



**HAL**  
open science

# Mésodynamique et rupture des composites 3D C/C sous choc : une stratégie numérique dédiée

Jayant Sen Gupta

## ► To cite this version:

Jayant Sen Gupta. Mésodynamique et rupture des composites 3D C/C sous choc : une stratégie numérique dédiée. Matériaux. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2005. Français. NNT: . tel-00133772

**HAL Id: tel-00133772**

**<https://theses.hal.science/tel-00133772>**

Submitted on 27 Feb 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ENSC-2005/36

**THESE DE DOCTORAT  
DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN**

Présentée par

Monsieur Jayant SEN GUPTA

**pour obtenir le grade de**

**DOCTEUR DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN**

Domaine :

**MECANIQUE - GENIE MECANIQUE - GENIE CIVIL**

**Sujet de la thèse :**

**Mésodynamique et rupture des composites 3D C/C sous choc : une stratégie numérique dédiée**

Thèse présentée et soutenue à Cachan le 17 février 2005 devant le jury composé de :

Quoc Son NGUYEN	Professeur des Universités	Président
Bruno COCHELIN	Professeur des Universités	Rapporteur
Yves REMOND	Professeur des Universités	Rapporteur
Pierre-Alain BOUCARD	Professeur des Universités	Examineur
Alain FANGET	Ingénieur	Examineur
Didier GUEDRA-DEGEORGES	Ingénieur	Examineur
Olivier ALLIX	Professeur des Universités	Directeur de thèse

LMT-Cachan  
ENS CACHAN/CNRS/UMR 8535  
61, avenue du Président Wilson, 94235 CACHAN CEDEX (France)

---

---

---

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>ix</b>
<b>1 Préliminaires : étude bibliographique</b>	<b>5</b>
1 Les matériaux 3D C/C	7
1.1 Présentation générale des composites carbone / carbone	7
1.2 Le Bloc300	9
2 Les problèmes de localisation associés à la rupture	14
2.1 Origine de la localisation	14
2.2 Les modèles non-locaux	16
2.3 Le modèle du second gradient	17
2.4 Modèles à discontinuité	17
2.5 Introduction d'effet de vitesse	17
2.6 Le modèle à effet retard	18
3 Les méthodes de sous-structuration en dynamique	19
3.1 Décomposition de domaine en dynamique transitoire	19
3.2 Décomposition de domaine modale en dynamique	22
3.3 Approches alternatives	25
3.4 La méthode LATIN	26
4 Le traitement numérique des chocs	28
4.1 La viscosité artificielle	28
4.2 Notations	29
4.3 Problème de référence	29
4.4 Schémas de Newmark	32
4.5 La Méthode de Galerkin Discontinue	38
4.6 La méthode HHT	47
4.7 Conclusion de l'étude	53

---

<b>2</b>	<b>Mésomodélisation du 3D C/C</b>	<b>55</b>
1	La mésomodélisation du 3D C/C	57
1.1	Travaux antérieurs sur les 3D C/C	57
1.2	Les principes de la mésomodélisation	58
2	Le modèle d'endommagement	62
2.1	Modèle pour un matériau isotrope	62
2.2	Modèle d'endommagement à effet retard	64
3	Le modèle de compaction	66
3.1	Modélisation	66
3.2	Identification du modèle de compaction	69
3.3	Validation	72
4	Calcul de l'élévation de température au passage d'un choc	76
4.1	Formation du choc	76
4.2	Lois de conservation	78
4.3	Augmentation de température et largeur de front	80
4.4	Calcul dans le cas d'un matériau dense	81
4.5	Calcul dans le cas d'un matériau poreux	84
4.6	Résultats numériques	85
4.7	Résultats dans le cas non-poreux	85
4.8	Résultats dans le cas poreux	87
5	Relation avec la viscosité artificielle	88
<b>3</b>	<b>Méthode de sous-structuration dynamique</b>	<b>89</b>
1	Problème de référence	91
2	Présentation générale de la méthode	93
2.1	Découpage en sous-structures et interfaces	93
2.2	Notations	94
2.3	Équations du problème	95
2.4	Séparation des difficultés	96
2.5	Stratégie de résolution : méthode Latin	98
3	Direction de recherche sous-structure constante	102
3.1	Étape locale	102
3.2	Étape globale	103
4	Efficacité de la méthode direction de recherche constante	105
4.1	Interface de contact	105
4.2	Endommagement à effet retard	108
4.3	Compaction élastique	113
4.4	Couplage des comportements en traction et en compression	116
5	Direction de recherche sécante	117
5.1	Étape globale	117
5.2	Résolution du gradient conjugué	118

6	Étude comparée de l'efficacité de la méthode à direction de recherche sécante	124
6.1	Endommagement	124
6.2	Compaction	124
6.3	Endommagement/Compaction	129
<b>4</b>	<b>Simulation numérique 1D 1/2</b>	<b>133</b>
1	Description de l'essai	134
2	Modélisation 1D 1/2 de l'essai	134
2.1	Modélisation des sous-structures	134
2.2	Modélisation des interfaces	137
3	Résultats de simulation	138
4	Optimisation du GC	144
<b>5</b>	<b>Simulation numérique de choc en 3D</b>	<b>149</b>
1	Le calcul à réaliser	150
2	Les difficultés rencontrées	152
3	Utilisation du calcul parallèle	152
3.1	Les étapes parallélisables	152
3.2	La définition de groupe de sous-structures	153
3.3	La procédure parallélisée	154
4	Résultats	156
5	Piste pour le stockage des non-linéarités	158
	<b>Bibliographie</b>	<b>165</b>
<b>A</b>	<b>Démonstration de la relation sur la dispersion</b>	<b>179</b>
<b>B</b>	<b>Démonstration de la deuxième relation sur la dispersion</b>	<b>183</b>
<b>C</b>	<b>Modèle thermodynamique d'un matériau poreux</b>	<b>187</b>
<b>D</b>	<b>Compléments sur l'endommagement à effet retard</b>	<b>191</b>
<b>E</b>	<b>Algorithmes de gradient conjugué</b>	<b>195</b>
1	Méthode du Gradient Conjugué (gc)	196
1.1	Présentation	196
1.2	Algorithme	196
1.3	Interprétation géométrique	196
1.4	Convergence	196
2	Méthode du Gradient Conjugué Préconditionné (gcp)	198
2.1	Présentation	198
2.2	Algorithme	198



---

# Table des figures

1.1	Le composite 3D C/C de l'étude . . . . .	9
1.2	Détail de l'enchevêtrement de torons de fibres . . . . .	10
1.3	Vue au tomographe du matériau 3D C/C - CE Gramat . . . . .	10
1.4	Reproductivité du matériau d'une cellule à l'autre - [Gratton 1998] . . . . .	11
1.5	Ondulations à l'échelle macro près d'un bord - [Gratton 1998] . . . . .	11
1.6	Détail des constituants . . . . .	12
1.7	Essai de traction . . . . .	13
1.8	Modèle d'endommagement en phase post-pic . . . . .	14
1.9	Cas modèle pour la mise en évidence de la localisation . . . . .	15
1.10	Problème modèle décomposition de domaine . . . . .	20
1.11	Le problème de McNeal . . . . .	23
1.12	Solutions successives de la LATIN . . . . .	27
1.13	Description de la géométrie . . . . .	30
1.14	Exemple numérique : demi-sinus . . . . .	34
1.15	Simulation d'un demi sinus par un schéma de Newmark . . . . .	35
1.16	Exemple numérique : créneau . . . . .	36
1.17	Simulation d'un créneau par un schéma de Newmark . . . . .	37
1.18	Exemple numérique : demi-sinus . . . . .	40
1.19	Simulation d'un demi sinus par un schéma Galerkin discontinu ordre 0 . . . . .	41
1.20	Exemple numérique : créneau . . . . .	42
1.21	Simulation d'un créneau par un schéma de Galerkin discontinu . . . . .	43
1.22	Définition des notations pour le problème à un pas de temps . . . . .	44
1.23	Évolution de la viscosité équivalente en fonction de la pulsation . . . . .	47
1.24	Filtrage des hautes fréquences pour différents schémas d'intégration . . . . .	48
1.25	Exemple numérique : demi-sinus . . . . .	49
1.26	Résultats de la simulation d'un demi sinus par un schéma HHT . . . . .	50
1.27	Exemple numérique : créneau . . . . .	51
1.28	Résultats de la simulation d'un créneau par un schéma HHT . . . . .	52
2.1	Réponse de différents 3D C/C - [Queen et Marsh 1967] . . . . .	58



---

2.2	Détail des constituants	59
2.3	Modèle simplifié 1D1/2	60
2.4	Diagramme des caractéristiques	61
2.5	Mécanisme de rupture	61
2.6	Résultat de l'identification de la courbe de Goeke-McClintock	65
2.7	Diagramme des impédances - cas linéaire	67
2.8	Diagramme des impédances - cas non-linéaire	67
2.9	Résultat de l'essai œdométrique	70
2.10	Courbe contrainte/déformation pour le modèle de compaction	71
2.11	Description de l'essai d'impact	73
2.12	Réponse expérimentale et calcul de réponse sous choc	73
2.13	Réponse expérimentale et calcul de réponse sous choc	75
2.14	Formation d'une onde de choc	77
2.15	Evolution du profil d'une onde de choc au cours de sa formation	78
2.16	Tube de matière	78
2.17	Courbe d'Hugoniot pour un matériau dense	80
2.18	Front d'une onde de choc	82
2.19	Courbe $p$ en fonction de $v$ pour un matériau poreux	84
3.1	Description de la géométrie	91
3.2	Décomposition d'une structure	93
3.3	Échange entre sous-structures et interfaces	94
3.4	Schéma itératif	98
3.5	Schéma itératif - Étape locale	100
3.6	Schéma itératif - Étape globale	100
3.7	Cas test pour l'interface de contact	108
3.8	Vitesse dans l'éprouvette	109
3.9	Déplacement aux points de contact	109
3.10	Cas de calcul pour l'endommagement effet retard	110
3.11	Résultat pour un chargement en sinus - endommagement	111
3.12	Résultat pour un chargement en sinus - contrainte	111
3.13	Courbe de convergence pour la direction de recherche élastique	112
3.14	Vitesse de convergence pour des directions de recherche constantes	113
3.15	Cas de calcul pour la compaction élastique	114
3.16	Résultat de calcul pour la compaction	114
3.17	Convergence pour la compaction	115
3.18	Convergence en fonction de la direction de recherche (compaction)	115
3.19	Schéma de l'admissibilité en déplacement	120
3.20	Schéma de l'admissibilité en contrainte	121
3.21	Schéma de résolution adopté	122
3.22	Convergence comparée pour l'endommagement	125

3.23	Génération d'ondes de choc - calcul par direction sécante . . . . .	126
3.24	Convergence comparée pour la compaction . . . . .	127
3.25	Contrainte pour le cas de compaction sévère . . . . .	128
3.26	Cas de calcul pour le comportement couplé . . . . .	129
3.27	Champ de contrainte dans la barre . . . . .	130
3.28	Endommagement dans la barre . . . . .	131
4.1	Dispositif expérimental d'un essai d'impact plaque/plaque . . . . .	135
4.2	Modélisation 1D 1/2 . . . . .	135
4.3	Comparaison essai/simulation pour une vitesse de 259 m/s . . . . .	139
4.4	Comparaison des vitesses en face arrière pour différentes vitesses d'impact <sup>140</sup>	
4.5	Contrainte dans les torons transverses . . . . .	141
4.6	Contrainte dans la matrice équivalente . . . . .	142
4.7	Comparaison de la convergence sans modification . . . . .	145
4.8	Comparaison de la convergence des différentes options . . . . .	146
4.9	Comparaison de la convergence pour l'ADM DEPL . . . . .	146
4.10	Comparaison de la convergence pour l'ADM CONT . . . . .	147
4.11	Comparaison de la convergence pour l'ADM OPT . . . . .	147
5.1	Dispositif expérimental d'un essai d'impact plaque/plaque . . . . .	150
5.2	Modélisation éléments finis d'un essai d'impact plaque/plaque . . . . .	151
5.3	Échange d'informations à l'interface . . . . .	153
5.4	Un groupe de sous-structure . . . . .	154
5.5	Algorithme parallélisé . . . . .	155
5.6	Contrainte de Von Mises . . . . .	156
5.7	Contrainte longitudinale . . . . .	157
5.8	Contrainte transversale 5 cellules . . . . .	158
B.1	Front d'une onde de choc . . . . .	184
C.1	Courbe $p$ en fonction de $v$ pour un matériau poreux . . . . .	188
D.1	Description de l'essai étudié par Deü - Eprouvette . . . . .	192
D.2	Description de l'essai étudié par Deü - Chargement . . . . .	192
D.3	Résultats comparés pour $\tau_c$ fixé à $2\mu s$ et $a$ variant . . . . .	194
D.4	Résultats comparés pour $a$ fixé à 10 et $\tau_c$ variant . . . . .	194



---

# Liste des tableaux

1.1	Description des différentes directions de fibres . . . . .	9
1.2	Propriétés mécaniques des constituants de la cellule de base . . . . .	12
1.3	Vitesse des ondes élastiques et impédance mécanique des constituants	13
2.1	Vitesses des ondes et des temps de parcours pour les trois essais . . .	74
2.2	Données matériau et constantes . . . . .	86
2.3	Résultats théoriques dans le cas non-poreux . . . . .	86
2.4	Résultats théoriques dans le cas poreux . . . . .	87
2.5	Détermination du paramètre de viscosité artificielle . . . . .	88
3.1	Choix des deux groupes d'équation dans [Ladevèze <i>et al.</i> 2000] . . .	97
3.2	Autres choix des deux groupes d'équation . . . . .	97
3.3	Choix de répartition de équations . . . . .	102
4.1	Influence of the termination tolerance . . . . .	144
E.1	Algorithme de gradient conjugué . . . . .	197
E.2	Algorithme de gradient conjugué préconditionné . . . . .	199



---

# Introduction

Modélisation et simulation sont désormais des mots clefs du métier d'ingénieur. Dans ce domaine, en effet, une volonté de plus en plus forte tend à minimiser le recours aux essais dans le processus de conception industrielle et de les remplacer par des simulations, ou essais virtuels (*Virtual Testing* en anglais). Cette volonté se manifeste actuellement tout particulièrement au travers de programmes de recherche nationaux ou européens dans le domaine aéronautique (MAIA, MUSCA, ...). Un des enjeux associés au "*virtual testing*", en mécanique des matériaux et des structures, est la prévision de l'endommagement et de la rupture, à la fois en statique et en dynamique. Ceci est d'autant plus vrai pour les matériaux composites qui possèdent une diversité d'architectures structurales et une multiplicité de matériaux de base qui rendent la réalisation de campagnes d'essais très lourde et très coûteuse. La gamme des essais à réaliser au cours de ces campagnes est, de plus, très large ; elle comprend aussi bien des essais de base que des essais sur structure, en passant par différents niveaux d'éprouvettes technologiques. À titre d'exemple, le coût des étapes de caractérisation des composites utilisés dans l'A340-600 s'élève à plusieurs centaines de millions d'euros. Notons que dans le domaine des applications militaires, dans lequel se situe cette thèse, le recours à la simulation est, également, souvent indispensable, vue la difficulté de réalisation d'essais représentatifs.

C'est dans le cadre de la problématique du "*virtual testing*" jusqu'à rupture de pièces composites en dynamique rapide que s'inscrit cette thèse. L'objectif du Centre d'Études de Gramat (CEG) de la DGA est de disposer d'outils fiables de prévision de la tenue aux chocs de structures en composites 3D carbone/carbone.

Un préalable nécessaire à la simulation jusqu'à rupture est de disposer d'une base matériau solide. Dans les cas des composites et de la dynamique, ceci constitue un écueil important car les phénomènes de dégradation gouvernant la réponse jusqu'à rupture se situent à une échelle mésoscopique, voire microscopique, suivant les échelles de temps mises en jeu.

Dans une étude précédente menée également en coopération avec le CEG, il a été montré que pour des durées de sollicitations de l'ordre de quelques microsecondes, une modélisation à l'échelle méso du 3D C/C pouvait rendre compte de

façon pertinente des principales observations expérimentales [Hérel et al. 1997, Allix et al. 1997 - 2001, Gratton 1998]. L'échelle méso est l'échelle des constituants de base du matériau : les torons de fibres et les blocs de matrice. La taille caractéristique de la maille élémentaire qui permet de reconstruire ce matériau périodique est de 0,8 mm par 0,8 mm par 0,175 mm.

Il est à noter qu'un modèle de comportement à l'échelle macroscopique est inapte à reproduire la réponse du matériau pour le type de choc étudié, les mécanismes de rupture étant principalement liés aux célérités totalement différentes dans les torons de fibres et les blocs de matrice. De l'étude précédente, il ressort que la réponse des 3D C/C sous choc est gouvernée par la compaction des blocs de matrice, l'endommagement et la rupture des différents mésoconstituants.

Cependant, le traitement numérique d'un modèle de composite décrit à l'échelle de ces constituants mésoscopiques en dynamique conduit très rapidement à des problèmes de taille très importante. À titre d'exemple, le maillage minimal d'une éprouvette de 5 cm<sup>3</sup> du 3D C/C étudié contient environ cinq millions de degrés de liberté (ddl). Pour des schémas d'intégration temporelle explicites, le nombre de pas de temps à utiliser est également considérable. Les caractéristiques du problème traité typique de ce que l'on entend par mésodynamique [Allix et al. 2001] (fortes non-linéarités, description à l'échelle fine engendrant un grand nombre de degrés de liberté) nécessitent le développement de méthodes de simulation adaptées.

Cette thèse est la première consacrée à l'étude de méthode de simulation dédiée à la mésodynamique des composites. Le travail a donc été axé sur l'étude systématique des difficultés posées par une telle extension, difficultés liées notamment au comportement très différent en traction (endommagement) et en compression (forte rigidification). Plus précisément, l'emploi de méthodes itératives pour la résolution spatiale (liée à la sous-structuration) et pour la résolution temporelle (méthode LATIN) engendre des approximations de solutions très éloignées des solutions finales. Une des questions particulièrement examinées dans ce travail est celle de la robustesse des algorithmes utilisés et des choix de paramètres assurant cette robustesse tout en minimisant les coûts d'analyse et la quantité d'informations à stocker.

Le premier axe étudié est celui de la sous-structuration. Les sous-structures du modèle numérique correspondent aux sous-structures physiques. Les interfaces entre mésoconstituants jouant un rôle mécanique très important, une méthode de sous-structuration mixte, mettant en exergue la notion d'interface entre sous-structures et permettant aisément d'introduire des comportements d'interface non-linéaires, proposée dans [Ladevèze 1985] et appliquée dans [Lemoussu et al. 2002] à la dynamique, a été adaptée. Cette étude menée dans le cadre des chocs pyrotechniques avait montré l'efficacité en terme de temps de calcul, mais surtout de précision, d'une approche temporelle globale dans le cadre de sous-structures linéaires avec des non-linéarités concentrées aux interfaces. Aussi avons-nous pri-

vilégié, l'idée d'étendre cette étude au cas de sous-structures fortement non-linéaires, notamment dans la perspective de pouvoir réutiliser des outils mis au point pour les chocs pyrotechniques.

Ce document est composé de cinq chapitres.

Le premier chapitre présente une étude bibliographique sur les thèmes abordés par cette étude, à savoir :

- les composites 3D et leurs applications industrielles ;
- le traitement de la rupture et en particulier les problèmes de localisation ;
- les méthodes de sous-structuration en dynamique ;
- les chocs en dynamique et le schéma d'intégration à privilégier pour l'étude.

Le deuxième chapitre s'intéresse à ce qui concerne la modélisation du matériau. En particulier, les principes de la mésomodélisation sont rappelés. Les modèles des principaux phénomènes dans les cas d'impact (l'endommagement et la compaction) sont détaillés et une étude thermodynamique sur les effets de température induits par un choc permet de valider l'hypothèse d'indépendance des propriétés mécaniques du matériau vis à vis de la température.

Le troisième chapitre développe la méthode dédiée en elle-même. Cette méthode itérative, globale en temps et en espace, est paramétrée par des directions de recherche qu'il faut optimiser. Deux voies ont été explorées :

- des directions de recherche constantes ;
- des directions de recherche variables.

Le choix de directions de recherche constantes est le plus simple car il permet de revenir dans le cadre d'application initial de la méthode en dynamique en profitant ainsi de tous les développements réalisés à ce jour, notamment le code éléments-finis Cofast3D, développé par Laurent Champaney [Blanzé *et al.* 1996, Champaney *et al.* 1996 - 1997 - 1999]. Dans ce cadre, les opérateurs sont constants et peuvent être factorisés en pré-traitement et utilisés simplement au cours des itérations. Cette méthode peut, *a priori*, être très efficace pour des comportements faiblement non-linéaires. L'efficacité de cette option est testée dans des cas simples où les difficultés ont été séparées (compaction, endommagement). Des exemples couplant ces difficultés ont montré les limites de cette approche.

Le choix de directions de recherche variables est plus compliqué car, dans ce cas, les opérateurs ne sont plus constants au cours des itérations. Un algorithme de gradient conjugué est utilisé pour pallier à ce désagrément. Plusieurs voies d'adaptation de cet algorithme à la méthode itérative sont présentées.

La méthode est illustrée par deux exemples où les difficultés ont été séparées.



Tout d'abord, la méthode a été validée dans un exemple 1D 1/2 qui a permis d'optimiser les paramètres de la méthode. Il s'agit de la même modélisation 1D 1/2 qui avait été proposée dans la thèse de Michel Gratton [[Gratton 1998](#)] pour des essais d'impact plaque/plaque et qui permet de se placer dans un cadre numérique moins lourd pour tester les idées et étudier la convergence de la méthode. Dans ce cas, les non-linéarités comme l'endommagement et la compaction sont introduites dans la modélisation du comportement du matériau. Cet exemple est présenté dans le quatrième chapitre.

Le cinquième chapitre présente le cas d'un calcul 3D d'impact plaque/plaque. Dans ce cas, on s'est intéressé à la gestion du nombre important de degrés de liberté en dynamique. Les sous-structures ont un comportement élastique et les non-linéarités sont concentrées aux interfaces. Les résultats du calcul sont présentés et discutés. Des pistes sont également proposées pour améliorer la gestion du stockage des informations. L'utilisation de l'hypothèse du mésomodèle est fondamentale pour réduire l'information nécessaire.

---

# Préliminaires : étude bibliographique

*Ce chapitre est de nature bibliographique. Plusieurs points sont abordés. Une brève présentation des composites 3D C/C est réalisée. On se focalise, ensuite, sur le traitement numérique de la rupture et en particulier les problèmes de dépendances au maillage dans le cas de la localisation. Puis, on étudie les méthodes de sous-structuration en dynamique de la littérature pour terminer, enfin, sur le traitement des chocs en dynamique.*

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Les matériaux 3D C/C</b> . . . . .	<b>7</b>
1.1	Présentation générale des composites carbone / carbone . .	7
1.2	Le Bloc300 . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Les problèmes de localisation associés à la rupture</b> . . . . .	<b>14</b>
2.1	Origine de la localisation . . . . .	14
2.2	Les modèles non-locaux . . . . .	16
2.3	Le modèle du second gradient . . . . .	17
2.4	Modèles à discontinuité . . . . .	17
2.5	Introduction d'effet de vitesse . . . . .	17

2.6	Le modèle à effet retard . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Les méthodes de sous-structuration en dynamique . . . . .</b>	<b>19</b>
3.1	Décomposition de domaine en dynamique transitoire . . . . .	19
3.2	Décomposition de domaine modale en dynamique . . . . .	22
3.3	Approches alternatives . . . . .	25
3.4	La méthode LATIN . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Le traitement numérique des chocs . . . . .</b>	<b>28</b>
4.1	La viscosité artificielle . . . . .	28
4.2	Notations . . . . .	29
4.3	Problème de référence . . . . .	29
4.4	Schémas de Newmark . . . . .	32
4.5	La Méthode de Galerkin Discontinue . . . . .	38
4.6	La méthode HHT . . . . .	47
4.7	Conclusion de l'étude . . . . .	53

---

# I Les matériaux 3D C/C

L'objectif de ce paragraphe est de présenter les grands traits des composites 3D C/C, traits qui ont orientés cette étude.

## I.1 Présentation générale des composites carbone / carbone

De manière générale, un matériau composite est constitué de renforts de fibres, destinés à soutenir une charge dans la plupart des cas, et d'une matrice dont le rôle consiste à répartir les efforts et à protéger les renforts fibreux de l'environnement extérieur. L'intérêt d'un tel matériau est d'allier ces différents constituants pour obtenir des propriétés que chacun des constituants séparés n'auraient pas eu.

La plupart du temps, les composites carbone/carbone sont réalisés pour remplir des fonctions spécifiques au sein d'un système donné. Ils sont particulièrement utilisés dans l'industrie aérospatiale et l'armement. Les composites carbone/carbone multidirectionnels sont souvent, bien que d'un coût très élevé, indispensables pour certaines applications, notamment grâce à leur bonne tenue à haute température.

### I.1.1 De très bonnes propriétés mécaniques

Comme le note [Legendre 1992], les composites carbone/carbone, et en particulier les multidirectionnels, sont les seuls matériaux qui conservent des caractéristiques mécaniques élevées au delà de 1500 °C, en particulier la résistance ultime, la rigidité et la ténacité.

Ils présentent également une excellente résistance aux chocs thermiques grâce une bonne conductibilité thermique (de l'ordre de  $25000 \text{ W.cm}^{-1}.\text{°C}^{-1}$  suivant l'axe de fibres) et d'un coefficient de dilatation faible. Ceci leur permet d'avoir une excellente stabilité dimensionnelle, même à haute température.

Ils sont aussi très réfractaires : à pression ambiante, ils se subliment sans fondre au delà de 3000 °C seulement. Pour cette raison, ils font partie des meilleurs matériaux d'ablation connus.

Ils ont aussi d'excellentes propriétés de frottement et de friction. Ils ont en effet, une excellente capacité à dissiper la chaleur par unité de masse. Leur coefficient de frottement se maintient jusqu'à très hautes températures et ils résistent très bien à la fatigue.

### I.1.2 Des applications de pointe

La première application des composites carbone/carbone est le freinage, en particulier pour les avions militaires et civils gros porteurs, mais aussi des voitures

de compétition ou des poids-lourds. Comme nous l'avons déjà mentionné dans le paragraphe 1.1.1, on trouve d'autres applications de ces matériaux dans l'industrie spatiale et l'armement.

L'intérêt pour ces industries des composites carbone/carbone multidirectionnels est la possibilité de reprendre des charges multidirectionnelles, telles qu'un fort gradient de température. Il est naturel de les retrouver dans les pièces destinées à subir de tels chargements. On peut citer parmi ces pièces le nez et les bords d'attaque des ailes de la navette spatiale américaine et des pièces sensibles des engins balistiques et tactiques. L'ensemble des missiles nucléaires stratégiques américains, anglais et français possèdent des boucliers thermiques en composite carbone/carbone [[Savage 1993](#)]

## 1.2 Le Bloc300

Le BLOC300 fait partie de la famille des composites tri-dimensionnels carbone-carbone. La mésostructure du matériau est représentée dans la figure 1.1.

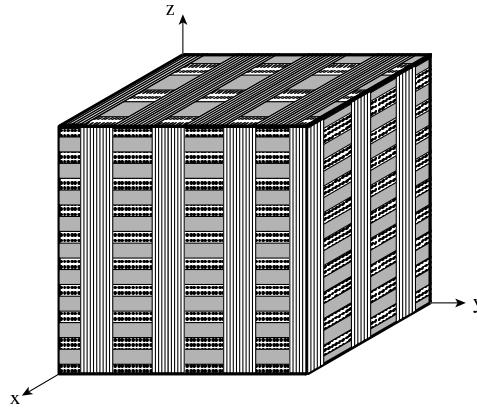


Figure 1.1: Le composite 3D C/C de l'étude

Pour ce matériau, les renforts sont orthogonaux entre eux dans trois directions différentes. Les torons dans une des directions sont plus gros que les autres, ce qui implique une direction de renfort privilégiée. Pour le matériau étudié, il s'agit de la direction que nous noterons  $\vec{z}$ . L'enchevêtrement des baguettes de fibres est illustré par la figure 1.2.

Les trous laissés dans l'enchevêtrement des torons sont remplis par une matrice de carbone. Cette matrice de carbone est poreuse, comme le montre l'observation au tomographe du matériau. Les blancs dans la figure 1.3 sont les pores présents dans la matrice. Les gros carrés gris sont une coupe transversale des torons Z.

Le taux volumique de fibres dans le matériau est d'environ 47 %. La répartition suivant les différentes directions est donnée dans le tableau 1.1, dans lequel K signifie 1000 fibres par fil.

Direction	x/y	z
Fibres utilisées	Soficar T300 (1K)	Soficar T300 (3K)
Pas moyen (mm)	1,6	0,324
Taux volumique de fibres	14,6 %	17,7 %

Tableau 1.1: Description des différentes directions de fibres

Une observation au microscope du matériau montre une variation relativement faible de la géométrie des baguettes d'une cellule à l'autre (figures 1.4 et 1.5). Les

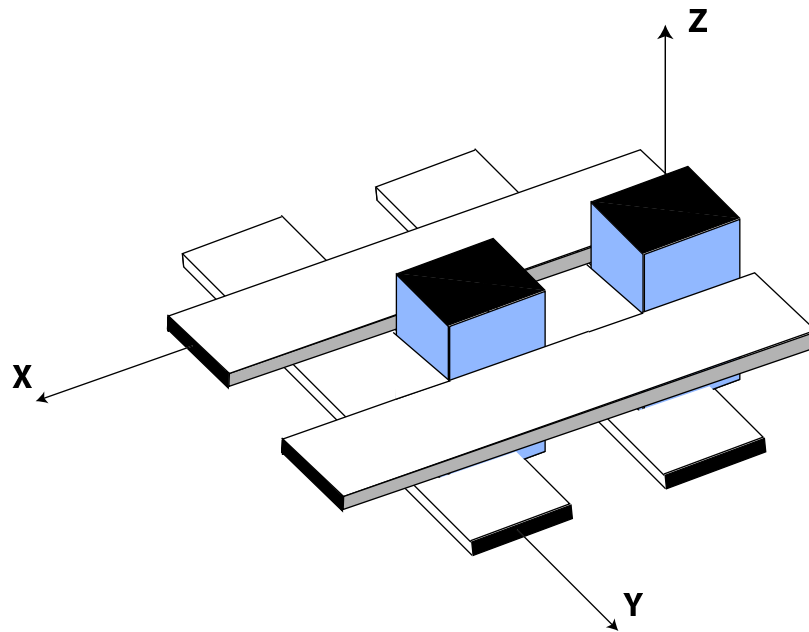


Figure 1.2: Détail de l'enchevêtrement de torons de fibres

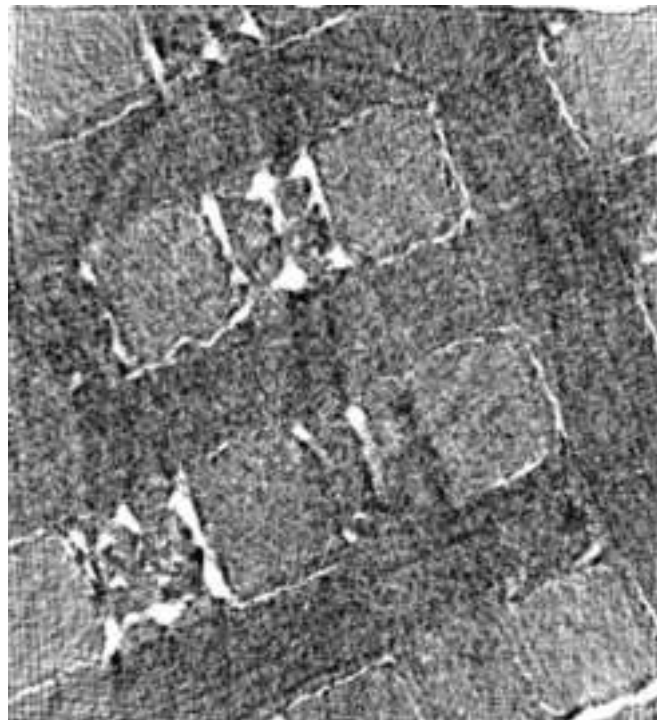


Figure 1.3: Vue au tomographe du matériau 3D C/C - CE Gramat

pores et les fissures dans la matrice ne sont pas périodiques mais sont répartis de manière relativement homogène dans le matériau. Partant de cette constatation, le matériau est modélisé comme parfaitement périodique.

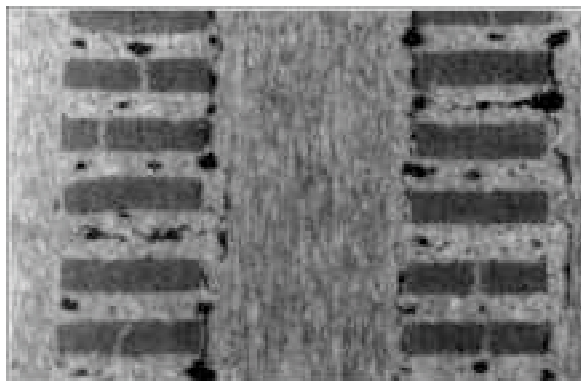


Figure 1.4: Reproductivité du matériau d'une cellule à l'autre - [Gratton 1998]

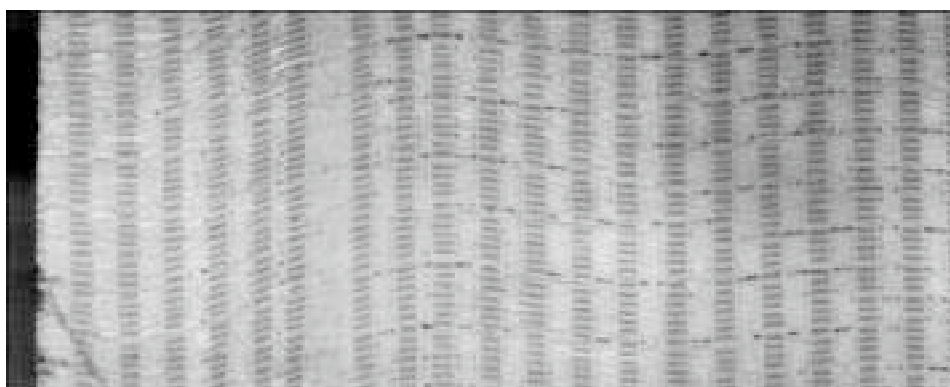


Figure 1.5: Ondulations à l'échelle macro près d'un bord - [Gratton 1998]

Le matériau étant supposé périodique, il peut être représenté par une cellule de base. En prenant la maille de volume minimale comprenant un seul de chacun des constituants, on obtient une cellule possédant trois symétries. On déduit donc une cellule de base égale à 1/8ème de la maille de volume minimale. Cette cellule de base est constituée de torons et de blocs de matrice représentés dans la figure 1.6.

Cette cellule est très hétérogène comme le montre le tableau 1.3 donnant les propriétés élastiques de chacun des constituants.

Les torons sont isotropes transverses avec une très nette différence entre la direction longitudinale et les directions transverses. Les blocs de matrice sont eux



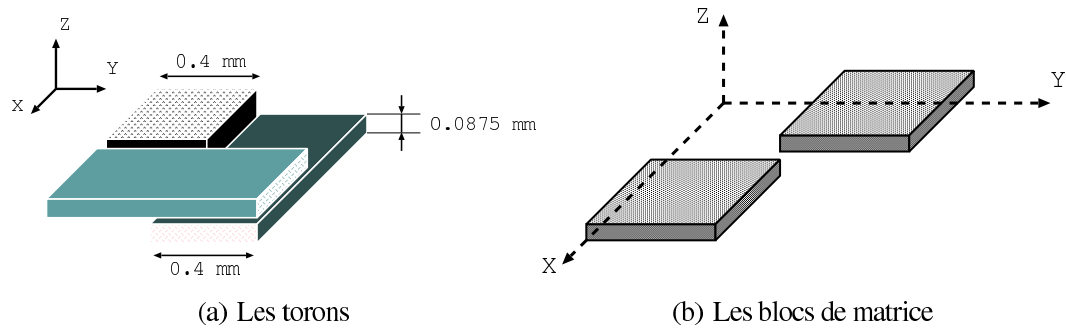


Figure 1.6: Détail des constituants

aussi isotropes transverses mais avec un faible hétérogénéité entre la direction  $\vec{z}$  et les directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ .

Torons isotropes transverse	Blocs de matrice isotropes transverses
$E_1 = E_2 = 2,05 \text{ GPa}$ $E_3 = 450 \text{ GPa}$	$E_1 = E_2 = 27 \text{ GPa}$ $E_3 = 20 \text{ GPa}$
$G_{13} = G_{23} = 9150 \text{ MPa}$ $G_{12} = E_1/2(1+\nu_{12})$	$G_{13} = G_{23} = 3,7 \text{ GPa}$ $G_{12} = E_1/2(1+\nu_{12})$
$\nu_{31} = \nu_{32} = \nu_{12} = 0,42$	$\nu_{31} = \nu_{32} = 0,15$ $\nu_{12} = 0,25$
$\rho = 2075 \text{ kg/m}^3$	$\rho = 1770 \text{ kg/m}^3$

Tableau 1.2: Propriétés mécaniques des constituants de la cellule de base

Ceci permet de déduire la vitesse élastique des ondes longitudinales dans chacun des constituants ainsi que leur impédance mécanique.

Pour illustrer cette hétérogénéité, il suffit de considérer le cas d'un impact normal au toron. Les ondes dans le toron se propage à peu près dix fois plus vite que les ondes dans les blocs de matrice et torons transverses.

Un matériau 3D C/C équilibré appelé Aerolor 32 a été étudié par Ladevèze, Poss et Rémond dans les années 80 [Ladevèze *et al.* 1982 - 1984]. Il est apparu que le

Torons	Blocs de matrice	Torons transverses
$c_0^{torZ} = 15 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$ $Z_0^{torZ} = 30 \text{ Mpa/m} \cdot \text{s}^{-1}$	$c_0^{mat} = 2 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$ $Z_0^{tor} = 6 \text{ Mpa/m} \cdot \text{s}^{-1}$	$c_0^{torXY} = 1 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$ $Z_0^{torXY} = 2 \text{ Mpa/m} \cdot \text{s}^{-1}$

Tableau 1.3: Vitesse des ondes élastiques et impédance mécanique des constituants

comportement de ce matériau était élasto-plastique endommageable, l'endommagement et la plasticité se développant de façon relativement isotrope dans les blocs de matrice et dans les interfaces entre les blocs de matrice et les torons.

Le matériau étudié ici présente des directions de renfort non-équivalentes, ce qui entraîne un comportement non-linéaire plus anisotrope. Les figures ci-dessous tirées de [Gratton 1998] présentent quelques réponses typiques de ce matériau sous des sollicitations de traction avec charge et décharge.

II

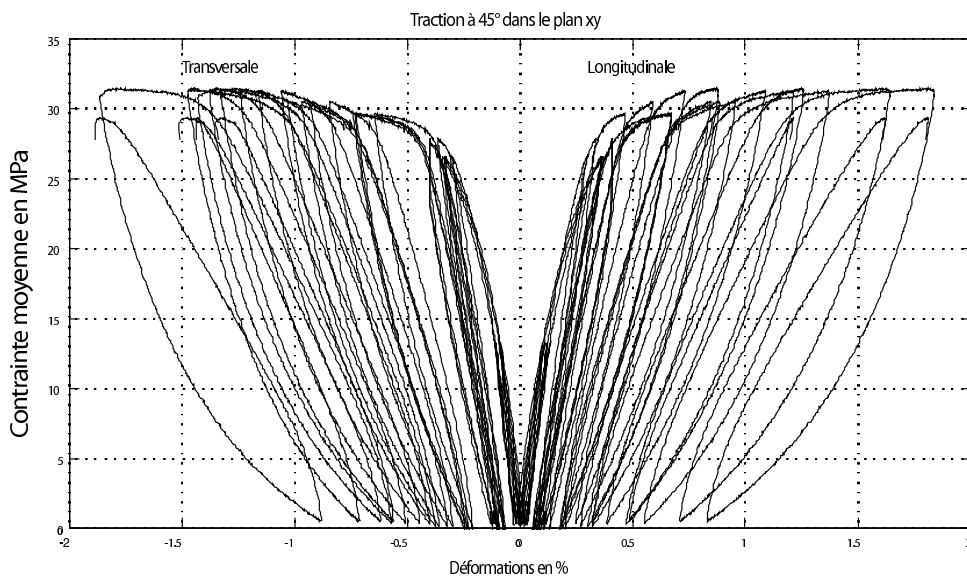


Figure 1.7: Essai de traction

## 2 Les problèmes de localisation associés à la rupture

Un des objectifs avoués de l'étude est d'étudier le comportement du matériau jusqu'à sa rupture. Comme beaucoup de matériaux composites, le BLOC300 peut se fissurer. Ce phénomène entraîne un adoucissement du matériau en traction modélisé souvent par de l'endommagement. Or, la rupture des matériaux composites s'accompagne de phénomènes de localisation des déformations et de l'endommagement comme le montre la figure 1.8. Numériquement, cela se traduit par une localisation artificielle dans une zone qui dépend de la taille du maillage. La taille de la zone de localisation tend vers 0 quand la taille du maillage tend vers 0 [Bazant 1976]. Cette dépendance au maillage est un phénomène qu'il est nécessaire de combattre d'autant qu'il n'intervient pas seulement en statique mais aussi en dynamique.

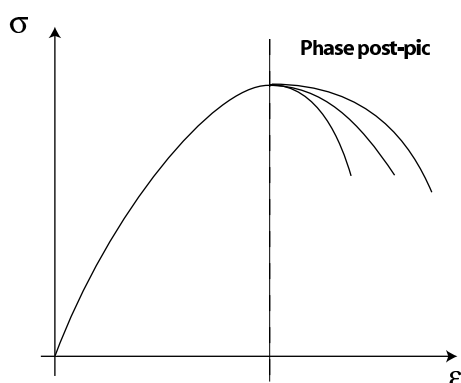


Figure 1.8: Modèle d'endommagement en phase post-pic

La technique la plus répandue pour remédier à ce problème est d'introduire une longueur caractéristique propre au matériau. L'état en un point de ce matériau ne dépendra pas seulement de la déformation en ce point mais également de l'interaction avec les points voisins, situés à une longueur inférieure à la longueur caractéristique introduite [Pijaudier-Cabot et Bazant 1988, Borst *et al.* 1993].

Nous allons brosser rapidement l'éventail le plus exhaustif possible des méthodes à disposition dans la littérature pour remédier au problème de la localisation.

### 2.1 Origine de la localisation

On peut expliquer la localisation d'un point de vue mathématique par le changement de nature de l'équation du mouvement, se transformant d'équation hyperbolique en équation elliptique. Il est relativement aisé de le démontrer comme cela

est fait dans [Needleman 1988, Bazant et Belytschko 1985]. Pour simplifier la démonstration, on se place dans le cas d'une barre sollicitée en traction composée d'un matériau élasto-plastique avec module d'écrouissage  $h$  constant et négatif, comme cela est montré dans la figure 1.9.

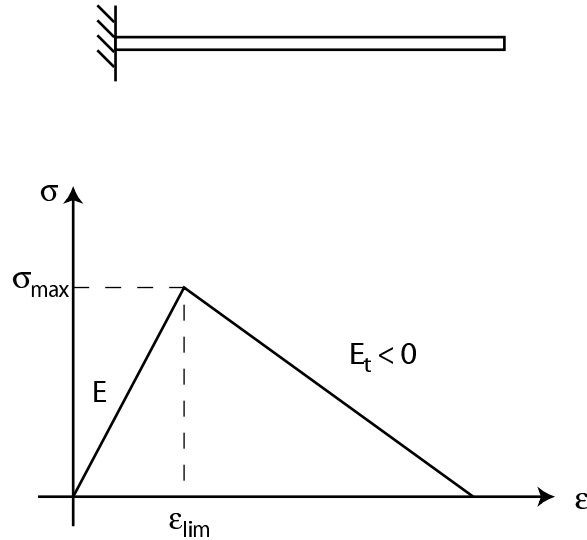


Figure 1.9: Cas modèle pour la mise en évidence de la localisation

L'expression de l'équation d'équilibre de la barre s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial t} = \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

où  $\sigma$  est la contrainte et  $u$  le déplacement, relié à la déformation totale par l'expression :

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \varepsilon_e(x, t) + \varepsilon_p(x, t) \quad (1.2)$$

La relation de comportement s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) &= E \varepsilon(x, t) & \text{si } \varepsilon \leq \varepsilon_{\text{lim}} \\ \sigma(x, t) &= \sigma_{\text{max}} + E_t (\varepsilon(x, t) - \varepsilon_{\text{lim}}) & \text{si } \varepsilon \geq \varepsilon_{\text{lim}} \end{aligned} \quad (1.3)$$

En dérivant les équations 1.1, 1.2 et 1.3 par rapport au temps, on obtient le système 1.4, où  $v$  est la vitesse et où apparaissent les taux de déformation et de contrainte :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{\sigma}(x, t)}{\partial t} &= \rho \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \\ \dot{\varepsilon}(x, t) &= \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \\ \dot{\sigma}(x, t) &= E \dot{\varepsilon}(x, t) \quad \text{si } \varepsilon \leq \varepsilon_{\text{lim}} \\ \dot{\sigma}(x, t) &= E_t \dot{\varepsilon}(x, t) \quad \text{si } \varepsilon \geq \varepsilon_{\text{lim}}\end{aligned}\tag{1.4}$$

En éliminant le taux de contrainte et le taux de déformation, on peut obtenir l'équation du mouvement de la barre en fonction seulement de la vitesse.

$$\frac{\tilde{E} \partial^2 v(x, t)}{\rho \partial x^2} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2}\tag{1.5}$$

où  $\tilde{E}$  vaut  $E$  si  $\varepsilon \leq \varepsilon_{\text{lim}}$  ou vaut  $E_t$  si  $\varepsilon \geq \varepsilon_{\text{lim}}$

On voit donc pour une déformation inférieure à  $\varepsilon_{\text{lim}}$ , l'équation 1.5 est une équation hyperbolique de propagation d'onde classique à la vitesse  $c = \sqrt{E/\rho}$ . Dès que la déformation dépasse  $\varepsilon_{\text{lim}}$ , l'équation 1.5 devient elliptique. La vitesse s'annule donc brutalement et l'onde est piégée dans le premier élément qui atteint la déformation limite puisque la transmission de la déformation aux éléments voisins ne se fait pas. La déformation se localise donc dans cet élément, quelle que soit sa taille. Ceci explique donc la localisation et la dépendance au maillage.

Ce raisonnement, fait dans un cas simple avec un comportement modèle, peut se généraliser à tous les comportements adoucissants et à l'endommagement dans sa phase post-pic.

La suite de ce paragraphe présente diverses alternatives pour éviter les phénomènes de localisation.

## 2.2 Les modèles non-locaux

Ces modèles développés en particulier dans les travaux de [Bazant et Belytschko 1985, Pijaudier-Cabot et Bazant 1988] propose de régulariser le problème en exprimant les lois d'évolution en un point en fonction des valeurs des variables internes au voisinage du point. La taille de localisation est donc fixée par le modèle et ne dépend plus du maillage. D'un point de vue numérique, il faut prendre en compte plusieurs éléments pour définir les variables au point d'intégration.

La taille caractéristique du modèle doit être reliée à des données physiques du matériau comme des tailles de grain, des tailles caractéristiques de microstructure, etc. Quelques difficultés se posent à propos des conditions numériques qui, sans aménagement particulier, comprennent une partie liée aux variables internes.

## 2.3 Le modèle du second gradient

Il s'agit d'enrichir le modèle continu en faisant intervenir des termes dérivés d'ordre supérieur, soit au niveau des déformations, soit au niveau des variables internes. Des simulations numériques en quasi-statique et dynamique ont montré que ce modèle permettait de résoudre correctement les problèmes de localisation classiques. L'utilisation d'un gradient d'ordre supérieur implique l'introduction d'une longueur caractéristique et de lois de comportement supplémentaires, rendant plus difficile la mise en œuvre. Cette approche est peu utilisée par le milieu industriel.

Les limitations de ce problème sont l'introduction de variables supplémentaires nécessitant de se poser la question des conditions aux limites à imposer et la détermination des paramètres introduits dans le modèle.

## 2.4 Modèles à discontinuité

Cette approche est aujourd'hui particulièrement développée dans [Oliver 1995, Oliver *et al.* 1999, Jirasek 2000]. La cinématique du modèle continu est enrichie de façon à introduire des champs de déplacement ou de déformation discontinus. Ainsi, la localisation peut se faire sur des bandes d'épaisseur nulle et la dépendance au maillage est donc perdue. Ces modèles sont actuellement très étudiés et de plus en plus utilisés pour gérer les problèmes de rupture.

## 2.5 Introduction d'effet de vitesse

Pour ce modèle, on introduit un effet de vitesse par le taux de déformation plastique. Le couplage temps/espace de la dynamique fait qu'introduire un effet de vitesse revient à introduire une longueur caractéristique. Ces modèles ont été proposés par [Needleman 1988, Borst *et al.* 1993].

La contrainte ne dépend plus seulement de la déformation mais aussi du taux de déformation plastique. Par exemple,

$$\sigma = \sigma \left( \varepsilon, \frac{\partial \varepsilon^p}{\partial t} \right) = \sigma^{max} + h\varepsilon^p + m \frac{\partial \varepsilon^p}{\partial t} \quad (1.6)$$

où  $m$  est un paramètre de sensibilité au taux de déformation. Une étude de dispersion permet de mettre en évidence une longueur caractéristique  $l$  :

$$l = \frac{2m}{\sqrt{\rho E}} \quad (1.7)$$

Ce modèle a montré son efficacité pour résoudre les problèmes de dépendance au maillage en dynamique.

## 2.6 Le modèle à effet retard

Ce modèle fait partie des modèles à effet de vitesse mais est spécifique à l'endommagement. Cette approche a été proposée par Ladevèze dans [Ladevèze 1992] dans le cas des composites stratifiés. Le type de modèle finalement retenu a été défini dans [Allix et Deü 1997] et est basé sur la notion de vitesse maximale d'endommagement. L'idée est d'introduire une viscosité dans la loi d'évolution et de limiter le taux d'endommagement, ce qui revient à dire que les fissures ne se propagent pas à une vitesse infinie. Ceci se fait par l'introduction d'un temps caractéristique, spécifique de la structure.

Il est à noter que des travaux récents menés par l'équipe d'Alain Combescure se sont intéressés à ce type de modèle en l'appliquant à des alliages d'aluminium et de titane [Suffis *et al.* 2003].

## 3 Les méthodes de sous-structuration en dynamique

La méthode que nous allons développer ultérieurement fait partie des méthodes dites de décomposition de domaine, utilisant le vieil adage : "diviser pour mieux régner". Ces techniques ont en commun la manière de traiter des problèmes de taille importante. Il s'agit de diviser la structure à étudier en sous-structures plus petites, toutes distinctes, et dont la réunion représente la structure totale. Il existe des méthodes de décomposition de domaine où les sous-structures ont une intersection non nulle (méthode de recouvrement de Schwarz [Roux 1990]) mais la majorité des méthodes utilisées aujourd'hui sont des méthodes sans recouvrement. C'est dans ce cadre que nous nous placerons dans la suite. Notons cependant les travaux récents concernant l'extension de la méthode Arlequin en dynamique [Dhia et Rateau 2003], méthode qui est une méthode de partition de modèle avec recouvrement.

