



HAL
open science

Sur une stratégie de calcul pour les problèmes multiphysiques

David Néron

► **To cite this version:**

David Néron. Sur une stratégie de calcul pour les problèmes multiphysiques. Mécanique [physics.med-ph]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2004. Français. NNT: . tel-00133655

HAL Id: tel-00133655

<https://theses.hal.science/tel-00133655>

Submitted on 27 Feb 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Spécialité

MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

Présentée à l'École Normale Supérieure de Cachan par

David Néron

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Sujet de la thèse

**Sur une stratégie de calcul pour les
problèmes multiphysiques**

Soutenue le 14 décembre 2004

devant le jury composé de :

Bernhard A. Schrefler	Président
Alain Combescure	Rapporteur
Nicolas Moës	Rapporteur
David Dureisseix	Examineur
Pierre Ladevèze	Examineur
Pierre Verpeaux	Examineur

Laboratoire de Mécanique et Technologie

ENS Cachan / CNRS / Université Paris 6

61, avenue du Président Wilson

F-94235 CACHAN CEDEX

Sur une stratégie de calcul pour les problèmes multiphysiques

Résumé • L'objectif de ce travail est d'étendre le concept classique d'interface entre sous-structures à celui d'interface entre physiques afin de proposer un cadre de réflexion général pour la simulation des problèmes multiphysiques. On présente ainsi une nouvelle stratégie, fondée sur la méthode à grand incrément de temps (LATIN) et on montre sa faisabilité sur le problème de consolidation d'un sol poreux saturé, cas typique d'interaction forte entre fluide et structure. Une technique d'approximation radiale des inconnues est ensuite mise en place afin d'accroître les performances de la méthode, que ce soit en terme de coût de calcul ou de modularité. Le volet suivant est l'utilisation du concept d'interface entre physiques pour prendre en compte les aspects multiéchelles en temps et en espace, inhérents à la cohabitation de plusieurs physiques. Des techniques de couplage et de transfert sont introduites afin de permettre l'utilisation de discrétisations temporelles et de maillages spatiaux différents pour chacune des physiques, et d'augmenter encore ainsi la modularité de la méthode. Enfin, des travaux sur le traitement des non linéarités sont présentés et montrent que ces nouveaux aspects n'affectent pas les performances de la stratégie.

Mots clés • Stratégie de calcul, multiphysique, multiéchelle en temps et en espace, non linéarités, LATIN, approximation radiale, milieux poreux.

On a computational strategy suitable for multiphysics problems

Abstract • The aim of this work is to extend the usual concept of interface between substructures to that of interface between physics in order to propose a general framework for the simulation of multiphysics problems. A new strategy, derived from the Large Time INcrement (LATIN) method, is presented and its feasibility demonstrated on the consolidation of saturated porous soils, a typical case of highly coupled fluid-structure problem. A technique of radial loading approximation of unknowns is then setup to increase the performance of the method, in term of computational cost but also of modularity. The following step is the use of the concept of interface between physics to take into account the time and the space multiscale aspects, which usually arise with the cohabitation of several physics. Techniques of coupling and transfer are introduced in order to allow the use of different time and space discretizations for each physics and thus to further increase the modularity of the method. Lastly, some works on the taking into account of the nonlinearities are presented, showing that these new aspects do not affect the performance of the strategy.

Keywords • Computational strategy, multiphysics, time and space multiscale aspects, nonlinearities, LATIN, radial approximation, porous media.

CETTE FOIS, ÇA Y EST ! L'heure est venue d'écrire quelques mots de remerciements. Vous savez bien ! remplir cette fameuse petite page qu'on laisse vide pendant des mois, ou bien à la rigueur qu'on barbouille de « merci à toto, et puis à titi, et puis... », en se disant que, quand on en sera là, il y aura du chemin de fait ;-)

Je me lance donc, en sachant combien il est difficile de n'oublier personne dans la longue liste de rencontres qui ont fait que cet épisode de ma vie s'est déroulé dans d'aussi excellentes conditions...

Merci, donc, aux membres de mon jury, qui ont eu la gentillesse de m'accorder un peu de leur temps, d'autant plus précieux qu'il se faisait rare en une période de l'année riche en événements : Bernhard Schrefler, qui m'a accueilli à Padoue durant quelques mois et qui, après un long voyage semé d'embûches, a accepté d'être président ; Alain Combescure et Nicolas Moës, dont la relecture attentive et la précision des questions ont permis de préparer efficacement la soutenance ; Pierre Verpeaux, qui a joué à merveille son rôle d'« industriel », comme il le dit lui même...

Merci à Pierre Ladevèze, sans qui ce travail n'aurait sans doute jamais vu le jour et dont la porte est toujours ouverte pour ceux qui veulent pénétrer dans son univers, parfois si lointain mais toujours passionnant.

Une mention spéciale pour DD, sa gentillesse, sa disponibilité et un clin d'œil pour nos longues discussions, le week-end, l'oreille collée au téléphone et les doigts aux touches du clavier.

Plein de regards émus aux habitants du fameux « bureau sympa » : Mā, Geappy et Jay, mes camarades de jeu depuis maintenant quelques temps, dont la joie, la bonne humeur, les sapins de Noël et les petites surprises qui m'attendaient à mes retours de voyages me laisseront pendant encore longtemps de bien jolis souvenirs.

Et bien sûr, un grand merci à tous les autres, que j'ai côtoyés avec bonheur tous les jours. Je n'oserai pas les citer, tant il serait risqué d'en oublier... je me rassure égoïstement en me disant que j'ai su leur montrer combien ils comptaient pour moi et qu'ils se reconnaîtront.

Évidemment, je ne saurais finir sans une pensée pour Joanne, douce présence à mes côtés durant ces années.

Cachan, février 2005

Résumé

Titre • Sur une stratégie de calcul pour les problèmes multiphysiques.

Direction • Dirigée par P. Ladevèze et co-encadrée par D. Dureisseix.

Résumé • L'objectif de ce travail est d'étendre le concept classique d'interface entre sous-structures à celui d'interface entre physiques afin de proposer un cadre de réflexion général pour la simulation des problèmes multiphysiques. On présente ainsi une nouvelle stratégie, fondée sur la méthode à grand incrément de temps (LATIN) et on montre sa faisabilité sur le problème de consolidation d'un sol poreux saturé, cas typique d'interaction forte entre fluide et structure. Une technique d'approximation radiale des inconnues est ensuite mise en place afin d'accroître les performances de la méthode, que ce soit en terme de coût de calcul ou de modularité. Le volet suivant est l'utilisation du concept d'interface entre physiques pour prendre en compte les aspects multiéchelles en temps et en espace, inhérents à la cohabitation de plusieurs physiques. Des techniques de couplage et de transfert sont introduites afin de permettre l'utilisation de discrétisations temporelles et de maillages spatiaux différents pour chacune des physiques, et d'augmenter encore ainsi la modularité de la méthode. Enfin, des travaux sur le traitement des non linéarités sont présentés et montrent que ces nouveaux aspects n'affectent pas les performances de la stratégie.

Mots clés • Stratégie de calcul, multiphysique, multiéchelle en temps et en espace, non linéarités, LATIN, approximation radiale, milieux poreux.

Abstract

Title • On a computational strategy suitable for multiphysics problems.

Advisors • Directed by P. Ladevèze and D. Dureisseix.

Abstract • The aim of this work is to extend the usual concept of interface between substructures to that of interface between physics in order to propose a general framework for the simulation of multiphysics problems. A new strategy, derived from the Large Time INcrement (LATIN) method, is presented and its feasibility demonstrated on the consolidation of saturated porous soils, a typical case of highly coupled fluid-structure problem. A technique of radial loading approximation of unknowns is then setup to increase the performance of the method, in term of computational cost but also of modularity. The following step is the use of the concept of interface between physics to take into account the time and the space multiscale aspects, which usually arise with the cohabitation of several physics. Techniques of coupling and transfer are introduced in order to allow the use of different time and space discretizations for each physics and thus to further increase the modularity of the method. Lastly, some works on the taking into account of the nonlinearities are presented, showing that these new aspects do not affect the performance of the strategy.

Keywords • Computational strategy, multiphysics, time and space multiscale aspects, nonlinearities, LATIN, radial approximation, porous media.

Table des matières

Résumé	i
Abstract	iii
Table des matières	v
Table des figures	ix
Liste des tableaux	xiii
Introduction	1
1 Le problème de référence	7
1 Quelques notions sur les milieux poreux	7
2 Problème de référence	9
2.1 Conditions aux limites	10
2.2 Équations mises en jeu	10
2.3 Espaces de solution	12
2.4 Techniques de résolution	13
3 Méthode directe	17
3.1 Concepts de base	17
3.2 Application	17
4 Stratégies de partitionnement	18
4.1 Concepts de base	18
4.2 Application	25
5 Discussion	26
2 La méthode LATIN pour le multiphysique	27
1 Concept d'interface entre physiques	27
2 Principes de la méthode LATIN	28
2.1 Séparations des difficultés	29
2.2 Résolution itérative en deux étapes	30
2.3 Représentation des inconnues	33

2.4	Convergence de la méthode	36
3	Aspects multiéchelles	39
4	Cas test	41
4.1	Description du problème	41
4.2	Premiers résultats et comparaisons	42
5	Conclusions	46
3	Une représentation adaptée des inconnues	47
1	Représentation des champs cinématiques uniquement	47
1.1	Étape linéaire avec représentation à l'itération $n + 1$	48
1.2	Étape préliminaire à l'itération $n + 1$	53
1.3	Solution initiale	54
1.4	Résultats et comparaisons	56
2	Représentation de tous les champs	62
2.1	Étape linéaire avec représentation à l'itération $n + 1$	62
2.2	Étape préliminaire à l'itération $n + 1$	67
2.3	Solution initiale	69
2.4	Résultats et comparaisons	70
3	Exemple d'un filtre poreux	72
3.1	Description du problème	72
3.2	Résultats	73
4	Conclusions	75
4	Les aspects multiéchelles en temps	77
1	Motivations	77
2	Mise en place de l'approche multiéchelle	78
2.1	Introduction d'une discrétisation de l'interface	78
2.2	Description des variables aux échelles micro et macro	80
2.3	Choix des discrétisations	82
2.4	Étape locale à l'itération $n + 1/2$	83
2.5	Résultats	84
3	Formulation Galerkin discontinue en temps	88
3.1	Formulation	88
3.2	Directions de recherche	90
3.3	Étape linéaire avec représentation à l'itération $n + 1$	90
3.4	Étape locale à l'itération $n + 1/2$	96
3.5	Étape préliminaire à l'itération $n + 1$	97
3.6	Résultats	98
4	Conclusions	99
5	Les aspects multiéchelles en espace	101
1	Motivations	101
2	Mise en place de l'approche multiéchelle	102
2.1	Introduction d'une discrétisation de l'interface	103

2.2	Point fixe entre les physiques	105
3	Opérateurs de transfert	107
3.1	Cas d'un champ C^0 défini aux nœuds	108
3.2	Cas d'un champ défini aux points d'intégration	110
4	Résultats	112
4.1	Consolidation d'un sol	112
4.2	Filtre poreux	114
5	Conclusions	118
6	Prise en compte des non linéarités	121
1	Perméabilité et rigidité non constantes	121
1.1	Perméabilité	121
1.2	Rigidité	123
2	Méthode LATIN pour le non linéaire	123
2.1	Étape locale à l'itération $n + 1/2$	123
2.2	Premiers résultats	125
3	Mise à jour des directions de recherche	127
3.1	Choix des directions de recherche	127
3.2	Résultats	128
4	Conclusions	130
	Conclusion et perspectives	131
	Bibliographie	133

Table des figures

1.1	Structure interne d'un milieu poreux	8
1.2	Conditions aux limites du problème	10
1.3	Équations du problème	12
1.4	Exemples d'éléments bidimensionnels	14
1.5	Système couplé	18
1.6	Stratégie SSP	20
1.7	Échanges d'informations	20
1.8	Stratégie ISSP	21
1.9	Stratégie ISPP	22
1.10	Stratégies dédiées à l'aéroélasticité	24
2.1	Interface entre sous-structures	28
2.2	Interface entre physiques	29
2.3	Une itération de la méthode LATIN	30
2.4	Représentation de principe de la méthode	31
2.5	Méthode LATIN avec représentation	35
2.6	Représentation de principe de la méthode avec étape préliminaire	35
2.7	Une itération de la méthode LATIN avec étape préliminaire	35
2.8	Indicateurs à l'itération $n + 1$	39
2.9	Discrétisations de l'interface	40
2.10	Cas test avec effort imposé	41
2.11	Maillage du domaine	42
2.12	Évolution de la pression interstitielle	43
2.13	Évolution de la pression interstitielle maximale	43
2.14	Convergence de la méthode LATIN sans représentation	44
2.15	Convergence de l'ISPP	45
3.1	Méthode LATIN avec $\frac{1}{2}P3$: direction de recherche vérifiée exactement	48
3.2	Méthode LATIN avec étape préliminaire	53
3.3	Évolution des erreurs et indicateurs d'erreurs $0P3$ ou $\frac{1}{2}P3$	57
3.4	Évolution de l'erreur vs. critère ζ	58
3.5	Évolution de l'erreur vs. nombre de champs générés	59

3.6	Cas test avec flux imposé	60
3.7	Couplage de codes avec duplication de l'étape locale	61
3.8	Couplages de codes avec code pilote	61
3.9	Méthode LATIN avec P3 : admissibilité vérifiée exactement	63
3.10	Cas test avec flux effort	71
3.11	Convergence LATIN 0P3, ½P3 et P3	71
3.12	Géométrie du filtre	73
3.13	Maillage d'un quart du filtre	73
3.14	Évolution de la déformation à t_1 , t_3 et t_4	74
3.15	Évolution de la pression à t_1 , t_3 et t_4	74
3.16	Évolution de la pression interstitielle maximale	74
3.17	Évolution des erreurs vs. itérations	75
4.1	Méthodes de partitionnement avec sous-itérations en temps sur le fluide	78
4.2	Discrétisations des parties solide et fluide et de l'interface	79
4.3	Exemple d'une fonction f et de sa partie macro f^M	82
4.4	Discontinuité de la partie macro	82
4.5	Un exemple de discrétisations en temps	83
4.6	Cas test avec effort imposé	85
4.7	Évolution de $\eta_F^2/\eta_S^{\infty 2}$ vs. $\Delta t_S/\Delta t_F$	86
4.8	Évolution de $(\eta_F^2 - \eta_F^{\infty 2})/\eta_S^{\infty 2}$ vs. $\Delta t_S/\Delta t_F$	87
4.9	Convergence de la méthode multiéchelle en temps	87
4.10	Influence du nombre d'itérations du point fixe (ici 2, 3 et 10)	88
4.11	Exemple d'une fonction f et de sa partie macro f^M discontinue	89
4.12	Partition $[0, T]_{\mathcal{D}} = \{I_k = [t_{k-1}, t_k]\}_{k=1}^N$	89
4.13	Comparaison des schémas d'intégration	99
5.1	Extraction basée sur des moyennes généralisées	108
5.2	Fonctions test continues	109
5.3	Extrapolation	110
5.4	Fonctions test discontinues	111
5.5	Consolidation d'un sol	112
5.6	Maillages solide Ω_S et fluide Ω_F	113
5.7	Évolution de la pression interstitielle maximale	113
5.8	Maillage solide Ω_S , maillages de l'interface Ω_I et maillage fluide Ω_F	114
5.9	Évolution de la pression interstitielle maximale	114
5.10	Évolution de la pression interstitielle maximale	115
5.11	Géométrie du filtre	115
5.12	Répartition de la déformation et de la pression à t_2	116
5.13	Maillages solide Ω_S et fluide Ω_F	116
5.14	Évolution des erreurs vs. itérations	117
5.15	Maillages solide Ω_S , interface Ω_I et fluide Ω_F	117
5.16	Comparaison des répartitions de pression	118

5.17	Évolution des erreurs vs. itérations	118
5.18	Maillages solide Ω_S , interface Ω_I et fluide Ω_F	119
5.19	Évolution des erreurs vs. itérations	119
6.1	Évolution de la perméabilité intrinsèque avec la déformation volumique .	123
6.2	Évolution de la rigidité avec la déformation	124
6.3	Influence de la perméabilité non constante	126
6.4	Influence de la rigidité non constante	126
6.5	Influence de la perméabilité non constante	129
6.6	Influence de la rigidité non constante	129
6.7	Résumé de la stratégie	131

Liste des tableaux

2.1	Caractéristiques du grès de Béréa saturé	42
2.2	Caractéristiques du grès de Béréa saturé ($[L], [M], [T]$)	42
3.1	Comparaison des coûts de calcul	58
3.2	Influence du coefficient de Biot b	58
3.3	Influence de la complexité du chargement	60
3.4	Coûts LATIN 0P3, $\frac{1}{2}$ P3 et P3	72
4.1	Évolution des contributions pour $\Delta t_S = T/32$ fixé	86
6.1	Caractéristiques du grès de Béréa saturé non déformé	125

Introduction

DEPUIS DE NOMBREUSES ANNÉES, les problèmes couplés ont fait l'objet de multiples travaux en matière de modélisation et de simulation. Dans [Zie00], O. C. Zienkiewicz et R. L. Taylor les définissent comme des problèmes dans lesquels interviennent plusieurs domaines, dont les variables décrivent généralement des phénomènes physiques différents, et pour lesquels :

- aucun domaine ne peut être résolu indépendamment des autres ;
- aucun groupe de variables ne peut être éliminé explicitement des équations.

Ils suggèrent de classer ces problèmes en deux catégories. La première est celle dans laquelle le couplage a lieu au niveau d'interfaces matérielles entre les domaines, ces derniers pouvant ou non correspondre à des phénomènes physiques différents. C'est le cas de l'interaction fluide-structure en aéroélasticité, mais aussi celui où des techniques numériques différentes sont utilisées pour traiter chaque domaine ([Fel01] parle alors de sous-systèmes artificiels). La seconde catégorie regroupe les problèmes dans lesquels il y a recouvrement partiel ou total des domaines, le couplage ayant lieu au niveau des équations gouvernant les différents phénomènes physiques. On peut notamment citer les cas du couplage physico-chimique, des matériaux piézo-électriques, de la thermo-élasticité ou encore de l'interaction fluide-structure dans les milieux poreux (sols, muscles...).

Depuis quelques années, le qualificatif *multiphysique* est apparu pour désigner les problèmes dans lesquels interagissent des phénomènes de natures différentes et qui étaient étudiés, il y a encore peu de temps, par des branches différentes de la physique. [Par01] constate que leur étude est en train de devenir un des nouveaux défis de la simulation comme en témoigne le nombre grandissant de conférences qui lui sont consacrées (citons notamment la récente *Workshop on Modelling and Simulation of Multi-Physics Multi-Scale Systems*¹, dont le nombre de communications soumises a dépassé les espérances des organisateurs).

¹Durant l'ICCS-2004, 6-9 juin 2004, Cracovie, Pologne.

Si on suppose que la modélisation et la simulation de chacun des domaines mis en jeu dans un problème multiphysique sont bien maîtrisées, mises à part les méthodes d'élimination qui sont moins générales, deux approches sont classiquement utilisées pour traiter le problème complet :

- la résolution couplée (dite *directe* ou *monolithique*) : le problème est traité dans son intégralité et la résolution de chaque composant avance simultanément en temps (e.g. [Blo98, Gos03, Mic04b]) ;
- le découplage (ou *partitionnement*) : les composants sont traités séparément, les interactions étant vues comme des chargements imposés, transférés entre les domaines en utilisant des techniques de prédiction, substitution et synchronisation (e.g. [Fel80, Fel88, Mor95, Lew98, Far00, Fel01]).

On attend de ces méthodes les qualités suivantes : précision, efficacité et modularité [Pip95a]. La précision justifie le fait d'accorder crédit aux résultats de la simulation vis-à-vis de la modélisation choisie. L'efficacité doit permettre d'effectuer des calculs précis pour un coût raisonnable. La modularité, quant à elle, est souvent présentée comme le fait de pouvoir réutiliser des codes existants, fonctionnant éventuellement sur des machines différentes.

Si l'on est prêt à développer un nouvel outil, dédié au problème que l'on souhaite traiter, on peut se tourner vers l'approche monolithique qui offre précision et simplicité de mise en œuvre. Par contre, elle ne présente pas la modularité qui vient d'être décrite et peut conduire à la résolution de systèmes couplés de grande taille, éventuellement non linéaires.

Si, en revanche, on souhaite réutiliser les stratégies et les codes adaptés dont on dispose déjà, on préfère souvent une méthode de partitionnement, dont [Fel01] rappelle la très grande modularité. Sous sa forme la plus simple (*staggered*²), ce type de stratégie incrémentale consiste, à un instant donné, à calculer de manière découplée l'état de chaque composant. Durant ce calcul, tous les autres composants sont supposés « gelés ». Cette approche repose sur le fait que la solution de chacun des domaines est celle d'un problème bien posé, dès lors que la valeur des variables des autres domaines est connue. Les systèmes à résoudre sont donc de taille réduite, et le coût de la simulation *a priori* plus faible qu'avec la méthode monolithique. Des modélisations, des discrétisations et des méthodes de résolution différentes peuvent être utilisées pour chacun des composants. Néanmoins, cette technique a des inconvénients [Mic04b] : d'une part, chaque composant a toujours un retard en temps par rapport aux autres et les propriétés de conservation d'énergie sont souvent perdues ; d'autre part, le schéma peut souffrir d'une stabilité conditionnelle ou d'un manque

² « titubante », ou parfois « zig-zag », du fait de l'allure du schéma de principe de l'algorithme comme il sera décrit dans la suite.

de cohérence (*consistency*) qui impose certains choix sur la taille des pas de temps. Pour réduire le retard et recouvrer la cohérence, diverses procédures de prédiction et de sous-itérations à chaque pas de temps peuvent être mises en place. Ces techniques peuvent être vues comme des méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel ou Newton par blocs [Par83, Zie88, Tur94a, Mic03, Mat03]. La question du choix entre la méthode directe et une stratégie de partitionnement a fait l'objet de nombreuses publications (e.g. [Lew91, Blo98, Kuh01, Pip01, Fel01, Fel04]) mais il semble que la réponse dépende fortement du problème traité.

L'objectif de cette thèse est de proposer une stratégie alternative et non incrémentale pour la simulation des problèmes multiphysiques. Le point de départ est d'étendre le concept d'interface entre sous-structures (cf. [Lad99a] puis [Lad00, Lad01b, Lad02b]) à celui d'*interface entre physiques*. Chaque physique est alors traitée indépendamment (notamment en terme de discrétisation en temps et en espace) et les couplages entre les physiques sont recouverts lors de la vérification de « propriétés » d'interface. Les bases de cette méthode ont été présentées dans [Dur03c] et le cas test qui sert de support est un problème multiphysique classique : celui de consolidation d'un milieu poreux, problème d'interaction fluide-structure fortement couplé en volume. Cette thèse a été réalisée en collaboration avec le Professeur B. A. Schrefler³ dont les travaux ont largement contribué à la compréhension et à la simulation de ces milieux⁴ [Lew98, Sch02]. Le terme *consolidation* désigne la lente déformation du « squelette » d'un milieu poreux, accompagnée d'un flux du fluide contenu dans les pores [Lew98, Cou04]. Ce phénomène joue un rôle important dans de nombreux problèmes de mécanique des sols et a fait l'objet de nombreuses études. Deux cas ont été examinés avec beaucoup d'attention. D'une part, celui où le sol est soumis à un chargement mécanique : effet du poids d'un édifice, fondations des piles de pont, etc. D'autre part, celui où le sol est soumis à un chargement hydraulique qui peut conduire à un changement d'équilibre : pompage massif d'une ressource naturelle (pétrole, gaz) dans le sol, etc.

Le « moteur » de la stratégie proposée ici est la méthode à grand incrément de temps (LATIN) [Lad99a]. Cette méthode très générale a déjà été utilisée pour traiter de nombreux problèmes complexes, notamment non linéaires. Elle se démarque des stratégies décrites précédemment par son caractère non incrémental. Brièvement, elle consiste à mettre en place un algorithme de résolution itératif au cours duquel les équilibres de chaque physique sont traités indépendamment, lors d'une étape dite *linéaire*, tandis que les propriétés d'interface sont vérifiées lors d'une étape dite *locale*. Elle peut donc être considérée comme une stratégie de partitionnement mais ne souffre pas du retard en temps inhérent aux méthodes *staggered*. On peut remarquer que cette méthode est conçue dès sa formulation pour être implantée sur des ordinateurs à architecture parallèle et pour permettre le couplage de codes de calcul dédiés. L'utilisation pratique

³Dipartimento di Costruzioni e Trasporti, Université de Padoue, Italie.

⁴Milieux poreux saturés, insaturés, isothermes ou non, mono ou multiphasés, avec comportement élastique ou élasto-plastique, non linéaires, en grandes déformations, etc.

de codes différents n'a cependant pas été abordée au cours de cette thèse. Il faut noter que dans le cas des milieux poreux, la notion d'interface entre physiques peut paraître assez abstraite car elle n'a pas de réalité matérielle comme c'est le cas en aéroélasticité où elle désigne la « peau » d'une structure baignant dans un fluide. Remarquons aussi que l'introduction d'une interface va dans le sens de [Par01], qui préconise que l'analyse multiphysique d'un problème tel que celui d'interaction fluide-structure fasse intervenir trois modules : un pour l'analyse de la partie fluide, un pour celle de la partie solide et un pour l'interface, qui prenne en compte les interactions entre les phénomènes.

Un des points clés de cette stratégie est l'introduction d'une technique d'approximation propre à son caractère non incrémental. Cette technique, fondée sur le concept de fonctions radiales [Lad99a], consiste à approximer la solution par une somme de produits de fonctions du temps par des fonctions de l'espace. Ces fonctions sont générées automatiquement par l'algorithme au fil des itérations et pour un coût de calcul réduit. Une telle méthode permet en outre d'augmenter la modularité de la stratégie en limitant le volume d'informations à échanger entre la partie fluide et la partie solide. Dans [Dur03c], la stratégie LATIN a été présentée et comparée à l'ISPP (*Iterative Standard Parallel Procedure*), un des schémas classiques de partitionnement [Mat96]. Elle s'est avérée compétitive en terme d'efficacité dès lors que la technique d'approximation radiale est utilisée, mais seule l'approximation des quantités cinématiques a alors été mise en place.

Le premier volet de cette thèse est l'introduction de l'approximation radiale pour l'ensemble des champs et la comparaison des performances de l'ISPP et de la méthode LATIN pour ces différents types d'approximation [Dur03b]. On montre que la représentation de tous les champs ne modifie pas le taux de convergence et permet de réduire le coût du calcul et les besoins en terme de stockage et de transfert d'informations. Le comportement de l'algorithme vis-à-vis de la complexité en temps du chargement est en outre testé. La stratégie LATIN se montre peu sensible à cette complexité alors que le coût pour atteindre la convergence de l'ISPP y est directement lié [Dur03b].

Le second volet de ces travaux concerne les aspects multiéchelles et l'utilisation de discrétisations différentes pour chacune des physiques, en particulier dans les cas où des échelles de temps et d'espace très différentes sont amenées à « cohabiter » [Pip95b, Far98, Fel01]. L'utilisation de pas de temps de tailles différentes permet de réduire le coût de la simulation en évitant des calculs inutiles sur les champs pour lesquels une discrétisation plus grossière peut suffire, évitant en outre les transferts d'informations trop fréquents entre les codes [Pip95b]. L'utilisation de discrétisations spatiales différentes peut, quant à elle, être nécessaire lorsque les codes utilisent des méthodes d'adaptation pour générer automatiquement des maillages *ad hoc*, qui ne sont pas forcément compatibles, ou lorsque les schémas utilisés ne sont pas les mêmes (*e.g.* dans un problème d'aéroélasticité, éléments finis pour la partie structure et différences fi-

nies pour la partie fluide [Far98, Bec00, Mat03]).

Un des points clés en faveur des méthodes de partitionnement est la possibilité de coupler des techniques de discrétisation et des algorithmes de résolutions qui ont fait leurs preuves dans chacun des domaines. Dans ce type de méthodes, l'aspect multi-échelle en temps est le plus souvent traité en sous-itérant sur la physique qui nécessite la discrétisation la plus fine. Des techniques adaptées de prédiction des autres champs permettent alors de conserver la stabilité inconditionnelle du schéma [Pip95b, Fel01]. Pour l'utilisation de discrétisations spatiales différentes, que ce soit dans une méthode monolithique ou de partitionnement, le point clé est le transfert d'informations qui ne sont pas définies sur les mêmes maillages. Un certain nombre de techniques ont été proposées dans le cadre de la résolution des problèmes couplés (e.g. [Mam95, Far98, Bec00, Vil02] pour l'aéroélasticité). Dans la méthode LATIN, la prise en compte de ces aspects multiéchelles s'intègre naturellement dans le cadre de l'interface entre les deux physiques. Pour cela, on donne un sens concret à l'interface en la munissant de ses propres discrétisations en temps et en espace. La vérification des relations de comportement est alors réalisée sur ces maillages. La difficulté est le transfert de champs spatiaux et temporels entre les discrétisations de l'interface et celles de chacune des physiques.

Pour ce qui est des aspects multiéchelles en temps, le caractère non incrémental de la stratégie nécessite la définition du transfert entre plusieurs grilles temporelles de champs définis sur l'intervalle tout entier, contrairement aux méthodes *staggered*. Ce problème a déjà été abordé dans de nombreux cas (e.g. [Gra01a, Fis01, Bot02, Com02, Mad02, Yu02b]). La technique qui est introduite ici est une modification de la stratégie micro-macro proposée dans [Lad99b, Lad01b, Lad03] pour résoudre les problèmes multiéchelles en espace. Elle consiste à introduire deux échelles, dites « macro » et « micro », la partie macro d'une fonction étant définie comme une sorte de moyenne sur des pas de temps grossiers. Les inconnues fluides sont représentées avec leurs parties macro et micro tandis que les quantités solides ne le sont qu'avec leur partie macro. Le couplage à l'étape locale est assuré par des techniques de projection/interpolation. Dans le cas du problème de consolidation qui nous intéresse, on constate qu'une discrétisation beaucoup plus grossière des quantités solides est suffisante pour obtenir des niveaux d'erreur identiques sur la partie solide et sur la partie fluide. Pour obtenir un niveau d'erreur donné, cette stratégie permet donc un gain substantiel en terme de coût de calcul [Dur03b].

Pour l'utilisation de maillages spatiaux différents, le choix se porte sur une technique fondée sur des opérateurs de transfert de type mortar [Ber94, Far98]. Les relations de comportement sont alors vérifiées entre les champs projetés sur le maillage de l'interface. On constate que la solution obtenue et le taux de convergence de la méthode sont très peu affectés, même dans le cas de maillages fortement incompatibles ou de l'utilisation d'un maillage grossier de l'interface [Nér04]. En revanche, la ques-

tion du choix du maillage de l'interface reste pour l'instant ouverte.

Enfin, il semble qu'une majorité des problèmes de consolidation traités dans la littérature se limite aux hypothèses d'un comportement du squelette élastique linéaire et d'une perméabilité du milieu constante. En réalité, dans la plupart des situations rencontrées en géomécanique, le comportement du sol est non linéaire [Kon63, Lew98, Dor02, Mer02]. Le dernier point abordé dans cette thèse est la prise en compte d'un tel comportement. Dans la méthode LATIN, cela se traduit une nouvelle fois par une modification de l'étape locale, dans laquelle le système différentiel à résoudre devient non linéaire mais reste local en espace. Un choix adapté des directions de recherche permet de rendre le taux de convergence de la méthode quasi-indépendant du degré de non linéarité [Nér04].

Ce document est composé de six chapitres :

- dans le premier, on présente le problème de référence et on rappelle les principes des stratégies usuelles. La procédure ISPP, avec laquelle la stratégie LATIN est comparée dans la suite, est détaillée ;
- dans le deuxième, on décrit la méthode LATIN, adaptée à la simulation des problèmes multiphysiques et la notion d'interface entre physiques. On donne ensuite de premiers éléments de comparaison avec l'ISPP ;
- dans le troisième, on développe les techniques d'approximations propres au caractère non incrémental de la méthode ;
- dans le quatrième, on montre comment les aspects multiéchelles en temps peuvent être pris en compte de manière naturelle par le concept d'interface entre physiques. On montre ainsi l'intérêt de pouvoir utiliser une discrétisation plus grossière pour la partie solide. L'opportunité d'utiliser un schéma Galerkin discontinu en temps est aussi discutée ;
- dans le cinquième, on modifie à nouveau le concept d'interface entre physiques afin d'utiliser des maillages spatiaux différents pour chacune des physiques ;
- dans le sixième, enfin, on teste l'aptitude de la stratégie à prendre en compte les non linéarités du matériau, et en particulier son comportement vis-à-vis du « degré » de non linéarité.

Le problème de référence

DANS CE CHAPITRE, on présente quelques notions sur les milieux poreux et les équations du modèle qui fera l'objet de cette étude. On rappelle ensuite les idées de base des stratégies généralement utilisées pour résoudre ce type de problème couplé : la méthode monolithique et celles de partitionnement. Une des stratégies classiques de partitionnement, l'ISPP, est détaillée et servira de point de comparaison pour la méthode proposée dans ce travail.

1 Quelques notions sur les milieux poreux

L'objectif de cette section n'est évidemment pas de détailler la théorie des milieux poreux, mais plutôt d'introduire les grandeurs caractéristiques qui seront manipulées tout au long de ce travail, ainsi que les équations qui les gouvernent. Il faut noter que les équations qui vont être présentées sont celles obtenues sous des hypothèses simplificatrices très fortes. Elles ne reflètent pas l'état d'avancement actuel des travaux sur la simulation des milieux poreux. Pour plus de détails sur la mécanique de ces milieux, on pourra se référer aux ouvrages très complets [Lew98, Cou04].

On définit généralement la *mécanique des milieux poreux* comme l'étude des matériaux dont la structure interne comprend une phase *solide* et des pores, fermés ou ouverts, remplis d'une phase *fluide* dont le comportement influence de manière significative celui de la structure (cf. **Figure 1.1**). Dans les exemples qui seront considérés ici, les pores ouverts seront supposés complètement saturés de fluide. Dans le cas des géomatériaux, comme les sols, les roches ou le béton, ce fluide est généralement de l'eau, du pétrole ou du gaz. Cependant, des propriétés identiques régissent la circulation du sang dans les tissus musculaires ou le comportement des tissus oculaires remplis d'humeur aqueuse [Mer02]. La mécanique des milieux poreux joue donc un rôle important dans des domaines aussi divers que la géophysique, la géotechnique, la

biomécanique, l'étude des matériaux ...

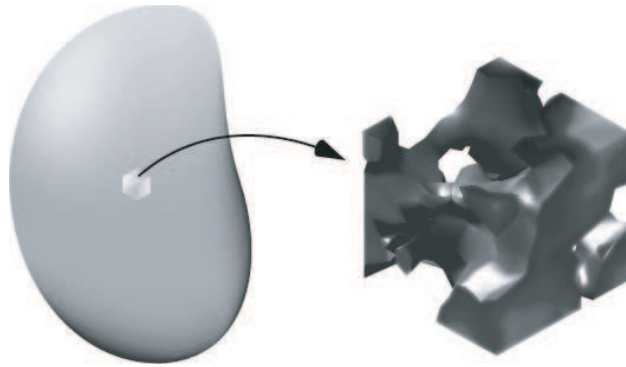


Figure 1.1 • Structure interne d'un milieu poreux

Un des points clés de la mécanique des milieux poreux est de réussir à décrire les interactions entre les constituants solide et fluide. La géométrie des pores est souvent trop complexe pour qu'une description microscopique de ces interactions soit envisageable, *i.e.* en considérant les inhomogénéités réelles à l'échelle de la porosité. On lui substitue donc généralement un modèle macroscopique, dans lequel on suppose que les différents constituants occupent le domaine tout entier, solide et le fluide formant des milieux continus qui se chevauchent. Ce milieu de substitution peut alors être traité avec les méthodes classiques de la mécanique des milieux continus.

Deux familles de stratégies sont généralement utilisées pour construire le comportement de ce milieu de substitution à partir de ceux des différents composants. La première, dont font partie les approches phénoménologiques et les théories des mélanges, est fondée sur une approche macroscopique. La seconde, dont font partie les théories des moyennes (ou des mélanges hybrides), s'appuie sur une vision plutôt microscopique. Très brièvement, elle consiste à intégrer, sur un volume élémentaire représentatif, les équations d'équilibre microscopiques du solide et du fluide, afin de faire apparaître des quantités macroscopiques et les équations qui régissent leur évolution. Ce type de stratégie permet donc une bonne compréhension des relations entre les états microscopique et macroscopique. Il a été montré que, sous certaines hypothèses, les deux approches conduisent à des modèles identiques [Lew98].

Dans la suite, on présente les variables macroscopiques qui seront considérées tout au long de ce document. Elles correspondent à des quantités réellement mesurables. Ce lien avec les pratiques expérimentales est particulièrement important dans des disciplines comme la mécanique des sols.

2 Problème de référence

Le problème auquel nous nous intéressons ici est l'évolution d'une structure constituée d'un matériau poreux saturé et occupant un domaine Ω . On se place sous les hypothèses de petites perturbations et d'évolution isotherme sur l'intervalle d'étude $[0, T]$.

On définit la porosité n du matériau comme le ratio entre le volume des vides V_v (entièrement remplis dans le cas de la saturation totale) contenus dans un volume élémentaire représentatif, et le volume V_e de celui-ci :

$$n = \frac{V_v}{V_e}$$

En tout point \underline{M} du milieu poreux, on s'intéresse aux champs macroscopiques suivants :

- pour le squelette solide : le déplacement \underline{U} , les contraintes σ , les déformations ε et les taux de déformations $\dot{\varepsilon}$

$$\varepsilon(\underline{U}) = \left(\frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{M}} \right)_{\text{sym}} \quad \text{et} \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$

- pour le fluide contenu dans les pores : la pression interstitielle p , son gradient \underline{Z}

$$\underline{Z} = \underline{\text{grad}} p$$

le taux q d'accumulation de fluide dans l'élément de volume élémentaire qui entoure le point et l'opposée de la vitesse de Darcy \underline{W} . La vitesse de Darcy $\underline{w} = -\underline{W}$ représente la vitesse relative moyenne du fluide par rapport au squelette solide.

L'état de la structure est défini sur $\Omega \times [0, T]$ par le groupe de variables :

$$\mathbf{s} = \left\{ \dot{\varepsilon}, \sigma, p, q, \underline{Z}, \underline{W} \right\}$$

et chacune des variables est recherchée dans l'espace des champs à énergie finie correspondant :

$$\underline{U} \in \mathbf{U}, \quad \sigma \in \Sigma, \quad p \in \mathbf{P}, \quad q \in \mathbf{Q}, \quad \underline{Z} \in \mathbf{Z} \quad \text{et} \quad \underline{W} \in \mathbf{W}$$

On note $\mathbf{S}^{[0, T]}$ l'espace dans lequel est recherché \mathbf{s} .

2.1 Conditions aux limites

Les chargements imposés à chaque instant t de $[0, T]$ sont :

- un déplacement \underline{U}_d sur une partie de la frontière $\partial_1\Omega$;
- un chargement \underline{F}_d sur la partie $\partial_2\Omega$, complémentaire de $\partial_1\Omega$;
- un chargement volumique \underline{f}_d sur le domaine Ω ;
- une pression du fluide p_d sur une autre partie $\partial_3\Omega$;
- un flux de fluide w_d sur la partie $\partial_4\Omega$, complémentaire de $\partial_3\Omega$.

Toutes les quantités indicées $(\cdot)_d$ sont des données du problème. Pour simplifier la présentation, on supposera $\underline{f}_d = \underline{0}$ dans toute la suite. La **Figure 1.2** résume ces chargements et leur action sur chacune des physiques. \underline{n} désigne usuellement la normale sortante aux différentes surfaces.

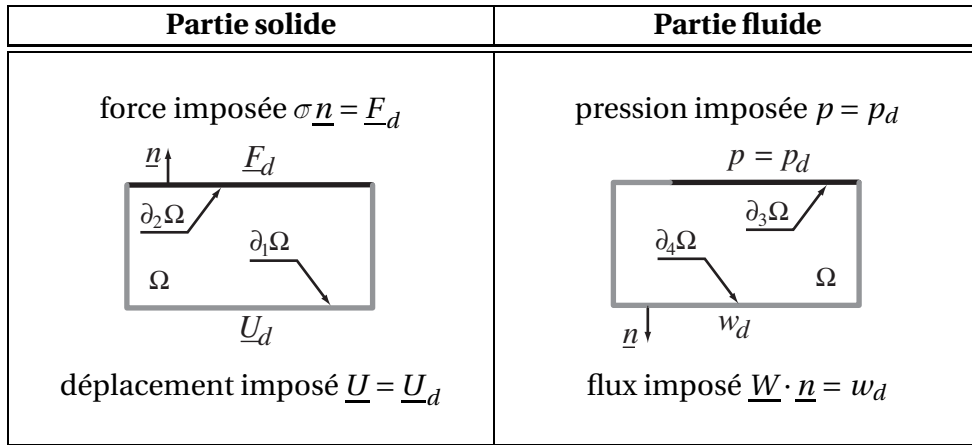


Figure 1.2 • Conditions aux limites du problème

2.2 Équations mises en jeu

Le problème consiste à trouver \mathbf{s} dans $\mathbf{S}^{[0, T]}$ satisfaisant à chaque instant t de $[0, T]$ les équations suivantes (cf. [Lew98, Cou04]) :

- **partie solide** • compatibilité des déformations ε et équilibre des contraintes σ :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= \varepsilon(\underline{U}) \quad \text{sur } \Omega \quad \text{et} \quad \underline{U} = \underline{U}_d \quad \text{sur } \partial_1\Omega \\
 \underline{\text{div}} \sigma &= \underline{0} \quad \text{sur } \Omega \quad \text{et} \quad \sigma \underline{n} = \underline{F}_d \quad \text{sur } \partial_2\Omega
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

- **partie fluide** • conservation de la masse de fluide :

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{\text{grad}} p \quad \text{sur } \Omega \quad \text{et} \quad p = p_d \quad \text{sur } \partial_3 \Omega \\ q &= \text{div } \underline{W} \quad \text{sur } \Omega \quad \text{et} \quad \underline{W} \cdot \underline{n} = w_d \quad \text{sur } \partial_4 \Omega \end{aligned} \quad (1.2)$$

- **relations de comportement** • loi de Hooke, loi de Darcy et effets de la compressibilité :

$$\sigma = \mathbf{D}\varepsilon - bp\mathbf{I}, \quad q = \frac{1}{Q}\dot{p} + b\text{Tr}\dot{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \underline{W} = \frac{K}{\mu_w}\underline{Z} \quad (1.3)$$

où \mathbf{D} désigne le tenseur de Hooke, b le coefficient de Biot, Q le module de Biot, K la perméabilité intrinsèque du matériau et μ_w la viscosité dynamique du fluide saturant. Ce sont toutes des caractéristiques macroscopiques du matériau qui ont été obtenues à partir des caractéristiques microscopiques. Le coefficient de Biot peut être exprimé en fonction du module de compressibilité du squelette drainé K_t et de celui de la phase solide K_s par $b = 1 - \frac{K_t}{K_s}$. Pour les sols saturés, le module de Biot peut être relié à la porosité n et aux modules de compressibilité de la phase solide K_s et de la phase fluide K_w par $\frac{1}{Q} = \frac{n}{K_w} + \frac{b-n}{K_s}$. Dans la suite, le tenseur $\frac{K}{\mu_w}\mathbf{I}$ sera noté \mathbf{H} de telle sorte que $\underline{W} = \mathbf{H}\underline{Z}$.

- **conditions initiales**

On suppose que le système était en régime permanent à $t < 0$ et on prend comme conditions initiales les solutions du problème statique où les chargements ont la même valeur qu'à $t = 0$.

(1.4)

La **Figure 1.3** illustre la nature des équations mises en jeu et les couplages entre la partie solide et la partie fluide.

Remarque 1 • Le terme *contrainte effective* est souvent utilisée pour désigner la quantité $\sigma' = \sigma + bp\mathbf{I}$.

Remarque 2 • Dans le cas où le coefficient de Biot est nul ($b = 0$), les deux physiques sont découplées. Dans le cas d'un problème purement statique ($\dot{p} = 0$, $\text{Tr}\dot{\varepsilon} = 0$ et $q = 0$), on dit que les deux physiques sont « semi-couplées » car le problème fluide est découplé du problème solide.

Remarque 3 • Lorsqu'on examine les équations précédentes, il est clair que l'on a affaire à un problème couplé, dans lequel les variables décrivent des phénomènes physiques différents. Le fait de travailler sur les grandeurs macroscopiques en remplaçant

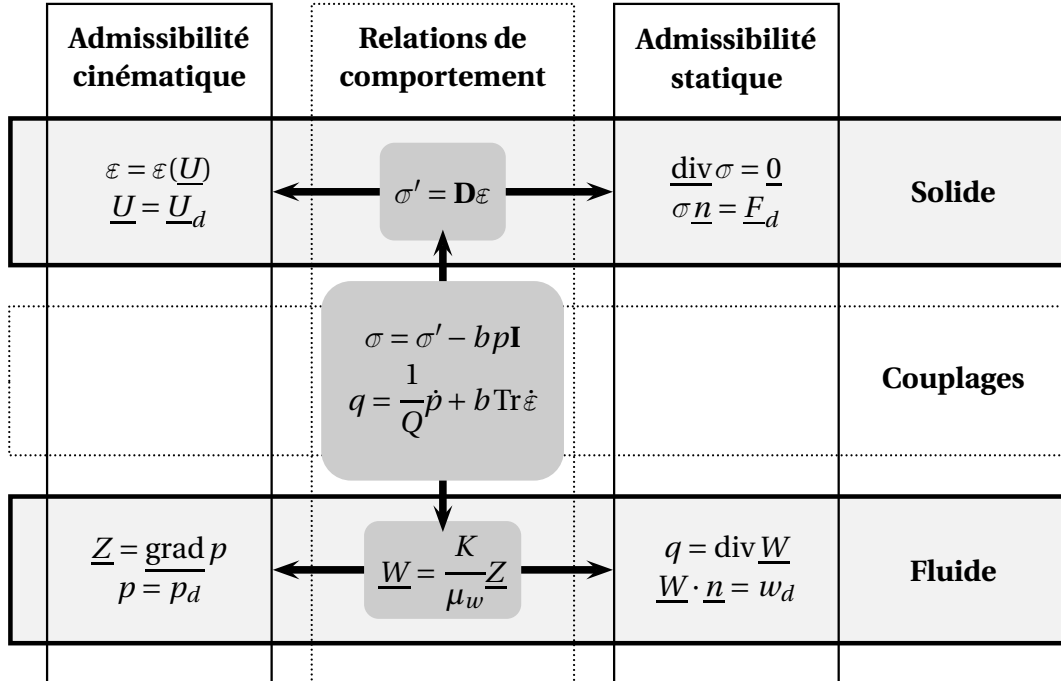


Figure 1.3 • Équations du problème

solide et fluide par des milieux continus qui se chevauchent, conduit à un couplage en volume, ce qui n'aurait pas été le cas si l'on avait traité le problème à l'échelle de la porosité.

Les équations d'admissibilité (1.1) et (1.2) sont découplées entre chacune des physiques et pourraient être traitées avec les outils performants qui sont développés pour la simulation des problèmes de mécanique des solides et des fluides. En revanche, les relations de comportement (1.3) couplent les deux physiques, ce qui justifie qu'on parle de *problème multiphysique* au sens introduit dans [Zie00].

2.3 Espaces de solution

On introduit $\mathcal{U}^{[0,T]}$, l'espace des champs de déplacement admissibles, *i.e.* à énergie finie sur $\Omega \times [0, T]$ et qui sont égaux à \underline{U}_d sur $\partial_1\Omega$:

$$\mathcal{U}^{[0,T]} = \left\{ \underline{U} \mid \underline{U} \in \mathbf{U} \text{ et } \underline{U} = \underline{U}_d \text{ sur } \partial_1\Omega \right\}$$

et on note $\mathcal{U}_0^{[0,T]}$, l'espace homogène associé :

$$\mathcal{U}_0^{[0,T]} = \left\{ \underline{U} \mid \underline{U} \in \mathbf{U} \text{ et } \underline{U} = \underline{0} \text{ sur } \partial_1\Omega \right\}$$

De la même façon, on introduit les espaces de champs admissibles $\mathcal{S}^{[0,T]}$, $\mathcal{P}^{[0,T]}$, $\mathcal{G}^{[0,T]}$, $\mathcal{W}^{[0,T]}$, $\mathcal{H}^{[0,T]}$:

$$\mathcal{S}^{[0,T]} = \left\{ \underline{\sigma} \mid \underline{\sigma} \in \Sigma, \quad \underline{\text{div}} \underline{\sigma} = \underline{0} \text{ sur } \Omega \quad \text{et} \quad \underline{\sigma} \underline{n} = \underline{F}_d \text{ sur } \partial_2 \Omega \right\}$$

$$\mathcal{P}^{[0,T]} = \left\{ p \mid p \in \mathbf{P} \quad \text{et} \quad p = p_d \text{ sur } \partial_3 \Omega \right\}$$

$$\mathcal{G}^{[0,T]} = \left\{ (p, \underline{Z}) \mid (p, \underline{Z}) \in \mathbf{P} \times \mathbf{Z}, \quad \underline{Z} = \underline{\text{grad}} p \text{ sur } \Omega \quad \text{et} \quad p = p_d \text{ sur } \partial_3 \Omega \right\}$$

$$\mathcal{W}^{[0,T]} = \left\{ \underline{W} \mid \underline{W} \in \mathbf{W} \quad \text{et} \quad \underline{W} \cdot \underline{n} = w_d \text{ sur } \partial_4 \Omega \right\}$$

$$\mathcal{H}^{[0,T]} = \left\{ (q, \underline{W}) \mid (q, \underline{W}) \in \mathbf{Q} \times \mathbf{W}, \quad q = \text{div } \underline{W} \text{ sur } \Omega \quad \text{et} \quad \underline{W} \cdot \underline{n} = w_d \text{ sur } \partial_4 \Omega \right\}$$

et $\mathcal{S}_0^{[0,T]}$, $\mathcal{P}_0^{[0,T]}$, $\mathcal{G}_0^{[0,T]}$, $\mathcal{W}_0^{[0,T]}$, $\mathcal{H}_0^{[0,T]}$, les espaces homogènes associés.

De manière générale, la notation $(\cdot)^{[0,T]}$ sera utilisée pour des espaces de fonctions pouvant dépendre du temps. Leurs éventuels sous-espaces ne contenant que des fonctions indépendantes du temps, seront dépourvus de cette notation. Ainsi \mathcal{U}_0 désignera le sous-espace de $\mathcal{U}_0^{[0,T]}$ qui ne contient que des champs indépendants du temps.

2.4 Techniques de résolution

Lorsqu'on injecte les relations de comportement (1.3) dans les équations d'admissibilité (1.1) et (1.2) écrites sous forme variationnelle, les inconnues cinématiques \underline{U} et p peuvent être déterminées en résolvant le problème :

Trouver $\underline{U} \in \mathcal{U}^{[0,T]}$ et $p \in \mathcal{P}^{[0,T]}$ telles que $\forall t \in [0, T]$,

$$\forall \underline{U}^* \in \mathcal{U}_0, \quad \int_{\Omega} \text{Tr}[\underline{\varepsilon}(\underline{U}) \mathbf{D}_{\varepsilon}(\underline{U}^*)] d\Omega - \int_{\Omega} b p \text{Tr} \underline{\varepsilon}(\underline{U}^*) d\Omega = \int_{\partial_2 \Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^* dS$$

$$\forall p^* \in \mathcal{P}_0, \quad \int_{\Omega} \underline{\text{grad}} p \cdot \mathbf{H} \underline{\text{grad}} p^* d\Omega + \int_{\Omega} \dot{p} \frac{1}{Q} p^* d\Omega + \int_{\Omega} b p^* \text{Tr} \dot{\underline{\varepsilon}} d\Omega = \int_{\partial_4 \Omega} w_d p^* dS$$

Il reste à associer à ce problème les conditions initiales *ad hoc* en pression. Si l'on utilise l'hypothèse (1.4), celles-ci permettront en outre de calculer les conditions en déplacement.

Discrétisation spatiale • Après discrétisation spatiale, le problème précédent peut être réécrit sous la forme d'un système global non symétrique :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ N^T & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -N \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_d \\ g_d \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

où U et p désignent les champs discrétisés associés à \underline{U} et p , K , H et S les matrices de rigidité, perméabilité et compressibilité ; N le terme de couplage ; f_d les forces généralisées correspondant à \underline{F}_d et g_d les flux généralisés correspondant à w_d .

