



HAL
open science

Simulation de la propagation des fissures par fatigue dans les toiles des roues de train sous chargement à amplitude variable

Rami Hamam

► **To cite this version:**

Rami Hamam. Simulation de la propagation des fissures par fatigue dans les toiles des roues de train sous chargement à amplitude variable. Mécanique [physics.med-ph]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2006. Français. NNT: . tel-00133413

HAL Id: tel-00133413

<https://theses.hal.science/tel-00133413>

Submitted on 26 Feb 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ENSC-2006 n°7

THÈSE DE DOCTORAT
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

PRÉSENTÉE PAR

Monsieur Rami HAMAM

POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

DOMAINE :
Mécanique- Génie mécanique – Génie civil

SUJET DE LA THÈSE :

**Simulation de la propagation des fissures par fatigue dans les toiles des roues
de train sous chargement à amplitude variable**

Thèse présentée et soutenue à Cachan le 6 octobre 2006 devant le jury composé de :

Suzanne Degallaix	Professeure à l'École Centrale de Lille	Rapporteuse
Véronique Doquet	Chargée de Recherche à l'École Polytechnique	Rapporteuse
Frédéric Bumbieler	Ingénieur R&D (SNCF)	Examineur
Alain Combescure	Professeur à l'INSA de Lyon	Examineur
André Pineau	Professeur à l'École des Mines de Paris	Président
Sylvie Pommier	Professeure à l'ENS de Cachan	Directrice de thèse

Laboratoire de Mécanique et Technologie
ENS CACHAN/CNRS/UMR 8535
61, avenue du Président Wilson, 94235 CACHAN CEDEX (France)

« ...Je marche éternellement sur ces rivages entre le sable et l'écume. Le flux de la marée effacera l'empreinte de mes pas et le vent emportera l'écume. Mais la mer et le rivage demeureront éternellement... »

Khalil Gibran (Le sable et l'écume)

Remerciements

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Mécanique et Technologie (LMT) de L'École Normale Supérieure de Cachan dans le cadre d'une thèse CIFRE en partenariat avec l'Agence d'Essai Ferroviaire (AEF) de la SNCF.

Je commence par remercier Frédéric Bumbieler pour m'avoir permis de faire cette thèse. Quelques phrases ne suffisent pas pour te remercier pour la confiance que tu m'as accordée, la marge de liberté que tu m'as laissée, tes capacités d'écoute et ton rôle de guide au cours de ces 3 années.

Ensuite, je remercie tout particulièrement Sylvie Pommier qui m'a encadré tout au long de l'étude. Sylvie, tu as toujours été là pour m'aider à chaque fois que tu le pouvais. J'ai eu beaucoup de plaisir de travailler avec toi grâce à ta disponibilité, ton implication dans le travail, tes compétences techniques et ta bonne humeur.

J'adresse toute ma reconnaissance aux membres du jury, en particulier, André Pineau pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury ainsi que pour l'échange passionnant qu'on a eu avant la soutenance ; Suzanne Degallaix et Véronique Doquet pour avoir accepté la lourde tâche de rapporter le manuscrit et Alain Combescure pour avoir accepté d'examiner le travail.

Je souhaite également témoigner ma gratitude à l'ensemble des membres du LMT et de l'AEF, amis, collègues et tous ceux qui ont contribué à l'aboutissement du travail et ceux que j'ai côtoyé et connu pendant ces trois années.

Je n'oublie pas les stagiaires de Master II, Julien Chemouni et Peter Jankovic, que j'ai eu la chance d'encadrer et qui ont contribué à l'avancée du travail.

Je tiens également à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé à faire les pré-soutenances et à rendre ma présentation compréhensible : Pierre Alain Boucard, François Hild, Juan Ruiz, Rodrigue Demosrat, Joumana Yammine, Alexandre Kane, Nicolas Malesys et Sébastien Vincent.

Et finalement je remercie chaleureusement Anne-Sophie ainsi que ma famille qui m'ont toujours soutenu pendant ces trois années.

Table des matières

Table des matières.....	1
Table des figures et des tableaux.....	5
Notations.....	13
Introduction.....	17
Chapitre 1 Bibliographie générale.....	21
1.1 La roue de train	23
1.1.1 La roue, ses fonctions et sa fabrication	23
1.1.2 Le chargement de la roue	25
1.1.3 La fissuration de la roue	30
1.1.4 La maintenance de la roue et objectifs de la thèse.....	30
1.2 Eléments de mécanique de la rupture.....	32
1.2.1 Modes de fissuration et champs de contrainte autour d'une fissure en mode I	32
1.2.2 Limites de validité des champs présentés	33
1.2.2.1 Taille de zone plastique	34
1.2.2.2 Limite du développement asymptotique.....	35
1.2.3 Propagation des fissures par fatigue	36
1.2.4 Limites de la démarche classique.....	39
1.3 Bilan du Chapitre 1	39
Chapitre 2 Le modèle de fissuration par fatigue sous amplitude variable.....	41
2.1 L'amplitude variable dans les toiles des roues	43
2.2 Bibliographie : la fissuration sous chargement d'amplitude variable.....	44
2.2.1 Effet du chargement à amplitude variable sur la fissuration.....	44
2.2.1.1 Cas de surcharges unitaires	44
2.2.1.2 Chargement par blocs.....	46
2.2.2 La modélisation de la fissuration sous chargement d'amplitude variable	47
2.3 Le modèle incrémental de propagation	51
2.3.1 Présentation du modèle	51
2.3.2 Etude des champs de déplacements en pointe de fissure.....	52
2.3.2.1 Hypothèse de projection du champ de déplacement.....	52
2.3.2.2 Décomposition de Karhunen-Loeve.....	53
2.3.2.3 Hypothèse de projection du champ de déplacement retenue.....	56

2.3.2.4	Vérification par Eléments Finis.....	57
2.3.2.5	Interprétation	60
2.3.3	Equations d'évolution du modèle	62
2.3.3.1	Loi de fissuration.....	62
2.3.3.2	Loi d'émoussement (sans compression)	65
2.3.4	Méthode d'implémentation.....	85
2.3.5	Méthode d'identification	88
2.4	Identification des paramètres de la loi pour l'acier à roue	89
2.4.1	Identification du comportement élastoplastique	89
2.4.2	Identification des paramètres de la loi d'émoussement	93
2.4.3	Identification du paramètre de la loi de fissuration.....	95
2.5	Confrontation essais calculs	97
2.6	Etude de sensibilité.....	102
2.7	Bilan du Chapitre 2	107
Chapitre 3 Enrichissement du modèle.....		109
3.1	Effet des phases de fermeture de la fissure.....	111
3.1.1	Position du problème.....	111
3.1.2	Bibliographie sur l'effet des phases de compression sur la fissuration.....	112
3.1.3	Essais réalisés	114
3.1.4	Etude et modélisation de l'effet des phases de fermeture de la fissure.....	117
3.1.4.1	Etude de l'effet des phases de fermeture par Eléments Finis.....	117
3.1.4.2	Modélisation de l'effet des phases de fermeture.....	123
3.1.4.3	Confrontation des simulations et des essais.....	125
3.2	Etude de l'effet de la biaxialité du chargement.....	126
3.2.1	Problème.....	126
3.2.2	Biaxialité et fissuration par fatigue, étude bibliographique.....	127
3.2.2.1	Définitions.....	127
3.2.2.2	Influence de T sur la taille de la zone plastique	127
3.2.2.3	Influence de T sur le chemin de propagation	128
3.2.2.4	Influence de T sur la vitesse de propagation.....	129
3.2.2.5	Evolution de la contrainte T dans quelques éprouvettes	134
3.2.2.6	Modèles tenant compte de T.....	134
3.2.3	Essais réalisés : tentatives, échecs et succès.....	135
3.2.4	Etude par Eléments Finis de l'effet de la contrainte T.....	139
3.2.4.1	Effet de la longueur de la fissure sur T.....	140
3.2.4.2	Sensibilité du seuil d'émoussement à T.....	144
3.2.5	Identification du modèle	154
3.2.6	Confrontations essais/simulations.....	157
3.3	Bilan du Chapitre 3	160
Chapitre 4 Application en 3D.....		161
4.1	Position du problème	163
4.2	Bibliographie.....	165
4.2.1	Champs asymptotiques pour une fissure semi-elliptique.....	165
4.2.2	Le passage 2D-3D	166
4.3	Essais de validation.....	168
4.3.1	Essais sur éprouvettes.....	169
4.3.2	Essais sur roue à l'échelle 1	171
4.4	Méthode de modélisation de la fissure semi elliptique	174

4.5	Confrontation essais simulations.....	175
4.6	Bilan du Chapitre 4.....	181
	Conclusion et perspectives.....	183
	Bibliographie.....	185
	Annexe A Plan de prélèvement des éprouvettes et expressions d'évolution de K et T....	193
	Annexe B Méthodes de calcul de K.....	201
	Annexe C Equations d'implémentation du modèle incrémental.....	209
	Annexe D Calcul de l'éprouvette cruciforme.....	215
	Annexe E Calcul de K et T d'une fissure semi-elliptique en bi-traction et bi-flexion combinées.....	223
	Annexe F Articles.....	231

Table des figures

Figure du chapitre I

Figure 1-1. Les différentes parties de la roue et les différentes formes de toile	24
Figure 1-2. Les étapes de fabrication de la roue [Document Valdune].....	24
Figure 1-3. Cycle de traitement thermique appliqué à la roue (a), microstructure observée dans la toile (b) et comportement mécanique en traction simple dans la toile et la jante (c).....	25
Figure 1-4. Différents types de sollicitations externes appliquées à la roue	26
Figure 1-5. Evolution de la contrainte radiale et circonférentielle dans une toile droite obtenue par calcul par Elements Finis pour un tour de roue [Rapport interne AEF]	27
Figure 6. (a) Montage du train utilisé pour les mesures en lignes du chargement. (b) Photo de la roue instrumenté et des blocs d'aciers simulant le chargement. (c) vue à l'intérieur de la voiture de mesure.....	28
Figure 1-7. (a) composante radiale de la contrainte calculée à partir des mesures sur les faces internes et externes de la roue. (b) Evolution de la composante de traction-compression des composantes radiale, circonférentielle et de cisaillement de la contrainte dans la toile de roue. (c) Evolution de la composante de flexion des composantes radiale, circonférentielle et de cisaillement de la contrainte dans la toile de roue. Mesures réalisées pendant 5 tours de roue au niveau du raccordement toile moyeu d'une roue à toile ondulée.....	29
Figure 1-8. Forme type des fissures de fatigue rencontrées dans la toile.....	30
Figure 1-9. La future démarche de maintenance des roues	31
Figure 1-10. Les trois modes de fissuration	32
Figure 1-11. Fissure de Griffith en mode I soumise à un chargement biaxial	33
Figure 1-12. Différentes zones autour d'une fissure.....	33
Figure 1-13. Zone plastique monotone en contraintes planes et déformations planes (a), zone plastique cyclique (b) et estimation d'Irwin de la zone plastique monotone (c)	35
Figure 1-14. Influence des coefficients d'écrouissage isotrope b et Q sur la forme de la zone plastique monotone [Pommier 2002b].....	35
Figure 1-15. Evolution de l'erreur due au développement asymptotique sur le champ de contrainte σ_{yy} calculé dans l'axe de la fissure en fonction du rapport (r/a) sur l'axe.....	36
Figure 1-16. Evolution de l'erreur due au développement asymptotique sur le champ de contrainte σ_{xx} calculé dans l'axe de la fissure en fonction du rapport de biaxialité S_x/S_y pour $r/a=0.1$	36
Figure 1-17. Courbe de propagation de Paris	37
Figure 1-18. Sillage plastique (a) et phénomène de fermeture de la fissure par plasticité (b)	38
Figure 1-19. Détermination du niveau d'ouverture Kouvo par la méthode de complaisance.....	38

Figure du chapitre II

Figure 2-1. Exemple d'évolution de la contrainte radiale mesurée dans une toile ondulée au niveau du point le plus sollicité (raccordement toile moyeu). La vitesse du train est de 80 Km/h et le wagon est à vide en (a) et chargé en (b).....	44
Figure 2-2. Différentes réponses aux surcharges pour les fissures en fatigue [Bathias et Bailon 1997].....	45
Figure 2-3. Evolution du niveau d'ouverture après l'application d'une surcharge [Bathias et Bailon 1997].....	45
Figure 2-4. Evolution de la vitesse de propagation après application d'une surcharge.....	46
Figure 2-5. Evolution du niveau d'ouverture et de la longueur de la fissure pendant un chargement par blocs [Bathias et Bailon 1997].....	46
Figure 2-6. Exemples de durées de vie en fissuration par fatigue pour des blocs simples [Schijve 1973].....	47
Figure 2-7. Zones plastiques après surcharge [Wheeler 1972].....	48
Figure 2-8. Modèle de [Willenborg et al. 1971].....	49
Figure 2-9. Modèle de [Dugdale 1960].....	50
Figure 2-10. Zones plastiques après surcharge (d'après [Kim et Lee 2000]).....	51
Figure 2-11. Système de coordonnées autour de la fissure.....	52
Figure 2-12. (a) solution du calcul élastique par éléments finis de référence (b) premier mode, (c) second et (d) troisième modes de Karhunen-Loeve du calcul élasto-plastique.....	55
Figure 2-13. Carte d'erreur moyenne sur le temps (a) avec un seul mode et (b) avec deux modes.....	55
Figure 2-14. Coefficient temporel (a) du premier mode et (b) du second mode de Karhunen-Loeve du calcul élastoplastique en fonction du facteur d'intensité des contraintes nominal.....	56
Figure 2-15. Maillage utilisé pour les calculs de validation.....	58
Figure 2-16. Evolution du déplacement élastoplastique suivant y le long des faces de la fissure en fonction du déplacement élastique.....	58
Figure 2-17. Comparaison du déplacement U_y obtenu par l'équation (2-16) avec celui calculé par Eléments Finis le long des faces de la fissure.....	59
Figure 2-18. Comparaison du déplacement U_y obtenu par l'équation avec celui calculé par Eléments Finis sur un rayon de 1 mm autour de la fissure.....	59
Figure 2-19. Comparaison du déplacement U_x obtenu par l'équation avec celui calculé par Eléments Finis sur un rayon de 1 mm autour de la fissure.....	60
Figure 2-20. Evolution de K_I^{sb} avec l'émoussement plastique.....	61
Figure 2-21. (a) Allure des champs de déplacement, élastique $\underline{u}^e(\underline{x})$ et plastique $\underline{u}^p(\underline{x})$. (b) Comparaison de la partie plastique du champ de déplacement $\beta \underline{u}^e(\underline{x}) + \underline{u}^p(\underline{x})$ avec le second mode de Karhunen-Loeve. Composante U_y	62
Figure 2-22. Evolution du facteur d'intensité des contraintes nominal en fonction de l'émoussement plastique ρ calculé par la méthode des moindres carrés à partir des résultats d'un calcul par éléments finis.....	62
Figure 2-23. Stries de fatigue observées sur un faciès de rupture par fatigue (a) et mécanismes de propagation par émoussement et aiguisement de la pointe (b).....	63
Figure 2-24. Mécanisme de propagation par glissement.....	64
Figure 2-25. Schéma de principe de la relation entre pas de stries et vitesses de propagation [Nedbal et al. 1989].....	64
Figure 2-26. Evolution de l'émoussement plastique en fonction du facteur d'intensité des contraintes appliqué.....	66
Figure 2-27. Evolution expérimentale du CTOD avec le facteur d'intensité des contraintes pour un chargement variable de gauche [Masahiro 2004].....	67

Figure 2-28. Evolution de la partie elastique et plastique du COD en fonction du chargement appliqué [Richter et al. 2001]	67
Figure 2-29. Courbe d'évolution de l'émoussement ρ en fonction du chargement φ	72
Figure 2-30. Diverses séquences d'ouverture fermeture qui ont permis d'étudier les phases de charge et de décharge.....	73
Figure 2-31. En (a), variation du facteur d'intensité des contraintes K depuis le début de la décharge K_0 en fonction de la variation de l'émoussement plastique ρ depuis le début de la décharge ρ_0 pour plusieurs décharges. En (b), mêmes évolutions de φ avec ρ	73
Figure 2-32. Evolution du facteur d'intensité des contraintes K lors d'une phase de fermeture depuis le début de la décharge K_0 en fonction de la variation de l'émoussement plastique ρ depuis le début de la décharge ρ_0 dans un diagramme $K - \sqrt{\rho}$	74
Figure 2-33. Evolution du facteur d'intensité des contraintes K lors d'une phase de fermeture depuis le début de la décharge K_0 en fonction de la variation de l'émoussement plastique ρ depuis le début de la décharge ρ_0 dans un diagramme $K - \rho$	74
Figure 2-34. Evolution du point de contact avec l'émoussemnt plastique, en (a) pour un niveau de contact négatif et en (b) pour un niveau de contact positif	77
Figure 2-35. Evolution du point de contact des lèvres calculée à partir de K_I^{Sh}	78
Figure 2-36. Méthode de détermination de l'évolution de la taille de la zone plastique monotone φ_m avec la longueur de la fissure a	79
Figure 2-37. Evolution de la déformation plastique équivalente avec la distance de la pointe de la fissure	79
Figure 2-38. Méthode de détermination de l'évolution de la position de la zone plastique monotone φ_{xm} avec la longueur de la fissure a	80
Figure 2-39. Chargement d'une fissure par une contrainte constante en ses extrémités.....	81
Figure 2-40. Allure du champ de contrainte résiduelle en pointe de fissure, (a) avant et (b) après la propagation de celle ci.....	82
Figure 2-41. Evolution du niveau de contact K_{xm} avec la longueur de la fissure a	82
Figure 2-42. Evolution du CTOD en fonction du nombre de cycle obtenu par Elements Finis pour un rapport de charge nul [Tvergaard 2004]	83
Figure 2-43. Evolution du point de contact avec l'extension de la fissure [Beevers et al. 1984]....	83
Figure 2-44. Algorithme de propagation avec la loi incrémentale	86
Figure 2-45. Evolution du point de contact avec l'émoussement plastique, en (a) pour un niveau de contact négatif et en (b) pour un niveau de contact positif.....	88
Figure 2-46. Démarche d'identification des paramètres du modèle incrémental de propagation..	89
Figure 2-47. Boucles d'écrouissage cyclique dans le sens radial de la roue pour deux niveaux de déformation totale imposée.....	90
Figure 2-48. Boucles d'écrouissage cyclique stabilisées dans le sens radial de la roue	90
Figure 2-49. Courbes de traction monotone et cycliques.....	91
Figure 2-50. Principe des bandes de Lüders.....	92
Figure 2-51. Comparaison des courbes d'écrouissage cyclique expérimentales avec celles obtenues par Eléments Finis	93
Figure 2-52. Comparaison de la courbe de traction monotone expérimentale avec celle obtenue par Eléments Finis	93
Figure 2-53. Calculs Eléments Finis réalisés pour identifier les paramètres de la loi d'émoussement	94
Figure 2-54. Identification des paramètres a_m , b_m , a_f et b_f	94

Figure 2-55. Identification des paramètres a_{xm} , p_a , k_a et k_b	94
Figure 2-56. Montage de l'éprouvette (a) et suivi de la longueur de fissure par imagerie (b)	96
Figure 2-57. Courbe de Paris pour un rapport de charge R=0	96
Figure 2-58. Rôle du paramètre α sur la vitesse de propagation.....	97
Figure 2-59. Surcharge appliquée.....	97
Figure 2-60. Comparaison essai-calcul pour des surcharges simples.....	98
Figure 2-61. Evolution du niveau de contact calculé avec le modèle lors de l'application des surcharges	99
Figure 2-62. Exemple d'évolution du niveau d'ouverture après surcharge obtenu expérimentalement [Masahiro et al. 2004].....	99
Figure 2-63. Courbes d'émoussement avant et après application d'une surcharge	100
Figure 2-64. Essais réalisés pour l'étude de l'influence du nombre de surcharge dans un bloc sur la vitesse de propagation	100
Figure 2-65. Courbes de propagation pour différents nombres de surcharge dans un bloc répété de 100 cycles	101
Figure 2-66. Essais réalisés pour l'étude de la distribution des surcharges dans un bloc sur la vitesse de propagation	101
Figure 2-67. Courbes de propagation pour différentes distributions de surcharge dans un bloc répété de 10000 cycles	102
Figure 2-68. Courbes de traction monotone pour les différentes amplitudes d'écroûissage testées	103
Figure 2-69. Courbes de décharge cyclique pour les différents comportements étudiés	103
Figure 2-70. Courbes de Paris des différentes amplitudes d'écroûissage testées	104
Figure 2-71. Evolution de la vitesse de propagation pour $K_{max} = 20MPa\sqrt{m}$ en fonction du taux d'écroûissage	105
Figure 2-72. Evolution du coefficient m de la loi de Paris en fonction du taux d'écroûissage	105
Figure 2-73. Courbes de traction monotone correspondant aux différents jeux de paramètres matériaux testés	106
Figure 2-74. Courbes de Paris obtenues par le modèle pour les différentes vitesses d'écroûissage testées	106

Figures du chapitre III

Figure 3-1. (a) Evolution de la contrainte radiale relevée in situ sur quelques tours de roue de part et d'autre d'une toile de roue de train lors de la circulation en alignement à 120 km/h du train. Le wagon instrumenté était chargé par des blocs d'acier de 60 tonnes. (b) Décomposition en une composante de traction-compression homogène dans l'épaisseur et une contrainte de flexion selon l'épaisseur de la toile.....	112
Figure 3-2. Evolution du niveau de fermeture de la fissure en fonction du rapport de charge appliqué et de la contrainte maximale [Newman 1981]. Résultats issus de calculs par éléments finis.....	113
Figure 3-3. En (a) faciès de rupture d'une fissure soumises à des souscharges et en (b) effet d'une surcharge en compression [Suresh 1991].....	114
Figure 3-4. Effet de la compression en fatigue aléatoire sur la vitesse de propagation [Gros 1996]	114
Figure 3-5. Courbes de Paris des différents rapports de charge en fonction de K_{max}	115
Figure 3-6. Evolution du niveau d'ouverture en fonction du rapport de charge (a) et de la contrainte minimale appliquée S_{ymin} (b)	117

Figure 3-7. (a) Courbe d'émoussement plastique après une sous-charge à $S_{y\min}$	118
Figure 3-8. Courbe d'émoussement après une sous-charge de $S_{y\min} = -100MPa$, comparaison avec un cycle sans fermeture. La position du point de contact entre les lèvres de la fissure, notée K_{xm} , est indépendante du niveau de compression atteint.....	119
Figure 3-9. Courbes d'émoussement après une souscharge de $S_{y\min} = -100MPa$, la position de la transition entre plasticité cyclique et plasticité monotone reste la même. (a) courbe complète. (b) détail, courbe d'émoussement depuis la ré-ouverture de la fissure dans un diagramme $K_I, \rho^{1/2}$.	120
Figure 3-10. Courbe d'émoussement après souscharge on remarque que la dimension de la zone plastique cyclique ne change pas.....	121
Figure 3-11. Evolution des courbes d'émoussement après application d'une souscharge à plusieurs niveaux de compression $S_{y\min}$	122
Figure 3-12. Evolution de la position du centre du domaine d'élasticité cyclique, noté K_{xo} , selon le niveau de compression atteint et selon la valeur de K_{max}	123
Figure 3-13. Evolution schématique du domaine d'élasticité cyclique lors d'une décharge.....	124
Figure 3-14. Exemple de simulation à l'aide du modèle incremental de l'émoussement plastique d'une fissure de Griffith sous chargement d'amplitude constante ($R = -1$) ou ($R = 0$) de longueur initiale 5mm et après 5mm de propagation.	124
Figure 3-15. Courbes de Paris simulées pour différents rapports de charge en fonction de K_{max} , comparaison avec les résultats d'essais.....	125
Figure 3-16. En (a) évolution des composantes de flexion selon l'épaisseur de la toile des contraintes radiale et circonférentielle pendant une circulation à 120 Km/h d'un wagon chargé à 60 tonnes, la roue instrumentée est à l'avant du train (en attaque). Evolution des composantes circonférentielles en fonctions de composantes radiales. En (b) terme de flexion, en (c) terme de traction compression.	126
Figure 3-17. Influence de la contrainte T sur la taille de la zone plastique [Lee et al. 2005].....	128
Figure 3-18. Shémas montrant l'influence de la contrainte T sur le trajet de fissuration [Lee et al. 2005].....	129
Figure 3-19. Courbes de propagation pour différents niveaux de biaxialité et pour deux niveaux de $S_{y\max}$ appliquée.....	130
Figure 3-20. Ouverture des lèvres au niveau de la pointe de fissure en fonction de la contrainte T et du rapport de charge R en déformation plane [Fleck et Newman 1988]	131
Figure 3-21. Evolution de la contrainte T en fonction de la longueur de la fissure pour quelques éprouvettes normalisées [Sherry et al. 1995]	134
Figure 3-22. Courbes de propagation réalisés sur éprouvettes CT et CCT. En (a) la vitesse de propagation est tracée en fonction de ΔK et en (b) en fonction de $\Delta K_{effectif}$	135
Figure 3-23. Eprouvettes étudiées pour la validation de la contrainte T	136
Figure 3-24. Machine triaxiale Astree (a) et éprouvette biaxiale montée entre les verins horizontaux	137
Figure 3-25. Propagation des fissures dans les éprouvettes cruciformes pour les 3 niveaux de T_{max} testés.....	137
Figure 3-26. Vitesse de propagation des éprouvettes cruciformes pour les 3 niveaux de T_{max} testés.....	138
Figure 3-27. Infléchissement de la fissure observé lors du changement de niveau de biaxialité ($T = -146 \rightarrow 82 MPa$).....	138
Figure 3-28. Comparaison des vitesses de propagation expérimentales des éprouvettes CT et CCT	139

Figure 3-29. Fissures de Griffith de différentes longueurs	140
Figure 3-30. Evolution des courbes d'émoussement pour le même K_I , pour un chargement uniaxial de deux éprouvettes contenant une fissure centrale de longueur $2a$, où $a=6\text{mm}$ ou 12mm . Pour ces calculs le même raffinement de maillage a été employé en pointe de fissure ainsi que la même méthode de dépouillement. Le comportement du matériau était élasto-plastique : $Re=100\text{MPa}$, $E=200\text{GPa}$, $\nu=0.3$	140
Figure 3-31. Evolution de la contrainte seuil de propagation en fonction de la longueur de fissure [Tanaka et al. 1981]	142
Figure 3-32. Evolution de la contrainte T pour une fissure de Griffith en chargement uniaxial en fonction de la longueur de la fissure normalisée par la valeur de T pour une longueur de $a=30\text{mm}$ et pour un même facteur d'intensité des contraintes K	142
Figure 3-33. Fissures de Griffith de différentes longueurs soumises au même K et au même T	143
Figure 3-34. Evolution des courbes d'émoussement pour le même K_I et le même T , pour deux éprouvettes contenant une fissure centrale de longueur $2a$, où $a=6\text{mm}$ ou 12mm . Pour ces calculs le même raffinement de maillage a été employé en pointe de fissure ainsi que la même méthode de dépouillement. Le comportement du matériau était élasto-plastique : $Re=100\text{MPa}$, $E=200\text{GPa}$, $\nu=0.3$	143
Figure 3-35. Direction de chargement dans le plan $K-T$ (a) et détermination du seuil d'émoussement plastique pour un chargement donné (b)	144
Figure 3-36. Seuil d'émoussement plastique calculé par Eléments Finis, déterminé pour 3 valeurs de ρ_{seuil} : 0.15 , 0.2 et $0.25\text{ }\mu\text{m}$	145
Figure 3-37. Chargement de l'éprouvette dans le plan $K-T$	146
Figure 3-38. Domaine d'intégration de l'énergie élastique de cisaillement autour de la fissure....	148
Figure 3-39. Iso énergie élastique de cisaillement dans un domaine de rayon d autour de l'extrémité de la fissure pour une fissure chargée en mode I et soumises à une contrainte T non nulle.	148
Figure 3-40. Chargement de l'éprouvette dans le plan $K-T$	149
Figure 3-41. (a) Surface seuil de plasticité, (a) pour différentes valeurs du domaine d . (b) comparaison avec les résultats de calculs par éléments finis. Les points correspondent aux calculs EF et la courbes à l'expression proposée.	150
Figure 3-42. En (a), exemple du FAD tracé dans un diagramme $K-T$ et en (b) quelques résultats expérimentaux du seuil [Ayatollahi et al. 2002]	151
Figure 3-43. En (a), critère de plasticité proposé tracé pour une fissure de Griffith et un chargement uniaxial dans un diagramme de Kitagawa. En (b) diagramme de [Kitagawa et Takahashi 1976]	152
Figure 3-44. Evolution de la surface seuil après précharges	153
Figure 3-45. Chargement de l'éprouvette dans le plan $K-T$	154
Figure 3-46. Evolution des paramètres du modèle incrémental avec la direction de propagation T/K	155
Figure 3-47. Chargement de l'éprouvette dans le plan $K-T$	157
Figure 3-48. Vitesse de propagation des éprouvettes cruciformes pour les 3 niveaux de T_{max} testés	158
Figure 3-49. Vitesse de propagation des éprouvettes cruciformes pour les 3 niveaux de T testés	158
Figure 3-50. Vitesse de propagation des éprouvettes cruciformes pour les 3 niveaux de T testés	159
Figure 3-51. Comparaison des vitesses de propagation expérimentales des éprouvettes CT et CCT	159

Figures du chapitre IV

Figure 4-1. En (a) évolution des contraintes radiales et circonférentielles des deux faces externe et interne de la toile. En (b) évolution de la contrainte moyenne (traction) et de l'amplitude (flexion) suivant le rayon et la circonférence. Le train est chargé et sa vitesse est de 120 Km/h.....	163
Figure 4-2. Modèle géométrique utilisé pour simuler la propagation des fissures dans les toiles de roue.....	164
Figure 4-3. Evolution du rapport de forme d'une fissure semi-elliptique en flexion rotative et cyclique [Carpinteri et al. 2000]	165
Figure 4-4. Repère attaché au front d'une fissure semi-elliptique.....	165
Figure 4-5. Calcul de propagation d'une fissure semi-elliptique avec 2 degrés de liberté (a) et avec plusieurs (b) [Lin et Smith 1999a].....	166
Figure 4-6. (a) calcul de propagation d'une fissure 2D [Nykänen 1996] et (b) exemple d'une évolution de la fissure à côté d'un cordon de soudure	167
Figure 4-7. Montage de l'éprouvette entre les mors de la machine	169
Figure 4-8. Réplique de la fissure observée au microscope optique.....	170
Figure 4-9. Evolution de la longueur de la fissure en fonction du nombre de cycle	170
Figure 4-10. Succession des blocs de chargement afin de marquer le front (a) et exemple de faciès de rupture marqué pour l'éprouvette épaisse (essai N°1)	171
Figure 4-11. Evolution du rapport de forme de la fissure pour les différents essais réalisés.....	171
Figure 4-12. Maillage de la roue en (a) et résultat de calcul (contrainte radiale) pour un chargement transversal de rapport de charge $R=-1$ en (b).....	172
Figure 4-13. Emplacement des entailles dans la roue	172
Figure 4-14. Montage de la roue sur le banc en (a) et photo de la fissure après ressuage en (b) .	173
Figure 4-15. Evolution de la longueur de la fissure dans la toile en fonction du nombre de cycles	173
Figure 4-16. Méthode de calcul de la propagation d'une fissure semi-elliptique	175
Figure 4-17. Sensibilité des résultats du calcul au nombre d'élément du maillage pour un chargement de flexion pure. En (a) évolution de la longueur de la fissure a avec le nombre de cycle et en (b) évolution du rapport de forme avec a	176
Figure 4-18. Evolution du rapport de forme expérimental et obtenu avec le modèle.....	176
Figure 4-19. Evolution du rapport de forme pour différents valeurs initiales [Lin et Smith 1999b]	177
Figure 4-20. Evolution du rapport de forme simulé selon le rapport de forme initial	177
Figure 4-21. Comparaison essai/calcul	178
Figure 4-22. Evolution du rapport de forme expérimental et obtenu avec le modèle.....	178
Figure 4-23. Evolution de la longueur de la fissure dans la roue en fonction du nombre de cycle	179
Figure 4-24. Evolution du rapport de forme obtenu avec le modèle.....	179
Figure 4-25. Séquence de chargement à amplitude variable appliquée lors de l'essai sur roue.....	180
Figure 4-26. Comparaison de la vitesse de propagation mesurée (cercles) et calculée avec le modèle.....	180

Notations

Notations du chapitre I

S_x	Contrainte appliquée parallèle à la fissure de Griffith
S_y	Contrainte appliquée perpendiculaire à la fissure de Griffith
$S_{y\max}$	Contrainte maximale appliquée perpendiculaire à la fissure de Griffith
$S_{y\min}$	Contrainte minimale appliquée perpendiculaire à la fissure de Griffith
K_I	Facteur d'intensité des contraintes en mode I
K_{\max}	Facteur d'intensité des contraintes maximal
K_{\min}	Facteur d'intensité des contraintes minimal
K_{ouv}	Facteur d'intensité des contraintes d'ouverture
ΔK	Variation du facteur d'intensité des contraintes appliquée
ΔK_{eff}	Variation du facteur d'intensité des contraintes effective
R	Rapport de charge appliqué
T	Contrainte de biaxialité appliquée
R_e	Limite d'élasticité du matériau
R_m	Contrainte ultime du matériau
ν	Coefficient de Poisson
E	Module d'Young
C	Paramètre matériau définissant le niveau de la droite de Paris
m	Paramètre matériau définissant la pente de la droite de Paris
$\frac{da}{dN}$	Vitesse de propagation de la fissure en mm/cycle
a	Longueur de fissure
ρ	Emoussement plastique des lèvres de la fissure
r	Distance d'un point par rapport à la pointe de la fissure
θ	Angle définissant un point autour de la pointe de la fissure par rapport à son plan
Z_p	Taille de la zone plastique monotone en pointe de fissure

Notations du chapitre II

Zp_{surch}	Taille de la zone plastique due à l'application d'une surcharge
m_w	Paramètre matériau du modèle de Wheeler

$\underline{u}^e(\underline{x})$	Champ de déplacements élastiques autour de la fissure
$\underline{u}^p(\underline{x})$	Champ de déplacements plastiques ou permanents autour de la fissure
$\underline{x}(r, \theta)$	Point autour de la fissure défini par la distance r de la pointe et l'angle θ
r	Distance d'un point par rapport à la pointe de la fissure
\tilde{K}_I	Facteur d'intensité des contraintes vu par la fissure pour un matériau élastoplastique
K_I^∞	Facteur d'intensité des contraintes appliqué à la fissure pour un matériau élastoplastique
K_I^{Sb}	Facteur d'intensité des contraintes dû aux contraintes résiduelles autour de la fissure
K_I	Facteur d'intensité des contraintes appliqué à la fissure pour un matériau élastique
ϱ	Emoussement plastique en pointe de fissure
S	Pas de strie de fatigue
S_y	Contrainte appliquée perpendiculaire à la fissure de Griffith
α	Paramètre matériau de la loi de fissuration
φ	Variable thermodynamique associée à l'émoussement plastique
φ_m	Taille de la zone plastique monotone dans un diagramme $\varphi - \varrho$
φ_{xm}	Position de la zone plastique monotone dans un diagramme $\varphi - \varrho$
$2\varphi_c$	Taille de la zone plastique cyclique dans un diagramme $\varphi - \varrho$
φ_{xc}	Position de la zone plastique cyclique dans un diagramme $\varphi - \varrho$
K_m	Taille de la zone plastique monotone dans un diagramme $K - \varrho$
K_{xm}	Position de la zone plastique monotone dans un diagramme $K - \varrho$
$2K_c$	Taille de la zone plastique cyclique dans un diagramme $K - \varrho$
K_{xc}	Position de la zone plastique cyclique $K - \varrho$
a_m	Paramètre matériau définissant l'évolution de la zone plastique monotone avec ϱ
b_m	Paramètre matériau définissant l'évolution de la zone plastique monotone avec ϱ
\mathcal{A}	Facteur matériau dépendant du module d'Young et du coefficient de Poisson
a_{cf}	Paramètre matériau définissant l'évolution de la zone cyclique en fermeture avec ϱ
b_{cf}	Paramètre matériau définissant l'évolution de la zone cyclique en fermeture avec ϱ
a_{co}	Paramètre matériau définissant l'évolution de la zone cyclique en ouverture avec ϱ
b_{co}	Paramètre matériau définissant l'évolution de la zone cyclique en ouverture avec ϱ
a_{xm}	Paramètre matériau définissant l'évolution de la position de la zone monotone avec ϱ
b_{xm}	Paramètre matériau définissant l'évolution de la position de la zone monotone avec ϱ
p_a	Paramètre matériau définissant l'évolution de la zone plastique monotone avec a
p_b	Paramètre matériau définissant l'évolution de la zone plastique monotone avec a
k_a	Paramètre matériau définissant l'évolution de la position de la zone monotone avec a
k_b	Paramètre matériau définissant l'évolution de la position de la zone monotone avec a

Notations du chapitre III

R	Rapport de charge appliqué
S_x	Contrainte appliquée parallèle à la fissure
S_y	Contrainte appliquée perpendiculaire à la fissure

T	Contrainte de biaxialité autour d'une fissure chargée en biaxial $T = S_x - S_y$
λ	Rapport de biaxialité d'une fissure chargée en biaxial $\lambda = S_x / S_y$
$S_{y\max}$	Contrainte maximale appliquée perpendiculaire à la fissure
$S_{y\min}$	Contrainte minimale appliquée perpendiculaire à la fissure
K_I	Facteur d'intensité des contraintes en mode I
K_{Ith}	Facteur d'intensité des contraintes seuil d'émoussement plastique en mode I
K_{\max}	Facteur d'intensité des contraintes maximale
K_{\min}	Facteur d'intensité des contraintes minimale
ΔK	Variation du facteur d'intensité des contraintes appliqué
ΔK_{eff}	Variation du facteur d'intensité des contraintes effectives
C	Paramètre de Paris dans un diagramme $da / dN = f(\Delta K)$
C_0	Paramètre de Paris dans un diagramme $da / dN = f(\Delta K_{eff})$
m	Paramètre matériau définissant la pente de la droite de Paris
K_{ouv}	Facteur d'intensité des contraintes d'ouverture
K_m	Taille de la zone plastique monotone dans un diagramme $K - \rho$
K_{xm}	Position de la zone plastique monotone dans un diagramme $K - \rho$
$2K_c$	Taille de la zone plastique cyclique dans un diagramme $K - \rho$
K_{xc}	Position de la zone plastique cyclique dans un diagramme $K - \rho$
U	Energie élastique de déformation
σ'	Déviateur du champ des contraintes
ε'	Déviateur du champ des déformations

Notations du chapitre VI

G	Taux de restitution de l'énergie potentielle d'une fissure
a	Demi-longueur de la fissure semi-elliptique en surface
b	Profondeur de la fissure semi-elliptique
S_{\max}	Contrainte normale en surface de l'éprouvette de flexion
e	Épaisseur de l'éprouvette de flexion
T_i	Taille de l'élément i du maillage du front de la fissure semi-elliptique
da_i	Extension du point de calcul de l'élément i du maillage du front de fissure
A_i	Extension de surface d'un élément i du maillage du front de fissure

Introduction

L'invention de la roue en 3500 avant J.C à Sumer en Mésopotamie a été l'un des fondements des technologies du transport. Si la géométrie de cet organe a relativement peu évolué au cours des siècles, les fonctions qu'il assure se sont largement étendues. En effet, la fonction principale de la roue, assurer le roulement, est restée la même, par contre d'autres fonctions sont apparues et la roue moderne est devenue un organe de guidage, de freinage, un amortisseur de choc, un absorbeur de vibration, un différentiel, etc...

Comme toute pièce sollicitée de manière cyclique, les roues de train sont confrontées aux problèmes associés à la fatigue des matériaux. Bien qu'elles soient dimensionnées en endurance, des fissures ont déjà été rencontrées par le passé sur ces organes. Dans la plupart des cas recensés, leur apparition est due à des impacts d'objets externes lors du fonctionnement en service (ballast) ou bien à des défauts d'usure ou de fabrication. La politique de la SNCF est de contrôler régulièrement les roues et de les déposer en cas de détection de fissure. Il est donc nécessaire d'estimer le temps qu'une fissure non détectée met pour se propager depuis une dimension légèrement inférieure au seuil de détection et la dimension critique conduisant à la fissuration instable de la roue. Cela permet de définir des intervalles de maintenance inférieurs à ce temps afin de s'assurer qu'en cas d'apparition de fissure, celles-ci seront détectées avant d'atteindre une taille critique mettant en cause la sécurité du système.



Figure 0-1. Accident du train allemand ICE arrivé à Eschede (Allemagne) en juin 1998 (a) provoqué par la rupture d'une roue fissurée (b) [Richard et al. 2005]

La démarche de maintenance des roues de train à la SNCF est aujourd'hui essentiellement fondée sur le retour d'expérience. Cette approche a fait ses preuves mais l'évolution du dessin des roues, conçues pour assurer davantage de fonctions, l'évolution des matériaux font qu'il n'est pas toujours possible de se baser sur le retour d'expérience. Citons à titre d'exemple la nouvelle roue

allemande à faible niveau de bruit retirée du service suite à l'accident de train ICE d'Eschede de 1988 (Figure 0-1). L'accident avait été provoqué par la rupture d'une roue, suite à la propagation par fatigue d'une fissure dans une zone où elle était difficilement détectable [Esslinger et al. 2003].

L'objectif principal de ce travail est donc de mettre en œuvre un outil de prévision de la durée de vie en fatigue, fondé sur la propagation de fissures de fatigue depuis le seuil des moyens de contrôle non destructifs jusqu'à la rupture.

Trois difficultés majeures surviennent quand on cherche à modéliser la fissuration par fatigue des pièces mécaniques.

La première réside dans la connaissance du chargement appliqué en service, les sollicitations externes sont souvent variables dans le temps, comprennent des éléments aléatoires et restent difficiles à prévoir par le calcul. On a donc recours à des mesures en service, qui permettent de remonter aux états de contraintes et à leur évolution en s'appuyant sur des calculs par éléments finis.

La deuxième difficulté provient du calcul du chargement vu par la fissure (le facteur d'intensité des contraintes) en fonction de sa position et de son orientation dans la roue ainsi que de sa forme et du chargement externe appliqué. La méthode des Éléments Finis, très utile pour calculer les états de contrainte dans la roue, reste encore trop coûteuse en temps de calcul pour examiner les diverses configurations de fissures possibles. Des approches simplifiées sont généralement employées pour estimer les facteurs d'intensité des contraintes par superposition en s'appuyant sur un calcul élastique de la roue non fissurée.

Enfin, la dernière difficulté consiste à prévoir comment la fissure se propage sous l'effet des sollicitations que l'on s'est donné les moyens de déterminer. Un modèle doit pouvoir tenir compte du chargement appliqué et de son histoire ainsi que du matériau constitutif de la structure fissurée. C'est ce dernier point qui constitue l'objectif de ce travail. Plus précisément, nous nous attachons dans cette étude à développer un modèle incrémental pour la simulation de la propagation des fissures de fatigue dans les toiles des roues de train, c'est-à-dire des fissures semi-elliptiques soumises à un chargement de flexion biaxiale à amplitude variable et partiellement aléatoire.

Ce rapport s'articule autour de quatre chapitres. Le **premier chapitre** est une bibliographie générale sur la roue de train, ses fonctions, sa fabrication, son chargement et sa fissuration. Nous présentons ensuite quelques éléments de mécanique de la rupture et sur la fissuration par fatigue. Nous discutons à la fin du chapitre des spécificités du problème posé et des limites des modèles classiques vis-à-vis de notre cahier des charges.

Le **deuxième chapitre** est consacré au modèle incrémental de propagation. Après une présentation des hypothèses de représentation du champ de déplacement en mode I autour de l'extrémité d'une fissure par sa projection sur une base comprenant deux champs (élastique et plastique), nous abordons les deux lois constitutives du modèle de propagation : la loi de fissuration et la loi de d'émoussement. Les démarches d'identification de la forme des équations d'évolution, des valeurs des paramètres matériaux du modèle et l'implémentation numérique des équations d'évolutions sont ensuite discutées. Le modèle incrémental a été validé pour l'acier à roue par comparaison entre les résultats du modèle et les vitesses de fissuration mesurées sur éprouvette lors d'essais complexes comprenant des blocs de chargement. Une étude de sensibilité, présentée à la fin du chapitre, nous a également permis de comprendre le rôle de chaque paramètre de la loi.

Dans le **troisième chapitre**, nous verrons comment ce modèle incrémental a évolué afin de tenir compte des particularités du chargement de la roue. En effet, lors d'un tour de roue, une large

partie de la toile est sollicitée en traction-compression radiale et de manière biaxiale (contrainte radiale + circonférentielle). Il a donc fallu enrichir le modèle pour tenir compte des phases de compression et de la biaxialité du chargement. Dans un premier temps, on explique comment l'effet de la biaxialité ou de la compression a été étudié en employant les hypothèses présentées dans le second chapitre. Ensuite, la modélisation des résultats obtenus est discutée puis modèle et résultats expérimentaux sont confrontés.

Enfin, l'application du modèle incrémental à une fissure semi elliptique travaillant en flexion biaxiale est présentée dans le **quatrième chapitre**. On discute la méthodologie de passage du modèle établi en 2D à la fissure 3D semi-elliptique dans la roue. Cette méthode de passage a été validée sur des éprouvettes de flexion quatre points dans un premier temps puis sur des essais sur roue à l'échelle 1 réalisés sur le banc de l'Agence d'Essai Ferroviaire.

Et maintenant si vous voulez en savoir plus sur la fissuration des roues de train par fatigue, je vous invite à tourner cette page et commencer par le premier chapitre du rapport...

Chapitre 1 Bibliographie générale

1.1	La roue de train	23
1.1.1	La roue, ses fonctions et sa fabrication	23
1.1.2	Le chargement de la roue	25
1.1.3	La fissuration de la roue.....	30
1.1.4	La maintenance de la roue et objectifs de la thèse.....	30
1.2	Eléments de mécanique de la rupture	32
1.2.1	Modes de fissuration et champs de contrainte autour d'une fissure en mode I.....	32
1.2.2	Limites de validité des champs présentés.....	33
1.2.2.1	Taille de zone plastique.....	34
1.2.2.2	Limite du développement asymptotique.....	35
1.2.3	Propagation des fissures par fatigue	36
1.2.4	Limites de la démarche classique.....	39
1.3	Bilan du Chapitre 1	39

Modéliser la fissuration des roues de train suppose une bonne connaissance de la roue, de son chargement et de sa fissuration d'une part et des lois de propagation qui existent dans la littérature d'autre part.

Dans la première partie de ce chapitre, nous présentons la roue de train et ses principales étapes de fabrication. Nous montrons ensuite les différentes sources de sollicitations externes de la roue. Ces sollicitations d'origine mécanique pour la plupart, sont à amplitude variable et présentent un caractère aléatoire, la propagation des fissures par fatigue dans la roue est la conséquence directe de ces sollicitations.

La deuxième partie de ce chapitre est un rappel bibliographique des grandes lignes de la mécanique de la rupture. Nous présentons ensuite quelques lois de propagation par fatigue et nous nous attachons à montrer leurs limites d'utilisation afin de répondre à la question suivante : quel modèle choisir pour simuler la propagation des fissures dans la roue ? Un bilan sera présenté à la fin du chapitre.

1.1 La roue de train

1.1.1 La roue, ses fonctions et sa fabrication

Un vocabulaire spécifique définit les différentes parties d'une roue monobloc (Figure 1-1). En plus de sa fonction principale d'assurer le roulement, chaque partie joue un rôle important dans le fonctionnement du système.

- Le boudin assure avec la forme conique de la jante le guidage du train et empêche son déraillement.

- Grâce à sa forme conique, la roue joue le rôle d'un différentiel permettant d'éviter le glissement des roues opposées dans les virages. La différence de la distance parcourue par les 2 roues opposées est rattrapée par la différence de leurs diamètres respectifs calculés au niveau du contact.

- Dans le cas des roues freinées, la jante permet de dissiper la puissance de freinage provenant du frottement avec les semelles de frein.

- Quant à la toile, elle assure le lien entre le moyeu et la jante et transmet, avec une certaine flexibilité, les efforts latéraux de guidage du train. Les différentes formes de toile existantes sont : toiles droite, ondulée et conique.

- Il existe également des roues dont la toile est percée afin d'y fixer des absorbeurs de vibrations permettant de réduire les bruits de roulement ou de freinage.

- Les dimensions de la roue et son poids dépendent du matériel roulant en question, une roue de voiture de TGV admet par exemple un diamètre de 920 mm et pèse 350 kg.

La fabrication d'une roue passe par trois étapes principales (Figure 1-2) : le forgeage, le traitement thermique et l'usinage. Dans la première étape, des lopins cylindriques d'acier à roue (voir composition chimique dans le Tableau 1-1) de longueur variable sont coupés suivant la dimension de la roue à fabriquer, ils sont ensuite chauffés à 1300 °C dans un four à sol tournant. À la sortie du four, la couche d'oxyde créée est enlevée par décalaminage, le forgeage est ensuite réalisé en plusieurs phases. L'ébauchage et le performage se font à l'aide d'une presse de 6000 tonnes. Le moyeu est percé par une presse de 400 tonnes. La forme finale de la roue est obtenue grâce à un laminage vertical. Pendant cette phase, la roue est maintenue par un axe passant par son moyeu et elle est soumise à l'action de plusieurs galets.

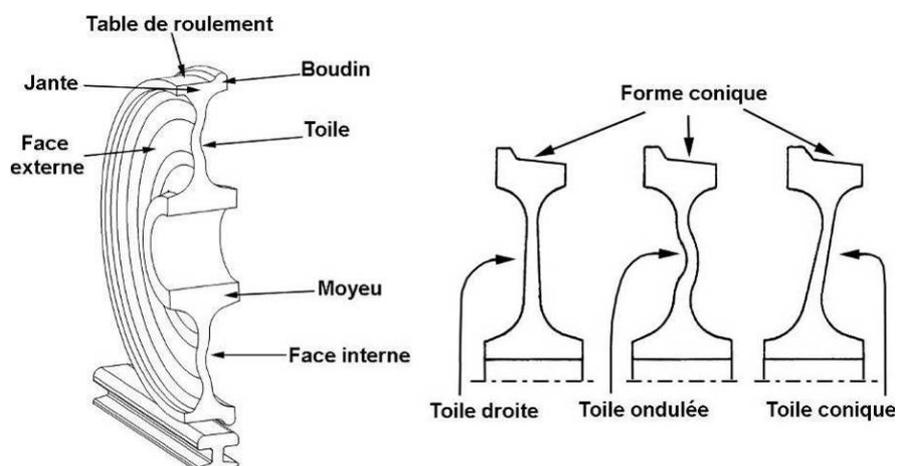


Figure 1-1. Les différentes parties de la roue et les différentes formes de toile

	C	Si	Mn	P	S	Cr	Cu	Mo	Ni	V
Teneur %	0.52	0.40	0.80	0.035	0.035	0.30	0.30	0.08	0.30	0.05
Variation	0.02	0.03	0.04	0.005	0.005	0.05	0.02	0.03	0.05	0.02

Tableau 1-1. Composition chimique de l'acier ER7 (XC48)

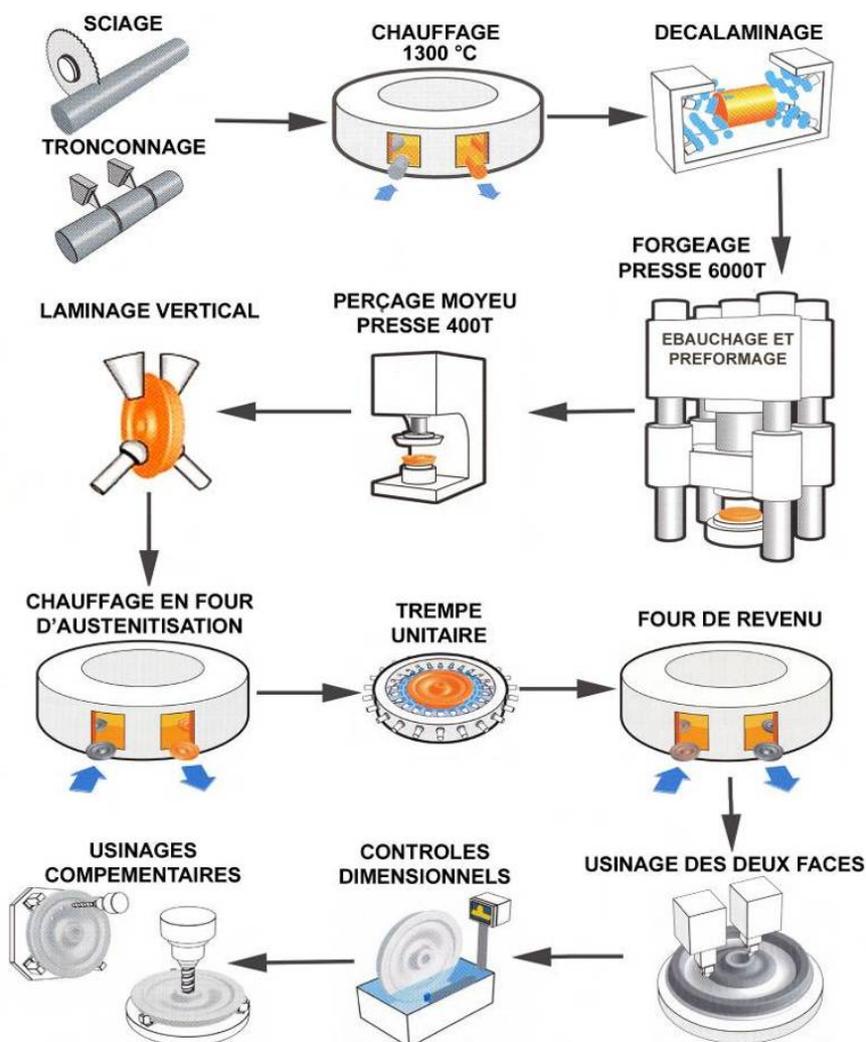


Figure 1-2. Les étapes de fabrication de la roue [Document Valdune]

Le cycle de traitement thermique appliqué après forgeage est le suivant (Figure 1-3a) : une austénitisation à 830 °C, suivie d'une trempe superficielle à l'eau de la jante dans un bac de trempe puis d'un revenu à une température supérieure à 500 °C pendant 2 heures. La microstructure obtenue après le traitement thermique est ferrito-perlitique. Très fine en surface au niveau de la table de roulement, elle devient progressivement ferrito-perlitique à bandes dans la toile et le moyeu (Figure 1-3b). Le comportement mécanique n'est pas homogène dans la roue. La limite d'élasticité varie de 440 MPa dans la toile à 530 MPa dans la jante (Figure 1-3c). Un écart de près de 15 % est observé entre la contrainte ultime R_m mesurée au niveau de la toile et celle mesurée dans la jante.

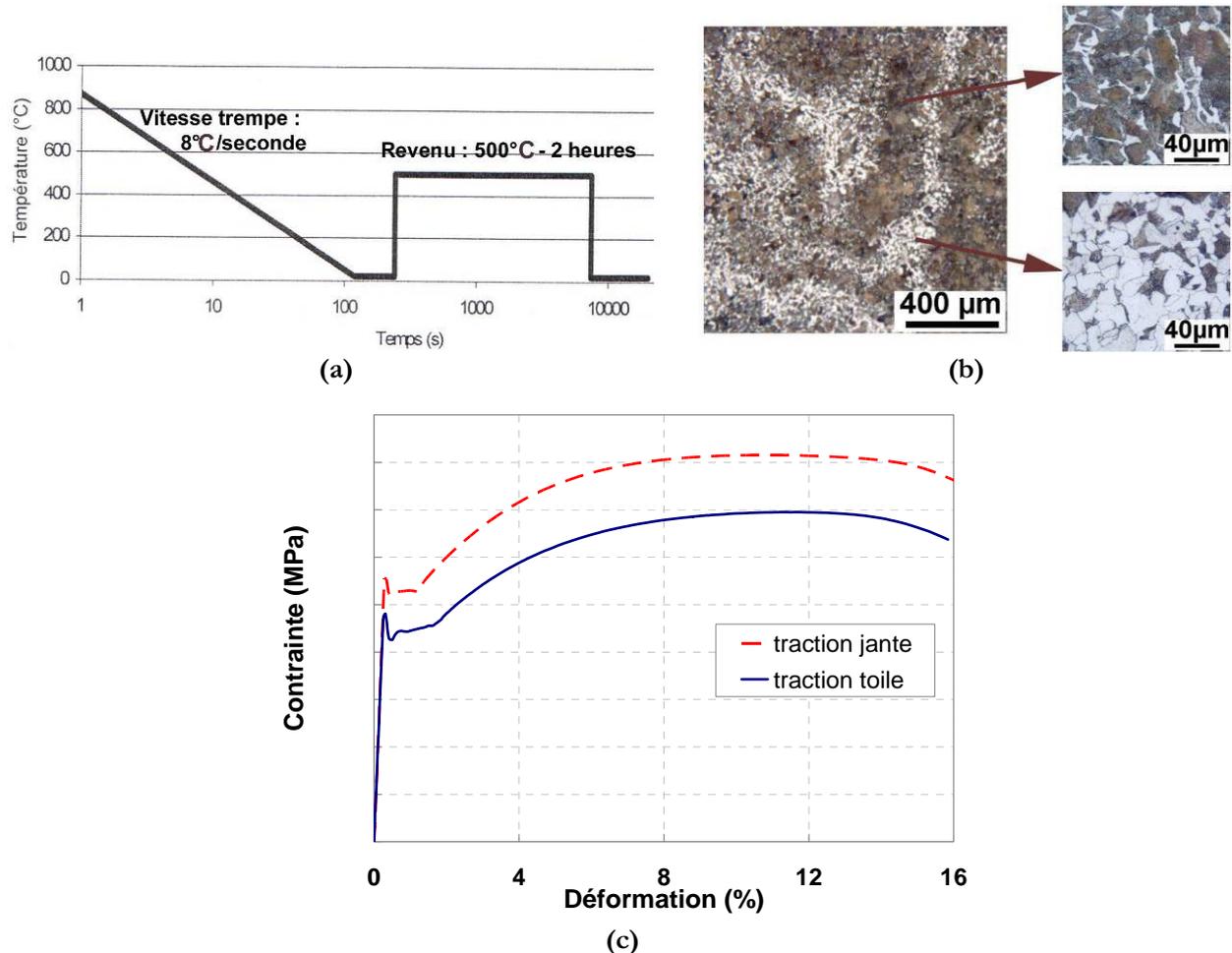


Figure 1-3. Cycle de traitement thermique appliqué à la roue (a), microstructure observée dans la toile (b) et comportement mécanique en traction simple dans la toile et la jante (c)

La dernière étape de la fabrication consiste à usiner l'ensemble de la roue (toile, jante et moyeu). Des usinages supplémentaires peuvent être effectués sur certaines roues comme des perçages dans la toile pour recevoir un système de freinage.

1.1.2 Le chargement de la roue

Le chargement externe vu par la roue provient de plusieurs sources agissant en même temps ou séparément (Figure 1-4). Les différentes sollicitations rencontrées sont les suivantes :

- La sustentation sous l'action de la charge verticale du train appliquée au niveau du contact roue-rail, cette charge implique des contraintes cycliques de Hertz sur la table de roulement et de traction-compression biaxiale dans la toile. Cette sollicitation est modulée par les composantes de tangages des divers modes vibratoires du train.
- Le chargement dû au guidage transversal qui a lieu au niveau du contact boudin-rail. Il est nul ou faible quand le véhicule circule en alignement et devient important dans les virages lorsque la force centrifuge n'est pas totalement compensée par le dévers de la voie. Ce chargement engendre des contraintes de flexion répétées dans la toile. Cette sollicitation est accentuée par les composantes de lacet des divers modes vibratoires du train.
- La commutation lors du passage du train dans les appareils de changement de voie, elle provoque un inversement momentané de l'effort latéral engendrant des contraintes de flexion biaxiale élevées dans la toile.
- Le chargement provenant de la propulsion du train, ce sont les contraintes mécaniques tangentielles qui s'exercent sur la table de roulement lors du démarrage ou du freinage et qui génèrent un couple dans la roue.
- Les contraintes radiales dues à la force centrifuge, ces contraintes sont proportionnelles à la vitesse de rotation de la roue et à la distance de chaque point à l'axe de rotation. Ces contraintes sont de second ordre par rapport aux autres sollicitations.
- Dans le cas de la roue freinée, des contraintes thermiques et mécaniques apparaissent dans la jante et la toile. Les contraintes thermiques proviennent du frottement des semelles de frein sur la table de roulement, les contraintes mécaniques de freinage génèrent un couple dans la roue autour de son axe de rotation.
- A tout cela s'ajoute le chargement transitoire provenant des chocs et de la dynamique du train et les contraintes résiduelles résultant du processus de fabrication de la roue et qui évoluent au cours du temps. Le frettage de la roue sur l'essieu génère également des contraintes tangentielles, circonférentielles et radiales dans le moyeu et la toile, ces contraintes sont très faibles dans la jante.

L'évolution temporelle du champ des contraintes résultant de ces sollicitations est difficile à calculer étant donné qu'elles apparaissent, pour certaines, d'une manière aléatoire et sont d'amplitude variable.

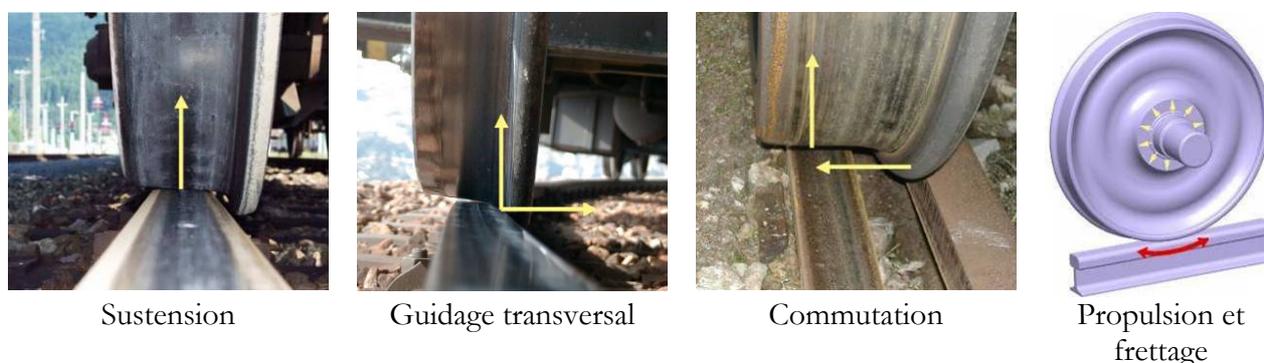


Figure 1-4. Différents types de sollicitations externes appliquées à la roue

La Figure 1-5 présente par exemple l'évolution de la contrainte radiale et circonférentielle de la face externe d'une toile droite calculée par Eléments Finis pendant un tour de roue. Ces

évolutions ont été calculées en élasticité pour 3 configurations élémentaires : suspension pure, suspension et guidage transversal et suspension et commutation.

Pour le premier cas, la suspension pure, le niveau de contrainte dans la toile reste faible, la contrainte circonférentielle est négligeable devant la contrainte radiale et elle est de signe opposé. Pour ce cas de chargement, la partie compressive du cycle est nettement dominante, devant la partie où la contrainte radiale est positive.

Quand une composante transversale s'ajoute à la composante verticale (cas 2 et 3), les niveaux de contraintes dans la toile deviennent élevés du fait de la flexion de la roue et les contraintes radiales et circonférentielles sont alors en phase. En fonction du sens de cette composante transversale, la contrainte radiale obtenue sur une face de la toile peut être positive ou négative puisque la roue travaille en flexion.

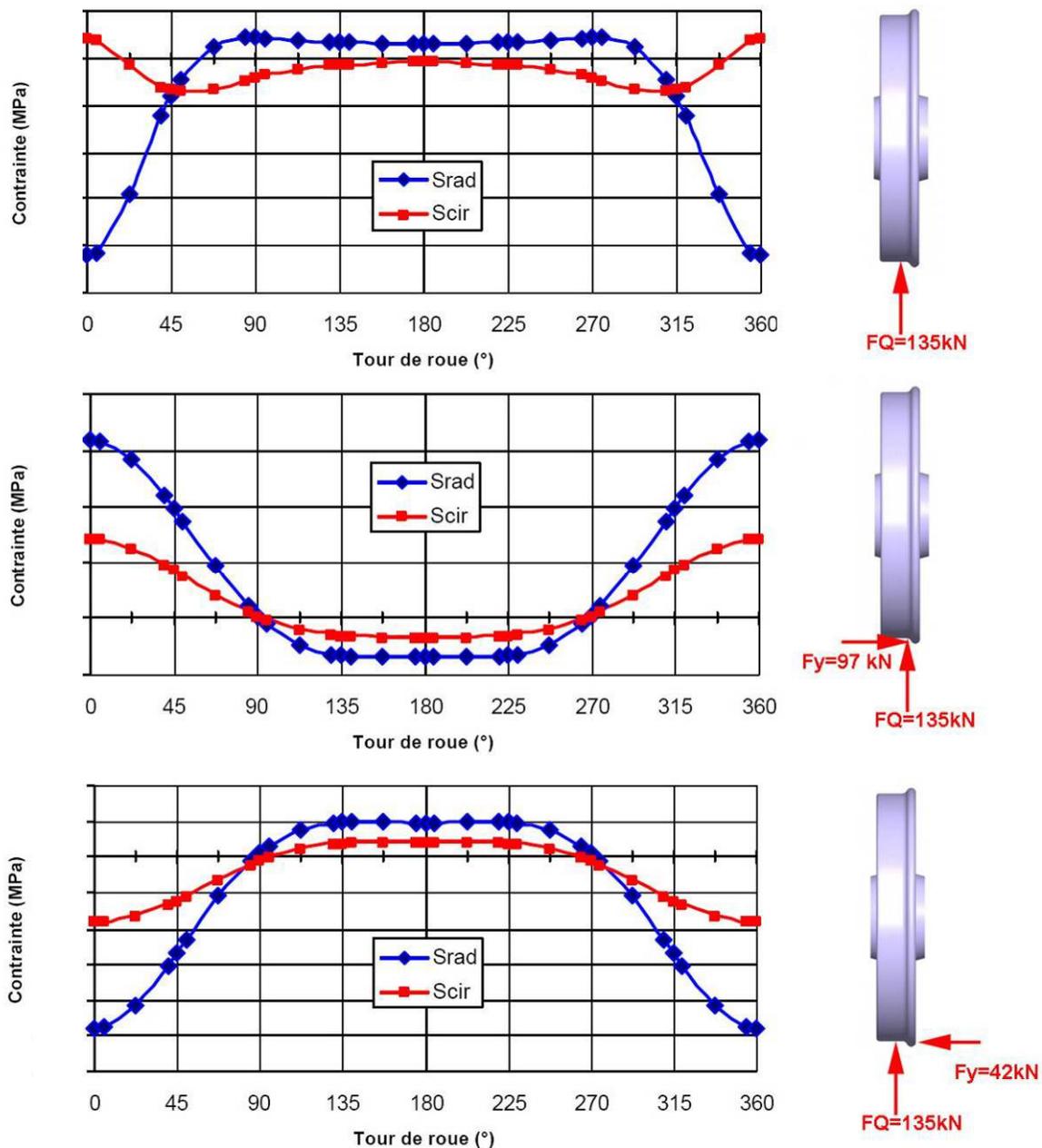
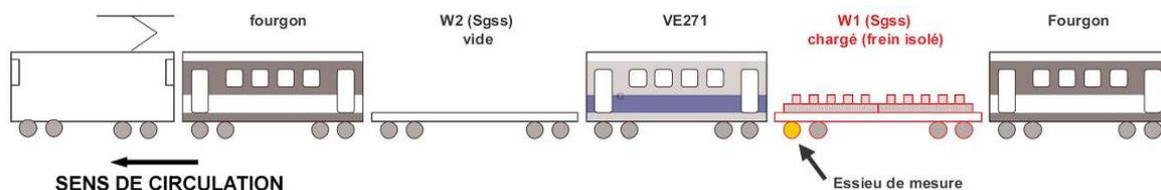
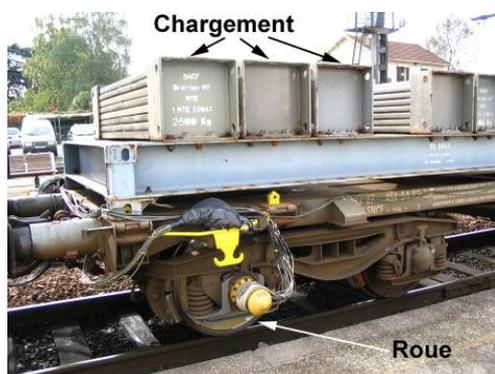


Figure 1-5. Evolution de la contrainte radiale et circonférentielle dans une toile droite obtenue par calcul par Elements Finis pour un tour de roue [Rapport interne AEF]

Le chargement réel dans la toile a été mesuré par l'Agence d'Essai Ferroviaire (AEF) de la SNCF lors d'une campagne de mesure en service à laquelle j'ai eu la chance d'assister. Les circulations d'essai ont eu lieu en France entre Paris et Saint Jean de Maurienne dans les Alpes. Le wagon d'essai est équipé d'un essieu de mesure permettant l'enregistrement des forces verticales et transversales appliquées au niveau du contact d'une roue à toile ondulée (Figure 6). Suite à ces mesures, on dispose d'une base de donnée de chargement dans plusieurs conditions de circulation représentatives du service commercial (circulation en alignement à différentes vitesses, circulation en courbe, entrées et sorties de gares, voies de service, train chargé ou à vide, etc..).



(a)



(b)

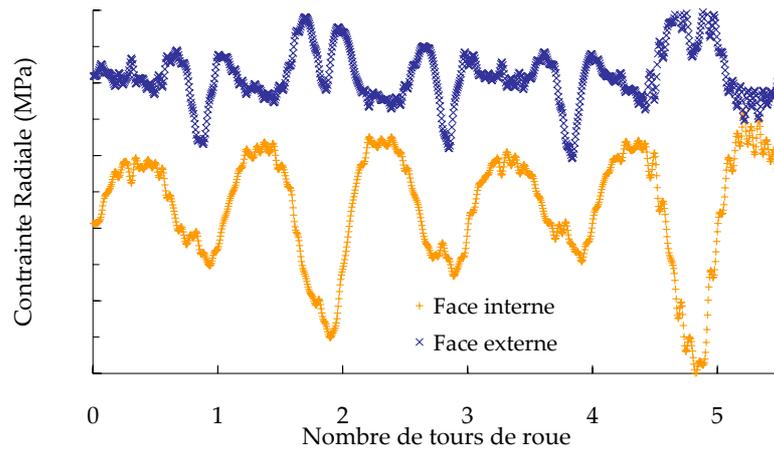


(c)

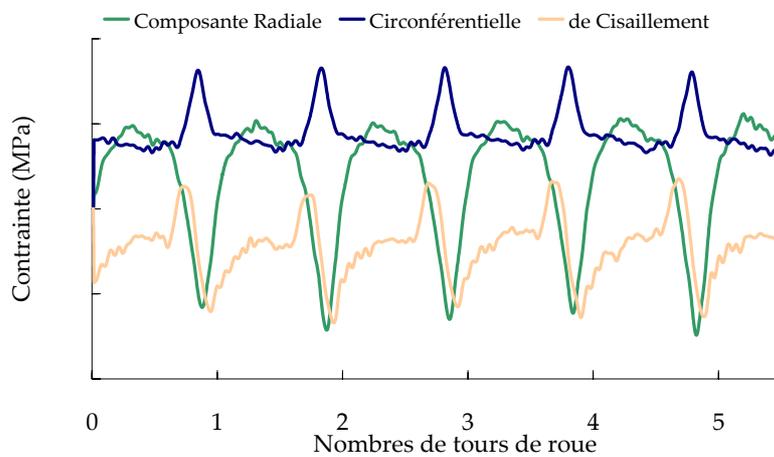
Figure 6. (a) Montage du train utilisé pour les mesures en lignes du chargement. (b) Photo de la roue instrumenté et des blocs d'aciers simulant le chargement. (c) vue à l'intérieur de la voiture de mesure

La Figure 1-7 montre un exemple d'évolution du champ des contraintes mesuré au point le plus sollicité de la roue (au raccordement toile-moyeu), les mesures ont été relevées symétriquement sur les deux faces de la toile. La configuration tracée sur la Figure 1-7 correspond au cas suivant : le train est chargé par des blocs d'acier de 60 tonnes et circule en alignement à 120 km/h.

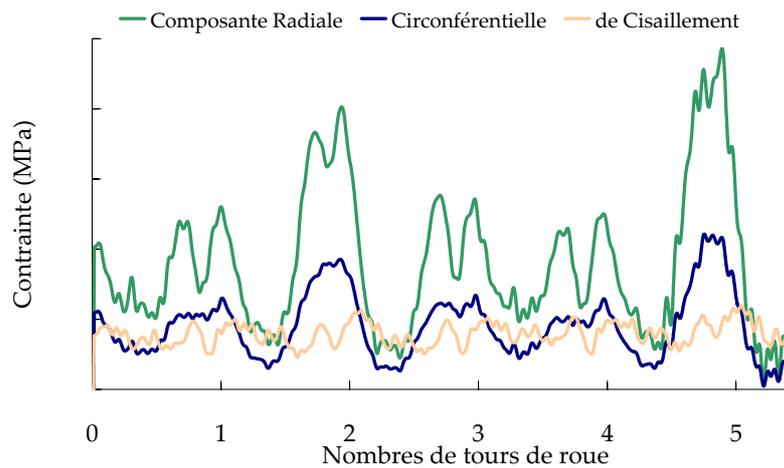
Le signal peut être traité pour en extraire une composante de traction-compression (moyenne des valeurs relevées sur chacune des faces) et une composante de flexion (demi-différence des valeurs relevées sur chacune des faces). On constate que l'évolution des contraintes radiales et circonférentielles de traction-compression relevées dans la toile ressemble à l'évolution obtenue par Elément Finis dans le cas d'une sustentation pure. Cependant les niveaux de contrainte atteints ici sont plus élevés du fait de la composante de flexion. En effet, il s'agit d'une roue ondulée, qui travaille donc en flexion même lorsque le train circule en alignement. La composante de cisaillement dans la toile reste généralement faible par rapport aux composantes radiales et circonférentielle, nous la négligeons dans cette étude et nous considérons le champ de contrainte comme étant biaxial. Par ailleurs, on note que la composante de flexion domine devant celle de traction-compression, même pour une circulation en alignement. Les circulations en courbes, entrée en gare et commutation amplifient principalement les termes de flexion. Sur les quelques tours de roue tracés sur la Figure 1-7 le caractère variable dans le temps du signal est déjà visible. D'autres d'enregistrements seront présentées par la suite, sur des séquences plus longues, permettant de bien visualiser le caractère variable dans le temps du signal.



(a)



(b)



(c)

Figure 1-7. (a) composante radiale de la contrainte calculée à partir des mesures sur les faces internes et externes de la roue. (b) Evolution de la composante de traction-compression des composantes radiale, circonférentielle et de cisaillement de la contrainte dans la toile de roue. (c) Evolution de la composante de flexion des composantes radiale, circonférentielle et de cisaillement de la contrainte dans la toile de roue. Mesures réalisées pendant 5 tours de roue au niveau du raccordement toile moyeu d'une roue à toile ondulée

On peut retenir de cette brève présentation que le champ de contrainte dans la roue est biaxial, avec des composantes de flexion et de traction-compression variables dans le temps.

Par ailleurs, la période de base étant le tour de roue, le nombre de cycles à traiter est considérable. En effet, un aller simple Paris-Marseille correspond à 270000 tours de roue. Pour un train qui effectue 2 allers-retours par jour ceci revient à effectuer 384 millions de tours de roue par an !

1.1.3 La fissuration de la roue

Les composants ferroviaires et notamment les roues de train sont dimensionnés à l'aide de critères d'endurance afin de ne tolérer aucun amorçage de fissure du fait des sollicitations mécaniques. Cependant, des cas de roues fissurées ont été rencontrés dans le passé. Les analyses effectuées à l'Agence d'Essai Ferroviaire (AEF) ont montré que l'amorçage se fait dans la plupart des cas sur des entailles créées par chocs mécaniques (projections de ballast, etc...) ou sur les défauts de fabrication (replis de forge, etc...). Quant à la propagation, elle se fait par fatigue et nécessite un très grand nombre de cycles avant que la fissure n'atteigne une taille critique. Voici les observations faites par l'AEF suite aux expertises menées sur des roues fissurées (Figure 1-8) :

- L'amorçage des fissures se fait souvent dans la toile.
- La forme des fissures est semi-elliptique.
- Le plan de propagation est orthoradial.

Compte tenu de ces observations, on peut conclure que la fissure travaille essentiellement en mode I, sous chargement biaxial, avec un gradient de contrainte selon l'épaisseur de la toile pour les deux composantes. Le cisaillement étant relativement faible devant les deux autres composantes, on pourra ne considérer que le mode I et négliger le mode II.

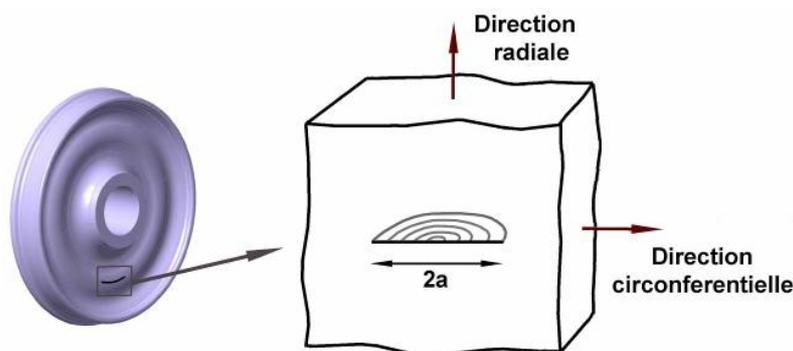


Figure 1-8. Forme type des fissures de fatigue rencontrées dans la toile

1.1.4 La maintenance de la roue et objectifs de la thèse

Puisque les roues de trains constituent des organes de sécurité majeure, elles sont régulièrement inspectées en service commercial et immédiatement déposées en cas de présence de fissure. Les intervalles d'inspection sont actuellement déterminés en se fondant sur le retour d'expérience. Elles dépendent du matériel roulant en question (TGV, corail, Fret, etc...) et de la voie empruntée. L'ordre de grandeur pour un TGV est de 1 million de km. Bien que cette approche

donne entière satisfaction du point de vue de la sécurité au niveau national, la SNCF souhaite introduire la mécanique de la rupture dans sa politique de maintenance pour répondre à deux objectifs principaux :

- Optimiser et individualiser les pas d'inspection des roues. L'optimisation a pour but de s'assurer que si une fissure apparaît, elle sera détectée avant de mettre en cause la sécurité du système tout en limitant les coûts de maintenance, tandis que l'individualisation doit permettre d'assouplir la gestion du réseau ferroviaire.

- Réduire l'importance du retour d'expérience dans la mise en place de la politique de maintenance. En effet, cette importance pose problème lorsque des évolutions ont lieu, comme les éventuels changements de design de la roue, ou même le changement de voie de circulation notamment avec les projets d'interopérabilité des échanges ferroviaires en Europe dont les travaux de normalisation sont en cours.

La réponse à ces 2 objectifs nécessite de modéliser la fissuration et de connaître les sollicitations réelles appliquées, afin d'en déduire l'évolution de la longueur de la fissure au cours du temps (Figure 1-9). Les pas de maintenance de la roue seront choisis de manière à rester inférieurs au temps que met la plus petite fissure détectable par les moyens d'inspection de la SNCF (avec une probabilité de détection de 100%) pour atteindre une taille critique.

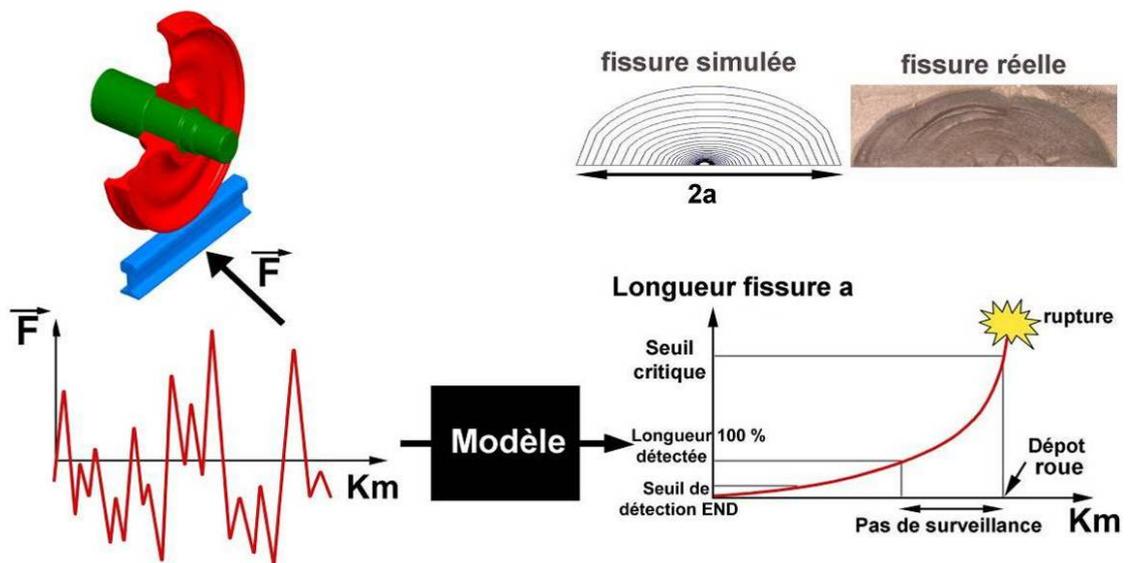


Figure 1-9. La future démarche de maintenance des roues

L'objectif de ce travail est donc de développer un modèle permettant de simuler la propagation des fissures par fatigue en mode I sous chargement à amplitude variable. Les fissures simulées sont semi elliptiques et soumises à un gradient biaxial de contrainte. Avant d'aborder dans le deuxième chapitre le modèle de propagation utilisé, nous présentons dans les prochains paragraphes une bibliographie succincte sur les bases de la Mécanique de la Rupture et les modèles de propagation existants.

1.2 Eléments de mécanique de la rupture

1.2.1 Modes de fissuration et champs de contrainte autour d'une fissure en mode I

Une fissure peut être sollicitée suivant trois modes cinématiques élémentaires :

- Mode d'ouverture (mode I)
- Mode de cisaillement plan (mode II)
- Mode de cisaillement hors-plan (Mode III)

En élasticité linéaire, la sollicitation de la fissure est la superposition linéaire de ces trois modes élémentaires. Dans cette étude nous nous intéressons seulement à la fissuration en mode I.

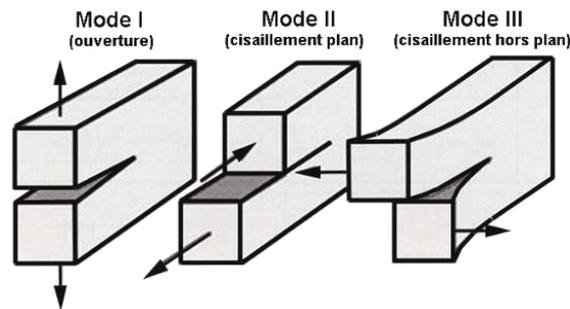


Figure 1-10. Les trois modes de fissuration

L'expression asymptotique des champs de contraintes autour d'une fissure traversante dans un milieu infini (Figure 1-11) soumise à un chargement biaxial en mode I est la suivante :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{\overline{K_I} \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) + \frac{(S_x - S_y)}{T} + o\left(\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
 \sigma_{yy} &= \frac{\overline{K_I} \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) + o\left(\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
 \sigma_{xy} &= \frac{\overline{K_I} \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + o\left(\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right)
 \end{aligned} \tag{1-1}$$

Ces expressions sont obtenues à partir des fonctions de Westergard permettant de calculer les champs de contraintes des problèmes présentant une symétrie du chargement et de la géométrie du problème comme dans le cas de la fissure de Griffith (Figure 1-11). Les champs de contraintes sont déduits de ces fonctions en effectuant un développement asymptotique en (r/a) où r est la distance à l'extrémité de la fissure. Les hypothèses permettant d'établir ces expressions sont les suivantes : élasticité plane, isotropie et petites déformations.

Dans le cas particulier de la fissure de Griffith, nous observons que les champs de contraintes sont fonction de deux termes dépendant du chargement, le premier est le facteur d'intensité des contraintes K_I qui dépend de la longueur de la fissure a et de la contrainte à l'infini normale au

plan de la fissure, le deuxième terme est la contrainte T qui dépend de la contrainte S_x . Le rapport S_x/S_y définit le niveau de biaxialité du chargement appliqué à l'infini. On trouve dans la littérature les expressions de K_I et de T pour les géométries de fissures et d'éprouvette les plus courantes. Pour les cas dont la solution n'est pas connue, les expressions de K_I et de T peuvent être déterminées de différentes manières, l'annexe B de ce rapport est une synthèse des différentes méthodes de calcul de K_I .

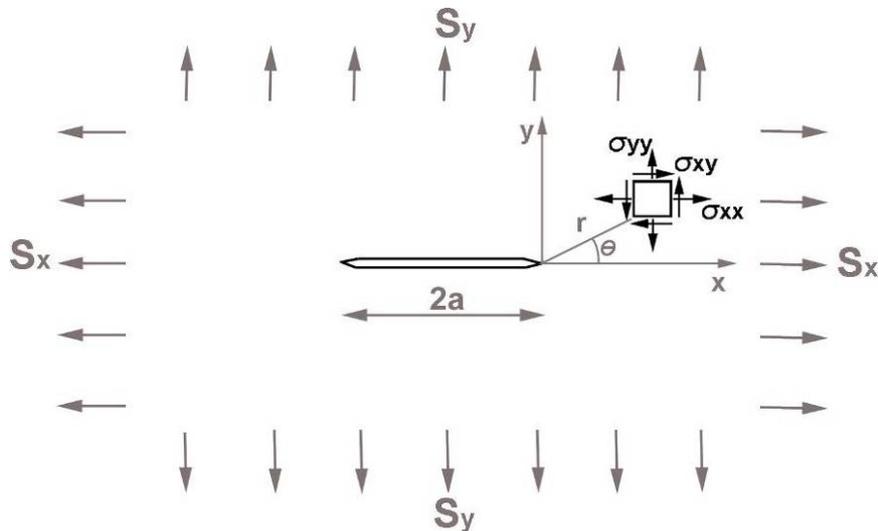


Figure 1-11. Fissure de Griffith en mode I soumise à un chargement biaxial

1.2.2 Limites de validité des champs présentés

Les solutions asymptotiques du champ des contraintes autour d'une fissure (1-1) ne sont pas valables partout dans la pièce fissurée mais dans une couronne limitée par la frontière de la zone plastique pour sa borne inférieure et par la limite de validité du développement asymptotique pour sa borne supérieure (Figure 1-12). Ces limites seront présentées en détail dans les paragraphes suivants, retenons seulement les ordres de grandeur : quelques millimètres pour la zone de validité du développement asymptotique et quelques dixièmes de millimètre pour la taille de la zone plastique.

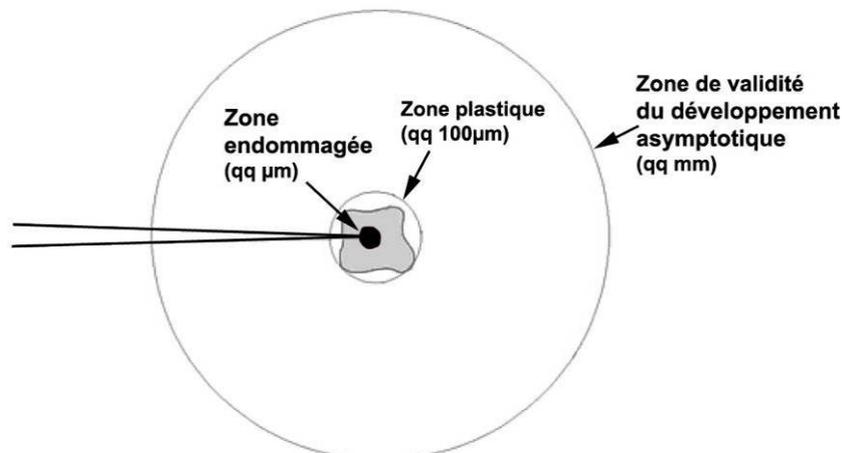


Figure 1-12. Différentes zones autour d'une fissure

1.2.2.1 Taille de zone plastique

En élasticité, les solutions asymptotiques présentent une singularité à l'extrémité de la fissure car les contraintes tendent vers une valeur infinie. En réalité le niveau de contrainte n'est pas infini, il se développe une zone plastifiée à l'extrémité de la fissure. La forme et la dimension de cette zone plastifiée dépendent du chargement ainsi que des caractéristiques du comportement élastoplastique du matériau

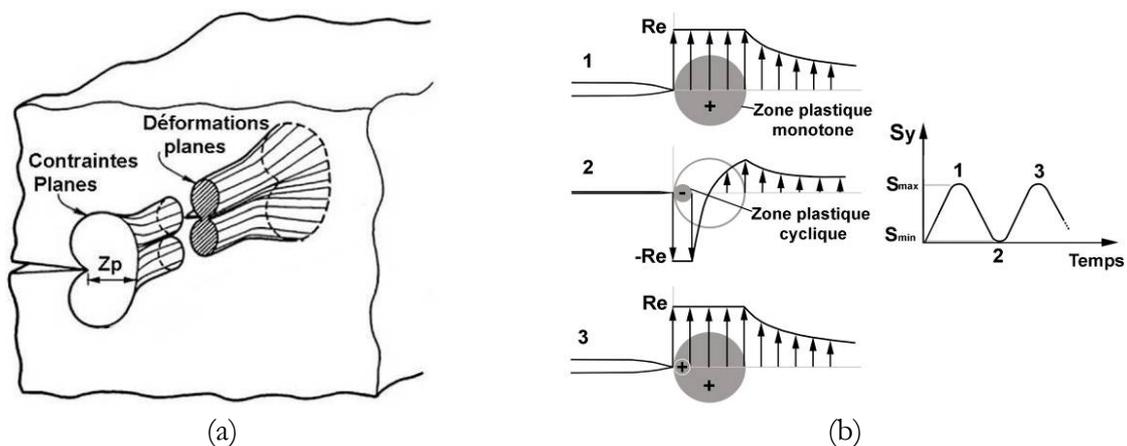
C'est dans les années 1960 que les progrès en microscopie tant optique qu'électronique ont permis de révéler l'existence d'une zone plastique en fond de fissure de fatigue [Bathias et Bailon 1997], cette zone joue un rôle très important dans la propagation dans les matériaux élastoplastiques, elle est à l'origine de l'interaction entre cycles et du phénomène de retard observé après surcharge. On peut distinguer deux types de zone plastique, l'une appelée monotone et l'autre cyclique.

La zone plastique monotone (Figure 1-13a) apparaît lors de l'application d'un chargement monotone, sa forme ainsi que sa taille dépendent de la nature du chargement. En contraintes planes, la zone plastique est plus étendue qu'en déformations planes, par contre elle présente une forme d'ailes de papillon moins marquée. La première évaluation de la zone perturbée par la plasticité en pointe de fissure est due à Irwin [Irwin 1960]. L'expression proposée donne une bonne approximation de l'étendue de la zone plastique monotone, pour un matériau supposé élastique parfaitement plastique. Cette expression est la suivante :

$$Zp = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{Re} \right)^2 \text{ en contrainte plane} \tag{1-2}$$

$$Zp = \frac{1}{3\pi} \left(\frac{K_I}{Re} \right)^2 \text{ en déformation plane}$$

Avec K_I le facteur d'intensité des contraintes appliqué et R_e la limite d'élasticité du matériau. Ces expressions sont déterminées en comparant la contrainte équivalente de Von Mises déduite des équations (1-1) à la limite d'élasticité du matériau. Le rayon r_p obtenu (Figure 1-13c) est pris comme une première approximation de la dimension de la zone plastique monotone. On calcule ensuite à partir de r_p , la dimension de la zone dans laquelle les champs de contrainte sont perturbés afin de respecter l'équilibre mécanique. La taille de la zone plastique monotone ainsi que sa forme dépendent de paramètres autres que la limite d'élasticité et le facteur d'intensité des contraintes, comme la contrainte de biaxialité T et l'écroutissage du matériau fissuré (Figure 1-14) [Pommier 2002b].



