\overline{\otimes}\mathbf{u}^*/2$
densité d’énergie cinétique	$T = \rho\omega^2\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*/4$
densité d’énergie de déformation	$U = \sigma\overline{\otimes\otimes}\epsilon^*/4$
densité d’énergie totale	$W = T + U$
densité lagrangienne	$L = T - U$

TAB. 2.1 – Variables énergétiques

En considérant toujours la superposition de deux ondes planes longitudinales (Figure 2.6), l’intensité de structure \mathbf{I} et la densité d’énergie de déformation U s’expriment en fonction du déplacement \mathbf{u} et de son potentiel ϕ , respectivement

$$\mathbf{I} = -\frac{j\rho\omega^3}{2}\phi\mathbf{u}^* \quad (2.8)$$

et

$$U = \frac{\rho\omega^2}{4}k^{*2}\phi\phi^*. \quad (2.9)$$

²Soit \mathbf{Q} un tenseur d’ordre $q \geq 2$ et \mathbf{R} un tenseur d’ordre $r \geq 2$. On appelle *produit tensoriel doublement contracté* des tenseurs \mathbf{Q} et \mathbf{R} le tenseur d’ordre $p+q-4$ dont les composantes sont obtenues par sommation, selon la convention d’Einstein, des deux derniers indices de \mathbf{Q} avec les deux premiers indices de \mathbf{R} .

Compte tenu des expressions de ϕ (2.5) et de \mathbf{u} (2.7), \mathbf{I} et U s'écrivent respectivement

$$\mathbf{I} = \frac{\rho\omega^3}{2} k^* \left\{ \begin{array}{l} \cos(\alpha/2) (AA^* e^{-j(\mathbf{k}_A - \mathbf{k}_A^*) \cdot \mathbf{r}} + BB^* e^{-j(\mathbf{k}_B - \mathbf{k}_B^*) \cdot \mathbf{r}} \\ + AB^* e^{-j(\mathbf{k}_A - \mathbf{k}_B^*) \cdot \mathbf{r}} + BA^* e^{-j(\mathbf{k}_B - \mathbf{k}_A^*) \cdot \mathbf{r}}) \\ - \sin(\alpha/2) (AA^* e^{-j(\mathbf{k}_A - \mathbf{k}_A^*) \cdot \mathbf{r}} - BB^* e^{-j(\mathbf{k}_B - \mathbf{k}_B^*) \cdot \mathbf{r}} \\ - AB^* e^{-j(\mathbf{k}_A - \mathbf{k}_B^*) \cdot \mathbf{r}} + BA^* e^{-j(\mathbf{k}_B - \mathbf{k}_A^*) \cdot \mathbf{r}}) \end{array} \right\} \quad (2.10)$$

et

$$U = \frac{\rho\omega^2}{4} k^{*2} \left(\begin{array}{l} AA^* e^{-j(\mathbf{k}_A - \mathbf{k}_A^*) \cdot \mathbf{r}} + BB^* e^{-j(\mathbf{k}_B - \mathbf{k}_B^*) \cdot \mathbf{r}} \\ + AB^* e^{-j(\mathbf{k}_A - \mathbf{k}_B^*) \cdot \mathbf{r}} + BA^* e^{-j(\mathbf{k}_B - \mathbf{k}_A^*) \cdot \mathbf{r}} \end{array} \right). \quad (2.11)$$

La partie réelle $Re(U)$ de la densité d'énergie de déformation représente la densité d'énergie "stockée" tandis que sa partie imaginaire $Im(U)$ est proportionnelle à la puissance "dissipée". La densité d'énergie cinétique T est une exception, en tant que seule variable quadratique purement réelle parmi celles présentées dans le tableau 2.1 :

$$T = \frac{\rho\omega^2}{4} k k^* \left(\begin{array}{l} AA^* e^{-j(\mathbf{k}_A - \mathbf{k}_A^*) \cdot \mathbf{r}} + BB^* e^{-j(\mathbf{k}_B - \mathbf{k}_B^*) \cdot \mathbf{r}} \\ + \cos \alpha (AB^* e^{-j(\mathbf{k}_A - \mathbf{k}_B^*) \cdot \mathbf{r}} + BA^* e^{-j(\mathbf{k}_B - \mathbf{k}_A^*) \cdot \mathbf{r}}) \end{array} \right). \quad (2.12)$$

Le caractère quadratique de ces variables fait qu'elles sont régies par des composantes de vecteurs d'onde $\mathbf{k}_C - \mathbf{k}_{C'}$, où C et C' prennent les valeurs A ou B et où $*$ désigne le nombre complexe conjugué.

2.4 Echelles spatiales des variables énergétiques en ondes planes

La densité d'énergie cinétique T (2.12), la densité d'énergie de déformation U (2.11), la densité d'énergie totale $W = T + U$, la densité lagrangienne $L = T - U$ et l'intensité de structure \mathbf{I} (2.10) présentent les mêmes nombres d'onde : $\mathbf{k}_A - \mathbf{k}_A^*$, $\mathbf{k}_B - \mathbf{k}_B^*$, $\mathbf{k}_A - \mathbf{k}_B^*$ et $\mathbf{k}_B - \mathbf{k}_A^*$. En raison de la superposition d'ondes planes, le champ de déplacement (2.7) est pseudo-périodique, et les dimensions de sa cellule de pseudo-périodicité spatiale sont déterminées par la longueur d'onde λ_0 et l'orientation des deux ondes (Figure 2.6b). Les quantités énergétiques, en tant que variables quadratiques, présentent donc une cellule de pseudo-périodicité spatiale de longueur et largeur moitiés de celles de ϕ . La surface S des cellules qui caractérise cette pseudo-périodicité est définie dans le repère $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$, par les dimensions

$$S = \frac{\lambda_0}{2|\cos \alpha|} \times \frac{\lambda_0}{2|\sin \alpha|}. \quad (2.13)$$

Cette pseudo-périodicité spatiale des variables quadratiques en ondes planes est illustrée dans les figures 2.7, 2.8, 2.9 et 2.10 pour les moyennes temporelles des densités d'énergie cinétique et de déformation ainsi que pour le vecteur intensité. En particulier les lignes de flux (Figure 2.10) du vecteur intensité \mathbf{I} de coordonnées cartésiennes I_x et I_y sont définies par $dx/I_x = dy/I_y$ et obtenues ici à l'aide d'un schéma de Runge Kutta à 4 approximations.

Les différentes composantes de la superposition quadratique d'ondes planes (2.12) révèlent deux sortes de champs :

- le champ régi par les vecteurs d'ondes $\mathbf{k}_A - \mathbf{k}_A^*$ et $\mathbf{k}_B - \mathbf{k}_B^*$, prenant en compte les contributions aux transferts d'énergie des ondes planes A et B lorsque ces ondes sont considérées séparément l'une de l'autre,
- le champ régi par les vecteurs d'ondes $\mathbf{k}_A - \mathbf{k}_B^*$ et $\mathbf{k}_B - \mathbf{k}_A^*$, prenant en compte l'interaction entre les ondes planes A et B et son influence sur les échanges énergétiques.

Ces deux sortes de champ renvoient à deux sortes de phénomènes physiques, et à des transferts d'énergie à des échelles différentes [163]. Dans le chapitre suivant, ces échelles sont analysées pour des ondes planes unidimensionnelles.

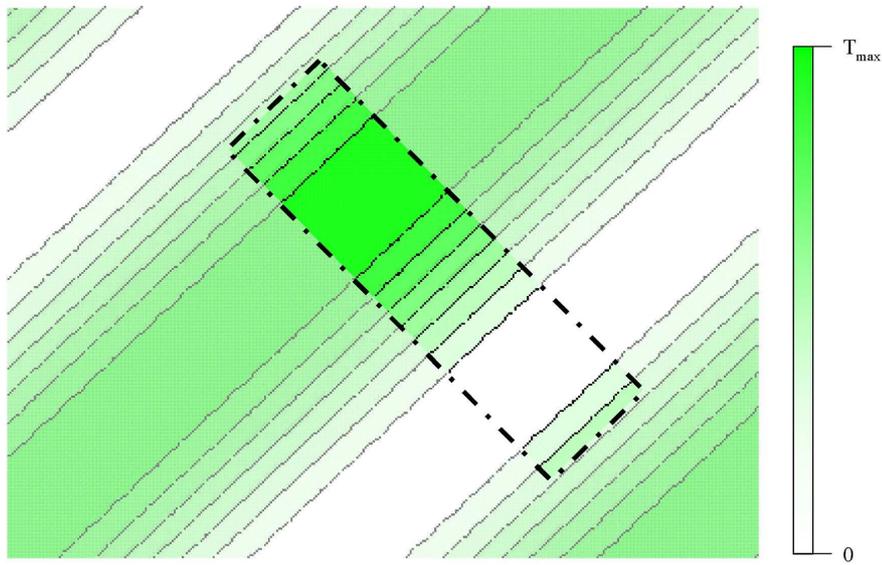


FIG. 2.7 – Densité d'énergie cinétique T .

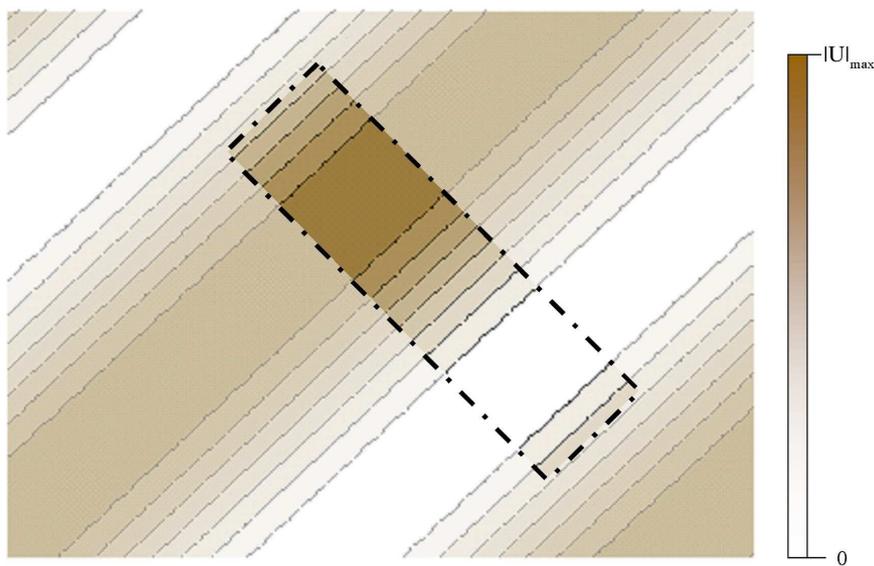


FIG. 2.8 – Module de la densité d'énergie de déformation $|U|$.

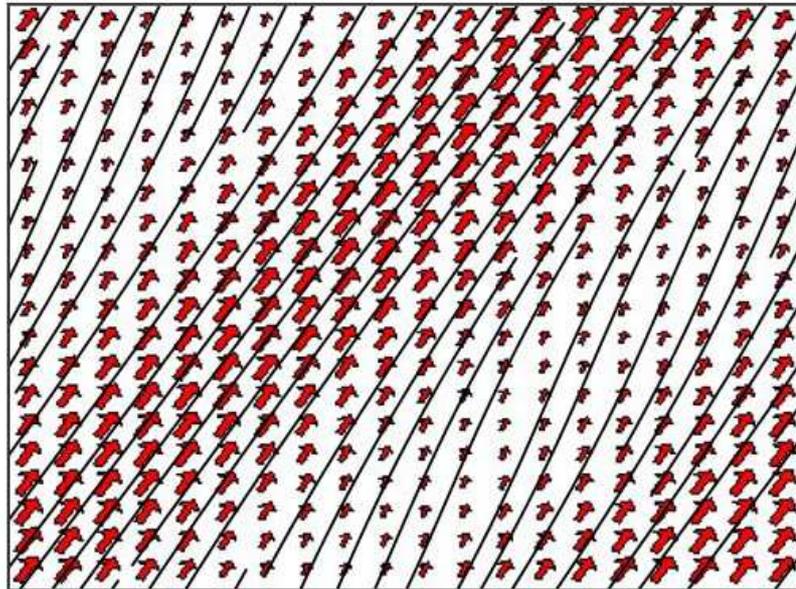


FIG. 2.9 – Intensité de structure (flèches) et lignes de flux.

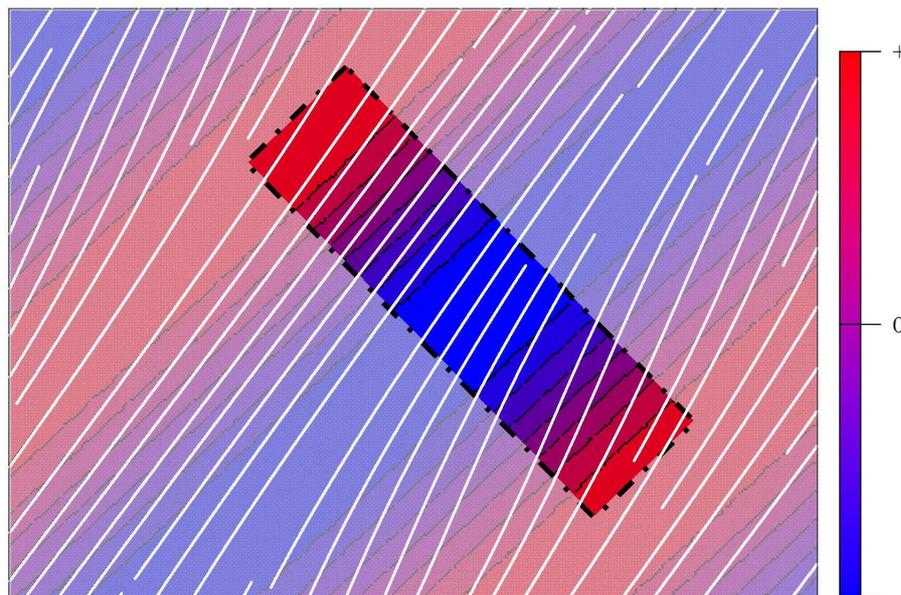


FIG. 2.10 – Rotationnel de l'intensité de structure et lignes de flux.

2.5 Types d'ondes considérés

Comme indiqué dans la partie 2.2, l'analyse effectuée dans la partie 2.4 pour des ondes planes purement longitudinales s'applique également à des ondes acoustiques planes. Il en va donc de même des résultats des chapitres 3 et 5 portant respectivement sur une formulation quadratique exacte et moyennée spatialement pour des systèmes unidimensionnels.

L'analyse de la partie 2.4 reste également valable pour des ondes planes de cisaillement ou des ondes planes dans les plaques, qu'il s'agisse d'ondes quasi-longitudinales ou de cisaillement polarisées. En revanche son application à des ondes de flexion n'est pas possible, en raison de composantes d'interférences supplémentaires dans les variables quadratiques, issues d'une part des interférences entre les différentes composantes évanescentes et d'autre part entre composantes évanescentes et propagatives des variables *linéaires*. Ce cas particulier des ondes quasi-longitudinales, de cisaillement polarisées et de flexion dans les plaques est détaillée dans le chapitre 4.

2.6 Conclusion

Les transferts énergétiques associés à des champs généraux sont relativement compliqués, notamment en raison du rôle non négligeable joué par les termes d'interférences des variables quadratiques, qu'il s'agisse d'interférences entre sources ou entre types d'ondes. Cependant les choses se simplifient dans le cas des ondes planes pour lesquelles l'analyse des différentes composantes de la superposition quadratique est facilitée. La suite de ce document s'attache donc à le confirmer pour des systèmes unidimensionnels mettant en jeu différents types d'ondes parmi ceux présentés plus haut, l'objectif étant d'aboutir à une formulation complète du problème, notamment en ce qui concerne l'expression des différentes conditions limites.

Chapitre 3

Cas des ondes planes unidimensionnelles

3.1 Introduction

Faisant suite au chapitre 2 où les échelles de variation des variables quadratiques pour des ondes planes interférant sont analysées, ce chapitre traite du cas particulier des ondes planes unidimensionnelles. Le premier objectif est d'établir une distinction entre les différents phénomènes physiques associés aux différentes échelles de variation des variables quadratiques, toujours à l'aide d'une analyse portant sur les nombres d'ondes [164]. Le second objectif est d'illustrer cette analyse par une application numérique portant sur une formulation quadratique unidimensionnelle exacte basée sur des résultats démontrés dans [165]. Enfin ce chapitre conclut par l'évocation des perspectives envisagées pour obtenir une formulation adaptée à une augmentation de la fréquence et qui est développée au chapitre 5.

3.2 Echelles de variation des grandeurs énergétiques

Pour des ondes planes dont les directions font entre elles un angle α , les variables énergétiques présentent un caractère pseudo-périodique dont la structure rectangulaire, de dimensions $S = \frac{\lambda_0}{2|\cos \alpha|} \times \frac{\lambda_0}{2|\sin \alpha|}$ est déterminée par les combinaisons de nombres d'ondes $\mathbf{k}_A - \mathbf{k}_B^*$ et $\mathbf{k}_B - \mathbf{k}_A^*$. La structure locale pseudo-périodique des champs énergétiques est donc le résultat des interférences entre les deux ondes planes A et B (partie 2.4). Le cas unidimensionnel de deux ondes contre-propagatives (Figure 3.1) constitue une application intéressante : le fait de fixer $\alpha = \pi$ donne $\mathbf{k}_B = -\mathbf{k}_A$ et fournit les variations des champs énergétiques à deux échelles bien distinctes.

3.2.1 A petite échelle : structure locale des interférences

Les variations locales des champs énergétiques sont à une échelle définie par le nombre d'onde $k + k^*$. Ce nombre d'onde est purement réel :

$$k + k^* = 2\text{Re}(k) = 2k_0 = \frac{4\pi}{\lambda_0}, \quad (3.1)$$

et ne dépend que de la longueur d'onde λ_0 , autrement dit uniquement de la fréquence et des propriétés du milieu de propagation. Les nombres d'ondes réels $k + k^*$ et son opposé $-k - k^*$ (Figure 3.2) décrivent donc les transferts énergétiques à petite échelle (la demi-longueur d'onde pour les systèmes 1D), et correspondent à des composantes des variables quadratiques liées à des ondes stationnaires.

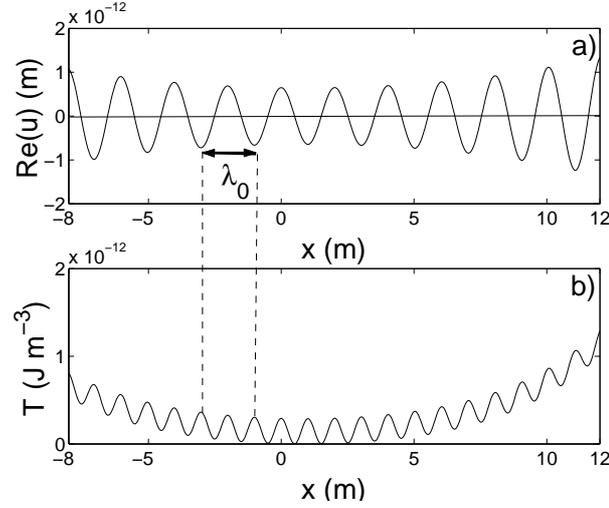


FIG. 3.1 – Ondes unidimensionnelles contre-propagatives en espace libre : a) partie réelle du déplacement u ; b) densité d'énergie cinétique T .

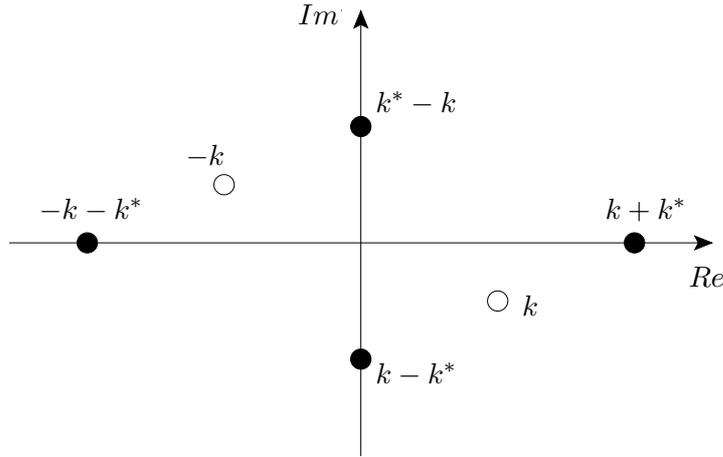


FIG. 3.2 – Représentation des nombres d'ondes du déplacement (\circ) et des variables quadratiques (\bullet) dans le plan complexe, pour deux ondes unidimensionnelles contre-propagatives.

3.2.2 A grande échelle : transferts énergétiques globaux et dissipation

Les vecteurs d'ondes des composantes à grande échelle des variables quadratiques sont construits à partir d'un vecteur d'onde du déplacement et de son conjugué (par exemple $\mathbf{k}_A - \mathbf{k}_A^*$ et $\mathbf{k}_B - \mathbf{k}_B^*$ pour les deux premiers termes de l'équation (2.12)). Ces ondes peuvent être qualifiées d'évanescentes car les nombres d'onde associés, de la forme $k - k^*$, sont des imaginaires purs (Figure 3.2) :

$$k - k^* = 2j\text{Im}(k) = -2jk_0 \theta = -j \frac{4\pi\theta}{\lambda_0}. \quad (3.2)$$

Les composantes à grande échelle des variables quadratiques dépendent donc de l'amortissement ; elles correspondent à la décroissance globale de puissance causée par les phénomènes dissipatifs et décrivent

les transferts énergétiques à une échelle grande devant la longueur d'onde. Cette analyse s'applique notamment aux champs unidimensionnels : les variations globales des variables énergétiques (Figure 3.1b) sont gouvernées par le nombre d'onde (3.2).

3.3 Exemple unidimensionnel illustrant la présence des deux types d'échelles

Le but de cette partie est de présenter une formulation énergétique exacte pour toute fréquence, dans le cas d'un système unidimensionnel [167].

3.3.1 Configuration et formulation en déplacement

Un système unidimensionnel, dans lequel seules des ondes longitudinales se propagent (Figure 3.3), est considéré ici. Seules les hypothèses citées au début de la partie 2.3 sont formulées. Pour rappel, il s'agit de : petits déplacements et petites déformations, milieu de propagation homogène et isotrope avec amortissement hystérétique et régime harmonique.

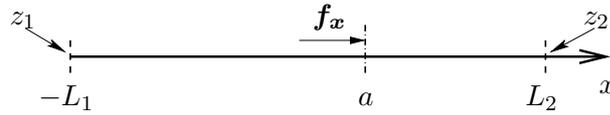


FIG. 3.3 – Système unidimensionnel étudié.

Pour un tel système, la solution de la formulation en déplacement est connue. Le déplacement $\mathbf{u}(x)$ dérive du potentiel $\phi(x)$, solution de l'équation de propagation avec second membre

$$(\Delta + k^2) \phi(x) = -\frac{k^2 f_x}{\rho \omega^2} H(x - a), \quad (3.3)$$

où $\mathbf{f}_x = f_x \mathbf{e}_x$ est une densité surfacique de force appliquée en $x = a$, $H(x)$ désignant la fonction de Heaviside. Le potentiel du déplacement $\phi(x)$ solution de (3.3) s'écrit donc

$$\phi(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) + \frac{f_x H(x - a)}{\rho \omega^2} (\cos(k(x - a)) - 1). \quad (3.4)$$

Les deux coefficients C_1 et C_2 sont donnés par les conditions aux limites en $x = -L_1$ et $x = L_2$, conditions mixtes suivantes [166] faisant apparaître respectivement les impédances spécifiques z_1 et z_2 (normalisées par rapport à l'impédance caractéristique du milieu) :

$$\begin{cases} \phi_{,x^2}(-L_1) - j k z_1 \phi_{,x}(-L_1) & = 0 \\ -\phi_{,x^2}(L_2) - j k z_2 \phi_{,x}(L_2) & = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Les variables quadratiques, notamment la densité d'énergie cinétique T et la densité d'énergie de déformation U , s'obtiennent à partir du déplacement $\mathbf{u} = \phi_{,x} \mathbf{e}_x$ et de son potentiel ϕ :

$$T = \frac{\rho \omega^2}{4} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*, \quad (3.6)$$

$$U = \frac{\lambda + 2\mu}{4} \Delta \phi \Delta \phi^*. \quad (3.7)$$

L'intensité de structure \mathbf{I} est donnée par l'intégration, avec une constante d'intégration donnée par la condition limite en $x = -L_1$ par exemple, de

$$\operatorname{div} \mathbf{I} = -2j\omega(T - U) + P, \quad (3.8)$$

où P est la densité de puissance injectée s'écrivant ici

$$P = -\frac{j\omega}{2} \mathbf{f}_x \cdot \mathbf{u}^*. \quad (3.9)$$

3.3.2 Formulation quadratique exacte

Une autre manière d'obtenir des variables quadratiques exactes consiste à résoudre un système linéaire d'équations. Dans le cas d'un amortissement faible, un système d'équations couplées est obtenu dans [104] pour les densités d'énergie T et U concernant des ondes longitudinales dans des barres. En exprimant les quantités énergétiques à partir de variables quadratiques et en cherchant des relations linéaires entre celles-ci, un système d'équations similaire est obtenu dans [165] pour des ondes longitudinales ou de cisaillement dans un milieu 3D isotrope. Dans le cas particulier d'ondes unidimensionnelles, il est montré, toujours dans [165], que les densités d'énergie T et U vérifient

$$\begin{cases} \Delta T + (k^2 + k^{*2})T - 2k^2U & = s_{T,x} \delta_a \\ \Delta U + (k^2 + k^{*2})U - 2k^{*2}T & = s_{U,x} \delta_a + s_U \delta_{a,x}, \end{cases} \quad (3.10)$$

avec $\delta_a(x) = \delta(x - a)$, $\Delta(x)$ étant la fonction de Dirac, $s_{T,x}$ désignant le saut de $T_{,x}$, $s_{U,x}$ celui de $U_{,x}$ et s_U celui de U .

En dehors des sources, une équation d'ordre 4 peut être obtenue, par substitution à partir de (3.10), pour chacune des densités d'énergie T et U . Cette équation se met sous la forme :

$$\left(\Delta \Delta + 2(k^2 + k^{*2})\Delta + (k^2 - k^{*2})^2 \right) \xi = 0. \quad (3.11)$$

Dans le cas d'un amortissement faible, l'équation (3.11) vérifiée par T et U a également été obtenue pour des ondes longitudinales dans le cadre des vibrations de barres [104].

Concernant les sauts de $T_{,x}$, $U_{,x}$ et U apparaissant dans (3.10), il est important de préciser d'une part que ces trois discontinuités sont données par la formulation en déplacement :

$$s_{T,x} = -\frac{1}{4} (k^2 f_x u^*(a) + k^{*2} f_x^* u(a)), \quad (3.12)$$

$$s_{U,x} = \frac{k^{*2}}{4} (f_x u(a) + f_x^* u^*(a)), \quad (3.13)$$

$$s_U = \frac{k^{*2}}{4} \left(\frac{f_x f_x^*}{\rho \omega^2} - \frac{f_x^* u_{,x}(a^-)}{k^2} - \frac{f_x u_{,x}^*(a^-)}{k^{*2}} \right), \quad (3.14)$$

et d'autre part que le système d'équations (3.10) mène à une formulation exacte équivalente reposant sur la densité d'énergie totale $W = T + U$ et sur la densité lagrangienne $L = T - U$:

$$\begin{cases} \Delta W + (k^2 - k^{*2})L & = (s_{T,x} + s_{U,x}) \delta_a + s_U \delta_{a,x} \\ \Delta L + 2(k^2 + k^{*2})L - (k^2 - k^{*2})W & = (s_{T,x} - s_{U,x}) \delta_a - s_U \delta_{a,x}. \end{cases} \quad (3.15)$$

Conditions limites pour les variables quadratiques

Cas général : conditions mixtes

Les quatre conditions limites vérifiées par T et U s'obtiennent à partir des équations (3.5), (3.6) et (3.7), et s'écrivent :

$$T_{,x}(-L_1) - j(k z_1 - k^* z_1^*)T(-L_1) = 0, \quad (3.16)$$

$$U(-L_1) - \frac{k^*}{k} z_1 z_1^* T(-L_1) = 0, \quad (3.17)$$

$$T_{,x}(L_2) - j(k^* z_2^* - k z_2)T(L_2) = 0, \quad (3.18)$$

$$U(L_2) - \frac{k^*}{k} z_2 z_2^* T(L_2) = 0. \quad (3.19)$$

Par exemple l'équation (3.16) s'obtient en exprimant $T_{,x}(-L_1)$ par dérivation de (3.6) :

$$T_{,x}(-L_1) = \frac{\rho\omega^2}{4} (u_{,x}(-L_1)u^*(-L_1) + u(-L_1)u_{,x}^*(-L_1)), \quad (3.20)$$

puis par substitution de $u_{,x}(-L_1)$ et $u_{,x}^*(-L_1)$, respectivement par $jkz_1u(-L_1)$ et $-j^*k^*z_1^*u^*(-L_1)$ d'après la première condition d'impédance de (3.5).

Des conditions mixtes obtenues de la même manière et portant sur l'intensité de structure peuvent être écrites :

$$z_1 I_{,x}(-L_1) - j(k - k^*|z_1|^2)I(-L_1) = 0, \quad (3.21)$$

$$z_2 I_{,x}(L_2) + j(k - k^*|z_2|^2)I(L_2) = 0, \quad (3.22)$$

une seule de ces deux conditions étant nécessaire à l'intégration de (3.8) pour reconstruire l'intensité de structure à partir des densités d'énergie, la deuxième condition étant alors automatiquement vérifiée.

Interprétation des impédances spécifiques

Dans la formulation en déplacement, les impédances spécifiques font apparaître le rapport entre la contrainte normale σ_{xx} et la vitesse normale $\pm j \omega u$, les deux équations de (3.5) permettant d'écrire :

$$z_1 = \frac{k}{\rho \omega} \frac{\sigma_{xx}(-L_1)}{j \omega u(-L_1)}, \quad (3.23)$$

$$z_2 = -\frac{k}{\rho \omega} \frac{\sigma_{xx}(L_2)}{j \omega u(L_2)}. \quad (3.24)$$

Dans la formulation quadratique, le carré du module de chacune des impédances spécifiques fait apparaître le rapport entre densité d'énergie de déformation et densité d'énergie cinétique :

$$|z_1|^2 = \frac{k}{k^*} \frac{U(-L_1)}{T(-L_1)}, \quad (3.25)$$

$$|z_2|^2 = \frac{k}{k^*} \frac{U(L_2)}{T(L_2)}. \quad (3.26)$$

Cas particulier : conditions de réflexion totale

Les conditions de réflexion totale s'obtiennent à partir des valeurs limites des impédances spécifiques. Afin d'observer l'influence de ces valeurs limites sur les grandeurs énergétiques, les équations (3.16), (3.17), (3.18) et (3.19) doivent être réécrites en notant les impédances spécifiques $z_i = |z_i|e^{j \arg(z_i)}$, $i = 1, 2$:

$$T_{,x}(-L_1) + 2 k_0 |z_1| [\sin(\arg(z_1)) - \theta \cos(\arg(z_1))] T(-L_1) = 0, \quad (3.27)$$

$$U(-L_1) - \frac{k^*}{k} |z_1|^2 T(-L_1) = 0, \quad (3.28)$$

$$T_{,x}(L_2) - 2 k_0 |z_2| [\sin(\arg(z_2)) - \theta \cos(\arg(z_2))] T(L_2) = 0, \quad (3.29)$$

$$U(L_2) - \frac{k^*}{k} |z_2|^2 T(L_2) = 0. \quad (3.30)$$

Dans le cas d'une terminaison libre en $x = -L_1$ (i.e. $z_1 = 0$) et d'une terminaison bloquée en $x = L_2$ (i.e. $|z_2| = +\infty$), les deux équations (3.29) et (3.30) aboutissent à $T(L_2) = 0$. En fait, $U_{,x}(L_2)$ est lié à $T(L_2)$ par

$$U_{,x}(L_2) - j \frac{k^*}{k} (k^* z_2 - k z_2^*) T(L_2) = 0, \quad (3.31)$$

de sorte que $T(L_2) = 0 \Rightarrow U_{,x}(L_2) = 0$. Par conséquent les équations (3.16), (3.17), (3.18) et (3.19) sont valables quelles que soient les valeurs prises par z_1 et z_2 . Finalement l'expression de conditions de réflexion totale en termes de grandeurs énergétiques se résume au tableau 3.1. Les quatre conditions

	impédance spécifique	déplacement	densités d'énergie
terminaison libre	$z_1 = 0$	$u_{,x}(-L_1) = 0$	$T_{,x}(-L_1) = 0,$ $U(-L_1) = 0$
terminaison bloquée	$ z_2 \rightarrow +\infty$	$u(L_2) = 0$	$T(L_2) = 0,$ $U_{,x}(L_2) = 0$

TAB. 3.1 – Expressions des conditions de réflexion totale.

mixtes vérifiées par les densités d'énergie totale $W = T + U$ et lagrangienne $L = T - U$ se déduisent de celles vérifiées par T et U .

Application numérique

Les formulations présentées précédemment, qu'elles soient basées sur le déplacement ou sur les grandeurs énergétiques, peuvent donner lieu à une application numérique pour des ondes longitudinales se propageant à 5 kHz dans de l'acier entre $-L_1 = -9 \text{ m}$ et $L_2 = 11 \text{ m}$, la densité de force concentrée $f_x = 1 \text{ Pa}$ étant appliquée en $x = a = 3 \text{ m}$. Les propriétés du matériau figurent dans le tableau 3.2. Les valeurs choisies pour les impédances spécifiques sont $z_1 = 0$ (terminaison libre en $x = -L_1$) et $z_2 = 1$ (terminaison anéchoïque en $x = L_2$). De telles valeurs signifient qu'il y a réflexion totale de l'onde en $x = -L_1$ et absence de réflexion $x = L_2$.

