

Schémas à deux grilles pour la résolution du problème de Navier-Stokes instationnaire incompressible

Hyam Abboud

Laboratoire Jacques-Louis Lions
Université Pierre et Marie Curie - Paris
V. Girault



Faculté des Sciences
Université Saint-Joseph - Beyrouth
T. Sayah



03 Juillet 2006

- 1 Motivation
- 2 Présentation du problème & Technique à deux grilles
 - Problème de Navier-Stokes (N-S)
 - Existence, unicité et régularité de la solution
 - Historique & Idées des schémas à deux grilles
- 3 Schéma d'ordre 1 en temps
 - Schéma à deux grilles d'ordre un
 - Étude théorique
 - Étude numérique
- 4 Schéma d'ordre 2 en temps
 - Schéma à deux grilles d'ordre deux
 - Étude théorique
 - Étude numérique
- 5 Conclusion & perspectives

Motivation

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \underbrace{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}_{\text{convection non-linéaire}} + \nabla p(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

- Caractère non-linéaire
 - ⇒ difficulté de résolution théorique
 - ⇒ résolution numérique
 - ⇒ Méthode à deux grilles
- Réduire la complexité du schéma
- Conserver l'ordre de convergence
- Gagner en temps de calcul

Motivation

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \underbrace{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}_{\text{convection non-linéaire}} + \nabla p(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

- Caractère non-linéaire
 - ⇒ difficulté de résolution théorique
 - ⇒ résolution numérique
 - ⇒ **Méthode à deux grilles**
- Réduire la complexité du schéma
- Conserver l'ordre de convergence
- Gagner en temps de calcul

Motivation

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \underbrace{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}_{\text{convection non-linéaire}} + \nabla p(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

- Caractère non-linéaire
 - ⇒ difficulté de résolution théorique
 - ⇒ résolution numérique
 - ⇒ **Méthode à deux grilles**
- Réduire la complexité du schéma
- Conserver l'ordre de convergence
- Gagner en temps de calcul

Motivation

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \underbrace{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}_{\text{convection non-linéaire}} + \nabla p(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

- Caractère non-linéaire
 - ⇒ difficulté de résolution théorique
 - ⇒ résolution numérique
 - ⇒ **Méthode à deux grilles**
- Réduire la complexité du schéma
- Conserver l'ordre de convergence
- Gagner en temps de calcul

Motivation

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \underbrace{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}_{\text{convection non-linéaire}} + \nabla p(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

- Caractère non-linéaire
 - ⇒ difficulté de résolution théorique
 - ⇒ résolution numérique
 - ⇒ **Méthode à deux grilles**
- Réduire la complexité du schéma
- Conserver l'ordre de convergence
- Gagner en temps de calcul

Plan

- 1 Motivation
- 2 Présentation du problème & Technique à deux grilles
 - Problème de Navier-Stokes (N-S)
 - Existence, unicité et régularité de la solution
 - Historique & Idées des schémas à deux grilles
- 3 Schéma d'ordre 1 en temps
 - Schéma à deux grilles d'ordre un
 - Étude théorique
 - Étude numérique
- 4 Schéma d'ordre 2 en temps
 - Schéma à deux grilles d'ordre deux
 - Étude théorique
 - Étude numérique
- 5 Conclusion & perspectives

Problème de Navier-Stokes (N-S)

Étude du comportement d'un fluide incompressible dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, borné de frontière assez régulière $\Gamma = \partial\Omega$ et de normale extérieure \vec{n} .

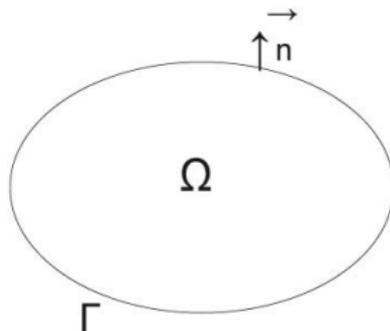


Figure: Domaine de travail

Problème de Navier-Stokes (N-S)

- ▷ Équations de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla p(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t),$$

dans $\Omega \times [0, T]$

(1)

- ▷ Condition d'incompressibilité:

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \text{dans } \Omega \times [0, T]$$

(2)

- ▷ Condition de Dirichlet:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0, T]$$

(3)

- ▷ Condition initiale:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0} \text{ sur } \Omega.$$

(4)

Plan

- 1 Motivation
- 2 **Présentation du problème & Technique à deux grilles**
 - Problème de Navier-Stokes (N-S)
 - **Existence, unicité et régularité de la solution**
 - Historique & Idées des schémas à deux grilles
- 3 Schéma d'ordre 1 en temps
 - Schéma à deux grilles d'ordre un
 - Étude théorique
 - Étude numérique
- 4 Schéma d'ordre 2 en temps
 - Schéma à deux grilles d'ordre deux
 - Étude théorique
 - Étude numérique
- 5 Conclusion & perspectives

Existence de la solution

Soient

$$\mathcal{V} = \{ \mathbf{w} \in \mathcal{D}(\Omega)^d; \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \text{ dans } \Omega \},$$

$$V = \{ \mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^d; \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \text{ dans } \Omega \},$$

$$H = \{ \mathbf{w} \in H(\operatorname{div}; \Omega); \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \text{ dans } \Omega \},$$

où $H(\operatorname{div}; \Omega) = \{ \mathbf{w} \in L^2(\Omega)^d; \operatorname{div} \mathbf{w} \in L^2(\Omega) \}$.

Soient

$$\mathbf{f} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^d) \text{ et } \mathbf{u}_0 \in H.$$

Existence de la solution

Théorème d'existence

Soit $d = 2$ ou 3 et $T < \infty$. Pour $\mathbf{f} \in L_t^2(H_x^{-1})$, $\mathbf{u}_0 \in H$ et $\nu > 0$ donné, \exists au moins une solution de (1)–(4) $\mathbf{u} \in L_t^2(V_x) \cap L_t^\infty(H_x)$ et $p \in W_t^{-1,\infty}(L_{0x}^2)$.

Si $d = 2$, $\mathbf{u} \in C^0([0, T]; H)$ et si $d = 3$, \mathbf{u} est continue de $[0, T]$ dans H muni de la topologie faible de $L^2(\Omega)^3$.

De plus, $\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in L^2(0, T; V')$ si $d = 2$ ou $L^{4/3}(0, T; V')$ si $d = 3$.

Unicité de la solution

Théorème d'unicité

Si $d = 2$, le problème (1)–(4) a une unique solution \mathbf{u} telle que $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$.

Problème Ouvert

En $d = 3$, question ouverte d'unicité!

Unicité de la solution

Théorème d'unicité

Si $d = 2$, le problème (1)–(4) a une unique solution \mathbf{u} telle que $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$.

Problème Ouvert

En $d = 3$, question ouverte d'unicité!

Régularité de la solution

On se restreint à la dimension $d = 2$.

Théorème de régularité...

Si $\mathbf{f} \in L_t^2(L_x^{4/3})$ alors $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L_{t,x}^2$, $\mathbf{u} \in L_t^2(W_x^{2,4/3})$ et $p \in L_t^2(W_x^{1,4/3})$.

Si en plus Ω convexe et $\mathbf{f} \in L_{t,x}^2$ alors $\mathbf{u} \in L_t^2(H_x^2)$ et $p \in L_t^2(H_x^1)$.

...suite

Si $\mathbf{f} \in L_t^\infty(L_x^{4/3})$ alors $\mathbf{u} \in L_t^\infty(W_x^{2,4/3})$ et $p \in L_t^\infty(W_x^{1,4/3})$.

Si de plus Ω convexe et $\mathbf{f} \in L_t^\infty(L_x^2)$ alors $\mathbf{u} \in L_t^\infty(H_x^2)$ et $p \in L_t^\infty(H_x^1)$.