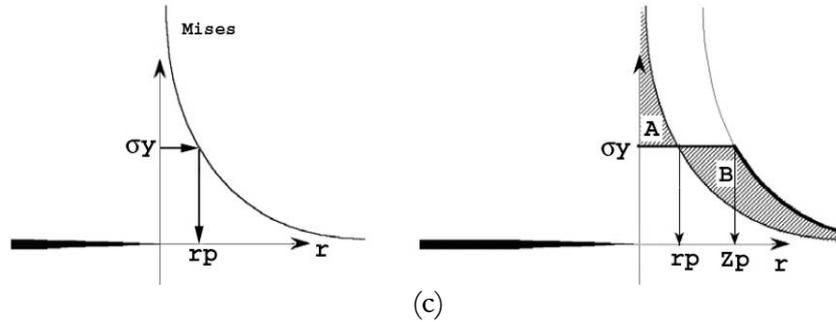


Figure 1-13. Zone plastique monotone en contraintes planes et déformations planes (a), zone plastique cyclique (b) et estimation d'Irwin de la zone plastique monotone (c)

Dans le cas d'un chargement cyclique, une autre zone plastique, dite cyclique, apparaît à l'intérieur de la zone plastique monotone (Figure 1-13b). Dans cette zone, le matériau se déforme plastiquement lors de la décharge. La taille de cette zone est estimée au quart de la zone plastique monotone quand le chargement appliqué à l'infini est nul. Cette zone plastique cyclique a été mise en évidence expérimentalement par plusieurs auteurs et par différents moyens expérimentaux, tels que la microdureté, l'attaque métallographique ou la diffraction des rayons X [Bathias et Bailon 1997].

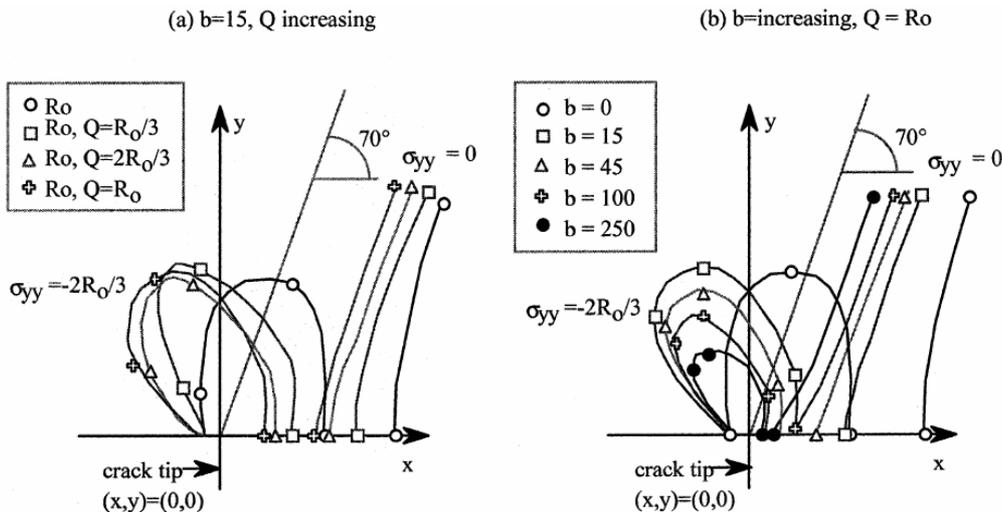


Figure 1-14. Influence des coefficients d'écaillage isotrope b et Q sur la forme de la zone plastique monotone [Pommier 2002b]

1.2.2.2 Limite du développement asymptotique

La solution asymptotique du champ de contrainte autour de la fissure s'écarte de la solution exacte quand nous nous éloignons de la pointe de la fissure. L'erreur sur la contrainte σ_{yy} est liée au rapport (r/a) puisque le développement asymptotique est en (r/a) . Le calcul de l'erreur associée au développement asymptotique est simple lorsqu'on dispose d'une solution exacte, il suffit de comparer la solution exacte à la solution asymptotique. Sur la Figure 1-15 nous avons reporté l'évolution de l'erreur en fonction de r/a calculée par [Pommier 2002a], nous remarquons que jusqu'à une distance à l'extrémité de la fissure égale à $0.1a$, l'erreur reste inférieure à 7%.

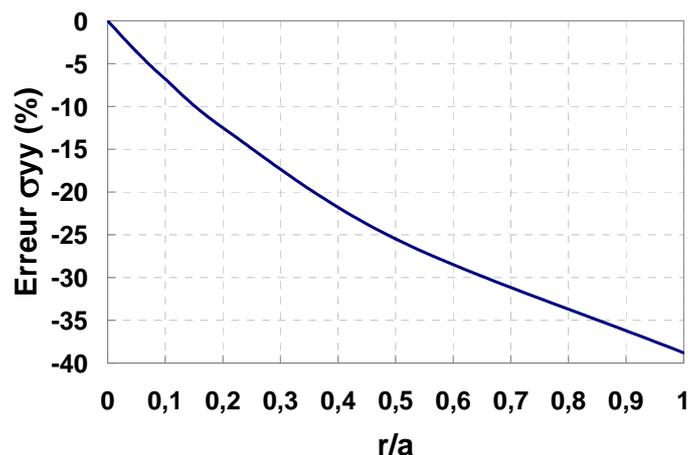


Figure 1-15. Evolution de l'erreur due au développement asymptotique sur le champ de contrainte σ_{yy} calculé dans l'axe de la fissure en fonction du rapport (r/a) sur l'axe

L'évolution de l'erreur sur le champ σ_{xx} suivant l'axe de la fissure ($\theta = 0$) est donnée dans la Figure 1-16 pour un $r/a=0.1$. Nous remarquons que cette erreur augmente rapidement en fonction du niveau de biaxialité.

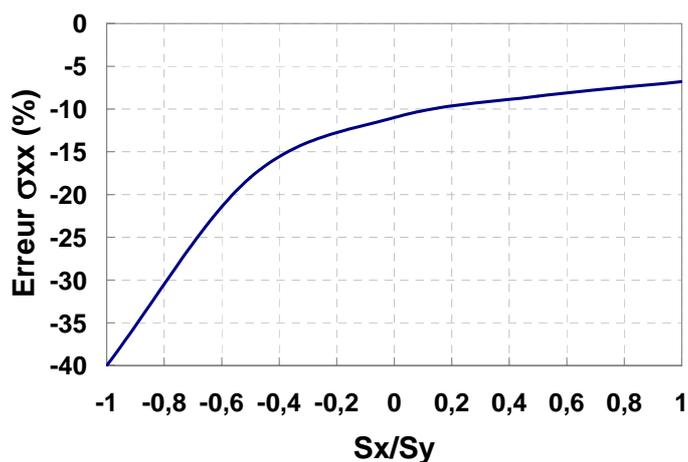


Figure 1-16. Evolution de l'erreur due au développement asymptotique sur le champ de contrainte σ_{xx} calculé dans l'axe de la fissure en fonction du rapport de biaxialité S_x/S_y pour $r/a=0.1$

Donc, la limite supérieure de validité du champ des contraintes autour d'une fissure est typiquement égale à 1/10 de la longueur de la fissure (pour une erreur inférieure à 10%), si le rapport de biaxialité du chargement est positif.

1.2.3 Propagation des fissures par fatigue

Les modèles classiques de propagation de fissure par fatigue donnent l'évolution de la vitesse de propagation en fonction du chargement appliqué en pointe de fissure par une approche empirique. Le modèle le plus utilisé est celui de [Paris et Erdogan 1963], pour ce modèle un essai de fissuration est nécessaire pour caractériser l'évolution de la vitesse de propagation en fonction de la variation du facteur d'intensité des contraintes (Figure 1-17). La courbe obtenue fait apparaître trois régimes, le régime central (régime II) dit de Paris pour lequel la vitesse de

fissuration est une fonction puissance de la variation du facteur d'intensité des contraintes. Au-delà de ce régime, la vitesse de propagation est supérieure à celle prévue dans le régime de Paris car la fissure se propage d'une manière instable (régime III). En deçà du régime II, la vitesse de propagation est inférieure à celle de Paris (régime I). Dans ce régime, la vitesse diminue rapidement quand ΔK diminue et la fissure finit par présenter des vitesses de fissuration difficilement détectables.

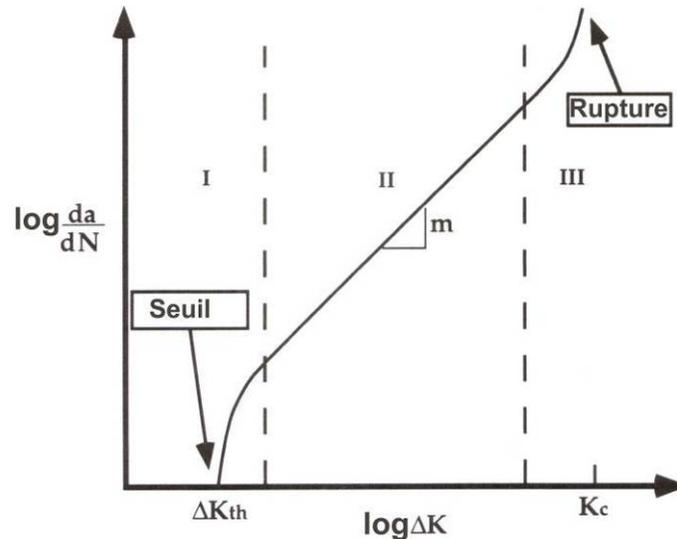


Figure 1-17. Courbe de propagation de Paris

La relation proposée par [Paris et Erdogan 1963] durant le régime II de propagation est la suivante :

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta K^m \quad (1-3)$$

ΔK étant la variation du facteur d'intensité des contraintes au cours d'un cycle qui induit une avancée da de la fissure, C et m sont deux paramètres du matériau définissant respectivement la position et la pente de la droite de Paris.

L'expérience montre que la vitesse de propagation d'une fissure n'est pas proportionnelle à la variation du facteur d'intensité des contraintes ΔK appliquée mais plutôt au facteur d'intensité des contraintes effectif ΔK_{eff} vu par la fissure. En effet, seule une fraction du cycle de fatigue est efficace, la fissure restant fermée pendant l'autre partie. La fermeture de la fissure peut avoir plusieurs sources comme la plasticité, la rugosité de ses faces, l'oxydation ou une transformation de phase induite par le chargement mécanique à l'extrémité de la fissure. Nous nous intéressons ici à la fermeture induite par plasticité, qui est particulièrement sensible aux effets d'histoire du chargement. La fermeture induite par plasticité provient de deux sources différentes, la première est le sillage plastique créé par la zone plastique le long du chemin de la fissure (Figure 1-18a) et la deuxième est l'apparition des contraintes résiduelles de compression devant la fissure qui a été mis en évidence par [Elber 1971] pour la première fois (Figure 1-18b). En réalité ces effets ne sont pas indépendants, et sont deux conséquences d'un même phénomène. En régime de plasticité confinée, la déformation plastique qui se développe dans la zone plastique monotone est à l'origine de contraintes résiduelles de compression devant l'extrémité de la fissure qui rend les cycles ultérieurs moins efficaces. Puis lorsque la fissure se propage les contraintes résiduelles s'exercent alors sur les faces de la fissure ce qui augmente le niveau d'ouverture de celle-ci.

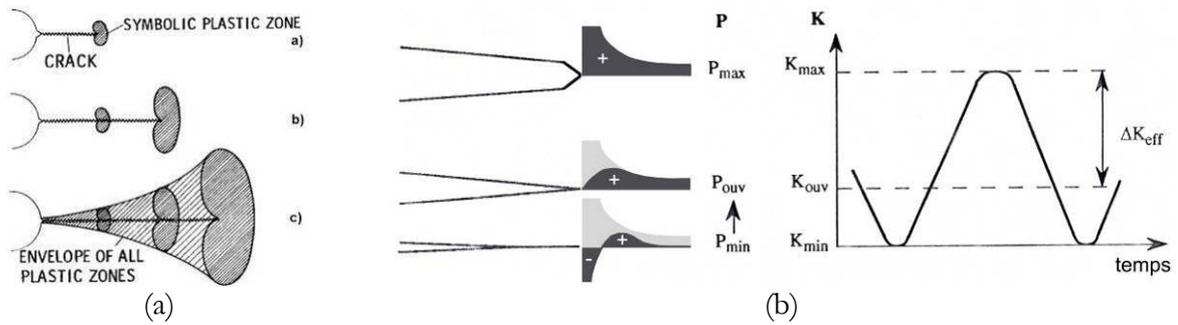


Figure 1-18. Sillage plastique (a) et phénomène de fermeture de la fissure par plasticité (b)

Le niveau de fermeture peut être déterminé expérimentalement ou par simulation par Eléments Finis connaissant le comportement élastoplastique de la structure fissurée [Mc Clung 1996]. La méthode de détermination expérimentale s'appelle la méthode de variation de la complaisance de l'éprouvette, on trace l'évolution du déplacement de deux points de part et d'autre des lèvres de la fissure en fonction du chargement appliqué. Le seuil d'ouverture correspond au niveau de chargement à partir duquel la complaisance devient linéaire puisque la fissure est alors complètement ouverte. La difficulté réside dans la définition du critère de perte de linéarité nécessaire pour déterminer le niveau de charge à partir duquel la fissure est fermée. Ce critère doit varier en fonction de la distance entre les points de mesure et l'extrémité de la fissure.

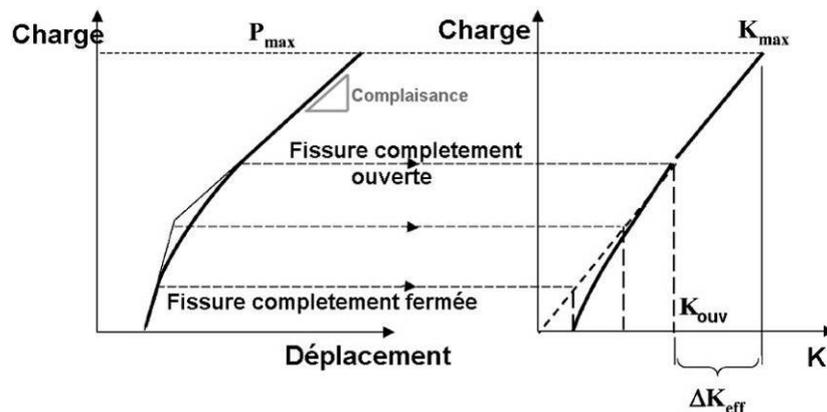


Figure 1-19. Détermination du niveau d'ouverture K_{ouv} par la méthode de complaisance

Les paramètres influant sur le niveau de fermeture par plasticité, en fatigue à amplitude monotone, sont classés en deux catégories, les paramètres liés au chargement appliqué et les paramètres liés au matériau [Roychowdhury et Dodds 2004]. Les paramètres matériaux sont ses propriétés élastiques (E et ν) et plastiques (limite d'élasticité et coefficients d'écrouissage). Les paramètres liés au chargement ont été étudiés d'une manière abondante dans la littérature depuis les travaux d'[Elber 1971]. Par exemple, dans le cadre d'une étude sur les essieux ferroviaire [Kurzawa 2002] a montré que l'influence du rapport de charge R sur le niveau de fermeture dépend du signe de R . Les simulations de la propagation par Eléments Finis ont permis de conclure que K_{ouv} dépend de R quand ce dernier est positif et de K_{max} et S_{ymin} quand R est négatif. Ces simulations ont été validées grâce à des essais de fissuration réalisés à différents rapports de charge. Le niveau d'ouverture dépend également de la biaxialité autour de la fissure (contrainte T). L'influence de la contrainte T sur la vitesse de propagation est attribuée à la dépendance du niveau de fermeture à T ([Hutar et al. 2004] et [Hutar et al. 2006]).

Pour un matériau donné, la loi de Paris tenant compte du phénomène de fermeture devient alors :

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta K_{eff}^m = C \cdot (K_{max} - K_{ouv})^m \quad \text{et} \quad K_{ouv} = f(R, T, K_{max}, S_{min}) \quad (1-4)$$

En fatigue à amplitude variable, la prise en compte de K_{ouv} est indispensable pour modéliser l'interaction entre les cycles. Son évolution ne peut généralement pas être calculée analytiquement. Les Eléments Finis constituent un moyen de détermination de K_{ouv} , mais dans la pratique cette méthode n'est pas employée en amplitude variable puisqu'il reste hors de portée des machines actuelles de calculer par éléments finis des millions de cycles, surtout si l'on emploie des lois de comportement élaborées.

1.2.4 Limites de la démarche classique

Ainsi, la démarche classique consiste à exprimer la vitesse de fissuration en utilisant la loi de Paris dite intrinsèque, c'est-à-dire donnée en fonction de l'amplitude effective du facteur d'intensité des contraintes ($\Delta K_{eff} = K_{max} - K_{ouv}$), puis à proposer des lois d'évolution pour le niveau d'ouverture en fonction des paramètres liés au matériau et des paramètres liés au chargement. Cette démarche présente certains inconvénients :

- L'identification expérimentale des lois d'évolution de K_{ouv} en fonction de ces paramètres est lourde et coûteuse si l'on souhaite prendre en compte tous les paramètres de chargement (K_{max} , T , S_{ymin} ou R), puisque le nombre d'essais de fissuration à réaliser devient vite non négligeable. Cela sans tenir compte de la dispersion des résultats en propagation qui impose généralement de doubler les essais. De même déterminer ces évolutions par Eléments Finis nécessite des calculs conséquents. Comme pour les essais, examiner les diverses configurations possibles pour les différents paramètres du chargement est assez long et coûteux.
- Cette démarche est bien adaptée pour les sollicitations à amplitude constante puisqu'on sait calculer ou mesurer l'évolution du niveau d'ouverture à partir du chargement appliqué dans ce cas. Or une roue est soumise à un chargement d'amplitude variable. Examiner toutes les configurations pour les jeux (K_{max} , T , S_{ymin}) ainsi que les évolutions transitoires entre chacun de ces jeux devient rapidement inabordable que l'on emploie une méthode numérique ou expérimentale.

1.3 Bilan du Chapitre 1

- La fissuration des toiles de roue en service n'est pas due à un problème de conception mais plutôt de production (replis de forge) ou d'utilisation (chocs mécaniques).
- Les fissures étudiées sont semi elliptiques.
- La toile de roue, où se développent des fissures, travaille en traction-compression et flexion biaxiale. Les termes de flexion et de traction-compression, n'évoluent pas de la même manière en fonction du temps.

- Le niveau de cisaillement dans la toile étant faible devant les autres composantes, les fissures sont supposées travailler en mode I.
- L'évolution temporelle du chargement appliqué est difficile à calculer car elle est à caractère variable, des enregistrements des signaux de chargement ont été réalisés par la SNCF.
- Le nombre de cycles à traiter est très élevé. A titre d'exemple, le trajet Paris-Marseille compte 384 millions de tours de roue par an.
- La démarche classique employée pour la fissuration par fatigue à amplitude constante est mal adaptée à ce problème. Un modèle incrémental permettant de prendre en compte l'histoire temporelle du chargement sera donc mis en place puis enrichi afin de pouvoir tenir compte des niveaux élevés de compression et de la biaxialité du chargement. Ce modèle ainsi que les améliorations apportées seront l'objet des prochains chapitres.

Chapitre 2 Le modèle de fissuration par fatigue sous amplitude variable

2.1	L'amplitude variable dans les toiles des roues.....	43
2.2	Bibliographie : la fissuration sous chargement d'amplitude variable.....	44
2.2.1	Effet du chargement à amplitude variable sur la fissuration.....	44
2.2.1.1	Cas de surcharges unitaires	44
2.2.1.2	Chargement par blocs.....	46
2.2.2	La modélisation de la fissuration sous chargement d'amplitude variable.....	47
2.3	Le modèle incrémental de propagation.....	51
2.3.1	Présentation du modèle	51
2.3.2	Etude des champs de déplacements en pointe de fissure.....	52
2.3.2.1	Hypothèse de projection du champ de déplacement.....	52
2.3.2.2	Décomposition de Karhunen-Loeve.....	53
2.3.2.3	Hypothèse de projection du champ de déplacement retenue.....	56
2.3.2.4	Vérification par Eléments Finis.....	57
2.3.2.5	Interprétation	60
2.3.3	Equations d'évolution du modèle	62
2.3.3.1	Loi de fissuration.....	62
2.3.3.2	Loi d'émoussement (sans compression)	65
2.3.4	Méthode d'implémentation.....	85
2.3.5	Méthode d'identification.....	88
2.4	Identification des paramètres de la loi pour l'acier à roue.....	89
2.4.1	Identification du comportement élastoplastique.....	89
2.4.2	Identification des paramètres de la loi d'émoussement	93
2.4.3	Identification du paramètre de la loi de fissuration	95
2.5	Confrontation essais calculs.....	97
2.6	Etude de sensibilité	102
2.7	Bilan du Chapitre 2	107

Nous avons vu que les modèles de fissuration par fatigue fondés sur la loi de Paris ne sont pas suffisants pour prévoir la fissuration des toiles de roue de train (biaxialité, compression, amplitude variable). Quel modèle de propagation utiliser dans ce cas ? Nous avons choisi un modèle incrémental né il y a quelques années dans le cadre d'une étude réalisée sur la fissuration par fatigue de disques de turbomachines [Pommier et Risbet 2005]. Ce modèle permet d'effectuer des calculs de fissuration par fatigue sous chargement à amplitude variable. L'originalité du modèle incrémental est d'introduire des variables internes décrivant l'état courant de la structure fissurée et d'identifier les lois d'évolution de ces variables internes en s'appuyant sur des calculs par éléments finis. Parmi ces variables internes, on aura, par exemple, le niveau de fermeture de la fissure. Mais d'autres variables sont aussi introduites afin de tenir compte des divers effets d'interaction entre cycles de fatigue. Deux avantages principaux découlent de cette démarche. Le premier est de pouvoir travailler directement avec le signal temporel, ce qui facilite le traitement des chargements complexes. Le second est le faible coût expérimental associé à l'identification du modèle, puisque l'identification se fait essentiellement par post-traitement de calculs par éléments finis. Un autre avantage du modèle, est de travailler à une échelle globale qui permet de s'affranchir lors de la simulation, des calculs par éléments finis de propagation de fissures par fatigue en élasto-plasticité. Après un exposé rapide des conditions de chargement de la roue, et de l'effet de chargements à amplitude variable sur la propagation des fissures de fatigue, nous présentons les équations d'évolution du modèle incrémental. Le modèle est constitué de deux lois, une dite de fissuration et l'autre dite d'érouissage. Nous nous attacherons à expliquer les méthodes d'implémentation numérique et d'identification des paramètres matériaux. L'application du modèle sur l'acier à roue sera ensuite présentée. Les premiers résultats de simulation de propagation de fissure seront confrontés aux résultats expérimentaux pour des cas de chargements complexes (surcharges, blocs de cycles). Une étude de sensibilité présentée à la fin du chapitre montre comment les paramètres de la loi de comportement du matériau influent sur le modèle de fissuration par fatigue que l'on identifie.

2.1 L'amplitude variable dans les toiles des roues

La Figure 2-1 montre deux courts extraits d'un chargement temporel mesuré dans une toile de roue ondulée pendant la campagne menée par l'Agence d'Essai Ferroviaire. On présente ici l'évolution de la contrainte radiale dans une roue en attaque (c'est-à-dire à l'avant du wagon). Le train roulait à 80km/h et le wagon de mesure était à vide (18.5 tonnes) pour le premier signal et chargé par des blocs d'acier de 60 tonnes pour le deuxième. On remarque que ces chargements sont variables dans le temps et ne présentent, à part le tour de roue, aucun signe manifeste de motif répétitif.

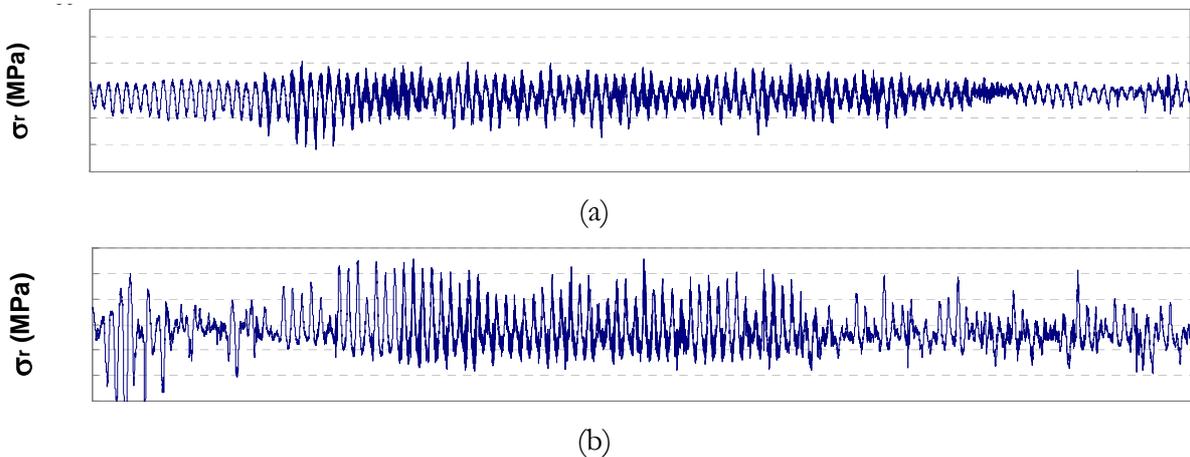


Figure 2-1. Exemple d'évolution de la contrainte radiale mesurée dans une toile ondulée au niveau du point le plus sollicité (raccordement toile moyeu). La vitesse du train est de 80 Km/h et le wagon est à vide en (a) et chargé en (b).

Ces signaux seront traités afin d'extraire les maximum et minimum de contrainte par tour de roue. L'ordre d'apparition de ces minima et maxima sera conservé puisque l'histoire de chargement est importante pour les calculs de durée de vie en propagation.

2.2 Bibliographie : la fissuration sous chargement d'amplitude variable

Une différence fondamentale existe entre la prédiction de la propagation en fatigue sous chargement à amplitude constante et celle à amplitude variable. Pour les chargements à amplitude constante, l'incrément de propagation dépend de la longueur de la fissure et du chargement appliqué. Pour les chargements à amplitude variable, l'incrément de propagation dépend en outre de l'histoire du chargement que la fissure a subie. On trouve dans la littérature de nombreuses études concernant l'effet de chargements à amplitude variable sur la propagation des fissures de fatigue. Nous discutons ici quelques phénomènes observés expérimentalement.

2.2.1 Effet du chargement à amplitude variable sur la fissuration

2.2.1.1 Cas de surcharges unitaires

Lorsqu'on applique une surcharge unitaire à une structure sollicitée en fatigue à amplitude constante, l'effet de la surcharge, contrairement à ce que l'on peut l'imaginer, est bénéfique. La surcharge retarde la propagation de la fissure. Le phénomène de retard observé après l'application d'une surcharge est bien connu dans la littérature et a fait l'objet de nombreux travaux. Ce phénomène spectaculaire peut être exploité par exemple lors de tests d'épreuve des composants travaillant sous pression (chaudières, canalisations, etc...). Cette méthode de contrôle destructif consiste à appliquer une surcharge à la structure. Si un défaut critique vis à vis du test d'épreuve existe dans la pièce, la pièce est détruite. Sinon, la pièce n'est pas rompue et les défauts sous-critiques verront leur propagation par fatigue ultérieure ralentie voire supprimée grâce à l'effet de surcharge. On peut observer d'après la Figure 2-2 que la réponse de la fissure suite à l'application d'une surcharge peut varier d'un cas à l'autre. Selon les cas, le retard est plus ou moins grand et arrive plus ou moins tôt. L'effet de non retard (a) est observé pour les petites surcharges. Pour les surcharges plus élevées, le retard peut être immédiat (b), différé (c) ou perdu (d). Le retard différé est observé pour la plupart des matériaux, il correspond à un accroissement immédiat de la vitesse de propagation suivi d'une forte diminution de cette vitesse, le bilan global étant un retard. Selon le poids relatif de ces deux phases, le retard peut être plus ou moins important, voire nul (retard perdu) ou négatif. Pour les surcharges élevées, un blocage complet de la fissure peut avoir lieu. Globalement l'effet de retard après une surcharge dépend des conditions de chargement, de la longueur de la fissure, de sa forme mais également de la nature du matériau, de la température etc... Le modèle de propagation doit donc être capable de prendre en compte tous ces facteurs.

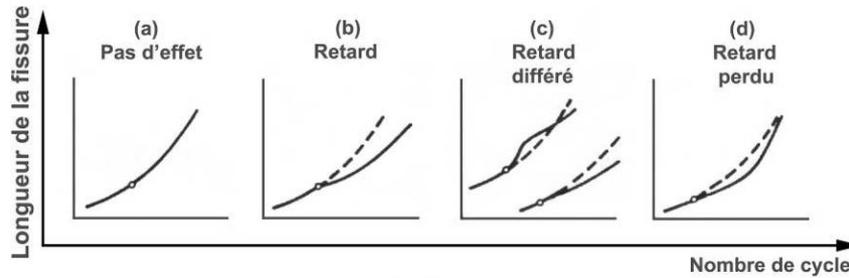


Figure 2-2. Différentes réponses aux surcharges pour les fissures en fatigue [Bathias et Baïlon 1997]

Pourquoi la vitesse de fissuration diminue-t-elle après l'application d'une surcharge ? Comme on l'a vu au premier chapitre, lorsque la plasticité est confinée, une zone de contraintes résiduelles de compression apparaît devant la pointe de la fissure quand cette dernière est déchargée. Ces contraintes résiduelles de compression sont à l'origine du phénomène de fermeture des fissures de fatigue à travers lequel est généralement interprété l'effet de retard. La Figure 2-3 montre par exemple l'évolution du niveau d'ouverture d'une fissure après l'application d'une surcharge dans le cas d'un retard différé. L'accélération instantanée de la propagation provient de la chute du niveau d'ouverture K_{ouv} , juste après la surcharge. En effet, la surcharge conduit à l'émoussement de la fissure et il devient donc nécessaire de comprimer pour obtenir le contact entre ses lèvres. Ensuite, le niveau d'ouverture de la fissure augmente au fur et à mesure de l'avancée de son extrémité dans la zone de compression laissée par la surcharge. Enfin lorsque l'extrémité de la fissure s'échappe de cette zone de compression résiduelle, le niveau d'ouverture diminue de nouveau.

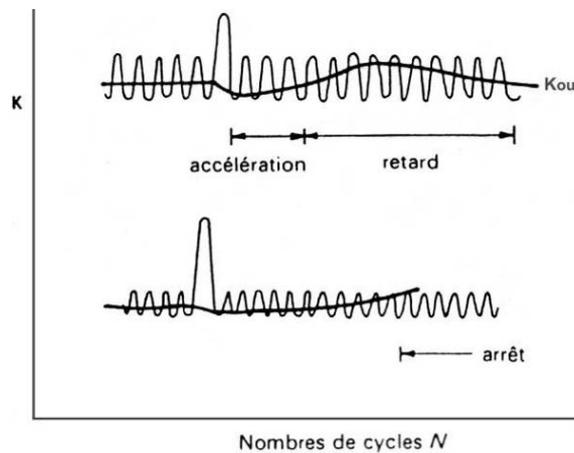


Figure 2-3. Evolution du niveau d'ouverture après l'application d'une surcharge [Bathias et Baïlon 1997]

Sur la Figure 2-4 est tracée l'évolution schématique de la vitesse de propagation par fatigue après application d'une surcharge dans un diagramme de Paris. On observe l'accélération immédiate de la fissure suivie d'une décélération, puis à nouveau d'une accélération. La vitesse de propagation décroît tant que le niveau d'ouverture augmente, puis croît lorsque la fissure quitte progressivement la zone de compression résiduelle laissée par la surcharge.

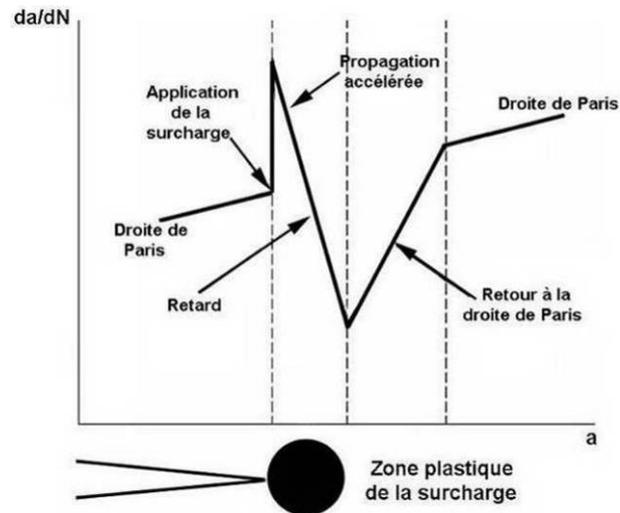


Figure 2-4. Evolution de la vitesse de propagation après application d'une surcharge

2.2.1.2 Chargement par blocs.

L'effet d'un bloc de surcharges est comparable à celui d'une surcharge unitaire (Figure 2-5), les mêmes phénomènes transitoires d'accélération et de ralentissement ont lieu au début et à la fin du bloc. En général, l'effet d'accélération transitoire, comme l'effet de retard sont plus marqués pour un bloc de surcharges que pour une surcharge unitaire. Si la longueur du bloc est suffisante, un régime stabilisé peut s'établir à l'intérieur de la séquence.

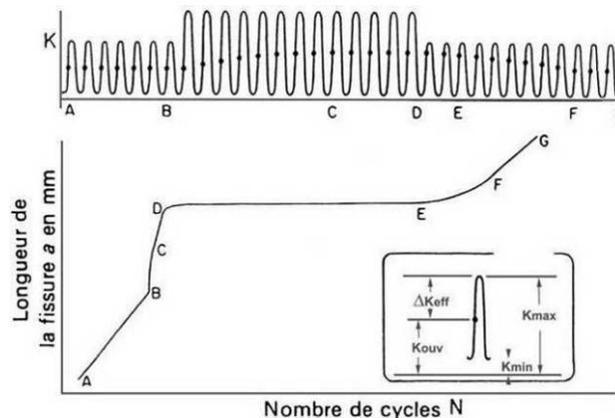


Figure 2-5. Evolution du niveau d'ouverture et de la longueur de la fissure pendant un chargement par blocs [Bathias et Baïlon 1997]

Pour des blocs complexes, il devient difficile de prévoir les phénomènes observés du fait d'interactions non-linéaires entre cycles. La Figure 2-6 illustre la durée de vie à rupture obtenue pour différents blocs répétés lors d'une étude réalisée sur l'aluminium 2024-T3 [Schijve 1973]. Les blocs (c), (d) et (e) ainsi que (f), (g) et (h) contiennent respectivement les mêmes cycles mais distribués de trois manières différentes dans le temps. La différence entre les durées de vie obtenues dans les trois cas provient des différences d'histoire de chargement. En effet, la durée de vie obtenue avec le bloc à amplitude croissante (c) est inférieure à celle obtenue avec le bloc (e) à amplitude décroissante puisque dans le premier cas les grands cycles sont suivis des petits cycles qui n'ont pas beaucoup d'influence sur la durée de vie. Par contre dans la configuration (e) les grands cycles jouant le rôle de surcharge sont suivis des cycles intermédiaires qui deviennent inefficaces à cause du retard de la fissure. La taille du bloc joue un rôle non négligeable sur la

durée de vie. Pour les blocs (c) et (e) la durée de vie obtenue est similaire puisque la taille du bloc est petite ce qui fait que le niveau de contact n'a pas le temps d'évoluer entre surcharges. Les blocs (f) et (h) sont plus longs, la différence entre les durées de vie obtenues est donc plus marquée.

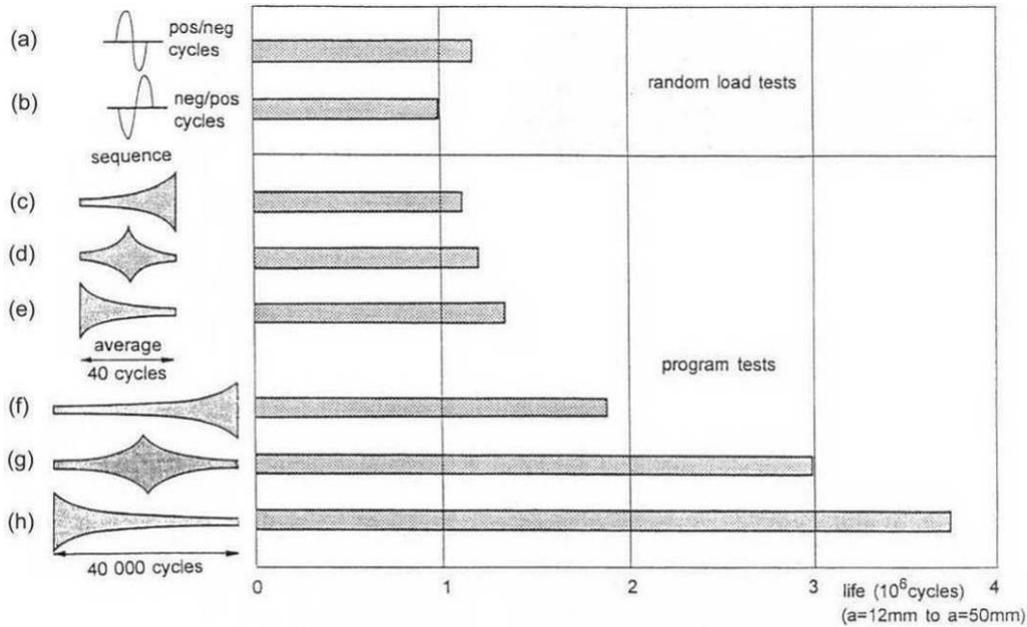


Figure 2-6. Exemples de durées de vie en fissuration par fatigue pour des blocs simples [Schijve 1973]

Les études concernant la propagation des fissures de fatigue sous chargement réellement aléatoire sont très rares. En effet les essais sont très longs, d'une part, du fait de difficultés de pilotage des machines d'essai (faibles fréquences) et d'autre part du fait des effets d'interaction entre cycles qui tendent souvent à augmenter les durées de vie.

2.2.2 La modélisation de la fissuration sous chargement d'amplitude variable

L'un des modèles les plus simples permettant de modéliser le retard après surcharge est celui de Wheeler [Wheeler 1972]. Ce modèle consiste à multiplier la vitesse de propagation après l'application de la surcharge par une fonction retard Φ . Le retard existe tant que la zone plastique de la fissure reste à l'intérieur de celle due à la surcharge (Figure 2-7).

$$\left(\frac{da}{dN} \right)_{\text{retardé}} = \Phi \left(\frac{da}{dN} \right)_{\text{non retardé}} \quad (2-1)$$

La fonction retard est définie comme suit :

$$\Phi = \left(\frac{Zp_i}{\lambda} \right)^{m_w} = \left(\frac{Zp_i}{a_0 + Zp_{\text{surcb}} - a_i} \right)^{m_w} \quad (2-2)$$

Zp_i étant la taille de la zone plastique due au chargement de base, Zp_{surcb} celle de la zone plastique due à la surcharge et m_w un paramètre matériau déterminé expérimentalement.

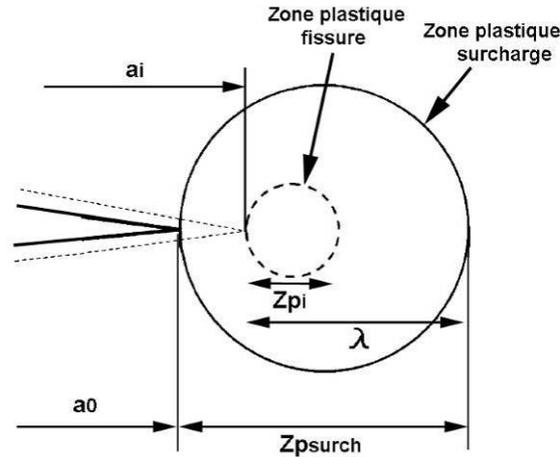


Figure 2-7. Zones plastiques après surcharge [Wheeler 1972]

Le premier défaut du modèle de Wheeler c'est qu'il suppose que le retard est immédiat après surcharge. Or, lorsque les surcharges sont proches, l'effet d'accélération domine devant l'effet retard, ce que le modèle de Wheeler ne prévoit pas. Un deuxième défaut provient du fait que la fonction retard Φ est monotone croissante avec la longueur de la fissure. Ainsi, le retard présenté dans la Figure 2-4 ne sera pas modélisé mais seulement le retour à la droite de Paris. A ces deux limitations s'ajoute le fait que le modèle n'est pas fait pour cumuler l'effet de surcharges rapprochées. En effet, comme la fonction retard est multiplicative, l'effet des surcharges est aussi multiplicatif dans ce modèle. Ceci conduit à sous-estimer considérablement les vitesses de fissuration lorsqu'une seconde surcharge est appliquée alors que l'effet de la précédente est encore significatif.

Un autre modèle permettant de calculer la vitesse de propagation après surcharge est celui de [Willenborg et al. 1971]. Le retard est modélisé en utilisant un facteur d'intensité des contraintes effectif ΔK_{eff} calculé comme suit :

$$\Delta K_{eff} = K_{max\,eff} - K_{min\,eff} \quad \text{avec} \quad K_{max\,eff} = K_{max} - K_{red} \quad \text{et} \quad K_{min\,eff} = K_{min} - K_{red} \quad (2-3)$$

On n'utilisera que la partie positive de $K_{min\,eff}$. Le facteur d'intensité des contraintes K_{red} (comme « reduction » en anglais) correspond à la réduction du facteur d'intensité des contraintes après application de la surcharge. Il est calculé de la manière suivante :

$$K_{red} = K_{req} - K_{max} \quad (2-4)$$

Le facteur d'intensité des contraintes K_{req} (comme « required » en anglais) correspond au facteur d'intensité des contraintes nécessaire pour produire une zone plastique Zp_{req} dont la dimension est égale à la dimension de la zone plastique laissée par la surcharge Zp_{surcb} moins la distance parcourue par la fissure depuis l'application de cette surcharge (Figure 2-8). Les quantités Zp_{req} et K_{req} sont calculées comme suit :

$$a_0 + Zp_{surcb} = a_i + Zp_{req} = a_i + \alpha \left(\frac{K_{req}}{R_c} \right)^2 \quad (2-5)$$

Le facteur d'intensité des contraintes K_{red} diminue au fur et à mesure de l'extension de la fissure. Finalement, hors de la zone plastique de la surcharge ΔK_{eff} est égal à ΔK .

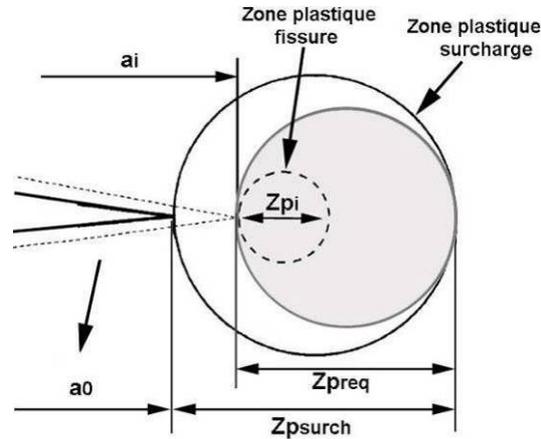


Figure 2-8. Modèle de [Willenborg et al. 1971]

La loi de propagation utilisée ensuite est celle de Forman, qui permet de tenir compte des effets de rapport de charge :

$$\frac{da}{dN} = \frac{C \Delta K_{eff}}{(1 - R_{eff}) K_c - \Delta K_{eff}} \quad (2-6)$$

K_c étant le facteur d'intensité des contraintes critique et R_{eff} est le rapport de charge effectif :

$$R_{eff} = \frac{K_{min\,eff}}{K_{max\,eff}} \quad (2-7)$$

Ce modèle permet de cumuler des surcharges de niveaux différents, plus ou moins proches. Cependant, pour des surcharges de forte amplitude ce modèle surestime largement leur effet. Par exemple, juste après l'application une surcharge d'un facteur 2, $K_{red} = K_{max}$, et par conséquent ΔK_{eff} est nul et la vitesse de fissuration également.

Dans le même esprit, mais de manière beaucoup plus élaborée, une deuxième génération de modèles a ensuite été proposée. Ces modèles, tels que les modèles CORPUS, ONERA et PREFAS (voir [Newman et Elber 1988]), sont fondés essentiellement sur une ou plusieurs lois d'évolution du niveau d'ouverture de la fissure. Ces lois d'évolution sont déterminées de manière empirique en se basant sur des essais. L'avantage de cette démarche est de pouvoir ajuster les paramètres du modèle pour chaque matériau. L'inconvénient est qu'il faut une importante campagne d'essais pour identifier le modèle, et qu'on ne sait pas a priori prévoir la vitesse de fissuration pour des configurations non envisagées dans la campagne d'essai. Par exemple, l'effet de surcharges rapprochées est mal décrit, parce que ces modèles décrivent mal l'effet de retard différé après une surcharge. Or l'effet de retard différé est couramment rencontré en pratique.

Enfin la troisième génération de modèles (COSMIC de [Newman 1992], [De Koning 1981]) est semi-numérique et fondée généralement sur le modèle de Dugdale. Le modèle de [Dugdale 1960] est un modèle permettant de calculer la taille de la zone plastique d'une fissure dans un matériau parfaitement plastique avec une hypothèse de contraintes planes. Il a également été étendu au cas

des déformations planes, mais avec moins de succès. Ce modèle emploie une fissure de longueur fictive $a_i + Zp$ où a_i est la longueur physique de la fissure et Zp la taille de sa zone plastique (Figure 2-9). Dans cette zone plastique, règnent des contraintes de cohésion égales à l'opposé de la contrainte d'écoulement R_e . La taille de la zone plastique est calculée par superposition en considérant que la solution de cette fissure est égale à la superposition de deux problèmes. Le premier est celui de la fissure fictive de longueur $a_i + Zp$ soumise à un champ de contrainte appliqué à l'infini et le deuxième correspondant aux forces de cohésions dans la partie fictive Zp de la fissure. A la pointe de la fissure fictive, la singularité des contraintes disparaît de telle sorte que le facteur d'intensité des contraintes devient nul à cet endroit. Cela se traduit par :

$$K_s(a_i + Zp) + K_{\sigma_0}(a_i + Zp) = 0 \quad (2-8)$$

La seule inconnue de cette équation est la taille de la zone plastique Zp . A titre d'exemple, la taille de la zone plastique calculée à partir de ce modèle pour une fissure traversante dans une plaque infinie est :

$$Zp = \frac{\pi}{8} \left(\frac{K_s}{R_e} \right)^2 \quad (2-9)$$

L'avantage de ce modèle est qu'il permet d'évaluer la déformation plastique à l'extrémité de la fissure à partir d'un simple calcul par superposition.

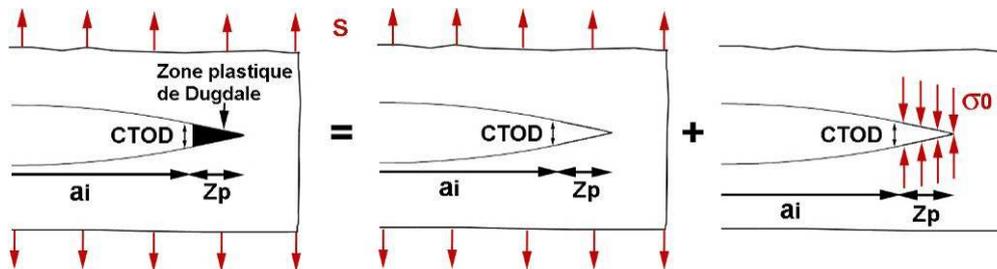


Figure 2-9. Modèle de [Dugdale 1960]

Le modèle de fermeture induite par la plasticité « d'éprouvettes » fictives dans la zone plastique de la fissure de Dugdale (ou Strip Yield) a pour objectif de calculer les contraintes résiduelles de compression en pointe de fissure et dans son sillage et d'en déduire le niveau de fermeture de la fissure. La zone plastique en pointe de fissure est discrétisée en « éprouvettes » de largeur fixée. Ces « éprouvettes » sont supposées travailler en traction-compression uniaxiale. Néanmoins, pour tenir compte de l'aspect multiaxial de la sollicitation en pointe de fissure, un facteur correctif peut être appliqué à la contrainte d'écoulement σ_0 (Figure 2-10). Cette amélioration a été apportée par [Newman 1981], essentiellement pour pouvoir aborder les problèmes en déformations planes. L'idée est d'introduire un coefficient de confinement plastique α (Constraint Factor). La contrainte d'écoulement en pointe de fissure vaut alors $\alpha \cdot \sigma_0$. En contrainte plane le coefficient α est proche de 1 et en déformation plane il est choisi proche de 3. Le coefficient α peut être différent en traction et en compression, ce qui permet, entre autres, de simuler d'une manière assez grossière l'effet Bauschinger. L'allongement de ces « éprouvettes » dans le sillage de la fissure permet ensuite de calculer le niveau de fermeture de la fissure.

Ce modèle est bien plus riche que ceux de Wheeler et Willenborg. Il permet d'avoir une saturation de l'effet de surcharge, lié à la capacité des « éprouvettes » de se déformer plastiquement en compression. Il permet également de cumuler des surcharges de niveaux

différents. Mais ce modèle présente également plusieurs inconvénients. Premièrement il est fondé sur le modèle de Dugdale qui s'applique mal en déformations planes. Deuxièmement, les « éprouvettes » ont une largeur constante. Or la déformation plastique se fait sans changement de volume. En contraintes planes, une déformation hors plan, selon la direction z , permet de conserver le volume. En déformations planes, la déformation hors plan étant nulle, une contraction latérale des « éprouvettes » devrait être considérée, ce qui n'est pas le cas. On crée donc de la matière ! A travers le facteur α , on tient compte de cet effet multiaxial sur la contrainte d'écoulement. Mais l'effet de la contraction latérale sur la géométrie du problème n'est pas pris en compte. Le calcul du niveau de fermeture en est affecté.

Par ailleurs, le modèle ne permet pas de tenir compte de l'écroutissage du matériau. Or cet écroutissage a une importance notable sur le niveau de fermeture des fissures. En effet, l'écroutissage cinématique, ou effet Bauschinger, est important pour déterminer le niveau de contrainte résiduelle de compression que l'on peut atteindre dans le sillage et en pointe de fissure et par conséquent le niveau d'ouverture de la fissure.

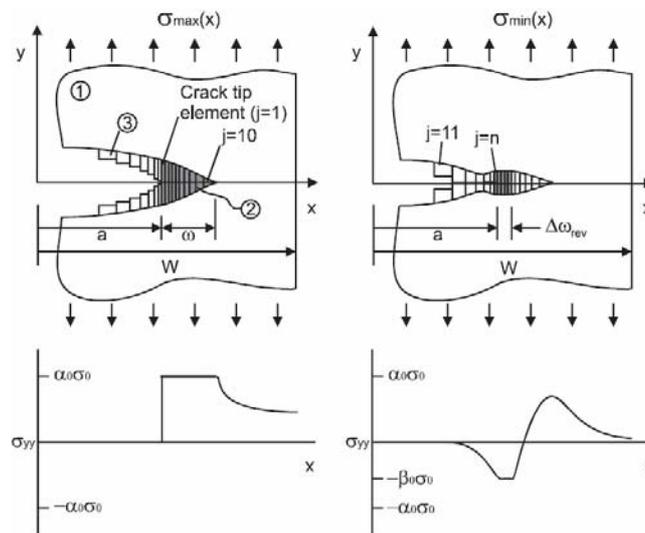


Figure 2-10. Zones plastiques après surcharge (d'après [Kim et Lee 2000])

[Budiansky et Hutchinson 1978] ont proposé une solution analytique de ce problème en utilisant le modèle de Dugdale. La conservation de la matière est prise en compte dans ce modèle. En effet, le volume créé lors de la plastification des éprouvettes, est compensé par la suppression de volume devant l'extrémité de la fissure (insertion de dipôles de dislocations). En outre le modèle permet de tenir compte de l'écroutissage du matériau. Cependant les effets multiaxiaux restent mal modélisés.

2.3 Le modèle incrémental de propagation

2.3.1 Présentation du modèle

Les premiers éléments de ce modèle ont été mis en place dans le cadre d'une étude réalisée en collaboration avec la Snecma sur la fissuration des disques de turbines [Pommier et Risbet 2005]. Depuis les hypothèses du modèle ont été rediscutées et ce dernier a été étendu. Ces extensions sont discutées dans le chapitre suivant. Le principe du modèle incrémental est simple, il contient 2 lois :

- Une loi de fissuration qui donne la vitesse instantanée de fissuration par fatigue en fonction de la vitesse instantanée d'érouissage plastique de la fissure.

- et une loi d'érouissage plastique permettant de déterminer la vitesse d'érouissage plastique en fonction du chargement appliqué et de la valeur des variables internes du modèle.

Avant de présenter les équations d'évolution du modèle de propagation, nous discutons les hypothèses sur les champs de déplacement qui permettent de calculer l'érouissage plastique de la fissure. Dans les premiers travaux de [Pommier et Risbet 2005], on utilisait le champ de déplacement des faces de la fissure pour déterminer l'érouissage plastique en pointe de fissure. Nous proposons ici une vision plus générale du problème, à partir d'une hypothèse de partition du champ de déplacement dans toute la région qui entoure l'extrémité de la fissure.

2.3.2 Etude des champs de déplacements en pointe de fissure.

2.3.2.1 Hypothèse de projection du champ de déplacement

Soit un point $\underline{x}(x, y)$ dans un système de coordonnées local attaché au front d'une fissure (Figure 2-11). Nous cherchons à déterminer une forme simplifiée du déplacement de ce point connaissant le chargement appliqué à la fissure. L'objectif est de réduire le nombre de degrés de liberté du problème afin que l'outil de simulation final conduise à des temps de calcul réalistes vis-à-vis du problème industriel posé.

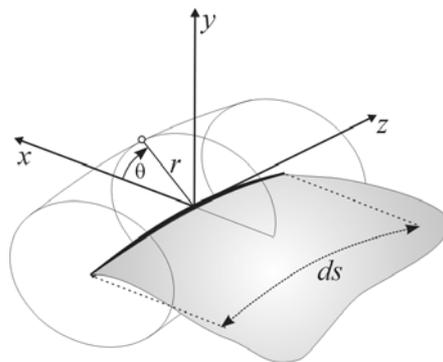


Figure 2-11. Système de coordonnées autour de la fissure

En mécanique élastique linéaire de la rupture, on obtient les champs de déplacement dans la région de l'extrémité de la fissure en effectuant un développement asymptotique vis à vis de la distance r à cette extrémité. Le premier terme de ce développement s'exprime comme le produit du facteur d'intensité des contraintes, variable au cours du temps, et d'un champ de référence qui ne dépend que des coordonnées du point considéré par rapport à l'extrémité de la fissure. Ainsi, au premier ordre, seul le facteur d'intensité des contraintes K_I est variable au cours du temps. Les critères de fissuration pourront donc être écrits en fonction de K_I qui devient le seul degré de liberté du problème.

On voudrait étendre cette démarche au cas de l'élasto-plasticité cyclique. Pour cela on cherche à représenter le champ de déplacement dans la région de l'extrémité de la fissure comme suit :

$$u(\underline{x}, t) = \sum_j a_j(t) u_j(\underline{x}) \quad (2-10)$$

Où, $u_j(\underline{x})$ est une base de champs spatiaux, tandis que $a_j(t)$ sont les paramètres temporels du problème. Ces paramètres temporels, seront les degrés de liberté du problème et pourront ensuite être employés dans un critère de fissuration.

On emploie dans un premier temps la méthode des éléments finis pour calculer les champs de déplacement en élasto-plasticité cyclique puis les champs calculés sont traités afin de justifier l'approximation choisie.

2.3.2.2 Décomposition de Karhunen-Loeve

La décomposition de Karhunen-Loeve permet justement d'effectuer une telle décomposition (2-10) sur un ensemble discret de résultats. Supposons que l'on connaisse une composante U du déplacement d'un ensemble de points n pour un ensemble d'instant t . On construit alors la matrice des données spatio-temporelles V , puis la matrice de corrélation spatiale C de ces données de la manière suivante :

$$V = \begin{bmatrix} U(n=1, t=1) & \cdots & U(n=1, t=k) \\ \vdots & & \vdots \\ U(n=N, t=1) & \cdots & U(n=N, t=k) \end{bmatrix}, \quad C = V.V^T \quad (2-11)$$

Les vecteurs propres de la matrice C , normalisés et notés F_k , constituent la base de champs spatiaux de la projection de Karhunen-Loeve, tandis que les coefficients temporels s'obtiennent comme suit :

$$A_k = V^T.F_k \quad (2-12)$$

La décomposition de Karhunen-Loeve de la matrice V s'écrit alors de la manière suivante :

$$V = \sum_{k=1}^N A_k F_k \quad (2-13)$$

Lorsqu'on se limite aux h premiers modes de la décomposition on obtient une solution approchée, et l'erreur globale liée à cette approximation se calcule comme suit :

$$\tilde{V} = \sum_{k=1}^h A_k F_k \quad \text{erreur} = \sqrt{\frac{\sum_{i,k} (V_{ik} - \tilde{V}_{ik})^2}{\sum_{i,k} (V_{ik})^2}} \quad (2-14)$$

Cette méthode permet donc de trouver sans aucun a priori une première approximation des champs de déplacement selon la forme proposée à l'équation (2-10).

La méthode a été appliquée aux résultats d'un calcul par éléments finis d'un modèle contenant une fissure centrale de 20 mm dans une plaque de 2m par 2m. Seul un quart de l'éprouvette a été modélisé du fait des symétries du problème. Une zone de 5 mm par 10 mm autour de l'extrémité

de la fissure a été maillée finement par des éléments linéaires de forme triangulaire et de coté égal à $33\mu m$. Les calculs ont été effectués en déformation plane.

Un premier calcul, en élasticité a été réalisé ($E = 200\text{ GPa}$, $\nu = 0.3$). La fissure a été sollicitée en Mode I, à un niveau de contrainte tel que le facteur d'intensité des contraintes était égal à $1\text{MPa}\sqrt{m}$.

Un second calcul a ensuite été effectué avec un comportement élasto-plastique pour le matériau. Le module d'élasticité et le coefficient de Poisson étaient comme précédemment respectivement égaux à 200 GPa et 0.3, tandis que la limite d'élasticité était de 400 MPa et le coefficient d'écroutissage isotrope linéaire de 10 MPa. La plaque a été soumise à une contrainte de 200 MPa puis déchargée jusqu'à une contrainte de 20 MPa et enfin rechargée jusqu'à 200 MPa. Chacune des étapes du calcul a été divisée en dix incréments. Pour chacun de ces incréments, les composantes horizontales et verticales du champ de déplacement de chacun des nœuds se trouvant dans la région située autour de la pointe de la fissure ont été enregistrées.

A partir de ces résultats, et pour chaque composante du déplacement U_x ou U_y , une matrice des données spatio-temporelles V a été construite, puis la décomposition de Karhunen-Loeve a été appliquée. Ces calculs ont été effectués avec le logiciel Matlab, en n'utilisant qu'un point tous les 0.1 mm par 0.1 mm sur une zone de 2.5 mm de rayon autour de l'extrémité de la fissure.

Premièrement, on constate que les deux premiers modes sont suffisants pour reconstruire la solution. L'erreur globale est inférieure à 1% dès que deux modes sont utilisés puis l'erreur globale a tendance à saturer lorsque le nombre de modes augmente (Tableau 2-1) :

Nombre de Modes utilisés	Décomposition de Karhunen Loeve		Idem, mais le premier mode est supposé être la solution du calcul élastique	
	erreur sur U_x	erreur sur U_y	erreur sur U_x	erreur sur U_y
0	100%	100%	100%	100%
1	0.75%	0.96%	1.51%	1.98%
2	0.07%	0.14%	0.11%	0.14%
3	0.06%	0.12%	0.08%	0.13%

Tableau 2-1. Erreur obtenue sur le déplacement pour les différents modes

Deuxièmement, il apparaît que le premier mode de Karhunen-Loeve est très proche de la solution élastique (Figure 2-12). On peut donc faire l'hypothèse que la solution du calcul élastique, notée F_e , est le premier mode de Karhunen-Loeve. On peut alors calculer les coefficients temporels associés à ce premier mode et en déduire la matrice résidu Vr (2-15). Cette matrice résidu peut ensuite être décomposée en employant la méthode de Karhunen-Loeve afin de déterminer les modes suivants.

$$A_e = V^T . F_e \quad Vr = V - A_e F_e \quad (2-15)$$

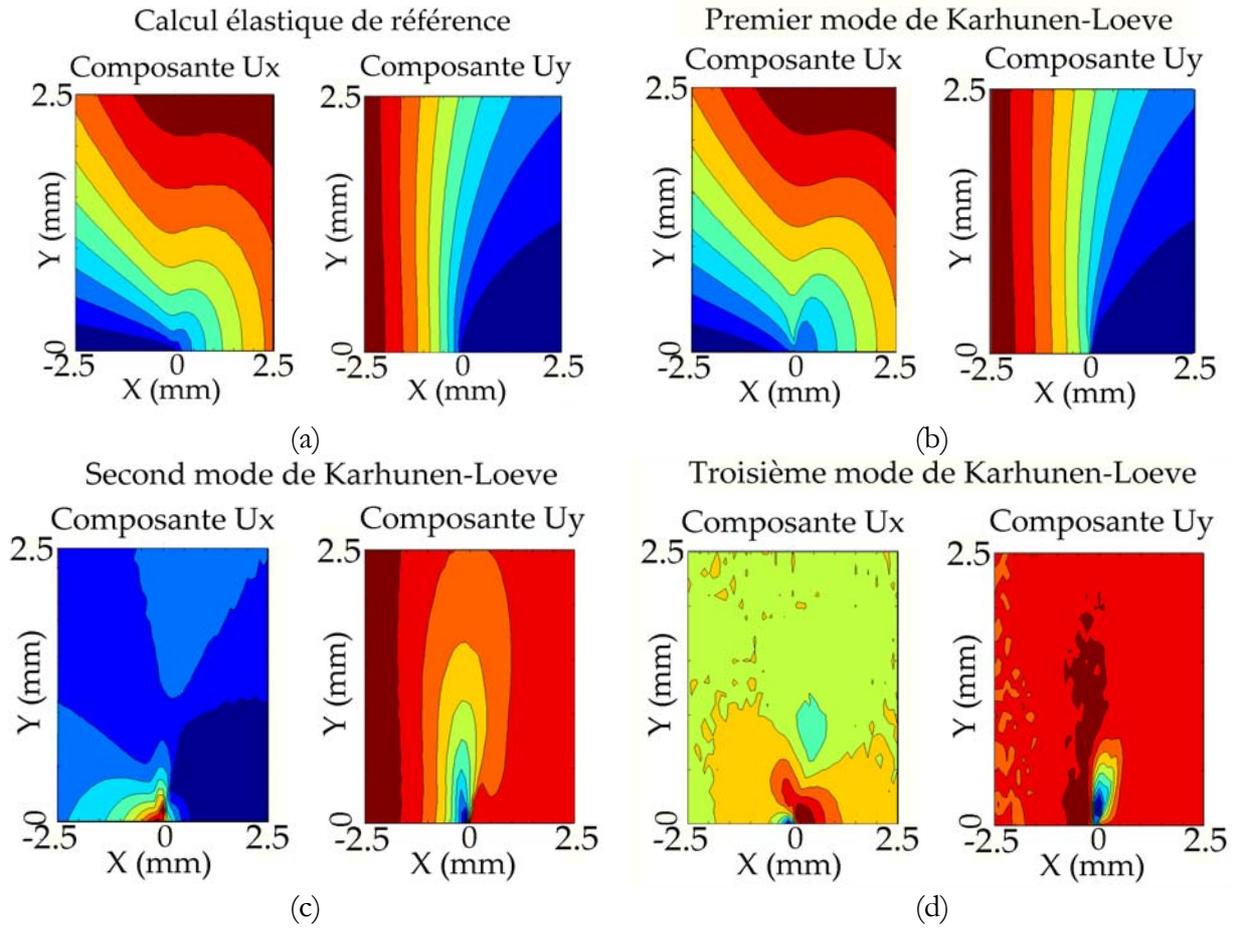


Figure 2-12. (a) solution du calcul élastique par éléments finis de référence (b) premier mode, (c) second et (d) troisième modes de Karhunen-Loeve du calcul élasto-plastique

Le second mode de Karhunen-Loeve est localisé à l'extrémité de la fissure et tend à s'annuler lorsqu'on s'éloigne de cette extrémité. Le troisième mode et les suivants sont bruités et n'améliorent pas significativement la solution. On constate ainsi, que dès que deux modes sont employés l'erreur moyenne en fonction du temps devient inférieure à 10^{-3} excepté au cœur de la zone plastique de la fissure (Figure 2-13).

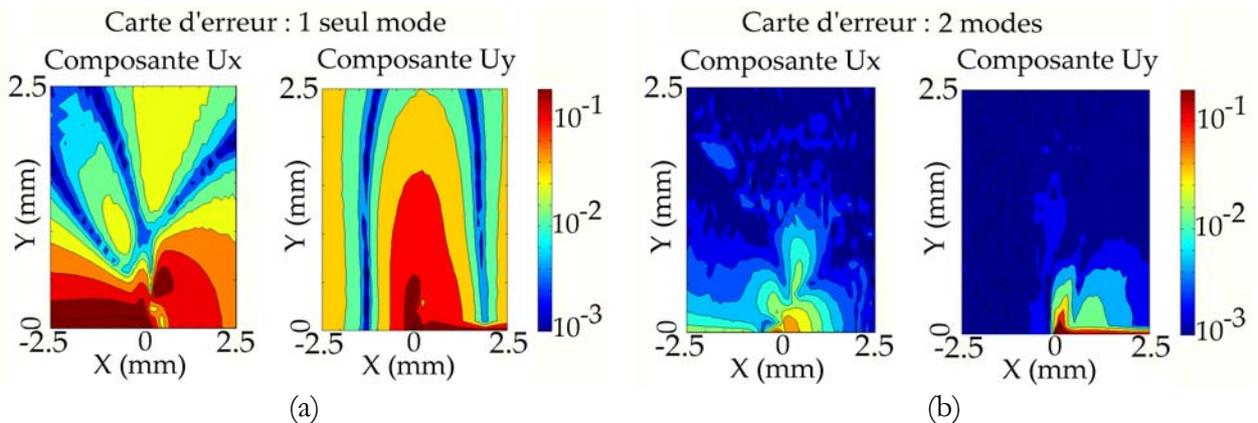


Figure 2-13. Carte d'erreur moyenne sur le temps (a) avec un seul mode et (b) avec deux modes

Enfin, les coefficients temporels des deux premiers modes sont tracés sur la Figure 2-14. L'évolution du coefficient temporel du premier mode est quasiment identique à celle du facteur d'intensité des contraintes nominal. Ainsi, le coefficient temporel du premier mode mesure t'il la

composante « élastique » du déplacement aussi bien en terme spatial que temporel. En revanche le coefficient temporel du second mode présente une évolution non-linéaire. Comme il suffit de deux modes pour reconstruire la solution élasto-plastique et que le premier mode caractérise la partie « élastique » du champ de déplacement, le second mode caractérise, lui, la partie complémentaire, à savoir la plasticité en pointe de fissure. On note qu'après un changement de direction de chargement, le coefficient temporel du second mode n'évolue pas. Il existe donc un domaine d'élasticité pour la région en pointe de fissure à l'intérieur duquel seul le coefficient temporel du mode « élastique » varie.

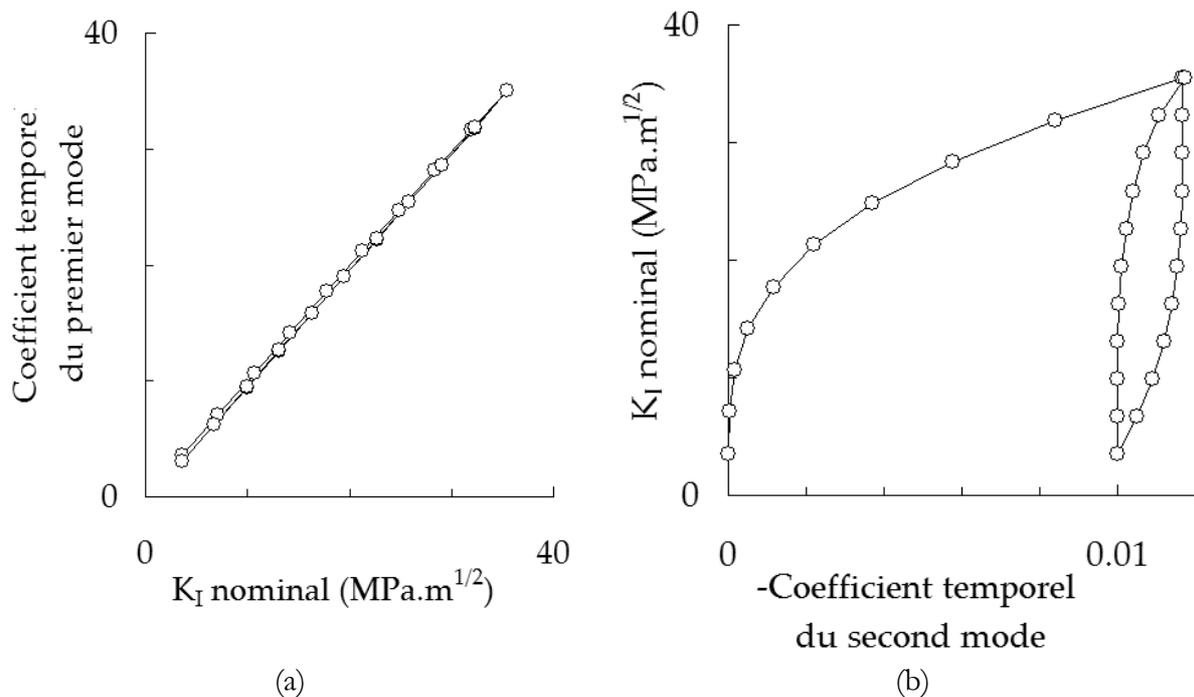


Figure 2-14. Coefficient temporel (a) du premier mode et (b) du second mode de Karhunen-Loeve du calcul élastoplastique en fonction du facteur d'intensité des contraintes nominal

$$(i.e. K_{I \text{ Nominal}} = S_y \sqrt{\pi a})$$

Cette étude purement numérique permet de montrer que l'on peut décomposer le champ de déplacement dans la région avoisinant la pointe de fissure sur une base de champs spatiaux. Les deux premiers modes sont suffisants pour approcher le champ calculé avec une bonne précision. On observe que le premier mode est quasiment identique à la solution d'un calcul élastique. On peut ainsi diminuer de manière considérable le nombre de degrés de liberté du problème en les réduisant aux seuls coefficients temporels des deux premiers modes.

2.3.2.3 Hypothèse de projection du champ de déplacement retenue

Le champ de déplacement recherché est donc supposé se décomposer sur une base composée de deux champs de référence, un champ « élastique » $\underline{u}^e(\underline{x})$ et un champ « plastique » $\underline{u}^p(\underline{x})$. Cette partition présente l'avantage de réduire à 2 le nombre de degrés de liberté du problème. Ces deux degrés de liberté sont les intensités de ces champs de référence : le facteur d'intensité des contraintes \tilde{K}_I préfacteur du champ élastique et l'émoussement plastique ϱ préfacteur du champ plastique :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \tilde{K}_I \cdot \underline{u}^e(\underline{x}) + \rho \cdot \underline{u}^\perp(\underline{x}) \quad (2-16)$$

Comme il a été dit plus haut, on peut utiliser des solutions numériques pour ces deux champs mais on peut aussi leur donner une expression analytique. En effet, la décomposition de Karhunen-Loeve est intéressante car on peut l'effectuer sans avoir le moindre a priori sur la solution cherchée mais elle est très coûteuse en temps de calcul. Il est plus simple de se donner une expression analytique pour les champs de déplacement en pointe de fissure et d'utiliser ensuite la méthode des moindres carrés pour déterminer les coefficients temporels à partir des résultats d'un calcul par éléments finis. En outre lorsqu'on se donne une expression analytique des champs de référence, on se donne aussi une interprétation des résultats.

On peut choisir par exemple, pour le champ élastique de référence $\underline{u}^e(\underline{x})$ la solution analytique de Westergaard, pour un facteur d'intensité des contraintes $\tilde{K}_I = 1$. L'expression analytique du champ de déplacement autour de l'extrémité d'une fissure en mode I est ainsi donnée par :

$$\begin{aligned} u_x^e(\vec{x}) &= \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{\kappa-1}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ u_y^e(\vec{x}) &= \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{\kappa+1}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (2-17)$$

Avec : $\kappa = 3 - 4\nu$ et $r^2 = x^2 + y^2$

Par ailleurs, le champ de déplacement plastique $\underline{u}^\perp(\underline{x})$ retenu est celui d'une dislocation coin, couchée sur le plan de la fissure. Selon cette hypothèse (2-18) le déplacement normal des lèvres de la fissure est constant et égal à 1. Ainsi le préfacteur ρ de ce champ peut être interprété comme l'émoussement plastique de la fissure ou CTOD (Crack Tip Opening Displacement).

$$\begin{aligned} u_x^\perp(\vec{x}) &= \frac{1}{\pi(\kappa+1)} \left[(\kappa-1) \log r + 2 \frac{y^2}{r^2} \right] \\ u_y^\perp(\vec{x}) &= \frac{1}{\pi(\kappa+1)} \left[(\kappa+1) \theta - 2 \cos \theta \sin \theta \right] \end{aligned} \quad (2-18)$$

n.b. En pratique, lors du post traitement des calculs par éléments finis, on utilise d'une part, pour le champ $\underline{u}^e(\underline{x})$, la solution numérique d'un calcul par éléments finis réalisé auparavant sur le même maillage et d'autre part, pour le champ $\underline{u}^\perp(\underline{x})$, l'équation (2-18).

2.3.2.4 Vérification par Eléments Finis

La qualité de cette seconde approximation a été étudiée par Eléments Finis. Le modèle est une plaque carrée de $400 \times 400 \text{ mm}^2$ contenant une fissure centrale $2a = 20 \text{ mm}$. Nous n'avons modélisé qu'un quart de la plaque du fait des symétries du problème. Les calculs ont été effectués en déformation plane (Figure 2-15). Dans le cas présent, un maillage rayonnant autour de l'extrémité de la fissure a été employé. La taille d'élément en pointe de fissure est de $25 \mu\text{m}$. Pour chaque incrément de calcul on a enregistré le déplacement le long des faces de la fissure ($\theta = \pi$) et suivant trois rayons $r = 0.5 \text{ mm}$, $r = 1 \text{ mm}$ et $r = 2 \text{ mm}$ pour $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

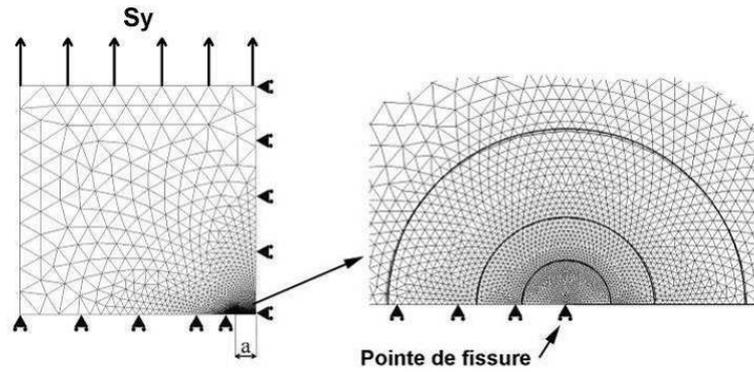


Figure 2-15. Maillage utilisé pour les calculs de validation

D'après l'équation (2-18), le champ de déplacement de référence $u_y^\perp(\bar{x})$ est constant et égal à 1 au niveau des lèvres de la fissure ($\theta = \pi$). L'équation (2-16) du champ de déplacement élasto-plastique devient alors :

$$\underline{u}_y(r, \theta = \pi) = \tilde{K}_I \cdot \underline{u}_y^e(r, \theta = \pi)_{K_I=1} + \rho \quad (2-19)$$

La Figure 2-16 représente la valeur de la composante $u_y(r, \theta = \pi)$ calculée par éléments finis le long des lèvres de la fissure pour un comportement élastique parfaitement plastique et pour un chargement appliqué $S_y = 200 \text{ MPa}$ en fonction de la composante $\underline{u}_y^e(r, \theta = \pi)$ calculée aux mêmes points en élasticité et pour $K_I^\infty = 1 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$. A partir de ces résultats, les deux préfacteurs \tilde{K}_I et ρ de l'équation (2-19) sont déterminés par la méthode des moindres carrés. Ce traitement est effectué de manière automatisée à chaque incrément du calcul élasto-plastique afin de déterminer les évolutions temporelles de \tilde{K}_I et ρ . On remarque, d'après la Figure 2-16, qu'à part les premiers points, situés à l'intérieur de la zone plastique en pointe de fissure, l'équation (2-16) paraît adéquate pour décrire le déplacement des nœuds situés sur les faces de la fissure.

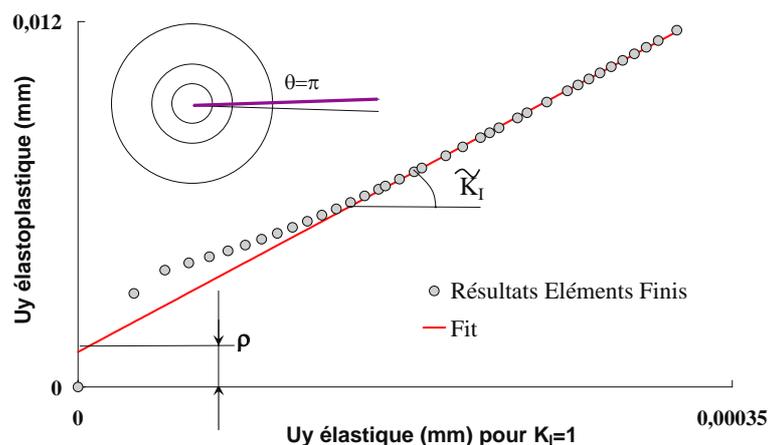


Figure 2-16. Evolution du déplacement élastoplastique suivant y le long des faces de la fissure en fonction du déplacement élastique

Une fois les deux intensités \tilde{K}_I et ρ estimées, le champ de déplacement peut être calculé à partir de l'équation (2-16) en tout point $\underline{x}(r, \theta)$ situé dans la zone de prédominance en K autour de

l'extrémité de la fissure. Dans la Figure 2-17, on compare le déplacement total u_y calculé par Eléments Finis le long des lèvres ($\theta = \pi$) à celui déduit de l'équation (2-16). La Figure 2-18 et la Figure 2-19 montrent la même comparaison pour les nœuds situés sur un rayon $r = 1\text{mm}$ pour les deux composantes du déplacement $u_x(r=1,\theta)$ et $u_y(r=1,\theta)$. Ces mêmes comparaisons ont été effectuées pour deux autres rayons $r = 0.5\text{mm}$ et $r = 2\text{mm}$. Encore une fois, l'approximation proposée reproduit fidèlement le champ de déplacement calculé à condition de se placer hors de la zone plastique en pointe de fissure.

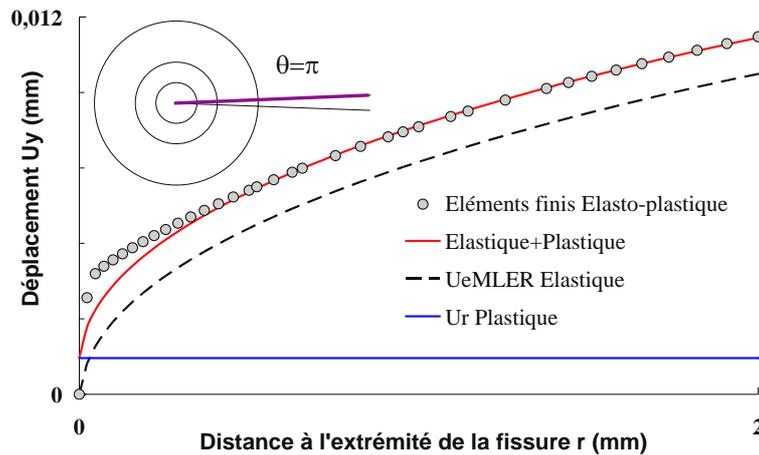


Figure 2-17. Comparaison du déplacement U_y obtenu par l'équation (2-16) avec celui calculé par Eléments Finis le long des faces de la fissure

La validité des champs présentés a été vérifiée pour plusieurs types de comportements du matériau. Divers comportements élastoplastiques de Von-Mises avec des écrouissages cinématique et isotrope linéaires ou non linéaires ont été étudiés. En outre, pour un comportement élasto-plastique parfait, la sensibilité d'une part à la limite d'élasticité et d'autre part au module d'Young a également été testée. Nous avons trouvé que l'équation (2-16) est convenable pour décrire le champ de déplacement autour de l'extrémité d'une fissure tant que la zone plastique de la fissure reste bien confinée dans le premier quart de la zone étudiée.

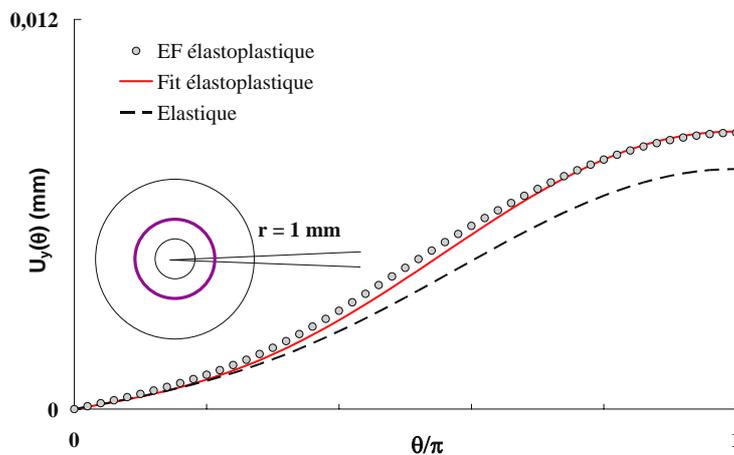


Figure 2-18. Comparaison du déplacement U_y obtenu par l'équation avec celui calculé par Eléments Finis sur un rayon de 1 mm autour de la fissure

Les mêmes calculs du champ de déplacement ont été effectués par Eléments Finis après avoir fait subir à la fissure un chargement complexe, par exemple une surcharge suivie d'une extension de la fissure par relâchement de noeud. Dans ce cas, le champ de déplacement peut toujours être calculé à partir de l'équation (2-16), pourvu qu'on se place en « eulérien ». À savoir que l'on calcule le déplacement entre deux incréments successifs et non pas le déplacement depuis la configuration initiale.

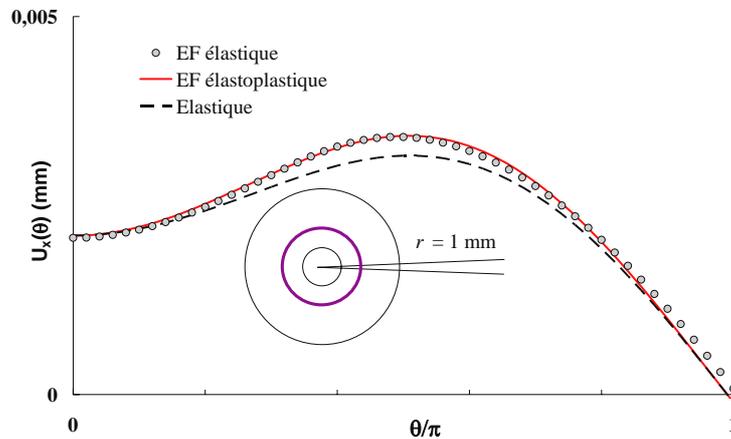


Figure 2-19. Comparaison du déplacement U_x obtenu par l'équation avec celui calculé par Eléments Finis sur un rayon de 1 mm autour de la fissure

2.3.2.5 Interprétation

Le facteur d'intensité des contraintes calculé par cette méthode \tilde{K}_I est différent du facteur d'intensité des contraintes nominal K_I^∞ appliqué à la fissure. En effet, \tilde{K}_I est le facteur d'intensité des contraintes effectif vu par la fissure, il est égal à la somme du facteur d'intensité des contraintes nominal K_I^∞ et de celui provenant des contraintes internes K_I^{Sb} .

$$\tilde{K}_I = K_I^\infty + K_I^{Sb} \quad (2-20)$$

Le facteur d'intensité des contraintes K_I^{Sb} est négatif puisqu'il est dû aux contraintes résiduelles de compression qui tendent à fermer les lèvres de la fissure. La Figure 2-20 montre l'évolution de K_I^{Sb} , calculé à partir de l'équation (2-20), en fonction de l'érouissage plastique lors d'une phase de chargement monotone. On remarque que la différence entre K_I^{Sb} et K_I^∞ reste inférieure à 12 % pour un érouissage plastique en pointe de fissure inférieur à $1 \mu m$. De plus, l'évolution de K_I^{Sb} avec ϱ est strictement linéaire. Cela permet de conclure que seule la modélisation de l'évolution de ϱ est nécessaire. Celle de K_I^{Sb} n'est pas nécessaire.

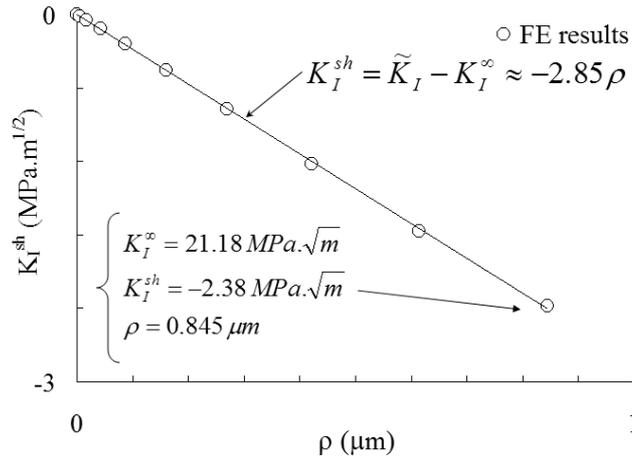


Figure 2-20. Evolution de K_I^{sh} avec l'érouissage plastique

Le facteur d'intensité des contraintes dû aux contraintes internes peut donc s'écrire de la manière suivante :

$$\tilde{K}_I = K_I^\infty + \beta \cdot \rho \quad (2-21)$$

Finalement le champ de déplacement se décompose donc comme suit, la seconde partie constituant à proprement parler le champ plastique :

$$\underline{u}(\underline{x}) = K_I^\infty \underline{u}^e(\underline{x}) + \rho (\beta \underline{u}^e(\underline{x}) + \underline{u}^p(\underline{x})) \quad (2-22)$$

Sur la figure ci-dessous (Figure 2-21), est tracée la comparaison entre la partie plastique de la décomposition retenue (2-22) et le second mode de Karhunen-Loeve déterminé précédemment. Pour cela, on utilise pour β la valeur déterminée à l'aide de la méthode des éléments finis (Figure 2-20) et les expressions analytiques des champs $\underline{u}^e(\underline{x})$ (2-17) et $\underline{u}^p(\underline{x})$ (2-18). L'allure générale des champs est similaire. On note cependant des différences entre les deux résultats, notamment lorsque la distance à l'extrémité de la fissure augmente. Pour l'essentiel cela est dû au fait que la décomposition de Karhunen-Loeve a été effectuée sur une boîte de 5mm par 2.5mm avec des pas de 0.1 mm tandis que l'identification de β et ρ a été effectuée sur une plage de distance de 0 à 2 mm à l'extrémité de la fissure avec des pas de 0.025 mm puis tracée sur la même plage que la décomposition de Karhunen-Loeve.

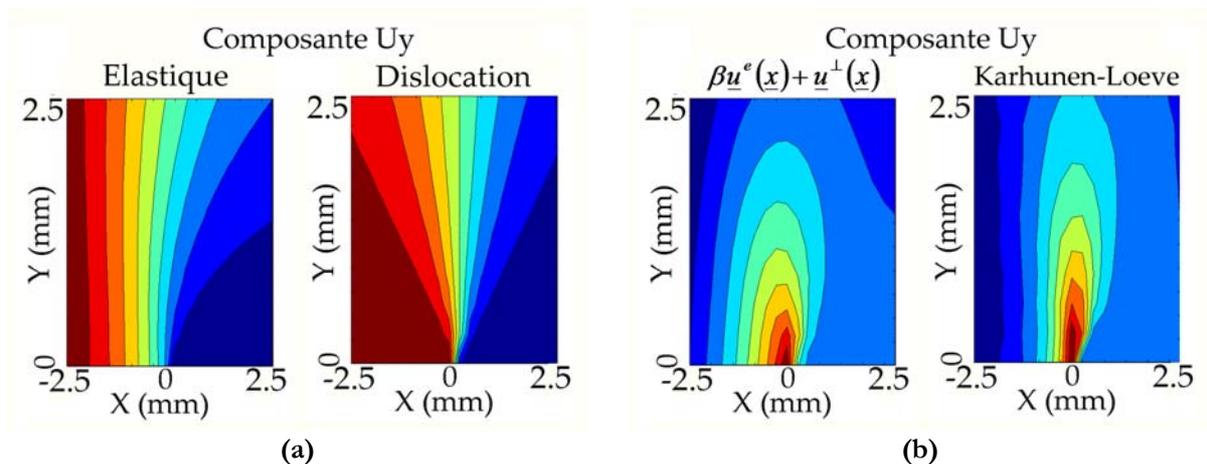


Figure 2-21. (a) Allure des champs de déplacement, élastique $\underline{u}^e(\underline{x})$ et plastique $\underline{u}^p(\underline{x})$. (b) Comparaison de la partie plastique du champ de déplacement $\beta \underline{u}^e(\underline{x}) + \underline{u}^p(\underline{x})$ avec le second mode de Karhunen-Loeve. Composante U_y .

Enfin si l'on trace maintenant l'évolution temporelle de l'émoussement plastique ρ déterminé à l'aide de cette seconde méthode (Figure 2-22), on constate que l'allure générale de cette évolution est tout à fait similaire à celle du coefficient temporel du second mode de Karhunen-Loeve (Figure 2-14). En revanche avec cette approximation, on peut donner une mesure et une signification physique à ρ , à savoir la partie plastique du déplacement relatif des lèvres de la fissure ou partie plastique du CTOD.

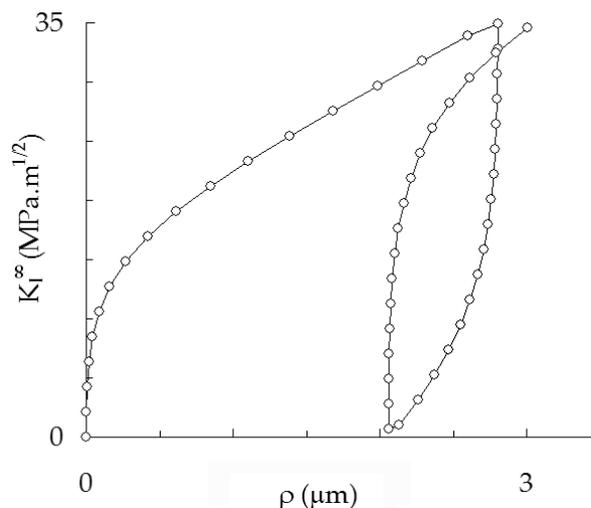


Figure 2-22. Evolution du facteur d'intensité des contraintes nominal en fonction de l'émoussement plastique ρ calculé par la méthode des moindres carrés à partir des résultats d'un calcul par éléments finis.

2.3.3 Equations d'évolution du modèle

Par la suite nous appliquerons la démarche suivante.

