



Décompositions acircuituques de grands graphes orientés:des apsects algorithmiques aux aspects combinatoires.

Jean-François Culus

► To cite this version:

Jean-François Culus. Décompositions acircuituques de grands graphes orientés:des apsects algorithmiques aux aspects combinatoires.. Mathématiques [math]. Université Toulouse le Mirail - Toulouse II, 2006. Français. NNT: . tel-00134814

HAL Id: tel-00134814

<https://theses.hal.science/tel-00134814>

Submitted on 5 Mar 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Toulouse II Le Mirail

Thèse
soutenue par
Jean-François Culus
pour l'obtention du titre
de docteur en Mathématiques

Décompositions acircuitiques de grands graphes :
des aspects algorithmiques aux aspects combinatoires

Devant le jury composé de :

Marc Demange	ESSEC Business School	Examineur
Louis Ferré	Université Toulouse II le Mirail	Directeur de thèse
Olivier Hudry	ENST Paris	Examineur
Bertrand Jouve	Université Toulouse II le Mirail	Tuteur de thèse
Bruce Reed	Université McGill, Montréal	Rapporteur
Eric Sopena	Université Bordeaux I	Rapporteur

Table des matières

1	Introduction	4
1.1	Contexte de la thèse	4
1.2	Quelques partitions sous contraintes	7
1.3	Plan de la thèse	13
1.4	Préliminaires techniques	14
1.4.1	Notations sur les graphes	14
1.4.2	Notions d'homomorphismes de graphes	16
1.4.3	Listes des travaux publiés	23
1.4.4	Liste des symboles	24
2	Coloration orientée d'un graphe	26
2.1	Introduction	26
2.2	Complexité	27
2.2.1	Introduction	27
2.2.2	Nouvelles variantes $\mathcal{NP}$ -complètes	29
2.2.3	Nouvelle famille polynomiale	36
2.3	Inapproximation	38
2.3.1	Ensemble Stable Maximum	38
2.3.2	Réduction du Stable Maximum vers la Coloration Orientée	38
2.3.3	Réduction vers le problème du Stable Maximum	41
3	Coloration mixte	43
3.1	Introduction	43
3.2	Approximation	47
3.2.1	Une différence entre coloration mixte et coloration orientée	47
3.2.2	L'algorithme glouton et son analyse	49
3.3	Polynôme chromatique mixte	51
3.3.1	Définition	52
3.3.2	Propriétés du polynôme chromatique mixte	54

3.3.3	Formule par Exclusion / Inclusion	55
3.3.4	Interprétation des coefficients	58
3.4	Discussion et perspectives	74
4	Décomposition acircuitique	77
4.1	Introduction	77
4.1.1	Définitions	77
4.1.2	Modélisations	80
4.2	Complexité	81
4.2.1	Réduction au problème 3-Sat	81
4.2.2	Famille polynomiale	84
4.3	Graphe orienté acircuitique-indécomposable	89
4.3.1	Définitions	89
4.3.2	Tournoi sommet-critique a-indécomposable	93
4.4	Polynôme chromatique acircuitique	99
4.4.1	Définition du polynôme chromatique acircuitique d'un graphe orienté	100
4.4.2	Décomposition acircuitique d'un graphe mixte	101
4.4.3	Formule de récurrence	105
4.4.4	Propriétés du polynôme chromatique acircuitique	108
4.5	Discussion et perspectives	109
5	Conclusion	111

Remerciements

Je remercie chaleureusement Bertrand Jouve et Louis Ferré pour m'avoir offert la possibilité de travailler sur ce sujet de thèse et pour avoir été des guides patients et attentionnés tout au long de ces années, se rendant disponibles pour moi malgré leurs lourdes responsabilités respectives. La grande sympathie, l'incroyable énergie et efficacité dont fait quotidiennement preuve Bertrand, l'ouverture d'esprit de Louis ont rendu intéressante chaque journée passée en leur compagnie.

Qu'ils en soient donc ici remerciés.

Je tiens ensuite à présenter tous mes remerciements à Marc Demange, avec qui j'ai eu grand plaisir à travailler. Je lui suis très reconnaissant pour son dynamisme, sa sympathie et sa communicative passion de la recherche, en particulier pour les problèmes d'approximation.

J'adresse ma plus profonde reconnaissance à Bruce Reed et Eric Sopena pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'avoir rapporté ma thèse. Leurs judicieuses remarques m'ont permis d'améliorer mon document initial. Je remercie Olivier Hudry de m'avoir fait le plaisir d'accepter de participer à mon jury de thèse.

Cette thèse n'aurait pas pu voir le jour sans le soutien des membres de l'équipe Grimm et du département de mathématiques et informatique de l'Université Toulouse le Mirail qui m'ont confié, quatre années durant, un post d'ATER. Je tiens donc à cordialement remercier l'ensemble de ses membres pour leur accueil, leur sympathie et leur accessibilité. En particulier, je remercie Nathalie pour sa patiente et minutieuse relecture, Bertrand, Julien, Francis, Pascal, Claudie, Cathy et Sophie pour avoir eu le plaisir de partager des enseignements avec eux, Véronique et les membres du corps administratif pour la compétence dont elles font preuve au secrétariat, Marc, Jean-Marc, Christian et Bernard pour leurs implications administratives qui simplifient la vie à de jeunes thésards tels que moi. Enfin, plus que des collègues, nombre

des membres du département sont aujourd'hui des amis ; l'ambiance de camaraderie qui y prédomine renouvelle chaque jour le plaisir d'y travailler.

Je remercie mes amis de longue date pour qui j'ai été si peu présent durant ces quatre années, pour leurs grandes disponibilités lors de mes venues en « coup de vent » à Paris, le temps d'un Week-End. Je remercie finalement ma famille, et tout spécialement ma mère, pour la patience et la compréhension dont elle a fait preuve depuis toutes ces années.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte de la thèse

L'analyse de données relationnelles peut procéder de la recherche de propriétés du graphe de relations qui les représente. C'est dans ce contexte que l'équipe de Mathématiques Appliquées du GRIMM a été amenée à travailler, en collaboration avec des sociologues, sur des problèmes de structure du graphe orienté extrait d'internet (cf. [Ferré et Jouve, 2002]). Son expertise, à la fois en classification, statistique et théorie des graphes, a permis l'émergence d'une partition, dite « *décomposition acircuitique* », adaptée aux exigences de l'analyse des sociologues.

Celle-ci consiste à rechercher la plus petite partition de l'ensemble des sommets d'un graphe orienté en classes acircuitiques, présentant entre elles des liens orientés dans un seul sens. Les approches combinatoires et algorithmiques de cette décomposition ont été le point de départ de cette thèse. Notons que la partition des sommets du graphe obtenu à partir d'une coloration orientée, au sens défini dans [Sopena, 1997], est un cas particulier de décomposition acircuitique dans laquelle la contrainte d'acircuitique a été renforcée en ensemble stable.

Citons brièvement les grandes lignes de ce travail de doctorat. La première consiste en l'étude de la complexité et de l'approximabilité du problème de coloration orientée. Ce travail a révélé l'intérêt d'un nouveau type de coloration, que nous avons appelé coloration mixte, et qui est une généralisation des notions de coloration et coloration orientée aux graphes mixtes. Son étude conduit à obtenir des résultats positifs d'approximation du nombre chromatique orienté. La coloration mixte permet, par ailleurs, de définir la notion de polynôme chromatique sur les graphes mixtes. Certains verrous inhérents à l'analyse des propriétés du polynôme chromatique orienté tombent dans le

cas mixte. Dans la dernière partie de ce travail, nous abordons les questions relatives à la décomposition acircuitique sans renforcement de contrainte. Après l'étude de sa complexité dans le cas général, nous étudions une sous-famille de tournois.

Cette décomposition s'inscrit plus largement dans la problématique de mise en évidence de la structure¹ d'un graphe. De nombreux domaines aussi différents que l'analyse textuelle, la biologie, les systèmes informatiques ou encore les réseaux sociaux, produisent des données de grande taille, pouvant être formalisées par un graphe. Celui-ci n'est généralement pas représentable et donc son analyse se trouve être particulièrement difficile. On cherche alors à caractériser au mieux ce graphe au moyen de l'étude de sa structure.

La recherche de structure est une immense problématique, regroupant des approches très différentes, des vastes gammes de méthodes et d'outils servant à la résolution de nombreux problèmes. Parmi ces méthodes, nous présentons ci-après quatre familles : l'extraction d'indices, les méthodes spectrales, la classification et les méthodes combinatoires. Même si nous les présentons de manière séparée, le cloisonnement entre celles-ci n'est en rien étanche. Par exemple, la coloration d'un graphe peut être vue comme un indice (nombre chromatique), comme une méthode de classification (il s'agit d'obtenir une partition de l'ensemble des sommets en classes vérifiant certaines contraintes), ou encore comme une méthode relevant typiquement de l'approche combinatoire dans laquelle nous la ferons apparaître. De même, un problème peut faire l'objet de différentes approches. Par exemple, la mise en évidence d'une partition de l'ensemble des sommets d'un graphe arête-pondérée en classes de diamètre s fixé, peut être traitée par des méthodes de *classification*, mais peut aussi se faire au moyen de la définition d'un graphe seuil G_s , transformant ce premier problème en un problème de coloration du graphe seuil (cf. [Hansen et Delattre, 1978]). Aussi, ne faut-il pas voir la prochaine liste comme une énumération de familles disjointes de méthodes mais plutôt comme l'énumération de classes empiétantes d'une partie de cet immense domaine.

- La première approche consiste à extraire des *indices* du graphe. Celle-ci fut à l'origine du succès de [Watts, 2003], qui mit en évidence des indices tels que la moyenne des longueurs des plus courts chemins, ou encore le coefficient de « clustering », le diamètre du graphe... Aujourd'hui, cette approche est reprise pour étudier le graphe issu d'internet ([Latapy et Guillaume, 2004]). Les indices sont particulièrement intéressants pour obtenir un modèle du graphe que l'on étudie, afin de pouvoir générer aléatoirement des graphes aussi proches que possible du « vrai » et y tester nos méthodes et algo-

¹propriétés du graphe invariantes par isomorphisme

rithmes. Par exemple, relativement au graphe d'internet, la méthode de l'attachement préférentiel, développée dans [Albert et Barbási, 1999], permet de générer des graphes dont les indices ressemblent à ceux du graphe d'internet. En outre, cette méthode permet de donner une explication simple au fait que la distribution des degrés du graphe d'internet est généralement proche d'une loi puissance.

- Nous regroupons sous l'appellation générique de *méthodes spectrales* différentes approches utilisant la recherche de valeurs propres de la matrice d'adjacence du graphe ou d'autres calculées à partir de ce graphe. Une première application de ces méthodes consiste à représenter ce graphe, ce qui est particulièrement intéressant lorsqu'il est de grande taille. À partir d'un tableau de distances obtenu via une fonction calculant une distance entre deux sommets par considération de leurs voisinages, l'emploi de méthodes telles que le Principal Coordinate Analysis (cf. [Jolliffe, 1986]) en permet la représentation. Une telle approche a, par exemple, été utilisée dans le domaine des neurosciences dans [Jouve, 1999]. Toujours visant cet objectif, le calcul de vecteurs propres associés aux k plus petites valeurs propres du Laplacien du graphe permet d'associer à tout sommet des coordonnées dans $\mathbb{R}^k$, et donc de le représenter. Plus généralement, les méthodes spectrales peuvent être utilisées pour résoudre ou approcher des problèmes de partitionnement de l'ensemble des sommets du graphe. Un premier exemple est donné par la précédente représentation qui conduit à une heuristique permettant de réaliser une bipartition du graphe (problème **Min Cut**). Les valeurs propres du Laplacien ([Chung, 1997]) d'un graphe permettent d'obtenir une borne inférieure du coût de la coupe réalisant la bisection² du graphe ([Boppana, 1987]). Ces outils peuvent aussi être utilisés pour l'encadrement de certains indices du graphe dont le calcul est impossible en pratique. C'est, par exemple, le cas pour le nombre chromatique qui admet un encadrement fonction des valeurs propres maximale et minimale de la matrice d'adjacence ([Hoffman, 1970]). Pour de plus amples plongées dans ces méthodes spectrales, nous renvoyons en particulier à [Mohar et Poljak, 1993, Cvetkovic et al., 1997, Chung, 1997].

- Recoupant ces méthodes spectrales, les *méthodes de classification* visent à l'obtention d'une partition de l'ensemble des sommets du graphe. Parmi celles-ci, les méthodes hiérarchiques partent d'un tableau de distances calculées à partir du graphe et permettent l'obtention d'une partition au moyen du calcul d'une hiérarchie. Cette approche a été initialement mise en œuvre dans le cadre de la pagination des circuits électroniques dans

²Recherche d'une partition de l'ensemble des sommets du graphe en deux classes équilibrées minimisant la somme des poids des arêtes coupées

[de Fraisse et Kuntz, 1992], et se retrouve dans le cadre d’une étude liée à la *décomposition acircuitique* dans [Ferré et Jouve, 2002]. On peut aussi utiliser ces mêmes méthodes non en partant d’une distance mais fondées sur une mesure de densité, comme dans [Colombo et al., 2003]. Les méthodes d’apprentissage non supervisé peuvent aussi permettre d’obtenir une partition du graphe, comme dans [Berry et al., 2004]. Enfin, citons l’optimisation d’une fonction de coût qui permet d’obtenir une partition optimisée selon un certain critère, généralement la séparation, l’homogénéité ou encore la dispersion de la partition ; pour une revue comparée de ces différents critères, nous renvoyons à [Guénoche, 2003]. Pour une revue plus exhaustive de cette problématique, nous recommandons la lecture de [Alpert et Kahng, 1995].

- Enfin, terminons cette présentation sur la recherche de structures dans un graphe par les *méthodes combinatoires*. Une première famille de ces méthodes consiste à reformuler le problème de structure afin qu’il puisse être résolu ou approché par un algorithme du domaine. Par exemple, l’algorithme de coupe de coût minimal / flot maximal permet d’obtenir une coupe de poids minimum (problème **Min Cut**) en temps polynomial. Par itération de cet algorithme, nous pouvons obtenir une solution garantissant un rapport d’approximation égal à $2 - \frac{2}{k}$ par rapport au poids des arêtes coupées par une partition optimale en k classes minimisant le nombre d’arcs entre les classes ([Saran et Vazirani, 1991]). Une autre approche combinatoire du domaine est la recherche de sous-graphes présentant une structure caractéristique, telle, par exemple, une clique, ou un sous-graphe isomorphe à $K_{3,3}$, ou encore des sous-structures locales apparaissant dans le graphe du Web ([Latapy et Guillaume, 2004]). L’utilisation d’homomorphismes est alors particulièrement intéressant, puisqu’il permet de projeter un graphe sur un autre, et donc de retrouver une structure au sein d’un graphe. Cet outil permet aussi d’obtenir une partition de l’ensemble des sommets, sous la forme générique du problème de coloration ([Hell et Nesetril, 2004]). L’outil que constituent les homomorphismes est très souple, et s’adapte à un grand nombre de contraintes, ce qui permet de formaliser au moyen d’homomorphismes de très nombreuses partitions sous contraintes de l’ensemble des sommets d’un graphe. Nous reviendrons largement sur cet outil dans les chapitres suivants.

1.2 Quelques partitions sous contraintes

Après avoir été étudiée par des approches relevant de la classification hiérarchique ([Ferré et Jouve, 2002]) et par une méthode d’optimisation d’inertie ([Jouve, 2005]), la *décomposition acircuitique* est abordée ici

par les méthodes combinatoires spécifiquement dédiées aux partitions sous contraintes de l'ensemble des sommets d'un graphe. Cette partie est consacrée à une petite revue de quelques-unes de ces partitions ainsi qu'à l'exposé de quelques problématiques et résultats les concernant. Nous mentionnerons la formulation équivalente en termes d'homomorphismes de ces problèmes ; le lecteur trouvera en section 1.4.2 une introduction plus complète sur ce sujet.

Dans le cadre non-orienté, deux contraintes de structures apparaissent naturellement. Il s'agit, d'une part, de l'obtention de classes *stables*, c'est-à-dire de sous-graphes induits sans arête, et d'autre part, d'obtenir des *cliques*, c'est-à-dire des sous-graphes induits complets (non nécessairement maximaux). Si l'unique condition est de partitionner l'ensemble des sommets du graphe en un nombre minimum de classes stables, nous obtenons le très classique problème de *coloration*. Sinon, le problème de la (p, k) -*coloration* d'un graphe mélange les contraintes d'obtention de classes stables et de cliques. Ainsi, une (p, k) -*coloration* de G est une $(p + k)$ -partition de l'ensemble des sommets de G en p cliques et k stables. La (p, k) -coloration conduit à deux problèmes d'optimisation différents : minimiser $p + k$ conduit au problème de *co-coloration*, alors que la minimisation de $Max(p, k)$ conduit à la notion de *split-coloration*. Bien que moins explorés que la notion de coloration, ces problèmes sont actuellement l'objet d'intenses recherches (cf. [Demange et al., 2005, Erkim et de Werra, 2005]).

Coloration

La plus grande liberté de la structure orientée (la relation entre sommets n'étant plus nécessairement symétrique) nous conduit à un plus large éventail de contraintes possibles. Sans prétendre être exhaustif, nous allons en évoquer quelques-unes. Outre la notion de *stable*, nous rencontrerons la notion de classe *acircuitique*. Une classe (un ensemble de sommet) est *acircuitique* si le sous-graphe induit par ces sommets ne contient pas de circuit. De plus, nous dirons que deux sous-ensembles S et S' de $V(\vec{G})$ vérifient la propriété d'*unidirection* si tous les arcs entre S et S' sont orientés dans le même sens, c'est-à-dire soit de S vers S' , soit de S' vers S . Les sous-ensembles $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ de $V(\vec{G})$ vérifient la propriété d'*unidirection* (dans leur ensemble) s'ils la vérifient deux à deux.

Introduisons aussi brièvement quelques notions d'homomorphisme dont nous aurons besoin dans cette revue. Un *homomorphisme* de $G = (V, E)$ dans $H = (V', E')$ est une application $f : V \rightarrow V'$ vérifiant, pour toute arête $\{x, y\}$ de G , $\{f(x), f(y)\}$ est une arête de H ([Hell et Nesetril, 2004]). Un *homomorphisme orienté* ([Bang-Jensen et Gutin, 2000]) de $\vec{G} = (V, A)$ dans $\vec{H} = (V', A')$ est une application f de V dans V' , telle que, pour tout arc (x, y) de $\vec{G}$, $(f(x), f(y))$ est un arc de $\vec{H}$. Un homomorphisme acircuitique ([Feder et al., 2003]) de $\vec{G} = (V, A)$ dans $\vec{H} = (V', A')$ est une application f

Homomorphisme

Homomorphisme orienté

Homomorphisme acircuitique

de V dans A telle que, si (x, y) est un arc de $\vec{G}$, alors soit $f(x) = f(y)$, soit $(f(x), f(y))$ est un arc de $\vec{H}$. De plus, pour tout sommet a de V' , l'image réciproque par f de a doit être un sous-ensemble *acircuitique* de $\vec{G}$.

Coloration

Ce problème a, depuis longtemps, été étudié sous divers aspects, tant algébrique que combinatoire ou probabiliste. Nous ne présentons, ici, que quelques problématiques de cet immense domaine, dont un aperçu plus conséquent pourra être obtenu dans [Jensen et Toft, 1995, Du et Pardalos, 1998, Toft, 1995, Molloy et Reed, 2001].

En terme d'homomorphisme de graphes, un graphe G admet une k -coloration si et seulement s'il existe un graphe K d'ordre k tel qu'il existe un homomorphisme de G dans K . Pour k naturel fixé, le problème de savoir si un graphe G donné est k -colorable est noté **Col_k**. Bien que ce problème de décision soit $\mathcal{NP}$ -complet pour $k \geq 3$ ([Karp, 1972]), de nombreuses familles polynomiales sont connues, telles les graphes multipartis complets, ou encore les cographes ([Golumbic, 1980]). A l'inverse, des familles d'instances peuvent être montrées $\mathcal{NP}$ -complètes, telles la famille des graphes planaires pour le problème de la 3-coloration, alors même que le problème de la 4-coloration est polynomial pour ces mêmes instances, en conséquence du résultat d'Appel et Haken ([Appel et Haken, 1977, Appel et al., 1977]). Ainsi, la difficulté du problème de coloration de ces instances se concentre autour de la seule 3-coloration. L'approximation du problème de minimisation associé, noté **Nombre chromatique**, a été menée dans le domaine de l'approximation classique et différentielle. Dans le cadre classique, ce problème admet une $O(\log(n)/n)$ -approximation par un algorithme glouton analysé en 1974 par Johnson ([Johnson, 1974]). Ce résultat a ensuite successivement été amélioré dans [Berger et Rompel, 1990], puis dans [Wigderson, 1983], pour finalement aboutir à la meilleure approximation connue pour l'heure, en $O(n(\log \log n)^2 / \log^3(n))$ dans [Halldórson, 1993]. Relativement à l'approximation différentielle, il admet un rapport constant (donc assuré quel que soit l'ordre n du graphe instance). Ce résultat a initialement été prouvé par Marc Demange et Vangelis Paschos lors de l'établissement d'une première borne égale à $1/2$ ([Demange et al., 1998]). Un raffinement de l'analyse a permis l'obtention du rapport différentiel de $2/3$ ([Hassin et Lahav, 1994]). Enfin, le meilleur rapport d'approximation différentiel connu pour l'heure est de $289/360$, obtenu par Rong-Chii Duh et Martin Fürer dans [Duh et Fürer, 1997]. Si l'on considère l'ensemble $\mathcal{C}_k$ des graphes k -chromatiques, les graphes minimaux au sens de l'inclusion sont dits *critiques*. Plus généralement, un sommet ou un arc / une arête est *critique*

Col_k

Graphe critique

si sa suppression diminue le nombre chromatique du graphe. [Brooks, 1941] caractérise les graphes critiques k -chromatique comme ceux ayant $k - 1$ pour degré minimal. Cette étude est poursuivie par Gallai dans [Gallai, 1963], par l’usage de graphes biconnexes et d’ensembles d’articulation. La poursuite de ce travail peut se faire en imposant la condition de critique aux seuls sommets du graphe. Cela permet à Gallai, dans [Gallai, 1963], de proposer un théorème relatif à un sous-graphe d’un graphe sommet-critique analogue à celui de Brooks. Ces deux familles sont bien distinctes : Brown prouve l’existence de graphes sommet-critiques n’ayant aucune arête critique ([Brown, 1992]). Dans la lignée de ce travail, Jensen démontre, dans [Jensen, 1996], l’existence de graphes k -sommet critiques ($k \geq 5$) dont le nombre chromatique ne décroît pas après suppression de m arêtes toutes incidentes à un même sommet.

Dans l’idée de démontrer le théorème des quatre couleurs, Birkhoff introduit en 1912 la notion de polynôme chromatique dans [Birkhoff et Lewis, 1946], qui constitue aujourd’hui, un domaine quasi propre de la théorie des graphes ([Toft, 1995, Dong et al., 2005, Read, 1968, Biggs, 2001]). Notons dans ce domaine l’étonnante interprétation, due à Stanley ([Stanley, 1973]), de la valeur absolue de l’évaluation en -1 de ce polynôme en termes d’orientations acircuitiques. Poursuivant ce travail, Gessel relie, dans [Gessel, 2001], les différents coefficients du polynôme chromatique de G à des classes d’orientations acircuitiques différentes de G . Suscitant quelques curiosités, ce résultat a été démontré par maintes méthodes ([Gessel, 1996, Gessel, 2001, Lass, 2001, Gebhard et Sagan, 2000]).

Coloration orientée

Cette notion apparaît dans les études réalisées par Courcelle [Courcelle, 1994] relatives aux logiques monadiques. Un graphe orienté $\vec{G}$ admet une k -coloration orientée s’il existe une k -partition $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ de l’ensemble des sommets de $\vec{G}$ en classes stables vérifiant la propriété d’uni-direction entre elles, ie.

$$\forall 1 \leq i < j \leq k, \{x, x'\} \in V_i^2, \{y, y'\} \in V_j^2, (x, y) \in A(\vec{G}) \Rightarrow (y', x') \notin A(\vec{G})$$

En terme d’homomorphisme, le graphe orienté $\vec{G}$ admet une k -coloration orientée si et seulement s’il existe un graphe orienté asymétrique $\vec{H}$ d’ordre k et un homomorphisme orienté de $\vec{G}$ dans $\vec{H}$. Le *Nombre chromatique orienté* de $\vec{G}$, noté $\chi_o(\vec{G})$, est le plus petit entier k tel qu’il existe une k -coloration orientée de $\vec{G}$. Le nombre chromatique orienté peut être défini pour un graphe G comme étant le plus grand nombre chromatique orienté

Coloration orientée

sur l'ensemble des orientations $\vec{G}$ de G . De nombreux travaux relient le nombre chromatique orienté d'un graphe à d'autres paramètres de celui-ci. Par exemple, un lien entre le nombre chromatique orienté et le nombre acircuitique de ce même graphe a été obtenu dans [Kostochka et al., 1997]. Une relation similaire a été obtenue lorsque G est un graphe à degré borné. Cette relation a récemment été améliorée dans [Wood, 2004]. La famille des graphes planaires a fait l'objet d'une attention particulière dans [Sopena, 1997, Raspaud et Sopena, 1994], permettant l'obtention d'une borne au nombre chromatique orienté pour tout graphe planaire (en l'occurrence, si G est un graphe planaire, alors $\chi_o(G) \leq 80$). Cette borne a fait l'objet d'investigations plus poussées, déjà dans [Nesetril et al., 1997], puis dans [Borodin et al., 1999], aboutissant à un résultat bien plus fin selon la valeur de la « maille » du graphe G . Le travail inverse, consistant à déduire le nombre minimum d'arcs étant donné une connaissance sur le nombre chromatique orienté et l'ordre du graphe planaire orienté $\vec{G}$ a été mené dans [Klostermeyer et MacGillivray, 2004a]. Le nombre chromatique orienté est aussi relié à d'autres paramètres du graphe, tel, par exemple, le degré moyen du graphe, obtenu dans [Borodin et al., 1999].

La notion de graphes critiques pour la coloration orientée a, elle aussi, été étudiée. Dans [Borodin et al., 1998] est prouvée l'existence de graphes orientés *profondément critiques* (pour les arcs), définis comme les graphes $\vec{G}$ vérifiant $\chi_o(\vec{G} \setminus (u, v)) = \chi_o(\vec{G}) - 2$. Cette étude est complétée par [Borodin et al., 2001] où est obtenue, pour tout entier k , l'existence d'un graphe profondément critique vérifiant, pour tout sommet v de $\vec{G}_k$: $\chi_o(\vec{G}_k) - \chi_o(\vec{G}_k \setminus \{v\}) \leq k$.

Nous reviendrons sur cette partition dans les chapitres 2 et 3.

Partition dichromatique

L'idée initiale de cette partition est due à Erdos [Erdos, 1979], et a été étudiée par Victor Neumann-Lara [Neumann-Lara, 1982, Neumann-Lara et Urrutia, 1984, Neumann-Lara, 1994]. Une *k-partition dichromatique* d'un graphe $\vec{G}$ est une partition de l'ensemble $V(\vec{G})$ en k classes acircuitiques.

Donnons quelques exemples de résultats connus sur cette partition. Dans [Neumann-Lara, 1982], nous trouvons un résultat généralisant un théorème de Paul Erdos quant à l'existence de cycles de longueur impaire supérieure ou égale à $\chi(G) - 1$ pour tout graphe G . La notion de graphe sommet-critique dichromatique est étudiée dans [Neumann-Lara et Urrutia, 1984] ; l'existence de tels graphes orientés est ob-

tenue au moyen de tournois circulants. Enfin, une caractérisation des graphes 3 et 4-dichromatiques pour des ordres relativement petits (jusqu'à 11 en l'occurrence) est donnée dans [Neumann-Lara, 1994].

Intervalles

La notion d'*intervalle* généralise l'habituelle notion définie lorsque $\vec{G}$ est un ordre total. Un *intervalle* d'un graphe orienté $\vec{G}$ est un sous-ensemble I de $V(\vec{G})$ tel que :

$\forall (a, b) \in I^2, x \in V(\vec{G}) \setminus I, [(x, a) \in A(\vec{G})] \Leftrightarrow [(x, b) \in A(\vec{G})]$ et $[(a, x) \in A(\vec{G})] \Leftrightarrow [(b, x) \in A(\vec{G})]$. Cette notion, très largement étudiée, peut apparaître sous différentes appellations. Selon le domaine de recherche, un intervalle est aussi nommé sous-ensemble autonome, sous-ensemble homogène, clan ou module (cf [Dahlhaus et al., 2002, MacConnell et de Montgolfier, 2005]); nous renvoyons le lecteur, par exemple à [Boudabbous et al., 2000], pour de plus amples liens terminologiques.

Les ensembles $\emptyset$ et $V(\vec{G})$ ainsi que les singletons sont toujours des intervalles (dits triviaux) de $\vec{G}$.

Un graphe est *indécomposable* lorsque tous ses intervalles sont triviaux.

Donnons un aperçu très rapide de quelques-uns des travaux relatifs à cette notion. Reprenant une première étude menée dans [Schmerl et Trotter, 1994] et abordant, entre autres, la question de la caractérisation des graphes critiques indécomposables³, Pierre Ille étudie dans [Ille, 1997] les graphes indécomposables ayant un sous-graphe (propre) indécomposable. Dans [Cournier et Ille, 1998], il poursuit son étude des graphes indécomposables en étudiant une notion de minimalité de ceux-ci. Dans [Boudabbous et al., 2000], il caractérise les tournois dont tous les sous-tournois propres indécomposables sont auto-duaux (i.e. isomorphes à leurs inverses). Enfin, dans [Bouissairi et al., 2004], il montre, avec ses coauteurs, l'importance de la structure des 3-circuits pour la notion de décomposition. Plus explicitement, si T est un tournoi et si l'on désigne par $C_3(T)$ l'ensemble des $\{x, y, z\}$ tels que (x, y, z) soit un 3-circuit de T , les auteurs démontrent que si T et T' sont deux tournois vérifiant $C_3(T) = C_3(T')$ et si T est indécomposable, alors T' est isomorphe soit à T , soit à son dual.

³graphes indécomposables mais dont tout sous-graphe propre induit est décomposable

Partition chromatique orientée circulaire

Nous évoquons aussi, ici, l'adaptation de la notion de nombre chromatique circulaire proposée dans [Bokal et al., 2004, Feder et al., 2003]. Soit p un réel positif. Nous désignons par S_p le cercle de périmètre p de $\mathbb{R}^2$ centré en $(0,0)$. A tout couple (x,y) de points de S_p , nous désignons par $d(x,y)$ la longueur de l'arc reliant x à y en parcourant S_p dans le sens des aiguilles d'une montre. Une p -coloration circulaire d'un graphe orienté $\vec{G}$ est une application c de $V(\vec{G})$ dans S_p vérifiant, pour tout arc (u,v) dans $A(\vec{G})$, $d(c(u),c(v)) \geq 1$. Cette condition implique en particulier que l'ensemble c^{-1} induit un graphe acircuitique de $\vec{G}$. Le *nombre chromatique circulaire* $\chi_c(\vec{G})$ est défini comme la borne inférieure de l'ensemble $\{p \in \mathbb{R} : \vec{G} \text{ admet une } p\text{-coloration circulaire}\}$.

Le nombre chromatique circulaire des graphes circulants est calculé dans [Bokal et al., 2004]. Il en résulte l'existence, pour tout rationnel $r > 0$, d'au moins un graphe dont le nombre chromatique circulant est égal à r . Le lien entre *homomorphisme acircuitique* et nombre chromatique circulaire est explicité dans [Bokal et al., 2004] ; ainsi, $\chi_c(\vec{G}) \leq k/d$ si et seulement s'il existe un homomorphisme acircuitique de $\vec{G}$ dans un certain tournoi circulant à k sommets. Le nombre chromatique circulaire d'un graphe non orienté G est défini comme le maximum des nombres chromatiques circulaires sur l'ensemble des orientations $\vec{G}$ de G . Un encadrement du nombre chromatique circulaire par le nombre chromatique est établi dans [Bokal et al., 2004]. Le cas d'égalité a fait l'objet de nombreux travaux, repris dans [Zhu, 2001]. Par exemple, le problème de décision consistant à savoir si $\chi_c(G) = \chi(G)$ pour un graphe G est établi comme étant $\mathcal{NP}$ -difficile. Les grandes lignes de l'étude du cas où $\chi_c(G)$ est « proche » de $\chi(G) - 1$, faisant intervenir la notion de graphe G critique (pour la coloration classique) sont reprises dans [Zhu, 2001]. Nous renvoyons le lecteur intéressé par cette problématique à cette dernière référence, qui contient de nombreux résultats mais aussi des questions ouvertes sur ce sujet. Pour une adaptation de cette notion aux graphes pondérés, on se reportera à [Mohar, 2003].

1.3 Plan de la thèse

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons à la coloration orientée comme cas particulier de la décomposition acircuitique. Nous présentons déjà un exemple d'application de cette coloration en terme d'assignation de tâches, domaine d'application classique des problèmes

de coloration ([de Werra, 1985]). La $\mathcal{NP}$ -complétude de la k -coloration orientée, pour $k \geq 4$, n'a été établie que pour les graphes connexes ([Klostermeyer et MacGillivray, 2004b]). Nous améliorons la connaissance de ce sujet en exhibant à la fois des familles $\mathcal{NP}$ -complètes très restrictives, mais aussi des familles d'instances polynomiales. En effet, au moyen d'une réduction de Turing partant de 3-Sat, nous prouvons la $\mathcal{NP}$ -complétude des familles des graphes acircuitiques ou des graphes bipartis planaires, puis mettons en lumière le fait que les graphes multipartis complets forment une famille polynomiale pour ce problème. Une fois cette complexité testée et réaffirmée, nous nous intéressons à la résolution effective de celui-ci au moyen de l'étude de l'approximation de ce problème. Nous obtenons en premier lieu des résultats d'inapproximation au moyen d'une réduction avec le problème du *Stable Maximum*.

Le troisième chapitre aborde une généralisation de la notion de coloration orientée aux graphes mixtes, dite *coloration mixte*. Nous étudions dans un premier temps les liens existant entre cette coloration et les colorations classique et orientée, puis ré-abordons la question de l'approximation du problème de coloration orientée dans ce nouveau cadre. Le résultat que nous obtenons permet de garantir un rapport d'approximation différentielle pour les problèmes de colorations orientée et mixte. Suscité par le travail d'Eric Sopena dans [Sopena, 1994], nous introduisons la notion de polynôme chromatique mixte et en donnons les premières propriétés. Cela nous permet de retrouver celle relative au polynôme chromatique orienté, mais aussi d'entamer une possible interprétation des coefficients de celui-ci, au moyen d'orientations acircuitiques d'un graphe, de façon assez similaire à [Stanley, 1973].

Le quatrième chapitre de cette thèse est consacré à l'étude de la décomposition acircuitique. Nous démontrons la $\mathcal{NP}$ -complétude du problème général, et abordons une importante famille polynomiale de graphes : la famille des tournois, que nous explorons plus profondément. Un tournoi est *a-indécomposable* si les classes monochromatiques de toute décomposition acircuitique sont des singletons ou vides. Notre motivation pour ces tournois est suscitée par le fait que la probabilité qu'un tournoi aléatoire d'ordre n soit *a-indécomposable* tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Nous caractérisons, à l'aide des tournois circulants, les tournois *a-indécomposables* sommet-critique qui sont les tournois *a-indécomposables* minimaux pour l'opération de suppression de sommet. Enfin, nous définissons la notion de polynôme chromatique acircuitique et en donnons les premières propriétés.

1.4 Préliminaires techniques

1.4.1 Notations sur les graphes

Graphe	Un graphe G est la donnée d'un ensemble $V(G)$ de <i>sommets</i> étiquetés et d'un ensemble $E(G)$ d'<i>arêtes</i>, chaque arête étant une paire de sommets. Une <i>chaîne</i> $P_k = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ un k-uplet de sommets de $V(G)$ telle que, $\forall i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, $\{x_i, x_{i+1}\} \in E(G)$. L'entier $k-1$ est la <i>longueur</i> de la chaîne P_k. Un <i>cycle</i> est une chaîne $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ avec $x_1 = x_k$. Une <i>boucle</i> est un cycle de longueur 2. Sauf mention explicite contraire, nous considérerons des <i>graphes simples</i>, c'est-à-dire des graphes sans boucle. Un <i>graphe orienté</i> $\vec{G}$ est la donnée d'un ensemble $V(\vec{G})$ de <i>sommets</i> et d'un ensemble $A(\vec{G})$ d'arcs, chaque arc étant un couple de sommets. Un <i>chemin</i> $C_k = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ est un k-uplet de sommets de $V(\vec{G})$ tel que, pour tout i compris entre 1 et $k-1$, (x_i, x_{i+1}) est un arc de $\vec{G}$. L'entier $k-1$ est la <i>longueur</i> du chemin. Un <i>circuit</i> est un chemin $C_k = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ tel que $x_k = x_1$. Une <i>boucle orientée</i> est un circuit de longueur 2 (soit (x, x)). Nous ne considérerons, sauf mention contraire explicite, que des graphes <i>asymétriques</i>, c'est-à-dire sans boucle, orienté et vérifiant : $(x, y) \in A(\vec{G}) \Rightarrow (y, x) \notin A(\vec{G})$. De manière équivalente, un <i>graphe orienté asymétrique</i> est un graphe orienté sans circuit de longueur 1 ou 2. Un <i>tournoi</i> T est un graphe orienté asymétrique <i>complet</i>, c'est-à-dire qu'à toute paire $\{x, y\}$ de sommets de T, soit (x, y), soit (y, x) est un arc de T et non les deux. Un <i>graphe mixte</i> $\mathcal{G}$ est donné par un triplet d'ensembles $(V(\mathcal{G}), A(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}))$; le premier est l'ensemble des sommets de $\mathcal{G}$, le second est un ensemble de couples de sommets (les arcs de $\mathcal{G}$), et le dernier est un ensemble de paires de sommets (l'ensemble des arêtes de $\mathcal{G}$). Notons qu'il ne peut y avoir d'arcs ou d'arêtes multiples parallèles, mais si x et y sont deux sommets de $\mathcal{G}$, l'arc (x, y) et l'arête $\{x, y\}$ peuvent appartenir respectivement à $A(\mathcal{G})$ et $E(\mathcal{G})$. Les graphes simples et graphes orientés sont des graphes mixtes; aussi les précédentes définitions s'étendent-elles à ces derniers. Sauf mention explicite contraire, nous ne considérerons que des <i>graphes mixtes asymétriques</i>, c'est-à-dire sans boucle (orientée ou non) et sans circuit de longueur 2. Au graphe mixte $\mathcal{G} = (V(\mathcal{G}), A(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}))$, nous associons trois graphes : – Le graphe simple $\hat{\mathcal{G}} = (V(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}))$ (sommets et arêtes identiques à $\mathcal{G}$). – Le graphe orienté $\vec{\mathcal{G}} = (V(\mathcal{G}), A(\mathcal{G}))$ (sommets et arcs identiques à $\mathcal{G}$). – Le graphe simple $Und(\mathcal{G}) = (V(\mathcal{G}), \mathcal{E})$ obtenu à partir du graphe $\mathcal{G}$ en
Chaîne	
Longueur	
Cycle	
Boucle	
Graphe orienté	
Chemin	
Circuit	
Tournoi	
Graphe mixte	
$\hat{\mathcal{G}}$	– Le graphe simple $\hat{\mathcal{G}} = (V(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}))$ (sommets et arêtes identiques à $\mathcal{G}$). – Le graphe orienté $\vec{\mathcal{G}} = (V(\mathcal{G}), A(\mathcal{G}))$ (sommets et arcs identiques à $\mathcal{G}$). – Le graphe simple $Und(\mathcal{G}) = (V(\mathcal{G}), \mathcal{E})$ obtenu à partir du graphe $\mathcal{G}$ en
$\vec{\mathcal{G}}$	

supprimant l'orientation de tous les arcs et en identifiant les éventuelles arêtes multiples.	$Und(\mathcal{G})$
Nous pouvons effectuer des opérations sur ces graphes : nous allons les décrire pour les graphes mixtes. Soit $\mathcal{G} = (V(\mathcal{G}), A(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}))$ un graphe mixte. Si $e = \{x, y\}$ n'est pas une arête de $\mathcal{G}$, on désigne par $\mathcal{G} \cup e$ le graphe mixte $(V(\mathcal{G}), A(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}) \cup e)$ obtenu par ajout de l'arête e à l'ensemble $E(\mathcal{G})$. Le graphe $\mathcal{G}_e$ est le graphe obtenu, partant de $\mathcal{G}$, en identifiant les sommets x et y et en identifiant ensuite les arcs ou arêtes multiples parallèles. Notons que si e est une arête de $\mathcal{G}$, alors le graphe $\mathcal{G}_e$ possède une boucle, que nous ne supprimons pas.	Ajout d'une arête Contraction
L'ordre du graphe $\mathcal{G}$ est le nombre $ V(\mathcal{G}) $ de sommets de ce graphe. Soit x un sommet de $\mathcal{G}$. Le voisinage $\Gamma(x)$ de x est l'ensemble des <i>voisins</i> de x , soit : $\Gamma(x) = \{y : \{x, y\} \in E\}$. Le sommet z est un <i>prédécesseur</i> de x si (y, x) est un arc de $\mathcal{G}$. L'ensemble des prédécesseurs du sommet x est noté $\Gamma^-(x)$, qui est l'ensemble $\{y : (y, x) \in A\}$. Le sommet y est un <i>successeur</i> de x si (x, y) est un arc de $\mathcal{G}$. L'ensemble des successeurs de x est noté $\Gamma^+(x)$, qui est l'ensemble $\{y : (x, y) \in A\}$. Le degré sortant du sommet x , noté $d^+(x)$, est le cardinal de $\Gamma^+(x)$. Le degré entrant de x est le cardinal de $\Gamma^-(x)$, que l'on note $d^-(x)$. Le sommet s est une source de $\mathcal{G}$ si $\Gamma^-(s) = \emptyset$. Le sommet p est un puit de $\mathcal{G}$ si $\Gamma^+(p) = \emptyset$.	Ordre Voisinage Prédécesseur Successeur degré entrant / sortant Source Puits Sous graphe
Le graphe mixte $\mathcal{H} = (V(\mathcal{H}), A(\mathcal{H}), E(\mathcal{H}))$ est un <i>sous-graphe</i> (mixte) de $\mathcal{G}$ si $V(\mathcal{H}) \subset V(\mathcal{G})$, $A(\mathcal{H}) \subset A(\mathcal{G})$, $E(\mathcal{H}) \subset E(\mathcal{G})$. Si F est un sous-ensemble de $V(\mathcal{G})$, le <i>sous-graphe induit</i> $\mathcal{G}[F]$ est le graphe mixte : (F, A_F, E_F) où $A_F = \{(x, y) \in F^2 : (x, y) \in A(\mathcal{G})\}$ et $E_F = \{\{x, y\} \subset F : \{x, y\} \in E(\mathcal{G})\}$. Un sous-ensemble S de $V(\mathcal{G})$ est un <i>ensemble stable</i> (ou un stable) si $\mathcal{G}[S]$ ne comporte ni arc, ni arête. Un sous-ensemble A de $V(\mathcal{G})$ est un <i>ensemble acircuitique</i> si $\mathcal{G}[A]$ ne comporte pas de circuit. Deux sous-ensembles C_1 et C_2 de $V(\mathcal{G})$ sont en <i>unidirection</i> si tous les arcs entre C_1 et C_2 sont orientés dans le même sens. On note $C_1 \rightarrow C_2$ si tous les arcs entre ces deux classes ont leur extrémité initiale en C_1 et leur extrémité terminale en C_2 . Soit $\mathcal{G}$ un graphe mixte d'ordre n et $\{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n\}$ un ensemble de n graphes mixtes. On désigne par $\{1, 2, \dots, n\}$ l'ensemble des sommets de $\mathcal{G}$. Le graphe composé $\mathcal{G}\{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n\}$ est obtenu, partant du graphe $\mathcal{G}$, en substituant au sommet j le graphe $\mathcal{G}_j$. Si $\{i, j\}$ est une arête de $\mathcal{G}$, tous les sommets de $\mathcal{G}_i$ sont voisins des sommets de $\mathcal{G}_j$, et si (i, j) est un arc de $\mathcal{G}$, les sommets de $\mathcal{G}_j$ sont successeurs de tout sommet de $\mathcal{G}_i$.	Graphe induit Stable Acircuitique Unidirection Graphe composé Orientation
Etant donnée une arête $e = \{x, y\}$ d'un graphe simple $\hat{\mathcal{G}}$, une <i>orientation</i> de l'arête e est la donnée du couple (x, y) ou du couple (y, x) . Une <i>orientation</i> θ du graphe $\hat{\mathcal{G}}$ est la donnée d'une orientation de toutes ses arêtes ; on note $\theta(\hat{\mathcal{G}})$ le graphe orienté ainsi obtenu. Si θ est une orientation du graphe $\hat{\mathcal{G}}$ et si	$\theta(e)$

$\overline{\theta(e)}$

inverse

e est une arête de $\widehat{G}$, nous noterons $\theta(e)$ l'orientation donnée par θ à l'arête e et par $\overline{\theta(e)}$ l'orientation inverse. Enfin, si $\vec{G}$ est un graphe orienté, nous désignons par $\overleftarrow{G}$ le graphe orienté *inverse*, obtenu par inversion du sens de tous les arcs de $\vec{G}$.