Les champs énergétiques que sont la densité d'énergie cinétique T et la densité d'énergie de déformation U obtenues à l'aide de la formulation quadratique (3.10), et l'intensité de structure \mathbf{I} obtenue par intégration de (3.8) avec une condition d'intensité nulle en $x = -L_1$, se superposent exactement à

Masse volumique ρ ($kg\ m^{-3}$)	7800
Module d'Young E (Pa)	$2.1\ 10^{11}(1 + j\ 0.01)$
Coefficient de Poisson ν	0.3

TAB. 3.2 – Propriétés du milieu de propagation

ceux issus de la formulation en déplacement (3.3), comme l'illustrent les Figures 3.5 et 3.6. Ce résultat confirme que la formulation quadratique, constituée du système d'équations (3.10) et de conditions mixtes portant sur les densités d'énergie T et U , fournit des grandeurs énergétiques exactes.

Cette application numérique (au regard de la figure 3.5 par exemple) illustre le résultat présenté dans la partie 2.4 : les variables quadratiques possèdent deux échelles de variation spatiale. Les variations à grande échelle s'observent dans tout le milieu dissipatif. Elles correspondent aux composantes propagatives des grandeurs énergétiques, dont la décroissance, ici depuis $x = a$, est liée au facteur d'amortissement η . Dans la portion définie par $x > a$, il n'y a que des composantes propagatives, en raison de la terminaison anéchoïque située en $x = L_2$. Les composantes à petite échelle de variation spatiale ne sont présentes que dans la portion $x < a$. Par comparaison avec le champ de déplacement (Figure 3.4), la longueur caractéristique de ces composantes est la demi-longueur d'onde. Les composantes à petite échelle traduisent la présence d'interférences dues à la condition de réflexion totale en $x = -L_1$. Ceci peut également être interprété en termes de composantes actives et réactives à la vue de la partie imaginaire de l'intensité de structure (Figure 3.6b) : pour $x > a$, l'intensité de structure est purement active puisque il n'y a pas d'onde propagative réfléchie. En ce qui concerne la densité de force concentrée f_x située en $x = a$, la densité de puissance injectée P (3.9) qui lui est associée apparaît dans le saut de $Re(\mathbf{I})$ en $x = a$ (Figure 3.6a).

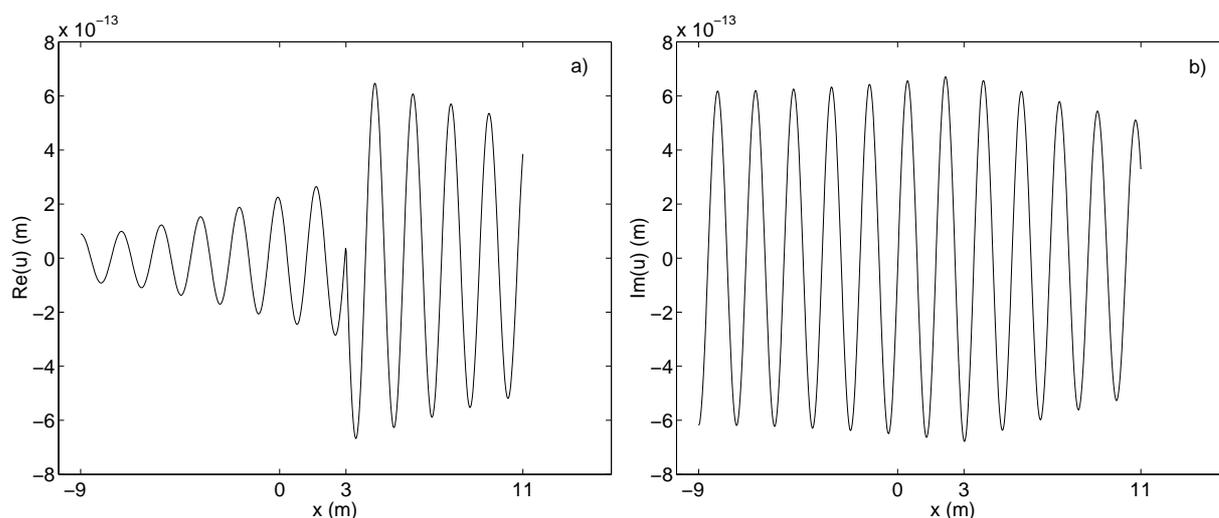


FIG. 3.4 – Champ de déplacement : a) partie réelle ; b) partie imaginaire.

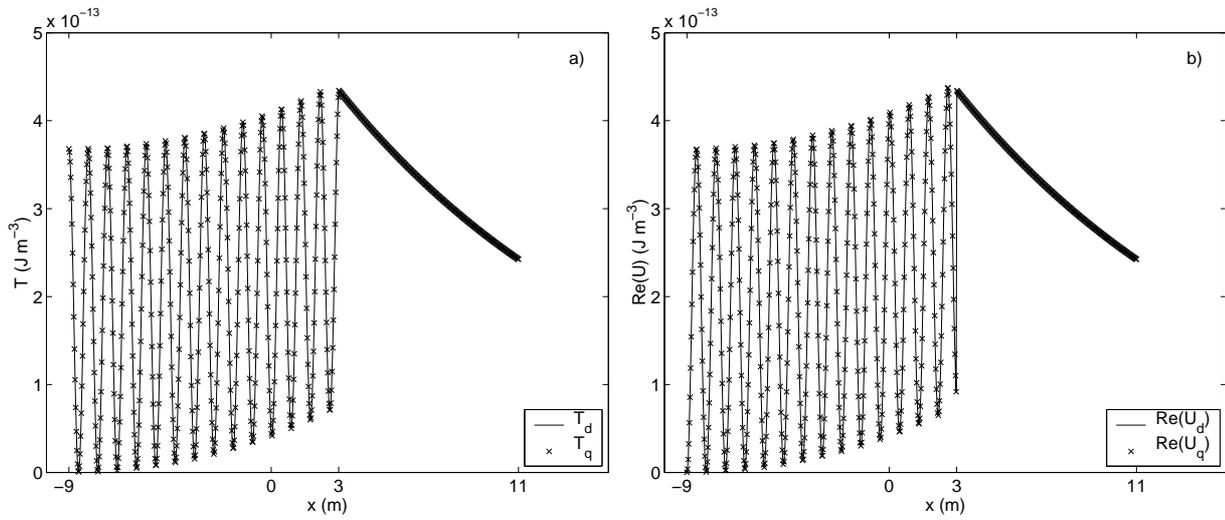


FIG. 3.5 – a) Densités d'énergie cinétique : T_d (—) à partir de la formulation en déplacement, T_q (---) à partir de la formulation quadratique ; b) Parties réelles des densités d'énergie de déformation : $\text{Re}(U_d)$ (—) à partir de la formulation en déplacement, $\text{Re}(U_q)$ (---) à partir de la formulation quadratique.

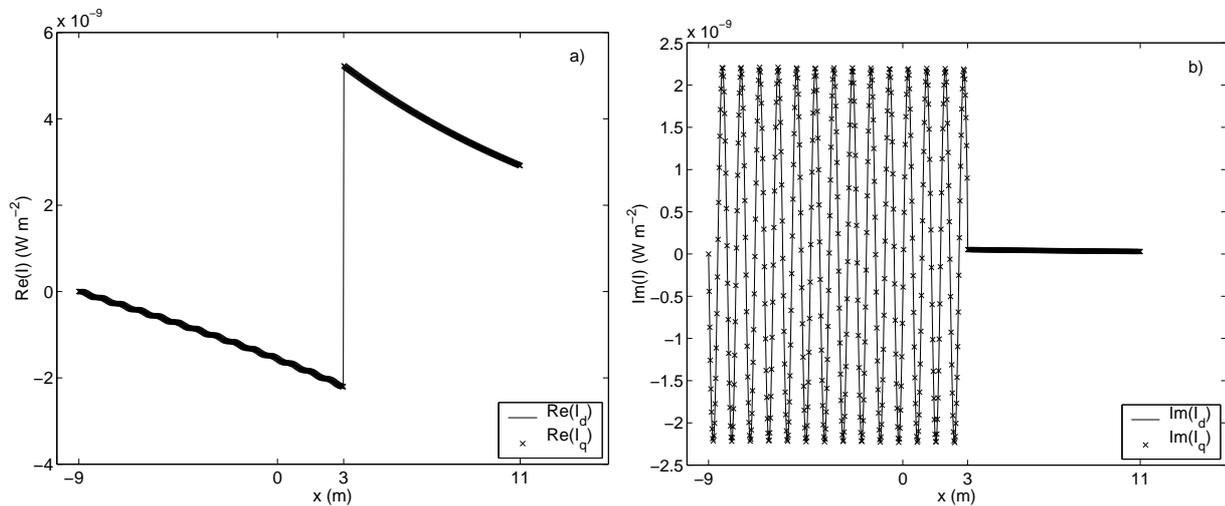


FIG. 3.6 – a) Parties réelles des intensités de structure : $\text{Re}(I_d)$ (—) à partir de la formulation en déplacement, $\text{Re}(I_q)$ (---) à partir de la formulation quadratique ; b) Parties imaginaires des intensités de structure : $\text{Im}(I_d)$ (—) à partir de la formulation en déplacement, $\text{Im}(I_q)$ (---) à partir de la formulation quadratique.

Conclusions et perspectives

La formulation quadratique (3.10) est équivalente à la formulation en déplacement (3.3) pour le calcul des quantités énergétiques. Cependant le système d'équations (3.10) est d'ordre plus élevé que celui de (3.3), et sa solution vérifie des conditions limites plus nombreuses et plus compliquées. La formulation quadratique apparaît donc comme une alternative à la formulation en déplacement, mais plus coûteuse en calculs que cette dernière, ce qui en limite d'autant l'application lorsque la fréquence augmente. Toutefois il est possible de s'affranchir des composantes à petite échelle spatiale des variables quadratiques pseudo-périodiques, notamment en moyennant celles-ci à l'échelle de leur pseudo-période. L'utilisation de telles variables quadratiques moyennées induit une reformulation du problème, avec l'écriture de nouvelles équations aux dérivées partielles (équations différentielles dans les cas 1D) et surtout de nouvelles conditions limites vérifiées par ces variables. C'est cette approche qui est présentée dans le chapitre 5.

Le chapitre 4 a quant à lui pour objet d'étendre la présente approche à différents types d'ondes de plaque.

Chapitre 4

Transferts énergétiques dans les plaques : analyse de différents types d'ondes

4.1 Introduction

Ce chapitre traite de différents types d'ondes dans les plaques semi-infinies. De manière similaire à l'approche utilisée dans [165], les grandeurs énergétiques y sont exprimées à l'aide de variables quadratiques. Dans les cas de propagation unidimensionnelle, des simplifications permettent d'obtenir des relations linéaires entre ces variables quadratiques et d'en tirer une formulation quadratique exacte, de manière similaire à l'exemple traité à la fin du chapitre 3. Les dernières parties de ce chapitre se concentrent sur une telle formulation concernant des ondes de flexion unidimensionnelles afin d'étendre à ce type d'ondes l'analyse de la partie 3.2 sur les nombres d'ondes des différentes composantes des grandeurs énergétiques.

4.2 Equations locales et modèle de plaque

4.2.1 Equations locales

En régime harmonique, le champ de déplacement s'écrit $\mathbf{u}(t) = \text{Re}(\mathbf{u}e^{j\omega t})$. En omettant la partie réelle et la dépendance spatiale $e^{j\omega t}$, il est caractérisé par le vecteur complexe \mathbf{u} , fonction uniquement des coordonnées spatiales (x, y, z) . De la même manière, le champ de vitesse et les forces extérieures sont caractérisés par les vecteurs complexes $\mathbf{v} = j\omega\mathbf{u}$ et \mathbf{f}_z , et les déformations ainsi que les contraintes respectivement par les tenseurs complexes ϵ et σ dont les composantes sont

$$\epsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \quad (4.1)$$

$$\sigma_{kl} = \lambda\epsilon_{jj}\delta_{kl} + 2\mu\epsilon_{kl}, \quad (4.2)$$

où les indices répétés implique une somme et où δ_{kl} désigne le symbole de Kronecker. Dans sa forme complexe, l'équation du mouvement s'écrit

$$-\rho\omega^2\mathbf{u} = \mathbf{f}_z + \text{div } \sigma, \quad (4.3)$$

où

$$\text{div } \sigma = (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathbf{u} - \mu \text{rot rot } \mathbf{u}. \quad (4.4)$$

En définissant la moyenne temporelle de la même manière que celle présentée dans la partie 2.3, les variables *linéaires* ci-dessus que sont $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{f}_z(t)$, $\epsilon(t)$, et $\sigma(t)$ présentent une moyenne temporelle nulle, contrairement aux variables *quadratiques* définies comme le produit de deux variables linéaires. Chaque quantité quadratique peut alors être désignée par une variable complexe, dont la partie réelle représente la moyenne temporelle, et qui peut s'exprimer comme le demi-produit de deux termes linéaires complexes conjugués. C'est notamment le cas pour les quantités énergétiques moyennées temporellement, dont la définition figure dans le chapitre 2 et se trouve rappelée dans le tableau 4.1 où * désigne le nombre complexe conjugué et $\overline{\otimes}$ le produit tensoriel doublement contracté. La densité

intensité de structure	$I = j\omega\sigma\overline{\otimes}\mathbf{u}^*/2$
densité d'énergie cinétique	$T = \rho\omega^2\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*/4$
densité d'énergie de déformation	$U = \sigma\overline{\otimes}\epsilon/4$
densité d'énergie totale	$W = T + U$
densité lagrangienne	$L = T - U$

TAB. 4.1 – Variables énergétiques complexes

d'énergie cinétique T est une exception en tant qu'unique quantité quadratique purement réelle parmi celles figurant dans le tableau 4.1. La combinaison de l'équation (4.2) et de l'équation (5.74) de l'annexe B donne :

$$\mathbf{I} = \frac{j\omega}{2} \left(\begin{array}{l} (\lambda + 2\mu) \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{u}^* - \mu \operatorname{div} \mathbf{u}^* \mathbf{u} + \mu (\operatorname{rot} \mathbf{u}^* \times \mathbf{u}) \\ + \mu \operatorname{grad} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*) + \mu \operatorname{rot} (\mathbf{u} \times \mathbf{u}^*) \end{array} \right), \quad (4.5)$$

où \times désigne le produit vectoriel. Les parties réelle et imaginaire de l'intensité de structure \mathbf{I} représentent respectivement la moyenne temporelle de la densité de puissance active et réactive. La combinaison de l'équation (4.2) et de l'équation (5.75) de l'annexe B donne :

$$U = \frac{1}{4} ((\lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{u}^* + \mu (\Delta(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*) - \mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{u}^* - \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* - \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u}^*)). \quad (4.6)$$

La partie réelle de la densité d'énergie de déformation U , associée aux parties réelles des coefficients de Lamé λ et μ , est positive. La partie imaginaire de U est proportionnelle à la densité de puissance dissipée, en raison du facteur d'amortissement η du matériau et se traduisant par les parties imaginaires de λ et μ .

De manière similaire à l'acoustique [184], la divergence de l'intensité de structure peut s'écrire

$$\operatorname{div} \mathbf{I} = -2j\omega(T - U) - \frac{j\omega}{2} \mathbf{f}_z \cdot \mathbf{u}^*. \quad (4.7)$$

Cette dernière équation traduit la conservation de l'énergie localement : la partie réelle de la divergence de l'intensité de structure est la somme de la puissance active développée par les forces extérieures et dissipée dans le milieu, tandis que la partie imaginaire est proportionnelle à la partie réelle de la densité lagrangienne et de la puissance réactive des forces extérieures.

4.2.2 Modèle de plaque

La plaque considérée est semi-infinie en longueur ($-L_1 \leq x \leq L_2$, $-\infty < y < +\infty$) et d'épaisseur h (Figure 4.1). En notant $\bar{\zeta}(x, y) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \zeta(x, y, z) dz$ la moyenne sur l'épaisseur h de la fonction $\zeta(x, y, z)$, les moyennes respectives de la divergence et du rotationnel de l'intensité de structure s'écrivent

$$\overline{\operatorname{div} \mathbf{I}} = \operatorname{div} \bar{\mathbf{I}} + [\mathbf{I} \cdot \mathbf{n}]_{-h/2}^{h/2}/h, \quad (4.8)$$

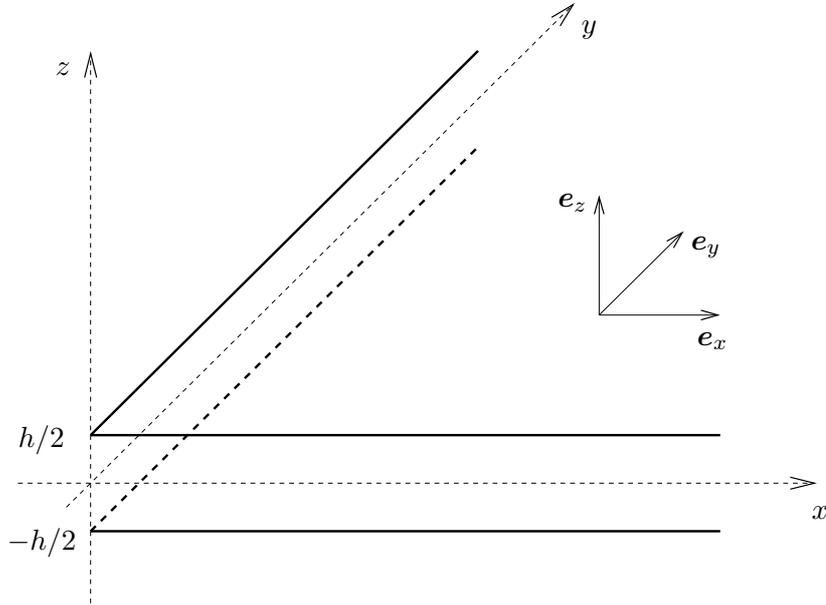


FIG. 4.1 – Géométrie de la plaque, semi-infinie en longueur ($-L_1 \leq x \leq L_2$, $-\infty < y < +\infty$) et d'épaisseur h , et vecteurs unitaires e_x , e_y , e_z du système de coordonnées cartésiennes.

$$\overline{\text{rot } \mathbf{I}} = \text{rot } \overline{\mathbf{I}} + \left(-[\mathbf{I} \cdot \mathbf{e}_y]_{-h/2}^{h/2} \mathbf{e}_x + [\mathbf{I} \cdot \mathbf{e}_x]_{-h/2}^{h/2} \mathbf{e}_y \right) / h, \quad (4.9)$$

où $[\zeta(x, y, z)]_{-h/2}^{h/2} = \zeta(x, y, h/2) - \zeta(x, y, -h/2)$ désigne le saut de ζ entre les deux faces de la plaque et \mathbf{n} la normale extérieure telle que $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_z$ en $z = -h/2$ et $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ en $z = h/2$. En notant $\overline{\otimes}$ le produit tensoriel contracté, le terme

$$[\mathbf{I} \cdot \mathbf{n}]_{-h/2}^{h/2} = \frac{j\omega}{2} [(\overline{\sigma \otimes \mathbf{u}^*}) \cdot \mathbf{n}]_{-h/2}^{h/2} = \frac{j\omega}{2} [(\overline{\sigma \otimes \mathbf{n}}) \cdot \mathbf{u}^*]_{-h/2}^{h/2} \quad (4.10)$$

dans l'équation (4.8) représente la densité de puissance échangée à travers les interfaces $z = \pm h/2$, demi-produit du complexe conjugué de la vitesse et de la densité surfacique de force sur les faces $z = \pm h/2$. Pour une plaque libre, il n'y a aucune contrainte aux interfaces ($\overline{\sigma \otimes \mathbf{e}_z} = \mathbf{0}$ en $z = \pm h/2$) et par conséquent $\overline{\text{div } \mathbf{I}} = \text{div } \overline{\mathbf{I}}$ et $\overline{\text{rot } \mathbf{I}} = \text{rot } \overline{\mathbf{I}}$.

En faisant l'hypothèse de contraintes planes ($\sigma_{zz} = 0$), la composante ϵ_{zz} du tenseur des déformations vérifie

$$\epsilon_{zz} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (4.11)$$

en chaque point $(x, y, -h/2 \leq z \leq h/2)$ de la plaque. Différents types de mouvement sont considérés par la suite, suivant la forme prise par le champ de déplacement \mathbf{u} en utilisant le modèle cinématique approprié, exact dans le cas d'ondes de cisaillement (SH pour Shear Horizontal) ou approché dans les cas d'ondes longitudinales (QL pour Quasi-Longitudinal) et d'ondes de flexion. Le champ de vitesse, les tenseurs des déformations et des contraintes, l'intensité de structure ainsi que les densités d'énergie peuvent être définies à partir du déplacement en utilisant les équations (4.1) et (4.3), d'abord localement pour $-h/2 \leq z \leq h/2$, puis moyennées sur l'épaisseur.

Quand un modèle cinématique approché est utilisé, comme c'est le cas pour des ondes QL ou des ondes de flexion, l'équation du mouvement (4.3) n'est pas exactement vérifiée : une force résiduelle

peut subsister, consistant en une densité volumique de force $\tilde{\mathbf{f}}_z$ dans la plaque et en une densité surfacique de force $\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{e}_z \neq \mathbf{0}$ sur les faces $z = \pm h/2$. Ces forces, combinées au champ de vitesse vibratoire de la plaque, introduisent des transferts de puissance supplémentaires qui doivent être pris en compte. Différents types d'ondes (ondes de flexion, ondes QL, ondes SH...) contribuent au champ vibratoire dans les plaques. Lorsqu'une formulation en déplacement est utilisée, ces différentes ondes sont découplées; chacune d'elles peut être considérée séparément [172], et le champ de déplacement total peut s'exprimer comme la somme de ces différentes contributions. Mais comme les grandeurs énergétiques sont des variables quadratiques, elles sont construites comme des produits de variables linéaires de chaque type d'ondes et comportent i) les variables énergétiques s'exprimant à partir de deux variables linéaires (déplacement, déformations, contraintes) du même type d'ondes, et ii) les variables énergétiques mixtes, résultant du produit d'une variable linéaire d'un type d'ondes par une variable linéaire d'un autre type d'ondes. Ainsi le fait de considérer par exemple la présence à la fois d'ondes longitudinales et d'ondes de cisaillement dans un milieu 3D isotrope conduit à considérer une composante longitudinale, une composante de cisaillement et deux composantes mixtes pour chacune des variables quadratiques pour obtenir le champ énergétique total [168]. Toutefois, dans ce qui suit, les différents types d'ondes sont analysés séparément, sous l'hypothèse répétée que chacun d'entre eux est le seul présent dans la plaque. Ces différentes ondes présentent des équations de formes similaires, pouvant être classées suivant leur ordre :

- les ondes QL et SH sont régies par l'équation d'onde harmonique et présentent des caractéristiques similaires à celles des ondes longitudinales et de cisaillement d'un milieu 3D isotrope [168], qu'il s'agisse de l'expression des variables énergétiques dans le cas 2D ou de la formulation énergétique et de ses solutions dans le cas 1D, comme présenté en 4.3;
- les ondes de flexion sont régies par l'équation d'onde bi-harmonique, d'ordre plus élevé, et donnant par conséquent des expressions plus compliquées pour les variables énergétiques dans le cas 2D, la formulation énergétique et ses solutions dans le cas 1D étant obtenues de manière similaire aux autres types d'ondes, comme présenté en 4.4.

4.3 Ondes régies par une équation d'ordre 2

4.3.1 Modèle exact pour les ondes SH dans les plaques

Lorsque seules des ondes SH sont considérées, l'équation du mouvement (4.3) peut s'exprimer à partir d'un potentiel vecteur ne présentant qu'une seule composante non nulle suivant \mathbf{e}_z . Chacune de ces ondes est dénotée par un entier positif n et caractérisée par un nombre d'onde k_{β_n} [175]. L'équation d'onde pour la composante suivant \mathbf{e}_z du potentiel vecteur s'écrit comme l'équation scalaire

$$\Delta\beta + k_{\beta_n}^2\beta + \frac{1}{\mu}\Gamma_{\beta_n} = 0, \tag{4.12}$$

où

$$k_{\beta_n}^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu} - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2, \tag{4.13}$$

les scalaires $\beta(x, y)$ et $\Gamma_{\beta_n}(x, y)$ représentant respectivement le champ de déplacement et les forces extérieures.

A partir des potentiels vecteurs $\boldsymbol{\beta}(x, y)$ et $\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\beta}}(x, y)$, dont les composantes sont définies par

$$\boldsymbol{\beta}(x, y) = \beta(x, y)\mathbf{e}_z, \quad \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\beta}}(x, y) = \Gamma_{\beta}(x, y)\mathbf{e}_z, \tag{4.14}$$

l'équation (4.12) peut être dérivée pour donner l'équation vectorielle

$$\Delta \mathbf{rot} \boldsymbol{\beta} + k_{\beta_n}^2 \mathbf{rot} \boldsymbol{\beta} + \frac{1}{\mu} \mathbf{F}_{\beta} = \mathbf{0}, \quad (4.15)$$

où les variables $\mathbf{rot} \boldsymbol{\beta}$ et $\mathbf{F}_{\beta} = \mathbf{rot} \boldsymbol{\Gamma}_{\beta}$ représentent, au signe près, le champ de déplacement et les forces extérieures sur les faces $z = \pm h/2$ de la plaque.

Pour une onde donnée, définie par n pair ou impair, le déplacement \mathbf{u}_{β_n} et le chargement \mathbf{f}_{β_n} sont donnés par :

$$\begin{array}{ll} \text{cas symétrique } (n \text{ pair}) & \begin{array}{l} \mathbf{u}_{\beta_n} = \mathbf{rot} \boldsymbol{\beta}_n \quad \boldsymbol{\beta}_n = \beta(x, y) \cos(n\pi z/h) \mathbf{e}_z \\ \mathbf{f}_{\beta_n} = \mathbf{rot} \boldsymbol{\Gamma}_{\beta_n} \quad \boldsymbol{\Gamma}_{\beta_n} = \Gamma_{\beta}(x, y) \cos(n\pi z/h) \mathbf{e}_z \end{array} \\ \text{cas antisymétrique } (n \text{ impair}) & \begin{array}{l} \mathbf{u}_{\beta_n} = \mathbf{rot} \boldsymbol{\beta}_n \quad \boldsymbol{\beta}_n = \beta(x, y) \sin(n\pi z/h) \mathbf{e}_z \\ \mathbf{f}_{\beta_n} = \mathbf{rot} \boldsymbol{\Gamma}_{\beta_n} \quad \boldsymbol{\Gamma}_{\beta_n} = \Gamma_{\beta}(x, y) \sin(n\pi z/h) \mathbf{e}_z, \end{array} \end{array} \quad (4.16)$$

où n pair et n impair gouvernent respectivement les ondes symétriques et antisymétriques. Ces champs de déplacement et de force sont plans, de divergence nulle :

$$\mathbf{u}_{\beta_n} \cdot \mathbf{e}_z = 0, \quad \mathbf{f}_{\beta_n} \cdot \mathbf{e}_z = 0, \quad \text{div} \mathbf{u}_{\beta_n} = 0, \quad \text{div} \mathbf{f}_{\beta_n} = 0. \quad (4.17)$$

Le déplacement \mathbf{u}_{β_n} , le tenseur des déformations $\boldsymbol{\epsilon}_{\beta_n}$ (4.1) le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}_{\beta_n}$ (4.2), ainsi que le chargement \mathbf{f}_{β_n} , vérifient l'équation du mouvement (4.3) en tout point dans l'épaisseur de la plaque, et la condition de surface libre est vérifiée sur les faces inférieure et supérieure :

$$\begin{array}{l} \rho \omega^2 \mathbf{u}_{\beta_n} + \text{div} \boldsymbol{\sigma}_{\beta_n} + \mathbf{f}_{\beta_n} = \mathbf{0} \quad \text{en tout point } (x, y, -h/2 \leq z \leq h/2) \\ \boldsymbol{\sigma}_{\beta_n} \otimes \mathbf{e}_z = \mathbf{0} \quad \text{sur } z = \pm h/2, \end{array} \quad (4.18)$$

où la divergence des contraintes se réduit à $\text{div} \boldsymbol{\sigma}_{\beta_n} = -\mu \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{u}_{\beta_n}$.

Les variables énergétiques \mathbf{I}_{β_n} , T_{β_n} , U_{β_n} définies dans le tableau 4.1 vérifient localement l'équation (4.7) :

$$\text{div} \mathbf{I}_{\beta_n} = -2j\omega(T_{\beta_n} - U_{\beta_n}) - \frac{j\omega}{2} \mathbf{f}_{\beta_n} \cdot \mathbf{u}_{\beta_n}^*. \quad (4.19)$$

De (4.8), (4.9) et (4.16), les moyennes sur l'épaisseur de la divergence et du rotationnel de l'intensité de structure vérifient

$$\overline{\text{div} \mathbf{I}_{\beta_n}} = \text{div} \overline{\mathbf{I}_{\beta_n}}, \quad \overline{\mathbf{rot} \mathbf{I}_{\beta_n}} = \mathbf{rot} \overline{\mathbf{I}_{\beta_n}}, \quad (4.20)$$

de sorte que l'équation moyennée (4.19) peut s'écrire

$$\text{div} \overline{\mathbf{I}_{\beta_n}} = -2j\omega(\overline{T_{\beta_n}} - \overline{U_{\beta_n}}) - \frac{j\omega}{2} \overline{\mathbf{f}_{\beta_n} \cdot \mathbf{u}_{\beta_n}^*}. \quad (4.21)$$

En notant $\kappa = 1$ pour $n = 0$ et $\kappa = 1/2$ pour toute autre valeur positive de n , l'intensité de structure moyennée $\overline{\mathbf{I}_{\beta_n}}$, les densités d'énergie $\overline{U_{\beta_n}}$ et $\overline{T_{\beta_n}}$, et la densité de puissance moyennée développée par les forces extérieures peuvent s'écrire

$$\overline{\mathbf{I}_{\beta_n}} = \kappa \frac{j\omega}{2} \mu \left(\begin{array}{l} -\Delta \boldsymbol{\beta}^* \times \mathbf{rot} \boldsymbol{\beta} \\ + \mathbf{grad}(\mathbf{rot} \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{rot} \boldsymbol{\beta}^*) + \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{rot} \boldsymbol{\beta}^*) \end{array} \right), \quad (4.22)$$

$$\overline{U_{\beta_n}} = \kappa \frac{\mu}{4} \left(\begin{array}{l} -\Delta \boldsymbol{\beta} \cdot \Delta \boldsymbol{\beta}^* + \Delta(\mathbf{rot} \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{rot} \boldsymbol{\beta}^*) \\ -\mathbf{rot} \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{rot} \Delta \boldsymbol{\beta}^* - \mathbf{rot} \boldsymbol{\beta}^* \cdot \mathbf{rot} \Delta \boldsymbol{\beta} + \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \mathbf{rot} \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{rot} \boldsymbol{\beta}^* \end{array} \right), \quad (4.23)$$

$$\overline{T_{\beta_n}} = \kappa \frac{\rho\omega^2}{4} (\mathbf{rot} \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{rot} \boldsymbol{\beta}^*), \quad (4.24)$$

$$-\frac{j\omega}{2} \overline{\mathbf{f}_{\beta_n} \cdot \mathbf{u}_{\beta_n}^*} = -\frac{j\omega}{2} \kappa \mathbf{F}_{\beta} \cdot \mathbf{rot} \boldsymbol{\beta}^*. \quad (4.25)$$

La divergence de (4.22), où $\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\beta} = -\mathbf{rot} \mathbf{rot} \boldsymbol{\beta} = \Delta\boldsymbol{\beta} \mathbf{e}_z$ est exprimé à partir de (4.12), donne la forme suivante pour l'équation (4.21) :

$$\operatorname{div} \overline{\mathbf{I}_{\beta_n}} = \kappa \frac{j\omega}{2} \left(\begin{array}{l} -\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\beta}^* + \mu \Delta(\mathbf{rot} \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{rot} \boldsymbol{\beta}^*) \\ + \left(\frac{\mu}{\mu^*} \rho\omega^2 - \mu \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2 \right) \mathbf{rot} \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{rot} \boldsymbol{\beta}^* + \frac{\mu}{\mu^*} \mathbf{F}_{\beta}^* \cdot \mathbf{rot} \boldsymbol{\beta} \end{array} \right), \quad (4.26)$$

et de manière identique, le rotationnel de l'intensité de structure peut s'écrire

$$\mathbf{rot} \overline{\mathbf{I}_{\beta_n}} = \kappa \frac{j\omega}{2} \left(\begin{array}{l} -\mu \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{rot} \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{rot} \boldsymbol{\beta}^*) \\ - \left(\frac{\mu}{\mu^*} \rho\omega^2 - \mu \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2 \right) \mathbf{rot} \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{rot} \boldsymbol{\beta}^* + \frac{\mu}{\mu^*} \mathbf{F}_{\beta}^* \times \mathbf{rot} \boldsymbol{\beta} \end{array} \right). \quad (4.27)$$

En raison de la forme (4.16) du champ de déplacement des ondes SH, le déplacement \mathbf{u}_{β_n} est horizontal, dans le plan (4.17) ; les tenseurs des déformations et des contraintes présentent des composantes diagonales telles que $\epsilon_{zz} = 0$, $\sigma_{zz} = 0$ et $\sigma_{yy} = -\sigma_{xx}$, de sorte que l'équation (4.11) possède des membres de gauche et de droite nuls pour σ_{zz} nul. Le modèle cinématique (4.16) complété par l'équation scalaire (4.12) est un modèle exact, au sens où il ne contient aucune approximation sur le champ $\boldsymbol{\beta}$, et les équations locales (4.18) et (4.19) dans l'épaisseur de la plaque, ainsi que celles sur les faces inférieure et supérieure, sont vérifiées. Dépendant du type d'onde considéré, les champs $\boldsymbol{\beta}$ et $\boldsymbol{\gamma}$ présentent différentes propriétés :

i) dans le cas de l'onde symétrique pour laquelle $\kappa = 1$ ($n = 0$), l'onde SH présente un champ uniforme dans l'épaisseur de la plaque ($\beta_0 = \beta(x, y)$ et $\Gamma_{\beta_0} = \Gamma_{\beta}(x, y)$ pour $-h/2 \leq z \leq h/2$), les déformations et les contraintes sont planes, et l'équation d'onde (4.12) est non-dispersive [175]. Ce système correspond exactement au cas d'ondes de cisaillement polarisées présentées dans [168], et les relations moyennées sur l'épaisseur de la plaque, de (4.22) à (4.27), sont identiques aux équations locales dans [168].

ii) les autres ondes SH ($n > 0$) présentent une dépendance en z dans le champ de déplacement (4.16), introduisant le facteur $\kappa = 1/2$ dans l'expression des variables quadratiques moyennées sur l'épaisseur et l'équation d'onde devient dispersive [175]. Le déplacement est plan (4.17) mais ni les contraintes ni les déformations ne le sont en raison de composantes de cisaillement orientées suivant z non nulles : le mouvement de cisaillement est alors présent à la fois dans et hors des directions du plan de la plaque, mais il vérifie la condition de surface libre de (4.18) aux interfaces $z = \pm h/2$. La présence de composantes de cisaillement orientées suivant z produit les effets suivants dans l'épaisseur :

- à partir de la définition de l'intensité de structure (tableau 4.1), les composantes de cisaillement σ_{xy} et σ_{xz} , quant elles sont multipliées par le champ de vitesse plan, engendrent un flux de puissance dirigé suivant $\pm z$ à l'intérieur de la plaque, donnant une composante non nulle suivant z pour \mathbf{I}_{β_n} . Cette composante $\mathbf{I}_{\beta_n} \cdot \mathbf{e}_z$ est nulle en $z = \pm h/2$ et antisymétrique par rapport à z , de sorte que l'intensité de structure moyennée sur l'épaisseur $\overline{\mathbf{I}_{\beta_n}}$ est plane,
- à partir de la définition de la densité d'énergie de déformation (tableau 4.1), les déformations et les contraintes de cisaillement contribuent à la densité locale d'énergie de déformation U_{β_n} , avec une dépendance symétrique par rapport à z , donnant, une fois moyennées, le terme $\kappa \frac{\mu}{4} \left(\frac{n\pi}{2h} \right)^2$ de (4.23) pour $\overline{U_{\beta_n}}$.