Les conditions initiales doivent maintenant porter sur p et U . En notant $p(t=0) = p_0$ et $U(t=0) = U_0$, pour rester cohérent avec le système précédent, on doit avoir :

$$KU_0 = f_{d0} + Np_0$$

Remarque sur la discrétisation spatiale • Ce problème est résolu classiquement par la méthode des éléments finis. La nature des quantités qui doivent être manipulées conduit à utiliser des éléments mixtes déplacement/pression. Cependant, le choix du type et de la taille des éléments n'est pas trivial et a fait l'objet de nombreux travaux, notamment dans le cas de la consolidation (e.g. [Yok71, San77, Ree84]). Ces travaux ont montré que des erreurs numériques peuvent apparaître, en particulier dans les premiers instants de la consolidation.

[Yok71, San77] ont étudié de nombreux types d'éléments pour les cas bi et tri-dimensionnels et observé que les éléments quadratiques « standards » (quadratiques pour le déplacement et la pression, cf. **Figure 1.4**) conduisaient à de grandes oscillations dans les premiers instants de la solution en pression. C'est pour cette raison que les éléments « composites » (quadratiques pour le déplacement mais linéaire pour la pression cf. **Figure 1.4**) sont généralement préférés, même si les résultats qu'ils permettent d'obtenir sont moins précis. [Ree84] propose néanmoins une procédure de lissage de la solution en pression dans le cas où les éléments standards sont utilisés.

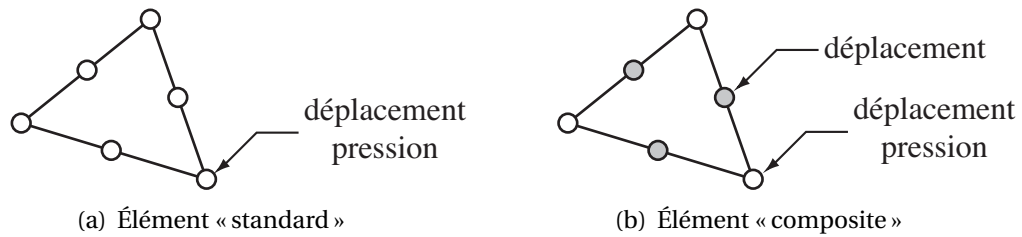


Figure 1.4 • Exemples d'éléments bidimensionnels

Le choix des éléments « composites », qui vérifient la condition LBB ou au moins le patch-test [Zie86, Bre91], permet d'assurer la convergence et la cohérence (*consistency*) de la discrétisation spatiale.

Discrétisation en temps • On discrétise en temps le système (1.5) en utilisant un schéma d'intégration du type θ -méthode. Si X est une fonction du temps, sa valeur X_{i+1} à l'instant t_{i+1} s'exprime en fonction de la valeur X_i à l'instant t_i par :

$$X_{i+1} = X_i + h_{i+1} \dot{X}_{i+\theta}$$

où l'on a noté :

$$\dot{X}_{i+\theta} = \theta \dot{X}_{i+1} + (1 - \theta) \dot{X}_i$$

et

$$h_{i+1} = t_{i+1} - t_i$$

Le schéma de dérivation correspondant est :

$$\dot{X}_{i+1} = \frac{X_{i+1} - X_i}{\theta h_{i+1}} + \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) \dot{X}_i$$

Remarque sur le schéma • Dans la pratique $0 \leq \theta \leq 1$. Pour des valeurs particulières de θ , on retrouve les schémas classiques :

- si $\theta = 0$: Euler explicite ;
- si $\theta = \frac{1}{2}$: Crank-Nicholson ;
- si $\theta = 1$: Euler implicite.

Le système (1.5) consiste alors à résoudre à chaque pas de temps t_{i+1} l'équation, dite *monolithique*, suivante :

$$\begin{bmatrix} \theta h_{i+1} K & -\theta h_{i+1} N \\ N^T & S + \theta h_{i+1} H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_{i+1} = C_{i+1} \quad (1.6)$$

dans laquelle le second membre est connu :

$$C_{i+1} = \begin{bmatrix} C_U \\ C_p \end{bmatrix}_{i+1} = h_{i+1} \begin{bmatrix} f_d \\ g_d \end{bmatrix}_{i+\theta} + \begin{bmatrix} (\theta - 1) h_{i+1} K & -(\theta - 1) h_{i+1} N \\ N^T & S + (\theta - 1) h_{i+1} H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_i$$

et le schéma initié par :

$$\begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} U_0 \\ p_0 \end{bmatrix}$$

Indépendamment d'une éventuelle condition de stabilité du schéma, [Ver81] a étudié le cas unidimensionnel et analysé les erreurs liées au choix du maillage et du pas de temps. Pour les limiter, [Ver81, Hib96] proposent le critère suivant :

$$\frac{h}{\Delta L^2} \geq \frac{1}{6\theta c} \quad (1.7)$$

où h est le pas de temps supposé constant, ΔL la taille de la maille supposée uniforme, θ le paramètre de la méthode d'intégration et c une constante qui dépend du matériau. Dans notre cas :

$$c = E \frac{K}{\mu_w} \frac{3 - 2\nu}{3(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (1.8)$$

avec E le module d'Young et ν le coefficient de Poisson du matériau. La vérification d'un tel critère suppose l'utilisation d'un maillage fin en espace si l'on veut utiliser une discrétisation très fine en temps.

Pour traiter un problème symétrique • Si on le souhaite, la dérivation du premier groupe d'équations permet éventuellement de mettre le système (1.5) sous la forme symétrique suivante :

$$\begin{bmatrix} K & -N \\ -N^T & -S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{f}_d \\ -g_d \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Comme précédemment, on montre que ce système (1.9) consiste alors à résoudre à chaque pas de temps t_{i+1} l'équation monolithique suivante :

$$\begin{bmatrix} K & -N \\ -N^T & -S - \theta h_{i+1} H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_{i+1} = D_{i+1} \quad (1.10)$$

dans laquelle le second membre est connu :

$$D_{i+1} = \begin{bmatrix} D_U \\ D_p \end{bmatrix}_{i+1} = h_{i+1} \begin{bmatrix} \dot{f}_d \\ -g_d \end{bmatrix}_{i+\theta} + \begin{bmatrix} K & -N \\ -N^T & -S + (1-\theta)h_{i+1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_i$$

Techniques de résolution • Pour résoudre ce type d'équation, deux approches sont classiquement utilisées :

- la résolution couplée (dite *directe* ou *monolithique*) [Blo98, Mic04b] ;
- le découplage (ou *partitionnement*) [Fel80, Fel88, Mor95, Lew98, Far00, Fel01].

Comme rappelé dans [Pip95a], on attend de ces méthodes les qualités suivantes : précision, efficacité et modularité . La précision justifie le fait d'accorder crédit aux résultats de la simulation. L'efficacité doit permettre d'effectuer des calculs précis pour un coût raisonnable. La modularité, quant à elle, est souvent présentée comme le fait de pouvoir réutiliser des codes existants, fonctionnant éventuellement sur des machines différentes.

Dans les sections suivantes, les deux types d'approches, et leurs spécificités respectives, vont être détaillées et appliquées au cas qui nous intéresse.

3 Méthode directe

3.1 Concepts de base

On parle aussi souvent de *méthode monolithique*. Elle consiste à inverser l'équation monolithique (1.10) directement, *i.e.* à traiter le problème dans son intégralité en résolvant simultanément chaque physique [Blo98, Mic04b]. Toutes les grandeurs sont donc synchronisées à chaque instant. [Gos03] propose une amélioration de cette approche directe, fondée sur une méthode de décomposition de domaine hybride, dans laquelle les champs sont traités individuellement de manière primale ou duale, selon la nature de la physique à laquelle ils correspondent.

Avantages • On peut montrer que l'équation (1.10) est cohérente avec l'équation différentielle (1.9), *i.e.* que la solution de (1.10) tend vers celle de (1.9) lorsque la taille des pas de temps tend vers zéro [Fel88, Tur93, Lew98]. Cette méthode bénéficie en outre de la stabilité inconditionnelle du schéma en temps lorsque l'on prend $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$. Le choix du pas de temps n'est alors dicté que par la précision que l'on désire atteindre et la volonté d'éviter les oscillations parasites (1.7).

Inconvénients • L'utilisation de cette technique nécessite la réécriture d'un code spécifique pour chaque nouveau type de problème. Elle ne présente donc aucune modularité telle qu'on la décrivait précédemment.

3.2 Application

Dans le cas qui nous intéresse, à partir de la forme symétrique des équations, la stratégie monolithique consiste à résoudre directement à chaque pas de temps t_{i+1} :

$$\begin{bmatrix} K & -N \\ -N^T & -S - \theta h_{i+1} H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_{i+1} = D_{i+1}$$

Cette technique appelle les remarques suivantes :

Remarque 1 • La matrice qui apparaît dépend du pas de temps h_{i+1} et doit donc être refactorisée à chaque itération, dès lors qu'on utilise des pas de temps variables, et ce, même dans le cas linéaire.

Remarque 2 • Elle peut *a priori* engendrer un coût de calcul important : d'une part, à cause du grand nombre de degrés de liberté (on a à la fois comme inconnues, le

déplacement et la pression) ; d'autre part, à cause de la largeur de bande de la matrice à factoriser qui se trouve grandement augmentée par les termes de couplage N .

Dans tout ce document, la solution obtenue à l'aide de la méthode monolithique servira de solution de référence.

4 Stratégies de partitionnement

4.1 Concepts de base

On cherche cette fois-ci à éviter la résolution directe de l'équation monolithique (1.10). Pour cela, on va traiter les composants séparément, les interactions étant vues comme des chargements imposés, transférés entre les domaines en utilisant des techniques de prédiction, substitution et synchronisation.

On peut se référer à [Fel80, Fel88, Mor95, Lew98, Far00, Fel01] pour une présentation détaillée des stratégies de partitionnement dans le cas de systèmes couplés gouvernés par une équation différentielle matricielle du premier ou du second ordre (cf. **Figure 1.5**). [Fel88] propose une procédure systématique pour éventuellement transformer un système du second ordre en système du premier ordre. Après introduction d'un schéma d'intégration en temps, on est amené à résoudre à chaque pas de temps un système similaire à (1.6). Une méthode de partitionnement repose sur le choix judicieux d'une partition de la matrice d'itération.

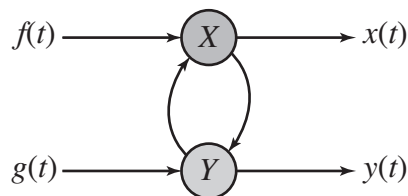


Figure 1.5 • Système couplé

Nous allons présenter ici quelques-unes des partitions qui ont été introduites pour traiter l'équation des milieux poreux (1.6) [Mat96]. Afin de simplifier la présentation, on suppose la discrétisation en temps uniforme : $\forall i, h_{i+1} = h$.

4.1.1 SSP : *Standard Staggered Procedure*

[Fel88] propose comme partition de la matrice d'itération :

$$\begin{bmatrix} \theta hK & -\theta hN \\ N^T & S + \theta hH \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta hK & 0 \\ 0 & S + \theta hH \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\theta hN \\ N^T & 0 \end{bmatrix}$$

ce qui conduit à réécrire (1.6) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \theta hK & 0 \\ 0 & S + \theta hH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & \theta hN \\ -N^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_{i+1} + \begin{bmatrix} C_U \\ C_p \end{bmatrix}_{i+1}$$

dans laquelle la valeur à t_{i+1} des inconnues dans le membre de droite est en fait « prédite » :

$$\begin{bmatrix} \theta hK & 0 \\ 0 & S + \theta hH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & \theta hN \\ -N^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_{i+1}^p + \begin{bmatrix} C_U \\ C_p \end{bmatrix}_{i+1}$$

La prédiction consiste généralement à prendre une combinaison linéaire des solutions obtenues aux pas de temps précédents. On choisit ici :

$$p_{i+1}^p = p_i$$

ce qui permet de calculer U_{i+1} en résolvant la première équation, puis, en prenant :

$$U_{i+1}^p = U_{i+1}$$

de calculer p_{i+1} en résolvant la seconde équation. La procédure complète, dont le déroulement est forcément séquentiel, est détaillée dans l'**Algorithme 1.1**. La notation « \leftarrow » signifie « est obtenu en résolvant ».

1	prédiction	$p_{i+1}^p = p_i$
2	progression	$U_{i+1} \leftarrow -\theta hK U_{i+1} = \theta hN p_{i+1}^p + C_{U,i+1}$
3	substitution	$U_{i+1}^p = U_{i+1}$
4	progression	$p_{i+1} \leftarrow (S + \theta hH) p_{i+1} = -N^T U_{i+1}^p + C_{p,i+1}$

Algorithme 1.1 • Stratégie SSP

La **Figure 1.6** schématise la procédure SSP et les différentes étapes de la résolution. Si on supprime les flèches correspondant aux calculs internes de chaque code, pour ne laisser que celles correspondant aux échanges d'informations, on obtient la **Figure 1.7**, en forme de zig-zag. Comme le rappelle [Fel01], c'est cette interprétation graphique qui motive l'appellation *staggered*.

Avantages • La taille des problèmes à résoudre durant les phases de progression (2) et (4) est très inférieure à celle du problème monolithique. Le critère de stabilité inconditionnelle est le même que dans le cas de la méthode monolithique : $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$.

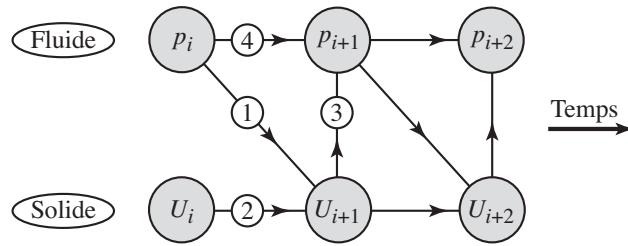


Figure 1.6 • Stratégie SSP

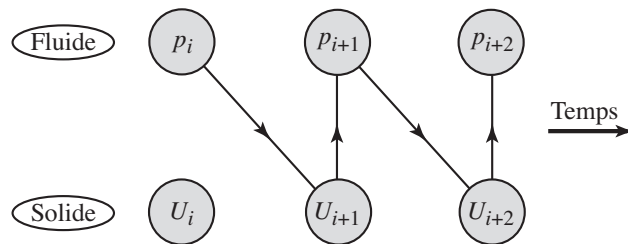


Figure 1.7 • Échanges d'informations

Inconvénients • La procédure n'est pas cohérente, *i.e.* elle ne converge pas vers la même solution que la méthode monolithique même lorsqu'on réduit la taille des pas de temps.

4.1.2 ISSP : *Iterated Standard Staggered Procedure*

[Sae91] propose une modification de la stratégie SSP afin de la rendre cohérente. Il s'agit de sous-itérer K_{i+1} fois jusqu'à atteindre la convergence à chaque pas de temps t_{i+1} . L'équation à résoudre est donc cette fois :

$$\begin{bmatrix} \theta h K & 0 \\ 0 & S + \theta h H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_{i+1}^k = \begin{bmatrix} 0 & \theta h N \\ -N^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_{i+1}^{p,k} + \begin{bmatrix} C_U \\ C_p \end{bmatrix}_{i+1}$$

et on utilise comme prédicteur $p_{i+1}^{p,k} = p_{i+1}^{k-1}$ puis $U_{i+1}^{p,k} = U_{i+1}^k$ après avoir initialisé par la dernière solution obtenue en pression $p_{i+1}^{p,0} = p_i^{K_i}$ puis $U_{i+1}^{p,0} = U_{i+1}^0$. La procédure complète est détaillée dans l'**Algorithme 1.2**.

La **Figure 1.8** schématise la procédure ISSP et les différentes étapes de la résolution.

Avantages • À nouveau, la taille des problèmes à résoudre durant les phases de progression (2), (4) et (5) est très inférieure à celle du problème monolithique.

[Sae91] montre que si la convergence de la procédure itérative est assurée, le critère

1	prédiction	$p_{i+1}^{p,0} = p_i^{K_i}$
2	progression	$U_{i+1}^0 \leftarrow -\theta h K U_{i+1}^0 = \theta h N p_{i+1}^{p,0} + C_{U,i+1}$
3	substitution	$U_{i+1}^{p,0} = U_{i+1}^0$
4	progression	$p_{i+1}^0 \leftarrow -(S + \theta h H) p_{i+1}^0 = -N^T U_{i+1}^{p,0} + C_{p,i+1}$
5	sous-itérations	$p_{i+1}^{p,k} = p_{i+1}^{k-1}$
		$U_{i+1}^k \leftarrow -\theta h K U_{i+1}^k = \theta h N p_{i+1}^{p,k} + C_{U,i+1}$
		$U_{i+1}^{p,k} = U_{i+1}^k$
		$p_{i+1}^k \leftarrow -(S + \theta h H) p_{i+1}^k = -N^T U_{i+1}^{p,k} + C_{p,i+1}$

Algorithme 1.2 • Stratégie SSP

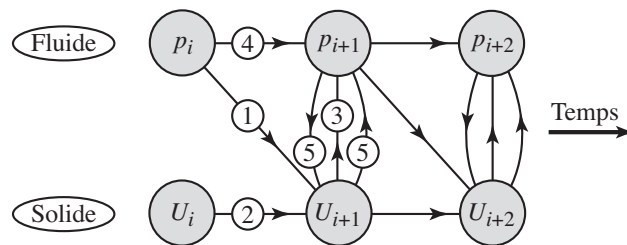


Figure 1.8 • Stratégie ISSP

de stabilité inconditionnelle est le même que dans le cas de la méthode monolithique : $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$. Dans ce cas, la précision de la procédure est la même que celle de la méthode monolithique pour une discrétisation en temps donnée.

Inconvénients • Si le couplage est fort, la convergence de la méthode nécessite beaucoup de sous-itérations K_i au pas de temps t_i , au moins durant les premiers pas de temps, ce qui peut conduire à un coût de calcul important.

[Sae91] montre en outre que, pour certaines valeurs de θ , la convergence de la procédure itérative impose une limite inférieure à la taille des pas de temps. Il devient donc impossible de faire tendre l'erreur de cohérence vers zéro entre (1.6) et (1.5).

4.1.3 ISPP : Iterated Standard Parallel Procedure

[Tur94b] propose une nouvelle modification afin de traiter le problème de manière parallèle. Elle consiste à utiliser une méthode de Jacobi par blocs, *i.e.* à reprendre la stratégie précédente mais en prenant cette fois comme prédicteur :

$$\begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_{i+1}^{p,k} = \begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_{i+1}^{k-1}$$

et l'initialisation :

$$\begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_{i+1}^{p,0} = \begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_i^{K_i}$$

La nouvelle procédure, dont le déroulement peut maintenant être parallèle, est détaillée dans l'**Algorithme 1.3**.

1	prédiction	$p_{i+1}^{p,0} = p_i^{K_i}$ et $U_{i+1}^{p,0} = U_i^{K_i}$
2	progression	$p_{i+1}^0 \leftarrow (S + \theta h H) p_{i+1}^0 = -N^T U_{i+1}^{p,0} + C_{p,i+1}$
	en parallèle	$U_{i+1}^0 \leftarrow \theta h K U_{i+1}^0 = \theta h N p_{i+1}^{p,0} + C_{U,i+1}$
3	sous-itérations	$p_{i+1}^{p,k} = p_{i+1}^{p,k-1}$ et $U_{i+1}^{p,k} = U_{i+1}^{p,k-1}$
	en parallèle	$p_{i+1}^k \leftarrow (S + \theta h H) p_{i+1}^k = -N^T U_{i+1}^{p,k} + C_{p,i+1}$
		$U_{i+1}^k \leftarrow \theta h K U_{i+1}^k = \theta h N p_{i+1}^{p,k} + C_{U,i+1}$

Algorithme 1.3 • Stratégie ISPP

La **Figure 1.9** schématise la procédure ISPP et les différentes étapes de la résolution.

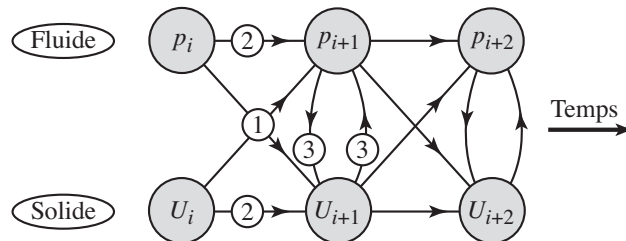


Figure 1.9 • Stratégie ISPP

Avantages • À nouveau, la taille des problèmes à résoudre durant les phases de progression (2) et (3) est très inférieure à celle du problème monolithique. Les résolutions des parties fluides et solides peuvent être menées simultanément, ce qui ouvre la possibilité d'utiliser des ordinateurs à architecture parallèle.

On montre à nouveau que si la méthode converge, le critère de stabilité inconditionnelle est le même que dans le cas de la méthode monolithique : $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$. On montre enfin que la précision de la procédure est la même que celle de la méthode monolithique pour une discrétisation en temps donnée.

Inconvénients • Si le couplage est fort, la convergence de la méthode nécessite beaucoup de sous-itérations K_i au pas de temps t_i , au moins durant les premiers pas de temps, ce qui peut conduire à un coût de calcul important. La restriction sur la taille minimale des pas de temps nécessaire pour que la procédure itérative converge est la même que précédemment.

Remarque • Il est aussi possible de condenser les équations solides et fluides pour les découpler. Il devient alors envisageable d'effectuer les sous-itérations séparément sur chacune des physiques pour n'échanger les informations qu'une seule fois par pas de temps. En revanche, cette condensation nécessite la construction des matrices $(S + \theta hH)^{-1}$ et $(\theta hK)^{-1}$ qui sont pleines et vont donc conduire à des résolutions coûteuses.

4.1.4 UCSP : *Unconditionally Convergent Staggered Procedure*

De nombreux schémas peuvent être stabilisés en utilisant des techniques dédiées [Par83, Zie88] ou en condensant un des types d'inconnues sur les autres [Mat96, Sae92]. [Sae92] propose une technique afin de rendre la stratégie SSP inconditionnellement stable pour toute valeur de θ .

On reprend donc le schéma SSP, mais en introduisant arbitrairement deux matrices A et B :

$$\begin{bmatrix} \theta hK + A & 0 \\ 0 & S + \theta hH + B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} A & \theta hN \\ -N^T & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_{i+1}^p + \begin{bmatrix} C_U \\ C_p \end{bmatrix}_{i+1} \quad (1.11)$$

L'idée est alors de choisir A et B de telle sorte que le schéma soit inconditionnellement stable pour toute valeur de θ .

Si l'on choisit $B = 0$, après condensation de la partie fluide sur la partie solide, le système peut être réécrit :

$$\begin{bmatrix} \theta hK + A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} A - \theta hN(S + \theta hH)^{-1}N^T & 0 \\ -(S + \theta hH)^{-1}N^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_{i+1}^p + \begin{bmatrix} C_U + \theta hN(S + \theta hH)^{-1}C_p \\ C_p \end{bmatrix}_{i+1}$$

La stabilité est liée au rayon spectral de la matrice :

$$J = (\theta hK + A)^{-1}(A - \theta hN(S + \theta hH)^{-1}N^T)$$

qui doit être inférieur à 1. [Sae92] propose de faire en sorte que $J = \lambda \mathbf{I}$ avec $|\lambda| < 1$, en posant :

$$A = (1 - \lambda)^{-1}(\lambda \theta hK + \theta hN(S + \theta hH)^{-1}N^T)$$

λ est alors choisi de façon à améliorer la précision et le taux de convergence.

Avantages • La méthode est inconditionnellement stable quelque soit la valeur de θ , ce qui permet de n'avoir aucune limitation lors du choix du pas de temps h .

Inconvénients • Malheureusement, cette dernière technique souffre d'un coût de calcul important car la condensation augmente la connectivité des opérateurs mis en jeu. Le calcul de A nécessite celui de $N(S + \theta hH)^{-1}N^T$, qui est pleine et conduit donc à une résolution coûteuse.

4.1.5 PUCP : *Parallel Unconditionally Convergent Procedure*

Une version parallèle de la stratégie UCSP peut être construite. Elle consiste à substituer l'une dans l'autre chacune des deux équations de (1.11), puis à choisir A et B de façon à ce que les matrices d'itérations s'écrivent toutes deux λI avec $|\lambda| < 1$.

Comme pour l'UCSP, on est amené à manipuler des matrices pleines, ce conduit à des résolutions coûteuses. En revanche, cette procédure permet de traiter les deux physiques en parallèle sans limitation sur la taille des pas de temps.

4.1.6 Et d'autres méthodes...

De nombreuses autres techniques de partitionnement ont été développées dans la littérature, notamment pour traiter les problèmes d'interaction fluide-structure en aéroélasticité (e.g. [Pip95b, Far00]). La **Figure 1.10** présente deux exemples de stratégies qui ont été proposées dans [Pip95b]. Contrairement aux méthodes détaillées précédemment, elles ont la particularité d'utiliser une prédiction basée sur les valeurs des champs au demi-pas de temps suivant afin d'exploiter la précision des schémas d'intégration aux différences centrées [Pip95b, Geu04].

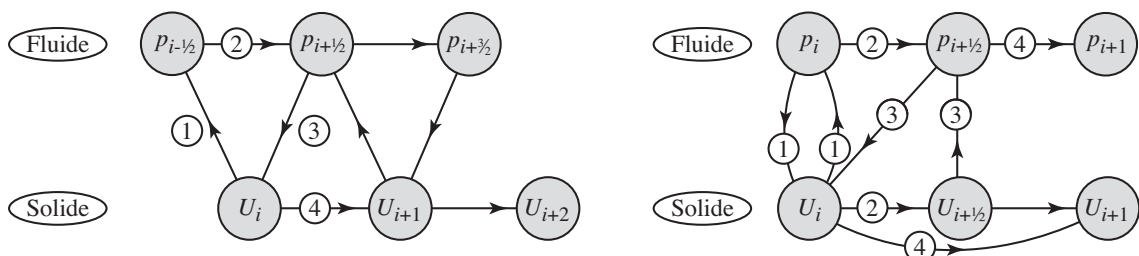


Figure 1.10 • Stratégies dédiées à l'aéroélasticité

4.2 Application

Dans notre cas, on choisit d'utiliser la stratégie ISPP pour résoudre l'équation symétrique (1.10) :

$$\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -S - \theta h_{i+1} H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & N \\ N^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_{i+1} + D_{i+1}$$

En utilisant le prédicteur :

$$\begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_{i+1}^p = \begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_i$$

le problème découplé devient :

$$\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -S - \theta h_{i+1} H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & N \\ N^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_{i+1}^p + D_{i+1}$$

La cohérence du schéma est assurée en sous-itérant à chaque pas de temps. Le problème au pas de temps t_{i+1} et à la sous-itération k est alors réécrit :

$$\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -S - \theta h_{i+1} H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_{i+1}^k = \begin{bmatrix} 0 & N \\ N^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_{i+1}^{p,k} + D_{i+1} \quad (1.12)$$

en utilisant la nouvelle évaluation de la solution comme prédicteur :

$$\begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_{i+1}^{p,k} = \begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_{i+1}^{k-1}$$

et l'initialisation :

$$\begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_{i+1}^{p,0} = \begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_i^{n_{\text{sub}}}$$

où n_{sub} est le nombre de sous-itérations (supposé constant) à chaque pas de temps. Dans le problème qui nous intéresse, le couplage est fort, ce qui se traduit par une convergence lente des sous-itérations. Pour améliorer ce taux de convergence, on utilise une méthode de relaxation, transformant la méthode de Jacobi par blocs en une technique SOR (*Successive Over Relaxation*) [Bar94, Saa00]. Le système (1.12) est alors transformé en :

$$\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -S - \theta h_{i+1} H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_{i+1}^k = \begin{bmatrix} (1-\omega)K & \omega N \\ \omega N^T & (1-\omega)(-S - \theta h_{i+1} H) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ p \end{bmatrix}_{i+1}^{p,k} + \omega D_{i+1}$$

Les paramètres de la méthode ISPP sont donc le nombre de sous-itérations n_{sub} et le paramètre de relaxation ω .

5 Discussion

[Fel04] rappelle les caractéristiques qui semblent être en faveur des méthodes de partitionnement :

- l'utilisation des techniques de discrétisation différentes et des algorithmes de résolution qui ont déjà fait leurs preuves pour chacun des systèmes ;
- l'utilisation de discrétisations ou de maillages qui ne sont pas forcément coïncidents ;
- la réutilisation de codes de calcul qui sont déjà disponibles ;
- la modularité, c'est-à-dire la possibilité de prendre facilement en compte un nouvel aspect dans la modélisation de l'un des composants sans avoir à reformuler toute la procédure.

[Blo98, Mic04b] regrettent cependant que, dans les stratégies *staggered*, un décalage en temps entre les deux physiques existe toujours, et que les propriétés de conservation d'énergie soient souvent perdues. Ce décalage peut néanmoins être négligé lorsque le pas de temps est petit.

Pour ce qui est du coût du calcul, un critère qui peut sembler en faveur des techniques de partitionnement du fait de la taille réduite des opérateurs considérés, il est difficile de conclure. De nombreuses publications ont proposé un bilan sur cette question, mais la réponse dépend fortement du problème traité (*e.g.* [Lew91, Blo98, Kuh01, Pip01, Fel01, Fel04]). [Mic04b] étudie notamment un exemple dans lequel, pour un nombre de pas de temps fixé, le coût de calcul des stratégies de partitionnement est effectivement moindre, mais ne permet d'atteindre qu'une précision inférieure à celle de la méthode monolithique. Il constate qu'en terme de ratio entre précision et coût de calcul, les deux familles de méthodes présentent des performances similaires et qu'il est donc difficile de trancher sur la supériorité de l'une sur l'autre. Les techniques de partitionnement permettent cependant de traiter des problèmes hors de portée de la méthode monolithique [Geu04].

La méthode LATIN pour le multiphysique

DANS CE CHAPITRE, on propose une stratégie alternative pour la simulation des problèmes multiphysiques, dont le point de départ est l'introduction du concept d'interface entre physiques. On rappelle les principes de la méthode LATIN, qui sert de « moteur » à cette stratégie, et on montre comment elle peut être adaptée au cas qui nous intéresse. On explique ensuite comment le concept d'interface entre physiques permet de prendre en compte de manière naturelle les aspects multiéchelles. On conclut par de premiers résultats et comparaisons avec une méthode classique de partitionnement.

1 Concept d'interface entre physiques

En calcul de structures, la simulation de la réponse de structures complexes conduit à des problèmes de grande taille. Le parallélisme est, depuis longtemps maintenant, un des outils majeurs utilisés pour la résolution de ces modèles. Les plus puissants calculateurs actuels sont d'ailleurs très souvent à architecture parallèle et les algorithmes de résolution ont dû être adaptés à ce type d'ordinateurs [Dur00]. Parmi ces algorithmes, des formulations « mécaniques » ont été proposées, comme les méthodes de décomposition de domaine.

Ce type de stratégies consiste à décomposer la structure étudiée en sous-domaines et à utiliser une méthode itérative durant laquelle les résolutions globales n'ont lieu que sur les sous-domaines (cf. **Figure 2.1**). Le nouveau problème est alors de taille considérablement réduite. Une méthode de décomposition de domaine mixte, fondée sur la méthode LATIN qui sera détaillée dans la section suivante, a été proposée au LMT-Cachan, d'abord dans le cadre des structures faiblement hétérogènes [Dur98a, Lad99b], puis dans celui des structures fortement hétérogènes [Lad00, Lad01b], éven-

tuellement avec contacts [Lad02b] et, plus récemment, avec une technique d'homogénéisation à la fois en temps et en espace [Lad02a, Lad03]. Dans cette méthode, les interfaces entre sous-domaines constituent une entité mécanique à part entière pour laquelle les efforts et les déplacements sont traités de manière identique. La stratégie proposée consiste à vérifier alternativement des propriétés sur les sous-structures, supposées indépendantes, et des propriétés d'interfaces, qui permettent de transmettre les couplages entre les sous-domaines.

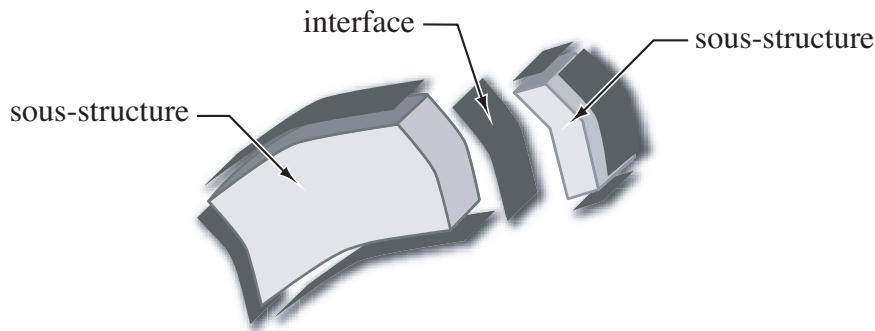


Figure 2.1 • Interface entre sous-structures

Dans le cas des problèmes multiphysiques, l'idée est similaire. Elle consiste à traiter chaque physique séparément, en résolvant toutes les équations indépendantes, puis à recouvrer les couplages en vérifiant les équations restantes. Si l'on dote une entité de propriétés correspondant à ces équations de couplage, celle-ci peut être vue comme une interface entre les physiques. La notion d'*interface matérielle entre sous-structures* a alors été étendue à celle d'*interface entre physiques*. Il est important de noter que, contrairement au cas de la décomposition de domaine, cette interface n'a pas forcément de réalité « matérielle ». Dans le cas de l'aéroélasticité, elle peut être vue comme la « peau » de la structure en contact avec le fluide qui l'entoure. Dans le cas des milieux poreux que l'on traite du point de vue macroscopique, le couplage a lieu en tout point du domaine et l'interface a un sens plus abstrait (cf. **Figure 2.2**).

2 Principes de la méthode LATIN

Initialement, la méthode LATIN a été proposée par P. Ladevèze pour traiter les problèmes non linéaires d'évolution [Lad85]. LATIN est l'acronyme de *L*Arge *T*ime *I*Ncrement *M*ethod ou méthode à grand incrément de temps. C'est ce caractère non incrémental qui la distingue de la plupart des démarches classiques, qui construisent une solution pas de temps par pas de temps. Dans son cas, partant d'une approximation (parfois grossière) en tout point de la structure et sur tout l'intervalle de temps, une succession d'itérations améliore automatiquement la connaissance de la solution. À

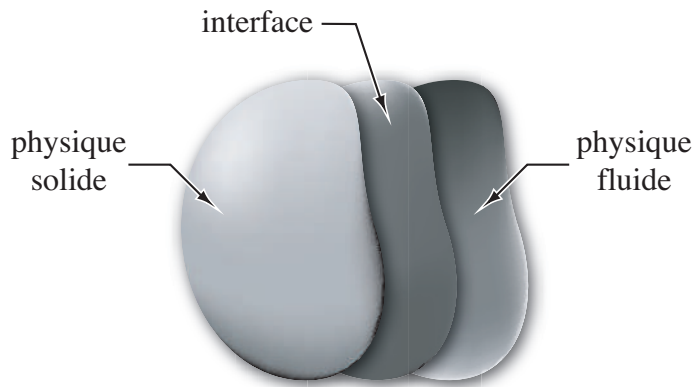


Figure 2.2 • Interface entre physiques

chacune de ces itérations, on dispose donc d'une solution approchée en tout point de la structure et sur tout l'intervalle de temps.

Une présentation détaillée de la stratégie LATIN peut être trouvée dans [Lad99a]. Brièvement, elle est fondée sur trois principes, qui seront développés dans les sections suivantes :

- **P1** la séparation des difficultés ;
- **P2** une résolution itérative en deux étapes ;
- **P3** une représentation mécanique adaptée des inconnues.

De nombreuses applications ont été proposées au cours des vingt dernières années, notamment dans le domaine des problèmes non linéaires et des méthodes multi-échelles de décomposition de domaine. On peut cependant citer quelques contributions récentes. Tout d'abord des travaux concernant la simulation des problèmes de dynamique avec contact ou chocs [Bou00, Lem02]. Puis, la proposition d'une méthode de décomposition de domaine mixte [Lad92, Cog96, Cha97] et multi-échelle [Dur98b] qui a servi de base à une technique d'homogénéisation pour les structures fortement hétérogènes [Lad01b]. Enfin, une nouvelle stratégie de calcul multi-échelle incluant une procédure d'homogénéisation automatique à la fois en temps et en espace pour traiter les problèmes non linéaires d'évolution [Lad02a, Lad03].

2.1 Séparations des difficultés

Le principe **P1** de la méthode préconise la séparation des difficultés. Le choix de ce partitionnement n'est pas trivial et est dicté par la volonté de séparer les équations découplées et les équations couplées (qui serviront à définir l'interface entre physiques).

Pour cela, la technique consiste à séparer les équations en deux groupes, ce qui permet en outre d'éviter d'avoir à traiter simultanément un problème global et un problème couplé.

On introduit \mathbf{A}_d , l'ensemble des solutions des équations linéaires et découplées, éventuellement globales (ici les conditions d'amissibilité (1.1) et (1.2)) :

$$\mathbf{A}_d = \left\{ \mathbf{s} \mid \mathbf{s} \text{ vérifie (1.1) et (1.2)} \right\}$$

et Γ , l'ensemble des solutions des équations locales, éventuellement couplées (ici les relations de comportement (1.3) et les conditions initiales (1.4)) :

$$\Gamma = \left\{ \hat{\mathbf{s}} \mid \hat{\mathbf{s}} \text{ vérifie (1.3) et (1.4)} \right\}$$

La solution \mathbf{s}_{ex} du problème de référence est donc :

$$\mathbf{s}_{ex} = \mathbf{A}_d \cap \Gamma$$

2.2 Résolution itérative en deux étapes

Le principe **P2** de la méthode LATIN propose de construire la solution \mathbf{s}_{ex} à l'aide d'un schéma itératif à deux étapes. La **Figure 2.3** détaille une itération $n + 1$ typique.

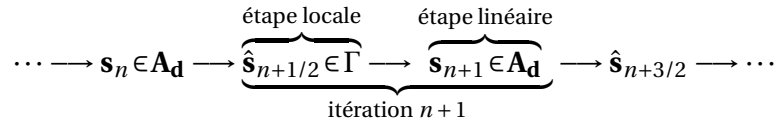


Figure 2.3 • Une itération de la méthode LATIN

Si l'on suppose que l'itération n a généré un élément \mathbf{s}_n de \mathbf{A}_d , l'*étape locale* consiste à chercher un élément $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2}$ de Γ en utilisant une première direction de recherche E^+ . Ce nouvel élément étant connu, l'*étape linéaire* consiste à chercher un élément \mathbf{s}_{n+1} de \mathbf{A}_d en utilisant une seconde direction de recherche E^- , conjuguée de la précédente. La **Figure 2.4** donne une représentation de principe de la stratégie dans l'espace $\mathbf{S}^{[0,T]}$ et les sous-sections suivantes détaillent chacune de ces étapes.

2.2.1 Étape locale à l'itération $n + 1$

On suppose que l'étape précédente a produit une solution \mathbf{s}_n de \mathbf{A}_d et on se donne un espace linéaire E^+ appelé *direction de recherche à l'étape locale* :

$$E^+ = \left\{ \Delta \mathbf{s} \mid \Delta \sigma + \mathbf{L} \Delta \hat{\epsilon} = 0, \Delta q + r \Delta p = 0, \Delta \underline{W} + \mathbf{M} \Delta \underline{Z} = 0 \right\}$$

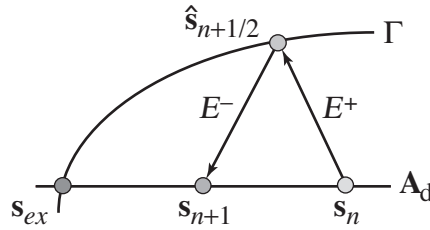


Figure 2.4 • Représentation de principe de la méthode

où les opérateurs \mathbf{L} , r et \mathbf{M} , qui sont les paramètres de la méthode, seront précisés ultérieurement.

Le problème est maintenant de trouver $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2}$ dans Γ tout en imposant que $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2} - \mathbf{s}_n$ appartienne à E^+ , *i.e.* :

$$\begin{aligned} (\hat{\sigma}_{n+1/2} - \sigma_n) + \mathbf{L}(\hat{\varepsilon}_{n+1/2} - \varepsilon_n) &= 0 \\ (\hat{q}_{n+1/2} - q_n) + r(\hat{p}_{n+1/2} - p_n) &= 0 \\ (\hat{W}_{n+1/2} - W_n) + \mathbf{M}(\hat{Z}_{n+1/2} - Z_n) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

En utilisant les relations de comportement (1.3), l'étape locale consiste alors à résoudre en chaque point d'espace le système différentiel en temps suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\hat{\varepsilon}_{n+1/2} + \mathbf{D}\hat{\varepsilon}_{n+1/2} - b\hat{p}_{n+1/2}\mathbf{I} &= \mathbf{A}_n \\ \frac{1}{Q}\hat{p}_{n+1/2} + r\hat{p}_{n+1/2} + b\text{Tr}\hat{\varepsilon}_{n+1/2} &= \alpha_n \\ (\mathbf{M} + \mathbf{H})\hat{Z}_{n+1/2} &= \underline{\beta}_n \end{aligned} \quad (2.2)$$

dans lequel les seconds membres :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_n &= \sigma_n + \mathbf{L}\varepsilon_n \\ \alpha_n &= q_n + rp_n \\ \underline{\beta}_n &= W_n + \mathbf{M}Z_n \end{aligned} \quad (2.3)$$

sont des quantités connues à cette étape. Les conditions initiales en pression et en déformations sont $p(t=0) = p_0$ et $\hat{\varepsilon}(t=0) = \varepsilon(\underline{U}_0)$. Notons que l'équation qui permet de calculer $\hat{Z}_{n+1/2}$ ne posera pas de problème particulier lors de la résolution puisqu'elle est indépendante des deux autres et ne couple pas les quantités solides et fluides. Les quantités duales $\hat{\sigma}_{n+1/2}$, $\hat{q}_{n+1/2}$ et $\hat{W}_{n+1/2}$ sont ensuite calculés en utilisant la direction de recherche (2.1).

2.2.2 Étape linéaire à l'itération $n + 1$

Une fois $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2}$ de Γ déterminée, on se donne un espace linéaire E^- appelé *direction de recherche à l'étape linéaire* :

$$E^- = \left\{ \Delta \mathbf{s} \mid \Delta \sigma - \mathbf{L} \Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0, \Delta q - r \Delta p = 0, \Delta \underline{W} - \mathbf{M} \Delta \underline{Z} = 0 \right\}$$

conjuguée de la précédente. Ce choix permet de ne pas recoupler le problème solide et le problème fluide à cette étape.

Le problème est maintenant de trouver $\hat{\mathbf{s}}_{n+1}$ dans \mathbf{A}_d tout en imposant que $\mathbf{s}_{n+1} - \hat{\mathbf{s}}_{n+1/2}$ appartienne à E^- , *i.e.* :

$$\begin{aligned} (\sigma_{n+1} - \hat{\sigma}_{n+1/2}) - \mathbf{L}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1/2}) &= 0 \\ (q_{n+1} - \hat{q}_{n+1/2}) - r(p_{n+1} - \hat{p}_{n+1/2}) &= 0 \\ (\underline{W}_{n+1} - \hat{\underline{W}}_{n+1/2}) - \mathbf{M}(\underline{Z}_{n+1} - \hat{\underline{Z}}_{n+1/2}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Si l'on écrit les équations d'admissibilité (1.1) et (1.2) sous forme variationnelle, l'étape linéaire se décompose en deux problèmes. Le *problème solide* consiste à trouver $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\dot{U}}_{n+1})$ avec $\underline{U}_{n+1} \in \mathcal{U}^{[0,T]}$ vérifiant à chaque instant t de $[0, T]$:

$$\forall \underline{U}^* \in \mathcal{U}_0, \quad \int_{\Omega} \text{Tr}[\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\dot{U}}_{n+1}) \mathbf{L} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{U}^*)] d\Omega = \int_{\Omega} \text{Tr}[\hat{\mathbf{A}}_{n+1/2} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{U}^*)] d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \underline{E}_d \cdot \underline{U}^* dS \quad (2.5)$$

et le *problème fluide* à trouver p_{n+1} dans $\mathcal{P}^{[0,T]}$ vérifiant à chaque instant t de $[0, T]$:

$$\begin{aligned} \forall p^* \in \mathcal{P}_0, \quad \int_{\Omega} \underline{\text{grad}} p_{n+1} \cdot \mathbf{M} \underline{\text{grad}} p^* d\Omega + \int_{\Omega} p_{n+1} r p^* d\Omega \\ = \int_{\Omega} \hat{\alpha}_{n+1/2} p^* d\Omega + \int_{\Omega} \hat{\underline{\beta}}_{n+1/2} \cdot \underline{\text{grad}} p^* d\Omega + \int_{\partial_4 \Omega} w_d p^* dS \end{aligned} \quad (2.6)$$

dans lesquelles les seconds membres :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}_{n+1/2} &= -\hat{\sigma}_{n+1/2} + \mathbf{L} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1/2} \\ \hat{\alpha}_{n+1/2} &= -\hat{q}_n + r \hat{p}_n \\ \hat{\underline{\beta}}_{n+1/2} &= -\hat{\underline{W}}_{n+1/2} + \mathbf{M} \hat{\underline{Z}}_{n+1/2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

sont des quantités connues à cette étape.

Les équations (2.5) et (2.6) forment deux problèmes globaux découplés qu'il faut résoudre à chaque pas de temps. Après discrétisation en espace, les problèmes peuvent s'écrire :

$$LV = B_{\sigma}^T \hat{A} + f_d \quad (2.8)$$

$$[M + R]p = B_q^T \hat{\alpha} + B_w^T \hat{\beta} + g_d \quad (2.9)$$

où f_d représente les forces généralisées associées à \underline{F}_d , g_d les flux généralisés associés à w_d et, afin de ne pas alourdir les notations et en l'absence d'ambiguïté, les champs discrétisés associés à \underline{U}_{n+1} , $\hat{\mathbf{A}}_{n+1/2}$, p_{n+1} , $\hat{\alpha}_{n+1/2}$ et $\hat{\beta}_{n+1/2}$ sont simplement notés V , \hat{A} , p , $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$. Les opérateurs L , B_σ , $[M + R]$, B_q , B_w (ainsi que deux autres, B_ε et B_z , qui seront utilisés par la suite) sont définis par :

$$\begin{aligned}
\forall \underline{V}, \quad \varepsilon &= B_\varepsilon V \\
\forall (\underline{V}^*, \underline{V}), \quad \int_{\Omega} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{V}^*) \mathbf{L} \varepsilon(\underline{V})] d\Omega &= V^{*T} L V \\
\forall (\underline{V}^*, \sigma), \quad \int_{\Omega} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{V}^*) \sigma] d\Omega &= V^{*T} B_\sigma^T \sigma \\
\forall p, \quad Z &= B_z p \\
\forall (p^*, p), \quad \int_{\Omega} (\underline{\text{grad}} p^* \cdot \mathbf{M} \underline{\text{grad}} p + p^* r p) d\Omega &= p^{*T} [M + R] p \\
\forall (p^*, q), \quad \int_{\Omega} p^* q d\Omega &= p^{*T} B_q^T q \\
\forall (p^*, W), \quad \int_{\Omega} \underline{\text{grad}} p^* \cdot \underline{W} d\Omega &= p^{*T} B_w^T W
\end{aligned} \tag{2.10}$$

dans lesquels V , ε , σ , p , Z , q et W désignent les champs discrétisés associés à \underline{V} , $\varepsilon(\underline{V})$, σ , p , $\underline{\text{grad}} p$, q et \underline{W} .

2.2.3 Initialisation

Nous verrons dans la suite qu'une manière simple pour déterminer une solution initiale \mathbf{s}_0 de \mathbf{A}_d consiste à résoudre une étape linéaire après avoir posé $\hat{\mathbf{A}}_{-1/2} = 0$, $\hat{\alpha}_{-1/2} = 0$ et $\hat{\beta}_{-1/2} = 0$.

2.3 Représentation des inconnues

Le principe **P3** de la méthode préconise l'utilisation d'une représentation mécanique *ad hoc* des inconnues. Cette technique est un point clé pour gagner en performances [Lad99a]. Elle consiste à nouveau à tirer parti du caractère non incrémental de la stratégie en proposant pour chaque approximation de la solution qui est générée, une représentation adaptée à la qualité qu'on peut attendre. Il s'agit là d'une technique adaptative, puisqu'au fur et à mesure des itérations, la solution peut être représentée de plus en plus finement.

Une approximation qui s'est avérée pertinente pour les problèmes d'évolution quasi-statique est la superposition de chargements radiaux. On choisit de représenter une

quantité admissible $\mathbf{s}(\underline{M}, t)$ de \mathbf{A}_d sous la forme :

$$\mathbf{s}(\underline{M}, t) = s_0(t)S_0(\underline{M}) + \sum_i s_i(t)S_i(\underline{M})$$

où S_0 est un champ admissible particulier et les S_i des champs admissibles à zéro ; les s_0 et s_i sont des fonctions scalaires du temps. Le nombre de couples (s_i, S_i) peut être augmenté au cours des itérations si cela est nécessaire pour améliorer la précision de la solution : typiquement, un couple peut être ajouté à chaque étape linéaire et donc chaque itération.

Dans le chapitre suivant, on décrira en détail comment une telle approximation transforme l'étape linéaire. Principalement, on verra qu'elle permet de remplacer la résolution d'un système global à résoudre à chaque pas de temps (pour calculer $\mathbf{s}(\underline{M}, t)$) en celle d'un faible nombre de systèmes globaux, indépendants du temps (pour calculer $S_i(\underline{M})$). Cette technique permet donc un gain substantiel en terme de coût de calcul.

On note $\mathbf{R}^{[0,T]}$, l'ensemble des champs qui peuvent s'écrire comme la superposition de chargements radiaux :

$$\mathbf{R}^{[0,T]} = \left\{ \mathbf{s} \mid \exists n \in \mathbb{N}, \exists \{(s_i, S_i)\}_{i \in \{0, \dots, n\}}, \mathbf{s}(\underline{M}, t) = s_0(t)S_0(\underline{M}) + \sum_{i=1}^n s_i(t)S_i(\underline{M}) \right\}$$

Lors d'une étape linéaire, on cherche un élément \mathbf{s} appartenant à \mathbf{A}_d et à la direction de recherche E^- . si l'on ajoute comme contrainte supplémentaire qu'il puisse s'écrire sous forme représentée, *i.e.* $\mathbf{s} \in \mathbf{R}^{[0,T]}$, le problème devient surcontraint. Il faut alors choisir entre :

- vérifier exactement la direction de recherche et seulement « au mieux » l'admissibilité (cf. **Figure 2.5(a)**) ;
- vérifier exactement l'admissibilité et seulement « au mieux » la direction de recherche (cf. **Figure 2.5(b)**).

Cette notion de vérification « au mieux » (ou vérification faible en un certain sens) sera précisée ultérieurement.

Enfin, une étape dite *préliminaire* peut également être mise en place. Elle consiste, à partir d'une solution \mathbf{s}_n de \mathbf{A}_d exprimée sous forme représentée, à calculer à moindre frais une « meilleure » solution $\bar{\mathbf{s}}_{n+1}$, en ne modifiant que les fonctions du temps. La phase la plus coûteuse, celle de génération de nouvelles fonctions de l'espace est alors évitée. Cette étape préliminaire prend place après l'étape locale et la **Figure 2.6** donne une représentation de principe de la méthode.

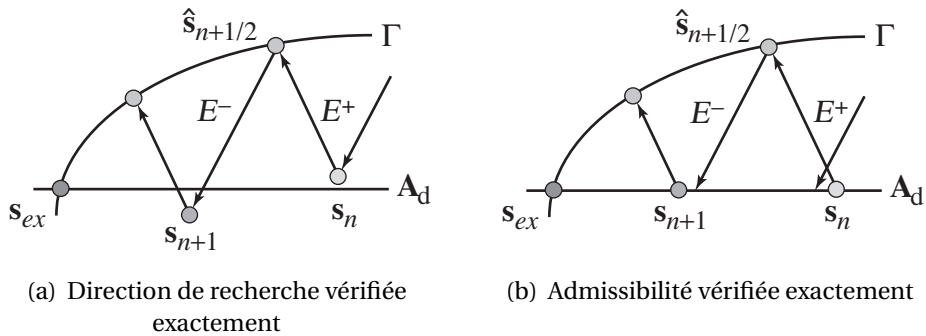


Figure 2.5 • Méthode LATIN avec représentation

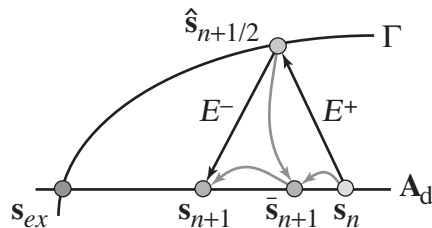


Figure 2.6 • Représentation de principe de la méthode avec étape préliminaire

Un critère fondé sur l'efficacité de l'étape préliminaire permet de décider si elle doit ou non être suivie d'une étape linéaire classique (avec génération de nouvelles fonctions d'espace). La Figure 2.7 détaille une nouvelle itération $n + 1$ typique de la méthode. Ce critère sera détaillé dans la section suivante.