Plan

- 1 Motivation
- 2 **Présentation du problème & Technique à deux grilles**
 - Problème de Navier-Stokes (N-S)
 - Existence, unicité et régularité de la solution
 - **Historique & Idées des schémas à deux grilles**
- 3 Schéma d'ordre 1 en temps
 - Schéma à deux grilles d'ordre un
 - Étude théorique
 - Étude numérique
- 4 Schéma d'ordre 2 en temps
 - Schéma à deux grilles d'ordre deux
 - Étude théorique
 - Étude numérique
- 5 Conclusion & perspectives

Historique & travaux précédents

- ▷ Quinzaine d'années
- ▷ Équations elliptiques semi-linéaires stationnaires (Xu, Niemistö)
- ▷ Problème de (N-S) stationnaire (Fairag, Layton, Layton & Lenferink et Girault & Lions)
- ▷ Problème de (N-S) instationnaire, semi-discret (Girault & Lions)

Idées des schémas à deux grilles

Pour Navier-Stokes stationnaire:

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}. \quad (5)$$

- L'idée:

- ▷ Discrétisation de (5) sur une grille grossière de pas H .
- ▷ Discrétisation de (5) sur une grille fine de pas h en linéarisant $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ par $\mathbf{u}_H \cdot \nabla \mathbf{u}_h$.

- Résultats:

Discrétisation d'ordre 1, l'erreur sur \mathbf{u} en norme H^1 est en $O(H)$, en norme L^2 est en $O(H^2)$. La contribution du facteur \mathbf{u} dans l'erreur de $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ est en norme L^2 , donc en $O(H^2)$.

Idées des schémas à deux grilles

Pour Navier-Stokes stationnaire:

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}. \quad (5)$$

- L'idée:

- ▷ Discrétisation de (5) sur une **grille grossière** de pas H .
- ▷ Discrétisation de (5) sur une **grille fine** de pas h en **linéarisant** $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ par $\mathbf{u}_H \cdot \nabla \mathbf{u}_h$.

- Résultats:

Discrétisation d'ordre 1, l'erreur sur \mathbf{u} en norme H^1 est en $O(H)$, en norme L^2 est en $O(H^2)$. La contribution du facteur \mathbf{u} dans l'erreur de $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ est en norme L^2 , donc en $O(H^2)$.

Idées des schémas à deux grilles

Pour Navier-Stokes stationnaire:

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}. \quad (5)$$

- L'idée:

- ▷ Discrétisation de (5) sur une **grille grossière** de pas H .
- ▷ Discrétisation de (5) sur une **grille fine** de pas h en **linéarisant** $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ par $\mathbf{u}_H \cdot \nabla \mathbf{u}_h$.

- Résultats:

Discrétisation **d'ordre 1**, l'erreur sur \mathbf{u} en norme H^1 est en $O(H)$, en norme L^2 est en $O(H^2)$. La contribution du facteur \mathbf{u} dans l'erreur de $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ est en norme L^2 , donc en $O(H^2)$.

Idées des schémas à deux grilles

- But:
 - ▷ **Ordre 1 (resp. 2)** Si $h = H^2$ (resp. $h^2 = H^3$), l'erreur à la fin des deux étapes est $O(h)$ (resp. $O(h^2)$).
 - ▷ **Diminuer le temps de calcul**, i.e gagner en coût de calcul.
 - ▷ **Conserver la précision** et **réduire la complexité du schéma**.
- Difficulté: Estimation d'erreur en norme L^2 basée sur un argument de dualité.
- Outils: → Discrétisations:
 - 1 spatiales: pas d'espace H et h .
 - 2 temporelle: pas de temps $\Delta t = \frac{T}{N}$ avec intervalle de temps $[0, T]$ et $t^n = n\Delta t, 0 \leq n \leq N$.

Idées des schémas à deux grilles

- But:
 - ▷ **Ordre 1 (resp. 2)** Si $h = H^2$ (resp. $h^2 = H^3$), l'erreur à la fin des deux étapes est $O(h)$ (resp. $O(h^2)$).
 - ▷ **Diminuer le temps de calcul**, i.e **gagner en coût de calcul**.
 - ▷ **Conserver la précision** et **réduire la complexité du schéma**.
- **Difficulté**: Estimation d'erreur en norme L^2 basée sur un **argument de dualité**.
- **Outils**: → **Discrétisations**:
 - 1 spatiales: pas d'espace H et h .
 - 2 temporelle: pas de temps $\Delta t = \frac{T}{N}$ avec intervalle de temps $[0, T]$ et $t^n = n\Delta t, 0 \leq n \leq N$.

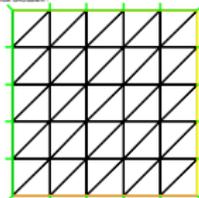
Idées des schémas à deux grilles

- But:
 - ▷ **Ordre 1 (resp. 2)** Si $h = H^2$ (resp. $h^2 = H^3$), l'erreur à la fin des deux étapes est $O(h)$ (resp. $O(h^2)$).
 - ▷ **Diminuer le temps de calcul**, i.e **gagner en coût de calcul**.
 - ▷ **Conserver la précision** et **réduire la complexité du schéma**.
- **Difficulté**: Estimation d'erreur en norme L^2 basée sur un **argument de dualité**.
- **Outils**: → **Discrétisations**:
 - 1 spatiales: pas d'espace H et h .
 - 2 temporelle: pas de temps $\Delta t = \frac{T}{N}$ avec intervalle de temps $[0, T]$ et $t^n = n\Delta t, 0 \leq n \leq N$.

Plan

- 1 Motivation
- 2 Présentation du problème & Technique à deux grilles
 - Problème de Navier-Stokes (N-S)
 - Existence, unicité et régularité de la solution
 - Historique & Idées des schémas à deux grilles
- 3 Schéma d'ordre 1 en temps
 - Schéma à deux grilles d'ordre un
 - Étude théorique
 - Étude numérique
- 4 Schéma d'ordre 2 en temps
 - Schéma à deux grilles d'ordre deux
 - Étude théorique
 - Étude numérique
- 5 Conclusion & perspectives

LE MAILLAGE GROSSIER



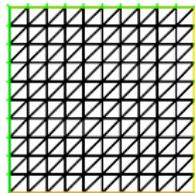
Grille Grossière: problème non-linéaire

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}_H^{n+1} - \mathbf{u}_H^n, \mathbf{v}_H) + \nu (\nabla \mathbf{u}_H^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_H) + (\mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_H^{n+1}, \mathbf{v}_H) \\ - (p_H^{n+1}, \operatorname{div} \mathbf{v}_H) + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_H^{n+1}, \mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \mathbf{v}_H) = \langle \mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v}_H \rangle, \end{aligned} \quad (6)$$

$$(q_H, \operatorname{div} \mathbf{u}_H^{n+1}) = 0,$$

où (\cdot, \cdot) produit scalaire de $L^2(\Omega)$.

© 2006-2007



Grille Fine: problème linéarisé

$$\frac{1}{\Delta t}(\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) + \nu(\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_h) + (\mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) - (p_h^{n+1}, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) = \langle \mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v}_h \rangle, \quad (7)$$

$$(q_h, \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n+1}) = 0.$$

avec $\mathbf{u}_H^0 = \mathbf{u}_h^0 = 0$ et $\mathbf{u}_H^n = R(\mathbf{u}_h^n)$, où R est une restriction adéquate de X_h dans X_H .

Espaces des E.F & Condition inf-sup

E.F "mini-élément": $\mathbb{P}_1 + \text{"bulle"} / \mathbb{P}_1$



Rôle de la bulle : Assurer la condition inf-sup.

