



HAL
open science

Transformation de Mellin faisceutique et D-modules

Hervé Fabbro

► **To cite this version:**

Hervé Fabbro. Transformation de Mellin faisceutique et D-modules. Mathématiques [math]. Université Nice Sophia Antipolis, 2006. Français. NNT: . tel-00133909

HAL Id: tel-00133909

<https://theses.hal.science/tel-00133909>

Submitted on 28 Feb 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS - UFR SCIENCES
Ecole Doctorale de Sciences Fondamentales et Appliquées
LABORATOIRE J. A. DIEUDONNÉ
U.M.R. C.N.R.S. 6621

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de

Docteur en SCIENCES
Spécialité MATHÉMATIQUES

par

Hervé FABBRO

Transformation de Mellin faisceutique et \mathcal{D} -modules

Thèse dirigée par Michel MERLE
soutenue le 16 mai 2006 devant le jury composé de :

M. ANTOINE DOUAI	Examineur
Maître de conférence à l'Université de Nice	
MME ANNE DUVAL	Rapporteur
Professeur à l'Université de Lille	
M. PHILIPPE MAISONOBE	Examineur
Professeur à l'Université de Nice	
M. MICHEL MERLE	Directeur de thèse
Professeur à l'Université de Nice	
M. CLAUDE SABBAH	Rapporteur
Directeur de recherche au CNRS	
M. CARLOS SIMPSON	Examineur
Directeur de recherche au CNRS	

Remerciements

Je suis heureux d'exprimer toute ma gratitude à Michel Merle, mon directeur de thèse. Il a toujours été très disponible durant ces années et m'a apporté toute son aide et son soutien, notamment dans les moments où le doute faisait surface. Sa culture et son recul sur les mathématiques m'ont été très précieux pour la rédaction de cette thèse. J'ai également beaucoup apprécié les nombreuses discussions que nous avons eues sur tout ce qui touche de près ou de loin aux mathématiques. Elles ont été extrêmement enrichissantes pour moi.

Je remercie également tous les membres de l'équipe « \mathcal{D} -modules et singularités » de Nice, et plus particulièrement Antoine Douai et Philippe Maisonobe avec qui j'ai fréquemment discuté et qui m'ont éclairé bien souvent. Je suis heureux qu'ils prennent part au jury.

Ma gratitude s'adresse aussi à Claude Sabbah et Anne Duval qui ont accepté de lire avec soin cette thèse et de la rapporter. Leurs remarques ont été très constructives et ont contribué sans nul doute à améliorer considérablement ce texte.

Je tiens également à remercier Carlos Simpson qui me fait l'honneur de participer au jury.

Je remercie pour leur bonne humeur Gil, Raphaël, Tristan, Fabrice et Olivier avec qui j'ai partagé mon bureau, André G., André H., Jacques, Mohamed pour leur soutien amical, Jean-Louis et Isabelle pour leur gentillesse à la bibliothèque, Bernard et Jean-Marc pour leur efficacité dès qu'un problème informatique survient, Janine pour sa disponibilité, et plus généralement tout le personnel du laboratoire de mathématiques.

Je remercie enfin mes parents et mon épouse Cécile pour le soutien moral qu'ils m'ont apporté tout au long de ces années, sans oublier ma fille Chloé qui est née il y a peu pour assister à l'achèvement de cette thèse.

Table des matières

Introduction	4
1 Notations et rappels	10
1.1 Notations	10
1.2 Transformation de Mellin pour les $\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}$ -modules	12
1.3 Transformation de Mellin inverse pour les modules aux différences finies	14
1.4 Polygone de Newton et solutions d'une équation différentielle linéaire	15
1.5 Polygone de Newton d'un opérateur linéaire aux différences finies	16
1.6 \mathbb{C} -constructibilité et \mathbb{R} -constructibilité d'un faisceau	18
2 Définitions des conditions de croissance et de décroissance sur les fonctions	19
2.1 Conditions de décroissance pour les fonctions sur $(\mathbb{C}^*)^p$	19
2.2 Conditions de croissance et de décroissance pour les fonctions sur \mathbb{C}^p	27
3 Transformation de Mellin et foncteurs des solutions	29
3.1 Torsion par le noyau \mathcal{T}	30
3.2 Théorème de commutation de la transformation de Mellin et du foncteur des solutions	39
3.3 La preuve	41
3.4 Exemples de calculs explicites à une variable	51
4 Transformation de Mellin inverse et foncteurs des solutions	55
4.1 Définition du sous-espace $\Sigma_{\lambda,\mu}$	56
4.2 Théorème de commutation de la transformation de Mellin inverse et du foncteur des solutions	57
4.3 La preuve	58

4.4	Le cas des opérateurs à une variable et à une seule pente strictement positive	67
5	Calculs et lemmes techniques	73
5.1	Un résultat de finitude sur les solutions d'un $\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}$ -module . .	73
5.2	Calculs de développements asymptotiques	80
5.3	Lemmes sur les équations aux différences linéaires	90
5.4	Lemmes sur les équations aux dérivées partielles linéaires . . .	94
5.5	Un petit calcul annexe	96
	Bibliographie	97

Introduction

La transformation de Mellin pour les \mathcal{D} -modules est inspirée de l'analyse. Elle reproduit sur l'algèbre des opérateurs différentiels linéaires algébriques sur le tore $(\mathbb{C}^*)^p$ (de coordonnées t_1, \dots, t_p) ce qui se passe sur la transformation intégrale

$$\widehat{\varphi}(s_1, \dots, s_p) = \int_{]0, +\infty[^p} \varphi(t_1, \dots, t_p) t_1^{s_1} \dots t_p^{s_p} \frac{dt_1}{t_1} \dots \frac{dt_p}{t_p}$$

qui à une fonction φ indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[^p$ associe une fonction sur \mathbb{C}^p (de coordonnées s_1, \dots, s_p). Si on note τ_j la translation $s_j \mapsto s_j + 1$, on remarque que $\widehat{t_j \varphi} = \tau_j \widehat{\varphi}$. Si de plus on prend $\widehat{\varphi}$ à décroissance rapide en 0 et à l'infini en chaque variable, il vient $\widehat{t_j \frac{\partial}{\partial t_j} \varphi} = -s_j \widehat{\varphi}$. L'action d'un opérateur différentiel $P(t_1, \dots, t_p, t_1 \frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, t_p \frac{\partial}{\partial t_p})$ sur φ est donc changée en l'action de l'opérateur aux différences $P(\tau_1, \dots, \tau_p, -s_1, \dots, -s_p)$ sur $\widehat{\varphi}$.

Considérons donc la \mathbb{C} -algèbre non commutative engendrée par les s_j, τ_j, τ_j^{-1} et les relations $\tau_j s_j = (s_j + 1) \tau_j$: c'est l'algèbre des opérateurs aux différences finies linéaires sur \mathbb{C}^p , et on la note $\mathbb{C}[s_1, \dots, s_p] \langle \tau_1, \tau_1^{-1}, \dots, \tau_p, \tau_p^{-1} \rangle$ (l'opérateur $\tau - 1$ est l'opérateur de différence finie usuel).

F. Loeser et C. Sabbah définissent, dans [L-S], un foncteur de transformation de Mellin algébrique, noté \mathfrak{M} , de la catégorie des \mathcal{D} -modules algébriques sur $(\mathbb{C}^*)^p$ dans la catégorie des $\mathbb{C}[s_1, \dots, s_p] \langle \tau_1, \tau_1^{-1}, \dots, \tau_p, \tau_p^{-1} \rangle$ -modules. Etant donné que les \mathbb{C} -algèbres $D = \mathbb{C}[t_1, t_1^{-1}, \dots, t_p, t_p^{-1}] \langle t \partial_t \rangle$ et $\mathbb{C}[s_1, \dots, s_p] \langle \tau_1, \tau_1^{-1}, \dots, \tau_p, \tau_p^{-1} \rangle$ sont isomorphes via la correspondance $s_j \mapsto -t_j \frac{\partial}{\partial t_j}$, $\tau_j \mapsto t_j$, tout module sur l'une est un module sur l'autre. Le foncteur \mathfrak{M} est alors une équivalence de catégories définie par

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} : \mathfrak{Mod}(\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}) &\longrightarrow \mathfrak{Mod}(\mathbb{C}[s_1, \dots, s_p] \langle \tau_1, \tau_1^{-1}, \dots, \tau_p, \tau_p^{-1} \rangle) \\ \mathcal{M} &\longmapsto M \end{aligned}$$

où M est le module des sections globales de \mathcal{M} . Son inverse $\overline{\mathfrak{M}}$ est alors appelé transformation de Mellin inverse algébrique, et est défini par

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{M}} : \mathfrak{Mod}(\mathbb{C}[s_1, \dots, s_p] \langle \tau_1, \tau_1^{-1}, \dots, \tau_p, \tau_p^{-1} \rangle) &\longrightarrow \mathfrak{Mod}(\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}) \\ M &\longmapsto \underline{\mathfrak{M}} \end{aligned}$$

D'autre part, il existe un foncteur Sol , appelé foncteur des solutions, entre la catégorie des \mathcal{D} -modules algébriques sur $(\mathbb{C}^*)^p$ et la catégorie dérivée des complexes bornés de faisceaux de \mathbb{C} -espaces vectoriels sur $(\mathbb{C}^*)^p$. Si on se restreint aux \mathcal{D} -modules holonomes réguliers d'une part, et aux faisceaux pervers d'autre part, ce foncteur est même une équivalence de catégories, appelée correspondance de Riemann-Hilbert.

Nous pouvons également définir un foncteur des solutions, encore noté Sol , de la catégorie des $\mathbb{C}[s_1, \dots, s_p]\langle \tau_1, \tau_1^{-1}, \dots, \tau_p, \tau_p^{-1} \rangle$ vers la catégorie dérivée des complexes bornés de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}$ -modules, où $\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p$ est la variété analytique quotient de la variété algébrique \mathbb{C}^p par les translations τ_j .

En 1992, C. Sabbah pose alors une question ([Sab-2], Q₂ p.374) : comment définir un foncteur $\mathfrak{M} : D^b((\mathbb{C}^*)^p, \mathbb{C}) \rightarrow D^b(\mathfrak{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}))$, de la catégorie dérivée des complexes bornés de faisceaux de \mathbb{C} -espaces vectoriels sur $(\mathbb{C}^*)^p$ vers celle des complexes bornés de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}$ -modules, qui fasse commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}\text{-modules algébriques} & \xrightarrow{Sol} & D^b((\mathbb{C}^*)^p, \mathbb{C}) \\ \downarrow \mathfrak{M} & & \downarrow \mathfrak{M} \\ \text{Modules aux différences finies} & \xrightarrow{Sol} & D^b(\mathfrak{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p})) \end{array}$$

Notre but est, dans un premier temps, de répondre à cette question.

Le problème traité au chapitre 3 consiste alors à essayer de décrire le faisceau des solutions du transformé de Mellin $\mathfrak{M}(\mathcal{M})$ en fonction des solutions du \mathcal{D} -module \mathcal{M} . La démarche utilisée est analogue à celle de B. Malgrange qui a résolu le problème analogue dans le cas de la transformation de Fourier (voir [Mal-4], [Mal-3], [Da],[B-M-V-1], [B-M-V-2]).

Notre résultat se présente alors sous la forme suivante :

THÉORÈME 3.2.3 *Pour tout $\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}$ -module algébrique cohérent \mathcal{M} , tel que $Sol^{<0}(\mathcal{M})|_{(\mathbb{C}^*)^p}$ est à cohomologie \mathbb{C} -constructible et $Sol^{<0}(\mathcal{M})|_{(\overline{\mathbb{C}^*)^p} \setminus (\mathbb{C}^*)^p}$ est à cohomologie \mathbb{R} -constructible, il existe un isomorphisme canonique dans $D^b(\mathfrak{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}))$*

$$\mathfrak{M}\left(Sol^{<0}(\mathcal{M})\right) \cong Sol\left(\mathfrak{M}(\mathcal{M})\right)$$

Il existe une conjecture selon laquelle $Sol^{<0}(\mathcal{M})$ est à cohomologie \mathbb{C} -constructible sur $(\mathbb{C}^*)^p$ et \mathbb{R} -constructible sur le bord de $(\overline{\mathbb{C}^*)^p}$ pour tout p

dès que \mathcal{M} est holonome. Cependant, il est déjà possible d'établir le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3.2.4 *Si une des deux hypothèses suivantes est vérifiée*

- \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}$ -module holonome, régulier sur $(\mathbb{P}^1)^p \setminus (\mathbb{C}^*)^p$
- pour $p = 1$, \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^*}$ -module holonome

alors il existe un isomorphisme canonique dans $D^b(\mathfrak{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}))$

$$\mathfrak{M}\left(\mathcal{S}ol^{<0}(\mathcal{M})\right) \cong \mathcal{S}ol\left(\mathfrak{M}(\mathcal{M})\right)$$

La transformation de Mellin classique étant une transformation intégrale, il est naturel d'imposer des conditions de croissance ou de décroissance sur les fonctions considérées : le premier pas essentiel est alors la construction d'un foncteur $\mathcal{S}ol^{<0}$ de solutions à décroissance rapide. Pour cela, nous compactifions le tore $(\mathbb{C}^*)^p$ en anneaux $(\overline{\mathbb{C}^*})^p$, c'est à dire en rajoutant un cercle S^1 en 0 et à l'infini de chaque facteur \mathbb{C}^* , et nous définissons sur $(\overline{\mathbb{C}^*})^p$ le faisceau $\mathcal{A}_{(\overline{\mathbb{C}^*})^p}^{<0}$, dont les sections locales sont à distance finie des fonctions holomorphes, et sont de plus à décroissance rapide en 0 ou à l'infini sur les bords des anneaux. Nous définissons alors le complexe des solutions de \mathcal{M} dans $\mathcal{A}_{(\overline{\mathbb{C}^*})^p}^{<0}$ comme étant $\mathcal{S}ol^{<0}(\mathcal{M}) = \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\bar{\pi}^{-1}\mathcal{D}_{(\mathbb{P}^1)^p}^{an}}(\bar{\pi}^{-1}(j_+\mathcal{M})^{an}, \mathcal{A}_{(\overline{\mathbb{C}^*})^p}^{<0})$, où $j : (\mathbb{C}^*)^p \hookrightarrow (\mathbb{P}^1)^p$ est l'inclusion et $\bar{\pi}$ l'éclatement réel dans $(\mathbb{P}^1)^p$ du diviseur $(\mathbb{P}^1)^p \setminus (\mathbb{C}^*)^p$.

Le deuxième pas essentiel est la définition du foncteur de transformation de Mellin faisceautique \mathfrak{M} suivant :

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} : D^b((\overline{\mathbb{C}^*})^p, \mathbb{C}) &\longrightarrow D^b(\mathfrak{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p})) \\ \mathcal{F} &\longmapsto \mathbf{R}\Gamma\left(\underline{((\overline{\mathbb{C}^*})^p, \mathcal{F} \otimes_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{L}})}[p] \otimes_{\mathbb{C}[\underline{T}, \underline{T}^{-1}]} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}\right) \end{aligned}$$

où $\bar{\mathcal{L}}$ est le système local naturel sur le tore $(\overline{\mathbb{C}^*})^p$ de $\mathbb{C}[M_1, M_1^{-1}, \dots, M_p, M_p^{-1}]$ -modules libres de rang 1 et où les coordonnées de $\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p$, notées T_1, \dots, T_p , agissent sur $\mathbf{R}\Gamma\left(\underline{((\overline{\mathbb{C}^*})^p, \mathcal{F} \otimes_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{L}})}\right)$ par $M_1^{-1}, \dots, M_p^{-1}$.

Il reste alors à démontrer le quasi-isomorphisme souhaité.

Ces résultats répondent donc bien à la question posée par C. Sabbah dans [Sab-2] (Q₂ p.374).

Il devient maintenant naturel de formuler l'analogue de cette question avec la transformation de Mellin inverse : existe-il un morphisme canonique

entre le transformé de Mellin inverse du complexe des solutions holomorphes d'un module aux différences finies sur l'espace affine \mathbb{C}^p , et le complexe des solutions holomorphes du transformé de Mellin inverse de ce module ? Si oui, est-ce un isomorphisme ?

Plus précisément, peut-on construire un foncteur de transformation de Mellin inverse faisceautique $\overline{\mathfrak{M}}$ qui fasse commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}\text{-modules algébriques} & \xrightarrow{\text{Sol}} & D^b((\mathbb{C}^*)^p, \mathbb{C}) \\
 \uparrow \overline{\mathfrak{M}} & & \uparrow \overline{\mathfrak{M}} \\
 \text{Modules aux différences finies} & \xrightarrow{\text{Sol}} & D^b(\mathfrak{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}))
 \end{array}$$

Ce problème, plus délicat, est abordé au chapitre 4.

Nous compactifions $\mathbb{C}^p = (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^p$ en $\overline{\mathbb{C}^p} = (\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}))^p$, et nous construisons sur $\overline{\mathbb{C}^p}$ le faisceau \mathcal{E} dont les sections locales sont, à distance finie, des fonctions holomorphes, en tout point de $\mathbb{R} \times \{\infty\}$ sont à croissance exponentielle d'ordre 1 dans des bandes verticales, et en tout point de $\{\infty\} \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ sont nulles. Nous avons donc le diagramme suivant dans la catégorie des variétés analytiques

$$\begin{array}{ccc}
 & \widetilde{(\mathbb{C}^*)^p} \times \overline{\mathbb{C}^p} & \\
 & \downarrow q & \\
 & (\mathbb{C}^*)^p \times \overline{\mathbb{C}^p} & \\
 \swarrow \rho_1 & & \searrow \rho_2 \\
 (\mathbb{C}^*)^p & & \overline{\mathbb{C}^p}
 \end{array}$$

où le morphisme $q : (\sigma_1, \dots, \sigma_p, s_1, \dots, s_p) \mapsto (e^{\sigma_1}, \dots, e^{\sigma_p}, s_1, \dots, s_p)$ est le revêtement universel de $(\mathbb{C}^*)^p$. Nous pouvons alors définir un foncteur, noté $\text{Sol}(-, \mathcal{E})$, des solutions dans \mathcal{E} , de la catégorie des $\mathbb{C}[s_1, \dots, s_p]\langle \tau_1, \tau_1^{-1}, \dots, \tau_p, \tau_p^{-1} \rangle$ vers la catégorie dérivée des complexes bornés de faisceaux de \mathbb{C} -espaces vectoriels.

Le premier théorème que nous obtenons à ce sujet est le suivant :

THÉORÈME 4.2.4 *Notons $\mathfrak{Mod}_{pf}(\mathbb{C}[\underline{s}]\langle \underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1} \rangle)$ la catégorie des $\mathbb{C}[\underline{s}]\langle \underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1} \rangle$ -modules de présentation finie.*

Pour tout objet \mathbb{M} de $\mathfrak{Mod}_{pf}(\mathbb{C}[\underline{s}]\langle \underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1} \rangle)$ et tout $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{Q}_+^*)^p \times (\mathbb{C}^*)^p$, il existe un foncteur

$$\Psi_{\lambda, \mu} : \mathfrak{Mod}_{pf}(\mathbb{C}[\underline{s}]\langle \underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1} \rangle) \longrightarrow D^b((\mathbb{C}^*)^p, \mathbb{C})$$

et deux morphismes canoniques dans $D^b((\mathbb{C}^*)^p, \mathbb{C})$

$$\overline{\mathfrak{M}}_{\lambda, \mu} \left(\mathcal{S}ol(\mathbb{M}, \mathcal{E}) \right) \xleftarrow{\phi_{\lambda, \mu}} \Psi_{\lambda, \mu}(\mathbb{M}) \xrightarrow{\psi_{\lambda, \mu}} \mathcal{S}ol \left(\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p} \otimes_{\mathbb{D}} \overline{\mathfrak{M}}(\mathbb{M}), \mathbf{R}q_! \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{an} \right)$$

où $\mathcal{S}ol(-, \mathbf{R}q_! \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{an}) = \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(-, \mathbf{R}q_! \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{an})$

Le point essentiel réside dans la définition de la transformation de Mellin inverse faisceautique $\overline{\mathfrak{M}}_{\lambda, \mu}$. Elle dépend de deux paramètres complexes λ et μ , et fait intervenir une sous-espace de $(\mathbb{C}^*)^p \times \overline{\mathbb{C}}^p$, noté $\Sigma_{\lambda, \mu}$ (voir la section 4.1) :

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{M}}_{\lambda, \mu} : D^b(\overline{\mathbb{C}}^p, \mathbb{C}) &\longrightarrow D^b((\mathbb{C}^*)^p, \mathbb{C}) \\ \mathcal{G} &\longmapsto \mathbf{R}\rho_{1*} \mathbf{R}q_! (q^{-1} \rho_2^{-1} \mathcal{G} \otimes_{\mathbb{C}} \underline{\mathbb{C}}_{\Sigma_{\lambda, \mu}}) [p] \end{aligned}$$

La transformation de Mellin inverse classique associée à une fonction holomorphe $g : \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction \overline{g} sur $(\mathbb{C}^*)^p$ définie par

$$\overline{g}(t_1, \dots, t_p) = \int_{\gamma_1 \times \dots \times \gamma_p} g(s_1, \dots, s_p) t_1^{-s_1} \dots t_p^{-s_p} ds_1 \dots ds_p$$

où chaque γ_j est un chemin vertical du type $x_0 + i\mathbb{R}$. Si nous connaissons le comportement asymptotique des fonctions g dont nous étudions la transformation de Mellin inverse, nous sommes en mesure de choisir une détermination de $t_1^{-s_1} \dots t_p^{-s_p}$, c'est à dire borner les arguments des t_j , de manière à ce que l'intégrale ci-dessus converge. Dans la définition de $\overline{\mathfrak{M}}_{\lambda, \mu}$, ceci se traduit par le produit tensoriel par $\underline{\mathbb{C}}_{\Sigma_{\lambda, \mu}}$.

Le théorème précédent décrit un premier lien qui possède l'avantage d'être valable pour tout $\mathbb{C}[\underline{s}]\langle \underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1} \rangle$ -module de présentation finie \mathbb{M} . Cependant, les morphismes canoniques obtenus sont des isomorphismes à distance finie, mais pas à l'infini en général. Il est donc utile de compléter cette étude en exhibant des classes de modules pour lesquelles ces morphismes deviennent des isomorphismes à l'infini. C'est ce à quoi nous nous employons dans la suite du chapitre 4. Nous nous appuyons, pour cela, sur des travaux de A. Duval et J.P. Ramis (voir, par exemple, [Duv-1], [Duv-2], [Ram-2], ou encore [Tou] p.141) grâce auxquels nous connaissons une base de solutions des

équations aux différences à une variable et une expression asymptotique de chacune d'entre elles. Ainsi, nous savons contrôler le comportement à l'infini de ces solutions, et donc imposer au module \mathbb{M} les conditions adéquates pour obtenir les isomorphismes souhaités. Dorénavant, considérons donc le cas d'une seule variable.

Il existe une notion de polygone de Newton pour les modules aux différences (voir par exemple [B-D] ou [Tou]), analogue à celle de polygone de Newton d'un \mathcal{D} -module. Tout opérateur aux différences finies possède donc des pentes. Soit alors un module aux différences $\mathbb{M} = \frac{\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle}{\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle\Delta}$ à une variable qui n'en n'a qu'une, notée $\frac{p}{q}$, et qui soit strictement positive. Alors, le 0^{ème} faisceau de cohomologie du complexe des solutions holomorphes du \mathcal{D} -module $\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p} \otimes_{\mathbb{D}} \overline{\mathfrak{M}}(\mathbb{M})$ possède une base de fonctions de la forme $f(t) = e^{Q(t^{\frac{1}{q}})} t^\alpha \hat{\varphi}(t)$, avec $\alpha \in \mathbb{C}$, $\hat{\varphi}(t) \in \mathbb{C}[[t^{-\frac{1}{q}}]][\log(t^{\frac{1}{q}})]$ et $Q(X) \in X\mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à p . En notant δ le coefficient dominant de Q , nous appelons $(\frac{p}{q}, \delta)$ le couple du \mathcal{D} -module $\overline{\mathfrak{M}}(\mathbb{M})$. Formulons maintenant notre théorème :

THÉORÈME 4.4.2 *Etant donné $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Q}_+^* \times \mathbb{C}^*$, pour tout $\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$ -module $\mathbb{M} = \frac{\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle}{\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle\Delta}$ avec $\Delta \in \mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle - \{0\}$, à une seule pente strictement positive, dont le transformé de Mellin algébrique inverse a pour couple $(\frac{1}{\lambda}, \mu)$, il existe un isomorphisme canonique dans $D^b((\mathbb{C}^*)^p, \mathbb{C})$*

$$\mathcal{H}^0 \overline{\mathfrak{M}}_{\lambda, \mu} \left(\text{Sol}(\mathbb{M}, \mathcal{E}) \right) \cong \mathcal{H}^0 \text{Sol} \left(\mathcal{D}_{\mathbb{C}^*} \otimes_{\mathbb{D}} \overline{\mathfrak{M}}(\mathbb{M}), \mathbf{R}q_! \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an} \right)$$

Nous donnons, avec le théorème 4.2.4, un point de départ possible de l'étude de la transformation de Mellin inverse, et le théorème 4.4.2 en est une précision. La question de trouver des cas d'isomorphisme pour des modules aux différences plus généraux, et même à plusieurs variables, reste ouverte.

★ ★
★

Le plan de ce mémoire est le suivant. Dans le chapitre 1, nous précisons les notations et rappelons les définitions essentielles intervenant par la suite. Le chapitre 2 est dévolu à la mise en place des conditions de croissance et de décroissance, ainsi qu'à la construction des faisceaux correspondants. Ils interviendront fortement dans les chapitres 3 et 4, où sont présentés les résultats principaux, ainsi que les grandes lignes de leur preuve. Les lemmes, et résultats techniques, nécessaires aux démonstrations des théorèmes principaux n'étant pas indispensables en première lecture, ils sont relégués au chapitre 5.

Chapitre 1

Notations et rappels

Nous mettons en place quelques notations, et rappelons des notions sur la théorie des \mathcal{D} -modules, la transformation de Mellin et les polygones de Newton qui nous seront utiles tout au long du travail.

1.1 Notations

Si X est un espace topologique, A un anneau commutatif, et \mathcal{R} un faisceau d'anneaux sur X , on note $\mathfrak{Mod}(A)$ la catégorie des A -modules, $\mathfrak{Mod}(\mathcal{R})$ la catégorie des \mathcal{R} -modules à gauche, $\mathfrak{Coh}(\mathcal{R})$ celle des \mathcal{R} -modules à gauche cohérents, $D^b(\mathfrak{Mod}(\mathcal{R}))$ la catégorie dérivée des complexes bornés de \mathcal{R} -modules à gauche, $D_{coh}^b(\mathfrak{Mod}(\mathcal{R}))$ la catégorie dérivée des complexes bornés de \mathcal{R} -modules à cohomologie cohérente, $D^b(X, \mathbb{C})$ la catégorie dérivée des complexes bornés de faisceaux de \mathbb{C} -espaces vectoriels sur X , et $D_c^b(X, \mathbb{C})$ la sous-catégorie de $D^b(X, \mathbb{C})$ des complexes à cohomologie \mathbb{C} -constructible sur X .

Lorsqu'on a un complexe double $\mathcal{K}^{\bullet, \bullet}$, le complexe simple (ou total) associé est noté $\mathcal{T}ot^{\bullet}(\mathcal{K}^{\bullet, \bullet})$.

Si N est un groupe abélien, on note \underline{N}_X le faisceau constant sur X de fibre N . On l'écrit également \underline{N} quand il n'y a pas de confusion possible sur l'espace de base. Si Y est un sous-espace de X , on note \underline{N}_Y le faisceau sur X , constant de fibre N sur Y , et de fibre 0 sur $X \setminus Y$.

Si X est une variété algébrique, \mathcal{O}_X le faisceau des fonctions algébriques sur X , \mathcal{O}_X^{an} le faisceau des fonctions holomorphes sur X , et si \mathcal{F} est un \mathcal{O}_X -

module, on note \mathcal{F}^{an} son “analytisé”, c’est à dire

$$\mathcal{F}^{an} = \mathcal{O}_X^{an} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$$

Ainsi, \mathcal{F}^{an} est un \mathcal{O}_X^{an} -module.

Si \mathcal{D}_X est le faisceau des opérateurs différentiels algébriques sur X , \mathcal{D}_X^{an} celui des opérateurs différentiels analytiques sur X , et si \mathcal{G} est un \mathcal{D}_X -module, on note \mathcal{G}^{an} son “analytisé”, c’est à dire

$$\mathcal{G}^{an} = \mathcal{D}_X^{an} \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{G}$$

Ainsi, \mathcal{G}^{an} est un \mathcal{D}_X^{an} -module.

Soit p un nombre entier supérieur ou égal à 1.

Notons $(\mathbb{C}^*)^p$ la variété affine $\text{Spec } \mathbb{C}[t_1, t_1^{-1}, \dots, t_p, t_p^{-1}]$, \mathbb{C}^p la variété affine $\text{Spec } \mathbb{C}[s_1, \dots, s_p]$, et τ_1, \dots, τ_p les translations $s_j \mapsto s_j + 1$ sur \mathbb{C}^p . On désigne par $\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}$ (ou \mathcal{D}) le faisceau des opérateurs différentiels algébriques sur $(\mathbb{C}^*)^p$, $\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}$ (ou \mathcal{D}) l’anneau de ses sections globales, et $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}$ le faisceau des fonctions régulières sur \mathbb{C}^p .

Notons $\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p$ le quotient de \mathbb{C}^p par l’action des τ_j , où \mathbb{C}^p est vue cette fois comme variété analytique. Les coordonnées sont $T_j = e^{-2i\pi s_j}$, et le passage au quotient, $\pi : \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p$, est $(s_1, \dots, s_p) \mapsto (e^{-2i\pi s_1}, \dots, e^{-2i\pi s_p})$. Le faisceau $\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}^{an}$ est le faisceau des fonctions holomorphes en (s_1, \dots, s_p) définies sur des ouverts stables par les translations τ_j . Le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}$, des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p$, est le sous-faisceau de $\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}^{an}$ des fonctions holomorphes 1-périodiques en chaque s_j .

Notons $\mathbb{C}[s_1, \dots, s_p] \langle \tau_1, \tau_1^{-1}, \dots, \tau_p, \tau_p^{-1} \rangle$ l’algèbre non commutative engendrée par $\mathbb{C}[s_1, \dots, s_p]$ et $\tau_1, \tau_1^{-1}, \dots, \tau_p, \tau_p^{-1}$, et les relations $\tau_j s_j = (s_j + 1)\tau_j$. C’est l’algèbre des opérateurs aux différences finies algébriques sur \mathbb{C}^p .

Pour tout $t = (t_1, \dots, t_p) \in (\mathbb{C}^*)^p$, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p) \in \mathbb{C}^p$ et $s = (s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{C}^p$, on note

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{s+1} &:= t_1^{s_1+1} \dots t_p^{s_p+1} \\ e^{-\langle \sigma, s \rangle} &= e^{-\sigma_1 s_1} \dots e^{-\sigma_p s_p} \end{aligned}$$

Pour un $\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}$ -module algébrique \mathcal{M} , on pose

$$\text{Sol}(\mathcal{M}) = \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{an}}(\mathcal{M}^{an}, \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{an}) = \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{an})$$

Si de plus \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}$ -module cohérent, on a $\mathcal{M} = \mathcal{D} \otimes_{\mathbb{D}} \underline{\mathcal{M}}$, où $\underline{\mathcal{M}}$ est le module des sections globales de \mathcal{M} . Et par l'adjonction du produit tensoriel et du $\mathbf{R}\mathcal{H}om$, il vient $\mathcal{S}ol(\mathcal{M}) = \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{D}}(\underline{\mathcal{M}}, \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{an})$. Ceci définit un foncteur

$$\mathcal{S}ol : \mathfrak{C}oh(\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}) \longrightarrow D^b((\mathbb{C}^*)^p, \mathbb{C})$$

Pour tout faisceau \mathcal{F} sur une variété analytique E , notons $\mathcal{F}[X] = \mathcal{F} \otimes_{\mathbb{C}_E} \underline{\mathbb{C}[X]}_E$, et

$$\mathcal{F}[[X]] = \lim_{\longleftarrow k \geq 0} \frac{\mathcal{F}[X]}{X^k}$$

Notons également $\mathcal{F}[[X]][X^{-1}] = \mathcal{F}[[X]] \otimes_{\mathbb{C}_E} \underline{\mathbb{C}[X^{-1}]}_E$. Ainsi, les sections de ce dernier faisceau sur un ouvert U de E sont des séries $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n X^n$ avec $n_0 \in \mathbb{Z}$, et où les a_n sont des sections de \mathcal{F} sur U .

C'est ainsi que nous définissons les faisceaux

$$\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[[t]][\frac{1}{t}] \text{ et } \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[[\frac{1}{t}]] [t] \text{ sur } \mathbb{C}/\mathbb{Z}$$

$$\mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{C}^*}}^{an}[[\frac{1}{s}]] [s] \text{ sur } \widetilde{\mathbb{C}^*}$$

1.2 Transformation de Mellin pour les $\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}$ -modules

Rappelons la théorie élémentaire de la transformation de Mellin des fonctions \mathcal{C}^∞ de la variable réelle.

Soit $\varphi :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ , bornée en 0 et à décroissance rapide à l'infini, c'est à dire $\forall N > 0, \exists C > 0 : |\varphi(t)| \leq \frac{C}{|t|^N}$ pour $|t|$ assez grand.

La transformée de Mellin de φ est la fonction holomorphe sur le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 0\}$ définie par la formule intégrale

$$\widehat{\varphi}(s) = \int_0^{+\infty} \varphi(t) t^s \frac{dt}{t}$$

Une première remarque est que l'on a l'identité $\widehat{t\varphi}(s) = \widehat{\varphi}(s+1)$ pour tout complexe s de partie réelle strictement positive. Autrement dit, avec les notations introduites précédemment, on a

$$\widehat{t\varphi} = \tau \widehat{\varphi}$$

De plus, avec les hypothèses sur φ , une intégration par parties donne $\widehat{t\varphi}'(s) = [\varphi(t)t^s]_0^{+\infty} - s \int_0^{+\infty} \varphi(t)t^s \frac{dt}{t} = -s \int_0^{+\infty} \varphi(t)t^s \frac{dt}{t}$, c'est à dire

$$\widehat{t\partial_t.\varphi} = -s\widehat{\varphi}$$

Ansi, via la transformation de Mellin, la multiplication par la variable t devient l'action de la translation τ , et l'action de l'opérateur différentiel $t\partial_t$ devient la multiplication par $-s$. C'est ce qui motive la définition de la transformation de Mellin pour les $\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}$ -modules.

Considérons l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[t_1, \dots, t_p^{-1}] \langle t_1 \partial_{t_1}, \dots, t_p \partial_{t_p} \rangle & \longrightarrow & \mathbb{C}[s_1, \dots, s_p] \langle \tau_1, \tau_1^{-1}, \dots, \tau_p, \tau_p^{-1} \rangle \\ t_j & \longmapsto & \tau_j \\ t_j \partial_{t_j} & \longmapsto & -s_j \end{array}$$

C'est un isomorphisme de \mathbb{C} -algèbres, qui identifie l'algèbre des opérateurs différentiels algébriques sur $(\mathbb{C}^*)^p$ et celle des opérateurs aux différences finies algébriques sur \mathbb{C}^p .

DÉFINITION 1.2.1 (voir [L-S] et [Sab-2])

Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}$ -module algébrique sur le tore $(\mathbb{C}^*)^p$, dont le module des sections globales est noté M .

Via l'isomorphisme précédent, M est un $\mathbb{C}[s_1, \dots, s_p] \langle \tau_1, \tau_1^{-1}, \dots, \tau_p, \tau_p^{-1} \rangle$ -module, noté $\mathfrak{M}(\mathcal{M})$, appelé **transformé de Mellin de \mathcal{M}** .

Ceci définit un foncteur

$$\mathfrak{M} : \mathfrak{Mod}(\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}) \longrightarrow \mathfrak{Mod}(\mathbb{C}[s_1, \dots, s_p] \langle \tau_1, \tau_1^{-1}, \dots, \tau_p, \tau_p^{-1} \rangle)$$

Une description équivalente est donnée dans [L-S]. On note pr la projection $\text{Spec } \mathbb{C}[s_1, \dots, s_p, t_1, \dots, t_p^{-1}] \longrightarrow \text{Spec } \mathbb{C}[s_1, \dots, s_p]$, et on considère le $\mathcal{D}[s_1, \dots, s_p]$ -module $\mathcal{M}[s_1, \dots, s_p]t_1^{s_1} \cdots t_p^{s_p}$: c'est le faisceau $\mathcal{M}[s_1, \dots, s_p]$, l'action des $t_j \partial_{t_j}$ étant donnée par $t_j \partial_{t_j} \cdot m \otimes b(\underline{s}) := t_j \frac{\partial m}{\partial t_j} \otimes b(\underline{s}) + m \otimes s_j b(\underline{s})$. Alors, on a $\mathfrak{M}(\mathcal{M}) = pr_+(\mathcal{M}[s_1, \dots, s_p]t_1^{s_1} \cdots t_p^{s_p})$.

EXEMPLE 1.2.2 Un exemple important est celui des D-modules à une variable de la forme

$$\frac{D_{\mathbb{C}^*}}{D_{\mathbb{C}^*}P}, \text{ avec } P = \sum_{i,j} a_{i,j} t^i (t\partial_t)^j \in D_{\mathbb{C}^*}$$

Le transformé de Mellin de $\frac{D_{\mathbb{C}^*}}{D_{\mathbb{C}^*P}}$ est alors le module

$$\frac{\mathbb{C}[\underline{s}]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle}{\mathbb{C}[\underline{s}]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle\Delta}, \text{ avec } \Delta = \sum_{i,j} (-1)^j a_{i,j} \tau^i s^j \in \mathbb{C}[\underline{s}]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$$

On rejoint la théorie classique d'intégration des équations différentielles où la transformation de Mellin permet de se ramener à la résolution d'une équation aux différences finies.

