

Décompositions acircuitiques de grands graphes: *des aspects algorithmiques aux aspects combinatoires*

Jean-François Culus

9 juin 2006

Passage du non-orienté à l'orienté

Non-orienté

Coloration

Orienté (antisymétrique)

Passage du non-orienté à l'orienté

Non-orienté

Coloration \leftrightarrow Homomorphisme

Orienté (antisymétrique)

Passage du non-orienté à l'orienté

Non-orienté

Coloration \leftrightarrow Homomorphisme

Homomorphisme orienté

Orienté (antisymétrique)

Passage du non-orienté à l'orienté

Non-orienté

Coloration \leftrightarrow Homomorphisme

Coloration orientée \leftrightarrow Homomorphisme orienté

Orienté (antisymétrique)

Passage du non-orienté à l'orienté

Non-orienté

Coloration \leftrightarrow Homomorphisme

Mixte
(antisymétrique)

Coloration mixte \leftrightarrow Homomorphisme mixte

Coloration orientée \leftrightarrow Homomorphisme orienté

Orienté (antisymétrique)

Passage du non-orienté à l'orienté

Non-orienté

Coloration \leftrightarrow Homomorphisme

Homomorphisme orienté

Orienté (antisymétrique)

Passage du non-orienté à l'orienté

Non-orienté

Coloration \leftrightarrow Homomorphisme

Homomorphisme acircuitique

Orienté (antisymétrique)

Passage du non-orienté à l'orienté

Non-orienté

Coloration \leftrightarrow Homomorphisme

Décomposition acircuitique \leftrightarrow Homomorphisme acircuitique

Orienté (antisymétrique)

Introduction

Coloration orientée

Coloration mixte

Décomposition acircuitique

Conclusion

Problématique

Homomorphisme et coloration

Homomorphismes orientés et Coloration orientée

Homomorphisme mixte et coloration mixte

Homomorphisme acircuitique et décomposition acircuitique

Partie I :

Introduction

Partie I :

Introduction

- ▶ Homomorphisme et Coloration

Partie I :

Introduction

- ▶ Homomorphisme et Coloration
- ▶ Homomorphisme Orienté et Coloration Orientée

Partie I :

Introduction

- ▶ Homomorphisme et Coloration
- ▶ Homomorphisme Orienté et Coloration Orientée
- ▶ Homomorphisme Mixte et Coloration Mixte

Partie I :

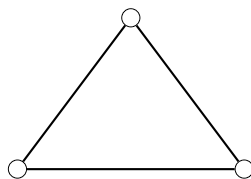
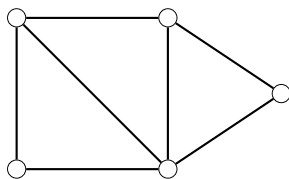
Introduction

- ▶ Homomorphisme et Coloration
- ▶ Homomorphisme Orienté et Coloration Orientée
- ▶ Homomorphisme Mixte et Coloration Mixte
- ▶ Homomorphisme Acircuitique et Décomposition Acircuitique

Homomorphisme

Définition

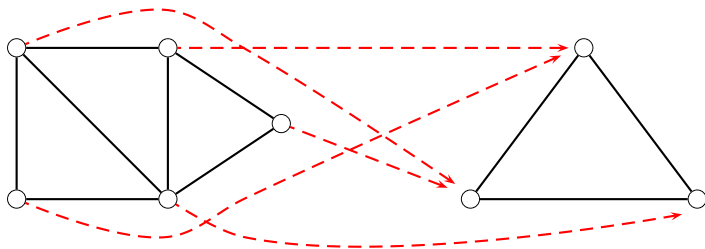
Soient $G = (V, E)$ et $H = (V', E')$ deux graphes simples. Un **homomorphisme** de G dans H est une application $f : V \rightarrow V'$ telle que : $\{x, y\} \in E \Rightarrow \{f(x), f(y)\} \in E'$.



Homomorphisme

Définition

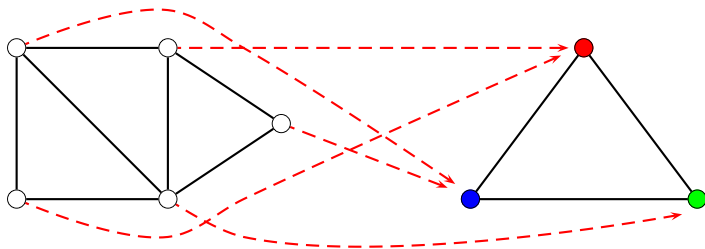
Soient $G = (V, E)$ et $H = (V', E')$ deux graphes simples. Un **homomorphisme** de G dans H est une application $f : V \rightarrow V'$ telle que : $\{x, y\} \in E \Rightarrow \{f(x), f(y)\} \in E'$.



Homomorphisme

Définition

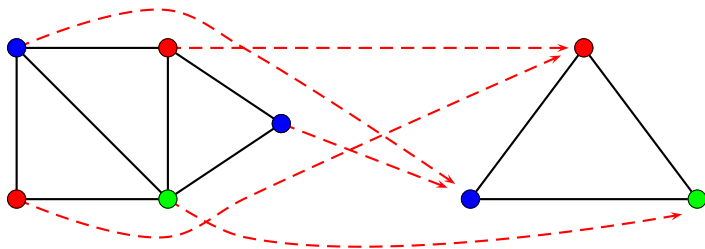
Soient $G = (V, E)$ et $H = (V', E')$ deux graphes simples. Un **homomorphisme** de G dans H est une application $f : V \rightarrow V'$ telle que : $\{x, y\} \in E \Rightarrow \{f(x), f(y)\} \in E'$.



Homomorphisme

Définition

Soient $G = (V, E)$ et $H = (V', E')$ deux graphes simples. Un **homomorphisme** de G dans H est une application $f : V \rightarrow V'$ telle que : $\{x, y\} \in E \Rightarrow \{f(x), f(y)\} \in E'$.



Coloration et homomorphisme

Définition

Le graphe G admet une k -coloration s'il existe un graphe H d'ordre k et un homomorphisme de G dans H .

Coloration et homomorphisme

Définition

Le graphe G admet une k -coloration s'il existe un graphe H d'ordre k et un homomorphisme de G dans H .

Définition

Le **nombre chromatique** de G (noté $\chi(G)$) est le plus petit entier k tel que G admet une k -coloration.

Coloration et homomorphisme

Définition

Le graphe G admet une k -coloration s'il existe un graphe H d'ordre k et un homomorphisme de G dans H .

Définition

Le **nombre chromatique** de G (noté $\chi(G)$) est le plus petit entier k tel que G admet une k -coloration.

Propriété : Lien nombre chromatique / homomorphisme

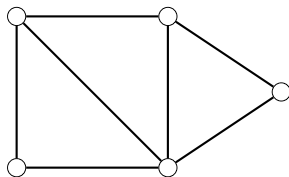
$\chi(G) \leq k$ si et seulement s'il existe un homomorphisme de G dans K_k .

Coloration comme partition sous-contrainte

Proposition

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. G admet une k -coloration si et seulement s'il existe une application $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ telle que

$$\{x, y\} \in E \Rightarrow c(x) \neq c(y).$$

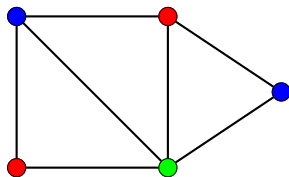


Coloration comme partition sous-contrainte

Proposition

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. G admet une k -coloration si et seulement s'il existe une application $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ telle que

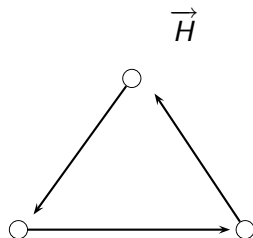
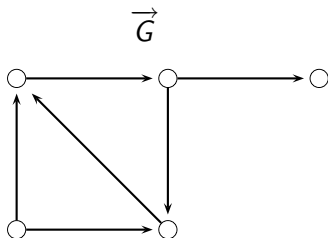
$$\{x, y\} \in E \Rightarrow c(x) \neq c(y).$$



Homomorphisme orienté

Définition

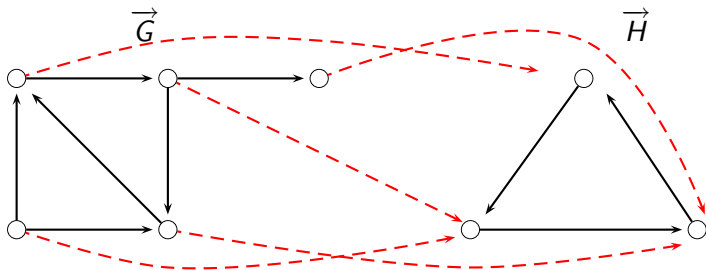
Soient $\vec{G} = (V, A)$ et $\vec{H} = (V', A')$ deux graphes orientés. Un **homomorphisme orienté** de \vec{G} dans \vec{H} est une application $f : V \rightarrow V'$ telle que : $(x, y) \in A \implies (f(x), f(y)) \in A'$.



Homomorphisme orienté

Définition

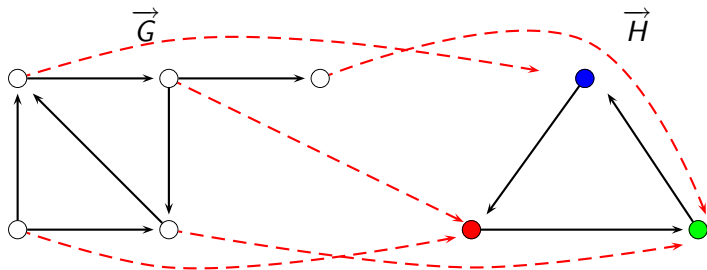
Soient $\vec{G} = (V, A)$ et $\vec{H} = (V', A')$ deux graphes orientés. Un **homomorphisme orienté** de \vec{G} dans \vec{H} est une application $f : V \rightarrow V'$ telle que : $(x, y) \in A \implies (f(x), f(y)) \in A'$.



Homomorphisme orienté

Définition

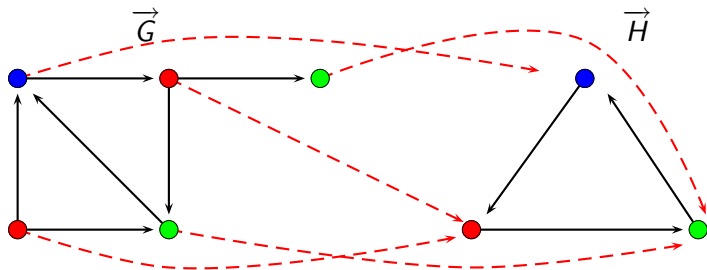
Soient $\vec{G} = (V, A)$ et $\vec{H} = (V', A')$ deux graphes orientés. Un **homomorphisme orienté** de \vec{G} dans \vec{H} est une application $f : V \rightarrow V'$ telle que : $(x, y) \in A \implies (f(x), f(y)) \in A'$.



