



**HAL**  
open science

# Radio-goniométrie : modélisation, algorithmes, performances

Anne Ferréol

► **To cite this version:**

Anne Ferréol. Radio-goniométrie : modélisation, algorithmes, performances. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2005. Français. NNT : . tel-00134537

**HAL Id: tel-00134537**

**<https://theses.hal.science/tel-00134537>**

Submitted on 2 Mar 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ECOLE DOCTORALE DE L'ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE  
DE CACHAN

DOMAINE : Traitement du Signal



SATIE

THALES

**RADIO-GONIOMÉTRIE :**  
MODÉLISATION - ALGORITHMES - PERFORMANCES

*Thèse soutenue le mardi 13 décembre 2005 par ANNE FERRÉOL*

DIRECTEUR DE THÈSE : PASCAL LARZABAL

PRÉSIDENT : PHILIPPE LOUBATON  
RAPPORTEUR : JEAN-JACQUES FUCHS  
RAPPORTEUR : YIDE WANG  
EXAMINATEUR : CÉDRIC DEMEURE  
EXAMINATEUR : ERIC BOYER  
EXAMINATEUR : PASCAL LARZABAL  
EXAMINATEUR : PIERRE DUHAMEL



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Préambule . . . . .	1
1.2	Ma contribution scientifique en tant qu'ingénieur d'étude . . . . .	1
1.2.1	Le traitement d'antennes . . . . .	3
1.2.2	Travaux sur la séparation de sources . . . . .	6
1.2.3	Travaux sur la goniométrie . . . . .	7
1.2.4	Implantations et expérimentations sur signaux réels . . . . .	10
1.3	Motivations et cadre de l'étude . . . . .	11
1.4	Présentation du document . . . . .	12
1.5	Contributions du travail de thèse . . . . .	12
1.6	Publications et communications . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Modélisations physiques et goniomètres correspondants</b>	<b>17</b>
2.1	Préambule . . . . .	17
2.2	Modélisations relatives au réseau de capteurs . . . . .	18
2.2.1	Erreur d'appairage des récepteurs ou problème de câbles . . . . .	18
2.2.2	Erreur de position des capteurs . . . . .	19
2.2.3	Polarisation . . . . .	20
2.2.4	Erreur de couplage dans un réseau de capteurs . . . . .	20
2.3	Modélisations relatives au canal de propagation . . . . .	27
2.3.1	Multi-trajets cohérents . . . . .	27
2.3.2	Front d'onde non plan . . . . .	28
2.3.3	Sources large Bande (LB) . . . . .	30
2.3.4	Sources diffuses . . . . .	32
2.4	Perturbations physiques combinées. . . . .	34
2.5	Généralisation du modèle . . . . .	35
2.6	Algorithme d'Auto-Calibration . . . . .	37
2.6.1	Transformation de l'observation capteurs $\mathbf{x}(t)$ (2.2)(2.51) . . . . .	37

2.6.2	Algorithme . . . . .	41
2.6.3	Simulations . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Performances en présence d'erreurs de modèle</b>	<b>47</b>
3.1	Préambule . . . . .	47
3.2	Biais et Variance (EQM) en présence d'erreurs de modèle . . . . .	49
3.2.1	Algorithme du Maximum de Vraisemblance (MV) . . . . .	49
3.2.2	Algorithmes MUSIC à l'ordre 2 . . . . .	55
3.2.3	Cas des ordres supérieurs (MUSIC-2q) . . . . .	62
3.2.4	Généralisation à d'autres critères . . . . .	67
3.2.5	Conclusion . . . . .	69
3.3	Probabilités de résolution et performances conditionnées à la résolution . . . . .	70
3.3.1	Probabilités de résolution [FLV05e] . . . . .	70
3.3.2	Etablissement des performances conditionnées à la résolution [FLV05c] . . . . .	72
3.4	Application des expressions des performances de goniométrie . . . . .	72
3.4.1	Spécification d'un système de goniométrie . . . . .	72
3.4.2	Localisation de sources . . . . .	75
3.5	Performances de l'algorithme d'Auto-Calibration . . . . .	79
3.5.1	Cas où le vecteur $\varphi_y(\boldsymbol{\eta}_{y,m})$ contient deux composantes . . . . .	81
3.5.2	Cas où le vecteur $\varphi_y(\boldsymbol{\eta}_{y,m})$ est de dimension quelconque . . . . .	83
3.5.3	Simulations . . . . .	85
<b>4</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>87</b>
<b>5</b>	<b>Annexes</b>	<b>89</b>
<b>A</b>	<b>Moments d'un produit ou rapport de formes hermitiennes</b>	<b>91</b>
A.1	Résultats préliminaires . . . . .	91
A.2	Moments d'un rapport de formes hermitiennes . . . . .	92
A.3	Moments d'un produit de formes hermitiennes . . . . .	93
A.4	Calcul de $\mathbf{R}_\varepsilon^{(4)}$ lorsque la variable $\varepsilon$ est gaussienne . . . . .	96
A.5	Démonstrations de l'Annexe-A . . . . .	96
<b>B</b>	<b>Moments d'ordres supérieurs de produits de formes hermitiennes</b>	<b>99</b>
<b>C</b>	<b>Démonstrations associées à l'erreur de goniométrie du MV</b>	<b>107</b>
<b>D</b>	<b>Démonstrations des performances de MUSIC-2q</b>	<b>113</b>

<b>E</b>	<b>Démonstrations du DL champ proche</b>	<b>117</b>
<b>F</b>	<b>Performances conditionnées à une résolution</b>	<b>121</b>
F.1	Probabilité de résolution [FLV05e] . . . . .	123
F.2	Biais et EQM conditionnés à une résolution [FLV05c] . . . . .	131



# Table des figures

1.1	Projet LUTECE . . . . .	2
1.2	Traitement d'antennes . . . . .	3
1.3	Réseau circulaire de 5 patchs : cas de LUTECE . . . . .	3
1.4	Réseau circulaire de 5 dipôles . . . . .	4
1.5	Réseau linéaire de 3 dipôles . . . . .	4
1.6	Filtrage Spatial . . . . .	4
1.7	Réseau d'antennes radio-électriques . . . . .	5
1.8	Calibration d'un réseau circulaire comme celui de la Figure- 1.4 . . . . .	7
1.9	Canal de propagation à deux trajets . . . . .	8
1.10	Canal de propagation HF dans le plan vertical . . . . .	8
2.1	Propagation d'une onde du point "S" de la source vers le point "M" du capteur . . . . .	18
2.2	Voie de réception d'un capteur . . . . .	19
2.3	Couplage mutuel : Couplage entre les capteurs d'un réseau . . . . .	21
2.4	Couplage avec une structure(mât) . . . . .	22
2.5	Couplage entre deux antennes . . . . .	22
2.6	Couplage entre les antennes d'un réseau . . . . .	24
2.7	Couplage des antennes d'un réseau avec ses structures porteuses . . . . .	24
2.8	Fonction de corrélation $c(\theta)$ . . . . .	26
2.9	Erreur d'Amplitude en fonction de $\theta$ : Amplitude de $a_n(\theta, \boldsymbol{\eta}) / \tilde{a}_n(\theta)$ pour $n = 1$ . . . . .	26
2.10	Erreur en phase en fonction de $\theta$ : Phase de $a_n(\theta, \boldsymbol{\eta}) / \tilde{a}_n(\theta)$ pour $n = 1$ . . . . .	27
2.11	Canal de propagation en milieu urbain . . . . .	27
2.12	Front d'onde courbe . . . . .	28
2.13	Front d'onde non plan . . . . .	29
2.14	Source émettant dans un cône de diffusion . . . . .	32
2.15	Critère de la méthode d'Autocalibration en " <i>champ proche</i> " en fonction de l'azimut $\theta$ et de la distance $D$ . . . . .	44

2.16	Critère de la méthode d'Autocalibration en " <i>champ proche</i> " en fonction de l'azimut $\theta$ et comparaison avec MUSIC. . . . .	45
2.17	Critère de la méthode d'Autocalibration en " <i>Large Bande</i> " en fonction de l'azimut $\theta$ et comparaison avec MUSIC pour $M = 6$ sources et $N = 5$ capteurs. . . . .	45
3.1	$\sigma_e^{\text{lim}}$ du MV en fonction de $ \theta_2 - \theta_1 $ : $\theta_1 = 100^\circ$ , $\mathbf{R}_s(1, 2) = 0.8$ sur un réseau circulaire où $N = 5$ et $R = \lambda_0$ . . . . .	54
3.2	$RMS_1$ ( $2^{\text{ième}}$ ordre en trait plein et $1^{\text{ier}}$ ordre en pointillé [Fri90a]) en fonction du niveau $\sigma_e$ de l'erreur de modèle : $\theta_1 = 100^\circ$ et $\theta_2 = 86^\circ$ , $\mathbf{R}_s(1, 2) = 0.8$ sur un réseau circulaire où $N = 5$ et $R = \lambda_0$ . . . . .	54
3.3	$RMS_1$ ( $2^{\text{ième}}$ ordre en trait plein et $1^{\text{ier}}$ ordre en pointillé [Fri90a]) en fonction de $ \theta_2 - \theta_1 $ : $\sigma_e = 0.26$ , $\theta_1 = 100^\circ$ , $\mathbf{R}_s(1, 2) = 0.8$ sur un réseau circulaire où $N = 5$ et $R = \lambda_0$ . . . . .	55
3.4	$\sigma_e^{\text{lim}}$ de MUSIC et du MV en fonction de $ \theta_2 - \theta_1 $ : $\theta_1 = 100^\circ$ , $\mathbf{R}_s(1, 2) = 0.8$ sur un réseau circulaire où $N = 5$ et $R = \lambda_0/2$ . . . . .	60
3.5	$RMS$ de la $1^{\text{ière}}$ source en fonction du niveau $\sigma_e$ du modèle d'erreur Gaussien et circulaire. Paramètres : $\theta_2 - \theta_1 = 8.2^\circ$ . Réseau circulaire de rayon $R = \lambda_0/2$ avec $N = 5$ capteurs. . . . .	61
3.6	Biais $E[\Delta\theta_1]$ en fonction du niveau $\sigma_e$ du modèle d'erreur Gaussien et circulaire. Paramètres : $\theta_2 - \theta_1 = 28^\circ$ . Réseau circulaire de rayon $R = \lambda_0/2$ avec $N = 5$ capteurs. . . . .	62
3.7	Comme la Figure 3.5, mais avec $\theta_2 - \theta_1 = 28^\circ$ . . . . .	62
3.8	$E[\Delta\theta_1]_0$ et $E[\Delta\theta_1]_1$ en fonction de la corrélation spatiale $c_{12}$ . L'erreur de modèle est Gaussienne et circulaire de niveau $\sigma_e = 0.26$ . Le réseau est circulaire de rayon $R = \lambda_0/2$ avec $N = 5$ capteurs. . . . .	63
3.9	$RMS$ de la $1^{\text{ière}}$ source en fonction de la corrélation spatiale $c_{12}$ . Les erreurs de modèle sont Gaussiennes et circulaire de niveau $\sigma_e = 0.26$ . Le réseau est circulaire de rayon $R = \lambda_0/2$ avec $N = 5$ capteurs. . . . .	63
3.10	$RMS_1$ en fonction de la corrélation spatiale $c_{12}$ pour $q = 1, 2, 3$ et $l = 1$ . L'erreur de modèle est Gaussienne et circulaire de niveau $\sigma_e = 0.1221$ . Le réseau est circulaire de rayon $R = \lambda_0/2$ avec $N = 5$ capteurs. . . . .	67
3.11	Probabilité de résolution de la $1^{\text{ière}}$ source en fonction de l'erreur de modèle $\sigma_e$ en présence de $M = 2$ sources où $\theta_2 - \theta_1 = 20.9^\circ$ . Le réseau est circulaire avec $N = 5$ capteurs et $R = \lambda_0/2$ . . . . .	71
3.12	Biais de la $1^{\text{ière}}$ source en fonction de l'erreur de modèle $\sigma_e$ en présence de $M = 2$ sources où $\theta_2 - \theta_1 = 20.9^\circ$ . Le réseau est circulaire avec $N = 5$ capteurs et $R = \lambda_0/2$ . . . . .	73
3.13	Racine de l'EQM de la $1^{\text{ière}}$ source en fonction de l'erreur de modèle $\sigma_e$ en présence de $M = 2$ sources où $\theta_2 - \theta_1 = 20.9^\circ$ . Le réseau est circulaire avec $N = 5$ capteurs et $R = \lambda_0/2$ . . . . .	73
3.14	$\sigma_e^{\text{max}}$ du MV en fonction de $ \theta_2 - \theta_1 $ pour une valeur $RMS_1^R = 1^\circ$ : $\theta_1 = 100^\circ$ , $\mathbf{R}_s(1, 2) = 0.8$ . Le réseau est circulaire avec $N = 5$ capteurs et un rayon $R = \lambda_0$ . . . . .	75
3.15	$\sigma_e^{\text{max}}$ en fonction de $ \theta_2 - \theta_1 $ pour une valeur $RMS_1^R = 1^\circ$ : $\theta_1 = 100^\circ$ . Le réseau est circulaire avec $N = 5$ capteurs et un rayon $R = \lambda_0$ . . . . .	75

3.16	Principe de la triangulation. . . . .	76
3.17	Triangulation avec deux goniomètres et zones d'incertitudes . . . . .	76
3.18	Triangulation avec trois goniomètres et zones d'incertitudes disjointes . . . . .	77
3.19	Problème de la triangulation avec $P = 2$ goniomètres dans un cas multi-sources ( $M = 2$ ) .	80
3.20	Triangulation avec $P = 3$ goniomètres dans un cas multi-sources ( $M = 2$ ) . . . . .	81
3.21	Racine de l' <b>EQM</b> de la source d'incidence $\theta_1$ en fonction du coefficient de couplage $\eta$ . Le réseau est circulaire avec $R=\lambda_0$ et $N=5$ capteurs. . . . .	86
3.22	Biais de la source d'incidence $\theta_1$ en fonction du coefficient de couplage $\eta$ . Le réseau est circulaire avec $R=\lambda_0$ et $N=5$ capteurs. . . . .	86



# Resumé

*Ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre d'une collaboration entre le Laboratoire SATIE de l'ENS de Cachan et la société THALES Communications. Au sein du réseau d'excellence NEWCOM, ce travail a initié plusieurs collaborations universitaires internationales avec les universités de Chalmers (Suède), Ilmenau (Allemagne) et Aalborg (Danemark). Les travaux scientifiques effectués relèvent du domaine du "traitement d'antennes" qui exploite et traite les signaux issus de plusieurs capteurs électromagnétiques. Plus particulièrement, ce travail se focalise sur les problèmes de "radio-goniométrie" dont l'objectif est de localiser en position angulaire des émetteurs radio-électriques. Les algorithmes de goniométrie sont des estimateurs de ces angles utilisant une connaissance a priori de la réponse du réseau de capteurs pour une direction d'arrivée donnée. Les diverses expérimentations effectuées au sein de THALES ont montré qu'un système réel de goniométrie est limité en performances en raison d'une mauvaise adéquation entre la réponse réelle du réseau et le modèle théorique utilisé.*

*L'objectif de la thèse est donc double :*

- *développer une classe unifiée d'algorithmes basée sur des modèles plus réalistes que ceux généralement utilisés dans la littérature. Ces modèles plus fins conduisent à l'introduction de paramètres supplémentaires dits de "nuisance" (coefficients de couplage, étendue spatiale d'une source, position des capteurs...) pouvant être estimés conjointement aux paramètres d'intérêt (angles d'arrivée). Pour ces raisons, et par extension, ces algorithmes sont qualifiés dans cette thèse d'algorithmes d'auto-calibration. Ils permettent de prendre en compte les diverses modélisations physiques du front d'onde par une méthode unique. Ainsi, des sources large bande, en champ proche, avec ou sans diversité de polarisation peuvent ainsi être traitées par le même algorithme.*
- *mener une étude de performance d'algorithmes en présence d'erreurs de modèle et en conditions asymptotiques (i.e. pour un nombre infini d'observations). Les performances sont établies en termes de biais, d'EQM et de probabilité de résolution. Ces calculs sont menés pour les algorithmes MUSIC et du Maximum de Vraisemblance. Ces études de performance ont nécessité l'établissement des expressions analytiques des moments statistiques de produits et rapports de formes hermitiennes.*

*Les retombées industrielles de ces travaux pour THALES sont :*

- *une spécification et définition plus rapides des systèmes de goniométrie en termes :*
  - *de faisabilité d'un cahier des charges.*
  - *de définition au plus juste de la phase de calibration.*
  - *d'une implémentation unifiée d'algorithmes d'auto-calibration.*
- *une augmentation du domaine de fonctionnement d'une localisation par triangulation.*



# Remerciements

*Je tiens à remercier tout particulièrement Pascal Larzabal du laboratoire SATIE et Cédric Demeure de THALES Communications qui après 15 ans d'expérience à THALES et de collaborations avec le laboratoire SATIE m'ont permis d'effectuer cette thèse. C'est ainsi que je remercie Gilbert Multedo et Jean-Luc Rogier de THALES Communications qui ont initié ces collaborations en 1989 après m'avoir embauchée pour effectuer des travaux d'ingénieur d'étude. Je remercie aussi Jean-Jacques Monot et François Delaveau d'avoir acceptés que je poursuive ce travail de thèse en parallèle de mon poste d'ingénieur.*

*Je remercie Jean-Jacques Fuchs, Yide Wang ainsi que tous les membres du Jury d'avoir accepté de relire et critiquer cette thèse.*

*Ma reconnaissance va à tous ceux du laboratoire SATIE et du service SPM de THALES. Je tiens à remercier plus particulièrement Eric Boyer qui a effectué une relecture attentive de cette thèse et dont les échanges scientifiques ont été fructueux. Je remercie aussi Pascal Chevalier qui m'a fait découvrir la recherche au sein de l'industrie et qui finalement a engagé un travail d'équipe à l'origine de ma motivation pour effectuer une thèse.*

*Je remercie aussi tous mes anciens stagiaires qui m'ont permis de mener à maturité un certain nombre de thèmes techniques. Je pense plus particulièrement à Joël Grouffaud, Marc Chenu-Tournier, Karim Fortier, Joséphine Castaing et Laurent Albera qui ont continué en DEA et/ou en thèse.*

*Au cours de cette thèse les échanges hebdomadaires avec Pascal Larzabal ont permis au cours du temps de trouver un fils conducteur à ma thèse, de consolider scientifiquement les différentes idées et de réaliser un certain nombre de collaborations internationales.*

*Enfin je remercie ma petite Marie et ma famille qui m'ont donné du temps pour rédiger cette thèse ...*



*"La progression est réalisée, dans les sciences empiriques,  
grâce à un va-et-vient constant entre  
l'élaboration d'hypothèses et  
le contrôle expérimental"*

Jean Ladrière  
*"L'articulation du sens" 1984*



# Abréviations et Acronymes

<b>1D</b>	1 dimension
<b>2D</b>	2 dimension
<b>MV</b>	Maximum de Vraisemblance
<b>HR</b>	Haute Résolution
<b>DOA</b>	Direction Of Arrival
<b>HF</b>	Haute Fréquence
<b>DL</b>	Développement Limité en série de Taylor
<b>LB</b>	Large Bande
<b>BE</b>	Bande Etroite
<b>EQM</b>	Erreur Quadratique Moyenne
<b>RMS</b>	Root Mean Square (ou Racine de l' <b>EQM</b> )
<b>RADAR</b>	Radio Detection And Ranging
<b>FIR</b>	Finite Impulse Response



# Notations

$\mathbf{u}$	Vecteur
$\mathbf{u}_i$ ou $\mathbf{u}(i)$	$i^{\text{ième}}$ élément du vecteur $\mathbf{u}$
$\mathbf{A}$	Matrice
$\mathbf{A}_{ij}$ ou $\mathbf{A}(i, j)$	Élément de la $i^{\text{ième}}$ ligne et $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}_j$ ou $\mathbf{A}(j)$	$j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^H$ ou $\mathbf{u}^H$	Transposé conjugué d'une matrice ou d'un vecteur
$\mathbf{A}^T$ ou $\mathbf{u}^T$	Transposé d'une matrice ou d'un vecteur
$\mathbf{A}^{-1}$	Inverse de $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^\# = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H$	Pseudo-inverse d'une matrice $\mathbf{A}$ ayant plus de lignes que de colonnes
$\mathbf{A}^\# = \mathbf{A}^H (\mathbf{A} \mathbf{A}^H)^{-1}$	Pseudo-inverse d'une matrice $\mathbf{A}$ ayant plus de colonnes que de lignes
$\text{trace}(\mathbf{A})$	Trace de la matrice $\mathbf{A}$
$\det(\mathbf{A})$	Déterminant de la matrice $\mathbf{A}$
$\text{vec}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T & \dots & \mathbf{a}_N^T \end{bmatrix}^T$	Vecteur composé des colonnes successives de la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_N \end{bmatrix}$
$\mathbf{I}_N$	Matrice identité de dimension $N \times N$
$\mathbf{0}_{N,M}$	Matrice nulle de dimension $N \times M$
$\text{diag}(\mathbf{u})$	Matrice diagonale dont la diagonale est composée des éléments du vecteur $\mathbf{u}$
$\text{diag}(\mathbf{A})$	Vecteur composé des éléments de la diagonale de la matrice $\mathbf{A}$
$\ \mathbf{u}\ _F = \sqrt{\mathbf{u}^H \mathbf{u}}$	Norme de Frobenius du vecteur $\mathbf{u}$
$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^T \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{v}^T \mathbf{u}_K \end{bmatrix}^T$	Produit de Kronecker de vecteurs lorsque $\mathbf{u}$ est un vecteur de dimension $K$ .
$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} \mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}_{1K} \mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{L1} \mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}_{LK} \mathbf{B} \end{bmatrix}$	Produit de Kronecker de matrices lorsque $\mathbf{A}$ est une matrice de dimension $L \times K$ .
$\mathbf{u} \odot \mathbf{v}$	Produit terme à terme de Hadamard de matrices ou vecteurs
$\mathbf{u}^{\otimes n} = (\mathbf{u} \otimes \dots \otimes \mathbf{u})$ <small><math>n</math> fois</small>	Puissance du Kronecker de matrice ou vecteur ( $\mathbf{u}^{\otimes 0} = 1$ )
$\mathbf{0}_N$	Vecteur nul de dimension $N \times 1$
$E[\cdot]$	Espérance mathématique
$\text{cum}(x_1, \dots, x_q)$	Cumulant d'ordre $q$ des variables $(x_1, \dots, x_q)$
$z^*$	Conjugué de $z$

$\Re(z)$	Partie réelle de $z$
$\Im(z)$	Partie imaginaire de $z$
$p! = 1 \times \cdots \times p$	Factoriel de l'entier $p$
$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$	Nombre de combinaisons d'ensemble à $p$ éléments dans un ensemble à $n$ éléments
$N$	Nombre de capteurs
$M$	Nombre de sources
$\begin{cases} \text{vec}(\mathbf{E}^T) = \mathbf{P} \text{vec}(\mathbf{E}) \\ \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \mathbf{P} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) \end{cases}$	$\mathbf{P}$ est une matrice de permutation

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Préambule

Les travaux de cette thèse s'inspirent de mon expérience professionnelle et s'incrivent dans la continuité de mes travaux de recherche industrielle menés au sein de la société THALES Communications. Bien que mes différentes missions d'études m'aient positionnée depuis une quinzaine d'année à l'interface université-industrie, les contraintes de mon poste d'ingénieur ne m'ont pas donné l'opportunité de mener un travail de fond sur une thématique de recherche précise.

Lors de mon parcours professionnel, j'ai été confrontée à de nombreux problèmes liés à la spécification et la définition de systèmes de goniométrie. Ma hiérarchie, consciente de l'enjeu industriel lié à la résolution de ces problèmes, m'a accompagnée dans mon souhait d'effectuer une thèse ayant pour objet la levée de ces verrous technologiques. C'est ainsi que cette thèse s'inscrit dans la continuité d'une collaboration régulière que THALES entretient avec le laboratoire SATIE de l'ENS de Cachan.

### 1.2 Ma contribution scientifique en tant qu'ingénieur d'étude

L'objectif de la société **THALES** communications est d'une part de mettre au point des systèmes de transmissions de signaux radio-électriques et d'autre part de réaliser des systèmes d'écoutes de guerre électronique. Tous ces produits nécessitent des systèmes de réceptions et de transmissions composés au minimum d'une antenne radio-électrique et d'un récepteur. Afin d'améliorer la transmission et l'écoute, ces systèmes sont dans certains cas composés de plusieurs antennes.

Dans ce contexte, le domaine scientifique de mes travaux est celui du traitement d'antennes qui exploite et traite les signaux issus de plusieurs capteurs électromagnétiques. Ces travaux, faisant partie du domaine de l'écoute passive, concernent plus particulièrement les thèmes de la "*radio-goniométrie*" et de la "*séparation aveugle de sources*" appliqués à des signaux de radio-communications. La "*radio-goniométrie*" permet de localiser des émetteurs radio-électriques tels que, par exemple, les téléphones portables. Les traitements sont dits "*aveugles*" lorsqu'ils n'utilisent aucune information a priori sur les signaux transmis et sont dits "*coopératifs*" lorsqu'un "*a priori*" est utilisé.

Ma mission à **THALES** a été de contribuer à la mutation technologique des systèmes de goniométrie

pour passer de l'interférométrie aux méthodes à Haute Résolution (HR). Pour mener à bien ce saut technologique, la réalisation de nombreuses études théoriques avec les expérimentations associées m'ont été confiées pour établir les arguments permettant de proposer les bons choix technologiques.

Le contexte d'application est celui des sources radioélectriques se propageant avec une polarisation donnée au travers de canaux à multi-trajets. Les premières missions à **THALES** m'ont conduite à traiter les signaux du canal de propagation HF (Haute Fréquence) permettant à une onde de se propager sur plusieurs milliers de kilomètres. La naissance de la téléphonie mobile m'a ensuite permis de m'intéresser au canal de propagation en milieu urbain qui a la caractéristique de décomposer l'onde transmise en un ensemble de multi-trajets faiblement décalés dans le temps. Le projet RNRT **LUTECE** (figure 1.1), dont l'objectif principal est la localisation de téléphones portables sous la neige, m'a permis de m'intéresser au canal de propagation dans un milieu montagneux et enneigé.



FIG. 1.1 – Projet LUTECE

Sachant que les performances des techniques de localisation sont fortement influencées par la qualité de la connaissance de la réponse des antennes radio-électriques de réception, les problématiques de la calibration et de l'autocalibration d'un réseau d'antennes ont été étudiées dans un premier temps afin de mieux prendre en compte dans les traitements le comportement de ces capteurs électromagnétiques. Dans un second temps, l'analyse de plusieurs types de canaux de propagation à trajets multiples a été effectuée afin d'en proposer une modélisation de type spéculaire permettant d'en déduire les paramètres le caractérisant. C'est ainsi que des algorithmes d'identification de ses paramètres (aveugles ou coopératifs) ont été proposés, d'une part pour le canal HF et d'autre part pour le canal urbain. Parmi ces paramètres, on peut citer les angles d'incidences des multi-trajets. De nombreuses expérimentations ont permis d'affiner et valider les modélisations des canaux à trajets multiples ainsi que celles des réseaux de capteurs électromagnétiques. Il a été ainsi développé des techniques d'autocalibration, d'analyse paramétrique d'un canal de propagation à multi-trajets, de diversité de polarisation des ondes. Quand cela est nécessaire les phénomènes large bande ainsi que la diminution du nombre de voies de réception ont été pris en compte.

Sachant que les signaux de radio-communications ont la caractéristique d'être cyclostationnaires et/ou circulaires, les dernières études ont eu pour objectif d'exploiter ces propriétés afin d'améliorer les perfor-

mances des techniques de goniométrie et de séparation de sources. Pour traiter ces signaux de manière efficace, la connaissance de leur norme de transmission ainsi que de leur caractère non gaussien ont été exploités : ceci a été le cas des signaux GSM du projet RNRT **LUTECE**. De telles approches permettent de mieux isoler les sources par une connaissance a priori et de réaliser par exemple une goniométrie sélective.

### 1.2.1 Le traitement d'antennes

La figure 1.2 présente la structure générale d'un système de traitement d'antennes composé d'un réseau de plusieurs capteurs illuminés par des sources sous des angles d'incidences différents. Dans un contexte électromagnétique, les capteurs sont des antennes et les sources émettent un signal électromagnétique polarisé. La figure 1.3 représente un réseau de capteurs électromagnétiques de type "patch" utilisé dans le projet **LUTECE** et les figures 1.4-1.5 d'un réseau de capteurs de type "dipôle".

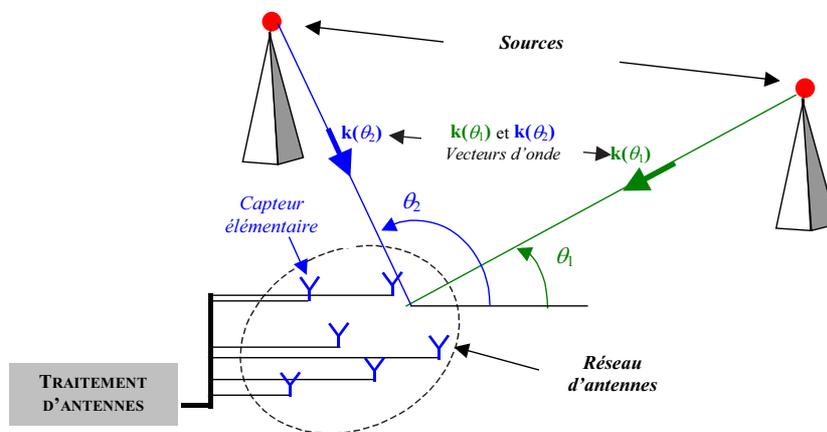


FIG. 1.2 – Traitement d'antennes

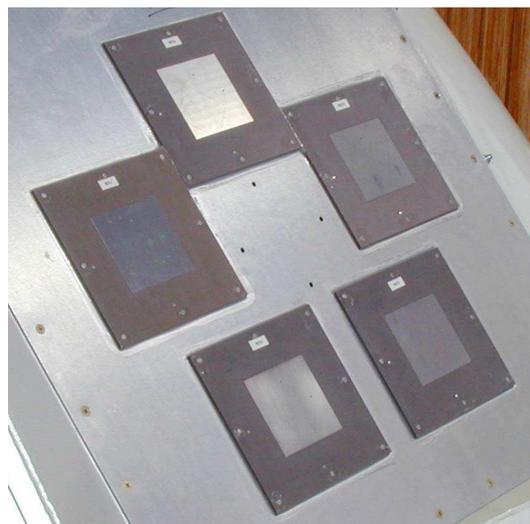


FIG. 1.3 – Réseau circulaire de 5 patches : cas de LUTECE

Les antennes du réseau reçoivent les ondes émises par les sources avec une phase et une amplitude dépendant de la direction d'arrivée (ou angle d'incidence) des sources, de la position des antennes et



FIG. 1.4 – Réseau circulaire de 5 dipôles



FIG. 1.5 – Réseau linéaire de 3 dipôles

des diagrammes de rayonnement associés. Les techniques de traitement d’antennes exploitent la diversité spatiale : utilisation de la position des antennes du réseau pour discriminer en incidence et distance des sources. Le traitement d’antennes se décompose en deux grandes activités :

- **Le filtrage spatial** (voir la figure 1.6) a pour objectif de combiner les signaux du réseau de capteurs pour former un faisceau dans la direction d’une des sources. Ce domaine comprend les activités de séparation aveugle de sources, de MODEM multi-capteurs, de filtrage adapté spatial etc. . .

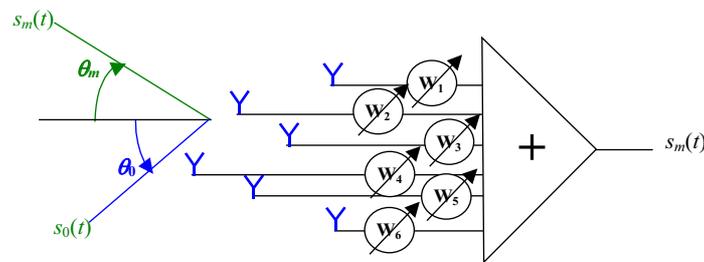


FIG. 1.6 – Filtrage Spatial

- **La goniométrie** a pour objectif d’estimer les angles d’incidences des émetteurs à partir d’un réseau de capteurs. Tous les algorithmes de goniométrie nécessitent la connaissance de la réponse du réseau à la direction d’arrivée d’une source. Ces angles d’incidences dépendent en 1D de l’azimut  $\theta_m$  et en 2D de l’azimut  $\theta_m$  et de l’élévation  $\Delta_m$ . La réponse du réseau à une direction d’arrivée est aussi appelée "vecteur directeur" et se note  $\mathbf{a}(\theta)$  ou  $\mathbf{a}(\theta, \Delta)$ . La figure 1.7 montre que lorsque les ondes émises par les sources se propagent dans un même plan, il suffit d’estimer les azimuts ( goniométrie 1D ) et dans le cas contraire d’estimer conjointement l’azimut et le site (goniométrie 2D) : ce plan est par exemple celui du réseau d’antennes où l’angle d’élévation de toutes les sources est nul. Les figures sont des exemples de réseaux de capteurs de type respectif patch et dipole.

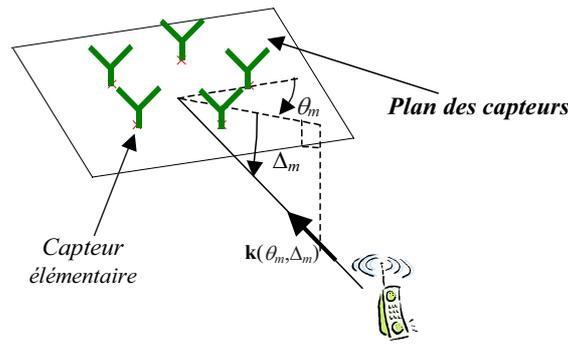


FIG. 1.7 – Réseau d’antennes radio-électriques

Les méthodes de goniométrie peuvent être classées par ordre croissant de performance (et donc de complexité) de la façon suivante :

- L’interférométrie exploitant la différence de phase d’un ou plusieurs couples de capteurs. En effet, en champ lointain le déphasage entre deux capteurs dépend de l’incidence de la source car la phase du signal sur un capteur dépend de sa distance à l’émetteur. Cette méthode ne peut pas localiser plusieurs sources à la fois.
  - Les méthodes super-résolutives qui recherchent les incidences où la puissance du signal en sortie de la voie formée dans une direction est maximale. La capacité à estimer l’incidence de plusieurs sources dépend du nombre de capteurs du réseau ainsi que de l’espacement angulaire entre les sources. Dans ces méthodes on peut citer la formation de voies, les méthodes de Capon [Cap69] et Lagunas [LC84] ou le propagateur [MB90]. La formation d’une voie dans une direction  $(\theta_0, \Delta_0)$  consiste à pondérer les signaux en sortie des capteurs par les poids  $w_n$  puis à sommer les voies pondérées (voir figure 1.6). Le diagramme de rayonnement de la voie ainsi formée doit faire apparaître un maximum dans la direction  $(\theta_0, \Delta_0)$  et ce maximum donne la puissance du signal dans la direction  $(\theta_0, \Delta_0)$ . Sachant que la direction  $(\theta_0, \Delta_0)$  retenue n’est pas forcément la direction d’une des sources incidentes, cette famille de méthode consiste à rechercher un (ou plusieurs) maximum d’énergie en réalisant un balayage en  $(\theta_0, \Delta_0)$ . Les méthodes super-résolutives diffèrent dans la façon de calculer les poids  $w_n$  pour une direction donnée. Par exemple, la méthode de Capon est basée sur le filtre adapté et consiste à en maximiser le rapport signal sur bruit plus brouilleur dans la direction  $(\theta_0, \Delta_0)$ .
  - Les méthodes à Haute Résolution (HR) [Mar98b] telles que MUSIC [BK79][Sch81][BK83], ESPRIT [RPK86] permettant de localiser plusieurs sources simultanément avec des techniques de sous-espace.
  - Les méthodes basées sur le Maximum de Vraisemblance (MV) [OVSN93][VO91][Lar92] permettant de localiser des sources fortement corrélées comme les signaux en sortie d’un canal à multi-trajets faiblement décalés en temps. L’objectif est de maximiser une vraisemblance entre le signal reçu sur les capteurs et un modèle paramétrique de cette observation. Ce type d’algorithme est coûteux en temps de calcul car il nécessite une recherche des paramètres du modèle suivant un critère multi-paramètres. Les méthodes IQML [BM86][Bre88] sont adaptées au cas des réseaux de capteurs linéaires et réduisent la méthode du MV à la résolution d’un polynôme dont l’ordre dépend du nombre de sources incidentes.
- Les méthodes de goniométrie citées ci-dessus utilisent les statistiques d’ordre 2 des signaux reçus et supposent que les sources émises sont bande-étroite (bande du signal négligeable devant sa fréquence

porteuse) avec un front d'onde plan (émetteurs éloignés du réseau de capteurs).

## 1.2.2 Travaux sur la séparation de sources

Mes travaux sur la séparation de sources sont basés sur des méthodes qui exploitent l'indépendance statistique des émetteurs. Plus particulièrement, ces techniques telles que SOBI [BAMCM97], JADE [CS93] et [Com94] utilisent les statistiques d'ordre 2 des signaux reçus pour blanchir les sources et l'ordre 4 pour les identifier et les séparer. Le blanchiment a pour objectif d'orthonormaliser la base des vecteurs directeurs  $\mathbf{a}(\theta_m, \Delta_m)$  des  $M$  sources incidentes et l'étape d'identification à l'ordre 4 estime les vecteurs directeurs orthonormalisés. Ces algorithmes ne peuvent séparer au maximum qu'un nombre de sources égal au nombre de capteurs.

Dans [FC97a], la méthode JADE est étendue au cas cyclique. En exploitant le caractère cyclostationnaire des sources, qui est celui des signaux de radiocommunications, un paramètre discriminant supplémentaire peut être utilisé pour leur séparation. La séparation par un critère d'indépendance statistique se réduit aux groupes de sources ayant les mêmes caractéristiques cycliques.

La méthode FOBIUM [FAC05][FAC03] étend à l'ordre 4 la méthode SOBI utilisant les statistiques d'ordre 2, pour identifier un nombre de sources supérieur au nombre de capteurs. Les méthodes SOBI et FOBIUM exploitent la diversité temporelle des sources afin de ne pas utiliser des statistiques d'ordre trop élevé pour les séparer.

La méthode ICAR [AFCC05][AFCC04b] s'affranchit de l'étape de blanchiment à l'ordre 2 d'une méthode telle que JADE en n'utilisant strictement que les statistiques d'ordre 4 pour identifier les sources. Dans ces conditions, la méthode ICAR n'est pas perturbée par un bruit gaussien non blanc. Toutefois cette méthode ne permet toujours pas d'identifier plus de sources que de capteurs. Pour atteindre cette capacité, la méthode ICAR a été étendue à l'ordre 6 par l'algorithme SIRBI [AFCC03b] et généralisée à l'ordre  $2q$  par BIOME [AFCC04a].

Sachant que les méthodes de séparation de sources permettent d'identifier des vecteurs dépendant de l'incidence de chaque source, des techniques de goniométrie appliquées à ces vecteurs ont été envisagées. Sachant que les signaux des émetteurs sont statistiquement indépendants, un algorithme de type formation de voies MAXCOR est appliqué dans [CBF96] car les signaux se propagent suivant un seul trajet. Dans [FCT02], le principe est étendu au cas des signaux partiellement corrélés car les signaux émis traversent des canaux à multi-trajets : identification MIMO (Multiple Input Multiple Output) non coopérative. Un algorithme de type MUSIC est appliqué sur chaque groupe de vecteurs associé au même émetteur.

Les méthodes de séparation de source nécessitent l'utilisation des moments et cumulants d'ordre  $2q$  des signaux reçus sur le réseau de capteurs. L'estimation classique de ces statistiques suppose que les sources sont stationnaires alors que dans un contexte de télécommunication les sources sont plutôt de type cyclostationnaires. Ainsi, dans certaines configurations de signaux, les statistiques d'ordre  $2q$  estimées de façon *classique* sont biaisées. Ce biais peut rendre des sources indépendantes non indépendantes en apparence : les sources ne peuvent plus être séparées sur un critère d'indépendance avec les estimateurs classiques des statistiques. Dans [CFA02][FCA04], un estimateur *exhaustif* des statistiques d'ordre 1 et 2 est mis en oeuvre pour appliquer correctement la méthode SOBI sur des signaux cyclostationnaires. Dans [FC00][FC97a][FC98], la méthode JADE est mise en oeuvre avec un estimateur *exhaustif* des statistiques

d'ordre 2 et 4.

### 1.2.3 Travaux sur la goniométrie

#### La calibration et l'autocalibration

Les techniques de calibration prennent en compte les caractéristiques physiques du réseau de capteurs et permettent d'obtenir des performances raisonnables de goniométrie. La calibration avec un signal pilote consiste à mesurer la réponse du réseau de capteurs en fonction de l'incidence d'une source : la figure 1.8 illustre le processus de calibration pour l'incidence  $(\theta_i, \Delta_i)$ . Il est ainsi construit une table de calibration avec un nombre fini de réponses. Toutefois, la table de calibration ne donne pas directement une expression analytique de la réponse du réseau.

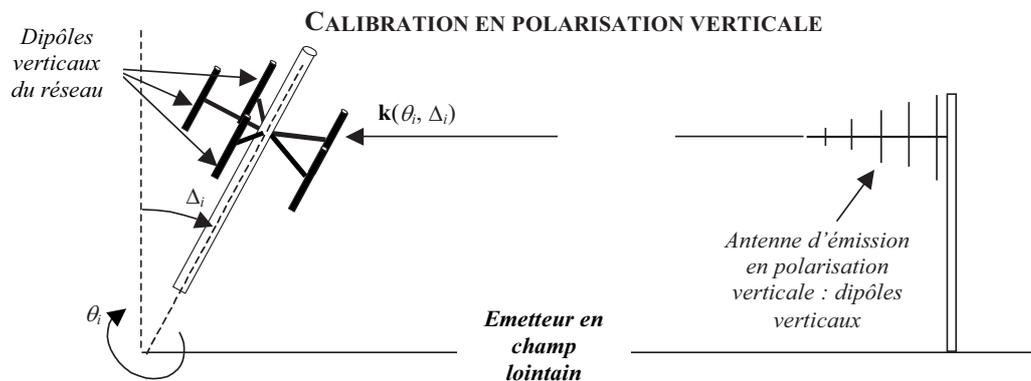


FIG. 1.8 – Calibration d'un réseau circulaire comme celui de la Figure- 1.4

Des techniques de modélisation de cette réponse par une matrice de couplage ont été étudiées. Dans les références [FL92][FRM91], la matrice de couplage est estimée à partir d'une table de calibration puis utilisée dans les algorithmes de goniométrie de type MUSIC et Maximum de vraisemblance. Dans le cas de réseaux linéaires équi-espacés, les techniques de lissage spatial ainsi que les méthodes MODE [BM86] et root-MUSIC ont été adaptées à cette modélisation de la réponse de l'antenne par une matrice de couplage [FRM91].

Sachant qu'une calibration n'est pas toujours possible pour des raisons de coût ou de dérive au cours du temps des caractéristiques du réseau, des techniques d'autocalibration ont été envisagées. Dans [FFLC94] [FL93], les algorithmes de goniométrie estiment conjointement les angles d'arrivées avec les paramètres de nuisances de la calibration, des conditions d'identifiabilité de ces paramètres sont établies. Dans [FFLC94] l'algorithme est itératif et les erreurs sont indépendantes de la direction d'arrivée, dans [FL93] l'algorithme est direct et les erreurs peuvent dépendre de la direction d'arrivée.

#### Identification de canaux de propagation à multi-trajets

L'objectif des techniques développées est de valider des modèles paramétriques d'un canal de propagation par confrontation des résultats aux mesures expérimentales. Ces canaux dépendent principalement des obstacles que rencontre l'onde se propageant entre un émetteur et un récepteur. Dans ces études, le canal est supposé spéculaire avec un nombre fini de multi-trajets dont les paramètres sont l'incidence, le temps

de propagation, le niveau et la polarisation de chacun des trajets. Dans la figure 1.9, le canal est composé d'un trajet direct et d'un trajet secondaire provoqué par un obstacle.

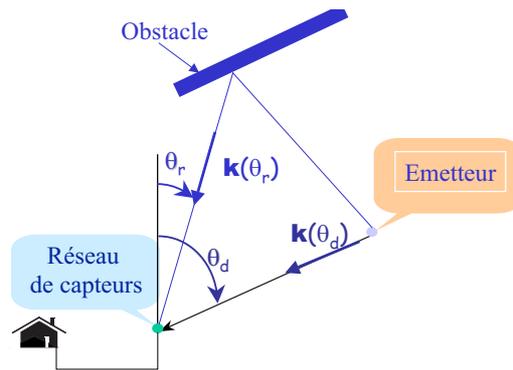


FIG. 1.9 – Canal de propagation à deux trajets

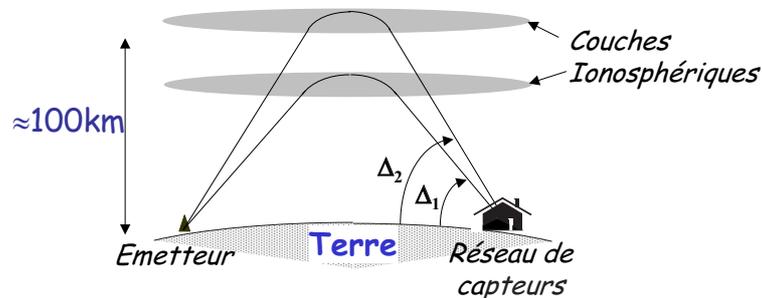


FIG. 1.10 – Canal de propagation HF dans le plan vertical

Le canal de propagation HF (0.3MHz-30MHz) illustré figure 1.10 a été étudié dans un premier temps : les multi-trajets sont provoqués par des réflexions sur les couches ionosphériques. Le signal d'un émetteur est reçu sur le réseau de capteurs suivant plusieurs trajets d'azimuts quasi-identiques et avec des valeurs d'angle de site  $\Delta_m$  différentes et dépendantes de l'altitude des couches ionosphériques. Des techniques d'estimation azimut-temps (ou site-temps) ont été adaptées à un canal spéculaire de type HF dans [GFLC97a][GFLC97b] puis dans [CTFL99][FCTL99].

L'analyse du canal en HF a conduit à s'intéresser à la polarisation des ondes radioélectriques et à mesurer expérimentalement leurs polarisations en appliquant la méthode MUSIC en diversité de polarisation [FP83]. Cette expérience a permis d'identifier les modes O et X de la propagation HF, caractérisés par des polarisations elliptiques quasi-orthogonales.

Les techniques d'estimation incidence-temps étudiées sont principalement basées sur l'estimation en aveugle de la matrice de canal par une méthode de sous-espace [MDCM95][PMMAM<sup>+</sup>01]. L'hypothèse spéculaire du canal permet de modéliser simplement la matrice de canal en fonction des paramètres incidence-temps des multi-trajets. Dans [GFLC97a][GFLC96][GFLC97b], les paramètres incidence-temps sont estimés conjointement et dans [CTFL99][FCTL99] estimés séparément. Dans les deux approches les incidences des trajets sont associées à leur temps de propagation. Dans [FCT00] et [FCT02], l'estimation paramétrique du canal de propagation est directe car elle ne nécessite pas une étape d'estimation de la matrice de canal.

## Goniométrie Large Bande (LB)

En l'absence de connaissance des supports spectraux des signaux incidents, les récepteurs doivent être à grande largeur de bande. Lorsque cette largeur de bande n'est pas négligeable devant la fréquence centrale des récepteurs, il est nécessaire d'appliquer des techniques de goniométrie adaptées.

Ces algorithmes se classent suivant deux grandes familles : les techniques de focalisation [WK85][Fer97] et les méthodes spatio-fréquentielles [FCT00][Fer99]. L'objectif de la focalisation est de concentrer l'énergie d'un signal, s'étalant sur plusieurs longueurs d'onde, sur une seule longueur d'onde afin d'appliquer un algorithme de goniométrie Bande-Etroite (**BE**). Les techniques spatio-fréquentielles paramétrisent les signaux large bande dans l'espace incidence-fréquence. Dans ce domaine de paramètres, un signal large bande se décompose suivant plusieurs signaux bande-étroite.

Dans [Fer97], la technique de focalisation est étendue au cas de la goniométrie cyclique. Dans [FCT00][Fer99], la méthode spatio-fréquentielle envisagée est appliquée sur un vecteur observation spatio-temporel. Dans [Fer99], où les sources émises sont décorréélées temporellement, l'algorithme exploite un critère de goniométrie de type MUSIC dans l'espace incidence-fréquence. Dans [FCT00] l'algorithme de [Fer99] est étendu au cas de sources corrélées.

## Goniométrie exploitant les caractéristiques du signal

Afin d'augmenter la capacité en nombre de sources par rapport aux techniques classiques de goniométrie, les caractéristiques temporelles et statistiques des signaux émis ont été prises en compte. Deux catégories d'algorithmes ont été envisagées : tout d'abord les techniques allongeant le vecteur observation puis les techniques sélectives ayant la propriété de séparer les émetteurs avant de les goniométrer.

- **Techniques par Allongement de l'observation** Dans une première approche, les statistiques d'ordre supérieur, qui exploitent la non-gaussianité des sources, permettent de goniométrer plus de sources que de capteurs. En particulier, les statistiques d'ordre 4 permettent de goniométrer  $N^2 - N$  sources indépendantes avec un réseau de  $N$  antennes. Dans [CF99][CFD96], un algorithme de goniométrie est appliqué sur la quadricovariance de dimension  $N^2 \times N^2$  contenant les cumulants d'ordre 4 à la place de la matrice de covariance. Il est ensuite montré par analogie avec l'ordre 2 que l'utilisation de la quadricovariance revient à appliquer une goniométrie sur un réseau virtuel composé au maximum de  $N^2 - N + 1$  capteurs dont la géométrie dépend complètement du réseau de capteurs initial. Cette remarque permet de déduire intuitivement les performances d'une goniométrie à l'ordre 4. La notion de réseau virtuel à l'ordre 4 est étendue à l'ordre  $2q$  dans [CAFC05] : un réseau de  $N$  capteurs peut localiser au maximum  $N^q - 1$  sources. L'article [CAFC05] montre que la borne maximale en nombre de sources localisables dépend en autres de la géométrie du réseau initial et de l'arrangement des éléments dans la matrice des cumulants.

Dans une deuxième approche, les caractéristiques fréquentielles non homogènes des sources incidentes sont exploitées. En effet, dans un contexte aveugle les signaux incidents peuvent se recouvrir spectralement avec des largeurs de bande différentes. Afin d'exploiter ces caractéristiques, nous avons construit un vecteur d'observation spatio-temporel à partir des signaux observés sur les capteurs [FCT00][Fer99]. Cette famille d'algorithmes applique finalement une analyse spectrale conjointement à une goniométrie. Dans [Fer99],

le pseudo-spectre de goniométrie dépend des paramètres incidence-fréquence et dans [FCT00] dépend uniquement de l'incidence. Les références [FCT00] et [Fer99] montrent qu'en construisant un vecteur observation avec  $L$  observations du même signal, décalées dans le temps, un réseau de  $N$  capteurs peut localiser jusqu'à  $NL - 1$  porteuses.

- **Techniques sélectives** L'objectif des techniques de goniométrie sélective est de goniométrer séparément des émetteurs ayant des propriétés temporelles ou statistiques différentes. Pour cela trois sous-classes d'algorithmes ont été étudiées et expérimentées :

- *Les techniques de goniométrie cyclique* [GFN98][Fer97] : elles permettent de goniométrer séparément des sources ayant des caractéristiques cycliques différentes. Les signaux de radiocommunication, dont font partie les modulations numériques sont de caractéristique cyclostationnaires. Ces modulations numériques contiennent des fréquences cycliques dépendantes du débit binaire, de la modulation, des indices de modulation, etc... Dans ce contexte, les techniques cycliques se réduisent à appliquer une goniométrie sur les sous-groupes de sources ayant de l'énergie à la même fréquence cyclique. Dans [Fer97][GFN98], les techniques de goniométrie cyclique sont adaptées aux cas des signaux large-bande. L'évaluation des performances théoriques de l'estimation du nombre de sources sur des matrices de covariance utilisant les statistiques cycliques est donnée dans [GFN98].
- *Les techniques de goniométrie après séparation de sources* [CBF96][FCT02] (voir le paragraphe sur la séparation de sources).
- *Les techniques de goniométrie à référence* utilisent la connaissance du ou des signaux émis sur une durée connue : signaux de références. La connaissance du signal de référence d'une source permet d'isoler son signal de celui des autres émetteurs. Dans un premier temps, la technique estime la matrice de canal entre le signal émis et les signaux reçus puis détermine les incidences des multi-trajets à partir d'un modèle paramétrique de cette matrice. Cette méthode a été utilisée dans le projet **LUTECE** pour localiser des portables sous la neige en utilisant les signaux de référence de la norme GSM.

#### 1.2.4 Implantations et expérimentations sur signaux réels

Les campagnes de mesures se décomposent suivant deux phases : la mise au point de systèmes d'acquisition de signaux puis l'organisation et la réalisation des expérimentations. Les étapes de ces affaires expérimentales sont alors les suivantes :

- Etude algorithmique
- Mise au point d'un banc d'acquisition
- Planification, organisation et réalisation des expérimentations
- Test et réadaptation des algorithmes étudiés sur les signaux acquis lors des expérimentations.

La mise au point des bancs d'acquisition ainsi que les études algorithmiques ont permis la réalisation de nombreuses bibliothèques de fonctions en C et MATLAB. C'est ainsi que j'ai été amenée à introduire un ensemble de fonctions MATLAB dans un environnement C et compiler des bibliothèques C sur des processeurs de traitement du signal.

Toutes ces bibliothèques sont constituées de fonctions facilement réintégrant dans de nouveaux systèmes expérimentaux. La facilité de réintégration des fonctions est due à la structure très modulaire ainsi que

l'allocation dynamique des variables qui ne sont généralement pas compatibles avec un logiciel optimisé en temps de calcul et en mémoire. Toutefois ils permettent dans un premier temps de réaliser un "*debug*" algorithmique. A partir de ses logiciels, le développement des produits peuvent être envisagé suivant deux approches complètement différentes :

- **Un développement manuel des produits** : lorsque la partie "*debug*" algorithmique est terminée, le logiciel est complètement re-défini en l'optimisant conjointement en mémoire et temps de calcul sur le matériel numérique envisagé pour le produit. Cela conduit à un logiciel parfaitement optimisé non ré-utilisable pour d'autres produits.
- **Un développement automatique des produits** : à partir des logiciels modulaires des systèmes expérimentaux et du matériel numérique envisagé pour le produit, le logiciel modulaire est transformé en un logiciel optimisé sur le matériel numérique envisagé par un "*super-compileur*". Le "*super-compileur*" doit d'une part avoir en mémoire les calculs mathématiques récurrents du logiciel modulaire et d'autre part connaître les caractéristiques des cibles (matériel numérique) sur lequel doit être porté le logiciel. Les calculs récurrents d'un produit de traitement d'antennes sont principalement des calculs matriciels et produits scalaires. On sait par exemple que la plupart des processeurs actuels de traitement du signal sont orientés pour effectuer un produit scalaire de façon parfaitement optimisé et que le traitement adapté à ses processeurs est le filtrage numérique de type FIR (Finite Impulse Response) d'un signal. Dans l'état actuel du développement, ces "*super-compileurs*" ne sont pas encore au point. Toutefois, les compilateurs de logiciels C sur des processeurs de traitement du signal ou de transformation du code MATLAB en un code C sont déjà des ébauches de "*super-compileurs*".

### 1.3 Motivations et cadre de l'étude

Le sujet de la thèse concerne plus particulièrement la goniométrie qui est traitée ici dans le cadre général de l'estimation paramétrique. Les diverses expérimentations effectuées à THALES ont montré qu'un système réel de goniométrie est limité en performances et que la connaissance théorique de cette limitation est indispensable à la fois pour la mise au point d'un système et pour sa définition à partir d'un cahier des charges bien précis. Dans ces conditions, il est possible d'éviter un développement lourd et coûteux d'un système lorsque les performances requises dans le cahier des charges sont impossibles à atteindre. La maîtrise des performances peut aussi conduire à redéfinir le cahier des charges. En effet, un client définit un cahier des charges à partir de ses besoins de performances d'une part et du coût matériel d'autre part. C'est pourquoi dans un système de traitement d'antennes, la limitation du nombre de capteurs  $N$  s'impose pour des raisons financières. Lors de la définition d'un système, l'évaluation des performances théoriques ultimes à partir d'un cahier des charges peut aussi s'avérer fort utile pour invalider les performances trop optimistes affichées par un concurrent.

Traditionnellement, les méthodes de goniométrie supposent que le front d'onde est plan, que les sources sont bande étroite, ponctuelles, sans diversité de polarisation, sans trajets cohérents et sans perturbation de la réponse du réseau de capteurs à une source. Lorsque l'une de ces hypothèses n'est pas vérifiée, la réponse du réseau de capteurs à une source ne dépend plus uniquement de l'incidence mais d'autres paramètres tels que la largeur de bande, les coefficients de couplage, la largeur du cône de diffusion ou encore la distance sources-capteurs. Sans la prise en compte de ces paramètres supplémentaires, les

performances des méthodes de goniométrie seront fortement dégradées. Pour réduire la dégradation les méthodes de goniométrie doivent alors estimer ces paramètres secondaires conjointement à la direction d'arrivée.

L'objectif de la thèse est donc double :

- développer une classe unifiée d'algorithmes basée sur des modèles plus réalistes que ceux généralement utilisés dans la littérature. Ces modèles plus fins conduisent à l'introduction de paramètres supplémentaires dits de "nuisance" (coefficients de couplage, étendue spatiale d'une source, position des capteurs...) pouvant être estimés conjointement aux paramètres d'intérêt (angles d'arrivée). Pour ces raisons, et par extension, ces algorithmes sont qualifiés dans cette thèse d'algorithmes d'auto-calibration. Ils permettent de prendre en compte les diverses modélisations physiques du front d'onde par une méthode unique. Ainsi, des sources large bande, en champ proche, avec ou sans diversité de polarisation peuvent ainsi être traitées par le même algorithme.
- mener une étude de performance d'algorithmes en présence d'erreurs de modèle et en conditions asymptotiques (i.e. pour un nombre infini d'observations). Les performances sont établies en terme de biais, d'EQM et de probabilité de résolution. Ces calculs sont menés pour les algorithmes MUSIC et du Maximum de Vraisemblance. Ces études de performance ont nécessité l'établissement des expressions analytiques des moments statistiques de produits et rapports de formes hermitiennes.

## 1.4 Présentation du document

Le document est structuré en fonction des deux objectifs de la thèse et se divise de la façon suivante :

- **chapitre-2** : *Modélisations physiques et Algorithme de goniométrie correspondant*. Les erreurs de modèle liées aux réseaux de capteurs puis au canal de propagation sont modélisées suivant une écriture unique. Cette écriture permet d'envisager un algorithme de goniométrie unique, décrit dans le paragraphe-2.6, prenant en compte ces modélisations.
- **chapitre-3** : *Performances en présence d'erreurs de modèles*. Ce chapitre évalue les performances théoriques pour plusieurs méthodes de goniométrie puis donne deux applications utilisant ces expressions théoriques. Pour terminer les performances de l'algorithme d' Auto-Calibration en présence d'erreurs de modèle sont données.

## 1.5 Contributions du travail de thèse

- Les premières contributions de cette thèse concernent l'évaluation des performances théoriques en présence d'erreurs de modélisation du vecteur directeur  $\mathbf{a}(\theta_m, \Delta_m)$  pour différents algorithmes de goniométrie. Les performances sont tout d'abord données en terme d'EQM (Erreur Quadratique Moyenne) et de biais sur la direction d'arrivée. Dans l'état de l'art, d'autres auteurs se sont intéressés à l'évaluation de ces performances. On peut ainsi citer les références Friedlander [Fri90b], Swindlehurst & Kailath [SK92] et Marcos [Mar98a] pour l'algorithme MUSIC puis les références [Fri90a] pour l'algorithme du Maximum de vraisemblance(MV). Tous ces calculs de performances sont effectués à l'aide d'une approximation du premier ordre de l'erreur et ne sont donc pas pertinents pour des erreurs de mo-

dèle importantes comme dans [MB90][SH90] ou pour des sources d'incidences proches. C'est pourquoi nous avons étendu cette étude à l'aide d'une approximation des erreurs au second ordre pour MUSIC [FL03][FLV05d] dans un premier temps puis pour le Maximum de Vraisemblance(MV) [FLV04] dans un deuxième temps. Les évaluations des performances théoriques nous ont conduit à évaluer en Annexe-A les moments statistiques des produits et rapports de formes hermitiennes. En présence de fortes erreurs de modèle, il devient intéressant de connaître les performances conditionnées à une résolution des sources. Les derniers travaux de la thèse concernent l'établissement de la probabilité de résolution de deux sources en présence d'erreurs de modèles [FLV05e] puis l'évaluation des performances conditionnées à une résolution [FLV05c]. C'est ainsi qu'il a été nécessaire d'établir les moments d'ordre supérieurs d'une forme hermitienne [FLV05b], Annexe-B.

- Le deuxième objectif de la thèse est de raffiner les modèles de réception utilisés en prenant en compte les perturbations induites par la propagation et les matériels de réception. Dans une approche de type MUSIC, on a ainsi développé un algorithme unique indépendant de la nature physique de l'erreur [FL04][FBL04] : *Goniométries Auto-Calibrées*. Cette méthode a ensuite été appliquée au cas particulier de sources en champ proche où la direction d'arrivée est estimée conjointement à la distance de l'émetteur [BFL05]. Sachant que l'algorithme par Auto-Calibration ne prend pas forcément en compte tous les paramètres du modèle, le vecteur directeur multi-paramètres subit alors une erreur de modélisation et les performances de l'algorithme ne sont pas parfaites. C'est pourquoi dans [FBL05] les performances de l'algorithme par Auto-Calibration ont été évaluées en présence d'un seul paramètre de nuisance.

Cette thèse a contribué à la mise en place de collaborations entre l'équipe "*traitement du signal*" du laboratoire du **SATIE** et les universités de Chalmers en Suède, d'Ilmenau en Allemagne et d'Aalborg au Danemark. C'est ainsi que plusieurs papiers [FLV05d] [FLV04] [FLV05e] [FLV05c] [FLV05a] ont été rédigés avec Mats Viberg de l'université de Chalmers et qu'un papier [FBLH05] est en cours avec Martin Haardt de "*Ilmenau*". La collaboration avec "*Ilmenau*" ainsi que les papiers THALES/SATIE sont des contributions du département 2 du réseau d'excellence européen "*NEWCOM*" (Contrat 507527).

## 1.6 Publications et communications

### Reuves

- **J-1** P.Chevalier et A.Ferréol «*On the virtual array concept for the fourth-order direction finding problem*», IEEE trans on SP, vol 47, n°9, pp 2592-2595, septembre 1999 [CF99]
- **J-2** A.Ferréol et P.Chevalier «*On the behavior of current second and higher order blind source separation method for cyclostationnary sources*», IEEE trans on SP, vol 48, n°6, pp1712-1725, juin 2000 [FC00]
- **J-3** A.Ferréol, P.Chevalier et L.Albera «*Second order blind separation of first and second order cyclostationnary sources – Application to AM, FSK and CPFSK sources* », IEEE trans on SP, vol 52, n°4, pp845-861, avril 2004 [FCA04]
- **J-4** A.Ferréol, E.Boyer et P.Larzabal, «*Low cost algorithm for some bearing estimation in presence of separable nuisance parameters*», Electronic-Letters, IEE, vol 40, n°15, pp966-967, july 2004 [FBL04]
- **J-5** L.Albera, A.Ferréol, P.Comon et P.Chevalier «*Blind Identification of overdetermined and underde-*

- terminated mixtures of sources (BIOME)*» LAA (Linear Algebra Application), vol 391, nov 2004, pp3-30 [AFCC04a]
- **J-6** P.Chevalier, L.Albera, A.Ferréol et P.Comon, «*On the Virtual Array Concept for Higher Order Array processing*», IEEE trans on SP, vol 53, n°4, pp1254-1271, avril 2005 [CAFC05]
  - **J-7** A.Ferréol, L.Albera et P.Chevalier, «*Fourth Order Blind Identification of Underdetermined Mixtures of sources (FOBIUM)* », IEEE trans on SP, may 2005 [FAC05]
  - **J-8** E.Boyer, A.Ferréol et P.Larzabal «*Simple Robust Bearing-Range Source's Localization With Curved Wavefronts*», IEEE processing Letters, vol 12, n°6, pp457-460, june 2005 [BFL05]
  - **J-9** L.Albera, A.Ferréol, P.Chevalier et P.Comon «*ICAR, a tool for blind source separation using fourth order statistics only* », IEEE trans on SP, oct 2005, pp3633-3643 [AFCC05]
  - **J-10** P.Chevalier, A.Ferréol et L.Albera «*High resolution direction finding from higher order statistics : The 2Q-MUSIC algorithm* », IEEE trans on SP, accepted in 2005 [CFA05] .
  - **J-11** A.Ferréol, P.Larzabal et M.Viberg «*On the asymptotic performance analysis of subspace DOA estimation in the presence of modeling errors : Case of MUSIC* », IEEE trans on SP, accepted 2005 [FLV05d]
  - **J-12** P.Chevalier et A.Ferréol «*High Order Virtual array in the case of rectilign sources* », IEEE trans on SP, soumis en 2005 [CF05]
  - **J-13** A.Ferréol, E.Boyer, P.Larzabal et M.Haardt «*On the introduction of an extended coupling matrix for a 2D bearing estimation with an experimental RF system* », IEEE trans on propagation, soumis en 2005 [FBLH05]
  - **J-14** A.Ferréol, P.Larzabal et M.Viberg «*On the resolution probability of MUSIC in presence of modelling error* », IEEE trans on SP, to be submitted to [FLV05e]
  - **J-15** A.Ferréol, P.Larzabal et M.Viberg «*MUSIC performances conditionally to resolved sources in presence of modelling error* », IEEE trans on SP, to be submitted to [FLV05c]
  - **J-16** A.Ferréol, P.Larzabal et M.Viberg «*Asymptotic performances of Maximum Likelihood DOA estimation method with modeling errors*», IEEE trans on SP, to be submitted to [FLV05a]

## Communications dans des congrès avec actes

- **C-1** A.Ferréol et P.Larzabal «*Prise en compte du couplage électromagnétique dans une radio-goniométrie haute résolution en VHF*», JINA, Nice, Novembre 1992 [FL92]
- **C-2** A.Flieller, A.Ferréol, P.Larzabal, H.Clergeot «*Robust bearing estimation in the presence of direction-dependent modelling errors : identifiability and treatment* », ICASSP 1994 [FFLC94]
- **C-3** P.Chevalier, G.Benoit, A.Ferréol «*Direction finding after blind identification of sources steering vectors : The blind-maxcor and blind-MUSIC methods*», EUSIPCO, Trieste, pp 2097-2100, 1996 [CBF96]
- **C-4** P.Chevalier, A.Ferréol, JP.Denis «*New geometrical results about 4-th order direction finding methods performances*», EUSIPCO, Trieste, pp923-926, 1996 [CFD96]
- **C-5** J.Grouffaud, A.Ferréol, P.Larzabal et H.Clergeot «*Passive identification of ionospheric channel*», Proceeding of EUSIPCO, Trieste, 1996 [GFLC96]
- **C-6** A.Ferréol et P.Chevalier «*Higher order blind source separation using the cyclostationarity property of the signals*», ICASSP Munich, Vol 5, pp4061-4064, 1997 [FC97a]

- **C-7** J.Grouffaud, A.Ferréol, P.Larzabal et H.Clergeot, « *A maximum likelihood approach for the passive identification of non stationary multi-paths channel*», Proceeding of ICASSP 1997, Vol 5, pp. 3585-3588, Munich, Germany, 1997 [GFLC97b]
- **C-8** A.Ferréol et P.Chevalier « *On the fourth-order cumulants estimation for the HO blind separation of cyclostationary sources*», ICASSP, Seattle, vol 4, pp 2313-2316, 1998 [FC98]
- **C-9** M.Chenu-Tournier, A.Ferréol, P.Larzabal, « *Low complexity blind space-time identification of propagation parameters*», ICASSP, Phoenix, 1999, pp2873-2876 [CTFL99]
- **C-10** A.Ferréol, M.Chenu-Tournier et P.Larzabal « *Low complexity, passive spatio-temporal identification of multi-path channel*», PSIP, Paris, janvier 1999, pp27-32 [FCTL99]
- **C-11** A.Ferréol et M.Chenu-Tournier « *Space-frequency direction finding in wide-band and multi-path contexts*», ICASSP, Istanbul, Vol 5, pp 3113-3116, 2000 [FCT00]
- **C-12** A.Ferréol et M.Chenu-Tournier « *DOA estimation after blind identification of subspace channel vectors in multi-path context* », ICASSP, Orlando, mai 2002 [FCT02]
- **C-13** P.Chevalier, A.Ferréol et L.Albera « *On the behavior of current second order blind source separation methods for first and second order cyclostationary sources - application to CPFSK sources* », ICASSP, Orlando, mai 2002 [CFA02]
- **C-14** A.Ferréol, P.Chevalier et L.Albera « *Higher order blind separation of non zero-mean cyclostationary sources* », EUSIPCO, Toulouse, septembre 2002, pp 103-106 [FCA02]
- **C-15** A.Ferréol, L.Albera et P.Chevalier « *Fourth order Blind identification of underdetermined mixtures of sources (FOBIUM)* », ICASSP, Hong-Kong, avril 2003, pp 41-44 [FAC03]
- **C-16** L.Albera, A.Ferréol, P.Comon et P.Chevalier « *Sixth order blind identification of undetermined mixtures (SIRBI) of sources*», ICA2003, Nara (Japon), avril 2003, pp 909-914 [AFCC03b]
- **C-17** L.Albera, P.Comon, P.Chevalier et A.Ferréol « *Blind identification of undetermined mixtures based on the hexacovariance* », ICASSP, Montréal, mai 2004 [ACCF04]
- **C-18** L.Albera, A.Ferréol, P.Chevalier et P.Comon « *ICAR : Independent Component Analysis using Redundancies* », ISCAS, Vancouver, mai 2004 [AFCC04b]
- **C-19** A.Ferréol, JL.Rogier, G.Multedo « *Application des méthodes à haute résolution sur un réseau d'antennes perturbées par le couplage*», GRETSI, Juan les pins, pp 665-668, septembre 1991 [FRM91]
- **C-20** A.Ferréol et P.Larzabal « *Un algorithme non itératif pour la localisation de sources avec des erreurs de modèle dépendant de leur direction* », GRETSI, Juan les pins, septembre 1993, pp 237-240 [FL93]
- **C-21** A.Ferréol « *Goniométrie cyclique large bande par focalisation* », GRETSI, Grenoble, pp 87-91, septembre 1997 [Fer97]
- **C-22** A.Ferréol et P.Chevalier « *Limites des estimateurs classiques de cumulants d'ordre quatre pour la séparation aveugle de sources cyclo-stationnaires* », GRETSI, Grenoble, pp 19-22, 1997 [FC97b]
- **C-23** J.Grouffaud, A.Ferréol, P.Larzabal, H.Clergeot « *Estimation des paramètres spatio-temporels d'un canal de propagation à trajets multiples* », GRETSI, Grenoble, 1997, pp 1319-1322 [GFLC97a]
- **C-24** A.Ferréol « *Mise en œuvre d'une goniométrie spatio-fréquentielle large bande*», GRETSI, Vannes, pp 547-550, septembre 1999 [Fer99]
- **C-25** A.Ferréol « *Goniométrie multi-sources avec un système de réception deux voies par des techniques à haute résolution*», GRETSI, Toulouse, 2001, pp257-260 [Fer01]

- **C-26** L.Albera, A.Ferréol, P.Chevalier et P.Comon « *ICAR, un algorithme d'ICA à convergence rapide, robuste au bruit* », GRETSI, Paris, 2003 [AFCC03a]
- **C-27** P.Chevalier, A.Ferréol et L.Albera « *Méthodologie générale pour la séparation aveugle de sources cyclostationnaires arbitraires-Application à l'écoute passive des radiocommunications* », GRETSI, Paris, 2003 [CFA03]
- **C-28** A.Ferréol, P.Larzabal et M.Viberg « *A new expression of the asymptotic performances of maximum Likelihood DOA estimation method with modeling errors* », EUSIPCO, Vienne, septembre 2004 [FLV04]
- **C-29** A.Ferréol, E.Boyer et P.Larzabal « *Asymptotic performance for subspace bearing methods with separable nuisance parameters in presence of modeling errors* », ICASSP, Philadelphie, mars 2005 [FBL05]
- **C-30** A.Ferréol et P.Larzabal « *Etude analytique de l'impact des erreurs de calibration sur les performances d'estimateurs de direction d'arrivées : cas de la méthode MUSIC* », GRETSI, Paris, 2003 [FL03]

## Brevet

- **B-1** A.Ferréol et P.Larzabal « *Procédé de goniométrie multi-paramètres par séparation de l'incidence et des paramètres de nuisances* » REF : FR 04.07007, juillet 2004 [FL04]

## Chapitre 2

# Modélisations physiques et goniomètres correspondants

### 2.1 Préambule

Il est supposé classiquement que le réseau de capteurs reçoit les sources avec des capteurs identiques de gain  $G(\theta)$ , sensible à la même polarisation, des récepteurs et câbles identiques et que le canal de propagation donnent des sources ponctuelles, Bande-Etendue à la fréquence porteuse  $f_0$ , sur un front d'onde plan en champ lointain. On note par  $\mathbf{a}(\theta)$  la réponse du réseau à une source d'incidence  $\theta$  lorsque ces hypothèses sont toutes vérifiées. L'objectif de ce chapitre est de donner une modélisation unique de la réponse du réseau lorsqu'au moins l'une des hypothèses n'est pas vérifiée puis d'appliquer une méthode de goniométrie adaptée. On notera  $\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta})$  la réponse modélisée du réseau où  $\boldsymbol{\eta}$  est un vecteur de nuisance paramétrant l'écart avec le vecteur  $\mathbf{a}(\theta)$ .

Sur la figure 2.1, la source émet un signal  $s(t)$  qui se propage à la vitesse  $c$  dans un milieu homogène suivant une sphère centrée sur sa position "S". Le front d'onde est l'ensemble des points "M" où les signaux  $x(t)=s(t-\tau)$  reçus sont synchrones. Le retard  $\tau$  de propagation vérifie alors  $\tau = \frac{\|\overrightarrow{\mathbf{SM}}\|_F}{c}$ . Le vecteur d'onde  $\mathbf{k}(\theta)$  est un vecteur normé colinéaire au vecteur  $\overrightarrow{\mathbf{SM}}$  passant par le point "M" du capteur et où  $\theta$  est l'incidence (ou la direction d'arrivée) de la source sur le capteur. En hypothèse de front d'onde plan (où  $\|\mathbf{r}\|_F = \|\overrightarrow{\mathbf{OM}}\|_F \ll \|\overrightarrow{\mathbf{OS}}\|_F$ ) la distance  $D = \|\overrightarrow{\mathbf{OS}}\|_F$  vérifie :  $\|\overrightarrow{\mathbf{SM}}\|_F = D - \mathbf{k}(\theta)^H \mathbf{r}$ . Lorsque le signal émis est bande étroite autour d'une fréquence porteuse  $f_0$ , l'expression du signal  $x(t)$  est approchée par  $x(t)=s(t) \exp(-j2\pi f_0 \tau)$ . En ajoutant l'hypothèse du front d'onde plan ce signal devient :  $x(t)=s(t) \exp(j2\pi/\lambda_0 \mathbf{k}(\theta)^H \mathbf{r}) \exp(j\varphi)$  où  $\lambda_0 = c/f_0$  est la longueur d'onde et  $\varphi = -2\pi/\lambda_0 D$ .

Dans un réseau de  $N$  capteurs identiques de gain  $G(\theta)$  où le  $n^{\text{ième}}$  capteur est à la position  $\mathbf{r}_n$  avec un gain  $G(\theta)$ , le signal en sortie de ce capteur s'écrit alors  $x_n(t)=G(\theta) s(t) \exp(j2\pi/\lambda_0 \mathbf{k}(\theta)^H \mathbf{r}_n) \exp(j\varphi)$ . Ainsi, le signal multi-voies  $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & \cdots & x_N(t) \end{bmatrix}^T$  reçu en sortie de ce réseau vérifie :

$$\mathbf{x}(t) = G(\theta) \exp(j\varphi) s(t) \mathbf{a}(\theta) \text{ avec } \mathbf{a}(\theta) = \begin{bmatrix} \exp(j2\pi/\lambda_0 \mathbf{k}(\theta)^H \mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ \exp(j2\pi/\lambda_0 \mathbf{k}(\theta)^H \mathbf{r}_N) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

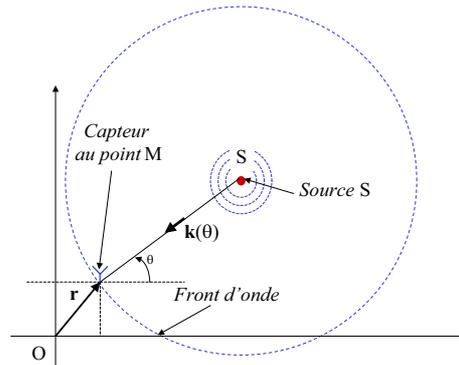


FIG. 2.1 – Propagation d'une onde du point "S" de la source vers le point "M" du capteur

où  $\mathbf{a}(\theta)$  est le vecteur directeur théorique lorsque les hypothèses bande étroite et front d'onde plan, sont vérifiées. En présence de  $M$  sources bruitées d'incidence  $\theta_m$  ( $1 \leq m \leq M$ ), le vecteur  $\mathbf{x}(t)$  s'écrit :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{m=1}^M \tilde{\mathbf{a}}(\theta_m) s_m(t) + \mathbf{n}(t) \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{n}(t)$  est le vecteur bruit,  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta)$  la réponse du réseau de capteur (ou vecteur directeur) à une source d'incidence  $\theta$  et  $s_m(t)$  le signal émis par la  $m^{\text{ième}}$  source. Les vecteurs directeurs théorique  $\mathbf{a}(\theta)$  et réel  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta)$  sont différents dans un système de goniométrie expérimental. Les erreurs de modèle se classent dans les deux familles suivantes :

- Modélisations relatives au réseau de capteurs : couplage, récepteurs, longueur de câbles, ...
- Modélisations relatives au canal de propagation : champ proche, large bande, sources diffuses,...