### 3.1 Décomposition de domaine en dynamique transitoire

L'utilisation d'une technique de décomposition de domaine en dynamique ne pose pas de difficulté majeure supplémentaire par rapport à la version en statique. En effet, l'utilisation d'un schéma d'intégration temporel permet de se ramener à des problèmes à résoudre à chaque pas de temps du même type que le problème statique.

Pour simplifier l'écriture des différentes méthodes, et étant donné que la décomposition de domaine en dynamique transitoire est similaire à la décomposition de domaine en statique, elles sont proposées en statique.

Le domaine à étudier noté  $\Omega$  est divisé en deux domaines distincts notés  $\Omega_E$  et  $\Omega_{E'}$ , reliés par une interface  $\gamma_{EE'}$ . Les différentes méthodes se caractérisent par le choix des inconnues aux interfaces, créant ainsi 3 types de méthodes.

Le problème modèle est illustré par la figure 1.10

#### 3.1.1 La méthode de Schur primale

Cette méthode, initialement présentée dans [Przemieniecki 1963], est reprise dans de nombreuses études comme [Mandel 1993], [de Roeck *et al.* 1992] ou [Roux 1990]. Elle privilégie la quantité cinématique déplacement. Ainsi, le problème discrétisé après une légère contrainte de re-numérotation des noeuds de maillage s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} K_E & 0 & K_{E\gamma} \\ 0 & K_{E'} & K_{E'\gamma} \\ K_{E\gamma}^T & K_{E'\gamma}^T & K_\gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_E \\ u_{E'} \\ u_\gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_E \\ f_{E'} \\ f_\gamma \end{Bmatrix} \quad (1.8)$$



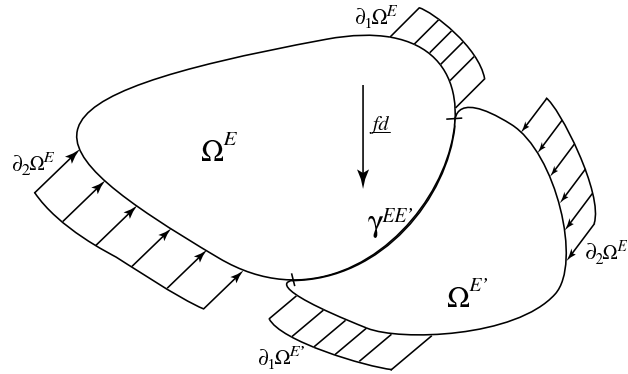


Figure 1.10: Problème modèle décomposition de domaine

La méthode de Schur propose de condenser le problème sur les inconnues nodales  $\{u_\gamma\}$ , liées à l'interface  $\gamma^{EE'}$ . Les matrices  $K_E$  et  $K_{E'}$  ne sont pas exactement les matrices de raideur des deux sous-structures puisqu'elles ne concernent que les inconnues  $\{u_E\}$  et  $\{u_{E'}\}$  relatives aux noeuds intérieurs des sous-structures  $\Omega_E$  et  $\Omega_{E'}$ . Il est possible de définir la matrice du complément de Schur  $[S]$  et le problème à résoudre est alors :

$$[S] \{u_\gamma\} = \{b\} \quad (1.9)$$

où  $[S]$  et  $b$  sont définis par :

$$[S] = \left( K_\gamma - K_{E_\gamma}^T K_E^{-1} K_{E_\gamma} - K_{E'_\gamma}^T K_{E'}^{-1} K_{E'_\gamma} \right) \quad (1.10)$$

$$b = f_\gamma - K_{E_\gamma}^T K_E^{-1} f_E - K_{E'_\gamma}^T K_{E'}^{-1} f_{E'} \quad (1.11)$$

Le problème a donc été réduit à la taille associée au nombre de noeuds de l'interface. La matrice  $[S]$  est cependant plus pleine qu'une matrice éléments finis standard. Les inconnues cinématiques relatives aux sous-structures  $\Omega_E$  et  $\Omega_{E'}$  sont déduites des inconnues d'interface par post-traitement, comme le montrent les équations suivantes :

$$u_E = K_E^{-1} (f_E - K_{E_\gamma} u_\gamma) \quad (1.12)$$

$$u_{E'} = K_{E'}^{-1} (f_{E'} - K_{E'_\gamma} u_\gamma) \quad (1.13)$$

La résolution du problème de Schur nécessite un traitement spécial des termes  $K_{E_\gamma}^T K_E^{-1} K_{E_\gamma}$  et  $K_{E'_\gamma}^T K_{E'}^{-1} K_{E'_\gamma}$  car l'inversion des matrices  $K_E$  et  $K_{E'}$  serait, comme

bien souvent, prohibitive. Bien que la résolution directe du problème soit très robuste et aisément parallélisable, des méthodes itératives de type gradient conjugué sont donc employées afin d'éviter les inversions coûteuses de matrice. L'efficacité de ces méthodes itératives est largement améliorée par l'utilisation de pré-conditionneurs, comme le montrent [de Roeck et Tallec 1990].

### 3.1.2 Méthode de Schur duale

Cette approche est l'approche duale de la précédente. Ici, ce sont les efforts à l'interface qui sont privilégiés et les inconnues statiques sont donc les multiplicateurs de Lagrange de l'interface  $\lambda_\gamma$ . Le problème discrétisé s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} K_E & 0 & L_{E\gamma} \\ 0 & K_{E'} & L_{E'\gamma} \\ L_{E\gamma}^T & L_{E'\gamma}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_E \\ u_{E'} \\ \lambda_\gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_E \\ f_{E'} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.14)$$

Cette fois,  $K_E$  est bien la matrice éléments finis de la sous-structure  $\Omega_E$  et  $L_{E\gamma}$  est la matrice de restriction aux noeuds bords. Par une condensation du problème sur les multiplicateurs de Lagrange, on obtient le problème suivant :

$$[\Lambda] \{ \lambda_\gamma \} = \{ c \} \quad (1.15)$$

avec

$$[\Lambda] = \left( L_{E\gamma}^T K_E^{-1} L_{E\gamma} + L_{E'\gamma}^T K_{E'}^{-1} L_{E'\gamma} \right) \quad (1.16)$$

$$c = L_{E\gamma}^T K_E^{-1} f_E + L_{E'\gamma}^T K_{E'}^{-1} f_{E'} \quad (1.17)$$

Comme pour la méthode primale, le problème se condense parfaitement sur l'interface et le problème réduit se résout en utilisant une approche directe ou itérative. Là encore, les inconnues relatives aux sous-structures  $\Omega_E$  et  $L_{E\gamma}$  sont obtenues par post-traitement. La méthode FETI [Farhat *et al.* 1994] utilise cette technique en tirant avantage de l'interconnexion faible entre les sous-structures. Elle offre un grand degré de parallélisme et permet, par exemple, de traiter des maillages incompatibles entre les sous-structures.

### 3.1.3 Approches mixtes

L'idée de ces méthodes est de ne plus privilégier une quantité (cinématique ou statique) par rapport à une autre mais de les traiter à égalité par l'intermédiaire d'une dualité adaptée au problème à résoudre. Plusieurs techniques, qui peuvent s'interpréter comme des approches mixtes, à base de Lagrangien augmenté [Tallec 1994, Glovinski et Tallec 1990] ont été proposées. Ces méthodes, au contenu plus

”mécanique”, permettent d’obtenir une grande qualité sur la solution lorsque les interfaces entre les sous-structures sont associées à un comportement complexe (contact/frottement, endommagement...).

La technique utilisée ici, et proposée dans [Ladevèze 1996a], est une approche véritablement mixte où les échanges entre sous-structures se font par l’intermédiaire d’efforts et de vitesses. Cette description très mécanique des interfaces associe une loi de comportement à chaque type d’interface.

Cette idée d’interface mécanique est particulièrement bien adaptée aux matériaux composites puisque la notion d’interface est également utilisée pour décrire le comportement du matériau en lui-même.

Un ingrédient supplémentaire qui peut être ajouté à cette méthode est le multi-échelle. Il s’introduit, dans les travaux de [Ladevèze 1996a, Champaney *et al.* 1997, Dureisseix et Ladevèze 1999, Ladevèze *et al.* 2002, Ladevèze et Nouy 2003] et, plus récemment encore, dans [Néron *et al.* 2004], en décomposant les inconnues d’interfaces en parties micro et macro. La partie macro est une moyenne spatiale et/ou temporelle du champ considéré. Au niveau de la résolution, un problème macro simplifié permet, à chaque itération, de propager l’information à l’ensemble de la structure. Le multi-échelle est utilisé en statique et en quasi-statique. En revanche, en dynamique, des développements doivent encore être réalisés.

### 3.2 Décomposition de domaine modale en dynamique

Après avoir étudié la sous-structuration purement spatiale associée à un schéma d’intégration en temps incrémental, il faut s’intéresser au couplage temps/espace de la dynamique. Les techniques qui associent naturellement le temps et l’espace sont les techniques de décomposition en base modale. Dans ce paragraphe sont présentées deux méthodes de décomposition de domaine modales et leur applicabilité aux problèmes de chocs est discutée.

L’idée est de pouvoir calculer les modes et les fréquences propres d’une structure à partir des modes et des fréquences propres de chaque sous-structure. On distingue deux grandes méthodes qui se distinguent par le choix fait de la liaison entre les différentes sous-structures.

Craig et Bampton [Craig et Bampton 1968] ont choisi d’encastrement les sous-structures et de calculer des modes d’interface statiques.

McNeal [McNeal 1971] a choisi, pour sa part, d’utiliser des interfaces libres entre les sous-structures et de calculer des modes d’interface statiques. L’étude qui suit est issue du cours ”Dynamique, vibration, recalage” du DEA *Techniques Avancées en Calcul de Structures*.

Nous allons nous concentrer sur la méthode de McNeal et étudier ses propriétés et ses limites.

On se place dans le cas de deux sous-structures reliées par une interface  $\Gamma$ , comme dans la figure 1.11. On veut déterminer les valeurs propres et les modes propres de la structure à partir des modes propres et des valeurs propres des sous-structures.

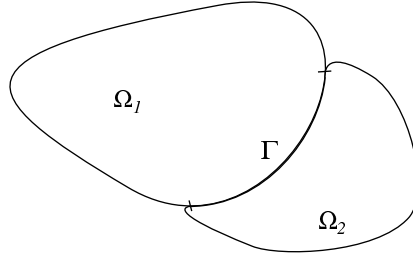


Figure 1.11: Le problème de McNeal

Quelques notations sont à préciser pour simplifier l'écriture de ce qui suit.

Les champs indicés 1 (respectivement 2) seront associés à la sous-structure 1 (respectivement 2).

$$\mathcal{U}_0 = \{ \underline{U} = (\underline{U}_1, \underline{U}_2) / \underline{U}_1|_{\partial_1\Omega_1} = 0, \underline{U}_2|_{\partial_1\Omega_2} = 0, \text{régularité} \} \quad (1.18)$$

$$\mathcal{T} = \{ \underline{T} \text{ définis sur } \Gamma / \text{régularité} \} \quad (1.19)$$

$$(\underline{U}, \underline{V}) = \int_{\Omega_1} \rho \underline{U}_1 \cdot \underline{V}_1 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho \underline{U}_2 \cdot \underline{V}_2 d\Omega_2 \quad (1.20)$$

$$\langle \underline{U}, \underline{V} \rangle = \int_{\Omega_1} Tr [\mathbf{K}\varepsilon(\underline{U}_1)\varepsilon(\underline{V}_1)] d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} Tr [\mathbf{K}\varepsilon(\underline{U}_2)\varepsilon(\underline{V}_2)] d\Omega_2 \quad (1.21)$$

Le problème à résoudre est le suivant :

Trouver  $(\omega, \underline{U}, \underline{T}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{U}_0 \times \mathcal{T}$  avec  $\underline{U} \neq 0$  rendant stationnaire  $\Phi(\underline{U}', \underline{T}')$  où

$$\Phi(\underline{U}, \underline{T}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} Tr [\mathbf{K}\varepsilon(\underline{U}_1)\varepsilon(\underline{U}_1)] d\Omega_1 - \frac{\omega^2}{2} \int_{\Omega_1} \rho \underline{U}_1 \cdot \underline{U}_1 d\Omega_1 \quad (1.22)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_2} Tr [\mathbf{K}\varepsilon(\underline{U}_2)\varepsilon(\underline{U}_2)] d\Omega_2 - \frac{\omega^2}{2} \int_{\Omega_2} \rho \underline{U}_2 \cdot \underline{U}_2 d\Omega_2 \quad (1.23)$$

$$- \int_{\Gamma} \underline{T} \cdot (\underline{U}_1 - \underline{U}_2) dS \quad (1.24)$$

$\underline{T}$  est un multiplicateur de Lagrange et représente un inter-effort à l'interface. On peut donc simplifier l'écriture de  $\Phi$ .

$$\Phi(\underline{U}, \underline{T}) = \frac{1}{2} \langle \underline{U}, \underline{U} \rangle - \frac{\omega^2}{2} (\underline{U}, \underline{U}) - \int_{\Gamma} \underline{T} \cdot (\underline{U}_1 - \underline{U}_2) dS$$

On se donne une base orthonormée pour chacune des sous-structures. On définit alors deux sous-espaces vectoriels :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_1^m &= \langle \underline{\phi}_1^1, \dots, \underline{\phi}_m^1 \rangle \\ \mathcal{U}_2^m &= \langle \underline{\phi}_1^2, \dots, \underline{\phi}_m^2 \rangle \end{cases} \quad (1.25)$$

L'idée de McNeal est alors la suivante. Tout vecteur de  $\mathcal{U}_1$  peut être décomposé en une partie appartenant à  $\mathcal{U}_1^m$  et une partie orthogonale.

$$\underline{U}_1 = \underline{V}_1 + \underline{W}_1 \quad (1.26)$$

$\underline{V}_1$  appartient à  $\mathcal{U}_1^m$  et  $\underline{W}_1$  est orthogonal à  $\underline{V}_1 \in \mathcal{W}_1^m$  et vérifie donc :

$$\int_{\Omega_1} \rho \underline{W}_1 \underline{\phi}_i^1 = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (1.27)$$

On peut faire la même chose pour  $\Omega_2$  et on peut définir  $\mathcal{W}_0^m = \mathcal{W}_1^m \times \mathcal{W}_2^m$ . On peut alors aisément démontrer les deux propriétés suivantes.

$$\begin{cases} (\underline{V}, \underline{W}) = 0 & \forall \underline{V} \in \mathcal{U}_0^m, \forall \underline{W} \in \mathcal{W}_0^m \\ \langle \underline{V}, \underline{W} \rangle = 0 & \forall \underline{V} \in \mathcal{U}_0^m, \forall \underline{W} \in \mathcal{W}_0^m \end{cases} \quad (1.28)$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \Phi(\underline{U}, \underline{T}) &= \frac{1}{2} \langle \underline{V}, \underline{V} \rangle - \frac{\omega^2}{2} (\underline{V}, \underline{V}) \\ &+ \frac{1}{2} \langle \underline{W}, \underline{W} \rangle - \frac{\omega^2}{2} (\underline{W}, \underline{W}) - \int_{\Gamma} \underline{T} \cdot (\underline{U}_1 - \underline{U}_2) dS \end{aligned} \quad (1.29)$$

L'hypothèse de McNeal est que  $\frac{\omega^2}{2} (\underline{W}, \underline{W})$  est négligeable devant  $\frac{1}{2} \langle \underline{W}, \underline{W} \rangle$ . On définit le quotient de Rayleigh d'un mode :

$$R(\underline{W}_1) = \frac{\langle \underline{W}_1, \underline{W}_1 \rangle}{(\underline{W}_1, \underline{W}_1)} \quad (1.30)$$

Il est assez aisé de démontrer les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} R(\underline{W}_1) \geq \omega_{m+1}^1{}^2 \quad \forall \underline{W}_1 \in \mathcal{W}_1^m \\ R(\underline{W}_2) \geq \omega_{m+1}^2{}^2 \quad \forall \underline{W}_2 \in \mathcal{W}_2^m \end{cases} \quad (1.31)$$

On en déduit donc :

$$\omega^2(\underline{W}, \underline{W}) \leq \frac{\omega^2}{(\inf(\omega_{m+1}^1, \omega_{m+1}^2))^2} \langle \underline{W}, \underline{W} \rangle \quad (1.32)$$

L'erreur relative commise par l'utilisation de l'hypothèse de McNeal, est donc :

$$\zeta(\omega) = \frac{\omega^2}{(\inf(\omega_{m+1}^1, \omega_{m+1}^2))^2}$$

Cette méthode est intéressante si on ne s'intéresse pas à des fréquences trop importantes. Dans notre étude, on s'intéresse à des chocs qui ont un contenu fréquentiel très important et cette méthode n'est donc pas adaptée.

### 3.3 Approches alternatives

Il est à noter que certains travaux s'intéressent à optimiser les méthodes de décomposition de domaine en couplant différentes approches.

Un premier exemple est le couplage de schéma d'intégration entre sous-structures différentes [Combescure et Gravouil 2001]. Ceci permet de coupler des schémas implicite et explicite. Ceci se fait en décomposant l'accélération en deux. Une première partie de l'accélération vérifie l'équilibre sur chaque sous-structure et peut être calculée indépendamment sur chaque sous-structure. Une deuxième partie prend en compte les liaisons entre sous-structures. Ces liaisons sont écrites comme des relations de contraintes sur les déplacements. On introduit des multiplicateurs de Lagrange ( $\Lambda$ ) associés aux contraintes de liaison. Les multiplicateurs de Lagrange sont déduits à partir des accélérations calculées précédemment et la partie de l'accélération associée aux liaisons est déduite des multiplicateurs de Lagrange. On obtient un problème discrétisé qui s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^k \ddot{\mathbf{U}}^k + \mathbf{F}_{int}^k &= \mathbf{F}_{ext}^k + \mathbf{F}_{link}^k \quad \forall k \in \{1, \dots, s\} \\ \sum_{k=1}^s \mathbf{C}^k \mathbf{W}^k &= 0 \\ \mathbf{F}_{link}^k &= \mathbf{C}^{kT} \Lambda \end{aligned} \quad (1.33)$$

où  $\mathbf{W}^k$  est le vecteur déplacement, vitesse ou accélération suivant la condition cinématique choisie.

On introduit la décomposition de l'accélération dans le système d'équation précédent :  $\ddot{\mathbf{U}}^k = \ddot{\mathbf{U}}_{free}^k + \ddot{\mathbf{U}}_{link}^k$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{U}}^k &= \ddot{\mathbf{U}}_{free}^k + \ddot{\mathbf{U}}_{link}^k \\
\mathbf{M}^k \ddot{\mathbf{U}}_{free}^k + \mathbf{F}_{int}^k &= \mathbf{F}_{ext}^k \quad \forall k \in \{1, \dots, s\} \\
\mathbf{M}^k \ddot{\mathbf{U}}_{link}^k &= \mathbf{F}_{link}^k \quad \forall k \in \{1, \dots, s\} \\
\sum_{k=1}^s \mathbf{C}^k \mathbf{W}^k &= 0 \\
\mathbf{F}_{link}^k &= \mathbf{C}^{kT} \Lambda
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Cette technique permet de coupler aisément différents schémas d'intégration en remarquant que le schéma d'intégration intervient en modifiant de façon explicite les opérateurs et les forces internes. L'extension au cas non-linéaire se fait en itérant sur le calcul des accélérations jusqu'à obtenir la vérification de l'équilibre et des contraintes de liaison.

Une approche multi-échelle en temps, avec la possibilité de discrétisations temporelles différentes entre sous-structures, est également proposée par les mêmes auteurs dans [Combescure et Gravouil 2002]. Le passage entre deux échelles se fait par l'utilisation d'un projecteur pour passer de l'échelle fine à l'échelle grossière. En général, on choisit d'interpoler linéairement l'échelle macro sur l'échelle micro. La décomposition micro/macro se fait sur les inconnues cinématiques et sur les multiplicateurs de Lagrange.

Enfin, dans [Combescure *et al.* 2003], une extension des travaux précédents aux cas de maillages incompatibles a été proposée. L'utilisation d'une méthode *mortar* permet de gérer les incompatibilités aux interfaces.

Pour les approches couplant deux techniques complètement différentes, on peut citer, par exemple, les travaux de [Faucher et Combescure 2003] où on utilise une décomposition modale pour les sous-structures linéaires éloignées des fortes sollicitations ou en grands déplacements, en gardant une résolution classique pour les sous-structures sollicitées plus durement. Ceci se fait en se basant sur les techniques décrites succinctement précédemment en projetant les opérateurs sur la base modale pour les sous-structures réduites. Le problème peut s'écrire alors dans le même formalisme que les méthodes précédentes.

### 3.4 La méthode LATIN

La résolution par la méthode LATIN est différente des techniques de résolution classique car elle n'est pas incrémentale. À chaque itération, la solution sera une approximation sur tout l'espace et sur tout le temps de la solution du problème, comme le montre la figure 1.12. Une technique classique consisterait à discrétiser l'intervalle d'étude, à utiliser un schéma d'intégration temporel et de finalement

résoudre à chaque pas de temps un problème de sous-structuration avec des sous-itérations à chaque pas de temps pour faire converger l'algorithme, comme décrit dans le paragraphe 3.

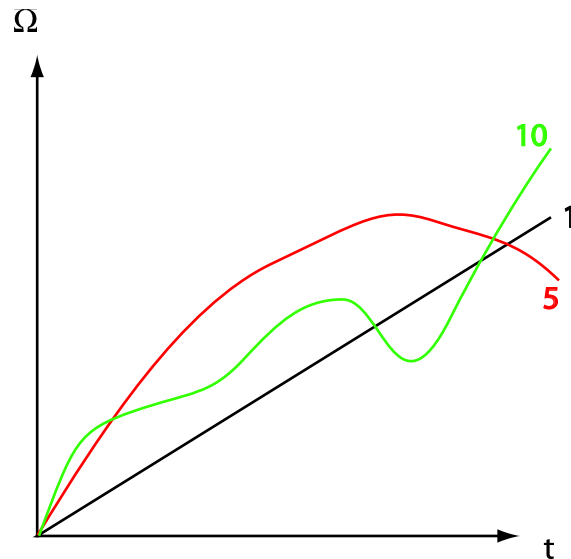


Figure 1.12: Solutions successives de la LATIN

Cette méthode s'est montrée très efficace en quasi-statique et en dynamique [Lemoussu *et al.* 2002, Ladevèze *et al.* 2000] pour simuler la réponse dynamique d'un assemblage de structures élastiques où les non-linéarités sont concentrées aux interfaces. Des problèmes complexes comprenant du contact et du frottement ont été traités dans le cas des chocs pyrotechniques engendrés par la séparation d'un étage sur la fusée *Ariane*.



## 4 Le traitement numérique des chocs

### 4.1 La viscosité artificielle

La présence de comportement rigidifiant en dynamique génère des ondes de choc. D'un point de vue numérique, il est nécessaire d'introduire de la viscosité afin de gérer ces ondes de choc. L'objet de ce paragraphe est de donner un bref rappel sur la forme de la viscosité artificielle depuis longtemps utilisée dans les codes de dynamique rapide ainsi que sur son sens physique.

[Rayleigh 1910] montre, pour un fluide, que la dissipation est nécessairement présente dans une onde de choc et qu'elle est rendue possible par :

- l'aspect non parfaitement adiabatique de la transformation ;
- l'aspect visqueux de la matière activé par une déformation à déviateur non nulle (déformation uniaxiale).

L'effet de la viscosité introduite est néanmoins si faible, qu'il ne devient visible, dans le choc, que pour des gradients en espace (ou en temps) très importants. A titre d'exemple, pour l'air, la longueur du front est de quelques dizaines de nm.

Dans le cas de calculs numériques, la discrétisation spatiale introduit une fréquence de coupure. Un maillage trop "grossier" présentant une fréquence de coupure trop basse ne peut permettre de prendre en compte les mécanismes de viscosité physique de la matière stabilisant l'onde de choc. Afin d'avoir un calcul stable et à condition d'entrer les caractéristiques complètes du matériau, il faut un maillage suffisamment fin, apte à représenter les très grands taux de déformation activant la viscosité. Dans le cas de l'air, à titre d'exemple, la taille de la maille devrait être de l'ordre de quelques nm. Il va de soi que de tels calculs s'avèrent exorbitants aussi, [Neumann et Richtmyer 1950] propose d'introduire une viscosité artificielle ne modifiant ni les hauteurs de front, ni la dissipation du processus et permettant un maillage plus grossier. Ce terme de viscosité permet de maintenir le front sur 5 à 6 éléments et doit être calé de manière à suivre la droite de Rayleigh lors du choc. Un aspect unilatéral y est introduit afin de ne pas l'activer lors de la décharge (sauf cas de matériaux particuliers). La forme de ce terme de viscosité est quadratique par rapport au gradient des vitesses. On ajoute également un terme linéaire :

$$q = k_1 \cdot \rho \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| + k_2 \cdot \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$$

Le principe fondamental pour traiter numériquement correctement les chocs est d'introduire une dissipation. Plusieurs méthodes permettant de régulariser le problème permettent, avec plus ou moins de réussite, à éviter ces désagréments ou, au moins, de les limiter.

Différentes méthodes pour le traitement des chocs sont étudiées. Pour chacune des méthodes, une étude théorique et des exemples numériques qui illustrent leurs avantages et leurs inconvénients sont présentés.

Le choix d'un schéma numérique pour l'étude est fait en se basant sur les conclusions de cette étude.

## 4.2 Notations

Le milieu étudié, noté  $\Omega$  est une partie, définie à l'instant initial  $t = 0$ , de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ .

Un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  est souligné :

$\underline{U}, \underline{V}$  : déplacement, vitesse

Un point courant du domaine  $\Omega$  est noté  $\underline{M}$ .

Les opérateurs linéaires sont notés en écriture doublée :

$\sigma, \varepsilon$  : contrainte, déformation

Les opérateurs plus complexes comme l'opérateur de Hooke seront écrits en gras :

**K** : opérateur de Hooke

Les expressions matricielles des opérateurs seront écrites doublées :

$\mathbb{K}$  : matrice de raideur éléments finis

$\mathbb{M}$  : matrice de masse éléments finis

## 4.3 Problème de référence

Avant de décrire les différents schémas d'intégration en temps, nous allons présenter le problème que nous cherchons à résoudre avec ces méthodes.

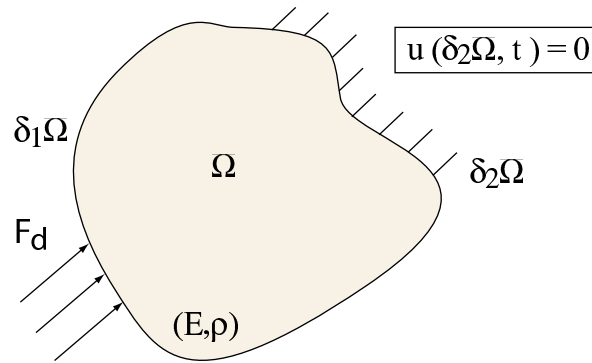


Figure 1.13: Description de la géométrie

### 4.3.1 Problème continu

On considère un domaine  $\Omega$  soumis à des forces de volume  $f_d$  et à des efforts surfaciques  $F_d$  sur une partie  $\delta_2\Omega$ . Sur la partie complémentaire de  $\partial\Omega$ , notée  $\delta_1\Omega$ , des déplacements  $U_d$  (ou des vitesses  $V_d$ ) sont peuvent être appliqués également. On se place dans l'hypothèse des petites perturbations mais les chargements extérieurs varient dans le temps ce qui ne permet pas de négliger les quantités d'accélération. Le problème est donc dynamique mais les niveaux sont supposés tels que le comportement des matériaux restent élastiques linéaires.

Le problème est alors de trouver un couple  $(\underline{U}, \sigma)$  défini sur  $\Omega \times [0, T]$  qui vérifie :

– Conditions Initiales :

$$\forall M \in \Omega, \quad \begin{aligned} \underline{U}_{t=0} &= \underline{U}_0 \\ \underline{V}_{t=0} &= \underline{V}_0 \end{aligned} \quad (1.35)$$

– Équations de liaison :

$$\forall t \in [0, T], \quad \begin{aligned} \underline{U}|_{\delta_1\Omega} &= \underline{U}_d \\ \underline{U} &\in \mathcal{U}^{[0, T]} \end{aligned} \quad (1.36)$$

– Équilibre :

$$\forall t \in [0, T], \forall U^* \in \mathcal{U}_0^{[0, T]}$$

$$\int_{\Omega} \rho \frac{d^2 \underline{U}}{dt^2} \cdot \underline{U}^* d\Omega + \int_{\Omega} Tr(\sigma_{\varepsilon}(\underline{U}^*)) d\Omega = \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^* dS$$

$$\sigma \in \mathcal{S}^{[0,T]}$$
(1.37)

– Relation de comportement :

$$\forall t \in [0, T] \quad \sigma(M, t) = \mathbf{K}_{\varepsilon}(\underline{U})$$

$$\forall \underline{M} \in \Omega$$
(1.38)

$\mathbf{K}$  est le tenseur de Hooke, caractéristique du matériau,  $\varepsilon(\underline{U})$  est le tenseur de déformation donné par la formule suivante :

$$\varepsilon(\underline{U}) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{M}} + \left( \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{M}} \right)^T \right]$$
(1.39)

$\mathcal{U}^{[0,T]}$  est l'espace des déplacements admissibles dans lequel on recherche le déplacement  $\underline{U}$  solution.

$\mathcal{U}_0^{[0,T]}$  est l'espace des vitesses virtuelles défini par :

$$\mathcal{U}_0^{[0,T]} = \{ \underline{U}^*, \text{nul sur } \partial_1 \Omega, \text{ régulier} \}$$
(1.40)

$\mathcal{S}^{[0,T]}$  est l'espace des champs dynamiquement admissibles dans lequel on va rechercher le champ de contrainte.

### 4.3.2 Discrétisation en temps et en espace

Pour résoudre cette équation, on va résoudre un problème éléments finis à chaque pas de temps.

La discrétisation en espace est une discrétisation très classique de type éléments finis. En temps, on discrétise l'intervalle  $[0, T]$  en sous-intervalle de type  $[t_i, t_{i+1}]$  de taille  $dt_i$ .

Il est à noter que, même si la majorité des méthodes utilisent un schéma d'intégration temporel se basant sur une discrétisation, certaines méthodes s'en affranchissent. On peut citer par exemple les travaux de [Cochelin et Compain 2000], qui s'appuie sur une méthode asymptotique numérique pour déterminer la réponse temporelle d'une structure. Pour l'instant, cette méthode n'a été appliquée que dans des cas simples où la variation temporelle est lente. Son application dans le cas de choc demanderait des développements supplémentaires.

## 4.4 Schémas de Newmark

### 4.4.1 Exemples de schémas de Newmark classiques

Tout comme on a besoin de définir une intégration sur l'espace, il est nécessaire de définir un schéma d'intégration sur le temps. Ce schéma revient à définir les inconnues au pas de temps  $n + 1$  en fonction des variables aux pas de temps précédents, supposées avoir été calculées précédemment.

Les schémas de type Newmark pour une intégration d'ordre 2 définissent des relations linéaires entre les inconnues au pas de temps  $n + 1$  et celles calculées au pas de temps précédents  $n$ , en introduisant deux paramètres  $(\beta, \gamma)$  qui, en fonction de leurs valeurs, vont définir les propriétés du schéma.

Les équations sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + dt_i ((1 - \gamma)\ddot{x}_n + \gamma\ddot{x}_{n+1}) \\ x_{n+1} = x_n + dt_i \dot{x}_n + dt_i^2 ((1/2 - \beta)\ddot{x}_n + \beta\ddot{x}_{n+1}) \end{cases} \quad (1.41)$$

A ces équations, il est nécessaire d'ajouter l'équation d'équilibre dynamique, ici écrite dans sa forme discrétisée.

$$\mathbb{M}\ddot{x}_{n+1} + \mathbb{C}\dot{x}_{n+1} + \mathbb{K}x_{n+1} = F_{n+1}^e \quad (1.42)$$

On va maintenant s'intéresser à quelques valeurs particulières de  $\beta$  et  $\gamma$ , ce qui va permettre de brosser un éventail des différents schémas de Newmark classiques.

#### 4.4.1.1 Différences centrées : $(\beta = 0, \gamma = 1/2)$

$$\begin{cases} \dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \frac{dt_i}{2} (\ddot{x}_n + \ddot{x}_{n+1}) \\ x_{n+1} = x_n + dt_i \dot{x}_n + \frac{dt_i^2}{2} \ddot{x}_n \end{cases} \quad (1.43)$$

Ce schéma est certainement le plus connu et le plus utilisé de tout les schémas présentés ci-dessus du fait de sa simplicité. Ce schéma est explicite et donc peu coûteux numériquement. En effet, la diagonalisation de la matrice de masse  $\mathbb{M}$  de l'équation 1.42 rend ce schéma explicite. C'est pourquoi il est utilisé dans la grande majorité des codes de calcul de dynamique rapide. Cependant, il est conditionnellement stable. Sa condition de stabilité est bien connue en 1D sous le nom de condition de Courant où intervient  $c$ , la vitesse de propagation des ondes dans le milieu,  $dt$  le pas de temps du schéma d'intégration temporel et  $dx$  la taille caractéristique du maillage :

$$c dt \leq dx \quad (1.44)$$

Cette condition exprime le fait que pendant un pas de temps, le signal ne doit pas se propager de plus d'un élément.

Cependant, ce schéma ne convient, nous semble-t-il, au cadre de cette étude pour plusieurs raisons :

- cette condition de stabilité s'exprime de façon plus complexe en 3D ;
- la condition de Courant pour chacun des mésoconstituants du matériau donne des pas de temps critiques extrêmement différents qui nécessiteraient une échelle de temps différente par mésoconstituant afin de réduire la quantité d'information à stocker pour les mésoconstituants où cela est possible ;
- dans le cas du comportement de compaction, le nombre de pas de temps devra encore augmenter de façon importante ;
- la quantité d'information à stocker est plus importante que pour tout autre schéma inconditionnellement stable.

#### 4.4.1.2 Accélération moyenne : ( $\beta = 1/4, \gamma = 1/2$ )

$$\begin{cases} \dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \frac{dt_i}{2} (\ddot{x}_n + \ddot{x}_{n+1}) \\ x_{n+1} = x_n + dt_i \dot{x}_n + \frac{dt_i^2}{4} (\ddot{x}_n + \ddot{x}_{n+1}) \end{cases} \quad (1.45)$$

Ce schéma revient à considérer l'accélération constante sur l'intervalle de temps (égale à la moyenne de l'accélération des deux pas de temps) et à intégrer.

Ce schéma est un schéma implicite. En effet, le calcul des inconnues au pas de temps  $n + 1$  dépend à la fois des données du pas de temps  $n$  mais aussi des inconnues. Il est donc nécessaire de calculer l'opérateur inverse. En revanche, ce schéma est inconditionnellement stable. Cela signifie qu'il n'y a pas de condition sur le pas de temps  $dt_i$  pour assurer la convergence du schéma. De plus, ce schéma est d'ordre 2.

C'est ce schéma que nous utiliserons dans la suite et qui sera testé dans les exemples numériques.

On va maintenant tester le schéma de Newmark des accélérations moyennes (schéma que nous utiliserons dans la suite) sur deux exemples numériques discriminants :

- un exemple dynamique à gradient raisonnable ;
- un exemple de choc.

#### 4.4.2 Premier exemple : propagation de faible gradient

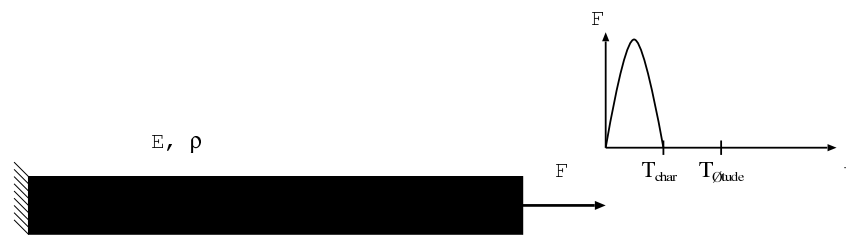


Figure 1.14: Exemple numérique : demi-sinus

**4.4.2.1 Description** On impose une force dépendant du temps mais sans discontinuité. On veut tester ici que le schéma nous permet de calculer correctement la propagation du signal dans la barre.

**4.4.2.2 Résultats** La réponse de la barre a été simulée par le schéma des accélérations moyennes (voir paragraphe 4.4.1.2) et on donne comme résultat le déplacement (en  $m$ ) et la contrainte (en  $Pa$ ) au milieu de la barre en fonction du temps (figure 1.15).

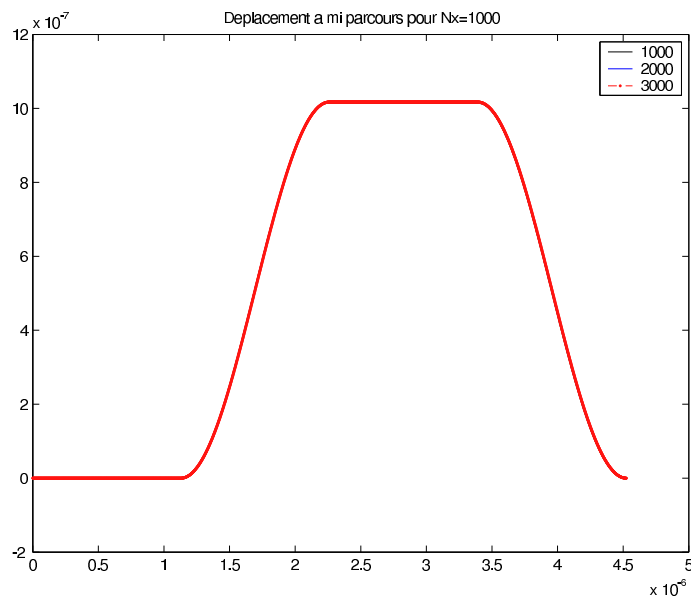
**4.4.2.3 Analyse** On remarque que ce schéma de Newmark, dit des accélérations moyennes, permet, et ceci sans contrainte de convergence, de représenter parfaitement les vitesses et les contraintes. Nous pouvons donc considérer que la propagation du signal est bien simulée.

L'avantage de ce schéma est que l'on peut choisir la discrétisation temporelle et donc limiter le nombre de degrés de liberté à stocker. En effet, on n'observe pas de différence entre les différentes courbes, résultats de simulations avec des discrétisations différentes. Ceci est particulièrement avantageux lorsqu'on veut résoudre des problèmes de dynamique avec un très grand nombre de degrés de liberté.

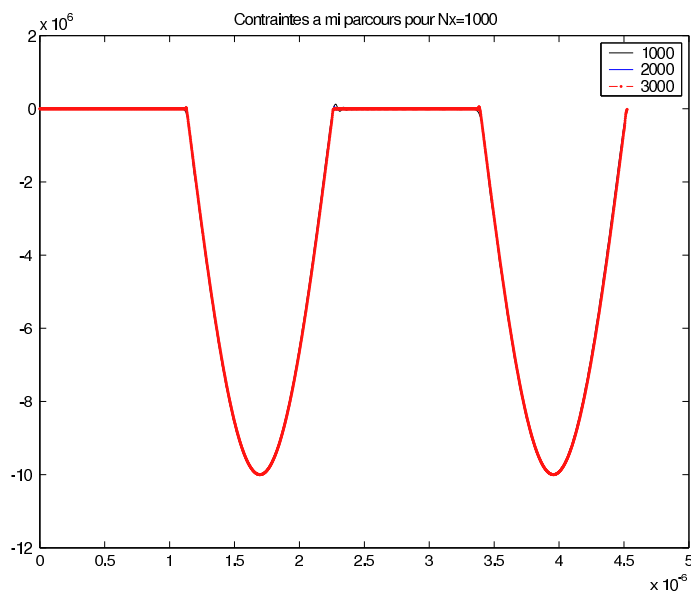
### 4.4.3 Deuxième exemple : propagation de choc

**4.4.3.1 Description** On impose un choc à un des bouts de la barre. On veut illustrer la difficulté de calculer la propagation d'un choc par un schéma classique de Newmark et la dépendance à la discrétisation.

**4.4.3.2 Résultats** La réponse de la barre a été simulée par le schéma des accélérations moyennes (voir paragraphe 4.4.1.2) et on donne comme résultat le déplacement (en  $m$ ) et la contrainte (en  $Pa$ ) au milieu de la barre en fonction du temps (figure 1.17).



(a) demi-sinus, déplacement



(b) demi-sinus, contrainte

Figure 1.15: Simulation d'un demi sinus par un schéma de Newmark

**4.4.3.3 Analyse** Le déplacement est une quantité que l'on pourra considérer comme fiable car il est le résultat d'une intégration temporelle qui régularise le signal.

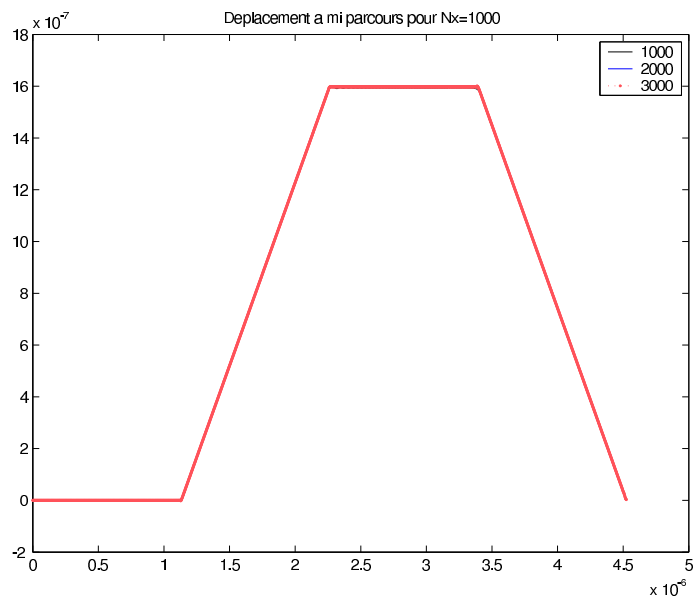




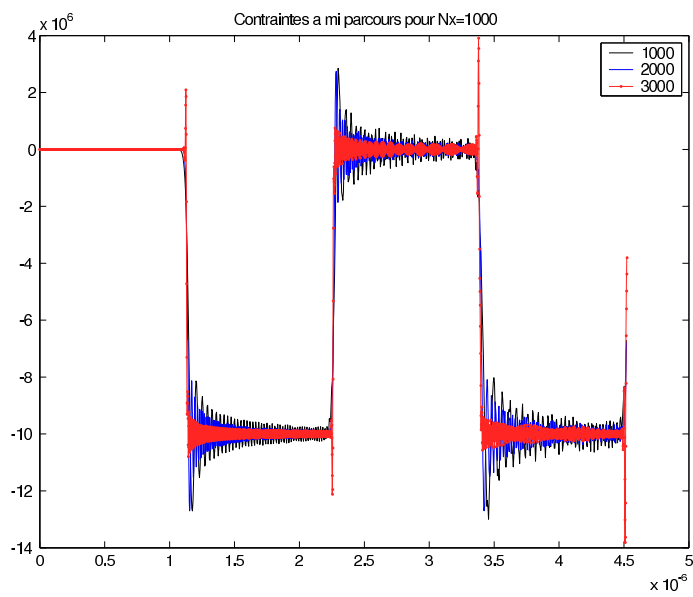
Figure 1.16: Exemple numérique : créneau

En revanche, en ce qui concerne la contrainte (il est en de même pour la vitesse) le résultat est probant. On observe des oscillations autour des discontinuités. On peut remarquer également que la forme des discontinuités dépend de la discrétisation temporelle, ou pour être plus précis du rapport entre discrétisation temporelle et discrétisation spatiale. On observe que plus les pas de temps sont petits, plus les oscillations sont limitées mais avec de grands pics aux discontinuités.

Ce phénomène est classique pour le schéma de Newmark, qui est un schéma non dispersifs. Si l'on veut une meilleure qualité de solution, il est nécessaire de changer de schéma d'intégration numérique.



(a) créneau - déplacement



(b) créneau - contrainte

Figure 1.17: Simulation d'un créneau par un schéma de Newmark

## 4.5 La Méthode de Galerkin Discontinue

### 4.5.1 Présentation de la méthode

Dans un schéma d'intégration classique, on cherche des fonctions continues en temps. Que se passerait-il si on ne restreignait plus l'espace des solutions à un espace de fonctions continues en temps et qu'on décidait donc d'introduire des discontinuités dans la solution du problème ? L'intégration de fonctions discontinues ne pose pas de problèmes bien entendu. En revanche, la dérivation d'une fonction discontinue est une chose plus complexe.

Pour des raisons de simplification, nous allons contraindre les fonction à n'être discontinues qu'en temps et seulement aux pas de temps du schéma.

Soit  $[0, T]$  un intervalle de temps et  $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  une discrétisation de cet intervalle. On considère deux fonctions  $f$  et  $g$ , continues sur  $]t_i, t_{i+1}[$  et éventuellement discontinues en  $t_i$ . On pose, comme dans [Hulbert et Hughes 1990, Johnson 1993], :

$$\int_{[0,T]} f \dot{g} dt = \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \int_{]t_i, t_{i+1}[} f \dot{g} dt + f(t_i^+) (g(t_i^+) - g(t_i^-)) \right] \quad (1.46)$$

Il faut remarquer ici que l'expression de l'intégrale sur le saut est un choix parfaitement arbitraire. Cette expression est posée pour rendre le schéma incrémental en temps et non pas global par couplage de tous les pas de temps entre eux.

### 4.5.2 Cas particulier d'une approximation de degré 0

L'équation de la dynamique sera écrite sous la forme suivante :

Trouver  $(u, v, \sigma)$  tel que  $\forall (w_u, w_v)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times [0, T]} \rho \dot{v} w_v d\Omega dt + \int_{\Omega \times [0, T]} Tr [\sigma(u) \varepsilon(w_v)] d\Omega dt \\ = \int_{\Omega \times [0, T]} F_v w_v d\Omega dt + \int_{\Gamma \times [0, T]} F_s w_v d\Gamma dt \end{aligned} \quad (1.47)$$

$$\int_{\Omega \times [0, T]} (\dot{u} - v) w_u d\Omega dt = 0 \quad (1.48)$$

La première équation correspond à l'équilibre dynamique. La deuxième est la compatibilité déplacement-vitesse écrite au sens faible sur l'espace et le temps.

On utilise ensuite l'équation 1.46 en remplaçant les expressions des intégrales sur le temps. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\Omega \times [t_i, t_{i+1}]} \rho \dot{v} w_v d\Omega dt + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\Omega \times [t_i, t_{i+1}]} Tr [\sigma(u) \varepsilon(w_v)] d\Omega dt \\
 & + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\Omega \times [t_i, t_{i+1}]} \rho [v(t_i)] w_v(t_i^+) d\Omega = \int_{\Omega \times [0, T]} F_v w_v d\Omega dt + \int_{\Gamma \times [0, T]} F_s w_v d\Gamma dt
 \end{aligned} \tag{1.49}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\Omega \times [t_i, t_{i+1}]} Tr [\sigma(\dot{u} - v) \varepsilon(w_u)] d\Omega dt \\
 & + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\Omega \times [t_i, t_{i+1}]} Tr [\sigma([u(t_i)]) \varepsilon(w_u(t_i^+))] d\Omega dt = 0 \tag{1.50}
 \end{aligned}$$

On remarque qu'il est possible de résoudre de façon incrémentale. En utilisant la connaissance de la solution sur l'intervalle de temps précédent, on peut calculer la solution sur l'intervalle de temps courant.

Si on fait une approximation constante de la vitesse et du déplacement sur un intervalle  $[t_0, t_1]$ , soit :

$$\begin{aligned}
 \forall t \in ]t_0, t_1[ & \quad u(t) = u_1 \\
 \forall t \in ]t_0, t_1[ & \quad v(t) = v_1 \\
 \text{CI en déplacement} & \quad u(0^-) = u_0 \\
 \text{CI en vitesse} & \quad v(0^-) = v_0
 \end{aligned} \tag{1.51}$$

On obtient un problème à résoudre sur chaque intervalle :

$$\begin{aligned}
 \Delta t \int_{\Omega} Tr [\sigma(u_1) \varepsilon(w_v)] d\Omega + \int_{\Omega} \rho (v_1 - v_0) w_v d\Omega & = 0 \\
 -\Delta t \int_{\Omega} Tr [\sigma(v_1) \varepsilon(w_u)] d\Omega + \int_{\Omega} Tr [\sigma(u_1 - u_0) \varepsilon(w_u)] d\Omega & = 0
 \end{aligned} \tag{1.52}$$

La forme discrétisée de ce problème s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \Delta t \mathbb{K} & \mathbb{M} \\ \mathbb{I} & -\Delta t \mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{M} v_0 \\ u_0 \end{bmatrix} \tag{1.53}$$

On peut condenser la deuxième équation :

$$u_1 = u_0 + \Delta t v_1$$

On obtient alors le problème discrétisé à résoudre en  $v_1$  :

$$\Delta t \mathbb{K} v_1 + \frac{1}{\Delta t} \mathbb{M} v_1 = \frac{\mathbb{M}}{\Delta t} v_0 - \mathbb{K} u_0 \quad (1.54)$$

On va tester le schéma de Galerkin discontinu sur deux exemples numériques discriminants :

- un exemple dynamique à faible gradient ;
- un exemple de choc.

### 4.5.3 Premier exemple : propagation de faible gradient

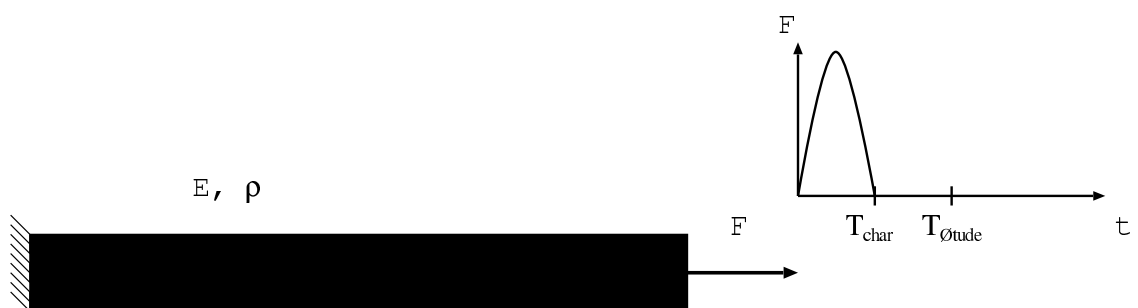


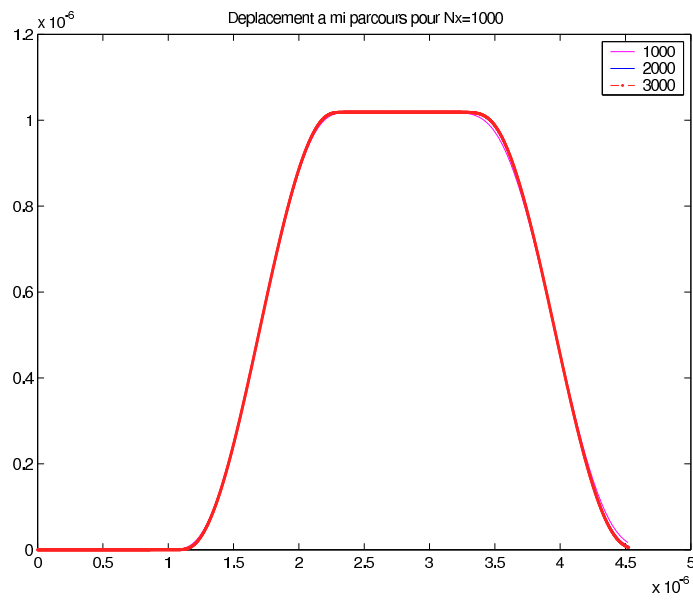
Figure 1.18: Exemple numérique : demi-sinus

**4.5.3.1 Description** On impose une force ayant un faible gradient. On veut tester ici que le schéma nous permet de bien calculer la propagation du signal dans la barre.