Excepté pour ce dernier terme, qui n'introduit pas de variable supplémentaire, les formes des expressions allant de (4.22) à (4.27) restent inchangées lorsque des ondes SH ayant des profils non constants en z ($n > 0$) sont considérées. En résumé, ce qui est présenté pour des ondes de cisaillement en milieu 3D dans [168] est ici directement transposable pour des ondes SH dans les plaques minces.

4.3.2 Modèle approché pour les ondes QL dans les plaques

Les champs ondulatoires correspondant aux ondes QL d'une plaque mince peuvent être décrits à partir d'une équation d'onde pour le champ scalaire $\alpha(x, y)$:

$$\Delta\alpha + k_\alpha^2\alpha + \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda + \mu)}\Gamma_\alpha = 0, \quad (4.28)$$

avec

$$k_\alpha^2 = \rho\omega^2 \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda + \mu)}, \quad (4.29)$$

où $\Gamma_\alpha(x, y)$ représente les forces extérieures, k_α étant le nombre d'onde quasi-longitudinal. Le fait de dériver cette équation dans le plan donne

$$\Delta \mathbf{grad} \alpha + k_\alpha^2 \mathbf{grad} \alpha + \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda + \mu)} \mathbf{F}_\alpha = \mathbf{0}, \quad (4.30)$$

où $\mathbf{grad} \alpha$ et $\mathbf{F}_\alpha = \mathbf{grad} \Gamma_\alpha$ désignent respectivement le déplacement et les forces extérieures [175]. Les équations ci-dessus (4.28) et (4.30), en considérant le champ ondulatoire comme une fonction des coordonnées du plan (x, y) uniquement, sont adéquates pour modéliser la propagation d'ondes QL dans les plaques minces. Cependant le fait de considérer un déplacement de la forme $\mathbf{grad} \alpha(x, y)$ induit l'uniformité de la composante σ_{zz} du tenseur des contraintes, alors que pour des ondes quasi-longitudinales, aucune contrainte dans la direction z n'est appliquée. De plus, comparé au premier champ ondulatoire symétrique de Lamb, le modèle (4.30) néglige clairement toute composante de cisaillement [176]. Afin de prendre en compte ces composantes, même partiellement en ce qui concerne les variables énergétiques, un modèle local plus détaillé est considéré ci-après. Le champ de déplacement local \mathbf{u}_α à l'intérieur de la plaque $-h/2 \leq z \leq h/2$ présente les composantes

$$\mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{e}_x = \alpha_{,x}, \quad \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{e}_y = \alpha_{,y}. \quad (4.31)$$

Aucune contrainte dans la direction z n'est appliquée pour des ondes QL, de sorte que $\sigma_{zz} = 0$. Afin de vérifier l'équation (4.12), la composante hors du plan (x, y) du déplacement est prise de la forme

$$\mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{e}_z = -z \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \Delta\alpha, \quad (4.32)$$

antisymétrique par rapport à z , et donnant une composante uniforme du tenseur des déformations $\epsilon_{zz} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \Delta\alpha$. Les tenseurs des déformations et des contraintes peuvent être exprimés à partir de (4.1) et (4.2); en raison de la composante suivant z (4.32) du déplacement \mathbf{u}_α , le tenseur des contraintes présente des composantes de cisaillement non nulles σ_{xz} and σ_{yz} . Pour cette raison, le champ n'est pas purement longitudinal ($\mathbf{rot} \mathbf{u}_\alpha \neq \mathbf{0}$), et de telles ondes sont appelées *quasi*-longitudinales. Ces composantes de cisaillement du tenseur des contraintes ne disparaissent pas pour $z = \pm h/2$, donnant des contraintes résiduelles aux interfaces, de sorte que la condition (4.12) pour des interfaces non chargées n'est pas vérifiée. Le champ de déplacement local ci-dessus \mathbf{u}_α défini par (4.31) et (4.32)

constitue alors un modèle *approché*.

D'après l'équation du mouvement (4.3), les forces extérieures \mathbf{f}_α vérifient

$$\rho\omega^2\mathbf{u}_\alpha + \mathbf{div}\boldsymbol{\sigma}_\alpha + \mathbf{f}_\alpha = \mathbf{0}, \quad (4.33)$$

où

$$\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma}_\alpha = (\lambda + 2\mu)\mathbf{grad}\mathbf{div}\mathbf{u}_\alpha - \mu\mathbf{rot}\mathbf{rot}\mathbf{u}_\alpha \quad (4.34)$$

car le champ de déplacement local présente des composantes longitudinales et de cisaillement. L'intensité de structure \mathbf{I}_α et les densités d'énergie T_α et U_α peuvent être exprimées à partir du tableau 4.1. L'équation locale (4.7) est alors vérifiée :

$$\mathbf{div}\mathbf{I}_\alpha = -2j\omega(T_\alpha - U_\alpha) - \frac{j\omega}{2}\mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha^*. \quad (4.35)$$

Cependant, en raison des contraintes de cisaillement σ_{xz} et σ_{yz} résiduelles aux interfaces, la divergence et le rotationnel de l'intensité de structure moyennée sur l'épaisseur sont tels que

$$\overline{\mathbf{div}\mathbf{I}_\alpha} = \mathbf{div}\overline{\mathbf{I}_\alpha} + \tau_\alpha, \quad \overline{\mathbf{rot}\mathbf{I}_\alpha} = \mathbf{rot}\overline{\mathbf{I}_\alpha}, \quad (4.36)$$

où le terme additionnel τ_α est dû aux contraintes de cisaillement non nulles $\boldsymbol{\sigma}_\alpha \otimes \mathbf{e}_z$ et au déplacement dans le plan aux interfaces $z = \pm h/2$:

$$\tau_\alpha = \frac{j\omega}{2h} [(\boldsymbol{\sigma}_\alpha \otimes \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{u}_\alpha^*]_{-h/2}^{h/2} = -\frac{j\omega}{2} \frac{\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \mathbf{grad}\Delta\alpha \cdot \mathbf{grad}\alpha^*. \quad (4.37)$$

La moyenne de (4.35) sur l'épaisseur de la plaque s'écrit alors

$$\mathbf{div}\overline{\mathbf{I}_\alpha} = -2j\omega(\overline{T_\alpha} - \overline{U_\alpha}) - \frac{j\omega}{2}\overline{\mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha^*} - \tau_\alpha. \quad (4.38)$$

Le chargement \mathbf{f}_α apparaissant dans l'équation (4.33) peut être exprimé comme $\mathbf{f}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha + \tilde{\mathbf{f}}_\alpha$, où \mathbf{F}_α est le chargement, uniforme par rapport à z , du modèle (4.30) et $\tilde{\mathbf{f}}_\alpha$ une force d'excitation locale liée aux composantes suivant z du déplacement et des contraintes (4.32). Ces composantes induisent également des forces non nulles en $z = \pm h/2$. Mais ces deux chargements introduits par le modèle local se compensent exactement en terme de force :

$$\overline{\tilde{\mathbf{f}}_\alpha} + [\boldsymbol{\sigma}_\alpha z]_{-h/2}^{h/2} / h = \mathbf{0}, \quad (4.39)$$

et se compensent quasiment en terme d'énergies :

$$\overline{\tilde{\mathbf{f}}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha^*} + [(\boldsymbol{\sigma}_\alpha z) \cdot \mathbf{u}_\alpha^*]_{-h/2}^{h/2} / h = O(h^2), \quad (4.40)$$

où $O(h^2)$ signifie que les termes en h^2 et puissances supérieures de h sont négligés.

La composante de cisaillement pour le déplacement, introduite par (4.32), présente alors les effets suivants :

- de (4.39), la force volumique $\tilde{\mathbf{f}}_\alpha$ et les composantes de cisaillement résiduelles du tenseur des contraintes σ_{xz} et σ_{yz} en $z = \pm h/2$ se compensent lorsqu'elles sont moyennées sur l'épaisseur de la plaque, de sorte que la composante de cisaillement disparaît en moyennant l'équation (4.35). Ainsi la composante de cisaillement peut être négligée en utilisant cette équation moyennée dans le modèle cinématique pour les plaques minces.

- De (4.40), la puissance totale développée par la force volumique $\tilde{\mathbf{f}}_\alpha$ et celle résiduelle aux interfaces en $z = \pm h/2$ sont d'ordre h^2 . Elles ne se compensent pas exactement (une force moyenne nulle peut développer une puissance moyenne non nulle), mais la contribution globale des composantes de cisaillement peut être négligée en ce qui concerne les ondes quasi-longitudinales dans les plaques "minces" ($h \ll L_1 + L_2$).

Le terme τ_α dans (4.37) peut être exprimé à partir de (4.40) comme

$$\tau_\alpha = \frac{j\omega}{2h} [(\boldsymbol{\sigma}_\alpha \otimes \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{u}_\alpha^*]_{-h/2}^{h/2} = -\frac{j\omega}{2} \overline{\tilde{\mathbf{f}}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha^*} + O(h^2) \quad (4.41)$$

de sorte que les deux derniers termes de (4.38) s'écrivent

$$-\frac{j\omega}{2} \overline{\tilde{\mathbf{f}}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha^*} - \tau_\alpha = -\frac{j\omega}{2} \mathbf{F}_\alpha \cdot \mathbf{grad} \alpha^* + O(h^2) \quad (4.42)$$

et que l'équation (4.38) pour les variables énergétiques se réduit à

$$\mathit{div} \overline{\mathbf{I}}_\alpha = -2j\omega(\overline{T}_\alpha - \overline{U}_\alpha) - \frac{j\omega}{2} \mathbf{F}_\alpha \cdot \mathbf{grad} \alpha^* + O(h^2). \quad (4.43)$$

Le fait de négliger les termes d'ordre h^2 pour les plaques minces (h petit) permet d'écrire l'intensité de structure et les densités d'énergie moyennées sur l'épaisseur comme des formes quadratiques des variables $\mathbf{grad} \alpha$ et $\Delta \alpha$:

$$\overline{\mathbf{I}}_\alpha = \frac{j\omega}{2} \left(\begin{array}{l} \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu} \Delta \alpha \mathbf{grad} \alpha^* - \mu \Delta \alpha^* \mathbf{grad} \alpha \\ + \mu \mathbf{grad}(\mathbf{grad} \alpha \cdot \mathbf{grad} \alpha^*) + \mu \mathbf{rot}(\mathbf{grad} \alpha \times \mathbf{grad} \alpha^*) \end{array} \right) + O(h^2), \quad (4.44)$$

$$\overline{U}_\alpha = \frac{1}{4} \left(\begin{array}{l} \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} \Delta \alpha \Delta \alpha^* \\ + \mu(\Delta(\mathbf{grad} \alpha \cdot \mathbf{grad} \alpha^*) - \mathbf{grad} \alpha \cdot \mathbf{grad} \Delta \alpha^* - \mathbf{grad} \alpha^* \cdot \mathbf{grad} \Delta \alpha) \end{array} \right) + O(h^2), \quad (4.45)$$

$$\overline{T}_\alpha = \frac{\rho\omega^2}{4} (\mathbf{grad} \alpha \cdot \mathbf{grad} \alpha^*) + O(h^2). \quad (4.46)$$

En substituant l'expression (4.30) de \mathbf{F}_α dans (4.42), l'écriture suivante est obtenue pour la divergence de l'intensité de structure moyennée sur l'épaisseur :

$$\mathit{div} \overline{\mathbf{I}}_\alpha = \frac{j\omega}{2} \left(\begin{array}{l} \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} \Delta \alpha \Delta \alpha^* + \mu \Delta(\mathbf{grad} \alpha \cdot \mathbf{grad} \alpha^*) \\ + \rho\omega^2 \left(-\frac{3\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)} + \frac{\mu}{\mu^*} \frac{\lambda^*+2\mu^*}{4(\lambda^*+\mu^*)} \right) \mathbf{grad} \alpha \cdot \mathbf{grad} \alpha^* \\ - \frac{3\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)} \mathbf{F}_\alpha \cdot \mathbf{grad} \alpha^* + \frac{\mu}{\mu^*} \frac{\lambda^*+2\mu^*}{4(\lambda^*+\mu^*)} \mathbf{F}_\alpha^* \cdot \mathbf{grad} \alpha \end{array} \right) + O(h^2), \quad (4.47)$$

et une expression similaire est obtenue pour son rotationnel :

$$\mathit{rot} \overline{\mathbf{I}}_\alpha = \frac{j\omega}{2} \left(\begin{array}{l} -\rho\omega^2 \left(\frac{3\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)} + \frac{\mu}{\mu^*} \frac{\lambda^*+2\mu^*}{4(\lambda^*+\mu^*)} \right) \mathbf{grad} \alpha \times \mathbf{grad} \alpha^* \\ - \mu \Delta(\mathbf{grad} \alpha \times \mathbf{grad} \alpha^*) \\ - \frac{3\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)} \mathbf{F}_\alpha \times \mathbf{grad} \alpha^* + \frac{\mu}{\mu^*} \frac{\lambda^*+2\mu^*}{4(\lambda^*+\mu^*)} \mathbf{F}_\alpha^* \times \mathbf{grad} \alpha \end{array} \right) + O(h^2). \quad (4.48)$$

4.3.3 Discussion sur les équations et cas unidimensionnel

Les systèmes d'équations obtenues pour les ondes SH et QL présentent la même structure et des variables similaires, et sont ici traités simultanément. Il faut tout d'abord noter le parallélisme entre d'un côté les ondes QL dans les plaques et celles se propageant dans un milieu 3D (les expressions allant de (4.44) à (4.48) sont identiques aux équations (15) dans [168], où λ est remplacé par $2\lambda\mu/(\lambda + 2\mu)$), et d'un autre côté les ondes SH dans les plaques et les ondes de cisaillement polarisées dans un milieu 3D. Toutes les équations d'ondes correspondantes présentent la même structure dans la formulation en déplacement, et les expressions obtenues pour l'intensité de structure, sa divergence et son rotationnel, et les densités d'énergie sont très similaires et mettent en jeu des variables quadratiques aux propriétés identiques. En considérant à présent séparément les ondes SH et les ondes QL, l'analyse conduit aux conclusions obtenues pour ces types d'ondes se propageant dans un milieu 3D isotrope [168], et pouvant être résumées comme suit.

Le fait de substituer $\Delta\beta$ (respectivement $\Delta\alpha$) par son expression obtenue à partir de (4.12) (respectivement 4.28) dans $\text{rot } \Delta\beta$ (4.23) (respectivement $\text{grad } \Delta\alpha$ 4.45) donne, pour des ondes SH (respectivement des ondes QL), une expression pour la densité d'énergie de déformation moyennée $\overline{U_{\beta_n}}$ (respectivement $\overline{U_{\alpha}}$), mettant en jeu

- deux variables réelles positives, $\Delta\beta \cdot \Delta\beta^*$ et $\text{rot } \beta \cdot \text{rot } \beta^*$ (respectivement $\Delta\alpha \cdot \Delta\alpha^*$ et $\text{grad } \alpha \cdot \text{grad } \alpha^*$),
- le produit scalaire entre les forces extérieures et le conjugué du déplacement, autrement dit la puissance développée par les forces extérieures.

Ces variables sont également adaptées à l'expression de la densité d'énergie cinétique moyennée $\overline{T_{\beta_n}}$ (4.24) (respectivement $\overline{T_{\alpha}}$ 4.46) et, d'après (4.21) (respectivement 4.43), à celles de la divergence de l'intensité de structure moyennée (4.46).

Le rotationnel de l'intensité de structure moyennée (4.27) (respectivement 4.48) met en jeu :

- le vecteur purement imaginaire $\text{rot } \beta \times \text{rot } \beta^*$ (respectivement $\text{grad } \alpha \times \text{grad } \alpha^*$),
- le produit vectoriel entre les forces extérieures et le conjugué du déplacement, dans lequel ces deux vecteurs présentent des composantes non nulles uniquement suivant \mathbf{e}_z .

L'expression (4.22) (respectivement 4.44) de l'intensité de structure moyennée met en jeu

- le gradient de la variable réelle $\text{rot } \beta \cdot \text{rot } \beta^*$ (respectivement $\text{grad } \alpha \cdot \text{grad } \alpha^*$) et le rotationnel du vecteur purement imaginaire $\text{rot } \beta \times \text{rot } \beta^*$ (respectivement $\text{grad } \alpha \times \text{grad } \alpha^*$),
- le vecteur complexe $\Delta\beta^* \times \text{rot } \beta$ (respectivement $\Delta\alpha^* \text{grad } \alpha$), qui ne dérive ni d'un scalaire ni d'un potentiel vecteur.

Cependant l'expression (4.22) (respectivement 4.44) ne contient pas les forces extérieures. Dans cette expression, le terme $\text{grad } (\text{rot } \beta \cdot \text{rot } \beta^*)$ est proportionnel au gradient de la densité d'énergie cinétique moyennée (si le terme $O(h^2)$ est négligé pour les plaques minces dans l'équation 4.46), mais ne contribue qu'à l'intensité réactive en négligeant l'amortissement dans le matériau. Il apparaît alors clairement que pour des cas généraux, l'intensité de structure ne peut pas être exprimée à partir d'un potentiel scalaire. Les méthodes énergétiques basées sur l'analogie thermique pour les plaques [81, 82, 91] font une approximation sur (4.22) ou (4.44) en supposant l'intensité de structure égale au gradient de la densité d'énergie totale. Lorsqu'il est complété par l'équation de conservation de l'énergie (4.7), (4.21) ou (4.43), ce modèle de type gradient pour l'intensité de structure conduit à une équation présentant des similarités avec l'équation de la chaleur utilisée en thermique, et adaptée à la représentation des transferts énergétiques dans certaines structures [80, 81, 82, 91, 101]. Cette équation peut être établie sur la base d'hypothèses particulières telles qu'un amortissement faible, la correspondance entre potentiel scalaire de l'intensité et la densité d'énergie totale, la suppression des termes d'interférences et

la possibilité de moyennner spatialement les densités d'énergie.

Parce ce qu'elles sont obtenues uniquement à partir des hypothèses formulées au chapitre 2, les équations linéaires ci-dessus allant de (4.22) à (4.27) et de (4.44) à (4.48) pour les variables quadratiques sont ainsi plus générales. Leur capacité à fournir une formulation quadratique pour des champs vibratoires de plaques est à présent discutée.

Impliquant moins de variables (deux réelles et une imaginaire) et impliquant directement les forces extérieures, les expressions (4.26) et (4.27) (ou 4.47 et 4.48) pour la divergence et le rotationnel de l'intensité de structure s'avèrent plus attrayantes que les expressions (4.22) ou (4.44) pour l'intensité de structure (lesquelles impliquent un scalaire réel, un autre imaginaire et un vecteur complexe à deux composantes). Cependant les équations (4.26) et (4.27) (ou 4.47 et 4.48) impliquent plus de variables que de relations, ce qui les rend insuffisantes pour obtenir les champs vibratoires quadratiques de plaques dans les cas généraux.

Toutefois des simplifications apparaissent lorsque la propagation des ondes dans une seule direction est considérée, c'est-à-dire lorsque les champs vibratoires ne dépendent que d'une coordonnée, et une formulation quadratique exacte peut alors être obtenue comme suit : l'équation d'onde pour les ondes QL et SH dans les plaques est de la forme

$$\Delta\zeta = -k^2\zeta - \frac{k_0^2}{\rho\omega^2}\Gamma \quad (4.49)$$

lorsqu'écrite à partir de potentiels, ou

$$\Delta\boldsymbol{\chi} = -k^2\boldsymbol{\chi} - \frac{k_0^2}{\rho\omega^2}\mathbf{F} \quad (4.50)$$

lorsqu'écrite à partir du déplacement, où $\zeta = \alpha$, $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{grad} \alpha$, $\Gamma = \Gamma_\alpha$, $\mathbf{F} = \mathbf{grad} \Gamma_\alpha$ et $k^2 = k_0^2 = k_\alpha^2$ pour des ondes QL, et $\zeta = \beta$, $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{rot} \beta$, $\Gamma = \Gamma_\beta$, $\mathbf{F} = \mathbf{rot} \Gamma_\beta$, $k^2 = k_{\beta_n}^2$ et $k_0^2 = \rho\omega^2 / \mu$ pour des ondes SH. En considérant des vibrations unidimensionnelles, les champs ne dépendent que d'une direction de la plaque. Comme le matériau constitutif de la plaque est supposé isotrope, les équations restent inchangées par rapport à la direction, et seules des ondes se propageant dans la direction $\pm x$ sont considérées ici. Les potentiels du déplacement et des forces extérieures sont alors $\zeta = \zeta(x)$, $\Gamma = \Gamma(x)$ et les vecteurs $\boldsymbol{\chi}$ et \mathbf{F} ne dépendent que de x (mais orientés suivant x pour les ondes QL, et suivant z pour les ondes SH). En raison de cette dépendance par rapport à x uniquement, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \Delta(\zeta\zeta^*) &= \zeta \Delta\zeta^* + \zeta^* \Delta\zeta + 2\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\chi}^* \\ \Delta(\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\chi}^*) &= \boldsymbol{\chi} \cdot \Delta\boldsymbol{\chi}^* + \boldsymbol{\chi}^* \cdot \Delta\boldsymbol{\chi} + 2\Delta\zeta \Delta\zeta^*, \end{cases} \quad (4.51)$$

ou, en substituant (4.49) et (4.50) pour $\Delta\zeta$ et $\Delta\boldsymbol{\chi}$:

$$\begin{cases} \Delta(\zeta\zeta^*) + (k^2 + k^{*2})\zeta\zeta^* &= 2\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\chi}^* - \frac{k_0^2}{\rho\omega^2}\zeta^*\Gamma - \frac{k_0^{*2}}{\rho\omega^2}\zeta\Gamma^* \\ \Delta(\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\chi}^*) + (k^2 + k^{*2})\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\chi}^* &= 2k^2k^{*2}\zeta\zeta^* - \frac{k_0^{*2}}{\rho\omega^2}\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\chi}^* - \frac{k_0^2}{\rho\omega^2}\mathbf{F}^* \cdot \boldsymbol{\chi} \\ &+ \frac{k^2k_0^{*2} + k_0^2k^{*2}}{\rho\omega^2}(\zeta^*\Gamma + \zeta\Gamma^*) + \frac{2k_0^2k_0^{*2}}{\rho^2\omega^4}\Gamma\Gamma^*. \end{cases} \quad (4.52)$$

Lorsque les sources d'excitation de la plaque sont connues (c'est-à-dire lorsque les termes $\zeta\Gamma^*$, $\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\chi}^*$ et $\Gamma\Gamma^*$ sont connus), et lorsque les conditions limites lui sont adjointes, le système (4.52) de deux

équations à deux inconnues $\zeta\zeta^*$ et $\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\chi}^*$ peut être résolu, donnant la solution pour ces deux variables quadratiques réelles positives. Les densités d'énergie moyennées et la divergence de l'intensité de structure moyennée sont alors exprimées à partir des variables quadratiques $\zeta\zeta^*$, $\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\chi}^*$ et des termes d'excitation $\zeta\Gamma^*$, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}^*$ et $\Gamma\Gamma^*$, en remplaçant $\Delta\zeta$ et $\Delta\boldsymbol{\chi}$ par (4.49) et (4.50), soit dans (4.23), (4.24) et (4.26), soit dans (4.45), (4.46) et (4.47).

De par la forme de $\boldsymbol{\chi}(x)$ et $\mathbf{F}(x)$, la divergence de l'intensité de structure dépend uniquement de x , est orientée suivant $\pm x$, et son rotationnel (4.27) ou (4.48) est nul. Le flux de puissance dans la plaque peut alors être déterminé en intégrant le membre de droite de (4.26) ou (4.47), avec les conditions limites appropriées, afin d'obtenir l'intensité de structure moyennée sur l'épaisseur. Cette approche, basée sur une formulation quadratique, est similaire pour des ondes gouvernées par une équation d'ordre deux dans les plaques et dans un milieu 3D [168] lorsqu'un seul type d'ondes est considéré (longitudinales ou de cisaillement). L'application numérique pour les équations (4.52) et la détermination de l'intensité de structure seraient identiques à celles pour l'équation (27) dans [168] et ne sont pas développées ici. Il est intéressant de considérer, exprimé à partir de variables quadratiques, le champ unidimensionnel dans une portion de plaque libre. Aucun chargement extérieur n'est alors appliqué à la plaque ($\Gamma = 0$, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$), de sorte que les variables quadratiques $\zeta\zeta^*$ et $\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\chi}^*$ vérifient le système homogène associé à (4.52), qui se réduit à

$$\begin{cases} \Delta(\zeta\zeta^*) + (k^2 + k^{*2})\zeta\zeta^* &= 2\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\chi}^* \\ \Delta(\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\chi}^*) + (k^2 + k^{*2})\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\chi}^* &= 2k^2k^{*2}\zeta\zeta^*. \end{cases} \quad (4.53)$$

Un système similaire d'équations peut être écrit pour les densités d'énergie T et U au lieu de $\zeta\zeta^*$ et $\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\chi}^*$. Les équations (4.53) peuvent être combinées pour obtenir une équation d'ordre quatre pour une seule variable, valable indifféremment pour les variables $\xi = \zeta\zeta^*$ ou $\xi = \boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\chi}^*$:

$$\left(\Delta\Delta + 2(k^2 + k^{*2})\Delta + (k^2 - k^{*2})^2 \right) \xi = 0, \quad (4.54)$$

ce qui peut se factoriser sous la forme

$$(\Delta - r_1)(\Delta - r_2)\xi = 0, \quad (4.55)$$

où $r_1 = (\pm j(k - k^*))^2$ et $r_2 = (\pm j(k + k^*))^2$, de sorte que dans une portion de plaque libre, la solution analytique pour les variables quadratiques $\zeta\zeta^*$ et $\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\chi}^*$ est la somme de quatre composantes, présentant les nombres d'ondes $\pm(k \pm k^*)$ dans la direction x . Ainsi les densités d'énergie et l'intensité de structure présentent toutes quatre composantes correspondant aux nombres d'ondes $\pm(k \pm k^*)$. Pour des champs unidimensionnels, cette forme est valable pour toute variable quadratique : en tant que moyenne temporelle du produit de deux composantes du déplacement (ou de ses dérivées) de nombres d'ondes $\pm k$, les nombres d'ondes des variables quadratiques résultent des quatre combinaisons, donnant les quatre composantes deux à deux opposées et purement réelles ou imaginaires $\pm(k \pm k^*)$.

Beaucoup de méthodes énergétiques [80, 81, 88, 91] sont basées sur des hypothèses conduisant à négliger certaines de ces composantes. Par exemple, en écrivant $k^2 = k_R^2(1 + j\eta)$ et en faisant l'hypothèse d'amortissement faible $\eta \ll 1$, l'équation factorisée (4.55) peut s'écrire $(\Delta - k_R^2\eta^2)(\Delta + 4k_R^2)\xi = 0$; seul le premier facteur est considéré pour la densité d'énergie totale W (conduisant aux seules composantes de nombres d'ondes $\pm(k - k^*)$), et seul le second facteur est considéré pour la densité lagrangienne L (conduisant aux seules composantes de nombres d'ondes $\pm(k + k^*)$) dans la méthode GEM [85].

4.4 Ondes de flexion régies par une équation d'ordre 4

4.4.1 Modèle de Kirchhoff pour les plaques en flexion

Le fait d'intégrer les différentes composantes cartésiennes de l'équation du mouvement (4.2) après avoir multiplié les deux premières par z , ainsi que la prise en compte d'interfaces libres, donne [175]

$$\begin{cases} M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x + \rho\omega^2 R_x & = 0 \\ M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y + \rho\omega^2 R_y & = 0 \\ Q_{x,x} + Q_{y,y} + \rho\omega^2 T_z + F_z & = 0 \end{cases} \quad (4.56)$$

où

$$\begin{aligned} M_x &= h\overline{\sigma_{xx} z}, & M_y &= h\overline{\sigma_{yy} z}, & M_{xy} &= h\overline{\sigma_{xy} z}, \\ Q_x &= h\overline{\sigma_{xz}}, & Q_y &= h\overline{\sigma_{yz}}, & T_z &= h\overline{u_z}, \\ R_x &= h\overline{u_x z}, & R_y &= h\overline{u_y z}, & F_z &= h\overline{f_z}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

En particulier les quantités M_x et M_y désignent des moments de flexion par unité de longueur, M_{xy} un moment de torsion par unité de longueur, Q_x et Q_y des efforts tranchants par unité de longueur. Ces quantités sont calculées à partir d'un tenseur des contraintes σ symétrique. Les expressions de Q_x et Q_y obtenues à partir des deux premières composantes de (4.56), et réinjectées dans la troisième donne l'équation suivante [175] :

$$M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + \rho\omega^2(R + T_z) + F_z = 0, \quad (4.58)$$

où $R = R_{x,x} + R_{y,y}$.

Le modèle de Kirchhoff pour les ondes de flexion suppose que le champ de déplacement est de la forme

$$\mathbf{u}(x, y, z) = -zw_x \mathbf{e}_x - zw_y \mathbf{e}_y + w \mathbf{e}_z, \quad (4.59)$$

où le champ scalaire $w(x, y)$ représente le mouvement de flexion de la plaque mince.

