HAL open science

IDENTIFICATION D'EFFORTS AUX LIMITES DES POUTRES ET PLAQUES EN FLEXION PAR METHODE INDIRECTE

Simon Chesne

To cite this version:

Simon Chesne. IDENTIFICATION D'EFFORTS AUX LIMITES DES POUTRES ET PLAQUES EN FLEXION PAR METHODE INDIRECTE. Acoustique [physics.class-ph]. INSA de Lyon, 2006. Français. NNT : . tel-00135492

HAL Id: tel-00135492

https://theses.hal.science/tel-00135492

Submitted on 8 Mar 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre 2006-ISAL-00109 Année 2006

Thèse

IDENTIFICATION D'EFFORTS AUX LIMITES DES POUTRES ET PLAQUES EN FLEXION PAR METHODE INDIRECTE

présentée devant

L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

pour obtenir

le grade de docteur

École doctorale : Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique (MEGA)
Spécialité : Acoustique

par

Simon CHESNE
Ingénieur diplômé de l'INSA de Lyon

Soutenue le 11 décembre 2006 devant la commission d'examen
Jury

M. BERLIOZ Alain	Université Paul Sabatier (Toulouse)	Rapporteur
M. GAUTIER François	Université du Maine (Le Mans)	
M. GUYADER Jean-Louis	INSA (Lyon)	Directeur
M. MATTEI Pierre-Olivier	LMA (Marseille)	
M. PAVIC Goran	INSA (Lyon)	
M. PEZERAT Charles	INSA (Lyon)	Co-directeur
M. SESTIERI Aldo	Università La Sapienza (Rome)	Rapporteur

Thèse préparée au Laboratoire Vibrations Acoustique de l'INSA de Lyon

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu mes directeurs de thèse, Jean-Louis Guyader et Charles Pézerat, pour le temps qu'ils m'ont consacré, pour leur soutien, pour leurs immenses connaissances et leur curiosité scientifique et surtout pour la confiance qu'ils m'ont accordé même face aux équations les plus coriaces.
Je remercie Alain Berlioz et Aldo Sestieri d'avoir accepté de faire la relecture de ce rapport. Je leur en suis reconnaissant pour le temps qu'ils y ont consacré et pour l'intérêt qu'ils y ont porté.
Mes remerciement vont également à Goran Pavic, François Gautier et Pierre-Olivier Mattéi qui ont accepté de faire partie du jury.
Merci à Quentin, qui, malgré ma difficulté à écrire son nom, m'a conseillé et dépanné face aux problèmes de troncature, et merci à Nicolas pour ses calculs en éléments finis.
Merci à tout le LVA "d'en bas" et particulièrement Nath, Bernard, Etienne, Nacer, Claude, Maurice, Bélaïd et les autres pour l'ambiance plus que chaleureuse du laboratoire.
Longue vie au LVA "d'en haut" ! ! ! Je pense particulièrement à Vincent et Jérémie, les compères et goupils du labo, JD mon partenaire de congres, Lionel qui me supporta quelques temps en face de lui, et François et Laurent, la relève. Je n'omettrais pas les trentenaires Céline et Charles, qui résistent au temps et aux thèses, fidèles au poste.
Merci et pardon à Emilie ma co-bureau pour m'avoir supporté, moi, mes habitudes, mes pieds sur la table, mes exercices de batteries. . .et aussi pour m'avoir hébergé lorsqu'en fin de thèse je me retrouvais sans toit.
Bien évidemment, merci et bravo à Emy, Boule, Pedro, et Carlo pour ces trois années de baby foot (faut que ça claque !), de flipper et de café à l'Oxxo entre midi et 14h.

Et ma dernière pensée, toute particulière, ira bien évidemment à Eva. . .

Table des matières

Remerciements **3**

Introduction et contexte scientifique **18**

Description du sujet 18

Techniques de caractérisation de sources 19

Description de la structure 22

Acquisition des réponses 23

Reconstruction des efforts 23

Problème inverse et problème mal posé 24

Instabilité du problème et techniques de régularisation 26

Autres problèmes inverses appliqués aux vibrations et à l'acoustique 29

Position du sujet 30

Structure du document 32

1 Reconstruction de l'effort tranchant et du moment fléchissant : Cas d'une poutre en flexion **33**

1.1 Objectifs du chapitre 33

1.2 Equations de base du problème 33

1.3 Approche générale 36

1.4 Reconstruction de l'effort tranchant 37

1.4.1 Définition de la fonction test 37

1.4.2 Exemple de fonction test 38

1.5 Reconstruction du moment fléchissant 40

1.5.1 Définition de la fonction test 40

1.5.2 Exemple de fonction test 40

1.6 Application analytique sur un cas simple 42
1.7 Conclusion 44

2 Approximations et incertitudes : Cas d'une poutre en flexion 45
2.1 Objectifs du chapitre 45
2.2 Intégration discrète 45
2.2.1 Méthodes d'intégrations 46
2.2.2 Simulations 48
2.3 Effets des incertitudes de mesure 55
2.3.1 Bruitage du déplacement 55
2.3.2 Simulations 56
2.4 Conclusions 62

3 Validations Expérimentales sur poutre 64
3.1 Objectifs du chapitre 64
3.1.1 Reconstruction de l'effort tranchant 65
3.1.2 Reconstruction du moment fléchissant 72
3.2 Conclusion 77

4 Identification des conditions aux limites d'une poutre en flexion 78
4.1 Objectifs 78
4.2 Principe de l'identification 78
4.3 Identification de la pente à la limite d'une poutre 79
4.3.1 Principe 79
4.3.2 Simulations numériques 81
4.4 Identification des conditions aux limites : Simulations numériques 83
4.4.1 Simulations exactes 83
4.4.2 Effet du bruit sur l'identification 86
4.5 Conclusions 89

5 Reconstruction de l'effort tranchant et du moment fléchissant : Cas d'une plaque en flexion 90
5.1 Objectifs du chapitre 90
5.2 Equations de base du problème 91

5.2.1 Effort tranchant et moment fléchissant 91
5.2.2 Modèle de plaque 91
5.3 Approche générale 92
5.3.1 Calcul analytique préliminaire 92
5.3.2 Caractérisation des fonctions test 96
5.3.3 Cas d'un domaine d'intégration rectangulaire 97
5.3.4 Identification des efforts locaux 103
5.4 Conclusions 107

6 Approximations et incertitudes : Cas d'une plaque en flexion 108
6.1 Objectifs du chapitre 108
6.2 Calculs directs 109
6.2.1 Plaque appuyée aux quatre bords, reconstruction de l'effort tranchant 109
6.2.2 Plaque guidée aux quatre bords, reconstruction du moment fléchissant 111
6.3 Intégrations discrètes 114
6.3.1 Méthode d'intégration 114
6.3.2 Simulations numériques 115
6.4 Effet des incertitudes de mesure 119
6.4.1 Types de bruits 119
6.4.2 Simulations numériques bruitées 120
6.5 Troncature SVD 123
6.5.1 Principe de la troncature SVD 123
6.5.2 Choix du nombre de troncature 124
6.5.3 Simulations numériques 125
6.6 Conclusions 136

7 Validations expérimentales : Cas d'une plaque en flexion 137
7.1 Objectifs du chapitre 137
7.2 Dispositif expérimental 137
7.3 Résultats 139
7.3.1 Reconstruction de l'effort tranchant moyenné pondéré par intégration de surface 139
7.3.2 Reconstruction de l'effort tranchant local à la limite 141
7.4 Conclusions 146

Conclusion Générale **147**

A Calcul détaillé de l'équation intégrale générale du cas des poutres en flexion **150**

B Intégration numérique 1D : Méthode hybride Gauss-Trapézoidale **153**

B.1 Principe de la méthode 153

C Calcul détaillé de l'équation intégrale générale du cas des plaques en flexion **157**

D Singularités des contours, formules de Green **164**

E Compléments sur les fonctions test dans un cas bidimensionnel **168**

E.1 Expressions analytiques des fonctions test 168

E.2 Recherche d'une Fonction test par variables séparées 169

F Liste des communications scientifiques issues de cette thèse **172**

Table des figures

1.1 Tronçon [a,b] d'une poutre en flexion soumise à différents efforts, forces ou moments 34

1.2 Fonction $\eta_T(x)$ pour x $\in$ [a ;b], utilisée pour le calcul de $T(a)$, effort tranchant à gauche du domaine d'intégration. 39

1.3 Fonction $\frac{\partial^4 \eta_T}{\partial x^4}(x)$ pour x $\in$ [a ;b], utilisée pour le calcul de $T(a)$, effort tranchant à gauche du domaine d'intégration. 39

1.4 Fonction $\eta_M(x)$ pour x $\in$ [a,b], utilisée pour le calcul de $M(a)$, moment fléchissant à gauche du domaine d'intégration, pour ||ab||=1. 41

1.5 Fonction $\frac{\partial^4 \eta_M}{\partial x^4}(x)$ pour x $\in$ [a,b], utilisée pour le calcul de $M(a)$, moment fléchissant à gauche du domaine d'intégration. 41

1.6 Poutre en appui excitée par une force hamonique à répartition sinusoïdale 42

2.1 Approximation d'une courbe continue à l'aide de trapèzes 46

2.2 Poutre en appui simple de longueur L, excitée par une force harmonique localisée en $X_f = 0.8L$ 49

2.3 NERET ϵ_T entre la simulation et l'effort tranchant calculé analytiquement, a) intégration trapézoïdale, b)intégration type Gauss-Legendre en utilisant 10(pointillés), 14(croix) ou 20 (ligne continue) points. La fréquence d'excitation est de 2500Hz et les caractéristiques de la poutre sont : $L = 2.5m,\ E = 2.10^{11}(1 + j10^{-2})N/m^2,\ l = 0.06m,\ h = 0.01m,\ \rho = 7800kg/m^3$. 51

2.4 NERET ϵ_T entre l'effort exact et reconstruit par intégration trapézoïdale utilisant 20 points pour 500 fréquences d'excitations différentes comprises entre 10Hz et 5000Hz. Les caractéristiques de la poutre sont : $L = 2.5m,\ E = 2.10^{11}(1+j10^{-2})N/m^2,\ l = 0.06cm,\ h = 0.01cm,\ \rho = 7800kg/m^3$. 52

2.5 Poutre encastrée-libre de longueur L, excitée par une force harmonique localisée en $X_f = 0.8L$. Les caractéristiques de la poutre sont : $L = 2.5m,\ E = 2.10^{11}(1 + j10^{-2})N/m^2,\ l = 0.06m,\ h = 0.01m,\ \rho = 7800kg/m^3$. 53

2.6 NERMF entre la simulation et le moment fléchissant calculé analytiquement pour une intégration a)de type trapézoïdale et b)de type Gauss-Legendre en utilisant 10(pointillés), 14(croix) ou 20 (ligne continue) points. La fréquence d'excitation est de 2500Hz et les caractéristiques de la poutre sont : $L = 2.5m,\ E = 2.10^{11}(1+j10^{-2})N/m^2,\ l = 0.06m,\ h = 0.01m,\ \rho = 7800kg/m^3$. 55

2.7 NERET entre les simulations bruitées (x, bruit multiplicatif) ou exactes (ligne continue) et l'effort tranchant exact pour une intégration a) de type trapézoïdale et b) de type Gauss-Legendre utilisant 20 points. La fréquence de la force excitatrice est de 2500Hz, et les caractéristiques de la poutre sont : $L = 2.5m,\ E = 2.10^{11}(1 + j10^{-2})N/m^2,\ l = 0.06m,\ h = 0.01m,\ \rho = 7800kg/m^3$. 57

2.8 NERET entre les simulations bruitées (x, bruit additif) ou exactes (ligne continue) et l'effort tranchant exact pour une intégration a) de type trapézoïdale et b) de type Gauss-Legendre utilisant 20 points. La fréquence de la force excitatrice est de 2500Hz, et les caractéristiques de la poutre sont : $L = 2.5m,\ E = 2.10^{11}(1+j10^{-2})N/m^2,\ l = 0.06m,\ h = 0.01m,\ \rho = 7800kg/m^3$. 58

2.9 NERET entre les simulations bruitées (x, erreur de positionnement) ou exactes (ligne continue) et l'effort tranchant exact pour une intégration a) de type trapézoïdale et b) de type Gauss-Legendre utilisant 20 points. La fréquence de la force excitatrice est de 2500Hz, et les caractéristiques de la poutre sont : $L = 2.5m,\ E = 2.10^{11}(1 + j10^{-2})N/m^2,\ l = 0.06m,\ h = 0.01m,\ \rho = 7800kg/m^3$. 59

2.10 NERMF entre les simulations bruitées (x, bruit multiplicatif) ou exactes (ligne continue) et le moment fléchissant exact pour une intégration a) de type trapézoïdale et b) de type Gauss-Legendre utilisant 20 points. La fréquence de la force excitatrice est de 2500Hz, et les caractéristiques de la poutre sont : $L = 2.5m,\ E = 2.10^{11}(1 + j10^{-2})N/m^2,\ l = 0.06m,\ h = 0.01m,\ \rho = 7800kg/m^3$. 60

2.11 NERMF entre les simulations bruitées (x, bruit additif) ou exactes (ligne continue) et le moment fléchissant exact pour une intégration a) de type trapézoïdale et b) de type Gauss-Legendre utilisant 20 points. La fréquence de la force excitatrice est de 2500Hz, et les caractéristiques de la poutre sont : $L = 2.5m,\ E = 2.10^{11}(1 + j10^{-2})N/m^2,\ l = 0.06m,\ h = 0.01m,\ \rho = 7800kg/m^3$. 61
2.12 NERMF entre les simulations bruitées (x, erreur de positionnement) ou exactes (ligne continue) et le moment fléchissant exact pour une intégration a) de type trapézoïdale et b) de type Gauss-Legendre utilisant 20 points. La fréquence de la force excitatrice est de 2500Hz, et les caractéristiques de la poutre sont : $L = 2.5m,\ E = 2.10^{11}(1 + j10^{-2})N/m^2,\ l = 0.06m,\ h = 0.01m,\ \rho = 7800kg/m^3$. 61

3.1 Dispositif expérimental utilisé pour la reconstruction de l'effort tranchant. Poutre d'acier de longueur $L = 1.5m$, largeur $l = 6cm$, épaisseur $h = 1cm$. 66
3.2 Module du déplacement de l'extrémité excitée de la poutre. Poutre d'acier de longueur $L = 1.5m$, largeur $l = 6cm$, épaisseur $h = 1cm$. 66
3.3 Reconstruction de l'effort tranchant en utilisant une intégration trapézoidale. Mesure directe : courbe noire épaisse, reconstruction : fine courbe grise. 68
3.4 Reconstruction de l'effort tranchant en utilisant une intégration de type Gauss-Legendre. Mesure directe : courbe noire épaisse, reconstruction : fine courbe grise. 70
3.5 Reconstruction de l'effort tranchant en utilisant une intégration trapézoidale avec 10 points. a) Longueur d'intégration 36cm, b) Longueur d'intégration 20cm. 71
3.6 Dispositif expérimental utilisé pour la reconstruction du moment fléchissant. Poutre d'acier de longueur L=1.5m, largeur l=6cm, épaisseur h=1cm. 73
3.7 Reconstruction du moment fléchissant en utilisant une intégration trapézoidale. Mesure directe : courbe noire épaisse, reconstruction : fine courbe grise. 75
3.8 Reconstruction du moment fléchissant en utilisant une intégration de type Gauss-Legendre. Mesure directe : courbe noire épaisse, reconstruction : fine courbe grise. . 76

4.1 Fonction $\eta_P(x)$ pour x $\in$ [a,b], utilisée pour le calcul de la pente à la borne inférieure du domaine d'intégration. 80
4.2 Fonction $\frac{\partial^4 \eta_P(x)}{\partial x^4}$ pour x $\in$ [a ;b], utilisée pour le calcul de la pente à la borne inférieure du domaine d'intégration. 81

4.3 Poutre avec des ressorts de translation et de rotation de raideur K et C à l'une de ses extrémités. 82
4.4 Niveau d'erreur ϵ_P entre la pente calculée par simulation et la pente analytique, pour une intégration de type trapézoidale utilisant 20 points 83
4.5 Niveau d'erreur ϵ_K entre la raideur de translation calculée par simulation et la raideur de translation K exacte, pour une intégration de type trapezoidale utilisant 20 points . 84
4.6 (a)Niveau d'erreur ϵ_M entre le moment fléchissant calculé par simulation et le moment fléchissant exact, pour une intégration de type trapézoïdale utilisant 20 points (b)Niveau d'erreur ϵ_P entre la pente calculée par simulation et la pente exacte, pour une intégration de type trapézoïdale utilisant 20 points 85
4.7 Niveau d'erreur ϵ_K entre la raideur de torsion calculée par simulation et la raideur de torsion C exacte, pour une intégration de type trapezoidale utilisant 20 points 85
4.8 Niveau d'erreur ϵ_K entre la raideur de translation calculée par simulation bruitée et la raideur de translation K exacte, pour une intégration de type trapézoidale utilisant 20 points. Ligne continue : Simulation utilisant des déplacements exacts, x : Simulation utilisant des déplacements bruités 87
4.9 Niveau d'erreur ϵ_C entre la raideur de rotation calculée par simulation bruitée et la raideur de rotation C exacte, pour une intégration de type trapezoidale utilisant 20 points. Ligne continue : Simulation utilisant des déplacements exacts, x : Simulation utilisant des déplacements bruités 88
4.10 (a)Niveau d'erreur ϵ_M entre le moment fléchissant calculé par simulation(ligne continue : déplacements exacts, x :déplacements bruités) et le moment fléchissant exact , pour une intégration de type trapezoidale utilisant 20 points (b)Niveau d'erreur ϵ_P entre la pente calculée par simulation(ligne continue : déplacements exacts, x :déplacements bruités) et la pente exacte, pour une intégration de type trapezoidale utilisant 20 points 88

5.1 Représentation des vecteurs unitaires en un point du contour σ. $\vec{n}$ normale extérieure à S, $\vec{s}$ tangente à σ. 91
5.2 Contour σ présentant une singularité au point A. Le vecteur normal à gauche η_{A^-} est différent du vecteur normal à droite η_{A^+} 95
5.3 Fonction test $\eta_T(x, y)$ définie sur une surface d'intégration carrée unitaire et calculée à partir d'une série trigonométrique 102

5.4 $\eta_M(x, y)$ définie sur une surface d'intégration carrée unitaire et calculée à partir d'une série trigonométrique 102
5.5 $\eta_R(x, y)$ définie sur une surface d'intégration carrée unitaire et calculée à partir d'une série trigonométrique 103
5.6 Recherche d'une répartition d'efforts pondérés moyennés avec N surfaces rectangulaires 104

6.1 Différentes étapes du calcul et erreurs entachant la reconstruction, dans le cas ici de l'effort tranchant. 109
6.2 Vibrations d'une plaque d'épaisseur $1mm$ en acier, appuyée aux bords, soumise à une excitation harmonique ponctuelle unitaire de fréquence 400Hz, en $X_f = 0.2m$ et $Y_f = 0.4m$ 112
6.3 Effort tranchant à une limite d'une plaque d'épaisseur $1mm$ en acier, appuyée aux bords, soumise à une excitation harmonique ponctuelle unitaire de fréquence 400Hz, en $X_f = 0.2m$ et $Y_f = 0.4m$ 112
6.4 Vibrations d'une plaque d'épaisseur $1mm$ en acier, guidée aux bords, soumise à une excitation harmonique ponctuelle unitaire de fréquence 400Hz, en $X_f = 0.2m$ et $Y_f = 0.4m$ 113
6.5 Moment fléchissant à une limite d'une plaque d'épaisseur $1mm$ en acier, guidée aux bords, soumise à une excitation harmonique ponctuelle unitaire de fréquence 400Hz, en $X_f = 0.2m$ et $Y_f = 0.4m$ 113
6.6 Différentes étapes du calcul et erreurs entachant la reconstruction. Erreur de discrétisation. 114
6.7 Calcul de l'intégrale 6.13. Lignes épaisses : intégrales calculées à partir de $T(w)_{analytique}$, lignes fines : intégrales calculées numériquement à partir de $w_{discret}$. a) $\Delta = 1cm$, b) $\Delta = 0.5cm$ et c) $\Delta = 0.25cm$ 116
6.8 Erreur d'intégration ϵ_T entre intégrations numériques de surface et contour utilisant des données discrètisées issues des calculs directs et intégrations numériques utilisant des données analytiques, pour différentes fréquences d'excitation comprises entre 100Hz et 3000Hz, $\Delta = 0.5cm$ 117