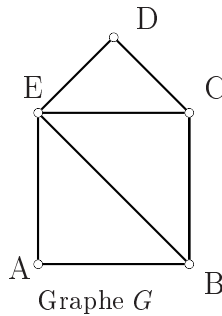
1.4.2 Notions d'homomorphismes de graphes

Dans cette section, nous présentons un outil que nous utiliserons fort souvent par la suite : les homomorphismes. D'inspiration algébrique, ils permettent des présentations et raisonnements efficaces pour les problèmes de partitionnement sous contraintes. Le très récent livre [Hell et Nesetril, 2004] de Pavol Hell et Jaroslav Nesetril, est un excellent moyen d'aborder cet aspect de la théorie des graphes.

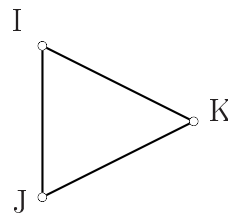
Homomorphisme

Homomorphisme

Si $G = (V(G), E(G))$ et $H = (V(H), E(H))$ sont deux graphes, un *homomorphisme* de G dans H est une application $f : V(G) \rightarrow V(H)$ telle que l'image par f de toute arête de G soit une arête de H , c'est à dire : $\{x, y\} \in E(G) \Rightarrow \{f(x), f(y)\} \in E(H)$. En d'autres termes, la notion d'homomorphisme conserve la notion de voisinage. L'image réciproque d'un sommet quelconque de H par un homomorphisme de G dans H est un stable de G puisqu'il n'y a pas de boucles dans H .



Graphe G



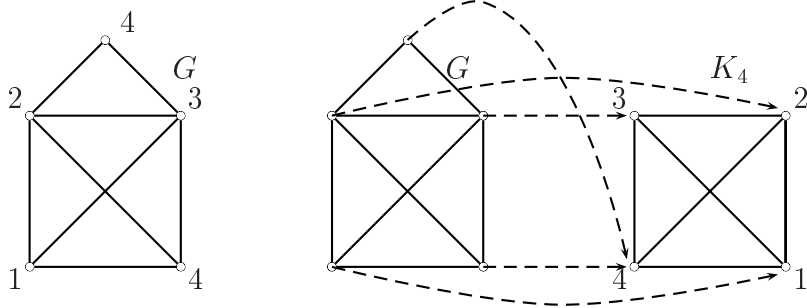
Graphe H

$$\begin{aligned}\phi(A) &= \phi(C) = I \\ \phi(B) &= \phi(D) = J \\ \phi(E) &= K\end{aligned}$$

Homomorphisme ϕ de G sur H

Exemple d'homomorphisme entre deux graphes.

La notion d'homomorphisme permet de définir, de façon équivalente, la notion de coloration d'un graphe. Plus particulièrement, l'ensemble des k -colorations de G et l'ensemble des homomorphismes de G dans K_k sont en bijection ([Hell et Nesetril, 2004]). Sont représentés dans la figure ci-dessous, une 4-coloration c du graphe G et l'homomorphisme ϕ_c , de G dans K_4 , associé (naturellement) à cette coloration.



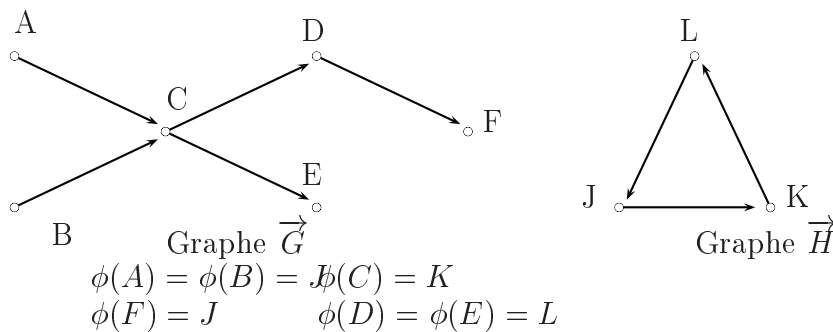
Une 4-coloration du graphe G et l'homomorphisme associé.

Une k -coloration c d'un graphe $G = (V(G), E(G))$ peut donc être vue, au moyen de la bijection précédente, comme un homomorphisme du graphe G dans le graphe complet K_k .

Homomorphisme orienté

Si $\vec{G} = (V(\vec{G}), A(\vec{G}))$ et $\vec{H} = (V(\vec{H}), A(\vec{H}))$ sont deux graphes orientés, un *homomorphisme orienté* de $\vec{G}$ dans $\vec{H}$ est une application $f : V(\vec{G}) \rightarrow V(\vec{H})$ telle que l'image de tout arc de $\vec{G}$ soit un arc de $\vec{H}$, c'est-à-dire vérifiant : $\forall (x, y) \in A(\vec{G}), (f(x), f(y)) \in A(\vec{H})$. En d'autres termes, un homomorphisme orienté transporte la structure de voisinage orienté de $\vec{G}$ dans $\vec{H}$, et l'image réciproque par f de tout sommet de $\vec{H}$ est un ensemble stable.

L'application $\phi : V(\vec{G}) \rightarrow V(\vec{H})$ définie dans la figure de la page suivante est un homomorphisme orienté du graphe orienté de $\vec{G}$ dans $\vec{H}$.



Exemple d'homomorphisme orienté entre graphes orientés.

Une première façon d'utiliser la notion d'homomorphisme orienté pour « colorier » un graphe orienté est d'employer la notion de $\vec{H}$ -coloration

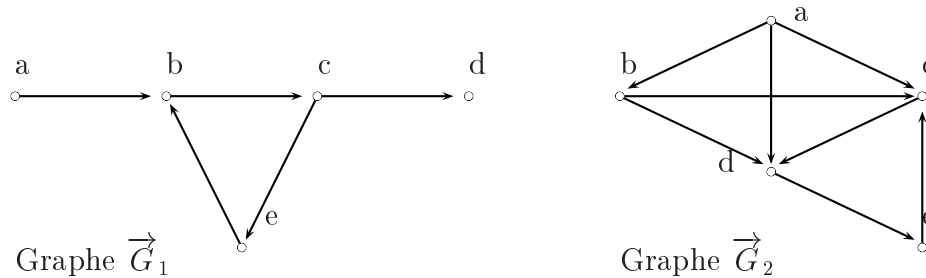
([Bang-Jensen et Gutin, 2000]). Etant donné un graphe orienté $\vec{G}$, une $\vec{H}$ -coloration de $\vec{G}$ est un homomorphisme de $\vec{G}$ dans $\vec{H}$. Différents articles (par exemple [Jensen et al., 1998, Bang-Jensen et Hell, 1990]) explorent la complexité de ce problème, qui reste inconnue dans le cas général. Néanmoins, la complexité de la $\vec{T}$ -coloration est connue dès que $\vec{T}$ est un tournoi ([Bang-Jensen et Hell, 1990]) ; ce problème est polynomial si $\vec{T}$ admet au plus un circuit, et est $\mathcal{NP}$ -complet dans le cas où $\vec{T}$ contient au moins deux circuits. Notons que le plus petit tournoi comportant deux circuits est d'ordre 4.

Tout comme les homomorphismes de graphes permettaient de définir la notion de coloration, les homomorphismes orientés permettent de donner une définition équivalente à la coloration orientée. Si $\vec{G}$ désigne un graphe orienté, une k -coloration orientée de $\vec{G}$ est une $\vec{H}$ -coloration de $\vec{G}$, où $\vec{H}$ désigne un graphe asymétrique d'ordre k . L'unique différence entre l'usage générique de la $\vec{H}$ -coloration et son emploi relativement à la coloration orientée se situe dans le fait que l'on considère un graphe orienté $\vec{H}$ asymétrique.

Homomorphisme acircuitique

Dans le très récent [Feder et al., 2003], Thomás Feder, Pavol Hell et Bojan Mohar introduisent la notion d'homomorphisme acircuitique, afin d'étudier la complexité du problème de coloration circulaire des graphes orientés que nous avons évoqué dans la section précédente. Nous allons rapidement énoncer quelques résultats relatifs à ces homomorphismes.

Un *homomorphisme acircuitique* de $\vec{G}$ dans $\vec{F}$ est une application $\phi : V(\vec{G}) \rightarrow V(\vec{F})$ telle que, pour tout arc $(u, v) \in A(\vec{G})$, soit $\phi(u) = \phi(v)$, soit $(\phi(u), \phi(v)) \in A(\vec{F})$, et telle que, pour tout sommet w de $V(\vec{F})$, le sous-graphe induit $\vec{F}[\phi^{-1}(w)]$ est acircuitique. Présentons deux exemples d'homomorphisme acircuitique des graphes $\vec{G}_1$ et $\vec{G}_2$ ci-dessous :



Aucun de ces deux graphes orientés n'est acircuitique : aussi, nous allons

donner des homomorphismes acircuitiques de ces graphes vers le 3-circuit $(1, 2, 3)$.

L'application $\phi_1 : V(\vec{G}_1) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ définie par : $\phi_1(a) = \phi_1(b) = 1$; $\phi_1(c) = 2$ et $\phi_1(d) = \phi_1(e) = 3$ est un homomorphisme acircuitique de $\vec{G}_1$ dans le 3-circuit $(1, 2, 3)$.

L'application ϕ_2 définie par $\phi_2(a) = \phi_2(b) = \phi_2(c) = 1$; $\phi_2(d) = 2$ et $\phi_2(e) = 3$ est un homomorphisme acircuitique de $\vec{G}_2$ dans le 3-circuit $(1, 2, 3)$.

La notion d'homomorphisme acircuitique permet de définir, de manière équivalente, la notion de décomposition acircuitique d'un graphe orienté $\vec{G}$. Plus précisément, $\vec{G}$ admet une k -décomposition acircuitique si et seulement s'il existe un graphe asymétrique orienté $\vec{H}$ d'ordre k et un homomorphisme acircuitique de $\vec{G}$ dans $\vec{H}$.

Homomorphisme Coloré

Les travaux explorant les liens entre homomorphismes et colorations sont nombreux; nous en citons brièvement une établie dans le cadre des graphes mixtes. Dans [Nesetril et Raspaud, 2000], les auteurs s'intéressent à une adaptation de travaux réalisés sur les graphes simples colorés aux graphes mixtes colorés. Cette étude porte sur les graphes mixtes $\mathcal{G}$ tels que si $\{x, y\}$ est une arête de $\mathcal{G}$, alors (x, y) n'est pas un arc de $\mathcal{G}$. Le graphe $\mathcal{G}$ est un graphe mixte (m, n) -coloré si ses arcs sont colorés par n couleurs et si ses arêtes sont colorés par m couleurs.

Etant donné deux graphes mixtes (m, n) -colorés $\mathcal{G}_1 = (V_1, A_1, E_1)$ et $\mathcal{G}_2 = (V_2, A_2, E_2)$, un homomorphisme coloré de $\mathcal{G}_1$ dans $\mathcal{G}_2$ est une application f de V_1 dans V_2 satisfaisant :

$$(x, y) \in A_1 \Rightarrow (f(x), f(y)) \in A_2; \quad \{x, y\} \in E_1 \Rightarrow \{f(x), f(y)\} \in E_2,$$

et la couleurs de l'arc ou l'arête liant les sommets x et y de $\mathcal{G}_1$ est la même que celle de l'arc ou de l'arête liant $f(x)$ et $f(y)$ dans $\mathcal{G}_2$.

Enfin, étant donné un graphe mixte (n, m) -coloré, nous recherchons le nombre minimal de sommets d'un graphe mixte (n, m) -coloré $\mathcal{G}'$ tel qu'il existe un homomorphisme coloré de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}'$. Ce nombre est dénomé le nombre chromatique orienté (n, m) -coloré de $\mathcal{G}$ (noté $\chi(\mathcal{G}, n, m)$). Remarquons que $\chi(\mathcal{G}, 0, 1)$ coïncide avec le nombre chromatique classique alors que $\chi(\mathcal{G}, 1, 0)$ coïncide, lui, avec le nombre chromatique orienté. Le nombre chromatique orienté (n, m) -coloré d'un graphe mixte (n, m) -coloré $\mathcal{G}$ peut être borné par le nombre chromatique acyclique du graphe sous-jacent $\hat{\mathcal{G}}$. Cela conduit à l'obtention d'une borne supérieure du nombre chromatique orienté (n, m) -coloré d'un graphe mixte planaire. Enfin, cela conduit à l'existence

d'un homomorphisme coloré entre un arbre mixte (n, m) -coloré et un graphe $\mathcal{G}$ dont le graphe sous-jacent $\widehat{\mathcal{G}}$ est le graphe complet K_{2n+m+1} .

Homomorphisme en Sociologie et Psychologie

Avant de refermer cette section dédiée aux notions d'homomorphisme, remarquons que ceux-ci ont, depuis longtemps, fait l'objet d'études en psychologie et sociologie. C'est en 1971 que François Lorrain et Harrison C. White s'intéressent à la notion *d'équivalent structural* à l'occasion d'étude de réseaux sociaux ([Lorrain et White, 1971]). Ces travaux conduisent à la systématisation d'une certaine analyse des réseaux sociaux à l'aide d'homomorphismes entre graphes ([Boorman et al., 1976, Boorman et White, 1976, Everett et Nieminen, 1980]). Aussi est-il intéressant de remarquer que nous retrouvons cette même démarche aujourd'hui, de manière relativement indépendante. La *décomposition acircuitique* se place naturellement dans la filiation de ces travaux, qu'elle vient compléter en modifiant les hypothèses initiales (deux individus présentant une relation pouvant être dans une même classe de cette décomposition).

Approximation des problèmes de colorations

Cette section est consacrée à une très courte introduction à la problématique de l'approximation dans le cadre des problèmes de colorations. Nous y considérons un problème de coloration $\mathcal{NP}$ -complet consistant, étant donné un graphe mixte $\mathcal{G}$, à colorer l'ensemble de ses sommets sous certaines contraintes. La taille de l'instance sera ici considérée comme égale à l'ordre du graphe. Nous désignons par P_i le problème de minimisation associé, consistant en la recherche, étant donné un graphe mixte $\mathcal{G}$, d'un nombre minimum de couleurs permettant de colorer les sommets de $\mathcal{G}$ en respectant les contraintes. Aussi, il n'est pas possible (sous l'hypothèse $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$) d'obtenir un algorithme polynômial résolvant ce problème à l'optimum pour toutes ses instances. Nous souhaitons tester la performance un algorithme $\mathcal{A}$ qui, à toute instance $\mathcal{G}$ de Π , colorie ce graphe associé en temps polynomial.

A une instance $\mathcal{G}$ du problème Π , nous pouvons associer trois grandeurs caractéristiques :

- La solution optimale du problème Π , notée $Opt(\mathcal{G})$.
- La valeur de la solution obtenue par l'algorithme $\mathcal{A}$ appliqué à $\mathcal{G}$, noté $\lambda(\mathcal{G})$.
- La valeur de la pire solution du problème Π appliqué à $\mathcal{G}$, notée $\omega(\mathcal{G})$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & Opt(\mathcal{G}) & & \lambda(\mathcal{G}) & & \omega(\mathcal{G}) \\ & & \circ & & \circ & & \circ \\ & & \text{---} & & \text{---} & & \text{---} \end{array} \rightarrow \mathbb{R}$$

Nous définissons la *pire* valeur comme étant, parmi l'ensemble des graphes d'ordre n fixé, la plus grande valeur optimale prise. Ainsi, par exemple, si l'on considère le problème Π de recherche du nombre chromatique, étant donné un graphe G , la valeur optimale est $\chi(G)$ et la pire valeur est l'ordre du graphe (puisque'il existe toujours au moins un graphe d'ordre n dont le nombre chromatique est égal à n).

De manière général, dans le cadre des problèmes de colorations de l'ensemble des sommets d'un graphe, la pire valeur sera toujours l'ordre de ce graphe (puisque l'on peut toujours trouver un graphe n'admettant pas d'autres colorations que les colorations triviales).

Approximation classique

Dans cette théorie, la qualité de l'algorithme dépend de sa capacité à approcher la meilleur solution pour toutes les instances de même taille. Cette performance est synthétisée par le rapport d'approximation classique suivant :

$$r_{\mathcal{A}}(n) = \text{Min}_{\mathcal{G}/|\mathcal{G}|=n} \frac{Opt(\mathcal{G})}{\lambda(\mathcal{G})}.$$

Pour une plus ample introduction générale à cette théorie, on se reportera à [Ausiello et al., 2003].

Approximation différentielle

Dans cette théorie alternative et complémentaire de la précédente, la qualité de l'algorithme dépend tout autant de sa faculté à s'approcher de la meilleure valeur que de celle de s'éloigner de la pire. Là encore, on définit un rapport d'approximation (dit *d'approximation différentielle*) sur l'ensemble des instances de même taille, comme le ratio entre la longueur séparant la valeur obtenue par l'algorithme de la valeur optimale et la longueur séparant la pire valeur de la valeur optimale.

$$\rho_{\mathcal{A}}(n) = \text{Min}_{\mathcal{G}/|\mathcal{G}|=n} \frac{\omega(\mathcal{G}) - \lambda(\mathcal{G})}{\omega(\mathcal{G}) - Opt(\mathcal{G})}.$$

Pour une introduction plus avancée dans cette problématique ainsi que ses liens avec l'approximation classique, on se reportera à [Monnot et al., 2003].

1.4.3 Listes des travaux publiés

Différents travaux exposés dans cette thèse ont donné lieu à collaborations, présentations et publications.

Dans des revues et conférences internationales :

- Jean-François Culus and Marc Demange, *Oriented Coloring : Complexity and Approximation*, Current Trends in Theory and Practice of Computer Science, SofSem 2006 proceedings, Lecture Note in Computer Science 3831, p. 226-236, reprend l'essentiel du chapitre 2 et la première partie du chapitre 3.
- Jean-François Culus and Bertrand Jouve, *Tournois sans intervalle acyclique*, Comptes Rendu de l'Académie des Sciences de Paris, Serie I 341, 2005, p. 465-468, reprend l'essentiel des deux premières parties du chapitre 4.

Dans des conférences nationales :

- Jean-François Culus, *Polynôme chromatique mixte et interprétation des coefficients*, Actes de la Roadf 2006, Presse Universitaire de Lille, reprend la fin du chapitre 3.
- Jean-François Culus and Bertrand Jouve, *Décomposition de tournois sans classe acyclique*, Actes de la SFC 2004, Presse Universitaire de Bordeaux, reprend une partie du chapitre 4.

1.4.4 Liste des symboles

G	un graphe simple.
$\vec{G}$	un graphe orienté.
T	un tournoi.
$\mathcal{G}$	un graphe mixte.
$\vec{\mathcal{G}}$	le graphe orienté obtenu à partir de $\mathcal{G}$ par suppression de toutes les arêtes.
$\widehat{\mathcal{G}}$	le graphe simple obtenu à partir du graphe $\mathcal{G}$ par suppression de tous les arcs.
$Und(\mathcal{G})$	le graphe simple obtenu par suppression des orientations des arcs de $\mathcal{G}$ et identification des arcs et arêtes multiples.
$\mathcal{G} \cup e$	le graphe mixte obtenu par ajout de l'arête e à l'ensemble des arêtes de $\mathcal{G}$.
$\mathcal{G}_e$	Si $e = \{x, y\}$, $\mathcal{G}_e$ est le graphe obtenu à partir de $\mathcal{G}$ par identification des sommets x et y , puis éventuellement les arcs ou arêtes multiples. Généralement, $\{x, y\} \notin E(\mathcal{G})$; le cas contraire implique l'existence d'une boucle dans le graphe obtenu.
$\alpha_{x,y}$	notation du sommet de $\mathcal{G}_e$ obtenu par l'identification de x et y dans $\mathcal{G}$.
$V(\mathcal{G})$	L'ensemble des sommets du graphe $\mathcal{G}$.
$A(\mathcal{G})$	l'ensemble des arcs du graphe $\mathcal{G}$.
$E(\mathcal{G})$	l'ensemble des arêtes du graphe $\mathcal{G}$.
$\Gamma(x)$	l'ensemble des voisins du sommet x dans le graphe considéré.
$\Gamma^+(x)$	l'ensemble des successeurs de x dans le graphe considéré.
$\Gamma^-(x)$	l'ensemble des prédécesseurs de x dans le graphe considéré.
$C_1 \rightarrow C_2$	$\{C_1, C_2\}$ sont des sous-ensembles de l'ensemble des sommets vérifiant la propriété d'unidirection, et tous les arcs sont orientés partant de C_1 pour arriver en C_2 .
$\chi(G)$	le nombre chromatique du graphe G .
$\chi_o(\vec{G})$	le nombre chromatique orienté du graphe orienté $\vec{G}$.
$\chi_m(\mathcal{G})$	le nombre chromatique mixte du graphe mixte $\mathcal{G}$.
$dec(\vec{G})$	le nombre a-chromatique de $\vec{G}$.
$\mathcal{C}(\mathcal{G})$	l'ensemble $\{ \{(x, y), (z, t)\} \in A(\mathcal{G})^2 : \{y, z\} \text{ et } \{x, t\} \notin E(Und(\mathcal{G})) \}$.
$Id(\mathcal{G}, Z)$	l'ensemble $Z = \{(x_i, y_i), (z_i, t_i)\}_{1 \leq i \leq k}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{C}(\mathcal{G})$. Le graphe simple $Id(\mathcal{G}, Z)$ est le graphe obtenu en partant de $Und(\mathcal{G})$ en identifiant, pour tout i compris entre 1 et k , le sommet x_i avec le sommet t_i et le sommet y_i avec le sommet z_i .
$B_{\mathcal{G}}(v, 2)$	l'ensemble $\{y : \exists z \in V, [(v, z), (z, y)] \vee [(y, z), (z, v)] \in A\} \cup \Gamma^+(v) \cup \Gamma^-(v) \cup \Gamma(v)$.

$M(\mathcal{G})$	le graphe mixte obtenu à partir de $\mathcal{G}$, en ajoutant pour tout sommet x les arêtes $\{x, y\}$ où $y \in B_{\mathcal{G}}(x, 2)$.
$P(G, .)$	Le polynôme chromatique du graphe G . Si k est un entier naturel $P(G, k)$ est le nombre de k -colorations de G .
$\vec{P}(\vec{G}, .)$	Le polynôme chromatique orienté du graphe $\vec{G}$. Si k est un entier, $\vec{P}(\vec{G}, k)$ est le nombre de k -colorations orientées de $\vec{G}$.
$P_m(\mathcal{G}, .)$	Le polynôme chromatique mixte de $\mathcal{G}$. Si k est un entier naturel, $P_m(\mathcal{G}, k)$ est le nombre de k -colorations mixtes de $\mathcal{G}$.
$P_a(\vec{G}, .)$	Le polynôme chromatique acircuitique de $\vec{G}$. Si k est un entier naturel, $P_a(\vec{G}, k)$ est le nombre de k -décompositions acircuitiques de $\vec{G}$.
$\Theta(\hat{\mathcal{G}})$	L'ensemble des orientations acircuitiques du graphe (simple) $\hat{\mathcal{G}}$.

Chapitre 2

Coloration orientée d'un graphe

2.1 Introduction

Les notations

Provenant des travaux d'Eric Sopena ([Sopena, 2001]), la coloration orientée se définit, par les homomorphismes orientés, de la même façon que se définit la coloration par les homomorphismes de graphes. Un graphe orienté $\vec{G}$ admet une *k-coloration orientée* s'il existe un graphe orienté asymétrique $\vec{H}$ d'ordre k et un homomorphisme de $\vec{G}$ dans $\vec{H}$. Un homomorphisme de $\vec{G}$ dans $\vec{H}$ est appelée une $\vec{H}$ -coloration de $\vec{G}$ ([Bang-Jensen et Gutin, 2000]). Le graphe orienté $\vec{H}$ est un graphe des couleurs de G . Toute image réciproque $\vec{H}$ -coloration non vide d'un sommet de $\vec{H}$ est une classe monochromatique de $\vec{G}$.

Modélisation

La coloration est souvent utilisée pour modéliser et résoudre efficacement des problèmes d'assignation de tâches [de Werra, 1985]. Donnons d'abord un exemple de problème relevant de ce domaine d'application classique dont la résolution se fait au moyen de la coloration orientée.

Considérons un ensemble de n tâches $V = \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_{n-1}, T_n\}$. Nous disposons pour cela d'une machine constituée de n processeurs identiques travaillant en parallèle. Chaque processeur ne peut effectuer qu'une seule tâche durant une unité de temps et chaque tâche nécessite une unité de temps pour être accomplie par un processeur. Néanmoins, il existe des incompatibilités temporelles entre certaines d'entre elles. Donnons-nous un sous-ensemble A de $\{(T_i, T_j) : i \neq j\}$ tel que si $(T_i, T_j) \in A$, $(T_j, T_i) \notin A$. Le couple (T_i, T_j) correspond au fait que la tâche T_j ne peut être effectuée par notre machine ni durant l'intervalle de temps où est accomplie T_i ni durant l'intervalle de

temps suivant. On appelle *lot* un ensemble de tâches réalisables en une unité de temps par notre machine parallèle.

Nous devons effectuer une partition de l'ensemble des tâches en un nombre minimal k de lots tels que, tout sous-ensemble de p lots soit réalisable en p unités de temps ($0 \leq p \leq k$).

La situation peut se modéliser par un graphe orienté $\vec{G} = (V, A)$ dont les sommets représentent les différentes tâches et les arcs, les incompatibilités entre elles. Une partition de l'ensemble des tâches en k lots est une k -partition de l'ensemble des sommets de $\vec{G}$. Remarquons que chaque lot est une classe stable de $\vec{G}$. La condition de réalisabilité des lots pour $p = 2$ implique l'unidirection entre les classes de cette partition. Une solution admissible est donc une k -coloration orientée de $\vec{G}$ où les classes monochromatiques sont les lots.

Enfin, montrons qu'étant donné une k -coloration orientée de $\vec{G}$ et un ensemble de p classes monochromatiques, il existe un ordonnancement de ces lots de tâches tel que ces dernières soient réalisables en p unités de temps. Sans perte de généralité, nous supposons que le graphe des couleurs $\vec{C}$ est un tournoi. Considérons alors le sous-tournoi de $\vec{C}$ induit par les p lots sélectionnés. Notons $C_1, C_2, \dots, C_p$ ses sommets. Tout tournoi admet un chemin hamiltonien ; soit $(C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_p})$ celui relatif à notre sous-tournoi. Alors, l'ordre $(C_{i_p}, C_{i_{p-1}}, \dots, C_{i_1})$ permet de réaliser les p lots sélectionnés en p unités de temps.

2.2 Complexité

Cette section est dédiée à l'étude de la complexité du problème de coloration orientée. Nous introduisons le formalisme et rappelons quelques résultats connus. Les deux paragraphes suivants améliorent les connaissances que nous avons de ce problème en présentant des raffinements des classes $\mathcal{NP}$ -complètes ainsi qu'une nouvelle famille polynomiale pour le problème d'optimisation.

2.2.1 Introduction

L'étude de la complexité fait appel à trois problèmes. Le premier, dit problème de la $\vec{H}$ -coloration, est issu du lien entre coloration orientée et homomorphisme orienté. Soit $\vec{H}$ un graphe orienté asymétrique fixé.

$\vec{H}$ -coloration

Entrée : Un graphe orienté $\vec{G}$

Sortie : Oui / Non

Question : Le graphe orienté $\vec{G}$ admet-il une $\vec{H}$ -coloration ?

Le problème d'optimisation associé à la coloration orientée est le problème suivant :

Nombre Chromatique Orienté (χ_o)

Entrée : Un graphe orienté $\vec{G}$

Sortie : Un entier k

Question : Quel est le plus petit entier k tel que $\vec{G}$ admette une k -coloration orientée ?

Au problème d'optimisation précédent est associée la famille de problèmes de décisions suivante : soit k un entier strictement positif fixé.

k -Col _{o}

Entrée : Un graphe orienté $\vec{G}$

Sortie : Oui / Non

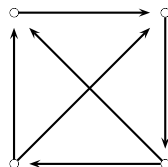
Question : Le graphe orienté $\vec{G}$ admet-il une k -coloration orientée ?

Nous pouvons construire des réductions de Turing entre ces différents problèmes. Si nous savions répondre au problème k -Col _{o} en temps polynomial alors nous pourrions aussi répondre en temps polynomial au problème visant à trouver le nombre chromatique orienté de $\vec{G}$, simplement en essayant les différentes valeurs de k dans k -Col _{o} pour le graphe orienté $\vec{G}$. La complexité du problème de recherche du nombre chromatique orienté serait alors majorée par n fois celle de k -Col _{o} , ce qui resterait polynomial.

Ensuite, si le problème de la $\vec{H}$ -coloration était polynomial, il en serait de même du problème k -Col _{o} restreint aux instances connexes. En effet, désignons par $\vec{H}_k$ le graphe orienté constitué de l'union (disjointe) de tous les tournois d'ordre au plus k . Si un graphe orienté connexe $\vec{G}$ admet une k -coloration orientée alors il admet une $\vec{H}_k$ -coloration ; ainsi le problème k -Col _{o} restreint aux instances connexes serait, lui aussi, polynomial.

La question première est donc celle de la complexité de la $\vec{H}$ -coloration. Bien qu'ayant fait l'objet de nombreuses recherches ([Bang-Jensen et Hell, 1990, Jensen et al., 1998, Hell et Nesetril, 2004]), celle-ci n'est pas connue dans le cas général, mais l'est dans le cas particulier des tournois [Jensen et al., 1998]. Ce problème est $\mathcal{NP}$ -complet si et seulement si le tournoi $\vec{H}$ admet au moins deux circuits différents. Or, un graphe $\vec{G}$ qui est $\vec{H}$ -colorable est aussi T -colorable, où T désigne un

tournoi quelconque contenant $\vec{H}$ et le plus petit tournoi ayant deux circuits différents est le tournoi T_4^1 ci-dessous.



Tournoi T_4^1 .

Par conséquent, les problèmes des 1, 2 et 3-coloration orientée sont polynomiaux, alors que celui de la 4-coloration orientée est $\mathcal{NP}$ -complet. William F. Klostermeyer et Gary MacGillivray améliorent ce résultat en prouvant que le problème **4-Col_o** est $\mathcal{NP}$ -complet même si le graphe est connexe ([Klostermeyer et MacGillivray, 2004b]).

Enfin, comme résultat positif, tout arbre orienté admet une 3-coloration orientée, ce qui en fait une classe polynomiale pour le problème **Nombre Chromatique Orienté**.

2.2.2 Nouvelles variantes $\mathcal{NP}$ -complètes

Le premier résultat nouveau que nous proposons ici consiste en l'amélioration du résultat de [Klostermeyer et MacGillivray, 2004b]. La famille des arbres orientés étant polynomiale pour le problème du **Nombre Chromatique Orienté**, et un arbre orienté étant un graphe biparti acircuitique, nous avons recherché la complexité du problème **Nombre Chromatique Orienté** d'une part pour la famille des graphes orientés bipartis, d'autre part pour celle des graphes acircuitiques (sans-circuit). L'étude de ces deux familles de graphes va conduire à l'établissement de leurs $\mathcal{NP}$ -complétudes. Cette étude est conduite pour la 4-coloration orientée, premier cas pour lequel un algorithme polynomial n'est pas connu. Le graphe des couleurs est alors nécessairement le graphe T_4^1 représenté ci-dessus, seul tournoi d'ordre 4 ayant deux circuits distincts (à isomorphisme près). Dans la suite, on démontrera que le problème de décider si de tels graphes admettent une 4-coloration orientée est $\mathcal{NP}$ -complet.

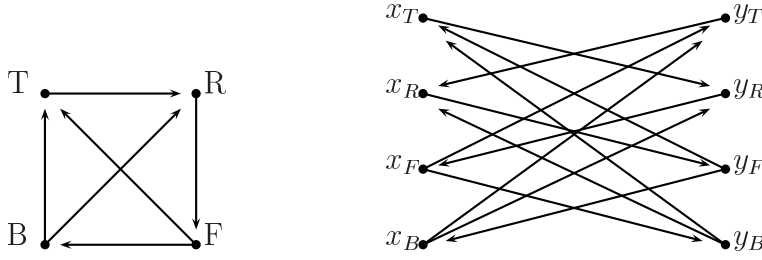
Pour ce faire, nous introduisons quelques constructions ainsi que des résultats relatifs à celles-ci, afin d'être en mesure d'énoncer et de démontrer le résultat principal de cette partie.

Représentation bipartie d'un tournoi

Définition 1 *Représentation bipartie d'un tournoi*

Soit $\vec{G}$ un tournoi d'ordre n . Nous désignerons par $B(\vec{G})$ la représentation bipartie de $\vec{G}$ définie par : $V(B(\vec{G})) = \{x_i : i \in V(\vec{G})\} \cup \{y_i : i \in V(\vec{G})\}$, et $A(B(\vec{G})) = \{(x_i, y_j), (y_i, x_j) : (i, j) \in A(\vec{G})\}$.

Donnons, pour exemple, la représentation bipartie du tournoi T_4^1 .



Le tournoi T_4^1 et sa représentation bipartie, $B(T_4^1)$.

Lemme 1 *Sur le nombre chromatique de $B(\vec{G})$*

Soit $\vec{G}$ un tournoi d'ordre n , nous avons $\chi_o(B(\vec{G})) = n$. De plus, l'unique coloration orientée optimale c de $B(\vec{G})$ est, à permutation des couleurs près, donnée par

$$\forall i \in V(\vec{G}), \quad c(x_i) = c(y_i) = i$$

Enfin, le graphe des couleurs de $B(\vec{G})$ associé à c est $\vec{G}$.

Démonstration du lemme :

Considérons une coloration orientée optimale de $B(\vec{G})$. Si i et j sont deux sommets différents de $\vec{G}$, les sommets x_i et y_j sont liés dans $B(\vec{G})$; aussi ne peuvent-ils appartenir à une même classe de coloration orientée. Pour tout triplet (i, j, k) de sommets distincts dans $V(\vec{G}) \times V(\vec{G}) \times V(\vec{G})$, le triangle (i, j, k) admet un 2-chemin (orienté) dans $\vec{G}$. Les sommets x_i, x_j et x_k ne peuvent donc appartenir à une même classe de coloration orientée de $B(\vec{G})$. Celles-ci contiennent donc au plus 2 sommets, et donc $\chi_o(B(\vec{G})) \geq n$.

D'autre part, l'application $c_1 : V(B(\vec{G})) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ définie par $c_1(x_i) = c_1(y_i) = i$ pour tout i dans $\{1, 2, \dots, n\}$ est une coloration orientée de $B(\vec{G})$ impliquant $\chi_o(B(\vec{G})) = n$. La coloration orientée c_1 est de cardinal minimal. Le graphe des couleurs associé à cette coloration orientée de $B(\vec{G})$ est le graphe orienté $\vec{G}$.

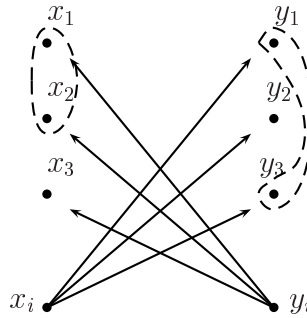
Il nous reste à démontrer l'unicité de la coloration orientée optimale. Supposons l'existence de tournois dont la représentation bipartie admet deux colorations orientées optimales différentes. Parmi ceux-ci, considérons le graphe orienté $\vec{G}$ d'ordre minimum. L'ordre de $\vec{G}$ est alors au moins égal à 3 et, par hypothèse, sa représentation bipartie $B(\vec{G})$ admet deux colorations orientées optimales, c_1 (définie précédemment) et c_2 .

Pour tout couple de sommets distincts i et j de $\vec{G}$, nous avons $c_2(x_i) \neq c_2(y_j)$. Il s'ensuit que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $c_2(x_i) \neq c_2(y_i)$. En effet, s'il existait un entier i tel que $c_2(x_i) = c_2(y_i)$, alors le graphe orienté $\vec{G} \setminus \{i\}$ posséderait aussi deux colorations orientées optimales, ce qui contredit la minimalité de $\vec{G}$.

Or, les classes monochromatiques de c_2 doivent être de taille 2 (car aucun triplet de sommets ne peut être dans une même classe monochromatique de coloration orientée). Ainsi celles-ci sont-elles de la forme $\{x_i, x_j\}$ ou $\{y_i, y_j\}$, avec $i \neq j$. Il en résulte que l'ordre de $\vec{G}$ est pair. Nous pouvons donc supposer $|\vec{G}| \geq 4$.

Quitte à renuméroter les sommets, nous pouvons supposer que $c_2(x_1) = c_2(x_2)$. Il est alors aisé de vérifier que $c_2(y_1) \neq c_2(y_2)$ (car le cas inverse implique la non satisfaction de la propriété d'unidirection entre les classes). De même, supposons, quitte à renuméroter les sommets, que $c_2(y_1) = c_2(y_3)$.

Soit i dans $\{4, \dots, n\}$, la propriété d'unidirection entre $\{y_i\}$ et la classe monochromatique $\{x_1, x_2\}$ implique que $\{y_i\}$ entretient les mêmes liens avec les sommets x_1 et x_2 . Les cas étant symétriques l'un de l'autre, supposons que $(y_i, x_1) \in A(B(\vec{G}))$.



Exemple de configuration possible.

Par construction de $B(\vec{G})$, $(x_i, y_1) \in A(B(\vec{G}))$. Comme $c_2(y_1) = c_2(y_3)$, nous en déduisons que $(x_i, y_3) \in A(B(\vec{G}))$, et par symétrie

$(y_i, x_3) \in A(B(\vec{G}))$. Ainsi : $\forall i \in \{4, \dots, n\}, \forall j \in \{1, 2, 3\}, (y_i, x_j) \in A(B(\vec{G}))$.