Espaces des E.F:

$$X_\eta = \{ \mathbf{v}_\eta \in C^0(\overline{\Omega})^2; \forall \kappa \in \mathcal{T}_\eta, \mathbf{v}_\eta|_\kappa \in [\mathbb{P}_1 \oplus \text{Vect}(b_\kappa)]^2, \mathbf{v}_\eta|_{\partial\Omega} = \mathbf{0} \} \text{ et}$$

$$M_\eta = \{ q_\eta \in C^0(\overline{\Omega}); \forall \kappa \in \mathcal{T}_\eta, q_\eta|_\kappa \in \mathbb{P}_1, \int_\Omega q_\eta dx = 0 \}.$$

Espaces des E.F & Condition inf-sup

E.F "mini-élément": $\mathbb{P}_1 + \text{"bulle"} / \mathbb{P}_1$



Rôle de la bulle : Assurer la condition inf-sup.

Espaces des E.F:

$$X_\eta = \{ \mathbf{v}_\eta \in C^0(\overline{\Omega})^2; \forall \kappa \in \mathcal{T}_\eta, \mathbf{v}_\eta|_\kappa \in [\mathbb{P}_1 \oplus \text{Vect}(b_\kappa)]^2, \mathbf{v}_\eta|_{\partial\Omega} = \mathbf{0} \} \text{ et}$$

$$M_\eta = \{ q_\eta \in C^0(\overline{\Omega}); \forall \kappa \in \mathcal{T}_\eta, q_\eta|_\kappa \in \mathbb{P}_1, \int_\Omega q_\eta dx = 0 \}.$$

Espaces des E.F & Condition inf-sup

Condition "inf-sup" de Babuška-Brezzi :

$$\inf_{q_\eta \in M_\eta} \sup_{\mathbf{v}_\eta \in X_\eta} \frac{\int_{\Omega} q_\eta (\operatorname{div} \mathbf{v}_\eta) d\mathbf{x}}{\|q_\eta\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \mathbf{v}_\eta\|_{L^2(\Omega)}} \geq \beta^*, \quad (8)$$

où $\beta^* > 0$ est indépendante de η .

Dans la suite, $\mathbf{f}(t^{n+1})$ est approchée par la moyenne:

$$\mathbf{f}^{n+1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) dt, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \quad (9)$$

Plan

- 1 Motivation
- 2 Présentation du problème & Technique à deux grilles
 - Problème de Navier-Stokes (N-S)
 - Existence, unicité et régularité de la solution
 - Historique & Idées des schémas à deux grilles
- 3 Schéma d'ordre 1 en temps
 - Schéma à deux grilles d'ordre un
 - Étude théorique
 - Étude numérique
- 4 Schéma d'ordre 2 en temps
 - Schéma à deux grilles d'ordre deux
 - Étude théorique
 - Étude numérique
- 5 Conclusion & perspectives

Erreur de base de (N-S)

Théorème 1: A chaque pas de temps, solution \mathbf{u}_η^{n+1} unique de (6) si Δt assez petit. Si $\mathbf{u} \in L_t^\infty(H_x^1) \cap L_t^2(H_x^2)$, $\mathbf{u}' \in L_t^2(H_x^1)$ et $p \in L_t^2(H_x^1)$, alors $\exists \alpha, \beta, C$ et $k_0 > 0$ indép. de η et Δt t.q pour $\Delta t \leq k_0$:

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \|(\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \frac{\nu}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t |\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C(\eta^2 + (\Delta t)^2). \end{aligned} \quad (10)$$

Sous l'hypothèse $\Delta t \geq \alpha \eta^2$

$$\sup_n |\mathbf{u}_\eta^n|_{H^1(\Omega)} \leq C. \quad (11)$$

Erreur de base de (N-S)

Théorème 1: A chaque pas de temps, solution \mathbf{u}_η^{n+1} unique de (6) si Δt assez petit. Si $\mathbf{u} \in L_t^\infty(H_x^1) \cap L_t^2(H_x^2)$, $\mathbf{u}' \in L_t^2(H_x^1)$ et $p \in L_t^2(H_x^1)$, alors $\exists \alpha, \beta, C$ et $k_0 > 0$ indép. de η et Δt t.q pour $\Delta t \leq k_0$:

$$\sup_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \|(\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n))\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t |\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C(\eta^2 + (\Delta t)^2). \quad (10)$$

Sous l'hypothèse $\Delta t \geq \alpha \eta^2$

$$\sup_n |\mathbf{u}_\eta^n|_{H^1(\Omega)} \leq C. \quad (11)$$

Quelques estimations de Stokes

L'estimation d'erreur d'ordre 2 en temps dans $L^2(\Omega \times]0, T])^2$ est basée sur un **argument de dualité** pour le problème de Stokes dépendant du temps.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \nu \Delta \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \nabla q(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} + \begin{cases} C.I \\ C.L \end{cases}$$

Régularité (Grisvard, Temam)

- ▷ Si $\mathbf{g} \in L^2_{t,x}$ alors $\mathbf{v} \in L^2_t(W_x^{2,4/3}) \cap L^\infty_t(H_x^1)$, $\mathbf{v}' \in L^2_{t,x}$ et $q \in L^2_t(W_x^{1,4/3})$.
- ▷ Si Ω est convexe alors $(\mathbf{v}, q) \in L^2_t(H_x^2) \times L^2_t(H_x^1)$.
- ▷ Sans la convexité, si $\mathbf{g} \in H^1_t(H_x^{-1})$ et $\mathbf{g}(0) \in L^2(\Omega)^2$ alors $\mathbf{v}' \in L^\infty_t(L^2_x) \cap L^2_t(H_x^1)$.

Quelques estimations de Stokes

L'estimation d'erreur d'ordre 2 en temps dans $L^2(\Omega \times]0, T])^2$ est basée sur un **argument de dualité** pour le problème de Stokes dépendant du temps.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \nu \Delta \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \nabla q(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} + \begin{cases} C.I \\ C.L \end{cases}$$

Régularité (Grisvard, Temam)

- ▷ Si $\mathbf{g} \in L^2_{t,x}$ alors $\mathbf{v} \in L^2_t(W_x^{2,4/3}) \cap L^\infty_t(H_x^1)$, $\mathbf{v}' \in L^2_{t,x}$ et $q \in L^2_t(W_x^{1,4/3})$.
- ▷ Si Ω est convexe alors $(\mathbf{v}, q) \in L^2_t(H_x^2) \times L^2_t(H_x^1)$.
- ▷ Sans la convexité, si $\mathbf{g} \in H^1_t(H_x^{-1})$ et $\mathbf{g}(0) \in L^2(\Omega)^2$ alors $\mathbf{v}' \in L^\infty_t(L^2_x) \cap L^2_t(H_x^1)$.

Problème de Stokes rétrograde

(S) discrétisé

$$\frac{1}{\Delta t}(\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{v}_\eta^n, \mathbf{z}_\eta) + \nu(\nabla \mathbf{v}_\eta^{n+1}, \nabla \mathbf{z}_\eta) - (q_\eta^{n+1}, \operatorname{div} \mathbf{z}_\eta) = (\mathbf{g}^{n+1}, \mathbf{z}_\eta),$$

$$(\lambda_\eta, \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta^{n+1}) = 0.$$

▷ Argument de dualité basé sur le problème de Stokes rétrograde

(S_{ret}):

(S_{ret})

$$\frac{1}{\Delta t}(\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^n) + \nu \Delta \mathbf{w}^n - \nabla \lambda^n = \mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n),$$

$$\operatorname{div} \mathbf{w}^n = 0, \mathbf{w}^n|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \mathbf{w}^{N+1} = \mathbf{0}.$$

Problème de Stokes rétrograde

(S) discrétisé

$$\frac{1}{\Delta t}(\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{v}_\eta^n, \mathbf{z}_\eta) + \nu(\nabla \mathbf{v}_\eta^{n+1}, \nabla \mathbf{z}_\eta) - (q_\eta^{n+1}, \operatorname{div} \mathbf{z}_\eta) = (\mathbf{g}^{n+1}, \mathbf{z}_\eta),$$

$$(\lambda_\eta, \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta^{n+1}) = 0.$$

▷ Argument de dualité basé sur le problème de Stokes rétrograde

(S_{ret}):

(S_{ret})

$$\frac{1}{\Delta t}(\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^n) + \nu \Delta \mathbf{w}^n - \nabla \lambda^n = \mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n),$$

$$\operatorname{div} \mathbf{w}^n = 0, \mathbf{w}^n|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \mathbf{w}^{N+1} = \mathbf{0}.$$

Problème de Stokes rétrograde

Estimations a priori:

- " $L_t^\infty(L_x^2)$ ", " $L_t^2(H_x^1)$ " et $\left(\sum_{n=0}^N \Delta t \left\| \frac{\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{1/2}$ majorées

par: $\left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|v_\eta^n - v(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{1/2}$.