Dans [L-S] est également défini le faisceau des solutions d'un $\mathbb{C}[\underline{s}]\langle\underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1}\rangle$ -module. On considère ici le complexe de ces solutions, comme il est classique de le faire en théorie des \mathcal{D} -modules :

DÉFINITION 1.2.3 *Le complexe des solutions holomorphes d'un $\mathbb{C}[\underline{s}]\langle\underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1}\rangle$ -module \mathbb{M} est*

$$\text{Sol}(\mathbb{M}) = \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{C}[\underline{s}]\langle\underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1}\rangle}(\mathbb{M}, \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}^{an})$$

$\text{Sol}(\mathbb{M})$ est un complexe de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}$ -modules, car $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}$ est le sous-faisceau des sections de $\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}^{an}$ qui commutent à l'action de $\mathbb{C}[\underline{s}]\langle\underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1}\rangle$.

Nous venons donc de définir un foncteur

$$\text{Sol} : \mathcal{M}od(\mathbb{C}[s_1, \dots, s_p]\langle\tau_1, \tau_1^{-1}, \dots, \tau_p, \tau_p^{-1}\rangle) \longrightarrow D^b(\mathcal{M}od(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}))$$

1.3 Transformation de Mellin inverse pour les modules aux différences finies

On considère à nouveau l'isomorphisme de \mathbb{C} -algèbres

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[t_1, \dots, t_p^{-1}]\langle t_1 \partial_{t_1}, \dots, t_p \partial_{t_p} \rangle &\longrightarrow \mathbb{C}[s_1, \dots, s_p]\langle \tau_1, \tau_1^{-1}, \dots, \tau_p, \tau_p^{-1} \rangle \\ t_j &\longmapsto \tau_j \\ t_j \partial_{t_j} &\longmapsto -s_j \end{aligned}$$

DÉFINITION 1.3.1 *Soit \mathbb{M} un $\mathbb{C}[\underline{s}]\langle\underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1}\rangle$ -module.*

*Via l'inverse de l'isomorphisme précédent, \mathbb{M} est un $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_p^{-1}]\langle t_1 \partial_{t_1}, \dots, t_p \partial_{t_p} \rangle$ -module, noté $\overline{\mathcal{M}}(\mathbb{M})$, et appelé **transformé de Mellin inverse** de \mathbb{M} .*

Si \mathbb{M} est de type fini, alors $\overline{\mathcal{M}}(\mathbb{M})$ est un \mathcal{D} -module de type fini, ou de manière équivalente, $\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p} \otimes_{\mathbb{D}} \overline{\mathcal{M}}(\mathbb{M})$ est un $\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}$ -module algébrique cohérent.

Nous venons donc de définir un foncteur

$$\begin{aligned} \mathcal{M}od_{tf}(\mathbb{C}[\underline{s}]\langle\underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1}\rangle) &\longrightarrow \mathcal{C}oh(\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}) \\ \mathbb{M} &\longmapsto \mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p} \otimes_{\mathbb{D}} \overline{\mathcal{M}}(\mathbb{M}) \end{aligned}$$

où $\mathcal{M}od_{tf}(\mathbb{C}[\underline{s}]\langle\underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1}\rangle)$ est la catégorie des $\mathbb{C}[\underline{s}]\langle\underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1}\rangle$ -modules de type fini.

1.4 Polygone de Newton et solutions d'une équation différentielle linéaire

Cette section est largement inspirée de [B-D] ou [Tou].

Polygone de Newton en 0

Prenons un opérateur $P = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m a_{i,j} t^i \partial_t^j$. Soit le quadrant $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0, y \geq 0\}$. Pour tout $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, posons $Q(u, v) = (u, v) + Q$. Soit alors $M_0(P)$ la réunion des $Q(j, i - j)$ pour $i = 0, \dots, m, j = 0, \dots, n$, tels que $a_{i,j} \neq 0$. Le polygone de Newton en 0 de P , noté $N_0(P)$, est alors l'intersection de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ avec l'enveloppe convexe de $M_0(P)$.

Soit un $D_{\mathbb{C}^*}$ -module algébrique M isomorphe à un quotient $\frac{D_{\mathbb{C}^*}}{D_{\mathbb{C}^*}P}$, où $P \in D_{\mathbb{C}^*} - \{0\}$. Le polygone de Newton de M en 0, noté $N_0(M)$, est alors celui de P . Cette définition est indépendante de l'opérateur P choisi. En effet, si deux quotients $\frac{D_{\mathbb{C}^*}}{D_{\mathbb{C}^*}P_1}$ et $\frac{D_{\mathbb{C}^*}}{D_{\mathbb{C}^*}P_2}$ sont isomorphes, alors $N_0(P_1)$ et $N_0(P_2)$ sont identiques.

Les faces compactes du polygone de Newton en 0 d'un module sont appelées les arêtes. Les pentes de ces arêtes sont, par définition, les pentes de ce module en 0. La longueur d'une pente est la longueur de la projection de l'arête sur l'axe horizontal.

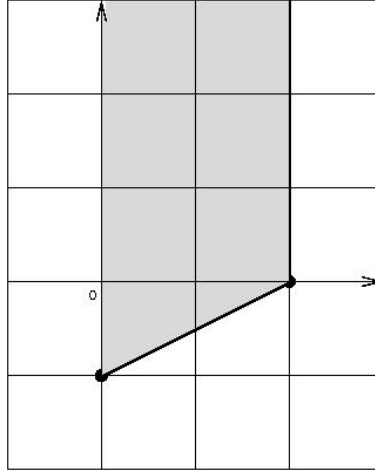
Polygone de Newton à l'infini

Soit encore $P = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m a_{i,j} t^i \partial_t^j$. Le polygone de Newton à l'infini de P est le polygone de Newton en 0 de P après changement de variable $z = \frac{1}{t}$. Il est noté $N_\infty(P)$.

Si on note $M_\infty(P)$ la réunion des $Q(j, -i + j)$ pour $i = 0, \dots, m, j = 0, \dots, n$, tels que $a_{i,j} \neq 0$, alors $N_\infty(P)$ est l'intersection de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ avec l'enveloppe convexe de $M_\infty(P)$.

De même qu'en 0, on définit le polygone de Newton $N_\infty(M)$ d'un module $M = \frac{D_{\mathbb{C}^*}}{D_{\mathbb{C}^*}P}$ à l'infini, ainsi que ses arêtes, leurs longueurs et ses pentes.

Par exemple, le polygone de Newton à l'infini de $t^2 \partial_t^2 + t \partial_t + t$ est



Solutions formelles asymptotiques à l'infini d'un opérateur différentiel

On peut se reporter, par exemple, à [Tou] (p. 158).

Soient $P = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m a_{i,j} t^i \partial_t^j$ un opérateur différentiel et $N_\infty(P)$ son polygone de Newton à l'infini. Soient $\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_r}{q_r}$ ses pentes écrites sous formes irréductibles.

A chaque pente sont attachées des solutions formelles asymptotiques de P à l'infini.

Pour la pente nulle (si elle existe), les solutions formelles sont de la forme $y = t^\alpha \hat{\varphi}(t)$, avec $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\hat{\varphi}(t) \in \mathbb{C}[[\frac{1}{t}]][\log t]$.

Pour une pente $\frac{p_k}{q_k} > 0$, les solutions formelles sont $y = e^{Q(t^{\frac{1}{q_k}})} t^\alpha \hat{\varphi}(t)$, avec $\alpha \in \mathbb{C}$, $\hat{\varphi}(t) \in \mathbb{C}[[t^{-\frac{1}{q_k}}]][\log(t^{\frac{1}{q_k}})]$ et $Q(X) \in X\mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à p_k .

DÉFINITION 1.4.1 *S'il n'y a qu'une seule pente $\frac{p}{q}$ strictement positive, nous appellerons **couple de l'équation, ou du D-module** $\frac{D_{\mathbb{C}^*}}{D_{\mathbb{C}^*} P}$, le couple (ν, δ) où $\nu = \frac{p}{q}$ et δ est le coefficient dominant de Q .*

Dans [Tou], E. Tournier en donne un algorithme de calcul.

1.5 Polygone de Newton d'un opérateur linéaire aux différences finies

Donnons la définition du τ -polygone de Newton d'un opérateur aux différences finies à une variable. Dans [B-D], A. Barkatou et A. Duval utilisent

également un autre polygone de Newton, appelé δ -polygone.

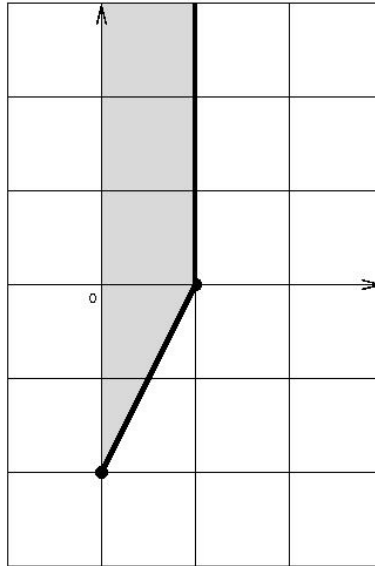
Prenons un opérateur $\Delta = \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^l a_{i,j} s^j \tau^i$. Soit le quadrant $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0, y \geq 0\}$. Pour tout $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, posons $Q(u, v) = (u, v) + Q$. Soit alors $M(\Delta)$ la réunion des $Q(i, -j)$ pour $i = 0, \dots, r, j = 0, \dots, l$, tels que $a_{i,j} \neq 0$. Le τ -polygone de Newton de Δ , noté $N(\Delta)$, est alors l'intersection de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ avec l'enveloppe convexe de $M(\Delta)$.

Comme dans le cas différentiel, on ne considère que les faces compactes du polygone de Newton : ces faces sont appelées arêtes du polygone et les pentes de ces arêtes les pentes du polygone.

On passe du polygone de Newton à l'infini d'un opérateur différentiel à celui de son transformé de Mellin algébrique par symétrie par rapport à la deuxième bissectrice. Les pentes sont alors inverses les unes des autres (voir [B-D] paragraphe 2).

Soit un $\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$ -module \mathbb{M} isomorphe à un quotient $\frac{\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle}{\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle\Delta}$, où $\Delta \in \mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle - \{0\}$. Son polygone de Newton, noté $N(\mathbb{M})$, est alors celui de Δ . Il est indépendant du choix de l'opérateur aux différences Δ . En effet, pour voir cela, nous pouvons nous ramener au cas différentiel car $\frac{\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle}{\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle\Delta}$ est isomorphe à un quotient $\frac{D_{\mathbb{C}^*}}{D_{\mathbb{C}^*}P}$, où P est l'opérateur différentiel transformé de Mellin inverse algébrique de Δ .

Par exemple, le polygone de Newton du transformé de Mellin algébrique de $t^2\partial_t^2 + t\partial_t + t$, c'est à dire de $\tau + s^2$ est



1.6 \mathbb{C} -constructibilité et \mathbb{R} -constructibilité d'un faisceau

Soit \mathcal{F} un faisceau de \mathbb{C} -espaces vectoriels sur une variété analytique X .

Nous dirons que \mathcal{F} est \mathbb{C} -constructible sur X lorsqu'il existe une stratification analytique complexe $X = \coprod_{\alpha} X_{\alpha}$ telle que, pour tout α , $\mathcal{F}|_{X_{\alpha}}$ est un système local de \mathbb{C} -espaces vectoriels de dimension finie sur X_{α} .

Nous dirons que \mathcal{F} est \mathbb{R} -constructible sur X lorsqu'il existe une stratification sous-analytique $X = \coprod_{\alpha} X_{\alpha}$ telle que, pour tout α , $\mathcal{F}|_{X_{\alpha}}$ est un système local de \mathbb{C} -espaces vectoriels de dimension finie sur X_{α} .

De telles stratifications sont dites adaptées au faisceau \mathcal{F} .

Chapitre 2

Définitions des conditions de croissance et de décroissance sur les fonctions

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, la transformation de Mellin des fonctions \mathcal{C}^∞ est définie par une intégrale. Il en est de même pour la transformation de Mellin inverse. Il n'est donc pas étonnant que, dans les preuves des théorèmes principaux des chapitres 3 et 4, nous soyons amenés à étudier la convergence de certaines intégrales, et donc à utiliser des conditions de croissance et de décroissance sur les fonctions considérées. Ce chapitre est donc dévolu à la constructions des faisceaux de fonctions avec conditions en 0 et à l'infini qui seront utiles par la suite. Il s'agit, d'une part, des faisceaux $\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{<0}$, $\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{<0}$ et $\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}^{<0}$ qui imposent des conditions de décroissance rapide en 0 et à l'infini sur les fonctions en t_1, \dots, t_p , et d'autre part $\mathcal{B}^{\ll 0}$ et \mathcal{E} , qui imposent respectivement des conditions de décroissance rapide et une croissance exponentielle d'ordre 1 pour les parties imaginaires des s_j infinies.

2.1 Conditions de décroissance pour les fonctions sur $(\mathbb{C}^*)^p$

Introduisons des conditions de décroissance sur les fonctions en t_1, \dots, t_p . Pour cela, reprenons une construction de [Da] et [Mal-4].

Considérons donc le diagramme dans la catégorie des variétés analytiques

$$\begin{array}{ccc}
 & & (\overline{\mathbb{C}^*})^p \\
 & \nearrow k & \downarrow \bar{\pi} \\
 (\mathbb{C}^*)^p & & (\mathbb{P}^1)^p \\
 & \searrow j &
 \end{array}$$

où $\overline{\mathbb{C}^*} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ est l'éclatement réel de \mathbb{P}^1 en 0 et l'infini. En fait, $\overline{\mathbb{C}^*}$ est le compactifié en anneau de \mathbb{C}^* . On note S_0 et S_∞ respectivement les cercles S^1 en 0 et à l'infini de $\overline{\mathbb{C}^*}$.

Considérons ensuite le diagramme suivant dans la catégorie des variétés analytiques

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (\overline{\mathbb{C}^*})^p & & \mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p \\
 & & \swarrow r_1 & & \nearrow r_2 \\
 & & (\overline{\mathbb{C}^*})^p \times \mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p & & \\
 & & \uparrow \pi & & \\
 & & (\overline{\mathbb{C}^*})^p \times \mathbb{C}^p & & \\
 & \nearrow k & \downarrow \bar{\pi} & & \\
 (\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p & & (\mathbb{P}^1)^p \times \mathbb{C}^p & & \\
 \downarrow \pi & \searrow j & \downarrow \pi & & \\
 (\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p & & (\mathbb{P}^1)^p \times \mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p & & \\
 \swarrow p_1 & \searrow p_2 & \downarrow \pi & & \\
 (\mathbb{C}^*)^p & & (\mathbb{P}^1)^p \times \mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p & & \\
 & & \swarrow q_1 & & \searrow q_2 \\
 & & (\mathbb{P}^1)^p & & \mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p
 \end{array}$$

Rappelons que $\pi : \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p$ est le passage au quotient par l'action de τ_1, \dots, τ_p . On écrit abusivement $\pi, \bar{\pi}, k$ et j au lieu respectivement de $id \times \pi, \bar{\pi} \times id_{\mathbb{C}^p}, k \times id_{\mathbb{C}^p}$ et $j \times id_{\mathbb{C}^p}$.

Définition des faisceaux de fonctions plates en 0 et à l'infini

Définissons dans ce paragraphe le faisceau $\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{<0}$ sur $(\overline{\mathbb{C}^*})^p \times \mathbb{C}^p$.

De manière analogue, on peut également définir $\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{<0}$ et $\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}^{<0}$, ce que nous laisserons au lecteur. Pour une description plus approfondie, on peut se reporter à [Sab-4] (chapitre II.1).

Soit $\mathcal{C}_{(\mathbb{P}^1)^p \times \mathbb{C}^p}^\infty$ le faisceau des fonctions sur $(\mathbb{P}^1)^p \times \mathbb{C}^p$ indéfiniment dérivables en $t_1, \dots, t_p, \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_p$ et holomorphes en s_1, \dots, s_p .

Soit $\mathcal{C}_{(\mathbb{P}^1)^p \times \mathbb{C}^p}^{<0}$ le sous-faisceau de $\mathcal{C}_{(\mathbb{P}^1)^p \times \mathbb{C}^p}^\infty$ des fonctions plates sur $((\mathbb{P}^1)^p \setminus (\mathbb{C}^*)^p) \times \mathbb{C}^p$, dont nous décrivons les fibres. Soit un point $x^0 = (\underline{t}_I^0, \underline{t}_J^0, \underline{t}^0, \underline{s}^0) \in \{0\}^I \times \{\infty\}^J \times (\mathbb{C}^*)^{\{1, \dots, p\} \setminus I \cup J} \times \mathbb{C}^p$. Un germe de section $f \in \mathcal{C}_{(\mathbb{P}^1)^p \times \mathbb{C}^p, x^0}^{<0}$ est caractérisé comme suit : f est définie sur un voisinage ouvert Ω de $(\underline{t}_I^0, \underline{t}_J^0, \underline{t}^0, \underline{s}^0)$ dans $(\mathbb{P}^1)^p \times \mathbb{C}^p$, indéfiniment dérivable en $t_1, \dots, t_p, \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_p$ et holomorphe en s_1, \dots, s_p , nulle sur $\{0\}^I \times \{\infty\}^J \times (\mathbb{C}^*)^{\{1, \dots, p\} \setminus I \cup J} \times \mathbb{C}^p$, et vérifiant :

$$\forall K \subset \Omega \text{ compact, } \forall (N_k)_{k \in I \cup J} \in \mathbb{N}^{I \cup J}, \exists C_{N,K} > 0, \forall (\underline{t}, \underline{s}) \in K :$$

$$|f(t_1, \dots, t_p, s_1, \dots, s_p)| \leq C_{N,K} \frac{\prod_{i \in I} |t_i|^{N_i}}{\prod_{j \in J} |t_j|^{N_j}}$$

Notons

$$\mathcal{P}_{(\mathbb{P}^1)^p \times \mathbb{C}^p}^{0, \bullet} = \left(\mathcal{C}_{(\mathbb{P}^1)^p \times \mathbb{C}^p}^{<0} \otimes_{\mathcal{C}_{(\mathbb{P}^1)^p \times \mathbb{C}^p}^\infty} \mathcal{C}_{(\mathbb{P}^1)^p \times \mathbb{C}^p}^{0, \bullet}, \bar{\partial} \right)$$

le complexe de Dolbeault plat, où $\mathcal{C}_{(\mathbb{P}^1)^p \times \mathbb{C}^p}^{k,l}$ est le faisceau des (k, l) -formes différentielles \mathcal{C}^∞ à paramètre holomorphe en (s_1, \dots, s_p) .

De même, on définit $\mathcal{C}_{(\overline{\mathbb{C}^*})^p \times \mathbb{C}^p}^\infty$. Soit alors $\mathcal{C}_{(\overline{\mathbb{C}^*})^p \times \mathbb{C}^p}^{<0}$ le sous-faisceau de $\mathcal{C}_{(\overline{\mathbb{C}^*})^p \times \mathbb{C}^p}^\infty$ des fonctions plates le long de $((\overline{\mathbb{C}^*})^p \setminus (\mathbb{C}^*)^p) \times \mathbb{C}^p$.

Notons

$$\mathcal{P}_{(\overline{\mathbb{C}^*})^p \times \mathbb{C}^p}^{0, \bullet} = \left(\mathcal{C}_{(\overline{\mathbb{C}^*})^p \times \mathbb{C}^p}^{<0} \otimes_{\mathcal{C}_{(\overline{\mathbb{C}^*})^p \times \mathbb{C}^p}^\infty} \mathcal{C}_{(\overline{\mathbb{C}^*})^p \times \mathbb{C}^p}^{0, \bullet}, \bar{\partial} \right)$$

le complexe de Dolbeault plat, où $\mathcal{C}_{(\overline{\mathbb{C}^*})^p \times \mathbb{C}^p}^{k,l}$ est le faisceau des (k, l) -formes différentielles \mathcal{C}^∞ à paramètre holomorphe en (s_1, \dots, s_p) .

On a $\mathbf{R}\bar{\pi}_* \mathcal{C}_{(\overline{\mathbb{C}^*})^p \times \mathbb{C}^p}^{<0} = \bar{\pi}_* \mathcal{C}_{(\overline{\mathbb{C}^*})^p \times \mathbb{C}^p}^{<0} = \mathcal{C}_{(\mathbb{P}^1)^p \times \mathbb{C}^p}^{<0}$ (voir [Mal-1]).

Pour tout (k, l) , on a donc $\mathbf{R}\bar{\pi}_* \mathcal{P}_{(\overline{\mathbb{C}^*})^p \times \mathbb{C}^p}^{0, \bullet} = \bar{\pi}_* \mathcal{P}_{(\overline{\mathbb{C}^*})^p \times \mathbb{C}^p}^{0, \bullet} = \mathcal{P}_{(\mathbb{P}^1)^p \times \mathbb{C}^p}^{0, \bullet}$.

On définit alors

$$\mathcal{A}_{(\overline{\mathbb{C}^*})^p \times \mathbb{C}^p}^{<0} = \text{Ker} \left(\mathcal{P}_{(\overline{\mathbb{C}^*})^p \times \mathbb{C}^p}^{0,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{P}_{(\overline{\mathbb{C}^*})^p \times \mathbb{C}^p}^{0,1} \right)$$

C'est donc le faisceau sur $(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p$ des fonctions holomorphes à décroissance rapide en chacun des t_j dans des secteurs angulaires le long des cercles S^1 en 0 et à l'infini, uniformément par rapport aux s_j sur tout compact.

Les sections de ce faisceau vérifient une estimation en 0 et à l'infini ; décrivons-la. Soient un point $x^0 = (\underline{\theta}_I^0, \underline{\theta}_J^0, \underline{t}^0, \underline{s}^0) \in (S_0)^I \times (S_\infty)^J \times (\mathbb{C}^*)^{\{1, \dots, p\} \setminus I \cup J} \times \mathbb{C}^p$ et les polysecteurs angulaires

$$D_0(\theta_I^0, \varepsilon_i) = \{\underline{t}_I \in (\mathbb{C}^*)^I \mid \forall i \in I, |t_i| < \varepsilon_i, |\text{Arg}(t_i) - \theta_i^0| < \varepsilon_i\}$$

$$D_\infty(\theta_J^0, \varepsilon_j) = \{\underline{t}_J \in (\mathbb{C}^*)^J \mid \forall j \in J, |t_j| > \frac{1}{\varepsilon_j}, |\text{Arg}(t_j) - \theta_j^0| < \varepsilon_j\}$$

Une section $f \in \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p, x^0}^{<0}$ est holomorphe sur $D_0(\theta_I^0, \varepsilon_i) \times D_\infty(\theta_J^0, \varepsilon_j) \times W^0 \times V^0$ où les $\varepsilon_i, \varepsilon_j$ sont assez petits et où W^0 et V^0 sont des voisinages assez petits de $\underline{t}^0 \in (\mathbb{C}^*)^{\{1, \dots, p\} \setminus I \cup J}$ et $\underline{s}^0 \in \mathbb{C}^p$, et vérifie pour tout compact $K \subset W^0 \times V^0$:

$$\forall (N_k)_{k \in I \cup J} \in \mathbb{N}^{I \cup J}, \exists C_{N,K} > 0, \forall (\underline{t}, \underline{s}) \in D_0(\theta_I^0, \varepsilon_i) \times D_\infty(\theta_J^0, \varepsilon_j) \times K :$$

$$|f(t_1, \dots, t_p, s_1, \dots, s_p)| \leq C_{N,K} \frac{\prod_{i \in I} |t_i|^{N_i}}{\prod_{j \in J} |t_j|^{N_j}}$$

Nous avons une résolution de $\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{<0}$ comme \underline{D} -module (voir [Maj]) :

$$\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{<0} \cong \left(\mathcal{P}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{0, \bullet}, \bar{\partial} \right)$$

Nous en déduisons :

LEMME 2.1.1 *On a un quasi-isomorphisme de \underline{D} -modules*

$$\pi_* \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{<0} \cong \left(\pi_* \mathcal{P}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{0, \bullet}, \bar{\partial} \right)$$

PREUVE : Ceci découle directement du fait que π est un revêtement.

Le complexe $\pi_* \mathcal{P}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{0, \bullet}$ étant isomorphe à un produit tensoriel de p complexes à 2 termes de la forme

$\pi_* \mathcal{C}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{<0} \xrightarrow{\partial_{\bar{t}_j}} \pi_* \mathcal{C}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{<0}$, il suffit de démontrer le lemme pour $p = 1$.

De la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}^{<0} \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}^{<0} \xrightarrow{\partial_{\bar{t}}} \mathcal{C}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}^{<0} \longrightarrow 0$$

on déduit la suite exacte longue

$$0 \longrightarrow \pi_* \mathcal{A}_{\overline{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}}^{\leq 0} \longrightarrow \pi_* \mathcal{C}_{\overline{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}}^{\leq 0} \xrightarrow{\partial_{\bar{t}}} \pi_* \mathcal{C}_{\overline{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}}^{\leq 0} \xrightarrow{\alpha} \mathbf{R}^1 \pi_* \mathcal{A}_{\overline{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}}^{\leq 0} \longrightarrow \dots$$

Nous allons montrer que $\alpha = 0$.

En regardant cette suite sur la fibre en un point (t_0, T_0) de $\overline{\mathbb{C}^*} \times \mathbb{C}$, nous sommes ramenés à la suite exacte

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & \lim_{\overline{U}} \mathcal{A}_{\overline{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}}^{\leq 0}(\pi^{-1}(U)) \longrightarrow \lim_{\overline{U}} \mathcal{C}_{\overline{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}}^{\leq 0}(\pi^{-1}(U)) \\ & & \searrow \partial_{\bar{t}} \\ \lim_{\overline{U}} \mathcal{C}_{\overline{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}}^{\leq 0}(\pi^{-1}(U)) & \xrightarrow{\alpha_{(t_0, T_0)}} & \lim_{\overline{U}} H^1(\pi^{-1}(U), \mathcal{A}_{\overline{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}}^{\leq 0}) \longrightarrow \dots \end{array}$$

où l'ouvert U décrit l'ensemble des ouverts contenant (t_0, T_0) , dont l'image inverse par π est une réunion disjointe $\coprod_{k \in \mathbb{Z}} U_k$, où $U_k = \tau^k(U)$.

Nous sommes donc ramenés à la suite exacte

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & \lim_{\overline{U}} \mathcal{A}_{\overline{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}}^{\leq 0}(U) \longrightarrow \lim_{\overline{U}} \mathcal{C}_{\overline{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}}^{\leq 0}(U) \\ & & \searrow \partial_{\bar{t}} \\ \lim_{\overline{U}} \mathcal{C}_{\overline{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}}^{\leq 0}(U) & \xrightarrow{\alpha_{(t_0, s_0)}} & \lim_{\overline{U}} H^1(U, \mathcal{A}_{\overline{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}}^{\leq 0}) \longrightarrow \dots \end{array}$$

où l'ouvert U décrit l'ensemble des ouverts contenant un (t_0, s_0) , avec $T_0 = e^{-2i\pi s_0}$. Le morphisme $\partial_{\bar{t}}$ est alors surjectif. Ainsi, le morphisme $\alpha_{(t_0, s_0)}$ est nul. On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \pi_* \mathcal{A}_{\overline{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}}^{\leq 0} \longrightarrow \pi_* \mathcal{C}_{\overline{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}}^{\leq 0} \xrightarrow{\partial_{\bar{t}}} \pi_* \mathcal{C}_{\overline{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}}^{\leq 0} \longrightarrow 0$$

□

Solutions à décroissance rapide d'un $\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}$ -module

DÉFINITION 2.1.2 *Le foncteur des solutions holomorphes à décroissance rapide en 0 et à l'infini d'un $\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}$ -module algébrique est*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}ol^{<0} : \mathfrak{Mod}(\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}) &\longrightarrow D^b((\overline{\mathbb{C}^*})^p, \mathbb{C}) \\ \mathcal{M} &\longmapsto \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\overline{\pi}^{-1}\mathcal{D}_{(\mathbb{P}^1)^p}^{an}}(\overline{\pi}^{-1}(j_+\mathcal{M})^{an}, \mathcal{A}_{(\overline{\mathbb{C}^*})^p}^{<0}) \end{aligned}$$

La théorie classique sur les images directes de \mathcal{D} -modules algébriques donne $j_+\mathcal{M} = \mathbf{R}j_*\mathcal{M}$ (voir par exemple [Bo]). Or, le morphisme j étant l'inclusion de l'ouvert affine $(\mathbb{C}^*)^p$ dans $(\mathbb{P}^1)^p$, on a $j_+\mathcal{M} = \mathbf{R}j_*\mathcal{M} = j_*\mathcal{M}$. Le complexe des solutions holomorphes à décroissance rapide en 0 et à l'infini d'un $\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}$ -module algébrique \mathcal{M} s'écrit donc

$$\mathcal{S}ol^{<0}(\mathcal{M}) = \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\overline{\pi}^{-1}\mathcal{D}_{(\mathbb{P}^1)^p}^{an}}(\overline{\pi}^{-1}(j_*\mathcal{M})^{an}, \mathcal{A}_{(\overline{\mathbb{C}^*})^p}^{<0})$$

Les notions de constructibilité sont rappelées dans la section 1.6. Un résultat classique en théorie des \mathcal{D} -modules assure alors que :

PROPOSITION 2.1.3 *Pour tout $\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}$ -module holonome, régulier sur $(\mathbb{P}^1)^p \setminus (\mathbb{C}^*)^p$, le complexe $\mathcal{S}ol^{<0}(\mathcal{M})$ est à cohomologie \mathbb{C} -constructible.*

Si nous nous privons de l'hypothèse de régularité, nous n'avons plus que :

PROPOSITION 2.1.4 *(Par ex : [Mal-4] ou [Was])(Cas $p = 1$) Pour tout $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^*}$ -module holonome, le complexe $\mathcal{S}ol^{<0}(\mathcal{M})$ restreint à \mathbb{C}^* est à cohomologie \mathbb{C} -constructible, et restreint au bord de $\overline{\mathbb{C}^*}$, il est à cohomologie \mathbb{R} -constructible.*

Cependant, sous certaines hypothèses sur le $\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}$ -module \mathcal{M} , cette proposition reste vraie pour quelques valeurs de p (par exemple, voir [Sab-3] th 7.3 pour $p = 2$).

Il existe même une conjecture précisant que ce résultat est vrai pour tout p et tout $\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}$ -module \mathcal{M} holonome.

Démontrons enfin un lemme qui nous servira par la suite.

LEMME 2.1.5 *Pour tout \mathcal{M} dans $\mathfrak{Coh}(\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p})$, dont le module des sections globales est noté \underline{M} , on a*

$$\mathcal{S}ol^{<0}(\mathcal{M}) = \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{D}}(\underline{M}, \mathcal{A}_{(\overline{\mathbb{C}^*})^p}^{<0})$$

PREUVE : • Le module \mathcal{M} est $\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}$ -cohérent sur $(\mathbb{C}^*)^p$ affine, donc $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p} \otimes_{\underline{\mathcal{D}}_{(\mathbb{C}^*)^p}} \underline{\mathcal{M}}_{(\mathbb{C}^*)^p}$. Le morphisme naturel $j_* \mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p} \otimes_{j_* \underline{\mathcal{D}}_{(\mathbb{C}^*)^p}} j_* \underline{\mathcal{M}}_{(\mathbb{C}^*)^p} \longrightarrow j_* \mathcal{M}$ est un isomorphisme : il suffit de le vérifier pour $\mathcal{M} = \mathcal{D}$. Le morphisme d'adjonction $\underline{\mathcal{M}}_{(\mathbb{P}^1)^p} \longrightarrow j_* \underline{\mathcal{M}}_{(\mathbb{C}^*)^p}$ est aussi un isomorphisme : on le vérifie sur les fibres, en prenant des petits ouverts connexes de $(\mathbb{P}^1)^p$, dont l'intersection avec $(\mathbb{C}^*)^p$ est connexe.

Donc, on a un isomorphisme naturel $j_* \mathcal{M} \cong j_* \mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p} \otimes_{\underline{\mathcal{D}}_{(\mathbb{P}^1)^p}} \underline{\mathcal{M}}_{(\mathbb{P}^1)^p}$. Il vient alors

$$\begin{aligned} (j_* \mathcal{M})^{an} &= \mathcal{D}_{(\mathbb{P}^1)^p}^{an} \otimes_{\mathcal{D}_{(\mathbb{P}^1)^p}} j_* \mathcal{M} = \mathcal{D}_{(\mathbb{P}^1)^p}^{an} \otimes_{\mathcal{D}_{(\mathbb{P}^1)^p}} j_* \mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p} \otimes_{\underline{\mathcal{D}}_{(\mathbb{P}^1)^p}} \underline{\mathcal{M}}_{(\mathbb{P}^1)^p} \\ &= (j_* \mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p})^{an} \otimes_{\underline{\mathcal{D}}_{(\mathbb{P}^1)^p}} \underline{\mathcal{M}}_{(\mathbb{P}^1)^p} \end{aligned}$$

d'où

$$\bar{\pi}^{-1}(j_* \mathcal{M})^{an} = \bar{\pi}^{-1}(j_* \mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p})^{an} \otimes_{\underline{\mathcal{D}}_{(\overline{\mathbb{C}^*)^p}} \underline{\mathcal{M}}_{(\overline{\mathbb{C}^*)^p}}$$

Grâce à l'adjonction du produit tensoriel et du $\mathbf{R}\mathcal{H}om$, il vient alors

$$\begin{aligned} \mathcal{S}ol^{<0}(\mathcal{M}) &= \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\bar{\pi}^{-1} \mathcal{D}_{(\mathbb{P}^1)^p}^{an}} \left(\bar{\pi}^{-1}(j_* \mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p})^{an} \otimes_{\underline{\mathcal{D}}_{(\overline{\mathbb{C}^*)^p}} \underline{\mathcal{M}}_{(\overline{\mathbb{C}^*)^p}}, \mathcal{A}_{(\overline{\mathbb{C}^*)^p}^{<0}} \right) \\ &= \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{\mathcal{D}}} \left(\underline{\mathcal{M}}, \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\bar{\pi}^{-1} \mathcal{D}_{(\mathbb{P}^1)^p}^{an}} \left(\bar{\pi}^{-1}(j_* \mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p})^{an}, \mathcal{A}_{(\overline{\mathbb{C}^*)^p}^{<0}} \right) \right) \end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\bar{\pi}^{-1} \mathcal{D}_{(\mathbb{P}^1)^p}^{an}} \left(\bar{\pi}^{-1}(j_* \mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p})^{an}, \mathcal{A}_{(\overline{\mathbb{C}^*)^p}^{<0}} \right) \cong \mathcal{A}_{(\overline{\mathbb{C}^*)^p}^{<0}}$ dans la catégorie des $\underline{\mathcal{D}}$ -modules à gauche.

• Utilisation du morphisme d'adjonction $\mathcal{D}_{(\mathbb{P}^1)^p} \xrightarrow{u} j_* j^{-1} \mathcal{D}_{(\mathbb{P}^1)^p} = j_* \mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}$. A distance finie, c'est à dire au voisinage de tout point de $(\mathbb{C}^*)^p$, c'est un isomorphisme.

Plaçons-nous maintenant au voisinage d'un point que l'on peut écrire, quitte à faire une permutation d'indices, sous la forme $t^0 = (0, \dots, 0, \infty, \dots, \infty, t_{r+1}, \dots, t_p) \in \{0\}^l \times \{\infty\}^{r-l} \times (\mathbb{C}^*)^{p-r} \subset (\mathbb{P}^1)^p$.

Décrivons le morphisme

$$\mathcal{D}_{(\mathbb{P}^1)^p, t^0} \xrightarrow{u} (j_* \mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p})_{t^0}$$

On a $(j_* \mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p})_{t^0} = \mathcal{O}_{(\mathbb{P}^1)^p, t^0} \left[\frac{1}{t_1}, \dots, \frac{1}{t_l}, t_{l+1}, \dots, t_r \right] \otimes_{\mathcal{O}_{(\mathbb{P}^1)^p, t^0}} \mathcal{D}_{(\mathbb{P}^1)^p, t^0}$ donc

$$\mathcal{D}_{(\mathbb{P}^1)^p, t^0} \xrightarrow{u} \mathcal{O}_{(\mathbb{P}^1)^p, t^0} \left[\frac{1}{t_1}, \dots, \frac{1}{t_l}, t_{l+1}, \dots, t_r \right] \otimes_{\mathcal{O}_{(\mathbb{P}^1)^p, t^0}} \mathcal{D}_{(\mathbb{P}^1)^p, t^0}$$

est le morphisme de localisation algébrique de l'anneau $\mathcal{D}_{(\mathbb{P}^1)^p, t^0}$. Il est bien $\mathcal{D}_{(\mathbb{P}^1)^p, t^0}$ -linéaire et est déterminé par $u(1) = 1$.

On a de plus

$$\begin{aligned}
(j_* \mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p})_{t^0} &= \mathcal{O}_{(\mathbb{P}^1)^p, t^0} \left[\frac{1}{t_1}, \dots, \frac{1}{t_l}, t_{l+1}, \dots, t_r \right] \otimes_{\mathcal{O}_{(\mathbb{P}^1)^p, t^0}} \mathcal{D}_{(\mathbb{P}^1)^p, t^0} \\
&= \mathcal{D}_{(\mathbb{P}^1)^p, t^0} \left[\frac{1}{t_1}, \dots, \frac{1}{t_l}, t_{l+1}, \dots, t_r \right] \quad (\text{formule de "commutation" de } \partial_{t_j} \text{ et } t_j) \\
&= \mathcal{D}_{(\mathbb{P}^1)^p, t^0} \frac{t_{l+1} \cdots t_r}{t_1 \cdots t_l}
\end{aligned}$$

Donc

$$(j_* \mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p})_{t^0}^{an} = \mathcal{D}_{(\mathbb{P}^1)^p, t^0}^{an} \frac{t_{l+1} \cdots t_r}{t_1 \cdots t_l}$$

Et le morphisme u devient alors

$$\mathcal{D}_{(\mathbb{P}^1)^p, t^0}^{an} \xrightarrow{u} \mathcal{D}_{(\mathbb{P}^1)^p, t^0}^{an} \frac{t_{l+1} \cdots t_r}{t_1 \cdots t_l}$$

Il est entièrement défini par $u(1) = 1 \left(= \frac{t_1 \cdots t_l}{t_{l+1} \cdots t_r} \cdot \frac{t_{l+1} \cdots t_r}{t_1 \cdots t_l} \right)$.