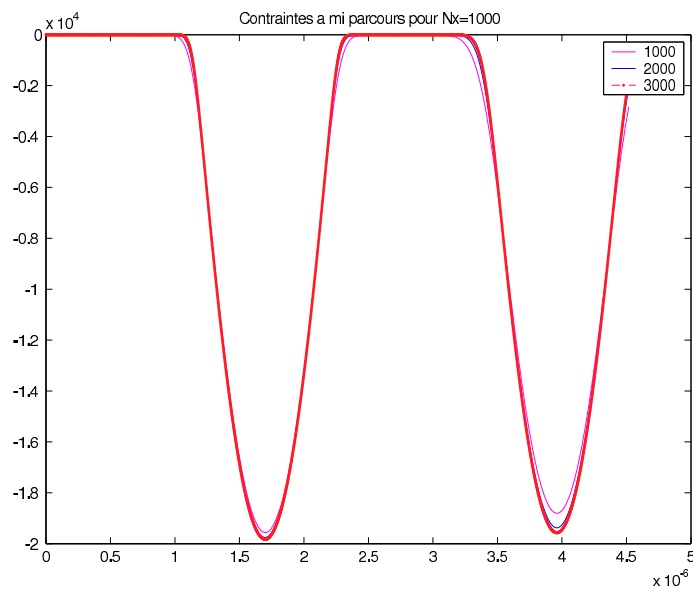
**4.5.3.2 Résultats** La réponse de la barre a été simulée par le schéma de Galerkin discontinu (voir paragraphe 4.5.2) et on donne comme résultat le déplacement (en  $m$ ) et la contrainte (en  $Pa$ ) au milieu de la barre en fonction du temps (figure 1.19).

**4.5.3.3 Analyse** On constate que pour la contrainte, le deuxième pic n'est pas aussi important que le deuxième. Cela est dû au fait que le schéma de Galerkin discontinu est un schéma dispersif. Il est évident que cette dispersion énergétique vient polluer un calcul où l'énergie ne se disperse pas. Ce schéma n'est donc pas à choisir si le chargement n'est pas brutal.

On remarque également que la solution dépend de la discrétisation. On peut ainsi diminuer la dispersion en augmentant le nombre de pas de temps et donc en augmentant le nombre d'informations à stocker. En effet, en diminuant le pas de temps, on limite les sauts aux discontinuités et donc la dispersion.



(a) demi-sinus, déplacement



(b) demi-sinus, contrainte

Figure 1.19: Simulation d'un demi sinus par un schéma Galerin discontinu ordre 0

Cependant, notre intérêt est de limiter la quantité d'information à stocker donc cette solution n'est pas à privilégier.

#### 4.5.4 Deuxième exemple : propagation de choc



Figure 1.20: Exemple numérique : créneau

**4.5.4.1 Description** Dans ce deuxième exemple, on impose un choc à un des bouts de la barre. On veut déterminer l'efficacité de la méthode à simuler correctement la propagation d'un choc.

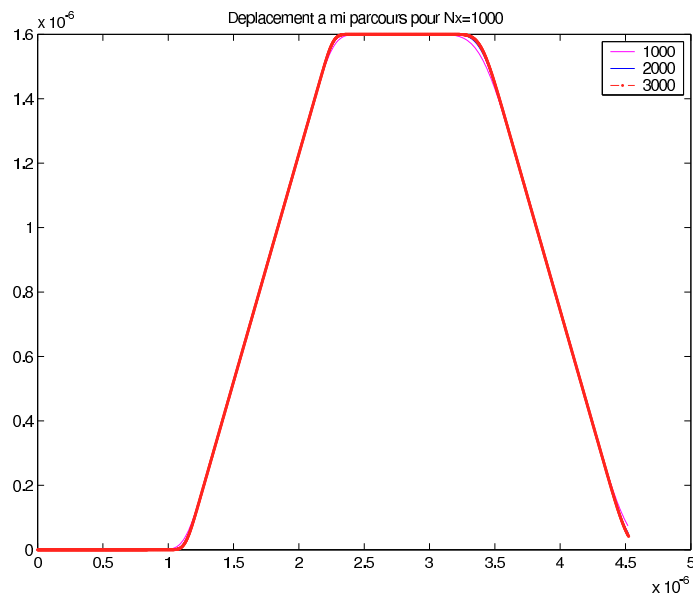
**4.5.4.2 Résultats** La réponse de la barre a été simulée par le schéma de Galerkin discontinu (voir paragraphe 4.5.2) et on donne comme résultat le déplacement (en  $m$ ) et la contrainte (en  $Pa$ ) au milieu de la barre en fonction du temps (figure 1.21).

**4.5.4.3 Analyse** La qualité de la solution est vraiment très bonne. Cela est dû à la dispersion numérique introduite naturellement dans le schéma. La solution dépend beaucoup de la discrétisation temporelle car la dispersion énergétique dépend de la taille des pas de temps. Pour avoir une solution de très bonne qualité, il est nécessaire d'adapter le pas de temps. Dans le cas étudié ici, nous avons utilisé plusieurs discrétisations. Celle qui amenait à la meilleure solution contenait dix fois plus de pas de temps que la solution correspondant à un nombre de pas de temps respectant au mieux la condition de Courant.

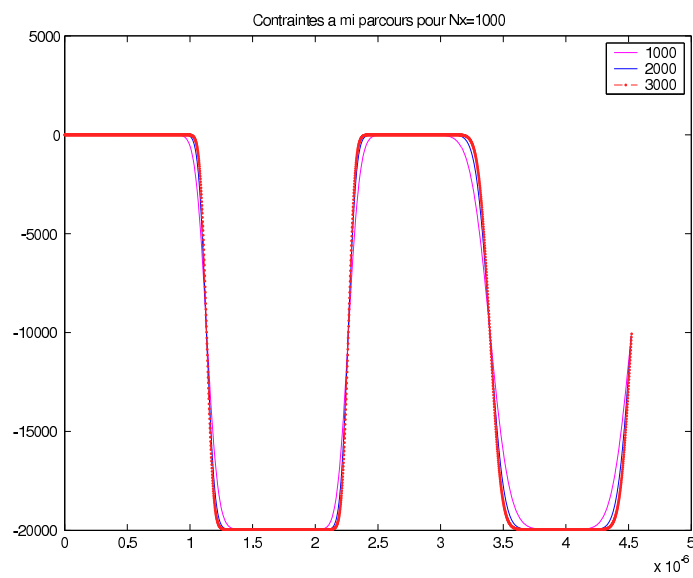
Ce schéma est donc à utiliser quand on peut se permettre de stocker une quantité d'information importante. Cette concession faite, ce schéma permet d'obtenir des solutions de très bonnes qualités.

#### 4.5.5 Évaluation de la dissipation associée au schéma

Nous allons essayer dans ce paragraphe d'évaluer la dissipation associée à un schéma de type Galerkin discontinu. Pour cela, nous allons nous limiter à une description modale d'un problème 1D.



(a) créneau - déplacement



(b) créneau - contrainte

Figure 1.21: Simulation d'un créneau par un schéma de Galerkin discontinu

$$\underline{U} = \sum_{i=1}^N u_i(t) \underline{f}_i(M) \quad (1.55)$$



On projette sur un mode particulier. On suppose que ces modes sont normés et on utilise le produit scalaire pour lequel les modes sont orthogonaux.

L'équation de la dynamique simple s'écrit donc :

$$\ddot{u}_i(t) + \omega_i^2 u_i(t) = 0 \quad (1.56)$$

On va essayer de résoudre ce problème avec le schéma Galerkin discontinu d'ordre 0. On cherche  $u$  le déplacement et  $v$  la vitesse dans le même espace discontinu.

Le problème s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (1.57)$$

On note  $(\cdot, \cdot)_I$  le produit scalaire des fonctions discontinues de l'intervalle  $[0, T]$ . La formulation faible s'écrit alors :

$$\forall w \text{ admissible} \quad \begin{cases} (\dot{u}, w)_I = (v, w)_I \\ (\dot{v}, w)_I = -\omega_i^2 (u, w)_I \end{cases} \quad (1.58)$$

On va étudier le problème sur un pas de temps. On se retrouve dans la situation décrite dans la figure 1.22.

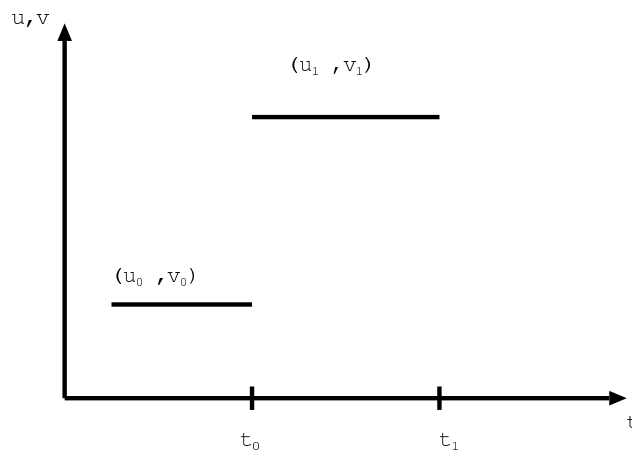


Figure 1.22: Définition des notations pour le problème à un pas de temps

Nous connaissons la solution sur l'intervalle de temps précédent :  $(u_0, v_0)$ . Le couple  $(u_1, v_1)$  vérifiera les équations suivantes :

$$\forall w \text{ admissible} \quad \begin{cases} (\dot{u}, w)_{]t_0, t_1[} + ([u(t_0)], w(t_0)) = (v, w)_{]t_0, t_1[} \\ (\dot{v}, w)_{]t_0, t_1[} + ([v(t_0)], w(t_0)) = -\omega_i^2 (u, w)_{]t_0, t_1[} \end{cases} \quad (1.59)$$

En appliquant l'approximation de degré 0, on obtient finalement le problème suivant :

$$\forall w \text{ admissible} \quad \begin{cases} (u_1 - u_0, w(t_0)) = \Delta t (v_1, w) \\ (v_1 - v_0, w(t_0)) = -\omega_i^2 \Delta t (u_1, w) \end{cases} \quad (1.60)$$

On déduit donc le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & -\Delta t \\ \omega_i^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \quad (1.61)$$

Après inversion,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{1 + \omega_i^2 \Delta t^2} \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_i^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \quad (1.62)$$

Les valeurs propres de  $\mathbb{A}$  sont

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{1 + \omega_i^2 \Delta t^2} (1 \pm i \cdot \omega_i \Delta t) \quad (1.63)$$

$$|\lambda_{\pm}| = \sqrt{\frac{1}{1 + \omega_i^2 \Delta t^2}} = \rho(\mathbb{A}) \quad (1.64)$$

Il faut se donner un encadrement de la pulsation  $\omega_i$  pour avoir un encadrement du rayon spectral de  $\mathbb{A}$ .

Si on a une barre de longueur  $L$  discrétisée régulièrement par des éléments de taille  $dx$ . La pulsation des modes numériques qu'on peut calculer pour cette barre sera :

$$\frac{2\pi}{L} \leq \omega_k \leq \frac{2\pi}{dx} \quad (1.65)$$

En introduisant l'inégalité 1.65 dans l'expression de 1.64 on obtient l'inégalité suivante :

$$\sqrt{\frac{1}{1 + 4\pi^2\Delta t^2/\Delta x^2}} \leq \rho(\mathbb{A}) \leq \sqrt{\frac{1}{1 + 4\pi^2\Delta t^2/L^2}} \quad (1.66)$$

Pour exploiter cette inégalité, il est nécessaire de se ramener à quelque chose de plus concret. Pour cela, on va utiliser un résultat issu de [Belytschko *et al.* 1983] dans le cas d'une équation de dynamique avec amortissement visqueux. Hughes relie, dans ce cas, le rayon spectral de l'opérateur d'évolution à la viscosité. À partir de l'équation 1.64, on peut donc remonter à une viscosité équivalente qui permettra de quantifier l'effet dispersif du schéma.

En prenant les mêmes notations que dans ce document, le résultat issu de la référence précédente s'écrit de la façon suivante, à  $\omega_i$  fixé :

$$\rho(\mathbb{A}) = e^{-\xi\omega_i\Delta t} = \sqrt{\frac{1}{1 + \omega_i^2\Delta t^2}} \quad (1.67)$$

On en déduit l'amortissement visqueux dépendant de  $\omega_i$  :

$$\xi = \frac{\ln(1 + \omega_i^2\Delta t^2)}{2\omega_i\Delta t} \quad (1.68)$$

L'évolution de  $\xi$  en fonction de  $\omega_i$  est représentée dans la figure 1.23. Les bornes en abscisse de la figure sont choisies afin de correspondre aux problèmes typiques en 1D sur le matériau étudié.

$$\Delta x = 0.4mm \quad (1.69)$$

$$L = 8mm \quad (1.70)$$

Le pas de temps est également choisi en fonction des problèmes typiques à traiter :

$$\Delta t = 20ns \quad (1.71)$$

La beauté de la méthode de Galerkin discontinue vient du fait qu'aucun paramètre n'est ajouté dans la méthode pour introduire la dissipation. Cependant, l'inéquation 1.66, notamment la première partie, montre que la dissipation est bien paramétrée et que les paramètres sont la discrétisation spatiale et la discrétisation temporelle. Ces paramètres sont très durs à contrôler *a priori*. Dans les tests effectués pour cette étude, il a fallu plusieurs essais de discrétisation pour obtenir une solution convenable.

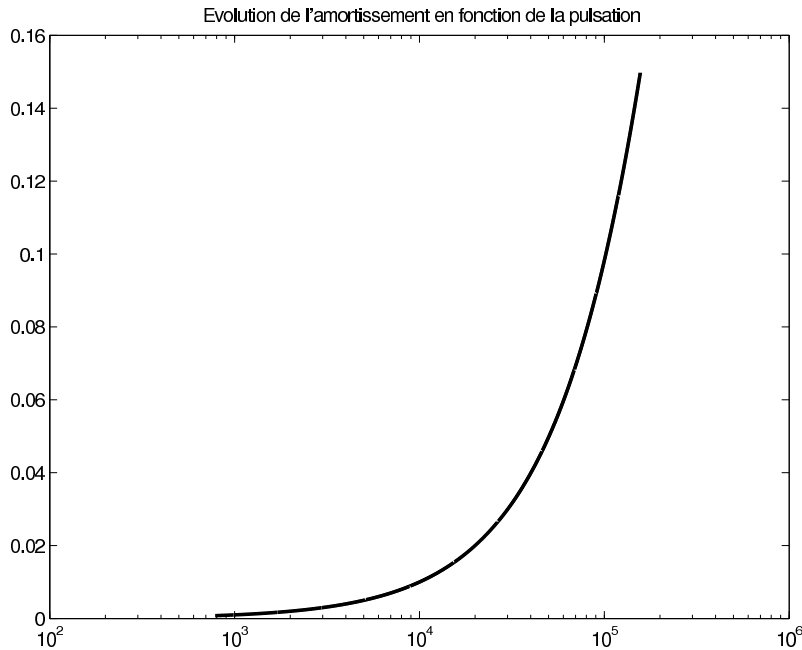


Figure 1.23: Évolution de la viscosité équivalente en fonction de la pulsation

## 4.6 La méthode HHT

### 4.6.1 Présentation de la méthode

Le problème de référence est le même que dans les cas précédents.

On utilise la même représentation des inconnues que dans le schéma de Newmark avec toujours 2 paramètres  $(\beta, \gamma)$ .

$$\begin{cases} \dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + dt_i((1 - \gamma)\ddot{x}_n + \gamma\ddot{x}_{n+1}) \\ x_{n+1} = x_n + dt_i\dot{x}_n + dt_i^2((1/2 - \beta)\ddot{x}_n + \beta\ddot{x}_{n+1}) \end{cases} \quad (1.72)$$

La différence est que l'équation d'équilibre discrétisée va être modifiée. En effet, l'astuce numérique pour introduire la dissipation numérique indispensable au traitement des chocs est de changer légèrement le problème à résoudre. Le problème n'est plus écrit au pas de temps  $n + 1$  strictement mais à un pas de temps situé entre  $n$  et  $n + 1$  pour les inconnues d'ordre 0 ou 1 en temps. Il s'agit, bien entendu, de régulariser la solution en introduisant un terme visqueux. Il est bien connu que ce type de régularisation revient à filtrer les hautes fréquences. Le filtrage des hautes fréquences est illustré par la figure 1.24 tiré de [Hilber et Hughes 1978] qui montre

le rayon spectral de l'opérateur associé au schéma d'intégration en fonction de la fréquence.

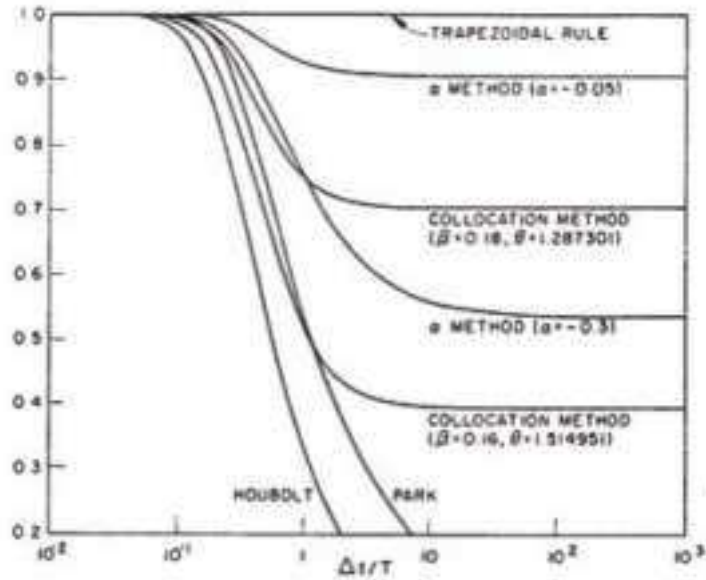


Figure 1.24: Filtrage des hautes fréquences pour différents schémas d'intégration

Le schéma HHT montre que le rayon spectral, qu'on associe à la dissipation du schéma, diminue légèrement avec la fréquence. Ceci permet d'atténuer les hautes fréquences sans trop dégrader le signal.

Le problème discrétisé à résoudre est le suivant :

$$\mathbb{M}\ddot{x}_{n+1} + \mathbb{C}((1 - \alpha)\dot{x}_{n+1} + \alpha\dot{x}_n) + \mathbb{K}((1 - \alpha)x_{n+1} + \alpha x_n) = (1 - \alpha)F_{n+1}^e + \alpha F_n^e \quad (1.73)$$

En combinant les équations 1.72 et 1.73, on obtient le problème suivant à chaque pas de temps :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{\gamma dt_i} \mathbb{M} + (1 - \alpha)\mathbb{C} + (1 - \alpha)\frac{\beta dt_i}{\gamma} \mathbb{K} \right] \dot{x}_{n+1} &= (1 - \alpha)F_{n+1}^e + \alpha F_n^e \\ &+ \mathbb{M} \left( \frac{1}{\gamma dt_i} \dot{x}_n + \frac{1 - \gamma}{\gamma} \ddot{x}_n \right) - \alpha \mathbb{C} \dot{x}_n \\ &+ \mathbb{K} \left( -x_n + (1 - \alpha)dt_i \left( \left( \frac{\beta}{\gamma} - 1 \right) \dot{x}_n + \left( \frac{\beta}{\gamma} - 1/2 \right) \ddot{x}_n dt_i \right) \right) \end{aligned} \quad (1.74)$$

On utilise ensuite l'équation 1.72 pour déduire  $x_{n+1}$  et  $\ddot{x}_{n+1}$ .

Dans [Hilber *et al.* 1977], la convergence du schéma est prouvée pour ( $\alpha < 0.3$ ) et des valeurs de  $\beta$  et  $\gamma$  différentes du cas du schéma des accélérations moyennes, le paramètre  $\alpha$  venant modifier ces deux paramètres.

$$\begin{cases} \beta = \frac{(1 + \alpha)^2}{4} \\ \gamma = \frac{1}{2} + \alpha \end{cases} \quad (1.75)$$

On va tester le schéma HHT sur deux exemples numériques discriminants :

- un exemple dynamique classique à faible gradient ;
- un exemple de choc.

#### 4.6.2 Premier exemple : propagation de faible gradient

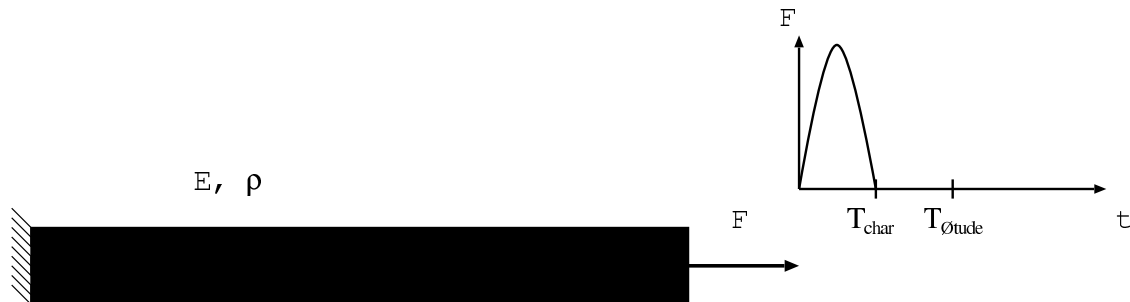
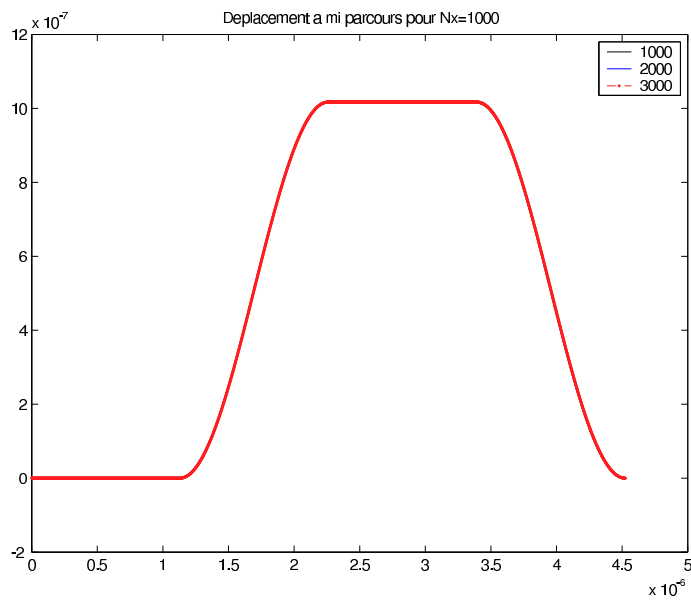


Figure 1.25: Exemple numérique : demi-sinus

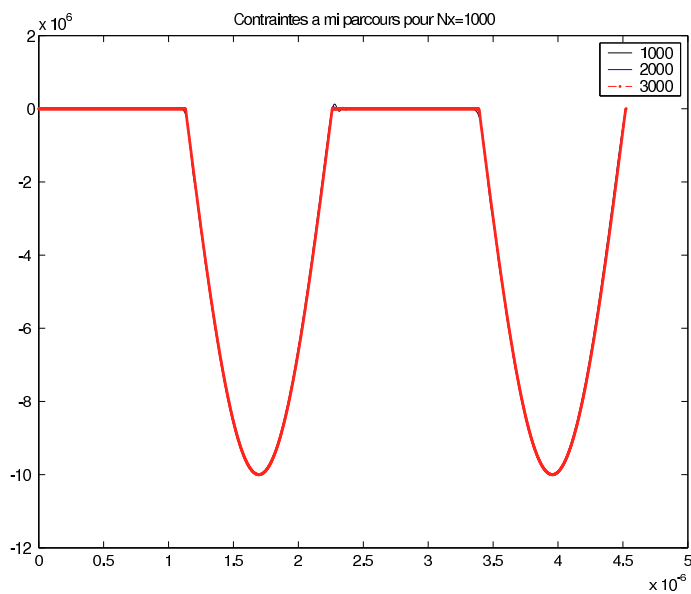
**4.6.2.1 Description** On impose une force ne présentant pas de saut. On veut tester ici que le schéma nous permet de bien calculer la propagation du signal dans la barre.

**4.6.2.2 Résultats** La réponse de la barre a été simulée par le schéma HHT et on donne comme résultat le déplacement (en  $m$ ) et la contrainte (en  $Pa$ ) au milieu de la barre en fonction du temps (figure 1.26).

**4.6.2.3 Analyse** Dans ce schéma, une viscosité est introduite par le paramètre  $\alpha$ . Cette viscosité ne perturbe pas les calculs dans le cas où il n'y a pas de discontinuités car cette viscosité n'affecte que les hautes fréquences. En effet, dans le cas où la différence entre le pas de temps  $t_i$  et le pas de temps  $t_{i+1}$  est peu importante, l'équation à résoudre est la même que l'équation de type Newmark classique



(a) demi-sinus, déplacement



(b) demi-sinus, contrainte

Figure 1.26: Résultats de la simulation d'un demi sinus par un schéma HHT

avec un schéma en accélération moyenne. Dans le cas où il y a une discontinuité et donc possibilité d'avoir une différence non négligeable entre deux pas de temps successifs, la viscosité introduite a tendance à limiter le saut et donc à limiter les

oscillations. On constate, en effet, que dans le cas d'un exemple où le chargement ne contient pas de discontinuité, la réponse est la même que dans le schéma de Newmark. Il n'y a pas les différences que l'on avait constaté avec le schéma de Galerkin discontinu.

### 4.6.3 Deuxième exemple : propagation de choc

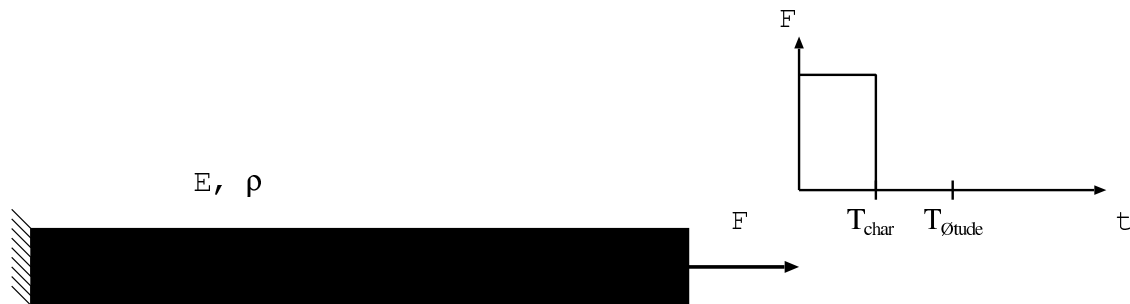


Figure 1.27: Exemple numérique : créneau

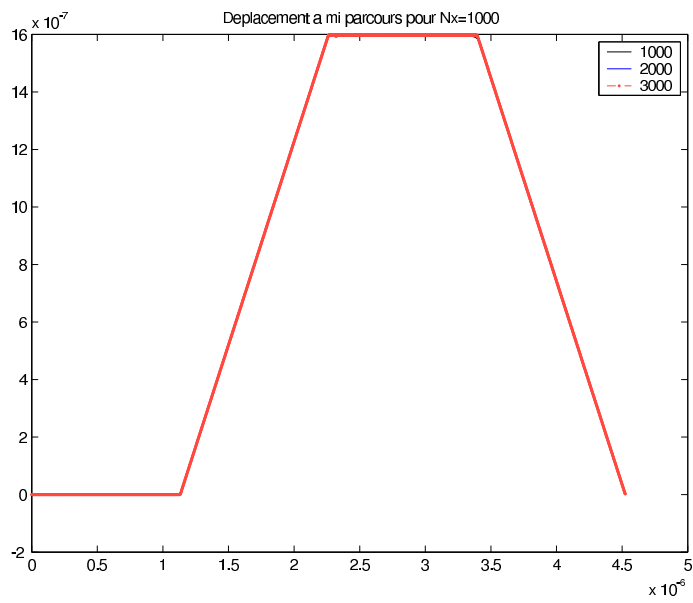
**4.6.3.1 Description** On impose un choc à un des bouts de la barre. On veut illustrer la difficulté de calculer la propagation d'un choc par un schéma de type HHT.

**4.6.3.2 Résultats** Les résultats de la propagation de choc par l'algorithme HHT sont présentés dans la figure 1.28 où l'on montre le déplacement (en  $m$ ) et la contrainte (en  $Pa$ ) au milieu de la barre en fonction du temps.

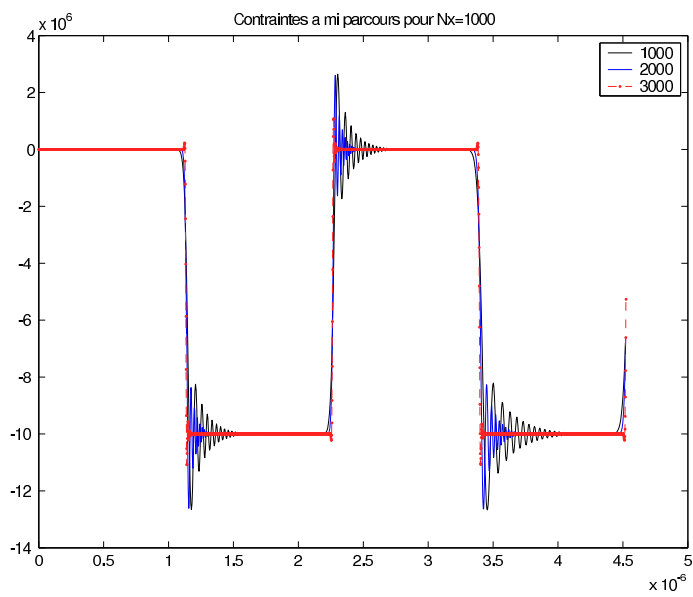
**4.6.3.3 Analyse** Dans le cas où des discontinuités sont présentes, on constate que la réponse calculée par le schéma HHT contient des oscillations. Ces oscillations sont cependant bien moins importantes que dans le cas d'un schéma de Newmark classique. Le schéma HHT sera donc à préférer par rapport à un schéma de Newmark classique pour l'amélioration qu'il apporte en cas de présence de discontinuités sans la détérioration constatée avec le schéma de Galerkin discontinu pour les cas à faible gradient.

Pour la comparaison entre la méthode HHT et la méthode de Galerkin discontinue, nous allons détailler le raisonnement dans un nouveau paragraphe.





(a) créneau - déplacement



(b) créneau - contrainte

Figure 1.28: Résultats de la simulation d'un créneau par un schéma HHT

## 4.7 Conclusion de l'étude

Le schéma des différences centrées, bien qu'il soit le plus pratique et le plus utilisé de tous les schémas d'intégration en temps, ne semble pas celui à adopter pour l'étude. Le multiplication des pas de temps avec le comportement et l'écriture de la condition de stabilité de ce schéma en 3D font qu'il n'est pas pratique. De plus, le nombre de pas de temps qu'il faudrait utiliser pour assurer la stabilité est trop important et mènerait à un coût de stockage trop important.

Le schéma de l'accélération moyenne est, quant à lui, incapable de gérer correctement les chocs. En revanche, son coût en terme de stockage est plus faible que les autres.

Le schéma de Galerkin discontinu est celui qui, si on veut s'en donner les moyens, obtient les meilleurs résultats. En revanche, tout comme le schéma des différences centrées, et dans une plus grande mesure encore, il conduit à un coût en terme de stockage énorme.

Le schéma HHT obtient de meilleurs résultats que celui des accélérations moyennes tout en conservant un coût en terme de stockage raisonnable. Il obtient cependant de moins bons résultats que le schéma de Galerkin discontinu.

Le choix entre la méthode HHT et la méthode Galerkin discontinu est donc difficile à faire. Cependant, la mémoire étant un des problèmes principaux que nous rencontrons, la méthode HHT semble bien plus adaptée malgré des résultats moins performants pour le traitement des discontinuités. C'est donc ce schéma que nous choisissons.

La méthode de Galerkin discontinu a l'avantage qu'il n'y a pas de paramètres ajoutés à la méthode pour régler correctement la dissipation. Mais cela est caché par le fait que la dissipation est directement reliée à la discrétisation choisie et que le paramètre à introduire est la discrétisation en elle-même. Cela implique d'imposer la discrétisation en fonction de la dissipation. Cela peut être pratique dans certains cas mais certainement pas dans les cas où l'on veut éviter de trop stocker trop d'informations.



*Dans ce chapitre, on s'intéresse à la modélisation du matériau. Les principes de base de la mésomodélisation sont rappelés ainsi que quelques résultats du travail de Michel Gratton [Allix et al. 2001, Gratton 1998]. Les modèles des principales non-linéarités de comportement du matériau (endommagement, compaction) sont développées. Une étude thermodynamique sur l'augmentation de température associée à un choc permet de valider l'hypothèse d'indépendance à la température.*

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>La mésomodélisation du 3D C/C</b> . . . . .	<b>57</b>
1.1	Travaux antérieurs sur les 3D C/C . . . . .	57
1.2	Les principes de la mésomodélisation . . . . .	58
<b>2</b>	<b>Le modèle d'endommagement</b> . . . . .	<b>62</b>
2.1	Modèle pour un matériau isotrope . . . . .	62
2.2	Modèle d'endommagement à effet retard . . . . .	64
<b>3</b>	<b>Le modèle de compaction</b> . . . . .	<b>66</b>
3.1	Modélisation . . . . .	66
3.2	Identification du modèle de compaction . . . . .	69

3.3	Validation . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Calcul de l'élévation de température au passage d'un choc . . .</b>	<b>76</b>
4.1	Formation du choc . . . . .	76
4.2	Lois de conservation . . . . .	78
4.3	Augmentation de température et largeur de front . . . . .	80
4.4	Calcul dans le cas d'un matériau dense . . . . .	81
4.5	Calcul dans le cas d'un matériau poreux . . . . .	84
4.6	Résultats numériques . . . . .	85
4.7	Résultats dans le cas non-poreux . . . . .	85
4.8	Résultats dans le cas poreux . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Relation avec la viscosité artificielle . . . . .</b>	<b>88</b>

---

# I La mésomodélisation du 3D C/C

## I.1 Travaux antérieurs sur les 3D C/C

Quelques études se sont intéressées à des matériaux proches de celui de cette étude.

[Kibler et Chatterjee 1975, Loomis 1980] proposaient une description d'un matériau 3D C/C à partir de ses constituants élémentaires (les torons de fibre, la matrice poreuse et les interfaces élastiques endommageables) afin de déterminer le comportement à partir de grandeurs locales propres aux constituants. Un outil numérique éléments finis tridimensionnel permettait de changer d'échelle et de déterminer le comportement de la cellule à partir de celui des constituants.

[Ladevèze *et al.* 1982] s'est intéressé à l'identification d'un modèle à l'échelle macroscopique et les auteurs avaient mis au point de nombreux essais de caractérisation d'un 3D C/C dit équilibré, avec les trois directions de renfort rigoureusement équivalentes. Une technique de changement d'échelle était proposée pour exploiter les essais réalisés. [Ladevèze *et al.* 1984], en se basant sur les travaux précédents, a complété la partie expérimentale et a exploité une technique de changement d'échelle basée sur les développements asymptotiques afin de lier le comportement à l'échelle macroscopique à celui à l'échelle mésoscopique.

Dans le cadre de la mésomodélisation d'un autre matériau 3D C/C, le 3D-EVO, une première implantation numérique utilisant une technique d'homogénéisation pour la partie élastique du comportement était réalisée dans Castem2000. Cet outil avait permis de caractériser l'influence des dimensions au sein de la cellule élémentaire sur le comportement macroscopique linéaire de tout matériau tri-orthogonal [Cluzel *et al.* 1990].

[Gratton 1998, Allix *et al.* 2001 - 1997, Héreil *et al.* 1997] ont cherché à caractériser un matériau 3D C/C en dynamique. Contrairement aux travaux cités précédemment [Ladevèze *et al.* 1982 - 1984], le matériau n'est plus équilibré et les hypothèses utilisées pour le changement d'échelle ne sont plus valides. Les auteurs utilisent alors un outil numérique pour calculer les champs à l'échelle inférieure. Ils ont prouvé qu'une modélisation à l'échelle méso de ce matériau était suffisante et qu'il n'était pas nécessaire d'introduire d'effet de vitesse pour obtenir un modèle pertinent en dynamique.

[Siron et Lamon 1998, Pailhes *et al.* 2002] se sont également intéressés à un matériau 3D C/C en réalisant une modélisation et décrivant les mécanismes de rupture de ce matériau. Il est à noter que ce matériau est, contrairement à tous ceux cités précédemment, un matériau 2D C/C tissé dans lequel on a inséré des renforts orthogonalement au plan de tissage.

Enfin, [Davy et Marquis 2003] s'est intéressé au matériau étudié présentement. L'approche est sensiblement différente puisque ce sont des considérations probabilistes sur la rupture des fibres qui sont utilisées pour estimer la rupture.

## 1.2 Les principes de la méso-modélisation

Le but de la méso-modélisation, ici, est de réaliser une modélisation à l'échelle méso qui soit pertinente en dynamique. Le fait de modéliser à l'échelle méso est justifié par la figure 2.1.

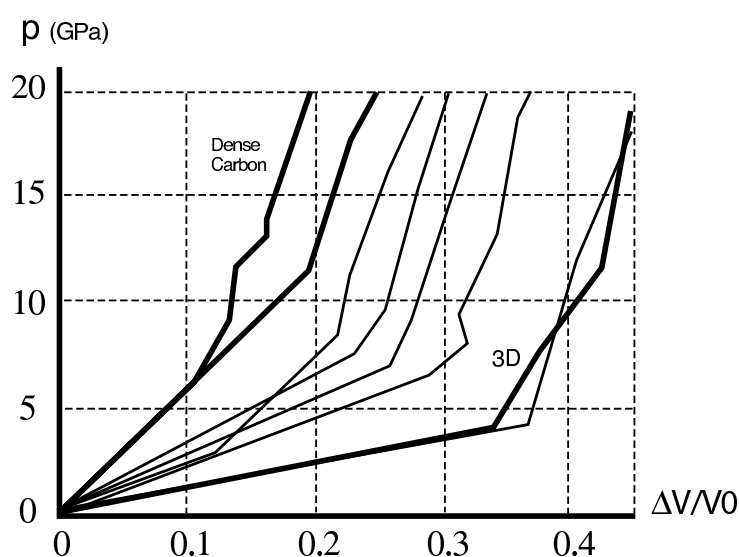
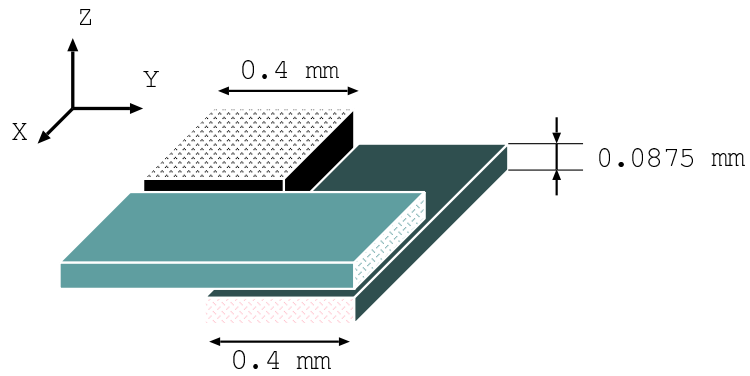


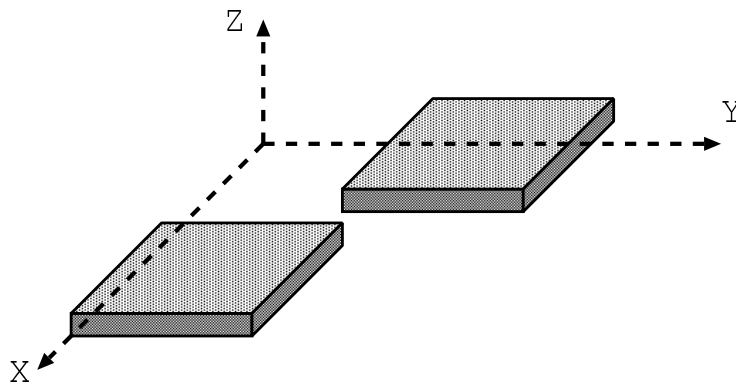
Figure 2.1: Réponse de différents 3D C/C - [Queen et Marsh 1967]

Elle montre l'influence de la mésostructure sur la courbe contrainte-variation de volume relative, surtout pour des contraintes inférieures à 10 GPa. Au delà, le comportement tangent tend vers celui du carbone dense. La gamme de contraintes à laquelle est soumis le matériau correspond à la zone inférieure à 10 GPa. On en déduit que la modélisation doit se faire au moins à l'échelle méso pour rendre compte de ces différences. L'échelle méso est donc une échelle nécessaire. Le postulat est que cette échelle est suffisante. Ce postulat est vérifiée pour des durées de sollicitations de l'ordre de quelques microsecondes.

L'hypothèse forte du méso-modèle est l'homogénéité des mécanismes de dégradation par blocs. Cela impose donc le choix des mésoconstituants, qui doivent vérifier au mieux cette hypothèse. Dans le cas du matériau 3D C/C étudié, les



(a) Les torons



(b) Les blocs de matrice

Figure 2.2: Détail des constituants



mésoconstituants sont les blocs de matrice, les torons transverses ainsi que les sections de torons longitudinaux comme représentés dans la figure 2.2.

Le travail de Michel Gratton avait permis de montrer qu'à cette échelle, le modèle construit en statique était pertinent pour des chargements de type choc. Le modèle de compaction en est l'exemple parfait et il sera décrit un peu plus tard.

Pour le modèle d'endommagement, un effet retard est introduit pour rendre compte de la dynamique de la rupture et éviter les phénomènes de localisation.

Cette modélisation avait donné de bonnes corrélations avec les essais et avait permis une simulation par un modèle simplifié, dédié aux impacts dans la direction des torons de fibres. Ce modèle simplifié consistait à considérer que le matériau pouvait être vu comme deux milieux 1D (torons longitudinaux et matrice équivalente) reliés par une interface, comme le montre la figure 2.3. À partir de ce modèle, un mécanisme de rupture avait même été dégagé : la rupture des torons longitudinaux se produit lorsque les ondes de détente dans ces torons croisent l'onde de compression moins rapide dans les autres constituants ; Les torons sont, en effet, confinés par les fortes contraintes de compression imposés par leur environnement structural et l'onde de traction rompt les torons au moment du croisement.

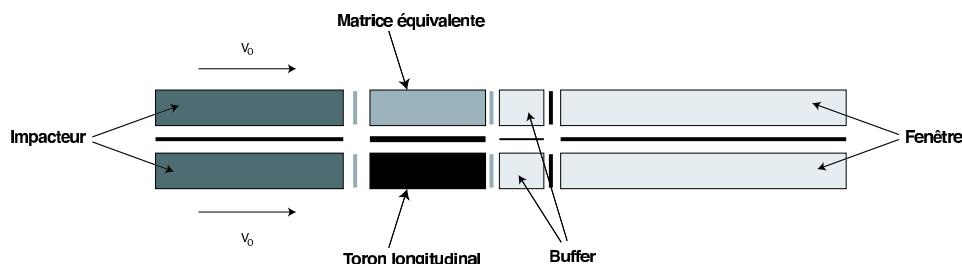


Figure 2.3: Modèle simplifié 1D1/2

Ce mécanisme est illustré par le diagramme des caractéristiques, figure 2.4, qui montre les instants de rupture prévus et par la figure 2.5 qui montre le mécanisme en lui-même.

La suite de ce paragraphe s'intéresse aux modèles des deux principaux phénomènes qu'il est nécessaire de prendre en compte : l'endommagement et la compaction.

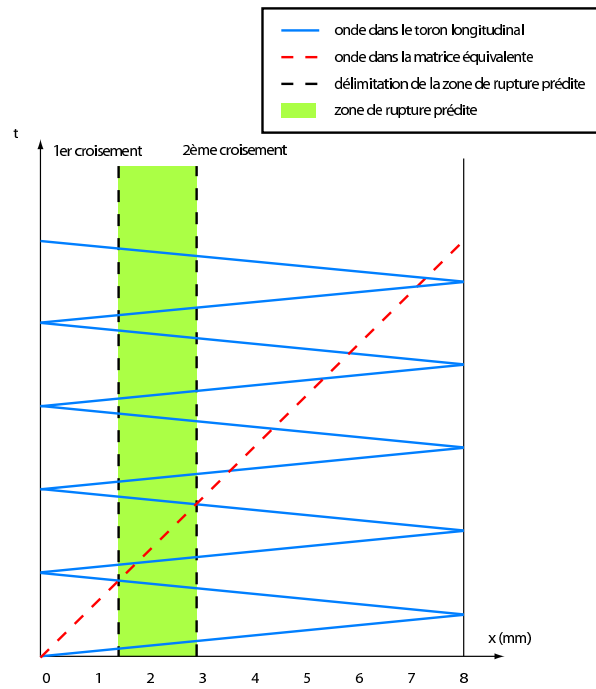


Figure 2.4: Diagramme des caractéristiques

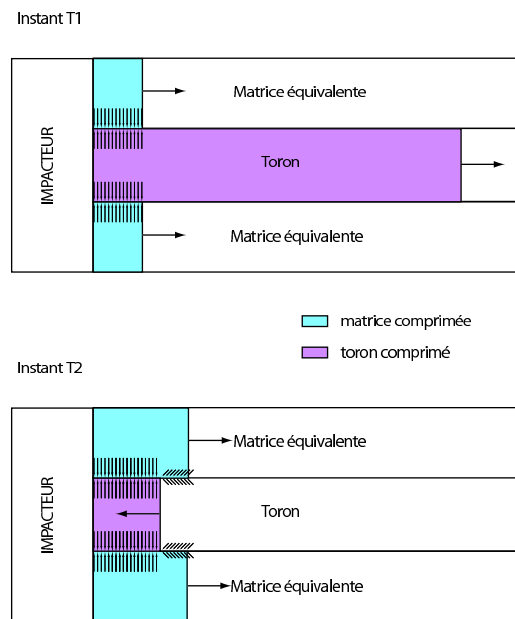


Figure 2.5: Mécanisme de rupture

## 2 Le modèle d'endommagement

On commence par présenter le modèle d'endommagement utilisé dans la modélisation du matériau. Les principaux ingrédients injectés dans le modèle sont présentés. Le modèle d'endommagement utilisé pour le matériau 3D C/C est basé sur le modèle d'endommagement développé au LMT-Cachan et introduit par Ladevèze [Ladevèze 1992]. Classiquement, dans le domaine des composites stratifiés, l'endommagement est supposé constant dans l'épaisseur d'une couche. Dans le cas du matériau 3D C/C, l'endommagement sera supposé uniforme dans les mésoconstituants décrits précédemment.

Dans un premier temps, le modèle dans le cas d'un matériau isotrope avec un endommagement isotrope est présenté.

### 2.1 Modèle pour un matériau isotrope

L'endommagement est pris en compte sous la forme de deux variables internes, notées  $d$  et  $\delta$ , traduisant la chute du module de compressibilité et du module de cisaillement du matériau.

La première étape est de définir un potentiel thermodynamique défini à partir des variables internes, de  $\sigma$  la contrainte,  $E_0$  le module d'Young du matériau et  $\nu$  le coefficient de Poisson.

$$\rho\Psi = \frac{11 + \nu}{2} \frac{1}{E_0} \frac{1}{(1-d)} \text{Tr} [\sigma^D \sigma^D] + \frac{11 - 2\nu}{2} \frac{1}{3E_0} \frac{1}{(1-\delta)} (\text{Tr} [\sigma])^2 \quad (2.1)$$

où  $\rho$  est la masse volumique et  $\psi$  est l'énergie libre.

On définit ensuite les forces thermodynamiques d'endommagement associées à  $d$  et à  $\delta$ . Ces forces sont notées  $Y_d$  et  $Y_\delta$  et valent :

$$Y_d = \left. \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial d} \right|_{\sigma} = \frac{11 + \nu}{2} \frac{1}{E_0} \frac{1}{(1-d)^2} \text{Tr} [\sigma^D \sigma^D] \quad (2.2)$$

$$Y_\delta = \left. \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial \delta} \right|_{\sigma} = \frac{11 - 2\nu}{2} \frac{1}{3E_0} \frac{1}{(1-\delta)^2} (\text{Tr} [\sigma])^2 \quad (2.3)$$

Enfin, il est nécessaire de déterminer une loi d'évolution de l'endommagement. De façon générale, cette loi d'évolution devra dépendre de l'état et de l'histoire du chargement.

En définissant les quantités  $\bar{Y}_\alpha$ , il est possible de donner une expression tout à fait générale de la loi d'évolution.

$$\bar{Y}_\alpha(t) = \sup_{\tau \leq t} \left( \int_{\Omega} Y_\alpha(M, \tau) d\Omega \right) \quad (2.4)$$

Il est à noter que cette définition de la force d'endommagement équivalente prend en compte la moyenne spatiale des force d'endommagement locales. Ceci est directement issu de l'hypothèse méso qui suppose l'uniformité des phénomènes par mésoconstituants. Dans le cas des torons de fibres, il faudrait faire la moyenne sur une section et non sur un volume.

Les lois d'évolution s'écrivent alors :

$$\dot{d} = f_d(\bar{Y}_d, \bar{Y}_\delta, Y_d, Y_\delta, d) \quad \text{tel que } \dot{d} \geq 0 \quad (2.5)$$

$$\dot{\delta} = f_\delta(\bar{Y}_d, \bar{Y}_\delta, Y_d, Y_\delta, \delta) \quad \text{tel que } \dot{\delta} \geq 0 \quad (2.6)$$

On vérifie bien que la dissipation associée à l'endommagement vérifie bien le second principe de la thermodynamique :

$$\omega = Y_d \dot{d} + Y_\delta \dot{\delta} \geq 0 \quad (2.7)$$

On peut exprimer le potentiel thermodynamique un peu plus simplement :

$$\rho\Psi = \frac{1}{2} \frac{Tr[\sigma^D \sigma^D]}{2G(d)} + \frac{1}{2} \frac{(\frac{1}{3} Tr[\sigma])^2}{K(\delta)} \quad (2.8)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} K(\delta) = \frac{E_0(1-\delta)}{3(1-2\nu)} \\ G(d) = \frac{E_0(1-d)}{2(1+\nu)} \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Il est également nécessaire de prendre en compte l'unilatéralité de l'endommagement. En effet, lorsque les fissures se referment, elles n'influencent plus la rigidité du matériau.

Pour cela, dans la partie hydrostatique, il est nécessaire de différencier la partie positive de la partie négative des contraintes.

L'énergie libre s'écrit alors de la manière suivante :

$$\rho\Psi = \frac{1}{2} \frac{Tr[\sigma^D \sigma^D]}{2G(d)} + \frac{1}{2} \frac{\langle \frac{1}{3} Tr[\sigma] \rangle_+^2}{K(\delta)} + \frac{1}{2} \frac{\langle \frac{1}{3} Tr[\sigma] \rangle_-^2}{K_0} \quad (2.10)$$

## 2.2 Modèle d'endommagement à effet retard

Le temps n'apparaît pas du tout dans ce modèle précédent. Pour être plus précis, aucun effet de vitesse n'est introduit. Or, comme l'a montré l'étude sur la localisation, il est nécessaire de modifier le modèle d'endommagement car il mène à des phénomènes de dépendance au maillage.

