



HAL
open science

Contributions en automatique non-linéaire

André Monin

► **To cite this version:**

André Monin. Contributions en automatique non-linéaire. Automatique / Robotique. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2003. tel-00132471

HAL Id: tel-00132471

<https://theses.hal.science/tel-00132471>

Submitted on 21 Feb 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Contributions en Automatique Non-Linéaire

A. Monin

Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes
Centre National de la Recherche Scientifique
7 Avenue du Colonel Roche - 31077 Toulouse cedex 4 - France
Tel: (33) 5.61.33.62.95 / email: monin@laas.fr

Habilitation à Diriger des Recherches soutenue le 8 janvier 2003 devant le jury composé de :

Gérard Authié, Président
Michèle Basseville, Rapporteur
Michel Fliess, Rapporteur
Eric Moulines, Rapporteur
Gérard Salut, Directeur de recherche

Table des matières.

Introduction.	5
Chapitre 1 Travaux à caractère fondamental.	7
1 Représentation des systèmes non-linéaires déterministes.	7
1.1 Introduction.	7
1.2 Représentations exponentielles et commandabilité.	8
1.3 Topologie de chemins et prolongement continu.	9
2 Filtrage optimal de Volterra a horizon infini.	11
1.1 Introduction.	11
1.2 Réalisabilité en dimension finie de l'estimateur de Volterra.	12
1.3 Observabilité stochastique.	13
1.3.1 Observabilité linéaire des systèmes bilinéaires.	13
1.3.2 Observabilité quadratique.....	13
1.4 Exemples en simulation.	14
1.4.1 Estimation de la variance d'un bruit dynamique.	14
1.4.2 Système linéaire non-gaussien.	14
3 Réalisation et identification en treillis ARMAX.	16
1.1 Introduction.	16
1.2 Réalisation en treillis ARMA.	16
1.3 Identification en treillis ARMA.	18
1.4 Exemples en simulation.	20
1.4.1 Approximations optimales de filtres passe-bas idéaux.	20
1.4.2 Identification de systèmes linéaires.	20
1.4.3 Identification adaptative.	20
4 Filtrage linéaire optimal sur un domaine borné.	22
1.1 Introduction.	22
1.2 Evolution de la densité de probabilité conditionnelle.....	22
1.3 Termes de normalisation.....	22
1.4 Expression de l'estimateur.....	23
5 Filtrage non-linéaire particulière.	24
1.1 Introduction.	24
1.1.1 Approximation de la densité <i>a priori</i>	24
1.1.2 Approximation de la densité conditionnelle.....	25

1.2	Procédures de régularisation.....	26
1.3	Exploitation de la métrique de la vraisemblance.....	27
1.3.1	Distribution initiale.....	28
1.3.2	Redistribution diffuse.....	28
1.4	Parallélisation de l'algorithme.....	29
Chapitre 2 Travaux à caractère appliqué.....		32
1	Détection et discrimination de multi-émissions sur une même porteuse.....	32
2.1	Introduction.....	32
2.2	Distingabilité des multi-émissions.....	32
2.3	Modélisation du signal modulé.....	34
2.4	Test d'hypothèse.....	34
2.5	Applications en simulation.....	35
2.5.1	Distingabilité entre 1 et 2 émissions.....	36
2.5.2	Distingabilité entre 2 et 3 émissions.....	36
2.5.3	Extension à d'autres modulations.....	37
2	Traitement optimal du signal LORAN-C.....	38
2.1	Introduction.....	38
2.2	Modélisation.....	39
2.2.1	Modèle du porteur.....	39
2.2.2	Modèle du signal d'observation.....	39
2.3	Algorithme d'estimation.....	40
2.4	Résultats sur données réelles.....	43
2.4.1	Contexte des enregistrements.....	43
2.4.2	Paramètres de l'algorithme.....	43
2.4.3	Résultats.....	44
2.5	Exploitation sur antenne immergée.....	45
2.6	Conclusion.....	47
Chapitre 3 Prospective.....		49
1	Développements fondamentaux.....	49
3.1	Identification de systèmes bilinéaires.....	49
3.2	Filtrage à maximum de vraisemblance des systèmes échantillonnés à bruit ponctuel.....	49
2	Application - Valorisation.....	49
Références.....		51
Curriculum Vitae.....		55

Mémoires et diplômes dirigés	57
Liste des publications.	58

Introduction.

L'objet du présent mémoire est de présenter un aperçu de nos activités de chercheur depuis 1985. Nous avons pris le parti de découper cet exposé en deux parties principales. La première décrit les résultats à caractère fondamental les plus importants à notre sens obtenus au long de cette période alors que la deuxième s'attache à exposer quelques applications industrielles qui mettent en oeuvre ces résultats. Il nous paraît en effet important de ne pas réduire l'activité d'un chercheur à ses travaux purement académiques. La réalisation d'applications industrielles accompagnée de son transfert technologique vers l'industrie fait partie de notre mission et permet de valoriser définitivement la pertinence des résultats théoriques obtenus quand ils sont expérimentés sur données réelles.

On pourra constater que le dénominateur commun de ces résultats réside dans l'intérêt porté aux systèmes dynamiques non-linéaires. Le premier centre d'intérêt a été sur la réalisation des systèmes non-linéaires déterministes où apparaît clairement le rôle fondamental que jouent les algèbres de Lie des champs de vecteurs, que se soit pour des problèmes de commandabilité, d'observabilité ou de réalisation. Les résultats connus à cette époque s'appuyaient essentiellement sur la géométrie différentielle et les développements algébriques de Michel Fliess [16] ne faisaient pas apparaître la série canonique des crochets de Lie des champs de vecteur intervenant en commandabilité. C'est pourquoi nous avons cherché, à partir d'outils mathématiques fondamentaux en algèbre, à construire des représentations explicites de ces systèmes où les séries de Lie apparaissent naturellement en dualité avec les intégrales itérées de l'entrée du système qui en sont les coefficients.

Nous nous sommes par la suite intéressés aux systèmes dynamiques non-linéaires stochastiques, principalement sous l'angle de l'estimation dynamique : le filtrage non-linéaire. Les premiers résultats dans ce domaine faisaient apparaître la relative pauvreté des techniques de filtrage optimal opérationnelles pour les applications. La théorie établit en effet que de tels filtres ne sont pas en général réalisables en dimension finie ce qui constitue une obstruction difficile à contourner. Cependant, il existait, pour des systèmes analytiques, quelques techniques de type Volterra à horizon fini (FIR) qui s'appuyaient sur la recherche de filtres sous-optimaux dans une classe réduite d'estimateurs. L'objection principale qu'on pouvait faire à cette approche réside dans son caractère incomplet qui empêche le filtre de Kalman d'être le cas particulier linéaire de ces filtres de Volterra. Nous nous sommes donc appliqués à rechercher des classes de filtres réalisables en dimension finie et plus générales que celles-ci. Nous avons abouti à l'étude de fonctionnelles de Volterra à horizon infini (IIR) réalisables par des filtres bilinéaires nilpotents et avons pu montrer que ces filtres étaient récursivement calculables pour tous les systèmes stochastiques bilinéaires. Une extension aux systèmes généraux analytiques a été proposée par application de méthodes de type particulières au calcul des paramètres de ces filtres, méthode mise en oeuvre hors ligne.

L'approche projective que nous avons utilisée pour le calcul des filtres de Volterra IIR nous a guidés dans la résolution optimale du problème classique de réduction de modèle, dans le cas particulier des systèmes linéaires. En effet, l'approche que nous utilisons peut être considérée comme une forme de réduction entre le filtre optimal (de dimension infinie) et le filtre de Volterra (réalisable). C'est alors que nous avons abordé le problème de réduction optimale de modèle dont nous avons établi qu'il mettait en jeu un calcul héréditaire. A noter que cette technique de réduction peut s'appliquer à la réduction d'un système infini-dimensionnel (systèmes répartis, systèmes fractionnaires,...) à un système fini-dimensionnel. Ces résultats ont été, dans un premier temps, développés en utilisant des réalisations sous forme canoniques pour être, par la suite, étendus aux structures en treillis, célèbres pour leurs qualités numériques. Nous avons donc abouti à la construction d'algorithmes de réalisation optimale de systèmes linéaires sous forme treillis (à partir des fonctions d'autocorrélations de la sortie ou d'intercorrélations entrée/sortie) puis, par utilisation

de critères de type maximum de vraisemblance, à la construction d'algorithmes d'identification optimale (à partir des trajectoires de sortie ou des trajectoires entrée/sortie).

Bien que n'ayant été que partiellement impliqué dans la genèse de la théorie du filtrage particulière en 1989 [56], nous avons eu l'occasion de participer pleinement à ses développements. C'est surtout dans le traitement d'applications concrètes à caractère industriel que nous avons pu apporter notre contribution à la mise en oeuvre de cette technique très générale de filtrage non-linéaire. En particulier, nous nous sommes intéressés à l'optimisation des méthodes de redistributions en faisant apparaître la métrique de la vraisemblance sur l'espace d'état qui permet une meilleure utilisation des particules pour le remplissage de l'espace, que se soit au niveau de la distribution initiale ou au niveau des redistributions. Nous avons également contribué à la parallélisation de l'algorithme particulière, par nature coûteux en temps de calcul et difficilement implémentable dans sa version séquentielle pour une application temps réel.

Nous avons retenu deux applications qui nous semblent d'une part bien illustrer la pertinence des résultats théoriques exposés plus haut et qui démontrent par ailleurs la nécessité de faire évoluer les méthodes dans le contexte des problèmes de l'ingénieur. Il s'agit d'abord de la discrimination de multi-émissions sur une même porteuse, problème ardu soumis par le CELAR (Centre Electronique de L'Armement). Nous avons construit, pour résoudre ce problème, un test de détection original basé sur l'estimation non-linéaire du module des signaux par filtrage de Volterra IIR. Cette méthode a été appliquée avec succès en simulation puisque nous avons pu, dans certaines conditions, détecter jusqu'à quatre signaux simultanément présents.

La deuxième application que nous présentons est le traitement non-linéaire du signal de radionavigation LORAN-C par le filtrage particulière, problème soumis par DCN/Ingénierie. Pour établir les limites de portée du système, il nous a fallu réaliser une modélisation fine du problème permettant, par une approche globale, de traiter au mieux toutes les informations disponibles. Cette application nous semble tout à fait intéressante dans la mesure où elle a traité des données réelles récoltées au cours de la campagne en mer du «Langevin» au printemps 1997. On a pu ainsi démontrer en quoi l'approche utilisée était saine et fiable tout en donnant à l'opérateur des informations sur la qualité des résultats fournis. Ces résultats ont abouti à la réalisation d'une maquette réalisée par la société DIGINEXT pour le compte de la Direction des Constructions Navales (DCN), actuellement embarquée à bord d'un sous-marin .

Chapitre 1 : Travaux à caractère fondamental.

1. Représentation des systèmes non-linéaires déterministes.

1.1. Introduction.

Les premiers résultats fondamentaux d'automatique non-linéaire, notamment en commandabilité et réalisation [24] [34], furent obtenus par une approche géométrique. L'utilisation par Michel Fliess des séries en variables non-commutatives a permis, depuis, une approche algébrique de la représentation entrées-sorties des systèmes analytiques [17] [20] [19] [18]. Un tel système est décrit par une équation différentielle du type suivant :

$$\dot{x}_t = f(x_t, u_t) \quad (1)$$

$$y_t = h(x_t) \quad (2)$$

où x_t désigne l'état interne du système étudié ($x_t \in \mathbb{R}^n$), u_t l'entrée du système et y_t la sortie de celui-ci. La fonction f est supposée analytique en ses deux arguments. On définit alors l'opérateur de transport temporel sur l'intervalle $[0, t]$ comme agissant sur toute fonction analytique de la manière suivante :

$$\forall \varphi \in C^\omega, \varphi(x_t) = H_t \varphi|_{x_0} \quad (3)$$

où x_0 désigne l'état initial, supposé connu. Si on introduit le champ de vecteur associé à la dynamique :

$$F_u = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} f(x, u) \quad (4)$$

il est alors aisé d'établir l'équation différentielle que vérifie l'opérateur de transport, soit :

$$\dot{H}_t = H_t F_{u_t} \quad (5)$$

avec comme condition initiale $H_0 = I$, l'opérateur identité.

Examinons le cas particulier des systèmes à contrôle linéaire, soit :

$$f(x, u) = \sum_{i=1}^m a_i(x) u_t^i \quad (6)$$

Associons à chacune des fonctions $a_i(x)$ les champs de vecteurs définis de la manière suivante :

$$A_i = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} a_i(x) \quad (7)$$

L'intégration itérée de Picard de l'équation (5) permet de développer l'opérateur de transport dans l'algèbre non-commutative des champs de vecteur sous la forme suivante :

$$H_t = I + \sum_{\nu \geq 1} \sum_{j_1, \dots, j_\nu=1}^m A_{j_1} \dots A_{j_\nu} I_t(j_1 \dots j_\nu) \quad (8)$$

où les coefficients de cette série sont les intégrales itérées de Chen [12] [13] [11] construites sur les trajectoires d'entrées :

$$I_t(j_1 \dots j_\nu) = \int_0^t \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{\nu-1}} u_{\tau_1}^{j_1} \dots u_{\tau_\nu}^{j_\nu} d\tau_\nu \dots d\tau_1$$

Si une telle expression (8) atteint bien l'objectif de représentation entrées-sorties fixé, celle-ci n'est pas minimale dans le sens où il n'y a pas biunivocité entre l'ensemble des intégrales itérées et l'ensemble des trajectoires d'entrées. En effet, il est aisé de montrer que cet ensemble n'est pas algébriquement libre (intégrations par parties).

L'originalité des travaux présentés ici est de donner des représentations explicites de ces systèmes dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sous forme de l'exponentielle d'une série. La représentation ainsi développée permet de «coder» de manière minimale les chemins d'entrée dans une algèbre de Lie duale dite «intégrale». Ces représentations permettent, entre autres, de prolonger la classe des entrées admissibles des systèmes non-linéaires à celle des mesures grâce à l'introduction d'une topologie sur les chemins d'entrées ad-hoc. En outre, cette approche permet de redémontrer, par la voie algébrique, les théorèmes de commandabilité des systèmes non-linéaires en mettant en évidence de manière explicite comment la combinatoire des chemins d'entrée permet d'exploiter les directions induites par les crochets de Lie des champs de vecteurs.

Ce travail a donné lieu aux publications suivantes : [27] [26] [28] [25] [30] [29].

1.2. Représentations exponentielles et commandabilité.

Les travaux de Chen [12] ont montré que l'exponentielle formelle de la série décrite par l'équation (8) appartient à l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteur. La loi de l'algèbre de Lie est nommée «crochet de Lie» et définie par :

$$[A, B] = AB - BA \quad (9)$$

Théorème 1 *L'opérateur de transport s'exprime comme exponentielle d'une série de Lie à coefficients réels dont la structure est la suivante :*

$$H_t = \exp\left(\sum_{\nu \geq 1} \frac{1}{\nu^2} \sum_{k_1, \dots, k_\nu=1}^m [A_{k_\nu}, [A_{k_{\nu-1}}, \dots, [A_{k_2}, A_{k_1}] \dots]] J_t([k_1 \dots k_\nu])\right) \quad (10)$$

où l'ensemble des éléments $J_t([k_1 \dots k_\nu])$ possède une structure d'algèbre de Lie définie par :

- $\forall i = 1 \dots m, J_t([i]) = I_t(i)$
- $J_t([k_1 \dots k_\nu]) = J_t([k_1 \dots k_{\nu-1}]k_{\nu-1}) - J_t([k_2 \dots k_\nu]k_1)$

□

Ce théorème a été établi en utilisant la projection de l'algèbre associative dans l'algèbre de Lie [7] définie par :

$$\forall A_1, \dots, A_\nu, \pi(A_1 \dots A_\nu) = Ad_{A_1} \dots Ad_{A_{\nu-1}} A_\nu \quad (11)$$

où Ad désigne l'opérateur adjoint défini par :

$$Ad_A B = [A, B] \quad (12)$$

et en exploitant les propriétés des algèbres de mélanges [53].

L'utilisation de la propriété générique de la fonction exponentielle permet d'obtenir un autre type de représentation, cette fois comme produit d'exponentielles de champs de vecteurs.

Théorème 2 *L'opérateur de transport admet une décomposition factorisée en produits d'exponentielle de champs de vecteurs dont la structure est la suivante :*

$$H_t = \overleftarrow{\prod}_{\nu \geq 1} \exp(B_\nu s_t^\nu) \quad (13)$$

où les éléments B_ν forment une base de Hall de l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs $\{A_1, \dots, A_m\}$ [7] et où les paramètres s_t^ν sont des réels définis à partir d'un ensemble de Hall construit sur les indices $\{1, \dots, m\}$ par :

- $\forall i = 1 \dots m, s_t^i = \int_0^t u_\tau^i d\tau$
- Si s_t^ν est le ν -ième élément de l'ensemble de Hall, il s'écrit $s_t^\nu = (s_t^p, s_t^q)$ et s'obtient par

$$s_t^\nu = \alpha_\nu \int_0^t s_\tau^p \dot{s}_\tau^q d\tau \quad (14)$$

où α_ν est une constante ne dépendant que de la structure de B_ν . □

A partir de ces deux théorèmes, il est possible de montrer que les familles de coefficients des deux séries sont des familles algébriquement indépendantes et que, par conséquent, elles sont en relation biunivoque avec le codage des trajectoires d'entrées. On en déduit immédiatement une nouvelle démonstration (constructive) des théorèmes de commandabilité des systèmes analytiques jusqu'alors obtenus par des considérations géométriques [24].

1.3. Topologie de chemins et prolongement continu.

La classe des entrées admissibles est classiquement restreinte à l'ensemble des fonctions continues par morceaux et à variations bornées. Une telle hypothèse est en effet suffisante pour assurer unicité et continuité de la solution sous l'hypothèse que les champs de vecteurs soient Lipschitz [16] [21]. Or, on sait que pour les systèmes linéaires, il est possible d'étendre la classe des entrées admissibles à celle des mesures à variations bornées ; ceci permet en particulier d'introduire la notion de réponse impulsionnelle.

Pour ce faire, il a été nécessaire d'étudier les conditions de convergence des développements exponentiels présentés plus haut [30].

Théorème 3 *La série :*

$$\varphi(x_t) = \left(\overleftarrow{\prod}_{\nu \geq 1} \exp(B_\nu s_t^\nu) \right) \varphi(x)|_{x_0} \quad (15)$$

converge s'il existe y et ρ tels que $\|x_0 - \bar{x}\|_\infty \leq y \leq \rho$ (où \bar{x} désigne un point à l'intérieur du domaine de convergence des développements de Taylor des fonctions analytiques) et si :

$$\sum_{\nu \geq 1} |s_t^\nu| \|B_\nu\|^\rho < \frac{\rho}{n+1} \left(1 - \frac{y}{\rho}\right)^{n+1} \quad (16)$$

où n désigne la dimension du système et où :

$$\|B_\nu\|^\rho = \sup_{j=1 \dots n} \sum_{i_1 \dots i_n \geq 0} |\alpha_{i_1, i_1, \dots, i_n}| \rho^{i_1 + \dots + i_n} \quad (17)$$

désigne la norme du champ de vecteur considéré (les coefficients α étant les termes du développement de Taylor des composantes de ce champ de vecteur). □

A partir de ce théorème, on a pu prolonger continûment la classe des entrées admissibles d'un

système analytique à un ensemble de fonctions dont les primitives sont à variations bornées par l'introduction d'une nouvelle topologie.

Théorème 4 *La fonctionnelle entrée-sortie d'un système analytique à contrôle linéaire est continue sur l'espace des entrées généralisées pour la topologie sur les chemins induite par la distance D définie par :*

$$D(u_1, u_2) = \sum_{\nu \geq 1} |s_t^{\nu,1} - s_t^{\nu,2}| \|B_\nu\|^\rho \quad (18)$$

où les termes $s_t^{\nu,1}$ et $s_t^{\nu,2}$ sont les intégrales itérées définies dans le théorème 2.

□

A noter que l'ensemble des résultats de représentation et de topologie présentés a été généralisé aux systèmes analytiques à contrôle non-linéaire [25] [29].

2. Filtrage optimal de Volterra a horizon infini.

2.1. Introduction.

Dans de nombreux problèmes pratiques (modèles non-linéaires ou/et non-gaussiens), il peut s'avérer que l'information recherchée sur l'état d'un système dynamique se trouve être non-linéairement liée aux observations, ce qui rend inefficace, voire sans objet, l'application de la théorie linéaire. Par ailleurs, il n'est pas toujours possible ou désirable, à cause de contraintes de temps réel ou de coût, de mettre en oeuvre la puissance de résolution du filtrage optimal non linéaire général qui fournit, au prix de nombreux calculs et en général sous forme d'approximation numérique, la densité de probabilité de l'état recherché, conditionnellement aux observations (filtrage à minimum de variance).

C'est la raison pour laquelle une formulation intermédiaire, investiguée de longue date, consiste à restreindre l'espace de projection hilbertienne que représente le filtrage optimal classique, à la classe des fonctionnelles polynomiales dites de Volterra. Cette approche convient particulièrement aux problèmes non linéaires suffisamment réguliers (modèles analytiques), notamment aux problèmes ayant, en terme de probabilité conditionnelle, une solution unimodale. Comme dans cette formulation on cherche à approcher l'espérance conditionnelle de l'état, celle-ci n'a d'intérêt que si la probabilité conditionnelle possède un seul maximum. Il y a en effet dans ce cas proximité entre la moyenne conditionnelle et le maximum de probabilité *a posteriori* (l'égalité est atteinte quand la densité de probabilité est symétrique). De nombreuses tentatives ont été faites en ce sens dans le passé. Leurs développements suivirent essentiellement deux voies.

La première approche (Wiener [59] [60], Zadeh [61], Pugatchev [52],...) consiste à considérer les fonctionnelles de Volterra les plus générales. On cherche alors à décrire le système qui engendre les noyaux de cette fonctionnelle, équations que l'on peut considérer comme une extension des équations de Wiener-Hopf du cas linéaire. Malheureusement, dans cette formulation et à l'exception de cas très particuliers, le système qui réalise les noyaux n'est pas de dimension finie, la solution est donnée sous forme d'équations intégrales, ce qui rend inapplicable une telle méthode, la difficulté étant du même ordre que celle du problème initial de filtrage.