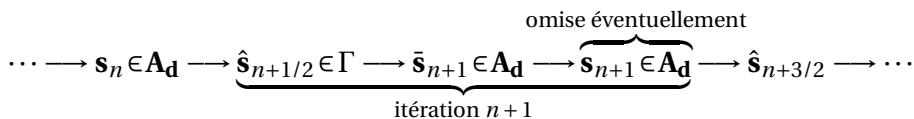


Figure 2.7 • Une itération de la méthode LATIN avec étape préliminaire

Remarque • Notons que la technique d'approximation radiale n'a été utilisée que pour les champs de \mathbf{A}_d , ce qui se traduit par une modification de l'étape linéaire uniquement. On pourrait tout à fait imaginer étendre cette technique à l'ensemble des champs manipulés dans le problème. On serait alors certainement amené à développer un cadre mathématique spécifique sur l'ensemble des couples (fonction du temps, fonction de l'espace).

La méthode complète de résolution est décrite dans l'Algorithme 2.1. Les étapes marquées d'un **///** sont parallélisables.

//	Initialisation solide	résolution d'un problème global solide
//	Initialisation fluide	résolution d'un problème global fluide
	<i>Boucle sur les itérations</i>	
	Étape locale	résolution de systèmes différentiels locaux
	Étape préliminaire solide	mise à jour des fonctions du temps
	<i>Si nouveau couple requis</i>	
//	Étape linéaire solide	point fixe sur un problème global solide pour calculer un nouveau couple
	<i>Fin si</i>	
	Étape préliminaire fluide	mise à jour des fonctions du temps
	<i>Si nouveau couple requis</i>	
//	Étape linéaire fluide	point fixe sur un problème global fluide pour calculer un nouveau couple
	<i>Fin si</i>	
	<i>Critère d'arrêt</i>	calcul des indicateurs d'erreur
	<i>Fin des itérations</i>	

Algorithme 2.1 • Méthode LATIN pour le multiphysique

2.4 Convergence de la méthode

2.4.1 Choix des directions de recherche

Dans le cas de figure où l'on n'utilise pas de représentation et où les directions de recherche sont constantes, une démonstration de la convergence de la méthode peut être établie en suivant la démarche présentée dans [Lad99a]. Elle se base sur des propriétés de stabilité vérifiées par le matériau. Pour cela, on définit la forme bilinéaire « travail » $\langle \cdot, \cdot \rangle : (\mathbf{S}^{[0,T]})^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivante :

$$\forall (\mathbf{s}, \mathbf{s}') \in (\mathbf{S}^{[0,T]})^2,$$

$$\langle \mathbf{s}, \mathbf{s}' \rangle = \int_{[0,T]} \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_{\Omega} (\text{Tr}[\underline{\sigma}' \dot{\underline{\epsilon}}] + \text{Tr}[\underline{\sigma}' \dot{\underline{\epsilon}}] + q p' + q' p + \underline{W} \cdot \underline{Z}' + \underline{W}' \cdot \underline{Z}) d\Omega dt$$

qui fait intervenir les membres des couples de grandeurs duales $(\dot{\underline{\epsilon}}, \underline{\sigma})$, (p, q) et $(\underline{Z}, \underline{W})$. En remarquant les propriétés :

$$\forall (\mathbf{s}, \mathbf{s}', \mathbf{s}'') \in (\mathbf{A}_d)^3, \langle \mathbf{s} - \mathbf{s}', \mathbf{s} - \mathbf{s}'' \rangle = 0$$

et

$$\forall (\mathbf{s}, \mathbf{s}') \in (\Gamma)^2, \langle \mathbf{s} - \mathbf{s}', \mathbf{s} - \mathbf{s}' \rangle \geq 0$$

on peut montrer que des directions de recherches de la forme (2.1) et (2.4) permettent d'assurer la convergence, à condition que les opérateurs \mathbf{L} , r et \mathbf{M} soient définis positifs.

Après analyse dimensionnelle, on voit qu'on peut les choisir de la forme :

$$\mathbf{L} = t_m \mathbf{D}, \quad r = \frac{1}{t_h Q} \quad \text{et} \quad \mathbf{M} = \mathbf{H} \quad (2.11)$$

où t_m et t_h sont deux temps caractéristiques. Ces deux temps sont des paramètres de la méthode : ils ne modifient pas la solution à convergence mais leurs valeurs influent sur le taux de convergence de l'algorithme.

Dans le cadre de la méthode multiéchelle avec homogénéisation développée dans [Lad02a, Lad03], de récents travaux ont été menés sur l'interprétation et l'optimisation de ces directions de recherche lorsqu'on se restreint au cas de l'élastostaticité linéaire [Vio03].

On construit maintenant, à partir de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, une norme sur les quantités solides, définie sur $\mathbf{S}^{[0,T]}$:

$$\phi_S^2(\mathbf{s}) = \int_{[0,T]} \|\varepsilon\|_{\mathbf{D}}^2 dt \quad \text{avec} \quad \|\varepsilon\|_{\mathbf{D}}^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr}[\varepsilon \mathbf{D} \varepsilon] d\Omega$$

une norme sur les quantités fluides :

$$\phi_F^2(\mathbf{s}) = \int_{[0,T]} \|p\|_{Q^{-1}}^2 dt \quad \text{avec} \quad \|p\|_{Q^{-1}}^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} p Q^{-1} p d\Omega$$

une norme sur l'ensemble des deux physiques :

$$\phi^2(\mathbf{s}) = \phi_S^2(\mathbf{s}) + \phi_F^2(\mathbf{s})$$

ainsi que les grandeurs adimensionnées sur $(\mathbf{S}^{[0,T]})^2$:

$$\Phi_S(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = \frac{\phi_S(\mathbf{s} - \mathbf{s}')}{\phi_S\left(\frac{1}{2}(\mathbf{s} + \mathbf{s}')\right)} \quad \text{et} \quad \Phi_F(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = \frac{\phi_F(\mathbf{s} - \mathbf{s}')}{\phi_F\left(\frac{1}{2}(\mathbf{s} + \mathbf{s}')\right)}$$

Ces grandeurs vont être utilisées pour définir un certain nombre d'indicateurs d'erreur et de critères pour la méthode.

2.4.2 Erreur vis-à-vis d'une référence

Supposons que l'on dispose d'une solution de référence \mathbf{s}_{ex} et que l'on veuille mesurer l'erreur entre \mathbf{s}_{ex} et un élément quelconque \mathbf{s} de $\mathbf{S}^{[0,T]}$. On introduit une mesure de l'erreur sur les quantités solides : $E_S = \Phi_S(\mathbf{s}, \mathbf{s}_{ex})$ et une mesure sur les quantités

fluides : $E_F = \Phi_F(\mathbf{s}, \mathbf{s}_{ex})$. On introduit de la même façon la contribution à l'erreur totale de la partie solide :

$$\eta_S^2 = \frac{\phi_S^2(\mathbf{s} - \mathbf{s}_{ex})}{\phi^2(\mathbf{s}_{ex})}$$

et de la partie fluide :

$$\eta_F^2 = \frac{\phi_F^2(\mathbf{s} - \mathbf{s}_{ex})}{\phi^2(\mathbf{s}_{ex})}$$

de telle sorte qu'une mesure de l'erreur totale soit :

$$\eta = \sqrt{\eta_S^2 + \eta_F^2} = \frac{\phi(\mathbf{s} - \mathbf{s}_{ex})}{\phi(\mathbf{s}_{ex})}$$

Dans les exemples numériques qui suivront, si l'on dispose d'une solution de référence \mathbf{s}_{ex} , on étudiera notamment l'évolution de l'erreur entre \mathbf{s}_{n+1} de \mathbf{A}_d et \mathbf{s}_{ex} .

2.4.3 Indicateur d'erreur pour arrêter les itérations

La qualité de la solution générée par la LATIN s'améliore au cours des itérations. Il est donc nécessaire de se poser la question de l'arrêt des itérations. On utilise le caractère non incrémental pour construire un indicateur d'erreur qui prenne en compte la solution sur tout le domaine et tout l'intervalle de temps étudié.

Parmi les différents indicateurs possibles pour stopper l'algorithme après l'itération $n + 1$, on choisit d'introduire $e_{S,n+1} = \Phi_S(\mathbf{s}_{n+1}, \hat{\mathbf{s}}_{n+1/2})$ sur les quantités solides et $e_{F,n+1} = \Phi_F(\mathbf{s}_{n+1}, \hat{\mathbf{s}}_{n+1/2})$ sur les quantités fluides. On introduit de la même façon un indicateur total :

$$e_{n+1} = \frac{\phi(\mathbf{s}_{n+1} - \hat{\mathbf{s}}_{n+1/2})}{\phi\left(\frac{1}{2}(\mathbf{s}_{n+1} + \hat{\mathbf{s}}_{n+1/2})\right)}$$

Ces indicateurs peuvent être vus comme une mesure de distance entre deux solutions successives générées par la méthode (cf. **Figure 2.8**).

2.4.4 Critère de saut d'étape linéaire

Rappelons que si l'étape préliminaire $n + 1$ a permis de réduire de manière significative l'erreur vis-à-vis d'une itération précédente, on peut considérer qu'il n'est pas nécessaire de générer une nouvelle fonction de l'espace. On introduit les indicateurs

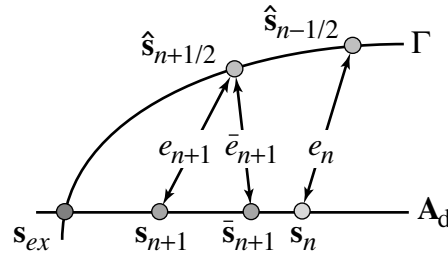


Figure 2.8 • Indicateurs à l'itération $n + 1$

$\bar{e}_{S,n+1} = \Phi_S(\bar{s}_{n+1}, \hat{s}_{n+1/2})$ pour la partie solide et $\bar{e}_{F,n+1} = \Phi_F(\bar{s}_{n+1}, \hat{s}_{n+1/2})$ pour la partie fluide (cf. **Figure 2.8**).

Les étapes linéaires $n + 1$ solide, resp. fluide, seront omises lorsque :

$$\frac{\bar{e}_{S,n+1}}{e_{S,n}} < \zeta \quad \text{resp.} \quad \frac{\bar{e}_{F,n+1}}{e_{F,n}} < \zeta$$

où le seuil ζ sera choisi par la suite.

3 Aspects multiéchelles

Une des caractéristiques majeures des problèmes multiphysiques concerne les aspects multiéchelles et la nécessité de pouvoir utiliser des discrétisations différentes pour chacune des physiques. Dans ce type de problèmes, des échelles de temps et d'espace très différentes peuvent être amenées à « cohabiter » [Pip95b, Far98, Fel01] et il est primordial de maîtriser l'utilisation de discrétisations différentes en temps car :

- elle permet de réduire le coût de la simulation en évitant des calculs inutiles sur les champs pour lesquels une discrétisation plus grossière est suffisante ;
- elle évite les transferts d'informations trop fréquents entre les codes [Pip95b] ;

et en espace car elle est nécessaire :

- lorsque les codes utilisent des méthodes d'adaptation pour générer automatiquement des maillages *ad hoc*, qui ne sont pas forcément compatibles ;
- lorsque les schémas utilisés ne sont pas identiques (*e.g.* dans un problème d'aéroélasticité, éléments finis pour la partie structure et différences finies pour la partie fluide [Far98, Bec00, Mat03]).

Dans les méthodes de partitionnement, l'aspect multiéchelle en temps est le plus souvent traité en sous-itérant sur la physique qui nécessite la discrétisation la plus fine. Des techniques adaptées de prédiction des autres champs permettent alors de conserver la stabilité inconditionnelle des schémas [Pip95b, Fel01]. Pour l'utilisation de discrétisations spatiales différentes, que ce soit dans une méthode monolithique ou de partitionnement, un certain nombre de techniques ont été proposées dans le cadre de la résolution des problèmes couplés (e.g. [Mam95, Far98, Bec00] pour l'aéroélasticité).

Dans la méthode LATIN, la prise en compte de ce type d'aspects multiéchelles s'intègre naturellement dans le cadre de l'interface entre les deux physiques. Pour cela, on donne un sens concret à l'interface en la munissant de ses propres discrétisations en temps et en espace (cf. **Figure 2.9**). La vérification des relations de comportement est alors réalisée sur ces discrétisations. La difficulté provient évidemment de la nécessité de transférer des champs spatiaux et temporels entre les discrétisations de l'interface et celles de chacune des physiques. Les techniques de transfert qui ont été mises en place seront développées dans des chapitres ultérieurs. Notons que le traitement indépendant de chacune des physiques avec une approche multiéchelle n'a pas été abordé dans ce travail, mais qu'il pourrait être introduit par le biais de la technique d'homogénéisation en temps et en espace présentée dans [Lad02a, Lad03].

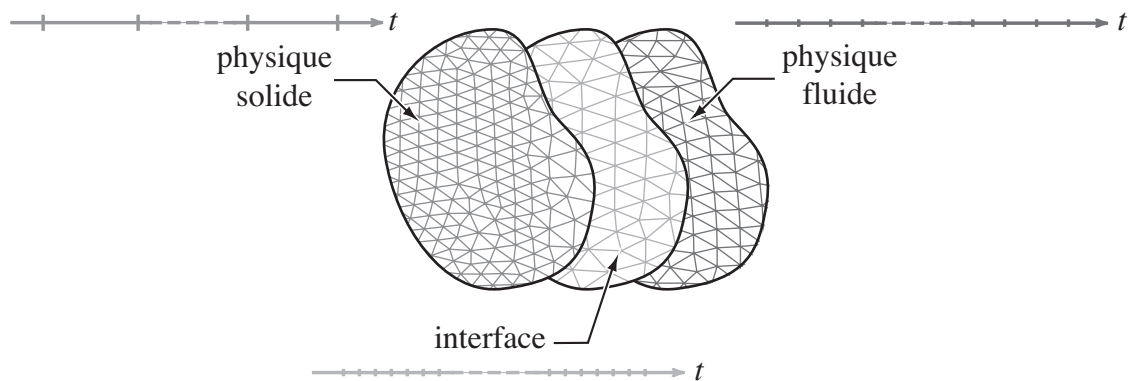


Figure 2.9 • Discrétisations de l'interface

Dans ce travail, on ne considère que des milieux poreux non fissurés et sans cavités de taille importante, qui empêcheraient l'utilisation d'une procédure d'homogénéisation pour travailler sur les grandeurs macroscopiques. L'utilisation de méthodes fondées sur la partition d'unité (du type X-FEM [Moë99, Moë02] ou G-FEM [Str01]) devrait permettre de prendre en compte de telles irrégularités.

4 Cas test

Le cas test qui est proposé ici permet de montrer la faisabilité de la méthode. Il a été traité dans l'environnement MatlabTM et interfacé avec le code éléments finis Cast3MTM (CEA Saclay, France) [Ver88] pour le pré et le post-traitement. Les résultats présentés sont issus de [Dur03c]. Dans un premier temps, la simulation a été réalisée sans utiliser la technique d'approximation radiale ni prendre en compte les aspects multiéchelles.

4.1 Description du problème

On considère le problème de consolidation d'un sol, soumis à un chargement imposé en effort. La géométrie est représentée sur la **Figure 2.10** et correspond à la même répartition des conditions aux limites que la **Figure 1.2**. Le problème est traité sous une hypothèse de déformations planes. L'intervalle de temps étudié est $T = 36$ s et les chargements $p_1 = 1,54$ GPa et $p_0 = 380$ MPa avec $t_1 = T/10$. La condition $w_d = 0$ correspond à une imperméabilité de la roche environnante. La condition initiale en pression est $p(t = 0) = p_0$. On suppose que le sol est en grès de Béréa saturé d'eau, dont les caractéristiques ont été identifiées dans [GRE90] et sont présentées dans le **Tableau 2.1**.

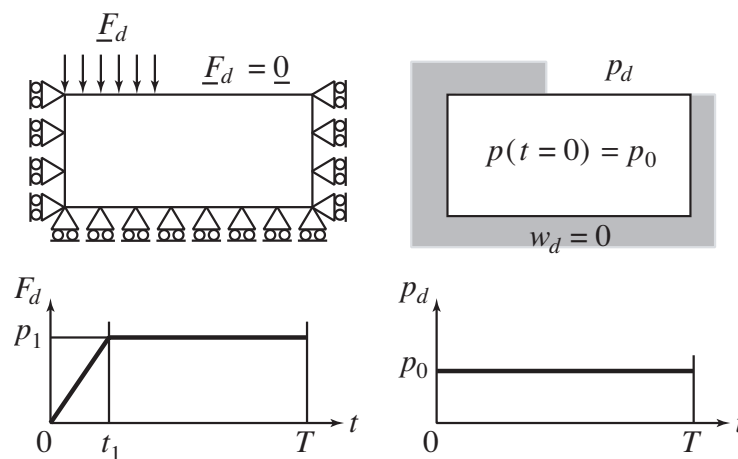


Figure 2.10 • Cas test avec effort imposé, conditions aux limites sur les parties solide et fluide

Ces caractéristiques présentent des ordres de grandeur très différents et on procède à une « adimensionnalisation » pour que les opérateurs qui interviennent dans la résolution soient bien conditionnés. On se place pour cela dans un nouveau système d'unités ($[L], [M], [T]$), avec $1 [L] = 1$ m, $1 [M] = 10^{10}$ kg et $1 [T] = 1$ s, de telle sorte que les valeurs du module d'Young, du module de Biot et de la perméabilité, soient

Porosité	$n = 0,19$	Module d'Young	$E = 14,4$ GPa
Coefficient de Poisson	$\nu = 0,2$	Module de Biot	$Q = 13,5$ GPa
Coefficient de Biot	$b = 0,78$	Perméabilité	$H = \frac{K}{\mu_w} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ m}^3 \cdot \text{s} \cdot \text{kg}^{-1}$

Tableau 2.1 • Caractéristiques du grès de Béréa saturé

de l'ordre de grandeur de 1. Les valeurs des caractéristiques du Grès de Béréa dans ce système sont reprises dans le **Tableau 2.2**.

Porosité	$n = 0,19$	Module d'Young	$E = 1,44 [L]^{-1} [M] [T]^{-2}$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0,2$	Module de Biot	$Q = 1,35 [L]^{-1} [M] [T]^{-2}$
Coefficient de Biot	$b = 0,78$	Perméabilité	$H = \frac{K}{\mu_w} = 2 [L]^3 [M]^{-1} [T]$

Tableau 2.2 • Caractéristiques du grès de Béréa saturé exprimées dans le système d'unités ($[L]$, $[M]$, $[T]$)

Les quantités solides (les déplacements) sont discrétisées en espace en utilisant des éléments P2 (triangles à 6 nœuds). Les quantités fluides (la pression) sont discrétisées en utilisant des éléments P1 (triangles à 3 nœuds avec une interpolation linéaire continue entre les éléments). Ce choix vérifie la condition LBB [Zie86, Bre91] et le maillage est représenté sur la **Figure 2.11**. 7 points de Gauss sont utilisés pour l'intégration et la représentation des éléments de la solution \mathbf{s} [Zie00].

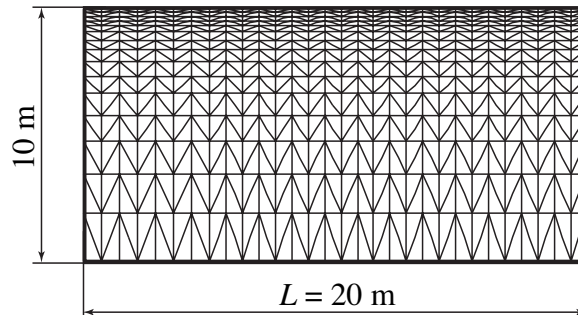


Figure 2.11 • Maillage du domaine

Une discrétisation en temps identique est utilisée pour tous les champs avec n_T pas de temps de taille $\Delta t = T/120$. Le schéma d'intégration est la θ -méthode avec $\theta = 1$.

4.2 Premiers résultats et comparaisons

La simulation est réalisée avec la méthode monolithique, dont la solution est considérée comme référence \mathbf{s}_{ex} , la stratégie LATIN et la procédure ISPP. À titre de comparaison, on étudie les erreurs entre les solutions générées par ces deux dernières méthodes

et \mathbf{s}_{ex} . La **Figure 2.12** représente l'évolution de la pression interstitielle dans le domaine et la **Figure 2.13** celle de son maximum au cours de l'intervalle de temps $[0, T]$. On peut constater que cet intervalle correspond à une partie transitoire de la réponse du sol.

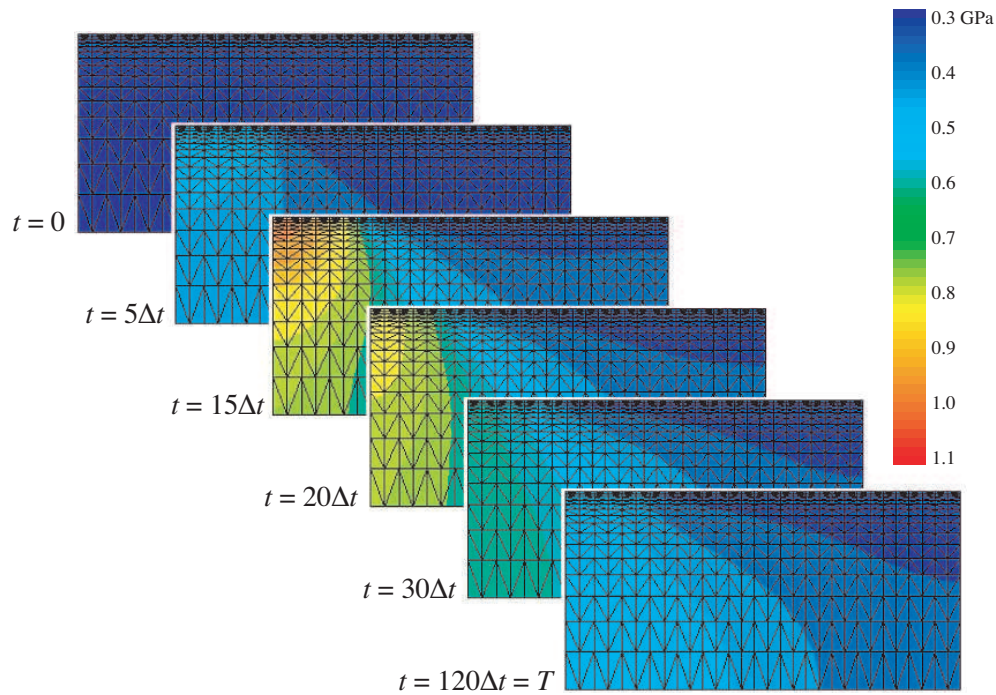


Figure 2.12 • Évolution de la pression interstitielle

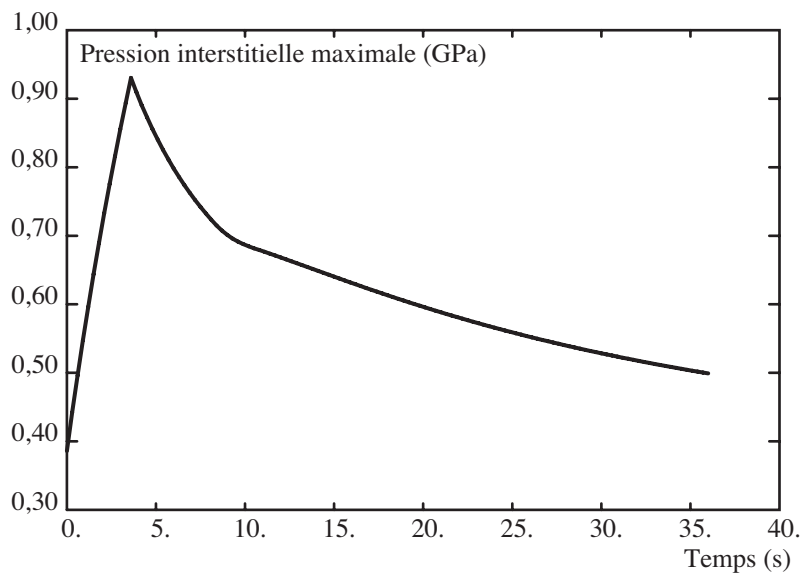


Figure 2.13 • Évolution de la pression interstitielle maximale

Pour la méthode LATIN, utilisée ici sans technique de représentation des inconnues, les paramètres des directions de recherche (2.11) ont été optimisés et fixés à $t_m = 0,015t_c$ et $t_h = 0,030t_c$. Le temps caractéristique t_c a été introduit après analyse dimensionnelle, $t_c = L^2/(QH)$ où L est la largeur de la structure, et vaut $t_c = 148$ s dans cet exemple.

La **Figure 2.14** montre l'influence du choix des paramètres t_m et t_h sur le taux de convergence de la méthode en représentant l'évolution de l'erreur η vis-à-vis de la référence s_{ex} en fonction du nombre d'itérations n_{it} . On peut constater que ce taux est plus sensible au paramètre fluide t_h qu'au paramètre solide t_m . Répétons que le choix automatique de ces paramètres reste pour l'instant une question ouverte.

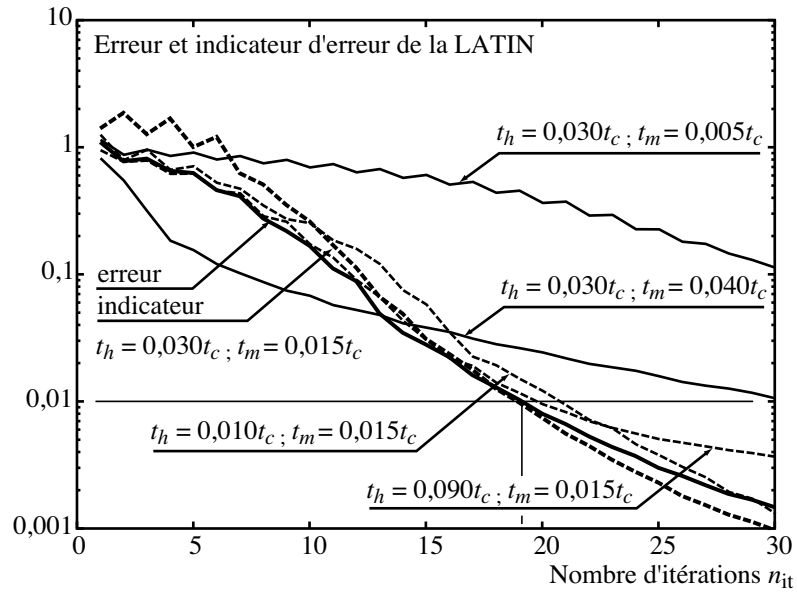


Figure 2.14 • Convergence de la méthode LATIN sans représentation

4.2.1 Comparaison avec la méthode monolithique

Une étape linéaire de la méthode LATIN consiste à résoudre à chaque pas de temps t_i , les deux problèmes globaux indépendants (2.8) et (2.9) de la forme :

$$\begin{aligned} LV_i &= B_\sigma^T \hat{A}_i + f_{di} \\ [H + R]p_i &= B_q^T \hat{\alpha}_i + B_w^T \hat{\beta}_i + g_{di} \end{aligned}$$

qu'il faut comparer au système monolithique (1.10) de la forme :

$$\begin{bmatrix} K & -N \\ -N^T & -S - \theta \Delta t_i H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ p_i \end{bmatrix} = D_i$$

Pour des directions de recherche du type (2.11), les matrices L et R peuvent s'exprimer en fonction des matrices K et S : $L = t_m K$ et $R = \frac{1}{t_h} S$. Il est important de noter que, contrairement à la méthode monolithique, le pas de temps Δt_i n'intervient pas dans les membres de gauche de la stratégie LATIN. Les matrices L et $[H + R]$ ne nécessitent donc qu'une seule factorisation, même lorsqu'une discrétisation en temps non uniforme est utilisée.

L'étape locale est, pour sa part, traitée pour un coût modique en intégrant en temps les petits systèmes différentiels (2.2) en chaque point de Gauss de chaque élément.

4.2.2 Comparaison avec la procédure ISPP

La **Figure 2.15** montre l'influence du paramètre de relaxation ω sur l'évolution de l'erreur η en fonction du nombre de sous-itérations à chaque pas de temps n_{sub} . Une valeur optimale du paramètre semble être proche de $\omega = 0,5$, tandis des valeurs plus grandes (proches de 1) nuisent à la convergence.

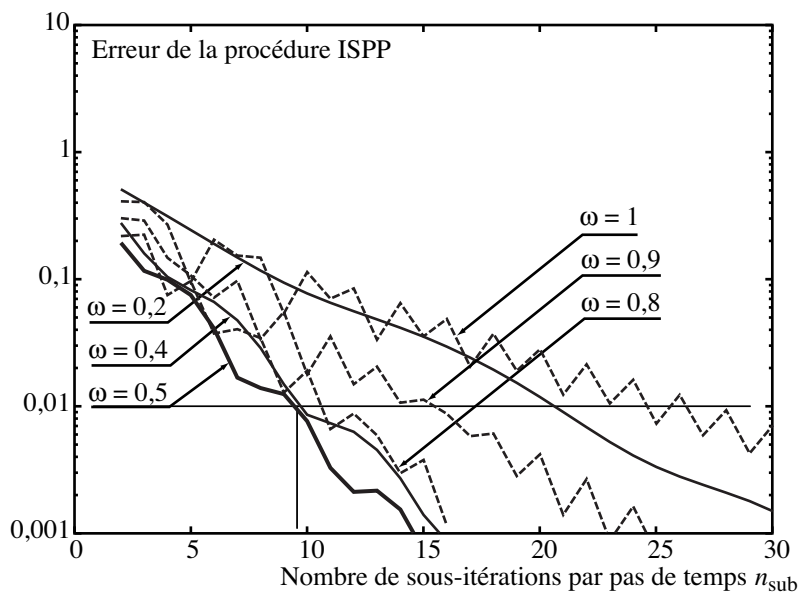


Figure 2.15 • Convergence de l'ISPP

Pour un pas de temps t_i , à chaque sous-itération, la procédure ISPP nécessite la résolution de deux problèmes indépendants (1.12) de la forme :

$$\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -S - \theta \Delta t_i H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ p_i \end{bmatrix} = E_i$$

La même remarque que pour la méthode monolithique peut être faite concernant

l'utilisation d'une discrétisation en temps non constante. Pour comparer les méthodes LATIN et ISPP, un indicateur est le nombre n_S de systèmes globaux à résoudre pour la partie solide et n_F pour la partie fluide afin d'atteindre un niveau d'erreur donné :

- pour la méthode LATIN : $n_S = n_F = n_{it} \times n_T$;
- pour la procédure ISPP : $n_S = n_F = n_{sub} \times n_T$.

Évidemment, ces résolutions globales ne constituent pas le seul coût de l'algorithme mais la part la plus importante, en particulier dans le cas des problèmes de grande taille. Il serait cependant intéressant de mener une analyse plus précise du coût de la simulation.

En comparant les **Figure 2.14** et **Figure 2.15**, on constate que pour atteindre un niveau d'erreur η de 1%, il faut $n_{it} = 18$ itérations pour la LATIN et $n_{sub} = 9$ sous-itérations pour l'ISPP. Dans cet exemple, le nombre total de résolutions globales $n_S + n_F$ nécessaire pour atteindre un niveau d'erreur donné est environ deux fois plus grand pour la méthode LATIN que pour l'ISPP.

5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous venons de présenter les idées de base de la méthode LATIN et d'illustrer son fonctionnement sur le cas de la consolidation d'un sol poreux, ce qui a permis de valider sa faisabilité.

On l'a ensuite comparée à la méthode monolithique et à la procédure ISPP et constaté qu'elle ne s'avérait pas compétitive vis-à-vis de la stratégie de partitionnement lorsque la technique d'approximation radiale n'était pas utilisée. Celle-ci est mise en place dans le chapitre qui suit.

Une représentation adaptée des inconnues

DANS CE CHAPITRE, on développe le troisième point de la méthode LATIN : une approximation des inconnues sous forme de fonctions radiales. On commence par présenter le cas où seuls les champs cinématiques sont approximés. Puis, dans un second temps, ce sont tous les champs qui sont traités de la même façon. On montre que cette technique permet d'augmenter l'efficacité de la méthode en diminuant les coûts de calcul et de stockage mais aussi en augmentant la modularité. Ces travaux ont donné lieu à un article paru [Dur03b].

Dorénavant, les désignations suivantes seront utilisées pour la méthode LATIN :

- **LATIN 0P3** sans technique de représentation ;
- **LATIN $\frac{1}{2}$ P3** avec une représentation des champs cinématiques uniquement ;
- **LATIN P3** avec une représentation de tous les champs.

1 Représentation des champs cinématiques uniquement

Comme on l'a suggéré dans le chapitre 2, lors de la présentation de la méthode LATIN, on se propose d'utiliser une technique d'approximation sur l'espace des champs admissibles \mathbf{A}_d . La première approche, qui sera désignée dorénavant par $\frac{1}{2}$ P3, consiste à représenter, sous la forme d'une superposition de champs radiaux, *les quantités cinématiques uniquement*.

L'idée est de construire des corrections cinématiques, qui soient à la fois admissibles et représentées, et telles que les corrections statiques, qui sont alors calculées en vérifiant exactement la direction de recherche, soient admissibles au mieux. Il est clair que les corrections statiques qui sont générées ne peuvent pas être, elles aussi, écrites sous la forme de chargements radiaux. Leur admissibilité s'affine au cours des itérations pour n'être exacte qu'à convergence. Une telle technique d'approximation

ne nécessite que la modification de l'étape linéaire (cf. **Figure 3.1**).

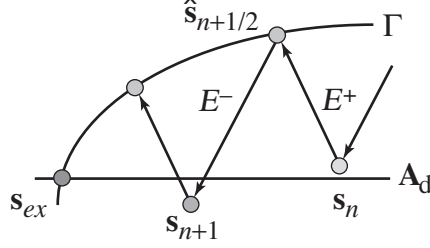


Figure 3.1 • Méthode LATIN avec $\frac{1}{2}P3$: direction de recherche vérifiée exactement

1.1 Étape linéaire avec représentation à l'itération $n + 1$

Rappelons que l'objectif de cette étape est d'ajouter une correction $\Delta \mathbf{s}_{n+1}$ à la solution \mathbf{s}_n générée par l'étape linéaire précédente, connaissant une solution $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2}$ de Γ . Pour alléger les écritures, on notera simplement $\Delta \mathbf{s}$ et $\hat{\mathbf{s}}$. La direction de recherche (2.4) peut être réécrite en fonction des corrections cinématiques $(\Delta \hat{\mathbf{x}}, \Delta p, \Delta \underline{\mathbf{Z}})$ et des grandeurs statiques corrigées $(\sigma, q, \underline{\mathbf{W}})$:

$$\begin{aligned} \sigma - \mathbf{L}\Delta \hat{\mathbf{x}} + \Delta \hat{\mathbf{A}} &= 0 & \text{avec} & & \Delta \hat{\mathbf{A}} &= (\mathbf{L}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\sigma}) - \mathbf{L}\hat{\mathbf{x}}_n = \hat{\mathbf{A}}_{n+1/2} - \mathbf{L}\hat{\mathbf{x}}_n \\ q - r\Delta p + \Delta \hat{\alpha} &= 0 & \text{avec} & & \Delta \hat{\alpha} &= (r\hat{p} - \hat{q}) - rp_n = \hat{\alpha}_{n+1/2} - rp_n \\ \underline{\mathbf{W}} - \mathbf{H}\Delta \underline{\mathbf{Z}} + \Delta \hat{\underline{\beta}} &= 0 & \text{avec} & & \Delta \hat{\underline{\beta}} &= (\mathbf{H}\hat{\underline{\mathbf{Z}}} - \hat{\underline{\mathbf{W}}}) - \mathbf{H}\underline{\mathbf{Z}}_n = \hat{\underline{\beta}}_{n+1/2} - \mathbf{H}\underline{\mathbf{Z}}_n \end{aligned} \quad (3.1)$$

Notons que la vérification des relations de comportement à l'étape locale et le fait d'avoir choisi une direction de recherche $\mathbf{M} = \mathbf{H}$, conduit à :

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\beta}}_{n+1/2} &= -\hat{\underline{\mathbf{W}}}_{n+1/2} + \mathbf{M}\hat{\underline{\mathbf{Z}}}_{n+1/2} \\ &= -\hat{\underline{\mathbf{W}}}_{n+1/2} + \mathbf{H}\hat{\underline{\mathbf{Z}}}_{n+1/2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

1.1.1 Partie solide

La correction cinématique est cherchée sous la forme radiale : $\Delta \hat{\mathbf{x}} = v_{\mathcal{E}}(\underline{\mathbf{V}})$, où $v(t)$ est une fonction scalaire du temps et $\underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{M}})$ une fonction de l'espace, toutes deux inconnues. On impose que cette correction soit exactement admissible à zéro, donc que $v\underline{\mathbf{V}} \in \mathcal{U}_0^{[0,T]}$, i.e. $\underline{\mathbf{V}}|_{\partial_1\Omega} = \underline{\mathbf{0}}$. Le problème est donc maintenant de déterminer v et $\underline{\mathbf{V}}|_{\Omega \cup \partial_2\Omega}$.

Lorsque la correction cinématique est connue, les contraintes sont calculées en vérifiant exactement la direction de recherche :

$$\sigma = \mathbf{L}\Delta\hat{\varepsilon} - \Delta\hat{\mathbf{A}} = \nu\mathbf{L}\varepsilon(\underline{V}) - \Delta\hat{\mathbf{A}} \quad (3.2)$$

et ne sont pas représentables comme un champ radial puisque $\Delta\hat{\mathbf{A}}$ ne l'est pas. On écrit l'admissibilité au mieux de ces contraintes (écriture en moyenne sur l'intervalle de temps $[0, T]$ et pour des champs virtuels \underline{U}^* particuliers) :

$$\forall \underline{U}^* = \nu^* \underline{V} + \nu \underline{V}^* \in \mathcal{U}_0^{[0, T]}, \quad \int_{\Omega \times [0, T]} \text{Tr}[\sigma \varepsilon(\underline{U}^*)] d\Omega dt = \int_{\partial_2 \Omega \times [0, T]} \underline{E}_d \cdot \underline{U}^* dS dt \quad (3.3)$$

et, pour que ce couple soit déterminé de façon unique, on choisit par exemple la normalisation suivante :

$$\|\underline{V}\|_{\mathbf{L}}^2 = \int_{\Omega} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{V})\mathbf{L}\varepsilon(\underline{V})] d\Omega = 1 \quad (3.4)$$

En introduisant la notation :

$$\|v\|_T^2 = \int_{[0, T]} v dt$$

les équations (3.2), (3.3) et (3.4) conduisent à réécrire le problème comme la recherche de v et $\underline{V} \in \mathcal{U}_0$ tels que :

$$\forall v^*, \quad \int_{[0, T]} v v^* dt = \int_{[0, T]} v^* \left(\int_{\Omega} \text{Tr}[\Delta\hat{\mathbf{A}}\varepsilon(\underline{V})] d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \underline{E}_d \cdot \underline{V} dS \right) dt \quad (3.5)$$

et

$$\forall \underline{V}^* \in \mathcal{U}_0, \quad \int_{\Omega} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{V})\mathbf{L}\varepsilon(\underline{V}^*)] d\Omega = \int_{[0, T]} \frac{v}{\|v\|_T^2} \left(\int_{\Omega} \text{Tr}[\Delta\hat{\mathbf{A}}\varepsilon(\underline{V}^*)] d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \underline{E}_d \cdot \underline{V}^* dS \right) dt \quad (3.6)$$

En écriture milieu continu en temps, l'équation (3.5) peut s'écrire :

$$v = \int_{\Omega} \text{Tr}[\Delta\hat{\mathbf{A}}\varepsilon(\underline{V})] d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \underline{E}_d \cdot \underline{V} dS$$

Après discrétisation en espace, ces équations deviennent :

$$V^T L V = 1 \quad (3.7)$$

$$v = V^T (B_{\sigma}^T \Delta\hat{\mathbf{A}} + f_d) \quad (3.8)$$

$$L V = \int_{[0, T]} \frac{v}{\|v\|_T^2} (B_{\sigma}^T \Delta\hat{\mathbf{A}} + f_d) dt \quad (3.9)$$

où f_d représente les forces généralisées associées à \underline{F}_d et les opérateurs L et B_σ ont été définis dans (2.10). Afin de ne pas alourdir les notations et en l'absence d'ambiguïté, les champs discrétisés associés à \underline{V} et $\Delta\hat{\mathbf{A}}$ sont simplement notés V et $\Delta\hat{\mathbf{A}}$.

Ce système couplé est résolu par la méthode du point fixe et le nombre d'itérations qui sont nécessaires est en général faible. Avec cette technique d'approximation, il n'est plus nécessaire de résoudre un système global à chaque pas de temps, mais seulement un petit nombre de fois (le nombre de sous-itérations du point fixe) par itération de la LATIN.

Pour initialiser le point fixe, on prend comme valeur de la fonction du temps, l'indicateur d'erreur en temps de l'itération précédente. Pour stopper le point fixe, on peut par exemple tester la stationnarité de la méthode : si (\bar{v}, \bar{V}) est le couple précédent et (v, V) le couple courant, un indicateur est :

$$\xi^2 = \frac{\frac{1}{2} \int_{[0,T]} \|v_\varepsilon(\underline{V}) - \bar{v}_\varepsilon(\bar{V})\|_{\mathbf{L}}^2 dt}{\frac{1}{2} \int_{[0,T]} \|v_\varepsilon(\underline{V})\|_{\mathbf{L}}^2 dt}$$

avec :

$$\|\varepsilon\|_{\mathbf{L}}^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr}[\varepsilon \mathbf{L} \varepsilon] d\Omega$$

Après discrétisation en espace, on peut réécrire ces équations sous la forme :

$$\xi^2 = \frac{\frac{1}{2} (\|v\|_T^2 + \|\bar{v}\|_T^2) - \bar{V}^T LV \int_{[0,T]} v \bar{v} dt}{\frac{1}{2} \|v\|_T^2}$$

L'algorithme correspondant à cette partie solide de l'étape linéaire à l'itération $n+1$ est décrit dans **Algorithme 3.1**.

1.1.2 Partie fluide

Le schéma précédent peut être réutilisé pour traiter la partie fluide du problème, *i.e.* les champs (p, \underline{Z}) et (q, \underline{W}) .

Par exemple, la correction cinématique est approchée par la forme radiale : $\Delta p = \pi P$ et $\Delta \underline{Z} = \pi \underline{\text{grad}} P$, où $\pi(t)$ est une fonction scalaire du temps et $P(\underline{M})$ une fonction

Calcul du second membre	$\Delta \hat{\mathbf{A}} = (\mathbf{L} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) - \mathbf{L} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_n$
	$\hat{\mathbf{f}} \leftarrow B_{\sigma}^T \Delta \hat{\mathbf{A}} + \mathbf{f}_d$
Initialisation	$\nu \leftarrow \ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1/2} - \boldsymbol{\varepsilon}_n\ _{\mathbf{L}}$
<i>Itérations du point fixe</i>	
Résolution	$V \leftarrow -LV = \int_{[0,T]} \frac{\nu}{\ \nu\ _T^2} \hat{\mathbf{f}} dt = \bar{\mathbf{f}}$
Normalisation	$\beta \leftarrow (\bar{\mathbf{f}}^T V)^{1/2}$
	$V \leftarrow \beta^{-1} V$
	$\nu \leftarrow \beta \nu$
Critère d'arrêt	pour le couple (ν, V)
Recalcul de la fonction du temps	$\nu \leftarrow V^T \hat{\mathbf{f}}$
<i>Fin des itérations</i>	

Algorithme 3.1 • Étape linéaire partie solide, itération
 $n + 1$

de l'espace. On impose que cette correction soit exactement admissible à zéro, donc que $\pi P \in \mathcal{D}_0^{[0,T]}$, i.e. $P|_{\partial_3 \Omega} = 0$. Le problème est donc de déterminer π et $P|_{\Omega \cup \partial_4 \Omega}$.

De la même façon que précédemment, les inconnues statiques sont obtenues en vérifiant exactement les directions de recherche :

$$q = r \Delta p - \Delta \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \pi r P - \Delta \hat{\boldsymbol{\alpha}}$$

$$\underline{W} = \mathbf{H} \Delta \underline{Z} - \Delta \hat{\boldsymbol{\beta}} = \pi \mathbf{H} \underline{\text{grad}} P - \Delta \hat{\boldsymbol{\beta}}$$

On écrit l'admissibilité statique au mieux de q et \underline{W} :

$$\forall p^* = \pi^* P + \pi P^* \in \mathcal{D}_0^{[0,T]}, \quad \int_{\Omega \times [0,T]} (q p^* + \underline{W} \cdot \underline{\text{grad}} p^*) d\Omega dt = \int_{\partial_4 \Omega \times [0,T]} w_d p^* dS dt$$

et on choisit par exemple la normalisation suivante :

$$\|P\|_{Hr}^2 + \|\underline{\text{grad}} P\|_{\mathbf{H}}^2 = \|\underline{\text{grad}} P\|_{\mathbf{H}}^2 + \|P\|_r^2 = \int_{\Omega} \underline{\text{grad}} P \cdot \mathbf{H} \underline{\text{grad}} P d\Omega + \int_{\Omega} PrP d\Omega = 1$$

ce qui conduit à :

$$\forall \pi^*, \quad \int_{[0,T]} \pi \pi^* dt = \int_{[0,T]} \pi^* \left(\int_{\Omega} (\Delta \hat{\boldsymbol{\alpha}} P + \Delta \hat{\boldsymbol{\beta}} \cdot \underline{\text{grad}} P) d\Omega + \int_{\partial_4 \Omega} w_d P dS \right) dt \quad (3.10)$$

et

$$\forall P^* \in \mathcal{D}_0, \quad \int_{\Omega} (PrP^* + \underline{\text{grad}} P \cdot \mathbf{H} \underline{\text{grad}} P^*) d\Omega$$

$$= \int_{[0,T]} \frac{\pi}{\|\pi\|_T^2} \left(\int_{\Omega} (\Delta \hat{\boldsymbol{\alpha}} P^* + \Delta \hat{\boldsymbol{\beta}} \cdot \underline{\text{grad}} P^*) d\Omega + \int_{\partial_4 \Omega} w_d P^* dS \right) dt \quad (3.11)$$

En écriture milieu continu en temps, l'équation (3.10) devient :

$$\pi = \int_{\Omega} \left(\Delta \hat{\alpha} P + \Delta \hat{\beta} \cdot \underline{\text{grad}} P \right) d\Omega + \int_{\partial_4 \Omega} w_d P dS$$

Après discrétisation en espace, on peut réécrire ces équations sous la forme :

$$P^T [H + R] P = 1 \quad (3.12)$$

$$\pi = P^T (B_q^T \Delta \hat{\alpha} + B_w^T \Delta \hat{\beta} + g_d) \quad (3.13)$$

$$[H + R] P = \int_{[0, T]} \frac{\pi}{\|\pi\|_T^2} (B_q^T \Delta \hat{\alpha} + B_w^T \Delta \hat{\beta} + g_d) dt \quad (3.14)$$

où g_d représente les flux généralisés associés à w_d et les opérateurs $[H + R]$, B_q et B_w ont été définis dans (2.10). Comme pour la partie solide, les champs discrétisés associés à P , $\Delta \hat{\alpha}$ et $\Delta \hat{\beta}$ sont notés simplement P , $\Delta \hat{\alpha}$ et $\Delta \hat{\beta}$.

Ce nouveau système est lui aussi résolu par une méthode de point fixe avec une initialisation et un critère d'arrêt du même type. L'algorithme correspondant à cette partie fluide de l'étape linéaire à l'itération $n + 1$ est décrit dans **Algorithme 3.2**.

Calcul du second membre	$\Delta \hat{\alpha} = (r \hat{p} - \hat{q}) - r p_n$ $\Delta \hat{\beta} = (\mathbf{H} \hat{\underline{Z}} - \hat{\underline{\beta}}) - \mathbf{H} \underline{Z}_n$ $\hat{g} \leftarrow B_q^T \Delta \hat{\alpha} + B_w^T \Delta \hat{\beta} + g_d$
Initialisation	$\pi \leftarrow \ \hat{p}_{n+1/2} - p_n\ _{Q^{-1}}$
<i>Itérations du point fixe</i>	
Résolution	$P \leftarrow [H + R] P = \int_{[0, T]} \frac{\pi}{\ \pi\ _T^2} \hat{g} dt = \bar{g}$
Normalisation	$\beta \leftarrow (\bar{g}^T P)^{1/2}$ $P \leftarrow \beta^{-1} P$ $\pi \leftarrow \beta \pi$
Critère d'arrêt	pour le couple (π, P)
Recalcul de la fonction du temps	$\pi \leftarrow P^T \hat{g}$
<i>Fin des itérations</i>	

Algorithme 3.2 • Étape linéaire partie fluide, itération
 $n + 1$

Remarque sur les espaces générés • Afin d'éviter que les espaces de champs solides et fluides ne dégèrent, ils peuvent être orthonormalisés :

$$\int_{\Omega} \text{Tr}[V_i \mathbf{L} V_j] d\Omega = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \left(P_i r P_j + \underline{\text{grad}} P_i \cdot \mathbf{H} \underline{\text{grad}} P_j \right) d\Omega = \delta_{ij}$$

Durant cette phase d'orthonormalisation, si l'on constate que les derniers champs ajoutés sont trop dépendants des précédents, on peut décider de ne pas les retenir.

1.2 Étape préliminaire à l'itération $n + 1$

Comme on l'a introduit dans le chapitre de présentation de la méthode LATIN, l'objectif de l'étape préliminaire est de générer à moindre frais une nouvelle solution de \mathbf{A}_d , en ne recalculant que de meilleures fonctions du temps et donc sans ajouter de nouveaux couples correctifs. Cette procédure de réutilisation des champs spatiaux est similaire à celle qui consiste à réutiliser les sous-espaces de Krylov afin d'accélérer la convergence dans les méthodes de Newton-Krylov (cf. par exemple [Saa00]).

L'étape préliminaire prend place entre l'étape locale et l'étape linéaire : connaissant une solution $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2}$ de Γ , on détermine une meilleure solution $\bar{\mathbf{s}}_{n+1}$ en optimisant seulement la valeur des fonctions du temps. On peut ensuite chercher une nouvelle solution \mathbf{s}_{n+1} dans \mathbf{A}_d en ajoutant de nouveaux couples grâce à une étape linéaire (cf. **Figure 3.2**). Le cas échéant, il est nécessaire de recalculer les quantités $\Delta\hat{\mathbf{A}}$, $\Delta\hat{\underline{\beta}}$ et $\Delta\hat{\underline{a}}$ à partir de $\bar{\mathbf{s}}_{n+1}$ et non de \mathbf{s}_n .