• Description du morphisme u^* .

A partir du morphisme u , on obtient

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\bar{\pi}^{-1} \mathcal{D}_{(\mathbb{P}^1)^p}^{an}} (\bar{\pi}^{-1} (j_* \mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p})^{an}, \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{<0}) \xrightarrow{u^*} \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\bar{\pi}^{-1} \mathcal{D}_{(\mathbb{P}^1)^p}^{an}} (\bar{\pi}^{-1} \mathcal{D}_{(\mathbb{P}^1)^p}^{an}, \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{<0})$$

ou encore

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\bar{\pi}^{-1} \mathcal{D}_{(\mathbb{P}^1)^p}^{an}} (\bar{\pi}^{-1} (j_* \mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p})^{an}, \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{<0}) \xrightarrow{u^*} \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{<0}$$

Montrons que u^* est un isomorphisme. Il suffit de le faire localement.

A distance finie, c'est un isomorphisme.

Plaçons-nous maintenant au voisinage d'un point du bord de $(\overline{\mathbb{C}^*})^p$. Quitte à faire une permutation d'indices, on peut supposer que ce point s'écrit $\theta^0 = (\theta_1, \dots, \theta_l, \theta_{l+1}, \dots, \theta_r, t_{r+1}, \dots, t_p) \in \bar{\pi}^{-1}(t^0)$.

Le faisceau $(j_* \mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p})^{an}$ est un $\mathcal{D}_{(\mathbb{P}^1)^p}^{an}$ -module localement libre de rang 1 : au voisinage de θ^0 , montrer que

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\bar{\pi}^{-1} \mathcal{D}_{(\mathbb{P}^1)^p}^{an}} (\bar{\pi}^{-1} (j_* \mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p})^{an}, \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{<0}) \xrightarrow{u^*} \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{<0}$$

est un isomorphisme revient donc à montrer que

$$\mathcal{H}om_{\bar{\pi}^{-1} \mathcal{D}_{(\mathbb{P}^1)^p}^{an}} (\bar{\pi}^{-1} (j_* \mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p})^{an}, \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{<0}) \xrightarrow{u^*} \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{<0}$$

est un isomorphisme. Or, u^* est défini par $u^* : \varphi \mapsto \varphi \circ u(1) = \varphi(1)$. Le morphisme φ étant entièrement déterminé par $\varphi(1)$, u^* est un isomorphisme.

- Vérifions la structure de $\underline{D}_{(\overline{\mathbb{C}^*})^p}$ -module à gauche.

Le morphisme u^* est bien un morphisme de \underline{D} -modules à gauche : on a

$$u^*(t_j \partial_{t_j} \cdot \varphi) = (t_j \partial_{t_j} \cdot \varphi)(1) = \varphi(1 \cdot t_j \partial_{t_j}) = \varphi(t_j \partial_{t_j}) = t_j \partial_{t_j} \varphi(1) = t_j \partial_{t_j} u^*(\varphi)$$

$$u^*(t_j \cdot \varphi) = (t_j \cdot \varphi)(1) = \varphi(1 \cdot t_j) = \varphi(t_j) = t_j \varphi(1) = t_j u^*(\varphi)$$

□

2.2 Conditions de croissance et de décroissance pour les fonctions sur \mathbb{C}^p

Nous aurons également besoin de conditions de décroissance sur les fonctions en s_1, \dots, s_p . Tout d'abord, considérons la compactification de $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. On notera $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Considérons ensuite le diagramme suivant dans la catégorie des variétés analytiques

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \widetilde{(\mathbb{C}^*)^p} \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p \\
 & & & & \uparrow \pi \\
 & & \widetilde{(\mathbb{C}^*)^p} \times \overline{\mathbb{C}^p} & \xleftarrow{\ell} & \widetilde{(\mathbb{C}^*)^p} \times \mathbb{C}^p \\
 & & \downarrow q & & \downarrow q \\
 & & (\mathbb{C}^*)^p \times \overline{\mathbb{C}^p} & \xleftarrow{\ell} & (\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p \\
 & \swarrow \rho_1 & & \searrow \rho_2 & \downarrow \pi \\
 (\mathbb{C}^*)^p & & & & (\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p \\
 & & & & \swarrow p_1 \quad \searrow p_2 \\
 & & & & (\mathbb{C}^*)^p \quad \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p
 \end{array}$$

où le morphisme $q : (\sigma_1, \dots, \sigma_p, s_1, \dots, s_p) \mapsto (e^{\sigma_1}, \dots, e^{\sigma_p}, s_1, \dots, s_p)$ est le revêtement universel de $(\mathbb{C}^*)^p$, et ℓ est l'inclusion de \mathbb{C}^p dans $\overline{\mathbb{C}^p}$.

Construction du faisceau $\mathcal{B}^{\ll 0}$

Définissons tout d'abord un faisceau, noté $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{C}^p}}^{\ll 0}$, sur $\overline{\mathbb{C}^p}$. Notons pour cela Z le diviseur à l'infini de $(\mathbb{R} \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}))^p$.

Sur un voisinage V de tout point de $(\mathbb{R} \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}))^p$, les sections de $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^p}^{\leq 0}$ sont les fonctions de $\Gamma(\pi^{-1}\pi(V \setminus Z), \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}^{an})$ vérifiant l'estimation suivante :

$$\forall N = (N_1, \dots, N_p) \in \mathbb{N}^p, \exists C_N > 0, \forall (s_1, \dots, s_p) \in \pi^{-1}\pi(V \setminus Z) :$$

$$|g(s_1, \dots, s_p)| \leq C_N \prod_{j=1}^p |s_j|^{-N_j}$$

Au voisinage de tout autre point, l'unique section de $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^p}^{\leq 0}$ est 0.

Nous construisons alors le faisceau $\mathcal{B}^{\leq 0}$ en étendant la définition de $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^p}^{\leq 0}$ à $(\widetilde{\mathbb{C}^*})^p \times \overline{\mathbb{C}^p}$ de la manière suivante : les sections de $\mathcal{B}^{\leq 0}$ sont des fonctions holomorphes en les variables $(\sigma_1, \dots, \sigma_p, s_1, \dots, s_p)$ et l'estimation ci-dessus est uniforme par rapport aux $(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$ dans tout compact $K \subset (\widetilde{\mathbb{C}^*})^p$.

Construction du faisceau \mathcal{E}

Introduisons également le faisceau des fonctions holomorphes sur \mathbb{C}^p à croissance au plus exponentielle d'ordre 1 verticalement en chaque variable, et définies sur des ouverts stables par les translations τ_1, \dots, τ_p . C'est un faisceau sur $(\overline{\mathbb{C}})^p = (\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}))^p$, et il est noté \mathcal{E} .

Notons encore Z le diviseur à l'infini de $(\mathbb{R} \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}))^p$. Sur un voisinage V de tout point de $(\mathbb{R} \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}))^p$, les sections de \mathcal{E} sont les fonctions de $\Gamma(\pi^{-1}\pi(V \setminus Z), \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}^{an})$ vérifiant l'estimation suivante :

$$\exists C, A > 0, \forall (s_1, \dots, s_p) \in \pi^{-1}\pi(V \setminus Z) :$$

$$|g(s_1, \dots, s_p)| \leq C e^{A \sum_{j=1}^p |\operatorname{Im}(s_j)|}$$

Au voisinage de tout autre point, l'unique section de \mathcal{E} est 0.

DÉFINITION 2.2.1 *Le foncteur des solutions holomorphes, à croissance au plus exponentielle d'ordre 1 verticalement, d'un $\mathbb{C}[\underline{s}] \langle \underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1} \rangle$ -module est*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}ol(-, \mathcal{E}) : \mathfrak{Mod}(\mathbb{C}[\underline{s}] \langle \underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1} \rangle) &\longrightarrow D^b(\overline{\mathbb{C}^p}, \mathbb{C}) \\ \mathbb{M} &\longmapsto \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{C}[\underline{s}] \langle \underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1} \rangle}(\mathbb{M}, \mathcal{E}) \end{aligned}$$

Chapitre 3

Transformation de Mellin et foncteurs des solutions

On reprend les notations des chapitres 1 et 2.

Dans cette section, nous définissons une transformation de Mellin faisceau-tique et nous montrons qu'elle commute au foncteur "solutions".

Une telle transformation a déjà été étudiée par O. Gabber et F. Loeser dans le cas ℓ -adique ([G-L] et [Loe]).

Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $m > 0$ et $(k^*)^p$ le tore $\text{Spec } k[t_1, t_1^{-1}, \dots, t_p, t_p^{-1}]$. Munissons le groupe des caractères ℓ -adiques continus ($\ell \neq m$) du groupe fondamental modéré de $(k^*)^p$ d'une structure de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ -schéma. Notons alors $\mathcal{C}((k^*)^p)$ ce schéma, $D_{coh}^b(\mathcal{C}((k^*)^p), \mathcal{O}_{\mathcal{C}((k^*)^p)})$ la catégorie dérivée des complexes bornés de $\mathcal{O}_{\mathcal{C}((k^*)^p)}$ -modules à cohomologie cohérente, et $D_c^b((k^*)^p, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ celle des complexes bornés de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ -modules à cohomologie $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ -constructible. La transformation de Mellin en question est alors un foncteur $\widehat{(-)} : D_c^b((k^*)^p, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) \rightarrow D_{coh}^b(\mathcal{C}((k^*)^p), \mathcal{O}_{\mathcal{C}((k^*)^p)})$ tel que, pour tout point fermé χ de $\mathcal{C}((k^*)^p)$ et tout objet \mathcal{F} de $D_c^b((k^*)^p, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$, la restriction de $\widehat{\mathcal{F}}$ à χ s'identifie canoniquement au complexe des sections globales $\mathbf{R}\Gamma((k^*)^p, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\chi)$, où \mathcal{L}_χ est ici le faisceau de Kummer associé à χ .

Revenons au cadre complexe. Rappelons que $q : \widehat{(\mathbb{C}^*)^p} \rightarrow (\mathbb{C}^*)^p$ est le revêtement universel de $(\mathbb{C}^*)^p$. Le faisceau $\mathcal{L} = q_! q^{-1} \mathbb{C}_{(\mathbb{C}^*)^p}$ est un système local de $\mathbb{C}[M_1, M_1^{-1}, \dots, M_p, M_p^{-1}]$ -modules libres de rang 1 sur le tore $(\mathbb{C}^*)^p$, où les multiplications par les M_i sont les actions des monodromies autour des hyperplans de coordonnées.

Une adaptation possible au cas complexe de la transformation de Mellin de

[G-L] et [Loe] est alors le foncteur

$$\begin{aligned} D^b((\mathbb{C}^*)^p, \mathbb{C}) &\longrightarrow D^b(\mathfrak{Mod}(\mathbb{C}[M_1, M_1^{-1}, \dots, M_p, M_p^{-1}])) \\ \mathcal{F} &\longmapsto \mathbf{R}\Gamma((\mathbb{C}^*)^p, \mathcal{F} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathcal{L}) \end{aligned}$$

Cette définition est annoncée par C. Sabbah dans [Sab-2].

C'est une définition quasi-identique que nous proposons par la suite (voir la définition 3.2.1) : la seule différence vient du fait que nous nous plaçons dans le compactifié en anneaux de $(\mathbb{C}^*)^p$.

3.1 Torsion par le noyau \mathcal{T}

Nous définissons ici le faisceau \mathcal{T} , dont la structure très riche est au coeur de la transformation de Mellin faisceautique que nous allons définir.

3.1.1 Résultats préliminaires et faisceau $\bar{\mathcal{L}}$

Rappelons que $q : \widetilde{(\mathbb{C}^*)^p} \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^p$ est le revêtement universel de $(\mathbb{C}^*)^p$ et notons $\bar{q} : \widetilde{(\overline{\mathbb{C}^*})^p} \longrightarrow (\overline{\mathbb{C}^*})^p$ celui de $(\overline{\mathbb{C}^*})^p$.

Ces applications sont définies par

$$(\sigma_1, \dots, \sigma_p) \longmapsto (t_1, \dots, t_p) = (e^{\sigma_1}, \dots, e^{\sigma_p})$$

Considérons alors le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{(\mathbb{C}^*)^p} & \xrightarrow{\tilde{k}} & \widetilde{(\overline{\mathbb{C}^*})^p} \\ \downarrow q & & \downarrow \bar{q} \\ (\mathbb{C}^*)^p & \xrightarrow{k} & (\overline{\mathbb{C}^*})^p \end{array}$$

Nous noterons encore

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{(\mathbb{C}^*)^p} \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p & \xrightarrow{\tilde{k}} & \widetilde{(\overline{\mathbb{C}^*})^p} \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p \\ \downarrow q & & \downarrow \bar{q} \\ (\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p & \xrightarrow{k} & (\overline{\mathbb{C}^*})^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p \end{array}$$

De même, nous noterons indifféremment $\pi : (\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p$ et $\pi : \widetilde{(\mathbb{C}^*)^p} \times \mathbb{C}^p \longrightarrow \widetilde{(\mathbb{C}^*)^p} \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p$ les passages au quotient par les translations τ_j .

Afin d'alléger les notations, nous noterons par la suite

$$\overline{\mathcal{O}} = k_* \pi_* \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{an}$$

LEMME 3.1.2 *On a un isomorphisme de faisceaux de \mathbb{C} -espaces vectoriels*

$$\bar{q}_! \left(\widetilde{k}_* \pi_* \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{an} \right) \cong \bar{q}_! \bar{q}^{-1} \overline{\mathcal{O}}$$

PREUVE : On a un morphisme naturel

$$\widetilde{k}_* \pi_* \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{an} = \widetilde{k}_* \bar{q}^{-1} \pi_* \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{an} \longrightarrow \bar{q}^{-1} k_* \pi_* \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{an} = \bar{q}^{-1} \overline{\mathcal{O}}$$

Ce morphisme est un isomorphisme : on le vérifie sur les fibres.

D'où l'isomorphisme souhaité. \square

On note alors $\bar{\mathcal{L}}$ le faisceau $\bar{q}_! \bar{q}^{-1} \underline{\mathbb{C}}_{(\mathbb{C}^*)^p}$.

C'est un système local de $\mathbb{C}[M_1, M_1^{-1}, \dots, M_p, M_p^{-1}]$ -modules libres de rang 1, la multiplication par M_j étant l'action de la monodromie autour du $j^{\text{ème}}$ hyperplan de coordonnées.

La restriction du système local $\bar{\mathcal{L}}$ à $(\mathbb{C}^*)^p$ est le système local \mathcal{L} défini dans l'introduction de ce chapitre 3.

Le faisceau $\bar{q}_! \bar{q}^{-1} \overline{\mathcal{O}} = \overline{\mathcal{O}} \otimes_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{L}}$ est alors un faisceau de $\mathbb{C}[M_1, M_1^{-1}, \dots, M_p, M_p^{-1}]$ -modules.

LEMME 3.1.3 *On a un isomorphisme de faisceaux de \mathbb{C} -espaces vectoriels*

$$\frac{\bar{q}_! \bar{q}^{-1} \overline{\mathcal{O}}}{(M_1 - 1, \dots, M_p - 1)} \cong \overline{\mathcal{O}}$$

PREUVE : Une fois choisi un isomorphisme local de $\bar{\mathcal{L}}$ avec $\mathbb{C}[M_1, M_1^{-1}, \dots, M_p, M_p^{-1}]$,

une section locale de $\bar{q}_! \bar{q}^{-1} \overline{\mathcal{O}} = \overline{\mathcal{O}} \otimes_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{L}}$ est représentée par une somme finie $\sum_{\text{finie}} f_\alpha M^\alpha$ (où les f_α sont des sections locales de $\overline{\mathcal{O}}$), avec la notation habi-

tuelle $M^\alpha := M_1^{\alpha_1} \cdots M_p^{\alpha_p}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}^p$. La somme $\sum_{\text{finie}} f_\alpha$ ne dépend

pas du choix d'un isomorphisme local. On a donc un morphisme naturel

$\bar{q}_1 \bar{q}^{-1} \bar{\mathcal{O}} \longrightarrow \bar{\mathcal{O}}$ qui à toute section locale $\sum_{\text{finie}} f_\alpha M^\alpha$ associe $\sum_{\text{finie}} f_\alpha$.

Il est surjectif et son noyau est bien $(M_1 - 1, \dots, M_p - 1) \bar{q}_1 \bar{q}^{-1} \bar{\mathcal{O}}$. \square

3.1.4 Construction du faisceau \mathcal{F}

Afin de construire ce faisceau, nous considérons la structure naturelle de $\tilde{\mathbb{D}} = \mathbb{D}[s_1, \dots, s_p] \langle \tau_1, \tau_1^{-1}, \dots, \tau_p, \tau_p^{-1} \rangle$ -module sur le faisceau de fonctions $\bar{\mathcal{O}} = k_* \pi_* \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{\text{an}}$, avec, rappelons-le, \mathbb{D} l'algèbre de Weil de $(\mathbb{C}^*)^p$.

DÉFINITION 3.1.5 *Soit le $\tilde{\mathbb{D}}$ -module*

$$\mathbb{T}^{s+1} = \frac{\tilde{\mathbb{D}}}{\tilde{\mathbb{D}} \left(t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} - s_1 - 1, \dots, t_p \frac{\partial}{\partial t_p} - s_p - 1, \tau_1 t_1^{-1} - 1, \dots, \tau_p t_p^{-1} - 1 \right)}$$

On pose alors

$$\mathcal{F} := \mathcal{H}om_{\tilde{\mathbb{D}}} \left(\mathbb{T}^{s+1}, \bar{\mathcal{O}} \right) = \mathcal{H}om_{\tilde{\mathbb{D}}} \left(\mathbb{T}^{s+1}, k_* \pi_* \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{\text{an}} \right)$$

où $\tilde{\mathbb{D}}$ et \mathbb{T}^{s+1} sont ici deux faisceaux constants sur $(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p$. C'est un sous-faisceau de $r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}$ -modules de $\bar{\mathcal{O}}$ sur $(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p$ (puisque les actions de $\tilde{\mathbb{D}}$ et de $r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}$ sur $\bar{\mathcal{O}}$ commutent).

3.1.6 Une autre description de \mathcal{F}

Rappelons tout d'abord un résultat utile.

Soient X un espace topologique, $q : \tilde{X} \longrightarrow X$ son revêtement universel, Y une variété analytique complexe et $pr_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ la seconde projection. Un faisceau \mathcal{F} est dit localement constant de $pr_2^{-1} \mathcal{O}_Y$ -modules si, sur tout ouvert $U \times V$ assez petit, le faisceau $\mathcal{F}|_{U \times V}$ est un $pr_2^{-1} \mathcal{O}_V$ -module. Il est dit localement constant de $pr_2^{-1} \mathcal{O}_Y$ -modules localement libres de rang m si, sur tout ouvert $U \times V$ assez petit, on a un isomorphisme

$$\mathcal{F}|_{U \times V} \simeq (pr_2^{-1} \mathcal{O}_V)^m$$

Le foncteur qui, à tout faisceau de $pr_2^{-1} \mathcal{O}_Y$ -modules \mathcal{F} , associe le faisceau $(pr_2 \circ q)_* q^{-1} \mathcal{F}$ induit une équivalence de catégories entre la catégorie des faisceaux localement constants de $pr_2^{-1} \mathcal{O}_Y$ -modules et celle des $\mathcal{O}_Y[\pi_1(X)]$ -modules.

Si Y est un point, on retrouve l'équivalence de catégories classique entre les faisceaux localement constants de \mathbb{C} -espaces vectoriels (ou systèmes locaux) et celle des $\mathbb{C}[\pi_1(X)]$ -modules.

On note $\mathbb{C}[T, T^{-1}] := \mathbb{C}[T_1, \dots, T_p, T_1^{-1}, \dots, T_p^{-1}]$ le faisceau constant d'anneaux sur $\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p$, qu'on considère comme un sous-faisceau d'anneaux de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}$. On note encore $\mathbb{C}[T, T^{-1}]$ son image inverse par r_2 et $r_2 \circ \bar{q}$.

Si $\mathbb{C}[\pi_1((\overline{\mathbb{C}^*})^p)] = \mathbb{C}[M, M^{-1}]$ avec $M = (M_1, \dots, M_p)$, alors, *via* l'équivalence de catégories rappelée ci-dessus, le faisceau $r_1^{-1}\bar{\mathcal{L}}$ muni de la structure de $r_2^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}$ -module triviale correspond au $\mathbb{C}[M, M^{-1}]$ -module $\mathbb{C}[T, T^{-1}]$ sur lequel M_j agit par la multiplication par T_j^{-1} .

De même, $r_2^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}$ correspond au $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}[M, M^{-1}]$ -module $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}$ sur lequel M_j agit par 1, c'est-à-dire $\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}[M, M^{-1}]}{(M_1 - 1, \dots, M_p - 1)}$.

On en déduit que le $r_2^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}$ -module $r_1^{-1}\bar{\mathcal{L}} \otimes_{\mathbb{C}[T, T^{-1}]} r_2^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}$ correspond au $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}[M, M^{-1}]$ -module $\mathbb{C}[T, T^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}[T, T^{-1}]} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}$ sur lequel M_j agit par $M_j \cdot (a \otimes b) = T_j^{-1}a \otimes 1b = T_j^{-1}a \otimes b = a \otimes T_j^{-1}b$.

Localement sur $(\overline{\mathbb{C}^*})^p \times \mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p$, on peut choisir une détermination de $\mathbf{t}^{s+1} := t_1^{s_1+1} \dots t_p^{s_p+1}$. Une section locale de \mathcal{F} consiste en la donnée d'une section locale φ de $\bar{\mathcal{O}}$ satisfaisant aux équations définissant \mathbb{T}^{s+1} . Par suite, \mathcal{F} est égal au $r_2^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}$ -module $r_2^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p} \cdot \mathbf{t}^{s+1} \subset \bar{\mathcal{O}}$. En particulier, \mathcal{F} est un faisceau localement constant de $r_2^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}$ -modules localement libres de rang 1. Puisque $M_j e^{\sigma_1(s_1+1)} \dots e^{\sigma_p(s_p+1)} = e^{2i\pi s_j} e^{\sigma_1(s_1+1)} \dots e^{\sigma_p(s_p+1)} = T_j^{-1} e^{\sigma_1(s_1+1)} \dots e^{\sigma_p(s_p+1)}$, le faisceau localement constant \mathcal{F} correspond, *via* l'équivalence de catégories rappelée ci-dessus, au $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}[M, M^{-1}]$ -module $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}$ sur lequel M_j agit par la multiplication par T_j^{-1} , c'est-à-dire

$$\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}[M, M^{-1}]}{(M_1 T_1 - 1, \dots, M_p T_p - 1)}$$

Remarquons maintenant que l'on a un isomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}[M, M^{-1}]$ -modules

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[T, T^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}[T, T^{-1}]} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p} \\ 1 \otimes f & \longmapsto & f \end{array} \quad (\#)$$

où, sur le terme de droite, l'action de M_j est la multiplication par T_j^{-1} , et, sur le terme de gauche, l'action de M_j est la multiplication par T_j^{-1} sur le facteur $\mathbb{C}[T, T^{-1}]$ uniquement.

Via l'équivalence de catégories rappelée ci-dessus, cet isomorphisme correspond à un isomorphisme de faisceaux localement constants de $r_2^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}$ -modules

$$r_1^{-1}\bar{\mathcal{L}} \otimes_{\mathbb{C}[T, T^{-1}]} r_2^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F} \quad (\#\#)$$

ou encore

$$\frac{r_1^{-1} \bar{\mathcal{L}} \otimes_{\mathbb{C}} r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}}{(M_1 T_1 - 1, \dots, M_p T_p - 1)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$$

Cependant, remarquons que si on compose au but l'isomorphisme (#) avec la multiplication par un inversible quelconque T^α ($\alpha \in \mathbb{Z}^p$) de $\mathbb{C}[T, T^{-1}]$, on obtient un autre isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[T, T^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}[T, T^{-1}]} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p} \\ 1 \otimes f & \longmapsto & T^\alpha f \end{array}$$

Ainsi, l'isomorphisme (##) n'est pas unique.

Pour plus de précisions, détaillons les calculs.

Détail des calculs

Considérons, tout d'abord, la suite exacte

$$0 \longrightarrow \bar{q}^{-1} r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p} \xrightarrow{\phi} \tilde{k}_* \pi_* \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{an} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \sigma_1} - s_1 - 1 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \sigma_p} - s_p - 1 \\ \tau_1 e^{-\sigma_1} - 1 \\ \vdots \\ \tau_p e^{-\sigma_p} - 1 \end{pmatrix}} \left(\tilde{k}_* \pi_* \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{an} \right)^{2p}$$

où

$$\phi : h(T_1, \dots, T_p) \longmapsto h(e^{-2i\pi s_1}, \dots, e^{-2i\pi s_p}) e^{\sigma_1(s_1+1)} \dots e^{\sigma_p(s_p+1)}$$

Le foncteur $\bar{q}_!$ étant exact à gauche, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \bar{q}_! \bar{q}^{-1} r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p} \xrightarrow{\bar{q}_! \phi} \bar{q}_! \tilde{k}_* \pi_* \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{an} \xrightarrow{\begin{pmatrix} t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} - s_1 - 1 \\ \vdots \\ t_p \frac{\partial}{\partial t_p} - s_p - 1 \\ \tau_1 t_1^{-1} - 1 \\ \vdots \\ \tau_p t_p^{-1} - 1 \end{pmatrix}} \left(\bar{q}_! \tilde{k}_* \pi_* \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{an} \right)^{2p}$$

ou encore

$$0 \longrightarrow r_1^{-1} \bar{\mathcal{L}} \otimes_{\mathbb{C}} r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p} \xrightarrow{\bar{q}_1 \phi} \bar{q}_1 \bar{q}^{-1} \bar{\mathcal{O}} \xrightarrow{\begin{pmatrix} t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} - s_1 - 1 \\ \vdots \\ t_p \frac{\partial}{\partial t_p} - s_p - 1 \\ \tau_1 t_1^{-1} - 1 \\ \vdots \\ \tau_p t_p^{-1} - 1 \end{pmatrix}} (\bar{q}_1 \bar{q}^{-1} \bar{\mathcal{O}})^{2p} \quad (\dagger)$$

Nous noterons par la suite Δ_s le morphisme $\begin{pmatrix} t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} - s_1 - 1 \\ \vdots \\ t_p \frac{\partial}{\partial t_p} - s_p - 1 \\ \tau_1 t_1^{-1} - 1 \\ \vdots \\ \tau_p t_p^{-1} - 1 \end{pmatrix}$.

Décrivons le morphisme $\bar{q}_1 \phi$.

Pour tout ouvert simplement connexe U de $(\mathbb{C}^*)^p$ et tout ouvert W de $\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p$, on écrit l'ouvert $\bar{q}^{-1}(U \times W)$ de la façon suivante :

$$\bar{q}^{-1}(U \times W) = \coprod_{\alpha \in \mathbb{Z}^p} U_\alpha \times W$$

avec les U_α isomorphes à U . Comme dans le lemme 3.1.3, une fois choisi un isomorphisme local de $\bar{\mathcal{L}}$ avec $\mathbb{C}[M_1, M_1^{-1}, \dots, M_p, M_p^{-1}]$, l'expression de $\bar{q}_1 \phi$ sur un ouvert $U \times W$ est

$$\sum_{\text{finie}} f_\alpha(T_1, \dots, T_p) M^\alpha \longmapsto \sum_{\text{finie}} f_\alpha(e^{-2i\pi s_1}, \dots, e^{-2i\pi s_p}) \left[t_1^{s_1+1} \dots t_p^{s_p+1} \right]_\alpha M^\alpha$$

où $\left[t_1^{s_1+1} \dots t_p^{s_p+1} \right]_\alpha$ est la $\alpha^{\text{ème}}$ détermination du produit $t_1^{s_1+1} \dots t_p^{s_p+1}$, c'est-à-dire la valeur du produit $e^{\sigma_1(s_1+1)} \dots e^{\sigma_p(s_p+1)}$ sur l'ouvert $U_\alpha \times W$.

L'action de M_j sur $\bar{q}_1 \bar{q}^{-1} \bar{\mathcal{O}}$ induit alors sur $r_1^{-1} \bar{\mathcal{L}} \otimes_{\mathbb{C}} r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}$ l'action de $M_j \otimes T_j$.

Plus généralement, pour tout $\beta \in \mathbb{Z}^p$, on a

$$T^\beta M^\beta \sum_{\text{finie}} f_\alpha M^\alpha \xrightarrow{\bar{q}_1 \phi} M^\beta \sum_{\text{finie}} f_\alpha \left[t_1^{s_1+1} \dots t_p^{s_p+1} \right]_\alpha M^\alpha$$

En effet :

$$\begin{aligned} \bar{q}_! \phi \left(T^\beta M^\beta \sum_{\text{finie}} f_\alpha M^\alpha \right) &= \bar{q}_! \phi \left(\sum_{\text{finie}} f_\alpha T^\beta M^{\alpha+\beta} \right) = \sum_{\text{finie}} f_\alpha T^\beta \left[t_1^{s_1+1} \dots t_p^{s_p+1} \right]_{\alpha+\beta} M^{\alpha+\beta} = \\ &= \sum_{\text{finie}} f_\alpha \left[t_1^{s_1+1} \dots t_p^{s_p+1} \right]_\alpha M^{\alpha+\beta} = M^\beta \sum_{\text{finie}} f_\alpha \left[t_1^{s_1+1} \dots t_p^{s_p+1} \right]_\alpha M^\alpha. \end{aligned}$$

Mieux : le sous-module $(M_1 T_1 - 1, \dots, M_p T_p - 1) r_1^{-1} \bar{\mathcal{L}} \otimes_{\mathbb{C}} r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}$ est l'image inverse de $(M_1 - 1, \dots, M_p - 1) \bar{q}_! \bar{q}^{-1} \bar{\mathcal{O}}$ par l'injection $\bar{q}_! \phi$.

LEMME 3.1.7 *Si on passe aux quotients dans la suite (†), l'exactitude est conservée, c'est-à-dire que $\frac{r_1^{-1} \bar{\mathcal{L}} \otimes_{\mathbb{C}} r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}}{(M_1 T_1 - 1, \dots, M_p T_p - 1)}$ est le noyau du morphisme δ_s suivant*

$$\delta_s : \frac{\bar{q}_! \bar{q}^{-1} \bar{\mathcal{O}}}{(M_1 - 1, \dots, M_p - 1)} \xrightarrow{\begin{pmatrix} t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} - s_1 - 1 \\ \vdots \\ t_p \frac{\partial}{\partial t_p} - s_p - 1 \\ \tau_1 t_1^{-1} - 1 \\ \vdots \\ \tau_p t_p^{-1} - 1 \end{pmatrix}} \left(\frac{\bar{q}_! \bar{q}^{-1} \bar{\mathcal{O}}}{(M_1 - 1, \dots, M_p - 1)} \right)^{2p}$$

Remarquons que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \bar{q}_! \bar{q}^{-1} \bar{\mathcal{O}} & \xrightarrow{\Delta_s} & (\bar{q}_! \bar{q}^{-1} \bar{\mathcal{O}})^{2p} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{\bar{q}_! \bar{q}^{-1} \bar{\mathcal{O}}}{(M_1 - 1, \dots, M_p - 1)} & \xrightarrow{\delta_s} & \left(\frac{\bar{q}_! \bar{q}^{-1} \bar{\mathcal{O}}}{(M_1 - 1, \dots, M_p - 1)} \right)^{2p} \end{array}$$

PREUVE : Le morphisme $\bar{q}_! \phi$ étant injectif, il l'est encore par passage au quotient puisque l'image inverse de $(M_1 - 1, \dots, M_p - 1) \bar{q}_! \bar{q}^{-1} \bar{\mathcal{O}}$ par l'injection $\bar{q}_! \phi$ est exactement $(M_1 T_1 - 1, \dots, M_p T_p - 1) r_1^{-1} \bar{\mathcal{L}} \otimes_{\mathbb{C}} r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}$.

Nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} r_1^{-1} \bar{\mathcal{L}} \otimes_{\mathbb{C}} r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p} & \xrightarrow{\bar{q}_! \phi} & \bar{q}_! \bar{q}^{-1} \bar{\mathcal{O}} \xrightarrow{\Delta_s} (\bar{q}_! \bar{q}^{-1} \bar{\mathcal{O}})^{2p} \quad (\dagger\dagger) \\ \parallel & & \nu \downarrow \cong \quad \nu \downarrow \cong \\ r_1^{-1} \bar{\mathcal{L}} \otimes_{\mathbb{C}} r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p} & \hookrightarrow & \bar{q}_! \bar{q}^{-1} \bar{\mathcal{O}} \xrightarrow{\Delta} (\bar{q}_! \bar{q}^{-1} \bar{\mathcal{O}})^{2p} \end{array}$$

où le morphisme Δ est
$$\begin{pmatrix} t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} \\ \vdots \\ t_p \frac{\partial}{\partial t_p} \\ \tau_1 - 1 \\ \vdots \\ \tau_p - 1 \end{pmatrix}$$
 et le morphisme ν est

$$\nu : \sum_{\text{finie}} f_\alpha M^\alpha \mapsto \sum_{\text{finie}} f_\alpha \left[t_1^{-s_1-1} \dots t_p^{-s_p-1} \right]_\alpha M^\alpha$$

avec les mêmes notations que précédemment.

Dans le diagramme ($\dagger\dagger$), le faisceau $\bar{q}_! \bar{q}^{-1} \bar{\mathcal{O}}$ est équipé des actions des M_j sur la ligne du haut et des $M_j T_j$ sur la ligne du bas. Quant au faisceau $r_1^{-1} \bar{\mathcal{L}} \otimes_{\mathbb{C}} r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}$, il est équipé des actions des $M_j T_j$ dans les deux suites exactes et ces actions sont compatibles avec les flèches du diagramme.

Il nous reste à montrer que le noyau du morphisme

$$\frac{\bar{q}_! \bar{q}^{-1} \bar{\mathcal{O}}}{(M_1 T_1 - 1, \dots, M_p T_p - 1)} \xrightarrow{\delta} \left(\frac{\bar{q}_! \bar{q}^{-1} \bar{\mathcal{O}}}{(M_1 T_1 - 1, \dots, M_p T_p - 1)} \right)^{2p}$$

est
$$\frac{r_1^{-1} \bar{\mathcal{L}} \otimes_{\mathbb{C}} r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}}{(M_1 T_1 - 1, \dots, M_p T_p - 1)}.$$

Considérons tout d'abord le morphisme

$$\bar{q}_! \bar{q}^{-1} \bar{\mathcal{O}} \xrightarrow{\Delta} \left(\frac{\bar{q}_! \bar{q}^{-1} \bar{\mathcal{O}}}{(M_1 T_1 - 1, \dots, M_p T_p - 1)} \right)^{2p}$$

et calculons-en le noyau, c'est-à-dire résolvons le système

$$\forall j, \begin{cases} t_j \frac{\partial}{\partial t_j} \sum_{\text{finie}} f_\alpha M^\alpha \in (M_1 T_1 - 1, \dots, M_p T_p - 1) \bar{q}_! \bar{q}^{-1} \bar{\mathcal{O}} \\ (\tau_j - 1) \sum_{\text{finie}} f_\alpha M^\alpha \in (M_1 T_1 - 1, \dots, M_p T_p - 1) \bar{q}_! \bar{q}^{-1} \bar{\mathcal{O}} \end{cases}$$

Il suffit pour cela de trouver une solution particulière dans $(M_1 T_1 - 1, \dots, M_p T_p - 1) \bar{q}_! \bar{q}^{-1} \bar{\mathcal{O}}$. La section $\sum_{\text{finie}} f_\alpha M^\alpha$ est donc une section de

$$\text{Ker} \bar{q}_! \phi + (M_1 T_1 - 1, \dots, M_p T_p - 1) \bar{q}_! \bar{q}^{-1} \bar{\mathcal{O}}$$

c'est-à-dire une section de

$$r_1^{-1} \bar{\mathcal{L}} \otimes_{\mathbb{C}} r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p} + (M_1 T_1 - 1, \dots, M_p T_p - 1) \bar{q}_! \bar{q}^{-1} \bar{\mathcal{O}}$$

Le noyau de δ est donc

$$\begin{aligned}
& \frac{r_1^{-1}\bar{\mathcal{L}} \otimes_{\mathbb{C}} r_2^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p} + (M_1T_1 - 1, \dots, M_pT_p - 1)\bar{q}_1\bar{q}^{-1}\bar{\mathcal{O}}}{(M_1T_1 - 1, \dots, M_pT_p - 1)\bar{q}_1\bar{q}^{-1}\bar{\mathcal{O}}} \\
& \cong \frac{r_1^{-1}\bar{\mathcal{L}} \otimes_{\mathbb{C}} r_2^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}}{r_1^{-1}\bar{\mathcal{L}} \otimes_{\mathbb{C}} r_2^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p} \cap (M_1T_1 - 1, \dots, M_pT_p - 1)\bar{q}_1\bar{q}^{-1}\bar{\mathcal{O}}} \\
& \cong \frac{r_1^{-1}\bar{\mathcal{L}} \otimes_{\mathbb{C}} r_2^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}}{(M_1T_1 - 1, \dots, M_pT_p - 1)}
\end{aligned}$$

□

Tout ceci se résume dans la proposition suivante :

PROPOSITION 3.1.8

1. L'isomorphisme induit par $\bar{q}_1\phi$ entre $\frac{\bar{\mathcal{L}} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}}{(M_1T_1 - 1, \dots, M_pT_p - 1)}$ et \mathcal{I} dépend du choix d'un relèvement de $t_1^{s_1+1} \dots t_p^{s_p+1}$ au revêtement universel. Nous l'avons fixé ici à $e^{\sigma_1(s_1+1)} \dots e^{\sigma_p(s_p+1)}$. Tout autre détermination de $t_1^{s_1+1} \dots t_p^{s_p+1}$ s'obtenant par multiplication par un monôme T^α , on obtient un autre isomorphisme par composition avec la multiplication d'un tel monôme sur $\frac{\bar{\mathcal{L}} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}}{(M_1T_1 - 1, \dots, M_pT_p - 1)}$.
Les deux objets $\frac{\bar{\mathcal{L}} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}}{(M_1T_1 - 1, \dots, M_pT_p - 1)}$ et \mathcal{I} sont donc isomorphes en tant que $r_2^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}$ -modules (à un isomorphisme non unique près). Par abus, nous les identifions grâce au morphisme $\bar{q}_1\phi$.
2. Le faisceau $\bar{\mathcal{L}} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}$ hérite de la structure de $r_2^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}$ -module, et de l'action des monodromies M_j provenant du système local $\bar{\mathcal{L}}$. Sur le quotient $\frac{\bar{\mathcal{L}} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}}{(M_1T_1 - 1, \dots, M_pT_p - 1)}$, les actions de T_j^{-1} et M_j sont identifiées. Plus précisément, les actions des M_j sur $\bar{\mathcal{L}}$ induisent les multiplications par les T_j^{-1} sur $\frac{\bar{\mathcal{L}} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}}{(M_1T_1 - 1, \dots, M_pT_p - 1)}$ et donc sur \mathcal{I} , cela ne dépendant pas du choix de la détermination de $t_1^{s_1+1} \dots t_p^{s_p+1}$.
3. Le faisceau \mathcal{I} est donc un faisceau localement constant de $r_2^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}$ -modules localement libres de rang 1, ou encore, selon Deligne ([Del]), un système local relatif à la projection $r_2 : (\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p \longrightarrow \mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p$. Ceci signifie que, sur tout ouvert $U \times V$ assez petit, on a un isomorphisme

$$\mathcal{I}|_{U \times V} \simeq r_2^{-1}\mathcal{O}_V$$

3.1.9 Torsion de $\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}^{<0}$ par \mathcal{I}

On s'intéresse ici au faisceau

$$\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}^{<0} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}} \mathcal{I}$$

Nous définissons une structure de D-module sur $\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}^{<0} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}} \mathcal{I}$ comme suit : pour toute section locale $g \otimes \omega$ de $\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}^{<0} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}} \mathcal{I}$, on pose

$$t_j \partial_{t_j} \cdot g \otimes \omega := t_j \frac{\partial g}{\partial t_j} \otimes \omega$$

Pour toute détermination δ de la fonction $t_1^{s_1+1} \cdots t_p^{s_p+1}$, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}^{<0} & \longrightarrow & \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}^{<0} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}} \mathcal{I} \\ g \mapsto & \longrightarrow & g \otimes \delta \end{array}$$

est un isomorphisme compatible avec les structures décrites ci-dessus de D-modules et de $r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}$ -modules.