La deuxième approche (Kailath [14], Duvaut [15], ...) considère des fonctionnelles à horizon fini. Le calcul du nombre fini de paramètres que sont les valeurs des noyaux pour les valeurs possibles de retards retenus est alors naturellement, par construction, fini-dimensionnel. L'inconvénient majeur de cette technique réside dans le fait que les estimateurs n'utilisent qu'un passé tronqué des observations (filtres connus sous le nom de filtres transverses) et que, inversement, le nombre de paramètres nécessaires croît exponentiellement avec la valeur de l'horizon. Notons au passage que le filtre de Kalman-Bucy n'est pas un cas particulier de ce type de filtre.

Notre approche se situe à l'intermédiaire de ces deux formulations classiques [46]. Nous utilisons une classe d'estimateurs réalisable en dimension finie mais à horizon infini. Cette classe correspond à l'ensemble des fonctionnelles de Volterra de degré fini où les noyaux sont séparables, c'est à dire égaux à des sommes de produits de fonctions de chacune de ses variables. Notons que cette restriction aux fonctionnelles à noyaux séparables ne nuit pas à la généralité puisqu'elles sont denses, au sens L^2 , dans la classe des fonctionnelles générales. Il est de plus aisé de vérifier que le filtre linéaire optimal de Kalman-Bucy est inclus dans cette formulation.

On considère donc un système non-linéaire stochastique du type suivant :

$$\begin{aligned}x_t &= f(x_{t-1}, w_{t-1}) \\y_t &= h(x_t) + v_t\end{aligned}\tag{19}$$

où x_t désigne l'état interne du système, w_t et v_t sont des bruits blancs indépendants et où y_t désigne le signal d'observation. L'objet est d'estimer une fonction de l'état $\varphi(x)$ aux vues des observations sur l'intervalle $[0, t]$. Un tel estimateur est recherché dans la classe des fonctionnelles de Volterra de degré fini.

Ce travail a donné lieu aux publications suivantes : [6] [46] [37] [46]

2.2. Réalisabilité en dimension finie de l'estimateur de Volterra.

Une série de Volterra de degré fini est réalisable par un système bilinéaire si ses noyaux sont séparables, c'est à dire définis comme somme de produits finis de fonctions de chacune des variables. Elle peut en particulier être réalisée par un système bilinéaire.

Théorème 5 *La fonctionnelle de Volterra de degré k :*

$$\widehat{\varphi}_t = \sum_{\tau_1=0}^t \sum_{\tau_2=0}^{\tau_1} \dots \sum_{\tau_k=0}^{\tau_{k-1}} W_k(t, \tau_1, \dots, \tau_k) y_{\tau_1} \dots y_{\tau_k}\tag{20}$$

peut être réalisée par le système bilinéaire nilpotent suivant :

$$\begin{cases}z_t^1 = A_t^1 z_{t-1}^1 + A_t^0 y_t \\z_t^2 = A_t^2 z_{t-1}^2 + z_t^1 y_t \\ \dots \\z_t^k = A_t^k z_{t-1}^k + z_t^{k-1} y_t \\ \widehat{\varphi}_t = z_t^k\end{cases}\tag{21}$$

□

La classe d'estimateur étant ainsi déterminée, le calcul des paramètres optimaux est obtenu par projection de la variable à estimer sur cette classe, soit en minimisant la variance de l'erreur d'estimation $E[\|\varphi_t - \widehat{\varphi}_t\|^2]$.

Théorème 6 *Les paramètres du filtre optimal du système bilinéaire du type :*

$$\begin{aligned}x_t &= Fx_{t-1} + (Gx_t + g)w_t \\y_t &= Hx_t + v_t\end{aligned}\tag{22}$$

sont récursivement calculables en dimension finie et vérifient le système d'équations linéaires suivant :

$$\forall i = 0 \dots k, \sum_{j=0}^k A_t^j E[z_{t-1}^j (z_{t-1}^i)^T y_t^{2k-i-j}] = E[\varphi_t (z_{t-1}^i)^T y_t^{k-i}]\tag{23}$$

□

On observe alors que pour de tels systèmes, toutes les espérances nécessaires au calcul des paramètres optimaux sont de degré $\leq 2k$.

2.3. Observabilité stochastique.

Dans la mesure où l'optimalité n'est pas une condition suffisante pour assurer la convergence et la stabilité de l'estimateur, il est nécessaire d'introduire un concept d'observabilité adapté à ce nouveau contexte.

Définition 1 La fonction $\varphi(x)$ est stochastiquement observable à partir des moments d'ordre d du signal d'observation si l'application :

$$\psi(x_{t_0}) \longrightarrow \{E[y_{\tau_1} \dots y_{\tau_d} | \psi(x_{t_0})], \tau_1, \dots, \tau_d \geq t_0\} \quad (24)$$

est bijective. \square

2.3.1. Observabilité linéaire des systèmes bilinéaires.

Nous nous sommes limités ici aux systèmes purement bilinéaires ($g = 0$) dans (22). Avec cette définition, on retrouve la condition d'observabilité classique des systèmes linéaires, soit :

Théorème 7 Un système bilinéaire est linéairement observable si le rang de la famille de vecteurs :

$$\{\phi^T(t - t_0)H^T, t \geq t_0\} = \{(F^T)^i H^T, i \geq 0\} \quad (25)$$

est égal à la dimension du système. ϕ désigne la matrice de transition associée à la matrice dynamique F .

\square

2.3.2. Observabilité quadratique.

En ce qui concerne les fonctionnelles quadratiques de l'observation, on s'intéresse à l'estimation de fonctions quadratiques de l'état du type $x_t x_t^T$.

Théorème 8 Un système bilinéaire est quadratiquement observable si l'espace engendré par les matrices :

$$\{(G_{i_{\tau_1}} \dots G_{i_{\tau_2}})H^T H \phi(\tau_1 - \tau_2) G_{i_{\tau_1}} \dots G_{i_{\tau_2}}, \tau_1 \geq \tau_2 \geq 0, i_{\tau_1} \dots i_{\tau_2} = 0, 1\} \quad (26)$$

(où $G_0 = F$ et $G_1 = G$ par convention) coïncide avec l'espace engendré par les matrices symétriques de dimension n .

\square

Cette famille est de la forme suivante :

$$\{H^T H, F^T H^T H F, G^T H^T H G, F^T H^T H F F, G^T H^T H F G, F^T F^T H^T H F F, \dots\} \quad (27)$$

On établit alors le lien entre observabilité et convergence de l'estimateur en introduisant une hypothèse d'ergodicité :

Théorème 9 Si un système bilinéaire est ergodique et quadratiquement observable, l'estimateur de $\varphi(x) = x x^T$ converge au sens de $L^2(P)$.

\square

2.4. Exemples en simulation.

2.4.1. Estimation de la variance d'un bruit dynamique.

Considérons un système linéaire pour lequel la variance du bruit de dynamique est inconnue. Pour représenter cette nouvelle variable, il suffit d'augmenter l'état du système. On obtient alors le système bilinéaire suivant :

$$\begin{cases} \sigma_t = \sigma_{t-1} \\ x_t = Fx_{t-1} + \sigma_{t-1}w_{t-1} \end{cases} \quad (28)$$

$$y_t = Hx_t + v_t \quad (29)$$

où σ_t désigne l'écart type inconnu du bruit de dynamique. On peut alors montrer que $Q_t = \sigma_t \sigma_t^T$ est quadratiquement observable. La comparaison, dans le cas scalaire, entre un filtre à horizon fini du type :

$$\widehat{Q}_t = A_t^0 y_t^2 + A_t^1 y_t y_{t-1} + A_t^2 y_{t-1}^2 + b_t$$

et un filtre à horizon infini ayant le même nombre de paramètres (4) :

$$\begin{cases} z_t^1 = A_t^1 z_{t-1}^1 + A_t^0 y_t \\ \widehat{Q}_t = A_t^2 \widehat{Q}_{t-1} + z_t^1 y_t + b_t \end{cases} \quad (30)$$

est illustrée figure 1. Apparaît clairement sur cette figure le bénéfice obtenu par utilisation du filtrage à horizon infini. On peut de plus constater que, dans cette simulation, les écarts types théoriques sont conformes aux valeurs prévisibles par le calcul des variances d'erreur *a priori*.

2.4.2. Système linéaire non-gaussien.

On considère un système linéaire tel que le bruit de dynamique est de type «à sauts» de fréquence λ connue. Le test en simulation a été réalisé en construisant successivement les filtres de degré 1 (filtre linéaire de Kalman), 2, 3 et 4. Les résultats obtenus en termes d'erreur moyenne d'estimation sont illustrés figure 2. On constate ici le gain progressif qu'il y a à utiliser des filtres de degré croissant qui savent exploiter la nature particulière de la distribution. A nouveau, les erreurs expérimentales sont conformes aux valeurs théoriques calculées *a priori*.

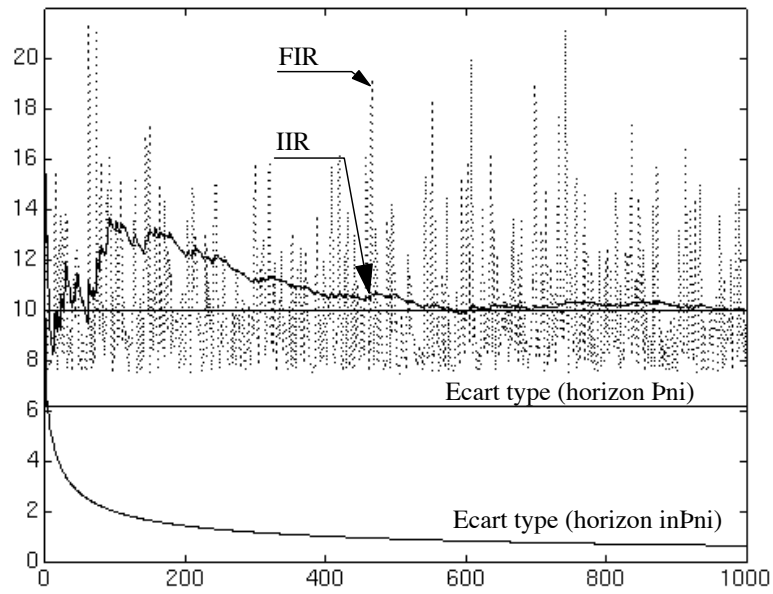


figure 1 : Estimation de la variance d'un bruit dynamique.

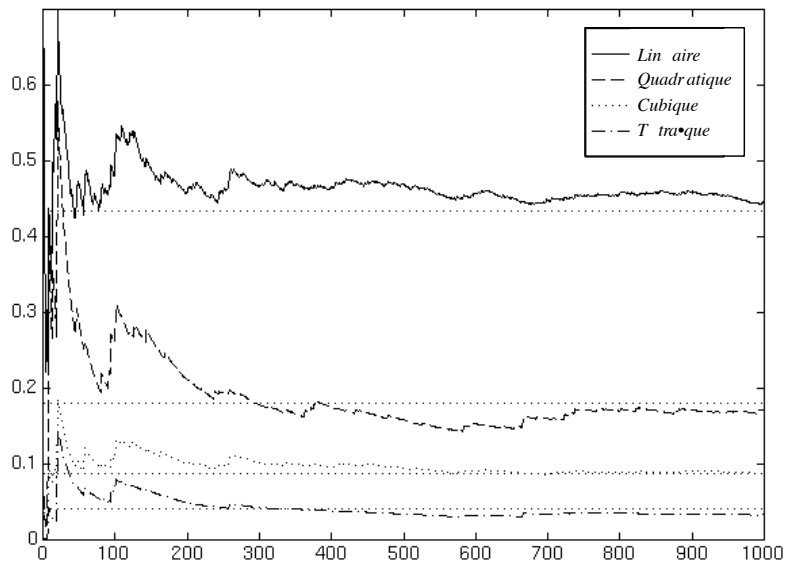


figure 2 : Comparaison entre filtres de Kalman, filtres quadratiques, cubiques et tétraïques.

3. Réalisation et identification en treillis ARMAX.

3.1. Introduction.

Pour ses bonnes propriétés numériques, le filtrage par identification en treillis est familier des traiteurs de signaux. Toutefois, les résultats exacts d'optimalité ne concernent que les filtres FIR ou, ce qui revient au même, l'identification AR. C'est pourquoi ce treillis classique s'avère une réécriture de la régression linéaire au sens des moindres carrés et constitue un filtre prédicteur calculable en dimension finie mais dépourvu de "feed-back". Or, il est bien connu que la simple prise en compte des bruits de mesures dans un modèle néanmoins purement AR suffit à le rendre ARMA. C'est la raison pour laquelle on s'est attaché à la réalisation et à l'identification en treillis ARMA, c'est à dire celle du filtre prédicteur IIR dont la difficulté, connue de longue date, réside dans une non linéarité implicite.

L'objet poursuivi ici est donc de construire le prédicteur optimal de dimension fixée sous la forme treillis ARMA quand on connaît soit la fonction d'autocorrélation d'un signal [43] [44], soit une trajectoire de celui-ci [45]. Plusieurs solutions approchées ont été proposées dans le passé [4] [3] [32] [51] [50] conduisant à l'algorithme classique des moindres carrés étendus [57]. Rappelons que ces solutions, par nature, ne sont pas optimales dans le transitoire [35]. Citons de plus les algorithmes récursifs basés sur le gradient stochastique [5] [22] [57] qui présentent, dans certaines situations, des problèmes de convergences, en particulier si la dimension de la réalisation est inférieure à la dimension du système réel qui engendre la fonction d'autocorrélation.

Tout d'abord, en examinant le problème dit de réalisation du prédicteur optimal d'ordre n fixé à partir de fonctions d'autocorrélation quelconques, il a été montré que ce treillis ARMA de prédiction optimale s'obtient par un calcul héréditaire (c'est à dire à mémoire croissante) mais rapidement convergeant avec l'horizon de corrélation [43].

La prise en compte de corrélations lointaines (l'algorithme de calcul des paramètres s'alimente de l'ensemble des autocorrélations définies sur tout l'horizon temporel considéré) est la caractéristique principale de ce résultat de nature exacte, par opposition à d'autres solutions de nature approchée. Sa supériorité s'est révélée essentielle dans les situations à spectre fréquentiel fortement irrégulier (correspondant à des fonctions d'autocorrélations très étalées). C'est notamment le cas pour la synthèse de filtres idéaux tels que "passe-bande" ou le treillis prédicteur ARMA, vu en tant que modèle, s'avère approximateur optimal au sens de $L^2(p)$ du problème de synthèse.

Ce travail a donné lieu aux publications suivantes : [43] [36] [44] [45].

3.2. Réalisation en treillis ARMA.

Soit y_t le signal à réaliser par un système linéaire de dimension finie n fixée. Une réalisation ARMA de ce processus peut se construire à partir du prédicteur optimal à un pas défini sous la forme suivante :

$$\hat{y}_{t|t-1} = \sum_{i=1}^n a_i \hat{y}_{t-i|t-i-1} + b_i \tilde{y}_{t-i|t-i-1} \quad (31)$$

où $\tilde{y}_{t|t-1} = y_t - \hat{y}_{t|t-1}$ est un bruit blanc. La réalisation du signal s'obtient alors par :

$$y_t = \sum_{i=1}^n a_i (y_{t-i} + \varepsilon_{t-i}) + b_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t \quad (32)$$

où ε_t représente un bruit blanc de même variance que $\tilde{y}_{t|t-1}$.

Il s'agit par conséquent de projeter le signal à l'instant sur son propre passé ainsi que sur ses prédictions passées, soit :

$$z_t = P[y_t | y_{t-1}, \dots, y_{t-n}, z_{t-1}, \dots, z_{t-n}] \quad (33)$$

où z_t désigne le prédicteur à un pas du signal et P le projecteur défini au sens du produit extérieur $\langle x|y \rangle = E[xy^T]$ (projection au sens du minimum de variance).

Théorème 10 *La réalisation d'ordre n du prédicteur à un pas d'un signal y_t sous forme de treillis ARMA (non normalisé) est obtenue par le système linéaire suivant :*

$$\forall i = 1 \dots n - 1, \begin{cases} X_t^i = X_{t-1}^{i-1} - q_t^{i-1} z_{t-1}^{i-1} \\ z_t^i = z_{t-1}^{i-1} - (k_t^{i-1})^T X_{t-1}^{i-1} \end{cases} \text{ avec } X_t^0 = \begin{bmatrix} y_t - z_t^0 \\ z_t^0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

où la sortie z_t est définie par :

$$z_t^0 = \sum_{i=0}^{n-1} (k_t^i)^T X_{t-1}^i \quad (35)$$

et où les paramètres $\{k_t^i, q_t^i\}$ sont donnés par :

$$\forall i = 0 \dots n - 1, \begin{cases} k_t^i = E[X_{t-1}^i y_t] (E[X_{t-1}^i (X_{t-1}^i)^T])^{-1} \\ q_t^i = E[X_{t-1}^i y_t] / E[(z_t^i)^2] \end{cases} \quad (36)$$

□

La structure induite par ce système est illustrée figure 3.

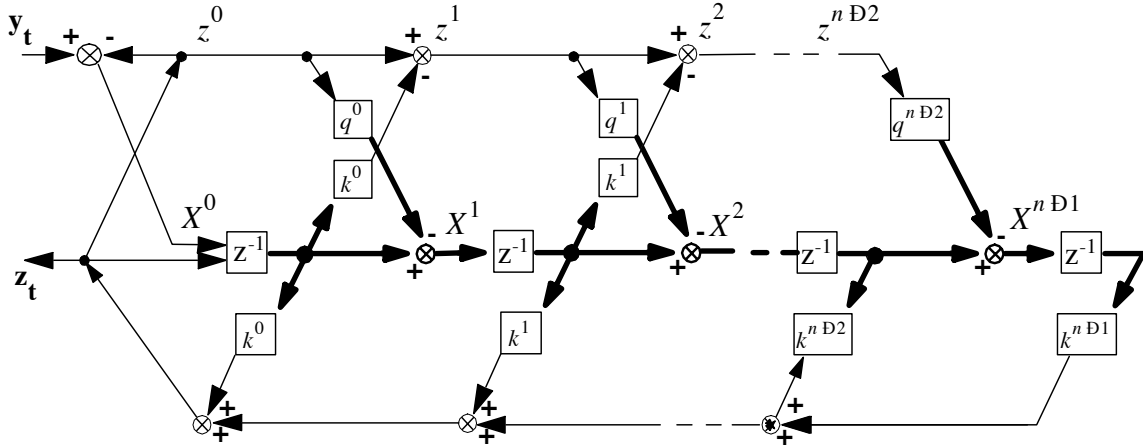


figure 3 : Structure de treillis non normalisé

Le calcul effectif des paramètres du treillis $\{k_t^i, q_t^i\}$ fait appel à deux types de quantités. Les éléments $E[X_{t-1}^i (X_{t-1}^i)^T]$ et $E[(z_t^i)^2]$ sont calculables récursivement à partir du système (34) alors que les termes $E[X_{t-1}^i y_t]$ sont héréditaires et font intervenir les autocorrélations du signal d'entrée d'ordre t :

$$\forall \tau = 1 \dots t - 1, \begin{cases} E[X_\tau^0 y_t] = \begin{bmatrix} E[y_\tau y_t] - E[z_\tau^0 y_t] \\ E[z_\tau^0 y_t] \end{bmatrix} \\ E[X_\tau^i y_t] = E[X_{\tau-1}^i y_t] - q_\tau^{i-1} E[z_\tau^{i-1} y_t], \forall i = 1 \dots n - 1 \\ E[z_\tau^{n-1} y_t] = (k_\tau^{n-1})^T E[X_{\tau-1}^{n-1} y_t] \\ E[z_\tau^i y_t] = E[z_\tau^{i+1} y_t] + (k_\tau^{n-1})^T E[X_\tau^i y_t], \forall i = n - 2 \dots 0 \end{cases} \quad (37)$$

Il apparaît en effet la nécessité de mémoriser toutes les valeurs passées des paramètres $\{k_\tau^i, q_\tau^i, \tau = 1 \dots t-1\}$ pour obtenir les valeurs finales des espérances $E[X_{t-1}^i y_t]$ qui permettent de calculer, à travers (36), les valeurs actualisées de $\{k_t^i, q_t^i\}$.

On constate alors que dans cette formulation, la norme des résidus X_t^i décroît fortement avec i . Aussi, afin d'améliorer encore le conditionnement numérique du calcul du prédicteur à un pas, il est intéressant de normaliser les résidus X_t^i , c'est à dire de les remplacer par des quantités V_t^i telles que $E[V_t^i (V_t^i)^T] = I$, la matrice identité. La version normalisée de ce treillis, est donnée par :

Théorème 11 *La réalisation d'ordre du prédicteur à un pas d'un signal y_t sous forme de treillis ARMA normalisé est obtenue par le système linéaire suivant :*

$$i = 1 \dots n-1, \begin{cases} V_t^i = (I - p_t^{i-1} (p_t^{i-1})^T)^{-1/2} (V_{t-1}^{i-1} - p_t^{i-1} u_t^{i-1}) \\ u_t^i = (I - (p_t^{i-1})^T p_t^{i-1})^{-1/2} (u_{t-1}^{i-1} - (p_t^{i-1})^T V_{t-1}^{i-1}) \end{cases} \quad (38)$$

avec :

$$V_t^0 = \begin{bmatrix} (E[(y_t - z_t^0)^2])^{-1/2} & 0 \\ 0 & (E[(z_t^0)^2])^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t - z_t^0 \\ z_t^0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

où les paramètres $\{p_t^i\}$ sont donnés par :

$$\forall i = 0 \dots n-1, p_t^i = E[V_{t-1}^i u_t^i]$$

et où :

$$E[(z_t^0)^2] = \sum_{i=0}^{n-1} E[(V_{t-1}^i)^T y_t] E[y_t V_{t-1}^i] \quad (40)$$

□

Le calcul des paramètres du treillis est également héréditaire à travers le calcul des éléments $E[y_t V_{t-1}^i]$.