Nous allons montrer que le graphe orienté biparti associé à $\vec{G} \setminus \{1, 2\}$ possède deux colorations orientées optimales, ce qui contredit la minimalité de $\vec{G}$. Il dispose d'une première $(n-2)$ -coloration orientée c_1 , définie par $c_1(x_i) = c_1(y_i)$, pour tout $3 \leq i \leq n$. Nous allons, à présent, démontrer qu'il dispose d'une seconde $(n-2)$ -coloration orientée.

Soit $\vec{B}'$ le graphe orienté obtenu, partant de $B(\vec{G})$, par suppression des sommets x_1, x_2, y_1, y_3 . $\vec{B}'$ est isomorphe au graphe orienté obtenu à partir de $B(\vec{G} \setminus \{1, 2\})$ par ajout d'un arc $\vec{a}$ entre x_3 et y_3 (l'orientation de $\vec{a}$ étant fonction du lien entre les sommets 2 et 3 dans $\vec{G}$). Puisqu'il est obtenu à partir de $B(\vec{G})$ par suppression de deux classes monochromatiques, nous savons que $\chi_o(\vec{B}') \leq n-2$. Or, $\chi_o(\vec{G} \setminus \{1, 2\}) \leq \chi_o(\vec{B}')$, donc $\chi_o(\vec{B}') = n-2$.

La restriction de la coloration c_2 à l'ensemble des sommets de $\vec{B}'$ est une $(n-2)$ -coloration orientée de $\vec{B}'$. Par l'isomorphisme entre $\vec{B}' \setminus \vec{a}$ et $B(\vec{G} \setminus \{1, 2\})$, nous en déduisons l'existence d'une $(n-2)$ -coloration orientée de $B(\vec{G} \setminus \{1, 2\})$ vérifiant $c_2(x_3) \neq c_2(y_3)$; ainsi, c_1 et c_2 sont bien des colorations orientées différentes de $B(\vec{G} \setminus \{1, 2\})$.

La minimalité de $|\vec{G}|$ est alors contredite, d'où nous concluons la preuve du lemme. $\square$

La précédente construction nous permet d'affirmer l'existence, pour tout entier n strictement positif, de graphes bipartis d'ordre $2n$ dont le nombre chromatique orienté est n . Même lorsque le tournoi des couleurs T est imposé, nous obtenons l'existence d'un $2n$ -graphe orienté biparti admettant une T -coloration.

Comment compléter une application en un homomorphisme?

Considérons les applications c du graphe orienté $\vec{L}_j = (V(\vec{L}_j), A(\vec{L}_j))$ (voir figure suivante), à valeur dans $V(T_4^1)$ et qui satisfont à la condition $c(z_1^j), c(z_2^j), c(z_3^j) \in \{T, F\}$.

Nous nous intéressons aux conditions sur $c(z_1^j), c(z_2^j), c(z_3^j)$ permettant de compléter une telle application c en un homomorphisme de $\vec{L}_j$ vers T_4^1 .

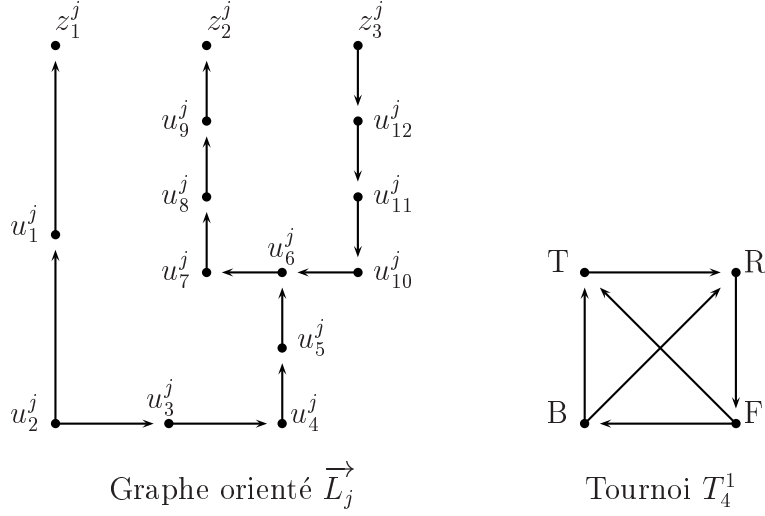


FIG. 2.1 – Homomorphisme entre graphes orientés

Lemme 2 *Condition d'existence d'un homomorphisme dans le cas de la figure 2.1*

L'application c peut être complétée en un homomorphisme de $\vec{L}_j$ sur T_4^1 si et seulement si

$$(c(z_1^j), c(z_2^j), c(z_3^j)) \neq (F, F, F).$$

Démonstration : Supposons que c soit un tel homomorphisme vérifiant $c(z_3^j) = c(z_2^j) = F$. Alors, puisqu'il existe un chemin de longueur 4 de z_3^j à u_6^j , les couleurs possibles pour u_6^j sont F, T ou B . Inversement, il existe un chemin de longueur 4 de u_6^j à z_2^j ; les couleurs possibles pour u_6^j sont alors F ou R . Il s'ensuit ainsi que $c(u_6^j) = F$. Le sommet u_2^j peut alors être coloré par F ou R , puisqu'il existe un 4-chemin partant de u_2^j à u_6^j . A présent, utilisons le 2-chemin (u_2^j, u_1^j, z_1^j) . Si $c(u_2^j) = R$, alors $c(z_1^j) \in \{T, B\}$. Sinon, $c(u_2^j) = F$ et alors $c(z_1^j) \in \{T, R\}$. Ainsi, il s'ensuit que, si $c(z_3^j) = c(z_2^j) = F$, alors $c(z_1^j) \neq F$. $\square$

Théorème sur les variantes $\mathcal{NP}$ -complètes

Énonçons le résultat principal de cette partie.

Théorème 1 *Complexité de 4- $\mathbf{Col}_0$ pour des familles particulières*

- (i) *Le problème 4- $\mathbf{Col}_0$ est $\mathcal{NP}$ -complet même lorsque l'instance initiale est réduite à un graphe orienté biparti de degré borné.*
- (ii) *Le problème 4- $\mathbf{Col}_0$ est $\mathcal{NP}$ -complet même lorsque l'instance initiale est réduite à un graphe orienté acircuitique de degré borné.*

Démonstration : Déjà, remarquons que ce problème appartient bien à $\mathcal{NP}$. Il nous reste donc à démontrer la complétude pour les instances choisies. La preuve de l'assertion (i) se fait en considérant une réduction de 3-Sat à 4-**Col**_o. Considérons une instance du problème 3-Sat : Soient $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un ensemble de variables booléennes et $\{C_1, \dots, C_m\}$ un ensemble des m 3-clauses, chacune des 3-clauses étant une disjonction de 3 littérales sur l'ensemble X .

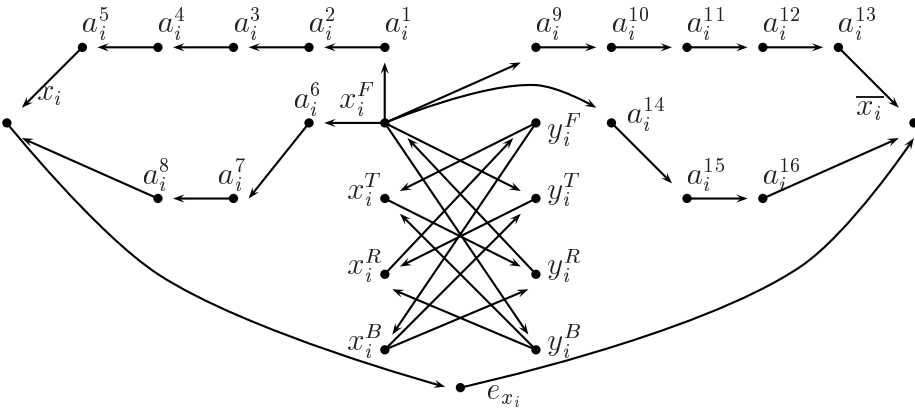
La réduction à partir de l'instance de 3-Sat sur 4-**Col**_o utilise le graphe orienté $\vec{G}$ défini de la manière suivante :

- pour chaque couple de littérales $(x_i, \bar{x}_i)$, on insère une copie du graphe $\vec{H}_i$ représenté ci-dessous
- pour chaque clause $C_j = z_1^j \vee z_2^j \vee z_3^j$, avec z_1^j, z_2^j, z_3^j pris dans l'ordre des indices croissants dans l'ensemble $\{x_i, \bar{x}_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$, on insère une copie du graphe $\vec{L}_j$ représenté ci-dessus.

In fine, l'ensemble des sommets de $\vec{G}$ est : $V(\vec{G}) = \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i \cup \bigcup_{1 \leq j \leq m} B_j$, avec :

$$A_i = \{x_i, \bar{x}_i, e_{x_i}, a_i^l, x_i^F, y_i^F, x_i^T, y_i^T, x_i^R, y_i^R, x_i^B, y_i^B : 1 \leq l \leq 16\} \text{ et } B_j = \{u_l^j : 1 \leq l \leq 12\}$$

et l'ensemble des arcs de $\vec{G}$ est : $\bigcup_{1 \leq i \leq n} A(\vec{H}_i) \cup \bigcup_{1 \leq j \leq m} A(\vec{L}_j)$



Exemple de graphe orienté $\vec{H}_i$

La construction de $\vec{G}$ est réalisable en temps polynomial. Le graphe orienté $\vec{G}$ est un graphe biparti et son degré est borné par $\max(p + 3, 7)$, où p désigne le nombre maximum d'occurrences d'un littéral dans l'ensemble des clauses. Or, nous savons que

nous pouvons nous restreindre au cas où $p \leq 3$, puisque le problème 3-Sat reste $\mathcal{NP}$ -complet pour ces instances (d'après [Tovey, 1984]).

Soit c est une coloration orientée de $\vec{G}$, alors $c(x_i) \neq c(\bar{x}_i)$ (puisque'il existe un 2-chemin orienté entre ces sommets). Fixons i dans l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, le graphe orienté induit $\vec{G}[x_i^T, x_i^R, x_i^B, x_i^F, y_i^T, y_i^R, y_i^B, y_i^F]$ étant isomorphe à la représentation bipartite du tournoi T_4^1 , nous en déduisons que $\chi_o(\vec{G}) \geq 4$. De plus, si $\chi_o(\vec{G}) = 4$, le graphe des couleurs est alors nécessairement le tournoi T_4^1 .

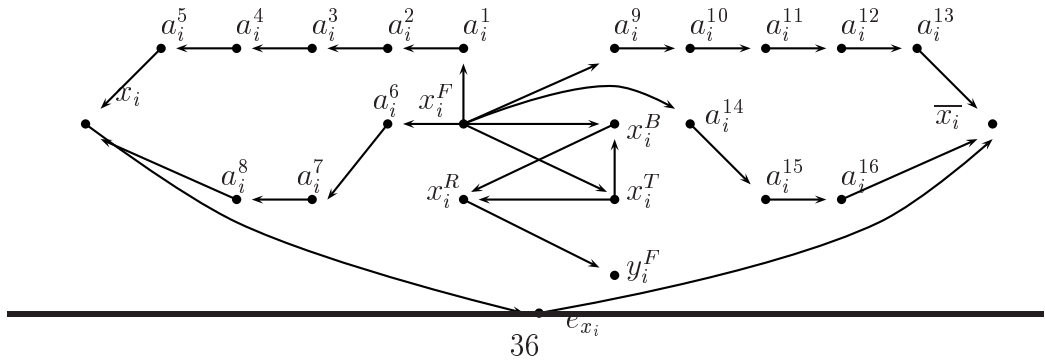
Enfin, supposons que c est une 4-coloration orientée de $\vec{G}$. Par le lemme 1, $c(x_i^F) = F$. L'existence d'un 4-chemin en même temps que celle d'un 6-chemin de x_i^F à x_i d'une part, et de x_i^F à $\bar{x}_i$ d'autre part, impliquent que $\{c(x_i), c(\bar{x}_i)\} = \{T, F\}$.

Soit $t : \{x_i, \bar{x}_i, i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}\} \rightarrow \{\text{Vrai}, \text{Faux}\}$ une distribution de vérité sur l'ensemble des littéraux. A cette distribution t , nous associons l'application $c : V(\vec{G}) \rightarrow \{T, F\}$ définie comme $c(x_i) = T$ si $t(x_i) = \text{Vrai}$, F sinon. La distribution de vérité t satisfait alors aux différentes clauses $\{C_j\}_{1 \leq j \leq m}$ si et seulement si c est un homomorphisme de $\vec{G}$ sur T_4^1 .

Si t satisfait toutes les clauses $\{C_j\}_{1 \leq j \leq m}$, alors en appliquant le lemme 2, il existe un homomorphisme de $\vec{G}$ sur T_4^1 .

Réciproquement, l'existence d'un tel homomorphisme c implique, par le lemme 2, que la distribution de vérité t définie par $t(x_i) = \text{Vrai}$ si $c(x_i) = T$, Faux sinon, satisfait toutes les clauses C_j ($1 \leq j \leq m$).

La démonstration de l'assertion (ii) utilise la précédente réduction en remplaçant le graphe $\vec{H}_i$ par le graphe orienté suivant :



Nouveau graphe orienté $\vec{H}_i$

Le nouveau graphe $\vec{H}_i$ obtenu est acircuitique du fait que, pour chaque clause C_j , les variables z_1^j, z_2^j et z_3^j représentent les littéraux dans l'ordre croissant des indices. $\square$.

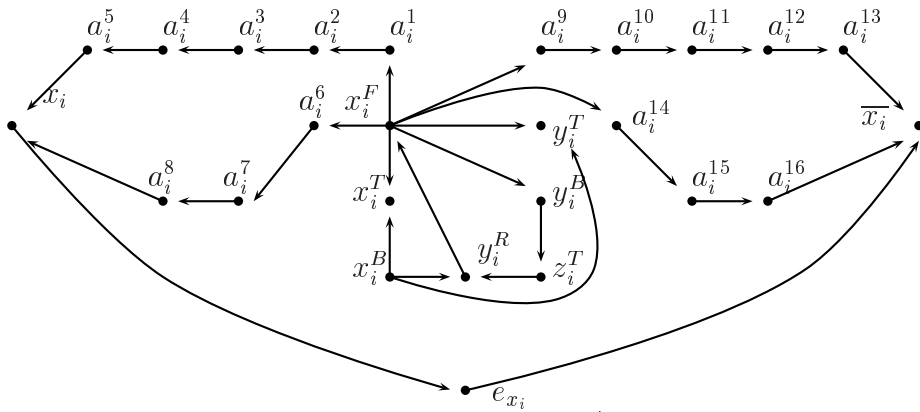
Nous pouvons obtenir un raffinement de la classe des graphes orientés connexes bipartis en utilisant une réduction, non de **3-Sat**, mais de **Planar 3-Sat** :

Corollaire 1 *Graphes orientés bipartis planaires*

*Le problème 4-**Col**_o est $\mathcal{NP}$ -complet même si le graphe initial est un graphe orienté biparti planaire.*

Démonstration : Nous allons reprendre les constructions de la précédente démonstration afin d'obtenir une réduction partant de **Planar 3-Sat**. Considérons une instance $\mathcal{I}$ de ce problème. Nous effectuons la série d'opérations suivantes sur une représentation planaire de $\mathcal{I}$:

- Nous supprimons la ligne sur laquelle sont les variables $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$.
- Pour tout $1 \leq i \leq n$, nous remplaçons l'arête $\{x_i, \bar{x}_i\}$ par le graphe $\vec{K}_i$ défini ci-dessous.
- Pour tout $1 \leq j \leq m$, nous remplaçons les arêtes $\{C_j, z_1^j\}$, $\{C_j, z_2^j\}$ et $\{C_j, z_3^j\}$ associées à la clause C_j par le graphe $\vec{L}_j$.



Nouveau graphe orienté $\vec{K}_i$

Nous obtenons alors un graphe orienté biparti et planaire. Par le théorème 1, nous en déduisons que le graphe ainsi obtenu admet

une 4-coloration si et seulement si l'instance $\mathcal{I}$ de **Planar 3-Sat** est satisfiable, aboutissant à la $\mathcal{NP}$ -complétude de la classe des graphes bipartis planaires. $\square$

2.2.3 Nouvelle famille polynomiale

Nous allons ici présenter une nouvelle famille de graphes orientés, les graphes orientés multipartis complets, dont la coloration orientée optimale est obtenue en temps polynomial. La clef de la démonstration utilise la complexité polynomiale du problème de coloration pour les cographes, c'est-à-dire les graphes sans P_4 . Nous entendons bien sûr par là que tout sous-graphe induit par 4 sommets n'est pas isomorphe à une chaîne de longueur 3.

Rappelons qu'un graphe orienté multiparti complet $\vec{G}$ est un graphe orienté pour lequel il existe un entier naturel l tel que $V(\vec{G})$ admette une l -partition $\{V_1; V_2; V_3; \dots; V_l\}$ de sorte que les graphes induits $\{\vec{G}[V_i]\}_{1 \leq i \leq l}$ soient stables et pour tout couple de sommets $(x, y) \in V_i \times V_j$ avec $i \neq j$, soit (x, y) , soit (y, x) est un arc de $\vec{G}$.

Proposition 1 [*Culus et Demange, 2006*] *Graphes multipartis orientés complets*

*Le problème **Nombre Chromatique Orienté** est polynomial sur la famille des graphes orientés multipartis complets.*

Démonstration : Si $x \in V_i$ et $y \in V_j$ avec $i \neq j$, alors les sommets x et y appartiennent à deux classes monochromatiques différentes pour toute coloration orientée. Aussi, nous avons au moins l classes monochromatiques non-vides. Pour tout entier i compris entre 1 et l , définissons le graphe G_i ayant V_i pour ensemble de sommets et dont l'ensemble des arêtes est défini par :

$$\{x, y\} \in E(G_i) \Leftrightarrow \exists z \in V_j, j \neq i, (x, z) \in A(\vec{G}) \text{ et } (z, y) \in A(\vec{G}).$$

Nous avons alors :

$$\chi_o(\vec{G}) = \sum_{i=1}^l \chi(G_i). \quad (\star)$$

En effet, considérons deux classes monochromatiques C_i et C_j respectivement de G_i et G_j ($i \neq j$), les classes C_i et C_j de $\vec{G}$ constituées des mêmes sommets sont des stables vérifiant la propriété d'unidirection (le cas contraire impliquerait l'existence

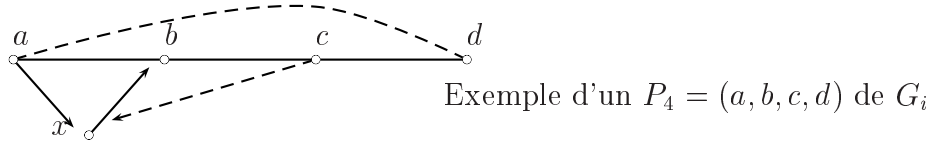
d'une arête dans l'une des classes monochromatiques C_i ou C_j , ce qui serait absurde). Nous obtenons alors la formule ($\star$).

Montrons que les graphes $\{G_i\}_{1 \leq i \leq l}$ sont des cographes : supposons pour cela l'existence, dans G_i , d'une chaîne de longueur 3, notée (a, b, c, d) . Ainsi, il existe un indice j différent de i tel que G_j contienne un sommet x vérifiant (quitte à inverser le sens de tous les arcs de $\vec{G}$) (a, x, b) est un 2-chemin de $\vec{G}$. La figure ci-dessous présente cette configuration.

Si (x, c) est un arc de $\vec{G}$, alors l'arête $\{a, c\}$ existe dans G_i .

Sinon, (c, x) est un arc de $\vec{G}$ (cas présenté dans le schéma).

Ainsi, soit (d, x) est un arc de $\vec{G}$, et alors $\{b, d\}$ est une arête de G_i , soit (x, d) est un arc de $\vec{G}$ et alors c'est $\{a, d\}$ qui est une arête de G_i . Ainsi il ne peut exister dans G_i de graphe induit par 4 sommets isomorphe à P_4 , et donc G_i est un cographe.



Comme le problème de coloration (classique) est polynomial sur l'ensemble des cographes ([Golumbic, 1980]), le problème de coloration orientée des graphes complets multipartis l'est aussi. $\square$

2.3 Inapproximation

L'existence d'une réduction partant du problème du **Stable Maximum** vers le problème du **Nombre Chromatique Orienté** nous permet de transporter les résultats d'inapproximation existant pour ce premier problème au second. Dans cette partie, nous allons mettre en lumière une telle réduction, puis nous transposerons les résultats d'inapproximation à notre problème initial.

2.3.1 Ensemble Stable Maximum

Ensemble stable maximum (Maximum Independent Set)

Instance : Un graphe simple G .

Réponse : Un sous-ensemble de $V(G)$.

Question : Quel est le stable de G de taille maximum ?

Ce problème, classique en théorie des graphes, a été longuement étudié. Nous savons qu'il est $\mathcal{NP}$ -complet sous l'hypothèse que $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, et qu'il n'admet pas de rapport d'approximation constant ni dans le cadre classique, ni dans le cadre différentiel. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [Monnot et al., 2003] pour plus de détails et de références.

2.3.2 Réduction du Stable Maximum vers la Coloration Orientée

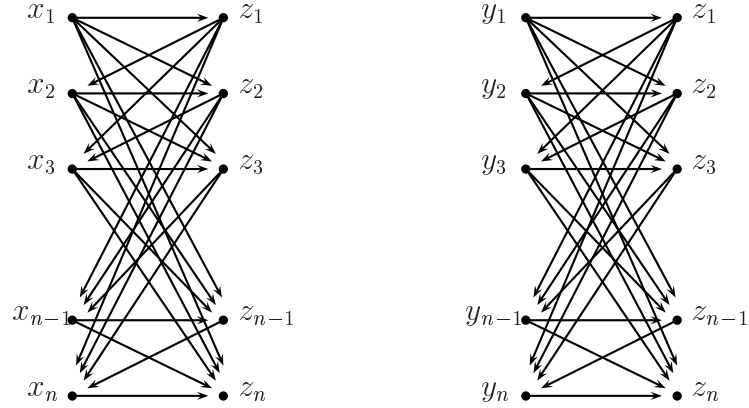
C'est au moyen d'une réduction que nous pouvons transposer les résultats négatifs relatifs au problème du **Stable Maximum** au problème **Nombre Chromatique Orienté**.

Considérons un graphe simple $G = (V, E)$ instance du problème de l'ensemble **Stable Maximum** et notons $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ l'ensemble des sommets de G . Définissons alors le graphe orienté $\vec{G}'$ par :

$V(\vec{G}') = X \cup Y \cup Z$ avec $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ et $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$.

$A(\vec{G}') = A_{XY} \cup A_{XZ} \cup A_{YZ}$ avec :

- $A_{XZ} = \{(x_i, z_j), i \leq j\} \cup \{(z_i, x_j), i < j\}$,
- $A_{YZ} = \{(y_i, z_j), i \leq j\} \cup \{(z_i, y_j), i < j\}$
- $A_{XY} = \{(x_i, y_j), i < j\} \cup \{(x_j, y_i), i < j \text{ et } (j, i) \in E\} \cup \{(y_i, x_j), i < j, (i, j) \notin E\}$.



Graphes $\vec{G}'[X \cup Z]$ induit par $X \cup Z$ et $\vec{G}'[Y \cup Z]$ induit par $Y \cup Z$.

Remarque 1 Sur les sous-graphes $\vec{G}'[X \cup Z]$ et $\vec{G}'[Y \cup Z]$

i) Les deux sous-graphes $\vec{G}'[X \cup Z]$ et $\vec{G}'[Y \cup Z]$ sont isomorphes par l'application suivante : $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\phi(x_i) = y_i$; et $\phi(z_i) = z_i$.

ii) Les deux graphes $\vec{G}'[X \cup Z]$ et $\vec{G}'[Y \cup Z]$ sont des graphes complets bipartis orientés.

iii) $\vec{G}'[X \cup Y] \cup \{(x_i, y_i) : 1 \leq i \leq n\}$ est un graphe orienté biparti complet.

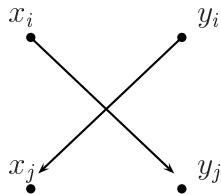
L'existence d'un 2-chemin (orienté) entre x_i et x_j d'une part et entre z_i et z_j d'autre part ($i < j$), implique que toutes les classes monochromatiques sont réduites à des singletons. Ainsi, $\chi_o(\vec{G}'[X \cup Z]) = \chi_o(\vec{G}'[Y \cup Z]) = 2n$.

Lemme 3 *Lien avec le nombre de Stabilité de G*

Désignons par n l'ordre de G et $\alpha(G)$ le nombre de stabilité de G . Nous avons $\chi_o(\vec{G}') = 3n - \alpha(G)$. Réciproquement, toute k -coloration orientée de $\vec{G}'$ nous permet de spécifier (en temps polynomial) un ensemble stable de G de taille $3n - k$.

Démonstration : Rappelons que le *Nombre de Stabilité* d'un graphe est le nombre de sommets de son stable maximum. Par la remarque précédente, toute classe monochromatique de $\vec{G}'$ est, soit réduite à un singleton, soit il existe un entier $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ pour lequel cette classe monochromatique est la paire $\{x_i, y_i\}$.

Nous déduisons de cette proposition que $\chi_o(\vec{G}') = k$, avec k vérifiant : $2n \leq k \leq 3n$. Toute k -coloration orientée de $\vec{G}'$ est formée par $(3n - k)$ paires de sommets et $(2k - 3n)$ singletons. Soit S un sous-ensemble de $V(\vec{G}')$ défini par $S = \{i \in V : \{x_i, y_i\} \text{ est une couleur}\}$. Pour tout couple (i, j) dans $S \times S$, $i < j$, la définition de A_{XY} et la propriété d'unidirection impliquent la configuration de la figure ci-dessous.



Une telle configuration implique que $(i, j) \notin E$. Ainsi, S est un ensemble stable de G . Réciproquement, soit $S \subset V$ un ensemble stable de G

et soit c la coloration orientée de $\vec{G}'$ définie par les classes monochromatiques $\{x_i, y_i\}$ pour $i \in S$ complétée par des singletons $\{u\}$.

Vérifions qu'une telle coloration est bien une coloration orientée propre de $\vec{G}'$. Comme $(i, j) \notin E$, le schéma ci-dessus montre que les deux classes monochromatiques sont en unidirection. Nous

avons, maintenant, à montrer que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, il n'existe pas de 2-chemin entre les sommets x_i et y_i . En fait, l'unique 2-chemin entre x_i et y_i est (x_i, z_j, y_i) . Par définition de A_{XZ} et de A_{YZ} , nous avons la configuration suivante :



Ainsi, il existe une bijection entre la coloration orientée de $\vec{G'}$ et un ensemble stable de G , ce qui démontre le lemme. $\square$

Théorème 2 *Réduction entre le Stable et la Coloration orientée*

Il existe une réduction du problème du **Stable Maximum** vers le problème de recherche du **Nombre Chromatique Orienté** qui transforme tout rapport d'approximation différentielle $\rho(n)$ pour le problème **Nombre Chromatique Orienté** en un rapport de $\rho(3n)$ pour le problème **Stable Maximum**.

Démonstration : Soit $\mathcal{A}$ un algorithme garantissant un rapport d'approximation différentielle $\rho(n)$ pour le problème de la coloration orientée et soit G un graphe. Définissons le graphe orienté $\vec{G'}$ comme précédemment et notons $\chi'_o(\vec{G'})$ le nombre de couleurs obtenues par l'algorithme $\mathcal{A}$. Le lemme 3 précédent implique l'obtention d'un ensemble stable de G de taille $\alpha'(G) = 3n - \chi'_o(\vec{G'})$.

Ainsi, $\frac{\alpha'(G)}{\alpha(G)} = \frac{3n - \chi'_o(\vec{G'})}{3n - \chi_o(\vec{G'})} \geq \rho(3n)$, et le théorème est prouvé. $\square$

Corollaire 2 *Résultat d'inapproximation*

Si $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, alors le problème du **Nombre Chromatique Orienté** n'est pas approximable avec un rapport différentiel constant.

Si $\mathcal{P} \neq \mathcal{ZPP}$, alors le problème du **Nombre Chromatique Orienté** n'est pas approximable avec un rapport différentiel de $O(n^{\varepsilon-1})$, $\varepsilon > 0$.

2.3.3 Réduction vers le problème du Stable Maximum

Etudions une réduction inverse en partant du problème **Nombre Chromatique Orienté** et aboutissant au problème du **Stable Maximum**.

Proposition 2 *Réduction au stable maximum*

Il existe une réduction du problème de la coloration orientée au problème du stable maximum telle que tout rapport d'approximation classique $\rho(\tilde{G})$ pour le problème du stable est transformé en un rapport d'approximation différentielle de $1/2 \times \rho(\tilde{G})$ pour le problème de la coloration orientée.

Démonstration : Soit $\vec{G} = (V, A)$ un graphe orienté de G , on définit le graphe (non orienté) $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ par :

- $\tilde{V} = \{(i, j) \in V \times V : l_G(i, j) \geq 3\}$, avec $l_G(i, j)$ égal au nombre minimum d'arcs sur l'ensemble des chemins allant de i à j ou de j à i .
- Pour $u = (u_1, u_2) \in \tilde{V}$ et $v = (v_1, v_2) \in \tilde{V}$, $\{u, v\} \in \tilde{E}$ si et seulement si l'application c_1 définie par $c_1(u_1) = c_1(u_2) = 1$ et par $c_1(v_1) = c_1(v_2) = 2$ n'est pas une 2-coloration orientée du graphe induit $\vec{G}[\{u_1, u_2, v_1, v_2\}]$ par $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ dans $\vec{G}$.

Nous remarquons que $\{u, v\} \in \tilde{E}$ si 1) $u = (u_1, u_2)$ et 2) $v = (u_1, v_2)$ ou $v = (v_1, u_2)$.

D'une part, $\{u, v\} \notin \tilde{E} \iff \{u_1, u_2\} \notin A$ et $\{v_1, v_2\} \notin A$, et, d'autre part, l'application c_1 définie ci-dessus est une 2-coloration orientée de $\vec{G}[\{u_1, u_2, v_1, v_2\}]$.

Prenons un ensemble stable $\tilde{S}$ de $\tilde{G}$. Nous définissons une coloration orientée de $\vec{G}$ de la manière suivante :

- Les sommets u_1 et u_2 de $\vec{G}$ tel que le couple $u = (u_1, u_2) \in \tilde{S}$ sont colorés au moyen d'une nouvelle couleur.
- Les autres sommets sont chacun colorés par une nouvelle couleur.

La coloration ainsi définie comporte $\chi'_o(\vec{G}) = |V| - |\tilde{S}|$ couleurs. Toute classe de coloration est de taille 1 ou 2, et tout couple de classes monochromatiques vérifie la propriété d'unidirection. Ainsi, cette coloration est une $\chi'_o(\vec{G})$ -coloration orientée de $\vec{G}$.

D'autre part, soit c une coloration orientée optimale de $\vec{G}$. Pour $1 \leq i \leq \chi_o(\vec{G})$, posons $V_i = c^{-1}(i)$ (la $i^{\text{ème}}$ classe monochromatique). Dans chaque classe monochromatique, nous rassemblons les sommets par paires $\{u_1, u_2\}$ (il reste éventuellement un sommet isolé par classe monochromatique). L'ensemble des sommets $u = (u_1, u_2)$ est un stable de $\tilde{G}$ de taille au moins $\sum_{i=1}^{\chi_o(\vec{G})} \frac{|V_i|-1}{2} = \frac{n-\chi_o(\vec{G})}{2}$.

De façon évidente, on a : $\alpha(\tilde{G}) \geq \frac{n-\chi_o(\vec{G})}{2}$.

Supposons l'existence d'un algorithme garantissant un rapport d'approximation classique $\rho(\tilde{G})$ pour le problème du stable maximum, et choisissons alors un ensemble stable $\tilde{S}$ de $\tilde{G}$ vérifiant $\frac{|\tilde{S}|}{\alpha(\tilde{G})} \geq \rho(\tilde{G})$.

La $\chi'_o(\vec{G})$ -coloration orientée de $\vec{G}$ obtenue précédemment vérifie

alors :

$$\frac{n - \chi'_0(\vec{G})}{n - \chi_o(\vec{G})} = \frac{|\tilde{S}|}{2\alpha(\tilde{G})} \geq 1/2 \times \rho(\tilde{G}),$$

ce qui achève cette démonstration. $\square$

Chapitre 3

Coloration mixte

L'étude d'approximations du nombre chromatique orienté se heurte à des problèmes lorsque l'on essaie d'utiliser des algorithmes gloutons. Nous avons réussi à dépasser quelques limites en considérant un graphe orienté comme un graphe mixte particulier, et en définissant la notion de coloration sur les graphes mixtes. La définition du polynôme chromatique sur les graphes mixtes pourrait aussi permettre d'améliorer nos connaissances du polynôme chromatique orienté, notamment concernant l'interprétation de ses coefficients où par exemple sa valeur en -1 , importante dans le cadre non-orienté.

3.1 Introduction

Sauf mention explicite contraire, dans toute cette partie, $\mathcal{G} = (V, A, E)$ désigne un graphe mixte, c'est-à-dire pouvant comporter des arcs (dont l'ensemble est noté A) et des arêtes (dont l'ensemble est noté E). De manière générale, nous ne considérons que des graphes mixtes sans arc ou arête multiple, sans boucle (orientée ou non). De même, nous supposons que le graphe mixte est asymétrique, autrement dit que $\mathcal{G}$ ne contient aucun circuit (orienté) de longueur 2. Néanmoins, étant donné deux sommets x et y de V , il peut exister l'arête $\{x, y\} \in E$ et l'arc $(x, y) \in A$. A tout graphe mixte $\mathcal{G} = (V, A, E)$ sont associés deux graphes :

- Le graphe non orienté $\widehat{\mathcal{G}} = (V, E)$.
- Le graphe orienté $\vec{\mathcal{G}} = (V, A)$.

Coloration mixte comme partition de l'ensemble des sommets

Définition 2 *Coloration mixte*

Une k -coloration mixte de $\mathcal{G}$ est une application $c : V \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ telle

que $\{\mathcal{G}[c^{-1}(i)]\}_{1 \leq i \leq k}$ est une k -partition de $V(\mathcal{G})$ en classes stables, et pour tout couple d'entiers i, j vérifiant $1 \leq i < j \leq k$, les classes monochromatiques $c^{-1}(i)$ et $c^{-1}(j)$ vérifient la propriété d'unidirection dans le graphe orienté $\vec{\mathcal{G}} = (V, A)$.

On désigne par $\chi_m(\mathcal{G})$ le *nombre chromatique mixte* de $\mathcal{G}$, c'est-à-dire le plus petit entier k tel qu'il existe une k -coloration mixte de $\mathcal{G}$.

Coloration mixte au moyen des homomorphismes mixtes

La notion de coloration mixte admet une définition équivalente utilisant une notion d'*homomorphisme mixte* qui généralise à la fois les homomorphismes entre graphes et entre graphes orientés. Définissons d'abord l'homomorphisme mixte et ses liens avec les notions d'homomorphismes classiques et orientés, puis donnons la définition équivalente de coloration mixte en terme d'homomorphisme mixte.

Définition 3 Homomorphisme mixte

Homomorphisme mixte

Soient $\mathcal{G} = (V(\mathcal{G}), A(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}))$ et $\mathcal{K} = (V(\mathcal{K}), A(\mathcal{K}), E(\mathcal{K}))$ deux graphes mixtes. Un homomorphisme mixte de $\mathcal{G}$ vers $\mathcal{K}$ est une application $h : V(\mathcal{G}) \longrightarrow V(\mathcal{K})$ vérifiant :

- $\forall \{x, y\} \in E(\mathcal{G}), \{h(x), h(y)\} \in E(\mathcal{K}),$
- $\forall (x, y) \in A(\mathcal{G}), (h(x), h(y)) \in A(\mathcal{K}).$

Notons qu'un homomorphisme mixte entre $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ coïncide avec la notion d'homomorphisme mixte (m, n) -coloré introduite dans [Nesetril et Raspaud, 2000] lorsque $m = n = 1$, c'est-à-dire lorsque les arcs des graphes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont tous colorés en bleu et les arêtes de ces mêmes graphes le sont en rouge. L'étude des homomorphismes (m, n) -colorés ayant été, dans [Nesetril et Raspaud, 2000], plus générale, nous allons préciser les liens entre homomorphismes mixtes et homomorphismes classiques et orientés.

La proposition suivante, dont la démonstration n'est qu'un simple jeu de réécriture, permet d'exprimer un homomorphisme mixte entre $\mathcal{G}$ et $\mathcal{K}$ comme, à la fois, un homomorphisme entre deux graphes G et K et un homomorphisme orienté entre deux graphes orientés $\vec{G}$ et $\vec{K}$.

Proposition 3 Définition équivalente d'un homomorphisme mixte

Soient $\mathcal{G} = (V(\mathcal{G}), A(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}))$ et $\mathcal{K} = (V(\mathcal{K}), A(\mathcal{K}), E(\mathcal{K}))$ deux graphes mixtes. L'application $h : V(\mathcal{G}) \longrightarrow V(\mathcal{K})$ est un homomorphisme mixte si et seulement si les applications :

- $\widehat{h} : V(\mathcal{G}) \longrightarrow V(\mathcal{K}), \forall x \in V(\mathcal{G}), \widehat{h}(x) = h(x),$
- $\vec{h} : V(\mathcal{G}) \longrightarrow V(\mathcal{K}), \forall x \in V(\mathcal{G}), \vec{h}(x) = h(x),$

sont des homomorphismes respectivement, entre les graphes $\widehat{\mathcal{G}}$ et $\widehat{\mathcal{K}}$ d'une part et entre les graphes orientés $\vec{\mathcal{G}}$ et $\vec{\mathcal{K}}$ d'autre part.

Cette nouvelle notion d'homomorphisme permet une nouvelle définition de la coloration mixte.

Proposition 4 *Lien coloration mixte / homomorphisme mixte*

Le graphe mixte $\mathcal{G}$ admet une k -coloration mixte si et seulement s'il existe un graphe mixte d'ordre k , $\mathcal{K}$ et un homomorphisme mixte h de $\mathcal{G}$ vers $\mathcal{K}$. Le graphe mixte $\mathcal{K}$ est un graphe des couleurs de $\mathcal{G}$.

Démonstration Soit $c : V(\mathcal{G}) \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ une k -coloration mixte de $\mathcal{G}$. Considérons le graphe mixte $\mathcal{K}$ défini par : $V(\mathcal{K}) = \{1, 2, \dots, k\}$, $A(\mathcal{K}) = \{(i, j) : \exists (x, y) \in A(\mathcal{G}), c(x) = i, c(y) = j\}$, $E(\mathcal{K}) = \{\{i, j\} : \exists \{x, y\} \in E(\mathcal{G}), c(x) = i, c(y) = j\}$. Alors l'application $h : V(\mathcal{G}) \longrightarrow V(\mathcal{K})$ définie par $h(x) = c(x)$ est un homomorphisme mixte de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{K}$.

Réciproquement, étant donné un homomorphisme h de $\mathcal{G}$ dans un graphe mixte $\mathcal{K}$ d'ordre k avec $V(\mathcal{K}) = \{1, 2, \dots, k\}$. L'application $c : V(\mathcal{G}) \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ définie par $c(x) = h(x)$ est une k -coloration mixte de $\mathcal{G}$.

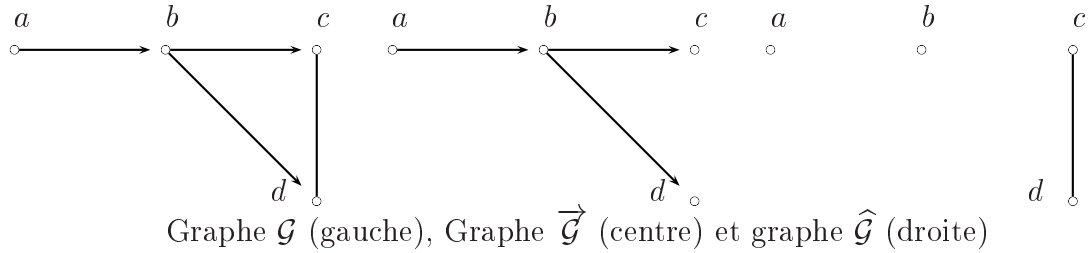
Coloration mixte comme colorations classique et orientée

Des précédentes propriétés relatives aux liens entre homomorphismes mixtes et homomorphismes classiques et orientés, découle le lien entre coloration mixte et les colorations classique et orientée.

Corollaire 3 *Définition équivalente de la coloration mixte*

Soit $\mathcal{G} = (V, A, E)$ un graphe mixte. L'application $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ est une k -coloration mixte de $\mathcal{G}$ si et seulement si elle est une coloration de $\widehat{\mathcal{G}}$ et une coloration orientée de $\vec{\mathcal{G}}$.

Démonstration : Ce corollaire résulte des propositions 3 et 4. $\square$



Dans l'exemple précédent, remarquons qu'une coloration mixte optimale n'induit pas nécessairement ni une coloration orientée optimale de $\vec{\mathcal{G}}$, ni une coloration optimale de $\widehat{\mathcal{G}}$. En effet, dans cet exemple, $\chi_o(\vec{\mathcal{G}}) = 3$ et $\chi(\widehat{\mathcal{G}}) = 2$ alors qu'une coloration mixte optimale de $\mathcal{G}$ comporte 4 couleurs.

Graphe mixte $M(\mathcal{G})$ associé au graphe mixte $\mathcal{G}$

Etant donné un graphe mixte $\mathcal{G}$, il existe d'autres graphes mixtes construits sur le même ensemble de sommets et qui ont même ensemble de colorations mixtes, c'est-à-dire qu'il existe $\mathcal{K}$ tel que $V(\mathcal{G}) = V(\mathcal{K})$ et tel que $c : V(\mathcal{G}) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ est une coloration mixte de $\mathcal{G}$ si et seulement si c'est une coloration mixte de $\mathcal{K}$.