Homomorphisme orienté

Définition

Soient $\vec{G} = (V, A)$ et $\vec{H} = (V', A')$ deux graphes orientés. Un **homomorphisme orienté** de \vec{G} dans \vec{H} est une application $f : V \rightarrow V'$ telle que : $(x, y) \in A \implies (f(x), f(y)) \in A'$.



Coloration orientée

Définition

Un graphe orienté $\vec{G} = (V, A)$ admet une **k-coloration orientée** s'il existe un graphe orienté \vec{H} d'ordre k et un homomorphisme orienté de \vec{G} dans \vec{H} .

Coloration orientée

Définition

Un graphe orienté $\vec{G} = (V, A)$ admet une **k -coloration orientée** s'il existe un graphe orienté \vec{H} d'ordre k et un homomorphisme orienté de \vec{G} dans \vec{H} .

Définition

Le **nombre chromatique orienté** de \vec{G} (noté $\chi_o(\vec{G})$) est le plus petit entier k tel qu'il existe une k -coloration orientée de \vec{G} .

Coloration orientée

Définition

Un graphe orienté $\vec{G} = (V, A)$ admet une **k -coloration orientée** s'il existe un graphe orienté \vec{H} d'ordre k et un homomorphisme orienté de \vec{G} dans \vec{H} .

Définition

Le **nombre chromatique orienté** de \vec{G} (noté $\chi_o(\vec{G})$) est le plus petit entier k tel qu'il existe une k -coloration orientée de \vec{G} .

Propriété : Lien $\chi_o(\vec{G})$ / homomorphisme orienté

$\chi_o(\vec{G}) \leq k$ s'il existe un homomorphisme orienté de \vec{G} dans un tournoi d'ordre k .

Coloration orientée comme partition sous contraintes

Proposition

Le graphe orienté \vec{G} admet une k -coloration orientée s'il existe une application $c_o : V \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ vérifiant :

Coloration orientée comme partition sous contraintes

Proposition

Le graphe orienté \vec{G} admet une k -coloration orientée s'il existe une application $c_o : V \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ vérifiant :

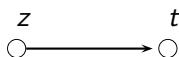
- ▶ $(x, y) \in A \implies c_o(x) \neq c_o(y)$,

Coloration orientée comme partition sous contraintes

Proposition

Le graphe orienté \vec{G} admet une k -coloration orientée s'il existe une application $c_o : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ vérifiant :

- ▶ $(x, y) \in A \implies c_o(x) \neq c_o(y)$,
- ▶ $\forall \{(x, y), (z, t)\} \subset A, c_o(x) = c_o(t) \implies c_o(y) \neq c_o(z)$.



Coloration orientée comme partition sous contraintes

Proposition

Le graphe orienté \vec{G} admet une k -coloration orientée s'il existe une application $c_o : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ vérifiant :

- ▶ $(x, y) \in A \implies c_o(x) \neq c_o(y)$,
- ▶ $\forall \{(x, y), (z, t)\} \subset A, c_o(x) = c_o(t) \implies c_o(y) \neq c_o(z)$.

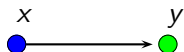


Coloration orientée comme partition sous contraintes

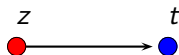
Proposition

Le graphe orienté \vec{G} admet une k -coloration orientée s'il existe une application $c_o : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ vérifiant :

- ▶ $(x, y) \in A \implies c_o(x) \neq c_o(y)$,
- ▶ $\forall \{(x, y), (z, t)\} \subset A, c_o(x) = c_o(t) \implies c_o(y) \neq c_o(z)$.



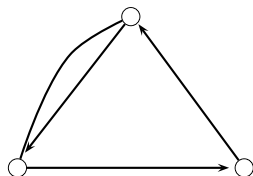
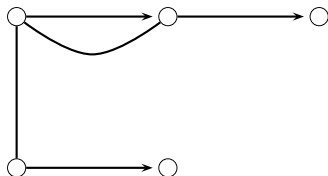
Propriété d'unidirection



Homomorphisme mixte

Définition

Soient $\mathcal{G} = (V, A, E)$ et $\mathcal{H} = (V', A', E')$ deux graphes mixtes antisymétriques. Un **homomorphisme mixte** de \mathcal{G} dans \mathcal{H} est une application $f : V \rightarrow V'$ vérifiant :

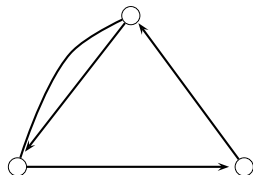
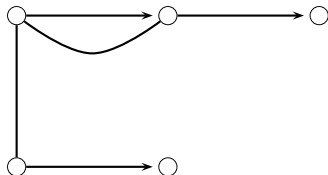


Homomorphisme mixte

Définition

Soient $\mathcal{G} = (V, A, E)$ et $\mathcal{H} = (V', A', E')$ deux graphes mixtes antisymétriques. Un **homomorphisme mixte** de \mathcal{G} dans \mathcal{H} est une application $f : V \rightarrow V'$ vérifiant :

- ▶ $\{x, y\} \in E \implies \{f(x); f(y)\} \in E'$,

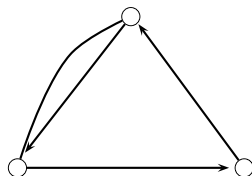
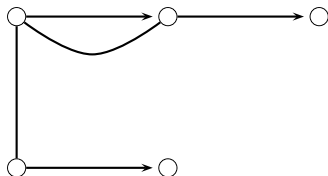


Homomorphisme mixte

Définition

Soient $\mathcal{G} = (V, A, E)$ et $\mathcal{H} = (V', A', E')$ deux graphes mixtes antisymétriques. Un **homomorphisme mixte** de \mathcal{G} dans \mathcal{H} est une application $f : V \rightarrow V'$ vérifiant :

- ▶ $\{x, y\} \in E \implies \{f(x); f(y)\} \in E'$,
- ▶ $(x, y) \in A \implies (c_o(x), c_o(y)) \in A'$.

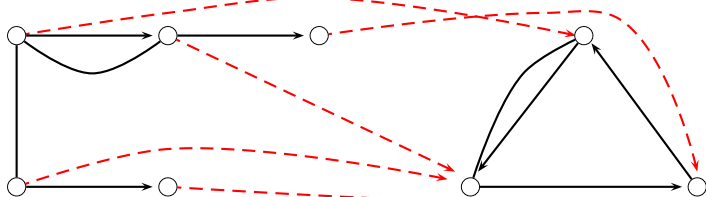


Homomorphisme mixte

Définition

Soient $\mathcal{G} = (V, A, E)$ et $\mathcal{H} = (V', A', E')$ deux graphes mixtes antisymétriques. Un **homomorphisme mixte** de \mathcal{G} dans \mathcal{H} est une application $f : V \rightarrow V'$ vérifiant :

- ▶ $\{x, y\} \in E \implies \{f(x); f(y)\} \in E'$,
- ▶ $(x, y) \in A \implies (c_o(x), c_o(y)) \in A'$.

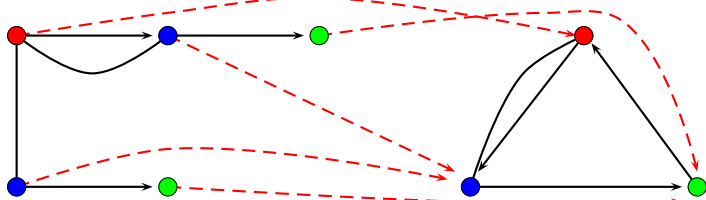


Homomorphisme mixte

Définition

Soient $\mathcal{G} = (V, A, E)$ et $\mathcal{H} = (V', A', E')$ deux graphes mixtes antisymétriques. Un **homomorphisme mixte** de \mathcal{G} dans \mathcal{H} est une application $f : V \rightarrow V'$ vérifiant :

- ▶ $\{x, y\} \in E \implies \{f(x); f(y)\} \in E'$,
- ▶ $(x, y) \in A \implies (c_o(x), c_o(y)) \in A'$.



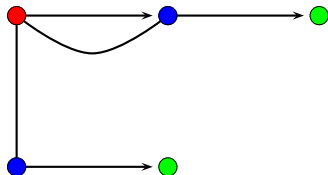
Coloration mixte comme partition sous-contrainte

Définition

Soit $\mathcal{G} = (V, A, E)$ un graphe mixte antisymétrique. Une

k -coloration mixte de \mathcal{G} est une application

$c_m : V \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ vérifiant :



Coloration mixte comme partition sous-contrainte

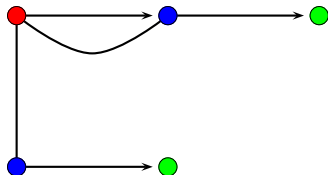
Définition

Soit $\mathcal{G} = (V, A, E)$ un graphe mixte antisymétrique. Une

k -coloration mixte de \mathcal{G} est une application

$c_m : V \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ vérifiant :

- ▶ $\{x, y\} \in E$ ou $(x, y) \in A \implies c_m(x) \neq c_m(y)$,



Coloration mixte comme partition sous-contrainte

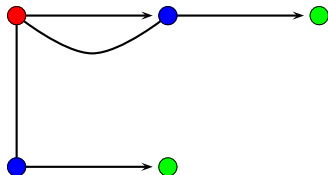
Définition

Soit $\mathcal{G} = (V, A, E)$ un graphe mixte antisymétrique. Une

k -coloration mixte de \mathcal{G} est une application

$c_m : V \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ vérifiant :

- ▶ $\{x, y\} \in E$ ou $(x, y) \in A \implies c_m(x) \neq c_m(y)$,
- ▶ $\{(x, y), (z, t)\} \subset A, c_m(x) = c_m(t) \implies c_m(z) \neq c_m(y)$,



Coloration mixte comme partition sous-contrainte

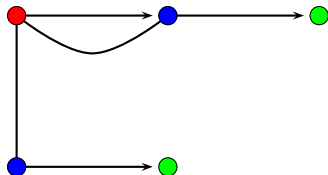
Définition

Soit $\mathcal{G} = (V, A, E)$ un graphe mixte antisymétrique. Une

k -coloration mixte de \mathcal{G} est une application

$c_m : V \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ vérifiant :