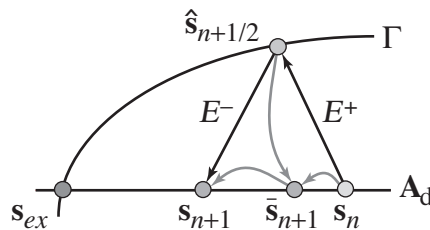


Figure 3.2 • Méthode LATIN avec étape préliminaire

Cette étape préliminaire est plus simple si l'on a pris soin d'orthogonaliser chaque fonction de l'espace ajoutée :

$$\int_{\Omega} \text{Tr}[V_i \mathbf{L} V_j] d\Omega = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} (P_i r P_j + \underline{\text{grad}} P_i \cdot \mathbf{H} \underline{\text{grad}} P_j) d\Omega = \delta_{ij}$$

soit, sous forme discrétisée :

$$V_i^T \mathbf{L} V_j = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad P_i^T [H + R] P_j = \delta_{ij}$$

1.2.1 Partie solide

On cherche une correction des déformations sous la forme $\Delta\hat{\underline{\varepsilon}} = \sum_j w_j \underline{\varepsilon}(V_j)$, où les w_j , qu'il faut déterminer, peuvent être vues comme des corrections des fonctions du temps actuelles, alors que les \underline{V}_j sont données. Les nouvelles fonctions du temps seront alors $\bar{v}_j = v_j + w_j$, de telle sorte que :

$$\bar{\underline{\varepsilon}}_{n+1} = \hat{\underline{\varepsilon}}_n + \Delta\hat{\underline{\varepsilon}} = v_0 \underline{\varepsilon}(V_0) + \sum_j (v_j + w_j) \underline{\varepsilon}(V_j)$$

Si, comme on l'a noté précédemment, les espaces de fonctions ont été orthonormalisés, la détermination de chaque fonction inconnue se fait de manière indépendante :

$$w_j = \int_{\Omega} \text{Tr}[\underline{\varepsilon}(\underline{V}_j)\Delta\hat{\mathbf{A}}]d\Omega + \int_{\partial_2\Omega} \underline{V}_j \cdot \underline{F}_d d\Omega = V_j^T (B_{\sigma}^T \Delta\hat{\mathbf{A}} + f_d)$$

Une technique équivalente consiste à recalculer directement les nouvelles fonctions du temps \bar{v}_j et non leur correction. La nouvelle approximation sera alors :

$$\bar{\underline{\varepsilon}}_{n+1} = v_0 \underline{\varepsilon}(\underline{V}_0) + \sum_j \bar{v}_j \underline{\varepsilon}(\underline{V}_j)$$

Le problème consiste alors à rendre $\sum_j v_j \mathbf{L}\hat{\underline{\varepsilon}}(\underline{V}_j) - \hat{\mathbf{A}}_{n+1/2}$ admissible au mieux. On montre qu'on peut obtenir :

$$\bar{v}_j = \int_{\Omega} \text{Tr}[\underline{\varepsilon}(\underline{V}_j)\hat{\mathbf{A}}_{n+1/2}]d\Omega = V_j^T B_{\sigma}^T \hat{\mathbf{A}}_{n+1/2}$$

1.2.2 Partie fluide

On cherche cette fois une correction de la pression sous la forme $\Delta p = \sum_j \mu_j P_j$, où μ_j sont des fonctions du temps à déterminer alors que les P_j sont données. À nouveau, si l'on a pris soin d'orthonormaliser les espaces, la détermination de chaque fonction inconnue se fait de manière indépendante :

$$\mu_j = \int_{\Omega} \left(P_j \Delta\hat{\alpha} + \underline{\text{grad}} P_j \cdot \Delta\hat{\underline{\beta}} \right) d\Omega + \int_{\partial_4\Omega} P_j w_d dS = P_j^T (B_q^T \Delta\hat{\alpha} + B_w^T \Delta\hat{\underline{\beta}} + g_d)$$

Comme dans le cas de la partie solide, on aurait aussi pu chercher directement les nouvelles fonctions du temps et on aurait alors obtenu :

$$\bar{\pi}_j = \int_{\Omega} \left(P_j \hat{\alpha}_{n+1/2} + \underline{\text{grad}} P_j \cdot \hat{\underline{\beta}}_{n+1/2} \right) d\Omega = P_j^T (B_q^T \hat{\alpha}_{n+1/2} + B_w^T \hat{\underline{\beta}}_{n+1/2})$$

1.3 Solution initiale

Pour démarrer l'algorithme LATIN, il nous faut une solution initiale :

$$\mathbf{s}_0 = \left\{ \hat{\underline{\varepsilon}}_0, \sigma_0, p_0, q_0, \underline{Z}_0, \underline{W}_0 \right\}$$

de \mathbf{A}_d . Cette solution peut être exprimée comme une superposition d'autant de chargements radiaux qu'il y a de paramètres de chargement et donc être représentée sous la même forme que les corrections.

Nous allons présenter la méthode qui permet de construire une solution initiale dans le cas où les chargements ne dépendent chacun que d'un seul paramètre :

$$\begin{aligned} \underline{U}_d &= d(t)\underline{D}(\underline{M}) & \text{et} & & p_d &= g(t)G(\underline{M}) \\ \underline{F}_d &= f(t)\underline{F}(\underline{M}) & & & w_d &= h(t)H(\underline{M}) \end{aligned}$$

1.3.1 Partie solide

On cherche une solution initiale en taux de déformations $\dot{\varepsilon}_0 = \varepsilon(\dot{\underline{U}}_0)$ avec $\underline{U}_0 = u_0^1(t)\underline{V}_0^1(\underline{M}) + u_0^2(t)\underline{V}_0^2(\underline{M}) \in \mathcal{U}^{[0,T]}$. Cette admissibilité cinématique exacte de \underline{U}_0 implique que $\underline{U}_0|_{\partial_1\Omega} = (u_0^1\underline{V}_0^1 + u_0^2\underline{V}_0^2)|_{\partial_1\Omega} = d\underline{D}$. On choisit de prendre $u_0^1 = d$, d'où $\underline{V}_0^1|_{\partial_1\Omega} = \underline{D}$ et $\underline{V}_0^2 \in \mathcal{U}_0$.

Une façon simple de déterminer cette solution consiste à poser $\hat{\mathbf{A}}_{-1/2} = 0$ et à utiliser la direction de recherche (2.4) vérifiée exactement pour obtenir $\sigma_0 = \mathbf{L}_\varepsilon(\dot{\underline{U}}_0) = \dot{u}_0^1\mathbf{L}_\varepsilon(\underline{V}_0^1) + \dot{u}_0^2\mathbf{L}_\varepsilon(\underline{V}_0^2)$. Le champ σ_0 peut donc être écrit sous forme représentée. Son admissibilité statique exacte $\sigma_0 \in \mathcal{S}^{[0,T]}$ s'écrit :

$$\forall t \in [0, T], \quad \forall \underline{V}^* \in \mathcal{U}_0, \quad \int_{\Omega} \text{Tr}[\varepsilon(\dot{\underline{U}}_0)\mathbf{L}_\varepsilon(\underline{V}^*)] d\Omega = \int_{\partial_2\Omega} f \underline{F} \cdot \underline{V}^* dS$$

Si l'on choisit de prendre $\dot{u}_0^2 = f$, \underline{V}_0^1 et \underline{V}_0^2 sont entièrement déterminés en résolvant le problème qui consiste à trouver $\underline{V}_0^1|_{\partial_1\Omega} = \underline{D}$ et $\underline{V}_0^2 \in \mathcal{U}_0$ tels que :

$$\forall \underline{V}^* \in \mathcal{U}_0, \quad \int_{\Omega} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{V}_0^1)\mathbf{L}_\varepsilon(\underline{V}^*)] d\Omega = 0$$

et

$$\forall \underline{V}^* \in \mathcal{U}_0, \quad \int_{\Omega} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{V}_0^2)\mathbf{L}_\varepsilon(\underline{V}^*)] d\Omega = \int_{\partial_2\Omega} \underline{F} \cdot \underline{V}^* dS$$

1.3.2 Partie fluide

De manière analogue, on cherche la solution initiale en pression p_0 sous la forme $p_0 = \pi_0^1 P_0^1 + \pi_0^2 P_0^2 \in \mathcal{P}^{[0,T]}$. Cette admissibilité cinématique exacte de p_0 implique $p_0|_{\partial_3\Omega} = (\pi_0^1 P_0^1 + \pi_0^2 P_0^2)|_{\partial_3\Omega} = gG$. On choisit de prendre $\pi_0^1 = g$, d'où $P_0^1|_{\partial_3\Omega} = G$ et $P_0^2 \in \mathcal{P}_0$.

Une façon simple de déterminer cette solution consiste à poser $\hat{\alpha}_{-1/2} = 0$ et $\hat{\beta}_{-1/2} = 0$ et à utiliser la direction de recherche (2.4) vérifiée exactement pour obtenir $q_0 = rp_0 = \pi_0^1 rP_0^1 + \pi_0^2 rP_0^2$ et $\underline{W}_0 = \mathbf{H} \underline{\text{grad}} p_0 = \pi_0^1 \mathbf{H} \underline{\text{grad}} P_0^1 + \pi_0^2 \mathbf{H} \underline{\text{grad}} P_0^2$. Leur admissibilité statique exacte $(q_0, \underline{W}_0) \in \mathcal{H}^{[0,T]}$ s'écrit :

$$\forall t \in [0, T], \quad \forall P^* \in \mathcal{P}_0, \quad \int_{\Omega} (prP^* + \underline{\text{grad}} p \cdot \mathbf{H} \underline{\text{grad}} P^*) d\Omega = \int_{\partial_4 \Omega} hHP^* dS$$

Si l'on choisit de prendre $\pi_0^2 = h$, P_0^1 et P_0^2 sont entièrement déterminés en résolvant le problème qui consiste à trouver $P_0^1|_{\partial_3 \Omega} = G$ et $P_0^2 \in \mathcal{P}_0$ tels que :

$$\forall P^* \in \mathcal{P}_0, \quad \int_{\Omega} (P_0^1 rP^* + \underline{\text{grad}} P_0^1 \cdot \mathbf{H} \underline{\text{grad}} P^*) d\Omega = 0$$

et

$$\forall P^* \in \mathcal{P}_0, \quad \int_{\Omega} (P_0^2 rP^* + \underline{\text{grad}} P_0^2 \cdot \mathbf{H} \underline{\text{grad}} P^*) d\Omega = \int_{\partial_4 \Omega} HP^* dS$$

1.4 Résultats et comparaisons

1.4.1 Coût des calculs

On reprend le problème de consolidation de la section 4.1 du chapitre 2, mais en utilisant cette fois la technique de représentation $\frac{1}{2}P_3$ qui vient d'être décrite.

Dans un premier temps, les étapes préliminaires sont toujours suivies d'étapes linéaires. En d'autres termes, un champ de l'espace solide et un champ de l'espace fluide sont ajoutés à chaque itération. Le nombre de sous-itérations du point fixe est en outre fixé à 1 dans chacune des étapes linéaires. Dans ce cas, un seul problème global solide et un seul problème global fluide doivent être résolus à chaque itération. Les mêmes directions de recherche que dans la section 4.1 du chapitre 2 sont utilisées : $t_m = 0.015 t_c$ et $t_h = 0.030 t_c$.

La **Figure 3.3** permet de comparer l'évolution des erreurs (E_S, E_F) et des indicateurs d'erreur (e_S, e_F) lorsque la technique de représentation est utilisée ou non. On peut constater que l'approximation des quantités cinématiques admissibles ne modifie que très peu le taux de convergence et donc que cette représentation sous forme de chargements radiaux est bien adaptée à ce type de problème.

Dans un second temps, la technique de saut de l'étape linéaire est utilisée. Si l'étape préliminaire a permis de réduire l'erreur de manière significative, la génération d'un

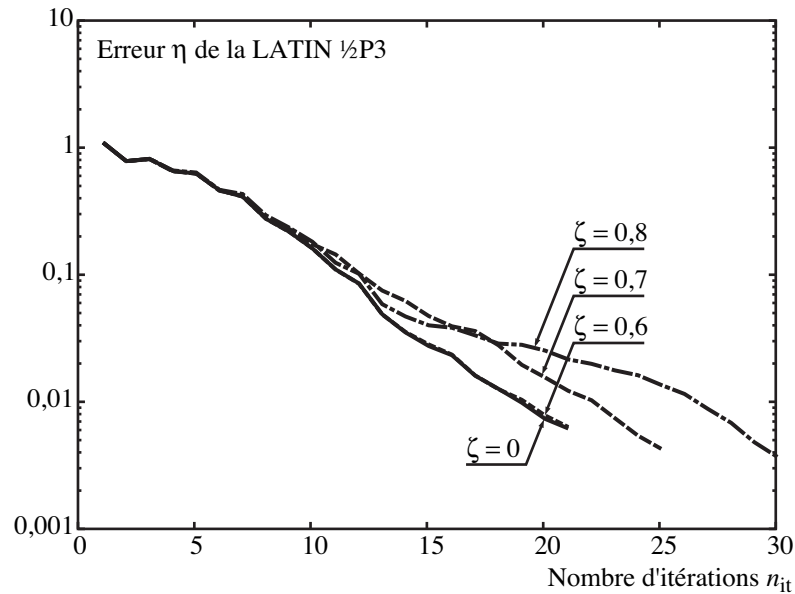


Figure 3.4 • Évolution de l'erreur vs. critère ζ

ISPP ($\omega = 0,5$)		LATIN OP3		LATIN $\frac{1}{2}$ P3 ($\zeta = 0$)		LATIN $\frac{1}{2}$ P3 ($\zeta = 0,8$)	
n_{sub}	$n_S + n_F$	n_{it}	$n_S + n_F$	n_{it}	$n_S + n_F$	n_{it}	$n_S + n_F$
9	1080+1080	18	2160+2160	18	18+18	27	8+16

Tableau 3.1 • Comparaison des coûts de calcul

1.4.2 Influence du couplage

Ce test concerne le comportement des différentes approches vis-à-vis de la valeur du coefficient de couplage b . Pour cela, on compare les coûts nécessaires pour atteindre une erreur η de 1%. Le **Tableau 3.2** regroupe le nombre de sous-itérations n_{sub} de l'ISPP (avec $\omega = 0,5$) et les nombres de résolutions globales (n_S, n_F) pour la méthode LATIN (avec les mêmes directions de recherche que précédemment). Le coût de l'ISPP augmente nettement avec le couplage, ce qui n'est pas le cas pour la stratégie LATIN $\frac{1}{2}$ P3 lorsque $\zeta = 0$.

b	ISPP		LATIN $\frac{1}{2}$ P3 ($\zeta = 0$)		LATIN $\frac{1}{2}$ P3 ($\zeta = 0,8$)	
	n_{sub}	$n_S + n_F$	n_{it}	$n_S + n_F$	n_{it}	$n_S + n_F$
0,25	6	720+720	19	19+19	20	4+9
0,50	8	960+960	18	18+18	20	6+10
0,75	9	1080+1080	19	19+19	26	9+13
0,90	10	1200+1200	20	20+20	22	7+13
1,00	13	1560+1560	21	21+21	21	8+12

Tableau 3.2 • Influence du coefficient de Biot b

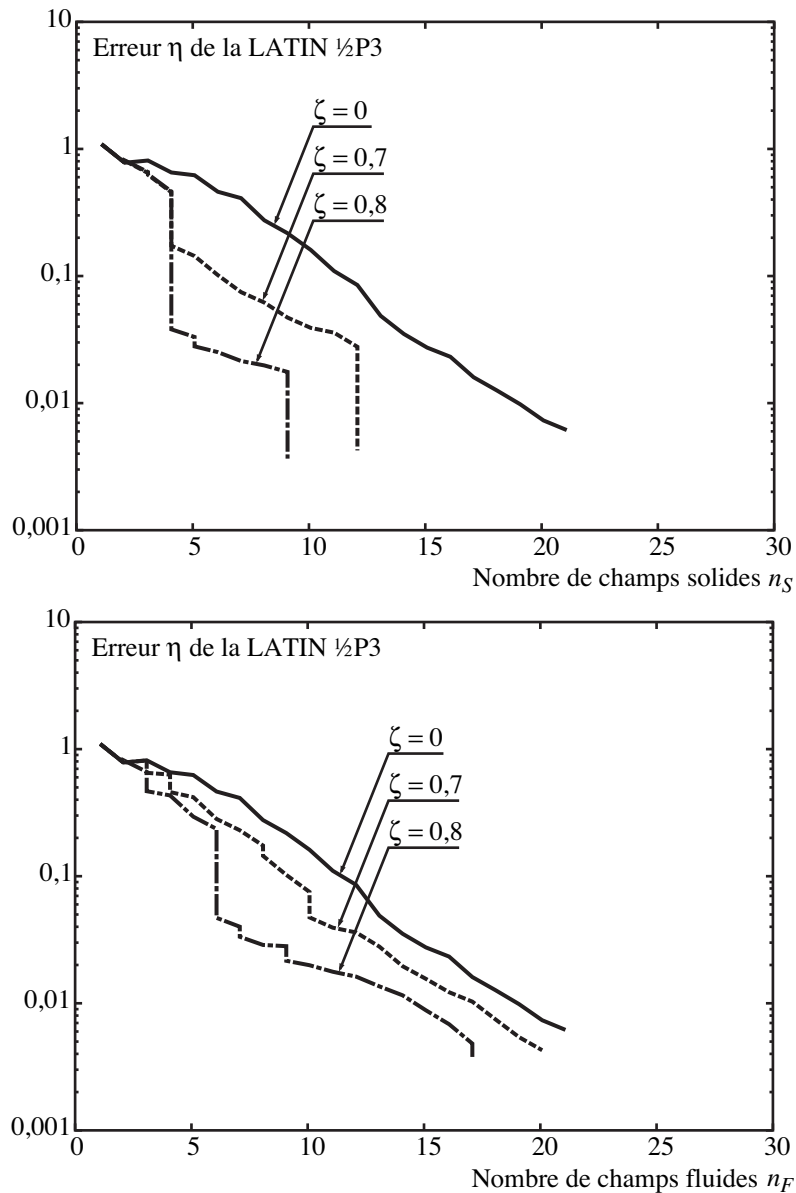


Figure 3.5 • Évolution de l'erreur vs. nombre de champs générés

1.4.3 Influence de la complexité du chargement

On étudie maintenant le comportement des différentes approches vis-à-vis de la complexité en temps du chargement [Dur03b]. Le cas test est le problème à flux imposé de la **Figure 3.6**, qui est traité pour trois chargement différents (le nombre de pas de temps n_T vaut successivement 60, 120, 180 et le chargement est de plus en plus complexe). Les directions de recherche sont à nouveau celles de la section 4.1 du chapitre

2 et la procédure de saut des étapes linéaires n'est pas activée ($\zeta = 0$). Le **Tableau 3.3** regroupe les résultats obtenus en terme de nombre de résolutions globales nécessaires pour obtenir une erreur η de 1%.

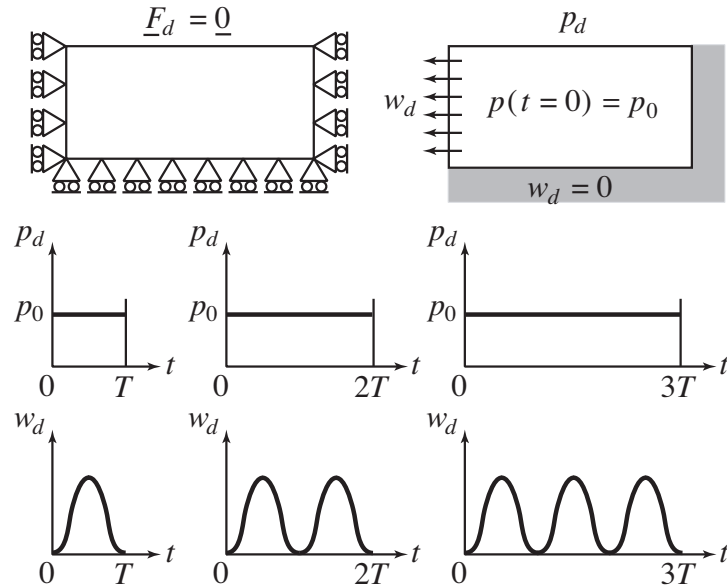


Figure 3.6 • Cas test avec flux imposé, conditions aux limites sur les parties solide et fluide

(chargement) n_T	ISPP		LATIN OP3		LATIN $\frac{1}{2}$ P3 ($\zeta = 0$)	
	n_{sub}	$n_S + n_F$	n_{it}	$n_S + n_F$	n_{it}	$n_S + n_F$
(1) 60	4	240+240	12	720+720	16	4+8
(2) 120	5	600+600	16	1920+1920	20	6+10
(3) 180	5	900+900	19	3420+3420	21	11+12

Tableau 3.3 • Influence de la complexité du chargement

La convergence de la procédure ISPP est meilleure pour le problème à flux imposé que pour celui à effort imposé. La méthode LATIN présente des taux de convergence similaires. Pour une même convergence (*i.e.* un nombre sous-itérations n_{sub} quasi-constant), le coût de la méthode ISPP est directement relié au nombre de pas de temps n_T , tandis que la méthode LATIN $\frac{1}{2}$ P3 y est moins sensible.

1.4.4 En terme de stockage et transferts

Rappelons qu'une des caractéristiques principales que l'on recherche dans une stratégie de calcul pour la simulation d'un problème multiphysique est sa modularité.

Elle doit si possible permettre de bâtir le nouvel algorithme en réutilisant des outils ou des codes qui ont déjà fait leurs preuves dans le traitement de chacune des physiques. Dans ce cas, il est nécessaire de limiter le volume des informations à transférer entre les codes. Les **Figure 3.7** et **Figure 3.8** proposent deux possibilités de couplage de codes solide et fluide et les flux d'informations à échanger. Dans la **Figure 3.7**, l'étape locale a été dupliquée, ainsi que la base de données (nécessaire, à moins qu'une base de données unique ne soit stockée en mémoire partagée). Dans la **Figure 3.8**, un troisième code pilote les deux autres, qui ne sont utilisés que pour la résolution des problèmes globaux.

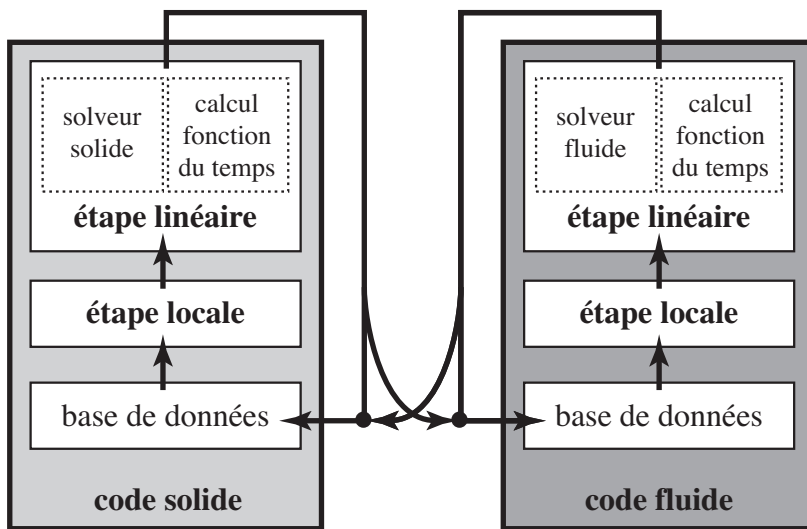


Figure 3.7 • Couplage de codes avec duplication de l'étape locale

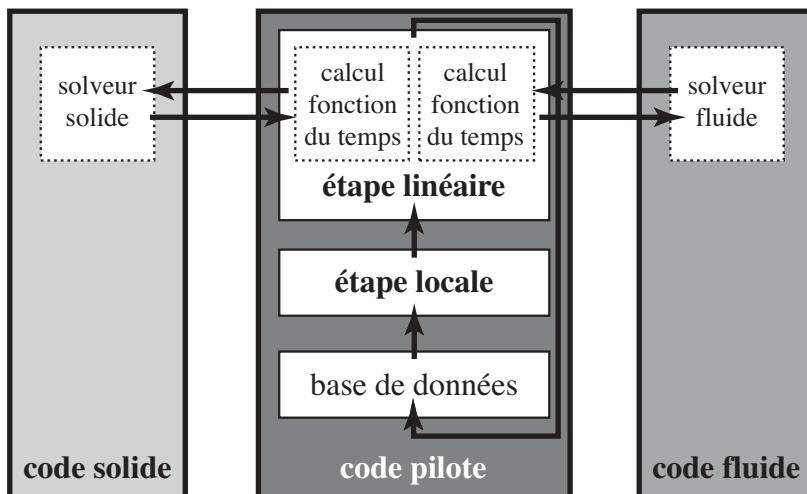


Figure 3.8 • Couplages de codes avec code pilote

Dans les deux cas, en sortie d'étape linéaire $n + 1$, il est nécessaire de fournir à

l'étape locale $n + 3/2$, les quantités :

$$\mathbf{A}_{n+1} = \sigma_{n+1} + \mathbf{L}\dot{\hat{\epsilon}}_{n+1}, \quad \alpha_{n+1} = q_{n+1} + r p_{n+1} \quad \text{et} \quad \underline{\beta}_{n+1} = \underline{W}_{n+1} + \mathbf{H}\underline{Z}_{n+1}$$

où les grandeurs cinématiques $\dot{\hat{\epsilon}}_{n+1}$, p_{n+1} et \underline{Z}_{n+1} peuvent être reconstruites à partir de leurs formes représentées et les grandeurs statiques associées σ_{n+1} , q_{n+1} et \underline{W}_{n+1} doivent être calculées en utilisant la direction de recherche (2.4). Il est cependant possible d'éviter le calcul de ces champs statiques en exprimant les quantités \mathbf{A}_{n+1} , α_{n+1} et $\underline{\beta}_{n+1}$ sous la forme :

$$\mathbf{A}_{n+1} = 2\mathbf{L}\dot{\hat{\epsilon}}_{n+1} - \hat{\mathbf{A}}_{n+1/2}, \quad \alpha_{n+1} = 2r p_{n+1} - \hat{\alpha}_{n+1/2} \quad \text{et} \quad \underline{\beta}_{n+1} = 2\mathbf{H}\underline{Z}_{n+1} - \hat{\underline{\beta}}_{n+1/2}$$

ce qui nécessite cette fois de stocker $\hat{\mathbf{A}}_{n+1/2}$, $\hat{\alpha}_{n+1/2}$ et $\hat{\underline{\beta}}_{n+1/2}$. Le calcul des quantités \mathbf{A}_{n+1} , α_{n+1} et $\underline{\beta}_{n+1}$ nécessite donc la construction ou le stockage de champs non représentés. Nous allons maintenant mettre en place l'approximation des champs statiques. Cette approche permettra de reconstruire entièrement les champs qui transitent à l'aide de quantités représentées. Il sera alors seulement nécessaire de transférer et de stocker des fonctions du temps et des champs de l'espace, ce qui devrait permettre de réduire considérablement les coûts.

2 Représentation de tous les champs

Cette seconde approche, qui sera désignée dorénavant par **P3**, consiste à représenter, sous la forme d'une superposition de champs radiaux, *toutes les quantités du problème*.

L'idée est de construire des corrections cinématiques et statiques, qui soient admissibles et représentées, en ne vérifiant la direction de recherche qu'en moyenne. Ce vérification va être réalisée par l'intermédiaire d'une expression de type erreur en relation de comportement qu'il faut minimiser [Lad01c]. Cette technique a été employée pour la première fois pour les problèmes de plasticité [Boi89]. On présente ici son extension au cas des problèmes multiphysiques, en particulier pour la partie fluide.

Comme l'approche $\frac{1}{2}$ P3, une telle technique d'approximation ne nécessite que la modification de l'étape linéaire (cf. **Figure 3.9**).

2.1 Étape linéaire avec représentation à l'itération $n + 1$

L'objectif de cette étape est d'ajouter une correction $\Delta \mathbf{s}$ à la solution \mathbf{s}_n générée par l'étape linéaire précédente. La direction de recherche (2.4) est cette fois entièrement

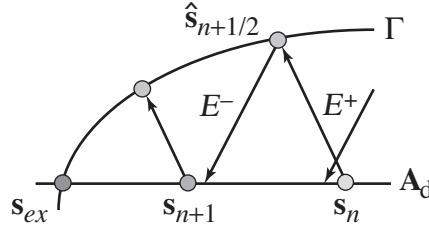


Figure 3.9 • Méthode LATIN avec P3 : admissibilité vérifiée exactement

réécrite en fonction des corrections :

$$\begin{aligned}
 \Delta\sigma - \mathbf{L}\Delta\dot{\varepsilon} + \delta\hat{\mathbf{A}} &= 0 & \text{avec} & \quad \delta\hat{\mathbf{A}} = (\mathbf{L}\hat{\varepsilon} - \hat{\sigma}) - (\mathbf{L}\dot{\varepsilon}_n - \sigma_n) = \hat{\mathbf{A}}_{n+1/2} - (\mathbf{L}\dot{\varepsilon}_n - \sigma_n) \\
 \Delta q - r\Delta p + \delta\hat{\alpha} &= 0 & \text{avec} & \quad \delta\hat{\alpha} = (r\hat{p} - \hat{q}) - (rp_n - q_n) = \hat{\alpha}_{n+1/2} - (rp_n - q_n) \\
 \Delta\underline{W} - \mathbf{H}\Delta\underline{Z} + \delta\hat{\underline{\beta}} &= 0 & \text{avec} & \quad \delta\hat{\underline{\beta}} = (\mathbf{H}\hat{\underline{Z}} - \hat{\underline{\beta}}) - (\mathbf{H}\underline{Z}_n - \underline{W}_n) = \hat{\underline{\beta}}_{n+1/2} - (\mathbf{H}\underline{Z}_n - \underline{W}_n)
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

On introduit \mathbf{A}_{d0} , l'espace homogène associé à \mathbf{A}_d . Le but est maintenant de trouver $\Delta\mathbf{s}$ dans \mathbf{A}_{d0} qui minimise cette direction de recherche écrite sous une forme de type erreur en relation de comportement [Lad01c] :

$$\frac{1}{2} \int_{[0,T]} \left(\|\Delta\sigma - \mathbf{L}\Delta\dot{\varepsilon} + \delta\hat{\mathbf{A}}\|_{\mathbf{L}^{-1}}^2 + \|\Delta q - r\Delta p + \delta\hat{\alpha}\|_{r^{-1}}^2 + \|\Delta\underline{W} - \mathbf{H}\Delta\underline{Z} + \delta\hat{\underline{\beta}}\|_{\mathbf{H}^{-1}}^2 \right) dt$$

avec :

$$\|\sigma\|_{\mathbf{L}^{-1}}^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr}[\sigma \mathbf{L}^{-1} \sigma] d\Omega, \quad \|q\|_{r^{-1}}^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} q r^{-1} q d\Omega, \quad \|\underline{W}\|_{\mathbf{H}^{-1}}^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{W} \cdot \mathbf{H}^{-1} \underline{W} d\Omega$$

2.1.1 Partie solide

On cherche les corrections admissibles à zéro, $\Delta\dot{\varepsilon} = \varepsilon(\Delta\underline{U})$ avec $\Delta\underline{U} \in \mathcal{W}_0^{[0,T]}$ et $\Delta\sigma \in \mathcal{S}_0^{[0,T]}$, qui minimisent :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega \times [0,T]} \text{Tr}[(\Delta\sigma - \mathbf{L}\Delta\dot{\varepsilon} + \delta\hat{\mathbf{A}}) \mathbf{L}^{-1} (\Delta\sigma - \mathbf{L}\Delta\dot{\varepsilon} + \delta\hat{\mathbf{A}})] d\Omega dt \tag{3.16}$$

En utilisant la propriété d'admissibilité $\int_{\Omega} \text{Tr}[\Delta\sigma \Delta\dot{\varepsilon}] d\Omega = 0$, on montre que (3.16) se découple en la recherche de la correction cinématique $\Delta\underline{U} \in \mathcal{W}_0^{[0,T]}$ telle que :

$$\forall \underline{U}^* \in \mathcal{W}_0^{[0,T]}, \quad \int_{\Omega \times [0,T]} \text{Tr}[(\mathbf{L}\Delta\dot{\varepsilon} - \delta\hat{\mathbf{A}}) \varepsilon(\underline{U}^*)] d\Omega dt = 0 \tag{3.17}$$

et de la correction statique $\Delta\sigma \in \mathcal{S}_0^{[0,T]}$ telle que :

$$\forall \sigma^* \in \mathcal{S}_0^{[0,T]}, \quad \int_{\Omega \times [0,T]} \text{Tr}[(\Delta\sigma + \delta\hat{\mathbf{A}})\mathbf{L}^{-1}\sigma^*] d\Omega dt = 0 \quad (3.18)$$

Représentation de la correction cinématique • On cherche la correction sous la forme $\Delta\hat{\varepsilon} = \varepsilon(\Delta\hat{\mathbf{U}}) = v\varepsilon(\underline{\mathbf{V}})$ où $v(t)$ est une fonction du temps et $\underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{M}})$ une fonction de l'espace. On impose que cette correction soit admissible à zéro, donc que $v\underline{\mathbf{V}} \in \mathcal{U}_0^{[0,T]}$, i.e. $\underline{\mathbf{V}} \in \mathcal{U}_0$. Pour déterminer ce couple de façon unique, on choisit par exemple la normalisation $\|\underline{\mathbf{V}}\|_{\mathbf{L}}^2 = 1$.

En prenant $\underline{\mathbf{U}}^* = v^*\varepsilon(\underline{\mathbf{V}}) + v\varepsilon(\underline{\mathbf{V}}^*)$ avec $\underline{\mathbf{V}}^* \in \mathcal{U}_0$, l'équation (3.17) conduit alors à :

$$v = \int_{\Omega} \text{Tr}[\delta\hat{\mathbf{A}}\varepsilon(\underline{\mathbf{V}})] d\Omega \quad (3.19)$$

$$\forall \underline{\mathbf{V}}^* \in \mathcal{U}_0, \quad \int_{\Omega} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{\mathbf{V}})\mathbf{L}\varepsilon(\underline{\mathbf{V}}^*)] d\Omega = \int_{[0,T]} \frac{v}{\|v\|_T^2} \int_{\Omega} \text{Tr}[\delta\hat{\mathbf{A}}\varepsilon(\underline{\mathbf{V}}^*)] d\Omega dt \quad (3.20)$$

Après discrétisation en espace, ces équations deviennent :

$$V^T L V = 1 \quad (3.21)$$

$$v = V^T B_{\sigma}^T \delta \hat{\mathbf{A}} \quad (3.22)$$

$$L V = \int_{[0,T]} \frac{v}{\|v\|_T^2} B_{\sigma}^T \delta \hat{\mathbf{A}} dt \quad (3.23)$$

Ce système couplé est résolu par la méthode du point fixe qui est initialisé par l'indicateur d'erreur en temps de l'itération précédente.

Représentation de la correction statique • On cherche la correction sous la forme $\Delta\sigma = s(t)\mathbb{S}(\underline{\mathbf{M}})$. On impose que cette correction soit admissible à zéro, donc que $s\mathbb{S} \in \mathcal{S}_0^{[0,T]}$, i.e. $\mathbb{S} \in \mathcal{S}_0$. Pour déterminer ce couple de façon unique, on choisit par exemple la normalisation $\|\mathbb{S}\|_{\mathbf{L}^{-1}}^2 = 1$.

En prenant $\sigma^* = s^*\mathbb{S} + s\mathbb{S}^*$ avec $\mathbb{S}^* \in \mathcal{S}_0$, l'équation (3.18) conduit alors à :

$$s = - \int_{\Omega} \text{Tr}[\delta\hat{\mathbf{A}}\mathbf{L}^{-1}\mathbb{S}] d\Omega \quad (3.24)$$

$$\forall \mathbb{S}^* \in \mathcal{S}_0, \quad \int_{\Omega} \text{Tr}[\mathbb{S}\mathbf{L}^{-1}\mathbb{S}^*] d\Omega = - \int_{[0,T]} \frac{s}{\|s\|_T^2} \int_{\Omega} \text{Tr}[\delta\hat{\mathbf{A}}\mathbf{L}^{-1}\mathbb{S}^*] d\Omega dt \quad (3.25)$$

qui est résolu par la méthode du point fixe. Si l'on suppose s connue, l'équation (3.25) peut être résolue par dualisation : elle traduit le fait que $\mathbf{L}^{-1}\mathbb{S} + \hat{T}$ est cinématiquement admissible à zéro, avec :

$$\hat{T} = \int_{[0,T]} \frac{s}{\|s\|_T^2} \mathbf{L}^{-1} \delta \hat{\mathbf{A}} dt$$

et donc de la forme $\mathbf{L}^{-1}\mathbb{S} + \hat{T} = \varepsilon(\underline{X})$ avec $\underline{X} \in \mathcal{U}_0$. Comme $\mathbb{S} \in \mathcal{S}_0$, le problème dualisé consiste à trouver $\underline{X} \in \mathcal{U}_0$ tel que :

$$\forall \underline{X}^* \in \mathcal{U}_0, \quad \int_{\Omega} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{X}) \mathbf{L} \varepsilon(\underline{X}^*)] d\Omega = \int_{\Omega} \text{Tr}[\hat{T} \mathbf{L} \varepsilon(\underline{X}^*)] d\Omega$$

puis à calculer $\mathbb{S} = \mathbf{L}(\varepsilon(\underline{X}) - \hat{T})$.

Si la correction cinématique $\Delta \hat{\varepsilon} = \nu \varepsilon(\underline{V})$ a déjà été calculée, le point fixe pour la correction statique peut être initialisé par $s = \nu$, ce qui donne $\underline{X} = \underline{V}$.

2.1.2 Partie fluide

On cherche cette fois-ci à trouver les corrections admissibles à zéro, $(\Delta p, \Delta \underline{Z}) \in \mathcal{G}_0^{[0,T]}$ et $(\Delta q, \Delta \underline{W}) \in \mathcal{H}_0^{[0,T]}$, qui minimisent :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega \times [0,T]} \left((\Delta q - r \Delta p + \delta \hat{\alpha}) r^{-1} (\Delta q - r \Delta p + \delta \hat{\alpha}) \right. \\ & \quad \left. + (\Delta \underline{W} - \mathbf{H} \Delta \underline{Z} + \delta \hat{\beta}) \cdot \mathbf{H}^{-1} (\Delta \underline{W} - \mathbf{H} \Delta \underline{Z} + \delta \hat{\beta}) \right) d\Omega dt \quad (3.26) \end{aligned}$$

En utilisant la propriété d'admissibilité $\int_{\Omega} (\Delta p \Delta q + \Delta \underline{Z} \cdot \Delta \underline{W}) d\Omega = 0$, on montre que (3.26) se découple en la recherche de la correction cinématique $(\Delta p, \Delta \underline{Z}) \in \mathcal{G}_0^{[0,T]}$ telle que :

$$\forall (p^*, \underline{Z}^*) \in \mathcal{G}_0^{[0,T]}, \quad \int_{\Omega \times [0,T]} \left(\Delta p r p^* + \Delta \underline{Z} \cdot \mathbf{H} \underline{Z}^* - \delta \hat{\alpha} p^* - \delta \hat{\beta} \cdot \underline{Z}^* \right) d\Omega dt = 0 \quad (3.27)$$

et de la correction statique $(\Delta q, \Delta \underline{W}) \in \mathcal{H}_0^{[0,T]}$ telle que :

$$\begin{aligned} & \forall (q^*, \underline{W}^*) \in \mathcal{H}_0^{[0,T]}, \\ & \int_{\Omega \times [0,T]} \left(\Delta q r^{-1} q^* + \Delta \underline{W} \cdot \mathbf{H}^{-1} \underline{W}^* + \delta \hat{\alpha} r^{-1} q^* + \delta \hat{\beta} \cdot \mathbf{H}^{-1} \underline{W}^* \right) d\Omega dt = 0 \quad (3.28) \end{aligned}$$

Représentation de la correction cinématique • On cherche la correction sous la forme $\Delta p = \pi P$ et $\Delta \underline{Z} = \pi \text{grad} P$ où $\pi(t)$ est une fonction du temps et $P(\underline{M})$ une fonction de l'espace. On impose que cette correction soit admissible à zéro, donc que $\pi P \in$

$\mathcal{P}_0^{[0,T]}$, i.e. $P \in \mathcal{P}_0$. Pour déterminer ce couple de façon unique, on choisit par exemple la normalisation $\|P\|_{\mathbf{H}r}^2 = 1$.

En prenant $p^* = \pi^* P + \pi P^*$ avec $P^* \in \mathcal{P}_0$ et $\underline{Z}^* = \pi^* \underline{\text{grad}} P + \pi \underline{\text{grad}} P^*$, l'équation (3.27) conduit alors à :

$$\pi = \int_{\Omega} \left(\delta \hat{\alpha} P + \delta \underline{\hat{\beta}} \cdot \underline{\text{grad}} P \right) d\Omega \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \forall P^* \in \mathcal{P}_0, \quad & \int_{\Omega} \left(PrP^* + \underline{\text{grad}} P \cdot \mathbf{H} \underline{\text{grad}} P^* \right) d\Omega \\ & = \int_{[0,T]} \frac{\pi}{\|\pi\|_T^2} \int_{\Omega} \left(\delta \hat{\alpha} P^* + \delta \underline{\hat{\beta}} \cdot \underline{\text{grad}} P^* \right) d\Omega dt \quad (3.30) \end{aligned}$$

Après discrétisation en espace, ces équations deviennent :

$$P^T [H + R] P = 1 \quad (3.31)$$

$$\pi = P^T (B_q^T \delta \hat{\alpha} + B_w^T \delta \hat{\beta}) \quad (3.32)$$

$$[H + R] P = \int_{[0,T]} \frac{\pi}{\|\pi\|_T^2} (B_q^T \delta \hat{\alpha} + B_w^T \delta \hat{\beta}) dt \quad (3.33)$$

Ce système couplé est résolu par une méthode de point fixe. L'initialisation et le critère d'arrêt sont similaires aux précédents.

Représentation de la correction statique • On cherche la correction sous la forme $\Delta q = \theta(t)Q(\underline{M})$ et $\Delta W = \theta(t)\underline{Y}(\underline{M})$. On impose que cette correction soit admissible à zéro, donc que $(\theta Q, \theta \underline{Y}) \in \mathcal{H}_0^{[0,T]}$, i.e. $(Q, \underline{Y}) \in \mathcal{H}_0$. Pour déterminer ce couple de façon unique, on choisit par exemple la normalisation :

$$\int_{\Omega} (Qr^{-1}Q + \underline{Y} \cdot \mathbf{H}^{-1} \underline{Y}) d\Omega = 1$$

En prenant $q^* = \theta^* Q + \theta Q^*$ et $\underline{W}^* = \theta^* \underline{Y} + \theta \underline{Y}^*$ avec $(Q^*, \underline{Y}^*) \in \mathcal{H}_0$, l'équation (3.28) conduit alors à :

$$\theta = - \int_{\Omega} \left(\delta \hat{\alpha} r^{-1} Q + \delta \underline{\hat{\beta}} \cdot \mathbf{H}^{-1} \underline{Y} \right) d\Omega \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \forall (Q^*, \underline{Y}^*) \in \mathcal{H}_0, \quad & \int_{\Omega} (Qr^{-1}Q^* + \underline{Y} \cdot \mathbf{H}^{-1} \underline{Y}^*) d\Omega \\ & = - \int_{[0,T]} \frac{\theta}{\|\theta\|_T^2} \int_{\Omega} \left(\delta \hat{\alpha} r^{-1} Q^* + \delta \underline{\hat{\beta}} \cdot \mathbf{H}^{-1} \underline{Y}^* \right) d\Omega dt \quad (3.35) \end{aligned}$$

qui est résolu par la méthode du point fixe. Comme précédemment, si l'on suppose que θ connue, l'équation (3.35) peut être résolue par dualisation : elle traduit le fait que $(r^{-1}Q + \hat{U}, \mathbf{H}^{-1}\underline{Y} + \hat{V})$ est cinématiquement admissible à zéro avec :

$$\hat{U} = \int_{[0,T]} \frac{\theta}{\|\theta\|_T^2} r^{-1} \delta \hat{a} dt$$

$$\hat{V} = \int_{[0,T]} \frac{\theta}{\|\theta\|_T^2} \mathbf{H}^{-1} \delta \hat{\beta} dt$$

et donc de la forme $r^{-1}Q + \hat{U} = \Pi$ et $\mathbf{H}^{-1}\underline{Y} + \hat{V} = \underline{\text{grad}}\Pi$ avec $\Pi \in \mathcal{P}_0$. Comme $(Q, \underline{Y}) \in \mathcal{H}_0$, le problème dualisé consiste à trouver $\Pi \in \mathcal{P}_0$ tel que :

$$\forall P^* \in \mathcal{P}_0, \quad \int_{\Omega} \left(\Pi r P^* + \underline{\text{grad}}\Pi \cdot \mathbf{H} \underline{\text{grad}}P^* \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left(\hat{U} r P^* + \hat{V} \cdot \mathbf{H} \underline{\text{grad}}P^* \right) d\Omega$$

puis à calculer $Q = r(\Pi - \hat{U})$ et $\underline{Y} = \mathbf{H}(\underline{\text{grad}}\Pi - \hat{V})$.

Si la correction cinématique $\Delta p = \pi P$ a déjà été calculée, le point fixe pour la correction statique peut être initialisé par $\theta = \pi$.

2.2 Étape préliminaire à l'itération $n + 1$

Rappelons à nouveau que cette étape est plus simple si l'on a pris soin d'orthogonaliser chaque fonction de l'espace ajoutée. Pour la partie solide :

$$\int_{\Omega} \text{Tr}[\underline{V}_i \mathbf{L} \underline{V}_j] d\Omega = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \text{Tr}[\underline{S}_i \mathbf{L}^{-1} \underline{S}_j] d\Omega = \delta_{ij}$$

et pour la partie fluide :

$$\int_{\Omega} \left(P_i r P_j + \underline{\text{grad}}P_i \cdot \mathbf{H} \underline{\text{grad}}P_j \right) d\Omega = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \left(Q_i r^{-1} Q_j + \underline{Y}_i \cdot \mathbf{H}^{-1} \underline{Y}_j \right) d\Omega = \delta_{ij}$$

2.2.1 Partie solide

On cherche des corrections sous la forme $\Delta \hat{\varepsilon} = \sum_j w_j \varepsilon(\underline{V}_j)$ et $\Delta \sigma = \sum_j t_j \mathbb{S}_j$, où les w_j et t_j , qu'il faut déterminer, peuvent être vues comme des corrections des fonctions du temps actuelles, alors que les \underline{V}_j et \mathbb{S}_j sont données. Les nouveaux champs seront donc :

$$\bar{\varepsilon}_{n+1} = \hat{\varepsilon}_n + \Delta \hat{\varepsilon} = v_0 \varepsilon(\underline{V}_0) + \sum_j (v_j + w_j) \varepsilon(\underline{V}_j)$$

$$\bar{\sigma}_{n+1} = \sigma_n + \Delta \sigma = s_0 \mathbb{S}_0 + \sum_j (s_j + t_j) \mathbb{S}_j$$

Si les fonctions de l'espace ont été orthonormalisées, la minimisation de la direction de recherche sur l'ensemble des champs admissibles conduit à :

$$w_j = \int_{\Omega} \text{Tr}[\underline{\varepsilon}(\underline{V}_j) \delta \hat{\mathbf{A}}] d\Omega \quad \text{et} \quad t_j = - \int_{\Omega} \text{Tr}[\underline{\mathbb{S}}_j \mathbf{L}^{-1} \delta \hat{\mathbf{A}}] d\Omega$$

Une technique équivalente consiste à recalculer directement les nouvelles fonctions du temps \bar{v}_j et \bar{s}_j et non leur correction. Les nouveaux champs seront alors :

$$\begin{aligned} \bar{\underline{\varepsilon}}_{n+1} &= \nu_0 \underline{\varepsilon}(\underline{V}_0) + \sum_j \bar{v}_j \underline{\varepsilon}(\underline{V}_j) \\ \bar{\underline{\mathbb{S}}}_{n+1} &= s_0 \underline{\mathbb{S}}_0 + \sum_j \bar{s}_j \underline{\mathbb{S}}_j \end{aligned}$$

On montre dans ce cas que :

$$\begin{aligned} \bar{v}_j &= \int_{\Omega} \text{Tr}[\underline{\varepsilon}(\underline{V}_j) (s_0 \underline{\mathbb{S}}_0 - \nu_0 \mathbf{L} \underline{\varepsilon}(\underline{V}_0) + \hat{\mathbf{A}})] d\Omega \\ \bar{s}_j &= - \int_{\Omega} \text{Tr}[\underline{\mathbb{S}}_j \mathbf{L}^{-1} (s_0 \underline{\mathbb{S}}_0 - \nu_0 \mathbf{L} \underline{\varepsilon}(\underline{V}_0) + \hat{\mathbf{A}})] d\Omega \end{aligned}$$

2.2.2 Partie fluide

On cherche des corrections sous la forme $\Delta p = \sum_j \omega_j P_j$, $\Delta \underline{Z} = \sum_j \omega_j \underline{\text{grad}} P_j$ et $\Delta q = \sum_j \vartheta_j Q_j$, $\Delta \underline{W} = \sum_j \vartheta_j \underline{Y}_j$ où les ω_j et ϑ_j sont les fonctions du temps à déterminer alors que les P_j , Q_j et \underline{Y}_j sont données. Les nouveaux champs seront donc :

$$\begin{aligned} \bar{p}_{n+1} &= \pi_0 P_0 + \sum_j (\pi_j + \omega_j) P_j & \bar{q}_{n+1} &= \theta_0 Q_0 + \sum_j (\theta_j + \vartheta_j) Q_j \\ \bar{\underline{Z}}_{n+1} &= \pi_0 \underline{\text{grad}} P_0 + \sum_j (\pi_j + \omega_j) \underline{\text{grad}} P_j & \bar{\underline{W}}_{n+1} &= \theta_0 \underline{Y}_0 + \sum_j (\theta_j + \vartheta_j) \underline{Y}_j \end{aligned} \quad \text{et}$$

À nouveau, si les fonctions de l'espace ont été orthonormalisées, la minimisation de la direction de recherche sur l'ensemble des champs admissibles conduit à :

$$\omega_j = \int_{\Omega} \left(P_j \delta \hat{\alpha} + \underline{\text{grad}} P_j \cdot \delta \underline{\hat{\beta}} \right) d\Omega \quad \text{et} \quad \vartheta_j = - \int_{\Omega} \left(Q_j r^{-1} \delta \hat{\alpha} + \underline{Y}_j \cdot \mathbf{H}^{-1} \delta \underline{\hat{\beta}} \right) d\Omega$$

Une technique équivalente consiste à recalculer directement les nouvelles fonctions du temps $\bar{\pi}_j$ et $\bar{\theta}_j$ et non leur correction. Les nouveaux champs seraient alors :

$$\begin{aligned} \bar{p}_{n+1} &= \pi_0 P_0 + \sum_j \bar{\pi}_j P_j & \bar{q}_{n+1} &= \theta_0 Q_0 + \sum_j \bar{\theta}_j Q_j \\ \bar{\underline{Z}}_{n+1} &= \pi_0 \underline{\text{grad}} P_0 + \sum_j \bar{\pi}_j \underline{\text{grad}} P_j & \bar{\underline{W}}_{n+1} &= \theta_0 \underline{Y}_0 + \sum_j \bar{\theta}_j \underline{Y}_j \end{aligned} \quad \text{et}$$

2.3 Solution initiale

Nous allons présenter la méthode qui permet de construire une solution initiale, pour démarrer l'algorithme LATIN, dans le cas où les chargements ne dépendent chacun que d'un seul paramètre :

$$\begin{aligned} \underline{U}_d &= d(t)\underline{D}(\underline{M}) & \text{et} & & p_d &= g(t)G(\underline{M}) \\ \underline{F}_d &= f(t)\underline{F}(\underline{M}) & & & w_d &= h(t)H(\underline{M}) \end{aligned}$$

2.3.1 Partie solide

On cherche une solution initiale en taux de déformations $\dot{\varepsilon}_0 = \varepsilon(\underline{\dot{U}}_0)$ avec $\underline{U}_0 = u_0(t)\underline{V}_0(\underline{M}) \in \mathcal{U}^{[0,T]}$ et en contraintes $\sigma_0 = s_0(t)\underline{S}_0(\underline{M}) \in \mathcal{S}^{[0,T]}$. L'admissibilité cinématique de \underline{U}_0 implique que $\underline{U}_0|_{\partial_1\Omega} = u_0\underline{V}_0|_{\partial_1\Omega} = d\underline{D}$. On choisit de prendre $u_0 = d$, d'où $\underline{V}_0|_{\partial_1\Omega} = \underline{D}$. Pour qu'il soit entièrement déterminé, on décide de chercher \underline{V}_0 en ajoutant la condition :

$$\forall \underline{V}^* \in \mathcal{U}_0, \quad \int_{\Omega} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{V}_0)\mathbf{L}_{\varepsilon}(\underline{V}^*)] d\Omega = 0$$

D'autres choix sont possibles, mais celui-ci, relativement simple, a l'avantage de réutiliser le même opérateur que pour les itérations et ne conduit donc pas à un surcoût important.