Les quantités énergétiques moyennées sur l'épaisseur peuvent être exprimées en utilisant les variables (4.57) et les champs de déplacement et de déformations peuvent être déterminés à partir de ce modèle cinématique approché : comme w^* et ses dérivées par rapport aux coordonnées du plan de la plaque ne dépendent pas de z , les composantes dans ce plan de l'intensité de structure moyennée sur l'épaisseur se construisent à partir de

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_{xx} u_x^* + \sigma_{xy} u_y^* + \sigma_{xz} u_z^*} &= (-M_x w_{,x}^* - M_{xy} w_{,y}^* + Q_x w^*)/h, \\ \overline{\sigma_{xy} u_x^* + \sigma_{yy} u_y^* + \sigma_{yz} u_z^*} &= (-M_{xy} w_{,x}^* - M_y w_{,y}^* + Q_y w^*)/h. \end{aligned} \quad (4.60)$$

La composante hors du plan se construit à partir de $\overline{\sigma_{zx} u_x^* + \sigma_{zy} u_y^* + \sigma_{zz} u_z^*}$, où σ_{zz} est nul, les composantes de cisaillement σ_{xz} and σ_{yz} sont symétriques et les déplacements u_x^* and u_y^* (4.59) sont antisymétriques par rapport à z . L'intensité de structure moyennée sur l'épaisseur présente alors les composantes suivantes (l'intensité de structure résultante étant présentée dans [150, 169, 177]) :

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{e}_x &= \frac{j\omega}{2h} (-M_x w_{,x}^* - M_{xy} w_{,y}^* + Q_x w^*) \\ \overline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{e}_y &= \frac{j\omega}{2h} (-M_{xy} w_{,x}^* - M_y w_{,y}^* + Q_y w^*) \\ \overline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{e}_z &= 0 \end{cases} \quad (4.61)$$

A partir du modèle de Kirchhoff (4.59), la densité d'énergie cinétique moyennée sur l'épaisseur s'écrit

$$\overline{T} = \frac{\rho\omega^2}{4} \left(w w^* + \frac{h^2}{12} (w_{,x} w_{,x}^* + w_{,y} w_{,y}^*) \right), \quad (4.62)$$

et le fait d'exprimer le conjugué ϵ^* du tenseur des déformations à partir de (4.59) donne

$$\overline{\sigma_{xx}\epsilon_{xx}^* + 2\sigma_{xy}\epsilon_{xy}^* + \sigma_{yy}\epsilon_{yy}^*} = -M_x w_{,x^2}^* - 2M_{xy} w_{,xy}^* - M_y w_{,y^2}^*. \quad (4.63)$$

Les composantes de cisaillement du tenseur des déformations sont négligées :

$$\epsilon_{xz}^* = (u_{x,z}^* + u_{z,x}^*)/2 = 0, \quad \epsilon_{yz}^* = (u_{y,z}^* + u_{z,y}^*)/2 = 0, \quad (4.64)$$

et comme la composante σ_{zz} du tenseur des contraintes est nulle, la densité d'énergie de déformation moyennée sur l'épaisseur est alors de la forme [150, 175, 177] :

$$\bar{U} = -\frac{1}{4h}(M_x w_{,x^2}^* + 2M_{xy} w_{,xy}^* + M_y w_{,y^2}^*). \quad (4.65)$$

Certaines variables de (4.57) peuvent être exprimées à partir de w en utilisant le modèle de Kirchhoff :

$$R_x = -\frac{h^3}{12} w_{,x}, \quad R_y = -\frac{h^3}{12} w_{,y}, \quad R = -\frac{h^3}{12} \Delta w, \quad T_z = hw, \quad (4.66)$$

et, en négligeant σ_{zz} et en exprimant les contraintes σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} à partir de (4.59) et (1.1) [150, 175, 177] :

$$M_x = -D(w_{,x^2} + \nu w_{,y^2}), \quad M_y = -D(w_{,y^2} + \nu w_{,x^2}), \quad M_{xy} = -D(1 - \nu)w_{,xy}, \quad (4.67)$$

où $D = \frac{h^3}{12} \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}$ est la rigidité de flexion de la plaque et $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ le coefficient de Poisson du matériau. Cependant, comme le modèle de Kirchhoff néglige les déformations de cisaillement ($\epsilon_{xz}^* = 0$, $\epsilon_{yz}^* = 0$), déterminer σ_{xz} et σ_{yz} de la même manière reviendrait à négliger Q_x et Q_y , alors que, pour une seule onde se propageant selon x , le terme $Q_x w^*$ de (4.61) contribue pour moitié au flux de puissance [177].

Les expressions de Q_x et Q_y s'obtiennent ici à partir des deux premières équations du système (4.56), et en utilisant les équations (4.66) et (4.67) pour M_x , M_y , M_{xy} , R_x et R_y :

$$Q_x = -D\Delta w_{,x} - \rho\omega^2 h^3 w_{,x}/12, \quad Q_y = -D\Delta w_{,y} - \rho\omega^2 h^3 w_{,y}/12. \quad (4.68)$$

Substituer les relations (4.66), (4.67) et (4.68) dans (4.58) donne la formulation en déplacement pour les ondes de flexion :

$$\Delta^2 w + k^4 \frac{h^2}{12} \Delta w - k^4 w = \frac{F_z}{D}, \quad (4.69)$$

où k est le nombre d'onde de Kirchhoff approché pour les ondes de flexion, qui s'écrit

$$k = \rho\omega^2 \frac{h}{D} = \rho\omega^2 \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda + \mu)} \frac{12}{h^2}. \quad (4.70)$$

Lorsque le terme $k^4 \frac{h^2}{12} \Delta w$ de (4.69), tenant compte de l'inertie de rotation, est négligé, cette équation se réduit à l'équation bi-harmonique

$$\Delta^2 w - k^4 w = \frac{F_z}{D}. \quad (4.71)$$

4.4.2 Expressions quadratiques pour les quantités énergétiques

En exprimant les variables (4.56) à l'aide de w , et en prenant notamment pour les efforts tranchants Q_x et Q_y les expressions (4.68) tenant compte de l'inertie de rotation, les variables énergétiques (4.61), (4.62) et (4.65) peuvent s'écrire comme suit, à partir des différentes variables quadratiques construites à l'aide du champ $w(x, y)$:

$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{j\omega h^2}{2} \frac{h^2}{12} \left(\begin{array}{l} \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} \Delta w \mathbf{grad} w^* - \mu \Delta w^* \mathbf{grad} w \\ - \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} w^* \mathbf{grad} \Delta w - \rho\omega^2 w^* \mathbf{grad} w \\ + \mu \mathbf{grad} (\mathbf{grad} w \cdot \mathbf{grad} w^*) + \mu \mathbf{rot} (\mathbf{grad} w \times \mathbf{grad} w^*) \end{array} \right), \quad (4.72)$$

$$\bar{T} = \frac{\rho\omega^2}{4} \left(ww^* + \frac{h^2}{12} \mathbf{grad} w \cdot \mathbf{grad} w^* \right), \quad (4.73)$$

$$\bar{U} = \frac{1}{4} \frac{h^2}{12} \left(\begin{array}{l} \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \Delta w \Delta w^* + \mu (\Delta (\mathbf{grad} w \cdot \mathbf{grad} w^*)) \\ - \mathbf{grad} w \cdot \mathbf{grad} \Delta w^* - \mathbf{grad} w^* \cdot \mathbf{grad} \Delta w \end{array} \right). \quad (4.74)$$

Il est important de noter que l'expression (4.72) pour l'intensité de structure moyennée sur l'épaisseur utilise les coefficients de Lamé afin de faire apparaître les différentes variables quadratiques mises en jeu, plutôt que la rigidité de flexion D qui permet de mettre l'intensité complexe sous une forme vectorielle compacte.

Le plus souvent, les expressions des efforts tranchants Q_x et Q_y employées pour obtenir l'intensité des ondes de flexion des plaques sont [147, 177, 178, 179] :

$$Q_x = -D\Delta w_{,x}, \quad Q_y = -D\Delta w_{,y}, \quad (4.75)$$

que Meirovitch [180] écrit sous la forme équivalente :

$$Q_x = M_{x,x} + M_{xy,y}, \quad Q_y = M_{y,y} + M_{xy,x}. \quad (4.76)$$

L'intensité de structure correspondante, notée $\mathbf{\Pi}$, a pour composantes Π_x et Π_y s'écrivant

$$\Pi_x = \frac{-j\omega D}{2h} (w^* \Delta w_{,x} - (w_{,x^2} + \nu w_{,y^2} w_{,x}^*) - (1 - \nu) w_{,xy} w_{,y}^*), \quad (4.77)$$

$$\Pi_y = \frac{-j\omega D}{2h} (w^* \Delta w_{,y} - (w_{,y^2} + \nu w_{,x^2} w_{,y}^*) - (1 - \nu) w_{,xy} w_{,x}^*). \quad (4.78)$$

Seule la partie réelle $\mathbf{Re}(\mathbf{\Pi})$ employée dans les études portant sur l'intensité active peut se mettre sous la forme vectorielle compacte [154], en gardant la rigidité de flexion D en facteur et en négligeant la dissipation (c'est-à-dire D réel) :

$$\mathbf{Re}(\mathbf{\Pi}) = \frac{\omega D}{2h} \mathbf{Im} \left(w^* \mathbf{grad} \Delta w - \Delta w \mathbf{grad} w^* - \frac{1 - \nu}{2} \mathbf{rot} (\mathbf{grad} w \times \mathbf{grad} w^*) \right) \quad (4.79)$$

En résumé, l'équation (4.72) ne diffère de (4.77) et (4.78) que par le développement de D et ν en fonction des coefficients de Lamé λ et μ et par la prise en compte de l'inertie de rotation par l'intermédiaire de R_x et R_y (4.66).

Les expressions obtenues ici pour les grandeurs énergétiques, où les termes $-\rho\omega^2 w^* \mathbf{grad} w$ de (4.72)

et $h^2 \mathbf{grad} w \cdot \mathbf{grad} w^* / 12$ de (4.73) rendent compte de l'inertie de rotation, sont basés sur le même modèle de Kirchhoff, et contiennent exactement les mêmes approximations que (4.61), (4.62) et (4.65). L'équation moyennée sur l'épaisseur (4.7) est donc vérifiée par les expressions (4.72), (4.73) et (4.74) :

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{I}} = -2j\omega(\bar{T} - \bar{U}) - \frac{j\omega}{2h} F_z w^*, \quad (4.80)$$

et les relations suivantes sont obtenues pour la divergence et le rotationnel de l'intensité de structure moyennée sur l'épaisseur

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{I}} = \frac{j\omega}{2} \left(\begin{array}{c} \frac{h^2}{12} \left(\frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \Delta w \Delta w^* - 2\mu \operatorname{Re}(\mathbf{grad} \Delta w \cdot \mathbf{grad} w^*) \right) \\ + \mu \Delta(\mathbf{grad} w \cdot \mathbf{grad} w^*) - \rho\omega^2 \mathbf{grad} w \cdot \mathbf{grad} w^* \\ - \rho\omega^2 w w^* - \frac{1}{h} F_z w^* \end{array} \right), \quad (4.81)$$

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{I}} = \frac{j\omega}{2} \frac{h^2}{12} \left(\begin{array}{c} \frac{\mu(7\lambda + 6\mu)}{\lambda + 2\mu} \mathbf{grad} \Delta w \times \mathbf{grad} w^* - \mu \mathbf{grad} \Delta w^* \times \mathbf{grad} w \\ + \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot}(\mathbf{grad} w \times \mathbf{grad} w^*) + \rho\omega^2 \mathbf{grad} w \times \mathbf{grad} w^* \end{array} \right). \quad (4.82)$$

A l'exception du terme $-F_z w^*/h$, tous les termes en facteur de $j\omega/2$ dans (4.81) sont réels et concernent donc en majeure partie la divergence de l'intensité réactive. Ce n'est que par l'intermédiaire de la partie imaginaire ou "dissipative" des coefficients de Lamé λ et μ que ces termes contribuent à l'intensité active :

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{I}} = \frac{\omega}{2h} \operatorname{Im}(F_z w^*) + \frac{\omega h^2}{24} \left(\begin{array}{c} -\operatorname{Im} \left(\frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \right) \Delta w \Delta w^* \\ + \operatorname{Im}(\mu) (2\operatorname{Re}(\mathbf{grad} \Delta w \cdot \mathbf{grad} w^*) - \Delta(\mathbf{grad} w \cdot \mathbf{grad} w^*)) \end{array} \right). \quad (4.83)$$

Les relations (4.72), (4.73), (4.74) et (4.81), (4.82) impliquent des variables telles que $w w^*$, les produits scalaire et vectoriel entre $\mathbf{grad} w$ et son conjugué, ou la puissance développée par les forces extérieures $j\omega F_z w^*/2$. Mais d'autres variables quadratiques sont composées de la dérivée seconde et tierce de w (telles que Δw ou $\mathbf{grad} \Delta w$). De telles variables, constituées de dérivées d'ordre deux ou trois, pourraient être exprimées à l'aide de variables d'ordre inférieur lorsque des ondes gouvernées par une équation du mouvement d'ordre deux comme les ondes SH ou QL sont considérées. Mais pour des champs généraux d'ondes de flexion, l'équation du mouvement (4.69), d'ordre quatre, ne peut pas être utilisée pour exprimer ces quantités quadratiques à l'aide de variables composées du produit des forces extérieures avec des dérivées d'ordre inférieur, telles que $\mathbf{grad} w \cdot \mathbf{grad} w^*$ ou $\mathbf{grad} w \times \mathbf{grad} w^*$. Les expressions (4.72), (4.73), (4.74) et (4.81), (4.82) rendent alors le nombre de variables plus important que le nombre de relations. Par conséquent ces expressions ne sont pas adéquates pour une formulation quadratique concernant des ondes de flexion en général.

Toutefois des simplifications apparaissent pour des configurations particulières. C'est le cas des ondes de flexion unidimensionnelles pour lesquelles une formulation quadratique exacte existe.

4.4.3 Formulation quadratique pour les ondes de flexion unidimensionnelles

Pour des ondes de flexion unidimensionnelles, w ne dépend que d'une coordonnée de l'espace, par exemple $w(x)$. Les équations (4.72), (4.73), (4.74) et (4.81), (4.82) sont alors particulièrement simplifiées : l'intensité de structure moyennée sur l'épaisseur $\bar{\mathbf{I}}$ est alors orientée suivant $\pm x$ et de

rotationnel nul, ce qui signifie que \bar{T} dérive d'un potentiel scalaire.

Par souci de simplicité, l'inertie de rotation est négligée et les ondes de flexion sont gouvernées par (4.71), mais les résultats de cette section peuvent être aisément étendus à des modèles plus complets. En notant les variables $\xi_{mn} = w_{,x^m} w_{,x^n}^*$, les variables quadratiques de (4.73), (4.74) pour les densités d'énergie et (4.81) pour la divergence de l'intensité de structure sont $\xi_{00} = ww^*$, $\xi_{22} = w_{,x^2} w_{,x^2}^*$, $\xi_{13} = w_{,x} w_{,x^3}^*$ et son conjugué $\xi_{31} = w_{,x^3} w_{,x}^*$, et $\Delta\xi_{11} = \Delta(w_{,x} w_{,x}^*) = \xi_{31} + \xi_{13} + 2\xi_{22}$ (les autres occurrences de ξ_{11} sont liées à l'inertie de rotation, et négligées ici).

Les variables quadratiques adéquates sont alors :

- les deux variables réelles positives ξ_{00} and ξ_{22} , respectivement proportionnelles aux densités d'énergie cinétique et de déformation moyennées sur l'épaisseur :

$$\bar{T} = \frac{\rho\omega^2}{4} \xi_{00}, \quad \bar{U} = \frac{1}{4} \frac{h^2}{12} \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} \xi_{22} \quad (4.84)$$

- et la variable quadratique complexe ξ_{13} .

Ces variables sont liées par les trois équations différentielles d'ordre quatre suivantes

$$\begin{aligned} \Delta\Delta\xi_{00} - (k^4 + k^{*4})\xi_{00} &= 6\xi_{22} + 4\xi_{13} + 4\xi_{13}^* + \eta_{00} + \eta_{00}^* \\ \Delta\Delta\xi_{22} - (k^4 + k^{*4})\xi_{22} &= 6k^4 k^{*4} \xi_{00} + 4k^4 \xi_{13} + 4k^{*4} \xi_{13}^* + 6k^4 \eta_{00} + 6k^{*4} \eta_{00}^* \\ &\quad + 4\eta_{13} + 4\eta_{13}^* + \eta_{22} + \eta_{22}^* + 6\pi_{00} \\ \Delta\Delta\xi_{13} - (k^4 + k^{*4})\xi_{13} &= 6k^{*4} \xi_{13}^* + 4k^4 k^{*4} \xi_{00} + 4k^{*4} \xi_{22} + 4k^4 \eta_{00} + 4k^{*4} \eta_{00}^* \\ &\quad + 4\eta_{22} + 6\eta_{13} + \eta_{13}^* + \eta_{31} + 4\pi_{00} \end{aligned} \quad (4.85)$$

obtenues par dérivations successives et substitution de $\Delta^2 w$ par son expression (4.71) à chaque apparition, les forces extérieures étant représentées par les termes

$$\eta_{mn} = F_{z,x^m}^* w_{,x^n} / D^*, \quad \pi_{00} = F_z F_z^* / (DD^*). \quad (4.86)$$

Les équations différentielles (4.85) sont constituées d'une équation réelle et de deux complexes ; lorsqu'elles sont combinées, une équation d'ordre 16 d'une seule variable ξ_{mn} est obtenue, de la forme

$$\begin{aligned} -\Delta^8 \xi_{00} + 4(k^4 + k^{*4})\Delta^6 \xi_{00} + (-6k^8 + 124k^4 k^{*4} - 6k^{*8})\Delta^4 \xi_{00} \\ + (4k^{12} + 124k^8 k^{*4} + 124k^4 k^{*8} + 4k^{*12})\Delta^2 \xi_{00} \\ - (k^{16} - 4k^{12} k^{*4} + 6k^8 k^{*8} - 4k^4 k^{*12} + k^{*16})\xi_{00} = \Theta_{00}, \end{aligned} \quad (4.87)$$

où le membre de gauche est inchangé pour les variables ξ_{00} , ξ_{22} ou ξ_{13} , et le membre de droite, respectivement Θ_{00} , Θ_{22} ou Θ_{13} , est une combinaison des dérivées des termes d'excitation η_{mn} ou π_{00} (4.86).

La solution homogène de (4.87) correspond aux solutions unidimensionnelles pour des ondes de flexion dans une portion de plaque libre de tout chargement et s'avère intéressante puisqu'une fois les forces extérieures supprimées, les solutions sont de la forme $\xi_{mn}(x) = \hat{\xi}_{mn} e^{Z_k x}$, où Z_k est une des 16 racines du polynôme

$$\begin{aligned} P(Z) = & -Z^{16} + 4(k^4 + k^{*4})Z^{12} + (-6k^8 + 124k^4 k^{*4} - 6k^{*8})Z^8 \\ & + (4k^{12} + 124k^8 k^{*4} + 124k^4 k^{*8} + 4k^{*12})Z^4 - (k^{16} - 4k^{12} k^{*4} + 6k^8 k^{*8} - 4k^4 k^{*12} + k^{*16}), \end{aligned} \quad (4.88)$$

qui peut être factorisé sous la forme

$$P(Z) = \prod_{m,n=0,1,2,3} (j^m k + j^n k^* - Z). \quad (4.89)$$

Les racines de $P(Z)$ sont représentées dans le plan complexe dans la figure 4.2, et peuvent être interprétées comme suit. Le champ de déplacement $w(x)$ pour des ondes de flexion unidimensionnelles est la somme de quatre ondes, chacune d'elles ayant une amplitude complexe : une onde aller et une onde retour, avec des nombres d'ondes $\pm k$, et deux ondes évanescentes opposées avec des nombres d'ondes $\pm jk$. Ces quatre nombres d'ondes ne se situent pas exactement sur les axes réel et imaginaire en raison des propriétés dissipatives du matériau, autrement dit de la partie imaginaire de la rigidité de flexion D induite par celles des coefficients de Lamé λ and μ . Une variable quadratique

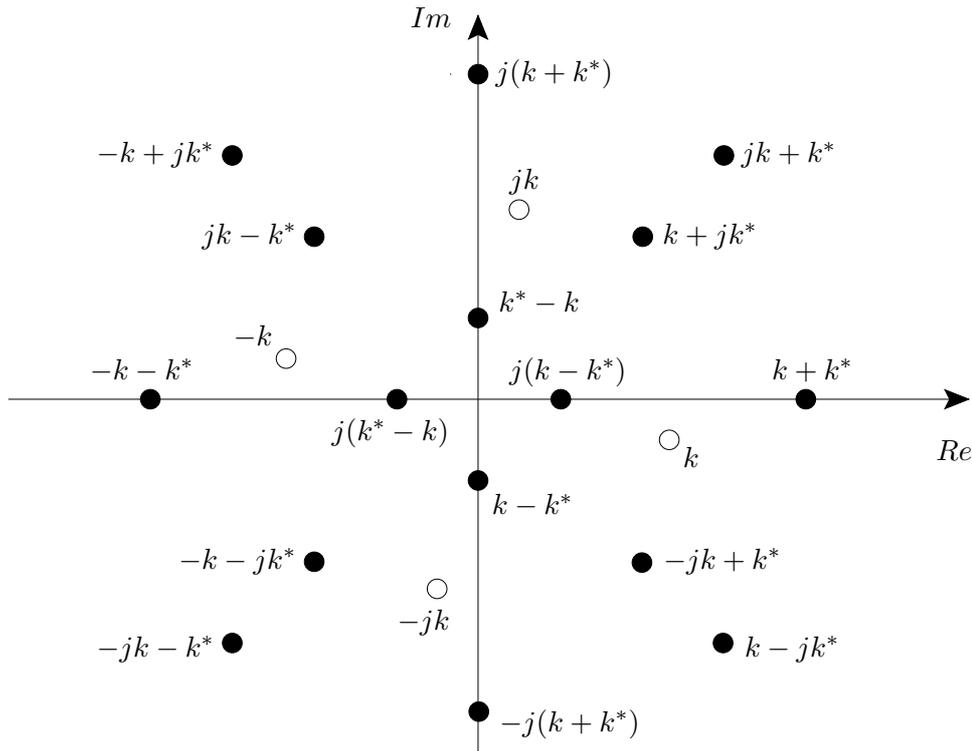


FIG. 4.2 – Représentation des nombres d'ondes, dans le plan complexe, pour des ondes de flexion unidimensionnelles dans une plaque, par des cercles vides (○) pour les 4 composantes $j^m k$, $m = 0, 1, 2, 3$, du déplacement, et par des cercles pleins (●) pour les 16 composantes $j^m k + j^n k^*$, m et $n = 0, 1, 2, 3$, des variables quadratiques.

ξ_{mn} est la moyenne temporelle du produit d'une dérivée d'ordre m du déplacement ($w_{,m}$) avec le conjugué d'une dérivée d'un autre ordre n ($w_{,n}^*$). Elle peut donc être présentée comme la somme de 16 composantes quadratiques, représentant, respectivement, le produit d'une des quatre ondes (propagative ou évanescente, orientée suivant $\pm x$) avec une autre, et dont les nombres d'ondes sont les racines de $P(Z)$ (4.89), c'est-à-dire comme la somme d'un nombre d'onde du déplacement $\pm k$ ou $\pm jk$ et du conjugué d'un autre. Représentés en cercles pleins dans la figure 4.2, les 16 nombres d'ondes résultants se divisent en quatre réels purs, quatre imaginaires purs, et comme l'inertie de rotation est négligée, quatre nombres sur la première bissectrice des axes et quatre autres sur la seconde bissectrice, et où les composantes quadratiques peuvent être associées par paires de nombres d'ondes de type similaire mais de directions opposées.

La solution générale du système homogène associé à (4.85) est alors de la forme

$$\begin{aligned} \xi_{00} = & c_1 \sin((jk + jk^*)x) + c_2 \cos((jk + jk^*)x) + c_3 \sin((jk - jk^*)x) + c_4 \cos((jk - jk^*)x) \\ & + c_5 \sin((k + jk^*)x) + c_6 \cos((k + jk^*)x) + c_7 \sin((k - jk^*)x) + c_8 \cos((k - jk^*)x) \\ & + c_9 \sin((jk + k^*)x) + c_{10} \cos((jk + k^*)x) + c_{11} \sin((jk - k^*)x) + c_{12} \cos((jk - k^*)x) \\ & + c_{13} \sin((k + k^*)x) + c_{14} \cos((k + k^*)x) + c_{15} \sin((k - k^*)x) + c_{16} \cos((k - k^*)x), \end{aligned} \quad (4.90)$$

$$\xi_{22} = k^2 k^{*2} \begin{pmatrix} c_1 \sin((jk + jk^*)x) + c_2 \cos((jk + jk^*)x) + c_3 \sin((jk - jk^*)x) \\ + c_4 \cos((jk - jk^*)x) - c_5 \sin((k + jk^*)x) - c_6 \cos((k + jk^*)x) \\ - c_7 \sin((k - jk^*)x) - c_8 \cos((k - jk^*)x) - c_9 \sin((jk + k^*)x) \\ - c_{10} \cos((jk + k^*)x) - c_{11} \sin((jk - k^*)x) - c_{12} \cos((jk - k^*)x) \\ + c_{13} \sin((k + k^*)x) + c_{14} \cos((k + k^*)x) + c_{15} \sin((k - k^*)x) + c_{16} \cos((k - k^*)x), \end{pmatrix} \quad (4.91)$$

$$\xi_{13} = k k^{*3} \begin{pmatrix} -c_1 \sin((jk + jk^*)x) - c_2 \cos((jk + jk^*)x) + c_3 \sin((jk - jk^*)x) \\ + c_4 \cos((jk - jk^*)x) + j c_5 \sin((k + jk^*)x) + j c_6 \cos((k + jk^*)x) \\ - j c_7 \sin((k - jk^*)x) - j c_8 \cos((k - jk^*)x) + j c_9 \sin((jk + k^*)x) \\ + j c_{10} \cos((jk + k^*)x) - j c_{11} \sin((jk - k^*)x) - j c_{12} \cos((jk - k^*)x) \\ + c_{13} \sin((k + k^*)x) + c_{14} \cos((k + k^*)x) - c_{15} \sin((k - k^*)x) - c_{16} \cos((k - k^*)x), \end{pmatrix} \quad (4.92)$$

où, en raison de la réelle positivité de ξ_{00} et ξ_{22} , les 16 coefficients d'amplitudes c_1 à c_{16} présentent les propriétés suivantes :

- $c_2, c_3, c_4, c_{13}, c_{14}, c_{16}$ sont purement réels, c_1, c_{15} sont purement imaginaires,
- et les coefficients restant sont complexes conjugués ($c_7 = c_9^*, c_8 = c_{10}^*, c_5 = c_{11}^*, c_6 = c_{12}^*$).

Les résultats ci-dessus peuvent être reliés à ceux obtenus dans des travaux précédents : en considérant un amortissement faible et en négligeant les composantes de déformation pour la densité d'énergie de déformation et la rotation pour la densité d'énergie cinétique dans des poutres en flexion, Le Bot et Jezequel ont obtenu un système d'équations différentielles couplées d'ordre huit pour les densités d'énergie totale (W) et lagrangienne (L) [97]. Une fois écrite comme un système de 16 équations du premier ordre, cette formulation fournit 16 valeurs propres, dont les expressions sont les premiers termes non nuls de l'expansion, pour un facteur d'amortissement η faible, des 16 nombres d'ondes $j^m k + j^n k^*$, m et $n = 0, 1, 2, 3$ pour les variables quadratiques. Mais souvent, seules certaines des 16 composantes quadratiques ci-dessus sont conservées. C'est notamment le cas lorsque certaines interactions entre les différentes ondes sont négligées. Par exemple, en écrivant $k^4 = k_0^4(1 + 2j\eta)$ et pour un facteur d'amortissement faible ($\eta \ll 1$), l'équation factorisée (4.89) peut être présentée comme

$$(\Delta - \eta^2 k_0^2)(\Delta + \eta^2 k_0^2)(\Delta - 4k_0^2)(\Delta + 4k_0^2) ((\Delta - 2jk_0^2)(\Delta + 2jk_0^2))^2 = 0. \quad (4.93)$$

Lorsque les ondes évanescences sont ignorées, seuls les premier $(\Delta - \eta^2 k_0^2)$ et quatrième $(\Delta + 4k_0^2)$ facteurs sont conservés, prenant en compte, respectivement, les composantes quadratiques construites à partir des ondes propagatives suivant les directions $\pm x$ avec des nombres d'ondes $\pm(k - k^*)$, et des ondes contre-propagatives avec des nombres d'ondes $\pm(k + k^*)$. Le fait de négliger les ondes évanescences et le champ résultant des interférences entre les différentes ondes propagatives, usuel dans les modèles reposant sur l'analogie thermique, conduit à ne considérer que le premier facteur. Dans l'équation factorisée (4.93), les second et troisième facteurs $(\Delta + \eta^2 k_0^2)(\Delta - 4k_0^2)$ représentent les variables quadratiques construites à partir des ondes évanescences, et les quatre derniers $((\Delta - 2jk_0^2)(\Delta + 2jk_0^2))^2$ concernent des variables impliquant une onde propagative et une onde évanescence, avec des nombres d'ondes se situant sur les lignes bissectrices du plan complexe dans la figure 4.2.

4.5 Application : solution quadratique pour les ondes de flexion unidimensionnelles

Les relations obtenues entre les variables énergétiques et les variables quadratiques pour les ondes de flexion conduisent à des formulations quadratiques pour les systèmes unidimensionnels, de sorte que des champs énergétiques exacts peuvent être obtenus directement en utilisant des variables quadratiques. Ce modèle unidimensionnel est adéquat pour des systèmes généraux, pour peu que les hypothèses du chapitre 2 soient vérifiées.

La plaque semi-infinie dont la géométrie est définie par $-1 \leq x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, $-h/2 \leq z \leq h/2$ est considérée, avec les coefficients de Lamé λ et μ et une masse volumique ρ . La plaque est excitée par une force normale constante F_z concentrée sur la ligne $x = 0$, $z = 0$, avec une condition libre à gauche ($x = -1$), une terminaison anéchoïque à droite $x \rightarrow +\infty$ et un appui simple en $x = 1$ (Figure 4.3). En raison des conditions limites et des forces extérieures, les ondes de flexion, propagatives et évanescentes, sont orientées dans les directions $\pm x$. Les grandeurs énergétiques peuvent être obtenues

- en calculant le champ de déplacement $w(x)$ à partir de la formulation en déplacement (4.71) et, dans un second temps, en calculant les densités d'énergie et l'intensité de structure à partir de ce champ de déplacement,
- en utilisant la formulation quadratique (4.85) pour calculer directement les variables quadratiques ξ_{mn} , les densités d'énergie (4.84) et intégrer (4.80) afin d'obtenir l'intensité de structure.

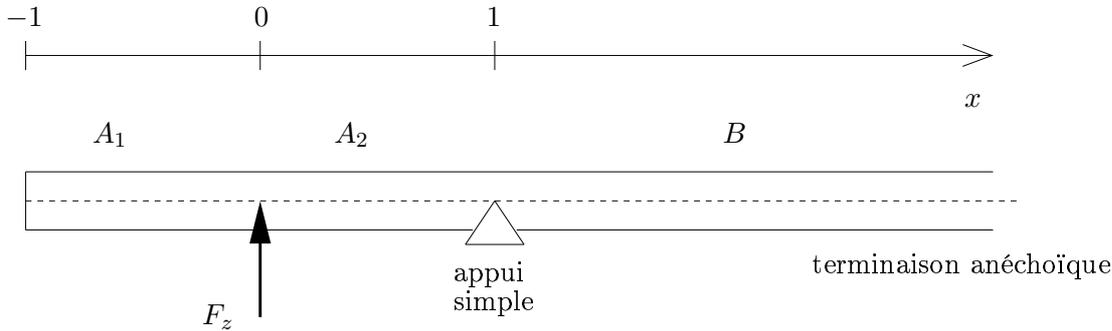


FIG. 4.3 – Plaque semi-infinie considérée pour des ondes de flexion orientées suivant x ($-\infty < y < +\infty$), composée de trois sections A_1 ($-1 < x < 0$), A_2 ($0 < x < 1$) et B ($1 < x < +\infty$), excitée par une force concentrée F_z en $x = 0$, simplement appuyée en $x = 1$, libre en $x = -1$ et avec une terminaison anéchoïque en $x \rightarrow +\infty$.

4.5.1 Formulation en déplacement

Le champ de déplacement unidimensionnel dans la plaque est constitué de la superposition d'ondes propagatives et évanescentes dans les directions $\pm x$. Chacune de ces quatre composantes est présente dans les sections libres A_1 ($-1 < x < 0$) et A_2 ($0 < x < 1$) tandis qu'en raison de la terminaison anéchoïque, la dernière section libre B ($1 < x < +\infty$) contient uniquement des ondes propagative et évanescente dans la direction $+x$. En utilisant une approche ondulatoire et le modèle de Kirchhoff pour les plaques, le champ de déplacement du système considéré est alors décrit par les amplitudes complexes des 10 ondes ci-dessus, qui sont obtenues à partir des 10 conditions :

- aux limites, condition d'appui simple à gauche et à droite $x = 1$ ($w(1^-) = 0$, $w(1^+) = 0$) ;
- de continuité, de la rotation et du moment en $x = 0$ et en $x = 1$ ($w_{,x}(1^-) = w_{,x}(1^+)$, $w_{,x^2}(1^-) = w_{,x^2}(1^+)$, $w_{,x}(0^-) = w_{,x}(0^+)$, $w_{,x^2}(0^-) = w_{,x^2}(0^+)$), et du déplacement w en $x = 0$ ($w(0^-) = w(0^+)$) ;
- de chargement, absence de chargement extérieur en $x = -1$ ($w_{,x^3}(-1) = 0$ pour la force, $w_{,x^2}(-1) = 0$ pour le moment), et force extérieure en $x = 0$ ($w_{,x^3}(0^+) - w_{,x^3}(0^-) = F_z$).

Pour la structure étudiée ci-après, les résultats concernant le champ de déplacement sont présentés dans la Figure 4.4. Cette solution pour $w(x)$ est alors utilisée pour calculer l'intensité de structure et les densités d'énergie. Cette approche constitue la manière habituelle de calculer les quantités énergétiques et est considérée ici comme la référence à laquelle sont comparés les résultats issus de la formulation quadratique.