- (S_{ret}) pb de Stokes stationnaire avec second membre $\frac{\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^n}{\Delta t} + (\mathbf{v}(t^n) - \mathbf{v}_\eta^n)$. Quand Ω convexe, $\mathbf{w}^n \in H^2(\Omega)^2$, $\lambda^n \in H^1(\Omega)$ et

$$\left(\sum_{n=0}^N \Delta t (|\mathbf{w}^n|_{H^2(\Omega)}^2 + |\lambda^n|_{H^1(\Omega)}^2)\right)^{1/2} \leq C \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|v_\eta^n - v(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{1/2}.$$

Estimation $L^2(\Omega \times]0, T])^2$

Théorème 2: H.A, V.Girault, T.Sayah

Si Ω convexe, $\mathbf{g} \in L^2_{t,x}$, $\mathbf{g}' \in L^2_t(H_x^{-1})$ et $\mathbf{g}(0) \in L^2(\Omega)^2$, alors $\exists C$ t.q

$$\left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^2 + \Delta t).$$

Idées de la preuve: Prendre $\sum_{n=0}^N \Delta t ((S_{ret}), \mathbf{e}^n)$ où $\mathbf{e}^n = \mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n)$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} (\mathbf{w}^{n+1}, \mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n+1}) - \nu \sum_{n=0}^N \Delta t (\nabla \mathbf{w}^n, \nabla \mathbf{e}^n) \\ &\quad + \sum_{n=0}^N \Delta t (\lambda^n - r_\eta \lambda^n, \operatorname{div} \mathbf{e}^n) \end{aligned}$$

Résultat de superconvergence

Rappel du but: Estimation d'ordre 2 en norme L^2 de $\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n)$: une contribution **linéaire** et une autre **non-linéaire**:

▷ **Linéaire** $\|\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})\|_{L^2(\Omega)}$ estimée d'après le Théorème 2 avec $\mathbf{g}^{n+1} = \mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1})$.

▷ Superconvergence: H.A, V.Girault, T.Sayah

Pour la **non-linéaire** $\|\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}_\eta^{n+1}\|$:

" $L_t^\infty(L_x^2)$ " et " $L_t^2(H_x^1)$ " sont en $O(\eta^2 + \Delta t)$.

$$\Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|\mathbf{u}(t^n) - \mathbf{u}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^2 + \Delta t),$$

où C est une constante indépendante de η et Δt

Résultat de superconvergence

Rappel du but: Estimation d'ordre 2 en norme L^2 de $\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n)$: une contribution **linéaire** et une autre **non-linéaire**:

▷ **Linéaire** $\|\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})\|_{L^2(\Omega)}$ estimée d'après le Théorème 2 avec $\mathbf{g}^{n+1} = \mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1})$.

▷ Superconvergence: H.A, V.Girault, T.Sayah

Pour la **non-linéaire** $\|\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}_\eta^{n+1}\|$:

" $L_t^\infty(L_x^2)$ " et " $L_t^2(H_x^1)$ " sont en $O(\eta^2 + \Delta t)$.

$$\Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|\mathbf{u}(t^n) - \mathbf{u}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^2 + \Delta t),$$

où C est une constante indépendante de η et Δt

Résultat de superconvergence

Rappel du but: Estimation d'ordre 2 en norme L^2 de $\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n)$: une contribution **linéaire** et une autre **non-linéaire**:

▷ **Linéaire** $\|\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})\|_{L^2(\Omega)}$ estimée d'après le Théorème 2 avec $\mathbf{g}^{n+1} = \mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1})$.

▷ Superconvergence: H.A, V.Girault, T.Sayah

Pour la **non-linéaire** $\|\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}_\eta^{n+1}\|$:

" $L_t^\infty(L_x^2)$ " et " $L_t^2(H_x^1)$ " sont en $O(\eta^2 + \Delta t)$.

$$\Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|\mathbf{u}(t^n) - \mathbf{u}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^2 + \Delta t),$$

où C est une constante indépendante de η et Δt .

Estimation d'erreur de la pression



$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| p_\eta^{n+1} - r_\eta p(t^{n+1}) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\beta^*} \left\{ C_1(\eta + \Delta t) + S_2 \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \frac{(u_\eta^{n+1} - u(t^{n+1})) - (u_\eta^n - u(t^n))}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \right\}$$

▷ Hyp. de régularité suppl. $\mathcal{T}_\eta : \rho_{\min} \geq \tilde{\tau} \eta^5$, où $\rho_{\min} = \inf_{\kappa \in \mathcal{T}_\eta} \rho_\kappa$.

$$\Rightarrow \sup_n |u_\eta^n|_{W^{1,5/2}(\Omega)} \leq C$$

$$\Rightarrow (\dots)_*^{1/2} \leq C(\eta + \sqrt{\Delta t}).$$

D'où

$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| p(t^{n+1}) - p_\eta^{n+1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta + \sqrt{\Delta t}).$$

Estimation d'erreur de la pression



$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| p_{\eta}^{n+1} - r_{\eta} p(t^{n+1}) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\beta^*} \left\{ C_1(\eta + \Delta t) + S_2 \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \frac{(u_{\eta}^{n+1} - u(t^{n+1})) - (u_{\eta}^n - u(t^n))}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \right\}$$

▷ Hyp. de régularité suppl. $\mathcal{T}_{\eta} : \rho_{\min} \geq \tilde{\tau} \eta^5$, où $\rho_{\min} = \inf_{\kappa \in \mathcal{T}_{\eta}} \rho_{\kappa}$.

$$\Rightarrow \sup_n |u_{\eta}^n|_{W^{1,5/2}(\Omega)} \leq C$$

$$\Rightarrow (\dots)^{1/2} \leq C(\eta + \sqrt{\Delta t}).$$

D'où

$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| p(t^{n+1}) - p_{\eta}^{n+1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta + \sqrt{\Delta t}).$$

Estimation d'erreur de la pression



$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| p_\eta^{n+1} - r_\eta p(t^{n+1}) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\beta_\star} \left\{ C_1(\eta + \Delta t) + S_2 \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \frac{(u_\eta^{n+1} - u(t^{n+1})) - (u_\eta^n - u(t^n))}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)_\star^{1/2} \right\}$$

▷ Hyp. de régularité suppl. $\mathcal{T}_\eta : \rho_{\min} \geq \tilde{\tau} \eta^5$, où $\rho_{\min} = \inf_{\kappa \in \mathcal{T}_\eta} \rho_\kappa$.

$$\Rightarrow \sup_n |u_\eta^n|_{W^{1,5/2}(\Omega)} \leq C$$

$$\Rightarrow (\dots)_\star^{1/2} \leq C(\eta + \sqrt{\Delta t}).$$

D'où

$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| p(t^{n+1}) - p_\eta^{n+1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta + \sqrt{\Delta t}).$$

Estimation d'erreur de la pression



$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| p_\eta^{n+1} - r_\eta p(t^{n+1}) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\beta_\star} \left\{ C_1(\eta + \Delta t) + S_2 \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \frac{(u_\eta^{n+1} - u(t^{n+1})) - (u_\eta^n - u(t^n))}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)_\star^{1/2} \right\}$$