$M(\mathcal{G})$

Définition 4 *Graphe mixte $M(\mathcal{G})$*

On désigne par $M(\mathcal{G})$ le graphe mixte ayant mêmes ensembles de sommets et de colorations mixtes que $\mathcal{G}$, contenant $\mathcal{G}$ comme sous-graphe et ayant le plus grand nombre d'arêtes.

Il est possible de donner une définition équivalente de $M(\mathcal{G})$ en utilisant, pour tout sommet v , l'ensemble $B_{\mathcal{G}}(v, 2)$ suivant :

$$B_{\mathcal{G}}(v, 2) = \{y : \exists z \in V, [(v, z), (z, y)] \vee [(y, z), (z, v)] \in A\} \cup \Gamma^+(v) \cup \Gamma^-(v) \cup \Gamma(v).$$

L'ensemble $B_{\mathcal{G}}(v, 2)$ est l'ensemble des sommets y de $\mathcal{G}$ tels que $c(v) \neq c(y)$, pour toute coloration mixte c de $\mathcal{G}$.

Proposition 5 *Graphe mixte $M(\mathcal{G})$ associé au graphe mixte $\mathcal{G}$*

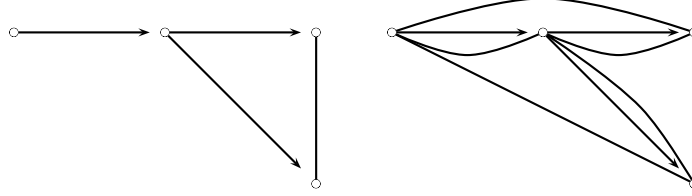
Soit $\mathcal{G} = (V, A, E)$ un graphe mixte. Le graphe $M(\mathcal{G})$ est défini par : $V(M(\mathcal{G})) = V$; $A(M(\mathcal{G})) = A$; $E(M(\mathcal{G})) = \{\{x, y\} : x \in B_{\mathcal{G}}(y, 2)\}$.

Démonstration : Désignons par F l'ensemble $\{\{x, y\} : x \in B_{\mathcal{G}}(y, 2)\}$, et montrons que $E(M(\mathcal{G})) = F$.

Soit $\{x, y\}$ une arête de $M(\mathcal{G})$, et supposons par l'absurde que $x \notin B_{\mathcal{G}}(y, 2)$. Donc il existe une coloration mixte c de $\mathcal{G}$ telle que $c(x) = c(y)$. Cette application ne peut être une coloration mixte de $M(\mathcal{G})$, d'où la contradiction, et $E(M(\mathcal{G})) \subset F$.

Réciproquement, pour toute paire $\{x, y\}$ de F et toute coloration mixte c de $\mathcal{G}$, $c(x) \neq c(y)$. Ainsi, $F \subset E(M(\mathcal{G}))$. $\square$

La figure ci-dessous reprend le graphe $\mathcal{G}$ précédent et présente le graphe mixte $M(\mathcal{G})$ qui lui est associé.



Graphe mixte $\mathcal{G}$ (gauche) et graphe mixte $M(\mathcal{G})$ (droite).

Dans le présent exemple et de manière générale, on peut noter les relations :

$$\chi_m(\mathcal{G}) = \chi_m(M(\mathcal{G})) \geq \chi(\widehat{M(\mathcal{G})}) \geq \chi(\widehat{\mathcal{G}}).$$

3.2 Approximation

Nous construisons un algorithme glouton de coloration mixte qui, par la proposition 3, s'identifie à une coloration orientée dans le cadre des graphes orientés et une coloration classique dans le cadre classique. Cet algorithme glouton garantit un rapport d'approximation différentiel.

3.2.1 Une différence entre coloration mixte et coloration orientée

La proposition suivante souligne l'intérêt d'introduire le graphe $M(\mathcal{G})$.

Proposition 6 *Extention des colorations mixtes*

Soit S l'ensemble des sommets d'un stable de $M(\mathcal{G})$. On désigne par c_1 une k_1 -coloration mixte du sous-graphe mixte induit dans $M(\mathcal{G})$ par $\Gamma^+(S)$ et par k_2 l'ordre de l'ensemble $V(\mathcal{G}) \setminus (S \cup \Gamma^+(S))$.

Nous pouvons alors étendre la coloration mixte c_1 en une $(k_1 + k_2 + 1)$ -coloration mixte c sur $M(\mathcal{G})$.

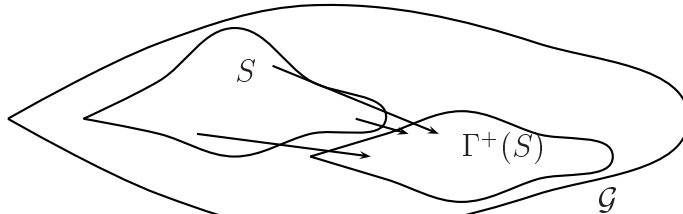


Schéma du graphe $\mathcal{G}$, de l'ensemble stable S et de l'ensemble $\Gamma^+(S)$.

Démonstration : Nous définissons, l'application $c : V(\mathcal{G}) \rightarrow \{1, 2, \dots, k_1 + k_2 + 1\}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in \Gamma^+(S), & c(x) = c_1(x) \in \{1, \dots, k_1\}, \\ \forall x \in S, & c(x) = k_1 + 1, \\ \forall x \notin S \cup \Gamma^+(S), & c(x) \text{ prend une valeur différente dans} \\ & \{k_1 + 2, \dots, k_1 + k_2 + 1\}. \end{cases}$$

Cette application est une coloration mixte de $\mathcal{G}$ prolongeant la coloration mixte c_1 . En effet, les $c_1 + c_2 + 1$ classes sont :

- soit S qui est une classe stable
- soit des singletons, donc des classes stables
- soit des classes de la coloration orientée de $\mathcal{G}[\Gamma^+(S)]$.

Ainsi, les classes définies par $\{c^{-1}(i)\}_{1 \leq i \leq k_1 + k_2 + 1}$ sont des classes stables.

Vérifions qu'elles vérifient la propriété d'unidirection deux à deux. Le stable S est en unidirection avec toutes les autres classes. Deux classes provenant de la c_1 -coloration orientée de $M(\mathcal{G})[\Gamma^+(S)]$ sont en unidirection entre-elles dans $M(\mathcal{G})$ car dans $M(\mathcal{G})[\Gamma^+(S)]$. Enfin, si $c_1^{-1}(i)$ désigne une classe stable de $M(\mathcal{G})[\Gamma^+(S)]$ et $y \notin S \cup \Gamma^+(S)$, cette classe est en unidirection avec le singleton $\{y\}$ car l'inverse impliquerait l'existence d'un 2-chemin entre deux sommets d'une même classe de $c_1^{-1}(i)$, et donc celle d'une arête dans $M(\mathcal{G})$, contredisant le fait que c_1 soit une coloration orientée de $M(\mathcal{G})[\Gamma^+(S)]$. $\square$

La pertinence de la notion du graphe $M(\mathcal{G})$ provient du fait que la proposition précédente n'est pas valable pour le graphe mixte $\mathcal{G}$. Voyons cela sur un exemple.



Graphe mixte $\mathcal{G}$ (gauche) et le graphe $M(\mathcal{G})$ associé (droite).

Considérons l'ensemble stable réduit au sommet S . L'application $c_1 : V(\mathcal{G}[\Gamma^+(S)]) \rightarrow \{1\}$, définie par $c_1(A) = c_1(B) = 1$, est une coloration mixte de $\Gamma^+(S) = \{A, B\}$. Cette coloration c_1 ne peut pas être étendue à $\mathcal{G}$ car toute coloration mixte c de $\mathcal{G}$ doit vérifier $c(A) \neq c(B)$ puisqu'il existe un

chemin de longueur 2 de A vers B . Par contre, le sous-graphe mixte de $M(\mathcal{G})$ induit par $\{A, B\}$ ne peut être colorié par une unique couleur.

Cette propriété du graphe mixte $M(\mathcal{G})$ va être employée, dans la suite, afin d'élaborer un algorithme glouton relatif au problème des colorations orientée et mixte.

3.2.2 L'algorithme glouton et son analyse

Conformément à ce qui précède, une coloration mixte de $\mathcal{G}$ se déduit d'une coloration mixte de $M(\vec{\mathcal{G}})$. Rappelons que si $\mathcal{G} = \vec{\mathcal{G}}$ est un graphe orienté, la coloration mixte obtenue est aussi une coloration orientée de $\vec{\mathcal{G}}$.

Nous allons définir une coloration mixte de $M(\mathcal{G})$ par la stratégie gloutonne suivante : on sélectionne dans $M(\mathcal{G})$ une classe stable S et on donne à ses sommets la même couleur. On évalue les cardinaux de $\Gamma^+(S)$ et $\Gamma^-(S)$: le plus petit des deux ensembles est colorié au moyen de classes monochromatiques réduites à des singletons. Nous réappliquons alors l'algorithme glouton à l'ensemble des sommets du graphe qui n'ont pas encore été colorés (i.e. à $M(\mathcal{G})[V \setminus (S \cup \Gamma^+(S))]$ si $|\Gamma^+(S)| \leq |\Gamma^-(S)|$).

Nous allons formaliser cet algorithme en deux temps.

Le premier algorithme est dédié à la recherche d'une classe stable, appelée aussi monochromatique, du graphe mixte $\mathcal{G}$.

Algorithme MonoChromOr

Entrée : Un graphe mixte $\mathcal{G} = (V, A, E)$

Sortie : Une classe MonoChromOr($\mathcal{G}$) monochromatique de $\mathcal{G}$

(0) Initialisation : Construire $M(\mathcal{G})$. $C := \emptyset$, $U := V$.

(1) Tant que $U \neq \emptyset$ FAIRE :

(2) Soit v sommet minimisant $|B(v, 2)|$ dans le sous-graphe mixte $M(\mathcal{G})[U]$;

(3) $C := C \cup \{v\}$; $U := U \setminus B(v, 2)$.

(4) Renvoyer C .

L'analyse de cet algorithme est strictement identique à celle obtenue dans le cadre classique par Johnson (cf [Johnson, 1974]) :

Proposition 7 *Analyse de MonoChromOr*

L'algorithme MonoChromOr permet de garantir l'obtention d'un ensemble stable d'au moins $\log_{\chi_m(\mathcal{G})}(|\mathcal{G}|)$ sommets. De plus, cette classe stable vérifie la propriété d'unidirection avec chaque sommet $\{z\}$, $z \notin \text{MonoChromOr}(M(\mathcal{G}))$.

Démonstration : On désigne par u le nombre d'itérations de la ligne (1) dans **MonoChromOr**. Posons $\chi_m(\mathcal{G}) = k$. Il existe donc une classe monochromatique ayant au moins $|\mathcal{G}|/k$ sommets. Le fait que deux sommets x et y soient dans la même classe monochromatique implique $y \notin B(x, 2)$. Ainsi, on retire au plus $|\mathcal{G}| - |\mathcal{G}|/k = |\mathcal{G}|(1 - 1/k)$ sommets en ligne (3). Le graphe (mixte) obtenu en sortie de cette itération est d'ordre au moins $|\mathcal{G}|/k$. Avant que l'ensemble U ne devienne vide, il se produit donc au moins $\lceil \log_{\chi_m(\mathcal{G})}(|\mathcal{G}|) \rceil$ itérations, ce qui implique que la classe stable obtenue est au moins d'ordre $\lceil \log_{\chi_m(\mathcal{G})}(|\mathcal{G}|) \rceil$.

Soit $z \notin \text{MonoChromOr}(M(\mathcal{G}))$, et supposons, par contradiction, que la propriété d'unidirection ne soit pas vérifiée entre $\{z\}$ et $\text{MonoChromOr}(M(\mathcal{G}))$. Alors, il existe deux sommets x et y dans $\text{MonoChromOr}(M(\overrightarrow{\mathcal{G}}))$ tels que les arcs (x, z) et (z, y) soient des arcs de $\mathcal{G}$. Comme les sommets sont sélectionnés les uns après les autres en ligne (2) de l'algorithme, nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que x a été sélectionné en ligne (2) avant y . Or, $y \in B(x, 2)$, ce qui contredit le fait que y ait été sélectionné après x dans **MonoChromOr**($M(\mathcal{G})$). $\square$

L'itération de cet algorithme nous permet de définir l'algorithme **ChromOr**, qui donne une coloration mixte à tout graphe mixte $\mathcal{G}$.

Algorithme Glouton **ChromOr** :

Entrée : Un graphe mixte $\mathcal{G} = (V, A, E)$.

Sortie Une coloration mixte $\text{ChromOr}(\mathcal{G})$ de $\mathcal{G}$.

Initialisation : $M(\mathcal{G})$, $U := V$, $j := 1$:

(a) Tant que $|U| > 0$ FAIRE :

(b) Les sommets de $S = \text{MonoChromOr}(M(\mathcal{G})[U])$ prennent la couleur j ,

(c) Soit $V_{\min}$ le sous-ensemble d'ordre minimum parmi $\Gamma^+(S)$ and $\Gamma^-(S)$,

(d) Colorier les sommets de $V_{\min}$ avec les $|V_{\min}|$ couleurs $\{j + 1, \dots, j + |V_{\min}|\}$,

(e) $U \leftarrow U \setminus (S \cup V_{\min})$; $j \leftarrow j + |V_{\min}| + 1$.

Théorème 3 *Analyse de l'algorithme **ChromOr***

*L'algorithme **ChromOr** permet de garantir l'obtention d'une coloration mixte de $\mathcal{G}$.*

Le problème du **Nombre Chromatique Mixte** admet une $O(\log^2(n)/n \log(\chi_m(\vec{G})))$ -approximation différentielle. En particulier, si $\chi_m(\vec{G})$ est borné alors le rapport différentiel $O(\log^2(n)/n)$ est garanti.

Démonstration : Nous désignons par k le nombre chromatique mixte du graphe $\mathcal{G}$. La proposition 6 garantit l'obtention, en fin d'algorithme, d'une coloration mixte de $\mathcal{G}$. Désignons par G_i le graphe mixte induit $\mathcal{G}[U]$ rencontré lors de la $i^{\text{ème}}$ itération de la boucle intérieure. Soit n_i l'ordre de G_i et λ_i le cardinal d'une classe stable de G_i obtenue par l'algorithme **MonoChromOr** appliqué à G_i , quitte à arrêter l'algorithme au bout de $\log(n_i)$ itérations, on obtient l'encadrement : $\log(n_i)/\log(k) \leq \lambda_i \leq \log(n_i)$.

La stratégie gloutonne implique : $\forall i \geq 0, n_{i+1} \geq \frac{n_i - \lambda_i}{2}$. Or, pour $x \geq 5$, on a l'inégalité : $\frac{x - \log(x)}{2} \geq \frac{x}{3}$. On a donc : $\forall i \geq 0, n_{i+1} \geq \frac{n_i}{3}$. On désigne par p le dernier appel possible de **MonoChromOr** dans **ChromOr**. Au rang initial, nous avons $\lambda_0 \geq \left(\frac{\log(n)}{\log(k)}\right)$. Par itération sur i , ($0 \leq i \leq p$), nous obtenons : $\lambda_i \geq \log_k\left(\frac{n}{3^i}\right)$. Il découle alors l'égalité : $p = \lceil \log_3(n) \rceil$.

Avec ces $\lceil \log_3(n) \rceil$ appels à l'algorithme **MonoChromOr**, le nombre de sommets coloriés est minoré par :

$$\log_k(n) + \log_k\left(\frac{n}{3}\right) + \log_k\left(\frac{n}{3^2}\right) + \dots + \log_k\left(\frac{n}{3^p}\right) \geq \log_k(3) \frac{(\log_3(n) - 1) \log_3(n)}{2}.$$

Le nombre de couleurs utilisées par l'algorithme est alors au plus

$$\log_3(n) + n - \log_k(3) \frac{(\log_3(n) - 1) \log_3(n)}{2}.$$

Le ratio différentiel de cet algorithme est donc :

$$\frac{n - \lambda}{n - k} \geq \frac{n - n - \log_3(n) + \log_k(3) \frac{(\log_3(n) - 1) \log_3(n)}{2}}{n - k}$$

impliquant que ce rapport différentiel est de l'ordre de $O\left(\frac{\log^2(n)}{n \log(k)}\right)$. $\square$

Notons que ce résultat, établi dans le cadre de la coloration mixte, est a fortiori vrai pour la coloration orientée.

3.3 Polynôme chromatique mixte

La notion de polynôme chromatique a été transposée au cadre orientée par Eric Sopena [Sopena, 1994]. A notre tour, nous définissons la notion de

polynôme chromatique mixte de façon similaire à celle du polynôme chromatique et du polynôme chromatique orienté. Le but de cette section est d'en étudier les principales propriétés.

3.3.1 Définition

Définition 5 *Polynôme chromatique mixte*

Soit $\mathcal{G}$ un graphe mixte et k un entier strictement positif.

- *Nous désignons par $P_m(\mathcal{G}, k)$ le nombre de k -colorations mixtes de $\mathcal{G}$.*
- *Nous appellerons polynôme mixte de $\mathcal{G}$ la fonction $k \rightarrow P_m(\mathcal{G}, k)$.*

Cette définition nécessite de vérifier que cette application est bien exprimable sous la forme d'un polynôme en k . Nous le ferons ultérieurement; entre-temps, nous supposons cette terminologie exacte.

A titre d'exemples, le polynôme chromatique mixte d'un graphe (mixte) vide d'ordre n sera : $P_m(\mathcal{G}, k) = k^n$. Celui d'un graphe mixte complet (c'est-à-dire ayant un arc ou une arête entre deux sommets quelconques) d'ordre n sera $P_m(\mathcal{G}, k) = k(k-1)\dots(k-n+1)$.

Proposition 8 *Polynôme chromatique mixte du graphe $M(\mathcal{G})$*

Soit $\mathcal{G}$ un graphe mixte. Pour tout entier positif k , nous avons :

$$P_m(\mathcal{G}, k) = P_m(M(\mathcal{G}), k).$$

Démonstration : Ce résultat découle directement de la définition 4. $\square$

Nous aurons besoin, par la suite, de la notion de graphe mixte M -maximal, c'est-à-dire un graphe mixte $\mathcal{G}$ vérifiant $M(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$.

M -maximal

Liens entre polynôme chromatique mixte et les autres polynômes chromatiques

Les liens établis entre la coloration mixte et les autres colorations peuvent se transférer aux notions de polynômes chromatiques respectifs.

Un graphe simple (respectivement orienté) peut être considéré comme un graphe mixte. Il est donc possible de calculer, à la fois, son polynôme chromatique (respectivement chromatique orienté) et son polynôme mixte. La prochaine proposition assure que le polynôme chromatique mixte coïncide avec le polynôme chromatique (respectivement chromatique orienté). Nous notons $P(G, \cdot)$ le polynôme chromatique du graphe G et $\vec{P}(\vec{G}, \cdot)$ le polynôme chromatique orienté du graphe $\vec{G}$.

Proposition 9 *De la généralisation du polynôme chromatique mixte*
Si G est un graphe simple et k un entier, nous avons :

$$P(G, k) = P_m(G, k).$$

Si $\vec{G}$ est un graphe orienté et k un entier, nous avons :

$$\vec{P}(\vec{G}, k) = P_m(\vec{G}, k).$$

Démonstration : Si le graphe G est considéré comme un graphe mixte, alors $\hat{G} = G$; de même, si $\vec{G}$ est considéré comme un graphe mixte, $(\vec{G}) = \vec{G}$. Le résultat découle de la proposition 3.
 $\square$

Au sens de la précédente proposition, le polynôme chromatique mixte généralise à la fois les notions de polynôme chromatique et polynôme chromatique orienté. Le lien, mis en évidence au moyen du graphe mixte $M(\vec{G})$, entre coloration orientée et coloration mixte se retrouve au niveau des polynômes chromatiques.

Remarque 2 *Lien entre polynômes chromatiques orienté et mixte*
Si $\vec{G}$ est un graphe orienté, remarquons l'égalité :

$$\vec{P}(\vec{G}, k) = P_m(M(\vec{G}), k).$$

Ce passage d'un graphe orienté à un graphe mixte va nous être utile pour l'interprétation des coefficients du polynôme chromatique orienté. Sur le même principe, tout sous-graphe mixte $\mathcal{H}$ de $M(\vec{G})$ contenant $\vec{G}$ comme sous-graphe mixte, vérifie $P_m(\mathcal{H}, k) = P_m(M(\vec{G}), k)$.

Formule de récurrence relative au polynôme chromatique mixte

L'outil principal des théories du polynôme chromatique et du polynôme chromatique orienté est la formule de récurrence qu'ils vérifient. Néanmoins, la formule vérifiée par le polynôme chromatique orienté ([Sopena, 1994]) est assez complexe. Le cadre mixte, généralisant le cadre orienté, permet l'obtention d'une expression plus simple pour cet indispensable outil.

Théorème 4 *Formule de récurrence du polynôme chromatique mixte*
Soit $\mathcal{G}$ un graphe mixte et soit e une paire de sommets qui n'est pas une arête de $M(\mathcal{G})$. Nous désignons par $\mathcal{G} \cup \{e\}$ le graphe mixte obtenu par l'ajout de l'arête e , et par $\mathcal{G}_e$ le graphe mixte obtenu par l'identification des deux

extrémités de e dans $\mathcal{G}$ (notons que $\mathcal{G}_e$ est sans boucle). Le polynôme chromatique mixte vérifie la formule de récurrence suivante :

$$P_m(\mathcal{G}, k) = P_m(\mathcal{G} \cup \{e\}, k) + P_m(\mathcal{G}_e, k).$$

Démonstration : Soit $\mathcal{G}$ un graphe mixte, $e = \{x, y\} \notin E(M(\mathcal{G}))$ et c_m une k -coloration mixte de $\mathcal{G}$:

- si $c_m(x) = c_m(y)$ alors c_m est aussi une coloration mixte de $\mathcal{G}_e$;
 - sinon, $c_m(x) \neq c_m(y)$ et c_m est une coloration mixte de $\mathcal{G} \cup \{e\}$.
- Ainsi, en parcourant les $P_m(\mathcal{G}, k)$ colorations mixtes de $\mathcal{G}$, nous obtenons soit des colorations de $\mathcal{G} \cup \{e\}$, soit de $\mathcal{G}_e$. De plus, à toute coloration mixte de $\mathcal{G} \cup \{e\}$ ou de $\mathcal{G}_e$, nous pouvons associer une unique coloration mixte de $\mathcal{G}$. Aussi l'ensemble des k -colorations mixtes de $\mathcal{G}$ est en bijection avec l'union de l'ensemble des k -colorations mixte de $\mathcal{G} \cup e$ et de l'ensemble des k -colorations mixtes de $\mathcal{G}_e$. $\square$

Notons que nous retrouvons une formule valide pour le polynôme chromatique mixte via la proposition 9.

3.3.2 Propriétés du polynôme chromatique mixte

De cette relation de récurrence du polynôme chromatique mixte, nous allons tirer ses principales propriétés. Celles-ci sont très similaires à celles des polynômes chromatiques, classique et orienté.

Théorème 5 *Propriétés du polynôme mixte*

Pour tout graphe mixte $\mathcal{G}$ d'ordre n , nous avons :

- *L'application $k \longrightarrow P_m(\mathcal{G}, k)$ est un polynôme d'ordre n en k ;*
- *Le coefficient dominant de ce polynôme est 1 ;*
- *Le terme constant de $P_m(\mathcal{G}, k)$ est nul ;*
- *Le coefficient de k^{n-1} dans $P(\mathcal{G}, k)$ est égal à $-|E(M(\mathcal{G}))|$.*

Démonstration : Puisque $P_m(\mathcal{G}, k) = P_m(M(\mathcal{G}), k)$, nous considérerons dans cette démonstration uniquement des graphes mixtes $\mathcal{G}$ M -maximaux. Posons $G = \widehat{M(\mathcal{G})}$.

Nous raisonnons par récurrence double, premièrement croissante sur l'ordre n du graphe $\mathcal{G}$, deuxièmement décroissante sur le nombre $|E(G)|$. Posons $\mathcal{H}_n$: tout graphe mixte d'ordre n vérifie l'ensemble des propriétés du théorème. On vérifie aisément que $\mathcal{H}_2$ est vraie. Supposons $\mathcal{H}_{n-1}$ vraie et démontrons $\mathcal{H}_n$.

Posons $\mathcal{K}_m^{(n)}$ la propriété : tout graphe mixte d'ordre n tel que $|E(G)| = m$ vérifie l'ensemble des propriétés du théorème. La propriété $\mathcal{K}_{\frac{n(n-1)}{2}}^{(n)}$ est vraie puisque le polynôme chromatique mixte des graphes mixtes complets est : $P_m(\mathcal{G}, k) = k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)$.

Soit m un entier strictement inférieur à $n(n-1)/2$ et supposons que $\mathcal{K}_{m+1}^{(n)}$ est vraie. Démontrons $\mathcal{K}_m^{(n)}$.

Soit $\mathcal{G}$ un graphe mixte M -maximal d'ordre n tel que $|E(M(\mathcal{G}))| = m$. Puisque le graphe $\mathcal{G}$ a m arêtes, il existe $e \notin E(\mathcal{G})$. Par la formule de récurrence du théorème 4 nous avons : $P_m(\mathcal{G}, k) = P_m(\mathcal{G} \cup e, k) + P_m(\mathcal{G}_e, k)$.

Par $\mathcal{K}_{m+1}^{(n)}$, le polynôme chromatique mixte $P_m(\mathcal{G} \cup e, \cdot)$ vérifie l'ensemble des propriétés du théorème. De plus, par $\mathcal{H}_n$, le polynôme chromatique mixte $P_m(\mathcal{G}_e, \cdot) = P_m(M(\mathcal{G}_e), \cdot)$ vérifie aussi l'ensemble des propriétés du théorème.

Il s'ensuit que le polynôme $P_m(\mathcal{G}, \cdot)$ vérifie l'ensemble des propriétés du théorème, et donc $\mathcal{K}_m^{(n)}$ est vraie. L'ensemble des propriétés $\{\mathcal{K}_m^{(n)}\}_{1 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}}$ étant vraie, la propriété $\mathcal{H}_n$ est vérifiée.

□

3.3.3 Formule par Exclusion / Inclusion

Les polynômes chromatiques classiques et orientés s'expriment donc simplement au moyen du polynôme chromatique mixte. L'expression inverse n'est pas aisée. Prolongeant la démarche d'Eric Sopena dans le cadre orienté ([Sopena, 1994]), nous allons présenter une expression du polynôme chromatique mixte de $\mathcal{G}$ comme somme des polynômes chromatiques (classiques) de sous-graphes de $Und(\mathcal{G})$ au moyen d'une formule par Inclusion / Exclusion.

Pour ce faire, associons au graphe mixte $\mathcal{G}$, l'ensemble $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ suivant : $\mathcal{C}(\mathcal{G})$

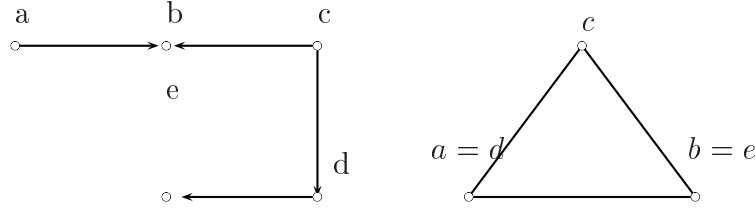
$$\mathcal{C}(\mathcal{G}) = \{ \{(x, y), (z, t)\} \in A(\mathcal{G})^2 : \{y, z\} \notin E(Und(\mathcal{G})) \text{ et } \{x, t\} \notin E(Und(\mathcal{G})) \}.$$

Remarquons que $y = z$ ou $x = t$ est possible, sauf dans le cas où $\mathcal{G} = M(\mathcal{G})$. Toute coloration mixte de $\mathcal{G}$ est une coloration classique de $Und(\mathcal{G})$. La réciproque est fausse, car la propriété d'unidirection peut être violée. Si elle l'est, l'ensemble des paires d'arcs la contredisant est inclus dans $\mathcal{C}(\mathcal{G})$. Inversement, pour tout sous-ensemble S non vide de $\mathcal{C}(\mathcal{G})$, il existe une coloration classique de $Und(\mathcal{G})$ qui n'est pas une coloration mixte de $\mathcal{G}$, et dont les paires d'arcs contredisant la propriété d'unidirection soient exactement S .

$Id(\mathcal{G}, Z)$

Si $Z = \{ \{(x_1, y_1), (z_1, t_1)\}, \dots, \{(x_k, y_k), (z_k, t_k)\} \}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{C}(\mathcal{G})$, nous désignons par $Id(\mathcal{G}, Z)$ le graphe obtenu, partant de $Und(\mathcal{G})$ en identifiant les sommets x_i avec les sommets t_i , et les sommets y_i avec les sommets z_i , pour tout $1 \leq i \leq k$. Nous pouvons obtenir, par une telle identification, un graphe ayant des boucles. Le polynôme chromatique mixte d'un tel graphe est bien sûr nul. Enfin, notons l'égalité $Id(\mathcal{G}, \emptyset) = Und(\mathcal{G})$.

Illustrons ces deux notions à travers l'exemple de la figure suivante :



Graphe mixte $\mathcal{G}$ Graphe $Id(\mathcal{G}, Z)$
 $\mathcal{C}(\mathcal{G}) = \{ \{(a, b), (e, d)\} \}$ avec $Z = \mathcal{C}(\mathcal{G}) = \{ \{(a, b); (e, d)\} \}$

Théorème 6 *Formule par Exclusion / Inclusion*

Soit $\mathcal{G}$ un graphe mixte. Nous avons :

$$P_m(\mathcal{G}, k) = \sum_{Z \subset \mathcal{C}(\mathcal{G})} (-1)^{|Z|} \times P(Id(\mathcal{G}, Z), k)$$

Démonstration : Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que $\mathcal{G}$ est M -maximal. Soit k un entier strictement positif.

L'ensemble $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ est union de p paires d'arcs $\{(x_j, y_j), (z_j, t_j)\} : \{y_j, z_j\} \notin E(Und(\mathcal{G}))$ et $\{x_j, t_j\} \notin E(Und(\mathcal{G}))$. Nous notons $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ les p éléments de $\mathcal{C}(\mathcal{G})$. Désignons par X l'ensemble des k -colorations de $Und(\mathcal{G})$. Nous avons donc $|X| = |P(Und(\mathcal{G}), k)|$. Parmi ces $P(Und(\mathcal{G}), k)$ k -colorations de $Und(\mathcal{G})$, certaines sont des k -colorations mixtes de $\mathcal{G}$, d'autres non. Le principe d'inclusion / exclusion va nous permettre de dénombrer les premières.

A une k -coloration c de $Und(\mathcal{G})$, nous associons le sous-ensemble $Z(c) \subset \mathcal{C}(\mathcal{G})$ défini par l'ensemble des paires d'arcs $\{(x_j, y_j), (z_j, t_j)\} \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$ tels que $c(x_j) = c(t_j)$ et $c(y_j) = c(z_j)$. Une telle k -coloration c de $Und(\mathcal{G})$ est aussi une coloration mixte de $\mathcal{G}$ si et seulement si $Z(c) = \emptyset$.

Pour $1 \leq i \leq p$, nous dirons que la k -coloration c de $Und(\mathcal{G})$ vérifie la propriété P_i si $\alpha_i \in Z(c)$. Posons $A_i = \{c \text{ coloration}$

de $Und(\mathcal{G}) : c$ vérifie la propriété $P_i\} \subset X$. Le nombre de k -colorations de $Und(\mathcal{G})$ vérifiant la propriété P_i est le nombre de k -colorations de $Id(\mathcal{G}, \alpha_i)$, soit $P(Id(\mathcal{G}, \alpha_i), k)$.

Soit Z un sous-ensemble de $\mathcal{C}(\mathcal{G})$. Le nombre de k -colorations de $Und(\mathcal{G})$ telles que $Z(c) = Z$ est égal au nombre de k -colorations vérifiant les propriétés $\{P_i\}_{i: \alpha_i \in Z}$, c'est-à-dire égal au nombre de k -colorations de $Id(\mathcal{G}, Z)$, soit $P(Id(\mathcal{G}, Z), k)$.

La formule d'inclusion / exclusion nous donne alors :

$$|\bigcup_{i=1}^p A_i| = \sum_{i=1}^p |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{p+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_p|.$$

Nous remarquons alors que $\sum_{i=1}^p |A_i| = \sum_{Z \subset \mathcal{C}(\mathcal{G}); |Z|=1} P(Id(\mathcal{G}, Z), k)$, et

$$\sum_{1 \leq i < j \leq p} |A_i \cap A_j| = \sum_{Z \subset \mathcal{C}(\mathcal{G}); |Z|=2} P(Id(\mathcal{G}, Z), k).$$

Plus généralement, pour $l \in \{1, 2, \dots, p\}$, nous obtenons la formule suivante :

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq p} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_l}| = \sum_{Z \subset \mathcal{C}(\mathcal{G}); |Z|=l} P(Id(\mathcal{G}, Z), k).$$

Ainsi obtenons-nous :

$$|\bigcup_{i=1}^p A_i| = \sum_{Z \subset \mathcal{C}(\mathcal{G}); |Z| \geq 1} (-1)^{|Z|+1} P(Id(\mathcal{G}, Z), k).$$

Les k -colorations mixtes de $\mathcal{G}$ étant les k -colorations de $Und(\mathcal{G})$ telles que $Z(c) = \emptyset$, nous avons : $P_m(\mathcal{G}, k) = |X \setminus (\bigcup_{i=1}^p A_i)| = P(Und(\mathcal{G}), k) - |\bigcup_{i=1}^p A_i|$. On en déduit :

$$P_m(\mathcal{G}, k) = P(Und(\mathcal{G}), k) - \sum_{Z \subset \mathcal{C}(\mathcal{G}); |Z| \geq 1} (-1)^{|Z|+1} P(Id(\mathcal{G}, Z), k),$$

soit comme $Und(\mathcal{G}) = Id(\mathcal{G}, \emptyset)$:

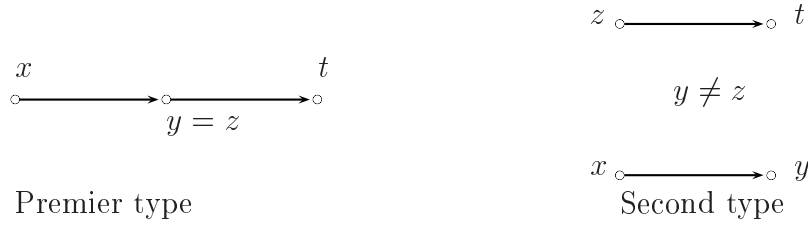
$$P_m(\mathcal{G}, k) = \sum_{Z \subset \mathcal{C}(\mathcal{G})} (-1)^{|Z|} P(Id(\mathcal{G}, Z), k).$$

Cette formule est vraie pour tout k entier fixé strictement positif, d'où se déduit l'égalité des deux polynômes. $\square$

3.3.4 Interprétation des coefficients

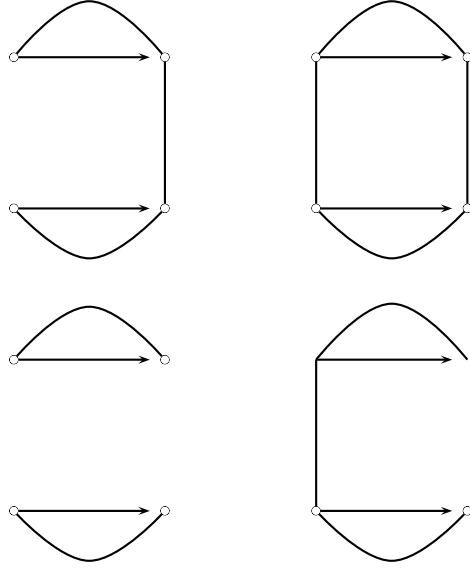
Le parallèle existant entre polynôme chromatique classique et orienté légitime l'idée de rechercher une interprétation des coefficients du polynôme chromatique orienté en terme d'orientations acircuitiques, de façon similaire au résultat obtenu dans [Stanley, 1973]. Cette partie est consacrée à répondre à cette question, en partie présente dans [Sopena, 1994]. Le cadre mixte permet d'apporter des éléments de réponses à cette question. Remarquons que se pose une question préalable : dans le cadre non orienté, l'alternance des signes des coefficients du polynôme chromatique impliquait l'égalité entre la somme des valeurs absolues des coefficients et $|P(G, -1)|$. Dans le cadre orienté, cette alternance n'est plus vraie ([Sopena, 1994]). Nous avons donc le choix entre interpréter la somme des valeurs absolues des coefficients ou interpréter la valeur absolue du polynôme évalué en -1 . Nous allons, ici, donner une interprétation de $|\vec{P}(\vec{G}, -1)|$, au travers du cadre mixte. Les démonstrations de nos résultats sont quelque peu techniques.

Etant donné un graphe mixte $\mathcal{G}$, les paires $\{(x, y), (z, t)\}$ de l'ensemble $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ sont nécessairement d'un des deux types suivants :



Etude du premier type

Débutons notre étude en considérant des graphes mixtes $\mathcal{G}$ tels que l'ensemble $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ ne contienne pas de paires d'arcs relevant du second type. De tels graphes mixtes sont exactement les graphes mixtes $\mathcal{G}$ tels que tout sous-graphe mixte de $M(\mathcal{G})$ induit par 4 sommets ne soit pas isomorphe à l'un des graphes mixtes suivants :



Proposition 10 *Cas relevant uniquement du premier type*

Soit $\mathcal{G}$ un graphe mixte tel que $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ ne contient que des paires d'arcs du premier type.

Alors, $P_m(\mathcal{G}, -1) = (-1)^n |\Theta_a(\widehat{M(\mathcal{G})})|$, où $\Theta_a(\widehat{M(\mathcal{G})})$ désigne l'ensemble des orientations acircuitiques du graphe $\widehat{M(\mathcal{G})}$.

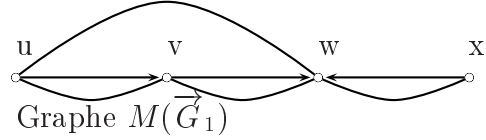
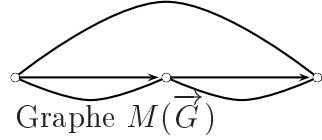
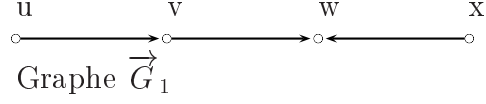
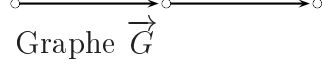
La valeur absolue du coefficient du monôme de degré 1 de ce polynôme est égal au nombre d'orientations acircuitiques de $\widehat{M(\mathcal{G})}$ ayant exactement une source fixée.

Démonstration : Soit $\mathcal{G}$ un tel graphe. Supposons $\{(x, y), (y, z)\} \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$. Par construction de $M(\mathcal{G})$, $\{x, z\} \in E(M(\mathcal{G}))$, et donc $\{(x, y), (y, z)\} \notin \mathcal{C}(M(\mathcal{G}))$. Ainsi, $\mathcal{C}(M(\mathcal{G})) = \emptyset$, et la formule d'inclusion / exclusion ne contient qu'un seul élément et on a : $P_m(\mathcal{G}, k) = P(\widehat{M(\mathcal{G})}, k)$. Stanley ([Stanley, 1973]) donne l'interprétation en terme d'orientations acircuitiques de ce polynôme en -1 $P_m(\mathcal{G}, -1) = (-1)^n |\Theta_a(\widehat{M(\mathcal{G})})|$.

La seconde assertion découle immédiatement du résultat obtenu par Gessel ([Gessel, 1996, Lass, 2001]) affirmant que le coefficient $|c_1|$ du polynôme chromatique d'un graphe est le nombre d'orientations acircuitiques de ce graphe ayant exactement un puits fixé.

□

Proposons deux exemples :



Le polynôme chromatique mixte du graphe $\vec{G}$ est : $P_m(\vec{G}, k) = k(k-1)(k-2) = P(\widehat{M(\vec{G})}, k)$. Il existe bien 6 orientations acircuitiques de $\widehat{M(\vec{G})} = \text{Und}(M(\vec{G}))$ (des $2^3 = 8$ orientations possibles des arêtes de $\text{Und}(M(\vec{G}))$, deux conduisent à des circuits).

Concernant le graphe $\vec{G}_1$, nous avons $\mathcal{C}(\vec{G}_1) = \{ \{(u, v)(v, w)\}; \{(u, v), (x, w)\} \}$ et donc ce graphe contient une paire d'arcs relevant du second type. Néanmoins, le graphe $M(\vec{G}_1)$ vérifie $\mathcal{C}(M(\vec{G}_1)) = \emptyset$. Aussi, nous appliquons la proposition 10 à ce graphe mixte et obtenons, par la remarque 2 :

$$\vec{P}(\vec{G}_1, k) = P_m(M(\vec{G}_1), k) = k^5 - 4k^4 + 5k^3 - k^2 - k.$$

Nous vérifions qu'il existe bien 12 orientations acircuitiques différentes de $M(\vec{G}_1)$.

La proposition précédente règle le cas où $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ ne contient que des configurations du premier type, puisqu'alors $\mathcal{C}(M(\mathcal{G})) = \emptyset$. Lorsque $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ contient des configurations du premier et du second type, celles du premier type disparaissent dans $\mathcal{C}(M(\mathcal{G}))$. On est alors ramené à l'étude d'un graphe mixte ne contenant que des configurations du second type.