Tout autre isomorphisme compatible avec les structures de D-modules et de $r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}$ -modules se déduit du précédent par composition avec la multiplication par un monôme T^α .

Cependant, à la différence de $\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}^{<0}$, le faisceau

$$\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}^{<0} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}} \mathcal{I} \cong \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}^{<0} \otimes_{\mathbb{C}[T, T^{-1}]} r_1^{-1} \bar{\mathcal{L}}$$

est équipé de p automorphismes de monodromie non triviaux autour des hyperplans de coordonnées de $(\mathbb{C}^*)^p$, qui sont identifiés aux multiplications par les p variables $T_j^{-1} = e^{2i\pi s_j}$.

3.2 Théorème de commutation de la transformation de Mellin et du foncteur des solutions

Nous sommes maintenant en mesure de définir la transformation de Mellin faisceautique et d'énoncer le théorème de commutation de la transformation de Mellin et du foncteur des solutions.

DÉFINITION 3.2.1 *Le foncteur de transformation de Mellin faisceautique est*

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} : D^b((\overline{\mathbb{C}^*})^p, \mathbb{C}) &\longrightarrow D^b(\mathfrak{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p})) \\ \mathcal{F} &\longmapsto \underline{\mathbf{R}\Gamma\left((\overline{\mathbb{C}^*})^p, \mathcal{F} \otimes_{\mathbb{C}}^{\mathbb{L}} \bar{\mathcal{L}}\right)[p]} \otimes_{\mathbb{C}[\underline{T}, \underline{T}^{-1}]}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p} \end{aligned}$$

où T_j agit sur $\mathbf{R}\Gamma\left((\overline{\mathbb{C}^*})^p, \mathcal{F} \otimes_{\mathbb{C}}^{\mathbb{L}} \bar{\mathcal{L}}\right)$ par M_j^{-1} .

Le transformé de Mellin d'un objet \mathcal{F} de $D^b((\overline{\mathbb{C}^*})^p, \mathbb{C})$ n'est autre que l'analytisé de ses modules d'Alexander sur $(\overline{\mathbb{C}^*})^p$ (voir [Sab-1] pour la définition des modules d'Alexander d'un faisceau).

Les différentes notions de constructibilité sont rappelées à la section 1.6. On peut alors énoncer la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 3.2.2 *Si \mathcal{F} est un objet de $D^b((\overline{\mathbb{C}^*})^p, \mathbb{C})$ à cohomologie \mathbb{R} -constructible, alors $\mathfrak{M}(\mathcal{F})$ est un objet de $D_{coh}^b(\mathfrak{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}))$.*

PREUVE : Comme \mathcal{F} est à cohomologie \mathbb{R} -constructible et $\bar{\mathcal{L}}$ est \mathbb{C} -constructible (en fait, c'est un système local), le complexe $\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{C}}^{\mathbb{L}} \bar{\mathcal{L}}$ est un complexe de faisceaux de $\mathbb{C}[\underline{M}, \underline{M}^{-1}]$ -modules libres de type fini à cohomologie \mathbb{R} -constructible. Pour tout j , $\mathbf{R}^j\Gamma\left((\overline{\mathbb{C}^*})^p, \mathcal{F} \otimes_{\mathbb{C}}^{\mathbb{L}} \bar{\mathcal{L}}\right)$ est alors un $\mathbb{C}[\underline{M}, \underline{M}^{-1}]$ -module de type fini.

Ainsi, $\underline{\mathbf{R}\Gamma\left((\overline{\mathbb{C}^*})^p, \mathcal{F} \otimes_{\mathbb{C}}^{\mathbb{L}} \bar{\mathcal{L}}\right)[p]} \otimes_{\mathbb{C}[\underline{T}, \underline{T}^{-1}]}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}$ est un complexe à cohomologie $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}$ -cohérente (voir [Ser-1] et [Ser-2]). \square

La suite est consacrée à la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME 3.2.3

Pour tout $\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^)^p}$ -module algébrique cohérent \mathcal{M} , tel que $\mathcal{S}ol^{<0}(\mathcal{M})|_{(\mathbb{C}^*)^p}$ est à cohomologie \mathbb{C} -constructible et $\mathcal{S}ol^{<0}(\mathcal{M})|_{(\overline{\mathbb{C}^*})^p \setminus (\mathbb{C}^*)^p}$ est à cohomologie \mathbb{R} -constructible, il existe un isomorphisme canonique dans $D^b(\mathfrak{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}))$*

$$\mathfrak{M}\left(\mathcal{S}ol^{<0}(\mathcal{M})\right) \cong \mathcal{S}ol\left(\mathfrak{M}(\mathcal{M})\right)$$

D'après ce que nous avons vu au paragraphe 2.1 (propositions 2.1.3 et 2.1.4), nous avons le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3.2.4 *Si une des deux hypothèses suivantes est vérifiée*

– \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}$ -module holonome, régulier sur $(\mathbb{P}^1)^p \setminus (\mathbb{C}^*)^p$

– pour $p = 1$, \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^*}$ -module holonome

alors il existe un isomorphisme canonique dans $D^b(\mathfrak{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}))$

$$\mathfrak{M}(\mathcal{S}ol^{<0}(\mathcal{M})) \cong \mathcal{S}ol(\mathfrak{M}(\mathcal{M}))$$

Nous avons également évoqué au paragraphe 2.1 que, selon C. Sabbah ([Sab-3] th. 7.3), le théorème 3.2.3 est vrai pour \mathcal{M} holonome, dans un cas particulier, pour $p = 2$. De plus, il existe une conjecture selon laquelle les hypothèses du théorème 3.2.3 sont vérifiées pour tout p dès que \mathcal{M} est holonome.

3.3 La preuve

Plan de la preuve

L'idée de base est que l'on a un isomorphisme

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{\mathbb{C}[s]}(\underline{\tau, \tau^{-1}})_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}}(\mathfrak{M}(\mathcal{M})_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}, \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}^{an}) \cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{\mathbb{D}}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}}(\underline{\mathbb{M}}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}, \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}^{an})$$

où t_j et $t_j \partial_{t_j}$ agissent sur $\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}^{an}$ par τ_j et $-\tau_j$.

Dans un premier temps, on montre donc que l'on a un isomorphisme de $\underline{\mathbb{D}}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}$ -modules sur les faisceaux de fonctions, puis on passe au cas général en appliquant le foncteur $\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{\mathbb{D}}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}}(\underline{\mathbb{M}}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}, -)$.

Plus précisément, dans un premier temps, nous exprimons différemment $\mathfrak{M}(\mathcal{S}ol^{<0}(\mathcal{M}))$, pour un $\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}$ -module algébrique cohérent \mathcal{M} , tel que $\mathcal{S}ol^{<0}(\mathcal{M})$ est à cohomologie \mathbb{C} -constructible sur $(\mathbb{C}^*)^p$ et \mathbb{R} -constructible sur le bord de $(\overline{\mathbb{C}^*})^p$. Ensuite, nous procédons en deux étapes.

Nous démontrons d'abord le théorème 3.2.3 pour $p = 1$. Pour cela, nous calculons de deux manières le complexe de $\underline{\mathbb{D}}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}$ -modules

$$\mathcal{K} = \mathbf{R}r_{2*} \left[\pi_* \mathcal{A}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}^{\leq 0} \xrightarrow{(\tau t^{-1} - 1)} \pi_* \mathcal{A}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}^{\leq 0} \right]$$

•

Nous montrons qu'il est isomorphe, d'une part à $\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[-1]$, et d'autre part à $\mathbf{R}r_{2*}(\mathcal{A}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}/\mathbb{Z}}^{\leq 0} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}} \mathcal{S})$, avec des actions bien choisies. Ces dernières font donc de l'isomorphisme

$$\mathbf{R}r_{2*}(\mathcal{A}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}/\mathbb{Z}}^{\leq 0} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}} \mathcal{S})[1] \cong \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}$$

un isomorphisme de $\underline{D}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}$ -modules. Nous n'avons alors plus qu'à appliquer le foncteur

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{D}}(\underline{M}, -)$$

La cas où p est quelconque se fait par récurrence sur p , à partir du cas à une variable.

PROPOSITION 3.3.1 *Pour tout $\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}$ -module algébrique cohérent \mathcal{M} , tel que $Sol^{<0}(\mathcal{M})$ est à cohomologie \mathbb{C} -constructible sur $(\mathbb{C}^*)^p$ et \mathbb{R} -constructible sur le bord de $(\overline{\mathbb{C}^*})^p$, et dont le module des sections globales est noté M , on a un isomorphisme canonique dans $D^b(\mathfrak{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}))$*

$$\mathfrak{M}(Sol^{<0}(\mathcal{M})) \cong \mathbf{R}r_{2*} \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{D}}(\underline{M}, \mathcal{A}_{(\overline{\mathbb{C}^*})^p \times \mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}^{<0} \otimes_{r_2^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}} \mathcal{F})[p]$$

où $t_j \partial_{t_j}$ agit sur $\mathcal{A}_{(\overline{\mathbb{C}^*})^p \times \mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}^{<0} \otimes_{r_2^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}} \mathcal{F}$ par $t_j \partial_{t_j} \cdot g(\underline{t}, \underline{T}) \otimes \omega = t_j \frac{\partial g}{\partial t_j}(\underline{t}, \underline{T}) \otimes \omega$

PREUVE : *Etape 1 :*

Par la proposition 3.1.8, on a $\mathcal{F} = \frac{r_1^{-1} \bar{\mathcal{L}} \otimes_{\mathbb{C}} r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}}{(M_1 T_1^{-1}, \dots, M_p T_p^{-1})}$.

Commençons par montrer que pour tout objet \mathcal{F} de $D^b((\overline{\mathbb{C}^*})^p, \mathbb{C})$, on a

$$\mathbf{R}r_{2*}(r_1^{-1} \mathcal{F} \otimes_{\mathbb{C}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}) \cong \underline{\mathbf{R}\Gamma((\overline{\mathbb{C}^*})^p, \mathcal{F} \otimes_{\mathbb{C}}^{\mathbb{L}} \bar{\mathcal{L}})} \otimes_{\mathbb{C}[\underline{T}, \underline{T}^{-1}]}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}$$

Pour cela, calculons :

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}r_{2*}(r_1^{-1} \mathcal{F} \otimes_{\mathbb{C}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F}) \\ = & \mathbf{R}r_{2*} \left(r_1^{-1} \mathcal{F} \otimes_{\mathbb{C}}^{\mathbb{L}} \frac{r_1^{-1} \bar{\mathcal{L}} \otimes_{\mathbb{C}} r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}}{(M_1 T_1^{-1}, \dots, M_p T_p^{-1})} \right) \\ = & \mathbf{R}r_{2*} \left(\frac{r_1^{-1} (\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{C}}^{\mathbb{L}} \bar{\mathcal{L}}) \otimes_{\mathbb{C}} r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}}{(M_1 - T_1^{-1}, \dots, M_p - T_p^{-1})} \right) \\ = & \mathbf{R}r_{2*} \left(\frac{r_1^{-1} (\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{C}}^{\mathbb{L}} \bar{\mathcal{L}})[\underline{T}, \underline{T}^{-1}]}{(M_1 - T_1^{-1}, \dots, M_p - T_p^{-1})} \otimes_{\mathbb{C}[\underline{T}, \underline{T}^{-1}]}^{\mathbb{L}} r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p} \right) \\ = & \frac{\mathbf{R}r_{2*} r_1^{-1} (\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{C}}^{\mathbb{L}} \bar{\mathcal{L}})[\underline{T}, \underline{T}^{-1}]}{(M_1 - T_1^{-1}, \dots, M_p - T_p^{-1})} \otimes_{\mathbb{C}[\underline{T}, \underline{T}^{-1}]}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p} \quad (\text{car } r_2 \text{ est propre}) \\ = & \underline{\mathbf{R}\Gamma((\overline{\mathbb{C}^*})^p, \mathcal{F} \otimes_{\mathbb{C}}^{\mathbb{L}} \bar{\mathcal{L}})} \otimes_{\mathbb{C}[\underline{T}, \underline{T}^{-1}]}^{\mathbb{L}} \pi^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p} \end{aligned}$$

Etape 2 :

Appliquons ce qui précède à $\mathcal{F} = Sol^{<0}(\mathcal{M})$. Il vient

$$\mathfrak{M}(Sol^{<0}(\mathcal{M})) \cong \mathbf{R}r_{2*}(r_1^{-1} Sol^{<0}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathbb{C}}^{\mathbb{L}} \mathcal{F})[p]$$

Par le lemme 2.1.5 : $Sol^{<0}(\mathcal{M}) = \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{D}}(\underline{M}, \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{<0})$. On a alors un morphisme canonique (voir [K-S] p.114) :

$$r_1^{-1} \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{D}}(\underline{M}, \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{<0}) \longrightarrow \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{D}}(\underline{M}, r_1^{-1} \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{<0})$$

Ce morphisme est en fait un isomorphisme : comme M est un D -module de présentation finie, il suffit de le vérifier pour $M = D$, ce qui est clair.

Puis :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{D}}(\underline{M}, r_1^{-1} \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{<0}) \otimes_{\mathbb{C}}^{\mathbb{L}} \mathcal{I} \\ \cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{D}}(\underline{M}, r_1^{-1} \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{<0}) \otimes_{\mathbb{C}}^{\mathbb{L}} r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}}^{\mathbb{L}} \mathcal{I} \end{aligned}$$

Par la proposition 5.1.1, il vient alors

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{D}}(\underline{M}, r_1^{-1} \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{<0}) \otimes_{\mathbb{C}}^{\mathbb{L}} \mathcal{I} \cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{D}}(\underline{M}, \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}^{<0}) \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}}^{\mathbb{L}} \mathcal{I}$$

On a enfin un morphisme canonique (voir [K-S] p.114)

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{D}}(\underline{M}, \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}^{<0}) \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}}^{\mathbb{L}} \mathcal{I} \\ \longrightarrow \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{D}}(\underline{M}, \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}^{<0} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}} \mathcal{I}) \end{aligned}$$

qui est en fait un isomorphisme (il suffit encore de le vérifier pour $M = D$). En ce qui concerne l'action de D sur $\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}^{<0} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}} \mathcal{I}$, elle provient de l'action de D sur $\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{<0}$, donc $t_j \partial_{t_j}$ agit par $t_j \partial_{t_j} \cdot g(\underline{t}, \underline{T}) \otimes \omega = t_j \frac{\partial g}{\partial t_j}(\underline{t}, \underline{T}) \otimes \omega$. Enfin, l'isomorphisme est naturellement dans $D^b(\mathfrak{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}))$, les actions étant claires. \square

3.3.2 Démonstration du théorème 3.2.3 pour $p = 1$

La démarche utilisée dans ce paragraphe est analogue à celle de B. Malgrange dans le cas de la transformation de Fourier ([Mal-4]).

On suppose dans tout ce paragraphe que $p = 1$.

On commence par exprimer de deux manières différentes le complexe

$$\mathcal{K} = \mathbf{R}r_{2*} [\pi_* \mathcal{A}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}^{<0} \xrightarrow{(\tau t^{-1} - 1)} \pi_* \mathcal{A}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}^{<0}]$$

•

\mathcal{K} est un complexe de $\underline{D}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}$ -modules, sur lequel t et $t\partial_t$ agissent par t et $t\frac{\partial}{\partial t} - s - 1$.

D'après le lemme 2.1.1, nous avons la résolution de Dolbeault suivante, qui est acyclique pour r_{2*} :

$$\pi_* \mathcal{A}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}^{\leq 0} \cong [\pi_* \mathcal{C}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}^{\leq 0} \xrightarrow{\partial_{\bar{t}}} \pi_* \mathcal{C}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}^{\leq 0}]$$

•

Donc, \mathcal{K} est le complexe simple associé au complexe double

$$\begin{array}{ccc} (r_2 \circ \pi)_* \mathcal{C}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}^{\leq 0} & \xrightarrow{(\tau t^{-1} - 1)} & (r_2 \circ \pi)_* \mathcal{C}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}^{\leq 0} \\ \downarrow \partial_{\bar{t}} & & \downarrow \partial_{\bar{t}} \\ (r_2 \circ \pi)_* \mathcal{C}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}^{\leq 0} & \xrightarrow{(\tau t^{-1} - 1)} & (r_2 \circ \pi)_* \mathcal{C}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}^{\leq 0} \end{array}$$

où le bidegré $(0, 0)$ est placé en haut à gauche.

En écrivant $(r_2 \circ \pi)_* = (q_2 \circ \pi)_* \bar{\pi}_*$, le complexe \mathcal{K} est le complexe simple associé au complexe double

$$\begin{array}{ccc} (q_2 \circ \pi)_* \mathcal{C}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}}^{\leq 0} & \xrightarrow{(\tau t^{-1} - 1)} & (q_2 \circ \pi)_* \mathcal{C}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}}^{\leq 0} \\ \downarrow \partial_{\bar{t}} & & \downarrow \partial_{\bar{t}} \\ (q_2 \circ \pi)_* \mathcal{C}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}}^{\leq 0} & \xrightarrow{(\tau t^{-1} - 1)} & (q_2 \circ \pi)_* \mathcal{C}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}}^{\leq 0} \end{array}$$

où le bidegré $(0, 0)$ est placé en haut à gauche, car $\mathbf{R}\bar{\pi}_* \mathcal{C}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}^{\leq 0} = \bar{\pi}_* \mathcal{C}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}^{\leq 0} = \mathcal{C}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}}^{\leq 0}$ (voir le paragraphe 2.1).

On s'intéresse aux colonnes de ce complexe double : dans la section 5.2.1, on montre dans la proposition 5.2.2 que l'on a une suite exacte de \underline{D} -modules

$$0 \longrightarrow (q_2 \circ \pi)_* \mathcal{C}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}}^{\leq 0} \xrightarrow{\partial_{\bar{t}}} (q_2 \circ \pi)_* \mathcal{C}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}}^{\leq 0} \xrightarrow{\varepsilon} \frac{\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[[t]][\frac{1}{t}]}{\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[\frac{1}{t}]} \oplus \frac{\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[[\frac{1}{t}]] [t]}{(t) \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[t]} \longrightarrow 0$$

où t et $t\partial_t$ agissent par t et $t\frac{\partial}{\partial t} - s - 1$, et avec $\varepsilon \circ (\tau t^{-1} - 1) = (\tau t^{-1} - 1) \circ \varepsilon$. On en déduit que

$$\mathcal{K} \cong \left[\frac{\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[[t]][\frac{1}{t}]}{\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[\frac{1}{t}]} \oplus \frac{\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[[\frac{1}{t}]] [t]}{(t) \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[t]} \xrightarrow{(\tau t^{-1} - 1)} \frac{\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[[t]][\frac{1}{t}]}{\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[\frac{1}{t}]} \oplus \frac{\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[[\frac{1}{t}]] [t]}{(t) \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[t]} \right] [-1]$$

•

dans la catégorie des \underline{D} -modules, où t et $t\partial_t$ agissent par t et $t\frac{\partial}{\partial t} - s - 1$. Il suffit alors d'étudier l'action de $\tau t^{-1} - 1$ sur chacun des termes de la somme directe. C'est l'objet des deux lemmes suivant.

LEMME 3.3.3 *On a un isomorphisme de complexes de \underline{D} -modules*

$$\left[\frac{\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[[\frac{1}{t}]] [t]}{(t)\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[t]} \xrightarrow{(\tau t^{-1} - 1)} \frac{\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[[\frac{1}{t}]] [t]}{(t)\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[t]} \right] \cong 0$$

•

où t et $t\partial_t$ agissent sur le membre de gauche par t et $t\frac{\partial}{\partial t} - s - 1$.

PREUVE : Soit $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(s)}{t^n}$ une section de $\frac{\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[[\frac{1}{t}]] [t]}{(t)\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[t]}$. On a alors dans ce même quotient $(\tau t^{-1} - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(s)}{t^n} = -a_0(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}(s+1) - a_n(s)}{t^n}$. Il est alors clair que ce morphisme est bijectif. \square

LEMME 3.3.4 *On a un isomorphisme de complexes de \underline{D} -modules*

$$\left[\frac{\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[[t]][\frac{1}{t}]}{\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[\frac{1}{t}]} \xrightarrow{(\tau t^{-1} - 1)} \frac{\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[[t]][\frac{1}{t}]}{\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[\frac{1}{t}]} \right] \cong \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}$$

•

où t et $t\partial_t$ agissent sur le membre de gauche par t et $t\frac{\partial}{\partial t} - s - 1$, et sur le membre de droite par τ et $-s$.

PREUVE : Soit $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(s)t^n$ une section de $\frac{\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[[t]][\frac{1}{t}]}{\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[\frac{1}{t}]}$. On a alors dans ce même quotient $(\tau t^{-1} - 1) \sum_{n=1}^{\infty} b_n(s)t^n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1}(s+1) - b_n(s))t^n$. Il est alors clair que ce morphisme est surjectif, et que son noyau est isomorphe à $\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}$ via l'application $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(s)t^n \mapsto b_1(s)$. De plus, une vérification simple montre que les actions de t et $t\frac{\partial}{\partial t} - s - 1$ deviennent, à-travers ce morphisme, les actions de τ et $-s$. \square

Nous en déduisons donc l'isomorphisme de complexes de \underline{D} -modules

$$\mathcal{K}[1] \cong \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}$$

où t et $t\partial_t$ agissent sur le membre de gauche par t et $t\frac{\partial}{\partial t} - s - 1$, et sur le membre de droite par τ et $-s$.

Mais, nous pouvons calculer d'une autre manière le complexe \mathcal{K} .
En effet, d'après la proposition 5.3.3, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}/\mathbb{Z}}^{\leq 0} \otimes_{r_2^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}} \mathcal{F} \longrightarrow \pi_* \mathcal{A}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}^{\leq 0} \xrightarrow{(\tau t^{-1} - 1)} \pi_* \mathcal{A}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}^{\leq 0} \longrightarrow 0$$

Et la structure de $\underline{\mathbf{D}}$ -module que nous avons mise sur $\mathcal{A}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}/\mathbb{Z}}^{\leq 0} \otimes_{r_2^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}} \mathcal{F}$, à la section 3.1, est celle qui en fait une suite exacte de $\underline{\mathbf{D}}$ -modules.

On a donc

$$\mathcal{K} \cong \mathbf{R}r_{2*}(\mathcal{A}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}/\mathbb{Z}}^{\leq 0} \otimes_{r_2^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}} \mathcal{F})$$

C'est un isomorphisme de complexes de $\underline{\mathbf{D}}$ -modules où t et $t\partial_t$ agissent sur le membre de gauche par t et $t\frac{\partial}{\partial t} - s - 1$, et sur le membre de droite par l'action décrite à la section 3.1.

En conclusion, on a un isomorphisme de complexes de $\underline{\mathbf{D}}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}$ -modules

$$\mathbf{R}r_{2*}(\mathcal{A}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}/\mathbb{Z}}^{\leq 0} \otimes_{r_2^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}} \mathcal{F})[1] \cong \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an} \quad (3.1)$$

où t et $t\partial_t$ agissent sur le membre de gauche par l'action décrite à la section 3.1, et sur le membre de droite par τ et $-s$.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 3.2.3 pour $p = 1$.

PREUVE : (du théorème 3.2.3 pour $p = 1$)

D'après 3.3.1, on a $\mathfrak{M}(\text{Sol}^{\leq 0}(\mathcal{M})) \cong \mathbf{R}r_{2*} \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{\mathbf{D}}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}/\mathbb{Z}}}(\underline{\mathbf{M}}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}/\mathbb{Z}}, \mathcal{A}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}/\mathbb{Z}}^{\leq 0} \otimes_{r_2^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}} \mathcal{F})[1] \cong \mathbf{R}r_{2*} \mathbf{R}\mathcal{H}om_{r_2^{-1}\underline{\mathbf{D}}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}}(r_2^{-1}\underline{\mathbf{M}}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}, \mathcal{A}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}/\mathbb{Z}}^{\leq 0} \otimes_{r_2^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}} \mathcal{F})[1]$ dans la catégorie $D^b(\mathfrak{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}))$, puis, grâce à un isomorphisme de [K-S] p.112, on a $\mathfrak{M}(\text{Sol}^{\leq 0}(\mathcal{M})) \cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{\mathbf{D}}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}}(\underline{\mathbf{M}}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}, \mathbf{R}r_{2*}(\mathcal{A}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}/\mathbb{Z}}^{\leq 0} \otimes_{r_2^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}} \mathcal{F})[1])$, où t et $t\partial_t$ agissent sur $\mathbf{R}r_{2*}(\mathcal{A}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}/\mathbb{Z}}^{\leq 0} \otimes_{r_2^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}} \mathcal{F})$ par l'action décrite à la section 3.1. Puis, d'après l'isomorphisme 3.1 ci-dessus, on a un isomorphisme dans $D^b(\mathfrak{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}))$

$$\mathfrak{M}(\text{Sol}^{\leq 0}(\mathcal{M})) \cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{\mathbf{D}}}(\underline{\mathbf{M}}, \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an})$$

où t et $t\partial_t$ agissent sur $\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}$ par τ et $-s$. Donc, on a dans $D^b(\mathfrak{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}))$

$$\mathfrak{M}(\text{Sol}^{\leq 0}(\mathcal{M})) \cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{\mathbf{C}}[s]_{\langle \tau, \tau^{-1} \rangle}}(\mathfrak{M}(\mathcal{M}), \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an})$$

□

3.3.5 Démonstration du théorème 3.2.3 pour p quelconque

Commençons par exprimer de deux manières différentes le complexe

$$\mathcal{K} = \mathbf{R}r_{2*}\mathcal{K}^\bullet(\tau_1 t_1^{-1} - 1, \dots, \tau_p t_p^{-1} - 1; \pi_* \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{<0})$$

où $\mathcal{K}^\bullet(\tau_1 t_1^{-1} - 1, \dots, \tau_p t_p^{-1} - 1; \pi_* \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{<0})$ est le complexe de Koszul avec le degré 0 placé tout à gauche.

\mathcal{K} est un complexe de $\underline{D}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}$ -modules, sur lequel les t_j et $t_j \partial_{t_j}$ agissent par t_j et $t_j \frac{\partial}{\partial t_j} - s_j - 1$.

D'après le lemme 2.1.1, on a la résolution de Dolbeault $\pi_* \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{<0} \cong \pi_* \mathcal{P}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{0, \bullet}$, qui est acyclique pour r_{2*} . Donc,

$$\mathcal{K} \cong \mathcal{T}ot^\bullet \left(\mathcal{K}^\bullet(\tau_1 t_1^{-1} - 1, \dots, \tau_p t_p^{-1} - 1; (r_2 \circ \pi)_* \mathcal{P}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{0, \bullet}) \right)$$

Comme $\mathbf{R}\bar{\pi}_* \mathcal{P}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{k, l} = \bar{\pi}_* \mathcal{P}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{k, l} = \mathcal{P}_{(\mathbb{P}^1)^p \times \mathbb{C}^p}^{k, l}$, en écrivant $(r_2 \circ \pi)_* = (q_2 \circ \pi)_* \bar{\pi}_*$, il vient

$$\mathcal{K} \cong \mathcal{T}ot^\bullet \left(\mathcal{K}^\bullet(\tau_1 t_1^{-1} - 1, \dots, \tau_p t_p^{-1} - 1; (q_2 \circ \pi)_* \mathcal{P}_{(\mathbb{P}^1)^p \times \mathbb{C}^p}^{0, \bullet}) \right)$$

Si Λ désigne un ensemble d'indices, convenons pour la suite que $\mathbb{C}[[t_\Lambda]]$ est l'anneau des séries formelles en toutes les variables t_λ ($\lambda \in \Lambda$).

Notons alors

$$\mathcal{D}\mathcal{A}_{I, J} = \frac{\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}^{an} \left[\left[t_I, \frac{1}{t_J} \right] \right] \left[\frac{1}{t_I}, t_J \right]}{\left(\sum_{l \in J} (t_l) \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}^{an} \left[\left[t_I \right] \right] \left[\frac{1}{t_I}, t_J \right] \right) + \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}^{an} \left[\left[\frac{1}{t_J} \right] \right] \left[t_I, t_J \right]}$$

pour toutes les partitions (éventuellement triviales) $I \amalg J = \{1, \dots, p\}$.

$\mathcal{D}\mathcal{A}_{I, J}$ est le faisceau sur $\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p$ des fonctions holomorphes en (s_1, \dots, s_p) définies sur des ouverts stables par les translations τ_j et à valeurs dans l'anneau

$$\text{des séries } \frac{\mathbb{C} \left[\left[t_I, \frac{1}{t_J} \right] \right] \left[\frac{1}{t_I}, t_J \right]}{\left(\sum_{l \in J} (t_l) \mathbb{C} \left[\left[t_I \right] \right] \left[\frac{1}{t_I}, t_J \right] \right) + \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{t_J} \right] \right] \left[t_I, t_J \right]}.$$

Notons ensuite

$$\mathcal{D}\mathcal{A} = \bigoplus_{I, J} \mathcal{D}\mathcal{A}_{I, J}$$

où la somme directe est prise sur toutes les partitions (éventuellement triviales) $I \coprod J = \{1, \dots, p\}$.

LEMME 3.3.6 *On a*

$$(q_2 \circ \pi)_* \mathcal{P}_{(\mathbb{P}^1)^p \times \mathbb{C}^p}^{0, \bullet} \cong \mathcal{DA} [-p]$$

dans la catégorie des complexes de \underline{D} -modules, où les t_j et les $t_j \partial_{t_j}$ agissent par t_j et $t_j \frac{\partial}{\partial t_j} - s_j - 1$.

PREUVE : On a $(q_2 \circ \pi)_* \mathcal{P}_{(\mathbb{P}^1)^p \times \mathbb{C}^p}^{0, \bullet} \cong \mathcal{K}^\bullet(\partial_{t_1}, \dots, \partial_{t_p}; (q_2 \circ \pi)_* \mathcal{C}_{(\mathbb{P}^1)^p \times \mathbb{C}^p}^{<0})$. On considère alors ce complexe de Koszul comme le complexe simple associé au complexe p -uplet formé des p complexes

$$\begin{array}{c} [(q_2 \circ \pi)_* \mathcal{C}_{(\mathbb{P}^1)^p \times \mathbb{C}^p}^{<0} \xrightarrow{\partial_{t_j}} (q_2 \circ \pi)_* \mathcal{C}_{(\mathbb{P}^1)^p \times \mathbb{C}^p}^{<0}] \\ \bullet \end{array}$$

que l'on calcule une variable après l'autre. Il suffit donc de savoir faire le calcul de la proposition 5.2.6 pour faire une démonstration par récurrence sur p . \square

On en déduit donc

$$\mathcal{K} \cong \mathcal{K}^\bullet(\tau_1 t_1^{-1} - 1, \dots, \tau_p t_p^{-1} - 1; \mathcal{DA}) [-p]$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{K} \cong \bigoplus_{I, J} \mathcal{K}^\bullet \left(\tau_1 t_1^{-1} - 1, \dots, \tau_p t_p^{-1} - 1; \mathcal{DA}_{I, J} \right) [-p]$$

dans la catégorie des complexes de \underline{D} -modules, où la somme directe est prise sur toutes les partitions (éventuellement triviales) $I \coprod J = \{1, \dots, p\}$.

Ce complexe est en fait beaucoup plus simple qu'il n'y paraît : tout terme correspondant à un J non vide est nul.

LEMME 3.3.7 *Si $J \neq \emptyset$, alors*

$$\mathcal{K}^\bullet \left(\tau_1 t_1^{-1} - 1, \dots, \tau_p t_p^{-1} - 1; \mathcal{DA}_{I, J} \right) \cong 0$$

PREUVE : Supposons $J \neq \emptyset$ fixé.

Encore une fois, on considère ce complexe de Koszul comme le complexe simple associé au complexe p -uplet formé des p morphismes $\tau_j t_j^{-1} - 1$ sur le faisceau $\mathcal{DA}_{I,J}$, que l'on calcule une variable après l'autre. Soit $m = \max(J)$.

Cas A : $m = p$

L'action de $\tau_p t_p^{-1} - 1$ sur $\mathcal{DA}_{I,J}$ est bijective, par le lemme 3.3.3, car $p \in J$.

Le complexe cherché est donc $\mathcal{K}^\bullet(\tau_1 t_1^{-1}, \dots, \tau_{p-1} t_{p-1}^{-1} - 1; 0) = 0$.

Cas B : $m < p$

L'action de $\tau_p t_p^{-1} - 1$ sur $\mathcal{DA}_{I,J}$ est surjective, et a pour noyau $\mathcal{DA}_{I-\{p\},J}$,

par le lemme 3.3.4, car $p \in I$. Le complexe cherché est donc $\mathcal{K}^\bullet\left(\tau_1 t_1^{-1} - 1, \dots, \tau_{p-1} t_{p-1}^{-1} - 1; \mathcal{DA}_{I-\{p\},J}\right)$.

En réitérant le procédé, le complexe cherché est alors $\mathcal{K}^\bullet\left(\tau_1 t_1^{-1} - 1, \dots, \tau_m t_m^{-1} - 1; \mathcal{DA}_{I-\{m+1, \dots, p\},J}\right)$.

On est donc ramené au cas A : le complexe est donc nul. \square

Cependant, si J est vide et $I = \{1, \dots, p\}$, alors :

LEMME 3.3.8 *On a un isomorphisme de complexes de \underline{D} -modules*

$$\mathcal{K}^\bullet\left(\tau_1 t_1^{-1} - 1, \dots, \tau_p t_p^{-1} - 1; \frac{\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}^{an} \left[\left[t_1, \dots, t_p \right] \right] \left[\frac{1}{t_1}, \dots, \frac{1}{t_p} \right]}{\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}^{an} \left[t_1, \dots, t_p \right]}\right) \cong \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}^{an}$$

où t_j et $t_j \partial_{t_j}$ agissent sur le membre de gauche par t_j et $t_j \frac{\partial}{\partial t_j} - s_j - 1$, et sur le membre de droite par τ_j et $-s_j$.

PREUVE : Il suffit de reprendre le calcul du cas B de la preuve de 3.3.7, en utilisant p fois le lemme à une variable 3.3.4. \square

Nous en déduisons donc l'isomorphisme de complexes de \underline{D} -modules

$$\mathcal{K}[p] \cong \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}^{an}$$

où t_j et $t_j \partial_{t_j}$ agissent sur le membre de gauche par t_j et $t_j \frac{\partial}{\partial t_j} - s_j - 1$, et sur le membre de droite par τ_j et $-s_j$.

Nous pouvons également calculer d'une autre manière le complexe \mathcal{K} .
En effet, d'après la proposition 5.3.4, on a un isomorphisme naturel

$$\mathcal{K}^\bullet(\tau_1 t_1^{-1} - 1, \dots, \tau_p t_p^{-1} - 1; \pi_* \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{\leq 0}) \cong \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}^{\leq 0} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}} \mathcal{T}$$

Et la structure de \underline{D} -module que nous avons mise sur $\mathcal{A}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C} / \mathbb{Z}}^{\leq 0} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C} / \mathbb{Z}}} \mathcal{T}$, à la section 3.1, est celle qui en fait un isomorphisme de \underline{D} -modules.

On a donc

$$\mathcal{K} \cong \mathbf{R}r_{2*}(\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}^{\leq 0} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}} \mathcal{T})$$

C'est un isomorphisme de complexes de \underline{D} -modules où t_j et $t_j \partial_{t_j}$ agissent par t_j et $t_j \frac{\partial}{\partial t_j} - s_j - 1$ sur le membre de gauche, et par l'action décrite à la section 3.1 sur le membre de droite.