- ▶ $\{x, y\} \in E$ ou $(x, y) \in A \implies c_m(x) \neq c_m(y)$,
- ▶ $\{(x, y), (z, t)\} \subset A, c_m(x) = c_m(t) \implies c_m(z) \neq c_m(y)$,



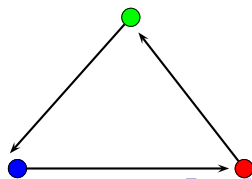
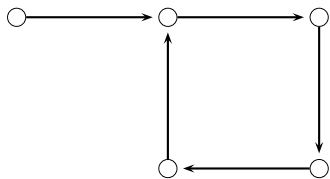
Le **nombre chromatique mixte** ($\chi_m(\mathcal{G})$) est le plus petit entier k tel qu'il existe une k -coloration mixte de \mathcal{G}

Homomorphisme acircuitique

Définition

Soient $\vec{G} = (V, A)$ et $\vec{H} = (V', A')$ deux graphes orientés antisymétriques. Un **homomorphisme acircuitique** de \vec{G} dans \vec{H} est une application $f : V \rightarrow V'$ telle que :

- ▶ $(x, y) \in A \implies (f(x), f(y)) \in A'$ ou $f(x) = f(y)$,

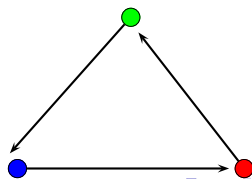
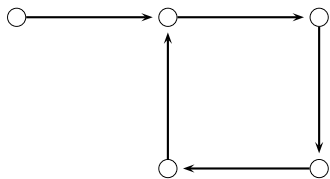


Homomorphisme acircuitique

Définition

Soient $\vec{G} = (V, A)$ et $\vec{H} = (V', A')$ deux graphes orientés antisymétriques. Un **homomorphisme acircuitique** de \vec{G} dans \vec{H} est une application $f : V \rightarrow V'$ telle que :

- ▶ $(x, y) \in A \implies (f(x), f(y)) \in A'$ ou $f(x) = f(y)$,
- ▶ $\forall \alpha \in V', f^{-1}(\alpha)$ est acircuitique dans \vec{G}

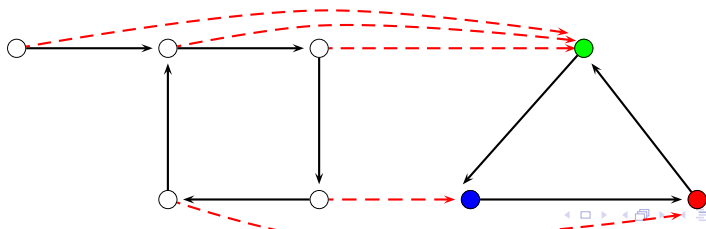


Homomorphisme acircuitique

Définition

Soient $\vec{G} = (V, A)$ et $\vec{H} = (V', A')$ deux graphes orientés antisymétriques. Un homomorphisme acircuitique de \vec{G} dans \vec{H} est une application $f : V \rightarrow V'$ telle que :

- ▶ $(x, y) \in A \implies (f(x), f(y)) \in A'$ ou $f(x) = f(y)$,
- ▶ $\forall \alpha \in V', f^{-1}(\alpha)$ est acircuitique dans \vec{G} .

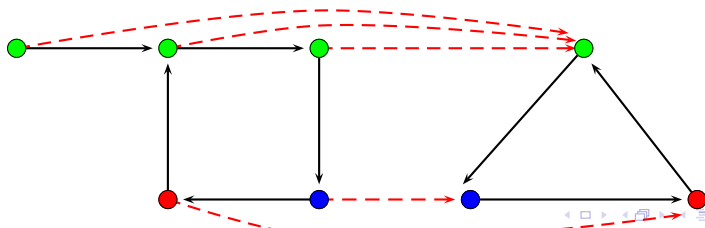


Homomorphisme acircuitique

Définition

Soient $\vec{G} = (V, A)$ et $\vec{H} = (V', A')$ deux graphes orientés antisymétriques. Un homomorphisme acircuitique de \vec{G} dans \vec{H} est une application $f : V \rightarrow V'$ telle que :

- ▶ $(x, y) \in A \implies (f(x), f(y)) \in A'$ ou $f(x) = f(y)$,
- ▶ $\forall \alpha \in V', f^{-1}(\alpha)$ est acircuitique dans \vec{G} .



Décomposition acircuitique

Définition

Le graphe mixte $\mathcal{G} = (V, A, E)$ admet une **k -décomposition acircuitique** s'il existe un graphe mixte $\mathcal{H} = (V', A', E')$ d'ordre k et un homomorphisme acircuitique de \mathcal{G} dans \mathcal{H} .

Décomposition acircuitique

Définition

Le graphe mixte $\mathcal{G} = (V, A, E)$ admet une **k -décomposition acircuitique** s'il existe un graphe mixte $\mathcal{H} = (V', A', E')$ d'ordre k et un homomorphisme acircuitique de \mathcal{G} dans \mathcal{H} .

Proposition : Comme partition sous-contraintes

$\mathcal{G} = (V, A, E)$ admet une k -décomposition acircuitique si et seulement s'il existe une application $d : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ telle que :

- ▶ $(x, y) \in A \Rightarrow d(x) = d(y)$ ou $(d(x), d(y)) \in A'$,

Décomposition acircuitique

Définition

Le graphe mixte $\mathcal{G} = (V, A, E)$ admet une **k -décomposition acircuitique** s'il existe un graphe mixte $\mathcal{H} = (V', A', E')$ d'ordre k et un homomorphisme acircuitique de \mathcal{G} dans \mathcal{H} .

Proposition : Comme partition sous-contraintes

$\mathcal{G} = (V, A, E)$ admet une k -décomposition acircuitique si et seulement s'il existe une application $d : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ telle que :

- ▶ $(x, y) \in A \Rightarrow d(x) = d(y)$ ou $(d(x), d(y)) \in A'$,
- ▶ $\forall \alpha \in \{1, 2, \dots, k\}$, $d^{-1}(\alpha)$ est acircuitique,

Décomposition acircuitique

Définition

Le graphe mixte $\mathcal{G} = (V, A, E)$ admet une **k -décomposition acircuitique** s'il existe un graphe mixte $\mathcal{H} = (V', A', E')$ d'ordre k et un homomorphisme acircuitique de \mathcal{G} dans \mathcal{H} .

Proposition : Comme partition sous-contraintes

$\mathcal{G} = (V, A, E)$ admet une k -décomposition acircuitique si et seulement s'il existe une application $d : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ telle que :

- ▶ $(x, y) \in A \Rightarrow d(x) = d(y)$ ou $(d(x), d(y)) \in A'$,
- ▶ $\forall \alpha \in \{1, 2, \dots, k\}$, $d^{-1}(\alpha)$ est acircuitique,
- ▶ $\{(x, y), (z, t)\} \subset A$, $c_m(x) = c_m(t) \implies c_m(z) \neq c_m(y)$.

Partie II

Coloration Orientée

Partie II

Coloration Orientée

- ▶ Complexité : Etat de l'art
- ▶ Complexité

Partie II

Coloration Orientée

- ▶ Complexité : Etat de l'art
- ▶ Complexité
- ▶ Approximation

Partie II

Coloration Orientée

- ▶ Complexité : Etat de l'art
- ▶ Complexité
- ▶ Approximation
- ▶ Pistes à suivre...

Complexité : Problème général

- ▶ Problème k -Coloration orientée
 - ▶ Entrée : Un graphe orienté \vec{G}

Complexité : Problème général

- ▶ Problème k -Coloration orientée
 - ▶ Entrée : Un graphe orienté \vec{G}
 - ▶ Sortie : Oui / Non

Complexité : Problème général

► Problème k -Coloration orientée

- Entrée : Un graphe orienté \vec{G}
- Sortie : Oui / Non
- Question : \vec{G} admet-il une k -coloration orientée ?

Complexité : Problème général

► Problème k -Coloration orientée

- Entrée : Un graphe orienté \vec{G}
- Sortie : Oui / Non
- Question : \vec{G} admet-il une k -coloration orientée ?

► Théorème [Klostermayer, MacGillivray, 2004]

Le problème de la 4-coloration orientée est \mathcal{NP} -complet même pour les instances connexes.

Complexité : Cas polynômiaux

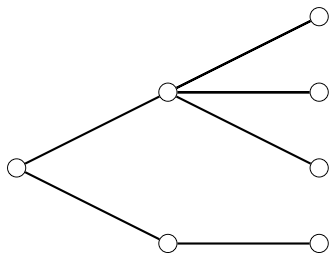
Proposition : Cas polynomiaux

- ▶ Les problèmes de 1, 2 et 3-Coloration orientée sont polynomiaux.

Complexité : Cas polynômiaux

Proposition : Cas polynomiaux

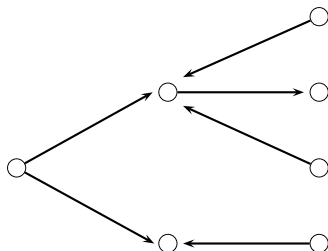
- ▶ Les problèmes de 1, 2 et 3-Coloration orientée sont polynomiaux.
- ▶ La famille des arbres orientés est polynomiale



Complexité : Cas polynômiaux

Proposition : Cas polynomiaux

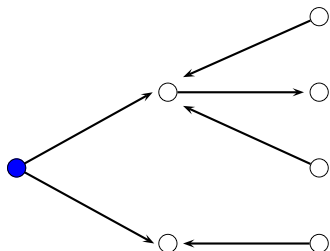
- ▶ Les problèmes de 1, 2 et 3-Coloration orientée sont polynomiaux.
- ▶ La famille des arbres orientés est polynomiale



Complexité : Cas polynômiaux

Proposition : Cas polynomiaux

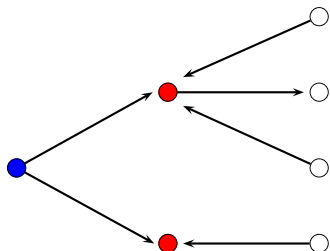
- ▶ Les problèmes de 1, 2 et 3-Coloration orientée sont polynomiaux.
- ▶ La famille des arbres orientés est polynomiale



Complexité : Cas polynômiaux

Proposition : Cas polynomiaux

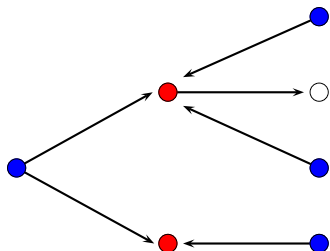
- ▶ Les problèmes de 1, 2 et 3-Coloration orientée sont polynomiaux.
- ▶ La famille des arbres orientés est polynomiale



Complexité : Cas polynômiaux

Proposition : Cas polynomiaux

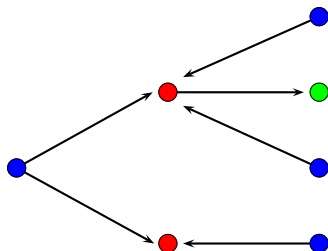
- ▶ Les problèmes de 1, 2 et 3-Coloration orientée sont polynomiaux.
- ▶ La famille des arbres orientés est polynomiale



Complexité : Cas polynômiaux

Proposition : Cas polynomiaux

- ▶ Les problèmes de 1, 2 et 3-Coloration orientée sont polynomiaux.
- ▶ La famille des arbres orientés est polynomiale



Une nouvelle classe \mathcal{NP} -complète

Théorème

Le problème de la 4-coloration orientée est \mathcal{NP} -complet même si l'instance appartient à la famille des graphes orientés

- ▶ biparti

Une nouvelle classe \mathcal{NP} -complète

Théorème

Le problème de la 4-coloration orientée est \mathcal{NP} -complet même si l'instance appartient à la famille des graphes orientés

- ▶ biparti
- ▶ acircuitique \neq acyclique !