Une coloration mixte de $\mathcal{G}$ est une coloration de $\text{Und}(M(\mathcal{G}))$. La réciproque est généralement fausse, sauf dans le cas particulier où $\mathcal{C}(M(\mathcal{G})) = \emptyset$. Comme par définition $M(\mathcal{G})$ est M -maximal, on peut démontrer ce résultat sur les graphes mixtes M -maximaux :

Proposition 11 *Lorsque $\mathcal{C}(\mathcal{G}) = \emptyset$*

Soit $\mathcal{G}$ un graphe mixte M -maximal vérifiant $\mathcal{C}(\mathcal{G}) = \emptyset$. Alors l'ensemble des colorations mixtes de $\mathcal{G}$ est en bijection avec l'ensemble des colorations de $\text{Und}(\mathcal{G})$. Il en résulte donc l'égalité des polynômes chromatiques : $P_m(\mathcal{G}, k) = P(\text{Und}(\mathcal{G}), k)$.

Démonstration :

Soit $\mathcal{G} = (V, A, E)$ un graphe mixte M -maximal. Par définition des colorations mixtes, nous savons qu'une coloration mixte c_m de $\mathcal{G}$ est aussi une coloration de $G = \widehat{\mathcal{G}}$. Le graphe $\mathcal{G}$ étant M -maximal, $Und(\mathcal{G}) = \widehat{\mathcal{G}}$, ce qui implique que c_m est une coloration de $Und(\mathcal{G})$.

Réciproquement, soit c une k -coloration de $Und(\mathcal{G})$. Pour $1 \leq i \leq k$, les sous-graphes mixtes induits $\mathcal{G}[c^{-1}(i)]$ forment une partition de V en classes stables puisque le graphe $\mathcal{G}$ est M -maximal. Il ne peut exister de chemin de longueur 2 bichromatique (pour c) puisque le graphe $\mathcal{G}$ est M -maximal. Supposons l'existence de couples $(x, x') \in V_i^2$, $(y, y') \in V_j^2$ tels que $(x, y) \in A$ et $(y', x') \in A$. Alors $\{(x, y); (y', x')\} \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$, ce qui est absurde. Aussi, toute coloration de $Und(\mathcal{G})$ est aussi une coloration mixte de $\mathcal{G}$, et la bijection s'ensuit. $\square$

Une conséquence directe de cette proposition est que l'intégralité de la théorie du polynôme chromatique s'applique aux graphes M -maximaux vérifiant $\mathcal{C}(\mathcal{G}) = \emptyset$, ou encore à ceux vérifiant $\mathcal{C}(M(\mathcal{G})) = \emptyset$, comme par exemple la première famille de graphe mixte étudiée.

Etude du second type : une première famille

L'étude des graphes dont l'ensemble $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ présente des couples d'arêtes du second type se révèle plus difficile, et il semble peu probable d'obtenir dès à présent un résultat très général. Nous étudions alors deux exemples de familles de tels graphes mixtes. La première est l'ensemble des graphes mixtes $\mathcal{G}$ tel que $\mathcal{C}(\mathcal{G}) = \{(x, y), (z, t)\}$, la seconde est l'ensemble des graphes $\mathcal{G}$ tels que $\mathcal{C}(\mathcal{G}) = \{\{(x, y), (z, t)\}, \{(x, y), (u, v)\}\}$, et dont les sommets z, t, u et v ne soient pas dans la même composante connexe que les sommets x et y . Introduisons quelques définitions que nous utiliserons.

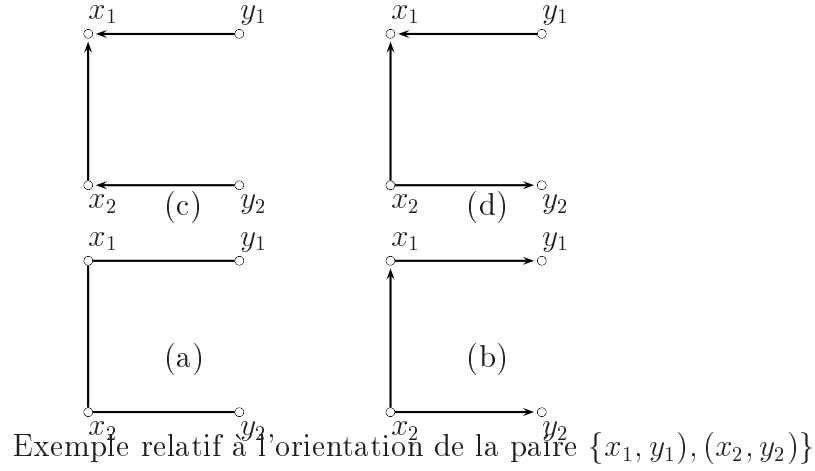
Définition 6 Orienter dans le même sens

Soit $G = (V, E)$ un graphe (non-orienté), et $\{(x_1, y_1); (x_2, y_2)\}$ une paire de couples de sommets de G telle que $\{x_1, y_1\} \in E$ et $\{x_2, y_2\} \in E$. Soit θ une orientation de G en $\vec{G} = (V, A)$. Nous dirons que $\vec{G}$ oriente dans le même sens la paire de couples $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$ si

Orienter dans le même sens

$$(x_1, y_1) \in A(\vec{G}) \iff (x_2, y_2) \in A(\vec{G}).$$

Est représenté ci-dessous un exemple cette notion.



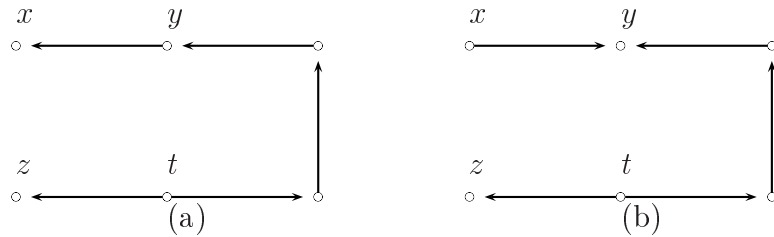
(a) : le graphe; (d) : une orientation non dans le même sens.
(b) et (c) : deux orientations dans le même sens.

Afin d'illustrer cette propriété *d'orienter dans le même sens*, sont représentés, en figure un graphe, puis deux orientations de celui-ci orientant le couple $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$ dans le même sens, et enfin une autre orientation ne vérifiant pas cette propriété.

Chemin entre arcs

Définition 7 *Chemin entre les arcs $\{(x, y), (z, t)\}$*

Soient $\{(x, y), (z, t)\}$ une paire d'arcs de $\mathcal{G}$ et soit θ une orientation de $\text{Und}(\mathcal{G})$. Nous dirons que les arcs (x, y) et (z, t) sont reliés par un chemin dans $\theta(\text{Und}(\mathcal{G}))$ s'il existe un chemin dans $\theta(\text{Und}(\mathcal{G}))$ contenant l'un des deux arcs ($\theta(\{x, y\})$ ou $\theta(\{z, t\})$) et dont l'une des extrémités est une extrémité de l'autre arc.



Au moyen de ces deux définitions, nous pouvons à présent donner une interprétation de l'évaluation du polynôme chromatique mixte évalué en -1 pour la première famille de graphes.

Proposition 12 *Première famille*

Soit $\mathcal{G}$ un graphe mixte tel que $\mathcal{C}(M(\mathcal{G})) = \{(x, y); (z, t)\}$. Nous avons alors :

$$P_m(\mathcal{G}, -1) = (-1)^n |\Theta_s(\mathcal{G})|,$$

où $\Theta_s(\mathcal{G})$ désigne l'ensemble des orientations acircuitiques du graphe $\widehat{M(\mathcal{G})}$ telles que les arcs de la paire $\{(x, y), (z, t)\}$ soit ont même orientation, soit sont reliés par un chemin.

Démonstration : Sans perte de généralité, nous pouvons considérer $\mathcal{G}$ un graphe mixte M -maximal d'ordre n tel que $\mathcal{C}(\mathcal{G}) = \{(x, y); (z, t)\}$, et posons $e = \{y, z\} \notin E(\mathcal{G})$. Les graphes mixtes $\mathcal{G} \cup e$ et $\mathcal{G}_e$ vérifient : $|\mathcal{C}(\mathcal{G} \cup e)| = |\mathcal{C}(\mathcal{G}_e)| = 0$. Par la proposition 10, nous avons :

$$P_m(\mathcal{G} \cup e, -1) = (-1)^n |\Theta(\mathcal{G} \cup e)| \text{ et } P_m(\mathcal{G}_e, -1) = (-1)^{n-1} |\Theta(\mathcal{G}_e)|.$$

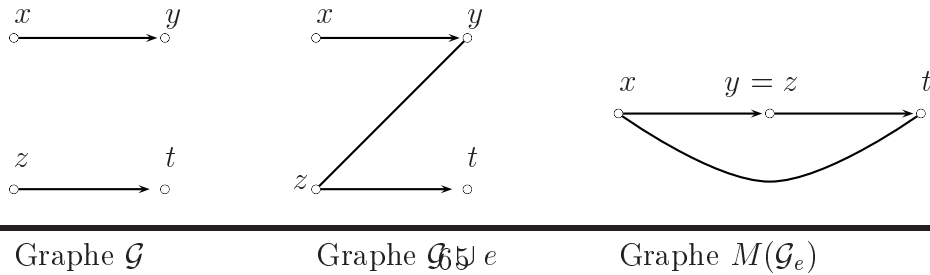
Le théorème 4 implique $P_m(\mathcal{G}, -1) = (-1)^n |\Theta(\mathcal{G} \cup e)| - (-1)^n |\Theta(\mathcal{G}_e)|$, c'est-à-dire :

$$|\Theta(\mathcal{G} \cup e)| = (-1)^n P_m(\mathcal{G}, -1) + |\Theta(\mathcal{G}_e)|.$$

Notons $\Theta_s(\mathcal{G})$ l'ensemble des orientations acircuitiques du graphe $\widehat{\mathcal{G}}$ telles que les arcs de la paire $\{(x, y), (z, t)\}$ soit ont même orientation, soit sont reliés par un chemin.

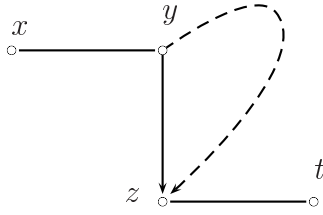
Les ensembles $\Theta_s(\mathcal{G})$ et $\Theta(\mathcal{G}_e)$ sont disjoints puisque ces graphes n'ont pas même ordre. Nous allons montrer qu'il existe une bijection entre $\Theta(\mathcal{G} \cup e)$ et $\Theta_s(\mathcal{G}) \cup \Theta(\mathcal{G}_e)$, ce qui impliquera le théorème.

Considérons $\theta \in \Theta(\mathcal{G} \cup e)$ l'une des $|P_m(\mathcal{G} \cup e, -1)|$ orientations acircuitiques de $\mathcal{G} \cup e$, nous lui associons, d'une part, l'orientation de $\widehat{\mathcal{G}}$ notée $\theta \setminus \theta(e)$, définie en privant l'orientation θ de l'arc $\theta(e)$ et, d'autre part, l'orientation partielle θ_e de $\widehat{M(\mathcal{G}_e)}$ définie en identifiant les sommets y et z dans l'orientation θ . Pour compléter cette dernière en une orientation de $\widehat{M(\mathcal{G}_e)}$, il suffit de donner une orientation à l'arête $\{x, t\}$ car c'est la seule arête qui n'existe pas dans $\widehat{\mathcal{G} \cup e}$, mais qui existe dans $\widehat{M(\mathcal{G}_e)}$. Le schéma suivant donne un exemple de situation simple :

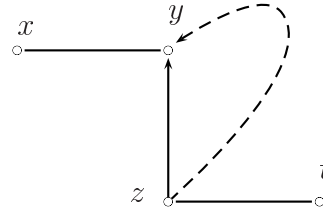


Enfin, nous notons $\theta' = (\theta \setminus \theta(e)) \cup \overline{\theta'(e)}$ l'orientation de $\widehat{\mathcal{G} \cup e}$ définie, à partir de θ , en inversant l'arc $\theta(e)$. Notons que les orientations $\theta \setminus \theta(e)$ et $\theta' \setminus \theta'(e)$ de $\widehat{\mathcal{G}}$ sont égales, ainsi que les orientations $\theta_e = \theta'_e$ de $\widehat{M(\mathcal{G}_e)}$. Pour établir la bijection, nous allons décrire l'ensemble $\Theta(\mathcal{G} \cup e)$ en distinguant 3 situations disjointes.

- Première situation : S'il existe, dans l'orientation $\theta \setminus \theta(e)$, un chemin entre y et z .



Configuration a



Configuration b

Dans ce cas, les orientations θ' de $\widehat{\mathcal{G} \cup e}$ et θ_e de $\widehat{M(\mathcal{G}_e)}$ ne sont pas acircuitiques. Il y a bijection entre l'ensemble des orientations acircuitiques de $\widehat{\mathcal{G} \cup e}$ ayant un chemin entre y et z et l'ensemble des orientations acircuitiques de $\widehat{\mathcal{G}}$ ayant un chemin entre y et z . On note ϕ_1 cette bijection.

Deuxième situation : Si l'on est pas dans la première situation et s'il existe dans $\theta \setminus \theta(e)$ un chemin entre x et t :

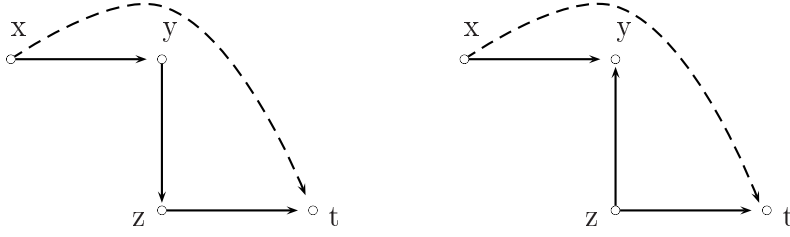
L'orientation de l'arête $\{x, t\}$ dans $\widehat{M(\mathcal{G}_e)}$ est imposée par ce chemin pour que θ_e soit acircuitique. Nous noterons $\theta(x, t)$ celle-ci.

- Si $\{(x, y), (z, t)\}$ ne sont pas orientés dans le même sens par θ , alors θ' est aussi une orientation acircuitique de $\widehat{\mathcal{G} \cup e}$. En ce cas, nous définissons la bijection ϕ_2 en construisant les images de θ et de θ' simultanément :

- $\phi_2(\theta) = \theta_e \cup \theta(x, t)$ qui est une orientation de $\Theta(\widehat{M(\mathcal{G}_e)})$,
- $\phi_2(\theta') = \theta' \setminus \theta'(e)$ qui est une orientation de $\Theta_s(\widehat{\mathcal{G}})$.

- Sinon, les arcs $\{(x, y), (z, t)\}$ sont orientés dans le même sens dans $\theta(\mathcal{G} \cup e)$.

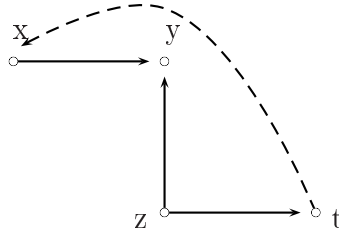
Si θ' est aussi une orientation acircuitique de $\widehat{\mathcal{G} \cup e}$, alors θ correspond à l'une des deux situations suivantes (par exemple dans le cas où le chemin est de x vers t) :



Dans ce cas, on définit ϕ_2 comme dans le cas précédent :

- $\phi_2(\theta) = \theta_e \cup \theta(x, t)$ qui est une orientation de $\Theta(\widehat{M(\mathcal{G}_e)})$,
- $\phi_2(\theta') = \theta' \setminus \theta'(e)$ qui est une orientation de $\Theta_s(\widehat{\mathcal{G}})$.

Sinon, θ' n'est pas une orientation acircuitique de $\widehat{\mathcal{G} \cup e}$, et θ correspond à la situation suivante (en supposant que le chemin est de t vers x) :

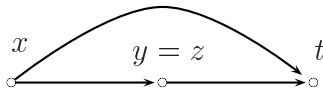


Il existe donc, dans $\theta \setminus \theta(e)$, un chemin entre y et z et nous sommes dans la première situation.

Troisième situation : S'il n'existe, dans $\theta \setminus \theta(e)$, ni de chemin entre y et z , ni de chemin entre x et t .

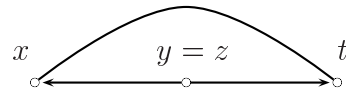
Comme il n'y a pas de chemin entre y et z , l'orientation θ' est aussi une orientation acircuitique appartenant à $\Theta(\widehat{\mathcal{G} \cup e})$.

Considérons les deux sous-cas suivants dans $\widehat{M(\mathcal{G}_e)}$, selon que θ oriente ou non dans le même sens la paire $\{(x, y), (z, t)\}$:



Premier sous-cas

$\{(x, y), (z, t)\}$ orientés dans le même sens



Second sous-cas

$\{(x, y), (z, t)\}$ non orientés dans le même sens

Si la paire d'arcs $\{(x, y), (z, t)\}$ est orientée dans le même sens par l'orientation θ , alors il existe une unique orientation de l'arête $\{x, t\}$ permettant de compléter l'orientation θ_e en une orientation acircuitique de $\widehat{M(\mathcal{G}_e)}$. Notons $\theta(x, t)$ celle-ci. Définissons alors l'application ϕ_3 par :

- $\phi_3(\theta) = \theta_e \cup \theta(x, t) \in \Theta(\widehat{M(\mathcal{G}_e)})$,
- $\phi_3(\theta') = \theta' \setminus \theta'(e) \in \Theta(\widehat{\mathcal{G}})$.

Si la paire d'arcs $\{(x, y), (z, t)\}$ n'est pas orientée dans le même sens par l'orientation θ , alors, les deux orientations différentes de l'arête $\{x, t\}$ complètent l'orientation θ_e en une orientation acircuitique de $\Theta(\widehat{M(\mathcal{G}_e)})$. Ainsi, nous faisons correspondre ces orientations de $\Theta(\widehat{\mathcal{G} \cup e})$ et certaines orientations de $\Theta(\widehat{M(\mathcal{G}_e)})$ de la façon suivante :

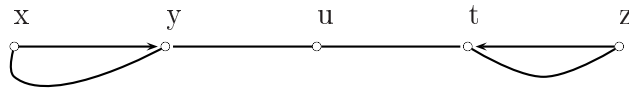
- $\phi_4(\theta) = \theta_e \cup (x, t) \in \Theta(\widehat{M(\mathcal{G}_e)})$,
- $\phi_4(\theta') = \theta'_e \cup (t, x) \in \Theta(\widehat{M(\mathcal{G}_e)})$.

En regroupant les bijections ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 et ϕ_4 , nous obtenons finalement la bijection voulue. En effet, les images de ces applications sont bien disjointes : l'ensemble $\Theta(\widehat{\mathcal{G}})$ est partitionné en l'ensemble des orientations ayant un chemin entre y et z ($\mathcal{Im}(\phi_1)$), l'ensemble des orientations n'ayant pas un tel chemin mais ayant un chemin entre x et t ($\mathcal{Im}(\phi_2) \cap \Theta(\widehat{\mathcal{G}})$) et l'ensemble des orientations n'ayant pas de tels chemins ($\mathcal{Im}(\phi_3) \cap \Theta(\widehat{\mathcal{G}})$).

L'ensemble $\Theta(\widehat{M(\mathcal{G}_e)})$ est lui partitionné en l'ensemble des orientations ayant un chemin entre x et t autre qu'un arc ($\mathcal{Im}(\phi_2) \cap \Theta(\widehat{M(\mathcal{G}_e)})$), l'ensemble des orientations n'ayant pas un tel chemin et donnant même orientations aux arcs $\{(x, y), (y, t)\}$, et enfin l'ensemble n'ayant pas un tel chemin et ne donnant pas même orientation aux arcs $\{(x, y), (y, t)\}$ ($\mathcal{Im}(\phi_4)$).

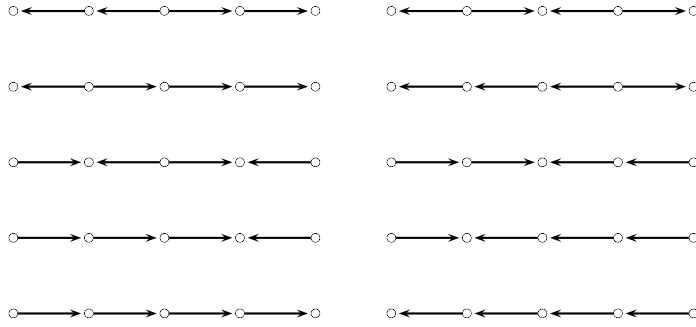
A chaque fois, on vérifie que toute orientation de l'un de ces ensembles admet un antécédent par l'une des applications ϕ_i . $\square$

Présentons deux exemples.



Exemple premier : graphe mixte $\mathcal{G}^1$

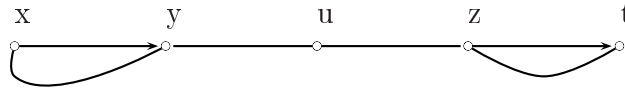
Le graphe G_m^1 ci-dessus est bien M -maximal et $\mathcal{C}(\mathcal{G}^1) = \{(x, y), (z, t)\}$. Le polynôme chromatique mixte de ce graphe est $k^5 - 4k^4 + 5k^3 - k^2 - k$. Ainsi, $P_m(\mathcal{G}^1, -1) = -10$; il doit donc y avoir 10 orientations acircuitiques de ce graphe orientant dans le même sens $\{(x, y), (z, t)\}$ ou les reliant par un chemin. Nous les donnons ici :



Les dix orientations acircuitiques de $\mathcal{G}^1$

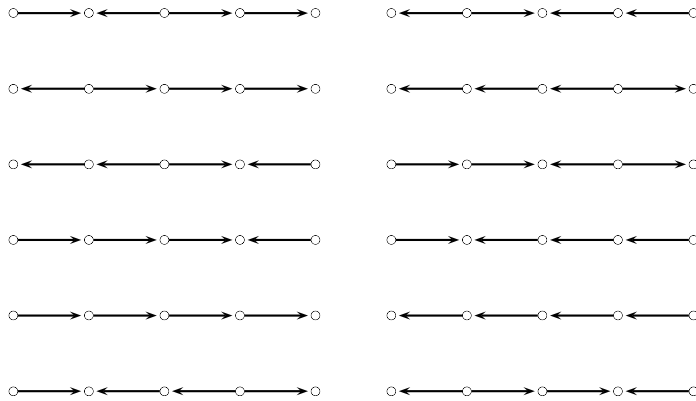
De ces dix orientations, seules les deux du bas ne respectent pas l'orientation dans le même sens des arcs de $\mathcal{C}(\mathcal{G}^1)$. Dans ces cas, il existe alors un chemin utilisant au moins l'un des arcs de $\mathcal{C}(\mathcal{G}^1)$.

Le second exemple est relativement proche du premier.



Second exemple : graphe $\mathcal{G}^2$

Le polynôme chromatique mixte du graphe précédent est : $P_m(\mathcal{G}^2, k) = k^2(k-1)^2(k-2)$. Ainsi $P_m(\mathcal{G}^2, -1) = -12$. Donnons les 12 orientations acircuitiques associées à ce polynôme chromatique mixte.



Orientations acircuitiques relatives au graphe $\mathcal{G}^2$

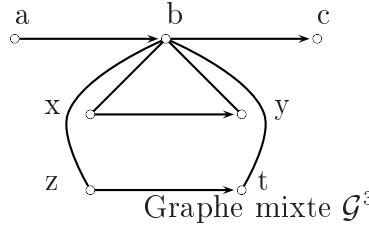
Sur ces 12 configurations, les seules qui n'orientent pas $\{(x, y), (z, t)\}$ dans le même sens sont celles des deuxième et quatrième lignes (de haut en bas).

Corollaire 4 *Extention du résultat sur le second type*

Soit $\mathcal{G}$ un graphe mixte et x, y, z, t quatre sommets tels que $\{(x, y), (z, t)\} \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$, et tels que tout autre élément de $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ s'écrive $\{(a, b), (b, c)\}$, avec $\{a, b, c\} \cap \{x, y, z, t\} = \emptyset$. Alors $P_m(\mathcal{G}, -1) = (-1)^n |\Theta_s(M(\mathcal{G}))|$.

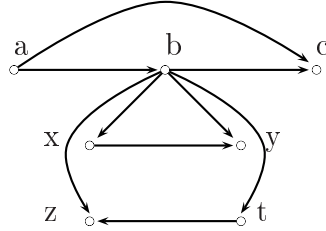
Démonstration : Il suffit, en effet, de remarquer que si $\{(a, b), (b, c)\} \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$, alors $\{a, c\} \in M(\mathcal{G})$ et $\{(a, b), (b, c)\} \notin \mathcal{C}(M(\mathcal{G}))$. Le graphe mixte $M(\mathcal{G})$ appartient alors bien à la première famille étudiée, et puisque $P_m(\mathcal{G}, k) = P_m(M(\mathcal{G}), k)$, le corollaire découle de la proposition 12. $\square$

Donnons pour exemple un tel graphe mixte.



Le polynôme chromatique mixte de ce graphe est : $P_m(\mathcal{G}^3, k) = k(k-1)^3(k-2)(k^2-3k+1)$, ce qui implique qu'il existe 120 orientations acircuitiques telles que $\{(x, y), (z, t)\}$ soient orientés dans le même sens ou qu'il existe un chemin entre $\{x, y\}$ et $\{z, t\}$.

Nous n'allons pas lister ces 120 orientations mais simplement donner une orientation acircuitique de $M(\mathcal{G})$ qui ne vérifie pas les conditions précédentes.



Une condition portant sur $\mathcal{C}(\mathcal{G})$, dite *de séparation*, permet d'étendre la première famille étudiée dans cette partie au cas où $\mathcal{C}(M(\mathcal{G}))$ n'est plus réduit à un singleton.

Corollaire 5 *Second type avec condition de séparation*

Soit j un entier strictement positif. Soit $\mathcal{G}$ un graphe mixte M -maximal et $\{x_i, y_i, z_i, t_i\}_{1 \leq i \leq j}$ des sommets deux à deux distincts de $V(\mathcal{G})$ tels que $\mathcal{C}(\mathcal{G}) = \{\{(x_i, y_i), (z_i, t_i)\} : 1 \leq i \leq j\}$. Alors nous obtenons : $P_m(\mathcal{G}, -1) = (-1)^n |\Theta_s(\mathcal{G})|$, où $\Theta_s(\mathcal{G})$ désigne l'ensemble des orientations acircuitiques telles que les arcs de chaque paire $\{(x_i, y_i), (z_i, t_i)\}$ soit ont même orientations, soit sont reliés par un chemin.

Démonstration : Nous allons raisonner par récurrence sur j , le nombre d'éléments de $\mathcal{C}(\mathcal{G})$. La précédente proposition démontre notre corollaire dans le cas $j = 1$. Soit $j > 1$ et supposons le corollaire vrai pour tout graphe M -maximal tel que $|\mathcal{C}(\mathcal{G})| = j-1$. Posons $\alpha = \{(x_j, y_j), (z_j, t_j)\}$. D'après la formule d'inclusion / exclusion, nous avons :

$$P_m(\mathcal{G}, k) = \sum_{Z \subset \mathcal{C}(\mathcal{G})} (-1)^{|Z|} \times P(\text{Id}(\mathcal{G}, Z), k) \text{ et}$$

$$P_m(\mathcal{G}, k) = \sum_{Z \subset \mathcal{C}(\mathcal{G}); \alpha \in Z} (-1)^{|Z|} P(\text{Id}(\mathcal{G}, Z), k) + \sum_{Z \subset \mathcal{C}(\mathcal{G}); \alpha \notin Z} (-1)^{|Z|} P(\text{Id}(\mathcal{G}, Z), k).$$

Notons $\mathcal{G}_\alpha$ le graphe obtenu à partir du $\mathcal{G}$ par identification des sommets x_j et t_j et des sommets y_j et z_j . On note, par abus, x_j et y_j ces deux sommets de $\mathcal{G}_\alpha$.

En remarquant que si $\alpha \in Z$, $\text{Id}(\mathcal{G}, Z) = \text{Id}(\mathcal{G}_\alpha, Z \setminus \{\alpha\})$, nous obtenons :

$$P_m(\mathcal{G}, k) = \sum_{Z' \subset \mathcal{C}(\mathcal{G}_\alpha)} (-1)^{|Z'|+1} P(\text{Id}(\mathcal{G}_\alpha, Z'), k) + \sum_{Z \subset \mathcal{C}(\mathcal{G}) \setminus \alpha} (-1)^{|Z|} P(\text{Id}(\mathcal{G}, Z), k).$$

La formule d'inclusion / exclusion appliquée au graphe $\mathcal{G}_\alpha$ donne :

$$P_m(\mathcal{G}_\alpha, k) = \sum_{Z' \subset \mathcal{C}(\mathcal{G}_\alpha)} (-1)^{|Z'|} P(\text{Id}(\mathcal{G}_\alpha, Z'), k).$$

Par substitution, on a :

$$P_m(\mathcal{G}, k) = -P_m(\mathcal{G}_\alpha, k) + \sum_{Z \subset \mathcal{C}(\mathcal{G}) \setminus \alpha} (-1)^{|Z|} P(\text{Id}(\mathcal{G}, Z), k).$$

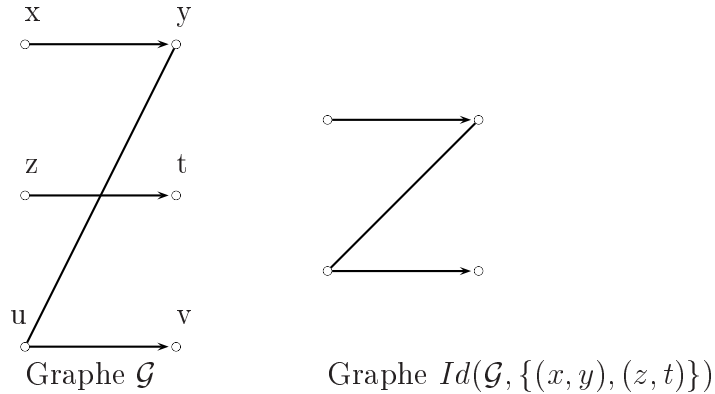
On considère le graphe mixte $\mathcal{H}$ obtenu, à partir de $\mathcal{G}$, en transformant les arcs (x_j, y_j) et (z_j, t_j) en arêtes. Ainsi, $\mathcal{C}(\mathcal{H}) =$

$\mathcal{C}(\mathcal{G}) \setminus \{(x_j, y_j), (z_j, t_j)\}$. Nous avons ainsi par la formule d'exclusion / inclusion :

$$P_m(\mathcal{H}, k) = \sum_{Z \subset \mathcal{C}(\mathcal{G}) \setminus \alpha} (-1)^{|Z|} P(\text{Id}(\mathcal{H}, Z), k).$$

Par hypothèse de récurrence, cette somme est le nombre d'orientations acircuitiques de $\widehat{\mathcal{G}}$ donnant mêmes orientations aux couples $\{(x_i, y_i), (z_i, t_i)\}_{1 \leq i \leq j-1}$ ou les reliant par un chemin. Dans cette somme, il n'y a aucune contrainte sur la paire d'arcs $\{(x_j, y_j), (z_j, t_j)\}$. Pour avoir le résultat, il faut enlever à cette somme les orientations qui n'orientent pas $\{(x_j, y_j), (z_j, t_j)\}$ dans le même sens et qui ne les relient pas par un chemin. Celles-ci sont exactement décomptées par $P_m(\mathcal{G}_\alpha, -1)$. En effet, puisque $\mathcal{C}(\mathcal{G}_\alpha) = \mathcal{C}(\mathcal{G}) \setminus \alpha$, on a, par hypothèse de récurrence, $|P_m(\mathcal{G}_\alpha, -1)| = |\Theta_s(M(\mathcal{G}_\alpha))|$, c'est-à-dire, le nombre d'orientations acircuitiques de $\mathcal{G}_\alpha$ donnant même orientation aux couples $\{(x_i, y_i), (z_i, t_i)\}_{1 \leq i \leq j-1}$ ou les reliant par un chemin. A chacune de ces orientations, on fait correspondre, de façon bi-univoque, une orientation de $\mathcal{G}$ en donnant naturellement aux arêtes $\{x_j, y_j\}$ et $\{t_j, z_j\}$ de $\mathcal{G}$ l'orientation de l'arête $\{x_j, y_j\}$ de $\mathcal{G}_\alpha$. Notons que la paire d'arcs $\{(x_j, y_j), (z_j, t_j)\}$ de $\mathcal{G}$ n'est jamais orientée dans le même sens et n'est pas reliée par un chemin. $\square$

Afin de montrer le lieu où intervient cette condition de séparation des couples $\{(x_i, y_i), (z_i, t_i)\}_{1 \leq i \leq j}$ de $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ dans la précédente démonstration, considérons le schéma suivant :



Nous avons $\mathcal{C}(\mathcal{G}) = \{\{(x, y), (z, t)\}, \{(z, t), (u, v)\}\}$, et $\mathcal{C}(\text{Id}(\mathcal{G}, \{(x, y), (z, t)\})) = \emptyset \neq \mathcal{C}(\mathcal{G}) \setminus \{(x, y), (z, t)\}$. Ainsi la précédente démonstration ne peut-elle s'étendre directement aux graphes dont les couples de $\mathcal{C}(M(\mathcal{G}))$ ne seraient pas séparés.

Etude du second type : la seconde famille

La précédente famille correspond au cas où $|\mathcal{C}(\mathcal{G})| = 1$, avec une extension à un cardinal supérieur dans le cas où la condition de séparation est vérifiée. Nous traitons à présent un cas où $|\mathcal{C}(\mathcal{G})| = 2$ sans condition de séparation.

Proposition 13 *Interprétation pour la seconde famille de graphes*

Soit $\mathcal{G}$ un graphe mixte ayant deux composantes connexes, la première contenant les sommets $\{z, t, u, v\}$, la seconde contenant les sommets $\{x, y\}$. Supposons de plus que

$\mathcal{C}(M(\mathcal{G})) = \{\{(x, y), (z, t)\}, \{(x, y), (u, v)\}\}$. Nous avons alors :

$$P_m(\mathcal{G}, -1) = (-1)^n (|\Theta_s(\mathcal{G})| - |\Upsilon_s(\mathcal{G})|),$$

où $\Theta_s(\mathcal{G})$ désigne l'ensemble des orientations acircuitiques de $\widehat{M(\mathcal{G})}$ telles que toute paire de $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ soit orientée dans le même sens ou soit reliée par un chemin, et où $\Upsilon_s(\mathcal{G})$ désigne l'ensemble des orientations acircuitiques de $\widehat{M(\mathcal{G})}$ telles qu'il existe un chemin entre la paire d'arcs $\{(z, t), (u, v)\}$ qui est de plus orienté dans le même sens et tel que la paire $\{(x, y), (z, t)\}$ ne soit pas orienté dans le même sens.

Démonstration : Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que le graphe mixte $\mathcal{G}$ est M -maximal. Aussi, en posant $e = \{y, z\}$, le graphe $\mathcal{G} \cup e$ est, lui aussi, M -maximal, contrairement au graphe $\mathcal{G}_e$ puisque $\mathcal{G}_e = M(\mathcal{G}_e) \setminus \{x, t\}$.

Considérons l'égalité $P_m(\mathcal{G}, -1) = P_m(\mathcal{G} \cup e, -1) + P_m(\mathcal{G}_e, -1)$, avec $e = \{y, z\}$, nous retrouvons alors deux graphes mixtes $\mathcal{G} \cup e$ et $\mathcal{G}_e$ appartenant à la première famille précédemment étudiée puisque $\mathcal{C}(\mathcal{G} \cup e) = \mathcal{C}(\mathcal{G}_e) = \{(x, y), (u, v)\}$.

Ainsi, en reprenant les notations de la proposition 12, nous obtenons :

$$P_m(\mathcal{G} \cup e, -1) = (-1)^n |\Theta_s(\mathcal{G} \cup e)| \text{ et } P_m(\mathcal{G}_e, -1) = (-1)^{n-1} |\Theta_s(\mathcal{G}_e)|.$$

D'où, par substitution, nous avons :

$$P_m(\mathcal{G}, -1) = (-1)^n [|\Theta_s(\mathcal{G} \cup e)| - |\Theta_s(\mathcal{G}_e)|].$$

Pour montrer l'égalité $P_m(\mathcal{G}, -1) = (-1)^n (|\Theta_s(\mathcal{G})| - |\Upsilon_s(\mathcal{G})|)$, il suffit donc de montrer $|\Theta_s(\mathcal{G})| - |\Upsilon_s(\mathcal{G})| = |\Theta_s(\mathcal{G} \cup e)| - |\Theta_s(\mathcal{G}_e)|$, soit qu'il existe une bijection entre les ensembles $\Theta_s(\mathcal{G}) \cup \Theta_s(\mathcal{G}_e)$ et $\Upsilon_s(\mathcal{G}) \cup \Theta_s(\mathcal{G} \cup e)$ (les unions étant disjointes).

Considérons $\theta \in \Theta_s(\mathcal{G} \cup e)$.

- Si (x, y) et (u, v) sont orientés dans le même sens dans θ .

Dans ce cas, l'orientation $\theta' = (\theta \setminus \theta(e)) \cup \overline{\theta(e)}$ appartient aussi à $\Theta_s(\mathcal{G} \cup e)$. De plus, $\theta \setminus \theta(e) = \theta' \setminus \theta'(e)$ est une orientation de $\Theta_s(\mathcal{G})$.

- Si θ n'oriente pas dans le même sens la paire $\{(x, y), (z, t)\}$, alors les deux orientations de l'arête $\{x, t\}$ de $M(\mathcal{G}_e)$ complètent θ_e en une orientation de $\Theta_s(\mathcal{G}_e)$. Nous définissons alors l'application ψ_1 par :

$$\begin{cases} \psi_1(\theta) &= \theta_e \cup (x, t) \in \Theta_s(\mathcal{G}_e), \\ \psi_1(\theta') &= \theta_e \cup (t, x) \in \Theta_s(\mathcal{G}_e). \end{cases}$$

- Si θ oriente dans le même sens la paire d'arc $\{(x, y), (z, t)\}$, alors il n'existe qu'une seule orientation possible de l'arête $\{x, t\}$ de $\mathcal{G}_e$ rendant l'orientation θ_e acircuitique. Notons $\theta(x, t)$ celle-ci. Nous considérons l'application ψ_2 définie par :

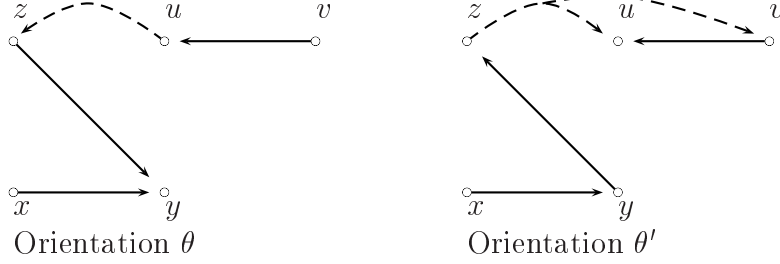
$$\begin{cases} \psi_2(\theta) &= \theta_e \cup \theta(x, t) \in \Theta_s(\mathcal{G}_e), \\ \psi_2(\theta') &= \theta' \setminus \theta(e) \in \Theta_s(\mathcal{G}). \end{cases}$$

La réunion des applications ψ_1 et ψ_2 définit une bijection entre :

l'ensemble des orientations de $\Theta_s(\mathcal{G} \cup e)$ orientant $\{(x, y), (z, t)\}$ dans le même sens
et l'union des orientations de $\Theta_s(\mathcal{G}_e)$ orientant $\{(x, y), (z, t)\}$ dans le même sens et de celles de $\Theta_s(\mathcal{G})$ orientant $\{(x, y), (z, t)\}$ et $\{(x, y), (u, v)\}$ dans le même sens.

- Sinon (x, y) et (u, v) ne sont pas orientés dans le même sens par θ mais il existe au moins un chemin dans $\theta(\mathcal{G} \cup e)$ entre cette paire d'arcs. Comme les sommets x et y n'appartiennent pas, dans $\mathcal{G}$, à la composante connexe contenant z, t, u, v , nous en déduisons que ce chemin passe nécessairement par l'isthme $\theta(z, y)$.

L'orientation θ' obtenue en inversant l'orientation de $\{y, z\}$ dans θ n'est pas une orientation de $\Theta_s(\mathcal{G} \cup e)$. En effet, nous pouvons supposer (quitte à inverser l'orientation de toutes les arcs de θ) qu'il existe un chemin de u à y dans θ . Si θ' était une orientation de $\Theta_s(\mathcal{G} \cup e)$, il existerait alors un chemin de y à u , passant nécessairement par z , ce qui est absurde puisqu'alors l'orientation θ devrait comporter un circuit.



Ainsi, θ' n'est pas une orientation de $\Theta_s(\mathcal{G} \cup e)$.