En fait, l'hypothèse implicite faite (ou qu'il faudrait faire pour étendre ce modèle à la dynamique) est que les fissures se propagent instantanément à travers la structure. Il est, cependant, évident que la vitesse de propagation n'est pas infinie. Ce modèle resterait pertinent pour des chargements pour lesquels l'échelle de temps serait grande devant le temps caractéristique de propagation des fissures. En revanche, dans le cas où les phénomènes étudiés sont très rapides, l'hypothèse précédente n'est plus valable et il est nécessaire de la relâcher pour décrire la rupture dynamique.

Un moyen pour y parvenir est de limiter le taux d'endommagement ( $\dot{d}$ ). Cette limite, homogène à l'inverse d'un temps, représente le temps qu'il faudrait à l'information pour se propager dans le milieu.

Ce modèle a été étudié dans la thèse de Deü et dans [Allix et Deü 1997]. Les auteurs ont appliqué ce modèle à des problèmes de propagation d'ondes dans un milieu endommageable.

Ce modèle est basé sur :

- l'introduction d'un temps caractéristique propre à l'ouverture des fissures dans le matériau. Ce temps est appelé  $\tau_c$  et joue le rôle de temps de coupure ;
- l'introduction d'un coefficient  $\alpha$  qui rend compte de la vitesse de transmission de l'information du chargement.

Ce modèle ne modifie que la loi d'évolution de l'endommagement et s'écrit alors :

$$\dot{d} = \frac{1}{\tau_c} \cdot (1 - \exp(-\alpha (f(Y_d) - d)_+)) \quad (2.11)$$

Dans ce modèle,  $\tau_c$  joue bien le rôle qu'on attendait de lui. En effet, même pour un chargement infini,  $\dot{d}$  sera au plus égal à  $1/\tau_c$ . Le temps minimum de rupture (définie pour  $d = 1$ ) est alors égal à  $\tau_c$ . Ce temps correspond à un temps caractéristique de propagation de la fissure dans le constituant.

Jean-François Deü avait obtenu des courbes de contrainte à rupture de barres en fonction du temps de chargement en simulant le comportement de la barre entière. Nous avons, pour notre part, utilisé une méthode alternative plus rapide en tirant partie de la connaissance du lieu de rupture de la barre. Cette démarche est développée dans l'annexe D. C'est avec ces courbes de contrainte à rupture en fonction du temps de chargement que nous allons identifier le modèle.

Pour cela, il faut un essai de référence qui permettra de vérifier que le modèle d'endommagement à effet retard est capable de reproduire les tendances expérimentales constatées. Nous obtiendrons ainsi une valeur pour chaque coefficient et nous serons alors à même d'utiliser le modèle pour le matériau sur lequel les essais ont été effectués.

L'essai de référence que nous allons utiliser est celui de [Goeke et McClintock 1975]. La courbe de résultat montre la dépendance de la contrainte à rupture au temps de chargement pour un composite 3D C/C. Afin d'identifier la valeur des paramètres du modèle, nous allons calculer, pour chaque jeu de paramètres, la courbe associée et la comparer à la courbe de référence. Le jeu de paramètres qui minimisera l'erreur par rapport à cette courbe sera supposé être le meilleur choix de paramètres possible.

La courbe 2.6 donne le résultat de cette identification :

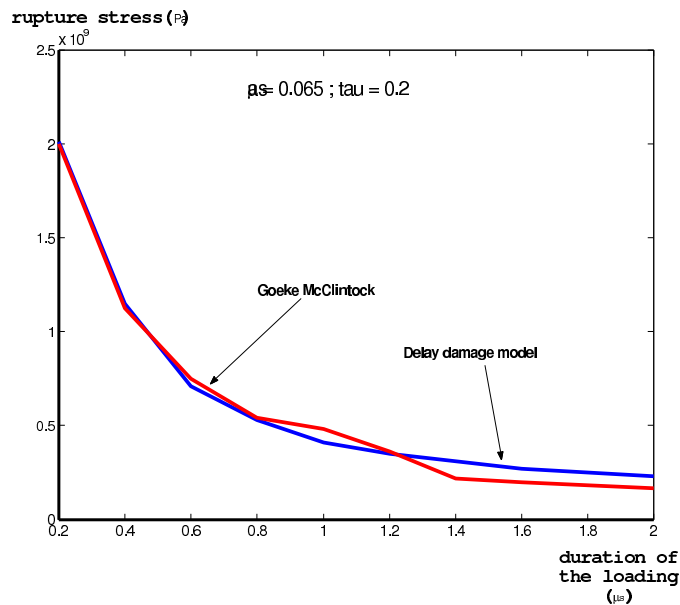


Figure 2.6: Résultat de l'identification de la courbe de Goeke-McClintock

La valeur du jeu de paramètres optimal est :

$$\begin{cases} a = 0.065 \\ \tau_c = 0.2 \mu s \end{cases} \quad (2.12)$$

## 3 Le modèle de compaction

### 3.1 Modélisation

La matrice est un matériau poreux. Les pores sont créés lors de la fabrication du matériau. Or, un matériau poreux, lorsqu'il est soumis à une sollicitation de compression, a un comportement rigidifiant. En effet, lorsqu'il se déforme, les pores se referment et le matériau devient, petit à petit, assimilable au matériau dense correspondant. Il faut donc trouver un modèle qui rende bien compte de ce phénomène.

Mais avant de décrire ce modèle, il convient de rappeler la façon de traiter les chocs en élasticité linéaire et quelle serait l'influence d'un tel comportement.

Cette approche consiste à résoudre les équations de conservation classiques (masse, quantité de mouvement, énergie) au passage d'une discontinuité dans le cas d'un comportement élastique linéaire, autrement dit, résoudre un problème de Riemann dans le cas linéaire.

On obtient alors les résultats classiques :

$$\underbrace{[\sigma]}_{\text{saut de contrainte}} = -Z \cdot \underbrace{[U]}_{\text{saut de vitesse}} \quad (2.13)$$

Le saut de contrainte est relié de façon linéaire au saut de vitesse. Le coefficient de proportionnalité est appelé impédance de choc et est noté  $Z$ . On peut relier ce coefficient aux propriétés du matériau.

$$Z = \rho c_0 = \sqrt{\rho \cdot E} \quad (2.14)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho : \text{Masse volumique du matériau} \\ E : \text{Module d'Young du matériau} \\ c_0 : \text{Vitesse des ondes élastiques dans le matériau} \end{array} \right. \quad (2.15)$$

On peut donc résoudre le problème sur une surface de discontinuité par le diagramme des impédances qui traduit la continuité de la contrainte normale à l'interface. Cette résolution est schématisée sur la figure 2.7 dans le cas linéaire classique et par la figure 2.8 pour un modèle non-linéaire rigidifiant.

Il nous reste à obtenir ces courbes non-linéaires qui vont nous permettre de connaître le saut de contraintes et le saut de vitesse à l'interface.

Dans l'étude, les vitesses matérielles, qui sont de l'ordre des vitesses d'impact, sont sensiblement inférieures aux vitesses des ondes. En effet, les vitesses d'impact

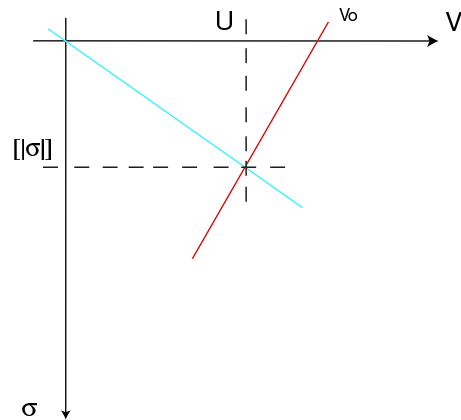


Figure 2.7: Diagramme des impédances - cas linéaire

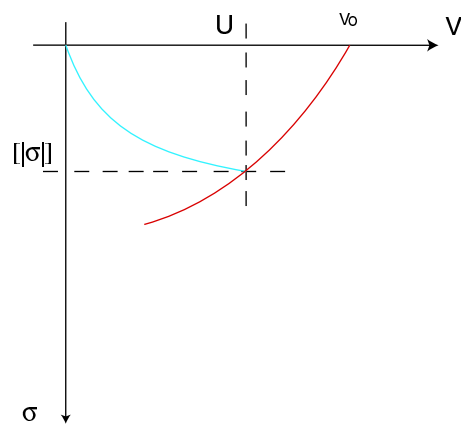


Figure 2.8: Diagramme des impédances - cas non-linéaire



sont toutes inférieures à  $500 \text{ m.s}^{-1}$  alors que la vitesse des ondes dans la matrice est de  $1150 \text{ m.s}^{-1}$  et de  $15000 \text{ m.s}^{-1}$  dans les torons. En se basant sur des informations expérimentales [Hérel et al. 1997], on peut constater que la vitesse des ondes n'est pas constante dans le milieu et qu'elle est reliée de façon affine à la vitesse matérielle. On connaît, en outre, la vitesse des ondes dans un milieu au repos : il s'agit de la vitesse du son dans le milieu, notée  $c_0$ . On modélise donc la vitesse des ondes  $D$  par :

$$D = c_0 + \alpha \cdot U \quad (2.16)$$

On peut noter que ce type de relation est, en général, très bien vérifiée par les solides et les liquides [Thouvenin 1997].

Cependant, la relation précédente n'est pas une relation de comportement. il faut maintenant déduire la relation du comportement de compaction compatible avec l'équation 2.16.

En utilisant l'équation de conservation de la masse pour un état avant choc non compacté, on obtient :

$$\rho \cdot (D - U) = \rho_0 \cdot D \quad (2.17)$$

donc

$$U = D \cdot \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \quad (2.18)$$

Or, sous l'hypothèse des petites déformations,

$$-Tr(\varepsilon) = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \quad (2.19)$$

On sait que la variation de volume n'est pas très importante donc on peut supposer que

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \simeq \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \quad (2.20)$$

On en déduit que :

$$U \simeq -D \cdot Tr(\varepsilon) \quad (2.21)$$

De même, en écrivant la continuité de la contrainte normale, on obtient :

$$p - p_0 = -\rho_0 \cdot D \cdot U \quad (2.22)$$

De là, on peut déduire une relation entre  $p$  et  $\varepsilon$ . En effet, en remplaçant (2.21) dans (2.16), on obtient

$$D = c_0 - \alpha \cdot D \cdot Tr(\varepsilon) \quad (2.23)$$

soit

$$D = \frac{c_0}{1 + \alpha \cdot Tr(\varepsilon)} \quad (2.24)$$

et en utilisant 2.22 :

$$p - p_0 = -\rho_0 \cdot c_0^2 \cdot \frac{Tr(\varepsilon)}{(1 + \alpha \cdot Tr(\varepsilon))^2} \quad (2.25)$$

En posant

$$E_0 = \rho_0 \cdot c_0^2 \quad (2.26)$$

on obtient :

$$p - p_0 = -E_0 \cdot \frac{Tr(\varepsilon)}{(1 + \alpha \cdot Tr(\varepsilon))^2} \quad (2.27)$$

Il est à noter que  $c_0$  représente la célérité des ondes en phase initiale de compaction. La compaction survient après la phase d'élasto-plasticité qui caractérise le comportement statique à basse pression. On obtient ainsi une loi de comportement de type rigidifiante. Plus la pression augmente, plus la rigidité apparente du matériau augmente. Cela est traduit par la courbe issue de l'essai œdométrique dans la figure 2.9.

Il est intéressant de s'interroger sur la signification de ces deux paramètres.

- $E_0$  correspond à la valeur du module tangent à l'initiation de la compaction. C'est donc la valeur apparente du module d'élasticité au point d'initiation.
- La signification du paramètre  $\alpha$  est un peu moins claire.  $\alpha$  représente, en quelque sorte, un facteur de rigidification du matériau. Plus  $\alpha$  est grand, plus le matériau aura tendance à être rigidifiant.

Le modèle de compaction est donc établi. Il faut maintenant l'identifier et le valider par rapport à l'expérience.

## 3.2 Identification du modèle de compaction

### 3.2.1 Identification en statique

Pour identifier le modèle, nous devons calculer les paramètres  $\alpha$  et  $E_0$  qui minimisent l'écart entre le modèle et la courbe obtenue par l'essai œdométrique. Le fait que le comportement statique et dynamique sont très proches vient du fait qu'une

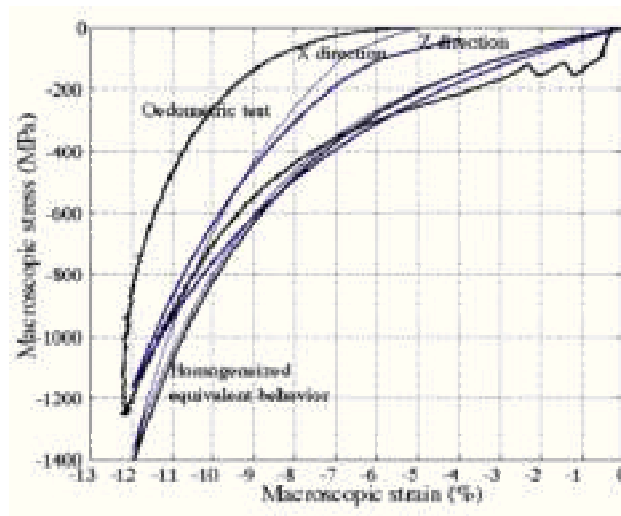


Figure 2.9: Résultat de l'essai œdométrique

transformation adiabatique est très proche d'une isotherme. Cette hypothèse sera vérifiée dans le paragraphe suivant.

En prenant la pente au début de la compaction de la courbe expérimentale, on peut identifier la valeur du paramètre  $E_0$  du modèle. Cette manière d'identifier semble tout à fait fiable car la pente à cet endroit est une quantité assez bien établie. Cette valeur a été identifiée à :

$$E_0 = 2.5 \text{ GPa} \quad (2.28)$$

La valeur du paramètre  $\alpha$  est quant à elle moins facile à définir. Cependant, en prenant un point caractéristique de la courbe, la déformation maximale par exemple, on devrait pouvoir obtenir une bonne estimation de ce paramètre. Sur la courbe qui nous intéresse, l'identification du paramètre  $\alpha$  a donné les résultats suivants :

$$\alpha = 4.16 \quad (2.29)$$

On obtient alors la courbe représentée dans la figure 2.10.

Il est à remarquer que la valeur de  $E_0$  correspond à la pente moyenne à l'origine et pas à la partie initiale de la courbe dont il est difficile de déterminer la signification. La vitesse des ondes élastique associée à cette identification est  $c_0 = 1118 \text{ m.s}^{-1}$ .

Il est à noter que cette identification a été réalisée en statique, ce qui peut paraître étonnant. Il nous faut maintenant vérifier la validité de cette identification pour des essais dynamiques.

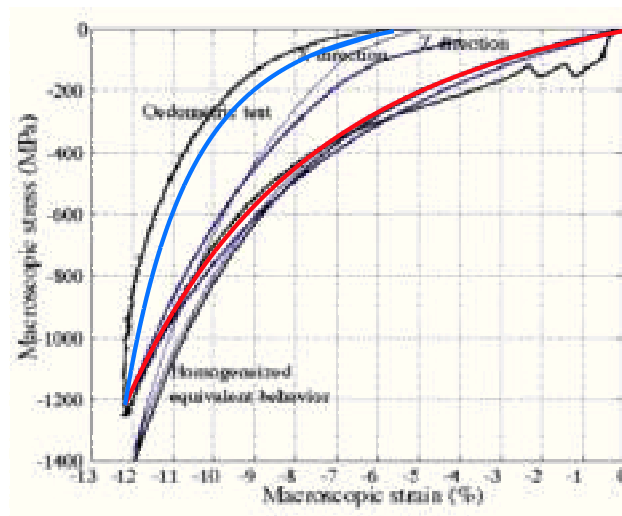


Figure 2.10: Courbe contrainte/déformation pour le modèle de compaction

### 3.2.2 Identification en dynamique

Ces deux valeurs sont à comparer avec les valeurs du même modèle, identifiées de manière purement expérimentale par un calcul de la vitesse des ondes pour plusieurs chocs à vitesses matérielles données. Ces travaux ont été effectués principalement par la DGA et les résultats sont décrits dans [Hérel *et al.* 1997].

Grâce à ces expériences, le modèle reliant la vitesse des ondes à la vitesse matérielle a pu être identifié et la valeur des paramètres  $E_0$  et  $\alpha$  estimée.

Dans l'article cité précédemment, la valeur de la vitesse des ondes dans le matériau au repos était de :

$$c_0 = 1146 \text{ m.s}^{-1} \quad (2.30)$$

Pour la masse volumique de la matrice poreuse de carbone,

$$\rho_0 = 1770 \text{ kg.m}^{-3} \quad (2.31)$$

on obtient une valeur de  $E_0$  de :

$$E_0 = 2.3 \text{ GPa} \quad (2.32)$$

Pour le paramètre  $E_0$ , l'identification semble donc correcte.

Concernant le paramètre  $\alpha$ , cette même étude de la DGA relatée dans [Hérel *et al.* 1997] identifiait la valeur de la constante  $\alpha$  de la relation :

$$D = c_0 + \alpha \cdot U \quad (2.33)$$

Ils obtenaient la valeur :

$$a = 4.07 \quad (2.34)$$

Cette valeur est très proche de celle que nous avons identifiée. On constate donc que l'hypothèse du mésomodèle est vérifiée : on peut utiliser un modèle statique pour décrire le comportement du matériau en dynamique.

### 3.3 Validation

Nous allons valider la modélisation et son identification en comparant les résultats avec un essai d'impact plaque/plaque. Certes, nous ne pourrions pas reproduire les courbes exactes au point où nous en sommes. Nous pouvons tout de même essayer de savoir si les temps de parcours des ondes dans l'éprouvette, les niveaux de vitesse matérielle et les différentes phases de l'essai sont bien reproduits.

Pour cela, nous allons décrire l'essai d'impact, étudier sa courbe de réponse et retrouver les valeurs importantes à l'aide du modèle de compaction.

Le dispositif, schématisé sur la figure 2.11, est constitué de :

- Un impacteur en Aluminium (AU4G1T3), d'environ 15 mm de long, dont nous connaissons les caractéristiques matériaux :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Module d'Young :} & E = 70 \text{ GPa} \\ \text{Coefficient de Poisson :} & \nu = 0.28 \\ \text{Masse volumique initiale :} & \rho_0 = 2790 \text{ kg/m}^3 \\ \text{Relation de choc :} & D_{imp} = (5330 + 1.34U) \text{ m/s} \end{array} \right. \quad (2.35)$$

- ;
- Une éprouvette de BLOC300 d'environ 8 mm de long ;
- Un buffer en PMMA d'1 mm de long : cette partie joue le rôle de filtre sur le signal provenant de l'éprouvette. Son rôle est d'uniformiser en espace le signal arrivant sur la surface métallisée pour une meilleure exploitation des résultats ;
- Une surface métallisée dont on détermine la vitesse par la réflexion d'un faisceau laser ;
- Une fenêtre ;
- Un dispositif de métrologie pour l'acquisition des résultats.

On obtient la courbe de réponse de la figure 2.12 représentant la vitesse matérielle moyenne en face arrière du buffer en fonction du temps.

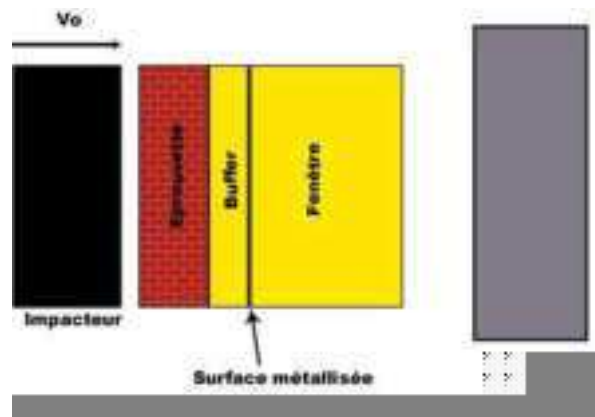


Figure 2.11: Description de l'essai d'impact

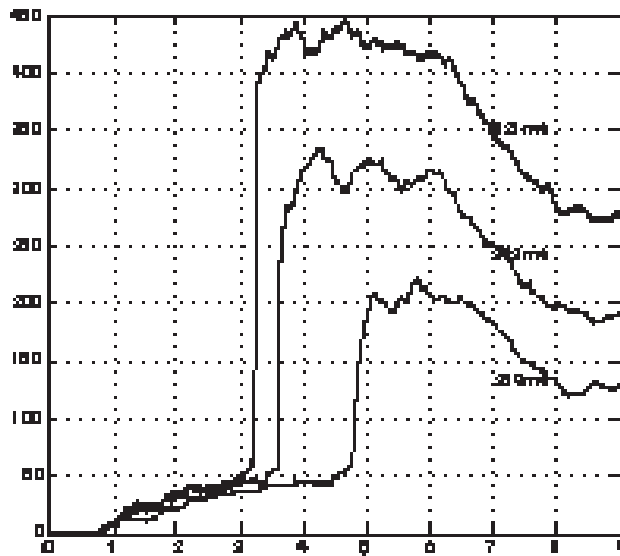


Figure 2.12: Réponse expérimentale et calcul de réponse sous choc

Sont représentées ici, les réponses pour trois essais à trois vitesses différentes :

- 259 m/s
- 383 m/s
- 521 m/s

On remarque plusieurs phases dans ces réponses :

- Au bout d'un temps constant pour les trois essais, un premier signal arrive. Il s'agit des ondes des torons qui sont beaucoup plus rapides que celles de la matrice. La vitesse matérielle n'est pas très élevée car :
  - La vitesse matérielle associée au choc dans les torons est plus faible que celle associée au choc sur la matrice ;
  - On fait une moyenne sur la section totale de l'éprouvette alors que la section relative des torons est faible.
- Au bout d'un temps qui dépend de l'essai, un autre signal arrive et il est beaucoup plus important que le précédent. Il s'agit des ondes dans la matrice moins rapides que celles des torons mais dont la vitesse matérielle associée est plus importante ;
- Au bout d'un temps dépendant de l'essai, la vitesse diminue et atteint un deuxième palier. Ce palier correspond à l'arrivée de l'onde de détente.

Ce sont ces trois phases que nous devons nous attacher à retrouver, avec les temps d'arrivée correspondants et les niveaux de vitesse matérielle.

La première étape consiste à calculer les différentes vitesses des ondes dans les milieux pertinents : l'impacteur et l'éprouvette. Ceci se fait en résolvant des problèmes aux interfaces comme il a été montré au début de cette partie, dans le cas non-linéaire, en utilisant les relations  $D = f(U)$  pour les deux matériaux. On obtient alors des polynômes du second degré dont on cherche les racines. On effectue cette opération deux fois :

- Une fois pour l'onde de compression ;
- Une fois pour l'onde de traction.

Le calcul des temps de parcours se fait à l'aide des vitesses et des longueurs à parcourir.

On obtient les résultats suivants pour les trois vitesses initiales :

essai (m/s)	259	383	521
T1 ( $\mu$ s)	4.5	3.8	3.2
U1 (m/s)	209	300	395
T2 ( $\mu$ s)	8.7	8.0	7.5
U2 (m/s)	156	212	265

Tableau 2.1: Vitesses des ondes et des temps de parcours pour les trois essais

On peut alors comparer ces résultats à la courbe expérimentale et placer les signaux qu'on obtiendrait avec les valeurs théoriques sur cette courbe. C'est ce qui est fait dans la figure 2.13.

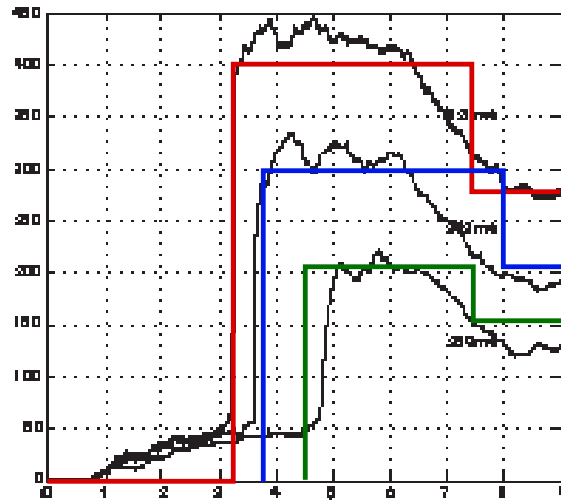


Figure 2.13: Réponse expérimentale et calcul de réponse sous choc

On peut faire plusieurs remarques. La première est que l'on retrouve correctement le signal. Bien entendu, on ne peut reproduire les petites oscillations à ce stade car elles correspondent aux interactions entre les ondes dont nous ne tenons pas compte dans cette étude. On peut cependant affirmer que les niveaux de vitesse et les temps de parcours sont correctement reproduits. La seconde est que le deuxième palier est également bien reproduit.



## 4 Calcul de l'élévation de température au passage d'un choc

Dans cette partie, nous nous attacherons à décrire la physique du choc. En effet, il semble primordial, avant d'initier une démarche de simulation numérique, de bien prendre en compte tous les phénomènes importants.

La compaction est pour le matériau étudié un des phénomènes prépondérants. On sait que, pour les fluides, le choc engendre des élévations de température importantes et que le rôle de l'énergie dissipée est prépondérant au niveau physique. S'il l'est à ce niveau, il semble important de le relier correctement à une énergie dissipée numériquement.

Cette approche nous amènera à calculer le saut de température au passage d'une discontinuité, la largeur du front de l'onde de choc ainsi que l'énergie dissipée au cours du choc. Ceci permettra de valider l'hypothèse de la modélisation qui consistait à négliger la température.

### 4.1 Formation du choc

Expérimentalement, on constate que le matériau subit, au cours du choc, des variations de volume non négligeables. Ceci entraîne que la vitesse des ondes dans le milieu va dépendre du niveau de contrainte dans le matériau : plus le matériau sera comprimé, plus les ondes se déplaceront rapidement en son sein. On va montrer alors qu'il est possible que se forment des ondes de choc même si la sollicitation n'est pas elle-même un choc. L'étude qui suit est très largement inspirée par [Thouvenin 1997] mais il nous a semblé nécessaire de l'exposer.

Soit un milieu au repos caractérisé par une pression  $p_0$ , une masse volumique  $\rho_0$  et une vitesse nulle. Cet état sera noté  $(p_0, \rho_0, 0)$ , où la première composante est la pression dans le milieu, la deuxième la masse volumique et la troisième la vitesse matérielle. On impose sur un de ses bords (supposé plat) une augmentation de pression en un temps court mais non nul. Cette face se met alors en mouvement, engendrant progressivement des ondes soniques de compression qui vont se propager dans le milieu.

La première onde ( $S_0$ ) voit un milieu  $(p_0, \rho_0, 0)$  et se propage donc à la vitesse du son dans le milieu au repos.

L'onde ( $S$ ), partant à l'instant  $t$ , voit un milieu  $(p, \rho, u)$  qui a déjà été modifié par les ondes précédentes. Elle le porte dans un état  $(p + dp, \rho + d\rho, u + du)$ . Elle se propage à la vitesse  $u + c$  constante.

Chaque onde va plus vite que celle qui la précède et donc, au bout d'un certain temps, elle la rejoindra. De plus, les ondes ( $S$ ), représentées par une droite de pente  $u + c$  dans le plan  $(x, t)$ , forment un faisceau de droites convergentes admettant une

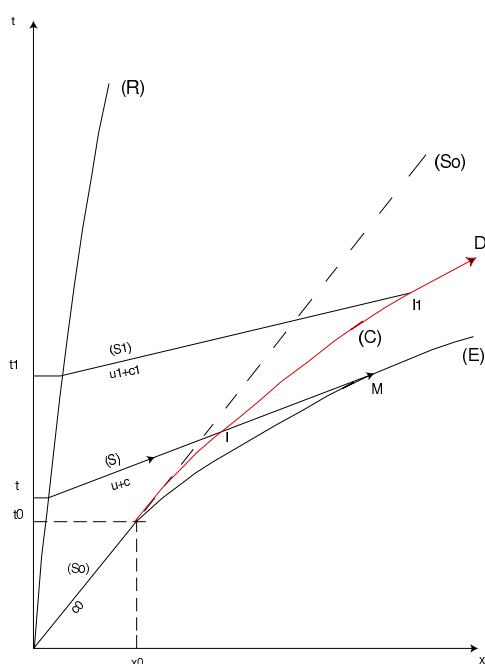


Figure 2.14: Formation d'une onde de choc

enveloppe ( $E$ ). On va montrer que le trajet de l'onde de choc est situé entre cette enveloppe et la droite représentant le trajet de ( $S_0$ ).

- L'onde de choc va plus vite que l'onde dans le milieu au repos

$$\implies D \geq c_0 \quad (2.36)$$

- L'onde de choc va moins vite que l'onde qui la rejoint. En effet, si tel n'était pas le cas, elle suivrait le trajet défini par l'enveloppe ( $E$ ). On définit le point  $M$ , intersection de ( $E$ ) et de ( $S$ ). Jusqu'à  $M$ , ( $S$ ) propage une perturbation  $dp$  dans un milieu  $(p, \rho, u)$  à la vitesse  $u + c$ . En  $M$ , elle rencontrerait un milieu  $(p_0, \rho_0, 0)$ . Sa perturbation passerait donc à une amplitude finie  $(p - p_0)$  alors que sa vitesse resterait constante et égale à  $u + c$ , ce qui est impossible.

$$\implies D \leq u + c \quad (2.37)$$

et donc

$$\implies c_0 \leq D \leq u + c \quad (2.38)$$

$D$  est compatible avec la propagation d'une amplitude finie  $(p_1 - p_0)$  dans un milieu  $(p_0, \rho_0, 0)$ .

Pour mieux se rendre compte de la formation d'une onde de choc, on peut se référer à la figure 2.15.

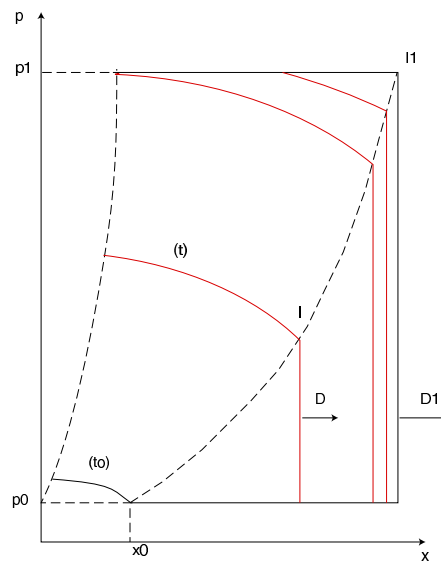


Figure 2.15: Evolution du profil d'une onde de choc au cours de sa formation

Après la formation du choc, il convient de s'intéresser aux lois de la propagation des ondes de choc.

## 4.2 Lois de conservation

Une manière très simple de traduire les lois de conservation est de les écrire sur un tube de matière, comme on le fait classiquement en thermodynamique statistique des gaz.

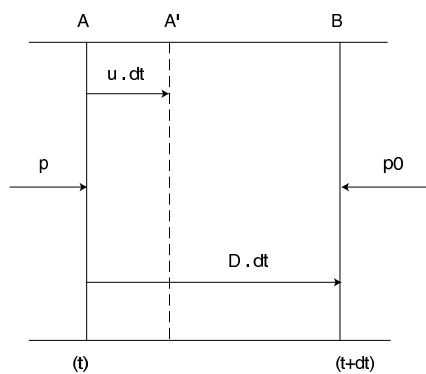


Figure 2.16: Tube de matière

– Conservation de la masse

$$m = \rho_0 \cdot AB = \rho_0 \cdot D \cdot \delta t \quad \text{à l'instant } t \quad (2.39)$$

$$m = \rho \cdot A'B = \rho \cdot (D - u) \cdot \delta t \quad \text{à l'instant } t + \delta t \quad (2.40)$$

donc

$$\implies \rho_0 \cdot D = \rho \cdot (D - u) \quad (2.41)$$

– Conservation de la quantité de mouvement

$$(p - p_0) \cdot \delta t = m \cdot u \quad (2.42)$$

$$\implies p - p_0 = \rho_0 \cdot D \cdot u \quad (2.43)$$

– Conservation de l'énergie

L'énergie reçue par AB entre  $t$  et  $t + dt$  est le travail des forces. En effet, il n'y a pas de chaleur reçue par l'extérieur car la transformation par choc est adiabatique.

$$m \cdot (E + \frac{1}{2}u^2) - mE_0 = p \cdot u \cdot \delta t \quad (2.44)$$

d'où

$$\implies (E - E_0) = \frac{1}{2} \cdot (p + p_0) \cdot (v_0 - v) \quad (2.45)$$

On utilisera ces équations sous la forme :

$$\begin{cases} \rho_0^2 \cdot D^2 = \frac{p - p_0}{v_0 - v} \\ u^2 = (p - p_0)(v_0 - v) \end{cases} \quad (2.46)$$

On aboutit, pour un milieu dense, à la courbe d'Hugoniot représentée figure 2.17. Cette courbe représente l'ensemble des états d'équilibre possible. Dans le cas quasi-statique, on suivrait cette courbe point par point. Dans le cas d'un choc, on passe directement de l'état A à l'état B. L'énergie du choc est représentée par l'aire du triangle ABC.

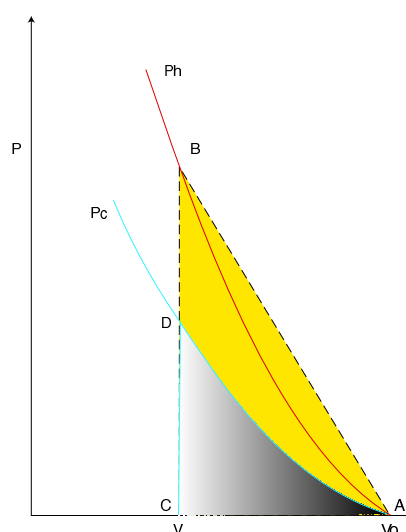


Figure 2.17: Courbe d'Hugoniot pour un matériau dense

### 4.3 Calcul de l'augmentation de température et de la largeur du front de l'onde de choc

Le but de cette étude est de préciser la forme du front d'onde. Le fait que le volume, la pression et la température varient nous fait penser à ce qui est fait communément pour les gaz. Zel'dovich dans [Zel'dovich et Raizer 1966] s'intéresse aux ondes de chocs dans les gaz. Dans ce contexte, il parvient à calculer ce que nous cherchons. Cependant, il convient de prendre quelques précautions avant de penser à utiliser les résultats obtenus par celui-ci. En effet, les hypothèses sous-jacentes au cas des gaz sont radicalement différentes de nos conditions d'étude. Ces hypothèses pour les gaz sont généralement :

- L'augmentation de pression est peu importante ;
- L'augmentation de température est importante ;
- La variation de volume est importante.

Avant d'étudier les solides, il est nécessaire de savoir quelles hypothèses leur sont raisonnablement applicables.

On constate expérimentalement que la variation de volume dans un solide est peu importante et, qu'au contraire, la variation de pression est très importante. En effet, la variation de volume relatif ne dépasse jamais les 10 % alors qu'on atteint, dans nos essais, plusieurs dizaines de milliers de fois la pression atmosphérique. En ce qui concerne la température, dans l'étude précédente, l'effet de l'augmentation de température a été négligé. C'est cette hypothèse que l'on cherche à justifier. Les hypothèses de variations des variables thermodynamiques sont donc les suivantes :

- L'augmentation de pression est très importante ;
- L'augmentation de température est peu importante ;
- La variation de volume est peu importante.

La démarche de l'étude qui suit est calquée sur celle adoptée par Zeldovich [Zel'dovich et Raizer 1966] mais adaptée au cas solide.

#### 4.4 Calcul dans le cas d'un matériau dense

Nous commençons par exprimer la température en fonction des autres variables du problème. Nous avons fait l'hypothèse que le volume variait peu. On développe alors la température autour de la température initiale  $T_0$ .

$$T_1 - T_0 = \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_S \cdot (v_1 - v_0) \quad (2.47)$$

Or, sur une isentropique

$$\left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_S = \left( \frac{\partial p}{\partial S} \right)_v \quad (2.48)$$

De plus, d'après la définition du coefficient de Gruneisen  $\Gamma$ , on a

$$\left( \frac{\partial p}{\partial S} \right)_v = \frac{\Gamma \cdot T_0}{v_0} \quad (2.49)$$

On en déduit,

$$T_1 - T_0 = -\frac{\Gamma \cdot T_0}{v_0} \cdot (v_1 - v_0) \quad (2.50)$$

Nous essayons ensuite de déterminer la largeur du front de l'onde de choc.

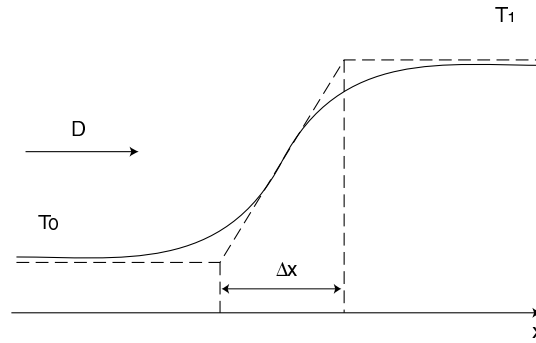


Figure 2.18: Front d'une onde de choc

En suivant une démarche semblable à celle de Zel'dovich [Zel'dovich et Raizer 1966], décrite dans l'annexe A, on peut montrer que

$$T_1 \cdot (S_1 - S_0) = \frac{1}{12} \left. \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_{T_0} \cdot (v_0 - v_1)^3 \quad (2.51)$$

De plus, on peut démontrer (C.F. annexe B) que

$$\rho_0 \cdot u_0 \cdot (S_1 - S_0) = \kappa \cdot \frac{(T_1 - T_0)^2}{\Delta x \cdot T_0 \cdot T_1} \quad (2.52)$$

Or, d'après la définition de  $\chi_T$ , le coefficient de compressibilité isotherme, on a :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_{T_0} &= - \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{v \cdot \chi_T} \right) \\ &= \frac{1}{\chi_T \cdot v^2} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Pour un solide,  $\chi_T$  peut s'exprimer en fonction des caractéristiques mécaniques du matériau, le module d'Young et le coefficient de Poisson. En effet,

$$Tr(\varepsilon) = \frac{(1 - 2\nu)}{E} \cdot Tr(\sigma) \quad (2.54)$$

d'où

$$\frac{\Delta v}{v} = - \frac{3 \cdot (1 - 2\nu)}{E} p \quad (2.55)$$

soit

$$\chi_T = -\frac{1}{v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta p} = \frac{3 \cdot (1 - 2\nu)}{E} \quad (2.56)$$

On peut alors en déduire  $\Delta x$ , la largeur de front de l'onde de choc :

$$\Delta x = \frac{36 \cdot \kappa \cdot \Gamma^2 \cdot T_0 \cdot (1 - 2\nu)}{\rho_0 \cdot u_0 \cdot (v_0 - v_1) \cdot E} \quad (2.57)$$

Nous pouvons désormais déterminer l'énergie dissipée par l'onde de choc.

Le but final de cette étude est de relier l'énergie dissipée thermiquement dans le choc à l'énergie dissipée numériquement par la viscosité artificielle. La largeur du front et la température sont des indicateurs qui peuvent nous prévenir au cas où nous ferions des erreurs de plusieurs ordres de grandeur. Il nous faut donc estimer l'énergie dissipée.

Elle apparue au cours d'une étape intermédiaire dans un des calculs précédents. En effet, d'après le deuxième principe de la thermodynamique, on a :

$$dS = \underbrace{\frac{\delta Q}{T}}_{\text{Echange de chaleur}} + \underbrace{dS^{irr}}_{>0} \quad (2.58)$$

Dans les chocs, les transformations sont adiabatiques donc  $\delta Q = 0$ . L'énergie dissipée est donc  $T\Delta S$ . On a vu précédemment que

$$T_1 \cdot (S_1 - S_0) = \left. \frac{1}{12} \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_{T_0} \cdot (v_0 - v_1)^3 \quad (2.59)$$

On sait donc estimer l'énergie dissipée dans le cas d'un matériau dense.

On a montré dans cette partie qu'il était possible de déterminer l'augmentation de température et la largeur du front. Cependant, cela a été montré pour un matériau dense. Dans le cas d'un matériau poreux, on sait expérimentalement que les élévations de température sont beaucoup plus importantes que pour un matériau dense. Le modèle doit donc être légèrement modifié pour que cette différence soit bien prise en compte. Il faut aussi remarquer que, comme ce qui vient d'être montré est vrai pour les matériaux denses, il faut prendre les valeurs des caractéristiques matériaux du matériau dense.





changée car elle dépend plutôt de la phase où  $v < v_0$ .

En revanche, l'augmentation de température est reliée à l'énergie dissipée thermiquement qui est beaucoup plus importante dans le cas d'un matériau poreux. On peut donc s'attendre à ce qu'elle soit plus importante dans ce calcul.

La relation entre  $P_{H_d}$  et  $P_{H_p}$  qu'on trouve dans Jaumotte [Jaumotte 1971] est la suivante :

$$P_{H_d} = \frac{1 + 2\Gamma^{-1} - \frac{\rho}{\rho_0}}{1 + 2\Gamma^{-1} - \frac{\rho}{\rho_{00}}} P_{H_p} \quad (2.60)$$

notant  $\rho_{00}$  la masse volumique du matériau

$$\alpha = \frac{\rho_{00}}{\rho_0} \quad (2.61)$$

on obtient une expression de l'énergie dissipée thermiquement  $E_d$  :

$$E_d = \left[ \frac{2 \cdot (1 - \alpha) \cdot (1 + 2\Gamma^{-1}) - (1 - \alpha^2) \cdot \frac{v_{00}}{v}}{\left(1 - \frac{v}{v_{00}}\right) \cdot \left(1 + 2\Gamma^{-1} - \frac{v_{00}}{v}\right)} \right] (E - E_0) \quad (2.62)$$

Les détails de ce calcul sont disponibles dans l'annexe C.

## 4.6 Résultats numériques

Il est important de connaître les valeurs numériques associées aux relations trouvées théoriquement précédemment. Ceci peut permettre de repérer les absurdités et, dans le cas où les résultats sont cohérents, confirmer l'ordre de grandeur de chacune des quantités qui nous intéressent. Les données matériau sont fournies dans le tableau 2.2.

## 4.7 Résultats dans le cas non-poreux

Les résultats sont présentés dans le tableau 2.3.

Plusieurs remarques sont à faire à la lecture de ces résultats.

- Les vitesses des ondes  $D$  varient d'un essai à l'autre et sont très différentes de la vitesse des ondes initiales  $c_0 = 1146m/s$ , il est donc primordial de ne pas considérer les vitesses des ondes constantes ;

Masses volumiques	
Matériau poreux	$\rho_{00} = 1770 \text{ kg.m}^{-3}$
Matériau dense	$\rho_0 = 2200 \text{ kg.m}^{-3}$
Constantes matériau	
Module d'Young	$E_0 = 2.5 \text{ GPa}$
Célérité des ondes initiale	$c_0 = 1146 \text{ m.s}^{-1}$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.28$
$a$ compaction	$a = 4.07$
Constantes thermodynamiques	
Température initiale	$T_0 = 300 \text{ K}$
Coefficient de compressibilité isotherme	$\chi_T = 6.10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$
Coefficient de Grüneisen	$\Gamma = 0.24$
Chaleur spécifique	$C_v = 709 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Conductivité thermique	$\kappa = 200 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

Tableau 2.2: Données matériau et constantes

essai (m/s)	521	383	259
U (m/s)	395	300	209
D (m/s)	2754	2367	1997
$p - p_0 (\text{MPa})$	2390	1560	918
$v_0 - v (\text{m}^3/\text{kg})$	$6.5 \cdot 10^{-5}$	$5.7 \cdot 10^{-5}$	$4.8 \cdot 10^{-5}$
$\Delta T (\text{K})$	<b>10.3</b>	<b>9.1</b>	<b>7.5</b>
$\Delta X (\mu\text{m})$	<b><math>7.8 \cdot 10^{-2}</math></b>	<b><math>1.0 \cdot 10^{-1}</math></b>	<b><math>1.5 \cdot 10^{-1}</math></b>

Tableau 2.3: Résultats théoriques dans le cas non-poreux

- Les variations de températures ne sont pas très importantes, de l'ordre de quelques degrés ;
- La largeur de front semble petite. Cependant, en la comparant à la largeur de front d'une onde de choc dans l'air (quelques  $nm$ ), on se rend compte que ce résultat est cohérent.

## 4.8 Résultats dans le cas poreux

Comme nous l'avons affirmé précédemment, la manière de calculer l'énergie dissipée est différente. Les résultats pour cette partie sont résumés dans le tableau 2.4.

essai (m/s)	521	383	259
U (m/s)	395	300	209
D (m/s)	2754	2367	1997
$p - p_0$ (MPa)	1925	1250	740
$v_{00} - v$ ( $m^3/kg$ )	$8.1 \cdot 10^{-5}$	$7.1 \cdot 10^{-5}$	$5.9 \cdot 10^{-5}$
$E_0$ (J/kg)	$7.8 \cdot 10^4$	$4.5 \cdot 10^4$	$2.1 \cdot 10^4$
$E_d$ (J/kg)	$6.1 \cdot 10^4$	$3.4 \cdot 10^4$	$1.5 \cdot 10^4$
$\Delta T_{poreux}$ (K)	<b>86</b>	<b>47</b>	<b>22</b>

Tableau 2.4: Résultats théoriques dans le cas poreux

Encore une fois, plusieurs remarques s'imposent.

- Les contraintes sont plus faibles que dans le cas non-poreux et sont très proches de celles constatées expérimentalement ;
- Les variations de température sont supérieures à celles obtenues dans le cas non-poreux mais n'atteignent pas les températures qu'on peut atteindre dans les chocs gazeux (plusieurs dizaines de milliers de Kelvins).

La matériau carbone n'étant pas très sensible aux variations de température et les variations de température étant peu importante, l'influence de la température peut être négligée.

## 5 Relation avec la viscosité artificielle

Ayant calculer l'énergie dissipée lors d'un choc, on peut faire le lien avec la viscosité artificielle. Grâce au tableau 2.4, nous allons déterminer le paramètre  $k$  de la viscosité artificielle. On ne conservera que le terme linéaire car le choc est subsonique. Ainsi, on aura une dissipation numérique en relation avec une dissipation physique. C'est, *a priori*, la meilleure façon de déterminer un paramètre numérique.

La relation entre l'énergie dissipée et la dissipation numérique  $q$  définie au chapitre 1 est la suivante :

$$E_d = \int_{\Omega} k_1 \cdot \rho \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| d\Omega \quad (2.63)$$

On en déduit ainsi la valeur du paramètre de viscosité comme indiqué dans le tableau 2.5.

essai (m/s)	521	383	259
U (m/s)	395	300	209
$\Delta X$ (m)	$7,8 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-7}$	$1,5 \cdot 10^{-7}$
$\rho$	2000	2000	2000
$E_d$ (J/kg)	$6.1 \cdot 10^4$	$3.4 \cdot 10^4$	$1.5 \cdot 10^4$
k	$2,4 \cdot 10^{-2}$	$2,3 \cdot 10^{-2}$	$2,2 \cdot 10^{-2}$

Tableau 2.5: Détermination du paramètre de viscosité artificielle

Dans la suite, on prendra comme paramètre :

$$k_1 = 2,310^{-2} Pa.s \quad (2.64)$$

---

# Méthode de sous-structuration dynamique

*Dans ce chapitre, une méthode de sous-structuration par interfaces mixtes est présentée. Dans cette méthode, les sous-structures sont les mésoconstituants du matériau 3D C/C. La méthode utilise un algorithme LATIN global en temps pour résoudre les problèmes de sous-structuration. Une première méthode, utilisant des opérateurs constants, est testée sur des cas de non-linéarités d'interface et de non-linéarités structurales caractéristiques de notre matériau comme l'endommagement et la compaction. Ces exemples nous ont amené à modifier la méthode et à envisager des hypothèses plus fines qui nous obligent à modifier la technique de résolution en utilisant des opérateurs non constants. Un algorithme de gradient conjugué est utilisé pour pallier à ce problème.*

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Problème de référence</b> . . . . .	<b>91</b>
<b>2</b>	<b>Présentation générale de la méthode</b> . . . . .	<b>93</b>

2.1	Découpage en sous-structures et interfaces . . . . .	93
2.2	Notations . . . . .	94
2.3	Équations du problème . . . . .	95
2.4	Séparation des difficultés . . . . .	96
2.5	Stratégie de résolution : méthode Latin . . . . .	98
<b>3</b>	<b>Direction de recherche sous-structure constante . . . . .</b>	<b>102</b>
3.1	Étape locale . . . . .	102
3.2	Étape globale . . . . .	103
<b>4</b>	<b>Efficacité de la méthode direction de recherche constante . . . . .</b>	<b>105</b>
4.1	Interface de contact . . . . .	105
4.2	Endommagement à effet retard . . . . .	108
4.3	Compaction élastique . . . . .	113
4.4	Couplage des comportements en traction et en compression . . . . .	116
<b>5</b>	<b>Direction de recherche sécante . . . . .</b>	<b>117</b>
5.1	Étape globale . . . . .	117
5.2	Résolution du gradient conjugué . . . . .	118
<b>6</b>	<b>Étude comparée de l'efficacité de la méthode à direction de recherche sécante</b>	<b>124</b>
6.1	Endommagement . . . . .	124
6.2	Compaction . . . . .	124
6.3	Endommagement/Compaction . . . . .	129

---

Les méthodes présentées dans la suite sont une extension de la méthode de sous-structuration dynamique développée dans le travail de thèse de Hervé Lemoussu (voir l'article [Ladevèze *et al.* 2000]).

Cette méthode de décomposition de domaine de domaine mixte utilise la méthode de résolution globale et itérative LATIN.

Ici, la méthode est étendue aux cas où les non-linéarités du problème ne sont plus seulement concentrées aux interfaces mais aussi dans le comportement matériau des différentes sous-structures.

Dans un premier temps, les différentes méthodes sont présentées puis testées sur des cas académiques afin de montrer leurs avantages respectifs et leurs faiblesses.

On commence par décrire le problème mécanique de référence.

## I Problème de référence

Les problèmes que l'on cherche à résoudre sont des problèmes de dynamique non-linéaire sur une structure  $\Omega$  pendant un intervalle de temps  $[0, T]$ .

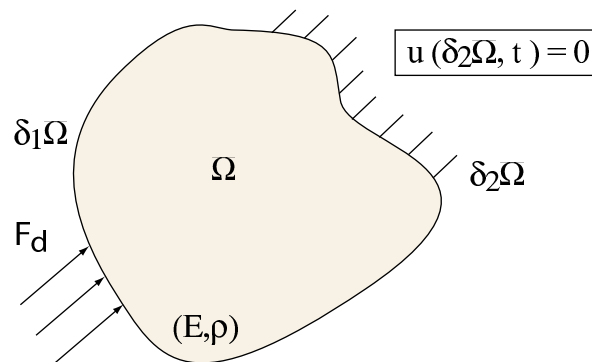


Figure 3.1: Description de la géométrie

On considère un domaine  $\Omega$  soumis à des forces de volume  $f_d$  et à des efforts surfaciques  $F_d$  sur une partie  $\partial_2\Omega$ . Sur la partie complémentaire de  $\partial\Omega$ , notée  $\partial_1\Omega$ , des déplacements  $U_d$  (ou des vitesses  $V_d$ ) peuvent être appliqués également. On se place dans l'hypothèse des petites perturbations mais les chargements extérieurs varient rapidement dans le temps ce qui ne permet pas de négliger les quantités d'accélération. Le problème est donc dynamique et non-linéaire.