▷ Hyp. de régularité suppl. $\mathcal{T}_\eta : \rho_{\min} \geq \tilde{\tau} \eta^5$, où $\rho_{\min} = \inf_{\kappa \in \mathcal{T}_\eta} \rho_\kappa$.

$$\Rightarrow \sup_n |u_\eta^n|_{W^{1,5/2}(\Omega)} \leq C$$

$$\Rightarrow (\dots)_\star^{1/2} \leq C(\eta + \sqrt{\Delta t}).$$

D'où

$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| p(t^{n+1}) - p_\eta^{n+1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta + \sqrt{\Delta t}).$$

Estimation d'erreur de la vitesse fine

Théorème 3: H.A, V.Girault, T.Sayah

Si $\mathbf{u} \in L_t^\infty(H_x^1) \cap L_t^2(H_x^2) \cap C_t^0(W_s^{1,4})$, $\mathbf{u}' \in L_t^2(H_x^1)$, $p \in L_t^\infty(H_x^1)$,
 $p' \in L_{t,x}^2$, $\mathbf{f} \in L_{t,x}^2$, $\mathbf{f}' \in L_t^2(H_x^{-1})$, $\mathbf{f}(0) \in L^2(\Omega)^2$, Ω convexe et si Δt
 suffisamment petit, alors l'unique solution de (7) satisfait l'estimation

$$\sup_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n)\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
 + \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|(\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n))\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(H^2 + h + \Delta t),$$

Estimation d'erreur de la pression fine

Théorème 4: H.A, V.Girault, T.Sayah

$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|p(t^{n+1}) - p_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(h + H^2 + \Delta t),$$

Sous l'hypothèse: $\exists \alpha'$ et $\gamma' > 0$ indépendantes de Δt et H t.q

$$\alpha' H^2 \leq h \leq \gamma' H^2, \quad (12)$$

alors

Ordre 1

$$\left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|p(t^{n+1}) - p_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq Ch.$$

Estimation d'erreur de la pression fine

Théorème 4: H.A, V.Girault, T.Sayah

$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|p(t^{n+1}) - p_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(h + H^2 + \Delta t),$$

Sous l'hypothèse: $\exists \alpha'$ et $\gamma' > 0$ indépendantes de Δt et H t.q

$$\alpha' H^2 \leq h \leq \gamma' H^2, \quad (12)$$

alors

Ordre 1

$$\left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|p(t^{n+1}) - p_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq Ch.$$

Plan

- 1 Motivation
- 2 Présentation du problème & Technique à deux grilles
 - Problème de Navier-Stokes (N-S)
 - Existence, unicité et régularité de la solution
 - Historique & Idées des schémas à deux grilles
- 3 **Schéma d'ordre 1 en temps**
 - Schéma à deux grilles d'ordre un
 - Étude théorique
 - **Étude numérique**
- 4 Schéma d'ordre 2 en temps
 - Schéma à deux grilles d'ordre deux
 - Étude théorique
 - Étude numérique
- 5 Conclusion & perspectives

Implémentation numérique

▷ Avec FreeFem++

▷ En imposant $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, x, y)$, on trouve

$(\mathbf{u}(t, x, y), p(t, x, y)) = (\text{rot } \psi(t, x, y), p(t, x, y))$ avec:

$\psi = te^{-t^2(x+y)}y^2(1-y)^2 \sin^2(\pi x)$, $p = te^{-t} \cos(2\pi x) \sin(2\pi y)$.

▷ 2 résolutions 2G:

- ① G.F: $\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1} + \frac{1}{2} \text{div } \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{u}_h^{n+1}$
- ② G.F: méthode des caractéristiques

Implémentation numérique

▷ Avec FreeFem++

▷ En imposant $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, x, y)$, on trouve

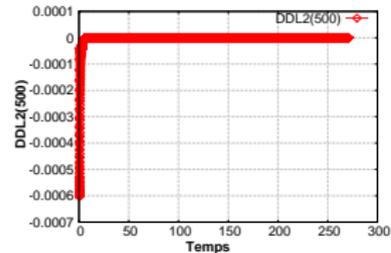
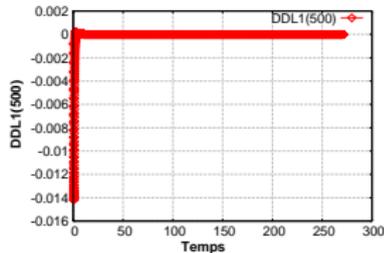
$(\mathbf{u}(t, x, y), p(t, x, y)) = (\text{rot } \psi(t, x, y), p(t, x, y))$ avec:

$$\psi = te^{-t^2(x+y)}y^2(1-y)^2 \sin^2(\pi x), \quad p = te^{-t} \cos(2\pi x) \sin(2\pi y).$$

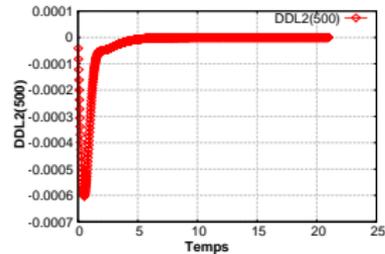
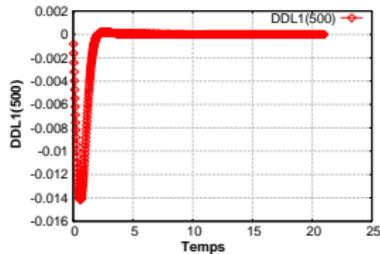
▷ 2 résolutions 2G:

- ① G.F: $\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1} + \frac{1}{2} \text{div } \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{u}_h^{n+1}$
- ② G.F: méthode des caractéristiques

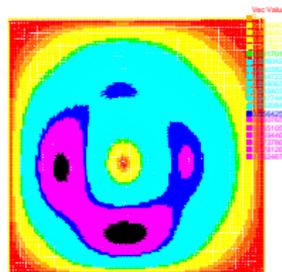
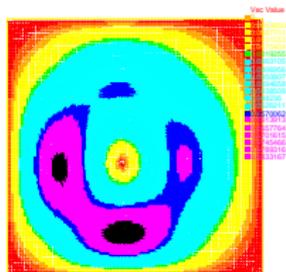
Stabilité par rapport au temps



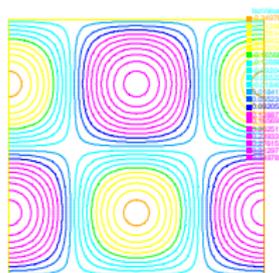
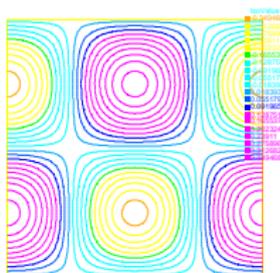
Stabilité par rapport au temps



Comparaison exacte et numérique



Comparaison exacte et numérique



Comparaison en temps de calcul

$N_g \times N_g$ points	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9
t_{1G} (en sec.)	85.63	236.46	597.94	1475.75	3265.38
$1^\circ t_{2G}$ (en sec.)	86.54	233.16	576.89	1403.93	3083.30
$\frac{ t_{2G}-t_{1G} }{t_{1G}}$ (en %)	*	1.39	3.52	4.86	5.57
$2^\circ t_{2G}$ (en sec.)	59.05	138.844	409.047	1061.16	2448.34
$\frac{ t_{2G}-t_{1G} }{t_{1G}}$ (en %)	45	41.2	31.5	28.09	25.02

Table: Comparaison en temps CPU des 2 schémas d'ordre 1 en temps.