- Une approche locale est d'abord mise en œuvre afin de calculer, par la méthode des éléments finis, le détail des évolutions des contraintes et déformation en pointe de fissure en fonction du comportement du matériau et du chargement appliqué.
- Puis, on passe de l'échelle locale à l'échelle globale en appliquant l'approximation sur le champ de déplacement détaillée plus haut (§ 2.3.2.3). On obtiendra ainsi pour chaque calcul par éléments finis l'évolution temporelle de l'émoussement plastique ρ .
- Il reste alors à associer à cette évolution un modèle dit « de comportement » qui pourra être employé dans une simulation numérique.
- Enfin, il faut aussi se donner une loi de fissuration qui relie la vitesse de fissuration à la vitesse d'émoussement plastique.

2.3.3.1 Loi de fissuration

L'émoussement plastique ρ mesure la déformation plastique en pointe d'une fissure. Compte tenu des hypothèses que nous avons faites sur la forme des champs (2-18), il peut être assimilé à

la partie permanente du CTOD (Crack Tip Opening Displacement). Il est accepté en général que le CTOD est le paramètre gouvernant la propagation de la fissure par fatigue sous amplitude monotone ainsi que sous amplitude variable [Masahiro 2004]. Le lien entre le CTOD et l'avancée d'une fissure a fait l'objet de plusieurs travaux proposant des scénarios de propagation à partir des observations fractographiques ([Laird 1967], [Pelloux 1969] et [Neumann 1969]). Nous présentons ici deux scénarios de propagation correspondant à deux mécanismes physiques différents.

L'observation des faciès de rupture par fatigue de matériaux ductiles révèle souvent la présence de stries perpendiculaires à la direction de propagation de la fissure (Figure 2-23a). [Laird 1967] et [Pelloux 1969] furent les premiers à expliquer l'apparition de ces stries par une succession d'éroussements et d'aiguïsements dus à la plasticité. Pour comprendre le mécanisme de propagation de Laird on va suivre l'évolution des faces de la fissure pendant un cycle de fatigue (charge+décharge) (Figure 2-23b). Au début de la charge, le déplacement des faces se fait par une simple ouverture élastique. Quand le chargement augmente, une zone plastique apparaît en point de fissure et celle-ci commence à s'érousser au fur et à mesure de la montée en charge, cela s'accompagne de la création de nouvelles surfaces par plasticité. Au début de la décharge, la fissure se referme élastiquement, et comme les champs semi-lointains sont élastiques, à charge nulle, la déformation imposée à la zone plastique est nulle. L'extrémité de la fissure subit donc une déformation plastique en retour. Cette déformation se produit en bas du cycle lorsque la fissure est presque refermée et ne peut pas compenser exactement la déformation plastique qui s'était produite quand elle était largement ouverte. En outre, du fait des réactions chimiques avec l'air, les surfaces libres récemment créées sont irréversibles. La fissure se propage donc finalement d'une longueur approximativement égale au rayon d'éroussement. Pour ce mécanisme de propagation, l'extension de la fissure provient donc d'une déformation plastique cyclique à l'extrémité de la fissure et le comportement plastique cyclique du matériau joue donc un rôle important dans la propagation. [Vladislav et al. 2005] ont réussi à simuler ce mécanisme de propagation par Eléments Finis, les calculs ont été effectués sur une plaque fissurée en déformation plane et la loi de comportement utilisée est élastoplastique non endommageable. Un remaillage automatique autour de la pointe de fissure a été effectué à chaque incrément de calcul pour résoudre les problèmes de création de surface libre au niveau de la pointe de fissure.

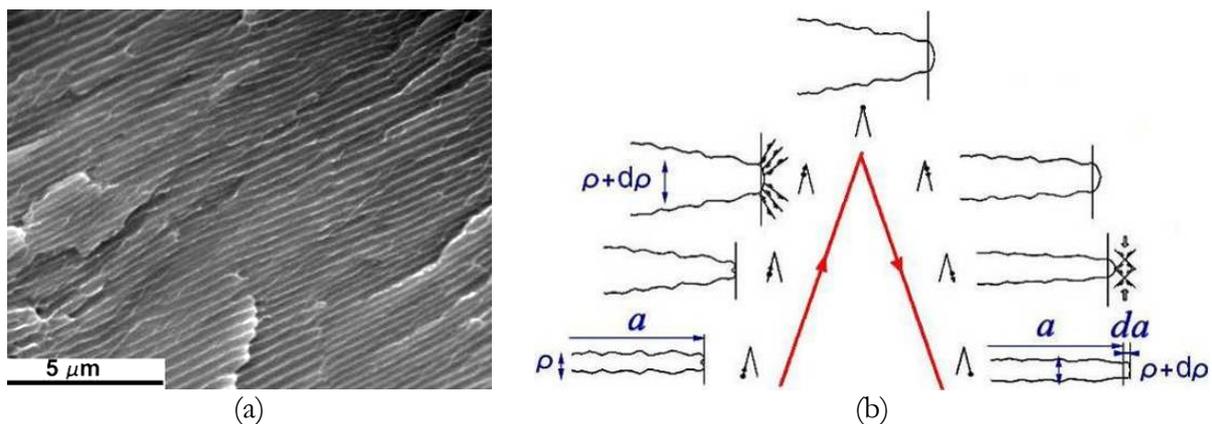


Figure 2-23. Stries de fatigue observées sur un faciès de rupture par fatigue (a) et mécanismes de propagation par éroussement et aiguïsement de la pointe (b)

Un autre mécanisme de fissuration par fatigue, basé sur un phénomène de succession de glissements plans à l'extrémité de la fissure a été proposé par [Neumann 1969] (Figure 2-24). Pour ce mécanisme, la fissure glisse alternativement sur un système puis un autre lors de la phase d'ouverture. A la décharge, une déformation plastique en retour se produit, mais les nouvelles surfaces créées lors de l'ouverture ne se résorbent pas du fait de leur interaction avec

l'environnement. La fissure s'étend donc d'une longueur qui dépend du cosinus de l'angle entre la direction du glissement et le plan de la fissure.

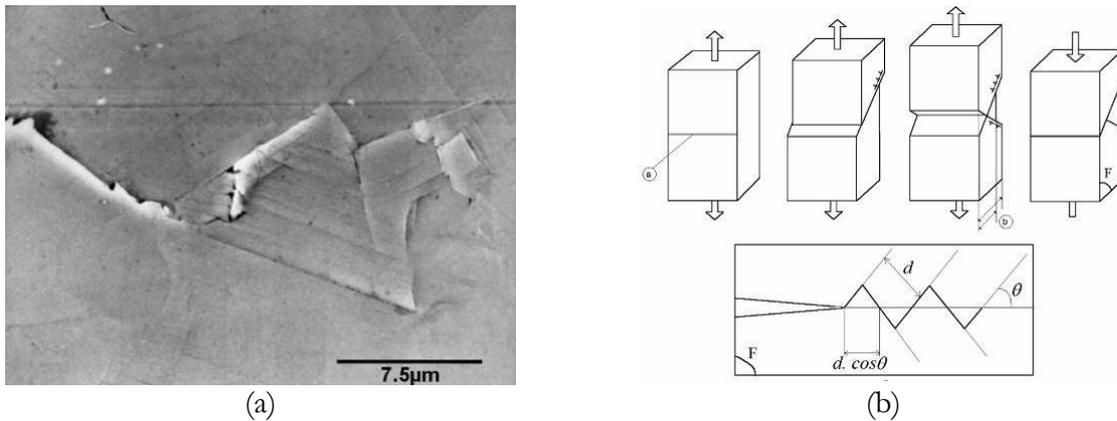


Figure 2-24. Mécanisme de propagation par glissement

Selon ces deux scénarios, on remarque qu'il existe un lien fort entre l'extension d'une fissure et l'ouverture de ses lèvres. La loi la plus célèbre qui lie ces deux grandeurs est celle du CTOD proposée par [McClintock 1967] et qui prédit la fissuration en amplitude monotone :

$$\frac{da}{dN} \approx \Delta CTOD \tag{2-23}$$

Pour un matériau élastoplastique parfait, $\Delta CTOD$ est donné par :

$$\Delta CTOD = \beta \frac{\Delta K^2}{2R_e E} \tag{2-24}$$

Avec β un facteur de proportionnalité, E le module d'Young du matériau et R_e la limite d'élasticité du matériau. Cette relation suppose une relation entre le $\Delta CTOD$ et la taille de la zone plastique. En effet le terme ΔK^2 provient de la taille de la zone plastique. Ainsi l'exposant de la loi de Paris est il trouvé égal à 2 avec cette hypothèse. [Nedbal et al. 1989] ont proposé une relation empirique entre l'avancée de la fissure et le pas de strie de fatigue, qui est proportionnel à l'émoussement plastique. Cette relation a été obtenue en divisant la vitesse macroscopique de propagation mesurée lors d'un essai de fissuration par la vitesse microscopique correspondant au pas de strie S mesuré sur le faciès de rupture (Figure 2-25).

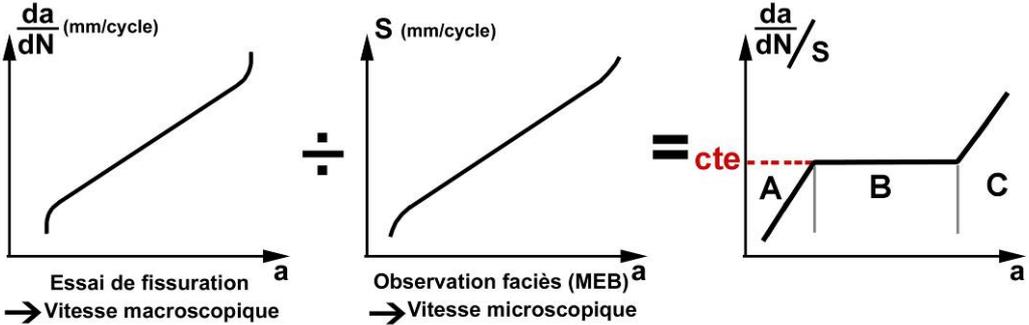


Figure 2-25. Schéma de principe de la relation entre pas de stries et vitesses de propagation [Nedbal et al. 1989]

La courbe obtenue contient trois zones correspondant aux trois stades de la courbe de Paris. Dans la zone A, la vitesse macroscopique est inférieure à la vitesse microscopique puisque certains cycles ne font pas avancer la fissure (cycles stériles). L'extension de la fissure dans la zone B correspond approximativement à une strie par cycle, c'est la zone de validité de la loi de Paris. Dans la zone C, la vitesse de fissuration est supérieure à une strie par cycle puisque d'autres mécanismes de propagation entrent en jeu comme la déchirure ductile. La relation proposée par l'auteur dans la zone B est la suivante :

$$\frac{da}{S \frac{dN}{S}} = cte \approx 1 \quad (2-25)$$

La loi de fissuration proposée dans cette étude est basée sur la relation de [Nebdal et al. 1989] mais elle est donnée en fonction du temps plutôt qu'en fonction des cycles. Cette loi de fissuration est la suivante :

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \alpha \frac{d\varrho}{dt} && \text{pendant la charge } (d\varrho > 0) \\ \frac{da}{dt} &= -\alpha \frac{d\varrho}{dt} && \text{pendant la décharge } (d\varrho < 0) \end{aligned} \quad (2-26)$$

Avec α un paramètre matériau identifié à l'aide des résultats d'un essai de fissuration à amplitude constante. Pour connaître la vitesse de propagation d'une fissure soumise à un chargement quelconque, il suffit alors de connaître l'évolution de l'éroussement plastique ϱ de sa pointe sous le même chargement. Cette évolution constituera la loi d'éroussement qui fera le sujet du paragraphe suivant...

2.3.3.2 Loi d'éroussement (sans compression)

L'éroussement plastique des lèvres de la fissure est calculé par Eléments Finis en s'appuyant sur une représentation simplifiée du champ de déplacement autour de la pointe de fissure. Une détermination expérimentale de l'éroussement est devenue aujourd'hui possible grâce aux nouveaux moyens de mesures expérimentales de champs de déplacement tels que la corrélation d'images. Cette technique expérimentale est plus lourde à mettre en œuvre que le calcul par Eléments Finis et ne permet de caractériser la loi d'évolution de ϱ qu'en surface. Cependant cette méthode à l'avantage de ne pas être dépendante du choix du modèle de comportement du matériau. Par contre, elle ne permet pas d'étudier indépendamment les évolutions des variables du modèle en fonction de ϱ et a , c'est-à-dire faire avancer la fissure sans l'érousser ou l'érousser sans la faire avancer. Nous employons la méthode des Eléments Finis dans cette étude mais il serait très intéressant d'utiliser la corrélation d'images dans le futur, au moins pour valider les calculs numériques. Sur la Figure 2-26 est présentée l'évolution de l'éroussement plastique obtenue par Eléments Finis en fonction du facteur d'intensité des contraintes appliqué pour une succession de charges-décharges croissantes. Cette évolution a été obtenue en appliquant la projection définie au paragraphe § 2.3.2.1. On a veillé à ce que la zone plastique en pointe de fissure reste confinée par rapport à la zone de dominance en K .

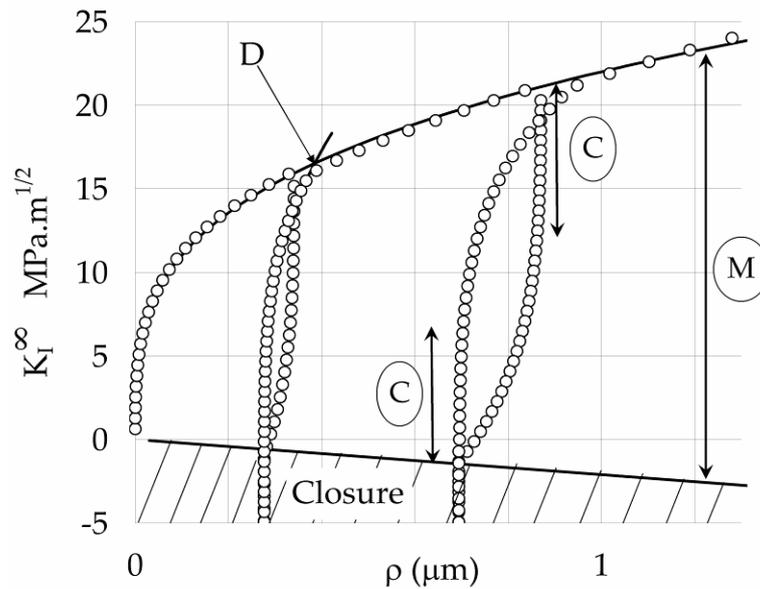


Figure 2-26. Evolution de l'éroussement plastique en fonction du facteur d'intensité des contraintes appliqué

D'après les courbes d'évolution de l'éroussement ρ , on remarque qu'après chaque inversion du sens du chargement (passage de la charge à la décharge et inversement), il existe une plage de ΔK_I^∞ au cours de laquelle l'éroussement plastique ne varie pas (plage C). Comme ρ mesure la plasticité en pointe de fissure, cette plage peut donc être définie comme le domaine d'élasticité cyclique de la fissure. On observe que ce domaine peut se déplacer au cours de la sollicitation. On lui associera donc une variable interne de type écrouissage cinématique.

On observe également, pendant les montées en charges, une discontinuité dans la courbe d'évolution. Cette discontinuité apparaît au moment où le chargement appliqué dépasse le chargement maximal atteint auparavant (point D). Cette rupture de pente correspond au point de chargement au-delà duquel la zone plastique monotone en pointe de fissure s'étend. Le point D constitue donc la limite du domaine d'élasticité monotone de la fissure (plage M), la limite inférieure de la zone plastique monotone correspond au point de contact entre les lèvres. En dessous de ce point de contact, l'éroussement plastique n'évolue plus même si on continue à comprimer puisque la fissure est fermée. En outre, la projection proposée n'a plus de sens et n'est donc plus effectuée.

On trouve dans la littérature des courbes, obtenues expérimentalement, similaires à ces courbes d'éroussement. [Masahiro 2004] qui étudiait l'effet de chargement à amplitude variable sur la propagation des fissures de fatigue a réalisé des essais de propagation in-situ sur l'alliage Ti-6Al-4V. Ces essais ont permis de tracer l'évolution du CTOD mesuré en un point donné des faces de la fissure en fonction du facteur d'intensité des contraintes pour un chargement aléatoire (Figure 2-27). On observe les mêmes allures que celles obtenues par Eléments Finis notamment la rupture de pente lors du franchissement du seuil de plasticité monotone (points 10, 16 et 24). L'auteur n'a pas réussi à expliquer la différence entre le seuil de fermeture des lèvres (points 4 et 41) qui est trouvé inférieur au seuil d'ouverture (point 7). Ce même phénomène est observé par Eléments Finis, puisque dans ce cas les points de fermeture et d'ouverture correspondent au contact des lèvres. Par contre le point d'ouverture observé par l'auteur correspond à la limite supérieure du domaine d'élasticité cyclique (plage C) de la fissure.

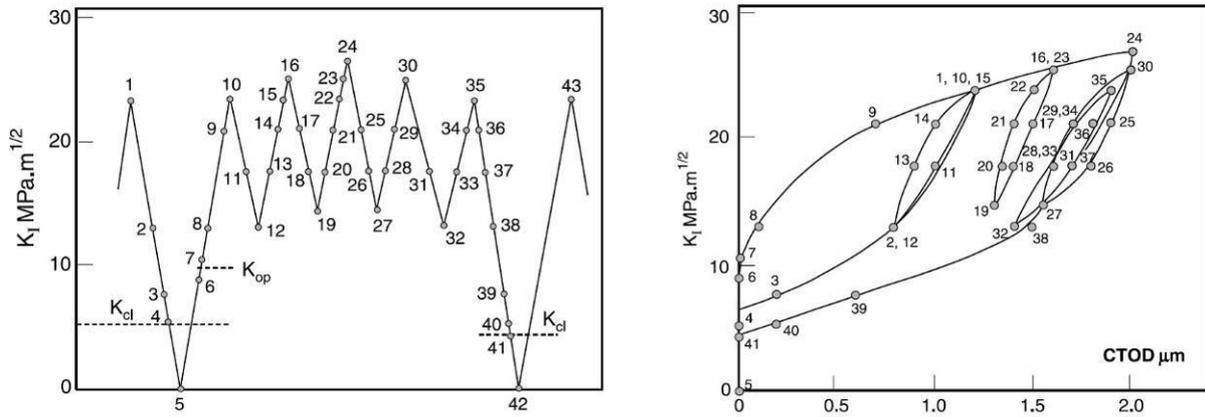


Figure 2-27. Evolution expérimentale du CTOD avec le facteur d'intensité des contraintes pour un chargement variable de gauche [Masahiro 2004]

Des boucles d'évolution du COD ont également été tracées par [Richter et al. 2001] pour plusieurs points de la face d'une fissure (Figure 2-28). Ces boucles expérimentales ont permis de décomposer le COD en une partie élastique (COD_{el}) et une partie plastique (COD_{pl}), la partie élastique a été déduite de la pente linéaire au début de la charge. Cette même décomposition a été effectuée pour plusieurs points des faces ce qui a permis de tracer le déplacement des lèvres comme la somme d'une partie élastique réversible et d'une partie permanente. Cette approche est donc très comparable à la notre.

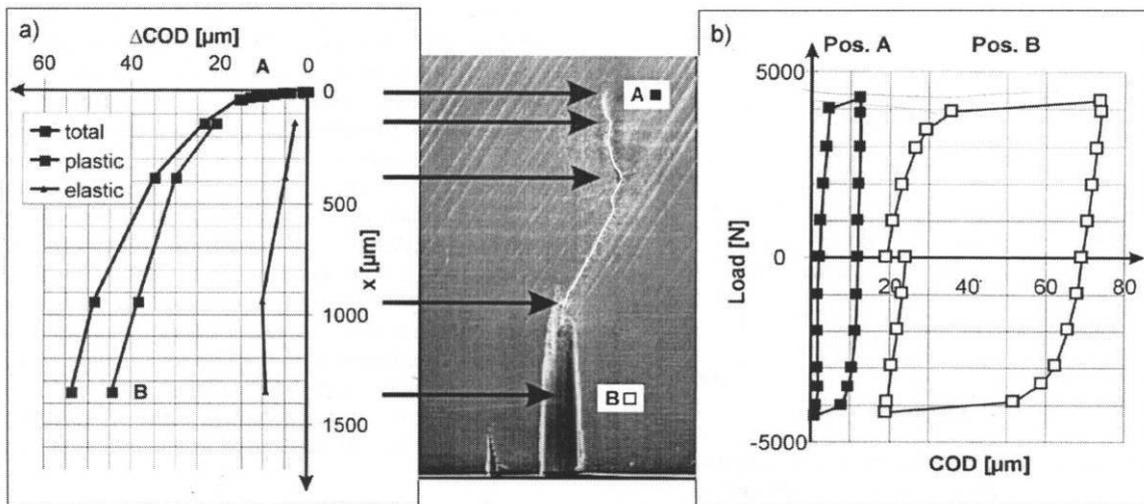


Figure 2-28. Evolution de la partie élastique et plastique du COD en fonction du chargement appliqué [Richter et al. 2001]

La loi d'érouissage qu'on cherche à déterminer décrit analytiquement les courbes d'évolution de l'érouissage. L'écriture des équations sera faite dans un cadre thermodynamique de manière comparable à celle employée pour établir une loi de comportement élastoplastique. Il est donc nécessaire de travailler avec des variables compatibles entre elles. L'érouissage plastique est un déplacement, la variable thermodynamique associée au déplacement est une force. Cette force sera déterminée à partir de l'application des principes de la thermodynamique sur la structure fissurée qui sera présentée dans le prochain paragraphe.

2.3.3.2.1 Détermination de la variable associée à l'érousement

2.3.3.2.1.1 Champs de vitesse autour d'une fissure

Le déplacement $\underline{U}(\underline{X})$ d'un point dans un système de coordonnées absolu, dans un domaine Γ autour de la pointe d'une fissure, s'écrit comme celui défini dans un repère local $\underline{u}(\underline{x})$:

$$\underline{U}(\underline{X}) = \underline{u}(\underline{x}) = \tilde{K}_I \cdot \underline{u}^e(\underline{x}) + \rho \cdot \underline{u}^\perp(\underline{x}) = (K_I^\infty + \beta \cdot \rho) \cdot \underline{u}^e(\underline{x}) + \rho \cdot \underline{u}^\perp(\underline{x}) \quad (2-27)$$

Le champ de vitesse s'écrit donc :

$$\frac{d\underline{U}}{dt}(\underline{X}) = \left(\frac{dK_I^\infty}{dt} + \beta \frac{d\rho}{dt} \right) \cdot \underline{u}^e(\underline{x}) + \frac{d\rho}{dt} \cdot \underline{u}^\perp(\underline{x}) + \frac{\partial \underline{u}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \frac{d\underline{x}}{dt} \quad (2-28)$$

En fatigue à grand nombre de cycles, l'érousement plastique ρ est de l'ordre de quelques dixièmes de micron tandis que la taille de la zone de dominance en K est de l'ordre de quelques millimètres. On peut donc écrire à l'échelle de la zone de dominance en K que :

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = -\frac{\alpha}{2} \frac{d\rho}{dt} \underline{e}_x \quad (2-29)$$

Où \underline{e}_x est le vecteur unitaire parallèle au plan de la fissure et normal à son front. En remplaçant cette équation dans (2-28) nous obtenons :

$$\frac{d\underline{U}}{dt}(\underline{X}) = \frac{dK_I^\infty}{dt} \underline{u}^e(\underline{x}) + \beta \frac{d\rho}{dt} \underline{u}^e(\underline{x}) + \frac{d\rho}{dt} \underline{u}^\perp(\underline{x}) - \frac{\alpha}{2} \frac{d\rho}{dt} \frac{\partial \underline{u}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \quad (2-30)$$

Quand la fissure est déchargée, elle se trouve dans le domaine d'élasticité cyclique, la variation du champ des contraintes peut donc être déduite du champ de Westergaard par :

$$\begin{aligned} \partial \sigma_{xx}(r, \theta) &= \frac{\delta K_I^\infty}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) = \delta K_I^\infty \sigma_{xx}^e(r, \theta) \\ \partial \sigma_{yy}(r, \theta) &= \frac{\delta K_I^\infty}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) = \delta K_I^\infty \sigma_{yy}^e(r, \theta) \\ \partial \sigma_{xy}(r, \theta) &= \frac{\delta K_I^\infty}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} = \delta K_I^\infty \sigma_{xy}^e(r, \theta) \end{aligned} \quad (2-31)$$

2.3.3.2.1.2 Principes de la thermodynamique sur structure fissurée

L'écriture du premier principe de la thermodynamique dans la zone de dominance en K autour de la fissure est la suivante :

$$P_{ext} + Q = \frac{dE}{dt} + \frac{dK}{dt} \quad (2-32)$$

Avec :

- P_{ext} la puissance réelle des efforts extérieurs.
- Q la chaleur reçue, elle est décomposée en une partie produite en interne provenant de l'auto échauffement (~95% de l'énergie de déformation) et une partie reçue par l'extérieur.
- E est l'énergie interne de la zone d'étude.
- K est l'énergie cinétique, elle est nulle car il s'agit de fissuration quasi statique.

L'énergie interne de la structure fissurée est donnée par l'expression suivante :

$$E = F - TS \quad \text{avec} \quad S = -\frac{\partial F}{\partial T} \quad (2-33)$$

Où :

- F est l'énergie libre ou élastique de Helmholtz, cette énergie peut être restituée lors de la décharge et elle correspond à l'ouverture fermeture élastique linéaire de la fissure.
- T est la température de l'élément de volume de la zone considérée.
- S est l'entropie.

En intégrant l'équation (2-33) dans l'équation (2-32) et en arrangeant la partie réversible d'un côté et irréversible de l'autre, on obtient :

$$\underbrace{P_{ext} - \frac{dF}{dt}}_{\frac{dP}{dt}} = \underbrace{-T \frac{dS}{dt}}_D - Q \quad (2-34)$$

Avec :

- $\frac{dP}{dt}$ la partie réversible correspondant au taux de restitution de l'énergie potentielle.
- D la partie irréversible correspondant à la dissipation.

L'énergie libre de Helmholtz dépend des variables d'état $F = F(T, K_I^\infty, \rho, V_X, V_R)$. Les deux variables V_X et V_R permettent de prendre en compte le développement des contraintes internes en pointe de fissure, elles correspondent aux changements de position et de taille des zones plastiques cyclique et monotone.

En écrivant le deuxième principe de la thermodynamique qui dit que la dissipation doit être positive ou nulle $D \geq 0$, on déduit l'inégalité suivante :

$$D = -T \frac{dS}{dt} - Q \geq 0 \quad (2-35)$$

L'équation (2-34) permet de déduire :

$$D = P_{ext} - \frac{dF}{dt} \geq 0 \quad (2-36)$$

Ce qui donne :

$$D = P_{ext} - \frac{\partial F}{\partial K_I^\infty} \frac{dK_I^\infty}{dt} - \frac{\partial F}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dt} - \frac{\partial F}{\partial V_X} \frac{dV_X}{dt} - \frac{\partial F}{\partial V_R} \frac{dV_R}{dt} \geq 0 \quad (2-37)$$

En plus, la puissance réelle des efforts extérieurs peut être exprimée en fonction du facteur d'intensité des contraintes, puisque la plasticité reste confinée :

$$P_{ext} = \int_{\Gamma} (K_I^\infty \underline{\underline{\sigma}}^e n d\Gamma) \cdot \frac{d\underline{u}}{dt} \quad (2-38)$$

En remplaçant la vitesse par sa valeur (équation (2-30)) on obtient :

$$P_{ext} = A_1 + A_2 + A_3 \quad (2-39)$$

Avec :

$$A_1 = K_I^\infty \int_{\Gamma} (\underline{\underline{\sigma}}^e n d\Gamma) \cdot \left(\frac{dK_I^\infty}{dt} \underline{u}^e(\underline{x}) \right) \quad (2-40)$$

$$A_2 = -\frac{\alpha}{2} \frac{d\rho}{dt} (K_I^\infty)^2 \int_{\Gamma} (\underline{\underline{\sigma}}^e n d\Gamma) \frac{\partial \underline{u}^e(\underline{x})}{\partial x} \quad (2-41)$$

$$A_3 = K_I^\infty \int_{\Gamma} (\underline{\underline{\sigma}}^e n d\Gamma) \cdot \left(\beta \frac{d\rho}{dt} \underline{u}^e(\underline{x}) + \frac{d\rho}{dt} \underline{u}^\perp(\underline{x}) - \frac{\alpha}{2} \frac{d\rho}{dt} \rho \frac{\partial \underline{u}^\perp(\underline{x})}{\partial x} \right) \quad (2-42)$$

2.3.3.2.1.3 Discussion

Si l'on considère le cas d'un chargement élastique, la longueur de fissure a et l'éroussement plastique ρ restent constants. Tous les termes de la puissance des efforts externes sont donc nuls à l'exception de A_1 . En outre si la transformation est réversible, la dissipation est nulle :

$$D = 0 = \frac{dK_I^\infty}{dt} \left(K_I^\infty \int_{\Gamma} (\underline{\underline{\sigma}}^e n d\Gamma) \cdot (\underline{u}^e(\underline{x})) - \frac{\partial F}{\partial K_I^\infty} \right) \quad (2-43)$$

Cette équation impose que le terme entre parenthèses soit toujours nul. L'expression de la dissipation devient donc maintenant :

$$D = A_2 + A_3 - \frac{\partial F}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dt} - \frac{\partial F}{\partial V_X} \frac{dV_X}{dt} - \frac{\partial F}{\partial V_R} \frac{dV_R}{dt} \geq 0 \quad (2-44)$$

A ce stade on peut introduire la densité d'énergie libre d'Helmholtz ψ et la densité du matériau fissuré ρ_p . Si on considère que le domaine d'étude Γ est en dehors de la zone plastique en pointe

de fissure, la densité d'énergie libre sur la frontière Γ est égale à la densité d'énergie élastique. En appliquant la transformation de Stokes, on obtient donc :

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = -\frac{\alpha}{2} \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} \rho_r \frac{\partial \psi}{\partial x} dm = -\frac{\alpha}{2} \int_{\Gamma} \rho_r \cdot \psi \cdot dy = -\frac{\alpha}{2} (K_I^\infty)^2 \int_{\Gamma} W_e \cdot dy \quad (2-45)$$

Avec :

- W_e l'énergie élastique sur la frontière Γ pour un facteur d'intensité des contraintes égal à 1.

D'après l'équation (2-37) on écrit :

$$B = \left(A_2 - \frac{\partial F}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dt} \right) = \frac{\alpha}{2} \frac{d\rho}{dt} (K_I^\infty)^2 \left(\int_{\Gamma} W_e \cdot dy - \int_{\Gamma} (\underline{\sigma}^e \cdot \underline{n} \cdot d\Gamma) \cdot \frac{\partial u^e(x)}{\partial x} \right) \quad (2-46)$$

On reconnaît dans cette expression l'intégrale J de Rice en mode I [Rice 1968], cette grandeur sera appelée φ dans la suite. L'équation (2-44) devient :

$$B = \left(A_2 - \frac{\partial F}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dt} \right) = \alpha \frac{d\rho}{dt} \varphi \quad \text{avec} \quad \varphi = \frac{J}{2} = \frac{1}{2} \frac{1-\nu^2}{E} K_I^{\infty 2} \quad (2-47)$$

L'expression de la dissipation devient :

$$D = A_3 + \alpha \frac{d\rho}{dt} \varphi - \frac{\partial F}{\partial V_X} \frac{dV_X}{dt} - \frac{\partial F}{\partial V_R} \frac{dV_R}{dt} \geq 0 \quad (2-48)$$

Le terme A_3 correspond à la puissance du champ de contrainte dans la zone plastique en pointe de fissure. Ce terme est négligeable devant le terme B de l'équation (2-47). Cela peut être vérifié grâce aux calculs par Eléments Finis. Pour un contour Γ circulaire situé à une distance r_0 de la pointe de la fissure, avec $\nu = 0.3$, $E = 200GPa$, $r_0 = 2mm$ et $\alpha = 1$, l'expression analytique du champ donne un terme A_3 nul si $\beta = -3.072MPa\sqrt{m} / \mu m$. Donc l'expression de la dissipation devient :

$$D = \alpha \frac{d\rho}{dt} \varphi - \varphi_X \frac{dV_X}{dt} - \varphi_R \frac{dV_R}{dt} \geq 0 \quad (2-49)$$

2.3.3.2.2 Equations d'évolution de la loi d'émoussement

La variable thermodynamique φ associée à l'émoussement plastique est donc égale à la moitié du taux de restitution d'énergie potentielle par avancée de fissure. Cela est valable pour une fissure ayant un rayon d'émoussement semi-circulaire. La Figure 2-29 montre l'évolution de l'émoussement plastique en fonction de φ , les courbes d'évolution sont similaires à celles tracées dans un diagramme $K - \rho$. On retrouve la zone plastique cyclique définie par sa position φ_{xc} et sa taille $2\varphi_c$ à l'intérieur de la zone plastique monotone de taille φ_m et de position φ_{xm} .

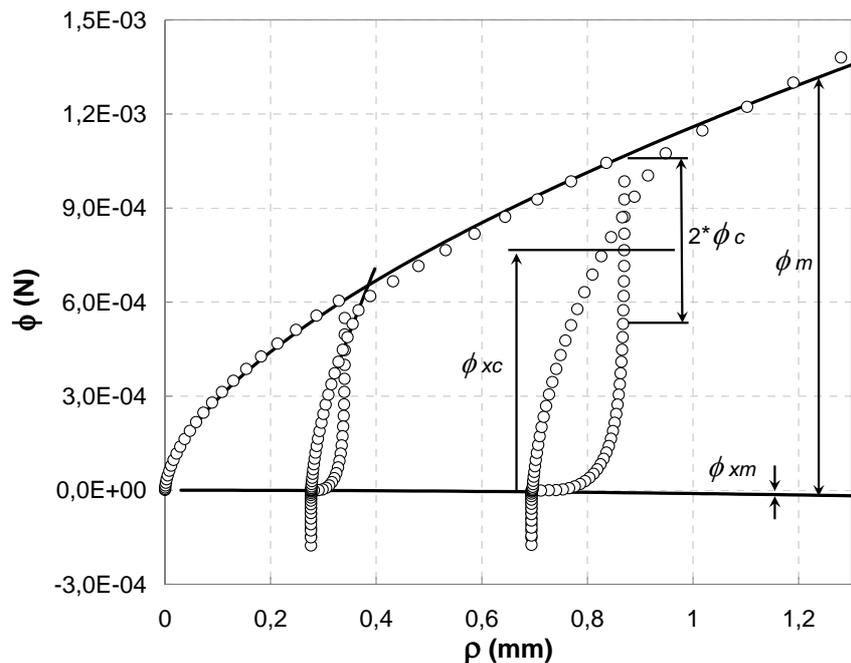


Figure 2-29. Courbe d'évolution de l'émoussement ρ en fonction du chargement φ

La loi d'émoussement doit décrire l'évolution des 4 variables φ_{xc} , φ_c , φ_m et φ_{xm} . Avec les calculs par éléments finis, on peut étudier indépendamment l'évolution des variables en fonction de a et de ρ . Lorsque la fissure se propage, la création de nouvelles surfaces libres conduit à une redistribution des contraintes internes pour assurer l'équilibre, ce qui est à l'origine d'évolutions de nos variables internes. Le nombre d'équations dont on souhaite déterminer une forme empirique est donc de 8 :

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial \rho}, \frac{\partial \varphi_{xm}}{\partial \rho}, \frac{\partial \varphi_c}{\partial \rho}, \frac{\partial \varphi_{xc}}{\partial \rho} \text{ et } \frac{\partial \varphi_m}{\partial a}, \frac{\partial \varphi_{xm}}{\partial a}, \frac{\partial \varphi_{cf}}{\partial a}, \frac{\partial \varphi_{xcf}}{\partial a}$$

Ces équations d'évolution constituent la loi de comportement de la structure fissurée. L'écriture sous forme différentielle des équations permet d'effectuer un calcul de propagation incrémental connaissant l'état courant des variables internes et l'incrément de chargement. Dans la suite, nous présentons en détail les équations d'évolution proposées en s'appuyant sur des résultats de calculs par Éléments Finis.

1- Equations d'évolution de $\frac{\partial \varphi_{xcf}}{\partial \rho}$ et $\frac{\partial \varphi_{cf}}{\partial \rho}$ (phase de fermeture)

On étudie dans un premier temps la réponse de la structure fissurée à une succession de charges-décharges, plusieurs configurations ont été étudiées pour plusieurs lois de comportement et plusieurs longueurs de fissure.

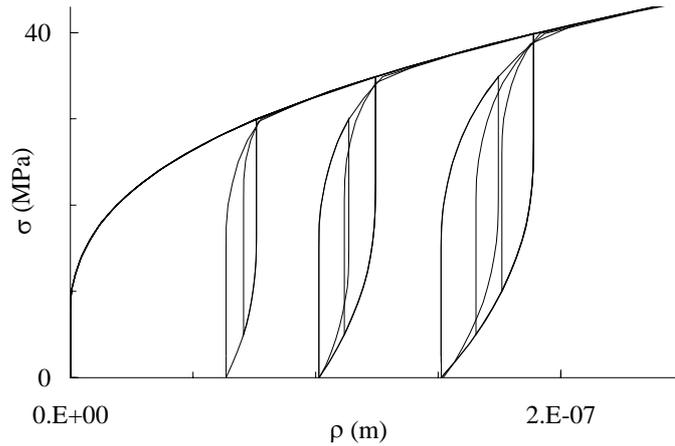


Figure 2-30. Diverses séquences d'ouverture fermeture qui ont permis d'étudier les phases de charge et de décharge

Dans la Figure 2-31a on trace la variation du facteur d'intensité des contraintes depuis le début de la décharge K_0 en fonction de la variation de l'érousement plastique. On constate que la réponse peut être considérée comme unique dans un diagramme $K_0 - K$ en fonction de $\rho_0 - \rho$, quel que soit le point de départ. En revanche on n'a pas unicité dans un diagramme $\phi_0 - \phi$ en fonction de $\rho_0 - \rho$ (Figure 2-31b).

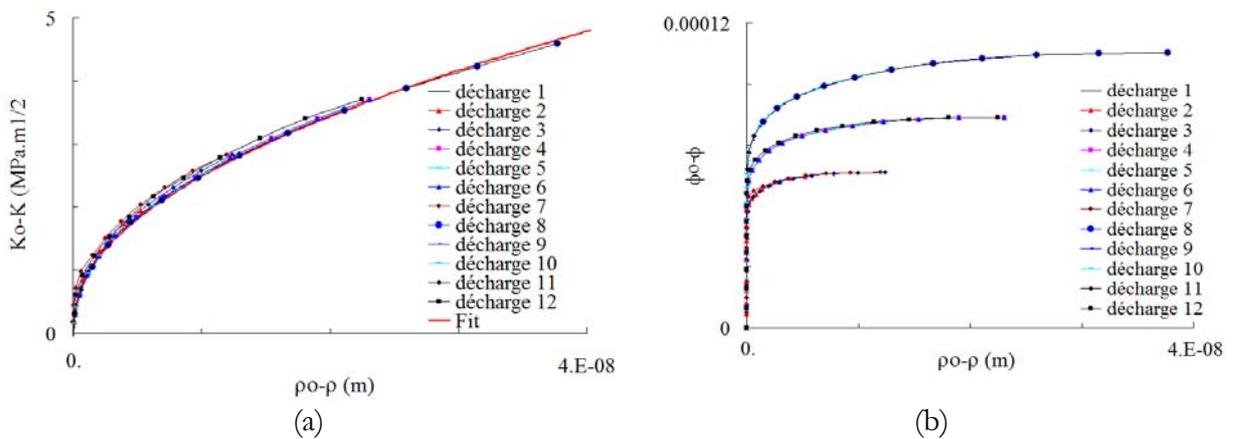


Figure 2-31. En (a), variation du facteur d'intensité des contraintes K depuis le début de la décharge K_0 en fonction de la variation de l'érousement plastique ρ depuis le début de la décharge ρ_0 pour plusieurs décharges. En (b), mêmes évolutions de ϕ avec ρ

Nous avons choisi, au départ, pour modéliser cette courbe, une équation de type fonction puissance avec seuil. L'erreur de fit est extrêmement faible dans ce cas. Cependant ce choix pose un problème de robustesse de l'identification. En effet, plusieurs jeux de paramètres permettent d'obtenir quasiment la même courbe. Ainsi, si l'on modifie un peu les conditions (par exemple le modèle de comportement du matériau), les paramètres eux, sont susceptibles de varier significativement. En plus, la fonction puissance pose des problèmes d'intégration numérique lors du passage à zéro et lors des phases de compression.

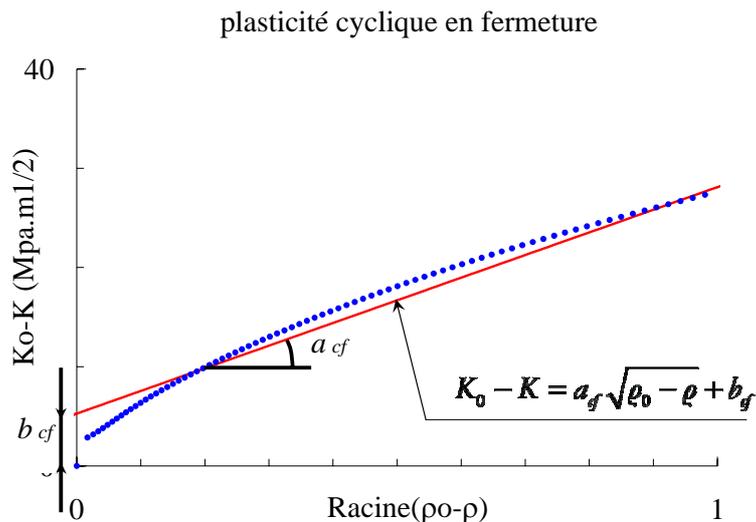


Figure 2-32. Evolution du facteur d'intensité des contraintes K lors d'une phase de fermeture depuis le début de la décharge K_0 en fonction de la variation de l'éroussement plastique ρ depuis le début de la décharge ρ_0 dans un diagramme $K - \sqrt{\rho}$

Nous avons donc choisi une fonction linéaire de $K_0 - K$ en fonction de $\sqrt{\rho_0 - \rho}$ (Figure 2-32), les deux paramètres matériau sont a_{cf} et b_{cf} . L'équation d'évolution choisie ne modélise par parfaitement les résultats des calculs numérique (Figure 2-33) mais l'avantage est que cette approche est très robuste car on détermine les paramètres a_{cf} et b_{cf} par la méthode des moindres carrés. Le jeu de paramètres est unique. L'avantage principal de cette unicité du jeu de paramètres c'est de permettre l'étude de leur évolution en fonction d'autres grandeurs comme la température ou la contrainte T .

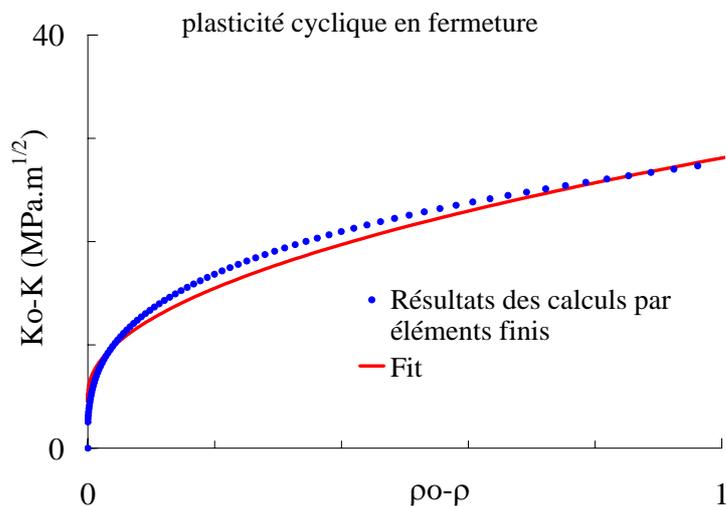


Figure 2-33. Evolution du facteur d'intensité des contraintes K lors d'une phase de fermeture depuis le début de la décharge K_0 en fonction de la variation de l'éroussement plastique ρ depuis le début de la décharge ρ_0 dans un diagramme $K - \rho$

L'équation d'évolution retenue pour ce cas particulier est donc la suivante :

$$K_0 - K = a_{cf} \sqrt{\rho_0 - \rho} + b_{cf} \tag{2-50}$$

En outre avec ce choix, la loi d'évolution de ϱ présente une ressemblance avec la loi du CTOD de [McClintock 1967] puisqu'elle lie la vitesse de propagation au carré du facteur d'intensité des contraintes. L'équation (2-50) donne :

$$\Delta CTOD \approx \varrho_0 - \varrho = \left(\frac{(K_0 - K) - b_{cf}}{a_{cf}} \right)^2 \quad (2-51)$$

Nous verrons par la suite que, malgré l'exposant 2 dans cette expression, l'exposant de la loi de Paris trouvé peut être différent de 2 grâce à l'existence du seuil b_{cf} .

Il reste maintenant à transformer cette équation, correspondant à un jeu de cas particulier en une équation d'évolution qui pourra être utilisée avec des valeurs initiales quelconques pour les variables internes. Par ailleurs, on utilisera la relation suivante entre K et φ :

$$\varphi = A^2 K^2 \text{signe}(K) \quad \text{avec} \quad A = \sqrt{\frac{1-\nu^2}{2E}} \quad (2-52)$$

Le domaine d'élasticité cyclique débute à $K = K_0$ et finit en $K = K_0 - b_{cf}$, la taille de la zone plastique cyclique est donc :

$$2\varphi_{cf} = A^2 K_0^2 - A^2 (K_0 - b_{cf})^2 \quad (2-53)$$

Ce qui donne pour φ_{cf} :

$$\varphi_{cf} = \frac{A^2 b_{cf}}{2} (2K_0 - b_{cf}) = \frac{A^2 b_{cf}}{2} \left(2 \frac{\sqrt{\varphi_0}}{A} - b_{cf} \right) \quad (2-54)$$

Cette valeur de φ_{cf} doit évoluer au cours des phases de plasticité cyclique et monotone en phase ouverture, mais pas au cours des phases d'élasticité ni au cours des phases de plasticité cycliques de fermeture. Par la suite, on peut écrire qu'au cours de la décharge $\varphi = \varphi_{scf} - \varphi_{cf}$, et comme φ_{cf} reste constant pendant de cette phase, on déduit que :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = \frac{\partial \varphi_{cf}}{\partial \varrho} + \frac{\partial \varphi_{scf}}{\partial \varrho} = \frac{\partial \varphi_{scf}}{\partial \varrho} \quad (2-55)$$

$\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}$ est donnée par :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = 2A^2 K \frac{\partial K}{\partial \varrho} = 2A^2 \frac{\sqrt{\varphi}}{A} \frac{\partial K}{\partial \varrho} = 2A \sqrt{\varphi} \frac{\partial K}{\partial \varrho} \quad (2-56)$$

$\frac{\partial K}{\partial \rho}$ est déduit de l'équation (2-50) :

$$\frac{\partial K}{\partial \rho} = \frac{a_{cf}}{2} \frac{1}{\sqrt{\rho_0 - \rho}} = \frac{a_{cf}}{2} \frac{1}{K_0 - K - b_{cf}} \quad (2-57)$$

Ce qui donne pour $\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}$:

$$\frac{\partial \varphi_{scf}}{\partial \rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = 2A\sqrt{\varphi} \frac{\partial K}{\partial \rho} = 2A\sqrt{\varphi} \frac{a_{cf}}{2} \frac{1}{K_0 - K - b_{cf}} \quad (2-58)$$

D'après l'équation (2-53), on déduit :

$$K_0 = \frac{\varphi_{cf}}{A^2 b_{cf}} + \frac{b_{cf}}{2} \quad (2-59)$$

En remplaçant K_0 dans l'équation (2-58), on obtient ainsi la loi d'évolution de φ_{scf} :

$$\frac{\partial \varphi_{scf}}{\partial \rho} = A^2 \frac{a_{cf}^2 \sqrt{\varphi}}{\frac{\varphi_{cf}}{Ab_{cf}} - \frac{Ab_{cf}}{2} - \sqrt{\varphi}} \quad (2-60)$$

2- Etude de la phase d'ouverture

En pratique les mêmes équations d'évolution sont employées, mais on vérifie lors de la phase d'identification que les coefficients a_{cf} et b_{cf} identifiés lors de la phase d'ouverture ou lors de la phase de fermeture sont bien les mêmes. Pour cela, il est nécessaire d'appliquer quelques cycles. Les coefficients, a_{cf} et b_{cf} identifiés correspondent donc à une boucle de plasticité cyclique stabilisée. La phase transitoire de stabilisation n'est pas modélisée.

3- Equation d'évolution de la zone plastique monotone avec l'émoussement $\frac{\partial \varphi_m}{\partial \rho}$

La démarche de détermination de l'évolution de la zone monotone est identique à celle de la zone cyclique d'ouverture. L'équation d'évolution est linéaire dans un diagramme $K - \sqrt{\rho}$:

$$K = K_m + K_{scm} = (a_m \sqrt{\rho} + b_m) \quad (2-61)$$

En remplaçant (2-61) et (2-52) dans (2-56) on obtient :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = 2A^2 \frac{\sqrt{\varphi}}{A} \frac{a_m}{2\sqrt{\rho}} = A^2 a_m^2 \frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{\varphi} - Ab_m} \quad (2-62)$$

Ce qui donne pour $\frac{\partial \varphi_m}{\partial \rho}$:

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial \rho} = A^2 a_m^2 \frac{\sqrt{\varphi_m + \varphi_{xm}}}{\sqrt{\varphi_m + \varphi_{xm}} - Ab_m} - \frac{\partial \varphi_{xm}}{\partial \rho} \quad (2-63)$$

4- Equation d'évolution de $\frac{\partial \varphi_{xm}}{\partial \rho}$

L'évolution du point de contact en fonction de l'érousement plastique peut être déterminée de deux manières différentes.

La première méthode que nous avons adoptée au départ consiste à charger la fissure à différents niveaux de contrainte et à décharger à chaque fois pour rechercher le point de contact des lèvres de la fissure (Figure 2-34a). Le calcul peut être effectué depuis l'état initial (point de contact à zéro) ou bien en partant d'un point de contact positif (Figure 2-34b). Pour cela, il suffit de faire avancer la fissure, par relâchement de nœuds, sur une certaine distance da ce qui permet de faire évoluer le point de contact. Plusieurs charges-décharges sont ensuite effectuées à plusieurs niveaux pour déterminer le point de contact. Les deux calculs effectués ont montré que l'évolution du niveau de contact est linéaire dans un diagramme $K-\rho$. L'inconvénient de cette méthode de détermination de l'évolution du contact est qu'elle est gourmande en temps de calcul.

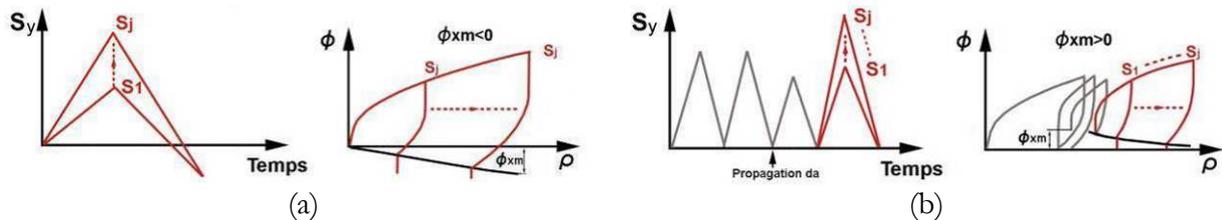


Figure 2-34. Evolution du point de contact avec l'érousement plastique, en (a) pour un niveau de contact négatif et en (b) pour un niveau de contact positif

Une deuxième méthode plus rapide et plus simple consiste à appliquer un seul chargement monotone à la fissure et à déduire l'évolution du point de contact à partir de la valeur de K_I^{Sb} . En effet, en remplaçant l'équation (2-20) dans l'équation (2-19), on obtient sur les lèvres de la fissure :

$$\underline{u}_y(r, \theta = \pi) = (K_I^\infty + K_I^{Sb}) \cdot \underline{u}_y^e(r, \theta = \pi)_{K_I=1} + \rho \quad (2-64)$$

L'évolution de K_I^{Sb} en fonction de ρ étant connue, il suffit de déduire la valeur de K_I^∞ à appliquer pour que les lèvres de la fissure rentrent en contact ($\underline{u}_y(r, \theta = \pi) = 0$). Le déplacement élastique des lèvres en déformations planes est donné par :

$$\underline{u}_y^e(r, \theta = \pi)_{K_I=1} = \frac{4(1-\nu^2)}{E\sqrt{2\pi}} \sqrt{r} \quad (2-65)$$

En remplaçant l'équation (2-65) dans (2-64), on obtient pour K_I^∞ :

$$K_I^\infty = K_I^{contact} = K_{\infty m} = K_I^{Sb} - \frac{\rho E \sqrt{2\pi}}{4(1-\nu^2) \sqrt{r}} \quad (2-66)$$

La distance à partir de l'extrémité de la fissure à laquelle se produit initialement le contact est définie par r . Une fois cette distance choisie, on peut tracer l'évolution du point de contact des lèvres. La Figure 2-35 montre l'évolution de $K_{\infty m}$ en fonction de l'émoussement plastique pour une distance r de la pointe de fissure (ici $r = 1mm$). On a pu montrer que les deux méthodes sont équivalentes pour déterminer l'effet de l'émoussement plastique sur l'évolution de la position du point de contact.

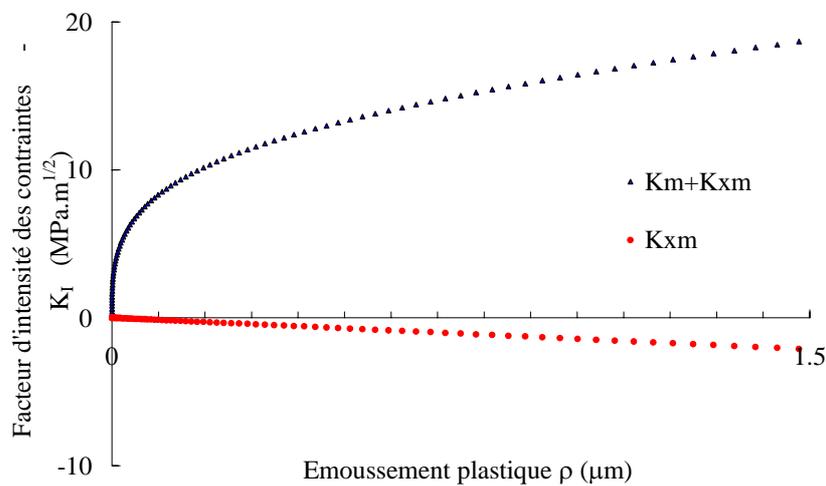


Figure 2-35. Evolution du point de contact des lèvres calculée à partir de K_I^{Sb}

L'évolution retenue pour $K_{\infty m}$ est linéaire en fonction de l'émoussement plastique :

$$K_{\infty m} = a_{\infty m} \rho + b_{\infty m} \quad (2-67)$$

Ce qui permet de déduire $\frac{\partial \varphi_{\infty m}}{\partial \rho}$ à partir de l'équation (2-56) :

$$\frac{\partial \varphi_{\infty m}}{\partial \rho} = 2A \sqrt{\varphi_{\infty m}} \frac{\partial K}{\partial \rho} = 2A a_{\infty m} \sqrt{\varphi_{\infty m}} \quad (2-68)$$

5- Equation d'évolution de $\frac{\partial \varphi_m}{\partial a}$

L'évolution de ϕ_m avec la longueur de la fissure a été déterminé par deux méthodes différentes. La première méthode consiste à faire se propager la fissure d'une longueur variable après l'application d'une surcharge (Figure 2-36). La fissure est ensuite chargée. Lors de cette phase, la déformation est d'abord une déformation de la zone plastique cyclique ensuite une déformation de la zone plastique monotone. Pour chaque avancée de fissure da_j de fissure, on déduit le niveau d'ouverture ϕ_{xmj} et la frontière supérieure de la zone plastique monotone ϕ_j . La taille de la zone plastique monotone ϕ_{mj} est ensuite déduite par la relation $\phi_{mj} = \phi_j - \phi_{xmj}$. L'équation d'évolution obtenue avec cette méthode est une droite décroissante dans un diagramme $\log(\phi_m)$ en fonction de a . Le problème de cette méthode est que le changement de pente n'est pas toujours très net, en particulier si le comportement du matériau est un peu élaboré.

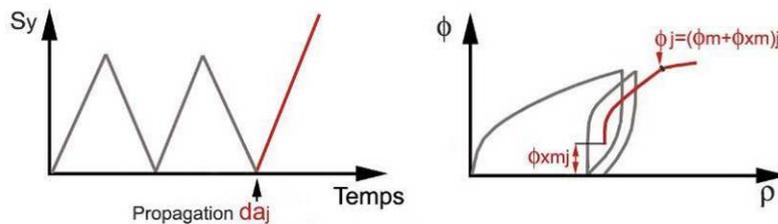


Figure 2-36. Méthode de détermination de l'évolution de la taille de la zone plastique monotone ϕ_m avec la longueur de la fissure a

La deuxième méthode d'identification de ϕ_m avec a consiste à appliquer un seul chargement monotone et suivre l'évolution de la taille de la zone plastique monotone en pointe de fissure. La Figure 2-37 montre l'évolution de la déformation plastique équivalente moyenne (de $\theta=0$ à $\theta=\pi$) à une distance r devant la pointe de la fissure.

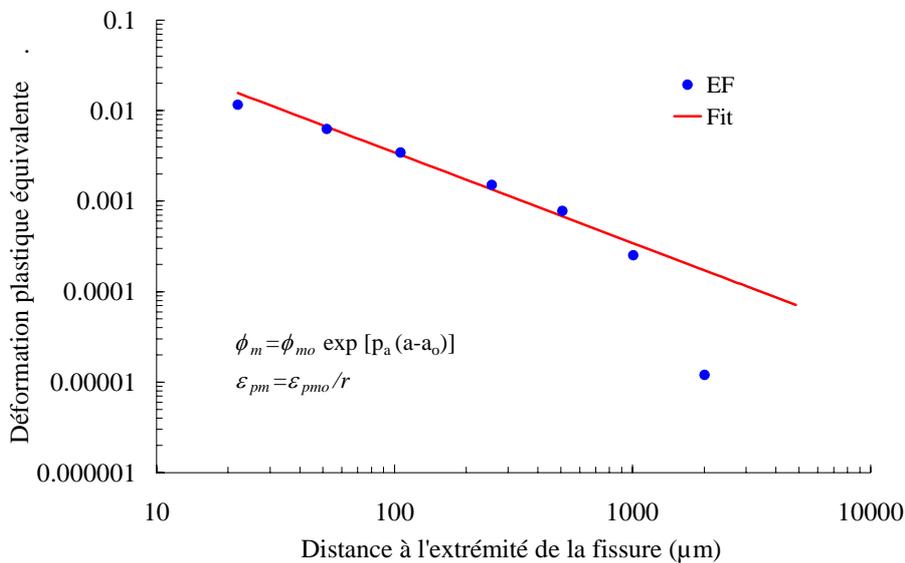


Figure 2-37. Evolution de la déformation plastique équivalente avec la distance de la pointe de la fissure

On trouve que la déformation plastique moyenne évolue comme l'inverse de la distance à l'extrémité de la fissure lorsque la distance à l'extrémité de cette fissure reste petite. On a préalablement déterminé la relation entre la déformation plastique, mesurée par ρ , et la taille de la zone plastique monotone mesurée par ϕ_m . En simplifiant un peu, ϕ_m varie linéairement avec ρ

(eqs. (2-61) et (2-53)). On peut donc en déduire le rapport entre la valeur de φ_{m0} appliquée initialement et ε_{pm0} .

$$\frac{\varepsilon_{pm0}}{r} = \frac{C_1 \cdot \varphi_{m0}}{r} \approx \frac{C_2 \cdot \varphi_{m0}}{r} \quad (2-69)$$

Si maintenant, la pointe de la fissure se trouvait à une distance $r = \delta a$, on pourrait écrire schématiquement que la déformation plastique en pointe de fissure reste inversement proportionnelle à la distance à cette pointe.

$$\frac{\varepsilon_{pm0}}{r} = \frac{\varepsilon_{pm1}}{r_1} \quad \text{où} \quad r_1 = r - \delta a \quad (2-70)$$

Simplement, la valeur de φ_m correspondante serait plus petite. Ce raisonnement grossier permet d'en déduire que φ_m devrait décroître de manière exponentielle avec l'extension de la fissure, et les valeurs de ε_{pm0} et φ_{m0} permettent d'estimer le coefficient de cette décroissance noté p_a . On précise ensuite la valeur de p_a lors de l'identification de la loi d'évolution de φ_{xm} avec a .

$$\frac{d\varphi_m}{da} = p_a \varphi_m \quad (2-71)$$

6- Equation d'évolution de $\frac{\partial \varphi_{xm}}{\partial a}$

L'évolution de φ_{xm} avec la longueur de la fissure a a été déterminée encore une fois de deux manières différentes. La première (Figure 2-38) consiste à faire se propager la fissure d'une longueur variable après l'application d'une surcharge. On charge ensuite la fissure et on regarde lors de cette phase le niveau correspondant à la perte de contact des lèvres de la fissure. Pour chaque avancée de fissure da_j , de fissure on a donc le niveau d'ouverture φ_{xmj} correspondant. Lors de ces calculs on a pu observer que le point de contact entre les faces de la fissure monte d'abord rapidement avec l'extension de la fissure puis diminue lentement. Par ailleurs, la composante normale du champ de contrainte résiduelle dans le sillage de la fissure, a été également étudiée. On trouve généralement que cette contrainte est quasiment constante dans le sillage de la fissure du fait de redistributions de contraintes et de re-plastification dans ce sillage lors de l'avancée de la fissure.

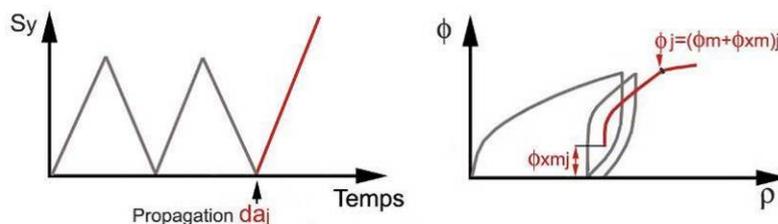


Figure 2-38. Méthode de détermination de l'évolution de la position de la zone plastique monotone φ_{xm} avec la longueur de la fissure a

La deuxième méthode d'identification de $\varphi_{\infty m}$ avec a consiste à appliquer un chargement monotone suivi d'une décharge et à déduire l'évolution du point de contact du champ des contraintes résiduelles de compression, calculé par éléments finis, devant l'extrémité de la fissure. Le facteur d'intensité des contraintes d'ouverture $K_{\infty m}$ est déterminé de la manière suivante.

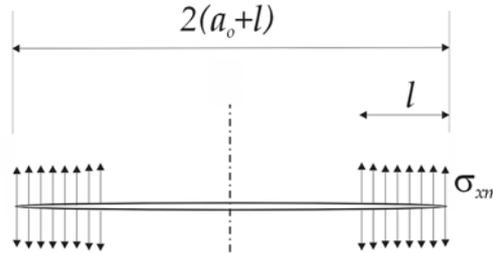


Figure 2-39. Chargement d'une fissure par une contrainte constante en ses extrémités

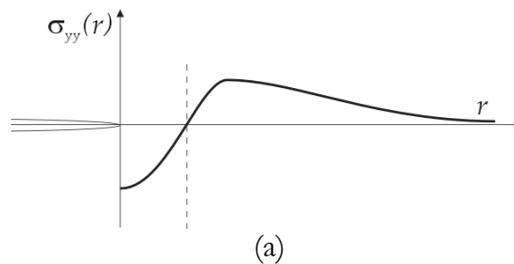
Le facteur d'intensité des contraintes d'une fissure de longueur $2(a_0 + l)$ chargée en ses extrémités sur une distance l par une contrainte constante de valeur $\sigma_{\infty m}$ vaut (2-72) :

$$K_{\infty m} = \sigma_{\infty m} \sqrt{\pi(a_0 + l)} \left[\frac{2}{\pi} a \cos\left(\frac{a_0}{a_0 + l}\right) \right] \quad (2-72)$$

La valeur de la contrainte $\sigma_{\infty m}$ est calculée comme suit en fonction de la composante normale au plan de la fissure du champ de contraintes résiduelles $\sigma_{yy}^{résiduelle}$ calculé par éléments finis :

$$\sigma_{\infty m} = \frac{1}{l} \int_{r=0}^{r=l} \sigma_{yy}^{résiduelle}(r) dr \quad (2-73)$$

La valeur moyenne de la contrainte résiduelle a été utilisée plutôt que le champ de contraintes résiduelles pour les raisons suivantes. D'une part lorsqu'on simule des propagations de fissure par éléments finis, le champ de contraintes résiduelles dans le sillage de la fissure n'est pas égal au champ de contraintes résiduelles devant l'extrémité de la fissure avant qu'elle ne se propage, mais plutôt à sa moyenne (Figure 2-40). D'autre part, le point de contact a été calculé par éléments finis en simulant effectivement la propagation de la fissure par la méthode de relâchement des nœuds et calculé en utilisant les fonctions de poids avec soit la moyenne glissante des contraintes résiduelles, soit le champ des contraintes résiduelles. Nous avons pu vérifier que le point de contact calculé en utilisant les équations (2-72) et (2-73) est proche de celui obtenu en simulant la propagation de la fissure par méthode de relâchement de nœuds. Ce n'était pas le cas quand le champ de contraintes résiduelles était employé tel quel et en utilisant les fonctions de poids.



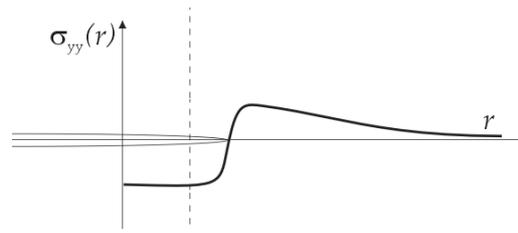


Figure 2-40. Allure du champ de contrainte résiduelle en pointe de fissure, (a) avant et (b) après la propagation de celle-ci

Bien que cette méthode de détermination de K_{xm} ne tienne compte que très grossièrement des redistributions des contraintes résiduelles après chaque extension de fissure, les courbes d'évolution sont similaires à celles obtenues par la première méthode. En fait, cette méthode a pu être adoptée parce que le matériau étudié présente beaucoup d'écrouissage cinématique, comme la plupart des aciers ferrito-perlitiques, et que les redistributions de contraintes résiduelles sont donc favorisées. Si le matériau présente moins d'écrouissage cinématique, la méthode par relâchement de nœuds peut toujours être employée. La Figure 2-41 montre l'évolution de K_{xm} avec la longueur de la fissure a . Cette évolution n'est pas monotone, elle atteint un maximum avant de décroître lentement. La montée du point de contact avec la longueur de la fissure permet de simuler le retard après l'application de la surcharge.

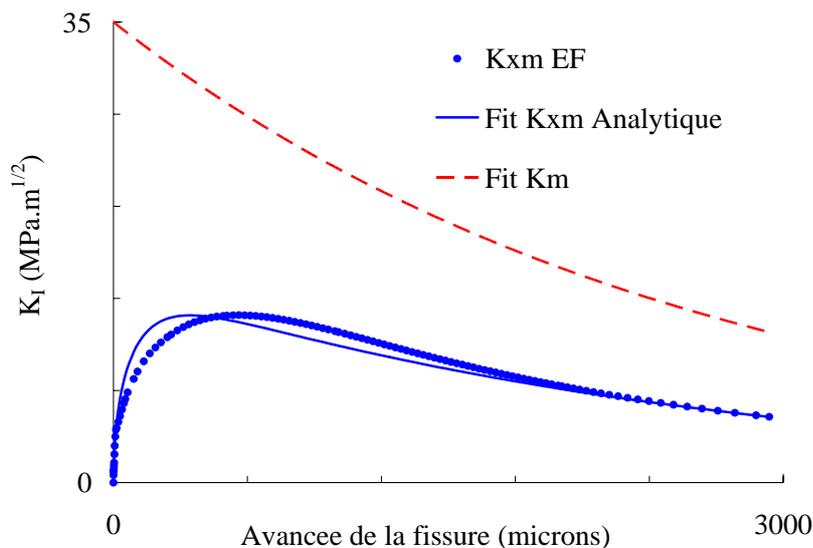


Figure 2-41. Evolution du niveau de contact K_{xm} avec la longueur de la fissure a

Cette évolution de K_{xm} ressemble à celle obtenue par [Tvergaard 2004]. L'auteur a suivi par calculs par Eléments Finis, l'évolution du CTOD en fonction du nombre de cycles (Figure 2-42). Le modèle est une éprouvette CCT et le comportement matériau est élastique parfaitement plastique. Un remaillage automatique a été réalisé afin de régler le problème de distorsion des éléments à proximité de la pointe et de permettre la création de surfaces libres. L'enveloppe basse de la courbe correspond au niveau de contact des faces de la fissure. Les mêmes calculs ont été réalisés pour trois niveaux du rapport de charge : -1, 0 et 0.5. L'allure des courbes d'évolution est similaire dans les trois cas.

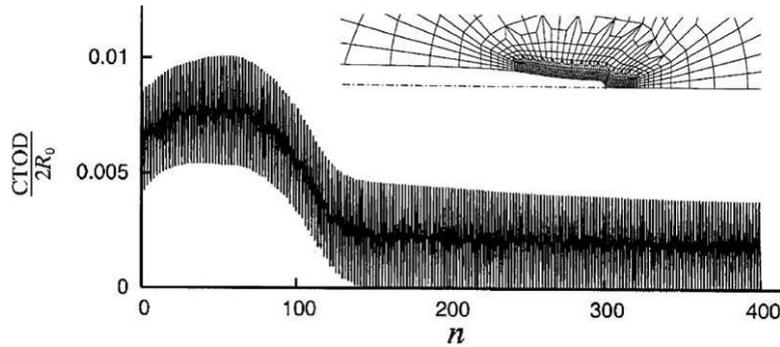


Figure 2-42. Evolution du CTOD en fonction du nombre de cycle obtenu par Elements Finis pour un rapport de charge nul [Tvergaard 2004]

Par ailleurs, une équation d'évolution sous forme puissance a été proposée par [Beevers et al. 1984] pour modéliser la partie décroissante du point de contact en fonction de l'extension de la fissure. Cette évolution a été proposée pour un effet de fermeture dû à une aspérité sur une des faces de la fissure. L'équation d'évolution proposée par l'auteur dépend de la rigidité de l'aspérité et de sa distance de la pointe de la fissure. La Figure 2-43 montre un exemple d'évolution de l'expression proposée pour une rigidité d'aspérité donnée.

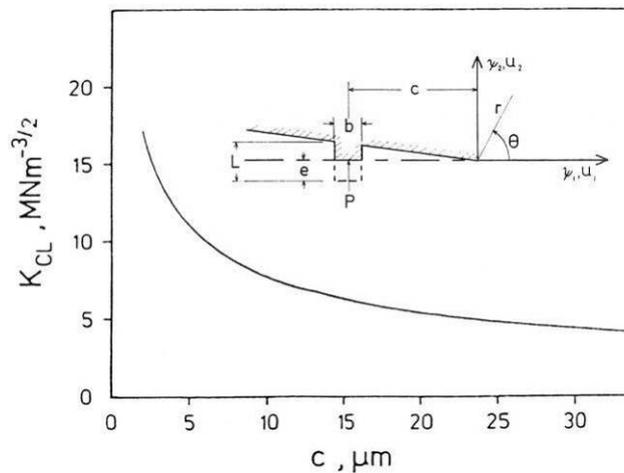


Figure 2-43. Evolution du point de contact avec l'extension de la fissure [Beevers et al. 1984]

La forme non monotone de l'évolution de K_{sm} que nous avons trouvée par la première ou la seconde méthode, et que trouvent également d'autres auteurs, fait que pour 2 extensions de fissures différentes, le même niveau d'ouverture peut être trouvé. Mais l'évolution de la position du point de contact (mesurée par φ_{sm}) est positive avant le pic et devient négative après le pic. Dans le même temps, la dimension de la zone plastique monotone (mesurée par φ_m) ne fait que décroître après la surcharge. Aussi doit on faire intervenir au moins deux variables internes dans la loi d'évolution de φ_{sm} . La fonction finalement retenue pour décrire l'évolution du point de contact avec la longueur de la fissure est la suivante :

$$\frac{\partial \varphi_{sm}}{\partial a} = k_a \cdot \varphi_{sm} + k_b \cdot \varphi_m \quad (2-74)$$

Où k_a et k_b sont des coefficients matériaux. Le premier terme de l'expression modélise la partie décroissante de la courbe et le deuxième terme la partie croissante. En remplaçant l'équation d'évolution de φ_m avec a dans l'équation (2-74) et en intégrant l'expression à partir de valeurs

initiales nulle pour φ_{xm} et égale à φ_{m0} pour φ_m , et connaissant la loi d'évolution de φ_m , on obtient l'évolution suivante pour φ_{xm} :

$$\varphi_{xm}(a) = \varphi_{m0} \cdot \frac{k_b}{k_a - p_a} \cdot (e^{k_a \cdot r} - e^{p_a \cdot r}) \quad (2-75)$$

On note que p_a intervient dans cette équation. Ainsi peut-on le ré-identifier à ce stade et vérifier que la nouvelle valeur obtenue ne s'écarte pas trop de la première.

7-Bilan

Dans tous les cas on utilise la relation suivante entre le facteur d'intensité des contraintes nominal et φ . Puis on examine les divers cas pouvant se présenter.

- $\varphi = A^2 K^2 \text{signe}(K)$ avec $A = \sqrt{\frac{1-\nu^2}{2E}}$

Extension de la zone plastique monotone : $f_m = 0$ et $\frac{d\varphi}{dt} > 0$

- Loi de fissuration : $\frac{da}{dt} = \frac{\alpha}{2} \frac{d\varphi}{dt}$

- Critère de plasticité ($\varphi_{xm} < \varphi$) : $f_m = \sqrt{(\varphi - \varphi_{xm})^2} - \varphi_m$

- Loi d'écoulement : $\frac{d\varphi}{dt} = \lambda \frac{\partial f_m}{\partial \varphi}$

- Consistance : $f_m = 0$, $\frac{df_m}{dt} = 0$

- Equations d'évolution :

- $\frac{\partial \varphi_{xm}}{\partial \varphi} = a_{xm} \cdot \sqrt{\varphi_{xm}}$

- $\frac{\partial \varphi_m}{\partial \varphi} + \frac{\partial \varphi_{xm}}{\partial \varphi} = A^2 a_m^2 \frac{\sqrt{\varphi_m + \varphi_{xm}}}{\sqrt{\varphi_m + \varphi_{xm}} - Ab_m}$

- $\frac{\partial \varphi_m}{\partial a} = p_a \cdot \varphi_m$

- $\frac{\partial \varphi_{xm}}{\partial a} = k_a \cdot \varphi_{xm} + k_b \cdot \varphi_m$ avec $A^2 = \frac{(1-\nu^2)}{2E}$

- Paramètres matériau ($a_m, b_m, a_{xm}, p_a, k_a, k_b$)

- Valeurs initiales : $\varphi_{m0} = A^2 b_m^2, \varphi_{x0} = 0$

Les paramètres matériaux sont identifiés automatiquement à l'aide de la méthode des moindres carrés en s'appuyant sur un jeu de calculs par éléments finis. φ_{xm} symbolise le point de contact entre les faces de la fissure et φ_m la dimension du domaine d'élasticité associé à la zone plastique monotone, c'est-à-dire le seuil au-delà duquel la zone plastique monotone peut s'étendre. Ce seuil est atteint si la fonction $f_m = 0$.

Plasticité cyclique: $f_c = 0$

- Loi de fissuration : $\frac{da}{dt} = \frac{\alpha}{2} \left\langle \frac{d\varrho}{dt} \right\rangle$
- Critère de plasticité : $f_c = \sqrt{(\varphi - \varphi_{xc})^2} - \varphi_c$
- Loi d'écoulement : $\frac{d\varrho}{dt} = \lambda \frac{\partial f_c}{\partial \varphi}$
- Consistance : $f_c = 0, \frac{df_c}{dt} = 0$
- Equations d'évolution :
 - $\frac{\partial \varphi_c}{\partial \varrho} = \frac{\partial \varphi_c}{\partial a} = \frac{\partial \varphi_{xc}}{\partial a} = 0$
 - $\frac{\partial \varphi_{xc}}{\partial \varrho} = A^2 \frac{a_c^2 \sqrt{\varphi_{xc} + \delta \cdot \varphi_c}}{\delta \left(\sqrt{\varphi_{xc} + \delta \cdot \varphi_c} - \frac{\varphi_c}{Ab_c} \right) - \frac{Ab_c}{2}}$ avec $\delta = \text{sign} \frac{d\varrho}{dt}$
 - $\frac{\partial \varphi_m}{\partial a} = p_a \cdot \varphi_m$
 - $\frac{\partial \varphi_{xm}}{\partial a} = k_a \cdot \varphi_{xm} + k_b \cdot \varphi_m$ Avec $A^2 = \frac{(1-\nu^2)}{2E}$
- Paramètres matériau (a_c, b_c)
- Evolutions de φ_c et φ_{xc} lorsque la plasticité monotone est activée :

$$\varphi = \varphi_c + \varphi_{xc} \quad \text{et} \quad \varphi_c = \frac{A^2 b_c}{2} \left(2 \frac{\sqrt{\varphi}}{A} - b_c \right)$$

2.3.4 Méthode d'implémentation

L'algorithme de calcul du modèle incrémental est présenté dans la Figure 2-44. Les intégrations numériques de la loi d'érouissage et de la loi de fissuration ont été réalisées d'une manière indépendante en 2 temps. A partir de l'évolution du champ de contrainte appliqué, on déduit pour chaque incrément de temps l'incrément de variation du chargement $d\varphi_i$ connaissant la longueur actuelle de la fissure a_i . La résolution des équations de la loi d'érouissage permettra ensuite de déduire l'incrément d'érouissage plastique $d\varrho_i$ résultant, ainsi que l'évolution des

variables internes $d\phi_{xc}$, $d\phi_c$, $d\phi_{xm}$ et $d\phi_m$. La nouvelle longueur de fissure est ensuite déterminée à partir de la loi de fissuration et les variables internes sont réactualisées avec a .

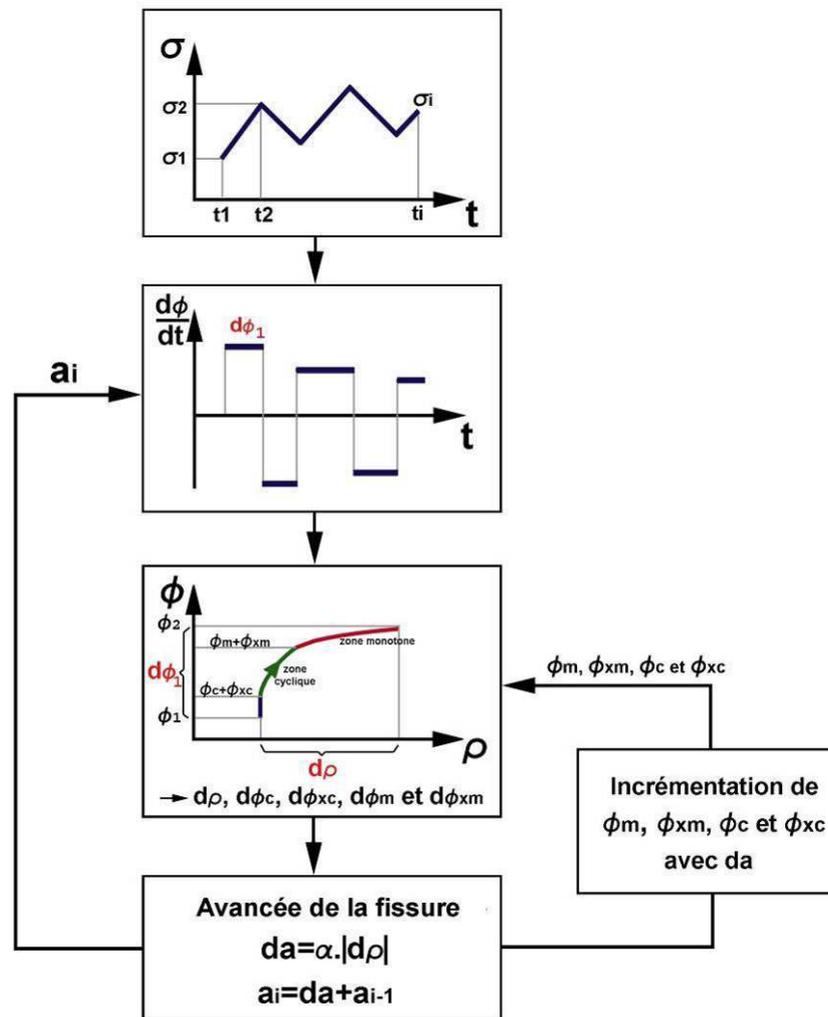


Figure 2-44. Algorithme de propagation avec la loi incrémentale

Le choix de découpler la résolution de la loi de fissuration de celle de la loi d'érouissage facilite énormément l'implémentation numérique et présente un gain non négligeable en temps de calcul. Cette résolution en deux étapes n'a pas de conséquence sur les résultats de calcul de propagation, car les variables internes évoluent rapidement avec l'érouissage plastique (en quelques dixièmes de microns) par contre ses évolutions sont beaucoup plus lentes avec la longueur de fissure (quelques centaines de microns). Donc à l'échelle du cycle de fatigue, la mise à jour des variables internes avec a peut être réalisée à la fin de l'incrément de calcul et pas en temps réel puisque l'avancée de la fissure ne fait pas évoluer de manière significative les variables.

L'intégration numérique des équations différentielles de la loi d'érouissage a été effectuée au départ avec un chemin d'intégration implicite, le temps de calcul nécessaire avec ce type de résolution est de l'ordre de quelques dizaines de minutes pour simuler 1 million de cycles en 2D. A noter que le temps de calcul est le même en amplitudes variable et constante puisqu'il s'agit dans les deux cas de calculs incrémentaux. En soit, ces temps de calculs ne sont pas rétroactifs. Mais ils augmenteront rapidement quand le modèle sera appliqué à un problème 3D et qu'il faudra calculer l'avancée de la fissure en plusieurs points du front de la fissure à chaque incrément.

En effet, l'objectif final est de traiter le cas d'une fissure semi-elliptique dans la toile sollicitée en traction et flexion biaxiale. Même si on se limite à dix points d'intégration le long du front de la fissure, les temps de calculs deviendront trop importants. Une méthode d'intégration analytique par morceaux a donc été finalement adoptée moyennant quelques hypothèses. Cette méthode est très rapide. La détermination des équations à implémenter est présentée en détail dans l'annexe C, nous présentons ici les résultats.

On connaît au début de chaque incrément de calcul les frontières de plasticité cyclique et monotone. Pour un incrément de chargement $d\varphi$, les équations à intégrer dépendent du niveau de chargement appliqué φ_2 et de l'état actuel de la fissure ($\varphi_1, \varphi_m, \varphi_{xm}, \varphi_{xf}, \varphi_{xof}, \varphi_{xo}, \varphi_{xoo}$) :

- Si φ_1 et φ_2 sont en dessous du point de contact (Figure 2-45a), aucune équation n'est à intégrer.

- Si φ_1 et φ_2 sont à l'intérieure de la zone plastique cyclique (Figure 2-45b), aucune équation à intégrer.

- Si φ_1 et φ_2 sont entre les limites des zones plastiques cyclique et monotone et on est en phase d'ouverture ($d\varphi > 0$) (Figure 2-45c), les équations à intégrer sont :

$$\varrho_2 = \frac{1}{a_{cf}^2} \left[\left(\frac{\sqrt{\varphi_1}}{A} - \frac{\varphi_{co}}{A^2 b_{cf}} - \frac{b_{cf}}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\varphi_2}}{A} - \frac{\varphi_{co}}{A^2 b_{cf}} - \frac{b_{cf}}{2} \right)^2 \right] - \varrho_1$$

$$\varphi_{xoo2} = \varphi_{xoo1} + d\varphi$$

$$\varphi_{co} = cte$$

$$\varphi_{cf} = \frac{A^2 b_{cf}}{2} \left(2 \frac{\sqrt{\varphi_2}}{A} - b_{cf} \right)$$

- Si φ_1 et φ_2 sont entre les limites des zones plastiques cyclique et monotone et on est en phase de fermeture ($d\varphi < 0$) (Figure 2-45d), les équations à intégrer sont :

$$\varrho_2 = \frac{1}{a_{cf}^2} \left[\left(\frac{\varphi_{cf}}{A^2 b_{cf}} - \frac{b_{cf}}{2} - \frac{\sqrt{\varphi_1}}{A} \right)^2 - \left(\frac{\varphi_{cf}}{A^2 b_{cf}} - \frac{b_{cf}}{2} - \frac{\sqrt{\varphi_2}}{A} \right)^2 \right] - \varrho_1$$

$$\varphi_{xof2} = \varphi_{xof1} + d\varphi$$

$$\varphi_{cf} = cte$$

$$\varphi_{co} = \frac{A^2 b_{cf}}{2} \left(2 \frac{\sqrt{\varphi_2}}{A} + b_{cf} \right)$$

- Si φ_2 dépasse la zone de plasticité monotone en ouverture (Figure 2-45e), on active les équations suivantes :

$$\varrho_2 = \left(\frac{\sqrt{\varphi + d\varphi} - b_m}{a_m} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\varphi} - b_m}{a_m} \right)^2 + \varrho_1$$

$$\varphi_{xm2} = A^2 \left(\frac{\sqrt{\varphi_{xm1}}}{A} + a_{xm} d\varrho \right)^2$$

$$\varphi_{m2} = \varphi_2 - \varphi_{xm2}$$

$$\varphi_{jf} = \frac{A^2 b_{jf}}{2} \left(2 \frac{\sqrt{\varphi_2}}{A} - b_{jf} \right)$$

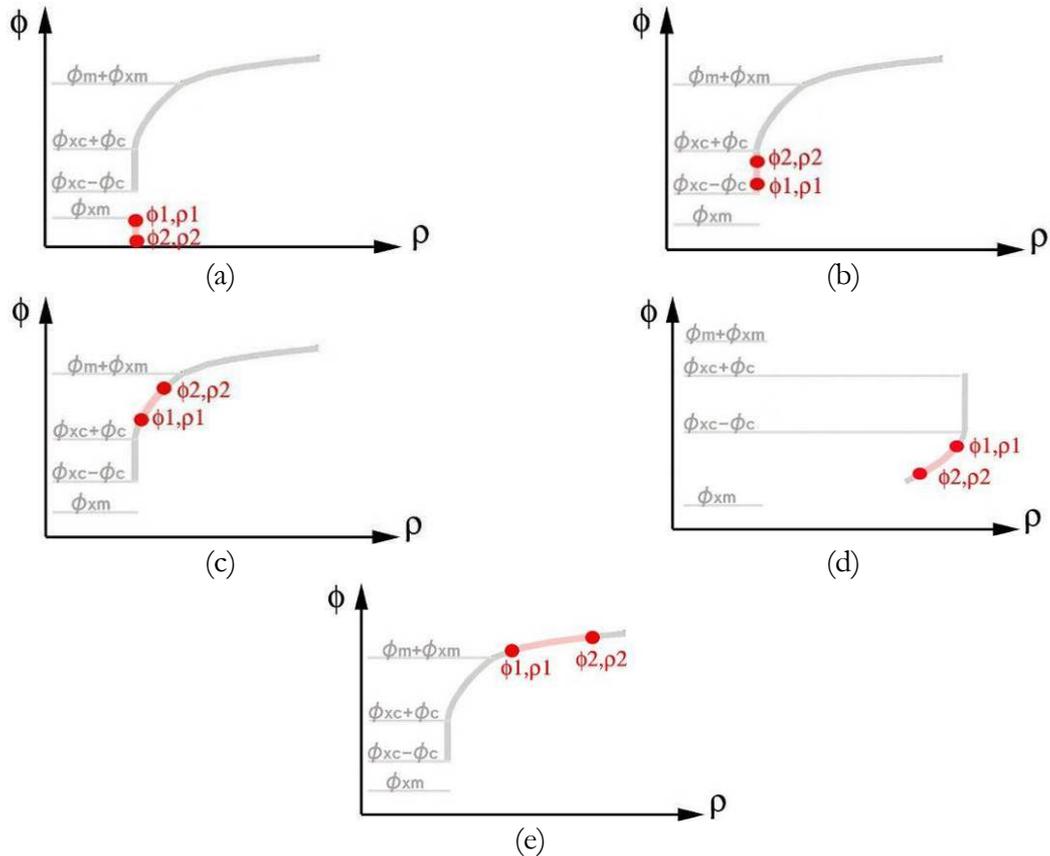


Figure 2-45. Evolution du point de contact avec l'érousement plastique, en (a) pour un niveau de contact négatif et en (b) pour un niveau de contact positif

A la fin de l'incrément, la longueur de la fissure est actualisée avec la loi de fissuration. Les variables internes dépendant de a seront également actualisées :

$$\varphi_{xm2} = \left(\varphi_{xm1} + \varphi_{m1} \cdot c_{pos} \right) \cdot e^{k_a \cdot da} - \varphi_{m2} \cdot c_{pos}$$

$$\varphi_{m2} = \varphi_{m1} e^{p_a (a_2 - a_1)}$$

2.3.5 Méthode d'identification

La Figure 2-46 montre la démarche d'identification des paramètres du matériau du modèle incrémental de propagation. L'identification nécessite 2 essais de base, le premier est un essai de traction-compression cyclique visant à identifier le comportement élastoplastique cyclique du matériau sain. La modélisation par Eléments Finis de ce comportement élastoplastique nous permettra ensuite d'identifier les 8 paramètres matériels de la loi d'érousement (ou loi de comportement de la structure fissurée). Une fois les paramètres de la loi d'érousement connus, une simulation d'un essai de fissuration sous chargement d'amplitude constante est réalisé. On

vérifie que l'exposant de la loi de Paris est correctement reproduit par la simulation. Le paramètre α de la loi de fissuration est ensuite ajusté en comparant la courbe de propagation simulée à une courbe expérimentale obtenue dans les mêmes conditions avec une éprouvette CCT.

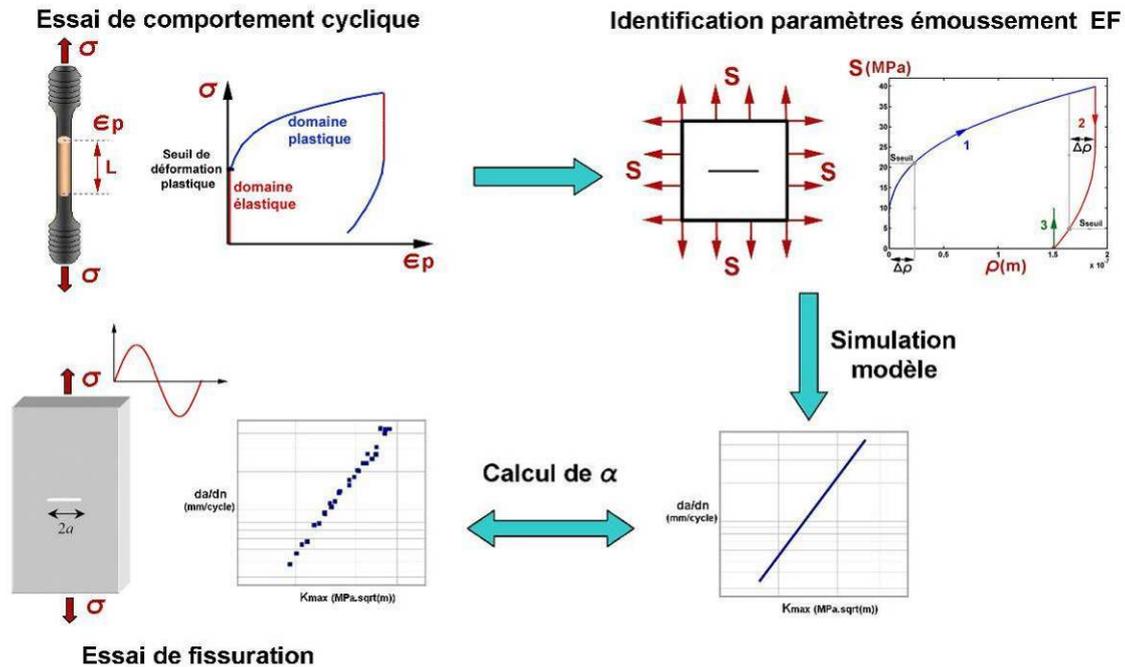


Figure 2-46. Démarche d'identification des paramètres du modèle incrémental de propagation

La procédure d'identification des paramètres de la loi d'érousement a été automatisée, elle se fait par la méthode des moindres carrés à partir des courbes d'érousement obtenues par Eléments Finis connaissant la loi de comportement du matériau. Le seul paramètre d'ajustement du modèle reste le paramètre α de la loi de fissuration. Nous présenterons dans le prochain paragraphe l'identification des paramètres du modèle incrémental pour l'acier à roue.