Finalement, on a un isomorphisme de complexes de \underline{D} -modules

$$\mathbf{R}r_{2*}(\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}^{\leq 0} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}} \mathcal{T})[p] \cong \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}^{an} \quad (3.2)$$

où t_j et $t_j \partial_{t_j}$ agissent sur le membre de gauche par l'action décrite à la section 3.1, et sur le membre de droite par τ_j et $-s_j$.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 3.2.3.

PREUVE : (du théorème 3.2.3)

On reprend la même démarche que pour $p = 1$.

D'après la proposition 3.3.1, on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(\mathcal{S}ol^{<0}(\mathcal{M})) &\cong \mathbf{R}r_{2*} \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{D}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}}(\underline{M}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}, \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}^{\leq 0} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}} \mathcal{T})[p] \\ &\cong \mathbf{R}r_{2*} \mathbf{R}\mathcal{H}om_{r_2^{-1} \underline{D}_{\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}}(r_2^{-1} \underline{M}_{\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}, \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}^{\leq 0} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}} \mathcal{T})[p] \end{aligned}$$

dans $D^b(\mathfrak{M}od(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}))$, puis, grâce à un isomorphisme de [K-S] p.112 :

$$\mathfrak{M}(\mathcal{S}ol^{<0}(\mathcal{M})) \cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{D}}(\underline{M}, \mathbf{R}r_{2*}(\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}^{\leq 0} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}} \mathcal{T})) [p]$$

où t_j et $t_j \partial_{t_j}$ agissent sur $\mathbf{R}r_{2*}(\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}^{\leq 0} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}} \mathcal{T})$ par l'action décrite à la section 3.1. Puis, grâce à l'isomorphisme 3.2 ci-dessus, on a un isomorphisme dans $D^b(\mathfrak{M}od(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}))$

$$\mathfrak{M}(\mathcal{S}ol^{<0}(\mathcal{M})) \cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{D}}(\underline{M}, \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}^{an})$$

où t_j et $t_j \partial_{t_j}$ agissent sur $\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}^{an}$ par τ_j et $-s_j$. Donc, on a

$$\mathfrak{M}(\mathcal{S}ol^{<0}(\mathcal{M})) \cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{C}[s] \langle \tau, \tau^{-1} \rangle}(\underline{\mathfrak{M}}(\mathcal{M}), \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}^{an})$$

dans $D^b(\mathfrak{M}od(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}))$. □

3.4 Exemples de calculs explicites à une variable

3.4.1 L'opérateur $t - a$

Soit le $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^*}$ -module $\mathcal{M} = \frac{\mathcal{D}_{\mathbb{C}^*}}{\mathcal{D}_{\mathbb{C}^*}(t-a)}$.

Son transformé de Mellin est $\mathfrak{M}(\mathcal{M}) = \frac{\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle}{\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle(\tau-a)}$, et $\text{Sol}(\mathfrak{M}(\mathcal{M})) = \mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}$: c'est le $\mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}$ -module libre engendré par la solution a^s .

Le faisceau des solutions à décroissance rapide de \mathcal{M} est le faisceau constant $\underline{\mathbb{C}}_{\{a\}}[-1]$ supporté par a , dont le transformé de Mellin est $\mathbf{R}\Gamma(\overline{\mathbb{C}^*}, \underline{\mathbb{C}}_{\{a\}} \otimes_{\mathbb{C}} \underline{\mathcal{L}}) \otimes_{\mathbb{C}[T, T^{-1}]} \mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}} = \mathbf{R}\Gamma(\{a\}, \underline{\mathcal{L}}|_{\{a\}}) \otimes_{\mathbb{C}[T, T^{-1}]} \mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}} = \mathbb{C}[T, T^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}[T, T^{-1}]} \mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}$.

3.4.2 L'opérateur $t\partial_t + \alpha$

Considérons le $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^*}$ -module $\mathcal{M} = \frac{\mathcal{D}_{\mathbb{C}^*}}{\mathcal{D}_{\mathbb{C}^*}(t\partial_t + \alpha)}$, avec $\alpha \in \mathbb{C}$.

Son transformé de Mellin est $\mathfrak{M}(\mathcal{M}) = \frac{\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle}{\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle(s-\alpha)}$, et $\text{Sol}(\mathfrak{M}(\mathcal{M})) = \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}}{(T - e^{-2i\pi\alpha})}[-1]$.

On pose $\mathbb{C}^* \xleftarrow{j} \overline{\mathbb{C}^*} \xleftarrow{i} Z = S_0 \cup S_\infty$.

Le faisceau des solutions à décroissance rapide de \mathcal{M} est le système local $\underline{\mathbb{C}}_{\mathbb{C}^*} t^{-\alpha}$ de \mathbb{C} -espaces vectoriels de dimension 1 sur \mathbb{C}^* , et de monodromie $e^{-2i\pi\alpha}$ autour de $t = 0$, que l'on prolonge par 0 à $\overline{\mathbb{C}^*}$: c'est donc $j_! \underline{\mathbb{C}}_{\mathbb{C}^*} t^{-\alpha}$. On montre que ces solutions n'ont pas de \mathcal{H}^1 .

Considérons la suite exacte courte

$$0 \rightarrow j_! \underline{\mathbb{C}}_{\mathbb{C}^*} t^{-\alpha} \otimes_{\mathbb{C}} \underline{\mathcal{L}} \rightarrow \underline{\mathbb{C}} t^{-\alpha} \otimes_{\mathbb{C}} \underline{\mathcal{L}} \rightarrow i_! \underline{\mathbb{C}}_Z t^{-\alpha} \otimes_{\mathbb{C}} \underline{\mathcal{L}} \rightarrow 0$$

D'où un triangle distingué

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(j_! \underline{\mathbb{C}}_{\mathbb{C}^*} t^{-\alpha})[-1] &\longrightarrow \mathbf{R}\Gamma(\overline{\mathbb{C}^*}, \underline{\mathbb{C}} t^{-\alpha} \otimes_{\mathbb{C}} \underline{\mathcal{L}}) \otimes_{\mathbb{C}[T, T^{-1}]} \mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}} \\ &\xrightarrow{\gamma} \mathbf{R}\Gamma(\overline{\mathbb{C}^*}, i_! \underline{\mathbb{C}}_Z t^{-\alpha} \otimes_{\mathbb{C}} \underline{\mathcal{L}}) \otimes_{\mathbb{C}[T, T^{-1}]} \mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}} \xrightarrow{+1} \end{aligned}$$

Puis

$$\mathfrak{M}(j_! \underline{\mathbb{C}}_{\mathbb{C}^*} t^{-\alpha})[-1] \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma(\overline{\mathbb{C}^*}, \underline{\mathbb{C}} t^{-\alpha} \otimes_{\mathbb{C}} \underline{\mathcal{L}}) \otimes_{\mathbb{C}[T, T^{-1}]} \mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}} \xrightarrow{\gamma}$$

$$\left(\mathbf{R}\Gamma(S_0, \underline{\mathbb{C}}_{S_0} t^{-\alpha} \otimes_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{L}}|_{S_0}) \oplus \mathbf{R}\Gamma(S_{\infty}, \underline{\mathbb{C}}_{S_{\infty}} t^{-\alpha} \otimes_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{L}}|_{S_{\infty}}) \right) \otimes_{\mathbb{C}[T, T^{-1}]} \mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}} \xrightarrow{+1}$$

où γ est le morphisme diagonal.

Or, on a

$$\mathbf{R}^k \Gamma(\overline{\mathbb{C}^*}, \underline{\mathbb{C}} t^{-\alpha} \otimes_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{L}}) = \begin{cases} \frac{\mathbb{C}[T, T^{-1}]}{(T - e^{-2i\pi\alpha})} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k \neq 1 \end{cases}$$

$$\mathbf{R}^k \Gamma(S_0, \underline{\mathbb{C}}_{S_0} t^{-\alpha} \otimes_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{L}}|_{S_0}) = \mathbf{R}^k \Gamma(S_{\infty}, \underline{\mathbb{C}}_{S_{\infty}} t^{-\alpha} \otimes_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{L}}|_{S_{\infty}}) = \begin{cases} \frac{\mathbb{C}[T, T^{-1}]}{(T - e^{-2i\pi\alpha})} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k \neq 1 \end{cases}$$

Il vient alors que

$$\mathcal{H}^k\left(\mathfrak{M}(\underline{\mathbb{C}}_{\mathbb{C}^*} t^{-\alpha})[-1]\right) = \begin{cases} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}}{(T - e^{-2i\pi\alpha})} & \text{si } k = 2 \\ 0 & \text{si } k \neq 2 \end{cases}$$

Le transformé de Mellin de ce faisceau de solutions est donc $\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}}{(T - e^{-2i\pi\alpha})}[-1]$.

3.4.3 Les $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^*}$ -modules monodromiques : l'opérateur $b(t\partial_t)$, où $b(X) \in \mathbb{C}[X]$

On peut immédiatement généraliser l'exemple précédent à un $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^*}$ -module de la forme $\frac{\mathcal{D}_{\mathbb{C}^*}}{\mathcal{D}_{\mathbb{C}^*} b(t\partial_t)}$, où $b(X) = \prod_{j=1}^r (X + \alpha_j)^{m_j} \in \mathbb{C}[X]$.

On trouve alors le $\mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}$ -module de torsion $\bigoplus_{j=1}^r \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}}{(T - e^{-2i\pi\alpha_j})^{m_j}}[-1]$.

3.4.4 L'exponentielle et la fonction Gamma : l'opérateur $t\partial_t + t$

Considérons le $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^*}$ -module $\mathcal{M} = \frac{\mathcal{D}_{\mathbb{C}^*}}{\mathcal{D}_{\mathbb{C}^*}(t\partial_t + t)}$.

Son transformé de Mellin est $\mathfrak{M}(\mathcal{M}) = \frac{\mathbb{C}[s](\tau, \tau^{-1})}{\mathbb{C}[s](\tau, \tau^{-1})(\tau - s)}$, et $\mathcal{S}ol(\mathfrak{M}(\mathcal{M})) = \mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}$: c'est le $\mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}$ -module libre engendré par la fonction Gamma.

Notons Z le demi-cercle fermé $\{\theta \in S_{\infty} \mid \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}\}$ de S_{∞} .

On pose $U = \overline{\mathbb{C}^*} \setminus (S_0 \cup Z) \xrightarrow{j} \overline{\mathbb{C}^*} \xleftarrow{i} S_0 \cup Z$.

Le faisceau des solutions à décroissance rapide de \mathcal{M} est $j_! \underline{\mathbb{C}}_U$ (c'est en fait le faisceau de \mathbb{C} -espaces vectoriels de dimension 1 engendrés par e^{-t}). On

montre que ces solutions n'ont pas de \mathcal{H}^1 .

Considérons la suite exacte courte

$$0 \rightarrow j_! \underline{\mathbb{C}}_U \otimes_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{L}} \rightarrow \bar{\mathcal{L}} \rightarrow i_! \underline{\mathbb{C}}_{S_0 \cup Z} \otimes_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{L}} \rightarrow 0$$

D'où un triangle distingué

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(j_! \underline{\mathbb{C}}_U)[-1] &\xrightarrow{\beta} \mathbf{R}\Gamma(\bar{\mathbb{C}}^*, \bar{\mathcal{L}}) \otimes_{\mathbb{C}[T, T^{-1}]} \mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}} \\ &\xrightarrow{\gamma} \mathbf{R}\Gamma(\bar{\mathbb{C}}^*, i_! \underline{\mathbb{C}}_{S_0 \cup Z} \otimes_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{L}}) \otimes_{\mathbb{C}[T, T^{-1}]} \mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}} \xrightarrow{+1} \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(j_! \underline{\mathbb{C}}_U)[-1] &\xrightarrow{\beta} \mathbf{R}\Gamma(\bar{\mathbb{C}}^*, \bar{\mathcal{L}}) \otimes_{\mathbb{C}[T, T^{-1}]} \mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}} \xrightarrow{\gamma} \\ &\left(\mathbf{R}\Gamma(S_0, \bar{\mathcal{L}}|_{S_0}) \oplus \mathbf{R}\Gamma(Z, \bar{\mathcal{L}}|_Z) \right) \otimes_{\mathbb{C}[T, T^{-1}]} \mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}} \xrightarrow{+1} \end{aligned}$$

où γ est le morphisme diagonal.

Or, on a $\mathbf{R}\Gamma(Z, \bar{\mathcal{L}}|_Z) = \mathbf{R}\Gamma(Z, \mathbb{C}[T, T^{-1}]_Z)$, car tout faisceau localement constant sur un espace contractile est constant. Donc

$$\mathbf{R}^k \Gamma(Z, \bar{\mathcal{L}}|_Z) = \begin{cases} \mathbb{C}[T, T^{-1}] & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

On a également :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^k \Gamma(\bar{\mathbb{C}}^*, \bar{\mathcal{L}}) &= \begin{cases} \frac{\mathbb{C}[T, T^{-1}]}{(T-1)} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k \neq 1 \end{cases} \\ \mathbf{R}^k \Gamma(S_0, \bar{\mathcal{L}}|_{S_0}) &= \begin{cases} \frac{\mathbb{C}[T, T^{-1}]}{(T-1)} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

On écrit alors la suite exacte longue de cohomologie.

Il vient immédiatement $\mathcal{H}^0(\mathfrak{M}(j_! \underline{\mathbb{C}}_U)[-1]) = 0$. De plus, le morphisme $\mathcal{H}^1(\gamma)$ est le morphisme diagonal de $\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}}{(T-1)}$ dans $\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}}{(T-1)} \oplus 0$: c'est donc un isomorphisme. Il vient alors d'une part que $\mathcal{H}^1(\beta) = 0$ et donc $\mathcal{H}^1(\mathfrak{M}(j_! \underline{\mathbb{C}}_U)[-1]) = \mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}$, et d'autre part $\mathcal{H}^k(\mathfrak{M}(j_! \underline{\mathbb{C}}_U)[-1]) = 0$ pour $k \neq 0, 1$.

On a donc

$$\mathfrak{M}(j_! \underline{\mathbb{C}}_U) = \mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}$$

Remarque : Soient les deux $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^*}$ -modules $\mathcal{M}_1 = \frac{\mathcal{D}_{\mathbb{C}^*}}{\mathcal{D}_{\mathbb{C}^*} t \partial_t}$ et $\mathcal{M}_2 = \frac{\mathcal{D}_{\mathbb{C}^*}}{\mathcal{D}_{\mathbb{C}^*} (t \partial_t + t)}$. Si nous considérons les complexes classiques des solutions holomorphes de \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 , nous avons

$$\mathbf{R}Hom_{\mathcal{D}_{\mathbb{C}^*}^{an}}(\mathcal{M}_1^{an}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an}) = \mathbf{R}Hom_{\mathcal{D}_{\mathbb{C}^*}^{an}}(\mathcal{M}_2^{an}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an}) = \underline{\mathbb{C}}_{\mathbb{C}^*}$$

La théorie classique ne fait donc aucune différence entre les fonctions 1 et e^{-t} . Cependant, avec le foncteur $Sol^{<0}$, il n'en est pas de même (voir l'exemple 3.4.2). Ainsi, les cas de 1 et de l'exponentielle sont traités différemment par la transformation de Mellin faisceautique.

Chapitre 4

Transformation de Mellin inverse et foncteurs des solutions

Reprenons les notations des chapitres 1 et 2.

Rappelons la situation suivante

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & (\widetilde{\mathbb{C}^*})^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p \\
 & & & & \uparrow \pi \\
 (\widetilde{\mathbb{C}^*})^p \times \overline{\mathbb{C}}^p & \xleftarrow{\ell} & & \xrightarrow{\ell} & (\widetilde{\mathbb{C}^*})^p \times \mathbb{C}^p \\
 \downarrow q & & & & \downarrow q \\
 (\mathbb{C}^*)^p \times \overline{\mathbb{C}}^p & \xleftarrow{\ell} & & \xrightarrow{\ell} & (\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p \\
 \swarrow \rho_1 & & & & \downarrow \pi \\
 (\mathbb{C}^*)^p & & & & (\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p \\
 & \searrow \rho_2 & & & \swarrow p_1 \quad \searrow p_2 \\
 & & \overline{\mathbb{C}}^p & & (\mathbb{C}^*)^p \quad \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p
 \end{array}$$

où le morphisme $q : (\sigma_1, \dots, \sigma_p, s_1, \dots, s_p) \mapsto (e^{\sigma_1}, \dots, e^{\sigma_p}, s_1, \dots, s_p)$ est le revêtement universel de $(\mathbb{C}^*)^p$.

Le problème consiste à comprendre le lien entre les solutions d'un module aux différences finies et les solutions du transformé de Mellin inverse de ce module (voir section 1.3). C'est ainsi que nous construisons un foncteur, appelé transformation de Mellin inverse faisceautique. Le théorème que nous obtenons dans un premier temps n'établit que deux morphismes canoniques

reliant les deux objets (th. 4.2.4). Nous approfondissons donc l'étude en exhibant une classe de modules aux différences finies pour lesquels ces morphismes sont des isomorphismes (th 4.4.2). Pour cela, nous construisons, dans la section 4.1, un sous-espace $\Sigma_{\lambda,\mu}$ de $(\widetilde{\mathbb{C}^*})^p \times \overline{\mathbb{C}^p}$ qui joue un rôle déterminant dans la démonstration.

Il est important de préciser que nous ne prouvons pas ici que le foncteur de transformation de Mellin inverse faisceautique est un quasi-inverse du foncteur transformation de Mellin faisceautique défini dans le chapitre 3 : ceci reste cependant une question ouverte intéressante.

4.1 Définition du sous-espace $\Sigma_{\lambda,\mu}$

Construction de $\Sigma_{\lambda,\mu}$

Pour tout couple de p -uplets $(\lambda, \mu) = (\lambda_1, \dots, \lambda_p; \mu_1, \dots, \mu_p) \in (\mathbb{Q}_+^*)^p \times (\mathbb{C}^*)^p$, définissons un sous-espace $\Sigma_{\lambda,\mu}$ de $(\widetilde{\mathbb{C}^*})^p \times \overline{\mathbb{C}^p}$, où $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

Soit $A_j = \{(\underline{\sigma}, \underline{s}) \in (\widetilde{\mathbb{C}^*})^p \times \mathbb{C}^p \mid (\text{Im}(\sigma_j) + \text{Arg}(\mu_j))\text{Im}(s_j) \geq \frac{\pi}{2}\lambda_j|\text{Im}(s_j)|\}$. Puis, posons $B = \overline{\ell(\bigcup_{j=1}^p A_j)}$, où l'adhérence est prise dans $(\widetilde{\mathbb{C}^*})^p \times \overline{\mathbb{C}^p}$, et $B_{<} = ((\widetilde{\mathbb{C}^*})^p \times \overline{\mathbb{C}^p}) \setminus B$. On définit alors $\Sigma_{\lambda,\mu}$ comme étant $((\widetilde{\mathbb{C}^*})^p \times \mathbb{C}^p) \cup B_{<}$.

Tout élément $(\underline{\sigma}, \underline{s}) \in B_{<} \cap ((\widetilde{\mathbb{C}^*})^p \times \mathbb{C}^p)$ vérifie les conditions à l'infini suivantes

$$\forall j = 1, \dots, p, \exists \varepsilon_j > 0 : |\text{Im}(s_j)| > \frac{1}{\varepsilon_j} \Rightarrow (\text{Im}(\sigma_j) + \text{Arg}(\mu_j))\text{Im}(s_j) < \frac{\pi}{2}\lambda_j|\text{Im}(s_j)|$$

ou encore

$$\forall j = 1, \dots, p, \exists \varepsilon_j > 0 : |\text{Im}(s_j)| > \frac{1}{\varepsilon_j} \Rightarrow |\text{Im}(\sigma_j) + \text{Arg}(\mu_j)| < \frac{\pi}{2}\lambda_j$$

Pour des valeurs négatives ou nulles d'un des λ_j , le sous-ensemble $\Sigma_{\lambda,\mu}$ serait donc égal à $(\widetilde{\mathbb{C}^*})^p \times \mathbb{C}^p$.

Motivation de cette construction

Ainsi, pour un couple $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{Q}_+^*)^p \times (\mathbb{C}^*)^p$ fixé, la fonction

$$\begin{aligned} \Sigma_{\lambda,\mu} \cap ((\widetilde{\mathbb{C}^*})^p \times \mathbb{C}^p) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\underline{\sigma}, \underline{s}) &\longmapsto g(s_1, \dots, s_p) e^{-\sum_{j=1}^p \sigma_j s_j} \end{aligned}$$

sera à décroissance rapide quand $|\operatorname{Im}(s_j)| \rightarrow +\infty$ et $a \leq \operatorname{Re}(s_j) \leq b$ pour tout $j = 1, \dots, p$, et uniformément par rapport aux σ_j , à chaque fois que nous rencontrerons une fonction $g : \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant

$$|g(s_1, \dots, s_p)| \sim C \prod_{j=1}^p \exp \left(\operatorname{Arg}(\mu_j) \operatorname{Im}(s_j) - \frac{\pi}{2} \lambda_j |\operatorname{Im}(s_j)| \right)$$

quand $|\operatorname{Im}(s_j)| \rightarrow +\infty$ et $a \leq \operatorname{Re}(s_j) \leq b$ pour tout $j = 1, \dots, p$.
En effet :

$$|g(s_1, \dots, s_p) e^{-\sum_{j=1}^p \sigma_j s_j}| \sim C' \prod_{j=1}^p \exp \left((\operatorname{Arg}(\mu_j) + \operatorname{Im}(\sigma_j)) \operatorname{Im}(s_j) - \frac{\pi}{2} \lambda_j |\operatorname{Im}(s_j)| \right)$$

La trace du sous-espace $\Sigma_{\lambda, \mu}$ à l'infini est même exactement l'ensemble des points de $(\widetilde{(\mathbb{C}^*)^p} \times \overline{\mathbb{C}^p}) \setminus ((\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p)$ au voisinage desquels la propriété de décroissance rapide ci-dessus est vérifiée. En effet, tout voisinage d'un point de l'infini n'étant pas sur cette trace contient des points où $g e^{-\sum_{j=1}^p \sigma_j s_j}$ n'est pas à décroissance rapide.

Ceci joue un rôle essentiel dans la preuve du théorème 4.4.2.

Dans la définition de la transformation de Mellin inverse faisceautique, on tensorisera donc par le faisceau constant sur $(\widetilde{(\mathbb{C}^*)^p} \times \overline{\mathbb{C}^p})$ supporté par $\Sigma_{\lambda, \mu}$, noté $\underline{\mathbb{C}}_{\Sigma_{\lambda, \mu}}$.

4.2 Théorème de commutation de la transformation de Mellin inverse et du foncteur des solutions

Nous sommes maintenant en mesure de définir la transformation de Mellin inverse faisceautique et d'énoncer un premier théorème de commutation de la transformation de Mellin inverse et du foncteur des solutions.

DÉFINITION 4.2.1 *Pour tout $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{Q}_+^*)^p \times (\mathbb{C}^*)^p$, le foncteur de (λ, μ) -transformation de Mellin inverse faisceautique est*

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{M}}_{\lambda, \mu} : D^b(\overline{\mathbb{C}^p}, \mathbb{C}) &\longrightarrow D^b((\mathbb{C}^*)^p, \mathbb{C}) \\ \mathcal{G} &\longmapsto \mathbf{R}\rho_{1*} \mathbf{R}q_! (q^{-1} \rho_2^{-1} \mathcal{G} \otimes_{\mathbb{C}} \underline{\mathbb{C}}_{\Sigma_{\lambda, \mu}}) [p] \end{aligned}$$

REMARQUE 4.2.2 Le morphisme ρ_1 étant propre, on a $\rho_{1*} = \rho_{1!}$. Donc, avec des abus de notation évidents, les foncteurs $\mathbf{R}\rho_{1*}$ et $\mathbf{R}q_!$ commutent, car $\mathbf{R}\rho_{1*}\mathbf{R}q_! = \mathbf{R}(\rho_1 \circ q)_! = \mathbf{R}(q \circ \rho_1)_!$.

Posons $\mathcal{L}_{\Sigma_{\lambda,\mu}} = \mathbf{R}q_!\underline{\mathbb{C}}_{\Sigma_{\lambda,\mu}}$. Ce faisceau est une généralisation du système local classique $\mathcal{L} = \mathbf{R}q_!q^{-1}\underline{\mathbb{C}}$ à l'espace $(\mathbb{C}^*)^p \times \overline{\mathbb{C}}^p$, puisque l'on a facilement que $\mathcal{L}_{\Sigma_{\lambda,\mu}}|_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p} = \mathcal{L}$.

PROPRIÉTÉ 4.2.3 *Pour tout objet \mathcal{G} de $D^b(\overline{\mathbb{C}}^p, \mathbb{C})$ et tout $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{Q}_+^*)^p \times (\mathbb{C}^*)^p$, on a*

$$\overline{\mathfrak{M}}_{\lambda,\mu}(\mathcal{G}) = \mathbf{R}\rho_{1*}(\rho_2^{-1}\mathcal{G} \otimes_{\mathbb{C}}^{\mathbb{L}} \mathcal{L}_{\Sigma_{\lambda,\mu}}) [p]$$

PREUVE : C'est juste une application du théorème de projection. \square

La suite est consacrée à la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME 4.2.4

Notons $\mathfrak{Mod}_{pf}(\mathbb{C}[\underline{s}] \langle \underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1} \rangle)$ la catégorie des $\mathbb{C}[\underline{s}] \langle \underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1} \rangle$ -modules de présentation finie.

Pour tout objet \mathbb{M} de $\mathfrak{Mod}_{pf}(\mathbb{C}[\underline{s}] \langle \underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1} \rangle)$ et tout $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{Q}_+^*)^p \times (\mathbb{C}^*)^p$, il existe un foncteur

$$\Psi_{\lambda,\mu} : \mathfrak{Mod}_{pf}(\mathbb{C}[\underline{s}] \langle \underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1} \rangle) \longrightarrow D^b((\mathbb{C}^*)^p, \mathbb{C})$$

et deux morphismes canoniques dans $D^b((\mathbb{C}^*)^p, \mathbb{C})$

$$\overline{\mathfrak{M}}_{\lambda,\mu}(\mathcal{S}ol(\mathbb{M}, \mathcal{E})) \xleftarrow{\phi_{\lambda,\mu}} \Psi_{\lambda,\mu}(\mathbb{M}) \xrightarrow{\psi_{\lambda,\mu}} \mathcal{S}ol\left(\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p} \otimes_{\mathbb{D}} \overline{\mathfrak{M}}(\mathbb{M}), \mathbf{R}q_!\widehat{\mathcal{O}}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{an}\right)$$

où $\mathcal{S}ol(-, \mathbf{R}q_!\widehat{\mathcal{O}}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{an}) = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(-, \mathbf{R}q_!\widehat{\mathcal{O}}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{an})$

4.3 La preuve

Plan de la preuve

La démarche est la même que pour la démonstration du théorème 3.2.3.

Dans un premier temps, nous exprimons différemment $\overline{\mathfrak{M}}_{\lambda,\mu}(\mathcal{S}ol(\mathbb{M}, \mathcal{E}))$, pour un $\mathbb{C}[\underline{s}] \langle \underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1} \rangle$ -module de présentation finie \mathbb{M} . Ensuite, nous procédons en deux étapes.

Nous démontrons d'abord le théorème 4.2.4 pour $p = 1$. Pour cela, nous calculons de deux manières le complexe de $\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle_{\mathbb{C}^*}$ -modules

$$\mathcal{K}^{\ll 0} = \mathbf{R}q_! \mathbf{R}\rho_{1*} [\mathcal{B}^{\ll 0} \xrightarrow{(\partial_\sigma + s)} \mathcal{B}^{\ll 0}]$$

•

Nous montrons qu'il est isomorphe, d'une part à $\mathbf{R}q_! \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an}[-1]$, et d'autre part à $\mathbf{R}\rho_{1*} \mathbf{R}q_!(q^{-1} \rho_2^{-1} \ell_* \ell^{-1} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\sigma s})^{\ll 0}$, avec des actions bien choisies. Ces dernières font donc de l'isomorphisme

$$\mathbf{R}\rho_{1*} \mathbf{R}q_!(q^{-1} \rho_2^{-1} \ell_* \ell^{-1} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\sigma s})^{\ll 0}[1] \cong \mathbf{R}q_! \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an}$$

un isomorphisme de $\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle_{\mathbb{C}^*}$ -modules. Nous n'avons alors plus qu'à appliquer le foncteur

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle_{\mathbb{C}^*}}(\underline{\mathbb{M}}_{\mathbb{C}^*}, -)$$

pour exprimer les morphismes canoniques $\phi_{\lambda, \mu}$ et $\psi_{\lambda, \mu}$.

La cas où p est quelconque se fait par récurrence sur p , à partir du cas à une variable.

Nous détaillons enfin, dans la section 4.4, un cas particulier où ces morphismes sont des isomorphismes.

PROPOSITION 4.3.1 *Pour tout $\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$ -module de présentation finie $\underline{\mathbb{M}}$, on a un isomorphisme canonique dans $D^b((\mathbb{C}^*)^p, \mathbb{C})$*

$$\overline{\mathfrak{M}}_{\lambda, \mu}(\mathcal{S}ol(\underline{\mathbb{M}}, \mathcal{E})) \cong \mathbf{R}\rho_{1*} \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle}(\underline{\mathbb{M}}, \rho_2^{-1} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{L}_{\Sigma_{\lambda, \mu}})[p]$$

PREUVE : $\overline{\mathfrak{M}}_{\lambda, \mu}(\mathcal{S}ol(\underline{\mathbb{M}}, \mathcal{E})) = \mathbf{R}\rho_{1*}(\rho_2^{-1} \mathcal{S}ol(\underline{\mathbb{M}}, \mathcal{E}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathcal{L}_{\Sigma_{\lambda, \mu}})[p]$. On a des morphismes canoniques (voir [K-S] p.114)

$$\begin{aligned} \rho_2^{-1} \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle}(\underline{\mathbb{M}}, \mathcal{E}) &\longrightarrow \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\rho_2^{-1} \mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle}(\rho_2^{-1} \underline{\mathbb{M}}, \rho_2^{-1} \mathcal{E}) \\ &\cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle}(\underline{\mathbb{M}}, \rho_2^{-1} \mathcal{E}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle}(\underline{\mathbb{M}}, \rho_2^{-1} \mathcal{E}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathcal{L}_{\Sigma_{\lambda, \mu}} \longrightarrow \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle}(\underline{\mathbb{M}}, \rho_2^{-1} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{L}_{\Sigma_{\lambda, \mu}})$$

Ces morphismes sont en fait des isomorphismes : comme $\underline{\mathbb{M}}$ est de présentation finie, il suffit donc de le vérifier pour $\underline{\mathbb{M}} = \mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$, ce qui est clair. Enfin, l'isomorphisme est naturellement dans $D^b((\mathbb{C}^*)^p, \mathbb{C})$. \square

4.3.2 Cas d'une variable

La démarche utilisée dans ce paragraphe est inspirée de celle de B. Malgrange pour le cas de la transformation de Fourier ([Mal-4]).

On suppose dans tout ce paragraphe que $p = 1$.

Commençons par exprimer de deux manières différentes le complexe

$$\mathcal{K}^{\ll 0} = \mathbf{R}q_! \mathbf{R}\rho_{1*} [\mathcal{B}^{\ll 0} \xrightarrow{(\partial_\sigma + s)} \mathcal{B}^{\ll 0}]$$

•

$\mathcal{K}^{\ll 0}$ est un complexe de $\underline{\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle}_{\mathbb{C}^*}$ -modules, sur lequel τ et s agissent par $\tau t = \tau e^\sigma$ et s .

L'opérateur $\partial_\sigma + s$ est exactement le remonté au revêtement universel de \mathbb{C}^* de l'opérateur $t\partial_t + s$, puisque $t = e^\sigma$.

On définit sur $\widetilde{\mathbb{C}^*} \times \overline{\mathbb{C}}$ le faisceau $\mathcal{C}^{\ll 0}$ de la même manière que $\mathcal{B}^{\ll 0}$, mais en prenant des fonctions \mathcal{C}^∞ en s, \bar{s} . La résolution de Dolbeault suivante est acyclique pour ρ_{1*} :

$$\mathcal{B}^{\ll 0} \cong [\mathcal{C}^{\ll 0} \xrightarrow{\partial_{\bar{s}}} \mathcal{C}^{\ll 0}]$$

•

Donc, $\mathcal{K}^{\ll 0}$ est l'image directe à support propre dérivée par q du complexe simple associé au complexe double

$$\begin{array}{ccc} \rho_{1*} \mathcal{C}^{\ll 0} \xrightarrow{(\partial_\sigma + s)} \rho_{1*} \mathcal{C}^{\ll 0} & & \\ \downarrow \partial_{\bar{s}} & & \downarrow \partial_{\bar{s}} \\ \rho_{1*} \mathcal{C}^{\ll 0} \xrightarrow{(\partial_\sigma + s)} \rho_{1*} \mathcal{C}^{\ll 0} & & \end{array}$$

où le bidegré $(0, 0)$ est placé en haut à gauche.

On s'intéresse aux colonnes de ce complexe double : dans la section 5.2.7, on montre dans la proposition 5.2.8 que l'on a une suite exacte de $\underline{\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle}$ -modules

$$0 \longrightarrow \rho_{1*} \mathcal{C}^{\ll 0} \xrightarrow{\partial_{\bar{s}}} \rho_{1*} \mathcal{C}^{\ll 0} \xrightarrow{\eta} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an}[[\frac{1}{s}]] [s]}{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an}[s]} \longrightarrow 0$$

où τ et s agissent par τe^σ et s , et avec $\eta \circ (\partial_\sigma + s) = (\partial_\sigma + s) \circ \eta$.

D'où

$$\mathcal{K}^{\ll 0} \cong \mathbf{R}q_! \left[\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an}[[\frac{1}{s}]] [s]}{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an}[s]} \xrightarrow{(\partial_\sigma + s)} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an}[[\frac{1}{s}]] [s]}{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an}[s]} \right] [-1]$$

•

C'est un isomorphisme de complexes de $\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$ -modules, où τ et s agissent par τe^σ et s .

LEMME 4.3.3 *On a un isomorphisme de complexes de $\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$ -modules*

$$\left[\begin{array}{c} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an}[[\frac{1}{s}]](s)}{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an}(s)} \xrightarrow{(\partial_\sigma + s)} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an}[[\frac{1}{s}]](s)}{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an}(s)} \\ \bullet \end{array} \right] \cong \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an}$$

où τ et s agissent sur le membre de gauche par τe^σ et s , et sur le membre de droite par e^σ et $-\partial_\sigma$.

PREUVE : Soit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(\sigma)}{s^n}$ une section de $\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an}[[\frac{1}{s}]](s)}{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an}(s)}$. On a alors dans ce même quotient $(\partial_\sigma + s) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(\sigma)}{s^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a'_n(\sigma) + a_{n+1}(\sigma)}{s^n}$. Il est alors clair que ce morphisme est surjectif, et que son noyau est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an}$ via l'application $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(\sigma)}{s^n} \mapsto a_1(\sigma)$. De plus, une vérification simple montre que les actions de τe^σ et s deviennent, à-travers ce morphisme, les actions de e^σ et $-\partial_\sigma$. \square

On en déduit donc l'isomorphisme de complexes de $\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$ -modules

$$\mathcal{K}^{\ll 0}[1] \cong \mathbf{R}q_! \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an}$$

où τ et s agissent sur le membre de gauche par τt et s , et sur le membre de droite par t et $-t\partial_t$. En effet, c'est un isomorphisme de faisceaux, non plus sur $\widetilde{\mathbb{C}^*}$, mais sur \mathbb{C}^* .

Mais grâce au lemme 5.4.1, on a aussi

$$\mathcal{K}^{\ll 0} \cong \mathbf{R}\rho_{1*} \mathbf{R}q_!(q^{-1} \rho_2^{-1} \ell_* \ell^{-1} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\sigma s})^{\ll 0}$$

où $(q^{-1} \rho_2^{-1} \ell_* \ell^{-1} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\sigma s})^{\ll 0}$ est le sous-faisceau de $\mathcal{B}^{\ll 0}$ des fonctions de la forme $g(s)e^{-\sigma s}$. Cet isomorphisme est également un isomorphisme de complexes de $\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$ -modules où τ et s agissent par τt et s .

Nous avons donc démontré le théorème suivant :

THÉORÈME 4.3.4

On a un isomorphisme de complexes de $\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$ -modules

$$\mathbf{R}\rho_{1*} \mathbf{R}q_!(q^{-1} \rho_2^{-1} \ell_* \ell^{-1} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\sigma s})^{\ll 0}[1] \cong \mathbf{R}q_! \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an}$$

où τ et s agissent sur le membre de gauche par τt et s , et sur le membre de droite par t et $-t\partial_t$.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 4.2.4 pour $p = 1$.

PREUVE : (du théorème 4.2.4 pour $p = 1$)

On remarque tout d'abord que le morphisme d'adjonction $\mathcal{E} \hookrightarrow \ell_* \ell^{-1} \mathcal{E}$ induit un isomorphisme $(q^{-1} \rho_2^{-1} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\sigma s})^{\ll 0} \xrightarrow{\cong} (q^{-1} \rho_2^{-1} \ell_* \ell^{-1} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\sigma s})^{\ll 0}$.

Pour prouver cela, il suffit de le vérifier sur les fibres en vérifiant que les conditions de croissance sont bien remplies.

Ensuite, on a un premier morphisme naturel de $\mathbb{C}[s]\langle \tau, \tau^{-1} \rangle$ -modules :

$$(q^{-1} \rho_2^{-1} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\sigma s})^{\ll 0} \otimes_{\mathbb{C}} \underline{\mathbb{C}}_{\Sigma_{\lambda, \mu}} \xrightarrow{\psi_{\lambda, \mu}} (q^{-1} \rho_2^{-1} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\sigma s})^{\ll 0}$$

où τ et s agissent par τe^{σ} et s sur les deux membres.