3.3. Identification en treillis ARMA.

Dans une deuxième étape, a été mis au point l'algorithme d'identification en treillis proprement dit, c'est à dire construit à partir des données brutes : fondé sur la détermination du prédicteur optimal au sens du maximum de vraisemblance, cet algorithme est quelque peu différent de ce que laisserait présager l'ergodicité dans l'algorithme de réalisation précédent en remplaçant la fonction d'autocorrélation par les produits de corrélation expérimentaux. A noter toutefois une sensible différence dans le régime transitoire due au traitement de l'initialisation qui préserve l'optimalité transitoire, contrairement à l'équivalent ergodique qui laisse subsister les classiques "effets de bords".

De fait, les projections sont limitées à chaque instant aux variables effectivement pertinentes. Là encore, le calcul d'optimisation des paramètres du treillis est de nature héréditaire en fonction des données. A chaque étape, toute la trajectoire de prédiction doit être mémorisée. Ceci traduit, une fois de plus, la prise en compte fine des corrélations d'ordre élevé.

Soit $\{y_\tau, \tau = 1 \dots t\}$ la trajectoire du processus à identifier. L'objectif est de construire à l'instant t un prédicteur à un pas de ce processus, c'est à dire une trajectoire de prédiction \hat{y}_τ^t qui minimise l'erreur quadratique suivante :

$$E^t[(y_\bullet - \hat{y}_\bullet^t)^2] = \frac{1}{t} \sum_{\tau=1}^t (y_\tau - \hat{y}_\tau^t)^2 \quad (41)$$

La notation y_\bullet désigne la trajectoire $\{y_\tau, \tau = 1 \dots t\}$. A noter que pour une identification adaptative, il

suffit de remplacer le critère (41) par exemple par :

$$E_T^t[(y_{\bullet} - \hat{y}_{\bullet}^t)^2] = \frac{1}{T} \sum_{\tau=t-T+1}^t (y_{\tau} - \hat{y}_{\tau}^t)^2 \quad (42)$$

Définissons l'opérateur de projection de la trajectoire X_{\bullet} sur la trajectoire Y_{\bullet} par :

$$P_{\tau}^t[X_{\bullet}|Y_{\bullet}] = E^t[X_{\bullet}(Y_{\bullet})^T](E^t[Y_{\bullet}(Y_{\bullet})^T])^{-1}Y_{\tau}, \forall \tau = 1 \dots t \quad (43)$$

La trajectoire de prédiction du processus y_{τ} est alors définie par :

$$\hat{y}_{\tau}^t = P_{\tau}^t[y_{\bullet}|\hat{y}_{\bullet-1}^{t-1}, \hat{y}_{\bullet-1}^{t-1}, \dots, \hat{y}_{\bullet-n}^{t-n}, \hat{y}_{\bullet-n}^{t-n}], \forall \tau = 1 \dots t \quad (44)$$

Théorème 12 *La trajectoire du prédicteur à un pas d'ordre n d'un signal y_t sous forme de treillis ARMA (non normalisé) est obtenue par le système linéaire suivant :*

$$\forall i = 1 \dots n - 1, \begin{cases} X_{\tau}^{i,t} = X_{\tau-1}^{i-1,t-1} - q_t^{i-1} z_{\tau}^{i-1,t} \\ z_{\tau}^{i,t} = z_{\tau-1}^{i-1,t} - (k_t^{i-1})^T X_{\tau-1}^{i-1,t-1} \end{cases} \text{ avec } X_t^{0,t} = \begin{bmatrix} y_t - z_{\tau}^{0,t} \\ z_{\tau}^{0,t} \end{bmatrix} \quad (45)$$

où la sortie est définie par :

$$\hat{y}_{\tau}^t = z_t^0 = \sum_{i=0}^{n-1} (k_t^i)^T X_{\tau}^{i,t-1} \quad (46)$$

et où les paramètres $\{k_t^i, q_t^i\}$ sont donnés par :

$$\forall i = 0 \dots n - 1, \begin{cases} k_t^i = E[X_{\bullet-1}^{i,t-1} z_{\bullet}^{i,t}] / E[(z_{\bullet}^{i,t})^2] \\ q_t^i = E[z_{\bullet}^{i,t} (X_{\bullet-1}^{i,t-1})^T] (E[X_{\bullet-1}^{i,t-1} (X_{\bullet-1}^{i,t-1})^T])^{-1} \end{cases} \quad (47)$$

□

La version normalisée de ce treillis est donnée par :

Théorème 13 *La trajectoire du prédicteur à un pas d'ordre n d'un signal y_t sous forme de treillis ARMA normalisé est obtenue par le système linéaire suivant :*

$$\forall i = 1 \dots n - 1, \begin{cases} V_{\tau}^{i,t} = (\frac{t}{t+1} (I - S_t^{i-1} (S_t^{i-1})^T)^{-1/2} (V_{\tau-1}^{i-1,t-1} - S_t^{i-1} u_{\tau}^{i-1,t}) \\ u_{\tau}^{i,t} = (I - (S_t^{i-1})^T S_t^{i-1})^{-1/2} (u_{\tau-1}^{i-1,t} - (S_t^{i-1})^T V_{\tau-1}^{i-1,t-1}) \end{cases} \quad (48)$$

avec :

$$V_{\tau}^{0,t} = \begin{bmatrix} (E^{t+1}[(y_{\bullet-1} - z_{\bullet-1}^{0,t})^2])^{-1/2} & 0 \\ 0 & (E^{t+1}[(z_{\bullet-1}^{0,t})^2])^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t - z_t^0 \\ z_t^0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

où la sortie est définie par :

$$\hat{y}_{\tau}^t = z_t^0 = \left(\sum_{i=0}^{n-1} (k_t^i)^T V_{\tau}^{i,t-1} \right) \sqrt{E^t[(z_{\bullet}^{0,t})^2]} \quad (50)$$

et où les paramètres $\{S_t^i\}$ sont donnés par :

$$\forall i = 0 \dots n - 1, S_t^i = E^t[V_{\bullet-1}^{i,t-1} u_{\bullet}^{i,t}] \quad (51)$$

□

L'extension de cette technique à des systèmes comportant des entrées multidimensionnelles (ARMAX) a été réalisée. L'aspect purement technique de cette extension ne sera pas exposé ici.

3.4. Exemples en simulation.

3.4.1. Approximations optimales de filtres passe-bas idéaux.

Un filtre passe-bas idéal est tel que l'autocorrélation du signal de sortie est la transformée de Fourier inverse de la fenêtre indicatrice $\mathbb{I}_{[-f,f]}$, soit :

$$E[y_t y_{t+\tau}] = \frac{\sin(4\pi f \tau)}{4\pi f \tau} + R\delta_0(\tau) \quad (52)$$

où R correspond à la variance du bruit blanc additif fixant le taux de réjection hors bande. Les résultats obtenus par l'algorithme sont illustrés figure 4. On constate ici qu'au-delà de $n = 12$, l'approximation est quasi parfaite. A noter que la formulation du problème (prédiction à minimum de variance) n'interdit pas les dépassements dans la bande comme l'imposerait une formulation de type gabarits. Ce phénomène peut être apparenté au phénomène de Gibbs bien connu en analyse harmonique.

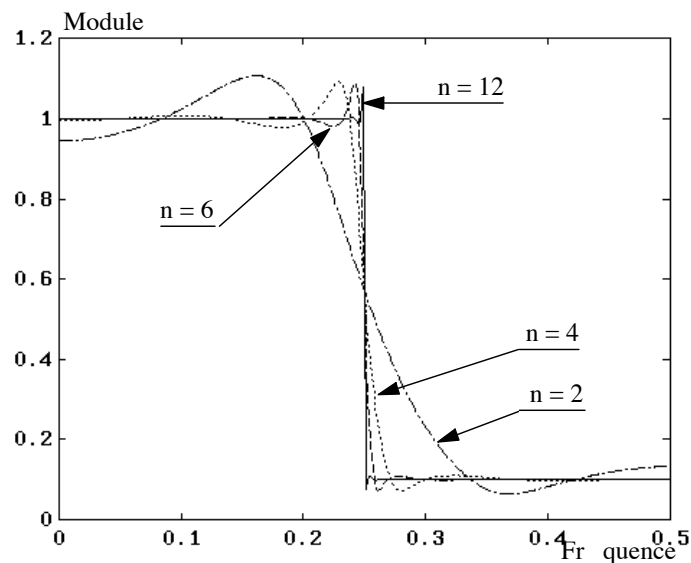


figure 4 : Approximation d'un passe-bas idéal - $n = 2, 4, 6, 12$

3.4.2. Identification de systèmes linéaires.

La supériorité de notre approche sur les algorithmes approchés que sont RML (Recursive Maximum Likelihood), ELS (Extended Least Square) et GNBD (Gauss-Newton Block Data) de la toolbox MATLAB a été largement démontrée et trouve une illustration de ses performances figure 5 sur un système de dimension 4.

3.4.3. Identification adaptative.

La mémoire héréditaire assurant l'optimalité théorique de la convergence peut être volontairement tronquée, afin de parer aux situations de dérives lentes des paramètres du modèle. On a pu ainsi obtenir d'excellentes performances dans la poursuite paramétrique simultanée de raies spectrales SONAR (passif) multiples et rapprochées (décalage des fréquences dû à l'effet Doppler). Sur la figure 6 sont représentés les densités spectrales de puissance des données (trait pointillé) comparées aux densités spectrales de puissance des systèmes identifiés à différentes étapes du calcul.

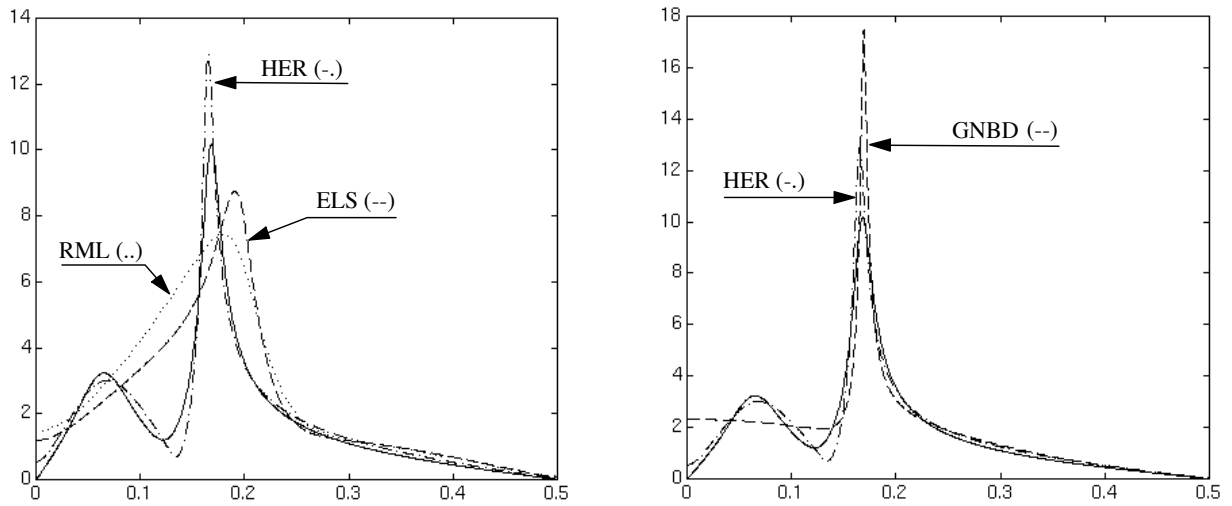


figure 5 : Comparaisons entre ELS, RML et HER - Ordre $n = 4$

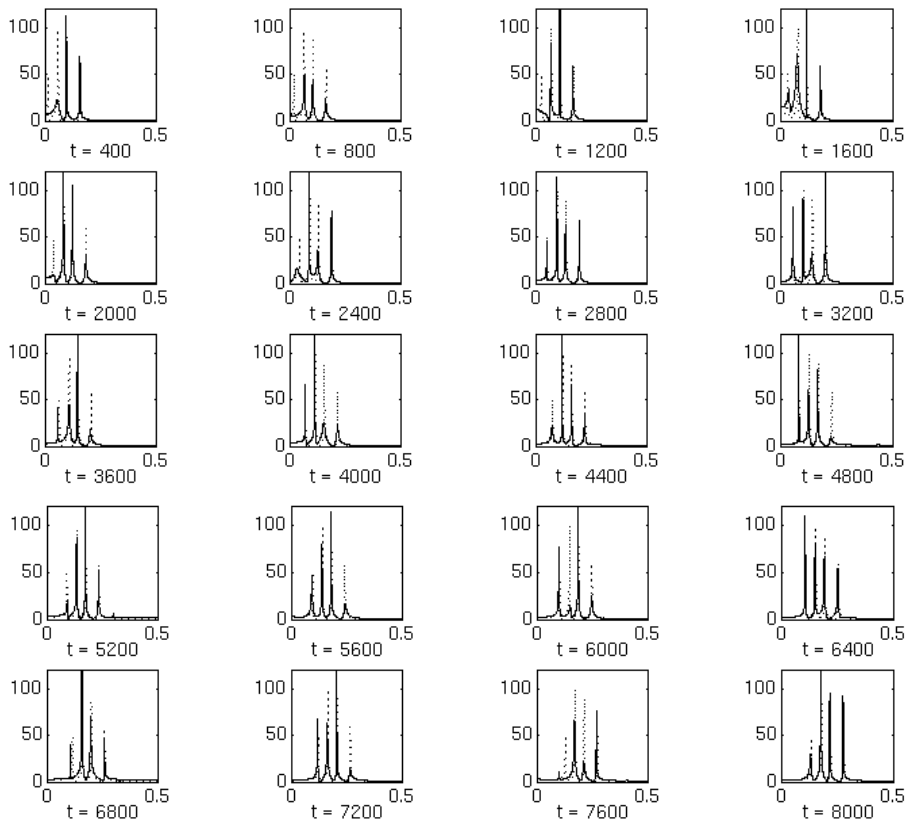


figure 6 : Poursuite de raies SONAR

4. Filtrage linéaire optimal sur un domaine borné.

4.1. Introduction.

Il est des situations où une variable d'état est, par nature, limitée à un certain intervalle. On peut montrer alors que si le modèle de cette variable est linéaire gaussien, l'estimateur optimal de celle-ci est calculable récursivement en dimension finie [47].

Supposons qu'un paramètre fixe $x \in \mathbb{R}^n$ soit linéairement observé par un processus $y_t \in \mathbb{R}^m$ entaché d'un bruit blanc additif gaussien v_t . Le modèle linéaire correspondant, en prenant un pas d'échantillonnage unitaire, est alors :

$$x_t = x_{t-1} \quad (53)$$

$$y_t = Hx_t + v_t \quad (54)$$

Prenons l'hypothèse supplémentaire que ce paramètre est astreint à rester dans un domaine $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$. Plus précisément, considérons que la densité de probabilité de x à l'instant initial est une distribution gaussienne "tronquée" sur le domaine, soit :

$$p_0(x) = \frac{1}{\alpha_0} \mathbb{I}_{[x \in \mathcal{D}]} e^{-\frac{1}{2}(x-\bar{x}_0)^T P_0^{-1}(x-\bar{x}_0)} \quad (55)$$

où $\mathbb{I}_{[x \in \mathcal{D}]}$ est la fonction indicatrice du domaine \mathcal{D} (1 si $x \in \mathcal{D}$, 0 sinon). Le coefficient de normalisation α_0 est tel que :

$$\alpha_0 = \int_{\mathcal{D}} e^{-\frac{1}{2}(x-\bar{x}_0)^T P_0^{-1}(x-\bar{x}_0)} dx \quad (56)$$

Ce travail a donné lieu à la publication suivante : [48].

4.2. Evolution de la densité de probabilité conditionnelle.

Intéressons-nous à la densité de probabilité de l'état x conditionnellement aux observations $Y_0^t = \{y_0, \dots, y_t\}$. On peut alors montrer que cette densité de probabilité est également une gaussienne tronquée de la forme (55).

Théorème 14 *Si la densité initiale d'une variable aléatoire est de la forme (55), alors cette structure est conservée dans le temps et on a :*

$$p(x|Y_0^t) = \frac{1}{\alpha_t} \mathbb{I}_{[x \in \mathcal{D}]} e^{-\frac{1}{2}(x-\bar{x}_t)^T P_t^{-1}(x-\bar{x}_t)} \quad (57)$$

où \bar{x}_t et P_t sont respectivement les moyennes et variances du filtre de Kalman de l'état x et où :

$$\alpha_t = \int_{\mathcal{D}} e^{-\frac{1}{2}((y_t - Hx)^T R^{-1}(y_t - Hx) + (x - \bar{x}_{t-1})^T P_{t-1}^{-1}(x - \bar{x}_{t-1}))} dx \quad (58)$$

□

4.3. Termes de normalisation.

On constate que le calcul de la vraisemblance de la trajectoire d'observation fait appel aux termes de normalisation α_t de la densité de probabilité gaussienne tronquée. Si la variable "tronquée" est scalaire, ces coefficients peuvent être calculés à partir de la fonction "erreur" définie par :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi \quad (59)$$

Supposons que le domaine \mathcal{D} soit défini par :

$$\mathcal{D} = \{x^1 \in I, (x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n-1}\} \quad (60)$$

où x^i désigne la i -ième composante du vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ et où $I = [a, b]$ représente l'intervalle auquel la première composante du vecteur est assujettie. On peut alors montrer que le terme de normalisation s'écrit :

$$\alpha_t = \left(\operatorname{erf}\left(\frac{b - \bar{x}_t^1}{\sqrt{P_t^{1,1}}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{a - \bar{x}_t^1}{\sqrt{P_t^{1,1}}}\right) \right) \sqrt{(2\pi)^n |P_t|} \quad (61)$$

4.4. Expression de l'estimateur.

L'estimateur \hat{x}_t de l'état x à l'instant t s'obtient simplement en calculant la moyenne de sa densité de probabilité, soit :

$$\hat{x}_t^1 = \bar{x}_t^1 - \sqrt{\frac{P_t^{1,1}}{2\pi}} \frac{e^{-\frac{1}{2}(b - \bar{x}_t^1)^2 / P_t^{1,1}} - e^{-\frac{1}{2}(a - \bar{x}_t^1)^2 / P_t^{1,1}}}{\operatorname{erf}\left(\frac{b - \bar{x}_t^1}{\sqrt{P_t^{1,1}}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{a - \bar{x}_t^1}{\sqrt{P_t^{1,1}}}\right)} \quad (62)$$

On constate à l'examen de la formule (62) que l'estimateur "tronqué" de l'état s'obtient en corrigeant l'estimateur linéaire classique d'un terme proportionnel à une sorte de distance entre l'estimateur de Kalman \bar{x}_t^1 et l'intervalle $[a, b]$.

5. Filtrage non-linéaire particulière.

Bien que n'ayant pas participé directement à la genèse du filtrage particulière en 1989 [56], j'ai eu l'occasion de participer pleinement à son développement. Les évolutions apportées à l'algorithme initial de filtrage particulière ont été le plus souvent inspirée par le traitement d'applications (GPS [9] [10], LORAN-C [42]). Ces travaux ont essentiellement porté sur les procédures de redistribution, de réalisation de la distribution initiale des particules et sur la parallélisation de l'algorithme de filtrage particulière [8].

5.1. Introduction.

Considérons le modèle à temps discret très général non linéaire suivant :

$$x_t = f(x_{t-1}, w_t) \quad (63)$$

$$y_t = h(x_t) + v_t \quad (64)$$

où w_t et v_t sont des bruits blancs (non nécessairement gaussiens). La technique de résolution particulière repose sur la reconstruction de la densité de probabilité de l'état à estimer x_t conditionnellement à l'ensemble des observations $Y_0^t = \{y_0, \dots, y_t\}$ accumulées sur l'intervalle de temps $[0, t]$, soit la densité de probabilité $p(x_t|Y_0^t)$. Cette densité est approchée par une mesure ponctuelle du type :

$$p(x_t|Y_0^t) \cong \sum_{i=1}^N \rho_t^i \delta_{x^i}(x_t) \quad (65)$$

où $\delta_{x^i}(x_t)$ désigne la mesure de Dirac au point support x^i . C'est une approximation faible de cette densité que nous construisons ainsi, la convergence ayant le sens suivant :

$$\forall \varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \rho_t^i \varphi(x^i) = E[\varphi(x_t)|Y_0^t] \quad (66)$$

5.1.1. Approximation de la densité a priori.

Dans un premier temps, on cherche à construire une approximation par une mesure ponctuelle du type (65) de la densité a priori $p(x_t)$. Pour ce faire, on réalise un tirage de N particules conformément à la distribution initiale $p(x_0)$. On a alors une approximation de cette densité par :

$$p(x_0) \cong \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \delta_{x_0^i}(x_0) \quad (67)$$

où x_0^i désigne la position de la particule i . Pour obtenir une approximation de $p(x_t)$, on fait évoluer chacune des particules indépendamment et conformément au modèle de prédiction de l'état, c'est à dire (63). Les particules évoluent donc selon :

$$x_t^i = f(x_{t-1}^i, w_t^i) \quad (68)$$

où w_t^i est obtenu par tirage aléatoire conforme à la loi supposée connue du bruit w_t . Après t itérations de ce type, on obtient une approximation de la densité de probabilité a priori par :

$$p(x_t) \cong \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \delta_{x_t^i}(x_t) \quad (69)$$

La figure 7 illustre cette évolution où les traits pointillés représentent la trajectoire de chaque particule.