6.9 Erreur d'intégration ϵ_M entre entre intégrations numériques de surface et contour utilisant des données discrètisées issues des calculs directs et intégrations numériques utilisant des données analytiques, pour différentes fréquences d'excitation comprises entre 100Hz et 3000Hz, $\Delta = 0.5cm$ 118
6.10 Différentes étapes du calcul et erreurs entachant la reconstruction. Incertitudes de mesure 119
6.11 Vibrations de plaques d'épaisseur $1mm$ en acier, appuyées aux bords, soumises à une excitation harmonique ponctuelle unitaire de fréquence 400Hz, en $X_f = 0.2m$ et $Y_f = 0.4m$, a) déplacements exacts ; b) déplacements bruités 120
6.12 Niveau d'erreur ϵ_T entre intégrations numériques de surface et contour utilisant des données discrètisées issues des calculs directs et intégration numérique utilisant des données analytiques, pour différentes fréquences d'excitation comprises entre 10Hz et 3000Hz, $\Delta = 0.5cm$. Ligne continue : Simulations utilisant des déplacements exacts, x : Simulations utilisant des déplacements bruités. 121
6.13 Niveau d'erreur ϵ_M entre intégrations numériques de surface et contour utilisant des données discrètisées issues des calculs directs et intégration numérique utilisant des données analytiques, pour différentes fréquences d'excitation comprises entre 100Hz et 3000Hz, $\Delta = 0.5cm$. Ligne continue : Simulation utilisant des déplacements exacts, x : Simulation utilisant des déplacements bruités 122
6.14 Différentes étapes du calcul et erreurs entachant la reconstruction 123
6.15 Courbe en L générale d'un problème type $Ax = b$, r est le nombre de troncature et k le nombre maximal de valeurs singulières. 125
6.16 Reconstruction de la répartition des moyennes pondérées de l'effort tranchant. Ligne continue : intégrale numérique utilisant des données analytiques, Croix : calcul de l'intégrale discretisée utilisant des déplacements exacts et une surface d'intégration carrée de $15cm$ de côté, $\Delta = 0.5cm$, Fréquence d'excitation $f = 1500Hz$. 126
6.17 Comparaison normalisée entre la norme du résidu et la norme de la solution normalisée, pour la reconstruction de l'effort tranchant en simulation "exacte". Comparaison normalisée entre la norme du résidu et la norme de la solution. Fréquence d'excitation $f = 1500Hz$. 127

6.18 Reconstruction de la répartition de l'effort tranchant. Ligne continue : calcul analytique, Croix : calcul de l'intégrale discretisée utilisant des déplacements exacts et une surface d'intégration carrée de $15cm$ de côté, $\Delta = 0.5cm$, Fréquence d'excitation $f = 1500Hz$, nombre de troncature :70. 128
6.19 Reconstruction de la répartition des moyennes pondérées de l'effort tranchant. Ligne continue : intégrale numérique utilisant des données analytiques, Croix : calcul de l'intégrale discretisée utilisant des déplacements bruités et une surface d'intégration carrée de $15cm$ de côté, $\Delta = 0.5mm$, Fréquence d'excitation $f = 1500Hz$. 129
6.20 Reconstruction de la répartition de l'effort tranchant. Ligne continue : calcul analytique, Croix : calcul de l'intégrale discrétisée utilisant des déplacements bruités et une surface d'intégration carrée de $15cm$ de côté, $\Delta = 0.5cm$, Fréquence d'excitation $f = 1500Hz$, nombre de troncature :70. 129
6.21 Courbe en L, pour la reconstruction de l'effort tranchant. Comparaison normalisée entre la norme du résidu et la norme de la solution. Fréquence d'excitation $f = 1500Hz$.130
6.22 Reconstruction de la répartition de l'effort tranchant. Ligne continue : calcul analytique, Croix : calcul de l'intégrale discrétisée utilisant des déplacements bruités et une surface d'intégration carrée de $15cm$ de côté, $\Delta = 0.5cm$, Fréquence d'excitation $f = 1500Hz$, nombre de troncature :31. 131
6.23 Reconstruction de la répartition des moyennes pondérées du moment fléchissant. Ligne continue : calcul utilisant des données analytiques, Croix : calcul de l'intégrale discrétisée utilisant des déplacements exacts et une surface d'intégration carrée de $15cm$ de côté, $\Delta = 0.5cm$, Fréquence d'excitation $f = 1500Hz$. 132
6.24 Reconstruction de la répartition du moment fléchissant. Ligne continue : calcul analytique, Croix : calcul de l'intégrale discrétisée utilisant des déplacements exacts et une surface d'intégration carrée de $15cm$ de côté, $\Delta = 0.5cm$, Fréquence d'excitation $f = 1500Hz$, nombre de troncature :70. 133
6.25 Reconstruction de la répartition des moyennes pondérées du moment fléchissant. Ligne continue : calcul utilisant des données analytiques, Croix : calcul de l'intégrale discrétisée utilisant des déplacements bruités et une surface d'intégration carrée de $15cm$ de côté, $\Delta = 0.5mm$, Fréquence d'excitation $f = 1500Hz$. 134

6.26 Reconstruction de la répartition du moment fléchissant. Ligne continue : calcul analytique, Croix : calcul de l'intégrale discrétisée utilisant des déplacements bruités et une surface d'intégration carrée de $15cm$ de côté, $\Delta = 0.5cm$, Fréquence d'excitation $f = 1500Hz$, nombre de troncature :70. 134
6.27 Courbe en L pour la reconstruction du moment fléchissant. Comparaison normalisée entre la norme du résidu et la norme de la solution. Fréquence d'excitation $f = 1500Hz$.135
6.28 Reconstruction de la répartition du moment fléchissant. Ligne continue : calcul analytique, Croix : calcul de l'intégrale discrétisée utilisant des déplacements bruités et une surface d'intégration carrée de $15cm$ de côté, $\Delta = 0.5cm$, Fréquence d'excitation $f = 1500Hz$, nombre de troncature :25. 136

7.1 Montage expérimental utilisé pour la reconstruction de l'effort tranchant à la limite d'une plaque de carré, de côté $1m$ et d'épaisseur $1mm$. 138
7.2 Discrétisation du domaine de mesure $15cm \times 78cm$ à la limite inférieure de la plaque, $\Delta = 5mm$. En pointillé : Surfaces d'intégration du calcul de l'effort tranchant moyenné pondéré. 139
7.3 Effort tranchant moyenné pondéré à la limite d'une plaque, surface d'intégration $15 \times 15cm$, pas de discrétisation $\Delta = 0.5cm$, pour différentes fréquences $a)f = 500Hz$, $b)f = 1000Hz$, $c)f = 2200H$ et $d)f = 3200Hz$, et $k \times L$: $a)6.6$, $b)9.5$, $c)13.5$ et $d)17$.140
7.4 Courbe en L pour le choix du paramètre de troncature lors de l'inversion de la matrice $[\eta]$ pour $f = 1600Hz$. 141
7.5 Modules des distributions d'effort tranchant à la limite d'une plaque, surface d'intégration $15 \times 15cm$, pas de discrétisation $\Delta = 0.5cm$, pour différentes fréquences $a)500Hz$, $b)1000Hz$, $c)2200Hz$ et $d)3200Hz$, et pour des valeurs de $k \times L$ correspondantes à : $a)6.6$, $b)9.5$, $c)13.5$ et $d)17$. 142
7.6 Module de l'effort tranchant issu de la mesure directe 142
7.7 Exemple de phénomène de lissage après déconvolution et troncature de valeurs singulières. Ligne rouge : Discontinuité originale, ligne bleue : Reconstruction lissée, utilisant x valeurs singulières, ligne verte : Reconstruction lissée, utilisant y valeurs singulières, avec $y < x$. 143
7.8 Reconstruction de l'effort tranchant. Courbe noire épaisse : Mesure directe, fine courbe grise : reconstruction. a)Module, b)Phase et c)Niveau d'erreur. 145

B.1 Reconstruction de l'effort tranchant en utilisant une intégration de type hybride. Mesure directe : courbe noire épaisse, reconstruction : fine courbe grise. 156

C.1 Représentation des vecteurs unitaires en un point du contour σ. $\vec{n}$ normale, $\vec{s}$ tangente. 159

D.1 Vecteurs normaux à σ aux abords d'une discontinuité. 165

D.2 Surface fermée S quelconque 165

Introduction et contexte scientifique

La connaissance des forces agissant sur les structures mécaniques est d'une importance capitale dans un grand nombre de domaine des sciences de l'ingénieur. L'analyse des contraintes, le diagnostic de fatigue, ou même la prévision du comportement vibroacoustique des structures nécessite ce genre de données. De nombreux modèles numériques type éléments finis les utilisent également. En général, l'observation directe de ces forces se heurte à l'impossibilité de placer les capteurs adéquats entre les sources d'excitations et la structure étudiée. Dans d'autres cas, les charges peuvent être mobiles ou non localisées, empêchant l'utilisation de capteur de force. Afin de pallier ce problème, il a été développé ces dernières années des méthodes dites indirectes. Elles sont basées sur la mesure de quantités aisément observables (déplacements, vitesses, accélérations, pressions, contraintes...) et d'une caractérisation des paramètres du système. Cette introduction, après une description du sujet, a pour but de présenter différentes méthodes indirectes et d'exposer leurs caractéristiques principales.

Description du sujet

L'objectif principal de la méthode exposée ici est de reconstruire les efforts auxquels les limites d'une structure sont soumises, à partir de la mesure des déplacements. Ces déplacements de la structure sont généralement créés par une excitation, appliquée directement sur la structure. Cette excitation peut être, ponctuelle ou répartie, de type force ou moment.
Lorsque l'on s'intéresse aux limites d'un domaine, et que ces dernières ne coïncident pas avec les points d'application des forces extérieures, les efforts rencontrés sont internes au matériau, c'est à dire, l'effort tranchant et le moment fléchissant. Ces quantités dépendent directement des dérivées spatiales du déplacement.
L'estimation des dérivées aux frontières, nécessaires à l'identification d'effort, est problématique. Impossibles à mesurer directement, ces dérivées ne sont accessibles qu'à la suite d'approximations

généralement peu précises aux limites des domaines. De plus, ces méthodes sont instables, c'est à dire très sensibles aux faibles variations des données d'entrée.
Jusque là de nombreuses méthodes d'identification localisent et caractérisent avec précision les efforts injectés à l'intérieur d'un domaine d'étude (cf. [PEZ 96], [FS 96]), mais à l'approche des limites du domaine, elles deviennent inefficaces.
Physiquement, on entend par problème inverse, la recherche des causes d'un phénomène à partir de la connaissance des effets. En ce sens, l'approche proposée dans ce travail n'est pas toujours un problème inverse, car les efforts internes aux limites, ne sont pas forcément les causes des vibrations se propageant dans la structure, mais une conséquence. Cette recherche d'effort interne à partir de la mesure des déplacements correspond mieux à la définition de mesure indirecte. C'est à dire que l'on estime une quantité à partir de la mesure d'une autre. Cependant, dans de nombreux cas, il sera possible de faire correspondre les limites du domaine d'étude avec les points d'application des forces extérieures. Dans ce cas la méthode développée ici vérifiera la définition physique du problème inverse.
Mathématiquement, la grande majorité des acousticiens entendent par problème inverse, inversion de matrice et minimisation de fonctionnelle d'écart. Ils ont raison. L'approche présentée dans ce manuscrit n'est pas typique des problèmes inverses au sens des mathématiques. La méthode est ici locale, et nécessite la connaissance *a priori* de l'équation de mouvement de la structure. L'utilisation de fonctions tests permettant l'extraction des quantités recherchées à partir de cette équation de mouvement est une des particularités de la technique. De plus l'utilisation d'intégrales spatiales pour le calcul d'identification régularise naturellement ce problème.
L'approche des limites de la structure, l'utilisation de fonction test et les calculs sous forme intégrale sont les trois originalités de cette méthode d'identification d'effort.

Techniques de caractérisation de sources

Le mouvement vibratoire d'une structure dépend de plusieurs paramètres : les forces extérieures, les caractéristiques physiques de la structure (dimensions, formes, matériaux,...) et les conditions aux limites. Toutefois en considérant un domaine particulier, il est possible qu'aucune force extérieure ne soit directement appliquée à l'intérieur de celui-ci, et que les vibrations soient transmises via les efforts internes présents aux limites du domaine. Ces limites sont alors les sources de la vibration qui anime le domaine considéré. On entend donc par "sources", les efforts qui sont à l'origine du

mouvement vibratoire de la structure étudiée.
La caractérisation de source est un vaste domaine d'étude en vibration et en acoustique. On comprend aisément l'importance de la connaissance des causes des vibrations, quelle que soit leur provenance (forces extérieures ou vibrations transmises par les limites des structures). De nombreuses approches ont été développées dans différents domaines.

Il existe deux grandes familles de techniques d'identification de sources. Celles issues du domaine acoustique et celles issues du domaine vibratoire. Pour le domaine acoustique, ces techniques sont basées sur la connaissance et l'analyse du champ acoustique rayonné par une structure vibrante. La plus célèbre, l'holographie acoustique en champ proche (cf. Maynard *et al.* [MWL 85]) a pour objet la reconstruction de la déformée d'une surface vibrante à partir de la mesure des pressions en champ proche par rétro-propagation des ondes acoustiques. Cette technique est basée sur la transformée de Fourier spatiale bidimensionnelle, permettant de calculer le champ acoustique dans le domaine du nombre d'onde. Elle présente des instabilités, et amplifie considérablement le bruit inhérent à toute mesure lors de la rétro-propagation du champ de pression. D'autres méthodes ont été également développées pour identifier les sources des champs de pression. Sans que celles-ci ne soient le sujet de cette thèse, centrée sur les vibrations, nous pourrons tout de même citer les techniques d'antennerie (cf. [DBHW 95]) ou les méthodes utilisant les éléments finis de frontière (cf. [SH 01]).

Dans le domaine vibratoire, c'est l'intensimétrie structurale, définie par analogie avec l'intensité acoustique, qui est à la base des techniques de localisation de source. Elle a été développée, dans les travaux de Pavic [PAV 76] et de Noiseux [NOI 70], pour analyser la propagation des ondes de flexion dans les structures simples. On peut ainsi cartographier les flux de puissance, et analyser le chemin parcouru par l'énergie vibratoire. La connaissance seule du déplacement transverse suffit. Mais ces méthodes présentent les instabilités caractéristiques des problèmes inverses. Cela est dû au calcul des dérivées spatiales de la structure, qu'elles soient calculées par différence finies (cf. [PAV 76]) ou par projection dans la base modale (cf. [GP 93]). L'intensimétrie est devenue un outil courant et a été utilisée dans de nombreux travaux, notamment dans des travaux d'identification tels que ceux de Zhang *et al.* (cf. [ZMI 96b],[ZMI 96a]).

L'identification et la caractérisation de source se basant sur les équations de déformation des structures étudiées reliant champ d'excitation et champ vibratoire mesuré ont été largement développées.

Pézerat (cf. [PEZ 96], [PG 00], [PG 95a], [PG 95b] et [PG 96]) utilise un shéma aux différences finies pour discrétiser les équations de mouvements et localiser les sources. Zhang *et al.* (cf. [ZMI 96b] et [ZMI 96a]) utilise une transformée de Fourier bidimensionnelle des déplacements mesurés afin de passer dans le domaine des nombres d'onde. Ils utilisent et comparent une formulation d'intensimétrie définie par Pavic [PAV 76] et une autre définie par Romano *et al.* [RAW 90], qui, combinée aux équations de mouvement permettent de caractériser les sources. Fregolent (cf.[FS 96]) utilise directement l'équation de déformation exprimée dans le domaine des nombres d'onde.

D'autres approches toujours basées sur la déformée de la structure étudiée, envisagent le problème du point de vue modal. Ainsi Granger et Perottin (cf. [GP 99] et [PG 99]) se servent d'un modèle modal de la structure et d'une transformée spatiale de l'excitation pour reconstruire une excitation répartie. Des méthodes permettant aussi de quantifier le nombre d'excitations auxquelles est soumise la structure ont été développées. Pour cela Shih *et al.* [SZA 89] calculent et comparent point à point l'incohérence spatiale des efforts reconstitués afin de déterminer ensuite leur nombre et leur localisation. Guillaume, Parloo *et al.* (cf.[PVGVO 02],[GPVDS 02]et [GPDS 02]) utilisent également une description modale de la structure. Ils ont mis en place une méthode qui réduit le nombre d'efforts calculés et les suppose ponctuels. Cette technique de pondération, supposant que la plupart des efforts trouvés n'existent pas et sont dûs au mauvais conditionnement du problème, cherche ainsi à minimiser le nombre de sources. Cela affine et stabilise la reconstruction d'efforts. Récement Liu (cf. [LS 06]) a proposé une méthode d'identification d'efforts distribués pour laquelle les fonctions composant la base modale ne sont définies que sur l'espace soumis à l'excitation, contrairement aux méthodes modales classiques où ces fonctions doivent être connues sur l'ensemble de la structure.

Toutes ces méthodes, ainsi que celles développées dans cet ouvrage, ont des étapes communes dans leur mise en place. Les procédures classiques d'identification de sources se déroulent de la manière suivante :
- Description de la structure,
- Acquisition des réponses vibratoires,
- Reconstitution des efforts.

Ces étapes sont décrites dans les paragraphes suivants.

Description de la structure

Quel que soit le travail entrepris, il est indispensable de décrire le comportement dynamique de la structure étudiée. On peut le faire selon trois approches : analytique, numérique ou expérimentale.

Analytique

L'approche analytique est issue de la théorie des milieux continus. Elle relie directement les mouvements de la structure et les forces excitatrices. Considérant le système comme continu ce dernier est décrit par des équations aux dérivées partielles temporelles et spatiales (cf. Guyader [GUY 02]). Le système décrit ainsi aura une infinité de modes propres qui seront exprimés à l'aide de fonctions propres. Ce type d'approche est utilisé dans certains travaux sur des structures simples (cf. [PEZ 96], [ZMI 96b], [DCR 92] et [FS 96]), ainsi que dans cette thèse.

Numérique

L'approche numérique est basée sur la description du comportement vibratoire des structures par éléments finis. Contrairement à l'approche précédente, celle-ci permet de décrire des structures aux formes complexes. Le système étudié sera ainsi considéré comme un ensemble de masse, de raideur et d'amortissement, ayant un nombre de degrés de liberté limités. La structure vibrante aura donc un nombre de modes propres finis, définis par des vecteurs propres. Cette approche est utilisée dans de nombreux problèmes inverses, que ce soit pour l'identification des conditions limites (cf.[KSMY 05] et [AJM 01]), pour l'intensimétrie (cf.[GP 93]),pour la reconstruction de paramètre (cf.[GLA 99] et [GLA 04]) ou pour l'identification de source (cf.[LEC 03], [MCL 03]).

Expérimentale

L'approche expérimentale consiste à décrire le comportement vibratoire de la structure à partir de mesures. Elle permet également d'étudier des structures de formes complexes. Elle implique une discrétisation spatiale du système en un certain nombre de points d'excitation ou de mesure. Le principe est de caractériser la relation linéaire entre une force d'excitation en un point et une réponse en un autre point de la structure. La plupart des travaux basés sur cette technique utilisent une transformée de Fourier de ces données afin de travailler dans le domaine fréquentiel. Ainsi la réponse $X_i(\omega)$ mesurée au point *j* lors d'une excitation impulsionnelle au point d'entrée *i*, n'est autre que la fonction de

transfert $H_{ij}(\omega)$ entre les point *i* et *j*.

$$X_i(\omega) = H_{ij}(\omega)F_j(\omega) \tag{1}$$

où $F_j(\omega)$ est un effort quelconque appliqué au point *j*.
Cette approche a elle aussi été le sujet de nombreux travaux souvent liés à des structure mécaniques industrielles. Ainsi Zhang [ZHA 98] développe plusieurs méthodes d'identification de source basées sur des mesures expérimentales de réponse. Une première utilisant la transformée de Fourier des réponses vibratoires, se limite aux champs parfaitement cohérents. Afin de pallier ce problème, il développe une méthode inverse utilisant la matrice interspectrale des réponses vibratoires. L'utilisation des interspectres et des autospectres des réponses est une technique répandue, on peut également citer les travaux d'identification de Jin *et al.*[JBHW 93]. Leclere [LEC 03] s'intéresse d'avantage aux stratégies de pondération afin d'affiner et stabiliser cette méthode d'identification appliquée au moteur diesel.