2.4 Identification des paramètres de la loi pour l'acier à roue

2.4.1 Identification du comportement élastoplastique

Puisque le comportement cyclique du matériau constitue la seule entrée du modèle incrémental, une bonne identification est nécessaire afin de décrire assez finement la plasticité en pointe de fissure et tous les phénomènes qui lui sont liés. L'identification du comportement a été réalisée sur des éprouvettes prélevées dans la toile d'une roue de TGV. Le plan de prélèvement est donné dans l'Annexe A-1. Les éprouvettes sont cylindriques de 8 mm de diamètre et 15 mm de longueur utile (Annexe A-6). La machine d'essai est une MTS $\pm 100\text{kN}$ et les essais ont été réalisés à 20°C. La déformation a été mesurée à l'aide d'un extensomètre monté sur l'éprouvette, la distance entre les couteaux est de 5 mm. La déformation imposée pour le premier niveau de déformation est de 0.3% et pour le dernier elle est de 1.5%. Pour chaque niveau de déformation nous avons réalisé 30 cycles de chargement avant de passer au niveau supérieur par pas de 0.1 %. Nous avons observé un fort adoucissement pendant les tout premiers cycles, ensuite un écrouissage cyclique a été mis en évidence pour chaque niveau de déformation imposé (Figure 2-47). L'adoucissement sera négligé dans la modélisation de la loi de comportement.

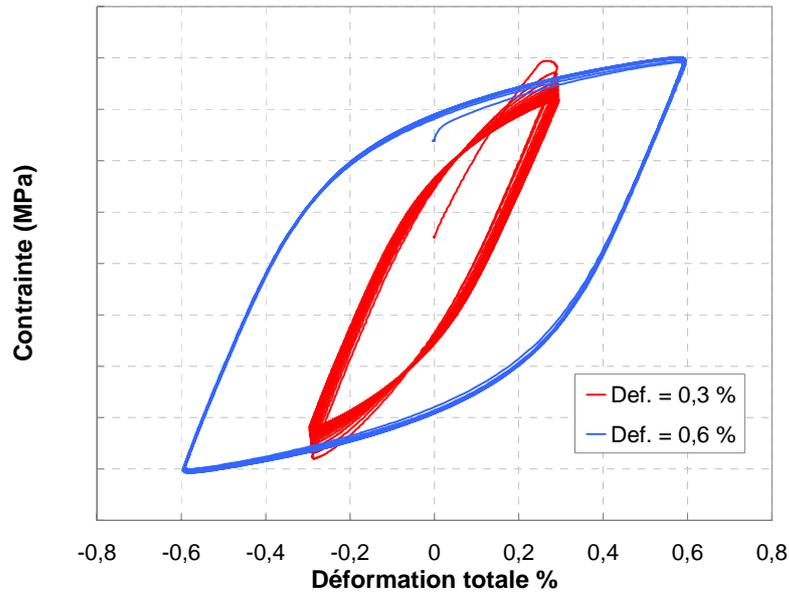


Figure 2-47. Boucles d'écroissage cyclique dans le sens radial de la roue pour deux niveaux de déformation totale imposée

La Figure 2-48 montre les boucles d'écroissage stabilisées pour une éprouvette prélevée selon la direction radiale de la roue. Un deuxième essai cyclique a été réalisé sur une deuxième éprouvette prélevée dans la direction orthoradiale de la roue. Les courbes de traction cyclique suivant les 2 directions, radiale et orthoradiale, sont données dans la Figure 2-49. L'écart entre les courbes est de l'ordre de 20 MPa, cette différence est faible comparée à la limite d'élasticité du matériau et au taux d'écroissage. On fera donc l'hypothèse que le matériau est isotrope et obéit au critère de Von Mises.

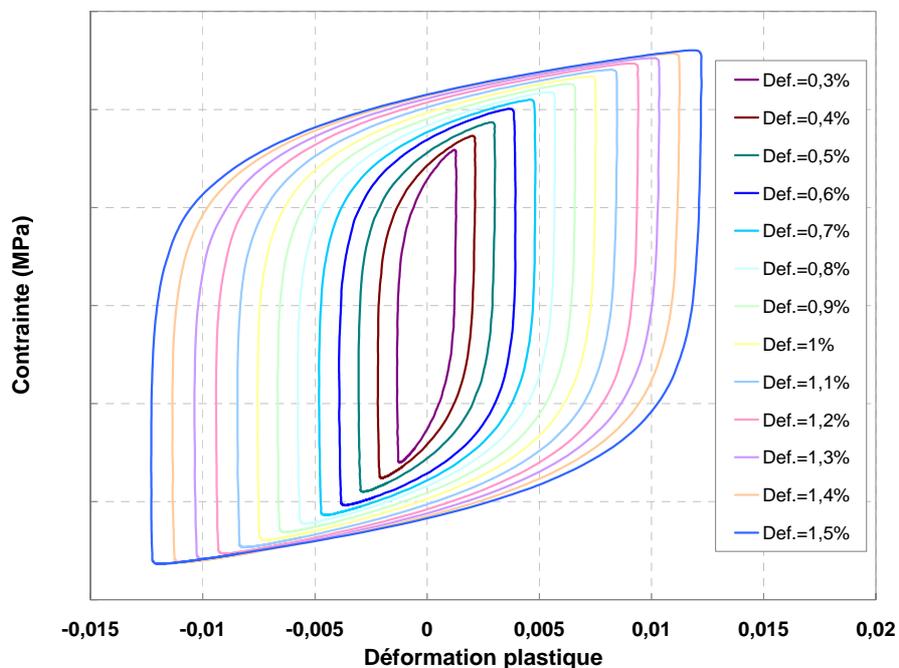
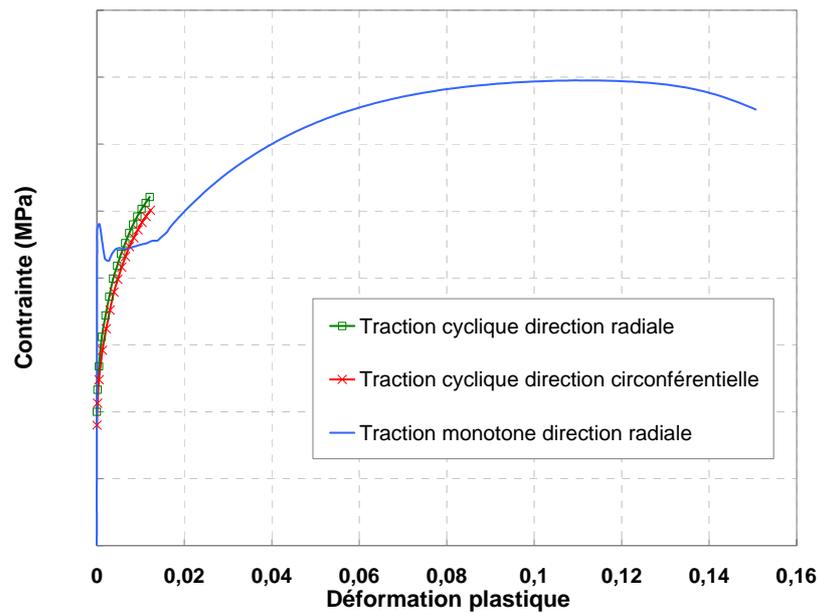
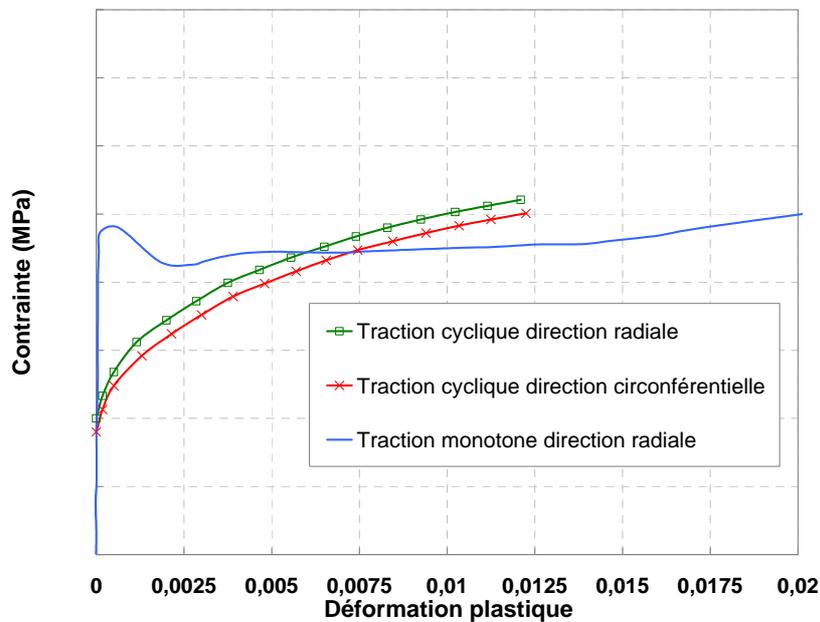


Figure 2-48. Boucles d'écroissage cyclique stabilisées dans le sens radial de la roue

On s'appuie sur des essais de traction simple (Figure 2-49) afin de couvrir des niveaux de déformation plus élevés. Le pic et le plateau de Lüders observés en traction simple n'ont pas été modélisés puisqu'on s'intéresse ici au comportement cyclique en pointe de fissure. Ce pic appelé aussi limite d'élasticité supérieure est caractéristique des aciers au carbone, il est dû à l'interaction dislocations-carbone dans le matériau. Une fois ce pic franchi, la dimension du domaine d'élasticité mesuré en traction simple (décharges partielles) diminue pour rejoindre celle mesurée en traction-compression cyclique. Un chauffage de l'éprouvette ou un temps d'attente après la décharge fait apparaître de nouveau le pic puisque les atomes de carbone ont le temps de diffuser et de s'ancrer de nouveau sur les dislocations. Le palier de la courbe de traction correspond à la propagation d'une bande de Lüders à travers l'éprouvette (Figure 2-50).



(a)



(b)

Figure 2-49. Courbes de traction monotone et cycliques

La taille du palier de Lüders est proportionnelle à la distance entre les 2 couteaux de l'extensomètre, plus cette distance est petite plus le palier est petit. A l'échelle de l'élément de volume, on pourrait se limiter à modéliser cet effet comme un adoucissement initial rapide suivi d'un écrouissage plus lent. Lorsque la fissure se propage, un élément de volume est grosso-modo soumis à une sollicitation à déformation imposée d'amplitude croissante. Ainsi, si le pic a un effet, on peut supposer que celui-ci est surtout important à une distance assez grande de l'extrémité de la fissure, mais ensuite l'effet de ce pic disparaît. La prise en compte de l'adoucissement créerait ainsi davantage de problèmes numériques que de précision sur le résultat. Il a été choisi de le négliger.

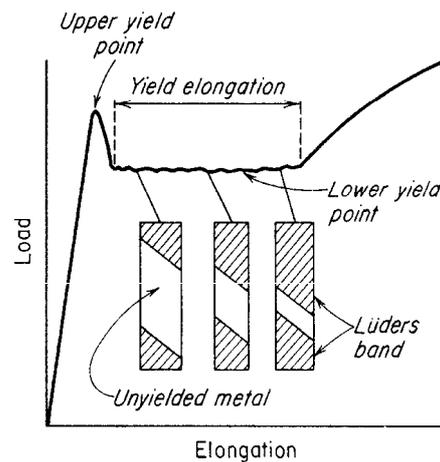


Figure 2-50. Principe des bandes de Lüders

La loi utilisée est celle de Chaboche avec 3 écrouissages cinématiques non linéaires combinés X sans seuil et un écrouissage isotrope non linéaire R . L'évolution de l'écrouissage cinématique est donnée par :

$$dX = \frac{2}{3} \cdot C \cdot d\varepsilon_p - \gamma \cdot X \cdot dp \quad \text{avec} \quad X|_{t=0} = X_0 \quad (2-76)$$

Et celle de l'isotrope :

$$dR = b(Q - R)dp \quad \text{avec} \quad R|_{t=0} = R_0 \quad (2-77)$$

p étant la déformation plastique cumulée définie par :

$$p = \int_{\tau=0}^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_p(\tau) : \dot{\varepsilon}_p(\tau)} d\tau \quad (2-78)$$

Les paramètres de cette loi sont présentés au Tableau 2-2. Une simulation par Elément Finis sur un élément de volume a permis de valider ces paramètres (Figure 2-51 et Figure 2-52). Les courbes simulées sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux.

E	ν	R0	Q	b	C_1	γ_1	C_2	γ_2	C_3	γ_3
190000	0.3	210	80	0.53	50000	1000	32500	500	11397	29

Tableau 2-2. Paramètres matériau de l'acier à roues

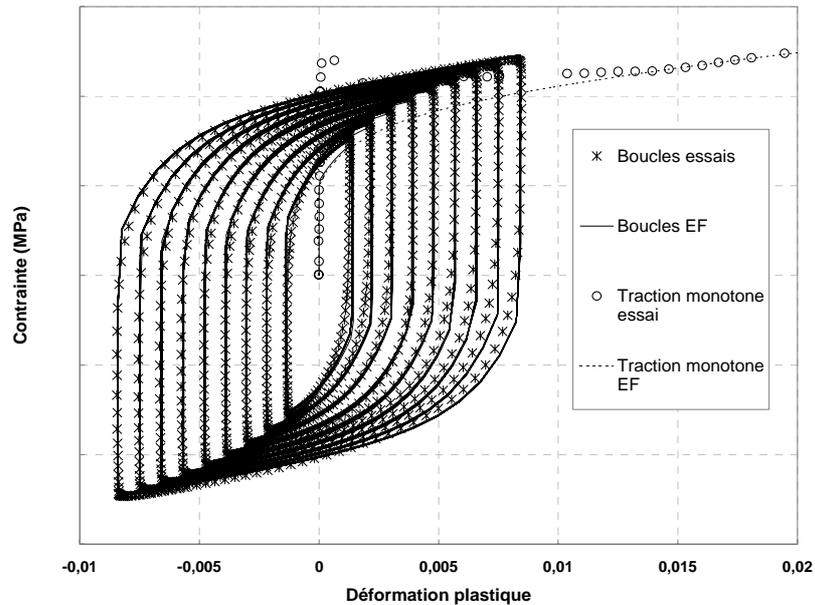


Figure 2-51. Comparaison des courbes d'écrouissage cyclique expérimentales avec celles obtenues par Eléments Finis

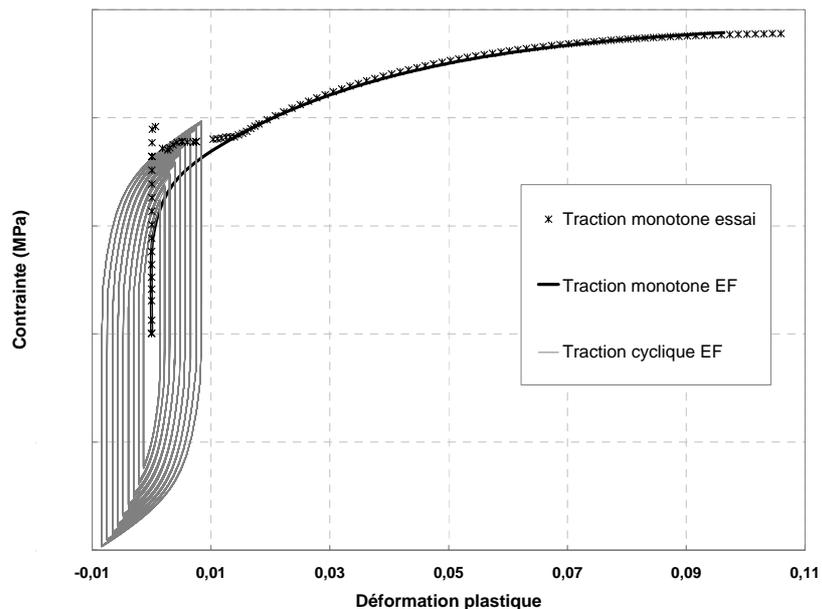


Figure 2-52. Comparaison de la courbe de traction monotone expérimentale avec celle obtenue par Eléments Finis

2.4.2 Identification des paramètres de la loi d'émoussement

Une fois le comportement de l'acier à roue connu, les paramètres de la loi d'émoussement peuvent être identifiés. La procédure d'identification est très simple, elle se fait grâce à un calcul Eléments Finis sur une plaque fissurée (Figure 2-53). Les dimensions de la plaque sont de (200*200mm) et la fissure centrale a une longueur de $2a=20\text{mm}$, le calcul est effectué en déformations planes en utilisant le comportement identifié pour le matériau. La plaque est soumise à une trentaine de cycles de charge-décharge afin d'obtenir une boucle stabilisée pour la partie cyclique.

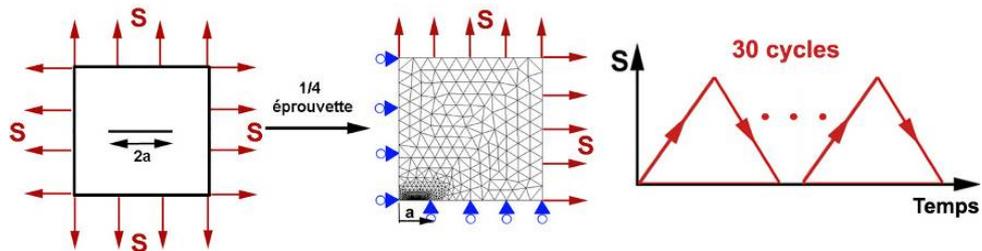


Figure 2-53. Calculs Eléments Finis réalisés pour identifier les paramètres de la loi d'érousement

L'identification des paramètres a_m , b_m , a_{cf} et b_{cf} s'effectue en traçant l'évolution de l'érousement plastique en fonction du facteur d'intensité des contraintes appliqué (Figure 2-54). L'identification de a_m et b_m se fait au cours de la première charge et celle de a_{cf} et b_{cf} au cours de la dernière décharge. Les paramètres sont ensuite calculés par la méthode des moindres carrés.

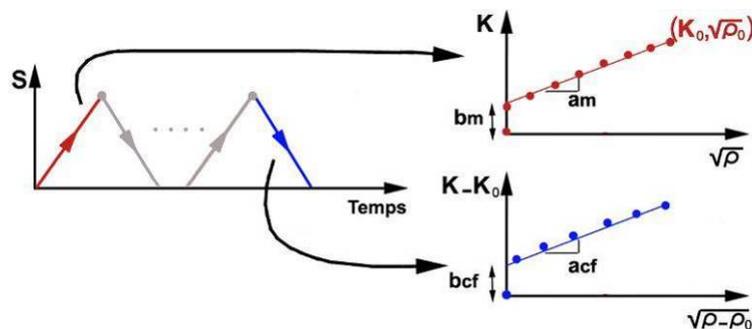


Figure 2-54. Identification des paramètres a_m , b_m , a_{cf} et b_{cf}

Pour l'identification du paramètre a_{xm} , il suffit de tracer l'évolution du point de contact K_{xm} pendant la première charge en fonction de l'érousement plastique. La méthode de détermination de K_{xm} est déjà décrite dans l'équation (2-66) page 78. La méthode des moindres carrés permet ensuite de déterminer a_{xm} qui est la pente de la courbe $K_{xm} - \rho$ (Figure 2-55).

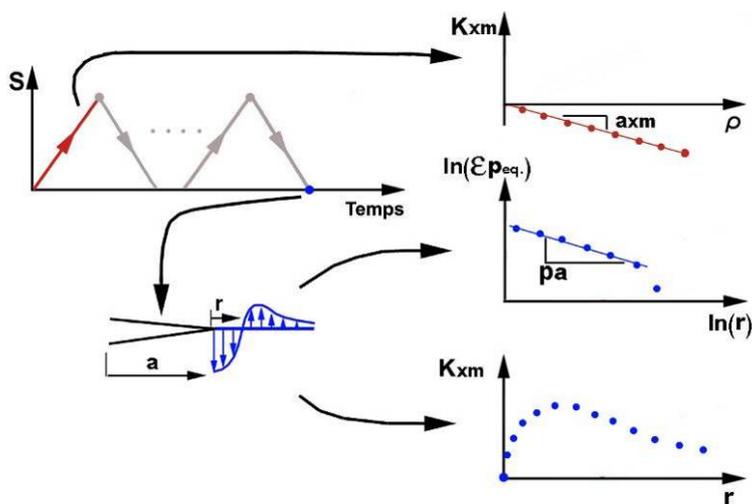


Figure 2-55. Identification des paramètres a_{xm} , p_a , k_a et k_b

L'identification de p_a se fait à partir de l'évolution de la déformation plastique équivalente en fonction de la distance à la pointe de la fissure (Figure 2-55). On calcule après décharge la déformation plastique équivalente moyenne (de $\theta = 0$ à $\theta = \pi$) en fonction de la distance r à l'extrémité de la fissure. Seuls les premiers points de la courbe obtenue sont utilisés pour les calcul de p_a .

Les deux paramètres k_a et k_b sont calculés à partir de l'évolution du point de contact en fonction de l'extension de la fissure. Le calcul du point de contact K_{xm} se fait à partir du champ de contrainte résiduelle en pointe de fissure. Les paramètres sont déterminés par une méthode de minimisation connaissant l'équation d'évolution de K_{xm} donnée par l'équation (2-75).

Le calcul Eléments Finis ainsi que la procédure d'identification des paramètres de la loi d'émoussement ont été automatisés sous Abaqus, le temps d'identification est de l'ordre de deux heures pour un comportement élastoplastique avec écrouissages non-linéaires. Les paramètres obtenus pour l'acier à roue sont les suivants :

$$a_m = 17.3 \text{MPa} \sqrt{m} / \sqrt{\mu m}$$

$$b_m = 4.6 \text{MPa} \sqrt{m}$$

$$a_f = 38.2 \text{MPa} \sqrt{m} / \sqrt{\mu m}$$

$$b_f = 5.8 \text{MPa} \sqrt{m}$$

$$a_{xm} = -1.5 \text{MPa} \sqrt{m} / \mu m$$

$$p_a = -0.00093 \text{MPa} \sqrt{m} / \mu m$$

$$k_a = -0.019 \text{MPa} \sqrt{m} / \mu m$$

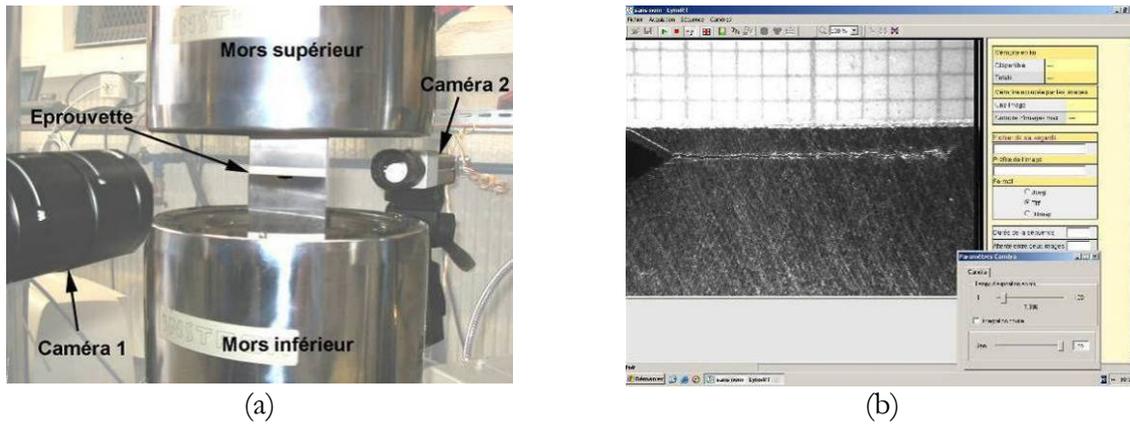
$$k_b = 0.0025 \text{MPa} \sqrt{m} / \mu m$$

2.4.3 Identification du paramètre de la loi de fissuration

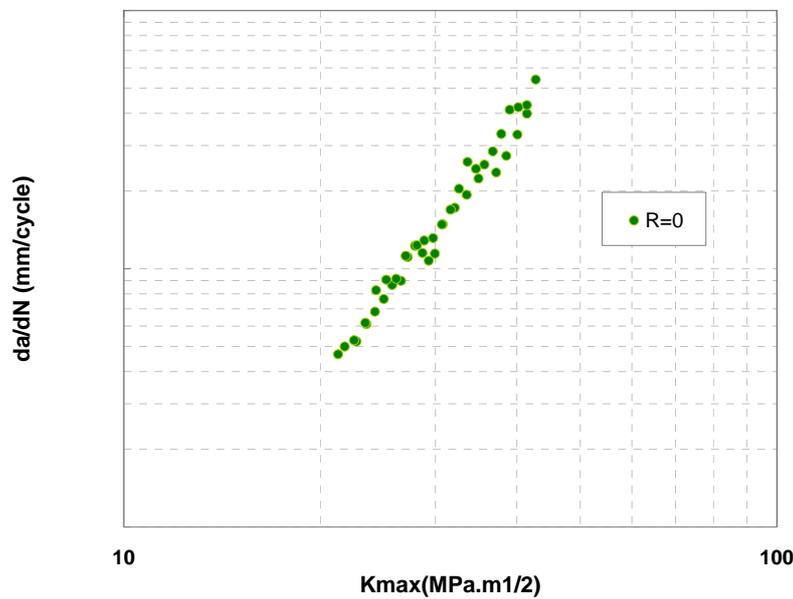
On rappelle, qu'une fois la loi d'émoussement plastique identifiée, il reste à déterminer la loi de fissuration, qui contient un unique paramètre d'ajustement α :

$$\frac{da}{dt} = \frac{\alpha}{2} \left| \frac{d\sigma}{dt} \right| \quad (2-79)$$

L'identification du paramètre α de la loi de fissuration se fait grâce à un essai de fissuration sous chargement à amplitude constante. L'essai a été réalisé sur une machine Instron 8501 ± 50 KN, le chargement appliqué est un sinus de rapport de charge $R = 0$ et une contrainte $S_{j\max} = 147 \text{MPa}$. Le plan de l'éprouvette CCT utilisée et l'expression du facteur d'intensité des contraintes correspondant sont donnés dans l'annexe A-2. Le suivi de la fissure a été effectué grâce à une caméra numérique (Figure 2-56a), sa longueur a été mesurée par imagerie après calibrage à l'aide d'un papier millimétré collé sur l'éprouvette au dessus de la fissure (Figure 2-56b). Le pas de mesure de la fissure est de 0.5 mm. A chaque pas, la longueur de la fissure est obtenue en prenant la moyenne de 4 mesures correspondant aux deux extrémités de la fissure et aux 2 faces de l'éprouvette.



La Figure 2-57 montre la courbe de propagation obtenue à partir de deux essais identiques, tracée dans un diagramme de Paris.



L'identification du paramètre α est très facile puisque ce paramètre agit seulement sur le niveau de la courbe de Paris en fatigue à amplitude constante et très peu sur sa pente (Figure 2-58). En effet, la vitesse de fissuration est supposée être directement proportionnelle à la vitesse d'érousement plastique. Ainsi lorsqu'on modifie la valeur de α , on modifie la position de la courbe de propagation dans le diagramme de Paris, mais pas sa pente. La pente de Paris est directement issue de la loi d'érousement, une bonne identification des paramètres de cette loi à partir du comportement du matériau est donc censée reproduire correctement l'exposant m de Paris. La méthode d'identification de α est la suivante : on effectue une première simulation avec un α de départ de 1, la valeur exacte est ensuite déduite du rapport entre vitesse simulée et vitesse expérimentale pour le même niveau de K_{max} .

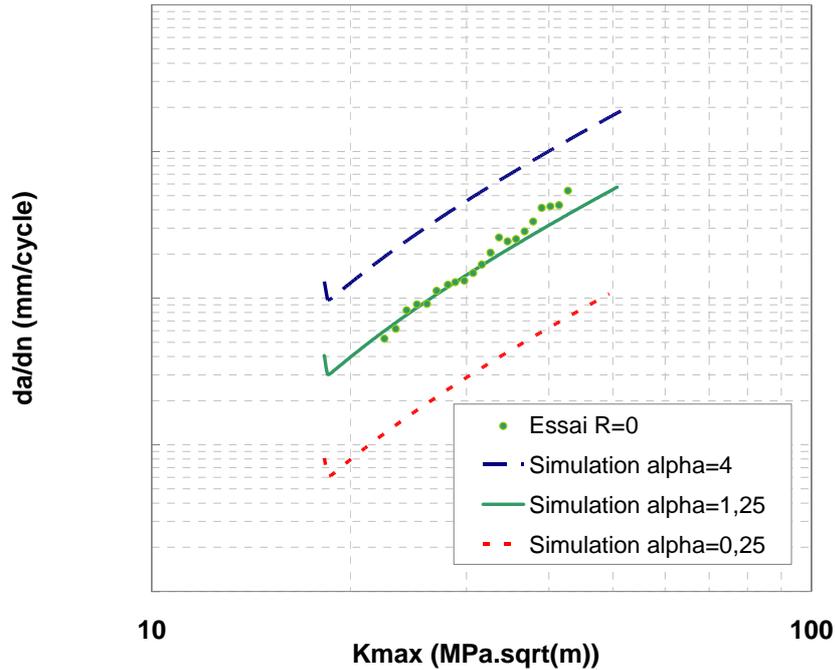


Figure 2-58. Rôle du paramètre α sur la vitesse de propagation

La diminution rapide de la vitesse de propagation observée au tout début de la courbe obtenue par le modèle est due à la variation du seuil d'ouverture de la fissure au début de sa propagation. Ce seuil est égal à zéro au début de la simulation et augmente ensuite lorsque la fissure se propage avant de se stabiliser. Cela correspond expérimentalement à la mise en place du sillage plastique. Une autre méthode de détermination de α peut être effectuée en mesurant le pas de stries au Microscope Electronique à Balayage. Le rapport entre ce pas de stries et la vitesse macroscopique de la fissure pour une longueur de fissure donnée devrait donner une valeur approchée de α (voir équation (2-25)). Les mesures de pas de stries réalisées sur le faciès de rupture de l'acier à roue n'ont pas été concluantes puisqu'il n'était pas évident de distinguer les pas de stries des lamelles de perlites

2.5 Confrontation essais calculs

Une fois les paramètres matériaux identifiés à l'aide d'un essai de traction compression sur éprouvette cylindrique et d'un essai de fissuration à amplitude constante sur éprouvette CCT, des essais de validation à amplitude variable ont été réalisés sur éprouvettes CCT. Le premier de ces essais consistait à vérifier la réponse du modèle après l'application d'une surcharge unitaire. Deux essais de propagation à amplitude constante ont été effectués pour un rapport de charge $R = 0$. Puis des surcharges ont été effectuées pour une longueur de fissure de 11.8 mm ($K = 20 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$). Les rapports de surcharge appliqués sont $S_{ys} / S_{y\text{max}} = 1.5$ pour la première éprouvette et $S_{ys} / S_{y\text{max}} = 1.8$ pour la deuxième (Figure 2-59)

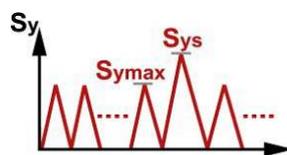


Figure 2-59. Surcharge appliquée

Les résultats des 2 essais ont été tracés dans un diagramme donnant la longueur de fissure en fonction du nombre de cycles (Figure 2-60). Les simulations numériques ont été comparées aux résultats expérimentaux et l'accord est satisfaisant.

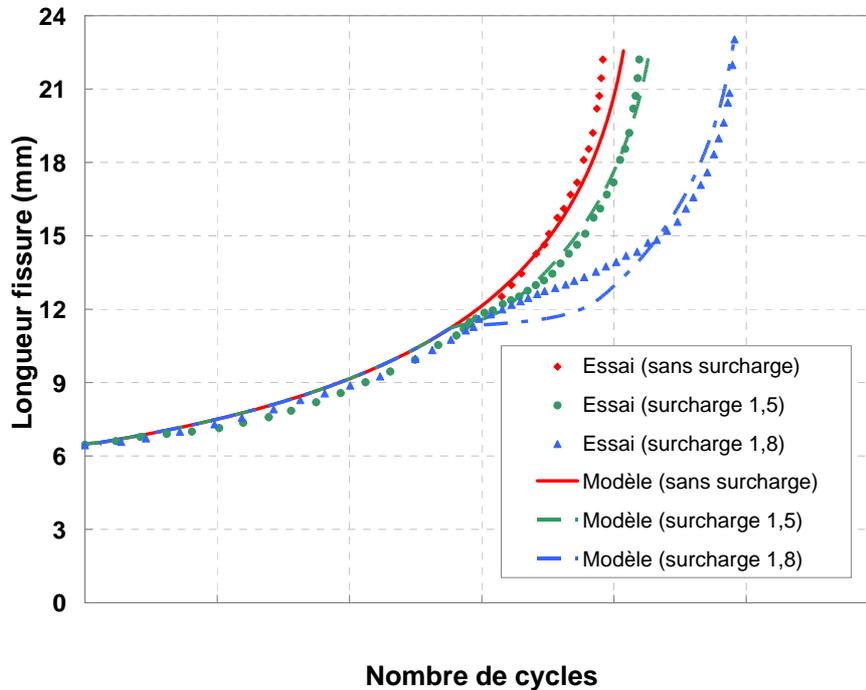


Figure 2-60. Comparaison essai-calcul pour des surcharges simples

On admet généralement que le retard après une surcharge est dû principalement au phénomène de fermeture de la fissure. La Figure 2-61 montre l'évolution du point de contact des lèvres de la fissure obtenu avec le modèle pour les 2 niveaux de surcharge appliqués. Au début de la simulation le niveau de contact est égal à zéro, il monte ensuite au fur et à mesure de la propagation pour atteindre un niveau stabilisé. Lors de l'application de la surcharge, une chute instantanée du niveau de contact est observée, qui correspond à l'émoussement de l'extrémité de la fissure dû à la surcharge et qui explique l'accélération transitoire de la fissure juste après la surcharge. Le niveau de fermeture monte ensuite pour atteindre un maximum, cette montée provoque une diminution de la partie efficace du cycle de fatigue et donc un retard de la fissuration. Quand la fissure commence à sortir de la zone plastique de surcharge, le niveau de contact commence à chuter pour rejoindre le niveau de départ.

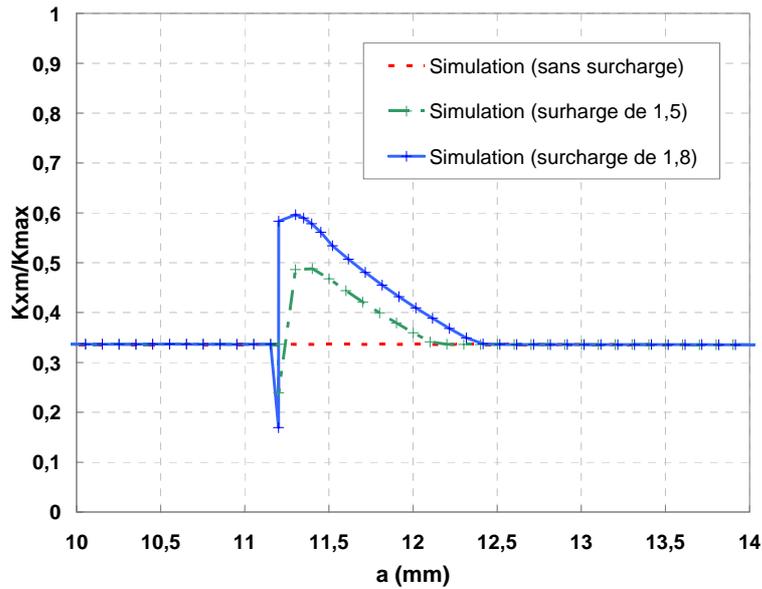


Figure 2-61. Evolution du niveau de contact calculé avec le modèle lors de l'application des surcharges

Ces mêmes observations ont été faites expérimentalement par plusieurs auteurs, la Figure 2-62 montre l'évolution du niveau d'ouverture après surcharge obtenu par exemple par [Masahiro et al. 2004].

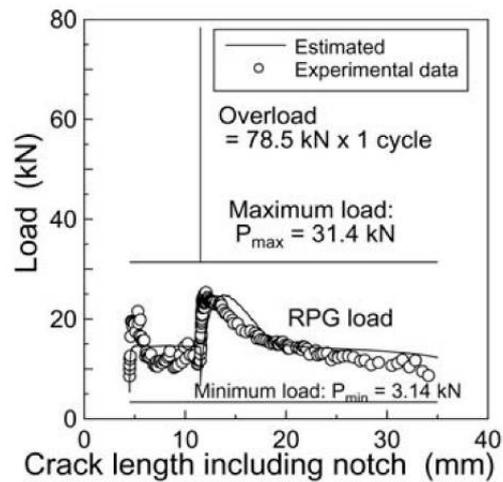


Figure 2-62. Exemple d'évolution du niveau d'ouverture après surcharge obtenu expérimentalement [Masahiro et al. 2004]

Pour comprendre exactement les mécanismes qui contrôlent l'évolution du niveau d'ouverture de la fissure, nous allons analyser des courbes d'érouissage types obtenues par le modèle après application d'une surcharge (Figure 2-63), ces courbes sont tracées dans un diagramme $K - \rho$.

Au départ, le niveau de contact K_{xm} est stable grâce à la compétition entre l'érouissage plastique qui fait chuter K_{xm} et l'extension de la fissure qui le fait monter. Dans ce régime, on passe à chaque cycle par la zone plastique cyclique puis par la zone plastique monotone. Le niveau de contact K_{xm} augmente à la fin de chaque incrément de calcul avec l'extension de la fissure da et diminue avec l'érouissage plastique $d\varrho$, quand on se trouve dans la zone plastique monotone.

Au moment de l'application de la surcharge (point 1), une extension importante de la zone plastique monotone se produit, cette extension provoque la création d'une zone plastique de surcharge en pointe de fissure et fait monter la limite supérieure de la zone plastique monotone $K_m + K_{xm}$ associée à la surcharge. Par contre, cette extension fait chuter considérablement le niveau de contact K_{xm} puisque ce dernier baisse rapidement avec l'érousement plastique (point 2).

Dans les cycles qui suivent le point 2, la limite supérieure de la zone plastique monotone n'est plus franchie à chaque montée en charge. Le point de contact ne diminue donc plus avec $d\theta$ car on ne passe plus par la zone monotone. L'extension de la fissure continue à faire chuter K_m et monter K_{xm} (voir les équations d'évolution de φ_{xm} et φ_m avec a).

Au point 3, on passe de nouveau à chaque charge par la zone plastique monotone, la fissure retrouve donc son équilibre et le niveau d'ouverture descend pour rejoindre le niveau de départ avant surcharge.

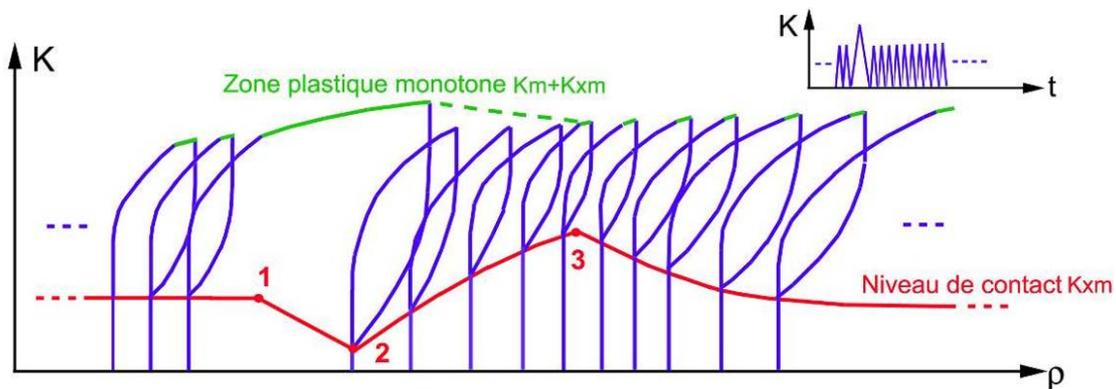


Figure 2-63. Courbes d'érousement avant et après application d'une surcharge

Nous avons ensuite réalisé des essais à blocs répétitifs afin d'étudier l'influence du nombre de surcharges dans un bloc répété sur la vitesse de propagation. Une séquence de base contenant 100 cycles de rapport de charge $R = 0$ a été jouée de trois manières différentes (Figure 2-64) : sans surcharge, 1 surcharge de rapport de surcharge de 1.5 tous les 99 cycles, 10 surcharges de 1.5 tous les 90 cycles. Lorsque les surcharges sont rapprochées, la compétition entre l'accélération transitoire après la surcharge et l'effet de retard est importante, ce qui rend ce type d'essais assez difficile à modéliser.

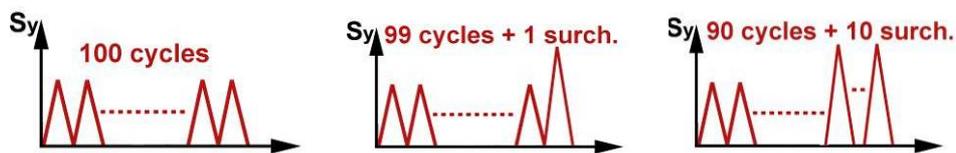


Figure 2-64. Essais réalisés pour l'étude de l'influence du nombre de surcharge dans un bloc sur la vitesse de propagation

La Figure 2-65 montre les résultats des essais ainsi que les prédictions du modèle tracés dans un diagramme de Paris. Le facteur d'intensité des contraintes K_{max} tracé correspond aux petits cycles et non à la surcharge. Les prédictions du modèle incrémental sont en bon accord avec les résultats des essais. On observe que quand le nombre de surcharges dans le bloc est faible (1+99), le ralentissement de la fissure est important. Au fur et à mesure que le nombre de surcharge augmente, le retard dans la vitesse de propagation devient moins marqué (10+99). Pour un bloc ne contenant que des surcharges (100+0), la courbe de Paris est identique à celle sans surcharge.

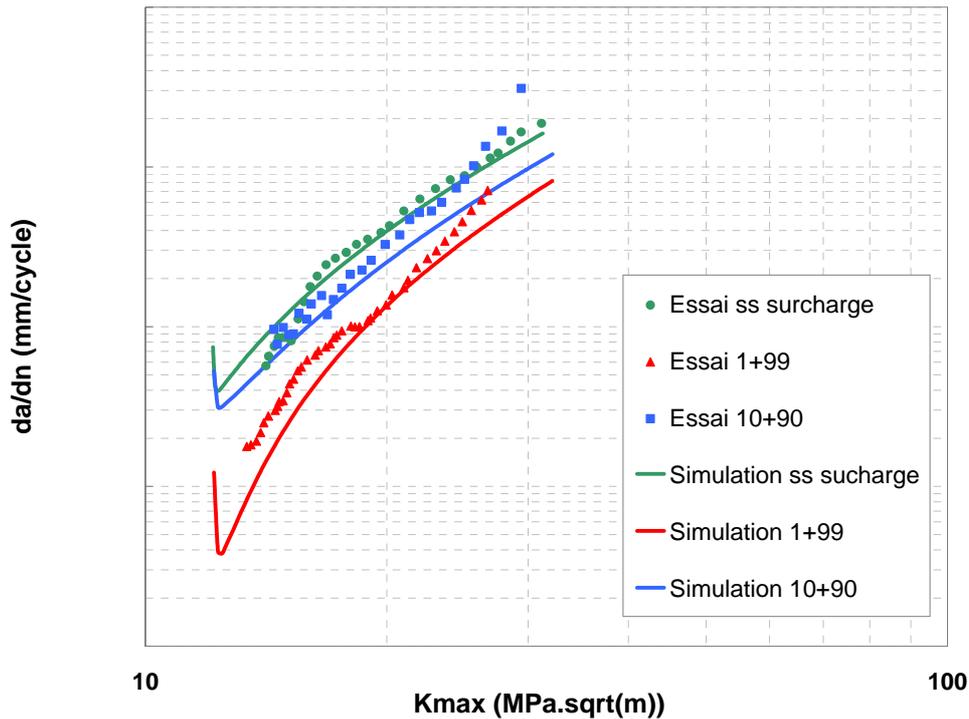


Figure 2-65. Courbes de propagation pour différents nombres de surcharge dans un bloc répété de 100 cycles

La distribution du nombre de surcharges dans une séquence a été ensuite étudiée. Une séquence de 10 000 cycles de rapport de charge $R = 0$ avec 1% de cycles de surcharge de rapport 1.5 a été répétée de 3 manières différentes (Figure 2-66) : 1 bloc de 100 surcharges suivi de 9900 cycles, 10 blocs de 10 surcharges tous les 990 cycles et finalement 100 blocs de 1 surcharges tous les 99 cycles.

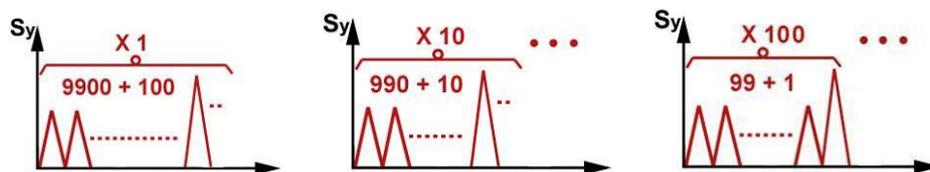


Figure 2-66. Essais réalisés pour l'étude de la distribution des surcharges dans un bloc sur la vitesse de propagation

Les résultats des 3 essais sont donnés sur la Figure 2-67 dans un diagramme de Paris. Ici aussi le facteur d'intensité des contraintes K_{max} tracé correspond aux petits cycles et non à la surcharge. Les courbes de Paris des trois configurations d'essais sont proches. Puisque les blocs de surcharges sont proches, la fissure subit une séquence de surcharges avant qu'elle ne soit sortie de la zone plastique de la séquence d'avant. Le niveau d'ouverture des essais avec surcharges est plus élevé que celui de l'essai sans surcharge ce qui provoque le ralentissement de la fissure. Par contre ce niveau d'ouverture semble similaire dans les 3 configurations avec surcharge ce qui explique des vitesses de propagation proches.

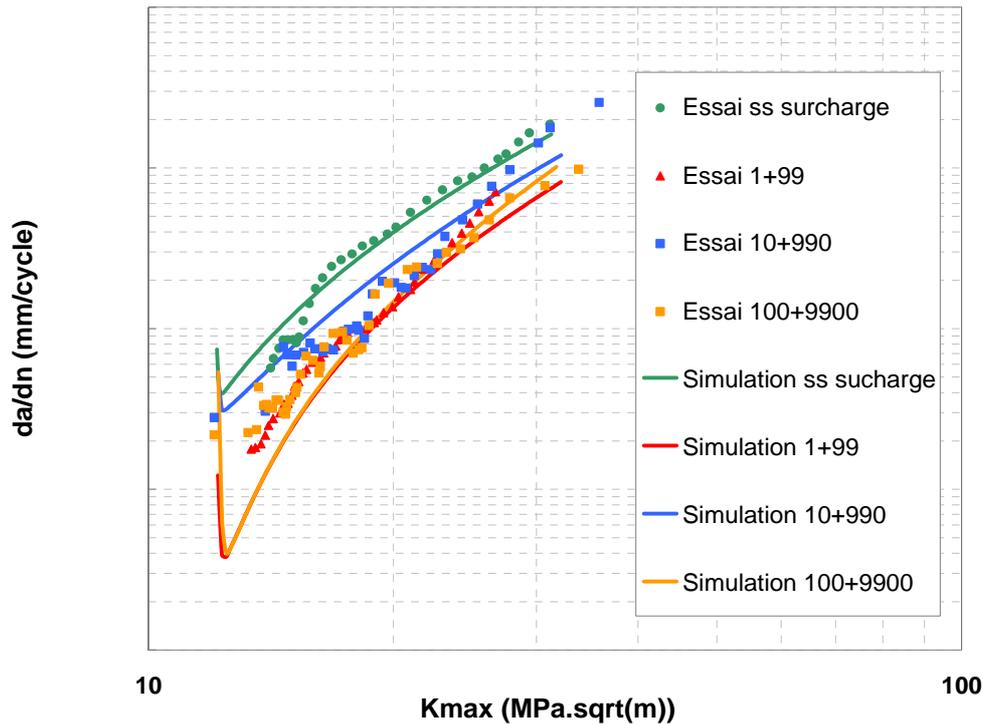


Figure 2-67. Courbes de propagation pour différentes distributions de surcharge dans un bloc répété de 10000 cycles

2.6 Etude de sensibilité

Le but de l'étude de sensibilité est de comprendre le lien entre le comportement élastoplastique du matériau et la vitesse de propagation de la fissure. Le comportement étudié est élastoplastique avec un seul écrouissage cinématique non linéaire. En premier lieu nous avons étudié l'influence du taux d'écrouissage pour une limite d'élasticité donnée sur le comportement de la fissure. Les paramètres matériels des quatre « matériaux » fictifs testés sont donnés dans le Tableau 2-3 et la Figure 2-68. La plage de variation de l'amplitude d'écrouissage étudiée dans les différents cas est entre 50 et 300 MPa.

E	ν	R0	Calcul a		Calcul b		Calcul c		Calcul d	
			C_a	γ_a	C_b	γ_b	C_c	γ_c	C_d	γ_d
190000	0.3	210	30000	100	20000	100	10000	100	5000	100

Tableau 2-3. Différents matériaux testés avec différentes amplitudes d'écrouissage

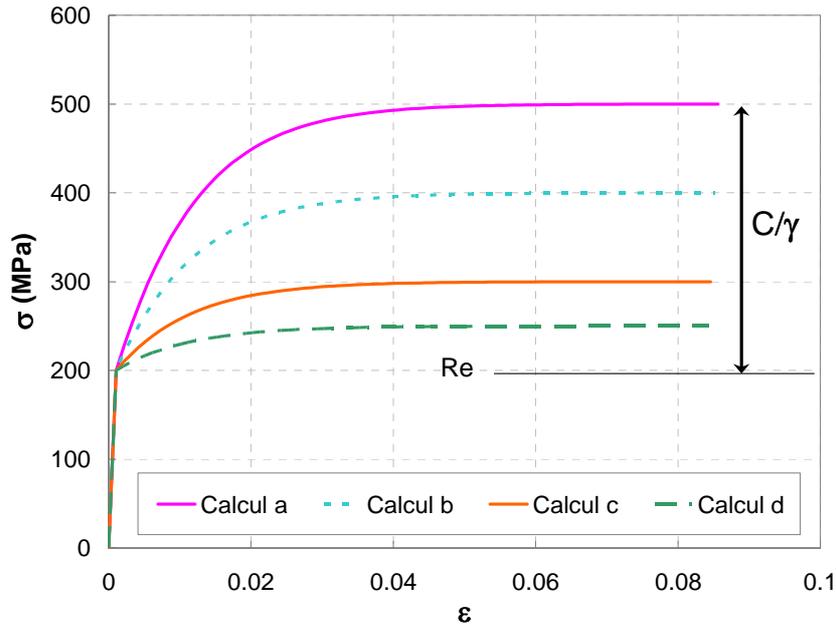


Figure 2-68. Courbes de traction monotone pour les différentes amplitudes d'écroissage testées

La première étape a consisté à identifier les paramètres de la loi d'émoussement des 4 comportements. À titre d'exemple, la Figure 2-69 montre l'évolution de l'émoussement plastique pendant une décharge en fonction du facteur d'intensité des contraintes appliqué, calculé par éléments finis pour ces quatre cas. On remarque que ces courbes se positionnent dans le même ordre que celles de la Figure 2-68. Plus l'amplitude de l'écroissage est élevée, plus le facteur d'intensité des contraintes est élevé pour un même émoussement plastique.

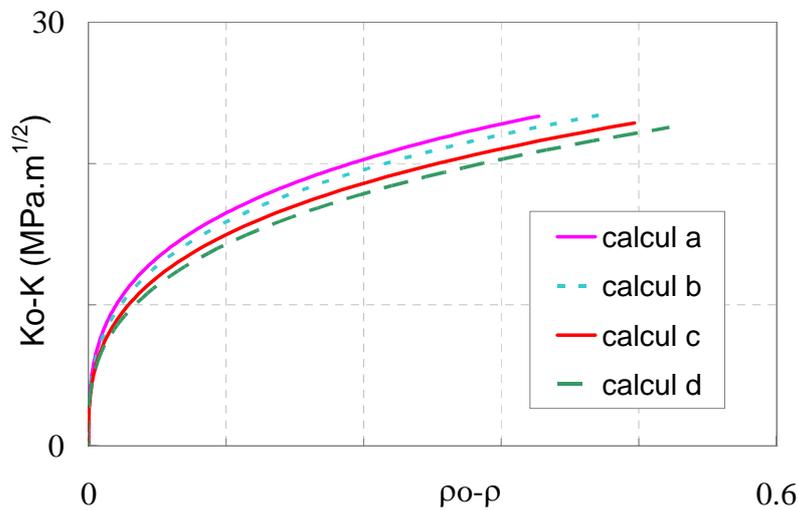


Figure 2-69. Courbes de décharge cyclique pour les différents comportements étudiés

Une fois les paramètres de la loi d'émoussement connus, nous avons réalisé des calculs de propagation avec le modèle incrémental. Les calculs ont été effectués sur une éprouvette CCT pour un rapport de charge $R = 0$. Le paramètre α de la loi de fissuration est fixé à 1 dans tous les cas testés. La Figure 2-70 montre les courbes de Paris obtenues pour les 4 comportements étudiés, on remarque que la pente ainsi que le niveau de la courbe dépendent sensiblement du taux d'écroissage.

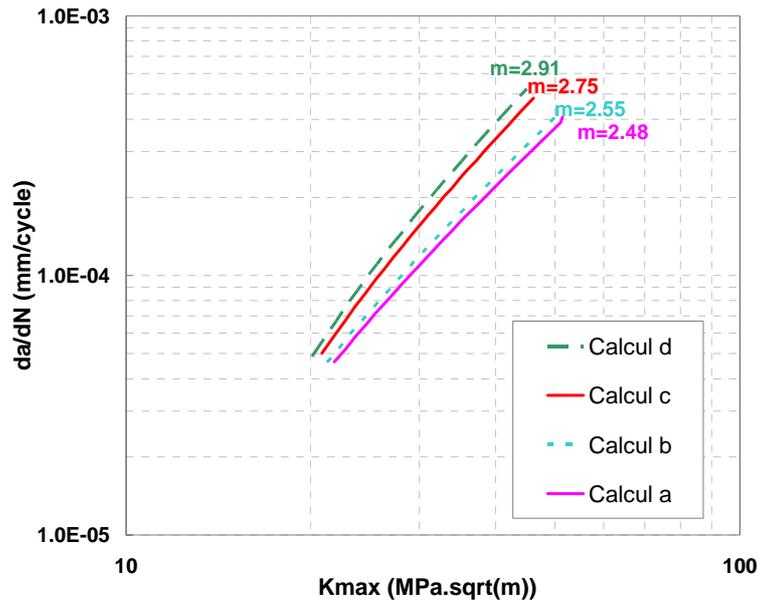


Figure 2-70. Courbes de Paris des différentes amplitudes d'érouissage testées

La Figure 2-71 montre l'évolution de la vitesse de propagation calculée à l'aide du modèle avec les divers jeux de paramètres pour un facteur d'intensité des contraintes $K_{max} = 20MPa\sqrt{m}$. Pour une limite d'élasticité donnée, la vitesse de propagation diminue quand le taux d'érouissage augmente. Cette évolution a été comparée avec le modèle proposé par [McClintock 1967] pour un matériau élastique parfaitement plastique. Comme l'exposant de ce modèle est toujours de 2 tandis que le notre est de 2.5 la comparaison a été effectuée pour un facteur d'intensité des contraintes donné de $K_{max} = 20MPa\sqrt{m}$:

$$\frac{da}{dN} = \frac{\Delta CTOD}{dN} = \beta \frac{\Delta K^2}{2R_0 E} \quad (2-80)$$

Les valeurs de ΔK , et E ont été prises identiques dans le modèle de McClintock et dans nos simulations. La valeur de R_0 utilisée correspond à la contrainte maximale R_m des 4 comportements étudiés soit : 250, 300, 400 et 500 MPa. La valeur de β a été ajustée à 35 de sorte que les vitesses de fissuration obtenues par les deux modèles puissent être comparées sur un même graphe. La décroissance de la vitesse de fissuration avec R_0 est plus rapide dans le modèle de [McClintock 1967] que ce que nous prévoyons avec notre modèle. Mais il est vrai que le comportement étudié dans notre cas est loin d'un comportement élastique parfaitement plastique.

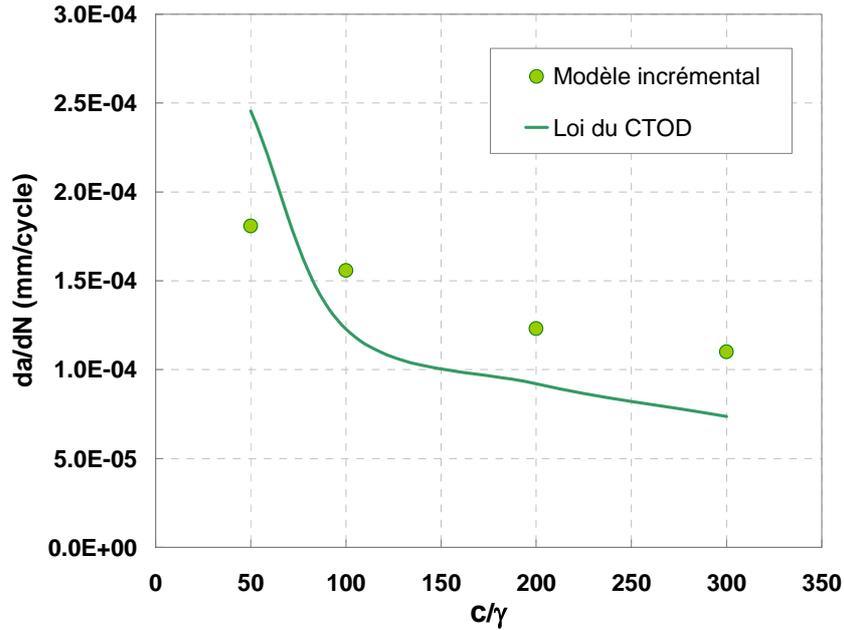


Figure 2-71. Evolution de la vitesse de propagation pour $K_{\max} = 20 \text{MPa}\sqrt{m}$ en fonction du taux d'écroissage

Nous avons ensuite tracé l'évolution de l'exposant m de la loi de Paris en fonction de l'amplitude d'écroissage (Figure 2-72). L'exposant m est supérieur à 2 dans tous les cas testés. De façon assez surprenante, plus l'amplitude d'écroissage augmente et plus l'exposant m diminue.

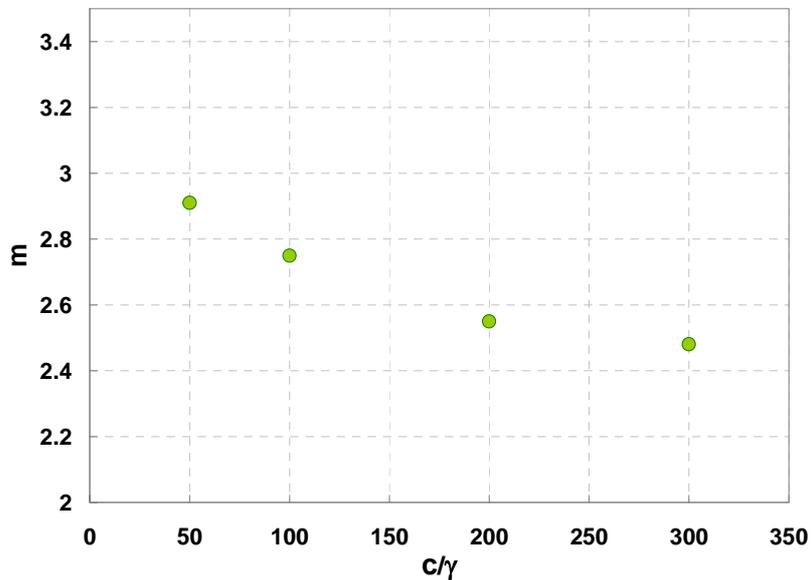


Figure 2-72. Evolution du coefficient m de la loi de Paris en fonction du taux d'écroissage

Le deuxième calcul a consisté à étudier l'influence de la vitesse de l'écroissage pour une même contrainte maximale R_m et une même limite d'élasticité R_0 (Figure 2-73). Les jeux de paramètres matériau employés pour cette étude sont donnés dans le Tableau 2-4.

E	ν	R0	Calcul e		Calcul f		Calcul a		Calcul g	
			C_e	γ_e	C_f	γ_f	C_a	γ_a	C_g	γ_g
190000	0.3	210	150000	500	60000	200	30000	100	15000	50

Tableau 2-4. Différents jeux de paramètres matériaux employés pour tester l'effet de la vitesse d'écrouissage

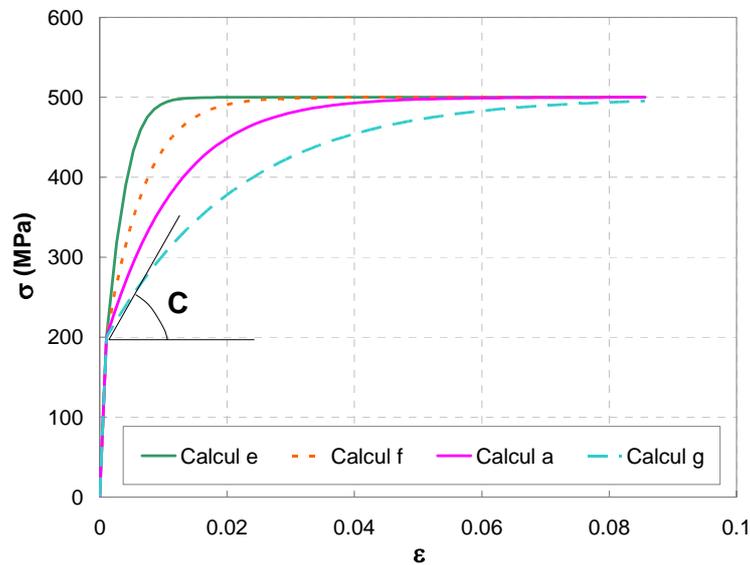


Figure 2-73. Courbes de traction monotone correspondant aux différents jeux de paramètres matériaux testés

L'identification des paramètres du modèle incrémental pour ces jeux de paramètres nous a permis d'effectuer des calculs de propagation en fatigue à amplitude constante. Les calculs ont été effectués sur une éprouvette CCT pour un rapport de charge $R = 0$ et un paramètre α de la loi de fissuration égal à 1. On remarque sur la Figure 2-74 que l'influence de la vitesse d'écrouissage sur les courbes de Paris est très peu marquée.

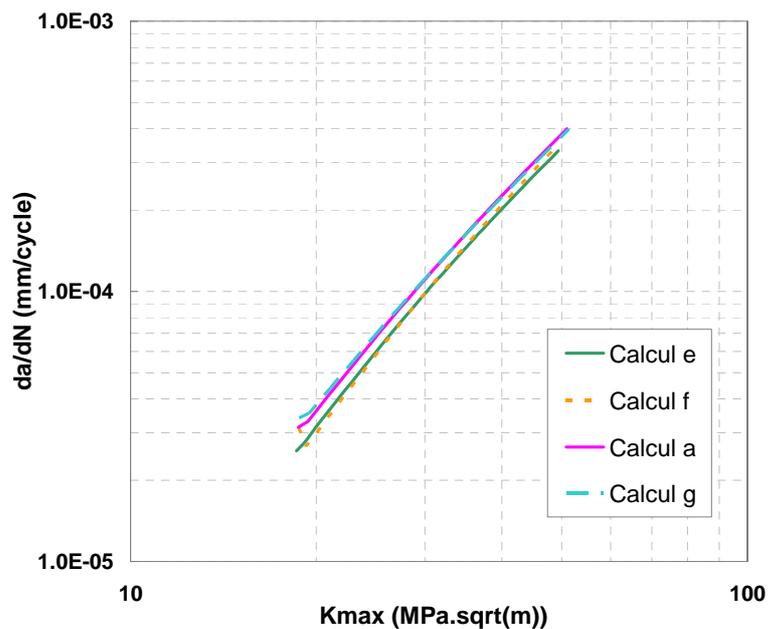


Figure 2-74. Courbes de Paris obtenues par le modèle pour les différentes vitesses d'écrouissage testées

2.7 Bilan du Chapitre 2

- Une méthode, fondée sur une hypothèse de projection du champ de déplacement, a été proposée qui permet d'exploiter des calculs par éléments finis à l'échelle locale et de les transférer à une échelle globale. Cette méthode a l'avantage de pouvoir tenir compte assez finement du détail de la déformation élastoplastique en pointe de fissure, tout en limitant le nombre de degrés de liberté du problème et donc les temps de calcul. En outre, comme la méthode exploite les champs de déplacement et non pas des résultats locaux, sa sensibilité au maillage est assez faible.
- Les calculs par éléments finis permettent ainsi de « générer » des courbes d'évolution de l'érouissage plastique (qui mesure le développement de la plasticité en pointe de fissure) en fonction du chargement appliqué.
- L'étude de l'évolution de l'érouissage plastique en fonction du chargement appliqué nous a permis d'établir les équations d'un modèle incrémental empirique à l'échelle globale. Le problème de fissuration a été transformé en un problème de plasticité « classique », avec surfaces seuil de plasticité et variables internes (dimension et taille des domaines d'élasticité). Ainsi, les calculs par éléments finis permettent-ils de passer de la loi de comportement élasto-plastique cyclique du matériau à la loi de comportement élasto-plastique cyclique de la structure fissurée (ou loi d'érouissage).
- On fait par ailleurs l'hypothèse que la vitesse de fissuration est proportionnelle à la vitesse d'érouissage plastique.
- Les paramètres du modèle incrémental de propagation ont été déterminés pour l'acier à roue grâce à deux essais de base : 1 essai de traction-compression cyclique à déformation imposée sur éprouvette cylindrique et un essai de fissuration à amplitude constante sur éprouvette CCT.
- Les essais de fissuration par blocs réalisés sur éprouvettes CCT ont permis de valider le modèle en 2D pour des chargements d'amplitude variable.
- Une étude de sensibilité a permis de comprendre le lien entre le comportement élastoplastique du matériau et la vitesse de propagation simulée. La vitesse de propagation est sensible à l'amplitude d'érouissage par contre elle est peu sensible à la vitesse d'érouissage.
- Dans le prochain chapitre on verra comment ce modèle peut être adapté afin d'intégrer la biaxialité du chargement et la compression...

Chapitre 3 Enrichissement du modèle

3.1	Effet des phases de fermeture de la fissure	111
3.1.1	Position du problème	111
3.1.2	Bibliographie sur l'effet des phases de compression sur la fissuration.	112
3.1.3	Essais réalisés	114
3.1.4	Etude et modélisation de l'effet des phases de fermeture de la fissure.	117
3.1.4.1	Etude de l'effet des phases de fermeture par Eléments Finis	117
3.1.4.2	Modélisation de l'effet des phases de fermeture.	123
3.1.4.3	Confrontation des simulations et des essais.	125
3.2	Etude de l'effet de la biaxialité du chargement.	126
3.2.1	Problème	126
3.2.2	Biaxialité et fissuration par fatigue, étude bibliographique.	127
3.2.2.1	Définitions.	127
3.2.2.2	Influence de T sur la taille de la zone plastique	127
3.2.2.3	Influence de T sur le chemin de propagation	128
3.2.2.4	Influence de T sur la vitesse de propagation	129
3.2.2.5	Evolution de la contrainte T dans quelques éprouvettes	134
3.2.2.6	Modèles tenant compte de T	134
3.2.3	Essais réalisés : tentatives, échecs et succès	135
3.2.4	Etude par Eléments Finis de l'effet de la contrainte T	140
3.2.4.1	Effet de la longueur de la fissure sur T	140
3.2.4.2	Sensibilité du seuil d'émoussement à T	144
3.2.5	Identification du modèle	154
3.2.6	Confrontations essais/simulations	157
3.3	Bilan du Chapitre 3	160

Nous présentons dans ce chapitre les évolutions que nous avons apportées au modèle incrémental pour pouvoir l'appliquer au problème de la fissuration des roues. Les deux évolutions principales sont la modélisation du comportement de la fissure lors des phases de compression et la modélisation de l'effet de la biaxialité du chargement. Pour chacun de ces problèmes, une étude préalable a été conduite afin de déterminer quelles sont les hypothèses principales qui peuvent être faites. Dans un second temps un modèle a été proposé puis intégré à l'outil de simulation. Comme nous l'avons vu au premier chapitre de ce rapport, une fissure de fatigue qui se développe dans une toile de roue est soumise à une sollicitation de traction-compression alternée. Le niveau de contrainte de compression appliqué est généralement plus élevé que celui atteint en traction. Le fait de négliger, dans le modèle, l'effet des phases durant lesquelles la fissure est fermée conduit à surestimer la durée de vie en propagation, ce qui n'est pas conservatif. Nous présentons les essais de fissuration qui ont été réalisés sur éprouvettes CCT afin d'étudier l'effet de ces phases de compression sur la vitesse de fissuration par fatigue. Nous présentons ensuite la démarche qui a permis d'étudier l'effet des phases de compression en s'appuyant sur les calculs par Eléments Finis. Puis nous présentons les équations d'évolution retenues ainsi que les confrontations avec les essais. Dans la deuxième partie de ce chapitre nous abordons l'effet de la biaxialité du chargement. L'existence d'un effet de la biaxialité du chargement sur la fissuration par fatigue en mode I a été démontrée par plusieurs auteurs, bien que les résultats expérimentaux semblent parfois contradictoires. Par contre, les modèles intégrant cet effet sont assez rares. Le caractère biaxial de la sollicitation dans la toile de roue impose donc d'étudier plus en détail le rôle de la biaxialité du chargement. Nous balayons dans un premier temps les travaux antérieurs réalisés sur ce thème, puis nous présentons deux types d'essais réalisés (éprouvettes cruciformes, éprouvettes CT) afin de mettre en évidence cet effet de biaxialité du chargement dans le cas de l'acier à roue. Nous abordons à la fin la modélisation de cet effet de biaxialité, à travers la contrainte T , et son intégration dans le modèle incrémental. Un bilan sera présenté à la fin du chapitre.

3.1 Effet des phases de fermeture de la fissure

3.1.1 Position du problème

Les niveaux de contrainte de compression relevés au cours d'un tour de roue au niveau de la toile sont généralement bien supérieurs aux niveaux atteints en traction, le terme de cisaillement restant négligeable. La compression se produit au moment où la fissure se trouve entre l'axe de l'essieu, supportant le poids de la voiture, et le rail. Les toiles ondulées travaillent majoritairement en flexion, le niveau de compression atteint dépend donc de la position supposée de la fissure (face interne ou face externe de la roue). La Figure 3-1 montre l'évolution de la contrainte radiale relevée in-situ sur chacune des deux faces d'une toile ondulée. Le train était alors chargé par des blocs d'acier de 60 tonnes et circulait en alignement à 120 Km/h. On note que la face interne est sollicitée majoritairement en traction tandis que la face externe travaille plutôt en compression.

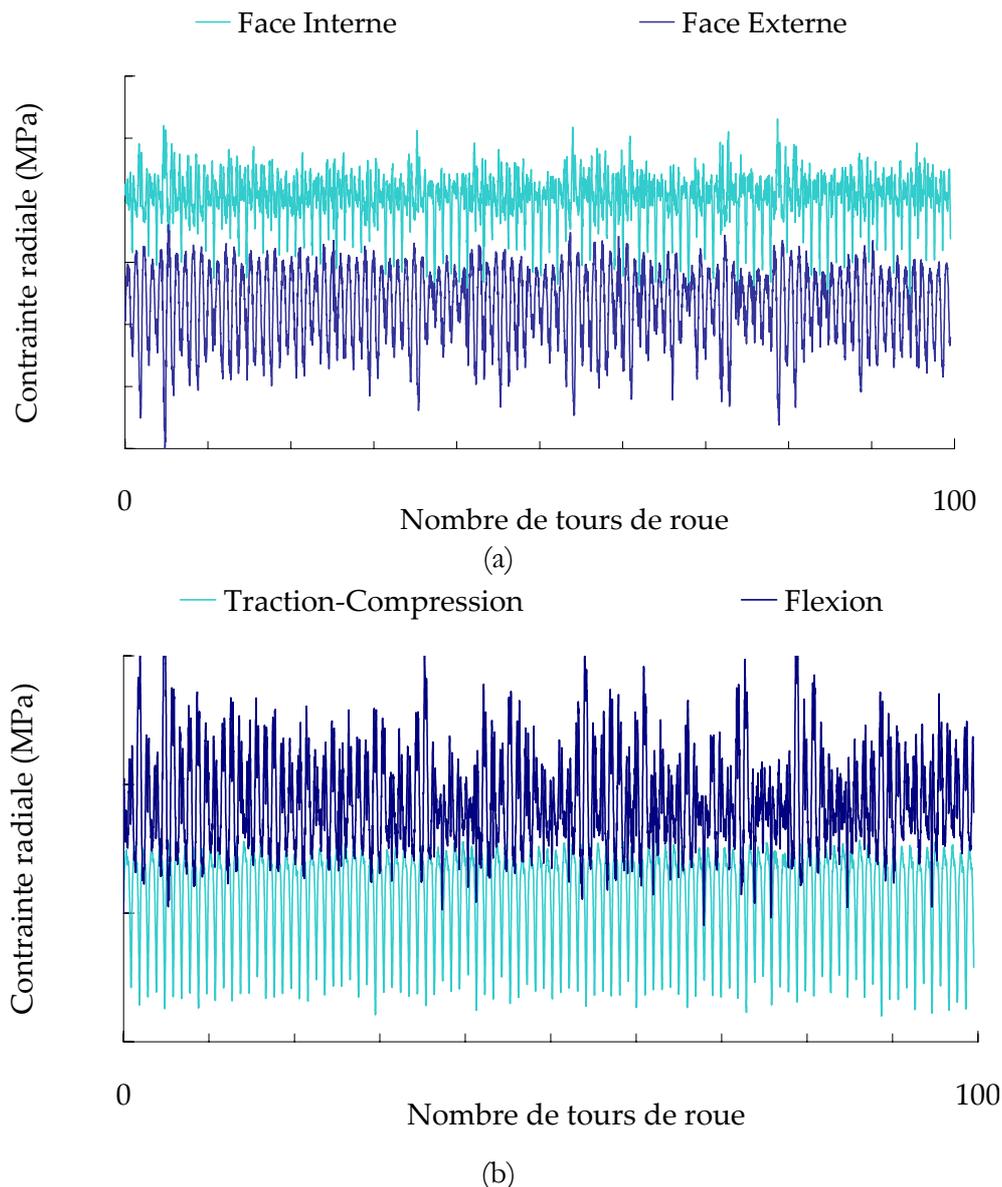


Figure 3-1. (a) Evolution de la contrainte radiale relevée in-situ sur quelques tours de roue de part et d'autre d'une toile de roue de train lors de la circulation en alignement à 120 km/h du train. Le wagon instrumenté était chargé par des blocs d'acier de 60 tonnes. (b) Décomposition en une composante de traction-compression homogène dans l'épaisseur et une contrainte de flexion selon l'épaisseur de la toile

3.1.2 Bibliographie sur l'effet des phases de compression sur la fissuration.

La part du cycle de fatigue pendant laquelle la fissure est sollicitée en compression a un effet sur la vitesse de fissuration par fatigue. Comment expliquer ceci, si la fissure, une fois fermée, ne joue plus le rôle de concentrateur des contraintes ? La réponse à cette question est double.

La première raison est que la fissure n'est pas toujours fermée quand elle est soumise à de la compression. En effet, quand le niveau de chargement est élevé, l'émoussement en pointe de fissure est conséquent et la fissure ne se referme pas à contrainte nulle, il devient nécessaire de comprimer la pièce pour refermer la fissure. Ainsi, une fraction de la partie compressive du cycle peut être efficace et faire avancer la fissure. La Figure 3-2 montre l'évolution du niveau

d'ouverture d'une fissure obtenue par le modèle de [Newman 1981] en fonction du rapport de charge et de la contrainte maximale appliquée. On observe que le niveau d'ouverture de la fissure diminue avec le rapport de charge tandis que la partie efficace du cycle augmente. Pour un même rapport de charge appliqué, le niveau d'ouverture décroît quand le chargement maximal $S_{y,max}$ augmente par rapport à la limite d'élasticité R_0 . Ce niveau d'ouverture peut même devenir négatif pour les chargements élevés du fait d'un émoussement conséquent en pointe de fissure. Le terme de « compression » seul n'a donc pas de sens en fissuration. Ce qui est important, c'est la position du point de contact, et la part du cycle de fatigue se trouvant en dessous de ce point de contact. Ce point de contact peut être obtenu pour des contraintes macroscopiques appliquées positives ou négatives.

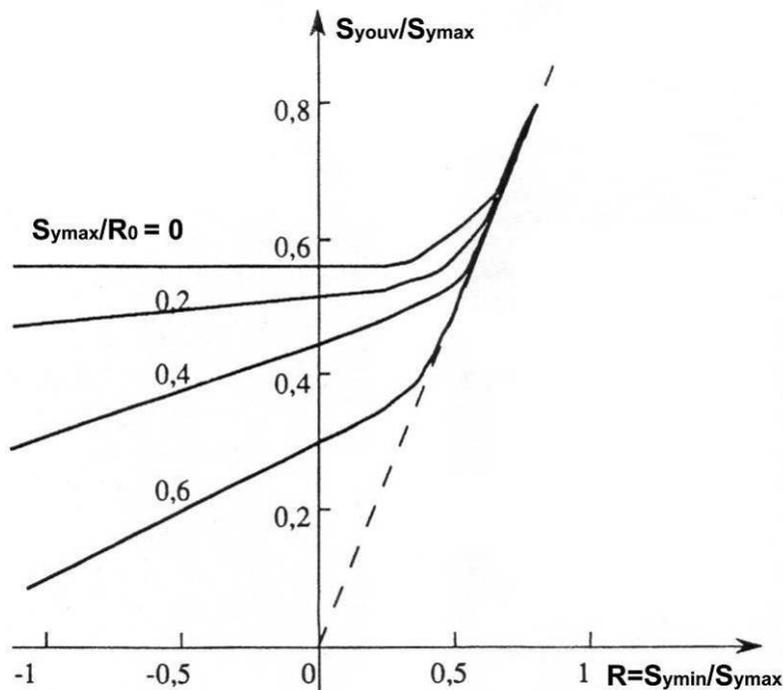


Figure 3-2. Evolution du niveau d'ouverture de la fissure en fonction du rapport de charge appliqué et de la contrainte maximale [Newman 1981]. Résultats issus de calculs par éléments finis

La deuxième raison est que de la déformation plastique en retour peut se produire en dessous du point de contact à l'intérieur de la zone plastique cyclique de la fissure. La position du domaine d'élasticité de cette zone se déplace donc vers le bas notamment si le matériau présente un fort écrouissage cinématique. Lors de la recharge, cela se traduit par une diminution du seuil d'écoulement plastique en traction et donc un émoussement plastique lors de la phase d'ouverture plus importante. La Figure 3-3a montre ainsi un exemple d'effet d'une sous-charge unitaire sur la propagation d'une fissure de fatigue. Immédiatement après l'application de la sous-charge, le pas de strie observé sur la surface de rupture est plus large, puisque ce dernier est directement proportionnel à l'amplitude de l'émoussement plastique. La Figure 3-3b montre la vitesse de propagation après une surcharge puis après une surcharge suivie d'une sous-charge. Le retard après la surcharge est quasiment annulé si une sous-charge est appliquée juste après.

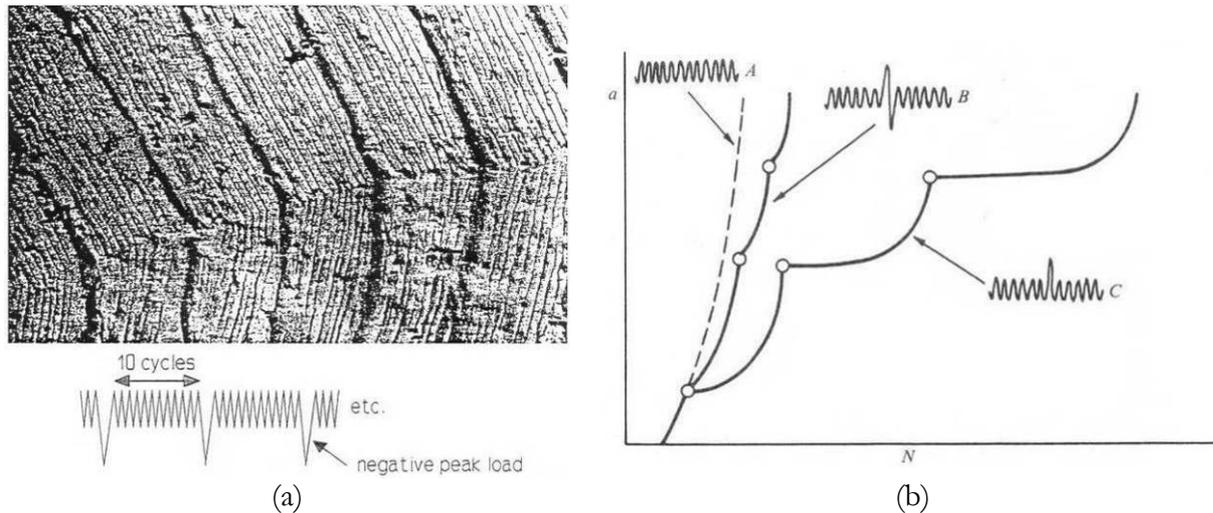


Figure 3-3. En (a) faciès de rupture d'une fissure soumises à des souscharges et en (b) effet d'une surcharge en compression [Suresh 1991]

En négligeant les parties compressives des cycles de fatigue, l'erreur commise sur la durée de vie de la pièce peut ainsi aller du simple au double. La Figure 3-4 montre des courbes de propagation obtenue par [Gros 1996] sur l'acier des essieux-axes ferroviaires. Le chargement consistait à répéter la même séquence temporelle traitée de deux manières différentes. L'une avec un rapport de charge $R=0$ et l'autre avec $R=-1$. On remarque que la durée de vie obtenue sans les phases de compression est égale au double de celle obtenue avec les phases de compression.

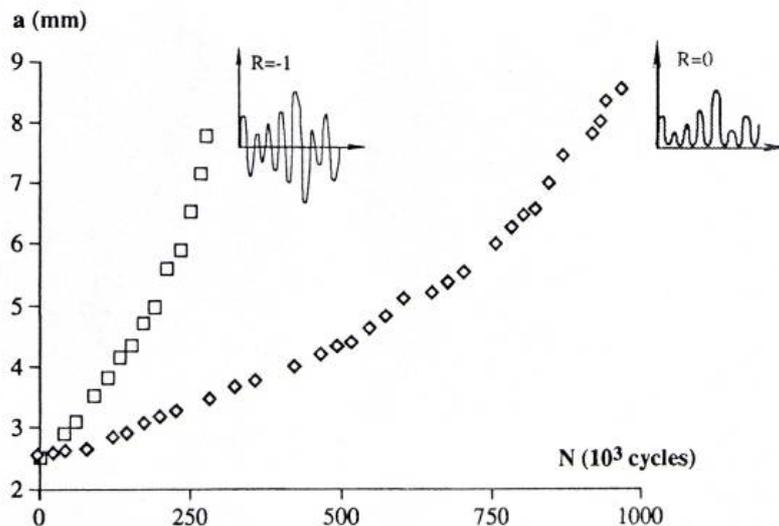


Figure 3-4. Effet de la compression en fatigue aléatoire sur la vitesse de propagation [Gros 1996]

3.1.3 Essais réalisés

Les essais de caractérisation de l'effet de la compression sur la fissuration par fatigue ont été réalisés sur des éprouvettes CCT. Le plan de l'éprouvette ainsi que les expressions de calcul du facteur d'intensité des contraintes utilisées sont données en annexe A-2. La machine d'essai est une Instron 8501 ± 50 kN, le chargement appliqué est sinusoïdal. La contrainte maximale est fixée pour tous les essais ($S_{y_{max}} = 147 \text{ MPa}$) tandis que la valeur de la contrainte minimale du cycle varie d'un essai à l'autre (Tableau 3-1).

Nombre d'essais	2	1	2	2	1	1	1	1	2
$S_{y_{max}}$ (MPa)	147	147	147	147	147	147	147	147	147
$S_{y_{min}}$ (MPa)	58.8	29.4	0	-50	-73.5	-100	-125	-132.3	-150
R	0.40	0.20	0.00	-0.34	-0.50	-0.68	-0.85	-0.90	-1.02

Tableau 3-1. Essais de fissurations réalisés pour différents rapports de charge

Le suivi de la fissure a été effectué grâce à l'analyse d'images acquises à l'aide d'une caméra numérique. Le pas de mesure de la fissure est de 0.5 mm, la longueur de la fissure est la moyenne de 4 mesures, correspondant aux deux extrémités de la fissure et aux 2 faces de l'éprouvette. Les résultats d'essais sont tracés, sur la Figure 3-5, dans un diagramme de Paris $da/dN = f(K_{max})$. Les courbes de propagation obtenues sont parallèles et le coefficient $m = 3.5$ de la loi de Paris a été déduit en prenant la moyenne des pentes des différentes courbes. Le coefficient C de Paris dépend alors du rapport de charge utilisé ; quand le rapport de charge diminue la vitesse de propagation ainsi que le coefficient C augmentent. La vitesse de fissuration mesurée est typiquement multipliée par un facteur 2.5 lorsque le rapport de charge R passe de zéro à -1.

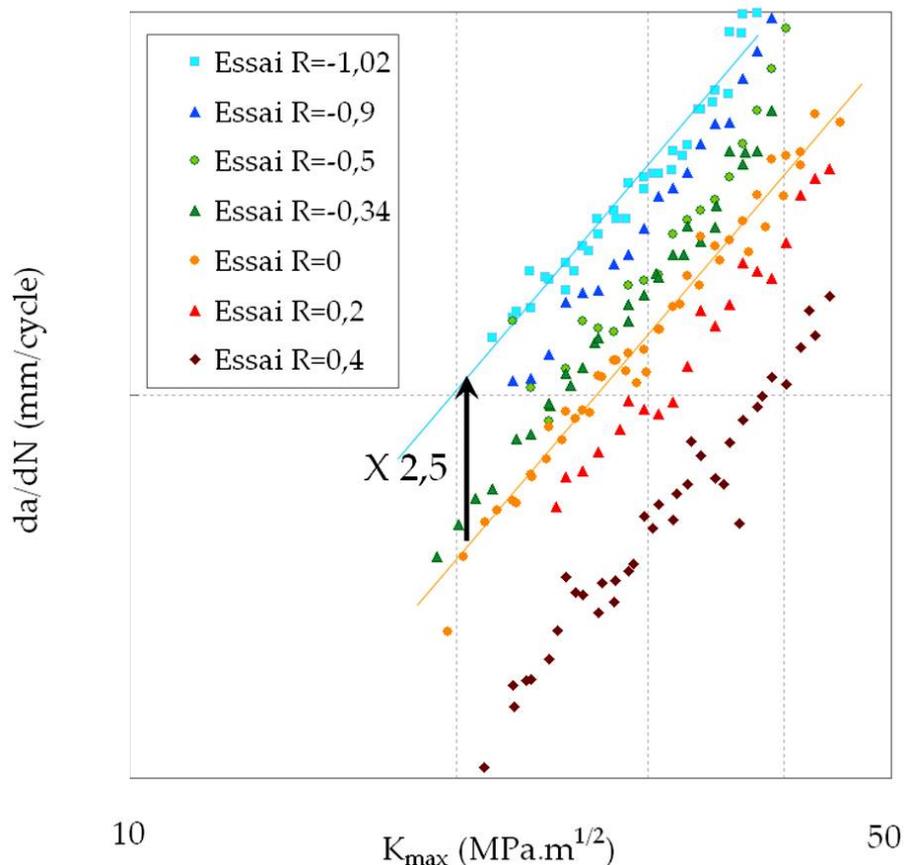


Figure 3-5. Courbes de Paris des différents rapports de charge en fonction de K_{max}

La variation de la vitesse de propagation en fonction du rapport de charge est attribuée, d'après plusieurs auteurs, à la variation du niveau « d'ouverture » de la fissure avec le rapport de charge R . En traçant les résultats d'essai dans un diagramme $da/dN = f(\Delta K_{eff})$ on obtient des courbes de Paris identiques pour les différents rapports de charge R . Pour déterminer les niveaux « d'ouverture » K_{ouv} correspondant aux différents rapports de charge, on fait l'hypothèse que

$K_{ouv} \leq K_{min}$ quand R est élevé. La fissure reste donc tout le temps ouverte pour $R = 0.4$, ce qui donne pour ΔK_{eff} :

$$\Delta K_{eff}(R = 0.4) = K_{max} - K_{ouv} = K_{max} - K_{kmin} \quad (3-1)$$

Dans le cas général, la relation de Paris s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{da}{dN} = C.K_{max}^m = C_0.\Delta K_{eff}^m = C_0.(K_{max} - K_{ouv})^m = C_0.\left(1 - \frac{K_{ouv}}{K_{max}}\right)^m .K_{max}^m \quad (3-2)$$

C_0 étant le coefficient de la loi de Paris dite « intrinsèque », c'est-à-dire tracée dans un diagramme $da / dN = f(\Delta K_{eff} = K_{max} - K_{ouv})$. L'équation (3-2) nous permet alors d'écrire que :

$$C = C_0.\left(1 - \frac{K_{ouv}}{K_{max}}\right)^m \quad (3-3)$$

On détermine C_0 à partir de l'essai réalisé à $R = 0.4$:

$$C_0 = \frac{C_{(R=0,4)}}{\left(1 - \frac{K_{min}}{K_{max}}\right)^m} = \frac{2,85.10^{-10}}{(1-0.4)^{3.5}} = 1,7.10^{-9} \text{ mm / cycle} \quad (3-4)$$

Une fois C_0 connue, le niveau « d'ouverture » K_{ouv} peut être déduit la relation (3-3) pour tous les rapports de charge connaissant le coefficient C correspondant :

$$\frac{K_{ouv}}{K_{max}} = 1 - \left(\frac{C}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}} \quad (3-5)$$

L'évolution du niveau « d'ouverture », ainsi calculée, avec le rapport de charge R est donnée dans la Figure 3-6. Cette évolution est différente de celle proposée par l'ASTM qui néglige le phénomène de fermeture. Pour l'ASTM, le niveau d'ouverture K_{ouv} est égal à K_{min} pour les rapports de charge positifs et il est nul quand le rapport de charge est négatif. On remarque que le niveau « d'ouverture » obtenu expérimentalement est négatif lorsque le rapport de charge devient inférieur à -0.5. Ainsi, une fraction du chargement de compression est efficace et contribue à la propagation de la fissure.