On a également

$$(q^{-1} \rho_2^{-1} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\sigma s})^{\ll 0} \otimes_{\mathbb{C}} \underline{\mathbb{C}}_{\Sigma_{\lambda, \mu}} \xrightarrow{\phi_{\lambda, \mu}} q^{-1} \rho_2^{-1} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} \underline{\mathbb{C}}_{\Sigma_{\lambda, \mu}}$$

où τ et s agissent sur le membre de gauche par τe^{σ} et s , et sur le membre de droite par τ et s .

En appliquant le foncteur $\mathbf{R}q_!$, et le théorème de projection, on obtient les deux morphismes de $\mathbb{C}[s]\langle \tau, \tau^{-1} \rangle$ -modules

$$\mathbf{R}q_! \left((q^{-1} \rho_2^{-1} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\sigma s})^{\ll 0} \otimes_{\mathbb{C}} \underline{\mathbb{C}}_{\Sigma_{\lambda, \mu}} \right) \xrightarrow{\psi_{\lambda, \mu}} \mathbf{R}q_! (q^{-1} \rho_2^{-1} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\sigma s})^{\ll 0}$$

$$\mathbf{R}q_! \left((q^{-1} \rho_2^{-1} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\sigma s})^{\ll 0} \otimes_{\mathbb{C}} \underline{\mathbb{C}}_{\Sigma_{\lambda, \mu}} \right) \xrightarrow{\phi_{\lambda, \mu}} \rho_2^{-1} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{L}_{\Sigma_{\lambda, \mu}}$$

où les actions sont les mêmes que précédemment, au changement de variable $t = e^{\sigma}$ près. Enfin, on applique les foncteurs $\mathbf{R}\rho_{1*}$, puis $\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{C}[s]\langle \tau, \tau^{-1} \rangle}(\underline{\mathbb{M}}, -)$.

On pose alors

$$\Psi_{\lambda, \mu}(\underline{\mathbb{M}}) = \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{C}[s]\langle \tau, \tau^{-1} \rangle} \left(\underline{\mathbb{M}}, \mathbf{R}\rho_{1*} \mathbf{R}q_! \left((q^{-1} \rho_2^{-1} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\sigma s})^{\ll 0} \otimes_{\mathbb{C}} \underline{\mathbb{C}}_{\Sigma_{\lambda, \mu}} \right) \right) [1]$$

et on a les deux morphismes

$$\Psi_{\lambda, \mu}(\underline{\mathbb{M}}) \xrightarrow{\quad} \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{C}[s]\langle \tau, \tau^{-1} \rangle} \left(\underline{\mathbb{M}}, \mathbf{R}\rho_{1*} \mathbf{R}q_! (q^{-1} \rho_2^{-1} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\sigma s})^{\ll 0} \right) [1]$$

$$\Psi_{\lambda, \mu}(\underline{\mathbb{M}}) \xrightarrow{\quad} \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{C}[s]\langle \tau, \tau^{-1} \rangle} \left(\underline{\mathbb{M}}, \mathbf{R}\rho_{1*} (\rho_2^{-1} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{L}_{\Sigma_{\lambda, \mu}}) \right) [1]$$

Grâce à la proposition 4.3.1 et à un isomorphisme canonique de [K-S] p.112, on a

$$\overline{\mathfrak{M}}_{\lambda,\mu}(\mathcal{S}ol(\mathbb{M}, \mathcal{E})) \cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{\mathbb{C}[s]\langle\tau,\tau^{-1}\rangle}}\left(\underline{\mathbb{M}}, \mathbf{R}\rho_{1*}(\rho_2^{-1}\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{L}_{\Sigma_{\lambda,\mu}})\right)[1]$$

où τ et s agissent de façon naturelle sur $\mathbf{R}\rho_{1*}(\rho_2^{-1}\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{L}_{\Sigma_{\lambda,\mu}})$. D'autre part, on a un isomorphisme dans $D^b(\mathbb{C}^*, \mathbb{C})$

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{D}}\left(\overline{\mathfrak{M}}(\mathbb{M}), \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an}\right) \cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{\mathbb{C}[s]\langle\tau,\tau^{-1}\rangle}}\left(\underline{\mathbb{M}}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an}\right)$$

où τ et s agissent par t et $-t\partial_t$ sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an}$.

Et par le théorème 4.3.4, on a un isomorphisme dans $D^b(\mathbb{C}^*, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}ol\left(\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{D}} \overline{\mathfrak{M}}(\mathbb{M}), \mathbf{R}q_!\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an}\right) &\cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{D}}\left(\overline{\mathfrak{M}}(\mathbb{M}), \mathbf{R}q_!\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an}\right) \\ &\cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{\mathbb{C}[s]\langle\tau,\tau^{-1}\rangle}}\left(\underline{\mathbb{M}}, \mathbf{R}\rho_{1*}\mathbf{R}q_!(q^{-1}\rho_2^{-1}\ell_*\ell^{-1}\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\sigma s})^{\ll 0}\right)[1] \end{aligned}$$

On déduit donc les deux morphismes canoniques cherchés. \square

4.3.5 Cas de p variables

Exprimons de deux manières différentes le complexe

$$\mathcal{K}^{\ll 0} = \mathbf{R}\rho_{1*}\mathbf{R}q_!\mathcal{K}^{\bullet}(\partial_{\sigma_1} + s_1, \dots, \partial_{\sigma_p} + s_p; \mathcal{B}^{\ll 0})$$

où $\mathcal{K}^{\bullet}(\partial_{\sigma_1} + s_1, \dots, \partial_{\sigma_p} + s_p; \mathcal{B}^{\ll 0})$ est le complexe de Koszul avec le degré 0 placé tout à gauche.

$\mathcal{K}^{\ll 0}$ est un complexe de $\underline{\mathbb{C}[s]\langle\tau,\tau^{-1}\rangle}_{(\mathbb{C}^*)^p}$ -modules, sur lequel les τ_j et s_j agissent par $\tau_j t_j = \tau_j e^{\sigma_j}$ et s_j .

On définit sur $(\widetilde{\mathbb{C}^*})^p \times \overline{\mathbb{C}^p}$ le faisceau $\mathcal{Q}^{k,l}$ de la même façon que $\mathcal{B}^{\ll 0}$, mais en prenant des formes différentielles \mathcal{C}^{∞} en les s_j et \bar{s}_j de type (k, l) , à paramètres holomorphes en les σ_j .

On a alors la résolution de Dolbeault $\mathcal{B}^{\ll 0} \cong \mathcal{Q}^{0,\bullet}$, qui est acyclique pour ρ_{1*} . Donc,

$$\mathcal{K}^{\ll 0} \cong \mathbf{R}q_!\mathcal{T}ot^{\bullet}\left(\mathcal{K}^{\bullet}(\partial_{\sigma_1} + s_1, \dots, \partial_{\sigma_p} + s_p; \rho_{1*}\mathcal{Q}^{0,\bullet})\right)$$

Notons $\frac{\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{an} \left[\left[\frac{1}{s_1}, \dots, \frac{1}{s_p} \right] \right] [s_1, \dots, s_p]}{\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{an} [s_1, \dots, s_p]}$ le faisceau sur $(\widetilde{\mathbb{C}^*})^p$ des fonctions holomorphes en $(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$ à valeurs dans $\frac{\mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{s_1}, \dots, \frac{1}{s_p} \right] \right] [s_1, \dots, s_p]}{\mathbb{C} [s_1, \dots, s_p]}$.

LEMME 4.3.6 *On a*

$$\rho_{1*} \mathcal{Q}^{0, \bullet}[p] \cong \frac{\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{an} \left[\left[\frac{1}{s_1}, \dots, \frac{1}{s_p} \right] \right] [s_1, \dots, s_p]}{\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{an} [s_1, \dots, s_p]}$$

PREUVE : La preuve de ce lemme se fait de la manière que celle de 3.3.6, en s'appuyant sur le lemme 5.2.11. \square

Il vient donc

$$\mathcal{K}^{\leq 0}[p] \cong \mathbf{R}q_! \mathcal{K}^{\bullet} \left(\partial_{\sigma_1 + s_1, \dots, \sigma_p + s_p}; \frac{\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{an} \left[\left[\frac{1}{s_1}, \dots, \frac{1}{s_p} \right] \right] [s_1, \dots, s_p]}{\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{an} [s_1, \dots, s_p]} \right)$$

Calculons maintenant ce complexe de Koszul.

LEMME 4.3.7 *On a un isomorphisme de $\mathbb{C}[\underline{s}] \langle \underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1} \rangle$ -modules*

$$\mathcal{K}^{\bullet} \left(\partial_{\sigma_1 + s_1, \dots, \sigma_p + s_p}; \frac{\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{an} \left[\left[\frac{1}{s_1}, \dots, \frac{1}{s_p} \right] \right] [s_1, \dots, s_p]}{\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{an} [s_1, \dots, s_p]} \right) \cong \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{an}$$

où τ_j et s_j agissent sur le membre de gauche par $\tau_j e^{\sigma_j}$ et s_j , et sur le membre de droite par e^{σ_j} et $-\partial_{\sigma_j}$.

PREUVE : Il suffit de le faire par récurrence sur p à l'aide du lemme similaire à une variable 4.3.3. Pour cela, on considère ce complexe de Koszul comme le complexe simple associé au complexe p -uple formé des p complexes

$$\left[\frac{\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{an} \left[\left[\frac{1}{s_1}, \dots, \frac{1}{s_p} \right] \right] [s_1, \dots, s_p]}{\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{an} [s_1, \dots, s_p]} \xrightarrow{\partial_{\sigma_j + s_j}} \frac{\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{an} \left[\left[\frac{1}{s_1}, \dots, \frac{1}{s_p} \right] \right] [s, 1, \dots, s_p]}{\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{an} [s_1, \dots, s_p]} \right].$$

On calcule une variable après l'autre. \square

On en déduit donc l'isomorphisme de complexes de $\mathbb{C}[\underline{s}] \langle \underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1} \rangle$ -modules

$$\mathcal{K}^{\ll 0}[p] \cong \mathbf{R}q! \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{an}$$

où τ_j et s_j agissent sur le membre de gauche par $\tau_j t_j$ et s_j , et sur le membre de droite par t_j et $-t_j \partial_{t_j}$.

Cependant, en notant $e^{-\langle \sigma, s \rangle} = e^{-\sigma_1 s_1} \dots e^{-\sigma_p s_p}$, le lemme 5.4.2 nous donne une autre expression du complexe $\mathcal{K}^{\ll 0}$:

$$\mathcal{K}^{\ll 0} \cong \mathbf{R}\rho_{1*} \mathbf{R}q!(q^{-1} \rho_2^{-1} \ell_* \ell^{-1} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\langle \sigma, s \rangle})^{\ll 0}$$

où $(q^{-1} \rho_2^{-1} \ell_* \ell^{-1} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\langle \sigma, s \rangle})^{\ll 0}$ est le sous-faisceau de $\mathcal{B}^{\ll 0}$ des fonctions de la forme $g(s_1, \dots, s_p) e^{-\langle \sigma, s \rangle}$. Cet isomorphisme est aussi un isomorphisme de complexes de $\mathbb{C}[\underline{s}] \langle \underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1} \rangle$ -modules où τ_j et s_j agissent par $\tau_j t_j$ et s_j .

Nous avons donc démontré le théorème suivant :

THÉORÈME 4.3.8

On a un isomorphisme de complexes de $\mathbb{C}[\underline{s}] \langle \underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1} \rangle$ -modules

$$\mathbf{R}\rho_{1*} \mathbf{R}q!(q^{-1} \rho_2^{-1} \ell_* \ell^{-1} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\langle \sigma, s \rangle})^{\ll 0} [p] \cong \mathbf{R}q! \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{an}$$

où τ_j et s_j agissent sur le membre de gauche par $\tau_j t_j$ et s_j , et sur le membre de droite par t_j et $-t_j \partial_{t_j}$.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 4.2.4.

PREUVE : (du théorème 4.2.4)

On remarque tout d'abord que le morphisme d'adjonction $\mathcal{E} \hookrightarrow \ell_* \ell^{-1} \mathcal{E}$ induit un isomorphisme

$$(q^{-1} \rho_2^{-1} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\langle \sigma, s \rangle})^{\ll 0} \xrightarrow{\cong} (q^{-1} \rho_2^{-1} \ell_* \ell^{-1} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\langle \sigma, s \rangle})^{\ll 0}$$

Pour prouver cela, il suffit de le vérifier sur les fibres en vérifiant que les conditions de croissance sont bien remplies.

Ensuite, on a un premier morphisme naturel de $\mathbb{C}[\underline{s}]\langle \underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1} \rangle$ -modules :

$$(q^{-1}\rho_2^{-1}\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\langle \sigma, s \rangle})^{\ll 0} \otimes_{\mathbb{C}} \underline{\mathbb{C}}_{\Sigma_{\lambda, \mu}} \xrightarrow{\psi_{\lambda, \mu}} (q^{-1}\rho_2^{-1}\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\langle \sigma, s \rangle})^{\ll 0}$$

où les τ_j et s_j agissent par $\tau_j e^{\sigma_j}$ et s_j sur les deux membres.

On a également

$$(q^{-1}\rho_2^{-1}\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\langle \sigma, s \rangle})^{\ll 0} \otimes_{\mathbb{C}} \underline{\mathbb{C}}_{\Sigma_{\lambda, \mu}} \xrightarrow{\phi_{\lambda, \mu}} q^{-1}\rho_2^{-1}\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} \underline{\mathbb{C}}_{\Sigma_{\lambda, \mu}}$$

où les τ_j et s_j agissent sur le membre de gauche par $\tau_j e^{\sigma_j}$ et s_j , et sur le membre de droite par τ_j et s_j .

En appliquant le foncteur $\mathbf{R}q_!$, et le théorème de projection, on obtient les deux morphismes de $\mathbb{C}[\underline{s}]\langle \underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1} \rangle$ -modules

$$\mathbf{R}q_! \left((q^{-1}\rho_2^{-1}\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\langle \sigma, s \rangle})^{\ll 0} \otimes_{\mathbb{C}} \underline{\mathbb{C}}_{\Sigma_{\lambda, \mu}} \right) \xrightarrow{\psi_{\lambda, \mu}} \mathbf{R}q_! (q^{-1}\rho_2^{-1}\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\langle \sigma, s \rangle})^{\ll 0}$$

$$\mathbf{R}q_! \left((q^{-1}\rho_2^{-1}\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\langle \sigma, s \rangle})^{\ll 0} \otimes_{\mathbb{C}} \underline{\mathbb{C}}_{\Sigma_{\lambda, \mu}} \right) \xrightarrow{\phi_{\lambda, \mu}} \rho_2^{-1}\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{L}_{\Sigma_{\lambda, \mu}}$$

où les actions sont les mêmes que précédemment, au changement de variables $t_j = e^{\sigma_j}$ près. Enfin, on applique les foncteurs $\mathbf{R}\rho_{1*}$, puis $\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{C}[\underline{s}]\langle \underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1} \rangle}(\underline{\mathbb{M}}, -)$. On pose alors

$$\Psi_{\lambda, \mu}(\underline{\mathbb{M}}) = \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{C}[\underline{s}]\langle \underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1} \rangle} \left(\underline{\mathbb{M}}, \mathbf{R}\rho_{1*} \mathbf{R}q_! \left((q^{-1}\rho_2^{-1}\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\langle \sigma, s \rangle})^{\ll 0} \otimes_{\mathbb{C}} \underline{\mathbb{C}}_{\Sigma_{\lambda, \mu}} \right) \right) [p]$$

et on a les deux morphismes

$$\Psi_{\lambda, \mu}(\underline{\mathbb{M}}) \xrightarrow{\psi_{\lambda, \mu}} \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{C}[\underline{s}]\langle \underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1} \rangle} \left(\underline{\mathbb{M}}, \mathbf{R}\rho_{1*} \mathbf{R}q_! (q^{-1}\rho_2^{-1}\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\langle \sigma, s \rangle})^{\ll 0} \right) [p]$$

$$\Psi_{\lambda, \mu}(\underline{\mathbb{M}}) \xrightarrow{\phi_{\lambda, \mu}} \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{C}[\underline{s}]\langle \underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1} \rangle} \left(\underline{\mathbb{M}}, \mathbf{R}\rho_{1*} (\rho_2^{-1}\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{L}_{\Sigma_{\lambda, \mu}}) \right) [p]$$

Grâce à la proposition 4.3.1 et à un isomorphisme canonique de [K-S] p.112, on a

$$\overline{\mathfrak{M}}_{\lambda, \mu}(\mathcal{S}ol(\underline{\mathbb{M}}, \mathcal{E})) \cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{C}[\underline{s}]\langle \underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1} \rangle} \left(\underline{\mathbb{M}}, \mathbf{R}\rho_{1*} (\rho_2^{-1}\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{L}_{\Sigma_{\lambda, \mu}}) \right) [p]$$

où les τ_j et s_j agissent de façon naturelle sur $\mathbf{R}\rho_{1*} (\rho_2^{-1}\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{L}_{\Sigma_{\lambda, \mu}})$.

D'autre part, on a un isomorphisme dans $D^b((\mathbb{C}^*)^p, \mathbb{C})$

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{D}} \left(\overline{\mathfrak{M}}(\underline{\mathbb{M}}), \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{an} \right) \cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{C}[\underline{s}]\langle \underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1} \rangle} \left(\underline{\mathbb{M}}, \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{an} \right)$$

où les τ_j et s_j agissent par t_j et $-t_j \partial_{t_j}$ sur $\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{an}$.

Et par le théorème 4.3.8, on a un isomorphisme dans $D^b((\mathbb{C}^*)^p, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \text{Sol}\left(\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{D}} \overline{\mathfrak{M}}(\mathbb{M}), \mathbf{R}q_! \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{an}\right) &\cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{D}}\left(\overline{\mathfrak{M}}(\mathbb{M}), \mathbf{R}q_! \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{an}\right) \\ &\cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle}\left(\underline{\mathbb{M}}, \mathbf{R}\rho_{1*} \mathbf{R}q_!(q^{-1} \rho_2^{-1} \ell_* \ell^{-1} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\langle\sigma, s\rangle})^{\ll 0}\right)[p] \end{aligned}$$

On déduit donc les deux morphismes canoniques cherchés. \square

4.4 Le cas des opérateurs à une variable et à une seule pente strictement positive

Dans le cas particulier des modules à une variable de la forme $\frac{\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle}{\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle\Delta}$, où $\Delta \in \mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle - \{0\}$, et à une seule pente strictement positive, nous montrons comment les morphismes $\phi_{\lambda, \mu}$ et $\psi_{\lambda, \mu}$ du théorème 4.2.4 peuvent devenir des isomorphismes.

4.4.1 Le théorème

On a défini en 1.4.1 le couple d'un D-module de la forme $\frac{\mathcal{D}_{\mathbb{C}^*}}{\mathcal{D}_{\mathbb{C}^*} P}$ ($P \neq 0$). Le but de cette section est de montrer le théorème suivant :

THÉORÈME 4.4.2

Etant donné $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Q}_+^* \times \mathbb{C}^*$, pour tout $\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$ -module $\mathbb{M} = \frac{\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle}{\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle\Delta}$ avec $\Delta \in \mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle - \{0\}$, à une seule pente strictement positive, dont le transformé de Mellin algébrique inverse a pour couple $(\frac{1}{\lambda}, \mu)$, il existe un isomorphisme canonique dans $D^b((\mathbb{C}^*)^p, \mathbb{C})$

$$\mathcal{H}^0 \overline{\mathfrak{M}}_{\lambda, \mu}\left(\text{Sol}(\mathbb{M}, \mathcal{E})\right) \cong \mathcal{H}^0 \text{Sol}\left(\mathcal{D}_{\mathbb{C}^*} \otimes_{\mathbb{D}} \overline{\mathfrak{M}}(\mathbb{M}), \mathbf{R}q_! \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an}\right)$$

Etant donné $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Q}_+^* \times \mathbb{C}^*$, nous allons montrer, en fait, que les morphismes canoniques $\phi_{\lambda, \mu}$ et $\psi_{\lambda, \mu}$ du théorème 4.2.4 deviennent des isomorphismes après application du foncteur

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle}\left(\underline{\mathbb{M}}, \mathbf{R}\rho_{1*} \mathbf{R}q_!\left(-\right)\right)$$

pour tout $\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$ -module $\mathbb{M} = \frac{\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle}{\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle\Delta}$ avec $\Delta \in \mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle - \{0\}$ à une seule pente strictement positive, dont le transformé de Mellin algébrique

inverse a pour couple $(\frac{1}{\lambda}, \mu)$.

Pour cela, nous allons utiliser des résultats de A. Duval et J.P. Ramis (voir, par exemple, [Duv-1], [Duv-2], [Ram-2], ou encore [Tou] p.141). Ces travaux font intervenir une transformation voisine de celle de Mellin : la transformation de Pincherle. Grâce a celle-ci, on peut déterminer une base de solutions de l'équation aux différences finies ([Ram-2], ou encore [Duv-2] pour une généralisation), et on connaît une expression asymptotique de chacune de ces fonctions ([Duv-1], [Tou] p.160, ou encore [Duv-2] pour une généralisation).

4.4.3 La preuve du théorème 4.4.2

Résumons en quelques points les résultats d'Anne Duval qui nous servent ici. Considérons un opérateur aux différences finies Δ de degré r et son transformé de Mellin inverse algébrique P . Selon des travaux de J.P. Ramis ([Ram-2]), A. Duval exhibe dans [Duv-2] une base de solutions de P (paragraphe b-i p.71). Si de plus le τ -polygone de Newton de Δ n'a que des pentes strictement positives, alors ces solutions sont au nombre de r (propositions 2-d-3 p.67 et 3-a-10 p.70). Celles-ci lui permettent alors de définir une base de r solutions de Δ (paragraphe b-ii p.73), et d'en donner une description asymptotique (théorème 3.b.10 et lemme 3.b.4). Ce comportement asymptotique est également donné de manière beaucoup plus précise par Evelyne Tournier dans [Tou] (p.161).

Nous sommes donc en mesure de connaître une base de solutions de Δ dont le comportement asymptotique peut se calculer explicitement : c'est le point crucial de la démonstration du résultat que nous avons en vue dans ce paragraphe.

Récapitulons donc, dans le théorème suivant, les résultats d'Anne Duval et d'Evelyne Tournier dont nous aurons besoin :

THÉORÈME 4.4.4 ([Duv-1], [Duv-2] 3.b.10, [Tou] p.161)

Soit $\Delta \in \mathbb{C}[s]\langle \tau, \tau^{-1} \rangle$. Si son polygone de Newton $N(\Delta)$ a toutes ses pentes strictement positives, alors il existe un système fondamental $\{f_1, \dots, f_r\}$ de solutions de $\Delta u = 0$ méromorphes sur \mathbb{C} , à croissance au plus exponentielle d'ordre 1 verticalement, holomorphes dans un demi-plan convenable $\{s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(s) > A\}$, avec $\arg(s) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. De plus, elles sont égales à

$$\sqrt{\frac{2\pi}{spq}} \left(\frac{qs}{p\delta}\right)^{\frac{q}{p}s} \exp\left(-\frac{q}{p}s + \sum_{n=1}^p A_n \left(-\frac{qs}{p\delta}\right)^{1-\frac{n}{p}}\right) g(s)$$

où δ est une constante que l'on sait déterminer, où g admet un développement asymptotique en $s^\alpha(\log s)^k$, quand $|s| \rightarrow +\infty$ dans ce demi-plan, et où $\frac{q}{p}$ est une pente écrite sous forme irréductible de $N(\Delta)$.

Ce théorème donne en fait une formule de Stirling généralisée. Dans [Duv-2] 3.b.10, cette formule est donnée à une puissance de la fonction Gamma près. La présence de ce facteur est juste technique : il sert à se ramener à un opérateur dont les pentes sont toutes strictement positives. Ceci étant déjà le cas ici, par hypothèse, ce facteur ne figure pas.

Etant donné que, dans le théorème 4.4.2, nous considérons les solutions à croissance au plus exponentielle d'ordre 1 verticalement, le résultat précédent va nous servir à mesurer effectivement cette croissance. Cependant, grâce au théorème 4.4.4, nous remarquons que l'exponentielle qui contrôle la croissance de ces solutions quand $|\text{Im}(s)| \rightarrow +\infty$ s'exprime à l'aide des pentes du τ -polygone de Newton de Δ .

Si nous voulons que chacune de ces fonctions ait des croissances exponentielles semblables, il suffit donc d'imposer à $N(\Delta)$ de n'avoir qu'une seule pente strictement positive. Et dans ce cas, nous obtenons :

PROPOSITION 4.4.5 *Soit $\Delta \in \mathbb{C}[s]\langle \tau, \tau^{-1} \rangle$ tel que le polygone de Newton $N(\Delta)$ n'a qu'une seule pente, dont la forme irréductible est $\frac{q}{p} > 0$. Notons $(\frac{p}{q}, \delta)$ le couple du transformé de Mellin inverse algébrique de Δ (voir définition 1.4.1).*

Alors toute fonction f du système fondamental évoqué au théorème 4.4.4 vérifie la condition suivante : il existe des réels B_l tels que pour toute bande verticale $\{a \leq \text{Re}(s) \leq b\}$ incluse dans un demi-plan $\{s \in \mathbb{C} | \text{Re}(s) > A\}$ convenable, avec $\arg(s) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, il existe une fonction $\Phi_{a,b}$ de la classe de Nilsson telle que

$$|f(s)| = O\left(|\Phi_{a,b}(s)| \exp\left(\text{Arg}(\delta)\text{Im}(s) - \frac{\pi}{2} \frac{q}{p} |\text{Im}(s)| + \sum_{l=1}^{p-1} B_l |\text{Im}(s)|^{1-\frac{l}{p}}\right)\right)$$

quand $|\text{Im}(s)| \rightarrow +\infty$ dans cette bande verticale.

PREUVE : D'après le théorème 4.4.4, le polygone de Newton de Δ ayant $\frac{q}{p} > 0$ comme unique pente, l'expression des fonctions du système fondamental ne peut être que

$$\sqrt{\frac{2\pi}{spq}} \left(\frac{q}{p} \frac{s}{\delta}\right)^{\frac{q}{p}s} \exp\left(-\frac{q}{p}s + \sum_{n=1}^p A_n \left(-\frac{q}{p} \frac{s}{\delta}\right)^{1-\frac{n}{p}}\right) g(s)$$

où g admet un développement asymptotique en $s^\alpha(\log s)^k$. Ecrite plus simplement, cette expression devient

$$s^{\frac{q}{p}s} \delta^{-s} \exp\left(-\frac{q}{p}s + \sum_{n=1}^p \Lambda_n \left(-\frac{q}{p} \frac{s}{\delta}\right)^{1-\frac{n}{p}}\right) h(s)$$

où h admet un développement asymptotique en $s^\alpha(\log s)^k$.

Dans une bande verticale $\{a \leq \operatorname{Re}(s) \leq b\}$, les modules des fonctions du système fondamental sont équivalentes, quand $|\operatorname{Im}(s)| \rightarrow +\infty$, à

$$\exp\left(\operatorname{Arg}(\delta)\operatorname{Im}(s) - \frac{\pi}{2} \frac{q}{p} |\operatorname{Im}(s)|\right) \left| \exp\left(-\frac{q}{p}s + \sum_{n=1}^p A_n \left(-\frac{q}{p} \frac{s}{\delta}\right)^{1-\frac{n}{p}}\right) \tilde{h}(s) \right|$$

où \tilde{h} admet un développement asymptotique en $s^\alpha(\log s)^k$. Le calcul annexe du paragraphe 5.5 nous permet alors de conclure. \square

Donnons ensuite une proposition qui mesure la croissance des fonctions sur \mathbb{C} tout entier.

PROPOSITION 4.4.6 *La proposition 4.4.5 reste vraie sans restriction à un demi-plan, c'est à dire sur \mathbb{C} tout entier.*

PREUVE : La formule de la proposition 4.4.5 provient de l'expression asymptotique d'une intégrale de la forme

$$I(s) = \int_{\gamma} e^{Q(t^{\frac{1}{q}})} (t^{\frac{1}{q}})^{\alpha+s-1} \varphi(t) dt$$

où γ est une demi-droite allant de 0 à l'infini dans un secteur angulaire de décroissance de $e^{Q(t^{\frac{1}{q}})}$ à l'infini, où $p = \deg Q$, $\alpha \in \mathbb{C}$, et où φ admet un développement asymptotique $\hat{\varphi}(t) \in \mathbb{C}[[t^{-\frac{1}{q}}]][\log(t^{\frac{1}{q}})]$ à l'infini (voir [Tou] p.159-161 ou [Duv-2] 3.b.4). Ceci est valable pour $\operatorname{Re}(s) > A$.

La partie qui dicte la croissance de $I(s)$ à l'infini est $\exp(-\frac{\pi}{2} \frac{q}{p} |\operatorname{Im}(s)|)$. Elle ne dépend donc que du polynôme Q qui intervient dans l'intégrale.

Or, par intégrations par parties successives, cette intégrale peut être prolongée de manière classique en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} . A la première étape, on obtient

$$\left(\frac{s-1}{q} + 1\right) I(s) = - \int_{\gamma} (t^{\frac{1}{q}})^{(s+q)-1} \frac{d}{dt} (t^{\frac{\alpha}{q}} \varphi(t) e^{Q(t^{\frac{1}{q}})}) dt$$

Or $\frac{d}{dt}(t^{\frac{\alpha}{q}}\varphi(t)e^{Q(t^{\frac{1}{q}})})$ s'écrit comme somme de trois termes de la forme $e^{Q(t^{\frac{1}{q}})}(t^{\frac{1}{q}})^{\beta}\psi(t)$, avec $\beta \in \mathbb{C}$, et ψ admettant un développement asymptotique $\hat{\psi}(t) \in \mathbb{C}[[t^{-\frac{1}{q}}]][\log(t^{\frac{1}{q}})]$ à l'infini.

Sur $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > A - q\} \setminus \{1 - q\}$, on a donc

$$I(s) = -\frac{q}{s - (1 - q)} \int_{\gamma} (t^{\frac{1}{q}})^{(s+q)-1} \frac{d}{dt} (t^{\frac{\alpha}{q}} \varphi(t) e^{Q(t^{\frac{1}{q}})}) dt$$

Le facteur dictant la croissance de l'expression de droite est une nouvelle fois $\exp(-\frac{\pi}{2} \frac{q}{p} |\operatorname{Im}(s)|)$. Il en est donc de même pour le prolongement de I en une fonction méromorphe sur le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > A - q\}$.

Et ainsi de suite. \square

Nous sommes maintenant en mesure de terminer la preuve du théorème 4.4.2. Soit donc un $\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$ -module $\mathbb{M} = \frac{\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle}{\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle\Delta}$ avec $\Delta \in \mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle - \{0\}$ à une seule pente strictement positive, et dont le transformé de Mellin inverse algébrique a pour couple $(\frac{1}{\lambda}, \mu)$. Considérons les morphismes canoniques $\phi_{\lambda, \mu}$ et $\psi_{\lambda, \mu}$ du théorème 4.2.4 à une variable :

$$(q^{-1}\rho_2^{-1}\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\sigma s})^{\ll 0} \otimes_{\mathbb{C}} \underline{\mathbb{C}}_{\Sigma_{\lambda, \mu}} \xrightarrow{\psi_{\lambda, \mu}} (q^{-1}\rho_2^{-1}\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\sigma s})^{\ll 0}$$

$$(q^{-1}\rho_2^{-1}\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\sigma s})^{\ll 0} \otimes_{\mathbb{C}} \underline{\mathbb{C}}_{\Sigma_{\lambda, \mu}} \xrightarrow{\phi_{\lambda, \mu}} q^{-1}\rho_2^{-1}\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} \underline{\mathbb{C}}_{\Sigma_{\lambda, \mu}}$$

Montrons que ces deux morphismes deviennent des isomorphismes après application du foncteur

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle}} \left(\underline{\mathbb{M}}, \mathbf{R}\rho_{1*} \mathbf{R}q_1 \left(- \right) \right)$$

Ces deux morphismes sont clairement des isomorphismes à distance finie dans $\widetilde{\mathbb{C}}$, c'est à dire en des points $(\sigma_0, s_0) \in \widetilde{\mathbb{C}}^* \times \mathbb{C}$. Il reste à traiter le cas des points $(\sigma_0, \xi_0) \in \widetilde{\mathbb{C}}^* \times (\widetilde{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{C})$.

Sur $\widetilde{\mathbb{C}}^* \times (\{\infty\} \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$, tous les faisceaux sont nuls : les isomorphismes sont donc triviaux.

Soit maintenant $(\sigma_0, x_0 \pm \infty) \in \widetilde{\mathbb{C}}^* \times (\mathbb{R} \times \{\infty\})$.

Soit $E_{(\sigma_0, x_0)}$ le sous-ensemble des fonctions de $\mathcal{E}_{(\sigma_0, x_0 \pm \infty)}$ qui sont dans le \mathcal{H}^0 des solutions de \mathbb{M} . Ces fonctions vérifient les propriétés des propositions 4.4.5 et 4.4.6. Leurs modules ont donc des expressions asymptotiques de la

forme

$$|\Phi_{a,b}(s)| \exp\left(\operatorname{Arg}(\mu)\operatorname{Im}(s) - \frac{\pi}{2}\lambda|\operatorname{Im}(s)| + \sum_{l=1}^{p-1} B_l|\operatorname{Im}(s)|^{1-\frac{l}{p}}\right)$$

dans des bandes verticales.

Une expression asymptotique du module d'une telle solution multipliée par $e^{-\sigma_0 s}$ est alors

$$|\Phi_{a,b}(s)| \exp\left((\operatorname{Im}(\sigma_0) + \operatorname{Arg}(\mu))\operatorname{Im}(s) - \frac{\pi}{2}\lambda|\operatorname{Im}(s)| + \sum_{l=1}^{p-1} B_l|\operatorname{Im}(s)|^{1-\frac{l}{p}}\right)$$

dans des bandes verticales.

C'est donc $(\operatorname{Im}(\sigma_0) + \operatorname{Arg}(\mu))\operatorname{Im}(s) - \frac{\pi}{2}\lambda|\operatorname{Im}(s)|$ qui dicte si un tel produit est à décroissance rapide dans des bandes verticales ou pas.

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\psi_{\lambda,\mu}$ soit un isomorphisme est que, si $(\operatorname{Im}(\sigma_0) + \operatorname{Arg}(\mu))\operatorname{Im}(s) > \frac{\pi}{2}\lambda|\operatorname{Im}(s)|$, alors la seule fonction de $E_{(\sigma_0, x_0)}$ qui, multipliée par $e^{-\sigma_0 s}$, soit à décroissance rapide verticalement, est 0. Ce qui est bien le cas.

De même, une condition nécessaire et suffisante pour que $\phi_{\lambda,\mu}$ soit un isomorphisme est que, si $(\operatorname{Im}(\sigma_0) + \operatorname{Arg}(\mu))\operatorname{Im}(s) < \frac{\pi}{2}\lambda|\operatorname{Im}(s)|$, alors pour tout $g \in E_{(\sigma_0, x_0)}$, le produit $g(s)e^{-\sigma_0 s}$ est à décroissance rapide dans des bandes verticales. Ce qui est encore le cas, d'après les hypothèses.

Ceci achève donc la démonstration du théorème 4.4.2.

Chapitre 5

Calculs et lemmes techniques

5.1 Un résultat de finitude sur les solutions d'un $\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}$ -module

Reprenons les notations du chapitre 2.
Nous noterons par la suite

$$T^\alpha = T_1^{\alpha_1} \cdots T_p^{\alpha_p} \text{ et } (T - T^0)^\alpha = (T_1 - T_1^0)^{\alpha_1} \cdots (T_p - T_p^0)^{\alpha_p}$$

$$t^N = t_1^{N_1} \cdots t_p^{N_p}$$

pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p$, et tout $N = (N_1, \dots, N_p) \in \mathbb{N}^p$.

Le but de cette section est de démontrer le résultat suivant :

PROPOSITION 5.1.1 *Pour tout $\mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}$ -module algébrique cohérent \mathcal{M} dont le module des sections globales est noté \underline{M} , tel que $\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{D}}(\underline{M}, \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{<0})$ est à cohomologie \mathbb{C} -constructible sur $(\mathbb{C}^*)^p$ et \mathbb{R} -constructible sur le bord de $(\overline{\mathbb{C}^*})^p$, on a un isomorphisme canonique dans $D^b(\mathfrak{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}))$*

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{D}}(\underline{M}, r_1^{-1} \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{<0}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathbb{C}} r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p} \cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{D}}(\underline{M}, \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}^{<0})$$

Précisons tout d'abord en quel sens nous parlons de résultat de finitude sur les solutions. Nous savons qu'il existe un morphisme canonique

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{D}}(\underline{M}, r_1^{-1} \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{<0}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathbb{C}} r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p} \longrightarrow \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{D}}(\underline{M}, r_1^{-1} \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{<0} \otimes_{\mathbb{C}} r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p})$$

C'est en fait un isomorphisme : comme M est un D -module de présentation finie, il suffit de le vérifier pour $M = D$.

Pour démontrer la proposition 5.1.1, il suffit donc de comparer

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{D}}(\underline{M}, r_1^{-1} \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{<0} \otimes_{\mathbb{C}} r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}) \text{ et } \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{D}}(\underline{M}, \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}^{<0})$$

Ainsi, nous désirons savoir à quelle condition les solutions holomorphes en $(t_1, \dots, t_p, T_1, \dots, T_p) \in (\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p$ d'un $k_* p_1^{-1} \mathcal{D}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{an}$ -module $k_* p_1^{-1} \mathcal{M}^{an}$ s'écrivent

$$\sum_{\text{finie}} u_j(t_1, \dots, t_p) h_j(T_1, \dots, T_p)$$

avec les u_j solutions holomorphes de M et les h_j également holomorphes, tout en respectant les conditions de décroissance rapide.