Acquisition des réponses

Les réponses vibratoires d'un système soumis à une excitation, peuvent être mesurées de différentes manières. Contraintes, vitesses ou accélérations sont les quantités généralement utilisées dans ces méthodes. Jauges de contraintes, vibromètres ou accéléromètres pouvant aisément être positionnés sur la surface de la structure étudiée afin de la caractériser, sont les capteurs les plus couramment utilisés. Contraintes, accélérations, vitesses ou déplacements sont des quantités liées, et la mesure de l'une d'elle permet en principe de calculer les autres.

Reconstruction des efforts

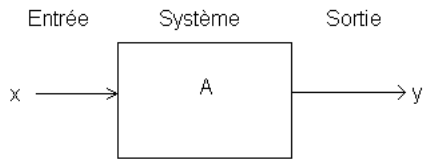
Une fois le système décrit et la réponse de la structure sous excitation mesurée, un traitement des données est nécessaire afin de reconstruire les efforts à l'origine de la vibration. Certaines méthodes (cf. [PEZ 96], [ZMI 96b]) nécessitent juste une manipulation de l'équation de mouvement ou d'une formulation de l'intensimétrie afin d'extraire les efforts. Mais dans certains cas, notamment pour les descriptions numériques ou expérimentales de la structure, l'inversion de la matrice de transfert est une étape complexe et obligatoire.
Les paragraphes suivants ont pour but de donner au lecteur une vision globale d'un certain nombre de phénomènes classiques des problèmes d'identification de type numérique ou expérimental qui

peuvent être rencontrés. Même si ces notions ne sont pas directement utilisées dans cette thèse, leur connaissance est fondamentale pour toute personne qui s'intéresse aux problèmes inverses liés aux vibrations acoustiques. Il était donc indispensable d'en faire état dans ce travail.

Problème inverse et problème mal posé

Les problèmes de vibroacoutique linéaires peuvent se poser de la façon suivante :

$$Ax = y \tag{2}$$



où x est la grandeur d'entrée, A les paramètres physiques du système sollicité, et y la réponse de ce système. Pour un problème de vibration, par exemple, x pourrait être la force excitatrice extérieure, A les caractéristique de la structure, et y le champ de déplacement vibratoire.
Ainsi, l'étude des systèmes vibrants propose trois problèmes de base :

1. Calculer la réponse y du système à partir de la connaissance des données d'entrée x et des paramètres A de ce système.

2. Calculer les paramètres A du système à partir de la connaissance des données d'entrée x et de la réponse y de ce dernier.

3. Calculer les données d'entrée x à partir de la connaissance de la réponse y et des paramètres A de celui-ci.

Les problèmes du premier type sont communément appelés problèmes directs. Les problèmes du deuxième type (identification de paramètre) et du troisième type (identification de sources) sont appellés problèmes inverses. La résolution des 2ème et 3ème types de problèmes nécessite généralement l'inversion du modèle étudié.

Il arrive souvent que cette notion de problème inverse rejoigne le concept du problème mal posé, introduit par Hadamard [HAD 02] au début du siècle. Un problème sera dit mal posé s'il ne vérifie pas les conditions suivantes :

1. La solution du problème existe,

2. La solution est unique,

3. La solution est stable.

Si ces trois aspects sont respectés, le problème est dit "bien posé". Les deux premières conditions sont booléennes au sens mathématique du terme, c'est à dire soient vraies ou soient fausses. En revanche pour la plupart des méthodes inverses, la stabilité n'est pas assurée. Dans le cas des problèmes directs, généralement bien posés, on évalue les effets à partir de causes connues. Mathématiquement cela revient à intégrer les données d'entrées. Cette intégration aura pour effet de lisser la solution, la rendant ainsi stable. Le problème inverse équivaut donc à un processus de différentiation, beaucoup plus complexe à résoudre (cf. Stevens [STE 87]), et fortement instable, en effet une petite variation des données d'entrées entraîne de grande variation de la solution. Malgré ce handicap les méthodes inverses furent développées dans de nombreux travaux. Il est toutefois important de souligner que tous les problèmes inverses ne sont pas mal posés et que tous les problèmes mal posés ne sont pas inverses. Le lecteur trouvera une bibliographie de la littérature consacrée à ce domaine ci dessous.

Parmi tous les formalismes, on peut retenir deux grande tendances : le principe probabiliste et le principe déterministe. Malgré leur différence de forme, ces deux principes cherchent à pallier les problèmes d'instabilité de l'inversion en régularisant le problème par une information *a priori* sur le résultat.
L'approche probabiliste des problèmes inverses dévellopée par Tarantola et Arsenine [TAR 87] a pour fondement le caractère aléatoire des erreurs qui affectent les données. Elle se propose de quantifier toute l'information que l'on possède sur une variable (donnée ou inconnue) par une fonction densité de probabilité. La solution du problème sera alors composée elle même d'une densité de probabilité. En vibroacoustique, peu de travaux abordent le problème inverse de façon probabiliste, on peut tout de même citer le travail de Bonnet [BON 91] sur le rayonnement acoustique des structures.

L'approche déterministe, plus répandue, est utilisée dans la plupart des travaux récensés dans la littérature. Elle est basée sur la minimisation d'une fonctionnelle d'écart entre les quantités mesurées et les quantités calculées à l'aide du problème direct. L'ouvrage de Tikhonov [TA 76] aborde le problème de façon déterministe et introduit la notion d'opérateur régularisant permettant de calculer une solution approchée (quasi solution) et rendant le problème stable. Cette oprération est appellée "régularisation", elle est nécessaire dans un grand nombre de problème inverse.

Instabilité du problème et techniques de régularisation

L'inversion de la matrice de transfert

L'équation 3 nous donne une formulation directe du problème.

$$X_i(\omega) = H_{ij}(\omega)F_j(\omega) \tag{3}$$

Afin de reconstruire les efforts, la solution qui vient en premier lieu est de calculer :

$$\{F(\omega)\}_n = ([H(\omega)]_{mn})^{-1}\{X(\omega)\}_m \tag{4}$$

où $([H(\omega)]_{mn})^{-1}$ est l'inverse de la matrice de transfert.
Cette méthode requiert l'égalité du nombre d'efforts recherchés et du nombre de réponses mesurées. Cependant, afin de stabiliser le problème, il est intéressant de surdimensionner la quantité d'informations introduite. Ainsi le nombre de point de mesure étant supérieur au nombre d'efforts recherchés, la matrice de transfert $[H(\omega)]_{mn}$ sera rectangulaire et le système à résoudre de la forme :

$$\{F(\omega)\}_n = [H(\omega)]^+_{mn}\{X(\omega)\}_m \tag{5}$$

avec $m > n$ et où $[H(\omega)]^+_{mn}$ est la pseudo-inverse de la matrice de transfert. Cette solution $\{F(\omega)\}_n$ est appellée solution au sens des moindres carrés, car ce n'est pas une solution exacte sur le plan mathématique. En effet si on ré-injecte les $\{F(\omega)\}_n$ calculés, dans l'équation 3 le vecteur $\{X(\omega)\}_m$ obtenu *a posteriori* n'est pas strictement égal au vecteur $\{X(\omega)\}_m$ introduit initialement dans 5. Une solution au sens des moindres carrés implique donc une reformulation mathématique du problème initial qui peut être formulé de la sorte :

Déterminer $\{F(\omega)\}_n$ *à partir de* $\{X(\omega)\}_m$ *et de* $[H(\omega)]_{mn}$
satisfaisant la relation $\{X(\omega)\}_m = [H(\omega)]_{mn}\{F(\omega)\}_n$

La formulation au sens des moindres carrés est exprimée par :

Déterminer $\{F(\omega)\}_n$ *à partir de* $\{X(\omega)\}_m$ *et de* $[H(\omega)]_{mn}$
en minimisant la quantité $\|\{X(\omega)\}_m - [H(\omega)]_{mn}\{F(\omega)\}_n\|$

L'appellation moindres carrés vient du fait que l'on cherche à minimiser la norme Euclidienne de cette différence.
Cette notion des moindres carrés est très importante et de nombreux ouvrages en traitent (cf.[LH 74]). Gladwell [GLA 04] fait remarquer qu'en ingéniérie, l'approche quasi-universelle des problèmes inverses est au travers des moindres carrés, c'est à dire : trouver un système qui minimise la distance entre la réponse mesurée et la réponse désirée.

Les erreurs entachant la reconstruction des efforts sont influencées par deux principaux facteurs : l'erreur sur les fonctions de transfert mesurées, et le mauvais conditionnement de la matrice de transfert. Rappelons que le conditionnement de la matrice $[H(\omega)]_{mn}$ représente le degré d'indépendance linéaire des déformées de la structure dues aux excitations. Cette notion peut être quantifiée par le nombre de conditionnement de $[H(\omega)]_{mn}$ qui est le rapport entre la plus grande et la plus petite de ses valeurs singulières.
Cette sensibilité du problème a été largement étudiée. Thite [TT 03], Starkey [SM 89] et Blau [BLA 97] analysent dans leurs travaux, l'influence de chacune de ces sources d'erreur à partir de différentes techniques d'identification. Les derniers travaux de Blau approfondissent l'analyse statistique des erreurs de mesures dans les techniques de mesures indirectes d'efforts (cf.[BLA 99] et [BLA 99]).

Optimisation de l'inversion

Afin d'améliorer l'inversion de la matrice de transfert, Mas *et al.* [MSW 94] proposent une technique qui se base sur la pondération des moindres carrés. Le fait de pondérer les termes du vecteur déjà minimisé permet d'ajuster l'importance accordée à chaque ligne du système. Cette méthode a été développée et analysée, notamment par Leclere *et al.* (cf.[LPLP 04]) qui proposent une comparaison entre pondération des moindres carrés et pondération des moindres carrés totaux. Cette comparaison est également faite par Liu (cf. [LS 05]) qui complète ces méthodes en y ajoutant une étape de régularisation. Guillaume *et al.* [GPDS 02] affinent cette technique de pondération afin de quantifier le nombre d'efforts injectés dans la structure étudiée.
Une autre approche, initiée par Desanghere [DS 85], consiste à passer en base modale afin de faciliter

l'inversion de la matrice de transfert. Pour cela, les entrées et sorties du système sont projetées dans la base des modes propres de la structure. Cette technique a été largement developpée (cf. [SZA 89], [ZAB 90], [WG 93], et [HCDV 97]). Elle nécessite malgré tout la connaissance du comportement modal de la structure, et la gamme de fréquence étudiée sera limitée par les modes pris en compte dans le calcul. De plus, l'omission d'un mode propre dans cette bande de fréquence affectera grandement la justesse du résultat.

Méthode de régularisation

La résolution d'un problème mal posé doit donc passer par les notions de solution approchée et de solution stable : c'est le but des méthodes de régularisation. Il s'agit de réduire l'hypersensibilité de la solution aux variations des données d'entrées. Deux grandes approches de régularisation peuvent être citées : la régularisation de Tikhonov et la TSVD (truncated Singular Value Decomposition).

La plus ancienne de ces méthode, celle de Tikhonov [TA 76], consiste à stabiliser le problème en minimisant la norme $\|\{X(\omega)\} - [H(\omega)]\{F(\omega)\}\|$ par l'introduction d'un opérateur régularisant $\beta(\omega)$. Le problème revient à minimiser la quantité $\|\{X(\omega)\} - [H(\omega)]\{F(\omega)\}\| + \beta(\omega)\,\|\{F(\omega)\}\|$. On cherche via cette démarche une procédure de calcul d'une approximation qui adoucisse les effets du bruit et qui fournisse une solution physiquement stable. Si on donne un poids trop important à l'opérateur régularisant, on conçoit aisément que la solution (par rapport à une hypothétique solution exacte) peut être altérée de façon non négligeable : ceci est un avantage dans le cas où l'on est sûr de l'information *a priori*. Si, en revanche, cette information est peu sûre, on doit trouver, via le paramètre de régularisation, le juste compromis entre la stabilité et la vraisemblance de la solution obtenue.

La méthode de troncature de valeurs singulières est beaucoup plus répandue. Elle a été décrite dans le cadre de la mesure indirecte d'efforts par Powell [PS 84]. Le principe est d'exprimer la matrice de transfert sous cette forme :

$$[H]_{mn} = [U]_{mn}[S]_{nn}[V]^*_{nn} \tag{6}$$

où $[U]_{mn}$ et $[V]^*_{nn}$ sont des matrices unitaires, et $[S]_{nn}$ est la matrice diagonale des valeurs singulières classées par ordre décroissant. Le nombre de valeurs singulières non nulles de $[H]_{mn}$ définit son rang, c'est à dire le niveau de dépendance linéaire de ses colonnes. En pratique, aucune des valeurs singulières n'est nulle, mais certaines sont très faibles. Ce sont ces faibles valeurs singulières, qui sont la cause de l'hypersensibilité du problème en amplifiant considérablement le bruit de mesure.

Le principe de cette régularisation sera donc de considérer comme nulles, toutes valeurs singulières inférieures à un certain seuil fixé. Ce seuil sera alors le paramètre de régularisation. Il est généralement dépendant du niveau d'incertitude des fonctions de transfert composants $[H]$.
Cette méthode, simple d'utilisation, a été utilisée dans de nombreux travaux d'identification (cf. [EJR 88], [WG 93], [HEN 94], [SZA 89], [PG 00]et [HDCV 99]). Cependant l'omission de valeurs singulières, même si elle régularise le problème, entraîne en acoustique une sous estimation de la puissance acoustique globale (cf. [MOO 03]). Des techniques d'ajustement ont donc été développées. Moorhouse (cf. [MOO 03]) propose une méthode qui ajuste la puissance estimée et la puissance mesurée afin de compenser l'annulation de certaines valeurs singulières. Pézerat [PG 00] compare la $TSVD$ avec une régularisation par filtrage des hauts nombres d'ondes, initialement développée avec la technique RIFF. L'étude montre que la troncature des valeurs singulières est physiquement équivalente à un filtrage en nombre d'onde.

Autres problèmes inverses appliqués aux vibrations et à l'acoustique

Dans le domaine des vibrations et de l'acoustique, les problèmes inverses sont nombreux. Mise à part l'identification de source, expliquée précédemment, on trouve de nombreuses et diverses applications. Il est important de noter que tous ces travaux considèrent la source de la vibration fixe et en régime harmonique. Mais il existe des techniques de localisation ou de caractérisation de sources ne correspondant pas à ces critères. Zhu et Law (cf.[ZL 01], [ZL 02] et [ZL 03]) ont développé des méthodes d'identification d'effort mobile, basées sur l'équation de déformation de la structure et sur une régularisation de type Tikhonov. La technique est limitée aux efforts non oscillants. L'étude des vibrations créees par un effort oscillant et mobile, est extrèmement complexe. Ces travaux en sont encore au stade du problème direct. Pesterev et Bergman y ont consacré de nombreux articles (cf. [PB 97a],[PB 97b],[PB 00]).

L'identification des conditions aux limites est également un problème complexe. Pézerat [PEZ 96] propose une méthode simple basée sur le calcul des impédances de translation et de rotation afin d'identifier des conditions aux limites extrèmes : appuyées, encastrées, guidées, ou libres. Divers méthodes numériques et expérimentales ont été mises au point. Elles utilisent principalement sur un modèle élements finis. On peut citer entre autres les travaux de Kamiya[KSMY 05] et de Ahmadian[AJM 01].

L'identification des paramètres d'un système vibrant, c'est à dire ses raideurs, ses masses ou ses amortissements est aussi un cas de problème inverse. Gladwell et Ram (cf. [GLA 04], [RAM 94], [RG 94], [GLA 99] et [GLA 04]) ont largement étudié la question numériquement. Ils s'intèressent à reconstruire un modèle éléments finis en se basant sur l'analyse de ses modes propres.

Position du sujet

Le but principal de la méthode exposée ici, est la détermination des efforts présents à la limite d'un domaine, à partir de la mesure du champ des déplacements à l'intérieur du domaine considéré.
Ce travail se démarque des nombreux travaux déjà existants. Effectivement la recherche des efforts aux limites est un sujet d'intérêt. Il est cependant extrêmement complexe, effectivement,le fait que l'on se positionne à la limite, réduit le nombre d'informations mesurables. Les efforts sont des quantités proportionnels aux dérivées spatiales du déplacement, pour estimer ces dérivées à partir de déplacements mesurés, il est courant d'utiliser des informations suitées d'un côté et de l'autre du point considéré. L'approche des limites devient donc problèmatique car on ne dispose pas d'information en dehors du domaine. Cet aspect fut déjà souligné dans le travail de Pézerat [PEZ 96] en developpant la technique RIFF qui identifie les sources présentes à l'intérieur d'un domaine à partir du champ de déplacement discrétisé. L'utilisation de schéma aux différences finies pour l'estimation des dérivées spatiales, pose problème à l'approche des limites du domaine. La technique developpée dans ce manuscrit se veut être complémentaire de RIFF en identifiant les efforts aux limites.
Cet aspect inovant présente de nouvelles perspectives de recherche dans de nombreux domaines de la vibroacoustique, telles que l'identification de défauts ou de conditions aux limites.
La méthode montre que l'utilisation de fonctions test est d'un grand intéret et permet avec succès l'extraction de données à partir des équations modélisant les systèmes. Ce concept peut être étendu au delà des vibrations ou de l'acoustique. Les sciences utilisant couramment des équations différentielles telles que la mécanique des fluides ou la thermique pourraient exploiter le concept de fonction test, associé aux formulations intégrales des sytèmes pour des applications variées.

Soulignons ici le fait que l'approche proposée se veut générale. En se concentrant sur les équations décrivant les phénomènes physiques, le développement de la méthode n'est pas orienté vers un champ d'application particulier tel que les problèmes vibro-acoustiques ou vers d'autres domaines plus généraux (le génie civil, micro-système,...) .

Cependant plusieurs facteurs sont à considérer. Les limites fréquentielles rencontrées lors des simulations et expériences peuvent sembler restreindre les applications à un certain type de problème. Or, les gammes de fréquence d'intérêt des différents domaines d'application sont indirectement liées aux dimensions de la structure (basses fréquences en génie civil, moyennes fréquences en vibro-acoustique,...). Il est montré dans cette étude que les limites fréquentielles de la méthode proposée dépendent directement de la taille du domaine de mesure et varient en conséquence avec la structure étudiée. Il est donc envisageable que les limites fréquentielles s'adpatent naturellement au domaine d'application.

Il faut toutefois souligner le fait que le développement s'est fait au sein du laboratoire de vibrations et d'acoustique (LVA) dont les problèmes vibro-acoustiques sont l'orientation principale. Ainsi les commentaires et analyses présents dans ce mémoire peuvent amener à penser que la méthode est dédiée à de tels problèmes. Il n'en est rien. Si les phénomènes physiques présents dans le système étudié peuvent être modélisés par les équations utilisées pour établir la méthode d'identification alors la méthode et ses limites restent théoriquement valables.

Structure du document

L'enemble du document s'articule en 7 chapitres :
-Le premier introduit le formalisme choisi pour la reconstruction de l'effort tranchant et du moment fléchissant dans le cas d'une poutre en flexion. Les définitions des fonctions test y sont présentées ainsi que des exemples.
-Le deuxième est consacré aux approximations et aux incertitudes qui détériorent la reconstruction. Elles sont analysées grâce à des simulations numériques. On s'interesse tout d'abord à l'erreur de discrétisation puis aux effets des bruits de mesure sur la reconstruction.
-Le troisième présente les validations expérimentales sur poutres de la reconstruction de l'effort tranchant et du moment fléchissant.
-Le quatrième propose une autre utilisation de la méthode pour l'identification des conditions aux limites.
-Le cinquième étend la méthode aux structures 2D planes. Certaines étapes y sont réétudiées.
-Le sixième analyse les approximations et les incertitudes de la reconstruction d'efforts dans le cas des plaques en flexion par simulations numériques.
-Enfin, le septième présente une validation expérimentale de la reconstruction de l'effort tranchant local à la limite d'une plaque en flexion.