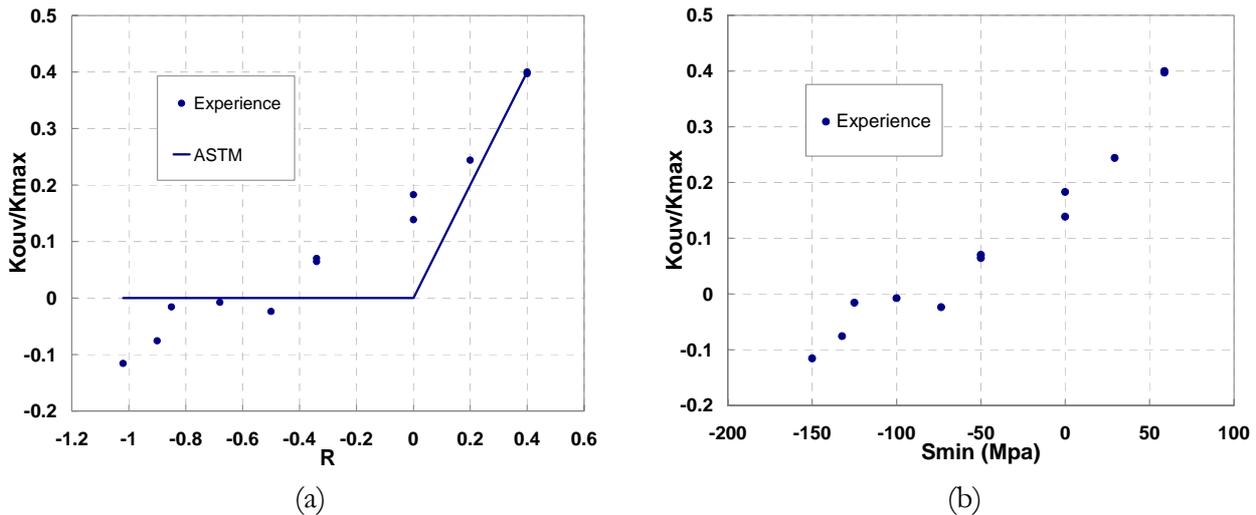


Figure 3-6. Evolution du niveau d'ouverture en fonction du rapport de charge (a) et de la contrainte minimale appliquée $S_{y\min}$ (b)

3.1.4 Etude et modélisation de l'effet des phases de fermeture de la fissure.

L'objectif de cette partie est de montrer comment l'effet des phases de fermeture sur l'érousement plastique a été étudié par Eléments Finis. La première partie est consacrée à la présentation d'une étude réalisée par Eléments Finis qui a permis de mieux comprendre le rôle des phases de fermeture. La deuxième partie traite de la modélisation et de l'intégration de cet effet des phases de fermeture dans le modèle incrémental. Enfin la comparaison entre les prévisions du modèle et les résultats des essais présentée dans une troisième partie.

3.1.4.1 Etude de l'effet des phases de fermeture par Eléments Finis

L'objectif de cette étude est de comprendre comment les phases de fermeture influencent les variables internes du modèle. Dans sa configuration actuelle le modèle contient quatre variables internes, les dimensions et les positions des domaines d'élasticité cyclique et monotone. La position du domaine d'élasticité monotone est aussi le point de contact entre les faces de la fissure. La position de ce point de contact n'évolue, que lorsque la zone plastique monotone évolue, où lorsque la fissure se propage. Par ailleurs, le domaine d'élasticité cyclique est contraint de rester à l'intérieur du domaine d'élasticité monotone. Ces calculs ont pour but de tester si ces hypothèses restent valables lorsque des niveaux de compression importants sont appliqués. Les résultats présentés ici correspondent tantôt à des résultats obtenus avec la loi de comportement identifiée pour l'acier des roues, tantôt à des résultats obtenus avec un comportement élasto-plastique parfait.

Nous avons tracé les courbes d'érousement plastique calculées par Eléments Finis pour une fissure de longueur $2a=20$ mm dans un milieu semi-infini et pour divers niveaux de compression. On extrait à chaque incrément du calcul, les déplacements en pointe de fissure et on effectue la projection proposée au chapitre précédent. Lorsque les lèvres de la fissure entrent en contact, on n'effectue plus la projection des champs de déplacement, qui n'a plus de sens. On ne peut donc pas caractériser ainsi l'effet de la phase de fermeture sur l'érousement plastique, puisque la fissure ne s'érouse pas lorsqu'elle est fermée. En revanche, on peut étudier ce que deviennent les courbes d'érousement plastique à partir du moment où la fissure s'ouvre de nouveau. Ainsi

peut-on caractériser l'effet des phases de fermeture par leurs conséquences sur le comportement de la fissure lorsqu'elle est ouverte.

Regardons d'abord l'influence du niveau de compression, défini ici par S_{ymin} , sur les courbes d'érouissage plastique à partir de la réouverture de la fissure. Dans la Figure 3-7 sont tracées les courbes d'érouissage obtenues après l'application d'une contrainte de compression S_{ymin} variant de 0 MPa à -400 MPa. Ces calculs ont été effectués en utilisant la loi de comportement identifiée pour l'acier à roue et comprenant, entre autres, trois écrouissages cinématiques non linéaires. Plus le niveau de compression atteint est élevé et plus l'amplitude de l'érouissage plastique lors de la phase de ré-ouverture d'un cycle est élevée (Figure 3-7). Comme dans notre modèle la vitesse de fissuration est directement proportionnelle à l'érouissage plastique, cela se traduira par une augmentation de la vitesse de fissuration. Ces résultats sont donc en accord avec ce qui est généralement trouvé dans la littérature sur le rôle néfaste des phases de fermeture sur la fissuration par fatigue. Par ailleurs, les courbes de la Figure 3-7 se déduisent les unes des autres par un simple décalage selon l'axe des K_I .

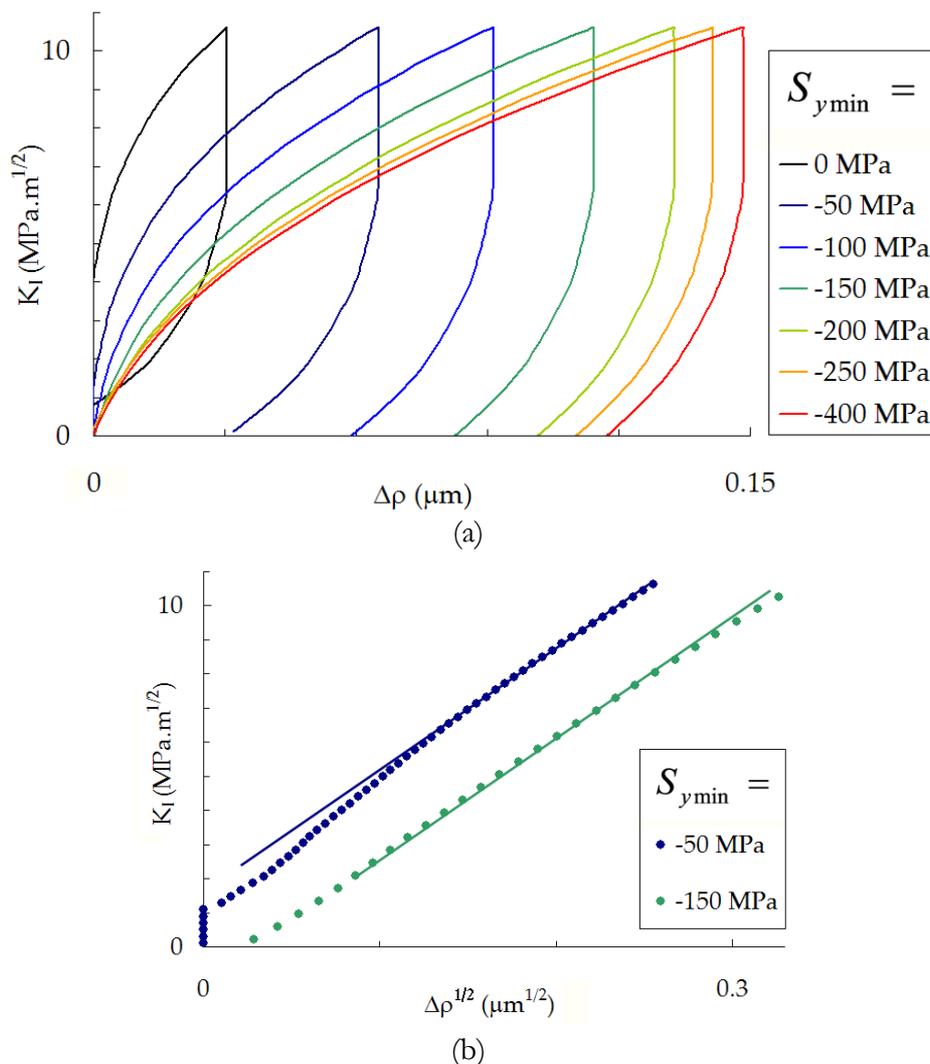


Figure 3-7. (a) Courbe d'érouissage plastique après une sous-charge à S_{ymin} . (b) Tracé dans un diagramme $K_I - \sqrt{\rho}$. Les courbes se déduisent l'une de l'autre par un simple décalage vertical

Nous avons ensuite étudié l'influence du niveau de compression $S_{y\min}$ appliqué, sur l'évolution des différentes variables internes du modèle incrémental. Pour cette étude qualitative, qui a servi à comprendre le rôle des phases de compression, un comportement élasto-plastique parfait a été utilisé pour le matériau, de manière à ne pas confondre les non-linéarités dues au comportement du matériau avec celles dues au changement de comportement de la fissure (transition entre la plasticité cyclique et la plasticité monotone, par exemple). Le comportement utilisé pour ces calculs est élastoplastique ($E=200$ GPa, $\nu=0.3$, $R_o=400$ MPa) avec un écrouissage cinématique linéaire négligeable ($H=1$ MPa).

Commençons par la position du point de contact, notée ici K_{xm} . Dans la Figure 3-8 nous avons tracé les courbes d'éroussement pour deux cas de chargement. Le premier correspond à un cycle de charge-décharge sans fermeture ; l'éprouvette est rechargée dès que les lèvres de la fissure entrent en contact. Le point de contact initial est légèrement en compression. Le second cas de chargement atteint un niveau de compression de $S_{y\min} = -100$ MPa. La position, notée K_{xm} , du point de contact des lèvres de la fissure reste la même dans les deux cas. La contrainte de compression $S_{y\min}$ n'a donc pas d'influence sur le seuil d'ouverture K_{xm} .

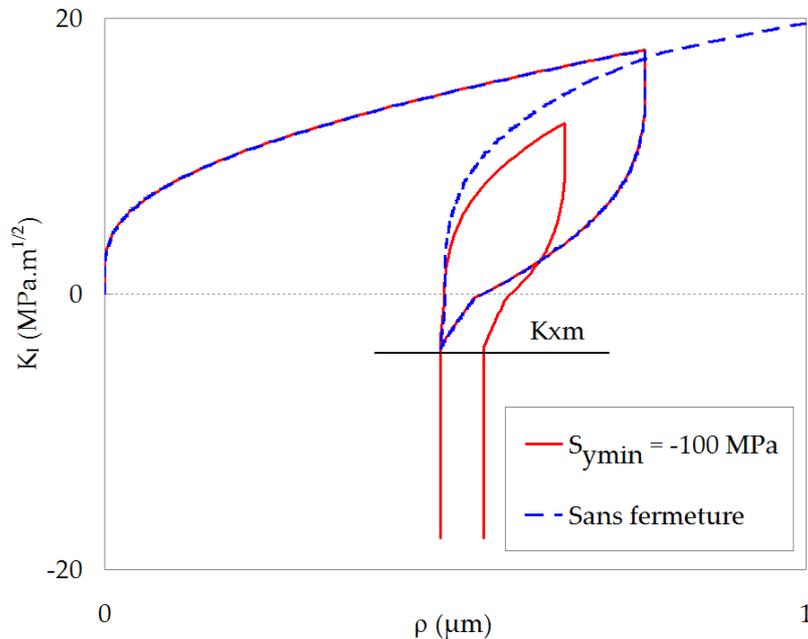
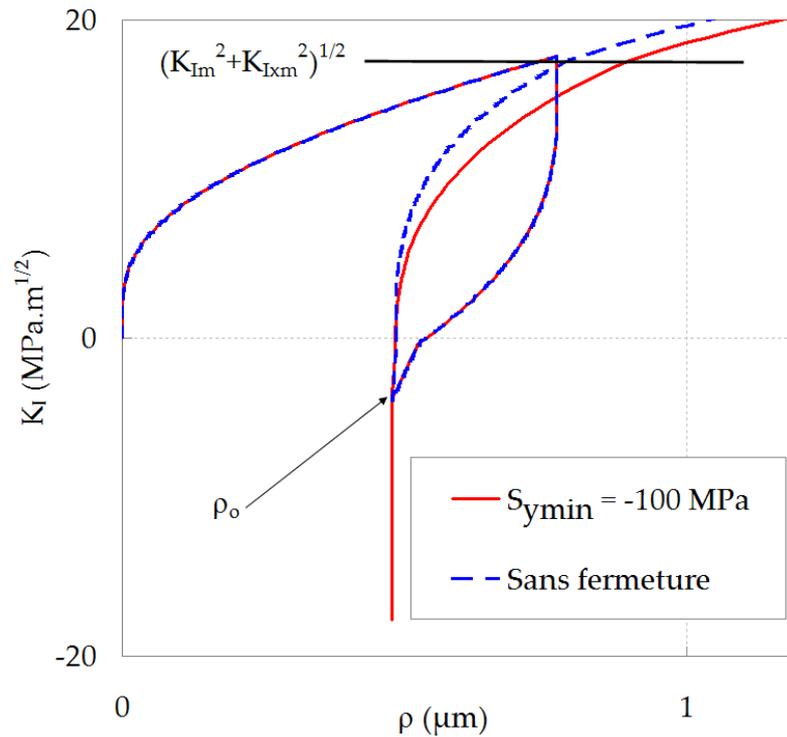
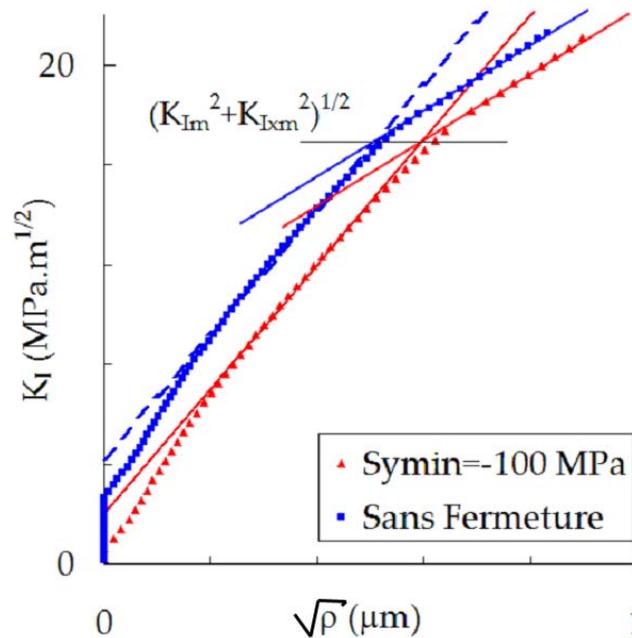


Figure 3-8. Courbe d'éroussement après une sous-charge de $S_{y\min} = -100$ MPa, comparaison avec un cycle sans fermeture. La position du point de contact entre les lèvres de la fissure, notée K_{xm} , est indépendante du niveau de compression

Ensuite, le facteur d'intensité des contraintes, noté ici K_m , au-delà duquel la zone plastique monotone commence à s'étendre a été recherché en fonction du niveau de compression atteint (Figure 3-9). Les résultats tracés correspondent aux mêmes cas de chargement que pour la Figure 3-8, excepté que le facteur d'intensité des contraintes appliqué lors de la recharge dépasse la valeur précédente de K_{\max} . Le seuil de plasticité pour la zone plastique monotone correspond à un changement de pente sur la courbe d'éroussement, ce qui permet de déterminer K_m . On constate que la phase de compression n'a aucun effet sur la valeur de K_m .



(a)



(b)

Figure 3-9. Courbes d'émoussement après une souscharge de $S_{ymin} = -100 \text{ MPa}$, la position de la transition entre plasticité cyclique et plasticité monotone reste la même. (a) courbe complète. (b) détail, courbe d'émoussement depuis la ré-ouverture de la fissure dans un diagramme $K_I - \sqrt{\rho}$

Ainsi, une phase de compression en dessous du point de fermeture de la fissure n'a aucun effet sur les variables internes associées à la zone plastique monotone de la fissure, à savoir φ_m (la dimension du domaine d'élasticité) et φ_{xm} la position du point de contact. Il reste maintenant à étudier l'effet d'une phase de compression sur les variables associées à la zone plastique cyclique, sa dimension et sa taille. Encore une fois, pour faciliter la lecture, on travaille dans un diagramme

($\rho - K_I$), on note la dimension du domaine d'élasticité $2K_e$ et sa position K_{sv} . Le comportement utilisé pour ces calculs est élastoplastique ($E = 200GPa$, $\nu = 0.3$, $R_0 = 400MPa$) avec un écrouissage cinématique linéaire négligeable ($H = 1MPa$).

Le calcul reporté sur la Figure 3-10 permet de suivre l'évolution de la dimension du domaine d'élasticité cyclique après application d'une sous-charge à un niveau de compression $S_{y\min} = -240MPa$. On constate que la dimension du domaine d'élasticité dans un diagramme ($\rho - K_I$) ne varie jamais, quel que soit le niveau de la sous charge.

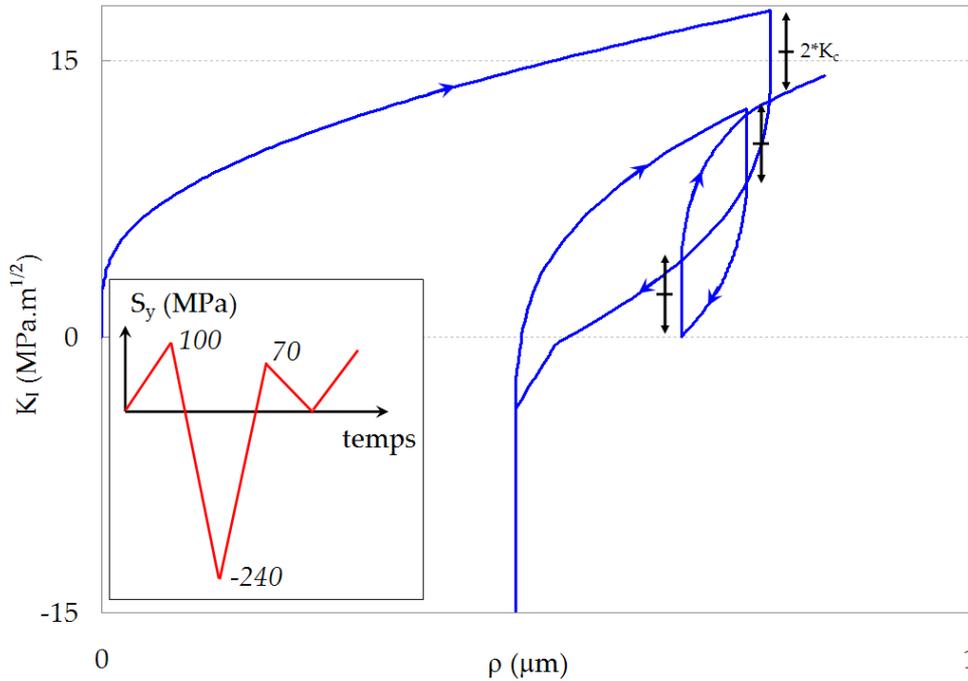


Figure 3-10. Courbe d'émoussement après souscharge on remarque que la dimension de la zone plastique cyclique ne change pas

Finalement le seul paramètre qui varie lorsqu'on applique une sous-charge, c'est la position du domaine d'élasticité cyclique. La Figure 3-11 montre les courbes d'émoussement après application d'une contrainte de compression à différents niveaux. Les courbes d'émoussement évoluent significativement lorsque le niveau de compression augmente. Les niveaux de compression testés varient ici entre -40 MPa et -240 MPa. Comme pour l'acier à roue (Figure 3-7), toutes les courbes se déduisent les unes des autres par un simple décalage selon l'axe des K_I . L'amplitude de l'émoussement plastique calculé lors de la phase de re-ouverture permet de calculer la position du centre du domaine d'élasticité cyclique.

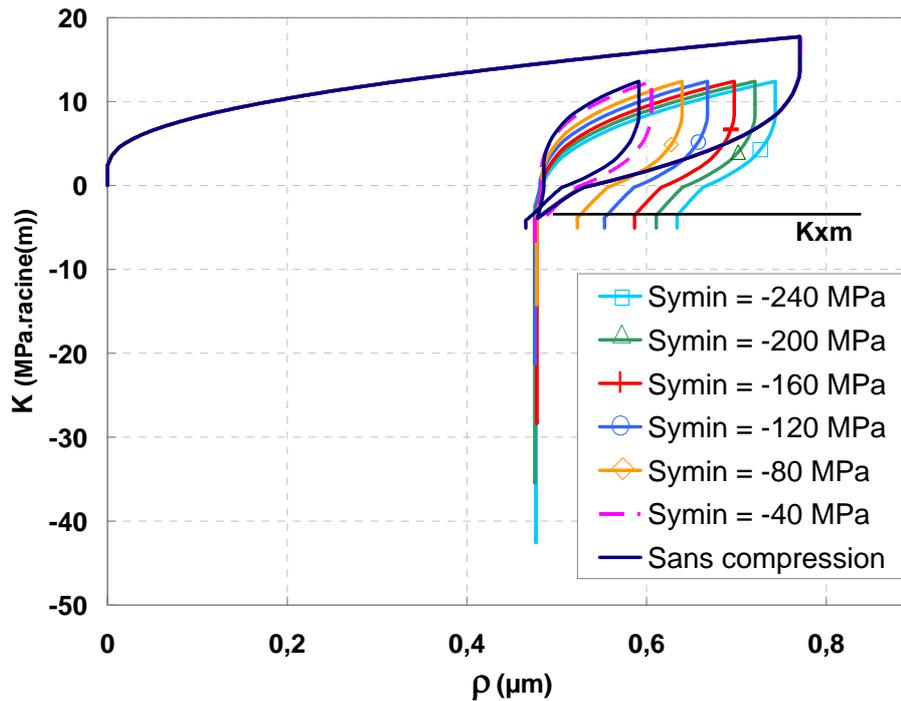


Figure 3-11. Evolution des courbes d'éroussement après application d'une souscharge à plusieurs niveaux de compression $S_{y\min}$

Nous avons également réalisé ces calculs sur l'acier à roue (Figure 3-7), pour différentes valeurs du facteur d'intensité des contraintes maximal atteint lors de la première mise en charge et pour divers niveaux de compression. L'analyse du décalage selon l'axe de K_I des courbes d'éroussement plastique permet de tracer l'évolution du centre du domaine d'élasticité de la zone plastique cyclique noté K_{xc} en fonction du niveau de compression atteint. Les résultats obtenus sont tracés sur la Figure 3-12. On constate que cette évolution est quasi-linéaire, tant que le seuil de plasticité généralisée en compression de l'éprouvette n'est pas atteint. Ensuite K_{xc} sature. Selon la valeur du facteur d'intensité des contraintes maximal appliqué lors de la mise en charge, ce niveau de saturation semble varier légèrement. Cependant, le seuil de fermeture de la fissure diminue lorsque K_{\max} augmente, puisque la fissure s'érousse. Le léger décalage observé entre les courbes correspond à la variation de la position du point de contact selon les niveaux de K_{\max} atteints.

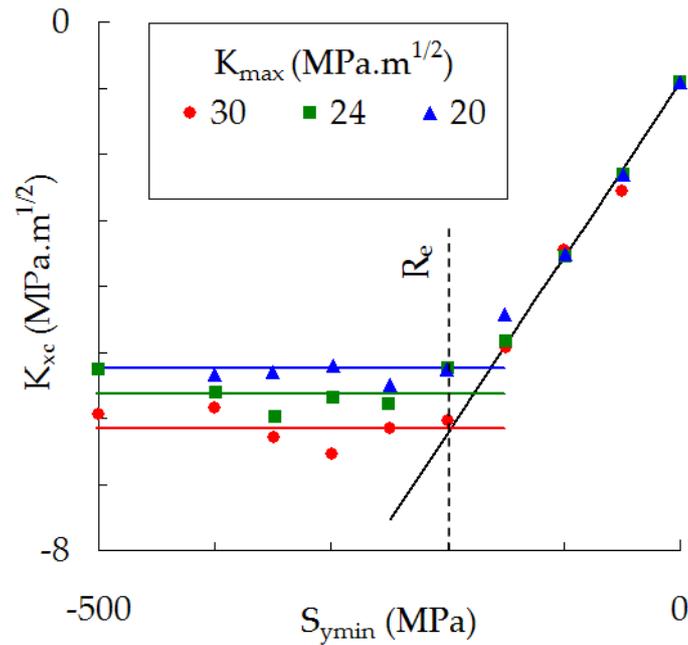


Figure 3-12. Evolution de la position du centre du domaine d'élasticité cyclique, noté K_{sc} , selon le niveau de compression atteint et selon la valeur de K_{max}

3.1.4.2 Modélisation de l'effet des phases de fermeture.

Pour modéliser l'effet des phases de fermeture, nous avons fait l'hypothèse que le domaine d'élasticité cyclique peut se déplacer en dessous du point de contact. Néanmoins la fissure ne peut pas s'éteindre si les lèvres de la fissure sont en contact. Ainsi lors d'une phase de décharge (Figure 3-13) les comportements suivants se produisent. Le facteur d'intensité des contraintes appliqué est en vert, le domaine d'élasticité monotone en bleu et le domaine d'élasticité cyclique en rouge. Au début de la décharge (1 à 2) le comportement est élastique. Ensuite (2 à 3) une déformation plastique en retour se produit lors de la décharge jusqu'au point de contact entre les faces de la fissure. Le domaine d'élasticité cyclique se déplace alors en suivant le facteur d'intensité des contraintes appliqué. Ensuite (3 à 4) le domaine d'élasticité cyclique se déplace toujours, à l'intérieur du domaine d'élasticité monotone mais cette fois sans que de l'érousement plastique se produise, puisque les lèvres de la fissure sont maintenant en contact. Enfin, au-delà du point 4, le domaine d'élasticité cyclique reste attaché à la frontière du domaine d'élasticité monotone. A partir du moment où la frontière inférieure est atteinte la position du domaine d'élasticité cyclique sature. Lors de la recharge, l'érousement plastique ne se produira qu'à partir du moment où on aura franchi le plus haut des deux seuils, de contact et de plasticité cyclique.

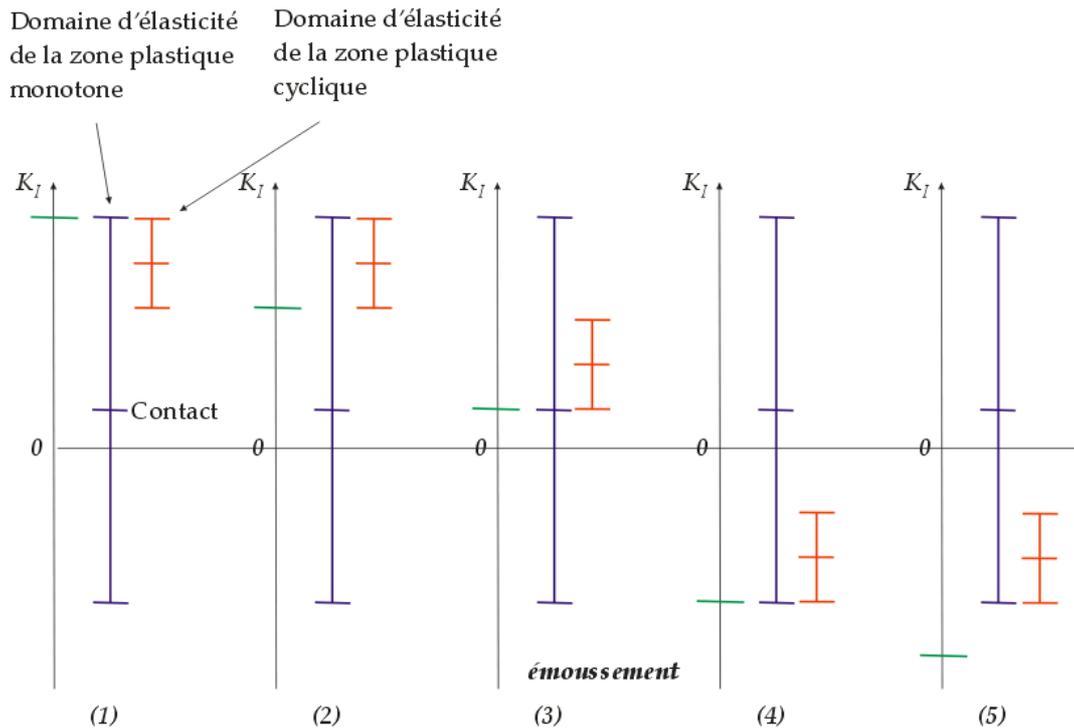


Figure 3-13. Evolution schématique du domaine d'élasticité cyclique lors d'une décharge

L'intégration de ce comportement dans le modèle est très simple, et ne nécessite l'identification d'aucun paramètre supplémentaire. A partir du moment où l'on se trouve en dessous du point de contact, l'érousement plastique ne se produit plus, les variables internes ne varient plus, sauf la position du domaine d'élasticité cyclique et ceci de manière à ce que sa frontière inférieure suive le chargement appliqué (en φ).

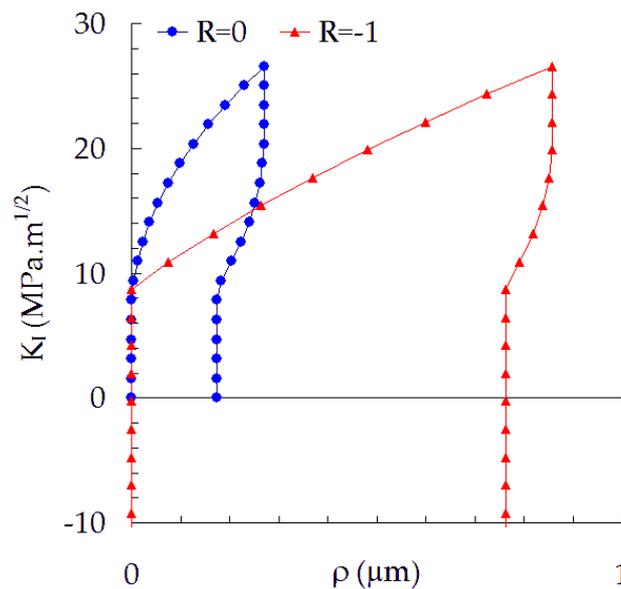


Figure 3-14. Exemple de simulation à l'aide du modèle incremental de l'érousement plastique d'une fissure de Griffith sous chargement d'amplitude constante ($R = -1$) ou ($R = 0$) de longueur initiale 5mm et après 5mm de propagation

3.1.4.3 Confrontation des simulations et des essais.

Les simulations des essais réalisés à divers rapport de charge ont été réalisées à l'aide du modèle incrémental et confrontées aux résultats expérimentaux dans la Figure 3-15. On constate qu'on obtient un excellent accord entre simulations et expériences et cela sans ajouter aucun paramètre supplémentaire dans le modèle.

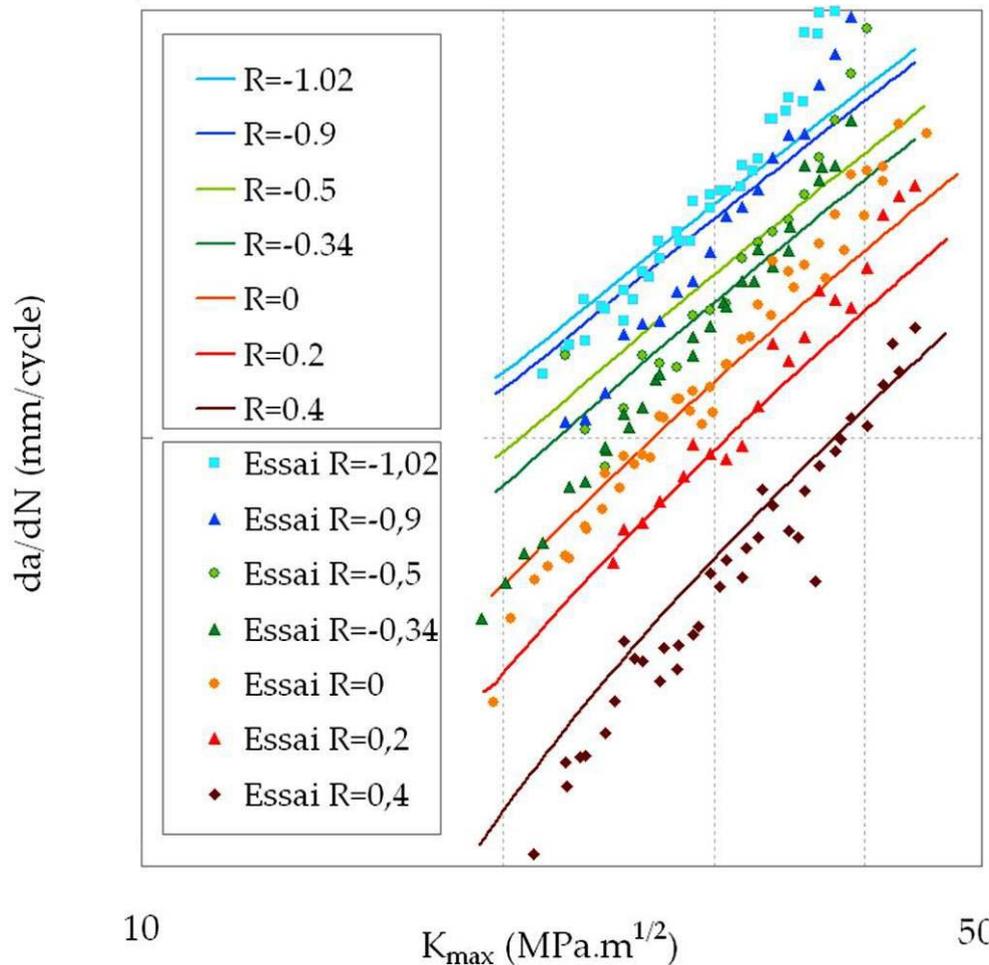


Figure 3-15. Courbes de Paris simulées pour différents rapports de charge en fonction de K_{max} , comparaison avec les résultats d'essais

3.2 Etude de l'effet de la biaxialité du chargement

3.2.1 Problème

Comme nous l'avons déjà évoqué à plusieurs reprises, le caractère biaxial du chargement dans la toile de roue nécessite la prise en compte de ce paramètre dans le modèle de propagation. La Figure 3-16a montre la composante de flexion des contraintes radiales et circonférentielles selon l'épaisseur de la toile pour une circulation à 120Km/h d'un wagon chargé à 60 tonnes. La Figure 3-16b montre, pour le même trajet et pour la composante de flexion, l'évolution de la contrainte circonférentielle en fonction de la contrainte radiale, la Figure 3-16c présente les mêmes résultats mais pour la composante de traction-compression.

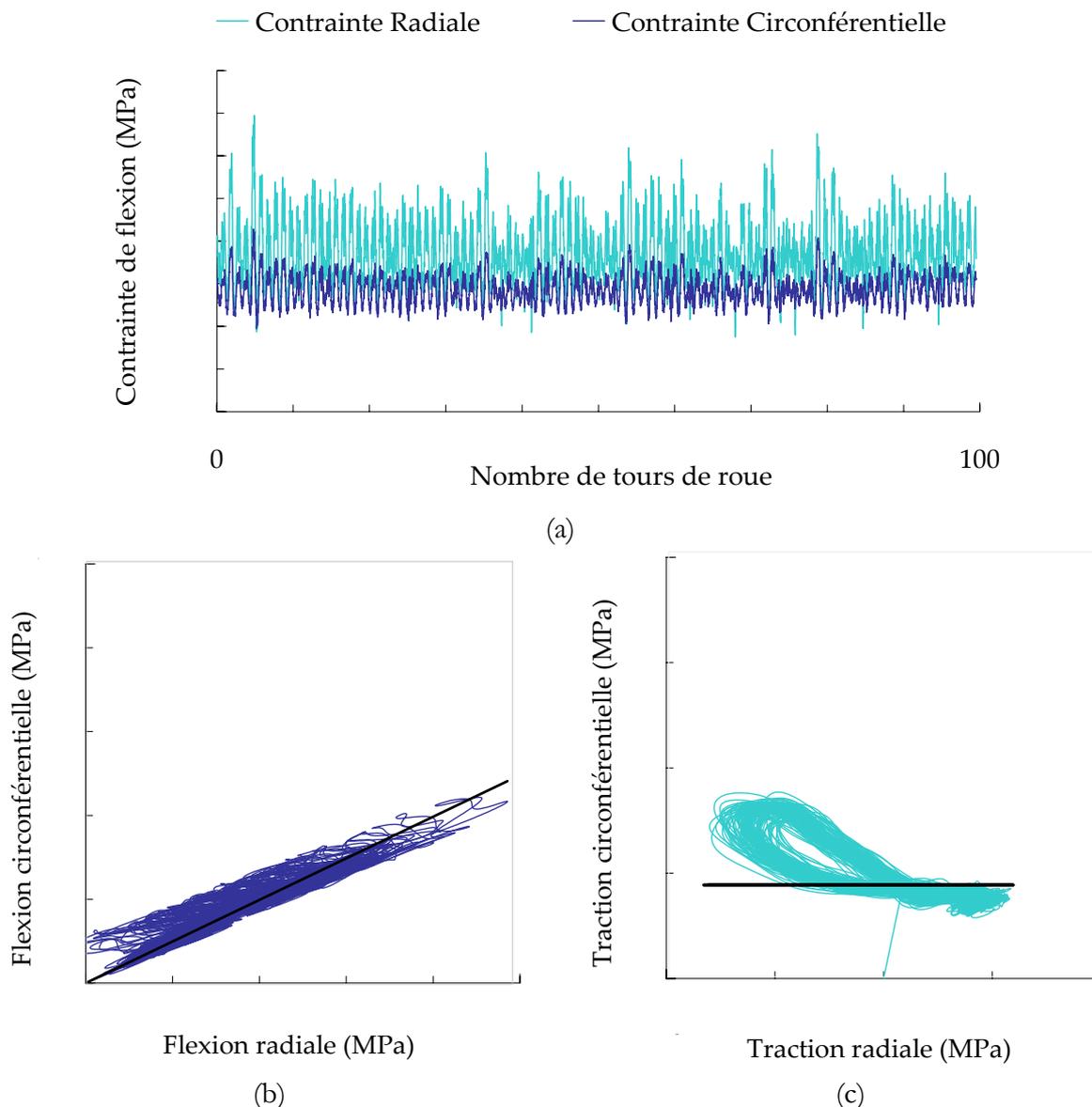


Figure 3-16. En (a) évolution des composantes de flexion des contraintes radiale et circonférentielle pendant une circulation à 120 Km/h d'un wagon chargé à 60 tonnes, la roue instrumentée est à l'avant du train (en attaque). Evolution des composantes circonférentielles en fonctions des composantes radiales. En (b) terme de flexion, en (c) terme de traction-compression

En ce qui concerne la composante de flexion, le chargement est quasiment proportionnel. Ce n'est pas vrai pour le terme de traction-compression, puisque la composante circonférentielle est quasiment constante tandis que la composante radiale varie. Cependant, il s'agit ici d'une circulation en alignement pour laquelle le terme de flexion est minimal. Pour une circulation en courbe, un aiguillage, ou une entrée en gare, le terme de flexion domine largement. Pour simplifier la modélisation, on fera par la suite l'hypothèse que le chargement est quasiment proportionnel, même si cela n'est pas tout à fait exact.

3.2.2 Biaxialité et fissuration par fatigue, étude bibliographique

3.2.2.1 Définitions

Dans le cas d'une fissure plane, traversante, de longueur $2a$, dans une plaque infinie, soumise à un chargement biaxial à l'infini (S_x, S_y) , la biaxialité λ du chargement, est définie comme le ratio $\lambda = S_x / S_y$ de la contrainte à l'infini S_x , agissant parallèlement au plan de la fissure et normale à son front, et de la contrainte à l'infini S_y , agissant dans la direction normale au plan de la fissure. Ce terme λ est le plus couramment employé dans la littérature pour caractériser la biaxialité du chargement appliqué à la fissure.

On peut également employer la contrainte T pour caractériser la biaxialité du chargement. La contrainte T est le premier terme non-singulier du développement asymptotique des contraintes en mécanique élastique linéaire de la rupture. Ce terme intervient dans l'écriture de la contrainte $\sigma_{xx}(r, \theta)$ (3-6). Dans le cas particulier de la fissure de Griffith, T est défini par $T = S_x - S_y$ tandis que le facteur d'intensité des contraintes est lui défini par $K_I = S_y \sqrt{\pi a}$.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + T + o \left(\left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\
 \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + o \left(\left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\
 \sigma_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + o \left(\left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \right)
 \end{aligned} \tag{3-6}$$

Comme nous travaillons dans le cadre de la mécanique élastique linéaire de la rupture, on définira la biaxialité du chargement par la contrainte T plutôt que par le rapport λ . Bien que la contrainte T soit en général faible devant σ_{xx} en pointe de fissure, on verra qu'elle joue un rôle non négligeable sur le comportement de la fissure, en particulier sur le développement de la zone plastique. Nous verrons dans les prochains paragraphes que la forme et la taille de la zone plastique, le chemin de propagation ainsi que la vitesse de propagation dépendent de ce terme non singulier.

3.2.2.2 Influence de T sur la taille de la zone plastique

La Figure 3-17 montre d'une manière schématique le rôle de T sur la forme et la taille de la zone plastique en déformations planes ainsi qu'en contraintes planes. Nous nous intéressons ici au cas des déformations planes. Dans ce cas, la zone plastique présente une forme d'ailes de papillons plus marquée quand la contrainte T est négative. Une contrainte T positive provoque un renversement de ces ailes vers l'arrière de la fissure.

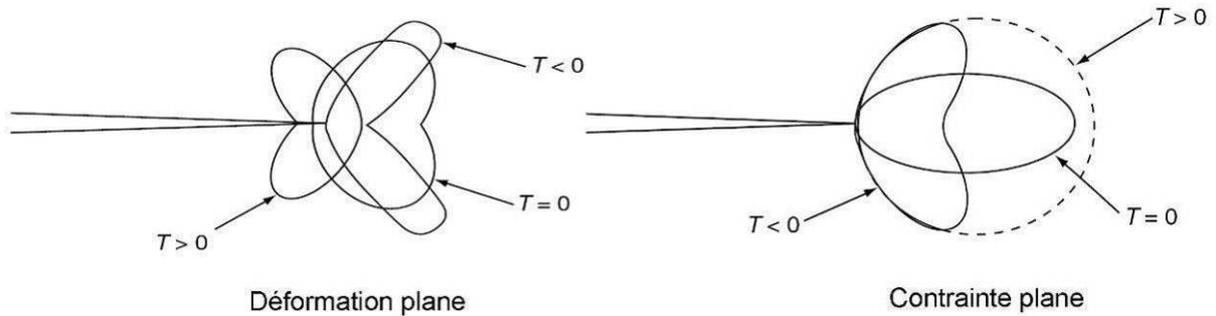


Figure 3-17. Influence de la contrainte T sur la taille de la zone plastique [Lee et al. 2005]

Le rôle de la contrainte T sur la plasticité peut se comprendre aisément en calculant la contrainte équivalente de Von Mises à l'aide du développement asymptotique des contraintes (3-7) incluant la contrainte T . En $\theta = \pi$, l'expression analytique de la contrainte équivalente de Von Mises est très simple et permet de tirer quelques tendances. Cette expression montre que la dimension de la zone plastique dépend du rapport T/K_I . En outre, plus r est grand, c'est-à-dire plus la zone plastique est grande, et plus l'effet de ce rapport T/K_I est grand. Enfin, compte tenu de la forme de l'expression, la valeur de la contrainte équivalente passe par un minimum en fonction du rapport T/K_I . En contraintes planes, ce minimum est en dehors des plages de variations usuelles du rapport T/K_I , l'évolution de la dimension de la zone plastique avec le rapport T/K_I est monotone. Mais ce n'est pas le cas en déformations planes, des évolutions non monotones de la dimension de la zone plastique avec T/K_I pourront être observées.

$$\sigma_{eq}\left(r, \theta = 0, \nu = \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sqrt{\frac{27}{28} + \frac{1}{28} \left(1 + \frac{14T\sqrt{2\pi r}}{K_I}\right)^2} \quad (3-7)$$

$$\sigma_{eq}\left(r, \theta = 0, \nu = 0\right) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2T\sqrt{2\pi r}}{K_I}\right)^2}$$

3.2.2.3 Influence de T sur le chemin de propagation

Il a été démontré par plusieurs auteurs que la contrainte T a une influence sur le trajet de fissuration par fatigue (Figure 3-18). Si l'on se place dans le cas particulier d'une fissure de Griffith, une contrainte T positive correspond à une contrainte S_x supérieure à S_y . Dans une telle configuration la fissure devrait bifurquer. Plus généralement, il a été montré qu'une contrainte T négative stabilise le trajet de fissuration, c'est-à-dire qu'une petite perturbation du trajet de la fissure sera vite atténuée. Par contre, une contrainte T positive accentue les déviations qui sont due aux obstacles microstructuraux et permettent à la fissure de bifurquer ([Cotterell et Rice 1980] ainsi que [Pook 1994]).

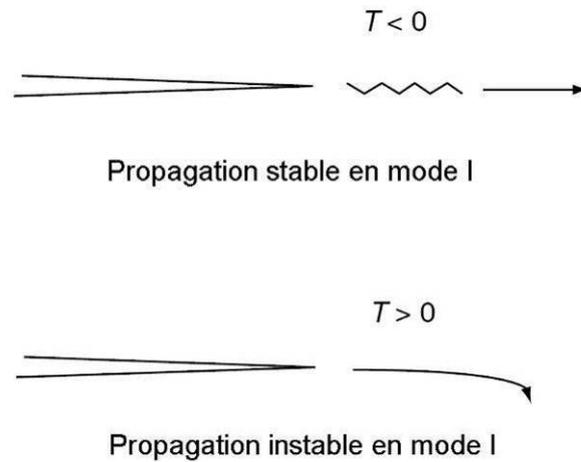


Figure 3-18. Schémas montrant l'influence de la contrainte T sur le trajet de fissuration [Lee et al. 2005]

Ce changement de direction de fissuration pour une contrainte T positive a été également mis en évidence expérimentalement par plusieurs auteurs. [Leevers et Radon 1982] ont remarqué que le trajet de fissuration est plus plan pour une contrainte T négative que pour une contrainte T nulle. Le chemin de la fissure est plus sinueux si le chargement devient équi-biaxial ($T = 0$). [Truchon et al. 1981] ont mis en évidence le même phénomène pour une fissure dans une éprouvette cruciforme, les auteurs ont remarqué que, pour une contrainte T positive, le plan de fissuration évolue de manière à ce que la fissure travaille en Mode I local.

3.2.2.4 Influence de T sur la vitesse de propagation

Les études concernant l'influence de la contrainte T sur la cinétique de la fissure sont souvent contradictoires. Cela laisse penser que l'effet de T sur la propagation dépend peut être d'une compétition entre divers effets, liés à la plasticité, au comportement du matériau, à l'épaisseur de l'éprouvette, à la rugosité ... Les tendances de la littérature montrent cependant que dans le cas général, la vitesse de propagation diminue quand la contrainte T augmente. Ceci a été montré expérimentalement ou par calcul par plusieurs auteurs. Le Tableau 3-2 et le Tableau 3-3 sont une synthèse des articles traitants de l'effet de T . Dans certaines études ([Tanaka et al. 1979] et [Hoshida et al. 1981]) on trouve que l'effet de T sur la propagation s'inverse pour un rapport de charge nul ($R = 0$).

Dans la Figure 3-19, on montre un exemple de résultats d'essais réalisés à différentes valeurs de T . Ces essais ont été réalisés par [Miller et Brown 1989] pour un rapport de charge $R = -1$ sur un acier inoxydable 316. Les auteurs ont remarqué que l'influence de T sur la propagation est moins marquée pour les faibles niveaux de chargement $S_{y_{max}}/R_e < 0.45$ (Figure 3-19a). Un niveau de chargement plus élevé $S_{y_{max}}/R_e > 0.45$ implique une contrainte T plus élevée, les différences entre les courbes de fissuration à différentes valeurs de T sont alors plus marquées. Ce résultat indique en tout cas que lorsqu'on donne davantage de poids à l'effet de la plasticité, par rapport à un possible effet de rugosité, la différence entre les vitesses de fissuration par fatigue obtenue pour diverses valeurs de T à même ΔK est plus élevée.

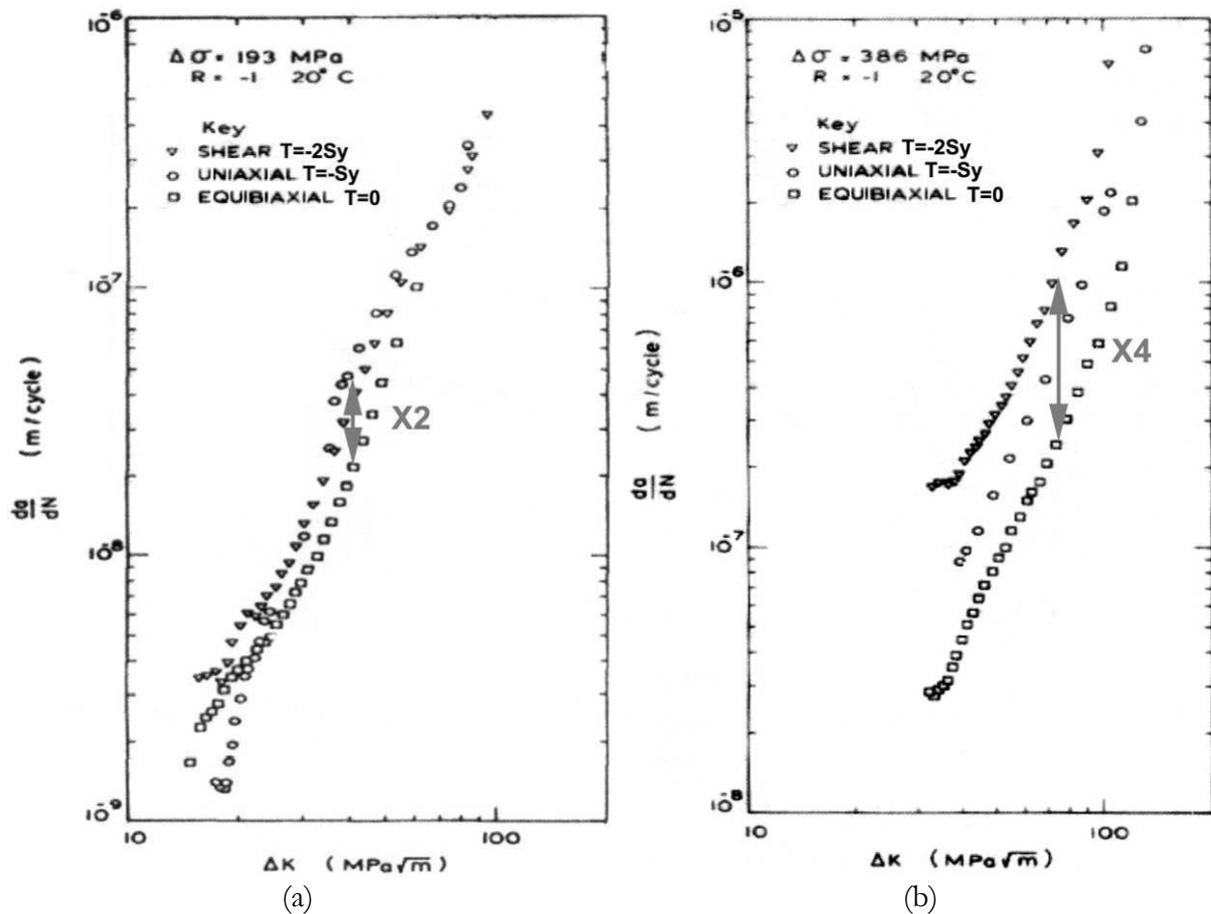


Figure 3-19. Courbes de propagation pour différents niveaux de biaxialité et pour deux niveaux de $S_{y\max}$ appliquée

La compétition entre rapport de charge R et contrainte T sur le comportement de la fissure a été étudiée par [Fleck et Newman 1988]. L'évolution du CTOD a été déterminée par Eléments Finis, pour 2 types d'éprouvettes, en fonction du rapport de charge appliqué. La première éprouvette est une éprouvette CCT dans laquelle la contrainte T est négative et la deuxième une éprouvette de flexion qui présente une contrainte T positive au-delà d'une certaine longueur de fissure. Sur la Figure 3-20 est tracé le CTOD calculé par éléments finis et normalisé en fonction du rapport de charge appliqué. Les valeurs déterminées à la contrainte maximale et à la contrainte minimale du cycle de fatigue sont reportées. Pour les rapports de charge positifs, l'amplitude du CTOD calculée dans l'éprouvette de flexion ($T > 0$) est égale à celle calculée dans l'éprouvette CCT ($T < 0$). Par contre, l'effet de la contrainte T est inversé en ce qui concerne la valeur maximale du CTOD. Si la vitesse de propagation de la fissure dépend à la fois de l'amplitude du CTOD et de sa valeur maximale, des effets opposés de T peuvent être observés selon les cas.

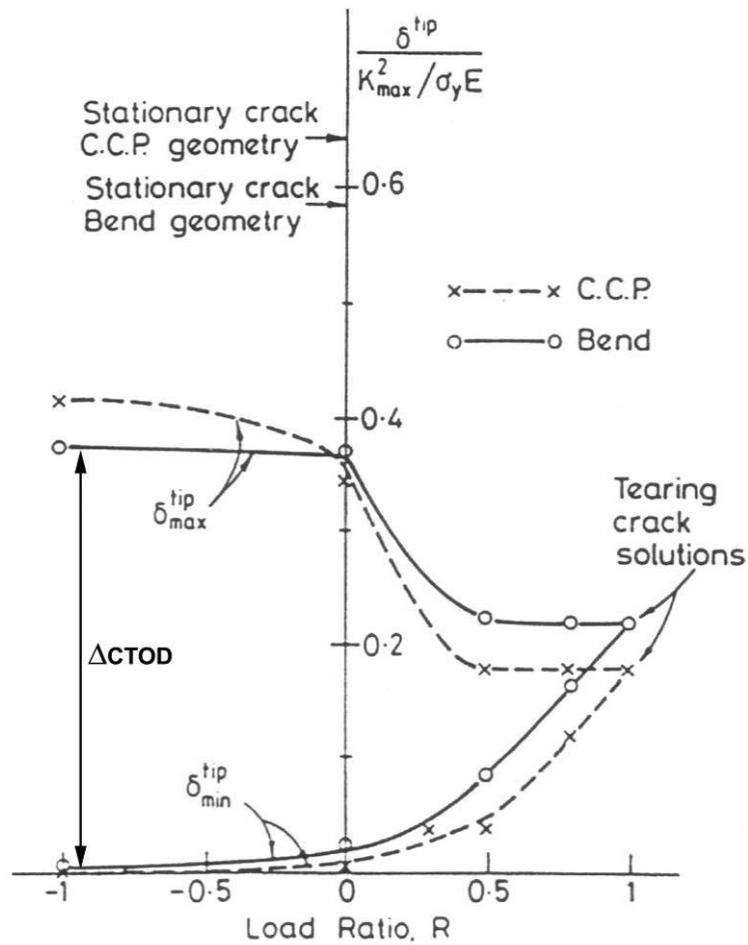


Figure 3-20. Ouverture des lèvres au niveau de la pointe de fissure en fonction de la contrainte T et du rapport de charge R en déformation plane [Fleck et Newman 1988]

Auteur	Conditions d'essai	R<0	R=0	R>0	Observations
[Hoshide et al. 1981]	- Matériau : acier 0.11% carbone - Eprouvette cruciforme sans peignes épaisseur = 2mm et trou milieu de 0.6mm	- R=-1 : da/dN augmente quand T diminue	Ordre bizarre : da/dN(T=-S _y)> da/dN(T=0)> da/dN(T=-2S _y)		- S _y max=0.617Re - 10 < ΔK < 30 pour R=0 et 3 < ΔK < 50 pour R=-1 - 3 niveaux de T : -2 S _y , - S _y , 0. Pour T=0 fissure déviée de 10°, pour T=-2S _y fissure cruciforme (4 fissures)
[Hutar et al. 2004]	- Matériau : acier à 0.65% carbone - Eprouvette CCT et CT			- R=0.1 : da/dN augmente quand T diminue	- 10 < ΔK < 25 - Courbes de Paris identiques pour da/dN=f(ΔK _{crit})
[Kane 2005]	- Matériau : acier 304 L - Fissures semi-elliptiques - Eprouvette parallélépipédique pour T=-S _y et plaques circulaires pour T=-2S _y et T=0. -- Les niveaux de T sont donnés en surface		- da/dN en surface augmente quand T diminue		- 5 < ΔK < 20 - Il existe une fermeture due à la rugosité - Tous les niveaux de T testés sont négatifs : T = -2S _y , T = -S _y et T = 0
[Kitagawa et al. 1985]	- Matériau : acier de construction 0.1 % carbone			- R=0.1, 0.3 et 0.5 - da/dN augmente quand T augmente	- Effet significatif de T pour dS _y =0.3S _y
[Kitaoka et Mikuriya 1996]	- Matériau : acier 0.86% carbone - Dispositif de flexion cisaillement	- R=-1 : da/dN augmente quand T diminue			
[Kitagawa et Yuki 1979]	- Matériau : acier de construction 0.1 % carbone - Eprouvette cruciforme sans peignes prélevée dans une tôle de soudage - Epaisseur 4.5 mm			- R=0.1 : da/dN augmente quand T diminue	- 5 < ΔK < 30 - Différence négligeable en da/dN mais toujours dans le même ordre
[Miller et Brown 1985]	- Matériau : acier inoxydable austénitique AISI316 - Eprouvette cruciforme	- R=-1 : pour sigma faible (dS _y =193) par rapport à Re pas d'influence. Pour sigma grand (dS _y =386) par rapport à Re, da/dN augmente quand T diminue			- Re=395MPa sigma rupture=611 MPa
[Pei et al. 1989]	- Matériau : acier austénitique AISI 316 - Eprouvette cruciforme avec peignes : épaisseur zone utile = 4 mm et trou milieu de 2 mm	- R=-1 : da/dN augmente quand T diminue pour dS _y =386 et 560MPa			- 30 < ΔK < 150 pour d S _y =560 et 380 - 20 < ΔK < 70 pour d S _y =193 et 64 - La différence entre da/dN devient négligeable quand ΔK est faible=64MPa
[Tanaka et al. 1979]	- Matériau : acier 0.45% de carbone - Eprouvette cruciforme		- da/dN augmente quand T augmente		- 10 < ΔK < 25 - 4 niveaux de T=- S _y , T=0, T=-0.5 S _y et T=-2 S _y , faible écart sur da/dN pour T=0 et T=- S _y
[Tong 2002]	- Matériau : acier doux - Epreuves : CT, SENT et CN d'épaisseur 12 mm. Epreuves CCT épaisseur 3 et 6 mm			- R=0.1 : da/dN augmente quand T augmente	- 15 < ΔK < 50 - L'écart entre les courbes de Paris est plus élevé vers la fin (les courbes ne sont pas parallèles)
[Vecchio et al. 1987]	- Matériau : aluminium 2024 - Eprouvette CCT et CT d'épaisseur 2.4 mm			- R=0.1 et 0.5 : da/dN augmente quand T diminue	- 30 < ΔK < 60
[Youshy et al. 1992]	- Matériau : acier austénitique 316 - Eprouvette cruciforme avec peignes : épaisseur zone utile=4mm et trou milieu de 16 mm de diamètre	- R=-1 : da/dN augmente quand T diminue pour dS _y =380MPa mais pas de différence pour T=-S _y , -0.5S _y et 0 - Ordre n'importe quoi pour dS _y =560MPa			- 50 < ΔK < 130 - Tout les niveaux de T sont négatifs ou nuls : -2 S _y , -1.5 S _y , - S _y , -0.5 S _y et 0 - da/dN est très élevé : commence à 10-3mm/cycle - Les courbes de Paris st pas linéaires en log-log

Tableau 3-2. Influence de T sur la vitesse de propagation obtenue expérimentalement

Auteur	Condition de la simulation	R<0	R=0	R>0	Observations
[Fleck et Newman 1988]		- $\Delta CTOD (T<0) > \Delta CTOD (T>0)$	- $\Delta CTOD (T<0) \sim \Delta CTOD(T>0)$		- Calculs effectués pour le même K à $\Delta CTOD$ équivalent
[Hamam et al. 2005]	- Seuil d'émoussement plastique supposé égal à K_{Ith}	- K_{Ith} augmente quand T augmente \rightarrow da/dN augmente quand T diminue	- K_{Ith} augmente quand T augmente \rightarrow da/dN augmente quand T diminue	- K_{Ith} augmente quand T augmente \rightarrow da/dN augmente quand T diminue	
[Hoshide et al. 1981]	- Calcul de K_{ouv} sur une éprouvette EF. K_{ouv} déduit de la courbe contrainte déplacement	- R=-1 : ΔK_{eff} augmente quand T diminue	- $\Delta K_{eff}(T=-2S_y) < \Delta K_{eff}(T=0) < \Delta K_{eff}(T=-S_y)$		- Pour R=-1 différence significative de ΔK_{eff} avec T - Pour R=0 différence pas très nette - Même courbe de Paris en traçant da/dN avec COD ou ΔK_{eff} sauf pour le cas ($T=-2S_y$ et $R=0$) ou la plasticité n'est plus confinée
[Kane 2005]	- Matériau : acier 316	- R=-1 et -0.5 : K_{ouv}/K_{max} augmente quand T augmente \rightarrow da/dN augmente quand T diminue	- K_{ouv}/K_{max} diminue quand T augmente (da/dN augmente quand T augmente)		- Quelque soit le chargement K_{ouv}/K_{max} diminue quand R diminue - L'effet de T sur K_{ouv}/K_{max} est faible en déformation plane - La transformation martensitique n'est pas modélisée par EF - Pas d'influence de T sur le facteur de forme
[Roychowdhury et al. 2003]	- Evolution de K_{ouv}/K_{max} avec a calculé par EF avec relâchement de noeud		- Contrainte plane K_{ouv}/K_{max} diminue quand T augmente - Déformation plane K_{ouv}/K_{max} diminue quand T augmente ($T<0$) - Déformation plane K_{ouv}/K_{max} augmente quand T augmente ($T>0$)		- Pour les faibles valeurs de K l'influence de T sur K_{ouv}/K_{max} est mieux marquée que pour k élevé

Tableau 3-3. Influence de T sur la vitesse de propagation obtenue par calcul EF

3.2.2.5 Evolution de la contrainte T dans quelques éprouvettes

Il existe plusieurs méthodes pour calculer la contrainte T en élasticité linéaire. Le rapport de [Fett 1998] fait une synthèse des différentes méthodes de calcul existantes. L'évolution de T dans les éprouvettes normalisées utilisées pour les essais de fissuration par fatigue peut être trouvée dans diverses publications ([Sherry et al. 1995] [Leevers et Radon 1982]). La Figure 3-21 montre quelques évolutions de la contrainte T , normalisée par le chargement appliqué, en fonction de la longueur de la fissure adimensionnée par la largeur de l'éprouvette. Nous pouvons remarquer que la plage de variation de T est assez large selon la géométrie de l'éprouvette, elle est négative pour la plupart des éprouvettes (CCT, DECT, SECT) mais peut être également positive, au-delà d'une certaine longueur de fissure, dans le cas d'éprouvettes travaillant en flexion (CT, 3PB).

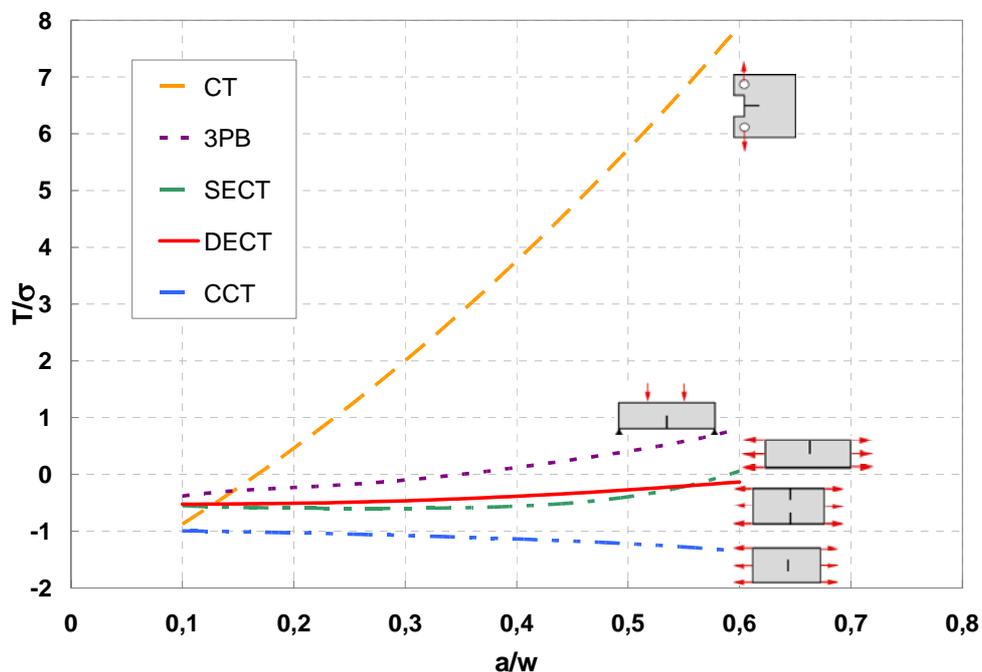


Figure 3-21. Evolution de la contrainte T en fonction de la longueur de la fissure pour quelques éprouvettes normalisées [Sherry et al. 1995]

3.2.2.6 Modèles tenant compte de T

Les modèles de fissuration par fatigue intégrant la contrainte T sont assez rares. La plupart des modèles rencontrés dans la littérature sont empiriques ([Howard 1981] et [Youshi et al. 1992]), ils consistent à ajouter à la loi de Paris un préfacteur, qui est une fonction dépendant du niveau de biaxialité du chargement. Cette fonction est identifiée de manière empirique à partir de résultats d'essais réalisés à différents niveaux de biaxialité. Il existe également des modèles plus élaborés, tels que celui de [Ahmad et al. 1986] qui est une extension de la méthode des « Strip Yield » aux chargements biaxiés, ou celui de [Tomkins 1968] qui lie la vitesse de propagation à la taille de la zone plastique qui à son tour dépend de T .

Enfin, nous présentons ici plus en détail le modèle de [Hutar et al. 2004] qui suppose que la vitesse de propagation est proportionnelle à la taille de la zone plastique en pointe de fissure. La loi propagation utilisée est celle de Paris :

$$\frac{da}{dN} = C \cdot K_{I_{eff}}^m \quad (3-8)$$

Le facteur d'intensité des contraintes effectif dépend du facteur d'intensité des contraintes réel appliqué et d'une fonction γ dépendant de la taille de la zone plastique en pointe de fissure :

$$K_{I_{eff}} = \gamma K_I \quad (3-9)$$

La fonction γ décrit l'évolution de la taille de la zone plastique en fonction de la contrainte T et de la limite d'élasticité R_e du matériau. L'expression de γ est une fonction monotone décroissante avec T/R_e croissant, elle a été déterminée de manière empirique afin de reproduire au mieux les résultats d'une campagne d'essais :

$$\gamma = 1 - 0.85 \left(\frac{T}{R_e} \right)^3 + 0.52 \left(\frac{T}{R_e} \right)^2 - 0.3 \left(\frac{T}{R_e} \right) \quad (3-10)$$

Le modèle de propagation a été validé avec des essais de propagation réalisés sur éprouvettes CT et CCT pour un rapport de charge nul. Les essais montrent que la vitesse de propagation d'une CCT ($T < 0$) est supérieure à celle d'une CT ($T > 0$) pour le même facteur d'intensité des contraintes (Figure 3-22a). En traçant les résultats d'essai en fonction du facteur d'intensité des contraintes effectif proposé par l'auteur ([Hutar et al. 2004]), on obtient une courbe de Paris unique pour les différentes valeurs de T (Figure 3-22b). La vitesse de propagation prédite avec ce modèle diminue quand T augmente puisque la taille de la zone plastique augmente quand la contrainte T diminue.

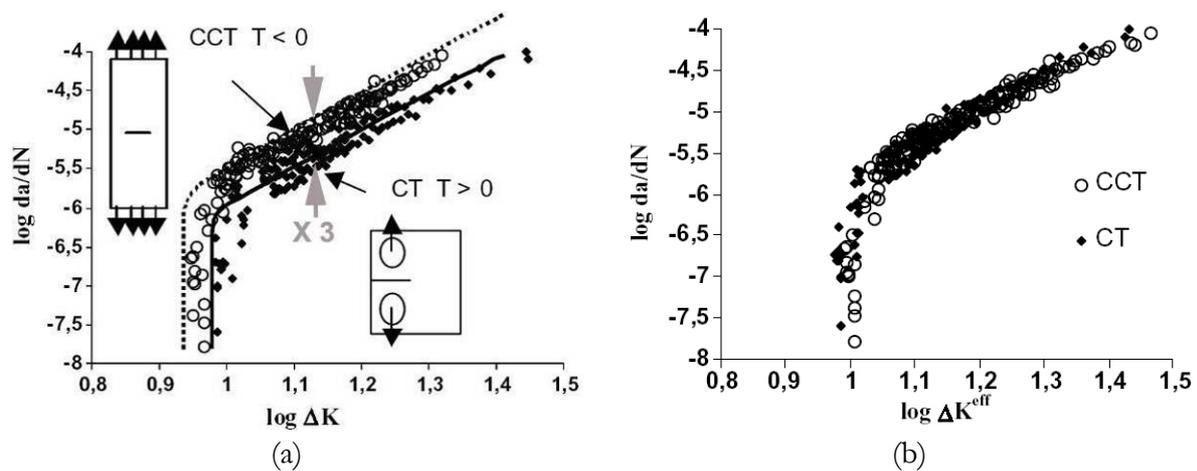


Figure 3-22. Courbes de propagation sur éprouvettes CT et CCT. En (a) la vitesse de propagation est tracée en fonction de ΔK et en (b) en fonction de $\Delta K_{effectif}$ [Hutar et al. 2004]

3.2.3 Essais réalisés : tentatives, échecs et succès...

L'objectif de cette partie du travail était de réaliser des essais de fissuration par fatigue en contrôlant la valeur de la contrainte T . Notre choix s'est porté sur des fissures longues traversantes 2D. En effet, les essais sur fissures semi-elliptiques ne permettent pas de caractériser

de manière claire le rôle de la contrainte T , car cette dernière varie le long du front de la fissure. Elle peut être négative en surface de l'éprouvette et devenir positive au point le plus profond. En outre, pour les fissures semi-elliptiques, une contrainte supplémentaire baptisée T_{∞} agit selon la direction parallèle au front de la fissure. Ce terme non-singulier est également susceptible de modifier la vitesse de propagation. Nous discuterons des effets 3D et de cette contrainte T_{∞} plus en détail dans le quatrième chapitre de ce rapport.

Dans un premier temps, nous avons cherché à travailler en uniaxial, afin de pouvoir accéder à des fréquences d'essais élevées. Dans ce cas, il faut faire évoluer la géométrie de l'éprouvette pour faire varier le rapport T/K_I .

Nous avons pensé à une éprouvette CCT, à laquelle serait ajoutée deux « oreilles » afin de générer une contrainte de compression selon l'axe horizontal par effet d'anneau, et donc de générer une contrainte T négative (Figure 3-23a). Après calcul par Eléments Finis, nous avons conclu que cette éprouvette se comporte finalement comme une CCT plus large [Jankovic 2004].

Nous avons étudié ensuite l'évolution de T de l'éprouvette conique dite TCBS (Tapered Cantilever Beam Specimen) (voir Figure 3-23b). Cette éprouvette présente l'avantage d'avoir un facteur d'intensité des contraintes constant en fonction de la longueur de la fissure. Un essai de propagation avec cette éprouvette doit donc permettre d'étudier l'effet de la contrainte T à facteur d'intensité des contraintes fixé, si la valeur de T/K_I varie avec l'avancée de la fissure. Malheureusement, les calculs Eléments Finis ont montré que la valeur du rapport T/K_I ne varie pas de manière sensible lors de la propagation de la fissure dans cette éprouvette.

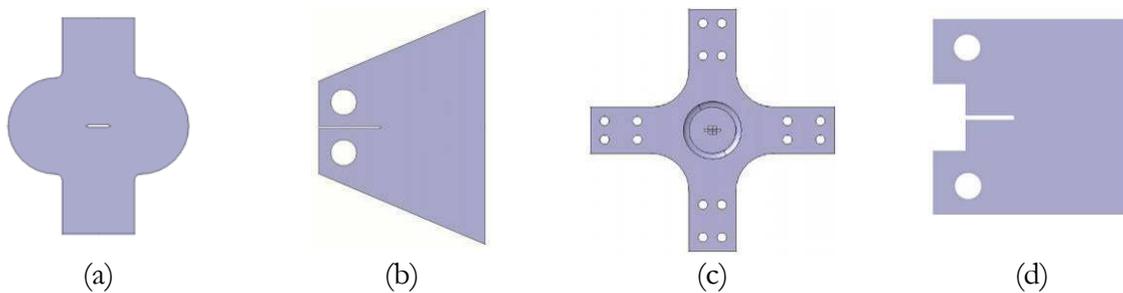


Figure 3-23. Eprouvettes étudiées pour la validation de la contrainte T

Nous nous sommes donc tournés vers des essais biaxiaux, qui ont l'avantage de permettre de contrôler le niveau de biaxialité, mais l'inconvénient de limiter la fréquence d'essai à environ 1Hz. Nous avons utilisé une éprouvette de géométrie cruciforme existante en ajoutant une fissure centrale dans la zone utile (Figure 3-23c). Comme les éprouvettes sont prélevées dans une roue de train, la dimension de l'éprouvette cruciforme était limitée. Le calcul des évolutions de T et de K_I avec la longueur de la fissure a été réalisé par Eléments Finis par la méthode d'extrapolation des déplacements (voir annexe D). Les expressions obtenues ainsi que le plan de l'éprouvette utilisée sont fournis dans l'annexe A-3.

Les essais de fissuration ont été réalisés sur la machine d'essai triaxiale du LMT baptisée ASTREE (Figure 3-24a). Cette machine électro-hydraulique asservie est constituée de 6 vérins installés selon trois directions orthogonales deux à deux. Les deux vérins verticaux montés respectivement sur le soubassement fixe et sur la traverse supérieure mobile ont une capacité de $\pm 250\text{kN}$ et une course de $\pm 300\text{ mm}$. Les quatre vérins horizontaux ont une capacité de $\pm 100\text{kN}$ et une course de $\pm 300\text{mm}$. La machine est équipée de deux armoires de commande électro-numérique. Chaque vérin est équipé de trois voies d'asservissement. En plus des possibilités de régulation classique en effort et en position ou déformation, chaque vérin peut être asservi en force ou en déplacement par rapport à son opposé (asservissement couplé).

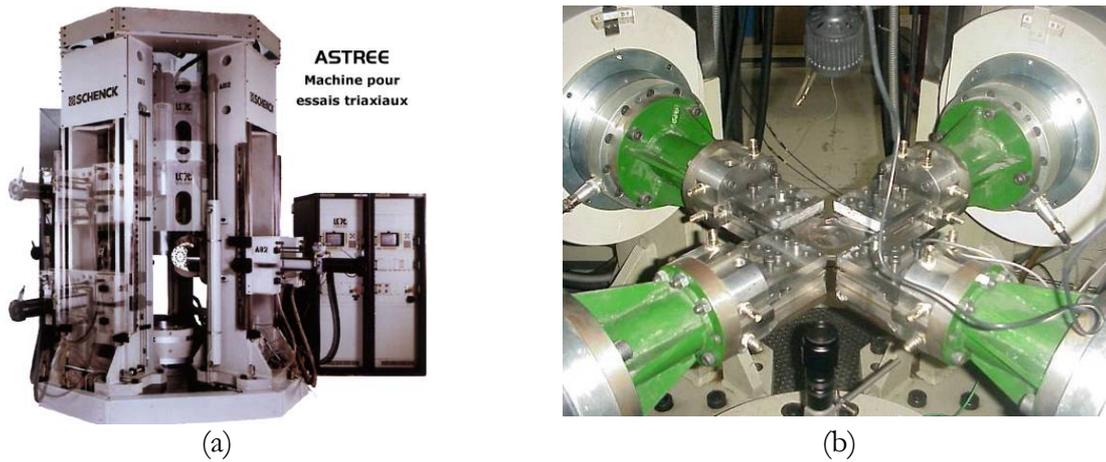


Figure 3-24. Machine triaxiale Astree (a) et éprouvette biaxiale montée entre les verins horizontaux

Nous avons utilisé les 4 vérins horizontaux de la machine pour réaliser les essais de fissuration (Figure 3-24b). Le suivi de la fissure a été effectué par imagerie à l'aide d'une caméra reliée à un PC de traitement. Trois essais ont été réalisés avec un rapport de charge nul. Pour le premier essai la contrainte T maximale atteinte est $T_{\max} = -146 \text{ MPa}$, pour le deuxième $T_{\max} = 82 \text{ MPa}$ et pour le troisième $T_{\max} = -5 \text{ MPa}$. Les deux premiers essais ont été réalisés sur une même éprouvette et le troisième sur une deuxième éprouvette.

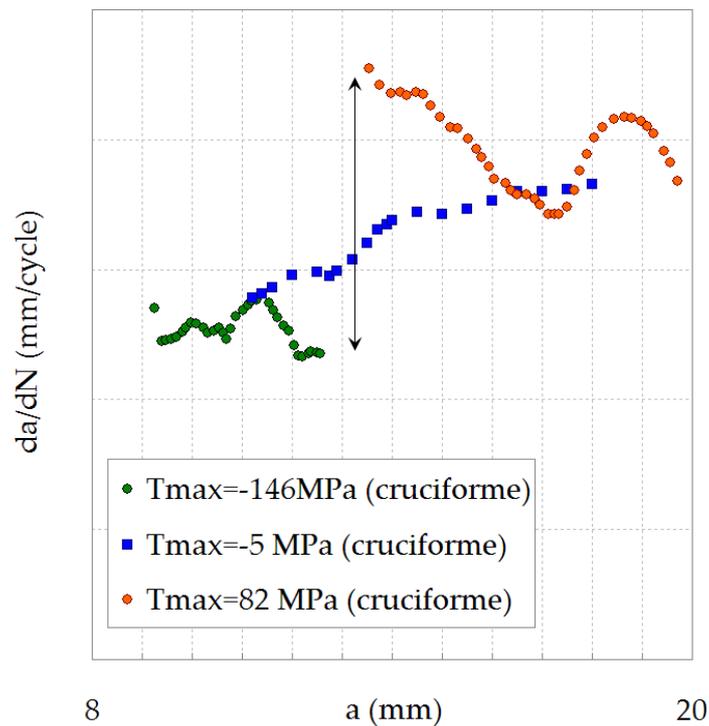


Figure 3-25. Propagation des fissures dans les éprouvettes cruciformes pour les 3 niveaux de T_{\max} testés

Les vitesses de fissuration obtenues pour les trois niveaux de T_{\max} sont quasiment identiques (Figure 3-25 et Figure 3-26). Seule une accélération transitoire a été observée lors du changement de niveau de T ($T_{\max} = -146 \text{ MPa} \rightarrow T_{\max} = 82 \text{ MPa}$) sur la deuxième éprouvette. Mais il est

difficile de conclure car les vitesses de fissuration obtenues sont peu régulières. La comparaison de ces essais avec les résultats obtenus sur une éprouvette CCT (Figure 3-26) montre que la vitesse de propagation est deux fois plus faible dans les éprouvettes cruciformes par rapport à la vitesse relevée dans les éprouvettes CCT à même rapport de charge. En effet, l'épaisseur des CCT est de 5mm par contre celle des cruciformes est de 2 mm, ce qui fait que la condition de déformations planes n'est probablement pas respectée dans ces éprouvettes ! L'effet des conditions aux limites (contraintes déformations planes) a été largement étudié dans la littérature. Il se traduit bien par une vitesse de fissuration plus faible pour les éprouvettes minces que pour les éprouvettes épaisses. Cet effet est généralement attribué à un niveau de fermeture plus élevé en contrainte plane puisque la taille de la zone plastique est plus grande dans ce cas ([Bao et McEvily 1998] et [Fleck et Newman 1988]).

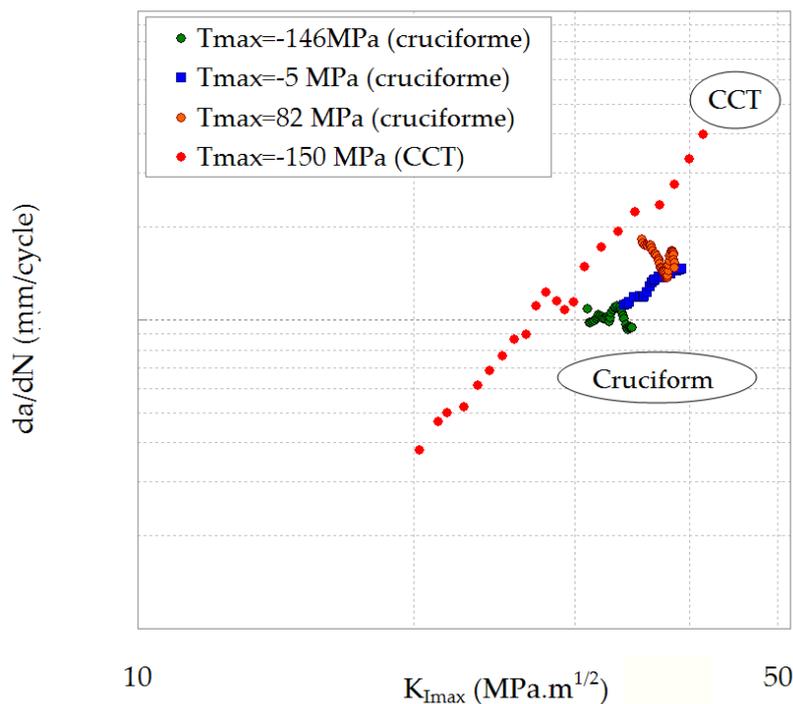


Figure 3-26. Vitesse de propagation dans les éprouvettes cruciformes pour les 3 niveaux de T_{max} testés

Lors du changement de la valeur de T ($T_{max} = -146 \text{ MPa} \rightarrow T_{max} = 82 \text{ MPa}$), appliqué au milieu du premier essai sur éprouvette cruciforme, une légère inclinaison du plan de propagation a été observée (Figure 3-27). Ce phénomène a déjà été mis en évidence par plusieurs auteurs lors d'essais de propagation réalisés sous contrainte T positive.

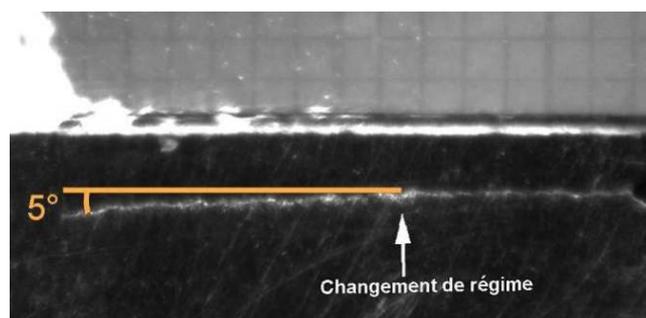


Figure 3-27. Infléchissement de la fissure observé lors du changement de niveau de biaxialité ($T = -146 \rightarrow 82 \text{ MPa}$)

Nous avons réalisé une dernière série d'essais sur des éprouvettes CT et CCT, de même épaisseur, afin de comparer la vitesse de propagation dans ces deux éprouvettes pour lesquelles les valeurs du rapport T/K_I sont très différentes (Figure 3-21). La contrainte T est négative dans une CCT et positive dans une CT. Le plan des éprouvettes ainsi que les expressions de K et de T en fonction de la longueur de la fissure sont donnés en annexe A. À noter que les éprouvettes CT ne permettent pas de tester les rapports de charge négatifs, compte tenu du montage de l'éprouvette. Nous avons réalisé 2 essais sur chaque type d'éprouvette pour deux rapports de charge différents. Le premier rapport de charge utilisé était $R=0.01$ et le second, $R=0.4$. Le suivi de la fissure a été réalisé par une caméra. Les résultats des essais sont tracés sur la Figure 3-28. On remarque que la vitesse de propagation des fissures dans les éprouvettes CCT est environ 1.5 fois plus grande que celle mesurée dans les éprouvettes CT. Ce résultat est en accord avec les résultats antérieurs trouvés dans la littérature ([Vecchio et al. 1987], [Hutar et al. 2004] et [Hutar et al. 2006]).

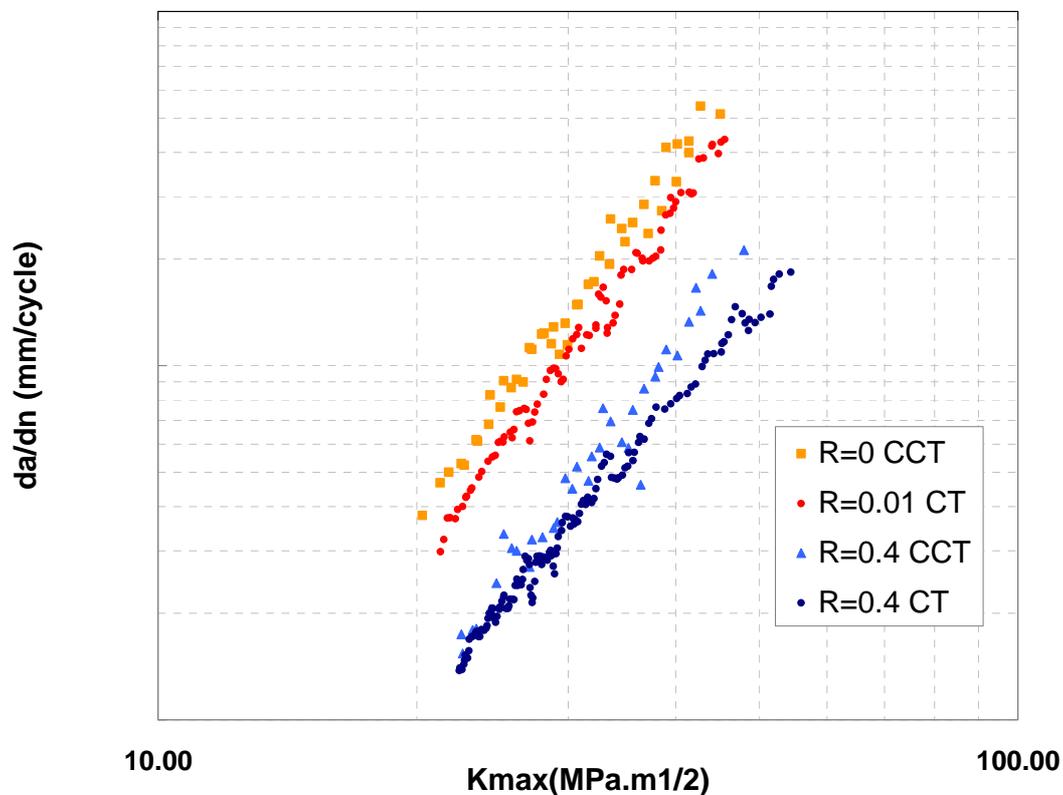


Figure 3-28. Comparaison des vitesses de propagation expérimentales des éprouvettes CT et CCT

Ces essais restent à compléter par une campagne sur éprouvettes cruciformes dans lesquelles on pourrait contrôler au mieux les valeurs des rapports T/K_I testés. Cependant, la géométrie des roues, dans lesquelles sont prélevées les éprouvettes, ne facilite pas les choses. Il faudrait plutôt conduire une étude systématique sur un acier commercial livré sous forme de tôles fortes.

En tout cas, cette étude montre que l'effet de la contrainte T peut être mis en évidence dans le matériau de l'étude, et que son importance peut être comparable à celui de surcharges périodiques proches.

3.2.4 Etude par Eléments Finis de l'effet de la contrainte T

L'étude bibliographique ainsi que les essais réalisés ont permis de montrer l'importance de la contrainte T sur la vitesse de fissuration par fatigue. Il a donc été décidé d'étudier l'effet de la contrainte T par la méthode des éléments finis, puis de modéliser et d'intégrer le rôle de T au modèle incrémental.

3.2.4.1 Effet de la longueur de la fissure sur T

Il est admis que deux fissures de longueurs différentes se propagent à la même vitesse si elles sont soumises au même facteur d'intensité des contraintes K . Prenons par exemple deux éprouvettes de Griffith avec deux fissures de tailles différentes, une fissure longue de longueur a_1 et une fissure plus courte de longueur a_2 .

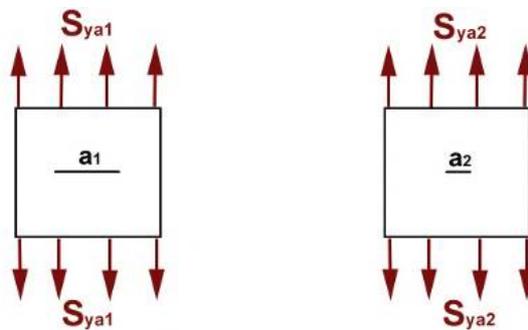


Figure 3-29. Fissures de Griffith de différentes longueurs

Pour avoir le même facteur d'intensité des contraintes dans les deux cas, compte tenu de l'expression du facteur d'intensité des contraintes dans ce cas, la contrainte appliquée à la fissure courte se calcule comme suit :

$$K_{a_2} = K_{a_1} \quad \text{si} \quad S_{y a_2} = S_{y a_1} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \quad (3-11)$$

La Figure 3-30 montre les courbes d'éroussement calculées par Eléments Finis pour un chargement uniaxial de deux éprouvettes fissurées, contenant deux fissures de tailles différentes mais soumises au même facteur d'intensité des contraintes. On remarque que pour un même facteur d'intensité des contraintes, l'éroussement plastique est plus élevé pour la fissure courte que pour la fissure longue. Ce résultat montre que la seule intensité K_I des termes au premier ordre des développements asymptotiques en pointe de fissure ne suffit pas à prévoir le comportement de la fissure. Il faut regarder comment évoluent les termes d'ordre supérieur, et le premier d'entre eux est la contrainte T . La différence entre les courbes d'éroussement s'explique par le fait que si K_I est bien le même dans les deux cas, en revanche la contrainte T n'est pas la même. En effet, avec cette géométrie, en chargement uniaxial, $T = -S_y$, et S_y n'est pas le même dans les deux éprouvettes.