Le vecteur directeur distordu  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta)$  dépend non seulement de la direction d'arrivée  $\theta$  mais aussi d'un vecteur de nuisance  $\boldsymbol{\eta}$  tel que :

$$\tilde{\mathbf{a}}(\theta) = \mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta})$$

Les paramètres du vecteur  $\boldsymbol{\eta}$  de nuisance peuvent tenir compte de la largeur de bande, des coefficients de couplage, de la largeur du cône de diffusion ou encore de la distance source-capteur. Les paragraphes suivants donnent pour différentes situations une modélisation unique du vecteur  $\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta})$  sous la forme  $\mathbf{U}(\theta) \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\eta})$ .

## 2.2 Modélisations relatives au réseau de capteurs

### 2.2.1 Erreur d'appairage des récepteurs ou problème de câbles

La figure 2.2, montre que l'onde émise par une source est tout d'abord captée par une antenne puis passe au travers d'un récepteur dont l'objectif est de régler le niveau du signal ainsi que la fréquence porteuse  $f_0$ . Le signal transite ensuite dans un câble avant d'atteindre un numériseur à l'entrée de la partie traitement du signal.

Un système multi-voies est composé de récepteurs et de câbles difficilement identiques car constituent les composants analogiques. Les différences proviennent d'une évolution divergente en température ainsi que de composants dont les caractéristiques sont difficilement reproductibles. En prenant la première voie

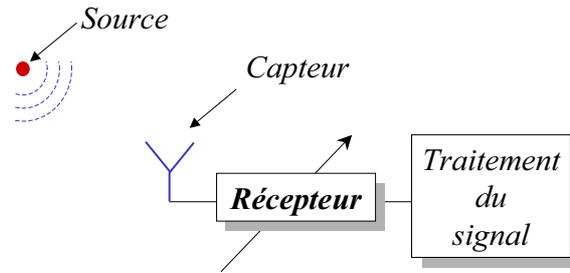


FIG. 2.2 – Voie de réception d'un capteur

comme référence, le vecteur directeur réel s'écrit alors :

$$\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} a_1(\theta) \\ \rho_2 a_2(\theta) \\ \vdots \\ \rho_N a_N(\theta) \end{bmatrix} \quad \text{où } \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_N \end{bmatrix} \quad \text{et } \mathbf{a}(\theta) = \begin{bmatrix} a_1(\theta) \\ \vdots \\ a_N(\theta) \end{bmatrix}$$

où le coefficient  $\rho_n$  représente la distorsion en gain et phase du  $n^{\text{ième}}$  récepteur par rapport au premier. Dans [FW88], les auteurs proposent un algorithme itératif estimant conjointement le vecteur de paramètres  $\boldsymbol{\eta}$  avec les incidences  $\theta_1, \dots, \theta_M$  de chacune des sources. L'algorithme peut converger lorsque le nombre de sources vérifie  $M > 1$ . Les paramètres  $\theta$  et  $\boldsymbol{\eta}$  sont séparables de la façon suivante dans le vecteur  $\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta})$  :

$$\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{U}(\theta) \boldsymbol{\eta} \quad \text{avec } \mathbf{U}(\theta) = \text{diag}(\mathbf{a}(\theta)) \quad (2.3)$$

La modélisation de l'expression (2.3) est utilisée dans [FW88].

## 2.2.2 Erreur de position des capteurs

La position des capteurs, caractérisée par le vecteur  $\mathbf{r}$  de la figure 2.1, n'est parfois connue qu'avec une certaine incertitude. Les capteurs ou hydrophones disposés sur une flûte derrière un bateau en acoustique sous-marine ont des positions non précises qui dépendent de la vitesse du bateau ainsi que de la rigidité de la flûte. Dans un réseau à  $N$  capteurs où la position théorique du  $n^{\text{ième}}$  capteur vaut  $\mathbf{r}_n$  et sa position réelle  $\tilde{\mathbf{r}}_n$ , la  $n^{\text{ième}}$  composante des vecteurs  $\mathbf{a}(\theta)$  et  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta)$  s'écrit d'après (2.1) :

$$a_n(\theta) = \exp(j2\pi/\lambda_0 \mathbf{k}(\theta)^H \mathbf{r}_n) \quad \text{et} \quad \tilde{a}_n(\theta) = \exp(j2\pi/\lambda_0 \mathbf{k}(\theta)^H \tilde{\mathbf{r}}_n) \quad (2.4)$$

Le vecteur  $\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta})$  de composante  $\tilde{a}_n(\theta)$  s'écrit alors :

$$\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{U}(\theta) \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\eta}) \quad \text{avec } \mathbf{U}(\theta) = \text{diag}(\mathbf{a}(\theta)) \quad (2.5)$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} \exp(j2\pi/\lambda_0 \mathbf{k}(\theta)^H \Delta \mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ \exp(j2\pi/\lambda_0 \mathbf{k}(\theta)^H \Delta \mathbf{r}_N) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{r}_N \end{bmatrix}$$

où  $\Delta \mathbf{r}_n = \tilde{\mathbf{r}}_n - \mathbf{r}_n$ . Beaucoup de méthodes de goniométrie ont envisagé de prendre en compte les erreurs de position des capteurs comme en particulier la méthode du propagateur [MB90].

### 2.2.3 Polarisation

Dans le domaine des signaux radio-électriques, les sources sont émises avec une polarisation dépendante de l'antenne d'émission. La figure 1.7 représente le cas d'un émetteur (téléphone portable) ayant une antenne de type monopôle dont la polarisation transmise est rectiligne. La polarisation émise se projète dans le plan d'onde qui est perpendiculaire au vecteur d'onde  $\mathbf{k}(\theta)$ . Les paramètres du vecteur de polarisation sont alors définis dans un repère du plan d'onde comme celui des composantes horizontale et verticale. Les capteurs du réseau antennaire reçoivent les sources avec une phase et une amplitude dépendant non seulement de leurs incidences mais aussi des deux composantes de la polarisation. En présence d'une source polarisée, bande étroite et émise en champ lointain le vecteur  $\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta})$  s'écrit :

$$\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\Phi}) = \mathbf{p}(\theta, \boldsymbol{\Phi}) = P_H \mathbf{a}^{(H)}(\theta) + P_V \mathbf{a}^{(V)}(\theta) = \mathbf{U}(\theta) \boldsymbol{\eta} \quad (2.6)$$

$$\text{où } \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} P_H \\ P_V \end{bmatrix} \quad \text{et } \mathbf{U}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(H)}(\theta) & \mathbf{a}^{(V)}(\theta) \end{bmatrix}$$

où la matrice  $\mathbf{U}(\theta)$  est composée des réponses  $\mathbf{a}^{(H)}(\theta)$  et  $\mathbf{a}^{(V)}(\theta)$  du réseau de capteurs aux deux composantes de la polarisation  $P_H$  et  $P_V$ . Les vecteurs  $\mathbf{a}^{(H)}(\theta)$  et  $\mathbf{a}^{(V)}(\theta)$  s'écrivent de la manière suivante en fonction des composantes  $a_n(\theta)$  du vecteur  $\mathbf{a}(\theta)$  :

$$\mathbf{a}^{(H)}(\theta) = \begin{bmatrix} G_1^{(H)}(\theta) a_1(\theta) \\ \vdots \\ G_N^{(H)}(\theta) a_N(\theta) \end{bmatrix} \quad \text{et } \mathbf{a}^{(V)}(\theta) = \begin{bmatrix} G_1^{(V)}(\theta) a_1(\theta) \\ \vdots \\ G_N^{(V)}(\theta) a_N(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

où  $G_n^{(H)}(\theta)$  et  $G_n^{(V)}(\theta)$  sont les gains du  $n^{\text{ième}}$  capteur suivant respectivement les polarisations horizontale et verticale car les antennes sont supposées de nature différente. L'expression (2.6) peut se réécrire :

$$\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\Phi}) = \mathbf{p}(\theta, \boldsymbol{\Phi}) = \begin{bmatrix} G_1(\theta, \boldsymbol{\Phi}) a_1(\theta) \\ \vdots \\ G_N(\theta, \boldsymbol{\Phi}) a_N(\theta) \end{bmatrix} \quad \text{où } G_n(\theta, \boldsymbol{\Phi}) = P_H G_n^{(H)}(\theta) + P_V G_n^{(V)}(\theta) \quad (2.8)$$

Les gains  $G_n^{(H)}(\theta)$  et  $G_n^{(V)}(\theta)$  peuvent dépendre de l'indice  $n$  du capteur lorsque les capteurs sont de nature différente : Mélange de patches et de dipôles, réseau de dipôles orientés différemment (Antennes colocalisées) et etc.... Les méthodes de goniométrie supposent généralement que les capteurs du réseau sont sensibles à la même polarisation. La méthode de Ferrara & Parks [FP83] adapte l'algorithme MUSIC au cas de sources reçues en diversité de polarisation.

### 2.2.4 Erreur de couplage dans un réseau de capteurs

Le couplage dans un réseau de capteurs provient soit du rayonnement entre les capteurs du réseau comme illustré sur la figure 2.3 (Couplage mutuel), soit du rayonnement de la structure porteuse du réseau sur les capteurs : figure 2.4.

La figure 2.3 donne un exemple de *Couplage mutuel* : le signal reçu par un des capteurs du réseau est perturbé par celui reçu sur les autres capteurs. La figure 2.4 montre le cas d'un couplage entre une structure (mât porteur) et un des capteurs du réseau. Une importante bibliographie s'intéresse au couplage mutuel dans un réseau de capteurs [AFW89][YLU89][HW90][SH90][Sva01]. Dans les papiers

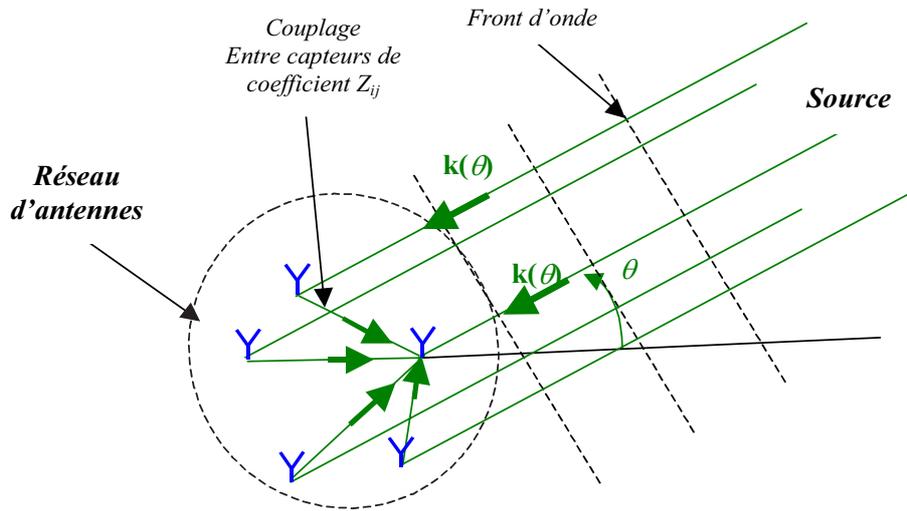


FIG. 2.3 – Couplage mutuel : Couplage entre les capteurs d'un réseau

[YLU89][HW90][SH90], la méthode MUSIC et la technique de décorrélation par lissage spatial sont adaptées à une modélisation du couplage sur un réseau linéaire équi-espacé. Toutefois, ces papiers ne traitent que du *couplage mutuel* sans prendre en compte le couplage du aux structures porteuses comme explicité figure 2.4 ou sans tenir compte de l'influence de la polarisation dans la modélisation du couplage mutuel. Nous proposons ici de modéliser ces deux effets qui n'ont pas été traités dans la littérature [FBLH05] à notre connaissance.

On considère un réseau de  $N$  antennes avec  $L$  éléments rayonnants externes. La figure 2.4 donne l'exemple d'un réseau circulaire avec  $N = 5$  dipôles et  $L = 6$  éléments rayonnants externes. Une image de l'antenne réelle est donnée figure 1.4. Dans cet exemple, les éléments rayonnants externes sont composés d'un mât porteur et de 5 bras horizontaux. Cette configuration induit un couplage mutuel entre les  $N$  antennes du réseau et un couplage de ces antennes avec les  $L$  éléments de la structure du réseau. Ces  $L$  éléments métalliques se comportent comme des antennes de gain  $G_n^s(\theta, \Phi)$ .

La figure 2.5 montre l'effet du couplage entre deux antennes ayant pour gains respectifs  $G_n(\theta, \Phi)$ ,  $1 \leq n \leq N$  et  $G_m(\theta, \Phi)$ ,  $1 \leq m \leq N$  ( $m \neq n$ ) (ou  $G_m^s(\theta, \Phi)$ ,  $1 \leq m \leq L$ ) suivant qu'il s'agit du couplage mutuel ou du couplage avec la structure du réseau. La source d'incidence  $\theta$  induit sur la charge d'impédance  $Z_m$  de la première antenne un courant  $I_m(t)$  qui produit un nouveau champ électrique qui se propage vers la deuxième antenne avec une atténuation dépendante de la distance entre les deux éléments. Ainsi, l'expression du signal  $x_n(t)$  en sortie de l'antenne perturbée par la présence d'un seul élément rayonnant s'écrit de la façon suivante pour une source de signal  $s(t)$  :

$$x_n(t) = \tilde{a}_n(\theta, \Phi) s(t) \quad \text{avec} \quad \tilde{a}_n(\theta, \Phi) = Z_n p_n(\theta, \Phi) + C p_m(\theta, \Phi) \quad (2.9)$$

où  $\tilde{a}_n(\theta, \Phi)$  est la réponse du  $n^{\text{ième}}$  capteur à une source d'incidence  $\theta$  et de polarisation  $\Phi$  en présence du couplage,  $p_n(\theta, \Phi) = G_n(\theta, \Phi) a_n(\theta, \Phi)$  est la  $n^{\text{ième}}$  composante du vecteur  $\mathbf{p}(\theta, \Phi)$  défini dans (2.8),  $C$  est le coefficient de couplage et  $Z_n$  l'impédance de charge de la  $n^{\text{ième}}$  antenne. Plus généralement, en prenant en compte les couplages avec les  $(N - 1)$  autres antennes ainsi que les  $L$  éléments rayonnants, la

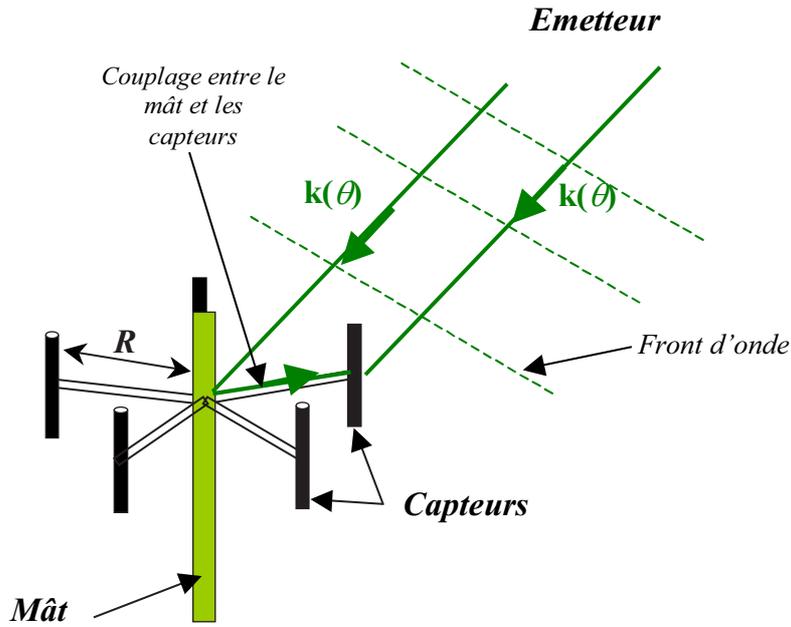


FIG. 2.4 – Couplage avec une structure(mât)

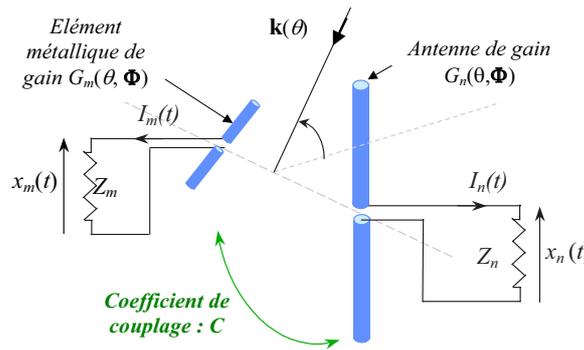


FIG. 2.5 – Couplage entre deux antennes

réponse du  $n^{ième}$  capteur à une source de direction  $\theta$  et de polarisation  $\Phi$  s'écrit selon (2.9) :

$$\begin{aligned}
 x_n(t) &= \tilde{a}_n(\theta, \Phi) s(t) & (2.10) \\
 \tilde{a}_n(\theta, \Phi) &= [Z_{n,1} \ \cdots \ Z_{n,N}] \mathbf{p}(\theta, \Phi) + [Z_{n,1}^s \ \cdots \ Z_{n,L}^s] \mathbf{p}_s(\theta, \Phi) \\
 \mathbf{p}_s(\theta, \Phi) &= \begin{bmatrix} G_1^s(\theta, \Phi) a_1^s(\theta) \\ \vdots \\ G_L^s(\theta, \Phi) a_L^s(\theta) \end{bmatrix} = P_H \mathbf{a}_s^{(H)}(\theta) + P_V \mathbf{a}_s^{(V)}(\theta) \\
 \mathbf{a}_s^{(H)}(\theta) &= \begin{bmatrix} G_1^{(s,H)}(\theta) a_1^s(\theta) \\ \vdots \\ G_L^{(s,H)}(\theta) a_L^s(\theta) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_s^{(V)}(\theta) = \begin{bmatrix} G_1^{(s,V)}(\theta) a_1^s(\theta) \\ \vdots \\ G_L^{(s,V)}(\theta) a_L^s(\theta) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

où  $a_i^s(\theta) = \exp(j2\pi/\lambda_0 \mathbf{k}(\theta)^H \mathbf{r}_i^s)$  et  $\mathbf{r}_i^s$  est le vecteur position du  $i^{ième}$  élément rayonnant de la structure du réseau où  $G_n^s(\theta, \Phi) = P_H G_n^{(s,H)}(\theta) + P_V G_n^{(s,V)}(\theta)$ . Les paramètres  $Z_{n,i}$  ( $i \leq N$ ) sont les coefficients

de couplage mutuel entre les  $n^{\text{ième}}$  et  $i^{\text{ième}}$  antennes du réseau et les paramètres  $Z_{n,i}^s$  ( $1 \leq i \leq L$ ) les coefficients de couplage entre la  $n^{\text{ième}}$  antenne et le  $i^{\text{ième}}$  élément rayonnant de la structure. L'expression du vecteur directeur  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta, \Phi) = \left[ \tilde{a}_1(\theta, \Phi) \ \dots \ \tilde{a}_N(\theta, \Phi) \right]^T$  prenant en compte tous les types de couplage vérifie d'après (2.10) :

$$\tilde{\mathbf{a}}(\theta, \Phi) = \underbrace{\begin{bmatrix} Z_{1,1} & \dots & Z_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N,1} & \dots & Z_{N,N} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}_M} \mathbf{p}(\theta, \Phi) + \underbrace{\begin{bmatrix} Z_{1,1}^s & \dots & Z_{1,L}^s \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N,1}^s & \dots & Z_{N,L}^s \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}_S} \mathbf{p}_s(\theta, \Phi) \quad (2.11)$$

où  $\mathbf{Z}_M$  et  $\mathbf{Z}_S$  sont respectivement les matrices de couplage mutuel et structure. Les coefficients  $Z_{n,n}$  correspondent aux impédances de charge des  $N$  antennes. L'expression (2.11) du vecteur  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta, \Phi)$  devient :

$$\tilde{\mathbf{a}}(\theta, \Phi) = \mathbf{Z} \mathbf{p}_g(\theta, \Phi) \quad \text{avec } \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_M & \mathbf{Z}_S \end{bmatrix} \quad \text{et } \mathbf{p}_g(\theta, \Phi) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(\theta, \Phi) \\ \mathbf{p}_s(\theta, \Phi) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Sans a priori sur le couplage, le vecteur des paramètres de nuisance s'écrit :

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \Phi \\ \text{vec}(\mathbf{Z}) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

D'après (2.8)(2.10), le vecteur  $\mathbf{p}_g(\theta, \Phi)$  s'écrit :

$$\mathbf{p}_g(\theta, \Phi) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_g^{(H)}(\theta) & \mathbf{p}_g^{(V)}(\theta) \end{bmatrix} \Phi \quad (2.14)$$

où  $\mathbf{p}_g^{(H)}(\theta) = \left[ \mathbf{a}^{(H)}(\theta)^T \ \mathbf{a}_s^{(H)}(\theta)^T \right]^T$  et  $\mathbf{p}_g^{(V)}(\theta) = \left[ \mathbf{a}^{(V)}(\theta)^T \ \mathbf{a}_s^{(V)}(\theta)^T \right]^T$ . D'après (2.12)(2.14)(2.13), le vecteur  $\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta})$  s'écrit :

$$\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta}) = \tilde{\mathbf{a}}(\theta, \Phi) = \mathbf{U}(\theta) f(\boldsymbol{\eta}) \quad (2.15)$$

$$\mathbf{U}(\theta) = \begin{bmatrix} \text{diag}(\mathbf{p}_g^{(H)}(\theta)) & \text{diag}(\mathbf{p}_g^{(V)}(\theta)) \end{bmatrix} \quad \text{et } f(\boldsymbol{\eta}) = \Phi \otimes \text{vect}(\mathbf{Z})$$

Le modèle de l'expression (2.15) ne fait aucune hypothèse sur la structure de la matrice de couplage  $\mathbf{Z}$  cependant dans de nombreux cas la symétrie du réseau permet de proposer un modèle structuré du couplage avec un nombre plus réduit de paramètres. Dans la suite de ce paragraphe cette modélisation structurée est développée pour l'exemple du réseau de la figure 1.4. Dans le cas du réseau expérimental de la figure 1.4, la matrice  $\mathbf{Z}_M$  des coefficients de couplage mutuel dépend uniquement des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  : La figure 2.6 montre que le coefficient  $\alpha$  est le couplage entre les  $n^{\text{ième}}$  et  $(n+1)^{\text{ième}}$  antennes et que  $\beta$  est celui entre les  $n^{\text{ième}}$  et  $(n+2)^{\text{ième}}$  antennes.

Selon figure 2.6, la matrice  $\mathbf{Z}_M$  s'écrit :

$$\mathbf{Z}_M = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta & \beta & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & 1 & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \beta & \beta & \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et } \text{vec}(\mathbf{Z}_M) = \mathbf{D}_M \boldsymbol{\eta}_M \quad \text{avec } \boldsymbol{\eta}_M = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{D}_M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Sachant que  $(\mathbf{AB}) \otimes \text{vect}(\mathbf{CD}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C})(\mathbf{B} \otimes \mathbf{D})$ , l'expression (2.15) se réduit à :

$$\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{U}(\theta) \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\eta}) \quad \text{avec } \mathbf{U}(\theta) = \left[ \text{diag}(\mathbf{p}_g^{(H)}(\theta)) \quad \text{diag}(\mathbf{p}_g^{(V)}(\theta)) \right] \quad (2.18)$$

$$\text{où } \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\eta}) = (\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{D})(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\eta}_{\text{reduit}}) \quad \text{avec } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_M \\ \mathbf{D}_S \end{bmatrix} \quad \text{et } \boldsymbol{\eta}_{\text{reduit}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_M \\ \boldsymbol{\eta}_S \end{bmatrix}$$

où  $\mathbf{I}_2$  est la matrice identité de dimension  $2 \times 2$ . Ainsi, en tenant compte des symétries d'un réseau de capteurs, les matrices de couplage se modélisent avec un nombre très réduit de paramètres de nuisance :  $\boldsymbol{\eta}_{\text{reduit}}$  contient 7 paramètres au lieu de 61 dans la matrice  $\mathbf{Z}$ . Cette réduction du nombre de paramètres peut être avantageusement utilisée dans une étape d'auto-calibration.

Dans la littérature, des techniques d'identification des coefficients de la matrice de couplage mutuel  $\mathbf{Z}_M$  sont proposées. En particulier dans [AFW89], une méthode de mesure électronique de ces coefficients au moyen d'un *analyseur de réseau* est décrite : Cette technique mesure, dans une chambre anéchoïde, la fonction de transfert entre deux antennes d'un réseau. Dans cette approche, les antennes doivent être capables de recevoir et de transmettre un signal. Toutefois, cette capacité n'est pas toujours vérifiée comme dans le cas d'antennes munies d'un circuit d'amplification. Une alternative consiste à donner une expression théorique de la matrice de couplage mutuel par la méthode des moments (MoM : Method of Moments) [Bal89][Rav00][GJ00]. Toutefois cette approche numérique nécessite une connaissance très précise de la forme du réseau d'antennes.

Pour l'instant, seule les références [FL92][FBLH05] proposent une technique permettant d'identifier des coefficients de couplage avec la structure du réseau. La technique consiste à estimer les coefficients de la matrice  $\mathbf{Z}$  ou du vecteur  $\boldsymbol{\eta}_{\text{reduit}}$  à partir d'une table de calibration contenant les mesures  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_k)$  pour un nombre  $K$  d'incidences où  $1 \leq k \leq K$ . Les vecteurs  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_k)$  sont mesurés suivant le processus de calibration de la figure 1.8. Dans les résultats suivants, les vecteurs  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_k)$  ont été acquis de façon expérimentale avec le réseau circulaire de la figure 1.4 pour  $K = 90$  incidences telles que  $\theta_i = 4(i - 1)$  degrés. La structure du réseau contient alors 5 bras et un mât porteur. La calibration est réalisée suivant la polarisation des dipôles verticaux du réseau de capteurs. Dans ces conditions, le vecteur expérimental  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta)$  est comparé avec les trois modèles suivants sur la figure 2.8 :

- Sans modèle de couplage (ZCM "*Zero Coupling Model*") :  $\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{a}(\theta)$
- Avec le couplage mutuel (MCM "*Mutual Coupling Model*") :  $\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{Z}_M \mathbf{a}(\theta)$
- Avec les couplage mutuel et structure (SECM "*Structured Extended Coupling Model*") en polarisation vertical :  $\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{Z}_M \mathbf{a}(\theta) + \mathbf{Z}_S \mathbf{a}_s^{(V)}(\theta)$ .

La comparaison entre le vecteur directeur réel  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta)$  et la modélisation  $\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta})$  est effectuée avec le coefficient de corrélation suivant :

$$c(\theta) = \frac{\left| \mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta})^H \tilde{\mathbf{a}}(\theta) \right|^2}{\left( \mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta})^H \mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta}) \right) \left( \tilde{\mathbf{a}}(\theta)^H \tilde{\mathbf{a}}(\theta) \right)} \quad (2.19)$$

où la fonction  $c(\theta)$  est normalisée telle que :  $0 \leq c(\theta) \leq 1$ . Le coefficient  $c(\theta)$  doit être proche de l'unité pour que le modèle  $\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta})$  soit correcte et si  $c(\theta) = 1$  alors  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta) = \mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta})$ . La figure 2.8 montre que le modèle le plus en adéquation est le SECM qui modélise conjointement le couplage mutuel et le couplage structure. Il vient ensuite le modèle avec le couplage mutuel puis le modèle sans couplage. Les figures

2.9-2.10 confirment les résultats de la figure 2.8 par la représentation respective de l'erreur en phase et de l'erreur d'amplitude (où  $a_n(\theta, \eta)$  et  $\tilde{a}_n(\theta)$  sont les  $n^{i\grave{e}me}$  composantes des vecteurs respectifs  $\mathbf{a}(\theta, \eta)$  et  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta)$ )

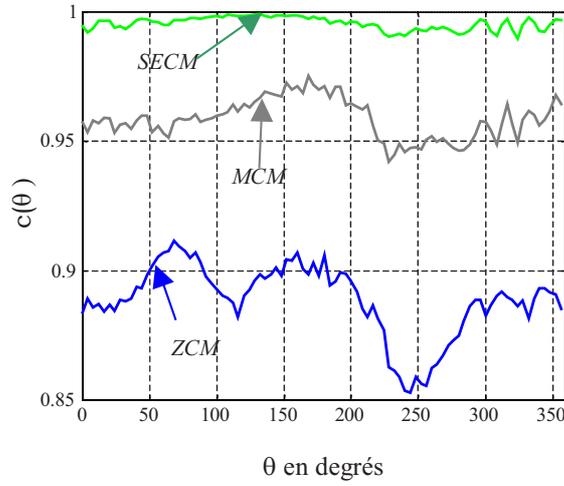


FIG. 2.8 – Fonction de corrélation  $c(\theta)$

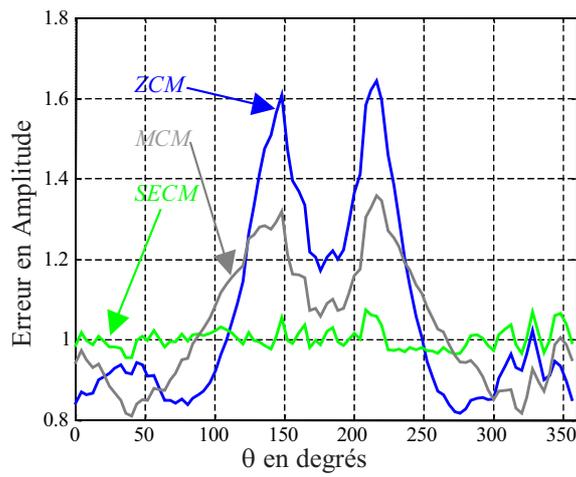


FIG. 2.9 – Erreur d'Amplitude en fonction de  $\theta$  : Amplitude de  $a_n(\theta, \eta) / \tilde{a}_n(\theta)$  pour  $n = 1$

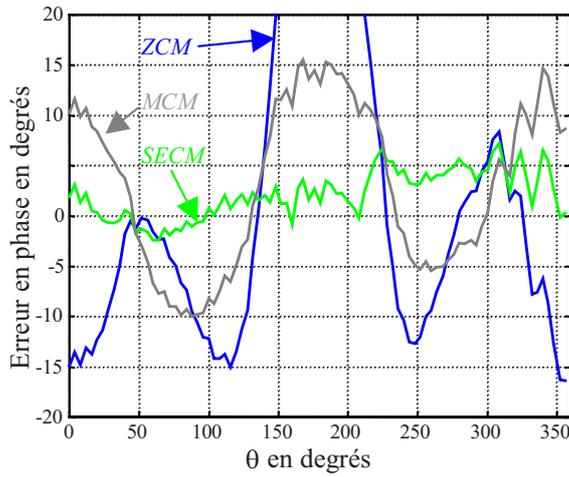


FIG. 2.10 – Erreur en phase en fonction de  $\theta$  : Phase de  $a_n(\theta, \eta) / \tilde{a}_n(\theta)$  pour  $n = 1$

## 2.3 Modélisations relatives au canal de propagation

### 2.3.1 Multi-trajets cohérents

La figure 2.11 montre qu'une source peut se propager suivant plusieurs trajets d'incidence  $\theta_m$  et que la réponse du réseau de capteurs dépend de ces incidences.

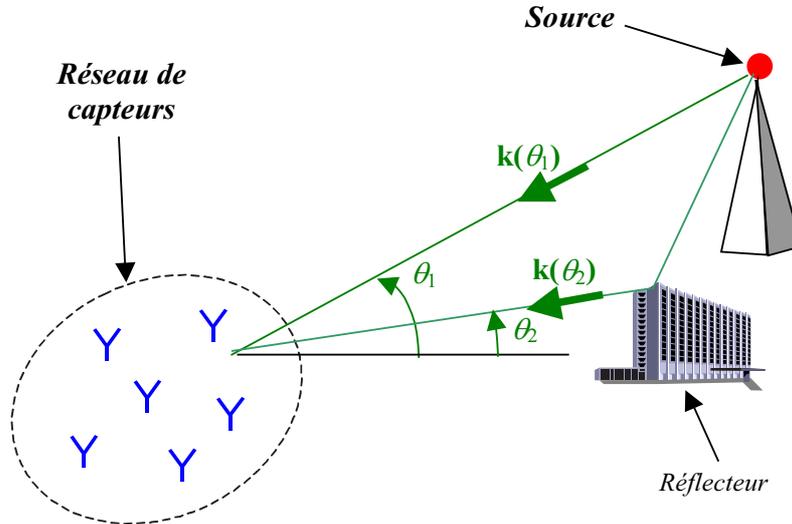


FIG. 2.11 – Canal de propagation en milieu urbain

En présence de  $M$  émetteurs se propageant suivant  $P_m$  multi-trajets, le modèle de l'équation (2.2) devient :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^{P_m} \rho_{mp} \mathbf{a}(\theta_{mp}) s_m(t - \tau_{mp}) + \mathbf{n}(t) \quad (2.20)$$

où  $s_m(t)$  est le signal émis par le  $m^{\text{ième}}$  émetteur et  $\rho_{mp}$ ,  $\theta_{mp}$ ,  $\tau_{mp}$  sont respectivement l'atténuation complexe, l'incidence et le retard du  $p^{\text{ième}}$  trajet du  $m^{\text{ième}}$  émetteur. Lorsque les trajets sont cohérents

les retards vérifient :  $\tau_m = \tau_{m1} = \dots = \tau_{mP_m}$  et l'expression (2.20) devient :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{m=1}^M \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_m, \boldsymbol{\eta}) s_m(t - \tau_m) + \mathbf{n}(t)$$

où

$$\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_m, \boldsymbol{\eta}_m) = \sum_{p=1}^{P_m} \rho_{mp} \mathbf{a}(\theta_{mp}), \quad \boldsymbol{\theta}_m = \begin{bmatrix} \theta_{m1} \\ \vdots \\ \theta_{mP_m} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\eta}_m = \begin{bmatrix} \rho_{m1} \\ \vdots \\ \rho_{mP_m} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Les paramètres de nuisance sont donc les amplitudes des différents multi-trajets et le vecteur  $\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_m, \boldsymbol{\eta}_m)$  est séparable suivant les paramètres  $\boldsymbol{\theta}_m$  et  $\boldsymbol{\eta}_m$  de la façon suivante :

$$\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_m, \boldsymbol{\eta}_m) = \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}_m) \boldsymbol{\eta}_m \quad \text{avec} \quad \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}_m) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta_{m1}) & \dots & \mathbf{a}(\theta_{mP_m}) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Le nombre  $P_m$  de multi-trajets cohérents fait partie des paramètres du modèle car est égal au nombre de composantes du vecteur  $\boldsymbol{\eta}_m$ .

### 2.3.2 Front d'onde non plan

Les signaux en sortie de capteurs installés sur le front d'onde d'une source sont synchrones. Le vecteur d'onde est perpendiculaire au front d'onde et donne le sens de la propagation. Sur la figure 2.12, une source est reçue par un réseau à deux capteurs sur un front d'onde courbe.

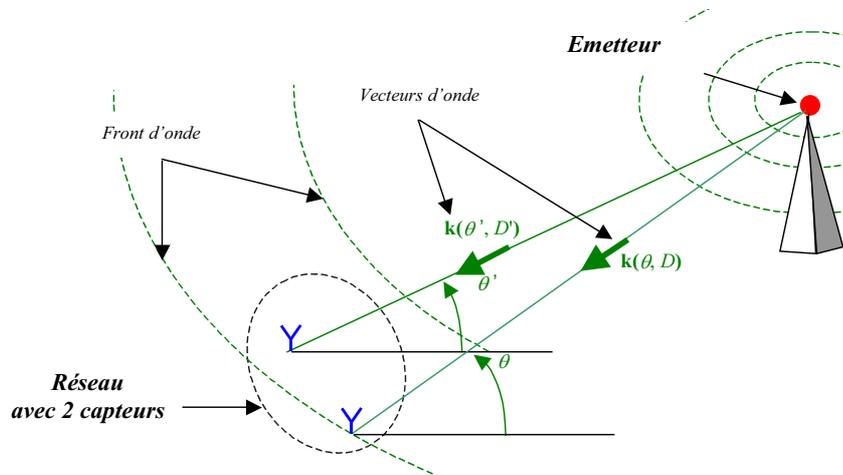


FIG. 2.12 – Front d'onde courbe

Sur la figure 2.12, le vecteur d'onde  $\mathbf{k}(\theta, D)$  dépend des paramètres incidence  $\theta$  et distance source-capteur  $D$ . Lorsque le front d'onde est courbe, les deux capteurs reçoivent la source sous des incidences  $\theta$  et  $\theta'$  et des distances  $D$  et  $D'$  différentes. En front d'onde plan, les deux capteurs reçoivent la source sous la même incidence  $\theta$  car sont éloignés de la source :  $1/D \rightarrow 0$ . Ainsi, lorsque le front d'onde est plan la réponse du réseau de capteurs dépend uniquement de l'incidence de la source alors que pour un front d'onde courbe cette réponse dépend de l'incidence  $\theta$  et de la distance  $D$  d'un capteur de référence du réseau. La figure 2.13 représente le vecteur d'onde  $\mathbf{k}_n(\theta, D)$  du  $n^{\text{ième}}$  capteur par rapport aux positions respectives  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{r}_n$  de la source et de ce capteur. D'après la figure 2.12, la réponse du  $n^{\text{ième}}$  capteur à

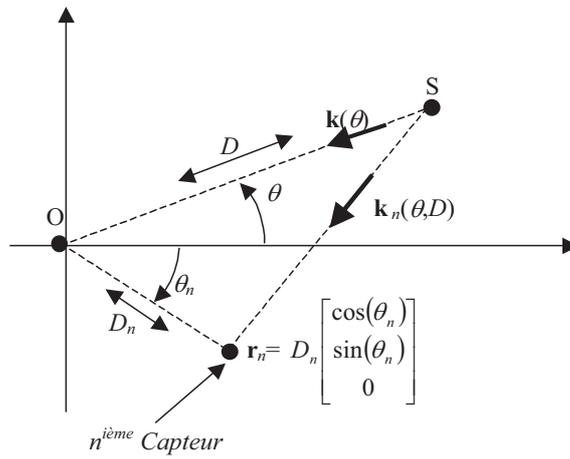


FIG. 2.13 – Front d'onde non plan

une source d'incidence  $\theta$  située à la distance  $D = \|\vec{\mathbf{SO}}\|_F$ , s'écrit en hypothèse bande étroite de la façon suivante :

$$\tilde{a}_n(\theta, D) = \frac{1}{\|\vec{\mathbf{SO}} + \mathbf{r}_n\|_F} \exp\left(-j2\pi/\lambda_0 \left(\|\vec{\mathbf{SO}} + \mathbf{r}_n\|_F\right)\right) \quad (2.23)$$

$$= \frac{\exp(-j\varphi)}{D\sqrt{\Psi_n(1/D)}} \exp\left(-j2\pi(D/\lambda_0) \left(\sqrt{\Psi_n(1/D)} - 1\right)\right)$$

$$\Psi_n(\eta) = 1 + \eta^2 \|\mathbf{r}_n\|_F^2 - 2\eta \mathbf{k}(\theta)^H \mathbf{r}_n \quad \text{et} \quad \varphi = 2\pi(D/\lambda_0) \quad (2.24)$$

où  $\lambda_0$  est la longueur d'onde de la source bande étroite. En factorisant le terme  $\exp(-j\varphi)/D$ , la réponse du réseau de capteur s'écrit alors :

$$\mathbf{a}(\theta, \eta = 1/D) = D \exp(j\varphi) \begin{bmatrix} \tilde{a}_1(\theta, D) \\ \vdots \\ \tilde{a}_N(\theta, D) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\exp(-j2\pi(\Phi_1(\eta)/\lambda_0))}{\sqrt{\Psi_1(\eta)}} \\ \vdots \\ \frac{\exp(-j2\pi(\Phi_N(\eta)/\lambda_0))}{\sqrt{\Psi_N(\eta)}} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$\Phi_n(\eta) = \frac{\sqrt{\Psi_n(\eta)} - 1}{\eta} \quad (2.26)$$

Contrairement aux exemples précédents de perturbations, le vecteur  $\mathbf{a}(\theta, \eta)$  n'est pas directement séparable suivant les paramètres  $\theta$  et  $\eta = 1/D$ . Pour ce faire, une solution est de réaliser un DL du vecteur  $\mathbf{a}(\theta, \eta)$  au voisinage de  $\eta = 1/D = 0$ . Au voisinage du champ lointain, l'expression du vecteur  $\mathbf{a}(\theta, \eta)$  devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\theta, \eta) &= \mathbf{a}(\theta, \eta = 0) + \sum_{p=1}^P \mathbf{a}^{(p)}(\theta, \eta = 0) \frac{\eta^p}{p!} + o(\|\eta\|^P) \\ &= \mathbf{U}(\theta) \varphi(\eta) + o(\|\eta\|^P) \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\text{avec } \mathbf{U}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta, 0) & \mathbf{a}^{(1)}(\theta, 0) & \dots & \mathbf{a}^{(P)}(\theta, 0) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi(\eta) = \begin{bmatrix} 1 \\ \eta \\ \vdots \\ \frac{\eta^P}{P!} \end{bmatrix}$$

où  $\mathbf{a}^{(p)}(\theta, \eta)$  est la dérivée  $p^{i\grave{e}me}$  de  $\mathbf{a}(\theta, \eta)$  en  $\eta$ . Lorsque l'ordre  $P$  du développement limité augmente, le modèle devient valable pour des sources plus proches. Les expressions (2.1) et (2.30) montrent que le vecteur directeur  $\mathbf{a}(\theta, 0) = \mathbf{a}(\theta)$  est celui du champ lointain. Les deux premières dérivées de la  $n^{i\grave{e}me}$  composante  $b_n(\theta, \eta) = \exp(-j2\pi(\Phi_n(\eta)/\lambda_0))/\sqrt{\Psi_n(\eta)}$  du vecteur  $\mathbf{a}(\theta, \eta)$  vérifient en  $\eta = 0$  :

$$\begin{aligned} b_n(\theta, 0) &= \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda_0} \mathbf{k}(\theta)^H \mathbf{r}_n\right) \\ b_n^{(1)}(\theta, 0) &= b_n(\theta, 0) \left( \mathbf{k}(\theta)^H \mathbf{r}_n - j\frac{\pi}{\lambda_0} \left( \|\mathbf{r}_n\|^2 - \left( \mathbf{k}(\theta)^H \mathbf{r}_n \right)^2 \right) \right) \\ b_n^{(2)}(\theta, 0) &= b_n(\theta, 0) \left[ -\|\mathbf{r}_n\|^2 + 3 \left( \mathbf{k}(\theta)^H \mathbf{r}_n \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - j\frac{4\pi}{\lambda_0} \left( \mathbf{k}(\theta)^H \mathbf{r}_n \right) \left( \|\mathbf{r}_n\|^2 - \left( \mathbf{k}(\theta)^H \mathbf{r}_n \right)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\pi}{\lambda_0} \mathbf{k}(\theta)^H \mathbf{r}_n \right)^2 \left( \|\mathbf{r}_n\|^2 + \left( \mathbf{k}(\theta)^H \mathbf{r}_n \right)^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

où la  $n^{i\grave{e}me}$  composante  $b_n^{(p)}(\theta, \eta)$  du vecteur  $\mathbf{a}^{(p)}(\theta, \eta)$  est la dérivée  $p^{i\grave{e}me}$  de  $b_n(\theta, \eta)$  en  $\eta$ . Les résultats de (2.28) ont été montrés dans [BFL05]. Lorsque la  $n^{i\grave{e}me}$  composante du vecteur  $\mathbf{a}(\theta, \eta)$  est approchée par  $\exp(-j2\pi(\Phi_n(\eta)/\lambda_0))$  car  $\|\vec{\mathbf{SO}} + \mathbf{r}_n\|_F \approx D$  à moyenne distance, les dérivées de  $b_n(\theta, \eta)$  vérifient :

$$\begin{aligned} b_n^{(0)}(\theta, \eta) &= b_n(\theta, \eta) = \exp(-j2\pi(\Phi_n(\eta)/\lambda_0)) \\ b_n^{(p)}(\theta, \eta) &= \sum_{i=0}^{p-1} C_{p-1}^i \left( -j\frac{2\pi}{\lambda_0} \Phi_n^{(p-i)}(\eta) \right) b_n^{(i)}(\theta, \eta) \end{aligned} \quad (2.29)$$

où  $\Phi_n^{(p)}(\eta)$  est la dérivée  $p^{i\grave{e}me}$  de  $\Phi_n(\eta)$  en  $\eta$  et  $C_n^p = n!/(p!(n-p)!)$ . En  $\eta = 0$  les dérivées  $\Phi_n^{(p)}(\eta = 0)$  et la  $n^{i\grave{e}me}$  composante  $b_n(\theta, \eta = 0)$  du vecteur  $\mathbf{a}(\theta, \eta)$  vérifient :

$$\begin{aligned} b_n(\theta, 0) &= \exp\left(j2\pi \left( \mathbf{k}(\theta)^H \mathbf{r}_n \right) / \lambda_0\right) \\ \Phi_n^{(0)}(0) &= -\mathbf{k}(\theta)^H \mathbf{r}_n \\ \Phi_n^{(1)}(0) &= \frac{\|\mathbf{r}_n\|^2 - \left( \mathbf{k}(\theta)^H \mathbf{r}_n \right)^2}{2} \\ \Phi_n^{(2p-1)}(0) &= -\frac{C_{2p}^p}{4p} g^{(p)}(0)^2 - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{C_{2p}^i}{4p} g^{(i)}(0)g^{(2p-i)}(0) \text{ et } \Phi_n^{(2p)}(0) = -\sum_{i=1}^p \frac{C_{2p+1}^i}{(4p+2)} g^{(i)}(0)g^{(2p-i+1)}(0) \end{aligned} \quad (2.30)$$

où  $g^{(p)}(0) = p\Phi_n^{(p-1)}(0)$ . Les équations (2.29) et (2.30) sont démontrées en Annexe-E.

### 2.3.3 Sources large Bande (LB)

D'un point de vu général, les capteurs reçoivent une source avec une phase dépendant du vecteur d'onde, de la position des capteurs et aussi des fréquences du signal source. En bande étroite, la réponse du capteur dépend uniquement de la fréquence centrale  $f_0$  de la source émise ou de la longueur d'onde  $\lambda_0 = c/f_0$ . En situation large bande (**LB**), le capteur reçoit une source dans une direction donnée suivant un continuum de fréquences  $f$  ou de longueurs d'ondes  $\lambda = c/f$ . Les méthodes de goniométrie supposent généralement que la source est bande étroite et que la réponse des capteurs ne dépend pas de la bande passante des sources. Ainsi, en présence de  $M$  sources large bande le modèle de l'équation (2.2) devient :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{K_m} \rho_{mk} \mathbf{a}(\theta_m, f_{mk}) s_m(t, f_{mk}) + \mathbf{n}(t) \quad (2.31)$$

où le signal de la  $m^{\text{ième}}$  source se décompose en  $K_m$  sources bande étroite de signal  $s_m(t, f_{mk})$ . Ainsi pour un signal de bande  $B$  centrée en  $f_0$ , le signal  $s_m(t, f_{mk})$  se modélise comme la sortie d'un filtre de bande passante et de fréquence centrale respectives  $B_k = B/K_m$  et  $f_k = f_0 + (k - K_m/2) B_k$  dont le signal d'entrée est  $s_m(t, f_{mk})$ . D'après (2.1) en hypothèse de front d'onde plan, le vecteur  $\mathbf{a}(\theta, f)$  s'écrit :

$$\mathbf{a}(\theta, f) = \begin{bmatrix} \exp(j2\pi(\mathbf{k}(\theta)^H \mathbf{r}_1)/\lambda) \\ \vdots \\ \exp(j2\pi(\mathbf{k}(\theta)^H \mathbf{r}_N)/\lambda) \end{bmatrix} \quad \text{où } \lambda = c/f \quad (2.32)$$

Les méthodes de goniométrie par focalisation, telles que celle de la référence [WK85], ont pour objectif de transformer le signal  $\mathbf{x}(t)$  en un signal bande étroite à une fréquence  $f_0$ . Dans une première étape, les techniques décomposent le signal  $\mathbf{x}(t)$  en un certain nombre de signaux bande étroite  $\mathbf{x}(t, f_k)$  pour ( $1 \leq k \leq K$ ) par un filtrage passe bande autour des fréquences  $f_k$ . Les signaux  $\mathbf{x}(t, f_k)$  subissent ensuite une transformation linéaire pour que les vecteurs directeurs des sources deviennent  $\mathbf{a}(\theta_m, f_0)$ . Les signaux transformés  $\mathbf{y}(t, f_k)$  sont ensuite intégrés en temps et fréquence dans une matrice de covariance (Focalisation) sur laquelle une méthode de goniométrie bande étroite est applicable. Les algorithmes de Focalisation sont itératifs car la transformation linéaire des signaux  $\mathbf{x}(t, f_k)$  nécessite une connaissance a priori des incidences.

La relation entre les signaux  $s_m(t, f_{mk})$  et  $s_m(t)$ , se modélise par le filtre FIR suivant :

$$s_m(t, f_{mk}) = \mathbf{h}_{mk}^H \mathbf{s}_m(t) \quad \text{où } \mathbf{s}_m(t) = \begin{bmatrix} s_m(t) \\ \vdots \\ s_m(t - L + 1) \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

où  $\mathbf{h}_{mk}$  est un vecteur composé des  $L$  coefficients FIR d'un filtre de bande  $B_k$  et de fréquence centrale  $f_{mk}$ . En introduisant l'équation (2.33) dans (2.31), le modèle du signal  $\mathbf{x}(t)$  devient :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{m=1}^M \mathbf{H}(\theta_m, \mathbf{f}_m, \mathbf{h}_m) \mathbf{s}_m(t) + \mathbf{n}(t) \quad (2.34)$$

$$\mathbf{H}(\theta_m, \mathbf{f}_m, \mathbf{h}_m) = \sum_{k=1}^{K_m} \rho_{mk} \mathbf{a}(\theta_m, f_{mk}) \mathbf{h}_{mk}^H \quad \text{avec } \mathbf{f}_m = \begin{bmatrix} f_{m1} \\ \vdots \\ f_{mK_m} \end{bmatrix} \quad \text{et } \mathbf{h}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{m1} \\ \vdots \\ \mathbf{h}_{mK_m} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Le rang de la matrice  $\mathbf{H}(\theta_m, \mathbf{f}_m, \mathbf{h}_m)$  de dimension  $N \times L$  vaut  $K_m \leq \min\{N, L\}$ . Dans ces conditions les vecteurs propres de la matrice  $\mathbf{H}(\theta_m, \mathbf{f}_m, \mathbf{h}_m) \mathbf{H}(\theta_m, \mathbf{f}_m, \mathbf{h}_m)^H$  associés aux  $K_m$  plus fortes valeurs propres vérifient :

$$\mathbf{a}(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{mk}) = \mathbf{H}(\theta_m, \mathbf{f}_m, \mathbf{h}_m) \boldsymbol{\alpha}_{mk} \quad \text{avec } \boldsymbol{\eta}_{mk} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_m \\ \mathbf{h}_{m1}^H \boldsymbol{\alpha}_{mk} \\ \vdots \\ \mathbf{h}_{mK_m}^H \boldsymbol{\alpha}_{mk} \end{bmatrix} \quad \text{pour } 1 \leq k \leq K_m \quad (2.36)$$

où les vecteurs  $\boldsymbol{\alpha}_{mk}$  pour  $1 \leq k \leq K_m$  orthonormalisent la base des vecteurs  $\mathbf{a}(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{mk})$  pour  $1 \leq k \leq K_m$ . Les paramètres  $\theta_m$  et  $\boldsymbol{\eta}_{mk}$  sont indirectement séparables dans le vecteur  $\mathbf{a}(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{mk})$ . Comme pour le champ proche, la solution est de réaliser un DL du vecteur  $\mathbf{a}(\theta, f)$  au voisinage de  $f = f_0$ . Le vecteur

$\mathbf{a}(\theta, f)$  devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\theta, f) &= \mathbf{a}(\theta, f_0) + \sum_{p=1}^P \mathbf{a}^{(p)}(\theta, f_0) \frac{(f - f_0)^p}{p!} + o(\|f - f_0\|^P) \\ &= \mathbf{U}(\theta) \varphi_{f_0}(f) + o(\|f - f_0\|^P) \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\text{avec } \mathbf{U}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta, f_0) & \mathbf{a}^{(1)}(\theta, f_0) & \cdots & \mathbf{a}^{(P)}(\theta, f_0) \end{bmatrix} \text{ et } \varphi_{f_0}(f) = \begin{bmatrix} 1 \\ (f - f_0) \\ \vdots \\ \frac{(f - f_0)^P}{P!} \end{bmatrix}$$

où  $\mathbf{a}^{(p)}(\theta, f)$  est la dérivée  $p^{\text{ième}}$  de  $\mathbf{a}(\theta, f)$  en  $f$ . En introduisant l'expression de  $\mathbf{a}(\theta, f)$  dans l'équation (2.36), le vecteur  $\mathbf{a}(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{mk})$  s'écrit :

$$\mathbf{a}(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{mk}) = \mathbf{U}(\theta_m) \varphi(\boldsymbol{\eta}_{mk}) + o(\|\mathbf{f}_m - f_0\|^P) \quad \text{avec } \varphi(\boldsymbol{\eta}_{mk}) = \sum_{i=1}^{K_m} \rho_{mk} \varphi_{f_0}(f_{mi}) \mathbf{h}_{mi}^H \boldsymbol{\alpha}_{mk} \quad (2.38)$$

Cette modélisation a été envisagée dans [FCT00] où l'algorithme MUSIC est adapté à ce modèle.

### 2.3.4 Sources diffuses

Une source provenant d'un émetteur est diffuse lorsqu'elle se propage au travers d'un continuum de diffuseurs. L'émetteur est alors reçu suivant un continuum d'incidences caractérisées par un cône. La figure 2.14 donne l'exemple de la diffusion au travers d'une couche de neige, d'une onde émise par un téléphone mobile vers un avion. Les méthodes de goniométrie supposent généralement que les sources sont ponctuelles avec une largeur de cône nulle.

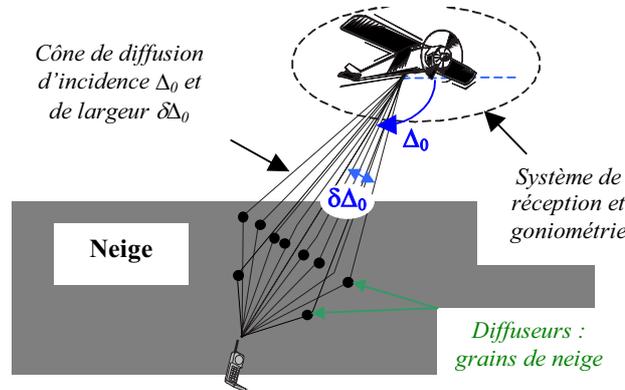


FIG. 2.14 – Source émettant dans un cône de diffusion

La propagation d'une source dans un cône de diffusion existe dans diverses applications telles que les radio-communications, l'imagerie médicale, le RADAR, la radio-astronomie,... En imagerie médicale l'onde diffuse au travers des tissus humains et en radio-astronomie, l'onde des étoiles, diffuse dans l'atmosphère terrestre avec les Speckles. Dans ce cas la direction d'arrivée d'une source se paramétrise non seulement par sa direction moyenne mais aussi par la largeur du cône de diffusion. L'application d'une méthode de goniométrie classique donne de mauvaises performances (voir par exemple [AO99] [Sor99]). En conséquence, le problème de la goniométrie avec des sources dispersées en incidence connaît un développement croissant depuis une décennie.

Des modèles numériques ont été développés dans [Zet97][FMB98]. Le signal reçu sur les capteurs est généralement décrit comme la somme de signaux plus ou moins retardés et pondérés avec des incidences comprises dans le cône de diffusion. C'est ainsi que des méthodes à sous-espaces basées sur une augmentation de la taille de l'espace signal et sur la connaissance de la distribution angulaire ont été introduites : DSPE [VCK95] et DISPARE [MSW96]. Toutefois ces algorithmes nécessitent une optimisation 2D d'un critère en angle d'arrivée et largeur de cône. Bengtsson [BO01] propose une généralisation du WSF[VO91] aux sources diffuses avec la méthode WPSF coûteuse en temps de calcul. Ainsi en présence d'une seule source, des algorithmes de faible charge de calculs ont été développé, soit avec un réseau de capteurs particulier [BS00], soit sans estimation de la largeur du cône [AOS97].

A l'exception de [AOS97], l'étalement angulaire des incidences est généralement modélisé par une distribution statistique continue définie par sa densité de probabilité. C'est ainsi que des distributions gaussiennes [Ben99][TO96] ou uniformes ont été envisagée dans des applications de radio-communication. Ainsi, afin de réduire les hypothèses sur le signal, le modèle présenté dans ce paragraphe ne fait aucune hypothèse statistique sur les distributions angulaires des sources. Ainsi, en présence de  $M$  sources diffuses, le modèle de l'équation (2.2) devient :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{L_m} \mathbf{a}(\theta_m + \tilde{\theta}_{mk}) \rho_{mk} s_m(t - \tau_{mk}) + \mathbf{n}(t) \quad (2.39)$$

où le signal de la  $m^{\text{ième}}$  source se décompose suivant  $L_m$  diffuseurs de signal  $s_m(t - \tau_{mk})$ ,  $\theta_m$  est l'incidence moyenne de la source et  $\theta_m + \tilde{\theta}_{mk}$  est l'incidence de l'un de ses diffuseurs tel que :

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{L_m} \sum_{k=1}^{L_m} \left( \frac{\rho_{mk} \tilde{\theta}_{mk}}{\rho_{m1} + \dots + \rho_{mL_m}} \right)^2} \quad (2.40)$$

où  $\sigma_m$  est la largeur du cône de diffusion de la  $m^{\text{ième}}$  source. La relation entre les signaux  $s_m(t - \tau_{mk})$  et  $s_m(t)$  se modélise par un filtre de type FIR où :

$$s_m(t - \tau_{mk}) = \mathbf{h}_{mk}^H \mathbf{s}_m(t) \quad \text{avec} \quad \mathbf{s}_m(t) = \begin{bmatrix} s_m(t) \\ \vdots \\ s_m(t - L + 1) \end{bmatrix}$$

avec  $\mathbf{h}_{mk}$  est un vecteur composé des  $L$  coefficients d'un filtre FIR. Le modèle de l'équation (2.39), devient alors :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{m=1}^M \mathbf{H}(\theta_m, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_m, \mathbf{h}_m) \mathbf{s}_m(t) + \mathbf{n}(t) \quad (2.41)$$

$$\mathbf{H}(\theta_m, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_m, \mathbf{h}_m) = \sum_{k=1}^{L_m} \rho_{mk} \mathbf{a}(\theta_m + \tilde{\theta}_{mk}) \mathbf{h}_{mk}^H \quad (2.42)$$

$$\text{avec} \quad \tilde{\boldsymbol{\theta}}_m = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_{m1} \\ \vdots \\ \tilde{\theta}_{mL_m} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{h}_m = \begin{bmatrix} \rho_{m1} \mathbf{h}_{m1} \\ \vdots \\ \rho_{mL_m} \mathbf{h}_{mL_m} \end{bmatrix}$$

Le rang de la matrice  $\mathbf{H}(\theta_m, \mathbf{f}_m, \mathbf{h}_m)$  de dimension  $N \times L$  vaut  $L_m \leq \min\{N, L\}$ . Dans ces conditions les vecteurs propres de la matrice  $\mathbf{H}(\theta_m, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_m, \mathbf{h}_m) \mathbf{H}(\theta_m, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_m, \mathbf{h}_m)^H$  associés aux  $L_m$  plus fortes valeurs

propres vérifient :

$$\mathbf{a}(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{mk}) = \mathbf{H}(\theta_m, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_m, \mathbf{h}_m) \boldsymbol{\alpha}_{mk} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\eta}_{mk} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_m \\ \mathbf{h}_{m1}^H \boldsymbol{\alpha}_{mk} \\ \vdots \\ \mathbf{h}_{mK_m}^H \boldsymbol{\alpha}_{mk} \end{bmatrix} \quad \text{pour } 1 \leq k \leq L_m \quad (2.43)$$

où les vecteurs  $\boldsymbol{\alpha}_{mk}$  pour  $1 \leq k \leq L_m$  orthonormalisent la base des vecteurs  $\mathbf{a}(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{mk})$  pour  $1 \leq k \leq L_m$ . Les paramètres  $\theta_m$  et  $\boldsymbol{\eta}_{mk}$  ne sont pas directement séparables dans  $\mathbf{a}(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{mk})$ . De la même manière que lors des modélisations large bande et champ proche, une alternative est d'appliquer un DL du vecteur  $\mathbf{a}(\theta + \tilde{\boldsymbol{\theta}})$  au voisinage de  $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = 0$ . Le vecteur  $\mathbf{a}(\theta + \tilde{\boldsymbol{\theta}})$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\theta + \tilde{\boldsymbol{\theta}}) &= \mathbf{a}(\theta) + \sum_{p=1}^P \mathbf{a}^{(p)}(\theta) \frac{\tilde{\boldsymbol{\theta}}^p}{p!} + o\left(\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^P\right) \\ &= \mathbf{U}(\theta) \varphi_{diffus}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) + o\left(\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^P\right) \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\text{avec } \mathbf{U}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta) & \mathbf{a}^{(1)}(\theta) & \dots & \mathbf{a}^{(P)}(\theta, f_0) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi_{diffus}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{\boldsymbol{\theta}} \\ \vdots \\ \frac{\tilde{\boldsymbol{\theta}}^P}{P!} \end{bmatrix}$$

où  $\mathbf{a}^{(p)}(\theta)$  est la dérivée  $p^{ième}$  de  $\mathbf{a}(\theta)$  en  $\theta$ . Dans [AOS97], Asztely envisage la même modélisation pour  $P = 1$  lorsque les retards  $\tau_{mk}$  de l'équation (2.39) sont tous identiques. En introduisant l'expression (2.44) de  $\mathbf{a}(\theta + \tilde{\boldsymbol{\theta}})$  dans l'équation (2.43), le vecteur  $\mathbf{a}(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{mk})$  devient :

$$\mathbf{a}(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{mk}) = \mathbf{U}(\theta_m) \varphi(\boldsymbol{\eta}_{mk}) + o\left(\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}_m\|^P\right) \quad \text{avec} \quad \varphi(\boldsymbol{\eta}_{mk}) = \sum_{i=1}^{L_m} \rho_{mk} \varphi_{diffus}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{mk}) \mathbf{h}_{mi}^H \boldsymbol{\alpha}_{mk} \quad (2.45)$$

Cette modélisation est similaire à celle envisagée dans le cas des signaux large bande. En effet dans les deux applications, une source présente un étalement, en fréquence ou en angle, qui provoque une décomposition du signal suivant plusieurs vecteurs directeurs. De plus, un développement limité du vecteur directeur  $\mathbf{a}(\theta + \tilde{\boldsymbol{\theta}}, f)$  en fréquence ou en angle est appliqué.

## 2.4 Perturbations physiques combinées.

Dans les paragraphes précédents, les exemples de modélisation du réseau de capteurs n'ont qu'une seule origine physique alors que dans la pratique elles peuvent se combiner entre elles. Ce paragraphe donne l'exemple d'une modélisation avec deux origines physiques afin de montrer que la modélisation du vecteur directeur par  $\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{U}(\theta) \varphi(\boldsymbol{\eta})$  reste toujours valable. L'exemple est celui de sources large bande reçues en champ proche. Sachant qu'en hypothèse large bande la source s'étale sur plusieurs longueurs d'ondes (ou fréquences), la réponse en champ proche d'une source d'incidence  $\theta$  et de fréquence  $f$  est la suivante d'après (2.25) :

$$\tilde{\mathbf{a}}(\theta, D, f) = \begin{bmatrix} \exp\left(-j \frac{2\pi}{c} (f \Phi_1(1/D))\right) \\ \vdots \\ \exp\left(-j \frac{2\pi}{c} (f \Phi_N(1/D))\right) \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

où la fonction  $\Phi_N(\eta)$  est celle de l'équation (2.26). En réalisant un **DL** d'ordre  $P$  de  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta, D, f)$  au voisinage de  $1/D = 0$ , l'expression du vecteur  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta, D, f)$  devient d'après (2.27) :

$$\tilde{\mathbf{a}}(\theta, D, f) \approx \mathbf{U}_1(\theta, f) \varphi_1(1/D) \quad (2.47)$$

$$\text{avec } \mathbf{U}_1(\theta, f) = \left[ \mathbf{a}_1(\theta, 0, f) \quad \mathbf{a}_1^{(1)}(\theta, 0, f) \quad \dots \quad \mathbf{a}_1^{(P)}(\theta, 0, f) \right] \text{ et } \varphi_1(\eta) = \begin{bmatrix} 1 \\ \eta \\ \vdots \\ \frac{\eta^P}{P!} \end{bmatrix}$$

où  $\mathbf{a}_1^{(p)}(\theta, \eta, f)$  est la dérivée  $p^{\text{ième}}$  de  $\mathbf{a}_1(\theta, \eta, f)$  suivant le paramètre  $\eta$ . Les dérivées de la  $n^{\text{ième}}$  composante  $b_n(\theta, \eta, f) = \exp\left(-j\frac{2\pi}{c}(f\Phi_n(\eta))\right)$  du vecteur  $\mathbf{a}_1(\theta, \eta, f)$  vérifient d'après (2.29) :

$$\begin{aligned} b_n^{(0)}(\theta, \eta, f) &= b_n(\theta, \eta, f) = \exp\left(-j\frac{2\pi}{c}(f\Phi_n(\eta))\right) \\ b_n^{(p)}(\theta, \eta, f) &= \sum_{i=0}^{p-1} C_{p-1}^i \left(-j\frac{2\pi}{c}f\Phi_n^{(p-i)}(\eta)\right) b_n^{(i)}(\theta, \eta, f) \end{aligned} \quad (2.48)$$

En réalisant un **DL** d'ordre  $Q$  des vecteurs  $\mathbf{a}_1^{(p)}(\theta, 0, f)$  on obtient au voisinage de  $f = f_0$  :

$$\mathbf{a}_1^{(p)}(\theta, 0, f) \approx \mathbf{U}^{(p)}(\theta) \varphi_{f_0}(f)$$

$$\mathbf{U}^{(p)}(\theta) = \left[ \mathbf{a}_1^{(p)(0)}(\theta, f_0) \quad \mathbf{a}_1^{(p)(1)}(\theta, f_0) \quad \dots \quad \mathbf{a}_1^{(p)(Q)}(\theta, f_0) \right] \text{ et } \varphi_{f_0}(f) = \begin{bmatrix} 1 \\ (f - f_0) \\ \vdots \\ \frac{(f - f_0)^Q}{Q!} \end{bmatrix}$$

où  $\mathbf{a}_1^{(p)(q)}(\theta, f_0)$  est la dérivée  $q^{\text{ième}}$  de  $\mathbf{a}_1^{(p)}(\theta, 0, f)$  en  $f$ . En introduisant l'expression (2.47) de  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta, D, f) = \mathbf{a}(\theta, f)$  dans l'équation (2.36), le vecteur  $\mathbf{a}(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{mk})$  s'écrit :

$$\mathbf{a}(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{mk}) \approx \mathbf{U}(\theta_m) \varphi(\boldsymbol{\eta}_{mk}) \quad \text{avec } \varphi(\boldsymbol{\eta}_{mk}) = \sum_{i=1}^{K_m} \rho_{mk} (\varphi_1(1/D) \otimes \varphi_{f_0}(f_{mi})) \mathbf{h}_{mi}^H \boldsymbol{\alpha}_{mk} \quad (2.49)$$

$$\text{et } \mathbf{U}(\theta) = \left[ \mathbf{U}^{(0)}(\theta) \quad \mathbf{U}^{(1)}(\theta) \quad \dots \quad \mathbf{U}^{(P)}(\theta) \right] \quad (2.50)$$

où le vecteur  $\boldsymbol{\eta}_{mk}$  vérifie selon (2.36) :

$$\boldsymbol{\eta}_{mk} = \begin{bmatrix} 1/D \\ \mathbf{f}_m \\ \mathbf{h}_{m1}^H \boldsymbol{\alpha}_{mk} \\ \vdots \\ \mathbf{h}_{mK_m}^H \boldsymbol{\alpha}_{mk} \end{bmatrix}$$

Le vecteur directeur (2.49) donne une expression de la réponse d'un réseau de capteurs à une source **LB** en champ proche. Cette équation est ainsi une illustration d'un mélange de perturbations du front d'onde et montre que le modèle de vecteur directeur  $\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta}) \approx \mathbf{U}(\theta) \varphi(\boldsymbol{\eta})$  est toujours valable.

## 2.5 Généralisation du modèle

Les modélisations liées au réseau de capteurs ainsi que celles du canal de propagation des paragraphes 2.2 et 2.3, montrent qu'en présence de  $M$  sources le signal reçu sur les capteurs s'écrit généralement sous

la forme :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{K_m} \mathbf{a}(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{mk}) s_{mk}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (2.51)$$

où  $\mathbf{a}(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{mk})$  est l'un des vecteurs directeurs de la  $m^{\text{ième}}$  source d'incidence  $\theta_m$ . Le signal  $s_{mk}(t)$  est une composante du signal de la  $m^{\text{ième}}$  source, tel que  $s_{mk}(t)$  se modélise comme la sortie d'un filtre dont l'entrée est  $s_m(t)$ . Les vecteurs  $\boldsymbol{\eta}_{mk}$  pour  $(1 \leq k \leq K_m)$  sont les paramètres de nuisance de la  $m^{\text{ième}}$  source. Le vecteur directeur  $\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta})$  peut s'écrire soit directement soit au moyen d'un développement limité (DL) sous la forme :

$$\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{U}(\theta) \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\eta}) \quad (2.52)$$

Lorsqu'un DL d'ordre  $P$  est appliqué au voisinage de  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_0$ , le vecteur  $\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta})$  s'écrit :

$$\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta}_0) + \sum_{p=1}^P \frac{\mathbf{d}\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta}_0, p)}{p!} (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0)^{\otimes p} + o(\|\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0\|^P)$$

$$\text{avec } \mathbf{d}\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta}_0, p) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1(\theta, \boldsymbol{\eta}_0, p)^H \\ \vdots \\ \mathbf{a}_N(\theta, \boldsymbol{\eta}_0, p)^H \end{bmatrix}$$

$$\text{où } \mathbf{a}_n(\theta, \boldsymbol{\eta}, 1) = \begin{bmatrix} \partial a_n(\theta, \boldsymbol{\eta}) / \partial \boldsymbol{\eta}(1) \\ \vdots \\ \partial a_n(\theta, \boldsymbol{\eta}) / \partial \boldsymbol{\eta}(L) \end{bmatrix} \quad \text{et } \mathbf{a}_n(\theta, \boldsymbol{\eta}_0, p+1) = \begin{bmatrix} \partial \mathbf{a}_n(\theta, \boldsymbol{\eta}, p) / \partial \boldsymbol{\eta}(1) \\ \vdots \\ \partial \mathbf{a}_n(\theta, \boldsymbol{\eta}, p) / \partial \boldsymbol{\eta}(L) \end{bmatrix}$$

où  $\boldsymbol{\eta}(k)$  est le  $k^{\text{ième}}$  paramètre de  $\boldsymbol{\eta}$ ,  $a_n(\theta, \boldsymbol{\eta})$  est la  $n^{\text{ième}}$  composante de  $\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta})$ ,  $\partial a_n(\theta, \boldsymbol{\eta}) / \partial \boldsymbol{\eta}(k)$  et  $\partial \mathbf{a}_n(\theta, \boldsymbol{\eta}, p) / \partial \boldsymbol{\eta}(k)$  sont les dérivées respectives de  $a_n(\theta, \boldsymbol{\eta})$  et du vecteur  $\mathbf{a}_n(\theta, \boldsymbol{\eta}, p)$  par rapport à  $\boldsymbol{\eta}(k)$ . La matrice  $\mathbf{U}(\theta)$  et le vecteur  $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\eta})$  ont alors les expressions suivantes :

$$\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{U}(\theta) \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\eta}) + o(\|\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0\|^P) \quad (2.53)$$

$$\mathbf{U}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta}_0) & \mathbf{d}\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta}_0, 1) & \cdots & \mathbf{d}\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta}_0, P) \end{bmatrix} \quad \text{et } \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} 1 \\ (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) \\ \vdots \\ \frac{(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0)^{\otimes P}}{P!} \end{bmatrix}$$

Le paramètre  $\boldsymbol{\eta}_0$  correspond aux hypothèses classiques de modélisation du vecteur directeur où les vecteurs  $\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta}_0)$  et  $\mathbf{a}(\theta)$  de l'expression (2.1) sont égaux. A partir des expressions (2.52) et (2.53) de  $\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta})$ , les trois démarches suivantes sont envisageables :

- **La calibration** : Le vecteur  $\boldsymbol{\eta}$  des paramètres de nuisance est estimable à partir de mesures effectuées lors d'une phase de calibration (figure 1.8), lorsqu'il est indépendant de la direction d'arrivée  $\theta$ . Ainsi, à partir de  $K$  mesures  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_k)$  ( $1 \leq k \leq K$ ) du vecteur  $\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta})$ , la technique consiste à résoudre le système d'équations :  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_k) = \mathbf{U}(\theta_k) \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\eta})$  pour  $(1 \leq k \leq K)$ . Cette méthode d'estimation a été envisagée dans [FRM91] et [FL93] pour des paramètres de nuisance dépendant des coefficients de couplage. Lorsque le vecteur  $\boldsymbol{\eta}$  dépend de  $L$  paramètres, il suffit d'utiliser  $K = L$  mesures  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_k)$  du vecteur  $\mathbf{a}(\theta_k, \boldsymbol{\eta})$ . Il faut remarquer que le terme de calibration est valable uniquement pour les perturbations liées au réseau de capteurs du paragraphe-2.2.
- **L'auto-calibration** : L'algorithme estime conjointement l'incidence  $\theta$  avec le vecteur des paramètres de nuisance  $\boldsymbol{\eta}$  comme la méthode proposée dans le chapitre-2.6. Il faut remarquer que le terme d'auto-

calibration est adapté à la modélisation du réseau de capteurs (paragraphe-2.2) et moins à celle du canal de propagation (paragraphe-2.3) et généralise ainsi le terme "Auto-Calibration".

- **L'évaluation des performances de goniométrie** : Sachant que le vecteur directeur réel  $\bar{\mathbf{a}}(\theta)$  est différent du vecteur directeur modélisé  $\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta}_0)$ , l'objectif du chapitre-3 est d'évaluer les performances théoriques d'estimation des angles  $\theta_m$  en fonction des statistiques de l'écart  $\|\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0\|$ .

## 2.6 Algorithme d'Auto-Calibration

L'objectif de l'algorithme par Auto-Calibration [FBL04] est de localiser des sources radio-électriques, acoustiques ou autres, dans des contextes physiques très divers au moyen d'une méthode unique. Plus particulièrement cette technique s'applique de la même manière pour des sources large bande [FCT00], en champ proche [BFL05] avec un front d'onde non plan, en diversité de polarisation ou reçu par des capteurs dont le diagramme de rayonnement est mal maîtrisé [FL93]. La technique a la capacité de combiner plusieurs modélisations physiques telles que la présence de sources large bande émettant en champ proche. Ces diverses applications qui ont été décrite dans le chapitre-2, nécessitent la mise en œuvre d'une estimation multi-paramètres : Estimation conjointe des angles d'incidences avec d'autre paramètres tels que la fréquence, la polarisation ou encore la distance de l'émetteur. Pour ces applications variées, le procédé réduit la complexité de la mise en oeuvre en séparant l'estimation des angles d'incidence de celle des paramètres d'intérêt secondaire. Pour ce faire, à partir d'une modélisation de la réponse du réseau de capteurs, la contribution des angles et des paramètres secondaires est séparée comme dans les expressions (2.52)(2.53). Le critère multi-paramètres est réduit suivant un critère mono-paramètre dépendant uniquement des incidences. L'estimation des paramètres secondaires est déduite des estimées des incidences en construisant pour chacune des sources des critères mono-paramètre dépendant uniquement des paramètres de nuisance.

L'algorithme par Auto-Calibration proposé est étendu en effectuant une transformation du vecteur observation  $\mathbf{x}(t)$ . L'objectif est de mieux exploiter les diversités temporelles afin de localiser un plus grand nombre de sources. La transformation la plus adéquate dépendra de la nature des signaux incidents ainsi que du contexte applicatif.