4.5.2 Formulation quadratique

La solution quadratique pour les ondes de flexion du système est obtenue à partir de la formulation quadratique (4.85), en considérant deux sections pour la plaque semi-infinie :

- la section $A_1 \cup A_2$ ($-1 \leq x \leq 1$), où les solutions pour les variables quadratiques ξ_{ij} sont les sommes des solutions générales (4.90), (4.91) et (4.92), définies par les 16 coefficients complexes c_1 à c_{16} , et d'une solution particulière pour la force concentrée F_z en $x = 0$, et telle que

$$\begin{aligned} \Delta^2 \xi_{00} - (k^4 + k^{*4}) \xi_{00} - 6\xi_{22} - 4\xi_{13} - 4\xi_{13}^* &= s_0 \delta_0 \\ \Delta^2 \xi_{22} - (k^4 + k^{*4}) \xi_{22} - 6k^4 k^{*4} \xi_{00} - 4k^4 \xi_{13} - 4k^{*4} \xi_{13}^* &= s_1 \delta_0 + s_2 \delta_{0,x} + s_3 \delta_{0,x^2} \\ \Delta^2 \xi_{13} - (k^4 + k^{*4}) \xi_{13} - 6k^{*4} \xi_{13}^* - 4k^4 k^{*4} \xi_{00} - 4k^{*4} \xi_{22} &= s_4 \delta_0 + s_5 \delta_{0,x} + s_6 \delta_{0,x^2} + s_7 \delta_{0,x^3}, \end{aligned} \quad (4.94)$$

où au point d'excitation $x = 0$, ξ_{00} et ξ_{22} sont continus, ξ_{00} présente des dérivées première et seconde continues, et les sauts s_0 à s_7 pour les autres variables et leurs dérivées, obtenus à partir de la formulation en déplacement, tiennent compte des conditions d'excitation dans le membre de droite de (4.94) : $\xi_{00,x^3}(0^+) - \xi_{00,x^3}(0^-) = -s_0/2$, $\xi_{22,x^3}(0^+) - \xi_{22,x^3}(0^-) = -s_1/2$, $\xi_{22,x^2}(0^+) - \xi_{22,x^2}(0^-) = -s_2/2$, $\xi_{22,x}(0^+) - \xi_{22,x}(0^-) = s_3$, $\xi_{13,x^3}(0^+) - \xi_{13,x^3}(0^-) = -s_4/2$, $\xi_{13,x^2}(0^+) - \xi_{13,x^2}(0^-) = -s_5/2$, $\xi_{13,x}(0^+) - \xi_{13,x}(0^-) = s_6$, $\xi_{13}(0^+) - \xi_{13}(0^-) = s_7$;

- la section B ($1 \leq x < +\infty$), libre de tout chargement, pour laquelle les variables quadratiques solutions sont (4.90), (4.91) et (4.92) où, en raison de la terminaison anéchoïque et de la seule orientation suivant x des ondes, la moitié des 16 composantes sont supprimées ($c_3 = 0$, $c_4 = 0$, $c_7 = 0$, $c_8 = 0$, $c_9 = 0$, $c_{10} = 0$, $c_{13} = 0$, $c_{14} = 0$), les 8 coefficients restants étant liés par : $c_1 = jc_{17}$, $c_2 = c_{17}$, $c_5 = jc_{18}$, $c_6 = c_{18}$, $c_{11} = jc_{19}$, $c_{12} = c_{19}$, $c_{15} = jc_{20}$, $c_{16} = c_{20}$. Les variables quadratiques ξ_{mn} dans la section B sont donc définies par les 4 coefficients c_{17} , c_{18} , c_{19} et c_{20} .

Ces 20 coefficients d'amplitudes complexes c_{1-20} (les 16 premiers dans la section A et les 4 derniers dans la section B) sont déterminés en écrivant les conditions limites pour la plaque libre à sa limite gauche $x = -1$ (8 relations, $\xi_{00,x^3}(-1) = 0$, $\xi_{22,x^3}(-1) = 0$, $\xi_{22,x^2}(-1) = 0$, $\xi_{22,x}(-1) = 0$, $\xi_{22}(-1) = 0$, $\xi_{13,x^3}(-1) = 0$, $\xi_{13}(-1) = 0$, $k^{*4} \xi_{00,x^2}(-1) = 2\xi_{13,x^2}(-1)$) et la continuité des sections A et B pour la plaque simplement appuyée en $x = 1$ (12 relations, $\xi_{00}(1^-) = 0$, $\xi_{00}(1^+) = 0$, $\xi_{00,x}(1^-) = 0$, $\xi_{00,x}(1^+) = 0$, $\xi_{00,x^2}(1^-) = \xi_{00,x^2}(1^+)$, $\xi_{00,x^3}(1^-) = \xi_{00,x^3}(1^+)$, $\xi_{22}(1^-) = \xi_{22}(1^+)$, $\xi_{22,x^3}(1^-) = \xi_{22,x^3}(1^+)$, $\xi_{13,x^3}(1^-) = \xi_{13,x^3}(1^+)$, $2\xi_{13,x^2}(1^-) - \xi_{22,x^2}(1^-) - k^{*4} \xi_{00,x^2}(1^-) = 0$, $2\xi_{13,x^2}(1^+) - \xi_{22,x^2}(1^+) - k^{*4} \xi_{00,x^2}(1^+) = 0$, $\xi_{22,x}(1^-) - \xi_{13,x}(1^-) - \xi_{13,x}^*(1^-) = 0$). Les expressions ci-dessus pour les conditions aux limites et à la jonction des deux sections A et B constituent un système d'équations permettant d'obtenir les 20 coefficients, mais ce n'est pas la seule manière d'y parvenir. Par exemple la dernière

condition peut être exprimée à la limite droite $x = 1^+$ plutôt qu'à la limite gauche $x = 1^-$. Les solutions obtenues pour les variables quadratiques réelles positives ξ_{00} et ξ_{22} donnent directement les densités d'énergies moyennées sur l'épaisseur en utilisant (4.84). Dans un second temps le flux de puissance à travers la plaque est obtenu en intégrant le membre de droite de (4.80) pour l'intensité de structure, avec la condition d'intensité nulle à la limite gauche $x = -1$.

4.5.3 Résultats numériques

Le champ de déplacement est présenté dans la Figure 4.4 et les champs énergétiques dans les Figures allant de 4.5 à 4.8 à une fréquence de 300 Hz pour une plaque dont les propriétés sont : épaisseur $h = 0.001 \text{ m}$, masse volumique $\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$, module d'Young $E = 210 (1 + j0.05) \text{ GPa}$, coefficient de Poisson $\nu = 0.3$, limite gauche en $x = -1 \text{ m}$, appui simple en $x = 1 \text{ m}$. La formulation en déplacement (section 4.5.1) fournit le champ de déplacement (Figure 4.4) à partir duquel les densités d'énergie (Figure 4.5) et l'intensité de structure (Figure 4.7) peuvent être obtenus. La formulation quadratique fournit directement les densités d'énergie (section 4.5.2) et l'intensité de structure peut être obtenue par intégration.

Comme aucune approximation n'a été introduite dans la formulation quadratique, ses résultats sont équivalents à ceux de la formulation en déplacement et les courbes correspondantes sont strictement identiques : une vue détaillée à proximité de la position de la force excitatrice est présentée pour les champs énergétiques (Figure 4.6 pour les densités d'énergie, Figure 4.8 pour l'intensité de structure), soulignant l'équivalence des deux formulations.

Le calcul de termes exponentiels avec de grands nombres d'ondes cause classiquement des instabilités numériques qui limitent, en hautes fréquences, l'utilisation d'une approche ondulatoire pour la formulation en déplacement. Pour une même précision de calcul, ces limitations apparaissent donc pour des fréquences encore plus faibles dans la formulation quadratique. En effet les variables quadratiques présentent des composantes avec des nombres d'ondes de la forme $j^m k + j^n k^*$ ($m = 0, 1, 2, 3$, $n = 0, 1, 2, 3$) dont le module est presque deux fois supérieur à celui du nombre d'onde de déplacement correspondant $j^m k$. Ces composantes sont construites à partir des ondes propagatives aller et retour donnant des ondes stationnaires dont les variations spatiales sont à l'échelle de π/k , c'est-à-dire la demi-longueur d'onde du déplacement, ce qui est illustré par les variations des densités d'énergie T et U (Figure 4.5) et du déplacement (Figure 4.4) dans la section A ($-1 \leq x \leq 1$) de la plaque. De manière similaire, lorsque des méthodes numériques telles que les différences finies ou les éléments finis sont utilisées, la grille ou le maillage utilisé doit être suffisamment fin pour pouvoir représenter avec une précision suffisante les variations spatiales du champ à l'échelle de la longueur d'onde $2\pi/k$ pour la formulation en déplacement, ce qui constitue également une limite pour de tels modèles en hautes fréquences.

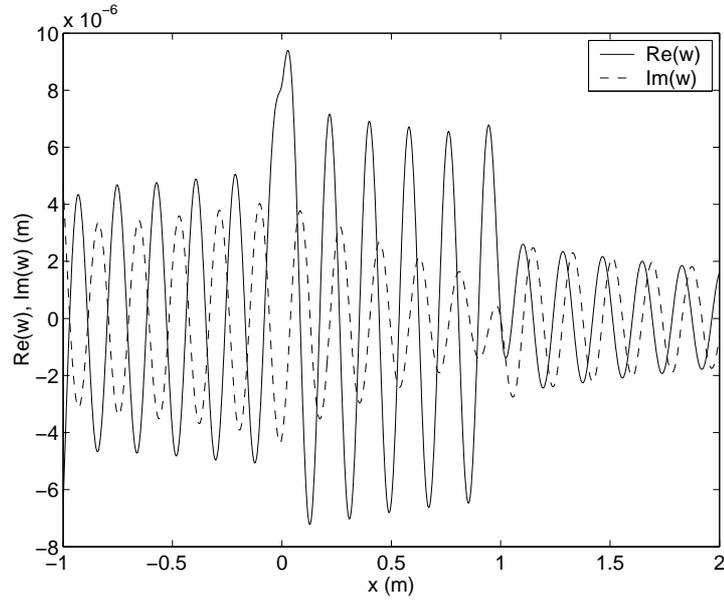


FIG. 4.4 – Partie réelle du déplacement w : $Re(w)$ (—) ; partie imaginaire du déplacement w : $Im(w)$ (---).

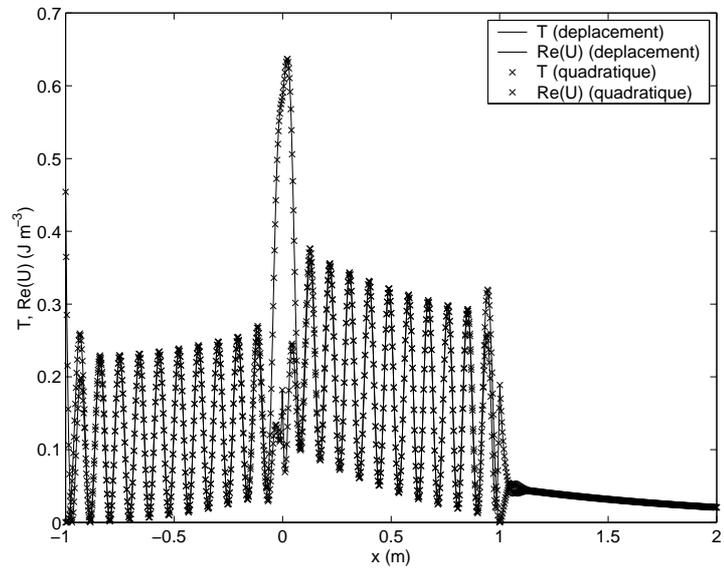


FIG. 4.5 – Densités d'énergie cinétique T (—) et parties réelles des densités d'énergie de déformation $Re(U)$ (---) obtenues à partir de la formulation en déplacement et de la formulation quadratique exacte.

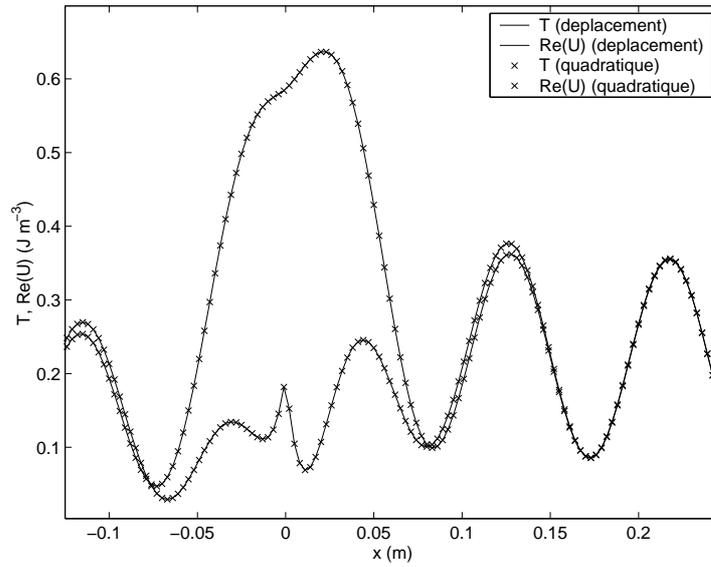


FIG. 4.6 – Densités d'énergie cinétique T (—) et parties réelles des densités d'énergie de déformation $Re(U)$ (- - -) obtenues à partir de la formulation en déplacement et de la formulation quadratique exacte : détail.

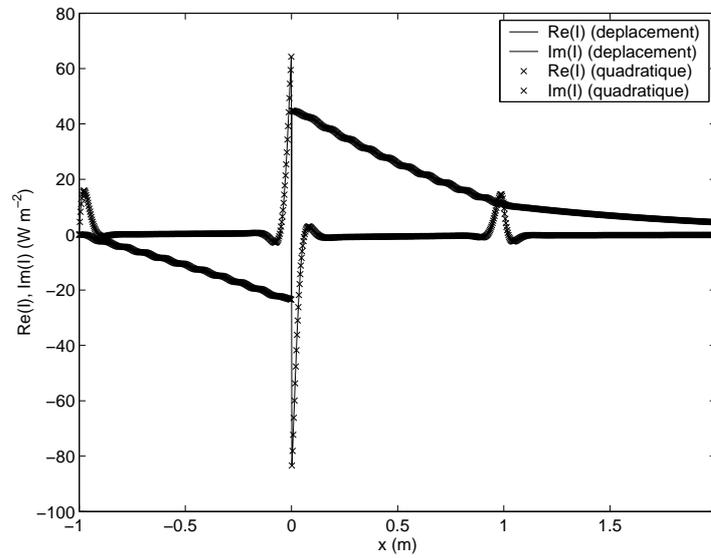


FIG. 4.7 – Parties réelles $Re(I)$ (—) et parties imaginaires $Im(I)$ (- - -) des intensités de structure obtenues à partir de la formulation en déplacement et de la formulation quadratique exacte.

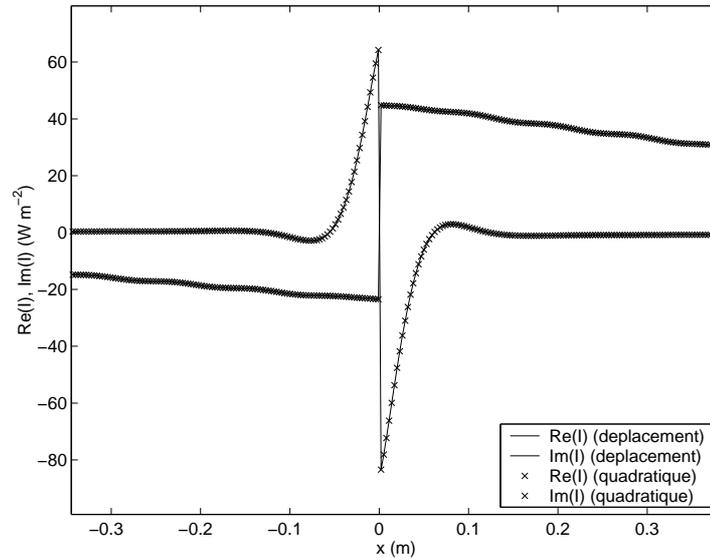


FIG. 4.8 – Parties réelles $Re(I)$ (—) et parties imaginaires $Im(I)$ (---) des intensités de structure obtenues à partir de la formulation en déplacement et de la formulation quadratique exacte : détail.

4.6 Conclusion

Ce chapitre montre qu'il est possible d'obtenir une formulation quadratique unidimensionnelle exacte, que ce soit pour des ondes de flexion dans les plaques (le résultat serait similaire pour des ondes de flexion dans les poutres), ou pour des ondes SH et QL. Cependant, dans la pratique, cette formulation reste inapplicable en raison d'un coût de calcul supérieur à celui de la formulation en déplacement, d'où la nécessité de procéder à des moyennes spatiales sur les grandeurs énergétiques. De telles moyennes sont mises en oeuvre au chapitre 5. Toutefois seules des ondes régies par une équation d'ordre 2 sont considérées dans le chapitre 5. En effet les composantes mixtes issues de l'interaction entre ondes propagatives et ondes évanescentes, dont les nombres d'ondes correspondants sont positionnés sur les bissectrices des axes de la Figure 4.2, compliquent singulièrement la définition d'une échelle appropriée au moyennage spatial des grandeurs énergétiques d'une part, et le calcul des conditions limites d'autre part.

Chapitre 5

Formulation quadratique moyenne

5.1 Introduction

Comme indiqué dans les conclusions du chapitre 2, il est possible de s'affranchir des composantes à petite échelle spatiale des variables quadratiques pseudo-périodiques, notamment en moyennant celles-ci à l'échelle de leur pseudo-période. Le but de ce chapitre est donc de montrer comment une formulation quadratique moyenne peut être obtenue dans le cas d'ondes planes unidimensionnelles. Cette formulation quadratique moyenne peut alors être appliquée au domaine des moyennes fréquences pour des systèmes unidimensionnels. Elle nécessite toutefois de redéfinir les conditions aux limites. Ces conditions permettent de décrire ici les différentes jonctions à l'aide de relations d'impédance.

5.2 Variables quadratiques moyennées spatialement en ondes planes

5.2.1 Cas bidimensionnel : interférences de deux ondes planes

La décomposition par transformée de Fourier spatiale d'un champ vibratoire représentera celui-ci sous la forme d'un spectre de nombres d'ondes dont chaque composante est une onde plane se propageant dans une direction donnée. Il est donc possible de représenter les grandeurs quadratiques d'un champ vibratoire quelconque en réalisant la somme quadratique des ondes élémentaires prises deux à deux.

Le cas considéré ici est donc celui de deux ondes planes (Figure 2.6) se propageant dans un milieu 3D invariant par translation suivant la direction perpendiculaire à celles des deux ondes. Afin que les moyennes spatiales prennent tout leur sens, il convient d'ajouter une hypothèse de système de grandes dimensions devant la longueur d'onde λ_0 à celles formulées au début de la partie 2.3 (petits déplacements et petites déformations, milieu de propagation homogène et isotrope avec amortissement hystérétique et régime harmonique). En raison de leur caractère pseudo-périodique en ondes planes, les densités d'énergie et l'intensité de structure peuvent être moyennées spatialement afin d'éliminer leurs variations à petite échelle et de ne s'intéresser qu'aux transferts énergétiques globaux lorsque la fréquence augmente. Pour toute variable quadratique Q , sa moyenne spatiale $\langle Q \rangle$ sur une pseudo-période rectangulaire (Figure 2.6) de surface S dans le plan des deux ondes est définie par :

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{S} \iint_S Q(s) ds. \quad (5.1)$$

Pour des ondes *planes* et pour toute variable quadratique, la moyenne spatiale des composantes d'interférences sur une pseudo-période disparaît. Par exemple l'intensité moyennée en ondes planes

est irrotationnelle : $\langle \text{rot } \mathbf{I} \rangle = 0$ (Figure 2.10). La moyenne spatiale $\langle Q \rangle$ peut alors être reliée aux composantes à grande échelle de Q . Par exemple la densité d'énergie de déformation U de l'expression (2.11), une fois moyennée sur sa pseudo-période (2.13), se réduit à

$$\langle U \rangle = \frac{\lambda + 2\mu}{4} k^2 k^{*2} \left(AA^* e^{-j(\mathbf{k}_A - \mathbf{k}_A^*) \cdot \mathbf{r}} + BB^* e^{-j(\mathbf{k}_B - \mathbf{k}_B^*) \cdot \mathbf{r}} \right) f_2(\theta). \quad (5.2)$$

- Le facteur $\frac{\lambda + 2\mu}{4} k^2 k^{*2} \left(AA^* e^{-j(\mathbf{k}_A - \mathbf{k}_A^*) \cdot \mathbf{r}} + BB^* e^{-j(\mathbf{k}_B - \mathbf{k}_B^*) \cdot \mathbf{r}} \right)$ représente la densité d'énergie de déformation obtenue en négligeant les interférences entre les deux ondes considérées. Dans le cas d'ondes planes, négliger les termes d'interférences revient à ne conserver que les composantes à grande échelle des variables quadratiques.
- Le processus de moyennage utilisé introduit un facteur $f_2(\theta)$ (dernier facteur de l'équation (5.2)), dû à la pseudo-périodicité :

$$f_2(\theta) = \left(\frac{\text{sh}(\pi \theta)}{\pi \theta} \right)^2. \quad (5.3)$$

L'élévation au carré de $\text{sh}(\pi \theta)/(\pi \theta)$ provient de la géométrie 2D du problème et le facteur $f_2(\theta)$ ne dépend que des propriétés dissipative du milieu de propagation, et se met sous la forme $f_2(\theta) = 1 + O(\eta^4)$ dans le cas d'un petit amortissement.

Le même procédé peut être utilisé pour moyennner la densité d'énergie cinétique : la densité moyennée $\langle T \rangle$ est proportionnelle, toujours au facteur $f_2(\theta)$ près, aux composantes directes de T :

$$\langle T \rangle = \frac{\rho \omega^2}{4} k k^* \left(AA^* e^{-j(\mathbf{k}_A - \mathbf{k}_A^*) \cdot \mathbf{r}} + BB^* e^{-j(\mathbf{k}_B - \mathbf{k}_B^*) \cdot \mathbf{r}} \right) f_2(\theta). \quad (5.4)$$

La densité d'énergie de déformation moyennée $\langle U \rangle$ est également proportionnelle à la densité d'énergie cinétique $\langle T \rangle$ (5.4) :

$$\langle U \rangle = \frac{1 + j\theta}{1 - j\theta} \langle T \rangle. \quad (5.5)$$

En particulier $|\langle U \rangle| = |\langle T \rangle|$. Le résultat établissant le lien entre variables quadratiques moyennées spatialement et composantes à grande échelle est donc similaire pour la densité d'énergie totale moyennée $\langle W \rangle = \langle T \rangle + \langle U \rangle$, pour la densité lagrangienne moyennée $\langle L \rangle = \langle T \rangle - \langle U \rangle$ et pour l'intensité de structure moyennée $\langle \mathbf{I} \rangle$ dont l'amplitude $\langle I \rangle$ s'écrit

$$\langle I \rangle(x) = \frac{\lambda + 2\mu}{2} \omega k \left(AA^* e^{-j(\mathbf{k}_A - \mathbf{k}_A^*) \cdot \mathbf{r}} + BB^* e^{-j(\mathbf{k}_B - \mathbf{k}_B^*) \cdot \mathbf{r}} \right) f_2(\theta). \quad (5.6)$$

Ces résultats peuvent être étendus au cas d'ondes de flexion, dans le cadre d'une approximation de champ lointain uniquement, car dans certains cas les interférences entre ondes évanescentes peuvent contribuer aux transferts énergétiques [170].

5.2.2 Cas unidimensionnel : équation différentielle pour l'intensité de structure moyennée $\langle I \rangle$

Le cas unidimensionnel de deux ondes contre-propagatives (Figure 3.1) constitue une application intéressante : lorsque $\mathbf{k}_B = -\mathbf{k}_A$ les variations à petite échelle des champs énergétiques se font à échelle de la demi-longueur d'onde $\lambda_0/2 = 2\pi/(k + k^*)$ et peuvent être supprimées si la moyenne est effectuée à cette échelle. Pour un système unidimensionnel, la moyenne spatiale $\langle Q \rangle$ de toute variable quadratique se définit donc à l'échelle de la demi-longueur d'onde $\lambda_0/2$:

$$\langle Q \rangle(x) = \frac{2}{\lambda_0} \int_{x-\lambda_0/4}^{x+\lambda_0/4} Q(u) du, \quad (5.7)$$

Afin de faire apparaître un paramètre tel que la densité de puissance injectée dans l'écriture des conditions limites, le choix a été fait ici de travailler avec l'intensité de structure moyennée spatialement $\langle I \rangle$. Dans le cas où seule la propagation des composantes à grande échelle est considérée, il se déduit de l'expression (5.6) que l'intensité de structure moyennée spatialement s'écrit

$$\langle I \rangle(x) = \frac{\lambda + 2\mu}{2} \omega k \left(AA^* e^{-j(k-k^*)x} - BB^* e^{j(k-k^*)x} \right) f(\theta), \quad (5.8)$$

avec

$$f(\theta) = \frac{sh(\pi\theta)}{\pi\theta}. \quad (5.9)$$

Le facteur $sh(\pi\theta)/(\pi\theta)$ n'est ici pas élevé au carré car la géométrie du problème est 1D. De plus $f(\theta)$ se met sous la forme $f(\theta) = 1 + O(\eta^2)$ dans le cas d'un petit amortissement. En dehors des sources, $\langle I \rangle$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\Delta \langle I \rangle + (k - k^*)^2 \langle I \rangle = 0. \quad (5.10)$$

Les densités d'énergie moyennées spatialement $\langle T \rangle$, $\langle U \rangle$, $\langle W \rangle$ et $\langle L \rangle$ vérifient également cette équation différentielle car elles présentent les mêmes nombres d'onde à grande échelle. Puisque le nombre d'onde $k - k^*$ est un imaginaire pur, $\langle I \rangle$ est la solution évanescente d'une équation de propagation.

L'équation (5.10) peut être mise sous la forme

$$\Delta \langle I \rangle - 4(Im(k))^2 \langle I \rangle = 0, \quad (5.11)$$

cette écriture étant semblable à l'équation régissant la moyenne spatiale de l'autospectre du déplacement en champ lointain pour des ondes de flexion dans [181], où l'intervalle sur lequel les moyennes sont effectuées est un multiple de quarts de longueurs d'ondes. Pour des petites valeurs d'amortissement, l'équation (5.10) s'écrit

$$\Delta \langle I \rangle - \frac{\eta^2 \omega^2}{c_g^2} \langle I \rangle = 0, \quad (5.12)$$

où la célérité des ondes c_g définie comme $c_g^2 = \omega^2/k^2$ est de la forme $c_g^2 = (\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho$ quand $\eta \ll 1$. La forme (5.12) est l'équation de base de la VCA (en dehors des sources) déjà obtenue dans de nombreux travaux, d'abord dans [76, 77] et par exemple dans [81] pour les membranes, dans [82, 83] pour les plaques ou dans la General Energy Method (GEM) [87, 88, 91, 92] pour des poutres et des barres. Par conséquent l'équation (5.10) est valable quelle que soit la valeur du facteur d'amortissement η mais la manière utilisée pour l'obtenir n'est pas nouvelle. Il a été montré dans [101] que l'équation de la VCA peut être obtenue à partir des équations énergétiques présentées dans [182] si les interférences entre ondes planes sont négligées et/ou si des moyennes spatiales appropriées sont effectuées. C'est d'ailleurs une équation du même type, associée à des conditions limites appropriées [183], que vérifie la moyenne spatiale de l'autospectre du déplacement en champ lointain dans [181].

5.2.3 Obtention des densités d'énergie moyennées spatialement à partir de $\langle I \rangle$

L'intensité de structure moyennée spatialement $\langle I \rangle$ est obtenue par résolution de l'équation (5.10) à laquelle sont adjointes les conditions limites pour différents types de jonctions. Les autres variables quadratiques $\langle T \rangle$, $\langle U \rangle$, $\langle W \rangle$ et $\langle L \rangle$ peuvent être déduites de $\langle I \rangle$. De manière similaire à l'Acoustique [184], l'intensité de structure et les densités d'énergie (Table 4.1) sont liées par :

$$I_{,x} = -2j\omega(T - U) + P, \quad (5.13)$$

où la densité de puissance injectée P , associée à la densité de forces extérieures \mathbf{f}_x , est défini par

$$P = -\frac{j\omega}{2} \mathbf{f}_x \cdot \mathbf{u}^*. \quad (5.14)$$

Le fait de moyenner l'équation (5.13) et d'utiliser la proportionnalité (5.5) entre la densité d'énergie cinétique moyennée spatialement $\langle T \rangle$ et la densité d'énergie de déformation moyennée spatialement $\langle U \rangle$ conduit soit à $\langle T \rangle$, soit à $\langle U \rangle$. Puisque la prochaine partie (consacrée aux conditions limites pour les grandeurs quadratiques moyennées spatialement) commencera par traiter le cas d'une charge ponctuelle en $x = a$, $\langle T \rangle$ s'écrit dans ce cas :

$$\langle T \rangle = -\left(\frac{1-j\theta}{4\omega\theta}\right) (\langle I \rangle_{,x} - P\delta_a), \quad (5.15)$$

où δ_a est la fonction de Dirac en $x = a$. En dehors des sources, la densité d'énergie cinétique moyennée spatialement $\langle T \rangle$ est proportionnelle à la dérivée spatiale $\langle I \rangle_{,x}$ de l'intensité de structure moyennée spatialement. Les autres densités d'énergies moyennées spatialement $\langle U \rangle$ (5.2), $\langle W \rangle$ et $\langle L \rangle$ sont obtenues à partir de $\langle T \rangle$.

5.3 Conditions limites énergétiques en ondes planes longitudinales unidimensionnelles

Les variables quadratiques moyennées spatialement, d'abord $\langle I \rangle$ puis $\langle T \rangle$, $\langle U \rangle$, $\langle W \rangle$ et $\langle L \rangle$, s'obtiennent par résolution de l'équation locale (5.10) associée aux conditions limites appropriées pour des jonctions actives ou passives. Cette partie traite de ces conditions limites énergétiques.

5.3.1 Cas des jonctions actives

En considérant un chargement concentré f_x en $x = a$, le potentiel du déplacement ϕ satisfait l'équation

$$(\Delta + k^2) \phi(x) = -\frac{k^2 f_x}{\rho\omega^2} H(x-a), \quad (5.16)$$

où $H(x)$ désigne la fonction de Heaviside.

Le potentiel du déplacement ϕ s'écrit donc

$$\phi(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) + \frac{f_x}{\rho\omega^2} H(x-a) (\cos(k(x-a)) - 1). \quad (5.17)$$

En $x = a$ où le chargement concentré est f_x , $\langle I \rangle$ et $\langle I \rangle_{,x}$ sont discontinues. La densité de puissance injectée P (5.14) est un paramètre approprié dont l'apparition dans l'écriture des conditions limites pour les jonctions actives est attendue. Les deux conditions écrites ici portent sur les valeurs limites à gauche $\langle I \rangle (a^-)$ et à droite $\langle I \rangle (a^+)$: la jonction active sera caractérisée par $\langle I \rangle (a^+) - \langle I \rangle (a^-)$ et $\langle I \rangle (a^+) / \langle I \rangle (a^-)$. Ces deux quantités sont calculées à partir de l'amplitude complexe u du déplacement, dont le potentiel ϕ satisfait l'équation du mouvement (5.16) et s'écrit de la forme (5.17). L'amplitude complexe u du déplacement s'obtient par dérivation du potentiel ϕ :

$$u(x) = -C_1 k \sin(kx) + C_2 k \cos(kx) - \frac{k f_x}{\rho\omega^2} H(x-a) \sin(k(x-a)). \quad (5.18)$$

5.3 Conditions limites énergétiques en ondes planes longitudinales unidimensionnelles 69

De même l'amplitude complexe $u_{,x}$ de la dérivée spatiale du déplacement s'obtient par dérivation de u :

$$u_{,x}(x) = -C_1 k^2 \cos(kx) - C_2 k^2 \sin(kx) - \frac{k^2 f_x}{\rho \omega^2} H(x-a) \cos(k(x-a)). \quad (5.19)$$

L'amplitude complexe I de l'intensité de structure se calcule à partir du champ de déplacement (Tableau 4.1) :

$$I = \frac{j\omega}{2} (\lambda + 2\mu) u_{,x} u^*. \quad (5.20)$$

Compte tenu de (5.37) et de (5.19), l'expression développée de I s'écrit :

$$I = \frac{j\omega}{2} (\lambda + 2\mu) \frac{k^2 k^*}{2} \left\{ \begin{array}{l} C_1 C_1^* (\sin((k+k^*)x) - \sin((k-k^*)x)) \\ -C_1 C_2^* (\cos((k-k^*)x) + \cos((k+k^*)x)) \\ +C_2 C_1^* (\cos((k-k^*)x) - \cos((k+k^*)x)) \\ -C_2 C_2^* (\sin((k+k^*)x) + \sin((k-k^*)x)) \\ +H(x-a) \left[\frac{C_1 f_x^*}{\rho \omega^2} (\sin((k+k^*)x - k^*a) - \sin((k-k^*)x + k^*a)) \right. \\ \left. - \frac{C_2 f_x^*}{\rho \omega^2} (\cos((k+k^*)x - k^*a) - \cos((k-k^*)x + k^*a)) \right. \\ \left. + \frac{C_1^* f_x}{\rho \omega^2} (\sin((k^*+k)x - ka) + \sin((k^*-k)x + ka)) \right. \\ \left. - \frac{C_2^* f_x}{\rho \omega^2} (\cos((k^*+k)x - ka) + \cos((k^*-k)x + ka)) \right] \\ \left. + H^2(x-a) \frac{f_x f_x^*}{(\rho \omega^2)^2} (\sin((k+k^*)(x-a)) - \sin((k-k^*)(x-a))) \right\}. \quad (5.21)$$

Ce développement fait apparaître les deux types de composantes de l'intensité de structure (nombres d'onde $\pm(k+k^*)$ et $\pm(k-k^*)$ présentés dans la partie 2.4.