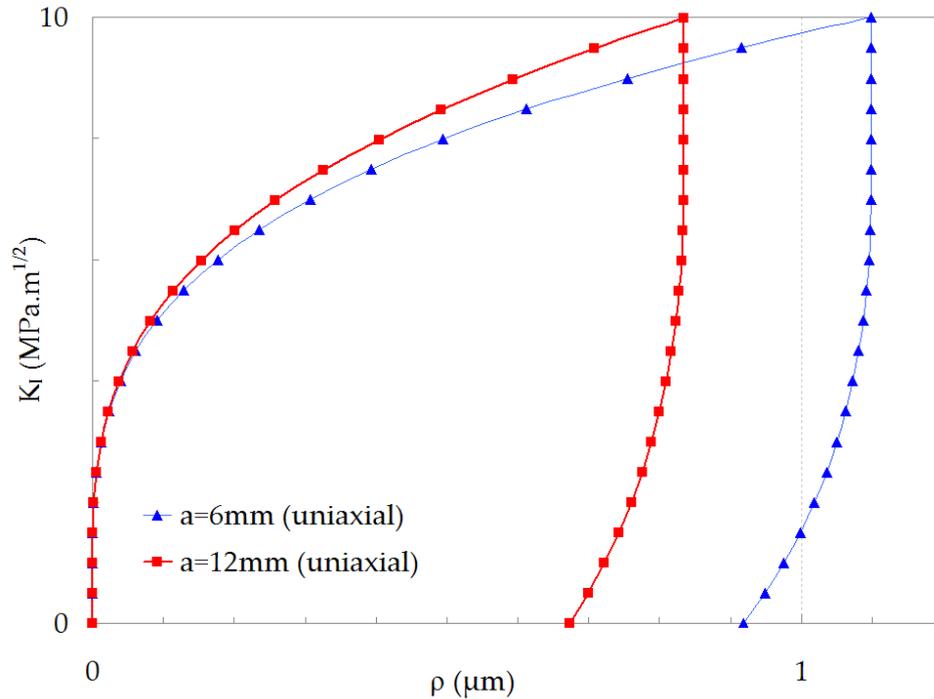


Figure 3-30. Evolution des courbes d'éroussement pour le même K_I , pour un chargement uniaxial de deux éprouvettes contenant une fissure centrale de longueur $2a$, où $a=6\text{mm}$ ou 12mm . Pour ces calculs le même raffinement de maillage a été employé en pointe de fissure ainsi que la même méthode de dépouillement. Le comportement du matériau était élasto-plastique parfait : $Re=100\text{ MPa}$, $E=200\text{ GPa}$, $\nu=0.3$

Il est admis dans la littérature que les fissures mécaniquement courtes se propagent plus vite que les fissures longues pour le même facteur d'intensité des contraintes [Miller 1987]. Comme, dans notre modèle, la vitesse de fissuration est proportionnelle à l'éroussement plastique, les résultats présentés à la Figure 3-30 sont cohérents avec cet effet dit « de fissure courte ». Cet effet de fissure courte a été initialement associé au fait que le seuil de non-propagation des fissures mécaniquement courtes est inférieur à celui prévu par la mécanique linéaire élastique de la rupture [Kitagawa et Takahashi 1976]. Le diagramme de Kitagawa et Takahashi (Figure 3-31) illustre cela en traçant l'évolution de la contrainte seuil de non-propagation en fonction de la dimension de défauts créés artificiellement à la surface d'éprouvettes de fatigue. Lorsque la dimension des défauts est petite, la contrainte au-delà de laquelle les défauts se propagent est quasiment constante et tend vers la limite d'endurance du matériau. Au contraire, quand les fissures sont plus longues, cette contrainte décroît avec la longueur des fissures. Cela correspond au seuil de non-propagation des fissures de fatigue ($K_{I\text{seuil}}$) qui est proportionnel à la racine de la dimension des défauts, ce qui explique la pente de $-1/2$ de cette partie décroissante dans un diagramme logarithmique.

$$K_I = Y S_y \sqrt{a} \Rightarrow S_{y\text{seuil}} = \frac{K_{I\text{seuil}}}{Y \sqrt{a}} \quad (3-12)$$

Le passage d'un régime à l'autre (endurance \rightarrow non propagation de fissures longues) se fait de manière continue. Ce diagramme (Figure 3-31) illustre qu'une approche à 1 seul paramètre K , n'est pas suffisante lorsque la dimension des fissures diminue.

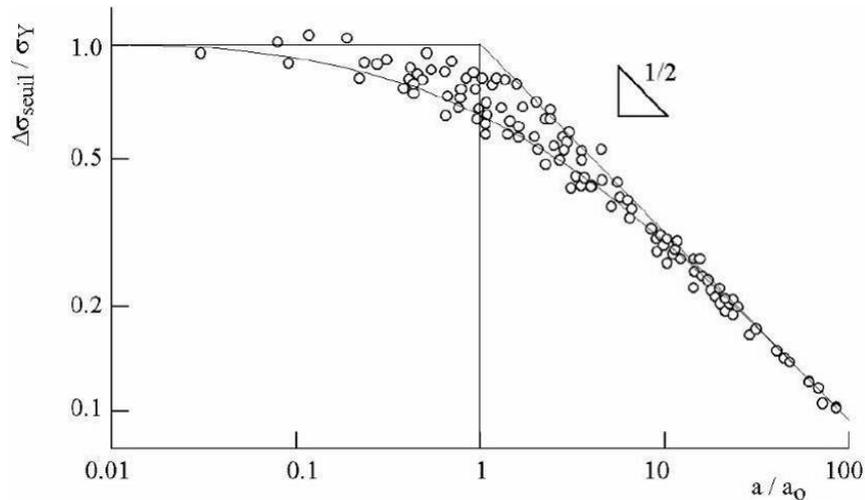


Figure 3-31. Evolution de la contrainte seuil de propagation en fonction de la longueur de fissure [Tanaka et al. 1981]

Regardons maintenant comment la contrainte T évolue avec la longueur de la fissure pour un chargement uniaxial. La Figure 3-32 montre l'évolution de la contrainte T d'une fissure de Griffith soumise à un chargement uniaxial à même facteur d'intensité des contraintes et en fonction de la longueur de la fissure (3-13) :

$$K = S_y \sqrt{\pi a} = -T \sqrt{\pi a} \Rightarrow T = \frac{-K}{\sqrt{\pi a}} \quad (3-13)$$

La contrainte T est négative et diminue rapidement en valeur absolue lorsque la longueur de la fissure augmente (3-13). Ainsi, le paramètre T , introduit pour tenir compte de la biaxialité du chargement évolue également en fonction de la longueur de la fissure.

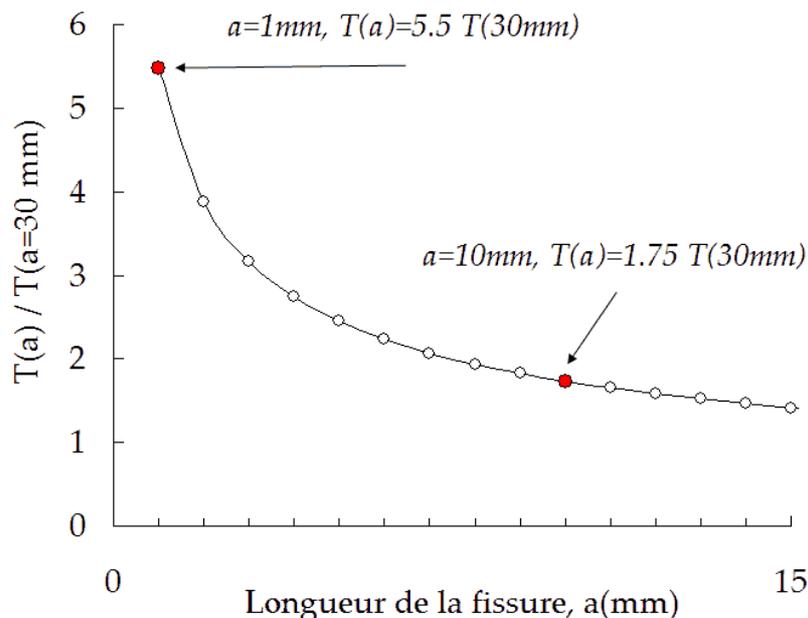


Figure 3-32. Evolution de la contrainte T pour une fissure de Griffith en chargement uniaxial en fonction de la longueur de la fissure normalisée par la valeur de T pour une longueur de $a=30$ mm et pour un même facteur d'intensité des contraintes K

Si on souhaite maintenant avoir le même K et le même T pour les deux fissures étudiées (3-14), l'éprouvette contenant la fissure courte a_2 doit être chargée de manière biaxiale, par une contrainte de traction S_x agissant parallèlement au plan de la fissure (Figure 3-33).

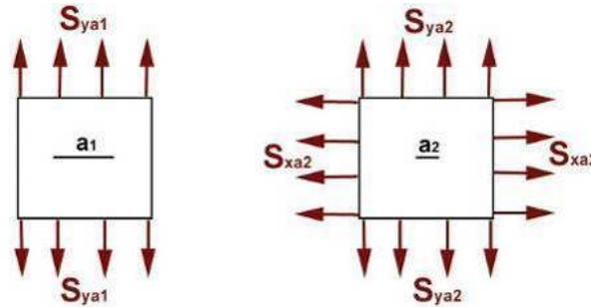


Figure 3-33. Fissures de Griffith de différentes longueurs soumises au même K et au même T

Le chargement S_x de la petite fissure est calculé comme suit :

$$T_{a2} = T_{a1} \quad \text{si} \quad S_{xa2} = S_{xa1} + S_{ya1} \left(\sqrt{\frac{a1}{a2}} - 1 \right) \quad (3-14)$$

La Figure 3-34 montre les courbes d'émoussement obtenues maintenant par éléments finis pour deux fissures de tailles différentes soumises au même facteur d'intensité des contraintes K et à la même contrainte T . On obtient bien cette fois-ci un comportement identique.

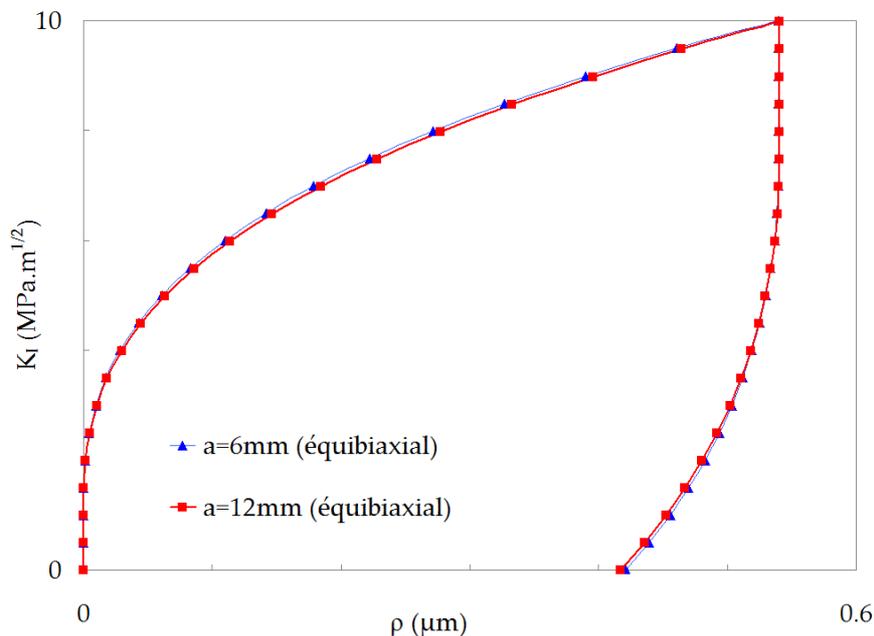


Figure 3-34. Evolution des courbes d'émoussement pour le même K_I et le même T , pour deux éprouvettes contenant une fissure centrale de longueur $2a$, où $a=6\text{mm}$ ou 12mm . Pour ces calculs le même raffinement de maillage a été employé en pointe de fissure ainsi que la même méthode de dépouillement. Le comportement du matériau était élasto-plastique parfait : $Re=100\text{MPa}$, $E=200\text{GPa}$, $\nu=0.3$

Ainsi, cette étude a permis de montrer qu'une approche à un seul paramètre K ne permet pas de caractériser complètement le comportement de la fissure (Figure 3-30). On a également montré

que deux paramètres T et K sont suffisants pour modéliser le comportement d'une fissure et appliquer le principe de similitude (Figure 3-34) : deux fissures s'émousent de la même manière si elles sont soumises au même facteur d'intensité des contraintes K et à la même contrainte T .

3.2.4.2 Sensibilité du seuil d'émoussement à T

Nous allons étudier dans ce paragraphe l'influence de la contrainte T sur le seuil d'émoussement plastique de la fissure. Cette sensibilité a été étudiée dans un premier temps en s'appuyant sur des calculs par Eléments Finis qui ont permis de tracer une surface seuil d'émoussement plastique dans un diagramme $K-T$. Une expression théorique de cette surface seuil a été ensuite écrite en appliquant un critère de plasticité comparable au critère de Von Mises mais pour la structure fissurée.

3.2.4.2.1 Calculs Eléments Finis du seuil d'émoussement et de ses évolutions avec T

Le modèle utilisé pour effectuer ces calculs est une plaque assimilable à un milieu infini contenant une fissure centrale de longueur $2a = 20\text{mm}$ et chargée de manière biaxiale, seul un quart de l'éprouvette a été modélisé du fait des symétries du problème. Les calculs ont été effectués en déformations planes.

Comme il a été montré auparavant que le comportement de la fissure était contrôlé par les deux paramètres K_I et T , diverses directions de chargement dans le plan ($K_I - T$) ont été étudiées. Dans un premier temps seuls des chargements proportionnels ont été appliqués (Figure 3-35a). Pour chaque direction explorée, les contraintes « à l'infini » S_x et S_y ont été calculées en fonction de T et de K_I à partir des relations (3-15).

$$S_y = \frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} \quad \text{et} \quad S_x = T + \frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} \quad (3-15)$$

Pour chaque cas, l'émoussement plastique a été calculé par éléments finis, puis tracé en fonction de la contrainte appliquée S_y (Figure 3-35b). Un seuil de plasticité conventionnel a été défini, ρ_{seuil} , qui nous a permis de déterminer le niveau de chargement au-delà duquel l'émoussement plastique est supposé devenir non négligeable.

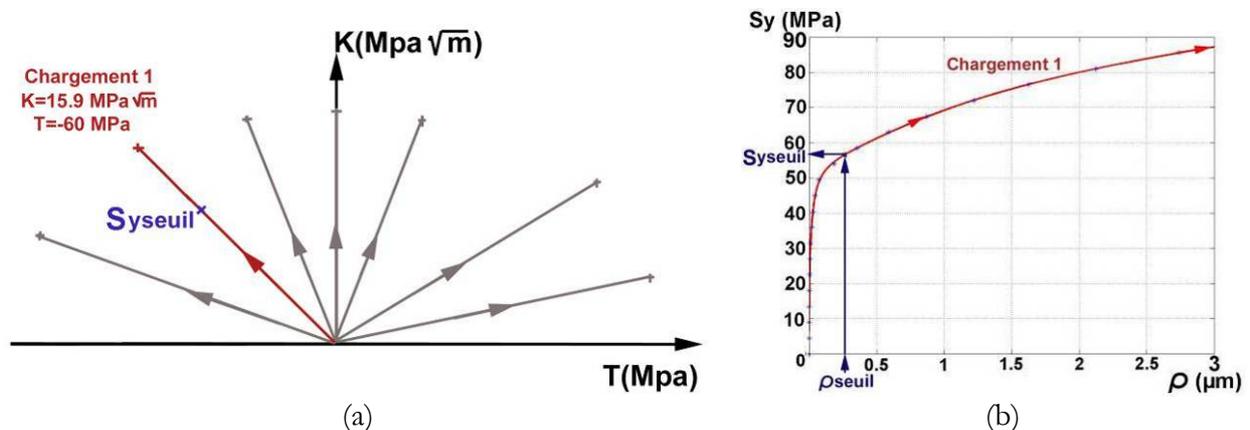


Figure 3-35. Direction de chargement dans le plan $K-T$ (a) et détermination du seuil (b)

d'émoussement plastique pour un chargement donné (b)

La Figure 3-36 montre les seuils de plasticité calculés suivant les différentes directions de chargement. Nous constatons que ce seuil de plasticité est sensible au niveau de biaxialité T . Une valeur maximale de K_{Iseuil} est obtenue pour une valeur de T supérieure à zéro, puis lorsque T diminue, le seuil diminue également. Cette surface a été tracée pour plusieurs valeurs du critères ρ_{seuil} , l'allure des courbes obtenues est identique.

On peut également faire l'hypothèse, cohérente avec les hypothèses de notre modèle, que la fissure ne se propage pas si l'émoussement plastique est nul. Dans ce cas on peut se donner le critère ρ_{seuil} en fonction du seuil de non-propagation des fissures de fatigue K_{seuil} déterminé expérimentalement pour une fissure longue (T proche de zéro). La courbe d'émoussement calculée pour $T = 0$ permet alors de déduire la valeur de ρ_{seuil} de celle de K_{seuil} (Figure 3-35b).

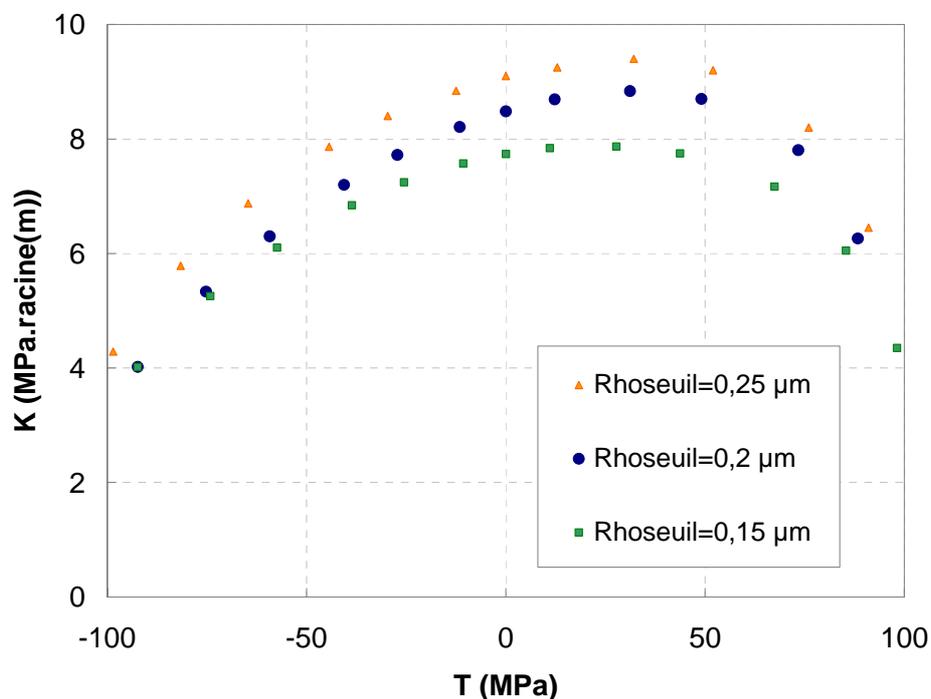


Figure 3-36. Seuil d'émoussement plastique calculé par Eléments Finis, déterminé pour 3 valeurs de ρ_{seuil} : 0.15, 0.2 et 0.25 μm

Pour faciliter la lecture, nous avons tracé sur la Figure 3-37 le chargement appliqué à la fissure dans un diagramme $K-T$. Le quadrant positif du diagramme correspond à un chargement S_x supérieur à S_y ce qui n'est jamais le cas dans les roues de train. Dans ce quadrant la fissure risque de bifurquer. Dans la toile des roues, les fissures sont soumises à des contraintes S_x de même signe que S_y mais plus faibles. On se trouve donc entre l'axe des ordonnées du diagramme $K-T$ et l'axe $S_x = 0$.

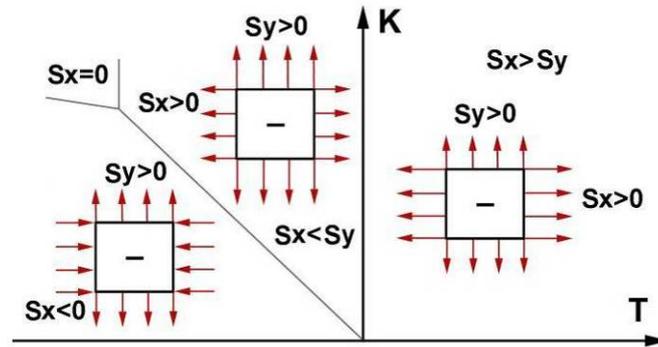


Figure 3-37. Chargement de l'éprouvette dans le plan K-T

3.2.4.2.2 Expression théorique de la surface seuil d'émoussement

Dans cette partie, nous proposons une expression théorique de la surface seuil d'émoussement plastique. Cette expression est basée sur une extension du critère de Von-Mises à notre problème. On rappelle rapidement comment est établi le critère de Von Mises pour un élément de volume, avant d'appliquer la même démarche à la structure fissurée.

Pour un élément de volume soumis à une déformation élastique, la densité d'énergie de déformation se calcule comme suit :

$$U = \frac{1}{2} Tr(\sigma \cdot \varepsilon) \quad (3-16)$$

Sachant que la plasticité est insensible à la pression hydrostatique et se produit sans changement de volume, on introduit les déviateurs σ' et ε' de la contrainte et de la déformation :

$$\sigma' = \sigma - \frac{1}{3} Tr(\sigma) I \quad \text{et} \quad \varepsilon' = \varepsilon - \frac{1}{3} Tr(\varepsilon) I \quad (3-17)$$

En remplaçant les expressions de σ et ε de l'équation (3-17) dans l'équation (3-16) nous obtenons :

$$U = \frac{1}{2} Tr \left[\sigma' + \frac{Tr[\sigma]}{3} I \right] \cdot \left[\varepsilon' + \frac{Tr[\varepsilon]}{3} I \right] \quad (3-18)$$

Le développement de (3-18) permet de simplifier l'expression de la densité d'énergie de déformation élastique :

$$U = \frac{1}{2} Tr[\sigma' \cdot \varepsilon'] + \underbrace{\frac{1}{2} Tr[\sigma'] \cdot \left[\frac{Tr[\varepsilon]}{3} I \right]}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2} Tr \left[\frac{Tr[\sigma]}{3} I \right] \cdot [\varepsilon']}_{=0} + \frac{1}{2} Tr \left[\frac{Tr[\sigma]}{3} I \right] \cdot \left[\frac{Tr[\varepsilon]}{3} I \right] \quad (3-19)$$

La densité d'énergie de déformation élastique s'exprime donc comme la somme d'une énergie élastique de changement de volume et d'une énergie élastique de cisaillement :

$$U = \frac{1}{2} Tr[\sigma' . \varepsilon'] + \frac{1}{2} Tr[\sigma] . Tr[\varepsilon] \quad (3-20)$$

Le critère de Von Mises postule que le seuil de plasticité est atteint pour une énergie élastique de cisaillement donnée U_0 . On identifie la valeur de U_0 en traction simple uniaxiale, ce qui permet d'en déduire l'expression du critère de Von Mises en fonction de la limite d'élasticité du matériau. Enfin, le matériau étant considéré comme isotrope on sait exprimer la déformation élastique de cisaillement en fonction de la contrainte de cisaillement et du module de cisaillement.

$$U_0 = \frac{1}{2} Tr[\sigma' . \varepsilon'] \quad (3-21)$$

On applique cette même démarche à la zone qui entoure l'extrémité de la fissure. On suppose qu'une déformation élastique est appliquée à la structure fissurée, on peut donc employer les champs asymptotiques de la mécanique de la rupture (3-22). On se limite au premier ordre, et on tient compte de la contrainte T , l'expression asymptotique des champs de déplacements est alors :

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{\kappa-1}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{T}{8\mu} (\kappa+1)r \cos \theta + O\left(\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \\ u_y &= \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{\kappa+1}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) - \frac{T}{8\mu} (3-\kappa)r \sin \theta + O\left(\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \\ u_z &= 0 \end{aligned} \quad (3-22)$$

Nous écrivons ensuite les expressions du champ de déplacement en coordonnées cylindriques :

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \quad (3-23)$$

Le champ de déformation est ensuite calculé de la façon suivante :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} & \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \varepsilon_{\theta r} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} & \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \\ \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) & \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) & \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3-24)$$

Et le champ de contrainte s'en déduit par la loi de Hooke :

$$\sigma = \lambda Tr \varepsilon . I + 2\mu . \varepsilon \quad (3-25)$$

On en déduit les déviateurs de la contrainte et de la déformation, ce qui permet de calculer l'énergie élastique de cisaillement totale dans un domaine circulaire de rayon d autour de l'extrémité de la fissure (Figure 3-38) :

$$U = \int_{r=0}^{r=d} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{2} \text{Tr} [\sigma' \cdot \varepsilon'] \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \quad (3-26)$$

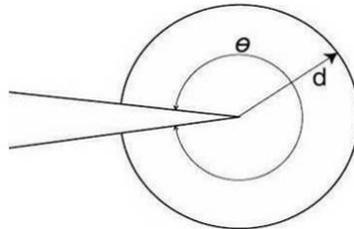


Figure 3-38. Domaine d'intégration de l'énergie élastique de cisaillement autour de la fissure

On obtient après calculs l'expression suivante de l'énergie élastique de cisaillement :

$$U = \frac{d}{360\pi E} (120d\pi^2 T^2 (1 + \nu^3) + 64KT \sqrt{2\pi d} (1 - 9\nu + 10\nu^2) + 15\pi K^2 (7 - 9\nu + 16\nu^3)) \quad (3-27)$$

Selon cette expression, les courbes d'iso-énergie élastique de cisaillement sont des ellipses dans un diagramme $(K - T)$ (Figure 3-39).

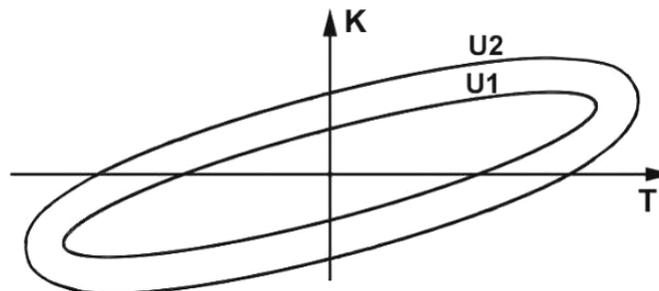


Figure 3-39. Iso énergie élastique de cisaillement dans un domaine de rayon d autour de l'extrémité de la fissure pour une fissure chargée en mode I et soumise à une contrainte T non nulle

Pour identifier la valeur de l'énergie élastique de cisaillement au seuil de plasticité, on peut procéder de deux manières différentes. Comme les variables du problème sont K et T , on peut soit déterminer le seuil de plasticité pour $K = 0$, soit pour $T = 0$.

Commençons par la première approche. On suppose que l'énergie élastique de cisaillement au seuil de plasticité pour un point (K_I, T) quelconque seuil est égale à l'énergie élastique de cisaillement pour une direction de chargement $(K_I = 0, T_e)$ lorsque la limite d'élasticité est atteinte. La direction $(K_I = 0, T_e)$ correspond au cas d'une fissure chargée uniquement dans la direction parallèle à son plan (Figure 3-40). Dans ce cas, la fissure ne joue pas le rôle de concentrateur de contrainte et la plaque se comporte comme une éprouvette travaillant en traction simple.

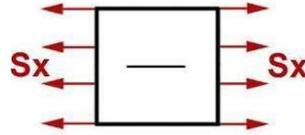


Figure 3-40. Chargement de l'éprouvette dans le plan K-T

Pour la configuration de la Figure 3-40, on peut écrire :

$$S_y = K = 0 \quad \text{et} \quad S_x = T \quad (3-28)$$

Puisqu'on est en déformations planes, la limite d'élasticité est atteinte pour :

$$\sigma_{eq} = R_e \Rightarrow S_x = T_e = \pm \frac{R_e}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \quad (3-29)$$

Cette valeur de T représente l'intersection de la surface seuil avec l'axe des abscisses (Figure 3-39). Pour le comportement de matériau introduit dans les calculs ($R_e = 100\text{MPa}$ et $\nu = 0.3$) on trouve $T_e = 112.5\text{MPa}$. Le critère de plasticité s'écrit donc comme suit :

$$\begin{aligned} U(K, T) < U(0, T_e) &\Rightarrow \text{élasticité} \\ U(K, T) = U(0, T_e) &\Rightarrow \text{seuil de plasticité} \end{aligned} \quad (3-30)$$

En remplaçant $U(K, T)$ par son expression (3-27) on en déduit l'expression du seuil de plasticité pour la structure fissurée :

$$\frac{T^2(\nu^2 - \nu + 1)}{\text{Re}^2} + \frac{8\sqrt{2}KT(10\nu^2 - 10\nu + 1)}{15\pi^{1.5} \text{Re}^2 \sqrt{d}} + \frac{K^2(16\nu^2 - 16\nu + 7)}{8\pi d \text{Re}^2} = 1 \quad (3-31)$$

Ce seuil dépend de la valeur choisie pour la dimension du domaine d'intégration d (Figure 3-41a). En choisissant pour d , la dimension du domaine ($d = 1\text{mm}$) qui a été utilisée pour dépouiller les calculs par éléments finis et extraire les valeurs de l'émoussement plastique ϱ , on peut directement comparer les résultats des calculs par éléments finis et la surface seuil proposée (3-31). L'expression proposée pour la surface seuil reproduit fidèlement les résultats des calculs par EF (Figure 3-41b). Cette surface seuil d'émoussement plastique constitue un domaine d'élasticité pour la structure fissurée, si le chargement appliqué reste à l'intérieur de ce domaine, le comportement de la fissure reste élastique. Un chargement au-delà du seuil provoque un émoussement plastique des lèvres et donc une propagation de la fissure.

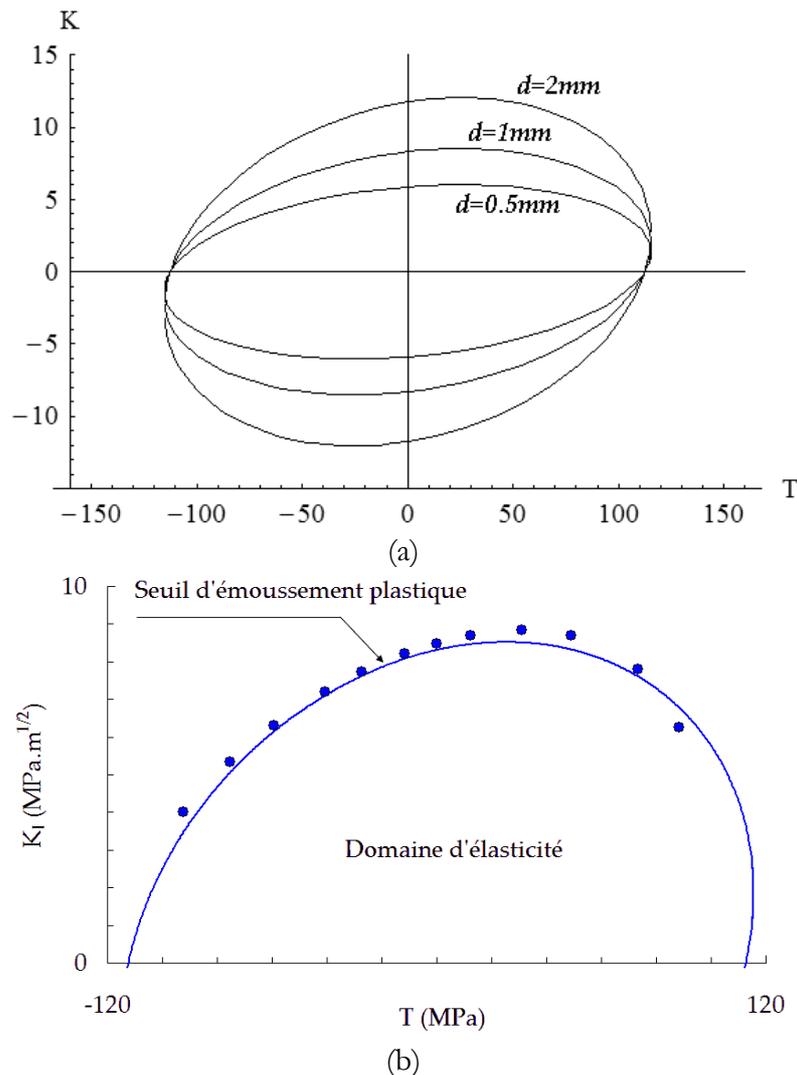


Figure 3-41. (a) Surface seuil de plasticité, (a) pour différentes valeurs du domaine d . (b) comparaison avec les résultats de calculs par éléments finis. Les points correspondent aux calculs EF et la courbe à l'expression proposée

La surface calculée par éléments finis dépend du choix du critère Q_{seuil} . Par ailleurs, la surface critère dépend de la dimension d du domaine d'intégration. On a déjà vu qu'on peut choisir Q_{seuil} en fonction du seuil de non propagation des fissures longues (K_{Ith}) avec l'hypothèse qu'à l'intérieur du domaine d'élasticité la fissure ne se propage pas. On peut alors calculer la dimension du domaine d qui permet d'obtenir un bon accord entre la surface critère proposée et les résultats des calculs par éléments finis. Le point d'intersection de la surface seuil avec l'axe des ordonnées se calcule à partir de l'équation (3-31) :

$$T = 0 \Rightarrow K_I = R_e \sqrt{\pi d} \frac{1}{\sqrt{(1 - 2\nu + 2\nu^2) - 1/8}} \quad (3-32)$$

R_e et K_I étant fixés on en déduit la valeur de d .

Cette surface seuil d'éroulement plastique (ou de non-propagation) présente une ressemblance avec le FAD (Failure Assessment Diagram) tracé dans le plan $K-T$. Ce diagramme est utilisé en rupture fragile pour définir la nocivité d'un défaut dans certaines applications, il définit le seuil de

fissuration instable. Dans la Figure 3-42 nous présentons un exemple de FAD dans un diagramme $K-T$, le facteur d'intensité des contraintes ainsi que la contrainte T ont été normalisés par rapport à leurs valeurs critiques.

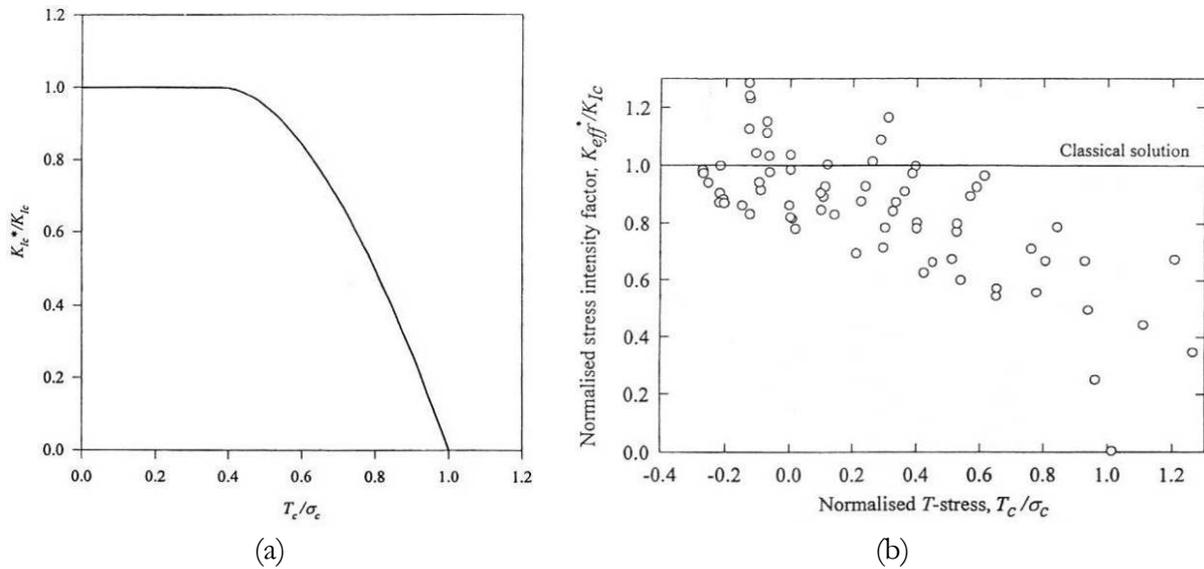


Figure 3-42. En (a), exemple du FAD tracé dans un diagramme $K-T$ et en (b) quelques résultats expérimentaux du seuil [Ayatollahi et al. 2002]

La surface seuil d'érousement plastique proposée peut également être comparée au diagramme de Kitagawa. En effet, on peut choisir comme intersection avec l'axe des ordonnées le seuil de non-propagation des fissures longues, et comme intersection avec l'axe $K_I = 0$, la valeur de T_c calculée à partir de la limite d'endurance du matériau. Il est bien évident que la limite d'élasticité du matériau n'est pas égale à la limite d'endurance. On peut cependant parfois comparer la limite d'endurance du matériau à son seuil de micro-plasticité mesuré, par exemple, à l'aide de courbes d'auto-échauffement [Poncelet et al. 2006]. On verra plus loin ce qui est obtenu avec un modèle de comportement du matériau réaliste. L'hypothèse qui est faite ici a surtout pour but d'illustrer la relation entre la contrainte T et l'effet de fissure mécaniquement courte. En tout cas, cette hypothèse permet de calculer la valeur de d , à partir des valeurs de K_{Ith} et de σ_D et de l'équation (3-32) :

$$d = \frac{(1 - 2\nu + 2\nu^2) - 1/8 \left(\frac{K_{Ith}}{\sigma_D} \right)^2}{\pi} \approx 0.145 \left(\frac{K_{Ith}}{\sigma_D} \right)^2 \quad (3-33)$$

Par exemple, avec $\sigma_D = 100 \text{ MPa}$ et $K_{Ith} = 8.3 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ (Figure 3-41a), on trouve une valeur de d égale à 1 mm. Une fois la valeur de d fixée, on peut tracer le critère dans un diagramme de Kitagawa. Pour cela, il suffit de calculer les couples de points (S_y, a) correspondant à chaque point (K, T) du diagramme. Par exemple, pour une fissure de Griffith :

$$T = -S_y \Rightarrow S_y = -T \quad \text{et} \quad K_I = S_y \sqrt{\pi a} \Rightarrow a = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{-T} \right)^2 \quad (3-34)$$

Avec ces hypothèses, le seuil de plasticité, calculé avec notre critère, peut être tracé dans un diagramme $S_y - a$ (Figure 3-43a). La forme du critère est tout à fait comparable au modèle de

Kitagawa et produit une transition des fissures longues aux fissures mécaniquement courtes. La prise en compte de T doit donc permettre de modéliser à la fois l'effet de chargements biaxiaux et l'effet de fissure mécaniquement courte.

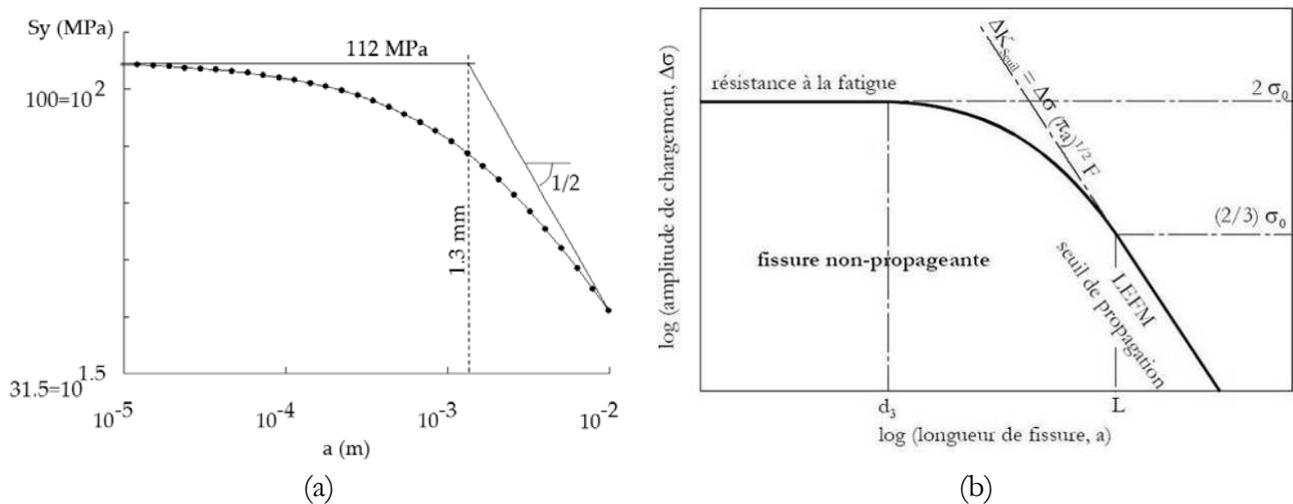
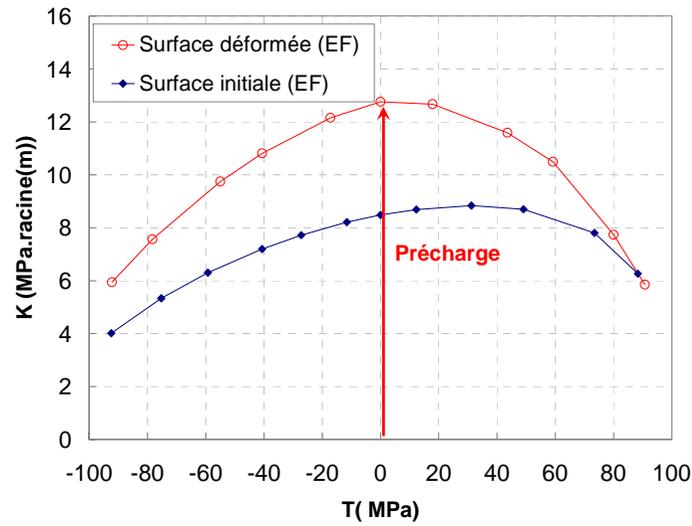


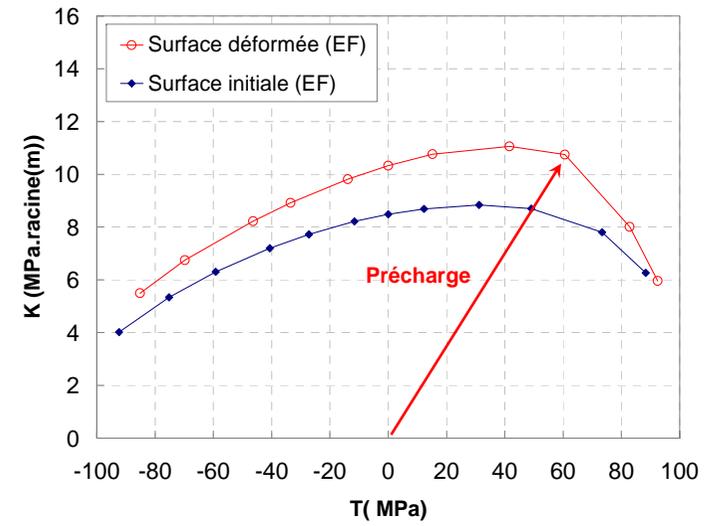
Figure 3-43. En (a), critère de plasticité proposé tracé pour une fissure de Griffith et un chargement uniaxial dans un diagramme de Kitagawa. En (b) diagramme de [Kitagawa et Takahashi 1976]

3.2.4.2.3 Evolution de la surface seuil d'érousement

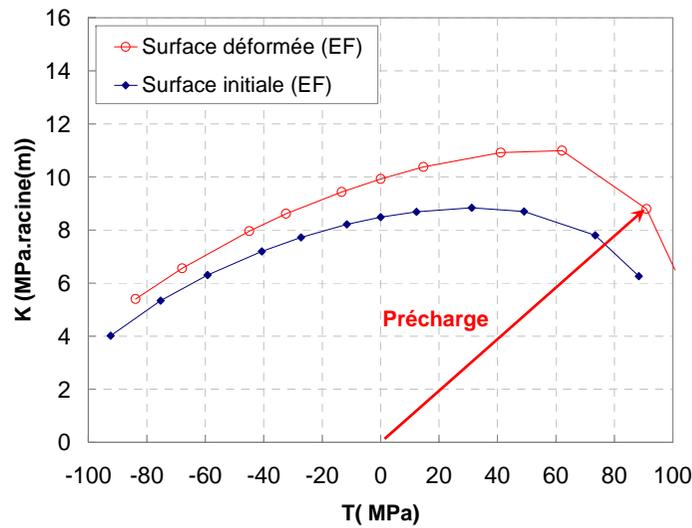
Nous avons donc trouvé que le seuil de plasticité pour la fissure dépend non seulement de K_I mais aussi de T . La méthode de dépouillement des calculs par Eléments Finis permet de tracer le seuil de plasticité en fonction du chargement appliqué. Il est donc possible d'étudier, par éléments finis, l'évolution de cette surface seuil en fonction du chargement appliqué. La surface seuil peut changer de taille, de position et même se distordre. Il serait donc utile d'identifier les variables internes définissant la surface seuil et leur évolution au cours de la sollicitation. La Figure 3-44a, b et c montre les premiers calculs qui ont été réalisés pour suivre l'évolution de la surface seuil après quelques précharges simples. Pour établir ces surfaces, la démarche suivante a été employée. On simule par éléments finis la précharge, puis une décharge partielle. Puis on applique des chargements selon diverses directions du plan $K-T$. Pour chaque direction explorée on détermine à quel moment la variation de l'érousement plastique dépasse ϱ_{seuil} . En première approximation, on pourrait représenter l'effet de la précharge par un simple déplacement du domaine d'élasticité dans le diagramme $K-T$. Sur la Figure 3-44d nous avons tracé la surface seuil obtenue après une précharge complexe. La précharge a consisté à appliquer un chargement radial suivi d'un chargement tangent à la surface seuil initiale au moment où cette dernière est atteinte. La surface seuil obtenue semble se déplacer plutôt de manière orthogonale à la surface seuil initiale que selon le chargement appliqué. Tout ceci, laisse penser qu'on pourra sans doute associer un modèle de plasticité avec surface seuil et variables internes à ce problème. Cependant, une telle démarche demande beaucoup d'études complémentaires et n'a pas pu être mise en œuvre dans le cadre de cette thèse. En effet, il faudrait pour cela se donner un cadre thermodynamique, identifier la variable à associer à la contrainte T , sans oublier que nous avons deux surfaces seuils de plasticité à étudier, l'une cyclique et l'autre monotone.



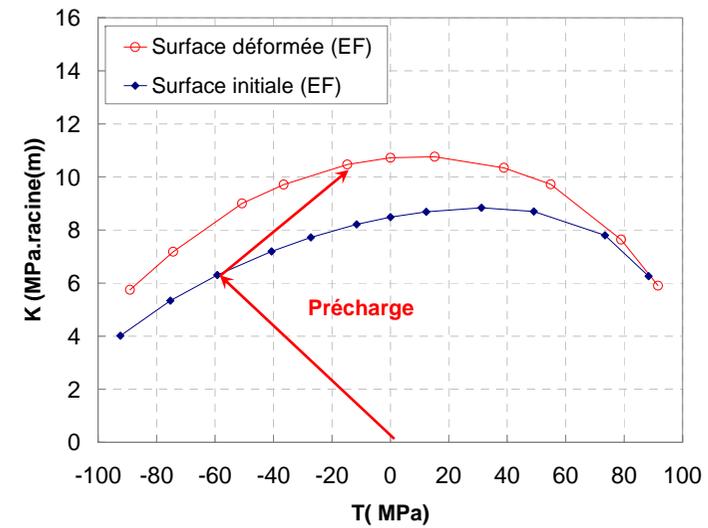
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 3-44. Evolution de la surface seuil après précharges

Nous avons donc choisi une solution plus simple qui consiste à déterminer l'évolution des 8 paramètres matériaux de la loi d'érouissage établie au chapitre précédent en fonction du rapport T/K .

Naturellement cette méthode limite l'application du modèle aux chargements proportionnels. En pratique, les composantes radiale et circonférentielle de la contrainte, relevées lors des essais in-situ sur roue instrumentée, sont quasiment proportionnelles (Figure 3-16). Néanmoins lorsque la fissure se propage, le rapport T/K évolue du fait de la variation du facteur d'intensité des contraintes avec la longueur de la fissure (Figure 3-45). Une évolution rapide du rapport T/K avec l'avancée de la fissure reviendrait à faire du chargement non proportionnel. Dans le cas où l'évolution de T/K est lente, la surface seuil a le temps de se restaurer au fur et à mesure de l'extension de la fissure. Or, comme dans la pratique l'évolution du rapport T/K avec la longueur de la fissure est lente devant la vitesse de variation de ρ , l'erreur induite par l'hypothèse d'un chargement proportionnel doit rester faible.

La Figure 3-45 montre ainsi l'évolution du rapport T/K en fonction de la longueur de la fissure pour quelques éprouvettes normalisées.

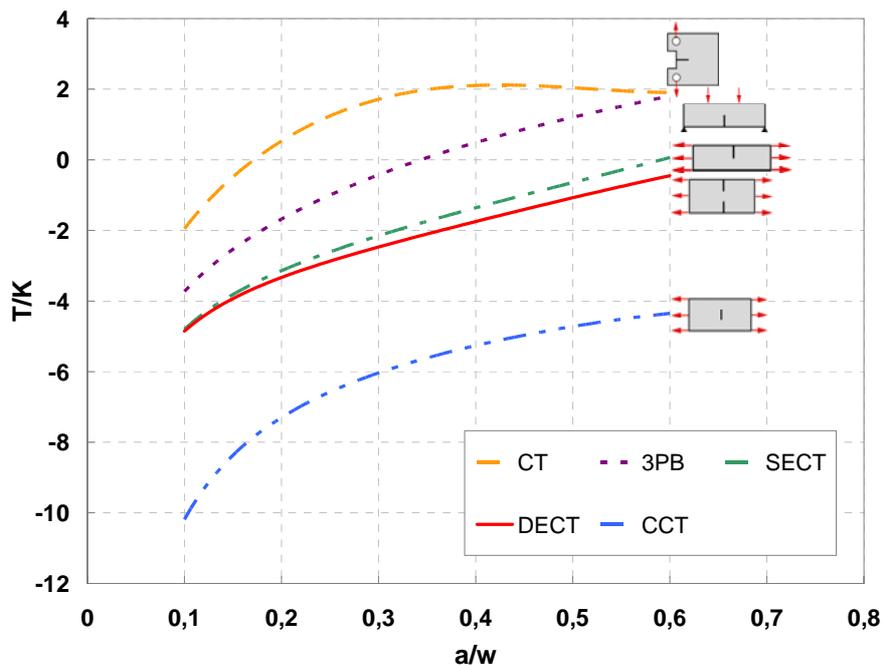


Figure 3-45. Evolution du rapport T/K en fonction de la longueur de la fissure pour quelques éprouvettes normalisées

3.2.5 Identification du modèle

La démarche suivante a été suivie pour identifier l'effet de la contrainte T . Nous disposons d'une méthode pour identifier automatiquement les 8 paramètres de la loi d'érouissage plastique en s'appuyant sur les calculs par éléments finis (Chapitre II). La méthode a été appliquée pour divers rapport T/K . Comme nous avons choisi, pour le modèle, des équations dont on pouvait identifier les paramètres par la méthode des moindres carrés, nous avons un jeu unique de paramètres pour chaque rapport T/K . Il est donc possible d'interpoler les résultats obtenus. Sur

la Figure 3-46, nous avons tracé l'évolution des paramètres d'érousement obtenus par Eléments Finis en fonction du rapport T/K . Nous avons choisi des polynômes du second degré pour interpoler les paramètres en fonction du T/K . Les rapports T/K étudiés ont été pris entre des bornes, correspondant aux rapports T/K que nous sommes susceptibles de rencontrer lors de campagnes d'essais (Figure 3-45) et pour une fissure semi-elliptique se propageant à la surface d'une roue.

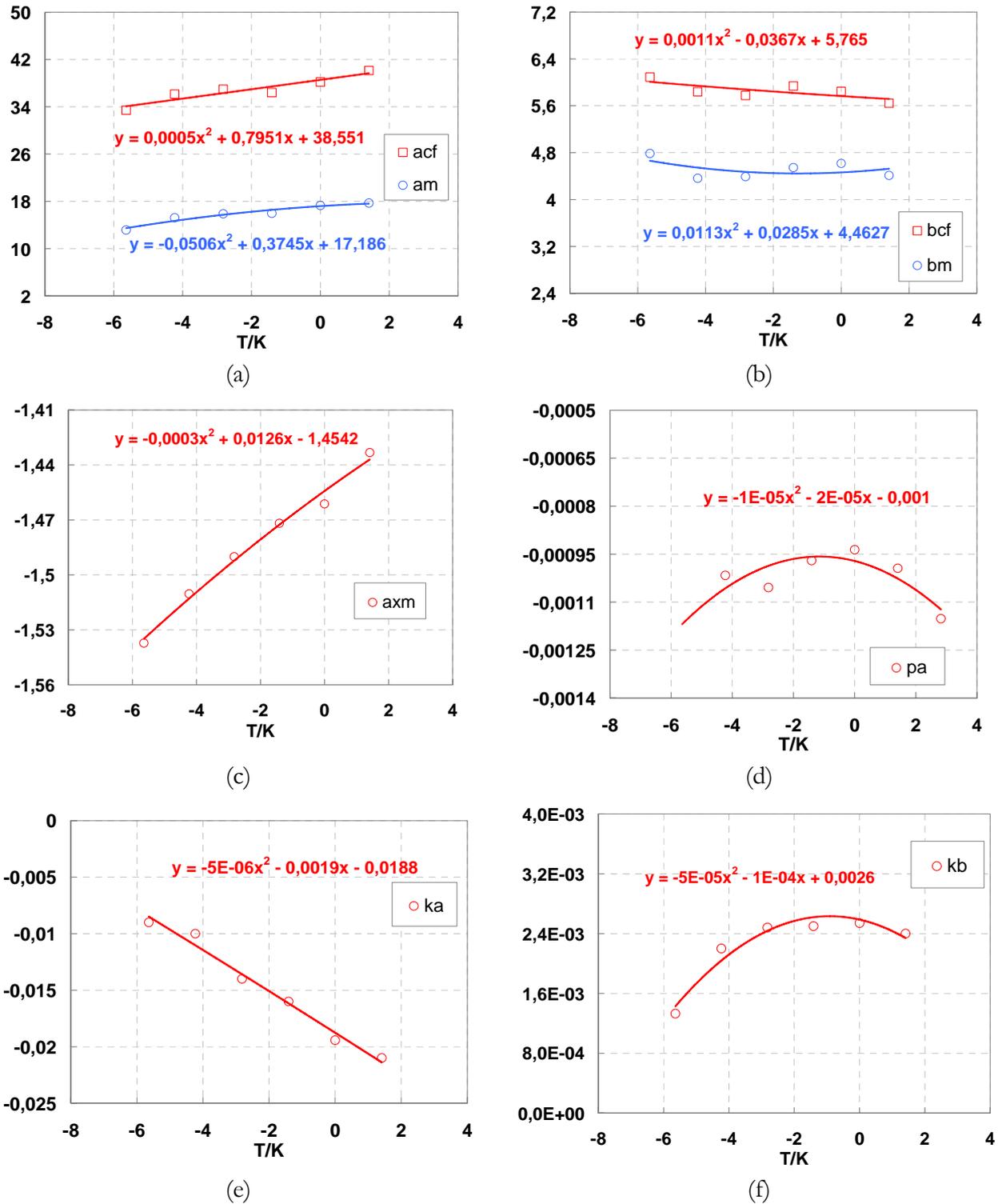


Figure 3-46. Evolution des paramètres du modèle incrémental avec la direction de propagation T/K

On peut noter que certains paramètres évoluent très significativement avec la contrainte T , tandis que d'autres varient très peu. Ainsi le paramètre p_a , qui pilote l'évolution de la taille de la zone plastique monotone avec la longueur de la fissure, varie très peu avec le rapport T/K . De même, la contrainte T ne joue pas beaucoup sur les paramètres k_a et k_b qui pilotent l'évolution du point de contact avec l'avancée de la fissure. En revanche le rapport T/K joue beaucoup sur le paramètre a_{sm} qui contrôle l'évolution du point de contact en fonction de l'érousement plastique.

Enfin, les paramètres a_m et b_m contrôlent l'évolution de la zone plastique monotone. On peut les utiliser pour recalculer, pour chaque valeur du rapport (T/K), la courbe d'érousement plastique lors d'un chargement dans une direction du plan $K-T$ donnée (Figure 3-35) et utiliser un critère ρ_{seuil} pour déterminer la valeur du seuil d'érousement plastique :

$$K_{1th} = a_m \sqrt{\rho_{seuil}} + b_m \tag{3-35}$$

On note (Figure 3-47) que l'allure de la surface seuil déterminée de cette manière en utilisant la loi de comportement de l'acier à roue, reste encore en bon accord avec l'expression théorique de la surface seuil proposée (§ 3.2.4.2.2). Comme précédemment la dimension du domaine d'élasticité dépend du choix de ρ_{seuil} . Pour chaque ρ_{seuil} choisi on en déduit une valeur de K_{1th} . Pour se donner quelques ordres de grandeurs, si l'on se donne des valeurs de ρ_{seuil} égales à 0, 0.05 et 0.15 μm , les valeurs de K_{1th} correspondantes sont, respectivement, de 4.5, 8.9 et 11.8 $\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$. Si l'on se fixe une valeur de d égale à 1 mm, on peut alors calculer l'intersection de la surface théorique avec l'axe des T et en déduire un ordre de grandeur de la « limite d'endurance » correspondant à chaque valeur choisie pour ρ_{seuil} (3-33), soit ici, respectivement, 60, 107 et 142 MPa. On constate que les valeurs obtenues ici sont bien inférieures à la limite d'élasticité entrée dans la loi de comportement du matériau. Réciproquement si l'on se fixe la « limite d'endurance » à une valeur de 200 MPa, on trouve pour d , les valeurs suivantes, selon le choix de ρ_{seuil} : 74, 287 et 504 μm .

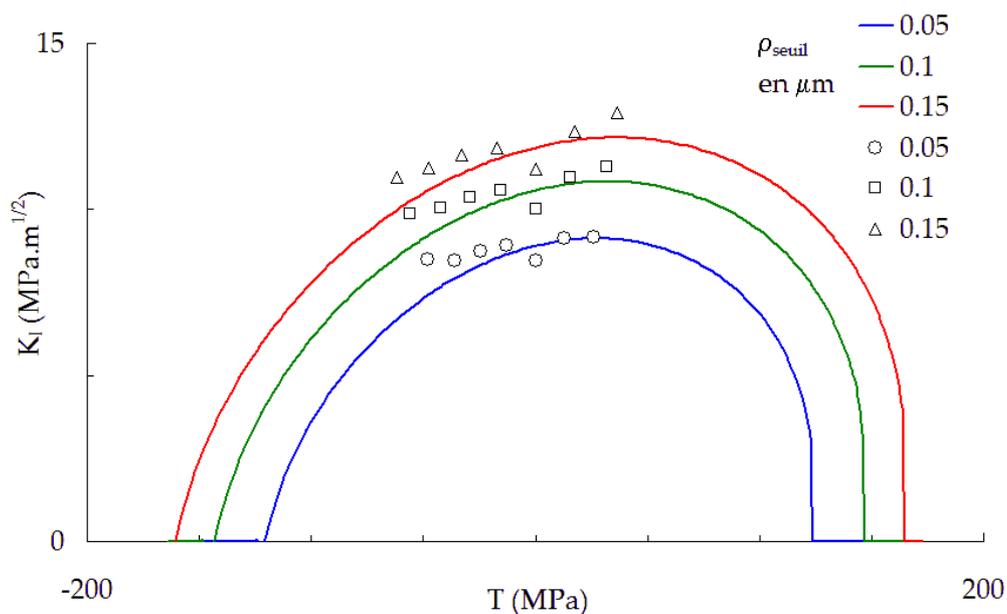


Figure 3-47. Surface seuil d'érousement plastique pour 3 niveaux du seuil

L'intégration numérique de l'effet de la biaxialité dans le modèle est très facile, il suffit d'entrer dans le modèle la dépendance des paramètres de la loi d'érousement au rapport T/K et de déterminer le rapport T/K en fonction de la longueur de la fissure a et du chargement appliqué.

3.2.6 Confrontations essais/simulations

Avant de présenter les confrontations entre les essais et les prédictions du modèle, nous allons montrer les directions de chargement, dans un diagramme $K-T$, pour les différents essais réalisés. Commençons par l'éprouvette cruciforme, nous rappelons que nous avons réalisé trois essais sur deux éprouvettes. Pour le premier essai la contrainte T maximale atteinte est $T_{\max} = -5 \text{ MPa}$, pour le deuxième $T_{\max} = -146 \text{ MPa}$ et pour le troisième $T_{\max} = 82 \text{ MPa}$. Le premier essai a été réalisé sur une première éprouvette et les deux autres sur une deuxième. La Figure 3-48 montre les directions de chargement de chaque éprouvette au début et à la fin de chaque essai.

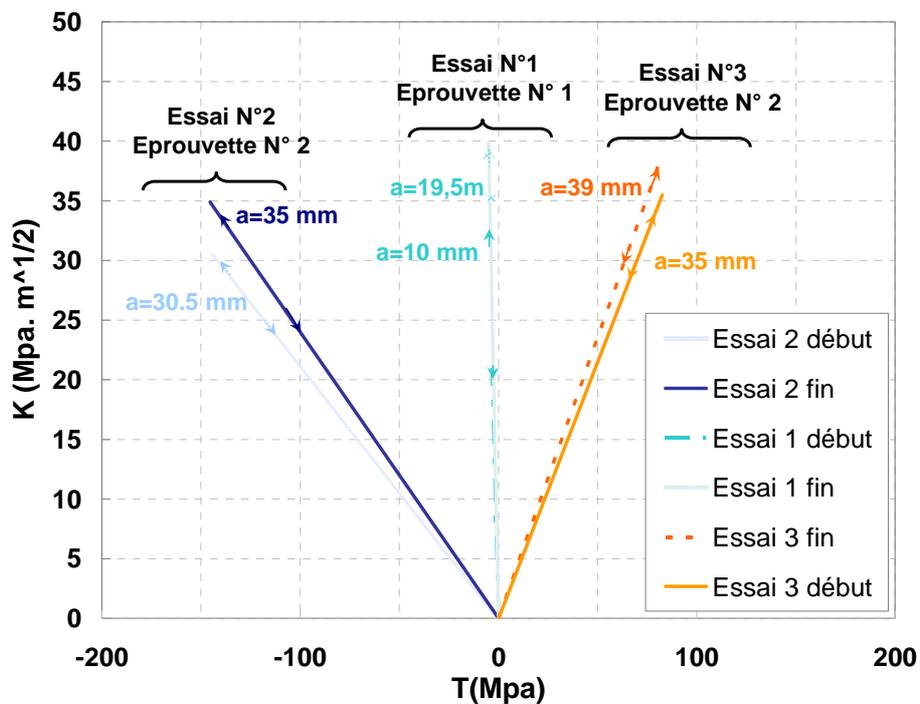


Figure 3-48. Directions de propagation dans un diagramme $K-T$ des essais réalisés avec des éprouvettes cruciformes

La Figure 3-49 montre le trajet de chargement des deux éprouvettes CT et CCT dans un diagramme $K-T$. On remarque que le trajet de chargement varie très peu avec la longueur de la fissure.

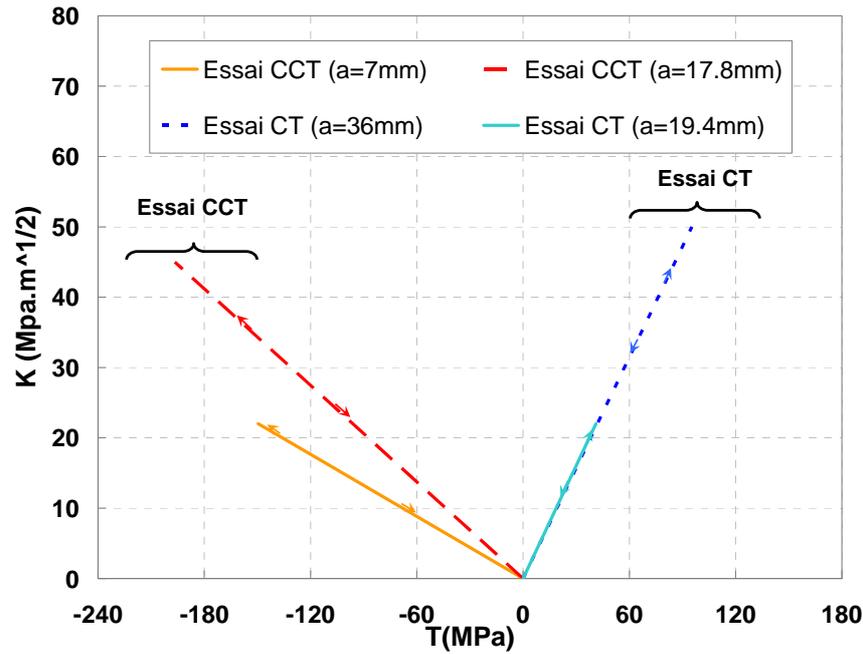


Figure 3-49. Directions de propagation dans un diagramme $K - T$ des essais réalisés avec des éprouvettes CT et CCT

On peut voir dans la Figure 3-50 que la différence entre les trajets de chargement obtenus sur éprouvettes CCT et CT est plus marquée que pour les 3 essais réalisés avec l'éprouvette cruciforme. Les niveaux de T et de K atteints avec les CT et CCT sont plus élevés. Cela peut expliquer le fait que les vitesses de propagation obtenues lors des essais sur éprouvettes cruciformes sont très proches les unes des autres. En outre, dans le cas des éprouvettes cruciformes, les conditions de déformation plane ne sont pas respectées.

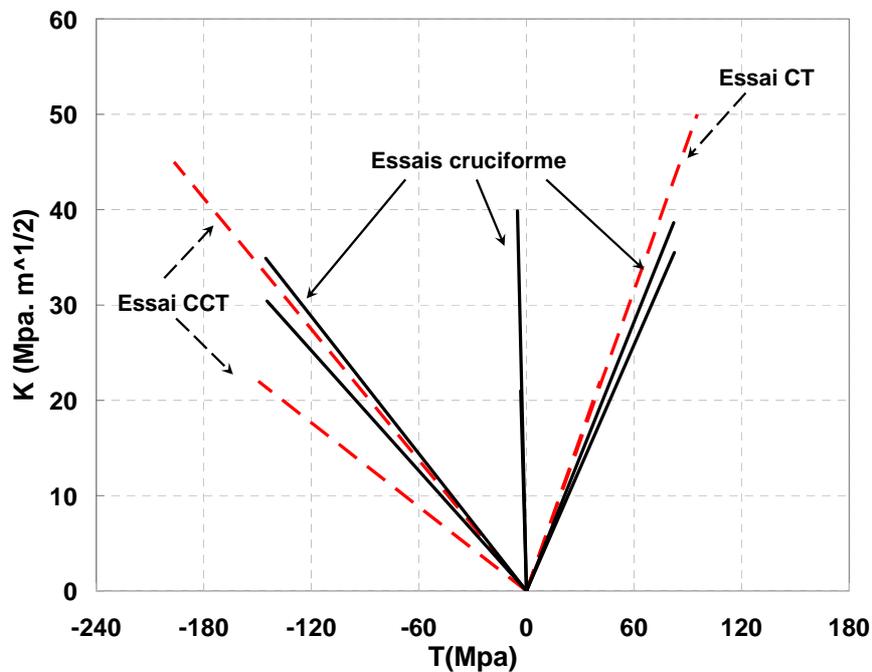


Figure 3-50. Directions de propagation dans un diagramme $K - T$ des différents essais réalisés

La Figure 3-51 montre les comparaisons entre les résultats d'essais et les simulations obtenues avec le modèle incrémental. L'accord obtenu est assez satisfaisant.

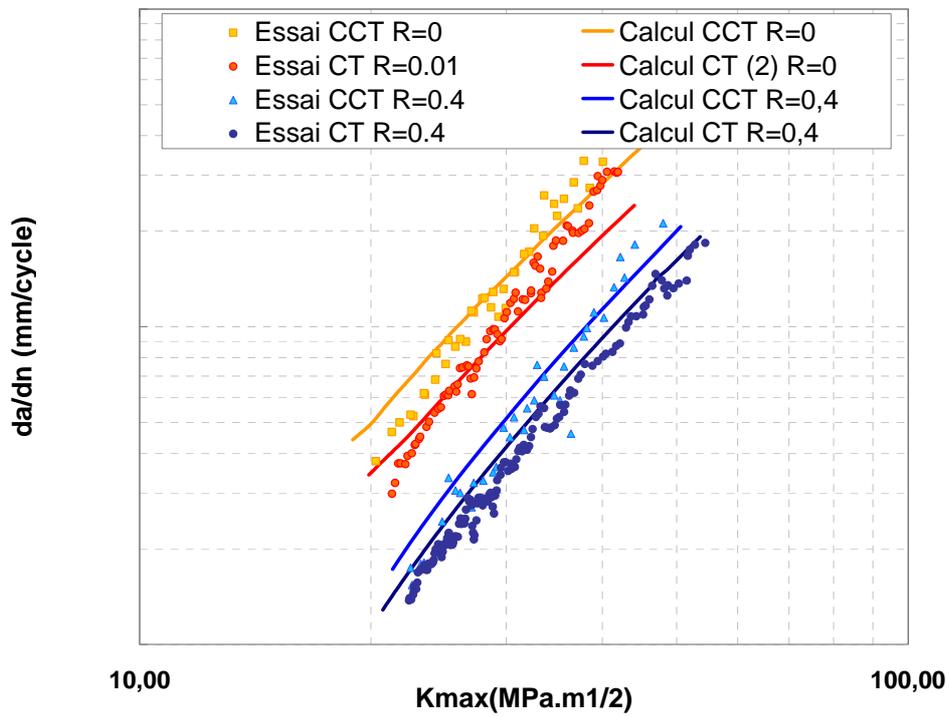


Figure 3-51. Comparaison des vitesses de propagation expérimentales sur éprouvettes CT et CCT

3.3 Bilan du Chapitre 3

- L'étude des phases de fermetures sur les diverses variables internes du modèle a montré que la compression modifie seulement la position de la zone plastique cyclique, mais pas la position du point de contact, ni la dimension des zones plastiques cycliques et monotones. Une équation d'évolution de la position de la zone plastique cyclique en dessous du point de contact a été proposée et intégrée au modèle incrémental. Cette partie du modèle n'a pas nécessité d'ajouter des paramètres supplémentaires.
- Les prévisions du modèle ont été confrontées aux résultats d'essais de fissuration par fatigue à amplitude constante et à différents rapports de charge. Essais et simulations sont en bon accord.
- L'étude de l'effet de chargements biaxés sur l'érousement plastique a montré que deux fissures de longueurs différentes ont le même comportement si elle sont soumises à la fois au même facteur d'intensité des contraintes K et à la même contrainte T .
- En introduisant un offset d'érousement ρ_{seuil} , on peut déterminer par éléments finis une surface seuil d'érousement plastique dans un diagramme $K-T$. Cette surface constitue la frontière d'un domaine d'élasticité pour la structure fissurée. On trouve que le seuil de plasticité K_{Ith} diminue lorsque la contrainte T s'éloigne de zéro.
- Une expression théorique du seuil de plasticité a été proposée, qui est une extension du critère de Von Mises aux champs asymptotiques de la mécanique élastique linéaire de la rupture. Ce critère en énergie élastique de cisaillement permet de tenir compte des chargements biaxés et de l'effet de fissure mécaniquement courte. Un bon accord est trouvé entre les résultats des calculs par éléments finis et la forme de la surface seuil théorique proposée.
- La prise en compte de la contrainte T dans le modèle a été effectuée de la manière suivante. Les paramètres du modèle ont été identifiés pour divers niveaux de biaxialité paramétrés par des rapports T/K fixés pour chaque identification. La dépendance des paramètres du modèle au rapport T/K a été représentée à l'aide de polynômes du second degré. Ces polynômes ont été implémentés dans le modèle incrémental de fissuration par fatigue.
- Les essais de propagation réalisés sur éprouvettes CT et comparés aux essais réalisés sur éprouvettes CCT ont montré que la vitesse de fissuration par fatigue diminue quand T augmente. Les prévisions du modèle incrémental ont permis de reproduire correctement ces essais.

Chapitre 4 Application en 3D

4.1	Position du problème	163
4.2	Bibliographie.....	165
4.2.1	Champs asymptotiques pour une fissure semi-elliptique.....	165
4.2.2	Le passage 2D-3D	166
4.3	Essais de validation.....	168
4.3.1	Essais sur éprouvettes.....	169
4.3.2	Essais sur roue à l'échelle 1	171
4.4	Méthode de modélisation de la fissure semi elliptique	174
4.5	Confrontation essais simulations	175
4.6	Bilan du Chapitre 4	181

Ce dernier chapitre traite de l'application du modèle incrémental à la propagation de fissures de fatigue semi-elliptiques dans une roue de train. La première partie est une courte discussion sur la représentation du chargement de la toile de roue. La seconde partie est une étude bibliographique succincte sur le champ de contrainte asymptotique pour une fissure semi-elliptique et sur quelques modèles de passage en 3D. Nous expliquons ensuite la méthodologie adoptée pour modéliser la propagation d'une fissure semi-elliptique. Afin de valider cette approche, des essais de propagation de fissures semi-elliptiques ont été réalisés sur des éprouvettes de flexion 4 points en premier lieu, la longueur de la fissure a été suivie en surface et en profondeur. Un essai sur roue à l'échelle 1 a été ensuite réalisé sur le banc d'essai de l'AEF afin de valider le passage éprouvette/structure. La dernière partie du chapitre est consacrée aux confrontations entre les prévisions du modèle et les résultats d'essais.

4.1 Position du problème

La Figure 4-1a montre l'évolution des contraintes radiales et circonférentielles des deux faces de la roue pour une circulation en alignement à 120 km/h. En négligeant les contraintes résiduelles dans la toile, le gradient des contraintes dans l'épaisseur est linéaire. Les gradients radial et circonférentiel peuvent donc être décomposés en un chargement de traction (moyenne) et un chargement de flexion pure (amplitude en surface). Cette décomposition est tracée dans la Figure 4-1b.

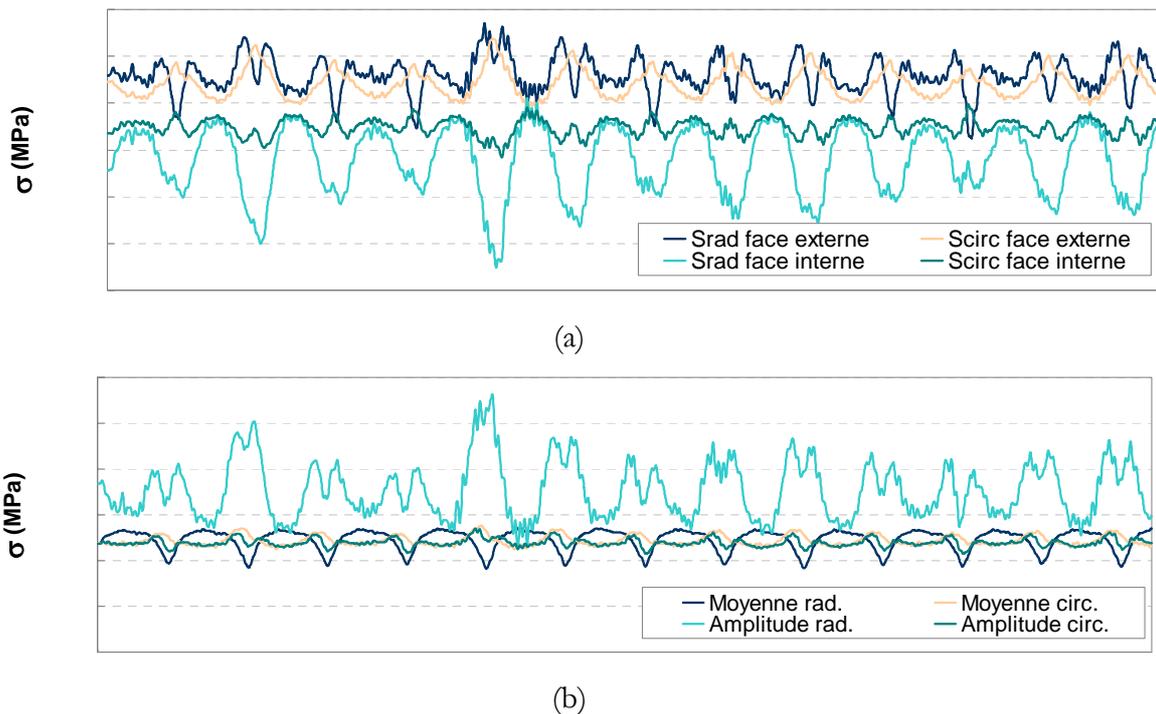


Figure 4-1. En (a) évolution des contraintes radiales et circonférentielles des deux faces externe et interne de la toile. En (b) évolution de la contrainte moyenne (traction) et de l'amplitude (flexion) suivant le rayon et la circonférence. Le train est chargé et sa vitesse est de 120 Km/h

Pour réaliser un calcul de propagation sur une roue fissurée, il est nécessaire de connaître le facteur d'intensité des contraintes K et la contrainte T en tout point du front de la fissure semi-elliptique. Des formules empiriques ont été élaborées à partir de résultats de calculs par Eléments Finis ([Newman et Raju 1981] et [Wang 2003]). Le nombre de calculs par Eléments Finis nécessaire est élevé, vu le grand nombre de combinaisons possibles (position de la fissure dans la

toile, distance au bord, forme de la fissure, chargement externe, etc...). Ce nombre de combinaisons complique les expressions de K et T recherchées, car il s'agit de fonctions à 4 dimensions minimum. Nous avons choisi d'utiliser des expressions déjà existantes dans la littérature pour des géométries simples (Figure 4-2) ([Newman et Raju 1981] et [Wang 2003]). La simulation de la propagation dans la toile revient donc à simuler la propagation d'une fissure semi elliptique dans une éprouvette parallélépipédique de même épaisseur que la toile et soumise à des chargements de bi-traction et de bi-flexion alternés.

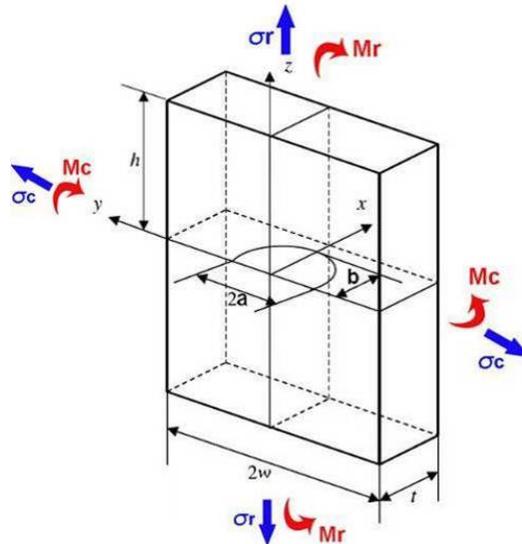


Figure 4-2. Modèle géométrique utilisé pour simuler la propagation des fissures dans les toiles de roue

Le chargement modélisé dans ce cas est une flexion cyclique. Des études concernant la propagation des fissures dans les essieux-axes ferroviaires révèlent une différence entre les vitesses de propagation dans ces deux cas de sollicitation [Beretta et al. 2006]. L'origine principale de ces différences est la suivante : dans les deux cas la contrainte dans la toile correspond à un gradient linéaire dont le plan moyen passe par l'axe x (Figure 4-3a). Pour un chargement cyclique appliqué sur une roue, la zone la plus sollicitée se trouve à l'aplomb de l'axe de la roue, c'est à dire l'axe x attaché à la fissure. Pour un chargement rotatif, les extrémités de la fissure passent par le point le plus chargé à chaque tour de l'essieu, la vitesse de propagation de la fissure est donc plus élevée. Cependant ces différences sont notables lorsque la dimension de la fissure est grande devant le diamètre de la roue. [Carpinteri et al. 2000] qui travaillait sur la propagation de fissures dans des tubes fissurés a montré par calcul que le rapport de forme de la fissure est presque identique en chargement rotatifs et cyclique (Figure 4-3b).

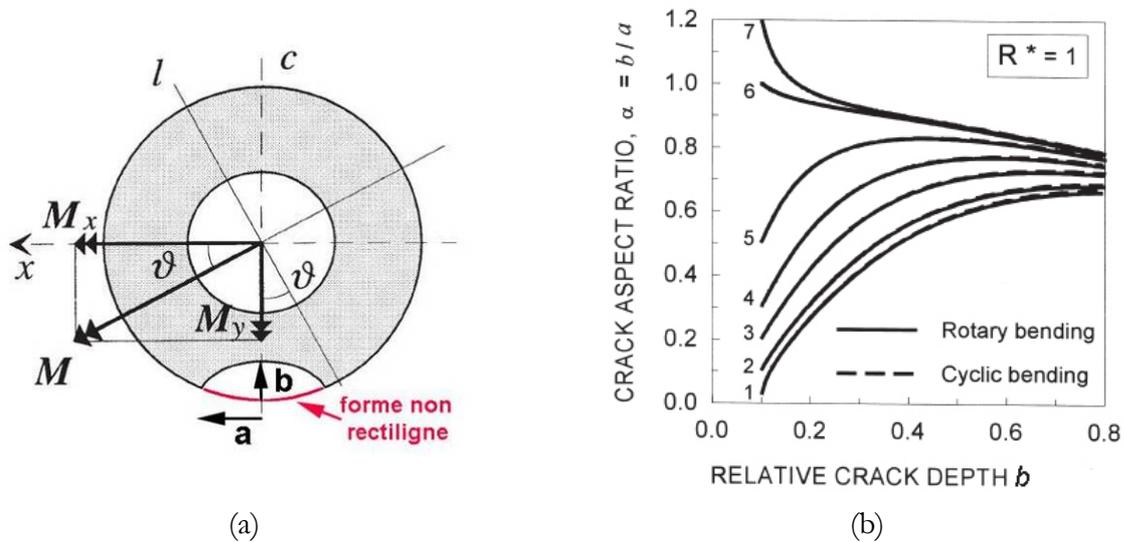


Figure 4-3. Evolution du rapport de forme d'une fissure semi-elliptique en flexion rotative et cyclique [Carpinteri et al. 2000]

Dans notre cas, la taille de la fissure reste toujours très petite par rapport au diamètre de la roue. Ses extrémités sont donc chargées de la même manière en chargement rotatif ou en chargement cyclique. Néanmoins, en chargement rotatif, un cisaillement hors phase est appliqué à la fissure, tandis qu'en chargement cyclique ce cisaillement n'existe pas. Nous avons vu cependant que la contrainte de cisaillement restait faible par rapport aux contraintes radiales et circonférentielles.

4.2 Bibliographie

4.2.1 Champs asymptotiques pour une fissure semi-elliptique

Soit un repère local attaché au front d'une fissure semi-elliptique (Figure 4-4). La direction 2 est perpendiculaire au plan de la fissure, la direction 3 est tangente au front et la direction 1 est perpendiculaire aux deux autres.

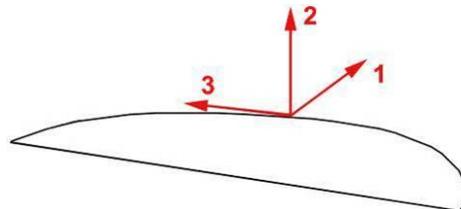


Figure 4-4. Repère attaché au front d'une fissure semi-elliptique

Le champ des contraintes autour d'une fissure semi-elliptique soumise à un chargement suivant la direction 2 s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) + T \\
 \sigma_{22} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\
 \sigma_{33} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} 2\nu \cos \frac{\theta}{2} + E\varepsilon_{33} + \nu T \\
 \sigma_{13} &= \sigma_{23} = 0
 \end{aligned}
 \tag{4-1}$$

E étant le module d'Young et ν le coefficient de Poisson du matériau.

On voit donc apparaître en 3D une seconde contrainte non singulière suivant la direction tangente au front de la fissure (direction 3). Cette contrainte non singulière est nommée dans la littérature T_ζ . On sait que T_ζ peut avoir un rôle sur le comportement de la fissure, par contre les études traitant du rôle de ce paramètre sont assez rares ([Guo 1999] et [Chang et Guo 1999]). Quand le chargement externe appliqué est uniaxial (suivant 2), T_ζ dépend seulement des propriétés élastiques de la fissure. Dans le problème de la roue, la fissure est chargée en flexion biaxiale. Dans ce cas une autre composante externe s'ajoute dans la direction parallèle au plan de la fissure. Cette contrainte tend à augmenter le niveau de T_ζ notamment au point le plus profond du front. Nous ne tiendrons pas compte de ce paramètre dans le calcul de propagation 3D. Le modèle de propagation utilisé tient compte de deux paramètres seulement, le facteur d'intensité des contraintes K et la direction de chargement T/K . Il est clair qu'il faudra, dans le futur, se préoccuper de l'effet de ce terme supplémentaire.

4.2.2 Le passage 2D-3D

Les démarches de passage présentées sont valables dans le cas des chargements cycliques ou statiques proportionnels ou non proportionnels. Il existe dans la littérature différentes manières de simuler la propagation de fissures semi-elliptiques. La première approche est celle dite à 2 degrés de liberté (Figure 4-5a). Dans cette configuration la propagation se fait en deux points du front, le premier est situé en surface et le deuxième à l'endroit le plus profond. Une loi de propagation est appliquée dans ces deux points qui est une fonction du facteur d'intensité des contraintes local. Cette méthode donne des résultats corrects quand le chargement appliqué est simple, une contrainte uniforme ou variant linéairement selon l'épaisseur. Un gradient de contrainte complexe nécessite la réalisation du calcul de propagation sur plusieurs points du front pour tenir compte de l'évolution du FIC le long de la fissure (Figure 4-5b).

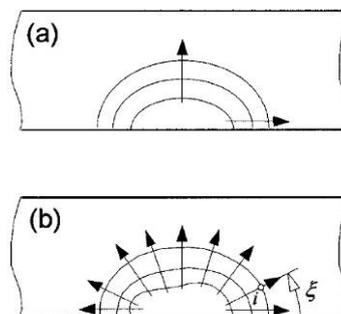


Figure 4-5. Calcul de propagation d'une fissure semi-elliptique avec 2 degrés de liberté (a) et avec plusieurs (b) [Lin et Smith 1999a]

Quand il s'agit d'une fissure tridimensionnelle, les critères de propagation sont classés en deux approches distinctes :

- Les critères locaux pour lesquels la vitesse de propagation en chaque point de la fissure est indépendante de son voisinage.
- Les critères globaux pour lesquels une maximisation du taux de restitution d'énergie de toute la structure fissurée est considérée.

Pour un critère local, le calcul de la vitesse de fissuration se fait d'une manière ponctuelle indépendante de son voisinage. L'inconvénient de cette méthode c'est qu'elle peut conduire, si on laisse la forme du front libre, à la formation de « pointes » sur le front de la fissure là où le facteur d'intensité des contraintes est maximal. Si l'on s'impose la forme du front de la fissure, cette méthode a l'avantage de permettre des calculs rapides. Nous présentons ici un exemple de calcul local réalisé par [Nykänen 1996]. La forme initiale de la fissure simulée est semi-elliptique. Le front de la fissure est discrétisé en éléments linéaires (Figure 4-6a) et la forme globale du front peut évoluer librement. La difficulté principale, lorsqu'on laisse libre la forme du front, réside dans le calcul du facteur d'intensité des contraintes. Il faut recalculer le facteur d'intensité des contraintes en chaque point après avoir calculé la nouvelle position du front de la fissure. Le facteur d'intensité des contraintes est calculé [Nykänen 1996] par la méthode d'avancée virtuelle de la fissure (ou méthode de perturbation) présentée dans l'annexe B de ce rapport. La direction de propagation du front en chaque élément est orthogonale à la frontière de l'élément et la vitesse de propagation est calculée directement avec une loi de Paris isotrope, c'est-à-dire que les coefficients sont identiques pour tous les points du front. Certains auteurs proposent d'utiliser des lois anisotropes, les observations expérimentales de [Raju et Newman 1979] montrent par exemple que le coefficient C de la loi de Paris à utiliser en surface est égal à 0.9 fois celui à utiliser en profondeur. La vitesse de propagation à la frontière entre deux éléments se calcule comme la moyenne des vitesses de propagation calculées pour chacun. Un exemple d'évolution du front en traction cyclique est donné sur la Figure 4-6b. On remarque que malgré le développement libre du front, la fissure a gardé sa forme semi-elliptique initiale. Il est néanmoins probable que cela ne soit pas le cas pour une discrétisation plus fine du front de la fissure.

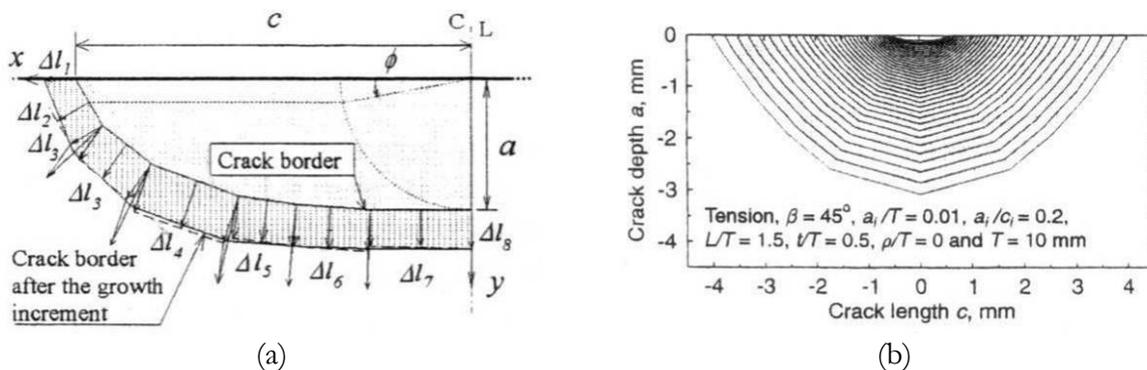


Figure 4-6. (a) calcul de propagation d'une fissure 2D [Nykänen 1996] et (b) exemple d'une évolution de la fissure à côté d'un cordon de soudure

Les modèles globaux s'appliquent à des problèmes élastiques et consistent à réaliser une maximisation du taux de restitution d'énergie potentielle de la structure fissurée en fonction des paramètres du problème. Cette maximisation permet de déterminer le trajet de propagation (ou l'angle de bifurcation de la fissure) ainsi que la distribution des vitesses de propagation le long du front. Ces modèles énergétiques peuvent être appliqués, par exemple, dans le cas d'une fissure semi-elliptique avec deux degrés de liberté. Dans ce cas la fissure est définie par deux paramètres

géométriques qui sont les dimensions de la fissure en surface a et en profondeur b . [Wadier 1981] suppose que l'énergie potentielle ne peut pas être considérée comme une fonction de l'extension d'aire A de la surface car pour une aire donnée il existe une infinité de formes de fissure différentes. Cependant si on a deux paramètres a et b , on peut calculer les dérivées partielles du taux de restitution de l'énergie potentielle par rapport à chacun des deux paramètres, puis chercher la combinaison assurant le gradient maximum :

$$G_a = -\frac{\partial W}{\partial A} \Big|_{b=ct} \quad \text{et} \quad G_b = -\frac{\partial W}{\partial A} \Big|_{a=ct} \quad (4-2)$$

En outre, l'aire d'une fissure semi elliptique peut être écrite en fonction des deux paramètres géométriques par :

$$A = \pi.a.b \quad (4-3)$$

Ce qui donne pour les taux de restitution d'énergie :

$$G_a = \frac{1}{\pi b} \frac{\partial W}{\partial a} \quad \text{et} \quad G_b = \frac{1}{\pi a} \frac{\partial W}{\partial b} \quad (4-4)$$

On applique ensuite la loi de Paris à chaque paramètre :

$$\frac{da}{dN} = C_a \cdot G_a^{m_a} \quad \text{et} \quad \frac{db}{dN} = C_b \cdot G_b^{m_b} \quad (4-5)$$

Les coefficients de la loi de Paris pour chaque direction doivent être déterminés par des essais de fissuration en 3D. En l'absence de résultats d'essai, on peut prendre les mêmes coefficients suivant les deux axes. On peut se donner une valeur de C_a inférieure à C_b en accord avec les observations de [Raju et Newman 1979] :

$$C_a = 0.9^m C_b \quad (4-6)$$

Les critères énergétiques sont également utilisés pour une fissure définie par plus de deux paramètres. [Billardon et al. 1986] ont comparé la propagation expérimentale d'une fissure plane dans un axe soumis à une flexion 4 points à des calculs numériques. Les auteurs ont étudié différentes extensions virtuelles de la fissure parmi lesquelles, une propagation locale correspondant à l'extension d'un seul élément du front et une propagation globale correspondant à l'extension de tout le front de fissure. L'étude a montré que l'utilisation d'un critère local peut conduire à une propagation physiquement non admissible, localisée autour du point où le facteur d'intensité des contraintes est maximal. Un critère global est nécessaire pour calculer la distribution des vitesses de fissuration le long du front.

4.3 Essais de validation

Deux types d'essais ont été menés afin de valider le modèle 3D : des essais sur éprouvettes de flexion 4 points et des essais sur roue à l'échelle 1.

4.3.1 Essais sur éprouvettes

Ces essais ont été effectués sur des éprouvettes de flexion 4 points contenant une entaille semi elliptique créée par électroérosion. La longueur totale de la fissure en surface $2a$ est de 1 mm. Le plan des éprouvettes est donné en annexe A-4. La machine d'essai est une SCHENCK $\pm 80\text{KN}$, le montage de l'éprouvette entre les mors de la machine est présenté sur la Figure 4-7. Nous avons réalisé deux essais différents avec 4 éprouvettes (Tableau 4-1), le rapport de charge utilisé dans les essais était de $R = -1$.