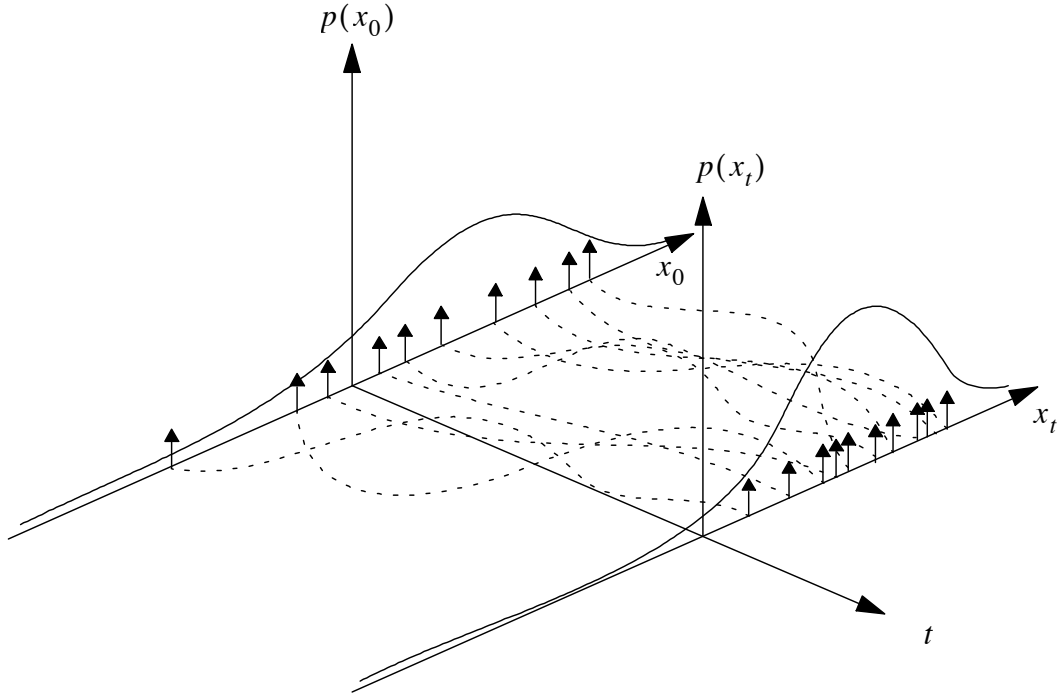


figure 7 : Evolution a priori

On peut alors montrer, en utilisant la loi des grands nombres, qu'il y a convergence faible de l'approximation ponctuelle quand le nombre de particules tend vers l'infini.

5.1.2. Approximation de la densité conditionnelle.

La probabilité conditionnelle peut s'obtenir, en utilisant récursivement la règle de Bayes :

$$p(x_t|Y_0^t) \cong \sum_{i=1}^N \rho_t^i \delta_{x^i}(x_t) \text{ avec } \rho_t^i = \frac{p(y_t|x_t^i) \dots p(y_0|x_0^i)}{\sum_{i=1}^N p(y_t|x_t^i) \dots p(y_0|x_0^i)} \quad (70)$$

La figure 8 illustre la construction de la densité de probabilité conditionnelle où les flèches représentent les poids des particules.

Dans l'hypothèse où le bruit blanc d'observation v_t est gaussien de variance R , les poids peuvent se calculer explicitement. En effet, on a :

$$p(y_t|x_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} e^{-\frac{1}{2}(y_t - h(x_t))^2/R} \quad (71)$$

La vraisemblance de la trajectoire s'obtient alors par :

$$V_t^i = -\frac{1}{2} \sum_{\tau=0}^t (y_\tau - h(x_\tau^i))^2 / R \quad (72)$$

Les poids peuvent alors s'obtenir par :

$$\rho_t^i = \frac{e^{V_t^i}}{\sum_{i=1}^N e^{V_t^i}} \quad (73)$$

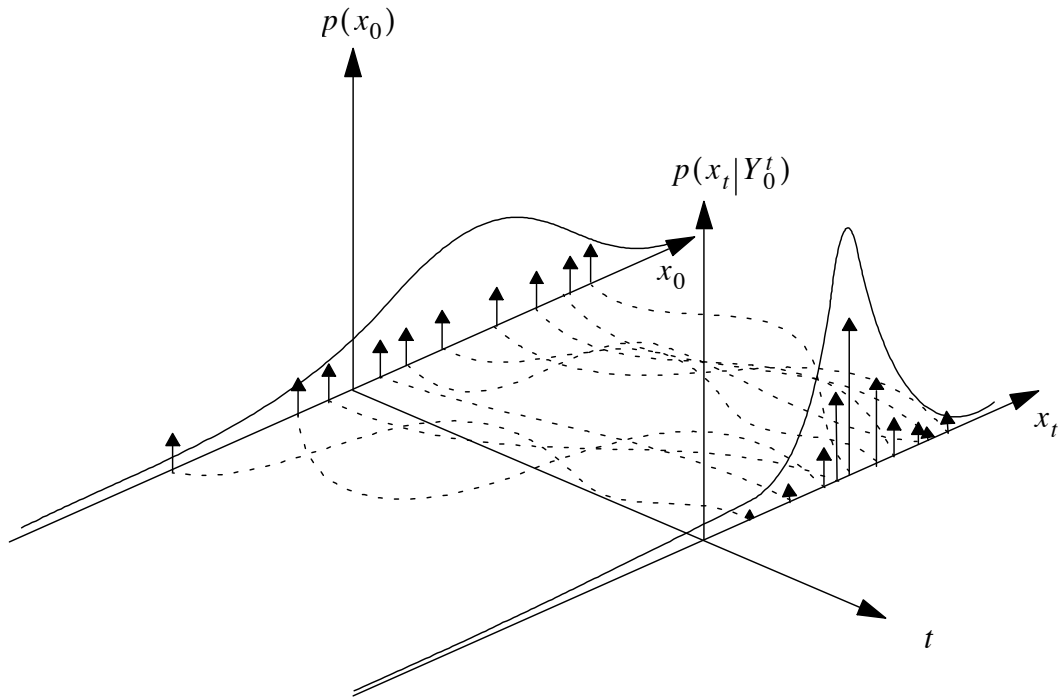


figure 8 : Evolution de la densité conditionnelle

et l'estimateur particulaire en calculant la moyenne de cette densité, soit :

$$\hat{x}_t = \sum_{i=1}^N \rho_t^i x_t^i \quad (74)$$

L'inconvénient majeur la technique telle qu'elle a été exposée ici réside dans son défaut de convergence uniforme. En effet, pour un nombre de particules donné, lorsqu'on accumule les observations, on peut montrer qu'il y a dégénérescence de la représentation dans le sens où le rapport de poids entre deux particules distinctes diverge en moyenne. Ainsi, au bout d'un certain temps, une particule, et une seule a un poids qui temps vers 1 alors que toutes les autres ont un poids quasi nul et deviennent, par conséquent, inutiles à la représentation. Par ailleurs, si le système est instable, le nuage de particules a tendance à s'éparpiller dans l'espace d'état. La représentation de la probabilité devient alors dégénérée. Plusieurs procédures de régularisation ont été envisagées.

5.2. Procédures de régularisation.

Pour pallier ce défaut de convergence uniforme de l'estimateur particulaire vers l'estimateur optimal, il est nécessaire de modifier l'algorithme de base en réalisant périodiquement une redistribution des particules conformément à la densité de probabilité obtenue. Ainsi, les zones de l'espace d'état qui comportent les particules les plus probables se voient renforcées par un nombre de particule plus grand après redistribution au détriment des zones moins probables. L'objectif des redistributions est en effet de maintenir la représentation de la mesure de probabilité conditionnelle aux observations proche d'une représentation où tous les poids sont peu différents de $1/N$, ceci afin de se maintenir dans le cadre d'application de la loi des grands nombres. Il s'agit donc de poursuivre deux objectifs : minimiser la distance entre représentations de la densité de probabilité avant et après redistribution; maintenir les poids proches de $1/N$.

Les premières tentatives de régularisation consistaient à réaliser les redistributions à chaque pas de

l'algorithme en tirant aléatoirement les positions des particules $\{(x_t^i, \rho_t^i), i = 1 \dots N\}$ conformément à la loi obtenue et à réinitialiser les poids des particules à $1/N$ [23]. L'avantage de cette technique est de garantir la convergence uniforme de l'algorithme au prix d'un nombre prohibitif de particules. En effet le "bruit" introduit lors des redistributions purement aléatoires impose l'utilisation en pratique d'un nombre très élevé de particules.

Afin de limiter les effets perturbateurs de redistributions trop fréquentes, on a alors introduit un critère de déclenchement des redistributions à base de quantification des particules dites "efficaces" [54] [33].

Nous avons alors introduit une procédure de redistribution déterministe de type fractionnaire : on affecte autoritairement à chaque position x_t^i le nombre $A(\rho_t^i N)$, où la fonction A désigne la valeur arrondie à l'unité. Au terme de cette procédure, il peut y avoir déficit ou bien excédant de particules. Dans le premier cas, on affecte le nombre requis de particules aux positions où la différence $\rho_t^i N - A(\rho_t^i N) > 0$, ceci par ordre décroissant de cette différence. Dans le cas où il y aurait excédant, on retire les particules là où la différence $\rho_t^i N - A(\rho_t^i N) < 0$, toujours par ordre décroissant. Afin de minimiser la distance entre représentation de la distribution avant et après redistribution, les poids des particules redistribuées ne sont pas fixés à $1/N$ mais à ρ_t^i/n^i où n^i est le nombre de particules alloué à la position x_t^i . Cette redistribution est déclenchée quand au moins une particule a un poids inférieur à $1/2N$ ($A(\rho_t^i N) = 0$) et au moins une particule a un poids supérieur à $3/2N$ ($A(\rho_t^i N) = 2$). A noter que si le rapport signal/bruit du système est faible, un nombre réduit de particules est redistribué à chaque étape et la plupart de la représentation particulaire est inchangée par la procédure. Cette technique nous semble allier les deux avantages des méthodes précédentes : maintenir à chaque étape les poids proches de $1/N$ tout en évitant l'introduction de trop fortes perturbations dans le processus de filtrage en permettant une intégration des observations sur un horizon qui s'adapte automatiquement aux conditions d'observabilité.

De plus, dans l'objectif de parallélisation de l'algorithme, nous avons introduit un type de redistribution qui accepte une certaine fluctuation du nombre total de particules utilisées pour l'estimation tout en assurant une stabilité de ce nombre autour de la valeur N désirée. Soit N_t le nombre de particules à l'instant t . Si on décide de redistribuer le réseau de particules à cet instant, on affecte autoritairement à chaque position x_t^i le nombre $A(\rho_t^i N)$, indépendant de N_t . On peut alors montrer que la variance du nombre de particules autour de la consigne N tend vers 0 quand le nombre de particules tend vers l'infini.

5.3. Exploitation de la métrique de la vraisemblance.

Dans une mise en oeuvre pratique, il est crucial d'utiliser au mieux l'ensemble des particules allouées à une application dans un simple souci d'économie de temps de calcul. Une des voies possibles consiste à distribuer initialement le réseau de particules conformément aux sensibilités directionnelles de l'état du système. En effet, pour un problème donné, certaines directions de l'espace d'état du système sont plus «observables» dans le sens où, pour un nombre d'itérations donné, la variance de l'estimateur dans cette direction décroît plus vite que pour des directions orthogonales à celle-ci.

Si on considère le problème d'observabilité intrinsèque du modèle (63) pour lequel le bruit blanc de dynamique est nul, on peut exprimer cette vraisemblance en fonction de la condition initiale par utilisation de la fonction de transition du système, soit :

$$V_t(x_0) = -\frac{1}{2} \sum_{\tau=0}^t (y_\tau - h(\phi(\tau, x_0)))^2 / R \quad (75)$$

où $\phi(t, x) = f(\phi(t-1, x), 0)$ et $\phi(0, x) = x$.

Intéressons-nous à présent aux variations de cette vraisemblance autour de son maximum, c'est à dire au voisinage d'une trajectoire d'observation pour laquelle la vraisemblance est nulle : $\forall \tau, y_\tau = h(\phi(\tau, x_0))$. L'objectif est ici de calculer le paraboloid local approximant $V_t(x_0)$ autour de son maximum. Pour ce faire, il suffit d'en calculer le Hessien :

$$H_t(x_0) = \frac{\partial^2 V_t(x_0)}{\partial x_0^2} = \sum_{\tau=0}^t \frac{\partial h(\phi(\tau, x_0))^T}{\partial x_0} \frac{\partial h(\phi(\tau, x_0))}{\partial x_0} \quad (76)$$

L'approximation locale de la vraisemblance prend alors la forme quadratique suivante :

$$V_t(x_0) \cong x_0^T H_t x_0 \quad (77)$$

Réalisons la diagonalisation de la matrice $H_t(x_0)$. Dans la base des vecteurs propres, l'approximation locale de vraisemblance prend la forme suivante :

$$V_t(x_0) \cong \sum_{i=1}^n \lambda_i (z_0^i)^2 \quad (78)$$

où z_0 désigne les coordonnées du point x_0 dans cette nouvelle base.

Une ligne de niveau de cette approximation locale de la vraisemblance peut alors être vue comme une hyper-ellipse dont les axes sont portés par les directions propres de la matrice $H_t(x_0)$ et dont la longueur des demi-axes est proportionnelle à $1/\sqrt{\lambda_i}$. On réalise ainsi l'approximation locale de la vraisemblance par une fonction quadratique, ce qui est équivalent à considérer une approximation locale de la probabilité par une distribution gaussienne.

5.3.1. Distribution initiale.

L'exploitation des sensibilités directionnelles pour le remplissage initial de l'espace consiste à construire une grille locale dont les directions correspondent aux directions propres de la matrice de sensibilités $H_t(x_0)$ et dont les dimensions sont proportionnelles à $1/\sqrt{\lambda_i}$. Ainsi, la densité des particules sera plus forte dans les directions pour lesquelles l'estimateur est le plus sensible.

Cette procédure a été appliquée avec succès au traitement sur données réelles du signal LORAN-C en radionavigation [47] [39] [42]. Dans ce problème, la sensibilité de la détermination de la position du récepteur dépend de la géométrie de l'ensemble des stations observées comme l'illustre la figure 9. Le remplissage résultant de l'utilisation des stations Ejde et Lessay est représenté figure 10.

5.3.2. Redistribution diffuse.

Comme il a été souligné plus haut, le développement quadratique de la vraisemblance donne une approximation locale de la probabilité par une distribution gaussienne. Au moment d'une redistribution, on affecte en chaque position retenue un nombre de particules donné autour de la position retenue. Dans le but d'optimiser l'utilisation des particules, il s'avère intéressant de réaliser une diffusion conforme à cette distribution gaussienne. On connaît, au moment de déclencher une redistribution, quelle était la topologie du nuage de particules au coup précédent à travers le rectangle élémentaire dont est constituée la grille. Si une particule doit se multiplier, celle-ci doit chercher à remplir l'espace inexploré par le nuage au coup précédent. La tâche de redistribution doit donc respecter les directions propres de la matrice de sensibilité et les écarts types de diffusion doivent évaluer la dimension des pas de la grille précédente afin de couvrir au mieux les intervalles laissés inexplorés.

La figure 11 illustre un exemple de redistributions utilisant de procédé. On voit ici apparaître des

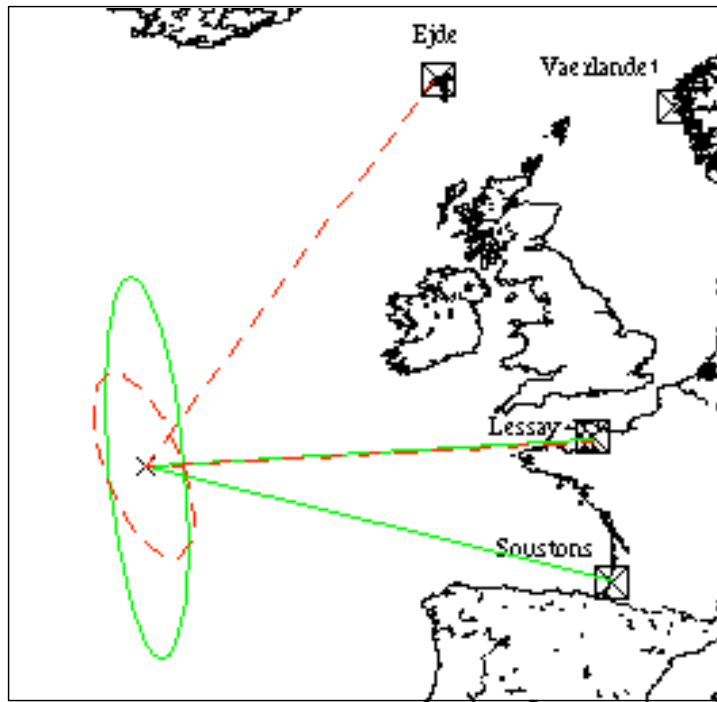


figure 9 : Analyse des sensibilités

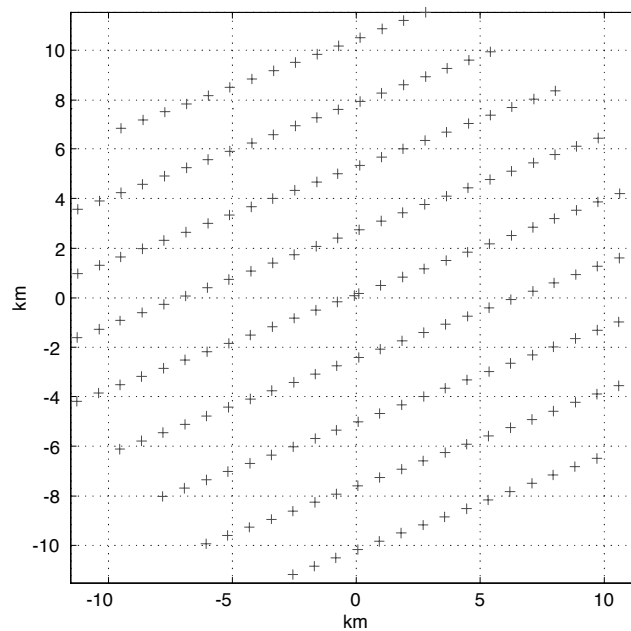


figure 10 : Exemple de distribution initiale.

lignes de position distantes d'une longueur d'onde, distance correspondant à une pseudo-ambiguïté.

5.4. Parallélisation de l'algorithme.

Les impératifs de traitement en temps réels des applications sont souvent difficilement compatibles avec une mise en oeuvre séquentielle de l'algorithme particulière. En effet, malgré l'utilisation

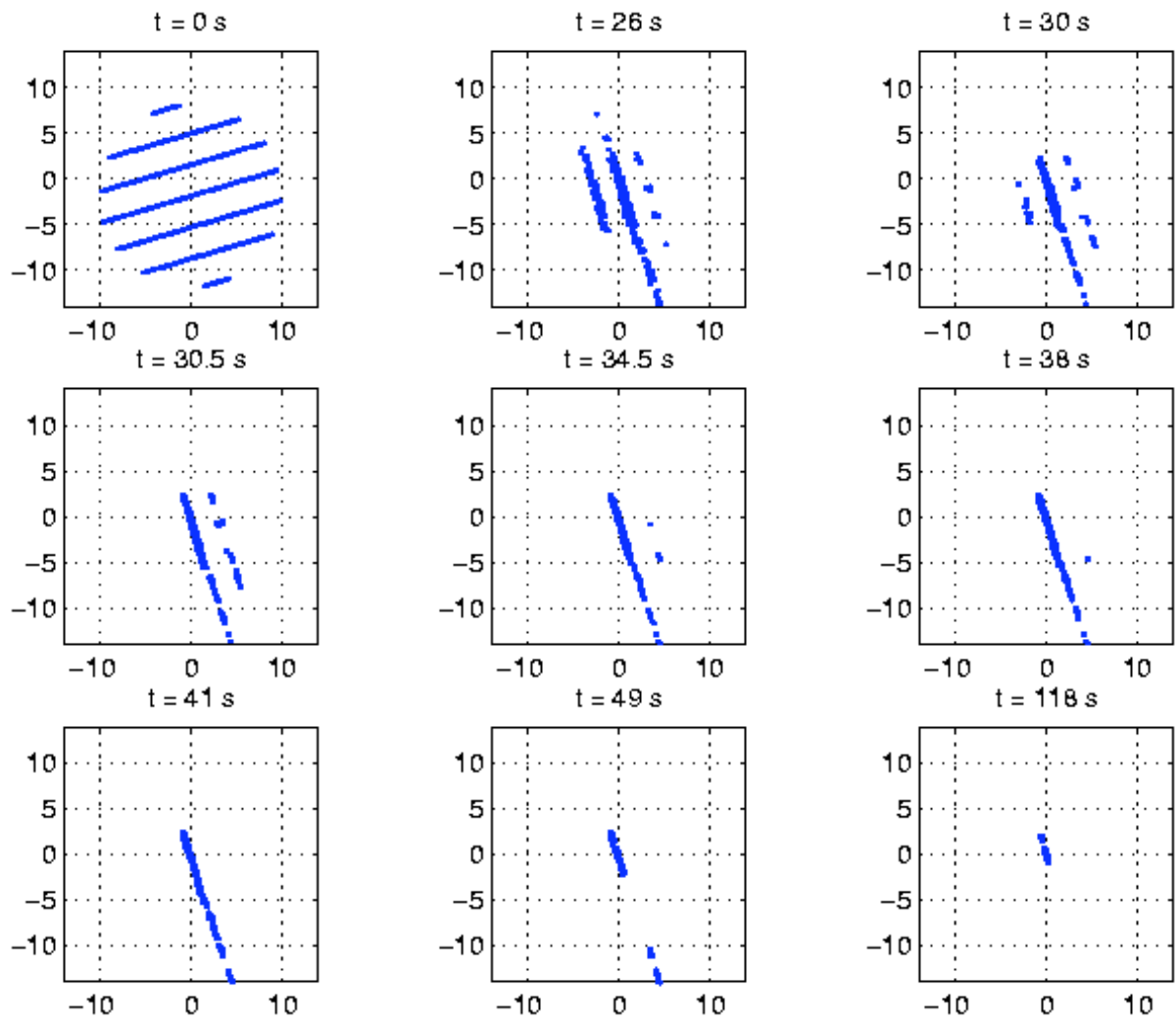


figure 11 : Redistribution diffuse des particules

de procédures qui visent à minimiser le nombre de particules, celui-ci peut néanmoins demeurer prohibitif.

Par nature, l'algorithme particulaire est hautement parallélisable. En effet, chaque particule à une évolution propre, indépendante des évolutions du reste du réseau. De même, le calcul de la vraisemblance de chaque particule peut se faire, au terme de normalisation près, à partir de la seule donnée qu'est le signal d'observation.