Une nouvelle classe \mathcal{NP} -complète

Théorème

Le problème de la 4-coloration orientée est \mathcal{NP} -complet même si l'instance appartient à la famille des graphes orientés

- ▶ biparti
- ▶ acircuitique \neq acyclique !
- ▶ planaire

Une nouvelle classe \mathcal{NP} -complète

Théorème

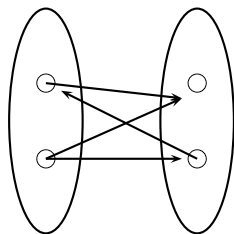
Le problème de la 4-coloration orientée est \mathcal{NP} -complet même si l'instance appartient à la famille des graphes orientés

- ▶ biparti
- ▶ acircuitique \neq acyclique !
- ▶ planaire
- ▶ de degré borné

Une nouvelle classe polynomiale

Proposition

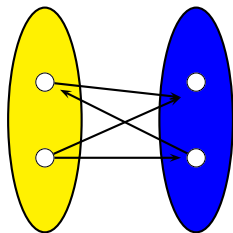
La famille des graphes orientés multipartis complets est polynômiale pour le problème du **nombre chromatique orienté**.



Une nouvelle classe polynomiale

Proposition

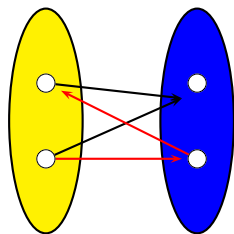
La famille des graphes orientés multipartis complets est polynômiale pour le problème du **nombre chromatique orienté**.



Une nouvelle classe polynomiale

Proposition

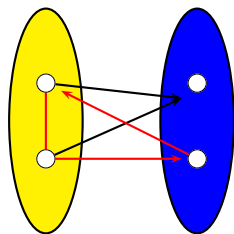
La famille des graphes orientés multipartis complets est polynômiale pour le problème du **nombre chromatique orienté**.



Une nouvelle classe polynomiale

Proposition

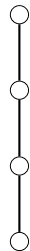
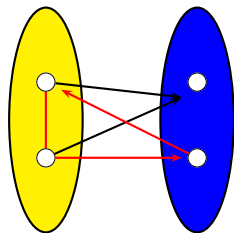
La famille des graphes orientés multipartis complets est polynômiale pour le problème du **nombre chromatique orienté**.



Une nouvelle classe polynomiale

Proposition

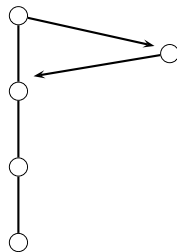
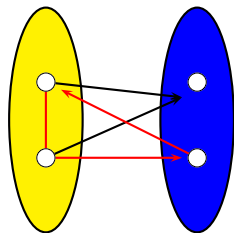
La famille des graphes orientés multipartis complets est polynômiale pour le problème du **nombre chromatique orienté**.



Une nouvelle classe polynomiale

Proposition

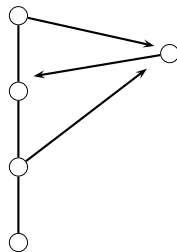
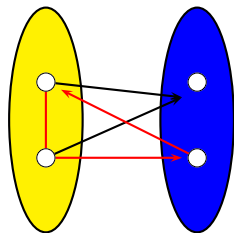
La famille des graphes orientés multipartis complets est polynômiale pour le problème du **nombre chromatique orienté**.



Une nouvelle classe polynomiale

Proposition

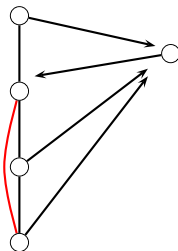
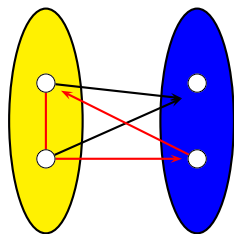
La famille des graphes orientés multipartis complets est polynômiale pour le problème du **nombre chromatique orienté**.



Une nouvelle classe polynomiale

Proposition

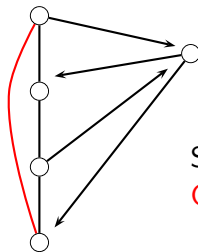
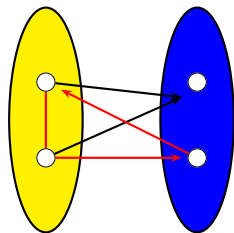
La famille des graphes orientés multipartis complets est polynômiale pour le problème du **nombre chromatique orienté**.



Une nouvelle classe polynomiale

Proposition

La famille des graphes orientés multipartis complets est polynômiale pour le problème du **nombre chromatique orienté**.



Sans P_4
Cographe

Approximation

► Théorème

Il existe une transformation du problème de **Stable Maximum** vers le problème du **nombre chromatique orienté** transformant tout rapport d'approximation différentielle $\rho(n)$ pour le problème du **Nombre chromatique orienté** en un rapport $\rho(3n)$ pour le problème du **Stable Maximum**.

Approximation

► Théorème

Il existe une transformation du problème de **Stable Maximum** vers le problème du **nombre chromatique orienté** transformant tout rapport d'approximation différentielle $\rho(n)$ pour le problème du **Nombre chromatique orienté** en un rapport $\rho(3n)$ pour le problème du **Stable Maximum**.

► Corollaire

Si $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, **Nombre chromatique orienté** n'est pas approximable avec un rapport différentiel constant.

Si $\mathcal{P} \neq \mathcal{ZPP}$, **Nombre chromatique orienté** n'est pas approximable avec un rapport différentiel de $O(n^{\epsilon-1})$.

Propositions de poursuite

Propositions de poursuite

- ▶ Approximation classique ?

Propositions de poursuite

- ▶ Approximation classique ?
- ▶ Obtention d'une famille approximable en différentielle.

Propositions de poursuite

- ▶ Approximation classique ?
- ▶ Obtention d'une famille approximable en différentielle.
- ▶ Passage au cadre mixte !

Partie III

Coloration mixte :

Partie III

Coloration mixte :

- ▶ Motivation du cadre mixte : l'approximation de $\chi_o(\vec{G})$.

Partie III

Coloration mixte :

- ▶ Motivation du cadre mixte : l'approximation de $\chi_o(\vec{G})$.
- ▶ Etat de l'art : les homomorphismes mixtes colorés

Partie III

Coloration mixte :

- ▶ Motivation du cadre mixte : l'approximation de $\chi_o(\vec{G})$.
- ▶ Etat de l'art : les homomorphismes mixtes colorés
- ▶ Approximation du problème de coloration mixte

Partie III

Coloration mixte :

- ▶ Motivation du cadre mixte : l'approximation de $\chi_o(\vec{G})$.
- ▶ Etat de l'art : les homomorphismes mixtes colorés
- ▶ Approximation du problème de coloration mixte
- ▶ Motivation du cadre mixte : le polynôme chromatique mixte

Partie III

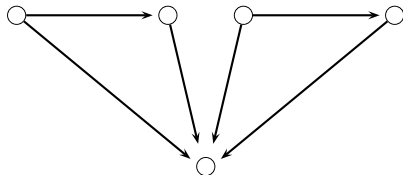
Coloration mixte :

- ▶ Motivation du cadre mixte : l'approximation de $\chi_o(\vec{G})$.
- ▶ Etat de l'art : les homomorphismes mixtes colorés
- ▶ Approximation du problème de coloration mixte
- ▶ Motivation du cadre mixte : le polynôme chromatique mixte
- ▶ Pistes à suivre...

Pourquoi passer au cadre mixte ?

Algorithme glouton de coloration

Soit G un graphe

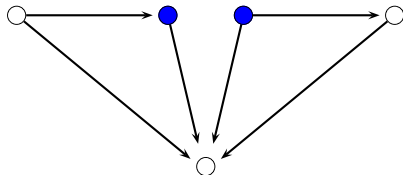


Pourquoi passer au cadre mixte ?

Algorithme glouton de coloration

Soit G un graphe

- ▶ On choisit S un ensemble stable de G que l'on colorie

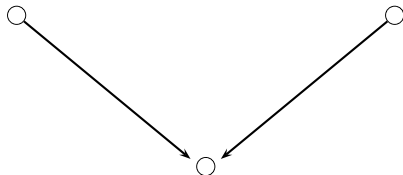


Pourquoi passer au cadre mixte ?

Algorithme glouton de coloration

Soit G un graphe

- ▶ On choisit S un ensemble stable de G que l'on colorie
- ▶ On prend $G \leftarrow G \setminus S$

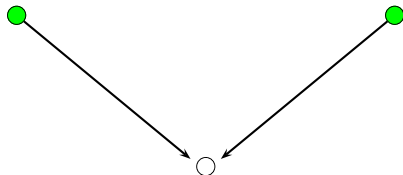


Pourquoi passer au cadre mixte ?

Algorithme glouton de coloration

Soit G un graphe

- ▶ Tant que $G \neq \emptyset$
- ▶ On choisit S un ensemble stable de G que l'on colorie
- ▶ On prend $G \leftarrow G \setminus S$
- ▶ fin Tant que



Pourquoi passer au cadre mixte ?

Algorithme glouton de coloration

Soit G un graphe

- ▶ Tant que $G \neq \emptyset$
- ▶ On choisit S un ensemble stable de G que l'on colorie
- ▶ On prend $G \leftarrow G \setminus S$
- ▶ fin Tant que

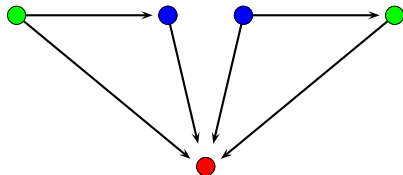


Pourquoi passer au cadre mixte ?