Plan

- 1 Motivation
- 2 Présentation du problème & Technique à deux grilles
 - Problème de Navier-Stokes (N-S)
 - Existence, unicité et régularité de la solution
 - Historique & Idées des schémas à deux grilles
- 3 Schéma d'ordre 1 en temps
 - Schéma à deux grilles d'ordre un
 - Étude théorique
 - Étude numérique
- 4 Schéma d'ordre 2 en temps
 - Schéma à deux grilles d'ordre deux
 - Étude théorique
 - Étude numérique
- 5 Conclusion & perspectives

Grille Grossière

$$\frac{1}{2\Delta t}(3\mathbf{u}_H^{n+1} - 4\mathbf{u}_H^n + \mathbf{u}_H^{n-1}, \mathbf{v}_H) + \nu(\nabla \mathbf{u}_H^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_H) - (p_H^{n+1}, \operatorname{div} \mathbf{v}_H) + (\mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_H^{n+1}, \mathbf{v}_H) + \frac{1}{2}(\operatorname{div} \mathbf{u}_H^{n+1}, \mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \mathbf{v}_H) = \langle \mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v}_H \rangle,$$

$$(q_H, \operatorname{div} \mathbf{u}_H^{n+1}) = 0.$$

(13)

Grille Fine

$$\frac{1}{2\Delta t}(3\mathbf{u}_h^{n+1} - 4\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h) + \nu(\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_h) + (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) - (p_h^{n+1}, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) = \langle \mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v}_h \rangle,$$

(14)

$$(q_h, \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n+1}) = 0.$$

avec $\mathbf{u}_H^0 = \mathbf{u}_h^0 = \mathbf{0}$, \mathbf{u}_H^1 et \mathbf{u}_h^1 obtenus par une itération du schéma d'Euler en temps: erreur est donc en $O(\Delta t^2)$.

Grille Grossière

$$\frac{1}{2\Delta t}(3\mathbf{u}_H^{n+1} - 4\mathbf{u}_H^n + \mathbf{u}_H^{n-1}, \mathbf{v}_H) + \nu(\nabla\mathbf{u}_H^{n+1}, \nabla\mathbf{v}_H) - (p_H^{n+1}, \operatorname{div}\mathbf{v}_H) + (\mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla\mathbf{u}_H^{n+1}, \mathbf{v}_H) + \frac{1}{2}(\operatorname{div}\mathbf{u}_H^{n+1}, \mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \mathbf{v}_H) = \langle \mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v}_H \rangle,$$

$$(q_H, \operatorname{div}\mathbf{u}_H^{n+1}) = 0.$$

(13)

Grille Fine

$$\frac{1}{2\Delta t}(3\mathbf{u}_h^{n+1} - 4\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h) + \nu(\nabla\mathbf{u}_h^{n+1}, \nabla\mathbf{v}_h) + (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) - (p_h^{n+1}, \operatorname{div}\mathbf{v}_h) = \langle \mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v}_h \rangle,$$

(14)

$$(q_h, \operatorname{div}\mathbf{u}_h^{n+1}) = 0.$$

avec $\mathbf{u}_H^0 = \mathbf{u}_h^0 = \mathbf{0}$, \mathbf{u}_H^1 et \mathbf{u}_h^1 obtenus par une itération du schéma d'Euler en temps: erreur est donc en $O(\Delta t^2)$.

Espaces des E.F & Condition inf-sup

E.F Taylor-Hood: $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$



Espaces des E.F:

$$X_\eta = \{ \mathbf{v}_\eta \in C^0(\overline{\Omega})^2; \forall \kappa \in \mathcal{T}_\eta, \mathbf{v}_\eta|_\kappa \in \mathbb{P}_2, \mathbf{v}_\eta|_{\partial\Omega} = \mathbf{0} \} \text{ et}$$

$$M_\eta = \left\{ q_\eta \in C^0(\overline{\Omega}); \forall \kappa \in \mathcal{T}_\eta, q_\eta|_\kappa \in \mathbb{P}_1, \int_\Omega q_\eta dx = 0 \right\}.$$

Plan

- 1 Motivation
- 2 Présentation du problème & Technique à deux grilles
 - Problème de Navier-Stokes (N-S)
 - Existence, unicité et régularité de la solution
 - Historique & Idées des schémas à deux grilles
- 3 Schéma d'ordre 1 en temps
 - Schéma à deux grilles d'ordre un
 - Étude théorique
 - Étude numérique
- 4 Schéma d'ordre 2 en temps
 - Schéma à deux grilles d'ordre deux
 - **Étude théorique**
 - Étude numérique
- 5 Conclusion & perspectives

Erreur de base de (N-S)

Théorème 5: Si $\mathbf{u} \in L_t^2(H_x^3)$, $\mathbf{u}' \in L_t^2(H_x^2)$, $\mathbf{u}^{(3)} \in L_{t,x}^2$ et $p \in L_t^2(H_x^2)$, il existe C et $k_0 > 0$, indép. de η et Δt t.q, pour tout $\Delta t \leq k_0$,

$$\sup_{1 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n)\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{n=1}^{N-1} \|\delta^2(\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n))\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^2 + (\Delta t)^2).$$

avec

$$\delta^2 a^n = a^{n+1} - 2a^n + a^{n-1}.$$

Quelques estimations de (S)

(S) discrétisé

$$\frac{1}{2\Delta t}(3\mathbf{v}_\eta^{n+1} - 4\mathbf{v}_\eta^n + \mathbf{v}_\eta^{n-1}, \mathbf{z}_\eta) + \nu(\nabla\mathbf{v}_\eta^{n+1}, \nabla\mathbf{z}_\eta) - (q_\eta^{n+1}, \operatorname{div} \mathbf{z}_\eta) = (\mathbf{g}^{n+1}, \mathbf{z}_\eta),$$

$$(\lambda_\eta, \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta^{n+1}) = 0.$$

▷ Argument de dualité basé sur le problème de Stokes rétrograde (S_{ret}):

(S_{ret})

$$-\frac{\mathbf{w}^{n+1} - 4\mathbf{w}^n + 3\mathbf{w}^{n-1}}{2\Delta t} + \nu\Delta\mathbf{w}^{n-1} - \nabla\lambda^{n-1} = \mathbf{v}_\eta^{n-1} - \mathbf{v}(t^{n-1}),$$

$$\operatorname{div} \mathbf{w}^{n-1} = 0, \mathbf{w}^{n-1}|_{\partial\Omega} = 0, \mathbf{w}^{N+1} = \mathbf{w}^N = 0.$$

Problème de Stokes rétrograde

Estimations a priori:

- " $L_t^\infty(L_x^2)$ ", " $L_t^2(H_x^1)$ " et $\left(\sum_{n=0}^N \Delta t \left\| \frac{\mathbf{w}^{n+1} - 4\mathbf{w}^n + 3\mathbf{w}^{n-1}}{2\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$

majorées par $\left(\sum_{n=1}^N \Delta t \left\| \mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$.

- (S_{ret}) pb de Stokes stationnaire avec second membre $\mathbf{v}(t^{n-1}) - \mathbf{v}_\eta^{n-1} - (\mathbf{w}^{n+1} - 4\mathbf{w}^n + 3\mathbf{w}^{n-1})/2\Delta t$. Quand Ω convexe, $\mathbf{w}^n \in H^2(\Omega)^2$, $\lambda^n \in H^1(\Omega)$ et

$$\left(\sum_{n=0}^N \Delta t (|\mathbf{w}^n|_{H^2(\Omega)}^2 + |\lambda^n|_{H^1(\Omega)}^2) \right)^{1/2} \leq C \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \left\| \mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Estimation $L^2(\Omega \times]0, T[)^2$

Ces estimations permettent de déduire

Théorème 6: H.A, V.Girault, T.Sayah

Si Ω est convexe, $\mathbf{g} \in L^2_{t,x}$, $\mathbf{v} \in L^2_t(H^3_x)$, $\mathbf{q} \in L^2_t(H^2_x)$ et $\mathbf{v}' \in L^2_t(H^2_x)$
alors il existe C t.q

$$\left(\sum_{n=1}^N \Delta t \|\mathbf{v}_\eta^{n-1} - \mathbf{v}(t^{n-1})\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^3 + (\Delta t)^2 + \eta(\Delta t)^2).$$

Rappel du but: Estimation d'ordre 2 en norme L^2 de $\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n)$: une contribution **linéaire** et une autre **non-linéaire**:

▷ **Linéaire** $\|\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})\|_{L^2(\Omega)}$ estimée d'après le Théorème 6
avec $\mathbf{g}^{n+1} = \mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1})$.