L'implantation parallélisée de l'algorithme peut donc être structurée de la manière suivante [8] : chaque processeur p traite un sous-ensemble de particules $\{x_t^{i,p}, i = 1 \dots N_p\}$ et traite localement l'exploration de l'espace par tirages aléatoires du bruit de dynamique. De même, chaque processeur calcule la vraisemblance (non normalisée) de chaque particule ainsi que l'estimateur local (non normalisé) et son terme de normalisation local, soit :

$$V_t^{i,p} = -\frac{1}{2} \sum_{\tau=0}^t (y_\tau - h(x_\tau^{i,p}))^2 / r \quad (79)$$

$$\hat{x}_t^p = \sum_{i=1}^{N_p} e^{V_t^{i,p}} x_t^{i,p} \quad (80)$$

$$\rho_t^p = \sum_{i=1}^{N_p} e^{V_t^{i,p}} \quad (81)$$

Une tâche maître se charge de recueillir chacun des termes \hat{x}_t^p et ρ_t^p afin de calculer l'estimateur global, soit :

$$\hat{x}_t = \frac{\sum_{p=1}^P \hat{x}_t^p}{\sum_{p=1}^P \rho_t^p} \quad (82)$$

On constate que dans cette phase les quantités échangées entre processeurs se limitent à quelques réels (de l'ordre de la dimension du système) ce qui est très favorable aux performances de la version parallélisée qui peut, de ce fait, atteindre des accélérations quasi linéaires. A noter que, de plus, le calcul de l'estimateur peut se faire de manière périodique avec une période supérieure à la période d'échantillonnage.

Le traitement de la procédure de redistribution est légèrement plus délicat à traiter. L'utilisation de redistribution de type aléatoire proportionnel nécessite un échange complet des positions de particules entre processeurs, procédure à éliminer étant donné le nombre prohibitif des valeurs à échanger.

L'utilisation de redistribution de type aléatoire fractionnaire limite largement le nombre d'échanges nécessaire. En effet, chaque processeur n'a besoin, pour calculer le nombre de particules à redistribuer sur une position donnée, que des termes de normalisation locale des autres processeurs (quelques réels). Cependant, le nombre de particules ainsi calculé diffère, en général, du nombre de particules souhaité. Si on souhaite maintenir le nombre de particules par processeur strictement fixe, il est alors nécessaire d'échanger les reliquats afin de réorganiser la répartition entre processeurs.

L'utilisation de redistribution de type déterministe permet d'annuler totalement les échanges de positions de particules au prix d'une fluctuation du nombre de particules alloué. Cette procédure devient la plus performante si le coût de communication entre processeur est élevé ou si les redistributions doivent intervenir fréquemment.

Chapitre 2 : Travaux à caractère appliqué.

Nous présentons ici deux applications ayant fait l'objet de contrats de recherche qui nous ont donné l'occasion de mettre en oeuvre les différents outils théoriques développés précédemment. La première est une application du filtrage polynomial de Volterra au test de détection multi-hypothèses. Il s'agit de la détection de multi-émissions sur une même porteuse associée à la recherche du nombre de celles-ci. La suivante est une application du filtrage non linéaire pour la radionavigation et porte sur le traitement optimal du signal LORAN-C.

1. Détection et discrimination de multi-émissions sur une même porteuse.

1.1. Introduction.

Cette étude a été réalisée dans le cadre d'un contrat avec le Centre Electronique de l'Armement (CELAR) de Rennes, projet Clémentine [38] [49]. Le problème qui nous a été soumis est celui de la détection de la présence simultanée de plusieurs émissions de télécommunication sur une même porteuse et, le cas échéant, du décompte de celles-ci. Le signal analysé est en effet issu d'un satellite d'écoute qui peut, du fait de sa position, couvrir un domaine dans lequel se trouvent plusieurs émetteurs calés sur la même fréquence. Les types de modulation envisagés sont les modulations de phase, de fréquence et d'amplitude, de natures numériques ou analogiques.

La démarche retenue pour résoudre le problème de détection de multi-émissions comporte les étapes suivantes :

- Réaliser l'inventaire de tous les types d'émissions attendues sur une même porteuse. Cette étape conduit à l'établissement d'une liste des différentes hypothèses qui devront être testées. En l'occurrence, cette liste doit non seulement distinguer les différents types de modulation rencontrés mais également la conjonction de ces modulations entre elles. Par exemple, pour un type de modulation donné, il faut envisager la présence d'une, de deux, trois,... modulations du même type présentes simultanément.
- Modéliser précisément les différentes hypothèses traitées. Cela consiste à décrire les processus d'observation dans chacune des situations par l'analyse de leurs densités de probabilité ou de leurs fonctions caractéristiques.
- Analyser la distingabilité des différentes hypothèses retenues à partir de l'analyse des caractéristiques statistiques d'ordre élevé des signaux envisagés.
- Etablir un critère de décision et vérifier l'efficacité de celui-ci.

La mise en oeuvre complète d'un test de détection a été développée dans le cas particulier de la recherche du nombre de modulation de phase présentes dans un signal. Celui-ci a été construit à partir d'un filtre quadratique de Volterra de la puissance instantanée du signal.

Ce travail a donné lieu à la publication suivante : [49].

1.2. Distingabilité des multi-émissions.

Pour chacun des types de modulation envisagés, nous considérerons l'hypothèse H_i comme correspondant à la présence simultanée de i modulations de ce même type. Le signal observé, représenté par le nombre complexe y_t , sera alors défini, sous chacune des hypothèses, selon :

$$H_i : y_t = s_t^i + v_t = \sum_{k=1}^i x_t^k + v_t \quad (83)$$

où v_t désigne le bruit blanc additif de sortie défini par :

$$v_t = v_t^1 + jv_t^2 \quad (84)$$

v_t^1 et v_t^2 sont des bruits blancs gaussiens indépendants de variance R et où s_t^i désigne le signal non bruité comportant les i modulations x_t^k présentes potentiellement dans le signal observé.

L'objet est de déterminer quels sont les moments de probabilité du signal qui rendent le paramètre i (nombre de modulations) observable. Le calcul des différents moments de probabilité du signal d'observation révèle qu'il est nécessaire de monter jusqu'à l'ordre 4 pour faire apparaître une dépendance de la distribution avec le nombre i de modulations. Plus précisément, l'indépendance supposée entre les signaux x_t^k permet d'établir qu'en régime stationnaire et pour une somme de signaux modulés en phase ou en fréquence, on a la relation suivante :

$$E[|s_t^i|^4] = \sum_{k=1}^i E[|x_t^k|^4] + 2 \sum_{k \neq l} E[|x_t^k|^2] E[|x_t^l|^2] \quad (85)$$

Supposons que les différents signaux x_t^k aient la même distribution. Notons β le rapport entre moments du deuxième et quatrième ordre :

$$\beta = \frac{E[|x_t^k|^4]}{E[|x_t^k|^2]^2} \quad (86)$$

On peut alors montrer que :

$$E[|s_t^i|^4] = \frac{\beta + 2(i-1)}{i} (E[|s_t^i|^2])^2 \quad (87)$$

La distorsion de la distribution de probabilité du module du signal $|s_t^i|$ en fonction du nombre de signaux présents i est donc mise en évidence par les statistiques d'ordre 4 du signal. C'est cette propriété que nous utiliserons pour construire le test de détection du nombre de signaux. Cette propriété, visible "à l'oeil nu" en absence de bruit blanc additif, est illustrée figure 12. On constate que le nuage de points correspondant à 2 modulations est moins dilué autour de la moyenne du module carré (unitaire en l'occurrence) que celui correspondant à 3 signaux.

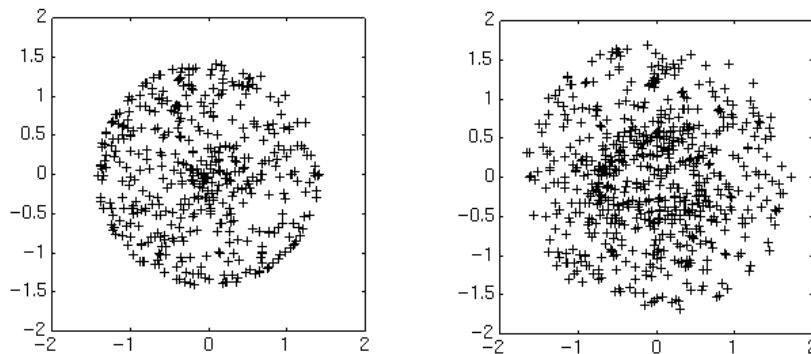


figure 12 : Dispersion du module autour de la moyenne pour 2 et 3 signaux présents

Plus précisément, le filtre optimal du module carré du signal prenant en compte les moments de probabilité du signal de degré inférieur ou égal à 4, celui-ci sera différent pour chacune des hypothèses sur le nombre de signaux présents. Par conséquent, les innovations des différents filtres

construits sous chacune des hypothèses s'écarteront plus ou moins de leurs valeurs théoriques selon que l'hypothèse est correcte ou non.

Le principe de distinguabilité retenu repose donc sur l'estimation du module carré du signal, sous chacune des hypothèses, suivie de la comparaison entre les innovations expérimentales et leurs valeurs théoriques. L'hypothèse retenue sera alors celle pour laquelle l'innovation expérimentale est la plus proche de sa valeur théorique.

1.3. Modélisation du signal modulé.

Selon de type de modélisation considéré, les systèmes obtenus seront soit bilinéaires, soit polynomiaux. Soit x_t le signal démodulé (après suppression de porteuse). Pour une modulation de phase, le modèle de x_t est bilinéaire du type suivant :

$$x_t = x_{t-1}w_t \quad (88)$$

où x_t représente l'état du système (complexe) et w_t est un bruit blanc décrivant l'incrément de phase entre deux échantillons.

Pour une modulation de fréquence, on obtient le modèle non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} z_t = z_{t-1}(1 - \Delta N_t) + w_t \Delta N_t \\ x_t = x_{t-1}z_{t-1} \end{cases} \quad (89)$$

où z_t désigne l'incrément de phase du signal, celui-ci ne pouvant plus, dans ce contexte, être considéré comme un bruit blanc. Le processus ΔN_t représente l'incrément d'un processus de comptage qui régit les sauts de phase alors que w_t est un bruit blanc de type gaussien.

Enfin, une modulation d'amplitude peut être modélisée selon :

$$\begin{cases} z_t = z_{t-1} \\ x_t = x_{t-1}(1 - \Delta N_t) + z_{t-1}w_t \Delta N_t \end{cases} \quad (90)$$

où z_t est un nombre complexe de module unitaire, initialement équidistribué sur le cercle de rayon unité et représentant le déphasage initial entre la porteuse et l'oscillateur de démodulation local, ΔN_t est le processus de comptage qui gouverne les sauts d'amplitudes et w_t est un bruit blanc de type gaussien.

1.4. Test d'hypothèse.

Comme nous l'avons souligné plus haut, le test de détection repose sur la construction du filtre du module carré du signal conditionné par chacune des hypothèses «nombre de signaux présents». Le filtre retenu est un filtre polynomial à horizon infini de dimension 2 et de degré 2. En effet, il est aisé de vérifier que dans le cas d'une multi-émission, la dynamique de la variable $\Psi_t = |s_t^i|^2$ est de dimension 2 car elle fait appel à la seule variable supplémentaire :

$$\Theta_t = \sum_{k=1}^i |x_t^k|^2 \quad (91)$$

On peut alors montrer que, les variables à estimer étant réelles, le prédicteur à un pas polynomial de Volterra du vecteur $[\Psi_t, \Theta_t]$ se réduit à la forme suivante [46] :

$$\begin{cases} p_t = A_t^i p_{t-1} + A_t^0 y_{t-1}^* \\ z_t = A_t^2 z_{t-1} + p_t y_t + p_t^* y_{t-1}^* \end{cases} \quad (92)$$

où y_t désigne le signal (complexe) d'observation (y_t^* son conjugué) et p_t l'état interne linéaire du filtre. A noter que les paramètres A_t^i sont également réels. Ceux-ci sont calculés récursivement,

le modèle de modulation étant dans ce cas bilinéaire. Ces paramètres étant calculés, on peut alors estimer les variances *a priori* des estimateurs, et en particulier les quantités $E[(|y_t|^2 - \widehat{\Psi}_{t|t-1}^i)^2]$, où $\widehat{\Psi}_{t|t-1}^i$ désigne le prédicteur à un pas du module carré du signal sous l'hypothèse i signaux présents.

Le test conduisant à la détermination du nombre de modulations prend son inspiration du cas linéaire gaussien. En effet, dans ce cas classique, on construit le prédicteur optimal du signal observé $\widehat{y}_{t|t-1}$ sous chacune des hypothèses H_i et on calcule alors la vraisemblance de chaque hypothèse selon :

$$L_t^i = \sum_{\tau=1}^t \frac{(y_\tau - \widehat{y}_{\tau|\tau-1}^i)^2}{E[(y_\tau - \widehat{y}_{\tau|\tau-1}^i)^2]} + \ln(E[(y_\tau - \widehat{y}_{\tau|\tau-1}^i)^2]) \quad (93)$$

La décision est alors prise en fonction des comparaisons entre vraisemblances suivant : si $L_t^i < L_t^j$, l'hypothèse H_i est choisie en place de H_j .

Le test que nous proposons est basé sur le processus d'innovation engendré par le module carré du signal. On impose à la variable de test définie par S_t la structure suivante :

$$S_t = \sum_{\tau=1}^t (|y_t|^2 - \widehat{\Psi}_{t|t-1}^i)^2 + \alpha_\tau (|y_t|^2 - \widehat{\Psi}_{t|t-1}^j)^2 + \beta_\tau \quad (94)$$

où α_τ et β_τ sont des paramètres destinés à normaliser le contraste entre les deux hypothèses i et j . On peut alors naturellement imposer :

$$\begin{aligned} E[S_t|H_i] &= t \\ E[S_t|H_j] &= -t \end{aligned} \quad (95)$$

afin que l'espérance de la différence entre la variable de test sous chacune des hypothèses croisse linéairement avec le nombre de données traitées, comme c'est le cas pour les systèmes linéaires gaussiens. La décision prend alors la forme suivante :

$$S_t < 0 \implies H_i \text{ et } S_t > 0 \implies H_j \quad (96)$$

La contrainte (95) permet de déterminer les valeurs des paramètres α et β :

$$\alpha_t = \frac{2 - J_t^{2,3} + J_t^{2,2}}{J_t^{3,3} - J_t^{3,2}} \quad (97)$$

$$\beta_t = 1 - J_t^{2,3} - \alpha_t J_t^{3,3} \quad (98)$$

où :

$$J_t^{i,j} = E[(|y_t|^2 - \widehat{\Psi}_{t|t-1}^i)^2 | H_j] \quad (99)$$

1.5. Applications en simulation.

Nous avons testé l'algorithme proposé plus haut dans les conditions suivantes :

- Rapport signal/bruit de +10dB.
- Fréquence moyenne de commutation de phase : 0.05.
- Puissance moyenne *a priori* du signal : 1.
- Variance de la puissance moyenne : 10.
- Hypothèses de 1, 2 et 3 signaux présents.

Pour la situation "un seul signal présent", le prédicteur à un pas est quadratique de dimension

1 (complexe) alors que pour "2 signaux présents" et "3 signaux présents", ce prédicteur est de dimension 2 (complexe).

1.5.1. Distingabilité entre 1 et 2 émissions.

Cette situation est la plus favorable puisque selon l'hypothèse prise, le signal à prédire est soit constant ($i = 1$), soit variable ($i = 2$). Sur la figure 13 apparaissent les trajectoires des signaux d'observations sous chacune des hypothèses.

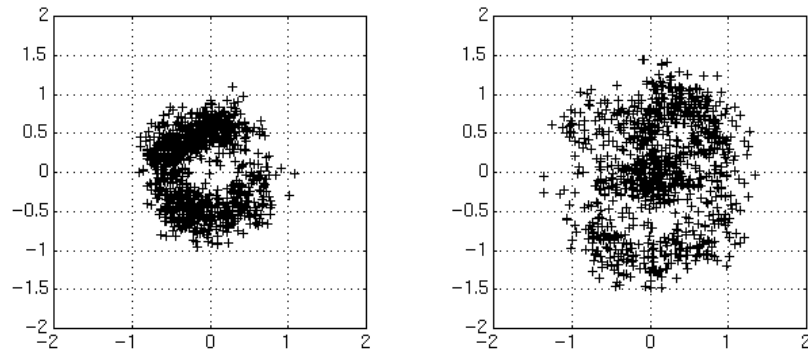


figure 13 : Trajectoires du signal d'observation avec 1 et 2 signaux présents

Sur la figure 14 ont été représentées les valeurs de la variable de test S_t dans les cas où 1 ou 2 signaux sont présents, avec, en pointillé, leurs valeurs moyennes théoriques. On voit très clairement que ce test permet de distinguer les hypothèses.

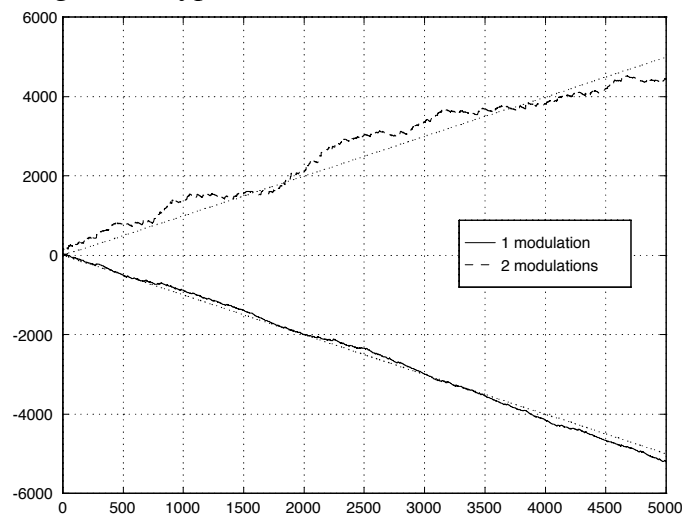


figure 14 : Détection entre 1 et 2 modulations

1.5.2. Distingabilité entre 2 et 3 émissions.

Le problème est déjà beaucoup plus délicat dans la mesure où, pour les deux situations testées, le module carré du signal varie au cours du temps. Cependant, comme l'illustre la figure 15, on constate que la distinction est néanmoins performante au prix de l'augmentation de l'horizon d'observation.

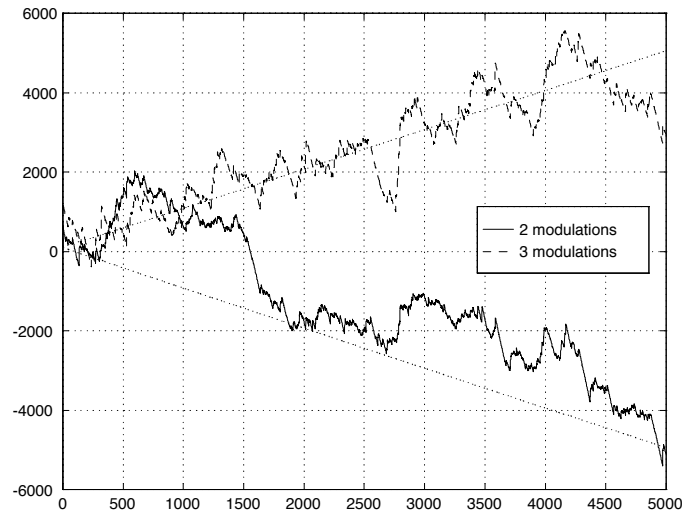


figure 15 : Détection entre 2 et 3 modulations

1.5.3. Extension à d'autres modulations.

Comme on l'a souligné plus haut, pour des modulations de phase, le modèle d'évolution dynamique du système est un modèle bilinéaire, particulièrement bien adapté à cette technique car, dans ce cas, les paramètres du filtre de Volterra sont calculables en dimension finie. Cependant, on a su étendre l'application de cette méthode de détection à d'autres modèles non linéaires (modulations d'amplitude et de phase) en utilisant un autre mode de calcul des paramètres du filtre. Celui-ci est basé sur des tirages de Monte-Carlo. En effet, ces paramètres sont calculés hors ligne et sont fonction de moments conjoints entre état du système et état du filtre. En simulant un grand nombre de tirage des bruits de dynamique et en calculant pour chacun de ces tirages les gains du filtre correspondant, on obtient une estimation des valeurs des paramètres [49].

2. Traitement optimal du signal LORAN-C.

2.1. Introduction.

Le travail qui est présenté ici a été réalisé dans le cadre de trois contrats DIGINEXT/DCN et a pour objet le traitement optimal du signal de radionavigation LORAN-C. Ce travail s'est déroulé en 4 phases :

- Modélisation et étude de faisabilité en simulation [47].
- Validation sur données réelles à quai (Brest) et préparation de la campagne Langevin d'enregistrement de données en mer [39].
- Validation sur données réelles en mer [42].
- Validation sur données réelles de la modélisation de l'antenne filaire immergée utilisée par les sous-marins [40].

L'exploitation du signal LORAN-C en radionavigation utilise des trains d'impulsions (à la fréquence 100 kHz) envoyés par un ensemble de stations terrestres organisées en chaînes. La position de ces stations étant parfaitement connue et les impulsions datées à quelques nano-secondes près par rapport au temps UTC, le système classique permet, à partir de la mesure des temps de propagation émetteur/récepteur, d'estimer la position du récepteur selon deux modes :

- Circulaire : le récepteur dispose d'une horloge très précise (de type Césium). On peut alors estimer directement la distance station/récepteur et seules deux stations sont nécessaires pour réaliser le positionnement. Les lignes de position sont des cercles centrés sur les positions des stations.
- Hyperbolique : on mesure les écarts entre temps d'arrivée des signaux issus de deux stations. On peut alors construire une ligne de position (hyperbole) pour chaque couple de stations. A l'aide de trois stations, on peut construire deux lignes de position. Leur intersection se situe à la position estimée du récepteur.

Ce système a été initialement conçu en 1958 pour une exploitation à faible distance (inférieure à 1500 km) où les rapports signal/bruit sont supérieurs à -20dB . L'objet de cette étude est d'évaluer la limite de portée de ce système de navigation par estimation non-linéaire.