L'intensité de structure moyennée $\langle I \rangle$ étant proportionnelle aux composantes à grande échelle (nombres d'onde $\pm(k-k^*)$) de l'intensité de structure (5.21), $\langle I \rangle$ s'écrit :

$$\langle I \rangle = \frac{j\omega}{2} (\lambda + 2\mu) f(\theta) \frac{k^2 k^*}{2} \left\{ \begin{array}{l} -C_1 C_1^* (\sin((k-k^*)x)) \\ -C_1 C_2^* (\cos((k-k^*)x)) \\ +C_2 C_1^* (\cos((k-k^*)x)) \\ -C_2 C_2^* (\sin((k-k^*)x)) \\ +H(x-a) \left[-\frac{C_1 f_x^*}{\rho \omega^2} \sin((k-k^*)x + k^*a) \right. \\ \left. + \frac{C_2 f_x^*}{\rho \omega^2} \cos((k-k^*)x + k^*a) \right. \\ \left. + \frac{C_1^* f_x}{\rho \omega^2} \sin((k^*-k)x + ka) \right. \\ \left. - \frac{C_2^* f_x}{\rho \omega^2} \cos((k^*-k)x + ka) \right] \\ \left. - H^2(x-a) \frac{f_x f_x^*}{(\rho \omega^2)^2} \sin((k-k^*)(x-a)) \right\}. \quad (5.22)$$

Les limites à gauche en $x = a^-$ et à droite en $x = a^+$ du terme en $H^2(x-a)$ étant nulles, les termes en facteur de $H(x-a)$ dans (5.22) permettent d'obtenir le saut d'amplitude de l'intensité de structure moyennée au point a :

$$\langle I \rangle (a^+) - \langle I \rangle (a^-) = f(\theta) \frac{j\omega}{4} \frac{(\lambda + 2\mu) k^2}{\rho \omega^2} \left(\begin{array}{l} \frac{k^*}{k} f_x^* (-C_1 k \sin(ka) + C_2 k \cos(ka)) \\ + f_x (C_1^* k^* \sin(k^*a) - C_2^* k^* \cos(k^*a)) \end{array} \right). \quad (5.23)$$

L'expression (5.23) fait apparaître l'amplitude complexe du déplacement en a

$$u(a) = -C_1 k \sin(ka) + C_2 k \cos(ka)$$

ainsi que son nombre complexe conjugué $u^*(a)$. Cette expression peut donc se mettre sous la forme

$$\langle I \rangle (a^+) - \langle I \rangle (a^-) = \frac{f(\theta)}{2} \left(-\frac{j\omega}{2} f_x u^*(a) + \frac{k^*}{k} \frac{j\omega}{2} f_x^* u(a) \right), \quad (5.24)$$

ou bien encore, d'après la définition de la densité de puissance injectée P (5.14) :

$$\langle I \rangle (a^+) - \langle I \rangle (a^-) = \frac{P}{2} \left(1 + \frac{k^*}{k} \frac{P^*}{P} \right) f(\theta). \quad (5.25)$$

L'expression (5.25) est donc la première condition caractérisant la jonction active. Cette expression (5.25) est plus compliquée que la simple densité de puissance injectée P qui donne la discontinuité de l'intensité de structure locale : $I(a^+) - I(a^-) = P$. En particulier l'expression (5.25) met en jeu le facteur d'amortissement θ présent dans $f(\theta)$ en raison du moyennage effectué et dans $k^*/k = (1 + j\theta)/(1 - j\theta)$.

La deuxième condition porte sur le rapport $\langle I \rangle (a^+)/\langle I \rangle (a^-)$ qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{\langle I \rangle (a^+)}{\langle I \rangle (a^-)} = 1 + \frac{\langle I \rangle (a^+) - \langle I \rangle (a^-)}{\langle I \rangle (a^-)}. \quad (5.26)$$

La limite à gauche en a de l'intensité de structure moyennée peut être déterminée à partir de (5.22) :

$$\langle I \rangle (a^-) = \frac{j\omega}{2} (\lambda + 2\mu) f(\theta) \frac{k^2 k^*}{2} \begin{pmatrix} -C_1 C_1^* \sin((k - k^*)a) - C_1 C_2^* \cos((k - k^*)a) \\ +C_2 C_1^* \cos((k - k^*)a) - C_2 C_2^* \sin((k - k^*)a) \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

Cette expression peut être développée sous la forme

$$\langle I \rangle (a^-) = \frac{f(\theta)}{2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{j\omega}{2} (\lambda + 2\mu) [C_1 C_1^* k^2 k^* \cos(ka) \sin(k^* a) \\ -C_1 C_2^* k^2 k^* \cos(ka) \cos(k^* a) \\ +C_2 C_1^* k^2 k^* \sin(ka) \sin(k^* a) \\ -C_2 C_2^* k^2 k^* \sin(ka) \cos(k^* a)] \\ -\frac{j\omega}{2} (\lambda + 2\mu) \frac{k}{k^*} [C_1 C_1^* k k^{*2} \sin(ka) \cos(k^* a) \\ +C_1 C_2^* k k^{*2} \sin(ka) \sin(k^* a) \\ -C_2 C_1^* k k^{*2} \cos(ka) \cos(k^* a) \\ -C_2 C_2^* k k^{*2} \cos(ka) \sin(k^* a)] \end{array} \right\}. \quad (5.28)$$

L'expression (5.28) fait apparaître le produit $u_{,x}(a^-)u^*(a)$ et son conjugué :

$$\langle I \rangle (a^-) = \frac{f(\theta)}{2} \left(\frac{j\omega}{2} (\lambda + 2\mu) u_{,x}(a^-) u^*(a) - \frac{j\omega}{2} (\lambda + 2\mu) \frac{k}{k^*} u_{,x}^*(a^-) u(a) \right), \quad (5.29)$$

ce qui peut se mettre sous la forme

$$\langle I \rangle (a^-) = \frac{f(\theta)}{2} \left(I(a^-) + \frac{k}{k^*} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda^* + 2\mu^*} \right) I^*(a^-) \right). \quad (5.30)$$

Sachant que $(\lambda + 2\mu)/(\lambda^* + 2\mu^*) = k^{*2}/k^2$, l'expression (5.30) devient

$$\langle I \rangle (a^-) = \frac{f(\theta)}{2} \left(I(a^-) + \frac{k^*}{k} I^*(a^-) \right). \quad (5.31)$$

L'impédance Z_1 peut être ramenée de $L = -L_1$ en $x_0 = a^-$ comme démontré en Annexe A. Dans ce cas $\epsilon = -1$ et l'impédance ramenée Z_r s'écrit

$$Z_r = \rho c \frac{e^{jk(L_1+a)} - e^{-jk(L_1+a)} + z_1(e^{jk(L_1+a)} + e^{-jk(L_1+a)})}{z_1(e^{jk(L_1+a)} - e^{-jk(L_1+a)}) - e^{jk(L_1+a)} - e^{-jk(L_1+a)}}. \quad (5.32)$$

La limite à gauche du point a de l'intensité de structure peut donc s'écrire

$$I(a^-) = \frac{j\omega^2}{2} Z_r u(a) u^*(a), \quad (5.33)$$

ce qui, compte tenu de l'expression de la densité de puissance injectée P (5.14), peut se réécrire

$$I(a^-) = 2j Z_r \frac{PP^*}{f_x f_x^*}. \quad (5.34)$$

Finalement, en utilisant les équations (5.26), (5.31) et (5.34), la deuxième condition en a , portant sur le rapport $\langle I \rangle (a^+)/\langle I \rangle (a^-)$, s'écrit :

$$\frac{\langle I \rangle (a^+)}{\langle I \rangle (a^-)} = 1 + \frac{P \left(1 + \frac{k^* P^*}{k P} \right)}{2j \frac{PP^*}{f_x f_x^*} \left(Z_r - \frac{k^* Z_r^*}{k} \right)}. \quad (5.35)$$

5.3.2 Jonctions passives : cas des conditions d'impédance

La condition d'impédance [166] portant sur l'amplitude complexe u du déplacement s'écrit

$$u_{,n}(L) + jkz u(L) = 0, \quad (5.36)$$

où z est l'impédance spécifique en $x = L$, autrement dit $z = z_1$ lorsque $L = -L_1$ et $z = z_2$ lorsque $L = L_2$. Entre les jonctions, quand $-L_1 \leq x < a$ ou $a < x \leq L_2$, l'amplitude complexe u satisfait l'équation de Helmholtz et s'écrit

$$u(x) = A e^{-jkx} + B e^{jkx}, \quad (5.37)$$

où A et B sont les amplitudes complexes, respectivement de l'onde propagative et de l'onde contre-propagative. De (5.37) et (5.36) il résulte que

$$u_{,n}(x) = \epsilon jk(-A e^{-jkx} + B e^{-jkx}), \quad (5.38)$$

où le paramètre $\epsilon = \pm 1$ est défini par

$$\frac{\partial}{\partial n} = \epsilon \frac{\partial}{\partial x}. \quad (5.39)$$

La relation (5.36) permet d'exprimer A en fonction de B :

$$A = \frac{\epsilon + z}{\epsilon - z} e^{2jkL} B. \quad (5.40)$$

Il s'en déduit que

$$AA^* = \alpha e^{2j(k-k^*)L} BB^*, \quad (5.41)$$

avec

$$\alpha = \frac{(\epsilon + z)(\epsilon + z^*)}{(\epsilon - z)(\epsilon - z^*)}. \quad (5.42)$$

Or en $x = L$, l'amplitude complexe de l'intensité de structure moyennée s'écrit

$$\langle I \rangle (L) = -\frac{\omega}{2}(\lambda + 2\mu)f(\theta)kBB^*e^{j(k-k^*)L}(1 - \alpha), \quad (5.43)$$

et sa dérivée spatiale s'écrit :

$$\langle I \rangle_{,x} (L) = -\frac{j\omega}{2}(\lambda + 2\mu)f(\theta)k(k - k^*)BB^*e^{j(k-k^*)L}(1 + \alpha), \quad (5.44)$$

Des expressions (5.43) et (5.44) il se déduit que

$$\langle I \rangle_{,x} (L) - j(k - k^*) \left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right) \langle I \rangle (L) = 0, \quad (5.45)$$

avec

$$\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} = -\epsilon \frac{1 + zz^*}{z + z^*}. \quad (5.46)$$

La relation (5.45) peut donc s'écrire

$$\langle I \rangle_{,x} (L) + j(k - k^*)\epsilon \frac{1 + zz^*}{z + z^*} \langle I \rangle (L) = 0, \quad (5.47)$$

ce qui compte tenu de la définition (5.39) de ϵ , donne finalement pour l'amplitude complexe de l'intensité de structure moyennée la condition mixte :

$$\langle I \rangle_{,n} (L) + j(k - k^*) \frac{1 + zz^*}{z + z^*} \langle I \rangle (L) = 0. \quad (5.48)$$

Des cas particuliers de conditions mixtes avec des impédances spécifiques réelles sont présentées dans le tableau 5.1.

	terminaison libre	terminaison bloquée	terminaison anéchoïque
impédance spécifique	$z = 0$	$ z \rightarrow +\infty$	$z = 1$
déplacement	$u_{,n}(L) = 0$	$u(L) = 0$	$u_{,n}(L) + jku(L) = 0$
intensité de structure moyennée	$\langle I \rangle (L) = 0$	$\langle I \rangle (L) = 0$	$\langle I \rangle_{,n} (L) + j(k - k^*) \langle I \rangle (L) = 0$

TAB. 5.1 – Cas particuliers de conditions mixtes pour des impédances spécifiques réelles.

5.3.3 Jonctions passives : cas d'un changement de milieu de propagation

Configuration et définition des impédances

Cette partie établit les conditions limites relatives à une discontinuité de densité en $x = d$ (Figure 5.1). Les impédances et les impédances spécifiques mises en jeu dans l'obtention de ces conditions limites apparaissent dans les tableaux 5.2, 5.3 et 5.4. En utilisant les six équations du tableau 5.2 et les six équations du tableau 5.3, les trois impédances spécifiques z_{a-} , z_a , z_{a+} et les trois impédances spécifiques z_{b-} , z_b , z_{b+} se trouvent liées respectivement par

$$z_{a+} = -z_{a-} + z_a, \quad (5.49)$$

et

$$z_{b+} = -z_{b-} + z_b. \quad (5.50)$$

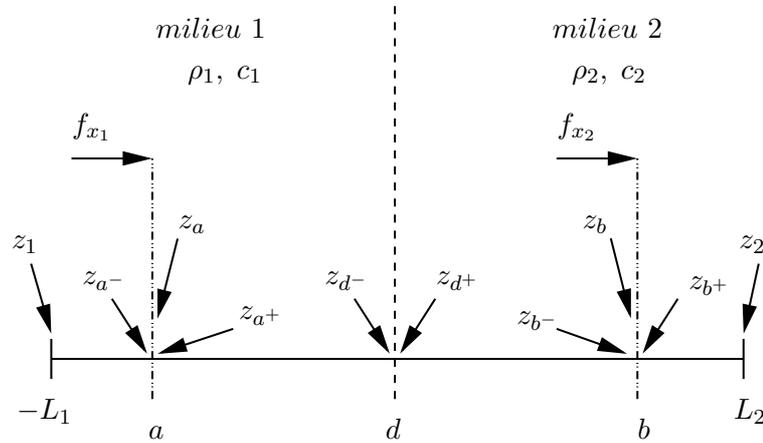


FIG. 5.1 – Changement de milieu de propagation : configuration du système étudié.

Conditions limites portant sur le champ de déplacement

Le déplacement et la contrainte normale sont continus à la frontière $x = d$ entre les deux milieux :

$$\begin{cases} u(d^-) = u(d^+) \\ (\lambda_1 + 2\mu_1)u_{,x}(d^-) = (\lambda_2 + 2\mu_2)u_{,x}(d^+). \end{cases} \quad (5.51)$$

Remarque : le rapport z_{d+}/z_{d-} peut être obtenu en utilisant les équations (5.81) et les conditions mixtes du tableau 5.4. Ce rapport ne dépend que des propriétés des milieux :

$$\frac{z_{d+}}{z_{d-}} = - \left(\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\lambda_2 + 2\mu_2} \right) \frac{k_1}{k_2}, \quad (5.52)$$

Impédances spécifiques de chaque côté de la frontière

Les deux impédances spécifiques z_{d-} et z_{d+} peuvent s'écrire comme des impédances ramenées, respectivement z_{a+} et z_{b-} , en utilisant le résultat de l'Annexe A :

$$z_{d-} = \frac{(1 - z_{a+})e^{-jk_1(d-a)} - (1 + z_{a+})e^{jk_1(d-a)}}{(1 - z_{a+})e^{-jk_1(d-a)} + (1 + z_{a+})e^{jk_1(d-a)}}, \quad (5.53)$$

où $z_{a^+} = -z_{a^-} + z_a$ (5.49), et

$$z_{d^+} = -\frac{(-1 - z_{b^-})e^{-jk_2(d-b)} - (-1 + z_{b^-})e^{jk_2(d-b)}}{(-1 - z_{b^-})e^{-jk_2(d-b)} + (-1 + z_{b^-})e^{jk_2(d-b)}}. \quad (5.54)$$

où $z_{b^-} = -z_{b^+} + z_b$ (5.50).

De plus les deux impédances spécifiques z_{a^-} et z_{b^+} peuvent s'écrire comme des impédances ramenées, respectivement z_1 et z_2 :

$$z_{a^-} = -\frac{(-1 - z_1)e^{jk_1(L_1+a)} - (-1 + z_1)e^{-jk_1(L_1+a)}}{(-1 - z_1)e^{jk_1(L_1+a)} + (-1 + z_1)e^{-jk_1(L_1+a)}}, \quad (5.55)$$

$$z_{b^+} = \frac{(1 - z_2)e^{-jk_2(L_2-b)} - (1 + z_2)e^{jk_2(L_2-b)}}{(1 - z_2)e^{-jk_2(L_2-b)} + (1 + z_2)e^{jk_2(L_2-b)}}. \quad (5.56)$$

Par conséquent, connaître les impédances spécifiques z_{d^-} et z_{d^+} revient à connaître les impédances spécifiques z_1 et z_2 .

Conditions limites portant sur l'intensité de structure moyennée spatialement

L'intensité de structure moyennée spatialement est continue à la frontière $x = d$. La première condition limite s'écrit donc

$$\langle I \rangle (d^+) = \langle I \rangle (d^-). \quad (5.57)$$

Puisque les impédances spécifiques z_{d^-} et z_{d^+} peuvent être obtenues à partir des impédances spécifiques z_1 et z_2 , des conditions mixtes du même type que l'équation (5.48) peuvent être écrites pour chacune des valeurs limites $\langle I \rangle (d^-)$ et $\langle I \rangle (d^+)$ de l'intensité de structure moyennée spatialement :

$$-\langle I \rangle_{,x} (d^-) + j(k_1 - k_1^*) \frac{1 + z_{d^-} z_{d^-}^*}{z_{d^-} + z_{d^-}^*} \langle I \rangle (d^-) = 0, \quad (5.58)$$

$$\langle I \rangle_{,x} (d^+) + j(k_2 - k_2^*) \frac{1 + z_{d^+} z_{d^+}^*}{z_{d^+} + z_{d^+}^*} \langle I \rangle (d^+) = 0. \quad (5.59)$$

La seconde condition limite porte sur le rapport $\langle I \rangle_{,x} (d^+) / \langle I \rangle_{,x} (d^-)$. En effet ce rapport s'obtient à partir des équations (5.57), (5.58) et (5.59) :

$$\frac{\langle I \rangle_{,x} (d^+)}{\langle I \rangle_{,x} (d^-)} = -\frac{k_2 - k_2^*}{k_1 - k_1^*} \frac{1 + z_{d^+} z_{d^+}^*}{1 + z_{d^-} z_{d^-}^*} \frac{z_{d^-} + z_{d^-}^*}{z_{d^+} + z_{d^+}^*} \quad (5.60)$$

x	a^-	a	a^+
impédance	$Z_{a^-} = -\frac{(\lambda_1 + 2\mu_1)u_{,x}(a^-)}{j\omega u(a)}$	$Z_a = \frac{f_{x_1}}{j\omega u(a)}$	$Z_{a^+} = \frac{(\lambda_1 + 2\mu_1)u_{,x}(a^+)}{j\omega u(a)}$
impédance spécifique	$z_{a^-} = Z_{a^-} \rho_1 c_1$	$z_a = Z_a \rho_1 c_1$	$z_{a^+} = Z_{a^+} \rho_1 c_1$

TAB. 5.2 – Définitions des impédances et des impédances spécifiques pour la jonction active en $x = a$.

x	b^-	b	b^+
impédance	$Z_{b^-} = \frac{(\lambda_2 + 2\mu_2)u_{,x}(b^-)}{j\omega u(b)}$	$Z_b = \frac{f_{x_2}}{j\omega u(b)}$	$Z_{b^+} = -\frac{(\lambda_2 + 2\mu_2)u_{,x}(b^+)}{j\omega u(b)}$
impédance spécifique	$z_{b^-} = Z_{b^-}/\rho_2 c_2$	$z_b = Z_b/\rho_2 c_2$	$z_{b^+} = Z_{b^+}/\rho_2 c_2$

 TAB. 5.3 – Définitions des impédances et des impédances spécifiques pour la jonction active en $x = b$.

x	d^-	d^+
impédance	$Z_{d^-} = \rho_1 c_1 z_{d^-}$	$Z_{d^+} = \rho_2 c_2 z_{d^+}$
impédance spécifique	$z_{d^-} = \frac{u_{,x}(d^-)}{jk_1 u(d^-)}$	$z_{d^+} = -\frac{u_{,x}(d^+)}{jk_2 u(d^+)}$

 TAB. 5.4 – Définitions des impédances et des impédances spécifiques pour la jonction passive en $x = d$.

5.3.4 Jonctions passives : cas des jonctions à réaction localisée

Ce paragraphe vise à établir la condition limite énergétique correspondant à une jonction à réaction localisée (Figure 5.2) caractérisée par les grandeurs M , C et K désignant respectivement la masse, l'amortissement et la raideur.

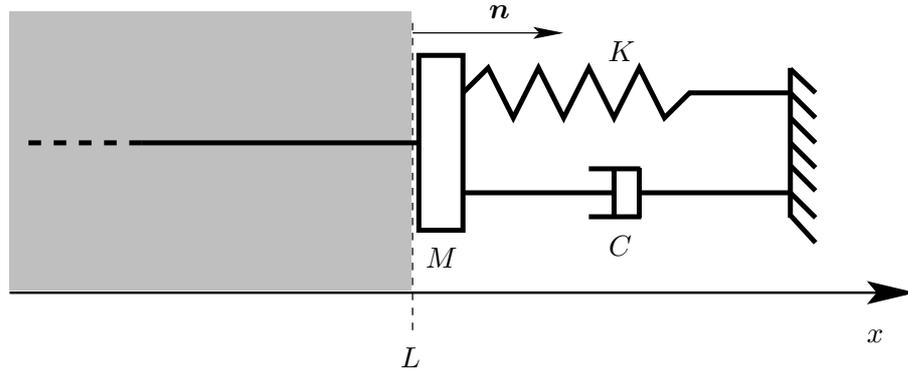


FIG. 5.2 – Jonction à réaction localisée.

En $x = L$, l'équation d'équilibre s'écrit sur les résultantes :

$$-\int_S \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{n} dS = M \ddot{\mathbf{u}} + C \dot{\mathbf{u}} + K \mathbf{u}. \quad (5.61)$$

Dans le cas d'une onde longitudinale se propageant suivant x , l'unique composante σ_{xx} de la contrainte normale $\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{n}$ s'écrit $\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) u_{,x}$. La célérité de l'onde s'écrivant $c = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$, l'amplitude complexe $u(L)$ du déplacement en $x = L$ et sa dérivée spatiale $u_{,x}(L)$ sont liées, en régime permanent de pulsation ω et pour une surface unitaire, par :

$$u_{,x}(L) = \frac{M\omega^2 - jC\omega - K}{\lambda + 2\mu} u(L) \quad (5.62)$$

Une condition d'impédance [166] en $x = L$, exprimée à l'aide de l'impédance spécifique z , s'écrit :

$$-u_{,x}(L) - j k z u(L) = 0, \quad (5.63)$$

où $z = Z/Z_c$ et $k = \omega/c$. Les équations 5.62 et 5.63 permettent d'aboutir à :

$$Z = C + j \left(M\omega - \frac{K}{\omega} \right), \quad (5.64)$$

l'impédance Z étant ici bien définie comme le rapport d'une force sur une vitesse. Une condition libre s'écrit avec une impédance nulle, tandis qu'une condition de blocage du déplacement s'écrit avec une impédance infinie. La caractérisation de la jonction par une impédance spécifique z permet donc d'écrire des conditions limites énergétiques analogues à la condition mixte (5.48) établie pour l'intensité de structure moyennée spatialement.

Les impédances et impédances spécifiques correspondant aux cas d'une masse bloquante, d'un amortisseur ou d'une liaison élastique sont précisées dans le tableau 5.5.

	masse bloquante	amortisseur	liaison élastique
impédance	$Z = j\omega M$	$Z = C$	$Z = K/(j\omega)$
impédance spécifique	$z = j\omega M/(\rho c)$	$C/(\rho c)$	$K/(j\omega \rho c)$

TAB. 5.5 – Définitions des impédances et des impédances spécifiques pour une jonction à réaction localisée.

5.4 Exemples de résultats

La méthode consiste à résoudre l'équation (5.10) associée aux différents types de conditions limites présentés plus haut :

- les équations (5.25) et (5.35) pour une jonction active,
- l'équation (5.48) pour une frontière décrite par une impédance spécifique z ,
- les équations (5.57) et (5.60) pour une interface.

Une fois l'intensité de structure moyennée spatialement $\langle I \rangle$ déterminée, les densités d'énergie moyennées $\langle T \rangle$, $\langle U \rangle$, $\langle W \rangle$ et $\langle L \rangle$ sont obtenues comme expliqué en 5.2.3.

Les résultats présentés ci-dessous sont similaires à ceux exposés dans [185] pour des ondes longitudinales, et à ceux figurant dans [186] pour des ondes acoustiques.

5.4.1 Un premier exemple portant sur des jonctions actives et passives

L'application numérique porte sur des ondes longitudinales se propageant entre $-L_1 = -9 \text{ m}$ et $L_2 = 11 \text{ m}$ (Figure 5.3) dans de l'acier dont les paramètres sont définis dans le tableau 5.6 (milieu 1). La densité de force concentrée f_x est appliquée en $a = 3 \text{ m}$. L'impédance spécifique $z_1 = 0.05 + 0.01j$ signifie que la jonction située en $x = -L_1$ est fortement réfléchissante et peu dissipative. L'impédance spécifique $z_2 = 0.9$ signifie que la jonction située en $x = L_2$ est peu réfléchissante.

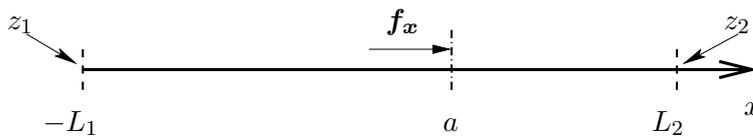


FIG. 5.3 – Système étudié dans la partie 5.4.1.

5.4.1.1 Réponse en fréquence pour l'intensité de structure moyennée spatialement

Les transferts énergétiques peuvent être analysés dans le domaine fréquentiel. L'intensité de structure active est calculée en $b = 7m$ pour une densité de force unitaire $f_x = 1 Nm^{-2}$ (Figure 5.4) dans la gamme de fréquence $[3000 Hz - 5000 Hz]$, et fait apparaître le comportement résonnant du système.

5.4.1.2 Description spatiale des transferts énergétiques

Les quantités énergétiques locales sont calculées à partir de la formulation en déplacement (mais pourraient également l'être à partir de la formulation quadratique exacte présentée dans le chapitre 3), tandis que les quantités énergétiques moyennées spatialement sont obtenues à l'aide de la formulation présentée dans ce chapitre. Les intensités actives sont calculées à $3640 Hz$ (Figure 5.6a) pour l'une de ces valeurs les plus faibles et à $3750 Hz$ (Figure 5.6b) pour l'une de ses valeurs les plus fortes (points marqués sur la Figure 5.4). Ces différences de niveau dues au comportement résonnant du système se retrouvent sur le module de l'impédance d'entrée $|Z_a| = |Z_{a+} + Z_{a-}|$ de la Figure 5.5, où l'impédance $Z_a = f_{x1}/(j\omega u(a))$ est calculée à partir des impédances spécifiques z_1 et z_2 .

La formulation quadratique moyennée permet une bonne reconstitution des composantes à grande échelle des quantités énergétiques. Une fois moyennées spatialement, les variations spatiales à petite échelle des quantités énergétiques telles que les densités d'énergie (5.15) et (5.5) sont supprimées (Figure 5.7). Un modèle Eléments Finis basé sur le champ de déplacement avec 6 éléments par longueur d'onde nécessiterait 76 noeuds à $4000 Hz$, sans tenir compte du dédoublement des noeuds là où doit être représentée une discontinuité, tandis que très peu de noeuds sont nécessaires sur $-L_1 \leq x \leq a$ et sur $a \leq x \leq L_2$ à la représentation des quantités énergétiques moyennées. Cette approche s'avère donc pertinente dès lors que la fréquence augmente.

	milieu 1	milieu 2
Masse volumique ρ ($kg m^{-3}$)	7800	2700
Module d'Young E (Pa)	$2.1 \cdot 10^{11}(1 + j \cdot 0.01)$	$0.7 \cdot 10^{11}(1 + j \cdot 0.01)$
Coefficient de Poisson ν	0.3	0.3

TAB. 5.6 – Propriétés des milieux de propagation

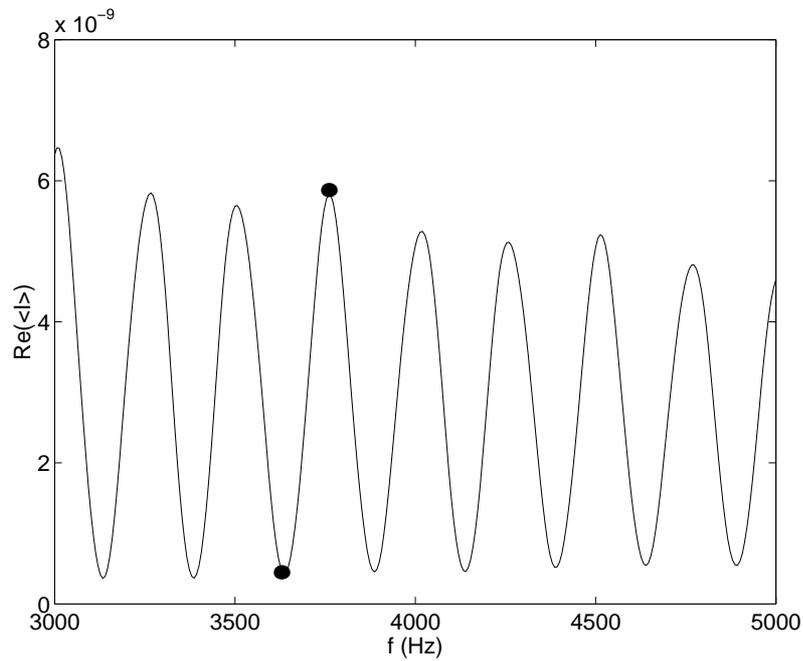


FIG. 5.4 – Intensité de structure active moyennée spatialement au point $b = 7 \text{ m}$ (point marqué sur les Figures 5.6 et 5.7) pour une densité de force concentrée f_x unitaire.

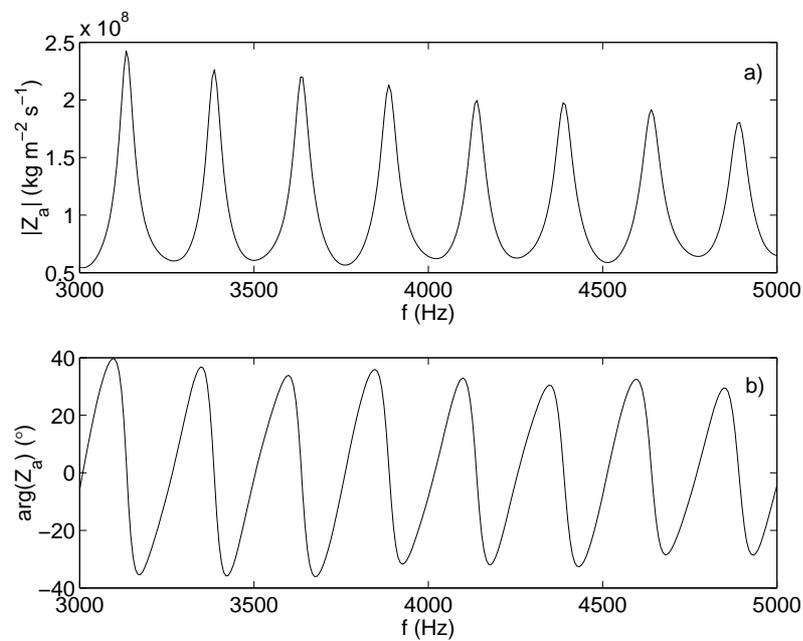


FIG. 5.5 – Impédance d'entrée Z_a : a) module $|Z_a|$; b) argument $\arg(Z_a)$.

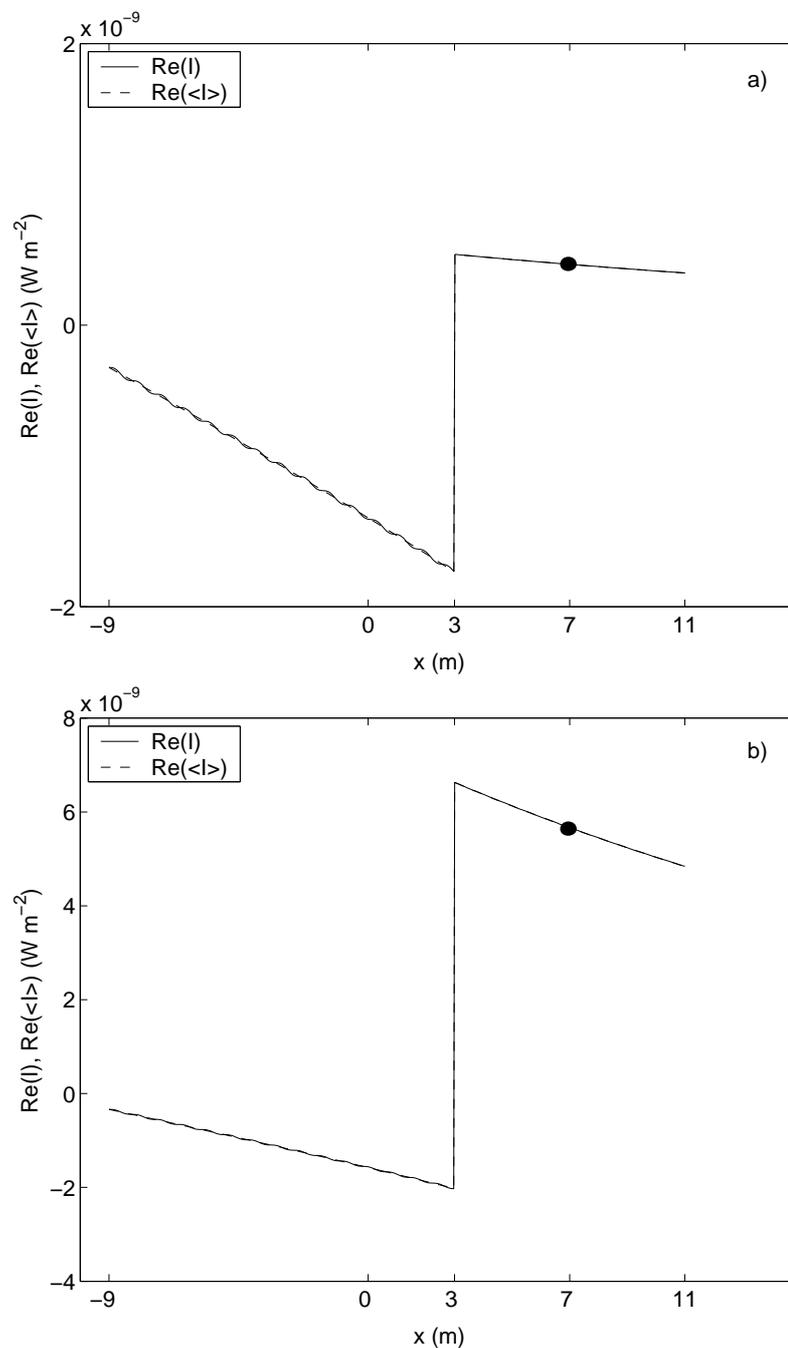


FIG. 5.6 – Parties réelles des intensités de structure : a) à 3640 Hz , b) à 3750 Hz . Ligne pleine : solution obtenue à partir de la formulation en déplacement, ligne pointillée : solution obtenue à partir de la formulation quadratique moyennée spatialement.