Chapitre 1

Reconstruction de l'effort tranchant et du moment fléchissant : Cas d'une poutre en flexion

1.1 Objectifs du chapitre

L'objectif du chapitre est de présenter et d'expliquer la méthode de reconstruction de l'effort tranchant et du moment fléchissant aux limites d'un domaine d'étude. Afin de faciliter la compréhension de l'approche, le chapitre se limite aux poutres en flexion. L'extention de la technique aux plaques, nécessitant d'importantes modifications, sera présentée à partir du chapitre 5. Après un bref rappel des équations de base du problème vibratoire, l'approche mathématique permettant le calcul des efforts tranchants et moments fléchissants est présentée.

1.2 Equations de base du problème

Dans ce travail, nous avons pour objectif la reconstruction de l'effort tranchant et du moment fléchissant à partir des déplacements d'une poutre vibrant en flexion. Nous considérerons un mouvement harmonique tel que :

$$w(x,t) = w(x)e^{j\omega t} \tag{1.1}$$

où $w(x)$ est l'amplitude du déplacement transversal de la poutre et ω la pulsation de l'excitation.

Les expressions de l'effort tranchant T et du moment fléchissant M en un point quelconque de la poutre, sont données par (cf. [GUY 02]) :

$$\begin{cases} T(x) = EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x) \\ \\ M(x) = EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x) \end{cases} \tag{1.2}$$

où E est le module d'Young complexe, I l'inertie de flexion et w le déplacement transversal. On constate donc que ces quantités sont directement proportionnelles aux dérivées troisième et seconde du déplacement. Dans la suite du travail on s'intéressera à l'effort tranchant et au moment fléchissant à la limite du domaine considéré.

Le champ des déplacements $w(x)$ issus des vibrations transversales est la solution d'une équation différentielle du quatrième ordre. Dans un domaine *[a,b]* d'une poutre homogène, l'équilibre du système est régi par l'équation de mouvement :

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x) - \rho S\omega^2 w(x) = F(x)\ pour\ x \in]a, b[\tag{1.3}$$

où ρ est la masse volumique du matériau, S la section de la poutre et $F(x)$ la distribution de force excitant la structure.

Les équations 1.4 et 1.5 donnent l'effort tranchant et moment fléchissant dûs aux conditions aux limites du domaine considéré (fig 1.1).

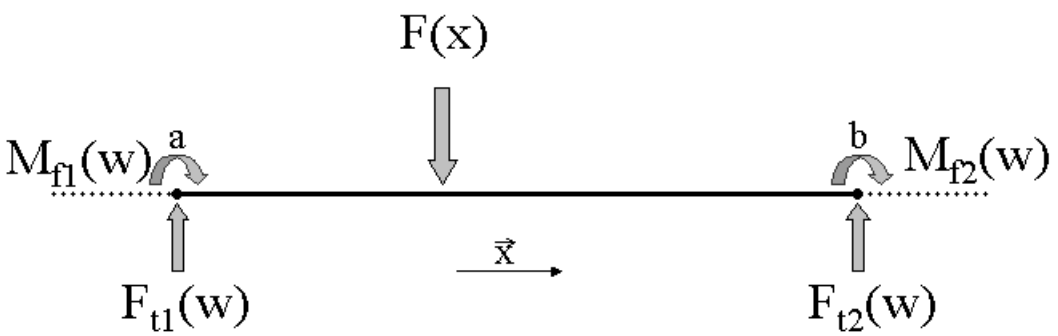


FIG. 1.1 – Tronçon [a,b] d'une poutre en flexion soumise à différents efforts, forces ou moments

$$\begin{cases} EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x) = F_{t1}(w) \\ \\ EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x) = M_{f1}(w) \end{cases} \quad pour\ x = a \tag{1.4}$$

$$\begin{cases} EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x) = F_{t2}(w) \\ \\ EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x) = M_{f2}(w) \end{cases} \quad pour\ x = b \tag{1.5}$$

Les quantités décrites pas les termes $F_{t1}(w)$, $M_{f1}(w)$, $F_{t2}(w)$ et $M_{f2}(w)$ représentent les efforts appliqués à la poutre aux points $x = a$ et $x = b$. Ils sont nuls si ces points sont les extrémités libres d'une poutre. Ils représentent l'effort tranchant ou le moment dû aux efforts internes si la poutre ne se restreint pas au domaine étudié, etc...

Les équations 1.3, 1.4 et 1.5 fournissent la base de notre problème, dans la méthode RIFF (cf.[PEZ 96]), l'inconnue recherchée est $F(x)$, distribution de force excitatrice dans le domaine $]a, b[$. Il est important de souligner que notre objectif n'est pas de la calculer, elle sera supposée connue ou nulle, mais d'identifier l'effort tranchant et le moment fléchissant aux limites d'un domaine d'étude, c'est à dire les quantités décrites par les équations 1.4 et 1.5. Les limites du domaine d'étude pouvant coïncider avec les limites de la structure, nous pourrons reconstruire T et M aux extrémitées physiques de la poutre. Remarquons que dans le cas où l'effort F s'appliquerait à une extrémité libre de la poutre, alors le calcul de T équivaudrait au calcul de F, cet aspect sera d'ailleurs utilisé lors de la validation expérimentale de l'approche.

En regardant les équations 1.2, 1.4 ou 1.5, on pourrait imaginer une méthode de calcul basée, comme dans la méthode RIFF, sur l'estimation des dérivées spatiales avec des techniques de type "différences finies". La méthode proposée par la suite est différente pour plusieurs raisons. Il est bien connu que l'estimation des dérivées spatiales aux extrémités présente de grandes difficultés. Effectivement, les méthodes classiques utilisent des schémas dits "centrés", où le point de calcul doit être encadré de plusieurs points de mesures, ce qui est impossible aux extrémités. Il existe aussi des schémas décentrés qui permettent une estimation des dérivées aux limites, malheureusemnt ces derniers présentent l'inconvénient de ne pas aussi bien converger que les schémas centrés. De plus ce type d'estimation présente une très grande sensibilité au bruit. Afin de palier ce problème, une étape de régularisation est généralement nécessaire. La méthode présentée ici permet d'éviter cette difficulté.

1.3 Approche générale

L'idée est de faire apparaître et d'extraire l'une des quantités recherchées (Effort tranchant noté $T(x)$ ou moment fléchissant noté $M(x)$) à partir de l'équation de mouvement 1.3. Pour cela nous considérons une formulation faible (Eq.1.6) de celle-ci en la multipliant par une fonction arbitraire $\eta(x)$ et en intégrant l'ensemble sur l'intervalle $[a, b]$. Il est nécessaire que la fonction $\eta(x)$ ait des dérivées continues jusqu'au quatrième ordre, nous verrons pourquoi ultérieurement.

$$\int_a^b \eta(x)[EI\frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} - \rho S\omega^2 w(x)]dx = \int_a^b \eta(x)F(x)dx \tag{1.6}$$

L'intégration par partie du premier terme de cette équation donne :

$$\int_a^b \eta(x)[EI\frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4}]dx = EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(b)\eta(b) - EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(a)\eta(a) + \int_a^b -EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x)\frac{\partial \eta}{\partial x}(x) \tag{1.7}$$

L'équation 1.6 devient ainsi :

$$\begin{aligned} EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(b)\eta(b) - EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(a)\eta(a) + \int_a^b [-EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x)\frac{\partial \eta}{\partial x}(x) - \eta(x)\rho S\omega^2 w(x)]dx \\ = \int_a^b \eta(x)F(x)dx \end{aligned} \tag{1.8}$$

On voit apparaître les termes $EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(b)$ et $EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(b)$ égaux aux efforts tranchants aux abscisses a et b. Dans la même l'optique, d'autres intégrations par parties peuvent être réalisées pour arriver au résultat suivant (le calcul détaillé est présenté dans l'annexe A) :

$$\begin{aligned} T(b)\eta(b) - T(a)\eta(a) - M(b)\frac{\partial \eta}{\partial x}(b) + M(a)\frac{\partial \eta}{\partial x}(a) \\ +EI\frac{\partial w}{\partial x}(b)\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}(b) - EI\frac{\partial w}{\partial x}(a)\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}(a) - EIw(b)\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}(b) + EIw(a)\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}(a) \\ = \int_a^b w(x)[\rho S\omega^2 \eta(x) - EI\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4}(x)]dx + \int_a^b \eta(x)F(x)dx \end{aligned} \tag{1.9}$$

Dans l'équation 1.9, les expressions de l'effort tranchant et du moment fléchissant en a et b apparaissent. On peut constater dans cette équation que l'effort tranchant et le moment fléchissant ne sont

pas multipliés par les mêmes quantités et qu'un choix judicieux de la fonction permettra d'éliminer des termes. Nous séparerons donc en deux parties distinctes le calcul de l'effort tranchant et celui du moment fléchissant, car la fonction test $\eta(x)$ permettant leur calcul ne sera pas la même, comme expliqué dans les paragraphes suivants.

1.4 Reconstruction de l'effort tranchant

Il est maintenant nécessaire de définir la fonction $\eta(x)$. Celle-ci doit permettre de calculer le plus simplement possible les valeurs de l'effort tranchant qui apparaissent dans l'équation (1.9).

1.4.1 Définition de la fonction test

Afin d'isoler, par exemple $T(a)$, il est nécessaire de choisir une fonction particulière $\eta(x)$ qui annule tous les termes de la partie gauche de l'équation, excepté celui qui multiplie $T(a)$. Dans ce cas, quelle que soit la fonction $\eta(x)$ choisie, celle-ci doit vérifier les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \eta(a) = 1 & \eta(b) = 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial x}(a) = 0 & \frac{\partial \eta}{\partial x}(b) = 0 \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}(a) = 0 & \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}(b) = 0 \\ \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}(a) = 0 & \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}(b) = 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

Afin de dissocier les différentes fonctions $\eta(x)$ que nous allons présenter, la fonction $\eta(x)$ qui vérifira les conditions 1.10 sera notée $\eta_T(x)$ en rapport avec T, l'effort tranchant.
En considérant qu'il n'y ait pas d'effort externe appliqué dans l'intervalle d'intégration $]a, b[$, l'équation 1.3 peut s'écrire :

$$\int_a^b \eta(x)[EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x) - \rho S\omega^2 w(x)]dx = 0 \tag{1.11}$$

Ainsi, en utilisant les conditions décrites par le système 1.10 , la forme générale 1.9 se réduit à l'équation 1.12.

$$T(a) = -\int_a^b w(x)[\rho S\omega^2 \eta_T(x) - EI\frac{\partial^4 \eta_T}{\partial x^4}(x)]dx \tag{1.12}$$

On exprime finalement $T(a)$ par une intégrale ne dépendant que du déplacement $w(x)$ et de données structurelles (Si le point de coordonnée a correspond à l'extrémité gauche de la poutre, alors l'effort tranchant calculé, sera celui appliqué au tronçon droit de la poutre). Cette expression intégrale présente un grand avantage. Car elle ne dépend que des déplacements (sans termes de dérivation) et que la sommation aura tendance à réduire l'effet des erreurs associées aux incertitudes de mesure. La stabilité obtenue devrait être plus importante qu'avec une méthode d'approximation directe de la dérivée troisième du déplacement.
On précise que le calcul de l'effort tranchant à l'autre borne $(x = b)$ du domaine d'intégration est analogue en utilisant la fonction symétrique $\eta_T(x) = \eta_T(b + a - x)$ dans l'équation 1.12 .

1.4.2 Exemple de fonction test

La fonction $\eta_T(x)$ doit vérifier les 8 conditions 1.10. On propose dans ce paragraphe de développer $\eta_T(x)$ en une fonction polynômiale où les constantes sont calculées de manière à respecter le système 1.10. Le degré du polynôme doit donc être au minimum 7. Dans ce cas son expression est la suivante.

$$\eta_T(x) = 1 - 35\frac{(x-a)^4}{(b-a)^4} + 84\frac{(x-a)^5}{(b-a)^5} - 70\frac{(x-a)^6}{(b-a)^6} + 20\frac{(x-a)^7}{(b-a)^7} \tag{1.13}$$

L'expression de sa dérivée quatrième, utile au calcul de l'effort tranchant est :

$$\frac{\partial^4 \eta_T}{\partial x^4}(x) = -840\frac{1}{(b-a)^4} + 10080\frac{(x-a)}{(b-a)^5} - 25200\frac{(x-a)^2}{(b-a)^6} + 16800\frac{(x-a)^3}{(b-a)^7} \tag{1.14}$$

Les polynômes présentent l'avantage d'être indéfiniment dérivables.
Les figures 1.2 et 1.3 nous montrent les formes de la fonction polynomiale et de sa dérivée quatrième utiles au calcul intégrale de l'équation 1.12. Pour ces représentations, la norme $|b - a|$ de la longueur d'intégration est choisie arbitrairement égale à 1. La fonction $\eta_T(x)$ ne change pas, quelque soit la longueur de l'intervalle d'intégration, contrairement à la dérivée quatrième $\frac{\partial^4 \eta_T}{\partial x^4}(x)$ dont les valeurs augmentent considérablement lorsque le domaine d'intégration [a,b] diminue. Cette remarque prendra toute son importance dans la suite, car elle sera une limite lors de la mise en oeuvre du calcul discret de l'intégrale 1.12

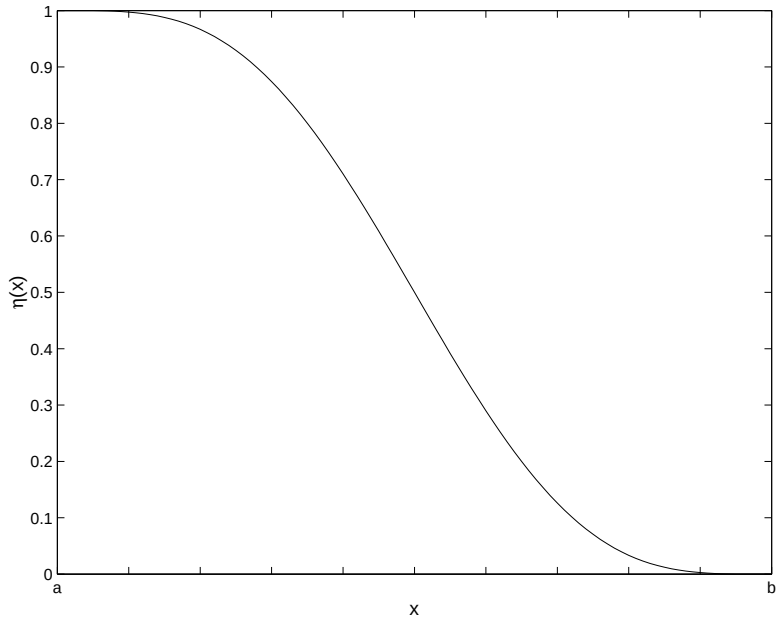


FIG. 1.2 – Fonction $\eta_T(x)$ pour x $\in$ [a ;b], utilisée pour le calcul de $T(a)$, effort tranchant à gauche du domaine d'intégration.

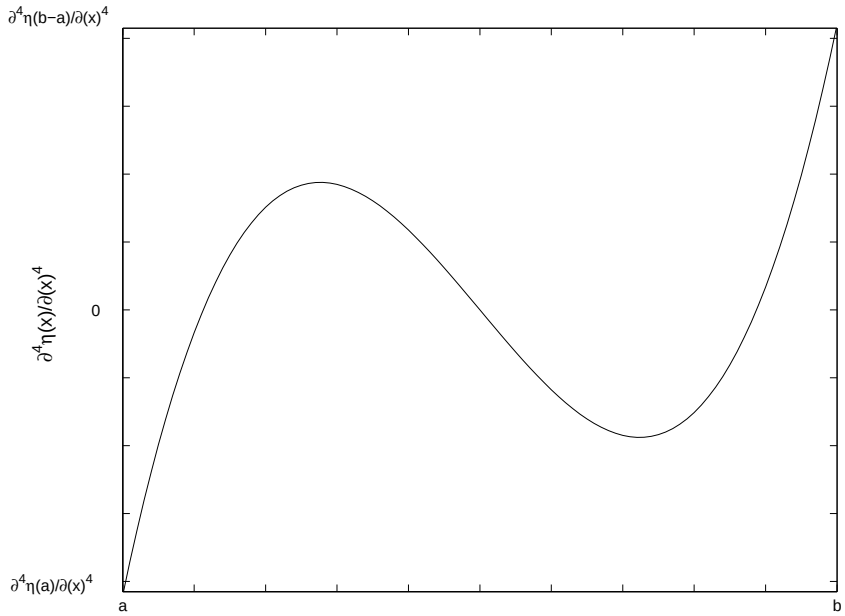


FIG. 1.3 – Fonction $\frac{\partial^4 \eta_T}{\partial x^4}(x)$ pour x $\in$ [a ;b], utilisée pour le calcul de $T(a)$, effort tranchant à gauche du domaine d'intégration.

1.5 Reconstruction du moment fléchissant

Le principe qui permet l'extraction du moment fléchissant $M(a)$ au point d'abscisse a, est le même que celui présenté au paragraphe 1.4.1. En observant à nouveau l'équation générale 1.9, il apparaît que si $\eta(x)$ vérifie les conditions définies par le système d'équation 1.15, le moment $M(a)$ peut être isolé.

1.5.1 Définition de la fonction test

Par rapport à 1.10, seules deux conditions diffèrent : la valeur de la fonction $\eta(x)$ en $x = a$ est ici nulle, sa dérivée première, par contre, ne l'est pas.

$$\begin{cases} \eta(a) = 0 & \eta(b) = 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial x}(a) = 1 & \frac{\partial \eta}{\partial x}(b) = 0 \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}(a) = 0 & \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}(b) = 0 \\ \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}(a) = 0 & \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}(b) = 0 \end{cases} \tag{1.15}$$

Dans la suite, on notera $\eta_M(x)$ les fonctions verifiant les conditions 1.15. Ainsi si l'on considère une fonction $\eta_M(x)$, le moment fléchissant $M(a)$ peut être calculé par l'intégrale :

$$M(a) = \int_a^b w(x)[\rho S \omega^2 \eta_M(x) - EI \frac{\partial^4 \eta_M}{\partial x^4}(x)]dx \tag{1.16}$$

On note également que le calcul du moment fléchissant à l'autre extrémité b peut être fait en utilisant la fonction symétrique $\eta_M(x) = \eta_M(b + a - x)$.

1.5.2 Exemple de fonction test

Le choix de la fonction $\eta_M(x)$ se résume à la résolution du système des 8 équations 1.15. Le polynôme de plus petit degré verifiant (1.15), et sa dérivée quatrième, sont :

$$\eta_M(x) = (x-a) - 20\frac{(x-a)^4}{(b-a)^3} + 45\frac{(x-a)^5}{(b-a)^4} - 36\frac{(x-a)^6}{(b-a)^5} + 10\frac{(x-a)^7}{(b-a)^6} \tag{1.17}$$

$$\frac{\partial^4 \eta_M}{\partial x^4}(x) = -480\frac{1}{(b-a)^3} + 5400\frac{(x-a)}{(b-a)^4} - 12960\frac{(x-a)^2}{(b-a)^5} + 8400\frac{(x-a)^3}{(b-a)^6} \tag{1.18}$$

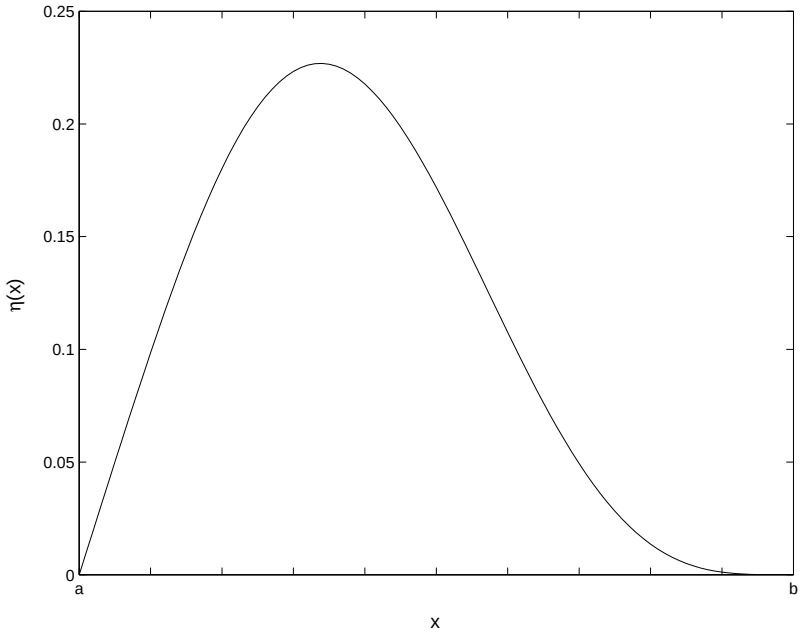


FIG. 1.4 – Fonction $\eta_M(x)$ pour x $\in$ [a,b], utilisée pour le calcul de $M(a)$, moment fléchissant à gauche du domaine d'intégration, pour ||ab||=1.