- Si θ oriente dans le même sens la paire $\{(x, y), (z, t)\}$, alors il existe, dans $\mathcal{G}_e$ une unique façon d'orienter l'arête $\{x, t\}$ qui rende l'orientation θ_e acircuitique : soit $\theta(x, t)$ celle-ci. Nous définissons dans ce cas l'application ψ_3 par :

$$\psi_3(\theta) = \theta_e \cup \theta(x, t) \in \Theta(\mathcal{G}_e).$$

- Sinon, $\{(x, y), (z, t)\}$ ne sont pas orientés dans le même sens et les deux orientations (x, t) et (t, x) complètent l'orientation θ_e en une orientation acircuitique de $\widehat{M(\mathcal{G}_e)}$ appartenant à $\Theta(\mathcal{G}_e)$. De plus, notons que l'orientation $\theta \setminus \theta(e)$ appartient à $\Upsilon_s(\mathcal{G})$, puisque nous sommes dans le cas où il existe un chemin entre $\{(z, t), (u, v)\}$, que cette paire est orientée dans le même sens alors que $\{(x, y), (z, t)\}$ ne l'est pas. Nous notons θ_Υ l'orientation $\theta \setminus \theta(e)$ vue comme orientation de $\Upsilon_s(\mathcal{G})$ et définissons l'application ψ_4 partant de l'ensemble union de $\Upsilon_s(\mathcal{G})$ et de l'ensemble des orientations de $\Theta_s(\mathcal{G} \cup e)$ n'orientant pas $\{(x, y), (u, v)\}$ dans le même sens, et à valeur dans l'ensemble des orientations de $\Theta_s(\mathcal{G}_e)$ qui n'orientent pas $\{(x, y), (u, v)\}$ dans le même sens, par :

$$\begin{cases} \psi_4(\theta) = & \theta_e \cup (x, t) \in \Theta(\mathcal{G}_e), \\ \psi_4(\theta_\Upsilon) = & \theta_e \cup (t, x) \in \Theta(\mathcal{G}_e). \end{cases}$$

La réunion des applications ϕ_3 et ϕ_4 définit une bijection entre :

l'union de $\Upsilon_s(\mathcal{G})$ et l'ensemble des orientations de $\Theta_s(\mathcal{G} \cup e)$ n'orientant pas $\{(x, y), (u, v)\}$ dans le même sens,

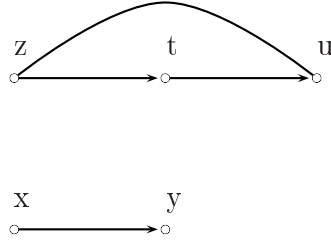
et l'ensemble des orientations de $\Theta_s(\mathcal{G}_e)$ n'orientant pas $\{(x, y), (u, v)\}$ dans le même sens.

Il nous faut alors remarquer que $\Theta_s(\mathcal{G} \cup e)$ se partitionne en deux sous-ensembles selon que l'orientation considérée donne ou non même sens au couple $\{(x, y), (u, v)\}$. De plus, nous remarquons,

puisque les sommets x et y ne sont pas dans la même composante connexe que y, z, t, y , que les orientations de $\Theta_s(\mathcal{G})$ sont exactement celles orientent dans le même sens les paires $\{(x, y), (z, t)\}$ et $\{(x, y), (u, v)\}$ (il ne peut y avoir de chemin entre elles dans $\mathcal{G}$).

Il s'ensuit alors que l'application $\psi : \Theta_s(\mathcal{G} \cup e) \cup \Upsilon_s(\mathcal{G}) \rightarrow \Theta_s(\mathcal{G}) \cup \Theta_s(\mathcal{G}_e)$ définie, selon le cas, par les applications $\{\psi_i\}_{1 \leq i \leq 4}$ est la bijection voulue. $\square$

Le graphe mixte M -maximal suivant n'appartient pas à la première famille (ni à ses extentions).



Graphe mixte $\mathcal{G}$

Le graphe $\mathcal{G}$ est bien M -maximal, et nous avons : $\mathcal{C}(\mathcal{G}) = \{\{(x, y), (z, t)\}, \{(x, y), (t, u)\}\}$.

En posant $e = \{y, z\}$, nous constatons que $\mathcal{C}(\mathcal{G}_e) = \emptyset \neq \mathcal{C}(\mathcal{G}) \setminus \{(x, y), (z, t)\}$. Le polynôme chromatique mixte de ce graphe est $P_m(\mathcal{G}, k) = k(k - 1)(k - 2)^2(k + 1)$. Sa valeur en -1 est nulle.

3.4 Discussion et perspectives

La théorie relative au polynôme chromatique des graphes (non orientés) est très riche ([Read, 1968, Biggs, 2001, Dong et al., 2005]). Outre l'interprétation des coefficients, que nous avons entamée, nous pouvons relever deux autres questions. Une première est la localisation des racines de ce polynôme chromatique, l'autre est relative aux graphes co-polynomiaux.

Nous allons ici, fort rapidement et modestement, indiquer quelques travaux préparatoires relatifs à ces questions, qui sont des pistes potentielles de recherche.

Interprétation des coefficients

Relativement à l'interprétation de $|P_m(\mathcal{G}, -1)|$ en tant que nombre d'orientations vérifiant certaines conditions, plusieurs voies semblent pos-

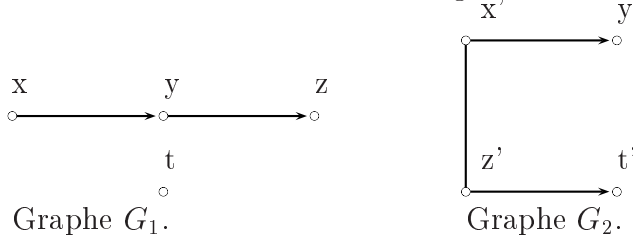
sibles. La première consiste, par exemple, à généraliser les précédentes interprétations à des familles de plus en plus larges, en utilisant les résultats présentés ici comme base de réflexion.

Une seconde est d'utiliser d'autres arguments que ceux employés ici (des bijections), afin d'obtenir des interprétations en terme d'orientations acircuitiques de façon plus directe. Cette voie d'exploration est suivie dans d'autres travaux ([Gebhard et Sagan, 2000, Lass, 2001, Gessel, 2001]) et permet de retrouver l'interprétation de $P(G, -1)$ en terme d'orientations acircuitiques.

Une autre piste possible est l'étude de l'interprétation des autres coefficients pris séparément (et non l'évaluation en -1 du polynôme chromatique mixte), afin de créer un parallèle avec des travaux similaires ([Gessel, 1996]) dans le cadre classique. Pour l'heure, dans ce domaine, nous n'avons pas poussé l'exploration plus loin que l'interprétation du coefficient de k dans $P_m(\mathcal{G}, k)$.

Graphes co-polynomiaux

Nous connaissons quelques cas de graphes co-polynomiaux.



Les graphes mixtes G_1 et G_2 précédents sont co-polynomiaux. Nous vérifions, en effet, que $P_m(G_1, k) = P_m(G_2, k) = k^2(k-1)(k-2)$. En utilisant ce cas particulier, nous pouvons énoncer une proposition plus générale.

Proposition 14 Graphes co-polynomiaux

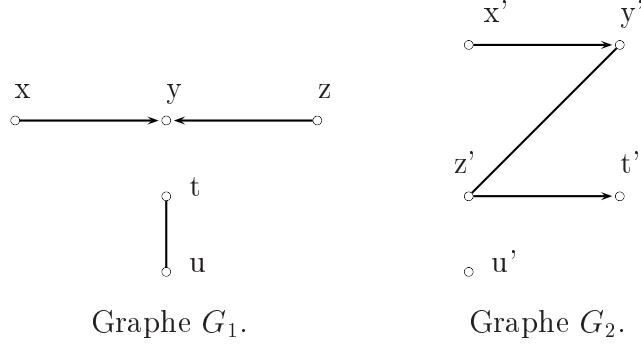
Soit $\mathcal{G}$ un graphe tel que $\mathcal{G}[x, y, z, t]$ soit isomorphe à G_1 et tel que pour tout $u \in V(\mathcal{G}) \setminus \{x, y, z, t\}$, $\{\{x, u\}, \{y, u\}, \{z, u\}, \{t, u\}\} \subset \widehat{M(\mathcal{G})}$.

Soit $\mathcal{G}'$ le graphe mixte obtenu à partir de $\mathcal{G}$ en remplaçant les arcs de $\mathcal{G}[x, y, z, t]$ par ceux de G_2 . Alors les graphes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont co-polynomiaux.

Démonstration : La démonstration repose sur le fait que, puisque les sommets x, y, z, t sont reliés à tous les sommets de $V(\mathcal{G}) \setminus \{x, y, z, t\}$, $P_m(\mathcal{G}, k) = k^2(k-1)(k-2) \times P(\mathcal{G} \setminus \{x, y, z, t\}, k)$. Il en va de même de $\mathcal{G}'$, et la conclusion s'ensuit. $\square$

Nous avons donc caractérisé une première famille (infinie) de graphes mixtes co-polynomiaux.

Nous pouvons faire de même avec, par exemple, les deux graphes de la figure suivante :



Exemples de graphes mixtes co-polynomiaux

En effet, nous remarquons que les polynômes chromatiques mixtes des graphes précédents sont égaux : $P_m(G_1, k) = P_m(G_2, k) = k^2(k - 1)^3$.

Il serait intéressant de tenter d'étendre les familles de graphes co-polynomiaux. Pour ce faire, nous pourrions par exemple étudier une condition proche de celle de séparation relative aux sommets x, y, z, t dans $\mathcal{C}(\mathcal{G})$. En effet, si nous avons une condition permettant de nous assurer que ni les arcs de G_1 , ni les arcs de G_2 n'apparaissent ni dans $\mathcal{C}(\mathcal{G})$, ni dans $\mathcal{C}(\mathcal{G}')$ alors nous pourrions en déduire que ces graphes sont co-polynomiaux.

Localisation de racines

Alors que le polynôme chromatique a toutes ses racines positives, il existe des racines négatives pour le polynôme chromatique orienté (en particulier -1). Voici une première différence entre ces deux objets relativement à la localisation des racines. A titre de travaux préparatoires, nous pouvons utiliser la bijection entre coloration mixte de $\mathcal{G}$ et coloration classique de $Und(\mathcal{G})$ dans le cas où $\mathcal{C}(\mathcal{G}) = \emptyset$ pour transposer au cadre mixte les résultats de localisation de racines que nous connaissons dans le cadre non orienté. Ces résultats peuvent donc servir de bases à l'exploration de cas pour lesquels $\mathcal{C}(\vec{\mathcal{G}})$ serait différent.

Chapitre 4

Décomposition acircuitique

4.1 Introduction

Nous introduisons la notion de décomposition acircuitique, nouveau type de partitionnement de l'ensemble des sommets d'un graphe orienté qui est une extension de la coloration orientée au sens où toute coloration orientée est acircuitique. Nous étudierons le cas particulier des tournois, pour lesquels toute coloration orientée est triviale (le nombre minimal de couleurs est l'ordre du tournoi), ce qui n'est pas le cas pour la décomposition acircuitique.

4.1.1 Définitions

Rappelons la définition de la propriété d'unidirection entre les classes d'un graphe orienté.

Définition 8 *Propriété d'unidirection entre les classes*

Soient $V_1, V_2 \subset V(\vec{G})$ deux sous-ensembles d'intersection vide. Nous dirons Unidirection que V_1 et V_2 vérifient la condition d'unidirection si :

$$\forall (a, a') \in V_1^2; \forall (b, b') \in V_2^2, (a, b) \in A(\vec{G}) \Rightarrow (b', a') \notin A(\vec{G}).$$

Si $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ sont des sous-ensembles de $V(\vec{G})$ deux à deux disjoints, nous dirons qu'ils vérifient la propriété d'unidirection (dans leur ensemble) si $\forall 1 \leq i \neq j \leq k$, les ensembles V_i et V_j vérifient la propriété d'unidirection.

Définition 9 *Décomposition acircuitique d'un graphe orienté*

Soit $\vec{G}$ un graphe orienté et k un entier strictement positif. Une k -Décomposition acircuitique

décomposition acircuitique de $\vec{G}$ est une k -partition $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ de $V(\vec{G})$ telle que les sous-graphes orientés induits $\{\vec{G}[V_i]\}_{1 \leq i \leq k}$ soient acircuitiques et tels que les ensembles $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ vérifient la propriété d'unidirection dans $\vec{G}$.

Cette définition de la notion de décomposition acircuitique, faite au moyen d'une partition sous contrainte, admet des définitions équivalentes. Nous allons en mentionner une, employant la notion d'homomorphisme acircuitique.

Proposition 15 *Lien décomposition acircuitique / homomorphisme acircuitique*

Le graphe orienté $\vec{G}$ admet une k -décomposition acircuitique si et seulement s'il existe un homomorphisme acircuitique de $\vec{G}$ dans $\vec{F}$, où $\vec{F}$ désigne un graphe orienté asymétrique d'ordre k .

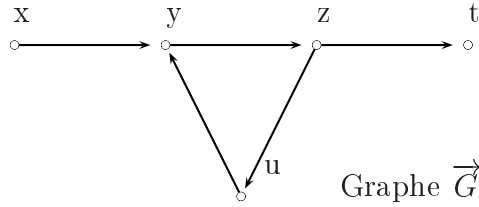
Démonstration :

Soit $\{V_1, \dots, V_k\}$ une k -décomposition acircuitique de $\vec{G}$. Définissons $d : V(\vec{G}) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ l'application : $\forall x \in V(\vec{G})$, $d(x) = i \Leftrightarrow x \in V_i$. Soit $\vec{F}_d$ le graphe dont l'ensemble de sommets est noté $V(\vec{F}_d) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, et (v_i, v_j) est un arc de $\vec{F}_d$ si et seulement s'il existe deux sommets, x dans V_i et y dans V_j tels que (x, y) soit un arc de $\vec{G}$. Remarquons que le graphe $\vec{F}_d$ obtenu est asymétrique (par définition des classes $\{V_i\}_{1 \leq i \leq k}$), d'ordre k .

L'application $\phi : V(\vec{G}) \rightarrow V(\vec{F}_d)$, définie par $\phi(v) = v_{d(v)}$, est alors un homomorphisme acircuitique de $\vec{G}$ dans $\vec{F}_d$.

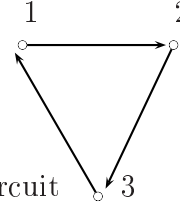
Réciproquement, à tout homomorphisme acircuitique ϕ de $\vec{G}$ dans le graphe orienté asymétrique $\vec{F}$ (avec $V(\vec{F}) = \{v_1, \dots, v_k\}$), nous pouvons associer une k -décomposition acircuitique d_ϕ définie par $d_\phi(x) = i$ si $\phi(x) = v_i$. $\square$

Donnons un exemple de la précédente proposition ; la partition $\{\{x, y\}, \{z\}, \{t, u\}\}$ est une 3-décomposition acircuitique du graphe $\vec{G}$ ci-dessous. Donnons l'homomorphisme acircuitique ϕ de $\vec{G}$ dans le 3-circuit $(1, 2, 3)$ associé à celle-ci.

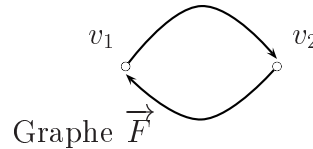
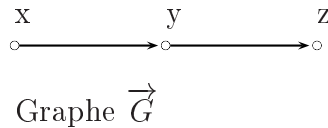


$$\phi(x) = \phi(y) = 1; \phi(z) = 2 \text{ et } \phi(t) = \phi(u) = 3$$

Homomorphisme acircuitique associé à une 3-décomposition acircuitique de $\vec{G}$.



La notion d'homomorphisme acircuitique apparaît initialement dans [Feder et al., 2003] avant d'être reprise dans [Hell et Nesetril, 2004]. Précisons que l'unique différence dans l'emploi de cette notion entre le précédent article et le présent travail se situe dans le fait que, dans [Feder et al., 2003], le graphe orienté $\vec{F}$ n'est pas nécessairement asymétrique. Ainsi, les ensembles de sommets de $\vec{G}$ ayant même image par un homomorphisme acircuitique de $\vec{G}$ dans $\vec{F}$ sont bien acircuitiques, mais ne vérifient pas nécessairement la propriété d'unidirection, comme le montre l'exemple suivant où l'homomorphisme ϕ est acircuitique mais où les classes $\{x, z\}$ et $\{y\}$ ne vérifient pas la propriété d'unidirection :



Exemple d'homomorphisme acircuitique vers un graphe orienté symétrique

$$\phi(x) = \phi(z) = v_1, \phi(y) = v_2$$

Le fait de ne considérer que des graphes orientés asymétriques implique le respect de la propriété d'unidirection entre les images réciproques par l'homomorphisme acircuitique.

De manière tout à fait identique à celle dont nous avons procédé pour les colorations tant classique qu'orientée, on associe un problème de minimisation au problème d'homomorphisme acircuitique.

Définition 10 *Nombre a-chromatique d'un graphe orienté*

Soit $\vec{G}$ un graphe orienté. Nous désignons par $\text{dec}(\vec{G})$ le plus petit entier k tel qu'il existe une k -décomposition acircuitique du graphe $\vec{G}$.

La précédente définition est justifiée par le fait qu'il existe toujours une n -décomposition acircuitique d'un graphe orienté d'ordre n .

4.1.2 Modélisations

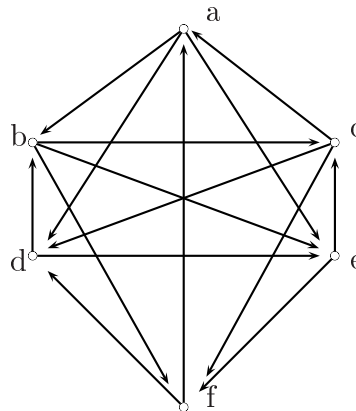
Illustrons un intérêt de la décomposition acircuitique pour interpréter le résultat d'un vote majoritaire.

Un ensemble de votants se prononce sur leurs préférences entre k candidats. Pour ce faire, chacun des votants se prononce sur chacune des paires de candidats. C'est-à-dire que, pour tout couple de candidats (i, j) , chaque votant exprime sa préférence soit pour le candidat i , soit le candidat j .

Le candidat i est majoritairement préféré au candidat j si et seulement si, le nombre de votants ayant préféré le candidat i au candidat j est majoritaire. En cas d'égalité entre les candidats, nous n'obtenons pas de préférence majoritaire. Pour éviter ce cas, nous supposons qu'il y a un nombre impair de votants.

Au résultat de ce vote, nous associons le graphe orienté $\vec{G}$, dont les sommets représentent les candidats et les arcs la préférence majoritaire (i.e. $(i, j) \in A(\vec{G})$ si le candidat i est majoritairement préféré au candidat j).

Le graphe obtenu n'est pas nécessairement un graphe acircuitique.



Exemple de préférence majoritaire obtenue sur 6 candidats

Une démarche naturelle consiste à rechercher l'ordre le plus « proche » du graphe $\vec{G}$. Si $\vec{G}$ et $\vec{H}$ sont deux graphes orientés, nous définissons par $d(\vec{G}, \vec{H})$ le nombre minimum d'arcs à inverser pour obtenir, en partant de

$\vec{G}$, le graphe $\vec{H}$. Un *ordre de Slater* de $\vec{G}$ est un ordre $\mathcal{O}$ pour lequel $d(\vec{G}, \mathcal{O})$ est minimum (parmi l'ensemble des ordres sur $|\vec{G}|$ sommets).

Si l'on s'intéresse à l'obtention d'un ordre de Slater de $\vec{G}$, nous constatons qu'il peut être « éloigné » de $\vec{G}$. Pire, il peut exister de nombreux ordres de Slater dont les structures peuvent différer les uns des autres. Une décomposition acircuitique peut faire apparaître les circuits structurant le tournoi.

4.2 Complexité

Formalisons les problèmes que nous étudions. Le premier est le problème de minimisation :

Nombre a-chromatique ($Dec(\vec{G})$) $Dec(\vec{G})$
 Instance : Un graphe orienté $\vec{G}$.
 Question : Quel est le plus petit entier k tel que $\vec{G}$ admet une k -décomposition acircuitique ?
 Réponse : Un entier naturel k .

Au précédent problème de minimisation, nous associons, pour tout entier naturel strictement positif k , le problème de décision suivant :

Dec_k (nombre a-chromatique $\leq k$) **Dec_k**
 Instance : Un graphe orienté $\vec{G}$.
 Question : Le graphe $\vec{G}$ admet-il une k -décomposition acircuitique ?
 Réponse : Oui / Non.

L'objet de cette section est l'étude de la complexité de ce problème, selon les valeurs de k .

4.2.1 Réduction au problème 3-Sat

Nous allons établir la $\mathcal{NP}$ -complétude du problème **Dec₃** à l'aide d'une réduction de Turing, en partant du classique problème 3-Sat.

Proposition 16 *Réduction à 3-Sat*

Il existe une réduction de Turing de 3-Sat à Dec₃. En conséquence, le problème Dec₃ est NP-complet.

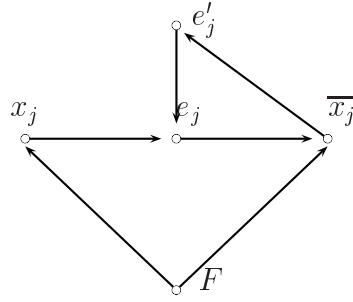
Démonstration : Soit $\mathcal{I}$ une instance de 3-Sat définie par la donnée d'un ensemble de n variables booléennes $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et d'un ensemble de m 3-clauses disjonctives $\{C_i\}_{1 \leq i \leq m}$ à valeur

dans l'ensemble des littéraux $\mathcal{L} = \{x_j, \overline{x_j} : 1 \leq j \leq n\}$. Nous supposons qu'aucune clause C_i n'est une tautologie (c'est-à-dire fait apparaître à la fois x_j et $\overline{x_j}$). Construisons, partant de cette instance de 3-Sat, un graphe orienté $\vec{G}$ défini comme suit :

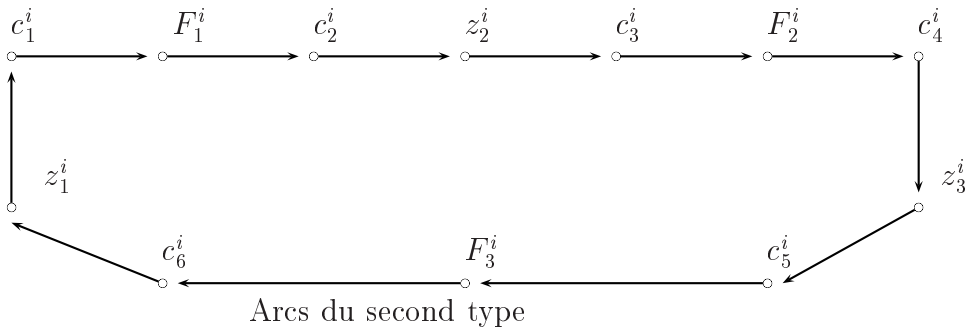
$$V(\vec{G}) = \bigcup_{1 \leq j \leq n} \{x_j, e_j, e'_j, \overline{x_j}\} \cup \bigcup_{1 \leq i \leq m} \{c_1^i, c_2^i, c_3^i, c_4^i, c_5^i, c_6^i, F_1^i, F_2^i, F_3^i\} \cup \{V, F, I\}.$$

L'ensemble des arcs de $\vec{G}$ est obtenu par l'union de 4 types d'arcs différents :

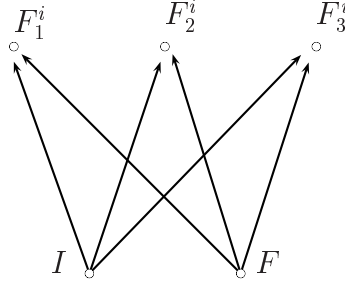
- Les arcs du premier type : pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, nous avons les arcs :



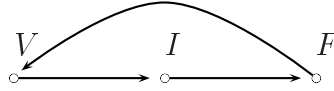
- Les arcs du second type : pour toute clause $C_i = z_1^i \vee z_2^i \vee z_3^i$ (avec $z_1^i, z_2^i, z_3^i \in \mathcal{L}$), nous avons les arcs :



- Les arcs du troisième type : pour tout $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, nous avons les arcs représentés ci-dessous :
-



- Arcs du quatrième type : entre les sommets $\{V, F, I\}$, nous avons les arcs suivants :



Supposons que le graphe $\vec{G}$, ainsi obtenu, admette une 3-décomposition acircuitique. Alors, les arcs du quatrième type impliquent l'existence d'un homomorphisme acircuitique de $\vec{G}$ dans le 3-circuit (V, I, F) . Les arcs du premier type impliquent que les sommets $\{x_j, \overline{x_j}\}_{1 \leq j \leq n}$ sont soit dans la classe de F , soit dans celle de V . Les sommets $\{F_l^i\}_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq l \leq 3}}$ sont successeurs à la fois des sommets I et F (arcs du troisième type) : ils appartiennent donc à la classe de décomposition acircuitique de F .

Pour que $\vec{G}$ admette une 3-décomposition acircuitique il est nécessaire que, pour toute clause C_i ($i \in \{1, 2, \dots, m\}$), les sommets (z_1^i, z_2^i, z_3^i) ne soient pas tous dans la classe de F .

Aussi la distribution de vérité ϕ sur l'ensemble des variables booléennes définie par :

$$\begin{cases} \phi(x_i) = \text{Faux} & \text{si } d(x_i) = F, \\ \phi(x_i) = \text{Vrai} & \text{sinon.} \end{cases}$$

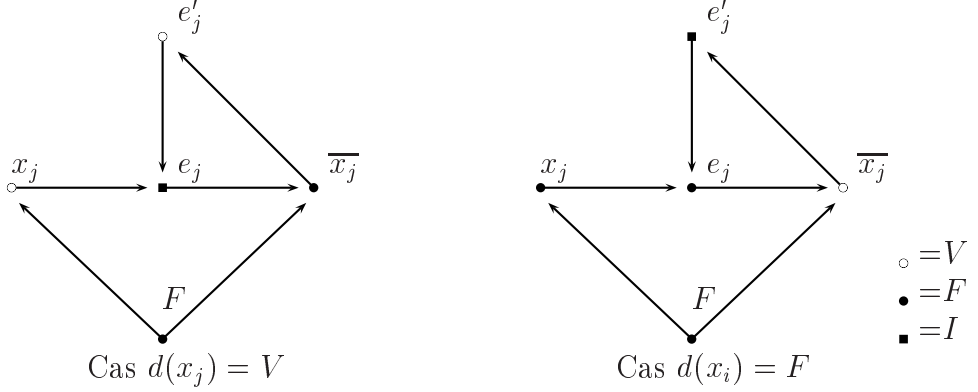
satisfait l'ensemble des clauses de l'instance $\mathcal{I}$ de **3-Sat**.

Réciproquement, supposons l'existence d'une distribution de vérité sur l'ensemble des variables booléennes telle que toutes les clauses sont satisfaites. Alors l'application définie sur un sous-ensemble des sommets de $\vec{G}$ par :

$$\begin{cases} d(x_i) = V \text{ et } d(\overline{x_i}) = F & \text{si la variable booléenne } x_i \text{ est à Vrai,} \\ d(x_i) = F \text{ et } d(\overline{x_i}) = V & \text{sinon,} \end{cases}$$

peut être complétée en une 3-décomposition acircuitique de $\vec{G}$ de la manière suivante :

Pour les arcs du premier type, nous colorons selon l'une des deux situations suivantes :



La coloration des sommets des arcs des second et troisièmes type se déduit de celle des sommets x_i par la règle suivante :

Tous les sommets $\{F_k^i\}_{k=1,2,3}$ sont dans la classe de F . Si $d(z_k^i) = F$, alors les sommets prédessesseur et successeur sont dans F ; si $d(z_k^i) = V$, alors le sommet prédessesseur est dans F alors que le sommet successeur est mis dans la classe de I . Comme les trois sommets z_1^i , z_2^i et z_3^i ne sont pas tous trois dans F , il s'ensuit que le circuit formé par ces arcs n'est pas inclu dans l'une des classes de décomposition acircuitique.

Ainsi l'instance $\mathcal{I}$ de 3-Sat est satisfiable si et seulement si le graphe orienté $\vec{G}$ admet une 3-décomposition acircuitique. $\square$

En complément de la proposition 16, affirmons que les problèmes **Dec**₁ et **Dec**₂ sont polynomiaux. En effet, un graphe orienté $\vec{G}$ admet une 1-décomposition acircuitique si et seulement s'il est acircuitique. Or, il existe des algorithmes polynomiaux permettant de reconnaître si un graphe est acircuitique. Le problème **Dec**₁ est donc polynomial. De plus, il n'existe pas, à proprement parler, de 2-décomposition acircuitique, puisqu'il y a identité entre les 2-décompositions acircuitiques et les 1-décompositions acircuitiques. Le problème **Dec**₂ est donc lui-aussi polynomial.

4.2.2 Famille polynomiale

Nous allons à présent développer un aspect combinatoire de la décomposition acircuitique en identifiant, dans un premier temps, une fa-

mille polynômiale pour ce problème, puis en étudiant une sous-famille de celle-ci.

Dans la suite, T désigne un tournoi dont le nombre a -chromatique est noté k . L'application $d : V(T) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ désignera une k -décomposition acircuitique de T . Remarquons que, dans le cas des tournois, les classes de décompositions acircuitiques de T sont des ordres (totaux) et nous pourrons donc parler de plus petit et plus grand sommet d'une classe. Notons enfin que les ensembles $\Gamma^+(x)$ et $\Gamma^-(x)$ forment une partition de $V(T) \setminus \{x\}$.

Définition 11 *Plus grand successeur exact d'un sommet*

Soit T un tournoi et x un sommet de T . Le plus grand successeur exact de x est, s'il existe, le sommet x^+ vérifiant :

$$\Gamma^+(x^+) = \Gamma^+(x) \setminus \{x^+\}. \quad (4.1)$$

Remarquons que, puisque T est un tournoi, la condition (4.1) est équivalente à la condition :

$$\Gamma^-(x^+) = \Gamma^-(x) \cup \{x\}.$$

Le schéma suivant présente cette situation relative aux sommets x et x^+ .

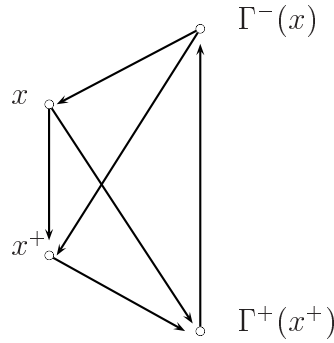


FIG. 4.1 – Schéma relatif aux sommets x et x^+ .

Proposition 17 *Conséquence de la non-existence de x^+*

S'il n'existe pas de sommet x^+ alors le sommet x est le plus petit sommet de sa classe de décomposition acircuitique dans toute k -décomposition acircuitique de T .

Démonstration : Utilisons une démonstration par contraposition en supposant que x n'est pas le plus petit élément dans sa classe de décomposition acircuitique. Celle-ci est un ordre total ; notons y le successeur direct de x dans cet ordre. Si z est un autre sommet dans la même classe de décomposition, alors x et y ont même

relation avec z (i.e. soit z domine ces deux sommets, soit il est dominé par ceux-ci). Si z est un sommet d'une autre classe de décomposition, la condition d'unidirection entre les classes implique que les sommets x et y ont mêmes relations avec z . Aussi y vérifie la condition (4.1), et nous permet de déduire l'existence du plus grand successeur exact $x^+ = y$ du sommet x . $\square$

Proposition 18 *Lien entre plus grand successeur exact et classe de décomposition acircuitique*

Soit T un tournoi d'ordre n et notons k son nombre a -chromatique. Soit x un sommet de T et y le plus grand élément de $\Gamma^+(x)$.

S'il existe une k -décomposition acircuitique d de T telle que $d(x) = d(y)$ alors $y = x^+$.

Réciproquement, si le sommet x^+ existe, alors, pour toute k -décomposition acircuitique d de T , $d(x) = d(x^+)$.

Démonstration : Si x domine y et $d(x) = d(y)$, alors x n'est pas le plus petit élément dans sa classe de décomposition acircuitique. L'intersection de $\Gamma^+(x)$ et de la classe de décomposition acircuitique de x est un ordre strict non vide, dont y est le plus grand élément. Nous vérifions, alors, que les sommets x et y respectent bien les conditions de 4.1 ; ainsi $y = x^+$.

A présent, supposons que $y = x^+$. Soit d une décomposition acircuitique de T , et supposons par l'absurde que $d(x) \neq d(y)$. Notons par C_1 et C_2 les classes de décompositions acircuitiques de x et y respectivement. Le sommet x domine C_2 puisque $y \in \Gamma^+(x)$. La condition (4.1) implique que y est le plus grand élément de C_2 . Soit C_i ($i \geq 3$) une classe de décomposition acircuitique de d quelconque. Alors, nous avons : $C_1 \rightarrow C_i \iff C_2 \rightarrow C_i$. En effet, si $z \in C_i$, alors la condition 4.1 implique $x \rightarrow z \iff y \rightarrow z$. Ainsi, les deux classes ont mêmes relations avec toutes les autres classes : nous en déduisons que la décomposition acircuitique d' définie, partant de d , en fusionnant les classes C_1 et C_2 est une $(k-1)$ -décomposition acircuitique de T , ce qui contredit $\text{dec}(T) = k$. $\square$

Les raisonnements précédents sont toujours valables en considérant les prédécesseurs de x au lieu des successeurs. Nous allons reprendre ces propositions en les considérant dans ce nouveau cas. Les démonstrations sont omises : elles se font toutes en remarquant que le passage du tournoi T à son tournoi inverse $\overline{T}$ permet de faire correspondre la notion de plus grand

successeur exact avec celle de plus petit prédécesseur exact. Nous obtenons alors :

Définition 12 *Plus petit prédécesseur exact.*

Soit T un tournoi et x un sommet de T . Nous définissons, s'il existe, le plus petit prédécesseur exact de x comme étant le sommet x^- vérifiant la condition :

$$\Gamma^-(x^-) = \Gamma^-(x) \setminus \{x^-\}. \quad (4.2)$$

Nous pouvons, alors, obtenir des résultats comparables aux propositions précédentes, à savoir :

Proposition 19 *Lien plus petit prédécesseur exact / classe de décomposition acircuitique*

Soit x un sommet de T et y le plus petit élément de $\Gamma^-(x)$. S'il existe une k -décomposition acircuitique d de T telle que $d(x) = d(y)$, alors, $y = x^-$.

Réciproquement, si le sommet x^- existe, alors, pour toute k -décomposition acircuitique d de T , $d(x) = d(x^-)$.

Les différentes propositions impliquent le corollaire suivant :

Corollaire 6 *Unicité de la décomposition acircuitique minimale d'un tournoi*

Il existe une unique décomposition acircuitique minimale d'un tournoi donné T .

Démonstration : En effet, nous disposons de l'équivalence :

$$d(x) = d(y) \text{ et } y \text{ suit directement } x \text{ dans l'ordre } d^{-1}(x) \Leftrightarrow y = x^+.$$

d'où nous déduisons la conclusion du corollaire. $\square$

Avant d'élaborer, à l'aide des précédentes discussions, un algorithme donnant une décomposition acircuitique optimale d'un tournoi T , faisons une petite remarque :

Remarque 3 *Nous avons :*

$$y = x^+ \Leftrightarrow x = y^-.$$

Présentons cet algorithme en deux temps. En premier, nous élaborons deux sous-programmes permettant, étant donné un sommet x du tournoi T , de savoir s'il existe dans T un plus petit prédécesseur exact et un plus grand successeur exact de x , et le cas échéant, de les identifier.

Programme : **Down**(x)

Entrée : Un tournoi T , un sommet x .

Sortie : Un sommet y vérifiant la condition $\Gamma^+(y) = \Gamma^+(x) \setminus \{y\}$ s'il existe, $\emptyset$ sinon.

Considérer les sommets z de $\Gamma^+(x)$ les uns après les autres :

. Si le sommet y considéré vérifie la condition $\Gamma^+(y) = \Gamma^+(x) \setminus \{y\}$, alors renvoyer y .

. Sinon poursuivre.

Si aucun sommet ne vérifie la condition, renvoyer $\emptyset$.

Programme : **Up**(x)

Entrée : Un tournoi T , un sommet x .

Sortie : Un sommet z vérifiant la condition $\Gamma^-(z) = \Gamma^-(x) \setminus \{z\}$ s'il existe, $\emptyset$ sinon.

Considérer les sommets z de $\Gamma^-(x)$ les uns après les autres :

. Si le sommet z considéré vérifie la condition $\Gamma^-(z) = \Gamma^-(x) \setminus \{z\}$, alors renvoyer z .

. Sinon poursuivre.

Si aucun sommet ne vérifie la condition, renvoyer $\emptyset$.

En utilisant les deux algorithmes gloutons précédents, nous élaborons l'algorithme suivant, donnant une décomposition acircuitique optimale de T .

Algorithme de décomposition acircuitique des tournois

Entrée : Un tournoi T

Sortie : Une décomposition acircuitique optimale de T .

A chaque sommet x de T , nous associons une marque $\mathcal{M}(x)$ (au final, les classes monochromatiques seront formées des sommets ayant même marque). Les variables k et v représentent respectivement un entier et un sommet de T .

Initialisation : $\forall x \in V(T)$, $\mathcal{M}(x) = 0$, et $k = 0$.

Tant qu'il existe un sommet x tel que $\mathcal{M}(x) = 0$ FAIRE :

```

.       $k \leftarrow k + 1.$ 
.       $v \leftarrow x.$ 
.       $\mathcal{M}(v) \leftarrow k.$ 
.      Tant que  $\text{Up}(v) \neq \emptyset.$ 
.           $v \leftarrow \text{Up}(v).$ 
.           $\mathcal{M}(v) = k.$ 
.      Tant que  $\text{Down}(v) \neq \emptyset.$ 
.           $v \leftarrow \text{Down}(v).$ 
.           $\mathcal{M}(v) = k.$ 

```

Proposition 20 *Analyse de l'algorithme*

La solution donnée en sortie de l'algorithme précédent est une décomposition acircuitique optimale du tournoi T instance.

Démonstration : La décomposition est acircuitique car seuls les sommets vérifiant la condition (4.1) ou (4.2) sont dans la même classe. Celle-ci est, alors, bien optimale par la proposition 19.

L'identification de la $i^{\text{ème}}$ classe de coloration, de cardinal n_i nécessite au plus $2n_i$ appels aux deux algorithmes gloutons, chacun de complexité au pire cas égal à n . Pour identifier les k classes, on fait de l'ordre de $n \sum_{i=1}^k 2n_i = O(n^2)$ opérations. $\square$

4.3 Graphe orienté acircuitique-indécomposable

Cette partie aborde la notion de graphe *acircuitique-indécomposable*¹, qui sera, par la suite, modifiée pour obtenir une notion de décomposition (acircuitique) critique.

4.3.1 Définitions

Définition 13 *Graphe orienté acircuitique-indécomposable*

Un graphe orienté $\vec{G}$ d'ordre n est acircuitique-indécomposable (ou encore a-indécomposable) si $\text{dec}(\vec{G}) = n$. Dans le cas inverse, le graphe $\vec{G}$ est dit a-décomposable.

Nous présentons en figure 4.2 des exemples de tels graphes.

¹nous noterons aussi a-indécomposable

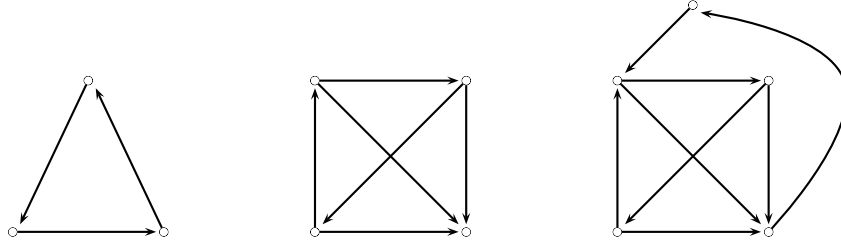


FIG. 4.2 – Exemples de trois graphes a-indécomposables.

Nous allons nous intéresser, dans la suite, à une sous-famille de tournois a-indécomposables. Par l'emploi d'un argument probabiliste, nous pouvons quantifier l'importance de ces tournois parmi l'ensemble des tournois aléatoires d'ordre n .

Proposition 21 *Densité des tournois a-indécomposables dans l'ensemble des tournois d'ordre n*

Désignons par $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des tournois aléatoires T d'ordre n (éventuellement isomorphes) obtenu par l'orientation de toutes les arêtes du graphe complet K_n , de manière indépendante, par une probabilité uniforme (ie. $\forall \{x, y\} \in E(K_n)$, $P((x, y) \in A(T)) = P((y, x) \in A(T)) = 1/2$).

La probabilité que le tournoi $T \in \mathcal{T}_n$ soit indécomposable tend vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$.

Démonstration : Soit A l'événement « T est a-indécomposable ». L'événement opposé est réalisé lorsqu'il existe au moins deux sommets x et y tels que

$$\forall z \notin \{x, y\}, (x, z) \in A(T) \iff (y, z) \in A(T)$$

Ainsi, les sommets x et y doivent avoir même relation avec les $n-2$ autres sommets de T . La probabilité de cet événement est alors minorée par $\binom{n}{2}(1/2)^{n-2}$. Ainsi, $P(A) = 1 - P(A^c) \geq 1 - \binom{n}{2}(\frac{1}{2})^{n-2}$ et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A) = 1$. $\square$

Cette proposition nous incite à rechercher des familles de tournois a-indécomposables. Nous allons en donner un exemple. Rappelons qu'un tournoi T est *régulier* si le degré sortant de tout sommet est égal au degré entrant de ce sommet, soit $\forall x \in V(T)$, $d^+(x) = d^-(x)$.

Proposition 22 *Des tournois réguliers*

Tout tournoi régulier est a-indécomposable.

Tournoi régulier

Démonstration : Supposons qu'il existe deux sommets i et j distincts dans une même classe de décomposition acircuitique d'un tel tournoi. Nous pouvons, sans perte de généralité, supposer que $\Gamma^+(i) = \Gamma^+(j) \cup \{j\}$. Ainsi, les degrés entrant et sortant de ces deux sommets ont pour différence 1 ou -1 , contredisant la définition d'un tournoi régulier. Donc $i = j$ et tout tournoi régulier est a -indécomposable. $\square$

Les opérations suivantes nous permettent de générer de nouvelles familles de tournois a -indécomposables à partir d'une famille initiale.