Du morphisme $r_1^{-1} \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{<0} \otimes_{\mathbb{C}} r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p} \longrightarrow \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}^{<0}$, il vient un morphisme canonique

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{D}}(\underline{M}, r_1^{-1} \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{<0} \otimes_{\mathbb{C}} r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}) \xrightarrow{\Phi} \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{D}}(\underline{M}, \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}^{<0})$$

Nous avons donc à montrer que Φ est un quasi-isomorphisme lorsque les hypothèses de la proposition 5.1.1 sont vérifiées. Pour cela, soit un D -module M de présentation finie. Sur une résolution D -libre de M , la fibre en un $x^0 = (\theta_I^0, \theta_J^0, t^0, T^0) \in (S_0)^I \times (S_\infty)^J \times (\mathbb{C}^*)^{\{1, \dots, p\} \setminus I \cup J} \times \mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p$ quelconque du morphisme précédent s'écrit

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{<0} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p})_{x^0}^{m_0} & \xrightarrow{\Psi_0} \dots \xrightarrow{\Psi_{l-1}} & (\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{<0} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p})_{x^0}^{m_l} & \xrightarrow{\Psi_l} \dots \\ & & \downarrow \Phi_0 & & \downarrow \Phi_l & \\ 0 & \longrightarrow & (\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p, x^0}^{<0})^{m_0} & \xrightarrow{\Psi_0} \dots \xrightarrow{\Psi_{l-1}} & (\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p, x^0}^{<0})^{m_l} & \xrightarrow{\Psi_l} \dots \end{array}$$

où les Ψ_j sont des matrices d'opérateurs dans D . Montrons que Φ est un quasi-isomorphisme, sachant que $\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\underline{D}}(\underline{M}, \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{<0})$ est à cohomologie \mathbb{C} -constructible sur $(\mathbb{C}^*)^p$ et \mathbb{R} -constructible sur le bord de $(\overline{\mathbb{C}^*})^p$, ce qui implique que les fibres de ses faisceaux de cohomologie sont des \mathbb{C} -espaces vectoriels de dimension finie.

Montrons que Φ_0 induit un isomorphisme sur la cohomologie

Le morphisme Φ_0 est l'inclusion. Montrons que tout $g = (g_1, \dots, g_{m_0}) \in (\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p, x^0}^{<0})^{m_0}$ tel que $\Psi_0(g) = 0$ est un élément de $(\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p}^{<0} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p})_{x^0}^{m_0}$.

En reprenant les notations du paragraphe 2.1, posons

$$x^0 = (\theta_I^0, \theta_J^0, t^0, T^0) \in (S_0)^I \times (S_\infty)^J \times (\mathbb{C}^*)^{\{1, \dots, p\} \setminus I \cup J} \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p$$

Toute section $f \in \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p, x^0}^{<0}$ est holomorphe sur un ouvert $D_0(\theta_I^0, \varepsilon_i) \times D_\infty(\theta_J^0, \varepsilon_j) \times W^0 \times V^0$, où $D_0(\theta_I^0, \varepsilon_i)$ et $D_\infty(\theta_J^0, \varepsilon_j)$ sont des polysecteurs angulaires en 0 et à l'infini, W^0 est un voisinage ouvert de t^0 , et V^0 est un voisinage ouvert d'un polydisque compact $\overline{D(T^0, R)} = \overline{D(T_1^0, R_1)} \times \dots \times \overline{D(T_p^0, R_p)}$ de centre T^0 et de polyrayon $R \in (\mathbb{R}_+^*)^p$.

LEMME 5.1.2 *Toute fonction $f \in \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p, x^0}^{<0}$ définie sur un ouvert décrit ci-dessus se développe en*

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} u_\alpha \cdot (T - T^0)^\alpha \quad \text{avec } u_\alpha \in \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p, (\theta_I^0, \theta_J^0, t^0)}^{<0}$$

et les $|T_j - T_j^0| < R_j$.

Cette série converge normalement au sens

$$\forall K \subset W^0 \text{ compact, } \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} \|u_\alpha\|_\infty^{K, \varepsilon} \rho^\alpha < +\infty$$

pour $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_p) \in (\mathbb{R}_+^*)^p$ tel que $\rho_j < R_j$ pour tout $j = 1, \dots, p$, et où $\|\cdot\|_\infty^{K, \varepsilon}$ désigne la norme infinie sur $D_0(\theta_I^0, \varepsilon_i) \times D_\infty(\theta_J^0, \varepsilon_j) \times K$.

PREUVE : La formule de Cauchy nous donne pour tout $(t, T) \in D_0(\theta_I^0, \varepsilon_i) \times D_\infty(\theta_J^0, \varepsilon_j) \times W^0 \times D(T^0, R)$:

$$f(t, T) = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^p \int \dots \int_{\{|\xi_j - T_j^0| = R_j\}} \frac{f(t, \xi)}{(\xi_1 - T_1) \dots (\xi_p - T_p)} d\xi_1 \dots d\xi_p$$

Or, pour tout $T \in D(T^0, R)$ et tout ξ tel que $\forall j : |\xi_j - T_j^0| = R_j$, on a le développement

$$\frac{1}{(\xi_1 - T_1) \dots (\xi_p - T_p)} = \sum_{k_1, \dots, k_p \geq 0} \frac{(T_1 - T_1^0)^{k_1} \dots (T_p - T_p^0)^{k_p}}{(\xi_1 - T_1^0)^{k_1+1} \dots (\xi_p - T_p^0)^{k_p+1}}$$

On obtient alors

$$f(t, T) = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^p \int \dots \int_{\{|\xi_j - T_j^0| = R_j\}} \sum_{k_1, \dots, k_p \geq 0} f(t, \xi) \frac{(T_1 - T_1^0)^{k_1} \dots (T_p - T_p^0)^{k_p}}{(\xi_1 - T_1^0)^{k_1+1} \dots (\xi_p - T_p^0)^{k_p+1}} d\xi_1 \dots d\xi_p$$

pour tout $(t, T) \in D_0(\theta_I^0, \varepsilon_i) \times D_\infty(\theta_J^0, \varepsilon_j) \times W^0 \times D(T^0, R)$.

En posant,

$$u_{k_1, \dots, k_p}(t) = \left(\frac{1}{2i\pi} \right)^p \int \cdots \int_{\{|\xi_j - T_j^0| = R_j\}} \frac{f(t, \xi)}{(\xi_1 - T_1^0)^{k_1+1} \cdots (\xi_p - T_p^0)^{k_p+1}} d\xi_1 \cdots d\xi_p$$

nous avons

$$f(t, T) = \sum_{k_1, \dots, k_p \geq 0} u_{k_1, \dots, k_p}(t) (T_1 - T_1^0)^{k_1} \cdots (T_p - T_p^0)^{k_p}$$

pour tout $(t, T) \in D_0(\theta_I^0, \varepsilon_i) \times D_\infty(\theta_J^0, \varepsilon_j) \times W^0 \times D(T^0, R)$.

Voyons maintenant que pour tout $k_1, \dots, k_p \geq 0$, on a $u_{k_1, \dots, k_p} \in \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p, (\theta_I^0, \theta_J^0, t^0)}^{<0}$.

Par domination, il est clair que les u_{k_1, \dots, k_p} sont holomorphes.

Pour montrer leur décroissance rapide, procédons à des majorations en utilisant celle de f en t .

Soit K un compact contenu dans W^0 . Pour tout $t \in D_0(\theta_I^0, \varepsilon_i) \times D_\infty(\theta_J^0, \varepsilon_j) \times K$, on a :

$$\begin{aligned} |u_{k_1, \dots, k_p}(t)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^p} \left| \int \cdots \int_{\{|\xi_j - T_j^0| = R_j\}} \frac{|f(t, \xi)|}{|\xi_1 - T_1^0|^{k_1+1} \cdots |\xi_p - T_p^0|^{k_p+1}} d\xi_1 \cdots d\xi_p \right| \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^p} \left| \int \cdots \int_{\{|\xi_j - T_j^0| = R_j\}} \frac{|f(t, \xi)|}{R_1^{k_1+1} \cdots R_p^{k_p+1}} d\xi_1 \cdots d\xi_p \right| \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^p} \left| \int \cdots \int_{\{|\xi_j - T_j^0| = R_j\}} \frac{C_N \prod_{i \in I} |t_i|^{N_i}}{\prod_{j \in J} |t_j|^{N_j}} d\xi_1 \cdots d\xi_p \right| \\ &\leq \frac{C_N}{R_1^{k_1} \cdots R_p^{k_p}} \frac{\prod_{i \in I} |t_i|^{N_i}}{\prod_{j \in J} |t_j|^{N_j}} \end{aligned}$$

pour tout $N = (N_k)_{k \in I \cup J} \in \mathbb{N}^{I \cup J}$, la constante $C_N > 0$ dépendant de N .

La convergence de la série en découle. Pour tout $\rho \in (\mathbb{R}_+^*)^p$ tel que $\rho_j < R_j$ pour tout $j = 1, \dots, p$, on a :

$$\begin{aligned} \forall K \subset W^0 \text{ compact, } \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} \|u_\alpha\|_\infty^{K, \varepsilon} \rho^\alpha &\leq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} \frac{C_N \prod_{i \in I} \varepsilon_i^{N_i}}{R^\alpha \prod_{j \in J} \frac{1}{\varepsilon_j^{N_j}}} \rho^\alpha \\ &\leq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} \tilde{C}_N \frac{\rho^\alpha}{R^\alpha} < +\infty \end{aligned}$$

□

Grâce à ce lemme, développons g en

$$g = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} u_\alpha \cdot (T - T^0)^\alpha$$

avec $u_\alpha = (u_\alpha^1, \dots, u_\alpha^{m_0}) \in (\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p, (\theta_I^0, \theta_J^0, t^0)}^{<0})^{m_0}$. Or, le morphisme Ψ_0 ne faisant intervenir que des opérateurs différentiels indépendants de la variable T , nous avons que $\Psi_0(g) = 0$ implique $\Psi_0(u_\alpha) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^p$. Mais, par hypothèse, l'espace vectoriel $(\ker \Psi_0)_{(\theta_I^0, \theta_J^0, t^0)}$ est de dimension finie. Notons f_1, \dots, f_d une base de ce dernier. Il existe donc des $\lambda_1^\alpha, \dots, \lambda_d^\alpha \in \mathbb{C}$ tels que

$$u_\alpha = \lambda_1^\alpha f_1 + \dots + \lambda_d^\alpha f_d$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} g &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} u_\alpha \cdot (T - T^0)^\alpha \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} \sum_{k=1}^d \lambda_k^\alpha f_k (T - T^0)^\alpha \\ &= \sum_{k=1}^d \left(f_k \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} \lambda_k^\alpha (T - T^0)^\alpha \right) \end{aligned}$$

Il reste à montrer que les séries $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} \lambda_k^\alpha (T - T^0)^\alpha$ convergent. Pour cela, démontrons grâce au lemme suivant que nous savons contrôler les $|\lambda_k^\alpha|$ à l'aide de $\|u_\alpha\|_\infty^{K, \varepsilon}$:

LEMME 5.1.3 *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $k = 1, \dots, d$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^p$, on a $|\lambda_k^\alpha| \leq C \|u_\alpha\|_\infty^{K, \varepsilon}$.*

PREUVE : Notons $\| - \|_{\infty, f}$ la norme sur $E = \text{Vect}(f_1, \dots, f_d)$ suivante : si $g = a_1 f_1 + \dots + a_d f_d \in E$ avec $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{C}$, posons

$$\|g\|_{\infty, f} := \sup_{k=1, \dots, d} |a_k|$$

On a alors $|\lambda_k^\alpha| \leq \|u_\alpha\|_{\infty, f}$ pour tout $k = 1, \dots, d$. Mais, E étant de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes, et il existe donc $C > 0$

indépendant de u_α tel que $\|u_\alpha\|_{\infty, f} \leq C \|u_\alpha\|_{\infty}^{K, \varepsilon}$, où on note encore $\| - \|_{\infty}^{K, \varepsilon}$ la norme induite par $\| - \|_{\infty}^{K, \varepsilon}$ sur E . On obtient bien l'inégalité souhaitée. \square

Grâce à ce lemme, pour $|T_j - T_j^0| = \rho_j < R_j$, nous avons

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} \lambda_k^\alpha (T - T^0)^\alpha \right| &\leq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} \left| \lambda_k^\alpha (T - T^0)^\alpha \right| \\ &\leq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} |\lambda_k^\alpha| \rho^\alpha \\ &\leq C \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} \|u_\alpha\|_{\infty}^{K, \varepsilon} \rho^\alpha \end{aligned}$$

D'après le lemme 5.1.2, chaque composante de ce développement converge.

Montrons que Φ_l induit un isomorphisme sur la cohomologie

Pour voir cela, notons $[g]$ la classe d'un élément au but, et $[[g]]$ celle d'un élément à la source.

Soient $f_1, \dots, f_d \in (\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p, (\theta_I^0, \theta_J^0, t^0)}^{<0})^{m_l}$ tels que $[f_1], \dots, [f_d]$ soit une base de $\mathbf{R}^l \mathcal{H}om_{\mathbb{D}}(\underline{M}, \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p, (\theta_I^0, \theta_J^0, t^0)}^{<0})$.

Soit $g = (g_1, \dots, g_{m_l}) \in (\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p, x^0}^{<0})^{m_l}$. Grâce au lemme 5.1.2, développons g en

$$g = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} u_\alpha \cdot (T - T^0)^\alpha$$

avec $u_\alpha = (u_\alpha^1, \dots, u_\alpha^{m_l}) \in (\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p, (\theta_I^0, \theta_J^0, t^0)}^{<0})^{m_l}$. Ecrivons alors :

$$\begin{aligned} g &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} \left(\Psi_{l-1}(v_\alpha) + \sum_{k=1}^d \lambda_k^\alpha f_k \right) (T - T^0)^\alpha \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} \Psi_{l-1}(v_\alpha) (T - T^0)^\alpha + \sum_{k=1}^d f_k \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} \lambda_k^\alpha (T - T^0)^\alpha \end{aligned}$$

où $v_\alpha \in (\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p, x^0}^{<0})^{m_l-1}$. Ainsi, on a $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} \Psi_{l-1}(v_\alpha) (T - T^0)^\alpha \in \text{Im}(\Psi_{l-1})$. Le morphisme Φ_l induit donc une surjection sur les groupes de cohomologie.

En effet, nous avons

$$\begin{aligned}
[g] &= \left[\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} \Psi_{l-1}(v_\alpha)(T - T^0)^\alpha \right] + \left[\sum_{k=1}^d f_k \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} \lambda_k^\alpha (T - T^0)^\alpha \right] \\
&= [0] + \sum_{k=1}^d \left[f_k \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} \lambda_k^\alpha (T - T^0)^\alpha \right] \\
&= \Phi_l \left(\sum_{k=1}^d [[f_k]] \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} \lambda_k^\alpha (T - T^0)^\alpha \right)
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que Φ_l induit une injection sur les groupes de cohomologie.

Supposons pour cela $\Phi_l \left(\sum_{k=1}^d (\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} \lambda_k^\alpha (T - T^0)^\alpha) [[f_k]] \right) = [0]$, c'est à dire $\left[\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} (\sum_{k=1}^d \lambda_k^\alpha f_k) (T - T^0)^\alpha \right] = [0]$, c'est à dire $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} (\sum_{k=1}^d \lambda_k^\alpha f_k) (T - T^0)^\alpha \in \text{Im} \Psi_{l-1}$. Par unicité de l'écriture en série de T , on a $\sum_{k=1}^d \lambda_k^\alpha f_k \in \text{Im} \Psi_{l-1}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^p$. Donc, $[0] = \left[\sum_{k=1}^d \lambda_k^\alpha f_k \right] = \sum_{k=1}^d \lambda_k^\alpha [f_k]$. Les $[f_k]$ étant linéairement indépendants sur \mathbb{C} , il vient que $\lambda_k^\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^p$ et tout $k = 1, \dots, d$. Donc : $\sum_{k=1}^d (\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} \lambda_k^\alpha (T - T^0)^\alpha) [[f_k]] = [[0]]$.

5.2 Calculs de développements asymptotiques

5.2.1 Développements asymptotiques en t et $\frac{1}{t}$

On reprend les notations du chapitre 3.

Posons $K : t \mapsto \frac{-1}{2i\pi(t-1)}$. Cette fonction est localement intégrable sur \mathbb{C}^* , donc on la considère comme distribution pour la mesure de Haar du groupe multiplicatif \mathbb{C}^* . On note $K * f$ le produit de convolution partiel en la variable t de K par f , c'est à dire

$$(K * f)(t, s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}^*} f(\xi, s) \frac{1}{1 - \frac{\xi}{t}} \frac{d\xi}{\xi} \wedge \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi}}$$

Le but de ce paragraphe est de montrer la proposition :

PROPOSITION 5.2.2 *On a une suite exacte de \underline{D} -modules*

$$0 \longrightarrow (q_2 \circ \pi)_* \mathcal{C}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}}^{<0} \xrightarrow{\partial_t} (q_2 \circ \pi)_* \mathcal{C}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}}^{<0} \xrightarrow{\varepsilon} \frac{\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[[t]][\frac{1}{t}]}{\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[\frac{1}{t}]} \oplus \frac{\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[[\frac{1}{t}]] [t]}{(t) \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[t]} \longrightarrow 0$$

où ε associe à f les développements asymptotiques de $K * f$ en 0 et à l'infini, et où t et $t\partial_t$ agissent par t et $t\frac{\partial}{\partial t} - s - 1$. De plus, on a $\varepsilon \circ (\tau t^{-1} - 1) = (\tau t^{-1} - 1) \circ \varepsilon$.

En fin de section, nous démontrerons cet énoncé à paramètres.

Rappelons d'abord la définition d'un développement asymptotique.

Une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{P}^1)$ admet un développement asymptotique en 0 s'il existe une série formelle $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$ telle que $f - \sum_{0 \leq n \leq N} a_n t^n$ est plate en 0 pour tout $N \in \mathbb{N}$ et vérifie sur tout compact $K \subset \mathbb{P}^1$

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists C_N > 0 : |f(t) - \sum_{0 \leq n \leq N} a_n t^n| \leq C_N |t|^{N+1}$$

La série $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$ est alors le développement asymptotique en 0 de f .

De même, une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{P}^1)$ admet un développement asymptotique à l'infini s'il existe une série formelle $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{t^n}$ telle que $f - \sum_{0 \leq n \leq N} \frac{a_n}{t^n}$ est plate à l'infini pour tout $N \in \mathbb{N}$ et vérifie sur tout compact $K \subset \mathbb{P}^1$

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists C_N > 0 : |f(t) - \sum_{0 \leq n \leq N} \frac{a_n}{t^n}| \leq \frac{C_N}{|t|^{N+1}}$$

La série $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{t^n}$ est alors le développement asymptotique à l'infini de f .

Montrons maintenant les lemmes techniques utiles à la preuve de 5.2.2.

LEMME 5.2.3 *Pour toute section g de $(q_2 \circ \pi)_* \mathcal{C}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}}^{\leq 0}$, on peut majorer le module de l'intégrale*

$$I = \int_{\mathbb{C}^*} g(\xi, s) \frac{1}{1 - \frac{\xi}{t}} \frac{d\xi}{\xi} \wedge \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi}}$$

indépendamment de t , lorsque $|t|$ est assez grand et s dans un compact.

PREUVE : L'idée est de découper I en deux intégrales

$$I^{\leq 1} = \int_{\mathbb{C}^* \cap \{|\xi-t| \leq |t|\}} g(\xi, s) \frac{1}{1 - \frac{\xi}{t}} \frac{d\xi}{\xi} \wedge \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi}}$$

$$I^{> 1} = \int_{\mathbb{C}^* \cap \{|\xi-t| > |t|\}} g(\xi, s) \frac{1}{1 - \frac{\xi}{t}} \frac{d\xi}{\xi} \wedge \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi}}$$

Cas de $I^{\leq 1}$.

On fait le changement de variables $\begin{cases} \xi = t + \rho e^{i\theta} \\ \bar{\xi} = \bar{t} + \rho e^{-i\theta} \end{cases}$

On alors $d\xi \wedge d\bar{\xi} = 2i\rho d\theta \wedge d\rho$. Donc

$$\begin{aligned} |I^{\leq 1}| &= \left| \int_{\mathbb{C}^* \cap \{|\xi-t| \leq |t|\}} t \frac{|\xi|^{-2} g(\xi, s)}{t - \xi} d\xi \wedge d\bar{\xi} \right| \\ &= \left| \int_{[0, 2\pi] \times]0, |t|]} t \frac{|t + \rho e^{i\theta}|^{-2} g(t + \rho e^{i\theta}, s)}{-\rho e^{i\theta}} 2i\rho d\theta \wedge d\rho \right| \\ &\leq \left| \int_{[0, 2\pi] \times]0, |t|]} \frac{2|t|}{|t + \rho e^{i\theta}|^2} |g(t + \rho e^{i\theta}, s)| d\theta \wedge d\rho \right| \end{aligned}$$

Or, g est à décroissance rapide en 0 et à l'infini, uniformément par rapport à s sur tout compact, donc g est bornée par une constante $C > 0$ pour s dans un compact. Donc, pour $|t|$ assez grand

$$|I^{\leq 1}| \leq \left| \int_{[0, 2\pi] \times]0, |t|]} \frac{2C|t|}{(|t| - \rho)^2} d\theta \wedge d\rho \right| \leq \left| \int_{[0, 2\pi] \times]0, |t|]} \frac{2C|t|}{(|t| - 1)^2} d\theta \wedge d\rho \right| = \frac{4\pi C|t|^2}{(|t| - 1)^2}$$

Enfin, pour $|t|$ assez grand, $\frac{|t|^2}{(|t|-1)^2}$ est borné par une constante $C' > 0$. Donc, pour $|t|$ assez grand :

$$|I^{\leq 1}| \leq 4\pi C C'$$

Cas de $I^{>1}$.

$$\begin{aligned}
|I^{>1}| &= \left| \int_{\mathbb{C}^* \cap \{|\xi-t|>|t|\}} \frac{tg(\xi, s)}{(t-\xi)|\xi|^2} d\xi \wedge d\bar{\xi} \right| \\
&\leq \left| \int_{\mathbb{C}^* \cap \{|\xi-t|>|t|\}} \frac{|t||g(\xi, s)|}{|t-\xi||\xi|^2} d\xi \wedge d\bar{\xi} \right| \\
&\leq \left| \int_{\mathbb{C}^* \cap \{|\xi-t|>|t|\}} |\xi|^{-2} |g(\xi, s)| d\xi \wedge d\bar{\xi} \right|
\end{aligned}$$

qui est bien majoré par une constante indépendante de t , car $\xi^{-2}g(\xi, s)$ est à décroissance rapide en 0 et à l'infini en ξ uniformément en la variable s sur tout compact. \square

On montre de la même manière :

LEMME 5.2.4 *Pour toute section g de $(q_2 \circ \pi)_* \mathcal{C}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}}^{\leq 0}$, on peut majorer le module de l'intégrale*

$$I = \int_{\mathbb{C}^*} g(\xi, s) \frac{1}{1 - \frac{\xi}{t}} \frac{d\xi}{\xi} \wedge \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi}}$$

indépendamment de t , lorsque $|t|$ est assez proche de 0 et s dans un compact.

LEMME 5.2.5 *Pour toute section f de $(q_2 \circ \pi)_* \mathcal{C}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}}^{\leq 0}$, le produit de convolution $K * f$ existe, et a des développements asymptotiques en 0 et à l'infini qui sont respectivement*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{-1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}^*} \frac{f(\xi, s)}{\xi^k} \frac{d\xi}{\xi} \wedge \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi}} \right) t^k \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}^*} \xi^k f(\xi, s) \frac{d\xi}{\xi} \wedge \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi}} \right) \frac{1}{t^k}$$

De plus, ε est un morphisme de \underline{D} -modules, c'est à dire que pour toute section f de $(q_2 \circ \pi)_* \mathcal{C}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}}^{\leq 0}$, on a $\varepsilon \left((t \frac{\partial}{\partial t} - s - 1) f \right) = (t \frac{\partial}{\partial t} - s - 1) \varepsilon(f)$.

PREUVE : On remarque tout d'abord que, pour toute section f de $(q_2 \circ \pi)_* \mathcal{C}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}}^{\leq 0}$, le produit de convolution $K * f(t, s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}^*} f(\xi, s) \frac{1}{1 - \frac{\xi}{t}} \frac{d\xi}{\xi} \wedge \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi}}$ est bien défini : c'est la décroissance rapide de f en 0 et à l'infini, uniformément par rapport à s sur tout compact, qui assure l'existence de cette intégrale pour tout $t \in \mathbb{C}^*$.

– Montrons maintenant que $K * f$ a un développement asymptotique à l'infini.

En effet, à l'infini, en utilisant le fait que $\frac{1}{1 - \frac{\xi}{t}} = \sum_{k=0}^n \frac{\xi^k}{t^k} + \frac{\xi^{n+1}}{1 - \frac{\xi}{t}}$, il vient

$(K*f)(t, s) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}^*} \xi^k f(\xi, s) \frac{d\xi}{\xi} \wedge \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi}} \right) \frac{1}{t^k} + \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}^*} \frac{\xi^{n+1} f(\xi, s) d\xi}{1-\frac{\xi}{t}} \wedge \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi}} \right) \frac{1}{t^{n+1}}$.
 Du fait de la décroissance rapide de f en 0 et à l'infini, les intégrales $\int_{\mathbb{C}^*} \xi^k f(\xi, s) \frac{d\xi}{\xi} \wedge \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi}}$ sont finies. Seule l'intégrale $\int_{\mathbb{C}^*} \frac{\xi^{n+1} f(\xi, s) d\xi}{1-\frac{\xi}{t}} \wedge \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi}}$ pose problème. On la borne indépendamment de t , pour $|t|$ assez grand, grâce au lemme 5.2.3, avec $g(\xi, s) = \xi^{n+1} f(\xi, s)$.

Le développement asymptotique à l'infini de $K * f$ est donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}^*} \xi^k f(\xi, s) \frac{d\xi}{\xi} \wedge \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi}} \right) \frac{1}{t^k}$$

- De même, on montre à l'aide du lemme 5.2.4 que le développement asymptotique en 0 de $K * f$ est $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{-1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}^*} \frac{f(\xi, s) d\xi}{\xi^k} \wedge \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi}} \right) t^k$.
- Montrons que $\varepsilon \left((t \frac{\partial}{\partial t} - s - 1) f \right) = (t \frac{\partial}{\partial t} - s - 1) \varepsilon(f)$.
 Par commodité, notons $DA_{\infty}(g)$ et $DA_0(g)$ les développements asymptotiques d'une section g à l'infini et en 0.

D'après ce qui précède, on a

$$DA_{\infty}(K * t \frac{\partial f}{\partial t}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}^*} \xi^{k+1} \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, s) \frac{d\xi}{\xi} \wedge \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi}} \right) \frac{1}{t^k}$$

Pour $k \geq 0$, en écrivant $\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi^k f(\xi, s)}{\xi} \right) = k \frac{\xi^{k-1} f(\xi, s)}{\xi} + \frac{\xi^k}{\xi} \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, s)$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}^*} \xi^{k+1} \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, s) \frac{d\xi}{\xi} \wedge \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi}} &= \int_{\mathbb{C}^*} \frac{\xi^k}{\xi} \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, s) d\xi \wedge d\bar{\xi} \\ &= \int_{\mathbb{C}^*} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi^k f(\xi, s)}{\xi} \right) d\xi \wedge d\bar{\xi} - \int_{\mathbb{C}^*} k \frac{\xi^{k-1} f(\xi, s)}{\xi} d\xi \wedge d\bar{\xi} \end{aligned}$$

Par le théorème de Stokes, $\int_{\mathbb{C}^*} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi^k f(\xi, s)}{\xi} \right) d\xi \wedge d\bar{\xi}$ est nulle, puisque f est à décroissance rapide en 0 et à l'infini. Pour $k \geq 0$, il reste donc

$$\int_{\mathbb{C}^*} \xi^{k+1} \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, s) \frac{d\xi}{\xi} \wedge \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi}} = -k \int_{\mathbb{C}^*} \xi^k f(\xi, s) \frac{d\xi}{\xi} \wedge \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi}}$$

Donc,

$$\begin{aligned} DA_{\infty}(K * t \frac{\partial f}{\partial t}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left[-k \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}^*} \xi^k f(\xi, s) \frac{d\xi}{\xi} \wedge \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi}} \right) \right] \frac{1}{t^k} \\ &= t \sum_{k=0}^{+\infty} \left[-k \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}^*} \xi^k f(\xi, s) \frac{d\xi}{\xi} \wedge \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi}} \right) \right] \frac{1}{t^{k+1}} \\ &= t \frac{\partial}{\partial t} DA_{\infty}(K * f) \end{aligned}$$

On a donc $DA_\infty\left(K * \left(t \frac{\partial}{\partial t} - s - 1\right) f\right) = DA_\infty\left(K * \left(t \frac{\partial}{\partial t}\right) f\right) - DA_\infty\left(K * (s + 1) f\right) = t \frac{\partial}{\partial t} DA_\infty(K * f) - (s + 1) DA_\infty(K * f) = \left(t \frac{\partial}{\partial t} - s - 1\right) DA_\infty(K * f)$.

On peut refaire les mêmes calculs pour montrer que $DA_0\left(K * \left(t \frac{\partial}{\partial t} - s - 1\right) f\right) = \left(t \frac{\partial}{\partial t} - s - 1\right) DA_0(K * f)$.

On en déduit donc que $\varepsilon\left(\left(t \frac{\partial}{\partial t} - s - 1\right) f\right) = \left(t \frac{\partial}{\partial t} - s - 1\right) \varepsilon(f)$. □

PREUVE : (de la proposition 5.2.2)

Première étape : On déduit du lemme 5.2.5 que l'image de ε est contenue dans $\frac{\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[[t]][\frac{1}{t}]}{\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[\frac{1}{t}]} \oplus \frac{\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[[\frac{1}{t}]] [t]}{(t) \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[t]}$

De plus, grâce aux expressions des développements asymptotiques données dans le lemme 5.2.5, on montre facilement que, dans les quotients ci-dessus, on a $\varepsilon\left((\tau t^{-1} - 1) f\right) = (\tau t^{-1} - 1) \varepsilon(f)$ pour toute section f .

Deuxième étape : Un calcul classique donne $\frac{\partial K}{\partial t} = \delta_1$, la distribution de Dirac en $t = 1$. Donc, pour toute section f de $(q_2 \circ \pi)_* \mathcal{C}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}}^{<0}$, on a $f = \frac{\partial K}{\partial t} * f = K * \frac{\partial f}{\partial t}$. Donc, le morphisme $(q_2 \circ \pi)_* \mathcal{C}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}}^{<0} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}} (q_2 \circ \pi)_* \mathcal{C}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}}^{<0}$ est injectif.

De plus, on a également $f = \frac{\partial}{\partial t}(K * f)$. Donc, du fait de l'injectivité précédente, f est dans l'image de ce morphisme si et seulement si $K * f$ est à décroissance rapide en 0 et à l'infini, c'est à dire si et seulement si $f \in Ker(\varepsilon)$.

Troisième étape : Il reste à montrer que ε est surjectif. Soient γ_0 et γ_∞ des sections de $\frac{\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[[t]][\frac{1}{t}]}{\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[\frac{1}{t}]} \oplus \frac{\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[[\frac{1}{t}]] [t]}{(t) \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an}[t]}$. Par le théorème de Borel (voir [Mal-4] p.62, ou encore [Mal-2], [Ram-1]), il existe deux fonctions g_0 et g_∞ qui sont \mathcal{C}^∞ en t sur \mathbb{P}^1 (et holomorphe localement en s) et qui ont respectivement γ_0 pour développement asymptotique en 0, et γ_∞ pour développement asymptotique à l'infini. Grâce à une fonction plateau, on peut construire une fonction g qui est \mathcal{C}^∞ en t sur \mathbb{P}^1 (et holomorphe localement en s), et qui a γ_0 et γ_∞ pour développement asymptotique en 0 et à l'infini.

Montrons que $\frac{\partial g}{\partial t}$ est un antécédent de $(\gamma_0, \gamma_\infty)$ par ε . D'une part, $\frac{\partial g}{\partial t}$ est une section de $(q_2 \circ \pi)_* \mathcal{C}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}}^{<0}$: en effet, les développements asymptotiques de g ne font pas intervenir de \bar{t} , donc ceux de $\frac{\partial g}{\partial t}$ sont nuls. D'autre part, $K * \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial K}{\partial t} * g = g$, donc les développements asymptotiques de $K * \frac{\partial g}{\partial t}$ et de

g sont les mêmes. □

Enonçons ici un analogue à paramètres de la proposition 5.2.2 utile dans la démonstration du lemme 3.3.6 :

PROPOSITION 5.2.6 *Pour tout sous-ensemble $I \subset \{1, \dots, p\}$, notons*

$$\mathcal{C}_I^{<0} := (q_2 \circ \pi)_* \mathcal{C}_{(\mathbb{P}^1)^{\{1, \dots, p\}} \setminus I \times \mathbb{C}^p}^{<0}$$

Pour toutes parties disjointes $I, J \subset \{1, \dots, p\}$, l'opérateur $\partial_{\bar{t}_j} (j \notin I \cup J)$ sur

$$\frac{\mathcal{C}_{I \cup J}^{<0} \left[\left[t_I, \frac{1}{t_J} \right] \right] \left[\frac{1}{t_I}, t_J \right]}{\left(\sum_{l \in J} (t_l) \mathcal{C}_{I \cup J}^{<0} \left[\left[t_I \right] \right] \left[\frac{1}{t_I}, t_J \right] \right) + \mathcal{C}_{I \cup J}^{<0} \left[\left[\frac{1}{t_J} \right] \right] \left[t_I, t_J \right]}$$

est injectif et a pour conoyau la somme directe de

$$\frac{\mathcal{C}_{I \cup J \cup \{j\}}^{<0} \left[\left[t_j, t_I, \frac{1}{t_J} \right] \right] \left[\frac{1}{t_j}, \frac{1}{t_I}, t_J \right]}{\left(\sum_{l \in J} (t_l) \mathcal{C}_{I \cup J \cup \{j\}}^{<0} \left[\left[t_j, t_I \right] \right] \left[\frac{1}{t_j}, \frac{1}{t_I}, t_J \right] \right) + \mathcal{C}_{I \cup J \cup \{j\}}^{<0} \left[\left[\frac{1}{t_J} \right] \right] \left[t_j, t_I, t_J \right]}$$

et de

$$\frac{\mathcal{C}_{I \cup J \cup \{j\}}^{<0} \left[\left[t_I, \frac{1}{t_J}, \frac{1}{t_j} \right] \right] \left[\frac{1}{t_I}, t_J, t_j \right]}{\left(\sum_{l \in J \cup \{j\}} (t_l) \mathcal{C}_{I \cup J \cup \{j\}}^{<0} \left[\left[t_I \right] \right] \left[\frac{1}{t_I}, t_J, t_j \right] \right) + \mathcal{C}_{I \cup J \cup \{j\}}^{<0} \left[\left[\frac{1}{t_J}, \frac{1}{t_j} \right] \right] \left[t_I, t_J, t_j \right]}$$

*Le morphisme d'augmentation ε vers le conoyau associe à tout f les développements asymptotiques de $K * f$ en 0 et à l'infini en la variable t_j ($j \notin I \cup J$), et où les t_k et $t_k \partial_{t_k}$ agissent par t_k et $t_k \frac{\partial}{\partial t_k} - s_k - 1$.*

De plus, on a $\varepsilon \circ (\tau_k t_k^{-1} - 1) = (\tau_k t_k^{-1} - 1) \circ \varepsilon$.

Cette proposition se démontre de la même manière que 5.2.2. Le seul point à vérifier est la décroissance rapide des coefficients des développements asymptotiques, que nous calculons explicitement dans le lemme 5.2.5. Cette vérification est donc immédiate.

5.2.7 Développements asymptotiques en $\frac{1}{s}$

On reprend les notations du chapitre 4.

Posons $L : s \mapsto \frac{-1}{2i\pi s}$. Cette fonction est localement intégrable sur \mathbb{C} , donc on la considère comme distribution pour la mesure de Haar du groupe additif \mathbb{C} . On note $L * f$ le produit de convolution partiel en la variable s de L par f , c'est à dire

$$(L * f)(t, s) = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} f(t, \xi) \frac{1}{\xi - s} d\xi \wedge d\bar{\xi}$$

Le but de ce paragraphe est de montrer la proposition :

PROPOSITION 5.2.8 *On a une suite exacte de $\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$ -modules*

$$0 \longrightarrow \rho_{1*}\mathcal{C}^{\ll 0} \xrightarrow{\partial_s} \rho_{1*}\mathcal{C}^{\ll 0} \xrightarrow{\eta} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an}[[\frac{1}{s}]] [s]}{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an}[s]} \longrightarrow 0$$

où η associe à f le développement asymptotique verticalement à l'infini de $L * f$, et où τ et s agissent par τt et s . De plus, on a $\eta \circ (t\partial_t + s) = (t\partial_t + s) \circ \eta$.

En fin de section, nous démontrerons cet énoncé à paramètres.

Nous dirons qu'une fonction entière f admet un développement asymptotique verticalement à l'infini s'il existe une série formelle $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{s^n}$ telle que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on ait pour $|\operatorname{Im}(s)| \gg 1$ et $a \leq \operatorname{Re}(s) \leq b$ l'estimation suivante

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists C_N > 0 : |f(s) - \sum_{0 \leq n \leq N} \frac{a_n}{s^n}| \leq \frac{C_N}{|s|^{N+1}}$$

La série $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{s^n}$ est alors le développement asymptotique verticalement à l'infini de f .

Montrons maintenant les lemmes techniques utiles à la preuve de 5.2.8.

LEMME 5.2.9 *Pour toute section g de $\rho_{1*}\mathcal{C}^{\ll 0}$, on peut majorer, indépendamment de s , le module de l'intégrale*

$$J = \int_{\mathbb{C}} \frac{g(t, \xi)}{\xi - s} d\xi \wedge d\bar{\xi}$$

pour t dans un compact.