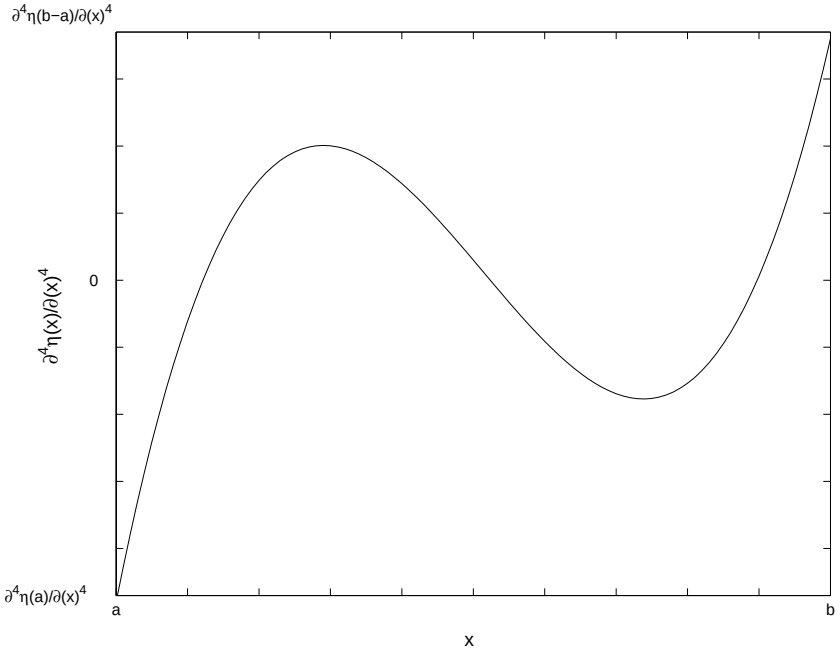


FIG. 1.5 – Fonction $\frac{\partial^4 \eta_M}{\partial x^4}(x)$ pour x $\in$ [a,b], utilisée pour le calcul de $M(a)$, moment fléchissant à gauche du domaine d'intégration.

Les figures 1.4 et 1.5 montrent la forme de la fonction polynomiale et de sa dérivée quatrième utilisées dans l'équation (1.16). Contrairement aux remarques du paragraphe 1.4.1, les valeurs $\eta_M(x)$ ne restent pas constantes et dépendent de l'intervalle d'intégration. Les valeurs de la dérivée quatrième varient également lorsque le domaine d'intégration [a,b] change.

1.6 Application analytique sur un cas simple

Une application de la méthode est présentée. On considère une poutre de longueur L, de section S, en appui, excitée par un force harmonique transversale présentant une répartition sinusoïdale, de la forme :

$$F(x,t) = sin(\frac{\pi}{L}x)e^{j\omega t} \tag{1.19}$$

Par la suite, pour des raisons de simplicité, la dépence temporelle $e^{j\omega t}$ est supprimée. La figure 1.6 illustre cette répartition.

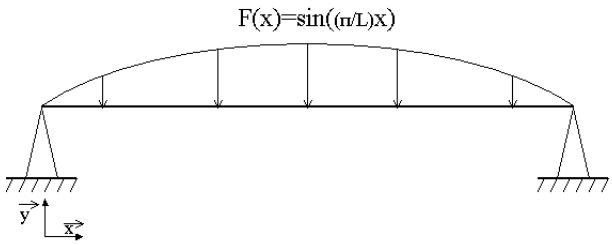


FIG. 1.6 – Poutre en appui excitée par une force hamonique à répartition sinusoïdale

L'équation de mouvement des poutres en flexion est :

$$EI\frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} - \rho S\omega^2 w(x) = F(x) \tag{1.20}$$

La solution correspondant au cas décrit est (cf. [GUY 02]) :

$$w(x) = Asin(\frac{\pi}{L}x) \tag{1.21}$$

avec A, l'amplitude modale du déplacement, égale dans ce cas simple à (cf. [GUY 02]) :

$$A = \frac{1}{EI(\frac{\pi}{L})^4 - \rho S\omega^2} \tag{1.22}$$

L'effort tranchant en un point a appartenant à $[0, L]$ est :

$$T(a) = EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(a) \tag{1.23}$$

soit, en considérant 1.21 :

$$T(a) = -EI(\frac{\pi}{L})^3 Acos(\frac{\pi}{L}(a)) \tag{1.24}$$

L'objectif de la méthode indirecte est de retrouver cette expression analytique de l'effort tranchant, à partir d'intégrales ne contenant aucune dérivée spatiale du déplacement. On utilise l'intégrale 1.12, modifiée par la présence d'un effort $F(x)$ dans le domaine d'intégration $[a, b]$ (voir annexe A).

$$T(a) = -\int_a^b w(x)[\rho S\omega^2\eta_T(x) - EI\frac{\partial^4\eta_T}{\partial x^4}(x)]dx - \int_a^b \eta_T(x)F(x)dx \tag{1.25}$$

où $[a, b] \in [0, L]$. En remplaçant $w(x)$ par son expression 1.21, on obtient :

$$T(a) = -\int_a^b sin(\frac{\pi}{L}x)\left[\left(A\rho S\omega^2 + 1\right)\eta_T(x) - AEI\frac{\partial^4\eta_T}{\partial x^4}(x)\right]dx \tag{1.26}$$

$$T(a) = -\int_a^b sin(\frac{\pi}{L}x)\left[AEI(\frac{\pi}{L})^4\eta_T(x) - AEI\frac{\partial^4\eta_T}{\partial x^4}(x)\right]dx \tag{1.27}$$

$$T(a) = -EIA\int_a^b sin(\frac{\pi}{L}x)\left[(\frac{\pi}{L})^4\eta_T(x) - \frac{\partial^4\eta_T}{\partial x^4}(x)\right]dx \tag{1.28}$$

En utilisant les expressions de η_T et $\frac{\partial^4\eta_T}{\partial x^4}$ données en 1.13 et 1.14, on obtient après calcul analytique la simplification suivante :

$$T(a) = -EI(\frac{\pi}{L})^3 Acos(\frac{\pi}{L}(a)) \tag{1.29}$$

On retrouve l'expression analytique de l'effort tranchant de l'équation 1.24.

1.7 Conclusion

Ce chapitre a introduit, pour des vibrations de flexion des poutres, la méthode de reconstruction de l'effort tranchant et du moment fléchissant à la limite d'un domaine d'étude. L'approche mathématique se base sur une manipulation intégrale de l'équation de mouvement. Une fonction test vérifiant des conditions limites particulières permet d'isoler des quantités recherchées. L'originalité de la méthode réside dans le fait que l'on estime des dérivées spatiales du déplacement vibratoire indirectement par le calcul d'une intégrale. On peut donc s'attendre à un comportement plus stable face aux incertitudes de mesure. Effectivement les seules dérivations spatiales nécessaires, sont faites analytiquement sur la fonction test. Cette dernière étant connue analytiquement les dérivations ne sont pas effectuées sur des données pouvant être entachées d'incertitudes. Lors de ce chapitre on n'aborde que le côté analytique de la méthode, et un cas simple illustre la démarche d'identification. Mais, en pratique, l'utilisation d'intégrale implique la discrétisation du système. L'effet de cette discrétisation et des incertitudes de mesure est l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 2

Approximations et incertitudes : Cas d'une poutre en flexion

2.1 Objectifs du chapitre

On a coutume de dire qu'il existe un fossé entre la théorie et la pratique. C'est généralement vrai. L'analyse des erreurs dûes à la discrétisation des systèmes (approximations) et aux incertitudes de mesures permet de faire le lien entre ces deux aspects de la science. Ainsi, les difficultés rencontrées lors de la mise en application de la méthode peuvent être mieux comprises et corrigées. Dans ce chapitre on propose d'analyser et de quantifier les erreurs introduites tout d'abord par la discrétisation du système, puis par différentes erreurs introduites dans la mesure. Pour cela, différents cas sont traités numériquement : poutre appuyée pour la reconstruction de l'effort tranchant ou poutre encastrée-libre pour la reconstruction du moment fléchissant. Ceux-ci permettront de mettre en évidence les limites de cette technique en vue de son utilisation pratique. Le chapitre se décompose en deux grandes parties. L'une d'elle analyse l'effet de la discrétisation du système, l'autre l'effet des différentes incertitudes de mesure pouvant perturber la reconstruction.

2.2 Intégration discrète

L'objectif de l'étude est d'élaborer une méthode complète et applicable *in situ*. Les formulations intégrales 1.12 et 1.16 résultant des calculs précédents ne contiennent aucune approximation, mais elles utilisent des données continues. En pratique, la connaissance du champ de déplacements de la

poutre ne peut être mesuré qu'en un nombre fini de points conduisant à une évaluation des intégrales 1.12 et 1.16 par discrétisation. Il convient donc d'étudier l'effet de la discrétisation numérique sur les résultats. Il est important de souligner que cette discrétisation est l'unique approximation de la méthode si on utilise des déplacements exacts pour les calculs, c'est à dire vérifiant l'équation de mouvement.

2.2.1 Méthodes d'intégrations

Il existe de nombreuses méthodes numériques permettant de discrétiser et de calculer une intégrale, le livre de Baker [BAK 77] en présente un grand nombre. Dans la suite de ce travail deux méthodes sont utilisées, chacune d'elles ayant ses avantages et ses inconvénients.

La méthode des trapèzes (cf [BAK 77]) est bien connue. Elle utilise un maillage régulier, c'est à dire que la distance séparant chaque point de mesure est constante. Cette approximation, illustrée figure 2.1 correspond à une interpolation linéaire de la courbe entre deux points consécutifs.

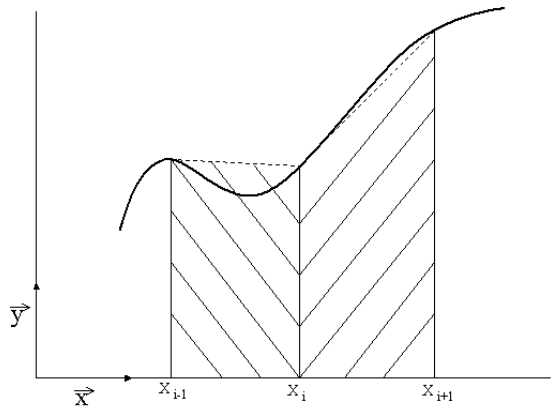


FIG. 2.1 – Approximation d'une courbe continue à l'aide de trapèzes

L'approximation de cette intégrale est de la forme :

$$\int_a^b f(x)dx = \Delta_x \Sigma_{i=1}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \tag{2.1}$$

où $f(x)$ est la fonction à intégrer, n est le nombre de points de mesure utilisé, Δ_x est le pas d'intégration et i l'indice de numérotation des points.

La méthode de Gauss-Legendre (cf [SS 66]) utilise, elle, un maillage irrégulier à symétrie centrale. Une pondération particulière A_i est associée à chaque point du maillage. L'expression de cette approximation est la suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{|b-a|}{2} \Sigma_{i=1}^{n} A_i f(x_i) \tag{2.2}$$

où x_i est la coordonnée du point numéro *i* du maillage irrégulier, et A_i est la pondération utilisée en ce même point.

En pratique, la méthode trapézoïdale est une technique simple à appliquer grâce à son maillage régulier. Cependant elle nécessite une répartition de point sur l'ensemble du domaine à intégrer, notament aux extrémités. La mesure des déplacements aux limites peut dans certains cas être problématique.

La méthode de Gauss-Legendre a l'avantage d'être plus précise, mais nécessite la mise en place contraignante d'un maillage irrégulier. Elle évite cependant d'avoir à mesurer ou calculer les déplacements aux bornes de l'intégrale. Ceci peut être un grand avantage face à la méthode trapézoïdale lorsque la mesure du déplacement à l'extrémité d'une poutre n'est pas possible.

Le tableau 2.1 permet de visualiser les différences entre les deux types d'intégrations numériques proposées. Sur un interval de mesure $[0, 1]$, on considère une intégration numérique utilisant 10 points. Le tableau donne la localisation x_i et la pondération A_i appliquée pour chaque point utilisé :

Pour le calcul des coefficients de pondération et des localisations, nous renvoyons le lecteur aux références [BAK 77] et [SS 66]. On notera que la valeur 0.111 présente dans le tableau correspond à la valeur du pas Δx lorsque le maillage est régulier.

Une troisième méthode a été testée. Cette méthode dite "hybride" a été développée par Alpert [ALP 99]. Celle-ci se veut être un compromis intéressant entre les trapèzes et Gauss-Legendre. Afin de ne pas alourdir les paragraphes suivants, la méthode "hybride" est succintement présentée dans l'annexe B.

Trapèzes		Gauss	
x_i	A_i	x_i	A_i
0.000	0.055	0.013	0.033
0.111	0.111	0.067	0.074
0.222	0.111	0.160	0.109
0.333	0.111	0.283	0.134
0.444	0.111	0.425	0.147
0.555	0.111	0.574	0.147
0.666	0.111	0.716	0.134
0.777	0.111	0.839	0.109
0.888	0.111	0.932	0.074
1.000	0.055	0.986	0.033

TAB. 2.1 – Localisations des 10 points d'intégration et leurs coefficients de pondération pour chaque méthode, sur un intervalle [0,1]

2.2.2 Simulations

Pour étudier la possibilité de reconstruire l'effort tranchant et le moment flechissant aux limites d'une poutre, des simulations numériques ont été effectuées. Celles-ci permettront de connaître également les limites fréquentielles et spatiales de la méthode. Chaque simulation est constituée de deux étapes :
- le calcul direct, où l'effort tranchant et le moment fléchissant sont calculés par dérivation de la solution analytique.
- le calcul indirect, où l'on cherche à retrouver l'effort tranchant et/ou le moment fléchissant, à partir des déplacements et des intégrales décrites précédemment.
Les paragraphes suivants présentent ces deux étapes pour chaque identification (T et M). Des comparaisons entre les valeurs analytiques de l'effort tranchant et du moment fléchissant et des valeurs reconstruites, obtenues grâce au calcul intégral (1.12 et 1.16), sont présentées afin de quantifier l'erreur introduite par la discrétisation de l'intégrale.

2.2.2.1 Reconstruction de l'effort tranchant

Pour la reconstruction de l'effort tranchant, le cas d'une poutre simplement appuyée (schématisée figure 2.2) a été étudié. Celle-ci est de longueur $L = 2.5m$, de hauteur $h = 1cm$, de largeur $l = 6cm$

et la force harmonique excitatrice de fréquence $f = 2500Hz$ est localisée au point $X_f = 0.8L$. L'objectif de cette section est de calculer l'effort tranchant à la limite $x = 0$, en utilisant la méthode précédemment présentée.

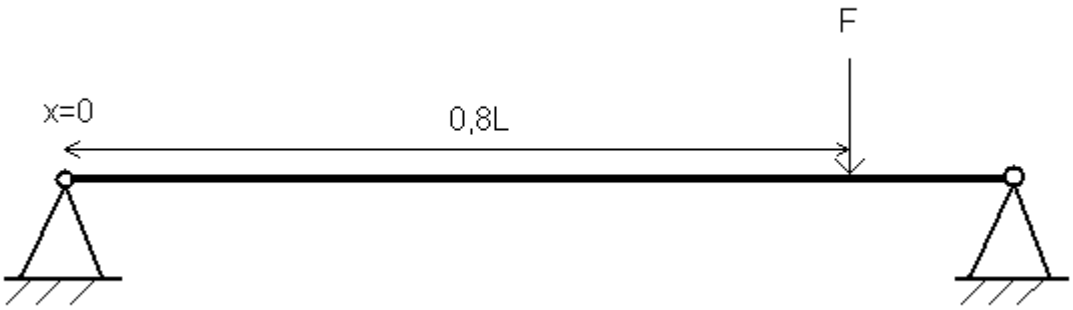


FIG. 2.2 – Poutre en appui simple de longueur L, excitée par une force harmonique localisée en $X_f = 0.8L$

Les déplacements de la poutre nécessaires au calcul direct sont donnés par la solution analytique de l'équation de mouvement 1.3. Celle-ci est calculée grâce à la méthode des ondes forcées [GUY 02]. La solution est décomposée en deux ondes propagatives et deux ondes évanescentes du côté droit (w_1) et du côté gauche (w_2) du point d'excitation :

$$\begin{aligned} w_1 &= A_1 cos(kx) + B_1 sin(kx) + C_1 sh(kx) + D_1 ch(kx) pour\ x\ \in\ [0; X_f] \\ w_2 &= A_2 cos(kx) + B_2 sin(kx) + C_2 sh(kx) + D_2 ch(kx) pour\ x\ \in\ [X_f; L] \end{aligned} \tag{2.3}$$

où k est le nombre d'onde naturel, vérifiant l'équation de dispertion :

$$k^4 = \frac{\rho S}{EI}\omega^2 \tag{2.4}$$

et $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ sont les amplitudes des ondes. Ces coefficients sont déduits de la vérification des conditions aux limites de la poutre (appuyée-appuyée) et des conditions 2.5 de raccordement entre les deux tronçons de la poutre au point d'application de la force.

$$\begin{cases} w_1(0) = 0 & w_2(L) = 0 \\ EI\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}(0) = 0 & EI\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}(L) = 0 \\ w_1(X_f) = w_2(X_f) & \frac{\partial w_1}{\partial x}(X_f) = \frac{\partial w_2}{\partial x}(X_f) \\ EI\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}(X_f) = EI\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}(X_f) \\ EI\frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3}(X_f) - EI\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3}(X_f) = F \end{cases} \tag{2.5}$$

La résolution du système linéaire qui découle des équations 2.5 et 2.3 permet le calcul analytique de l'équation de mouvement de la structure. Ainsi une valeur analytique exacte de l'effort tranchant peut être calculée à l'extrémité de la poutre en utilisant l'équation 1.2. Cette valeur servira de référence afin de calculer l'erreur sur la reconstruction qui sera quantifiée par un Niveau d'Erreur de Reconstruction de l'Effort Tranchant (NERET) ϵ_T défini par :

$$\epsilon_T = 10 * log \left| \frac{T(0)}{EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(0)} \right| \tag{2.6}$$

où $T(0)$ est l'effort tranchant reconstruit au point $x = 0$, obtenu par le calcul de l'intégrale discrétisée 1.12. Cet indicateur compare donc une valeur analytique qui sert de référence, avec l'effort tranchant obtenu par reconstruction. L'utilisation de l'échelle logarithmique permet d'obtenir des résultats en dB.

La figure 2.3 montre le NERET ϵ_T en fonction du Nombre d'Onde dans le Domaine d'Intégration (NODI) [0,b] pour les 2 types d'intégrales discrétisées. Pour faire varier le NODI, il a été choisi de faire varier la longueur du domaine d'intégration pour une même fréquence d'excitation. Le nombre de points est gardé fixe donc l'espacement entre les points est d'autant plus grand que la longueur d'intégration est grande.

Pour chaque type d'intégrale, 3 courbes sont tracées, pour respectivement 10, 14 et 20 points utilisés pour calculer l'intégrale. Une comparaison entre ces différentes courbes montre que l'utilisation d'un grand nombre de point améliore considérablement la précision de la reconstruction.

L'analyse des graphiques 2.3 amène plusieurs constatations, sur l'influence de la fréquence d'excitation, sur la comparaison entre les méthodes d'intégration, puis sur l'influence du nombre de points.