L'approche que nous avons adoptée nous a amené à reprendre le problème sous une approche globale qui suppose :

- La modélisation de l'ensemble porteur/récepteur. En effet, pour repousser les limites du système, il est nécessaire d'intégrer le signal reçu pendant plusieurs minutes. L'utilisation des mesures de cap et vitesse permet de compenser partiellement le mouvement du porteur.
- Une modélisation fine du signal reçu. Un des principaux obstacles à l'extension de la portée du système réside dans la présence d'une onde de ciel, réplique de l'onde de sol mais retardée de quelques dizaines de microsecondes (correspondant à quelques dizaines de kilomètres). Au-delà de 2000 km, cette onde de ciel peut avoir une puissance supérieure de 20dB par rapport à l'onde de sol et les systèmes classiques risquent "d'accrocher" sur celle-ci et donc de fournir une distance erronée. A noter que le décalage entre ondes de sol et de ciel est largement trop fluctuant avec les conditions atmosphériques pour interdire toute exploitation efficace de l'onde de ciel pour le positionnement.
- Une vision globale du problème. A la différence des systèmes classiques qui exploitent séparément les estimations de distance station/récepteur ou les lignes de position obtenues

par l'utilisation d'un couple de stations, notre approche exploite globalement les signaux issus de toutes les stations se trouvant à distance raisonnable ce qui permet d'utiliser, le cas échéant, une certaine redondance qui fournit l'estimateur optimal dans une configuration donnée. Notons que cette redondance ne peut pas être utilisée de manière rationnelle par le système qui utilise des lignes de position.

Cette application nous a permis de valider l'approche du filtrage particulière, dans un contexte réaliste puisque appliqué à des données réelles.

2.2. Modélisation.

2.2.1. Modèle du porteur.

Dans l'utilisation opérationnelle de ce système de radionavigation, la position du porteur est connue à quelques dizaines de kilomètres près. Aussi, la position absolue du porteur est définie dans un repère cartésien centré sur un point fixe (sous forme de latitude et longitude) et situé à une distance raisonnable de la position réelle, fonction de l'incertitude initiale. Le modèle d'évolution dynamique retenu est le suivant :

$$\begin{cases} x_{t+\Delta t} = x_t + (V_t + \delta V_t) \sin(K_t + \delta K_t) \Delta t \\ y_{t+\Delta t} = y_t + (V_t + \delta V_t) \cos(K_t + \delta K_t) \Delta t \end{cases} \quad (100)$$

où x_t et y_t désignent les coordonnées cartésiennes du porteur, V_t et K_t les vitesses et caps mesurés, δV_t et δK_t les erreurs de mesures de cap et vitesse, supposées ici de type bruits blancs gaussiens. Les erreurs de capteurs étant relativement faibles vis à vis des horizons d'observation, ce modèle peut être linéarisé sans préjudice pour l'estimation sous la forme :

$$\begin{cases} x_{t+\Delta t} = x_t + V_t \sin(K_t) \Delta t + \sin(K_t) \delta V_t + V_t \cos(K_t) \delta K_t \\ y_{t+\Delta t} = y_t + V_t \cos(K_t) \Delta t + \cos(K_t) \delta V_t - V_t \sin(K_t) \delta K_t \end{cases} \quad (101)$$

2.2.2. Modèle du signal d'observation.

Le signal reçu est celui émis par la station considérée, retardé du temps de propagation et atténué en fonction de la distance. A ce signal, il faut ajouter l'onde de ciel. Celle-ci pourrait être modélisée comme superposition de répliques de l'onde directe d'amplitudes inconnues et dont les retards par rapport à l'onde de sol sont inconnus. Une telle modélisation fait apparaître un nombre prohibitif de variables d'état pour être utilisable en pratique. Rappelons que l'objectif poursuivi ici est de rejeter cette onde perturbatrice et non de l'estimer précisément, celle-ci n'étant pas fiable pour réaliser le positionnement comme il a été souligné plus haut. On a donc pris le parti de modéliser cette onde de ciel comme la somme de répliques de l'onde de sol dont les retards sont uniformément répartis sur un intervalle fixé par les conditions de réception (nature du jour, distance,...) et dont seules les amplitudes sont inconnues. Si le nombre de variables introduites peut sembler important, il faut noter que ces nouvelles inconnues interviennent linéairement dans l'équation d'observation, ce qui les rend estimables de manière plus aisée. On obtient alors le modèle d'observation suivant :

$$z_t = \sum_{k=1}^{N_s} \left(a_t^k s_k(t - r(D_t^k)) + \sum_{l=1}^M A_t^{k,l} s_k(t - r(D_t^k) - \tau^{k,l}) \right) + v_t \quad (102)$$

avec :

- N_s : nombre de stations traitées
- t : temps universel (UTC)

- s_k : onde LORAN-C datée à l'émission
- a_t^k : amplitude de l'onde de sol issue de la station
- D_t^k : distance géodésique entre position du récepteur et station
- $r(\bullet)$: temps de propagation en fonction de la distance (modèle de Salt)
- M : nombre d'intervalles d'arrivée de l'onde de ciel
- $\tau^{k,l}$: retards (fixes) d'arrivée de l'onde de ciel par rapport à l'onde de sol
- $A_t^{k,l}$: amplitudes de l'onde de ciel
- v_t : bruit blanc additif

Dans ce modèle, les amplitudes a_t^k de l'onde de sol et les amplitudes $A_t^{k,l}$ des ondes de ciel sont inconnues. Cependant, il existe des modèles d'atténuation de l'amplitude [1] qui se sont avérés très fiables en pratique et dont l'exploitation permet de prédire à $\pm 3\text{dB}$ près l'amplitude du signal reçu. La forme d'onde du signal émis s_k est représenté figure 16 et a pour expression :

$$s(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^2 e^{-2\frac{(t-t_0)}{t_0}} \sin(2\pi f_0 t) \quad (103)$$

où $f_0 = 100 \text{ kHz}$ et $t_0 = 65 \mu\text{s}$.

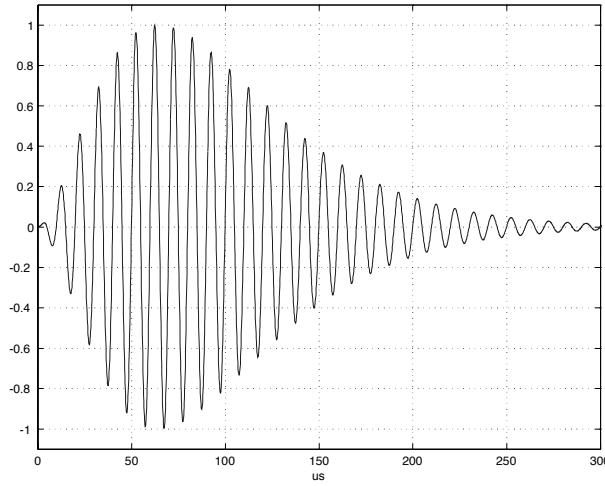


figure 16 : Forme d'onde LORAN-C

2.3. Algorithme d'estimation.

Les variables dynamiques inconnues du problème sont :

- x_t et y_t , position du porteur en coordonnées cartésiennes
- a_t^k , amplitudes de l'onde de sol
- $A_t^{k,l}$, amplitudes de l'onde de ciel

Notons X_t le vecteur d'état correspondant. Le modèle constitué de (101) et (102) peut se résumer sous la forme suivante :

$$X_{t+1} = f(X_t) + g(X_t)w_t \quad (104)$$

$$Z_t = h(X_t) + v_t \quad (105)$$

Il apparaît clairement que les variables d'amplitude (onde de ciel et onde de sol) possèdent un modèle linéaire conditionnellement à toutes les autres variables. De plus, la fonction d'observation est continûment dérivable par rapport aux variables x_t et y_t . Cette propriété, mariée au fait que les bruits de dynamiques (erreurs de mesure des capteurs de cap et vitesse) sont de faible puissance, fait que le filtre de Kalman étendu peut être utilisé dans de bonnes conditions en poursuite, c'est à dire quand l'écart type d'estimation est faible vis à vis de la longueur d'onde du signal (3000 m). En d'autres termes, si l'écart type de position est inférieur au quart d'une longueur d'onde (750 m), le filtre de Kalman étendu est stable autour de la bonne position. Tout le problème réside alors dans l'acquisition de la position quand l'incertitude initiale est de l'ordre de 10 km, valeur type utilisée par les marins. En effet, la pseudo-périodicité de l'onde rend la densité de probabilité *a posteriori* multi-modale.

La représentation de la densité de probabilité conditionnelle aux observations que nous avons retenue est une approximation sous forme de somme de gaussiennes pondérées [2] :

$$p(X_t|Z_0^t) \cong \sum_{i=1}^N \rho_t^i G(X_t; \hat{X}_{t|t}^i, P_{t|t}^i) \quad (106)$$

où $G(x; \bar{x}, P)$ est la distribution gaussienne en la variable x de moyenne \bar{x} et de matrice de covariance P . A noter que ceci est équivalent à considérer que la densité de probabilité *a posteriori* est localement gaussienne. Par conséquent, on considérant l'approximation linéaire locale du modèle d'observation (le modèle dynamique tangent est ici supposé linéaire gaussien), la structure de cette densité sous forme de somme de gaussiennes est conservée dans le temps. On construit donc, pour chaque particule i , le filtre de Kalman étendu basé sur cette linéarisation.

- Prédiction :

$$p(X_{t+1}|Z_0^t) = \int_{\mathbb{R}^n} p(X_{t+1}|X_t)p(X_t|Z_0^t)dX_t \quad (107)$$

$$= \sum_{i=1}^N \rho_t^i \int_{\mathbb{R}^n} p(X_{t+1}|X_t)G(X_t; \hat{X}_{t|t}^i, P_{t|t}^i)dX_t \quad (108)$$

$$\cong \sum_{i=1}^N \rho_t^i G(X_{t+1}; \hat{X}_{t+1|t}^i, P_{t+1|t}^i) \quad (109)$$

avec :

$$\hat{X}_{t+1|t}^i = f(\hat{X}_{t|t}^i, 0) \quad (110)$$

$$P_{t+1|t}^i = F_t^i P_{t|t}^i (F_t^i)^T + g(\hat{X}_{t|t}^i)Qg(\hat{X}_{t|t}^i)^T \quad (111)$$

où $F_t^i = \frac{\partial f(X)}{\partial X}|_{\hat{X}_{t|t}^i}$ et $Q = E[w_t w_t^T]$.

- Correction :

$$p(X_{t+1}|Z_0^{t+1}) = \frac{p(Z_{t+1}|X_{t+1})p(X_{t+1}|Z_0^t)}{p(Z_{t+1}|Z_0^t)} \quad (112)$$

$$= \alpha_t \sum_{i=1}^N \rho_t^i G(X_{t+1}; \hat{X}_{t+1|t}^i, P_{t+1|t}^i) G(Z_{t+1}; h(X_{t+1}), R) \quad (113)$$

$$\cong \sum_{i=1}^N \rho_{t+1}^i G(X_{t+1}; \hat{X}_{t+1|t+1}^i, P_{t+1|t+1}^i) \quad (114)$$

avec :

$$\hat{X}_{t+1|t+1}^i = \hat{X}_{t+1|t}^i - K_t^i (Z_t - h(\hat{X}_{t+1|t}^i)) \quad (115)$$

$$P_{t+1|t+1}^i = P_{t+1|t}^i - K_t^i H_t^i P_{t+1|t}^i \quad (116)$$

où $H_t^i = \frac{\partial h(X)}{\partial X} \Big|_{\hat{X}_{t+1|t}^i}$ et $R = E[v_t v_t^T]$. Le gain de Kalman est calculé selon :

$$K_t^i = P_{t+1|t}^i (H_t^i)^T (H_t^i P_{t+1|t}^i (H_t^i)^T + R) \quad (117)$$

Les poids des particules sont actualisés par :

$$\rho_{t+1}^i = \frac{\rho_t^i G(Z_{t+1}; h(\hat{X}_{t+1|t}^i), H_t^i P_{t+1|t}^i (H_t^i)^T + R)}{\sum_{i=1}^N \rho_t^i G(Z_{t+1}; h(\hat{X}_{t+1|t}^i), H_t^i P_{t+1|t}^i (H_t^i)^T + R)} \quad (118)$$

Par ailleurs, la fiabilité du modèle de l'amplitude *a priori* nous a permis d'exploiter les résultats concernant les filtres linéaires bornés exposés en 4. Cette utilisation s'est en particulier avérée fondamentale afin de discriminer l'onde de ciel de l'onde de sol en rejetant l'hypothèse d'une onde de sol de valeur nulle. En d'autres termes, on peut rejeter l'onde de ciel sans "accrocher" celle-ci parce qu'on recherche une onde de sol non nulle qui arrive avant l'onde de ciel. Ceci se traduit par une modification du calcul des poids ρ_t^i de la manière suivante :

$$\rho_t^i \longrightarrow \frac{\rho_t^i \prod_{k=1}^{N_s} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{a_M^k - \hat{a}_t^{k,i}}{\sqrt{p_t^{k,i}}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{a_m^k - \hat{a}_t^{k,i}}{\sqrt{p_t^{k,i}}} \right) \right)}{\sum_{i=1}^N \rho_t^i \prod_{k=1}^{N_s} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{a_M^k - \hat{a}_t^{k,i}}{\sqrt{p_t^{k,i}}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{a_m^k - \hat{a}_t^{k,i}}{\sqrt{p_t^{k,i}}} \right) \right)} \quad (119)$$

où $\hat{a}_t^{k,i}$ est l'estimateur de Kalman de l'amplitude de l'onde directe de la station k pour la particule i et où l'intervalle d'appartenance de cette variable est défini par $[a_m^k, a_M^k]$.

A l'instant initial, les poids ρ_t^i sont fixés à $1/N$ et les moyennes des gaussiennes $\hat{X}_{t|t}^i$ réparties sur le disque d'incertitude. Cette répartition peut être uniforme ou bien dictée par l'analyse des sensibilités directionnelles évoquées précédemment. Le choix du critère de distance entre la densité uniforme sur le disque et l'approximation de la densité obtenue par (106) donne les valeurs des matrices de covariance P_t^i [58]. Les amplitudes d'onde de sol sont initialisées à leurs valeurs nominales alors que les amplitudes de l'onde de ciel sont fixées à zéro, leurs phases (signes) étant *a priori* inconnues. Les variances *a priori* des amplitudes de l'onde de sol sont fixées en fonction de la capacité de prédiction des amplitudes obtenue par le modèle de propagation dans [1] qui s'élève ici à environ $\pm 3\text{dB}$.

2.4. Résultats sur données réelles.

2.4.1. Contexte des enregistrements.

Les enregistrements utilisés pour la validation de cet algorithme ont été réalisés à bord du navire civil Langevin (printemps 1997). On dispose des données de cap et vitesse ainsi que d'une trajectoire de référence fournie par un récepteur GPS. Ces enregistrements sont datés à quelques nano-secondes près. Les positions et caps du porteur sont illustrés figure 17.

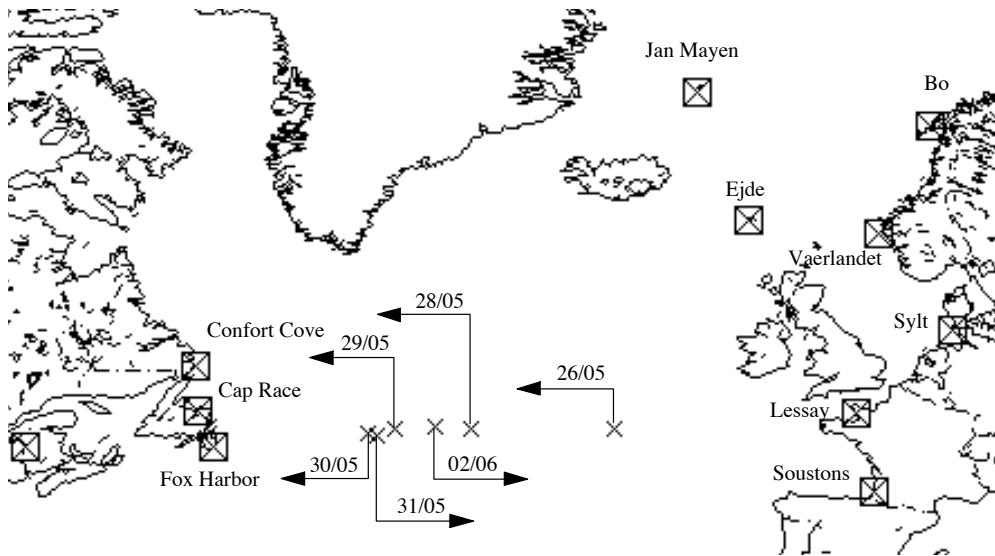


figure 17 : Positions et caps au cours de la campagne de mesures

2.4.2. Paramètres de l'algorithme.

- L'incertitude initiale est fixée à 12 km. La recherche de la position du porteur se fait donc à l'intérieur d'un disque ayant ce rayon.
- Le nombre N de particules est fixé tel que pour une distribution uniforme sur ce disque, la distance entre particules n'excède pas un quart de longueur d'onde (750 m). La valeur de N qui satisfait cette contrainte est 800.
- La durée utile de l'impulsion est fixée à 35 μs .
- L'incertitude initiale sur l'amplitude de l'onde de sol est fixée à $\pm 3\text{dB}$.
- Les variations d'amplitudes des ondes de ciel et de sol sont fixées à 1% de leurs valeurs nominales toutes les 5 s.
- Pour des stations se trouvant à plus de 2500 km, l'instant d'arrivée de l'onde de ciel est fixé à 20 μs . L'intervalle de recherche de l'onde de ciel est de 30 μs . L'espacement entre ondes de ciel d'amplitudes inconnues est fixé à 2,5 μs ce qui donne lieu à 13 amplitudes estimées. La puissance *a priori* de l'onde de ciel est répartie uniformément sur cet intervalle ce qui correspond à une variance sur l'amplitude pour chaque onde de ciel recherchée égale à cette puissance divisée par 13.
- Le signal périodique est préalablement sommé sur un intervalle de 5 s. Pendant cet intervalle, le porteur ne s'est pas déplacé de manière significative pour altérer la forme d'onde obtenue par sommation par rapport à l'onde théorique de référence.

2.4.3. Résultats.

L'utilisation d'une représentation de la densité *a posteriori* comme somme de mesures gaussiennes pondérées ne nécessite pas obligatoirement ici l'utilisation de redistributions. En effet, chaque filtre de Kalman étendu est stable autour du mode sur lequel il accroche et l'exploration de l'espace d'état est garantie par la présence des termes de dérive sur l'amplitude de l'onde de sol et sur la position, à travers les erreurs de capteurs. Nous avons donc testé deux types d'algorithmes : le premier n'utilise pas de redistribution, le second utilise la procédure de redistribution dite fractionnaire.

Les erreurs d'estimation obtenues ainsi que les temps de convergence sont consignés dans les tableaux 1 et 2. Les rapports signal/bruit varient pour ces données entre -30dB et -40dB . On peut noter dans ces tableaux que les erreurs en latitude sont en général plus grandes que celles en longitude. Ceci est dû à la configuration géométrique particulière de l'ensemble porteur/stations.

Enreg.	Stations	Distances	Latitude	Longitude	Position	Conv.
28/05	Less. -Ejde	2300 km - 2260 km	$-369\text{ m} \pm 11\text{ m}$	$226\text{ m} \pm 8\text{ m}$	432 m	25 s
28/05	Less.-Soust.	2300 km - 2470 km	$249\text{ m} \pm 257\text{ m}$	$-67\text{ m} \pm 11\text{ m}$	258 m	560 s
28/05	Less.-Ejde-Soust.	2300 km - 2260 km - 2470 km	$-318\text{ m} \pm 11\text{ m}$	$46\text{ m} \pm 7\text{ m}$	321 m	5 s
29/05	Less. -Ejde	2740 km - 2540 km	$125\text{ m} \pm 15\text{ m}$	$49\text{ m} \pm 11\text{ m}$	134 m	85 s
29/05	Less.-Soust.	2740 km - 2925 km	$-254\text{ m} \pm 69\text{ m}$	$184\text{ m} \pm 20\text{ m}$	313 m	260 s
29/05	Less.-Ejde-Soust.	2740 km - 2540 km - 2925 km	$77\text{ m} \pm 14\text{ m}$	$103\text{ m} \pm 10\text{ m}$	128 m	40 s
30/05	Less. -Ejde	2850 km - 2645 km	$-118\text{ m} \pm 19\text{ m}$	$-53\text{ m} \pm 19\text{ m}$	129 m	240 s
30/05	Less.-Soust.	2850 km - 3035 km	$-781\text{ m} \pm 901\text{ m}$	$172\text{ m} \pm 276\text{ m}$	800 m	Non
30/05	Less.-Ejde-Soust.	2850 km - 2645 km - 3035 km	$-101\text{ m} \pm 18\text{ m}$	$-69\text{ m} \pm 18\text{ m}$	122 m	45 s
31/05	Less. -Ejde	2890 km - 2650 km	$-232\text{ m} \pm 75\text{ m}$	$-77\text{ m} \pm 76\text{ m}$	244 m	510 s
31/05	Less.-Soust.	2890 km - 3075 km	$-415\text{ m} \pm 556\text{ m}$	$8\text{ m} \pm 174\text{ m}$	415 m	Non
31/05	Less.-Ejde-Soust.	2890 km - 2650 km - 3075 km	$-238\text{ m} \pm 19\text{ m}$	$-76\text{ m} \pm 22\text{ m}$	250 m	105 s
02/06	Less. -Ejde	2490 km - 2360 km	$-129\text{ m} \pm 62\text{ m}$	$89\text{ m} \pm 9\text{ m}$	157 m	50 s
02/06	Less.-Soust.	2490 km - 2675 km	$45\text{ m} \pm 255\text{ m}$	$36\text{ m} \pm 73\text{ m}$	58 m	170 s
02/06	Less.-Ejde-Soust.	2490 km - 2360 km - 2675 km	$-122\text{ m} \pm 34\text{ m}$	$91\text{ m} \pm 19\text{ m}$	152 m	30 s

tableau 1 : Algorithme sans redistribution

Enreg.	Stations	Distances	Latitude	Longitude	Position	Conv.
28/05	Less. -Ejde	2300 km - 2260 km	$-300\text{ m} \pm 9\text{ m}$	$89\text{ m} \pm 7\text{ m}$	313 m	35 s
28/05	Less.-Soust.	2300 km - 2470 km	$367\text{ m} \pm 48\text{ m}$	$-54\text{ m} \pm 11\text{ m}$	371 m	45 s
28/05	Less.-Ejde-Soust.	2300 km - 2260 km - 2470 km	$-275\text{ m} \pm 8\text{ m}$	$57\text{ m} \pm 6\text{ m}$	281 m	5 s
29/05	Less. -Ejde	2740 km - 2540 km	$-3578\text{ m} \pm 19\text{ m}$	$4474\text{ m} \pm 10\text{ m}$	5728 m	Div
29/05	Less.-Soust.	2740 km - 2925 km	$760\text{ m} \pm 12\text{ m}$	$95\text{ m} \pm 6\text{ m}$	766 m	410 s
29/05	Less.-Ejde-Soust.	2740 km - 2540 km - 2925 km	$-47\text{ m} \pm 10\text{ m}$	$219\text{ m} \pm 7\text{ m}$	55 m	35 s
30/05	Less. -Ejde	2850 km - 2645 km	$-130\text{ m} \pm 14\text{ m}$	$-216\text{ m} \pm 8\text{ m}$	252 m	225 s
30/05	Less.-Soust.	2850 km - 3035 km	$-647\text{ m} \pm 114\text{ m}$	$83\text{ m} \pm 21\text{ m}$	652 m	200 s
30/05	Less.-Ejde-Soust.	2850 km - 2645 km - 3035 km	$-84\text{ m} \pm 11\text{ m}$	$-86\text{ m} \pm 9\text{ m}$	120 m	35 s
31/05	Less. -Ejde	2890 km - 2650 km	$-112\text{ m} \pm 23\text{ m}$	$-174\text{ m} \pm 20\text{ m}$	207 m	70 s
31/05	Less.-Soust.	2890 km - 3075 km	$-1343\text{ m} \pm 278\text{ m}$	$209\text{ m} \pm 90\text{ m}$	1359 m	65 s
31/05	Less.-Ejde-Soust.	2890 km - 2650 km - 3075 km	$-185\text{ m} \pm 12\text{ m}$	$-67\text{ m} \pm 15\text{ m}$	197 m	70 s
02/06	Less. -Ejde	2490 km - 2360 km	$-227\text{ m} \pm 14\text{ m}$	$148\text{ m} \pm 13\text{ m}$	271 m	35 s
02/06	Less.-Soust.	2490 km - 2675 km	$-155\text{ m} \pm 70\text{ m}$	$120\text{ m} \pm 21\text{ m}$	196 m	110 s
02/06	Less.-Ejde-Soust.	2490 km - 2360 km - 2675 km	$-217\text{ m} \pm 9\text{ m}$	$132\text{ m} \pm 12\text{ m}$	254 m	25 s

tableau 2 : Algorithme avec redistributions

Les erreurs totales d'estimation (distance entre point estimé et référence GPS) des deux algorithmes sont représentées sur la figure 18, les temps de convergence sur la figure 19. On constate ici que les erreurs des deux algorithmes sont comparables, avec un léger avantage pour l'algorithme qui n'utilise pas de redistributions. Les erreurs sont la plupart du temps en dessous de 300 m, valeur classiquement admise comme précision attendue du système LORAN-C pour des distances inférieures à 2000 km. On peut de plus noter que la précision est améliorée et les temps de convergence réduits par utilisation de plus de deux stations.