Proposition 23 *Opérations conservant la a -indécomposabilité des tournois*

1. *Supposons que T soit un tournoi a -indécomposable qui n'a pas de source, et soit T' le tournoi obtenu à partir de T en lui ajoutant une source s . Alors le tournoi T' est a -indécomposable.*

Réciproquement, si T est un tournoi a -indécomposable ayant une source s , alors $T \setminus \{s\}$ est un tournoi a -indécomposable.

2. *Supposons que T soit un tournoi a -indécomposable qui n'a pas de puits, et soit T'' le tournoi obtenu à partir de T en lui ajoutant un puits p . Alors le tournoi T'' obtenu est a -indécomposable.*

Réciproquement, si T est un tournoi a -indécomposable ayant un puits p , alors $T \setminus \{p\}$ est un tournoi a -indécomposable.

3. *Soit T un tournoi a -indécomposable d'ordre strictement supérieur à 2 et qui possède une source s et un puits p . Alors le tournoi T''' obtenu en inversant l'orientation de l'arc (s, p) en (p, s) est un tournoi a -indécomposable.*

Démonstration :

1. Supposons l'existence dans T' d'un sommet x tel que $\{x, s\}$ soit une classe de décomposition acircuitique (étant entendu que toutes les autres classes sont réduites à des singletons). Alors nécessairement $x = s^+$, et il s'ensuit que $\Gamma^+(x) = \Gamma^+(s) \setminus \{x\}$. Ainsi x serait une source du tournoi T , ce qui infirme l'hypothèse initiale sur T .

Soit T un tournoi a -indécomposable ayant une source s . Supposons par l'absurde l'existence de deux sommets, x et y , tels que $\{x, y\}$ soit une classe de décomposition acircuitique de $T \setminus \{s\}$ (étant entendu que toutes les autres classes de la décomposition acircuitique sont réduites à des singletons). Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $(x, y) \in A(T)$.

Alors, $\Gamma_{T \setminus \{s\}}^+(y) = \Gamma_{T \setminus \{s\}}^+(x) \setminus \{y\}$. Le sommet s étant une source, nous en déduisons alors que l'égalité $\Gamma^+(y) = \Gamma^+(x) \setminus \{y\}$ est vraie dans T , d'où T n'est pas a -indécomposable, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, le tournoi $T \setminus \{s\}$ est a -indécomposable.

2. S'obtient à partir de 1. en remarquant que le tournoi $\bar{T}$ obtenu par inversion du sens de l'orientation de tous les arcs de T est a -indécomposable si et seulement si T l'est.

3. Soit T un tel tournoi. Le tournoi $T''' \setminus \{s, p\}$ est isomorphe au tournoi $T \setminus \{s, p\}$ qui est acircuitique-indécomposable d'après les points 1. et 2. de la démonstration. Soit x un sommet de $T''' \setminus \{s, p\}$. L'ensemble $\{s, x\}$ ne peut être en unidirection avec tous les sommets de $T \setminus \{x, s, p\}$ puisque sinon x serait une source de $T \setminus \{s, p\}$, donc une source de $T \setminus \{s\}$, ce qui est absurde d'après la remarque énoncée dans 1. De même, l'ensemble $\{s, p\}$ ne peut être en unidirection avec tous les sommets de $T \setminus \{s, p\}$ par définition des sommets s et p et car T est d'ordre au moins 3. Ainsi les classes de T''' sont-elles nécessairement réduites à des singletons ; T est a -indécomposable. $\square$

Nous appliquons ces trois opérations au premier tournoi régulier non réduit à un singleton dans la figure 4.3. Les différents tournois obtenus sont donc tous a -indécomposables.

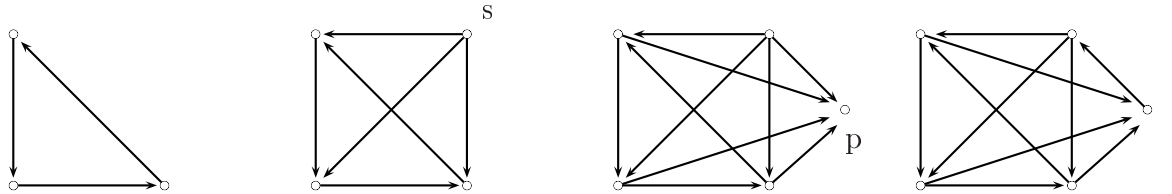


FIG. 4.3 – Tournois obtenus partant du 3-circuit par les opérations de la prop. 23.

La figure 4.4 présente les deux 4-tournois a -indécomposables non-isomorphes.

A toute 4-décomposition acircuitique d'un tournoi T , nous pouvons associer un 4-homomorphisme acircuitique. La définition suivante nous permet alors de formaliser cette association.

Définition 14 *Graphe orienté composé*

Soit t un tournoi d'ordre p et $T_1, T_2, \dots, T_p$ p tournois quelconques. Le tournoi



FIG. 4.4 – Les deux 4-tournois a-indécomposables non-isomorphes.

$t\{T_1, T_2, \dots, T_p\}$ est le tournoi obtenu à partir de t en remplaçant le $i^{\text{ème}}$ sommet de t par le tournoi T_i et en orientant tous les arcs entre T_i et T_j dans le sens de l'arc (i, j) de t .

Puisque la composée de deux homomorphismes acircuitiques est un homomorphisme acircuitique, nous en déduisons que tout tournoi T admettant une 4-décomposition acircuitique admet un homomorphisme dans T_4 ou T'_4 . Un tel tournoi admet donc une 4-partition $\{O_1; O_2; O_3; O_4\}$ de l'ensemble de ses sommets telle que $T = T_4\{O_1; O_2; O_3; O_4\}$ ou $T = T'_4\{O_1; O_2; O_3; O_4\}$.

S'il nous est possible de caractériser ainsi les tournois a -indécomposables d'ordre 4, il paraît difficile de pouvoir en faire autant pour des ordres plus importants. C'est pourquoi nous consacrons la prochaine section à l'introduction d'une sous-famille de ces tournois, dit *tournois sommet-critique a-indécomposables*, dont nous donnons une caractérisation à tous les ordres.

4.3.2 Tournoi sommet-critique a-indécomposable

Nous étudions dans ce paragraphe la notion de tournoi sommet-critique a -indécomposable, qui est l'adaptation de la notion de tournois sommet-critique introduite, par exemple, dans le cadre des tournois dichromatiques par Neumann-Lara ([Neumann-Lara et Urrutia, 1984]) ou encore dans le cadre de la coloration classique.

Définition 15 *Tournoi sommet-critique a-indécomposable*

Le tournoi T est *sommet-critique a-indécomposable* s'il est a -indécomposable, et si, pour tout sommet $v \in V(T)$, le tournoi $T \setminus \{v\}$ est a -décomposable. sommet-critique
a-indécomposable

Parmi les deux 4-tournois T_4 et T'_4 , aucun n'est sommet-critique indécomposable. En effet, même s'ils sont tous deux a -indécomposables, il suffit d'enlever le sommet P au tournoi T_4 pour obtenir un 3-tournoi indécomposable. De même, la suppression du sommet S du tournoi T'_4

laisse un tournoi indécomposable. Aussi, il n'existe aucun 4-tournoi sommet-critique a-indécomposable.

A titre d'exemple, nous constatons que le 3-circuit est sommet-critique indécomposable : il est bien a-indécomposable (i.e. $\text{dec}(\vec{C}_3) = 3$), et la suppression d'un sommet quelconque de celui-ci laisse un graphe réduit à un arc ; celui-ci est décomposable, puisque $\text{dec}((u, v)) = 1 < 2$.

Rappelons, à ce niveau, la notion de tournoi circulant :

Définition 16 *Tournoi circulant*

Tournoi circulant

Soit J un sous-ensemble de $\{1, 2, \dots, n\}$. Le tournoi circulant $\vec{C}_n(J)$ est le n -tournoi dont l'ensemble des sommets est $\{1, 2, \dots, n\}$ et dont l'ensemble des arcs est $\{(j, k); k - j [n] \in J\}$.

Le tournoi $\vec{C}_5(\{1, 2\})$ de la figure 4.5 est un tel tournoi circulant (les sommets étant numérotés en suivant l'ordre circulaire de la représentation). Considérons, à présent, un n -tournoi T sommet critique indécomposable, et soit u un sommet de T . Le tournoi $T \setminus \{u\}$ est, par définition, a-décomposable. Il existe donc un couple de sommets $\{i_u, j_u\}$ ayant mêmes successeurs et mêmes prédécesseurs dans $T \setminus \{u\}$. Nous construisons, alors, le graphe G_T associé à T de la façon suivante :

Définition 17 *Graphe G_T associé au tournoi T*

Graphe G_T

Soit T un n -tournoi sommet-critique indécomposable. Nous définissons le graphe G_T comme le graphe ayant même ensemble de sommets que le tournoi T et dont les arêtes sont les couples de sommets $\{i_u, j_u\}_{u \in V(T)}$.

Remarque 4 *Notons que le tournoi T étant sommet-critique a-indécomposable si, pour tout sommet u , il existe une paire $\{i_u, j_u\}$ telle que l'unique chemin de longueur 2 d'extrémité $\{i_u, j_u\}$ est (i_u, u, j_u) .*

Nous donnons, en figure 4.5, le graphe $\vec{C}_5(\{1, 2\})$ et le graphe $G_{\vec{C}_5(\{1, 2\})}$ qui lui est associé.

Le lemme suivant démontre l'existence et l'unicité, étant donné un sommet u , de l'arête $\{i_u, j_u\}$ associée, ainsi que celles du sommet u , étant donné une arête de G_T .

Lemme 4 *Existence et unicité du sommet u / de l'arête $\{i_u, j_u\}$*

Nous avons, pour tous sommets u et v de T , la relation :

$$u = v \Leftrightarrow \{i_u, j_u\} = \{i_v, j_v\}. \quad (\star\star)$$

Nous dirons que l'arête $\{i_u, j_u\}$ de G_T et le sommet u sont associés.

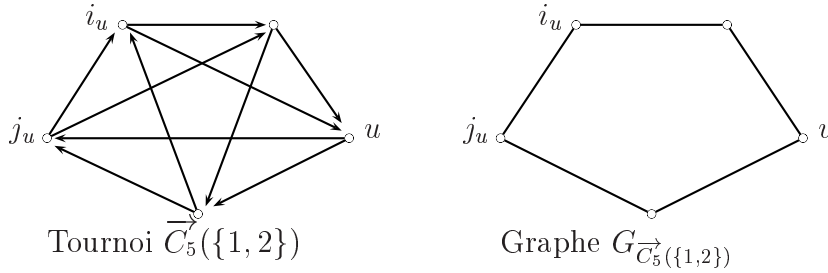
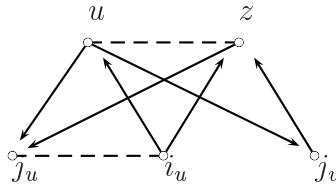


FIG. 4.5 – Un tournoi circulant et son graphe associé

Démonstration : Supposons que les deux sommets u et v sont différents, mais que $i_u = i_v$ et $j_u = j_v$. Alors, il existe deux chemins de longueur 2 d'extrémités i_u et j_u , ce qui contredit la remarque.

Supposons à présent que u soit associé à deux paires différentes $\{i_u, j_u\}$ et $\{i_v, j_v\}$. Sans perte de généralité (quitte à inverser l'orientation de tous les arcs de T), nous pouvons supposer que j_u est différent de j_v .

Puisque u est associé à la paire $\{i_v, j_v\}$, le seul 2-chemin ayant pour extrémités i_v et j_v est (i_v, u, j_v) . Conséquemment, tout sommet y différent de u est en unidirection avec les sommets i_v et j_v . Aussi, il existe un sommet z tel que le sommet j_v doit être associé à la paire $\{u, z\}$. En effet, s'il était associé à une paire $\{z_1, z_2\}$ avec $z_1 \neq u$ et $z_2 \neq u$, nous en déduirions que le sommet i_v serait aussi associé à cette paire, contredisant l'unicité du 2-chemin d'extrémités i_v et j_v .



Ainsi, les sommets u et z sont en unidirection avec tout sommet de $T \setminus \{j_v\}$, ce qui contredit le fait que (i_u, u, j_u) est le seul 2-chemin ayant pour extrémités i_u et j_u . On en déduit donc, par l'absurde, que si $u = v$ alors $\{i_u, j_u\} = \{i_v, j_v\}$, ce qui conclut cette démonstration. $\square$

Puisque, pour tout sommet u , il existe au moins un couple $\{i_u, j_u\}$, G_T a, au moins, $|T|$ arêtes. La précédente relation permet de conclure à l'unicité

de l'arête associée au sommet x , tout comme à l'unicité du sommet x associé à une arête de G_T . Cette bijection entre sommets de G_T et arêtes de G_T implique le corollaire suivant :

Corollaire 7 *Nombre d'arêtes de G_T*

Le graphe G_T a autant d'arêtes que de sommets. Ainsi, il contient au moins un cycle.

Passons, à présent, à une cascade de lemmes préliminaires à notre étude.

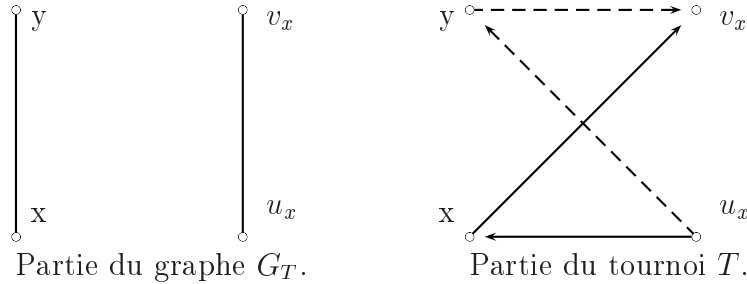
Lemme 5 *Voisinage et associés*

Soit x un sommet de G_T ; on note $\{u_x, v_x\}$ l'arête de G_T qui lui est associée. Soit y un voisin de x . Alors l'arête $\{x, y\}$ est associée soit au sommet u_x , soit au sommet v_x .

Réciproquement, si l'arête $\{u_x, v_x\}$ est associée au sommet x , alors toute autre arête $\{u_x, w_x\}$ de G_T incidente au sommet u_x est associée à un voisin de x .

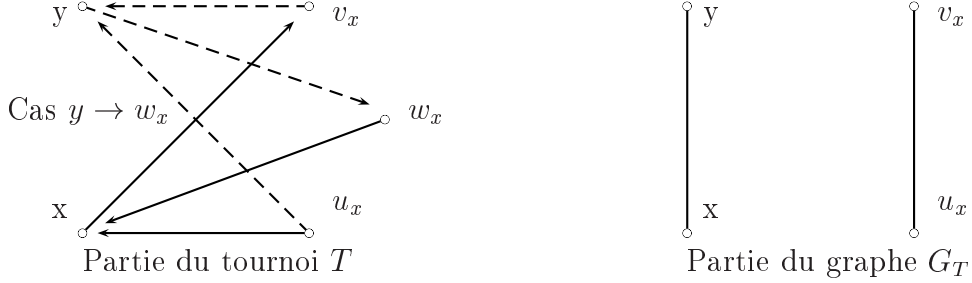
Plus généralement, les sommets x et y sont voisins dans G_T si et seulement si, leurs arêtes associées sont incidentes à un même sommet de G_T .

Démonstration : Raisonnons par l'absurde en supposant que la paire $\{x, y\}$ n'est ni associée au sommet u_x , ni associée au sommet v_x . Alors les sommets u_x et v_x ont même relation avec les sommets x et y , i.e. $(u_x, x) \in A(T) \Leftrightarrow (u_x, y) \in A(T)$ et $(v_x, x) \in A(T) \Leftrightarrow (v_x, y) \in A(T)$.



Nous en déduisons, alors, que la suppression de x ne permet pas de créer une classe de décomposition acircuitique regroupant u_x et v_x , d'où une contradiction. Ainsi, soit $y \in \Gamma^+(u_x) \cap \Gamma^+(v_x)$, soit $y \in \Gamma^-(u_x) \cap \Gamma^-(v_x)$. Dans le premier cas, l'arête $\{x, y\}$ de G_T est associée au sommet u_x , dans le second cas au sommet v_x . Prouvons la propriété réciproque : Par unicité de l'arête associée au sommet x , ce sommet domine ou est dominé par les sommets u_x et w_x . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer qu'il

est dominé par l'arête $\{u_x, w_x\}$, et donc x domine le sommet v_x comme l'indique le schéma suivant :



Posons y le sommet associé à l'arête $\{u_x, w_x\}$; il n'a donc pas même relation avec ces sommets. Nous remarquons que les deux configurations possibles donnent soit w_x associé au couple $\{x, y\}$, soit u_x est associé au couple $\{x, y\}$. Dans les deux cas, l'arête $\{x, y\}$ existe dans G_T et donc le sommet y est voisin de x . Nous déduisons de ces deux premières assertions, l'équivalence finale. $\square$

Le prochain lemme permet d'exhiber une configuration interdite dans G_T .

Lemme 6 *Configuration interdite*

Le degré des sommets du graphe G_T est inférieur ou égal à 2.

Démonstration : Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un sommet x ayant 3 voisins dans G_T : y, z et t . Alors, par le lemme 5, les trois arêtes $\{x, y\}$, $\{x, z\}$ et $\{x, t\}$ doivent être associées à l'un des sommets u_x ou v_x , ce qui contredit la formule $(\star\star)$. $\square$

Lemme 7 *Degré des sommets de G_T*

Les sommets de G_T ont tous pour degré 2.

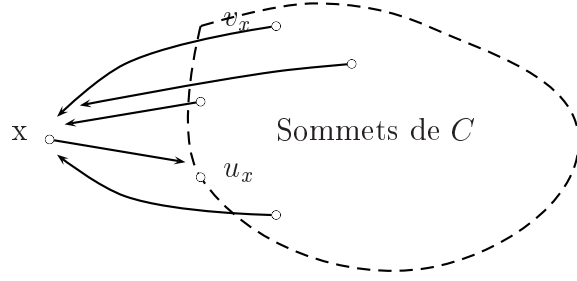
Démonstration : Le graphe G_T a autant d'arêtes que de sommets (cf. corollaire 7). La somme de ses degrés est donc égale à $2n$. Or, G_T ne contient pas de 3-étoile. Ainsi : $\forall x \in V(G_T), d(x) < 3$. De la classique formule $\sum_{x \in V(G_T)} d(x) = 2n$, nous déduisons $\forall x \in V(G_T), d(x) = 2$. $\square$

Ce lemme implique que les composantes connexes de G_T sont des cycles. Etudions la relation entre l'arête associée à un sommet et cycle comportant ce sommet.

Lemme 8 *Connexité et sommet associé*

Désignons par C le cycle auquel appartient l'arête $\{u_x, v_x\}$. Alors, le sommet x , associé à l'arête $\{u_x, v_x\}$ est un sommet de C .

Démonstration : Supposons par l'absurde que x ne soit pas dans C . Puisque le sommet x est associé à l'arête $\{u_x, v_x\}$, les relations dans T entre le sommet x et les sommets u_x et v_x sont de sens opposés. L'unicité de l'arête associée à x implique que les extrémités de toutes les arêtes autres que $\{u_x, v_x\}$ ont mêmes relations avec x dans T . Ainsi, l'ensemble des sommets de $C \setminus \{u_x, v_x\}$ soit domine x , soit est dominé par x . Ces deux possibilités impliquent que l'une des arêtes voisines de $\{u_x, v_x\}$ est associée à x , contredisant l'unicité de l'arête associée. $\square$

**Proposition 24** *Connexité et cardinalité*

Tout cycle C de G_T est d'ordre impair.

Démonstration : Par l'absurde, supposons l'existence d'un entier k strictement positif tel que $C = (x_0, x_1, \dots, x_{2k-1})$ soit un cycle de G_T . Soit l l'entier strictement positif tel que l'arête $\{x_l, x_{l+1}\}$ soit associée au sommet x_0 . Par le lemme 5, l'arête $\{x_0, x_1\}$ est associée soit au sommet x_l , soit au sommet x_{l+1} .

Premier cas : Supposons que $\{x_0, x_1\}$ est associée à x_{l+1} .

Alors, en réutilisant le fait que deux sommets sont voisins dans G_T si et seulement si leurs arêtes associées le sont, nous en déduisons que x_1 est associé à l'arête $\{x_{l+1}, x_{l+2}\}$. En itérant ce processus, nous obtenons que le sommet x_{l+1} est associé à l'arête $\{x_{l+(l+1)}, x_{l+1+(l+1)}\} = \{x_{2l+1}, x_{2l+2}\}$. Les indices devant être compris modulo $[2k]$, par l'unicité de l'arête associée au sommet x_{l+1} , nous en déduisons que $2l+1 \equiv 0 \pmod{[2k]}$, ce qui est impossible.

Second cas : Supposons à présent que $\{x_0, x_1\}$ est associée au sommet x_l . Par le même type de raisonnement, le sommet x_2 est alors associé à x_{l-1} . En itérant ce processus, nous en déduisons que le sommet $x_{[l/2]}$ devrait être associé à une arête

dont il est l'une des extrémités, ce qui est impossible.

Nous obtenons bien, pour conclusion, que $|C|$ doit être impair. $\square$

Proposition 25 *Caractérisation des sous-tournois d'un tournoi sommet-critique a-indécomposable*

Soit T un tournoi sommet-critique a-indécomposable. Soit T' le sous-tournoi de T engendré par les sommets d'un cycle $\mathcal{C}$ de G_T de longueur $2k+1$. Alors T' est un tournoi circulant $\vec{C}_{2k+1}(1, 2, \dots, k)$ où k est tel que le cycle $\mathcal{C}$ de G_t soit de longueur $2k+1$.

Démonstration : Nous allons numéroter les sommets de $\mathcal{C}$ de manière à ce que $C = (x_0, x_1, \dots, x_{2k})$. Supposons le sommet x_0 associé à l'arête $\{x_l, x_{l+1}\}$. En reprenant les mêmes arguments que ceux de la proposition 24, nous nous apercevons que, seul le premier cas permet d'obtenir une solution à l'équation $2l \equiv 0 \pmod{[2k]}$. Ainsi $l = k$, et l'ensemble des prédécesseurs / successeurs de tout sommet x_i de G_T est exactement les k voisins de x_i en parcourant $\mathcal{C}$ selon le sens de parcours. $\square$

L'usage de la définition 14 permet alors l'obtention d'une caractérisation des tournois sommet-critique a-indécomposables.

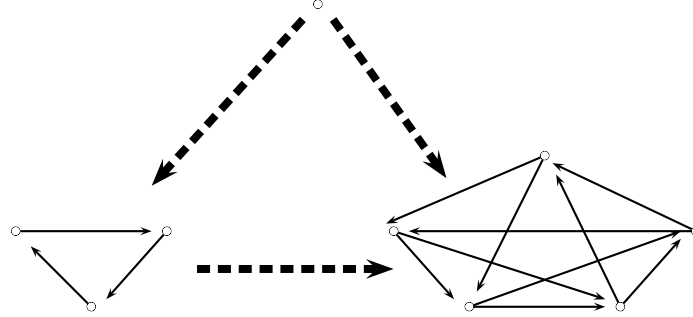
Théorème 7 *Caractérisation des tournois sommet-critique a-indécomposables*

Les tournois sommet-critique a-indécomposables sont les tournois de la forme

$$t\{\vec{C}_{2k_1+1}, \dots, \vec{C}_{2k_p+1}\}$$

avec $p \in \mathbb{N}$, $(k_1, k_2, \dots, k_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$, t désignant un tournoi quelconque et $\{\vec{C}_{2k_i+1}\}_{1 \leq i \leq p}$ désigne le tournoi circulant à $2k_i+1$ sommets.

Proposons l'exemple d'un tel tournoi sommet critique indécomposable. Si t désigne le 3-ordre, le tournoi $t\{\vec{C}_1, \vec{C}_3, \vec{C}_5\}$ ci-dessous est sommet-critique a-indécomposable.



4.4 Polynôme chromatique acircuitique

Nous explorons dans cette section l'adaptation de la notion de polynôme chromatique au cadre de la décomposition acircuitique d'un graphe orienté.

4.4.1 Définition du polynôme chromatique acircuitique d'un graphe orienté

Définition 18 *Polynôme chromatique acircuitique d'un graphe orienté*
 Soit $\vec{G}$ un graphe orienté et soit k un entier. Nous désignons par $P_a(\vec{G}, k)$ le nombre de k -décompositions acircuitiques de $\vec{G}$.
 La fonction $k \rightarrow P_a(\vec{G}, k)$ est le polynôme acircuitique du graphe $\vec{G}$.

La définition précédente nécessite de s'assurer que la fonction $k \rightarrow P_a(\vec{G}, k)$ est bien un polynôme. Nous vérifierons cette condition ultérieurement. Proposons tout d'abord quelques exemples du calcul simple de ce polynôme acircuitique.

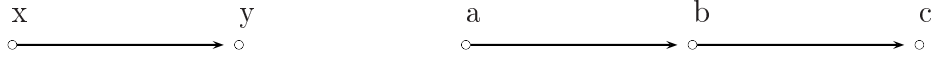
- Si $\vec{G}_\emptyset$ est un graphe orienté d'ordre n vide (i.e. sans arc aucun), alors

$$P_a(\vec{G}_\emptyset, k) = k^n$$

- Si $\vec{G}$ est un graphe a-indécomposable d'ordre n alors :

$$P_a(\vec{G}, k) = k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)$$

- Passons à deux exemples plus singuliers :



Graphe $\vec{G}_1$

Graphe $\vec{G}_2$

Concernant le graphe $\vec{G}_1$, étant donné un entier strictement positif k , nous pouvons choisir la classe de décomposition acircuitique du sommet x parmi les k possibles. Concernant le sommet y , il en est de même. Ainsi : $P_a(\vec{G}_1, k) = k^2$.

Nous pouvons généraliser ce résultat aux étoiles (une racine centrale et $n - 1$ feuilles²) : un tel graphe orienté a comme polynôme acircuitique

$$P_a(\vec{G}, k) = k^n.$$

Nous remarquons, là, qu'il s'agit du même polynôme acircuitique que celui d'un graphe (orienté) vide d'ordre n .

Passons au graphe $\vec{G}_2$. Nous pouvons opter parmi les k couleurs disponibles pour le sommet a . De la même façon pour le sommet b , mais le sommet c dépend, lui, des choix précédents : si $d(a) \neq d(b)$, alors c ne peut prendre la couleur $d(a)$. Ainsi, obtenons-nous :

$$P_a(\vec{G}_2, k) = k^2 + k(k - 1)^2 = k(k^2 - k + 1)$$

4.4.2 Décomposition acircuitique d'un graphe mixte

Poursuivons le parallèle avec la coloration (classique ou orientée) en élaborant une formule de récurrence relative au polynôme acircuitique permettant, entre autre, de pouvoir calculer ses valeurs pour tout graphe (en temps non polynomial). Tout comme dans les formules de récurrence relatives à ces objets, nous allons ajouter des arêtes $\{x, y\}$ au graphe orienté $\vec{G}$, ce qui nécessite l'introduction de la notion de décomposition acircuitique d'un graphe mixte.

Définition 19 *Décomposition acircuitique d'un graphe mixte*

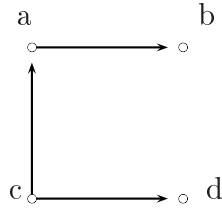
Soit $\mathcal{G} = (V, A, E)$ un graphe mixte et soit k un entier strictement positif. Une k -décomposition acircuitique de $\mathcal{G}$ est une application $d : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ vérifiant :

- $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $d^{-1}(i)$ est acircuitique,
- $\forall x, x', y, y' \in V$ tels que $d(x) = d(x')$, $d(y) = d(y')$ et $d(x) \neq d(y)$,

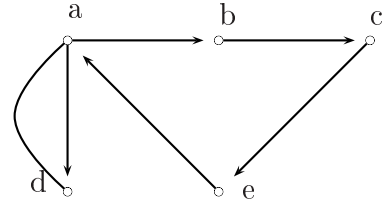
$$[(x, y) \in A] \Leftrightarrow [(y', x') \notin A].$$

²extrémité terminale d'un arc partant de la racine

Insistons sur le fait que, contrairement aux colorations orientée et mixte, ici, les sommets extrémités d'un arc peuvent être mis dans une même classe, mais que cela n'est pas vrai des sommets extrémités d'une arête. La définition 19 prolonge la notion définie dans le cadre des graphes orientés. Plus formellement, sur cet ensemble, les deux définitions coïncident. Illustrons cette notion par un exemple.



Graphe $\mathcal{G}_3$.



Graphe $\mathcal{G}_4$.

Le graphe $\mathcal{G}_3$ est acircuitique, donc il admet une 1-décomposition acircuitique. Nous pouvons aussi donner quelques exemples de décompositions acircuitiques (non-optimale) de $\mathcal{G}_3$:

- $d_1(a) = d_1(b) = d_1(d) = 1$ et $d_1(c) = 2$ est une 2-décomposition acircuitique de G_{m_3} .
- $d_2(a) = d_2(d) = 1$, $d_2(b) = 2$, $d_2(c) = 3$ en est une 3-décomposition.

Passons à l'étude du graphe $\mathcal{G}_4$; notons, à cette occasion, qu'il est possible d'avoir un arc et une arête ayant mêmes extrémités (mais ni arcs ni arêtes parallèles). Ajoutons que si cette information était redondante dans le cadre de la coloration orientée (les sommets extrémités d'un arc ne pouvant avoir la même couleur), elle ne l'est pas dans le cadre de la décomposition acircuitique (les sommets extrémités d'un arc pouvant être dans la même classe de décomposition acircuitique, mais pas les extrémités d'une arête). Le graphe $\mathcal{G}_4$ contient un circuit, donc il n'admet ni 1 ni 2-décomposition acircuitique. Par contre, il admet la 3-décomposition acircuitique d_1 suivante : $d_1(a) = d_1(b) = 1$, $d_1(c) = d_1(d) = 2$ et $d_1(e) = 3$. Par contre, l'application $d_2 : V(\mathcal{G}_4) \rightarrow \{1, 2\}$ suivante n'est pas une décomposition acircuitique de $\mathcal{G}_4$. $d_2(a) = d_2(b) = d_2(e) = 1$, $d_2(d) = d_2(c) = 2$. En effet, les classes de décomposition acircuitique de couleurs 1 et 2 ne vérifient pas la propriété d'unidirection.

La définition de décomposition acircuitique étendue aux graphes mixtes admet des formulations équivalentes. Donnons-en deux, exprimant cette nouvelle décomposition acircuitique comme partition de l'ensemble des sommets

sous certaines contraintes.

Proposition 26 *Définitions équivalentes de la décomposition acircuitique d'un graphe orienté*

Soit $\mathcal{G} = (V, A, E)$ un graphe mixte k -décomposable.

i. L'application $d : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ est une k -décomposition acircuitique de $\mathcal{G}$ si et seulement si l'application d est une coloration du graphe $\widehat{\mathcal{G}} = (V, E)$ et si les ensembles $\{d^{-1}(i)\}_{1 \leq i \leq k}$ forment une décomposition acircuitique de $\vec{\mathcal{G}} = (V, A)$.

ii. L'application $d : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ est une k -décomposition acircuitique de $\mathcal{G}$ si et seulement si, les ensembles $\{V_i\}_{1 \leq i \leq k}$ définis par $V_i = d^{-1}(i)$ forment une k -partition de V en sous-ensembles acircuitiques ne contenant aucune arête et s'ils vérifient la propriété d'unidirection dans $\vec{\mathcal{G}}$.

La notion de polynôme chromatique acircuitique peut alors être étendue aux graphes mixtes utilisant la précédente extension de la décomposition acircuitique.

Définition 20 *Polynôme chromatique acircuitique du graphe mixte $\mathcal{G}$*

Soit $\mathcal{G}$ un graphe mixte et soit k un entier strictement positif. Soit $P_a(\mathcal{G}, k)$ le nombre de k -décompositions acircuitiques du graphe mixte $\mathcal{G}$. La fonction $k \rightarrow P_a(\mathcal{G}, k)$ sera appelée polynôme acircuitique du graphe (mixte) $\mathcal{G}$.

Comme précédemment, la définition présuppose une vérification que nous ferons ultérieurement. Notons simplement que ce polynôme acircuitique mixte coïncide avec le polynôme acircuitique lorsque le graphe $\mathcal{G}$ est un graphe orienté.

Une difficulté inattendue

Nous souhaitons établir la formule de récurrence vérifiée par le polynôme acircuitique mixte. Notre premier mouvement consiste à mettre en exergue une difficulté nouvelle spécifique au problème de décomposition acircuitique sur le choix de la paire de sommets $e = \{x, y\}$. Nous étudierons, dans un second temps, un cas simple dans lequel la difficulté ne se rencontre pas et qui permet de conclure à l'existence d'une paire de sommets vérifiant la formule de récurrence. Dans un troisième temps, nous étudierons le cas de graphes ne présentant pas la précédente configuration, et introduirons les notions nécessaires nous permettant d'obtenir une paire de sommets vérifiant la formule de récurrence.

Si $\mathcal{G} = (V, A, E)$ est un graphe mixte et si $e = \{x, y\} \notin E$, nous désignons par $\mathcal{G}_e$ le graphe obtenu par identification des sommets x et y et suppression

éventuelle des boucles ou arcs multiples. Le sommet de $\mathcal{G}_e$ obtenu par identification des sommets x et y de $\mathcal{G}$ est noté $\alpha_{x,y}$. Nous souhaitons obtenir la formule de récurrence suivante :

$$P_a(\mathcal{G}, k) = P_a(\mathcal{G} \cup \{e\}, k) + P_a(\mathcal{G}_e, k). \quad (\star)$$

Expliquons-la informellement pour l'heure : les décompositions acircuitiques de $\mathcal{G}$ peuvent se diviser en deux catégories : celles, qui séparent les sommets x et y et celles qui les mettent dans la même classe de décomposition acircuitique.

Nous aimerions affirmer que les premières sont des décompositions acircuitiques de $\mathcal{G} \cup e$ (ce qui est vrai), et que les secondes sont des décompositions acircuitiques de $\mathcal{G}_e$ (ce qui ne l'est pas !).

Exposons déjà la première partie valide de ce raisonnement informel.

Proposition 27 *La partie ne posant pas problème...*

Soit $\mathcal{G}$ un graphe mixte et x et y deux sommets de $\mathcal{G}$ tels que $\{x, y\} \notin E(\mathcal{G})$. Soit $d : V(\mathcal{G}) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ une k -décomposition acircuitique de $\mathcal{G}$ telle que $d(x) \neq d(y)$. Alors l'application d est aussi une décomposition acircuitique de $\mathcal{G} \cup \{x, y\}$.

Démonstration : Les classes $\{d^{-1}(i)\}_{1 \leq i \leq k}$ sont acircuitiques et vérifient la propriété d'unidirection dans $\mathcal{G}$, donc dans $\mathcal{G} \cup e$. La conclusion s'ensuit alors. $\square$

Pour la seconde partie, à une application $d : V(\mathcal{G}) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ vérifiant $d(x) = d(y)$, nous associons l'application d_e de l'ensemble des sommets de $\mathcal{G}_e$ dans $\{1, 2, \dots, k\}$ définie par $\forall z \in V(\mathcal{G}) \setminus \{x, y\}, d_e(z) = d(z)$ et $d_e(\alpha_{x,y}) = d(x) = d(y)$. Cette application n'est pas toujours une décomposition acircuitique de $\mathcal{G}_e$. La figure 4.6 apporte un contre-exemple à cette intuition erronée. Nous y faisons figurer à la fois, le graphe $\mathcal{G}$, le graphe $\mathcal{G} \cup e$ (avec $e = \{x, y\}$), ainsi que le graphe $\mathcal{G}_e$.

Le graphe $\mathcal{G}$ est acircuitique : aussi admet-il une 1-décomposition acircuitique d dans laquelle tous les sommets sont dans la même classe. Aussi cette application ne peut pas être une décomposition acircuitique de $\mathcal{G} \cup e$, à cause de l'arête e . Pour autant, l'application d_e n'est pas une décomposition acircuitique de $\mathcal{G}_e$, qui est un 3-circuit et qui ne peut donc admettre de 1-décomposition. Ainsi, la formule de récurrence $(\star)$ n'est pas vérifiée pour l'arête $e = \{x, y\}$ puisque $P_a(\mathcal{G}, 1) = 1 \neq P_a(\mathcal{G} \cup e, 1) + P_a(\mathcal{G}_e, 1) = 0$.

Moralité : Alors que la formule de récurrence, pour les polynômes chromatiques classiques ou mixtes, était valable pour tout couple de sommets non

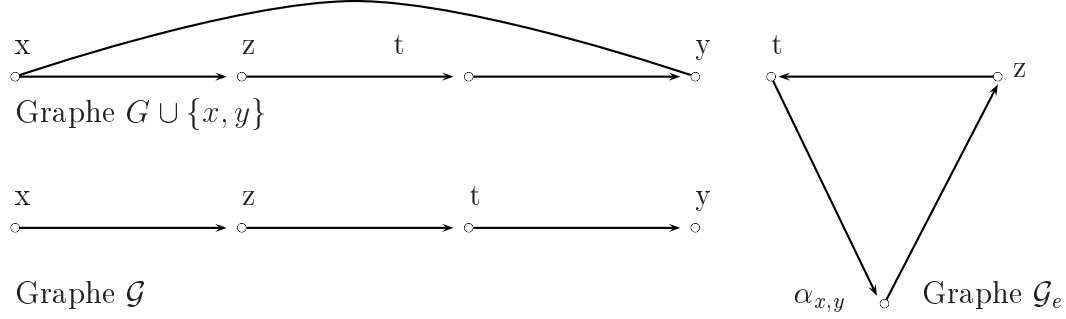


FIG. 4.6 – Contre exemple à une intuition possible erronée

voisins (dans G ou $M(\vec{G})$), il nous faut dans le présent cas mettre en œuvre un processus nouveau de sélection de la paire $\{x, y\}$ de sommet sur laquelle nous appliquons la formule de récurrence.

4.4.3 Formule de récurrence

Une fois cette difficulté identifiée, nous introduisons les notions de graphe $N(\mathcal{G})$ et de chemin admissible qui nous permettent d'étudier un premier cas dans lequel l'obtention d'une formule de récurrence se fait aisément.

Définition 21 Graphe mixte $N(\mathcal{G})$

Graphe $N(\mathcal{G})$

Soit $\mathcal{G} = (V, A, E)$ un graphe mixte. Nous lui associons le graphe mixte $N(\mathcal{G})$ défini comme suit : $V(N(\mathcal{G})) = V$; $A(N(\mathcal{G})) = A(\mathcal{G})$; $E(N(\mathcal{G})) = E(\mathcal{G}) \cup \{\{x, y\} : \exists z \in V, (x, y, z) \text{ soit un 3-circuit de } \mathcal{G}\} \cup \{\{x, t\} : \exists y, z \in V, (x, y, z) \text{ soit un 3-circuit et } t \in \Gamma^-(z) \cup \Gamma^+(y)\}$.

Cette première notion ressemble, dans son principe, à l'association du graphe $M(\mathcal{G})$ au graphe $\mathcal{G}$ dans le cadre de la coloration orientée. En effet, remarquons que si (x, y, z) forment un 3-circuit, alors, ils appartiennent nécessairement à 3 classes de décompositions acircuitiques différentes. Le second ensemble est relatif à la condition d'unidirection entre les classes : puisque x domine la classe de y , tout sommet t dominé par y ne peut être dans la classe de x . La figure 4.7 présente un exemple d'un graphe orienté (vu comme graphe mixte) $\mathcal{G}$ et du graphe mixte $N(\mathcal{G})$ qui lui est associé.

Toutes les conditions d'incompatibilités entre les sommets apparaissent explicitement dans le graphe mixte $N(\mathcal{G})$. Plus exactement, nous avons le lemme suivant reposant sur la définition de décomposition acircuitique mixte :

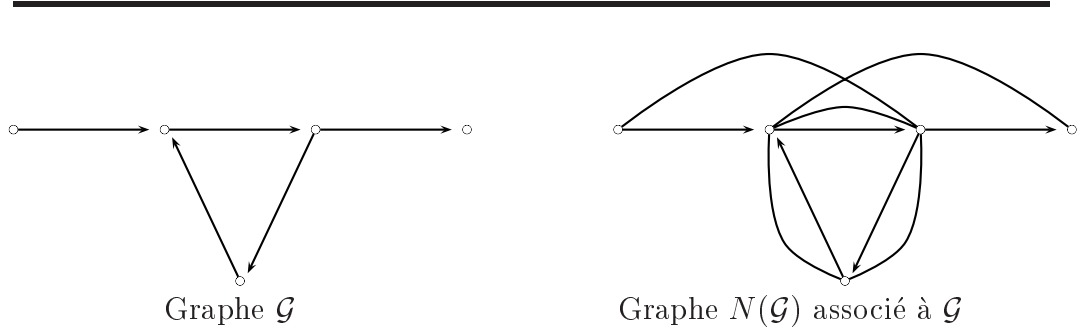


FIG. 4.7 – Exemple d'un graphe mixte $\mathcal{G}$ et du graphe mixte $N(\mathcal{G})$ associé

Lemme 9 *Propriété du graphe $N(\mathcal{G})$*

Soit $\mathcal{G}$ un graphe mixte. Si $\{x, y\} \in E(N(\mathcal{G}))$ alors, pour toute décomposition acircuitique d de $\mathcal{G}$, les sommets x et y vérifient : $d(x) \neq d(y)$.

Ainsi on ne recherchera dans la suite les paires $\{x, y\}$ de sommets vérifiant la formule de récurrence $(\star)$ que parmi les paires vérifiant $\{x, y\} \notin E(N(\mathcal{G}))$.