Algorithme glouton de coloration

Soit G un graphe

- ▶ Tant que $G \neq \emptyset$
- ▶ On choisit S un ensemble stable de G que l'on colorie
- ▶ On prend $G \leftarrow G \setminus S$
- ▶ fin Tant que



Contredit l'**unidirection**
entre les couleurs

Homomorphisme mixte coloré

Définition : Graphe mixte (m, n) -coloré

C'est un graphe mixte dont les arcs sont colorés avec m couleurs et les arêtes avec n couleurs.

Définition [Nesetril, Raspaud, 2000]

Soient $\mathcal{G} = (V, A, E)$ et $\mathcal{H} = (V', A', E')$ deux graphes mixtes (m, n) -colorés. Un **homomorphisme mixte coloré** de \mathcal{G} dans \mathcal{H} est une application $f : V \longrightarrow V'$ vérifiant :

Homomorphisme mixte coloré

Définition : Graphe mixte (m, n) -coloré

C'est un graphe mixte dont les arcs sont colorés avec m couleurs et les arêtes avec n couleurs.

Définition [Nesetril, Raspaud, 2000]

Soient $\mathcal{G} = (V, A, E)$ et $\mathcal{H} = (V', A', E')$ deux graphes mixtes (m, n) -colorés. Un **homomorphisme mixte coloré** de \mathcal{G} dans \mathcal{H} est une application $f : V \rightarrow V'$ vérifiant :

- ▶ $(x, y) \in A \implies (f(x), f(y)) \in A'$,

Homomorphisme mixte coloré

Définition : Graphe mixte (m, n) -coloré

C'est un graphe mixte dont les arcs sont colorés avec m couleurs et les arêtes avec n couleurs.

Définition [Nesetril, Raspaud, 2000]

Soient $\mathcal{G} = (V, A, E)$ et $\mathcal{H} = (V', A', E')$ deux graphes mixtes (m, n) -colorés. Un **homomorphisme mixte coloré** de \mathcal{G} dans \mathcal{H} est une application $f : V \rightarrow V'$ vérifiant :

- ▶ $(x, y) \in A \implies (f(x), f(y)) \in A'$,
- ▶ $\{x, y\} \in E \implies \{x, y\} \in E'$,

Homomorphisme mixte coloré

Définition : Graphe mixte (m, n) -coloré

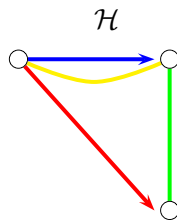
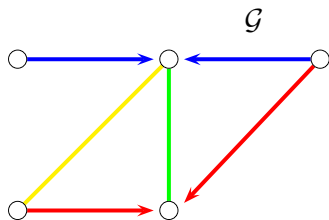
C'est un graphe mixte dont les arcs sont colorés avec m couleurs et les arêtes avec n couleurs.

Définition [Nesetril, Raspaud, 2000]

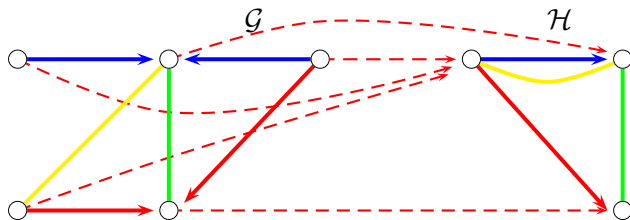
Soient $\mathcal{G} = (V, A, E)$ et $\mathcal{H} = (V', A', E')$ deux graphes mixtes (m, n) -colorés. Un **homomorphisme mixte coloré** de \mathcal{G} dans \mathcal{H} est une application $f : V \longrightarrow V'$ vérifiant :

- ▶ $(x, y) \in A \implies (f(x), f(y)) \in A'$,
- ▶ $\{x, y\} \in E \implies \{x, y\} \in E'$,
- ▶ la couleur d'un arc ou d'une arête reliant x à y dans \mathcal{G} est la même que celle reliant $f(x)$ à $f(y)$ dans \mathcal{H} .

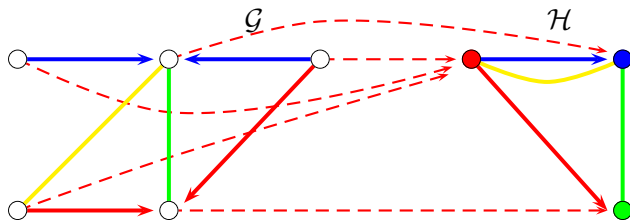
Exemple d'homomorphisme mixte coloré



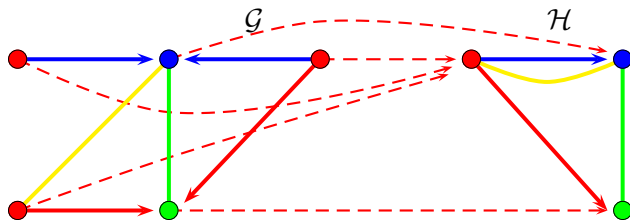
Exemple d'homomorphisme mixte coloré



Exemple d'homomorphisme mixte coloré



Exemple d'homomorphisme mixte coloré



Le nombre chromatique (n, m) -coloré de \mathcal{G}

Définition

Soit \mathcal{G} un graphe mixte (n, m) -coloré. Le plus petit entier k tel qu'il existe un graphe mixte (n, m) -coloré \mathcal{H} d'ordre k est le **nombre chromatique (n, m) -coloré** de \mathcal{G} , noté $\chi(\mathcal{G}, n, m)$.

Proposition : liens entre nombres chromatiques

Le nombre chromatique (n, m) -coloré de \mathcal{G}

Définition

Soit \mathcal{G} un graphe mixte (n, m) -coloré. Le plus petit entier k tel qu'il existe un graphe mixte (n, m) -coloré \mathcal{H} d'ordre k est le **nombre chromatique (n, m) -coloré** de \mathcal{G} , noté $\chi(\mathcal{G}, n, m)$.

Proposition : liens entre nombres chromatiques

- ▶ $\chi(G, 0, 1) = \chi(G)$.

Le nombre chromatique (n, m) -coloré de \mathcal{G}

Définition

Soit \mathcal{G} un graphe mixte (n, m) -coloré. Le plus petit entier k tel qu'il existe un graphe mixte (n, m) -coloré \mathcal{H} d'ordre k est le **nombre chromatique (n, m) -coloré** de \mathcal{G} , noté $\chi(\mathcal{G}, n, m)$.

Proposition : liens entre nombres chromatiques

- ▶ $\chi(G, 0, 1) = \chi(G)$.
- ▶ $\chi(\vec{G}, 1, 0) = \chi_o(\vec{G})$.

Le nombre chromatique (n, m) -coloré de \mathcal{G}

Définition

Soit \mathcal{G} un graphe mixte (n, m) -coloré. Le plus petit entier k tel qu'il existe un graphe mixte (n, m) -coloré \mathcal{H} d'ordre k est le **nombre chromatique (n, m) -coloré** de \mathcal{G} , noté $\chi(\mathcal{G}, n, m)$.

Proposition : liens entre nombres chromatiques

- ▶ $\chi(G, 0, 1) = \chi(G)$.
- ▶ $\chi(\vec{G}, 1, 0) = \chi_o(\vec{G})$.
- ▶ $\chi(\mathcal{G}, 1, 1) = \chi_m(\vec{G})$.

Approximation par un algorithme glouton

Approximation par un algorithme glouton

Proposition : Lien χ_m et χ_o

Si \vec{G} est un graphe orienté, alors $\chi_m(\vec{G}) = \chi_o(\vec{G})$.

Approximation par un algorithme glouton

Proposition : Lien χ_m et χ_o

Si \vec{G} est un graphe orienté, alors $\chi_m(\vec{G}) = \chi_o(\vec{G})$.

Théorème

Le problème du **Nombre chromatique mixte** admet une

$O\left(\frac{\log^2(n)}{n \log(\chi_m(\mathcal{G}))}\right)$ -approximation différentielle.

Si $\chi_m(\mathcal{G})$ est borné, le rapport différentiel de $O(\log^2(n)/n)$ est garanti.

Retour sur une motivation du cadre mixte

Motivation du cadre mixte

↙
Approximation

↘
Polynôme chromatique orienté

Définition [Birkhoff, Lewis, 1946]

Le **polynôme chromatique** du graphe G est défini, pour tout entier k , comme étant le nombre de k -colorations de G . On le note $P(G, k)$.

Définition [Birkhoff, Lewis, 1946]

Le **polynôme chromatique** du graphe G est défini, pour tout entier k , comme étant le nombre de k -colorations de G . On le note $P(G, k)$.

Définition [Sopena, 1994]

Le **polynôme chromatique orienté** du graphe \vec{G} est défini, pour tout entier k , comme étant le nombre de k -colorations orientées de \vec{G} . On le note $P_o(\vec{G}, k)$.

Définition [Birkhoff, Lewis, 1946]

Le **polynôme chromatique** du graphe G est défini, pour tout entier k , comme étant le nombre de k -colorations de G . On le note $P(G, k)$.

Définition [Sopena, 1994]

Le **polynôme chromatique orienté** du graphe \vec{G} est défini, pour tout entier k , comme étant le nombre de k -colorations orientées de \vec{G} . On le note $P_o(\vec{G}, k)$.

Définition

Le **polynôme chromatique mixte** du graphe \mathcal{G} est défini, pour tout entier k , comme étant le nombre de k -colorations mixtes de \mathcal{G} . On le note $P_m(\mathcal{G}, k)$.

Adaptation du résultat de Stanley

Théorème [Stanley, 1973]

Le nombre d'orientations acircuitiques de G est $|P(G, -1)|$.

Adaptation du résultat de Stanley

Théorème [Stanley, 1973]

Le nombre d'orientations acircuitiques de G est $|P(G, -1)|$.



Adaptation du résultat de Stanley

Théorème [Stanley, 1973]

Le nombre d'orientations acircuitiques de G est $|P(G, -1)|$.