Cet algorithme est actuellement en phase de validation. Il est implanté sur une maquette réalisée par la société DIGINEXT, embarquée sur un sous-marin de la Marine Nationale.

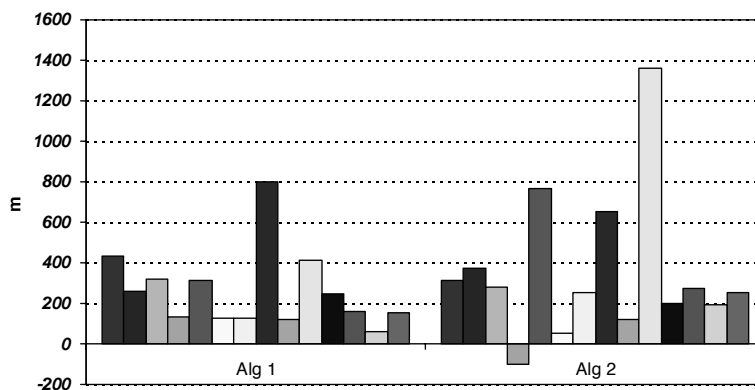


figure 18 : Erreurs d'estimation en distance par rapport au GPS

2.5. Exploitation sur antenne immergée.

Le système de radionavigation LORAN-C est exploité par les sous-marins selon deux modes de fonctionnement :

- Exploitation sur antenne dite multi-fonctions : quand le sous-marin est en surface, il utilise une antenne aérienne de type fouet pour la réception du signal. Le courant induit dans cette antenne est de même forme que le courant émis et le signal de référence attendu en réception est donné par (103).

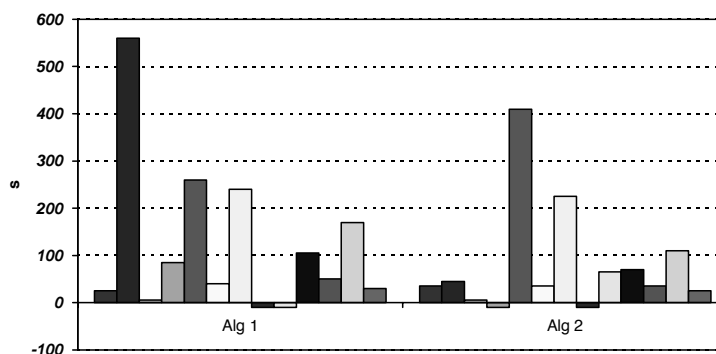


figure 19 : Temps de convergence

- Exploitation sur antenne dite filaire : quand le sous-marin est en immersion, il traîne derrière lui une antenne de plusieurs centaines de mètres affleurant la surface de l'eau. Cette antenne est constituée d'un fil conducteur entouré d'un isolant relié d'un côté au récepteur et à son autre extrémité à une charge basse impédance. La présence de l'eau, partiellement conductrice, autour de l'isolant constitue une ligne électrique. Le courant induit dans l'antenne relève de la théorie des ondes latérales [31] et ne peut plus du tout être assimilé au courant de référence (103). En particulier, il y a inversion de phase quand l'onde passe de l'avant à l'arrière du sous-marin. C'est d'ailleurs la seule propriété qui est actuellement exploitée par les récepteurs.

Afin d'améliorer la précision du système en utilisation sur antenne filaire, nous avons proposé une modélisation fine du phénomène d'ondes latérales, largement inspirée de [31] et adaptée à cette situation [41]. La structure physique de cette antenne est représentée en vue de dessus figure 20.

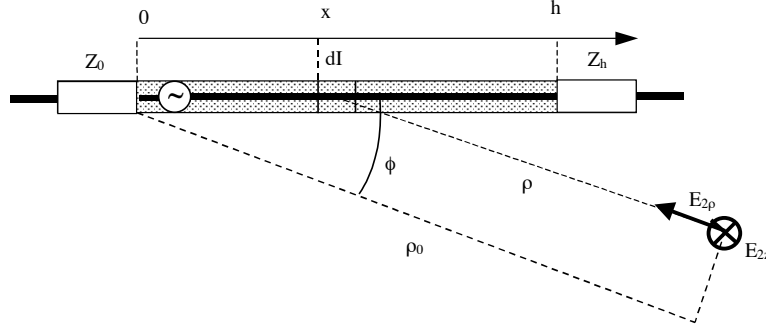


figure 20 : Champ rayonné

Dans cette modélisation, on montre que le champ induit dans la charge Z_0 est le résultat de l'intégration de courants élémentaires dI qui se propagent le long de l'antenne avec un nombre d'onde complexe k_L qui dépend des caractéristiques électriques et géométriques de l'antenne. Le modèle paramétrique de la fonction de transfert entre courant émis et courant reçu que nous avons obtenu est le suivant :

$$H(\omega, \phi) = -\frac{\sqrt{\omega} e^{-j\pi/4} \cos(\phi)}{(k_L^2 - k_2^2 \cos^2(\phi)) \cos(k_L h)} (k_2 \cos(\phi) (\cos(k_L h) - e^{jk_2 \cos(\phi) h}) + j k_L \sin(k_L h)) \quad (120)$$

où ϕ est l'angle d'incidence entre l'onde et l'axe de l'antenne, k_2 est le nombre d'onde de l'air ($k_2 = \omega/c$) et k_L est le nombre d'onde de l'antenne défini par :

$$k_L = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_d} \sqrt{1 + \frac{1}{\ln(\frac{b}{a})} \left(\frac{1}{a \sqrt{\omega \mu_0 \sigma_c}} + \ln\left(\frac{2}{k_1 b}\right) + \ln\left(\frac{1}{k_1 d}\right) - 2\nu - j \left(\frac{1}{a \sqrt{\omega \mu_0 \sigma_c}} + \pi \right) \right)} \quad (121)$$

où :

- b est le rayon de l'isolant
- a est le rayon du fil conducteur
- ε_d est la permittivité de l'isolant
- σ_c est la conductivité du fil conducteur
- k_1 est le nombre d'onde de l'eau de mer
- ν est une constante

Nous avons retenu comme paramétrisation l'approximation linéaire locale (au voisinage de 100 kHz) de k_L sous la forme $k_L = (n_L - j\alpha_L)k_2$, ceci afin de minimiser le nombre de paramètres à identifier. Ces deux paramètres ont été identifiés sur données réelles issue de la campagne Langevin en utilisant des signaux à fort rapport signal/bruit (stations situées à moins de 1000 km). On a représenté figure 21 les déformations induites par l'antenne filaire pour des incidences extrêmes de 0° et de 180° , ceci pour une longueur de 780 m. Il apparaît clairement que ces déformations sont loin d'être négligeables et que la prise en compte de ce modèle est indispensable à l'exploitation de cette antenne si on souhaite l'utiliser pour des angles d'incidence variables. On a d'ailleurs pu valider sur données réelles l'exploitation de cette antenne pour des distances station/porteur allant jusqu'à 2500 km et pour des incidences allant jusqu'à 50° , valeurs largement supérieures aux valeurs classiquement utilisées par les marins (l'incidence maximale utilisée est de $\pm 5^\circ$).

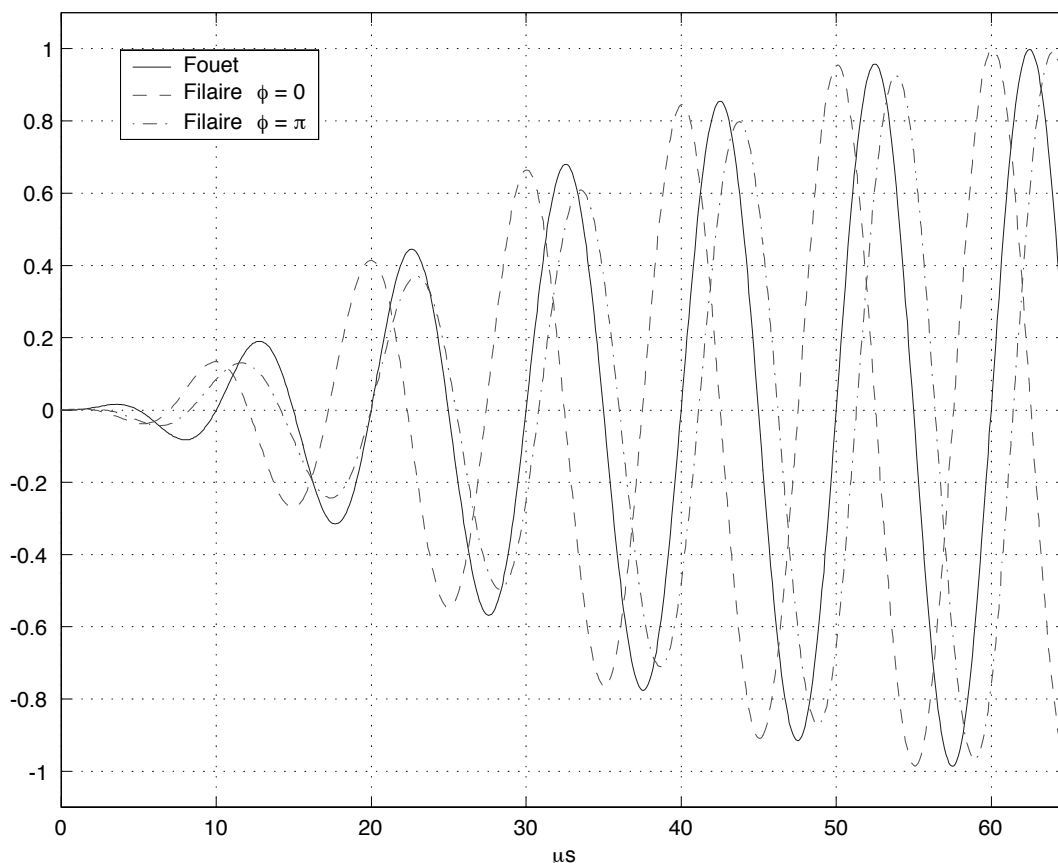


figure 21 : Forme d'onde antenne filaire

2.6. Conclusion.

Cette étude de longue haleine nous a permis de nous confronter à une situation concrète pour laquelle aucun élément ne pouvait être négligé. Elle nous a donné l'occasion de démontrer la pertinence de l'application de la théorie du filtrage non-linéaire à un tel système grâce à la validation sur données réelles. Elle a permis en outre à la société DIGINEXT de développer un récepteur purement numérique de nouvelle génération capable de supplanter largement les récepteurs de la génération précédente, autant en termes de limite de portée (augmentée d'environ 1000 km) qu'en exploitation sur antenne immergée (angles d'incidences d'exploitation augmentée de plusieurs

dizaines de degré). Ainsi, on a pu démontrer que le système LORAN-C permet la radionavigation avec une précision d'environ 300 m pour une traversée de l'Atlantique Nord.

Chapitre 3 : Prospective.

1. Développements fondamentaux.

Plusieurs domaines abordés méritent à mon sens un certain nombre de développements et extensions d'un point de vue théorique.

1.1. Identification de systèmes bilinéaires.

Plusieurs algorithmes sont proposés dans la littérature pour résoudre le problème d'identification des systèmes dynamiques dans la classe des systèmes linéaires. A noter en particulier les algorithmes originaux que nous avons développés qui réalise l'identification en treillis par un calcul héréditaire (à mémoire augmentante avec la taille des données). Quand on est face à un système non linéaire, le problème d'identification est plus délicat. En effet, il faut d'une part définir la classe de systèmes ad-hoc correctement paramétrées pour ensuite construire l'algorithme de recherche des paramètres optimaux.

Notre double expérience dans le filtrage de Volterra et dans l'identification des systèmes linéaires pourra être mise à profit pour résoudre le problème de l'identification des systèmes analytiques (non-linéarités « douces »). Plusieurs orientations sont envisageables pour aborder ce problème :

- Modèles non linéaires à mémoire finie. Dans cette approche, on considère des fonctions polynomiales à horizon fini de l'entrée du système comme classe de système non linéaire. L'application directe de l'algorithme d'identification en treillis déjà développé doit permettre de donner sans difficulté les coefficients optimaux.
- Utiliser comme classe de systèmes non linéaires, la classe des systèmes bilinéaires dont la sortie peut s'exprimer comme une fonctionnelle de Volterra de degré fini mais à horizon infini, de type polynomial. Il s'agira, ensuite, d'adapter l'algorithme d'identification héréditaire à cette classe de systèmes. Cela suppose avoir défini en préalable la forme canonique des systèmes bilinéaires adéquate.
- Transposer la procédure d'orthogonalisation qui donne lieu à la structure en treillis à ce contexte des systèmes bilinéaires.

1.2. Filtrage à maximum de vraisemblance des systèmes échantillonnés à bruit ponctuel.

Ce problème, dual de celui de la commande optimale des systèmes à commande impulsionnelle, mérite d'être investigué sur la base de résultats connus en temps continu [55]. L'échantillonnage d'un système dynamique à bruits impulsionnels fait apparaître des vraisemblances (des coûts) non convexes, ce qui rend inapplicable la théorie du principe du maximum de Pontryagin à temps discret. Le problème posé par la discontinuité des trajectoires induites en temps continu par la présence d'entrées impulsionnelles est résolu par introduction d'une variable duale supplémentaire qui régularise l'évolution du système à l'occurrence d'un saut. L'idée est de transposer cette technique aux systèmes à temps discret. Les applications d'une telle théorie sont nombreuses en filtrage comme en commande optimale (détection de manoeuvres).

2. Application - Valorisation.

Les résultats très positifs sur le traitement optimal du signal LORAN-C ont encouragé les

industriels à développer ce type d'algorithme pour une utilisation plus générale dans le domaine de la défense. En particulier, il est convenu dès à présent de traiter le problème de réception sur antenne filaire (sous-marins) en collaboration avec DCN/Ing. L'introduction de ce composant dans la chaîne de réception suppose de faire un effort de modélisation/identification du comportement de cette antenne dont les principes reposent sur le principe des ondes latérales de surface. Une campagne de mesure sur antenne filaire est d'ores et déjà en cours. Une maquette de traitement du signal LORAN-C a été réalisée sur la base des résultats présentés plus haut et est actuellement embarquée à bord d'un sous-marin de la DCN.

L'application de notre algorithme d'identification a déjà fait ses preuves dans le domaine de la prédiction du mouvement de plate-forme de navire. En effet, l'industrialisation du logiciel a été réalisée par la société DIGINEXT pour le compte de la société MATRA-Défense. Une autre application est en cours en collaboration avec la société THALES (ex SEXTANT-Avionique). Il s'agit d'identifier le phénomène dynamique de dérive de gyrolaser en fonction de la température à fin de compensation en ligne des erreurs. La compensation statique non linéaire (sous forme de polynômes) réalisée actuellement ne satisfait pas l'industriel ce qui l'a conduit à envisager une compensation dynamique basée sur l'identification entrée/sortie du système températures/dérive. Les premiers résultats que nous avons obtenus par identification d'un système dynamique multi-entrées linéaire ne semblent pas assurer la précision suffisante attendue. Aussi, il nous paraît nécessaire de développer, pour cette application, l'identification de systèmes bilinéaires (à sortie polynomiale) afin de marier les aspects non linéaires déjà exploités dans le modèle statique avec les aspects dynamiques naturellement présents dans des systèmes soumis à la propagation de la chaleur.

Enfin, nous pensons que ces différentes techniques de traitement du signal peuvent avoir un réel intérêt dans le domaine des télécommunications, particulièrement dans les problèmes d'adaptation de canal et d'immunisation aux perturbations de type non gaussien (multi-trajets, perturbations non stationnaires, saturations à l'émission...).

Références.

- [1] “Groundwave Propagation Curves”. *CCIR Rec. 368-5*, vol. 5, 1986.
- [2] D. L. Alspach et H. W. Sorenson. “Nonlinear Bayesian Estimation Using Gaussian Summ Approximation”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 17, no. 4, pp. 439–448, 1972.
- [3] A. Benveniste. *Algorithme En Treillis Pour Les Modèles Stationnaires*, vol. 26. Outils et modèles mathématiques pour l’automatique, l’analyse des systèmes et le traitement du signal, Paris, 1982.
- [4] A. Benveniste et C. Chaure. “AR and ARMA Algorithms of Levinson Type: An Innovation Approach”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 26, no. 6, pp. 1243–1261, 1981.
- [5] A. Benveniste, M. Metivier, et P. Priouret. *Algorithmes Adaptatifs et Approximations Stochastiques*. Edition Masson, Paris, 1987.
- [6] K. Berbiche, A. Monin, M. Gérard, et G. Salut. “Filtrage Linéaire Quadratique Des Systèmes Non-Linéaire”. Dans *II-Ième Colloque Magrébin sur Les Modèles Numériques de l’Ingénieur*, Rabat, juin 1988.
- [7] Bourbaki. “Groupes et Algèbres de Lie”. Hermann, Paris. Chap. 2 et 3.
- [8] O. Brun et J. M. Garcia. “Parallélisation de la Méthode de Filtrage Particulaire,”. Rapport 99384, LAAS, 1999.
- [9] H. Carvalho. *Filtrage Optimal Non-Linéaire Du Signal GPS-NAVSTAR En Recalage Des Centrales de Navigation*,. Thèse d’Université , ENSAE, Toulouse, 1995.
- [10] H. Carvalho, A. Monin, et G. Salut. “Optimal Nonlinear Filtering in GPS/INS Integration”. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic*, vol. 33, no. 3, pp. 835–850, 1997.
- [11] K. T. Chen. “Decomposition of Differential Equations”. *Math. Annalen*, , no. 146, 1962.
- [12] K. Chen. “Integration of Paths, Geometric Invariant and a Generalized Campbell-Hausdorff Formula”. *Ann. of Math*, , no. 65, pp. 163–178, 1957.
- [13] K. Chen. “Integration of Paths. A Faithfull Representation of Paths by Non-Commutative Formal Power Series”. *Trans. Amer. Math. Soc.*, , no. 89, 1958.
- [14] J. M. Cioffi et T. Kailath. “Fast Recursive Least-Squares Transversal Filters For Adaptive Filtering”. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 32, no. 2, pp. 304–313, 1984.
- [15] P. Duvaut. “Le Filtrage de Wiener Linéaire-Quadratique À Horizon Fini - Application À la Prédiction”. *Traitement Du Signal*, vol. 6, no. 3, pp. 153–159, 1989.
- [16] M. Fliess. “Fonctionnelles Causales Non-Linéaires et Indéterminées Non-Commutatives”. *Bull. Soc. Math. France*, , no. 109, 1981.
- [17] M. Fliess. “Fonctionnelles Causales Non-Linéaires et Indéterminées Non-Commutatives”. *Bull. Soc. Math. France*, , no. 109, 1981.
- [18] M. Fliess. “Réalisation Locale Des Systèmes Non-Linéaires, Algèbres de Lie Filtrées Transitives et Séries Génératrices Non-Commutatives”. *Invent. Math*, , no. 71, 1983.
- [19] M. Fliess, M. Lamnabhi, et F. Lamnabhi-Lagarrigue. “An Algebraic Approach to Non-Linear Functional Expansions”. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, , no. 29, 1983.
- [20] M. Fliess et D. Normand-Cyrot. “Algèbres de Lie Nilpotentes, Formule de Baker-Campbell-Hausdorff et Intégrales Itérées de K.T. Chen”. Dans *Séminaire de Probabilités XVI - Lecture Notes in Mathematics - Springer-Verlag*, 1982.