### 2.6.1 Transformation de l'observation capteurs $\mathbf{x}(t)$ (2.2)(2.51)

Les méthodes de goniométrie telle que MUSIC [Sch81] ou le MV [OVSN93][VO91][Lar92] utilisent directement le vecteur observation  $\mathbf{x}(t)$  des signaux capteurs de (2.51) où  $\mathbf{a}(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{mk})$  est la réponse de la  $m^{ième}$  source à ce réseau. Dans ces conditions, ces algorithmes localisent au maximum  $N - 1$  sources. Sachant que le nombre  $N$  de capteurs est aussi la dimension du vecteur  $\mathbf{x}(t)$ , l'application de ces méthodes sur un vecteur  $\mathbf{y}(t) = f(\mathbf{x}(t))$  de dimension plus grande permettra dans certain cas de localiser plus de sources. Le choix de la transformation  $f(\cdot)$  qui permettra de localiser un nombre plus grand de sources dépend des caractéristiques temporelles des signaux incidents. Dans beaucoup d'applications, le signal  $\mathbf{y}(t)$  transformé est linéarisable de la façon suivante :

$$\mathbf{y}(t) = f(\mathbf{x}(t)) \approx \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{K_{m,y}} \mathbf{a}_y(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{y,mk}) s_{y,mk}(t) + \mathbf{n}_y(t) \quad (2.54)$$

où  $\mathbf{a}_y(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{y,mk})$  est une des réponses de la  $m^{\text{ième}}$  source pour l'observation  $\mathbf{y}(t)$  transformée. Sachant que le vecteur  $\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta})$  s'écrit (ou s'approxime) par  $\mathbf{U}(\theta) \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\eta})$  selon (2.52)(2.53), le vecteur  $\mathbf{a}_y(\theta, \boldsymbol{\eta})$  se modélise suivant la même structure :

$$\mathbf{a}_y(\theta, \boldsymbol{\eta}_y) \approx \mathbf{U}_y(\theta) \boldsymbol{\varphi}_y(\boldsymbol{\eta}_y) \quad (2.55)$$

où la matrice  $\mathbf{U}_y(\theta)$  et le vecteur  $\boldsymbol{\varphi}_y(\boldsymbol{\eta})$  dépendent de la fonction  $f(\cdot)$ . La fonction de transformation du vecteur observation  $\mathbf{x}(t)$  la plus adéquate dépend du contexte applicatif ainsi que des caractéristiques des signaux. Des exemples de fonction  $f(\cdot)$  sont donnés dans les paragraphes qui suivent lorsque les signaux incidents ont des caractéristiques spectrales différentes, sont non circulaires ou encore non-gaussiens.

### Cas des signaux à diversité spectrale

La construction d'une observation spatio-temporelle  $\mathbf{x}_L(t)$  est intéressante lorsque les sources ont des caractéristiques spectrales différentes :

$$\mathbf{y}(t) = f(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}_L(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(t-L+1) \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

En présence de  $M$  porteuses de signal  $s_m(t) = \exp(j2\pi f_m t)$  et en hypothèse **BE**, le vecteur  $\mathbf{y}(t)$  de (2.56) s'écrit de la façon suivante d'après (2.2) :

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{m=1}^M \mathbf{a}_y(\theta_m, f_m) s_m(t) + \mathbf{n}_y(t) \quad (2.57)$$

avec  $\mathbf{a}_y(\theta_m, f_m) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}(\theta_m) \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{a}}(\theta_m) \exp(-j2\pi f_m(L-1)) \end{bmatrix}$  et  $\mathbf{n}_y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{n}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{n}(t-L+1) \end{bmatrix}$

et le vecteur  $\mathbf{y}(t)$  se décompose suivant  $M$  porteuses de la même manière que le vecteur  $\mathbf{x}(t)$ . En conséquence,  $NL - 1$  porteuses sont goniométrables après la transformation de l'observation de l'équation (2.56).

Lorsque les sources ont une plus grande largeur de bande, le nombre de sources localisables diminue car chacune des sources se décompose suivant plusieurs porteuses. Dans le cas le plus pessimiste où les  $M$  sources sont spectralement blanches, le nombre de sources localisables se réduit à  $N - 1$ . D'après (2.51)(2.52) et (2.56), le vecteur  $\mathbf{y}(t)$  s'écrit :

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{K_m} \mathbf{U}_L(\theta_m) \mathbf{s}_{mk}(t, \boldsymbol{\eta}_{mk}) + \mathbf{n}_y(t) \quad (2.58)$$

où  $\mathbf{U}_L(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{U}(\theta) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{U}(\theta) \end{bmatrix}$  et  $\mathbf{s}_{mk,L}(t, \boldsymbol{\eta}_{mk}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\eta}_{mk}) s_{mk}(t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\eta}_{mk}) s_{mk}(t-L+1) \end{bmatrix}$

où la matrice  $\mathbf{U}_L(\theta)$  est de dimension  $NL \times PL$  et la décomposition du vecteur  $\mathbf{s}_{mk,L}(t, \boldsymbol{\eta}_{mk})$  est la suivante :

$$\mathbf{s}_{mk,L}(t, \boldsymbol{\eta}_{mk}) = \sum_{i=1}^{L_{mk}} \Phi_i(\boldsymbol{\eta}_{mk}) s_{mki}(t) \text{ où } 1 \leq L_{mk} \leq PL \quad (2.59)$$

où  $P$  est la dimension du vecteur  $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\eta}_{mk})$ . Lorsque la  $m^{\text{ième}}$  source est une porteuse, en hypothèse **BE**, alors  $L_{mk} = K_m = 1$ ,  $\mathbf{U}(\theta) = \tilde{\mathbf{a}}(\theta_m)$ ,  $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\eta}_{mk}) = 1$  et  $s_{mk}(t) = \exp(j2\pi f_m(t - k + 1))$ . En introduisant l'expression (2.59) de  $\mathbf{s}_{mk,L}(t, \boldsymbol{\eta}_{mk})$  dans (2.58), le vecteur  $\mathbf{a}_y(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{y,mj})$  des expressions (2.54)(2.55) et le signal  $s_{y,mj}(t)$  deviennent :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_y(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{y,mj}) &= \mathbf{U}_y(\theta_m) \boldsymbol{\varphi}_y(\boldsymbol{\eta}_{y,mj}) \\ \mathbf{U}_y(\theta) &= \mathbf{U}_L(\theta) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varphi}_y(\boldsymbol{\eta}_{y,mj}) = \Phi_i(\boldsymbol{\eta}_{mk}) \\ s_{y,mj}(t) &= s_{mki}(t) \quad \text{et} \quad j = K_m(k - 1) + i \end{aligned} \quad (2.60)$$

Cette transformation du signal en présence de signaux large bande à diversité spectrale a été effectuée dans [FCT00].

### Cas des signaux non-circulaires

En présence de signaux non circulaires, le vecteur  $\mathbf{x}(t)$  peut être transformé de la manière suivante :

$$\mathbf{y}(t) = f(\mathbf{x}(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t)^* \exp(j2\pi\beta t) \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Lorsque les signaux incidents sont  $M$  BPSK de fréquence centrale  $\beta/2$  où le signal  $s_m(t) = s_{m0}(t) \exp(j\pi\beta t)$  avec  $s_{m0}(t) = s_{m0}(t)^*$ , le vecteur  $\mathbf{y}(t)$  de (2.61) devient d'après (2.2) :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \sum_{m=1}^M \mathbf{a}_y(\theta_m) s_m(t) + \mathbf{n}_y(t) \\ \text{avec } \mathbf{a}_y(\theta_m) &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}(\theta_m) \\ \tilde{\mathbf{a}}(\theta_m)^* \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{n}(t) \\ \mathbf{n}(t)^* \exp(j2\pi\beta t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.62)$$

et le vecteur  $\mathbf{y}(t)$  s'écrit comme une combinaison linéaire de  $M$  BPSK de la même manière que  $\mathbf{x}(t)$ . Ainsi, la transformation de l'équation (2.61) permet de goniométrer jusqu'à  $2N - 1$  BPSK. Lorsque le mélange de sources contient moins de signaux BPSK, le nombre de sources localisables diminue. Sans aucune source BPSK de fréquence centrale  $\beta/2$ , le nombre de sources localisables se réduit à  $N - 1$ . D'après (2.51)(2.52) et (2.61), le vecteur  $\mathbf{y}(t)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{K_m} \mathbf{U}_C(\theta_m) \mathbf{s}_{C,mk}(t, \boldsymbol{\eta}_{mk}) + \mathbf{n}_y(t) \\ \text{où } \mathbf{U}_C(\theta) &= \begin{bmatrix} \mathbf{U}(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}(\theta)^* \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{s}_{C,mk}(t, \boldsymbol{\eta}_{mk}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\eta}_{mk}) s_{mk}(t) \\ \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\eta}_{mk})^* s_{mk}(t)^* \exp(j2\pi\beta t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.63)$$

où la matrice  $\mathbf{U}_C(\theta)$  est de dimension  $2N \times 2P$  et la décomposition du vecteur  $\mathbf{s}_{C,mk}(t, \boldsymbol{\eta}_{mk})$  est la suivante :

$$\mathbf{s}_{C,mk}(t, \boldsymbol{\eta}_{mk}) = \sum_{i=1}^{L_{mk}} \Phi_{C,i}(\boldsymbol{\eta}_{mk}) s_{mki}(t) \quad \text{où} \quad 1 \leq L_{mk} \leq 2P \quad (2.64)$$

où  $P$  est la dimension du vecteur  $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\eta}_{mk})$ . Lorsque les sources sont des modulations BPSK de fréquence centrale  $\beta/2$  alors  $L_{mk} = 1$ . En introduisant l'expression de  $\mathbf{s}_{C,mk}(t, \boldsymbol{\eta}_{mk})$  (2.64) dans l'équation (2.63),

le vecteur  $\mathbf{b}_y(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{y,mj})$  des expressions (2.54)(2.55) et le signal  $s_{y,mj}(t)$  deviennent :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_y(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{y,mj}) &= \mathbf{U}_y(\theta_m) \boldsymbol{\varphi}_y(\boldsymbol{\eta}_{y,mj}) \\ \mathbf{U}_y(\theta) &= \mathbf{U}_C(\theta) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varphi}_y(\boldsymbol{\eta}_{y,mj}) = \Phi_{C,i}(\boldsymbol{\eta}_{mk}) \\ s_{y,mj}(t) &= s_{mki}(t) \quad \text{et} \quad j = K_m(k-1) + i \end{aligned} \quad (2.65)$$

La transformation de l'équation (2.61) a été introduite dans [CWS01a][CWS01b]. Lorsque les signaux incidents présentent en plus une diversité spectrale, la transformation suivante de  $\mathbf{x}(t)$  est envisageable :

$$\mathbf{y}(t) = f(\mathbf{x}(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_L(t) \\ \mathbf{x}_L(t)^* \exp(j2\pi\beta t) \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

où  $\mathbf{x}_L(t)$  est le vecteur spatio-temporel de l'équation (2.56). Selon (2.58) et (2.63), le vecteur  $\mathbf{y}(t)$  s'écrit :

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{K_m} \mathbf{U}_{CL}(\theta_m) \mathbf{s}_{CL,mk}(t, \boldsymbol{\eta}_{mk}) + \mathbf{n}_y(t) \quad (2.67)$$

$$\text{où } \mathbf{U}_{CL}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_L(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_L(\theta)^* \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{s}_{CL,mk}(t, \boldsymbol{\eta}_{mk}) = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{mk,L}(t, \boldsymbol{\eta}_{mk}) \\ \mathbf{s}_{mk,L}(t, \boldsymbol{\eta}_{mk})^* \exp(j2\pi\beta t) \end{bmatrix}$$

où la matrice  $\mathbf{U}_{CL}(\theta)$  est de dimension  $2PN \times 2PL$  et la décomposition du vecteur  $\mathbf{s}_{CL,mk}(t, \boldsymbol{\eta}_{mk})$  est la suivante :

$$\mathbf{s}_{CL,mk}(t, \boldsymbol{\eta}_{mk}) = \sum_{i=1}^{L_{mk}} \Phi_{CL,i}(\boldsymbol{\eta}_{mk}) s_{mki}(t) \quad \text{où } 1 \leq L_{mk} \leq 2PL \quad (2.68)$$

où  $P$  est la dimension du vecteur  $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\eta}_{mk})$ . En introduisant l'expression de  $\mathbf{s}_{CL,mk}(t, \boldsymbol{\eta}_{mk})$  (2.68) dans l'équation (2.67), le vecteur  $\mathbf{a}_y(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{y,mj})$  des expressions (2.54)(2.55) et le signal  $s_{y,mj}(t)$  deviennent :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_y(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{y,mj}) &= \mathbf{U}_y(\theta_m) \boldsymbol{\varphi}_y(\boldsymbol{\eta}_{y,mj}) \\ \mathbf{U}_y(\theta) &= \mathbf{U}_{CL}(\theta) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varphi}_y(\boldsymbol{\eta}_{y,mj}) = \Phi_{CL,i}(\boldsymbol{\eta}_{mk}) \\ s_{y,mj}(t) &= s_{mki}(t) \quad \text{et} \quad j = K_m(k-1) + i \end{aligned} \quad (2.69)$$

### Cas des signaux cyclostationnaires

En présence de signaux cyclostationnaires, l'observation suivante peut être construite

$$\mathbf{y}(t) = f(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}_L^\alpha(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t-1) \exp(j2\pi\alpha t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(t-L+1) \exp(j2\pi\alpha(L-1)t) \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

où la matrice  $\mathbf{U}_y(\theta)$  du vecteur  $\mathbf{a}_y(\theta, \boldsymbol{\eta}_y)$  vérifie :

$$\mathbf{U}_y(\theta) = \mathbf{U}_L(\theta) \quad (2.71)$$

dont l'expression de  $\mathbf{U}_L(\theta)$  est donnée dans (2.58). Lorsque certains signaux sont de plus circulaires, une fonction  $f(\mathbf{x}(t))$  adéquate peut vérifier :

$$\mathbf{y}(t) = f(\mathbf{x}(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_L^\alpha(t) \\ \mathbf{x}_L^\alpha(t)^* \exp(j2\pi\beta t) \end{bmatrix} \quad \text{avec } \mathbf{U}_y(\theta) = \mathbf{U}_{CL}(\theta) \quad (2.72)$$

dont l'expression de  $\mathbf{U}_{CL}(\theta)$  est donnée dans (2.67). WA.Gardner est le premier à avoir introduit la notion de cyclostationnarité et avoir ensuite appliqué cette propriété à la goniométrie. D'autres auteurs [CWS02] ont par la suite contribué à ce thème de recherche.

### Cas de sources non-gaussiennes

La plupart des méthodes de goniométrie telles que les méthodes **HR** utilisent les statistiques d'ordre 2 des observations  $\mathbf{x}(t)$  en calculant la matrice de covariance  $\mathbf{R}_x = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^H]$ . Lorsque les sources sont non gaussiennes les cumulants d'ordre strictement supérieurs à 2 deviennent non-nuls. C'est pourquoi dans [Car90] et [CFA05], les cumulants d'ordre 4 et  $2q$  sont utilisés pour estimer les angles d'incidences. Une méthode de goniométrie à l'ordre  $2q$  utilise la matrice des cumulants  $\mathbf{R}_x^{2q,l}$  tel que :

$$(\mathbf{R}_x^{2q,l})_{IJ} = cum(x_{i_1}(t), \dots, x_{i_l}(t), x_{i_{l+1}}(t)^* \dots, x_{i_q}(t)^*, x_{j_1}(t)^*, \dots, x_{j_l}(t)^*, x_{j_{l+1}}(t) \dots, x_{j_q}(t)) \quad (2.73)$$

$$I = \sum_{k=1}^l N^{q-k} (i_k - 1) + \sum_{k=1}^{q-l} N^{q-l-k} (i_k - 1) + 1 \quad \text{et} \quad J = \sum_{k=1}^l N^{q-k} (j_k - 1) + \sum_{k=1}^{q-l} N^{q-l-k} (j_k - 1) + 1$$

où  $(\mathbf{R}_x^{2q,l})_{IJ}$  est le  $IJ^{ième}$  élément de  $\mathbf{R}_x^{2q,l}$  et  $\mathbf{R}_s^{2q,l}$  est la matrice des cumulants d'ordre  $2q$  du vecteur  $\mathbf{s}(t)$ . D'après (2.51) le signal  $\mathbf{x}(t)$  s'écrit :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (2.74)$$

$$\text{avec } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \dots & \mathbf{B}_M \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{m1}) & \dots & \mathbf{a}(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{mK_m}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1(t) \\ \vdots \\ \mathbf{s}_M(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{s}_m(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{m1}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{s}_{mK_m}(t) \end{bmatrix}$$

et la matrice exacte  $\mathbf{R}_x^{2q,l}$  des cumulants du signal  $\mathbf{x}(t)$  s'écrit :

$$\mathbf{R}_x^{2q,l} = \left( \mathbf{A}^{\otimes l} \otimes \mathbf{A}^{\otimes(q-l)*} \right) \mathbf{R}_s^{2q,l} \left( \mathbf{A}^{\otimes l} \otimes \mathbf{A}^{\otimes(q-l)*} \right)^H \quad (2.75)$$

Les expressions (2.74)(2.75) montrent qu'une réponse de la  $m^{ième}$  source au réseau de virtuel [CAFC05] d'ordre  $2q$  s'écrit :

$$\mathbf{a}_y(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{mi}) = \mathbf{a}(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{mi})^{\otimes l} \otimes \mathbf{a}(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{mi})^{\otimes(q-l)*}$$

Sachant que  $\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{U}(\theta) \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\eta})$  d'après (2.52), l'expression de  $\mathbf{a}_y(\theta, \boldsymbol{\eta})$  devient :

$$\mathbf{a}_y(\theta, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{U}_y(\theta) \boldsymbol{\varphi}_y(\boldsymbol{\eta}) \quad (2.76)$$

$$\mathbf{U}_y(\theta) = \mathbf{U}(\theta)^{\otimes l} \otimes \mathbf{U}(\theta)^{\otimes(q-l)*} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varphi}_y(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\eta})^{\otimes l} \otimes \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\eta})^{\otimes(q-l)*}$$

Le réseau virtuel d'ordre  $2q$  associé à la réponse  $\mathbf{a}_y(\theta, \boldsymbol{\eta})$  permet de goniométrer au maximum un nombre de sources dont l'ordre de grandeur est  $N^q$  [CAFC05].

### 2.6.2 Algorithme

L'algorithme par Auto-Calibration [FBL04] estime les directions d'arrivées des sources à partir de l'observation étendue  $\mathbf{y}(t)$  de l'équation (2.54). Dans le cas particulier où la fonction de transformation vérifie  $f(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t)$ , l'observation étendue  $\mathbf{y}(t)$  se réduit à l'observation  $\mathbf{x}(t)$  des signaux capteurs. Une des réponses de la  $m^{ième}$  source à l'observation  $\mathbf{y}(t)$  est le vecteur  $\mathbf{a}_y(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{y,mi}) \approx \mathbf{U}_y(\theta_m) \boldsymbol{\varphi}_y(\boldsymbol{\eta}_{y,mi})$  d'après (2.55). En appliquant un algorithme de type MUSIC [Sch81], la méthode détermine les  $\sum_{m=1}^M K_m$  minima  $(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{y,mi})$  du critère normalisé suivant :

$$J_{multi}(\theta, \boldsymbol{\eta}) = \frac{\mathbf{a}_y(\theta, \boldsymbol{\eta})^H \boldsymbol{\Pi}_b \mathbf{a}_y(\theta, \boldsymbol{\eta})}{\mathbf{a}_y(\theta, \boldsymbol{\eta})^H \mathbf{a}_y(\theta, \boldsymbol{\eta})} \quad \text{où} \quad 0 \leq J_{multi}(\theta, \boldsymbol{\eta}) \leq 1 \quad (2.77)$$

où  $\Pi_b = \mathbf{U}_n (\mathbf{U}_n)^H$  avec  $\mathbf{U}_n = [\mathbf{u}_{M_y+1} \cdots \mathbf{u}_{N_y}]$ . Les  $\mathbf{u}_i$  pour  $(M_y + 1 \leq i \leq N_y)$  sont les vecteurs propres associés aux plus petites valeurs propres des estimées de la matrice  $E[\mathbf{y}(t)\mathbf{y}(t)^H]$  (ou  $\mathbf{R}_x^{2q,l}$  de l'expression (2.73)). Le rang de ces matrices de dimension  $N_y \times N_y$  est égal à  $M_y$ . Sachant que  $\mathbf{a}_y(\theta, \boldsymbol{\eta}) \approx \mathbf{U}_y(\theta) \boldsymbol{\varphi}_y(\boldsymbol{\eta})$  le critère devient :

$$J_{multi}(\theta, \boldsymbol{\eta}) = \frac{\boldsymbol{\varphi}_y(\boldsymbol{\eta})^H \mathbf{Q}_1(\theta) \boldsymbol{\varphi}_y(\boldsymbol{\eta})}{\boldsymbol{\varphi}_y(\boldsymbol{\eta})^H \mathbf{Q}_2(\theta) \boldsymbol{\varphi}_y(\boldsymbol{\eta})} \quad (2.78)$$

$$\mathbf{Q}_1(\theta) = \mathbf{U}_y(\theta)^H \Pi_b \mathbf{U}_y(\theta) \quad \text{et} \quad \mathbf{Q}_2(\theta) = \mathbf{U}_y(\theta)^H \mathbf{U}_y(\theta)$$

En utilisant la théorie des formes quadratiques [Gan59], le critère (2.78) se réduit de la façon suivante en fonction du paramètre  $\theta$  :

$$J_{opt}(\theta) = \lambda_{\min}^G \{ \mathbf{Q}_2(\theta), \mathbf{Q}_1(\theta) \} \quad (2.79)$$

où  $\lambda_{\min}^G \{ \mathbf{A}, \mathbf{B} \}$  est la valeur propre généralisée minimale des matrices carrées  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ . D'après la définition des valeurs propres généralisées ( $\mathbf{B}\mathbf{e} = \lambda\mathbf{A}\mathbf{e}$  où  $\lambda$  est une valeur propre généralisée associée au vecteur  $\mathbf{e}$ ), le critère devient :

$$J_{opt}(\theta) = \lambda_{\min} \{ \mathbf{Q}_2(\theta)^{-1} \mathbf{Q}_1(\theta) \} \quad (2.80)$$

où  $\lambda_{\min} \{ \mathbf{A} \}$  est la valeur propre minimale de la matrice  $\mathbf{A}$ . Lorsque les matrices  $E[\mathbf{y}(t)\mathbf{y}(t)^H]$  (ou  $\mathbf{R}_x^{2q,l}$ ) sont estimées avec un nombre infini d'observations  $\mathbf{y}(t)$  et que le vecteur  $\mathbf{a}_y(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{y,mi})$  modélise sans erreur la réponse d'une source le critère vérifie :  $J_{opt}(\theta_m) = 0$  pour  $(1 \leq m \leq M)$ . Comme la valeur propre minimale  $J_{opt}(\theta_m)$  de la matrice  $\mathbf{Q}_2(\theta_m)^{-1} \mathbf{Q}_1(\theta_m)$  est nulle, le déterminant de cette matrice est alors nul et le critère peut finalement se réduire à :

$$J_{det}(\theta) = \det \left( \mathbf{Q}_2(\theta)^{-1} \mathbf{Q}_1(\theta) \right) = \frac{\det(\mathbf{Q}_1(\theta))}{\det(\mathbf{Q}_2(\theta))} \quad (2.81)$$

Les incidences  $\theta_m$  sont déterminées en recherchant les  $M$  minima  $\theta_m$  du critère  $J_{det}(\theta)$ . D'après (2.54)(2.55) et (2.80), le vecteur propre  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_m$  associé à la valeur propre minimale de  $\mathbf{Q}_2(\theta_m)^{-1} \mathbf{Q}_1(\theta_m)$  vérifie :

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}_m = \sum_{i=1}^{K_m} \alpha_{mi} \boldsymbol{\varphi}_y(\boldsymbol{\eta}_{y,mi}) = \Phi(\boldsymbol{\eta}_{y,m}) \boldsymbol{\alpha}_m \quad (2.82)$$

$$\Phi(\boldsymbol{\eta}_{y,m}) = \left[ \boldsymbol{\varphi}_y(\boldsymbol{\eta}_{y,m1}) \quad \cdots \quad \boldsymbol{\varphi}_y(\boldsymbol{\eta}_{y,mK_m}) \right] \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\alpha}_m = \begin{bmatrix} \alpha_{m1} \\ \vdots \\ \alpha_{mK_m} \end{bmatrix}$$

où  $\boldsymbol{\eta}_{y,m} = \left[ \boldsymbol{\eta}_{y,m1}^T \quad \cdots \quad \boldsymbol{\eta}_{y,mK_m}^T \right]^T$ . Le projecteur orthogonal  $\Pi_m$  du vecteur  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_m$  vérifie :

$$\Pi_m = \mathbf{I}_{N_y} - \hat{\boldsymbol{\varphi}}_m (\hat{\boldsymbol{\varphi}}_m)^\# \quad \text{et} \quad (\hat{\boldsymbol{\varphi}}_m)^H \Pi_m \hat{\boldsymbol{\varphi}}_m = 0 \quad (2.83)$$

En conséquence, le critère suivant admet un seul minimum en  $(\boldsymbol{\eta}_{y,m}, \boldsymbol{\alpha}_m)$  :

$$C_m(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\alpha})^H \Pi_m \boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\alpha})}{\boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\alpha})^H \boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\alpha})} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\alpha}) = \Phi(\boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{\alpha} \quad (2.84)$$

Sachant que  $\boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\alpha}) = \Phi(\boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{\alpha}$ , le critère  $C_m(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\alpha})$  se réduit en une fonction dépendante de  $\boldsymbol{\eta}$  où :

$$C_{det,m}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{\det(\mathbf{Q}_{1m}(\boldsymbol{\eta}))}{\det(\mathbf{Q}_{2m}(\boldsymbol{\eta}))} \quad (2.85)$$

$$\mathbf{Q}_{1m}(\boldsymbol{\eta}) = \Phi(\boldsymbol{\eta})^H \Pi_m \Phi(\boldsymbol{\eta}) \quad \text{et} \quad \mathbf{Q}_{2m}(\boldsymbol{\eta}) = \Phi(\boldsymbol{\eta})^H \Phi(\boldsymbol{\eta})$$

et le minimum du critère  $C_{\det,m}(\boldsymbol{\eta})$  est le vecteur  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_{y,m}$ . Pour réduire la complexité du critère  $C_{\det,m}(\boldsymbol{\eta})$ , un des paramètres  $\eta_{mi}$  du vecteur  $\boldsymbol{\eta}_{y,mi}$  est séparé de la façon suivante des autres paramètres  $\boldsymbol{\eta}'_{y,mi}$  :

$$\boldsymbol{\eta}_{y,mi} = \begin{bmatrix} \eta_{mi} \\ \boldsymbol{\eta}'_{y,mi} \end{bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{\varphi}_y(\boldsymbol{\eta}_{y,mi}) = \mathbf{G}(\eta_{mi}) \boldsymbol{\varphi}'_y(\boldsymbol{\eta}'_{y,mi})$$

Le vecteur  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_m$  de l'équation (2.82) devient alors :

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}_m = \Phi'(\eta_{m1}, \dots, \eta_{mK_m}) \boldsymbol{\beta}_{mK_m} \quad (2.86)$$

$$\Phi'(\eta_{m1}, \dots, \eta_{mK_m}) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}(\eta_{m1}) & \dots & \mathbf{G}(\eta_{mK_m}) \end{bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{\beta}_{mK_m} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}'_y(\boldsymbol{\eta}'_{y,m1}) \alpha_{m1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}'_y(\boldsymbol{\eta}'_{y,mK_m}) \alpha_{mK_m} \end{bmatrix}$$

Le critère (2.84) devient :

$$C_m(\eta_1, \dots, \eta_K, \boldsymbol{\beta}) = \frac{\boldsymbol{\varphi}'_m(\eta_1, \dots, \eta_K, \boldsymbol{\beta})^H \Pi_m \boldsymbol{\varphi}'_m(\eta_1, \dots, \eta_K, \boldsymbol{\beta})}{\boldsymbol{\varphi}'_m(\eta_1, \dots, \eta_K, \boldsymbol{\beta})^H \boldsymbol{\varphi}'_m(\eta_1, \dots, \eta_K, \boldsymbol{\beta})}$$

avec  $\boldsymbol{\varphi}'_m(\eta_1, \dots, \eta_K, \boldsymbol{\beta}) = \Phi'(\eta_1, \dots, \eta_K) \boldsymbol{\beta}$

Sachant que  $\boldsymbol{\varphi}'_m(\eta_1, \dots, \eta_K, \boldsymbol{\beta}) = \Phi'(\eta_1, \dots, \eta_K) \boldsymbol{\beta}$ , le critère  $C_m(\eta_1, \dots, \eta_K, \boldsymbol{\beta})$  se réduit en une fonction dépendante de  $(\eta_1, \dots, \eta_K)$  où :

$$C_{\det,m}^K(\eta_1, \dots, \eta_K) = \frac{\det(\mathbf{Q}'_{1m}(\eta_1, \dots, \eta_K))}{\det(\mathbf{Q}'_{2m}(\eta_1, \dots, \eta_K))} \quad (2.87)$$

$$\mathbf{Q}'_{1m}(\eta_1, \dots, \eta_K) = \Phi'(\eta_1, \dots, \eta_K)^H \Pi_m \Phi'(\eta_1, \dots, \eta_K)$$

$$\mathbf{Q}'_{2m}(\eta_1, \dots, \eta_K) = \Phi'(\eta_1, \dots, \eta_K)^H \Phi'(\eta_1, \dots, \eta_K) \quad (2.88)$$

et le minimum du critère  $C_{\det,m}^K(\eta_1, \dots, \eta_K)$  est  $(\eta_{m1}, \dots, \eta_{mK_m})$ . Le vecteur  $\boldsymbol{\beta}_{mK_m}$  est le vecteur propre associé à la valeur propre minimale de  $\mathbf{Q}'_{2m}(\eta_{m1}, \dots, \eta_{mK_m})^{-1} \mathbf{Q}'_{1m}(\eta_{m1}, \dots, \eta_{mK_m})$ . D'après (2.86), les vecteurs  $\boldsymbol{\varphi}'_y(\boldsymbol{\eta}'_{y,mi})$  se déduisent du vecteur  $\boldsymbol{\beta}_{mK_m}$ . Les vecteurs  $\boldsymbol{\eta}'_{y,mi}$  sont déduits des  $\boldsymbol{\varphi}'_y(\boldsymbol{\eta}'_{y,mi})$  de la même façon que les scalaires  $\eta_{mi}$  avec le critère (2.87). L'algorithme par Auto-Calibration permet donc d'estimer les paramètres  $(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{y,mi})$  du vecteur  $\mathbf{a}_y$  les uns derrière les autres : La technique estime tout d'abord les incidences  $\theta_m$  des sources puis pour chaque source estime les composantes du vecteur  $\boldsymbol{\eta}_{y,mi}$  les unes derrière les autres.

Cette approche à l'avantage de réduire considérablement le coût de calcul par rapport à une technique qui estimerait de façon conjointe tous les paramètres  $(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{y,mi})$ . L'algorithme traite de façon unique des situations physiques diverses lorsque le vecteur directeur des sources se modélise sous la forme  $\mathbf{a}_y(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{y,mi}) \approx \mathbf{U}_y(\theta_m) \boldsymbol{\varphi}_y(\boldsymbol{\eta}_{y,mi})$ . La technique reste indépendante de la fonction de transformation  $f()$  du vecteur observation  $\mathbf{x}(t)$  : Il suffit que le vecteur directeur du réseau virtuel associé à  $\mathbf{y}(t)$  garde cette structure où l'incidence  $\theta_m$  et le vecteur de perturbation  $\boldsymbol{\eta}_{y,mi}$  sont séparables. La fonction  $f()$  a pour objectif d'accroître la capacité de l'algorithme en nombre de sources et de mieux traiter les cas où le nombre de paramètres du vecteur  $\boldsymbol{\eta}_{y,mi}$  est grand.

### 2.6.3 Simulations

Les simulations concernent le cas du champ proche décrit dans le paragraphe-2.3.2. Le réseau de  $N = 7$  capteurs est circulaire avec un rayon  $R = 0.7\lambda_0$ . On est en présence de  $M = 2$  sources d'incidences

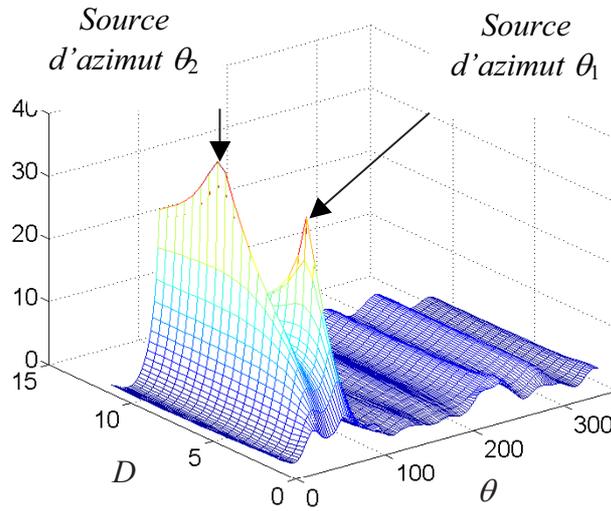


FIG. 2.15 – Critère de la méthode d'Autocalibration en "champ proche" en fonction de l'azimut  $\theta$  et de la distance  $D$ .

$\theta_1 = 79.40^\circ$  et  $\theta_2 = 54.34^\circ$  où les distances respectives par rapport au centre du réseau valent  $D_1 = 3.63\lambda_0$  et  $D_2 = 7.54\lambda_0$ . Les méthodes sont appliquées sur une matrice de covariance estimée avec un nombre infini d'échantillons  $\mathbf{x}(t)$ . La figure 2.15 présente le critère de MUSIC utilisant le vecteur directeur bi-dimensionnel en  $\theta$  et  $D$  de l'équation (2.25). La figure 2.16 représente le critère d'Auto-calibration de l'équation (2.81) exploitant la structure du vecteur directeur de l'équation (2.27) pour  $P = 1$ . Les critères sont représentés en  $-10 \log_{10}(\cdot)$  pour que les maxima des courbes correspondent aux incidences estimées. Le critère de la figure 2.15 estime les incidences en  $\hat{\theta}_1 = 79.34^\circ$  et  $\hat{\theta}_2 = 54.43^\circ$  et le critère d'Auto-Calibration de la figure 2.16 estime les directions en  $\hat{\theta}_1 = 79.26^\circ$  et  $\hat{\theta}_2 = 53.99^\circ$ . Sur la figure 2.16 on constate que la méthode MUSIC qui suppose que les sources sont en champ lointain estime moins bien l'incidence de la source la plus proche en  $\theta_1 = 79.40^\circ$  que celle plus éloignée en  $\theta_2 = 54.34^\circ$ .

Les simulations suivantes concernent les modélisations Large Bande du paragraphe-2.3.3. Le réseau est circulaire avec  $N = 5$  capteurs et la bande passante des récepteurs vérifie  $B/f_0 = 0.2$ . L'ordre du DL du vecteur directeur  $\mathbf{a}(\theta, f)$  de l'équation (2.37) vérifie  $P = 1$  au voisinage de  $f_0$  et  $L = 5$  dans l'observation spatio-temporelle de l'équation (2.56). La matrice de covariance  $E[\mathbf{y}(t)\mathbf{y}(t)^H]$  est estimée à partir de 3000 échantillons temporels  $\mathbf{y}(t)$  et le rapport signal sur bruit des  $M = 6$  sources est à 10dB. La figure 2.17 représente le critère d'Auto-calibration de l'équation (2.81) qui exploite la structure du vecteur directeur des équations (2.58) et (2.49). Comme pour la figure 2.16, la méthode d'Autocalibration est comparée à la méthode MUSIC et les critères sont tracés en  $-10 \log_{10}(\cdot)$ . Le premier émetteur a une bande passante de  $B/f_0 = 0.1$  avec une fréquence centrale  $f_1 = f_0 + B/50$ . Cet émetteur se propage suivant  $P_1 = 2$  trajets d'incidences  $\theta_{11} = 100^\circ$  et  $\theta_{12} = 120^\circ$  et avec des retards où  $\tau_{11} - \tau_{12} = 2/B$  : modèle de l'équation (2.20). Les autres émetteurs sont des porteuses qui se propagent suivant  $P_m = 1$  trajet d'incidences  $\theta_2 = 175^\circ$ ,  $\theta_3 = 20^\circ$ ,  $\theta_4 = 65^\circ$ ,  $\theta_5 = 150^\circ$  et de fréquences respectives  $f_2 = f_0 + 3B/50$ ,  $f_3 = f_0$ ,  $f_4 = f_0 - 3B/50$ ,  $f_5 = f_0 - 2B/50$ . Le rang de la matrice de covariance  $E[\mathbf{y}(t)\mathbf{y}(t)^H]$  vaut  $K = \sum_{k=1}^M K_{m,y} = 10$  (voir équation (2.54)). La figure 2.17 montre que 6 sources sont localisables sans biais avec 5 capteurs par la méthode d'Autocalibration tandis que la méthode MUSIC Bande étroite donne approximativement les directions de seulement 4 sources.

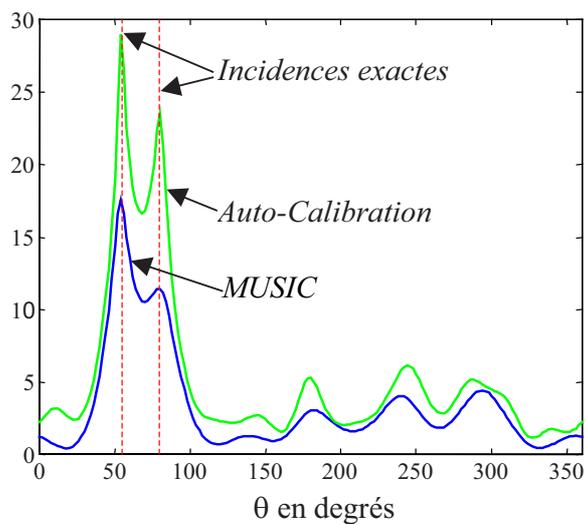


FIG. 2.16 – Critère de la méthode d'Autocalibration en "champ proche" en fonction de l'azimut  $\theta$  et comparaison avec MUSIC.

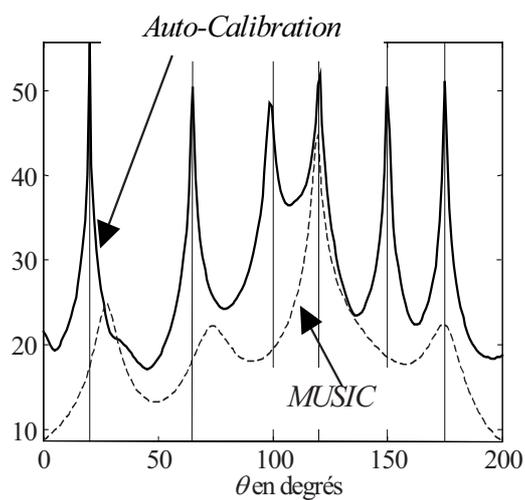


FIG. 2.17 – Critère de la méthode d'Autocalibration en "Large Bande" en fonction de l'azimut  $\theta$  et comparaison avec MUSIC pour  $M = 6$  sources et  $N = 5$  capteurs.



# Chapitre 3

## Performances en présence d'erreurs de modèle

### 3.1 Préambule

Lorsque les vecteurs directeurs  $\mathbf{a}(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{mk}) = \tilde{\mathbf{a}}(\theta_m)$  de l'équation (2.51) sont différents d'une expression connue du vecteur  $\mathbf{a}(\theta_m)$ , les méthodes d'estimation des angles d'incidences  $\theta_m$  peuvent fortement se dégrader. Toutefois malgré cette dégradation, un algorithme prenant en compte ces erreurs de modèle n'est pas toujours intégré dans un produit de goniométrie. Les raisons sont souvent liées à des contraintes de coût de calcul, de mise en oeuvre ou encore de difficultés liées à la modélisation de ces erreurs de modèle. L'objectif de ce chapitre est d'obtenir une expression analytique des performances en termes de **biais**, d'**EQM** (Erreur Quadratique Moyenne) et de **pouvoir de résolution** de plusieurs méthodes de goniométrie telles que MUSIC [Sch81][Car90][CM95] ou le MV (Maximum Vraisemblance) [OVSN93][VO91][Lar92]. Dans le paragraphe-3.4, les expressions théoriques des performances sont utilisées pour soit spécifier un système de goniométrie, soit localiser des sources à partir de plusieurs goniomètres.

Sous l'hypothèse d'erreurs de modèle faibles, Friedlander [Fri90b][Fri90a], Swindlehurst & Kailath [SK92] et Marcos [Mar98a] donnent des résultats théoriques après une approximation au premier ordre des erreurs. Toutefois en présence d'erreurs de modèles plus importantes [MB90][SH90], les expressions théoriques des premiers travaux diffèrent des résultats de simulation lorsque les sources sont proches : les résultats sont plutôt pessimistes dans le cas de MUSIC [Fri90b] et optimistes pour le maximum de vraisemblance [Fri90a]. Il faut noter qu'il n'existe pas de résultats théoriques pour MUSIC-4 [Car90] en présence d'erreurs de modèle.

Pour être plus précis, ces performances au premier ordre ne sont pas utilisables lorsque les sources sont en limite de résolution. Or, la connaissance précise du comportement des algorithmes dans cette zone de limite de résolution est indispensable pour spécifier un système. C'est pourquoi, dans ce chapitre, les performances sont établies par une approximation d'ordre plus élevé des erreurs de modèles. Cette nouvelle approche a nécessité le développement de nouveaux outils mathématiques présentés en Annexe-A. Il s'agit en particulier de l'établissement, original à notre connaissance, des moments du rapport de

deux formes hermitiennes, nécessitant le calcul des moments d'ordre supérieur des erreurs de modèles. En effet, les anciens résultats n'utilisent que les statistiques d'ordre un et deux.

Le vecteur des erreurs de modélisation de la réponse du réseau de capteurs à une source d'incidence  $\theta_m^0$  est noté par  $\mathbf{e}_m$  :

$$\mathbf{e}_m = \tilde{\mathbf{a}}(\theta_m^0) - \mathbf{a}(\theta_m^0) = \tilde{\mathbf{a}}_m - \mathbf{a}_m \quad (3.1)$$

$$\tilde{\mathbf{a}}(\theta_m^0) = \mathbf{a}(\theta_m^0) + \mathbf{e}_m \quad (3.2)$$

où  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_m^0) = \tilde{\mathbf{a}}_m$  et  $\mathbf{a}(\theta_m^0) = \mathbf{a}_m$ . En présence de  $M$  sources, les erreurs de modèle sont paramétrées par la matrice suivante :

$$\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_M] \quad (3.3)$$

En présence de sources ponctuelles, l'équation (2.51) du modèle généralisé devient :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{m=1}^M \tilde{\mathbf{a}}(\theta_m^0) s_m(t) + \mathbf{n}(t) = \tilde{\mathbf{A}}(\underline{\theta}_0, \mathbf{E}) \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (3.4)$$

où  $\tilde{\mathbf{A}}(\underline{\theta}_0) = [\tilde{\mathbf{a}}(\theta_1^0) \dots \tilde{\mathbf{a}}(\theta_M^0)]$ ,  $\underline{\theta}_0 = [\theta_1^0 \dots \theta_M^0]^T$  et  $\mathbf{s}(t) = [s_1(t) \dots s_M(t)]^T$ . La matrice  $\tilde{\mathbf{A}}(\underline{\theta}_0)$  des vecteurs perturbés s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{A}}(\underline{\theta}_0, \mathbf{E}) = \mathbf{A}(\underline{\theta}_0) + \mathbf{E} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{A}(\underline{\theta}_0) = \tilde{\mathbf{A}}(\underline{\theta}_0, \mathbf{E} = \mathbf{0}_{N,M}) = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_M] = \mathbf{A}_0 \quad (3.6)$$

Le problème de la goniométrie est d'estimer les incidences  $\theta_m^0$  sachant que le nombre  $M$  de sources ainsi que les statistiques du vecteur aléatoire centré  $\mathbf{x}(t)$  sont parfaitement connues. À l'ordre deux lorsque le bruit est blanc et indépendant du signal, la matrice de covariance exacte  $\mathbf{R}_x(\mathbf{E}) = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^H]$  de  $\mathbf{x}(t)$  s'écrit :

$$\mathbf{R}_x(\mathbf{E}) = \tilde{\mathbf{A}}(\underline{\theta}_0, \mathbf{E}) \mathbf{R}_s \tilde{\mathbf{A}}(\underline{\theta}_0, \mathbf{E})^H + \sigma^2 \mathbf{I}_N \quad (3.7)$$

où  $\mathbf{R}_s = E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}(t)^H]$ ,  $N$  est le nombre de capteurs et  $E[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}(t)^H] = \sigma^2 \mathbf{I}_N$ . À l'ordre quatre lorsque le bruit  $\mathbf{n}(t)$  est gaussien, la quadri-covariance [Car90][LAC97][CM95] exacte  $\mathbf{Q}_x(\mathbf{E})$  des cumulants de  $\mathbf{x}(t)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_x(\mathbf{E}) &= \left( \tilde{\mathbf{A}}(\underline{\theta}_0, \mathbf{E}) \otimes \tilde{\mathbf{A}}(\underline{\theta}_0, \mathbf{E})^* \right) \mathbf{Q}_s \left( \tilde{\mathbf{A}}(\underline{\theta}_0, \mathbf{E}) \otimes \tilde{\mathbf{A}}(\underline{\theta}_0, \mathbf{E})^* \right)^H \\ \mathbf{Q}_x(\mathbf{E})_{IJ} &= \text{cum}(x_i(t), x_j(t)^*, x_k(t)^*, x_l(t)) \\ I &= (i-1)N + j \text{ et } J = (k-1)N + l \end{aligned} \quad (3.8)$$

où  $\mathbf{Q}_x(\mathbf{E})_{IJ}$  est le  $IJ^{\text{ième}}$  élément de  $\mathbf{Q}_x(\mathbf{E})$  et  $\mathbf{Q}_s$  est la quadri-covariance du signal  $\mathbf{s}(t)$ . À l'ordre  $2q$ , la matrice exacte  $\mathbf{R}_x^{2q,l}(\mathbf{E})$  des cumulants [CAFC05] du signal  $\mathbf{x}(t)$  s'écrit d'après (2.73) de la façon suivante lorsque le bruit  $\mathbf{n}(t)$  est gaussien :

$$\mathbf{R}_x^{2q,l}(\mathbf{E}) = \left( \tilde{\mathbf{A}}(\underline{\theta}_0, \mathbf{E})^{\otimes l} \otimes \tilde{\mathbf{A}}(\underline{\theta}_0, \mathbf{E})^{\otimes (q-l)*} \right) \mathbf{R}_s^{2q,l} \left( \tilde{\mathbf{A}}(\underline{\theta}_0, \mathbf{E})^{\otimes l} \otimes \tilde{\mathbf{A}}(\underline{\theta}_0, \mathbf{E})^{\otimes (q-l)*} \right)^H \quad (3.9)$$

où  $\mathbf{R}_s^{2q,l}$  est la matrice exacte des cumulants d'ordre  $2q$  du signal  $\mathbf{s}(t)$ . Les matrices  $\mathbf{R}_x(\mathbf{E})$ ,  $\mathbf{Q}_x(\mathbf{E})$  et  $\mathbf{R}_x^{2q,l}(\mathbf{E})$  dépendent de la matrice  $\mathbf{E}$  des erreurs de modèle. Lorsque  $\mathbf{E} = \mathbf{0}_{N,M}$  en l'absence d'erreurs

de modèle, les méthodes [Sch81][Car90][OVSN93][VO91][Lar92] estiment les angles  $\theta_m^0$  par  $\hat{\theta}_m^0 = \theta_m^0$ . Toutefois en présence d'erreurs de modèle, l'estimation de ces angles devient erronée lorsque  $\mathbf{E} \neq \mathbf{0}_{N,M}$ . La variable aléatoire  $\Delta\theta_m = \hat{\theta}_m^0 - \theta_m^0$  est ainsi une fonction de la matrice d'erreur de modélisation  $\mathbf{E}$ , qui dépend de l'algorithme. Plus précisément, dans les approches [Fri90b][Fri90a], l'erreur  $\Delta\theta_m(\mathbf{E})$  est approximée par un développement limité du premier ordre au voisinage de  $\mathbf{E} = \mathbf{0}_{N,M}$ . L'objectif de ce chapitre est d'améliorer cette approximation par un développement limité d'ordre plus élevé en  $\mathbf{E}$  afin d'obtenir des performances plus représentatives de la réalité.

Les performances sont données en terme de **biais** ( $E[\Delta\theta_m]$ ) et de racine de l'**EQM** ( $RMS_m$ ) satisfaisant :  $(RMS_m)^2 = E[\Delta\theta_m^2]$ . Sachant que le **biais** et la racine de l'**EQM** font intervenir des moments de la variable  $\Delta\theta_m$ , ces performances dépendent forcément des moments statistiques de la matrice  $\mathbf{E}$  des erreurs de modèle. L'Annexe-A donne les expressions analytiques des moments  $E[(\Delta\theta_m(\mathbf{E}))^q]$  lorsque les fonctions  $\Delta\theta_m(\mathbf{E})$  sont des rapports ou produits de formes hermitiennes en  $vec(\mathbf{E})$ .

Dans la suite de ce chapitre les vecteurs  $\mathbf{a}(\theta)$  sont normés.

## 3.2 Biais et Variance (EQM) en présence d'erreurs de modèle

### 3.2.1 Algorithme du Maximum de Vraisemblance (MV)

L'algorithme du MV estime les  $M$  directions de paramètres  $\theta_1^0, \dots, \theta_M^0$  à partir des statistiques d'ordre 2 du signal  $\mathbf{x}(t)$  qui se caractérisent par la matrice de covariance  $\mathbf{R}_x(\mathbf{E})$  de l'expression (3.7) où la matrice  $\tilde{\mathbf{A}}(\underline{\theta}_0, \mathbf{E})$  est supposée de rang plein. La méthode du MV conditionnel [OVSN93] suppose que les signaux des sources incidentes sont déterministes et que le bruit  $\mathbf{n}(t)$  est gaussien avec  $E[\mathbf{n}(t) \mathbf{n}(t)^H] = \sigma^2 \mathbf{I}_N$ . L'algorithme minimise en  $\underline{\theta}$  le critère de vraisemblance  $c_{ML}(\underline{\theta}, \mathbf{E})$  suivant pour estimer le vecteur des incidences  $\underline{\theta}_0 = [\theta_1^0 \dots \theta_M^0]^T$

$$c_{ML}(\underline{\theta}, \mathbf{E}) = trace(\Pi(\underline{\theta}) \mathbf{R}_x(\mathbf{E})), \quad (3.10)$$

où  $\underline{\theta} = [\theta_1 \dots \theta_M]^T$ , et  $\Pi(\underline{\theta})$  est un projecteur tel que :

$$\Pi(\underline{\theta}) = \mathbf{I}_N - \mathbf{A}(\underline{\theta}) \mathbf{A}(\underline{\theta})^\# \quad (3.11)$$

où  $\mathbf{A}(\underline{\theta}) = [\mathbf{a}(\theta_1) \dots \mathbf{a}(\theta_M)]$ ,  $\mathbf{a}(\theta)$  est la réponse supposée du réseau de capteurs à une source et  $\#$  définit la pseudo-inverse satisfaisant :  $\mathbf{A}^\# \mathbf{A} = \mathbf{I}_M$ . Comme  $\Pi(\underline{\theta}_0) \mathbf{A}(\underline{\theta}_0) = \mathbf{0}_{N,M}$  grâce à la propriété d'orthogonalité de  $\Pi(\underline{\theta})$ , selon (3.7) le critère du MV sans erreur de modèle vérifie :

$$c_{ML}(\underline{\theta}, \mathbf{E} = \mathbf{0}) \geq c_{ML}(\underline{\theta}_0, \mathbf{E} = \mathbf{0}_{N,M}) = \sigma^2 (N - M) \quad (3.12)$$

où dans ce cas  $\mathbf{a}_m = \tilde{\mathbf{a}}_m$  pour  $(1 \leq m \leq M)$ .

Lorsque  $\mathbf{a}_m \neq \tilde{\mathbf{a}}_m$ , le critère devient  $c_{ML}(\underline{\theta}_0, \mathbf{E}) > \sigma^2 (N - M)$  et présente un minimum local dans des directions  $\hat{\underline{\theta}}_0 = [\hat{\theta}_1^0 \dots \hat{\theta}_M^0]^T$  différentes de  $\underline{\theta}_0$ .

**Etablissement de la fonction reliant  $\Delta\theta_m$  à la matrice  $\mathbf{E}$  des erreurs de modèles**

L'objectif de ce paragraphe est d'établir la relation liant les variables aléatoires  $\Delta\theta_m$  et  $\mathbf{E}$ . D'après (3.7) et (3.10), le critère du MV en  $\underline{\theta} = \underline{\theta}_0$  est une fonction de  $\mathbf{E}$

$$c_{ML}^{opt}(\mathbf{E}) = trace(\Pi_0 \mathbf{R}_x(\mathbf{E})), \quad (3.13)$$

où  $\Pi_0 = \mathbf{I}_N - \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_0^\#$ ,  $\mathbf{A}_0$  étant défini par l'équation (3.6). Après un développement limité au premier ordre de la dérivée du critère  $c_{ML}(\underline{\theta}, \mathbf{E})$  en  $\underline{\theta}$  au voisinage de  $\underline{\theta} = \underline{\theta}_0$ , le vecteur  $\Delta\underline{\theta} = [\Delta\theta_1 \dots \Delta\theta_M]^T$  d'erreur d'estimation des incidences devient d'après [OVSN93]

$$\Delta\underline{\theta} = -\mathbf{H}(\mathbf{E})^{-1} \nabla_0(\mathbf{E}), \quad (3.14)$$

où le vecteur  $\nabla_0(\mathbf{E})$  du gradient vérifie

$$\nabla_0(\mathbf{E}) = -2\Re \left( diag \left( \mathbf{A}_0^\# \mathbf{R}_x(\mathbf{E}) \Pi_0 \dot{\mathbf{A}}_0 \right) \right) \quad (3.15)$$

où  $\dot{\mathbf{A}}_0 = [\dot{\mathbf{a}}_1 \dots \dot{\mathbf{a}}_M]$ ,  $\dot{\mathbf{a}}_m$  étant la dérivée première du vecteur directeur  $\mathbf{a}(\theta)$  en  $\theta_m$ .

La matrice  $\mathbf{H}(\mathbf{E})$  du Hessian vérifie

$$\mathbf{H}(\mathbf{E}) = 2\Re \left( \left( \dot{\mathbf{A}}_0^H \Pi_0 \dot{\mathbf{A}}_0 \right) \odot \left( \mathbf{A}_0^\# \mathbf{R}_x(\mathbf{E}) \left( \mathbf{A}_0^\# \right)^H \right)^T \right), \quad (3.16)$$

En utilisant (3.5)(3.7) puis (3.15), le gradient devient

$$\nabla_0(\mathbf{E}) = \nabla_1(\mathbf{E}) + \nabla_2(\mathbf{E}) \quad (3.17)$$

avec

$$\nabla_1(\mathbf{E}) = -2\Re \left( diag \left( \mathbf{R}_s \mathbf{E}^H \Pi_0 \dot{\mathbf{A}}_0 \right) \right), \quad (3.18)$$

$$\nabla_2(\mathbf{E}) = -2\Re \left( diag \left( \mathbf{A}_0^\# \mathbf{E} \mathbf{R}_s \mathbf{E}^H \Pi_0 \dot{\mathbf{A}}_0 \right) \right). \quad (3.19)$$

**Démonstration :** Voir en Annexe-C ■

En utilisant les expressions (3.5)(3.7) et (3.16), le hessian  $\mathbf{H}(\mathbf{E})$  peut se réécrire de la façon suivante

$$\mathbf{H}(\mathbf{E}) = \mathbf{H}_0 + d\mathbf{H}(\mathbf{E}) \quad (3.20)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0 &= 2\Re \left( \left( \dot{\mathbf{A}}_0^H \Pi_0 \dot{\mathbf{A}}_0 \right) \odot \left( \mathbf{R}_s + \sigma^2 \left( \mathbf{A}_0^H \mathbf{A}_0 \right)^{-1} \right)^T \right), \\ d\mathbf{H}(\mathbf{E}) &= 2\Re \left( \left( \dot{\mathbf{A}}_0^H \Pi_0 \dot{\mathbf{A}}_0 \right) \odot \left( \mathbf{U}(\mathbf{E}) \mathbf{R}_s \mathbf{U}(\mathbf{E})^H - \mathbf{R}_s \right)^T \right) \\ \mathbf{U}(\mathbf{E}) &= \mathbf{I}_M + \mathbf{A}_0^\# \mathbf{E}. \end{aligned}$$

**Démonstration :** Voir en Annexe-C ■

Le développement limité au second ordre du vecteur  $\Delta\underline{\theta}$  de l'expression (3.14) au voisinage de  $\mathbf{E} = \mathbf{0}_{N,M}$  vaut alors

$$\Delta\underline{\theta} = -\mathbf{H}_0^{-1} \nabla_0(\mathbf{E}) + \mathbf{H}_0^{-1} \Delta\mathbf{H}(\mathbf{E}) \mathbf{H}_0^{-1} \nabla_1(\mathbf{E}) + o(\|\mathbf{E}^2\|), \quad (3.21)$$

où :

$$\Delta \mathbf{H}(\mathbf{E}) = 4\Re \left( \left( \dot{\mathbf{A}}_0^H \Pi_0 \dot{\mathbf{A}}_0 \right) \odot \left( \mathbf{A}_0^\# \mathbf{E} \mathbf{R}_s \right)^T \right), \quad (3.22)$$

**Démonstration :** Voir en Annexe-C ■

Il faut remarquer que l'expression (3.21) de l'erreur de goniométrie  $\Delta \underline{\theta}$  est une fonction assez complexe de l'erreur de modélisation  $\mathbf{E}$  et que l'établissement des expressions du biais et de la racine de l'EQM n'est pas direct à ce stade.

**Ecriture de la fonction  $\Delta \theta_m(\mathbf{E})$  suivant une forme hermitienne en  $\varepsilon = [1 \text{ vec}(\mathbf{E})^T \text{ vec}(\mathbf{E})^H]^T$**

L'objectif de ce paragraphe est de transformer les composantes du vecteur  $\Delta \underline{\theta}$  en formes hermitiennes de variables  $\varepsilon = [1 \text{ vec}(\mathbf{E})^T \text{ vec}(\mathbf{E})^H]^T$  après une approximation d'ordre deux. En effet, le développement limité au deuxième ordre de la variable  $\Delta \underline{\theta}$  au voisinage de  $\mathbf{E} = \mathbf{0}_{N,M}$  entraîne une dépendance de  $\Delta \underline{\theta}$  avec les composantes de la matrice  $\varepsilon \varepsilon^H$ . Cette transformation est indispensable pour obtenir des expressions mathématiques simples du biais et de la variance. Selon (3.17), la  $m^{\text{ième}}$  composante de  $\nabla_0(\mathbf{E})$  s'écrit

$$\nabla_0(\mathbf{E})_m = \boldsymbol{\mu}^H \mathbf{Q}_{\nabla m} \boldsymbol{\mu} \text{ avec } \mathbf{Q}_{\nabla m} = -\mathbf{Q}_{\nabla m0} - \mathbf{Q}_{\nabla m0}^H \quad (3.23)$$

où  $\boldsymbol{\mu} = [1 \text{ vec}(\mathbf{E})^T]^T$  et

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\nabla m0} &= \mathbf{Q}_1(\mathbf{p}_m, \Pi_0 \dot{\mathbf{a}}_m) + \mathbf{Q}_2(\mathbf{g}_m, \Pi_0 \dot{\mathbf{a}}_m) \\ (\mathbf{A}_0^\#)^H &= [\mathbf{g}_1 \dots \mathbf{g}_M] \text{ et } \mathbf{R}_s = [\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_M] \\ \mathbf{Q}_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{u}^* \otimes \mathbf{v} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{Q}_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_s^T \otimes (\mathbf{v} \mathbf{u}^H) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Démonstration :** Voir en Annexe-C ■

En utilisant la relation (3.23), la  $m^{\text{ième}}$  composante  $\Delta \theta_m^1$  du vecteur  $\Delta \underline{\theta}^1 = -\mathbf{H}_0^{-1} \nabla_0(\mathbf{E})$  devient

$$\Delta \theta_m^1 = \boldsymbol{\mu}^H \mathbf{Q}_m^1 \boldsymbol{\mu} \text{ avec } \mathbf{Q}_m^1 = -\sum_{i=1}^M \mathbf{H}_0^{-1}(m, i) \mathbf{Q}_{\nabla i}. \quad (3.24)$$

La  $m^{\text{ième}}$  composante  $\Delta \theta_m^2$  du vecteur  $\Delta \underline{\theta}^2 = \mathbf{H}_0^{-1} \Delta \mathbf{H}(\mathbf{E}) \mathbf{H}_0^{-1} \nabla_1(\mathbf{E})$  a pour expression

$$\Delta \theta_m^{(2)} = \varepsilon^H \mathbf{Q}_m^2 \varepsilon \quad (3.25)$$

avec

$$\mathbf{Q}_m^2 = -2 \sum_{i=1}^M \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{q}_i \mathbf{q}_{mi}^H & \mathbf{q}_i \mathbf{q}_{mi}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{q}_{mi}^* \mathbf{q}_i^H & \mathbf{q}_i^* \mathbf{q}_{mi}^T \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{q}_i = \sum_{l=1}^M \mathbf{H}_0^{-1}(i, l) (\mathbf{p}_l^* \otimes (\Pi_0 \dot{\mathbf{a}}_l)) \quad (3.27)$$

$$\mathbf{q}_{mi} = \sum_{k=1}^M \mathbf{H}_0^{-1}(m, k) (\dot{\mathbf{a}}_k^H \Pi_0 \dot{\mathbf{a}}_i)^* (\mathbf{p}_k^* \otimes \mathbf{g}_i) \quad (3.28)$$

**Démonstration :** Voir en Annexe-C ■

D'après (3.21), (3.24) et (3.25), la  $m^{\text{ième}}$  composante  $\Delta\theta_m$  de  $\Delta\theta = \Delta\theta^1 + \Delta\theta^2$  vérifie

$$\Delta\theta_m = \varepsilon^H \mathbf{Q}_m \varepsilon \quad \text{où} \quad \mathbf{Q}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_m^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \mathbf{Q}_m^2 \quad (3.29)$$

La matrice  $\mathbf{Q}_m$  dépend de la matrice  $\mathbf{R}_s = E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}(t)^H]$  de covariance des sources, de la matrice  $\mathbf{A}_0 = \tilde{\mathbf{A}}(\theta_0, \mathbf{E}=\mathbf{0})$  des vecteurs directeurs non perturbés ainsi que de la matrice  $\dot{\mathbf{A}}_0$  des dérivées premières en  $\theta_m$  de ces vecteurs.

### Expressions du biais et de la racine de l'EQM

**Expressions générales** L'objectif de ce paragraphe est d'établir pour la méthode du maximum de vraisemblance (MV), l'expression des moments de la forme hermitienne  $\Delta\theta_m = \varepsilon^H \mathbf{Q}_m \varepsilon$  afin d'obtenir l'expression du biais et de la racine de l'EQM. Sachant que

$$E[\mathbf{x}^H \mathbf{Q} \mathbf{x}] = E[\text{trace}(\mathbf{Q} \mathbf{x} \mathbf{x}^H)] = \text{trace}(\mathbf{Q} E[\mathbf{x} \mathbf{x}^H]), \quad (3.30)$$

d'après (3.29), le biais de la  $m^{\text{ième}}$  source a pour expression

$$E[\Delta\theta_m] = \text{trace}(\mathbf{Q}_m \mathbf{R}_\varepsilon) \quad \text{où} \quad \mathbf{R}_\varepsilon = E[\varepsilon \varepsilon^H] \quad (3.31)$$

En utilisant l'équation (A.1)

$$(\mathbf{x}^H \mathbf{Q} \mathbf{x})^2 = (\mathbf{x}^{\otimes 2})^H \mathbf{Q}^{\otimes 2} \mathbf{x}^{\otimes 2} \quad (3.32)$$

où  $\mathbf{u}^{\otimes 2} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ , et selon (3.29) (3.30) et (3.32), la racine de l'EQM de la  $m^{\text{ième}}$  source s'écrit

$$RMS_m = \sqrt{E[(\Delta\theta_m)^2]} = \sqrt{\text{trace}(\mathbf{Q}_m^{\otimes 2} \mathbf{R}_\varepsilon^{(4)})} \quad \text{où} \quad \mathbf{R}_\varepsilon^{(4)} = E[\varepsilon^{\otimes 2} (\varepsilon^{\otimes 2})^H] \quad (3.33)$$

**Cas gaussien** Dans le cas d'erreurs de modèle  $\varepsilon$  gaussiennes, l'expression (A.15) montre que la matrice  $\mathbf{R}_\varepsilon^{(4)}$  des moments d'ordre 4 de  $\varepsilon$  dépend des matrices  $\mathbf{R}_\varepsilon$  et  $\mathbf{C}_\varepsilon = E[\varepsilon \varepsilon^T]$ . Toutefois en utilisant les expressions (A.13)(3.33) et (3.29), la racine de l'EQM de la  $m^{\text{ième}}$  source s'écrit

$$RMS_m = \sqrt{E[(\varepsilon^H \mathbf{Q}_m \varepsilon)^2]} = \sqrt{F_2^G(\mathbf{Q}_m, \mathbf{Q}_m, \mathbf{R}_\varepsilon, \mathbf{C}_\varepsilon)} \quad (3.34)$$

D'après (3.3) lorsque les erreurs de modèle sont circulaires et que les colonnes de la matrice  $\mathbf{E}$  vérifient  $E[\mathbf{e}\mathbf{e}^H] = \sigma_e^2 \mathbf{I}_{NM}$  et  $E[\mathbf{e}\mathbf{e}^T] = 0$  avec  $\mathbf{e} = \text{vec}(\mathbf{E})$ , les expressions de  $\mathbf{R}_\varepsilon$  et  $\mathbf{C}_\varepsilon$  deviennent

$$\mathbf{R}_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{2NM}^T \\ \mathbf{0}_{2NM} & \mathbf{R}_\varepsilon \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{C}_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{2NM}^T \\ \mathbf{0}_{2NM} & \mathbf{C}_\varepsilon \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{NM} \\ \mathbf{I}_{NM} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_\varepsilon = \sigma_e^2 \mathbf{I}_{2NM}, \quad \mathbf{C}_\varepsilon = \sigma_e^2 \mathbf{T}_0$$

L'expression du biais (3.31) devient

$$E[\Delta\theta_m] = \mathbf{Q}_m(1,1) + \sigma_e^2 \text{trace}(\mathbf{Q}_m^I) \quad (3.36)$$

où  $\mathbf{Q}^I$  est une sous-matrice de  $\mathbf{Q}$  contenant les lignes et colonnes indicées par le vecteur d'indices  $I = [2, 3, \dots, 2NM]$ . A partir de (3.35), on définit la matrice de permutation  $\mathbf{T}$  telle que  $\mathbf{T} \mathbf{R}_\varepsilon = \mathbf{C}_\varepsilon$ . Dans ce cas l'expression de la racine de l'EQM de (3.34) se réduit à

$$RMS_m = \sqrt{\mathbf{Q}_m(1,1)^2 + \sigma_e^2 \beta(\mathbf{Q}_m) + \sigma_e^4 \alpha(\mathbf{Q}_m^I)} \quad (3.37)$$

où

$$\alpha(\mathbf{Q}) = \text{trace}(\mathbf{Q}^I)^2 + \text{trace}\left(\left(\mathbf{Q}^I\right)^2\right) + \text{trace}\left(\left(\mathbf{Q}^I\right)^T \mathbf{T}_0 \mathbf{Q}^I \mathbf{T}_0\right) \quad (3.38)$$

$$\beta(\mathbf{Q})/2 = \mathbf{Q}(1,1) \text{trace}(\mathbf{Q}^I) + \Re(\mathbf{u}^H \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{T}_0 \mathbf{u}) \quad (3.39)$$

et

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(1,1) & \mathbf{u}^H \\ \mathbf{u} & \mathbf{Q}^I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^H \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_0 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Toutefois, selon (3.23),(3.24),(3.25) et (3.29)

$$\mathbf{Q}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_m(1,1) = 0 & \mathbf{u}_m^H \\ \mathbf{u}_m & \mathbf{Q}_m^I \end{bmatrix}, \quad \text{trace}(\mathbf{Q}_m^I) = 0. \quad (3.41)$$

D'après (3.29),  $\mathbf{Q}_m(1,1) = 0$  car  $\nabla_0(\mathbf{E} = \mathbf{0}) = 0$  et la démonstration de  $\text{trace}(\mathbf{Q}_m^I) = 0$  est donnée en Annexe-C. D'après (3.41), les expressions (3.36)(3.37) du biais et de la racine de l'EQM de la  $m^{\text{ième}}$  source sont

$$E[\Delta\theta_m] = 0 \text{ et } RMS_m = \sigma_e \sqrt{\beta_m + \sigma_e^2 \alpha_m} \quad (3.42)$$

avec selon (3.24)(3.37)

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \text{trace}\left(\left(\mathbf{Q}_m^I\right)^2\right) + \text{trace}\left(\left(\mathbf{Q}_m^I\right)^T \mathbf{T}_0 \mathbf{Q}_m^I \mathbf{T}_0\right) \\ \beta_m &= 2\Re(\mathbf{u}_m^H \mathbf{u}_m + \mathbf{u}_m^T \mathbf{T}_0 \mathbf{u}_m) \\ \mathbf{Q}_m^I &= \mathbf{Q}_m^{I(1)} + \mathbf{Q}_m^{I(2)} \\ \mathbf{Q}_m^{I(1)} &= -\sum_{i=1}^M \mathbf{H}_0^{-1}(m,i) (\mathbf{U}_i + \mathbf{U}_i^H) & \mathbf{Q}_m^{I(2)} &= -2 \sum_{i=1}^M \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i \mathbf{q}_{mi}^H & \mathbf{q}_i \mathbf{q}_{mi}^T \\ \mathbf{q}_{mi}^* \mathbf{q}_i^H & \mathbf{q}_i^* \mathbf{q}_{mi}^T \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_m &= -\sum_{i=1}^M \mathbf{H}_0^{-1}(m,i) (\mathbf{p}_i^* \otimes (\Pi_0 \hat{\mathbf{a}}_i)) & \mathbf{U}_i &= \mathbf{R}_s^T \otimes ((\Pi_0 \hat{\mathbf{a}}_i) \mathbf{g}_i^H) \end{aligned}$$

Les résultats théoriques de l'expression (3.42) montrent que l'algorithme du MV est non biaisé en présence d'erreurs de modèle dans le cas gaussien centré et que ces résultats ne dépendent pas des angles d'arrivées  $\theta_m$  et de la matrice  $\mathbf{R}_s$  de covariance des sources. Dans la référence [Fri90a], la matrice  $\mathbf{Q}_m^I$  est nulle et la racine de l'EQM vérifie au premier ordre :

$$RMS_m^{\text{pre}} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_e \sqrt{\beta_m} \quad (3.43)$$

On définit par  $\sigma_e^{\text{lim}}$  la valeur maximale de  $\sigma_e$  où l'approximation au premier ordre de [Fri90a] des erreurs de modèle est valable à 10% près

$$\begin{aligned} \circ \text{ Pour } \sigma_e < \sigma_e^{\text{lim}} \text{ alors } RMS_m &\approx \sigma_e \sqrt{\beta_m} \\ \circ \text{ Pour } \sigma_e \geq \sigma_e^{\text{lim}} \text{ alors } RMS_m &\approx \sigma_e \sqrt{\beta_m + \sigma_e^2 \alpha_m} \\ \sigma_e^{\text{lim}} &= \sqrt{0.1 \frac{\beta_m}{\alpha_m}} \end{aligned} \quad (3.44)$$

La figure 3.1, donne la valeur de  $\sigma_e^{\text{lim}}$  en fonction de l'écart angulaire  $|\theta_2 - \theta_1|$  entre les  $M = 2$  sources incidentes à un réseau circulaire de rayon  $R = \lambda_0$  avec  $N = 5$  capteurs.

On constate que la valeur de  $\sigma_e^{\text{lim}}$  diminue avec le rapprochement angulaire des sources. Dans un goniomètre expérimental standard, les erreurs de modèle valent approximativement  $\sigma_e = 0.12$  et nécessitent donc une approximation au second ordre lorsque  $|\theta_2 - \theta_1| < 14^\circ$  avec un réseau d'ouverture  $2R = 2\lambda_0$ .

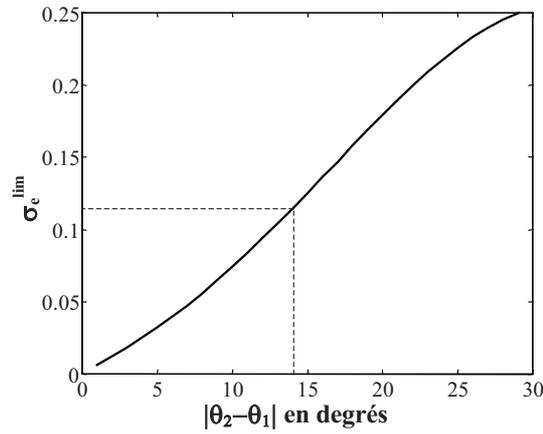


FIG. 3.1 –  $\sigma_e^{\text{lim}}$  du MV en fonction de  $|\theta_2 - \theta_1|$  :  $\theta_1 = 100^\circ$ ,  $\mathbf{R}_s(1, 2) = 0.8$  sur un réseau circulaire où  $N = 5$  et  $R = \lambda_0$ .

### Simulations

Dans le cas de  $M = 2$  sources d'incidences  $\theta_1 = 100^\circ$  et  $\theta_2$ , les figure 3.2 et figure 3.3 comparent les performances estimées de la première source (Racine de l'EQM) sur 1000 réalisations aux performances théoriques des premier [Fri90a] et second ordre. Le réseau est circulaire avec un rayon  $R = \lambda_0$  et  $N = 5$  capteurs et le bruit additif sur les observations vérifie  $\sigma^2 = 0$ . La matrice  $\mathbf{R}_s$  de covariance des sources vérifie :  $\mathbf{R}_s(1, 1) = \mathbf{R}_s(2, 2) = 1$  et  $\mathbf{R}_s(1, 2) = \mathbf{R}_s(2, 1) = 0.8$ . Les erreurs de modèle  $\mathbf{E}$  sont gaussiennes et circulaires en vérifiant  $E[\mathbf{e}\mathbf{e}^H] = \sigma_e^2 \mathbf{I}_{NM}$  avec  $\mathbf{e} = \text{vec}(\mathbf{E})$ . Plus précisément, la comparaison est effectuée en fonction de  $\sigma_e$  pour  $\theta_2 = 86^\circ$  sur la figure 3.2 puis en fonction de  $|\theta_2 - \theta_1|$  sur la figure 3.3 pour  $\sigma_e = 0.26$ .

D'après les figures 3.2 et 3.3, l'approximation au premier ordre de l'EQM est valide respectivement pour  $\sigma_e < \sigma_e^{\text{lim}} = 0.12$  (avec  $|\theta_2 - \theta_1| = 14^\circ$ ) et  $|\theta_2 - \theta_1| > 20^\circ$  (avec  $\sigma_e = 0.26$ ). Au delà de ces domaines seule l'approximation au second ordre est en parfaite adéquation avec les simulations. Comme prédit par (3.44) ou bien par figure 3.1, la figure 3.2 montre que la racine de l'EQM est une fonction linéaire de  $\sigma_e$  jusqu'à  $\sigma_e^{\text{lim}} = 0.12$  lorsque  $|\theta_2 - \theta_1| = 14^\circ$  et devient quadratique après  $\sigma_e^{\text{lim}} = 0.12$ .

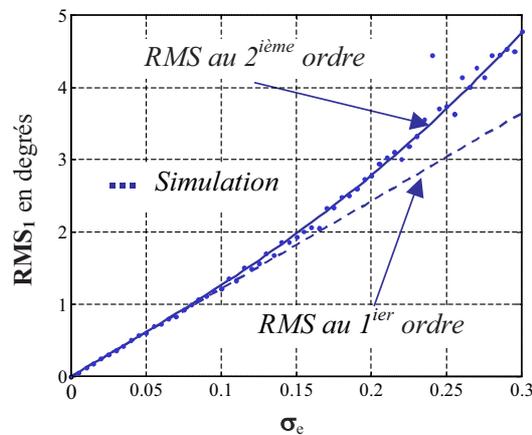


FIG. 3.2 –  $RMS_1$  ( $2^{\text{ième}}$  ordre en trait plein et  $1^{\text{ière}}$  ordre en pointillé [Fri90a]) en fonction du niveau  $\sigma_e$  de l'erreur de modèle :  $\theta_1 = 100^\circ$  et  $\theta_2 = 86^\circ$ ,  $\mathbf{R}_s(1, 2) = 0.8$  sur un réseau circulaire où  $N = 5$  et  $R = \lambda_0$ .

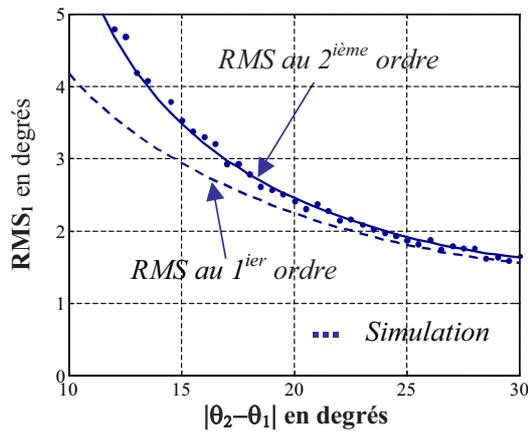


FIG. 3.3 –  $RMS_1$  (2<sup>ème</sup> ordre en trait plein et 1<sup>er</sup> ordre en pointillé [Fri90a]) en fonction de  $|\theta_2 - \theta_1|$  :  $\sigma_e = 0.26$ ,  $\theta_1 = 100^\circ$ ,  $\mathbf{R}_s(1,2) = 0.8$  sur un réseau circulaire où  $N = 5$  et  $R = \lambda_0$ .