Par ailleurs, l'admissibilité statique de σ_0 s'écrit

$$\forall t \in [0, T], \quad \forall \underline{V}^* \in \mathcal{U}_0, \quad \int_{\Omega} \text{Tr}[\sigma_0 \varepsilon(\underline{V}^*)] d\Omega = \int_{\partial_2\Omega} f \underline{F} \cdot \underline{V}^* dS$$

On choisit de prendre $s_0 = f$ et de chercher \underline{S}_0 sous la forme $\underline{S}_0 = \mathbf{L}_{\varepsilon}(\underline{X})$ avec $\underline{X} \in \mathcal{U}_0$. Ce choix conduit à chercher $\underline{X} \in \mathcal{U}_0$ tel que :

$$\forall \underline{V}^* \in \mathcal{U}_0, \quad \int_{\Omega} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{X})\mathbf{L}_{\varepsilon}(\underline{V}^*)] d\Omega = \int_{\partial_2\Omega} \underline{F} \cdot \underline{V}^* dS$$

À nouveau, le même opérateur est utilisé pour déterminer \underline{X} .

2.3.2 Partie fluide

De manière analogue, on cherche la solution initiale sous la forme :

$$(p_0, \underline{Z}_0) = (\pi_0(t)P_0(\underline{M}), \pi_0(t) \underline{\text{grad}} P_0(\underline{M})) \in \mathcal{G}^{[0,T]}$$

et

$$(q_0, \underline{W}_0) = (\theta_0(t)Q_0(\underline{M}), \theta_0(t)\underline{Y}_0(\underline{M})) \in \mathcal{H}^{[0,T]}$$

L'admissibilité cinématique de (p_0, \underline{Z}_0) implique que $p_0|_{\partial_3\Omega} = \pi_0 P_0|_{\partial_3\Omega} = gG$. On choisit de prendre $\pi_0 = g$, d'où $P_0|_{\partial_3\Omega} = G$. Pour qu'il soit entièrement déterminé, on décide de chercher P_0 en ajoutant la condition :

$$\forall P^* \in \mathcal{P}_0, \quad \int_{\Omega} \left(P_0 r P^* + \underline{\text{grad}} P_0 \cdot \mathbf{H} \underline{\text{grad}} P^* \right) d\Omega = 0$$

L'admissibilité statique de (q_0, \underline{W}_0) s'écrit :

$$\forall t \in [0, T], \quad \forall P^* \in \mathcal{P}_0, \quad \int_{\Omega} \left(q P^* + \underline{W} \cdot \underline{\text{grad}} P^* \right) d\Omega = \int_{\partial_4\Omega} h H P^* dS dt$$

On choisit de prendre $\theta_0 = h$ et de chercher Q_0 sous la forme $Q_0 = r\Pi$ et \underline{Y}_0 sous la forme $\underline{Y}_0 = \mathbf{H} \underline{\text{grad}} \Pi$ avec $\Pi \in \mathcal{P}_0$. Ce choix conduit à chercher $\Pi \in \mathcal{P}_0$ tel que :

$$\forall P^* \in \mathcal{P}_0, \quad \int_{\Omega} \left(\Pi r P^* + \underline{\text{grad}} \Pi \cdot \mathbf{H} \underline{\text{grad}} P^* \right) d\Omega = \int_{\partial_4\Omega} G P^* dS dt$$

2.4 Résultats et comparaisons

2.4.1 En terme de coût

Dans un premier temps, on reprend le problème de consolidation à force imposée de la section 4.1 du chapitre 2, mais cette fois dans le cas unidimensionnel (cf. **Figure 3.10**). L'intervalle de temps étudié est $T = 1$ s et les chargements $p_1 = 10$ MPa et $p_0 = 0,1$ MPa avec $t_1 = T/2$. La condition initiale en pression est $p(t = 0) = p_0$ et la hauteur $L = 5$ m de la structure est discrétisée en 100 éléments (P2 pour le déplacement et P1 pour la pression). L'intervalle de temps est discrétisé en $n_T = 32$ pas de temps. Les paramètres des directions de recherche sont fixés aux valeurs qui semblent optimales : $t_m = 9 \cdot 10^{-3} t_c$ et $t_h = 8 \cdot 10^{-3} t_c$, avec $t_c = 9,3$ s. Dans les tests suivants, les pas de temps seront plus grands que le pas de temps critique $\Delta t_{\min} = 0,17$ ms calculé à partir du critère (1.7).

La simulation est réalisée en utilisant la LATIN sans représentation (0P3) et avec les deux versions d'approximation ($\frac{1}{2}$ P3 et P3). La procédure de saut éventuel des étapes linéaires n'est pas activée et le nombre de sous-itérations dans le point fixe de ces étapes est fixé à 1. La **Figure 3.11** regroupe les évolutions des erreurs vis-à-vis de la

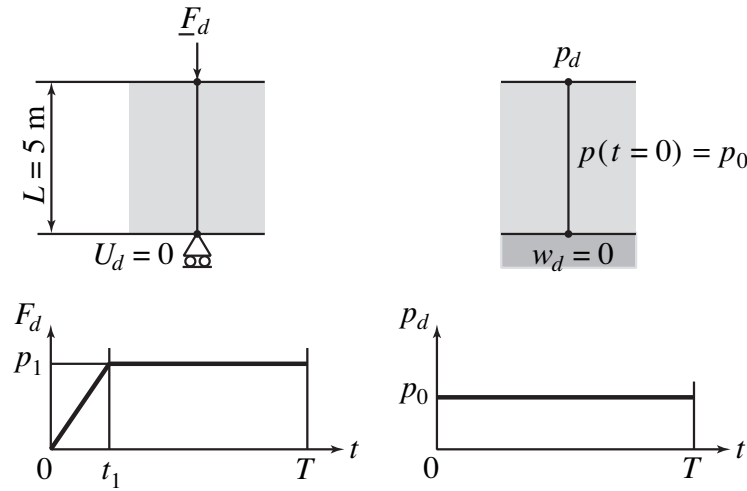


Figure 3.10 • Cas test avec effort imposé, conditions aux limites sur les parties solide et fluide

référence générée par l’approche monolithique. On peut constater que les différentes techniques d’approximation n’affectent pas le taux de convergence de la méthode. Elles permettent en revanche de diminuer le coût de la simulation.

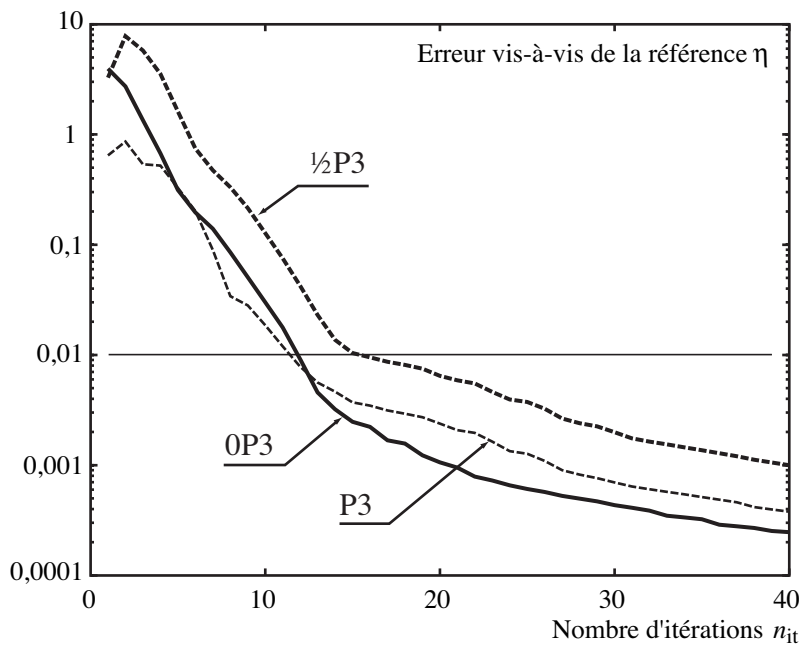


Figure 3.11 • Convergence LATIN 0P3, 1/2P3 et P3

Le **Tableau 3.4** regroupe en effet le nombre d’itérations n_{it} et les nombres de résolutions globales (n_S, n_F) nécessaires pour atteindre une erreur η de 1%. Le gain en terme de coût entre les versions 0P3 et 1/2P3 est évident. En revanche, l’intérêt de la version

P3 est moins immédiat du strict point de vue du coût. Comme on le verra par la suite, c'est du point de la modularité que cette version prendra tout son sens.

LATIN 0P3		LATIN ½P3		LATIN P3	
n_{it}	$n_S + n_F$	n_{it}	$n_S + n_F$	n_{it}	$n_S + n_F$
12	384+384	16	16+16	12	24+24

Tableau 3.4 • Coûts LATIN 0P3, ½P3 et P3

2.4.2 En terme de stockage et de transfert

Lorsque la technique d'approximation P3 est utilisée, les champs de l'espace et du temps qui sont utilisés dans les différentes étapes de la stratégie (e.g. \mathbf{A}_{n+1} , α_{n+1} et β_{n+1}), ou lors du post-traitement, peuvent être construits entièrement à partir de quantités représentées. Les informations qui transitent entre les physiques ne sont donc que des fonctions du temps et des champs de l'espace, ce qui permet de réduire considérablement les coûts de stockage et de transfert.

3 Exemple d'un filtre poreux

À titre d'illustration, on s'intéresse à présent au comportement d'un filtre constitué d'un matériau poreux.

3.1 Description du problème

On considère le filtre poreux cylindrique dont la section carrée est représentée sur la **Figure 3.12**. Dans chacun des trous circule un fluide à la pression p_d , ce qui se traduit en terme de conditions aux limites par une pression imposée p_d sur la partie fluide et une force $\underline{F}_d = -p_d \underline{n}$ sur la partie solide du milieu poreux. On considère en outre que les bords extérieurs sont libres et soumis à la pression atmosphérique supposée nulle.

Le problème est traité sous une hypothèse de déformations planes et, en utilisant les symétries, on se limite au quart de la section. La **Figure 3.13** représente le maillage du domaine en utilisant des éléments identiques au cas de la section 4.1 du chapitre 2.

L'intervalle de temps étudié est $T = 0,36$ s et les chargements $p_1 = 0,386$ GPa et $p_2 = 0,772$ GPa avec $t_1 = \frac{1}{3}T$, $t_2 = \frac{9}{15}T$, $t_3 = \frac{11}{15}T$ et $t_4 = t_3 + \frac{1}{120}T$. La condition initiale

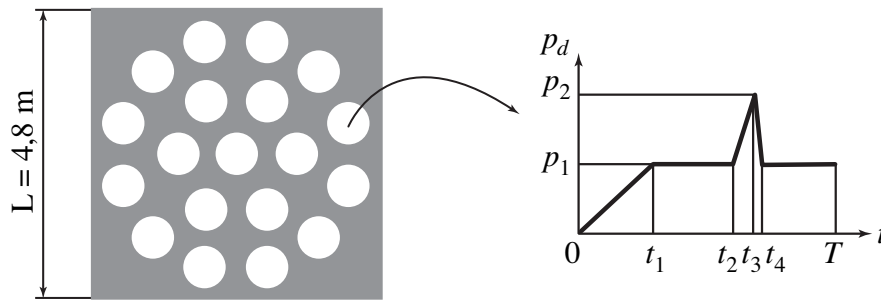


Figure 3.12 • Géométrie du filtre

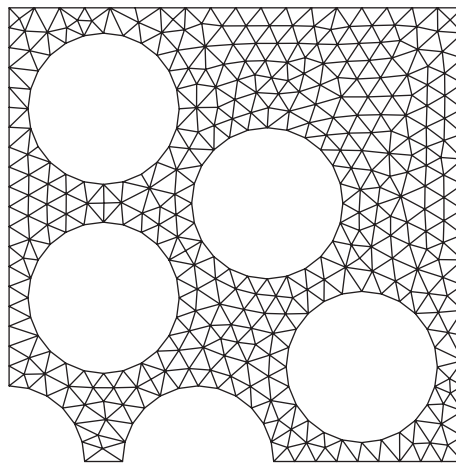


Figure 3.13 • Maillage d'un quart du filtre

en pression est $p(t = 0) = 0$. On suppose que le filtre est en grès de Béréa saturé d'eau, dont les caractéristiques ont été présentées dans le **Tableau 2.1**. L'intervalle de temps est discrétisé en $n_T = 120$ pas. Les paramètres des directions de recherche (2.11) ont été optimisés et fixés à $t_m = 0,007 t_c$ et $t_h = 0,003 t_c$.

3.2 Résultats

La **Figure 3.14** présente la répartition de la déformation principale et la **Figure 3.15** celle de la pression dans le domaine aux instants t_1 , t_3 et t_4 . Il est intéressant de remarquer que les déformations sont concentrées entre les trous, qu'à l'instant t_4 , la haute pression baisse par transfert de fluide et qu'un « front » de basse pression semble apparaître. La **Figure 3.16** représente l'évolution de la pression maximale dans le domaine au cours du temps. On constate qu'à l'instant t_4 , la pression maximale est supérieure à la pression maximale imposée p_2 .

La **Figure 3.17** regroupe l'évolution des erreurs η et des indicateurs e pour la LATIN

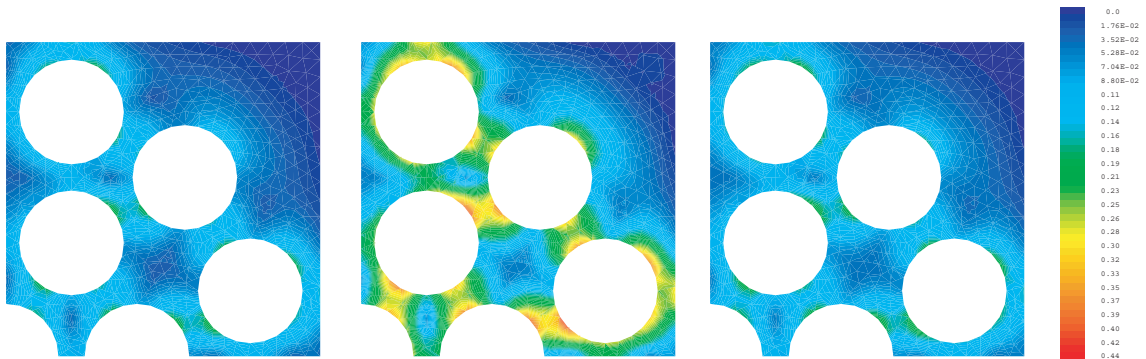


Figure 3.14 • Évolution de la déformation à t_1 , t_3 et t_4

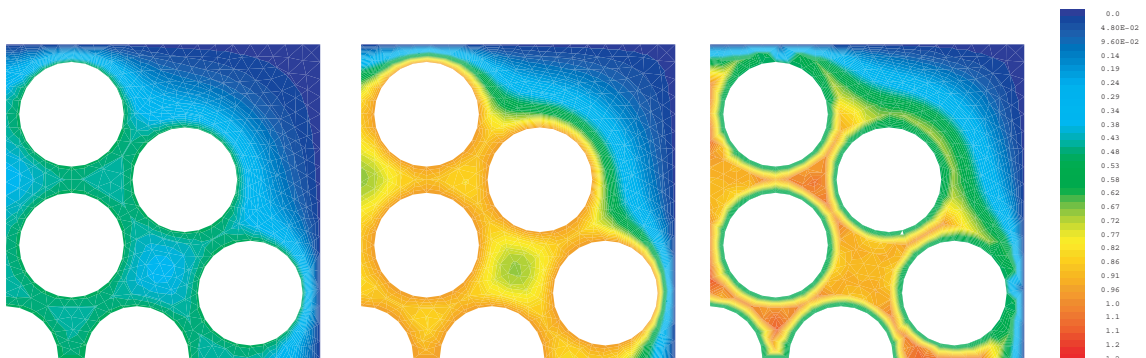


Figure 3.15 • Évolution de la pression à t_1 , t_3 et t_4

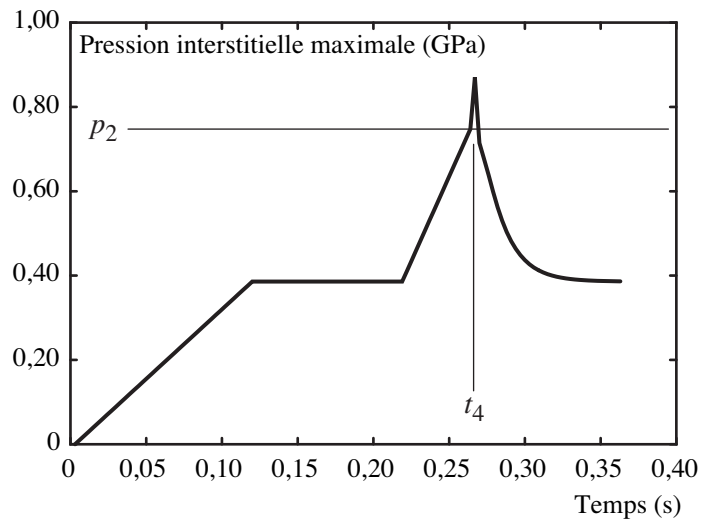


Figure 3.16 • Évolution de la pression interstitielle maximale

OP3 et avec les approximations $\frac{1}{2}$ P3 et P3. On constate à nouveau que les techniques d'approximation n'affectent pas la convergence de la méthode et que l'indicateur e est

représentatif de l'erreur η .

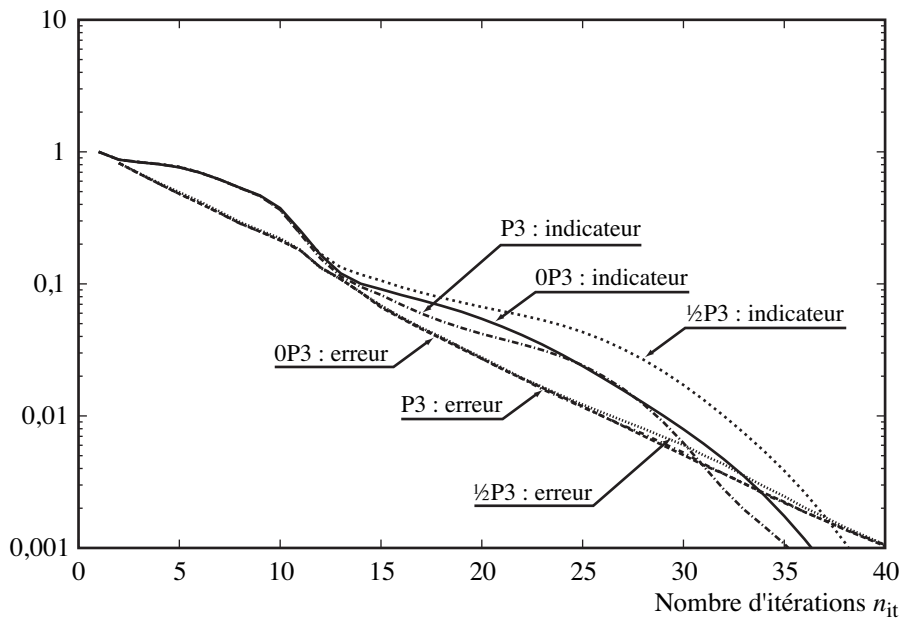


Figure 3.17 • Évolution des erreurs vs. itérations

4 Conclusions

Dans le chapitre précédent, on avait pu constater que la méthode LATIN n'était pas très compétitive en terme de coût de calcul si le troisième point de la méthode n'était pas implanté. Dans ce chapitre, on a présenté et testé deux types d'approximation sous forme de chargements radiaux. Le premier, qui consiste à approximer seulement les champs cinématiques, permet d'obtenir de très bons résultats en terme de coût, sans dégrader le taux de convergence de la méthode. Le second, qui consiste à approximer tous les champs, est très légèrement plus coûteux mais permet d'accroître la modularité de la stratégie en réduisant le volume d'informations à échanger entre les physiques dans le cas du couplage de codes, ainsi que le coût de stockage.

Notons que, dans ces cas, la convergence de la méthode LATIN n'a pas été prouvée. Cependant, les essais numériques tendent à montrer la convergence de cette technique.

Les aspects multiéchelles en temps

DANS CE CHAPITRE, on montre comment le concept d'interface entre physiques permet de prendre en compte de manière naturelle les aspects multiéchelles en temps inhérents à la cohabitation de plusieurs physiques. Ces travaux ont donné lieu à un article paru [Dur03b]. Dans un second temps, on discute la possibilité d'utiliser un schéma d'intégration en temps du type Galerkin discontinu afin d'augmenter la souplesse de la méthode.

1 Motivations

Lors d'une simulation, la description de tous les phénomènes à une même échelle temporelle peut parfois s'avérer inutile et donc néfaste du point de vue de l'efficacité. C'est par exemple le cas lors de la simulation des problèmes multiphysiques, dans lesquels les phénomènes peuvent avoir des échelles très différentes, mais aussi lorsqu'une solution temporelle fine n'a d'intérêt que dans une zone spatiale limitée de la structure. Il est alors important de tirer parti du caractère multiéchelle du problème afin de proposer une stratégie efficace et modulaire. Il serait en particulier dommage, si l'on a recours au couplage de codes lors de la résolution, d'avoir à forcer chacun d'eux à utiliser des échelles de temps identiques. Pour les structures hétérogènes, une technique d'homogénéisation en temps a été introduite dans [Fis01, Yu02b]. Une autre approche, dite « pararéel », dans laquelle la solution est corrigée itérativement par une méthode inspirée des techniques multigrilles (en espace), a été décrite dans [Lio01, Mad02], puis adaptée au cas des problèmes d'interaction fluide-structure dans [Far03]. Dans le cadre des structures fortement hétérogènes, une technique d'homogénéisation en temps (mais aussi en espace), fondée sur la méthode LATIN, a été présentée dans [Lad02a, Lad03].

Le problème de la cohabitation de discrétisations en temps différentes doit aussi

être abordé lorsque plusieurs techniques de calculs sont introduites pour s'adapter aux spécificités temporelles d'un problème donné. On peut citer de récents travaux sur le couplage de schémas d'intégration en dynamique, avec utilisation de pas de temps de tailles différentes [Gra01a, Com02, Gra03] (explicite avec de petits pas de temps sur une partie de la structure, implicite avec des pas plus grands dans l'autre partie, avec utilisation éventuelle de maillages spatiaux différents). Pour le couplage de modèles linéaires et non linéaires, une stratégie qui permet aussi d'utiliser des maillages spatiaux différents a été proposée dans [Fau03].

Dans le cadre des problèmes multiphysiques, comme l'aéroélasticité, le couplage est le plus souvent traité en sous-itérant en temps sur une des physiques, généralement la partie fluide. La **Figure 4.1** montre des exemples de cette technique lorsqu'elle est mise en place dans les méthodes de partitionnement décrites dans [Pip95b, Far00].

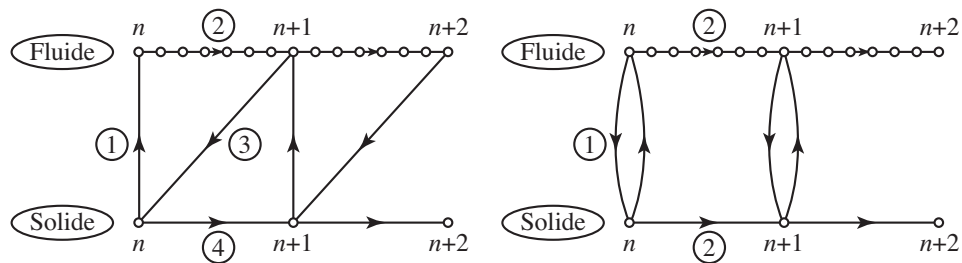


Figure 4.1 • Méthodes de partitionnement avec sous-itérations en temps sur le fluide

Dans la stratégie LATIN pour le multiphysique, l'utilisation d'échelles de temps différentes pour la partie solide et la partie fluide n'affecte pas l'étape linéaire, dans laquelle tous les calculs sont indépendants pour chacune des physiques. Seule l'étape locale, qui recouple solide et fluide au travers des propriétés de l'interface entre physiques, nécessite d'être adaptée. Dans la section suivante, nous allons présenter les modifications qu'il est nécessaire de mettre en place. Il faut noter que cette technique est complètement indépendante de la stratégie d'approximation des inconnues qui a été décrite dans le chapitre 3.

2 Mise en place de l'approche multiéchelle

2.1 Introduction d'une discrétisation de l'interface

On note $[0, T]_S$ la discrétisation en temps utilisée pour les quantités solides et $[0, T]_F$ celle utilisée pour les quantités fluides. Durant l'étape linéaire, les deux physiques sont

découplées : on utilise $[0, T]_S$ lorsqu'il s'agit de discrétiser en temps le problème solide et $[0, T]_F$ lorsqu'il s'agit du problème fluide.

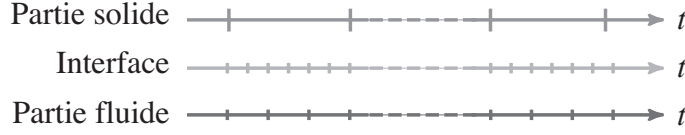


Figure 4.2 • Discrétisations des parties solide et fluide et de l'interface

On introduit maintenant une troisième discrétisation $[0, T]_I$, qui sera supposée être celle de l'interface entre les physiques (cf. **Figure 4.2**). Les champs discrétisés sur les différents maillages seront notés respectivement $(\cdot)_S$, $(\cdot)_F$ et $(\cdot)_I$.

On suppose avoir à notre disposition des opérateurs permettant le transfert des champs d'une discrétisation en temps à une autre :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{IS} : [0, T]_S &\rightarrow [0, T]_I & \mathbf{P}_{SI} : [0, T]_I &\rightarrow [0, T]_S \\ \mathbf{P}_{IF} : [0, T]_F &\rightarrow [0, T]_I & \mathbf{P}_{FI} : [0, T]_I &\rightarrow [0, T]_F \end{aligned}$$

de telle sorte que le champ de contraintes σ_S , exprimé sur $[0, T]_S$, peut être transféré en σ_I , exprimé sur $[0, T]_I$, par la relation : $\sigma_I = \mathbf{P}_{IS}\sigma_S$.

Les relations de comportement (1.3) étant considérées comme des propriétés de l'interface entre les physiques, elles doivent être vérifiées sur $[0, T]_I$:

$$\hat{\sigma}_I = \mathbf{D}\hat{\varepsilon}_I - b\hat{p}_I\mathbf{I}, \quad \hat{q}_I = \frac{1}{Q}\hat{p}_I + b\text{Tr}\hat{\varepsilon}_I \quad \text{et} \quad \underline{\hat{W}}_I = \mathbf{H}\hat{\underline{Z}}_I$$

La direction de recherche E^+ (2.1), réécrite sur l'interface, devient :

$$\begin{aligned} (\hat{\sigma}_I - \mathbf{P}_{IS}\sigma_{Sn}) + \mathbf{L}(\hat{\varepsilon}_I - \mathbf{P}_{IS}\varepsilon_{Sn}) &= 0 \\ (\hat{q}_I - \mathbf{P}_{IF}q_{Fn}) + r(\hat{p}_I - \mathbf{P}_{IF}p_{Fn}) &= 0 \\ (\underline{\hat{W}}_I - \mathbf{P}_{IF}\underline{W}_{Fn}) + \mathbf{H}(\hat{\underline{Z}}_I - \mathbf{P}_{IF}\underline{Z}_{Fn}) &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

L'étape locale (2.2) est donc transformée en :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\hat{\varepsilon}_I + \mathbf{D}\hat{\varepsilon}_I - b\hat{p}_I\mathbf{I} &= \mathbf{P}_{IS}\mathbf{A}_{Sn} \\ \frac{1}{Q}\hat{p}_I + r\hat{p}_I + b\text{Tr}\hat{\varepsilon}_I &= \mathbf{P}_{IF}\alpha_{Fn} \\ 2\mathbf{H}\hat{\underline{Z}}_I &= \mathbf{P}_{IS}\underline{\beta}_{Fn} \end{aligned} \tag{4.2}$$

dans lequel les seconds membres proviennent de l'étape linéaire précédente et sont donc exprimés sur les discrétisations solide et fluide :

$$\mathbf{A}_{Sn} = \sigma_{Sn} + \mathbf{L}\dot{\hat{\mathbf{x}}}_{Sn}, \quad \alpha_{Fn} = q_{Fn} + r p_{Fn} \quad \text{et} \quad \underline{\beta}_{Fn} = \underline{W}_{Fn} + \mathbf{H}\underline{Z}_{Fn}$$

Une fois que ces quantités ont été transférées sur l'interface, l'étape locale (4.2) est similaire à celle du cas monoéchelle (2.2) et permet de construire $\hat{\hat{\mathbf{x}}}_I$, \hat{p}_I et $\hat{\hat{\mathbf{z}}}_I$. Les quantités duales $\hat{\sigma}_I$, \hat{q}_I et $\hat{\underline{W}}_I$ sont ensuite calculées en utilisant la direction de recherche (4.1). Finalement, les différents champs sont renvoyés sur leurs discrétisations respectives pour poursuivre par une nouvelle étape linéaire.

Il est clair que la difficulté majeure de cette étape est la construction des opérateurs de transfert entre les différentes discrétisations. Dans la section suivante, nous allons proposer une stratégie de passage entre deux grilles temporelles.

2.2 Description des variables aux échelles micro et macro

La méthode que nous allons présenter est une adaptation au cas temporel de la stratégie micro-macro initialement proposée dans [Lad99b, Lad01b] pour résoudre les problèmes multiéchelles en espace. Elle consiste à séparer additivement les inconnues \mathbf{s} en une partie \mathbf{s}^M , dite *macro*, et un complément \mathbf{s}^m , qualifié de *micro* :

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}^M + \mathbf{s}^m$$

Dans tout ce chapitre, les notations $(\cdot)^M$ et $(\cdot)^m$ désigneront respectivement les échelles macro et micro en temps.

Soit $\mathcal{F}^{[0,T]}$ l'espace des fonctions définies sur $[0, T]$, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : (\mathcal{F}^{[0,T]})^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longmapsto \langle f, g \rangle = \int_{[0,T]} f g \, dt \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{F}_M^{[0,T]}$ un sous-espace de dimension finie de $\mathcal{F}^{[0,T]}$, donné *a priori*. La partie macro d'une fonction f de $\mathcal{F}^{[0,T]}$ est définie comme sa projection orthogonale au sens de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur l'espace macro $\mathcal{F}_M^{[0,T]}$ au moyen d'un projecteur π :

$$f^M = \pi f$$

Le complément micro est alors simplement calculé comme la différence entre la fonction f et sa partie macro :

$$f^m = f - f^M = (\mathbf{id} - \pi) f$$

où \mathbf{id} désigne l'application identité sur $\mathcal{F}^{[0,T]}$. Le sous-espace correspondant à f^m est noté $\mathcal{F}_m^{[0,T]}$.

La partie macro f^M d'une fonction f de $\mathcal{F}^{[0,T]}$ est donc définie par :

$$\forall g^M \in \mathcal{F}_M^{[0,T]}, \quad \langle f, g^M \rangle = \langle f^M, g^M \rangle$$

Notons qu'avec ce choix, il y a séparation des « énergies » entre les échelles macro et micro :

$$\forall (f, g) \in (\mathcal{F}^{[0,T]})^2, \quad \langle f, g \rangle = \langle f^M, g^M \rangle + \langle f^m, g^m \rangle$$

Si l'on suppose que le sous-espace $\mathcal{F}_M^{[0,T]}$ est de dimension $n_M + 1$ et que \mathbf{e}^M en est une base orthonormée :

$$\mathbf{e}^M = \left\{ e_k^M \right\}_{k=0}^{n_M}$$

le projecteur π peut être explicité par :

$$f^M = \pi f = \sum_{k=0}^{n_M} \langle f, e_k^M \rangle e_k^M \quad (4.3)$$

Notons que cette décomposition micro-macro est réalisée au niveau continu et ne suppose pas de discrétisation.

Introduisons une partition de l'intervalle $[0, T]$ en n_M sous-intervalles I_k :

$$[0, T]_M = \left\{ I_k = [T_{k-1}, T_k] \right\}_{k=1}^{n_M}$$

avec $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_{n_M} = T$. Dans la suite, $\mathcal{F}_M^{[0,T]}$ sera défini comme le sous-espace des fonctions continues, affines sur chaque I_k . Une base orthonormée \mathbf{e}^M peut aisément être construite en appliquant une procédure du Schmidt sur la base usuelle de $\mathcal{F}_M^{[0,T]}$. La **Figure 4.3** représente alors un exemple de fonction f et de sa partie macro.

Remarque 1 • Contrairement à une approche hiérarchique, les valeurs $f^M(T_k)$ et $f(T_k)$ ne sont pas forcément égales.

Remarque 2 • Dans cet exemple, $\mathcal{F}_M^{[0,T]}$ est un sous-espace de fonctions continues, le projecteur est donc global sur l'ensemble de l'échelle de temps macro. Ceci n'est pas l'unique choix possible, comme on le verra par la suite.

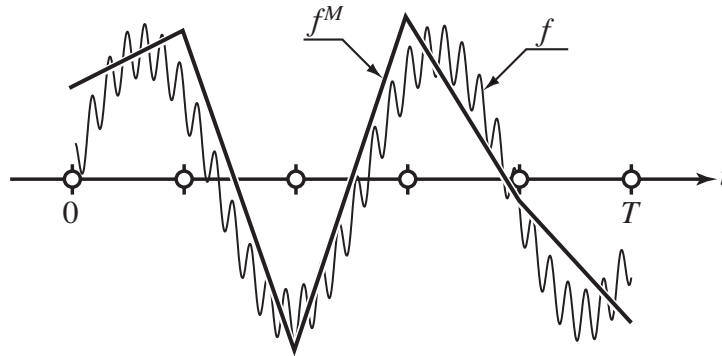


Figure 4.3 • Exemple d'une fonction f et de sa partie macro f^M

Remarque 3 • Si l'on fait l'analogie entre cette stratégie micro-macro en temps et celle en espace dont elle est inspirée, il faut noter qu'ici la partie macro est continue entre chaque pas de temps. La **Figure 4.4** représente un exemple de partie macro discontinue dans un problème en espace [Gui04].

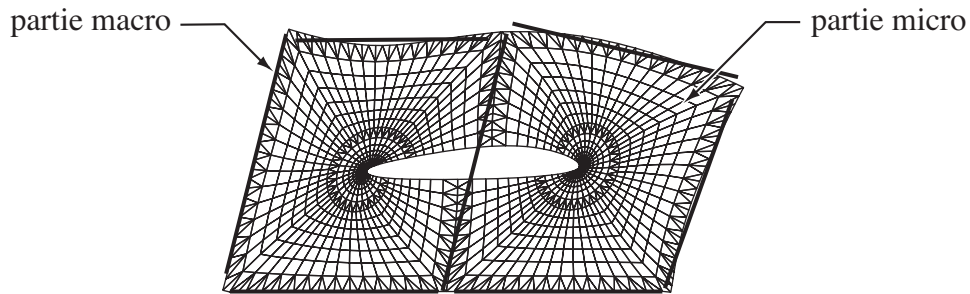


Figure 4.4 • Discontinuité de la partie macro

2.3 Choix des discrétisations

Nous allons introduire des discrétisations en temps différentes pour chacune des physiques. Pour la partie fluide, on discrétise $[0, T]$ en n sous-intervalles :

$$[0, T]_F = \left\{ i_k = [t_{k-1}, t_k] \right\}_{k=1}^n \quad \text{avec} \quad 0 = t_0 < \dots < t_n = T$$

et pour la partie solide, en n_M sous-intervalles :

$$[0, T]_S = \left\{ I_k = [T_{k-1}, T_k] \right\}_{k=1}^{n_M} \quad \text{avec} \quad 0 = T_0 < \dots < T_{n_M} = T$$

On choisit de prendre $n_M \leq n$. La **Figure 4.5** représente un cas où les discrétisations sont emboîtées, ce qui n'a rien d'obligatoire dans la démarche.



Figure 4.5 • Un exemple de discrétisations en temps

Enfin, on choisit d'exprimer les quantités fluides à l'aide de leurs parties macro et micro, *e.g.* :

$$p = p^M + p^m \quad \text{et} \quad q = q^M + q^m$$

tandis que les quantités solides le sont seulement à l'aide de leur partie macro, *e.g.* :

$$\sigma = \sigma^M \quad \text{et} \quad \varepsilon = \varepsilon^M$$

Ce choix, fait *a priori*, sera justifié dans la suite. On peut cependant lui donner une interprétation physique : l'échelle macro a été définie comme celle qui est adaptée pour décrire l'évolution des quantités solides. Les quantités fluides sont supposées nécessiter une discrétisation plus fine ; la partie complémentaire à ajouter pour cela est vue comme l'échelle micro.

Dans un premier temps, on décide de prendre comme discrétisation en temps de l'interface $[0, T]_I$, la plus fine des deux discrétisations. Dans notre cas :

$$[0, T]_I = [0, T]_F$$

ce qui revient à prendre :

$$\mathbf{P}_{FI} = \mathbf{P}_{IF} = \mathbf{id}, \quad \mathbf{P}_{SI} = \boldsymbol{\pi} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_{IS} = \mathbf{P} \quad (4.4)$$

où $\boldsymbol{\pi}$ le projecteur macro défini en (4.3) et \mathbf{P} un projecteur qui fait l'interpolation linéaire sur la grille fluide d'un champ discrétisé sur la grille solide.

2.4 Étape locale à l'itération $n + 1/2$

Le choix qui vient d'être proposé pour la discrétisation en temps de l'interface et les opérateurs (4.4) conduit à réécrire le système (4.2) sous la forme :

$$\mathbf{L}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_S + \mathbf{D}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_S = \mathbf{A}_{Sn} + b(\boldsymbol{\pi}\hat{p}_F)\mathbf{I} \quad (4.5a)$$

$$\frac{1}{Q}\hat{p}_F + r\hat{p}_F = \alpha_{Fn} - b(\mathbf{P}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_S) \quad (4.5b)$$

$$2\mathbf{H}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_F = \underline{\boldsymbol{\beta}}_{Fn} \quad (4.5c)$$

dans laquelle on note dorénavant $e = \text{Tr}\hat{\varepsilon}$. L'équation (4.5a) peut alors être traitée sur $[0, T]_S$ alors que (4.5b) peut être traitée sur $[0, T]_F$. La résolution de (4.5c) sur $[0, T]_F$ est, là encore, conduite *a posteriori* et sans problème particulier.

On se propose de résoudre ce nouveau système local à l'étape $n + 1/2$ en utilisant une méthode de point fixe. La pression est initialisée par $\hat{p}_F = p_{Fn}$; une fois \hat{p}_F connue, on peut calculer $\hat{\varepsilon}_S$ en utilisant (4.5a), puis \hat{p}_F en utilisant (4.5b). Cette démarche est décrite par l'**Algorithme 4.1**. Le choix du nombre d'itérations du point fixe sera discuté dans la suite.

Initialisation	$\hat{p}_F \leftarrow p_{Fn}$
<i>Boucle sur les itérations du point fixe</i>	
Prise de la partie macro de \hat{p}_F	$\hat{p}_S^p \leftarrow \pi \hat{p}_F$
Résolution de (4.5a)	$(\hat{\varepsilon}_S, \hat{\varepsilon}_S) \leftarrow -\mathbf{L}\hat{\varepsilon}_S + \mathbf{D}\hat{\varepsilon}_S = \mathbf{A}_{Sn} + b\hat{p}_S^p \mathbf{I}$
Interpolation linéaire de $\hat{\varepsilon}_S$	$\hat{e}_F^p \leftarrow \mathbf{P}\hat{\varepsilon}_S$
Résolution de (4.5b)	$(\hat{p}_F, \hat{p}_F) \leftarrow -\frac{1}{Q}\hat{p}_F + r p_F = \alpha_{Fn} - b\hat{e}_F^p$
<i>Fin des itérations du point fixe</i>	
Résolution de (4.5c)	$\underline{\hat{z}}_F \leftarrow -2\mathbf{H}\underline{\hat{z}}_F = \underline{\beta}_{Fn}$

Algorithme 4.1 • Étape locale $n + 1/2$ pour le multi-échelle en temps

Une telle transformation de l'étape locale revient à supposer que la partie rapide (partie micro p^m) de l'évolution des quantités fluides $p = p^M + p^m$ n'influence pas le comportement des quantités solides. Cette approximation est licite si les pas de temps micro sont petits par rapport au temps caractéristique t_m (tel que $\mathbf{L} = t_m \mathbf{D}$) de l'équation différentielle (4.5a).

2.5 Résultats

Le cas test considéré est le problème unidimensionnel de consolidation d'un sol, soumis à un chargement imposé en effort, qui a déjà été proposé dans la section 2.4 du chapitre 3 (cf. **Figure 4.6**). Tous les paramètres du chargement et des directions de recherche sont identiques.

La simulation est réalisée avec la méthode LATIN sans représentation OP3. La partie solide est discrétisée avec $n_M = 32$ pas de temps et la partie fluide avec n pas de temps. L'objectif est d'étudier l'influence de n sur la contribution η_F de la partie fluide à l'erreur globale η . Le pas de temps macro étant fixé à $\Delta t_S = 31$ ms et le pas de temps micro variant entre $\Delta t_F = 0,49$ ms et 31 ms (donc inférieur à $t_m = 84$ ms), on espère que l'approximation réalisée en (4.5) sera valide.

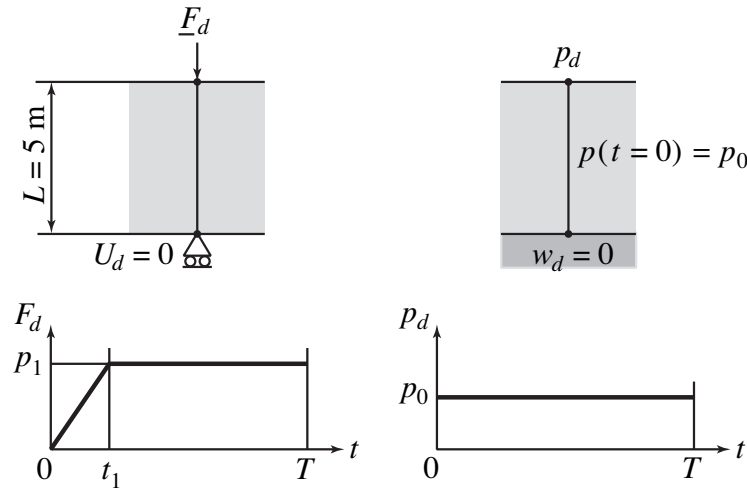


Figure 4.6 • Cas test avec effort imposé, conditions aux limites sur les parties solide et fluide

La solution est comparée à une solution de référence \mathbf{s}_{ex} obtenue grâce à l'approche monolithique (monoéchelle) et une discrétisation en temps fine : $\Delta t = 0,24$ ms qui, encore une fois, est supérieure à $\Delta t_{\min} = 0,17$ ms. Il est clair dans ce cas, que la solution générée par la méthode LATIN ne convergera pas vers la solution de référence, mais que la valeur de l'erreur devrait finir par se stabiliser. Pour sa part, l'indicateur d'erreur, qui mesure la « distance » entre une solution en sortie d'étape linéaire et une solution en sortie d'étape locale (exprimée sur $[0, T]_S$ pour les quantités solides et $[0, T]_F$ pour les quantités fluides), devrait converger vers zéro.

Le **Tableau 4.1** regroupe les évolutions des contributions η_S et η_F à l'erreur globale η ainsi que celle du ratio η_F/η_S , en fonction du ratio des pas de temps $\Delta t_S/\Delta t_F = n/n_M$. Comme le problème est couplé, le fait de raffiner la discrétisation fluide permet de réduire la valeur de chacune des contributions ; cependant, la contribution fluide η_F diminue plus rapidement que la contribution solide η_S . Lorsque la discrétisation de la partie fluide est suffisamment fine (64×32 pas de temps ici), elle peut être considérée comme continue en temps. On note alors η_S^∞ et η_F^∞ les contributions correspondantes. Celles-ci ne sont pas nulles car affectées par la discrétisation grossière de la partie solide. La **Figure 4.7** représente l'évolution de η_F^2/η_S^2 en fonction de $\Delta t_S/\Delta t_F$.

Pour étudier la part de l'erreur sur la partie fluide due à la discrétisation fluide, on considère maintenant la quantité $\eta_F^2 - \eta_F^{\infty 2}$. La **Figure 4.8** montre la convergence de $\eta_F^2 - \eta_F^{\infty 2}$ en fonction de $\Delta t_S/\Delta t_F$. On observe que pour obtenir des contributions à l'erreur globale identiques pour la partie fluide et pour la partie solide, il faut utiliser un ratio entre les pas de temps :

$$\frac{\Delta t_S}{\Delta t_F} \sim 16$$

$\frac{\Delta t_S}{\Delta t_F}$	η_S	η_F	η	$\frac{\eta_F}{\eta_S}$
1	$12,9 \cdot 10^{-4}$	$17,9 \cdot 10^{-4}$	$22,1 \cdot 10^{-4}$	1,39
2	$6,47 \cdot 10^{-4}$	$8,97 \cdot 10^{-4}$	$11,1 \cdot 10^{-4}$	1,38
4	$3,27 \cdot 10^{-4}$	$4,33 \cdot 10^{-4}$	$5,52 \cdot 10^{-4}$	1,35
8	$1,72 \cdot 10^{-4}$	$2,18 \cdot 10^{-4}$	$2,78 \cdot 10^{-4}$	1,26
16	$1,05 \cdot 10^{-4}$	$1,10 \cdot 10^{-4}$	$1,52 \cdot 10^{-4}$	1,05
32	$0,82 \cdot 10^{-4}$	$0,71 \cdot 10^{-4}$	$1,08 \cdot 10^{-4}$	0,86
64	$0,77 \cdot 10^{-4}$	$0,66 \cdot 10^{-4}$	$1,01 \cdot 10^{-4}$	0,85
	$= \eta_S^\infty$	$= \eta_F^\infty$		

Tableau 4.1 • Évolution des contributions pour $\Delta t_S = T/32$ fixé

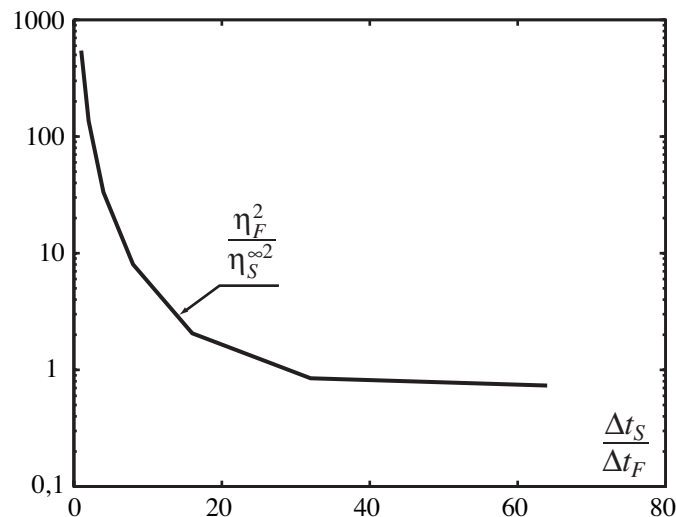


Figure 4.7 • Évolution de $\frac{\eta_F^2}{\eta_S^{\infty 2}}$ vs. $\frac{\Delta t_S}{\Delta t_F}$

ce qui justifie l'intérêt de prendre en compte les aspects multiéchelles en temps du problème.

La **Figure 4.9** représente l'évolution au cours des itérations de l'indicateur d'erreur e de la méthode. La discrétisation de la partie solide comporte toujours $n_M = 32$ pas de temps et celle de la partie fluide est fixée à $n = 64$ pas. L'indicateur décroît vers zéro, montrant ainsi la convergence de la stratégie multiéchelle en temps.

Pour finir, la **Figure 4.10** montre l'influence du nombre d'itérations du point fixe de l'étape locale sur l'erreur globale η . La discrétisation de la partie solide est à nouveau composée de $n_M = 32$ pas de temps et celle de la partie fluide de $n = 64$ pas. L'erreur

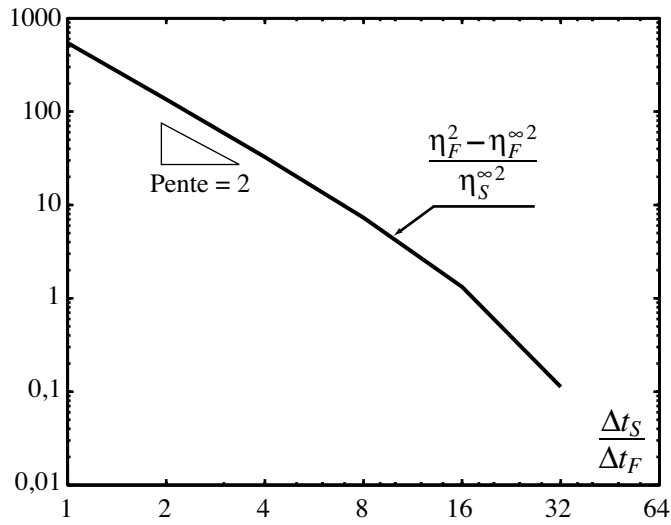


Figure 4.8 • Évolution de $\frac{\eta_F^2 - \eta_F^{\infty 2}}{\eta_S^{\infty 2}}$ vs. $\frac{\Delta t_S}{\Delta t_F}$

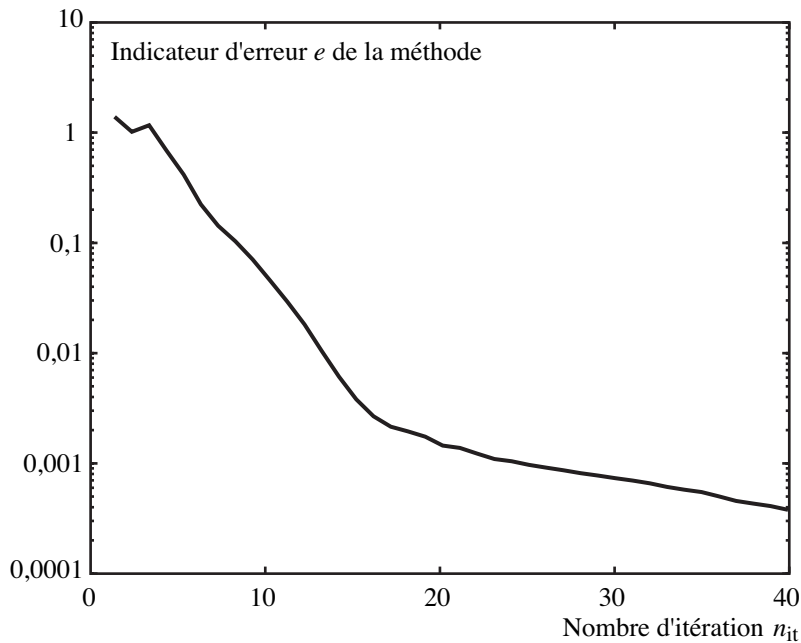


Figure 4.9 • Convergence de la méthode multiéchelle en temps

est mesurée vis-à-vis de la solution de référence, calculée avec une discrétisation très fine, ce qui explique qu'elle ne tend pas vers zéro. On constate que la convergence de l'étape locale nécessite au moins 2 itérations du point fixe, mais qu'au delà, ce nombre a une influence très faible sur le taux de convergence. Dans tous les tests précédents, le nombre d'itérations du point fixe avait été fixé à 2.

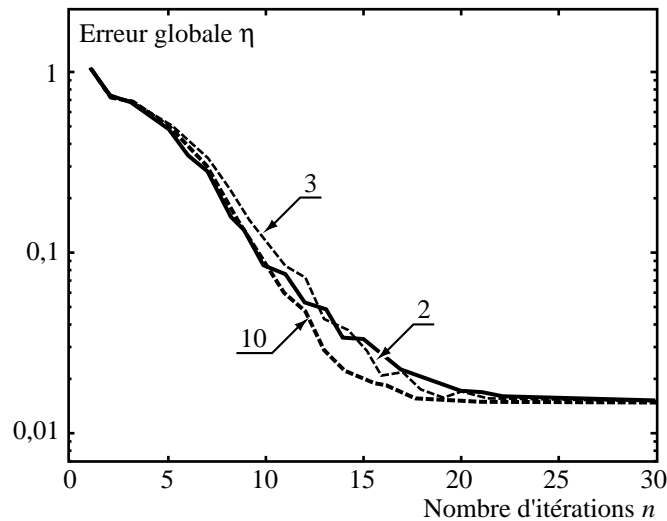


Figure 4.10 • Influence du nombre d'itérations du point fixe (ici 2, 3 et 10)

3 Formulation Galerkin discontinue en temps

Dans la section précédente, nous avons remarqué que si l'on faisait l'analogie entre la stratégie micro-macro en temps proposée et celle en espace, il fallait noter que la partie macro était continue entre chaque pas de temps. D'autres possibilités existent pour la définition d'une échelle macro en temps, notamment celle utilisée dans la stratégie multiéchelle avec homogénéisation en temps et en espace introduite dans [Lad02a, Lad03]. On peut ainsi imaginer une prise de moyenne généralisée par pas de temps macro. Ce choix conduit à des évolutions macros qui ne sont pas continues en temps (cf. **Figure 4.11**). Une telle description doit être gérée par une formulation adaptée, telle que la formulation Galerkin discontinue en temps qui va être présentée maintenant.