De manière similaire aux colorations orientées et mixtes des graphes $\vec{G}$ et $M(\vec{G})$, nous pouvons relier les décompositions acircuitiques de $\mathcal{G}$ et de $N(\mathcal{G})$ de la façon suivante :

Proposition 28 *Lien entre les décompositions acircuitiques de $\mathcal{G}$ et de $N(\mathcal{G})$*
 Soit $\mathcal{G}$ un graphe mixte. Toute décomposition acircuitique de $\mathcal{G}$ est une décomposition acircuitique de $N(\mathcal{G})$ et réciproquement. Ainsi obtenons-nous l'égalité :

$$P_a(\mathcal{G}, k) = P_a(N(\mathcal{G}), k)$$

Le graphe $N(\mathcal{G})$ nous permet de définir la notion de *chemin admissible* dans $\mathcal{G}$:

Définition 22 *Chemin admissible*

Si $\mathcal{G} = (V, A, E)$ est un graphe mixte et si x et y sont deux sommets de $\mathcal{G}$, nous appelons *chemin admissible* de x à y dans $\mathcal{G}$ tout chemin tel que s'il contient les sommets a et b , alors $\{a, b\}$ n'est pas une arête de $N(\mathcal{G})$.

Cette notion est liée à la présence de chemin dans une classe de décomposition, ou plus exactement, si d est une décomposition acircuitique de $\mathcal{G}$ et s'il existe dans une classe de décomposition acircuitique de d , un chemin, alors ce chemin est admissible. La réciproque n'est néanmoins pas vraie ; par exemple, si (a, b, c, d) est un 4-circuit, le chemin (a, b, c) est admissible mais ne peut être contenu dans aucune classe de décomposition acircuitique

Chemin admissible

de (a, b, c, d) . La notion de chemin admissible nous permet d'aborder l'étude d'un premier cas simple.

Proposition 29 *Si le couple de sommets $\{x, y\}$ est sans chemin admissible. Considérons un graphe mixte $\mathcal{G}$ et supposons qu'il n'existe aucun chemin admissible entre x et y dans $\mathcal{G}$, et que $\{x, y\} \notin E(N(\mathcal{G}))$. Alors la paire $e = \{x, y\}$ vérifie bien la formule de récurrence $(\star)$.*

Démonstration : Soit d une k -décomposition acircuitique de $\mathcal{G}$ telle que $d(x) = d(y)$; nous notons d_e l'application $V(\mathcal{G}_e) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ induite par d sur $\mathcal{G}_e$. Notons $C = \mathcal{G}[d^{-1}(d(x))]$ la classe de décomposition acircuitique de x (et y) dans $\mathcal{G}$ et $C_e = \mathcal{G}_e[d^{-1}(d(x))]$ cette même classe dans $\mathcal{G}_e$. La classe C_e ne peut contenir de circuit, car sinon celui-ci passerait nécessairement par le sommet fusionné $\alpha_{x,y}$, ce qui implique l'existence dans $\mathcal{G}$ d'un chemin admissible entre x et y , ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé. L'unidirection entre les classes de $\mathcal{G}_e$ se déduit de celle de $\mathcal{G}$, et nous en déduisons que d_e est bien une décomposition acircuitique de $\mathcal{G}_e$.

Si la condition imposée dans la proposition 29 est suffisante, elle n'est en rien nécessaire. Dans l'optique d'obtenir une condition nécessaire à nous assurer la formule $(\star)$, nous allons nous placer dans le cadre des graphes mixtes $\mathcal{G}$ ne vérifiant par la condition de la proposition 29. Ainsi, quels que soient les sommets x et y , il existe au moins un chemin admissible de x à y ou de y à x .

Définition 23 *Longueur l_{max} , Sphère S_{max}*

Soit $\mathcal{G} = (V, A, E)$ un graphe mixte et soient x et y deux sommets de $\mathcal{G}$. Nous désignons par $l_{max}(x, y)$ la longueur minimale entre le plus long chemin admissible allant de x à y et celle du plus long chemin admissible allant de y à x (étant entendu que s'il n'existe qu'un seul de ces chemins, l_{max} prend pour valeur cette longueur).

Par convention, si x, y ne sont pas reliés par un chemin admissible, alors $l_{max}(x, y) = 0$ et si $\{x, y\} \in E(N(\mathcal{G}))$, $l_{max}(x, y) = \infty$.

Soit k un entier strictement positif. Nous désignons par $S_{max}(x, k)$ la sphère S_{max} de centre x et de rayon k , à savoir l'ensemble $\{y \in V(\mathcal{G}), l_{max}(x, y) = k\}$.

Proposition 30 *Couple de sommets vérifiant la formule de récurrence*
Considérons donc un graphe mixte $\mathcal{G}$ tel qu'il existe au moins un chemin admissible entre tout couple de sommets de $\mathcal{G}$.

i. Pour tout sommet x de $\mathcal{G}$, il existe au moins un sommet y tel que $y \in$

$S_{max}(x, 1)$.

ii. Toute paire de sommets $\{x, y\}$ tel que $y \in S_{max}(x, 1)$ vérifie la formule de récurrence.

Démonstration : i. Soient x et z deux sommets quelconque de $\mathcal{G}$ tels que $\{x, z\} \notin E(N(\mathcal{G}))$. Par hypothèse, il existe au moins un chemin admissible entre x et z ; sans perte de généralité, nous le supposons partant de x et arrivant à z . Nous notons k la longueur $l_{max}(x, z)$.

Si $k = 1$, alors la paire $\{x, z\}$ répond à l'assertion.

Sinon, soit $(x, y, a_2, a_3, \dots, a_{k-1}, z)$ le plus long chemin admissible entre x et z . Alors $l_{max}(x, y) = 1$, et la paire $\{x, y\}$ répond à l'assertion.

ii. Soit $y \in S_{max}(x, 1)$, c'est-à-dire que la longueur minimale entre le plus long chemin admissible de x à y et celle du plus long chemin admissible de y à x est égale à 1. Supposons par l'absurde l'existence d'une décomposition acircuitique d de $\mathcal{G}$ telle que l'application d_e définie par : $d_e(u) = d(u)$ si $u \neq x, y$, $d_e(\alpha_{x,y}) = d(x)$ ne soit pas une décomposition acircuitique de $\mathcal{G}_e$. Aussi, il existe un circuit dans l'ensemble $C_e = \{z \in V(\mathcal{G}_e) : d_e(z) = d_e(\alpha_{x,y})\}$. Nous devons donc avoir dans $C = \{z \in V(\mathcal{G}) : d(z) = d(x)\}$ un chemin admissible entre x et y non réduit à un arc. Sans perte de généralité (en inversant éventuellement tous les arcs), nous supposons que ce chemin va de x à y . Ainsi, $l_{max}(x, y) > 1$ et, puisque $y \in S_{max}(x, 1)$, il découle que $l_{max}(y, x) = 1$, c'est-à-dire que (y, x) est un arc de $\mathcal{G}$. Nous obtenons alors une contradiction puisqu'il existe un circuit dans C .

La condition présente dans la proposition 30 est donc suffisante ; nous allons en démontrer l'existence de tel couple.

Proposition 31 *Existence d'un couple vérifiant l'hypothèse de récurrence*
Soit $\mathcal{G}$ un graphe mixte d'ordre n tel que la paire $e = \{x, y\}$ vérifie la relation de récurrence $(\star)$. Alors il existe un sommet z tel que $z \in S_{max}(x, 1)$.

Démonstration : Supposons l'existence d'une paire $\{x, y\}$ n'appartenant pas à $E(N(\mathcal{G}))$ et vérifiant l'hypothèse de récurrence. Ainsi, il existe un chemin admissible entre x et y ; notons k la longueur $l_{max}(x, y)$.

Si $k = 1$, alors le sommet y vérifie $y \in S_{max}(x, 1)$.

Sinon, d'après la proposition 30, il existe un sommet z tel que $z \in S_{max}(x, 1)$ et tel que la paire de sommets $\{x, z\}$ satisfasse la formule de récurrence. $\square$

4.4.4 Propriétés du polynôme chromatique acircuitique

Théorème 8 *Propriétés de $P_a(\mathcal{G}, k)$*

Soit $\mathcal{G}$ un polynôme mixte d'ordre n . Le polynôme acircuitique vérifie alors les propriétés suivantes :

- $P_a(\mathcal{G}, k)$ est un polynôme en n de degré k ;
- Le coefficient dominant de $P_a(\mathcal{G}, k)$ est 1 ;
- Le terme constant de $P_a(\mathcal{G}, k)$ est nul ;
- Le coefficient de k^{n-1} est $-|E(N(\mathcal{G}))|$.

Démonstration : Procédons à la démonstration de l'ensemble de ces propositions par récurrence double : premièrement croissante sur n , l'ordre du graphe et deuxièmement décroissante sur m , le cardinal de $|E(N(\mathcal{G}))|$.

Nous savons déjà que, lorsque $|E(N(\mathcal{G}))| = n(n-1)/2$, $P_a(\mathcal{G}, k)$ est un polynôme de degré n . Son coefficient dominant est alors égal à 1, le coefficient de k^{n-1} est bien $|E(N(\mathcal{G}))|$: les différentes assertions du théorème sont alors vraies.

Envisageons, à présent, que les précédentes propriétés soient vraies pour tout graphe d'ordre $n-1$ et pour tout graphe d'ordre n tel que $|E(N(\mathcal{G}))| = m+1$.

Puisque $m < n(n-1)/2$, il existe, d'après la proposition précédente, un couple $e = \{x, y\}$ vérifiant la formule de récurrence. Ainsi, obtenons-nous :

$$P_a(\mathcal{G}, k) = P_a(\mathcal{G} \cup e, k) + P_a(\mathcal{G}_e, k).$$

Il suffit alors de remarquer que $P_a(\mathcal{G} \cup e)$ et $P_a(\mathcal{G}_e, k)$ vérifient les différentes assertions du théorème par hypothèse de récurrence pour en déduire que $P_a(\mathcal{G}, k)$ les vérifient. Ainsi la formule de récurrence est vérifiée au rang m . $\square$

Nous avons donc obtenu, pour la notion de décomposition acircuitique, une formule de récurrence vérifiant des propriétés similaires aux polynômes chromatique, classique et orienté.

4.5 Discussion et perspectives

Complexité et Approximation

Dans le domaine de la décomposition acircuitique, de nombreuses pistes restent à explorer. Concernant des travaux proches de la présente thèse, la

question de l'approximation du nombre a-chromatique n'a pas, pour l'heure été étudiée. Relativement à la complexité, il serait intéressant de rechercher à la fois des familles polynomiales (peut-être en partant de la famille des tournois), ainsi que des familles $\mathcal{NP}$ -complètes (en étudiant sous cet angle la présente réduction ou en raffinant celle-ci).

Polynôme acircuitique

La encore, nous sommes intéressé par la poursuite du parallèle entre polynôme chromatique et polynôme acircuitique. La richesse de la théorie du polynôme chromatique nous permet de rêver à de très nombreux développements futurs, sachant que nous n'avons prétention qu'à poser le premier jalon de cette théorie, à savoir la formule de récurrence.

Liens avec d'autres paramètres ou problèmes

Si l'on s'inspire des travaux relatifs à l'étude de la coloration orientée, nous sommes tentés de nous intéresser aux liens qu'entretient le nombre a-chromatique d'un graphe orienté avec d'autres paramètres du graphe. Une première relation serait de remarquer l'évidente inégalité $dec_a(\vec{G}) \leq \chi_o(\vec{G})$.

Une autre voie d'investigation serait d'étudier les liens entre ce problème et d'autres. En particulier, nous avons médité sur le problème d'ensemble d'arcs retour³, et avons tenté, sans succès pour l'heure, de lier ces deux problèmes qui semblent, dans l'esprit, si proches l'un de l'autre.

³feedback arc set

Chapitre 5

Conclusion

Notre travail s'inscrit dans la problématique générale du passage de l'étude de structures non-orientés à celle de structures orientées. Nous étudions trois colorations possibles de graphes orientés ou mixtes au moyen d'outils algorithmiques et combinatoires. Ce travail nous a amené à considérer différentes partitions de l'ensemble des sommets d'un graphe orienté. Nous allons, dans la suite, discuter de nos résultats en les regroupant en cinq parties ; les trois parties centrales reprendront globalement les résultats des chapitres 2 à 4 (soit, la coloration orientée, la coloration mixte et la décomposition acircuitique), et les deux autres parties seront consacrées à des concepts transversaux de la présente thèse. Il s'agit, en premier lieu, de la notion d'homomorphisme et secondement, de considérations sur divers thématiques, notamment sur le polynôme chromatique.

Homomorphismes

Les différentes colorations que nous avons rencontrées au cours de nos travaux peuvent être reformulées au moyen d'homomorphismes, constituant un cadre unificateur à la fois simple et élégant. Aussi, nos connaissances de ces homomorphismes sont susceptibles d'éclairer l'étude des partitions. Hélas, bien que la complexité des homomorphismes ait fait l'objet de nombreuses études dans le cadre non orienté ([Hell et Nešetřil, 2004]), le cas des homomorphismes orientés est moins connu, et encore moins celui des homomorphismes acircuitiques. Une première voie de recherche dans ce domaine serait d'étudier les propriétés et caractéristiques de ces objets mathématiques, en particulier sous leur angle algorithmique via des questions de complexités soulevées par les homomorphismes orientés. Sur ce problème, rappelons qu'il n'existe pas de résultat général de complexité, mais qu'une conjecture est formulée dans [Bang-Jensen et Hell, 1990]. Compte tenu de la souplesse de

ces objets mathématiques, il est vraisemblable qu'ils seront sources de futures réductions, permettant d'ajouter un formalisme possible pour montrer la $\mathcal{NP}$ -complétude d'un problème. Néanmoins, nous pouvons conjecturer la $\mathcal{NP}$ -complétude de bon nombre de ces questions. Aussi devons-nous très probablement étudier la complexité des problèmes de coloration par elle-même, que se soit par la recherche des familles polynomiales d'instances ou sous l'angle de l'approximation du problème d'optimisation associé.

Coloration orientée

La connaissance de la complexité de ce problème a été améliorée. D'une part, nous avons démontré que le problème de la 4-coloration orientée est $\mathcal{NP}$ -complet sur une famille restreinte de graphes orientés (en fait, la famille des graphes planaire bipartis acircuitique à degré borné), et d'autre part, nous avons démontré que le problème de la k -coloration orientée est polynomiale pour la famille des graphes orientés multipartis. La famille $\mathcal{NP}$ -complète étant particulièrement restreinte, il semble peu opportun, à l'avenir, de chercher des classes encore plus spécifiques qui seraient elles-aussi $\mathcal{NP}$ -complètes. Par contre, la recherche d'autres classes polynomiales n'est pas à exclure. En particulier, on préconise l'emploi de familles de graphes orientés caractérisées par l'absence de certaines configurations.

Une réduction du problème du *Stable Maximum* vers le problème de la 4-coloration orientée permet d'établir des résultats d'inapproximabilités pour le problème du nombre chromatique orienté : à moins que $\mathcal{P}$ n'égale $\mathcal{NP}$, ce problème n'est pas approximable à rapport différentiel constant (contrairement aux problèmes de coloration dans le cadre non-orienté). Sous une hypothèse quelque peu plus forte ($\mathcal{P} \neq \mathcal{ZPP}$), ce problème n'est pas approximable avec un rapport différentiel de $O(n^{\varepsilon-1})$, pour tout ε strictement positif. Plusieurs voies sont ici envisageables : premièrement, le résultat d'inapproximation différentiel obtenu ne nous renseigne en rien quant à la nature de ce problème en approximation classique (même s'il nous paraît fort étonnant qu'il soit facilement approximable compte tenu de la condition d'unidirection entre les classes), et deuxièmement ne nous dispense pas de rechercher son appartenance exacte aux différentes classes de la hiérarchie de l'approximation différentielle. Néanmoins, nous préconisons une voie médiane entre la recherche d'une famille polynomiale et celle d'un algorithme à garantie de performance. On pourra en effet préférer rechercher une classe de graphes orientés pour laquelle il existe un algorithme garantissant un rapport d'approximation différentiel ou classique intéressant. Cette voie nous semble cumuler l'avantage de la restriction d'instances avec l'ambition d'un résultat dépassant la limite fixée par le résultat d'inapproximabilité. C'est,

par exemple, ce que nous pensons faire prochainement en adaptant la notion de graphe « parfait » au cadre orienté. Notons que les conditions du type absence de certaines configurations semblent particulièrement propices à l'obtention de familles approximables. Plus généralement, il ne serait pas étonnant que ce type de condition permette l'obtention de famille sur lesquelles il est aisé de travailler, puisque cette caractérisation limite fortement l'univers des possibles. Ainsi pense t'on qu'elle puisse être mise en œuvre avec succès dans d'autres domaines, comme par exemple pour la recherche des liens entre nombre chromatique orienté et d'autres indices du graphe orienté.

Coloration mixte

Dans un premier temps, les liens entre la coloration mixte et les colorations classiques et orientées sont établis, et nous permettent d'affirmer que cette notion en est une généralisation. Nous décrivons un algorithme glouton garantissant un rapport d'approximation différentiel pour les problèmes de nombres chromatiques mixtes (et donc orientée) égal à $O\left(\frac{\log(n)^2}{\log(k)}\right)$. Pour des travaux à venir, cet algorithme semble améliorable tant au niveau pratique (éventuelle implémentation) qu'au niveau théorique. En particulier, la restriction à des familles de graphes particuliers (spécialement si ces familles permettent l'obtention d'une majoration du nombre de couleurs de taille 1) semble, là encore, un bon moyen d'obtenir de meilleures performances.

Nous introduisons, à partir de la coloration mixte, le polynôme chromatique mixte qui est une généralisation des polynômes chromatiques classiques et orientés. La formule de récurrence permettant son calcul de manière récursive est démontrée et nous établissons ses premières propriétés. Etant donné un graphe mixte $\mathcal{G}$ d'ordre n , il peut exister de nombreux graphes mixtes d'ordre n ayant même polynôme chromatique mixte que $\mathcal{G}$. Une caractérisation du graphe $M(\mathcal{G})$, défini comme celui étant maximal au sens des arêtes, est donnée. Ce graphe mixte intervient dans l'étude des graphes mixtes $\mathcal{G}$ dont les colorations mixtes coïncident avec des colorations classiques de $Und(\mathcal{G})$. L'interprétation de la valeur en -1 du polynôme chromatique mixte est ensuite abordée, faisant écho à un résultat de Stanley ([Stanley, 1973]). Pour les graphes $\mathcal{G}$ tels que $\mathcal{C}(M(\mathcal{G})) = \emptyset$ (cf. page 41), nous retrouvons exactement l'interprétation de Stanley donnée dans le cadre non-orienté, et remarquons que l'ensemble de la théorie du polynôme chromatique est valable pour ces graphes. L'étude de cette interprétation se poursuit sur deux familles de graphes mixtes : la première est celle des graphes mixtes $\mathcal{G}$ vérifiant $|\mathcal{C}(M(\mathcal{G}))| = 1$, la seconde, celle des graphes mixtes $\mathcal{G}$ tels que $\mathcal{C}(M(\mathcal{G})) = \{\{(x, y), (z, t)\}, \{(x, y), (u, v)\}\}$ et les sommets x, y sont dans une

composante connexe différente des sommets u, v, z , et t . Ces interprétations font apparaître un décompte du nombre d'orientations acircuitiques de $M(\mathcal{G})$ vérifiant certaines conditions.

L'extension de ces interprétations à d'autres familles semble difficile mais néanmoins pas impossible à la condition d'introduire une notion englobant les paramètres pour l'heure mis en évidence : classe de connexité, existence de chemin et / ou orientation dans le même sens des paires d'arcs de $\mathcal{C}(\mathcal{G})$.

De manière plus générale, le polynôme chromatique est une notion extrêmement riche, établissant des liens entre différents domaines de la théorie des graphes. Il serait intéressant de regarder dans quelles mesures les résultats connus dans le cadre classique se généralisent au cadre mixte. Notons qu'il nous semble plus simple de regarder ces adaptations directement du cadre non orienté au cadre mixte plutôt que du cadre non orienté au cadre orienté, quand bien même il serait plus spécifique que le cadre mixte. En effet, nous retrouvons, au sein du cadre mixte, le cadre classique, impliquant que tout futur résultat mixte doive s'appuyer sur le cadre classique connu, alors que l'établissement d'une propriété dans le cadre orienté ne nous laisse pas ce palier.

Décomposition acircuitique

Nous démontrons la $\mathcal{NP}$ -complétude du problème **Dec₃** et complétons cette étude en donnant un algorithme polynomial sur la famille des tournois. Notre souhait étant d'établir un premier résultat de $\mathcal{NP}$ -complétude, il nous semble relativement aisé d'améliorer ces résultats, soit par la recherche de familles d'instances pour lesquelles ce problème est $\mathcal{NP}$ -complet, soit par celle de familles polynomiales. Du point de vu structurel, il serait intéressant de relier le nombre α -chromatique d'un graphe orienté à d'autres paramètres (ou indices) de ce graphe. De telles directions d'études paraissent pour l'heure relativement aisées et fécondes. Par exemple, toute k -coloration orientée d'un graphe est nécessairement une k -décomposition acircuitique de celui-ci. Aussi, $dec(\vec{G}) \leq \chi_o(\vec{G})$. Une telle inégalité suscite des interrogations : quels sont les cas d'égalité ? Existe t'il une inégalité inverse ? Existe t'il une inégalité inverse plus fine pour une famille particulière de graphe ? Une telle inégalité permettrait d'hériter des différentes relations établies entre le nombre chromatique orienté et d'autres paramètres du graphes (par exemple, le nombre d'arboricité au moyen de [Kostochka et al., 1997]). Une autre direction de recherche consiste en l'approximation du problème du nombre α -chromatique, que nous n'avons pas étudié pour l'heure. Toujours dans ce domaine, nous pouvons tenter de caractériser les graphes déterminés par la connaissance croisée de deux indices. Par exemple, quels sont les graphes

orientés $\vec{G}$ d'ordre 4 tels que $\chi_o(\vec{G}) = 4$ et $dec(\vec{G}) = 3$?

Nous avons ensuite focalisé notre attention sur la notion de tournoi a -indécomposable (les seules décompositions acircuitiques sont triviales) et avons démontré que la probabilité qu'un tournoi d'ordre n soit a -indécomposable tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Au sein de cette famille, nous caractérisons, à l'aide des tournois circulants, les tournois sommet-critiques a -indécomposable (pour tout sommet x de $\vec{G}$, le graphe orienté $\vec{G} \setminus \{x\}$ admet au moins une décomposition acircuitique non triviale).

La dernière partie de cette thèse est consacrée à la notion de polynôme chromatique acircuitique, que nous introduisons. Grâce à l'introduction d'une condition sur les paires de sommets, nous démontrons qu'il vérifie une formule de récurrence et établissons ses premières propriétés. De très nombreux travaux peuvent poursuivre ceux présentés ici. Par exemple, l'interprétation en -1 est possible, tout comme l'étude de l'adaptation d'autres propriétés du polynôme chromatique à celui-ci.

Réflexions générales

La notion de polynôme chromatique s'étend de la coloration classique aux colorations orientées, mixtes et à la décomposition acircuitique. Sans surprise, nous conjecturons qu'elle s'étend aux autres partitions de l'ensemble des sommets d'un graphe (orienté ou non) que nous avons cité en introduction de cette thèse. Notons néanmoins que cette adaptation peut parfois n'être pas immédiate, comme nous l'avons observé dans le cas de la décomposition acircuitique. Outre le questionnement sur l'adaptation des propriétés du polynôme chromatique (classique) à ces nouveaux objets, nous pensons qu'une approche axiomatique est possible. À savoir, quelles sont les propriétés vérifiées par ces polynômes connaissant les contraintes imposées sur ces partitions ? Par exemple, le polynôme chromatique d'un graphe ayant deux composantes connexes est le produit des polynômes chromatiques de ces sous-graphes connexes. Cette propriété devient fausse pour la coloration orientée. Est-ce le caractère orienté ou est-ce, plus finement, la propriété d'unidirection entre les classes qui l'infère ? Dans le second cas, nous en déduisons que cette propriété est, par exemple, fausse pour le polynôme chromatique acircuitique, mais vraie pour le polynôme chromatique relatif à la coloration orientée circulaire (qui n'impose pas la propriété d'unidirection entre les classes monochromatiques).

Rechercher la « structure » d'un graphe peut se faire au moyen du calcul de multiples indices. Différents travaux relient les indices les uns aux autres, ce qui conduit à un intéressant problème : si un indice est fortement lié à d'autres indices, son calcul nous renseigne sur leurs valeurs, rendant

intéressant le calcul de cet indice. Mais, d'un autre côté, si un indice est indépendant de tout autre indice (dans le sens où nous ne connaissons aucune double inégalité fine), l'information qu'il contient sur le graphe ne peut se déduire des autres indices ; son calcul devient intéressant. Au final, tout indice serait intéressant !

Enfin, d'autres approches des problèmes de coloration que la nôtre existent, notamment en classification. Notre problématique consiste à obtenir une partition de l'ensemble des sommets minimisant le nombre de couleurs, étant fixé qu'elle ne doit violer aucune condition. Une approche différente est possible : fixons-nous le nombre de couleurs et cherchons à trouver une coloration de l'ensemble des sommets minimisant le nombre de contraintes violées par celles-ci (étant entendu qu'une contrainte est violée, par exemple dans le cadre de la coloration orientée, pour chaque arc dans une classe monochromatique ou pour chaque arc contredisant l'unidirection entre les classes). Cette approche permet alors le partitionnement d'un gros graphe en un nombre fixé de petits graphes garantissant le respect d'une certaine structure.

Bibliographie

- [Albert et Barbási, 1999] Albert, R. et Barbási, A.-L. (1999). Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286 :509–512.
- [Alpert et Kahng, 1995] Alpert, C. J. et Kahng, A. B. (1995). Recent directions in netlist partitioning : a survey. Technical report, Computer Science department, University of California at Los Angeles.
- [Appel et Haken, 1977] Appel, K. et Haken, W. (1977). Every planar map is four-colorable, part i : Discharging. *Illinois Journal of Math*, 21 :429–490.
- [Appel et al., 1977] Appel, K., Haken, W., et Koch, J. (1977). Every planar map is four-colorable, part ii : Reducibility. *Illinois Journal of Math*, 21 :491–567.
- [Ausiello et al., 2003] Ausiello, G., Crescenzi, P., Gambosi, G., Kann, V., Marchetti, A., Spaccamela, et Protasi, M. (2003). *Complexity and Approximation*. Springer.
- [Bang-Jensen et Gutin, 2000] Bang-Jensen, J. et Gutin, G. (2000). *Diagrams : Theory, Algorithms and Applications*. Springer Monographs in Mathematics.
- [Bang-Jensen et Hell, 1990] Bang-Jensen, J. et Hell, P. (1990). The effect of two cycles on the complexity of colorings by directed graphs. *Discrete Mathematics*, 26 :1–23.
- [Berger et Rompel, 1990] Berger, B. et Rompel, J. (1990). A better performance guarantee for approximate graph coloring. *Algorithmica*, 5(4) :459–466.
- [Berry et al., 2004] Berry, A., Kaba, B., Nadif, M., Sanjuan, E., et Sigayret, A. (2004). Classification et désarticulation de termes. *Actes des JADT 2004*.
- [Biggs, 2001] Biggs, N. (2001). *Algebraic Graph Theory*. Cambridge Mathematical Library.
- [Birkhoff et Lewis, 1946] Birkhoff, G. et Lewis, D. (1946). Chromatic polynomials. *Trans. American Mathematical Society*, 60 :355–451.

-
- [Bokal et al., 2004] Bokal, D., Fijavz, G., Juvan, M., Kayll, M., et Mohar, B. (2004). The circular number of a digraph. *Journal of Graph Theory*, 46 :227–240.
- [Boorman et al., 1976] Boorman, S., Breiger, R., et White, H. C. (1976). Social structure from multiple networks : Part i. blockmodels of roles and positions. *American Journal of Sociology*, 81 :730–780.
- [Boorman et White, 1976] Boorman, S. et White, H. C. (1976). Social structure from multiple networks : Part ii. role interlock. *American Journal of Sociology*, 81 :1384–1446.
- [Boppana, 1987] Boppana, R. B. (1987). Eigenvalues and graph bisection : An average case analysis. *Proceedings of the 28th Annual Symposium Foundation Computer Science IEEE*.
- [Borodin et al., 1999] Borodin, O., Kostochka, A. V., Nešetřil, J., Raspaud, A., et Sopena, E. (1999). On the maximum average degree and the oriented chromatic number of a graph. *Discrete Mathematics*, 206 :77–89.
- [Borodin et al., 2001] Borodin, O. V., der Flaass, D. F., Kostochka, A. V., Raspaud, A., et Sopena, E. (2001). On deeply critical oriented graphs. *Journal of Combinatorics Theory Serie B*, 81 :150–155.
- [Borodin et al., 1998] Borodin, O. V., Kostochka, A. V., Nešetřil, J., Raspaud, A., et Sopena, E. (1998). On universal graphs for planar oriented graphs of a given girth. *Discrete Mathematics*, 188 :78–85.
- [Boudabbous et al., 2000] Boudabbous, Y., Dammak, J., et Ille, P. (2000). Indecomposability and duality of tournaments. *Discrete Mathematics*, 223 :55–82.
- [Bouissairi et al., 2004] Bouissairi, A., Ille, P., Lopez, G., et Thomassé, S. (2004). The c_3 -structure of the tournaments. *Discrete Mathematics*, 277 :29–43.
- [Brooks, 1941] Brooks, R. (1941). On colouring the nodes of a network. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 37 :194–197.
- [Brown, 1992] Brown, J. I. (1992). A vertex critical graph without critical edge. *Discrete Mathematics*, 102 :99–101.
- [Chung, 1997] Chung, F. R. (1997). *Spectral Graph Theory*. AMS.
- [Colombo et al., 2003] Colombo, T., Guénoche, A., et Quentin, Y. (2003). Recherche de zones denses dans un graphe ; application aux gènes orthologues. *Proceedings of the Fourth International Conference Jim'2003*.
- [Courcelle, 1994] Courcelle, B. (1994). The monadic second order logic of graphs vi : on several representations of graphs by relational structures. *Journal of Combinatorial Theory, Serie B*, 54 :117–149.
-

-
- [Cournier et Ille, 1998] Cournier, A. et Ille, P. (1998). Minimal indecomposable graphs. *Discrete Mathematics*, 183 :61–80.
- [Culus et Demange, 2006] Culus, J.-F. et Demange, M. (2006). Oriented coloring : Complexity and approximation. In *Current Trends in Theory and Practice of Computer Science, SofSem 2006 proceedings*, pages 226–236. Lecture Note in Computer Science 3831.
- [Cvetkovic et al., 1997] Cvetkovic, D., Rowlinson, P., et Simic, S. (1997). *Eigenspaces of graphs*, volume 66 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press.
- [Dahlhaus et al., 2002] Dahlhaus, E., Gustedt, J., et MacConnell, R. M. (2002). Partially complemented representation of digraphs. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 5(2) :147–168.
- [de Fraisse et Kuntz, 1992] de Fraisse, H. et Kuntz, P. (1992). Pagination of large scale networks ; embedding a graph in $\mathbb{R}^n$ for effective partitioning. *Algorithmic Review*, 2(3) :105–112.
- [de Werra, 1985] de Werra, D. (1985). An introduction to timetabling. *European Journal of Operational Research*, 19 :151–162.
- [Demange et al., 2005] Demange, M., Erkim, T., et de Werra, D. (2005). $(p; k)$ -coloring problems in line graphs. *Theoretical Computer Science*, 349 :462–474.
- [Demange et al., 1998] Demange, M., Grisoni, P., et Paschos, V. (1998). Differential approximation algorithms for some combinatorial optimization problems. *Theoretical Computer Science*, 209 :107–122.
- [Dong et al., 2005] Dong, F., Koh, K., et Teo, K. (2005). *Chromatic Polynomials and Chromaticity of Graphs*. World Scientific Pub Co Inc.
- [Du et Pardalos, 1998] Du, D.-Z. et Pardalos, P. (1998). *Handbook of Combinatorial Optimization*, volume 2. Kluwer Academic Publishers.
- [Duh et Fürer, 1997] Duh, R.-C. et Fürer, M. (1997). Approximation of the k -set cover by semi-local optimization. *Proceeding of the Twenty-Ninth Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, pages 256–264.
- [Erdos, 1979] Erdos, P. (1979). Problems and results in number theory and graphs theory. *Proc. Ninth Manitoba Conference on Numerical Math. and Computing*, pages 3–21.
- [Erkim et de Werra, 2005] Erkim, T. et de Werra, D. (2005). On split coloring problems. *Journal of Combinatorial Optimization*, 10 :211–225.
- [Everett et Nieminen, 1980] Everett, M. et Nieminen, J. (1980). Partitions and homomorphisms in directed and undirected graphs. *Journal of Mathematical Sociology*, 7 :91–111.
-

-
- [Feder et al., 2003] Feder, T., Hell, P., et Mohar, B. (2003). Acyclic homomorphisms and circular colorings of digraphs. *SIAM Journal of Discrete Mathematics*, 17.
- [Ferré et Jouve, 2002] Ferré, L. et Jouve, B. (2002). Vertex partitioning of a class of digraphs. *Mathématiques et Sciences Humaines*, 158 :59–77.
- [Gallai, 1963] Gallai, T. (1963). Kritische graphen. *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.*, 8 :165–192.
- [Gebhard et Sagan, 2000] Gebhard, D. D. et Sagan, B. E. (2000). Sinks in orientations of graphs. *Journal of Combinatorics Theory, Serie B* :130–146.
- [Gessel, 1996] Gessel, I. M. (1996). Counting acyclic digraphs by sources and sinks. *Discrete Mathematics*, pages 253–258.
- [Gessel, 2001] Gessel, I. M. (2001). Acyclic orientations and chromatic generating function. *Discrete Mathematics*, 232 :119–130.
- [Golumbic, 1980] Golumbic, M. C. (1980). *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. Academic Press, New York.
- [Guénoche, 2003] Guénoche, A. (2003). Partitions optimisées selon différents critères : évaluation et comparaison. *Mathématiques et Science Humaines*, 161 :41–58.
- [Halldórson, 1993] Halldórson, M. (1993). A still better performance guarantee for approximate graph coloring. *Information Processing Letters*, 45 :19–23.
- [Hansen et Delattre, 1978] Hansen, P. et Delattre, M. (1978). Complete-link cluster analysis by graph coloring. *Journal of American Statistical Association*, 73 :397–403.
- [Hassin et Lahav, 1994] Hassin, R. et Lahav, S. (1994). Maximizing the number of unused colors in the vertex coloring problem. *Information Processing Letter*, 52(2) :87–90.
- [Hell et Nesetril, 2004] Hell, P. et Nesetril, J. (2004). *Graphs and Homomorphism*. Oxford University press.
- [Hoffman, 1970] Hoffman, A. J. (1970). *On eigenvalues and colorings of graphs*, pages 79–91. Academic Press.
- [Ille, 1997] Ille, P. (1997). Indecomposable graphs. *Discrete Mathematics*, 173 :71–78.
- [Jensen et al., 1998] Jensen, J. B., Hell, P., et MacGillivray, G. (1998). The complexity of colouring by semicomplete digraphs. *SIAM. Journal of Discrete Mathematics*, 1 (3).
-

-
- [Jensen, 1996] Jensen, T. R. (1996). *Structure of Critical Graph*. PhD thesis, Osden University.
- [Jensen et Toft, 1995] Jensen, T. R. et Toft, B. (1995). *Graph Coloring Problems*. Wiley Intersciences Series in Discrete Mathematics and Optimization.
- [Johnson, 1974] Johnson, D. (1974). Approximation algorithms for combinatorial problems. *Journal of Computer and System Sciences*, 9 :256–278.
- [Jolliffe, 1986] Jolliffe, I. T. (1986). *Principal Component analysis*. Springer Verlag.
- [Jouve, 1999] Jouve, B. (1999). *La multiplicité des aires visuelles du cortex : approche par la théorie des graphes*. PhD thesis, Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales.
- [Jouve, 2005] Jouve, B. (2005). Transitive convex subsets in large tournaments. *7th International Colloquium on Graph Theory ICGT '05*, pages Hyère, France.
- [Karp, 1972] Karp, R. (1972). Reducibility among combinatorial problems. In Miller, R. et Thatcher, J., editors, *Complexity of Computer Computations*, pages 85–104. Plenum Press.
- [Klostermeyer et MacGillivray, 2004a] Klostermeyer, W. F. et MacGillivray, G. (2004a). Analogues of cliques for oriented coloring. *Discussiones Mathematicae : Graph Theory*, 24 :373–387.
- [Klostermeyer et MacGillivray, 2004b] Klostermeyer, W. F. et MacGillivray, G. (2004b). Homomorphisms and oriented colorings of equivalence classes of oriented graphs. *Discrete Mathematics*, 274 :161–172.
- [Kostochka et al., 1997] Kostochka, A. V., Sopena, E., et Zhu, X. (1997). Acyclic and oriented chromatic numbers of graphs. *Journal of Graph Theory*, 24 :331–340.
- [Lass, 2001] Lass, B. (2001). Orientations acycliques et le polynôme chromatique. *European Journal of Combinatorics*, 22 :1101–1123.
- [Latapy et Guillaume, 2004] Latapy, M. et Guillaume, J.-L. (2004). *Topologie d'Internet et du Web : mesure et modélisation*, pages 213–226. Les Canadiens en Europe.
- [Lorrain et White, 1971] Lorrain, F. et White, H. C. (1971). Structural equivalence of individuals in social networks. *Journal of Mathematical Sociology*, 1 :49–80.
- [MacConnell et de Montgolfier, 2005] MacConnell, R. M. et de Montgolfier, F. (2005). Linear-time modular decomposition of directed graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 145(2) :189–209.
-

-
- [Mohar, 2003] Mohar, B. (2003). Circular colorings of edge-weighted graphs. *Journal of Graph Theory*, 43 :107–116.
- [Mohar et Poljak, 1993] Mohar, B. et Poljak, S. (1993). *Eigenvalues in Combinatorial Optimization*, pages 107–151. IMA Volumes in Mathematics and Its Applications. Springer Verlag.
- [Molloy et Reed, 2001] Molloy, M. et Reed, B. (2001). *Graph colouring and the Probabilistic Method*. Springer-Verlag, Paris.
- [Monnot et al., 2003] Monnot, J., Paschos, V. T., et Toulouse, S. (2003). *Approximation polynomiale des problèmes $\mathcal{NP}$ -difficiles*. Hermès Science publication.
- [Nesetril et Raspaud, 2000] Nesetril, J. et Raspaud, A. (2000). Colored homomorphisms of colored mixed graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, 80 :147–155.
- [Nesetril et al., 1997] Nesetril, J., Raspaud, A., et Sopena, E. (1997). Colorings and girth of oriented planar graphs. *Discrete Mathematics*, 165/166 :519–530.
- [Neumann-Lara, 1982] Neumann-Lara, V. (1982). The dichromatic number of a digraphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 33 :265–270.
- [Neumann-Lara, 1994] Neumann-Lara, V. (1994). The 3 and 4-dichromatic tournaments of minimum order. *Discrete Mathematics*, 135 :233–243.
- [Neumann-Lara et Urrutia, 1984] Neumann-Lara, V. et Urrutia, J. (1984). Vertex critical r -dichromatic tournaments. *Discrete Mathematics*, 49 :83–87.
- [Raspaud et Sopena, 1994] Raspaud, A. et Sopena, E. (1994). Good and semi-strong colorings of oriented planar graphs. *Information Processing Letter*, 51 :171–174.
- [Read, 1968] Read, R. (1968). An introduction to chromatic polynomials. *Journal of Combinatorial Theory*, 4 :52–71.
- [Saran et Vazirani, 1991] Saran, H. et Vazirani, V. (1991). Finding k -cuts within twice the optimal. *Proceedings of the I.I.I.E. Symposium Foundations of Computer Science*, pages 743–751.
- [Schmerl et Trotter, 1994] Schmerl, J. et Trotter, W. (1994). Critically indecomposable partially ordered sets, graphs, tournaments and other binary relational structures. *Discrete Mathematics*, 113 :191–205.
- [Sopena, 1994] Sopena, E. (1994). Computing chromatic polynomials of oriented graphs. *Proc. Formal Power Series and Algebraic Combinatorics FPSAC'94*, pages 413–422.
-

-
- [Sopena, 1997] Sopena, E. (1997). The chromatic number of oriented graphs. *Journal of Graph Theory*, 25 :190–205.
- [Sopena, 2001] Sopena, E. (2001). Oriented graph coloring. *Discrete Mathematics*, 229 :359–369.
- [Stanley, 1973] Stanley, R. (1973). Acycliques orientations of graphs. *Discrete Mathematics*, 5 :171–178.
- [Toft, 1995] Toft, B. (1995). Colouring, stable sets and perfect graphs. In Graham, R., Grotschel, M., et Lovasz, L., editors, *Handbook of Combinatorics*, pages 233–288. Elsevier Science.
- [Tovey, 1984] Tovey (1984). A simplified $\mathcal{NP}$ -complete satisfiability problem. *Discrete Applied Mathematics*, 8 :85–89.
- [Watts, 2003] Watts, D. J. (2003). *Small Worlds : the dynamics of Networks between Order and Randomness*. Princeton University Press.
- [Wigderson, 1983] Wigderson, A. (1983). Improving the performance guarantee for approximate graph coloring. *JACM*, 30(4) :729–735.
- [Wood, 2004] Wood, D. R. (2004). A note on the oriented chromatic number.
- [Zhu, 2001] Zhu, X. (2001). Circular chromatic number : a survey. *Discrete mathematics*, 229 :371–410.