Adaptation du résultat de Stanley

Théorème [Stanley, 1973]

Le nombre d'orientations acircuitiques de G est $|P(G, -1)|$.



$$P_o(\vec{G}, k) = k(k-1)(k-2)$$
$$|P_o(\vec{G}, -1)| = 6$$

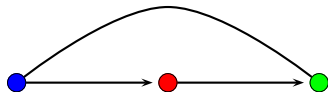
Adaptation du résultat de Stanley

Théorème [Stanley, 1973]

Le nombre d'orientations acircuitiques de G est $|P(G, -1)|$.



$$P_o(\vec{G}, k) = k(k-1)(k-2)$$
$$|P_o(\vec{G}, -1)| = 6$$



Adaptation du résultat de Stanley

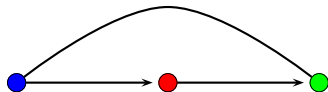
Théorème [Stanley, 1973]

Le nombre d'orientations acircuitiques de G est $|P(G, -1)|$.



$$P_o(\vec{G}, k) = k(k-1)(k-2)$$

$$|P_o(\vec{G}, -1)| = 6$$



$$P_m(\mathcal{G}, k) = k(k-1)(k-2)$$

$$|P_m(\mathcal{G}, -1)| = 6$$

Lien polynôme chromatique orienté / mixte

Définition

Soit $\mathcal{G} = (V, A, E)$ un graphe mixte. On lui associe le graphe $M(\mathcal{G})$ défini par $(V, A, E \cup E')$, avec

$$E' = \{\{x, z\} / \exists z \in V, \{(x, y), (y, z)\} \in A^2\}$$

Lien polynôme chromatique orienté / mixte

Définition

Soit $\mathcal{G} = (V, A, E)$ un graphe mixte. On lui associe le graphe $M(\mathcal{G})$ défini par $(V, A, E \cup E')$, avec

$$E' = \{\{x, z\} / \exists z \in V, \{(x, y), (y, z)\} \in A^2\}$$

Théorème

Lien polynôme chromatique orienté / mixte

Définition

Soit $\mathcal{G} = (V, A, E)$ un graphe mixte. On lui associe le graphe $M(\mathcal{G})$ défini par $(V, A, E \cup E')$, avec

$$E' = \{\{x, z\} / \exists z \in V, \{(x, y), (y, z)\} \in A^2\}$$

Théorème

- ▶ $\chi_m(\mathcal{G}) = \chi_m(M(\mathcal{G}))$.

Lien polynôme chromatique orienté / mixte

Définition

Soit $\mathcal{G} = (V, A, E)$ un graphe mixte. On lui associe le graphe $M(\mathcal{G})$ défini par $(V, A, E \cup E')$, avec

$$E' = \{\{x, z\} / \exists z \in V, \{(x, y), (y, z)\} \in A^2\}$$

Théorème

- ▶ $\chi_m(\mathcal{G}) = \chi_m(M(\mathcal{G}))$.
- ▶ $\chi_o(\vec{\mathcal{G}}) = \chi_m(M(\vec{\mathcal{G}}))$.

Lien polynôme chromatique orienté / mixte

Définition

Soit $\mathcal{G} = (V, A, E)$ un graphe mixte. On lui associe le graphe $M(\mathcal{G})$ défini par $(V, A, E \cup E')$, avec

$$E' = \{\{x, z\} / \exists z \in V, \{(x, y), (y, z)\} \in A^2\}$$

Théorème

- ▶ $\chi_m(\mathcal{G}) = \chi_m(M(\mathcal{G}))$.
- ▶ $\chi_o(\vec{\mathcal{G}}) = \chi_m(M(\vec{\mathcal{G}}))$.
- ▶ $P_o(\vec{\mathcal{G}}, k) = P_m(M(\vec{\mathcal{G}}), k)$.

Ensemble $\mathcal{C}(\mathcal{G})$

Définition

Soit \mathcal{G} un graphe mixte. L'ensemble $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ est défini par :

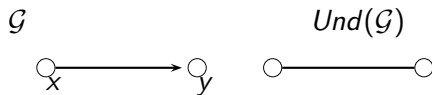
$$\mathcal{C}(\mathcal{G}) = \{ \{(x, y), (z, t)\} : \{x, t\} \notin E(\text{Und}(\mathcal{G})) \text{ et } \{y, z\} \notin E(\text{und}(\mathcal{G})) \}.$$

Ensemble $\mathcal{C}(\mathcal{G})$

Définition

Soit \mathcal{G} un graphe mixte. L'ensemble $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ est défini par :

$$\mathcal{C}(\mathcal{G}) = \{ \{(x, y), (z, t)\} : \{x, t\} \notin E(\text{Und}(\mathcal{G})) \text{ et } \{y, z\} \notin E(\text{und}(\mathcal{G})) \}.$$

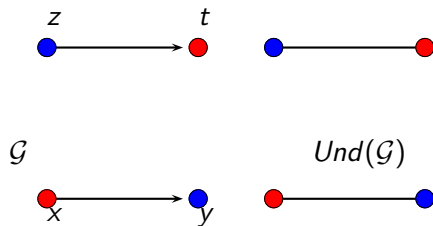


Ensemble $\mathcal{C}(\mathcal{G})$

Définition

Soit \mathcal{G} un graphe mixte. L'ensemble $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ est défini par :

$$\mathcal{C}(\mathcal{G}) = \{ \{(x, y), (z, t)\} : \{x, t\} \notin E(\text{Und}(\mathcal{G})) \text{ et } \{y, z\} \notin E(\text{und}(\mathcal{G})) \}.$$

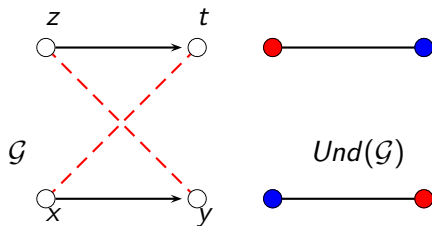


Ensemble $\mathcal{C}(\mathcal{G})$

Définition

Soit \mathcal{G} un graphe mixte. L'ensemble $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ est défini par :

$$\mathcal{C}(\mathcal{G}) = \{ \{(x, y), (z, t)\} : \{x, t\} \notin E(\text{Und}(\mathcal{G})) \text{ et } \{y, z\} \notin E(\text{und}(\mathcal{G})) \}.$$



Interprétation de $|P_m(\mathcal{G}, -1)|$

Proposition

Si \mathcal{G} est un graphe tel que $\mathcal{C}(\mathcal{G}) = \{\{(x, y), (y, z)\}\}$, alors $|P_m(\mathcal{G}, -1)|$ est le nombre d'orientations acircuitiques de $M(\mathcal{G})$.

Interprétation de $|P_m(\mathcal{G}, -1)|$

Proposition

Si \mathcal{G} est un graphe tel que $\mathcal{C}(\mathcal{G}) = \{\{(x, y), (y, z)\}\}$, alors $|P_m(\mathcal{G}, -1)|$ est le nombre d'orientations acircuitiques de $M(\mathcal{G})$.

Proposition

Si \mathcal{G} est un graphe tel que $\mathcal{C}(\mathcal{G}) = \{\{(x, y), (z, t)\}\}$ (avec x, y, z, t 2 à 2 différents), alors $|P_m(\mathcal{G}, -1)|$ est le nombre d'orientations acircuitiques de $M(\mathcal{G})$ orientant $\{(x, y), (z, t)\}$ dans le même sens ou les reliant par un chemin.

- ▶ Poursuite de l'étude de l'interprétation de $|P_m(\mathcal{G}, -1)|$.

- ▶ Poursuite de l'étude de l'interprétation de $|P_m(\mathcal{G}, -1)|$.
- ▶ Problèmes de localisation des racines.

- ▶ Poursuite de l'étude de l'interprétation de $|P_m(\mathcal{G}, -1)|$.
- ▶ Problèmes de localisation des racines.
- ▶ Extension des connaissances du cadre non-orienté au cadre orienté.

Partie IV

Décomposition acircuitique

Partie IV

Décomposition acircuitique

- ▶ Complexité

Partie IV

Décomposition acircuitique

- ▶ Complexité
- ▶ Décomposition critique

Partie IV

Décomposition acircuitique

- ▶ Complexité
- ▶ Décomposition critique
- ▶ Polynôme chromatique acircuitique

Partie IV

Décomposition acircuitique

- ▶ Complexité
- ▶ Décomposition critique
- ▶ Polynôme chromatique acircuitique
- ▶ Pistes à suivre...

Définition

Soit \vec{G} un graphe orienté. Le **nombre a -chromatique** de \vec{G} est le plus petit entier k tel qu'il existe une k -décomposition acircuitique de \vec{G} . On le note $dec(\vec{G})$.

Définition

Soit \vec{G} un graphe orienté. Le **nombre a -chromatique** de \vec{G} est le plus petit entier k tel qu'il existe une k -décomposition acircuitique de \vec{G} . On le note $dec(\vec{G})$.

Théorème

Définition

Soit \vec{G} un graphe orienté. Le **nombre a -chromatique** de \vec{G} est le plus petit entier k tel qu'il existe une k -décomposition acircuitique de \vec{G} . On le note $dec(\vec{G})$.

Théorème

- ▶ Les problèmes des 1,2 et 3-décompositions sont polynomiaux.

Définition

Soit \vec{G} un graphe orienté. Le **nombre a -chromatique** de \vec{G} est le plus petit entier k tel qu'il existe une k -décomposition acircuitique de \vec{G} . On le note $dec(\vec{G})$.

Théorème

- ▶ Les problèmes des 1,2 et 3-décompositions sont polynomiaux.
- ▶ Le problème de la 4-décomposition acircuitique est \mathcal{NP} -complet.

Définition

Soit \vec{G} un graphe orienté. Le **nombre a -chromatique** de \vec{G} est le plus petit entier k tel qu'il existe une k -décomposition acircuitique de \vec{G} . On le note $dec(\vec{G})$.

Théorème

- ▶ Les problèmes des 1,2 et 3-décompositions sont polynomiaux.
- ▶ Le problème de la 4-décomposition acircuitique est \mathcal{NP} -complet.

Proposition

La famille des tournois est polynomiale pour le problème du **nombre a -chromatique**.

Graphe α -indécomposable

Définition

Un graphe orienté \vec{G} d'ordre n est **α -indécomposable** si son nombre α -chromatique est égal à n .

Graphe a -indécomposable

Définition

Un graphe orienté \vec{G} d'ordre n est **a -indécomposable** si son nombre a -chromatique est égal à n .

Théorème : densité des tournois a -indécomposable

$\mathbb{T}_n = \{ \text{tournois obtenus par orientation des arêtes de } K_n \text{ de façon indépendante selon une probabilité uniforme} \}$

Graphe a -indécomposable

Définition

Un graphe orienté \vec{G} d'ordre n est **a -indécomposable** si son nombre a -chromatique est égal à n .