### 3.2.2 Algorithmes MUSIC à l'ordre 2

En supposant que les matrices  $\tilde{\mathbf{A}}(\underline{\theta}_0, \mathbf{E})$  et  $\mathbf{R}_s$  soient de rang plein, l'algorithme MUSIC utilisant les statistiques d'ordre deux de  $\mathbf{x}(t)$ , estime les  $M$  directions de paramètres  $\theta_1^0, \dots, \theta_M^0$  avec la matrice de covariance  $\mathbf{R}_x(\mathbf{E})$  (3.7) du signal  $\mathbf{x}(t)$ . Ainsi, la méthode MUSIC ne permet pas de déterminer les directions d'arrivées des multi-trajets cohérents car la matrice  $\mathbf{R}_s$  est de rang dégénéré. La méthode du MV permet cette estimation car ne fait pas d'hypothèse sur le rang de  $\mathbf{R}_s$ . La méthode MUSIC [BK79][Sch81] est la plus connue des méthodes dites à Haute Résolution [JD93][KV96] qui exploitent les propriétés géométriques de la matrice de covariance des observations  $\mathbf{x}(t)$ . La décomposition en éléments propres de cette matrice  $\mathbf{R}_x(\mathbf{E})$  s'écrit :

$$\mathbf{R}_x(\mathbf{E}) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^H = \mathbf{U}_s \mathbf{\Lambda}_s \mathbf{U}_s^H + \sigma^2 \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \quad (3.45)$$

où  $\mathbf{\Lambda}_s = \text{diag}\{\lambda_1 \dots \lambda_M\}$  contient les  $M$  plus fortes valeurs propres et  $\mathbf{U}_s = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_M]$  les vecteurs propres associés définissant l'espace signal. L'espace signal est décrit entièrement par les vecteurs directeurs  $\tilde{\mathbf{a}}_m$  des sources formant les colonnes de la matrice  $\tilde{\mathbf{A}}(\underline{\theta}_0, \mathbf{E})$ . La base des vecteurs  $\mathbf{u}_m$  et celle des vecteurs directeurs  $\tilde{\mathbf{a}}_m$  définissent donc le même espace. Les colonnes de la matrice  $\mathbf{U}_n = [\mathbf{u}_{M+1} \dots \mathbf{u}_N]$  sont associées à la même valeur propre  $\sigma^2$  et définissent l'espace bruit qui est orthogonal à l'espace signal. Les valeurs propres vérifient  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_M > \lambda_{M+1} = \dots = \lambda_N = \sigma^2$  et sont utilisées pour estimer le nombre  $M$  de sources [Aka74](AIC), [Ris78](MDL), [BK83](Chi-2) ou [MLC91] (Décroissance exponentielle des valeurs propres). La méthode MUSIC recherche alors les incidences  $\theta_m^0$  où le vecteur  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_m^0)$  est orthogonal aux colonnes de la matrice  $\mathbf{U}_n$ . Pour établir le critère de l'algorithme, un projecteur bruit est construit à partir des  $N - M$  vecteurs propres associés aux plus faibles valeurs propres d'une estimée de la matrice de covariance du signal  $\mathbf{x}(t)$ . Le projecteur bruit associé à la matrice de covariance exacte  $\mathbf{R}_x(\mathbf{E})$  vérifie

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{E}) = \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H = \mathbf{I}_N - \tilde{\mathbf{A}}(\underline{\theta}_0, \mathbf{E}) \tilde{\mathbf{A}}(\underline{\theta}_0, \mathbf{E})^\# \quad (3.46)$$

L'égalité (3.46) montre que les vecteurs  $\mathbf{u}_{M+1}, \dots, \mathbf{u}_N$  de l'espace bruit et les colonnes de la matrice  $\tilde{\mathbf{A}}(\underline{\theta}_0, \mathbf{E})$  sont orthogonaux. Ainsi, les  $M$  vecteurs directeurs  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_m^0)$  de  $\tilde{\mathbf{A}}(\underline{\theta}_0, \mathbf{E})$  vérifient  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_m^0)^H \mathbf{\Pi}(\mathbf{E}) \tilde{\mathbf{a}}(\theta_m^0) = 0$ . L'algorithme MUSIC exploite cette propriété en supposant que les vecteurs  $\mathbf{a}(\theta)$  et  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta)$  soient

égaux. Les  $M$  plus petits minima locaux du critère  $c(\theta, \mathbf{E})$  suivant

$$c(\theta, \mathbf{E}) = \mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{\Pi}(\mathbf{E}) \mathbf{a}(\theta), \quad (3.47)$$

donne une estimation des angles d'arrivées. Rappelons que les vecteurs  $\mathbf{a}(\theta)$  sont normés. Lorsque  $\mathbf{a}_m \neq \tilde{\mathbf{a}}_m$  alors  $\mathbf{E}$  est différent de la matrice nulle et le critère  $c(\theta_m^0, \mathbf{E})$  présente un minimum local en  $\hat{\theta}_m^0$  différent de l'incidence  $\theta_m^0$  de la  $m^{\text{ième}}$  source.

### Etablissement de la fonction reliant $\Delta\theta_m$ à la matrice $\mathbf{E}$ des erreurs de modèles

Une relation entre l'erreur d'incidence  $\Delta\theta_m$  et l'erreur de modélisation  $\mathbf{E}$  est établie dans cette partie. Après un développement limité au premier ordre en  $\theta$  du critère  $\dot{c}(\theta, \mathbf{E}) = \partial(c(\theta, \mathbf{E})) / \partial\theta$  au voisinage de  $\theta = \theta_m^0$ , l'expression de l'erreur d'incidence  $\Delta\theta_m = \hat{\theta}_m^0 - \theta_m^0$  devient :

$$\Delta\theta_m = -\frac{\dot{c}(\theta_m, \mathbf{E})}{\ddot{c}(\theta_m, \mathbf{E})} \quad (3.48)$$

où  $\dot{c}(\theta, \mathbf{E}) = \partial^2(c(\theta, \mathbf{E})) / \partial\theta^2$ , sont les dérivées première et seconde du critère  $c(\theta, \mathbf{E})$  en  $\theta$ . D'après (3.47), les expressions de  $\dot{c}(\theta, \mathbf{E})$  et  $\ddot{c}(\theta, \mathbf{E})$  s'écrivent

$$\dot{c}(\theta_m, \mathbf{E}) = 2\Re \{ \dot{\mathbf{a}}_m^H \mathbf{\Pi}(\mathbf{E}) \mathbf{a}_m \} \quad (3.49)$$

$$\ddot{c}(\theta_m, \mathbf{E}) = 2\Re \{ \ddot{\mathbf{a}}_m^H \mathbf{\Pi}(\mathbf{E}) \mathbf{a}_m \} + 2\dot{\mathbf{a}}_m^H \mathbf{\Pi}(\mathbf{E}) \dot{\mathbf{a}}_m \quad (3.50)$$

où  $\dot{\mathbf{a}}_m$  et  $\ddot{\mathbf{a}}_m$  sont les dérivées première et seconde du vecteur directeur  $\mathbf{a}(\theta)$  en  $\theta_m$ . La détermination d'une expression de  $\Delta\theta_m$  au second ordre en  $\mathbf{E}$  s'effectue par le calcul du développement limité du projecteur  $\mathbf{\Pi}(\mathbf{E})$  au voisinage de  $\mathbf{E} = \mathbf{0}_{N,M}$ . Dans [KFJ92], Krim et al établissent un développement limité récursif d'ordre  $n$  du projecteur  $\mathbf{\Pi}(\mathbf{E})$  en fonction de  $\Delta\mathbf{R}$ . Ce sont des résultats utiles, mais dans le cas d'erreurs de modèle (3.5) où  $\Delta\mathbf{R} = \mathbf{R}_x(\mathbf{E}) - \mathbf{R}_x(\mathbf{E} = \mathbf{0}) = \tilde{\mathbf{A}}(\theta_0, \mathbf{E}) \mathbf{R}_s \tilde{\mathbf{A}}(\theta_0, \mathbf{E})^H - \mathbf{A}_0 \mathbf{R}_s \mathbf{A}_0^H$ , un développement limité en fonction de la matrice  $\mathbf{E}$  est plus direct. L'Appendix-A du papier [FLV05d] donne l'expression suivante du développement limité :

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{E}) = \mathbf{\Pi}^{(2)}(\mathbf{E}) + o(\|\mathbf{E}\|^2) \quad (3.51)$$

où

$$\mathbf{\Pi}^{(2)}(\mathbf{E}) = \left( \mathbf{I}_N - \mathbf{E} \mathbf{A}_0^\# \right)^H \mathbf{\Pi}_0 \left( \mathbf{I}_N - \mathbf{E} \mathbf{A}_0^\# \right) - \mathbf{U}_0 \mathbf{U}_0^H + \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_0^H \quad (3.52)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_0 &= \mathbf{\Pi}(\mathbf{E} = \mathbf{0}) \text{ et } \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_M \end{bmatrix} \\ \mathbf{U}_0 &= \mathbf{\Pi}_0 \mathbf{E} \mathbf{A}_0^\# \text{ et } \mathbf{V}_0 = \mathbf{\Pi}_0 \left( \mathbf{E} \mathbf{A}_0^\# \right)^2 \end{aligned} \quad (3.53)$$

L'expression au second ordre de  $\mathbf{\Pi}(\mathbf{E})$  (3.51) donne l'approximation suivante du critère de MUSIC  $c(\theta_m, \mathbf{E})$

$$c(\theta_m, \mathbf{E}) = \tilde{c}(\theta_m, \mathbf{E}) + o(\|\mathbf{E}\|^2) \quad (3.54)$$

où

$$\tilde{c}(\theta_m, \mathbf{E}) = \mathbf{a}_m^H \mathbf{\Pi}^{(2)}(\mathbf{E}) \mathbf{a}_m \quad (3.55)$$

et l'approximation au second ordre de l'erreur d'incidence  $\Delta\theta_m = \hat{\theta}_m^0 - \theta_m^0$  (3.48) devient

$$\Delta\theta_m = -\frac{\dot{\tilde{c}}(\theta_m, \mathbf{E})}{\ddot{\tilde{c}}(\theta_m, \mathbf{E})} \quad (3.56)$$

où  $\dot{\tilde{c}}(\theta_m, \mathbf{E})$  et  $\ddot{\tilde{c}}(\theta_m, \mathbf{E})$  sont les dérivées première et seconde approchées du critère  $c(\theta, \mathbf{E})$  en  $\theta$ . D'après (3.49)(3.50) et (3.55), les expressions de ces dérivées sont les suivantes

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{c}}(\theta_m, \mathbf{E}) &= 2\Re \left\{ \dot{\mathbf{a}}_m^H \mathbf{\Pi}^{(2)}(\mathbf{E}) \mathbf{a}_m \right\} \\ \ddot{\tilde{c}}(\theta_m, \mathbf{E}) &= 2\Re \left\{ \ddot{\mathbf{a}}_m^H \mathbf{\Pi}^{(2)}(\mathbf{E}) \mathbf{a}_m \right\} + 2 \dot{\mathbf{a}}_m^H \mathbf{\Pi}^{(2)}(\mathbf{E}) \dot{\mathbf{a}}_m. \end{aligned} \quad (3.57)$$

**Ecriture de la fonction  $\Delta\theta_m(\mathbf{E})$  suivant un rapport de forme hermitiennes en  $\boldsymbol{\varepsilon} = \left[ 1 \text{vec}(\mathbf{E})^T \text{vec}(\mathbf{E})^H \right]^T$ .**

L'objectif de ce paragraphe est de transformer l'expression de  $\Delta\theta_m$  en un rapport de formes hermitiennes de variables  $\boldsymbol{\varepsilon} = \left[ 1 \text{vec}(\mathbf{E})^T \text{vec}(\mathbf{E})^H \right]^T$  afin d'obtenir une expression exploitable pour établir le biais et la racine de l'EQM. Il faut remarquer que le développement limité de  $\mathbf{\Pi}(\mathbf{E})$  au deuxième ordre en  $\mathbf{E}$  entraîne automatiquement une dépendance de  $\dot{\tilde{c}}(\theta_m, \mathbf{E})$  et  $\ddot{\tilde{c}}(\theta_m, \mathbf{E})$  avec toutes les composantes de la matrice  $\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^H$ . En notant par  $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{v}^H \mathbf{\Pi}^{(2)}(\mathbf{E}) \mathbf{u}$  et utilisant (3.52), l'Appendix-B du papier [FLV05d] donne la forme hermitienne associée à la fonction  $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

$$\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \boldsymbol{\varepsilon}^H \mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.58)$$

où

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} q & -\mathbf{q}_{12}^H & \mathbf{0}^T \\ -\mathbf{q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} & \mathbf{Q}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{32} & \mathbf{Q}_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.59)$$

où  $q = \mathbf{v}^H \mathbf{\Pi}_0 \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{q}_{12} = \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  et  $\mathbf{q}_{21} = \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{u})$  avec

$$\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \left( \mathbf{A}_0^\# \mathbf{u} \right)^* \otimes (\mathbf{\Pi}_0 \mathbf{v}) \quad (3.60)$$

Les sous-matrices de  $\mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  vérifient

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{22} &= \Psi \left( \mathbf{A}_0^\#, \mathbf{A}_0^\#, \mathbf{\Pi}_0 \right), & \mathbf{Q}_{23} &= \Psi \left( \mathbf{A}_0^\#, \mathbf{\Pi}_0, \left( \mathbf{A}_0^\# \right)^H \right) \mathbf{P}, \\ \mathbf{Q}_{32} &= \mathbf{P}^H \Psi \left( \mathbf{\Pi}_0, \mathbf{A}_0^\#, \mathbf{A}_0^\# \right), & \mathbf{Q}_{33} &= -\mathbf{P}^H \Psi \left( \mathbf{\Pi}_0, \mathbf{\Pi}_0, \mathbf{A}_0^\# \left( \mathbf{A}_0^\# \right)^H \right) \mathbf{P}, \\ \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) &= \left( (\mathbf{X}\mathbf{v})^* (\mathbf{Y}\mathbf{u})^T \right) \otimes \mathbf{Z} \end{aligned} \quad (3.61)$$

où  $\mathbf{P}$  est la matrice de permutation définie par  $\text{vec}(\mathbf{E}^T) = \mathbf{P} \text{vec}(\mathbf{E})$ . D'après (3.58), les dérivées approchées  $\dot{\tilde{c}}(\theta_m, \mathbf{E})$  et  $\ddot{\tilde{c}}(\theta_m, \mathbf{E})$  de l'équation (3.57) peuvent s'écrire de la manière suivante

$$\dot{\tilde{c}}(\theta_m, \mathbf{E}) = \boldsymbol{\varepsilon}^H \dot{\mathbf{Q}}_m \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \ddot{\tilde{c}}(\theta_m, \mathbf{E}) = \boldsymbol{\varepsilon}^H \ddot{\mathbf{Q}}_m \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.62)$$

où

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}}_m &\stackrel{def}{=} \mathbf{Q}(\mathbf{a}_m, \dot{\mathbf{a}}_m) + \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{a}}_m, \mathbf{a}_m), \\ \ddot{\mathbf{Q}}_m &\stackrel{def}{=} \mathbf{Q}(\mathbf{a}_m, \ddot{\mathbf{a}}_m) + \mathbf{Q}(\ddot{\mathbf{a}}_m, \mathbf{a}_m) + 2 \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{a}}_m, \dot{\mathbf{a}}_m). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Selon les expressions (3.56) (3.62), l'erreur de goniométrie  $\Delta\theta_m$  de la  $m^{\text{ième}}$  source s'écrit avec le rapport de formes hermitiennes suivant

$$\Delta\theta_m = -\frac{\boldsymbol{\epsilon}^H \dot{\mathbf{Q}}_m \boldsymbol{\epsilon}}{\boldsymbol{\epsilon}^H \ddot{\mathbf{Q}}_m \boldsymbol{\epsilon}} \quad \text{avec } \boldsymbol{\epsilon} = \left[ 1 \quad \text{vec}(\mathbf{E})^T \quad \text{vec}(\mathbf{E})^H \right]^T \quad (3.64)$$

L'expression (3.64) de l'erreur de goniométrie  $\Delta\theta_m$  s'écrit plus simplement que dans l'équation (3.56) car le vecteur  $\boldsymbol{\epsilon}$  est séparé des matrices  $\dot{\mathbf{Q}}_m$  et  $\ddot{\mathbf{Q}}_m$  qui sont indépendantes des erreurs de modèle  $\mathbf{E}$ .

### Expressions du biais et de la racine de l'EQM

**Expressions générales** Le calcul du biais et de la racine de l'EQM de l'estimateur MUSIC utilise les résultats de l'Annexe-A donnant une expression analytique des moments statistiques d'un rapport de formes hermitiennes. En supposant que  $\|\mathbf{E}\| \ll \|\mathbf{A}_0\|$ , le calcul des moments des premier et second ordre de l'erreur  $\Delta\theta_m$  (3.64) néglige la fonction  $\gamma(\mathbf{R}_u^{(2)}, \mathbf{R}_u^{(4)}, \dots)$  (A.6). Ainsi, d'après (A.7)(3.64), le biais d'ordre zero pour estimer l'incidence de la  $m^{\text{ième}}$  source vérifie :

$$E[\Delta\theta_m]_0 = -\frac{\text{trace}(\dot{\mathbf{Q}}_m \mathbf{R}_\epsilon)}{\text{trace}(\ddot{\mathbf{Q}}_m \mathbf{R}_\epsilon)}, \quad (3.65)$$

et devient au premier ordre

$$E[\Delta\theta_m]_1 = E[\Delta\theta_m]_0 \left( 1 + \gamma(\mathbf{R}_\epsilon, \mathbf{R}_\epsilon^{(4)}) \right), \quad (3.66)$$

où les expressions de  $\mathbf{R}_\epsilon$  et  $\mathbf{R}_\epsilon^{(4)}$  sont données par les expressions (3.31) et (3.33). L'expression (3.65) montre que le biais  $E[\Delta\theta_m]$  n'est pas nul dans le cas général et que cette propriété reste valable lorsque  $E[\mathbf{e}_m] = \mathbf{0}_N$ . A contrario, dans les références [Fri90b, SK92][Mar98a] le biais est nul lorsque  $E[\mathbf{e}_m] = \mathbf{0}_N$  parce que  $\Delta\theta_m$  dépend linéairement de  $\mathbf{e}_m$ . Lorsque la matrice de covariance est estimée avec un nombre fini d'échantillons, Xu and Buckley [XB92] montrent que l'estimateur MUSIC est biaisé en établissant une relation linéaire entre  $E[\Delta\theta_m]$  et  $E[\Delta\theta_m^2]$ . Selon l'expression (A.7), la racine de l'EQM de la  $m^{\text{ième}}$  source a l'expression suivante à l'ordre zéro :

$$RMS_m = \sqrt{\frac{\text{trace}(\dot{\mathbf{Q}}_m^{\otimes 2} \mathbf{R}_\epsilon^{(4)})}{\text{trace}(\ddot{\mathbf{Q}}_m^{\otimes 2} \mathbf{R}_\epsilon^{(4)})}}. \quad (3.67)$$

Les expressions (3.65) et (3.67) du biais et de la racine de l'EQM ne font aucune hypothèse sur la loi de probabilité de la variable  $\boldsymbol{\epsilon} = \left[ 1 \quad \text{vec}(\mathbf{E})^T \quad \text{vec}(\mathbf{E})^H \right]^T$ . La fonction qui relie  $\mathbf{R}_\epsilon^{(4)}$  à  $\mathbf{R}_\epsilon$  dépend de l'origine physique et statistique des erreurs de modèle  $\mathbf{E}$ . La référence [FLV05d] propose des expressions théoriques des matrices  $\mathbf{R}_\epsilon^{(4)}$  et  $\mathbf{R}_\epsilon$  dans le cas des erreurs de positions des capteurs et de perturbations liées au couplage mutuel. Il peut aussi être envisagé une mesure expérimentale des matrices  $\mathbf{R}_\epsilon^{(2q)}$  pour obtenir les expressions théoriques du biais et de la variance.

**Cas gaussien** Le modèle gaussien est une première approximation réaliste d'une loi statistique des erreurs car il tient compte du biais et de la variance des erreurs de modèle en négligeant les cumulants d'ordre supérieur. Lorsque les erreurs de modèle  $\boldsymbol{\epsilon}$  sont gaussiennes et centrées, la matrice  $\mathbf{R}_\epsilon^{(4)}$  des moments d'ordre 4 est donnée par l'expression (A.15). D'après (A.13)(3.62) (3.64) et (3.67), l'expression

de la racine de l'EQM dans le cas gaussien s'écrit :

$$RMS_m = \sqrt{\frac{E \left[ \left( \boldsymbol{\varepsilon}^H \dot{\mathbf{Q}}_m \boldsymbol{\varepsilon} \right)^2 \right]}{E \left[ \left( \boldsymbol{\varepsilon}^H \ddot{\mathbf{Q}}_m \boldsymbol{\varepsilon} \right)^2 \right]}} = \sqrt{\frac{F_2^G \left( \dot{\mathbf{Q}}_m, \dot{\mathbf{Q}}_m, \mathbf{R}_\varepsilon, \mathbf{C}_\varepsilon \right)}{F_2^G \left( \ddot{\mathbf{Q}}_m, \ddot{\mathbf{Q}}_m, \mathbf{R}_\varepsilon, \mathbf{C}_\varepsilon \right)}} \quad (3.68)$$

car  $trace \left( \mathbf{Q}^{\otimes 2} \mathbf{R}_\varepsilon^{(4)} \right) = E \left[ \left( \boldsymbol{\varepsilon}^H \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon} \right)^2 \right] = F_2^G \left( \mathbf{Q}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}_\varepsilon, \mathbf{C}_\varepsilon \right)$ .

Lorsque les colonnes  $\mathbf{e}_i$  de la matrice  $\mathbf{E}$  vérifient  $E[\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^H] = \sigma_e^2 \delta_i \delta_j \mathbf{I}_N$  avec  $E[\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T] = 0$ , les expressions des  $\mathbf{R}_\varepsilon = E[\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^H]$  et  $\mathbf{C}_\varepsilon = E[\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T]$  sont données par l'expression (3.35). En remarquant que  $\dot{\mathbf{Q}}_m(1, 1) = 2\Re \{ \dot{\mathbf{a}}_m^H \boldsymbol{\Pi}_0 \mathbf{a}_m \} = 0$ , le biais de l'expression (3.65) devient

$$E[\Delta\theta_m]_0 = -\frac{\sigma_e^2 trace \left( \dot{\mathbf{Q}}_m^I \right)}{\ddot{\mathbf{Q}}_m(1, 1) + \sigma_e^2 trace \left( \ddot{\mathbf{Q}}_m^I \right)} \quad (3.69)$$

où la relation entre  $\mathbf{Q}^I$  et  $\mathbf{Q}$  est donnée par (3.40). Pour des erreurs de modèle plus faibles ( $\sigma^2 \ll \left| \ddot{\mathbf{Q}}_m(1, 1) / trace(\ddot{\mathbf{Q}}_m^I) \right|$ ) l'approximation du biais au premier ordre devient

$$E[\Delta\theta_m]_0 \approx -\sigma_e^2 \frac{trace \left( \dot{\mathbf{Q}}_m^I \right)}{\ddot{\mathbf{Q}}_m(1, 1)} \quad (3.70)$$

Ainsi, le biais est une fonction quadratique du niveau  $\sigma_e$  des erreurs de modèle. Lorsque les erreurs de modèle sont très importantes le biais tend vers la constante suivante

$$E[\Delta\theta_m]_0 \approx -trace(\dot{\mathbf{Q}}_m^I) / trace(\ddot{\mathbf{Q}}_m^I), \quad (3.71)$$

qui donne le biais maximal de l'estimateur lorsque les directions des sources ne sont pas résolues.

A partir de (3.35), l'expression de la racine de l'EQM de (3.68)

$$RMS_m = \sigma_e \sqrt{\frac{\beta \left( \dot{\mathbf{Q}}_m \right) + \sigma_e^2 \alpha \left( \dot{\mathbf{Q}}_m \right)}{\ddot{\mathbf{Q}}_m(1, 1)^2 + \sigma_e^2 \beta \left( \ddot{\mathbf{Q}}_m \right) + \sigma_e^4 \alpha \left( \ddot{\mathbf{Q}}_m \right)}} \quad (3.72)$$

où les fonctions  $\alpha(\mathbf{Q})$  et  $\beta(\mathbf{Q})$  sont définies dans (3.38)(3.39). Pour des niveaux  $\sigma_e$  d'erreur de modèle plus faible, l'expression au premier ordre de la racine de l'EQM de [Fri90b][SK92][Mar98a] devient :

$$RMS_m^{pre} \stackrel{def}{=} \sigma_e \sqrt{\beta(\mathbf{Q}_0) / \ddot{\mathbf{Q}}_m(1, 1)} \quad (3.73)$$

avec  $\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{q}_0^H & \mathbf{0}_{NM}^T \\ -\mathbf{q}_0 & \mathbf{0}_{NM,NM} & \mathbf{0}_{NM,NM} \\ \mathbf{0}_{NM} & \mathbf{0}_{NM,NM} & \mathbf{0}_{NM,NM} \end{bmatrix}$  et  $\mathbf{q}_0 = \Phi(\mathbf{a}_m, \dot{\mathbf{a}}_m)$

où la fonction  $\Phi(\cdot)$  est définie dans (3.60). Pour des erreurs de modèles plus importantes lorsque les sources sont non résolues la racine de l'EQM tend vers la constante

$$RMS_m \approx \sqrt{\alpha(\dot{\mathbf{Q}}_m) / \alpha(\ddot{\mathbf{Q}}_m)} \quad (3.74)$$

Sachant que les matrices  $\mathbf{Q}^I$  sont nulles au premier ordre, on en déduit que  $\beta(\mathbf{Q}_0) = \beta(\dot{\mathbf{Q}}_m)$  et que  $RMS_m^{pre} \stackrel{def}{=} \sigma_e \sqrt{\beta(\dot{\mathbf{Q}}_m) / \ddot{\mathbf{Q}}_m(1, 1)}$ . Dans ces conditions l'approximation au premier ordre des références

[Fri90b][SK92][Mar98a] est vérifiée jusqu'à  $\sigma_e^{\text{lim}}$  qui vérifie

$$\sigma_e^{\text{lim}} = \sqrt{\frac{\alpha(\dot{\mathbf{Q}}_m) \ddot{\mathbf{Q}}_m(1,1)^2}{\alpha(\ddot{\mathbf{Q}}_m) \beta(\dot{\mathbf{Q}}_m)} - \frac{\beta(\ddot{\mathbf{Q}}_m)}{\alpha(\ddot{\mathbf{Q}}_m)}} \quad (3.75)$$

oPour  $\sigma_e < \sigma_e^{\text{lim}}$  alors  $RMS_m \approx \sigma_e \sqrt{\beta(\dot{\mathbf{Q}}_m) / \ddot{\mathbf{Q}}_m(1,1)}$

oPour  $\sigma_e \geq \sigma_e^{\text{lim}}$  alors  $RMS_m \approx \sigma_e \sqrt{\frac{\beta(\dot{\mathbf{Q}}_m) + \sigma_e^2 \alpha(\dot{\mathbf{Q}}_m)}{\ddot{\mathbf{Q}}_m(1,1)^2 + \sigma_e^2 \beta(\ddot{\mathbf{Q}}_m) + \sigma_e^4 \alpha(\ddot{\mathbf{Q}}_m)}}$

Pour un réseau circulaire de rayon  $R = \lambda_0/2$  avec  $N = 5$  capteurs, la figure 3.4, donne la valeur de  $\sigma_e^{\text{lim}}$  en fonction de l'écart angulaire  $|\theta_2 - \theta_1|$  entre les  $M = 2$  sources incidentes.

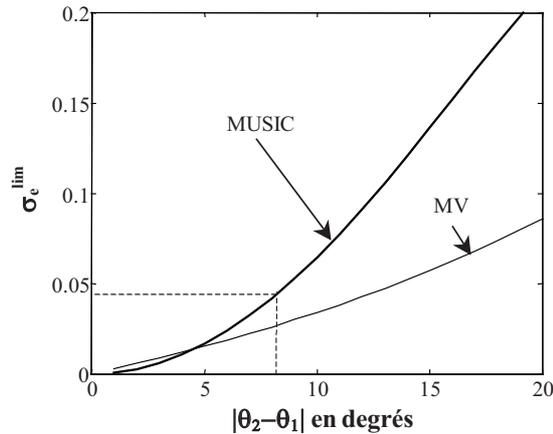


FIG. 3.4 –  $\sigma_e^{\text{lim}}$  de MUSIC et du MV en fonction de  $|\theta_2 - \theta_1|$  :  $\theta_1 = 100^\circ$ ,  $\mathbf{R}_s(1,2) = 0.8$  sur un réseau circulaire où  $N = 5$  et  $R = \lambda_0/2$ .

Comme pour le MV la valeur du  $\sigma_e^{\text{lim}}$  de la méthode MUSIC augmente avec l'éloignement des sources. Toutefois, le  $\sigma_e^{\text{lim}}$  de la méthode MUSIC augmente plus vite que dans le cas du maximum de vraisemblance. Ainsi pour une même configuration de sources, la zone d'approximation au premier ordre des performances théoriques est plus large pour la méthode MUSIC que pour le MV. La courbe de la figure 3.4 montre que l'approximation au premier ordre est valable pour  $|\theta_2 - \theta_1| < 8^\circ$  avec un réseau d'ouverture  $2R = \lambda_0$  lorsque  $\sigma_e = 0.05$ .

### Simulations

Le réseau des simulations de  $N=5$  capteurs est circulaire avec un rayon  $R=\lambda_0/2$  tel que la largeur à  $3dB$  du faisceau soit  $\Delta\theta = \pm 28^\circ$ . Deux sources de directions  $\theta_1 = 0^\circ$  et  $\theta_2$  sont incidentes à ce réseau. Les simulations comparent les performances estimées de la première source sur 500 réalisations aux performances théoriques du premier ordre [Fri90b][SK92][Mar98a] et du second ordre. Les erreurs de modèle  $\mathbf{e} = \text{vec}(\mathbf{E})$  sont gaussiennes et circulaires telles que  $E[\mathbf{e}\mathbf{e}^H] = \sigma_e^2 \mathbf{I}_{NM}$ , où  $\mathbf{R}_\epsilon$  vérifie (3.35) et  $\mathbf{R}_\epsilon^{(4)}$  (A.15).

La figure 3.5 représente la racine de l'EQM de la première source lorsque  $\theta_2 = 8.2^\circ$ . Trois zones de performances dépendantes de la probabilité de résolution  $P_r$  sont observables sur cette figure :

- 1<sup>ère</sup> zone :  $\sigma_e < 0.05$  où  $P_r \approx 1$ . Cette zone correspond aux erreurs de modèles faibles où une

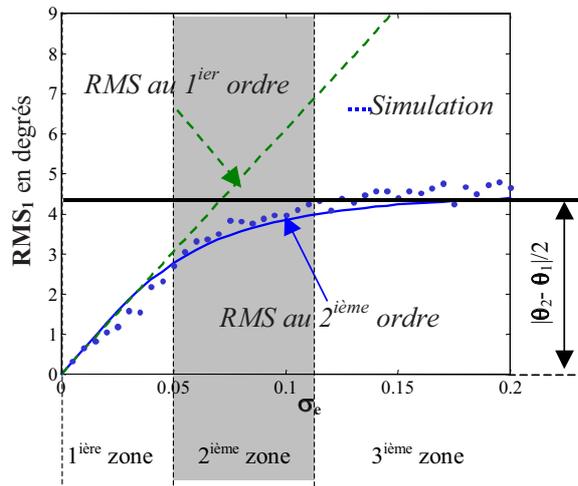


FIG. 3.5 –  $RMS$  de la 1<sup>ière</sup> source en fonction du niveau  $\sigma_e$  du modèle d'erreur Gaussien et circulaire. Paramètres :  $\theta_2 - \theta_1 = 8.2^\circ$ . Réseau circulaire de rayon  $R = \lambda_0/2$  avec  $N = 5$  capteurs.

approximation au premier ordre des performances est valable. La racine de l'EQM  $RMS_1$  est une fonction linéaire de  $\sigma_e$  comme prévu par (3.73) :  $RMS_1 \approx \sigma_e \sqrt{\beta(\dot{\mathbf{Q}}_1) / \ddot{\mathbf{Q}}_1(1,1)}$  et le biais est une fonction quadratique de  $\sigma_e$ . La valeur maximale de  $\sigma_e$  qui délimite cette zone correspond bien au  $\sigma_e^{\text{lim}} = 0.05$  de l'équation (3.75) d'après la figure 3.4.

- **2<sup>ième</sup> zone** :  $0.05 < \sigma_e < 0.12$  où  $0 < P_r < 1$ . On définit la limite de résolution par  $RMS = |\theta_2 - \theta_1|/2 = 4.1^\circ$ . Dans cette zone, l'estimateur MUSIC sépare difficilement les deux sources dans un certain nombre de réalisations.
- **3<sup>ième</sup> zone** :  $\sigma_e > 0.12$  où  $P_r \approx 0$ . Dans cette zone l'algorithme MUSIC ne sépare pas les sources car le critère ne donne qu'un seul minimum en  $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2 = (\theta_1 + \theta_2)/2$  pour la plupart des réalisations. La figure 3.5 montre que  $RMS_1$  est une constante comme prévu par (3.74) :  $RMS_1 \approx \sqrt{\alpha(\dot{\mathbf{Q}}_1)} / \sqrt{\alpha(\ddot{\mathbf{Q}}_1)} \approx |\theta_2 - \theta_1|/2$ .

Les résultats de la figure 3.5 montrent qu'un seuil de résolution est envisageable avec une approximation au second ordre des performances.

Sur les figures 3.6–3.7, le biais  $E[\Delta\theta_1]_0$  et le  $RMS_1$  de la première source sont présentés à la même échelle pour  $\theta_2 = 28^\circ$ . Comme prédit par (3.70), la figure 3.6 montre que le biais est bien une fonction quadratique de  $\sigma_e$  pour des valeurs de  $\sigma_e < \sigma_e^{\text{lim}}$  de la 1<sup>ière</sup> zone. Dans cette même zone de bonne résolution, la figure 3.7 montre que le  $RMS$  est bien une fonction linéaire de  $\sigma_e$  et que les approximations aux premier et second ordre donnent des résultats identiques. De plus, le biais n'est plus négligeable devant la racine de l'EQM dans ce scénario lorsque  $\sigma_e > 0.1$ . Les figures 3.8-3.9 présentent le biais et le  $RMS$  de la première source pour  $\sigma_e = 0.26$  en fonction de la corrélation spatiale  $c_{12}$  qui vérifie :

$$c_{12} = \frac{|\mathbf{a}(\theta_2)^H \mathbf{a}(\theta_1)|^2}{(\mathbf{a}(\theta_1)^H \mathbf{a}(\theta_1)) (\mathbf{a}(\theta_2)^H \mathbf{a}(\theta_2))} \quad (3.76)$$

La figure 3.8 montre que le biais  $E[\Delta\theta_m]_1$  utilisant le premier ordre est plus proche des résultats de simulation que le biais théorique  $E[\Delta\theta_m]_0$  approximé à l'ordre zéro. La figure 3.9 montre que l'expression théorique du  $RMS$  au second ordre est plus représentative des simulations que l'expression du premier ordre lorsque  $c_{12} > 0.8$ .

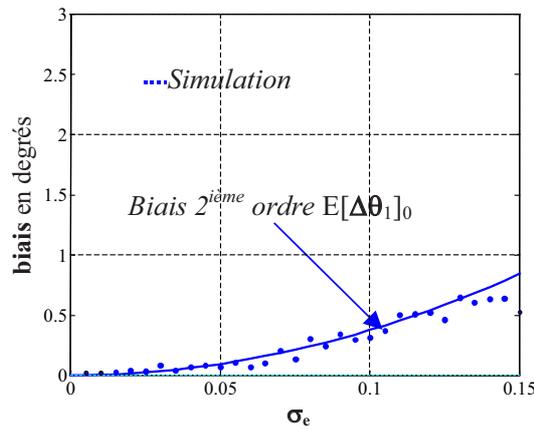


FIG. 3.6 – Biais  $E[\Delta\theta_1]$  en fonction du niveau  $\sigma_e$  du modèle d'erreur Gaussien et circulaire. Paramètres :  $\theta_2 - \theta_1 = 28^\circ$ . Réseau circulaire de rayon  $R = \lambda_0/2$  avec  $N = 5$  capteurs.

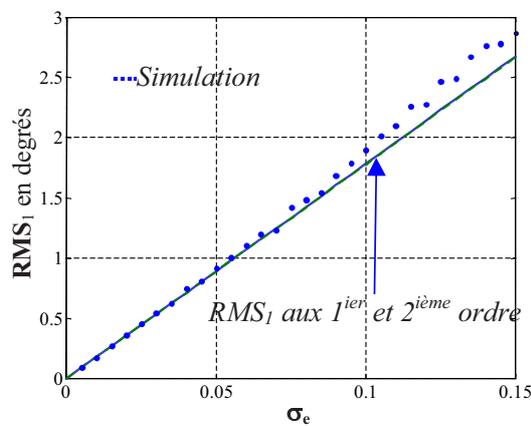


FIG. 3.7 – Comme la Figure 3.5, mais avec  $\theta_2 - \theta_1 = 28^\circ$

### 3.2.3 Cas des ordres supérieurs (MUSIC-2q)

En présence de  $M$  sources non gaussiennes pour  $q > 1$ , l'algorithme MUSIC à l'ordre  $2q$  [Car90] ( $q = 2$  et  $l = 1$ ), [CFA05] et [CAFC05] estime les directions  $\theta_1^0, \dots, \theta_M^0$  à partir de la matrice  $\mathbf{R}_x^{2q,l}(\mathbf{E})$  (3.9) des cumulants d'ordre  $2q$  de  $\mathbf{x}(t)$ , en supposant que la matrice  $\tilde{\mathbf{A}}(\underline{\theta}_0, \mathbf{E})$  soit de rang plein et que le rang  $M_q$  de  $\mathbf{R}_s^{2q,l}$  soit au moins égal à  $M$ . En observant que  $M$  colonnes parmi les  $M^2$  colonnes de la matrice  $\tilde{\mathbf{A}}_{q,l}(\underline{\theta}_0, \mathbf{E})$  s'écrivent  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_m^0)^{q,l} = \tilde{\mathbf{a}}(\theta_m^0)^{\otimes l} \otimes \tilde{\mathbf{a}}(\theta_m^0)^{\otimes(q-l)*}$ , la construction d'un critère de goniométrie analogue à celui de MUSIC à l'ordre 2 (3.47) est envisageable :

$$c_{q,l}(\theta, \mathbf{E}) = \left( \mathbf{a}(\theta)^{q,l} \right)^H \mathbf{\Pi}(\mathbf{E})^{q,l} \mathbf{a}(\theta)^{q,l} \quad (3.77)$$

$$\text{avec } \mathbf{\Pi}(\mathbf{E})^{q,l} = \mathbf{U}_n^{q,l} (\mathbf{U}_n^{q,l})^H \text{ et } \mathbf{a}(\theta)^{q,l} = \mathbf{a}(\theta)^{\otimes l} \otimes \mathbf{a}(\theta)^{\otimes(q-l)*} \quad (3.78)$$

où  $\mathbf{U}_n^{q,l}$  est composée des  $N^q - M_q$  vecteurs propres associés aux plus faibles valeurs propres d'une estimée de la matrice  $\mathbf{R}_x^{2q,l}(\mathbf{E})$ . Par analogie avec MUSIC [Sch81], les  $M$  plus petits minima locaux du critère  $c_{q,l}(\theta, \mathbf{E})$  donnent une estimée des directions  $\theta_m^0$  des sources. En présence d'erreurs de modèle, les vecteurs  $\mathbf{a}(\theta)^{q,l}$  et  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta)^{q,l}$  sont différents comme le sont les vecteurs  $\mathbf{a}(\theta)$  et  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta)$ . Le critère  $c_{q,l}(\theta_m^0, \mathbf{E})$  présente donc un minimum local en  $\hat{\theta}_m^0$  différent de l'incidence exacte  $\theta_m^0$  de la  $m^{\text{ième}}$  source. En posant

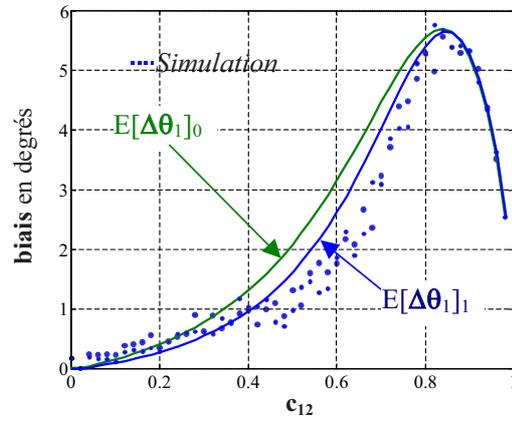


FIG. 3.8 –  $E[\Delta\theta_1]_0$  et  $E[\Delta\theta_1]_1$  en fonction de la corrélation spatiale  $c_{12}$ . L'erreur de modèle est Gaussienne et circulaire de niveau  $\sigma_e = 0.26$ . Le réseau est circulaire de rayon  $R = \lambda_0/2$  avec  $N = 5$  capteurs.

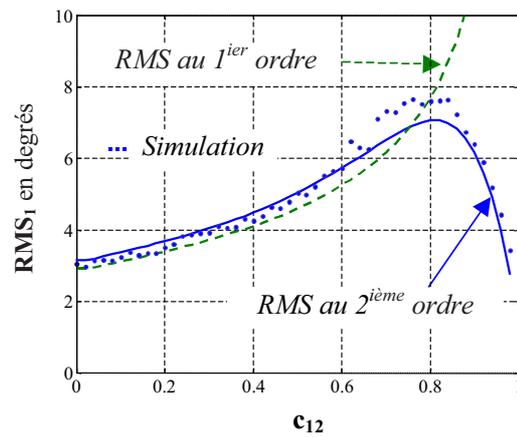


FIG. 3.9 –  $RMS$  de la 1<sup>ière</sup> source en fonction de la corrélation spatiale  $c_{12}$ . Les erreurs de modèle sont Gaussiennes et circulaire de niveau  $\sigma_e = 0.26$ . Le réseau est circulaire de rayon  $R = \lambda_0/2$  avec  $N = 5$  capteurs.

$\tilde{\mathbf{a}}_m^{q,l} = \tilde{\mathbf{a}} (\theta_m^0)^{q,l}$  et  $\mathbf{a}_m^{q,l} = \mathbf{a} (\theta_m^0)^{q,l}$ , le modèle d'erreur à l'ordre  $2q$  est le suivant :

$$\tilde{\mathbf{a}}_m^{q,l} = \mathbf{a}_m^{q,l} + \mathbf{e}_m^{q,l} \quad (3.79)$$

où le vecteur d'erreur  $\mathbf{e}_m^{q,l}$  à l'ordre  $2q$  est fonction de  $\mathbf{a}_m = \mathbf{a} (\theta_m^0)$  et de l'erreur de calibration  $\mathbf{e}_m$  (3.1). Lorsque les sources sont statistiquement indépendantes, les termes non nuls de  $\mathbf{R}_s^{2q,l}$  sont les auto-cumulants  $c_m^{2q}$  des sources où :  $c_m^{2q} = \mathbf{R}_s^{2q,l}(\mathbf{E})_{II}$  avec  $I = (m-1) \sum_{k=1}^q N^{q-k} + 1$ . Dans ces conditions, la matrice  $\mathbf{R}_x^{2q,l}(\mathbf{E})$  devient :

$$\mathbf{R}_x^{2q,l}(\mathbf{E}) = \tilde{\mathbf{A}}_{q,l}(\theta_0, \mathbf{E}) \mathbf{H}_s^{2q,l} \tilde{\mathbf{A}}_{q,l}(\theta_0, \mathbf{E})^H = \sum_{m=1}^M c_m^{2q} \tilde{\mathbf{a}}_m^{q,l} (\tilde{\mathbf{a}}_m^{q,l})^H \quad (3.80)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{q,l}(\theta_0, \mathbf{E}) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1^{q,l} & \dots & \tilde{\mathbf{a}}_M^{q,l} \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

où  $\mathbf{H}_s^{2q,l}$  est une matrice diagonale de rang plein dont la diagonale est composée des auto-cumulants  $c_m^{2q}$  des sources. Posons

$$\mathbf{E}^{q,l} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^{q,l} & \dots & \mathbf{e}_M^{q,l} \end{bmatrix}$$

Pour établir les performances de MUSIC-2q, les expressions théoriques données au paragraphe-3.2.2 pour MUSIC-2 sont utilisables en remplaçant  $\mathbf{E}$  par  $\mathbf{E}^{q,l}$  et  $\tilde{\mathbf{A}}(\theta_0, \mathbf{E})$  par  $\tilde{\mathbf{A}}_{q,l}(\theta_0, \mathbf{E})$ . Dans ces conditions, les matrices  $\mathbf{A}_0$  et  $\mathbf{\Pi}_0$  contenues dans les équations (3.61) s'écrivent à l'ordre  $2q$  de la manière suivante :

$$\mathbf{A}_0^{q,l} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{q,l} & \dots & \mathbf{a}_M^{q,l} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{\Pi}_0^{q,l} = \mathbf{I}_{N^q} - \mathbf{A}_0^{q,l} (\mathbf{A}_0^{q,l})^\# \quad (3.82)$$

et le modèle d'erreur à l'ordre  $2q$  devient :

$$\tilde{\mathbf{A}}_{q,l}(\theta_0, \mathbf{E}) = \mathbf{A}_0^{q,l} + \mathbf{E}^{q,l} \quad (3.83)$$

La dérivée première  $\dot{\mathbf{a}}_m^{q,l}$  du vecteur  $\mathbf{a}(\theta)^{q,l}$  en  $\theta = \theta_m^0$  vérifie :

$$\dot{\mathbf{a}}_m^{q,l} = \dot{\mathbf{a}}_m^l \otimes \mathbf{a}_m^{\otimes(q-l)*} + \mathbf{a}_m^{\otimes l} \otimes (\dot{\mathbf{a}}_m^{q-l})^* \quad (3.84)$$

$$\text{où } \dot{\mathbf{a}}_m^q = \dot{\mathbf{a}}_m^{q-1} \otimes \mathbf{a}_m + \dot{\mathbf{a}}_m \otimes \mathbf{a}_m^{\otimes(q-1)} \text{ avec } \dot{\mathbf{a}}_m^1 = \dot{\mathbf{a}}_m$$

et la dérivée seconde  $\ddot{\mathbf{a}}_m^{q,l}$  s'écrit :

$$\ddot{\mathbf{a}}_m^{q,l} = \ddot{\mathbf{a}}_m^l \otimes \mathbf{a}_m^{\otimes(q-l)*} + 2 \dot{\mathbf{a}}_m^l \otimes \dot{\mathbf{a}}_m^{\otimes(q-l)*} + \mathbf{a}_m^{\otimes l} \otimes (\ddot{\mathbf{a}}_m^{q-l})^* \quad (3.85)$$

$$\text{où } \ddot{\mathbf{a}}_m^q = \ddot{\mathbf{a}}_m^{q-1} \otimes \mathbf{a}_m + \ddot{\mathbf{a}}_m \otimes \mathbf{a}_m^{\otimes(q-1)} + \dot{\mathbf{a}}_m \otimes \dot{\mathbf{a}}_m^{(q-1)} + \dot{\mathbf{a}}_m^{q-1} \otimes \dot{\mathbf{a}}_m \text{ avec } \ddot{\mathbf{a}}_m^1 = \ddot{\mathbf{a}}_m$$

Les matrices  $\dot{\mathbf{Q}}_m^{q,l}$  et  $\ddot{\mathbf{Q}}_m^{2q,l}$  sont construites en utilisant l'expression (3.63) qui nécessite la connaissance des variables  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_0^{q,l}$  et  $\mathbf{\Pi}_0 = \mathbf{\Pi}_0^{q,l}$  de (3.82). Ainsi, l'erreur de goniométrie à l'ordre  $2q$  s'écrit de la façon suivante d'après (3.64) :

$$\Delta\theta_m^{q,l} = - \frac{(\boldsymbol{\epsilon}^{q,l})^H \dot{\mathbf{Q}}_m^{q,l} \boldsymbol{\epsilon}^{q,l}}{(\boldsymbol{\epsilon}^{q,l})^H \ddot{\mathbf{Q}}_m^{q,l} \boldsymbol{\epsilon}^{q,l}} \text{ avec } \boldsymbol{\epsilon}^{q,l} = \begin{bmatrix} 1 \\ \text{vec}(\mathbf{E}^{q,l}) \\ \text{vec}(\mathbf{E}^{q,l})^* \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

$$\dot{\mathbf{Q}}_m^{q,l} \stackrel{def}{=} \mathbf{Q}(\mathbf{a}_m^{q,l}, \dot{\mathbf{a}}_m^{q,l}) + \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{a}}_m^{q,l}, \mathbf{a}_m^{q,l})$$

$$\ddot{\mathbf{Q}}_m^{q,l} \stackrel{def}{=} \mathbf{Q}(\mathbf{a}_m^{q,l}, \ddot{\mathbf{a}}_m^{q,l}) + \mathbf{Q}(\ddot{\mathbf{a}}_m^{q,l}, \mathbf{a}_m^{q,l}) + 2 \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{a}}_m^{q,l}, \dot{\mathbf{a}}_m^{q,l})$$

Le vecteur  $\epsilon^{q,l}$  des erreurs de modèle à l'ordre  $2q$  dépend des vecteurs directeurs  $\mathbf{a}_m$  des  $M$  sources ainsi que de la matrice  $\mathbf{E}$  des erreurs de calibration. D'après (3.65) et (3.67), le biais et la racine de l'EQM à l'ordre zéro s'écrivent :

$$E \left[ \Delta\theta_m^{q,l} \right]_0 = - \frac{\text{trace} \left( \dot{\mathbf{Q}}_m^{q,l} \mathbf{R}_{\epsilon^{q,l}} \right)}{\text{trace} \left( \ddot{\mathbf{Q}}_m^{q,l} \mathbf{R}_{\epsilon^{q,l}} \right)} \text{ et } RMS_m^{q,l} = \sqrt{\frac{\text{trace} \left( \left( \dot{\mathbf{Q}}_m^{q,l} \right)^{\otimes 2} \mathbf{R}_{\epsilon^{q,l}}^{(4)} \right)}{\text{trace} \left( \left( \ddot{\mathbf{Q}}_m^{q,l} \right)^{\otimes 2} \mathbf{R}_{\epsilon^{q,l}}^{(4)} \right)}} \quad (3.87)$$

où  $\mathbf{R}_{\epsilon^{q,l}} = E \left[ \epsilon^{q,l} (\epsilon^{q,l})^H \right]$  et  $\mathbf{R}_{\epsilon^{q,l}}^{(4)} = E \left[ (\epsilon^{q,l}) (\epsilon^{q,l})^{\otimes 2H} \right]$ .

### Cas d'erreurs de modèle gaussiennes et circulaires

Lorsque les erreurs de modèle  $\epsilon^{q,l}$  sont gaussiennes et centrées, la matrice  $\mathbf{R}_{\epsilon^{q,l}}^{(4)}$  dépend de  $\mathbf{R}_{\epsilon^{q,l}}$  et  $\mathbf{C}_{\epsilon^{q,l}} = E \left[ \epsilon^{q,l} (\epsilon^{q,l})^T \right]$  selon (A.15) et

$$\text{trace} \left( \mathbf{Q}^{\otimes 2} \mathbf{R}_{\epsilon^{q,l}}^{(4)} \right) = E \left[ \left( (\epsilon^{q,l})^H \mathbf{Q} \epsilon^{q,l} \right)^2 \right] = F_2^G (\mathbf{Q}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}_{\epsilon^{q,l}}, \mathbf{C}_{\epsilon^{q,l}})$$

d'après (A.13). Ainsi, le calcul de  $E \left[ \Delta\theta_m^{q,l} \right]_0$  et  $RMS_m^{q,l}$  dépend soit de l'expression de  $\mathbf{R}_{\epsilon^{q,l}}^{(4)}$  (A.15) soit de la formule de (A.13). Dans les deux cas, la connaissance d'une expression des matrices  $\mathbf{R}_{\epsilon^{q,l}}$  et  $\mathbf{C}_{\epsilon^{q,l}}$  est suffisante. Une relation linéaire ( $\epsilon^{q,l} = \mathbf{P}^{q,l} \epsilon$ ) entre  $\epsilon^{q,l}$  et  $\epsilon$  est établie dans le paragraphe suivant afin d'obtenir les expressions suivantes de  $\mathbf{R}_{\epsilon^{q,l}}$  et  $\mathbf{C}_{\epsilon^{q,l}}$  :  $\mathbf{R}_{\epsilon^{q,l}} = \mathbf{P}^{q,l} \mathbf{R}_\epsilon (\mathbf{P}^{q,l})^H$  et  $\mathbf{C}_{\epsilon^{q,l}} = \mathbf{P}^{q,l} \mathbf{C}_\epsilon (\mathbf{P}^{q,l})^T$ .

### Approximation au premier ordre en $\epsilon$ de $\epsilon^{q,l}$

Une approximation au premier ordre des vecteurs  $\mathbf{e}_m^{q,l}$  est envisageable lorsque les erreurs  $\|\mathbf{E}\|$  sont faibles devant  $\mathbf{A}_0$ . Sachant que l'approximation au premier ordre du vecteur  $\tilde{\mathbf{a}}_m^{\otimes q}$  vérifie

$$\tilde{\mathbf{a}}_m^{\otimes q} = \mathbf{a}_m^{\otimes q} + \tilde{\mathbf{n}}_m^q + o(\|\mathbf{e}_m\|) \quad (3.88)$$

et que celle du vecteur  $\tilde{\mathbf{a}}_m^{q,l}$  vérifie

$$\tilde{\mathbf{a}}_m^{q,l} = \mathbf{a}_m^{q,l} + \tilde{\mathbf{e}}_m^{q,l} + o(\|\mathbf{e}_m\|), \quad (3.89)$$

l'approximation du vecteur  $\mathbf{e}_m^{q,l}$  de l'expression (3.79) devient alors

$$\mathbf{e}_m^{q,l} = \tilde{\mathbf{e}}_m^{q,l} + o(\|\mathbf{e}_m\|) \quad (3.90)$$

$$\text{où } \tilde{\mathbf{e}}_m^{q,l} = \tilde{\mathbf{n}}_m^l \otimes \mathbf{a}_m^{\otimes (q-l)*} + \mathbf{a}_m^{\otimes l} \otimes (\tilde{\mathbf{n}}_m^{q-l})^* \quad (3.91)$$

$$\text{et } \tilde{\mathbf{n}}_m^q = \mathbf{a}_m^{\otimes (q-1)} \otimes \mathbf{e}_m + \tilde{\mathbf{n}}_m^{(q-1)} \otimes \mathbf{a}_m \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{n}}_m^0 = 0 \quad (3.92)$$

Les expressions (3.91) et (3.92) sont démontrées dans le paragraphe-D. Le développement limité au premier ordre en  $\epsilon$  de  $\epsilon^{q,l}$  s'écrit :

$$\epsilon^{q,l} = \mathbf{P}^{q,l} \epsilon + o(\|\epsilon\|) \quad \text{avec} \quad \mathbf{P}^{q,l} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{NM}^T & \mathbf{0}_{NM}^T \\ \mathbf{0}_{N^q M} & \mathbf{P}_e^{q,l} & \tilde{\mathbf{P}}_e^{q,l} \\ \mathbf{0}_{N^q M} & (\tilde{\mathbf{P}}_e^{q,l})^* & (\mathbf{P}_e^{q,l})^* \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

Sachant que  $\mathbf{e}^{q,l} = \text{vec}(\mathbf{E}^{q,l}) = \mathbf{P}_{\mathbf{e}}^{q,l} \mathbf{e} + \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{e}}^{q,l} \mathbf{e}^* + o(\|\mathbf{e}\|)$  avec  $\mathbf{e} = \text{vec}(\mathbf{E})$ , les matrices  $\mathbf{P}_{\mathbf{e}}^{q,l}$  et  $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{e}}^{q,l}$  s'écrivent :

$$\mathbf{P}_{\mathbf{e}}^{q,l} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\mathbf{e}_1}^{q,l} & \cdots & \mathbf{0}_{N^q, N^q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{N^q, N^q} & \cdots & \mathbf{P}_{\mathbf{e}_M}^{q,l} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{e}}^{q,l} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{e}_1}^{q,l} & \cdots & \mathbf{0}_{N^q, N^q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{N^q, N^q} & \cdots & \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{e}_M}^{q,l} \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

où  $\tilde{\mathbf{e}}_m^{q,l} = \mathbf{P}_{\mathbf{e}_m}^{q,l} \mathbf{e}_m + \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{e}_m}^{q,l} \mathbf{e}_m^*$ . En utilisant le développement limité au premier ordre de  $\mathbf{e}_m^{q,l} = \tilde{\mathbf{e}}_m^{q,l} + o(\|\mathbf{e}_m\|)$  (3.90) et (3.91), les matrices  $\mathbf{P}_{\mathbf{e}_m}^{q,l}$  et  $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{e}_m}^{q,l}$  s'écrivent

$$\mathbf{P}_{\mathbf{e}_m}^{q,l} = \left( \mathbf{I}_{N^l} \otimes \mathbf{a}_m^{\otimes(q-l)*} \right) \mathbf{P}_{\mathbf{e}_m}^l \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{e}_m}^{q,l} = \left( \mathbf{a}_m^{\otimes l} \otimes \mathbf{I}_{N^{q-l}} \right) \left( \mathbf{P}_{\mathbf{e}_m}^{q-l} \right)^* \quad (3.95)$$

où  $\tilde{\mathbf{n}}_m^i = \mathbf{P}_{\mathbf{e}_m}^i \mathbf{e}_m$

Puis en utilisant (3.92), la matrice  $\mathbf{P}_{\mathbf{e}_m}^i$  s'écrit :

$$\mathbf{P}_{\mathbf{e}_m}^q = \left( \mathbf{a}_m^{\otimes(q-1)} \otimes \mathbf{I}_N \right) + \left( \mathbf{I}_{N^{q-1}} \otimes \mathbf{a}_m \right) \mathbf{P}_{\mathbf{e}_m}^{q-1} \quad \text{avec} \quad \mathbf{P}_{\mathbf{e}_m}^1 = \mathbf{I}_N \quad (3.96)$$

Les équations (3.93)(3.94)(3.95) et (3.96) sont démontrées dans l'Annexe-D. En utilisant l'approximation au premier ordre (3.93) de  $\mathbf{e}^{q,l}$ , l'expression (3.86) de l'erreur de goniométrie  $\Delta\theta_m^{q,l}$  devient :

$$\Delta\theta_m^{q,l} \approx - \frac{\boldsymbol{\epsilon}^H \widetilde{\dot{\mathbf{Q}}}_m^{q,l} \boldsymbol{\epsilon}}{\boldsymbol{\epsilon}^H \widetilde{\ddot{\mathbf{Q}}}_m^{q,l} \boldsymbol{\epsilon}} \quad (3.97)$$

$$\text{avec} \quad \widetilde{\dot{\mathbf{Q}}}_m^{q,l} = \left( \mathbf{P}^{q,l} \right)^H \dot{\mathbf{Q}}_m^{q,l} \mathbf{P}^{q,l} \quad \text{et} \quad \widetilde{\ddot{\mathbf{Q}}}_m^{q,l} = \left( \mathbf{P}^{q,l} \right)^H \ddot{\mathbf{Q}}_m^{q,l} \mathbf{P}^{q,l}$$

D'après (3.65) et (3.67), le biais et la racine de l'EQM à l'ordre zéro de la  $m^{\text{ième}}$  source deviennent :

$$E \left[ \Delta\theta_m^{q,l} \right]_0 = - \frac{\text{trace} \left( \widetilde{\dot{\mathbf{Q}}}_m^{q,l} \mathbf{R}_{\boldsymbol{\epsilon}} \right)}{\text{trace} \left( \widetilde{\ddot{\mathbf{Q}}}_m^{q,l} \mathbf{R}_{\boldsymbol{\epsilon}} \right)} \quad \text{et} \quad \text{RMS}_m^{q,l} = \sqrt{\frac{\text{trace} \left( \left( \widetilde{\dot{\mathbf{Q}}}_m^{q,l} \right)^{\otimes 2} \mathbf{R}_{\boldsymbol{\epsilon}}^{(4)} \right)}{\text{trace} \left( \left( \widetilde{\ddot{\mathbf{Q}}}_m^{q,l} \right)^{\otimes 2} \mathbf{R}_{\boldsymbol{\epsilon}}^{(4)} \right)}} \quad (3.98)$$

De plus, lorsque le vecteur  $\boldsymbol{\epsilon} = \left[ 1 \quad \text{vec}(\mathbf{E})^T \quad \text{vec}(\mathbf{E})^H \right]^T$  est gaussien, circulaire et centré tel que  $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\epsilon}} = E \left[ \text{vec}(\mathbf{E}) \text{vec}(\mathbf{E})^H \right] = \sigma_e^2 \mathbf{I}_{NM}$ , l'expression (3.98) devient :

$$E \left[ \Delta\theta_m \right]_0 = - \frac{\sigma_e^2 \text{trace} \left( \left( \widetilde{\dot{\mathbf{Q}}}_m^{q,l} \right)^I \right)}{\widetilde{\ddot{\mathbf{Q}}}_m^{q,l}(1,1) + \sigma_e^2 \text{trace} \left( \left( \widetilde{\ddot{\mathbf{Q}}}_m^{q,l} \right)^I \right)} \quad (3.99)$$

$$\text{RMS}_m = \sigma_e \sqrt{\frac{\beta \left( \widetilde{\dot{\mathbf{Q}}}_m^{q,l} \right) + \sigma_e^2 \alpha \left( \widetilde{\dot{\mathbf{Q}}}_m^{q,l} \right)}{\widetilde{\ddot{\mathbf{Q}}}_m^{q,l}(1,1)^2 + \sigma_e^2 \beta \left( \widetilde{\ddot{\mathbf{Q}}}_m^{q,l} \right) + \sigma_e^4 \alpha \left( \widetilde{\ddot{\mathbf{Q}}}_m^{q,l} \right)}} \quad (3.100)$$

où la relation entre  $\mathbf{Q}^I$  et  $\mathbf{Q}$  est donnée par (3.40) et les fonctions  $\alpha(\mathbf{Q})$  et  $\beta(\mathbf{Q})$  sont définies dans (3.38)(3.39).

### Simulations

Le réseau de capteurs est circulaire avec  $N = 5$  capteurs et un rayon de  $R = \lambda_0/2$ . Les erreurs de calibration  $\mathbf{E}$  sont gaussiennes, centrées et circulaires telles que :

$$E \left[ \text{vec}(\mathbf{E}) \text{vec}(\mathbf{E})^H \right] = \sigma_e^2 \mathbf{I}_{NM} \quad \text{avec} \quad \sigma_e = 0.1221 \quad (3.101)$$

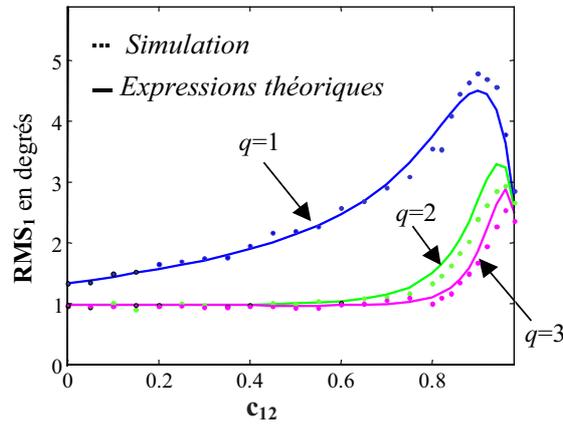


FIG. 3.10 –  $RMS_1$  en fonction de la corrélation spatiale  $c_{12}$  pour  $q = 1, 2, 3$  et  $l = 1$ . L'erreur de modèle est Gaussienne et circulaire de niveau  $\sigma_e = 0.1221$ . Le réseau est circulaire de rayon  $R = \lambda_0/2$  avec  $N = 5$  capteurs.

Les incidences de la 1<sup>ère</sup> et de la deuxième source valent respectivement  $\theta_1 = 100^\circ$  et  $\theta_2$ . Les performances sont données en fonction du coefficient de corrélation spatial entre les deux sources définies dans (3.76). Les performances théoriques sont comparées aux performances estimées sur 300 réalisations. La figure 3.10 représente le racine de l'EQM de la première source pour  $q = 1, 2$  et  $3$  et  $l = 1$ . Pour  $q = 2$  et  $l = 1$ , les matrices  $\mathbf{P}_{\mathbf{e}_m}^{q=2,l=1}$  et  $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{e}_M}^{q=2,l=1}$  de (3.95) vérifient :

$$\mathbf{P}_{\mathbf{e}_m}^{q=2,l=1} = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{a}_m^*) \text{ et } \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{e}_M}^{q=2,l=1} = (\mathbf{a}_m \otimes \mathbf{I}_N)$$

et les matrices  $\mathbf{P}_{\mathbf{e}_m}^{q=3,l=1}$  et  $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{e}_M}^{q=3,l=1}$  de (3.95) vérifient pour  $q = 3$  et  $l = 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\mathbf{e}_m}^{q=3,l=1} &= (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{a}_m^{\otimes 2*}) \\ \text{et } \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{e}_M}^{q=3,l=1} &= (\mathbf{a}_m \otimes \mathbf{I}_{N^2}) ((\mathbf{a}_m \otimes \mathbf{I}_N) + (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{a}_m))^* \end{aligned}$$

Les performances théoriques sont représentatives des simulations et mettent en évidence l'amélioration des performances avec l'augmentation de l'ordre  $2q$  des statistiques de  $\mathbf{x}(t)$ .

### 3.2.4 Généralisation à d'autres critères

Dans toutes les méthodes de goniométrie un critère (3.47)(3.77)(3.10) est construit à partir d'une table de calibration dépendant de  $K$  vecteurs directeurs  $\mathbf{a}(\theta_i)$  associés aux directions  $\theta_i$  ( $1 \leq i \leq K$ ). De plus, le critère dépend de la matrice  $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \dots & \mathbf{e}_M \end{bmatrix}$  des erreurs de modèle où  $\mathbf{e}_m = \tilde{\mathbf{a}}(\theta_m^0) - \mathbf{a}(\theta_m^0)$  car la réponse exacte  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta)$  est différente de  $\mathbf{a}(\theta)$ .

D'après les paragraphes précédents le critère de goniométrie est soit

- **Mono-Dimensionnel** : le critère noté par  $c_{mono}(\theta, \mathbf{E})$  dépend de la variable mono-dimensionnelle  $\theta$ . Les  $M$  plus petits minima (ou maxima) locaux du critère  $c_{mono}(\theta, \mathbf{E})$  donnent les directions estimées  $\hat{\theta}_m^0$  des  $M$  sources incidences. Toutes les méthodes super-résolutives, telles que les méthodes de Capon [Cap69] et Lagunas [LC84] ou le propagateur [MB90] rentrent dans cette catégorie ainsi que les méthodes de type MUSIC [BK79][Sch81][BK83][Car90].
- **Multi-Dimensionnels** : le critère noté par  $c_{multi}(\underline{\theta}, \mathbf{E})$  dépend du vecteur de paramètres  $\underline{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_M \end{bmatrix}^T$ .

Le plus petit minimum (ou maximum) local du critère  $c_{multi}(\underline{\theta}, \mathbf{E})$  donne le vecteur  $\hat{\underline{\theta}}^0 = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1^0 & \dots & \hat{\theta}_M^0 \end{bmatrix}^T$  des directions estimées  $\hat{\theta}_m^0$  des  $M$  sources incidences. C'est le cas des méthodes basées sur le Maximum de Vraisemblance (MV) [OVSN93][VO91][Lar92].

Dans les techniques de goniométrie, le critère balaye dans toutes les directions  $\theta$  (ou  $\underline{\theta}$ ) pour estimer les incidences  $\hat{\theta}_m^0$  (ou  $\hat{\underline{\theta}}^0$ ) qui correspondent à des maxima ou minima locaux du critère. Les expressions théoriques des performances sont établies en supposant que les incidences exactes  $\theta_m^0$  (ou  $\underline{\theta}^0$ ) sont proches des incidences estimées  $\hat{\theta}_m^0$  (ou  $\hat{\underline{\theta}}^0$ ). Sachant que la plupart des critères de goniométrie sont des fonctions quadratiques au voisinage de la solution, l'erreur d'estimation  $\Delta\theta_m = \hat{\theta}_m^0 - \theta_m^0$  (ou  $\Delta\underline{\theta} = \hat{\underline{\theta}}^0 - \underline{\theta}^0$ ) est approximée par un développement limité au deuxième ordre en  $\theta$  (ou  $\underline{\theta}$ ) du critère au voisinage de  $\theta = \theta_m^0$  (ou  $\underline{\theta} = \underline{\theta}^0$ ). L'expression de l'erreur d'incidence s'écrit alors :

$$\bullet \text{Cas Mono : } \Delta\theta_m(\mathbf{E})_{mono} = -\frac{\dot{c}_{mono}(\theta_m, \mathbf{E})}{\ddot{c}_{mono}(\theta_m, \mathbf{E})} \quad (3.102)$$

$$\bullet \text{Cas Multi : } \Delta\underline{\theta}(\mathbf{E})_{multi} = \begin{bmatrix} \Delta\theta_1(\mathbf{E})_{multi} \\ \vdots \\ \Delta\theta_M(\mathbf{E})_{multi} \end{bmatrix} = -\mathbf{H}(\mathbf{E})^{-1} \nabla(\mathbf{E}) \quad (3.103)$$

où les fonctions  $\dot{c}_{mono}(\theta, \mathbf{E})$  et  $\ddot{c}_{mono}(\theta, \mathbf{E})$  sont les dérivées première et seconde du critère  $c_{mono}(\theta, \mathbf{E})$  en  $\theta$ . Le gradient  $\nabla(\mathbf{E})$  est un vecteur composé des dérivées premières du critère  $c_{multi}(\underline{\theta}, \mathbf{E})$  par rapport aux paramètres  $\theta_m$  du vecteur  $\underline{\theta}$  et le Hessien est la matrice des dérivées secondes du critère  $c_{multi}(\underline{\theta}, \mathbf{E})$  par rapport aux paramètres du vecteur  $\underline{\theta}$ .

Suivant le type de critère, les fonctions  $\dot{c}_{mono}(\theta_m, \mathbf{E})$ ,  $\ddot{c}_{mono}(\theta_m, \mathbf{E})$  ou  $\Delta\underline{\theta}(\mathbf{E})_{multi}$  sont approximées par un développement limité d'ordre  $p$  au voisinage de  $\mathbf{E} = \mathbf{0}_{N,M}$ . Ainsi, les fonctions  $\Delta\theta_m(\mathbf{E})_{mono}$  ou  $\Delta\theta_m(\mathbf{E})_{multi}$  s'écrivent :

$$\bullet \text{Cas Mono : } \Delta\theta_m(\mathbf{E})_{mono} \approx -\frac{\dot{\dot{c}}_{mono}(\theta_m, \mathbf{E})}{\ddot{\dot{c}}_{mono}(\theta_m, \mathbf{E})} \quad (3.104)$$

$$\text{ou } \begin{cases} \dot{c}_{mono}(\theta_m, \mathbf{E}) = \dot{\dot{c}}_{mono}(\theta_m, \mathbf{E}) + o(\|\mathbf{E}\|^p) \\ \ddot{c}_{mono}(\theta_m, \mathbf{E}) = \ddot{\dot{c}}_{mono}(\theta_m, \mathbf{E}) + o(\|\mathbf{E}\|^p) \end{cases}$$

$$\bullet \text{Cas Multi : } \Delta\theta_m(\mathbf{E})_{multi} = \Delta\tilde{\theta}_m(\mathbf{E})_{multi} + o(\|\mathbf{E}\|^p) \quad (3.105)$$

où les fonctions  $\dot{\dot{c}}_{mono}(\theta_m, \mathbf{E})$ ,  $\ddot{\dot{c}}_{mono}(\theta_m, \mathbf{E})$  ou  $\Delta\tilde{\theta}_m(\mathbf{E})_{multi}$  dépendent linéairement des composantes de la matrice  $\epsilon^{\otimes p}$  où  $\epsilon = \begin{bmatrix} 1 & \text{vec}(\mathbf{E})^T & \text{vec}(\mathbf{E})^H \end{bmatrix}^T$  et s'écrivent suivant des formes hermitiennes. Les erreurs de goniométrie  $\Delta\theta_m(\mathbf{E})$  deviennent alors :

$$\bullet \text{Cas Mono : } \Delta\theta_m(\mathbf{E})_{mono} \approx -\frac{\dot{\dot{c}}_{mono}(\theta_m, \mathbf{E})}{\ddot{\dot{c}}_{mono}(\theta_m, \mathbf{E})} = -\frac{(\epsilon^{\otimes q})^H \dot{\mathbf{Q}}_m(\epsilon^{\otimes q})}{(\epsilon^{\otimes q})^H \ddot{\mathbf{Q}}_m(\epsilon^{\otimes q})} \quad (3.106)$$

$$\bullet \text{Cas Multi : } \Delta\theta_m(\mathbf{E})_{multi} \approx \Delta\tilde{\theta}_m(\mathbf{E})_{multi} = (\epsilon^{\otimes q})^H \mathbf{Q}_m(\epsilon^{\otimes q}) \quad (3.107)$$

où  $q = p/2$  (ou  $q = (p+1)/2$ ) suivant la parité de  $p$ . En utilisant (A.5)(A.7) et (3.30), le biais vérifie à l'ordre zéro :

$$\bullet \text{Cas Mono : } E[\Delta\theta_m(\mathbf{E})_{mono}] \approx -\frac{\text{trace}(\dot{\mathbf{Q}}_m \mathbf{R}_\epsilon^{(2q)})}{\text{trace}(\ddot{\mathbf{Q}}_m \mathbf{R}_\epsilon^{(2q)})} \quad (3.108)$$

$$\bullet \text{Cas Multi : } E[\Delta\theta_m(\mathbf{E})_{multi}] \approx \text{trace}(\mathbf{Q}_m \mathbf{R}_\epsilon^{(2q)}) \quad (3.109)$$

et la racine de l'EQM devient :

$$\bullet \text{Cas Mono : } (RMS_m)_{mono} \approx \sqrt{\frac{\text{trace}(\dot{\mathbf{Q}}_m^{\otimes 2} \mathbf{R}_\epsilon^{(4q)})}{\text{trace}(\ddot{\mathbf{Q}}_m^{\otimes 2} \mathbf{R}_\epsilon^{(4q)})}} \quad (3.110)$$

$$\bullet \text{Cas Multi : } (RMS_m)_{multi} \approx \sqrt{\text{trace}(\mathbf{Q}_m^{\otimes 2} \mathbf{R}_\epsilon^{(4q)})} \quad (3.111)$$

En présence d'erreurs de modèle gaussiennes et centrées, la formule de Leonov-Shiryaev (B.19) indique que la matrice  $\mathbf{R}_\epsilon^{(2q)}$  dépend des moments d'ordre deux des matrices  $\mathbf{R}_\epsilon$  et  $\mathbf{C}_\epsilon$  ainsi que des puissances de ces moments :

$$\mathbf{R}_\epsilon^{(2q)} = f_{Leonov}^{(2q)} \left( \left( \text{vec}(\mathbf{R}_\epsilon)^{\otimes i} \right) \otimes \left( \text{vec}(\mathbf{C}_\epsilon)^{\otimes j} \right) \text{ où } i + j \leq 2q \text{ pour } 1 \leq i \leq 2q \right)$$

L'expression (A.15) vérifie cette équation pour  $q = 2$ . En conséquence,  $\text{trace}(\mathbf{A} \mathbf{R}_\epsilon^{(2q)})$  est une fonction de  $\mathbf{A}$  et des vecteurs  $\left( \text{vec}(\mathbf{R}_\epsilon)^{\otimes i} \right) \otimes \left( \text{vec}(\mathbf{C}_\epsilon)^{\otimes j} \right)$  telle que :

$$\text{trace}(\mathbf{A} \mathbf{R}_\epsilon^{(2q)}) = \text{tr}_{Leonov}^{(2q)} \left( \mathbf{A}, \left( \text{vec}(\mathbf{R}_\epsilon^{(2)})^{\otimes i} \right) \otimes \left( \text{vec}(\mathbf{C}_\epsilon^{(2)})^{\otimes j} \right) \text{ où } i + j \leq 2q \text{ pour } 1 \leq i \leq 2q \right) \quad (3.112)$$

L'expression (A.13) est un exemple natif de cette fonction pour  $q = 2$  et  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}_1 \otimes \mathbf{Q}_2$ . Plus généralement, la fonction  $F_Q(\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_Q, \epsilon)$  de (A.9) vérifie (3.112) pour  $q = Q$  et  $\mathbf{A} = (\mathbf{Q}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{Q}_Q)$ . Plus particulièrement lorsque  $E[\text{vec}(\mathbf{E}) \text{vec}(\mathbf{E})^H] = \sigma_\epsilon^2 \mathbf{I}_{NM}$  et  $E[\text{vec}(\mathbf{E}) \text{vec}(\mathbf{E})^T] = \mathbf{0}_{NM, NM}$ , la matrice  $\mathbf{C}_\epsilon$  est nulle et le vecteur  $\text{vec}(\mathbf{R}_\epsilon^{(2)})^{\otimes i}$  est proportionnel à  $\sigma_\epsilon^{2i}$ . La fonction (3.112) devient le polynôme d'ordre  $q$  suivant en  $\sigma_\epsilon^2$  :

$$\text{trace}(\mathbf{A} \mathbf{R}_\epsilon^{(2q)}) = \sum_{i=0}^q \alpha_i^q(\mathbf{A}) \sigma_\epsilon^{2i} \quad (3.113)$$

Les fonctions  $\alpha(\mathbf{A})$  et  $\beta(\mathbf{A})$  de (3.38)(3.39) sont des coefficients de ce polynôme pour  $q = 2$ . Ainsi, dans le cas mono-dimensionnel le biais et la variance de l'EQM vérifient :

$$(RMS_m)_{mono} \approx \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{2q} \alpha_i^{2q}(\dot{\mathbf{Q}}_m^{\otimes 2}) \sigma_\epsilon^{2i}}{\sum_{i=0}^{2q} \alpha_i^{2q}(\ddot{\mathbf{Q}}_m^{\otimes 2}) \sigma_\epsilon^{2i}}} \quad \text{et} \quad E[\Delta\theta_m(\mathbf{E})_{mono}] \approx -\frac{\sum_{i=0}^q \alpha_i^q(\dot{\mathbf{Q}}_m) \sigma_\epsilon^{2i}}{\sum_{i=0}^q \alpha_i^q(\ddot{\mathbf{Q}}_m) \sigma_\epsilon^{2i}} \quad (3.114)$$

et dans le cas multi-dimensionnel :

$$(RMS_m)_{multi} \approx \sqrt{\sum_{i=0}^{2q} \alpha_i^{2q}(\mathbf{Q}_m^{\otimes 2}) \sigma_\epsilon^{2i}} \quad \text{et} \quad E[\Delta\theta_m(\mathbf{E})_{multi}] \approx -\sum_{i=0}^q \alpha_i^q(\mathbf{Q}_m) \sigma_\epsilon^{2i} \quad (3.115)$$

Les expressions (3.114) et (3.115), donnent des relations très simples entre le niveau  $\sigma_\epsilon^2$  des erreurs de modèle et les performances d'une méthode de goniométrie lorsque les erreurs de modèle sont gaussiennes, circulaires avec  $E[\text{vec}(\mathbf{E}) \text{vec}(\mathbf{E})^H] = \sigma_\epsilon^2 \mathbf{I}_{NM}$ . La qualité de ces expressions théoriques approchées dépend de l'ordre  $p = 2q$  (ou  $2q - 1$ ) du développement limité qui approxime la fonction  $\Delta\theta_m(\mathbf{E})$  des erreurs de goniométrie de la  $m^{\text{ième}}$  source.