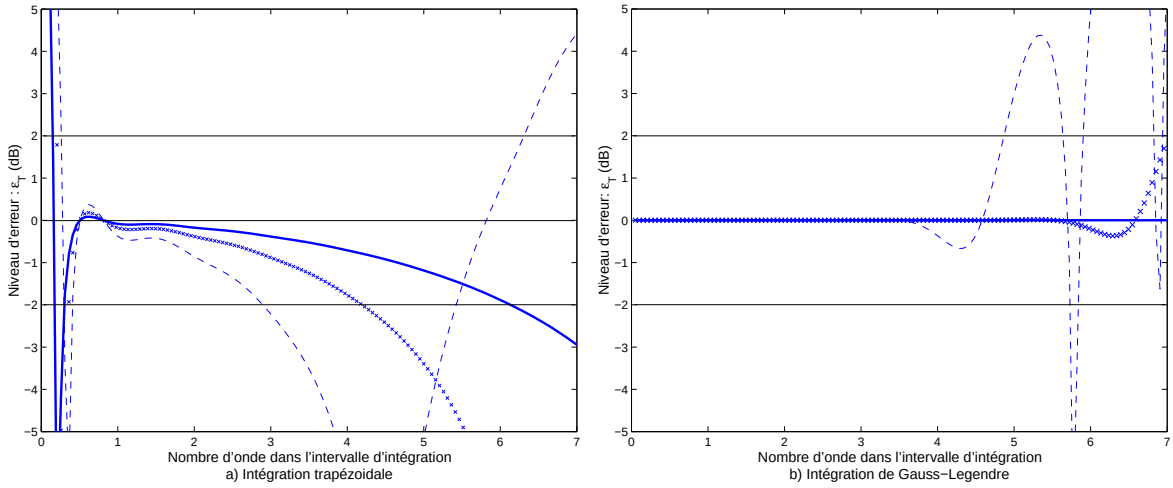


FIG. 2.3 – NERET ϵ_T entre la simulation et l'effort tranchant calculé analytiquement, a) intégration trapézoïdale, b)intégration type Gauss-Legendre en utilisant 10(pointillés), 14(croix) ou 20 (ligne continue) points. La fréquence d'excitation est de 2500Hz et les caractéristiques de la poutre sont : $L = 2.5m,\ E = 2.10^{11}(1 + j10^{-2})N/m^2,\ l = 0.06m,\ h = 0.01m,\ \rho = 7800kg/m^3$.

On constate que le paramètre clef de cette méthode est le nombre d'onde contenu dans le domaine d'intégration (NODI). Quelque que soit la fréquence d'excitation, le résultat reste inchangé. Cette remarque est vérifiée par la figure 2.4 où 500 courbes représentant le NERET pour des fréquences allant de 10Hz à 5000Hz, ont été tracées en utilisant une méthode d'intégration trapézoïdale. On observe que celles-ci se superposent exactement. Cette erreur de discrétisation, ne dépendant que de la forme de la fonction à intégrer, est donc purement mathématique.

Pour la méthode trapèzoïdale (2.3 a)) on remarque que l'erreur est faible lorsque le NODI avoisine l'unité. Cette dernière augmente pour des valeurs plus faibles ou plus grandes de ce nombre d'onde. Pour la méthode de Gauss-Legendre (2.3 b)) l'erreur tend vers zéro pour une large fenêtre de NODI. On remarquera que contrairement à la méthode trapézoïdale, la reconstruction de l'effort tranchant reste excellente même lorsque la longueur d'intégration tend vers zéro. La courbe d'erreur relative pour 20 points d'intégration n'apparaît pas clairement sur le graphique 2.3b), car ces valeurs sont très proches de zéro. Cette dernière méthode est donc très précise, mais extrèmement difficile à mettre en place expérimentalement en raison du maillage irrégulier qu'elle nécéssite.

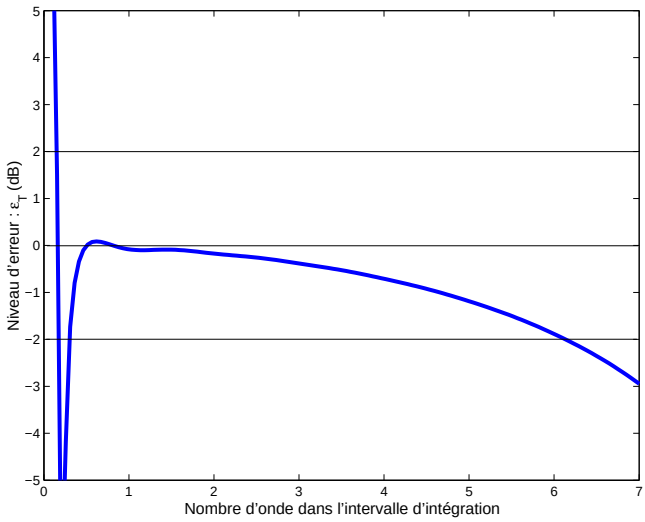


FIG. 2.4 – NERET ϵ_T entre l'effort exact et reconstruit par intégration trapézoïdale utilisant 20 points pour 500 fréquences d'excitations différentes comprises entre 10Hz et 5000Hz. Les caractéristiques de la poutre sont : $L = 2.5m,\ E = 2.10^{11}(1 + j10^{-2})N/m^2,\ l = 0.06cm,\ h = 0.01cm,\ \rho = 7800kg/m^3$.

Les augmentations de l'erreur pour des intervalles d'intégration petits ou grands s'expliquent différemment. Pour les grands intervalles d'intégration, l'erreur croît régulièrement pour les 2 types d'intégration. Plus la longueur d'intégration augmente, plus le nombre de points de discrétisation devient faible par rapport à la longueur d'onde. Alors, les déplacements discrétisés ne représentent pas correctement le comportement réel de la structure.

Pour les faibles longueur d'intégration (en dessous de 0.5 NODI), seule la méthode trapézoïdale présente de forte erreur. Effectivement lorsque l'intervalle d'intégration est réduit, les valeurs de la fonction $\eta(x)$ restent inchangées, mais celles de sa dérivée quatrième $\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}(x)$ augmentent très fortement. Les approximations de la méthode trapézoïdale prennent alors des valeurs non négligeables. Cependant, ces erreurs n'apparaissent pas dans la méthode de gauss-Legendre, cela est dû au fait que cette méthode est spécialement adaptée pour le calcul d'intégrale de fonction polynomiale telles que $\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}(x)$.

2.2.2.2 Reconstruction du moment fléchissant

La démarche est similaire à celle présentée au paragraphe précédent. Cependant, l'exemple de la poutre sur appuis simples ne peut être utilisé ici, car le moment fléchissant est nul aux limites. On considère donc le cas d'une poutre encastrée-libre (schématisée figure 2.5), où le moment fléchissant est calculé à l'extrémité encastrée de la poutre. Les paramètres physiques de la poutre restent les mêmes.

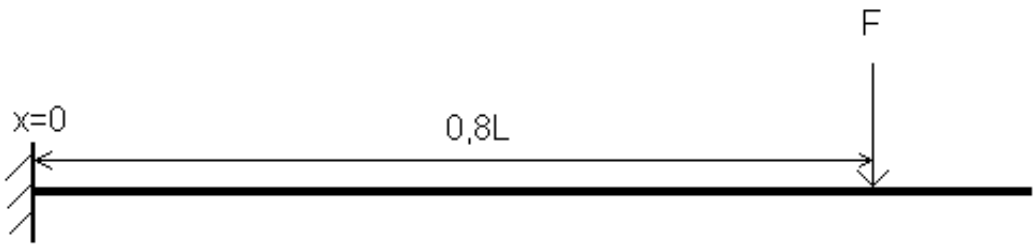


FIG. 2.5 – Poutre encastrée-libre de longueur L, excitée par une force harmonique localisée en $X_f = 0.8L$. Les caractéristiques de la poutre sont : $L = 2.5m,\ E = 2.10^{11}(1 + j10^{-2})N/m^2,\ l = 0.06m,\ h = 0.01m,\ \rho = 7800kg/m^3$.

Le calcul de l'expression analytique du déplacement, nécessaire aux calculs d'identification, est également effectué avec la méthode des ondes forcées. La décomposition 2.3 est utilisée à nouveau. Cependant, un nouveau système d'équations décrivant les conditions aux limites et les conditions de raccordement s'impose.

$$\begin{cases} w_1(0) = 0 & EI\frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3}(L) = 0 \\ \frac{\partial w_1}{\partial x}(0) = 0 & EI\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}(L) = 0 \\ w_1(X_f) = w_2(X_f) & \frac{\partial w_1}{\partial x}(X_f) = \frac{\partial w_2}{\partial x}(X_f) \\ EI\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}(X_f) = EI\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}(X_f) & \\ EI\frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3}(X_f) - EI\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3}(X_f) = F & \end{cases} \tag{2.7}$$

Une fois les déplacements calculés, un Niveau d'Erreur de Reconstruction du Moment Fléchissant (NERMF) ϵ_M est défini (Eq. 2.8) afin d'établir le domaine de validité de la méthode. Ses valeurs sont présentées Fig 2.6 pour les 2 types d'intégrations numériques précédemment présentés.

$$\epsilon_M = 10 * log \left| \frac{M(0)}{EI\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x}(0)} \right| \tag{2.8}$$

où $M(0)$ est le moment fléchissant reconstruit en $x = 0$.

La reconstruction du moment fléchissant présente un comportement similaire à celle de l'effort tranchant. L'erreur est même légèrement plus faible que celle observée pour l'effort tranchant dans des conditions similaires de calcul.

En effet, l'effort tranchant dépend directement de la dérivée troisième du déplacement, contrairement au moment fléchissant qui dépend de la dérivée seconde(cf 1.2). En pratique les intégrales 1.12 et 1.16 permettant l'estimation des ces quantités, doivent être discrétisées. Il apparait alors que l'intégrale discrétisée 1.16 permets une meilleure approximation du moment fléchissant que 1.12 pour l'effort tranchant. Même si ces dérivées ne sont pas calculées directement, on retrouve une sensibilité plus importante lorsque l'on recherche une valeur proportionnelle à une dérivée d'ordre supérieure.

De plus, on constate plus nettement l'apparition d'oscillations du niveau d'erreur pour la reconsrtuction utilisant une intégration trapézoïdale. Ces oscillations ont une période de un NODI, elles sont caractéristiques de l'approximation d'intégrale de courbes sinusoïdales par la méthode des trapèzes. Leurs amplitudes et leurs origines varient d'une reconstruction à l'autre, dépendant de la forme de la courbe à intégrer (donc des conditions aux limites de la poutre) ainsi que de la fonction test utilisée qui modifie également la courbe considérée.

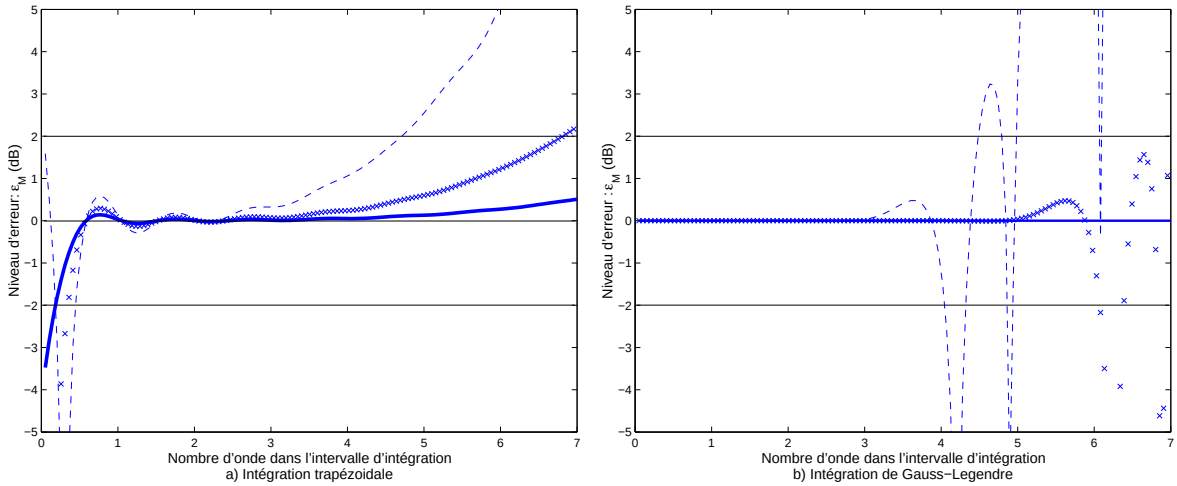


FIG. 2.6 – NERMF entre la simulation et le moment fléchissant calculé analytiquement pour une intégration a)de type trapézoïdale et b)de type Gauss-Legendre en utilisant 10(pointillés), 14(croix) ou 20 (ligne continue) points. La fréquence d'excitation est de 2500Hz et les caractéristiques de la poutre sont : $L = 2.5m,\ E = 2.10^{11}(1 + j10^{-2})N/m^2,\ l = 0.06m,\ h = 0.01m,\ \rho = 7800kg/m^3$.

2.3 Effets des incertitudes de mesure

De nombreux problèmes inverses d'identification présentent une forte instabilité aux incertitudes sur les données d'entrée. Ce phénomène force les méthodes existantes à ajouter une étape de régularisation afin de réduire les effets amplificateurs de bruit. L'objectif de cette partie est donc d'observer l'influence que peuvent avoir ces incertitudes sur la méthode proposée.

2.3.1 Bruitage du déplacement

Le principe de cette section consiste à utiliser des déplacements simulés et bruités, afin de simuler les incertitudes présentes dans les données expérimentales. Afin de couvrir les erreurs existant en pratique, 3 types sont considérés et pour mieux caractériser leurs effet, ils sont appliqués un par un, de manière indépendante.

Bruit multiplicatif sur les déplacements : Il s'agit de calculer le déplacement bruité de la manière suivante :

$$w^{bruité}(x_i) = w_1^{exact}(x_i).\Delta w_m.e^{j\Delta\varphi} \tag{2.9}$$

où Δw_m est une variable aléatoire Gaussienne réelle, de moyenne égale à un et d'écart type égale à 1% de l'amplitude du déplacement. L'autre paramêtre, $\Delta\varphi$ est une variable Gaussienne aléatoire réelle, de moyenne nulle, et d'écart type égale à 1°.
Ce type de bruit est représentatif de la précision avec laquelle les mesures sont faites. Ainsi la qualité de l'opérateur et de l'appareillage sont pris en compte dans la simulation.

Bruit additif sur les déplacements : Le déplacement bruité correspond à :

$$w^{bruité}(x_i) = w_1^{exact}(x_i) + \Delta w_a \tag{2.10}$$

Ici Δw_a représente le bruit de fond. C'est une variable aléatoire Gaussienne de moyenne nulle. L'écart type de son module dépend directement de la chaîne d'acquisition utilisée pour la mesure. Pour les simulations, il sera fixé à 1% de la valeur maximale du déplacement de la poutre. Sa phase est une variable aléatoire comprise entre 0 et 2π.
Ainsi, l'environnement dans lequel la mesure est faite et la qualité de la chaine d'acquisition sont pris en compte dans ces simulations.

Incertitude sur le positionnement des points : Ce type d'erreur sera également modélisé par un nombre réel Δx défini par sa moyenne nulle et son écart type égale à $0.5mm$. Cette erreur est associée à l'incertitude de positionnement des capteurs lors des expériences. Son écart type est fixé arbitrairement car il dépend grandement du type matériel utilisé (accéléromètres, vibromètre laser,...). Le déplacement ainsi bruité, a pour expression :

$$w^{bruité}(x_i) = w_1^{exact}(x_i + \Delta x) \tag{2.11}$$

2.3.2 Simulations

2.3.2.1 Reconstruction de l'effort tranchant

Reprenons l'exemple décrit en 2.2.2.1 d'une poutre sur appuis simples excitée par une force harmonique. Le champ de déplacement initial est celui calculé à l'aide des équations 2.3 et 2.5. Ce champ de déplacement est ensuite bruité. Les paragraphes suivants montrent l'influence de chaque type de bruit sur la reconstruction de l'effort tranchant.

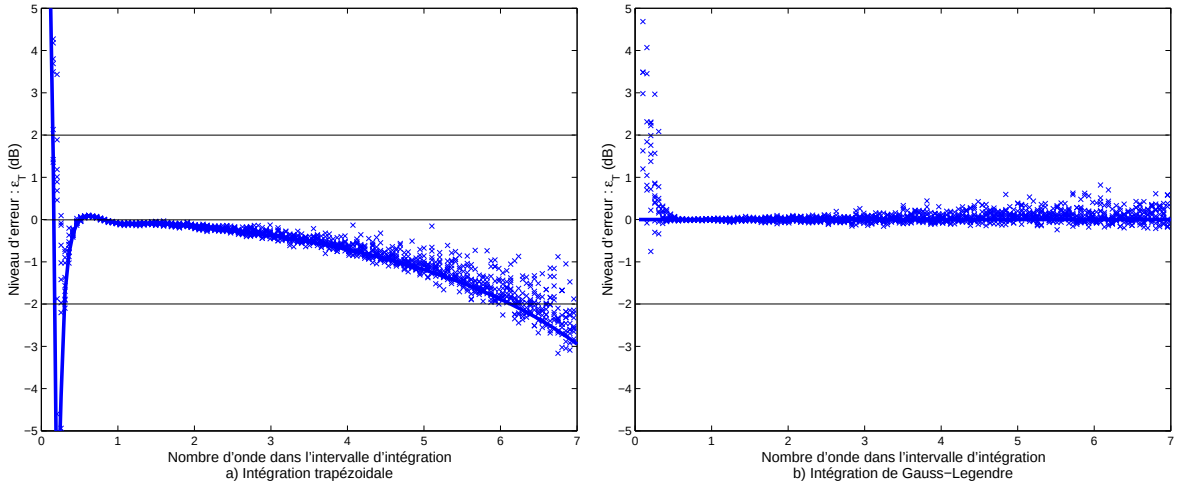


FIG. 2.7 – NERET entre les simulations bruitées (x, bruit multiplicatif) ou exactes (ligne continue) et l'effort tranchant exact pour une intégration a) de type trapézoïdale et b) de type Gauss-Legendre utilisant 20 points. La fréquence de la force excitatrice est de 2500Hz, et les caractéristiques de la poutre sont : $L = 2.5m,\ E = 2.10^{11}(1 + j10^{-2})N/m^2,\ l = 0.06m,\ h = 0.01m,\ \rho = 7800kg/m^3$.

Effet du bruit multiplicatif :

La figure 2.7 illustre l'effet d'un bruit multiplicatif sur la reconstruction de l'effort tranchant, en comparant le NERET obtenu à partir de déplacements exacts avec celui issu d'une reconstruction bruitée. Le bruit étant aléatoire, les figures montrent un ensemble de simulations bruitées indépendantes, représentées en nuage de points. Ceci permet de juger la dispertion des reconstructions liée au type de bruit appliqué.

L'observation des figures 2.7 nous permet de constater que le bruit multiplicatif ne perturbe que légerement les reconstructions de l'effort tranchant. En effet, le niveau d'erreur calculé avec des déplacements bruités suit une tendance générale similaire à celui issu de calculs utilisant des déplacements exacts.