- [21] R. Gamkrelidze. *Exponential Representation of Solution of Ordinary Differential Equations*, vol. 703. Proc. Equadiff IV. Springer-Verlag, New-York, 1979.
- [22] G. Glentis et N. Kalouptsidis. “Fast Adaptive Algorithm for Multichannel Filtering and System Identification”. *IEEE Trans. on Acoust. Speech, Signal Processing*, 1992.
- [23] N. J. Gordon, D. J. Salmond, et A. F. M. Smith. “Novel Approach to Nonlinear/Non-Gaussian Bayesian State Estimation”. *IEE Proceedings-F*, vol. 140, no. 2, pp. 107–113, 1993.
- [24] R. Hermann. *On the Accessibility Theorem in Control Theory - Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics*. Academic Press, 1963.
- [25] T. Huillet, A. Monin, G. Montseny, et G. Salut. “Generalized Inputs to Non Linear Systems”. *Spinger-Verlag Lecture Notes in Control of Information Sciences*, , no. 122, pp. 193–213, 1989.
- [26] T. Huillet, A. Monin, et G. Salut. “Lie Algebraic Representation in Non Linear Systems”. *Mathematical System Theory*, , no. 20, pp. 193–213, 1987.
- [27] T. Huillet, A. Monin, et G. Salut. “Lie Algebraic Representation Results for Non-Stationnary Evolution Operator”. *Mathematical System Theory*, , no. 19, pp. 205–226, 1987.
- [28] T. Huillet, A. Monin, et G. Salut. “Minimal Realization of the Matrix Transition Lie Group for Non-Linear Systems: Explicit Results”. *Systems and Control Letters*, vol. 24, no. 3, pp. 267–274, 1987.
- [29] T. Huillet, A. Monin, et G. Salut. “Représentations Exponentielles Des Systèmes Analytiques Généraux”. *APII*, vol. 24, no. 24, pp. 57–82, 1990.
- [30] T. Huillet, A. Monin, et G. Salut. “Réversibilité Des Systèmes Non Linéaires À Commandes Ponctuelles”. *APII*, vol. 24, no. 24, pp. 37–56, 1990.
- [31] R. W. P. King, M. Owens, et T. T. Wu. *Lateral Electromagnetic Waves - Theory and Applications to Communications, Geophysical Exploration, and Remote Sensing*. Springer-verlag, 1992.
- [32] D. T. Lee, B. Friedlander, et M. Morf. “Recursive Ladder Algorithms for ARMA Modelling”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 27, pp. 753–764, 1992.
- [33] J. S. Liu et R. Chen. “Blind Deconvolution Via Sequential Imputations”. *Journal of the american statistical association*, vol. 430, pp. 567–576, 1995.
- [34] C. Lobry. “Contrôlabilité Des Systèmes Non-Linéaires”. *SIAM Journal of Control*, vol. 8, no. 4, 1970.
- [35] F. Michaut. *Méthodes Adaptatives Pour Le Signal*. Hermès édition, Paris, 1992.
- [36] A. Monin. “ARMA Identification under Lattice Form: A New Hereditary Algorithm”. Dans *Colloque ATHOS, ESPRIT Basic Research Working Group Nž6620*, Sophia Antipolis, septembre 1993.
- [37] A. Monin. “Finite Dimensional Volterra Filtering: Application to Noise Variance Estimation”. Dans *Colloque ATHOS, ESPRIT Basic Research Working Group No6620*, Sophia Antipolis, septembre 1993.
- [38] A. Monin. “Détection et Discrimination de Multi-Émissions sur Une Même Porteuse. Application Simulée En Modulation de Phase”. Rapport 95248, LAAS/CNRS, 1995. Contrat DIGILOG/CELAR.
- [39] A. Monin. “Traitement Optimal Du Signal LORAN-C Par Estimation Non-Linéaire. Validation sur Données À Quai”. Rapport 97313, LAAS/CNRS, Septembre 1997. Contrat DCN/STERIA GiR.NR/97107.01.
- [40] A. Monin. “Modélisation de la Réponse D’une Antenne Filaire Immersée Pour Le

- Traitement Du Signal LORAN-C". Rapport 01525, LAAS/CNRS, Novembre 2001. Contrat DIGINEXT/ADERMIP.
- [41] A. Monin. "Modélisation et Identification de la Réponse D'une Antenne Filaire Immersée Pour Le Traitement Du Signal LORAN-C". Rapport 02243, LAAS/CNRS, Juin 2002. Contrat DIGINEXT/ADERMIP.
- [42] A. Monin, G. Rigal, et P. Charron. "A New Technology for LORAN-C Receivers". Bonn, Germany, Mars 2000, International Symposium on Integration of LORAN-C/Eurofix and EGNOS/Galileo.
- [43] A. Monin et G. Salut. "The Optimal Linear Predictor in Reduced Dimension". Dans *European Control Conference*, Grenoble, juillet 1991.
- [44] A. Monin et G. Salut. "Exact ARMA Lattice Predictors From Autocorrelations Functions". *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, no. 4, pp. 877–886, 1994.
- [45] A. Monin et G. Salut. "ARMA Lattice Identification: A New Hereditary Algorithm". *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 44, no. 2, pp. 360–370, 1996.
- [46] A. Monin et G. Salut. "IIR Volterra Filtering With Application to Bilinear Systems". *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 44, no. 9, pp. 2209–2221, 1996.
- [47] A. Monin et G. Salut. "Traitement Optimal Du Signal LORAN-C Par Estimation Dynamique Non-Linéaire". Rapport 97313, LAAS/CNRS, Juin 1996. Contrat DCN Ingenierie-STERIA-LAAS A94.75.106.
- [48] A. Monin et G. Salut. "Minimum Variance Estimation of Parameters Constrained by Bounds". *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 49, no. 1, pp. 246–248, 2001.
- [49] A. Monin, G. Salut, et V. Teulière. "Multisource Discrimination Using IIR Volterra Filtering". *IEEE Trans. on Communications*, vol. 49, no. 5, pp. 922–931, 2001.
- [50] M. Morf et D. T. Lee. "Recursive Square Root Ladder Estimation Algorithm". Dans *Proceedings IEEE Int. Conf. Acoust. Speech, Signal Processing*, Denver, 1980.
- [51] M. Morf, D. T. Lee, J. R. Nickolls, et A. Vieira. "A Classification of Algorithms for ARMA Models and Ladder Realizations". Dans *Proceedings IEEE Int. Conf. Acoust. Speech, Signal Processing*, Hartford, 1977.
- [52] V. S. Pugatchev. *Theory Of Random Functions And Its Applications To Control Problems*. Pergamon Press, Oxford, 1965.
- [53] R. Ree. "Lie Elements and an Algebra Associated with Shuffles". *Annals of Math*, , no. 68, pp. 210–220, 1958.
- [54] G. Rigal. *Filtrage Non-Linéaire, Résolution Particulière et Applications Au Traitement Du Signal*. Thèse d'Université , Université Paul Sabatier, 1993.
- [55] R. W. Rishel. "An Extended Pontryagin Principle for Control Systems Whose Control Laws Contains Mesures". *SIAM Journal of Control*, vol. 3, pp. 191–205, 1965.
- [56] G. Salut. "Le Thème Non-Linéaire En Automatique et Traitement Du Signal". Dans *Journées Nationales Du GDR "Traitement Du Signal et Images" Du CNRS*, Chantilly, 1989.
- [57] J. J. Shynk. "Adaptive IIR Filtering". *IEEE Acoust. Speech, Signal Processing Magazine*, vol. 6, pp. 4–21, 1989.
- [58] H. W. Sorenson et D. L. Alspach. "Recursive Bayesian Estimation Using Gaussian Sums". *Automatica*, vol. 7, pp. 465–479, 1971.
- [59] N. Wiener. *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series with*

Engineering Applications. MIT Press, 1949.

[60] N. Wiener. *Non-Linear Problems In Random Theory*. MIT Press, 1958.

[61] L. A. Zadeh. "Optimum Non-Linear Filters". *Jnl. of Applied Physics*, vol. 24, no. 4, pp. 396–404, 1953.

Curriculum Vitae

Diplômes/Formation :

- Ingénieur Electricien de Grenoble. (ENSIEG). Grenoble, juin 1980.
- Certificat d'Aptitude à l'Administration des Entreprises. (DESS) IAE de l'Université Claude Bernard. Lyon, juin 1981.
- DEA Automatique et Informatique. Université Claude Bernard. Lyon, juin 1984.
- Doctorat de l'Université Paul Sabatier. Spécialité Automatique. Toulouse, décembre 1987.

Situations professionnelles :

- Assistant de physique à l'Ecole Normale Supérieure de Marrakech au titre de la coopération. Marrakech (Maroc). Septembre 1981 - juillet 1983.
- Ingénieur d'étude à la Compagnie des Signaux et Equipements Electroniques (CSEE), détaché au Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes (LAAS/CNRS). Activité de recherche à caractère fondamental sur la commande des systèmes non-linéaires. Préparation de thèse à l'Université Paul Sabatier. Novembre 1984 - octobre 1987.
- Ingénieur d'étude à la société DIGILOG, détaché au LAAS/CNRS. Réalisation d'un contrat de recherche avec la Marine Nationale portant sur le filtrage non-linéaire des signaux RADAR et SONAR. Novembre 1987 - octobre 1989.
- Chargé de recherche au LAAS/CNRS depuis novembre 1989.
- Consultant de la société DIGINEXT.

Activités de recherche :

- Travail à caractère fondamental sur les représentations algébriques des systèmes non-linéaires analytiques.
- Etude de la réalisabilité en dimension finie des filtres polynomiaux à horizon fini. (filtrage dit de Volterra). Mise en oeuvre sur les systèmes bilinéaires et extension aux systèmes analytiques.
- Réalisation et identification des systèmes ARMAX sous forme treillis.
- Filtrage non-linéaire. Développement en simulation sur les traitements GPS et SONAR. Développement sur données réelles sur le traitement du signal LORAN-C.
- Commande optimale et filtrage à maximum de vraisemblance des systèmes à entrées impulsionnelles à temps discret.

Activités d'enseignement :

- TP et TD de physique en première et deuxième année de l'Ecole Normale Supérieure de Marrakech (1981-1983 à temps plein).
- Cours DEA de l'UPS : "Systèmes Non-Linéaires" (50% 1987-1990, 100% 1991-1993).

- Cours DEA de l'UPS : "Processus Stochastiques - Estimation - Filtrage" (1991-2002).
- Cours DESS de l'ENSEEIH : "Commande Non-Linéaire des Convertisseurs Statiques" (1985-1990).
- TD "Analyse harmonique"(1987-1994), "Systèmes dynamiques non-linéaires"(1990-1994), "Signaux et bruits"(1987-2001) en première et deuxième année de l'ENSAE.

Mémoires et diplômes dirigés

- Thèse de Doctorat de l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace. Soutenue en septembre 1995 par Himilcon Carvalho en présence de M. Bellanger, M. Corraza, J. Farré, P. Mouyon, P.E. Pommelet et G. Salut. Codirigée la première année avec Gérard Salut. Mention obtenue : très honorable avec félicitations du jury. Cette thèse a donné lieu à une publication dans IEEE Trans. on Aerospace and Electronic, 15 pages.
- Thèse de Doctorat de l'Université Paul Sabatier. Soutenue en octobre 2000 par Vincent Teulière en présence de P. Duvaut, G. Favier, J. P. Guilhot, J. P. Lecadre et G. Salut. Codirigée avec Gérard Salut. Mention obtenue : très honorable avec félicitations du jury. Cette thèse a donné lieu à une publication dans IEEE Trans. on Communications, 10 pages et à une communication dans le 17-ème Colloque GRETSI 99 sur le Traitement du Signal et des Images.
- DEA d'Automatique et d'Informatique Industrielle de l'UPS obtenu par Henri Payet en 1996. Codirection à 50% avec Jean Marie Garcia (OFP - LAAS).
- DEA d'Automatique de l'Ecole Doctorale Systèmes de l'UPS obtenu par Mohamed Djeddou en 2001.

Liste des publications.

Revue avec comité de lecture :

- **T. Huillet, A. Monin, G. Salut.** *Représentations Exponentielles en Commande Non-Linéaire.* APII, vol. 21, n°24, pp. 419-448, 1987.
- **T. Huillet, A. Monin, G. Salut.** *Lie Algebraic Representation Results for Non-Stationary Evolution Operator.* *Mathematical System Theory*, n°19, pp. 205-226, 1987.
- **T. Huillet, A. Monin, G. Salut.** *Minimal Realization of the Matrix Transition Lie Group for Non-Linear Systems: Explicit Results.* *Systems & Control Letters*, n°3, pp. 267-274, 1987.
- **T. Huillet, A. Monin, G. Salut.** *Lie Algebraic Canonical Representations in Nonlinear Systems.* *Mathematical System Theory*, n°20, pp. 193-213, 1987.
- **T. Huillet, A. Monin, G. Montseny, G. Salut.** *Generalized Inputs to Nonlinear Systems.* Springer-Verlag Lecture Notes in Control of Information Sciences, n°122, pp.193-213, 1989.
- **T. Huillet, A. Monin, G. Salut.** *Représentations Exponentielles des Systèmes Analytiques Généraux.* APII, vol. 24, n°24, pp. 57-82, 1990.
- **T. Huillet, A. Monin, G. Montseny, G. Salut.** *Réversibilité des Systèmes Non Linéaires à Commandes Ponctuelles.* APII, vol. 24, n°24, pp. 37-56, 1990.
- **A. Monin, G. Salut.** *Exact ARMA Lattice Predictors From Autocorrelations Functions.* *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 42, n°4, pp. 877-886, 1994.
- **A. Monin, G. Salut.** *ARMA Lattice Identification: A New Hereditary Algorithm.* *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 44, n°2, pp. 360-370, 1996.
- **A. Monin, G. Salut.** *IIR Volterra Filtering With Application to Bilinear Systems.* *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 44, n°9, pp. 2209-2221, 1996.
- **H. Carvalho, A. Monin, G. Salut.** *Optimal Nonlinear Filtering in GPS/INS Integration.* *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic*, vol. 33, n°3, pp. 835-850, 1997.
- **A. Monin, G. Salut.** *Minimum Variance Estimation of Parameters Constrained by Bounds.* *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 49, n°1, pp. 246-248, 2001.
- **A. Monin, G. Salut, V. Teulière.** *Multisource Discrimination Using IIR Volterra Filtering.* *IEEE Trans. on Communications*, vol. 49, n°5, pp. 922-931, 2001.

Conférences invitées dans des congrès :

- **A. Monin.** *Navigation LORAN-C par filtrage particulière,* Journées Doctorales d'Automatique (JDA'99), Nancy (France), 21-23 Septembre 1999, 17p.

Proceedings à comité de lecture :

- **O. Bennis, T. Huillet, A. Monin, G. Salut.** *Aspects Non-Linéaires en Poursuite RADAR de Cibles Aériennes.* IASTED, Applied Control, Filtering and Processing, Genève, Juin 1987.
- **O. Bennis, T. Huillet, A. Monin, G. Salut.** *Modèles Non-Linéaires Fondamentaux de l'Ecoute Passive SONAR pour l'Estimation Optimale en Azymétrie.* XI-ième colloque sur le

traitement du signal et des images, Nice, Juin 1987.

- **T. Huillet, A. Monin, G. Montseny, G. Salut.** *Generalized Inputs to Nonlinear Systems.* Colloque International d'Automatique Non-Linéaire (Années non-linéaires du CNRS) Nantes, Juin 1988.
- **K. Berbiche, A. Monin, G. Montseny, G. Salut.** *Filtrage Linéaire Quadratique des Systèmes Non-Linéaires.* II-ième Colloque Magrébin sur les Modèles Numériques de l'Ingénieur, vol. I, p.186, Novembre 1989.
- **A. Monin, G. Salut.** *The Optimal Linear Predictor in Reduced Dimension.* European Control Conference, Grenoble 2-5 Juillet 1991.
- **A. Monin, G. Salut.** *Filtrage Optimal de Volterra à Horizon Infini : Application aux Systèmes Bilinéaires.* Colloque GRETSI sur le traitement du signal et des images, Juan-Les-Pins, Septembre 93.
- **A. Monin.** *Finite Dimensional Volterra Filtering: Application to Noise Variance Estimation.* Colloque ATHOS, ESPRIT Basic Research Working Group n°6620, Sophia Antipolis, Sept. 1993.
- **A. Monin.** *ARMA Identification under Lattice Form: A New Hereditary Algorithm.* Colloque ATHOS, ESPRIT Basic Research Working Group n°6620, Sophia Antipolis, Sept. 1993.
- **A. Monin, G. Salut, V. Teulière.** *Trajectographie passive SONAR par estimation à maximum de vraisemblance,* 17-ème Colloque GRETSI 99 sur le Traitement du Signal et des Images, Vannes, France, 13-17 Sept. 1999.
- **A. Monin, G. Rigal, P. Charron.** *A New Technology for LORAN-C Receivers,* International Symposium on Integration of LORAN-C/Eurofix and EGNOS/Galileo, Bonn, Germany, 22-23 mars 2000.
- **A. Monin, G. Salut.** *Optimal filtering of LORAN-C signal via particle filtering - Simulation results.* EUSIPCO 2002 Conference, Toulouse, 3-6 septembre 2002.

Rapports de contrat :

- **O. Bennis, T. Huillet, A. Monin, G. Salut.** *Modélisation, Estimation et Optimisation Non-Linéaire des Chaînes de Poursuite RADAR pour Mobiles Non-Coopératifs.* Contrat DCAN n° 84.48.801.303,1986, 139 p.
- **O. Bennis, T. Huillet, A. Monin, G. Salut.** *Modélisation, Estimation et Décisions Optimales pour l'Elaboration des Eléments Buts à partir de l'Ecoute SONAR Passive.* Contrat DCAN n° 84.48.801.287,1986, 130 p.
- **A. Monin, G. Salut.** *Représentations Algébriques de l'Automatique pour l'Intelligence Artificielle.* Contrat DIGILOG/DCAN n° 88.48.825,1988, 33p.
- **A. Monin, G. Montseny, G. Salut.** *Filtrage Finidimensionnel de Systèmes Bilinéaires par Intégrations Itérées.* Contrat DIGILOG/DCAN n° 88.48.825,1988, 33 p.
- **A. Monin, G. Montseny, G. Salut.** *Méthodologie d'Analyse pour la Simplification du Filtrage Polynomial.* Contrat DIGILOG/DCAN n° 88.48.825, Rapport LAAS n° 90036, Février 1990, 37p.
- **A. Monin, G. Montseny, G. Salut.** *Filtrage Non-Linéaire de Systèmes Stochastiques*

- Bilinéaires. Méthodes et Applications.* Contrat DIGILOG/DCAN n° 88.48.825, 1989, 33 p.
- **K. Berbiche, A. Monin, G. Montseny, G. Salut.** *Filtrage Quadratique de Systèmes Bilinéaires : Applications à l'Identification Spectrale.* Contrat DCAN/DIGILOG, n° 88.48.825, Rapport LAAS n° 90039, Février 1990.
 - **A. Monin, G. Rigal, G. Salut.** *Nouvelles Techniques de Filtrage - Mise en Equations Spécifiques.* Contrat STCAN-DIGILOG-LAAS, n° A.91.77.013, Rapport LAAS n° 91478, Septembre 1991, 89p.
 - **H. Carvalho, A. Monin, G. Salut.** *Filtrage optimal non-linéaire du signal GPS NAVSTAR en recalage de centrales de navigation : filtrage par particules aléatoires.* Contrat DCAN-DIGILOG-LAAS n° A93.76.182, Rapport LAAS n° 94534, Juin 1994, 44p.
 - **H. Carvalho, A. Monin, G. Salut.** *Filtrage optimal non-linéaire du signal GPS NAVSTAR en recalage de centrales de navigation : adaptation à la SA par identification intégrée.* Contrat DCAN-DIGILOG-LAAS n° A93.76.182, Rapport LAAS n° 94498, Novembre 1994, 22p.
 - **H. Carvalho, A. Monin, G. Rigal, G. Salut.** *Filtrage Non-Linéaire Non-Gaussien Appliqué au Recalage de Plates-Formes Inertielles.* Contrat DCN/DIGILOG n° SM.MCY/858.92/0, 1995.
 - **A. Monin, G. Salut.** *Détection et Discrimination de Multi-Emissions Sur Une Même Porteuse - Application Simulée en Modulation de Phase.* Contrat CELAR-DIGILOG-LAAS n° GiR.NR/3313.94, Rapport LAAS n° 95248, Juin 1995, 62p.
 - **A. Monin, G. Salut.** *Traitement Optimal du Signal LORAN-C par Estimation Dynamique Non-Linéaire.* Contrat DCN Ingenierie-STERIA-LAAS n° A94.75.106, Rapport LAAS n° 96246, Juin 1996, 26p.
 - **A. Monin.** *Traitement Optimal du Signal LORAN-C par Estimation Non-Linéaire. Validation sur Données à Quai.* Contrat DCN/STERIA n° GiR.NR/97107.01, Rapport LAAS n° 97313, Septembre 1997, 60p.
 - **A. Monin.** *Traitement Optimal du Signal LORAN-C par Estimation Non-Linéaire. Validation sur Données en mer.* Contrat DIGINEXT/ADERMIP, Rapport LAAS n° 00157, Avril 2000, 85p.
 - **A. Monin.** *Modélisation de la réponse d'une antenne filaire immergée pour le traitement du signal LORAN-C.* Rapport LAAS n° 01525. Contrat DIGINEXT/ADERMIP, Novembre 2001, 21 p.
 - **A. Monin.** *Modélisation et identification de la réponse d'une antenne filaire pour le traitement du signal LORAN-C.* Rapport LAAS n° 02243. Contrat DIGINEXT/ADERMIP, Juin 2002, 44 p.

Notes internes :

- **A. Monin, G. Salut.** *Filtrage optimal récursif de systèmes bilinéaires par fonctionnelles polynomiales à noyaux séparables.* Rapport LAAS N°90039, 1990.
- **M. Chamon, A. Monin, G. Salut.** *Estimation/détection non linéaires. Théorie, algorithmes et applications.* Rapport LAAS N°94507, Décembre 1994, 96p.

Thèse :

- **A. Monin.** *Contributions Algébrique et Topologiques à la Représentation des Systèmes Non-Linéaires.* Doctorat de l'Université Paul Sabatier, Toulouse, Le 8 décembre 1987, n° 216, 131 p. Jury : Yves Sévely (Président), Jacques Audounet, Michel Fliess, Simon Larcher, Manuel Samuelides et Gérard Salut.