### 3.2.5 Conclusion

Les travaux menés dans ce paragraphe sur les performances théoriques d'estimateurs en présence d'erreurs de modèle ont permis d'augmenter le domaine de validité des expressions analytiques obtenues dans les

travaux initiaux de Friedlander [Fri90b][Fri90a], Marcos [Mar98a]. Ceci a conduit à la publication de [FLV05d]. Malgré tout, ces expressions ne sont plus valables lorsque l'erreur de modèle est trop élevée car les sources ne sont plus résolues. En effet, comme il est démontré dans [LL93], il est plus aisé de détecter le bon nombre de sources que d'en assurer la bonne localisation : pour un scénario donné, le pouvoir de détection est supérieur au pouvoir de résolution. Par conséquent, comme nous l'avons mis en évidence dans les simulations précédentes dans de nombreuses goniométries, bien que le nombre de sources incidentes soit connu, il ne sera pas toujours possible de localiser ces dernières par manque de résolution. Il apparaît dès lors que seule l'étude des performances de localisation conditionnellement à une bonne résolution présente un intérêt opérationnel. C'est à ce prix que l'on augmentera le domaine de validité des études précédentes. Cette problématique, nouvelle à notre connaissance est l'objet du paragraphe suivant.

### 3.3 Probabilités de résolution et performances conditionnées à la résolution

Ce paragraphe expose les résultats des travaux développés dans [FLV05e] pour le calcul de la probabilité de résolution et dans [FLV05c] pour l'établissement des performances conditionnelles (ces articles sont joints au rapport).

#### 3.3.1 Probabilités de résolution [FLV05e]

Quelques auteurs ([KB86][LW90][WF94a][WF94b],...) s'intéressent au seuil de résolution de deux sources identiquement perturbées sans établir la probabilité de résolution. Zhang [Zha95] établie cette probabilité lorsque la matrice de covariance est estimée avec un nombre fini d'observations pour une définition particulière de la résolution.

Les travaux ci-après concernent la méthode MUSIC dont le critère  $c(\theta, \mathbf{E})$  est celui de l'équation (3.47), qui s'approxime au second ordre par la forme hermitienne suivante d'après (3.58) :

$$c(\theta, \mathbf{E}) = \boldsymbol{\epsilon}^H \mathbf{Q}(\mathbf{a}(\theta), \mathbf{a}(\theta)) \boldsymbol{\epsilon} \text{ et } \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} 1 \\ \text{vec}(\mathbf{E}) \\ \text{vec}(\mathbf{E})^* \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

et où l'erreur de goniométrie est le rapport de formes hermitiennes de l'équation (3.64). Dans ce paragraphe, trois définitions de résolution sont envisagées :

- 1<sup>ière</sup> **approche** :  $c(\theta_1, \mathbf{E}) < c(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}, \mathbf{E})$  et  $c(\theta_2, \mathbf{E}) < c(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}, \mathbf{E})$
- 2<sup>ième</sup> **approche** :  $\ddot{c}(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}, \mathbf{E}) < 0$
- 3<sup>ième</sup> **approche** :  $\frac{c(\theta_1, \mathbf{E})+c(\theta_2, \mathbf{E})}{2} < c(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}, \mathbf{E})$

Les définitions de ci-dessus sont basées sur le fait que le critère  $c(\theta, \mathbf{E} = \mathbf{0})$  présente deux minima en  $\theta = \theta_1$  et  $\theta = \theta_2$  et qu'au voisinage de ses angles le critère est quadratique. Ainsi, les deux sources ne sont pas résolues lorsque le critère  $c(\theta, \mathbf{E})$  comporte un seul minimum au lieu de deux au voisinage de  $\theta = \theta_1$  et  $\theta = \theta_2$ . Les trois définitions de la résolution dépendent donc de la forme du critère au niveau de l'incidence moyenne  $\theta_{moy} = \frac{\theta_1+\theta_2}{2}$  car pour deux sources non résolues le critère a un minimum proche

de  $\theta_{moy}$ . Dans la première approche, le critère doit remonter entre les directions exactes des deux sources tel que son niveau en  $\theta_{moy}$  soit supérieur à celui en  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Dans le but d'obtenir *uniquement* un seuil de résolution et non une probabilité de résolution, une définition similaire a été proposée par Weiss et Friedlander dans [WF94a] en utilisant le critère moyen  $E[c(\theta, \mathbf{E})]$  en lieu et place de la variable aléatoire  $c(\theta, \mathbf{E})$ . Dans la deuxième approche, le critère doit présenter un maximum local au voisinage  $\theta_{moy}$  tel que la dérivée seconde soit négative. La première et la troisième approche prennent en compte des cas où les erreurs de modèle des deux sources n'ont pas le même niveau. Toutefois la première approche utilise deux seuils et la troisième similaire à Zhang [Zha95] utilise un seuil. D'après (3.59)(3.116), les écritures mathématiques de la probabilité de résolution  $P_{résolution}$  des trois approches sont les suivantes :

- **1<sup>ière</sup> approche** :  $P_{résolution} = \Pr [\epsilon^H \mathbf{Q}_{WF}^1 \epsilon < \mathbf{0} \text{ et } \epsilon^H \mathbf{Q}_{WF}^2 \epsilon < \mathbf{0}]$ 

$$\mathbf{Q}_{WF}^1 = \mathbf{Q}(\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_1)) - \mathbf{Q}(\mathbf{a}(\theta_{moy}), \mathbf{a}(\theta_{moy}))$$

$$\mathbf{Q}_{WF}^2 = \mathbf{Q}(\mathbf{a}(\theta_2), \mathbf{a}(\theta_2)) - \mathbf{Q}(\mathbf{a}(\theta_{moy}), \mathbf{a}(\theta_{moy}))$$

$$\theta_{moy} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$
- **2<sup>ième</sup> approche** :  $P_{résolution} = \Pr [\epsilon^H \mathbf{Q}_V \epsilon < \mathbf{0}]$ 

$$\mathbf{Q}_V = \mathbf{Q}(\ddot{\mathbf{a}}(\theta_{moy}), \mathbf{a}(\theta_{moy})) + \mathbf{Q}(\mathbf{a}(\theta_{moy}), \ddot{\mathbf{a}}(\theta_{moy})) + 2\mathbf{Q}(\dot{\mathbf{a}}(\theta_{moy}), \dot{\mathbf{a}}(\theta_{moy}))$$
- **3<sup>ième</sup> approche** :  $P_{résolution} = \Pr [\epsilon^H \mathbf{Q}_Z \epsilon < \mathbf{0}]$ 

$$\mathbf{Q}_Z = \frac{\mathbf{Q}(\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_1)) + \mathbf{Q}(\mathbf{a}(\theta_2), \mathbf{a}(\theta_2))}{2} - \mathbf{Q}(\mathbf{a}(\theta_{moy}), \mathbf{a}(\theta_{moy}))$$

où  $\Pr[\ ]$  désigne la probabilité et d'un point de vue général

$$P_{résolution} = \Pr [\epsilon^H \mathbf{Q}_{Résolution}^i \epsilon < \mathbf{0} \text{ pour } 1 \leq i \leq nb].$$

Dans [Zha95], la probabilité de résolution  $\Pr[\mathbf{y}^H \mathbf{D} \mathbf{y} > \mathbf{0}]$  est établie en supposant que  $\mathbf{y}$  est une variable aléatoire gaussienne dépendant des statistiques de la matrice de covariance et  $\mathbf{D}$  est une matrice diagonale déterministe. Contrairement à [Zha95], dans [FLV05e][FLV05c] les matrices  $\mathbf{Q}_{Résolution}^i$ ,  $\dot{\mathbf{Q}}_m \epsilon$  et  $\ddot{\mathbf{Q}}_m$  ne bénéficient pas de propriétés intéressantes. La figure 3.11 illustre le cas de  $M = 2$  sources d'incidences

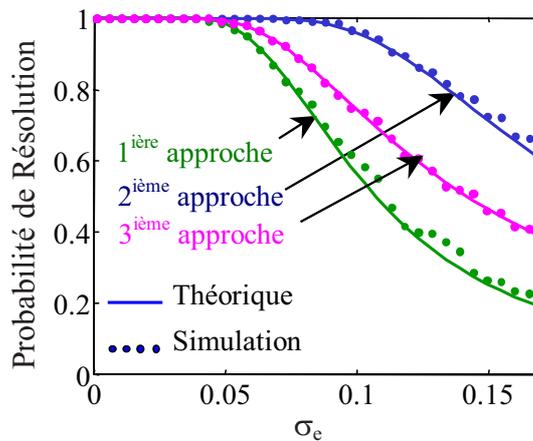


FIG. 3.11 – Probabilité de résolution de la 1<sup>ière</sup> source en fonction de l'erreur de modèle  $\sigma_e$  en présence de  $M = 2$  sources où  $\theta_2 - \theta_1 = 20.9^\circ$ . Le réseau est circulaire avec  $N = 5$  capteurs et  $R = \lambda_0/2$ .

$\theta_1 = 0^\circ$  et  $\theta_2 = 20.9^\circ$  sur un réseau circulaire de rayon  $R = \lambda_0/2$  avec  $N = 5$  capteurs. Les probabilités

de résolution de la 1<sup>ière</sup> source sont représentées pour les trois approches, en fonction du niveau  $\sigma_e$  d'une erreur de modèle qui est gaussienne et circulaire telle que :  $E[\mathbf{e}\mathbf{e}^H] = (\sigma_e)^2 \mathbf{I}_{NM}$  et  $\mathbf{e} = \text{vec}(\mathbf{E})$ . Les résultats montrent que les simulations sont en adéquation avec les performances théoriques pour la probabilité de résolution. Les détails mathématiques du papier [FLV05e] sont donnés en Annexe-F.

### 3.3.2 Etablissement des performances conditionnées à la résolution [FLV05c]

L'objectif est d'établir les performances de MUSIC en éliminant les réalisations où l'erreur  $\Delta\theta_m$  est associée à une non résolution. Ainsi, le biais et la racine de l'EQM de la  $m^{\text{ième}}$  source conditionnés par la résolution s'écrit

$$\begin{aligned} \text{Biais}_m &= E[\Delta\theta_m(\epsilon) \mid \epsilon^H \mathbf{Q}_{\text{Résolution}}^i \epsilon < \mathbf{0} \text{ pour } 1 \leq i \leq nb] \\ \text{RMS}_m &= \sqrt{E[\Delta\theta_m(\epsilon)^2 \mid \epsilon^H \mathbf{Q}_{\text{Résolution}}^i \epsilon < \mathbf{0} \text{ pour } 1 \leq i \leq nb]} \\ \Delta\theta_m(\epsilon) &= -\frac{\epsilon^H \dot{\mathbf{Q}}_m \epsilon}{\epsilon^H \ddot{\mathbf{Q}}_m \epsilon}, \end{aligned}$$

où  $E[\cdot \mid \cdot]$  désigne une espérance conditionnelle et l'erreur de goniométrie  $\Delta\theta_m(\epsilon)$  est donnée par (3.64). Dans [FLV05e][FLV05c], les calculs sont conduits en supposant que les formes hermitiennes  $\epsilon^H \mathbf{Q}_{\text{Résolution}}^i \epsilon$ ,  $\epsilon^H \dot{\mathbf{Q}}_m \epsilon$  et  $\epsilon^H \ddot{\mathbf{Q}}_m \epsilon$  sont gaussiennes. Lorsque les variables  $x, y$  et  $z$  sont gaussiennes, les espérances conditionnelles  $E[y \mid x < \alpha]$ ,  $E[z \mid x < \alpha \text{ et } y < \beta]$ ,  $E[y^2 \mid x < \alpha]$ ,  $E[z^2 \mid x < \alpha \text{ et } y < \beta]$  ont été établies en fonction des moyennes et variances des variables  $x, y$  et  $z$ .

Les figures 3.12 et 3.13 illustrent le cas de  $M = 2$  sources d'incidences  $\theta_1 = 0^\circ$  et  $\theta_2 = 20.9^\circ$  sur un réseau circulaire de rayon  $R = \lambda_0/2$  avec  $N = 5$  capteurs. Les performances de la 1<sup>ière</sup> source sont représentées pour les trois approches, en fonction du niveau  $\sigma_e$  d'une erreur de modèle qui est gaussienne et circulaire telle que :  $E[\mathbf{e}\mathbf{e}^H] = (\sigma_e)^2 \mathbf{I}_{NM}$  et  $\mathbf{e} = \text{vec}(\mathbf{E})$ . Les figures 3.12 et 3.13 donnent respectivement le biais et la variance conditionnels de l'estimateur. Les résultats montrent que les simulations sont en adéquation avec les performances théoriques. Dans la première approche, la concordance entre le biais théorique et la simulation correspondante est la plus adéquate, car la condition plus draconienne utilisant deux seuils, induit une probabilité de résolution associée chutant plus vite que dans les deux autres approches. La troisième approche puis la deuxième sont moins restrictives et donc les courbes de biais s'éloignent plus vite de la théorie.

Les détails mathématiques du papier [FLV05c] sont donnés en Annexe-F.

## 3.4 Application des expressions des performances de goniométrie

### 3.4.1 Spécification d'un système de goniométrie

La définition d'un système de goniométrie dépend des contraintes du cahier des charges liées en particulier à la précision d'estimation des angles d'incidence, au temps de réponse du système et à son coût de développement. L'objectif est plus précisément de choisir la méthode de goniométrie et la géométrie du réseau de capteurs (avec le matériel qui le compose tels que les récepteurs et les antennes) les mieux adaptés au système étudié. La contrainte liée au temps de réponse du système et son coût financier

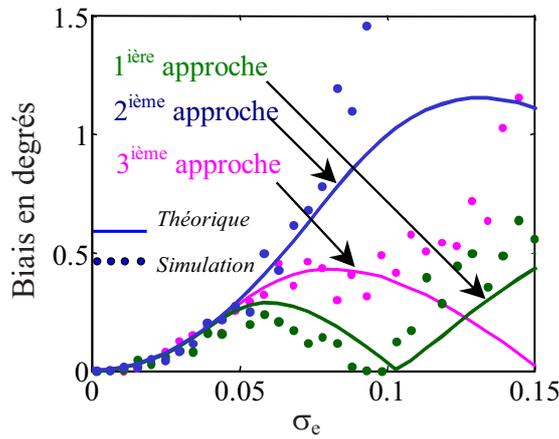


FIG. 3.12 – Biais de la 1<sup>ère</sup> source en fonction de l'erreur de modèle  $\sigma_e$  en présence de  $M = 2$  sources où  $\theta_2 - \theta_1 = 20.9^\circ$ . Le réseau est circulaire avec  $N = 5$  capteurs et  $R = \lambda_0/2$ .

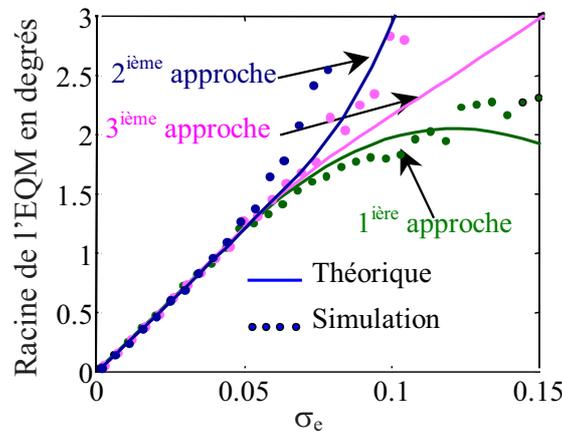


FIG. 3.13 – Racine de l'EQM de la 1<sup>ère</sup> source en fonction de l'erreur de modèle  $\sigma_e$  en présence de  $M = 2$  sources où  $\theta_2 - \theta_1 = 20.9^\circ$ . Le réseau est circulaire avec  $N = 5$  capteurs et  $R = \lambda_0/2$ .

(dont dépend la qualité du matériel) oriente le choix de l'algorithme d'estimation. De plus, les erreurs de modèle (mesurables) dépendant de la qualité du matériel permettent d'affiner ce choix. Pour cela, il est nécessaire de mettre en adéquation la qualité du matériel avec les performances requises pour la méthode de goniométrie choisie. Pour ce faire, une expression du niveau des erreurs de modèle en fonction des performances attendues du cahier des charges, de la géométrie du réseau d'antennes choisie et de la méthode de goniométrie, est un outil nécessaire pour la spécification d'un système. Cette dernière expression peut éventuellement permettre de mettre en évidence une non adéquation entre le matériel choisi et les performances spécifiées. Dans ce cas, le coût du système de goniométrie est forcément plus élevé que celui prévu dans le cahier des charges. La solution est alors soit de garder le même coût avec des performances dégradées soit d'autoriser l'augmentation de ce coût pour atteindre les performances requises.

Pour établir l'expression du niveau des erreurs de modèle  $\sigma_e$  en fonction des performances requises avec un premier ordre de grandeur, les statistiques des erreurs de modèles sont approchées par leurs deux premiers

moments. C'est pourquoi, les erreurs de modèle  $\mathbf{e} = \text{vec}(\mathbf{E})$  sont supposées gaussiennes et circulaires en vérifiant :  $E[\mathbf{e}\mathbf{e}^H] = \sigma_e^2 \mathbf{I}_{NM}$ . Dans ces conditions, le niveau des erreurs de modèle  $\sigma_e$  en fonction des performances est déduit des expressions générales (3.114)(3.115) du biais et de la variance. Il faut noter que les expressions (3.42) et (3.72) sont des cas particuliers de (3.114)(3.115) pour respectivement les méthodes du MV et de MUSIC. La valeur maximale  $\sigma_e^{\max}$  de  $\sigma_e$  pour que la racine de l'EQM soit inférieure à  $RMS_m^R$  vérifie d'après (3.114) :

$$\sum_{i=0}^{2q} a_i^{EQM} (\sigma_e^{\max})^{2i} = 0 \quad \text{avec} \quad a_i^{EQM} = (RMS_m^R)^2 \alpha_i^{2q} (\ddot{\mathbf{Q}}_m) - \alpha_i^{2q} (\dot{\mathbf{Q}}_m) \quad (3.117)$$

et pour que le biais  $E[\Delta\theta_m(\mathbf{E})_{mono}]$  soit inférieur à  $biais_m^R$  :

$$\sum_{i=0}^q a_i^{biais} (\sigma_e^{\max})^{2i} = 0 \quad \text{avec} \quad a_i^{biais} = bias_m^R \alpha_i^q (\ddot{\mathbf{Q}}_m) + \alpha_i^q (\dot{\mathbf{Q}}_m) \quad (3.118)$$

Selon que la performance est spécifiée en terme de biais où de variance, la valeur de  $(\sigma_e^{\max})^2$  est la racine d'un polynôme dont l'ordre est respectivement  $q$  ou  $2q$ . La valeur  $(\sigma_e^{\max})^2$  est ainsi la plus petite racine réelle et positive de l'un de ces polynômes. Il faut remarquer que les polynômes (3.118) et (3.117) ne donnent pas forcément de racines positives et que dans ce cas les performances requises  $RMS_m^R$  ou  $biais_m^R$  ne sont pas associées à une valeur particulière du niveau des erreurs de modèle. L'équation (3.115) donne une expression de  $\sigma_e^{\max}$  en cherchant les racines d'un polynôme comme dans le cas mono-dimensionnel avec (3.114).

En utilisant l'équation (3.42) des performances du Maximum de Vraisemblance, l'expression de la valeur maximale  $\sigma_e^{\max}$  de  $\sigma_e$  pour que la racine de l'EQM soit inférieure à  $RMS_m^R$  s'écrit :

$$\sigma_e^{\max} = \sqrt{\frac{-\beta_m + \sqrt{\beta_m^2 + 4\alpha_m (RMS_m^R)^2}}{2\alpha_m}} \quad (3.119)$$

où  $RMS_m^R$  est la racine de l'EQM requise pour la  $m^{i\text{ème}}$  source. En utilisant l'équation (3.72), l'expression de la valeur maximale  $\sigma_e^{\max}$  pour l'algorithme MUSIC s'écrit :

$$\begin{aligned} \sigma_e^{\max} &= \sqrt{-\frac{a_1 + \sqrt{\Delta}}{2a_2}} \quad \text{avec} \quad \Delta = a_1^2 - 4a_2a_0 \\ a_2 &= (RMS_m^R)^2 \alpha (\ddot{\mathbf{Q}}_m) - \alpha (\dot{\mathbf{Q}}_m) \\ a_1 &= (RMS_m^R)^2 \beta (\ddot{\mathbf{Q}}_m) - \beta (\dot{\mathbf{Q}}_m) \quad \text{et} \quad a_0 = (RMS_m^R)^2 \ddot{\mathbf{Q}}_m(1,1)^2 \end{aligned} \quad (3.120)$$

Les figures 3.14 et 3.15 donnent la valeur maximale  $\sigma_e^{\max}$  (3.119) de  $\sigma_e$  en fonction de  $|\theta_2 - \theta_1|$  lorsque  $RMS_1^R = 1^\circ$ ;  $\theta_1 = 100^\circ$  et  $\theta_2$  sont les directions des  $M = 2$  sources arrivant sur réseau circulaire de rayon  $R = \lambda_0$  avec  $N = 5$  capteurs. La figure 3.14 représente la valeur  $\sigma_e^{\max}$  du niveau des erreurs de modèle de l'équation (3.119) pour la méthode du MV : Comme prévu par la figure 3.2,  $\sigma_e^{\max} = 0.08$  lorsque  $|\theta_2 - \theta_1| = 14^\circ$ . La figure 3.14 montre que l'erreur de modèle maximale  $\sigma_e^{\max}$  doit diminuer en fonction du rapprochement angulaire des deux sources pour atteindre la valeur  $RMS_1^R$  requise. La figure 3.15 représente la valeur  $\sigma_e^{\max}$  du niveau des erreurs de modèle de l'équation (3.120) pour la méthode MUSIC. Sachant que  $\sigma_e^{\max}$  ne peut physiquement descendre en dessous d'une certaine valeur, les figure 3.14 et figure 3.15 donnent les valeurs minimales de  $|\theta_2 - \theta_1|$  physiquement atteignables pour respectivement les méthodes du MV et de MUSIC.

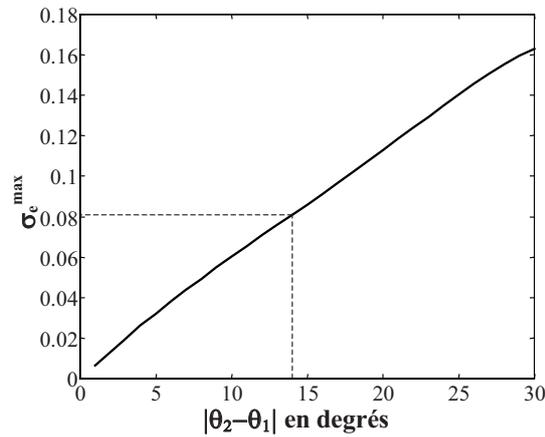


FIG. 3.14 –  $\sigma_e^{\max}$  du MV en fonction de  $|\theta_2 - \theta_1|$  pour une valeur  $RMS_1^R = 1^\circ$  :  $\theta_1 = 100^\circ$ ,  $\mathbf{R}_s(1, 2) = 0.8$ . Le réseau est circulaire avec  $N = 5$  capteurs et un rayon  $R = \lambda_0$ .

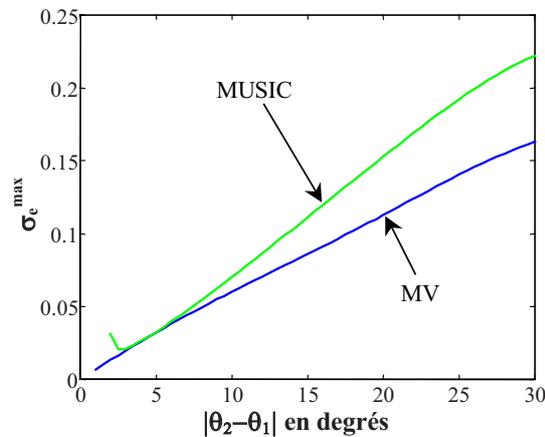


FIG. 3.15 –  $\sigma_e^{\max}$  en fonction de  $|\theta_2 - \theta_1|$  pour une valeur  $RMS_1^R = 1^\circ$  :  $\theta_1 = 100^\circ$ . Le réseau est circulaire avec  $N = 5$  capteurs et un rayon  $R = \lambda_0$ .

### 3.4.2 Localisation de sources

La localisation de sources en champ lointain nécessite plusieurs goniomètres car la réponse du réseau de capteurs dépend uniquement des directions d'arrivées. La position des émetteurs est mesurable à partir d'au moins deux goniomètres suivant le principe de la triangulation (voir figure 3.16).

La position des émetteurs est donnée par les paramètres  $(x_m, y_m)$  dans le plan horizontal et l'incidence de la  $m^{\text{ième}}$  source sur le  $p^{\text{ième}}$  goniomètre est notée par  $\theta_{pm}$ . Dans la pratique, la direction estimée sur le  $p^{\text{ième}}$  goniomètre à l'instant  $t_k$  est entachée d'une erreur  $e_k(p, m)$  telle que :

$$\hat{\theta}_k(p, m) = \theta_{pm} + e_k(p, m) \text{ pour } (1 \leq k \leq K_m) \quad (3.121)$$

où  $e_k(p, m) = \Delta e_k(p, m) + \Delta \theta_{mp}$  et  $\Delta \theta_{pm}$  est l'erreur de goniométrie des expressions (3.106)(3.107) liées aux erreurs de calibration. Le niveau de l'erreur  $\Delta e_k(p, m)$  dépend de l'instant  $t_k$ , du temps d'observation pour estimer l'angle  $\hat{\theta}_k(p, m)$  et du rapport signal sur bruit de la source.

En utilisant un ensemble de  $K_m$  mesures d'azimut  $\hat{\theta}_k(p, m)$  ( $1 \leq k \leq K_m$ ) sur  $P$  systèmes de goniométrie ( $1 \leq p \leq P$ ), le procédé de triangulation détermine la position moyenne  $(\hat{x}_m, \hat{y}_m)$  de l'émetteur dans une certaine zone d'incertitude incluant *idéalement* la position exacte  $(x_m, y_m)$ . La figure 3.17 montre que la

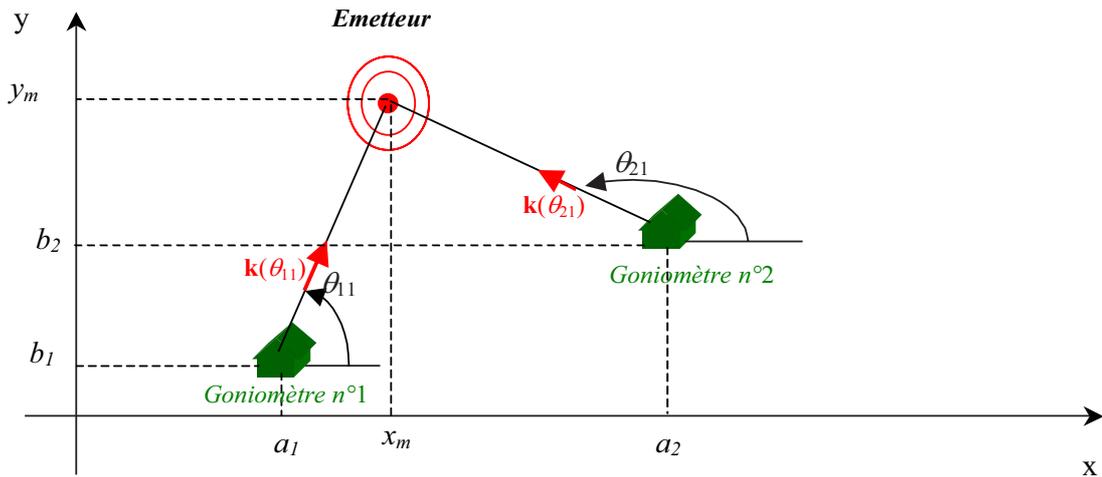


FIG. 3.16 – Principe de la triangulation.

zone d'incertitude de l'émetteur de position  $(x_m, y_m)$  dépend des cônes angulaires d'erreurs d'estimation des angles  $\theta_{1m}$  et  $\theta_{2m}$ . La largeur de ces cônes (ou zone d'incertitude) dépend des statistiques de l'erreur  $e_k(p, m)$  définies dans (3.121).

Classiquement, la zone d'incertitude de localisation est estimée à partir des statistiques empiriques des  $K_m$  mesures  $\hat{\theta}_k(p, m)$ . La partie non systématique  $\Delta e_k(p, m)$  de l'erreur d'estimation des angles est supposée égale à  $e_k(p, m)$  car  $\Delta\theta_{pm} = 0$ . La non prise en compte de l'erreur  $\Delta\theta_{pm}$  liée à la calibration peut donner une zone d'incertitude n'incluant pas la position exacte  $(x_m, y_m)$ .

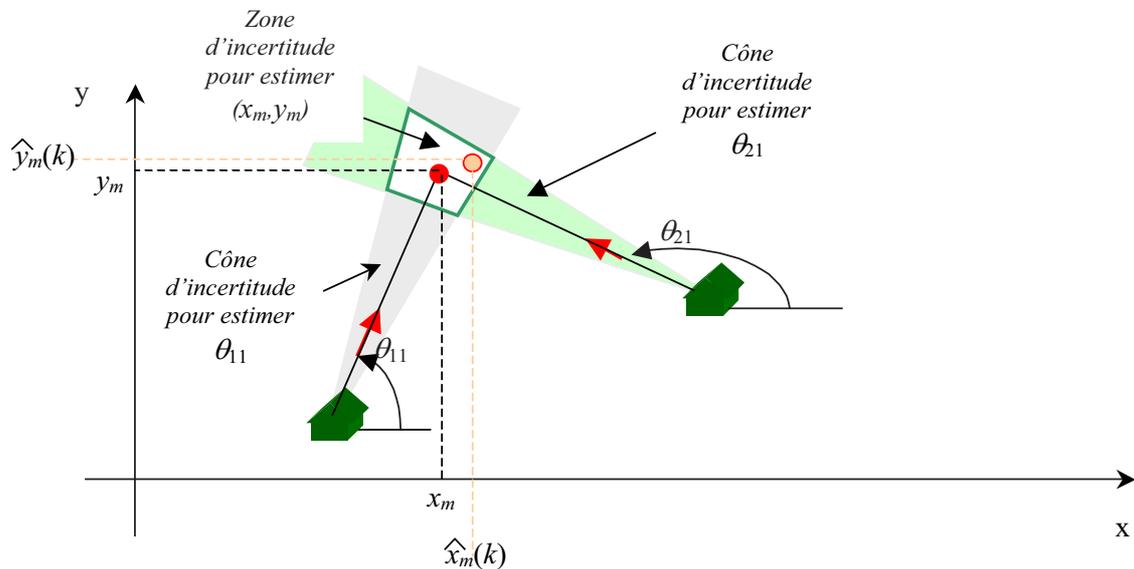


FIG. 3.17 – Triangulation avec deux goniomètres et zones d'incertitudes

Paradoxalement, plus les rapports signaux sur bruit des émetteurs seront élevés et le nombre  $P$  de goniomètres grands, plus ce problème d'erreur de localisation sera visible. Il faut remarquer d'autre part, qu'un minimum de trois goniomètres non alignés est nécessaire car une source alignée avec deux goniomètres n'est pas localisable. La figure 3.18 montre que l'obtention de zones d'incertitudes disjointes est possible avec trois goniomètres lorsqu'une triangulation est appliquée par couples de goniomètres. Il

faut donc prendre en compte les statistiques de l'erreur  $\Delta\theta_{pm}$  liée à la calibration pour effectuer une localisation non biaisée avec un grand nombre de goniomètres. Les statistiques de  $\Delta\theta_{pm}$  sont données dans les équations (3.114)(3.115).

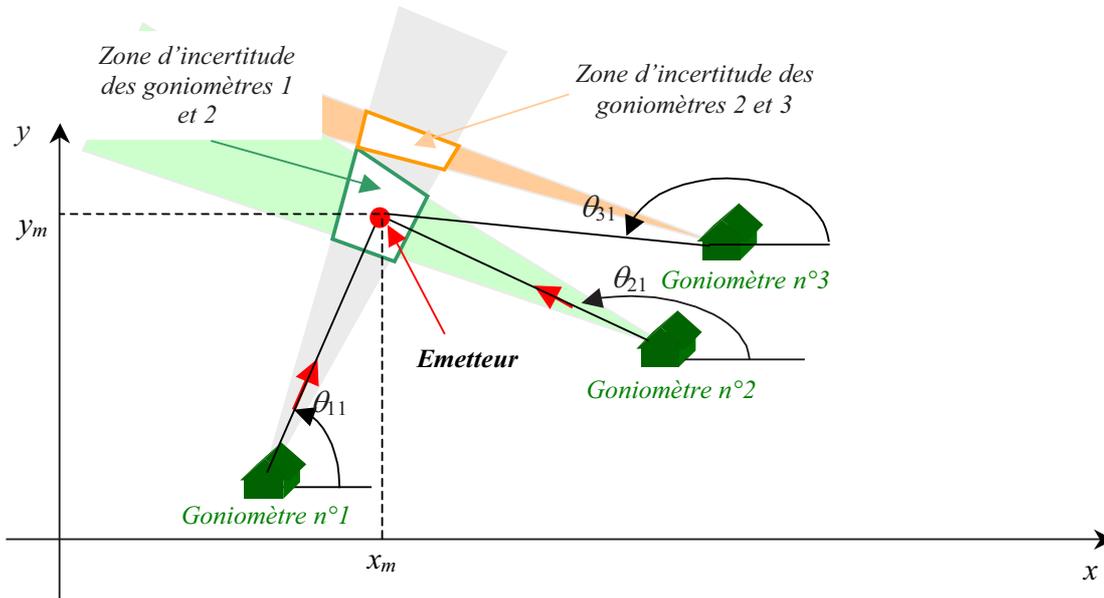


FIG. 3.18 – Triangulation avec trois goniomètres et zones d'incertitudes disjointes

Dans la technique de localisation proposée, l'erreur angulaire  $e_k(p, m)$  est supposée gaussienne et la zone d'incertitude d'une source de position  $(x_m, y_m)$  dans le plan horizontal est une ellipse. On suppose tout d'abord que les  $K_m$  incidences  $\hat{\theta}_k(p, m)$  pour  $1 \leq p \leq P$  sont associées au même émetteur. D'après figure 3.16, on note par  $\mathbf{M}_p$  le point de coordonnées  $(a_p, b_p)$  de position du  $p^{\text{ième}}$  goniomètre et par  $\mathbf{E}_m$  de coordonnées  $(x_m, y_m)$  la position du  $m^{\text{ième}}$  émetteur. La technique de localisation estime les coordonnées du point  $\mathbf{E}_m$  en résolvant le système d'équations suivant :

$$\overline{\mathbf{E}_m \mathbf{M}_p}^T \mathbf{k}_{ortho}(\hat{\theta}_k(p, m)) = 0 \text{ pour } 1 \leq p \leq P \quad (3.122)$$

où le vecteur  $\mathbf{k}_{ortho}(\theta)$  est orthogonal au vecteur d'onde  $\mathbf{k}(\theta)$  de la figure 3.16. Les vecteurs  $\overline{\mathbf{E}_m \mathbf{M}_p}$  et  $\mathbf{k}_{ortho}(\theta)$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{E}_m \mathbf{M}_p} &= \mathbf{z}_p - \mathbf{z}_m \text{ et } \mathbf{k}_{ortho}(\theta) = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix} \\ \text{où } \mathbf{z}_m &= \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{z}_p = \begin{bmatrix} a_p \\ b_p \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.123)$$

L'inconnue  $\mathbf{z}_m$  du système d'équations (3.122) vérifie alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\hat{\theta}_{km}) \mathbf{z}_m &= \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ortho}(\hat{\theta}_k(1, m))^T \mathbf{z}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{k}_{ortho}(\hat{\theta}_k(P, m))^T \mathbf{z}_P \end{bmatrix} \text{ avec } \hat{\theta}_{km} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_k(1, m) \\ \vdots \\ \hat{\theta}_k(P, m) \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}(\hat{\theta}_{km}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ortho}(\hat{\theta}_k(1, m)) & \cdots & \mathbf{k}_{ortho}(\hat{\theta}_k(P, m)) \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (3.124)$$

Lorsque  $P \geq 2$ , l'équation (3.124) admet la solution suivante :

$$\hat{\mathbf{z}}_{km} = \begin{bmatrix} \hat{x}_m(k) \\ \hat{y}_m(k) \end{bmatrix} = \left( \mathbf{K}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{km})^H \mathbf{K}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{km}) \right)^{-1} \mathbf{K}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{km})^H \mathbf{u}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{km}) \quad (3.125)$$

où le point de coordonnées  $(\hat{x}_m(k), \hat{y}_m(k))$  est la position estimée du  $m^{\text{ième}}$  émetteur à l'instant  $t_k$ . Sachant que les incidences  $\hat{\theta}_k(p, m)$  sont estimées avec une erreur, la position estimée  $\hat{\mathbf{z}}_{km}$  est alors différente de la position exacte  $\mathbf{z}_m$ . Pour établir l'équation de l'ellipse d'incertitude, la connaissance de la relation entre  $\mathbf{dz}_{km} = \hat{\mathbf{z}}_{km} - \mathbf{z}_m$  et les erreurs de goniométrie  $\Delta\boldsymbol{\theta}_{km} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{km} - \boldsymbol{\theta}_m = [e_k(1, m) \cdots e_k(P, m)]^T$  (où  $\boldsymbol{\theta}_m = [\theta_{1m} \cdots \theta_{Pm}]^T$ ) est nécessaire. Pour ce faire l'équation (3.124) est différenciée de la façon suivante :

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_m) \mathbf{dz}_{km} = \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}_m, \mathbf{z}_m) \Delta\boldsymbol{\theta}_{km} \quad (3.126)$$

où :

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}_m, \mathbf{z}_m) = \text{diag}(\dot{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\theta}_m, \mathbf{z}_m)) \quad \text{avec} \quad \dot{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\theta}_m, \mathbf{z}_m) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{k}}_{ortho}(\theta_{1m})^T (\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_m) \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{k}}_{ortho}(\theta_{Pm})^T (\mathbf{z}_P - \mathbf{z}_m) \end{bmatrix} \quad (3.127)$$

où  $\dot{\mathbf{k}}_{ortho}(\theta)$  est la dérivée première de  $\mathbf{k}_{ortho}(\theta)$  en  $\theta$ . La relation entre  $\mathbf{dz}_{km}$  et  $\Delta\boldsymbol{\theta}_{km}$  devient alors :

$$\mathbf{dz}_{km} = \mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}_m, \mathbf{z}_m) \Delta\boldsymbol{\theta}_{km} \quad \text{avec} \quad \mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}_m, \mathbf{z}_m) = \left( \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_m)^H \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_m) \right)^{-1} \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_m)^H \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}_m, \mathbf{z}_m) \quad (3.128)$$

L'ellipse d'incertitude pour localiser le  $m^{\text{ième}}$  émetteur est déduite de l'équation (3.128) ainsi que les statistiques supposées gaussiennes de l'erreur angulaire  $\Delta\boldsymbol{\theta}_{km}$ . Cette ellipse est une courbe fermée contenant la position réelle  $(x_m, y_m)$  de l'émetteur dont l'équation dépend des variables  $(x, y)$ .

L'équation de l'ellipse du  $m^{\text{ième}}$  émetteur vérifie :

$$\text{Ellipse}_m^P(x, y) = (\mathbf{dz}_m - \overline{\mathbf{dz}_m})^T (\mathbf{R}_{zz,m})^{-1} (\mathbf{dz}_m - \overline{\mathbf{dz}_m}) - \frac{\eta(\text{Pr})^2}{2} = 0 \quad (3.129)$$

avec :

$$\mathbf{R}_{zz,m} = E[\mathbf{dz}_m \mathbf{dz}_m^H], \quad \overline{\mathbf{dz}_m} = E[\mathbf{dz}_m] \quad \text{avec} \quad \mathbf{dz}_m = \begin{bmatrix} x - x_m & y - y_m \end{bmatrix}^T \quad (3.130)$$

où le seuil  $\eta(\text{Pr})$  vérifie l'équation suivante pour un vecteur  $\mathbf{dz}_m$  gaussien :

$$\text{Pr} = \int_{-\eta(\text{Pr})}^{\eta(\text{Pr})} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

où Pr est la probabilité que la position de coordonnées  $(\hat{x}_m(k), \hat{y}_m(k))$  soit à l'intérieur de l'ellipse. Le vecteur  $\mathbf{z}_m = \begin{bmatrix} x_m & y_m \end{bmatrix}^T$  est approximé à partir des  $K_m$  mesures  $\hat{\theta}_k(p, m)$ . La résolution du système d'équations  $\mathbf{K}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{km}) \mathbf{z}_m = \mathbf{u}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{km})$  pour  $1 \leq k \leq K_m$  donne alors :

$$\mathbf{z}_m \approx \begin{bmatrix} \hat{x}_m \\ \hat{y}_m \end{bmatrix} = (\mathbf{K}_P^H \mathbf{K}_P)^{-1} \mathbf{K}_P^H \mathbf{u}_P \quad (3.131)$$

$$\mathbf{K}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{K}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1m}) \\ \vdots \\ \mathbf{K}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{K_m m}) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1m}) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{K_m m}) \end{bmatrix}$$

En supposant que les erreurs de goniométrie  $e_k(p, m)$  de deux goniomètres différents soient indépendantes, les deux premiers moments statistiques de  $\mathbf{dz}_m$  vérifient d'après (3.128) :

$$\mathbf{R}_{zz,m} = \mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}_m, \mathbf{z}_m) \mathbf{R}_{\Delta\boldsymbol{\theta}\Delta\boldsymbol{\theta},m} \mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}_m, \mathbf{z}_m)^H \text{ et } \overline{\mathbf{dz}_m} = \mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}_m, \mathbf{z}_m) E[\Delta\boldsymbol{\theta}_{km}] \quad (3.132)$$

$$\mathbf{R}_{\Delta\boldsymbol{\theta}\Delta\boldsymbol{\theta},m} = E[\Delta\boldsymbol{\theta}_{km}(\Delta\boldsymbol{\theta}_{km})^H] - E[\Delta\boldsymbol{\theta}_{km}]E[\Delta\boldsymbol{\theta}_{km}]^H = \text{diag} \left( \begin{array}{c} E[|e_k(1, m)|^2] - |E[e_k(1, m)]|^2 \\ \vdots \\ E[|e_k(P, m)|^2] - |E[e_k(P, m)]|^2 \end{array} \right)$$

où  $E[\Delta\boldsymbol{\theta}_{km}] = [E[e_k(1, m)] \cdots E[e_k(P, m)]]^T$ . L'ellipse d'incertitude dépend donc du biais et de la variance des erreurs de goniométrie  $e_k(p, m)$  pour  $1 \leq p \leq P$ . Dans cette technique de localisation, les statistiques de  $e_k(p, m)$  sont estimées à partir d'une part des  $K_m$  mesures  $\hat{\theta}_k(p, m)$  et d'autre part d'un a priori sur les erreurs de calibration. Dans ces conditions :

$$E[e_k(P, m)] \approx \bar{e}_p(\theta_{pm}) + \frac{1}{K_m} \sum_{k=1}^{K_m} \hat{\theta}_k(p, m) \quad (3.133)$$

$$E[|e_k(P, m)|^2] \approx EQM_p(\theta_{pm}) + \frac{1}{K_m} \sum_{k=1}^{K_m} |\hat{\theta}_k(p, m)|^2$$

où  $\bar{e}_p(\theta_{pm})$  et  $EQM_p(\theta_{pm})$  sont le biais et la variance (ou EQM) de l'incidence  $\theta_{pm}$  en présence d'erreurs de modèle sur le  $p^{\text{ième}}$  goniomètre. D'après (3.114)(3.115),  $EQM_p(\theta_{pm})$  vérifie :

$$EQM_p(\theta_{pm}) = ((RMS_m)_{mono})^2 \text{ ou } EQM_p(\theta_{pm}) = ((RMS_m)_{multi})^2 \quad (3.134)$$

et  $\bar{e}_p(\theta_{pm})$  vérifie :

$$\bar{e}_p(\theta_{pm}) = E[\Delta\theta_m(\mathbf{E})_{mono}] \text{ ou } \bar{e}_p(\theta_{pm}) = E[\Delta\theta_m(\mathbf{E})_{multi}] \quad (3.135)$$

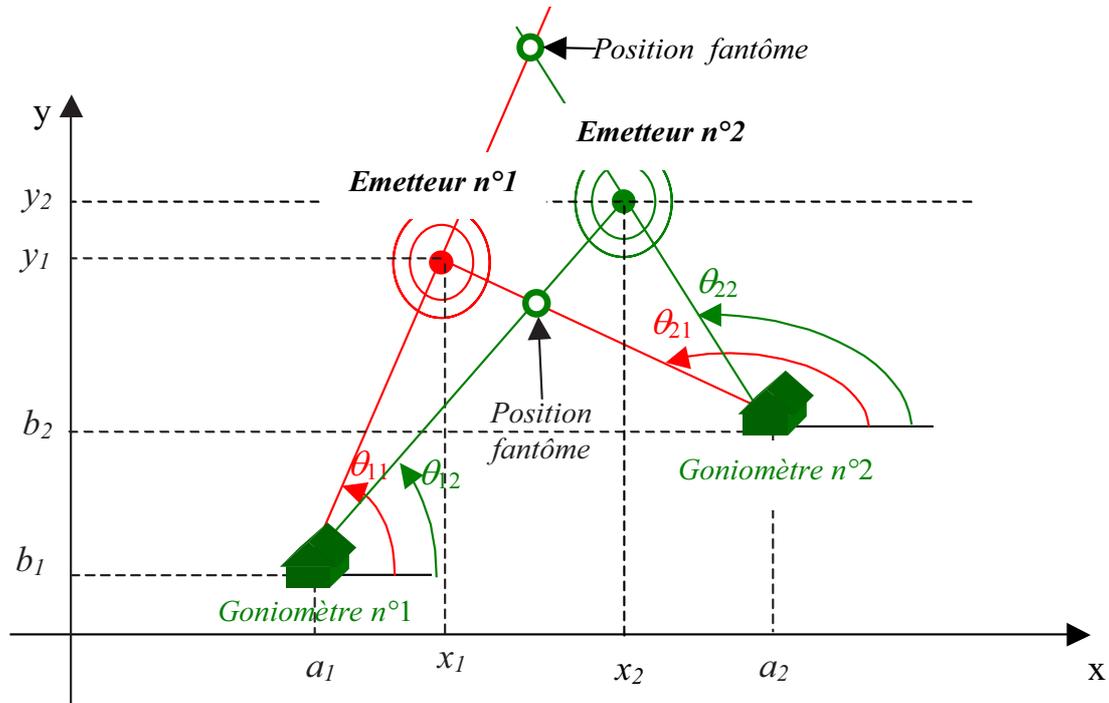
Les expressions de  $EQM_p(\theta_{pm})$  et  $\bar{e}_p(\theta_{pm})$  dépendent de l'incidence  $\theta_{pm}$ , de la méthode de goniométrie, du réseau de capteurs du  $p^{\text{ième}}$  goniomètre et d'une connaissance a priori de la précision de la table de calibration. L'incidence  $\theta_{pm}$  nécessaire au calcul de  $EQM_p(\theta_{pm})$  et  $\bar{e}_p(\theta_{pm})$  est alors approchée par :

$$\theta_{pm} \approx \frac{1}{K_m} \sum_{k=1}^{K_m} \hat{\theta}_k(p, m)$$

Sachant qu'en présence de plusieurs sources, l'intersection des  $PM$  incidences  $\theta_{pm}$  donne des positions fantômes, la technique de localisation proposée élimine ces positions fantômes par l'ajout progressif de goniomètres. La figure 3.19 montre l'existence de quatre localisations possibles pour  $M = 2$  sources et  $P = 2$  goniomètres. L'ajout d'un  $3^{\text{ième}}$  goniomètre comme dans la figure 3.20 permet d'éliminer les deux positions fantômes. La technique associe tout d'abord l'incidence  $\theta_{Pm}$  avec le  $m^{\text{ième}}$  émetteur, en cherchant une intersection entre la droite de direction  $\theta_{Pm}$  et l'ellipse d'incertitude  $Ellipse_i^{P-1}(x, y)$  déterminé par les  $P - 1$  premiers goniomètres. Lorsque l'incidence  $\theta_{Pm}$  et l'ellipse  $Ellipse_m^{P-1}(x, y)$  sont associées, l'ellipse d'équation  $Ellipse_m^P(x, y)$  est calculée en utilisant les  $P$  goniomètres.

### 3.5 Performances de l'algorithme d'Auto-Calibration

Dans la pratique la modélisation de la réponse d'une source à un réseau de capteurs par son incidence  $\theta_m$  et un vecteur de paramètres  $\boldsymbol{\eta}_{y,mi}$  n'est pas exhaustive car le vecteur  $\boldsymbol{\eta}_{y,mi}$  ne tient pas compte de toutes


 FIG. 3.19 – Problème de la triangulation avec  $P = 2$  goniomètres dans un cas multi-sources ( $M = 2$ )

les perturbations. Le modèle  $\mathbf{a}_y(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{y,mi}) = \mathbf{U}_y(\theta_m) \boldsymbol{\varphi}_y(\boldsymbol{\eta}_{y,mi})$  du vecteur directeur se rapproche de la réalité sans l'atteindre car seuls les paramètres de perturbation dominants sont pris en compte. De plus, la modélisation (2.53) du vecteur directeur par un développement limité est naturellement une approximation. Dans ce paragraphe les performances de l'algorithme d'Auto-Calibration sont données lorsque le modèle du vecteur directeur est approché. Les performances sont établies en formulant l'erreur de goniométrie comme un rapport de formes hermitiennes sous l'hypothèse que l'algorithme utilise un nombre infini d'observations  $\mathbf{y}(t)$ . Lorsque  $K_{m,y} = 1$  le modèle de l'équation (2.54) devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \sum_{m=1}^M \tilde{\mathbf{a}}_y(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{y,m}) s_m(t) + \mathbf{n}_y(t) \\ &= \tilde{\mathbf{A}}_y \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}_y(t) \end{aligned} \quad (3.136)$$

où  $\tilde{\mathbf{a}}_y(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{y,m})$  est la réponse exacte de la  $m^{\text{ième}}$  source,  $\tilde{\mathbf{A}}_y = [\tilde{\mathbf{a}}_y(\theta_1, \boldsymbol{\eta}_{y,1}) \ \cdots \ \tilde{\mathbf{a}}_y(\theta_M, \boldsymbol{\eta}_{y,M})]$ ,  $s_{y,m1}(t) = s_m(t)$  et  $\mathbf{s}(t) = [s_1(t) \ \cdots \ s_M(t)]^T$ . Sachant que  $\mathbf{a}_y(\theta, \boldsymbol{\eta})$  est l'expression analytique du vecteur directeur, l'erreur de modélisation de la  $m^{\text{ième}}$  source s'écrit

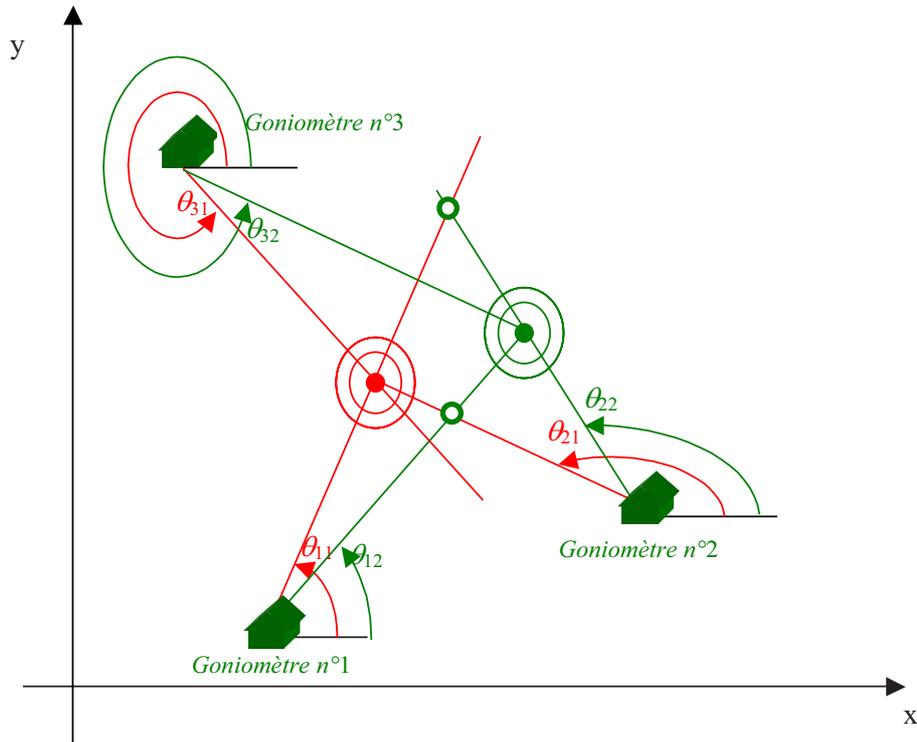
$$\mathbf{e}_m = \tilde{\mathbf{a}}_y(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{y,m}) - \mathbf{a}_y(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{y,m}) \quad (3.137)$$

Dans ces conditions la matrice  $\tilde{\mathbf{A}}_y$  dépend de la façon suivante des vecteurs d'erreur  $\mathbf{e}_m$  :

$$\tilde{\mathbf{A}}_y(\mathbf{E}) = \mathbf{A}_y + \mathbf{E} \text{ avec } \mathbf{E} = [\mathbf{e}_1 \ \cdots \ \mathbf{e}_M] \quad (3.138)$$

où  $\mathbf{A}_y = [\mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}_M] = \tilde{\mathbf{A}}_y(\mathbf{E} = \mathbf{0})$  avec  $\mathbf{a}_m = \mathbf{a}_y(\theta_m, \boldsymbol{\eta}_{y,m})$ . Lorsque la méthode utilise un nombre infini d'observations  $\mathbf{y}(t)$ , le projecteur bruit  $\Pi_b$  de l'équation (2.77) dépend de la matrice  $\mathbf{E}$  des erreurs de modèle :

$$\Pi_b = \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{E}) = \mathbf{I}_{N_y} - \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{E}) \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{E})^\# \quad (3.139)$$


 FIG. 3.20 – Triangulation avec  $P = 3$  goniomètres dans un cas multi-sources ( $M = 2$ )

En utilisant les expressions de  $\mathbf{Q}_1(\theta)$  et  $\mathbf{Q}_2(\theta)$  de (2.78), le critère de l'équation (2.81) devient :

$$J_{det}(\theta, \mathbf{E}) = \det \left( \mathbf{U}_y(\theta)^\# \mathbf{\Pi}(\mathbf{E}) \mathbf{U}_y(\theta) \right) \quad (3.140)$$

Comme montré dans les paragraphes précédents, les performances dépendent des statistiques de la variable aléatoire  $\Delta\theta_m = \hat{\theta}_m - \theta_m$  où  $\hat{\theta}_m$  et  $\theta_m$  sont respectivement les incidences estimées et exactes de la  $m^{i\text{ème}}$  source. La variable  $\Delta\theta_m(\mathbf{E})$  est une fonction de l'erreur de modélisation  $\mathbf{E}$ . D'après l'approche mono-dimensionnel précédente cette relation est un rapport de formes hermitiennes dont les statistiques (biais et variance) sont données dans l'annexe A.

### 3.5.1 Cas où le vecteur $\varphi_y(\eta_{y,m})$ contient deux composantes

Dans ce paragraphe, les performances sont établies lorsque le vecteur  $\eta_{y,m}$  dépend comme ci-dessous du scalaire  $\eta_m$  :

$$\varphi_y(\eta_m) = \begin{bmatrix} 1 \\ \eta_m \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_y(\theta, \eta) = \mathbf{U}_y(\theta) \varphi_y(\eta) \quad (3.141)$$

Les performances théoriques obtenues dans [FBL05] sont basées sur le modèle de l'équation (3.141). En remarquant que la matrice  $2 \times 2$  suivante s'écrit :

$$\mathbf{U}_y(\theta)^\# \mathbf{\Pi}(\mathbf{E}) \mathbf{U}_y(\theta) = \begin{bmatrix} J_{\mathbf{E}}(\mathbf{v}_1(\theta), \mathbf{u}_1(\theta)) & J_{\mathbf{E}}(\mathbf{v}_2(\theta), \mathbf{u}_1(\theta)) \\ J_{\mathbf{E}}(\mathbf{v}_1(\theta), \mathbf{u}_2(\theta)) & J_{\mathbf{E}}(\mathbf{v}_2(\theta), \mathbf{u}_2(\theta)) \end{bmatrix} \quad (3.142)$$

$$\text{avec } J_{\mathbf{E}}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \mathbf{v}^H \mathbf{\Pi}(\mathbf{E}) \mathbf{u}$$

$$\text{et } \mathbf{U}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(\theta) & \mathbf{u}_2(\theta) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}_y(\theta)^H = \mathbf{U}_y(\theta)^\# = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(\theta) & \mathbf{v}_2(\theta) \end{bmatrix}^H,$$

le critère de l'équation (3.140) devient :

$$J_{det}(\theta_m, \mathbf{E}) = J_{\mathbf{E}}(\mathbf{v}_{1m}, \mathbf{u}_{1m}) J_{\mathbf{E}}(\mathbf{v}_{2m}, \mathbf{u}_{2m}) - J_{\mathbf{E}}(\mathbf{v}_{1m}, \mathbf{u}_{2m}) J_{\mathbf{E}}(\mathbf{v}_{2m}, \mathbf{u}_{1m}) \quad (3.143)$$

$$\mathbf{u}_{im} = \mathbf{u}_i(\theta_m) \text{ et } \mathbf{v}_{im} = \mathbf{v}_i(\theta_m)$$

L'expression de l'erreur d'incidence  $\Delta\theta_m(\mathbf{E})$  est déterminée à partir d'un DL au deuxième ordre du critère  $J_{det}(\theta, \mathbf{E})$  au voisinage de  $\theta = \theta_m$  :

$$\Delta\theta_m(\mathbf{E}) = -\frac{\dot{J}_{det}(\theta_m, \mathbf{E})}{\ddot{J}_{det}(\theta_m, \mathbf{E})} \quad (3.144)$$

où  $\dot{J}_{det}(\theta, \mathbf{E})$  et  $\ddot{J}_{det}(\theta, \mathbf{E})$  sont respectivement les dérivées première et seconde du critère  $J_{det}(\theta, \mathbf{E})$ . Les expressions des dérivées première et seconde de  $J_{\mathbf{E}}(\mathbf{v}(\theta), \mathbf{u}(\theta))$  en  $\theta$  sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{J}_{\mathbf{E}}(\mathbf{v}(\theta), \mathbf{u}(\theta)) &= J_{\mathbf{E}}(\dot{\mathbf{v}}(\theta), \mathbf{u}(\theta)) + J_{\mathbf{E}}(\mathbf{v}(\theta), \dot{\mathbf{u}}(\theta)) \\ \ddot{J}_{\mathbf{E}}(\mathbf{v}(\theta), \mathbf{u}(\theta)) &= J_{\mathbf{E}}(\ddot{\mathbf{v}}(\theta), \mathbf{u}(\theta)) + J_{\mathbf{E}}(\mathbf{v}(\theta), \ddot{\mathbf{u}}(\theta)) \\ &\quad + 2 J_{\mathbf{E}}(\dot{\mathbf{v}}(\theta), \dot{\mathbf{u}}(\theta)) \end{aligned} \quad (3.145)$$

où  $\dot{\mathbf{u}}(\theta)$  et  $\dot{\mathbf{v}}(\theta)$  sont les dérivées première de  $\mathbf{u}(\theta)$  et  $\mathbf{v}(\theta)$  et les vecteurs  $\ddot{\mathbf{u}}(\theta)$  et  $\ddot{\mathbf{v}}(\theta)$  sont les dérivées seconde. En notant par :

$$f(\mathbf{M} = [\mathbf{v} \ \mathbf{u} \ \mathbf{y} \ \mathbf{x}]) = J_{\mathbf{E}}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) J_{\mathbf{E}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad (3.146)$$

$$\mathbf{M}_{ijkl}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i(\theta) & \mathbf{u}_j(\theta) & \mathbf{v}_k(\theta) & \mathbf{u}_l(\theta) \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{M}_{ijkl,m} = \mathbf{M}_{ijkl}(\theta_m),$$

les expressions de  $\dot{J}_{det}(\theta_m, \mathbf{E})$  et  $\ddot{J}_{det}(\theta_m, \mathbf{E})$  vérifient d'après (3.143) et (3.145) :

$$\dot{J}_{det}(\theta_m, \mathbf{E}) = \sum_{i=1}^4 f(\mathbf{M}_{1122,m}^i) - f(\mathbf{M}_{1221,m}^i) \quad (3.147)$$

$$\ddot{J}_{det}(\theta_m, \mathbf{E}) = 2 \sum_{i=1}^4 \sum_{j=i+1}^4 f(\mathbf{M}_{1122,m}^{ij}) - f(\mathbf{M}_{1221,m}^{ij}) + \sum_{i=1}^4 f(\mathbf{M}_{1122,m}^{ii}) - f(\mathbf{M}_{1221,m}^{ii}) \quad (3.148)$$

où les matrices  $\mathbf{M}_{ijkl,m}^I$ ,  $\mathbf{M}_{ijkl,m}^{IJ}$  et  $\mathbf{M}_{ijkl,m}^{II}$  vérifient :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ijkl,m}^I(K=I) &= \dot{\mathbf{M}}_{ijkl}(\theta_m)(I) \\ \mathbf{M}_{ijkl,m}^{II}(K=I) &= \ddot{\mathbf{M}}_{ijkl}(\theta_m)(I) \\ \mathbf{M}_{ijkl,m}^{IJ}(K=I) &= \dot{\mathbf{M}}_{ijkl}(\theta_m)(I) \text{ et } \mathbf{M}_{ijkl,m}^{IJ}(K=J) = \dot{\mathbf{M}}_{ijkl}(\theta_m)(J) \\ \mathbf{M}_{ijkl,m}^I(K \neq I) &= \mathbf{M}_{ijkl,m}^{II}(K \neq I) = \mathbf{M}_{ijkl,m}^{IJ}(K \neq I \neq J) = \mathbf{M}_{ijkl,m}(K) \end{aligned}$$

où  $\dot{\mathbf{M}}_{ijkl}(\theta)(I)$  et  $\ddot{\mathbf{M}}_{ijkl}(\theta)(I)$  sont respectivement les dérivées première et seconde de  $\mathbf{M}_{ijkl}(\theta)(I)$  en  $\theta$  et  $\mathbf{A}(I)$  est la  $I^{i\text{ème}}$  colonne de la matrice  $\mathbf{A}$ . D'après les résultats du paragraphe-3.2.2, le DL au second ordre de  $J_{\mathbf{E}}(\mathbf{v}, \mathbf{u})$  vérifie :

$$J_{\mathbf{E}}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \tilde{J}_{\mathbf{E}}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + o(\|\mathbf{E}\|^2) \quad (3.149)$$

$$\tilde{J}_{\mathbf{E}}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{v}^H \mathbf{\Pi}^{(2)}(\mathbf{E}) \mathbf{u} = \boldsymbol{\epsilon}^H \mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \boldsymbol{\epsilon}$$

où  $\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} 1 \text{ vec}(\mathbf{E})^T \text{ vec}(\mathbf{E})^H \end{bmatrix}^T$  et les fonctions  $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  et  $\mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  sont définies respectivement dans (3.58) et (3.59). Sachant que :

$$\tilde{J}_{\mathbf{E}}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \tilde{J}_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \boldsymbol{\epsilon}^{\otimes 2H} (\mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \otimes \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \boldsymbol{\epsilon}^{\otimes 2}$$

le **DL** au second ordre de  $f(\mathbf{M})$  au voisinage de  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  vérifie :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{M}) &= \tilde{f}(\mathbf{M}) + o(\|\mathbf{E}\|^2) \quad \text{avec} \quad \tilde{f}(\mathbf{M}) = \varepsilon^H \mathbf{Q}(\mathbf{M}) \varepsilon \\ \mathbf{Q}(\mathbf{M}) &= \mathbf{T}_1^H \mathbf{Q}_{-2} \mathbf{T}_1 + tr(\mathbf{T}_2^T \mathbf{Q}_{-2}^T \mathbf{1}) + tr(\mathbf{T}_2^H \mathbf{Q}_{-2} \mathbf{1}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{Q}_{-2} = \mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \otimes \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (3.150)$$

où  $\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \end{bmatrix}$ ,  $\varepsilon^H tr(\mathbf{w}) \varepsilon = \mathbf{w}^T \mathbf{e}_T^{\otimes 2}$  avec  $\mathbf{e}_T = [vec(\mathbf{E})^T \quad vec(\mathbf{E})^H]^T$  et les matrices de permutation  $\mathbf{T}_1$  et  $\mathbf{T}_2$  vérifient :

$$\varepsilon^{\otimes 2} = \mathbf{T}_1 \varepsilon + \mathbf{T}_2 \mathbf{e}_T^{\otimes 2} \quad (3.151)$$

En remplaçant la fonction  $\tilde{f}(\mathbf{M})$  par  $\varepsilon^H \mathbf{Q}(\mathbf{M}) \varepsilon$  dans les expressions (3.147)(3.148), les dérivées de  $J_{det}(\theta_m, \mathbf{E})$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} \dot{J}_{det}(\theta_m, \mathbf{E}) &= \varepsilon^H \dot{\mathbf{Q}}_m \varepsilon + o(\|\mathbf{E}\|^2) \quad \text{et} \quad \ddot{J}_{det}(\theta_m, \mathbf{E}) = \varepsilon^H \ddot{\mathbf{Q}}_m \varepsilon + o(\|\mathbf{E}\|^2) \\ \dot{\mathbf{Q}}_m &= \sum_{i=1}^4 \mathbf{Q}(\mathbf{M}_{1122,m}^i) - \mathbf{Q}(\mathbf{M}_{1221,m}^i) \\ \ddot{\mathbf{Q}}_m &= 2 \sum_{i=1}^4 \sum_{j=i+1}^4 \mathbf{Q}(\mathbf{M}_{1122,m}^{ij}) - \mathbf{Q}(\mathbf{M}_{1221,m}^{ij}) + \sum_{i=1}^4 \mathbf{Q}(\mathbf{M}_{1122,m}^{ii}) - \mathbf{Q}(\mathbf{M}_{1221,m}^{ii}) \end{aligned} \quad (3.152)$$

et l'erreur de géométrie  $\Delta\theta_m(\mathbf{E})$  de l'expression (3.144) devient :

$$\Delta\theta_m(\mathbf{E}) \approx -\frac{\varepsilon^H \dot{\mathbf{Q}}_m \varepsilon}{\varepsilon^H \ddot{\mathbf{Q}}_m \varepsilon} \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} 1 \\ vec(\mathbf{E}) \\ vec(\mathbf{E})^* \end{bmatrix} \quad (3.153)$$

où les matrices  $\dot{\mathbf{Q}}_m$  et  $\ddot{\mathbf{Q}}_m$  sont construites à partir des équations (3.152), la fonction  $\mathbf{Q}(\mathbf{M})$  à partir de (3.150)(3.149)(3.146) et les matrices  $\mathbf{M}_{ijkl,m}^I, \mathbf{M}_{ijkl,m}^{II}$  et  $\mathbf{M}_{ijkl,m}^{IJ}$  dépendent des vecteurs  $\mathbf{u}_{1m}, \mathbf{u}_{2m}, \mathbf{v}_{1m}, \mathbf{v}_{2m}$  ainsi que de leurs dérivées.

Le calcul du biais  $E[\Delta\theta_m(\mathbf{E})]$  et de l'EQM  $(RMS_m)^2 = E[\Delta\theta_m(\mathbf{E})^2]$  de l'algorithme par Auto-Calibration utilise l'expression (A.7) de l'Annexe-A donnant une expression analytique des moments statistiques d'un rapport de formes hermitiennes.

### 3.5.2 Cas où le vecteur $\varphi_y(\eta_{y,m})$ est de dimension quelconque

Dans ce paragraphe le vecteur  $\varphi_y(\eta_m)$  est de dimension  $P \times 1$ . Le  $ij^{ième}$  élément de la matrice  $\mathbf{U}_y(\theta)^\# \mathbf{\Pi}(\mathbf{E}) \mathbf{U}_y(\theta)$  de dimension  $P \times P$  vérifie :

$$\begin{aligned} \left[ \mathbf{U}_y(\theta)^\# \mathbf{\Pi}(\mathbf{E}) \mathbf{U}_y(\theta) \right]_{ij} &= J_{\mathbf{E}}(\mathbf{v}_i(\theta), \mathbf{u}_j(\theta)) \\ \text{avec} \quad \mathbf{U}_y(\theta) &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(\theta) & \cdots & \mathbf{u}_P(\theta) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}_y(\theta)^H = \mathbf{U}_y(\theta)^\# = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(\theta) & \cdots & \mathbf{v}_P(\theta) \end{bmatrix}^H, \end{aligned}$$

le critère  $J_{det}(\theta_m, \mathbf{E}) = \det(\mathbf{V}_y(\theta_m)^H \mathbf{\Pi}(\mathbf{E}) \mathbf{U}_y(\theta_m))$  de l'équation (3.140) devient :

$$\begin{aligned} J_{det}(\theta_m, \mathbf{E}) &= \sum_{i_1=1}^P \cdots \sum_{i_{P-1} \neq \{i_1, \dots, i_{P-2}\}=1}^P (-1)^{\eta(i_1, \dots, i_{P-1})} \prod_{p=1}^P J_{\mathbf{E}}(\mathbf{v}_{i_p m}, \mathbf{u}_{p m}) \\ \eta(i_1, \dots, i_{P-1}) &= \left( 1 + \sum_{j=1}^{P-1} i'_j \right) \end{aligned} \quad (3.154)$$

où  $i'_j$  est le  $(i'_j)^{i\grave{e}me}$  indice  $i_j \in \{1, \dots, P\}$  qui est différent des indices de l'ensemble  $\{i_1, \dots, i_{j-1}\}$ ,  $\mathbf{u}_{im} = \mathbf{u}_i(\theta_m)$  et  $\mathbf{v}_{im} = \mathbf{v}_i(\theta_m)$ . En notant par :

$$f_P(\mathbf{M} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{u}_1 \ \dots \ \mathbf{v}_P \ \mathbf{u}_P]) = \prod_{p=1}^P J_{\mathbf{E}}(\mathbf{v}_p, \mathbf{u}_p) \quad (3.155)$$

$$\mathbf{M}_{i_1, \dots, i_{2P}}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{i_1}(\theta) & \mathbf{u}_{i_2}(\theta) & \dots & \mathbf{v}_{i_{2P-1}}(\theta) & \mathbf{u}_{i_{2P}}(\theta) \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{M}_{i_1, \dots, i_{2P}, m} = \mathbf{M}_{i_1, \dots, i_{2P}}(\theta_m),$$

les expressions de  $\dot{J}_{det}(\theta_m, \mathbf{E})$  et  $\ddot{J}_{det}(\theta_m, \mathbf{E})$  vérifient d'après (3.154) :

$$\dot{J}_{det}(\theta_m, \mathbf{E}) = \sum_{k=1}^P \sum_{i_1=1}^P \dots \sum_{i_{P-1} \neq \{i_1, \dots, i_{P-2}\}=1}^P (-1)^{\eta(i_1, \dots, i_{P-1})} f_P(\mathbf{M}_{i_1, 1, \dots, i_P, P, m}^k) \quad (3.156)$$

$$\begin{aligned} \ddot{J}_{det}(\theta_m, \mathbf{E}) &= 2 \sum_{k=1}^P \sum_{l=k+1}^P \sum_{i_1=1}^P \dots \sum_{i_{P-1} \neq \{i_1, \dots, i_{P-2}\}=1}^P (-1)^{\eta(i_1, \dots, i_{P-1})} f_P(\mathbf{M}_{i_1, 1, \dots, i_P, P, m}^{kl}) \quad (3.157) \\ &+ \sum_{k=1}^P \sum_{i_1=1}^P \dots \sum_{i_{P-1} \neq \{i_1, \dots, i_{P-2}\}=1}^P (-1)^{\eta(i_1, \dots, i_{P-1})} f_P(\mathbf{M}_{i_1, 1, \dots, i_P, P, m}^{kk}) \end{aligned}$$

où les matrices  $\mathbf{M}_{i_1, \dots, i_{2P}, m}^I$ ,  $\mathbf{M}_{i_1, \dots, i_{2P}, m}^{IJ}$  et  $\mathbf{M}_{i_1, \dots, i_{2P}, m}^{II}$  vérifient :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{i_1, \dots, i_{2P}, m}^I(K=I) &= \dot{\mathbf{M}}_{i_1, \dots, i_{2P}}(\theta_m)(I) \\ \mathbf{M}_{i_1, \dots, i_{2P}, m}^{II}(K=I) &= \ddot{\mathbf{M}}_{i_1, \dots, i_{2P}}(\theta_m)(I) \\ \mathbf{M}_{i_1, \dots, i_{2P}, m}^{IJ}(K=I) &= \dot{\mathbf{M}}_{i_1, \dots, i_{2P}}(\theta_m)(I) \text{ et } \mathbf{M}_{i_1, \dots, i_{2P}, m}^{IJ}(K=J) = \dot{\mathbf{M}}_{i_1, \dots, i_{2P}}(\theta_m)(J) \\ \mathbf{M}_{i_1, \dots, i_{2P}, m}^I(K \neq I) &= \mathbf{M}_{i_1, \dots, i_{2P}, m}^{II}(K \neq I) = \mathbf{M}_{i_1, \dots, i_{2P}, m}^{IJ}(K \neq I \neq J) = \mathbf{M}_{i_1, \dots, i_{2P}, m}(K) \end{aligned}$$

où  $\dot{\mathbf{M}}_{i_1, \dots, i_{2P}}(\theta)(I)$  et  $\ddot{\mathbf{M}}_{i_1, \dots, i_{2P}}(\theta)(I)$  sont les dérivées première et seconde de  $\mathbf{M}_{i_1, \dots, i_{2P}}(\theta)(I)$  en  $\theta$  et  $\mathbf{A}(I)$  est la  $I^{i\grave{e}me}$  colonne de la matrice  $\mathbf{A}$ . D'après le paragraphe-3.2.2, le **DL** au second ordre de  $J_{\mathbf{E}}(\mathbf{v}, \mathbf{u})$  vérifie (3.149) et ainsi :

$$\prod_{p=1}^P J_{\mathbf{E}}(\mathbf{v}_p, \mathbf{u}_p) = (\boldsymbol{\varepsilon}^{\otimes P})^H (\mathbf{Q}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) \otimes \dots \otimes \mathbf{Q}(\mathbf{u}_P, \mathbf{v}_P)) \boldsymbol{\varepsilon}^{\otimes P}$$

et le **DL** au second ordre de  $f_P(\mathbf{M})$  au voisinage de  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  vérifie :

$$f_P(\mathbf{M}) = \tilde{f}_P(\mathbf{M}) + o(\|\mathbf{E}\|^2) \text{ avec } \tilde{f}_P(\mathbf{M}) = \boldsymbol{\varepsilon}^H \mathbf{Q}_P(\mathbf{M}) \boldsymbol{\varepsilon}$$

En remplaçant la fonction  $\tilde{f}_P(\mathbf{M})$  par  $\boldsymbol{\varepsilon}^H \mathbf{Q}_P(\mathbf{M}) \boldsymbol{\varepsilon}$  dans les expressions (3.156)(3.157), les dérivées de  $J_{det}(\theta_m, \mathbf{E})$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} \dot{J}_{det}(\theta_m, \mathbf{E}) &= \boldsymbol{\varepsilon}^H \dot{\mathbf{Q}}_m \boldsymbol{\varepsilon} + o(\|\mathbf{E}\|^2) \text{ et } \ddot{J}_{det}(\theta_m, \mathbf{E}) = \boldsymbol{\varepsilon}^H \ddot{\mathbf{Q}}_m \boldsymbol{\varepsilon} + o(\|\mathbf{E}\|^2) \quad (3.158) \\ \dot{\mathbf{Q}}_m &= \sum_{k=1}^P \sum_{i_1=1}^P \dots \sum_{i_{P-1} \neq \{i_1, \dots, i_{P-2}\}=1}^P (-1)^{\eta(i_1, \dots, i_{P-1})} \mathbf{Q}_P(\mathbf{M}_{i_1, 1, \dots, i_P, P, m}^k) \\ \ddot{\mathbf{Q}}_m &= 2 \sum_{k=1}^P \sum_{l=k+1}^P \sum_{i_1=1}^P \dots \sum_{i_{P-1} \neq \{i_1, \dots, i_{P-2}\}=1}^P (-1)^{\eta(i_1, \dots, i_{P-1})} \mathbf{Q}_P(\mathbf{M}_{i_1, 1, \dots, i_P, P, m}^{kl}) \\ &+ \sum_{k=1}^P \sum_{i_1=1}^P \dots \sum_{i_{P-1} \neq \{i_1, \dots, i_{P-2}\}=1}^P (-1)^{\eta(i_1, \dots, i_{P-1})} \mathbf{Q}_P(\mathbf{M}_{i_1, 1, \dots, i_P, P, m}^{kk}) \end{aligned}$$

et l'erreur de géométrie  $\Delta\theta_m(\mathbf{E})$  de l'expression (3.144) devient :

$$\Delta\theta_m(\mathbf{E}) \approx -\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^H \dot{\mathbf{Q}}_m \boldsymbol{\varepsilon}{\boldsymbol{\varepsilon}^H \ddot{\mathbf{Q}}_m \boldsymbol{\varepsilon}} \text{ avec } \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 \\ \text{vec}(\mathbf{E}) \\ \text{vec}(\mathbf{E})^* \end{bmatrix} \quad (3.159)$$

et l'erreur de goniométrie de l'algorithme par Auto-Calibration s'écrit sous un rapport de formes hermitienne dont le biais et l'EQM se déduisent de l'expression (A.7) de l'Annexe-A.