3.1 Formulation

On introduit une partition de l'intervalle $[0, T]$ en N sous-intervalles :

$$[0, T]_{\mathcal{D}} = \left\{ I_k = [t_{k-1}, t_k] \right\}_{k=1}^N$$

avec $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ (cf. **Figure 4.12**) et on considère maintenant $\mathcal{D}^{[0, T]}$, l'espace des fonctions du temps définies sur $[0, T]_{\mathcal{D}}$, continues sur I_k , mais qui peuvent présenter des discontinuités aux instants t_k . On introduit en outre \mathcal{D}^{I_k} l'espace des fonctions du temps définies et continues sur I_k .

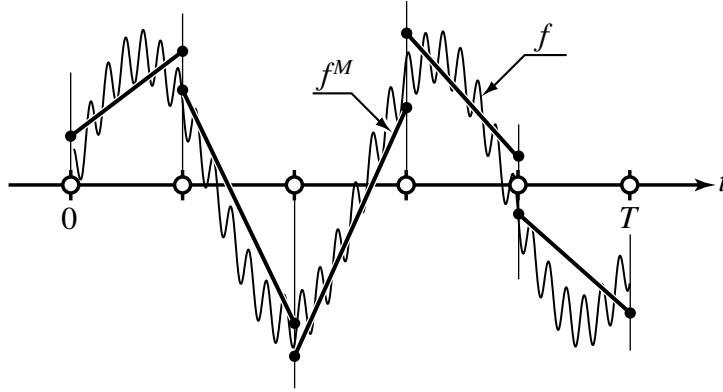


Figure 4.11 • Exemple d'une fonction f et de sa partie macro f^M discontinue

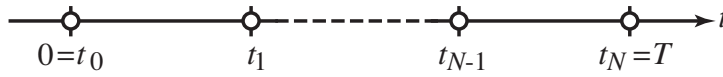


Figure 4.12 • Partition $[0, T]_{\mathcal{D}} = \{I_k = [t_{k-1}, t_k]\}_{k=1}^N$

La formulation Galerkin discontinue en temps [Eri85] permet de donner un sens à l'intégrale :

$$\int_{[0, T]} a \dot{b} dt$$

pour des fonctions a et b de $\mathcal{D}^{[0, T]}$. De manière générale, elle propose de définir :

$$\int_{[0, T]} a \dot{b} dt = \sum_{k=1}^N \left(\int_{I_k} a \dot{b} dt + [\alpha a(t_{k-1}^-) + (1 - \alpha) a(t_{k-1}^+)] \llbracket b \rrbracket_{k-1} \right)$$

avec α un paramètre compris entre 0 et 1 et en posant :

$$\forall f \in \mathcal{D}^{[0, T]}, \quad \llbracket f \rrbracket_{k-1} = f(t_{k-1}^+) - f(t_{k-1}^-)$$

et :

$$\forall f \in \mathcal{D}^{[0, T]}, \quad f(t_{k-1}^\pm) = \lim_{h \rightarrow 0^\pm} f(t_{k-1} + h)$$

Dans toute la suite, on choisit de prendre $\alpha = 0$, ce qui conduit à la définition suivante de l'intégrale en temps sur $[0, T]$:

$$\forall (a, b) \in (\mathcal{D}^{[0, T]})^2, \quad \int_{[0, T]} a \dot{b} dt = \sum_{k=1}^N \left(\int_{I_k} a \dot{b} dt + a(t_{k-1}^+) \llbracket b \rrbracket_{k-1} \right) \quad (4.6)$$

où la valeur de b en t_0^- est prise égale à zéro.

Enfin, dans le reste de cette section, les espaces de solutions :

$$\mathcal{U}^{[0,T]}, \mathcal{S}^{[0,T]}, \mathcal{P}^{[0,T]}, \mathcal{G}^{[0,T]}, \mathcal{W}^{[0,T]} \text{ et } \mathcal{H}^{[0,T]}$$

et leurs espaces homogènes associés :

$$\mathcal{U}_0^{[0,T]}, \mathcal{S}_0^{[0,T]}, \mathcal{P}_0^{[0,T]}, \mathcal{G}_0^{[0,T]}, \mathcal{W}_0^{[0,T]} \text{ et } \mathcal{H}_0^{[0,T]}$$

seront supposés contenir des champs de l'espace et du temps, définis sur $[0, T]_{\mathcal{D}}$, continus sur I_k , mais qui peuvent présenter des discontinuités aux instants t_k . Nous allons voir que le fait de considérer de tels champs nécessite quelques adaptations lors du traitement du problème.

3.2 Directions de recherche

Dans cette section, on considérera le cas de l'approximation de tous les champs (LATIN P3). Dans ce cas, si l'on suppose, par exemple, que les corrections $\Delta\sigma$ et $\Delta\dot{\varepsilon}$ appartiennent à $\mathcal{D}^{[0,T]}$, la direction de recherche à l'étape linéaire E^- :

$$E^- = \left\{ \Delta \mathbf{s} \mid \Delta\sigma - \mathbf{L}\Delta\dot{\varepsilon} = 0, \Delta q - r\Delta p = 0, \Delta \underline{W} - \mathbf{H}\Delta \underline{Z} = 0 \right\}$$

ne peut plus être écrite comme la minimisation d'une fonctionnelle :

$$\frac{1}{2} \int_{[0,T]} \left(\|\Delta\sigma - \mathbf{L}\Delta\dot{\varepsilon} + \delta \hat{\mathbf{A}}\|_{\mathbf{L}^{-1}}^2 + \|\Delta q - r\Delta p + \delta \hat{a}\|_{r^{-1}}^2 + \|\Delta \underline{W} - \mathbf{H}\Delta \underline{Z} + \delta \hat{\underline{\beta}}\|_{\mathbf{H}^{-1}}^2 \right) dt$$

car le produit de deux dérivées en temps $\Delta\dot{\varepsilon}$ n'a plus de sens. Il faut donc réécrire la direction de recherche sous une forme compatible avec la formulation Galerkin discontinue en temps.

3.3 Étape linéaire avec représentation à l'itération $n + 1$

3.3.1 Partie solide

Le problème consiste à trouver les corrections admissibles à zéro, $\Delta\dot{\varepsilon} = \varepsilon(\Delta \dot{\underline{U}})$ avec $\Delta \underline{U} \in \mathcal{W}_0^{[0,T]}$ et $\Delta\sigma \in \mathcal{S}_0^{[0,T]}$, qui vérifient au mieux la direction de recherche E^- . On est

donc amené à résoudre :

$$\Delta \underline{U} \in \mathcal{U}_0^{[0,T]} \iff \forall \sigma^* \in \mathcal{S}_0^{[0,T]}, \int_{\Omega \times [0,T]} \text{Tr}[\varepsilon(\Delta \underline{U}) \sigma^*] d\Omega dt = 0 \quad (4.7)$$

$$\Delta \sigma \in \mathcal{S}_0^{[0,T]} \iff \forall \underline{U}^* \in \mathcal{U}_0^{[0,T]}, \int_{\Omega \times [0,T]} \text{Tr}[\Delta \sigma \varepsilon(\underline{U}^*)] d\Omega dt = 0 \quad (4.8)$$

$$\text{Direction } E^- \iff \int_{\Omega \times [0,T]} \text{Tr}[(\Delta \sigma + \delta \hat{\mathbf{A}} - \mathbf{L} \varepsilon(\Delta \underline{U})) \mathbf{L}^{-1} \sigma^*] d\Omega dt = 0 \quad (4.9)$$

où $\delta \hat{\mathbf{A}} = (\mathbf{L} \hat{\underline{x}} - \hat{\sigma}) - (\mathbf{L} \underline{x}_n - \sigma_n)$ a été défini comme dans la section 2 du chapitre 3 et la fonction test σ^* de (4.9) doit être choisie de façon à fermer le problème (et éventuellement simplifier l'implantation de l'algorithme).

Représentation de la correction statique • Elle est similaire à celle exprimée dans la section 2 du chapitre 3. En choisissant $\sigma^* \in \mathcal{S}_0^{[0,T]}$ et en injectant (4.9) dans (4.7), on obtient le problème en contraintes qui consiste à trouver $\Delta \sigma \in \mathcal{S}_0^{[0,T]}$ tel que :

$$\forall \sigma^* \in \mathcal{S}_0^{[0,T]}, \int_{\Omega \times [0,T]} \text{Tr}[(\Delta \sigma + \delta \hat{\mathbf{A}}) \mathbf{L}^{-1} \sigma^*] d\Omega dt = 0 \quad (4.10)$$

On cherche la correction sous la forme $\Delta \sigma = s \mathbb{S}$ avec $s \in \mathcal{D}^{[0,T]}$ et $\mathbb{S} \in \mathcal{S}_0$. On prend en outre $\sigma^* = s^* \mathbb{S} + s \mathbb{S}^*$ avec $s^* \in \mathcal{D}^{[0,T]}$ et $\mathbb{S}^* \in \mathcal{S}_0$, ce qui conduit au système couplé :

$$\forall \mathbb{S}^* \in \mathcal{S}_0, \int_{\Omega \times [0,T]} \text{Tr}[s(s \mathbb{S} + \delta \hat{\mathbf{A}}) \mathbf{L}^{-1} \mathbb{S}^*] d\Omega dt = 0 \quad (4.11)$$

$$\forall s^* \in \mathcal{D}^{[0,T]}, \int_{\Omega \times [0,T]} \text{Tr}[s^*(s \mathbb{S} + \delta \hat{\mathbf{A}}) \mathbf{L}^{-1} \mathbb{S}] d\Omega dt = 0 \quad (4.12)$$

L'équation (4.11) est résolue par dualisation en introduisant le multiplicateur de Lagrange $\underline{X} \in \mathcal{U}_0$ tel que :

$$\forall \mathbb{S}^*, \int_{\Omega \times [0,T]} \text{Tr}[s(s \mathbb{S} + \delta \hat{\mathbf{A}}) \mathbf{L}^{-1} \mathbb{S}^*] d\Omega dt - \int_{\Omega} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{X}) \mathbb{S}^*] d\Omega = 0 \quad (4.13)$$

ce qui se traduit par :

$$\mathbf{L} \varepsilon(\underline{X}) = \|s\|_T^2 \mathbb{S} + \int_{[0,T]} s \delta \hat{\mathbf{A}} dt$$

ou encore :

$$\mathbb{S} = \frac{1}{\|s\|_T^2} \left(\mathbf{L} \varepsilon(\underline{X}) - \int_{[0,T]} s \delta \hat{\mathbf{A}} dt \right)$$

qui peut être introduit dans l'admissibilité à zéro de \mathbb{S} :

$$\mathbb{S} \in \mathcal{S}_0 \iff \forall \underline{X}^* \in \mathcal{U}_0, \quad \int_{\Omega} \text{Tr}[\mathbb{S} \varepsilon(\underline{X}^*)] d\Omega = 0$$

pour finalement obtenir le problème qui consiste à trouver $\underline{X} \in \mathcal{U}_0$ tel que :

$$\forall \underline{X}^* \in \mathcal{U}_0, \quad \int_{\Omega} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{X}) \mathbf{L} \varepsilon(\underline{X}^*)] d\Omega = \int_{\Omega} \text{Tr} \left[\left(\int_{[0,T]} s \delta \hat{\mathbf{A}} dt \right) \varepsilon(\underline{X}^*) \right] d\Omega$$

afin de calculer :

$$\mathbb{S} = \frac{1}{\|s\|_T^2} \left(\mathbf{L} \varepsilon(\underline{X}) - \int_{[0,T]} s \delta \hat{\mathbf{A}} dt \right)$$

En imposant la normalisation $\|\mathbb{S}\|_{\mathbf{L}^{-1}}^2 = 1$ afin d'assurer l'unicité du couple (s, \mathbb{S}) , l'équation (4.12) peut, quant à elle, être réécrite :

$$\forall s^* \in \mathcal{D}^{[0,T]}, \quad \int_{[0,T]} s^* \left(s + \int_{\Omega} \text{Tr}[\delta \hat{\mathbf{A}} \mathbf{L}^{-1} \mathbb{S}] d\Omega \right) dt = 0$$

Calcul pratique • En utilisant la formulation Galerkin discontinue (4.6) et en se rappelant que $\delta \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{L}(\hat{\varepsilon} - \varepsilon_n) - (\hat{\sigma} - \sigma_n)$, l'équation précédente est réécrite :

$$\forall k \in \{1, \dots, N\}, \quad \forall s^* \in \mathcal{D}^{I_k},$$

$$\int_{I_k} s^* \left(s + \int_{\Omega} \text{Tr}[\delta \hat{\mathbf{A}} \mathbf{L}^{-1} \mathbb{S}] d\Omega \right) dt + s^*(t_{k-1}^+) \int_{\Omega} \text{Tr}[\llbracket \hat{\varepsilon} - \varepsilon_n \rrbracket_{k-1} \mathbb{S}] d\Omega = 0$$

Si maintenant, on fait l'hypothèse que $\mathcal{D}^{[0,T]}$ se limite à des fonctions constantes par morceaux et qu'on note $(\cdot)_k$ la restriction à l'intervalle I_k , l'équation précédente permet de calculer :

$$\forall k \in \{1, \dots, N\}, \quad s_k = - \int_{\Omega} \text{Tr}[\delta \hat{\mathbf{A}}_k \mathbf{L}^{-1} \mathbb{S}] d\Omega - \int_{\Omega} \text{Tr} \left[\frac{\llbracket \hat{\varepsilon} - \varepsilon_n \rrbracket_{k-1}}{h_k} \mathbb{S} \right] d\Omega$$

où $h_k = t_k - t_{k-1}$ et dans laquelle il faut noter le terme complémentaire, dû au saut temporel de $\delta \hat{\mathbf{A}}$, qui apparaît par rapport à l'équation (3.24).

Remarque • Il est bien évidemment possible de généraliser ce calcul au cas où $\mathcal{D}^{[0,T]}$ est constitué de fonctions polynômiales par morceaux, et non constantes.

Représentation de la correction cinématique • On cherche la correction sous la forme $\Delta \underline{U} = u \underline{V}$ avec $u \in \mathcal{D}^{[0,T]}$, $\underline{V} \in \mathcal{U}_0$ et la normalisation $\|\underline{V}\|_{\mathbf{L}}^2 = 1$ afin d'assurer l'unicité du couple (u, \underline{V}) . Comme précédemment, il est nécessaire de choisir la forme de la

fonction test σ^* dans l'équation (4.9), qui exprime la vérification au mieux de la direction de recherche :

$$\int_{\Omega \times [0, T]} \text{Tr}[(s\mathbb{S} + \delta\hat{\mathbf{A}} - \dot{u}\mathbf{L}_{\mathcal{E}}(\underline{V}))\mathbf{L}^{-1}\sigma^*] d\Omega dt = 0 \quad (4.14)$$

Si l'on prend à nouveau $\sigma^* = s^*\mathbb{S} + s\mathbb{S}^*$ avec $s^* \in \mathcal{D}^{[0, T]}$ et $\mathbb{S}^* \in \mathcal{S}_0$, l'équation (4.14) conduit au système couplé :

$$\forall \mathbb{S}^* \in \mathcal{S}_0, \quad \int_{[0, T]} s \int_{\Omega} \text{Tr}[(\dot{u}\mathbf{L}_{\mathcal{E}}(\underline{V}) - \delta\hat{\mathbf{A}} - s\mathbb{S})\mathbf{L}^{-1}\mathbb{S}^*] d\Omega dt = 0 \quad (4.15)$$

$$\forall s^* \in \mathcal{D}^{[0, T]}, \quad \int_{[0, T]} s^* \int_{\Omega} \text{Tr}[(\dot{u}\mathbf{L}_{\mathcal{E}}(\underline{V}) - \delta\hat{\mathbf{A}} - s\mathbb{S})\mathbf{L}^{-1}\mathbb{S}] d\Omega dt = 0 \quad (4.16)$$

En réécrivant (4.15) sous la forme :

$$\forall \mathbb{S}^* \in \mathcal{S}_0, \quad \int_{\Omega \times [0, T]} \text{Tr}[s(s\mathbb{S} + \delta\hat{\mathbf{A}})\mathbf{L}^{-1}\mathbb{S}^*] d\Omega dt - \int_{[0, T]} s \dot{u} dt \int_{\Omega} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{V})\mathbb{S}^*] d\Omega = 0$$

et en la comparant à (4.13), on constate qu'un choix possible consiste à prendre $\underline{V} = \underline{X}$ où $\underline{X} \in \mathcal{U}_0$ est le champ qui a été introduit lors de la construction de la correction statique. Malheureusement, un tel choix est incompatible avec (4.16) qui deviendrait alors :

$$\forall s^* \in \mathcal{D}^{[0, T]}, \quad \int_{\Omega \times [0, T]} \text{Tr}[s^*(s\mathbb{S} + \delta\hat{\mathbf{A}})\mathbf{L}^{-1}\mathbb{S}] d\Omega dt = \int_{[0, T]} s^* \dot{u} dt \underbrace{\int_{\Omega} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{X})\mathbb{S}] d\Omega}_{=0} = 0$$

qui ne peut pas forcément être vérifié.

Un autre choix, plus simple à mettre en œuvre, consiste à réutiliser le champ $\underline{X} \in \mathcal{U}_0$ en cherchant la correction cinématique sous la forme $\Delta\underline{U} = u\underline{X}$ avec $u \in \mathcal{D}^{[0, T]}$. On prend alors la fonction test dans (4.14) sous la forme $\sigma^* = u^*\mathbf{L}_{\mathcal{E}}(\underline{X})$ avec $u^* \in \mathcal{D}^{[0, T]}$, ce qui conduit à :

$$\forall u^* \in \mathcal{D}^{[0, T]}, \quad \int_{[0, T]} u^* \int_{\Omega} \text{Tr}[(\dot{u}\mathbf{L}_{\mathcal{E}}(\underline{X}) - \delta\hat{\mathbf{A}} - s\mathbb{S})\varepsilon(\underline{X})] d\Omega dt$$

En utilisant l'admissibilité à zéro de \mathbb{S} , cette équation peut être réécrite sous la forme :

$$\forall u^* \in \mathcal{D}^{[0, T]}, \quad \int_{[0, T]} u^* \int_{\Omega} \text{Tr}[(\dot{u}\mathbf{L}_{\mathcal{E}}(\underline{X}) - \delta\hat{\mathbf{A}})\varepsilon(\underline{X})] d\Omega dt$$

ce qui permet de calculer u en utilisant une démarche analogue à celle qui a permis de construire s lors de la recherche de la correction statique.

3.3.2 Partie fluide

Le problème consiste à trouver les corrections admissibles à zéro, $(\Delta p, \Delta \underline{Z}) \in \mathcal{G}_0^{[0,T]}$ et $(\Delta q, \Delta \underline{W}) \in \mathcal{H}_0^{[0,T]}$, qui vérifient au mieux la direction de recherche E^- . On est donc amené à résoudre :

$$(\Delta p, \Delta \underline{Z}) \in \mathcal{G}_0^{[0,T]} \iff \begin{cases} \forall (q^*, \underline{W}^*) \in \mathcal{H}_0^{[0,T]}, \\ \int_{\Omega \times [0,T]} (\Delta p q^* + \Delta \underline{Z} \cdot \underline{W}^*) d\Omega dt = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

$$(\Delta q, \Delta \underline{W}) \in \mathcal{H}_0^{[0,T]} \iff \begin{cases} \forall (p^*, \underline{Z}^*) \in \mathcal{G}_0^{[0,T]}, \\ \int_{\Omega \times [0,T]} (\Delta q p^* + \Delta \underline{W} \cdot \underline{Z}^*) d\Omega dt = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

$$\text{Direction } E^- \iff \begin{cases} \int_{\Omega \times [0,T]} (\Delta q + \delta \hat{\alpha} - r \Delta p) r^{-1} q^* d\Omega dt = 0 \\ \int_{\Omega \times [0,T]} (\Delta \underline{W} + \delta \hat{\underline{\beta}} - \mathbf{H} \Delta \underline{Z}) \cdot \mathbf{H}^{-1} \underline{W}^* d\Omega dt = 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

où $\delta \hat{\alpha} = (r \hat{p} - \hat{q}) - (r p_n - q_n)$ et $\delta \hat{\underline{\beta}} = (\mathbf{H} \hat{\underline{Z}} - \hat{\underline{\beta}}) - (\mathbf{H} \underline{Z}_n - \underline{W}_n)$ ont été définis comme dans la section 2 du chapitre 3 et les fonctions test (q^*, \underline{W}^*) de (4.19) doivent être choisies de façon à fermer le problème.

Représentation de la correction statique • En choisissant $(q^*, \underline{W}^*) \in \mathcal{H}_0^{[0,T]}$ et en injectant (4.19) dans (4.17), on obtient le problème qui consiste à trouver $(\Delta q, \Delta \underline{W}) \in \mathcal{H}_0^{[0,T]}$ tels que :

$$\forall (q^*, \underline{W}^*) \in \mathcal{H}_0^{[0,T]}, \quad \int_{\Omega \times [0,T]} [(\Delta q + \delta \hat{\alpha}) r^{-1} q^* + (\Delta \underline{W} + \delta \hat{\underline{\beta}}) \cdot \mathbf{H}^{-1} \underline{W}^*] d\Omega dt = 0 \quad (4.20)$$

On cherche les corrections sous la forme $\Delta q = \theta Q$ et $\Delta \underline{W} = \theta \underline{Y}$ avec $\theta \in \mathcal{D}^{[0,T]}$ et $(Q, \underline{Y}) \in \mathcal{H}_0$. On prend en outre $q^* = \theta^* Q + \theta Q^*$ $\underline{W}^* = \theta^* \underline{Y} + \theta \underline{Y}^*$ avec $\theta^* \in \mathcal{D}^{[0,T]}$ et $(Q^*, \underline{Y}^*) \in \mathcal{H}_0$, ce qui conduit au système couplé :

$$\forall (Q^*, \underline{Y}^*) \in \mathcal{H}_0, \quad \int_{\Omega \times [0,T]} \theta [(\theta Q + \delta \hat{\alpha}) r^{-1} Q^* + (\theta \underline{Y} + \delta \hat{\underline{\beta}}) \cdot \mathbf{H}^{-1} \underline{Y}^*] d\Omega dt = 0 \quad (4.21)$$

$$\forall \theta^* \in \mathcal{D}^{[0,T]}, \quad \int_{\Omega \times [0,T]} \theta^* [(\theta Q + \delta \hat{\alpha}) r^{-1} Q + (\theta \underline{Y} + \delta \hat{\underline{\beta}}) \cdot \mathbf{H}^{-1} \underline{Y}] d\Omega dt = 0 \quad (4.22)$$

L'équation (4.21) est résolue par dualisation en introduisant le multiplicateur de

Lagrange $\Pi \in \mathcal{P}_0$ tel que : $\forall (Q^*, \underline{Y}^*)$,

$$\int_{\Omega \times [0, T]} \theta [(\theta Q + \delta \hat{\alpha}) r^{-1} Q^* + (\theta \underline{Y} + \delta \hat{\beta}) \cdot \mathbf{H}^{-1} \underline{Y}^*] d\Omega dt - \int_{\Omega} (\Pi Q^* + \underline{\text{grad}} \Pi \cdot \underline{Y}^*) d\Omega = 0 \quad (4.23)$$

ce qui se traduit par :

$$r\Pi = \|\theta\|_T^2 Q + \int_{[0, T]} \theta \delta \hat{\alpha} dt \quad \text{et} \quad \mathbf{H} \underline{\text{grad}} \Pi = \|\theta\|_T^2 \underline{Y} + \int_{[0, T]} \theta \delta \hat{\beta} dt$$

ou encore :

$$Q = \frac{1}{\|\theta\|_T^2} \left(r\Pi - \int_{[0, T]} \theta \delta \hat{\alpha} dt \right) \quad \text{et} \quad \underline{Y} = \frac{1}{\|\theta\|_T^2} \left(\mathbf{H} \underline{\text{grad}} \Pi - \int_{[0, T]} \theta \delta \hat{\beta} dt \right)$$

qui peut être introduit dans l'admissibilité à zéro de (Q^*, \underline{Y}^*) :

$$(Q, \underline{Y}) \in \mathcal{H}_0 \iff \forall (\Pi^*, \underline{Z}^*) \in \mathcal{G}_0, \quad \int_{\Omega} (Q\Pi^* + \underline{Y} \cdot \underline{Z}^*) d\Omega = 0$$

pour finalement obtenir le problème qui consiste à trouver $\Pi \in \mathcal{P}_0$ tel que : $\forall \Pi^* \in \mathcal{P}_0$,

$$\int_{\Omega} (\Pi r\Pi^* + \underline{\text{grad}} \Pi \cdot \mathbf{H} \underline{\text{grad}} \Pi^*) d\Omega = \int_{\Omega} \left[\left(\int_{[0, T]} \theta \delta \hat{\alpha} dt \right) \Pi^* + \left(\int_{[0, T]} \theta \delta \hat{\beta} dt \right) \cdot \underline{\text{grad}} \Pi^* \right] d\Omega$$

afin de calculer :

$$Q = \frac{1}{\|\theta\|_T^2} \left(r\Pi - \int_{[0, T]} \theta \delta \hat{\alpha} dt \right) \quad \text{et} \quad \underline{Y} = \frac{1}{\|\theta\|_T^2} \left(\mathbf{H} \underline{\text{grad}} \Pi - \int_{[0, T]} \theta \delta \hat{\beta} dt \right)$$

En imposant la normalisation de (Q, \underline{Y}) :

$$\int_{\Omega} (Q r^{-1} Q + \underline{Y} \cdot \mathbf{H}^{-1} \underline{Y}) d\Omega = 1$$

l'équation (4.22) peut, quant à elle, être réécrite :

$$\forall \theta^* \in \mathcal{D}^{[0, T]}, \quad \int_{[0, T]} \theta^* \left(\theta + \int_{\Omega} (\delta \hat{\alpha} r^{-1} Q + \delta \hat{\beta} \cdot \mathbf{H}^{-1} \underline{Y}) d\Omega \right) dt = 0$$

qui permet de calculer θ en utilisant à nouveau une démarche analogue à celle employée pour la partie solide.

Représentation de la correction cinématique • On cherche la correction sous la forme $\Delta p = \pi P$ et $\Delta \underline{Z} = \pi \underline{\text{grad}} P$ avec $\pi \in \mathcal{D}^{[0, T]}$, $P \in \mathcal{P}_0$ et la normalisation $\|P\|_{\mathbf{H}r}^2 = 1$ afin d'assurer l'unicité du couple (π, P) . Il est nécessaire de choisir la forme des fonctions test (q^*, \underline{W}^*) dans (4.19), qui exprime la vérification au mieux de la direction de recherche :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times [0, T]} (\theta Q + \delta \hat{\alpha} - \pi r P) r^{-1} q^* d\Omega dt &= 0 \\ \int_{\Omega \times [0, T]} (\theta \underline{Y} + \delta \hat{\beta} - \pi \mathbf{H} \underline{\text{grad}} P) \cdot \mathbf{H}^{-1} \underline{W}^* d\Omega dt &= 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Sur le même modèle que la partie solide, on réutilise le champ $\Pi \in \mathcal{P}_0$ en cherchant la correction cinématique sous la forme $\Delta p = \pi \Pi$ et $\Delta \underline{Z} = \pi \underline{\text{grad}} \Pi$ avec $\pi \in \mathcal{D}^{[0,T]}$. On prend alors les fonctions test dans (4.24) sous la forme $q^* = \theta^* r \bar{\Pi}$ et $\underline{W}^* = \theta^* \underline{\mathbf{H}} \underline{\text{grad}} \Pi$ avec $\theta^* \in \mathcal{D}^{[0,T]}$, ce qui conduit à :

$$\forall \theta^* \in \mathcal{D}^{[0,T]}, \quad \int_{[0,T]} \theta^* \int_{\Omega} [(\pi r \Pi - \delta \hat{\alpha} - \theta Q) \Pi + (\pi \underline{\mathbf{H}} \underline{\text{grad}} \Pi - \delta \hat{\underline{\beta}} - \theta \underline{Y}) \cdot \underline{\text{grad}} \Pi] d\Omega dt$$

En utilisant l'admissibilité à zéro de (Q, \underline{Y}) , cette équation peut être réécrite sous la forme :

$$\forall \theta^* \in \mathcal{D}^{[0,T]}, \quad \int_{[0,T]} \theta^* \int_{\Omega} [(\pi r \Pi - \delta \hat{\alpha}) \Pi + (\pi \underline{\mathbf{H}} \underline{\text{grad}} \Pi - \delta \hat{\underline{\beta}}) \cdot \underline{\text{grad}} \Pi] d\Omega dt$$

qui permet de calculer π en utilisant à nouveau une démarche analogue à celle employée pour la partie solide.

3.4 Étape locale à l'itération $n + 1/2$

De la même manière, les relations de comportement (1.3) doivent être réécrites sous une forme compatible avec la formulation Galerkin discontinue en temps :

$$\begin{aligned} \forall \sigma^*, \quad & \int_{[0,T]} \text{Tr}[(\hat{\sigma} - \mathbf{D}\varepsilon(\hat{\underline{U}}) + b \hat{p} \mathbf{I}) \mathbf{L}^{-1} \sigma^*] dt = 0 \\ \forall q^*, \quad & \int_{[0,T]} (\hat{q} - \frac{1}{Q} \hat{p} - b \text{Tr}\varepsilon(\hat{\underline{U}})) r^{-1} q^* dt = 0 \\ \forall \underline{W}^*, \quad & \int_{[0,T]} (\hat{\underline{W}} - \underline{\mathbf{H}} \hat{\underline{Z}}) \cdot \underline{\mathbf{H}}^{-1} \underline{W}^* dt = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

ainsi que la direction de recherche à l'étape locale E^+ :

$$\begin{aligned} \forall \sigma^*, \quad & \int_{[0,T]} \text{Tr}[(\hat{\sigma} - \mathbf{A}_n + \mathbf{L}\varepsilon(\hat{\underline{U}})) \mathbf{L}^{-1} \sigma^*] dt = 0 \\ \forall q^*, \quad & \int_{[0,T]} (\hat{q} - \alpha_n + r \hat{p}) r^{-1} q^* dt = 0 \\ \forall \underline{W}^*, \quad & \int_{[0,T]} (\hat{\underline{\beta}} - \underline{\beta}_n + \underline{\mathbf{H}} \hat{\underline{Z}}) \cdot \underline{\mathbf{H}}^{-1} \underline{W}^* dt = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

où \mathbf{A}_n , α_n et $\underline{\beta}_n$ ont été définis dans le chapitre 2. En injectant (4.26) dans (4.25), on obtient le problème couplé qui consiste à trouver $\hat{\underline{U}}$ et \hat{p} tels que :

$$\begin{aligned} \forall \sigma^*, \quad & \int_{[0,T]} \text{Tr}[(\mathbf{L}\varepsilon(\hat{\underline{U}}) + \mathbf{D}\varepsilon(\hat{\underline{U}}) - b \hat{p} \mathbf{I}) \mathbf{L}^{-1} \sigma^*] dt = \int_{[0,T]} \text{Tr}[\mathbf{A}_n \mathbf{L}^{-1} \sigma^*] dt \\ \forall q^*, \quad & \int_{[0,T]} (\frac{1}{Q} \hat{p} + r \hat{p} + b \text{Tr}\varepsilon(\hat{\underline{U}})) r^{-1} q^* dt = \int_{[0,T]} \alpha_n r^{-1} q^* dt \end{aligned}$$

et l'équation qui permet de construire $\hat{\underline{Z}}$:

$$\forall \underline{W}^*, \int_{[0,T]} 2\mathbf{H}\hat{\underline{Z}} \cdot \underline{W}^* dt = \int_{[0,T]} \underline{\beta}_n \cdot \underline{W}^* dt$$

Ces équations sont résolues en utilisant une démarche analogue à celle employée pour la partie solide dans l'étape linéaire.

3.5 Étape préliminaire à l'itération $n + 1$

À nouveau, cette étape est plus simple si l'on a pris soin d'orthogonaliser chaque fonction de l'espace ajoutée. Pour la partie solide :

$$\int_{\Omega} \text{Tr}[V_i \mathbf{L} V_j] d\Omega = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \text{Tr}[\mathbb{S}_i \mathbf{L}^{-1} \mathbb{S}_j] d\Omega = \delta_{ij}$$

et pour la partie fluide :

$$\int_{\Omega} \left(P_i r P_j + \underline{\text{grad}} P_i \cdot \mathbf{H} \underline{\text{grad}} P_j \right) d\Omega = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \left(Q_i r^{-1} Q_j + \underline{Y}_i \cdot \mathbf{H}^{-1} \underline{Y}_j \right) d\Omega = \delta_{ij}$$

3.5.1 Partie solide

De manière analogue à la section 2 du chapitre 3, on cherche des corrections sous la forme $\Delta \hat{\varepsilon} = \sum_j w_j \varepsilon(\underline{V}_j)$ et $\Delta \sigma = \sum_j t_j \mathbb{S}_j$, où les w_j et t_j , qu'il faut déterminer, peuvent être vues comme des corrections des fonctions du temps actuelles, alors que les \underline{V}_j et \mathbb{S}_j sont données.

L'équation (4.10) conduit à chercher la correction statique t_j telle que :

$$\forall t_j^* \in \mathcal{D}^{[0,T]}, \int_{[0,T]} t_j^* \left(t_j + \int_{\Omega} \text{Tr}[\mathbb{S}_j \mathbf{L}^{-1} \delta \hat{\mathbf{A}}] d\Omega \right) dt = 0$$

La direction de recherche (4.9) conduit à chercher la correction cinématique w_j telle que :

$$\forall u_j^* \in \mathcal{D}^{[0,T]}, \int_{[0,T]} u_j^* \left(w_j - \int_{\Omega} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{V}_j) \delta \hat{\mathbf{A}}] d\Omega \right) dt = 0$$

3.5.2 Partie fluide

On cherche des corrections sous la forme $\Delta p = \sum_j \varpi_j P_j$, $\Delta \underline{Z} = \sum_j \varpi_j \underline{\text{grad}} P_j$ et $\Delta q = \sum_j \vartheta_j Q_j$, $\Delta \underline{W} = \sum_j \vartheta_j \underline{Y}_j$ où les ϖ_j et ϑ_j sont les fonctions du temps à déterminer alors que les P_j , Q_j et \underline{Y}_j sont données.

L'équation (4.20) conduit à chercher la correction statique ϑ_j telle que :

$$\forall \vartheta_j^* \in \mathcal{D}^{[0,T]}, \quad \int_{[0,T]} \vartheta_j^* \left(\vartheta_j + \int_{\Omega} \left(Q_j r^{-1} \delta \hat{\alpha} + \underline{Y}_j \cdot \mathbf{H}^{-1} \delta \hat{\beta} \right) d\Omega \right) dt = 0$$

La direction de recherche (4.19) conduit à chercher la correction cinématique ϖ_j telle que :

$$\forall \varpi_j^* \in \mathcal{D}^{[0,T]}, \quad \int_{[0,T]} \varpi_j^* \left(\varpi_j - \int_{\Omega} \left(P_j \delta \hat{\alpha} + \underline{\text{grad}} P_j \cdot \delta \hat{\beta} \right) d\Omega \right) dt = 0$$

3.6 Résultats

Le cas test considéré est le problème unidimensionnel de consolidation d'un sol, soumis à un chargement imposé en effort, qui a déjà été proposé dans la section 2.4 du chapitre 3. Tous les paramètres du chargement et des directions de recherche sont identiques. La technique multiéchelle qui a été décrite dans la première partie de ce chapitre n'est pas utilisée et la discrétisation en temps fixée à $n_T = 32$ pas de temps.

On étudie les résultats obtenus en utilisant la méthode LATIN P3 et un schéma d'intégration en temps de type θ -méthode, comme c'était le cas depuis le début de ce travail, ou un schéma Galerkin discontinu. Ces résultats sont comparés à une solution de référence, générée par l'approche monolithique construite respectivement à partir d'un schéma de type θ -méthode ou Galerkin discontinu. On peut constater sur la **Figure 4.13**, qui regroupe les évolutions des erreurs, que le taux de convergence de la méthode n'est pas affecté par le choix du schéma.

Ce résultat valide la faisabilité de la stratégie LATIN couplée au schéma Galerkin discontinu. Une telle technique devrait permettre de mettre en place une approche multiéchelle en temps dans laquelle les fonctions macros peuvent être discontinues, ce qui augmenterait encore la souplesse de la stratégie. Cette approche n'a cependant pas été développée pour l'instant.

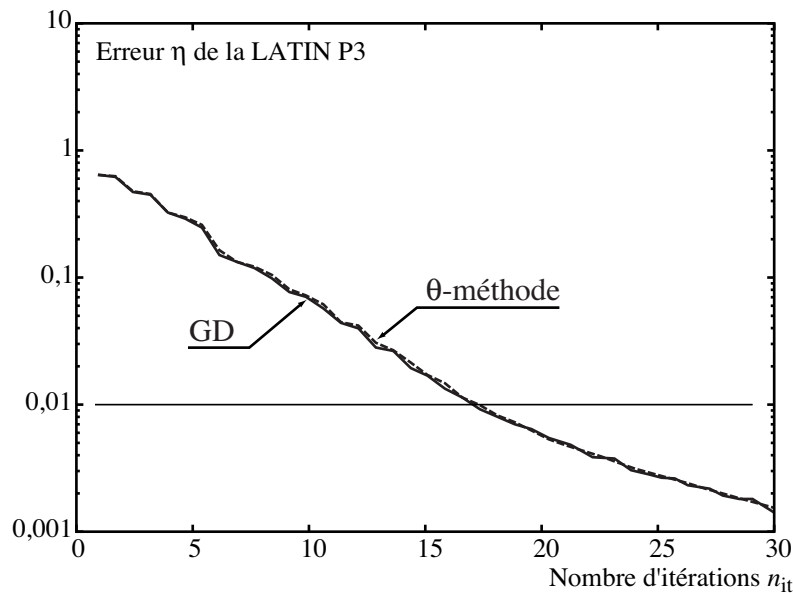


Figure 4.13 • Comparaison des schémas d'intégration

4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons proposé une modification de l'interface entre physiques afin de prendre en compte les échelles de temps très différentes qui peuvent apparaître lors de la simulation d'un problème multiphysique. On a ainsi pu constater qu'une discrétisation plus fine des quantités fluides était nécessaire si l'on voulait obtenir une sorte d'« iso-qualité » fluide/solide de la solution. Cette nouvelle approche permet d'augmenter la modularité de la stratégie LATIN en rendant indépendant les choix des discrétisations temporelles de chacune des physiques. Pour l'instant, seule des discrétisations uniformes et choisies *a priori* ont été envisagées. Un point clé serait évidemment de mettre en place une méthode adaptative de maillage en temps afin de déterminer automatiquement les discrétisations optimales.

Cette nouvelle technique est fondée sur l'approche micro-macro, qui a été proposée pour traiter les aspects multiéchelles en espace et dans laquelle les fonctions macros peuvent être discontinues, ce qui apporte une certaine souplesse dans la stratégie. L'utilisation d'un schéma d'intégration en temps de type Galerkin discontinu devrait permettre d'étendre cette souplesse au cas temporel. Les premiers essais montrent que la convergence de la méthode LATIN n'est pas affectée par l'utilisation d'un tel schéma.

Les aspects multiéchelles en espace

DANS CE CHAPITRE, on montre comment le concept d'interface entre physiques permet de prendre en compte de manière naturelle les aspects multiéchelles en espace inhérents à la cohabitation de plusieurs physiques. On propose notamment une technique de transfert de champs entre des maillages différents. Ces travaux ont été présentés dans [Nér04].

1 Motivations

La méthode des éléments finis est certainement un des outils les plus répandus pour la simulation des problèmes de mécanique des structures (et, dans une moindre mesure, de mécanique des fluides). Un des principaux avantages est qu'une fois un maillage du domaine choisi, les champs solutions bénéficient d'intéressantes propriétés de cohérence et de conservation d'énergie.

Dans de nombreux problèmes, on peut être amené à prendre en compte plusieurs maillages. Deux cas de figure peuvent en effet se présenter :

- on a affaire à plusieurs maillages d'un même domaine, comme c'est notamment le cas dans les techniques de remaillage (grandes déformations, propagation des fissures...), dans les techniques de « zoom » dans une zone particulière (méthode Arlequin [Ben98], techniques globales/locales [Noo86, Whi91], méthode Chimère [Ste83]...), mais aussi lors de la simulation de certains problèmes multiphysiques (couplage thermo-mécanique, interaction fluide-structure dans les milieux poreux...);
- on a affaire à plusieurs domaines et chacun possède son propre maillage, comme c'est le cas dans les problèmes de contact entre deux parties d'un assemblage, dans les méthodes de sous-structuration avec utilisation de maillages indépen-

dants, ou dans les problèmes d'interaction fluide-structure du type aéroélasticité.

Dans les problèmes multiphysiques, le fait de pouvoir utiliser plusieurs maillages est particulièrement intéressant si la résolution est réalisée en couplant plusieurs codes, car on peut imaginer que chacun des codes est capable de générer sa propre discrétisation optimale.

Dans ces problèmes, la difficulté consiste à « coller » les champs provenant de différents maillages [Qui95, Doh00], ou à les transférer d'un maillage à un autre [Ber90, Ber94, Mam95, Far98, Bec00, Her02, Vil02, Fau03], alors que ces maillages n'ont *a priori* aucune raison d'être compatibles. Dans la stratégie LATIN pour le multiphysique, l'utilisation de maillages différents pour la partie solide et la partie fluide n'affecte pas l'étape linéaire, dans laquelle les calculs sont indépendants pour chacune des physiques. C'est à nouveau l'étape locale, au travers de l'interface entre les deux physiques, qui va être en charge de faire cohabiter des champs définis sur le maillage solide ou le maillage fluide. La technique et les opérateurs de transfert qui vont être détaillés ici sont inspirés de [Dur04]. Il faut noter que cet aspect multiéchelle en espace est indépendant et complémentaire de la stratégie d'approximation des inconnues qui a été décrite dans le chapitre 3 et de l'approche multiéchelle en temps qui a été présentée dans le chapitre 4.

Les développements informatiques ont été réalisés dans un code éléments finis prototype, implanté dans l'environnement MatlabTM, maintenu par D. Dureisseix, les pré et post-traitement étant réalisés dans le code Cast3MTM (CEA Saclay, France) [Ver88].

2 Mise en place de l'approche multiéchelle

Nous allons présenter deux approches. L'une, très générale, consiste à introduire un maillage de l'interface et se prête particulièrement bien au cas général des problèmes multiphysiques, notamment lorsqu'ils comptent plus de deux physiques en interaction. L'autre, propre au cas du couplage entre seulement deux physiques, consiste à sous-itérer entre les deux par une méthode de point fixe et se rapproche de la technique proposée dans le chapitre 4.

2.1 Introduction d'une discrétisation de l'interface

2.1.1 Étape locale à l'itération $n + 1/2$

De manière totalement similaire à la stratégie multiéchelle en temps qui a été présentée dans le chapitre 4, on note Ω_S le maillage utilisé pour les quantités solides et Ω_F celui utilisé pour les quantités fluides. On introduit Ω_I , un maillage de l'interface. Durant l'étape linéaire, les deux physiques sont découplées : on utilise Ω_S lorsqu'il s'agit de discrétiser le problème solide et Ω_F lorsqu'il s'agit du problème fluide.

On suppose qu'on a à notre disposition des opérateurs permettant le transfert d'un maillage à un autre :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{IS} : \Omega_S &\rightarrow \Omega_I & \mathcal{P}_{SI} : \Omega_I &\rightarrow \Omega_S \\ \mathcal{P}_{IF} : \Omega_F &\rightarrow \Omega_I & \mathcal{P}_{FI} : \Omega_I &\rightarrow \Omega_F \\ \mathcal{P}_{SF} : \Omega_F &\rightarrow \Omega_S & \mathcal{P}_{FS} : \Omega_S &\rightarrow \Omega_F \end{aligned}$$

de telle sorte que le champ de contraintes σ_S , exprimé sur Ω_S , puisse être transféré en σ_I , exprimé sur Ω_I , par la relation : $\sigma_I = \mathcal{P}_{IS}\sigma_S$. Dans un premier temps et pour simplifier les expressions, on utilise la même notation \mathcal{P}_{∞} pour tous les opérateurs. En toute rigueur, il faudrait préciser $\sigma_I = \mathcal{P}_{IS}^\sigma \sigma_S$, $\varepsilon_I = \mathcal{P}_{IS}^\varepsilon \varepsilon_S$, etc.

Les relations de comportement (1.3) étant considérées comme des propriétés de l'interface entre les physiques, elles doivent être vérifiées localement sur Ω_I :

$$\hat{\sigma}_I = \mathbf{D}\hat{\varepsilon}_I - b\hat{p}_I\mathbf{I}, \quad \hat{q}_I = \frac{1}{Q}\hat{p}_I + b\hat{\varepsilon}_I \quad \text{et} \quad \underline{\hat{W}}_I = \mathbf{H}\underline{\hat{Z}}_I$$

où l'on rappelle la notation $e = \text{Tr}\hat{\varepsilon}$.

La direction de recherche E^+ (2.1), réécrite sur l'interface, devient :

$$\begin{aligned} (\hat{\sigma}_I - \mathcal{P}_{IS}\sigma_{Sn}) + \mathbf{L}(\hat{\varepsilon}_I - \mathcal{P}_{IS}\varepsilon_{Sn}) &= 0 \\ (\hat{q}_I - \mathcal{P}_{IF}q_{Fn}) + r(\hat{p}_I - \mathcal{P}_{IF}p_{Fn}) &= 0 \\ (\underline{\hat{W}}_I - \mathcal{P}_{IF}\underline{W}_{Fn}) + \mathbf{H}(\underline{\hat{Z}}_I - \mathcal{P}_{IF}\underline{Z}_{Fn}) &= 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

où l'on a noté de la même façon tous les opérateurs de transfert.

L'étape locale (2.2) est donc transformée en :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\hat{\varepsilon}_I + \mathbf{D}\hat{\varepsilon}_I - b\hat{p}_I\mathbf{I} &= \mathcal{P}_{IS}\mathbf{A}_{Sn} \\ \frac{1}{Q}\hat{p}_I + r\hat{p}_I + b\hat{\varepsilon}_I &= \mathcal{P}_{IF}\alpha_{Fn} \\ 2\mathbf{H}\underline{\hat{Z}}_I &= \mathcal{P}_{IF}\underline{\beta}_{Fn} \end{aligned} \tag{5.2}$$

dans lequel les seconds membres proviennent de l'étape linéaire n précédente et sont donc exprimés sur les discrétisations solide et fluide :

$$\mathbf{A}_{Sn} = \sigma_{Sn} + \mathbf{L}\hat{\varepsilon}_{Sn}, \quad \alpha_{Fn} = q_{Fn} + r p_{Fn} \quad \text{et} \quad \underline{\beta}_{Fn} = \underline{W}_{Fn} + \mathbf{H}\underline{Z}_{Fn}$$

Une fois que ces quantités ont été transférées sur l'interface, l'étape locale (5.2) est similaire à celle du cas monoéchelle (2.2) et permet de construire $\hat{\varepsilon}_I$, \hat{p}_I et $\hat{\underline{Z}}_I$. Les quantités duales $\hat{\sigma}_I$, \hat{q}_I et $\hat{\underline{W}}_I$ sont ensuite calculées en utilisant la direction de recherche (5.1). Finalement, les différents champs sont renvoyés sur leurs maillages respectifs pour poursuivre par une nouvelle étape linéaire $n + 1$. La question qui se pose alors, celle du choix de ce maillage d'interface, reste pour l'instant ouverte.

2.1.2 Méthode directe

Une solution de référence peut être construite en utilisant une méthode monolithique. Après discrétisation sur Ω_S , l'équation d'admissibilité solide (1.1) s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \varepsilon_S &= B_\varepsilon U_S \\ U_S^{*T} B_\sigma^T \sigma_S &= U_S^{*T} f_{dS} \end{aligned} \quad (5.3)$$

où U_S est un champ défini aux nœuds, σ_S un champ défini aux points d'intégration des éléments et les opérateurs B_ε et B_σ ont été définis dans (2.10). On introduit en outre l'opérateur B_e , tel que $e_S = B_e \dot{U}_S$.

Après discrétisation sur Ω_F , l'équation d'admissibilité fluide (1.2) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} Z_F &= B_z p_F \\ p_F^{*T} (B_q^T q_F + B_w^T W_F) &= p_F^{*T} g_{dF} \end{aligned} \quad (5.4)$$

où p_F est un champ défini aux nœuds, Z_F , q_F et w_F sont des champs définis aux points d'intégration des éléments et les opérateurs B_z , B_q et B_w ont été définis dans (2.10). On introduit en outre l'opérateur d'interpolation B_p , tel que $P_F = B_p p_F$ soit le champ de pression correspondant à p_F mais défini aux points d'intégration.

Les relations de comportement (1.3) peuvent s'écrire aux points d'intégration du maillage Ω_I de l'interface entre les physiques :

$$\sigma_I = D_I \varepsilon_I - b P_I, \quad q_I = \frac{1}{Q} \dot{P}_I + b e_I \quad \text{et} \quad W_I = H_I Z_I \quad (5.5)$$

Par souci de précision, on différencie cette fois les opérateurs de transfert :

$$\begin{aligned}
 \sigma_S &= \mathcal{P}_{SI}^\sigma \sigma_I \quad \text{et} \quad \varepsilon_I = \mathcal{P}_{IS}^\varepsilon \varepsilon_S = \mathcal{P}_{IS}^\varepsilon B_\varepsilon U_S, \quad e_I = \mathcal{P}_{IS}^e e_S = \mathcal{P}_{IS}^e B_e \dot{U}_S \\
 q_F &= \mathcal{P}_{FI}^q q_I \quad \text{et} \quad P_I = \mathcal{P}_{IF}^p P_F = \mathcal{P}_{IF}^p B_p p_F \\
 W_F &= \mathcal{P}_{FI}^w W_I \quad \text{et} \quad Z_I = \mathcal{P}_{IF}^z Z_F = \mathcal{P}_{IF}^z B_z p_F
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Si l'on injecte (5.5) puis (5.6) dans (5.3) et (5.4), on obtient :

$$\begin{aligned}
 U_S^{\star T} \left[\underbrace{(B_\sigma^T \mathcal{P}_{SI}^\sigma D_I \mathcal{P}_{IS}^\varepsilon B_\varepsilon)}_{K_S} U_S - \underbrace{(B_\sigma^T \mathcal{P}_{SI}^\sigma b \mathcal{P}_{IF}^p B_p)}_{N_{SF}} p_F \right] &= U_S^{\star T} f_{dS} \\
 p_F^{\star T} \left[\underbrace{(B_q^T \mathcal{P}_{FI}^q \frac{1}{Q} \mathcal{P}_{IF}^p B_p)}_{S_F} \dot{p}_F + \underbrace{(B_w^T \mathcal{P}_{FI}^w H_I \mathcal{P}_{IF}^z B_z)}_{H_F} p_F + \underbrace{(B_q^T \mathcal{P}_{FI}^q b \mathcal{P}_{IS}^e B_e)}_{N_{FS}} \dot{U}_S \right] &= p_F^{\star T} g_{dF}
 \end{aligned}$$

Le problème monolithique, écrit avec des maillages différents pour chacune des physiques et pour l'interface, consiste donc à résoudre :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ N_{FS} & S_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_S \\ \dot{p}_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_S & -N_{SF} \\ 0 & H_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_S \\ p_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{dS} \\ g_{dF} \end{bmatrix}$$

ou encore, en dérivant le premier groupe d'équations :

$$\begin{bmatrix} K_S & -N_{SF} \\ -N_{FS} & -S_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_S \\ \dot{p}_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -H_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_S \\ p_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{f}_{dS} \\ -g_{dF} \end{bmatrix}$$

dans lequel, *a priori*, $N_{FS} \neq N_{SF}^T$. La résolution directe de ce système est particulièrement coûteuse car elle fait intervenir la factorisation d'une matrice particulièrement pleine. Si tous les maillages sont identiques, *i.e.* $\Omega_S = \Omega_F = \Omega_I$, tous les opérateurs de transfert sont égaux à l'identité : on retrouve alors le système symétrique (1.9) présenté dans le chapitre 1. Cette méthode n'a pour l'instant pas été mise en place.