Le problème est alors de trouver un couple  $(\underline{U}, \underline{\sigma})$  défini sur  $\Omega \times [0, T]$  qui vérifie :

- Conditions Initiales :



$$\forall M \in \Omega, \quad \begin{aligned} \underline{U}_{t=0} &= \underline{U}_0 \\ \underline{V}_{t=0} &= \underline{V}_0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

– Équations de liaison :

$$\forall t \in [0, T], \quad \begin{aligned} \underline{U}|_{\partial_1 \Omega} &= \underline{U}_d \\ \underline{U} &\in \mathcal{U}^{[0, T]} \end{aligned} \quad (3.2)$$

– Équilibre :

$$\forall t \in [0, T], \forall U^* \in \mathcal{U}_0^{[0, T]}$$

$$\int_{\Omega} \rho \frac{d^2 \underline{U}}{dt^2} \cdot \underline{U}^* d\Omega + \int_{\Omega} Tr(\sigma \varepsilon(\underline{U}^*)) d\Omega = \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^* dS$$

$$\sigma \in \mathcal{S}^{[0, T]} \quad (3.3)$$

– Relation de comportement :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T] \\ \forall \underline{M} \in \Omega \end{aligned} \quad \sigma(M, t) = \mathbf{A}(\varepsilon(\underline{U}(M, \tau)), \tau \leq t) \quad (3.4)$$

où  $\varepsilon(\underline{U})$  est le tenseur de déformation donné par la formule suivante :

$$\varepsilon(\underline{U}) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{M}} + \left( \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{M}} \right)^T \right] \quad (3.5)$$

$\mathcal{U}^{[0, T]}$  est l'espace des déplacements admissibles dans lequel on recherche le déplacement  $\underline{U}$  solution.

$\mathcal{U}_0^{[0, T]}$  est l'espace des vitesses virtuelles défini par :

$$\mathcal{U}_0^{[0, T]} = \{ \underline{U}^*, \text{nul sur } \partial_1 \Omega, \underline{U}^* \text{ régulier sur } \Omega \} \quad (3.6)$$

$\mathcal{S}^{[0, T]}$  est l'espace des champs dynamiquement admissibles dans lequel on va rechercher le champs de contrainte.

La relation de comportement est écrite comme une fonction ; la contrainte à tout instant  $t \geq 0$  est une fonction de l'histoire de la déformation. Le comportement est supposé local, c'est à dire que le comportement au point  $\underline{M}$  ne dépend que de quantités définies au point  $\underline{M}$ . On dira que le comportement est local en espace. Le tenseur  $\mathbf{A}$  caractérise le comportement du matériau.

## 2 Présentation générale de la méthode

### 2.1 Découpage en sous-structures et interfaces

Le problème sous-structuré est obtenu par fractionnement du milieu lui-même. La structure est décomposée en deux entités mécaniques : les sous-structures (mésoconstituants du matériau) et les interfaces (interfaces entre mésoconstituants). Chaque mésoconstituant sera représenté par une ou plusieurs sous-structures. Les interfaces, quant à elles, sont des entités mécaniques à part entière qui permettent de représenter la liaison entre les mésoconstituants. Elles sont également utilisées pour appliquer les différents chargements et prendre ainsi en compte les conditions aux limites. Dans l'approche décrite ci-dessous, les sous-structures auront éventuellement un comportement non-linéaire (endommagement à effet retard, endommagement méso, compaction, plasticité...)

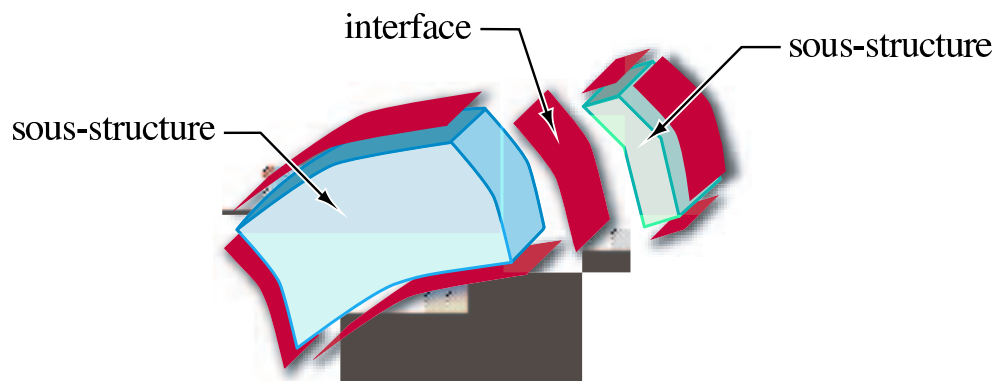


Figure 3.2: Décomposition d'une structure

Il est à noter que, d'un point de vue numérique, les maillages des sous-structures seront choisis conformes au niveau des interfaces. On pourra se référer aux travaux de [Combesure et Gravouil 2001 - 2002, Combesure *et al.* 2003] pour des exemples de traitement de maillages incompatibles et d'échelles de temps différentes.

## 2.2 Notations

Le domaine matériel occupé par l'une des sous-structures est noté  $\Omega_E$ , et on désigne par  $\Gamma_{EE'}$  une interface entre les sous-structures  $\Omega_E$  et  $\Omega_{E'}$ .

On introduit alors les notations suivantes figure 3.3 :

- pour les champs définis sur la sous-structure  $\Omega_E$  :
  - $\underline{U}_E, \underline{V}_E$  les champs de déplacements et de vitesses sur la sous-structure  $\Omega_E$ , et  $\mathcal{U}_E^{[0,T]}$  et  $\mathcal{V}_E^{[0,T]}$  les espaces correspondants ;
  - $\underline{\sigma}_E$  le champ de contraintes sur la sous-structure  $\Omega_E$ , et  $\mathcal{S}_E^{[0,T]}$  l'espace correspondant ;
- pour les champs définis sur l'interface  $\Gamma_{EE'}$  :
  - $\dot{\underline{W}}_{EE'}$  et  $\dot{\underline{W}}_{E'E}$  la trace du champ de vitesse respectivement de  $\Omega_E$  et  $\Omega_{E'}$  sur l'interface  $\Gamma_{EE'}$ ,  $\mathcal{W}_{EE'}^{[0,T]}$  l'espace correspondant ;
  - $\underline{F}_{E'E}$  et  $\underline{F}_{EE'}$  le champ d'efforts exercés par l'entité  $\Gamma_{EE'}$  respectivement sur la sous-structure  $\Omega_E$  et sur la sous-structure  $\Omega_{E'}$ ,  $\mathcal{F}_{EE'}^{[0,T]}$  l'espace correspondant.

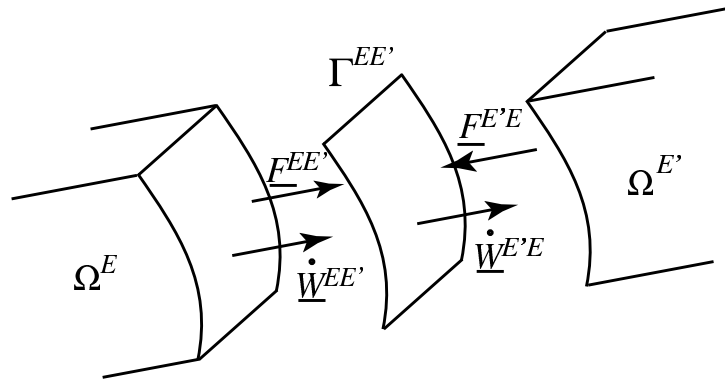


Figure 3.3: Échange entre sous-structures et interfaces

## 2.3 Équations du problème

On considère une sous-structure,  $\Omega_E$ . Cette entité est soumise sur la totalité de son bord à une densité d'effort  $\underline{F}_E$  et un champ de vitesse  $\underline{\dot{W}}_E$ .

Le problème à résoudre s'écrit alors : pour toute sous-structure  $\Omega_E$ , trouver  $(\underline{V}_E, \sigma_E)$  définis sur  $\Omega_E \times [0, T]$  et  $(\underline{\dot{W}}_{EE'}, \underline{\dot{W}}_{E'E}, \underline{F}_{E'E}, \underline{F}_{EE'})$  définis sur  $\Gamma_{EE'} \times [0, T]$  qui vérifient :

- **l'admissibilité cinématique** de  $(\underline{V}_E, \underline{\dot{W}}_{EE'}) \in \mathcal{V}_E^{[0,T]} \times \mathcal{W}_{EE'}^{[0,T]}$

*Conditions initiales :*

$$\forall M \in \Omega_E \quad \begin{aligned} \underline{U}_E(t=0) &= \underline{U}_E^0 \\ \underline{V}_E(t=0) &= \underline{V}_E^0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

*Équation de liaison :*

$$\forall t \in [0, T] \quad \forall E' \text{ voisin de } E \quad \underline{V}_E|_{\Gamma_{EE'}} = \underline{\dot{W}}_{EE'} \quad (3.8)$$

- **l'admissibilité dynamique** de  $(\sigma_E, \underline{F}_{E'E}) \in \mathcal{S}_E^{[0,T]} \times \mathcal{F}_{E'E}^{[0,T]}$

$\forall t \in [0, T], \forall (\underline{V}_E^*, \underline{\dot{W}}_{EE'}^*)$  cinématiquement admissible à 0

$$\int_{\Omega_E} \rho \frac{dV_E}{dt} \cdot \underline{V}_E^* d\Omega + \int_{\Omega_E} \text{tr}[\sigma_E \varepsilon(\underline{V}_E^*)] d\Omega = \sum_{E'} \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}_{E'E} \cdot \underline{\dot{W}}_{EE'}^* d\Gamma \quad (3.9)$$

- **les relations de comportement**

– *des sous-structures :*

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T] \\ \forall \underline{M} \in \Omega_E \end{aligned} \quad \sigma(M, t) = \mathbf{A}_{\Omega_E}(\varepsilon(\underline{U}(M, \tau), \tau \leq t)) \quad (3.10)$$

– *des interfaces :*

$$\forall t \in [0, T], \forall \underline{M} \in \Gamma_{EE'} \quad (\underline{F}_{EE'}, \underline{F}_{E'E}) = \mathbf{A}_{\Gamma_{EE'}}(\underline{\dot{W}}_{E'E}, \underline{\dot{W}}_{EE'}) \quad (3.11)$$

Le comportement de la sous-structure est représenté par l'opérateur  $A_{\Omega_E}$ . Le comportement est éventuellement non-linéaire. Il peut être local en espace ou homogénéisé sur une sous-structure, comme dans le cas de l'endommagement méso.

Le comportement des interfaces contenu dans l'opérateur  $A_{\Gamma_{EE'}}$  dépend du type de liaison à modéliser.

Il s'exprime simplement dans les cas suivants :

- pour les interfaces parfaites

$$\begin{aligned} \underline{F}_{E'E} + \underline{F}_{EE'} &= 0 \\ \underline{\dot{W}}_{E'E} - \underline{\dot{W}}_{EE'} &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

- pour les interfaces à vitesses imposées

$$\underline{\dot{W}}_{E'E} = \underline{V}_d \quad (3.13)$$

- pour les interfaces à efforts imposés

$$\underline{F}_{E'E} = \underline{F}_d \quad (3.14)$$

Ces interfaces seront aussi utilisées pour représenter des phénomènes complexes tels que le contact et le frottement qui seront explicités ultérieurement.

## 2.4 Séparation des difficultés

L'idée importante est de séparer l'ensemble des équations à résoudre en deux groupes. L'efficacité de la résolution est fortement dépendante du choix de ces groupes.

### 2.4.1 Cas des sous-structures linéaires

Dans le cas où les non-linéarités sont concentrées aux interfaces, le choix qui avait été fait dans les travaux de Lemoussu [[Ladevèze et al. 2000](#), [Lemoussu et al. 2002](#)] était de faire la séparation décrite dans le tableau [3.1](#).

On voit que le choix astucieux qui a été fait est de séparer les équations globales mais linéaires et les équations non-linéaires mais locales. Les problèmes à résoudre pour trouver une solution de  $\mathbf{Ad}$  seront donc globaux par sous-structure mais ils seront linéaires.

Les problèmes à résoudre pour trouver une solution de  $\Gamma$  seront donc non-linéaires mais locaux sur chaque interface.

Cette méthode est particulièrement adaptée à la résolution de problèmes de contact où les non-linéarités sont concentrées aux interfaces. On trouvera des exemples d'application de cette méthode dans [[Ladevèze et al. 2000](#), [Lemoussu et al. 2002](#)].

Ad	$\Gamma$
Admissibilité dynamique	
Comportement des sous-structures	Comportement des interfaces
Admissibilité cinématique	

Tableau 3.1: Choix des deux groupes d'équation dans [Ladevèze *et al.* 2000]

### 2.4.2 Cas des sous-structures non-linéaires

Dans le cas où le comportement des sous-structures est non-linéaire, garder la même répartition des équations dans les groupes Ad et  $\Gamma$  que dans 3.1 serait absurde car cela reviendrait à résoudre des problèmes non-linéaires globaux.

La solution envisagée est de suivre le même esprit que précédemment. L'idée est de mettre toutes les équations non-linéaires dans le groupe  $\Gamma$ . Dans ce cas, on aura la répartition décrite dans le tableau 3.3.

Ad	$\Gamma$
Admissibilité dynamique	Comportement des structures
Admissibilité cinématique	Comportement des interfaces

Tableau 3.2: Autres choix des deux groupes d'équation

On retrouve ainsi la séparation entre équations linéaires globales et équations non-linéaires locales. Dans le cas de la mésodynamique du 3D C/C, la deuxième assertion est partiellement vérifiée. En effet, l'hypothèse méso fait que le comportement sera non local. Cependant, le comportement sera moyenné sur un mésoconstituant qui est de petite taille. L'étape locale, étape où le comportement sera calculé, restera donc petite.

## 2.5 Stratégie de résolution : méthode Latin

### 2.5.1 Principes

La méthode LATIN ou méthode à grand incrément de temps [Ladevèze 1999 - 1996a] est une approche itérative globale en temps initialement proposée pour résoudre les problèmes non-linéaires d'évolution. Elle a depuis été employée avec succès pour traiter des problèmes de dynamique, de décomposition de domaines, etc.

À chaque itération, la méthode produit une approximation de la solution sur le domaine tout entier et sur tout l'intervalle de temps étudié, contrairement aux démarches classiques utilisées pour la résolution de problèmes non-linéaires d'évolution qui construisent une solution de façon incrémentale.

Cette approche est basée sur trois principes :

- **Principe 1** : séparation des difficultés ;
- **Principe 2** : approche itérative à deux étapes ;
- **Principe 3** : représentation mécanique adaptée des inconnues.

Le troisième point de la LATIN n'est ici pas utilisé. Il s'agit d'un cadre restrictif par rapport aux possibilités de la méthode, mais suffisant pour représenter correctement les phénomènes mis en jeu. Dans ce travail, nous étendons son application pour des matériaux au comportement non-linéaire structural et/ou aux interfaces.

Le troisième principe est souvent remplacé en dynamique linéaire par le fait que les opérateurs restent constants au cours des itérations. Nous essayerons de conserver cette propriété autant que possible.

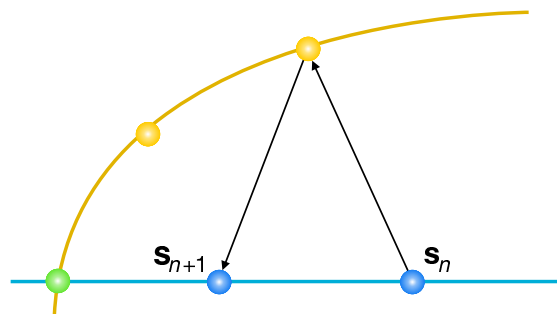


Figure 3.4: Schéma itératif

L'algorithme LATIN détermine des approximations successives de la solution en recherchant successivement des éléments de  $\mathbf{Ad}$  et  $\Gamma$ , guidés par deux directions de recherche différentes suivant que l'on vérifie l'un ou l'autre des groupes d'équations.

Les directions de recherche concernent, a priori, à la fois les quantités d'interface et les quantités de structure.

La direction de descente  $\mathbf{E}^-$  relie les quantités appartenant à  $\Gamma$  notées  $\hat{\cdot}$ , aux quantités appartenant à  $\mathbf{Ad}$ .

On distingue la direction de descente associée aux variables d'interface et la direction de descente associée aux variables de structures (pour le cas du tableau 3.3).

- Pour l'interface

$$\left( \underline{F}_{E'E} - \hat{\underline{F}}_{E'E} \right) + \mathbf{k}^- \left( \dot{\underline{W}}_{EE'} - \hat{\dot{\underline{W}}}_{EE'} \right) = 0 \quad (3.15)$$

- Pour la sous-structure

$$\left( \sigma_E - \hat{\sigma}_E \right) + \mathbf{K}_{\mathbf{E}^-} \left( \varepsilon_E - \hat{\varepsilon}_E \right) = 0 \quad (3.16)$$

De même, on va différencier la direction associée à l'interface et celle associée à la sous-structure (dans le cas du tableau 3.3).

La direction de montée  $\mathbf{E}^+$  avec les mêmes notations s'écrit :

- Pour l'interface

$$\left( \hat{\underline{F}}_{E'E} - \underline{F}_{E'E} \right) - \mathbf{k}^+ \left( \hat{\dot{\underline{W}}}_{EE'} - \dot{\underline{W}}_{EE'} \right) = 0 \quad (3.17)$$

- Pour la sous-structure

$$\left( \hat{\sigma}_E - \sigma_E \right) - \mathbf{K}_{\mathbf{E}^+} \left( \hat{\varepsilon}_E - \varepsilon_E \right) = 0 \quad (3.18)$$

En pratique, nous choisissons d'introduire un seul paramètre scalaire pour les interfaces ; ainsi, chaque opérateur se résume à :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^- &= k_M \mathbf{I} \\ \mathbf{k}^+ &= k_m \mathbf{I} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Il a été montré dans Lemoussu [Boucard *et al.* 1995] et dans [Chevreuil 2002] que les directions optimales étaient pour  $k_M = k_m = \sqrt{\rho E} \cdot S$ . Cette valeur correspond à l'impédance mécanique du matériau qui, dans le cas d'un choc élastique, relie le saut de contrainte à l'interface en fonction du saut de vitesse.

Concernant les directions de recherche de structures, elles seront prises, en pratique, comme suit :

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{K}_{\mathbf{E}^-} \right)^{-1} &= 0 \\ \mathbf{K}_{\mathbf{E}^+} &= \mathbf{K} \end{aligned} \quad (3.20)$$

$\mathbf{K}$  est l'équivalent d'un tenseur de Hooke et nous détaillerons le choix de ce tenseur dans la suite.



### 2.5.2 Détail de l'étape locale

Le problème est de trouver une solution  $\hat{s}_{n+1/2} \in \Gamma$  à partir de la connaissance d'un élément  $s_n \in \text{Ad}$  en utilisant la direction de recherche  $\mathbf{E}^+$ .  
Il s'écrit donc :

$$\text{trouver } \hat{s}_{n+1/2} \text{ vérifiant : } \left\{ \begin{array}{l} \hat{s}_{n+1/2} \in \Gamma \\ (\hat{s}_{n+1/2} - s_n) \in \mathbf{E}^+ \end{array} \right. \quad (3.21)$$

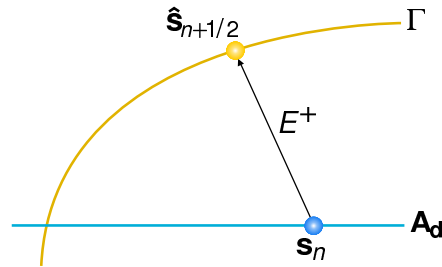


Figure 3.5: Schéma itératif - Étape locale

### 2.5.3 Détail de l'étape globale

Le problème est maintenant de trouver une solution  $s_{n+1} \in \text{Ad}$  à partir de la connaissance d'un élément  $\hat{s}_{n+1/2} \in \Gamma$  en utilisant la direction de recherche  $\mathbf{E}^-$ .  
Il s'écrit donc :

$$\text{trouver } s_{n+1} \text{ vérifiant : } \left\{ \begin{array}{l} s_{n+1} \in \text{Ad} \\ (s_{n+1} - \hat{s}_{n+1/2}) \in \mathbf{E}^- \end{array} \right. \quad (3.22)$$

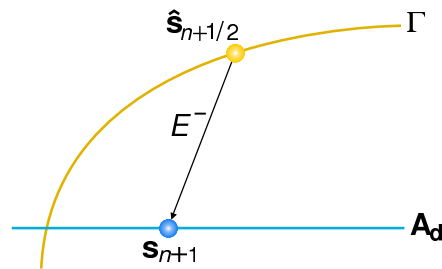


Figure 3.6: Schéma itératif - Étape globale

### 2.5.4 Arrêt de l'algorithme

Afin d'évaluer la qualité de la solution au cours des itérations, plusieurs indicateurs peuvent être définis. Le plus courant utilise la conjugaison des directions de recherche.

Les solutions consécutives vérifient les directions de recherche comme suit

$$\begin{aligned} (\hat{s}_{n+1/2} - s_n) &\in \mathbf{E}^+ \\ (s_{n+1} - \hat{s}_{n+1/2}) &\in \mathbf{E}^- \end{aligned}$$

La vérification croisée de ces deux directions indique que la différence  $s - \hat{s}$  est nulle dans les deux cas et que l'on est à convergence. On utilisera donc l'indicateur suivant :

$$\eta = \frac{\sum \|\hat{s}_{n+1/2} - s_n\|_E^2}{\sum \left\| \frac{\hat{s}_{n+1/2} + s_n}{2} \right\|_E^2} \quad (3.23)$$

$$\text{où : } \|s\|_E^2 = \int_0^T \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}_{E'E}^T k^{-1} \underline{F}_{E'E} + \int_0^T \int_{\Gamma_{EE'}} \dot{\underline{W}}_{EE'}^T k \dot{\underline{W}}_{EE'}$$

On peut également définir l'erreur entre une solution de référence  $\underline{U}_E^{ref}$  et la solution obtenue à l'itération n  $\underline{U}_E^n$ . L'erreur est alors définie par la norme en énergie de la différence entre les deux solutions

$$e_n^2 = \frac{\sum_E \int_{\Omega_E} \text{tr} \left[ \underline{\varepsilon}(\underline{U}_E^n - \underline{U}_E^{ref}) \mathbf{K}_E \underline{\varepsilon}(\underline{U}_E^n - \underline{U}_E^{ref}) \right] d\Omega}{\sum_E \int_{\Omega_E} \text{tr} \left[ \underline{\varepsilon}(\underline{U}_E^{ref}) \mathbf{K}_E \underline{\varepsilon}(\underline{U}_E^{ref}) \right] d\Omega} \quad (3.24)$$

### 3 Direction de recherche sous-structure constante

Comme nous l'avons vu précédemment, les latitudes que nous avons permises dans la présentation générale concernent la direction de recherche de sous-structure à l'étape globale. Nous allons distinguer deux cas et développer la méthode de résolution pour chacun de ces choix.

Cette version est la plus simple que l'on puisse écrire à partir de [Boucard *et al.* 1995]. Il s'agit de conserver la même répartition des équations entre les groupes Ad et  $\Gamma$ . On rappelle cette répartition dans le tableau 3.3.

Ad	$\Gamma$
Admissibilité dynamique	Comportement des structures
Admissibilité cinématique	Comportement des interfaces

Tableau 3.3: Choix de répartition de équations

#### 3.1 Étape locale

L'étape locale s'écrit de façon indépendante entre les interfaces et les sous-structures. Chaque entité peut être traitée simultanément, ce qui rend la parallélisation de cette étape envisageable et très aisée à programmer.

- Étape locale pour une interface

L'étape locale pour chaque interface est extrêmement simple. Elle consiste à résoudre des petits problèmes sur chaque interface définis comme suit. À cette étape, on considère comme connue une solution  $s_n$  de Ad. Les équations à résoudre sur l'interface sont donc les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \underline{F}_{EE'}^{n+1/2}, \underline{F}_{E'E}^{n+1/2} \right) = \mathbf{A}_{\Gamma_{EE'}} \left( \underline{\dot{W}}_{E'E}^{n+1/2}, \underline{\dot{W}}_{EE'}^{n+1/2} \right) \quad (a) \\ \left( \hat{\underline{F}}_{E'E}^{n+1/2} - \underline{F}_{E'E}^n \right) = \mathbf{k}^+ \left( \hat{\underline{W}}_{E'E}^{n+1/2} - \underline{\dot{W}}_{E'E}^n \right) \quad (b) \\ \left( \hat{\underline{F}}_{EE'}^{n+1/2} - \underline{F}_{EE'}^n \right) = \mathbf{k}^+ \left( \hat{\underline{W}}_{E'E}^{n+1/2} - \underline{\dot{W}}_{E'E}^n \right) \quad (c) \end{array} \right. \quad (3.25)$$

La relation de comportement de l'interface (équation 3.25(a)) correspond un système de 2 équations à 4 inconnues. Les directions de recherche sur l'in-

terface (équations 3.25(b) et 3.25(c)) viennent fermer ce système en rajoutant 2 équations linéaires. Ce problème est très simple à résoudre et, même dans le cas de comportements d'interface complexes (contact, frottement...), n'entraîne pas un coût de résolution important.

- Étape locale pour une sous-structure

L'étape locale au niveau de l'interface est aussi assez simple à écrire. Comme nous l'avons vu précédemment, la direction de recherche sous-structure pour l'étape locale permet d'avoir une résolution explicite du comportement de chaque sous-structure, comme on peut le voir dans le système 3.26.

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_E^{n+1/2} = \mathbf{C}_{\Omega_E}(\hat{\varepsilon}_E^{n+1/2})\hat{\varepsilon}_E^{n+1/2} & (a) \\ \hat{\varepsilon}_E^{n+1/2} = \varepsilon_E^n & (b) \end{cases} \quad (3.26)$$

### 3.2 Étape globale

L'étape globale est celle qui engendre le coût de calcul le plus important. En effet, le problème à résoudre est un problème de dynamique global sur chaque sous-structure. Cependant, ce problème est indépendant par sous-structure et permet donc d'envisager aisément une parallélisation. À cette étape, on suppose connue une solution  $s_{n+1/2}$  de  $\Gamma$ .

Les équations à résoudre sont énumérées dans les équations 3.27, 3.28, 3.29 :

$$\left( \underline{V}_E^{n+1}, \underline{\dot{W}}_{EE'}^{n+1} \right) \in \mathcal{V}_E^{[0,T]} \times \mathcal{W}_{EE'}^{[0,T]} + \begin{cases} \text{Conditions initiales} \\ \text{Conditions aux limites} \end{cases} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_E} \rho \frac{d^2 \underline{V}_E^{n+1}}{dt^2} \cdot \underline{V}_E^* d\Omega + \int_{\Omega_E} \text{tr} \left[ \sigma_E^{n+1} \varepsilon(\underline{V}_E^*) \right] d\Omega \\ = \sum_{E'} \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}_{E'E}^{n+1} \cdot \underline{\dot{W}}_{E'E}^* d\Gamma \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \sigma_E^{n+1} - \hat{\sigma}_E^{n+1/2} &= \mathbf{K} \left( \varepsilon_E^{n+1} - \hat{\varepsilon}_E^{n+1/2} \right) \\ \left( \underline{F}_{EE'}^{n+1} - \hat{\underline{F}}_{EE'}^{n+1/2} \right) &= \mathbf{k}^+ \left( \underline{\dot{W}}_{E'E}^{n+1} - \hat{\underline{\dot{W}}}_{E'E}^{n+1/2} \right) \end{aligned} \quad (3.29)$$

L'équation 3.27 correspond à l'admissibilité cinématique et l'équation 3.28 correspond à l'admissibilité dynamique. Les équations 3.29 sont les directions de recherche sous-structure et interface. Dans ce cas, l'opérateur  $\mathbf{K}$  sera constant au

cours du temps et au cours des itérations. En injectant les équations de direction de recherche et la compatibilité dans l'équation 3.28, on obtient l'équation 3.30.

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_E} \rho \frac{d^2 \underline{V}_E^{n+1}}{dt^2} \cdot \underline{V}_E^* d\Omega \\
 & + \sum_{E'} \int_{\Gamma_{EE'}} \mathbf{k}^+ \underline{V}_E^{n+1} \dot{\underline{W}}_{EE'}^* d\Gamma + \int_{\Omega_E} \text{Tr} [\mathbf{K}_{\mathcal{E}}(\underline{V}_E^{n+1})_{\mathcal{E}}(\underline{V}_E^*)] d\Omega \\
 & = \sum_{E'} \int_{\Gamma_{EE'}} \left( \underline{F}_{E'E}^{\hat{\cdot} n+1/2} + \mathbf{k}^+ \underline{W}_{E'E}^{\hat{\cdot} n+1/2} \right) \cdot \dot{\underline{W}}_{EE'}^* d\Gamma + \\
 & \int_{\Omega_E} \text{Tr} \left[ \left( \mathbf{K}_{\mathcal{E}}(\underline{V}_E^{\hat{\cdot} n+1/2}) - \hat{\mathcal{C}}_E^{n+1/2} \right)_{\mathcal{E}}(\underline{V}_E^*) \right] d\Omega \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

Dans l'équation 3.30, on reconnaît dans le premier terme une équation de dynamique linéaire comportant un terme d'amortissement provenant des interfaces. Ce terme est purement dû à l'algorithme et ne viendra pas perturber la solution finale. Le second terme est formé d'un terme d'interface qui permet le passage de l'information d'une sous-structure à une autre et d'un terme volumique qui traduit le non-respect de la relation de comportement.

La rigidité de ce problème de dynamique n'est autre que la direction de recherche de la sous-structure  $\Omega_E$ . L'opérateur que nous aurons à utiliser à chaque itération sera donc constant et pourra être factorisé une fois au début du calcul et servira à chaque itération et chaque pas de temps.

Le principal intérêt de cette première méthode est sa simplicité. On retrouve des propriétés extrêmement intéressantes pour le calcul que l'on avait déjà dans la méthode initiale, comme le fait que l'opérateur dynamique soit linéaire et constant à la fois au cours du temps et au cours des itérations. On peut cependant se demander si un algorithme aussi simple sera en mesure de converger rapidement vers la solution d'un problème complexe où le module de rigidité effectif pourra à la fois diminuer lorsque le matériau sera endommageable en traction et augmenter dramatiquement lorsqu'il aura un comportement de compaction en compression. Nous chercherons dans la suite le domaine de pertinence d'un tel algorithme en le testant sur des cas simples de non-linéarités.

## 4 Étude de l'efficacité de la méthode direction de recherche constante

Nous allons tester la méthode à direction de recherche constante sur des cas très simples 1D. Nous pourrons alors apprécier l'efficacité de la plus simple des méthodes de sous-structuration en dynamique basée sur la méthode Latin.

Il est évident que pour les non-linéarités d'interface, il n'y aura pas de différence par rapport la méthode initiale. La transmission des efforts et des vitesses à l'interface et la résolution du problème d'interface à l'étape locale sont inchangées. Nous allons pourtant traiter un de ces cas afin de rappeler le type de problème à résoudre pour des non-linéarités d'interface. Ce cas n'est qu'un rappel de la thèse de Hervé Lemoussu.

### 4.1 Interface de contact

On appelle  $U_N = U_N^E - U_N^{E'}$  le saut de déplacement normal l'interface et  $F_N = F_N^E = -F_N^{E'}$  la pression d'interface. Les conditions de contact entre deux domaines s'écrivent alors :

$$\begin{cases} U_N & \geq 0 \\ F_N & \leq 0 \\ U_N F_N & = 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

Ces équations traduisent le fait qu'il ne peut y avoir interpénétration entre deux sous-structures, que le seul effort qui puisse exister l'interface est un effort de compression et enfin que ces deux événements ne peuvent être simultanés.

Ces équations étant traitées au niveau de l'étape locale interface, nous allons réécrire cette étape.

Connaissant un élément  $s_n = (\underline{V}_n^E, \phi_n^E)$  appartenant  $\mathbf{Ad}$ , il nous faut trouver un élément de  $\Gamma$ ,  $\hat{s}_{n+1/2} = \left( \hat{\underline{W}}_{n+1/2}^E, \hat{\underline{W}}_{n+1/2}^{E'}, \hat{\underline{F}}_{n+1/2}^E, \hat{\underline{F}}_{n+1/2}^{E'} \right)$  défini sur  $\gamma^{EE'} \times [0, T]$  vérifiant :

- la loi de comportement de l'interface
- les directions de recherche

On décompose les champs l'interface en partie normale et partie tangentielle.

$$\begin{aligned} \hat{\underline{W}}_{n+1/2}^E &= \hat{\underline{W}}_{n+1/2}^{E N} \underline{N}^{EE'} + \pi \hat{\underline{W}}_{n+1/2}^E \\ \hat{\underline{F}}_{n+1/2}^E &= \hat{\underline{F}}_{n+1/2}^{E N} \underline{N}^{EE'} + \pi \hat{\underline{F}}_{n+1/2}^E \end{aligned} \quad (3.32)$$

Les conditions de contact définies dans l'équation 3.31 s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \hat{\underline{F}}_{n+1/2}^E + \hat{\underline{F}}_{n+1/2}^{E'} = 0 & \text{équilibre en effort} \\ \hat{\underline{F}}_{n+1/2}^{E N} \leq 0 & \text{compression} \\ \hat{\underline{W}}_{n+1/2}^{E' N} - \hat{\underline{W}}_{n+1/2}^{E N} \geq 0 & \text{non pénétration} \\ \left( \hat{\underline{W}}_{n+1/2}^{E' N} - \hat{\underline{W}}_{n+1/2}^{E N} \right) \cdot \left( \hat{\underline{F}}_{n+1/2}^{E' N} - \hat{\underline{F}}_{n+1/2}^{E N} \right) = 0 & \text{non simultanéité} \end{array} \right. \quad (3.33)$$

Il est nécessaire d'ajouter ces équations les directions de recherche :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \hat{\underline{F}}_{n+1/2}^E - \underline{F}_n^E \right) = k_0 \left( \hat{\underline{W}}_{n+1/2}^E - \underline{W}_n^E \right) \\ \left( \hat{\underline{F}}_{n+1/2}^{E'} - \underline{F}_n^{E'} \right) = k_0 \left( \hat{\underline{W}}_{n+1/2}^{E'} - \underline{W}_n^{E'} \right) \end{array} \right. \quad (3.34)$$

Intéressons-nous maintenant la résolution de ce problème de contact.

Tout d'abord, on peut déterminer aisément la solution pour les grandeurs dans le plan tangent.

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi \hat{\underline{F}}_{n+1/2}^E = \pi \hat{\underline{F}}_{n+1/2}^{E'} = 0 \\ \pi \hat{\underline{W}}_{n+1/2}^E = \pi \underline{W}_n^E - \frac{1}{k_0} \pi \underline{F}_n^E \\ \pi \hat{\underline{W}}_{n+1/2}^{E'} = \pi \underline{W}_n^{E'} - \frac{1}{k_0} \pi \underline{F}_n^{E'} \end{array} \right. \quad (3.35)$$

Pour les parties normales, on peut mettre en évidence un indicateur de contact scalaire. Il s'écrit :

$$2C_n(t) = \frac{\left( \hat{\underline{W}}_{n+1/2}^{E' N}(t) - \hat{\underline{W}}_{n+1/2}^{E N}(t) \right)}{(1 - \gamma)\Delta t} + \frac{\left( \hat{\underline{F}}_{n+1/2}^{E N} - \hat{\underline{F}}_{n+1/2}^{E' N} \right)}{k_0} \quad (3.36)$$

On remarque que cet indicateur est écrit à partir des déplacements d'interface alors que les inconnues sont les vitesses. Le paramètre  $\gamma$  est le paramètre d'intégration d'un schéma du premier ordre.

$$W(t) = W(t - \Delta t) + \Delta t \left( (1 - \gamma)\dot{W}(t) + \gamma\dot{W}(t - \Delta t) \right)$$

L'opérateur défini dans l'équation 3.36 est bien un indicateur de contact car :

$$\text{décollement} \iff \begin{cases} \hat{W}_{n+1/2}^{E' N} - \hat{W}_{n+1/2}^{E N} \geq 0 \\ \hat{F}_{n+1/2}^{E N} - \hat{F}_{n+1/2}^{E' N} = 0 \end{cases} \iff C_n(t) \geq 0 \quad (3.37)$$

$$\text{contact} \iff \begin{cases} \hat{W}_{n+1/2}^{E' N} - \hat{W}_{n+1/2}^{E N} = 0 \\ \hat{F}_{n+1/2}^{E N} - \hat{F}_{n+1/2}^{E' N} \leq 0 \end{cases} \iff C_n(t) \leq 0 \quad (3.38)$$

En introduisant les directions de recherche et le schéma d'intégration de premier ordre dans l'indicateur,

$$\hat{F} - F = k_0 (\hat{W} - W)$$

On obtient  $C_n$  en fonction de quantités connues au pas de temps  $t$  :

$$2C_n(t) = \frac{\hat{P}^{E'}(t - \Delta t) - \hat{P}^E(t - \Delta t)}{(1 - \gamma)\Delta t} + \dot{W}_n^{E' N}(t) - \dot{W}_n^{E N}(t) + \frac{F_n^{E N} - F_n^{E' N}}{k_0} \quad (3.39)$$

avec

$$\hat{P}^E(t) = \hat{W}^E(t) + \gamma \Delta t \hat{W}^E(t)$$

L'indicateur  $C_n$ , exprimé dans sa forme explicite (équation 3.39), permet une résolution explicite du problème de contact à l'étape locale par une simple intégration temporelle.

$$\text{décollement} \iff C_n(t) \geq 0 \iff \begin{cases} \hat{F}_{n+1/2}^{E N} = \hat{F}_{n+1/2}^{E' N} = 0 \\ \hat{W}_{n+1/2}^{E N} = \dot{W}_n^{E N} - \frac{F_n^{E N}}{k_0} \\ \hat{W}_{n+1/2}^{E' N} = \dot{W}_n^{E' N} - \frac{F_n^{E' N}}{k_0} \end{cases} \quad (3.40)$$



$$\text{contact} \iff C_n(t) \leq 0 \iff \begin{cases} \hat{F}_{n+1/2}^{E N} = -\hat{F}_{n+1/2}^{E' N} = k_0 C_n \\ \hat{W}_{n+1/2}^{E N} = \frac{1}{2} \left( \dot{W}_n^{E N} + \dot{W}_n^{E' N} - \frac{F_n^{E N} + F_n^{E' N}}{k_0} \right) \\ \hat{W}_{n+1/2}^{E' N} = \hat{W}_{n+1/2}^{E N} \end{cases} \quad (3.41)$$

Nous appliquons les deux méthodes un exemple très simple mettant en valeur l'interface de contact. Nous nous intéressons deux lopins en 1D, chacun représenté par une sous-structure. L'un de ces lopins est initialement au repos tandis que l'autre est animé d'une vitesse initiale  $V_0$ . Cet exemple est illustré par la figure 3.7.

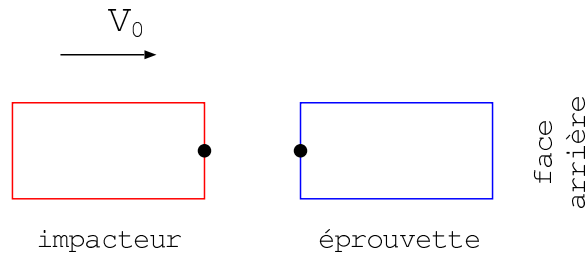


Figure 3.7: Cas test pour l'interface de contact

La figure 3.8 représente la vitesse de l'éprouvette en fonction de  $x$ , l'abscisse dans la barre, et  $t$ , le temps.  $t = 0$  au moment de l'impact. Les oscillations que l'on peut observer sont dues au schéma d'intégration et au fait qu'on impose un choc aux deux barres. La figure 3.9 représente les déplacements des points des deux barres en contact.

Après avoir montré le fonctionnement de l'interface de contact dans un cas simple, intéressons-nous au traitement de non-linéarités de comportement en dynamique.

## 4.2 Endommagement à effet retard

Dans un premier temps, on utilise le modèle d'endommagement à effet retard local présenté dans la partie 2 et rappelé dans l'équation 3.42. L'endommagement à effet retard sera utilisé pour modéliser l'endommagement des torons. En 1D, ce modèle sera local en espace puisque la moyenne sur la section est déjà réalisée. Nous étudierons plus tard le modèle d'endommagement non local pour la matrice.

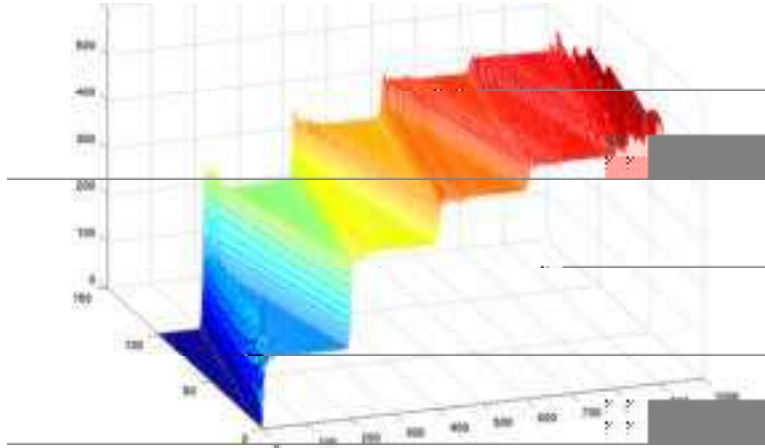


Figure 3.8: Vitesse dans l'éprouvette

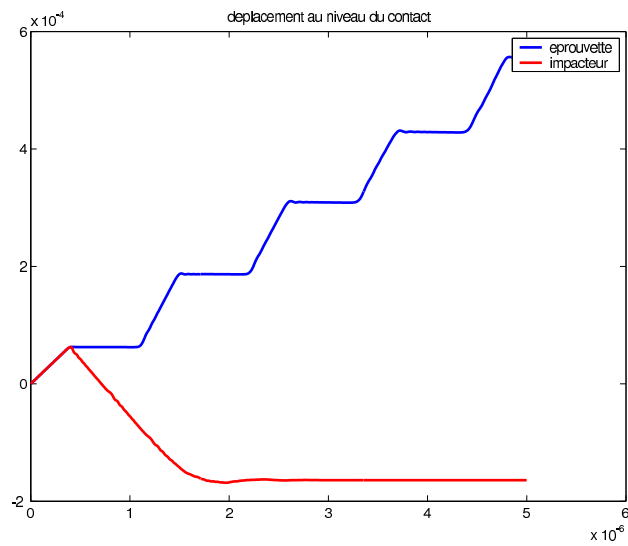


Figure 3.9: Déplacement aux points de contact

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = E \cdot (1 - d) \cdot \varepsilon \\ Y = \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial d} \Big|_{\sigma} \\ f(Y) = \frac{\sqrt{Y} - \sqrt{Y_0}}{\sqrt{Y_c}} \\ \dot{d} = \frac{1}{\tau_c} (1 - \exp(-a \langle f(Y) - d \rangle_+)) \end{array} \right. \quad (3.42)$$

Le cas sur lequel nous allons tester l'efficacité de la méthode est le cas le plus simple qui soit. Il s'agit de traiter une seule sous-structure soumise à une force dépendant du temps (voir figure 3.10). La longueur et le temps d'étude sont réglés pour que l'onde élastique puisse faire un seul aller dans la barre. Le chargement s'effectue sur un cinquième du temps d'étude. On applique une force de la forme d'un demi sinus car le but n'est pas de tester l'efficacité des méthodes en cas de chocs.

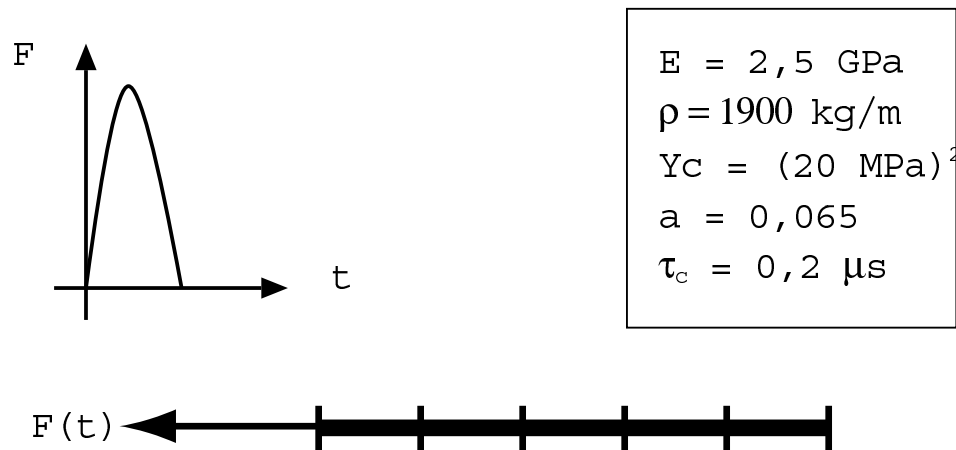


Figure 3.10: Cas de calcul pour l'endommagement effet retard

Les résultats présentés dans les figures 3.11, 3.12 et 3.13 ont été réalisés avec la méthode avec direction de recherche constante. La direction de recherche choisie dans ce cas l'était la direction élastique initiale.

On remarque dans 3.11 et 3.12 que la vitesse des ondes varie avec le chargement. Plus la barre est en traction, plus la rigidité est dégradée et donc plus la vitesse des ondes est faible.

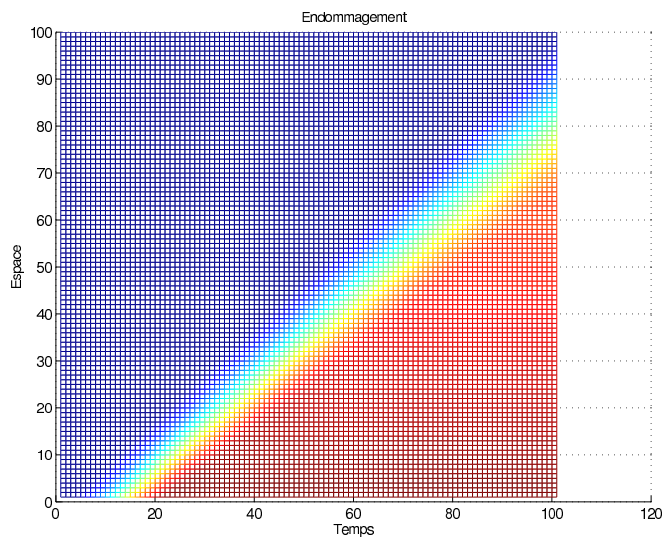


Figure 3.11: Résultat pour un chargement en sinus - endommagement

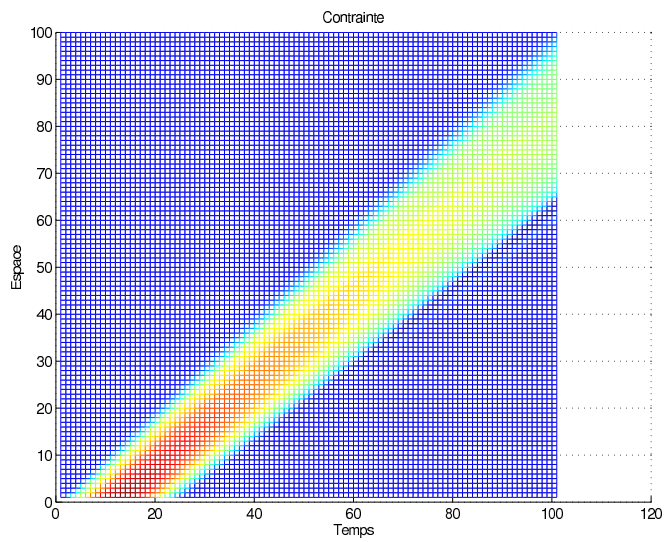


Figure 3.12: Résultat pour un chargement en sinus - contrainte

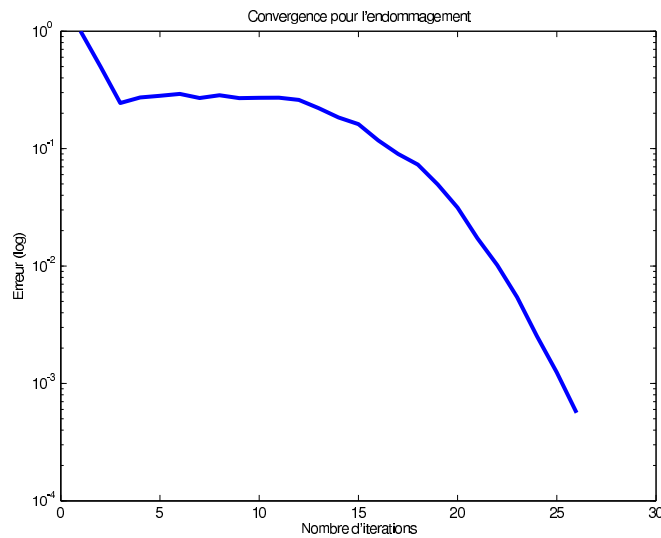


Figure 3.13: Courbe de convergence pour la direction de recherche élastique

La figure 3.14 montre la comparaison des vitesses de convergence pour différentes directions de recherche dans le cas de l'endommagement. Le but est de trouver une direction de recherche qui soit capable d'être efficace à la fois pour traiter l'endommagement et la compaction. Dans cette figure, le module noté  $E_{comp}$  correspond à la rigidité maximum pour le comportement de compaction. La rigidité initiale du matériau correspond à  $E_{comp}/25$ . La direction de recherche optimum est obtenue en prenant la moyenne sur l'espace et le temps de la rigidité du matériau, c'est à dire environ  $E_{comp}/50$ . On remarque que pour des directions de recherche très éloignées du comportement réel du matériau, la convergence est fortement dégradée.

On peut donc raisonnablement être sceptique quant à la possibilité de trouver une direction de recherche adaptée à des cas de traction/compression couplés. Confirmons cette impression en réalisant la même étude pour la compaction.

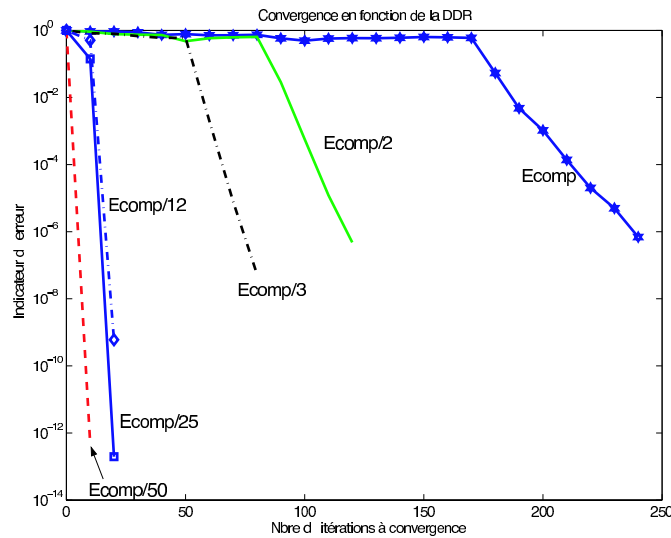


Figure 3.14: Vitesse de convergence pour des directions de recherche constantes

### 4.3 Compaction élastique

On utilise le modèle de compaction présenté dans la partie 3 en ne gardant que la partie élastique et que nous rappelons dans l'équation 3.43.

$$\begin{cases} \sigma = \frac{E_0 \varepsilon}{(1 + \alpha \varepsilon)^2} & \text{si } 0 > \varepsilon > -\varepsilon_{max} \\ \sigma = E_{max} (\varepsilon - \varepsilon_{max}) + \frac{E_0 \varepsilon_{max}}{(1 + \alpha \varepsilon_{max})^2} & \text{si } \varepsilon < -\varepsilon_{max} \end{cases} \quad (3.43)$$

Comme pour l'endommagement, nous allons traiter un cas 1D très simple. Ce cas est décrit dans la figure 3.15.