### 3.5.3 Simulations

Les simulations de l'algorithme d'Auto-Calibration concernent le cas du couplage mutuel [HW90]. L'objectif est d'estimer conjointement les angles d'incidences avec les coefficients de couplage [FL93]. Dans l'exemple de ci-dessous, la matrice de couplage  $\mathbf{Z}$  dépend d'un seul coefficient et le vecteur directeur  $\mathbf{a}(\theta, \eta)$  vérifie :

$$\mathbf{a}(\theta, \eta) = \mathbf{Z}(\eta) \mathbf{a}(\theta) \text{ avec } \mathbf{a}(\theta) = \begin{bmatrix} a_1(\theta) \\ \vdots \\ a_N(\theta) \end{bmatrix}$$

où  $\mathbf{a}(\theta)$  est la réponse du réseau de capteurs sans couplage. Comme le réseau est circulaire de rayon  $R$  et que  $\eta$  est le coefficient de couplage entre deux capteurs voisins, la matrice de couplage s'écrit :

$$\mathbf{Z}(\eta) = \begin{bmatrix} 1 & \eta & \mathbf{0}^T & \eta \\ \eta & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \eta \\ \eta & \mathbf{0}^T & \eta & 1 \end{bmatrix} \text{ et } a_n(\theta) = \exp\left(j2\pi \frac{R}{\lambda_0} \cos\left(\theta - 2\pi \left(\frac{n-1}{N}\right)\right)\right)$$

Dans ces conditions, le vecteur directeur  $\mathbf{a}(\theta, \eta)$  de (2.52) et le vecteur  $\mathbf{u}_i(\theta)$  de (3.142) s'écrivent :

$$\mathbf{a}(\theta, \eta) = \mathbf{U}(\theta) \begin{bmatrix} 1 \\ \eta \end{bmatrix} \text{ avec } \mathbf{U}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(\theta) & \mathbf{u}_2(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_1(\theta) = \mathbf{a}(\theta) \text{ et } \mathbf{u}_2(\theta) = \begin{bmatrix} a_2(\theta) + a_N(\theta) \\ a_1(\theta) + a_3(\theta) \\ \vdots \\ a_{N-1}(\theta) + a_1(\theta) \end{bmatrix}$$

Les figures 3.21 et 3.22 comparent les performances théoriques aux simulations moyennées sur 1000 réalisations. Le réseau circulaire comporte  $N=5$  capteurs avec un rayon  $R=\lambda_0$ . La méthode doit estimer les angles d'incidences de  $M=2$  sources de directions  $\theta_1=100$  et  $\theta_2=117$  degrés. Les erreurs de modèle sont gaussiennes et circulaires en vérifiant  $E[\text{vec}(\mathbf{E}) \text{vec}(\mathbf{E})^H] = \sigma_e^2 \mathbf{I}_{NM}$  avec  $\sigma_e=0.122$ . Les courbes sont fonction du niveau du coefficient de couplage  $\eta$ . Les figures montrent une bonne adéquation entre les simulations et les résultats théoriques. Les figures montrent d'autre part que les performances s'améliorent lorsque le niveau  $\eta$  du couplage augmente. En effet lorsque  $\eta$  est faible, l'algorithme tente de modéliser le vecteur directeur exacte  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_m, \eta) \approx \mathbf{u}_1(\theta) + \mathbf{e}_m$  par  $\mathbf{u}_1(\theta) + \eta \mathbf{u}_2(\theta)$  et commet une erreur car les vecteurs  $\mathbf{u}_2(\theta)$  et  $\mathbf{e}_m$  sont différents. Lorsque le coefficient  $\eta$  est plus grand, les angles sont mieux estimés car le vecteur  $\mathbf{e}_m$  est négligeable devant  $\eta \mathbf{u}_2(\theta)$  et le vecteur  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_m, \eta)$  est alors proche du modèle  $\mathbf{a}(\theta_m, \eta) = \mathbf{u}_1(\theta) + \eta \mathbf{u}_2(\theta)$ .

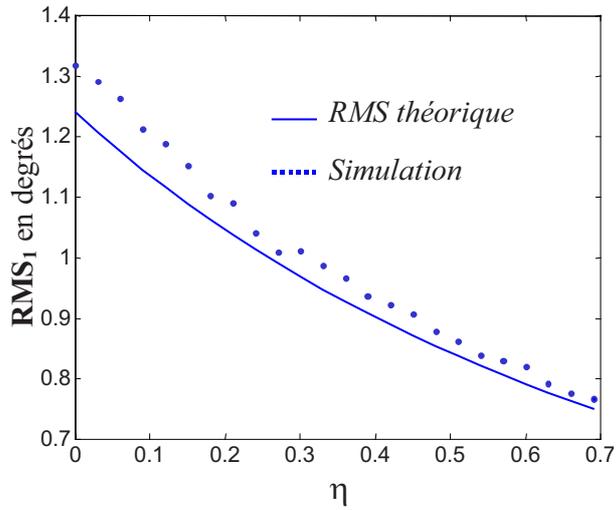


FIG. 3.21 – Racine de l'EQM de la source d'incidence  $\theta_1$  en fonction du coefficient de couplage  $\eta$ . Le réseau est circulaire avec  $R=\lambda_0$  et  $N=5$  capteurs.

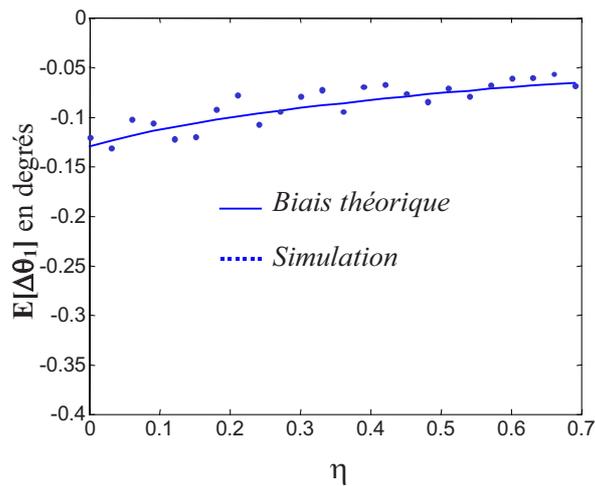


FIG. 3.22 – Biais de la source d'incidence  $\theta_1$  en fonction du coefficient de couplage  $\eta$ . Le réseau est circulaire avec  $R=\lambda_0$  et  $N=5$  capteurs.

## Chapitre 4

# Conclusion et perspectives

Ce thèse est axé sur les problèmes rencontrés en "radio-goniométrie" en présence d'erreurs de modèles.

Dans une première partie il a été modélisé avec un formalisme unique la réponse du réseau de capteurs à une source, en présence de paramètres de nuisance séparables qui peuvent être le couplage, les erreurs d'amplitude et/ou de phase, la distance dans un front d'onde courbe ou les paramètres de modélisation des sources large bande, diffuses, en diversité de polarisation... Cette écriture de la réponse du réseau de capteurs est soit intrinsèque comme dans le cas du couplage soit le fruit d'un développement limité. Ce formalisme unique a permis de développer un algorithme qualifié "d'Auto-Calibration" basé sur l'algorithme MUSIC et qui estime conjointement les incidences et les autres paramètres du modèle. Dans un souci opérationnel de diminution de la complexité du calcul, la structure particulière du vecteur directeur a été exploitée afin de réduire le critère multi-paramètres de MUSIC en un critère dépendant uniquement de l'incidence. Afin d'augmenter les possibilités de cet algorithme, nous l'avons étendu à des transformées des signaux capteurs permettant entre autre d'identifier un nombre de paramètres supérieur au nombre de capteurs.

Dans une deuxième partie, il a été établi les performances théoriques d'un certain nombre de méthode de goniométrie en présence d'erreurs de modèle et en conditions asymptotiques (i.e. pour un nombre infini d'observations). En effet, la quantification de la dégradation des performances en présence d'erreurs de modèle permet de réaliser rapidement un compromis entre les performances attendues et la puissance de calcul (liée au nombre de paramètres de nuisance retenus) autorisée. Ces performances ont été établies en terme de biais, d'EQM, de probabilité de résolution et de biais et variance conditionnels. Les calculs correspondants ont été menés principalement pour les algorithmes de type MUSIC et du Maximum de Vraisemblance. Nous avons montré que les erreurs de goniométrie s'approchent selon une forme hermitienne pour le MV et un rapport de formes hermitiennes pour MUSIC. Ceci a induit l'établissement des statistiques de produit et rapport de formes hermitiennes. Nous avons montré que lorsque les erreurs de modèle suivent des lois gaussiennes, le biais et la variance s'écrivent alors comme un rapport de deux polynômes de la variable  $\sigma_e^2$  qui correspond au niveau des erreurs de modèle. Une application potentielle de ce résultat est, pour une performance donnée, la détermination directe du niveau  $\sigma_e^2$  des erreurs de modèle admissibles. La probabilité de résolution a été établie pour trois définitions différentes. Ceci nous a permis d'établir le biais et la variance conditionnellement à des sources résolues par rapport à la définition retenue.

Au sein du réseau d'excellence NEWCOM, ce travail a permis d'initier plusieurs collaborations universitaires internationales avec les universités de Chalmers (Suède), Ilmenau (Allemagne) et Aalborg (Danemark). Les retombées industrielles de ces travaux pour THALES sont une spécification et définition plus rapides des systèmes de goniométrie et une augmentation du domaine de fonctionnement d'une localisation par triangulation.

En guise de perspective à ces travaux, il serait intéressant de développer des méthodes automatiques de sélection des bons paramètres de nuisance. Ceci pourra être effectué en établissant les seuils théoriques sur le critère de goniométrie permettant de sélectionner les extrema donnant des directions d'arrivée correctes. Ces seuils seront extraits des statistiques des extrema des critères qui dépendent eux-mêmes des performances théoriques attendues.

Il sera aussi intéressant de compléter ce travail de thèse en établissant les performances en présence à la fois d'erreurs de modélisation du réseau de capteurs ainsi que d'erreurs liées au nombre fini d'observations.

## Chapitre 5

## Annexes



# Annexe A

## Moments d'un produit ou rapport de formes hermitiennes

L'évaluation des performances des méthodes de goniométrie nous a conduit à évaluer les statistiques de variables aléatoires  $x$  fonction de formes hermitiennes tel que :

$$x = \frac{\prod_{i=1}^I (\boldsymbol{\epsilon}^H \mathbf{A}_i \boldsymbol{\epsilon})}{\prod_{j=1}^J (\boldsymbol{\epsilon}^H \mathbf{B}_j \boldsymbol{\epsilon})}$$

où les matrices  $\mathbf{A}_i$  et  $\mathbf{B}_j$  sont hermitiennes, et  $\boldsymbol{\epsilon} = [1 \ \mathbf{e}^T]^T$  est un vecteur aléatoire complexe où  $\|\mathbf{e}\|$  est petit devant l'unité avec un minimum d'hypothèses sur sa densité de probabilité. L'objectif est de déterminer les moments de  $x$  en fonction des moments de  $\boldsymbol{\epsilon}$ . Le vecteur aléatoire  $\mathbf{e}$  dépend des erreurs de modélisation du système de goniométrie.

### A.1 Résultats préliminaires

*Lemma 1* : Si  $\mathbf{u}$  est un vecteur et  $\mathbf{Q}$  une matrice, alors

$$(\mathbf{u}^H \mathbf{Q} \mathbf{u})^n = \mathbf{u}^{\otimes n H} \mathbf{Q}^{\otimes n} \mathbf{u}^{\otimes n} \quad (\text{A.1})$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{\otimes n} &= (\underbrace{\mathbf{u} \otimes \dots \otimes \mathbf{u}}_{n \text{ fois}}) \quad \text{et} \quad \mathbf{Q}^{\otimes n} = (\underbrace{\mathbf{Q} \otimes \dots \otimes \mathbf{Q}}_{n \text{ fois}}) \\ \mathbf{u}^{\otimes 0} &= 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{Q}^{\otimes 0} = 1 \end{aligned}$$

**Démonstration** : Voir l'Annexe-A.5 ■

*Lemma 2* : Si  $\mathbf{u}$  est un vecteur et les  $\mathbf{Q}_i$  des matrices, alors

$$\prod_{i=1}^n (\mathbf{u}^H \mathbf{Q}_i \mathbf{u}) = \mathbf{u}^{\otimes n H} (\mathbf{Q}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{Q}_n) \mathbf{u}^{\otimes n} \quad (\text{A.2})$$

**Démonstration** : Voir l'Annexe-A.5 ■

Lemma 3 : La forme hermitienne  $\varepsilon^H \mathbf{Q}_k \varepsilon$  où  $\varepsilon = [\mathbf{x}^T \mathbf{e}^H]^T$ ,  $\mathbf{x} = [1 \mathbf{e}^T]^T$  peut s'écrire

$$\varepsilon^H \mathbf{Q}_k \varepsilon = \mathbf{x}^H \mathbf{Q}_k^0 \mathbf{x} + \delta \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_k^R \delta \mathbf{x} + \delta \mathbf{x}^H \mathbf{Q}_k^I \delta \mathbf{x}^* \quad (\text{A.3})$$

où

$$\mathbf{Q}_k^0 = \begin{bmatrix} q_{11} & \mathbf{q}_{12} + \mathbf{q}_{31}^T \\ \mathbf{q}_{21} + \mathbf{q}_{13}^T & \mathbf{Q}_{22} + \mathbf{Q}_{33}^* \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{1}$$

et

$$\mathbf{Q}_k^R = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{32} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{Q}_k^I = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{23} \end{bmatrix}$$

en notant que

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & \mathbf{q}_{12} & \mathbf{q}_{13} \\ \mathbf{q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} & \mathbf{Q}_{23} \\ \mathbf{q}_{31} & \mathbf{Q}_{32} & \mathbf{Q}_{33} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

## A.2 Moments d'un rapport de formes hermitiennes

Des estimations numériques des moments de rapport de formes hermitiennes sont disponibles dans la littérature [Mag02], mais conduisent à des expressions analytiques difficilement exploitables. La connaissance d'une expression exacte de ces moments contourne ce problème. A notre connaissance, seuls quelques auteurs ont essayé d'en établir une expression. Dans le cas particulier de formes quadratiques définies positives avec un vecteur aléatoire de loi normale, ses moments ont été calculés dans [Mag86] et la distribution associée dans [For01]. L'objectif de ce paragraphe est d'établir une expression exacte des moments du rapport suivant :

$$\rho = (\mathbf{u}^H \mathbf{A} \mathbf{u}) / (\mathbf{u}^H \mathbf{B} \mathbf{u}) \quad (\text{A.4})$$

où les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont hermitiennes avec  $\mathbf{B}$  définie positive, et  $\mathbf{u} = [1 \mathbf{e}^T]^T$  est un vecteur aléatoire complexe où  $\|\mathbf{e}\|$  est petit devant 1 avec un minimum d'hypothèses sur sa densité de probabilité.

### Moment du 1<sup>ier</sup> ordre

Soient  $\mathbf{Q}_1$  et  $\mathbf{Q}_2$  deux matrices hermitiennes et  $\mathbf{u}$  un vecteur aléatoire non centré dont les moments sont bornés jusqu'à un ordre infini, on introduit la condition  $H_1$  comme

$$H_1 : 0 < \mathbf{u}^H \mathbf{Q}_2 \mathbf{u} < 2 E [\mathbf{u}^H \mathbf{Q}_2 \mathbf{u}]$$

et remarquant que  $\mathbf{u}$  est non centré,  $H_1$  est le plus vraisemblable lorsque la matrice de covariance de  $\mathbf{u} - \mathbf{1}$  est "petite" devant 1.

Theorem 1 : Sous la condition  $H_1$ , la moyenne du rapport hermitien est donné par le développement en série suivant :

$$E \left[ \frac{\mathbf{u}^H \mathbf{Q}_1 \mathbf{u}}{\mathbf{u}^H \mathbf{Q}_2 \mathbf{u}} \middle| H_1 \right] = \frac{\text{trace}(\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_u)}{\text{trace}(\mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_u)} \left( 1 + \gamma(\mathbf{R}_u^{(2)}, \mathbf{R}_u^{(4)}, \dots) \right) \quad (\text{A.5})$$

et

$$\gamma(\mathbf{R}_u^{(2)}, \mathbf{R}_u^{(4)}, \dots) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^{2n-i-1} C_{n-1}^i}{\text{trace}(\mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_u)^i} \left( \frac{\delta_i(\mathbf{Q}_2^{\otimes(i+1)})}{\text{trace}(\mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_u)} - \frac{\delta_i(\mathbf{Q}_1 \otimes \mathbf{Q}_2^{\otimes i})}{\text{trace}(\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_u)} \right) \quad (\text{A.6})$$

$$\delta_i(\mathbf{Q}) = \text{trace}(\mathbf{Q} \mathbf{R}_u^{(2i+2)})$$

avec

$$\mathbf{R}_u^{(2i)} = E [\mathbf{u}^{\otimes i} \mathbf{u}^{\otimes iH}], \quad \mathbf{R}_u = \mathbf{R}_u^{(2)} \quad \text{et} \quad C_n^i = \frac{n!}{i! (n-i)!}$$

et  $\text{trace}(\mathbf{Q})$  est la trace de la matrice  $\mathbf{Q}$ .

**Démonstration** : Voir l'Annexe-A.5 ■

### Moments aux ordres supérieurs

*Theorem 2* : En supposant que le moment d'ordre  $(2n)$  de  $\mathbf{x}$  est borné, le moment d'ordre  $n$  du rapport  $\rho$  défini dans (A.4) est donné par

$$E [\rho^n | H_1] = E \left[ \left( \frac{\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^H \mathbf{B} \mathbf{x}} \right)^n \middle| H_1 \right] = \frac{\text{trace}(\mathbf{A}^{\otimes n} \mathbf{R}_x^{(2n)})}{\text{trace}(\mathbf{B}^{\otimes n} \mathbf{R}_x^{(2n)})} \left( 1 + \gamma(\mathbf{R}_x^{(2n)}, \mathbf{R}_x^{(4n)}, \dots) \right) \quad (\text{A.7})$$

**Démonstration** : En appliquant (A.1),  $E [\rho^n]$  devient

$$E [\rho^n | H_1] = E \left[ \frac{\mathbf{x}^{\otimes nH} \mathbf{A}^{\otimes n} \mathbf{x}^{\otimes n}}{\mathbf{x}^{\otimes nH} \mathbf{B}^{\otimes n} \mathbf{x}^{\otimes n}} \middle| H_1 \right] = E \left[ \frac{\mathbf{u}^H \mathbf{Q}_1 \mathbf{u}}{\mathbf{u}^H \mathbf{Q}_2 \mathbf{u}} \middle| H_1 \right]$$

où  $\mathbf{u} = \mathbf{x}^{\otimes n}$ ,  $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{A}^{\otimes n}$  et  $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{B}^{\otimes n}$ . En remarquant que  $\mathbf{R}_u^{(i)} = \mathbf{R}_x^{(in)}$ , l'équation (A.7) est démontrée ■

## A.3 Moments d'un produit de formes hermitiennes

L'objectif de ce paragraphe est de calculer le moment

$$F_Q(\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_Q, \boldsymbol{\varepsilon}) = E \left[ \prod_{q=1}^Q \boldsymbol{\varepsilon}^H \mathbf{Q}_q \boldsymbol{\varepsilon} \right] \quad (\text{A.8})$$

où les matrices  $\mathbf{Q}_q$  sont des matrices hermitiennes et où  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est un vecteur aléatoire.

### Cas général

*Theorem 3* : En supposant que le moment d'ordre  $(2Q)$  de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est borné, le moment d'ordre 1 du produit  $\prod_{q=1}^Q \boldsymbol{\varepsilon}^H \mathbf{Q}_q \boldsymbol{\varepsilon}$  est donné par

$$F_Q(\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_Q, \boldsymbol{\varepsilon}) = \text{trace} \left( (\mathbf{Q}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{Q}_Q) \mathbf{R}_\boldsymbol{\varepsilon}^{(2Q)} \right) \quad (\text{A.9})$$

où  $\mathbf{R}_\boldsymbol{\varepsilon}^{(2Q)} = E [\boldsymbol{\varepsilon}^{\otimes Q} \boldsymbol{\varepsilon}^{\otimes QH}]$ .

**Démonstration** : En appliquant (A.2), l'expression de  $F_Q(\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_Q, \boldsymbol{\varepsilon})$  devient

$$\begin{aligned} E \left[ \prod_{q=1}^Q \boldsymbol{\varepsilon}^H \mathbf{Q}_q \boldsymbol{\varepsilon} \right] &= E [\boldsymbol{\varepsilon}^{\otimes QH} (\mathbf{Q}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{Q}_Q) \boldsymbol{\varepsilon}^{\otimes Q}] \\ &= E [\text{trace}((\mathbf{Q}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{Q}_Q) \boldsymbol{\varepsilon}^{\otimes Q} \boldsymbol{\varepsilon}^{\otimes QH})] \\ &= \text{trace}((\mathbf{Q}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{Q}_Q) E [\boldsymbol{\varepsilon}^{\otimes Q} \boldsymbol{\varepsilon}^{\otimes QH}]) \end{aligned}$$

et l'équation (A.9) est démontrée ■

## Cas gaussien

Dans ce paragraphe le vecteur aléatoire  $\varepsilon$  de l'équation (A.8) vérifie  $\varepsilon = [\mathbf{x}^T \mathbf{e}^H]^T$  avec  $\mathbf{x} = [1 \mathbf{e}^T]^T$ . Le vecteur  $\mathbf{e}$  est un vecteur aléatoire gaussien et circulaire tel que

$$\mathbf{R}_e = E[\mathbf{e} \mathbf{e}^H], \quad E[\mathbf{e}] = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad E[\mathbf{e} \mathbf{e}^T] = \mathbf{0} \quad (\text{A.10})$$

où  $\mathbf{0}$  est le vecteur nul. Selon (A.10) on en déduit que

$$E[\mathbf{x}] = \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_x = E[(\mathbf{x} - \mathbf{1})(\mathbf{x} - \mathbf{1})^H] \quad (\text{A.11})$$

où  $\mathbf{R}_x$  est la matrice de covariance de  $\mathbf{x}$ . On note dans ce cas :

$$\begin{aligned} F_Q(\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_Q, \varepsilon) &= F_Q^G(\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_Q, \mathbf{R}_e, \mathbf{C}_e) \\ \mathbf{R}_e &= E[\varepsilon \varepsilon^H] \quad \text{et} \quad \mathbf{C}_e = E[\varepsilon \varepsilon^T] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

## Cas du produit de $Q = 2$ formes hermitiennes

Dans le cas particulier où  $Q = 2$ , l'expression (A.12) devient

$$\begin{aligned} F_Q^G(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{R}_e, \mathbf{C}_e) &= \text{trace}(\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_e) \text{trace}(\mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_e) \\ &\quad + \text{trace}(\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_e \mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_e) \\ &\quad + \text{trace}((\mathbf{Q}_1)^T \mathbf{C}_e^* \mathbf{Q}_2 \mathbf{C}_e) - 2 \mathbf{Q}_1(1, 1) \mathbf{Q}_2(1, 1) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

où  $\mathbf{Q}_q(1, 1)$  est l'élément de la première ligne et première colonne de  $\mathbf{Q}_q$ .

**Démonstration :** Pour calculer  $F_Q^G(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{R}_e, \mathbf{C}_e) = E[(\varepsilon^H \mathbf{Q}_1 \varepsilon)(\varepsilon^H \mathbf{Q}_2 \varepsilon)] = E[(\varepsilon^H \mathbf{Q}_1 \varepsilon)(\varepsilon^T (\mathbf{Q}_2)^T \varepsilon^*)]$ , il est nécessaire d'utiliser la formule inverse de Leonov et Shiryaev [Bri81] donnant les moments en fonction des cumulants. Cette formule se simplifie de la façon suivante sous l'hypothèse que  $\varepsilon$  est gaussien car les cumulants d'ordre supérieurs à deux sont nuls :

$$\begin{aligned} F_2(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) &= \text{cum}(\varepsilon^H, \mathbf{Q}_1 \varepsilon) \text{cum}(\varepsilon^H, \mathbf{Q}_2 \varepsilon) + \text{trace}(\mathbf{Q}_1 \text{cum}(\varepsilon, \varepsilon^H) \mathbf{Q}_2 \text{cum}(\varepsilon, \varepsilon^H)) \\ &\quad + \text{trace}(\mathbf{Q}_1 \text{cum}(\varepsilon, \varepsilon^T) (\mathbf{Q}_2)^T \text{cum}(\varepsilon, \varepsilon^T)^*) + \left( E[\varepsilon^H \mathbf{Q}_1 E[\varepsilon]] \right) \left( E[\varepsilon^H \mathbf{Q}_2 E[\varepsilon]] \right) \\ &\quad + \left( E[\varepsilon^H \mathbf{Q}_1 E[\varepsilon]] \right) \text{cum}(\varepsilon^H, \mathbf{Q}_2 \varepsilon) + E[\varepsilon^H \mathbf{Q}_1 \text{cum}(\varepsilon, \varepsilon^T) (\mathbf{Q}_2)^T E[\varepsilon^*]] + E[\varepsilon^H \mathbf{Q}_1 \text{cum}(\varepsilon, \varepsilon^H) \mathbf{Q}_2 E[\varepsilon]] \\ &\quad + \left( E[\varepsilon^H \mathbf{Q}_2 E[\varepsilon]] \right) \text{cum}(\varepsilon^H, \mathbf{Q}_1 \varepsilon) + E[\varepsilon^T (\mathbf{Q}_2)^T \text{cum}(\varepsilon, \varepsilon^T)^* \mathbf{Q}_1 E[\varepsilon]] + E[\varepsilon^H \mathbf{Q}_2 \text{cum}(\varepsilon, \varepsilon^H) \mathbf{Q}_1 E[\varepsilon]] \end{aligned}$$

où  $\text{cum}(\dots)$  est le cumulants. Sachant  $\text{cum}(x, y) = E[xy] - E[x]E[y]$  et que  $E[\varepsilon] = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T = \mathbf{1}_K$  où  $K$  est la dimension du vecteur  $\varepsilon$ ,

$$\begin{aligned} \text{cum}(\varepsilon, \varepsilon^H) &= \mathbf{R}_e - \mathbf{1}_K \mathbf{1}_K^T \quad \text{et} \quad \text{cum}(\varepsilon, \varepsilon^T) = \mathbf{C}_e - \mathbf{1}_K \mathbf{1}_K^T \\ \text{cum}(\varepsilon^H, \mathbf{Q}_q \varepsilon) &= \text{trace}(\mathbf{Q}_q \mathbf{R}_e) - \mathbf{1}_K^T \mathbf{Q}_q \mathbf{1}_K \end{aligned}$$

et  $F_Q^G(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{R}_\epsilon, \mathbf{C}_\epsilon)$  devient :

$$\begin{aligned}
F_Q^G(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{R}_\epsilon, \mathbf{C}_\epsilon) &= \text{trace}(\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_\epsilon) \text{trace}(\mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_\epsilon) \\
&\quad - (\mathbf{1}_K^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{1}_K) \text{trace}(\mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_\epsilon) - (\mathbf{1}_K^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{1}_K) \text{trace}(\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_\epsilon) + (\mathbf{1}_K^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{1}_K) (\mathbf{1}_K^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{1}_K) \\
&\quad + \text{trace}(\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_\epsilon \mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_\epsilon) \\
&\quad - \mathbf{1}_K^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_\epsilon \mathbf{Q}_1 \mathbf{1}_K - \mathbf{1}_K^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_\epsilon \mathbf{Q}_2 \mathbf{1}_K + (\mathbf{1}_K^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{1}_K) (\mathbf{1}_K^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{1}_K) \\
&\quad + \text{trace}(\mathbf{Q}_1 \mathbf{C}_\epsilon (\mathbf{Q}_2)^T \mathbf{C}_\epsilon^*) \\
&\quad - \mathbf{1}_K^T (\mathbf{Q}_2)^T \mathbf{C}_\epsilon^* \mathbf{Q}_1 \mathbf{1}_K - \mathbf{1}_K^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{C}_\epsilon (\mathbf{Q}_2)^T \mathbf{1}_K + (\mathbf{1}_K^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{1}_K) (\mathbf{1}_K^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{1}_K) \\
&\quad + (\mathbf{1}_K^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{1}_K) (\mathbf{1}_K^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{1}_K) \\
&\quad + (\mathbf{1}_K^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{1}_K) \text{trace}(\mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_\epsilon) + (\mathbf{1}_K^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{1}_K) \text{trace}(\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_\epsilon) - 2 (\mathbf{1}_K^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{1}_K) (\mathbf{1}_K^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{1}_K) \\
&\quad + \mathbf{1}_K^H \mathbf{Q}_1 \mathbf{C}_\epsilon (\mathbf{Q}_2)^T \mathbf{1}_K + \mathbf{1}_K^H (\mathbf{Q}_2)^T \mathbf{C}_\epsilon^* \mathbf{Q}_1 \mathbf{1}_K - 2 (\mathbf{1}_K^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{1}_K) (\mathbf{1}_K^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{1}_K) \\
&\quad + \mathbf{1}_K^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_\epsilon \mathbf{Q}_1 \mathbf{1}_K + \mathbf{1}_K^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_\epsilon \mathbf{Q}_2 \mathbf{1}_K - 2 (\mathbf{1}_K^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{1}_K) (\mathbf{1}_K^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{1}_K) \\
&= \text{trace}(\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_\epsilon) \text{trace}(\mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_\epsilon) \\
&\quad + \text{trace}(\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_\epsilon \mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_\epsilon) + \text{trace}(\mathbf{Q}_1 \mathbf{C}_\epsilon (\mathbf{Q}_2)^T \mathbf{C}_\epsilon^*) \\
&\quad - 2 (\mathbf{1}_K^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{1}_K) (\mathbf{1}_K^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{1}_K)
\end{aligned}$$

Sachant que  $\text{trace}(\mathbf{Q}_1 \mathbf{C}_\epsilon (\mathbf{Q}_2)^T \mathbf{C}_\epsilon^*) = \text{trace}((\mathbf{Q}_1)^T \mathbf{C}_\epsilon^* \mathbf{Q}_2 \mathbf{C}_\epsilon)$  et que  $\mathbf{Q}_q(1, 1) = \mathbf{1}_K^T \mathbf{Q}_q \mathbf{1}_K$ , l'équation (A.13) est démontrée ■

### Cas général du produit de $Q$ formes hermitiennes [FLV05b]

En utilisant la relation (A.3)(A.8), l'expression (A.12) devient

$$F_Q^G(\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_Q, \mathbf{R}_\epsilon, \mathbf{C}_\epsilon) = E \left[ \prod_{q=1}^Q (\mathbf{x}^H \mathbf{Q}_q^0 \mathbf{x} + \delta \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_q^R \delta \mathbf{x} + \delta \mathbf{x}^H \mathbf{Q}_q^I \delta \mathbf{x}^*) \right]$$

où  $\delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{1}$ . L'expression de  $F_Q^G(\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_Q, \mathbf{R}_\epsilon, \mathbf{C}_\epsilon)$  par la formule de Leonov et Shiryaev contient un certain nombre de termes nuls car  $\mathbf{e}$  est circulaire et gaussien. L'expression (A.12) devient alors :

$$\begin{aligned}
F_Q^G(\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_Q, \mathbf{R}_\epsilon, \mathbf{C}_\epsilon) &= \sum_{k=1}^4 T_k \tag{A.14} \\
T_1 &= I_Q(\mathbf{Q}_1^0, \dots, \mathbf{Q}_Q^0) & T_2 &= \sum_{i=1}^Q S_{Q, \mathbf{x}}(\mathbf{Q}_i^R, \{\mathbf{Q}_{j \neq i}^0\}) \\
T_3 &= \sum_{i=1}^Q S_{Q, \mathbf{x}^*}(\mathbf{Q}_i^I, \{\mathbf{Q}_{j \neq i}^{0T}\}) & T_4 &= \sum_{i=1}^Q \sum_{j \neq i} S_Q(\mathbf{Q}_i^R, \mathbf{Q}_j^I, \{\mathbf{Q}_{k \neq i \neq j}^0\})
\end{aligned}$$

où les fonctions  $I_Q(\cdot)$ ,  $S_{Q, \mathbf{x}}(\cdot)$  et  $S_Q(\cdot, \{\cdot\})$  ont les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
I_Q(\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_Q) &= E \left[ \prod_{q=1}^Q \mathbf{x}^H \mathbf{Q}_q \mathbf{x} \right] \\
S_{Q, \mathbf{x}}(\mathbf{Q}_0, \{\mathbf{Q}_{1 \leq i \leq Q-1}\}) &= E \left[ \mathbf{u}^T \mathbf{Q}_0 \mathbf{u} \prod_{q=1}^{Q-1} \mathbf{x}^H \mathbf{Q}_q \mathbf{x} \right] \\
S_Q(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \{\mathbf{Q}_{1 \leq i \leq Q-2}\}) &= E \left[ \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u} \mathbf{u}^H \mathbf{B} \mathbf{u}^* \prod_{q=1}^{Q-2} \mathbf{x}^H \mathbf{Q}_q \mathbf{x} \right]
\end{aligned}$$

où  $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{1} = \delta \mathbf{x}$  et les expressions de  $I_Q(\cdot)$ ,  $S_{Q, \mathbf{x}}(\cdot)$  et  $S_Q(\cdot, \{\cdot\})$  sont données en Annexe-B respectivement dans (B.1), (B.9) et (B.15).

## A.4 Calcul de $\mathbf{R}_\varepsilon^{(4)}$ lorsque la variable $\varepsilon$ est gaussienne

Dans les moments de rapport de formes hermitiennes ou de produit de formes hermitiennes des équations respectives (A.7) et (A.9), on s'aperçoit qu'il est nécessaire de connaître les moments  $\mathbf{R}_\varepsilon^{(2n)} = E[\varepsilon^{\otimes n} \varepsilon^{\otimes n H}]$  d'ordre "2n" de la variable  $\varepsilon$ . Lorsque  $\varepsilon$  s'écrit  $\varepsilon = [\mathbf{x}^T \mathbf{e}^H]^T$  avec  $\mathbf{x} = [1 \ \mathbf{e}^T]^T$  et que  $\mathbf{e}$  est un vecteur gaussien centré, la matrice  $\mathbf{R}_\varepsilon^{(4)}$  a l'expression suivante :

$$\mathbf{R}_\varepsilon^{(4)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,1} & \cdots & \mathbf{R}_{1,K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{K,1} & \cdots & \mathbf{R}_{K,K} \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbf{R}_{i,j} = \mathbf{R}_\varepsilon \mathbf{R}_\varepsilon(i,j) + \mathbf{r}_\varepsilon(j) \mathbf{r}_\varepsilon(i)^H + \mathbf{c}_\varepsilon(i) \mathbf{c}_\varepsilon(j)^H - 2 \times \mathbf{1}_K \mathbf{1}_K^H \delta_i \delta_j$$

où  $K=1+2NM$ ,  $\mathbf{C}_\varepsilon = E[\varepsilon \varepsilon^T] = [\mathbf{c}_\varepsilon(1) \cdots \mathbf{c}_\varepsilon(K)]$ ,  $\mathbf{R}_\varepsilon = E[\varepsilon \varepsilon^H] = [\mathbf{r}_\varepsilon(1) \cdots \mathbf{r}_\varepsilon(K)]$ ,  $\mathbf{R}_\varepsilon(i,j)$  est le  $ij^{\text{ième}}$  élément de la matrice  $\mathbf{R}_\varepsilon$ , et  $\delta_i = 1$  quand  $i=1$  et 0 sinon. La démonstration se trouve dans [FL03][FLV05d].

## A.5 Démonstrations de l'Annexe-A

### Démonstration de (A.1)

Soient  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  2 matrices  $K \times K$ . On a alors

$$\pi = (\mathbf{u}^H \mathbf{A} \mathbf{u}) (\mathbf{v}^H \mathbf{B} \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K (\mathbf{v} u_i)^H (\mathbf{B} a_{ij}) (\mathbf{v} u_j) \quad (\text{A.16})$$

En utilisant les propriétés du produit de Kronecker , (A.16) s'écrit

$$(\mathbf{u}^H \mathbf{A} \mathbf{u}) (\mathbf{v}^H \mathbf{B} \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})^H (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \quad (\text{A.17})$$

Il s'ensuit que

$$(\mathbf{u}^H \mathbf{Q} \mathbf{u})^2 = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})^H (\mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q}) (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \mathbf{u}^{\otimes 2H} \mathbf{Q}^{\otimes 2} \mathbf{u}^{\otimes 2} \quad (\text{A.18})$$

et donc

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}^H \mathbf{Q} \mathbf{u})^n &= (\mathbf{u}^H \mathbf{Q} \mathbf{u})^{n-1} (\mathbf{u}^H \mathbf{Q} \mathbf{u}) \\ &= \left( \mathbf{u}^{\otimes (n-1)H} \mathbf{Q}^{\otimes (n-1)} \mathbf{u}^{\otimes (n-1)} \right) (\mathbf{u}^H \mathbf{Q} \mathbf{u}) \\ &= \left( \mathbf{u}^{\otimes (n-1)} \otimes \mathbf{u} \right)^H \left( \mathbf{Q}^{\otimes (n-1)} \otimes \mathbf{Q} \right) \left( \mathbf{u}^{\otimes (n-1)} \otimes \mathbf{u} \right) \\ &= \mathbf{u}^{\otimes nH} \mathbf{Q}^{\otimes n} \mathbf{u}^{\otimes n} \end{aligned}$$

Cette relation démontre de façon récursive l'équation (A.1).

### Démonstration de (A.2)

Partant de l'équation (A.17), on a

$$(\mathbf{u}^H \mathbf{Q}_1 \mathbf{u}) (\mathbf{u}^H \mathbf{Q}_2 \mathbf{u}) = \mathbf{u}^{\otimes 2H} (\mathbf{Q}_1 \otimes \mathbf{Q}_2) \mathbf{u}^{\otimes 2} \quad (\text{A.19})$$

et donc

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^n (\mathbf{u}^H \mathbf{Q}_i \mathbf{u}) &= \left( \prod_{i=1}^{n-1} (\mathbf{u}^H \mathbf{Q}_i \mathbf{u}) \right) (\mathbf{u}^H \mathbf{Q}_n \mathbf{u}) \\
&= \left( \mathbf{u}^{\otimes(n-1)H} (\mathbf{Q}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{Q}_{n-1}) \mathbf{u}^{\otimes(n-1)} \right) (\mathbf{u}^H \mathbf{Q}_n \mathbf{u}) \\
&= \left( \mathbf{u}^{\otimes(n-1)} \otimes \mathbf{u} \right)^H (\mathbf{Q}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{Q}_{n-1} \otimes \mathbf{Q}_n) \left( \mathbf{u}^{\otimes(n-1)} \otimes \mathbf{u} \right) \\
&= \mathbf{u}^{\otimes nH} (\mathbf{Q}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{Q}_n) \mathbf{u}^{\otimes n}
\end{aligned}$$

Cette relation démontre de façon récursive l'équation (A.2).

### Démonstration de (A.5)

Sachant que  $\mathbf{R}_u = E[\mathbf{u} \mathbf{u}^H]$ , on peut exprimer le rapport de formes hermitiennes comme

$$\rho = \frac{\mathbf{u}^H \mathbf{Q}_1 \mathbf{u}}{\mathbf{u}^H \mathbf{Q}_2 \mathbf{u}} = \frac{\text{trace}(\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_u)}{\text{trace}(\mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_u)} f(u, v) \quad (\text{A.20})$$

où

$$\begin{aligned}
f(u, v) &= \frac{1 + \alpha u}{1 + v}, \quad (\text{A.21}) \\
u &= \frac{\mathbf{u}^H \mathbf{Q}_1 \mathbf{u} - \text{trace}(\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_u)}{\text{trace}(\mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_u)}, \quad v = \frac{\mathbf{u}^H \mathbf{Q}_2 \mathbf{u}}{\text{trace}(\mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_u)} - 1 \text{ et } \alpha = \frac{\text{trace}(\mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_u)}{\text{trace}(\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_u)}
\end{aligned}$$

Pour  $v$  suffisamment petit, la série  $(1+v)^{-1}$  vérifie  $(1+v)^{-1} = 1 - v + v^2 - v^3 + \dots$ , et le développement en série entière de  $f(u, v)$  par rapport à  $(u, v)$  autour de  $(0, 0)$  donne

$$f(u, v) = \frac{1 + \alpha u}{1 + v} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n v^{n-1} (v - \alpha u) \quad (\text{A.22})$$

Sous l'hypothèse  $H_1$ , la variable aléatoire  $v$  vérifie  $|v| < 1$ , ce qui garantit la convergence de la série, qui peut être utilisée pour évaluer  $E[f(u, v) | H_1]$ . Notant

$$\alpha_1 = \frac{\mathbf{u}^H \mathbf{Q}_1 \mathbf{u}}{\text{trace}(\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_u)} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{\mathbf{u}^H \mathbf{Q}_2 \mathbf{u}}{\text{trace}(\mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_u)},$$

d'après (A.21), on peut écrire  $v - \alpha u = \alpha_2 - \alpha_1$  et  $v = \alpha_2 - 1$ . Le développement binomial de  $v$  s'écrit  $v^n = \sum_{i=0}^n C_n^i (-1)^{n-i} \alpha_2^i$ . En utilisant cette expression dans (A.22) on a

$$\begin{aligned}
f(u, v) &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \quad (\text{A.23}) \\
\text{avec } \beta_n &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{2n-i-1} C_{n-1}^i (\alpha_2^{i+1} - \alpha_1 \alpha_2^i)
\end{aligned}$$

D'après (A.1), (A.17) et (A.23)

$$\begin{aligned}
\alpha_2^{i+1} &= \left( \frac{\mathbf{u}^H \mathbf{Q}_2 \mathbf{u}}{\text{trace}(\mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_u)} \right)^{i+1} = \frac{\mathbf{u}^{\otimes(i+1)H} \mathbf{Q}_2^{\otimes(i+1)} \mathbf{u}^{\otimes(i+1)}}{\text{trace}(\mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_u)^{i+1}} \\
\alpha_1 \alpha_2^i &= \frac{\mathbf{u}^H \mathbf{Q}_1 \mathbf{u}}{\text{trace}(\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_u)} \left( \frac{\mathbf{u}^H \mathbf{Q}_2 \mathbf{u}}{\text{trace}(\mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_u)} \right)^i \\
&= \frac{\mathbf{u}^H \mathbf{Q}_1 \mathbf{u}}{\text{trace}(\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_u)} \frac{\mathbf{u}^{\otimes iH} \mathbf{Q}_2^{\otimes i} \mathbf{u}^{\otimes i}}{\text{trace}(\mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_u)^i} \\
&= \frac{\mathbf{u}^{\otimes(i+1)H} (\mathbf{Q}_1 \otimes \mathbf{Q}_2^{\otimes i}) \mathbf{u}^{\otimes(i+1)}}{\text{trace}(\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_u) \text{trace}(\mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_u)^i}.
\end{aligned}$$

Sachant que  $E[\mathbf{x}^H \mathbf{Q} \mathbf{x}] = \text{trace}(\mathbf{Q} E[\mathbf{x} \mathbf{x}^H])$ ,  $E[\alpha_2^{i+1}]$  et  $E[\alpha_1 \alpha_2^i]$  s'écrivent

$$E[\alpha_2^{i+1}] = \frac{\text{trace}(\mathbf{Q}_2^{\otimes(i+1)} \mathbf{R}_u^{(2i+2)})}{\text{trace}(\mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_u)^{i+1}} \quad \text{et} \quad E[\alpha_1 \alpha_2^i] = \frac{\text{trace}((\mathbf{Q}_1 \otimes \mathbf{Q}_2^{\otimes i}) \mathbf{R}_u^{(2i+2)})}{\text{trace}(\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_u) \text{trace}(\mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_u)^i}$$

Sous l'hypothèse  $H_1$ , l'expression donnée par l'équation (A.23) est absolument convergente, et par conséquent

$$E \left[ \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} E[\beta_n].$$

Donc,  $E[f(u, v)|H_1]$  est donné par

$$E[f(u, v)|H_1] = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^{2n-i-1} C_{n-1}^i}{\text{trace}(\mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_u)^i} \left( \frac{\delta_i(\mathbf{Q}_2^{\otimes(i+1)})}{\text{trace}(\mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_u)} - \frac{\delta_i(\mathbf{Q}_1 \otimes \mathbf{Q}_2^{\otimes i})}{\text{trace}(\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_u)} \right)$$

$$\delta_i(\mathbf{Q}) = \text{trace}(\mathbf{Q} \mathbf{R}_u^{(2i+2)})$$

ce qui prouve l'équation (A.5).

## Annexe B

# Moments d'ordres supérieurs de produits de formes hermitiennes

### Calculation of $I_Q(\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_Q)$

The purpose of this section is to provide an expression of the following moments

$$I_Q(\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_Q) = E \left[ \prod_{q=1}^Q \mathbf{x}^H \mathbf{Q}_q \mathbf{x} \right] \quad (\text{B.1})$$

where  $\mathbf{x} = [1 \ \mathbf{e}^T]^T$  and  $\mathbf{e}$  are the Gaussian variable of (A.10) and (A.11).

Using (B.19), the expression of the moment  $E[x_1 y_2^* \dots x_{2Q-1} y_{2Q}^*]$  where  $x_i$  and  $y_i$  are complex Gaussian and circular random variable,  $E[x_i x_j] = 0$  and  $E[y_i^* y_j^*] = 0$ , is as following

$$E[x_1 y_2^* \dots x_{2Q-1} y_{2Q}^*] = \sum_{p=0}^Q J_Q^p \quad (\text{B.2})$$

where

$$J_Q^p = \sum_{\Phi_p} \left( \prod_{\substack{i=1 \\ u \in \Omega_{pxi}, v \in \Omega_{pyi}}}^p E[x_u] E[y_v^*] \right) \left( \prod_{\substack{i=1 \\ (u,v) \in \Phi_{pi}}}^{Q-p} \text{cov}[x_u y_v^*] \right) \quad (\text{B.3})$$

where  $\text{cov}[xy] = E[xy] - E[x]E[y]$ ,  $\Omega_{pxi}$  and  $\Omega_{pyi}$  are sets of single element,  $\Phi_{pi}$  set of double elements and  $\Phi_p$  is a partition of  $\Phi = \{1, 2, \dots, 2Q\}$  such that

$$\Phi_p = \left( \bigcup_{i=1}^p \Omega_{pxi} \right) \cup \left( \bigcup_{i=1}^p \Omega_{pyi} \right) \cup \left( \bigcup_{i=1}^{Q-p} \Phi_{pi} \right) \quad (\text{B.4})$$

For instance for  $Q=2$  and  $p=1$  the partitions  $\Phi_1$  are

$$\begin{aligned} & \{1\} \cup \{2\} \cup \{3 \ 4\} \\ & \{1\} \cup \{4\} \cup \{2 \ 3\} \end{aligned}$$

For instance for  $Q=3$  and  $p=0$  the partitions  $\Phi_0$  are

$$\begin{aligned} & \{1\ 2\} \cup \{3\ 4\} \cup \{5\ 6\} \\ & \{1\ 2\} \cup \{3\ 6\} \cup \{4\ 5\} \\ & \{1\ 4\} \cup \{2\ 3\} \cup \{5\ 6\} \\ & \{1\ 4\} \cup \{2\ 5\} \cup \{3\ 6\} \\ & \{1\ 6\} \cup \{2\ 3\} \cup \{4\ 5\} \\ & \{1\ 6\} \cup \{2\ 5\} \cup \{3\ 4\} \end{aligned}$$

Replacing  $x_q y_q^*$  by  $\mathbf{x}^H \mathbf{Q}_q \mathbf{x}$  into (B.2) we provide an analytical expression of  $I_Q(\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_Q)$ . More precisely we used the following properties to provide  $I_Q(\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_Q)$

$$\begin{aligned} \text{cov}[x_i y_i^*] &= \text{trace}(\mathbf{Q}_i \mathbf{R}_x) & (B.5) \\ \text{cov}[x_j y_i^*] \text{cov}[x_i y_j^*] &= \text{trace}(\mathbf{Q}_i \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_j \mathbf{R}_x) \\ E[x_i] \text{cov}[y_i^* x_j] E[y_j^*] &= \mathbf{1}^H \mathbf{Q}_i \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_j \mathbf{1} \end{aligned}$$

knowing that  $x_i y_i^* = \mathbf{x}^H \mathbf{Q}_i \mathbf{x}$ ,  $x_j y_j^* = \mathbf{x}^H \mathbf{Q}_j \mathbf{x}$  and  $E[\mathbf{x}] = \mathbf{1}$ .

### Case of $Q = 2$

The purpose is to provide an expression of  $I_2(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$ . Using the equations (B.2) and (B.5) we obtain :

$$I_2(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) = J_2^0 + J_2^1 + J_2^2 \quad (B.6)$$

where

$$\begin{aligned} J_2^0 &= \text{trace}(\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_x) \text{trace}(\mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_x) \\ &\quad + \text{trace}(\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_x) \\ J_2^1 &= \mathbf{1}^H \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_2 \mathbf{1} + \mathbf{1}^H \mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_1 \mathbf{1} \\ J_2^2 &= \mathbf{1}^H \mathbf{Q}_1 \mathbf{1} \mathbf{1}^H \mathbf{Q}_2 \mathbf{1} \end{aligned}$$

### Case of $Q = 3$

The purpose is to provide an expression of  $I_3(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3)$ . Using the equations (B.2) and (B.5) we obtain

$$I_3(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3) = J_3^0 + J_3^1 + J_3^2 + J_3^3 \quad (B.7)$$

where

$$\begin{aligned} J_3^0 &= \prod_{i=1}^3 \text{trace}(\mathbf{Q}_i \mathbf{R}_x) \\ &\quad + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j \neq k}}^3 \text{trace}(\mathbf{Q}_i \mathbf{R}_x) \text{trace}(\mathbf{Q}_j \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_k \mathbf{R}_x) \\ &\quad + \text{trace}(\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_3) + \text{trace}(\mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_3) \end{aligned}$$

and

$$J_3^1 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j \neq k}}^3 (\mathbf{1}^H \mathbf{Q}_i \mathbf{1}) I_2(\mathbf{Q}_j, \mathbf{Q}_k) \\ + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j \neq k}}^3 (I_2(\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_j \mathbf{1} \mathbf{1}^H \mathbf{Q}_k) + I_2(\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_k \mathbf{1} \mathbf{1}^H \mathbf{Q}_j))$$

and

$$J_3^2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j \neq k}}^3 \text{trace}(\mathbf{Q}_i \mathbf{R}_x) (\mathbf{1}^H \mathbf{Q}_j \mathbf{1}) (\mathbf{1}^H \mathbf{Q}_k \mathbf{1}) \\ + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j \neq k}}^3 (\mathbf{1}^H \mathbf{Q}_i \mathbf{1}) (\mathbf{1}^H \mathbf{Q}_j \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_k \mathbf{1} + \mathbf{1}^H \mathbf{Q}_k \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_j \mathbf{1})$$

and

$$J_3^3 = \prod_{i=1}^3 \mathbf{1}^H \mathbf{Q}_i \mathbf{1}$$

**Case of  $Q = 4$**

The purpose is to provide an expression of  $I_4(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3, \mathbf{Q}_4)$ . Using the equations (B.2) and (B.5) we obtain

$$I_4(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3, \mathbf{Q}_4) = J_4^0 + J_4^1 + J_4^2 + J_4^3 + J_4^4 \quad (\text{B.8})$$

where

$$J_4^0 = \prod_{i=1}^4 \text{trace}(\mathbf{Q}_i \mathbf{R}_x) \\ + \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq k \neq l}}^4 \text{trace}(\mathbf{Q}_i \mathbf{R}_x) \text{trace}(\mathbf{Q}_j \mathbf{R}_x) \text{trace}(\mathbf{Q}_k \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_l \mathbf{R}_x) \\ + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j \neq k \neq l}}^4 \text{trace}(\mathbf{Q}_i \mathbf{R}_x) \text{trace}(\mathbf{Q}_j \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_k \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_l \mathbf{R}_x) \\ + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j \neq k \neq l}}^4 \text{trace}(\mathbf{Q}_i \mathbf{R}_x) \text{trace}(\mathbf{Q}_j \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_l \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_k \mathbf{R}_x) \\ + \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq k \neq l}}^4 \text{trace}(\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_j \mathbf{R}_x) \text{trace}(\mathbf{Q}_k \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_l \mathbf{R}_x) \\ + \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq k \neq l}}^4 \text{trace}(\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_j \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_k \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_l \mathbf{R}_x) \\ + \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq k \neq l}}^4 \text{trace}(\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_j \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_l \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_k \mathbf{R}_x)$$

and

$$\begin{aligned}
J_4^1 &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j \neq k \neq l}}^4 (\mathbf{1}^H \mathbf{Q}_i \mathbf{1}) I_3(\mathbf{Q}_j, \mathbf{Q}_k, \mathbf{Q}_l) \\
&\quad + \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq k \neq l}}^4 I_3(\mathbf{Q}_i \mathbf{1} \mathbf{1}^H \mathbf{Q}_j, \mathbf{Q}_k, \mathbf{Q}_l) \\
&\quad + \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq k \neq l}}^4 I_3(\mathbf{Q}_j \mathbf{1} \mathbf{1}^H \mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_k, \mathbf{Q}_l)
\end{aligned}$$

and :

$$\begin{aligned}
J_4^2 &= \sum_{i=1}^4 (\mathbf{1}^H \mathbf{Q}_i \mathbf{1}) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \neq j \neq l}}^4 I_2(\mathbf{Q}_j, \mathbf{Q}_k \mathbf{1} \mathbf{1}^H \mathbf{Q}_l) \\
&\quad + \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq k \neq l}}^4 I_2(\mathbf{Q}_k \mathbf{1} \mathbf{1}^H \mathbf{Q}_l, \mathbf{Q}_l \mathbf{1} \mathbf{1}^H \mathbf{Q}_j) \\
&\quad + \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq k \neq l}}^4 I_2(\mathbf{Q}_l \mathbf{1} \mathbf{1}^H \mathbf{Q}_k, \mathbf{Q}_j \mathbf{1} \mathbf{1}^H \mathbf{Q}_l) \\
&\quad + \sum_{i=1}^4 \sum_{\substack{j=i+1 \\ k \neq i \neq j \neq l}}^4 (\mathbf{1}^H \mathbf{Q}_i \mathbf{1}) (\mathbf{1}^H \mathbf{Q}_j \mathbf{1}) I_2(\mathbf{Q}_k, \mathbf{Q}_l)
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
J_4^3 &= \sum_{i=1}^4 \sum_{\substack{j=i+1 \\ k \neq i \neq j \neq l}}^4 (\mathbf{1}^H \mathbf{Q}_i \mathbf{1}) (\mathbf{1}^H \mathbf{Q}_j \mathbf{1}) \mathbf{1}^H \mathbf{Q}_k \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_l \mathbf{1} \\
&\quad + \sum_{i=1}^4 \sum_{\substack{j=i+1 \\ k \neq i \neq j \neq l}}^4 (\mathbf{1}^H \mathbf{Q}_i \mathbf{1}) (\mathbf{1}^H \mathbf{Q}_j \mathbf{1}) \mathbf{1}^H \mathbf{Q}_l \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_k \mathbf{1} \\
&\quad + \sum_{i=1}^4 \text{trace}(\mathbf{Q}_i \mathbf{R}_x) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 (\mathbf{1}^H \mathbf{Q}_j \mathbf{1})
\end{aligned}$$

and

$$J_4^4 = \prod_{i=1}^4 \mathbf{1}^H \mathbf{Q}_i \mathbf{1}$$

## Calculation of $S_{Q,\mathbf{x}}(\mathbf{Q}_0, \{\mathbf{Q}_{1 \leq i \leq Q-1}\})$

The purpose of this section is to provide an expression of the following symmetric moments

$$S_{Q,\mathbf{x}}(\mathbf{Q}_0, \{\mathbf{Q}_{1 \leq i \leq Q-1}\}) = E \left[ (\mathbf{u}^T \mathbf{Q}_0 \mathbf{u}) \prod_{q=1}^{Q-1} \mathbf{x}^H \mathbf{Q}_q \mathbf{x} \right] \quad (\text{B.9})$$

where  $\mathbf{u} = \mathbf{x} - E[\mathbf{x}]$  and  $\mathbf{x}$  is a Gaussian and circular random variable define in (A.11) and (A.10). Putting  $x_{2q-1}x_{2q} = \mathbf{x}^H \mathbf{Q}_q \mathbf{x}$  and  $x_{2Q}x_{2Q-1} = \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_0 \mathbf{x}$  into (B.19) we provide an analytical expression of  $S_Q(\mathbf{Q}_0)(\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_Q)$ . In addition of (B.5), we used the following properties to provide symmetric mo-

ments

$$E[x_{2i'}] E[x_{2i}] \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} & cov[x_{2i'-1}x_{2Q-1}] cov[x_{2i'-1}x_{2Q}] \\ &= \mathbf{1}^H \mathbf{Q}_{i'}^T \mathbf{R}_x^* \mathbf{Q}_0 \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_i \mathbf{1} \\ & E[x_{2i'}] E[x_{2i}] \quad (\text{B.11}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & cov[x_{2i'-1}x_{2Q}] cov[x_{2i'-1}x_{2Q-1}] \\ &= \mathbf{1}^H \mathbf{Q}_{i'}^T \mathbf{R}_x^* \mathbf{Q}_0^T \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_i \mathbf{1} \end{aligned}$$

knowing that  $E[\mathbf{x}] = \mathbf{1}$ .

**Case of  $Q = 2$**

In this particular case

$$S_{2,\mathbf{x}}(\mathbf{Q}_0, \{\mathbf{Q}_1\}) = 0 \quad (\text{B.12})$$

**Case of  $Q = 3$**

In this particular case

$$\begin{aligned} S_{3,\mathbf{x}}(\mathbf{Q}_0, \{\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2\}) &= \mathbf{1}^H \mathbf{Q}_1^T \mathbf{R}_x^* \mathbf{Q}_0^T \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_2 \mathbf{1} \\ &+ \mathbf{1}^H \mathbf{Q}_1^T \mathbf{R}_x^* \mathbf{Q}_0 \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_2 \mathbf{1} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

**Case of  $Q = 4$**

In this particular case

$$\begin{aligned} & S_{4,\mathbf{x}}(\mathbf{Q}_0, \{\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3\}) \quad (\text{B.14}) \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq k \neq i}}^4 \mathbf{1}^H \mathbf{Q}_i^T \mathbf{R}_x^* \mathbf{Q}_k^T \mathbf{R}_x^* \mathbf{Q}_0 \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_j \mathbf{1} \\ &+ \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq k \neq i}}^4 \mathbf{1}^H \mathbf{Q}_i^T \mathbf{R}_x^* \mathbf{Q}_k^T \mathbf{R}_x^* \mathbf{Q}_0^T \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_j \mathbf{1} \\ &+ \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq k \neq i}}^4 \mathbf{1}^H \mathbf{Q}_i^T \mathbf{R}_x^* \mathbf{Q}_0 \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_k \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_j \mathbf{1} \\ &+ \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq k \neq i}}^4 \mathbf{1}^H \mathbf{Q}_i^T \mathbf{R}_x^* \mathbf{Q}_0^T \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_k \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_j \mathbf{1} \\ &+ \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq k \neq i}}^3 (\text{trace}(\mathbf{Q}_i \mathbf{R}_x) + \mathbf{1}^H \mathbf{Q}_i \mathbf{1}) S_3(\mathbf{Q}_0)(\mathbf{Q}_j, \mathbf{Q}_k) \end{aligned}$$

## Calculation of $S_Q(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \{\mathbf{Q}_{1 \leq i \leq Q-2}\})$

The purpose of this section is to provide an expression of the following symmetric moments

$$S_Q(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \{\mathbf{Q}_{1 \leq i \leq Q-2}\}) = E \left[ (\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u}) (\mathbf{u}^H \mathbf{B} \mathbf{u}^*) \prod_{q=1}^{Q-2} \mathbf{x}^H \mathbf{Q}_q \mathbf{x} \right] \quad (\text{B.15})$$

where  $\mathbf{u}=\mathbf{x}-E[\mathbf{x}]$  and  $\mathbf{x}$  is a Gaussian and circular random variable define in (A.11) and (A.10). Putting  $x_{2q-1}x_{2q}=\mathbf{x}^H\mathbf{Q}_q\mathbf{x}$ ,  $x_{2Q-1}x_{2Q-2}=\mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{u}$  and  $x_{2Q}x_{2Q-1}=\mathbf{u}^H\mathbf{B}\mathbf{u}^*$  into (B.19) we provide an analytical expression of  $S_Q(\mathbf{A},\mathbf{B})(\mathbf{Q}_1,\dots,\mathbf{Q}_{Q-2})$ . On the following we used the properties of expressions (B.5) and (B.10).

### Case of $Q = 2$

In this particular case the expression of  $S_2(\mathbf{A},\mathbf{B})()$  is

$$\begin{aligned} S_2(\mathbf{A},\mathbf{B},\{\}) &= \text{trace}(\mathbf{A}\mathbf{R}_x\mathbf{B}\mathbf{R}_x^*) \\ &\quad +\text{trace}(\mathbf{A}\mathbf{R}_x\mathbf{B}^T\mathbf{R}_x^*) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

### Case of $Q = 3$

In this particular case the expression of  $S_3(\mathbf{A},\mathbf{B})(\mathbf{Q}_1)$  is

$$\begin{aligned} S_3(\mathbf{A},\mathbf{B},\{\mathbf{Q}_1\}) & \\ &= (\text{trace}(\mathbf{Q}_1\mathbf{R}_x) + \mathbf{1}^H\mathbf{Q}_1\mathbf{1}) S_2(\mathbf{A},\mathbf{B},\{\}) \\ &\quad +\text{trace}(\mathbf{Q}_1^T\mathbf{R}_x^*\mathbf{A}\mathbf{R}_x(\mathbf{B}+\mathbf{B}^T)\mathbf{R}_x^*) \\ &\quad +\text{trace}(\mathbf{Q}_1\mathbf{R}_x(\mathbf{B}+\mathbf{B}^T)\mathbf{R}_x^*\mathbf{A}\mathbf{R}_x) \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

### Case of $Q = 4$

In this particular case the expression of  $S_4(\mathbf{A},\mathbf{B})(\mathbf{Q}_1,\mathbf{Q}_2)$  is

$$\begin{aligned} S_4(\mathbf{A},\mathbf{B},\{\mathbf{Q}_1,\mathbf{Q}_2\}) & \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^2 (\text{trace}(\mathbf{Q}_i\mathbf{R}_x) + \mathbf{1}^H\mathbf{Q}_i\mathbf{1}) S_3(\mathbf{A},\mathbf{B},\{\mathbf{Q}_j\}) \\ &\quad - \prod_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^2 (\text{trace}(\mathbf{Q}_i\mathbf{R}_x) + \mathbf{1}^H\mathbf{Q}_i\mathbf{1}) S_2(\mathbf{A},\mathbf{B},\{\}) \\ &\quad +\text{trace}(\mathbf{Q}_2\mathbf{R}_x\mathbf{Q}_1\mathbf{R}_x\Phi(\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{R}_x)) \\ &\quad +\text{trace}(\mathbf{Q}_2^T\mathbf{R}_x^*\mathbf{Q}_1\mathbf{R}_x\Phi(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{R}_x^*)) \\ &\quad +\text{trace}(\Psi(\mathbf{Q}_1,\mathbf{A}+\mathbf{A}^T,\mathbf{R}_x)\Psi(\mathbf{Q}_2,\mathbf{B}+\mathbf{B}^T,\mathbf{R}_x^*)) \\ &\quad + (\mathbf{1}^H\mathbf{Q}_1\mathbf{R}_x\mathbf{Q}_2\mathbf{1} + \mathbf{1}^H\mathbf{Q}_2\mathbf{R}_x\mathbf{Q}_1\mathbf{1}) S_2(\mathbf{A},\mathbf{B},\{\}) \\ &\quad +\text{trace}(\mathbf{Q}_1\mathbf{R}_x\mathbf{Q}_2\mathbf{R}_x) S_2(\mathbf{A},\mathbf{B},\{\}) \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

where

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{R}_x) &= \mathbf{B}\mathbf{R}_x^*\mathbf{A}\mathbf{R}_x + \mathbf{B}\mathbf{R}_x^*\mathbf{A}^T\mathbf{R}_x \\ &\quad +\mathbf{B}^T\mathbf{R}_x^*\mathbf{A}\mathbf{R}_x + \mathbf{B}^T\mathbf{R}_x^*\mathbf{A}^T\mathbf{R}_x \end{aligned}$$

and

$$\Psi(\mathbf{Q},\mathbf{A},\mathbf{R}_x) = \mathbf{Q}\mathbf{R}_x^*\mathbf{A}^T\mathbf{R}_x$$

## Moments of Gaussian random variables

To compute the moment  $E[x_1 \dots x_{2Q}]$  where  $x_i$  is Gaussian, it is necessary to use the reverse of the formula known as of Leonov and Shiryaev giving the moments according to cumulants. This formula is simplified in the following way under the Gaussian assumption by using the cancellation property of cumulants of order strictly higher than second

$$E[x_1 \dots x_{2Q}] = \sum_{p=0}^Q J_Q^p \quad (\text{B.19})$$

where

$$J_Q^p = \sum_{\Phi_p} \left( \prod_{\substack{i=1 \\ u \in \Omega_{pi}}}^{2p} E[x_u] \right) \left( \prod_{\substack{i=1 \\ (u,v) \in \Phi_{pi}}}^{Q-p} \text{cov}[x_u x_v] \right) \quad (\text{B.20})$$

where  $\text{cov}[xy] = E[xy] - E[x]E[y]$  and  $\Phi_p$  is a partition of  $\Phi = \{1, 2, \dots, 2Q\}$  such that

$$\Phi_p = \left( \bigcup_{i=1}^{2p} \Omega_{pi} \right) \cup \left( \bigcup_{i=1}^{Q-p} \Phi_{pi} \right) \quad (\text{B.21})$$



## Annexe C

# Démonstrations associées à l'erreur de goniométrie du MV

### Proof of (3.17)

According to (3.5),  $\mathbf{U}(\mathbf{E}) = \mathbf{A}_0^\# \tilde{\mathbf{A}}(\underline{\theta}_0, \mathbf{E}) = \mathbf{I}_M + \mathbf{A}_0^\# \mathbf{E}$ . Thus, using (3.7),

$$\mathbf{A}_0^\# \mathbf{R}_x(\mathbf{E}) = \left( \mathbf{I}_M + \mathbf{A}_0^\# \mathbf{E} \right) \mathbf{R}_s \tilde{\mathbf{A}}(\underline{\theta}_0, \mathbf{E})^H + \sigma^2 \mathbf{A}_0^\#.$$

Using that  $\mathbf{A}_0^\# \Pi_0 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{A}_0^\# \mathbf{R}_x(\mathbf{E}) \Pi_0 = \left( \mathbf{I}_M + \mathbf{A}_0^\# \mathbf{E} \right) \mathbf{R}_s \tilde{\mathbf{A}}(\underline{\theta}_0, \mathbf{E})^H \Pi_0$  and knowing that  $\tilde{\mathbf{A}}(\underline{\theta}_0, \mathbf{E})^H \Pi_0 = \mathbf{E}^H \Pi_0$ , we obtain

$$\mathbf{A}_0^\# \mathbf{R}_x(\mathbf{E}) \Pi_0 = \left( \mathbf{I}_M + \mathbf{A}_0^\# \mathbf{E} \right) \mathbf{R}_s \mathbf{E}^H \Pi_0$$

Putting this last expression into (3.15) the equation (3.17) is proven

### Proof of (3.20)

According to (3.5),  $\mathbf{U}(\mathbf{E}) = \mathbf{A}_0^\# \tilde{\mathbf{A}}(\underline{\theta}_0, \mathbf{E}) = \mathbf{I}_M + \mathbf{A}_0^\# \mathbf{E}$  and using (3.7)

$$\mathbf{A}_0^\# \mathbf{R}_x(\mathbf{E}) \left( \mathbf{A}_0^\# \right)^H = \mathbf{U}(\mathbf{E}) \mathbf{R}_s \mathbf{U}(\mathbf{E})^H + \sigma^2 \mathbf{A}_0^\# \left( \mathbf{A}_0^\# \right)^H$$

Noticing that  $\mathbf{A}_0^\# \left( \mathbf{A}_0^\# \right)^H = \left( \mathbf{A}_0^H \mathbf{A}_0 \right)^{-1}$ ,  $\mathbf{A}_0^\# \mathbf{R}_x(\mathbf{E}) \left( \mathbf{A}_0^\# \right)^H$  becomes

$$\mathbf{A}_0^\# \mathbf{R}_x(\mathbf{E}) \left( \mathbf{A}_0^\# \right)^H = \left( \mathbf{U}(\mathbf{E}) \mathbf{R}_s \mathbf{U}(\mathbf{E})^H - \mathbf{R}_s \right) + \left( \sigma^2 \left( \mathbf{A}_0^H \mathbf{A}_0 \right)^{-1} + \mathbf{R}_s \right)$$

Putting this last expression into (3.16) the equation (3.20) is proven

### Proof of (3.21)

The purpose of this appendix is to prove the expression (3.21) of  $\Delta \underline{\theta} = f(\mathbf{E})$ . This second order Taylor expansion of  $f(\mathbf{E}) = -\mathbf{H}(\mathbf{E})^{-1} \nabla_0(\mathbf{E})$  checks around  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$

$$f(\mathbf{E}) = f(\mathbf{E} = \mathbf{0}) + df(\mathbf{E} = \mathbf{0}) + \frac{1}{2} d^2 f(\mathbf{E} = \mathbf{0}) + o\left(\|\mathbf{E}\|^2\right) \quad (\text{C.1})$$

where  $df(\mathbf{E})$  and  $d^2f(\mathbf{E})$  are respectively the first and second derivative of  $f(\mathbf{E})$ . According to (3.14) the expression of  $df(\mathbf{E})$  is as following

$$df(\mathbf{E}) = -d(\mathbf{H}(\mathbf{E})^{-1}) \nabla_0(\mathbf{E}) - \mathbf{H}(\mathbf{E})^{-1} d(\nabla_0(\mathbf{E})) \quad (\text{C.2})$$

where  $d(\mathbf{M})$  is the first derivative of  $\mathbf{M}$ . Noting that the first derivative of  $\mathbf{M}^{-1}$  is

$$d(\mathbf{M}^{-1}) = -\mathbf{M}^{-1} d(\mathbf{M}) \mathbf{M}^{-1} \quad (\text{C.3})$$

the first derivative of  $df(\mathbf{E})$  is

$$df(\mathbf{E}) = \mathbf{H}(\mathbf{E})^{-1} d(\mathbf{H}(\mathbf{E})) \mathbf{H}(\mathbf{E})^{-1} \nabla_0(\mathbf{E}) - \mathbf{H}(\mathbf{E})^{-1} d(\nabla_0(\mathbf{E})) \quad (\text{C.4})$$

Using  $\mathbf{H}(\mathbf{E} = \mathbf{0}) = \mathbf{H}_0$  according to (3.20) and  $\nabla_0(\mathbf{E} = \mathbf{0}) = \mathbf{0}$  according to (3.17), the derivative  $df(\mathbf{E} = \mathbf{0})$  becomes

$$df(\mathbf{E} = \mathbf{0}) = -\mathbf{H}_0^{-1} d(\nabla_0(\mathbf{E}))_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} \quad (\text{C.5})$$

where  $d(\nabla_0(\mathbf{E}))_{\mathbf{E}=\mathbf{0}}$  is the first derivative of  $\nabla_0(\mathbf{E})$  in  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  such that

$$d(\nabla_0(\mathbf{E}))_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} = \nabla_1(\mathbf{E}) = -2\Re \left( \text{diag} \left( \mathbf{R}_s \mathbf{E}^H \Pi_0 \dot{\mathbf{A}}_0 \right) \right) \quad (\text{C.6})$$

**Proof :** Using expression (3.17),  $d(\nabla_0(\mathbf{E}))_{\mathbf{E}=\mathbf{0}}$  becomes

$$\begin{aligned} d(\nabla_0(\mathbf{E}))_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} &= -2\Re \left( \text{diag} \left( \mathbf{R}_s d(\mathbf{E})_{\mathbf{E}=\mathbf{0}}^H \Pi_0 \dot{\mathbf{A}}_0 \right) \right) \\ &\quad -2\Re \left( \text{diag} \left( \mathbf{A}_0^\# d(\mathbf{E})_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} \mathbf{R}_s \mathbf{E}_{\mathbf{E}=\mathbf{0}}^H \Pi_0 \dot{\mathbf{A}}_0 \right) \right) \\ &\quad -2\Re \left( \text{diag} \left( \mathbf{A}_0^\# \mathbf{E}_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} \mathbf{R}_s d(\mathbf{E})_{\mathbf{E}=\mathbf{0}}^H \Pi_0 \dot{\mathbf{A}}_0 \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

According to (C.7), the expression (C.6) of  $d(\nabla_0(\mathbf{E}))_{\mathbf{E}=\mathbf{0}}$  is proven because around  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{E}_0 = \tilde{\mathbf{A}}(\theta_0, \mathbf{E} = \mathbf{0}) - \mathbf{A}_0 = \mathbf{0}$ ,  $d(\mathbf{E})_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}$  and  $\mathbf{E}_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} = \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}$  ■

According to (C.4) and using expression (C.3) of  $d(\mathbf{M}^{-1})$  the second derivative  $d^2f(\mathbf{E})$  is

$$\begin{aligned} d^2f(\mathbf{E}) &= -\mathbf{H}(\mathbf{E})^{-1} d(\mathbf{H}(\mathbf{E})) \mathbf{H}(\mathbf{E})^{-1} d(\mathbf{H}(\mathbf{E})) \mathbf{H}(\mathbf{E})^{-1} \nabla_0(\mathbf{E}) \\ &\quad + \mathbf{H}(\mathbf{E})^{-1} d^2(\mathbf{H}(\mathbf{E})) \mathbf{H}(\mathbf{E})^{-1} \nabla_0(\mathbf{E}) \\ &\quad - \mathbf{H}(\mathbf{E})^{-1} d(\mathbf{H}(\mathbf{E})) \mathbf{H}(\mathbf{E})^{-1} d(\mathbf{H}(\mathbf{E})) \mathbf{H}(\mathbf{E})^{-1} \nabla_0(\mathbf{E}) \\ &\quad + \mathbf{H}(\mathbf{E})^{-1} d(\mathbf{H}(\mathbf{E})) \mathbf{H}(\mathbf{E})^{-1} d(\nabla_0(\mathbf{E})) \\ &\quad + \mathbf{H}(\mathbf{E})^{-1} d(\mathbf{H}(\mathbf{E})) \mathbf{H}(\mathbf{E})^{-1} d(\nabla_0(\mathbf{E})) \\ &\quad - \mathbf{H}(\mathbf{E})^{-1} d^2(\nabla_0(\mathbf{E})) \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

where  $d^2(\mathbf{M})$  is the second derivative of  $\mathbf{M}$ . Using  $\mathbf{H}(\mathbf{E} = \mathbf{0}) = \mathbf{H}_0$  according to (3.20) and  $\nabla_0(\mathbf{E} = \mathbf{0}) = \mathbf{0}$  according to (3.17), the derivative  $d^2f(\mathbf{E} = \mathbf{0})$  becomes

$$\begin{aligned} d^2f(\mathbf{E} = \mathbf{0}) &= 2 \mathbf{H}_0^{-1} d(\mathbf{H}(\mathbf{E}))_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} \mathbf{H}_0^{-1} d(\nabla_0(\mathbf{E}))_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} \\ &\quad - \mathbf{H}_0^{-1} d^2(\nabla_0(\mathbf{E}))_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

where  $d^2(\nabla_0(\mathbf{E}))_{\mathbf{E}=\mathbf{0}}$  is the second derivative of  $\nabla_0(\mathbf{E})$  in  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  such that

$$d^2(\nabla_0(\mathbf{E}))_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} = -4\Re \left( \text{diag} \left( \mathbf{A}_0^\# \mathbf{E} \mathbf{R}_s \mathbf{E}^H \Pi_0 \dot{\mathbf{A}}_0 \right) \right) \quad (\text{C.10})$$

**Proof :** According to (C.7),  $d^2(\nabla_0(\mathbf{E}))_{\mathbf{E}=\mathbf{0}}$  is

$$d^2(\nabla_0(\mathbf{E}))_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} = -4\Re \left( \text{diag} \left( \mathbf{A}_0^\# d(\mathbf{E})_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} \mathbf{R}_s d(\mathbf{E})_{\mathbf{E}=\mathbf{0}}^H \Pi_0 \dot{\mathbf{A}}_0 \right) \right) \quad (\text{C.11})$$

According to (C.11), the expression (C.10) is proven because around  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{E}_0 = \tilde{\mathbf{A}}(\theta_0, \mathbf{E} = \mathbf{0}) - \mathbf{A}_0 = \mathbf{0}$ ,  $d(\mathbf{E})_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}$  and  $\mathbf{E}_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} = \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}$  ■

The first derivative  $d(\mathbf{H}(\mathbf{E}))_{\mathbf{E}=\mathbf{0}}$  of  $\mathbf{H}(\mathbf{E})$  is

$$d(\mathbf{H}(\mathbf{E}))_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} = \Delta \mathbf{H}(\mathbf{E}) = 4\Re \left( \left( \dot{\mathbf{A}}_0^H \Pi_0 \dot{\mathbf{A}}_0 \right) \odot \left( \mathbf{A}_0^\# \mathbf{E} \mathbf{R}_s \right)^T \right) \quad (\text{C.12})$$

**Proof :** According to expression (3.16),  $d(\mathbf{H}(\mathbf{E}))_{\mathbf{E}=\mathbf{0}}$  becomes

$$d(\mathbf{H}(\mathbf{E}))_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} = 4\Re \left( \left( \dot{\mathbf{A}}_0^H \Pi_0 \dot{\mathbf{A}}_0 \right) \odot \left( d(\mathbf{U}(\mathbf{E}))_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} \mathbf{R}_s \mathbf{U}(\mathbf{E})_{\mathbf{E}=\mathbf{0}}^H \right)^T \right) \quad (\text{C.13})$$

where  $d(\mathbf{U}(\mathbf{E}))_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} = \mathbf{A}_0^\# d(\mathbf{E})_{\mathbf{E}=\mathbf{0}}$  and  $\mathbf{U}(\mathbf{E})_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} = \mathbf{I}_M + \mathbf{A}_0^\# \mathbf{E}_{\mathbf{E}=\mathbf{0}}$ . The equation (C.12) is then proven because around  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{E}_0 = \tilde{\mathbf{A}}(\theta_0, \mathbf{E} = \mathbf{0}) - \mathbf{A}_0 = \mathbf{0}$ ,  $d(\mathbf{E})_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}$  and  $\mathbf{E}_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} = \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}$  ■

Noticing that  $\nabla_0(\mathbf{E}) = d(\nabla_0(\mathbf{E}))_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} + \frac{1}{2} d^2(\nabla_0(\mathbf{E}))_{\mathbf{E}=\mathbf{0}}$  and using (C.5)(C.6) (C.9) and (C.12), the expression (3.21) is proven.