Estimation $L^2(\Omega \times]0, T[)^2$

Ces estimations permettent de déduire

Théorème 6: H.A, V.Girault, T.Sayah

Si Ω est convexe, $\mathbf{g} \in L^2_{t,x}$, $\mathbf{v} \in L^2_t(H^3_x)$, $q \in L^2_t(H^2_x)$ et $\mathbf{v}' \in L^2_t(H^2_x)$ alors il existe C t.q

$$\left(\sum_{n=1}^N \Delta t \|\mathbf{v}_\eta^{n-1} - \mathbf{v}(t^{n-1})\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^3 + (\Delta t)^2 + \eta(\Delta t)^2).$$

Rappel du but: Estimation d'ordre 2 en norme L^2 de $\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n)$: une contribution **linéaire** et une autre **non-linéaire**:

▷ **Linéaire** $\|\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})\|_{L^2(\Omega)}$ estimée d'après le Théorème 6 avec $\mathbf{g}^{n+1} = \mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1})$.

Résultat de superconvergence

▷ Superconvergence: H.A, V.Girault, T.Sayah

Pour la **non-linéaire** $\|\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}_\eta^{n+1}\|$:

" $L_t^\infty(L_x^2)$ " et " $L_t^2(H_x^1)$ " sont en $O(\eta^3 + (\Delta t)^2 + \eta(\Delta t)^2)$.

$$\Rightarrow \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{u}(t^n) - \mathbf{u}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^3 + (\Delta t)^2),$$

où C est une constante indépendante de η et Δt .

Et

$$\left(\sum_{n=1}^N \Delta t \|\rho(t^{n+1}) - \rho_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^2 + (\Delta t)^{3/2} + \frac{\eta^3}{\sqrt{\Delta t}}).$$

Résultat de superconvergence

▷ Superconvergence: H.A, V.Girault, T.Sayah

Pour la **non-linéaire** $\|\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}_\eta^{n+1}\|$:

" $L_t^\infty(L_x^2)$ " et " $L_t^2(H_x^1)$ " sont en $O(\eta^3 + (\Delta t)^2 + \eta(\Delta t)^2)$.

$$\Rightarrow \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{u}(t^n) - \mathbf{u}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^3 + (\Delta t)^2),$$

où C est une constante indépendante de η et Δt .

Et

$$\left(\sum_{n=1}^N \Delta t \|\rho(t^{n+1}) - \rho_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^2 + (\Delta t)^{3/2} + \frac{\eta^3}{\sqrt{\Delta t}}).$$

Estimation d'erreur de la vitesse fine

Théorème 7: H.A, V.Girault, T.Sayah

Si Δt suffisamment petit, l'unique solution de (14) satisfait l'estimation

$$\begin{aligned} & \sup_{1 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n)\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{n=1}^{N-1} \|\delta^2(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n))\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ & + \sup_{1 \leq n \leq N} \left\| 2(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n)) - (\mathbf{u}_h^{n-1} - \mathbf{u}(t^{n-1})) \right\|_{L^2(\Omega)} \\ & + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=1}^N \Delta t \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n)\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(H^3 + h^2 + (\Delta t)^2). \end{aligned}$$

Estimation d'erreur de la pression fine

Théorème 8: H.A, V.Girault, T.Sayah

$$\left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|p(t^{n+1}) - p_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(h^2 + H^3 + (\Delta t)^2).$$

Sous l'hypothèse: $\exists \alpha'$ et $\gamma' > 0$ indépendantes de Δt et H t.q

$$\alpha' H^3 \leq (\Delta t)^2 \sim h^2 \leq \gamma' H^3, \quad (15)$$

alors

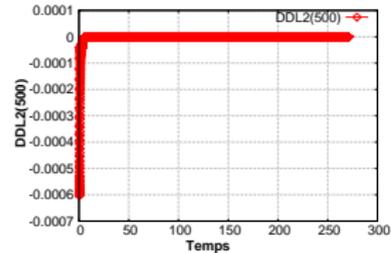
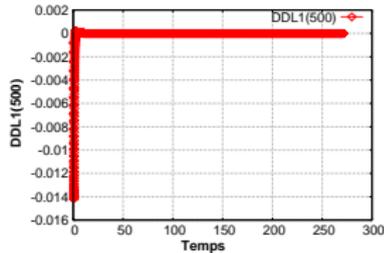
Ordre 2

$$\left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|p(t^{n+1}) - p_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq Ch^2.$$

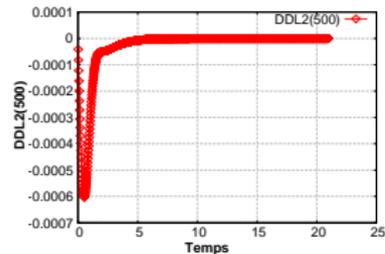
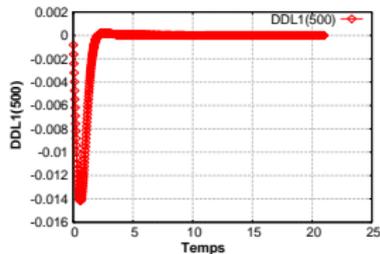
Plan

- 1 Motivation
- 2 Présentation du problème & Technique à deux grilles
 - Problème de Navier-Stokes (N-S)
 - Existence, unicité et régularité de la solution
 - Historique & Idées des schémas à deux grilles
- 3 Schéma d'ordre 1 en temps
 - Schéma à deux grilles d'ordre un
 - Étude théorique
 - Étude numérique
- 4 Schéma d'ordre 2 en temps
 - Schéma à deux grilles d'ordre deux
 - Étude théorique
 - Étude numérique
- 5 Conclusion & perspectives

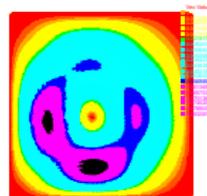
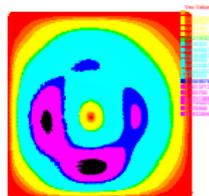
Stabilité par rapport au temps



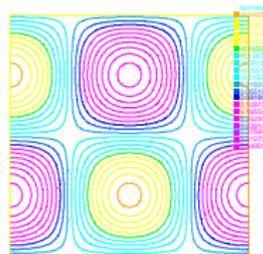
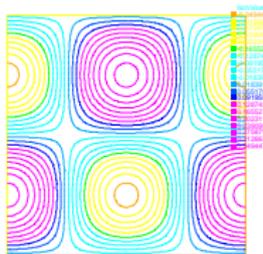
Stabilité par rapport au temps



Comparaison vitesse exacte et numérique



Comparaison pression exacte et numérique

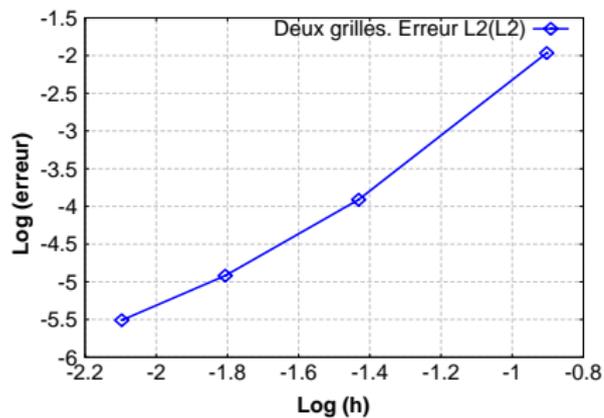


Ordre de convergence

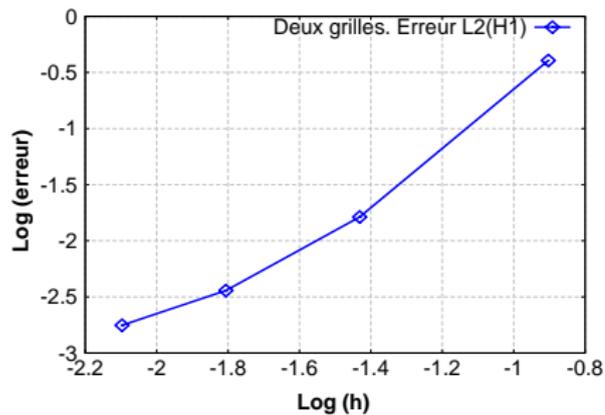
$N_g = 4, 9, 16$ et 25 avec $N_f^2 = N_g^3$, $T = 1$ et $nbiter = T \times N_f$.