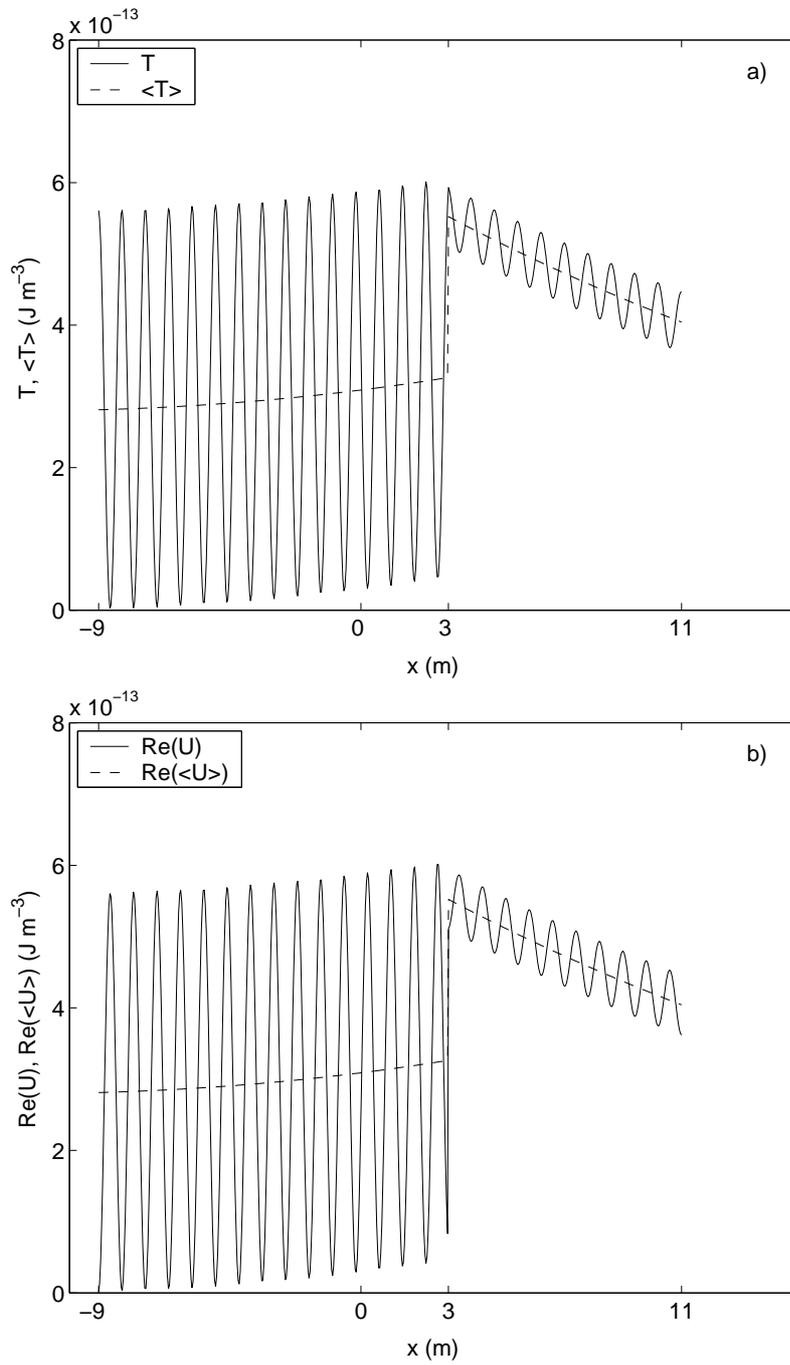


FIG. 5.7 – Densités d'énergie à 3750 Hz : a) densités d'énergie cinétique, b) partie réelle des densités d'énergie de déformation. Ligne pleine : solution obtenue à partir de la formulation en déplacement, ligne pointillée : solution obtenue à partir de la formulation quadratique moyennée spatialement.

5.4.2 Un second exemple portant sur une discontinuité de masse volumique

Les calculs ont été effectués pour des ondes purement longitudinales se propageant à une fréquence de 4000 Hz dans de l'acier (Table 5.6) entre $-L_1 = -10 \text{ m}$ et $d = 3 \text{ m}$, et dans de l'aluminium (Table 5.6) entre $d = 3 \text{ m}$ et $L_2 = 10 \text{ m}$ (Figure 5.8). Une première densité de force concentrée $f_{x_1} = 1 \text{ Nm}^{-2}$ est appliquée en $a = -2 \text{ m}$ et une seconde $f_{x_2} = 2 \text{ Nm}^{-2}$ en $b = 7 \text{ m}$. L'impédance spécifique z_1 vaut $z_1 = 0.05 + 0.01j$ comme dans le paragraphe 5.4.1. L'impédance spécifique $z_2 = 0.1$ signifie que la jonction située en $x = L_2$ est fortement réfléchissante. La discontinuité de masse volumique en $x = d$ implique une discontinuité de la première dérivée spatiale de l'intensité de structure locale (calculée à partir du champ de déplacement) comme de l'intensité moyennée spatialement. La formulation moyennée permet d'obtenir une bonne reconstitution de cette discontinuité (Figure 5.9).

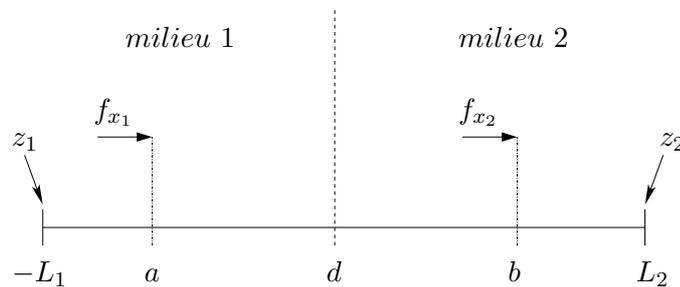


FIG. 5.8 – Discontinuité de masse volumique : configuration du système étudié.

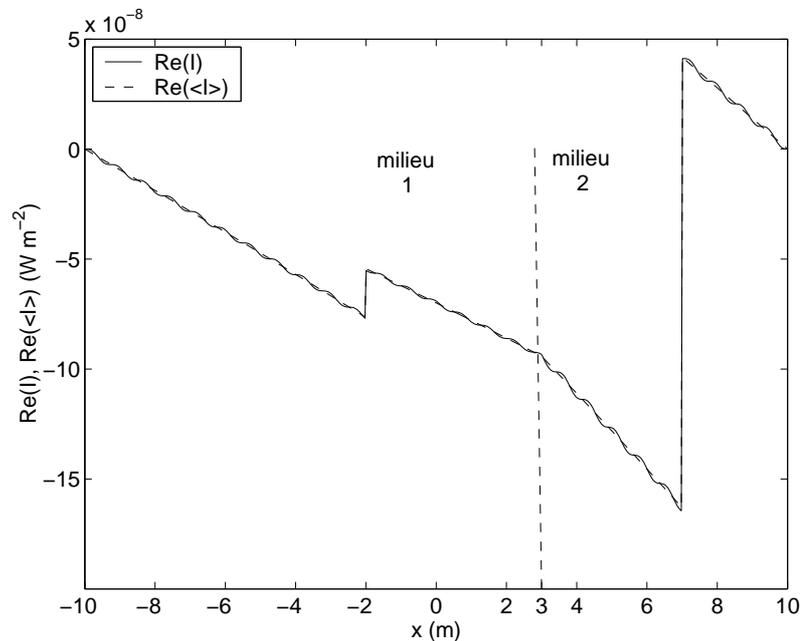


FIG. 5.9 – Parties réelles des intensités de structure. Ligne pleine : solution obtenue à partir de la formulation en déplacement, ligne pointillée : solution obtenue à partir de la formulation quadratique moyennée spatialement.

5.5 Extension de la formulation moyennée spatialement : perspectives et difficultés

5.5.1 Extension à d'autres types d'ondes dans le cas unidimensionnel

L'application de la formulation moyennée spatialement à des structures plus complexes passe par la prise en compte d'ondes non planes. La première extension envisagée concerne les ondes de flexion unidimensionnelles. Cependant, comme il est indiqué dans la conclusion du chapitre 4, les composantes mixtes issues de l'interaction entre ondes propagatives et ondes évanescentes compliquent singulièrement la définition d'une échelle appropriée au moyennage spatial des grandeurs énergétiques d'une part, et le calcul des conditions limites d'autre part. En particulier le calcul des conditions limites reposant sur la caractérisation d'une jonction par une seule impédance et tel que développé en 5.3 n'est plus envisageable. En effet, l'ajout de degrés de liberté de rotation à ceux du déplacement fait que les jonctions doivent alors être caractérisées par des matrices.

5.5.2 Extension à des systèmes bidimensionnels

Le premier cas d'extension de la formulation moyennée spatialement à des systèmes bidimensionnels est celui de l'interaction entre deux ondes planes. Dans ce cas, comme il a été montré dans la partie 2.4, les quantités énergétiques, en tant que variables quadratiques, présentent une cellule de pseudo-périodicité spatiale de longueur et largeur moitiés de celles du champ de déplacement. L'échelle sur laquelle porte les moyennes spatiales est donc bien identifiée. La difficulté majeure réside alors dans l'écriture des conditions limites vérifiées par les quantités énergétiques moyennées à partir de celles vérifiées par le champ de déplacement.

5.6 Conclusion

Une formulation quadratique moyenne pour des ondes planes unidimensionnelles est obtenue dans ce chapitre. En moyennant les variables quadratiques à l'échelle de leur pseudo-période, typiquement la demi-longueur d'onde, leurs composantes à petite échelle disparaissent. Les variables moyennées permettent alors de décrire les transferts énergétiques à une échelle grande devant la longueur d'onde. C'est notamment le cas de l'intensité de structure moyennée pour laquelle différentes conditions limites sont obtenues à partir d'une caractérisation des jonctions par des impédances. Cette formulation quadratique moyenne est bien adaptée à une gamme fréquentielle pour laquelle résoudre l'équation d'onde, par exemple à l'aide d'une méthode de type FEM, n'est plus possible. De plus la description des jonctions à l'aide d'impédances permet d'observer les résonances du système.

Toutefois l'extension directe de ce type de formulation, qu'il s'agisse d'ondes de flexion unidimensionnelles ou de systèmes bidimensionnels, paraît plus difficile à mettre en oeuvre à cause de la définition d'un intervalle de moyennage ou/et de l'écriture de conditions limites appropriés. Ces problèmes pourraient trouver une solution à l'aide d'un filtrage dans le domaine des nombres d'ondes.

Conclusion générale

Dans ce travail de thèse, les transferts énergétiques associés à différents types de phénomènes vibratoires ont été étudiés analytiquement. Après avoir donné au chapitre 1 un aperçu des différentes méthodes prédictives développées pour les moyennes et hautes fréquences, une analyse des grandeurs énergétiques issues de la solution de l'équation d'onde classique a été proposée au chapitre 2.

Cette analyse a dans un premier temps porté sur des champs généraux : elle a permis de souligner le rôle non négligeable des interférences sur les transferts énergétiques, qu'il s'agisse des interférences entre différents types d'ondes ou entre différentes sources, à l'image d'un exemple concernant deux monopôles acoustiques. Le cas d'un champ d'ondes planes, et plus particulièrement celui des interférences entre deux de ses ondes, a été traité dans un second temps : les quantités énergétiques, en tant que variables quadratiques, présentent alors une cellule de pseudo-périodicité spatiale de longueur et largeur moitiés de celles du champ de déplacement. Cette pseudo-périodicité permet d'envisager de procéder à des moyennes spatiales.

Ces résultats ont été confirmés au chapitre 3 pour des ondes planes unidimensionnelles. Dans ce cas il est possible d'établir une distinction entre les différents phénomènes physiques associés aux différentes échelles de variation des variables quadratiques. Les composantes à grande échelle des variables quadratiques correspondent à la décroissance globale de puissance causée par les phénomènes dissipatifs et décrivent les transferts énergétiques à une échelle grande devant la longueur d'onde, tandis que les composantes à petite échelle décrivent les transferts énergétiques à l'échelle de la demi-longueur d'onde. Il est alors envisageable de s'affranchir de ces composantes à petite échelle spatiale en moyennant les variables quadratiques à l'échelle de la demi-longueur d'onde. C'est cette approche qui a été proposée dans le chapitre 5. Cette approche est également envisageable en ce qui concerne les ondes quasi-longitudinales et de cisaillement dans les plaques semi-infinies abordées au chapitre 4 où une formulation quadratique équivalente à la formulation en déplacement a été présentée.

L'utilisation de variables quadratiques moyennées pour la description des transferts énergétiques en ondes planes unidimensionnelles a été développée dans le chapitre 5. Elle induit l'écriture de nouvelles équations différentielles et surtout de nouvelles conditions limites vérifiées par ces variables, notamment l'intensité de structure complexe moyennée. Différentes conditions limites, prenant en compte les parties active et réactive de cette intensité, ont été obtenues à partir d'une caractérisation des jonctions par des impédances. Les cas de jonctions passives (changement des caractéristiques du milieu de propagation, frontières) font intervenir des conditions mixtes analogues aux conditions d'impédance d'une formulation en déplacement. Le cas des jonctions actives fait quant à lui intervenir non seulement des impédances mais également la densité de puissance injectée dans la discontinuité d'intensité moyennée.

Cette formulation quadratique moyenne est bien adaptée à une gamme fréquentielle pour laquelle résoudre l'équation d'onde, par exemple à l'aide d'une méthode Eléments Finis, n'est plus possible. De plus la description des jonctions à l'aide d'impédances permet d'observer les résonances du système.

Les perspectives du travail présenté dans ce document peuvent avoir deux orientations possibles. La première vise à étendre la formulation moyennée à des ondes non planes, toujours pour des systèmes unidimensionnels. Le cas des ondes de flexion unidimensionnelles, abordées au chapitre 4, paraît toutefois plus difficile à traiter en raison des interactions supplémentaires dues à la présence de composantes évanescentes dans le champ de déplacement. La définition d'un intervalle de moyennage et l'écriture de conditions limites s'en trouvent compliquées. Une approche pourrait consister à opérer un filtrage dans le domaine des nombres d'onde, dans un premier temps en ajoutant une hypothèse d'amortissement faible. Ce filtrage permettrait d'identifier à la fois les composantes quadratiques qui décrivent les transferts énergétiques globaux et celles qui interviennent dans la description des jonctions.

La seconde orientation concerne l'extension de la formulation moyennée à des systèmes multidimensionnels. La description d'ondes issues de sources ponctuelles en 2D et 3D peut être envisagée par superposition d'ondes planes et évanescentes, de manière similaire à l'équation (16) dans [187], ce qui suppose de résoudre le cas des ondes évanescentes précédemment évoqué.

Pour des plaques de dimensions finies, une approche peut-être envisageable consisterait à opérer une décomposition par transformée de Fourier en essayant de dégager des conditions limites pour chaque composante ou paire de composantes. L'idée vient de la comparaison avec la méthode des éléments spectraux. Dans [13], Kulla, en donnant une décomposition de la solution en fonctions élémentaires des plaques en fonction de la transformée de Fourier calculée sur les bords, ramène le problème bidimensionnel à un cas unidimensionnel. Il s'agit alors de déterminer s'il est possible d'en faire de même avec les grandeurs quadratiques utilisées ici.

Concernant les perspectives d'applications des résultats obtenus lors de cette thèse, il est possible d'entrevoir la modélisation d'assemblages de systèmes unidimensionnels dans lesquels se propagent des ondes planes, qu'il s'agisse d'ondes acoustiques ou de vibrations de structures telles que des barres par exemple.

Annexe A

Impédance ramenée de $x = L$ à $x = x_0$

Entre $x = L$ et $x = x_0$, l'amplitude complexe u du déplacement peut s'écrire

$$u(x) = A_1 e^{jk(x-x_0)} + A_2 e^{-jk(x-x_0)}, \quad (5.65)$$

où A_1 et A_2 sont des constantes. En notant z l'impédance spécifique en $x = L$, la condition mixte sur le déplacement en $x = L$ est la condition d'impédance [166] $u_n(L) + jkzu(L) = 0$ qui s'écrit

$$\epsilon \left(A_1 e^{jk(L-x_0)} - A_2 e^{-jk(L-x_0)} \right) = -z \left(A_1 e^{jk(L-x_0)} + A_2 e^{-jk(L-x_0)} \right), \quad (5.66)$$

où le paramètre $\epsilon = \pm 1$ est défini par

$$\frac{\partial}{\partial n} = \epsilon \frac{\partial}{\partial x}. \quad (5.67)$$

Or d'après (5.65) le déplacement u et sa dérivée spatiale $u_{,x}$ au point x_0 valent

$$\begin{cases} u(x_0) &= A_1 + A_2 \\ u_{,x}(x_0) &= jk(A_1 - A_2). \end{cases} \quad (5.68)$$

Les relations (5.66) et (5.68) permettent d'exprimer les coefficients A_1 et A_2 en fonction de $u(x_0)$:

$$A_1 = \frac{(\epsilon - z) u(x_0) e^{-jk(L-x_0)}}{\epsilon(e^{jk(L-x_0)} + e^{-jk(L-x_0)}) + z(e^{jk(L-x_0)} - e^{-jk(L-x_0)})}, \quad (5.69)$$

$$A_2 = \frac{(\epsilon + z) u(x_0) e^{jk(L-x_0)}}{\epsilon(e^{jk(L-x_0)} + e^{-jk(L-x_0)}) + z(e^{jk(L-x_0)} - e^{-jk(L-x_0)})}. \quad (5.70)$$

Les expressions (5.69) et (5.70) permettent de déterminer l'impédance Z_r , ramenée de $x = L$ à $x = x_0$ et liant $u(x_0)$ et $u_{,x}(x_0)$ par

$$j\omega Z_r u(x_0) = \epsilon(\lambda + 2\mu) u_{,x}(x_0). \quad (5.71)$$

En effet, cette impédance ramenée Z_r est donnée par

$$Z_r = \frac{\epsilon(\lambda + 2\mu)k}{\omega} \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2}, \quad (5.72)$$

et s'écrit, en introduisant la célérité des ondes c :

$$Z_r = \epsilon \rho c \frac{(\epsilon - z) e^{-jk(L-x_0)} - (\epsilon + z) e^{jk(L-x_0)}}{(\epsilon - z) e^{-jk(L-x_0)} + (\epsilon + z) e^{jk(L-x_0)}}. \quad (5.73)$$

Annexe B

Formules

Le tenseur des déformations ϵ étant défini à partir du déplacement \mathbf{u} par $\epsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$, et pour tout vecteur \mathbf{q} :

$$2 \epsilon \mathbf{q} = \mathbf{grad}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}) + \mathbf{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{q}) + (\mathbf{rot} \mathbf{q}) \times \mathbf{u} - \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{q} + \mathbf{q} \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad (5.74)$$

et

$$2 \overline{\overline{\epsilon}} \epsilon^* = \Delta(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*) - \mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{u}^* - \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* - \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{u}^*, \quad (5.75)$$

où $\overline{\overline{\epsilon}} \epsilon^* = \epsilon_{ij} \epsilon_{ji}^*$ (produit tensoriel doublement contracté¹ de ϵ par ϵ^*).

¹Soit \mathbf{Q} un tenseur d'ordre $q \geq 2$ et \mathbf{R} un tenseur d'ordre $r \geq 2$. On appelle *produit tensoriel doublement contracté* des tenseurs \mathbf{Q} et \mathbf{R} le tenseur d'ordre $p + q - 4$ dont les composantes sont obtenues par sommation, selon la convention d'Einstein, des deux derniers indices de \mathbf{Q} avec les deux premiers indices de \mathbf{R} .

Annexe C

Solution analytique de maximisation des transferts énergétiques entre deux sources pour des ondes longitudinales 1D

En considérant le système unidimensionnel de la Figure 5.10 dans lequel se propagent des ondes longitudinales, cette annexe vise à donner la condition sur la densité de force f_{x_2} associée à la source 2 en $x = b$ permettant un transfert maximal de densité de puissance de la source 1 (de densité de force f_{x_1} en $x = a$) vers la source 2. La source 2 se comporte alors comme un "puits d'énergie".

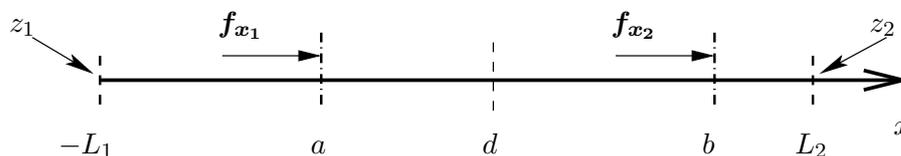


FIG. 5.10 – Maximisation des transferts énergétiques entre deux sources : système étudié.

Cas des ondes acoustiques

La question du transfert maximal d'énergie entre deux sources a fait l'objet de recherches, dans le cas de monopôles acoustiques notamment. Il a été montré que pour un nombre d'onde k donné, le transfert d'énergie entre deux monopôles distants de d dépend de kd [188]. En particulier se trouve dans [188] un exemple de deux sources, de débits de vitesse respectifs Q et $2Q$, dont celle de débit Q devient un "puits d'énergie" lorsqu'elles sont en opposition de phase. La question du transfert maximal de puissance acoustique entre deux monopôles a été détaillée dans [189, 190] pour l'étude des sources secondaires dans le cadre du contrôle actif. Pour obtenir un transfert maximal de puissance acoustique de la source 1 vers la source 2, il s'agit de trouver le débit de vitesse Q_2 de la source 2 qui minimise la forme quadratique qu'est la puissance acoustique \mathcal{P}_2 de cette même source. Cette condition s'écrit [189, 191]

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial \text{Re}(Q_2)} + j \frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial \text{Im}(Q_2)} = 0, \quad (5.76)$$

où la puissance acoustique \mathcal{P}_2 s'écrit

$$\mathcal{P}_2 = \frac{1}{2} \text{Re}(p_2 Q_2^*), \quad (5.77)$$

la pression acoustique p_2 à l'emplacement de la source 2 s'exprimant en fonction des impédances $Z_{ij} = p_i/Q_j$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$:

$$p_2 = Z_{21}Q_1 + Z_{22}Q_2. \quad (5.78)$$

De plus, l'expression de la pression rayonnée p par une source de débit de vitesse Q à une distance r de celle-ci est connue :

$$p = \frac{j\omega\rho Q}{4\pi r} e^{-jkr}. \quad (5.79)$$

Finalement, l'utilisation de (5.78) et (5.79) pour résoudre (5.76) permet d'obtenir le débit optimum Q_{2o} de la source 2 :

$$Q_{2o} = A e^{j\phi} Q_1, \quad (5.80)$$

A et ϕ désignant l'amplitude et la phase relative de la source 2 par rapport à la source 1, donnés respectivement par :

$$\begin{cases} A & = & 1/(2kd) \\ \phi & = & -(kd + \pi/2). \end{cases} \quad (5.81)$$

Cas des ondes dans un milieu élastique

L'approche présentée au paragraphe précédent peut être étendue aux vibrations longitudinales du système unidimensionnel de la Figure 5.10. L'intensité de structure I_2 à la position de la source 2 en $x = b$ s'écrit

$$I_2 = -\frac{j\omega}{2} f_{x_2} u^*(b), \quad (5.82)$$

où le déplacement u dérive du potentiel ϕ donné par

$$\phi(x) = (1 - H(x - d))\phi_1(x) + H(x - d)\phi_2(x), \quad (5.83)$$

avec

$$\phi_1(x) = c_1 \cos(k_1 x) + c_2 \sin(k_1 x) + (\cos(k_1(x - a)) - 1) \frac{f_{x_1}}{\rho_1 \omega^2} H(x - a) \quad (5.84)$$

et

$$\phi_2(x) = c_3 \cos(k_2 x) + c_4 \sin(k_2 x) + (\cos(k_2(x - b)) - 1) \frac{f_{x_2}}{\rho_2 \omega^2} H(x - b), \quad (5.85)$$

les différentes conditions limites (conditions d'impédance avec les impédances spécifiques z_1 en $x = -L_1$ et z_2 en $x = L_2$, conditions de changement de milieu de propagation en $x = d$) permettant de trouver les expressions des constantes c_1 , c_2 , c_3 et c_4 en fonction des caractéristiques des différentes jonctions, en particulier en fonction de la densité de force f_{x_2} . Le déplacement u s'écrit donc

$$u(x) = (1 - H(x - d))u_1(x) + H(x - d)u_2(x), \quad (5.86)$$

avec

$$u_1(x) = -k_1 c_1 \cos(k_1 x) + k_1 c_2 \sin(k_1 x) - \frac{k_1 f_{x_1}}{\rho_1 \omega^2} \sin(k_1(x - a)) H(x - a) \quad (5.87)$$

et

$$u_2(x) = -k_2 c_3 \cos(k_2 x) + k_2 c_4 \sin(k_2 x) - \frac{k_2 f_{x_2}}{\rho_2 \omega^2} \sin(k_2(x - b)) H(x - b). \quad (5.88)$$

Les conditions d'impédance en $x = -L_1$ et $x = L_2$ s'écrivent :

$$\begin{cases} u_{,x}(-L_1) - jk_1 z_1 u(-L_1) & = & 0 \\ u_{,x}(L_2) + jk_2 z_2 u(L_2) & = & 0. \end{cases} \quad (5.89)$$

Compte-tenu de (5.86), (5.87) et (5.88), les deux conditions d'impédance (5.89) se traduisent par les deux premières conditions suivantes pour les coefficients c_1 , c_2 , c_3 et c_4 :

$$c_1(-\cos(k_1 L_1) - jz_1 \sin(k_1 L_1)) + c_2(\sin(k_1 L_1) - jz_1 \cos(k_1 L_1)) = 0, \quad (5.90)$$

$$c_3(-\cos(k_2 L_2) - jz_2 \sin(k_2 L_2)) + c_4(-\sin(k_2 L_2) + jz_2 \cos(k_2 L_2)) = \frac{f_{x_2}}{\rho_2 \omega^2} (\cos(k_2(L_2 - b)) + jz_2 \sin(k_2(L_2 - b))). \quad (5.91)$$

Les conditions de changement de milieu de propagation en $x = d$ s'écrivent :

$$\begin{cases} u_1(d) & = & u_2(d) \\ (\lambda_1 + 2\mu_1)u_{1,x}(d) & = & (\lambda_2 + 2\mu_2)u_{2,x}(d), \end{cases} \quad (5.92)$$

ce qui, compte-tenu de (5.87) et (5.88), se traduit par :

$$c_1(-k_1 \sin(k_1 d)) + c_2(k_1 \cos(k_1 d)) + c_3(k_2 \sin(k_2 d)) + c_4(-k_2 \cos(k_2 d)) = \frac{k_1 f_{x_1}}{\rho_1 \omega^2} \sin(k_1(d - a)) \quad (5.93)$$

et

$$c_1(-\rho_1 \cos(k_1 d)) + c_2(-\rho_1 \sin(k_1 d)) + c_3(\rho_2 \cos(k_2 d)) + c_4(\rho_2 \sin(k_2 d)) = \frac{f_{x_1}}{\omega^2} \sin(k_1(d - a)). \quad (5.94)$$

Une fois les quatre coefficients c_1 , c_2 , c_3 et c_4 déterminés par la résolution de (5.90), (5.91), (5.93) et (5.94), l'intensité de structure I_2 peut être développée de la manière suivante :

$$I_2 = -\frac{j\omega}{2} k_2^* \left\{ \operatorname{Re}(f_{x_2}) [c_4^* \cos(k_2^* b) - c_3^* \sin(k_2^* b)] + j \operatorname{Im}(f_{x_2}) [c_4^* \cos(k_2^* b) - c_3^* \sin(k_2^* b)] \right\}, \quad (5.95)$$

où les coefficients c_3 et c_4 dépendent de f_{x_2} . Equivalente à (5.76), la condition pour trouver la densité de force f_{x_2} telle que le transfert d'énergie de la source 1 vers la source 2 soit maximal s'écrit :

$$\frac{\partial I_2}{\partial \operatorname{Re}(f_{x_2})} + j \frac{\partial I_2}{\partial \operatorname{Im}(f_{x_2})} = 0, \quad (5.96)$$

avec

$$\frac{\partial I_2}{\partial \operatorname{Re}(f_{x_2})} = -\frac{j\omega}{2} k_2^* \left\{ f_{x_2} \left[\frac{\partial c_4^*}{\partial \operatorname{Re}(f_{x_2})} \cos(k_2^* b) - \frac{\partial c_3^*}{\partial \operatorname{Re}(f_{x_2})} \sin(k_2^* b) \right] + c_4^* \cos(k_2^* b) - c_3^* \sin(k_2^* b) \right\}, \quad (5.97)$$

et

$$\frac{\partial I_2}{\partial \operatorname{Im}(f_{x_2})} = -\frac{j\omega}{2} k_2^* \left\{ f_{x_2} \left[\frac{\partial c_4^*}{\partial \operatorname{Im}(f_{x_2})} \cos(k_2^* b) - \frac{\partial c_3^*}{\partial \operatorname{Im}(f_{x_2})} \sin(k_2^* b) \right] + j(c_4^* \cos(k_2^* b) - c_3^* \sin(k_2^* b)) \right\}. \quad (5.98)$$

Finalement, compte tenu de (5.97) et (5.98), la condition (5.96) se réécrit :

$$\cos(k_2^* b) \left[\frac{\partial c_4^*}{\partial \operatorname{Re}(f_{x_2})} + j \frac{\partial c_4^*}{\partial \operatorname{Im}(f_{x_2})} \right] - \sin(k_2^* b) \left[\frac{\partial c_3^*}{\partial \operatorname{Re}(f_{x_2})} + j \frac{\partial c_3^*}{\partial \operatorname{Im}(f_{x_2})} \right] = 0. \quad (5.99)$$

La densité de force f_{x_2} vérifiant (5.99) dépend donc des caractéristiques des milieux de propagation, des conditions limites aux extrémités et surtout de la densité de force f_{x_1} de la source 1.

Dans le cas du contrôle actif, le même type de démarche peut être effectué, l'intensité de structure à minimiser n'étant cette fois-ci plus seulement I_2 mais l'intensité totale $I_1 + I_2$.

Ce cas est similaire à celui de la minimisation de la densité d'énergie cinétique totale des ondes de flexion dans une poutre d'Euler-Bernoulli soumise à deux forces ponctuelles harmoniques [192, 193].

Bibliographie

- [1] O.C. Zienkiewicz et R.L. Taylor, “*The Finite Element Method : Basic Formulation and Linear Problems*”, (Mac Graw-Hill Book Company) (1989).
- [2] C.A. Brebbia, “*The Boundary Element Method for Engineers*”, (Pentech, Londres) (1984).
- [3] F. Ihlenburg, “*Finite Element Analysis of Acoustic Scattering*”, Volume 132 of Applied Mathematical Sciences (Springer, New York) (1998).
- [4] S. Marburg, “*Six boundary elements per wavelength : is that enough ?*”, Journal of computational acoustics **10** (1), 25-51 (2002).
- [5] P.J. Shorter et V. Cotoni, “*Numerical and Experimental Validation of the Hybrid FE-SEA Method*”, Proceedings of NOVEN 2005, Saint-Raphaël, France (2005).
- [6] E. Rébillard et J.L. Guyader, “*Vibrational behaviour of a population of coupled plates : hypersensitivity to the connection angle*”, Journal of Sound and Vibration **188**, 435-454 (1995).
- [7] E. Rébillard et J.L. Guyader, “*Vibrational behaviour of lattices of plates. Basic behaviour and hypersensitive phenomena*”, Journal of Sound and Vibration **205**, 337-354 (1997).
- [8] E. Rébillard et J.L. Guyader, “*Calculation of the radiated sound from coupled plates*”, Acta Acustica **86**, 303-312 (2000).
- [9] R.J. Bernhard, “*The limits of predictability due to manufacturing and environmentally induced uncertainty*”, Proceedings of Internoise 96, vol 6, 2867-2872 (1996).
- [10] L. Gavrić et G. Pavić, “*A Finite Element Method for Computation of Structural Intensity by the Normal Mode Approach*”, Journal of Sound and Vibration **164** (1), 29-43 (1993).
- [11] W. Desmet, “*Mid-frequency vibro-acoustic modeling : challenges and potential solutions*”, Proceedings of ISMA2002, II, 835-862 (2002).
- [12] J.F. Doyle, “*Wave Propagation in Structures : Spectral Analysis Using Fast Discrete Fourier Transform*”, (Springer, New York) (1997).
- [13] P.H. Kulla, “*High precision finite elements*”, Finite Elements in Analysis and Design **26**, 97-114 (1997).
- [14] L. Donadon, E.L. Albuquerque et J.R.F. Arruda, “*Modeling reinforced plates using the spectral element method*”, Proceedings of Inter-noise, Prague (2004).
- [15] R.F. Nunes, S. Oexl et J.R.F. Arruda, “*Taking uncertainties into account in spectral element method modeling of structures*”, Proceedings of Inter-noise, Prague (2004).
- [16] R.F. Nunes, A. Klimke et J.R.F. Arruda, “*On estimating frequency response function envelopes using the spectral element method and fuzzy sets*”, Journal of Sound and Vibration **291**, 986-1003 (2006).
- [17] W. Desmet, “*A wave based prediction technique for coupled vibro-acoustic analysis*”, Ph.D. dissertation, Katholieke Universiteit Leuven, Department Werktuigkunde, Leuven (1998).