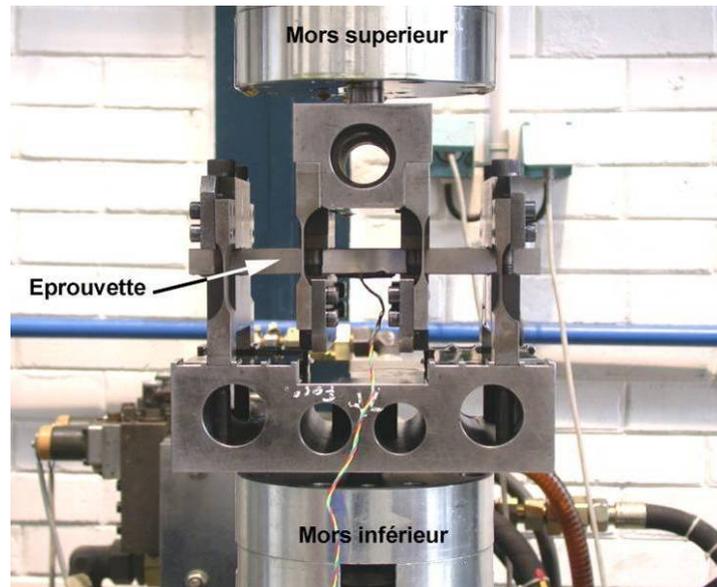


Figure 4-7. Montage de l'éprouvette entre les mors de la machine

Le premier essai (N°1) a été réalisé sur une éprouvette d'épaisseur de 15mm avec une contrainte normale en surface de 230 MPa. Le deuxième (N°2) a été réalisé sur une éprouvette d'épaisseur de 5 mm et une contrainte normale en surface de 230 MPa. Ainsi la comparaison des deux essais permettra d'étudier l'effet du gradient pour une même contrainte nominale normale en surface.

Numéro d'essai	1	2
Nombre d'éprouvette	2	2
Epaisseur éprouvette t (mm)	15	5
Contrainte normale en surface (MPa)	230	230
Rapport de charge R	-1	-1

Tableau 4-1. Essais de fissurations réalisés

Etant donné la petite taille de la fissure et le manque d'espace, le suivi en surface a été effectué par réplique. La surface d'un film d'acétate de cellulose est fondue à l'aide d'acétone, puis le film est maintenu pressé (avec le doigt) sur la surface fissurée le temps que le polymère durcisse prenant ainsi l'empreinte de la surface. La Figure 4-8 montre un exemple de réplique observée au microscope optique, on peut voir l'entaille initiale ainsi que l'extension de la fissure des deux côtés. La taille de la fissure peut ainsi être mesurée par traitement d'image.

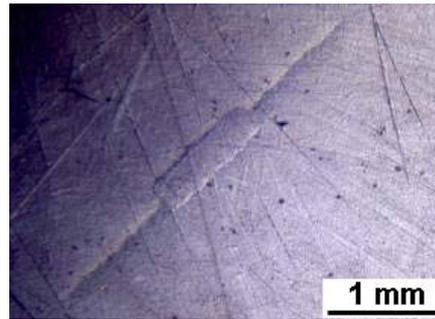


Figure 4-8. Réplique de la fissure observée au microscope optique

La Figure 4-9 montre l'évolution de la longueur de fissure en surface en fonction du nombre de cycles. La vitesse de propagation dans l'éprouvette épaisse est plus élevée que celle mesurée dans l'éprouvette de faible épaisseur. La contrainte en surface est identique dans les deux cas, mais le gradient est plus faible dans l'éprouvette épaisse.

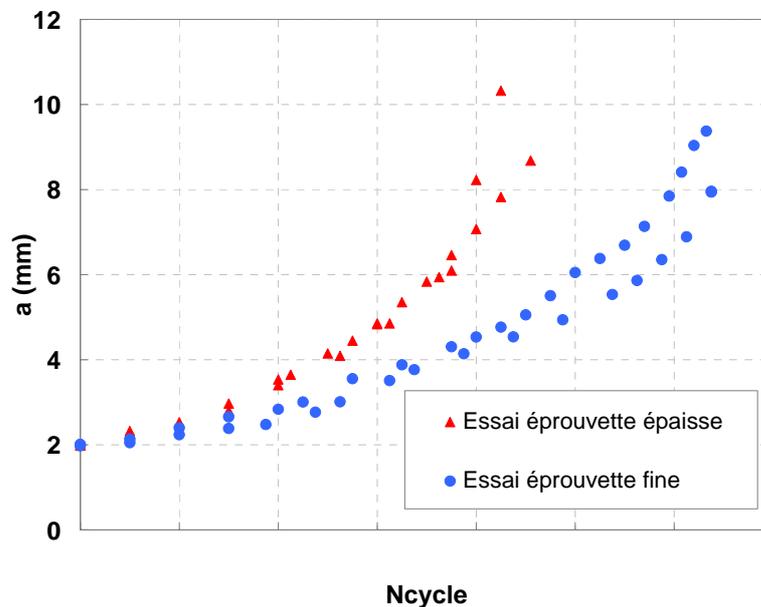


Figure 4-9. Evolution de la longueur de la fissure en fonction du nombre de cycle

L'évolution du rapport de forme de la fissure a été suivie par marquage du front de la fissure (Figure 4-10a). La méthode de marquage employée, décrite par [Husset et al. 1980], consiste à introduire périodiquement des blocs de cycles avec un rapport de charge différent ($R = 0$) de celui de l'essai ($R = -1$). La taille des blocs à appliquer pour réaliser le marquage dépend de la vitesse de propagation de la fissure. A titre d'exemple, l'éprouvette épaisse a subi une succession de 50000 cycles à $R = -1$ suivie de 50000 cycles à $R = 0$. Ainsi la fissure ralentit voir s'arrête pendant les cycles de marquage ce qui permet de déterminer, à posteriori, par examen fractographique, l'évolution du rapport de forme. La Figure 4-10b montre un exemple de faciès de rupture obtenu après fissuration par fatigue avec marquages et rupture fragile de l'éprouvette ; pour cela, sa température a été abaissée en dessous de sa température de transition ductile-fragile en la maintenant dans l'azote liquide, puis l'éprouvette a été rompue en flexion simple.

Nous avons réalisé deux essais pour chaque type d'éprouvette. Le premier essai, sans marquages, a servi à mesurer la vitesse de propagation de la fissure en surface. Le deuxième, avec marquage, a servi à reconstruire la forme du front pour chaque longueur de fissure. Nous avons ensuite reconstruit des courbes de propagation $a = f(N)$ à partir des deux essais.

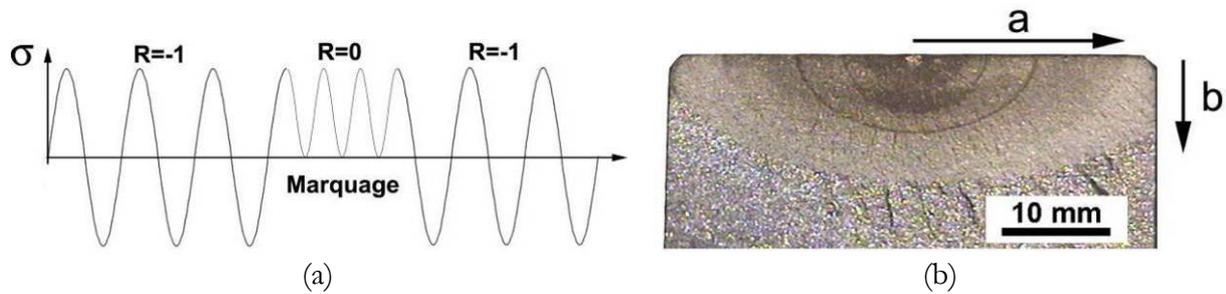


Figure 4-10. Succession des blocs de chargement afin de marquer le front (a) et exemple de faciès de rupture marqué pour l'éprouvette épaisse (essai N°1)

La Figure 4-11 montre l'évolution du rapport de forme b/a de la fissure en fonction de la longueur a pour les deux types d'essai réalisés. Le rapport de forme initiale est égal à 1 puisqu'on part d'une entaille semi-circulaire. Ce rapport décroît ensuite en fonction de l'intensité du gradient appliqué. Le gradient est plus élevé dans l'éprouvette fine ($e = 5\text{mm}$) ce qui justifie un rapport de forme plus faible. Dans les deux cas la fissure arrête de se propager en profondeur quand elle atteint la fibre neutre, par contre la propagation continue en surface.

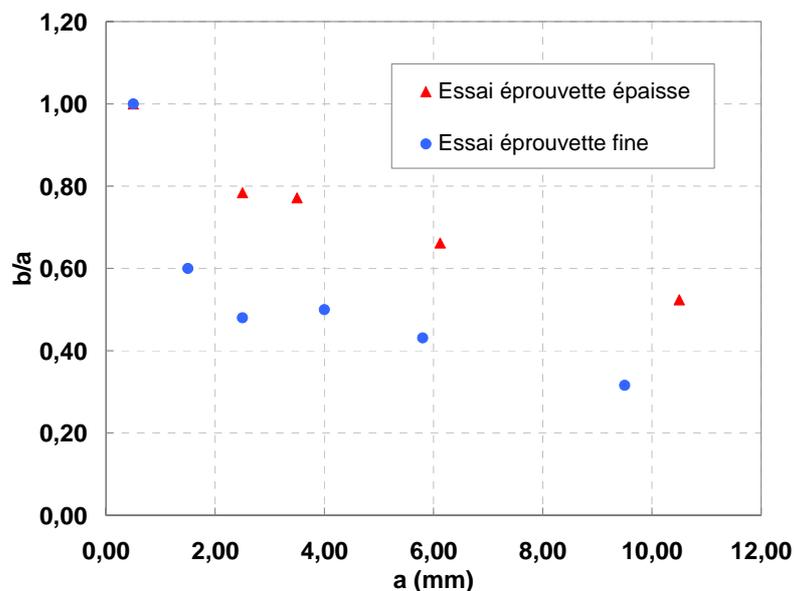


Figure 4-11. Evolution du rapport de forme de la fissure pour les différents essais réalisés

4.3.2 Essais sur roue à l'échelle 1

Nous avons réalisé également un essai de fatigue sur une roue de TGV contenant une entaille créée par électro-érosion. L'essai a été effectué sur le banc d'essai de l'Agence d'Essai Ferroviaire (AEF) et avait pour objectif de valider le passage éprouvette-structure. Nous avons effectué d'abord un calcul Eléments Finis afin de déterminer l'emplacement optimal de l'entaille dans la toile. Le chargement de la roue ne permet pas l'utilisation d'un modèle axisymétrique, un calcul complet 3D a du être effectué. Le maillage est donné sur la Figure 4-12a. La Figure 4-12b montre la cartographie de la contrainte radiale obtenue pour un chargement ponctuel parallèle à l'axe de la roue $F = \pm 150\text{KN}$, qui fait travailler celle-ci en flexion. Nous pouvons constater que le point le plus sollicité correspond au raccordement de la toile avec le moyeu, ce point est situé sur la face externe.

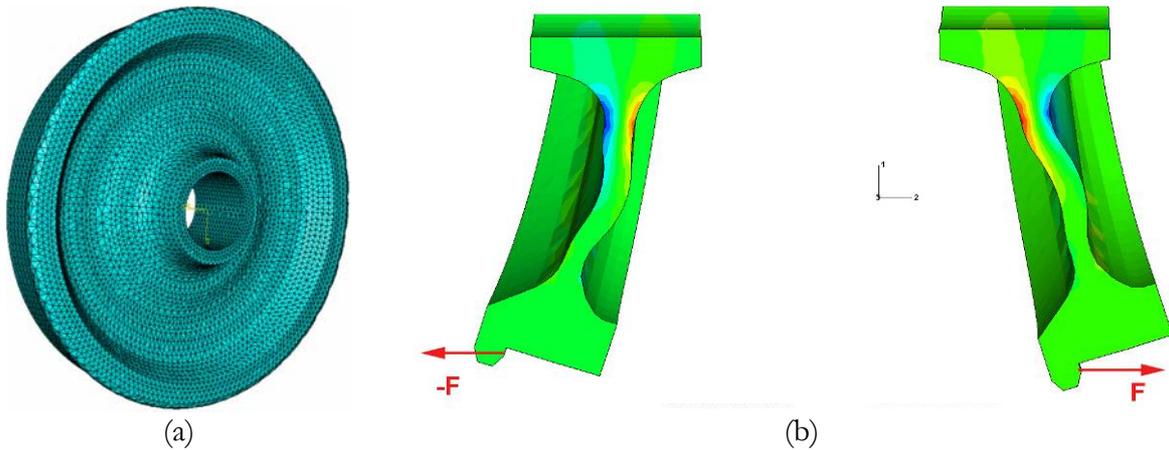


Figure 4-12. Maillage de la roue en (a) et résultat de calcul (contrainte radiale) pour un chargement transversal de rapport de charge $R=-1$ en (b)

Une entaille semi-circulaire a été créée par électroérosion sur un rayon de 189 mm (au point le plus sollicité). La direction de l'entaille est orthoradiale et sa taille est de $a = 1\text{mm}$ (Figure 4-13). Nous avons réalisé deux entailles diamétralement opposées afin de pouvoir effectuer deux essais de propagation.

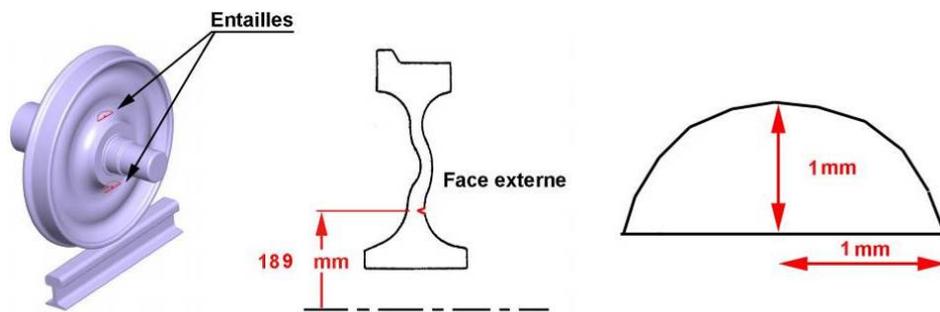
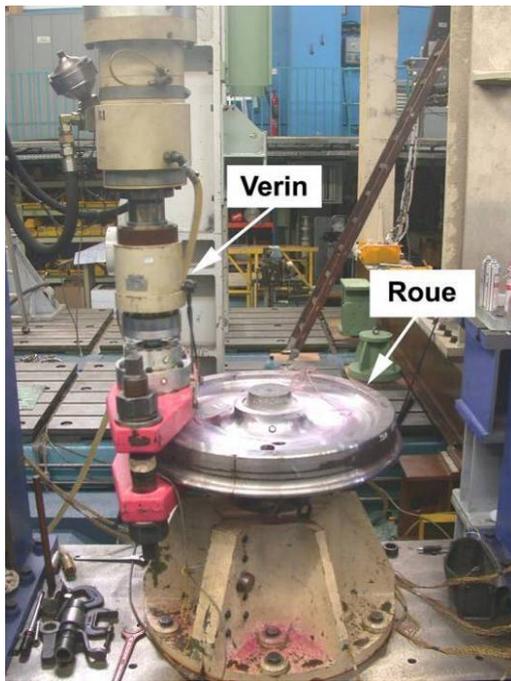


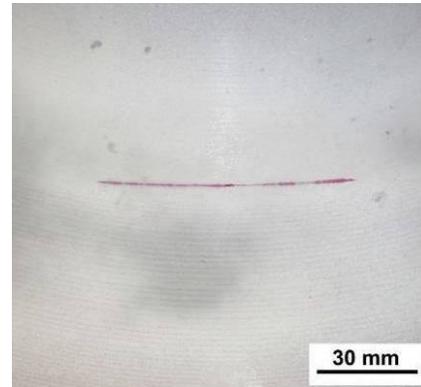
Figure 4-13. Emplacement des entailles dans la roue

La Figure 4-14a montre le montage de la roue sur le banc d'essai. Nous rappelons que le diamètre de la roue est de 920 mm et qu'elle pèse 337 kg. Il s'agit ici d'un banc à chargement non tournant, la roue étant encastrée sur un essieu et sollicitée en flexion par un vérin parallèle à son axe. Le point d'application du chargement est situé au niveau de la jante, le vérin applique un effort cyclique avec un rapport de charge $R = -1$. Le niveau de sollicitation appliqué pendant l'essai est de $\pm 112\text{KN}$. Le niveau de contrainte radiale correspondant à ce chargement est de $\pm 250\text{MPa}$. Ce niveau de contrainte a été mesuré grâce à une rosette collée sur la face opposée de l'entaille (face interne de la roue).

Le banc dispose d'un deuxième vérin qui peut agir dans la direction perpendiculaire à l'axe de la roue. Ce vérin agit directement sur la table de roulement et sollicite la toile en compression répétée. Le niveau de contrainte résultant est relativement faible dans la toile. Par contre le pilotage simultané des deux axes conduit à un écroulement de la fréquence d'essai (1 Hz à la place de 10 Hz). Pour cette raison nous n'avons utilisé que le premier vérin.



(a)



(b)

Figure 4-14. Montage de la roue sur le banc en (a) et photo de la fissure après ressuage en (b)

Le suivi de la fissure a été réalisé par ressuage. Cette technique consiste à appliquer un liquide pénétrant sur la surface de la roue. La surface est ensuite essuyée avec un chiffon et une poudre blanche (révélateur) est appliquée. Le pénétrant, présent dans la fissure, est absorbé par le révélateur ce qui permet de la mettre en évidence. La Figure 4-14b montre une photo prise après ressuage. Des photos similaires ont été prises par pas de 0.5 mm et la longueur de la fissure a été mesurée par traitement d'images. Sur la Figure 4-15 nous avons tracé l'évolution de la demi longueur de la fissure en surface a en fonction du nombre de cycles appliqués.

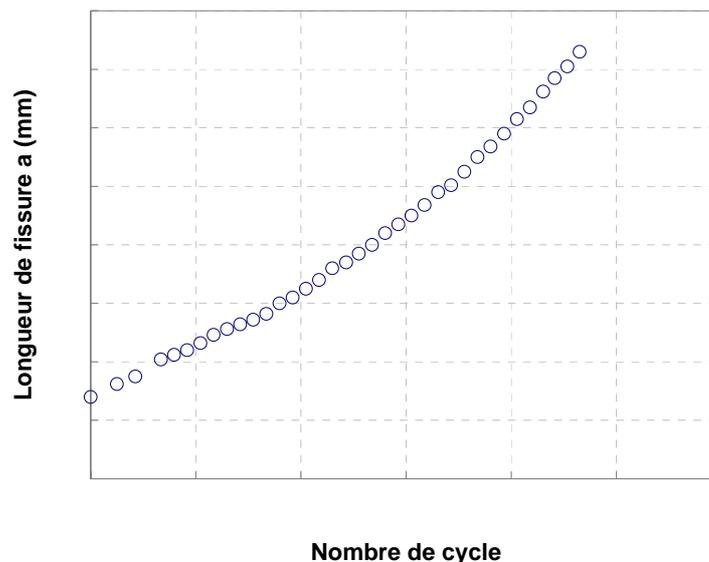


Figure 4-15. Evolution de la longueur de la fissure dans la toile en fonction du nombre de cycles

4.4 Méthode de modélisation de la fissure semi elliptique

L'algorithme de passage d'une fissure 2D traversante à une fissure 3D semi elliptique est tracé sur la Figure 4-16. A noter que les calculs ont été réalisés sur la moitié de la fissure pour des raisons de symétrie.

Nous partons d'une fissure semi-elliptique de dimension a_1 et b_1 et de centre O défini par rapport à un repère fixe.

La première étape consiste à discrétiser le front de la fissure semi-elliptique de départ par n éléments rectilignes (Figure 4-16a). Chaque élément est défini par sa longueur L_i et par un nœud intermédiaire c_i situé au milieu du segment. Le maillage est régulier, en termes de longueur, c'est-à-dire que tous les éléments du front ont la même longueur. Nous pouvons réaliser également un maillage régulier en termes d'angle, c'est-à-dire que les éléments suivent une distribution angulaire constante par rapport au centre de l'ellipse.

La deuxième étape consiste à calculer le facteur d'intensité des contraintes K_i et la contrainte T_i de chaque point de calcul c_i . Le calcul de K_i et T_i est présenté dans l'annexe E. Nous avons utilisé l'expression proposée par [Newman et Raju 1981] pour le calcul de K et celle de [Wang 2003], mais adapté à l'éprouvette de bi-flexion, pour le calcul de T .

Une fois K_i et T_i connus, nous réalisons un calcul de propagation local pour chaque élément avec le modèle incrémental. Nous obtenons ainsi les vitesses de variations d'aire par unité de longueur de front da_i pour chacun des éléments qui permettent de calculer la variation A_i locale de l'aire définie par $A_i = da_i L_i$ (Figure 4-16b).

Comme nous pouvons le constater sur la Figure 4-16c, le front de fissure obtenu à la fin du calcul de propagation est discontinu. L'objectif est de recalculer la forme du nouveau front qui permette de respecter la continuité. En premier lieu, on calcule la variation totale d'aire de la fissure comme suit :

$$A = \sum_1^n A_i \quad (4-7)$$

Cela permet d'écrire que la surface initiale de l'ellipse est égale à la surface avant propagation à laquelle s'ajoute l'extension de la fissure A :

$$\pi a_2 b_2 = \pi a_1 b_1 + A \quad (4-8)$$

Ce qui donne :

$$a_2 = \sqrt{\frac{\pi a_1^2 (b_1 / a_1) + A}{\pi (b_2 / a_2)}} \quad (4-9)$$

Le rapport de forme initial de la fissure b_1 / a_1 est connu. Le rapport de forme final est également supposé connu, on le détermine à partir de la configuration discontinue de la Figure 4-16c. On

peut ainsi calculer la demi-longueur a_2 de la fissure en surface à la fin de l'incrément à partir de l'équation (4-9). La profondeur b_2 est ensuite calculée connaissant a_2 et le rapport de forme final.

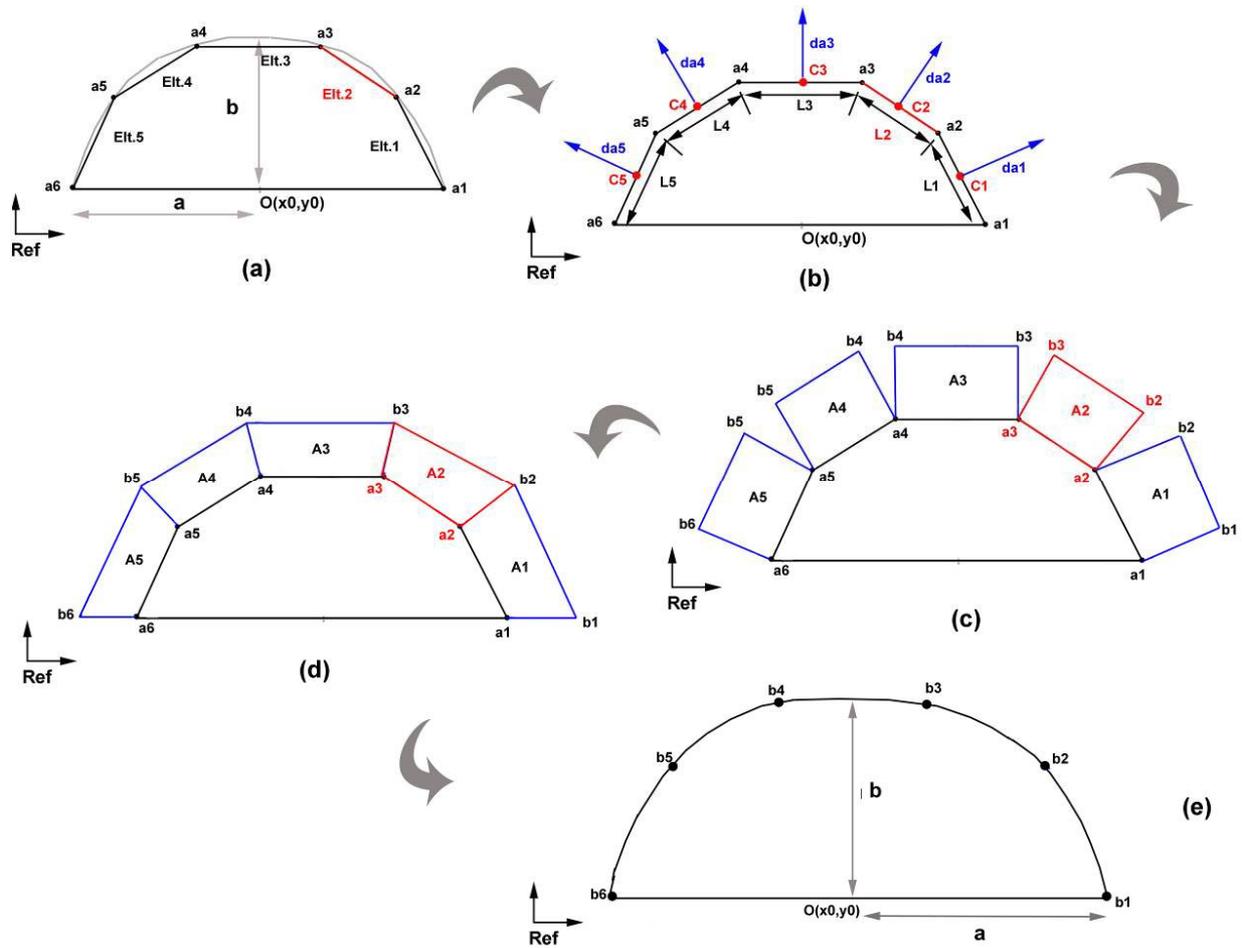


Figure 4-16. Méthode de calcul de la propagation d'une fissure semi-elliptique

4.5 Confrontation essais simulations

Avant de comparer les résultats de simulation avec les essais, nous avons étudié la sensibilité des résultats de calcul au maillage de la fissure. La Figure 4-17a montre l'évolution de la longueur de fissure en surface a simulée avec le modèle pour plusieurs discrétisations. Le calcul a été réalisé sur une éprouvette de taille finie soumise à une flexion pure. L'épaisseur de l'éprouvette t est de 15mm et sa demi-largeur $w = 12.5\text{mm}$. La solution converge à partir d'un nombre d'éléments le long du front égal à 12. La même chose est observée pour l'évolution du rapport de forme avec la longueur de fissure (Figure 4-17b). Le temps de calcul pour une fissure semi-elliptique est donc égal à 12 fois celui pour une fissure 2D.

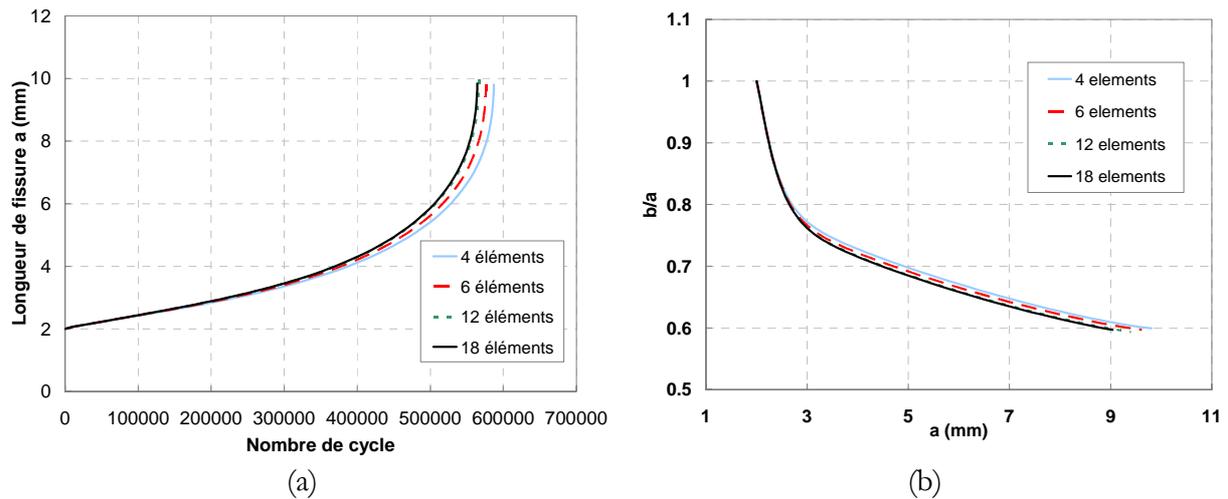


Figure 4-17. Sensibilité des résultats du calcul au nombre d'élément du maillage pour un chargement de flexion pure. En (a) évolution de la longueur de la fissure a avec le nombre de cycle et en (b) évolution du rapport de forme avec a

Nous avons vérifié ensuite la réponse du modèle pour un chargement de traction cyclique. La Figure 4-18 montre l'évolution du rapport de forme b/a en fonction de la longueur de fissure a . On observe une stabilisation du rapport de forme à un niveau de 0.9 ce qui correspond aux observations expérimentales. Le rapport de forme b/a de 0.9 est celui qui assure un facteur d'intensité des contraintes constant le long du front et donc une forme stationnaire du front lors de la propagation. La légère chute observée à la fin du calcul est due à l'effet de bord, puisque nous avons simulé une éprouvette de taille finie.

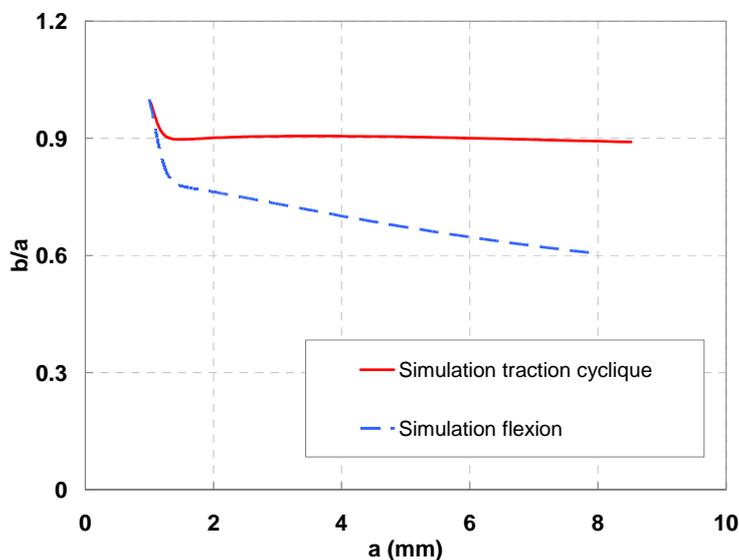


Figure 4-18. Evolution du rapport de forme expérimental et obtenu avec le modèle

Les études concernant la propagation des fissures semi-elliptiques ont montré que l'évolution du rapport de forme est indépendante de la forme initiale de la fissure. [Lin et Smith 1999b] et [Lin et Smith 1999c] ont réalisé des simulations de propagation de fissures semi-elliptiques avec plusieurs rapports de forme de départ (Figure 4-19a). Les auteurs ont utilisé les expressions de [Newman et Raju 1981] pour calculer K et le calcul de propagation a été effectué en 2 points (surface et profondeur). Les résultats des simulations ont été comparés avec les données expérimentales de [McFadyen et al. 1990] et [Putra et Schijve 1992] (voir Figure 4-19b).

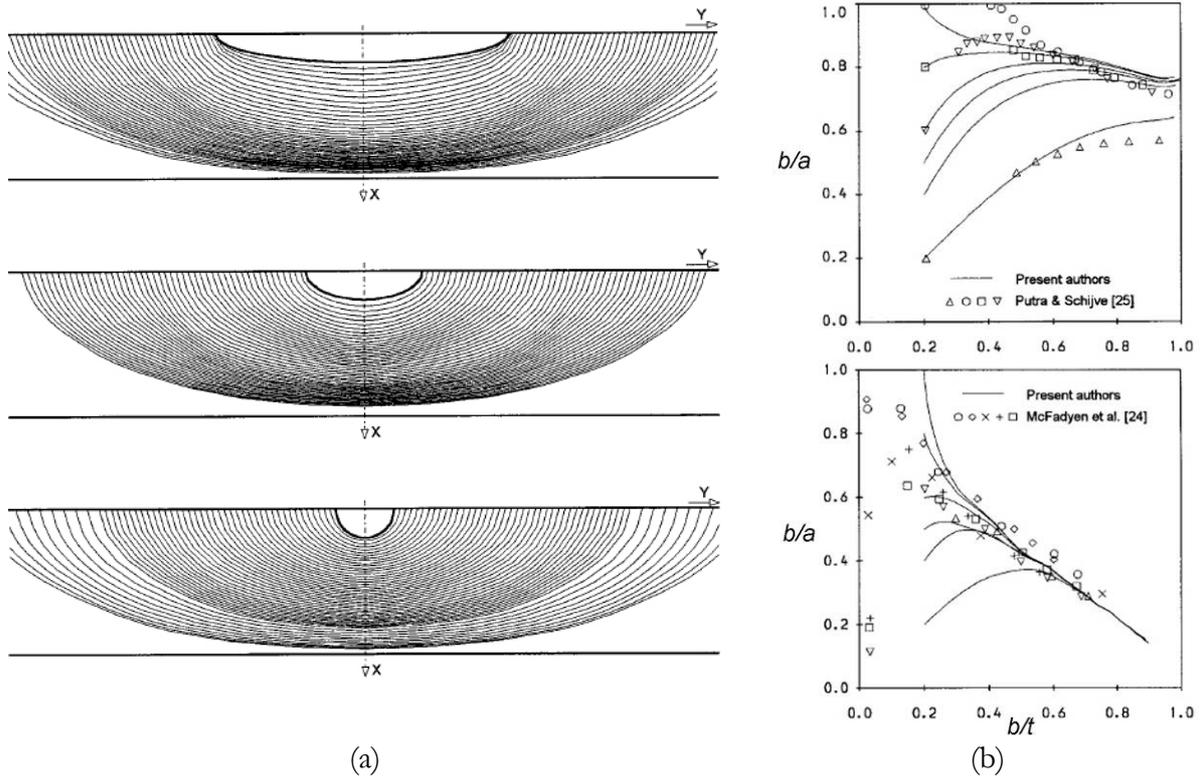


Figure 4-19. Evolution du rapport de forme pour différents valeurs initiales [Lin et Smith 1999b]

Nous avons testé la réponse de notre modèle au rapport de forme initial de la fissure. La Figure 4-20 montre l'évolution de rapport de forme b/a d'une fissure semi-elliptique en fonction de la longueur en surface. Le calcul a été réalisé sur une éprouvette de flexion de 15 mm d'épaisseur soumise à une flexion pure. La contrainte normale en surface est de 250 MPa et le rapport de charge appliqué est de -1. Nous avons effectués trois calculs avec trois rapport de forme b/a de départ différents : 0.4, 0.8 et 1. Nous pouvons constater que les courbes se rejoignent assez rapidement quel que soit le rapport de forme initial.

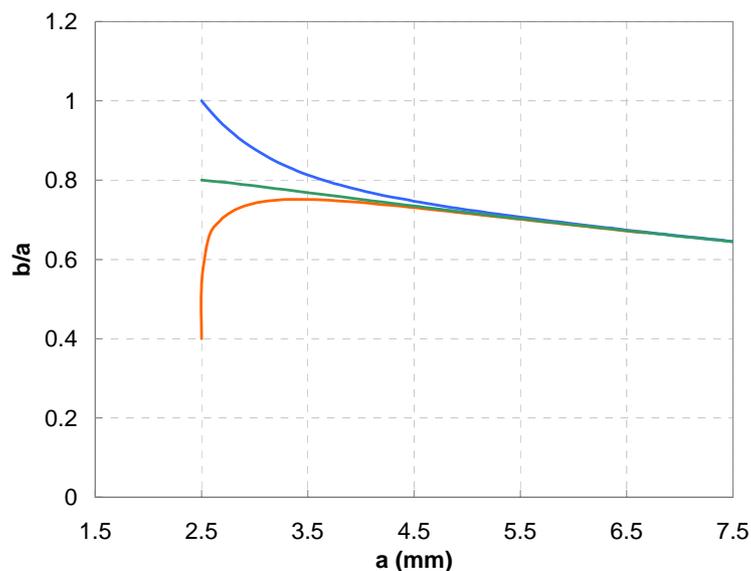


Figure 4-20. Evolution du rapport de forme simulé selon le rapport de forme initial

La Figure 4-21 montre la comparaison des prévisions du modèle avec les résultats d'essais sur éprouvettes. Nous pouvons remarquer que le modèle reproduit correctement l'effet du gradient dans les deux types d'essai (éprouvettes fine et épaisse). La durée de vie simulée est assez satisfaisante compte tenu de la dispersion des résultats expérimentaux.

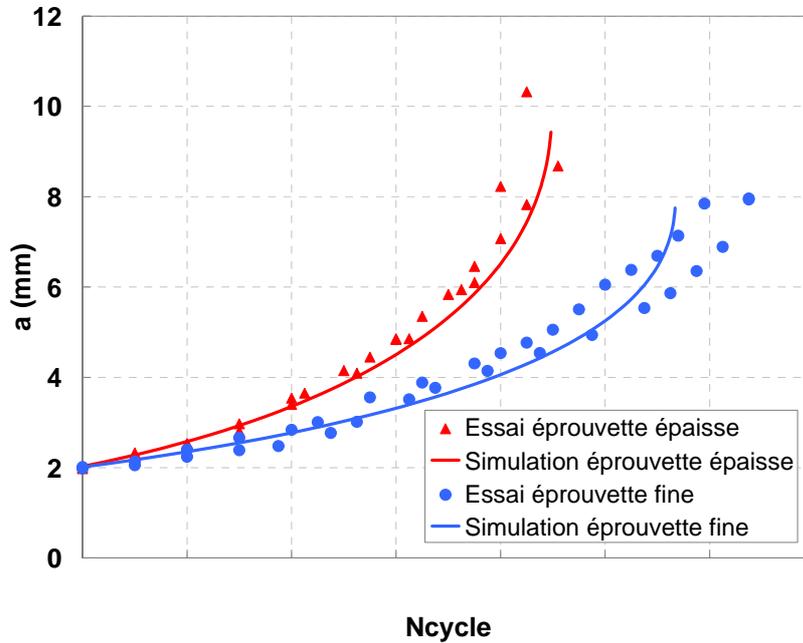


Figure 4-21. Comparaison essai/calcul

La Figure 4-22 montre l'évolution du rapport de forme de la fissure pour les mêmes essais en fonction de la longueur de la fissure. Les résultats du modèle sont en accord avec les résultats expérimentaux. Le rapport de forme initial est égal à 1 puisqu'on part d'une fissure semi-circulaire, il descend rapidement au début de la simulation, lorsque la fissure rejoint son facteur de forme d'équilibre. Puis le facteur de forme évolue plus lentement du fait du gradient de contrainte dans l'épaisseur.

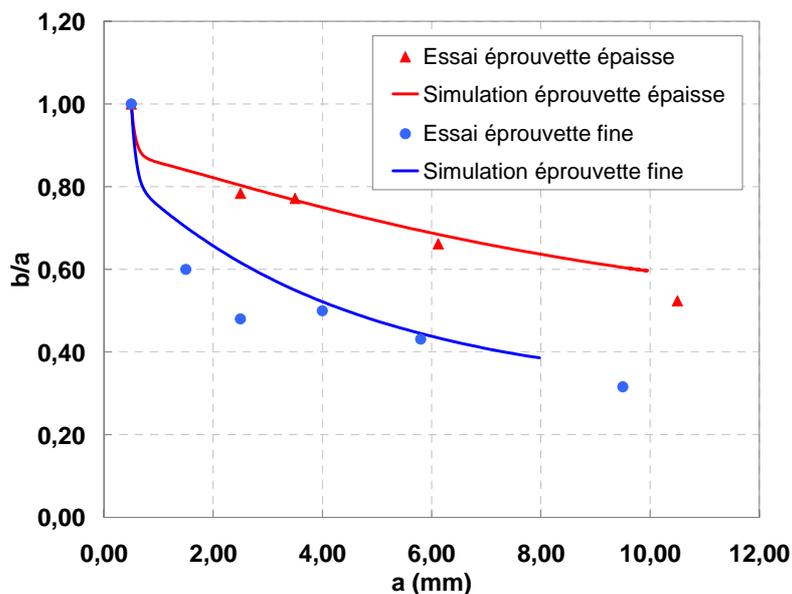


Figure 4-22. Evolution du rapport de forme expérimental et obtenu avec le modèle

Nous avons simulé ensuite l'essai de propagation sur roue à l'échelle 1. Dans cette simulation nous avons considéré une plaque de largeur $w = 16a$ car la taille de la fissure est petite par rapport aux dimensions de la roue. La Figure 4-23 montre la confrontation entre la simulation et le résultat d'essai dans un diagramme $a = f(N)$. L'accord essai-simulation est satisfaisant, la modélisation de la fissuration dans la roue par une plaque parallélépipédique est donc pertinente.

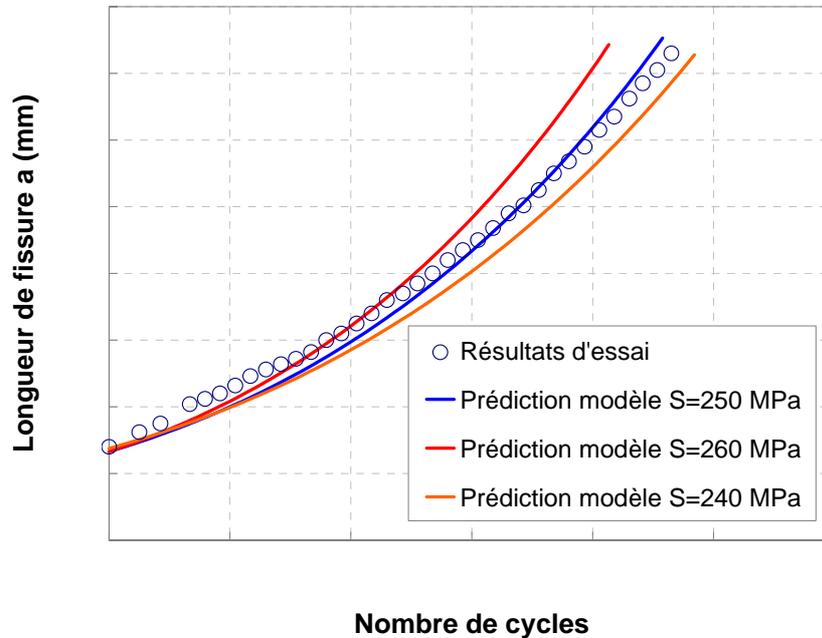


Figure 4-23. Evolution de la longueur de la fissure dans la roue en fonction du nombre de cycle

La Figure 4-24 montre l'évolution simulée du rapport de forme avec la longueur de la fissure.

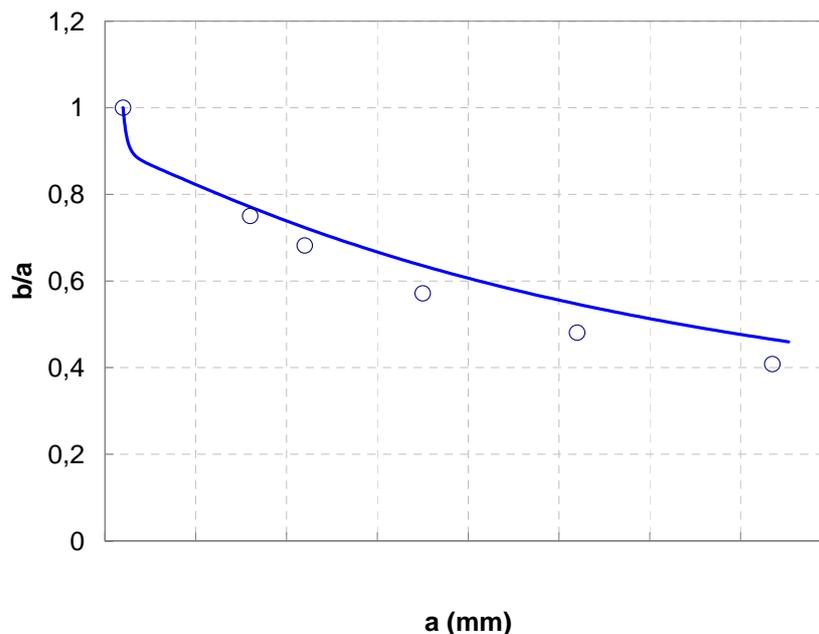


Figure 4-24. Evolution du rapport de forme obtenu avec le modèle

Nous avons réalisé ensuite un essai de propagation sur roue avec une séquence de chargement plus complexe (Figure 4-25). La séquence appliquée est constituée de 700 cycles (7 blocs) simulant des entrées-sorties de gare suivies de 49300 cycles à amplitude constante simulant une circulation en alignement. Les blocs des entrées-sorties de gares ont été inspirés des chargements mesurés en service commercial lors de la campagne menée par l'Agence d'Essai Ferroviaire.

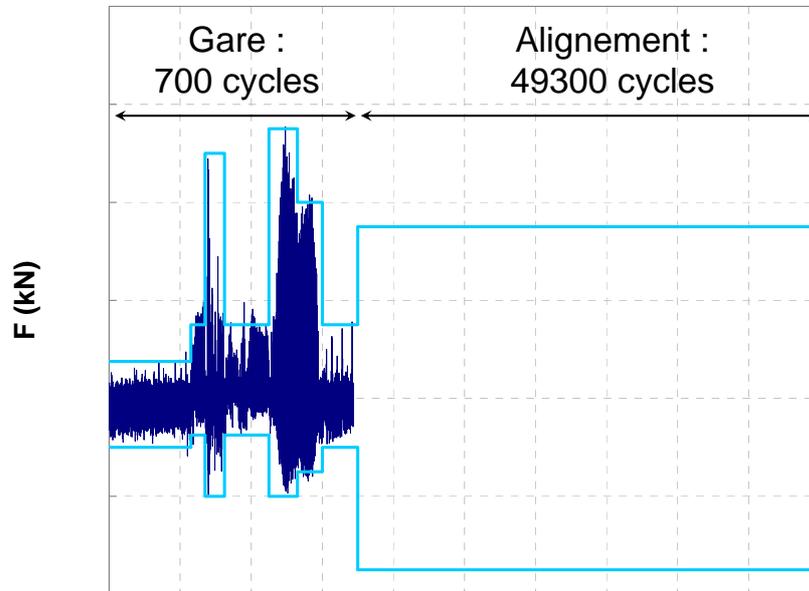


Figure 4-25. Séquence de chargement à amplitude variable appliquée lors de l'essai sur roue

La Figure 4-26 montre la confrontation entre la simulation réalisée avec le modèle et le résultat d'essai dans un diagramme $a = f(N)$. Un écart de 10 % a été observé à la fin de l'essai entre le nombre de cycle simulé et mesuré.

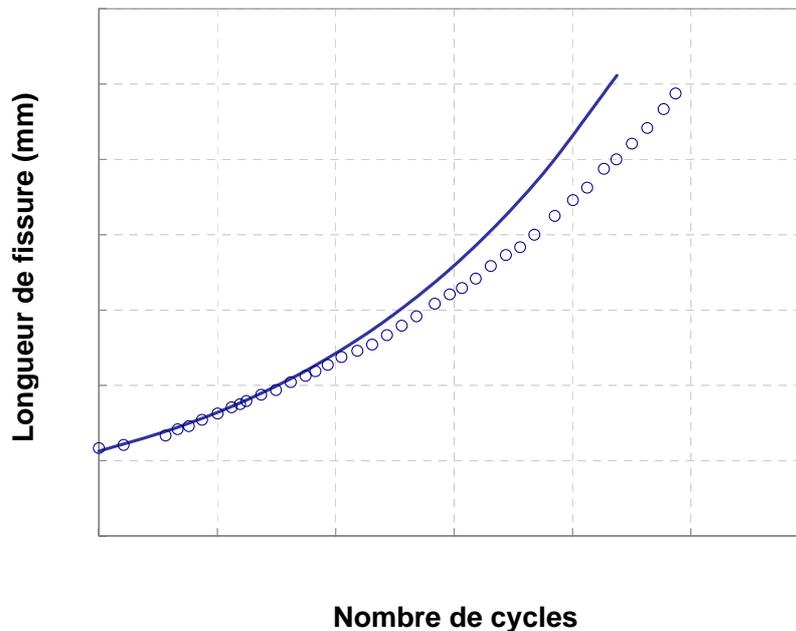


Figure 4-26. Comparaison de la vitesse de propagation mesurée (cercles) et calculée avec le modèle

4.6 Bilan du Chapitre 4

- L'analyse des essais en ligne a montré que le chargement en service dans la toile de roue peut être assimilé à une bi-traction combinée à une bi-flexion.
- Les essais et les simulations ont été réalisés pour un chargement cyclique sur la roue mais sans rotation de celle-ci.
- La méthodologie de passage de la fissure 2D à la fissure 3D semi-elliptique est la suivante : le front de fissure est discrétisé en plusieurs éléments rectilignes. Les évolutions de K et T/K sont calculées en fonction du chargement pour chaque élément. Ensuite, nous calculons avec le modèle incrémental une extension de surface par unité de longueur pour chaque élément. Le front obtenu permet de calculer le rapport de forme pour la nouvelle géométrie de la fissure. Cependant un nouveau front est recalculé afin d'assurer sa continuité.
- Le passage 2D-3D a été validé grâce à des essais de flexion 4 points réalisés pour deux épaisseurs d'éprouvettes différentes (5 mm et 15 mm).
- Un essai de propagation a été réalisé sur roue à l'échelle 1 afin de valider le passage éprouvette-structure.
- La convergence du modèle en fonction du nombre d'éléments le long du front est assurée dès que le nombre d'éléments dépasse 12. Le temps de calcul pour une fissure semi-elliptique par rapport à une fissure 2D est donc multiplié par 12.
- Le modèle permet de retrouver les phénomènes observés dans la littérature : rapport de forme de 0.9 en traction cyclique, indépendance de l'évolution du rapport de forme à la forme initiale de la fissure. La comparaison des prédictions du modèle aux résultats d'essais sur roue et sur éprouvette est satisfaisante.

Conclusions et perspectives

Nous avons présenté à travers les différents chapitres de ce rapport l'élaboration d'un modèle incrémental de fissuration par fatigue. L'objectif fixé était d'appliquer ce modèle à la fissuration de roues de train et de l'adapter afin de pouvoir tenir compte de la forme semi-elliptique de la fissure et du chargement appliqué en service, notamment les phases de compression et la nature biaxiale du chargement.

Le principe du modèle incrémental est simple, il est basé sur une approximation de la cinématique à l'extrémité de la fissure. Les champs élastique et plastique sont caractérisés par deux variables scalaires qui sont K_I , le facteur d'intensité des contraintes et ρ qui mesure l'érousement plastique. Cette approximation permet d'effectuer un changement d'échelle depuis l'échelle locale, à laquelle sont effectuées les identifications, vers l'échelle globale, à laquelle sont effectuées les simulations de la propagation des fissures. L'intérêt de cette approche est de combiner les avantages des approches locale et globale, à savoir une description fine des effets liés au matériau et des temps de calcul réduits.

Le modèle incrémental contient deux lois. Une loi de fissuration qui lie l'incrément d'extension de la fissure à l'incrément d'érousement plastique à son extrémité, et une loi d'érousement qui donne l'évolution de l'érousement plastique en fonction du chargement appliqué. La mise en œuvre du modèle incrémental nécessite deux essais de base, un essai de comportement cyclique du matériau et un essai de fissuration par fatigue à amplitude constante. L'identification des paramètres de la loi d'érousement se fait par Élément Finis, à l'aide d'un protocole automatisé. Cette méthode permet de tenir compte des particularités du comportement cyclique du matériau. La loi de fissuration contient un paramètre d'ajustement dont la valeur est fixée de manière à avoir un bon accord entre les prévisions du modèle et les résultats d'un essai de fissuration à amplitude de charge constante. Le modèle peut ensuite être employé pour simuler la fissuration par fatigue sous chargement d'amplitude variable. Les essais de validation ont montré que le modèle reproduit fidèlement les différents phénomènes observés en fissuration sous chargement à amplitude variable, parmi lesquels nous pouvons citer : le retard après une surcharge et l'interaction entre cycles dans le cas de chargement par blocs.

Ensuite nous avons apporté des évolutions au modèle. Ces améliorations ont consisté à implémenter l'effet des phases de compression sous le point de fermeture de la fissure et l'effet des chargements biaxiés à travers la contrainte T . Le niveau de compression élevé dans la toile tend à raccourcir la durée de vie en fatigue. Les essais de propagation menés à différents rapports de charge ont permis de valider les prévisions du modèle. L'introduction de la contrainte T dans le modèle incrémental a été ensuite réalisée en identifiant les paramètres de la loi d'érousement pour différents niveaux de biaxialité, puis en interpolant pour les niveaux intermédiaires.

L'interpolation a été possible parce que nous avons veillé à utiliser des équations d'évolutions dans la loi d'érousement pour lesquelles il y avait unicité du jeu de paramètres. Les essais réalisés sur des éprouvettes CT et CCT ont permis de montrer l'importance de ce paramètre et de s'assurer que le modèle donnait des résultats satisfaisants.

Enfin, le modèle a été appliqué au problème d'une fissure semi-elliptique soumise à un chargement combiné de bi-traction et de bi-flexion. Deux types d'essais ont été réalisés, des essais sur éprouvette de flexion 4 points et des essais sur roue à l'échelle 1. Les simulations réalisées avec le modèle ont montré que ce dernier reproduit fidèlement la durée de vie et le rapport de forme de la fissure.

Les perspectives de ce travail sont nombreuses.

Commençons par la validation expérimentale de l'approximation sur la cinématique. La corrélation d'images constitue un outil formidable pour valider cette approximation : elle fournit le champ de déplacement en tout point autour de la fissure. Aujourd'hui, on peut déjà déterminer expérimentalement, à l'aide cette méthode, une ténacité avec une précision de $\pm 0.2 \text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ [Hild et Roux 2006] dans un matériau fragile. Il est prévu d'appliquer une démarche similaire pour étudier le comportement cyclique de fissures dans des matériaux élastoplastiques.

Dans de nombreuses applications industrielles, les effets de couplage avec les phénomènes d'oxydation/corrosion jouent un rôle important. L'intégration de ces effets fait actuellement le sujet de la thèse de J.A. Ruiz qui se fait au LMT-Cachan en collaboration avec la Snecma. Le modèle incrémental, écrit sous la forme d'une vitesse de fissuration (da/dt), facilite l'écriture de tels couplages.

À moyen terme, le modèle actuel pourra être enrichi afin de s'appliquer à la fissuration en modes mixtes [Pommier 2006]. Lorsque la fissure travaille en chargement proportionnel, elle tend généralement à s'orienter de manière à travailler en mode I. Cependant, lorsque les chargements sont non-proportionnels (traction-compression et cisaillement hors phase) la fissure peut travailler en mode mixte tout au long de sa propagation. Il existe un certain nombre de problèmes pratiques de structures réelles dans lesquels le chargement est typiquement non-proportionnel (contacts, pièces tournantes). L'extension aux modes mixtes serait donc bien utile.

Bibliographie

[Ahmad et al. 1986] J. Ahmad, B. N. Leis et M. F. Kanninen. Analysis of fatigue crack propagation under bixial loading using an inclined strip yield zone model of crack tip plasticity. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, vol. 9, pp. 291-304, 1986.

[Ayatollahi et al. 2002] M.R. Ayatollahi, M.J. Pavier et D.J. Smith. Mode I cracks subjected to large T-stress. *International Journal of Fracture*, vol. 117 pp. 159-174, 2002.

[Bao et McEvily 1998] H. Bao et A. J. McEvily. On plane stress-plane strain interactions in fatigue crack growth. *International Journal of Fatigue*, vol. 20 pp. 441-448, 1998.

[Bathias et Baïlon 1997] C. Bathias et J.P. Baïlon. *La fatigue des matériaux et des structures*. Hermes, 1997.

[Beevers et al. 1984] C.J. Beevers, K. Bell, R.L. Carlson et E.A. Starke. A model for fatigue crack closure. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 19 pp. 93-100, 1984.

[Benyon et Waston 2001] J. Benyon et AS.Waston. The use of Monte-Carlo analysis to increase axel inspection interval. Dans *Proceedings of the 13th International Wheelset Congress, Rome (Italie)*, 2001.

[Beretta et al. 2006] S. Beretta, M. Madia., M. Schodel et U. Zerbst. SIF Solutions for cracks in railway axles under rotating bending. *16th European Conference of Fracture (ECF-16)*, 2006.

[Billardon et al. 1986] R. Billardon, C. Adam et J. Lemaitre. Study of the non-uniform growth of a plane crack in a three-dimensional body subjected to non-proportionnal loadings. *International Journal of Solids and Structure*, vol. 27 pp. 677-692, 1986.

[Blochwitz et al. 2003] C. Blochwitz, W. Tirschler et A. Weidner. Crack opening displacement and propagation rate of microstructurally short cracks. *Materials Science & Engineering*, A357 pp. 264-269, 2003.

[Budiansky et Hutchinson 1978] B. Budiansky et J.W. Hutchinson. Analysis of closure in fatigue crack growth. *Journal of applied mechanics*, vol. 45 pp. 267-276, 1978.

[Carpinteri et al. 2000] A. Carpinteri, R. Brighenti et A. Spagnoli. Fatigue growth simulation of part-through flaws in thick-walled pipes under rotary bending. *International Journal of Fatigue*, vol. 22 pp. 1-9, 2000.

[Chang et Guo 1999] T. Chang et W. Guo. Effects of strain hardening and stress state on fatigue crack closure. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 21 pp. 881-888, 1999.

[Chantier 2000] I. Chantier. Tolérance aux défauts initiaux et effets de surface dimensionnement à la fatigue de pièces de fonderie. Thèse de doctorat, ENS Cachan, 2000.

[Chemouni 2005] J. Chemouni. Contribution à la simulation de la propagation des fissures dans les roues de train. Mémoire de DEA, LMT Cachan, 2005.

[Cotterell et Rice 1980] B. Cotterell et J.R. Rice. Slightly curved or kinked cracks. *International Journal of Fracture*, vol. 16 pp. 155-169, 1980.

[Creager et Paris 1967] M. Creager et P.C Paris. Elastic field equations for blunt cracks with reference to stress corrosion cracking, *Int. Jour. Fract. Mech.* 3, pp. 247-252, 1967.

[De Koning 1981] A. U. De Koning. A simple crack closure model for prediction of fatigue crack growth rates under variable amplitude loading. *Fracture Mechanics Thirteenth Conference, ASTM STP 743*, pp. 63-85, 1981.

[Dugdale 1960] D.S. Dugdale. Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 8 pp. 100-108, 1960.

[Elber 1971] W. Elber. The Significance of fatigue crack closure. *ASTM STP 486*, pp. 230-242, 1971.

[Endo et al. 1974] T. Endo, K. Mitsunaga, K. Takahashi, K. Kobayashi et M Matsuishi. Damage evaluation of metals for random or varying loading – three aspects of Rain Flow method. Dans *Proceedings of the 1974 Symposium on Mechanical Behavior of Materials*, pp. 372-380, 1974.

[Esslinger et al. 2003] V. Esslinger, R. Kieselbach, R. Koller et B. Weisse. The railway accident of Eshede – technical background. *Engineering Failure Analysis*, vol. 11 pp. 515-535, 2003.

[Fett 1997] T. Fett. A Green's function for T-stresses in an edge-cracked rectangular plate. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 57 pp. 365-373, 1997.

[Fett 1998] T. Fett. A compendium of T-stress solutions. Rapport interne numéro FZKA 6057, Forschungszentrum Karlsruhe (Institut für Materialforschung), 1998.

[Fleck et Newman 1988] N.A. Fleck et J.C Newman. Analysis of crack closure under plane strain conditions. *Mechanics of fatigue crack closure, ASTM STP 982*, pp. 319-341, 1988.

[François et al. 1993] D. François, A. Pineau et A. Zaoui. Comportement mécanique des matériaux, volume II : visco-plasticité, endommagement, mécanique de la rupture, mécanique du contact. Edition Hermès, 1993.

[Gros 1996] V. Gros. Etude de l'amorçage et de la propagation des fissures de fatigue dans les essieux-axes ferroviaires. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Paris, 1996.

-
- [Guo 1999] W. Guo. Three-dimensional analyses of plastic constraint for through-thickness cracked bodies. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 62 pp. 383-407, 1999.
- [Hamam et al. 2005] R. Hamam, S. Pommier et F. Bumbieler. Mode I fatigue crack growth under biaxial loading. *International Journal of Fatigue*, vol. 27 pp. 1342-1346, 2005.
- [Hild et Roux 2006] F. Hild et S. Roux. Measuring stress intensity factors with a camera: Integrated digital image correlation (I-DIC). *Comptes Rendus Mecanique*, vol. 334 pp. 8-12, 2006.
- [Hoshide et Tanaka 1981] T. Hoshide et K. Tanaka. Stress-ratio effect of fatigue crack propagation in a biaxial stress field. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, vol. 4 pp. 355-366, 1981.
- [Howard 1981] I.C Howard. A method of estimating biaxial fatigue growth rates. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, vol. 3, pp. 265-270, 1981.
- [Huang et Tan 1995] W.L. Huang et J.Z. Tan. Failure assessment diagram (FAD) for I-II mixed-mode crack structures under biaxial load. *Int. J. Pres. Ves. & Piping*, vol. 69 pp. 53-58, 1996.
- [Husset et al. 1980] J. Husset, H. P. Lieurade, F. Maltrud et M. Truchon. In – depth fatigue crack growth monitoring using a crack front marking technique. *Rapport IRSID PA 2 -2996 HPL/NG*, 1980.
- [Hutar et al. 2004] P. Hutar, S. Seitzl et Z. Knésl. Quantification of the effect of specimen geometry on the fatigue crack growth response by two-parameter fracture mechanics. *Materials Science & Engineering, A* 387-389 pp. 491-494, 2004.
- [Hutar et al. 2006] P. Hutar, S. Seitzl et Z. Knésl. Effect of constraint on fatigue crack near threshold in medium carbon steel. *Computational Materials Science*, vol. 37 pp. 51-57, 2006.
- [Jankovic 2004] P. JANKOVIC. Etude de la fissuration sous chargement d'amplitude variable d'un acier pour composants ferroviaires. *Mémoire de DEA, INSTN CEA*, 2004.
- [Irwin 1960] G.R. Irwin. Plastic zone near a crack and fracture toughness. *Proc. Of the seventh Sagamore Ordnance Materials Conference*, vol. 4 pp. 63-78, New-york, Syracuse University, 1960.
- [Kane 2005] A. Kane. Propagation de fissures superficielles et de réseau de fissures en fatigue isotherme biaxiale et fatigue thermique dans l'acier inoxydable 304L. *Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique*, 2005.
- [Kfoury 1986] A.P. Kfoury. Some evaluation of the elastic T-term using Eshelby's method. *International Journal of fracture*, vol. 30 pp. 301-315, 1986.
- [Kim et Lee 2000] J.H. Kim et S.B. Lee. Fatigue crack opening stress based on the strip-yield model. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, vol. 34 pp. 73-84, 2000.

[Kitagawa et Takahashi 1976] H. Kitagawa et S. Takahashi. Applicability of fracture mechanics to very small cracks. International Conference on Mechanical Behaviour of Materials (ICM 2), pp. 627-631, 1976.

[Kitagawa et Yuuki 1979] H. Kitagawa et R. Yuuki. A fracture mechanics approach to high-cycle fatigue growth under in-plane biaxial loads. Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, vol. 2 pp. 195-206, 1979.

[Kitagawa et al. 1985] H. Kitagawa, R. Yuuki, K. Tohgo et M. Tanabe. ΔK -dependency of fatigue growth of single and mixed mode cracks under biaxial stress. Multiaxial fatigue, ASTM STP 853, pp. 164-183, 1985.

[Kitaoka et Mikuriya 1996] S. Kitaoka et T. Mikuriya. The effect of biaxial stress ratio on the propagation behaviour of mode I surface cracks by the combination of plane bending and cyclic torsion. International Journal of Fatigue, vol. 18 pp. 205-211, 1996.

[Kuna et al. 2003] M. Kuna, M. Springmann, K. Mädler, P. Hübner et G. Pusch. Fracture mechanics based design of railway wheel made of austempered ductile iron. Engineering Fracture Mechanics, vol. 72 pp. 241-253, 2003.

[Kurzawa 2002] S. Kurzawa. Etude de l'influence de la compression sur la vitesse de fissuration des essieux axes ferroviaires. Mémoire de DEA, ESSTIN de Nancy, 2002.

[Laird 1967] C. Laird. The influence of metallurgical structure on the mechanisms of fatigue crack propagation. ASTM STP 415, pp. 131-168, 1967.

[Lee et al. 2005] Y. Lee, J. Pan, R. Hathaway et M. Barkey. Fatigue testing and analysis (theory and practice). Edition Elsevier, 2005.

[Leevers et Radon 1982] P.S. Leevers et J.C. Radon. Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries. International Journal of fracture, vol. 19 pp. 311-325, 1982.

[Lemaitre et Chaboche 1985] J. Lemaitre et J.L. Chaboche. Mécanique des matériaux solides. Dunod, pp. 213-234, 1985.

[Lin et Smith 1999a] X.B. Lin et R.A. Smith. Finite element modelling of fatigue crack growth of surface cracked plates, part I: the numerical technique Engineering Fracture Mechanics, vol. 63 pp. 503-522, 1999.

[Lin et Smith 1999b] X.B. Lin et R.A. Smith. Finite element modelling of fatigue crack growth of surface cracked plates, part II: crack shape change. Engineering Fracture Mechanics, vol. 63 pp. 523-540, 1999.

[Lin et Smith 1999c] X.B. Lin et R.A. Smith. Shape evolution of surface cracks in fatigued round bars with a semicircular circumferential notch. International Journal of Fatigue, vol. 21 pp. 965-973, 1999.

[Masahiro 2004] J. Masahiro. Fatigue damage and crack growth under variable amplitude loading with reference to the counting methods of stress-strain ranges. International Journal of Fatigue, vol. 27 pp. 1006-1015, 2004.

[Masahiro et al. 2004] T. Masahiro, G. Koji et N. Toshio. Fatigue crack propagation for a through thickness crack : a crack propagation law considering cyclic plasticity near the crack tip. *International Journal of Fatigue*, vol. 26 pp. 983-992, 2004.

[McClintock 1967] F.A. McClintock. Discussion to C. Laird's paper « The influence of metallurgical microstructure on the mechanisms of fatigue crack propagation ». *Fatigue Crack Propagation*, ASTM STP 415, pp. 170-174, 1967.

[Mc Clung 1996] R.C. Mc Clung. Finite elements perspectives on the mechanics of fatigue crack closure, proc. *Fatigue 96*, 6th International Fatigue Congress, Berlin FRG, 6-10 May 1996.

[McFadyen et al. 1990] N.B. McFadyen, R. Bell et O. Vosikovsky. Fatigue crack growth of semi-elliptical surface cracks. *International Journal of Fatigue*, vol. 12 pp. 43-50, 1990.

[McMillan et Pelloux 1967] J.C. McMillan et R.M.N. Pelloux. Fatigue crack propagation under program and random loads. *ASTM STP 415*, pp. 505-532, 1967.

[Miller 1987] K.J. Miller. The behaviour of short fatigue cracks and their initiation part II – A general summary. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, vol. 10 pp. 93-113, 1987.

[Miller et Brown 1985] K.J. Miller et M.W. Brown. Mode I fatigue crack growth under biaxial stress at room and elevated temperature. *Multiaxial fatigue*, ASTM STP 853, pp. 135-152, 1985.

[Murakami et al. 1987] *Stress intensity factors handbook*. Pergamon Press, Oxford, 1987.

[Nedbal et al. 1989] I. Nedbal, J. SIEGEL et J. KUNZ. Relation between striation spacing and fatigue crack growth rate in Al-Alloy Sheets. *Advanced in Fracture Research*, Pergamon Press, pp. 3483-3491, 1989.

[Neuman 1969] P. Neuman. Coarse slip model of fatigue. *Acta metallurgica* 17 pp. 1219-1225, 1969.

[Newman 1981] J.C. Newman. A crack-closure model for predicting fatigue crack growth under aircraft spectrum loading. *ASTM STP 748* pp. 53-84, 1981.

[Newman et Elber 1988] J.C. Newman et W. Elber. Mechanics of fatigue crack closure. *PA 19103*, ASTM STP 982, 1988.

[Newman 1992] J.C. Newman. COSMIC, Fastran II - A Fatigue Crack Growth Structural Analysis Program. NASA Technical Memorandum 104159. Langley Research Center, Hampton, Virginia 23665, 1992.

[Newman et Raju 1981] J.C. Newman et I.S. Raju. An empirical stress-intensity factor equation for the surface crack. *Engineering Fracture Mechanics*, vol.15 pp. 185-192, 1981.

[NF F00-702 1998] Normalisation française. Comportement dynamique des véhicules vis-à-vis de la voie : méthodes de mesure des forces. F00-702, octobre 1998.

[NF A03-404 1991] Normalisation française. Pratique des essais de vitesse de propagation de fissure en fatigue. A03-404, Juin 1991.

[Nykänen 1996] T.J. Nykänen. Fatigue crack growth simulation based on free front shape development. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, vol. 19 pp. 99-109, 1996.

[Paris et Erdogan 1963] P.Paris et F.Erdogan. ASME, pp. 528-534, 1963.

[Patankar et Rayn 2000] R. Patankar et A. Ray. State-space modeling of fatigue growth in ductile alloys. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 66 pp. 129-151, 2000.

[Pei et al. 1989] H.X. Pei, M.W. Brown et K.J. Miller. Fatigue crack propagation under complex biaxial stress cycling. *Biaxial and Multiaxial Fatigue*, EGF 3, Mechanical Engineering publication, pp. 587-603, 1989.

[Pelloux 1969] R. M. N Pelloux. Mechanisms of formation of ductile fatigue striation. *ASM* 62, pp. 281-285, 1969.

[Pommier 2002a] Fatigue des matériaux métalliques. Rapport d'Habilitation à Diriger les Recherches.

[Pommier 2002b] S. Pommier. Plane strain crack closure and cyclic hardening. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 69, pp. 25-44, 2002.

[Pommier 2003] S. Pommier. Cyclic plasticity and variable amplitude fatigue. *International Journal of Fatigue*, vol. 25 pp. 983-997, 2003.

[Pommier et Risbet 2005] S. Pommier et M. Risbet. Time-derivative equations for fatigue crack growth in metals. *International Journal of fracture*, vol. 131 pp. 79-106, 2005.

[Pommier 2006] S. Pommier. Cyclic plasticity of a cracked structure submitted to mixed mode loading. *Proc. PLASTICITY 06*, Editors: A. S. Khan , R. Kazmi, Halifax, Canada, 17-22 July, 2006.

[Poncelet et al. 2006] M. Poncelet, C. Doudard, S. Calloch, D. Weber, A. Galtier et F. Hild. An identification of high cycle fatigue properties by using temperature measurement under biaxial loading. *Fatigue 2006 – 9th International Fatigue Congress*, 2006.

[Pook 1994] L. P. Pook. Some implications of corner point singularities. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 49, pp. 367-378, 1994.

[Pouillart 1984] T. Pouillart. Contribution à l'étude de la fatigue en sollicitation multiaxiales : application au calcul des roues de matériel ferroviaire. Mémoire de DEA, CNAM Paris, 1984.

[Putra et Schijve 1992] I .S. Putra et J. Schijve. Crack opening stress measurements of surface cracks in 7075-T6 aluminium alloy plate specimen through electron fractography. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, vol. 15 pp. 323-338, 1992.

[Raju et Newman 1979] I.S. Raju et J.C. Newman. Stress intensity factors for a wide range of semi-elliptical surface cracks in finite-thickness plates. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.11 pp. 817-829, 1979.

[Rice 1967] J. R. Rice. Mechanics of crack tip deformation and extension by fatigue. *ASTM STP 415*, pp. 247-309, 1967.

[Rice 1968] J.R. Rice. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks. *J. of Appl. Mech.*, Vol. 35, pp. 379-386, 1968.

[Richard et al. 2005] H.A. Richard, M. Fulland, M. Sander et G. Kullmer. Fracture in a rubber-sprung railway wheel. *Engineering Failure Analysis*, vol. 12 pp. 986-999, 2005.

[Richter et al. 2001] R. Richter, W. Trischler et C. Blochwitz. In-situ scanning electron microscopy of fatigue crack behaviour in ductile materials. *Materials Science & Engineering*, A313 pp. 237-243, 2001.

[Roychowdhury et Dodds 2004] S. Roychowdhury et Jr. R.H. Dodds. Effect of T-stress on fatigue crack closure in 3-D small-scale yielding. *International Journal of Solids and Structure*, vol. 41 pp. 2581-2606, 2004.

[Sansoz 2000] F. Sansoz. Propagation des petites fissures de fatigue dans les zones de concentration de contraintes dans le superalliage N18. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure de Mines de Paris, 2000.

[Seyedi 2004] D. Seyedi. Formation, propagation et coalescence dans un réseau de fissuration en fatigue thermique. Thèse de doctorat, ENS Cachan, 2004.

[Sham 1991] T.L. Sham. The determination of the elastic T-term using higher order weight functions. *International Journal of fracture*, vol. 48 pp. 81-102, 1991.

[Sherry et al. 1995] A.H. Sherry, C.C. France et M.R. Goldthorpe. Compendium of T-stress solution for two and three dimensional cracked geometries. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, vol. 18 pp. 141-155, 1995.

[Schijve 1973] J. Schijve. Effect of load sequences on crack propagation under random and program loading. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 5 pp. 269-280, 1973.

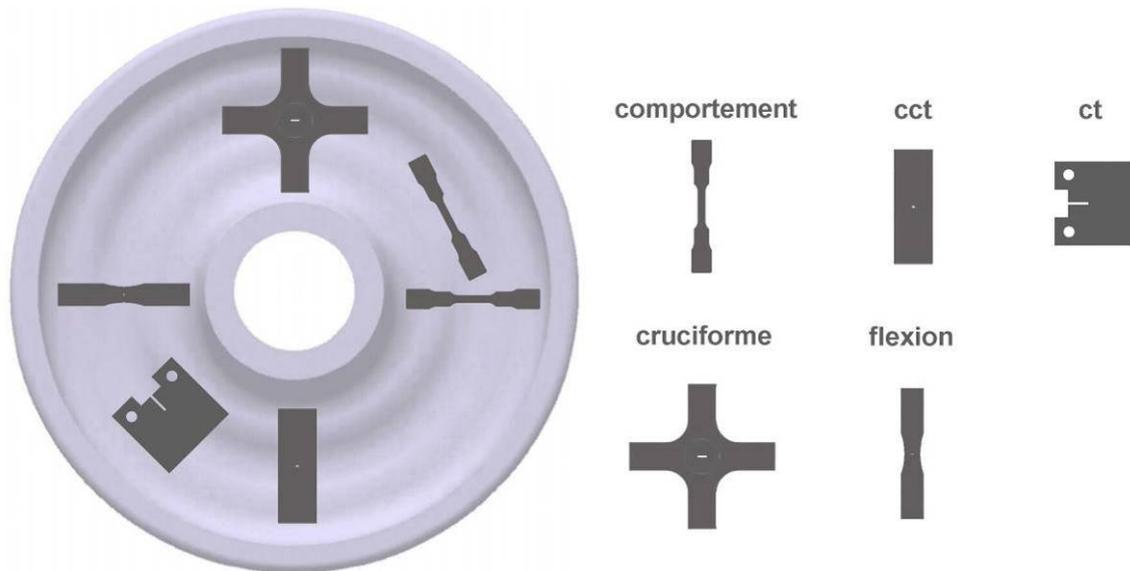
[Sivaprasad et al. 2005] S. Sivaprasad, S. Tarafder ; V. R. Ranganath et N. Parida. Fatigue and fracture behaviour of forged and cast railway wheels. Dans 11th International Conference on Fracture, paper 5591, Turin (Italie), 2005.

[Smith et al. 2000] D.J. Smith , M.R. Ayatollahi et M.J. Pavier. The role of T-stress in brittle fracture for linear elastic material under mixed-mode loading. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, vol. 24, pp. 137-150, 2000.

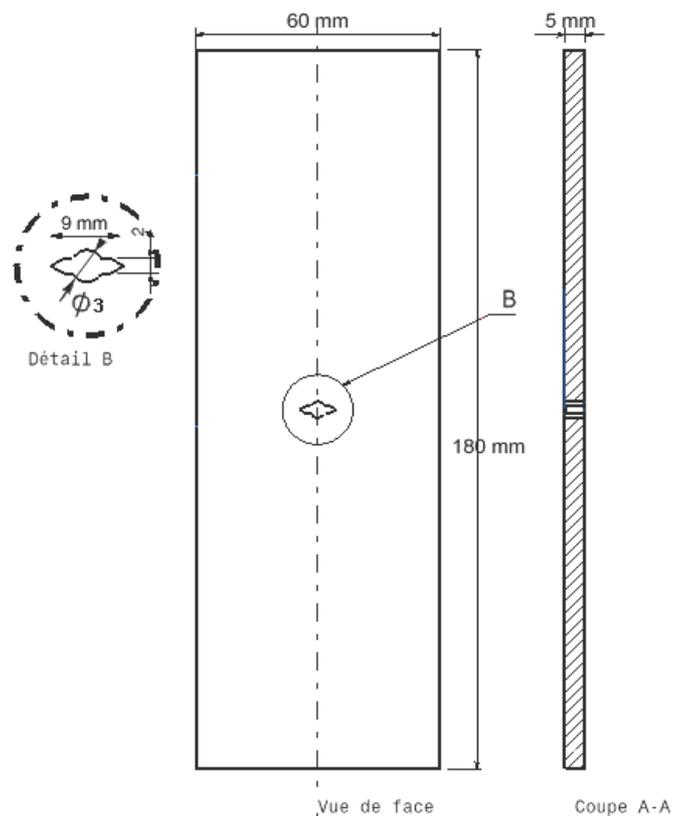
- [Suresh 1991] S. Suresh. Fatigue of materials. Cambridge, 1991.
- [Tvergaard 2004] V. Tvergaard. On fatigue crack growth in ductile materials by crack-tip blunting. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 52 pp. 2149-2166, 2004.
- [Truchon et al. 1981] M. Truchon, M. Amestoy et K. Dang-Van. Experimental study of fatigue crack growth under biaxial loading. *Proceeding ICF5 Cannes*, 1981.
- [Tanaka et al. 1979] K. Tanaka, T. Hoshide, A. Yamada et S. Taira. Fatigue crack propagation in biaxial stress fields. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, vol. 2 pp. 181-194, 1979.
- [Tanaka et al. 1981] K. Tanaka, Y. Nakai, M. Yamashita. Fatigue growth threshold of small cracks. *International Journal of fracture*, vol. 17 pp. 519-533, 1981.
- [Tong 2002] J. Tong. T-stress and its implications for crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 69 pp. 1325-1337, 2002.
- [Vecchio et al. 1987] R. S. Vecchio, J. S. Crompton et R. W. Hertzberg. The influence of specimen geometry on near threshold fatigue crack growth. *Fatigue of Engineering Materials*, vol. 10 pp. 333-342, 1987.
- [Vladislav et al. 2005] L. Vladislav, S. Rainer et S. Bob. Simulation of fatigue crack propagation in ductile metals by blunting and re-sharpening. *International Journal of fracture*, vol. 136 pp. 207-220, 2005.
- [Wadier 1981] Y. Wadier. Calculs tridimensionnels de propagation de fissures en fatigue par la méthode des Eléments Finis. Rapport EDF HI/3798-02, direction des études et de la recherche. 1981
- [Wang et Parks 1992] Y.Y. Wang et D.M. Parks. Evolution of the elastic T-stress in surface-cracked plates using line-spring method. *International Journal of fracture*, vol. 56 pp. 25-40, 1992.
- [Wang 2003] X. Wang. Elastic T-stress solutions for semi-elliptical surface cracks in finite thickness plates. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 70 pp. 731-756, 2003.
- [Wheeler 1972] O.E. Wheeler. Spectrum loading and crack growth. *Journal of Basic Engineering*, vol. 4 pp. 181, 1972.
- [Willenborg et al. 1971] J. Willenborg, R.M. Engle et H.A. wood. Crack retardation model using an effective stress concept. *AFFDL-TM 71-1-FBR*, 1971.
- [Youshi et al. 1992] H. Youshi, M.W. Brown et J. Miller. Fatigue crack growth from a circular notch under high levels of biaxial stress. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, vol. 15 pp. 1185-1197, 1992.
- [Yuuki et al. 1989] R. Yuuki, K. Akita et N. Kishi. The effect of biaxial stress state and changes of state on fatigue crack growth behavior. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, vol. 12 pp. 93-103, 1989.

Annexe A : Plan de prélèvement des échantillons et expressions d'évolution de K et T

A.1 Plan de prélèvement de éprouvettes dans la roue



A.2 Epreuve CCT



Expression du facteur d'intensité des contraintes [NF A03-404 1991] :

$$K = \frac{FY}{BW^{\frac{1}{2}}} \text{ pour } F > 0 \quad (\text{A-1})$$

$$K = 0 \text{ pour } F \leq 0 \quad (\text{A-2})$$

Avec :

B : épaisseur de l'éprouvette

W : Demi largeur de l'éprouvette

F : force appliquée en N

Y : facteur de forme défini par :

$$Y = \left(\frac{\theta}{\cos \theta} \right)^{\frac{1}{2}} (0.707 - 0.007\theta^2 + 0.007\theta^4) \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\pi a}{2W} \quad (\text{A-3})$$

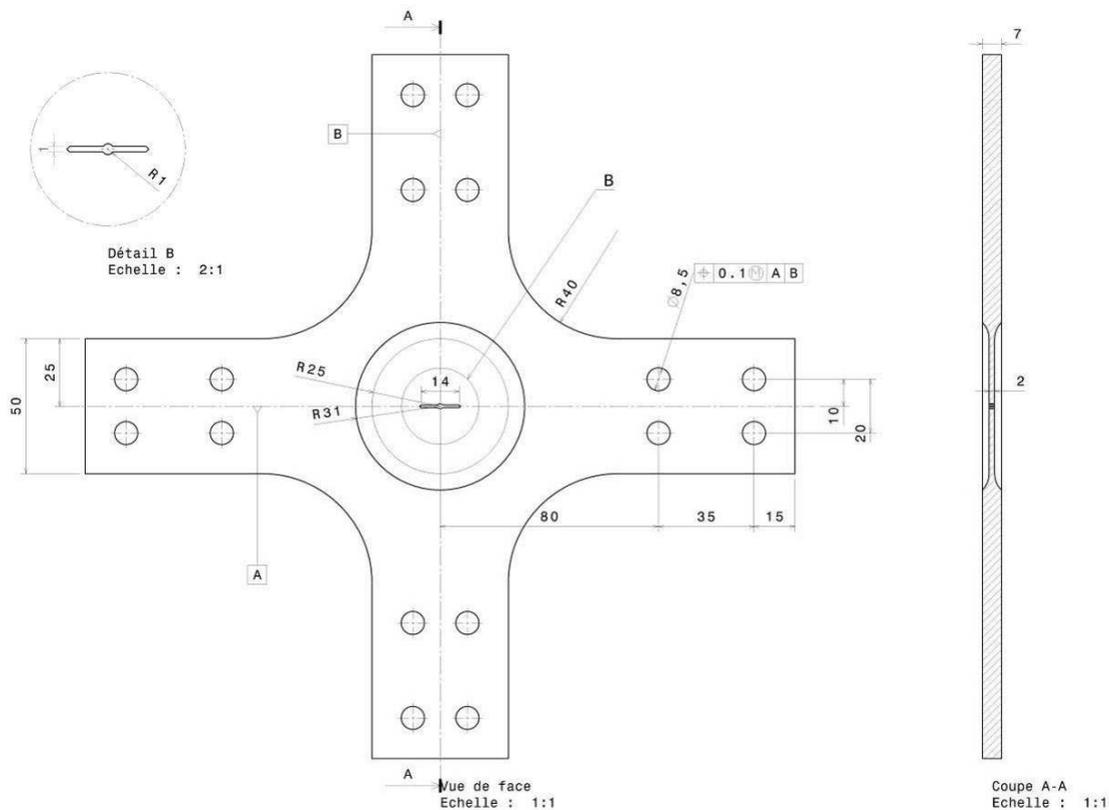
Expression de calcul de la contrainte T [Sherry et al. 1995] :

$$T = S_y \left(-0.997 + 0.283 \frac{a}{w} - 3.268 \left(\frac{a}{w} \right)^2 + 6.622 \left(\frac{a}{w} \right)^3 - 5.995 \left(\frac{a}{w} \right)^4 \right) \quad (\text{A-4})$$

Avec :

S_y : Contrainte appliquée en *MPa*

A.3 Eprouvette cruciforme



Les expressions de K et T ont été déterminées par EF par extrapolation des déplacements (voir annexe D). L'expression de K est la suivante :

$$K = l.P_y - n.P_x \quad (\text{A-5})$$

Avec :

$$l = -5.0392.10^{-4}.a^2 + 2.0586.10^{-2}.a + 0.11746$$

$$n = -2.5037.10^{-4}.a^2 + 8.788.10^{-3}.a + 2.54.10^{-2}$$

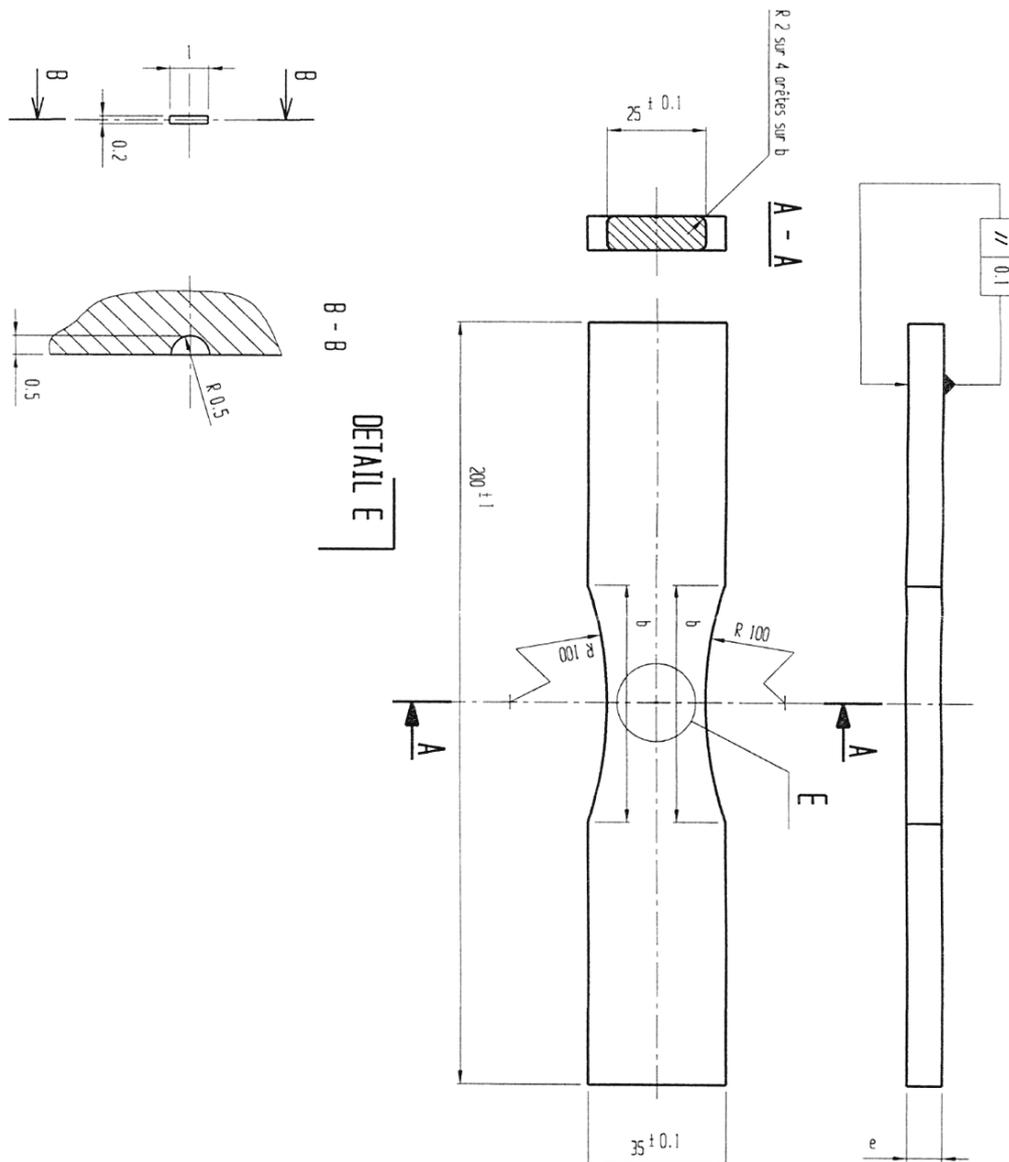
P_x : chargement en MPa appliqué aux bras parallèles à la fissure

P_y : chargement en MPa appliqué aux bras perpendiculaires à la fissure

Expression de T :

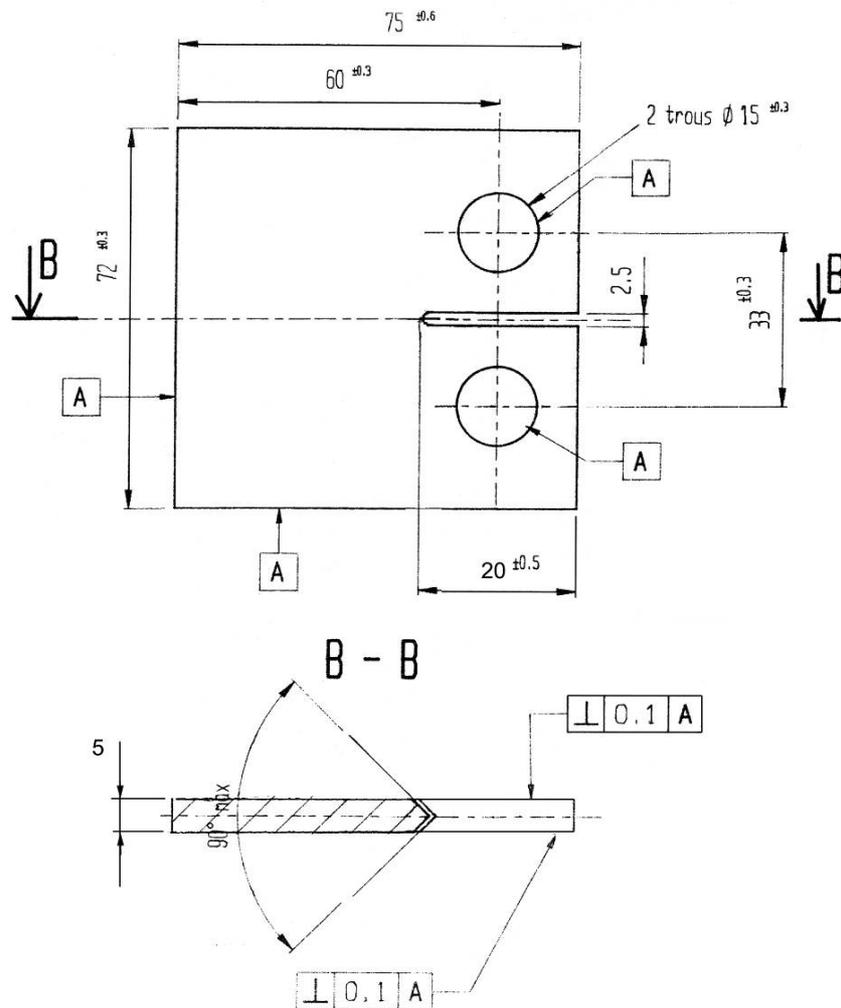
$$T = 2.1575P_x - 2.0832P_y \quad (\text{A-6})$$

A.4 Eprouvette de flexion 4 points



L'expression de K utilisé dans les calculs de propagation est celle de [Newman et Raju 1981], l'expression de T est celle de [Wang 2003]. Les expressions d'évolution de K et T sont présentées dans l'annexe E chapitre du manuscrit.