Nous représentons la contrainte dans la barre en fonction de l'abscisse et du temps dans la figure 3.17.

Contrairement à l'endommagement, on observe l'accélération des ondes au fur et mesure du chargement, comme l'indiquent les traits noirs dans la figure 3.17.

Dans la figure 3.18, on compare la vitesse de convergence en fonction des directions de recherche. On remarque que la première courbe en partant de la gauche correspond  $E_{comp}/2$ . En effet, le calcul avait de grandes difficultés à converger pour des directions de recherche trop éloignées du module effectif. Dans cet exemple précis, cette limite correspond à plus de 10 fois le module élastique initial. On voit donc se profiler le problème du choix de la direction de recherche dans le cas où le

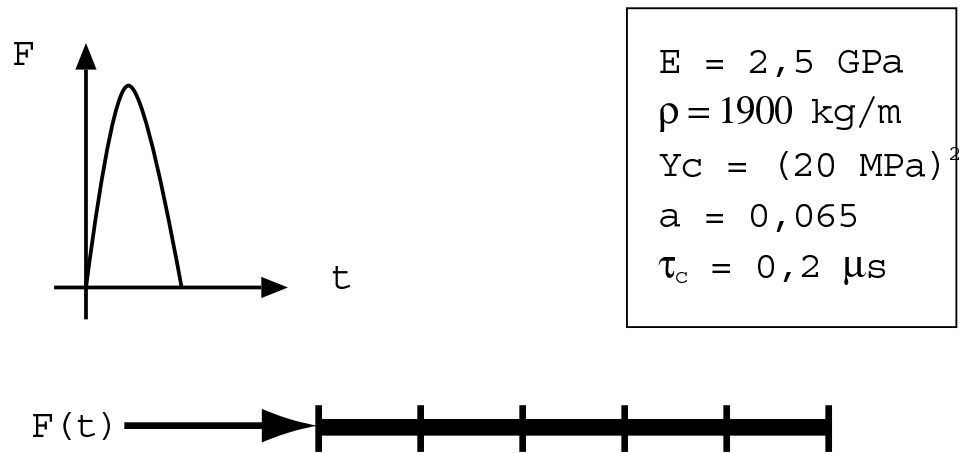


Figure 3.15: Cas de calcul pour la compaction élastique

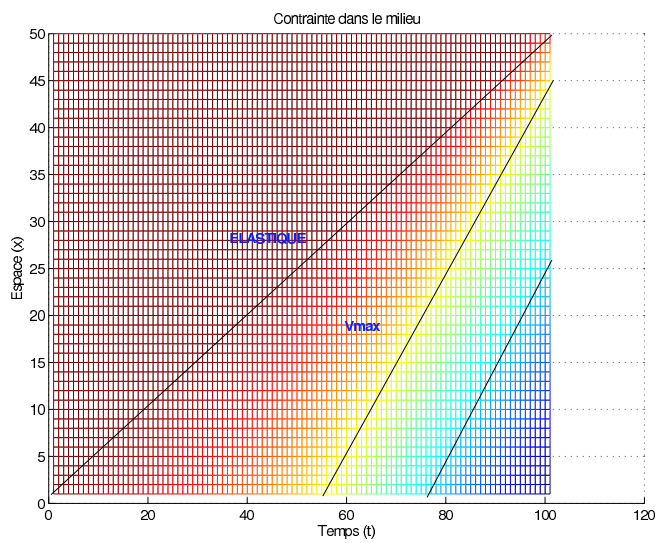


Figure 3.16: Résultat de calcul pour la compaction

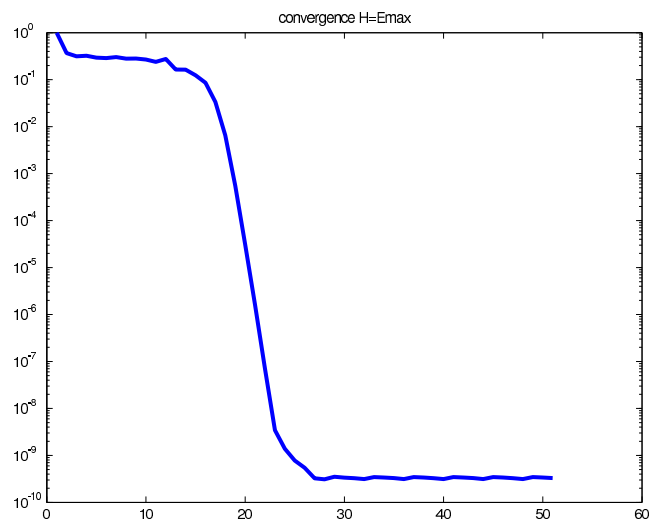


Figure 3.17: Convergence pour la compaction

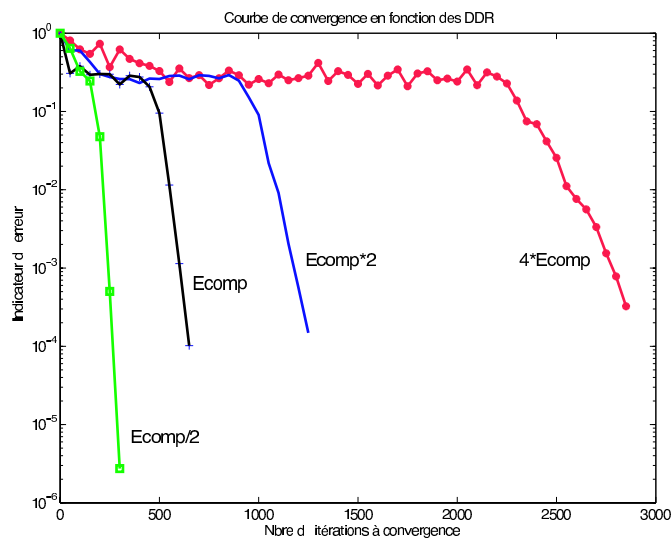


Figure 3.18: Convergence en fonction de la direction de recherche (compaction)



matériau est endommageable en traction et admet aussi un comportement de compaction en compression.

#### **4.4 Couplage des comportements en traction et en compression**

Dans le cas où le chargement est mixte (traction et compression), comme nous venons de le laisser entendre, il est difficile de trouver une direction de recherche qui assure une convergence convenable de l'algorithme. La conclusion de cette partie est donc qu'écrire l'algorithme en gardant les directions de recherche constantes est suffisant pour traiter des problèmes non-linéaires en dynamique lorsque le module effectif du matériau ne varie pas trop. Nous pourrions appeler cela des non-linéarités faibles. Dans le cas du composite 3D C/C auquel nous nous intéressons, cette restriction ne permet pas de traiter correctement le problème. Il faut donc prendre des directions de recherche non-constantes.

## 5 Direction de recherche sécante

*N.B.* : Le choix s'est porté sur le module sécant et non pas sur le module tangent pour éviter les problèmes dus à l'endommagement.

Cette version est bien entendu plus coûteuse car l'opérateur ne sera plus constant. En revanche, on peut s'attendre à ce qu'elle soit beaucoup plus efficace et requiert un nombre d'itérations plus petit que dans le cas de la direction de recherche constante. En effet, la direction de recherche sera choisie beaucoup plus proche de la rigidité non-linéaire réelle.

L'étape locale est exactement la même que dans le cas de la direction de recherche constante. En effet, cette direction de recherche n'intervient qu'à l'étape globale et il est donc inutile de modifier l'étape locale.

### 5.1 Étape globale

À cette étape, on suppose toujours connue une solution  $\hat{s}_{n+1/2}$  de  $\Gamma$ . Le couple  $(\hat{\sigma}_E^{n+1/2}, \hat{\varepsilon}_E^{n+1/2})$  vérifie le comportement de la sous-structure  $\Omega_E$ . Le choix qui est fait pour la direction de recherche est le suivant. On choisit la direction de recherche  $\mathbf{K}_{\text{NL}}$  qui vérifie :

$$\hat{\sigma}_E^{n+1/2} = \mathbf{K}_{\text{NL}} \hat{\varepsilon}_E^{n+1/2}$$

Les équations à résoudre sont énumérées dans les équations 3.44, 3.45, 3.46 :

$$\left( \underline{V}_E^{n+1}, \underline{\dot{W}}_{EE'}^{n+1} \right) \in \mathcal{V}_E^{[0,T]} \times \mathcal{W}_{EE'}^{[0,T]} + \begin{cases} \text{Conditions initiales} \\ \text{Conditions aux limites} \end{cases} \quad (3.44)$$

$$\int_{\Omega_E} \rho \frac{d^2 \underline{V}_E^{n+1}}{dt^2} \cdot \underline{V}_E^* d\Omega + \int_{\Omega_E} \text{tr} [\sigma_E^{n+1} \varepsilon(\underline{V}_E^*)] d\Omega = \sum_{E'} \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}_{E'E}^{n+1} \cdot \underline{\dot{W}}_{E'E}^* d\Gamma \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \sigma_E^{n+1} - \hat{\sigma}_E^{n+1/2} &= \mathbf{K}_{\text{NL}} \left( \varepsilon_E^{n+1} - \hat{\varepsilon}_E^{n+1/2} \right) \\ \left( \underline{F}_{E'E}^{n+1} - \hat{\underline{F}}_{E'E}^{n+1/2} \right) &= \mathbf{k}^+ \left( \underline{\dot{W}}_{E'E}^{n+1} - \hat{\underline{\dot{W}}}_{E'E}^{n+1/2} \right) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Les équations 3.44 et 3.45 correspondent à l'admissibilité cinématique et l'admissibilité dynamique. Les équations 3.46 sont les directions de recherche sous-structure et d'interface. Dans ce cas là, l'opérateur  $\mathbf{K}_{\text{NL}}$  ne sera pas constant, ni au cours du temps et ni au cours des itérations.

En injectant les équations de direction de recherche dans l'équation 3.45, on obtient l'équation 3.47.

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_E} \rho \frac{d^2 \underline{V}_E^{n+1}}{dt^2} \cdot \underline{V}_E^* d\Omega + \sum_{E'} \int_{\Gamma_{EE'}} \mathbb{K}^+ \dot{\underline{V}}_E^{n+1} \dot{\underline{W}}_{EE'}^* d\Gamma + \\
 \int_{\Omega_E} \text{tr} \left[ \mathbf{K}_{NL} \varepsilon(\dot{\underline{V}}_E^{n+1}) \varepsilon(\underline{V}_E^*) \right] d\Omega \\
 = \sum_{E'} \int_{\Gamma_{EE'}} \left( \hat{\underline{F}}^{n+1/2} + \mathbb{K}^+ \hat{\underline{W}}_{EE'}^{n+1/2} \right) \cdot \dot{\underline{W}}_{EE'}^* d\Gamma \quad (3.47)
 \end{aligned}$$

Dans l'équation 3.47, on reconnaît dans le premier terme une équation de dynamique comportant le même terme d'amortissement des interfaces que dans le cas précédent. Le second terme est formé du seul terme d'interface, le terme volumique étant annulé par le choix de la direction de recherche.

La rigidité de ce problème de dynamique varie, aussi faut-il s'intéresser à un moyen efficace de résoudre ce problème. Pour expliquer la façon dont nous procédons, il est nécessaire de passer à la forme discrétisée. La discrétisation permet de résoudre le problème en espace. En temps, il est nécessaire d'intégrer les équations. Pour cela, on utilise les schémas d'intégration présentés précédemment. À chaque pas de temps, on peut donc écrire le problème de dynamique comme suit :

$$[\mathbb{K}_{NL}^n] [\underline{U}^n] = [\underline{F}_{dyna}^n]$$

$\mathbb{K}_{NL}^n$  est l'opérateur dynamique construit à partir de la matrice de masse et la direction de recherche. Cet opérateur dépend aussi des paramètres du schéma d'intégration temporel.

$\underline{U}^n$  est le vecteur d'inconnues nodales. On peut choisir comme inconnues les déplacements, les vitesses ou les accélérations.

$\underline{F}_{dyna}^n$  est un vecteur de forces. Il dépend du chargement et du résultat de l'intégration des pas de temps précédents.

Pour résoudre ce problème, nous avons choisi d'utiliser un gradient conjugué, préconditionné ou pas. L'algorithme est décrit dans l'annexe E. Cet algorithme est intéressant pour notre problème car il assure une résolution du problème pour un coût de stockage et un coût de calcul non prohibitif.

## 5.2 Résolution du gradient conjugué

Chacune des étapes globales est résolue par un gradient conjugué, il convient de le résoudre de la plus efficace des façons. L'algorithme nous laisse assez peu de

liberté car peu de paramètres le régissent. Deux paramètres sont cependant susceptibles d'améliorer la résolution : le préconditionneur de l'algorithme et la tolérance de l'algorithme.

### 5.2.1 Préconditionneur de l'algorithme

Le but du préconditionneur est d'accélérer la convergence de l'algorithme de gradient conjugué. Cependant, il faut également que le gain qu'il apporte ne soit pas gâché par le temps qu'il faut pour le calculer. C'est pourquoi le choix du préconditionneur doit être un bon compromis entre facilité de calcul et gain sur la résolution du gradient conjugué.

Le choix qui a été fait dans ce travail est de prendre comme préconditionneur la diagonale de l'opérateur dynamique. Son inverse est, bien entendu, extrêmement aisé à calculer et fait office d'approximation correcte de l'inverse de l'opérateur. Cependant, nous n'avons pas essayé d'optimiser ce préconditionneur.

En dynamique rapide, un choix courant est d'utiliser l'algorithme explicite des différences centrées avec matrice de masse diagonale pour effectuer les calculs. Cet algorithme n'a pas été utilisé ici en raison des conditions de stabilité difficiles ou très coûteuses à satisfaire pour des comportements rigidifiants en compaction. La démarche utilisée ici est, en quelque sorte, une approche intermédiaire entre les calculs implicites et explicites puisque l'usage du conditionneur permet à chaque itération d'avoir une résolution immédiate de l'équation à résoudre.

### 5.2.2 Tolérance de l'algorithme

Le deuxième paramètre sur lequel il est possible d'influer est la tolérance, le critère d'arrêt de l'algorithme de gradient conjugué. En effet, la direction de recherche est une approximation du comportement du matériau donc il n'est pas nécessaire de résoudre parfaitement le problème de l'étape globale et de dépenser un temps de calcul important à résoudre un problème qui n'est pas exact.

La solution que nous allons obtenir en étant peu exigeant sur sa qualité peut être amenée à diverger si on s'éloigne trop des directions de recherche optimales. Il est donc nécessaire de choisir la tolérance adaptée qui satisfera les deux conditions.

La solution obtenue a également le défaut de ne pas forcément appartenir à l'espace  $A_d$  qui est l'espace des approximations satisfaisant l'équilibre dynamique. Il nous faut donc rééquilibrer le couple solution pour qu'il appartienne bien à  $A_d$ .

Pour cela, nous avons deux possibilités. La première consiste à conserver la contrainte et modifier le déplacement pour que le couple ainsi obtenu soit admissible.

La solution calculée par le gradient conjugué vérifie l'équation éléments finis suivante :

$$\frac{\mathbb{M}}{\gamma dt^2} u_{n+1} + (1 - \alpha) \frac{\gamma \mathbb{C}}{\beta dt} u_{n+1} + (1 - \alpha) \mathbb{K}_{NL} u_{n+1} = f_{n+1}^{dyn} - r_{n+1} \quad (3.48)$$

On cherche le déplacement rééquilibré sous la forme  $W_n = V_n + \Delta V$ .  $W_n$  est équilibré avec les forces internes reprojctées aux nœuds donc vérifie :

$$\frac{\mathbb{M}}{\gamma dt^2} w_{n+1} + (1 - \alpha) \frac{\gamma \mathbb{C}}{\beta dt} w_{n+1} + (1 - \alpha) \mathbb{K}_{NL} w_{n+1} = f_{n+1}^{dyn} \quad (3.49)$$

On en déduit :

$$\left[ \frac{\mathbb{M}}{\gamma dt^2} + (1 - \alpha) \frac{\gamma \mathbb{C}}{\beta dt} \right] \Delta u = r_{n+1} \quad (3.50)$$

Cette variante sera appelée admissibilité en déplacement (ADM DEPL) dans la suite.

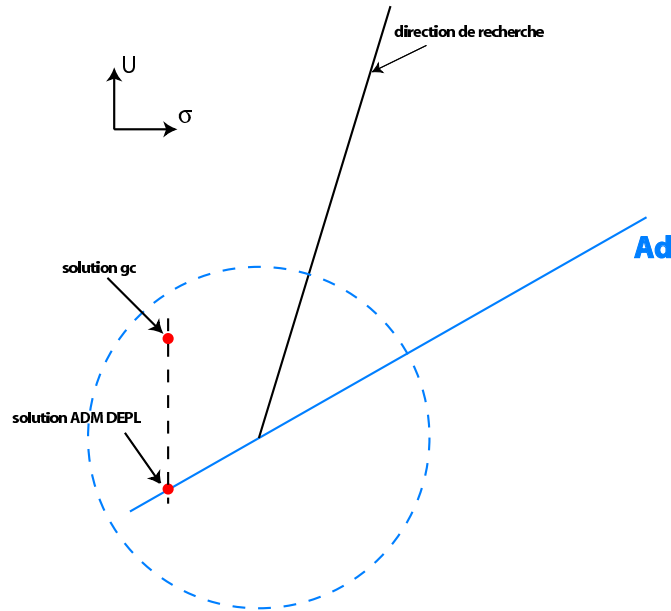


Figure 3.19: Schéma de l'admissibilité en déplacement

La deuxième consiste à conserver le déplacement et de recalculer une contrainte en équilibre. En utilisant l'équation 3.48, on a :

$$\frac{\mathbb{M}}{\gamma dt^2} u_{n+1} + (1 - \alpha) \frac{\gamma \mathbb{C}}{\beta dt} u_{n+1} + (1 - \alpha) \left[ \mathbb{K}_{NL} u_{n+1} + \frac{r_{n+1}}{(1 - \alpha)} \right] = f_{n+1}^{dyn} \quad (3.51)$$

En raisonnant sur les forces internes reprojctées aux noeuds, on va chercher la force interne en équilibre avec  $V_n$  sous la forme  $F_{n+1}^i = \mathbb{K}_{NL}u_{n+1} + \Delta F_i$ . Alors :

$$\Delta F_i = \frac{r_{n+1}}{(1 - \alpha)} \quad (3.52)$$

Cette variante sera notée admissibilité en contrainte (ADM CONT) dans la suite.

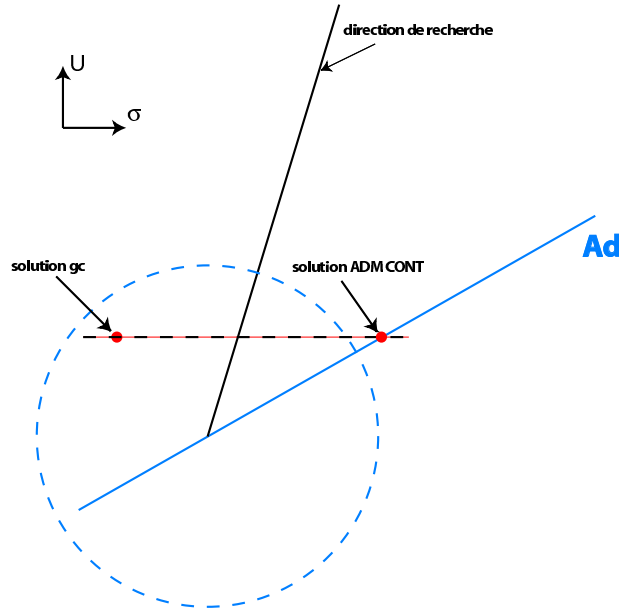


Figure 3.20: Schéma de l'admissibilité en contrainte

Une approche potentiellement plus précise, mais également légèrement plus coûteuse, est de faire ces deux rééquilibrages et de prendre la meilleure combinaison linéaire des deux couples équilibrés. C'est cette solution que nous avons choisie et que nous avons réalisée. Elle est décrite par la figure 3.21.

Nous avons construit deux couples équilibrés :  $[u_{n+1} + \Delta u; \mathbb{K}_{NL}u_{n+1}]$  et  $[u_{n+1}; \mathbb{K}_{NL}u_{n+1} + \Delta F_i]$ .

On construit une combinaison de ces deux couples.

$$S_\beta = [u_{n+1} + \beta \Delta u; \mathbb{K}_{NL}u_{n+1} + (1 - \beta) \Delta F_i] \quad (3.53)$$

Nous allons choisir le paramètre  $\beta$  qui minimise l'erreur en relation de comportement des couples  $S_\beta$ .

$$\zeta(\beta) = [\mathbb{K}_{NL}(u_{n+1} + \beta \Delta u) - (\mathbb{K}_{NL}u_{n+1} + (1 - \beta) \Delta F_i)]^T \mathbb{K}_{NL}^{-1} [\mathbb{K}_{NL}(u_{n+1} + \beta \Delta u) - (\mathbb{K}_{NL}u_{n+1} + (1 - \beta) \Delta F_i)] \quad (3.54)$$



Après simplification, on obtient une erreur qui s'écrit :

$$\zeta(\beta) = [(1 - \beta)\Delta F_i - \mathbb{K}_{NL}(\beta\Delta u)]^T \mathbb{K}_{NL}^{-1} [(1 - \beta)\Delta F_i - \mathbb{K}_{NL}(\beta\Delta u)] \quad (3.55)$$

Après un rapide calcul, on obtient analytiquement la valeur optimale :

$$\beta_{opt} = \frac{\Delta F_i^T \mathbb{K}_s^{-1} \Delta F_i + \Delta V^T \Delta F_i}{\Delta F_i^T \mathbb{K}_s^{-1} \Delta F_i + 2\Delta V^T \Delta F_i + \Delta V^T \mathbb{K}_s \Delta V} \quad (3.56)$$

Cette variante sera notée admissibilité optimale (ADM OPT) dans la suite.

L'influence de ces différentes variantes sera étudiée sur un cas un peu plus complexe que les cas 1D traités jusqu'à présent. Cette étude sera, en effet, conduite sur un cas 1D1/2 en utilisant le modèle présenté dans [\[Gratton 1998\]](#).



## 6 Étude comparée de l'efficacité de la méthode à direction de recherche sécante

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, l'approche de sous-structuration avec direction de recherche constante n'est pas suffisante lorsque la rigidité de la sous-structure varie beaucoup. Autrement dit, elle n'est pas capable d'être efficace pour des non-linéarités fortes. Ainsi, il est nécessaire d'utiliser des directions de recherche plus adaptées. Le fait que les directions de recherche ne soient pas constantes ni au cours des itérations ni même entre chaque pas de temps fait qu'il a fallu résoudre l'étape globale de façon adaptée, *i.e.* en utilisant un algorithme de gradient conjugué. Cette technique nous a permis de résoudre les problèmes de comportement couplés endommagement-compaction.

### 6.1 Endommagement

Elle nous a également permis de résoudre plus efficacement les problèmes traités avec des directions de recherche constante. On obtient ainsi de très bonnes courbes de convergence pour des problèmes identiques aux problèmes traités dans le paragraphe 4.2 sur l'endommagement.

La figure 3.22 montre la convergence de la méthode sur un exemple du même type que dans le paragraphe 4.2.

Les mêmes résultats, en terme de contrainte ou d'endommagement, sont obtenus.

### 6.2 Compaction

Il en va de même pour la compaction seule. On obtient bien des ondes qui accélèrent quand le milieu est comprimé. La génération d'ondes de choc est montrée dans la figure 3.23.

La méthode permet même d'obtenir des degrés de compaction supérieur, c'est à dire d'atteindre des degrés de non-linéarités supérieurs. Dans un cas où la non-linéarité est trop forte et où, notamment, on génère des ondes de chocs, la méthode à direction de recherche sécante permet de converger alors que la méthode à direction constante, quelque soient les directions choisies, ne permet pas de converger. Cette difficulté est confirmée par la figure 3.24 comparant les courbes d'erreur pour une direction de recherche sécante (qui converge) et une direction de recherche constante.

Les contraintes à convergence pour un cas sévère de compaction sont montrés dans la figure 3.25. On remarque la formation d'un choc au cours de la propagation. Cette formation suit le mécanisme expliqué dans le chapitre 2.

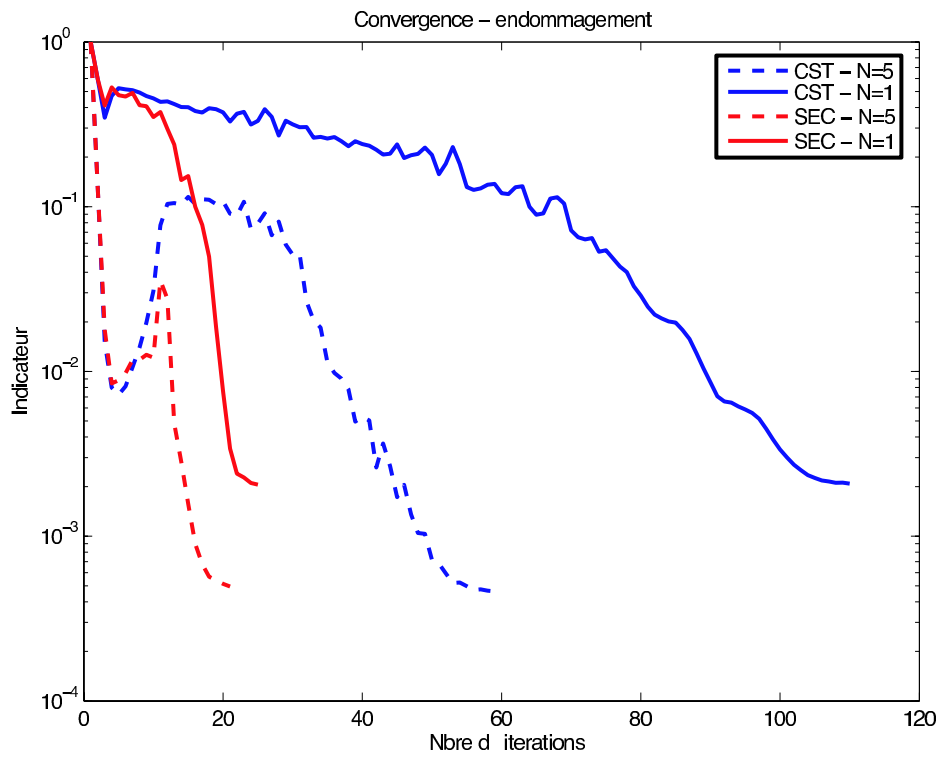


Figure 3.22: Convergence comparée pour l'endommagement

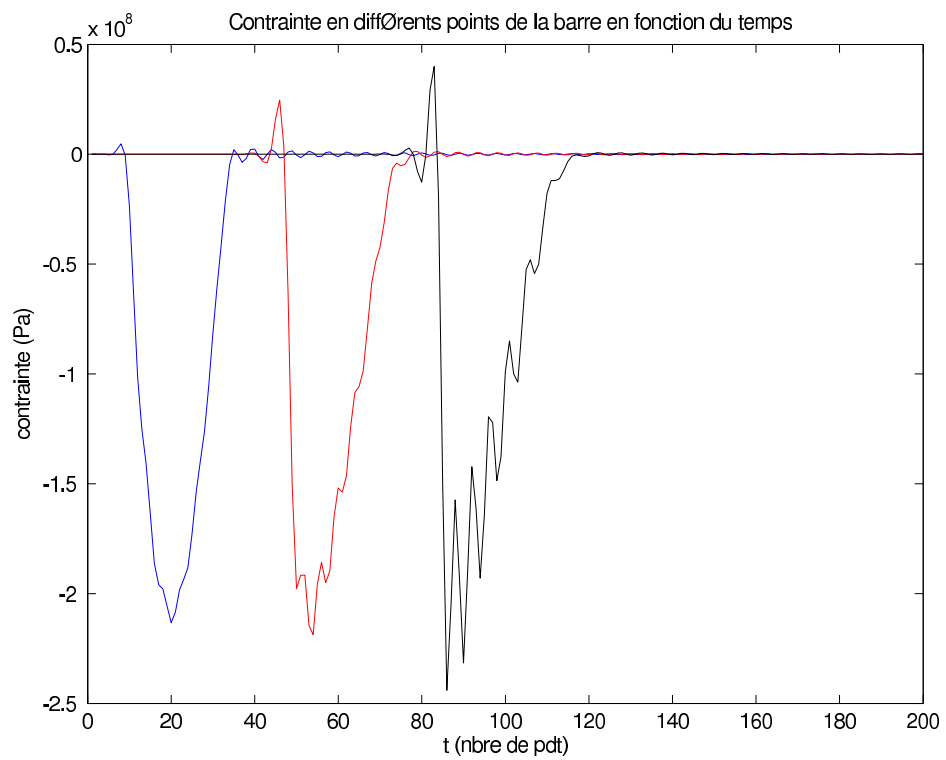


Figure 3.23: Génération d'ondes de choc - calcul par direction sécante

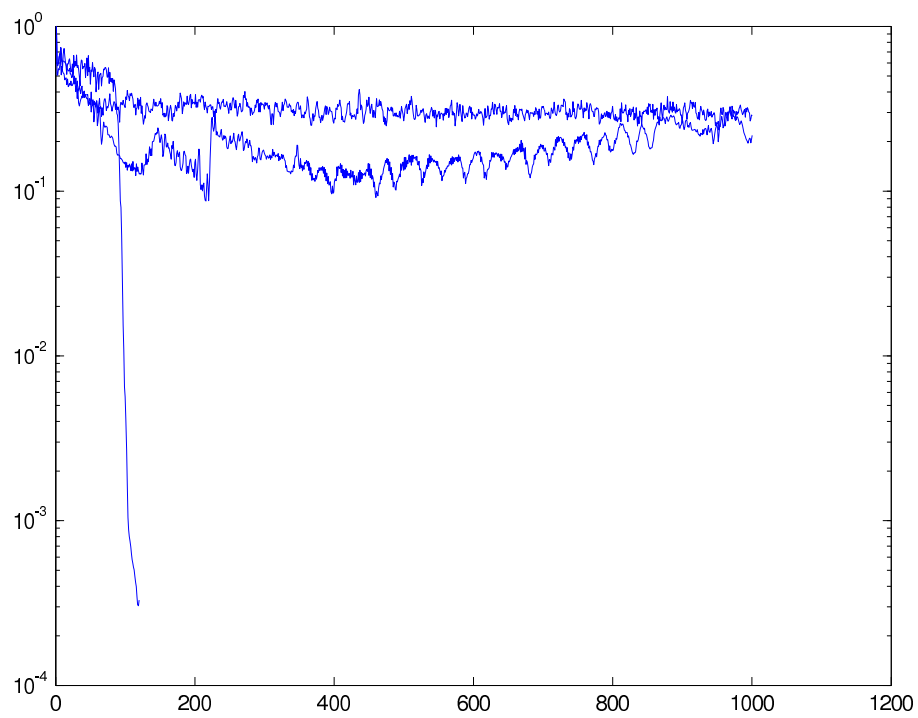


Figure 3.24: Convergence comparée pour la compaction

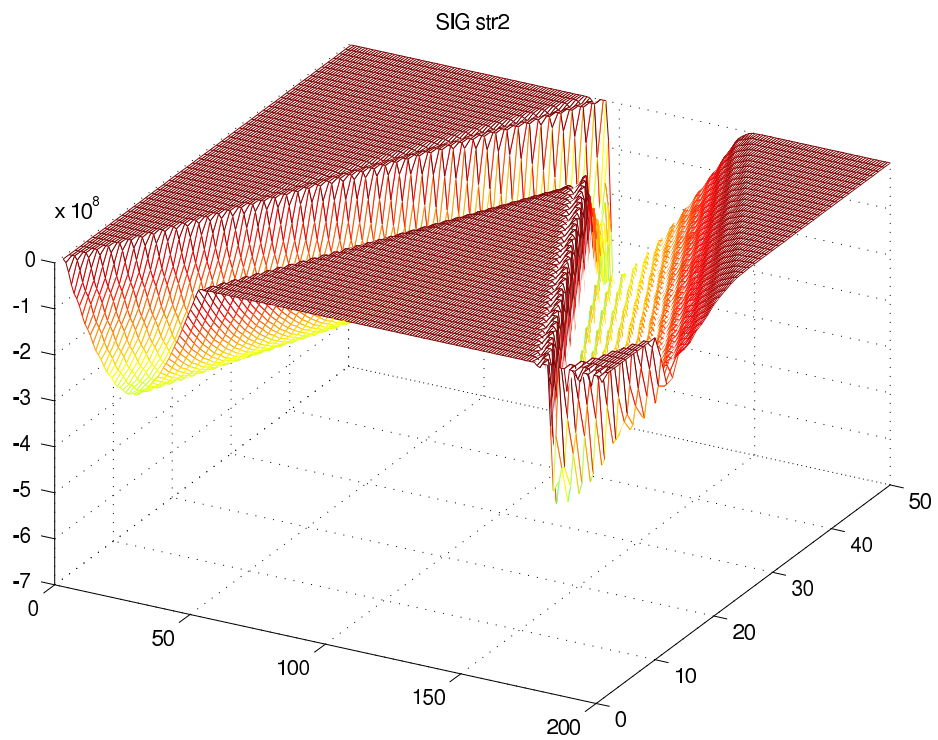


Figure 3.25: Contrainte pour le cas de compaction sévère

### 6.3 Endommagement/Compaction

Le cas de calcul pour le cas de comportement couplés est décrit dans la figure 3.26. On impose un chargement qui nous assurera d'avoir à la fois de la traction et de la compression au cours du chargement.

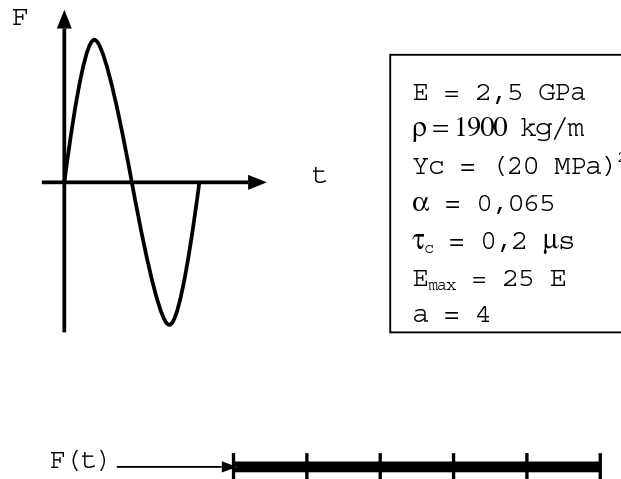


Figure 3.26: Cas de calcul pour le comportement couplé

L'utilisation d'un gradient conjugué accélère considérablement la vitesse de convergence. En effet, le fait de construire la solution par addition de vecteurs orthogonaux entre eux évite d'apporter des corrections colinéaires entre elles. Pour le cas traité, à chaque itération, le problème global converge en moins de 12 itérations de gradient conjugué. De plus, moins d'une vingtaine d'itérations de la méthode sont nécessaires pour converger. On constate donc un gain important.

La figure 3.27 représente le champ de contrainte à l'intérieur de la barre et la figure 3.28 représente la répartition de l'endommagement dans la barre.

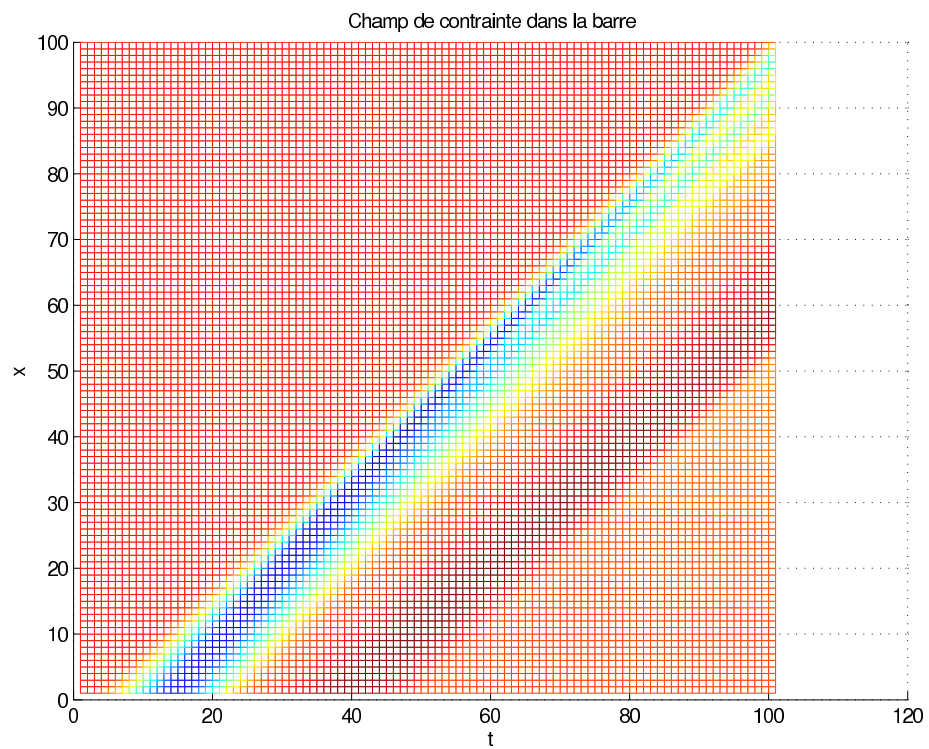


Figure 3.27: Champ de contrainte dans la barre

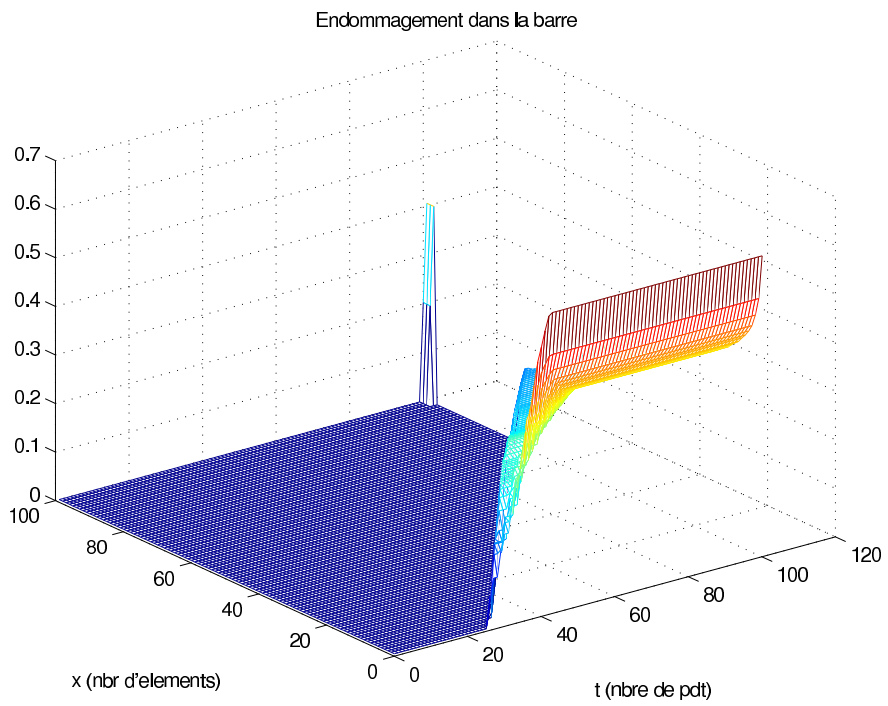


Figure 3.28: Endommagement dans la barre





---

# Simulation numérique 1D 1/2

*Dans ce chapitre, la simulation 1D 1/2 d'un essai d'impact plaque/plaque est décrite. La modélisation des différents matériaux est rappelée et se base sur la modélisation issue de la thèse de Michel Gratton [Gratton 1998]. La méthode présentée au chapitre précédent en utilisant les directions de recherche sécantes est testée*

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Description de l'essai</b>	<b>134</b>
<b>2</b>	<b>Modélisation 1D 1/2 de l'essai</b>	<b>134</b>
2.1	Modélisation des sous-structures	134
2.2	Modélisation des interfaces	137
<b>3</b>	<b>Résultats de simulation</b>	<b>138</b>
<b>4</b>	<b>Optimisation du GC</b>	<b>144</b>

---

Le but de ces calculs est de valider la méthode dans un cadre numérique moins lourd qu'un calcul 3D complet. Des références expérimentales sont à notre disposition et permettront une confrontation entre la simulation et les essais.

## I Description de l'essai

Les essais d'impact plaque/plaque ont tous été réalisés au *Centre d'Études de Gramat*, centre de la DGA spécialisé dans l'étude des explosifs, des missiles et de l'électromagnétisme.

La configuration typique d'un essai est la suivante :

- Un impacteur animé d'une vitesse initiale  $v_0$  ;
- Une éprouvette ;
- Un buffer qui sert à homogénéiser le signal reçu de l'éprouvette. Une surface métallique est collée sur la face arrière sur laquelle on va mesurer la vitesse matérielle ;
- Une fenêtre faite d'un matériau ayant la même impédance mécanique que le buffer servant à éviter toute réflexion sur la face arrière du buffer qui pourrait polluer le signal entrant ;
- Des moyens de métrologie, comme un laser VISAR pour mesurer les vitesses en face arrière du buffer.

Ce dispositif est décrit dans la figure 1.

## 2 Modélisation 1D 1/2 de l'essai

Dans le cas d'un impact dans le sens des torons, nous allons montrer qu'il est possible de faire une modélisation simplifiée de cet essai. Pour cela, on choisit de différencier le toron longitudinal du reste du matériau, qu'on homogénéise et qu'on appellera matrice équivalente. Ces deux constituants sont reliés par une interface. La modélisation est décrite dans la figure 2. L'idée est de tenir compte des phénomènes importants pour chacun des constituants. Les phénomènes pris en compte sont décrits précisément dans la suite.

### 2.1 Modélisation des sous-structures

#### 2.1.1 Modélisation du toron longitudinal

Le but est de prédire la rupture du matériau et notamment la rupture des torons. Pour cela, on utilise un modèle d'endommagement. Afin d'éviter tout phénomènes de localisation, on introduit un effet de vitesse pour l'endommagement, décrit dans [Allix et Deü 1997]. Il s'agit de supposer que le taux d'endommagement est borné.

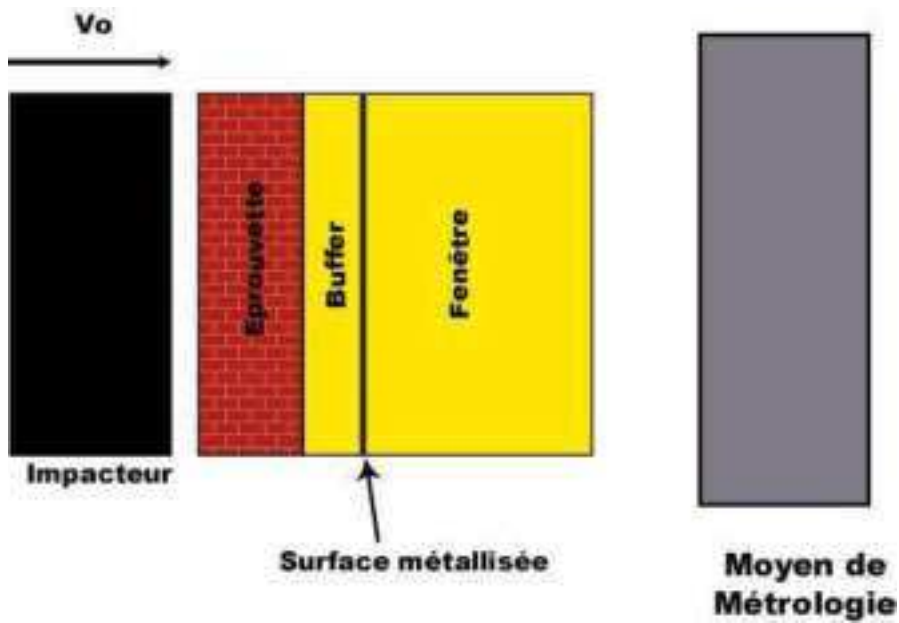


Figure 4.1: Dispositif expérimental d'un essai d'impact plaque/plaque

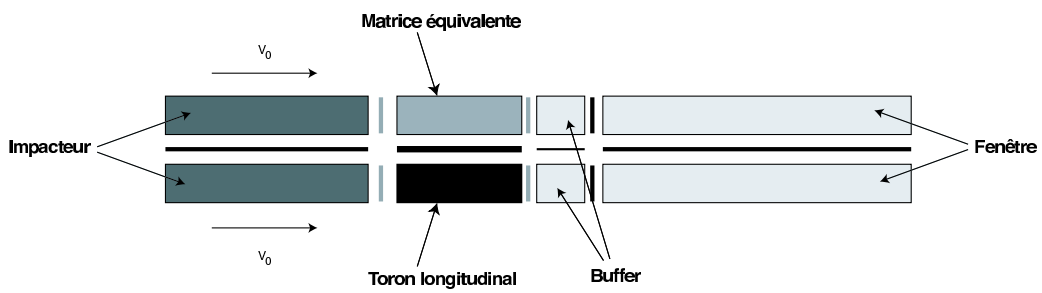


Figure 4.2: Modélisation 1D 1/2

Il ne peut aller plus vite que la propagation de l'information dans le matériau. Un effet retard est donc introduit comme suit :

$$\dot{d} = \frac{1}{\tau_c} \left[ 1 - \exp(-a < f_d(Y^{\frac{1}{2}}) - d >_+) \right] \quad (4.1)$$

avec

$$f_d(Y^{\frac{1}{2}}) = \frac{\sqrt{Y}}{\sqrt{Y_c}} \quad (4.2)$$

$\tau_c$  correspond au temps minimum pour que l'endommagement passe de 0 à 1.  $a$  est un paramètre de "viscosité".  $Y$  est la force d'endommagement associée à  $d$ .  $Y_c$  est donc un paramètre de l'évolution de l'endommagement.

Les valeurs utilisées pour le calcul sont :

$$\begin{cases} a = 0.065 \\ \tau_c = 0.2 \mu s \\ Y_c = 20 MPa \end{cases} \quad (4.3)$$

### 2.1.2 Modélisation de la matrice équivalente

Le phénomène important dans la matrice, et donc dans la matrice équivalente, est le phénomène de compaction, dû aux nombreux pores contenus dans la matrice. Une analyse tomographique non-officielle a estimé la porosité à plus de 20 %. On ajoute à ce phénomène de compaction élastique de la plasticité correspondant aux déformations résiduelles des trous.

Le modèle est donc le suivant :

– Partie élastique de la déformation

$$\begin{cases} \sigma = \frac{E_0 \varepsilon_e}{(1 + a \varepsilon_e)^2} & \text{si } \varepsilon_e < 0 \\ \sigma = 0 & \text{si } \varepsilon_e > 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

– Partie poreuse

$$\begin{cases} \sigma_{eq} = \langle -\sigma \rangle_+ \\ p = -\varepsilon_p \\ f = \sigma_{eq} - R - R_0 \\ R = b \left[ \exp\left(\frac{p}{p_0 - p}\right) - 1 \right] \end{cases} \quad (4.5)$$

Les valeurs des différents paramètres matériaux ont été identifiées par Michel Gratton et sont :

$$\begin{cases} E_0 = 7,4 \text{ GPa} \\ a = 8 \\ b = 420 \text{ MPa} \\ p_0 = 0,105 \end{cases} \quad (4.6)$$

Il est à noter que dans l'étude présentée ultérieurement, seule la partie élastique est prise en compte.

### 2.1.3 Modélisation du buffer

La partie du buffer (en PMMA) située derrière le toron est fortement sollicitée et a un comportement très plastique. Le modèle choisi est un modèle très simple de plasticité (type Prandl-Reuss), tendant vers le plastique parfait. La partie derrière la matrice équivalente est beaucoup moins sollicitée et est supposée élastique.

Le modèle de plasticité s'écrit :

$$\begin{cases} \sigma_{eq} = \langle -\sigma \rangle_+ \\ p = -\varepsilon_p \\ f = \sigma_{eq} - R - R_0 \\ R = kp^\alpha \end{cases} \quad (4.7)$$

Les caractéristiques élastiques et plastiques choisies sont :

$$\begin{cases} E_0 = 9 \text{ GPa} \\ k = 200 \text{ MPa} \\ \alpha = 1 \\ R_0 = 200 \text{ MPa} \end{cases} \quad (4.8)$$

### 2.1.4 Modélisation de l'impacteur et de la fenêtre

L'impacteur (en aluminium) et la fenêtre (en PMMA) sont supposés simplement élastiques.

Les modules d'Young de chacun des matériaux sont :

$$\begin{cases} E_{imp} = 70 \text{ GPa} \\ E_{fen} = 9 \text{ GPa} \end{cases} \quad (4.9)$$

## 2.2 Modélisation des interfaces

### 2.2.1 Interface toron/matrice

L'interface toron/matrice est modélisée par une interface de frottement modifiée, présentée au chapitre précédent.

Les paramètres définissant l'interface sont :

$$\begin{cases} k_{int} &= 10^8 \text{ MPa.m}^{-1} \\ T_0^{max} &= T_0 + f.P \\ f &= 0.2 \\ T_0 &= 20 \text{ MPa} \end{cases} \quad (4.10)$$

### 2.2.2 Interface dans le buffer

Dans le buffer, afin de permettre le déchaussement, on introduit une interface parfaitement plastique.

Les paramètres définissant l'interface sont :

$$\begin{cases} k_{int} &= 10^8 \text{ MPa.m}^{-1} \\ T_0^{max} &= 200 \text{ MPa} \end{cases} \quad (4.11)$$

### 2.2.3 Interface impacteur/éprouvette et éprouvette/buffer

L'interface entre l'impacteur et l'éprouvette est une interface de contact qui permet éventuellement un redécollement après le retour de l'onde. L'interface entre l'éprouvette et le buffer est modélisée de la même façon.

## 3 Résultats de simulation

Les résultats obtenus par les essais sont les vitesses matérielles en face arrière du buffer. L'avantage de la simulation est de pouvoir avoir beaucoup plus d'informations sur l'état de contrainte et/ou de dégradation à l'intérieur de l'éprouvette.

On commence par donner les vitesses en face arrière pour essai à  $259 \text{ m.s}^{-1}$  dans la figure 4.3. La comparaison avec l'essai permet bien de retrouver le bon temps d'arrivée de différentes ondes dans la matrice et le toron. Les niveaux de vitesse matérielle simulée sont en accord avec les vitesses expérimentales mesurées.

On montre également, dans la figure 4.4, les simulations réalisées pour des vitesses matérielles différentes. On observe bien une dépendance du temps d'arrivée des ondes de la matrice équivalente en fonction de la vitesse de l'impact. Les niveaux de vitesse matérielle varient également en fonction du chargement.

En plus des vitesses en face arrière, la simulation permet d'avoir les profils d'endommagement et donc d'estimer le lieu de rupture des torons.

On peut donner également les contraintes en fonction du temps et de l'espace pour la matrice équivalente et pour les torons.