Par contre, on constate que l'erreur augmente brutalement pour les reconstructions utilisant une intégration de type Gauss-Legendre lorsque le nombre d'onde dans l'intervalle d'intégration est inférieur à *0.5.*

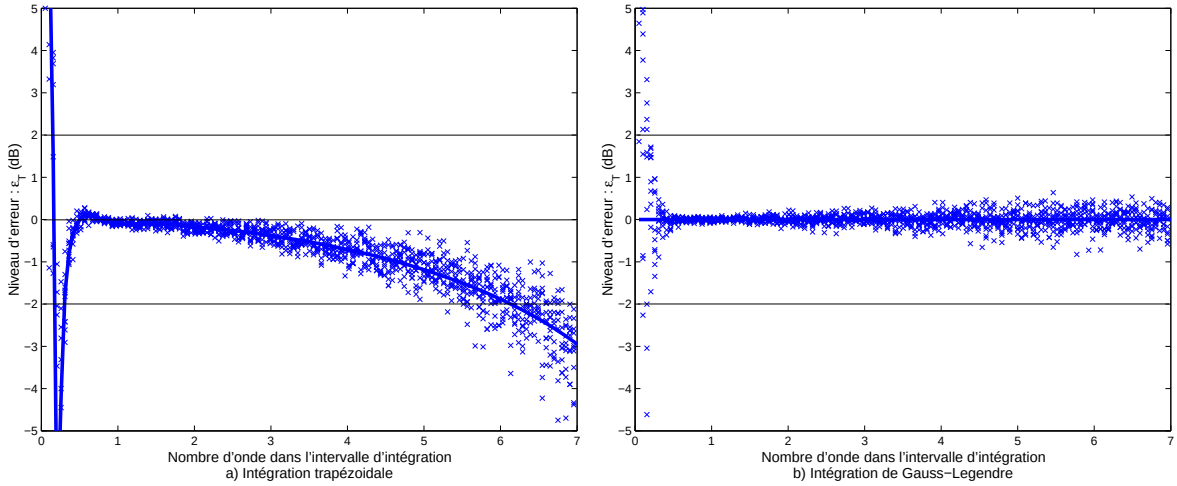


FIG. 2.8 – NERET entre les simulations bruitées (x, bruit additif) ou exactes (ligne continue) et l'effort tranchant exact pour une intégration a) de type trapézoïdale et b) de type Gauss-Legendre utilisant 20 points. La fréquence de la force excitatrice est de 2500Hz, et les caractéristiques de la poutre sont : $L = 2.5m,\ E = 2.10^{11}(1 + j10^{-2})N/m^2,\ l = 0.06m,\ h = 0.01m,\ \rho = 7800kg/m^3$.

Effet du bruit additif :

Les effets sur la reconstruction de l'effort tranchant d'un bruit additif entachant les déplacements sont présentés figure 2.8. On constate également que le NERET issu de déplacements bruités (bruit additif) est similaire à celui issu de déplacements exacts. Même si cette dispersion s'accentue lorsque le nombre d'onde inclu dans l'intervalle d'intégration augmente, le NERET "bruité" reste très proche du NERET "exact". On constate le même phénomène que précédement sur les reconstructions utilisant une intégration de type Gauss-Legendre. L'erreur augmente brutalement lorsque le nombre d'onde dans l'intervalle d'intégration est inférieur à *0.5.*

Effet de l'erreur sur le positionnement des points :

Les effets sur la reconstruction de l'effort tranchant d'une erreur sur le positionnement des points de mesures des déplacements sont présentés figure 2.9. A nouveau, le NERET issu de déplacements bruités fluctue autour de ceux obtenus avec les déplacements exacts. Ici aussi l'erreur augmente drastiquement pour une intégration de type Gauss-Legendre, lorsque le nombre d'onde dans l'intervalle d'intégration est inférieur à *0.5*.

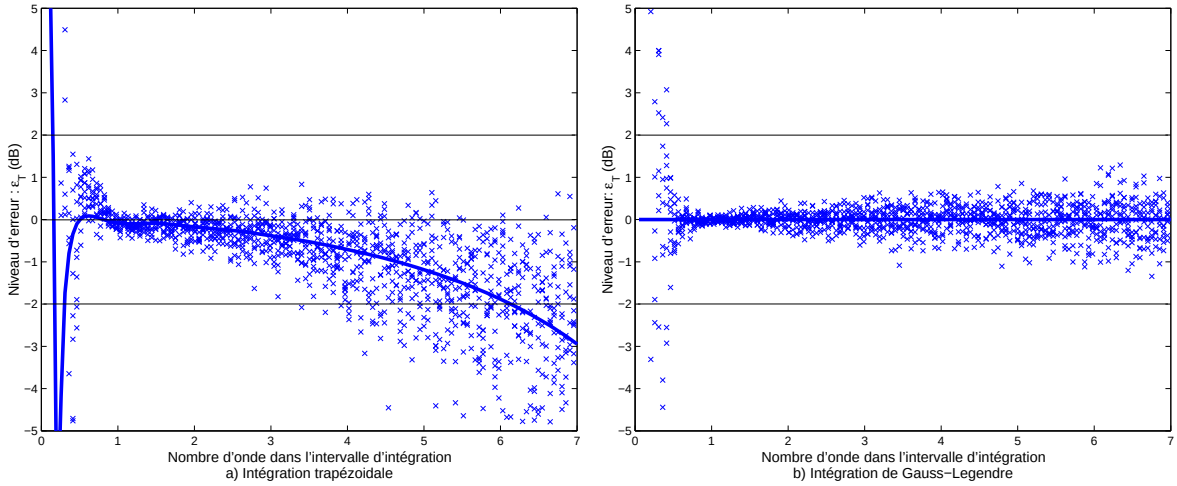


FIG. 2.9 – NERET entre les simulations bruitées (x, erreur de positionnement) ou exactes (ligne continue) et l'effort tranchant exact pour une intégration a) de type trapézoïdale et b) de type Gauss-Legendre utilisant 20 points. La fréquence de la force excitatrice est de 2500Hz, et les caractéristiques de la poutre sont : $L = 2.5m$, $E = 2.10^{11}(1 + j10^{-2})N/m^2$, $l = 0.06m$, $h = 0.01m$, $\rho = 7800kg/m^3$.

2.3.2.2 Reconstruction du moment fléchissant

Une démarche analogue à celle du paragraphe précédent est entreprise dans celui-ci. La structure servant de support à ces simulations est présentée sur la figure 2.5. Les déplacements exacts de la poutre vérifient les équations 2.3 et 2.7. Chaque type de bruit est à nouveau testé en utilisant les 2 types d'intégrations (trapézoïdale ou Gauss-Legendre). On s'intéresse ici au niveau d'erreur de reconstruction du moment fléchissant (NERMF)

Effet du bruit multiplicatif :

La figure présentée en 2.10 montre l'effet d'un bruit multiplicatif sur la reconstruction du moment fléchissant. On rappelle que les déplacements bruités sont définis par l'équation 2.9

On constate que les perturbations engendrées par ce type de bruit sont similaires à celles rencontrées pour les reconstructions bruitées de l'effort tranchant. Effectivement l'effet du bruit multiplicatif est faible. L'erreur sur la reconstruction du moment fléchissant issue de déplacements bruités est proche de celle issue de déplacements exacts. La tendance à la hausse de l'erreur lorsque le nombre d'onde dans l'intervalle d'intégration augmente, est également présente, ainsi que l'augmentation lorsque ce

nombre d'onde est inférieur à *0.5* pour une intégration de Gauss-Legendre.

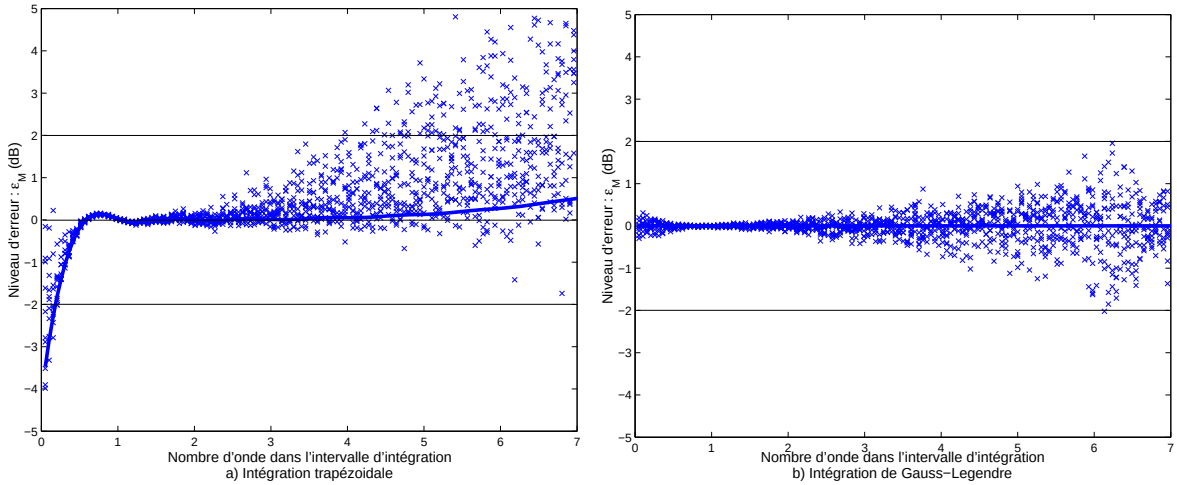


FIG. 2.10 – NERMF entre les simulations bruitées (x, bruit multiplicatif) ou exactes (ligne continue) et le moment fléchissant exact pour une intégration a) de type trapézoïdale et b) de type Gauss-Legendre utilisant 20 points. La fréquence de la force excitatrice est de 2500Hz, et les caractéristiques de la poutre sont : $L = 2.5m,\ E = 2.10^{11}(1 + j10^{-2})N/m^2,\ l = 0.06m,\ h = 0.01m,\ \rho = 7800kg/m^3$.

Effet du bruit additif :

Les niveaux d'erreur de reconstruction du moment fléchissant utilisant des déplacements perturbés par des bruits additifs sont présentés figures 2.11. A nouveau la tendance de cette erreur reste similaire à celle issue de déplacements exacts. Cette erreur augmente avec le nombre d'onde inclues dans l'intervalle d'intégration ou quand ce nombre est inférieur à *0.5*.

Effet de l'erreur de positionnement des points :

La figure 2.12 présente les niveaux d'erreur de reconstruction du moment fléchissant utilisant des déplacements dont le positionnement le long de la poutre est perturbé. Ici encore, la tendance de l'erreur est similaire à celle issue de déplacements exacts. Cette erreur augmente fortement avec le nombre d'onde inclu dans l'intervalle d'intégration ou quand ce nombre est inférieur à *0.5*.

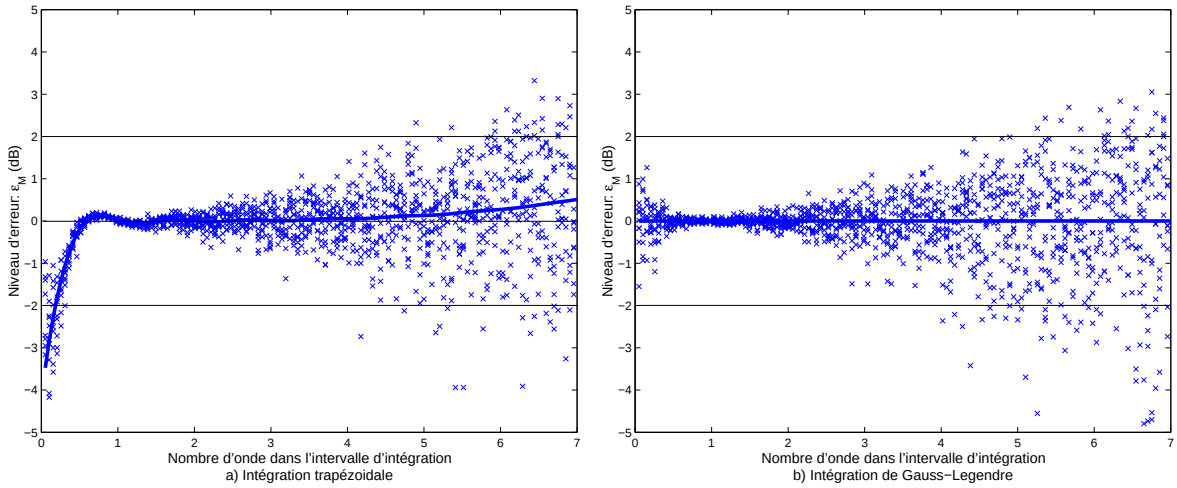


FIG. 2.11 – NERMF entre les simulations bruitées (x, bruit additif) ou exactes (ligne continue) et le moment fléchissant exact pour une intégration a) de type trapézoïdale et b) de type Gauss-Legendre utilisant 20 points. La fréquence de la force excitatrice est de 2500Hz, et les caractéristiques de la poutre sont : $L = 2.5m,\ E = 2.10^{11}(1 + j10^{-2})N/m^2,\ l = 0.06m,\ h = 0.01m,\ \rho = 7800kg/m^3$.

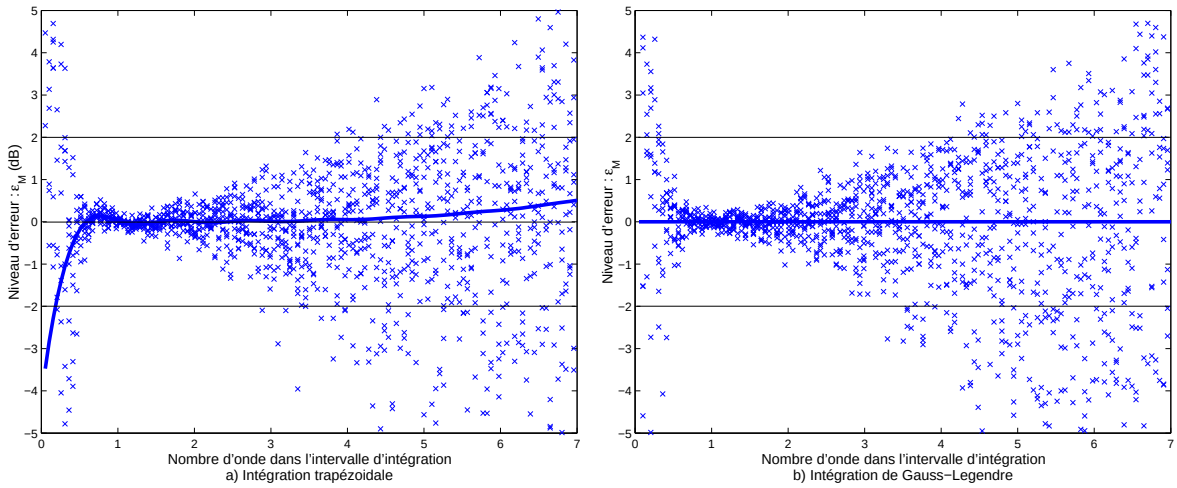


FIG. 2.12 – NERMF entre les simulations bruitées (x, erreur de positionnement) ou exactes (ligne continue) et le moment fléchissant exact pour une intégration a) de type trapézoïdale et b) de type Gauss-Legendre utilisant 20 points. La fréquence de la force excitatrice est de 2500Hz, et les caractéristiques de la poutre sont : $L = 2.5m,\ E = 2.10^{11}(1 + j10^{-2})N/m^2,\ l = 0.06m,\ h = 0.01m,\ \rho = 7800kg/m^3$.

2.4 Conclusions

Des simulations numériques exactes et bruitées ont été menées afin de caractériser les limites de la méthode. Des indicateurs d'erreur ont été établis pour estimer la justesse de reconstructions. Les résultats présentés précedemment démontrent que l'introduction de différents types d'incertitudes sur les déplacements ne fausse pas fondamentalement la reconstruction. On pouvait s'attendre à l'inverse, comme dans les problèmes d'identification indirects qui présentent une forte dégradation des résultats si les données sont bruitées : la méthode RIFF nécessite l'estimation de la dérivée quatrième du déplacement qui amplifie fortement le bruit. On comprend bien que cette amplification est directement liée au maillage utilisé. Dans de nombreux cas, une étape suplémentaire de régularisation est nécessaire afin d'extraire la quantité recherchée parmi un ensemble de résultats aberrants (cf [PG 95b], [PG 00]). La sensibilité aux incertitudes de mesures peut aussi être due à l'estimation directe de la dérivée troisième du déplacement comme dans le cas de l'intensité structurale [PAV 76].

La stabilité de la méthode proposée ici vient de 2 facteurs :
- L'utilisation des intégrations par partie menant à l'équation 1.9 transfère ces dérivées spatiales du déplacement aux fonctions tests η_T ou η_M. Ces dernières étant analytiquement connues, aucune difficulté n'est rencontrée pour calculer leurs dérivées de manière exacte.
- L'utilisation d'intégrale spatiale du déplacement pour calculer l'effort tranchant ou le moment fléchissant, moyenne les erreurs.

De plus, deux importantes conclusions pratiques peuvent être tirées de ces simulations :
- Le faible niveau d'erreur que présentaient les reconstructions utilisant une intégrale de Gauss-Legendre avec des déplacements exacts, est perdue lorsque les données sont dans les simulations, notamment lorsque le nombre d'onde inclu dans l'interval d'intégration est inférieur à *0.5*. Globalement, les 2 types d'intégration se comportent de manière similaire face aux incertitudes de mesure. En pratique, le maillage régulier de la méthode d'intégration trapézoïdale rend celle-ci plus intéressante.
- Il apparait que l'erreur reste faible lorsque l'intervalle d'intégration est compris entre une et deux longueurs d'onde, quelle que soit la quantité à reconstruire ou la méthode d'intégration utilisée. Cette constatation à son importance, car il est nécessaire d'adapter la longueur du maillage selon la gamme de fréquence ciblée. Ainsi, pour reconstruire un effort en basse fréquence, une grande longueur d'intégration sera conseillée, et inversement en haute fréquence. D'une manière générale, l'utilisation d'un grand nombre de points améliorera toujours l'identification.

Ce chapitre montre la faisabilité de la méthode proposée pour reconstruire l'effort tranchant ou le moment fléchissant. Les limites de la méthode sont également déterminées en fonction des paramètres physiques. Le chapitre suivant propose une série d'expérimentations qui valident la méthode.

Chapitre 3

Validations Expérimentales sur poutre

3.1 Objectifs du chapitre

Les précédents paragraphes présentaient une approche théorique et numérique de la méthode de reconstruction. Même si ces données ont été bruitées de façon à tenir compte d'éventuelles incertitudes de mesures, il est nécessaire de tester la méthode expérimentalement. L'objectif de cette section est donc de mettre en oeuvre et de valider la méthode présentée dans un cadre expérimental. Le principe des expérimentations réalisées ici consiste à appliquer un effort (force ou moment) à une limite libre de la poutre et de mesurer la réponse vibratoire de la structure en plusieurs points. L'objectif est de comparer les efforts mesurés directement par capteur de force et indirectement via leur reconstruction à partir des réponses vibratoires, permettant ainsi d'évaluer la faisabilité de la technique de mesure indirecte. Une première partie se consacre à la reconstruction de l'effort tranchant et une seconde à la reconstruction du moment fléchissant.
Comme pour les simulations numériques, les deux types de discrétisation (trapézoidale et Gauss-Legendre) sont testés. Le nombre de points de discrétisation est fixée à 10. La longueur d'intégration est fixée arbitrairement à *36cm* sauf indication contraire. Celle-ci fut choisie pour sa proportion adéquate avec la taille de la structure et le type d'intrumentation mis en oeuvre.

3.1.1 Reconstruction de l'effort tranchant

3.1.1.1 Dispositif expérimental

Les expériences menées pour la validation de la reconstruction de l'effort tranchant ou du moment fléchissant, ne pouvaient pas être effectuées avec le même dispositif expérimental. Deux séries de mesures ont donc été menées indépendamment.
Le shéma 3.1 présente le principe de la première expérience. Une poutre est suspendue, fixée par son extrémité supérieure à un chassis supposé rigide. Les conditions aux limites n'intervenant pas dans les calculs de reconstruction, la rigidité toute relative du chassis n'entre pas en jeu. Dans le principe, la méthode est locale, les éléments extérieurs au domaine d'intégration peuvent donc être ignorés.
L'extrémité libre inférieure de la poutre est excitée par un pot vibrant. Les déplacements le long de la poutre sont mesurés par un vibromètre laser à balayage. Un bruit blanc est utilisé pour l'excitation, afin que l'étude couvre une large bande de fréquence.
Comme l'effort externe appliqué par le pot vibrant est situé sur une extrémité libre de la poutre, l'effort tranchant à cette extrémité correspond à la force appliquée. Cette dernière est mesurée directement par un capteur de force placé entre le pot vibrant et la poutre. Cette mesure directe servira de référence afin d'évaluer la justesse de l'effort tranchant reconstruit à partir des déplacements mesurés.
Un accéléromètre est aussi fixé à l'extrémité basse de la poutre de façon à obtenir une référence de phase unique pour la force et les vitesses vibratoires.
A titre indicatif, la figure 3.2 représente le module du déplacement de l'extrémité excitée de la poutre. On y voit clairement les résonnances et anti-résonnances de l'ensemble de la structure (poutre et chassis).