2.2 Point fixe entre les physiques

2.2.1 Étape locale $n + 1/2$

Les relations de comportement (1.3) sont cette fois exprimées entre les quantités transférées en utilisant \mathcal{P}_{SF} et \mathcal{P}_{FS} :

$$\hat{\sigma}_S = \mathbf{D} \hat{\varepsilon}_S - b(\mathcal{P}_{SF} \hat{p}_F) \mathbf{I}, \quad \hat{q}_F = \frac{1}{Q} \hat{p}_F + b(\mathcal{P}_{FS} \hat{\varepsilon}_S) \quad \text{et} \quad \hat{W}_F = \mathbf{H} \hat{Z}_F$$

Dans ce cas, il faut noter que ces équations ne sont *a priori* plus locales en espace. Ce point sera discuté par la suite.

La direction de recherche E^+ (2.1), s'écrit sur les maillages Ω_S et Ω_F :

$$\begin{aligned} (\hat{\sigma}_S - \sigma_{Sn}) + \mathbf{L}(\hat{\varepsilon}_S - \varepsilon_{Sn}) &= 0 \\ (\hat{q}_F - q_{Fn}) + r(\hat{p}_F - p_{Fn}) &= 0 \\ (\hat{W}_F - W_{Fn}) + \mathbf{H}(\hat{Z}_F - Z_{Fn}) &= 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

L'étape locale (2.2) est donc transformée en :

$$\mathbf{L}\hat{\varepsilon}_S + \mathbf{D}\hat{\varepsilon}_S = \mathbf{A}_{Sn} + b(\mathcal{P}_{SF}\hat{p}_F)\mathbf{I} \quad (5.8a)$$

$$\frac{1}{Q}\hat{p}_F + r\hat{p}_F = \alpha_{Fn} - b(\mathcal{P}_{FS}\hat{\varepsilon}_S) \quad (5.8b)$$

$$2\mathbf{H}\hat{Z}_F = \underline{\beta}_{Fn} \quad (5.8c)$$

L'équation (5.8a) peut être traitée sur Ω_S alors que (5.8b) peut l'être sur Ω_F . La résolution de (5.8c) sur Ω_F est, là encore, conduite *a posteriori* et sans difficulté particulière. La résolution directe du système (5.8a,5.8b) n'est pas efficace dans la mesure où les opérateurs de transfert couplent les valeurs des inconnues aux différents points d'intégration. On se propose de le résoudre par une méthode de point fixe entre (5.8a) et (5.8b). Une fois les seconds membres transférés d'un maillage à l'autre, cette technique permet de ne traiter que des équations locales en espace. Cette démarche est décrite par l'**Algorithme 5.1**. En pratique, le nombre de sous-itérations du point fixe qui sont nécessaires est faible (de l'ordre de 3 ou 4).

Initialisation	$\hat{p}_F \leftarrow p_{Fn}$
<i>Boucle sur les itérations du point fixe</i>	
Transfert de \hat{p}_F sur Ω_S	$\hat{p}_S^p \leftarrow \mathcal{P}_{SF}\hat{p}_F$
Résolution de (5.8a)	$(\hat{\varepsilon}_S, \hat{\varepsilon}_S) \leftarrow \mathbf{L}\hat{\varepsilon}_S + \mathbf{D}\hat{\varepsilon}_S = \mathbf{A}_{Sn} + b\hat{p}_S^p\mathbf{I}$
Transfert de $\hat{\varepsilon}_S$ sur Ω_F	$\hat{e}_F^p \leftarrow \mathcal{P}_{FS}\hat{\varepsilon}_S$
Résolution de (5.8b)	$(\hat{p}_F, \hat{p}_F) \leftarrow \frac{1}{Q}\hat{p}_F + r\hat{p}_F = \alpha_{Fn} - b\hat{e}_F^p$
<i>Fin des itérations du point fixe</i>	
Résolution de (5.8c)	$\hat{Z}_F \leftarrow 2\mathbf{H}\hat{Z}_F = \underline{\beta}_{Fn}$

Algorithme 5.1 • Étape locale $n + 1/2$ pour le multi-échelle en espace

2.2.2 Méthode directe

Une solution de référence peut à nouveau être construite en utilisant une méthode monolithique. Par analogie, on écrit les relations de comportement (1.3) directement aux points d'intégration des maillages Ω_S et Ω_F :

$$\sigma_S = D_S \varepsilon_S - b \mathcal{P}_{SF}^p P_F, \quad q_F = \frac{1}{Q} \dot{P}_F + b \mathcal{P}_{FS}^e e_S \quad \text{et} \quad W_F = H_F Z_F \quad (5.9)$$

Si l'on injecte (5.9) dans (5.3) et (5.4), on obtient :

$$U_S^{*T} \left[\underbrace{(B_\sigma^T D_S B_\varepsilon)}_K U_S - \underbrace{(B_\sigma^T b \mathcal{P}_{SF}^p B_p)}_{A_{SF}} P_F \right] = U_S^{*T} f_{dS}$$

$$P_F^{*T} \left[\underbrace{(B_q^T \frac{1}{Q} B_p)}_S \dot{P}_F + \underbrace{(B_w^T H_F B_z)}_H P_F + \underbrace{(B_q^T b \mathcal{P}_{FS}^e B_e)}_{A_{FS}} \dot{U}_S \right] = P_F^{*T} g_{dF}$$

Le problème monolithique, écrit avec des maillages différents pour chacune des physiques, consiste donc à résoudre :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{FS} & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_S \\ \dot{P}_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -A_{SF} \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_S \\ P_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{dS} \\ g_{dF} \end{bmatrix}$$

ou encore, en dérivant le premier groupe d'équations :

$$\begin{bmatrix} K & -A_{SF} \\ -A_{FS} & -S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_S \\ \dot{P}_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_S \\ P_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{f}_{dS} \\ -g_{dF} \end{bmatrix}$$

dans lequel, *a priori*, $A_{FS} \neq A_{SF}^T$. La résolution directe de ce système est à nouveau particulièrement coûteuse car elle fait intervenir la factorisation d'une matrice particulièrement pleine. Si les maillages sont identiques, *i.e.* $\Omega_S = \Omega_F$, les opérateurs de transfert sont égaux à l'identité : on retrouve alors le système symétrique (1.9) présenté dans le chapitre 1. Cette méthode a été mise en place et la solution \mathbf{s}_{ex} de ce problème sert de référence lorsque la technique multiéchelle avec point fixe entre les deux physiques est employée.

3 Opérateurs de transfert

Nous allons présenter la méthode utilisée dans le cas où l'on cherche à définir les opérateurs de transfert \mathcal{P}_{FS} et \mathcal{P}_{SF} entre Ω_S et Ω_F . La démarche est bien évidemment

identique lorsqu'on introduit le maillage de l'interface Ω_I .

Comme ces opérations de transfert peuvent être effectuées plusieurs fois, une propriété intéressante des opérateurs est la conservation de l'énergie, ou plutôt de la dualité au sens du produit scalaire correspondant. C'est cette contrainte de base qui va servir à les définir. On considère un champ spatial $e_S(\underline{M})$, défini sur le domaine Ω_S . Sa projection en $e_F(\underline{M})$, définie sur le domaine Ω_F et telle que $e_F(\underline{M}) = \mathcal{P}_{FS}e_S(\underline{M})$, est définie par l'équivalence des moyennes généralisées des deux champs vis-à-vis d'une base de fonctions $\varphi_F^{(i)}$ données (cf. **Figure 5.1**) :

$$\forall i, \quad \int_{\Omega_F} \varphi_F^{(i)} e_F d\Omega_F = \int_{\Omega_S} \varphi_F^{(i)} e_S d\Omega_S \quad (5.10)$$

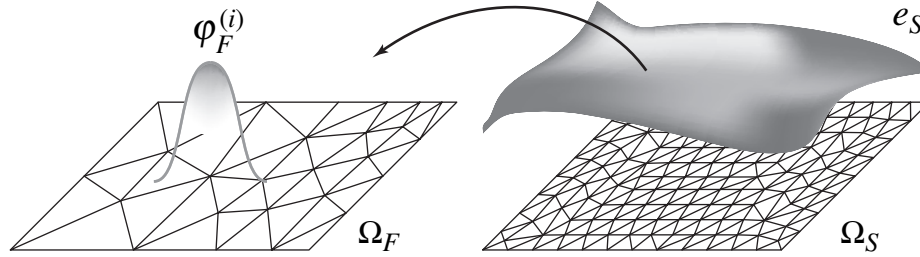


Figure 5.1 • Extraction basée sur des moyennes généralisées

De nombreux choix sont possibles pour la base de projection. Deux possibilités vont être proposées dans les sections suivantes.

3.1 Cas d'un champ C^0 défini aux nœuds

Si e_S et e_F sont des champs définis aux nœuds et continus sur les maillages Ω_S et Ω_F , on peut imaginer prendre comme base celle des fonctions poids introduites dans les techniques d'approximation diffuse [Vil02], celle des fonctions de base éléments finis, etc.

On se place dans ce deuxième cas (cf. **Figure 5.2**) et on désigne par N_S et N_F les vecteurs lignes contenant les fonctions de base éléments finis de Ω_S et Ω_F . On désigne en outre par E_S et E_F les vecteurs colonnes contenant les valeurs nodales des champs e_S et e_F , de telle sorte que $e_S(\underline{M}) = N_S(\underline{M})E_S$ et $e_F(\underline{M}) = N_F(\underline{M})E_F$. Les champs e_S et e_F ont donc la même régularité que les fonctions de base. On cherche l'opérateur de transfert \mathcal{P}_{FS} qui permet de passer des valeurs nodales E_S sur Ω_S aux valeurs nodales

E_F sur Ω_F . La définition (5.10) s'écrit :

$$\int_{\Omega_F} N_F^T N_F d\Omega_F E_F = \int_{\Omega_S} N_S^T N_S d\Omega_S E_S \iff \mathbf{M}_{FF} E_F = \mathbf{M}_{FS} E_S$$

où \mathbf{M}_{FF} est l'analogue d'une matrice de masse, produit croisé des fonctions de base de Ω_F , et \mathbf{M}_{FS} est le produit croisé des fonctions de base de chaque maillage. Cette seconde matrice peut être calculée efficacement en utilisant la technique décrite dans [Hei03].

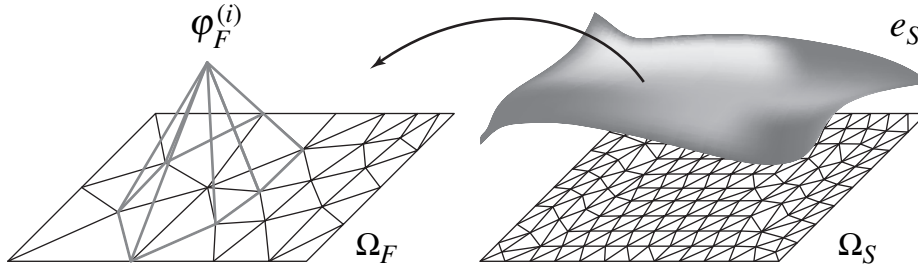


Figure 5.2 • Fonctions test continues

Dans ce cas, $E_F = \mathbf{P}_{FS} E_S$ avec $\mathbf{P}_{FS} = \mathbf{M}_{FF}^{-1} \mathbf{M}_{FS}$ et on reconnaît la méthode de projection de mortier [Ber90, Ber94]. L'inconvénient principal de cette technique est le coûteux recours à \mathbf{M}_{FF}^{-1} , qui est une matrice globale sur l'ensemble du maillage Ω_F . En revanche, parmi les intéressantes propriétés de la méthode de mortier, on compte la vérification du patch-test [Zie97] qui consiste à pouvoir transférer exactement un champ représentable sur les deux maillages (d'où l'appellation « projection »). En effet, si e est un champ représentable sur Ω_S et Ω_F , il peut s'écrire $e = N_S E_S = N_F E_F$, et on transfère E_S sur Ω_F par :

$$\mathbf{P}_{FS} E_S = \mathbf{M}_{FF}^{-1} \mathbf{M}_{FS} E_S = \mathbf{M}_{FF}^{-1} \int_{\Omega_S} N_F^T N_S E_S d\Omega_S = \mathbf{M}_{FF}^{-1} \int_{\Omega_F} N_F^T N_F E_F d\Omega_F = \mathbf{M}_{FF}^{-1} \mathbf{M}_{FF} E_F = E_F$$

L'opérateur de transfert de Ω_F vers Ω_S , qui transfère f_F , un champ dual de e_F , en f_S par $E_S = \mathbf{P}_{SF} E_F$, est construit par dualité en écrivant la conservation du produit scalaire :

$$\int_{\Omega_F} e_F f_F d\Omega_F = \int_{\Omega_S} e_S f_S d\Omega_S$$

pour tout champ e_S transféré en e_F par $E_F = \mathbf{P}_{FS} E_S$. On montre aisément que $\mathbf{P}_{SF} = \mathbf{M}_{SS}^{-1} \mathbf{P}_{FS}^T \mathbf{M}_{FF}$.

L'objectif est maintenant d'étendre cette approche à des champs définis, non plus aux nœuds, mais aux points d'intégration des éléments, et qui ne sont pas forcément C^0 . C'est le cas pour les champs intervenant dans la vérification des propriétés de l'interface entre physiques : le taux de déformation volumique \hat{e}_S et la pression interstitielle \hat{p}_F .

3.2 Cas d'un champ défini aux points d'intégration

On suppose maintenant que e_S est un champ connu aux points d'intégration du maillage Ω_S et on veut définir sa projection $e_F = \mathcal{P}_{FS}e_S$ sur Ω_F , connue elle aussi aux points d'intégration. On introduit \tilde{N}_S (resp. \tilde{N}_F), la base composée des restrictions à chaque élément des fonctions de base éléments finis N_S (resp. N_F). Cette base forme bien entendu une partition de l'unité [Moë99]. La procédure pour construire \mathcal{P}_{FS} est la suivante :

- la première étape consiste à rendre le champ e_S interpolable. Pour cela, on choisit de le représenter indépendamment sur chaque élément Ω_e de Ω_S , en utilisant les éléments \tilde{N}_S^e de la base \tilde{N}_S . Les valeurs E_S^e de E_S sont définies en chacun des nœuds de l'élément Ω_e (cf. **Figure 5.3**). Cette phase d'*extrapolation* de e_S à E_S peut être effectuée élément par élément en résolvant le problème de minimisation :

$$\forall \Omega_e \in \Omega_S, \quad E_S^e = \arg \min_{E_S^e} \int_{\Omega_e} (\tilde{N}_S^e E_S^e - e_S)^2 d\Omega_e$$

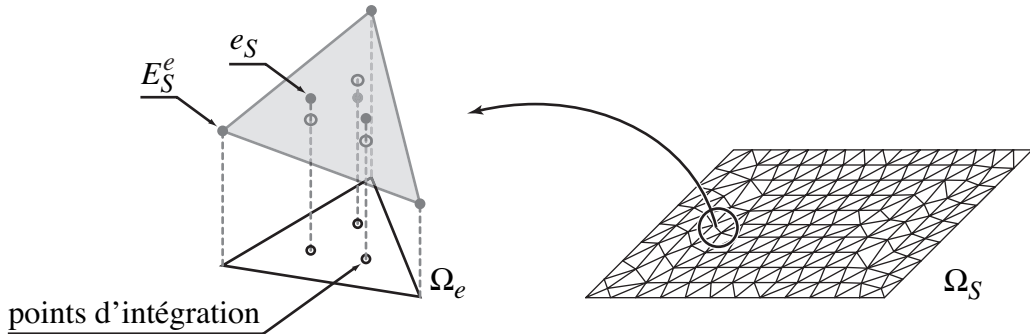


Figure 5.3 • Extrapolation

Le champ obtenu grâce à cette extrapolation appartient à l'espace généré par les fonctions \tilde{N}_S et est donc *a priori* discontinu entre les éléments.

- la deuxième étape consiste à calculer le champ E_F , la projection de E_S sur Ω_F . La démarche est identique à celle présentée pour un champ interpolable, mais en utilisant à nouveau la base des fonctions discontinues \tilde{N}_S (cf. **Figure 5.4**). Avec des notations évidentes, on a alors : $E_F = \mathbf{P}_{FS}E_S$ avec $\mathbf{P}_{FS} = \tilde{\mathbf{M}}_{FF}^{-1}\tilde{\mathbf{M}}_{FS}$.
- la troisième étape consiste à *interpoler* E_F aux points d'intégration de Ω_F afin de définir $e_F : (e_F)_j = \tilde{N}_F(j)E_F$, où j est un point d'intégration de l'élément courant de Ω_F .

La procédure complète permet de définir $e_F = \mathcal{P}_{FS}e_S$.

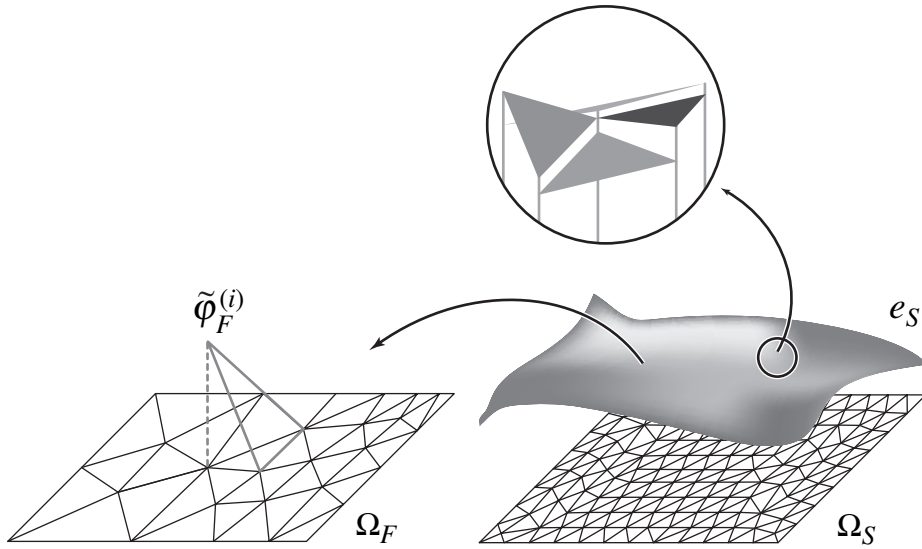


Figure 5.4 • Fonctions test discontinues

Remarque • Contrairement aux méthodes de mortar traditionnelles [Ber94], les matrices \tilde{M}_{FF} et \tilde{M}_{FS} sont définies au niveau des éléments. Dans la pratique, elles ne couplent que les éléments de Ω_S et de Ω_F qui ont une intersection et il n'est pas nécessaire de les assembler sur les maillages complets. L'opération de transfert de E_S en E_F n'est donc pas une opération très coûteuse.

Les principales propriétés de cette opération de transfert d'information sont que :

- la projection réciproque \mathcal{P}_{SF} , de Ω_F vers Ω_S , est définie par dualité en écrivant la conservation du produit scalaire correspondant. Dans le problème qui nous intéresse, cette conservation peut s'écrire, entre les quantités duales (e, p) , pour tout champ e_S transféré en $e_F = \mathcal{P}_{FS}e_S$ et tout champ p_F transféré en $p_S = \mathcal{P}_{SF}p_F$:

$$\int_{\Omega_F} e_F p_F d\Omega_F = \int_{\Omega_S} e_S p_S d\Omega_S \quad (5.11)$$

ce qui permet d'exprimer \mathcal{P}_{SF} comme l'opérateur transposé de \mathcal{P}_{FS} au sens la forme symétrique (5.11).

- la formulation est symétrique, *i.e.* on obtient des expressions identiques si l'on commence par définir \mathcal{P}_{SF} , à l'aide des matrices \tilde{M}_{SS} et \tilde{M}_{SF} , puis qu'on calcule la réciproque \mathcal{P}_{FS} .
- les deux projecteurs, \mathcal{P}_{FS} et \mathcal{P}_{SF} , vérifient le patch-test consistant à transmettre sans erreur un champ représentable sur les deux maillages.

Dans tous les calculs précédents, les matrices de masse élémentaires \tilde{M}_{SS} et \tilde{M}_{FF} sont supposées inversibles, ce qui est le cas si l'on ne fait pas de sous-intégration. Dans

le cas qui nous intéresse, la pression interstitielle \hat{p}_F et le taux de déformation volumique \hat{e}_S sont définis et projetés aux 3 points de Gauss des éléments. Ce choix est adéquat pour la partie fluide puisque les éléments utilisés sont des triangles à 3 nœuds et $\tilde{\mathbf{M}}_{FF}$ est inversible. Pour ce qui est de la partie solide, on utilise des triangles à 6 nœuds pour les déplacements. Le taux de déformation peut donc être représenté par des polynômes du premier ordre, *i.e.* sur des triangles à 3 nœuds, construits à partir des triangles à 6 nœuds en n'en conservant que les sommets. La matrice $\tilde{\mathbf{M}}_{SS}$ est alors elle aussi inversible.

Les autres opérateurs de transfert, \mathcal{P}_{SI} , \mathcal{P}_{IS} , \mathcal{P}_{FI} et \mathcal{P}_{IF} , peuvent être construits de la même manière. Les opérateurs qui doivent opérer sur des tenseurs ou des vecteurs (comme \mathcal{P}_{SI}^σ , \mathcal{P}_{FI}^z , ...), sont simplement construits composante par composante. Les énergies correspondantes sont conservées.

4 Résultats

4.1 Consolidation d'un sol

On reprend le problème de consolidation de la section 4.1 du chapitre 2, dont la géométrie est rappelée sur la **Figure 5.5**. Le matériau, les conditions aux limites, le chargement, ainsi que les directions de recherche sont identiques à ceux qui avaient été utilisés dans cette section.

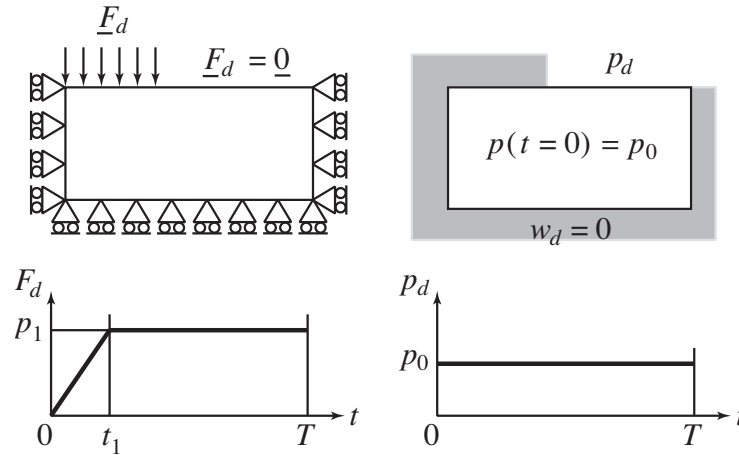


Figure 5.5 • Consolidation d'un sol

La **Figure 5.6** représente les maillages Ω_S et Ω_F qui vont être utilisés pour la partie solide et pour la partie fluide. La **Figure 5.7**, pour sa part, permet de comparer

l'évolution de la pression maximale au cours du temps, qui est obtenue en utilisant un maillage unique ou les deux maillages différents. Dans le second cas, l'évolution est celle de la pression représentée sur le maillage fluide. Il est clair que l'utilisation des deux maillages ne modifie que très peu les résultats mais permet d'accroître la modularité de la stratégie.

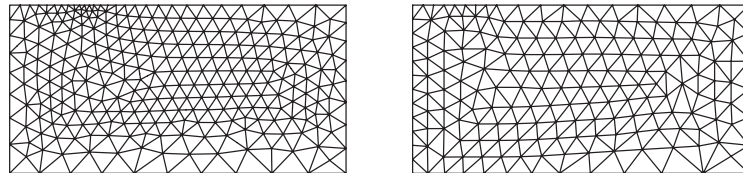


Figure 5.6 • Maillages solide Ω_S et fluide Ω_F

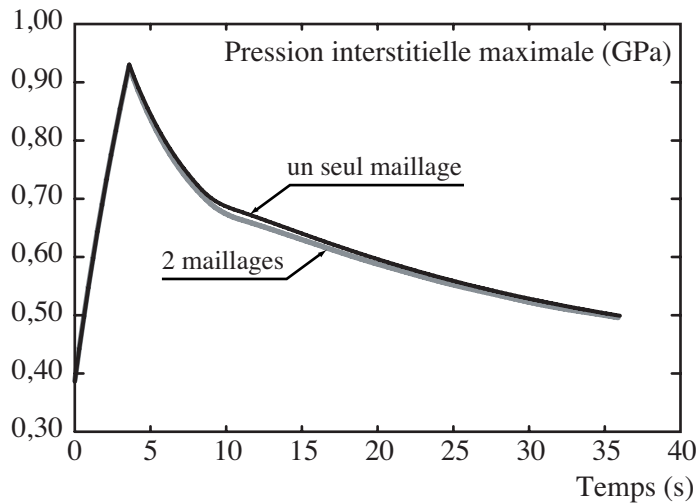


Figure 5.7 • Évolution de la pression interstitielle maximale

On se propose maintenant d'étudier l'influence de l'introduction d'un troisième maillage, celui de l'interface entre les physiques. La Figure 5.8 représente à nouveau les maillages solide et fluide ainsi que deux propositions de maillage Ω_I pour l'interface, construits *a priori*. La Figure 5.9 permet de comparer l'évolution de la pression maximale au cours du temps, obtenue en utilisant un maillage unique ou les trois maillages. Dans le second cas, l'évolution est celle de la pression représentée sur le maillage fluide. Il semble que l'utilisation du maillage d'interface modifie peu les résultats, même lorsque celui-ci est grossier. L'utilisation d'un maillage « pauvre » de l'interface est à rapprocher des travaux menés sur la discrétisation des interefforts dans [Lad01a, Lad02b].

Lorsqu'on utilise cette technique, il faut noter qu'on dispose de plusieurs valeurs de chacun des champs. Par exemple, pour la pression, on compte : p_F en sortie d'étape linéaire, donc sur Ω_F ; \hat{p}_I en sortie d'étape locale, donc sur Ω_I ; \hat{p}_F après transfert de

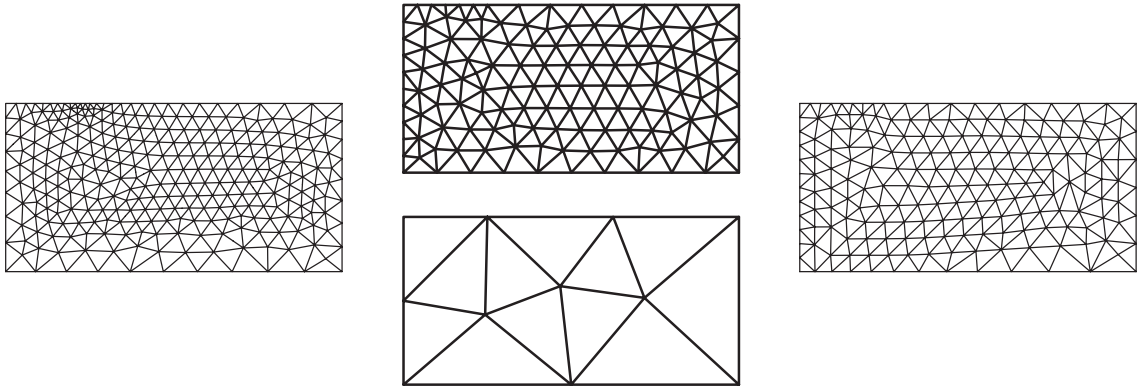


Figure 5.8 • Maillage solide Ω_S , maillages fin et grossier de l'interface Ω_I et maillage fluide Ω_F

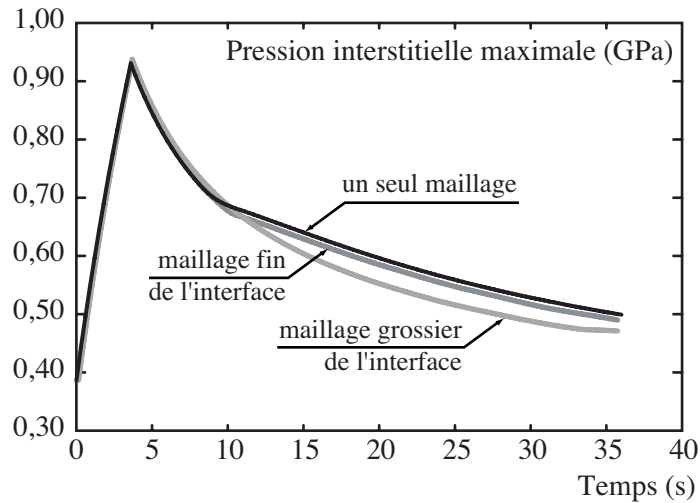


Figure 5.9 • Évolution de la pression interstitielle maximale

\hat{p}_I sur Ω_F . La **Figure 5.10** permet de comparer l'évolution de ces différentes pressions dans le cas où la discrétisation de l'interface la plus grossière a été utilisée. Ces pressions présentent évidemment quelques différences.

4.2 Filtre poreux

On considère à nouveau le filtre poreux qui a été présenté dans la section 3 du chapitre 3 et dont la géométrie est rappelée sur la **Figure 5.11**. Le matériau, les conditions aux limites, le chargement, ainsi que les directions de recherche sont identiques à ceux qui avaient été utilisés dans cette section.

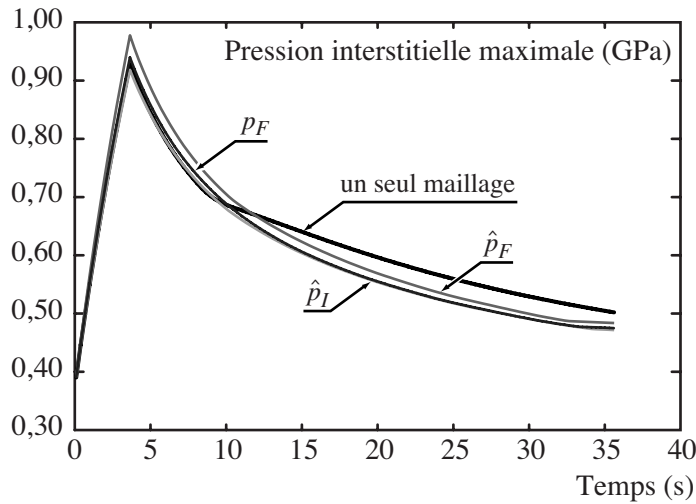


Figure 5.10 • Évolution de la pression interstitielle maximale

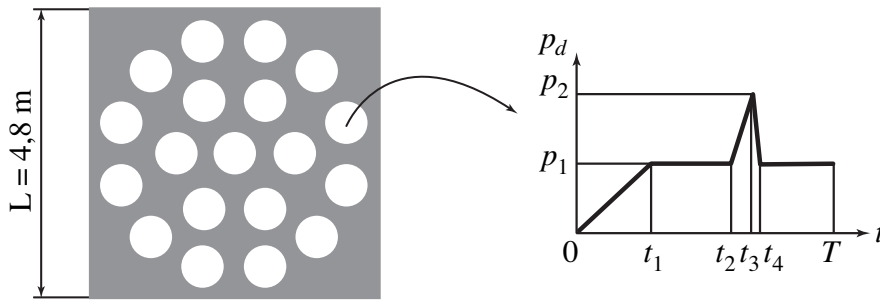


Figure 5.11 • Géométrie du filtre

La **Figure 5.12** représente la répartition de la déformation principale et de la pression dans le domaine à l’instant t_2 . Comme on l’avait déjà remarqué, les déformations sont concentrées entre les trous et comptent des gradients bien plus important que la pression. Les fortes variations de pression sont, pour leur part, plutôt situées dans la partie supérieure droite du quart de filtre. Ce constat motive le fait d’utiliser des maillages différents pour les deux physiques. La **Figure 5.13** représente ainsi deux maillages qui sont en accord avec les répartition que nous venons de décrire.

La **Figure 5.14** regroupe l’évolution des erreurs et des indicateurs d’erreur pour la LATIN 0P3 et avec les approximations $\frac{1}{2}$ P3 et P3. Les solutions sont comparées à la référence s_{ex} générée par l’approche monolithique multiéchelle en espace décrite dans la section 2.2.2 de ce chapitre. On constate que la prise en compte des différents maillages ne modifie pas le taux de convergence de la stratégie et que l’indicateur est toujours aussi représentatif de l’erreur.

Remarque • Comme tous les champs solides (resp. fluides) sont représentés sur

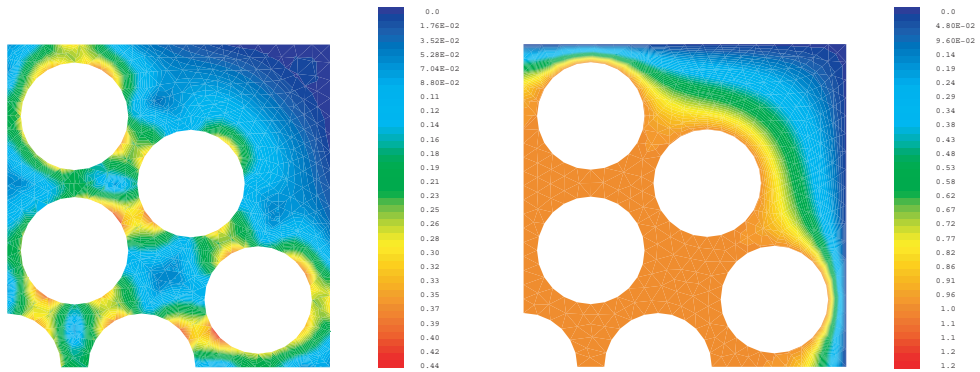


Figure 5.12 • Répartition de la déformation et de la pression à t_2

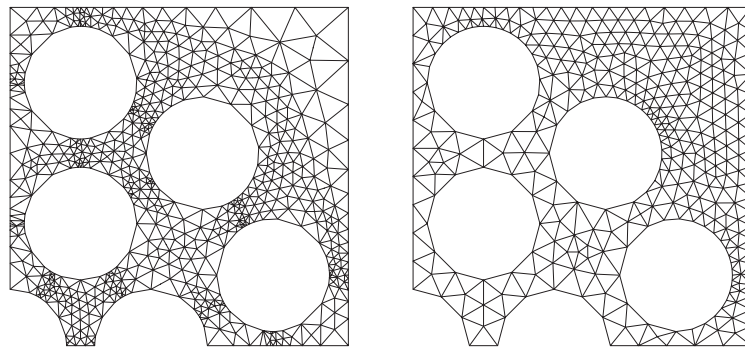


Figure 5.13 • Maillages solide Ω_S et fluide Ω_F

le même maillage Ω_S (resp. Ω_F), que ce soit en sortie d'étape locale, linéaire ou de la méthode monolithique, le calcul de l'erreur et de l'indicateur ne pose pas de problème particulier et tous tendent vers une valeur nulle.

On se propose à nouveau d'étudier l'influence de l'introduction d'un troisième maillage, pour l'interface entre les physiques. La **Figure 5.15** représente les maillages solide et fluide ainsi qu'un maillage d'interface, construit *a priori*.

La **Figure 5.16** permet de comparer les répartitions de pression interstitielle à l'instant T , obtenues en utilisant un seul maillage, des maillages solide et fluide, des maillages solide, fluide et d'interface. Il est clair que résultats obtenus sont très proches, ce qui valide la technique proposée.

La **Figure 5.17** regroupe cette fois-ci l'évolution des indicateurs d'erreur pour la LATIN 0P3 et avec les approximations $\frac{1}{2}$ P3 et P3. Comme une solution de référence prenant en compte l'utilisation d'un maillage de l'interface n'a pas été générée, on ne peut étudier que l'indicateur, qui mesure la « distance » entre une solution en sortie d'étape linéaire (exprimée sur Ω_S pour les quantités solides et Ω_F pour les quantités

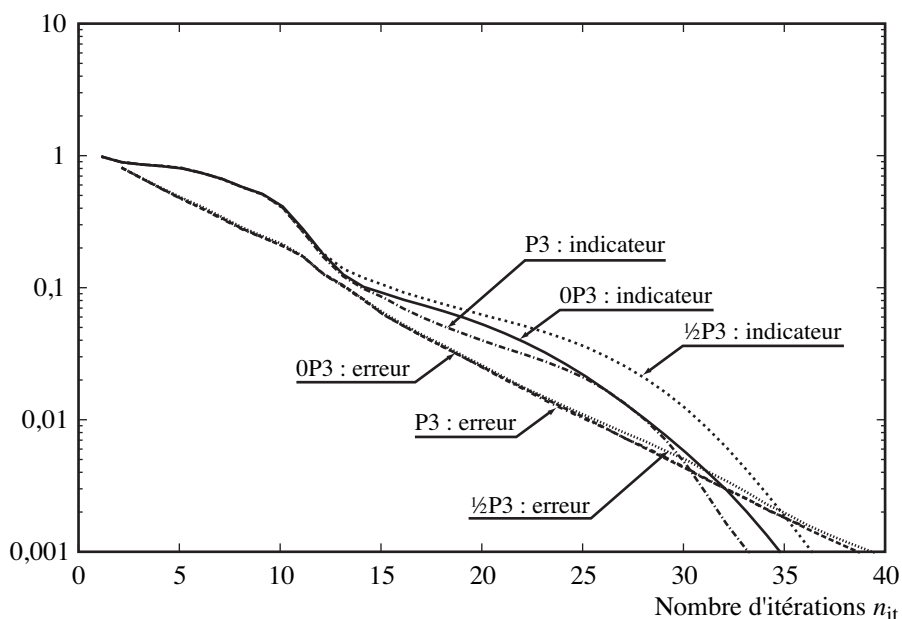


Figure 5.14 • Évolution des erreurs vs. itérations

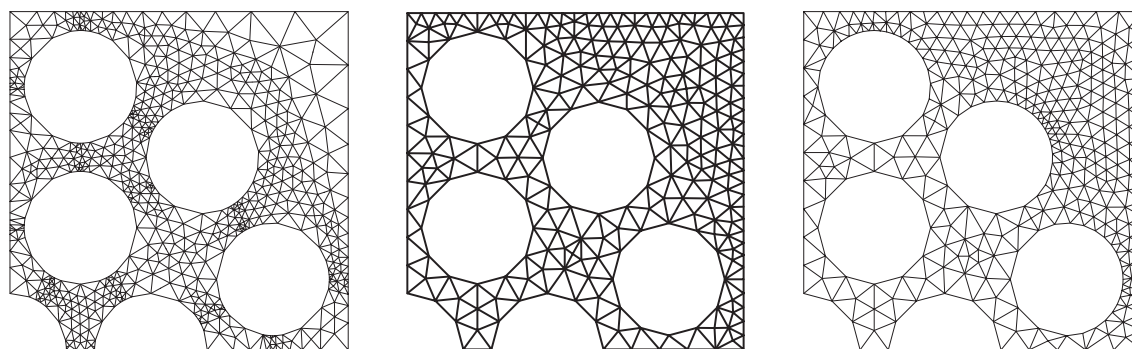


Figure 5.15 • Maillages solide Ω_S , interface Ω_I et fluide Ω_F

fluides) et une solution en sortie d'étape locale (exprimée sur Ω_I). Les maillages étant tous différents, il est normal de constater une stagnation de l'indicateur puisque les champs discrétisés sont de toute manière différents à convergence. Un tel indicateur n'est donc pas forcément pertinent pour mesurer la convergence de la méthode mais donne en revanche une information sur l'erreur en discrétisation. Les mêmes calculs sont donc menés en utilisant de nouveaux maillages, plus fins, représentés sur la **Figure 5.18**. Le niveau atteint par les indicateurs d'erreurs est alors plus bas, comme on peut le constater sur la **Figure 5.19**.

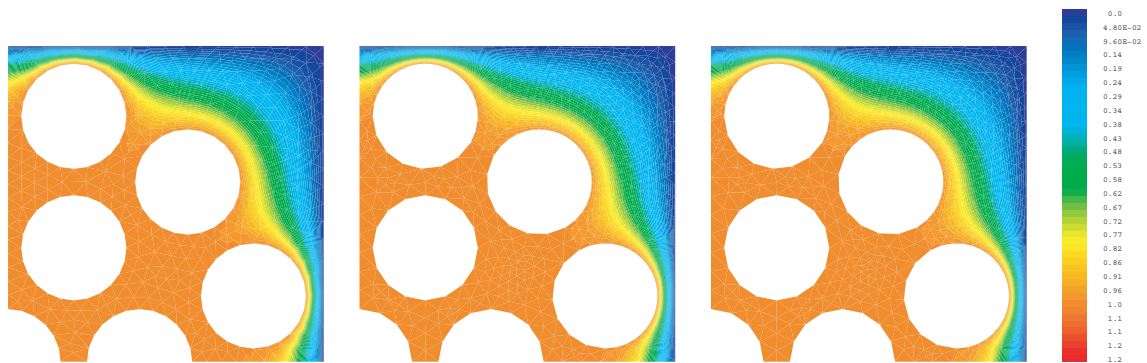


Figure 5.16 • Comparaison des répartitions de pression obtenues avec les différentes approches

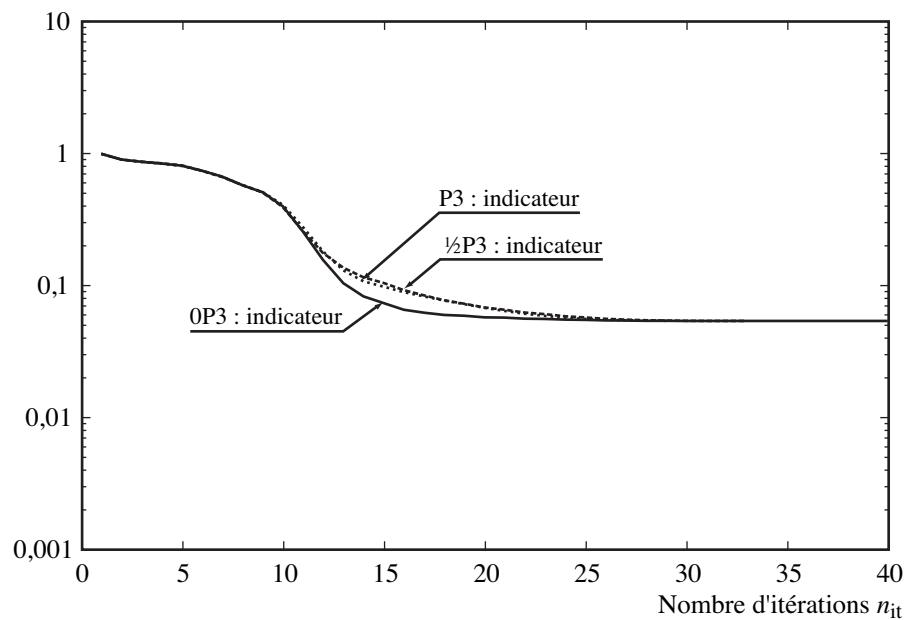


Figure 5.17 • Évolution des erreurs vs. itérations

5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons proposé une modification de l'interface entre physiques afin de permettre l'utilisation de maillages spatiaux différents pour chacune des physiques. Cette technique est particulièrement intéressante dans le cas du couplage de codes lorsque chacun des programmes est capable de générer son propre maillage automatiquement. Comme dans le cas des aspects multiéchelles en temps, nous avons introduit la possibilité d'utiliser un maillage de l'interface, sur lequel les relations de comportement doivent être vérifiées.

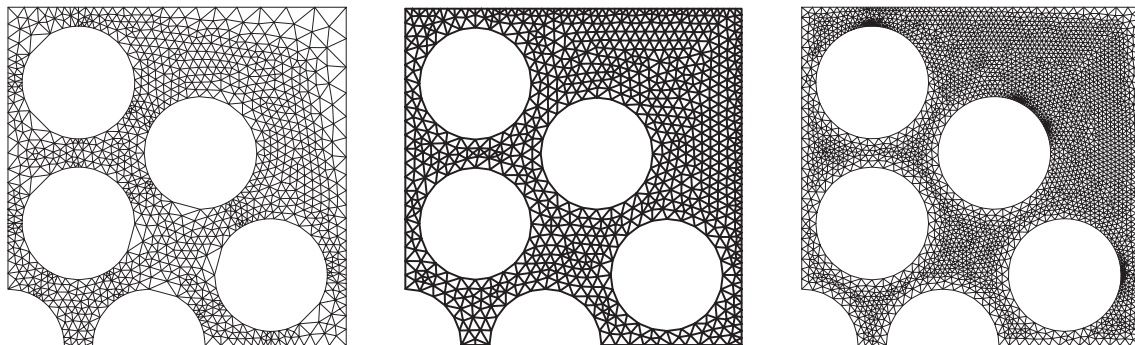


Figure 5.18 • Maillages solide Ω_S , interface Ω_I et fluide Ω_F

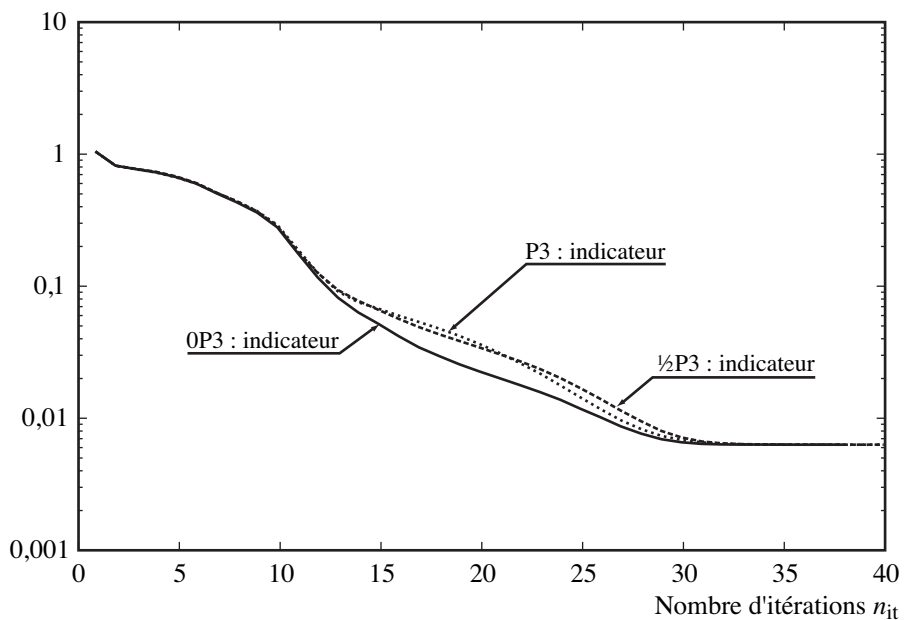


Figure 5.19 • Évolution des erreurs vs. itérations

Cette nouvelle approche permet d'augmenter la modularité de la stratégie LATIN en rendant indépendant les choix des discrétisations de chacune des physiques. La mise en place d'une méthode de construction automatique du maillage de l'interface reste un point important mais n'a cependant pas été abordée pour l'instant.

Prise en compte des non linéarités

DANS CE CHAPITRE, on montre comment le concept d'interface entre physiques permet de prendre en compte les aspects non linéaires qui peuvent apparaître dans le comportement du matériau constitutif de la structure. On s'intéresse en particulier aux cas d'une perméabilité et d'une rigidité non constantes. On étudie en outre l'influence du « degré » de non linéarités sur le taux de convergence de la stratégie LATIN. Ces travaux ont été présentés dans [Nér04].

1 Perméabilité et rigidité non constantes

Il semble qu'une majorité des problèmes de consolidation traités dans la littérature se limitent à un comportement linéaire du milieu poreux. En réalité, dans la plupart des situations rencontrées en géomécanique, le comportement du sol peut devenir fortement non linéaire [Kon63, Lew98, Dor02, Mer02]. Nous allons nous intéresser ici à la prise en compte des non linéarités dans la stratégie LATIN. Pour montrer la faisabilité de la méthode, nous ne considérerons dans un premier temps que des non linéarités simples, comme le comportement élastique non linéaire du squelette et la perméabilité non constante du milieu. La prise en compte de non linéarités plus fortes, comme la plasticité, ou avec la présence de variables internes, nécessiterait certainement un traitement particulier.

1.1 Perméabilité

Tout au long de ce travail, nous avons considéré la loi de Darcy sous la forme :

$$\underline{W} = \frac{K}{\mu_w} \underline{Z}$$

où K était la perméabilité du matériau supposée constante et μ_w la viscosité dynamique du fluide saturant. D'après [Lew98, Mer02], cette loi peut en fait être écrite plus précisément :

$$\underline{W} = \frac{k_r k}{\mu_w} \underline{Z}$$

où k_r est la perméabilité relative, fonction du degré de saturation (égale à 1 dans le cas de la saturation totale) et k la perméabilité intrinsèque du matériau (supposé isotrope). Expérimentalement, on constate que la perméabilité intrinsèque n'est pas constante mais dépend de l'indice des vides e défini par :

$$e = \frac{V_v}{V_s}$$

où V_v est le volume des vides (entièrement remplis dans le cas de la saturation totale) et V_s le volume du squelette dans un volume élémentaire représentatif du milieu. L'indice e peut être exprimé en fonction de la porosité n du matériau :

$$n = \frac{V_v}{V_s + V_v}$$

par la relation :

$$e = \frac{n}{1 - n}$$

[Mer02] propose de relier la perméabilité intrinsèque k à l'indice des vides e par une loi du type :

$$k = k_0 \frac{e}{e_0}$$

où une première approximation de l'évolution de e en fonction des déformations ε peut être construite dans le cas unidimensionnel en supposant le squelette indéformable :

$$e \simeq e_0 + (1 + e_0) \text{Tr} \varepsilon$$

Nous allons utiliser ici une modification de cette loi en supposant que la perméabilité intrinsèque est reliée à la déformation par :

$$k = k_0 \frac{n_0}{1 + n_0} \left(1 + \frac{1}{n_0} \left\langle \frac{\text{Tr} \varepsilon - \text{Tr} \varepsilon_0}{-\text{Tr} \varepsilon_0} \right\rangle_+^\alpha \right) \quad (6.1)$$

où $\langle \cdot \rangle_+$ désigne la partie positive, k_0 et n_0 la perméabilité et la porosité du milieu non déformé, ε_0 la déformation au dessous de laquelle la perméabilité ne peut plus diminuer (typiquement $\text{Tr} \varepsilon_0 = -n_0$) et α un paramètre dépendant du matériau (cf. **Figure 6.1**). Dans le cas de la saturation totale, la loi de Darcy s'écrit donc sous la forme :

$$\underline{W} = \mathbf{H}(\varepsilon) \underline{Z}$$

où $\mathbf{H}(\varepsilon) = \frac{k(\varepsilon)}{\mu_w} \mathbf{I}$ et le problème que l'on cherche à résoudre est non linéaire.

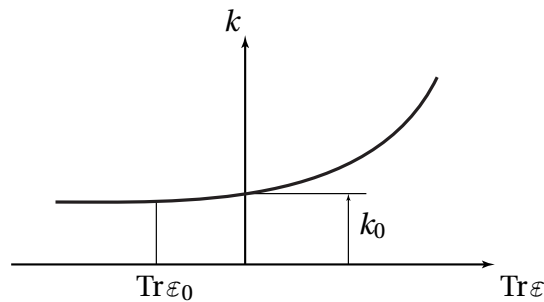


Figure 6.1 • Évolution de la perméabilité intrinsèque avec la déformation volumique

1.2 Rigidité

De la même manière, nous avons jusqu'à présent considéré la loi de Hooke :

$$\sigma = \mathbf{D}\varepsilon - bp\mathbf{I}$$

où \mathbf{D} était le tenseur de Hooke, supposé constant, et b le coefficient de Biot. [Lew98] propose de réécrire cette loi sous la forme plus précise suivante :

$$\sigma = \mathbf{D}(\varepsilon)\varepsilon - bp\mathbf{I}$$

où le tenseur de Hooke est maintenant une fonction des déformations ε . [Kon63] propose une approximation de la courbe contraintes-déformations pour le sable et les argiles :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{-\varepsilon_1}{A + B(-\varepsilon_1)} \quad (6.2)$$

qui relie la différence entre σ_1 , la plus grande des contraintes principales, et σ_3 , la plus petite, à ε_1 , la plus grande des déformations principales (cf. **Figure 6.2**). Les paramètres A et B sont des constantes matériaux qui peuvent être déterminées à partir d'essais triaxiaux conventionnels (confinement sous $\sigma_2 = \sigma_3$ constantes). Comme le modèle de Kondner n'est valable que dans le cas unidimensionnel, les tests numériques qui suivront se placeront dans ce cas de figure. Pour une extension tridimensionnelle du modèle, on pourra se référer à [Dor02].