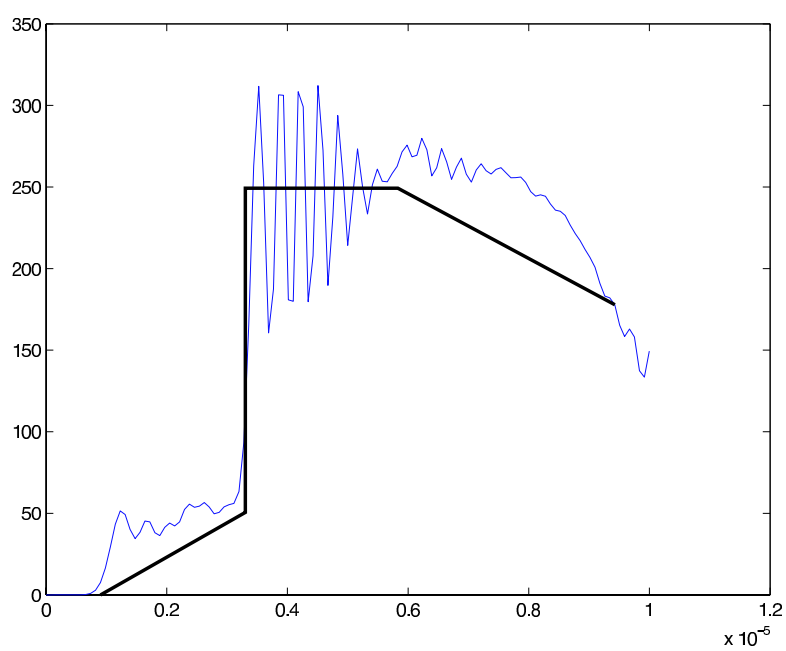


Figure 4.3: Comparaison essai/simulation pour une vitesse de 259 m/s



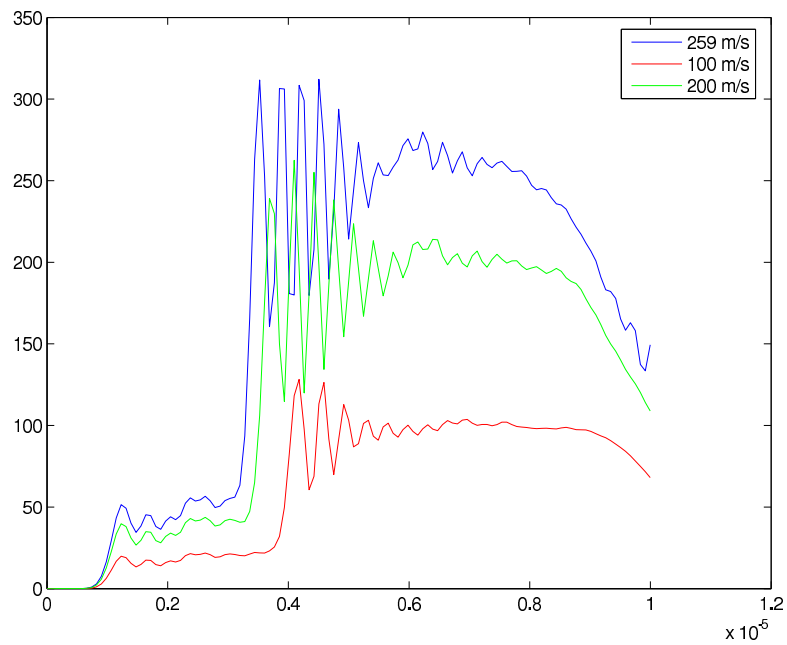


Figure 4.4: Comparaison des vitesses en face arrière pour différentes vitesses d'impact

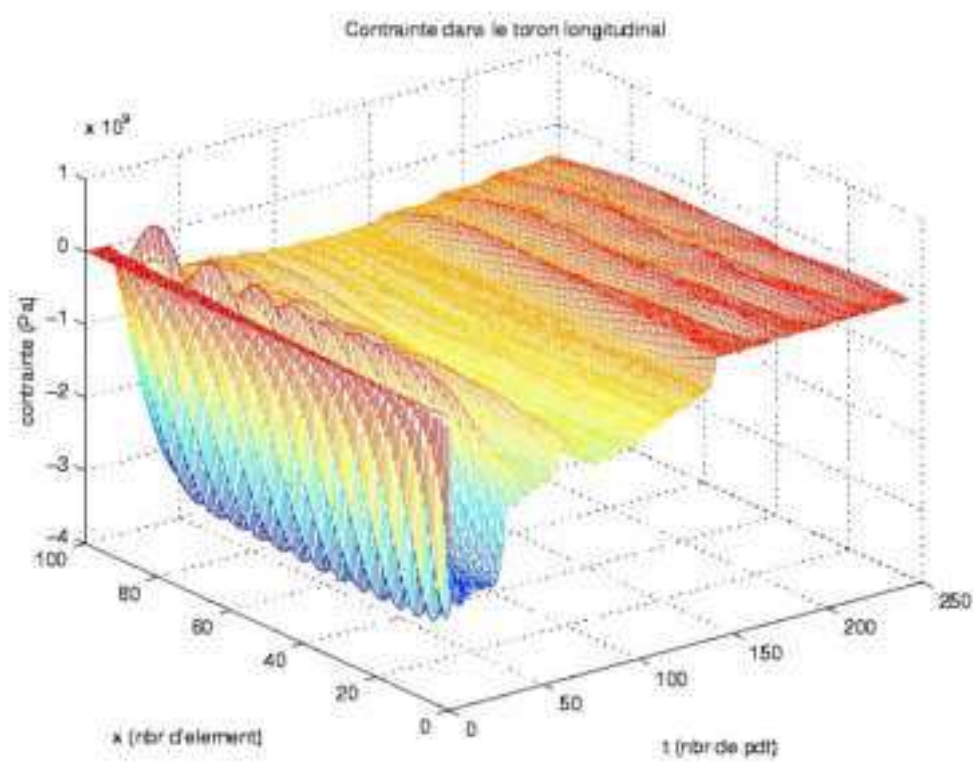


Figure 4.5: Contrainte dans les torons transverses

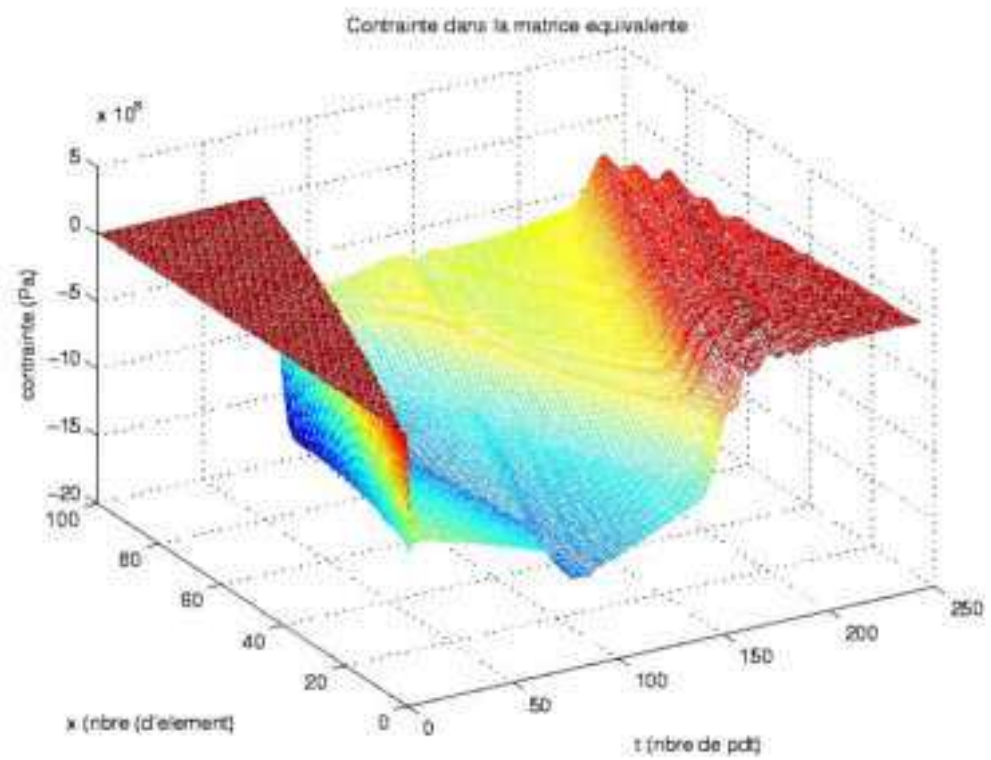


Figure 4.6: Contrainte dans la matrice équivalente

On remarque tout de même la présence de fortes oscillations qui nuisent grandement à la convergence du calcul. En effet, ces fortes oscillations entraînent de fortes variations locales dans les directions de recherche. Cela montre que le schéma HHT utilisé n'est pas suffisant pour se prémunir des oscillations dues aux chocs pour des niveaux de sollicitations importants.

Un moyen pour se prémunir plus efficacement est d'utiliser de la viscosité artificielle pour laquelle nous avons relié le paramètre de viscosité à la dissipation physique due au choc. L'implantation n'a pour le moment pas été réalisée.

## 4 Optimisation du GC

Le but de cette partie est de déterminer l'influence de la tolérance du gradient conjugué. Cette influence est également testée avec ou sans reconstruction d'un couple admissible. Les différents rééquilibrages ont tous été testés et sont comparés dans la figure 4.8. Les résultats de cette étude sont présentés dans les tableaux 4.1. Pour chaque calcul, cent itérations de la méthode ont été réalisées. La taille réelle du calcul est représentée par le nombre d'itérations du gradient conjugué.

	term. tol.	$10^{-3}$	$10^{-10}$
No re- building	(LATIN error) <sup>2</sup>	no convergence	0.67 %
	pcg iterations x10 <sup>6</sup>	1.36	2.43
	pgc iterations per global stage	4.25	7.59
displ. re- building	(LATIN error) <sup>2</sup>	1.8 %	0.67 %
	pcg iterations x10 <sup>6</sup>	1.37	2.44
	pgc iterations per global stage	4.28	7.63
stress re- building	(LATIN error) <sup>2</sup>	1.8 %	0.67 %
	pcg iterations x10 <sup>6</sup>	1.35	2.43
	pgc iterations per global stage	4.22	7.59
opt. re- building	(LATIN error) <sup>2</sup>	1.2 %	0.67 %
	pcg iterations x10 <sup>6</sup>	1.37	2.44
	pgc iterations per global stage	4.28	7.63

Tableau 4.1: Influence of the termination tolerance

La première constatation est que lorsque la tolérance est très petite, et donc que la résolution du gradient conjugué est très précise, il n'y a pas de différence entre la solution avec ou sans reconstruction d'un couple admissible. En effet, le rééquilibrage n'est "efficace" que lorsque la solution est éloignée de la solution théorique. Ce résultat est donc logique.

La deuxième est que la perte en qualité de solution est nulle jusqu'à une certaine limite lorsqu'on augmente la tolérance. Cette limite est difficilement déterminable analytiquement mais ces résultats nous donnent un ordre de grandeur du choix à faire.

Enfin, on remarque que le gain en terme d'opérations est important quand on augmente la tolérance et que la solution avec rééquilibrage est toujours plus intéressante.

Comme nous l'avions prédit dans la partie présentant la méthode, une trop grande tolérance sur le gradient conjugué peut amener à ne plus assurer la convergence de l'algorithme. Dans le cas présenté ici, un trop grand laxisme sur la direction de recherche a conduit à obtenir des solutions intermédiaires où l'endom-

magement valait 1 dans certaines partie de la structure. Une fois cet état atteint, l'algorithme a beaucoup de mal à en sortir et la convergence de l'algorithme en pâtit.

Pour comparer les différents rééquilibrages, nous allons comparer leur courbe de convergence à tolérance fixée. Ici, nous n'avons considéré que les cas où l'algorithme convergeait.

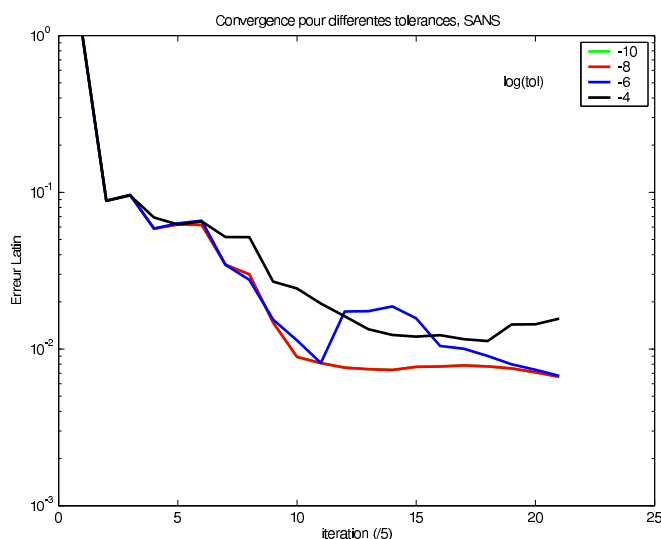


Figure 4.7: Comparaison de la convergence sans modification

Les courbes de convergence pour différentes tolérances sont montrées dans la figure 4.7. Comparée aux autres méthodes, la méthode sans modification de la solution brute du gradient conjugué a besoin d'une tolérance plus petite (et donc d'un nombre d'itérations du gradient conjugué plus grand) pour atteindre le même taux de convergence. Cette solution a, de plus, le désavantage de ne pas assurer que la solution de l'étape globale appartienne à l'espace admissible puisque le gradient conjugué ne va donner qu'une approximation d'une solution de cet espace. L'indicateur d'erreur de la méthode LATIN n'a, alors, plus de sens.

Dans la figure 4.8, la tolérance est fixée et on compare les différentes méthodes. On constate que les différentes options convergent sensiblement de la même manière. La solution optimisée est *a priori* celle à privilégier.

Pour les trois variantes dont les convergences pour différentes tolérances sont montrées dans les figure 4.9, 4.10 et 4.11, il apparaît que la convergence n'est que peu affectée par la modification de la tolérance. En revanche, le nombre d'itérations du gradient conjugué sur le total du calcul est, pour toutes les options, bien inférieur

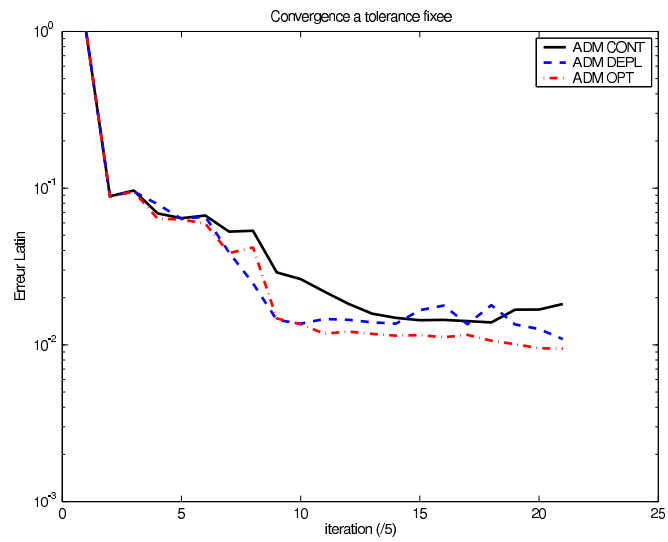


Figure 4.8: Comparaison de la convergence des différentes options

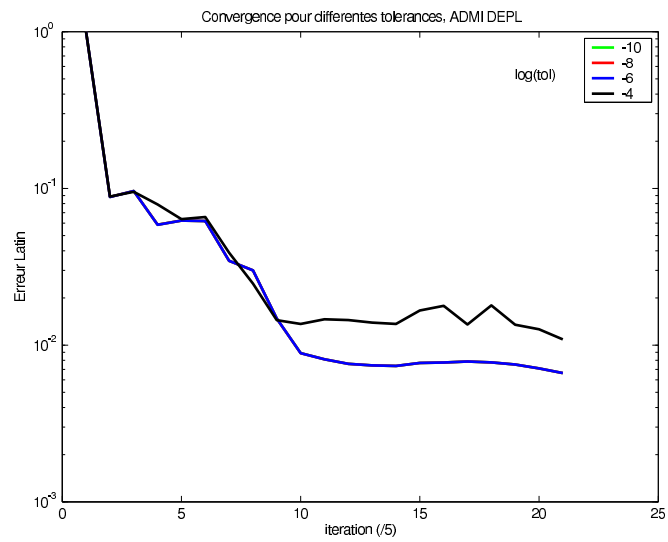


Figure 4.9: Comparaison de la convergence pour l'ADM DEPL

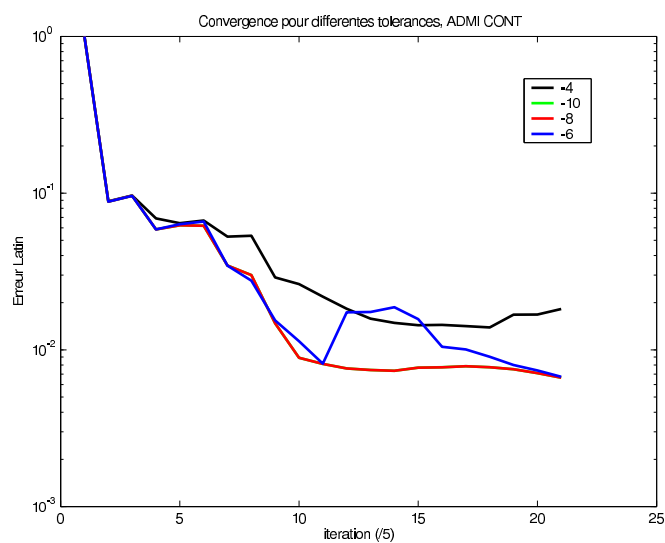


Figure 4.10: Comparaison de la convergence pour l'ADM CONT

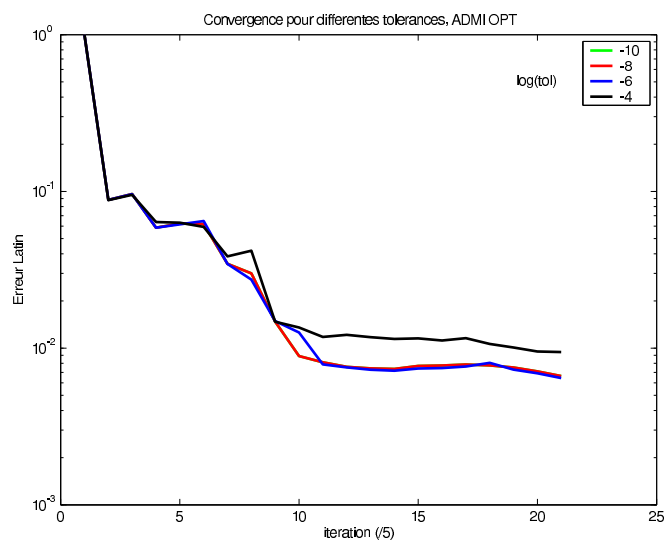


Figure 4.11: Comparaison de la convergence pour l'ADM OPT



pour des tolérances plus grandes. De plus, contrairement à la solution sans reconstruction, pour ces trois variantes, les solutions de l'étape globale appartiennent à l'espace admissible.

---

# Simulation numérique de choc en 3D

*Dans ce chapitre, les résultats du calcul de choc en 3D sont présentés. Avant de commencer à programmer la méthode testée en 1D et 1D1/2 dans un code éléments finis adapté, nous avons réalisé un calcul avec une modélisation des sous-structures élastiques et des interfaces non-linéaires (contact sans frottement) pour étudier la faisabilité d'un calcul de taille importante.*

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Le calcul à réaliser</b> . . . . .	<b>150</b>
<b>2</b>	<b>Les difficultés rencontrées</b> . . . . .	<b>152</b>
<b>3</b>	<b>Utilisation du calcul parallèle</b> . . . . .	<b>152</b>
3.1	Les étapes parallélisables . . . . .	152
3.2	La définition de groupe de sous-structures . . . . .	153
3.3	La procédure parallélisé . . . . .	154
<b>4</b>	<b>Résultats</b> . . . . .	<b>156</b>
<b>5</b>	<b>Piste pour le stockage des non-linéarités</b> . . . . .	<b>158</b>

---

## I Le calcul à réaliser

Le calcul réalisé est la simulation 3D d'un essai d'impact plaque/plaque. Cet essai est le même que celui considéré dans la partie précédente et est rappelée dans la figure 5.1. On utilise la périodicité du matériau et ses symétries pour réduire le problème à une cellule dans les directions transverses. Pour la direction longitudinale, il faudrait dix cellules théoriquement pour représenter parfaitement l'essai. À cause d'un manque de puissance de calcul pour effectuer le post-traitement, nous avons été obligé de limiter à huit le nombre de cellules.

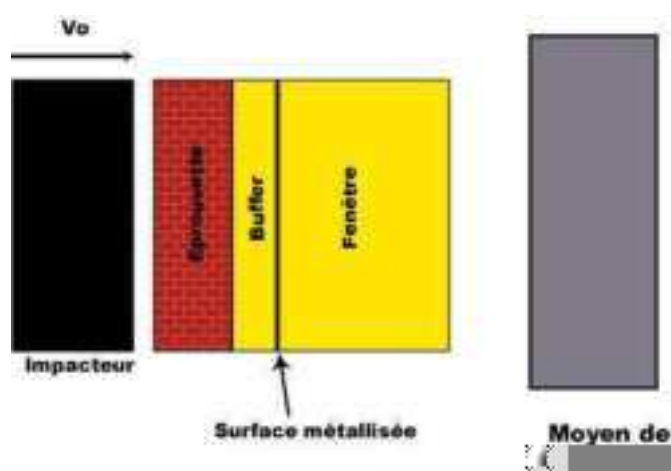


Figure 5.1: Dispositif expérimental d'un essai d'impact plaque/plaque

La modélisation éléments-finis que nous avons réalisé est décrite dans la figure 5.2 et a été réalisée dans le logiciel Cofast, développé par Laurent Champaney.

Dans ce maillage, chaque arête est discrétisée avec cinq éléments et on s'arrange pour avoir des maillages conformes à chaque interface. Cela conduit à couper certains constituants en deux. Le modèle numérique qui résulte de cette discrétisation contient 260 000 ddl. Pour réaliser le calcul, la structure a été divisé en 96 sous-structures et un peu plus de 400 interfaces. Le temps d'étude était  $10 \mu s$ , comme pour les essais d'impact plaque/plaque. La discrétisation temporelle utilisée était une discrétisation régulière contenant un peu plus de 220 pas de temps. Comme nous l'avons déjà dit, tous les mésoconstituants sont supposés élastiques. Le but est de se confronter aux difficultés d'un calcul de dynamique avec un très grand nombre de degrés de liberté.

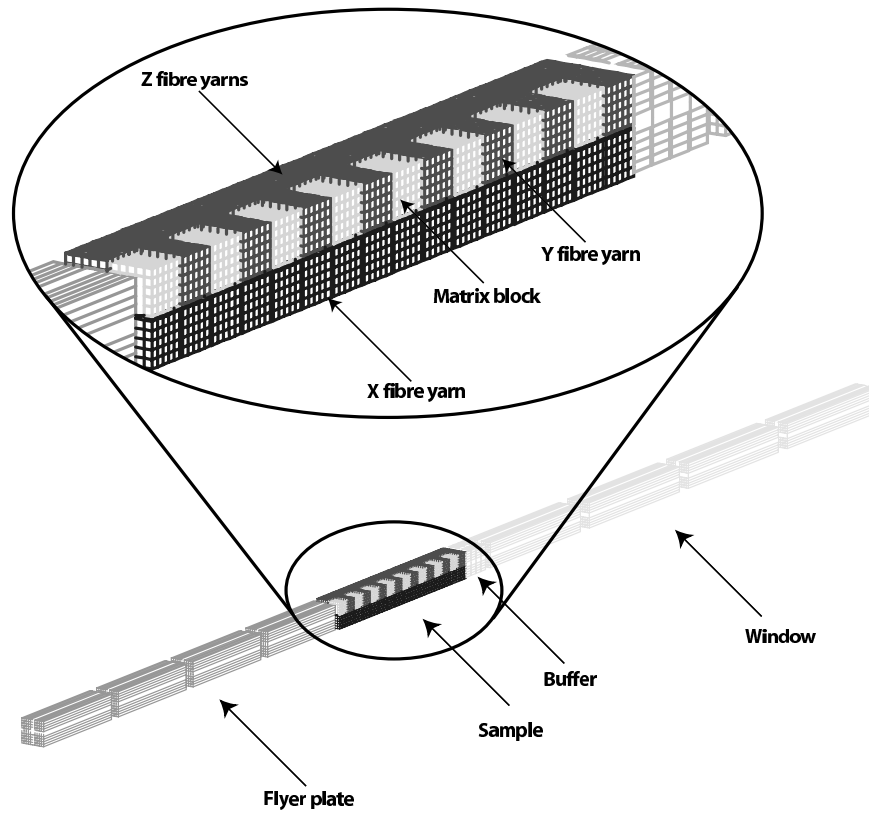


Figure 5.2: Modélisation éléments finis d'un essai d'impact plaque/plaque

## 2 Les difficultés rencontrées

Le problème qui nous a empêché, dans un premier temps, de mener à bien le calcul est un problème de place mémoire. En effet, il est nécessaire de stocker les champs de déplacement, de vitesse dans les sous-structures, ainsi que les efforts et les vitesses sur toutes les interfaces et ceci pour chaque pas de temps. Cette quantité d'informations nécessaire pour la réalisation du calcul dépasse la capacité d'indexage d'un processeur 32 bits et donc la taille maximale d'un fichier. Cela rend impossible la mise en œuvre d'un calcul avec autant de degrés de liberté.

Deux solutions peuvent être envisagées pour remédier à cet obstacle. La première est de modifier le logiciel afin qu'il puisse sauvegarder sur des fichiers différents et ne pas dépasser la taille critique susmentionnées. Cette solution n'est qu'un palliatif et ne peut nous satisfaire. D'autant plus que la deuxième solution, l'utilisation du calcul parallèle, permet également de réduire fortement le temps de calcul.

Le paragraphe suivant va s'intéresser à la parallélisation de la méthode.

## 3 Utilisation du calcul parallèle

### 3.1 Les étapes parallélisables

La méthode de décomposition de domaine présentée dans ce travail est, comme beaucoup de méthodes de décomposition de domaine, une méthode naturellement parallélisable. En effet, pendant les deux étapes de la méthode (étape locale et étape linéaire), on résout des problèmes indépendants par sous-structure et par interface. Ces problèmes peuvent donc être résolus simultanément par des processeurs différents.

À l'étape linéaire, il faut résoudre un problème linéaire par sous-structure. Chacun de ces problèmes est indépendant des autres et peut donc être traité par un processeur différent par sous-structure.

À l'étape locale, on résout indépendamment le comportement sur chaque sous-structure et sur chaque interface. De la même façon, ces problèmes peuvent être traités par des processeurs différents.

Entre l'étape linéaire et l'étape locale, il est nécessaire de faire une étape d'échange d'informations. Comme le montre la figure 5.3, l'étape linéaire sur la sous-structure  $\Omega_E$  permettra de calculer  $\underline{F}_{EE'}$  et  $\underline{W}_{EE'}$ . De même, l'étape linéaire sur la sous-structure  $\Omega_{E'}$  permettra de calculer  $\underline{F}_{E'E}$  et  $\underline{W}_{E'E}$ .

Afin d'être en mesure de réaliser l'étape locale sur l'interface  $\Gamma_{EE'}$ , l'information, composée des champs de forces et vitesses sur l'interface, doit se transmettre entre la sous-structure  $\Omega_E$  et la sous-structure  $\Omega_{E'}$ . Afin de réaliser cette

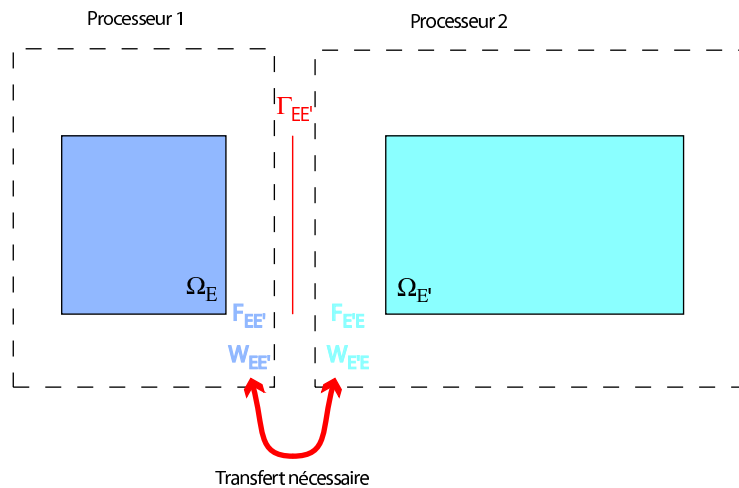


Figure 5.3: Échange d'informations à l'interface

étape d'échange, il est nécessaire d'attendre que tous les processeurs aient fini de résoudre l'étape linéaire.

### 3.2 La définition de groupe de sous-structures

Cependant, bien que la parallélisation soit naturelle, elle n'était pas encore disponible dans le logiciel Cofast, développé par Laurent Champaney. Il a donc été nécessaire de réfléchir à un moyen de l'implémenter. Au moment où le problème a été traité, la machine SGI Origin 2000 du LMT-Cachan était disponible et en état de marche. Cette machine dispose de 64 processeurs et d'une mémoire partagée d'environ 20 Go. C'est pour cette machine que la solution proposée est adaptée.

Le nombre de processeurs étant inférieur au nombre de sous-structures présentes dans le problème à dix cellules à résoudre, il a fallu créer des groupes de sous-structures. Ces groupes regroupent plusieurs sous-structures (au choix de l'utilisateur) et toutes leurs interfaces. Certaines de ces interfaces seront communes entre deux sous-structures du groupe, certaines seront en relation avec un sous-groupe différent. Cet état est décrit par la figure 5.4.

Deux critères vont permettre de guider la création des groupes de sous-structures.

Le premier critère est la répartition de charge sur chaque processeur. En effet, le gain en terme de temps de calcul sera optimal si chaque processeur met le même temps pour résoudre le problème qui lui incombe. Le temps de résolution d'un problème étant relié directement à la taille du problème à résoudre, il faut que chaque groupe ait le même nombre de degrés de liberté à gérer. Cela est relativement facile à assurer car, pour le 3D C/C, les maillages sont conformes et réguliers.

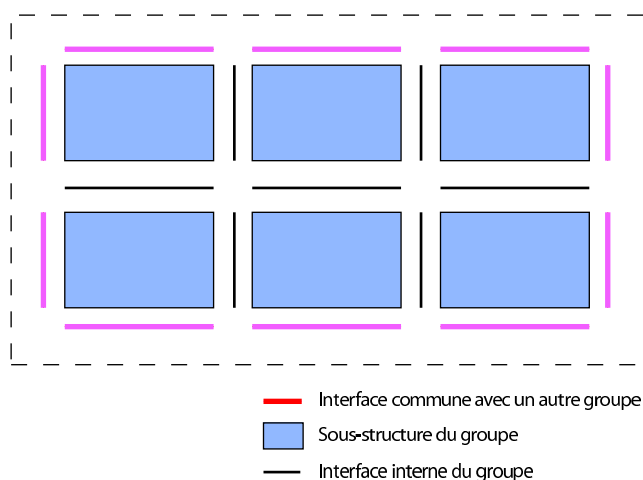


Figure 5.4: Un groupe de sous-structure

Le deuxième critère est la limitation des données à échanger entre chaque groupe. Il est donc préférable de choisir des sous-structures contiguës pour former les groupes afin de limiter les interactions avec les autres groupes et donc de limiter le transfert d'informations qui ralentit, potentiellement considérablement, le calcul.

### 3.3 La procédure parallélisé

Le logiciel Cofast a donc été parallélisé, en grande partie grâce à Laurent Champaney. Cette parallélisation est gérée par des scripts *perl*. Ces scripts démarrent un processus Cofast par groupe de sous-structures et gèrent le lancement simultané des étapes sur chaque processeur. Il ne s'agit pas d'une vraie parallélisation au sens informatique du terme avec une automatisation de la répartition sur les processeurs, mais d'une parallélisation au sens mécanique du terme. Entre chaque étape de la méthode, les processus sont mis en pause en attendant que tous les processeurs aient fini leur tâche. Il est donc fondamental de bien répartir la charge sur chaque processeur afin de limiter ce temps d'attente. Un équilibrage défectueux pénaliserait grandement la méthode.

L'algorithme parallélisé est expliqué dans la figure 5.5.

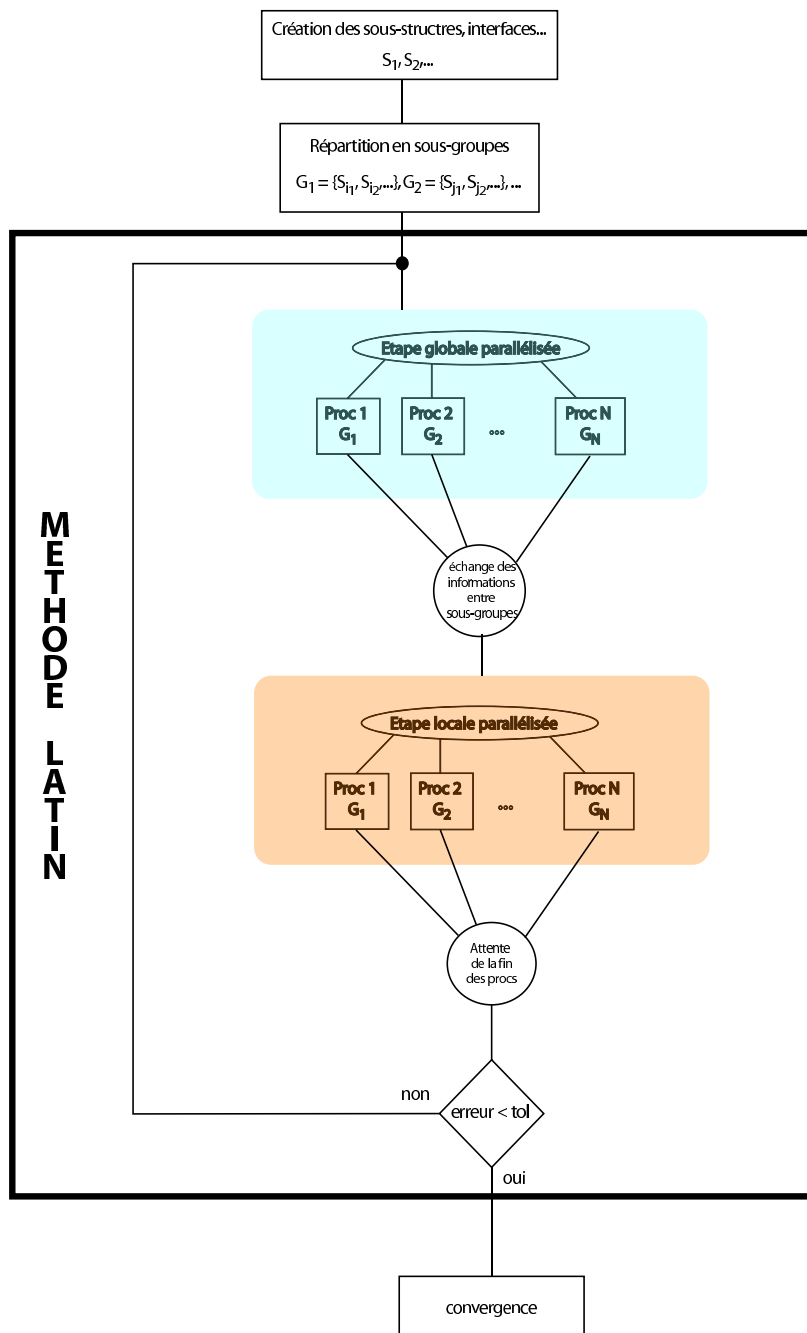


Figure 5.5: Algorithme parallélisé



## 4 Résultats

Les résultats montrés ici ont été réalisés en utilisant la méthode parallélisée avec cinq ou huit cellules dans la direction longitudinale. On rappelle que les sous-structures ont un comportement élastique et que les interfaces entre les mésoconstituants sont des interfaces de contact.

La figure 5.6 montre le champ de contrainte de Von Mises dans l'éprouvette. Les torons dans la direction  $y$  ont été enlevés pour une meilleure visualisation des phénomènes à cœur. L'impact sur l'éprouvette s'effectue à gauche sur la figure.

On remarque bien que les ondes se propagent à des vitesses très différentes dans le toron longitudinal et dans les autres mésoconstituants.

Le toron longitudinal, en bas à gauche, est contraint sur toute sa longueur, signe que le signal s'est propagé plus vite que dans les torons transverses ou dans les blocs de matrice.

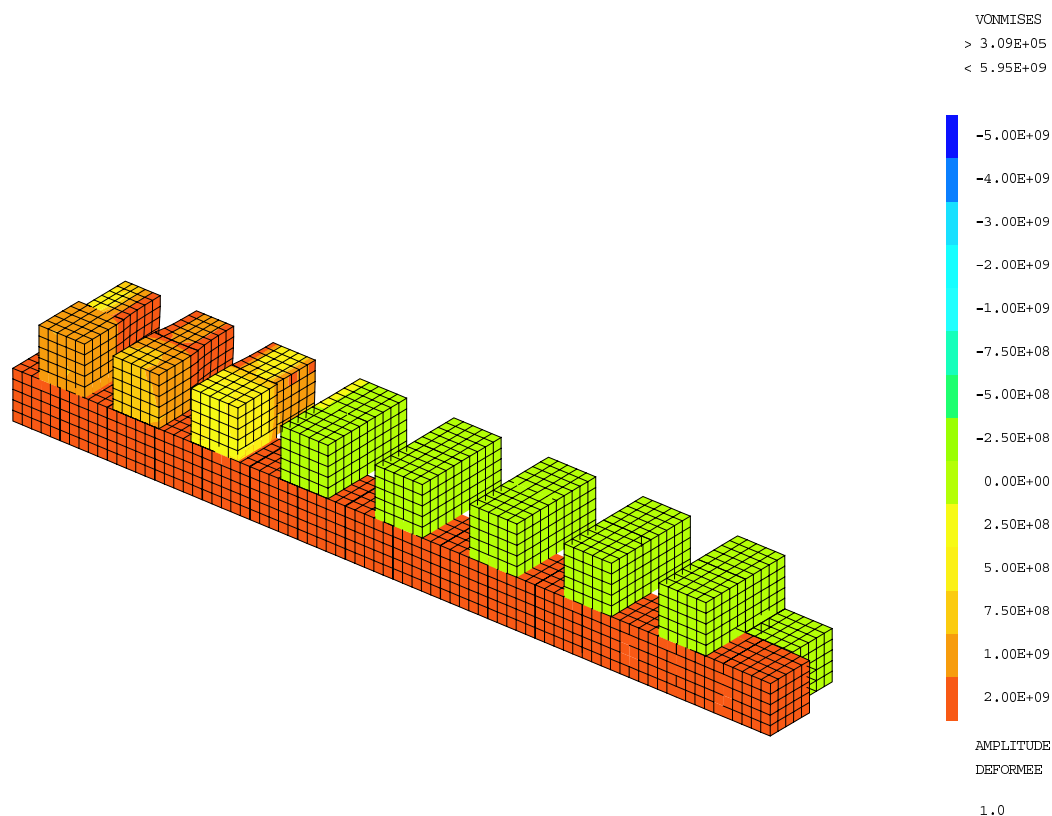


Figure 5.6: Contrainte de Von Mises

La figure 5.7 met en valeur le déchaussement du toron longitudinal. Ce phénomène

est observé sur tous les essais d'impact. Dans cette figure, on constate encore la forte hétérogénéité de chargement entre les différents mésoconstituants.

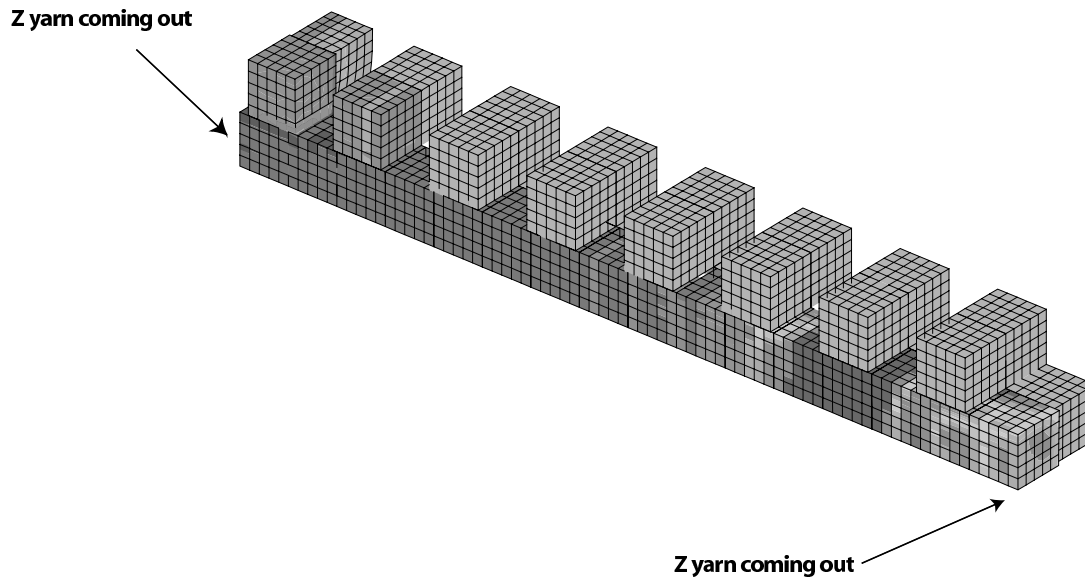


Figure 5.7: Contrainte longitudinale

Enfin, la figure 5.8 qui représente la contrainte transversale  $\sigma_{YY}$  dans le matériau à un temps donné, montre que les interfaces entre mésoconstituants sont des lieux de fortes concentrations de contraintes. Cela confirme l'importance des modèles d'interfaces.

On remarque que les torons longitudinaux sont extrêmement contraints transversalement. Cela va dans le sens du mécanisme de rupture décrit dans le thèse de Michel Gratton [Gratton 1998]. Les torons sont fortement contraints transversalement par la dilatation des blocs de matrice, créant un blocage, un encastrement. Le lieu du blocage bouge, suivant la propagation des ondes dans la matrice. La rupture se produit lorsque l'onde réfléchi au bout du toron croise cet encastrement. Le toron subit alors une forte traction qui mène à sa rupture par endommagement.

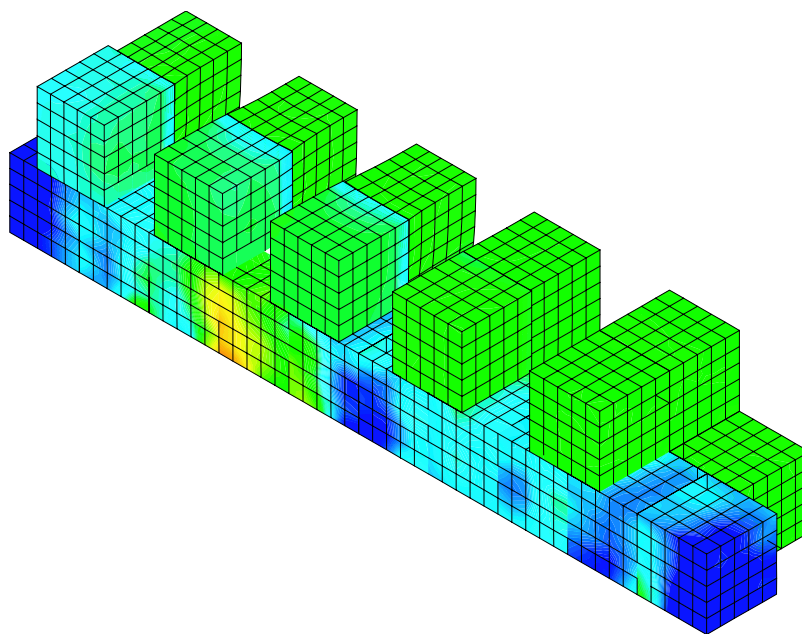


Figure 5.8: Contrainte transversale 5 cellules

## 5 Piste pour le stockage des non-linéarités

Une question à se poser avant de programmer la méthode en 3D est le stockage des non-linéarités. Il est nécessaire de déterminer une quantité minimale d'informations à stocker suffisante pour mener à bien le calcul. En effet, même si une méthode dédiée aux problèmes non-linéaires peut permettre une résolution très efficace, si la quantité des variables à stocker est trop grande, la méthode perd toute utilité. Il faut donc s'assurer de ne pas surcharger la mémoire en ne gardant que l'information minimale à la résolution. Dans la suite du paragraphe, nous nous intéresserons en particulier à la matrice, le mésoconstituant le plus complexe de part son comportement différent en traction et en compression.

Pour cela, il faut revenir aux hypothèses de la modélisation.

La première hypothèse est l'hypothèse du mésomodèle. En raison de la taille des blocs de matrice et des vitesses relatives des ondes dans les autres mésoconstituants, on suppose que les phénomènes sont homogènes à l'intérieur des blocs de matrice et des sections de torons. Cette hypothèse, faite pour la modélisation, et indépendante de l'aspect simulation numérique, va se révéler fondamentale dans les gains en coût de stockage.

En ce qui concerne le comportement de compaction, il est nécessaire de séparer la partie sphérique de la partie déviatorique du comportement. Pour cela, on reprend une définition classique qu'on peut trouver dans [Lemaitre et Chaboche 1985].

$$\sigma = \mathbf{K}^e \text{Tr}(\varepsilon) \mathbb{I} + 2\mathbf{G} \left( \varepsilon - \frac{1}{3} \text{Tr}(\varepsilon) \mathbb{I} \right) \quad (5.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}^e : \text{ module de compressibilité en élastique} \\ \mathbf{G} : \text{ module de cisaillement} \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Dans le cas de la compaction, on peut relier la trace du tenseur des contraintes (la pression hydrostatique à peu de choses près) à la trace du tenseur des déformations.

$$\frac{1}{3} \text{Tr}(\sigma) = \frac{E}{(1 + \alpha \text{Tr}(\varepsilon^m))^2} \text{Tr}(\varepsilon) \quad (5.3)$$

On en déduit que pour la compaction élastique,

$$\left\{ \begin{array}{l} K^c = \frac{E}{(1 + \alpha \text{Tr}(\varepsilon^m))^2} \\ G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \end{array} \right. \quad (5.4)$$

$K^c$  est le module de compressibilité en compaction. On peut donc en déduire la matrice de Hooke associée :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} K^c + 4/3G & K^c - 2/3G & K^c - 2/3G & & & \\ K^c - 2/3G & K^c + 4/3G & K^c - 2/3G & & & \\ K^c - 2/3G & K^c - 2/3G & K^c + 4/3G & & & \\ & & & 2G & 0 & 0 \\ & & & 0 & 2G & 0 \\ & & & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Dans le cas de l'endommagement, on supposera qu'il sera isotrope. Deux variables internes, que nous noterons  $d$  et  $\delta$ , sont donc nécessaires pour caractériser l'endommagement global d'une sous-structure à chaque pas de temps.

Dans ce cas, le tenseur de Hooke s'exprimera de la façon suivante :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} K_\delta + \frac{4}{3}G_d & K_\delta - \frac{2}{3}G_d & K_\delta - \frac{2}{3}G_d & & & \\ K_\delta - \frac{2}{3}G_d & K_\delta + \frac{4}{3}G_d & K_\delta - \frac{2}{3}G_d & & & \\ K_\delta - \frac{2}{3}G_d & K_\delta - \frac{2}{3}G_d & K_\delta + \frac{4}{3}G_d & & & \\ & & & 2G_d & 0 & 0 \\ & & & 0 & 2G_d & 0 \\ & & & 0 & 0 & 2G_d \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

où

$$\begin{cases} K_\delta = \frac{E_0}{3(1-2\nu_0)}(1-\delta) = K^e(1-\delta) \\ G_d = \frac{E_0}{2(1+\nu_0)}(1-d) = G_0(1-d) \end{cases} \quad (5.7)$$

Pour la sous-structure, il est nécessaire de calculer l'endommagement méso ( $d, \delta$ ) ainsi que la compaction méso (moyenne spatiale sur la sous-structure).

Chaque élément sera ensuite caractérisé par deux scalaires, que nous choisirons positif dans le cas de la compaction et négatif dans le cas de l'endommagement :

– Partie cisaillement :

$$f_1 = -d \quad (5.8)$$

– Partie hydrostatique

$$f_2 = \begin{cases} (1-\delta)K^e & \text{pour l'endommagement} \\ K^c & \text{pour la compaction} \end{cases} \quad (5.9)$$

Ces deux cas peuvent se mettre sous une forme unique :

$$\mathbf{H} = (1 + f_1) \left( \begin{bmatrix} 4/3G_0 & 2/3G_0 & 2/3G_0 & & & \\ -2/3G_0 & 4/3G_0 & -2/3G_0 & (0) & & \\ -2/3G_0 & -2/3G_0 & 4/3G_0 & & 2G_0 & 0 & 0 \\ & & & (0) & 0 & 2G_0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 2G_0 \end{bmatrix} + f_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & & & \\ 1 & 1 & 1 & (0) & & & \\ 1 & 1 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & (0) & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \quad (5.10)$$

En opérant de la sorte, on peut se contenter de stocker deux fonctions scalaires supplémentaires par sous-structure par rapport à la méthode initiale. Ces deux fonctions, dépendant seulement du temps, dans le cas d'un endommagement isotrope et en utilisant l'hypothèse du mésomodèle, permettent de rendre compte des non-linéarités structurales de type compaction et endommagement.

---

# Conclusion

Dans ce travail, une stratégie dédiée à la mésodynamique des composites 3D C/C a été mise en place. Trois difficultés devaient être traitées.

La première est le nombre important de degrés de libertés. Pour cela, une technique de décomposition de domaine, particulièrement bien adaptée à la mésomodélisation du matériau, a été mise en place. Cette décomposition par interfaces mixtes mène à des problèmes de taille bien moins grande, que l'on résout par un algorithme LATIN. À chaque itération de la méthode, une solution sur tout l'espace et tout le temps est calculée. Cette solution est une approximation de la solution finale dont la qualité peut être évaluée. La résolution est naturellement parallélisable et le gain en terme de charge de processeur et de temps de calcul est important. La seule limitation à ce point est de respecter au maximum le principe de répartition uniforme de la charge sur chaque processeur. L'exemple 3D traité montre bien l'efficacité de la méthode de ce point de vue.

La deuxième difficulté est les non-linéarités de comportement des sous-structures qui interviennent sur la mésodynamique du matériau. Pour cela, l'adaptation d'une technique très efficace pour traiter les problèmes où les non-linéarités sont concentrées aux interfaces a été réalisée. Le comportement des sous-structures est traité à l'étape locale de la méthode LATIN en même temps que le comportement des interfaces. L'optimisation des paramètres de la méthode, les directions de recherche, a été réalisée. En raison des fortes variations de raideur dues au comportement particulier du matériau, le choix de directions de recherche non constantes est le meilleur dans notre cas. Un algorithme de gradient conjugué a donc été choisi pour traiter les problèmes dont les opérateurs ne sont pas constants au cours du temps et des itérations. Il a été montré sur un exemple 1D 1/2 qu'un gain en temps de calcul important peut être réalisé en imposant une tolérance plus large au gradient conjugué et en recalculant un couple déplacement/contrainte admissible.

La dernière difficulté est le traitement numérique des chocs. Une étude sur différents schémas d'intégration numérique a été réalisée. Le choix s'est porté sur le schéma HHT, schéma permettant de limiter les perturbations numériques engendrées par les chocs tout en gardant une discrétisation identique à des schémas

classiques de Newmark. Le schéma de Galerkin discontinu présentait les meilleurs résultats mais engendrait une surdiscrétisation trop importante. Dans les cas de fortes non-linéarités, comme la compaction, la méthode HHT ne limite pas suffisamment les oscillations.

## Perspectives

Les perspectives à ce travail sont multiples.