PREUVE : L'idée est de découper J en deux intégrales

$$J^{\leq 1} = \int_{\{|\xi-s| \leq 1\}} \frac{g(t, \xi)}{\xi - s} d\xi \wedge d\bar{\xi}$$

$$J^{> 1} = \int_{\{|\xi-s| > 1\}} \frac{g(t, \xi)}{\xi - s} d\xi \wedge d\bar{\xi}$$

Cas de $J^{> 1}$.

$$\begin{aligned} |J^{> 1}| &\leq \left| \int_{\{|\xi-s| > 1\}} \frac{|g(t, \xi)|}{|\xi - s|} d\xi \wedge d\bar{\xi} \right| \\ &\leq \left| \int_{\{|\xi-s| > 1\}} |g(t, \xi)| d\xi \wedge d\bar{\xi} \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{C}} |g(t, \xi)| d\xi \wedge d\bar{\xi} \right| \end{aligned}$$

La dernière intégrale est finie, car g est à décroissance rapide quand $|\operatorname{Im}(\xi)| \rightarrow +\infty$ verticalement, et est nulle pour $|\operatorname{Re}(\xi)|$ assez grande. L'intégrale $J^{> 1}$ est donc bien majorée par une constante indépendante de s .

Cas de $J^{\leq 1}$.

On passe en coordonnées polaires : $\begin{cases} \xi = s + \rho e^{i\theta} \\ \bar{\xi} = \bar{s} + \rho e^{-i\theta} \end{cases}$

On alors $d\xi \wedge d\bar{\xi} = 2i\rho d\theta \wedge d\rho$. Donc

$$\begin{aligned} |J^{\leq 1}| &= \left| \int_{[0, 2\pi] \times [0, 1]} \frac{g(t, s + \rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta}} 2i\rho d\theta \wedge d\rho \right| \\ &\leq 2 \left| \int_{[0, 2\pi] \times [0, 1]} |g(t, s + \rho e^{i\theta})| d\theta \wedge d\rho \right| \end{aligned}$$

Or, g est à décroissance rapide quand $|\operatorname{Im}(s)| \rightarrow +\infty$ verticalement, et est nulle pour $|\operatorname{Re}(s)|$ assez grande, uniformément par rapport à t sur tout compact, donc g est bornée par une constant $C > 0$. Donc, $|J^{\leq 1}|$ est bornée par $4\pi C$. \square

LEMME 5.2.10 *Pour toute section f de $\rho_{1*}\mathcal{C}^{\leq 0}$, le produit de convolution $L * f$ existe, et a un développement asymptotique verticalement à l'infini égal à $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \xi^k f(t, \xi) d\xi \wedge d\bar{\xi} \right) \frac{1}{s^{k+1}}$. De plus, on a $\eta(\tau t f) = \tau t \eta(f)$ pour toute section f de $\rho_{1*}\mathcal{C}^{\leq 0}$.*

PREUVE : On remarque tout d'abord que, pour toute section f de $\rho_{1*}\mathcal{C}^{\ll 0}$, le produit de convolution $L * f(t, s) = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(t, \xi)}{\xi - s} d\xi \wedge d\bar{\xi}$ est bien défini : c'est la décroissance rapide verticalement à l'infini de f , et sa nullité pour $|\operatorname{Re}(s)|$ assez grande, uniformément par rapport à t , qui assure l'existence de cette intégrale pour tout $s \in \mathbb{C}$.

Montrons maintenant que $L * f$ a un développement asymptotique verticalement à l'infini.

En effet, à l'infini, en utilisant le fait que $\frac{1}{1-\xi} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\xi^k}{s^k} + \frac{\xi^n}{1-\xi}$, il vient $(L * f)(t, s) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \xi^k f(t, \xi) d\xi \wedge d\bar{\xi} \right) \frac{1}{s^{k+1}} + \left(\frac{-1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\xi^n f(t, \xi)}{\xi - s} d\xi \wedge d\bar{\xi} \right) \frac{1}{s^n}$. Du fait des conditions à l'infini sur f , les intégrales $\int_{\mathbb{C}} \xi^k f(t, \xi) d\xi \wedge d\bar{\xi}$ sont finies. Seule l'intégrale $\int_{\mathbb{C}} \frac{\xi^n f(t, \xi)}{\xi - s} d\xi \wedge d\bar{\xi}$ pose problème. On la borne indépendamment de s , grâce au lemme 5.2.9, avec $g(t, \xi) = \xi^n f(t, \xi)$.

Le développement asymptotique verticalement à l'infini de $L * f$ est donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \xi^k f(t, \xi) d\xi \wedge d\bar{\xi} \right) \frac{1}{s^{k+1}}$$

Montrons maintenant que $\eta(\tau t f) = \tau t \eta(f)$ pour toute section f de $\rho_{1*}\mathcal{C}^{\ll 0}$.

On a $(L * \tau t f)(t, s) = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{t f(t, \xi+1)}{\xi - s} d\xi \wedge d\bar{\xi} = \frac{-t}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(t, \xi)}{\xi - 1 - s} d\xi \wedge d\bar{\xi} = \tau t (L * f)(t, s)$. Donc, après développement, on obtient bien $\eta(\tau t f) = \tau t \eta(f)$. \square

PREUVE : (de la proposition 5.2.8)

Première étape : On déduit du lemme 5.2.10 que l'image de η est contenue dans $\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an}[[\frac{1}{s}]] [s]}{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an}[s]}$.

De plus, dans le quotient ci-dessus, on a $(\eta \circ (t\partial_t + s))(f) = ((t\partial_t + s) \circ \eta)(f)$.

Deuxième étape : Un calcul classique donne $\frac{\partial L}{\partial \bar{s}} = \delta_0$, la distribution de Dirac en $s = 0$. Donc, pour toute section f de $\rho_{1*}\mathcal{C}^{\ll 0}$, on a $f = \frac{\partial L}{\partial \bar{s}} * f = L * \frac{\partial f}{\partial \bar{s}}$.

Donc, le morphisme $\rho_{1*}\mathcal{C}^{\ll 0} \xrightarrow{\partial_{\bar{s}}} \rho_{1*}\mathcal{C}^{\ll 0}$ est injectif.

De plus, on a également $f = \frac{\partial}{\partial \bar{s}}(L * f)$. Donc, du fait de l'injectivité précédente, f est dans l'image de ce morphisme si et seulement si $L * f$ est à décroissance rapide verticalement à l'infini et nulle pour $|\operatorname{Re}(s)|$ assez grande, uniformément par rapport à t , c'est à dire si et seulement si $f \in \operatorname{Ker}(\eta)$.

Troisième étape : Il reste à montrer que η est surjectif. Soient γ une section de $\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an}[[\frac{1}{s}]] [s]}{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^{an}[s]}$. Par le théorème de Borel (voir [Mal-4] p.62, ou encore [Mal-2], [Ram-1]), il existe une fonction g qui est \mathcal{C}^∞ en s, \bar{s} sur \mathbb{P}^1 (et holomorphe

localement en t) et qui a γ pour développement asymptotique à l'infini, et donc en particulier lorsque $|\operatorname{Im}(s)| \rightarrow +\infty$ pour $\operatorname{Re}(s)$ bornée.

Montrons que $\frac{\partial g}{\partial \bar{s}}$ est un antécédent de γ par η . D'une part, $\frac{\partial g}{\partial \bar{s}}$ est une section de $\rho_{1*}\mathcal{C}^{\ll 0}$: en effet, le développement asymptotique de g ne fait pas intervenir de \bar{s} , donc celui de $\frac{\partial g}{\partial \bar{s}}$ est nul. D'autre part, $L * \frac{\partial g}{\partial \bar{s}} = \frac{\partial L}{\partial \bar{s}} * g = g$, donc les développements asymptotiques de $L * \frac{\partial g}{\partial \bar{s}}$ et de g sont les mêmes. \square

PROPOSITION 5.2.11 *Pour tout sous-ensemble $I \subset \{1, \dots, p\}$, notons*

$$\mathcal{C}_I^{\ll 0} := \rho_{1*} \mathcal{C}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \overline{\mathbb{C}^{\{1, \dots, p\} \setminus I}}}$$

Pour tout $j \notin I$, on a une suite exacte de $\mathbb{C}[\underline{s}] \langle \underline{\tau}, \underline{\tau}^{-1} \rangle$ -modules

$$0 \longrightarrow \frac{\mathcal{C}_I^{\ll 0} \left[\left[\frac{1}{s_I} \right] \right] [s_I]}{\mathcal{C}_I^{\ll 0} [s_I]} \xrightarrow{\partial_{\bar{s}_j}} \frac{\mathcal{C}_I^{\ll 0} \left[\left[\frac{1}{s_I} \right] \right] [s_I]}{\mathcal{C}_I^{\ll 0} [s_I]} \xrightarrow{\eta} \frac{\mathcal{C}_{I \cup \{j\}}^{\ll 0} \left[\left[\frac{1}{s_I}, \frac{1}{s_j} \right] \right] [s_I, s_j]}{\mathcal{C}_{I \cup \{j\}}^{\ll 0} [s_I, s_j]} \longrightarrow 0$$

*où η associe à f le développement asymptotique verticalement à l'infini de $L * f$ en la variable s_j ($j \notin I$), et où les τ_k et s_k agissent par $\tau_k t_k$ et s_k . De plus, on a $\eta \circ (t_k \partial_{t_k} + s_k) = (t_k \partial_{t_k} + s_k) \circ \eta$.*

Cette proposition se démontre de la même manière que 5.2.8. Le seul point à vérifier est la décroissance rapide verticale des coefficients des développements asymptotiques, que nous calculons explicitement dans le lemme 5.2.10. Cette vérification est donc immédiate.

5.3 Lemmes sur les équations aux différences linéaires

Le but de cette section est de montrer que l'on a un isomorphisme naturel

$$\mathcal{K}^\bullet(\tau_1 t_1^{-1} - 1, \dots, \tau_p t_p^{-1} - 1; \pi_* \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{<0}) \cong \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}^{<0} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}} \mathcal{F}$$

où $\mathcal{K}^\bullet(\tau_1 t_1^{-1} - 1, \dots, \tau_p t_p^{-1} - 1; \pi_* \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{<0})$ est le complexe de Koszul avec le degré 0 placé tout à gauche.

De plus, à la section 3.1, nous avons mis la structure de \underline{D} -module sur $\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}^{<0} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}} \mathcal{F}$ qui permet à cet isomorphisme d'avoir lieu dans la catégorie des \underline{D} -modules.

Rappelons que \mathcal{F} est, par définition, un sous-faisceau de $k_* \pi_* \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{an}$.

On a le morphisme d'adjonction injectif

$$k_* \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}^{an} \hookrightarrow k_* \pi_* \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{an}$$

Le morphisme $k_* \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}^{an} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}} k_* \pi_* \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{an} \longrightarrow k_* \pi_* \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{an}$ induit alors le morphisme

$$\begin{aligned} k_* \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}^{an} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}} \mathcal{F} &\longrightarrow k_* \pi_* \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{an} \\ g(t_1, \dots, t_p, T_1, \dots, T_p) \otimes \omega &\longmapsto g(t_1, \dots, t_p, e^{-2i\pi s_1}, \dots, e^{-2i\pi s_p}) \omega \end{aligned}$$

Celui-ci est localement la multiplication par $t_1^{s_1+1} \dots t_p^{s_p+1}$. L'injectivité étant une notion locale, ce morphisme est clairement injectif.

Grâce à l'adjonction $\text{id} \longrightarrow k_* k^{-1}$, nous nous restreignons aux fonctions à décroissance rapide en 0 et à l'infini :

$$\begin{array}{ccc} k_* \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}^{an} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}} \mathcal{F} &\longrightarrow & k_* \pi_* \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{an} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}^{<0} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}} \mathcal{F} &\longrightarrow & \pi_* \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{<0} \end{array}$$

$$g(t_1, \dots, t_p, T_1, \dots, T_p) \otimes \omega \longmapsto g(t_1, \dots, t_p, e^{-2i\pi s_1}, \dots, e^{-2i\pi s_p}) \omega$$

Le morphisme du bas est encore localement défini par la multiplication par $t_1^{s_1+1} \dots t_p^{s_p+1}$: il est donc injectif.

PROPRIÉTÉ 5.3.1 *L'injection précédente est un morphisme de \underline{D} -modules, l'action des opérateurs différentiels $t_j \partial_{t_j}$ sur $\mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}^{<0} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}} \mathcal{T}$ étant celle décrite à la section 3.1, et sur $\pi_* \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{<0}$ celles des dérivations $t_j \frac{\partial}{\partial t_j} - s_j - 1$.*

PREUVE : Notons d'abord que, par définition de \mathcal{T} , pour toute section ω de \mathcal{T} , on a $t_j \frac{\partial \omega}{\partial t_j} = (s_j + 1)\omega$.

Si on note ι l'injection en question, il suffit de calculer pour toute section locale $g(\underline{t}, \underline{T})\omega$ de $\pi_* \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{<0}$:

$$\begin{aligned}
& (t_j \frac{\partial}{\partial t_j} - s_j - 1)\iota(g(\underline{t}, \underline{T}) \otimes \omega) \\
&= (t_j \frac{\partial}{\partial t_j} - s_j - 1).g(\underline{t}, \underline{T})\omega \\
&= t_j \frac{\partial}{\partial t_j}(g(\underline{t}, \underline{T})\omega) - (s_j + 1)g(\underline{t}, \underline{T})\omega \\
&= t_j \frac{\partial g}{\partial t_j}(\underline{t}, \underline{T})\omega + (s_j + 1)g(\underline{t}, \underline{T})\omega - (s_j + 1)g(\underline{t}, \underline{T})\omega \\
&= t_j \frac{\partial g}{\partial t_j}(\underline{t}, \underline{T})\omega \\
&= \iota(t_j \frac{\partial g}{\partial t_j}(\underline{t}, \underline{T}) \otimes \omega) \\
&= \iota(t_j \partial_{t_j} . g(\underline{t}, \underline{T}) \otimes \omega)
\end{aligned}$$

□

Supposons pour le moment $p = 1$.

LEMME 5.3.2 *Le morphisme de faisceaux $\pi_* \mathcal{A}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}^{<0} \xrightarrow{(\tau-1).} \pi_* \mathcal{A}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}^{<0}$ est surjectif.*

PREUVE : L'opérateur $\tau - 1$ ne portant que sur s , et les conditions de décroissance ne portant que sur t , on peut calculer en oubliant t et les conditions de décroissance.

On regarde le morphisme fibre à fibre. Soit $T_0 = e^{-2i\pi s_0} \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ quelconque. $(\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an})_{T_0}$ est l'anneau des fonctions holomorphes dans un petit voisinage ouvert U_0 de s_0 et tous ses translatés U_j ($j \in \mathbb{Z}$) par τ et τ^{-1} (tous ces petits ouverts étant disjoints). On se donne $g \in (\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an})_{T_0}$, et on note g_j les restrictions de g aux U_j . On cherche alors un $u \in (\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{an})_{T_0}$ tel que $\forall s \in \bigcup_j U_j : u(s+1) - u(s) = g(s)$, i.e. $\forall j \in \mathbb{Z}, \forall s \in U_0 : u_{j+1}(s) - u_j(s) = g_j(s)$, où les u_j sont les restrictions de u aux U_j . Pour cela, on pose arbitrairement $u_0 \equiv 0$, et on trouve de proche en proche les u_j qui conviennent. □

PROPOSITION 5.3.3 *Le morphisme de faisceaux $\pi_* \mathcal{A}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}^{\leq 0} \xrightarrow{(\tau t^{-1} - 1)} \pi_* \mathcal{A}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}^{\leq 0}$ est surjectif, et a pour noyau $\mathcal{A}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}/\mathbb{Z}}^{\leq 0} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}} \mathcal{F}$.*

PREUVE : Commençons par le calcul du noyau. On part de l'injection (voir au début de cette section 5.3)

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}/\mathbb{Z}}^{\leq 0} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}} \mathcal{F} \longrightarrow \pi_* \mathcal{A}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}^{\leq 0}$$

Par définition du faisceau \mathcal{F} (voir section 3.1), l'image de cette injection est exactement le noyau du morphisme considéré. Le seul point à vérifier est celui des conditions de décroissance rapide : il ne pose aucun problème car une section ω de \mathcal{F} est de la forme $h(T)t^{s+1}$, où t^{s+1} est une détermination de la fonction multiforme $t \mapsto t^{s+1}$. Et cette fonction n'intervient pas dans ce type de décroissance. En effet, une section locale $g(t, T)t^{s+1}$ est à décroissance rapide en t (avec s dans un compact) si et seulement si g l'est.

Voyons maintenant la surjectivité.

Montrons-la sur la fibre en un (t_0, T_0) quelconque. Soit $g \in (\pi_* \mathcal{A}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}^{\leq 0})_{(t_0, T_0)}$ et cherchons un $u \in (\pi_* \mathcal{A}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}^{\leq 0})_{(t_0, T_0)}$ tel que $(\tau t^{-1} - 1)u = g$. On pose $v := t^{-s-1}u$, et on se ramène à $(\tau - 1)v = t^{-s-1}g$. Comme $t^{-s-1}g$ est holomorphe en s et encore à décroissance rapide en t , uniformément sur tout compact par rapport à s , on est capable de trouver une solution v grâce au lemme 5.3.2. D'où une solution $u = t^{s+1}v$ qui vérifie les conditions de décroissance ; ce qui prouve la surjectivité. \square

Reconsidérons maintenant un p quelconque.

PROPOSITION 5.3.4 *On a un isomorphisme de faisceaux*

$$\mathcal{K}^\bullet(\tau_1 t_1^{-1} - 1, \dots, \tau_p t_p^{-1} - 1; \pi_* \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{\leq 0}) \cong \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}^{\leq 0} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p}} \mathcal{F}$$

PREUVE : On considère ce complexe de Koszul comme le complexe simple associé au complexe p -uple formé des p complexes $[\pi_* \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{\leq 0} \xrightarrow{\tau_j t_j^{-1} - 1} \pi_* \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{\leq 0}]$,

•

et on procède par récurrence.

Pour cela, établissons quelques notations. Si I désigne une partie de $\{1, \dots, p\}$,

notons, comme à la section 3.1.4, $\mathbb{T}_I^{s+1} = \frac{\tilde{\mathbb{D}}}{\tilde{\mathbb{D}}\left(t_I \frac{\partial}{\partial t_I} - s_I - 1, \tau_I t_I^{-1} - 1\right)}$. Po-

sons alors

$$\mathcal{F}_I := \text{Hom}_{\tilde{\mathbb{D}}}\left(\mathbb{T}_I^{s+1}, k_* \pi_* \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{an}\right)$$

Nous sommes maintenant en mesure de faire la démonstration.
Le cas initial, c'est-à-dire le cas du morphisme

$$\pi_* \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{<0} \xrightarrow{(\tau_1 t_1^{-1} - 1)} \pi_* \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^p}^{<0}$$

se traite de la même manière que le cas à une variable (proposition 5.3.3) :
il est surjectif et son noyau est

$$\pi_* \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}\{2, \dots, p\}}^{<0} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}} \mathcal{I}_{\{1\}}$$

Voyons maintenant le pas de la récurrence.

Pour les mêmes raisons que \mathcal{I} , le faisceau \mathcal{I}_I est un faisceau localement constant de $r_2^{-1} \mathcal{O}_{(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^p}$ -modules localement libres de rang 1. Il est engendré localement par une détermination de $t_I^{s_I+1}$.

Prenons maintenant $I = \{1, \dots, j-1\} \subset \{1, \dots, p-1\}$ et $J = \{j, \dots, p\}$.
De la même manière que pour le cas à une variable (proposition 5.3.3), on montre que le morphisme naturel injectif

$$\begin{aligned} \pi_* \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^{I \cup \{j\}} \times \mathbb{C}^{J \setminus \{j\}}}^{<0} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}} \mathcal{I}_{\{j\}} &\hookrightarrow \pi_* \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^I \times \mathbb{C}^J}^{<0} \\ g(t, T_{I \cup \{j\}}, s_{J \setminus \{j\}}) \otimes \omega &\longmapsto g(t, T_I, e_j^{-2i\pi s_j}, s_{J \setminus \{j\}}) \omega \end{aligned}$$

a pour image le noyau du morphisme naturel surjectif

$$\pi_* \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^I \times \mathbb{C}^J}^{<0} \xrightarrow{(\tau_j t_j^{-1} - 1)} \pi_* \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^I \times \mathbb{C}^J}^{<0}$$

Or, \mathcal{I}_I et $\mathcal{I}_{\{j\}}$ étant des $r_2^{-1} \mathcal{O}_{(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^p}$ -modules localement libres, on remarque que

$$\mathcal{I}_I \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^p}} \mathcal{I}_{\{j\}} = \mathcal{I}_{I \cup \{j\}}$$

en considérant des générateurs de ces faisceaux. De plus, \mathcal{I}_I étant localement libre sur $r_2^{-1} \mathcal{O}_{(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^p}$, le foncteur $-\otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^p}} \mathcal{I}_I$ est exact. Ainsi, le morphisme naturel injectif

$$\pi_* \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^{I \cup \{j\}} \times \mathbb{C}^{J \setminus \{j\}}}^{<0} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}} \mathcal{I}_{I \cup \{j\}} \hookrightarrow \pi_* \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^I \times \mathbb{C}^J}^{<0} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}} \mathcal{I}_I$$

a pour image le noyau du morphisme naturel surjectif

$$\pi_* \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^I \times \mathbb{C}^J}^{<0} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}} \mathcal{I}_I \xrightarrow{(\tau_j t_j^{-1} - 1)} \pi_* \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^*)^p \times (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^I \times \mathbb{C}^J}^{<0} \otimes_{r_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p}} \mathcal{I}_I$$

□

5.4 Lemmes sur les équations aux dérivées partielles linéaires

On rappelle que l'on note $e^{-\langle \sigma, s \rangle} = e^{-\sigma_1 s_1} \dots e^{-\sigma_p s_p}$.

Dans la suite, $(q^{-1} \rho_2^{-1} \ell_* \ell^{-1} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\langle \sigma, s \rangle})^{\ll 0}$ est le sous-faisceau de $\mathcal{B}^{\ll 0}$ des fonctions de la forme $g(s_1, \dots, s_p) e^{-\langle \sigma, s \rangle}$.

Supposons pour le moment $p = 1$.

LEMME 5.4.1 *Le morphisme de faisceaux $\mathcal{B}^{\ll 0} \xrightarrow{(\partial_\sigma + s)} \mathcal{B}^{\ll 0}$ est surjectif, et a pour noyau $(q^{-1} \rho_2^{-1} \ell_* \ell^{-1} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\sigma s})^{\ll 0}$*

PREUVE : Par définition de $(q^{-1} \rho_2^{-1} \ell_* \ell^{-1} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\sigma s})^{\ll 0}$, on a un morphisme naturel injectif $(q^{-1} \rho_2^{-1} \ell_* \ell^{-1} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\sigma s})^{\ll 0} \hookrightarrow \mathcal{B}^{\ll 0}$. A ce stade on a donc

une suite $0 \longrightarrow (q^{-1} \rho_2^{-1} \ell_* \ell^{-1} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\sigma s})^{\ll 0} \longrightarrow \mathcal{B}^{\ll 0} \xrightarrow{(\partial_\sigma + s)} \mathcal{B}^{\ll 0} \longrightarrow 0$ partiellement exacte.

Reste à voir qu'elle est exacte sur la fibre en un (σ_0, s_0) quelconque en montrant la surjectivité de $\partial_\sigma + s$.

Si $s_0 \in \mathbb{C}$, la suite est trivialement exacte : c'est un cas classique rencontré dans la théorie des \mathcal{D} -modules sur \mathbb{C} .

Si $s_0 \in \{\infty\} \times \mathbb{R}$: on est en présence d'une suite de modules tous nuls, donc d'une suite de modules trivialement exacte.

Si $s_0 \in \mathbb{R} \times \{\infty\}$: il suffit de se placer sur un ouvert quelconque du type $U_\varepsilon = \{|\sigma - \sigma_0| < \varepsilon\} \times \{a < \operatorname{Re}(s) < b, |\operatorname{Im}(s)| > \frac{1}{\varepsilon}\}$. On cherche une solution holomorphe $u(\sigma, s)$ à l'équation $(\partial_\sigma + s)u = f$, où u et f sont à décroissance rapide en s sur U_ε , uniformément par rapport à σ sur tout compact. On pose $v(\sigma, s) = e^{\sigma s} u(\sigma, s)$. On trouve alors $\frac{\partial v}{\partial \sigma}(\sigma, s) = e^{\sigma s} f(\sigma, s)$, soit par exemple

$$u(\sigma, s) = e^{-\sigma s} \int_0^\sigma e^{\xi s} f(\xi, s) d\xi = \int_0^\sigma e^{(\xi - \sigma)s} f(\xi, s) d\xi$$

On appelle $\theta(\sigma)$ une mesure modulo 2π de l'argument de σ . Comme $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ est simplement connexe, on a le choix du chemin d'intégration dans l'intégrale ci-dessus. On prend alors le segment reliant 0 à σ . Ainsi, la variable d'intégration ξ est d'argument constant θ modulo 2π . On a alors

$$u(e^{-i\theta} \sigma, s) = \int_0^{e^{-i\theta} \sigma} e^{(\xi - e^{-i\theta} \sigma)s} f(\xi, s) d\xi$$

où $\xi, e^{-i\theta}\sigma \in \mathbb{R}_+$. Comme $0 \leq \xi \leq e^{-i\theta}\sigma$, il vient $\xi - e^{-i\theta}\sigma \leq 0$. D'où

$$|u(e^{-i\theta}\sigma, s)| \leq \left| \int_0^{e^{-i\theta}\sigma} e^{(\xi - e^{-i\theta}\sigma)a} |f(\xi, s)| d\xi \right| \leq \left| \int_0^{e^{-i\theta}\sigma} |f(\xi, s)| d\xi \right|$$

Et pour $|\sigma - \sigma_0| < \varepsilon$, on a : pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $C_N > 0$ tel que

$$|u(e^{-i\theta}\sigma, s)| \leq \left| \int_0^{e^{-i\theta}\sigma} \frac{C_N}{|s|^N} d\xi \right| \leq \frac{C_N |\sigma|}{|s|^N} \leq \frac{C_N (|\sigma_0| + \varepsilon)}{|s|^N}$$

Et enfin

$$|u(\sigma, s)| \leq \frac{C_N (|\sigma_0| + \varepsilon)}{|s|^N}$$

On a trouvé une solution avec la condition de décroissance voulue, ce qui prouve bien la surjectivité cherchée. \square

Reconsidérons maintenant un p quelconque.

Soit $\mathcal{K}^\bullet(\partial_{\sigma_1} + s_1, \dots, \partial_{\sigma_p} + s_p; \mathcal{B}^{\ll 0})$ le complexe de Koszul avec le degré 0 placé tout à gauche.

LEMME 5.4.2 *On a un isomorphisme de faisceaux*

$$\mathcal{K}^\bullet(\partial_{\sigma_1} + s_1, \dots, \partial_{\sigma_p} + s_p; \mathcal{B}^{\ll 0}) \cong (q^{-1} \rho_2^{-1} \ell_* \ell^{-1} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} e^{-\langle \sigma, s \rangle})^{\ll 0}$$

PREUVE : Les notations étant encore une fois très lourdes pour faire cette preuve rigoureusement, on en donne une esquisse.

On considère ce complexe de Koszul comme le complexe simple associé au complexe p -uple formé des p complexes $[\mathcal{B}^{\ll 0} \xrightarrow{\partial_{\sigma_j} + s_j} \mathcal{B}^{\ll 0}]$, que l'on résout une

•

variable après l'autre. Il suffit donc de savoir faire p fois la résolution à une variable, ce qui est fait dans le lemme 5.4.1. \square

5.5 Un petit calcul annexe

Soient Λ_l ($l \in \{1, \dots, q\}$) des nombres complexes. Le but de cette section est de calculer une estimation de

$$\left| \exp \left(\sum_{l=1}^q \Lambda_l s^{1-\frac{l}{q}} \right) \right|$$

quand $|\operatorname{Im}(s)| \rightarrow +\infty$, dans une bande $\{a \leq \operatorname{Re}(s) \leq b\}$ avec $\arg(s) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

On a tout d'abord

$$\operatorname{Re}(\Lambda_l s^{1-\frac{l}{q}}) = |s|^{1-\frac{l}{q}} \left(\operatorname{Re}(\Lambda_l) \cos\left(\left(1 - \frac{l}{q}\right) \arg(s)\right) - \operatorname{Im}(\Lambda_l) \sin\left(\left(1 - \frac{l}{q}\right) \arg(s)\right) \right)$$

Puis, on pose $\arg(s) = \frac{\pi}{2} + h$. On a alors quand $h \rightarrow 0$:

$$\operatorname{Re}(\Lambda_l s^{1-\frac{l}{q}}) = |s|^{1-\frac{l}{q}} \left(\operatorname{Re}(\Lambda_l) \cos\left(\left(1 - \frac{l}{q}\right) \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{Im}(\Lambda_l) \sin\left(\left(1 - \frac{l}{q}\right) \frac{\pi}{2}\right) + o(1) \right)$$

Donc, quand $\operatorname{Im}(s) \rightarrow +\infty$, $|\exp(\Lambda_l s^{1-\frac{l}{q}})|$ est équivalent à

$$\exp \left(|s|^{1-\frac{l}{q}} \left(\operatorname{Re}(\Lambda_l) \cos\left(\left(1 - \frac{l}{q}\right) \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{Im}(\Lambda_l) \sin\left(\left(1 - \frac{l}{q}\right) \frac{\pi}{2}\right) \right) \right)$$

De même, on pose $\arg(s) = -\frac{\pi}{2} + h$. On a alors quand $h \rightarrow 0$:

$$\operatorname{Re}(\Lambda_l s^{1-\frac{l}{q}}) = |s|^{1-\frac{l}{q}} \left(\operatorname{Re}(\Lambda_l) \cos\left(\left(1 - \frac{l}{q}\right) \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{Im}(\Lambda_l) \sin\left(\left(1 - \frac{l}{q}\right) \frac{\pi}{2}\right) + o(1) \right)$$

Donc, quand $\operatorname{Im}(s) \rightarrow -\infty$, $|\exp(\Lambda_l s^{1-\frac{l}{q}})|$ est équivalent à

$$\exp \left(|s|^{1-\frac{l}{q}} \left(\operatorname{Re}(\Lambda_l) \cos\left(\left(1 - \frac{l}{q}\right) \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{Im}(\Lambda_l) \sin\left(\left(1 - \frac{l}{q}\right) \frac{\pi}{2}\right) \right) \right)$$

Donc, il existe une constante B_l telle que

$$|\exp(\Lambda_l s^{1-\frac{l}{q}})| = O\left(\exp\left(B_l |s|^{1-\frac{l}{q}}\right)\right)$$

Et comme on a $a \leq \operatorname{Re}(s) \leq b$, il vient

$$|\exp(\Lambda_l s^{1-\frac{l}{q}})| = O\left(\exp\left(B_l |\operatorname{Im}(s)|^{1-\frac{l}{q}}\right)\right)$$

On en conclut donc qu'il existe des nombres complexes B_l tels que

$$\left| \exp \left(\sum_{l=1}^q \Lambda_l s^{1-\frac{l}{q}} \right) \right| = O\left(\exp\left(\sum_{l=1}^q B_l |\operatorname{Im}(s)|^{1-\frac{l}{q}}\right)\right)$$

Bibliographie

- [B-D] A. BARKATOU - A. DUVAL : Sur les séries formelles solutions d'équations aux différences polynomiales, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* 44, 2 (1994), 495-524
- [Bo] A. BOREL ET AL. : *Algebraic \mathcal{D} -modules*, Perspectives in Mathematics, Vol. 2, Academic Press, 1987.
- [B-M-V-1] J-L. BRYLINSKI - B. MALGRANGE - J-L. VERDIER : Transformation de Fourier géométrique I, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Sér. I Math. 297 (1983), no. 1, 55-58.
- [B-M-V-2] J-L. BRYLINSKI - B. MALGRANGE - J-L. VERDIER : Transformation de Fourier géométrique II, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Sér. I Math. 303 (1986), no. 5, 193-198.
- [Da] L. DAIA : La transformation de Fourier pour les \mathcal{D} -modules, *Thèse de l'Université J. Fourier (Grenoble I)* (1995)
- [Del] P. DELIGNE : *Lecture Notes in Mathematics* 169, Springer-Verlag, p.14.
- [Duv-1] A. DUVAL : Equations aux différences dans le champ complexe, *Thèse d'Etat de l'Université de Strasbourg* (1984)
- [Duv-2] A. DUVAL : Opérateurs intégro-différentiels méromorphes et opérateurs aux différences, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* 37, 1 (1987), 45-80.
- [G-L] O. GABBER - F. LOESER : Faisceaux pervers l -adiques sur un tore, *Duke Math. J.* 83 (1996), no. 3, 501-606.
- [G-H] P. GRIFFITHS - J. HARRIS : *Principles of algebraic geometry*, Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience, New York, 1978.
- [Iv] B. IVERSEN : *Cohomology of sheaves*, Springer-Verlag.
- [K-S] M. KASHIWARA - P. SCHAPIRA : *Sheaves on manifolds*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 292, Springer-Verlag.
- [Loe] F. LOESER : Faisceaux pervers, transformation de Mellin et déterminants, *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)* No. 66, (1996), 105 p.

- [L-S] F. LOESER - C. SABBABH : Equations aux différences finies et déterminants d'intégrales de fonctions multiformes, *Comment. Math. Helv.* 66 (1991), 458-503.
- [Maj] H. MAJIMA : Vanishing theorems in asymptotic analysis II, *Proc. Japan Acad.* 60 (1984), 171-173.
- [Mal-1] B. MALGRANGE : *Ideals of differentiable functions*, Oxford University Press, 1966.
- [Mal-2] B. MALGRANGE : Remarques sur les équations différentielles à points singuliers irréguliers, *Lecture Notes in Mathematics* 712 (1979), Springer-Verlag, 77-86.
- [Mal-3] B. MALGRANGE : Transformation de Fourier géométrique, Séminaire Bourbaki No. 692, Vol. 1987/88, *Astérisque* No. 161-162, (1988)
- [Mal-4] B. MALGRANGE : *Equations différentielles à coefficients polynomiaux*, Progress in Mathematics, Birkhäuser (1991).
- [Ram-1] J.P. RAMIS : A propos du théorème de Borel-Ritt à plusieurs variables, *Lecture Notes in Mathematics* 712 (1979), Springer-Verlag, 289-292.
- [Ram-2] J.P. RAMIS : Etude des solutions méromorphes des équations aux différences linéaires algébriques, non publié (1984).
- [R-R] J.P. RAMIS - G. RUGET : Résidus et dualité, *Invent. Math.* 26 (1974), 89-131.
- [Sab-1] C. SABBABH : Modules d'Alexander et \mathcal{D} -modules, *Duke Mathematical Journal* 60 (1990), no. 3, 729-814.
- [Sab-2] C. SABBABH : Lieu des pôles d'un système holonome d'équations aux différences finies, *Bull. Soc. Math. France* 120 (1992), 371-396.
- [Sab-3] C. SABBABH : Equations différentielles à points singuliers irréguliers en dimension 2, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* 43, 5 (1993), 1619-1688.
- [Sab-4] C. SABBABH : *Équations différentielles à points singuliers irréguliers et phénomène de Stokes en dimension 2*, *Astérisque* No. 263 (2000)
- [Ser-1] J. P. SERRE : Faisceaux algébriques cohérents, *Ann. of Math.* 61 (1955), 197-278.
- [Ser-2] J. P. SERRE : Géométrie algébrique et géométrie analytique, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* 6 (1955-1956), 1-42.
- [Tou] E. TOURNIER : Solutions formelles d'équations différentielles. Le logiciel de calcul formel : DESIR. Etude théorique et réalisation, *Thèse d'Etat de l'Université de Grenoble I* (1987)
- [Was] W. WASOW : *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, Interscience, New-York, 1965.

Résumé

Dans un premier temps, nous décrivons le complexe des solutions du transformé de Mellin algébrique d'un \mathcal{D} -module \mathcal{M} en fonction des solutions de \mathcal{M} . Pour cela, nous définissons un foncteur de transformation de Mellin faisceautique. Nous montrons alors que le transformé de Mellin du complexe des solutions à décroissance rapide en 0 et à l'infini d'un \mathcal{D} -module holonome régulier \mathcal{M} est quasi-isomorphe au complexe des solutions du transformé de Mellin algébrique de \mathcal{M} , l'hypothèse de régularité n'étant plus nécessaire à une variable.

Dans un second temps, nous faisons un travail analogue avec la transformation de Mellin inverse : les résultats sont plus partiels. Nous définissons une transformation de Mellin inverse faisceautique. Nous démontrons alors qu'il existe des morphismes naturels reliant le complexe des solutions du transformé de Mellin inverse algébrique d'un module aux différences avec le transformé de Mellin inverse faisceautique du complexe des solutions à croissance au plus exponentielle d'ordre 1 à l'infini dans des bandes verticales. Nous montrons ensuite que dans le cas d'un module aux différences à une variable et à une seule pente strictement positive, ces morphismes sont des isomorphismes.

Mots clés : transformation de Mellin, transformation de Mellin inverse (ou de Pincherle), \mathcal{D} -modules, équations aux différences finies, faisceaux constructibles, monodromie, développements asymptotiques, complexe des solutions, polygone de Newton.

Abstract

In a first part, we describe the complex of solutions of the algebraic Mellin transform of a \mathcal{D} -module \mathcal{M} in terms of the solutions of \mathcal{M} . In order to do that, we define a Mellin transform functor on sheaves. We show the Mellin transform of the complex of fast decreasing solutions of a regular holonomic \mathcal{D} -module \mathcal{M} is quasi-isomorphic with the complex of solutions of the algebraic Mellin transform of \mathcal{M} , the assumption of regularity not being necessary in the one variable case.

In a second part, we study the inverse Mellin transformation : our results are less complete. We define an inverse Mellin transform functor on sheaves. We show there are natural morphisms connecting the complex of solutions of the inverse algebraic Mellin transform of a finite difference module with the inverse Mellin transform of the complex of solutions with growth at most exponential of order 1 at infinity in vertical bands. We then show that, in the case of a one variable difference module with only one positive slope, these morphisms are isomorphisms.

Key words : Mellin transformation, Inverse Mellin transformation (or Pincherle transformation), \mathcal{D} -modules, finite difference equations, constructible sheaves, monodromy, asymptotic expansions, complex of solutions, Newton polygon.