## Transformation in an Hermitian Form

### Preliminary results

The following relations (C.14)(C.15) are shown in [FLV05d]. Noting  $\mathbf{e} = \text{vec}(\mathbf{E})$  and  $\boldsymbol{\mu} = [1 \ \mathbf{e}^T]^T$ ,

$$\mathbf{u}^H \mathbf{E} \mathbf{E}^H \mathbf{v} = \mathbf{e}^H (\mathbf{u}^* \otimes \mathbf{v}) = \boldsymbol{\mu}^H \mathbf{Q}_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \boldsymbol{\mu} \quad (\text{C.14})$$

with

$$\mathbf{Q}_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{u}^* \otimes \mathbf{v} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

and

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^H \mathbf{E} \mathbf{R}_s \mathbf{E}^H \mathbf{v} &= \mathbf{e}^H (\mathbf{R}_s^T \otimes (\mathbf{v} \mathbf{u}^H)) \mathbf{e} \\ &= \boldsymbol{\mu}^H \mathbf{Q}_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \boldsymbol{\mu} \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

where

$$\mathbf{Q}_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_s^T \otimes (\mathbf{v} \mathbf{u}^H) \end{bmatrix}$$

### Proof of equation (3.23)

According to (3.17), the  $m^{\text{th}}$  component of  $\nabla_0(\mathbf{E})$  is  $\nabla_0(\mathbf{E})_m = \nabla_1(\mathbf{E})_m + \nabla_2(\mathbf{E})_m$  ( $\nabla_1(\mathbf{E})_m$  and  $\nabla_2(\mathbf{E})_m$  are respectively the  $m^{\text{th}}$  component of  $\nabla_1(\mathbf{E})$  and  $\nabla_2(\mathbf{E})$ ). According to (3.18),  $\nabla_1(\mathbf{E})_m = -2\Re(\mathbf{p}_m^H \mathbf{E}^H \Pi_0 \dot{\mathbf{a}}_m)$  with  $\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \cdots & \mathbf{p}_M \end{bmatrix}$  and using (C.14).

$$\nabla_1(\mathbf{E})_m = -2\Re(\boldsymbol{\mu}^H \mathbf{Q}_1(\mathbf{p}_m, \Pi_0 \dot{\mathbf{a}}_m) \boldsymbol{\mu})$$

According to (3.19),  $\nabla_2(\mathbf{E})_m = -2\Re(\mathbf{g}_m^H \mathbf{E} \mathbf{R}_s \mathbf{E}^H \Pi_0 \dot{\mathbf{a}}_m)$  and using (C.15)

$$\nabla_2(\mathbf{E})_m = -2\Re(\boldsymbol{\mu}^H \mathbf{Q}_2(\mathbf{g}_m, \Pi_0 \dot{\mathbf{a}}_m) \boldsymbol{\mu})$$

Using that  $\mathbf{Q}_{\nabla m 0} = \mathbf{Q}_1(\mathbf{p}_m, \Pi_0 \dot{\mathbf{a}}_m) + \mathbf{Q}_2(\mathbf{g}_m, \Pi_0 \dot{\mathbf{a}}_m)$ ,  $\nabla_0(\mathbf{E})_m$  becomes

$$\nabla_0(\mathbf{E})_m = \nabla_1(\mathbf{E})_m + \nabla_2(\mathbf{E})_m = -2\Re(\boldsymbol{\mu}^H \mathbf{Q}_{\nabla m 0} \boldsymbol{\mu})$$

Noticing that  $-2\Re(\boldsymbol{\mu}^H \mathbf{Q}_{\nabla m 0} \boldsymbol{\mu}) = -(\boldsymbol{\mu}^H \mathbf{Q}_{\nabla m 0} \boldsymbol{\mu}) - (\boldsymbol{\mu}^H \mathbf{Q}_{\nabla m 0} \boldsymbol{\mu})^* = -(\boldsymbol{\mu}^H \mathbf{Q}_{\nabla m 0} \boldsymbol{\mu}) - (\boldsymbol{\mu}^H \mathbf{Q}_{\nabla m 0}^H \boldsymbol{\mu})$ , the equation (3.23) is proven

### Proof of equation (3.25)

The vector  $\Delta\theta^2 = \mathbf{H}_0^{-1} \Delta\mathbf{H}(\mathbf{E}) \mathbf{H}_0^{-1} \nabla_1(\mathbf{E})$  can be rewritten as  $\Delta\theta^2 = \mathbf{B}\mathbf{b}$  where

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{H}_0^{-1} \Delta\mathbf{H}(\mathbf{E}) \\ \mathbf{b} &= \mathbf{H}_0^{-1} \nabla_1(\mathbf{E}) \end{aligned}$$

According to (3.18), the  $m^{\text{th}}$  component  $\mathbf{b}_m$  of  $\mathbf{b} = \mathbf{H}_0^{-1} \nabla_1(\mathbf{E})$  becomes

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_m &= -2\Re(\mathbf{e}^H \mathbf{q}_m) \quad \text{with } \mathbf{e} = \text{vec}(\mathbf{E}) \\ \text{and } \mathbf{q}_m &= \sum_{i=1}^M \mathbf{H}_0^{-1}(m, i) (\mathbf{p}_i^* \otimes (\Pi_0 \dot{\mathbf{a}}_i)) \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

**Proof :** The  $m^{\text{th}}$  component of  $\mathbf{H}_0^{-1} \nabla_1(\mathbf{E})$  checks

$$\mathbf{b}_m = \sum_{i=1}^M \mathbf{H}_0^{-1}(m, i) \nabla_{1i}$$

where  $\nabla_{1i}$  is the  $i^{\text{th}}$  component of  $\nabla_1(\mathbf{E})$ . Using (3.18), the expression of the  $i^{\text{th}}$  component of  $\nabla_1(\mathbf{E})$  is  $\nabla_{1i} = -2\Re(\mathbf{p}_i^H \mathbf{E}^H (\Pi_0 \dot{\mathbf{a}}_i))$ . The equation (C.14) reduce  $\nabla_{1i}$  in  $\nabla_{1i} = -2\Re(\mathbf{e}^H (\mathbf{p}_i^* \otimes (\Pi_0 \dot{\mathbf{a}}_i)))$  with  $\mathbf{e} = \text{vec}(\mathbf{E})$ . Using the previous expression of  $\mathbf{b}_m$  the equation (C.16) is proven ■

According to (3.22), the  $mi^{\text{th}}$  element of  $\mathbf{B} = \mathbf{H}_0^{-1} \Delta\mathbf{H}(\mathbf{E})$  is

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{mi} &= 4\Re(\mathbf{q}_{mi}^H \mathbf{e}) \quad \text{with } \mathbf{e} = \text{vec}(\mathbf{E}) \\ \text{and } \mathbf{q}_{mi} &= \sum_{k=1}^M \mathbf{H}_0^{-1}(m, k) \left( (\mathbf{p}_k^* \otimes \mathbf{g}_i) (\dot{\mathbf{a}}_k^H \Pi_0 \dot{\mathbf{a}}_i)^* \right) \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

**Proof :** Let's note  $\alpha_{ki}$  the  $ki^{\text{th}}$  element of  $(\dot{\mathbf{A}}_0^H \Pi_0 \dot{\mathbf{A}}_0) \odot (\mathbf{A}_0^{\#} \mathbf{E} \mathbf{R}_s)^T$  such that :  $\alpha_{ki} = (\mathbf{g}_i^H \mathbf{E} \mathbf{p}_k^*) (\dot{\mathbf{a}}_k^H \Pi_0 \dot{\mathbf{a}}_i)$ . The  $mi^{\text{th}}$  element  $\mathbf{B}_{mi}$  of  $\mathbf{B} = \mathbf{H}_0^{-1} \Delta\mathbf{H}(\mathbf{E}) = 4\mathbf{H}_0^{-1} \Re((\dot{\mathbf{A}}_0^H \Pi_0 \dot{\mathbf{A}}_0) \odot (\mathbf{A}_0^{\#} \mathbf{E} \mathbf{R}_s)^T)$  is

$$\mathbf{B}_{mi} = \sum_{k=1}^M \mathbf{H}_0^{-1}(m, k) \alpha_{ki}$$

According to (C.14) the expression of  $(\mathbf{g}_i^H \mathbf{E} \mathbf{p}_k^*)$  becomes  $(\mathbf{g}_i^H \mathbf{E} \mathbf{p}_k^*) = (\mathbf{p}_k^T \mathbf{E}^H \mathbf{g}_i^*)^* = (\mathbf{e}^H (\mathbf{p}_k \otimes \mathbf{g}_i^*))^* = (\mathbf{p}_k^* \otimes \mathbf{g}_i)^H \mathbf{e}$  and  $\alpha_{ki} = (\dot{\mathbf{a}}_k^H \Pi_0 \dot{\mathbf{a}}_i) (\mathbf{p}_k^* \otimes \mathbf{g}_i)^H \mathbf{e}$  with  $\mathbf{e} = \text{vec}(\mathbf{E})$ . Putting the expression of  $\mathbf{g}_i^H \mathbf{E} \mathbf{p}_k^*$  into the previous expression of  $\mathbf{B}_{mi}$  the equation (C.17) is proven ■

According to (C.16)(C.17), the  $m^{\text{th}}$  component  $\Delta\theta_m^2$  of  $\Delta\theta^2$  is

$$\Delta\theta_m^2 = \sum_{i=1}^M \mathbf{B}_{mi} \mathbf{b}_i = -2 \sum_{i=1}^M 4\Re(\mathbf{q}_{mi}^H \mathbf{e}) \Re(\mathbf{e}^H \mathbf{q}_i) \quad \text{with } \mathbf{e} = \text{vec}(\mathbf{E})$$

Using that  $4\Re(a)\Re(b) = 2\Re(ab) + 2\Re(ab^*)$ ,  $\Delta\theta_m^2$  becomes

$$\Delta\theta_m^2 = -4 \sum_{i=1}^M (\Re(\mathbf{e}^H \mathbf{q}_i \mathbf{q}_{mi}^H \mathbf{e}) + \Re(\mathbf{e}^H \mathbf{q}_i \mathbf{q}_{mi}^T \mathbf{e}^*)) \text{ with } \mathbf{e} = \text{vec}(\mathbf{E})$$

Using that  $\Re(\mathbf{e}^H \mathbf{q}_i \mathbf{q}_{mi}^H \mathbf{e}) = (\mathbf{e}^H \mathbf{q}_i \mathbf{q}_{mi}^H \mathbf{e} + \mathbf{e}^H \mathbf{q}_i^* \mathbf{q}_{mi}^T \mathbf{e}^*)/2$ ,  $\Re(\mathbf{e}^H \mathbf{q}_i \mathbf{q}_{mi}^T \mathbf{e}^*) = (\mathbf{e}^H \mathbf{q}_i \mathbf{q}_{mi}^T \mathbf{e}^* + \mathbf{e}^T \mathbf{q}_{mi}^* \mathbf{q}_i^H \mathbf{e})/2$  and  $\boldsymbol{\varepsilon} = [\mathbf{1} \ \mathbf{e}^T \mathbf{e}^H]^T$  the equation (3.25) is proven

### Proof of equation (3.41)

According to (3.29)

$$\text{trace}(\mathbf{Q}_m^I) = \text{trace}(\mathbf{Q}_m^1) + \text{trace}(\mathbf{Q}_m^2)$$

Using the expression of (3.23),(3.24) and  $\text{trace}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \text{trace}(\mathbf{A}) \text{trace}(\mathbf{B})$  then

$$\begin{aligned} \text{trace}(\mathbf{Q}_m^1) &= -2 \sum_{i=1}^M \mathbf{H}_0^{-1}(m, i) \Re(\text{trace}(\mathbf{Q}_{\nabla i 0})) = -2 \sum_{i=1}^M \mathbf{H}_0^{-1}(m, i) \Re(\text{trace}(\mathbf{R}_s^T \otimes ((\Pi_0 \dot{\mathbf{a}}_i) \mathbf{g}_i^H))) \\ &= -2 \text{trace}(\mathbf{R}_s) \sum_{i=1}^M \mathbf{H}_0^{-1}(m, i) \Re(\mathbf{g}_i^H \Pi_0 \dot{\mathbf{a}}_i) \end{aligned}$$

and using (3.25),(3.27) and (3.28)

$$\text{trace}(\mathbf{Q}_m^2) = -4 \sum_{i=1}^M \Re(\mathbf{q}_{mi}^H \mathbf{q}_i) = -4 \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \Re(z_{ilmk} (\mathbf{p}_k^T \otimes \mathbf{g}_i^H) (\mathbf{p}_l^* \otimes (\Pi_0 \dot{\mathbf{a}}_i)))$$

with

$$z_{ilmk} = \mathbf{H}_0^{-1}(i, l) (\mathbf{H}_0^{-1}(m, k))^* (\dot{\mathbf{a}}_k^H \Pi_0 \dot{\mathbf{a}}_i)$$

Using the following relation  $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{C})(\mathbf{B} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{A}\mathbf{B}) \otimes (\mathbf{C}\mathbf{D})$

$$\text{trace}(\mathbf{Q}_m^2) = -4 \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \Re(z_{ilmk} (\mathbf{p}_k^T \mathbf{p}_l^*) (\mathbf{g}_i^H \Pi_0 \dot{\mathbf{a}}_i))$$

Noting that  $(\mathbf{A}_0^\#)^H = [\mathbf{g}_1 \dots \mathbf{g}_M]$  and  $\mathbf{A}_0^\# \Pi_0 = 0$ , the  $i^{\text{th}}$  row  $\mathbf{g}_i^H \Pi_0$  of  $\mathbf{A}_0^\# \Pi_0$  is null and  $\text{trace}(\mathbf{Q}_m^1) = \text{trace}(\mathbf{Q}_m^2) = \text{trace}(\mathbf{Q}_m^I) = 0$ .



## Annexe D

# Démonstrations des performances de MUSIC-2q

Ce paragraphe utilise les relations suivantes :

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = (\mathbf{I}_{N_u} \otimes \mathbf{v}) \mathbf{u} \quad (\text{D.1})$$

$$= (\mathbf{u} \otimes \mathbf{I}_{N_v}) \mathbf{v} \quad (\text{D.2})$$

où  $N_u$  et  $N_v$  sont respectivement les dimensions des vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ . Sachant que  $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{AC}) \otimes (\mathbf{BD})$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} &= (\mathbf{u} \times 1) \otimes (\mathbf{I}_{N_v} \mathbf{v}) \\ &= (\mathbf{u} \otimes \mathbf{I}_{N_v}) (1 \otimes \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{I}_{N_v}) \mathbf{v} \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} &= (\mathbf{I}_{N_u} \mathbf{u}) \otimes (\mathbf{v} \times 1) \\ &= (\mathbf{I}_{N_u} \otimes \mathbf{v}) (\mathbf{u} \otimes 1) = (\mathbf{I}_{N_u} \otimes \mathbf{v}) \mathbf{u} \end{aligned}$$

et les équations (D.1)(D.2) sont démontrées car  $1 \otimes \mathbf{v} = \mathbf{v} \otimes 1 = \mathbf{v}$ .

## Démonstration de (3.91) et (3.92)

Sachant que l'approximation au premier ordre du vecteur  $\tilde{\mathbf{a}}_m^{\otimes q}$  s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{a}}_m^{\otimes q} = (\mathbf{a}_m + \mathbf{e}_m)^{\otimes q} = \mathbf{a}_m^{\otimes q} + \tilde{\mathbf{n}}_m^q + o(\|\mathbf{e}_m\|)$$

A l'ordre  $q = 1$  où  $\tilde{\mathbf{a}}_m^{\otimes 1} = \tilde{\mathbf{a}}_m = \mathbf{a}_m + \mathbf{e}_m$ , la relation (3.92) est vérifiée car  $\tilde{\mathbf{n}}_m^0 = 0$ . En supposant que la relation soit vérifiée à l'ordre " $q - 1$ " :

$$\begin{aligned} \left( \tilde{\mathbf{a}}_m^{\otimes (q-1)} \right) \otimes (\mathbf{a}_m + \mathbf{e}_m) &= \left( \mathbf{a}_m^{\otimes (q-1)} + \tilde{\mathbf{n}}_m^{(q-1)} + o(\|\mathbf{e}_m\|) \right) \otimes (\mathbf{a}_m + \mathbf{e}_m) \\ &= \left( \mathbf{a}_m^{\otimes (q-1)} + \tilde{\mathbf{n}}_m^{(q-1)} \right) \otimes (\mathbf{a}_m + \mathbf{e}_m) + o(\|\mathbf{e}_m\|) \otimes (\mathbf{a}_m + \mathbf{e}_m) \\ &= \mathbf{a}_m^{\otimes q} + \left( \mathbf{a}_m^{\otimes (q-1)} \otimes \mathbf{e}_m + \tilde{\mathbf{n}}_m^{(q-1)} \otimes \mathbf{a}_m \right) \\ &\quad + \tilde{\mathbf{n}}_m^{(q-1)} \otimes \mathbf{e}_m + o(\|\mathbf{e}_m\|) \otimes (\mathbf{a}_m + \mathbf{e}_m) \end{aligned}$$

Sachant que  $\tilde{\mathbf{n}}_m^{(q-1)} \otimes \mathbf{e}_m = o(\|\mathbf{e}_m\|)$  car  $\tilde{\mathbf{n}}_m^1 = \mathbf{e}_m$ , on en déduit que  $\tilde{\mathbf{n}}_m^{(q-1)} \otimes \mathbf{e}_m + o(\|\mathbf{e}_m\|) \otimes (\mathbf{a}_m + \mathbf{e}_m) = o(\|\mathbf{e}_m\|)$  et que

$$\tilde{\mathbf{a}}_m^{\otimes q} = \mathbf{a}_m^{\otimes q} + \left( \mathbf{a}_m^{\otimes(q-1)} \otimes \mathbf{e}_m + \tilde{\mathbf{n}}_m^{(q-1)} \otimes \mathbf{a}_m \right) + o(\|\mathbf{e}_m\|)$$

et l'équation (3.92) est ainsi vérifiée.

En utilisant l'approximation au premier ordre de  $\tilde{\mathbf{a}}_m^{q,l}$  (3.89) :

$$\tilde{\mathbf{a}}_m^{q,l} = \tilde{\mathbf{a}}_m^{\otimes l} \otimes \tilde{\mathbf{a}}_m^{\otimes(q-l)*} = \mathbf{a}_m^{q,l} + \tilde{\mathbf{e}}_m^{q,l} + o(\|\mathbf{e}_m\|)$$

En utilisant l'approximation au premier ordre de  $\tilde{\mathbf{a}}_m^{\otimes l}$  et  $\tilde{\mathbf{a}}_m^{\otimes(q-l)*}$  (3.88),

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}}_m^{q,l} &= (\mathbf{a}_m^{\otimes l} + \tilde{\mathbf{n}}_m^l + o(\|\mathbf{e}_m\|)) \otimes (\mathbf{a}_m^{\otimes(q-l)} + \tilde{\mathbf{n}}_m^{q-l} + o(\|\mathbf{e}_m\|))^* \\ &= (\mathbf{a}_m^{\otimes l} + \tilde{\mathbf{n}}_m^l) \otimes (\mathbf{a}_m^{\otimes(q-l)} + \tilde{\mathbf{n}}_m^{q-l})^* + o(\|\mathbf{e}_m\|) \\ &= \mathbf{a}_m^{\otimes l} \otimes \mathbf{a}_m^{\otimes(q-l)*} + \tilde{\mathbf{n}}_m^l \otimes (\mathbf{a}_m^{\otimes(q-l)})^* + \mathbf{a}_m^{\otimes l} \otimes \tilde{\mathbf{n}}_m^{q-l*} + \tilde{\mathbf{n}}_m^l \otimes \tilde{\mathbf{n}}_m^{q-l*} + o(\|\mathbf{e}_m\|) \end{aligned}$$

Sachant que  $\tilde{\mathbf{n}}_m^l \otimes \tilde{\mathbf{n}}_m^{q-l*} = o(\|\mathbf{e}_m\|)$  car  $\tilde{\mathbf{n}}_m^1 = \mathbf{e}_m$ , on en déduit que :

$$\tilde{\mathbf{a}}_m^{q,l} = \mathbf{a}_m^{\otimes l} \otimes \mathbf{a}_m^{\otimes(q-l)*} + \tilde{\mathbf{n}}_m^l \otimes (\mathbf{a}_m^{\otimes(q-l)})^* + \mathbf{a}_m^{\otimes l} \otimes \tilde{\mathbf{n}}_m^{q-l*} + o(\|\mathbf{e}_m\|)$$

et l'équation (3.91) est vérifiée.

## Démonstration de (3.93) et de (3.94)

Sachant que  $\mathbf{e}^{q,l} = \mathbf{P}_{\mathbf{e}}^{q,l} \mathbf{e} + \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{e}}^{q,l} \mathbf{e}^* + o(\|\mathbf{e}\|)$ ,  $\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{e}^T & \mathbf{e}^H \end{bmatrix}^T$  où  $\mathbf{e} = \text{vec}(\mathbf{E})$ , l'équation (3.93) est vérifiée. Sachant que  $\mathbf{e}_m^{q,l} = \tilde{\mathbf{e}}_m^{q,l} + o(\|\mathbf{e}_m\|)$  où  $\tilde{\mathbf{e}}_m^{q,l} = \mathbf{P}_{\mathbf{e}_m}^{q,l} \mathbf{e}_m + \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{e}_m}^{q,l} \mathbf{e}_m^*$  et que  $\mathbf{e}^{q,l} = \text{vec}(\mathbf{E}^{q,l})$ , l'équation (3.94) est démontrée.

## Démonstration de (3.95)

D'après (3.91),

$$\tilde{\mathbf{e}}_m^{q,l} = \tilde{\mathbf{n}}_m^l \otimes (\mathbf{a}_m^{\otimes(q-l)})^* + \mathbf{a}_m^{\otimes l} \otimes \tilde{\mathbf{n}}_m^{q-l*}$$

En utilisant les expressions (D.1) et (D.2),

$$\tilde{\mathbf{e}}_m^{q,l} = (\mathbf{I}_{N^l} \otimes (\mathbf{a}_m^{\otimes(q-l)})^*) \tilde{\mathbf{n}}_m^l + (\mathbf{a}_m^{\otimes l} \otimes \mathbf{I}_{N^{q-l}}) \tilde{\mathbf{n}}_m^{q-l*}$$

Sachant que  $\tilde{\mathbf{n}}_m^i = \mathbf{P}_{\mathbf{e}_m}^i \mathbf{e}_m$  alors  $\tilde{\mathbf{e}}_m^{q,l} = (\mathbf{I}_{N^l} \otimes (\mathbf{a}_m^{\otimes(q-l)})^*) \mathbf{P}_{\mathbf{e}_m}^l \mathbf{e}_m + (\mathbf{a}_m^{\otimes l} \otimes \mathbf{I}_{N^{q-l}}) (\mathbf{P}_{\mathbf{e}_m}^{q-l})^* \mathbf{e}_m^* = \mathbf{P}_{\mathbf{e}_m}^{q,l} \mathbf{e}_m + \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{e}_m}^{q,l} \mathbf{e}_m^*$  et les expressions des matrices  $\mathbf{P}_{\mathbf{e}_m}^{q,l}$  et  $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{e}_m}^{q,l}$  de l'équation (3.95) sont démontrées.

## Démonstration de (3.96)

D'après (3.92),

$$\tilde{\mathbf{n}}_m^q = \mathbf{a}_m^{\otimes(q-1)} \otimes \mathbf{e}_m + \tilde{\mathbf{n}}_m^{(q-1)} \otimes \mathbf{a}_m$$

En utilisant les expressions (D.1) et (D.2),

$$\tilde{\mathbf{n}}_m^q = (\mathbf{a}_m^{\otimes(q-1)} \otimes \mathbf{I}_N) \mathbf{e}_m + (\mathbf{I}_{N^{q-1}} \otimes \mathbf{a}_m) \tilde{\mathbf{n}}_m^{(q-1)}$$

Sachant que  $\tilde{\mathbf{n}}_m^1 = \mathbf{e}_m$  et  $\tilde{\mathbf{n}}_m^0 = 0$ , la relation (3.92) est vérifiée pour  $q = 1$  car  $\mathbf{P}_{\mathbf{e}_m}^1 = \mathbf{I}_N$ . En supposant que la relation soit vérifiée pour  $q - 1$ , alors  $\tilde{\mathbf{n}}_m^{(q-1)} = \mathbf{P}_{\mathbf{e}_m}^{q-1} \mathbf{e}_m$  et

$$\tilde{\mathbf{n}}_m^q = \left( \mathbf{a}_m^{\otimes(q-1)} \otimes \mathbf{I}_N \right) \mathbf{e}_m + (\mathbf{I}_{N^{q-1}} \otimes \mathbf{a}_m) \mathbf{P}_{\mathbf{e}_m}^{q-1} \mathbf{e}_m$$

et ainsi  $\mathbf{P}_{\mathbf{e}_m}^q = \left( \mathbf{a}_m^{\otimes(q-1)} \otimes \mathbf{I}_N \right) + (\mathbf{I}_{N^{q-1}} \otimes \mathbf{a}_m) \mathbf{P}_{\mathbf{e}_m}^{q-1}$  et l'équation (3.92) est vérifiée pour toutes valeurs de  $q$ .



## Annexe E

# Démonstrations du DL champ proche

### Démonstration de (2.29)

D'après (2.29) la dérivée première de  $b_n(\theta, \eta)$  vérifie :

$$b_n^{(1)}(\theta, \eta) = \left( -j \frac{2\pi}{\lambda_0} \Phi_n^{(1)}(\eta) \right) b_n(\theta, \eta) = C_0^0 \left( -j \frac{2\pi}{\lambda_0} \Phi_n^{(1)}(\eta) \right) b_n^{(0)}(\theta, \eta)$$

car  $C_0^0 = 1$  et  $b_n^{(0)}(\theta, \eta) = b_n(\theta, \eta)$  et l'équation (2.29) est vérifiée pour  $p = 1$ . En supposant que l'équation (2.29) est vérifiée en  $p - 1$ , on obtient que :

$$b_n^{(p-1)}(\theta, \eta) = \sum_{i=0}^{p-2} C_{p-2}^i \left( -j \frac{2\pi}{\lambda_0} \Phi_n^{(p-1-i)}(\eta) \right) b_n^{(i)}(\theta, \eta)$$

En conséquence :

$$\begin{aligned} b_n^{(p)}(\theta, \eta) &= \sum_{i=0}^{p-2} C_{p-2}^i \left( -j \frac{2\pi}{\lambda_0} \Phi_n^{(p-i)}(\eta) \right) b_n^{(i)}(\theta, \eta) + \sum_{i=0}^{p-2} C_{p-2}^i \left( -j \frac{2\pi}{\lambda_0} \Phi_n^{(p-1-i)}(\eta) \right) b_n^{(i+1)}(\theta, \eta) \\ &= \sum_{i=0}^{p-2} C_{p-2}^i \left( -j \frac{2\pi}{\lambda_0} \Phi_n^{(p-i)}(\eta) \right) b_n^{(i)}(\theta, \eta) + \sum_{i=1}^{p-1} C_{p-2}^{i-1} \left( -j \frac{2\pi}{\lambda_0} \Phi_n^{(p-i)}(\eta) \right) b_n^{(i)}(\theta, \eta) \\ &= C_{p-2}^0 \left( -j \frac{2\pi}{\lambda_0} \Phi_n^{(p)}(\eta) \right) b_n^{(0)}(\theta, \eta) + C_{p-2}^{p-2} \left( -j \frac{2\pi}{\lambda_0} \Phi_n^{(1)}(\eta) \right) b_n^{(p-1)}(\theta, \eta) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{p-2} (C_{p-2}^i + C_{p-2}^{i-1}) \left( -j \frac{2\pi}{\lambda_0} \Phi_n^{(p-i)}(\eta) \right) b_n^{(i)}(\theta, \eta) \end{aligned}$$

Sachant d'une part que  $C_{p-2}^0 = C_{p-1}^0 = C_{p-2}^{p-2} = C_{p-1}^{p-1} = 1$  et que d'autre part  $C_{p-2}^i + C_{p-2}^{i-1} = C_{p-1}^i$ , l'expression (2.29) est démontrée.

### Démonstration de (2.30)

Comme d'après (2.24),

$$\begin{aligned} \Psi_n^{(1)}(\eta) &= 2\eta \|\mathbf{r}_n\|_F^2 - 2\mathbf{k}(\theta)^H \mathbf{r}_n \\ \Psi_n^{(2)}(\eta) &= 2 \|\mathbf{r}_n\|_F^2 \text{ et } \Psi_n^{(p>2)}(\eta) = 0 \end{aligned}$$

où  $\Psi_n^{(p)}(\eta)$  est la dérivée  $p^{\text{ième}}$  de  $\Phi_n(\eta)$  en  $\eta$ , on en déduit que :

$$\begin{aligned}\Psi_n(0) &= 1 \\ \Psi_n^{(1)}(0) &= -2\mathbf{k}(\theta)^H \mathbf{r}_n \text{ et } \Psi_n^{(2)}(0) = 2\|\mathbf{r}_n\|_F^2 \\ \Psi_n^{(p)}(0) &= 0 \text{ pour } p > 2\end{aligned}$$

Soit la fonction  $g(\eta)$  tel que :

$$\eta \Phi_n(\eta) = \sqrt{\Psi_n(\eta)} - 1 = g(\eta) \quad (\text{E.1})$$

On démontre en fin du paragraphe-2.3.2 que :

$$\begin{aligned}p \Phi_n^{(p-1)}(\eta) + \Phi_n^{(p)}(\eta) \eta &= g^{(p)}(\eta) \\ \Phi_n^{(p)}(\eta = 0) &= \frac{g^{(p+1)}(\eta = 0)}{p+1}\end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

où  $g^{(p)}(\eta)$  est la dérivée  $p^{\text{ième}}$  de  $g(\eta)$  en  $\eta$ . D'autre part, on démontre en fin du paragraphe-2.3.2 que :

$$\begin{aligned}g^{(1)}(\eta) &= \frac{\Psi_n^{(1)}(\eta)}{2(1+g(\eta))} \quad \text{et} \quad g^{(2)}(\eta) = \frac{\Psi_n^{(2)}(\eta) - 2g^{(1)}(\eta)^2}{2(1+g(\eta))} \\ g^{(2p+1)}(\eta) &= -\frac{2\sum_{i=1}^p C_{2p+1}^i g^{(i)}(\eta)g^{(2p-i+1)}(\eta)}{2(1+g(\eta))} \\ g^{(2p)}(\eta) &= -\frac{C_{2p}^p g^{(p)}(\eta)^2 + 2\sum_{i=1}^{p-1} C_{2p}^i g^{(i)}(\eta)g^{(2p-i)}(\eta)}{2(1+g(\eta))}\end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Sachant que  $g(\eta = 0) = 0$ ,  $\Psi_n^{(1)}(\eta = 0) = -2\mathbf{k}(\theta)^H \mathbf{r}_n$  et  $\Psi_n^{(2)}(\eta = 0) = 2\|\mathbf{r}_n\|_F^2$  et que d'après (E.2) les expressions des  $\Phi_n^{(p)}(0) = g^{(p+1)}(0)/(p+1)$  de l'équation (2.24) sont vérifiées. De plus sachant que  $\Phi_n(0) = \Phi_n^{(0)}(0) = -\mathbf{k}(\theta)^H \mathbf{r}_n$ ,

$$b_n(\theta, 0) = \exp\left(-j2\pi\left(\Phi_n^{(0)}(0)/\lambda_0\right)\right) = \exp\left(j2\pi\left(\mathbf{k}(\theta)^H \mathbf{r}_n/\lambda_0\right)\right)$$

et l'équation (2.24) est complètement démontrée.

## Démonstration de (E.2)

Sachant que  $g(\eta) = \eta \Phi_n(\eta)$  d'après (E.1), la dérivée  $1^{\text{ière}}$  de  $g(\eta)$  vérifie :

$$g^{(1)}(\eta) = \Phi_n(\eta) + \Phi_n^{(1)}(\eta) \eta$$

Comme  $\Phi_n(\eta) = \Phi_n^{(0)}(\eta)$ , l'équation (E.2) est vérifiée pour  $p = 1$ . En supposant que l'équation (E.2) soit vérifiée en  $p - 1$ ,

$$g^{(p-1)}(\eta) = (p-1) \Phi_n^{(p-2)}(\eta) + \Phi_n^{(p-1)}(\eta) \eta$$

En dérivant  $g^{(p-1)}(\eta)$  par rapport à  $\eta$ , il vient :

$$\begin{aligned}g^{(p)}(\eta) &= (p-1) \Phi_n^{(p-1)}(\eta) + \Phi_n^{(p-1)}(\eta) + \Phi_n^{(p)}(\eta) \eta \\ &= p \Phi_n^{(p-1)}(\eta) + \Phi_n^{(p)}(\eta) \eta\end{aligned}$$

et l'équation (E.2) est démontrée.

## Démonstration de (E.3)

Sachant que  $\Psi_n(\eta) = (1 + g(\eta))^2$  d'après (E.1), la dérivée 1<sup>ière</sup> de  $\Psi_n(\eta)$  vérifie :

$$\Psi_n^{(1)}(\eta) = 2(1 + g(\eta))g^{(1)}(\eta) \text{ et } g^{(1)}(\eta) = \frac{\Psi_n^{(1)}(\eta)}{2(1 + g(\eta))}$$

La dérivée seconde de  $\Psi_n(\eta)$  s'écrit alors :

$$\Psi_n^{(2)}(\eta) = 2g^{(1)}(\eta)^2 + 2(1 + g(\eta))g^{(2)}(\eta) \text{ et } g^{(2)}(\eta) = \frac{\Psi_n^{(2)}(\eta) - 2g^{(1)}(\eta)^2}{2(1 + g(\eta))} \quad (\text{E.4})$$

et l'équation (E.3) est vérifiée pour des ordres  $k < 3$ . En  $k \geq 3$ , les dérivées  $k^{\text{ième}}$  de  $\Psi_n(\eta)$  sont nulles et d'après (E.4),

$$\begin{aligned} \Psi_n^{(3)}(\eta) &= 0 = 4g^{(1)}(\eta)g^{(2)}(\eta) + 2g^{(1)}(\eta)g^{(2)}(\eta) + 2(1 + g(\eta))g^{(3)}(\eta) \\ \text{et } g^{(3)}(\eta) &= -\frac{6g^{(1)}(\eta)g^{(2)}(\eta)}{2(1 + g(\eta))} \end{aligned}$$

et l'équation est vérifiée pour  $2p + 1 = 3$  car  $p = 1$  et  $i = 1$  et ainsi  $2C_{2p+1}^i = 2C_3^1 = 6$ . En supposant que l'équation (E.3) soit vérifiée à l'ordre  $k = 2p - 1 = 2(p - 1) + 1$ ,

$$2 \sum_{i=1}^{p-1} C_{2p-1}^i g^{(i)}(\eta)g^{(2p-i)}(\eta) + 2(1 + g(\eta))g^{(2p-1)}(\eta) = 0$$

En dérivant l'équation de ci-dessus, il vient :

$$\begin{aligned} &2 \sum_{i=1}^{p-1} C_{2p-1}^i g^{(i)}(\eta)g^{(2p-i)}(\eta) + 2 \sum_{i=1}^{p-1} C_{2p-1}^i g^{(i+1)}(\eta)g^{(2p-i-1)}(\eta) + 2g^{(1)}(\eta)g^{(2p-1)}(\eta) \\ &\quad + 2(1 + g(\eta))g^{(2p)}(\eta) = 0 \\ \Leftrightarrow &2 \sum_{i=1}^{p-1} C_{2p-1}^i g^{(i)}(\eta)g^{(2p-i)}(\eta) + 2 \sum_{i=2}^p C_{2p-1}^{i-1} g^{(i)}(\eta)g^{(2p-i)}(\eta) + 2g^{(1)}(\eta)g^{(2p-1)}(\eta) \\ &\quad + 2(1 + g(\eta))g^{(2p)}(\eta) = 0 \\ \Leftrightarrow &2C_{2p-1}^{p-1}g^{(p)}(\eta)^2 + 2 \sum_{i=2}^{p-1} (C_{2p-1}^i + C_{2p-1}^{i-1}) g^{(i)}(\eta)g^{(2p-i)}(\eta) + 2(C_{2p-1}^1 + 1)g^{(1)}(\eta)g^{(2p-1)}(\eta) \\ &\quad + 2(1 + g(\eta))g^{(2p)}(\eta) = 0 \end{aligned}$$

Sachant que  $C_{2p-1}^i + C_{2p-1}^{i-1} = C_{2p}^i$  et que  $C_{2p}^i = C_{2p}^{2p-i}$ , on en déduit que  $C_{2p-1}^{p-1} = C_{2p-1}^{2p-1-p+1} = C_{2p}^p$  et que  $2C_{2p-1}^{p-1} = C_{2p}^p + C_{2p-1}^{p-1} = C_{2p}^p$ . D'autre part, comme  $C_{2p-1}^1 + 1 = 2p - 1 + 1 = 2p = C_{2p}^1$ , il vient :

$$C_{2p}^p g^{(p)}(\eta)^2 + 2 \sum_{i=2}^{p-1} C_{2p}^i g^{(i)}(\eta)g^{(2p-i)}(\eta) + 2C_{2p}^1 g^{(1)}(\eta)g^{(2p-1)}(\eta) + 2(1 + g(\eta))g^{(2p)}(\eta) = 0$$

et l'expression de  $g^{(2p)}(\eta)$  dans (E.3) est vérifiée. En supposant que l'équation (E.3) soit vérifiée à l'ordre  $k = 2p$ ,

$$C_{2p}^p g^{(p)}(\eta)^2 + 2 \sum_{i=1}^{p-1} C_{2p}^i g^{(i)}(\eta)g^{(2p-i)}(\eta) + 2(1 + g(\eta))g^{(2p)}(\eta) = 0$$

En dérivant l'équation de ci-dessus, il vient :

$$\begin{aligned}
& 2C_{2p}^p g^{(p)}(\eta)g^{(p+1)}(\eta) + 2\sum_{i=1}^{p-1} C_{2p}^i g^{(i)}(\eta)g^{(2p-i+1)}(\eta) + 2\sum_{i=1}^{p-1} C_{2p}^i g^{(i+1)}(\eta)g^{(2p-i)}(\eta) \\
& \quad + 2g^{(1)}(\eta)g^{(2p)}(\eta) + 2(1+g(\eta))g^{(2p+1)}(\eta) = 0 \\
\Leftrightarrow & 2C_{2p}^p g^{(p)}(\eta)g^{(p+1)}(\eta) + 2\sum_{i=1}^{p-1} C_{2p}^i g^{(i)}(\eta)g^{(2p-i+1)}(\eta) + 2\sum_{i=2}^p C_{2p}^{i-1} g^{(i)}(\eta)g^{(2p-i+1)}(\eta) \\
& \quad + 2g^{(1)}(\eta)g^{(2p)}(\eta) + 2(1+g(\eta))g^{(2p+1)}(\eta) = 0 \\
\Leftrightarrow & 2\sum_{i=2}^{p-1} (C_{2p}^i + C_{2p}^{i-1}) g^{(i)}(\eta)g^{(2p-i+1)}(\eta) + 2(C_{2p}^p + C_{2p}^{p-1}) g^{(p)}(\eta)g^{(p+1)}(\eta) + \\
& \quad + 2(1+C_{2p}^1)g^{(1)}(\eta)g^{(2p)}(\eta) + 2(1+g(\eta))g^{(2p+1)}(\eta) = 0
\end{aligned}$$

Sachant que  $C_{2p}^i + C_{2p}^{i-1} = C_{2p+1}^i$  et que  $1 + C_{2p}^1 = C_{2p+1}^1$ , l'équation précédente devient :

$$2\sum_{i=2}^{p-1} C_{2p+1}^i g^{(i)}(\eta)g^{(2p-i+1)}(\eta) + 2C_{2p+1}^p g^{(p)}(\eta)g^{(p+1)}(\eta) + 2C_{2p+1}^1 g^{(1)}(\eta)g^{(2p)}(\eta) + 2(1+g(\eta))g^{(2p+1)}(\eta) = 0$$

et l'expression de  $g^{(2p+1)}(\eta)$  dans (E.3) est vérifiée.

## Annexe F

# Performances conditionnées à une résolution



## F.1 Probabilité de résolution [FLV05e]

1

# On the resolution probability of MUSIC in presence of modelling error.

A. Ferréol<sup>1,2</sup>, P. Larzabal<sup>2</sup>, *Member, IEEE*, M. Viberg<sup>3</sup>, *Fellow, IEEE*.

<sup>1</sup>THALES communication, 160 boulevard de Valmy 92700 Colombes, FRANCE

<sup>2</sup>SATIE, ENS Cachan, UMR 8029, 61 avenue du président Wilson, 94235 Cachan Cedex France.

anne.ferreol@fr.thalesgroup.com

<sup>3</sup>Chalmers University of Technology , Department of Signals and Systems , SE-412 96 Gothenburg SWEDEN.

SOFTWARE: Scientific Word 4.1

**Abstract**—When the correlation matrix is known, the resolution power of subspace algorithm is infinite. In the presence of modelling errors, even if the correlation matrix is known, they can no more resolve sources with a probability one. In the case of the MUSIC method, we used three different definitions of the resolution and we determine the corresponding expressions of the probability of source resolution versus the model mismatch error. These results are interesting for the determination of the antenna calibration accuracy. Numerical results support our theoretical investigations.

### I. INTRODUCTION

Estimating the direction of arrival (DOA) of a signal incident on a planar array of sensors has applications in many field including radar, sonar, telecommunications. A lot of work have already been done to characterize their performances in asymptotic region (in SNR and or number of sensors and or in the number of snapshots) [1][2]. One of the principal interest of the signal processing community for the so called high resolution method [3] lies on their asymptotic infinite resolution power if the assumed model of reception is the true one. Unfortunately, in operational context the assumed model of reception is different of the true one, even after a calibration procedure. Some efforts have recently been done in this sense to characterize the algorithm in presence of model mismatching.

In the presence of modelling mismatch, some authors have studied the performance degradation, in term of variance [4],[5],[6], [7],[8]. We recently extended these results to larger modelling errors[7]. For small model mismatch, the resolution probability is close to one, making previous results very interesting for small and medium errors. This is no more the case when these mismatch are increasing, because even if the correlation matrix is known, the resolution power is no more infinite. Consequently the previous statistical studies must be conditioned to some resolution conditions.

In this way, some others authors have investigated the performance decrease versus the model mismatch, under the point of view of Resolution threshold for equipowered sources and the use of an heuristic definition of the resolution threshold ([9][10][11][12],...). To the best of our knowledge, there is no general result for sources of different modelling error level, and moreover no one has established the probability of resolution under modelling errors. Without modelling errors

and with finite number of snapshots a probability of resolution is derived by Zhang in [13].

In this paper, for three different definitions we propose to derive probability of resolution in presence of modelling errors.

The organization of the paper is as follows. In section 2 we formulate the problem and introduce the notation. In section 3, we provide some background for the mathematical derivation. In section 4, we first propose two definitions of the resolution with steering vector whom the modelling error level. is DOA dependent, and we then establish the corresponding probability of resolution versus the model mismatch. In section 5 numerical simulations confirm theoretical study. A conclusion is given in section 6.

### II. SIGNAL MODELLING AND PROBLEM FORMULATION

A noisy mixture of  $M$  Narrow-Band sources of DOAs  $\theta_m$  ( $1 \leq m \leq M$ ) is received by an array of  $N$  sensors. The associated observation vector,  $\mathbf{x}(t)$ , whose components  $x_n(t)$  ( $1 \leq n \leq N$ ) are the complex envelopes of the signals at the output of the sensors, is thus given by

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{m=1}^M \tilde{\mathbf{a}}(\theta_m) s_m(t) + \mathbf{n}(t) = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

where  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta)$  is the true steering vector of a signal source in the direction  $\theta$ ,  $\tilde{\mathbf{A}} = [\tilde{\mathbf{a}}(\theta_1) \cdots \tilde{\mathbf{a}}(\theta_M)]$ ,  $\mathbf{n}(t)$  is the supposed spatially white noise vector and  $s_m(t)$  is the complex envelope of the  $m^{\text{th}}$  source. Denoting  $\mathbf{a}(\theta)$  the assumed steering vector used in the algorithm, the modelling error  $\mathbf{e}_m$  of the  $m^{\text{th}}$  source is defined by

$$\mathbf{e}_m = \tilde{\mathbf{a}}(\theta_m) - \mathbf{a}(\theta_m) = \tilde{\mathbf{a}}_m - \mathbf{a}_m \quad (2)$$

where  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_m) = \tilde{\mathbf{a}}_m$  and  $\mathbf{a}(\theta_m) = \mathbf{a}_m$ . The MUSIC DOA estimates are given by the  $M$  smallest local minima of the criterion function

$$c(\theta, \epsilon) = \mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{\Pi}(\epsilon) \mathbf{a}(\theta) \quad (3)$$

where  $\mathbf{\Pi}(\epsilon) = \mathbf{I}_N - \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{A}}^{\#}$ ,  $\tilde{\mathbf{A}} = [\tilde{\mathbf{a}}_1 \cdots \tilde{\mathbf{a}}_M]$  and  $\epsilon = [1 \text{ vec}([\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_M])^T \text{ vec}([\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_M])^H]^T$ . When the assumed steering vector is different from the true one,  $\mathbf{a}_m \neq \tilde{\mathbf{a}}_m$ ,  $c(\theta_m, \epsilon)$  presents a local minimum at  $\hat{\theta}_m$ , which is different

2

from  $\theta_m$ . We present a general framework for source resolution. It is therefore important to know if the sources are resolved. The random variable  $\Delta\theta_m = \hat{\theta}_m - \theta_m$  defines the DOA estimation error. In order to introduce and define a general resolution criterion, the paper needs the introduction of some thresholds  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq I$ ). The sources will be said resolved when the  $I$  features  $\eta_i$  extracted from the shape of the pseudo-spectrum verify,  $\eta_i < \alpha_i$ . Looking for the MUSIC probability of resolved sources seeks to evaluate the probability  $Pr = \text{prob}(\eta_i < \alpha_i, 1 \leq i \leq I)$  where  $E[x | y]$  means the conditional expectation of  $x$  assuming  $y$ .

### III. PREVIOUS RESULTS OF [7][8]

The purpose of this section is to introduce recent results that will be used in the sequel of the papers. According to [7][8] the DOA estimation error  $\Delta\theta_m = \hat{\theta}_m - \theta_m$  can be approximated using a second order Taylor Expansion of  $c(\theta, \epsilon)$  with respect to  $\Delta\theta_m$  by

$$\Delta\theta_m = -\frac{\dot{c}(\theta_m, \epsilon)}{\ddot{c}(\theta_m, \epsilon)} \quad (4)$$

where  $\dot{c}(\theta, \epsilon)$  and  $\ddot{c}(\theta, \epsilon)$ , respectively, indicate the first and second derivatives of the criterion  $c(\theta, \epsilon)$  at  $\theta$ . After a second order Taylor expansion [7][8] of  $\dot{c}(\theta, \epsilon)$  and  $\ddot{c}(\theta, \epsilon)$  with respect to  $\epsilon$ ,  $\Delta\theta_m$  becomes

$$\Delta\theta_m = -\frac{\dot{\tilde{c}}(\theta_m, \epsilon)}{\ddot{\tilde{c}}(\theta_m, \epsilon)} \quad (5)$$

$$\dot{\tilde{c}}(\theta_m, \epsilon) = \epsilon^H \dot{\mathbf{Q}}_m \epsilon$$

$$\ddot{\tilde{c}}(\theta_m, \epsilon) = \epsilon^H \ddot{\mathbf{Q}}_m \epsilon$$

$$\dot{\mathbf{Q}}_m \stackrel{def}{=} \mathbf{Q}(\mathbf{a}_m, \dot{\mathbf{a}}_m) + \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{a}}_m, \mathbf{a}_m),$$

$$\ddot{\mathbf{Q}}_m \stackrel{def}{=} \mathbf{Q}(\mathbf{a}_m, \ddot{\mathbf{a}}_m) + \mathbf{Q}(\ddot{\mathbf{a}}_m, \mathbf{a}_m) + 2 \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{a}}_m, \dot{\mathbf{a}}_m)$$

where  $\dot{c}(\theta, \epsilon) = \dot{\tilde{c}}(\theta_m, \epsilon) + o(\|\epsilon\|^2)$ ,  $\ddot{c}(\theta, \epsilon) = \ddot{\tilde{c}}(\theta_m, \epsilon) + o(\|\epsilon\|^2)$  and  $\dot{\mathbf{a}}_m, \ddot{\mathbf{a}}_m$  are respectively the first and second derivative of  $\mathbf{a}_m$  taken in  $\theta_m$  and the matrix  $\mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  is defined by

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \mathbf{v}^H \mathbf{\Pi}^{(2)}(\epsilon) \mathbf{u} \\ &= \epsilon^H \mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \epsilon, \end{aligned} \quad (6)$$

where  $\mathbf{\Pi}(\epsilon) = \mathbf{\Pi}^{(2)}(\epsilon) + o(\|\epsilon\|^2)$ ,  $^T$  defines the transpose,  $*$  is complex conjugate and

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} q & -q_{12}^H & \mathbf{0}^T \\ -q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ \mathbf{0} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

where  $\mathbf{\Pi}_0 = \mathbf{\Pi}(\epsilon = \mathbf{0})$ ,  $q = \mathbf{v}^H \mathbf{\Pi}_0 \mathbf{u}$ ,  $q_{12} = \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  and  $q_{21} = \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{u})$  with  $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{A}^\# \mathbf{u})^* \otimes (\mathbf{\Pi}_0 \mathbf{v})$ . The remaining blocks are given by

$$Q_{22} = \Psi(\mathbf{A}^\#, \mathbf{A}^\#, \mathbf{\Pi}_0),$$

$$Q_{23} = \Psi(\mathbf{A}^\#, \mathbf{\Pi}_0, (\mathbf{A}^\#)^H) \mathbf{P},$$

$$Q_{32} = \mathbf{P}^H \Psi(\mathbf{\Pi}_0, \mathbf{A}^\#, \mathbf{A}^\#),$$

$$Q_{33} = -\mathbf{P}^H \Psi(\mathbf{\Pi}_0, \mathbf{\Pi}_0, \mathbf{A}^\# (\mathbf{A}^\#)^H) \mathbf{P},$$

where  $\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = ((\mathbf{X}\mathbf{v})^* (\mathbf{Y}\mathbf{u})^T) \otimes \mathbf{Z}$ . Here,  $\otimes$  is the Kronecker product and  $\mathbf{P}$  the permutation matrix defined by  $\text{vec}(\mathbf{E}^T) = \mathbf{P} \text{vec}(\mathbf{E})$ .

In this paper, the random variable  $\epsilon$  is Gaussian and the random vectors  $\mathbf{e}_m$  are circular.

### IV. PRELIMINARY MATHEMATICAL RESULTS

#### A. Definition and notations

In this section  $x$  and  $y$  are Gaussian random variables. The correlation between the random variables  $u$  and  $v$  is

$$R_{uv} = E[uv] \quad (8)$$

where  $E[\cdot]$  is the mathematical expectation. Let's note the covariance  $C_{uv}$  between  $u$  and  $v$  is

$$C_{uv} = E[uv] - E[u]E[v] \quad (9)$$

The  $n^{\text{th}}$  Cumulative Moments Functions (CMF) of a stochastic variable  $x$  is given by

$$\gamma(x^n, p(x), \alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} x^n p(x) dx \quad (10)$$

where  $p(x)$  is the probability density function of  $x$ . In the particular case of Gaussian variable, let's note the function  $\gamma(x^n, p(x), \alpha)$  as  $\gamma_G(x^n, [\mu \sigma^2], \alpha)$  where  $\mu$  and  $\sigma$  are respectively the mean and the standard deviation. In the normal case where  $\mu = 0$  and  $\sigma = 1$ , the CMF function is noted  $\gamma(x^n, \alpha)$ . For  $n=0$ ,  $\gamma(x^0, \alpha) = \gamma(\alpha)$ .

*Lemma 1:* The incomplete moments  $E[x^n | x < \alpha]$  is given by

$$E[x^n | x < \alpha] = \frac{\gamma(x^n, p(x), \alpha)}{\gamma(x^0, p(x), \alpha)} \quad (11)$$

*Proof:* Noticing that  $p(x, x < \alpha) = p(x | x < \alpha) p(x < \alpha)$  and  $p(x < \alpha) = \gamma(x^0, p(x), \alpha)$ :

$$\begin{aligned} E[x^n | x < \alpha] &= \int_{-\infty}^{\alpha} x^n p(x | x < \alpha) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\alpha} x^n \frac{p(x, x < \alpha)}{p(x < \alpha)} dx \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\alpha} x^n p(x, x < \alpha) dx}{p(x < \alpha)} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\alpha} x^n p(x) dx}{p(x < \alpha)}. \end{aligned}$$

Consequently, the equation (11) is proven  $\blacksquare$

When  $u$  is a Gaussian random variable of standard deviation  $\sigma$  and mean  $\mu$ ,

$$E[x^n | x < \alpha] = \frac{\gamma_G(x^n, \mu, \sigma^2, \alpha)}{\gamma_G(x^0, \mu, \sigma^2, \alpha)} \quad (12)$$

*Lemma 2:* The closed form expressions of the CMF function in the Gaussian and normal case are obtain as following

3

$$\begin{aligned}\gamma_G(u^n, \mu, \sigma^2, \alpha) &= \sum_{k=0}^n C_n^{n-k} \sigma^{n-k} \mu^k \gamma(x^{n-k}, \alpha) \quad (13) \\ \gamma(x^n, \alpha) &= -\frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) \\ &\quad + (n-1)\gamma(x^{n-2}, \alpha)\end{aligned} \quad (14)$$

where  $u = \mu + \sigma x$ ,  $\gamma(x, \alpha) = -1/\sqrt{2\pi} \exp(-\alpha^2/2)$  and  $C_n^{n-k} = n!/((n-k)! k!)$ .

*Proof:* See Appendix-A. ■

*Lemma 3:* Noting the Gaussian variables  $x$  and  $y$  with the following statistics

$$E[x^2] = R_{xx}, E[y^2] = R_{yy} \text{ and } E[xy] = R_{xy} \quad (15)$$

the variable  $y$  can be rewritten as the following decomposition in two independents Gaussian variables  $x$  and  $v$  such that

$$y = -\frac{1}{C_{xx}} v + \frac{C_{xy}}{C_{xx}}(x - E[x]) + E[y] \quad (16)$$

where

$$\begin{aligned}C_{xx} &= R_{xx} - E[x]^2, C_{yy} = R_{yy} - E[y]^2 \quad (17) \\ \text{and } C_{xy} &= R_{xy} - E[x]E[y]\end{aligned}$$

the statistics of  $v$  checks  $E[v] = 0$  and

$$E[v^2] \stackrel{def}{=} C_{vv} = C_{xx}(C_{xx}C_{yy} - C_{xy}^2) \quad (18)$$

*Proof:* We consider the following covariance matrix of the vector  $\mathbf{z}=[x - E[x] \ y - E[y]]^T$

$$\mathbf{R}_{zz} = E[\mathbf{z}\mathbf{z}^T] = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{xy} & C_{yy} \end{bmatrix} \quad (19)$$

The purpose is to find a matrix  $\mathbf{T}$  such that  $\mathbf{e} = \mathbf{T}\mathbf{z}$  in order that the covariance matrix  $\mathbf{R}_{ee}$  of the zero-mean Gaussian variable  $\mathbf{e} = \mathbf{T}\mathbf{z}$  is diagonal. On the arbitrary constraints that  $\mathbf{T}$  is triangular inferior and the entry  $T_{11}=1$  then:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ C_{xy} & -C_{xx} \end{bmatrix} \quad (20)$$

the associated covariance matrix is then

$$\mathbf{R}_{ee} = E[\mathbf{e} \mathbf{e}^T] = \mathbf{T} \mathbf{R}_{zz} \mathbf{T}^T = C_{xx} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C_{xx}C_{yy} - C_{xy}^2 \end{bmatrix}$$

Noting  $\mathbf{e}=[(x - E[x]) \ v]^T$ , the Gaussian variable  $v$  is independent to  $x$  with  $E[v^2] = C_{xx}(C_{xx}C_{yy} - C_{xy}^2)$  and  $E[v] = 0$ . Using that  $\mathbf{e}=[(x - E[x]) \ v]^T = \mathbf{T}\mathbf{z}$ , the relation between  $v$  and  $y$  is at following

$$v = C_{xy}(x - E[x]) - C_{xx}(y - E[y])$$

and

$$C_{xx}(y - E[y]) = C_{xy}(x - E[x]) - v$$

and equation (16) is proven ■

$$E[y | x < \alpha] = \frac{C_{xy}}{C_{xx}} (E[x | x < \alpha] - E[x]) + E[y] \quad (21)$$

*Proof:* Using the expression (16) of  $y$

$$\begin{aligned}E[y | x < \alpha] &= \\ -\frac{1}{C_{xx}} E[v | x < \alpha] &+ \frac{C_{xy}}{C_{xx}} (E[x | x < \alpha] - E[x]) + E[y]\end{aligned}$$

Using the independence of  $v$  and  $x$  we obtain  $E[v | x < \alpha] = E[v] = 0$  and

$$E[y | x < \alpha] = \frac{C_{xy}}{C_{xx}} (E[x | x < \alpha] - E[x]) + E[y]$$

$$\begin{aligned}E[y^2 | x < \alpha] &= \left(\frac{C_{xy}}{C_{xx}}\right)^2 E[x^2 | x < \alpha - E[x]] \quad (22) \\ &\quad + 2E[y] \frac{C_{xy}}{C_{xx}} E[x | x < \alpha - E[x]] \\ &\quad + \frac{C_{xx}C_{yy} - C_{xy}^2}{C_{xx}} + E[y]^2\end{aligned}$$

*Proof:* Using the expressions (16) and the independence of the random variables  $x$  and  $v$ ,  $E[y^2 | x < \alpha]$  becomes

$$\begin{aligned}E[y^2 | x < \alpha] &\quad (23) \\ = a^2 E[v^2] + b^2 E[(x - E[x])^2 | x < \alpha] \\ &\quad + 2bc E[(x - E[x]) | x < \alpha] + c^2\end{aligned}$$

Using expressions (16) and (18) and noting that  $E[(x - E[x])^2 | x < \alpha] = E[\bar{x}^2 | \bar{x} < \alpha - E[x]]$  with  $\bar{x} = x - E[x]$ , the equation (22) is proven ■

## B. Theorem

The incomplete probabilities  $\text{prob}[x < \alpha, y < \beta]$  and  $\text{prob}[x < \alpha]$  are according to (38)

$$\begin{aligned}\text{prob}[x < \alpha, y < \beta] &= \text{prob}[x < \alpha] \text{prob}[y < \beta] \quad (24) \\ \text{prob}[x < \alpha] &= \gamma_G(x^0, [E[x] \ C_{xx}], \alpha) \quad (25) \\ \text{prob}[y < \beta] &= \gamma_G(y^0, E_y(\alpha), C_{yy}(\alpha), \alpha) \\ C_{yy}(\alpha) &= E[y^2 | x < \alpha] - E_y(\alpha)^2 \\ E_y(\alpha) &= E[y | x < \alpha]\end{aligned}$$

where  $y^0 \in \{y | x < \alpha\}$ .

## V. THE PROBABILITY OF RESOLUTION

The papers [9][10][11][12], propose a definition of the resolution limit based on the MUSIC pseudo-spectrum  $c(\theta, \epsilon)$  taken at the true position  $\theta_1$  and  $\theta_2$  and at the mean value  $\bar{\theta} = (\theta_1 + \theta_2)/2$ . In this section, we use three different approaches for the definition of the resolution, and we establish, for the first time to our knowledge, the three corresponding expressions for the probability of resolution.

4

### A. First approach

In this approach we generalise the resolution threshold definition given in [11] and only based on the expectation of the criterion  $c(\theta_1, \epsilon)$ ,  $c(\theta_2, \epsilon)$  and  $c(\bar{\theta}, \epsilon)$ . In order to derive a probability of resolution, we reconsider the previous definition without expectation operator. This leads us to define the resolution of two sources of DOAs  $\theta_1$  and  $\theta_2$  as

$$c(\theta_1, \epsilon) < c(\bar{\theta}, \epsilon) \text{ and } c(\theta_2, \epsilon) < c(\bar{\theta}, \epsilon) \quad (26)$$

Using (6) and a second order Taylor expansion of  $c(\theta, \epsilon)$  with respect to  $\epsilon$ ,  $c(\theta, \epsilon)$  can be approximated by  $c(\theta, \epsilon) \approx \varphi(\mathbf{a}(\theta), \mathbf{a}(\theta)) = \epsilon^H \mathbf{Q}(\mathbf{a}(\theta), \mathbf{a}(\theta)) \epsilon$ . Noting  $\mathbf{Q}_m \stackrel{def}{=} \mathbf{Q}(\mathbf{a}(\theta_m), \mathbf{a}(\theta_m))$ ,  $\bar{\mathbf{Q}} \stackrel{def}{=} \mathbf{Q}(\mathbf{a}(\bar{\theta}), \mathbf{a}(\bar{\theta}))$ , the resolution condition given by (26) can be rewritten as

$$\begin{aligned} \eta_1 &< 0 \text{ and } \eta_2 < 0 \\ \eta_i &= \epsilon^H (\mathbf{Q}_i - \bar{\mathbf{Q}}) \epsilon \end{aligned} \quad (27)$$

where  $\eta_i$  are real random variables. The purpose is then to provide the resolution probability  $Pr = \text{prob}(\eta_1 < 0, \eta_2 < 0)$ .

Using the results established in [7][8], the first order Taylor expansion of  $\Delta\theta_m(4)$  with respect to  $(u, v)$  is

$$\begin{aligned} \Delta\theta_m &= \alpha_1 + \alpha_2 \dot{\tilde{c}}(\theta_m, \epsilon) + \alpha_3 \ddot{\tilde{c}}(\theta_m, \epsilon) + o(\|u\|, \|v\|) \\ \alpha_1 &= -\frac{E[\dot{\tilde{c}}(\theta_m, \epsilon)]}{E[\ddot{\tilde{c}}(\theta_m, \epsilon)]}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{E[\ddot{\tilde{c}}(\theta_m, \epsilon)]} \\ \alpha_3 &= -\frac{\alpha}{E[\ddot{\tilde{c}}(\theta_m, \epsilon)]} \end{aligned} \quad (28)$$

where  $u = \left( \frac{\dot{\tilde{c}}(\theta_m, \epsilon) - E[\dot{\tilde{c}}(\theta_m, \epsilon)]}{E[\ddot{\tilde{c}}(\theta_m, \epsilon)]} \right)$ ,  $v = \left( \frac{\ddot{\tilde{c}}(\theta_m, \epsilon) - E[\ddot{\tilde{c}}(\theta_m, \epsilon)]}{E[\ddot{\tilde{c}}(\theta_m, \epsilon)]} \right) - 1$  and  $\dot{\tilde{c}}(\theta_m, \epsilon) = \epsilon^H \dot{\mathbf{Q}}_m \epsilon$ ,  $\ddot{\tilde{c}}(\theta_m, \epsilon) = \epsilon^H \ddot{\mathbf{Q}}_m \epsilon$ . In this approach the random variables  $\dot{\tilde{c}}$  and  $\ddot{\tilde{c}}$  are assumed Gaussian. This assumption will be discussed in the simulation section.

**Proposition :** The probability of resolution is given by

$$\begin{aligned} \text{prob}[\eta_1 < 0, \eta_2 < 0] &= \text{prob}[\eta_1 < 0] \text{prob}[\eta_2 < 0] \\ \text{prob}[\eta_1 < 0] &= \gamma_G(\eta_1^0, [E[\eta_1] \ E[\eta_1^2] - E[\eta_1]^2], 0) \\ \text{prob}[\eta_2 < 0] &= \gamma_G(\eta_2^0, [E[\eta_2] \ E[\eta_2^2] - E[\eta_2]^2], 0) \end{aligned}$$

where  $\eta_2^0 \in \{\eta_2 \mid \eta_1 < 0\}$ ,  $C_{\eta_2, \eta_2'}(0) = E[\eta_2^2 \mid \eta_1 < 0] - E_{\eta_2'}(0)^2$ ,  $E_{\eta_2'}(0) = E[\eta_2 \mid \eta_1 < 0]$ ,  $E[\eta_2^2 \mid \eta_1 < 0]$  and  $E[\eta_2 \mid \eta_1 < 0]$  are given in (21)(22) needing the following statistical moments

$$\begin{aligned} E[\eta_i^2] &= F_2(\mathbf{Q}_i - \bar{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}_i - \bar{\mathbf{Q}}) \\ E[\eta_1 \eta_2] &= F_2(\mathbf{Q}_1 - \bar{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}_2 - \bar{\mathbf{Q}}) \\ E[\eta_i] &= \text{trace}((\mathbf{Q}_i - \bar{\mathbf{Q}}) \mathbf{R}_\epsilon) \end{aligned} \quad (29)$$

where

$$F_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = E[(\epsilon^H \mathbf{A} \epsilon)(\epsilon^H \mathbf{B} \epsilon)].$$

*Proof:* See the demonstration in Appendix-A. ■

### B. Approaches with one threshold

1) *Definition of the second approach:* In this approach, the resolution of two sources of DOAs  $\theta_1$  and  $\theta_2$  is defined by

$$\ddot{c}(\bar{\theta}, \epsilon) < 0. \quad (30)$$

This condition means that the MUSIC null spectrum presents a positive concavity between  $\theta_1$  and  $\theta_2$ , ensuring the presence of two minima. Using (5), the expression of  $\ddot{c}(\bar{\theta}, \epsilon)$  is

$$\begin{aligned} \ddot{c}(\bar{\theta}, \epsilon) &= \epsilon^H \ddot{\mathbf{Q}} \epsilon \\ \ddot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{Q}(\mathbf{a}(\bar{\theta}), \ddot{\mathbf{a}}(\bar{\theta})) + \mathbf{Q}(\ddot{\mathbf{a}}(\bar{\theta}), \mathbf{a}(\bar{\theta})) + 2 \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{a}}(\bar{\theta}), \dot{\mathbf{a}}(\bar{\theta})) \end{aligned}$$

where  $\dot{\mathbf{a}}(\theta)$ ,  $\ddot{\mathbf{a}}(\theta)$  are respectively the first and second derivative of  $\mathbf{a}(\theta)$  taken in  $\bar{\theta}$ . The resolution condition given by (30) can be rewritten as

$$\eta_1 < 0 \text{ with } \eta_i = \epsilon^H \ddot{\mathbf{Q}} \epsilon$$

where  $\eta_1$  is a real random variables. The purpose is then to establish the resolution probability  $Pr = \text{prob}(\eta_1 < 0)$ .

2) *Definition of the third approach:* In this approach similar to Zhang [13] in the case of finite number of snapshots without modelling error, the resolution of two sources of DOAs  $\theta_1$  and  $\theta_2$  is defined by

$$\frac{c(\theta_1, \epsilon) + c(\theta_2, \epsilon)}{2} < c(\bar{\theta}, \epsilon) \quad (31)$$

Using (6) and a second order Taylor expansion of  $c(\theta, \epsilon)$  with respect to  $\epsilon$ ,  $c(\theta, \epsilon)$  can be approximated by  $c(\theta, \epsilon) \approx \varphi(\mathbf{a}(\theta), \mathbf{a}(\theta)) = \epsilon^H \mathbf{Q}(\mathbf{a}(\theta), \mathbf{a}(\theta)) \epsilon$ . Noting  $\mathbf{Q}_m \stackrel{def}{=} \mathbf{Q}(\mathbf{a}(\theta_m), \mathbf{a}(\theta_m))$ ,  $\bar{\mathbf{Q}} \stackrel{def}{=} \mathbf{Q}(\mathbf{a}(\bar{\theta}), \mathbf{a}(\bar{\theta}))$ , the resolution condition given by (31) can be rewritten as

$$\begin{aligned} \eta_1 < 0 \text{ with } \eta_1 &= \epsilon^H \ddot{\mathbf{Q}} \epsilon \\ \ddot{\mathbf{Q}} &= \frac{\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2}{2} - \bar{\mathbf{Q}} \end{aligned}$$

where  $\eta_1$  is a real random variables. The purpose is then to establish the resolution probability  $Pr = \text{prob}(\eta_1 < 0)$ .

3) *Calculation of  $Pr = \text{prob}(\eta_1 < 0)$  under Gaussian assumption on  $\eta_1$ :* The probability of resolution is given by

$$\text{prob}[\eta_1 < 0] = \gamma_G(\eta_1^0, [E[\eta_1] \ E[\eta_1^2] - E[\eta_1]^2], 0)$$

where the moment of  $\eta_1$  are given in (21)(22) needing the following statistical moments

$$\begin{aligned} E[\eta_1^2] &= F_2(\ddot{\mathbf{Q}}, \ddot{\mathbf{Q}}) \\ E[\eta_1] &= \text{trace}(\ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{R}_\epsilon) \end{aligned} \quad (32)$$

where the moment  $F_2(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  is given by (40).

5

## VI. SIMULATIONS

In this section we present the result of computer simulations, to illustrate the usefulness of the obtained results. The array of sensors is uniform circular with radius  $R=0.5\lambda$  and  $N=5$  sensors. The beamwidth of the array at 3 dB is  $\Delta\theta = \pm 28^\circ$ . Two sources are impinging on the antenna from directions  $\theta_1 = 0^\circ$  and  $\theta_2$ (variable). For the first source, the following figures compare the results of simulations with 1000 independent trials, to the both theoretical probabilities of resolution proposed in this paper. The random modeling errors are circular, symmetric, Gaussian with  $E[\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^H] = \delta_{i-j} \sigma^2 \mathbf{I}_N$ . Let's us define the spatial correlation  $c_{12}$  between the two sources as

$$c_{12} = \frac{|\mathbf{a}(\theta_1)^H \mathbf{a}(\theta_2)|^2}{(\mathbf{a}(\theta_1)^H \mathbf{a}(\theta_1))(\mathbf{a}(\theta_2)^H \mathbf{a}(\theta_2))}$$

In the Figures 1-2-3, the resolution probability is carried out according to the level  $\sigma$  for respectively  $\theta_2 = 11.7^\circ, 20.9^\circ$  and  $28^\circ$ . These three values of  $\theta_2$  correspond respectively to the spatial correlation 0.9, 0.7 and 0.5. In the Figures 4-5 the resolution probability is plotted versus the spatial correlation  $c_{12}$  for respectively  $\sigma = 0.03$  and 0.122.

The simulations and theoretical results are in a very good agreement even if the sources are closed with high spatial correlation  $c_{12}$ . As a byproduct and as expected, the first definition of the probability of resolution requiring two thresholds is more pessimistic than the second one.

## VII. CONCLUSION

This paper provides two definitions of the probability of resolution. For each definition we have provided an analysis of the MUSIC algorithms. These gives more insight about the resolution capabilities of MUSIC than the previous resolution threshold, indeed it is the first time that a theoretical expression of the resolution probability is available. These results can be used as tools to design a calibration process for an bearing estimation experimental set-up.

## VIII. APPENDIX-A : PROOF OF (13)(14)

## A. Proof equation (14)

*Lemma 4:* The CMF function is given by for  $n=1$

$$\gamma_N(x, \alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) \quad (33)$$

*Proof:* Recalling that the probability density function of the stochastic variable  $x$  checks  $p(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \exp(-x^2/2)$ , the function  $\gamma(x^0, \alpha)$  becomes

$$\begin{aligned} \gamma(x, \alpha) &= \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ -\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right]_{-\infty}^{\alpha} \end{aligned}$$

This last relation proved (33). ■

*Lemma 5:* The relation between the functions  $\gamma(x^n, \alpha)$  and  $\gamma(x^{n-2}, \alpha)$  is given by

$$\gamma(x^n, \alpha) = -\frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) + (n-1)\gamma(x^{n-2}, \alpha) \quad (34)$$

*Proof:* The function  $CMF_N(x^n, \alpha)$  of equation (10) becomes

$$\gamma(x^n, \alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{x^n}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \quad (35)$$

Noting  $f^{(n)}(x)$  the  $n^{\text{th}}$  derivative of  $f(x)$  and

$$u(x) = x^{n-1} \text{ and } v^{(1)}(x) = x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (36)$$

and:

$$u^{(1)}(x) = (n-1)x^{n-2} \text{ and } v(x) = -\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (37)$$

Using (36) and (37),  $\gamma(x^n, \alpha)$  becomes

$$\begin{aligned} \gamma(x^n, \alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [u(x)v(x)]_{-\infty}^{\alpha} \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} u^{(1)}(x)v(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ -x^{n-1} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right]_{-\infty}^{\alpha} \\ &\quad + \frac{n-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} x^{n-2} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \end{aligned}$$

This last equation proved equation (34) ■

## B. Proof of equation (13)

If  $u$  is a gaussian random variable of standard deviation  $\sigma$  and mean  $\mu$  where  $u = \mu + \sigma x$  and  $x$  a normal variable, the relation between the CMF functions of  $u$  and  $x$  is at following

$$\gamma_G(u^n, [\mu \sigma^2], \alpha) = \sum_{k=0}^n C_n^{n-k} \sigma^{n-k} \mu^k \gamma(x^{n-k}, \alpha) \quad (38)$$

where

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

*Proof:* Using that  $u = \mu + \sigma x$  and  $p(x) = (1/\sqrt{2\pi\sigma^2}) \exp(-(u-\mu)^2/2\sigma^2)$ , the CMF function of the variable  $u$  of relation (10) becomes

$$\begin{aligned} \gamma_G(u^n, [\mu \sigma^2], \alpha) &= \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{x^n}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{(\mu + \sigma x)^n}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \end{aligned} \quad (39)$$

Putting the following relation:

$$(\mu + \sigma x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^{n-k} \sigma^{n-k} \mu^k x^{n-k}$$

into the relation (39) the equation (38) is proven

#### IX. APPENDIX-B : HIGHER ORDER MOMENTS OF CIRCULAR GAUSSIAN RANDOM VARIABLES

The purpose of this section is to provide an expression of the following moments

$$F_Q(\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_Q) = E \left[ \prod_{q=1}^Q \varepsilon^H \mathbf{Q}_q \varepsilon \right] \quad (40)$$

where  $\varepsilon = [\mathbf{x} \ \mathbf{e}^H]^T$ ,  $\mathbf{x} = [1 \ \mathbf{e}^T]^T$  and  $\mathbf{e}$  is a Gaussian and circular random variable such that

$$\mathbf{R}_e = E[\mathbf{e} \ \mathbf{e}^H] \quad \text{and} \quad E[\mathbf{e}] = \mathbf{0} \quad (41)$$

where is the null vector  $\mathbf{0}$  and  $E[\mathbf{e} \ \mathbf{e}^T] = \mathbf{0}$ . According to (41) we deduce that

$$E[\mathbf{x}] = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 \quad \text{and} \quad \mathbf{R}_x = E[(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) (\mathbf{x} - \mathbf{e}_1)^H] \quad (42)$$

where  $\mathbf{R}_x$  is the covariance matrix of  $\mathbf{x}$ . Using the relation (61), the expression (40) becomes

$$F_Q(\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_Q) = E \left[ \prod_{q=1}^Q (\mathbf{x}^H \mathbf{Q}_q^I \mathbf{x} + \delta \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_q^R \delta \mathbf{x} + \delta \mathbf{x}^H \mathbf{Q}_q^I \delta \mathbf{x}^*) \right]$$

where  $\delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{e}_1$ . Noting that  $\mathbf{e}$  is circular only few products of  $F_2(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$  are not zero-null, the expression of (40) becomes

$$F_Q(\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_Q) = \sum_{k=1}^Q T_k$$

$$T_1 = E \left[ \prod_{q=1}^Q \mathbf{x}^H \mathbf{Q}_q^0 \mathbf{x} \right] \quad (43)$$

$$T_2 = \sum_{i=1}^Q E \left[ (\delta \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_i^R \delta \mathbf{x}) \left( \prod_{j \neq i} \mathbf{x}^H \mathbf{Q}_j^0 \mathbf{x} \right) \right] \quad (44)$$

$$T_3 = \sum_{i=1}^Q E \left[ (\delta \mathbf{x}^H \mathbf{Q}_i^I \delta \mathbf{x}^*) \left( \prod_{j \neq i} \mathbf{x}^H \mathbf{Q}_j^0 \mathbf{x} \right) \right] \quad (45)$$

$$T_4 = \sum_{i=1}^Q \sum_{j \neq i} E[f_{ij}(\mathbf{x}, \delta \mathbf{x})] \quad (46)$$

with

$$f_{ij}(\mathbf{x}, \delta \mathbf{x}) = (\delta \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_i^R \delta \mathbf{x}) (\delta \mathbf{x}^H \mathbf{Q}_j^I \delta \mathbf{x}^*) \left( \prod_{k \neq i \neq j} \mathbf{x}^H \mathbf{Q}_k^0 \mathbf{x} \right)$$

$$A. \text{ Calculation of } T_1 = E \left[ \prod_{q=1}^Q \mathbf{x}^H \mathbf{Q}_q^0 \mathbf{x} \right]$$

Using (58), the expression of the moment  $E[x_1 y_2^* \dots x_{2Q-1} y_{2Q}^*]$  where  $x_i$  and  $y_i$  are Gaussian and circular random variable,  $E[x_i x_j] = 0$  and  $E[y_i^* y_j^*] = 0$ , is at following

$$E[x_1 y_2^* \dots x_{2Q-1} y_{2Q}^*] = \sum_{p=0}^Q J_2^p \quad (47)$$

where

$$J_2^p = \sum_{\Phi_p} \left( \prod_{i=1}^p E[x_u] E[y_v^*] \right) \left( \prod_{\substack{i=1 \\ (u,v) \in \Phi_{pi}}}^{Q-p} \text{cov}[x_u y_v^*] \right) \quad (48)$$

where  $\text{cov}[xy] = E[xy] - E[x]E[y]$  and  $\Phi_p$  is a partition of  $\Phi = \{1, 2, \dots, 2Q\}$  such that

$$\Phi_p = \left( \bigcup_{i=1}^p \Omega_{pxi} \right) \cup \left( \bigcup_{i=1}^p \Omega_{pyi} \right) \cup \left( \bigcup_{i=1}^{Q-p} \Phi_{pi} \right) \quad (49)$$

For instance for  $Q=2$  and  $p=1$  the partitions  $\Phi_1$  are

$$\begin{aligned} &\{1\} \cup \{2\} \cup \{3 \ 4\} \\ &\{1\} \cup \{4\} \cup \{2 \ 3\} \end{aligned}$$

Replacing  $x_q y_q^*$  by  $\mathbf{x}^H \mathbf{Q}_q \mathbf{x}$  into (47) we provide an analytical expression of  $I_Q(\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_Q)$ . More precisely we used the following properties to provide  $I_Q(\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_Q)$

$$\begin{aligned} \text{cov}[x_i y_i^*] &= \text{trace}(\mathbf{Q}_i \mathbf{R}_x) \quad (50) \\ \text{cov}[x_j y_j^*] \text{cov}[x_i y_i^*] &= \text{trace}(\mathbf{Q}_i \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_j \mathbf{R}_x) \\ E[x_i] \text{cov}[y_i^* x_j] E[y_j^*] &= \mathbf{e}_1^H \mathbf{Q}_i \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_j \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

knowing that  $x_i y_i^* = \mathbf{x}^H \mathbf{Q}_i \mathbf{x}$ ,  $x_j y_j^* = \mathbf{x}^H \mathbf{Q}_j \mathbf{x}$ . Using the equations (47) and (50) when  $Q=2$  then:

$$T_1 = J_2^0 + J_2^1 + J_2^2 \quad (51)$$

where

$$\begin{aligned} J_2^0 &= \text{trace}(\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_x) \text{trace}(\mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_x) \\ &\quad + \text{trace}(\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_x) \\ J_2^1 &= \mathbf{e}_1^H \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_2 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1^H \mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}_1 \\ J_2^2 &= \mathbf{e}_1^H \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_1^H \mathbf{Q}_2 \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

#### B. Calculation of $T_2$ and $T_3$

The purpose of this section is to provide an expression of the following symmetric moments

$$S_{Q,\mathbf{x}}(\mathbf{Q}_0, \{\mathbf{Q}_1 \leq i \leq Q-1\}) = E \left[ (\mathbf{u}^T \mathbf{Q}_0 \mathbf{u}) \left( \prod_{q=1}^{Q-1} \mathbf{x}^H \mathbf{Q}_q \mathbf{x} \right) \right] \quad (52)$$

where  $\mathbf{u} = \mathbf{x} - E[\mathbf{x}]$  and  $\mathbf{x}$  is a Gaussian and circular random variable define in (42) and (41). Putting  $x_{2q-1} x_{2q} = \mathbf{x}^H \mathbf{Q}_q \mathbf{x}$  and  $x_{2Q} x_{2Q-1} = \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_0 \mathbf{x}$  into (58) we provide an analytical

7

expression of  $S_Q(\mathbf{Q}_0, \{\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_Q\})$ . In addition of (50), we used the following properties to provide symmetric moments

$$E[x_{2i'}] E[x_{2i}] \quad (53)$$

$$\begin{aligned} & cov[x_{2i'-1}x_{2Q-1}] cov[x_{2i'-1}x_{2Q}] \\ &= \mathbf{e}_1^H \mathbf{Q}_0^T \mathbf{R}_x^* \mathbf{Q}_0 \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_0 \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

$$E[x_{2i'}] E[x_{2i}] \quad (54)$$

$$\begin{aligned} & cov[x_{2i'-1}x_{2Q}] cov[x_{2i'-1}x_{2Q-1}] \\ &= \mathbf{e}_1^H \mathbf{Q}_0^T \mathbf{R}_x^* \mathbf{Q}_0^T \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_0 \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

When  $Q = 2$ , then

$$S_{2,x}(\mathbf{Q}_0, \{\mathbf{Q}_1\}) = 0 \quad (55)$$

Thus using (44)(45) and (52),  $T_2 = S_{2,x}(\mathbf{Q}_1^R, \mathbf{Q}_2^0) + S_{2,x}(\mathbf{Q}_2^R, \mathbf{Q}_1^0) = 0$  and  $T_3 = S_{2,x^*}(\mathbf{Q}_1^I, \mathbf{Q}_2^{0T}) + S_{2,x^*}(\mathbf{Q}_2^I, \mathbf{Q}_1^{0T}) = 0$ .