Théorème : densité des tournois a -indécomposables

$\mathbb{T}_n = \{ \text{tournois obtenu par orientation des arêtes de } K_n \text{ de façon indépendante selon une probabilité uniforme} \}$

La probabilité qu'un tournoi de \mathbb{T}_n soit a -indécomposable tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

Sommet-critique a-indécomposable

Définition

Un tournoi $T = (V, A)$ est **sommet-critique a-indécomposable** s'il est :

Sommet-critique a-indécomposable

Définition

Un tournoi $T = (V, A)$ est **sommet-critique a-indécomposable** s'il est :

- ▶ a-indécomposable,

Sommet-critique a-indécomposable

Définition

Un tournoi $T = (V, A)$ est **sommet-critique a-indécomposable** s'il est :

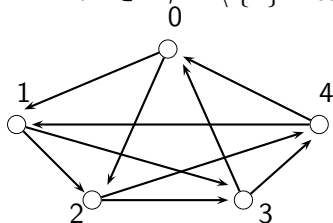
- ▶ a-indécomposable,
- ▶ $\forall x \in V, T \setminus \{x\}$ n'est pas a-indécomposable.

Sommet-critique a-indécomposable

Définition

Un tournoi $T = (V, A)$ est **sommet-critique a-indécomposable** s'il est :

- ▶ a-indécomposable,
- ▶ $\forall x \in V, T \setminus \{x\}$ n'est pas a-indécomposable.

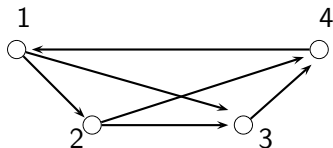


Sommet-critique a-indécomposable

Définition

Un tournoi $T = (V, A)$ est **sommet-critique a-indécomposable** s'il est :

- ▶ a-indécomposable,
- ▶ $\forall x \in V, T \setminus \{x\}$ n'est pas a-indécomposable.

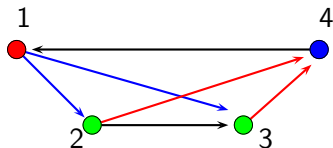


Sommet-critique a-indécomposable

Définition

Un tournoi $T = (V, A)$ est **sommet-critique a-indécomposable** s'il est :

- ▶ a-indécomposable,
- ▶ $\forall x \in V, T \setminus \{x\}$ n'est pas a-indécomposable.

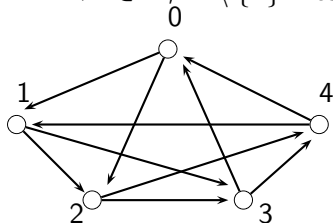


Sommet-critique a-indécomposable

Définition

Un tournoi $T = (V, A)$ est **sommet-critique a-indécomposable** s'il est :

- ▶ a-indécomposable,
- ▶ $\forall x \in V, T \setminus \{x\}$ n'est pas a-indécomposable.



Le tournoi circulant $\vec{C}_5(1, 2)$ est
sommet-critique a-indécomposable

Décomposition de tournoi Sommet-critique a-indécomposable

On associe au tournoi sommet-critique a-indécomposable
 $T = (V, A)$ le graphe G_T suivant :

Décomposition de tournoi Sommet-critique a-indécomposable

On associe au tournoi sommet-critique a-indécomposable
 $T = (V, A)$ le graphe G_T suivant :

- ▶ $V(G_T) = V,$

Décomposition de tournoi Sommet-critique a-indécomposable

On associe au tournoi sommet-critique a-indécomposable

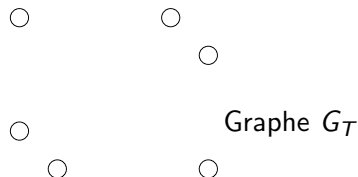
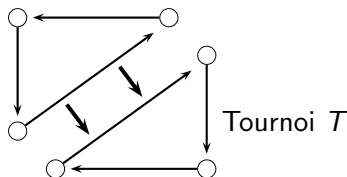
$T = (V, A)$ le graphe G_T suivant :

- ▶ $V(G_T) = V,$
- ▶ $E(G_T) = \{\{x, y\} / \exists z \in V, T \setminus \{z\} \text{ n'est pas a-indécomposable}\}.$

Décomposition de tournoi Sommet-critique a-indécomposable

On associe au tournoi sommet-critique a-indécomposable $T = (V, A)$ le graphe G_T suivant :

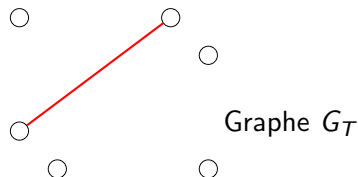
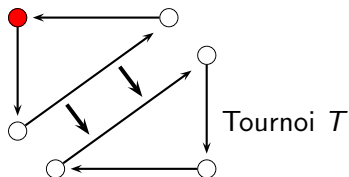
- ▶ $V(G_T) = V$,
- ▶ $E(G_T) = \{ \{x, y\} / \exists z \in V, T \setminus \{z\} \text{ n'est pas a-indécomposable} \}$.



Décomposition de tournoi Sommet-critique a-indécomposable

On associe au tournoi sommet-critique a-indécomposable $T = (V, A)$ le graphe G_T suivant :

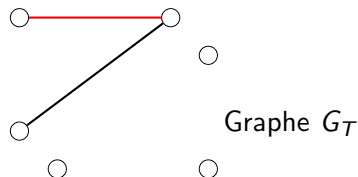
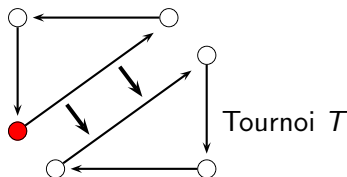
- ▶ $V(G_T) = V$,
- ▶ $E(G_T) = \{ \{x, y\} / \exists z \in V, T \setminus \{z\} \text{ n'est pas a-indécomposable} \}$.



Décomposition de tournoi Sommet-critique a-indécomposable

On associe au tournoi sommet-critique a-indécomposable $T = (V, A)$ le graphe G_T suivant :

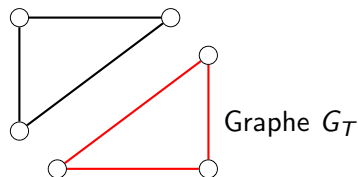
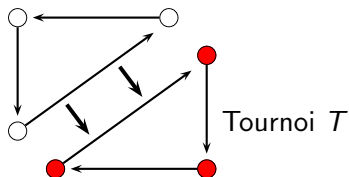
- ▶ $V(G_T) = V$,
- ▶ $E(G_T) = \{ \{x, y\} / \exists z \in V, T \setminus \{z\} \text{ n'est pas a-indécomposable} \}$.



Décomposition de tournoi Sommet-critique a-indécomposable

On associe au tournoi sommet-critique a-indécomposable $T = (V, A)$ le graphe G_T suivant :

- ▶ $V(G_T) = V$,
- ▶ $E(G_T) = \{ \{x, y\} / \exists z \in V, T \setminus \{z\} \text{ n'est pas a-indécomposable} \}$.



Propriétés du graphe G_T

Proposition

Le graphe G_T associé au tournoi T Sommet-critique
 α -indécomposable vérifie :

Propriétés du graphe G_T

Proposition

Le graphe G_T associé au tournoi T Sommet-critique α -indécomposable vérifie :

- ▶ G_T a autant d'arêtes que de sommets.

Propriétés du graphe G_T

Proposition

Le graphe G_T associé au tournoi T Sommet-critique α -indécomposable vérifie :

- ▶ G_T a autant d'arêtes que de sommets.
- ▶ G_T ne contient que des sommets d'ordre 2

Propriétés du graphe G_T

Proposition

Le graphe G_T associé au tournoi T Sommet-critique α -indécomposable vérifie :

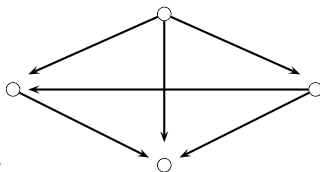
- ▶ G_T a autant d'arêtes que de sommets.
- ▶ G_T ne contient que des sommets d'ordre 2

Théorème

Tout tournoi T Sommet-critique α -indécomposable est obtenu par composition de tournois circulants

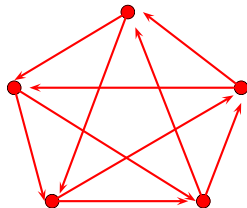
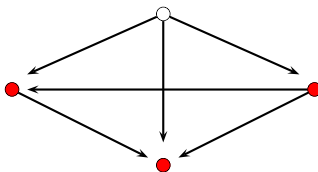
Exemple de tournoi Sommet-critique a-indécomposable

\vec{G} tournoi quelconque.



Exemple de tournoi Sommet-critique a-indécomposable

\vec{G} tournoi quelconque.



Polynôme chromatique acircuitique

Définition

Soit \vec{G} un graphe orienté et k un entier. On désigne par $P_a(\vec{G}, k)$ le nombre de k -décompositions acircuitiques de \vec{G} .

Polynôme chromatique acircuitique

Définition

Soit \vec{G} un graphe orienté et k un entier. On désigne par $P_a(\vec{G}, k)$ le nombre de k -décompositions acircuitiques de \vec{G} .

Problématique : Formule de récurrence

Soit $\vec{G} = (V, A)$ un graphe orienté antisymétrique. On souhaite obtenir une formule de récurrence de la forme :

$$P_a(\vec{G}, k) = P_a(\vec{G}_e, k) + P_a(\vec{G} \cup \{e\}, k)$$

Décomposition acircuitique de graphe mixte

Définition

Soit $\mathcal{G} = (V, A, E)$ un graphe mixte. Une k -décomposition acircuitique de \mathcal{G} est une application $d : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ telle que

Décomposition acircuitique de graphe mixte

Définition

Soit $\mathcal{G} = (V, A, E)$ un graphe mixte. Une k -décomposition acircuitique de \mathcal{G} est une application $d : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ telle que

- ▶ $\{x, y\} \in E \Rightarrow d(x) \neq d(y)$,

Décomposition acircuitique de graphe mixte

Définition

Soit $\mathcal{G} = (V, A, E)$ un graphe mixte. Une k -décomposition acircuitique de \mathcal{G} est une application $d : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ telle que

- ▶ $\{x, y\} \in E \Rightarrow f(x) \neq f(y)$,
- ▶ $\{(x, y), (z, t)\} \subset A, f(y) = f(z) \Rightarrow f(x) \neq f(t)$,

Décomposition acircuitique de graphe mixte

Définition

Soit $\mathcal{G} = (V, A, E)$ un graphe mixte. Une k -décomposition acircuitique de \mathcal{G} est une application $d : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ telle que

- ▶ $\{x, y\} \in E \Rightarrow f(x) \neq f(y)$,
- ▶ $\{(x, y), (z, t)\} \subset A, f(y) = f(z) \Rightarrow f(x) \neq f(t)$,
- ▶ $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}, f^{-1}(i)$ est acircuitique.