A.5 Epreuve CT



Expression du facteur d'intensité des contraintes [NF A03-404 1991] :

$$K = \frac{FY}{BW^{\frac{1}{2}}} \text{ pour } F > 0 \quad (\text{A-7})$$

Avec :

B : épaisseur de l'éprouvette

W : largeur de l'éprouvette, distance entre le bord de l'éprouvette et le centre des trous

F : force appliquée en N

Y : facteur de forme défini par :

$$Y = (2 + \theta) \frac{(0.886 + 4.64\theta - 13.32\theta^2 + 14.72\theta^3 - 5.6\theta^4)}{(1 - \theta)^{1.5}} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{a}{W} \quad (\text{A-8})$$

Expression de calcul de la contrainte T [Sherry et al. 1995] :

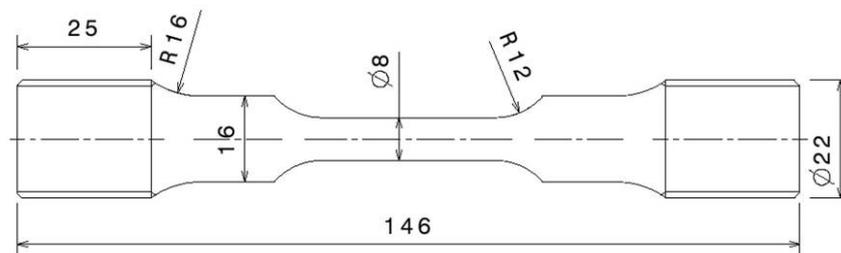
$$T = S_y \left(-1.996 + 10.169 \frac{a}{w} + 10.546 \left(\frac{a}{w} \right)^2 \right) \quad (\text{A-9})$$

Avec :

- S_y : la contrainte appliqué en MPa donnée par :

$$S_y = \frac{F}{W.B} \quad (\text{A-10})$$

A.6 Eprouvette de comportement



Annexe B : Méthodes de calcul de K

Un grand nombre de problèmes trouvent leurs solutions sous la forme d'expressions analytiques obtenues de façon exacte ou approchée. Ces expressions sont pour beaucoup regroupés dans le Handbook des facteurs d'intensité des contraintes de [Murakami et al 1987]. Quand il s'agit de configurations dont les solutions ne sont pas connues, il existe différentes méthodes permettant de calculer K .

B.1 Utilisation des solutions existantes (Principe de superposition)

Le principe de superposition peut être utilisé pour le calcul de K car il s'agit de problème où l'élasticité linéaire domine. L'expression de K d'une fissure soumise à un chargement donné est décomposée en une somme de configuration de chargements dont la solution est connue. Voici deux exemples du principe de superposition :

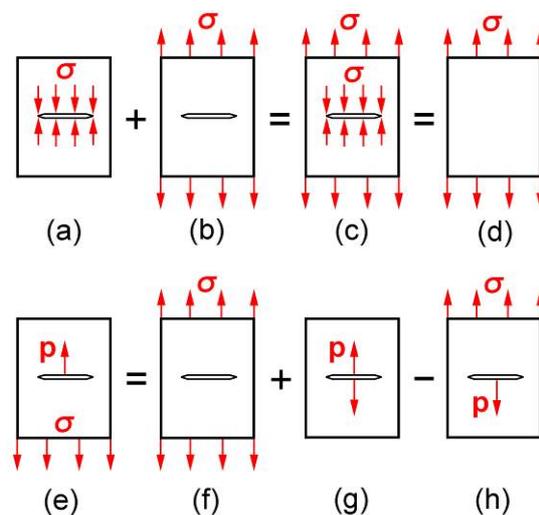


Figure B-1. Exemple du principe de superposition

Dans le premier cas, il s'agit de déterminer le facteur d'intensité des contraintes du chargement (a). On peut écrire :

$$K_{(a)} + K_{(b)} = K_{(c)} = K_{(d)} \quad (\text{B-1})$$

Donc :

$$K_{(a)} = K_{(d)} - K_{(b)} = 0 - \sigma\sqrt{\pi a} = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (\text{B-2})$$

Pour la deuxième configuration l'expression de K du chargement (e) s'écrit :

$$K_{(e)} = K_{(f)} + K_{(g)} - K_{(h)} = K_{(f)} + K_{(g)} - K_{(e)} \quad (\text{B-3})$$

Donc :

$$2K_{(e)} = K_{(f)} + K_{(g)} = \sigma\sqrt{\pi a} + \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \quad (\text{B-4})$$

B.2 Déduire K à partir du taux de relaxation de l'énergie G

L'inconvénient de cette méthode c'est qu'elle ne permet pas de séparer les modes I et II. La relation entre G et K est donnée par :

$$G = \frac{1}{E}(K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad (\text{en contraintes planes}) \quad (\text{B-5})$$

$$G = \frac{1-\nu^2}{E}(K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad (\text{en déformations planes})$$

G caractérise le taux de restitution d'énergie par avancée de fissure, c'est l'énergie disponible pour faire propager la fissure. Elle est définie par :

$$G = \frac{\delta W_{ext}}{\delta a} \quad (\text{B-6})$$

Le calcul de G peut se faire numériquement ou expérimentalement.

B.2.1 Détermination numérique de G par avancée réelle de la fissure

Cette méthode nécessite l'utilisation d'un code de calcul prédisposé à calculer l'énergie élastique. La démarche de calcul consiste à effectuer 3 calculs EF de la structure fissurée avec 3 longueurs de fissures différentes. La fissure est soumise à un chargement imposé et un maillage fin en pointe de fissure est nécessaire. La finesse du maillage doit être similaire dans les trois calculs, sinon on introduit des erreurs numériques.

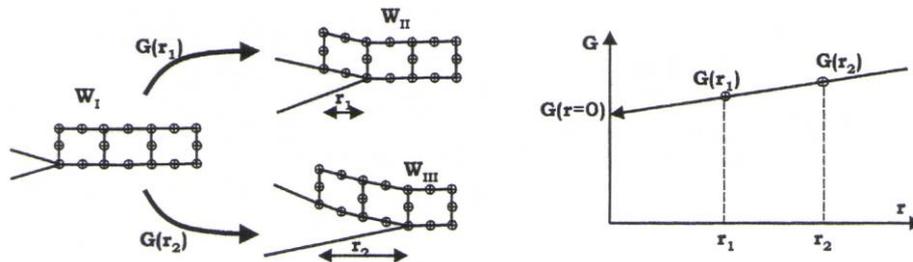


Figure B-2. Calculs EF effectués pour la détermination de G par avancée réelle de la fissure

On récupère pour chacun des trois calculs l'énergie élastique de déformation des éléments concernés et on détermine G pour les deux avancées de fissure (r_1 et r_2) :

$$G_{(r_1)} = \frac{W_{II} - W_I}{r_1} \quad \text{et} \quad G_{(r_2)} = \frac{W_{III} - W_I}{r_2} \quad (\text{B-7})$$

La valeur de G de la fissure initiale est ensuite déduite par extrapolation de la courbe vers $r=0$.

B.2.2 Détermination numérique de G par avancée virtuelle de la fissure (méthode de perturbation)

Cette méthode consiste à calculer la variation d'énergie après déplacement de la pointe de la fissure d'une valeur δa . On définit un contour Γ_0 à l'intérieur duquel les éléments seront translétés, le vecteur de perturbation δa est de l'ordre de 10^{-2} à 10^{-3} fois la dimension de la première maille en pointe. On peut démontrer que le taux de restitution d'énergie G peut être déterminé avec la relation suivante :

$$\underline{\underline{K}}\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{F}} \text{ donc } G = -\frac{1}{2}\underline{\underline{u}}^t \underline{\underline{\delta K}}\underline{\underline{u}} \quad (\text{B-8})$$

Avec $\underline{\underline{\delta K}}$ la modification de la matrice de raideur calculée sur les éléments perturbés et $\underline{\underline{u}}$ le vecteur des déplacements nodaux initial avant la perturbation. Une seule résolution par EF est nécessaire car $\underline{\underline{u}}$ correspond aux déplacements initialement calculés. Il ne faut pas oublier de multiplier G par 2 dans le cas où on effectue un calcul sur la demi structure.

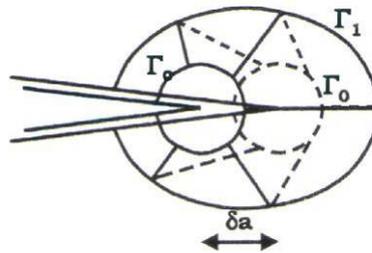


Figure B-3. Maillage autour de la pointe de la fissure avec la méthode de perturbation

B.2.3 Détermination expérimentale de G

Cette méthode consiste à déduire G de la variation de la complaisance C de la structure fissurée sollicitée en mode I. La complaisance qui est l'inverse de la raideur est définie par $\Delta = C.F$.

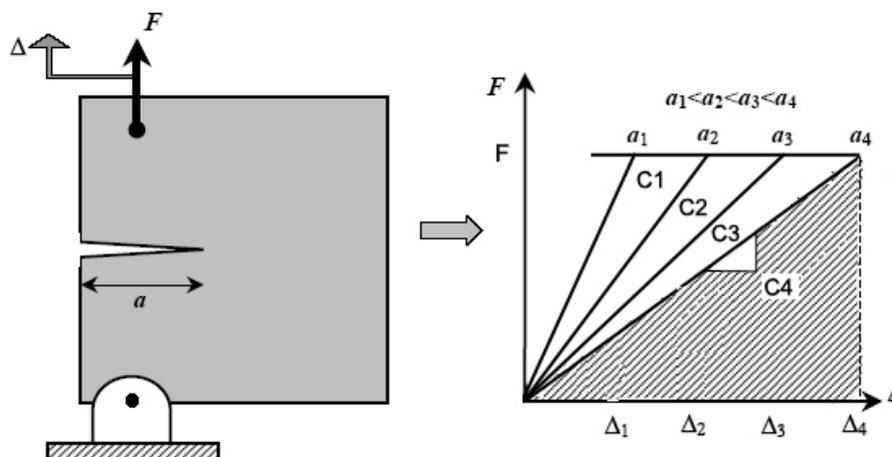


Figure B-4. Maillage autour de la pointe de la fissure avec la méthode de perturbation

Le taux de restitution d'énergie G à effort imposé est donné par :

$$G = \frac{F^2}{2} \frac{\partial C}{\partial A} \quad (\text{B-9})$$

A étant l'extension de surface de la fissure définie par $A = \Delta.e$, avec e l'épaisseur de l'éprouvette. Ainsi nous déterminons G pour plusieurs avancées de la fissure Δ . La valeur de G de la fissure initiale est ensuite déduite par extrapolation de la courbe vers $\Delta=0$. A noter que la détermination expérimentale de G peut se faire également à déplacement imposé.

B.3 Méthode faisant appel à l'intégrale J

Cette méthode est similaire à celle de la détermination de K à partir du taux de restitution d'énergie potentielle G . En élasticité linéaire, on montre que $J=G$. Dans ce cas on peut utiliser les mêmes méthodes de détermination de G qui permettent de déduire K .

B.4 Fonctions poids

Cette méthode est une conséquence du principe de superposition, le facteur d'intensité des contraintes d'une fissure soumise à une distribution de forces appliquées (Figure B-5a) est égale à la somme des facteurs d'intensité des contraintes connu $K_I(x)$ d'une fissure soumise à une force unitaire située à une distance x de la pointe de la fissure. La fonction $K_I(x)$ s'appelle fonction poids, pour une fissure dans une plaque semi-infinie (Figure B-5b) cette fonction est définie par :

$$K_{I(x)} = \frac{2}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \left(0.2945 - 0.3912 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 0.7685 \left(\frac{b}{a}\right)^4 - 0.9942 \left(\frac{b}{a}\right)^6 + 0.5094 \left(\frac{b}{a}\right)^8 \right) \quad (\text{B-10})$$

Ainsi pour une fissure soumise à un gradient de contrainte, On déduit la distribution de force ponctuelle correspondante, ce qui permet de calculer k par :

$$K_I = \int F(x) K_I(x) dx \quad (\text{B-11})$$

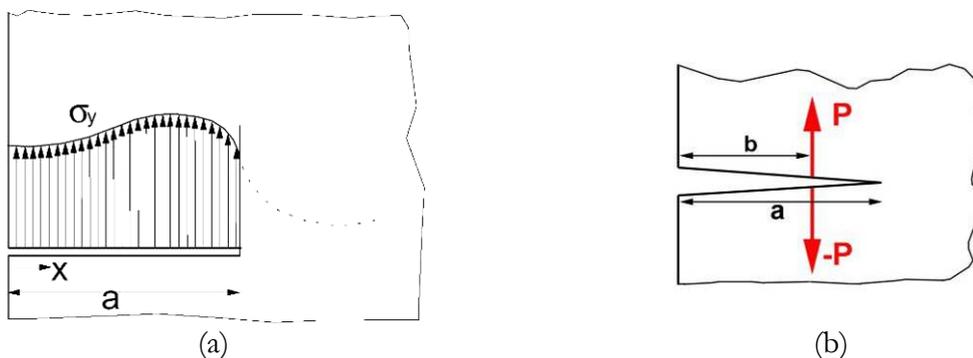


Figure B-5. Détermination de K par les fonctions poids

L'inconvénient de cette méthode c'est qu'elle ne tient pas des concentrations de contraintes dues aux effets de bord puisque le champ de contrainte utilisé est celui du milieu non fissuré. La fissure est supposée noyée dans un milieu infini.

B.5 Extrapolation des déplacements

Cette méthode de calcul permet de déterminer K à partir de l'expression du champ de déplacement des lèvres de la fissure. Le champ de déplacements numérique est calculé par éléments finis en élasticité. Le champ de déplacement peut être déterminé aussi expérimentalement comme par corrélation d'image. L'évolution de K est ensuite tracée en fonction de la distance de la pointe de la fissure r à partir des expressions analytiques du champ de déplacement :

$$U_{y(\theta=\pi)} = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left(\frac{\kappa+1}{2} \right) \Rightarrow K_I(r) = \mu \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \left(\frac{2}{\kappa+1} \right) U_{y(\theta=\pi)} \quad (\text{B-12})$$

Avec : $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ en contraintes planes et $\kappa = 3-4\nu$ en déformation plane

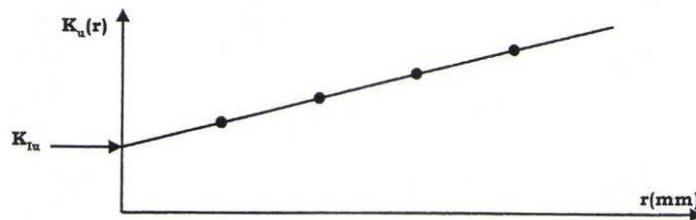


Figure B-6. Evolution de K avec la distance à la pointe de la fissure déterminée par l'extrapolation des déplacements

Cette méthode de calcul présente l'avantage de pouvoir séparer les 3 modes de fissuration

B.6 Extrapolation des contraintes

Le facteur d'intensité des contraintes est déterminé à partir de l'expression du champ de contrainte de Westergaard devant la fissure ($\theta = 0$) :

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \Rightarrow K_{I(r)} = \sigma_{yy(\theta=0)} \sqrt{2\pi r} \quad (\text{B-13})$$

Le champ des contraintes devant la fissure est calculé par Éléments Finis ou expérimentalement (photo-élasticimétrie par exemple). Le facteur d'intensité des contraintes est ensuite déduit à partir de l'expression de Westergaard ce qui permet de calculer K_I par passage à la limite $r \rightarrow 0$:

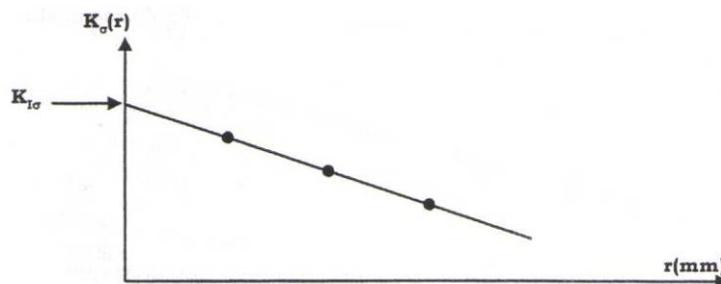


Figure B-7. Evolution de K avec la distance à la pointe de la fissure déterminée par l'extrapolation des contraintes

Annexe C : Equations d'implémentation du modèle incrémental

C.1 Equations à implanter pour la zone plastique monotone :

1- Evolution de ϱ :

Supposons qu'on passe d'un point 1 à un point 2

$$\begin{aligned} K_1 &= a_m \sqrt{\varrho_1} + b_m \\ K_2 &= a_m \sqrt{\varrho_2} + b_m \end{aligned} \quad (\text{C-1})$$

Ce qui donne pour $d\varrho$:

$$d\varrho = \varrho_2 - \varrho_1 = \left(\frac{K_2 - b_m}{a_m} \right)^2 - \left(\frac{K_1 - b_m}{a_m} \right)^2 \quad (\text{C-2})$$

En exprimant K_1 et K_2 en fonction de φ :

$$\varrho_2 = \left(\frac{\frac{\sqrt{\varphi + d\varphi}}{A} - b_m}{a_m} \right)^2 - \left(\frac{\frac{\sqrt{\varphi}}{A} - b_m}{a_m} \right)^2 + \varrho_1 \quad (\text{C-3})$$

2- Evolution de φ_{xm} avec ϱ :

Pour l'évolution de φ_{xm} on suit le même raisonnement. Les équations d'évolution du point de contact sont données en K_{xm} :

$$\begin{aligned} K_{xm1} &= a_{xm} \varrho_1 + b_{xm} \\ K_{xm2} &= a_{xm} (\varrho_1 + d\varrho) + b_{xm} \end{aligned} \quad (\text{C-4})$$

Ce qui donne en φ_{xm} :

$$\begin{aligned} \varphi_{xm1} &= A^2 (a_{xm} \varrho_1 + b_{xm})^2 \\ \varphi_{xm2} &= A^2 (a_{xm} (\varrho_1 + d\varrho) + b_{xm})^2 \end{aligned} \quad (\text{C-5})$$

En remplaçant φ_{xm1} par sa valeur dans φ_{xm2} on obtient :

$$\varphi_{xm2} = A^2 \left(\frac{\sqrt{\varphi_{xm1}}}{A} + a_{xm} d\varrho \right)^2 \quad (\text{C-6})$$

2- Evolution de φ_m avec ϱ :

La taille de la zone plastique monotone φ_m est déduite tout simplement à partir de $\varphi_{\infty m}$. A la fin du chargement on peut écrire :

$$\varphi_2 = \varphi_{m2} + \varphi_{\infty m2} \quad \text{donc} \quad \varphi_{m2} = \varphi_2 - \varphi_{\infty m2} \quad (\text{C-7})$$

2- Evolution de φ_m avec a :

Cette équation est actualisée à la fin de l'incrément, une fois l'avancée da de la fissure déduite par la loi de fissuration. Supposons que la fissure passe d'une première configuration (a_1, φ_{m1}) à une deuxième (a_2, φ_{m2}) , l'équation d'évolution de φ_m avec a donne :

$$\begin{aligned} \varphi_{m1} &= p_b e^{p_a a_1} \\ \varphi_{m2} &= p_b e^{p_a a_2} \end{aligned} \quad (\text{C-8})$$

En faisant le rapport des deux équations, on obtient :

$$\varphi_{m2} = \varphi_{m1} e^{p_a (a_2 - a_1)} \quad (\text{C-9})$$

2- Evolution de $\varphi_{\infty m}$ avec a :

Pour passer de la configuration 1 à la configuration 2 après avancée, l'équation d'évolution de $\varphi_{\infty m}$ avec a donne :

$$\begin{aligned} \varphi_{\infty m1} &= GC \cdot e^{a_1 \cdot k_a} - p_b \cdot e^{a_1 \cdot p_a} \cdot \frac{k_b}{k_a - p_a} \\ \varphi_{\infty m2} &= GC \cdot e^{a_2 \cdot k_a} - p_b \cdot e^{a_2 \cdot p_a} \cdot \frac{k_b}{k_a - p_a} \end{aligned} \quad (\text{C-10})$$

Si on remplace le paramètre GC de la première équation dans la deuxième, on obtient :

$$\varphi_{\infty m2} = \left(\varphi_{\infty m1} + p_b \cdot e^{a_1 \cdot p_a} \cdot \frac{k_b}{k_a - p_a} \right) \cdot e^{a_2 \cdot k_a} \cdot e^{-a_1 \cdot k_a} - p_b \cdot e^{a_2 \cdot p_a} \cdot \frac{k_b}{k_a - p_a} \quad (\text{C-11})$$

Ce qui donne :

$$\varphi_{\infty m2} = \left(\varphi_{\infty m1} + \varphi_{m1} \cdot c_{pos} \right) \cdot e^{k_a \cdot da} - \varphi_{m2} \cdot c_{pos} \quad \text{avec} \quad c_{pos} = \frac{k_b}{k_a - p_a} \quad (\text{C-12})$$

C.2 Equations à implanter pour la zone plastique cyclique :

1- Evolution de ϱ :

D'après l'expression d'évolution de ϱ pendant la phase de fermeture cyclique, pour passer d'une configuration initiale (1) à une configuration finale (2) on écrit :

$$K_0 - K_1 = a_{cf} \sqrt{\varrho_0 - \varrho_1} + b_{cf} \quad (\text{C-13})$$

$$K_0 - K_2 = a_{cf} \sqrt{\varrho_0 - \varrho_2} + b_{cf}$$

Ce qui donne pour $d\varrho$

$$d\varrho = \varrho_2 - \varrho_1 = \left(\frac{K_0 - K_1 - b_{cf}}{a_{cf}} \right)^2 - \left(\frac{K_0 - K_2 - b_{cf}}{a_{cf}} \right)^2 \quad (\text{C-14})$$

En remplaçant K_0 par sa valeur donnée en fonction de φ_{cf} et b_{cf} et en exprimant K_1 et K_2 en fonction de φ_1 et φ_2 , on obtient :

$$\varrho_2 = \frac{1}{a_{cf}^2} \left[\left(\frac{\varphi_{cf}}{A^2 b_{cf}} - \frac{b_{cf}}{2} - \frac{\sqrt{\varphi_1}}{A} \right)^2 - \left(\frac{\varphi_{cf}}{A^2 b_{cf}} - \frac{b_{cf}}{2} - \frac{\sqrt{\varphi_2}}{A} \right)^2 \right] - \varrho_1 \quad (\text{C-15})$$

Le même calcul a été effectué pendant la phase d'ouverture cyclique, l'évolution de ϱ obtenue est :

$$\varrho_2 = \frac{1}{a_{cf}^2} \left[\left(\frac{\sqrt{\varphi_1}}{A} - \frac{\varphi_{co}}{A^2 b_{cf}} - \frac{b_{cf}}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\varphi_2}}{A} - \frac{\varphi_{co}}{A^2 b_{cf}} - \frac{b_{cf}}{2} \right)^2 \right] - \varrho_1 \quad (\text{C-16})$$

2- Evolution de φ_c :

La taille de la zone plastique cyclique en fermeture φ_{cf} n'évolue pas pendant la décharge, par contre la taille de la zone plastique cyclique en ouverture φ_{co} évolue. A la fin de la décharge cyclique (φ_2), la taille de la zone plastique en ouverture est actualisé d'après l'équation :

$$\varphi_{co} = \frac{A^2 b_{cf}}{2} \left(2 \frac{\sqrt{\varphi_2}}{A} + b_{cf} \right) \quad (\text{C-17})$$

La même démarche est effectuée à la fin de la phase d'ouverture cyclique (φ_2), la taille de la zone plastique cyclique de fermeture est actualisée à partir de l'équation :

$$\varphi_{cf} = \frac{A^2 b_{cf}}{2} \left(2 \frac{\sqrt{\varphi_2}}{A} - b_{cf} \right) \quad (\text{C-18})$$

3- Evolution de φ_{xc} :

Puisque la taille de la zone plastique d'ouverture n'évolue pas pendant la phase d'ouverture et pareille pour la zone plastique de fermeture. Les positions de la zone plastique cyclique évolue

comme l'incrément de chargement appliqué $d\varphi$. Ce qui donne pendant la phase de fermeture cyclique :

$$\varphi_{xof2} = \varphi_{xof1} + d\varphi \quad (\text{C-19})$$

Et pendant la phase d'ouverture cyclique :

$$\varphi_{xoa2} = \varphi_{xoa1} + d\varphi \quad (\text{C-20})$$

Annexe D : Calcul de l'éprouvette cruciforme

D.1 Dimensionnement de l'éprouvette cruciforme

La géométrie de l'éprouvette cruciforme est donnée sur la Figure D-1a. Un modèle 3D a été utilisé car l'évidement circulaire central ne permet pas une modélisation 2D (Figure D-1b). Les trois plans de symétrie (suivant x, y et z) ont permis de modéliser le 1/8 de l'éprouvette.

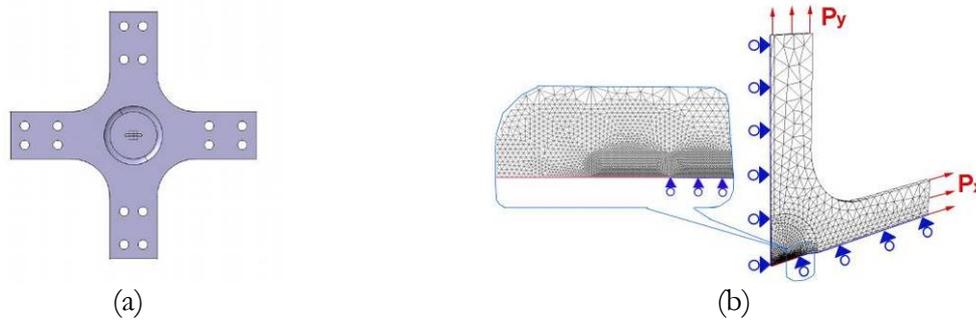


Figure D-1. Géométrie de l'éprouvette et maillage réalisé

Le maillage a été réalisé par des éléments tétraédriques, ces éléments ont 4 nœuds et 1 point d'intégration. Le maillage a été raffiné en pointe de fissure afin de mieux décrire le champ de contrainte suivant l'axe x qui est en $\frac{1}{\sqrt{r}}$, la taille d'élément près de la pointe est de 0.05 mm, et la taille de la zone où le maillage a été raffiné correspond à la zone où le développement limité du champ de contrainte est valable ($\frac{r}{a} \leq 0.1$). La loi de comportement utilisée est élastique avec un module d'Young $E = 190\,000$ MPa et un coefficient de poisson $\nu = 0.3$.

Les évolutions du facteur d'intensité des contraintes K et de la contrainte T ont été calculées par la méthode d'extrapolation des déplacements. Les champs de déplacement des lèvres d'une fissure sont donnés par :

$$U_x = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{\kappa-1}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{T}{8\mu} (\kappa+1) r \cos \theta + O \left(\left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$U_y = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{\kappa+1}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) - \frac{T}{8\mu} (\beta-\kappa) r \sin \theta + O \left(\left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \right)$$

Avec : $K_I = S_y \sqrt{\pi a}$ et $T = S_x - S_y$

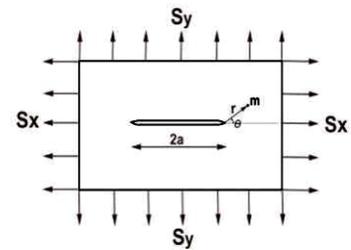


Figure D-2. Champs de déplacement des lèvres d'une fissure de Griffith

Ces expressions sont valables quelle que soit la géométrie de la fissure, seules les évolutions du facteur d'intensité des contraintes et de la contrainte T changent avec la géométrie.

T et K ont été calculés par les relations suivantes :

$$U_{x(\theta=\pi)} = -\frac{T}{8\mu}(\kappa+1)r \Rightarrow T = -\frac{8\mu}{(\kappa+1)r}U_{x(\theta=\pi)} \quad (\text{D-1})$$

$$U_{y(\theta=\pi)} = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left(\frac{\kappa+1}{2}\right) \Rightarrow K_I = \mu \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \left(\frac{2}{\kappa+1}\right) U_{y(\theta=\pi)}$$

Avec : $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ et $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ en contrainte plane et $\kappa = 3-4\nu$ en déformation plane.

Les valeurs de K et de T ont été calculées dans 2 configurations (Figure D-3) : la première correspond à un chargement uniaxial suivant y de 1 MPa et l'autre à un chargement biaxial (1MPa suivant y et compression de -1MPa suivant x). Le troisième cas de chargement a été déduit des deux autres par le principe de superposition qui sera validé plus loin dans ce rapport (Figure D-8). Le choix d'un chargement Px négatif ou nul permet d'éviter le contact entre les lèvres de la fissure.

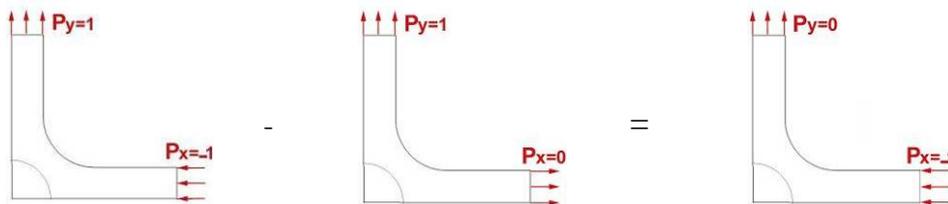


Figure D-3. Principe de superposition

Le champ de déplacement des lèvres nous permet de déduire l'évolution de K en fonction de la distance r de la pointe (Equation (D-1)). Voici un exemple de cette évolution :

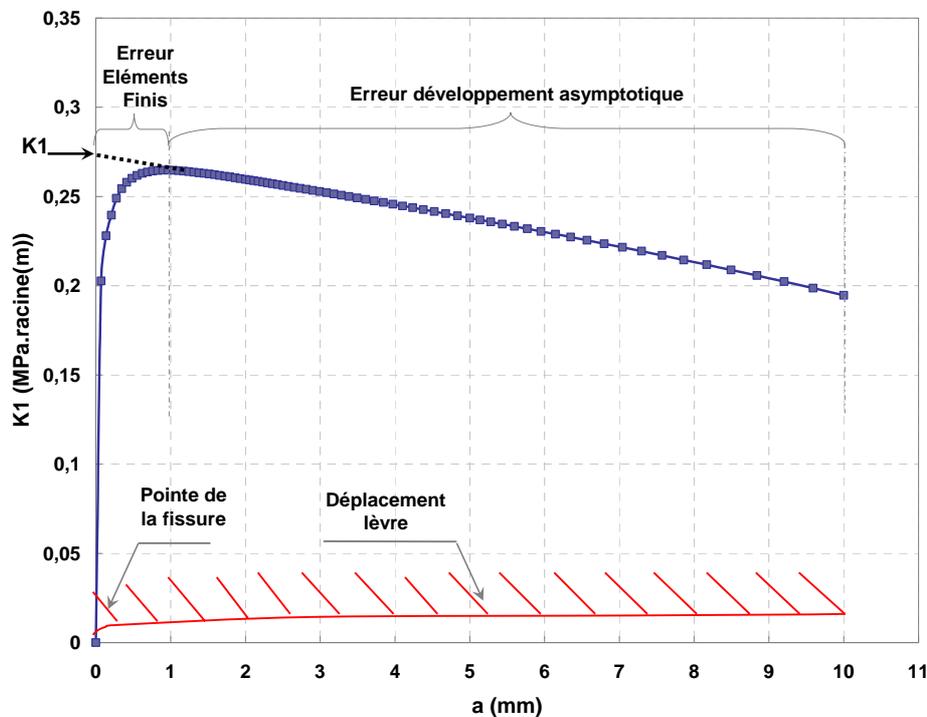


Figure D-4. Evolution de $K_{E.F}$ en fonction de la distance de la pointe de la fissure ($a=10$ mm, $P_x=0$, $P_y=1$ MPa)

Deux zones peuvent être mises en évidence sur cette courbe. La première est située au voisinage de la pointe de la fissure (de 0 à 0.8 mm). Dans cette zone la valeur de K est faussée à cause de l'approximation par EF (taille des éléments petite par rapport au gradient élevé de contrainte et déplacement). Dans la deuxième zone (au delà de 0.8mm), on remarque que K diminue quand on s'éloigne de la pointe à cause de l'erreur dans la solution asymptotique utilisée. En effet la solution asymptotique de K s'écarte de la valeur exacte quand on s'éloigne de la pointe de la fissure. La valeur exacte de K est déduite en extrapolant la courbe au delà de 0.8 mm et en prenant l'intersection avec l'axe des coordonnées (ici $0.275 \text{ MPa}\sqrt{m}$)

Le facteur d'intensité de contraintes K a été calculé de la même manière pour 6 longueurs de fissure (5, 8, 10, 13, 16 et 20mm) et pour les deux cas de chargement ($P_x=0 \text{ Py}=1 \text{ MPa}$ et $P_x=-1 \text{ Py}=1 \text{ MPa}$) (Figure D-5). Le cas ou $P_y=0$ et $P_x=-1$ a été déduit des 2 autres par superposition (Figure D-3).

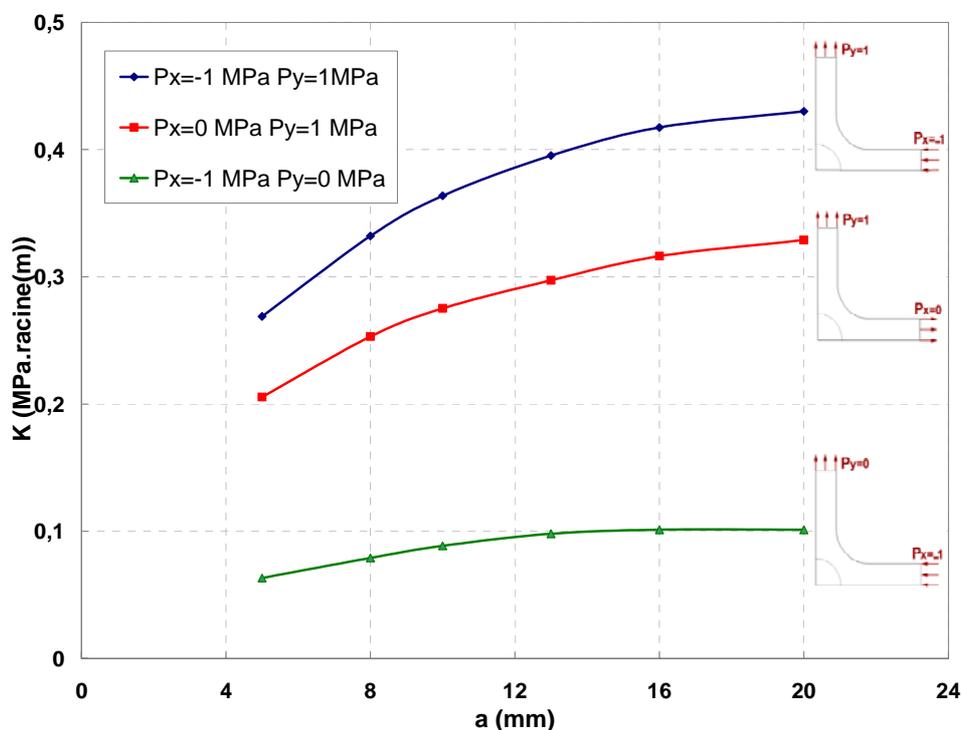


Figure D-5. Evolution de K en fonction de longueur de la fissure pour différents chargements

L'expression de K a été déterminée par un simple fit des courbes de la Figure D-5 :

$$K = K_{(P_x=0, P_y=+1)} + K_{(P_x=+1, P_y=0)} = K_{(P_x=0, P_y=+1)} - K_{(P_x=-1, P_y=0)} \quad (\text{D-2})$$

Avec :

$$K_{(P_x=0, P_y=+1)} = P_y \cdot (-5.0392 \cdot 10^{-4} \cdot a^2 + 2.0586 \cdot 10^{-2} \cdot a + 0.11746)$$

$$K_{(P_x=-1, P_y=0)} = P_x \cdot (-2.5037 \cdot 10^{-4} \cdot a^2 + 8.788 \cdot 10^{-3} \cdot a + 2.54 \cdot 10^{-2})$$

La longueur de fissure a est donnée en mm, Px et Py en MPa.

Ces expressions sont valables pour des longueurs de fissures situées entre 5 et 20 mm, dans les cas où le facteur d'intensité des contraintes K est positif. En effet pour certains chargements (P_x

élevé par rapport P_y), les deux lèvres rentrent en contact et la fissure ne joue plus le rôle de concentrateur de contrainte. Le domaine de validité de l'expression est calculé comme suit :

$$K > 0 \Rightarrow P_y > \frac{P_x \cdot (-2.5037 \cdot 10^{-4} \cdot a^2 + 8.788 \cdot 10^{-3} \cdot a + 2.54 \cdot 10^{-2})}{-5.0392 \cdot 10^{-4} \cdot a^2 + 2.0586 \cdot 10^{-2} \cdot a + 0.11746} \approx 0.322 P_x \quad (\text{D-3})$$

La Figure D-6 illustre le domaine de validité de K en fonction du chargement appliqué :

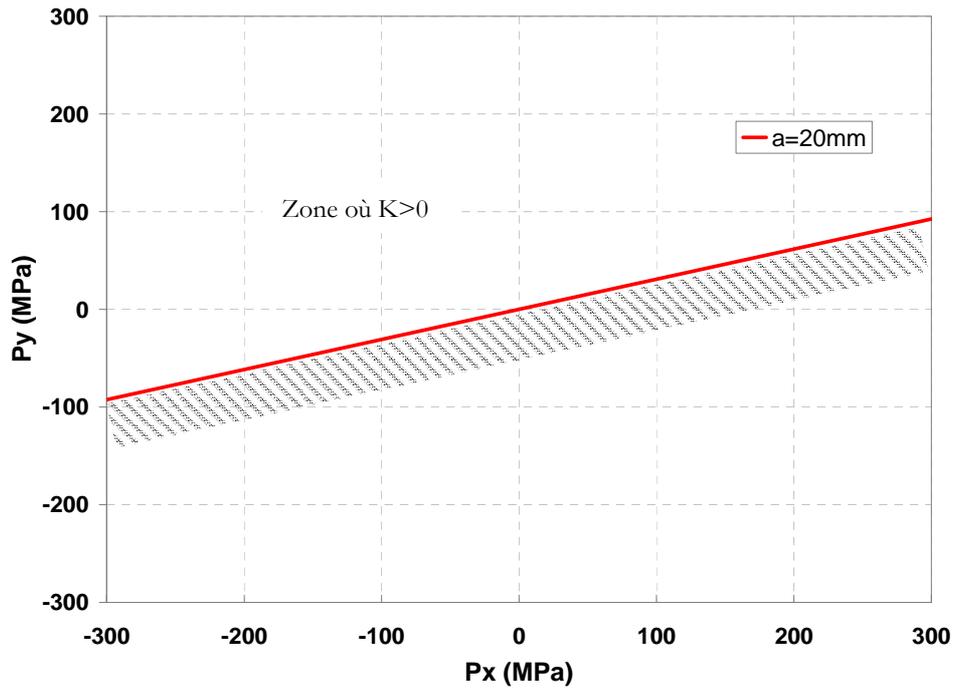


Figure D-6. Zone où l'expression du facteur d'intensité de contrainte **K** est valable

L'évolution de la contrainte T a été ensuite déterminée en fonction de a grâce à l'équation (D-1), les courbes obtenues (Figure D-7.) montrent que T n'évolue pas avec la longueur de la fissure pour un chargement P_x et P_y donné.

L'expression proposée de l'évolution de T en fonction de la contrainte appliquée est :

$$T = T_{(P_x=0, P_y=1)} + T_{(P_x=1, P_y=0)} = T_{(P_x=0, P_y=1)} - T_{(P_x=-1, P_y=0)} \quad (\text{D-4})$$

Avec :

$$T_{(P_x=0, P_y=1)} = -2.0832 P_y$$

$$T_{(P_x=-1, P_y=0)} = -2.1575 P_x$$

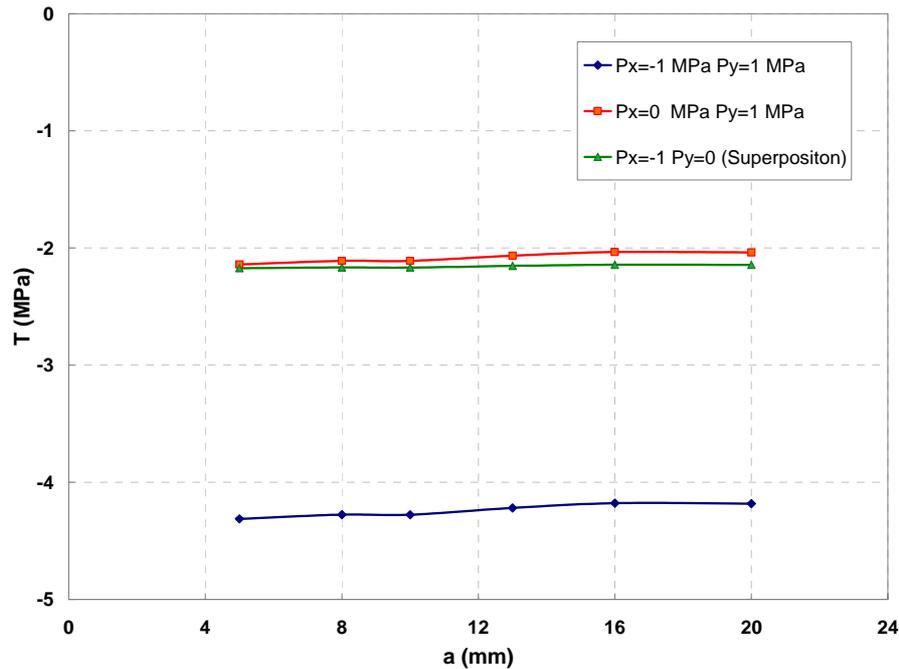


Figure D-7. Evolution de T en fonction de a pour un chargement constant

D.2 Vérification du principe de superposition :

Puisque K est une fonction linéaire du déplacement U_y , la vérification du principe de superposition sur K revient à le vérifier sur U_y . Voici le déplacement de la lèvres supérieure d'une fissure de 13 mm pour plusieurs cas de chargement (Figure D-8) :

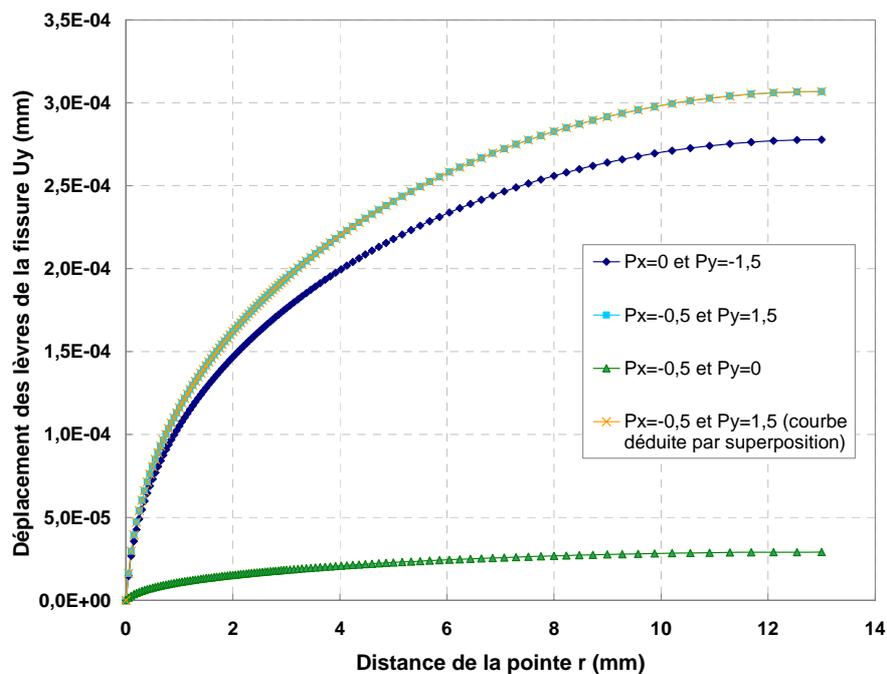


Figure D-8. Vérification du principe de superposition

D'après la Figure D-8, on peut écrire l'égalité suivante :

$$\underbrace{P_{y(P_x=-0.5, P_y=0)}}_{\text{Courbe verte}} + \underbrace{P_{y(P_x=0, P_y=1.5)}}_{\text{Courbe bleu foncé}} = \underbrace{P_{y(P_x=-0.5, P_y=1.5)}}_{\text{Courbe bleu clair}} \quad \text{(D-5)}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Courbe jaune}}$

Le principe de superposition est donc vérifié.

Annexe E : Calcul de K et T d'une fissure semi-elliptique en bi-traction et bi-flexion combinées

E.1 Calcul de K

L'expression utilisée pour le calcul du facteur d'intensité des contraintes est celle proposée par [Newman et Raju 1981]. Cette expression est valable pour une plaque contenant une fissure semi-elliptique et soumise à une traction σ_r et une flexion pure M_r , perpendiculaire à la fissure (Figure E-1). La fissure dans la toile de roue est soumise à une bi-flexion et une bi-traction. L'ajout d'une contrainte σ_c et d'un moment M_c parallèles à la fissure ne modifie pas l'expression de K_I de Newmann car il n'y a pas de couplage dans l'éprouvette.

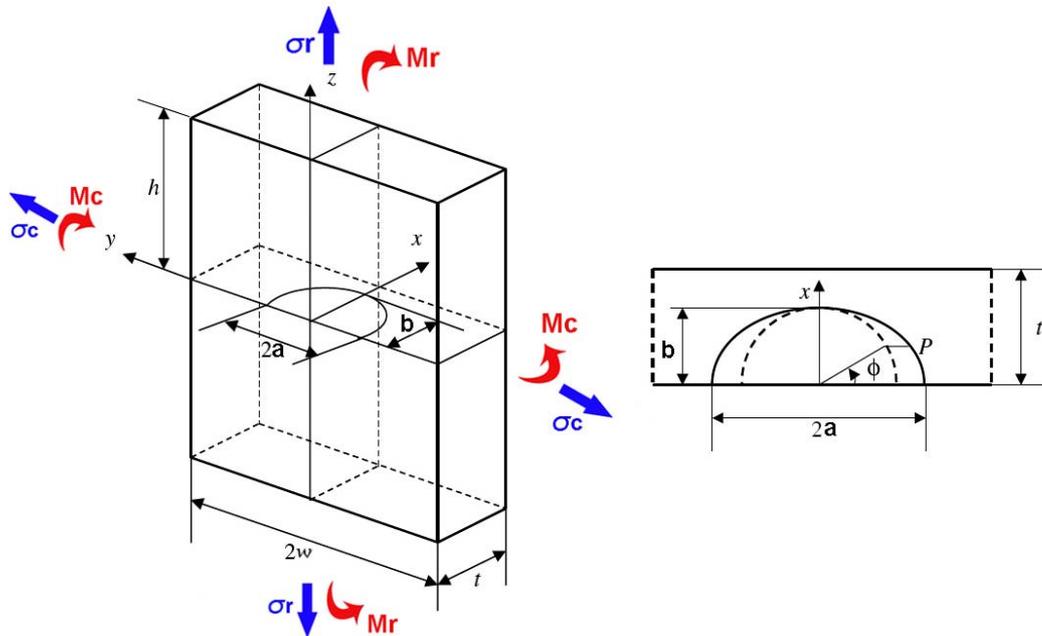


Figure E-1. Modèle géométrique de la fissure semi-elliptique

L'expression de K_I est la suivante :

$$K_I = (\sigma_r + h \cdot \sigma_f) \sqrt{\pi \frac{b}{Q}} \cdot F\left(\frac{b}{t}, \frac{b}{a}, \frac{b}{w}, \varphi\right) \quad (\text{E-1})$$

La contrainte σ_f est celle due au moment de flexion, cette contrainte perpendiculaire au plan de la fissure est définie par :

$$\sigma_f = \frac{3 \cdot M_r}{w \cdot t^2} \quad (\text{E-2})$$

Les différents facteurs qui interviennent dans l'expression de K_I sont donnés ci-après (équation (E-3) à (E-16)) :

$$Q = 1 + 1.464 \left(\frac{b}{a}\right)^{1.65} \quad \text{avec} \quad \left(\frac{b}{a} \leq 1\right) \quad (\text{E-3})$$

$$F = \left[M_1 + M_2 \left(\frac{b}{t} \right)^2 + M_3 \left(\frac{b}{t} \right)^4 \right] \cdot f_\varphi \cdot g \cdot f_w \quad (\text{E-4})$$

$$M_1 = 1.13 - 0.09 \left(\frac{b}{a} \right) \quad (\text{E-5})$$

$$M_2 = -0.54 + \frac{0.89}{0.2 + \left(\frac{b}{a} \right)} \quad (\text{E-6})$$

$$M_3 = 0.5 - \frac{1}{0.65 + \left(\frac{b}{a} \right)} + 14 \cdot \left(1 - \left(\frac{b}{a} \right) \right)^{24} \quad (\text{E-7})$$

$$g = 1 + \left[0.1 + 0.35 \left(\frac{b}{t} \right)^2 \right] (1 - \sin \varphi)^2 \quad (\text{E-8})$$

$$f_\varphi = \left[\left(\frac{b}{a} \right)^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \right]^{\frac{1}{4}} \quad (\text{E-9})$$

$$f_w = \left[\sec \left(\frac{\pi a}{2w} \sqrt{\frac{b}{t}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{avec} \quad \sec(z) = \frac{1}{\cos(z)} \quad (\text{E-10})$$

$$H = H_1 + (H_2 - H_1) \sin^p \varphi \quad (\text{E-11})$$

$$p = 0.2 + \frac{b}{a} + 0.6 \frac{b}{t} \quad (\text{E-12})$$

$$H_1 = 1 - 0.34 \left(\frac{b}{t} \right) - 0.11 \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{b}{t} \right) \quad (\text{E-13})$$

$$H_2 = 1 + G_1 \left(\frac{b}{t} \right) + G_2 \left(\frac{b}{t} \right)^2 \quad (\text{E-14})$$

$$G_1 = -1.22 - 0.12 \frac{b}{a} \quad (\text{E-15})$$

$$G_2 = 0.55 - 1.05 \left(\frac{b}{a} \right)^{0.75} + 0.47 \left(\frac{b}{a} \right)^{1.5} \quad (\text{E-16})$$

E.2 Calcul de T

La contrainte T d'une fissure semi-elliptique soumise à une bi-flexion et bi-traction a été calculée par superposition (Figure E-2).

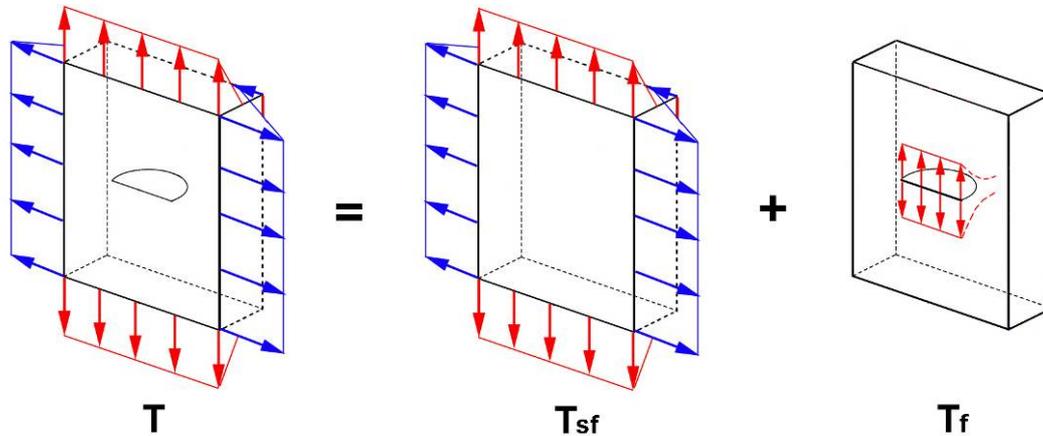


Figure E-2. Calcul de la contrainte T d'une plaque soumise à une bi-traction par la méthode de superposition

La contrainte T dans un point du front de la fissure est égale à la contrainte T du même point calculée dans un milieu non fissuré à laquelle s'ajoute T de la même fissure soumise à une pression interne équivalente au chargement externe appliqué.

$$T = T_{sf} + T_f \quad (\text{E-17})$$

La contrainte T dans le milieu non fissuré, exprimée dans un repère local attaché au front de la fissure virtuelle (Figure E-3), s'écrit de la manière suivante :

$$T_{sf} = \sigma_r - \sigma_z \quad (\text{E-18})$$

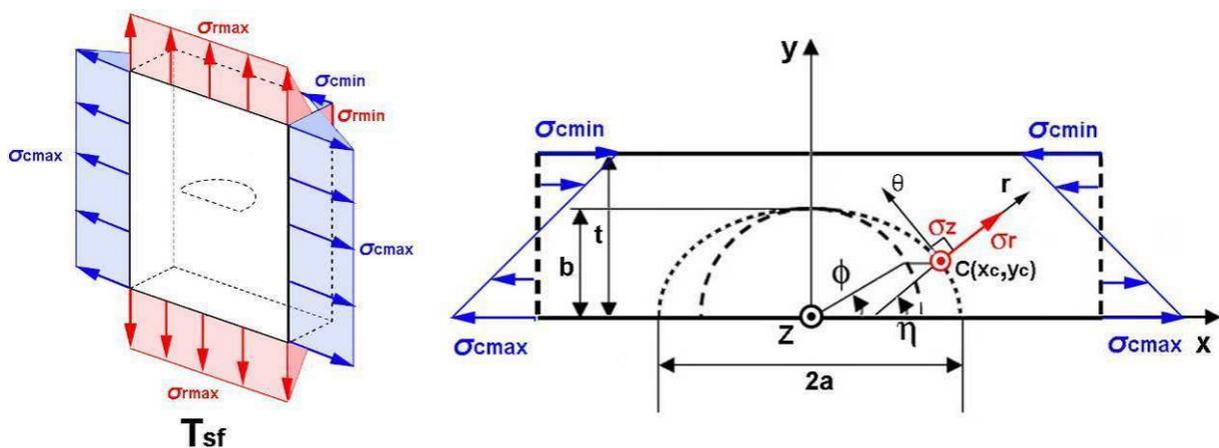


Figure E-3. Calcul de la contrainte T de la plaque sans la présence de fissure

La contrainte σ_z perpendiculaire au plan de la fissure virtuelle s'écrit en tout point C du front de la manière suivante :

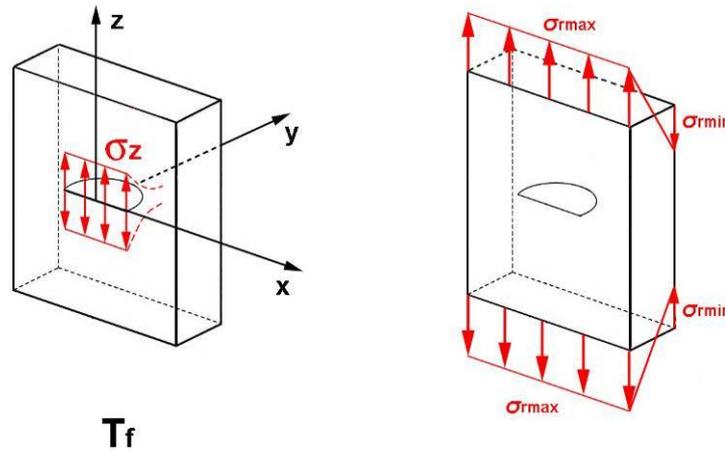
$$\sigma_{\xi} = \frac{\sigma_{r\min} - \sigma_{r\max}}{t} \cdot y_c + \sigma_{r\max} \quad \text{avec} \quad y_c = b \cdot \sin \varphi \quad (\text{E-19})$$

t étant l'épaisseur de l'éprouvette et b la profondeur de la fissure virtuelle.

La contrainte σ_r , orientée dans la direction perpendiculaire à la tangente au front de la fissure virtuelle, s'écrit en tout point du front de la manière suivante :

$$\sigma_r = \sigma_c \cdot \cos^2 \eta \quad \text{avec} \quad \sigma_c = \frac{\sigma_{c\min} - \sigma_{c\max}}{t} \cdot y_c + \sigma_{c\max} \quad (\text{E-20})$$

La contrainte T d'une fissure soumise à une pression interne équivalente au chargement externe appliqué est donnée par [Wang 2003].



T_f
Figure E-4. Calcul de la contrainte T avec la fissure soumise à une pression interne

Le champ de contrainte dû à la pression interne s'écrit de la manière suivante :

$$\sigma_{\xi} = \sum_{i=0}^n A_i \cdot \left(1 - \frac{y}{b}\right)^i \quad (\text{E-21})$$

n étant le degré du polynôme du champ des contraintes dans le plan $y-\xi$. A_i sont des constantes qui définissent le chargement appliqué. Pour un gradient linéaire, le champ de contrainte devient :

$$\sigma_{\xi} = A_0 + A_1 \cdot \left(1 - \frac{y}{b}\right) \quad (\text{E-22})$$

Les coefficients A_i sont déterminés en comparant ce champ de contrainte au chargement externe appliqué à l'éprouvette :

$$\sigma_{\xi} = \frac{\sigma_{r\min} - \sigma_{r\max}}{t} \cdot y_c + \sigma_{r\max} \quad (\text{E-23})$$

Ce qui donne pour les coefficients A_i :

$$A_0 = \sigma_{r,\max} \left(1 - \frac{b}{t}\right) + \sigma_{r,\min} \cdot \frac{b}{t} \quad \text{et} \quad A_1 = \frac{b}{t} (\sigma_{r,\max} - \sigma_{r,\min}) \quad (\text{E-24})$$

D'après Wang 2003], la contrainte T correspondante à ce champ de contrainte s'écrit de la manière suivante :

$$T_f = \sum_{i=0}^n V_i \left(\varphi, \frac{b}{a}, \frac{b}{t} \right) \cdot A_i \quad (\text{E-25})$$

V_i sont les valeurs de la contrainte T normalisées par rapport à A_i . Pour un gradient linéaire, cette expression devient :

$$T_f = V_0 \left(\varphi, \frac{b}{a}, \frac{b}{t} \right) \cdot A_0 + V_1 \left(\varphi, \frac{b}{a}, \frac{b}{t} \right) \cdot A_1 \quad (\text{E-26})$$

L'évolution du paramètre V_0 est donné par :

$$V_0 = a_0 + a_1 \left(\frac{b}{t} \right)^2 + a_2 \left(\frac{b}{t} \right)^4 + a_3 \left(\frac{b}{t} \right)^6 \quad (\text{E-27})$$

Les coefficients a_i dépendent $\frac{b}{a}$ et de φ . Les expressions d'évolution de ces coefficients sont donnés par :

$$a_i = c_{1ai} + c_{2ai} \left(\frac{b}{a} \right) + c_{3ai} \left(\frac{b}{a} \right)^2 + c_{4ai} \left(\frac{b}{a} \right)^3 \quad (\text{E-28})$$

Les coefficients c_{jai} dépendent de l'angle φ . Dans le Tableau E-1 on trouve l'évolution des coefficients avec φ permettant de calculer V_0 et dans le Tableau E-2 l'évolution des mêmes coefficients permettant de calculer V_1 .

Pour résumer, la contrainte T d'une fissure semi-elliptique soumise à une pression interne équivalente au chargement appliqué est calculés pour 10 valeurs de φ . Les valeurs de φ allant de 5° à 90° sont données dans les tableaux plus loin. La contrainte T d'un angle φ quelconque situé entre 0° et 90° est calculé par des interpolations de Lagrange sur les points concernés.

$\varphi(\text{deg})$	5	10	15	20	30	41.25	52.5	60	75	90
c_{1a0}	0.102	-0.3217	-0.5605	-0.5605	-0.5504	-0.5337	-0.502	-0.4941	-0.5428	-0.5344
c_{2a0}	-1.7978	0.1733	1.0882	0.8495	0.4566	0.2159	-0.0657	-0.1604	0.1911	0.0827
c_{3a0}	1.5579	-1.101	-2.2099	-1.4689	-0.5369	-0.1354	0.3815	0.5488	-0.2323	0.0278
c_{4a0}	-0.5067	0.6393	1.0804	0.6075	0.0752	-0.0961	-0.3575	-0.4349	0.0522	-0.1086
c_{1a1}	0.1896	-0.7059	-0.2307	-0.6507	-0.4327	-0.402	-0.2684	-0.2436	-0.0793	-0.1726
c_{2a1}	-1.0103	3.6036	1.7186	5.893	5.0483	3.8999	2.9016	3.1611	0.1202	0.6384
c_{3a1}	0.3013	-6.0496	-3.7636	-12.4015	-11.3254	-8.8251	-7.2517	-8.4803	-0.8694	-2.3236
c_{4a1}	0.5659	3.1954	2.2647	7.1724	6.6989	5.3341	4.6207	5.5516	0.7323	1.7683
c_{1a2}	0.7822	1.1237	-1.1656	-2.4999	-2.8624	-1.2908	-1.409	-2.182	-0.9558	-0.8986
c_{2a2}	6.4772	6.8599	9.9053	8.2121	3.3802	-1.0533	0.538	1.9	-0.249	0.3021
c_{3a2}	-15.6663	-23.3752	-14.826	-3.8692	12.3914	15.8323	12.0936	12.4663	7.0047	5.5248
c_{4a2}	7.8751	15.0468	6.1236	-1.8933	-12.7527	-13.3727	-11.1705	-12.2036	-5.7768	-5.0219
c_{1a3}	-8.1982	-9.8879	-4.7978	2.1419	9.3292	9.3464	6.7455	7.0637	3.0433	2.3877
c_{2a3}	23.0853	31.3199	17.0903	-6.5972	-31.0886	-33.5772	-26.1256	-27.7953	-12.7952	-12.2617
c_{3a3}	-22.4425	-28.5206	-22.8343	2.9593	26.7411	31.6388	25.0964	26.8418	11.121	12.5515
c_{4a3}	8.1994	7.5613	10.5908	1.6158	-5.1522	-7.6681	-6.0683	-6.5231	-2.0782	-3.407

Tableau E-1. Evolutions des coefficients c_{jai} avec l'angle φ pour le calcul de V_0

$\varphi(\text{deg})$	5	10	15	20	30	41.25	52.5	60	75	90
c_{1a0}	0.063	-0.39	-0.504	-0.4792	-0.4787	-0.4612	-0.3951	-0.35	-0.3468	-0.3507
c_{2a0}	-1.6082	0.7818	1.1353	0.6808	0.476	0.482	0.2069	0.058	0.1242	0.1722
c_{3a0}	1.2593	-2.3008	-2.4018	-1.1825	-0.5096	-0.6117	-0.174	0.0011	-0.1389	-0.2231
c_{4a0}	-0.3473	1.3276	1.2258	0.4637	0.0416	0.1619	-0.0334	-0.0871	0.0063	0.0535
c_{1a1}	0.3925	1.3834	1.3209	0.9791	2.0007	2.753	3.1501	3.2448	3.7075	3.8771
c_{2a1}	-2.1724	-7.0631	-3.3154	3.1656	1.9919	-0.3148	0.1083	0.7265	-0.0568	-0.4139
c_{3a1}	2.8442	12.8482	4.8718	-8.7901	-7.8171	-1.3919	-1.8567	-2.3397	-0.5408	0.2432
c_{4a1}	-0.8474	-6.7258	-2.1148	5.774	5.5571	1.2733	1.4467	1.4991	0.4233	-0.0269
c_{1a2}	-0.148	-1.048	-2.6092	-4.1622	-5.7889	-4.6837	-5.4774	-5.8624	-6.426	-6.5911
c_{2a2}	5.6972	7.0049	7.5234	6.7678	5.1152	-0.1721	0.5183	-0.1592	-0.9849	-1.3822
c_{3a2}	-9.3319	-10.6788	-5.8183	0.0462	9.0717	8.7876	6.1743	6.3748	5.4371	4.8857
c_{4a2}	3.1898	4.1595	-0.1149	-4.3988	-10.9915	-7.3604	-5.5336	-5.2081	-3.7738	-3.0364
c_{1a3}	-4.294	-5.2313	-1.3014	3.9963	8.8494	7.237	6.6242	7.0753	7.3404	7.4277
c_{2a3}	12.5383	22.8831	9.7072	-9.3323	-22.8839	-15.2073	-11.2427	-11.3809	-8.4251	-6.9298
c_{3a3}	-15.4861	-35.4905	-19.9984	6.047	18.0543	12.6304	9.0641	9.9834	6.9644	5.5375
c_{4a3}	7.8323	18.2588	12.3185	0.6099	-2.1496	-2.2413	-1.3854	-2.1973	-1.6141	-1.3923

Tableau E-2. Evolutions des coefficients c_{jai} avec l'angle φ pour le calcul de V_1

Annexe F : Articles



Available online at www.sciencedirect.com



International Journal of Fatigue 27 (2005) 1342–1346

 International
Journal of
Fatigue

www.elsevier.com/locate/ijfatigue

Mode I fatigue crack growth under biaxial loading

 R. Hamam^{a,*}, S. Pommier^a, F. Bumbieler^b
^aLMT, Ens-Cachan, 61, av. du président Wilson, 94235 Cachan, France

^bAEF, French Railways, 21 av. du Président Salvador Allende, 94407 Vitry sur Seine, France

Available online 15 August 2005

Abstract

This paper is centred on the role of the T -stress during mode I fatigue crack growth. The effect of a T -stress is studied through its effect on plastic blunting at crack tip. As a matter of fact, fatigue crack growth is characterized by the presence of striations on the fracture surface, which implies that the crack grows by a mechanism of plastic blunting and re-sharpening (Laird C. The influence of metallurgical structure on the mechanisms of fatigue crack propagation. In: Fatigue crack propagation, STP 415. Philadelphia: ASTM; 1967. p. 131–68 [8]). In the present study, plastic blunting at crack tip is a global variable ρ , which is calculated using the finite element method. ρ is defined as the average value of the permanent displacement of the crack faces over the whole K -dominance area. The presence of a T -stress modifies significantly the evolution of plastic deformation within the crack tip plastic zone as a consequence of plastic blunting at crack tip. A yield stress intensity factor K_Y is defined for the cracked structure, as the stress intensity factor for which plastic blunting at crack tip exceeds a given value. The variation of the yield stress intensity factor was studied as a function of the T -stress. It is found that the T -stress modifies significantly the yield point of the cracked structure and that the yield surface in a (T, K_I) plane is independent of the crack length. Finally, a yield criterion is proposed for the cracked structure. This criterion is an extent of the Von-Mises yield criterion to the problem of the cracked structure. The proposed criterion matches almost perfectly the results obtained from the FEM. The evolution of the yield surface of the cracked structure in a (T, K_I) plane was also studied for a few loading schemes. These results should develop a plasticity model for the cracked structure taking into account the effect of the T stress.

© 2005 Elsevier Ltd. All rights reserved.

 Keywords: Fatigue crack growth; Plasticity; T -stress; Crack tip blunting

1. Introduction

Critical areas of industrial components are often subjected to complex stresses, either because multiaxial loads are applied or because residual stresses are present in the material. In plane stresses are taken into account through mode I, II and III stress intensity factors. However, out of plane stresses are usually not taken into account in fatigue crack growth criterion though there are experimental evidences of their effect in the literature.

The role of out of plane stresses is examined in the present paper through the effect of the T -stress and in mode I only. In linear elastic fracture mechanics, the T -stress is the first second order term in the asymptotic development of σ_{xx}

at crack tip

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + T,$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right),$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

where σ_{xx} , σ_{yy} and σ_{zz} are the components of the stress field on each point around the crack tip defined by r and θ (Fig. 1). In the particular case of a through thickness crack, lying in the plane (x, z) , subjected to remote biaxial loads (S_x and S_y), the mode I stress intensity factor and the T -stress are as follows: $K_I = S_y \sqrt{\pi a}$ and $T = S_x - S_y$. Under pure remote biaxial stresses ($S_x = S_y$), the T -stress is zero. Under uniaxial remote stresses ($S_x = 0$, S_y), the T -stress is equal to $T = -K_I / \sqrt{\pi a}$. Therefore, the T -stress introduces a dependency to the crack length. Let consider for instance a long crack with a length a_1 and a short crack with a length

* Corresponding author. Tel.: +33 1 47 40 28 69.

E-mail address: pommier@lmt.ens-cachan.fr (S. Pommier).

Notation

LEFM	linear elastic fracture mechanics	K_Y	yield stress intensity factor (Mpa m ^{1/2})
a	crack length (m)	ρ_{th}	threshold plastic blunting at crack tip (m)
ρ	plastic blunting at crack tip (m)	K_{Ith}	threshold stress intensity factor (MPa m ^{1/2})
d	dimension of the K -dominance area (m)	E	young modulus (MPa)
r_p	plastic zone size (m)	Re	yield stress (MPa)
T	T -stress (MPa)	H	tangent modulus for bi-linear elastic–plastic behaviour (MPa)
K_I	mode I stress intensity factor (Mpa m ^{1/2})		

$a_2 = a_1/\alpha$, under a remote uniaxial stress, subjected both to the same stress intensity factor K_I . Then the T -stress of the short crack T_2 is not equal to that of the long crack T_1 but T_2 is as follows: $T_2 = T_1\sqrt{\alpha}$. A rough analysis shows that if $a_1 = 5$ mm, $a_2 = 1$ mm and $K_I = 10$ Mpa m^{1/2}, $T_1 = -80$ MPa, $T_2 = -240$ MPa. The difference is very significant with respect to material yield stresses and is therefore expected to modify fatigue crack growth. As a consequence the T -stress is considered to be a suitable candidate parameter for the description of the behaviour of mechanically short cracks [1].

The role of the T -stress can be studied using biaxial tests or using specimens with different evolutions of T with crack length. It was shown by various authors that the T -stress has a very significant effect on fatigue crack growth [3–6]. For instance, Tong et al. [2] show that the fatigue crack growth of a crack in a CT sample is up to ten times higher than that measured in SENT or CCT samples, with the same thickness. The authors argued that this difference is due to the T -stress, positive in CT samples and negative in CCT and SENT samples. However, the effect of the T -stress appears to depend also on the stress ratio employed in the experiments. For instance, if the stress ratio is negative, the crack growth rate was found to decrease when T increases. The same effect is also found for high positive values of R . However, when the stress ratio is zero, the effect is opposite [3–5]. Empirical models have also been proposed in the literature [5,6]. For example, Howard et al. [6] proposed an empirical equation based on their experimental results as follows: $da/dN = C \exp(-0.14(1 + T/S_y))\Delta K^m$, where T is

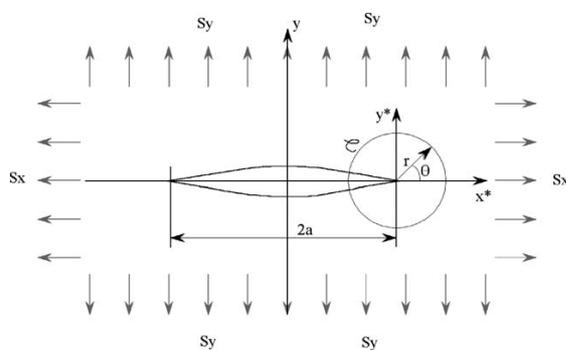


Fig. 1. Through thickness crack under remote biaxial stresses (S_x , S_y).

the biaxiality parameter (T -stress), S_y the applied stress (Fig. 1) and C and m the material parameters.

The general conclusion of this introduction is that the role of the T -stress appears to be very significant in the experiments reported in literature but that the underlying mechanisms need to be clarified. Besides, the T -stress is expected to be a suitable parameter to predict the behaviour of mechanically short cracks.

In this paper, the role of the T -stress on the elastic–plastic behaviour of the crack is examined. As a matter of fact, fatigue crack growth is closely related to the cyclic plasticity within the crack tip plastic zone. Therefore, a global variable ρ was introduced by Pommier et al. [7] in order to characterize crack tip plasticity at the global scale. This variable, the plastic blunting at crack tip ρ , is calculated as the average value of the permanent displacement of the crack faces over the whole K -dominance area. The evolutions of ρ versus K_I , as calculated using the finite element method, employed as an unzooming technique, allowed proposing a set of elastic–plastic constitutive equations for the cracked structure ($dp/dt = f(K_I$ and internal variables)). Then the fatigue crack growth rate (da/dt) is expressed as a function of the crack tip blunting rate (dp/dt), through a crack propagation law, which derives from the well-known Δ CTOD equation ($da/dN = \alpha \Delta$ CTOD). The same approach is employed in the present research. The role of the T -stress is examined through its effect on the evolution of ρ at crack tip.

2. Method

The finite element method is employed in order to calculate the evolution of ρ , the plastic blunting at the crack tip. According to previous analyses [7], plastic blunting at crack tip is defined as follows:

$$\rho = \frac{1}{d} \int_{r=0}^{r=d} (u_{yep}(r) - u_{ye}(r)) dr \quad (1)$$

Where $U_{ye}(r)$, the ‘elastic’ displacement profile, is calculated in elasticity, and obeys the dependency on \sqrt{r} as predicted by the LEFM theory. The ‘elastic–plastic’ displacement profile $u_{yep}(r)$, is calculated using any suitable elastic–plastic constitutive behaviour for the material.

The ‘plastic’ displacement profile $u_{yp}(r)$ is calculated as the difference between the ‘elastic–plastic’ and the ‘elastic’ profiles: $u_{yp}(r) = u_{yep}(r) - u_{ye}(r)$. It corresponds to the permanent displacement of the crack faces after unloading the cracked structure.

In the model developed by Pommier et al. [7], the displacement of the crack faces is approximated by the following expression:

$$\tilde{u}_{yep}(r) \approx \rho + u_{ye}(r) \quad (2)$$

The mean square error associated with this assumption is also calculated as follows:

$$\text{error} = \sqrt{\frac{1}{d} \int_{r=0}^{r=d} [u_{yep}(r) - \tilde{u}_{yep}(r)]^2 dr} \quad (3)$$

In finite element calculations, the maximum applied stress is adjusted in order to keep the mean square error of this approximation below 10%. For this purpose, the crack tip plastic zone is always kept well below one quarter of the K -dominance area, which ensures that LEFM can be applied. In such a case, plasticity is constrained within the plastic zone and at the scale of the K -dominance area the approximation proposed in Eq. (2) is reasonable. The dimension of the K -dominance area d should be typically below $a/10$. Besides, the mesh-refinement in this area should be such as that forward and reverse plasticity within the crack tip plastic zone could be properly captured using the finite element method. This imposes to choose a mesh size of about $r_p/20$, where r_p is the dimension of the cyclic plastic zone. Therefore, the mesh size within the K -dominance area is equal to $r_p/20$, where $r_p = d/4$ and $d = a/10$.

The finite element calculation of ρ and of the associated error was fully automated. Once the mesh is defined, each loading step is calculated in elastic–plastic conditions, then for each increment the displacement profiles are extracted. Plastic blunting ρ is calculated using Eq. (1) and the associated error is calculated using Eq. (3). The evolution of the calculated plastic blunting at crack tip can be plotted versus the applied stress intensity factor. One example is given in Fig. 2. In this figure, the error associated with the calculations of ρ was added. An error bar was also added which characterizes the relative error, over a distance d ahead of the crack tip, between the exact solution and the asymptotic development for stresses along the crack plane. This relative error was then applied to K_I , which is defined using the asymptotic development. It is interesting to note that the error associated with the approximation proposed in Eq. (2) is comparable to that inherited from the asymptotic development of stresses at crack tip, which allowed defining the stress intensity factor.

It was discussed in the introduction that the paper was centred on the role of the T -stress, in particular because the T -stress could be a good candidate for modelling the behaviour of mechanically short cracks. This implies that for similar stress intensity factor the crack growth rates of

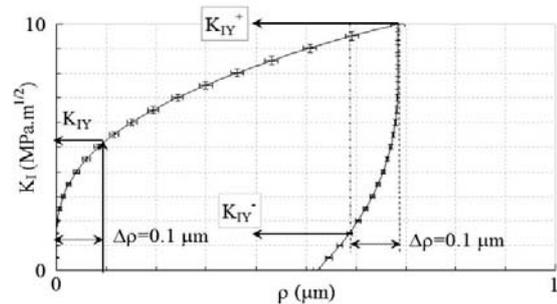


Fig. 2. Evolution of plastic blunting at crack tip, as defined in Fig. 1, during the loading and unloading of the cracked structure. Definition of the yield criterion $\Delta\rho$ and of the initial yield point K_{IY} and cyclic elastic domain (K_{IY}^+ and K_{IY}^-). 2D, plane strain, CCT specimen. Material: $E = 200$ GPa, $\nu = 0.3$. $Re = 100$ MPa, linear kinematics hardening $H = 100$ Mpa.

short and long cracks may be different, but that if both ΔK and T are the same for a long crack and a mechanically short crack, their crack growth rate should be the same. In the model developed in [7] the crack growth rate is related to the crack tip blunting rate. Therefore, it is important to check that the calculated evolutions of K versus ρ for given value of T , are independent of the crack length. This was performed for various values of T and one example is plotted in Fig. 3. In this case $T = 0$, and it is obvious that the evolutions of K_I versus ρ are not dependent on the crack length. The evolution of K_I versus ρ can be considered as intrinsic.

Then a second treatment of the finite element results was proposed. Since ρ characterizes the ‘plastic’ displacement of the crack faces, a yield criterion ($\Delta\rho > \rho_{th}$) was introduced for the cracked structure. This yield criterion is defined as a critical value ρ_{th} of the amplitude of crack tip blunting $\Delta\rho$, over which the crack is supposed to have undergone plastic deformation. In Fig. 2, the yield criterion ρ_{th} was chosen arbitrarily to be equal to $0.1 \mu\text{m}$. Then the evolution of the stress intensity factor as calculated using the finite element method allows defining a yield point for the cracked structure K_{IY} . For cyclic loading (which is the usual case in fatigue) an elastic domain is defined for the cracked structure which dimension is $(K_{IY}^+ - K_{IY}^-)$ and which centre is $(K_{IY}^+ + K_{IY}^-)/2$.

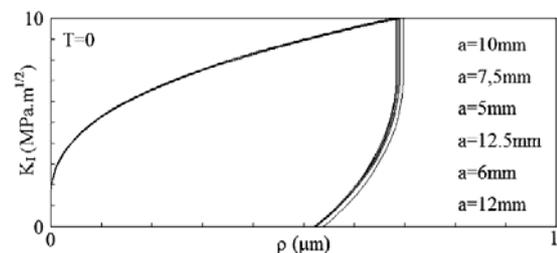


Fig. 3. Comparison of the results obtained for various cracks lengths and the same value of T . Material: $E = 200$ GPa, $\nu = 0.3$. $Re = 100$ MPa, linear kinematics hardening $H = 100$ Mpa.

The calculation of K_{IY} , K_{IY}^+ and K_{IY}^- was also automated which allows plotting their evolutions when the T -stress is varied.

Of course the calculated value of K_{IY} is closely related to the choice of ρ_{th} . It is obvious in Fig. 2, that very small values of ρ_{th} could arbitrarily be chosen as a yield criterion. However, though very small plastic blunting can be calculated using the finite element method, they may not be reasonable from a physical point of view. However, a physical sense can be given to ρ_{th} , if ρ_{th} is defined using the threshold stress intensity factor of the material ΔK_{th} .

As a matter of fact, the crack propagation law proposed by Pommier et al. [7] is as follows:

$$\frac{da}{dt} = \frac{\alpha}{2} \left\langle \frac{d\rho}{dt} \right\rangle \quad \text{with } \alpha \geq 1 \text{ and } \begin{cases} x \geq 0 & \langle x \rangle = x \\ x < 0 & \langle x \rangle = 0 \end{cases}$$

This crack propagation law, once integrated over a full fatigue cycle, is consistent with the Δ CTOD equation.

With such a definition, if the amplitude of plastic blunting at crack tip is zero (below the yield criterion), the crack is not supposed to grow. As a consequence, if the threshold stress intensity factor ΔK_{th} is known for the material, a suitable yield criterion ρ_{th} should be such as that $K_{IY} = \Delta K_{th}$. This provides at least a reasonable value for ρ_{th} instead of a pure arbitrary value.

Once ρ_{th} is chosen the same criterion is kept for all loading conditions. Then numerous finite element calculations have been conducted under biaxial remote stresses (S_x and S_y) (Fig. 1) in order to determine the evolution of K_{IY} with the T -stress, $T = S_x - S_y$.

3. Results and yield criterion for the cracked structure

The evolution of K_{IY} , for a given value of ρ_{th} , was plotted in Fig. 4 versus the T -stress as applied during the finite element calculations. The T -stress is found to modify very significantly the yield point of the cracked structure. The yield point goes through a maximum around $T=0$ and then decreases when T increases or decreases. The variations of the yield point with the T -stress are not negligible. For instance the size of the elastic domain of the cracked structure is equal to $8.5 \text{ Mpa m}^{1/2}$ for $T=0$, and equal to $6.5 \text{ Mpa m}^{1/2}$ for $T = -50 \text{ MPa} = -R_e/2$.

Now the problem is to find a mechanism at the origin of such an evolution of the yield point of the cracked structure with the T -stress. Crack tip plasticity is assumed to obey the Von-Mises yield criterion. Besides it is considered that below the yield point of the cracked structure the material behaviour remains elastic. Therefore, the elastic stress fields at crack tip can be employed in order to calculate an extent of the Von-Mises yield criterion to the problem of the cracked structure.

Recall, the Von-Mises yield criterion is based on the elastic shear energy inside a given volume of material. A volume of material subjected to a multiaxial but homogeneous stress

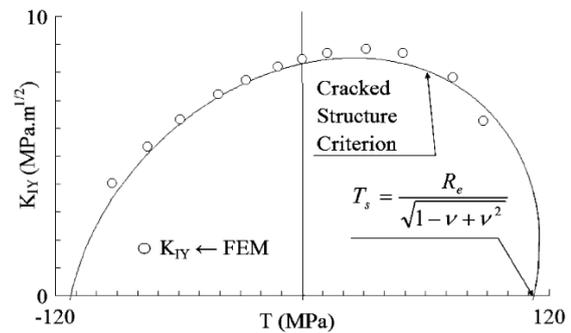


Fig. 4. Frontier of the initial elastic domain of the cracked structure, as calculated using the FEM, with a criterion $\Delta\rho = 0.2 \mu\text{m}$. The yield criterion for the cracked structure as proposed in the present paper is also added. Material: $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $R_e = 100 \text{ MPa}$, kinematics linear hardening $H = 100 \text{ Mpa}$.

state is supposed to yield for the same density of elastic shear energy as a sample subjected to a uniaxial tensile test.

This leads us to propose an extension of the Von-Mises yield criterion to the problem of the cracked structure. The displacement field of the LEFM in the presence of a T -stress are employed for the calculation of the stresses and strains in the K -dominance area, the material is assumed to behave elastically when the cracked structure is in its elastic domain, thus the following equations are employed:

$$u_x(r, \theta) = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{\kappa - 1}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{T}{8\mu} (\kappa + 1) r \cos \theta + O(r^{3/2})$$

$$u_y(r, \theta) = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{\kappa + 1}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) - \frac{T}{8\mu} (3 - \kappa) r \sin \theta + O(r^{3/2}) \text{ and } u_z(r, \theta) = 0$$

$$\epsilon(K_I, T) = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T) \text{ and } \epsilon^D = \epsilon - \frac{\text{Tr}[\epsilon]}{3} I$$

$$\sigma(K_I, T) = \lambda \text{Tr}[\epsilon] I + 2\mu \epsilon \text{ and } \sigma^D = \sigma - \frac{\text{Tr}[\sigma]}{3} I$$

The density of elastic shear energy is calculated as follows:

$$U(K_I, T) = \frac{1}{2} \epsilon^D(K_I, T) \sigma^D(K_I, T)$$

And the yield criterion for the cracked structure is therefore as follows:

$$\int_{r=0}^{r=\delta} \int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} U(K_I, T) dv = \int_{r=0}^{r=\delta} \int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} U(0, T) dv$$

If $K_I = 0$ it implies that $S_y = 0$. Thus, the cracked structure is subjected to a uniform stress to S_x . The density of elastic shear

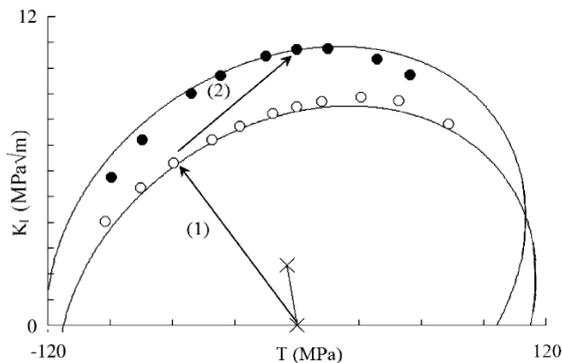


Fig. 5. Frontier of the elastic domain of the cracked structure. Empty symbols after loading the structure along the direction (1). Black symbols, after loadings the structure along (1) and (2) subsequently. Material: $E=200$ GPa, $\nu=0.3$. $R_e=100$ MPa, $H=100$ Mpa.

energy of a cracked structure subjected to $K_I=0$ and to $T \neq 0$ is equivalent to the elastic shear energy of an uncracked specimen under a uniform stress S_x . Its yield point is known and can be calculated using the Von-Mises yield criterion.

Taking into account the plane strain conditions, it comes that the yield point when $K_I=0$ is reached for:

$$T_s = \frac{R_e}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}}$$

After simplifications the yield criterion of the cracked structure can be alternatively written as follows:

$$\left(\frac{K_I}{K_s}\right)^2 + f_\nu \left(\frac{K_I}{K_s}\right) \left(\frac{T}{T_s}\right) + \left(\frac{T}{T_s}\right)^2 = 1$$

where: $T_s = R_e/\sqrt{1-\nu+\nu^2}$, where $K_s = 2\sqrt{2\pi d}R_e/\sqrt{7-16\nu+16\nu^2}$, where: $f_\nu = (32(1-10\nu+10\nu^2)/15\pi\sqrt{(1-\nu+\nu^2)(7-16\nu+16\nu^2)}) \approx 0.189 - 2.10\nu$

In Fig. 4, the yield point of the cracked structure (K_s) as calculated using the present criterion was compared to the yield point as calculated using the finite element method (with $\rho_{th}=0.1 \mu\text{m}$). It can be seen in Fig. 4 that this yield criterion for the cracked structure matches almost perfectly the results stemmed from the finite element method. Therefore, according to the finite element results and to a simple plasticity theory, the T -stress is found to have a significant impact on the development of crack tip plasticity.

4. Evolution of the yield surface of the cracked structure

The finite element method was also employed in order to study the evolution of the elastic domain of the cracked structure (K_{IY}^+, K_{IY}^-) after various loadings histories. It appears that the elastic domain is not significantly distorted but displaced in a (T, K_I) plane (see for instance the displacement of the yield surface after a complex non-proportional loading path Fig. 5). In the future, it is expected to associate

a kinematics hardening internal variable to the position of the centre of the yield surface of the cracked structure. But this should be done in the framework of the thermodynamics of dissipative processes which is not yet the case.

5. Conclusions and prospects

From the definition of crack tip blunting at crack tip, an elastic domain can be defined for the cracked structure, as the domain in a (T, K_I) plane within which the variation of crack tip blunting is below a critical value ($\rho_{th}=0.1 \mu\text{m}$, for instance). It is shown that the presence of a T -stress modifies significantly the yield point of the cracked structure. A criterion is proposed for the yield point of the cracked structure, which is an extension of the Von-Mises yield criterion to the problem of the cracked structure. It is found to match almost perfectly the results from the FEM. Finally, the evolution of the elastic domain of the cracked structure in a (T, K_I) plane is studied for complex loadings scheme. It appears that it obeys a simple displacement rule.

In the future, the constitutive model developed by Pommier and Risbet [7] within the framework of dissipative processes should be extended to biaxial remote loading conditions. This research shows that the Von-Mises plasticity theory is suitable to explain the role of the T -stress on the development of crack tip plasticity. Since the fatigue crack growth rate is closely related to crack tip plasticity, this could well explain the effect of biaxial loading conditions as reported in the literature. Our first prospect is to perform fatigue crack growth experiments under biaxial conditions and to analyse the effect of the T -stress. Then in order to compare predictions and experiments, it is necessary to build a complete theory for the plasticity of the cracked structure for complex loading conditions, as it was done for pure mode I loading conditions ($T=0$).

References

- [1] Roychowdhury S, Dodds RH. Three-dimensional effects on fatigue crack closure in the small-scale yielding regime—a finite element study. *Fatigue Fract Eng Mater Struct* 2003;26:663–73.
- [2] Tong J. T -stress and its implications for crack growth. *Eng Fract Mech* 2002;69:1325–37.
- [3] Hoshide T, Tanaka K. Stress-ratio effect of fatigue crack propagation in a biaxial stress field. *Fatigue Fract Eng Mater Struct* 1981;4:355–66.
- [4] Tanaka K, Hoshide T, Yamada A, Taira S. Fatigue crack propagation in biaxial stress fields. *Fatigue Fract Eng Mater Struct* 1979;2:181–94.
- [5] Youshi H, Brown MW, Miller J. Fatigue crack growth from a circular notch under high levels of biaxial stress. *Fatigue Fract Eng Mater Struct* 1992;15:1185–97.
- [6] Howard IC. A method of estimating biaxial fatigue growth rates. *Fatigue Fract Eng Mater Struct* 1981;3:265–70.
- [7] Pommier S, Risbet M. Partial-derivative equations for fatigue crack growth in metal. *Int J Fract* 2005;131:79–106.
- [8] Laird C. The influence of metallurgical structure on the mechanisms of fatigue crack propagation. Philadelphia: ASTM; 1967 p. 131–68.

Résumé

La plupart des pièces industrielles sont soumises à des chargements multiaxiaux à amplitude variable. La connaissance de la durée de vie résiduelle d'une pièce fissurée, nécessite des modèles de propagation capables de prendre en compte ces deux aspects.

Les objectifs de la thèse portent, d'une part, sur l'application d'un modèle incrémental pour simuler la fissuration par fatigue des roues de train sous chargement à amplitude variable, et d'autre part, sur l'enrichissement de ce modèle pour prendre en compte la compression, la contrainte T et la forme semi-elliptique des fissures.

Le modèle incrémental repose sur l'idée qu'en fatigue à grand nombre de cycle, l'avancée instantanée d'une fissure est proportionnelle à l'érousement plastique de sa pointe. Les équations d'évolution de l'érousement plastique sont déterminées par Eléments Finis à partir du comportement élastoplastique de la structure fissurée. Deux essais sont nécessaires pour identifier les paramètres du modèle, un essai de comportement élastoplastique cyclique du matériau et un essai de fissuration en fatigue à amplitude constante. Les calculs de propagation ont montré que le modèle reproduit fidèlement tous les phénomènes observés en fatigue à amplitude variable : retard après surcharge, accélération après souscharge, interaction entre cycles et histoire de chargement pour les signaux complexes. La compression et la contrainte T ont été ensuite intégrées dans le modèle et validées grâce à des essais de fissuration réalisés sur des éprouvettes prélevées dans une roue de TGV. Enfin le modèle a été étendu en 3D, des essais de fissuration sur fissure semi-elliptique ont été menés sur éprouvettes de flexion 4 points et sur roues à l'échelle 1, l'accord avec les prédictions du modèle est satisfaisant.

Mots clés : roue de train, fatigue, fissuration, amplitude variable, fermeture de fissure, érousement plastique, contrainte T , rapport de charge, fissure semi elliptique.

Abstract

Industrial components, like train wheels, are often subjected to complex stresses, either because multiaxial and random load.

It's proposed to apply an incremental crack growth model to predict crack growth in train wheels subjected to service loading. We present the improvement of the model to take into account the compressive cycles, the T -stress, and the semi elliptical shape of the crack.

The principle of the incremental model is easy, the instantaneous crack extension is proportional to the plastic blunting at crack tip. The evolution equations of the crack tip blunting are computed by Finite Element knowing the elastic plastic behaviour of the cracked structure. Two tests are necessary to identify the model parameters, a cyclic behaviour test and a monotonic crack growth test. Crack growth simulations show that the model reproduce all phenomenon observed in variable amplitude fatigue: delay after overload, acceleration after compressive overload, interaction between fatigue cycle and the history of the loading. We integrated and validate T -stress and R ratio in the model with fatigue test specimens machined in a wheel. Finally, the model has been extended for the semi elliptical crack. Crack growth test with 4 points specimen and a scale 1 wheel where performed, we found a good agreement with the model prediction.

Keywords: train wheel, fatigue, crack growth, random load, crack closure, crack tip blunting, T -stress, R -ratio, semi elliptical crack.