Dans un premier temps, il est impératif de tester la méthode en cumulant les difficultés qui ont été traitées pour le moment séparément. L'acquisition d'un outil de calcul puissant par le *Centre d'Études de Gramat* devrait permettre de tester la méthode sur un cas significatif, incluant des non-linéarités matériau. Pour cela, il est nécessaire de réécrire l'étape globale pour la résoudre par une méthode de gradient conjugué. Ceci ne devrait pas poser de problème particulier. De plus, il faut également écrire une fonction qui relie la déformation à la contrainte pour chaque type de comportement.

Dans un deuxième temps, la question d'un schéma d'intégration efficace pour traiter les chocs reste encore en partie posée. Comme le deuxième chapitre s'est attaché à le montrer, le schéma idéal serait un schéma pouvant donner les résultats aussi efficaces que ceux obtenus par le schéma de Galerkin discontinu en gardant une discrétisation raisonnable. Introduire plusieurs échelles de temps pourrait permettre de résoudre ce problème. Sur une échelle fine, la solution serait calculée et ne serait sauvegardée que sur une échelle plus grossière pour limiter la quantité d'information à stocker. Une interpolation, à déterminer, serait alors à utiliser pour recalculer la solution sur l'échelle fine à partir d'un champ défini sur l'échelle grossière. Une autre solution serait d'utiliser de la viscosité artificielle. Cette solution plus pragmatique que le schéma de Galerkin discontinu pourrait donner de bons résultats sur des phénomènes qui ressemblent à ce qu'on peut trouver en fluide (génération d'onde de choc). Pour l'instant, la détermination du paramètre de viscosité a été réalisée mais pas l'implantation numérique, qui demande de revoir en partie l'intégration numérique.

Ensuite, des choix ont été faits et peuvent être remis en question. Le fait d'utiliser une sous-structuration mixte est un choix sur lequel on peut se reposer. En revanche, le fait de faire une résolution globale sur le temps peut se discuter. Une résolution incrémentale pourrait éviter les problèmes de convergence lorsque une sous-structure est entièrement endommagée alors que la solution finale ne l'est pas. Ceci reste cependant à tester.

Par ailleurs, il a été fait le choix, par souci de simplicité, de ne pas introduire de viscosité artificielle dans l'étude des propriétés de convergence des algorithmes. Maintenant que l'approche numérique est plus clairement définie, il apparaît indispensable d'introduire ces termes de viscosité (ou des schémas apportant des propriétés équivalentes) pour améliorer la description des chocs et assurer une plus

grande régularité de la solution par des vitesses de chocs élevées et aussi augmenter la rapidité de la convergence de la méthode.





---

# Bibliographie

**[Allix et Deü 1997]**

O. Allix et J.-F. Deü. Delay-damage modelling for fracture prediction of laminated composites under dynamic loading. *Engineering transactions*, 45 :29–46, 1997.

**[Allix et al. 1997]**

O. Allix, M. Dommaget, M. Gratton, et O. P.-L. Héreil. Impact on 3d carbon-carbon composites : a meso-scale approach. Dans *5th international conference on mechanical and physical behaviour of materials under dynamic loading*, pages 675–680, Toledo, Spain, September 1997. Euro Dymat 97, Journal de Physique.

**[Allix et al. 2001]**

O. Allix, M. Dommaget, M. Gratton, et P.-L. Héreil. A multi-scale approach for the response of a 3d carbon/carbon composite under shock loading. *Composites Science and Technology*, 61 :409–415, 2001.

**[Allix et Sen Gupta 2001]**

O. Allix et J. Sen Gupta. Composite damage mesomodel for impact problems : Application to 3d c/c material. Dans *Keynotes of ECCM-2001*, Cracovia, Poland, 2001. ECCM.

**[Argyris et Scharpf 1969]**

J.H. Argyris et D.W. Scharpf. Finite elements in time and space. *Nuclear Engineering Design*, 10 :456–464, 1969.

**[Argyris et al. 1977]**

J.H. Argyris, L.E. Vaz, et K.J. William. Higher order methods for transient diffusion analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 12 :243–278, 1977.

**[Bazant 1976]**

Z.P. Bazant. Instability, ductility and size effect in strain softening concrete. *Journal of Engng. Mech.*, 102 :331–344, 1976.

**[Bazant et Belytschko 1985]**

Z.P. Bazant et T.B. Belytschko. Wave propagation in strain-softening bar : exact solution. *Journal of Engng. Mech.*, 111 :381–389, 1985.

**[Belytschko et al. 1983]**

T. Belytschko, T.J.R. Hughes, et K.-J. Bathe. *Computational Methods for Transient Analysis*. North Holland, 1983.

**[Blanzé et al. 1996]**

C. Blanzé, L. Champaney, J.-Y. Cognard, et P. Ladevèze. A modular approach to structure assembly computations, application to contact problems. *Engineering Computations*, 13(1) :15–32, 1996.

**[Bonnerot et Jamet 1974]**

R. Bonnerot et P. Jamet. A second order finite element method for the one-dimensional stefan problem. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 8 :811–820, 1974.

**[Borst et Müllhaus 1992]**

R. De Borst et H.B. Müllhaus. Gradient-dependent plasticity : formulation and algorithmic aspects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35 :521–539, 1992.

**[Borst et al. 1993]**

R. De Borst, H.B. Müllhaus, J. Pamin, et L.J. Sluys. Fundamental issues in finite element analyses of strain localisation. *Engng. Comput.*, 10 :99–121, 1993.

**[Boucard et al. 1995]**

P.-A. Boucard, P. Ladevèze, et H. Lemoussu. Une approche pour le calcul de chocs avec contact unilatéral. Dans *Actes du XII<sup>e</sup> congrès de Mécanique*, pages 213–216, Strasbourg, France, 1995. AFM.

**[Bruch et Zyvoloski 1973]**

J.C. Bruch et G. Zyvoloski. A finite element weighted residual solution to one-dimensional field problems. *International Journal of Numerical Methods Engineering*, 6 :577–585, 1973.

**[Cardle 1995]**

J.A. Cardle. A modification of the petrov-galerkin method for the transient convection-diffusion equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38 :2171–181, 1995.

**[Cella et Lucchesi 1975]**

A. Cella et M. Lucchesi. Space-time finite elements for the wave propagation problem. *Meccanica*, 10 :168–170, 1975.

**[Cella et al. 1980]**

A. Cella, M. Lucchesi, et G. Pasquinelli. Space-time finite elements for the shock wave propagation problem. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 15 :1475–1488, 1980.

**[Chabrand et al. 1998]**

P. Chabrand, F. Dubois, et M. Raous. Various numerical methods for solving unilateral contact problems with friction. *Mathematical and computer modelling*, 28 :97–108, 1998.

**[Champaney et al. 1999]**

L. Champaney, J.Y. Cognard, et P. Ladevèze. Modular analysis of assemblages of three-dimensional structures with unilateral contact conditions. *Computer and Structures*, Vol 73 :249–266, 1999.

**[Champaney et al. 1997]**

L. Champaney, J.-Y. Cognard, D. Dureisseix, et P. Ladevèze. Large scale application on paralel computers of a mixed decomposition method. *Computational Mechanics*, 19 :253–263, 1997.

**[Champaney et al. 1996]**

L. Champaney, J.-Y. Cognard, et P. Ladevèze. *A modular approach for 3D structural assembly computations with unilateral contact conditions*. Civil Comp Press, Edinburgh, bhv topping ed édition, 1996.

**[Chevreuil 2002]**

M. Chevreuil. *Stratégie multiéchelle pour la résolution des problèmes de contact en dynamique*. DEA TACS de l'ENS de Cachan, 2002.

**[Cluzel et al. 1990]**

C. Cluzel, M. Poss, et Y. Rémond. Prévission du comportement mécanique d'un composite 3d en fonction de la géométrie de sa maille élémentaire. 29-30 Mars 1990.

**[Cochelin et Compain 2000]**

B. Cochelin et C. Compain. An asymptotic numerical method for non-linear transient dynamics. *Revue européenne des éléments finis*, 9(1-2-3) :113–128, 2000.

**[Cockburn 2001]**

Bernardo Cockburn. Devising discontinuous galerkin methods for non-linear hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 128 :187–204, 2001.

**[Cockburn et Shu 1998]**

Bernardo Cockburn et Chi-Wang Shu. The runge-kutta discontinuous galerkin method for conservation laws v : Multidimensional systems. *Journal of computational physics*, 141(2) :199–224, 1998.

**[Combescure et Gravouil 2001]**

A. Combescure et A. Gravouil. A time-space multi-scale algorithms for transient structural nonlinear problems. *Mec. Ind.*, 2 :43–55, 2001.

**[Combescure et Gravouil 2002]**

A. Combescure et A. Gravouil. A numerical scheme to couple subdomains with different time-steps for predominantly linear transient analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 191 :1129–1157, 2002.

**[Combescure et al. 2003]**

A. Combescure, A. Gravouil, et B. Herry. An algorithm to solve transient structural non-linear problems for non-matching time-space domains. *Computers and Structures*, 81 :1211–1222, 2003.

**[Corigliano et al. 2003]**

Alberto Corigliano, Stefano Mariani, et Anna Pandolfi. Numerical modeling of rate-dependent debonding processes in composites. *Composite Structures*, 61 :39–50, July 2003.

**[Craig et Bampton 1968]**

R. R. Craig et M. C. Bampton. Coupling of substructures of dynamic analyses. *AIAA Journal*, 6(7) :1313–1319, 1968.

**[D. Rixen et Gérardin 1998]**

C. Farhat D. Rixen et M. Gérardin. A two step, two fiel hybrid method for the static and dynamics analysis if substructure problems with conforming and non-conforming interfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics ans Engineering*, Vol 154 :229–264, 1998.

**[Davy et Marquis 2003]**

C. Davy et D. Marquis. Effect of a machining-induced defect on the tensile strength of a 3d composite material. *Journal of Material Science*, 38(6) :1231–1238, March 2003.

**[de Roeck et Tallec 1990]**

Y.H. de Roeck et P. Le Tallec. Analysis and test of a local domain decomposition preconditionneur. Dans *Proceedings of the 4th International Symposium on Domain Decomposition Methods*, pages 112–128, 1990.

**[de Roeck et al. 1992]**

Y.H. de Roeck, P. Le Tallec, et M. Vidrascu. A domain decomposer solver for non-linear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 99 :187–207, 1992.

**[Dennis et Moré 1977]**

J.E. Dennis et J.J. Moré. Quasi-newton methods, motivation and theory. *SIAM Rev.*, 19 :46–89, 1977.

**[Dhia et Rateau 2003]**

H. Ben Dhia et G. Rateau. The arlequin method as a flexible engineering design tool. 2003.

**[Dumont et al. 1987]**

J.-P. Dumont, P. Ladevèze, M. Poss, et Y. Rémond. Damage mechanics for 3d composites. *International Journal for Composites II*, 8 :119–141, 1987.

**[Dureisseix et Ladevèze 1999]**

D. Dureisseix et P. Ladevèze. Une nouvelle stratégie de calcul micro/macro en mécanique des structures. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences*, 1999.

**[Enright 1980]**

W.H. Enright. On the efficient time integration of systems of second order equations arising in structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 16 :13–18, 1980.

**[Farhat et al. 1994]**

C. Farhat, L. Crivelli, et F.-X. Roux. A transient feti methodology for large-scale parallel implicit computations in structural mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37 :1945–1975, 1994.

**[Farhat et Roux 1991]**

C. Farhat et F.X. Roux. A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32 :1205–1227, 1991.

**[Faucher et Combescure 2003]**

V. Faucher et A. Combescure. A time and space mortar method for coupling linear modal subdomains and non-linear subdomains in explicit structural dynamics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 192 :509–533, 2003.

**[Fried 1969]**

I. Fried. Finite element analysis of time-dependent phenomena. *AIAA J.*, 7 :1170–1173, 1969.

**[Glovinski et Tallec 1990]**

R. Glovinski et P. Le Tallec. Augmented lagrangian interpretation of non-overlapping schwarz alternating method. Dans *Proceedings of the 4th International Symposium on Domain Decomposition Methods*, pages 224–231, 1990.

**[Goeke et McClintock 1975]**

E. C. Goeke et F.A. McClintock. Fracture of graphite composite under shock loading. *Journal of Applied Physics*, 46(11), November 1975.

**[Graff 1975]**

K. F. Graff. *Wave motion in elastic solids*. Clarendon Press, Oxford, 1975.

**[Gratton 1998]**

Michel Gratton. *Comportement d'un composite 3D Carb/Carb Méso-modélisation pour la prévision de la réponse sous choc*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1998.

**[Hansen et Rochinha 1998]**

A. S. Hansen et F. A. Rochinha. A transient domain decomposition method for the analysis of structural dynamics problems. *Computational Mechanics*, pages 1–15, 1998.

**[Hérel et al. 1997]**

P.-L. Hérel, O. Allix, et M. Gratton. Shock behaviour of 3d carbon-carbon composite. Dans *5th international conference on mechanical and physical behaviour of materials under dynamic loading*, pages 529–534, Toledo, Spain, September 1997. Euro Dymat 97, Journal de Physique.

**[Hilber et Hughes 1978]**

H.M. Hilber et T.J.R Hughes. Collocation, dissipation and 'overshoot' for time integration schemes in structural dynamics. *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.*, 6 :99–118, 1978.

**[Hilber et al. 1977]**

H.M. Hilber, T.J.R Hughes, et R.L. Taylor. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.*, 5 :283–292, 1977.

**[Hoff et al. 1989]**

C. Hoff, T.J.R. Hughes, G. Hulbert, et P.J. Pahl. Extended comparaison of the hilbert-hughes-taylor  $\alpha$ -method end the  $\theta$ -method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 76 :87 :93, 1989.

**[Hughes et al. 1987]**

T.J.R. Hughes, L.P. Franca, et M. Mallet. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : Vi. convergence analysis of the generalized streamline upwind/ Petrov-galerkin formulation for linear time-dependent multi-dimensional advective-diffusive systems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 63 :97–112, 1987.

**[Hughes et Hulbert 1988]**

T.J.R. Hughes et G.M. Hulbert. Space-time finite element methods for elastodynamics : Formulations and error estimates. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 66 :339–363, 1988.

**[Hulbert 1992]**

G.M. Hulbert. Time finite element methods for structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 8 :307–311, 1992.

**[Hulbert et Hughes 1990]**

G.M. Hulbert et T.J.R. Hughes. Space-time finite element methods for second-order hyperbolic equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 84 :327–348, 1990.

**[Jamet 1978]**

P. Jamet. Galerkin-type approximations which are discontinuous in time for parabolic equations in variable domain. *SIAM J. Numer. Anal.*, 15 :912–928, 1978.

**[Jaumotte 1971]**

A. Jaumotte. *Chocs et ondes de choc*. Masson et Cie, 1971.

**[Jirasek 2000]**

M. Jirasek. Comparative study on elements with embedded discontinuities. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 188 :1307–330, 2000.

**[Johnson 1993]**

C. Johnson. Discontinuous galerkin finite element methods for second order hyperbolic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol 107 :117–129, 1993.

**[Johnson et Pitkäranta 1984]**

C. Johnson et J. Pitkäranta. An analysis of the discontinuous galerkin method for a scalar hyperbolic equation. *Institute of Mathematics, Helsinki University of Technology, Finland*, 1984. Technical report MAT-A215.

**[Kibler et Chatterjee 1975]**

J.J. Kibler et S.N. Chatterjee. Development of mini-mechanics models for 3d



carbon-carbon composites. *MMSC TFR under NSW Contract N60921-75-C-0041*, July 1975.

**[Kok 1981]**

A.W.M. Kok. Pulses in finite element. Dans *Proceedings of the International conference on Computing in Civil Engineering*, pages 213–240, New York, USA, 1981. ASCE.

**[Ladevèze 1985]**

P. Ladevèze. Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, II :41–44, 1985.

**[Ladevèze 1986]**

P. Ladevèze. Sur la mécanique de l'endommagement des composites. Dans C. Bathias et D. Menkès, éditeurs, *Comptes rendus des JNC5*, pages 667–683, Paris, 1986. Pluralis Publication.

**[Ladevèze 1989]**

P. Ladevèze. La méthode à grand incrément de temps pour l'analyse de structures à comportement non-linéaire décrit par variables internes. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 309 :1095–1099, 1989.

**[Ladevèze 1992]**

P. Ladevèze. A damage computational method for composite structures. *Computers and Structures*, 44 :79–87, 1992.

**[Ladevèze 1996]**

P. Ladevèze. *Mécanique non-linéaire des structures*. Hermès, 1996.

**[Ladevèze 1996]**

P. Ladevèze. *Non-linear computational structural mechanics*. Springer, New York, USA, 1996.

**[Ladevèze 1999]**

P. Ladevèze. *Nonlinear Computational Structural Mechanics - New Approaches and non-Incremental Methods of Calculation*. Springer Verlag, 1999.

**[Ladevèze et al. 2000]**

P. Ladevèze, H. Lemoussu, et P.-A. Boucard. A modular approach to 3d impact computation with frictional contact. *Computer and Structures*, 78(1/3) :45–52, 2000.

**[Ladevèze et al. 2002]**

P. Ladevèze, O. Loiseau, et A. Nouy. A multiscale computational approach for

contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(43) :4869–4891, 2002.

**[Ladevèze et Nouy 2003]**

P. Ladevèze et A. Nouy. On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :3061–3087, 2003.

**[Ladevèze et al. 1982]**

P. Ladevèze, M. Poss, et L. Proslie. Damage and fracture of tridirectional composites. Dans *Proceedings of the 4th International Conference in Composite Materials - Progress in sciences and Engineering of composites*, pages tome I, 649–658, TOKYO, 1982.

**[Ladevèze et al. 1984]**

P. Ladevèze, M. Poss, et Y. Rémond. Reconstruction d'un matériau composite 3d à partir de ses constituants. Dans *Comptes rendus des JNC4*, pages 495–510, Paris, September 1984. AMAC.

**[Lasry et Belytschko 1988]**

D. Lasry et T. Belytschko. Localization plimiters in transient problems. *International Journal of Solids and Structures*, 24 :581–597, 1988.

**[Leclère 2001]**

J.-M. Leclère. *Modélisation parallèle de la propagation d'ondes dans les structures par éléments finis adaptatifs*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris, 2001.

**[Legendre 1992]**

A. Legendre. *Le matériau Carbone : des céramiques noires aux fibres de carbone*. Eyrolles, 1992.

**[Lemaitre et Chaboche 1985]**

J. Lemaitre et J.-L. Chaboche. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris, 1985.

**[Lemoussu et al. 2002]**

H. Lemoussu, P.-A. Boucard, et P. Ladevèze. A 3d shock computational strategy for real assembly and shock attenuator. *Advances in Engineering Software Advances in Engineering*, 33(7/10) :517–526, 2002.

**[Li et Wiberg 1998]**

X. D. Li et N.-E. Wiberg. Implementation and adaptivity of a space-time finite element method for structural dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 156 :211–229, 1998.

**[Lin et Tassoulas 1987]**

H.-T. Lin et J.L. Tassoulas. Discrete green functions for layered strata. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24 :1645–1658, 1987.

**[Lions 1990]**

P.L. Lions. On the schwarz alternating method iii. a variant of non-overlapping subdomains. Dans T. Chan, R. Glowinski, J. Périaux, et O. Windlum, éditeurs, *Proceedings of Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Philadelphia, 1990. SIAM.

**[Loomis 1980]**

W.C. Loomis. Analytical processing for improved composites (apic), analytical modeling. *AFWAL TR-80-4147*, II, October 1980.

**[Loula et al. 1987]**

A.F.D. Loula, T.J.R. Hughes, L.P. Franca, et I. Mirada. Mixed-petrov-galerkin methods for the timoshenko beam problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 63 :133–154, 1987.

**[Lucchesi et Pagni 2000]**

M. Lucchesi et A. Pagni. Solution of the riemann problem for longitudinal oscillations of bimodular rods. Dans A. Samartin M. Papadrakakis et E. Oñate, éditeurs, *Computational methods for shell and spatial structures*, Athens, Greece, 2000. ISASR-NTUA.

**[Mandel 1993]**

J. Mandel. Balancing domain decomposition. *Communications in Applied Numerical Methods*, 9 :233–241, 1993.

**[McNeal 1971]**

R. McNeal. A hybrid method of component mode synthesis. *Computers and Structures*, 1(43) :581–601, 1971.

**[Needleman 1988]**

R. Needleman. Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 67 :69–85, 1988.

**[Néron et al. 2004]**

D. Néron, P. Ladevèze, D. Dureisseix, et B. A. Schrefler. Accounting for nonlinear aspects in multiphysics problems : application to poroelasticity. Dans M. Bukak, G. D. van Albada, P. M. A. Slood, et J. J. Dongarra, éditeurs, *Lecture Notes*

in *Computer Science. Proceedings of the 4th International Conference on Computational Science ICCS 2004, LNCS 3039, Part IV*, pages 612–620. Springer Verlag, 2004.

**[Neumann et Richtmyer 1950]**

J. Von Neumann et R.D. Richtmyer. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks. *Journal of Applied Physics*, 21 :232–237, March 1950.

**[Newmark 1959]**

N. M. Newmark. A method of computation for structural dynamics. *Journal for Engineering Mechanics Division*, 3 :67–94, 1959.

**[Nguyen et Reynen 1984]**

H. Nguyen et J. Reynen. A space-time least-square finite element scheme for advection-diffusion equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 42 :331–342, 1984.

**[Oden 1969]**

J.T. Oden. A general theory of finite elements ii. applications. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 1 :247–259, 1969.

**[Oden et Martin 1985]**

J. T. Oden et J.A.C. Martin. Models and computational method for dynamic friction phenomena. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 52 :527–534, 1985.

**[Oliver 1995]**

J. Oliver. Continuum modelling of strong discontinuities in solid mechanics. *Fourth International Conference On Computational Plasticity*, pages 455–480, 1995.

**[Oliver et al. 1999]**

J. Oliver, M. Cervera, et O. Manzoli. Strong discontinuities and continuum plasticity models : the strong discontinuity approach. *International Journal of Plasticity*, 15 :319–351, 1999.

**[Pailhes et al. 2002]**

J. Pailhes, G. Camus, et J. Lamon. A constitutive model for the mechanical behavior of a 3d c/c composite. *Mechanics of Material*, 34 :161–177, 2002.

**[Palencia 1974]**

E. Sanchez Palencia. Comportement local et macroscopique de milieux physiques hétérogènes. *International Journal for Engineering Science*, 12 :331–351, 1974.

**[Pandolfi et al. 2000]**

A. Pandolfi, P. R. Guduru, M. Ortiz, et A. J. Rosakis. Three dimensional cohesive-element analysis and experiments of dynamic fracture in c300 steel. *International Journal of Solids and Structures*, 37(27) :3733–3760, July 2000.

**[Pandolfi et al. 1985]**

A. Pandolfi, C. Yu, D. Coker, M. Ortiz, et A. J. Rozakis. 3d modelling of inter-sonic crack growth in unidirectional composite plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1985.

**[Park et Housner 1982]**

K.C. Park et J.M. Housner. Semi-implicite transient analysis procedures for structural dynamics analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18 :609–622, 1982.

**[Pijaudier-Cabot et Bazant 1988]**

G. Pijaudier-Cabot et Z.P. Bazant. Local and non-local models for strain-softening, and their comparison based on dynamics analysis. Dans *Cracking and Damage*, pages 379–390, Cachan, France, 1988. Elsevier Applied Science Eds.

**[Przemieniecki 1963]**

J. S. Przemieniecki. Matrix structural analysis of substructures. *Am. Inst. Aero. Astro. J.*, 1 :138–147, 1963.

**[Queen et Marsh 1967]**

R.G. Queen et S.P. Marsh. *Behavior of dense media under high dynamic pressure*. Ed. Gordon and Breach, 1967.

**[Rayleigh 1910]**

Lord Rayleigh. *Aerial plane waves of finite amplitude*. A84. Proceedings of the Royal Society, 1910.

**[Rixen et al. 1998]**

D. Rixen, C. Farhat, et M. Géradin. The two-level feti method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol 155 :153–179, 1998.

**[Roux 1990]**

F.-X. Roux. Méthodes de résolution par sous-domaine en statique. *La Recherche Aérospatiale*, 1 :37–48, 1990.

**[Royer 1990]**

C. Royer. *Une approche des problèmes de dynamique par la méthode à grand incrément de temps*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 1990.

**[Salencon 1998]**

J. Salencon. *Mécanique des milieux continus*, volume Tome II. Ecole Polytechnique, 1998. Thermoélasticité.

**[Savage 1993]**

G. Savage. *Carbon-carbon composites*. Chapman et Hall, 1993.

**[Schwartz 1965]**

L. Schwartz. *Théorie des distributions*. Dunod, 1965.

**[Siron et Lamon 1998]**

O. Siron et J. Lamon. Damage and failure mechanisms of a 3-directional carbon/carbon composite under uniaxial tensile and shear loads. *Acta Mater.*, (18) :6631–6643, 1998.

**[Suffis et al. 2003]**

A. Suffis, T.A.A. Lubrecht, et A. Combescure. Damage model with delay effect - analytical and numerical studies of the evolution of the characteristic damage length. *International Journal of Solids and Structures*, 40 :3463–3476, 2003.

**[Tallec 1994]**

P. Le Tallec. Domain decomposition method in computational mechanics. *Computational Mechanics*, 1994 :121–220, 1994.

**[Thouvenin 1997]**

J. Thouvenin. *Détonique*. Collection du CEA. Eyrolles, Paris, mai 1997.

**[Tie et al. 2002]**

B. Tie, D. Aubry, et J.-M. Leclère. Sur la modélisation des ondes élastiques dans les structures : calculs parallèles avec équilibre des charges. *Revue européenne des éléments finis*, 11 :173–184, 2002.

**[Varoglu et Finn 1980]**

E. Varoglu et W.D.L. Finn. Space-time finite elements incorporating characteristics for the burgers' equation. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 16 :171–184, 1980.

**[Yu et al. 2002]**

C. Yu, A. Pandolfi, M. Ortiz, D. Coker, et A. J. Rosakis. Three-dimensional modeling of intersonic shear-crack growth in asymmetrically loaded unidirectional composite plates. *International Journal of Solids and Structures*, 39 :6135–6157, December 2002.

**[Yu et al. 2004]**

Rena C. Yu, Gonzalo Ruiz, et Anna Pandolfi. Numerical investigation on the dynamic behavior of advanced ceramics. *Engineering Fracture Mechanics*, 71 :897–911, March-April 2004.

**[Zel'dovich et Raizer 1966]**

Y.B. Zel'dovich et Y.P. Raizer. *Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena*. Academic press, New York and London, 1966. Translation.

**[Zienkiewicz 1977]**

O.C. Zienkiewicz. A new look at the newmark, houbolt and other time stepping formulas. a weighted residual approach. *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.*, 5 :413–418, 1977.

ANNEXE

**A**

---

## **Démonstration de la relation sur la dispersion**

*Dans cette annexe, on s'intéresse à la démonstration d'une  
relation thermodynamique dont nous avons besoin*



On part de l'expression de l'énergie libre spécifique (par unité de masse) que l'on développe au premier ordre en  $T$  et au troisième ordre en  $v$ , afin d'obtenir un développement au troisième ordre en  $v$ . On obtient alors :

$$f_1 - f_0 = \left. \frac{\partial f}{\partial T} \right|_{v_0} \cdot (T_1 - T_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{T_0} \cdot (v_1 - v_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right|_{T_0} \cdot (v_1 - v_0)^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial v^3} \right|_{T_0} \cdot (v_1 - v_0)^3 \quad (\text{A.1})$$

Or,

$$df = -SdT - pdv \quad (\text{A.2})$$

donc

$$f_1 - f_0 = -S_0 \cdot (T_1 - T_0) + (-p_0) \cdot (v_1 - v_0) - \frac{1}{2} \left. \frac{\partial p}{\partial v} \right|_{T_0} \cdot (v_1 - v_0)^2 - \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right|_{T_0} \cdot (v_1 - v_0)^3 \quad (\text{A.3})$$

De plus,

$$f = E - ST \quad (\text{A.4})$$

et

$$E_1 - E_0 = \frac{1}{2} \cdot (p_1 + p_0) \cdot (v_0 - v_1) \quad (\text{A.5})$$

d'où :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot (p_1 + p_0) \cdot (v_0 - v_1) + S_0 T_0 - S_1 T_1 \\ &= -S_0 \cdot (T_1 - T_0) + (-p_0) \cdot (v_1 - v_0) - \frac{1}{2} \left. \frac{\partial p}{\partial v} \right|_{T_0} \cdot (v_1 - v_0)^2 - \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right|_{T_0} \cdot (v_1 - v_0)^3 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

soit :

$$\frac{1}{2} \cdot (p_1 - p_0) \cdot (v_0 - v_1) + T_1 \cdot (S_0 - S_1) = -\frac{1}{2} \left. \frac{\partial p}{\partial v} \right|_{T_0} \cdot (v_1 - v_0)^2 - \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right|_{T_0} \cdot (v_1 - v_0)^3 \quad (\text{A.7})$$

On développe alors  $p_1 - p_0$  au deuxième ordre en  $v$  pour obtenir un membre de gauche du troisième ordre.

---

$$p_1 - p_0 = \left. \frac{\partial p}{\partial v} \right)_{T_0} \cdot (v_1 - v_0) + \frac{1}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_{T_0} \cdot (v_1 - v_0)^2 \quad (\text{A.8})$$

On obtient donc l'expression recherchée :

$$\boxed{T_1 \cdot (S_1 - S_0) = \frac{1}{12} \cdot \left. \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_{T_0} \cdot (v_0 - v_1)^3}$$

On vérifie bien que la température  $T$  est du troisième ordre en  $v$ .



ANNEXE

# B

---

## **Démonstration de la deuxième relation sur la dispersion**

*Dans cette annexe, on s'intéresse à la démonstration d'une  
relation thermodynamique dont nous avons besoin*

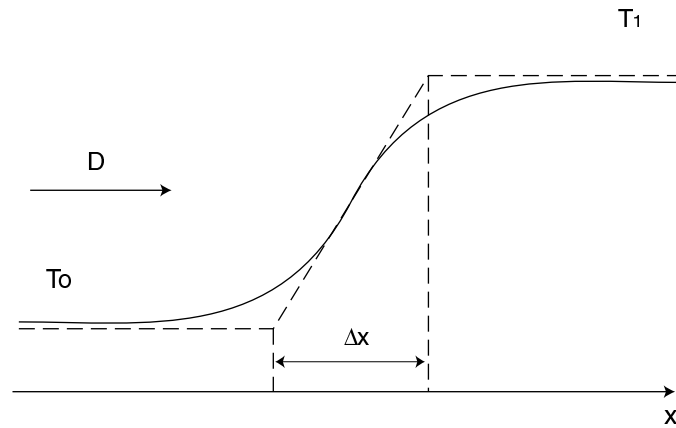


Figure B.1: Front d'une onde de choc

On écrit les lois de conservation dans le repère lié à l'onde de choc. La dérivation par rapport au temps est donc remplacée par la dérivée de transport.

$$\frac{d}{dt} = -u \cdot \frac{d}{dx} \quad (\text{B.1})$$

Or, si on suppose que l'énergie dissipée l'est uniquement sous forme de chaleur, on a :

$$\rho \cdot T \cdot \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dx} \left( -\kappa \cdot \frac{dT}{dx} \right) \quad (\text{B.2})$$

Cette expression écrite dans le repère lié à l'onde de choc devient :

$$\rho \cdot T \cdot u \cdot \frac{dS}{dx} = \kappa \cdot \frac{d^2T}{dx^2} \quad (\text{B.3})$$

Or, par la conservation de la masse,

$$\rho \cdot u = \text{constante} \quad (\text{B.4})$$

donc, en intégrant une fois, on obtient :

$$\rho_0 \cdot u_0 \cdot (S_1 - S_0) = \kappa \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{T} \frac{d^2T}{dx^2} u dx \quad (\text{B.5})$$

Après intégration par partie, on a :

$$\rho_0 \cdot u_0 \cdot (S_1 - S_0) = \kappa \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{T^2} \frac{dT}{dx} \frac{dT}{dx} u dx \quad (\text{B.6})$$

---

On fait un changement de variable  $T = T(x)$ , obtenant ainsi :

$$\rho_0 \cdot u_0 \cdot (S_1 - S_0) = \kappa \int_{T_0}^{T_1} \frac{1}{T^2} \frac{dT}{dx} dx \quad (\text{B.7})$$

On fait ensuite l'approximation que la température varie linéairement en fonction de  $x$ . Cela revient à faire l'approximation représentée par la figure **B.1**.

Cette approximation revient donc à majorer le gradient de température et donc à minorer la largeur de front. On obtient ainsi la relation que nous voulions démontrer :

$$\rho_0 \cdot u_0 \cdot (S_1 - S_0) = \kappa \cdot \frac{(T_1 - T_0)^2}{\Delta x \cdot T_0 \cdot T_1}$$



ANNEXE

# C

---

## **Modèle thermodynamique d'un matériau poreux**

*Cette annexe développe le modèle basé sur la thermodynamique d'un matériau poreux*



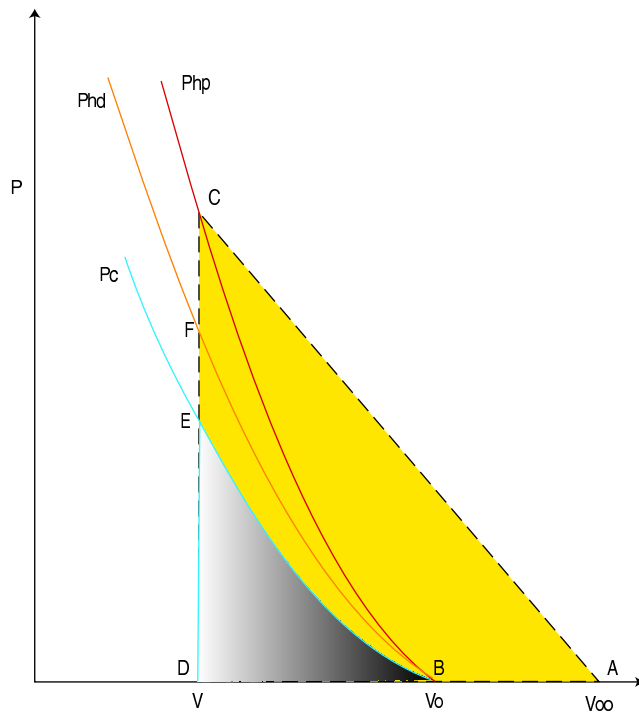


Figure C.1: Courbe  $p$  en fonction de  $v$  pour un matériau poreux

D'après Jaumotte, on a :

$$P_{H_d} = \frac{1 + 2\Gamma^{-1} - \frac{v_0}{v}}{1 + 2\Gamma^{-1} - \frac{v_{00}}{v}} \quad (\text{C.1})$$

On note  $\alpha$  le rapport entre les masses volumiques du matériau poreux et dense

$$\alpha = \frac{v_0}{v_{00}} \quad (\text{C.2})$$

On peut exprimer  $(v_0 - v)$  en fonction de  $(v_{00} - v)$

$$(v_0 - v) = (v_{00} - v) \cdot \left( \frac{\alpha - \frac{v}{v_{00}}}{1 - \frac{v}{v_{00}}} \right) \quad (\text{C.3})$$

Ainsi, on peut maintenant exprimer  $E_d$  en fonction de  $E_0$ .

$$E - E_0 = \frac{1}{2} \cdot p_{H_p} \cdot (v_{00} - v) \quad (\text{C.4})$$

---


$$E_d = (E - E_0) - \frac{1}{2} \cdot p_{H_d} \cdot (v_0 - v) \quad (\text{C.5})$$

Donc

$$E_d = (E - E_0) \cdot \left( 1 - \left( \frac{\alpha - \frac{v}{v_{00}}}{1 - \frac{v}{v_{00}}} \right) \cdot \left( \frac{1 + 2\Gamma^{-1} - \frac{v_0}{v}}{1 + 2 \cdot \Gamma^{-1} - \frac{v_{00}}{v}} \right) \right) \quad (\text{C.6})$$

soit, après avoir réduit au même dénominateur :

$$E_d = (E - E_0) \cdot \left( \frac{2 \cdot (1 - \alpha) \cdot (1 + 2\Gamma^{-1}) - (1 - \alpha^2) \frac{v_{00}}{v}}{\left(1 - \frac{v}{v_{00}}\right) \cdot \left(1 + 2\Gamma^{-1} - \frac{v_{00}}{v}\right)} \right) \quad (\text{C.7})$$

On obtient donc la relation à démontrer, reliant l'énergie disponible à l'énergie interne du choc définie pour un volume  $v$ .

$$E_d = \left[ \frac{2 \cdot (1 - \alpha) \cdot (1 + 2\Gamma^{-1}) - (1 - \alpha^2) \cdot \frac{v_{00}}{v}}{\left(1 - \frac{v}{v_{00}}\right) \cdot \left(1 + 2\Gamma^{-1} - \frac{v_{00}}{v}\right)} \right] (E - E_0)$$



ANNEXE

# D

---

## **Compléments sur l'endommagement à effet retard**

*Cette annexe présente rapidement une méthode alternative à celle de Deï pour retrouver les courbes de contrainte à rupture en fonction du temps de chargement.*

Deü, dans sa thèse, a traité des problèmes de propagation d'ondes de traction dans une barre endommageable et a fait varier les paramètres de son modèle afin de comprendre leur influence. Le problème auquel il s'intéressait est représenté figure D.1 et D.2.

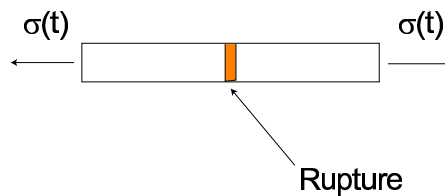


Figure D.1: Description de l'essai étudié par Deü - Eprouvette

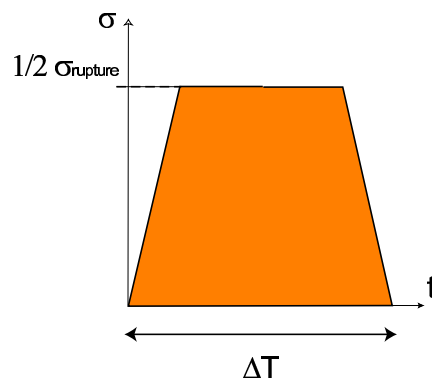


Figure D.2: Description de l'essai étudié par Deü - Chargement

Pour chaque jeu de paramètres, il avait étudié le problème de propagation associé, et numériquement, pour chaque durée de chargement, trouvé la contrainte correspondant à la rupture de la barre étudiée. Ces calculs sont longs et si l'on veut tester un grand nombre de jeu de paramètres, ce type de résolution n'est pas commode. Nous avons donc cherché un moyen plus rapide pour obtenir les mêmes courbes que lui. Pour cela, nous avons utilisé la connaissance du lieu de rupture de l'échantillon. En effet, celui-ci rompt à l'endroit où les deux ondes de traction vont se croiser. À cet endroit, la contrainte va doubler et c'est tout logiquement que l'éprouvette va casser à cet endroit. Nous nous sommes donc contentés de calculer l'endommagement en ce point et nous avons supposé que la rupture intervenait lorsque l'endommagement y valait 1.

---

Il convient, cependant, de vérifier les résultats obtenus par cette méthode à ceux obtenus par [Allix et Deü 1997] en utilisant un calcul de propagation.

La comparaison de ces calculs se trouve dans la figures D.3 et D.4.

Ces courbes montrent une excellente corrélation entre les résultats de Deü et les nôtres. Cela valide donc notre démarche de simplification.

La validation précédente a permis de trouver un moyen plus rapide de faire les calculs de l'endommagement dans l'échantillon. Cependant, l'identification du modèle et de sa validité n'a pas été faite. Pour cela, nous avons besoin d'une courbe de référence, issue de résultats expérimentaux, qui nous permettra de vérifier que le modèle d'endommagement à effet retard est capable de reproduire les tendances expérimentales constatées. Nous obtiendrons ainsi une valeur pour chaque coefficient et nous serons alors à même d'utiliser le modèle pour le matériau sur lequel les essais ont été effectués.

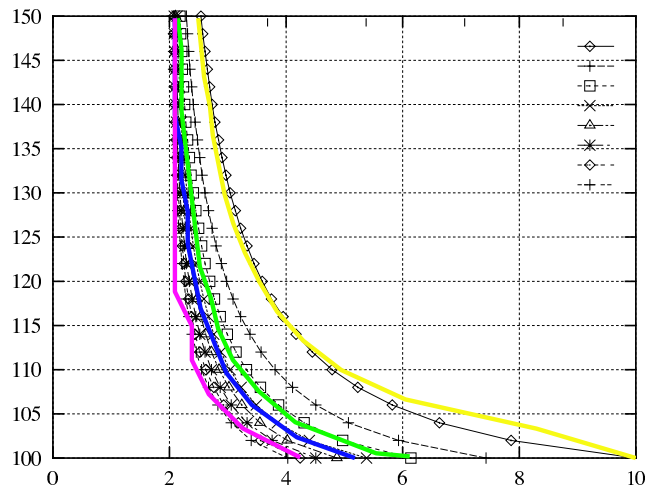


Figure D.3: Résultats comparés pour  $\tau_c$  fixé à  $2\mu s$  et  $a$  variant

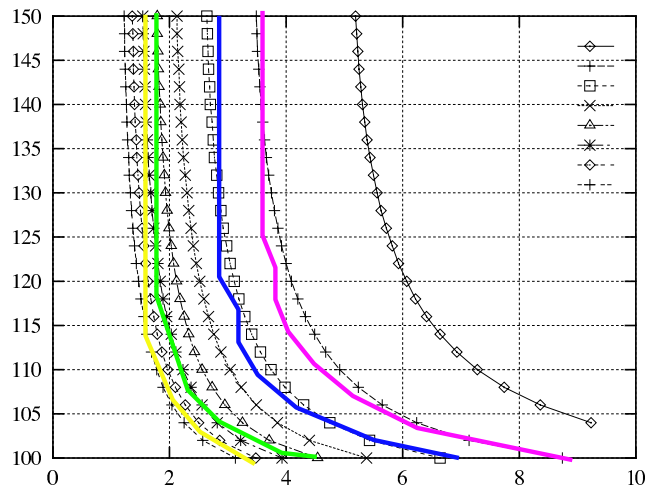


Figure D.4: Résultats comparés pour  $a$  fixé à 10 et  $\tau_c$  variant

---

## Algorithmes de gradient conjugué

*Dans cette annexe, on s'intéresse à l'algorithme de gradient conjugué que nous utilisons pour résoudre le problème global sur les sous-structures ayant un comportement fortement non-linéaires. Nous détaillons ici l'algorithme de gradient conjugué ainsi que l'algorithme de gradient conjugué preconditionné.*



# I Méthode du Gradient Conjugué (gc)

## I.1 Présentation

Cette méthode itérative permet de résoudre des problèmes classiques :

$$\mathbb{A}x = b \quad (\text{E.1})$$

où  $\mathbb{A}$  est symétrique définie positive.

Elle diffère des autres méthodes itératives par le fait qu'on impose aux résidus d'être orthogonaux aux résidus précédents. Cela revient à optimiser la direction de recherche.

## I.2 Algorithme

L'algorithme se trouve dans le tableau [E.1](#).

## I.3 Interprétation géométrique

Dans cette méthode, on impose :

- $(r^{(0)}, r^{(1)}, \dots, r^{(n-1)})$  soit une base orthogonale de l'espace engendré  $\mathbf{K}_n$
- $(d^{(0)}, d^{(1)}, \dots, d^{(n-1)})$  soit une base A-orthogonale de  $\mathbf{K}_n$

On a donc

$$\begin{cases} r^{(n)} \perp \mathbf{K}_n \\ r^{(n)} = \mathbb{A}x^{(n)} - b \\ \mathbb{A}x = b \end{cases} \quad (\text{E.2})$$

$\mathbb{A}(x^{(n)} - x) \perp \mathbf{K}_n$ .  $x^{(n)}$  est donc la projection A-orthogonal de  $x$  dans  $x^{(0)} + \mathbf{K}_n$ .

## I.4 Convergence

Étudions la convergence de cet algorithme. Pour cela, exprimons la norme énergétique de la différence entre  $x^{(n+1)}$  et  $x$ .

---

 Algorithme du gradient conjugué
 

---

**Initialisation**

Choix d'un vecteur initial :  $x^{(0)}$   
 Calcul du résidu :  $r^{(0)} = b - \mathbb{A}x^{(0)}$

**Itération : tant que** la convergence n'est pas atteinte,

$$\rho_{k-1} = r^{(k-1)T} r^{(k-1)}$$

**si**  $k = 1$  **alors**

$$d^{(1)} = r^{(0)}$$

**sinon**

$$\beta_{k-1} = \frac{\rho_{k-1}}{\rho_{k-2}}$$

$$d^{(k)} = r^{(k-1)} + \beta_{k-1}d^{(k-1)}$$

**fin**

$$q^{(k)} = \mathbb{A}d^{(k)}$$

$$\alpha_k = \frac{\rho_{k-1}}{d^{(k)T} q^{(k)}}$$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + \alpha_k d^{(k)}$$

$$r^{(k)} = r^{(k-1)} - \alpha_k q^{(k)}$$

Test de convergence

**fin itération**

$$x = x^{(k)}$$

---

 Tableau E.1: Algorithme de gradient conjugué

$$\begin{aligned} E_{n+1} &= (x^{(n+1)} - x)^T \mathbb{A} (x^{(n+1)} - x) \\ &= E_n - 2 \frac{r^{(n)T} r^{(n)}}{r^{(n)T} \mathbb{A} r^{(n)}} r^{(n)T} \mathbb{A} (x^{(n)} - x) + \left( \frac{-r^{(n)T} r^{(n)}}{r^{(n)T} \mathbb{A} r^{(n)}} \right)^2 r^{(n)T} \mathbb{A} r^{(n)} \\ &= E_n - \frac{(r^{(n)T} r^{(n)})^2}{r^{(n)T} \mathbb{A} r^{(n)}} \\ &= E_n \left( 1 - \frac{r^{(n)T} r^{(n)}}{r^{(n)T} \mathbb{A} r^{(n)}} \frac{r^{(n)T} r^{(n)}}{E_n} \right) \\ &= E_n \left( 1 - \frac{r^{(n)T} r^{(n)}}{r^{(n)T} \mathbb{A} r^{(n)}} \frac{r^{(n)T} r^{(n)}}{r^{(n)T} \mathbb{A}^{-1} r^{(n)}} \right) \end{aligned}$$

On voit donc que la convergence de l'algorithme est fortement liée au conditionnement de l'opérateur  $\mathbb{A}$ . Dans le cas d'opérateurs mal conditionnés, l'algorithme convergera en un nombre important d'itérations. C'est pour contrer ce désagrément que la méthode du gradient conjugué a été améliorée en la méthode du gradient conjugué préconditionné.

## 2 Méthode du Gradient Conjugué Préconditionné (gcp)

### 2.1 Présentation

Le but du préconditionnement est d'améliorer le conditionnement du problème à résoudre. Ainsi, comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, la convergence sera plus rapide. Une grande question est le choix du préconditionneur. Nous ne l'aborderons pas ici.

### 2.2 Algorithme

L'algorithme se trouve dans le tableau [E.2](#).

---

 Algorithme du gradient conjugué preconditionné
 

---

**Initialisation**

Choix d'un vecteur initial :  $x^{(0)}$   
 Calcul du résidu :  $r^{(0)} = b - \mathbb{A}x^{(0)}$

**Itération : tant que** la convergence n'est pas atteinte,

$$z^{(k-1)} = \mathbb{L}^{-T} \mathbb{L}^{-1} r^{(k-1)}$$

$$\rho_{k-1} = z^{(k-1)T} r^{(k-1)}$$

**si**  $k = 1$  **alors**

$$d^{(1)} = z^{(0)}$$

**sinon**

$$\beta_{k-1} = \frac{\rho_{k-1}}{\rho_{k-2}}$$

$$d^{(k)} = z^{(k-1)} + \beta_{k-1} d^{(k-1)}$$

**fin**

$$q^{(k)} = \mathbb{A}d^{(k)}$$

$$\alpha_k = \frac{\rho_{k-1}}{d^{(k)T} q^{(k)}}$$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + \alpha_k d^{(k)}$$

$$r^{(k)} = r^{(k-1)} - \alpha_k q^{(k)}$$

Test de convergence

**fin itération**

$$x = x^{(k)}$$

---

 Tableau E.2: Algorithme de gradient conjugué preconditionné

## Résumé

Le travail présenté est réalisé en collaboration avec le *Centre d'Études de Gramat* (CEG) de la DGA. L'objectif est de fournir des outils numériques fiables de prévision de la tenue aux chocs de structures en composites 3D carbone/carbone. Pour des durées de sollicitations de l'ordre de quelques microsecondes, une modélisation à l'échelle méso du 3D C/C peut rendre compte de façon pertinente des principales observations expérimentales. Le traitement numérique d'un modèle de composite décrit à l'échelle de ces constituants mésoscopiques en dynamique conduit cependant très rapidement à des problèmes de taille très importante. Les caractéristiques du problème traité, typique de ce que l'on entend par mésodynamique (fortes non-linéarités, description à l'échelle fine engendrant un grand nombre de degrés de liberté), nécessitent le développement de méthodes de simulation adaptées.

Nous développons une méthode de sous-structuration mixte par interfaces où les sous-structures du modèle numérique correspondent aux sous-structures physiques. Cette méthode itérative, globale en temps et en espace, est paramétrée par des directions de recherche qu'il faut optimiser. Deux voies sont explorées, des directions de recherche constantes et des directions de recherche variables. Le choix de directions de recherche constantes est le plus simple car il permet de revenir dans le cadre d'application initial de la méthode en dynamique où les opérateurs sont constants. Cette méthode n'est pas du tout efficace pour des non-linéarités fortes. Le choix de directions de recherche variables est plus compliqué car, dans ce cas, les opérateurs ne sont plus constants. Un algorithme de gradient conjugué est donc utilisé et optimisé pour réduire le nombre d'itérations. La méthode est validée dans un exemple 1D 1/2 qui a permis d'optimiser les paramètres de la méthode. Le cas d'un calcul 3D d'impact plaque/plaque est également traité. Dans ce cas, l'utilisation du calcul parallèle permet de gérer le nombre important de degrés de liberté.

**Mots clés :** décomposition de domaine, méthode LaTIn, calcul parallèle, composite 3D, endommagement, compaction

## Abstract

The work presented is completed in collaboration with the *Centre d'Études de Gramat* (CEG). The objective is to provide reliable numerical tools of prediction of the shock behaviour of structures in 3D C/C. For durations of loadings about a few microseconds, a modeling on the mesoscale of the material can simulate in a relevant way the principal experimental observations. The numerical processing of a model of composite described on the mesoscale in dynamics leads however very quickly to problems of very important size. The characteristics of the problem, typical of what one understands by mesodynamics (strong non-linearities, description on a fine scale generating a great number of degrees of freedom), require the development of adapted methods of simulation.

We develop a mixed domain decomposition strategy by interface where the substructures of the numerical model correspond to the physical substructures. This iterative, global method in time and space, is parameterized by search directions which should be optimized. Two ways are explored, constant search directions and variable search directions. The choice of constant search directions is the simplest because it makes the operators are constant. However, this method is not at all effective for strong non-linearities. The choice of variable search directions is more complicated because, in this case, the operators are no more constant. A conjugate gradient algorithm is used and optimized in order to reduce the number of iterations. The method is validated in an 1D 1/2 example in which the parameters of the method are optimized. The case of a 3D calculation of plate/plate impact test is also treated. In this case, parallel computing allows the treatment of problems with a significant number of degrees of freedom.

**Keywords:** domain decomposition, LaTIn method, parallel computing, 3D composite, damage, compaction