### C. Calculation of $T_4$

The purpose of this section is to provide an expression of the following symmetric moments

$$\begin{aligned} & S_Q(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \{\mathbf{Q}_{1 \leq i \leq Q-2}\}) \\ &= E \left[ (\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u}) (\mathbf{u}^H \mathbf{B} \mathbf{u}^*) \left( \prod_{q=1}^{Q-2} \mathbf{x}^H \mathbf{Q}_q \mathbf{x} \right) \right] \end{aligned} \quad (56)$$

where  $\mathbf{u} = \mathbf{x} - E[\mathbf{x}]$  and  $\mathbf{x}$  is a Gaussian and circular random variable define in (42) and (41). Putting  $x_{2q-1}x_{2q} = \mathbf{x}^H \mathbf{Q}_q \mathbf{x}$ ,  $x_{2Q-1}x_{2Q-2} = \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u}$  and  $x_{2Q}x_{2Q-1} = \mathbf{u}^H \mathbf{B} \mathbf{u}^*$  into (58) we provide an analytical expression of  $S_Q(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \{\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_{Q-2}\})$ . On the following we used the properties of expressions (50) and (53).

When  $Q = 2$ , the expression of  $S_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \{\})$  is

$$\begin{aligned} S_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \{\}) &= trace(\mathbf{A} \mathbf{R}_x \mathbf{B} \mathbf{R}_x^*) \\ &+ trace(\mathbf{A} \mathbf{R}_x \mathbf{B}^T \mathbf{R}_x^*) \end{aligned} \quad (57)$$

and according to (46) then :  $T_4 = S_2(\mathbf{Q}_1^R, \mathbf{Q}_2^I, \{\}) + S_2(\mathbf{Q}_2^R, \mathbf{Q}_1^I, \{\})$

### D. Moments of Gaussian random variables

To compute the moment  $E[x_1 \dots x_{2Q}]$  where  $x_i$  is Gaussian, it is necessary to use the reverse of the formula known as of Leonov and Shirayev giving the moments according to cumulants. This formula is simplified in the following way under the Gaussian assumption by using the cancellation property of cumulants of order strictly higher than second

$$E[x_1 \dots x_{2Q}] = \sum_{p=0}^Q J_Q^p \quad (58)$$

where

$$J_Q^p = \sum_{\Phi_p} \left( \prod_{\substack{i=1 \\ u \in \Omega_{pi}}}^{2p} E[x_u] \right) \left( \prod_{\substack{i=1 \\ (u,v) \in \Phi_{pi}}}^{Q-p} cov[x_u x_v] \right) \quad (59)$$

where  $cov[xy] = E[xy] - E[x]E[y]$  and  $\Phi_p$  is a partition of  $\Phi = \{1, 2, \dots, 2Q\}$  such that

$$\Phi_p = \left( \bigcup_{i=1}^{2p} \Omega_{pi} \right) \cup \left( \bigcup_{i=1}^{Q-p} \Phi_{pi} \right) \quad (60)$$

### E. Matrix reduction

The hermitian form  $\varepsilon^T \mathbf{Q}_k \varepsilon$  where  $\varepsilon = [1 \ \mathbf{x}^T \ \mathbf{x}^H]^T$  can be rewritten as

$$\varepsilon^T \mathbf{Q}_k \varepsilon = \mathbf{x}^H \mathbf{Q}_k^0 \mathbf{x} + \delta \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_k^R \delta \mathbf{x} + \delta \mathbf{x}^H \mathbf{Q}_k^I \delta \mathbf{x}^* \quad (61)$$

where

$$\mathbf{Q}_k^0 = \begin{bmatrix} q_{11} & \mathbf{q}_{12} + \mathbf{q}_{31}^T \\ \mathbf{q}_{21} + \mathbf{q}_{13}^T & \mathbf{Q}_{22} + \mathbf{Q}_{33}^T \end{bmatrix} \text{ and } \delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{1}$$

and

$$\mathbf{Q}_k^R = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{32} \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{Q}_k^I = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{23} \end{bmatrix}$$

noting that

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & \mathbf{q}_{12} & \mathbf{q}_{13} \\ \mathbf{q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} & \mathbf{Q}_{23} \\ \mathbf{q}_{31} & \mathbf{Q}_{32} & \mathbf{Q}_{33} \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

### REFERENCES

- [1] P. Stoica and A. Nehorai, "MUSIC, maximum likelihood and the Cramer-Rao bound," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 37, pp. 720-741, May 1989.
- [2] M. Viberg, B. Ottersten, and A. Nehorai, "Performance analysis of direction finding with large arrays and finite data," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 43, pp. 469-477, Feb. 1995.
- [3] R. O. Schmidt, *A signal subspace approach to multiple emitter location and spectral estimation*. PhD thesis, Stanford University, Stanford, CA, Nov. 1981.
- [4] B. Friedlander, "Sensitivity analysis of the MUSIC algorithm," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 38, pp. 1740-1751, July 1990.
- [5] B. Friedlander, "Sensitivity analysis of the maximum likelihood direction-finding algorithm," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 26, pp. 953-958, Nov. 1990.
- [6] S. Marcos, *Chapitre 11: Sensibilité des méthodes HR aux perturbations de modèle. Les Méthodes à Haute Résolution: Traitement d'Antenne et Analyse Spectrale*. Paris: Hermes ISBN 2-86601-662-9, 1998.
- [7] A. Ferréol, P. Larzabal, and M. Viberg, "On the asymptotic performance analysis of subspace DOA estimation in the presence of modeling errors: Case of MUSIC," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 2005. Accepted to.
- [8] A. Ferréol and P. Larzabal, "Etude analytique de l'impact des erreurs de calibration sur les performances d'estimateurs de direction d'arrivées : cas de la méthode MUSIC," in *Proceedings GRETSI*, (Paris, FR), pp. 133-135, 2003.
- [9] M. Kaveh and A. J. Barabell, "The statistical performance of the MUSIC and the minimum-norm algorithm in resolving plane waves in noise," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 34, pp. 331-341, Apr. 1986.
- [10] H. B. Lee and M. S. Wengrovitz, "Resolution threshold of beamspace MUSIC for two closely spaced emitters," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 38, pp. 1545-1559, Sept. 1990.
- [11] A. Weiss and B. Friedlander, "Effects of Modeling Errors on the Resolution Threshold of the MUSIC Algorithm," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, pp. 1519-1526, June 1994.
- [12] A. Weiss and B. Friedlander, "The Resolution Threshold of a Direction-Finding Algorithm for Diversely Polarized Arrays," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, pp. 1719-1727, July 1994.
- [13] Q. T. Zhang, "Probability of Resolution of the MUSIC Algorithm," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 43, pp. 978-987, Apr. 1995.

### FIGURES

8

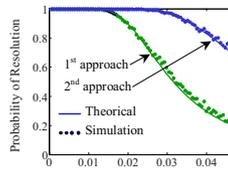


Fig. 1. Probability of resolution for the first source versus the level  $\sigma$  of Gaussian modelling errors. Parameters:  $\theta_2 - \theta_1 = 11.7^\circ$ . Circular array of radius  $R/\lambda = 0.5$  with  $N = 5$  sensors.

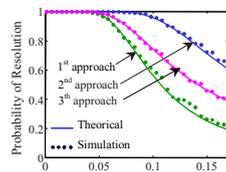


Fig. 2. Probability of resolution for the first source versus the level  $\sigma$  of Gaussian modelling errors. Parameters:  $\theta_2 - \theta_1 = 20.9^\circ$ . Circular array of radius  $R/\lambda = 0.5$  with  $N = 5$  sensors.

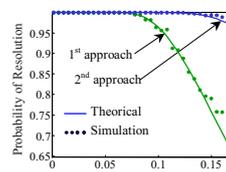


Fig. 3. Probability of resolution for the first source versus the level  $\sigma$  of Gaussian modelling errors. Parameters:  $\theta_2 - \theta_1 = 28^\circ$ . Circular array of radius  $R/\lambda = 0.5$  with  $N = 5$  sensors.

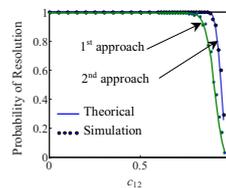


Fig. 4. Probability of resolution for the first source versus the level  $c_{12}$  of Gaussian modelling errors ( $\sigma = 0.03$ ). Parameters:  $\theta_1 = 0^\circ$ . Circular array of radius  $R/\lambda = 0.5$  with  $N = 5$  sensors.

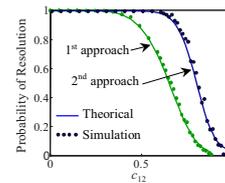


Fig. 5. Probability of resolution for the first source versus the level  $c_{12}$  of Gaussian modelling errors ( $\sigma = 0.122$ ). Parameters:  $\theta_1 = 0^\circ$ . Circular array of radius  $R/\lambda = 0.5$  with  $N = 5$  sensors.

## F.2 Biais et EQM conditionnés à une résolution [FLV05c]

1

# MUSIC performances conditionally to resolved sources in presence of modelling error.

A. Ferréol<sup>1,2</sup>, P. Larzabal<sup>2</sup>, *Member, IEEE* and M. Viberg<sup>3</sup>, *Fellow, IEEE*

<sup>1</sup>THALES communication, 160 boulevard de Valmy 92700 Colombes, FRANCE

<sup>2</sup>SATIE, ENS Cachan, UMR 8029, 61 avenue du président Wilson, 94235 Cachan Cedex France.

<sup>3</sup>Chalmers, Sweden.

anne.ferreol@fr.thalesgroup.com

SOFTWARE: Scientific Word 4.1

**Abstract**—When the correlation matrix is known, the resolution power of subspace algorithm is infinite. In the presence of modelling errors, even if the correlation matrix is known, they can no more resolve source with a probability one. In the case of MUSIC [1], the purpose of this work is *first* to determine the analytic expression of the probability of source resolution versus the model mismatch error (these errors can be different for each source) and *second* to provide the bias and variance of algorithm conditionally to the success of the source resolution test. These results are of a great interest for the determination of the antenna calibration accuracy. Numerical results support our theoretical investigations.

### I. INTRODUCTION

Estimating the direction of arrival (DOA) of a signal incident on a planar array of sensors has applications in many field including radar, sonar, telecommunications. A lot of work have already been done to characterize their performances in asymptotic region (in SNR and or in the number of snapshots) [Ref]. One of the principal interest of the signal processing community for the so called high resolution method [Ref] [1] lies on their asymptotic infinite resolution power if the assumed model of reception is the true one. Unfortunately, in operational context the assumed model of reception is different of the true one, even after a calibration procedure. Some efforts have recently been done in this sense to characterize the algorithm in presence of model mismatching.

In the presence of modelling mismatch, some authors have studied the performance degradation, in term of variance (Friedlander [2][3], Marcos [4], [5][6],...). For small model mismatch, their derivation are correct in the sense that the resolution probability is close to one. This is no more the case when these mismatch are increasing, because even if the correlation matrix is known, the resolution power is no more infinite.

Some others authors have investigated the performance decrease versus the model mismatch, under the point of view of Resolution threshold for equipowered sources and the use of an heuristic definition of the resolution threshold ([7][8][9][10],...). To the best of our knowledge, there is no general result for sources of different modelling error level, and moreover no one has established the probability of resolution and the bias and variance of algorithm under the resolution condition.

In this paper we propose to fill this gaps with a more detailed investigation of the phenomena. For this we first propose a new definition of the resolution for sources whom the DOA impacts on the modelling error level. We then establish the probability of resolution versus the model mismatch. Moreover we propose the bias and variance expression of subspace algorithm conditionally to resolution success.

The organization of the paper is as follows. In section 2 we formulate the problem and introduce the notation. In section 3, we provide some background for the mathematical derivation. In section 4, based on a new resolution definition we establish an analytic expression for the resolution probability. In section 5 the bias and variance conditionally to the sources resolution are established. In section 6 numerical simulation confirms their theoretical study. A conclusion is given in section 7.

### II. SIGNAL MODELLING AND PROBLEM FORMULATION

A noisy mixture of  $M$  Narrow-Band sources of DOAs  $\theta_m$  ( $1 \leq m \leq M$ ) is received by an array of  $N$  sensors. The associated observation vector,  $\mathbf{x}(t)$ , whose components  $x_n(t)$  ( $1 \leq n \leq N$ ) are the complex envelopes of the signals at the output of the sensors, is thus given by

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{m=1}^M \tilde{\mathbf{a}}(\theta_m) s_m(t) + \mathbf{n}(t) = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

where  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta)$  is the true steering vector of a signal source in the direction  $\theta$ ,  $\tilde{\mathbf{A}} = [\tilde{\mathbf{a}}(\theta_1) \cdots \tilde{\mathbf{a}}(\theta_M)]$ ,  $\mathbf{n}(t)$  is the supposed spatially white noise vector and  $s_m(t)$  is the complex envelope of the  $m^{\text{th}}$  source. Denoting  $\mathbf{a}(\theta)$  the assumed steering vector used in the algorithm, the modelling error  $\mathbf{e}_m$  of the  $m^{\text{th}}$  source is defined by

$$\mathbf{e}_m = \tilde{\mathbf{a}}(\theta_m) - \mathbf{a}(\theta_m) = \tilde{\mathbf{a}}_m - \mathbf{a}_m \quad (2)$$

where  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_m) = \tilde{\mathbf{a}}_m$  and  $\mathbf{a}(\theta_m) = \mathbf{a}_m$ . The MUSIC DOA estimates are given by the  $M$  smallest local minima of the criterion function

$$c(\theta, \epsilon) = \mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{\Pi}(\epsilon) \mathbf{a}(\theta) \quad (3)$$

where  $\mathbf{\Pi}(\epsilon) = \mathbf{I}_N - \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{A}}^\#$ ,  $\tilde{\mathbf{A}} = [\tilde{\mathbf{a}}_1 \cdots \tilde{\mathbf{a}}_M]$  and  $\epsilon = [1 \text{ vec}([\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_M])^T \text{ vec}([\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_M])^H]^T$ . When the assumed steering vector is different from the true one,  $\mathbf{a}_m \neq \tilde{\mathbf{a}}_m$ ,  $c(\theta_m, \epsilon)$  presents a local minimum at  $\hat{\theta}_m$ , which is different

from  $\theta_m$ . It is therefore important to know is the sources are resolved, and in this case to evaluate the bias and RMS error. The random variable  $\Delta\theta_m = \hat{\theta}_m - \theta_m$  defines the DOA estimation error of the direction of the  $m^{\text{th}}$  source. In order to introduce and define a general resolution criterion, the paper needs the introduction of some thresholds  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq I$ ). The sources are said resolved when the  $I$  features  $\eta_i$  extracted from the shape of the pseudo-spectrum verify,  $\eta_i < \alpha_i$ . Looking for the MUSIC performances conditionally to resolved sources seeks to evaluate the conditional bias  $E[\Delta\theta_m | \eta_i < \alpha_i, 1 \leq i \leq I]$ , RMS error  $RMSE_m = \sqrt{E[\Delta\theta_m^2 | \eta_i < \alpha_i, 1 \leq i \leq I]}$  and the probability  $Pr = \text{prob}(\eta_i < \alpha_i, 1 \leq i \leq I)$  where  $E[x | y]$  means the conditional expectation of  $x$  assuming  $y$ .

### III. PREVIOUS RESULTS OF [5][6]

The purpose of this section is to introduce recent results that will be used in the sequel of the papers. According to [5][6] the DOA estimation error  $\Delta\theta_m = \hat{\theta}_m - \theta_m$  can be approximated at the second order Taylor Expansion with respect to  $\Delta\theta_m$  by

$$\Delta\theta_m = -\frac{\dot{c}(\theta_m, \epsilon)}{\ddot{c}(\theta_m, \epsilon)} \quad (4)$$

where  $\dot{c}(\theta, \epsilon)$  and  $\ddot{c}(\theta, \epsilon)$ , respectively, indicate the first and second derivatives of the criterion  $c(\theta, \epsilon)$  at  $\theta$ . After a second order Taylor expansion [5][6] of  $\dot{c}(\theta, \epsilon)$  and  $\ddot{c}(\theta, \epsilon)$  with respect to  $\epsilon$ ,  $\Delta\theta_m$  becomes

$$\Delta\theta_m = -\frac{\dot{\tilde{c}}(\theta_m, \epsilon)}{\ddot{\tilde{c}}(\theta_m, \epsilon)} \quad (5)$$

$$\dot{\tilde{c}}(\theta_m, \epsilon) = \epsilon^H \dot{\mathbf{Q}}_m \epsilon$$

$$\ddot{\tilde{c}}(\theta_m, \epsilon) = \epsilon^H \ddot{\mathbf{Q}}_m \epsilon$$

$$\dot{\mathbf{Q}}_m \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}(\mathbf{a}_m, \dot{\mathbf{a}}_m) + \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{a}}_m, \mathbf{a}_m),$$

$$\ddot{\mathbf{Q}}_m \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}(\mathbf{a}_m, \ddot{\mathbf{a}}_m) + \mathbf{Q}(\ddot{\mathbf{a}}_m, \mathbf{a}_m) + 2\mathbf{Q}(\dot{\mathbf{a}}_m, \dot{\mathbf{a}}_m)$$

where  $\dot{c}(\theta, \epsilon) = \dot{\tilde{c}}(\theta_m, \epsilon) + o(\|\epsilon\|^2)$ ,  $\ddot{c}(\theta, \epsilon) = \ddot{\tilde{c}}(\theta_m, \epsilon) + o(\|\epsilon\|^2)$  and  $\dot{\mathbf{a}}_m$ ,  $\ddot{\mathbf{a}}_m$  are respectively the first and second derivative of  $\mathbf{a}_m$  with respect to  $\theta_m$  and the matrix  $\mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  is defined by

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \mathbf{v}^H \mathbf{\Pi}^{(2)}(\epsilon) \mathbf{u} \\ &= \epsilon^H \mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \epsilon, \end{aligned} \quad (6)$$

where  $\mathbf{\Pi}(\epsilon) = \mathbf{\Pi}^{(2)}(\epsilon) + o(\|\epsilon\|^2)$ ,  $T$  defines the transpose,  $*$  is complex conjugate and

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} q & -\mathbf{q}_{12}^H & \mathbf{0}^T \\ -\mathbf{q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} & \mathbf{Q}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{32} & \mathbf{Q}_{33} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

where  $\mathbf{\Pi}_0 = \mathbf{\Pi}(\epsilon = \mathbf{0})$ ,  $q = \mathbf{v}^H \mathbf{\Pi}_0 \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{q}_{12} = \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  and  $\mathbf{q}_{21} = \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{u})$  with  $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{A}^{\#} \mathbf{u})^* \otimes (\mathbf{\Pi}_0 \mathbf{v})$ . The remaining blocks are given by

$$\mathbf{Q}_{22} = \Psi(\mathbf{A}^{\#}, \mathbf{A}^{\#}, \mathbf{\Pi}_0),$$

$$\mathbf{Q}_{23} = \Psi(\mathbf{A}^{\#}, \mathbf{\Pi}_0, (\mathbf{A}^{\#})^H) \mathbf{P},$$

$$\mathbf{Q}_{32} = \mathbf{P}^H \Psi(\mathbf{\Pi}_0, \mathbf{A}^{\#}, \mathbf{A}^{\#}),$$

$$\mathbf{Q}_{33} = -\mathbf{P}^H \Psi(\mathbf{\Pi}_0, \mathbf{\Pi}_0, \mathbf{A}^{\#} (\mathbf{A}^{\#})^H) \mathbf{P},$$

where  $\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = ((\mathbf{X}\mathbf{v})^* (\mathbf{Y}\mathbf{u})^T) \otimes \mathbf{Z}$ . Here,  $\otimes$  is the Kronecker product and  $\mathbf{P}$  the permutation matrix defined by  $\text{vec}(\mathbf{E}^T) = \mathbf{P} \text{vec}(\mathbf{E})$ .

In this paper, the random variable  $\epsilon$  is Gaussian and the random vectors  $\mathbf{e}_m$  are circular.

### IV. PRELIMINARY MATHEMATICAL RESULTS

In this section  $x, y$  and  $z$  are Gaussian random variables. The correlation between the random variables  $u$  and  $v$  is

$$R_{uv} = E[uv] \quad (8)$$

where  $E[\cdot]$  is the mathematical mean. Let's note the covariance  $C_{uv}$  between  $u$  and  $v$  is

$$C_{uv} = E[uv] - E[u]E[v] \quad (9)$$

The incomplete moments  $E[u^n | u < \alpha]$  is given by

$$E[u^n | u < \alpha] = \frac{CMFG(u^n, \mu, \sigma^2, \alpha)}{CMFG(u^0, \mu, \sigma^2, \alpha)} \quad (10)$$

where  $u$  is a Gaussian random variable of standard deviation  $\sigma$  and mean  $\mu$  and  $CMFG(u^n, \mu, \sigma^2, \alpha)$  is the associated Cumulative Moments Functions (CMF) function defined in [11]

$$CMFG(u^n, \mu, \sigma^2, \alpha) =$$

$$\sum_{k=0}^n C_n^{n-k} \sigma^{n-k} \mu^k CMFN(x^{n-k}, \alpha) \quad (11)$$

$$CMFN(x^n, \alpha) = -\frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) + (n-1)CMFN(x^{n-2}, \alpha) \quad (12)$$

where  $CMFN(x^0, \alpha) = CDF(\alpha)$ ,  $CMFN(x, \alpha) = -1/\sqrt{2\pi} \exp(-\alpha^2/2)$  and  $C_n^{n-k} = n!/((n-k)! k!)$ . The function  $CDF(\alpha)$  is the cumulative distribution function of the normal random variable. The incomplete moments with one condition is given by

$$E[y | x < \alpha] = \frac{C_{xy}}{C_{xx}} (E[x | x < \alpha] - E[x]) + E[y] \quad (13)$$

$$\begin{aligned} E[y^2 | x < \alpha] &= \left(\frac{C_{xy}}{C_{xx}}\right)^2 E[x^2 | x < \alpha - E[x]] \\ &+ 2E[y] \frac{C_{xy}}{C_{xx}} E[x | x < \alpha - E[x]] \\ &+ \frac{C_{xx} C_{yy} - C_{xy}^2}{C_{xx}} + E[y]^2 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} E[yz | x < \alpha] &= r_{xy} r_{xz} E[x^2 | x < \alpha - E[x]] \\ &+ (r_{xy} E[z] + r_{xz} E[y]) E[x | x < \alpha - E[x]] \\ &- r_{xz} C_{xy} + C_{yz} + E[y] E[z] \end{aligned} \quad (15)$$

where  $r_{uv} = C_{uv}/C_{vv}$ . The incomplete moments with two conditions is given by

$$\begin{aligned} & E[x | x < \alpha, y < \beta] \\ &= \frac{r_{yx}(\alpha)}{1 - r_{yx}(\alpha)r_{xy}(\beta)} (E[y | y < \beta] - E[y | x < \alpha]) \\ &+ \frac{E[x | x < \alpha]}{1 - r_{yx}(\alpha)r_{xy}(\beta)} - \frac{r_{yx}(\alpha)r_{xy}(\beta)E[x | y < \beta]}{1 - r_{yx}(\alpha)r_{xy}(\beta)} \\ r_{yx}(\alpha) &= \frac{E[xy | x < \alpha] - E[x | x < \alpha]E[y | x < \alpha]}{E[y^2 | x < \alpha] - E[y | x < \alpha]^2} \end{aligned} \quad (16)$$

and :

$$\begin{aligned} & E[z | x < \alpha, y < \beta] \\ &= r_{xz}(\beta) (E[x | x < \alpha, y < \beta] - E[x | y < \beta]) \\ &+ E[z | y < \beta] \end{aligned} \quad (18)$$

The expressions (13),(14) are proven in [11] and the expressions (15),(16)(18) are proven in the Appendix-A of this paper.

#### V. DEFINITION OF THE PROBABILITY OF RESOLUTION

In the papers [7][8][9][10], the definition of the resolution limit is based on the MUSIC pseudo-spectrum  $c(\theta, \epsilon)$  taken at the true position  $\theta_1$  and  $\theta_2$  and at the mean value  $\bar{\theta} = (\theta_1 + \theta_2)/2$ . In this work, the resolution of two sources of DOAs  $\theta_1$  and  $\theta_2$  is defined by

$$c(\theta_1, \epsilon) < c(\bar{\theta}, \epsilon) \text{ and } c(\theta_2, \epsilon) < c(\bar{\theta}, \epsilon) \quad (19)$$

Using (6) and a second order Taylor expansion of  $c(\theta, \epsilon)$  with respect to  $\epsilon$ ,  $c(\theta, \epsilon)$  can be approximated by  $c(\theta, \epsilon) \approx \varphi(\mathbf{a}(\theta), \mathbf{a}(\theta)) = \epsilon^H \mathbf{Q}(\mathbf{a}(\theta), \mathbf{a}(\theta)) \epsilon$ . Noting that  $\mathbf{Q}_m \stackrel{def}{=} \mathbf{Q}(\mathbf{a}(\theta_m), \mathbf{a}(\theta_m))$ ,  $\bar{\mathbf{Q}} \stackrel{def}{=} \mathbf{Q}(\mathbf{a}(\bar{\theta}), \mathbf{a}(\bar{\theta}))$ , the resolution condition given by (19) can be rewritten as

$$\begin{aligned} \eta_1 &< 0 \text{ and } \eta_2 < 0 \\ \eta_i &= \epsilon^H (\mathbf{Q}_i - \bar{\mathbf{Q}}) \epsilon \end{aligned} \quad (20)$$

where  $\eta_i$  are real random variables. The resolution probability  $Pr = \text{prob}(\eta_1 < 0, \eta_2 < 0)$  has been established in [11].

#### VI. BIAS AND RMS UNDER RESOLUTION CONDITION

The Bias and RMS error under resolution condition depend on  $E[\Delta\theta_m^i | \eta_1 < 0, \eta_2 < 0]$  for respectively  $i = 1$  and  $i = 2$ . In order to provide the  $i^{th}$  order moment and using the results of [5], the random variable  $\Delta\theta_m^i$  is approximated by the following first order Taylor expansion with respect to  $(u_i, v_i)$

$$\begin{aligned} \Delta\theta_m^i &= \alpha + \beta \ddot{c}(\theta_m, \epsilon)^i + \gamma \dot{c}(\theta_m, \epsilon)^i \\ &+ o(\|u_i\|, \|v_i\|) \\ \alpha_i &= -\frac{E[\dot{c}(\theta_m, \epsilon)^i]}{E[\ddot{c}(\theta_m, \epsilon)^i]}, \quad \beta_i = -\frac{\alpha}{E[\dot{c}(\theta_m, \epsilon)^i]} \\ \gamma_i &= -\frac{1}{E[\dot{c}(\theta_m, \epsilon)^i]} \end{aligned} \quad (21)$$

where  $u_i = \left( \frac{\dot{c}(\theta_m, \epsilon)^i - E[\dot{c}(\theta_m, \epsilon)^i]}{E[\ddot{c}(\theta_m, \epsilon)^i]} \right)$ ,  $v_i = \left( \frac{\ddot{c}(\theta_m, \epsilon)^i - E[\ddot{c}(\theta_m, \epsilon)^i]}{E[\ddot{c}(\theta_m, \epsilon)^i]} \right) - 1$  and the random variables  $\dot{c}(\theta_m, \epsilon)^i = (\epsilon^H \dot{\mathbf{Q}}_m \epsilon)^i$ ,  $\ddot{c}(\theta_m, \epsilon)^i = (\epsilon^H \ddot{\mathbf{Q}}_m \epsilon)^i$  are assumed to be Gaussian. The conditional bias  $E[\Delta\theta_m | \eta_1 < 0, \eta_2 < 0]$  is provided by the expression (18)

$$\begin{aligned} & E[\Delta\theta_m | \eta_1 < 0, \eta_2 < 0] = \\ & r_{\eta_1 \Delta\theta_m}(0) (E[\eta_1 | \eta_1 < \alpha, \eta_2 < 0] - E[\eta_1 | \eta_2 < 0]) \\ & - E[\Delta\theta_m | \eta_2 < 0] \end{aligned}$$

where the expressions of  $r_{\eta_1 \Delta\theta_m}(0)$ ,  $E[\eta_1 | \eta_1 < \alpha, \eta_2 < 0]$  and  $E[\eta_1 | \eta_2 < 0]$ ,  $E[\Delta\theta_m | \eta_2 < 0]$  are respectively given by (17)(16) and (13), requiring the following statistical moments:

$$\begin{aligned} E[\Delta\theta_m^2] &= \frac{F_2(\dot{\mathbf{Q}}_m, \dot{\mathbf{Q}}_m)}{\text{trace}(\ddot{\mathbf{Q}}_m \mathbf{R}_\epsilon)} \\ &+ E[\Delta\theta_m]^2 \left( 1 + \frac{F_2(\ddot{\mathbf{Q}}_m, \ddot{\mathbf{Q}}_m)}{\text{trace}(\ddot{\mathbf{Q}}_m \mathbf{R}_\epsilon)} \right) \\ &+ 2E[\Delta\theta_m] \frac{F_2(\dot{\mathbf{Q}}_m, \ddot{\mathbf{Q}}_m)}{\text{trace}(\ddot{\mathbf{Q}}_m \mathbf{R}_\epsilon)} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} E[\Delta\theta_m \eta_i] &= \frac{F_2(\dot{\mathbf{Q}}_m, \mathbf{Q}_i - \bar{\mathbf{Q}})}{\text{trace}(\ddot{\mathbf{Q}}_m \mathbf{R}_\epsilon)} \\ &+ E[\Delta\theta_m] \left( \text{trace}((\mathbf{Q}_i - \bar{\mathbf{Q}}) \mathbf{R}_\epsilon) \right. \\ &\quad \left. - \frac{F_2(\dot{\mathbf{Q}}_m, \mathbf{Q}_i - \bar{\mathbf{Q}})}{\text{trace}(\ddot{\mathbf{Q}}_m \mathbf{R}_\epsilon)} \right) \end{aligned}$$

$$E[\Delta\theta_m] = -\frac{\text{trace}(\dot{\mathbf{Q}}_m \mathbf{R}_\epsilon)}{\text{trace}(\ddot{\mathbf{Q}}_m \mathbf{R}_\epsilon)}$$

where  $\Delta\theta_m$  is approximated by the expression (21) for  $i = 1$ ,  $E[\dot{c}(\theta_m, \epsilon)] = \text{trace}(\dot{\mathbf{Q}}_m \mathbf{R}_\epsilon)$  and  $E[\ddot{c}(\theta_m, \epsilon)] = \text{trace}(\ddot{\mathbf{Q}}_m \mathbf{R}_\epsilon)$ . The RMS error  $RMS_m$  under resolution condition depend on  $E[\Delta\theta_m^2 | \eta_1 < 0, \eta_2 < 0]$ . This incomplete moment is according to (18)

$$\begin{aligned} & E[\Delta\theta_m^2 | \eta_1 < 0, \eta_2 < 0] = \\ & r_{\eta_1 \Delta\theta_m^2}(0) (E[\eta_1 | \eta_1 < \alpha, \eta_2 < 0] - E[\eta_1 | \eta_2 < 0]) \\ & - E[\Delta\theta_m^2 | \eta_2 < 0] \end{aligned}$$

where the expressions of  $r_{\eta_1 \Delta\theta_m^2}(0)$  and  $E[\Delta\theta_m^2 | \eta_2 < 0]$  are respectively provided in (17) and (13), needing the following statistical moments

$$\begin{aligned} E[(\Delta\theta_m^2)^2] &= \frac{F_4(\dot{\mathbf{Q}}_m, \dot{\mathbf{Q}}_m, \dot{\mathbf{Q}}_m, \dot{\mathbf{Q}}_m)}{F_2(\ddot{\mathbf{Q}}_m, \ddot{\mathbf{Q}}_m)^2} \\ &+ E[\Delta\theta_m^2]^2 \left( 1 + \frac{F_4(\ddot{\mathbf{Q}}_m, \ddot{\mathbf{Q}}_m, \ddot{\mathbf{Q}}_m, \ddot{\mathbf{Q}}_m)}{F_2(\ddot{\mathbf{Q}}_m, \ddot{\mathbf{Q}}_m)^2} \right) \\ &+ 2E[\Delta\theta_m^2] \frac{F_4(\dot{\mathbf{Q}}_m, \dot{\mathbf{Q}}_m, \ddot{\mathbf{Q}}_m, \dot{\mathbf{Q}}_m)}{F_2(\ddot{\mathbf{Q}}_m, \ddot{\mathbf{Q}}_m)^2} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} E[\Delta\theta_m^2 \eta_i] &= \frac{F_3(\dot{\mathbf{Q}}_m, \dot{\mathbf{Q}}_m, \mathbf{Q}_i - \bar{\mathbf{Q}})}{F_2(\ddot{\mathbf{Q}}_m, \ddot{\mathbf{Q}}_m)} \\ &+ E[\Delta\theta_m^2] \left( \text{trace}((\mathbf{Q}_i - \bar{\mathbf{Q}}) \mathbf{R}_\epsilon) \right. \\ &\quad \left. - \frac{F_3(\dot{\mathbf{Q}}_m, \dot{\mathbf{Q}}_m, \mathbf{Q}_i - \bar{\mathbf{Q}})}{F_2(\ddot{\mathbf{Q}}_m, \ddot{\mathbf{Q}}_m)} \right) \end{aligned}$$

$$E[\Delta\theta_m^2] = \frac{F_2(\dot{\mathbf{Q}}_m, \dot{\mathbf{Q}}_m)}{F_2(\ddot{\mathbf{Q}}_m, \ddot{\mathbf{Q}}_m)}$$

where  $\Delta\theta_m^2$  is approximated by the expression (21) for  $i = 2$  and the expression of  $F_Q(\dots)$  is in (45).

## VII. SIMULATIONS

In this section we present the result of computer simulations, to illustrate the usefulness of the obtained results. The array of sensors is uniform circular with radius  $R=0.5\lambda$  and  $N=5$  sensors. The beamwidth of the array at 3 dB is  $\Delta\theta = \pm 28^\circ$ . Two sources are impinging on the antenna from directions  $\theta_1 = 0^\circ$  and  $\theta_2$ . For the first source, the following figures compare the results of simulations with 1000 independent trials, to the theoretical performances proposed in this paper in the case of circularly, symmetric and Gaussian modelling errors assuming  $E[e_i e_j^H] = \delta_{i-j} \sigma^2 \mathbf{I}_N$ . The comparison is carried out according to the level  $\sigma$  of modelling error in the Figures 1 to 3 for  $\theta_2 = 28^\circ$  and in the Figures 4 to 6 for  $\theta_2 = 20.8^\circ$ . The Figures (1,4)-(2,5)-(3,6) show respectively the resolution probability, RMS and bias of the two sources. The simulation and theoretical results are closed when the resolution probability is over 0.5. Indeed, when the resolution probability is under 0.5, the simulated performances are estimated with less independent trials ( $1000 \times \text{prob}(\eta_1 < 0, \eta_2 < 0)$ ) in one hand and in other hand the Gaussian assumption on the derivatives of  $c(\theta_m, \epsilon)$  (or  $c(\theta_m, \epsilon)^2$ ) are not well verify. In the Figures 7-8 the resolution probability and bias respectively are carried out according to the spatial correlation  $c_{12}$  for  $\sigma = 0.122$ .

$$c_{12} = \frac{|\mathbf{a}(\theta_1)^H \mathbf{a}(\theta_2)|^2}{(\mathbf{a}(\theta_1)^H \mathbf{a}(\theta_1)) (\mathbf{a}(\theta_2)^H \mathbf{a}(\theta_2))}$$

The simulations and theoretical results are in a very good match even if the sources are closed with high spatial correlation  $c_{12}$ .

## VIII. CONCLUSION

This paper provides a probability of resolution which gives more insight about the resolution capabilities of MUSIC than the previous resolution threshold. This work has evaluated for the first time the bias and RMS of sources conditionally to their resolution. In an experimental set-up only these kind of conditional results are useful. As a by product the mathematical derivations have provided some results such on higher order Gaussian statistics and incomplete moments in the Gaussian case.

## IX. APPENDIX-A : CONDITIONAL MEAN OF GAUSSIAN VARIABLES

## A. Case of 2 correlated random variables

Noting the Gaussian variables  $x$  and  $y$  with the following statistics

$$E[x^2] = R_{xx}, E[y^2] = R_{yy} \text{ and } E[xy] = R_{xy} \quad (24)$$

the variable  $y$  can be rewritten as the following decomposition in two independents Gaussian variables  $x$  and  $v$  such that

$$y = a v + b(x - E[x]) + c \quad (25)$$

where

$$a = -\frac{1}{C_{xx}}, b = \frac{C_{xy}}{C_{xx}} \text{ and } c = E[y] \quad (26)$$

and

$$\begin{aligned} C_{xx} &= R_{xx} - E[x]^2, C_{yy} = R_{yy} - E[y]^2 \\ \text{and } C_{xy} &= R_{xy} - E[x]E[y] \end{aligned} \quad (27)$$

the statistics of  $v$  checks  $E[v] = 0$  and

$$E[v^2] \stackrel{\text{def}}{=} C_{vv} = C_{xx}(C_{xx}C_{yy} - C_{xy}^2) \quad (28)$$

*Proof:* See [11]. ■

## B. Case of 3 correlated random variables

Noting the random variables  $x$  and  $y$  of (24)(27) and the Gaussian variable  $z$  such as

$$E[z^2] = R_{zz}, E[xz] = R_{xz} \text{ and } E[yz] = R_{yz} \quad (29)$$

the variable  $z$  can be rewritten as the following decomposition in three independents Gaussian variables  $x, v$  and  $w$  such that

$$z = a'' w + b'' v + c''(x - E[x]) + E[z] \quad (30)$$

where

$$\begin{aligned} a'' &= 1, b'' = \frac{\rho_{zy/x}}{C_{xx}} \text{ and } c'' = \frac{C_{xz}}{C_{xx}} \\ \rho_{zy/x} &= \frac{C_{xz}C_{xy} - C_{yz}C_{xx}}{C_{xx}C_{yy} - C_{xy}^2} \end{aligned} \quad (31)$$

and

$$\begin{aligned} C_{zz} &= R_{zz} - E[z]^2, C_{xz} = R_{xz} - E[x]E[z] \\ \text{and } C_{yz} &= R_{yz} - E[x]E[z] \end{aligned} \quad (32)$$

the statistics of  $v$  is (28) and the one of  $w$  checks

$$E[w] = 0 \quad (33)$$

*Proof:* We consider the following covariance matrix of the vector  $\mathbf{u} = [x - E[x] \ y - E[y] \ z - E[z]]^T$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{u}} = E[\mathbf{u}\mathbf{u}^T] = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} \\ C_{xy} & C_{yy} & C_{yz} \\ C_{xz} & C_{yz} & C_{zz} \end{bmatrix} \quad (34)$$

Noting the covariance matrix of the zero-mean vector  $\mathbf{e} = [x - E[x] \ v \ w]^T$  where

$$\mathbf{R}_{\mathbf{ee}} = E[\mathbf{e} \mathbf{e}^T] = \mathbf{T} \mathbf{R}_{zz} \mathbf{T}^T \text{ with } \mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \quad (35)$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ C_{xy} & -C_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -C_{xz} & -\frac{C_{yz}}{C_{vv}} & 1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

where  $C_{vv}$  is define in (28). The matrix  $\mathbf{R}_{\mathbf{ee}}$  is then diagonal such that

$$\mathbf{R}_{\mathbf{ee}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_{vv} & 0 \\ 0 & 0 & C_{ww} \end{bmatrix}$$

and the matrix  $\mathbf{T}$  verifies

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ C_{xy} & -C_{xx} & 0 \\ \alpha & \beta & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = -\frac{C_{xz} + C_{xy} \rho_{zy/x}}{C_{xx}} \text{ and } \beta = \rho_{zy/x} \quad (38)$$

Using that  $\mathbf{e} = [x - E[x] \ v \ w]^T = \mathbf{T}\mathbf{u}$ , the relation between  $v$ ,  $w$  and  $y$  is as following:

$$\begin{aligned} w &= \alpha (x - E[x]) + \beta(y - E[y]) + z - E[z] \\ v &= C_{xy}(x - E[x]) - C_{xx}(y - E[y]) \end{aligned}$$

and

$$C_{xx}w + \beta v = (C_{xx}\alpha + \beta C_{xy})(x - E[x]) + C_{xx}(z - E[z])$$

and

$$z = w + \frac{\rho_{zy/x}}{C_{xx}}v - \frac{C_{xx}\alpha + \beta C_{xy}}{C_{xx}}(x - E[x]) + E[z] \quad (39)$$

Using (38) it follow :  $C_{xx}\alpha + \beta C_{xy} = -C_{xz}$ , the equation (30) is the proven using (39) ■

#### C. Proof of equation (15)

Using the expressions (25) and (31) and the independence of the random variables  $x, v$  and  $w$ ,  $E[yz/x < \alpha]$  becomes

$$\begin{aligned} &E[yz | x < \alpha] \quad (40) \\ &= ab''E[v^2] + bc''E[(x - E[x])^2 | x < \alpha] \\ &\quad + bE[z]E[(x - E[x]) | x < \alpha] + cE[z] \\ &\quad + cc''E[(x - E[x]) | x < \alpha] \end{aligned}$$

Using expressions (25) and (31) and noting that  $E[(x - E[x])^2 | x < \alpha] = E[\bar{x}^2 | \bar{x} < \alpha - E[x]]$  with  $\bar{x} = x - E[x]$ , the equation (15) is proven

#### D. Proof of equation (16)

Noting the random variables  $x'$  and  $y'$  such that  $x' \in \{x | y < \beta\}$  and  $y' \in \{y | y < \beta\}$ , the expression (13) provide the following relation

$$E[y' | x < \alpha] = \frac{C_{x'y'}}{C_{x'x'}}(E[x' | x < \alpha] - E[x']) + E[y'] \quad (41)$$

Noting that  $E[y' | x < \alpha] = E[y | x < \alpha, y < \beta]$ ,  $E[x' | x < \alpha] = E[x | x < \alpha, y < \beta]$ ,  $E[y'] = E[y | y < \beta]$ ,  $E[x'] = E[x | y < \beta]$ ,  $C_{x'y'} = E[xy | y < \beta]$ ,  $C_{x'x'} = E[x^2 | y < \beta]$ ,  $E[x | y < \beta]E[y | y < \beta]$ , the relation (41) becomes

$$\begin{aligned} &E[y | x < \alpha, y < \beta] - E[y | y < \beta] = \quad (42) \\ &r_{xy}(\beta)(E[x | x < \alpha, y < \beta] - E[x | y < \beta]) \end{aligned}$$

It is possible to show in the same way that

$$\begin{aligned} &E[x | x < \alpha, y < \beta] - E[x | x < \alpha] = \quad (43) \\ &r_{yx}(\alpha)(E[y | x < \alpha, y < \beta] - E[y | x < \alpha]) \end{aligned}$$

Replacing the  $E[y | x < \alpha, y < \beta]$  of (42) into equation (43), the expression (16) of  $E[x | x < \alpha, y < \beta]$  is proven

#### E. Proof of equation (18)

Noting the random variables  $z'$  and  $x'$  such that  $z' \in \{z | y < \beta\}$  and  $x' \in \{x | y < \beta\}$ , the expression (13) provide the following relation

$$E[z' | x < \alpha] = \frac{C_{x'z'}}{C_{x'x'}}(E[x' | x < \alpha] - E[x']) + E[z'] \quad (44)$$

Noting that  $E[z' | x < \alpha] = E[z | x < \alpha, y < \beta]$ ,  $E[x' | x < \alpha] = E[x | x < \alpha, y < \beta]$ ,  $E[z'] = E[z | y < \beta]$ ,  $C_{x'z'} = E[xz | y < \beta]$ ,  $E[x | y < \beta]E[z | y < \beta]$ ,  $C_{x'x'} = E[x^2 | y < \beta]$ ,  $E[x | y < \beta]^2$  and  $C_{x'z'}/C_{x'x'} = r_{xz}(\beta)$ , the relation (18) is proven

### X. APPENDIX-B : HIGHER ORDER MOMENTS OF CIRCULAR GAUSSIAN RANDOM VARIABLES

The purpose of this section is to provide an expression of the following moments

$$F_Q(\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_Q) = E \left[ \prod_{q=1}^Q \varepsilon^H \mathbf{Q}_q \varepsilon \right] \quad (45)$$

where  $\varepsilon = [\mathbf{x} \ \mathbf{e}^H]^T$ ,  $\mathbf{x} = [1 \ \mathbf{e}^T]^T$  and  $\mathbf{e}$  is a Gaussian and circular random variable such that

$$\mathbf{R}_e = E[\mathbf{e} \ \mathbf{e}^H] \quad \text{and} \quad E[\mathbf{e}] = \mathbf{0} \quad (46)$$

where is the null vector  $\mathbf{0}$  and  $E[\mathbf{e} \ \mathbf{e}^T] = \mathbf{0}$ . See the expression in : "High Order Moment of Gaussian Hermitian Form.pdf".

### REFERENCES

- [1] R. O. Schmidt, *A signal subspace approach to multiple emitter location and spectral estimation*. PhD thesis, Stanford University, Stanford, CA, Nov. 1981.
- [2] B. Friedlander, "Sensitivity analysis of the MUSIC algorithm," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 38, pp. 1740–1751, July 1990.
- [3] B. Friedlander, "Sensitivity analysis of the maximum likelihood direction-finding algorithm," *IEEE Trans. Electron. Syst.*, vol. 26, pp. 953–958, Nov. 1990.
- [4] S. Marcos, *Chapitre 11: Sensibilité des méthodes HR aux perturbations de modèle. Les Méthodes à Haute Résolution: Traitement d'Antenne et Analyse Spectrale*. Paris: Hermes ISBN 2-86601-662-9, 1998.
- [5] A. Ferréol, P. Larzabal, and M. Viberg, "On the asymptotic performance analysis of subspace DOA estimation in the presence of modeling errors: Case of MUSIC," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 2004. Accepted to.
- [6] A. Ferréol and P. Larzabal, "Etude analytique de l'impact des erreurs de calibration sur les performances d'estimateurs de direction d'arrivées : cas de la méthode MUSIC," in *Proceedings GRETSI*, (Paris, FR), pp. 133–135, 2003.
- [7] M. Kaveh and A. J. Barabell, "The statistical performance of the MUSIC and the minimum-norm algorithm in resolving plane waves in noise," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 34, pp. 331–341, Apr. 1986.
- [8] H. B. Lee and M. S. Wengrovitz, "Resolution threshold of beamspace MUSIC for two closely spaced emitters," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 38, pp. 1545–1559, Sept. 1990.
- [9] A. Weiss and B. Friedlander, "Effects of Modeling Errors on the Resolution Threshold of the MUSIC Algorithm," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, pp. 1519–1526, 1994.
- [10] A. Weiss and B. Friedlander, "The Resolution Threshold of a Direction-Finding Algorithm for Diversely Polarized Arrays," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, pp. 1719–1727, 1994.
- [11] A. Ferréol and P. Larzabal, "Resolution probability of MUSIC in presence of modelling error," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 2005. Submitted to.

6

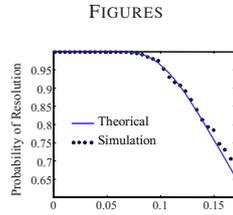


Fig. 1. Probability of resolution for the first source versus the level  $\sigma$  of Gaussian modelling errors. Parameters:  $\theta_2 - \theta_1 = 28^\circ$ . Circular array of radius  $R/\lambda = 0.5$  with  $N = 5$  sensors.

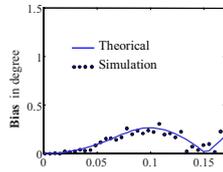


Fig. 2. Bias for the first source versus the level  $\sigma$  of Gaussian modelling errors. Parameters:  $\theta_2 - \theta_1 = 28^\circ$ . Circular array of radius  $R/\lambda = 0.5$  with  $N = 5$  sensors.

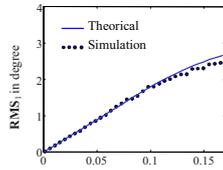


Fig. 3. RMS error for the first source versus the level  $\sigma$  of Gaussian modelling errors. Parameters:  $\theta_2 - \theta_1 = 28^\circ$ . Circular array of radius  $R/\lambda = 0.5$  with  $N = 5$  sensors.

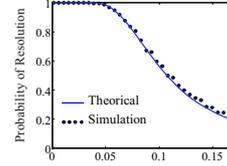


Fig. 4. Probability of resolution for the first source versus the level  $\sigma$  of Gaussian modelling errors. Parameters:  $\theta_2 - \theta_1 = 20.9^\circ$ . Circular array of radius  $R/\lambda = 0.5$  with  $N = 5$  sensors.

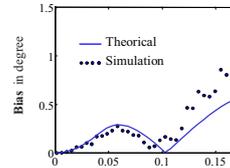


Fig. 5. Bias for the first source versus the level  $\sigma$  of Gaussian modelling errors. Parameters:  $\theta_2 - \theta_1 = 20.9^\circ$ . Circular array of radius  $R/\lambda = 0.5$  with  $N = 5$  sensors.

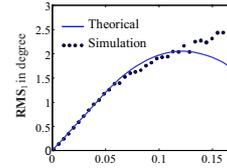


Fig. 6. RMS error for the first source versus the level  $\sigma$  of Gaussian modelling errors. Parameters:  $\theta_2 - \theta_1 = 20.9^\circ$ . Circular array of radius  $R/\lambda = 0.5$  with  $N = 5$  sensors.

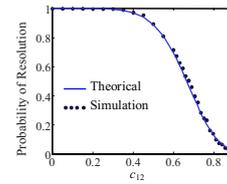


Fig. 7. Probability of resolution for the first source versus the level  $c_{12}$  of Gaussian modelling errors ( $\sigma = 0.122$ ). Parameters:  $\theta_1 = 0^\circ$ . Circular array of radius  $R/\lambda = 0.5$  with  $N = 5$  sensors.

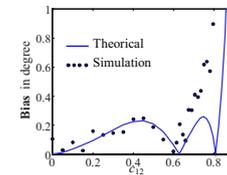


Fig. 8. Bias for the first source versus the level  $c_{12}$  of Gaussian modelling errors ( $\sigma = 0.122$ ). Parameters:  $\theta_1 = 0^\circ$ . Circular array of radius  $R/\lambda = 0.5$  with  $N = 5$  sensors.

# Bibliographie

- [ACCF04] L. Albera, P. Comon, P. Chevalier, and A. Ferréol. Blind identification of undetermined mixtures based on the hexacovariance. *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, May 2004.
- [AFCC03a] L. Albera, A. Ferréol, P. Comon, and P. Chevalier. ICAR, un algorithme d'ICA à convergence rapide, robuste au bruit. In *Proceedings GRETSI*, Paris, 2003.
- [AFCC03b] L. Albera, A. Ferréol, P. Comon, and P. Chevalier. Sixth order Blind Identification of undetermined mixtures (SIRBI) of sources. *ICA2003*, pages 909–914, April 2003.
- [AFCC04a] L. Albera, A. Ferréol, P. Comon, and P. Chevalier. Blind Identification of Overdetermined and underdetermined Mixtures of sources (BIOME). *LAA (Linear Algebra Application)*, 391 :3–30, November 2004.
- [AFCC04b] L. Albera, A. Ferréol, P. Comon, and P. Chevalier. ICAR : Independent Component Analysis using Redundancies. *ISCAS*, May 2004.
- [AFCC05] L. Albera, A. Ferréol, P. Chevalier, and P. Comon. ICAR, a tool for blind source separation using fourth order statistics only. *IEEE Trans. Signal Processing*, 53 :3633–3643, October 2005.
- [AFW89] H. Aumann, A. Fenn, and F. Willwerth. Phased array calibration and pattern prediction using Mutual Coupling Measurements. *IEEE Trans. Antennas. Propagation.*, 37(7) :844–850, July 1989.
- [Aka74] H. Akaike. A new look at the statistical model identification. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 19 :716–723, 1974.
- [AO99] D. Asztely and B. Ottersten. The effects of local scattering on Direction of Arrival estimation with MUSIC. *IEEE Trans. Signal Processing*, 47 :3220–3224, December 1999.
- [AOS97] D. Asztely, B. Ottersten, and A. Lee Swindlehurst. A generalized Array Manifold Model for local scattering in wireless communications. In *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, pages 4021–4024, Munich, 1997.
- [Bal89] C. Balanis. *Antenne theory : Analysis and Design*. Wiley-2nd edition, New York, 1989.
- [BAMCM97] A. Belouchrani, K. Abed-Meraim, J.F. Cardoso, and E. Moulines. A blind source separation technique using second order statistics. *IEEE Trans. Signal Processing*, 45(2) :434–444, February 1997.
- [Ben99] M. Bengtsson. *Antenna Array signal processing for high rank data models*. PhD thesis, R. Inst. Technol., Stockholm, Sweden, December 1999.

- [BFL05] E. Boyer, A. Ferréol, and P. Larzabal. Simple robust Bearing-Range Source's Localization With Curved Wavefronts. *IEEE Signal Processing Lett.*, 16(6), June 2005.
- [BK79] G. Bienvenu and L. Kopp. Principe de la goniométrie passive adaptative. In *Proceedings GRETSI*, pages 106–110, Nice, FR, 1979.
- [BK83] G. Bienvenu and L. Kopp. Optimality of high resolution array processing using the eigensystem approach. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 31(5) :1235–1247, October 1983.
- [BM86] Y. Bresley and A. Macovski. Exact maximum likelihood parameter estimation of superimposed exponential signals in noise. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 34 :1081–1089, October 1986.
- [BO01] M. Bengtsson and B. Ottersten. A generalization of Weighted Subspace Fitting to full-rank models. *IEEE Trans. Signal Processing*, 49 :1002–1012, May 2001.
- [Bre88] Y. Bresler. Maximum likelihood of linearly structured covariance with application to antenna array processing. In *Proc. ASSP Workshop on Spectrum Estimation and Modeling*, pages 172–175, Minneapolis, MN, 1988.
- [Bri81] DR. Brillinger. *Times Series, Data Analysis and Theory*. Holden Day., 1981.
- [BS00] O. Besson and P. Stoica. Decoupled estimation of DOA and angular spread for a spatially distributed source. *IEEE Trans. Signal Processing*, 48 :1872–1882, July 2000.
- [CAFC05] P. Chevalier, L. Albera, A. Ferréol, and P. Comon. On the virtual array concept for higher order array processing. *IEEE Trans. Signal Processing*, 53(4) :1254–1271, April 2005.
- [Cap69] J. Capon. High resolution frequency wavenumber spectrum analysis. *Proc. IEEE*, 57 :1408–1418, 1969.
- [Car90] J. F. Cardoso. Localisation et identification par la quadricovariance. *Traitement du signal*, 7(5), 1990.
- [CBF96] P. Chevalier, G. Benoit, and A. Ferréol. Direction finding after blind identification of sources steering vectors : The blind-maxcor and blind-MUSIC methods. In *EUSIPCO*, pages 2097–2100, Trieste, 1996.
- [CF99] P. Chevalier and A. Ferréol. On the virtual array concept for the fourth-order direction finding problem. *IEEE Trans. Signal Processing*, 47(9) :2592–2595, September 1999.
- [CF05] P. Chevalier and A. Ferréol. High order virtual array in the case of rectilinear sources. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2005. Submitted to.
- [CFA02] P. Chevalier, A. Ferréol, and L. Albera. On the behavior of current second order blind source separation methods for first and second order cyclostationary sources : application to CPFSK sources. In *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, Orlando, may 2002.
- [CFA03] P. Chevalier, A. Ferréol, and L. Albera. Méthodologie générale pour la séparation aveugle de sources cyclostationnaires arbitraires : Application à l'écoute passive des radiocommunications. In *Proceedings GRETSI*, Paris, 2003.

- [CFA05] P. Chevalier, A. Ferréol, and L. Albera. High resolution direction finding from higher order statistics : The 2Q-MUSIC algorithm. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2005. Accepted to.
- [CFD96] P. Chevalier, A. Ferréol, and J. P. Denis. New geometrical results about 4-th order direction finding methods performances. In *EUSIPCO*, pages 923–926, Trieste, 1996.
- [CM95] J. F. Cardoso and E. Moulines. Asymptotic performance analysis of direction finding algorithms based on fourth-order cumulants. *IEEE Trans. Signal Processing*, 43(1) :214–224, January 1995.
- [Com94] P. Comon. Independent Component Analysis, a new concept ? *Signal Processing, Elsevier*, 36(3) :287–314, April 1994.
- [CS93] J. F. Cardoso and A. Souloumiac. beamforming for non-gaussian signals. *IEE Proceedings-F*, 140(6) :362–370, December 1993.
- [CTFL99] M. Chenu-Tournier, A. Ferréol, and P. Larzabal. Low complexity blind space-time identification of propagation parameters. In *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, pages 2873–2876, Phoenix, 1999.
- [CWS01a] P. Chargé, Y. Wang, and J. Saillard. A non circular sources direction finding method using polynomial rooting. *Signal Processing, Fast communication, Elsevier*, 81 :1765–1770, April 2001.
- [CWS01b] P. Chargé, Y. Wang, and J. Saillard. A root-music algorithm for non circular sources. In *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, Salt Lake City, Utah, USA, May 2001.
- [CWS02] P. Chargé, Y. Wang, and J. Saillard. An extended cyclic music algorithm. In *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, Orlando, Floride, USA, May 2002.
- [FAC03] A. Ferréol, L. Albera, and P. Chevalier. Fourth Order Blind Identification of Underdetermined Mixtures of sources (FOBIUM). In *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, pages 909–914, Hong-Kong, April 2003.
- [FAC05] A. Ferréol, L. Albera, and P. Chevalier. Fourth Order Blind Identification of Underdetermined Mixtures of sources (FOBIUM). *IEEE Trans. Signal Processing*, May 2005.
- [FBL04] A. Ferréol, E. Boyer, and P. Larzabal. A low cost algorithm for some bearing estimation methods in the presence of separable nuisance parameters. *Electronic.Letters*, 40(15) :966–967, July 2004.
- [FBL05] A. Ferréol, E. Boyer, and P. Larzabal. Asymptotic performance for subspace bearing methods with separable nuisance parameters in presence of modeling errors. In *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, Philadelphia, March 2005.
- [FBLH05] A. Ferréol, E. Boyer, P. Larzabal, and M. Haardt. On the introduction of an extended coupling matrix for a 2D bearing estimation with an experimental RF system. *IEEE Trans. Antennas. Propagation.*, 2005. Submitted to.
- [FC97a] A. Ferréol and P. Chevalier. Higher order blind source separation using the cyclostationarity property of the signals. In *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, volume 5, pages 4061–4064, Munich, 1997.

- [FC97b] A. Ferréol and P. Chevalier. Limites des estimateurs classiques de cumulants d'ordre quatre pour la séparation aveugle de sources cyclo-stationnaires. In *Proceedings GRETSI*, pages 19–22, Grenoble, September 1997.
- [FC98] A. Ferréol and P. Chevalier. On the fourth-order cumulants estimation for the HO blind separation of cyclostationary sources. In *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, volume 4, pages 2313–2316, Seattle, 1998.
- [FC00] A. Ferréol and P. Chevalier. On the behavior of current second and higher order blind source separation method for cyclostationary sources. *IEEE Trans. Signal Processing*, 48(6) :1712–1725, June 2000.
- [FCA02] A. Ferréol, P. Chevalier, and L. Albera. Higher order blind separation of non zero-mean cyclostationary sources. In *EUSIPCO*, pages 103–106, Toulouse, September 2002.
- [FCA04] A. Ferréol, P. Chevalier, and L. Albera. Second order blind separation of first and second order cyclostationary sources : Application to AM, FSK and CPFSK sources. *IEEE Trans. Signal Processing*, 52(4) :845–861, April 2004.
- [FCT00] A. Ferréol and M. Chenu-Tournier. Space-frequency direction finding in wide-band and multi-path contexts. In *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, volume 5, pages 3113–3116, Istanbul, 2000.
- [FCT02] A. Ferréol and M. Chenu-Tournier. DOA estimation after blind identification of subspace channel vectors in multi-path context. In *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, Orlando, May 2002.
- [FCTL99] A. Ferréol, M. Chenu-Tournier, and P. Larzabal. Low complexity , passive spatio-temporal identification of multi-path channel. In *PSIP*, pages 27–32, Paris, January 1999.
- [Fer97] A. Ferréol. Goniométrie cyclique large bande par focalisation. In *Proceedings GRETSI*, pages 87–91, Grenoble, September 1997.
- [Fer99] A. Ferréol. Mise en oeuvre d'une goniométrie spatio fréquentielle large bande. In *Proceedings GRETSI*, pages 547–550, Vannes, September 1999.
- [Fer01] A. Ferréol. Goniométrie multi-sources avec un système de réception deux voies par des techniques à haute résolution. In *Proceedings GRETSI*, pages 257–260, Toulouse, September 2001.
- [FFLC94] A. Flieller, A. Ferréol, P. Larzabal, and H. Clergeot. Robust bearing estimation in the presence of direction-dependent modelling errors : identifiability and treatment. In *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1994.
- [FL92] A. Ferréol and P. Larzabal. Prise en compte du couplage électromagnétique dans une radio-goniométrie haute résolution en VHF. In *JINA*, Nice, November 1992.
- [FL93] A. Ferréol and P. Larzabal. Un algorithme non itératif pour la localisation de sources avec des erreurs de modèle dépendant de leur direction. In *GRETSI*, pages 237–240, Juan les Pins, 1993.
- [FL03] A. Ferréol and P. Larzabal. Etude analytique de l'impact des erreurs de calibration sur les performances d'estimateurs de direction d'arrivées : cas de la méthode MUSIC. In *Proceedings GRETSI*, pages 133–135, Paris, FR, 2003.

- [FL04] A. Ferréol and P. Larzabal. *Procédé de goniométrie multi-paramètres par séparation de l'incidence et des paramètres de nuisances*. Patent FR 04.07007, July 2004.
- [FLV04] A. Ferréol, P. Larzabal, and M. Viberg. A new expression of the asymptotic performances of Maximum Likelihood DOA estimation method with modeling errors. In *EUSIPCO*, Vienna, 2004.
- [FLV05a] A. Ferréol, P. Larzabal, and M. Viberg. Asymptotic performances of Maximum Likelihood DOA estimation method with modeling errors. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2005. to be submitted to.
- [FLV05b] A. Ferréol, P. Larzabal, and M. Viberg. High Order Moments of Gaussian Hermitian Forms. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2005. to be submitted to.
- [FLV05c] A. Ferréol, P. Larzabal, and M. Viberg. MUSIC performances conditionally to resolved sources in presence of modelling error. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2005. to be submitted to.
- [FLV05d] A. Ferréol, P. Larzabal, and M. Viberg. On the asymptotic performance analysis of subspace DOA estimation in the presence of modeling errors : Case of MUSIC. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2005. Accepted to.
- [FLV05e] A. Ferréol, P. Larzabal, and M. Viberg. On the resolution probability of music in presence of modelling error. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2005. to be submitted to.
- [FMB98] J. Fuhl, A. F. Molisch, and E. Bonek. Unified channel model for mobile radio systems with smart antennas. *Proc. Inst., Elect., Eng., Radar, Sonar, Navigat.*, 145 :32–41, February 1998.
- [For01] G. Forchini. The distribution of a ratio of quadratic forms in non-central normal variables. *University of York, Discussion paper in economics*, (12), October 2001.
- [FP83] E. R. Ferrara and T. M. Parks. Direction finding with an array of antennas having diverse polarizations. *IEEE Trans. Antennas. Propagation.*, 31 :231–236, March 1983.
- [Fri90a] B. Friedlander. Sensitivity analysis of the maximum likelihood direction-finding algorithm. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, 26 :953–958, November 1990.
- [Fri90b] B. Friedlander. Sensitivity analysis of the MUSIC algorithm. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 38(10) :1740–1751, July 1990.
- [FRM91] A. Ferréol, J.L. Rogier, and G. Multedo. Application des méthodes à haute résolution sur un réseau d'antennes perturbées par le couplage. In *Proceedings GRETSI*, pages 665–668, Juan les Pins, September 1991.
- [FW88] B. Friedlander and A. Weiss. Eigenstructure methods for direction finding with sensor gains and phases uncertainties. *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, 5, April 1988.
- [Gan59] FR. Gantmacher. *The theory of matrices*. Vol I-II, Chelsa, 1959.
- [GFLC96] J. Grouffaud, A. Ferréol, P. Larzabal, and H. Clergeot. Passive identification of ionospheric channel. In *EUSIPCO*, Trieste, 1996.

- [GFLC97a] J. Grouffaud, A. Ferréol, P. Larzabal, and H. Clergeot. Estimation des paramètres spatio-temporels d'un canal de propagation à trajets multiples. In *Proceedings GRETSI*, pages 1319–1322, Grenoble, September 1997.
- [GFLC97b] J. Grouffaud, A. Ferréol, P. Larzabal, and H. Clergeot. A Maximum Likelihood approach for the passive identification of non stationary multi-paths channel. In *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, volume 5, pages 3585–3588, Munich, 1997.
- [GFN98] Ph. Gournay, A. Ferréol, and Ph. Nicolas. *Les Méthodes à Haute Résolution (Chapitre 17) : Goniométrie cyclique*. Hermes ISBN 2-86601-662-9, Paris, January 1998.
- [GJ00] B. Green and M. Jensen. Diversity performance of dual-antenna hand-sets near operator tissue. *IEEE Trans. Antennas. Propagation.*, 48(7) :1017–1024, July 2000.
- [HW90] B. Himed and D. Weiner. Compensation for mutual coupling effects in direction finding. In *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1990.
- [JD93] DH. Johnson and DE.Dudgeon. *Array signal processing Concept and Techniques*. Prentice Hall, 1993.
- [KB86] M. Kaveh and A. J. Barabell. The statistical performance of the MUSIC and the minimum-norm algorithm in resolving plane waves in noise. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 34 :331–341, April 1986.
- [KFJ92] H. Krim, Ph. Forster, and JG.Proakis. Operator Approach to Performance Analysis of Root-MUSIC and Root-Min-Norm. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 40(7) :1687–1696, July 1992.
- [KV96] H. Krim and M. Viberg. Two decades of array signal processing research : the parametric approach. *IEEE Signal Processing Magazine.*, 13 :67–94, July 1996.
- [LAC97] J. L. Lacoume, P. O. Amblard, and P. Comon. *Statistiques d'ordre supérieur pour le traitement du signal*. Masson, Paris, 1997.
- [Lar92] P. Larzabal. *Application du maximum de vraisemblance au traitement d'antenne : radio-goniométrie et poursuite de cibles*. PhD thesis, Université de Paris-Sud, Orsay, FR, June 1992.
- [LC84] M. A. Lagunas and A. Casull. An improved maximum likelihood method for power spectral density estimation. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 32 :170–173, February 1984.
- [LL93] H. Lee and F. Li. Quantification of the Difference Between Detection and Resolution Thresholds for Multiple Closely Spaced Emitters. *IEEE Trans. Signal Processing*, 41 :2274–2277, June 1993.
- [LW90] H. B. Lee and M. S. Wengrovitz. Resolution threshold of beamspace MUSIC for two closely spaced emitters. *IEEE Trans. Signal Processing*, 38 :1545–1559, September 1990.
- [Mag86] J. R. Magnus. The exact moments of a ratio of quadratic forms in normal variables. *Annales d'économie et de statistique*, (4) :95–109, 1986.
- [Mag02] J. R. Magnus. Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics. *Wiley - series in probability and statistics*, 2002.

- [Mar98a] S. Marcos. *Chapitre 11 : Sensibilité des méthodes HR aux perturbations de modèle, Les Méthodes à Haute Résolution : Traitement d'Antenne et Analyse Spectrale*. Hermes IBSN 2-86601-662-9, Paris, 1998.
- [Mar98b] S. Marcos. *Les Méthodes à Haute Résolution : Traitement d'Antenne et Analyse Spectrale*. Hermes, Paris, 1998.
- [MB90] S. Marcos and M. Benidir. Source Bearing Estimation and sensor positioning with the propagator method. In *proc of SPIE*, pages 312–323, July 1990.
- [MDCM95] E. Moulines, P. Duhamel, J. F. Cardoso, and S. Mayrargue. Subspace methods for the blind identification of multichannel FIR filters. *IEEE Trans. Signal Processing*, 43(2) :516–525, February 1995.
- [MLC91] O. Michel, P. Larzabal, and H. Clergeot. Test de détection du nombre de sources corrélées pour les méthodes HR en traitement d'antennes. In *Proceedings GRETSI*, Juan les pins, 1991.
- [MSW96] Y. Meng, P. Stoica, and K. Wong. Estimation of the Direction of Arrival of spatially dispersed signals in array processing. *Proc. Inst., Elect., Eng., Radar, Sonar, Navigat.*, 143 :1–9, February 1996.
- [OVSN93] B. Ottersten, M. Viberg, P. Stoica, and A. Nehorai. Exact and large sample maximum likelihood techniques for parameter estimation and detection in array processing. In S. Haykin, J. Litva, and T. J. Shepherd, editors, *Radar Array Processing*, chapter 4, pages 99–151. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [PMMAM<sup>+</sup>01] L. Perros-Meilhac, E. Moulines, K. Abed-Meraim, P. Chevalier, and P. Duhamel. Blind identification of multipath channels : A parametric subspace approach. *IEEE Trans. Signal Processing*, 49(7) :1468–1480, July 2001.
- [Rav00] S. Ravira. Compensation for the effects of mutual coupling on direct data domain adaptive algorithms. *IEEE Trans. Antennas. Propagation.*, 48(1) :86–94, January 2000.
- [Ris78] J. Rissanen. Modeling by shortest Description Length. *Automatica*, 14 :465–471, 1978.
- [RPK86] R. Roy, A. Paulraj, and T. Kailath. ESPRIT a subspace rotation approach to estimation of parameters of cisoids in noise. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 34 :1340–1342, 1986.
- [Sch81] R. O. Schmidt. *A signal subspace approach to multiple emitter location and spectral estimation*. PhD thesis, Stanford University, Stanford, CA, November 1981.
- [SH90] Steykal and JS. Herd. Mutual coupling compensation in small array antennas. *IEEE Trans. Antennas. Propagation.*, 38(12) :1971–1975, December 1990.
- [SK92] A.L. Swindlehurst and T. Kailath. A performance Analysis of Subspace-Based method in the presence of model errors, Part I : The MUSIC algorithm. *IEEE Trans. Signal Processing*, 40(3) :1758–1773, July 1992.
- [Sor99] J. Sorelius. *Subspace-based parameter estimation problems in signal processing*. PhD thesis, Uppsala University, Uppsala Sweden, February 1999.

- [Sva01] T. Svantesson. *Antenna and Propagation from a signal processing perspective*. PhD thesis, Chalmers University of Technology, Goteborg, SW, May 2001.
- [TO96] T. Tramp and B. Ottersten. Estimation of nominal direction of arrival and angular spread using an array of sensors. *IEEE Trans. Signal Processing*, 50 :57–69, April 1996.
- [VCK95] S. Valaee, B. Champagne, and P. Kabal. Parametric localization of distributed sources. *IEEE Trans. Signal Processing*, 43 :2144–2153, September 1995.
- [VO91] M. Viberg and B. Ottersten. Sensor array processing based on subspace fitting. *IEEE Trans. Signal Processing*, 39 :1110–1121, May 1991.
- [WF94a] A. Weiss and B. Friedlander. Effects of Modeling Errors on the Resolution Threshold of the MUSIC Algorithm. *IEEE Trans. Signal Processing*, 42 :1519–1526, June 1994.
- [WF94b] A. Weiss and B. Friedlander. The Resolution Threshold of a Direction-Finding Algorithm for Diversely Polarized Arrays. *IEEE Trans. Signal Processing*, 42 :1719–1727, July 1994.
- [WK85] H. Wang and M. Kaveh. Coherent signal subspace processing for the detection and estimation of multiple wideband sources. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 33 :823–831, 1985.
- [XB92] XL. Xu and K. Buckley. Bias analysis of MUSIC location estimator. *IEEE Trans. Signal Processing*, 40(10) :2559–2569, October 1992.
- [YLU89] CC. Yeh, ML. Leou, and DR. Ucci. Bearing estimations with mutual coupling present. *IEEE Trans. Antennas. Propagation.*, 37(10) :1332–1335, October 1989.
- [Zet97] P. Zetterberg. *Mobile cellular communications with base station antenna arrays : Spectrum efficiency, algorithms and propagation models*. PhD thesis, R. Inst. Technol, Stockholm, Sweden, 1997.
- [Zha95] Q. T. Zhang. Probability of Resolution of the MUSIC Algorithm. *IEEE Trans. Signal Processing*, 43 :978–987, April 1995.