2 Méthode LATIN pour le non linéaire

2.1 Étape locale à l'itération $n + 1/2$

A priori, la prise en compte des aspects non linéaires précédents ne se traduit que par une modification des relations de comportement du matériau et donc des proprié-

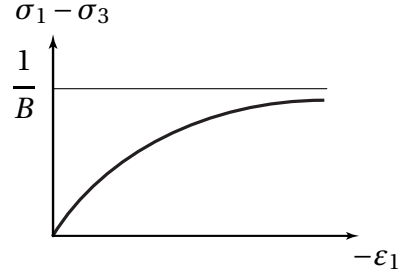


Figure 6.2 • Évolution de la rigidité avec la déformation

tés de l'interface entre physique.

L'étape locale $n + 1/2$ (2.2) est légèrement modifiée afin de faire apparaître les opérateurs matériaux qui dépendent des déformations :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\hat{\underline{\varepsilon}}_{n+1/2} + \mathbf{D}(\hat{\underline{\varepsilon}}_{n+1/2})\hat{\underline{\varepsilon}}_{n+1/2} - b\hat{p}_{n+1/2}\mathbf{I} &= \mathbf{A}_n \\ \frac{1}{Q}\hat{p}_{n+1/2} + r\hat{p}_{n+1/2} + b\text{Tr}\hat{\underline{\varepsilon}}_{n+1/2} &= \alpha_n \\ (\mathbf{M} + \mathbf{H}(\hat{\underline{\varepsilon}}_{n+1/2}))\hat{\underline{Z}}_{n+1/2} &= \underline{\beta}_n \end{aligned} \quad (6.3)$$

qui peut s'écrire sous la forme d'un système différentiel non linéaire du type :

$$A\dot{X} + B(X)X = C$$

résolu classiquement en utilisant un algorithme de type Newton [Kel03] portant sur un petit nombre d'inconnues (du fait de la localité en espace).

Remarque sur l'étape linéaire • L'étape linéaire $n + 1$ reste, pour sa part, inchangée. Elle consiste toujours à résoudre deux problèmes globaux découplés. Le problème solide (2.5) consiste à trouver $\dot{\underline{\varepsilon}}_{n+1} = \varepsilon(\dot{\underline{U}}_{n+1})$ avec $\underline{U}_{n+1} \in \mathcal{U}^{[0,T]}$ vérifiant à chaque instant t de $[0, T]$:

$$\forall \underline{U}^* \in \mathcal{U}_0, \quad \int_{\Omega} \text{Tr}[\varepsilon(\dot{\underline{U}}_{n+1})\mathbf{L}\varepsilon(\underline{U}^*)] d\Omega = \int_{\Omega} \text{Tr}[\hat{\mathbf{A}}_{n+1/2}\varepsilon(\underline{U}^*)] d\Omega + \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^* dS \quad (6.4)$$

et le problème fluide (2.6) à trouver p_{n+1} dans $\mathcal{P}^{[0,T]}$ vérifiant à chaque instant t de $[0, T]$:

$$\begin{aligned} \forall p^* \in \mathcal{P}_0, \quad \int_{\Omega} \underline{\text{grad}} p_{n+1} \cdot \mathbf{M} \underline{\text{grad}} p^* d\Omega + \int_{\Omega} p_{n+1} r p^* d\Omega \\ = \int_{\Omega} \hat{\alpha}_{n+1/2} p^* d\Omega + \int_{\Omega} \hat{\underline{\beta}}_{n+1/2} \cdot \underline{\text{grad}} p^* d\Omega + \int_{\partial_4\Omega} w_d p^* dS \end{aligned} \quad (6.5)$$

2.2 Premiers résultats

Le cas test considéré est le problème de consolidation d'un sol, soumis à un chargement imposé en effort et traité en unidimensionnel, qui a été décrit dans la section 2.4 du chapitre 3. Le sol est toujours constitué de Grès de Béréa saturé mais on prend cette fois en compte les non linéarités (cf. **Tableau 6.1**).

Porosité initiale	$n_0 = 0,19$	Module d'Young	$E = 14,4 \text{ GPa}$
Coef. de Poisson	$\nu = 0,2$	Module de Biot	$Q = 13,5 \text{ GPa}$
Coef. de Biot	$b = 0,78$	Perméabilité initiale	$H_0 = \frac{k_0}{\mu_w} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ m}^3 \cdot \text{s} \cdot \text{kg}^{-1}$

Tableau 6.1 • Caractéristiques du grès de Béréa saturé non déformé

Deux types de simulations sont effectuées afin d'illustrer le comportement de la stratégie LATIN dans le cas non linéaire. Dans ces deux simulations, ni les techniques d'approximation radiales, ni celles permettant de prendre en compte les aspects multi-échelles ne sont mises en place. Le premier test a pour but d'évaluer l'influence de perméabilité variable (6.1). Le coefficient α est fixé égal à 3, tandis la porosité initiale $n_0 = -\text{Tr} \varepsilon_0$ n'est plus celle du Grès de Béréa, mais varie de 0,01 à 0,9 (le cas linéaire est obtenu en faisant tendre n_0 vers $+\infty$). Le second test a pour objectif d'évaluer l'influence de la rigidité variable (6.2). Les coefficients A et σ_3 sont fixés égaux à $\frac{1}{E_0}$ et 0, tandis que B varie de 0 (qui correspond au cas linéaire) à 1 GPa^{-1} .

Dans un premier temps, les paramètres des directions de recherche sont les mêmes que dans la section 2.4 du chapitre 3 : $t_m = 9 \cdot 10^{-3} t_c$ et $t_h = 80 \cdot 10^{-4} t_c$, avec $t_c = 9,3 \text{ s}$. On s'intéresse à l'évolution de l'indicateur d'erreur e au cours des itérations de la LATIN. Les **Figure 6.3** et **Figure 6.4** correspondent respectivement au premier et au second test. Il apparaît clairement que le taux de convergence dépend fortement du « degré » de non linéarité du problème.

Pour diminuer cette influence, l'idée est maintenant d'utiliser des directions de recherche qui ne sont plus constantes mais peuvent varier et sont mises à jour au cours des itérations.

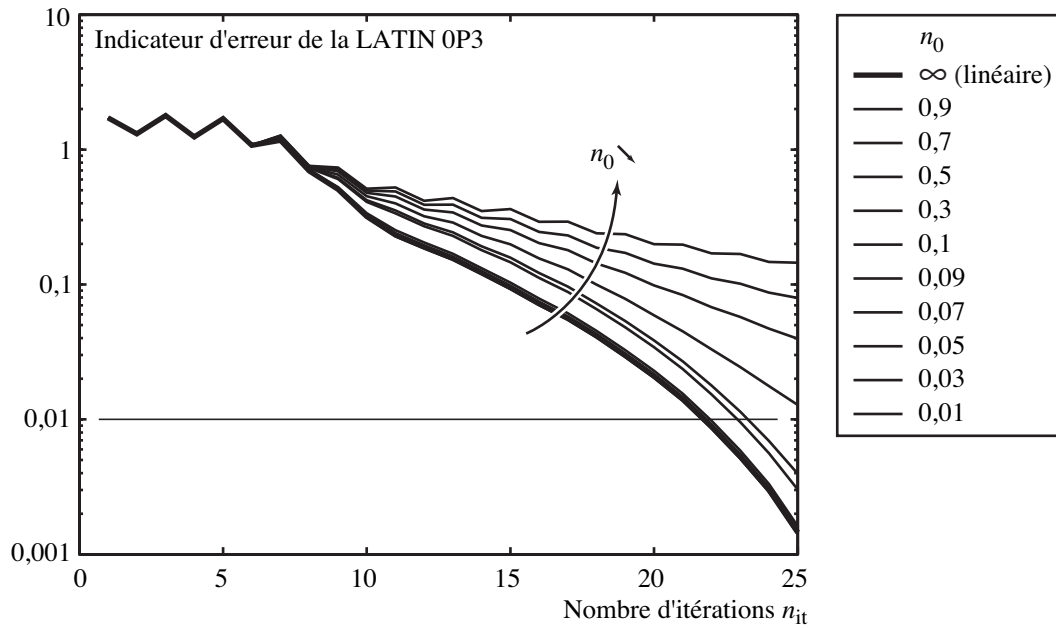


Figure 6.3 • Influence de la perméabilité non constante lorsqu'on utilise des directions de recherche constantes

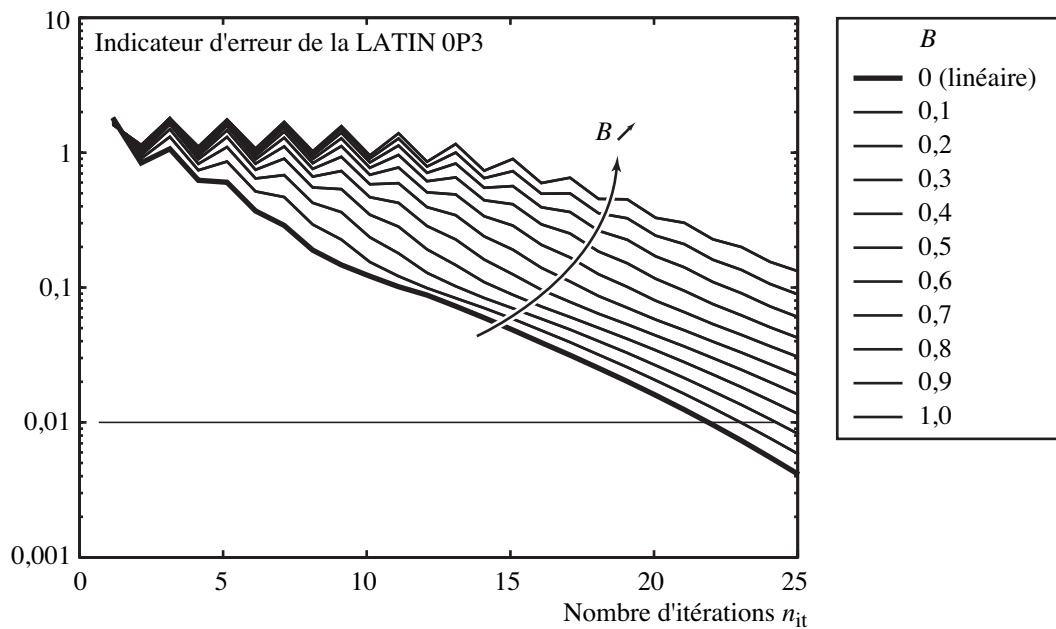


Figure 6.4 • Influence de la rigidité non constante lorsqu'on utilise des directions de recherche constantes

3 Mise à jour des directions de recherche

3.1 Choix des directions de recherche

Comme elles peuvent maintenant varier au cours des itérations, nous allons noter les directions de recherche $(\mathbf{L}_{n+1/2}, r_{n+1/2}, \mathbf{M}_{n+1/2})$ de telle sorte que la direction E^- (2.4) à l'étape linéaire $n + 1$ s'écrive :

$$\begin{aligned} (\sigma_{n+1} - \hat{\sigma}_{n+1/2}) - \mathbf{L}_{n+1/2}(\hat{\varepsilon}_{n+1} - \hat{\varepsilon}_{n+1/2}) &= 0 \\ (q_{n+1} - \hat{q}_{n+1/2}) - r_{n+1/2}(p_{n+1} - \hat{p}_{n+1/2}) &= 0 \\ (\underline{W}_{n+1} - \hat{\underline{W}}_{n+1/2}) - \mathbf{M}_{n+1/2}(\underline{Z}_{n+1} - \hat{\underline{Z}}_{n+1/2}) &= 0 \end{aligned}$$

et la direction conjuguée E^+ (2.1) à l'étape locale $n + 3/2$:

$$\begin{aligned} (\hat{\sigma}_{n+3/2} - \sigma_{n+1}) + \mathbf{L}_{n+1/2}(\hat{\varepsilon}_{n+3/2} - \hat{\varepsilon}_{n+1}) &= 0 \\ (\hat{q}_{n+3/2} - q_{n+1}) + r_{n+1/2}(\hat{p}_{n+3/2} - p_{n+1}) &= 0 \\ (\hat{\underline{W}}_{n+3/2} - \underline{W}_{n+1}) + \mathbf{M}_{n+1/2}(\hat{\underline{Z}}_{n+3/2} - \underline{Z}_{n+1}) &= 0 \end{aligned}$$

Un grand nombre de choix, qui permettent tous d'assurer la convergence de la méthode LATIN, sont possibles pour $(\mathbf{L}_{n+1/2}, r_{n+1/2}, \mathbf{M}_{n+1/2})$ (cf. [Lad99a]). Le plus simple, qui a été utilisé depuis le début de ce travail et en particulier dans la section précédente, est évidemment de prendre :

$$\forall n, \quad \mathbf{L}_{n+1/2} = t_m \mathbf{D}(\hat{\varepsilon} = \mathbb{O}), \quad r_{n+1/2} = \frac{1}{t_h Q} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_{n+1/2} = \mathbf{H}(\hat{\varepsilon} = \mathbb{O})$$

qui correspond à des directions constantes du même type que (2.11). L'avantage majeur est que les opérateurs ne sont alors construits qu'une seule fois, mais on vient de voir que le taux de convergence de la méthode dépendait alors fortement de la non linéarité.

Il a été montré dans [Lad99a] que la convergence de la stratégie LATIN est optimale lorsque E^- est la direction tangente de l'espace Γ , ce qui revient à chercher $\Delta \mathbf{s} = \mathbf{s}_{n+1} - \hat{\mathbf{s}}_{n+1/2}$ tel que :

$$\begin{aligned} \Delta \sigma - \mathbf{D}(\hat{\varepsilon}_{n+1/2}) \Delta \varepsilon - \left(\frac{\delta \mathbf{D}}{\delta \hat{\varepsilon}}(\hat{\varepsilon}_{n+1/2}) : \Delta \varepsilon \right) \hat{\varepsilon}_{n+1/2} + b \Delta p \mathbf{I} &= 0 \\ \Delta q - \frac{1}{Q} \Delta \dot{p} - \text{Tr} \Delta \dot{\varepsilon} &= 0 \\ \Delta \underline{W} - \mathbf{H}(\hat{\varepsilon}_{n+1/2}) \Delta \underline{Z} - \left(\frac{\delta \mathbf{H}}{\delta \hat{\varepsilon}}(\hat{\varepsilon}_{n+1/2}) : \Delta \varepsilon \right) \hat{\underline{Z}} &= 0 \end{aligned}$$

ce qui aurait malheureusement pour effet de recoupler les deux physiques à l'étape linéaire. Pour s'en affranchir, on peut se contenter d'une approximation de cette direction tangente en prenant seulement :

$$\begin{aligned} (\sigma_{n+1} - \hat{\sigma}_{n+1/2}) - t_m \mathbf{D}(\hat{\varepsilon}_{n+1/2})(\varepsilon_{n+1} - \hat{\varepsilon}_{n+1/2}) &= 0 \\ (q_{n+1} - \hat{q}_{n+1/2}) - \frac{1}{t_h Q} (p_{n+1} - \hat{p}_{n+1/2}) &= 0 \\ (\underline{W}_{n+1} - \hat{\underline{W}}_{n+1/2}) - \mathbf{H}(\hat{\varepsilon}_{n+1/2})(\underline{Z}_{n+1} - \hat{\underline{Z}}_{n+1/2}) &= 0 \end{aligned}$$

ce qui revient à choisir :

$$\mathbf{L}_{n+1/2} = t_m \mathbf{D}(\hat{\varepsilon}_{n+1/2}), \quad r_{n+1/2} = \frac{1}{t_h Q} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_{n+1/2} = \mathbf{H}(\hat{\varepsilon}_{n+1/2})$$

où t_m et t_h sont les paramètres de la méthode. Ce choix nécessite la construction des opérateurs à chaque itération et à chaque (\underline{M}, t) . Dans ce cas, l'étape linéaire devient plus complexe car les opérateurs qui interviennent dépendent du temps. Une nouvelle approximation consiste alors à définir une moyenne en temps des opérateurs :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{n+1/2}(\underline{M}) &= \frac{1}{T} \int_{[0,T]} t_m \mathbf{D}(\hat{\varepsilon}_{n+1/2}(\underline{M}, t)) dt \\ r_{n+1/2}(\underline{M}) &= \frac{1}{t_h Q} \\ \mathbf{M}_{n+1/2}(\underline{M}) &= \frac{1}{T} \int_{[0,T]} \mathbf{H}(\hat{\varepsilon}_{n+1/2}(\underline{M}, t)) dt \end{aligned} \tag{6.6}$$

Une autre possibilité aurait été de définir des opérateurs constants pas morceaux sur l'intervalle de temps.

3.2 Résultats

On reprend les cas tests précédents en utilisant les directions de recherche du type (6.6), mises à jour à chaque itération. Les **Figure 6.5** et **Figure 6.6** correspondent respectivement au premier et au second test. Le taux de convergence de la méthode est maintenant quasi-indépendant de la non linéarité. Notons par ailleurs que les non linéarités n'augmentent pas le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre un niveau donné d'erreur.

Malheureusement, même si le nombre d'itérations est moins élevé que dans le cas des directions de recherche constantes, la stratégie peut devenir très coûteuse car elle nécessite la factorisation à chaque itération des opérateurs liés à ces directions. Cependant, des tests ont montré que des résultats quasi-identiques peuvent être obtenus lorsqu'on ne met à jour les directions que durant les premières itérations (généralement 4 ou 5), ce qui réduit le coût de calcul de manière significative, et permet de

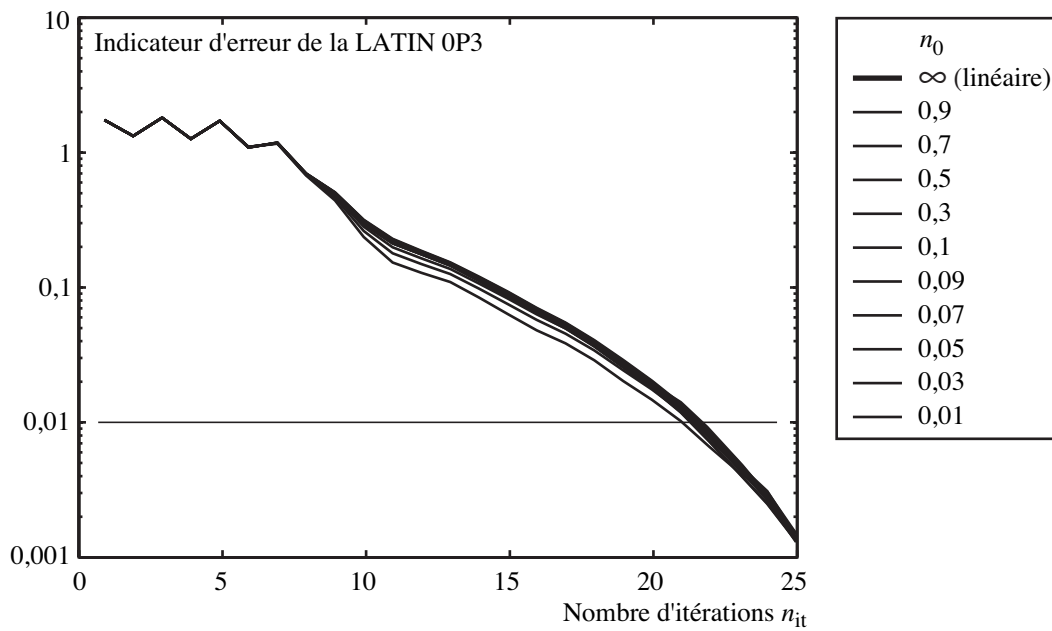


Figure 6.5 • Influence de la perméabilité non constante lorsqu'on utilise des directions de recherche constantes

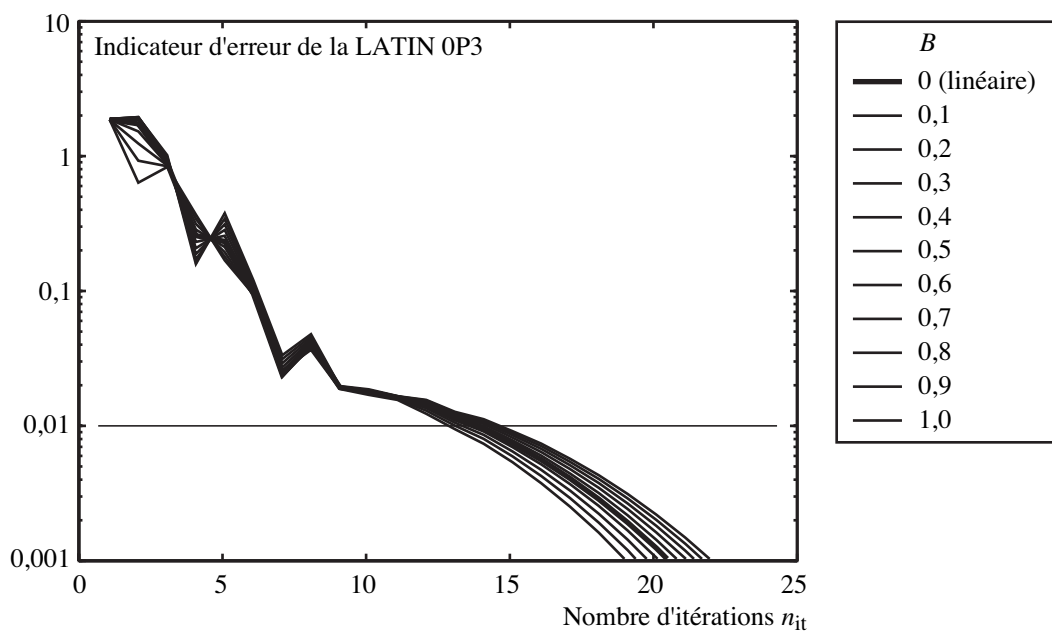


Figure 6.6 • Influence de la rigidité non constante lorsqu'on utilise des directions de recherche mises à jour

préserver la compétitivité de la méthode LATIN. Notons qu'il serait certainement intéressant de mettre en place un critère de « stagnation » des directions de recherche

afin de stopper automatiquement leur mise à jour au bout de quelques itérations.

4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous venons de montrer comment il était possible de prendre en compte les aspects non linéaires qui peuvent apparaître dans le comportement du matériau. La technique proposée consiste une nouvelle fois à modifier le traitement de l'interface entre les deux physiques.

On a pu constater que le taux de convergence de la méthode était très dépendant du « degré » de non linéarité du problème si l'on utilisait des directions de recherche constantes, comme c'était le cas depuis le début de ce document. En revanche, la mise à jour des directions au cours des premières itérations (jusqu'à obtenir des sortes de directions « optimales ») permet de rendre le taux de convergence, et le coût de la stratégie, quasi-indépendants de la non linéarité. Il serait par ailleurs intéressant de mettre en place un indicateur de « stagnation » des directions de recherche afin de stopper automatiquement leur mise à jour.

Conclusion et perspectives

DANS CE TRAVAIL, une nouvelle stratégie de calcul a été proposée pour l'analyse des problèmes multiphysiques. Cette stratégie, dont les idées s'inscrivent dans un cadre général, a été développée dans le cas de la simulation d'une structure constituée d'un matériau poreux. L'objectif était d'illustrer le fonctionnement et la faisabilité de la méthode dans une situation de couplage fort entre fluide et structure. Ce type de situation conduit le plus souvent à des coûts de simulation prohibitifs et nécessite donc un intérêt tout particulier.

Le point clé de cette nouvelle approche a été l'introduction du concept d'**interface entre physiques**, qui permet de prendre en compte de manière naturelle un certain nombre d'aspects inhérents aux problèmes multiphysiques. La **Figure 6.7** rappelle le schéma de principe de la méthode LATIN, qui est le « moteur » de cette stratégie, et résume les techniques mises en place tout au long de ce travail.

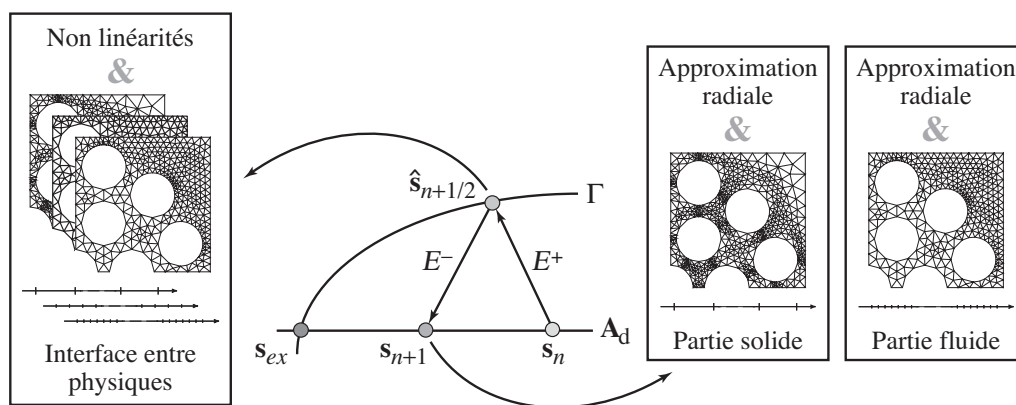


Figure 6.7 • Résumé de la stratégie

La technique d'approximation des champs admissibles sous forme de charges radiaux • Cette approximation a permis de réduire de manière significative le

coût de calcul par rapport à l'approche monolithique et à la procédure ISPP (une technique standard de partitionnement) auxquelles la méthode a été comparée. Cette technique permet, en outre, d'accroître la modularité de la stratégie en réduisant le volume d'informations à stocker et à échanger entre les physiques dans le cas du couplage de codes.

La prise en compte des aspects multiéchelles en temps et en espace • Une modification de l'interface entre physiques a été proposée, afin de prendre en compte les échelles de temps et d'espace très différentes qui peuvent apparaître lors de la simulation d'un problème multiphysique. Dans le cas général, cette technique consiste à « matérialiser » l'interface, en la dotant de son propre maillage et de sa propre discrétisation en temps. Du point de vue temporel, on a pu constater qu'une discrétisation plus fine des quantités fluides était nécessaire, si l'on voulait obtenir une sorte d'« isoqualité » fluide/solide de la solution. L'opportunité d'utiliser des champs discontinus en temps a aussi été envisagée afin d'augmenter la souplesse de la stratégie. Les premiers résultats montrent qu'un tel choix n'affecte pas la convergence de la méthode. Du point de vue spatial, on a pu montrer la faisabilité d'une technique rendant possible l'utilisation de maillages spatiaux différents pour chacune des physiques (éventuellement générés par une procédure automatique), ce qui augmente encore la modularité de la stratégie.

La prise en compte des non linéarités du problème • À nouveau, une modification de l'interface entre physiques a permis de prendre en compte un certain nombre de non linéarités dans le comportement du matériau. Un choix adapté des directions de recherche, suivi d'une mise à jour de celles-ci, conduit à un taux de convergence et un coût de la stratégie quasi-indépendants du « degré » de non linéarité.

Un certain nombre de points techniques, qui n'ont pas été abordés dans ce travail, restent néanmoins à développer : la mise en place d'une méthode de construction du maillage et de la discrétisation en temps de l'interface ; le choix automatique des discrétisations de chacune des physiques, qui devrait permettre d'optimiser les performances de la stratégie ; la prise en compte de non linéarités plus sévères (comme la plasticité...) et la proposition d'un indicateur de « stagnation » des directions de recherche, afin de stopper automatiquement leur mise à jour ; la mise en place de la technique d'homogénéisation en temps et en espace [Lad02a, Lad03] afin d'optimiser les performances lors du traitement indépendant de chacune des physiques ; la validation de l'approche sur des problèmes à plus grand nombre de champs (*e.g.* thermo-poro-élasticité) ; ainsi que l'exploitation, sur des calculateurs à architecture parallèle, du caractère hautement parallélisable de la stratégie, afin de traiter des problèmes jusqu'à présent hors de portée. Enfin, cette stratégie, présentée ici sur un problème modèle, pourrait être étendue à d'autres types de problèmes multiphysiques, tels que le couplage oxydation-endommagement dans les composites.

Bibliographie

- [Aub02] **X. Aubard, P.-A. Boucard, P. Ladevèze et S. Michel, 2002.** Modeling and simulation of damage in elastomer at high strains. *Computers and Structures*, 80(27-30) :2289–2298.
- [Bai99] **C. Bailey, G. A. Taylor, M. Cross et P. Chow, 1999.** Discretisation procedures for multi-physics phenomena. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 103 :3–17.
- [Bar94] **R. Barrett, M. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine et H. V. der Vorst, 1994.** *Templates for the Solution of Linear Systems : Building Blocks for Iterative Methods*. SIAM.
- [Bat99] **K.-J. Bathe, H. Zhang et S. Ji, 1999.** Finite element analysis of fluid flows fully coupled with structural interactions. *Computers and Structures*, 72 :1–16.
- [Bec00] **A. Beckert, 2000.** Coupling fluid (CFD) and structural (FE) models using finite interpolation elements. *Aerospace Science and Technology*, 47 :13–22.
- [Bem01] **E. Bemmer, M. Boutéca, O. Vincké et O. Ozanam, 2001.** Poromechanics : From linear to nonlinear poroelasticity and poroviscoelasticity. *Oil and Gas Science and Technology - Rev. IFP*, 56(6) :531–544.
- [Ben98] **H. Ben Dhia, 1998.** Problèmes mécaniques multi-échelles : la méthode arlequin. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, Iib(330) :899–904.
- [Ber90] **C. Bernardi, Y. Maday et A. T. Patera, 1990.** A new nonconforming approach to domain decomposition : the mortar element method. Dans *Non linear partial differential equations and their applications*. Collège de France seminar, Pitman : London.
- [Ber94] **C. Bernardi, Y. Maday et A. T. Patera, 1994.** A new nonconforming approach to domain decomposition : the mortar element method. Dans **H. Brezzi et al**, éditeur, *Nonlinear partial differential equations and their applications*, pages 13–51. Paris.

- [Bij02] **H. Bijl, S. Hulshoff et S. van Zuijlen, 2002.** Accuracy and efficiency of implicit time integration schemes for fluid-structure interaction simulations. Dans **H. A. Mang, F. Rammerstorfer et J. Eberhardsteiner**, éditeurs, *Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics, Vienne, Autriche*.
- [Blo98] **F. J. Blom, 1998.** A monolithic fluid-structure interaction algorithm applied to the piston problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 167 :369–391.
- [Boi89] **P. Boisse, P. Ladevèze et P. Rougée, 1989.** A large time increment method for elastoplastic problems. *European Journal of Mechanics. A/Solids*, 8(4) :257–275.
- [Boi04] **C. Boivin et C. Ollivier-Gooch, 2004.** A toolkit for numerical simulation of PDEs. II. Solving generic multiphysics problems. To appear in *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- [Bot02] **C. L. Botasso, 2002.** Multiscale temporal integration. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 :2815–2830.
- [Bou96] **E. Bourgeois et L. Dormieux, 1996.** Consolidation of a nonlinear poroelastic layer in finite deformations. *European Journal of Mechanics. A/Solids*, 15(4) :575–598.
- [Bou97] **P.-A. Boucard, P. Ladevèze, M. Poss et P. Rougée, 1997.** A nonincremental approach for large displacement problems. *Computers and Structures*, 64(1-4) :499–508.
- [Bou00] **P.-A. Boucard, P. Ladevèze et H. Lemoussu, 2000.** A modular approach to 3-D impact computation with frictional contact. *Computer and Structures*, 78(1-3) :45–52.
- [Bre91] **F. Brezzi et M. Fortin, 1991.** *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, tome 15 de *Computational Mathematics*. Springer.
- [Bre04] **P. Breitkopf, A. Rassineux, J.-M. Savignat et P. Villon, 2004.** Integration constraint in diffuse element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193 :1203–1220.
- [Cha97] **L. Champaney, J.-Y. Cognard, D. Dureisseix et P. Ladevèze, 1997.** Large scale applications on parallel computers of mixed domain decomposition method. *Computational Mechanics*, 19 :253–263.
- [Cog96] **J.-Y. Cognard, D. Dureisseix, P. Ladevèze et P. Lorong, 1996.** Expérimentation d'une approche parallèle en calcul de structures. *Revue Européenne des éléments Finis*, 5(2) :197–220.

- [Com02] **A. Combescure et A. Gravouil, 2002.** A numerical scheme to couple subdomains with different time-steps for predominantly linear transient analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(11-12) :1129–1157.
- [Cou89] **O. Coussy, 1989.** Thermomechanics of saturated porous solids in finite deformation. *European Journal of Mechanics. A/Solids*, 8(1) :1–14.
- [Cou95] **O. Coussy, 1995.** *Mechanics of porous continua*. John Wiley & Sons.
- [Cou04] **O. Coussy, 2004.** *Poromechanics*. John Wiley & Sons.
- [Daw02] **C. Dawson et J. Proft, 2002.** Coupling of continuous and discontinuous galerkin methods for transport problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 :3213–3231.
- [Deu02] **V. Deudé, L. Dormieux, D. Kondo et V. Pensée, 2002.** Propriétés élastiques non linéaires d'un milieu mésos fissuré. *Comptes Rendus Mécanique*, 330 :587–592.
- [Doh00] **C. R. Dohrmann, S. W. Key et M. W. Heinstein, 2000.** Methods for connecting dissimilar three-dimensional finite element meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(5) :1057–1080.
- [Dor02] **L. Dormieux, A. Molinari et D. Kondo, 2002.** Micromechanical approach to the behavior of poroelastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50 :2203–2231.
- [Dur98a] **D. Dureisseix et P. Ladevèze, 1998.** A multi-level and mixed domain decomposition approach for structural analysis, tome 218 de *Contemporary Mathematics, Domain Decomposition Methods 10*, pages 246–253. AMS.
- [Dur98b] **D. Dureisseix et P. Ladevèze, 1998.** Une approche parallèle et multi-échelles en calcul des structures : exemples et performances. *Revue Européenne des éléments Finis*, 7 :73–87.
- [Dur00] **D. Dureisseix et L. Champaney, 2000.** Calcul de structures et parallélisme~ : un bilan et quelques développements récents. *Mécanique et Industries*, 1 :43–60.
- [Dur01a] **D. Dureisseix, P. Ladevèze et B. A. Schrefler, 2001.** LATIN computational strategy for multiphysics problems. Dans *Proceedings of the 2nd European Conference on Computational Mechanics (ECCM)*.
- [Dur01b] **D. Dureisseix, P. Ladevèze et B. A. Schrefler, 2001.** LATIN strategy for coupled fluid-solid problems in the domain. Dans **K. J. Bathe**, éditeur, *Proceedings of the First M.I.T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, pages 1143–1146. Elsevier.

- [Dur02a] **D. Dureisseix, P. Ladevèze, D. Néron et B. A. Schrefler, 2002.** A computational strategy suitable for multiphysics problems. Dans *Proceedings of the International Workshop on Multiscale Computational Mechanics for Material and Structures, Cachan, France*.
- [Dur02b] **D. Dureisseix, P. Ladevèze, D. Néron et B. A. Schrefler, 2002.** A computational strategy suitable for multiphysics problems : a time multiscale approach. Dans *Proceedings of the Second International Conference on Advanced Computational Methods in Engineering, Liège, Belgique*.
- [Dur03a] **D. Dureisseix, P. Ladevèze, D. Néron et B. A. Schrefler, 2003.** A computational strategy for multiphysics problems involving multiscale aspects. Dans *Proceedings of the Seventh International Conference on Computational Plasticity, Barcelone, Espagne*.
- [Dur03b] **D. Dureisseix, P. Ladevèze, D. Néron et B. A. Schrefler, 2003.** A multi-time-scale strategy for multiphysics problems : application to poroelasticity. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 1(4) :387–400.
- [Dur03c] **D. Dureisseix, P. Ladevèze et B. A. Schrefler, 2003.** A computational strategy for multiphysics problems – application to poroelasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56(10) :1489–1510.
- [Dur04] **D. Dureisseix et H. Bavestrello, 2004.** Information transfer between incompatible finite element meshes : application to coupled thermo-viscoelasticity. *Soumis dans Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- [Eri85] **K. Eriksson, C. Johnson et V. Thomée, 1985.** Time discretization of parabolic problems by the discontinuous galerkin formulation. *RAIRO Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 19 :611–643.
- [Far98] **C. Farhat, M. Lesoinne et P. LeTallec, 1998.** Load and motion transfer algorithms for fluid/structure interaction problems with non-matching discrete interfaces : Momentum and energy conservation, optimal discretization and application to aeroelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 157 :95–114.
- [Far00] **C. Farhat et M. Lesoinne, 2000.** Two efficient staggered algorithms for the serial and parallel solution of three-dimensional nonlinear transient aeroelastic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 182 :499–515.
- [Far03] **C. Farhat et M. Chandesris, 2003.** Time-decomposed parallel time-integrators : theory and feasibility studies for fluid, structure, and fluid-structure applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58 :1397–1434.

- [Fau03] **V. Faucher et A. Combescure, 2003.** A time and space mortar method for coupling linear modal subdomains and non-linear subdomains in explicit structural dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :509–533.
- [Fel80] **C. A. Felippa et K. C. Park, 1980.** Staggered transient analysis procedures for coupled mechanical systems : formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 24 :61–111.
- [Fel88] **C. A. Felippa et T. L. Geers, 1988.** Partitioned analysis for coupled mechanical systems. *Engineering Computation*, 5 :123–133.
- [Fel01] **C. A. Felippa, K. C. Park et C. Farhat, 2001.** Partitioned analysis of coupled mechanical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :3247–3270.
- [Fel04] **C. A. Felippa et K. C. Park, 2004.** Synthesis tools for structural dynamics and partitioned analysis of coupled systems. Dans **A. Ibrahimbegovic et B. Brank**, éditeurs, *Proceedings of NATO Advanced Research Workshop, Bled, Slovénie*.
- [Fis01] **J. Fish et W. Chen, 2001.** Uniformly valid multiple spatial-temporal scale modeling for wave propagation in heterogeneous media. *Mechanics of Composite Materials and Structures*, 8 :81–99.
- [Gaw95] **D. Gawin et B. A. Schrefler, 1995.** Thermo-hydro-mechanical analysis of partially saturated porous materials. *Engineering Computations*, 13(7) :113–143.
- [Geu04] **P. Geuzaine, K. van der Zee et C. Farhat, 2004.** Second-order time-accurate loosely-coupled solution algorithms for nonlinear fsi problems. Dans *Proceedings of the European Conference on Computational Mechanics in Applied Sciences and Engineering*.
- [Gos03] **P. Gosselet, V. Chiaruttini, C. Rey et F. Feyel, 2003.** Une approche hybride de décomposition de domaine pour les problèmes multiphysiques : application à la poroélasticité. Dans *Actes du 6^e Colloque National en calcul des Structures, Giens, France*.
- [Gra01a] **A. Gravouil et A. Combescure, 2001.** Multi-time-step explicit implicit method for non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50 :199–225.
- [Gra01b] **W. G. Gray et B. A. Schrefler, 2001.** Thermodynamic approach to effective stress in partially saturated porous media. *European Journal of Mechanics. A/Solids*, 20 :521–538.

- [Gra03] **A. Gravouil et A. Combescure, 2003.** Multi-time-step and two-scale domain decomposition method for non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58 :1545–1569.
- [GRE90] **GRECO, 1990.** Greco géomatériaux. Scientific report.
- [Gui04] **P.-A. Guidault, O. Allix, L. Champaney et J.-P. Navarro, 2004.** A micro-macro approach for crack propagation with local enrichment. Dans **B. H. V. Topping et C. A. M. Soares**, éditeurs, *Proceedings of the Seventh International Conference on Computational Structures Technology, Lisbon*, page 199. Civil-Comp Press.
- [Hei03] **M. W. Heinstejn et T. A. Laursen, 2003.** A three dimensional surface-to-surface projection algorithm for non-coincident domains. *Communications in Numerical Methods for Engineering*, 19 :421–432.
- [Hei04] **M. Heil, 2004.** An efficient solver for the fully coupled solution of large-displacement fluid-structure interaction problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193 :1–23.
- [Her02] **B. Herry, L. Di Valentin et A. Combescure, 2002.** An approach to the connection between subdomains with non-matching meshes for transient mechanical analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55 :973–1003.
- [Hib96] **Hibbitt, Karlson et Sorensen**, éditeurs, **1996.** *Abaqus/Standard - User's Manual*, tome I, pages 6.4.2–2 and 6.6.1–4.
- [Kel03] **C. T. Kelley, 2003.** *Solving nonlinear equations with Newton's method*, tome 1. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [Kon63] **R. L. Kondner, 1963.** Hyperbolic stress-strain response : cohesive solids. *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, 89(SM1) :115–143.
- [Kuh01] **E. Kuhl, S. Hulshoff et R. de Borst, 2001.** A comparison of partitioned and monolithic solution procedures for fluid-structure interaction problems. Dans *Proceedings of the European Conference on Computational Mechanics*.
- [Lad85] **P. Ladevèze, 1985.** Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, 300(2) :41–44.
- [Lad92] **P. Ladevèze et P. Lorong, 1992.** A large time increment approach with domain decomposition technique for mechanical nonlinear problems. *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, INRIA*, pages 569–578.
- [Lad96] **P. Ladevèze, 1996.** *Mécanique non-linéaire des structures – Nouvelle approche et méthodes de calcul non incrémentales*. Hermès, Paris.

- [Lad97a] **P. Ladevèze, 1997.** Une technique de calcul d'intégrales en temps et en espace relative à la LATIN méthode. Rapport Interne 193, LMT-Cachan.
- [Lad97b] **P. Ladevèze et D. Dureisseix, 1997.** Une nouvelle stratégie de calcul parallèle et micro/macro en mécanique non-linéaire. Rapport Interne 188, LMT-Cachan.
- [Lad99a] **P. Ladevèze, 1999.** *Nonlinear Computational Structural Mechanics – New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation.* Springer Verlag.
- [Lad99b] **P. Ladevèze et D. Dureisseix, 1999.** Une nouvelle stratégie de calcul micro/macro en mécanique des structures. *Comptes Rendus à l'Académie des Sciences – Mécanique des Solides et des Structures*, 327 :1237–1244.
- [Lad00] **P. Ladevèze et D. Dureisseix, 2000.** A micro/macro approach for parallel computing of heterogeneous structures. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 1 :18–28.
- [Lad01a] **P. Ladevèze, 2001.** Sur la discrétisation des interefforts en calcul de structures : formulations et discrétisations. Rapport Interne 249, LMT-Cachan.
- [Lad01b] **P. Ladevèze, O. Loiseau et D. Dureisseix, 2001.** A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(1-2) :121–138.
- [Lad01c] **P. Ladevèze et J.-P. Pelle, 2001.** *La maîtrise du calcul en Mécanique linéaire et non-linéaire.* Hermès Sciences Publications.
- [Lad02a] **P. Ladevèze et A. Nouy, 2002.** A multiscale computational method with time and space homogenization. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, IIb(330) :683–689.
- [Lad02b] **P. Ladevèze, A. Nouy et O. Loiseau, 2002.** A multiscale computational approach for contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 :4869–4891.
- [Lad03] **P. Ladevèze et A. Nouy, 2003.** On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :3061–3087.
- [Le 01] **P. Le Tallec et J. Mouro, 2001.** Fluid structure interaction with large structural displacements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :3039–3067.
- [Lem02] **H. Lemoussu, P.-A. Boucard et P. Ladevèze, 2002.** A 3-D shock computational strategy for real assembly and shock attenuator. *Advances in Engineering Software*, 33(7-10) :517–526.

- [Lew91] **R. W. Lewis, B. A. Schrefler et L. Simoni, 1991.** Coupling versus uncoupling in soil consolidation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 15 :533–548.
- [Lew98] **R. W. Lewis et B. A. Schrefler, 1998.** *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media*. John Wiley & Sons, 2nd édition.
- [Lio01] **J.-L. Lions, Y. Maday et G. Turinici, 2001.** Résolution d'edp par un schéma en temps "pararéel". *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, I(332) :661–668.
- [Mad02] **Y. Maday et G. Turinici, 2002.** A parareal in time procedure for the control of partial differential equations. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, I(335)(Issue 4) :387–392.
- [Mam95] **N. Maman et C. Farhat, 1995.** Matching fluid and structure meshes for aeroelastic computations : a parallel approach. *Computers and Structures*, 54(4) :779–785.
- [Mat96] **R. Matteazzi, B. Schrefler et R. Vitaliani, 1996.** *Comparisons of partitioned solution procedures for transient coupled problems in sequential and parallel processing*, pages 351–357. Advances in Computational Structures Technology. Civil-Comp Ltd, Edinburgh, Scotland.
- [Mat02] **H. G. Matthies et J. Steindorf, 2002.** Partitioned but strongly coupled iteration schemes for nonlinear fluid-structure interaction. *Computers and Structures*, 80 :1991–1999.
- [Mat03] **H. G. Matthies et J. Steindorf, 2003.** Partitioned strong coupling algorithms for fluid-structure interaction. *Computers and Structures*, 81 :805–812.
- [Mer02] **E. A. Meroi et B. A. Schrefler, 2002.** Biomechanical multiphase approaches in soft biological tissues. Dans *Proceedings of the 12th International Conference on Mechanics in Medicine and Biology*.
- [Mic03] **C. Michler, E. H. van Brummelen, S. J. Hulshoff et R. de Borst, 2003.** The relevance of conservation for stability and accuracy of numerical methods for fluid-structure interaction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :4195–4215.
- [Mic04a] **J. Michopoulos, P. Tsompanopoulou, E. Houstis, C. Farhat, M. Lesoinne, J. Rice et A. Joshi, 2004.** On a data-driven environment for multiphysics applications. To appear in *Future Generation Computer Systems*.

- [Mic04b] **C. Michler, S. J. Hulshoff, E. H. van Brummelen et R. de Borst, 2004.** A monolithic approach to fluid-structure interaction. *Computers and Structures*, 33.
- [Moë99] **N. Moës, J. Dolbow et T. Belytschko, 1999.** A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46 :131–150.
- [Moë02] **N. Moës et T. Belytschko, 2002.** Extended finite method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 69 :813–833.
- [Mor95] **J.-P. Morand et R. Ohayon, 1995.** *Fluid-Structure Interaction : Applied Numerical Methods*. John Wiley & Sons.
- [Nér02] **D. Néron, 2002.** Une stratégie de calcul pour les problèmes multiphysiques : une approche multiéchelle en temps. Dans *Actes des Sixièmes Journées du LMT «Analyses Multiéchelles et Couplages en Mécanique»*, Fréjus, France.
- [Nér04] **D. Néron, P. Ladevèze, D. Dureisseix et B. A. Schrefler, 2004.** Accounting for nonlinear aspects in multiphysics problems : application to poroelasticity. Dans **M. Bukak, G. D. van Albada, P. M. A. Slood et J. J. Dongarra**, éditeurs, *Lecture Notes in Computer Science. Proceedings of the 4th International Conference on Computational Science ICCS 2004, LNCS 3039, Part IV*, pages 612–620. Springer Verlag.
- [Noo86] **A. K. Noor, 1986.** Global-local methodologies and their application to nonlinear analysis. *Finite Element Analysis*, 2 :333–346.
- [Par83] **K. C. Park, 1983.** Stabilization of partitioned solution procedure for pore fluid-soil interaction analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19 :1669–1673.
- [Par01] **K. C. Park, C. A. Felippa et R. Ohayon, 2001.** Partitioned formulation of internal fluid-structure interaction problems by localized lagrange multipliers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :2989–3007.
- [Pip95a] **S. Piperno, 1995.** Simulation numérique de phénomènes d'interaction fluide-structure. Thèse, École Nationale des Ponts et Chaussées.
- [Pip95b] **S. Piperno, C. Farhat et B. Larrouturou, 1995.** Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems. Part I : model problem, theory and two-dimensional application. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 124 :79–112.
- [Pip01] **S. Piperno et C. Farhat, 2001.** Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems. Part II : energy transfer analysis and

- three-dimensional applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :3147–3170.
- [Qui95] **L. Quiroz et P. Beckers, 1995.** Non-conforming mesh gluing in the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38 :2165–2184.
- [Ree84] **M. B. Reed, 1984.** An investigation of numerical errors in the analysis of consolidation by finite elements. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 8 :243–257.
- [Saa00] **Y. Saaf, 2000.** *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*.
- [Sae91] **A. Saetta, R. Vitaliani et B. A. Schrefler, 1991.** Estrategias de solucion para analisis de consolidacion acoplados en medios porosos. *Rev. Intern. de Met. Num. para Calculo y Diseno en Ingeniera*, 7(1) :55–66.
- [Sae92] **A. V. Saetta et R. V. Vitaliani, 1992.** Unconditionally convergent partitioned solution procedure for dynamic coupled mechanical systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33 :1975–1996.
- [San77] **R. S. Sandhu, H. Liu et K. J. Singh, 1977.** Numerical performance of some finite element schemes for analysis of seepage in porous elastic media. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1 :177–194.
- [Sch97] **B. A. Schrefler, L. Simoni et E. Turska, 1997.** Standard staggered and staggered newton schemes in thermo-hydro-mechanical problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 144 :93–109.
- [Sch02] **B. A. Schrefler, 2002.** Mechanics and thermodynamics of saturated-unsaturated porous materials and quantitative solutions. *Applied Mechanics Reviews*, 55(4) :351–388.
- [Ste83] **J. L. Steger, F. C. Dougherty et J. A. Benek, 1983.** A chimera grid scheme. *Advances in Grid Generation, ASME*, pages 59–69.
- [Ste04] **J. R. Stewart et H. C. Edwards, 2004.** A framework approach for developing parallel adaptive multiphysics applications. To appear in *Finite Elements in Analysis and Design*.
- [Str01] **T. Strouboulis, K. Copps et I. Babuška, 2001.** The generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :4081–4163.
- [Tur93] **E. Turska et B. A. Schrefler, 1993.** On convergence conditions of partitioned solution procedures for consolidation problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 106 :51–63.

- [Tur94a] **E. Turska et B. A. Schrefler, 1994.** On consistency, stability and convergence of staggered solution procedures. *Rend. Mat. Acc. Lincei*, 9(5) :265–271.
- [Tur94b] **E. Turska, K. Wisniewski et B. A. Schrefler, 1994.** Error propagation of staggered procedures for transient problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 114 :177–188.
- [Ver81] **P. A. Vermeer et A. Veruijt, 1981.** An accuracy condition for consolidation by finite elements. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 5 :1–14.
- [Ver88] **P. Verpeaux, T. Charras et A. Millard, 1988.** CASTEM²⁰⁰⁰ : une approche moderne du calcul des structures. Dans **J.-M. Fouet, P. Ladevèze et R. Ohayon**, éditeurs, *Calcul des Structures et Intelligence Artificielle*, tome 2, pages 261–271. Pluralis, Paris, France.
- [Vil02] **P. Villon, H. Borouchaki et K. Saanouni, 2002.** Transfert de champs plastiquement admissibles. *Comptes Rendus Mécanique*, 330 :313–318.
- [Vio03] **D. Violeau, 2003.** Sur une amélioration de la stratégie de calcul avec homogénéisation. Rapport du DEA techniques avancées en calcul des structures, ENS Cachan.
- [Whi91] **J. D. Whitcomb, 1991.** Iterative global/local method finite element analysis. *Computers and Structures*, 2 :1027–1031.
- [Yag00] **G. Yagawa et T. Furukawa, 2000.** Recent developments of free mesh method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47 :1419–1443.
- [Yok71] **Y. Yokoo, K. Yamagata et H. Nagaonka, 1971.** Finite element method applied to biot's consolidation theory. *Soils and Foundations*, 11 :29–46.
- [Yu02a] **Q. Yu et J. Fish, 2002.** Multiscale asymptotic homogenization for multiphysics problems with multiple spatial and temporal scales : a coupled thermo-viscoelastic example problem. *International Journal of Solids and Structures*, 39 :6429–6452.
- [Yu02b] **Q. Yu et J. Fish, 2002.** Temporal homogenization of viscoelastic and viscoplastic solids subjected to locally periodic loading. *Computational Mechanics*, 29 :199–211.
- [Zhu00] **G. Zhu et J.-H. Yin, 2000.** Finite element consolidation analysis of soils with vertical drain. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 24(337-366).
- [Zie86] **O. C. Zienkiewicz, S. Qu, R. L. Taylor et S. Nakazawa, 1986.** The patch test for mixed formulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23 :1873–1883.

-
- [Zie88] **O. C. Zienkiewicz, D. K. Paul et A. H. C. Chan, 1988.** Unconditionally stable staggered solution procedure for soil-pore fluid interaction problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26 :1039–1055.
- [Zie93] **O. C. Zienkiewicz, M. Huang, J. Wu et S. Wu, 1993.** A new algorithm for the coupled soil-pore fluid problem. *Shock and Vibration*, 1(1) :3–14.
- [Zie97] **O. C. Zienkiewicz et R. L. Taylor, 1997.** The finite element patch test revisited - a computer test for convergence, validation and error estimates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 149 :223–254.
- [Zie00] **O. C. Zienkiewicz et R. L. Taylor, 2000.** *The finite element method*. Butterworth Heinemann, 5th édition.