mailles	N_f	L^2	H^1	L^2 pression
$H = 1/4, h = 1/8$	8	-1.9665	-.0392877	-1.91479
$H = 1/9, h = 1/27$	27	-3.91066	-1.78782	-2.99626
$H = 1/16, h = 1/64$	64	-4.91066	-2.44335	-3.74569
$H = 1/25, h = 1/125$	125	-5.50908	-2.75303	-4.32621

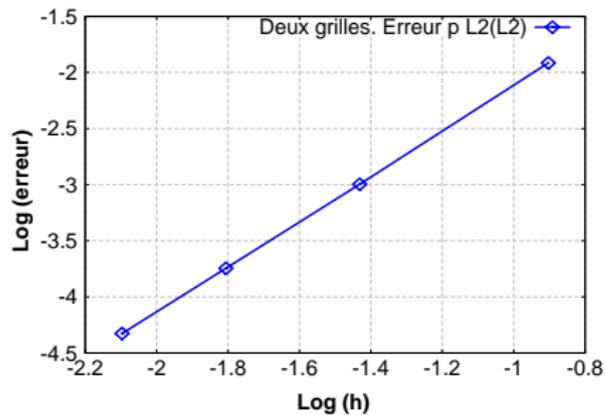
Ordre de convergence



Ordre de convergence



Ordre de convergence

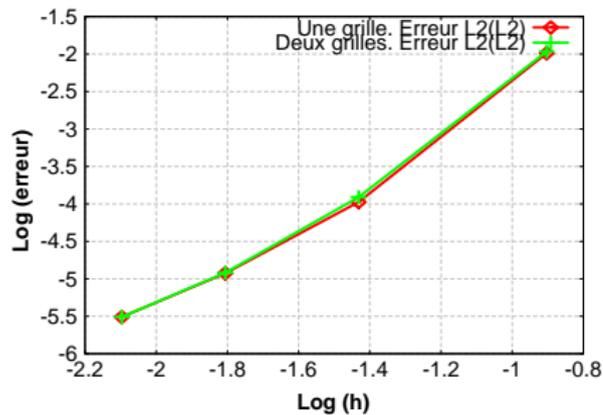


Comparaison en temps de calcul

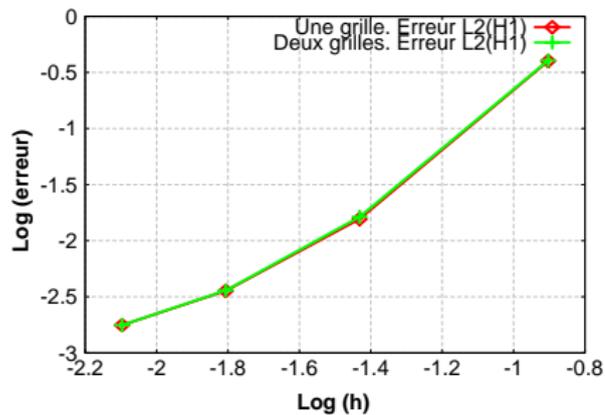
$N_f \times N_f$ points	8×8	27×27	64×64	125×125
t_{1G} en secondes	7.25	304.953	13346.01	363402.083
t_{2G} en secondes	4.89	196.25	7340.34	174433
$\frac{ t_{2G} - t_{1G} }{t_{1G}}$ (en %)	32.5	35.64	45	52

Table: Comparaison en temps de calcul CPU.

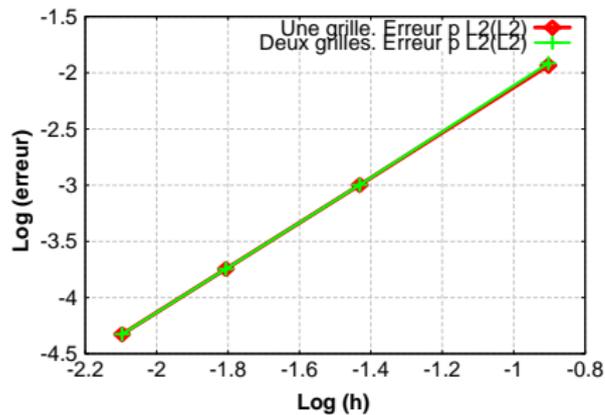
Comparaison $L^2_{t,x}$



Comparaison $L_t^2(H_x^1)$



Comparaison p $L^2_{t,x}$



Conclusion

- On a bien montré que si $h = H^2$ (resp. $h^2 = H^3$) et $\Delta t = h$ alors l'erreur finale du schéma à deux grilles est

$$\left(\sum_{n=1}^N \Delta t |u_h^{n+1} - u(t^{n+1})|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} = O(h) \text{ (resp. } O(h^2)\text{)}.$$

- La précision de la méthode sur la grille fine est la même que si le champ advectif est traité non linéairement.
- La comparaison en temps de calcul montre les potentialités de la technique à deux grilles.

Perspectives

- Schéma à deux grilles correspondant au problème implicite non anti-symétrisé, d'ordre un en temps.
- Analyse théorique des deux étapes grossière et fine intercalées.
- Application du concept à d'autres problèmes non-linéaires: aux systèmes dissipatifs non-linéaires (Kuramoto-Sivashinsky, Ginzburg-Landau, Cahn-Hilliard, Réaction-diffusion, Burgers, etc).
- Utilisation d'autres types d'éléments-finis: discontinus, l'élément fini de Crouzeix-Raviart, etc.

Perspectives

- Schéma à deux grilles correspondant au problème implicite non anti-symétrisé, d'ordre un en temps.
- Analyse théorique des deux étapes grossière et fine intercalées.
- Application du concept à d'autres problèmes non-linéaires: aux systèmes dissipatifs non-linéaires (Kuramoto-Sivashinsky, Ginzburg-Landau, Cahn-Hilliard, Réaction-diffusion, Burgers, etc).
- Utilisation d'autres types d'éléments-finis: discontinus, l'élément fini de Crouzeix-Raviart, etc.

Perspectives

- Schéma à deux grilles correspondant au problème implicite non anti-symétrisé, d'ordre un en temps.
- Analyse théorique des deux étapes grossière et fine intercalées.
- Application du concept à d'autres problèmes non-linéaires: aux systèmes dissipatifs non-linéaires (Kuramoto-Sivashinsky, Ginzburg-Landau, Cahn-Hilliard, Réaction-diffusion, Burgers, etc).
- Utilisation d'autres types d'éléments-finis: discontinus, l'élément fini de Crouzeix-Raviart, etc.

Perspectives

- Schéma à deux grilles correspondant au problème implicite non anti-symétrisé, d'ordre un en temps.
- Analyse théorique des deux étapes grossière et fine intercalées.
- Application du concept à d'autres problèmes non-linéaires: aux systèmes dissipatifs non-linéaires (Kuramoto-Sivashinsky, Ginzburg-Landau, Cahn-Hilliard, Réaction-diffusion, Burgers, etc).
- Utilisation d'autres types d'éléments-finis: discontinus, l'élément fini de Crouzeix-Raviart, etc.