- [18] E. Trefftz, "*Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren*", Proceedings of the 2nd International Congress on Applied Mechanics, Zurich, Switzerland, 131-137 (1926).
- [19] W. Desmet, B. Van Hal, P. Sas et D. Vandepitte, "*A computationally efficient prediction technique for the steady-state dynamic analysis of coupled vibro-acoustic systems*", Advance in Engineering Software **33**, 527-540 (2002).
- [20] B. Pluymers, W. Desmet, D. Vandepitte et P. Sas, "*Application of an efficient wave based prediction technique for the analysis of vibro-acoustic radiation problems*", Journal of Computational and Applied Mathematics **168**, 353-364 (2004).
- [21] B. Pluymers, W. Desmet, D. Vandepitte et P. Sas, "*Feasibility study of the wave based method for high-frequency steady-state acoustic analysis*", Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering ISMA2004, Leuven, Belgium, 1555-1574 (2004).
- [22] E. Skudrzyk, "*The mean-value method of predicting the dynamic response of complex vibrators*", Journal of the Acoustical Society of America **67** (4), 1105-1135 (1980).
- [23] J.L. Guyader, "*Modal sampling method for the vibration study of systems of high modal density*", Journal of the Acoustical Society of America **88** (5), 2269-2276 (1990).
- [24] D. Trentin et J.L. Guyader, "*Vibration of a master plate with attached masses using modal sampling method*", Journal of the Acoustical Society of America **96** (1), 235-245 (1994).
- [25] E.H. Dowell et Y. Kubota, "*Asymptotic modal analysis and statistical energy analysis of dynamics systems*", Journal of Applied Mechanics **52**, 949-957 (1985).
- [26] Y. Kubota et E.H. Dowell, "*Experimental investigation of asymptotic modal analysis for a rectangular plate*", Journal of Sound and Vibration **106** (2), 203-216 (1986).
- [27] R. Ohayon et C. Soize, *Structural Acoustics and Vibration - Mechanical Models, Variational Formulations and Discretization*, (Academic Press, San Diego), (1998).
- [28] R.H. Lyon et R.G. DeJong, *Theory and Application of Statistical Energy Analysis*, (Butterworth-Heinemann, Boston), (1995).
- [29] A.J. Keane, W.G. Price, *Statistical Energy Analysis, an overview with applications in structural dynamics*, (Cambridge University Press, New-York), (1997).
- [30] R.S. Langley, "*A wave intensity technique for the analysis of high frequency vibrations*", Journal of Sound and Vibration **159** (3), 483-502 (1992).
- [31] D.A. Bies, S. Hamid, "*In situ determination of loss and coupling loss factors by the power injection method*", Journal of Sound and Vibration **70** (2), 187-204 (1980).
- [32] F.J. Fahy, P.P. James, "*A study of the kinetic energy impulse response as an indicator of the strength of coupling between SEA subsystems*", Journal of Sound and Vibration **190** (3), 187-204 (1996).
- [33] F.J. Fahy, W.G. Price, Proceedings of the IUTAM Symposium on Statistical Energy Analysis, ISVR, Southampton (1997).
- [34] D. Trentin, "*Construction de modèles analytiques en vibroacoustique dans le domaine des moyennes et hautes fréquences pour les structures simples*", Thèse INSA Lyon (1995).
- [35] J.A. Steel et R.J.M. Craik, "*Statistical energy analysis of structure-borne sound transmission by finite element methods*", Journal of Sound and Vibration **178**, 553-561 (1994).
- [36] C. Fredö, "*SEA-like approach for the derivation of energy flow coefficients with finite element model*", Journal of Sound and Vibration **199**, 645-666 (1997).

- [37] L. Maxit et J.L. Guyader, “*Estimation of SEA coupling loss factors using a dual formulation and FEM modal information, part I : Theory*”, Journal of Sound and Vibration **239** (5), 907-930 (2001).
- [38] L. Maxit et J.L. Guyader, “*Estimation of SEA coupling loss factors using a dual formulation and FEM modal information, part II : Numerical applications*”, Journal of Sound and Vibration **239** (5), 931-948 (2001).
- [39] R.F. Nunes, K.M. Ahmida et J.R.F. Arruda, “*A SEM/Fuzzy method for the estimation of the SEA coupling loss factors*”, Proceedings of NOVEM 2005, Saint-Raphaël, France (2005).
- [40] D.E. Newland, “*Calculation of power flow between coupled oscillators*”, Journal of Sound and Vibration **3** (3), 262-276 (1966).
- [41] J. Woodhouse, “*An approach to the theoretical background of the statistical energy analysis applied to structural vibration*”, Journal of the Acoustical Society of America **69**, 1695-1709 (1981).
- [42] R.S. Langley, “*A general derivation of the statistical analysis equation for coupled dynamic systems*”, Journal of Sound and Vibration **135**, 499-508 (1989).
- [43] B.R. Mace, “*On the statistical energy analysis hypothesis of coupling power proportionality and some implications of its failure*”, Journal of Sound and Vibration **178** (1), 95-112 (1994).
- [44] R.S. Langley, “*A derivation of the coupling loss factors used in statistical energy analysis*”, Journal of Sound and Vibration **141** (2), 207-219 (1990).
- [45] S. Finnveden, “*Ensemble averaged vibration energy flow in a three elements structure*”, Journal of Sound and Vibration **187** (3), 495-529 (1995).
- [46] F.J. Fahy, “*Guide for potential users of sea*”, Proceedings of ISMA2002, Volume 2, 723-728 (2002).
- [47] F.J. Fahy, “*Statistical energy analysis : a critical overview*”, Phil Transaction of the Royal Soc. London, A346, 431-447 (1994).
- [48] A.D. Mohammed et F.J. Fahy, “*A study of uncertainty in applications of statistical energy analysis to one-dimensional and two-dimensional structural systems*”, Proceedings of the Institute of Acoustics **12**, 543-549 (1990).
- [49] F.J. Fahy, *Noise and Vibration*, (R.G. White and J.G. Walker, editors). Chichester : Ellis Horwood. Chapter 7 : Statistical Energy Analysis.
- [50] G. Borello, J.N. Pinder et I.U. Borchers, “*Interior Noise Control of Spacecraft Launch Vehicles*”, 40th IAF congress, Malaga, Spain (1989).
- [51] T. Kuba, V. Cotoni et P.J. Shorter, “*Improving SEA prediction of structure-borne noise by describing junctions details with FE*”, Proceedings of the Thirteenth International Congress on Sound and Vibration, Vienna, Austria (2006).
- [52] J.L. Guyader et N. Totaro, “*Structural partitioning and power flow analysis : the keys for vibroacoustic pre-design*”, Proceedings of Inter-Noise 2004, Prague (2004).
- [53] N. Totaro, “*Caractérisation de sources aérodynamiques et sous-structuration pour la méthode SEA*”, Thèse INSA Lyon (2004).
- [54] N. Totaro et J.L. Guyader, “*SEA substructuring using cluster analysis : The MIR index*”, Journal of Sound and Vibration **290**, 264-289 (2006).
- [55] F.J. Fahy, “*L’analyse statistique énergétique*”, Revue d’Acoustique **33**, 10-25 (1975).
- [56] A.K. Belyaev et V.A. Palmov, “*Integral theories of random vibration of complex structures*”, in Random Vibrations - Status and Recent Developments, edited by I. Elishakoff and R.H. Lyon, (Elsevier, Amsterdam, 1986).

- [57] C. Soize, "A model and numerical method in the medium frequency range for vibroacoustic predictions using the theory of structural fuzzy", Journal of the Acoustical Society of America **94**, 849-865 (1993).
- [58] R.S. Langley et P. Bremner, "A hybrid method for the vibration analysis of complex structural-acoustic systems", Journal of the Acoustical Society of America **105**, 1657-1671 (1999).
- [59] B.R. Mace et P.J. Shorter, "Energy flow models from finite element analysis", Journal of Sound and Vibration **233**, 369-389 (2000).
- [60] P.J. Shorter et R.S. Langley, "Vibro-acoustic analysis of complex systems", Journal of Sound and Vibration **288**, 669-699 (2005).
- [61] P.J. Shorter et R.S. Langley, "On the reciprocity relationship between direct field radiation and diffuse reverberant loading", Journal of the Acoustical Society of America **117**, 85-95 (2005).
- [62] L. Gagliardini & coll. et G. Borello, "Virtual SEA : Mid-Frequency Structure-Borne Noise Modeling Based on Finite Element Analysis", SAE conference, Traverse City, USA (2003).
- [63] G. Borello et V. Cipolla, "Prediction of high frequency shock response of a satellite using SEA", European Conference on Spacecraft Structures, Materials & Mechanical Testing, Toulouse, France (2002).
- [64] R.J. Pinnington et D. Lednik, "Transient Statistical Energy Analysis of an impulsively excited two oscillator system", Journal of Sound and Vibration **189(2)**, 249-264 (1996).
- [65] J.L. Guyader, "State of the art of energy methods used for vibro acoustic prediction", Proceedings of the Sixth International Congress on Sound and Vibration, Copenhagen, 59-84 (1999).
- [66] Y. Lase, "Description des réponses ste modèleructurales dans le domaine des moyennes fréquences à l'aide d'une formulation énergétique", Thèse Ecole Centrale de Lyon (1990).
- [67] O. Bouthier, "Energetics of vibrating systems", M Sc Thesis, Purdue University (1992).
- [68] M. Djimadoum, "Prévision des vibrations stationnaires et instationnaires aux moyennes fréquences : approche en énergie moyenne et approche par admittances impulsives", Thèse INSA Lyon (1993).
- [69] M.N. Ichchou, A. Le Bot et L. Jezequel, "Couplage de plaques en hautes fréquences : méthode de l'équation de la chaleur", 2^{ième} colloque du GDR 1138 vibroacoustique, Marseille, 65-79 (1996).
- [70] C.R. Steele, "Application of the WKB method in solid mechanics", in Mechanics Today (S. Nemat-Nasser, ed.). Pergamon Press, New York (1976) pp. 243-295.
- [71] G.C. Papanicolaou et R. Burridge, "Transport equations for the Stokes parameters from Maxwell's equations in a random medium", Journal of Mathematics Physics **16**, 2074-2085 (1975).
- [72] R.L. Weaver, "Diffusivity of ultrasound in polycrystals", Journal of the Mechanics and Physics of Solids **38**, 55-86 (1990).
- [73] E. Savin, "Transient transport equations for high-frequency power-flow in heterogeneous cylindrical shells", Waves in Random Media **14**, 303-325 (2004).
- [74] S.A. Rybak, "Waves in a plate containing random inhomogeneities", Soviet Physics and Acoustics **17**, 345-349 (1972).
- [75] S.A. Rybak, "Randomly coupled flexural and longitudinal vibrations of plates", Soviet Physics and Acoustics **18**, 76-79 (1972).
- [76] V.D. Belov et S.A. Rybak, "Applicability of the transport equation in one-dimensional wave-propagation problem", Soviet Physics Acoustics **21**, 110-114 (1975).

- [77] V.D. Belov, S.A. Rybak et B.D. Tartakovski, "*Propagation of vibrational energy in absorbing structures*", Soviet Physics Acoustics **23** (2), 115-119 (1977).
- [78] L.E. Buvailo et A.V. Ionov, "*Application of the finite element method to the investigation of vibroacoustical characteristics of structures at high audio frequencies*", Soviet Physics Acoustics **26** (4), 277-279 (1980).
- [79] D.J. Nefske et S.H. Sung, "*Power flow finite element analysis of dynamic systems : basic theory and applications to beams*", ASME Pub. NCA-3 : Statistical Energy Analysis, 47-54 (1987).
- [80] J.C. Wohlever et R.J. Bernhard, "*Mechanical energy flow models of rods and beams*", Journal of Sound and Vibration **153** (1), 1-19 (1992).
- [81] O. Bouthier et R.J. Bernhard, "*Simple models of energy flow in vibrating membranes*", Journal of Sound and Vibration **129-147**, 129-147 (1995).
- [82] O. Bouthier et R.J. Bernhard, "*Simple models of the energetics of transversely vibrating plates*", Journal of Sound and Vibration **182**, 149-164 (1995).
- [83] R.J. Bernhard et O. Bouthier, "*Model of the space averaged energetics of plates*", AIAA Paper 3921 (1990).
- [84] D.-H. Park, S.-Y. Hong et H.-G. Kil "*Power flow model of flexural waves in finite orthotropic plates*", Journal of Sound and Vibration **264** (1), 203-224 (2003).
- [85] Y. Lase et L. Jezequel, "*Analysis of a dynamic system based on a new energetic formulation*", Proceedings of the Third International Congress on Intensity Techniques, CETIM, Senlis, France (1990).
- [86] Y. Lase et L. Jezequel, "*Energetic analysis of structures*", Proceedings of Inter-Noise '90 (1990).
- [87] Y. Lase, M.N. Ichchou et L. Jezequel, "*Energy flow analysis of bars and beams : theoretical formulations*", Journal of Sound and Vibration **201** (5), 281-305 (1996).
- [88] A. Le Bot et L. Jezequel, "*Energy formulation for one dimensional problems*", Proceedings of Acoustics '93, Southampton (1993).
- [89] A. Le Bot et L. Jezequel, "*Energy methods applied to transverse vibrations of beams*", Proceedings of the Fourth International Congress on Intensity Techniques (1993).
- [90] A. Le Bot, "*Equations énergétiques en mécanique vibratoire. Application au domaine des moyennes et hautes fréquences*", Thèse Ecole Centrale de Lyon (1994).
- [91] M.N. Ichchou et L. Jezequel, "*Comments on simple models of the energy flow in vibrating membranes and transversely vibrating plates*", Journal of Sound and Vibration **195**, 679-685 (1996).
- [92] M.N. Ichchou, A. Le Bot et L. Jezequel, "*Energy models of one-dimensional, multi-propagative systems*", Journal of Sound and Vibration **201** (5), 535-554 (1997).
- [93] M.N. Ichchou et L. Jezequel, "*A general propagative approach for the energy flow models and the heat conduction analogy of one-dimensional systems*", Proceedings of Inter-Noise '95, Newport Beach, CA. (1995).
- [94] A. Le Bot, M.N. Ichchou et L. Jezequel, "*Energy flow analysis for curved beams*", Journal of the Acoustical Society of America **102** (2), 943-954 (1997).
- [95] A. Le Bot, "*Geometric diffusion of vibrational energy and comparison with the vibrational conductivity approach*", Journal of Sound and Vibration **212** (4), 637-647 (1998).
- [96] A. Bocquillet, M.N. Ichchou et L. Jezequel, "*Energetics of fluid-filled pipes up to high frequencies*", Journal of Fluids and Structures **17**, 491-510 (2003).

- [97] A. Le Bot, “*A vibroacoustic model for high frequency analysis*”, Journal of Sound and Vibration **211** (4), 537-554 (1998).
- [98] A. Le Bot, M.N. Ichchou et L. Jezequel, “*Smooth energy formulation for multi-dimensional problem*”, Proceedings of Euro-Noise '95, Lyon, 2, 423-428 (1995).
- [99] M.N. Ichchou, “*Formulation énergétique pour l'étude moyennes et hautes fréquences des systèmes : théorie et applications*”, Thèse Ecole Centrale de Lyon (1996).
- [100] A. Le Bot, M.N. Ichchou et L. Jezequel, “*Formulation énergétique pour l'étude moyennes et hautes fréquences des vibrations de structures*”, 1^{er} colloque du GDR 1138 vibroacoustique, Marseille, 1-12.
- [101] A. Sestieri et A. Carcaterra, “*Space average and wave interference in vibration conductivity*”, Journal of Sound and Vibration **263**, 475-491 (2003).
- [102] M. Viktorovitch, P. Moron, F. Thouverez, L. Jezequel, “*A stochastic approach of the energy analysis for one-dimensional structures*”, Journal of Sound and Vibration **216** (3), 361-378 (1998).
- [103] I.A. Butlitskaya, A.I. Vyalyshev et B.D. Tartakovskii, “*Propagation of vibrational and acoustic energy along a structure with losses*”, Soviet Physics Acoustics **29** (4), 333-334 (1983).
- [104] J.-M. Mencik, “*Formulation de la réponse dynamique d'une structure maîtresse couplée à un système annexe et formulation locale du comportement énergétique des structures vibrantes*”, Thèse Université de Sherbrooke et INSA de Lyon (2002).
- [105] M. Djimadoum et J.L. Guyader, “*Possibilities to generalize the heat transfer approach*”, Proceedings of Inter-Noise'95, Newport Beach, CA. (1995).
- [106] R.S. Langley, “*On the vibrational conductivity approach to high frequency dynamics for two-dimensional structural components*”, Journal of Sound and Vibration **182** (4), 637-657 (1995).
- [107] O. Bouthier, R.J. Bernhard, J.C. Wohlever, “*Energy and structural intensity formulation of beam and plate vibrations*”, Proceedings of the Third International Conference on Intensity Techniques, Senlis, France (1990).
- [108] J.D. Palmer, E.J. William, C.H. Fox, “*High frequency power flow in structures*”, Proceedings of IMAC, San Diego, USA (1992).
- [109] J.D. Palmer, E.J. William, C.H. Fox, “*Application of the energy flow approach to vibrational analysis of real structures*”, Proceedings of the Fifth International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics, Southampton, U.K. (1994).
- [110] A. Le Bot et E. Luzzato, “*Smooth energy formulation for multi-dimensional problems*”, Workshop on Methods in medium and high frequencies : the alternatives to SEA, Clamart (Electricité de France) (1994).
- [111] J.T. Xing et W.G. Price, “*The energy flow equation of continuum dynamics*”, IUTAM Symposium on Statistical Energy Analysis, edited by F.J. Fahy and W.G. Price, Southampton, UK 8-11 July 1997, 83-94, (Kluwer), (1998).
- [112] J.T. Xing et W.G. Price, “*A power flow analysis based on continuum dynamics*”, Proc. London Royal Society, A (455), 401-436 (1999).
- [113] R.S. Langley, “*Analysis of beam and plate vibrations by using the wave equation*”, Journal of Sound and Vibration **150**, 47-65 (1991).
- [114] A. Carcaterra et L. Adamo, “*Thermal analogy in wave energy transfer : theoretical and experimental analysis*”, Journal of Sound and Vibration **226** (2), 253-284 (1999).

- [115] G. Orefice, J.L. Guyader et C. Cacciolati, “*The energetic mean mobility approach (EMMA)*”, IUTAM Symposium on Statistical Energy Analysis, Southampton (1997).
- [116] P.E. Cho et R.J. Bernhard, “*Coupling of continuous beam models*”, Proceedings of Inter-Noise’92, Toronto, 487-492 (1992).
- [117] P.E. Cho et R.J. Bernhard, “*A simple method for predicting energy flow distributions in frame structures*”, Proceedings of CETIM, Senlis France, 347-354 (1992).
- [118] P.E. Cho et R.J. Bernhard, “*Energy flow analysis of coupled beams*”, Journal of Sound and Vibration **211**, 593-605 (1998).
- [119] H.S. Kim, H.J. Kang et J.S. Kim, “*A vibration analysis of plates at high frequencies by the power flow method*”, Journal of Sound and Vibration **174** (4), 493-504 (1994).
- [120] F.S. Sui, M.N. Ichchou et L. Jezequel, “*Prediction of vibroacoustics energy using a discretized transient local energy approach and comparison with TSEA*”, Journal of Sound and Vibration **251** (1), 163-180 (2002).
- [121] A. Sestieri et A. Carcaterra, “*An envelope energy model for high frequency structural problems*”, Journal of Sound and Vibration **188** (2), 283-295 (1995).
- [122] A. Carcaterra et A. Sestieri, “*Envelope versus envelope-phase energy model for high frequency vibrations*”, Proceedings of IMAC 13, Nashville, USA (1994).
- [123] A. Carcaterra et A. Sestieri, “*Complex envelope displacement analysis : a quasi-static approach to vibrations*”, Journal of Sound and Vibration **201** (2), 205-233 (1997).
- [124] R.S. Langley, “*Analysis of beam and plate vibrations by using the wave equation*”, Journal of Sound and Vibration **150** (1), 47-65 (1991).
- [125] L. Adamo, A. Sestieri et A. Carcaterra, “*Vibro-acoustics : extension of the envelope approach to two dimensional structures*”, Proceedings of ISMA 23 (1998).
- [126] M. Carroll et C. Chien, “*Decay of reverberant sound in a spherical enclosure*”, Journal of the Acoustical Society of America **62**, 1442-1446 (1977).
- [127] R.N. Miles, “*Sound field in a rectangular enclosure with diffusely reflecting boundaries*”, Journal of Sound and Vibration **92** (2), 203-226 (1984).
- [128] H. Kuttruff, “*Energetic sound propagation in rooms*”, Acta Acustica **83**, 622-628 (1997).
- [129] K.-S. Chae et J.-G. Ih, “*Prediction of vibrational energy distribution in the thin plate at high frequency bands by using the ray tracing method*”, Journal of Sound and Vibration **240** (2), 263-292 (2001).
- [130] A. Le Bot et A. Bocquillet, “*Comparison of an integral equation on energy and the ray-tracing technique in room acoustics*”, Journal of the Acoustical Society of America **108** (4), 1732-1740 (2000).
- [131] M.J. Smith, “*A hybrid energy method for predicting high frequency vibrational response of point loaded plates*”, Journal of Sound and Vibration **202** (3), 375-394 (1997).
- [132] A. Le Bot, “*Energy transfer for high frequencies in built-up structures*”, Journal of Sound and Vibration **250** (2), 247-275 (2002).
- [133] V. Cotoni et A. Le Bot, “*Radiation of plane structures at high frequencies using an energy method*”, International Journal of Acoustics and Vibration **6** (4), 209-214 (2001).
- [134] L.P. Franzoni, D.B. Bliss et J.W. House, “*An acoustic boundary element method based on energy and intensity variables for prediction of high frequency broadband sound fields*”, Journal of the Acoustical Society of America **110**, 3071-3080 (2001).

- [135] E. Reboul, A. Le Bot et J. Perret-Liaudet, “*Radiative transfer equation for multiple diffraction*”, Journal of the Acoustical Society of America **118** (3), 1326-1334 (2005).
- [136] J.L. Guyader et T. Loyau, “*The frequency averaged quadratic pressure : a method for calculating the noise emitted by structures and for localising the acoustic sources*”, Acta Acustica **86**, 1021-1027 (2000).
- [137] J.L. Guyader, “*Integral Equation for Frequency Averaged Quadratic Pressure*”, Acta Acustica united with Acustica **90**, 232-245 (2004).
- [138] J.-K. Kim et J.-G. Ih, “*Prediction of sound level at high-frequency bands by means of a simplified boundary element method*”, Journal of the Acoustical Society of America **112** (6), 2645-2655 (2002).
- [139] A. Wang, N. Vlahopoulos et K. Wu, “*Development of an energy boundary element formulation for computing high-frequency radiation from incoherent intensity boundary conditions*”, Journal of Sound and Vibration **278**, 413-436 (2004).
- [140] P. Ladevèze, “*A new computational approach for structure vibrations in the medium frequency range*”, C.R. Acad. Sci. Paris 322, Série II b No. 12, 849-856 (1996).
- [141] P. Ladevèze et L. Arnaud, “*A new computational method for structural vibrations in the medium frequency range*”, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences **7**, 219-226 (2000).
- [142] P. Ladevèze, L. Arnaud, P. Rouch et C. Blanzé, “*La théorie variationnelle des rayons complexes pour le calcul des vibrations moyennes fréquences*”, Revue Européenne des Eléments Finis **9**, 67-88 (2000).
- [143] H. Riou, P. Ladevèze et P. Rouch, “*Extension of the variational theory of complex rays to shells for medium-frequency vibrations*”, Journal of Sound and Vibration **272**, 341-360 (2004).
- [144] P. Rouch et P. Ladevèze, “*The variational theory of complex rays : a predictive tool for medium-frequency vibrations*”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **192**, 3301-3315 (2003).
- [145] P. Ladevèze, P. Rouch, H. Riou et X. Bohineust, “*Analysis of medium-frequency vibrations in a frequency range*”, Journal of Computational Acoustics **11**, 255-283 (2003).
- [146] P. Ladevèze et H. Riou, “*Calculation of medium-frequency vibrations over a wide frequency range*”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **194** (27/9), 3167-3191 (2005).
- [147] G. Pavić, “*Measurement of structure borne wave intensity, Part I : Formulation of the methods*”, Journal of Sound and Vibration **49** (2), 221-230 (1976).
- [148] J.W. Verheij, “*Cross-spectral density methods for measuring structure-borne power flow on beams and pipes*”, Journal of Sound and Vibration **70**, 133-139 (1980).
- [149] J. Linjama et T. Lahti, “*Estimation of bending wave intensity in beam using the frequency response technique*”, Journal of Sound and Vibration **153**, 21-36 (1992).
- [150] G. Pavić, “*Vibroacoustical energy flow through straight pipes*”, Journal of Sound and Vibration **154**, 411-429 (1992).
- [151] C.R. Halkyard et B.R. Mace, “*A wave component approach to structural intensity in beams*”, Proceedings of the Fourth International Congress on Intensity Techniques, Senlis, France, 183-190 (1993).
- [152] G. Pavić, “*Accuracy of energy flow measurement in pipes using the wave de-composition technique*”, Proceedings of the Fourth International Congress on Intensity Techniques, Senlis, France, 191-198 (1993).

- [153] E.G. Williams, H.D. Hardy et R.G. Fink, “*Technique for measurement on structure borne intensity in plates*”, Journal of the Acoustical Society of America **78**, 2061-2068 (1985).
- [154] J.-C. Pascal, T. Loyau et J.A. Mann III, “*Structural intensity from spatial Fourier transform and BAHIM acoustical holography method*”, Proceedings of the Congress on Structural Intensity and Vibrational Energy, Senlis, France, 197-204 (1990).
- [155] J.-C. Pascal, X. Carniel, V. Chalvidan et P. Smigielski, “*Determination of phase and amplitude of vibration for energy flow measurements in a plate using holographic interferometry*”, Optics and Lasers in Engineering **24**, 1-18 (1996).
- [156] J.-C. Pascal, T. Loyau et X. Carniel, “*Complete determination of structural intensity in plates using laser vibrometers*”, Journal of Sound and Vibration **161**, 527-531 (1993).
- [157] R. Morikawa, S. Ueha et K. Nakamura, “*Error evaluation of the structural intensity measured with a scanning laser Doppler vibrometer and a k-space signal processing*”, Journal of the Acoustical Society of America **99**, 2913-2921 (1996).
- [158] Y. Bobrovnitskii, “*Estimating the vibration energy characteristics of an elastic structure via the input impedance and mobility*”, Journal of Sound and Vibration **217**, 351-386 (1998).
- [159] Y. Bobrovnitskii, “*New method for estimating the energy characteristics of a vibrating elastic structure*”, Acoustical Physics **45**, 260-271 (1998).
- [160] Y. Bobrovnitskii, “*Improved estimates for the energy characteristics of a vibrating elastic structure via the input impedance and mobility : experimental verification*”, Journal of Sound and Vibration **247** (4), 683-702 (2001).
- [161] J.R.F. Arruda et P. Mas, “*Predicting and measuring flexural power flow in plates*”, 2nd International Conference on Vibration Measurement by Laser Techniques, SPIE Vol. 2868, Ancona, Italy, 149-163 (1996).
- [162] J.-C. Pascal, J.F. Li et X. Carniel, “*Wavenumber processing technique to determine structural intensity and its divergence from optical measurements without leakage effects*”, 4th International Conference on Vibration Measurement by Laser Techniques, SPIE, Ancona, Italy (2000).
- [163] C. Devaux, N. Joly et J.-C. Pascal, “*Space-averaged values and large scale components of quadratic variables in vibrating structures*”, Proceedings of NOVEM 2005, International Congress on Emerging Methods in Noise and Vibration, Saint-Raphaël, 18-21 April 2005.
- [164] C. Devaux, N. Joly et J.-C. Pascal, “*Vibrations d'un système unidimensionnel décrites par des grandeurs énergétiques*”, Actes des conférences du XVII^e Congrès Français de Mécanique, Troyes, 29 août - 2 septembre 2005.
- [165] N. Joly et J.-C. Pascal, “*Energy flow for quasi-longitudinal waves in plates : exact solutions for one-dimensional fields*”, Proceedings of the Tenth International Congress on Sound and Vibration, Stockholm, 3069-3076 (2003).
- [166] M. Bruneau, “*Manuel d'Acoustique Fondamentale*”, (Hermes, Paris) (1998).
- [167] C. Devaux, N. Joly et J.-C. Pascal, “*Analysis of energy flow and energy densities for one-dimensional acoustic fields*”, Proceedings of the joint congress CFA/DAGA'04, Strasbourg, March 22-25, 2004.
- [168] N. Joly, J.-C. Pascal, “*Energy flow relations from quadratic quantities in three-dimensional isotropic medium and exact solutions for one-dimensional*”, Journal of Sound and Vibration **298**, 934-957 (2006).

- [169] A.J. Romano, P.B. Abraham et E.G. Williams, “*A pointing vector formulation for thin shells and plates, and its application to structural intensity analysis and source location. Part I : Theory*”, Journal of the Acoustical Society of America **87 (3)**, 1166-1175 (1990).
- [170] Y. Bobrovnikskii, “*On the energy flow in evanescent waves*”, Journal of Sound and Vibration **152-1**, 175-176 (1992).
- [171] O.M. Bouthier et R.J. Bernhard, “*Models of space-averaged energetics of plates*”, Journal of American Institute of Aeronautics and Astronautics **30**, 616-623 (1992).
- [172] D.-H. Park, S.-Y. Hong, H.-G. Kil et J.-J. Jeon, “*Power flow models and analysis of in-plane waves in finite coupled thin plates*”, Journal of Sound and Vibration **244-4**, 651-668 (2001).
- [173] G. Pavić, “*The role of damping on energy and power in vibrating systems*”, Journal of Sound and Vibration **281-1**, 45-71 (2005).
- [174] L. Cremer, M. Heckl et E. Ungar, “*Structure-borne sound*”, (Springer, Berlin) (1988).
- [175] K.F. Graff, “*Wave motion in elastic solids*”, (Dover) (1975).
- [176] W. Maysenhölder, “*Rigorous computation of plate-wave-intensity*”, Acustica **72**, 166-179 (1990).
- [177] D.U. Noiseux, “*Measurement of power flow in uniform beams and plates*”, Journal of the Acoustical Society of America **47 (1)**, 238-247 (1970).
- [178] L. Gavrić, “*Influence des modifications locales sur le flux d'énergie dans les structures à parois minces*”, Thèse Université Technologique de Compiègne (1991).
- [179] Y. Bobrovnikskii, “*Calculation of the power flow in flexural waves on thin plates*”, Journal of Sound and Vibration **194 (1)**, 103-106 (1996).
- [180] L. Meirovitch, “*Principles and techniques of vibrations*”, (Prentice-Hall) (1997).
- [181] M. Djimadoum et J.L. Guyader, “*Vibratory prediction with an equation of diffusion*”, Acta Acustica **3**, 11-24 (1995).
- [182] A. Carcaterra et A. Sestieri, “*Energy density equations and power flow in structures*”, Journal of Sound and Vibration **188-2**, 269-282 (1995).
- [183] M. Djimadoum et J.L. Guyader, “*Prediction of coupled beams energy with the diffusion equation. Boundary conditions and coupling conditions*”, Proceedings of the Fourth International Congress on Intensity Techniques (1993).
- [184] P.W. Smith Jr, T.J. Schultz et C.I. Malme, “*Intensity Measurement in near fields and reverberant spaces*”, Bolt Beranek and Newman Inc. Rep. N° 1135 (1964).
- [185] C. Devaux, N. Joly et J.-C. Pascal, “*A middle frequency method based on space-averaged quadratic variables for one-dimensional systems*”, Proceedings of The Thirteen International Congress on Sound and Vibration, Vienna, July 2-6, 2006.
- [186] C. Devaux, N. Joly et J.-C. Pascal, “*Méthode énergétique basée sur l'intensité acoustique à grande échelle devant la longueur d'onde*”, Actes des conférences du 8^e Congrès Français d'Acoustique, Tours, 24-27 avril 2006.
- [187] R. Gunda, S.M. Vijayakar, R. Singh et J.E. Farstad, “*Harmonic Green's functions of a semi-infinite plate with clamped or free edges*”, Journal of the Acoustical Society of America **103 (2)**, 888-899 (1998).
- [188] F.J. Fahy, “*Sound intensity*”, seconde édition (E & FN Spon) (1995).
- [189] S.J. Elliott, P. Joseph, P.A. Nelson et M.E. Johnson, “*Power output minimization and power absorption in the active control of sound*”, Journal of the Acoustical Society of America **90**, 2501-2512 (1991).

-
- [190] M.E. Johnson et S.J. Elliott, “*Measurement of acoustic power output in the active control of sound*”, Journal of the Acoustical Society of America **93**, 1453-1459 (1993).
- [191] H.F. Olson et E.G. May, “*Electric sound absorber*”, Journal of the Acoustical Society of America **25**, 1130-1136 (1953).
- [192] P. Nelson et S.J. Elliott, “*Active Control of Sound*”, (Academic Press) (1992).
- [193] M.R. Dench, M.J. Brennan et N.S. Ferguson, “*Active Control of the Flexural Vibration of a Thin Beam with Free Ends*”, ISVR Technical Memorandum N° 949 (2005).