Décomposition acircuitique de graphe mixte

Définition

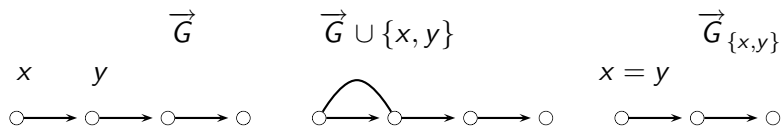
Soit $\mathcal{G} = (V, A, E)$ un graphe mixte. Une k -décomposition acircuitique de \mathcal{G} est une application $d : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ telle que

- ▶ $\{x, y\} \in E \Rightarrow f(x) \neq f(y)$,
- ▶ $\{(x, y), (z, t)\} \subset A, f(y) = f(z) \Rightarrow f(x) \neq f(t)$,
- ▶ $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}, f^{-1}(k)$ est acircuitique.

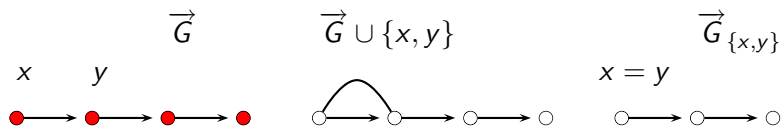
Définition

$P_a(\mathcal{G}, k)$ est le nombre de k -décompositions acircuitiques de \mathcal{G} .

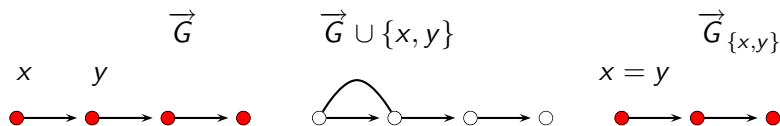
Un problème !



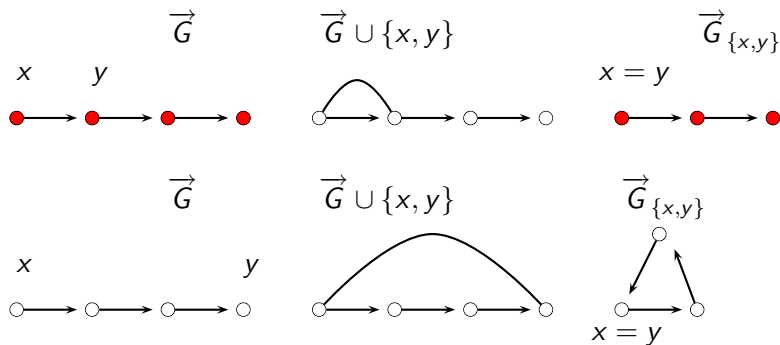
Un problème !



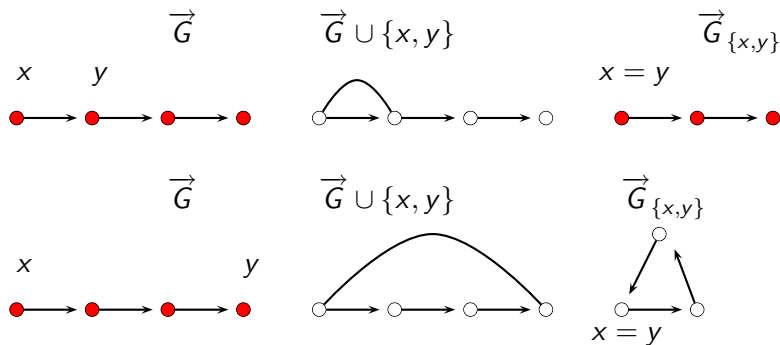
Un problème !



Un problème !



Un problème !



Une solution : 1er cas

Définition

Soit $\mathcal{G} = (V, A, E)$ un graphe mixte. Un chemin (orienté) \mathcal{C} de x à y est **admissible** si, pour tout couple de sommets (a, b) de \mathcal{C} , $\{a, b\} \notin E$.

Une solution : 1er cas

Définition

Soit $\mathcal{G} = (V, A, E)$ un graphe mixte. Un chemin (orienté) \mathcal{C} de x à y est **admissible** si, pour tout couple de sommets (a, b) de \mathcal{C} , $\{a, b\} \notin E$.

Proposition

Soit $\mathcal{G} = (V, A, E)$ un graphe mixte. S'il existe $\{x, y\} \notin E$ tel qu'il n'existe aucun chemin (orienté) admissible entre x et y dans \mathcal{G} , alors $e = \{x, y\}$ vérifie l'hypothèse de récurrence.

Une solution : Second cas

Proposition :

Sinon, x étant fixé, il existe au moins un chemin admissible entre x et y . On désigne par $l_{max}(x, y)$ la longueur du plus long chemin admissible entre x et y .

Une solution : Second cas

Proposition :

Sinon, x étant fixé, il existe au moins un chemin admissible entre x et y . On désigne par $l_{max}(x, y)$ la longueur du plus long chemin admissible entre x et y .

- ▶ Il existe alors au moins un sommet y tel que

$$\min(l_{max}(x, y); l_{max}(y, x)) = 1.$$

Une solution : Second cas

Proposition :

Sinon, x étant fixé, il existe au moins un chemin admissible entre x et y . On désigne par $l_{max}(x, y)$ la longueur du plus long chemin admissible entre x et y .

- ▶ Il existe alors au moins un sommet y tel que

$$\min(l_{max}(x, y); l_{max}(y, x)) = 1.$$

- ▶ L'arête $e = \{x, y\}$ vérifie l'hypothèse de récurrence.

- ▶ Recherche de familles polynomiales / \mathcal{NP} -complète.

- ▶ Recherche de familles polynomiales / \mathcal{NP} -complète.
- ▶ Approximation du problème ?

- ▶ Recherche de familles polynomiales / \mathcal{NP} -complète.
- ▶ Approximation du problème ?
- ▶ Poursuite sur le polynôme chromatique acircuitique ...

Quoi de neuf ?

Quoi de neuf ?

- ▶ Critère de caractérisation de famille par **absence d'une configuration**.

Quoi de neuf ?

- ▶ Critère de caractérisation de famille par absence d'une configuration.
- ▶ Passage classique à mixte plutôt que classique à orienté.

Quoi de neuf ?

- ▶ Critère de caractérisation de famille par **absence d'une configuration**.
- ▶ Passage **classique à mixte** plutôt que **classique à orienté**.
- ▶ Approche axiomatique des polynômes chromatiques selon les colorations.

Jf. Culus, Bertrand Jouve

Tournoi sans intervalle acyclique, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005), 465-468

Jf. Culus, Marc Demange

, *Oriented coloring : complexity and approximation* LNCS 3831, proceedings of Sofsem 2006, Merin, Czech Republic.

Jf. Culus

Polynôme chromatique mixte et interprétation des coefficients
Roadef 2006, Lille, France.

Jf. Culus, Bertrand Jouve

Décomposition de tournoi en classes acycliques, Actes de la SFC 2004, Bordeaux.

Bibliographie

[Nesetril et Raspaud, 2000]

Colored Homomorphisms of Colored Mixed Graphs, Journal of Combinatorial Theory, Vol 80, p. 147-155.

[Klostermayer, MacGillivray, 2004]

Homomorphisms and oriented colorings of equivalence classes of oriented graphs, Discrete mathematics, Vol 274, p. 161-172.

[Eric Sopena, 1997]

The Chromatic Number of Oriented Graphs, Journal of Graph Theory, Vol. 25, p. 190-205.

[Stanley, 1973]

Acyclic orientations of graphs, Discrete Mathematics, Vol. 5, p. 171-178.

Complément sur G_T

Définition

$$E(G_T) =$$

$\{\{x, y\} \mid \exists z, \{x, y\} \text{ est une classe d'une décomposition acircuitique de } T \text{ sur } z\}$.

Complément sur G_T

Définition

$$E(G_T) =$$

$\{\{x, y\} \mid \exists z, \{x, y\} \text{ est une classe d'une décomposition acircuitique de } T \text{ et } z \in \{x, y\}\}$.

Théorème : $u = v \Leftrightarrow \{i_u, j_u\} = \{i_v, j_v\}$.

Complément sur G_T

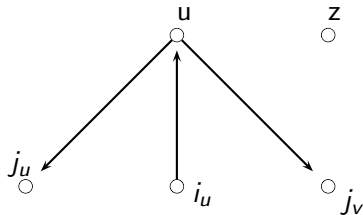
Définition

$$E(G_T) =$$

$\{\{x, y\} \mid \exists z, \{x, y\} \text{ est une classe d'une décomposition acircuitique de } T \text{ et } z\}$.

Théorème : $u = v \Leftrightarrow \{i_u, j_u\} = \{i_v, j_v\}$.

$$u = v \Rightarrow \{i_u, j_u\} = \{i_v, j_v\}$$



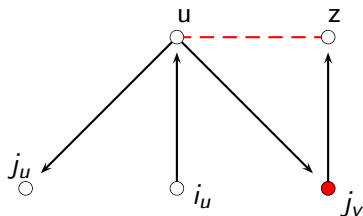
Complément sur G_T

Définition

$$E(G_T) =$$

$\{\{x, y\} \mid \exists z, \{x, y\} \text{ est une classe d'une décomposition acircuitique de } T \text{ et } z\}$.

Théorème : $u = v \Leftrightarrow \{i_u, j_u\} = \{i_v, j_v\}$.



$$u = v \Rightarrow \{i_u, j_u\} = \{i_v, j_v\}$$

On suppose $j_u \neq j_v$

Complément sur G_T

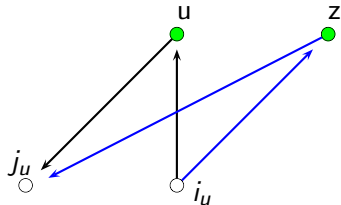
Définition

$$E(G_T) =$$

$\{\{x, y\} \mid \exists z, \{x, y\} \text{ est une classe d'une décomposition acircuitique de } T \text{ et } z\}$.

Théorème : $u = v \Leftrightarrow \{i_u, j_u\} = \{i_v, j_v\}$.

Dans $T \setminus j_v$



Complément sur G_T

Définition

$$E(G_T) =$$

$\{\{x, y\} \mid \exists z, \{x, y\} \text{ est une classe d'une décomposition acircuitique de } T \text{ et } z\}$.

Théorème : $u = v \Leftrightarrow \{i_u, j_u\} = \{i_v, j_v\}$.

Dans $T \setminus j_v$