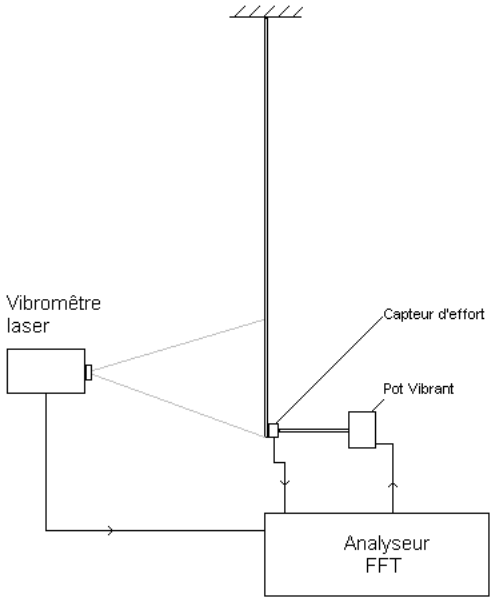


FIG. 3.1 – Dispositif expérimental utilisé pour la reconstruction de l'effort tranchant. Poutre d'acier de longueur $L = 1.5m$, largeur $l = 6cm$, épaisseur $h = 1cm$.

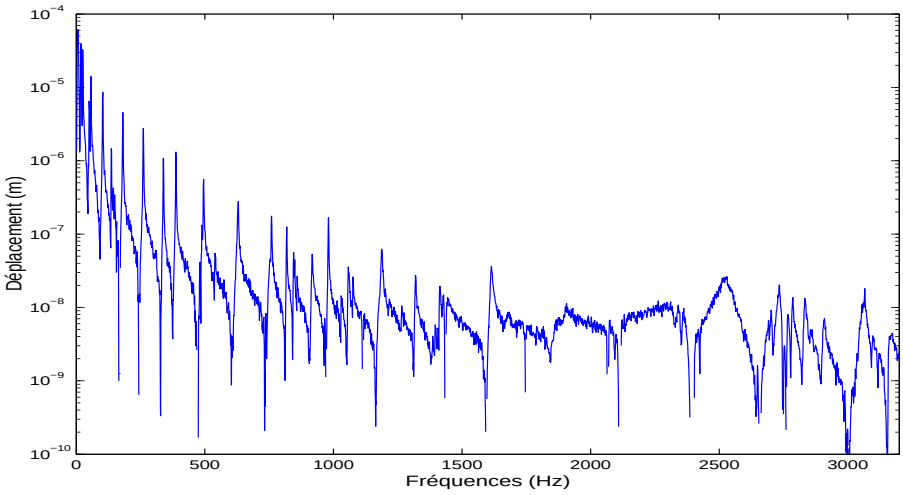


FIG. 3.2 – Module du déplacement de l'extrémité excitée de la poutre. Poutre d'acier de longueur $L = 1.5m$, largeur $l = 6cm$, épaisseur $h = 1cm$.

3.1.1.2 Résultats de la reconstruction

Les figures 3.3 et 3.4 présentent, pour chaque type d'intégration, les variations d'amplitude et de phase en fonction de la fréquence de l'effort tranchant reconstruit et de celui issu de la mesure directe. Afin de faciliter l'analyse des résultats, et de vérifier les limites de la méthode, des marqueurs ont été ajoutés sur ces spectres. Ils permettent de localiser certaines fréquences particulières. Le marqueur A correspond à une fréquence pour laquelle la longueur d'onde est approximativement égale à la longueur d'intégration. Le marqueur B et le marqueur C correspondent à des fréquences pour lesquelles la longueur d'onde est égale à la moitié et au tiers de la longueur d'intégration (deux et trois longueurs d'onde dans l'intervalle d'intégration). Ces marqueurs permettent donc de faire le lien avec les abaques d'erreurs (figures 2.3 à 2.11) établies dans la section des simulations numériques.

La figure 3.3 a) montre que la reconstruction du spectre de l'effort tranchant en utilisant une intégration de type trapèzoidale est très proche de la mesure directe. En basses fréquences ($< 200Hz$) la reconstruction devient aberrante, la longueur d'intégration devenant trop petite par rapport à la longueur d'onde. Cette limite se situe aux alentours du marqueur A, ce qui correspond aux limites en basses fréquences établies par les simulations numériques et les conclusions tirés en 2.4.
Dans les moyennes fréquences, les deux courbes sont globalement très proches, sauf aux résonnances où la reconstruction surestime l'effort tranchant.
L'analyse de la phase (figure 3.3 b)) mène aux mêmes conclusions, l'erreur est importante en basses fréquences.
La figure 3.3 c) illustre ses remarques, en montrant le niveau d'erreur de la reconstruction par rapport à la mesure directe, en dB. Cette erreur reste globalement comprise entre $\pm 2dB$, excepté pour les basses fréquences. Cependant, elle est importante à certaines fréquences, il s'agit des fréquences pour lesquelles la mesure directe de l'effort tranchant est très faible. On comprend bien que les valeurs faibles soient rapidement faussées par le bruit de fond (de type additif), qui dénature la reconstruction.

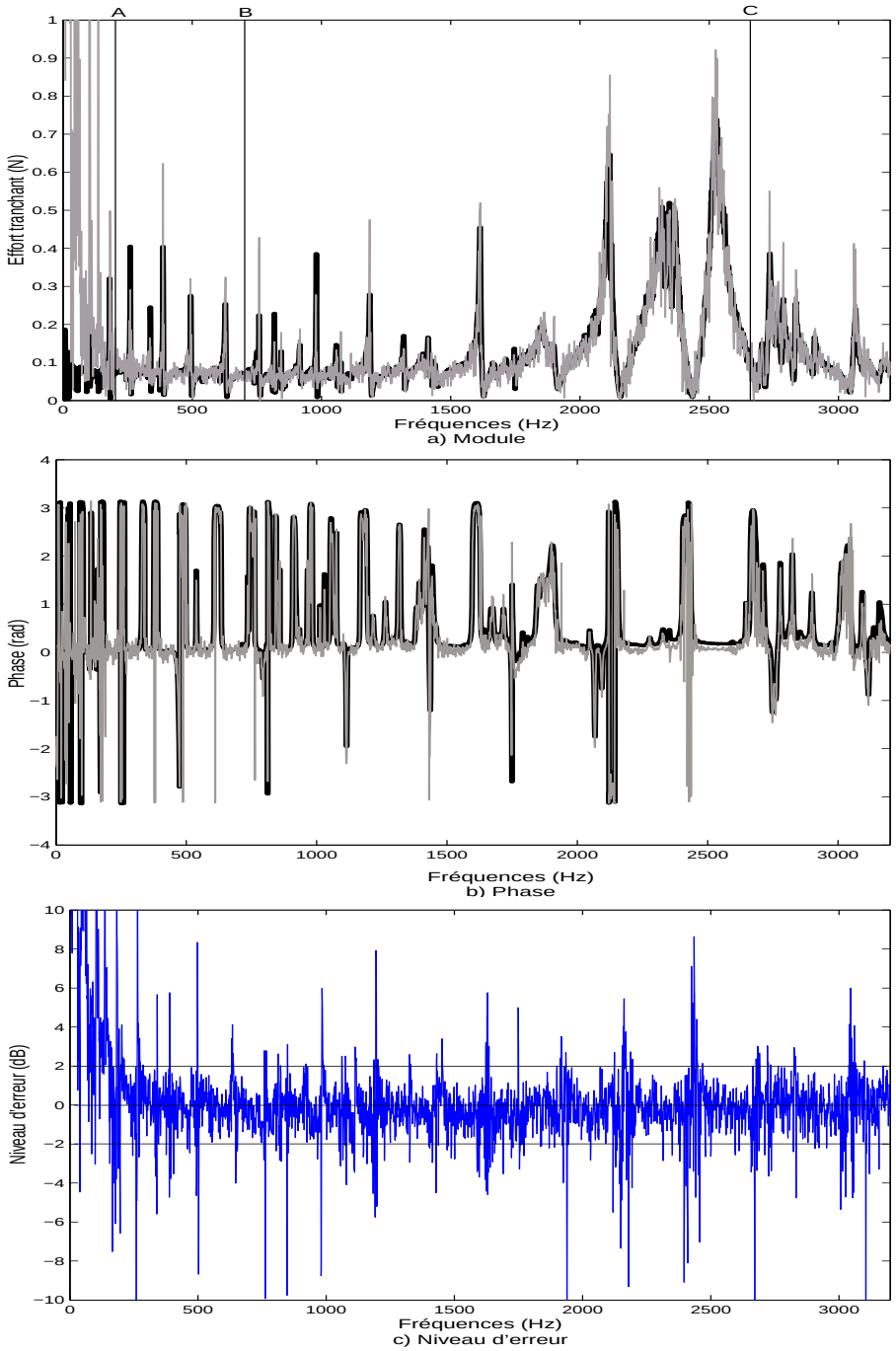


FIG. 3.3 – Reconstruction de l'effort tranchant en utilisant une intégration trapézoidale. Mesure directe : courbe noire épaisse, reconstruction : fine courbe grise.

Les figures 3.4 a), b) et c) montrent le module, la phase ainsi que le niveau d'erreur de reconstruction de l'effort tranchant, utilisant un maillage et une intégration de type Gauss-Legendre. Les résultats sont équivalents à ceux obtenus avec une intégration de type trapézoïdale. Ils montrent la possibilité pratique d'utiliser un maillage irrégulier. La mise en place d'un tel maillage peut être contraignante, mais le fait que les points aux extrémités du domaine d'intégration n'aient pas à être mesurés, est un avantage qui peut s'avérer déterminant dans certains cas.
Les premières fréquences propres de la poutre, sont celles qui ont les plus grandes longueurs d'onde. Les conditions expérimentales choisies ici ne permettent pas de descendre suffisamment bas en fréquence pour identifier correctement les modes situés en dessous de $200Hz$. Pour étendre le domaine d'observation fréquentielle de la reconstruction, il suffirait d'utiliser un maillage plus fin (plus de 10 points de discrétisation) pour rendre la reconstruction plus précise dans sa globalité, ou d'augmenter la longueur d'intégration.

Comme expliqué au chapitre 2, la longueur d'intégration et les limites fréquentielles pour lesquelles la reconsruction est exacte sont étroitement liées. Ce phénomène est illustré par la figure 3.5. Les spectres sont représentés jusqu'à 1000Hz seulement afin de mieux visualiser cette limite en basses fréquences. Les deux reconstructions utilisent des maillages réguliers avec une méthode d'intégration trapézoidale. La première reconstruction utilise une longueur d'intégration de *36cm* (la même que précédemment), quant à la seconde, elle utilise une longueur de *20cm*. On voit très nettement que la limite fréquentielle basse est liée au nombre d'onde dans l'intervalle d'intégration. Effectivement, les résultats des reconstructions concordent avec la mesure directe pour des fréquences supérieures à celle localisée par le marqueur A. Cette figure illustre concrètement les remarques faites sur ce phénomène.

En pratique, il faudra donc adapter la longueur d'intégration sur la structure en fonction de la gamme de fréquence ciblée. Pour analyser correctement une plus large fenêtre fréquentielle, il est également possible d'augmenter le nombre de points utilisés pour discrétiser le domaine d'intégration.

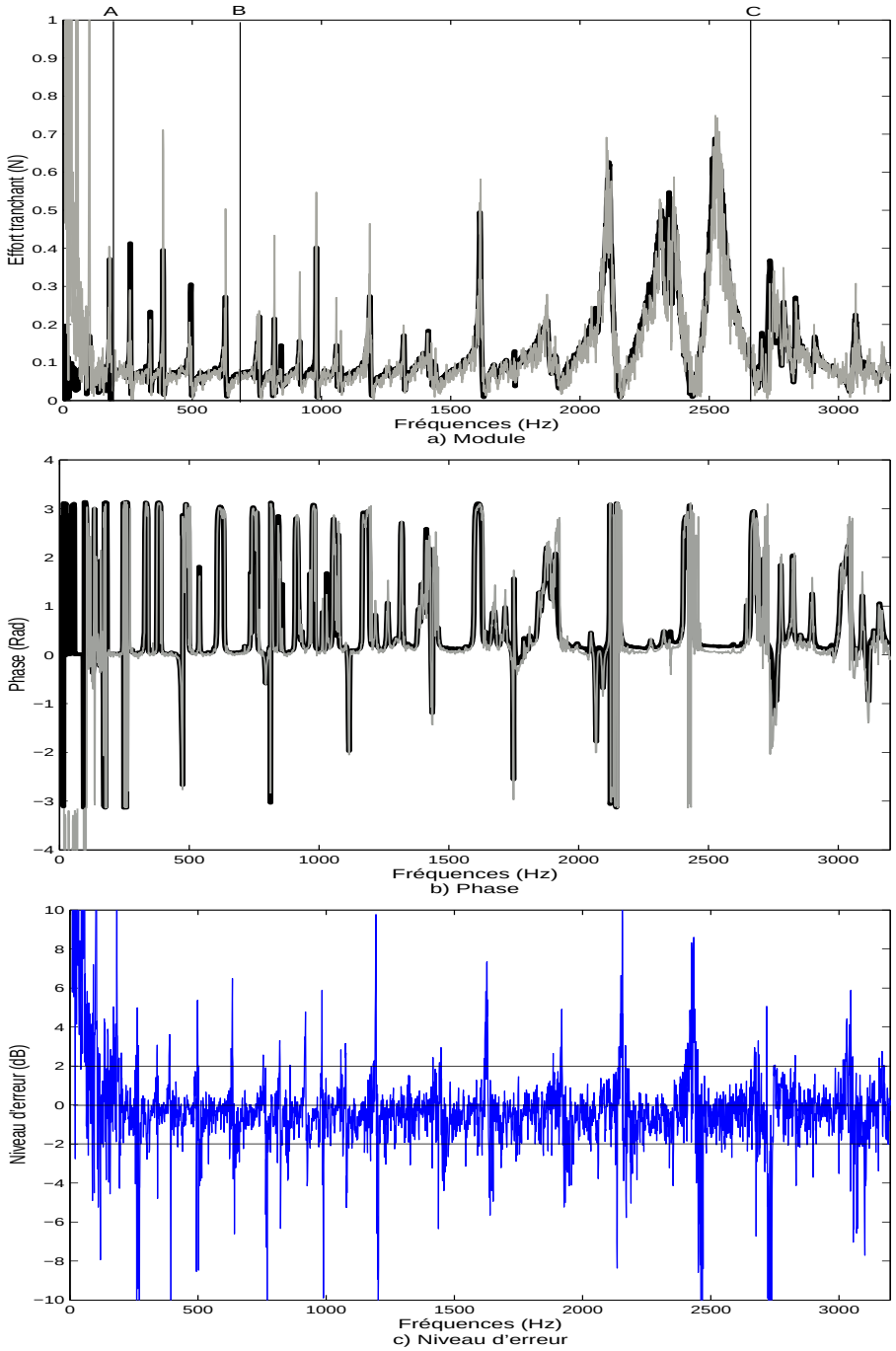


FIG. 3.4 – Reconstruction de l'effort tranchant en utilisant une intégration de type Gauss-Legendre. Mesure directe : courbe noire épaisse, reconstruction : fine courbe grise.

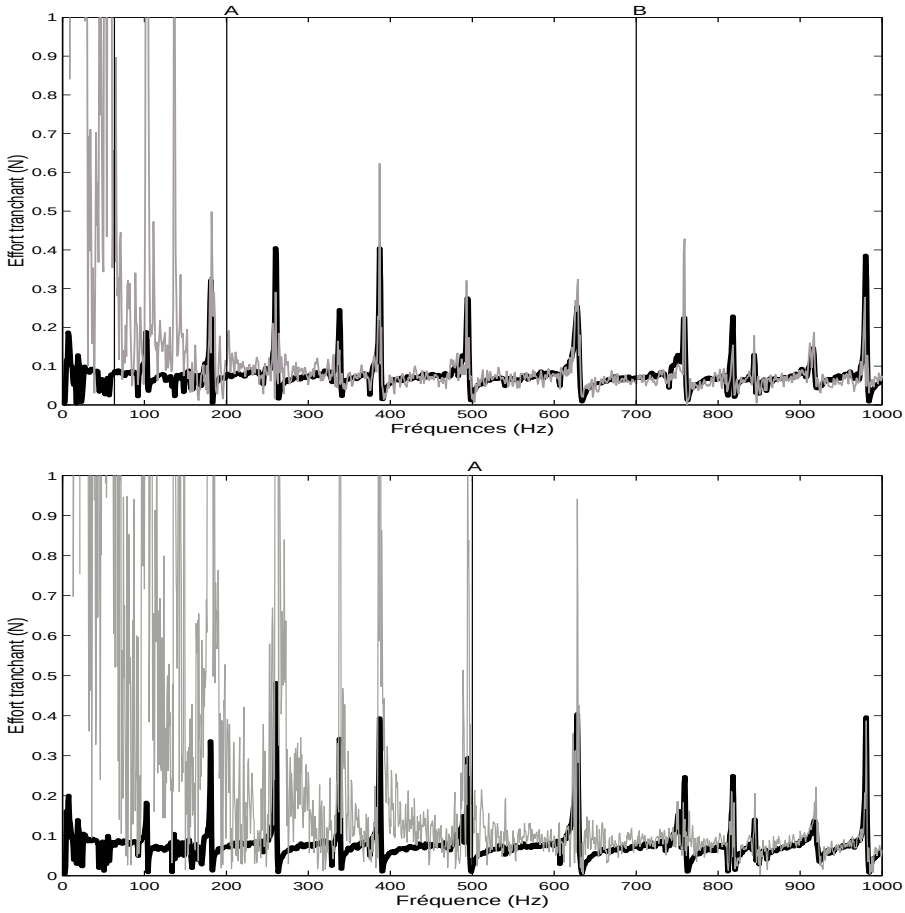


FIG. 3.5 – Reconstruction de l'effort tranchant en utilisant une intégration trapézoidale avec 10 points. a) Longueur d'intégration 36cm, b) Longueur d'intégration 20cm.

3.1.2 Reconstruction du moment fléchissant

3.1.2.1 Dispositif expérimental

La validation de la technique pour l'identification du moment fléchissant, nécessite un nouveau montage. Pour se rapprocher d'une excitation par moment, deux pots vibrants ont été fixés à l'extrémité de la poutre et séparés par une distance d. Ceux-ci appliquent sur la poutre deux forces identiques en opposition de phase. Ainsi, on considère que ce système d'excitation est équivalent à une excitation par moment au point A, au milieu des deux points excités. Cette hypothèse devrait être vraie en basses fréquences, lorsque la longueur d'onde est inférieur à $\frac{d}{2}$. Une limite en fréquence peut être définie si l'on considère que l'approximation est correcte pour $\frac{d}{2} < \frac{\lambda}{4}$.
Le schéma représenté en figure 3.6 illustre l'expérience.
La référence de phase nécessaire aux mesures est assurée par un accéléromètre situé à l'extrémité libre de la poutre. Pour la mesure de référence du moment fléchissant au point A, deux capteurs de force sont placés aux points d'attache des pots vibrants. La valeur du moment fléchissant équivalent est déduite de l'expression :

$$M(A) = \frac{d}{2} * F_1 + \frac{d}{2} * F_2 \tag{3.1}$$

où F_1 et F_2 sont les deux efforts mesurés par les capteurs.
La reconstruction du moment fléchissant au point A nécessite une intégration du point A au point B (figure 3.6). La force excitatrice F_1 est comprise dans ce domaine. Il est donc nécessaire de la considérer dans le calcul. L'intégrale 1.16 doit être réécrite, pour prendre en compte la présence de cet effort dans l'intervalle d'intégration :

$$M(A) = \int_A^{A+b} \left(w(x)[\rho S \omega^2 \eta(x) - EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4}(x)] \right) dx + \int_A^{A+b} F_1 \delta(x - x_{F_1}) \eta(x) dx \tag{3.2}$$

Les propriétés de la distribution dirac nous amènent à :

$$M(A) = \int_A^{A+b} \left(w(x)[\rho S \omega^2 \eta(x) - EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4}(x)] \right) dx + F_1 \eta(x_{F_1}) \tag{3.3}$$

La fonction η étant parfaitement définie, la force F_1 mesurée et sa localisation connue, le calcul de ce nouveau terme ne pose aucun problème.

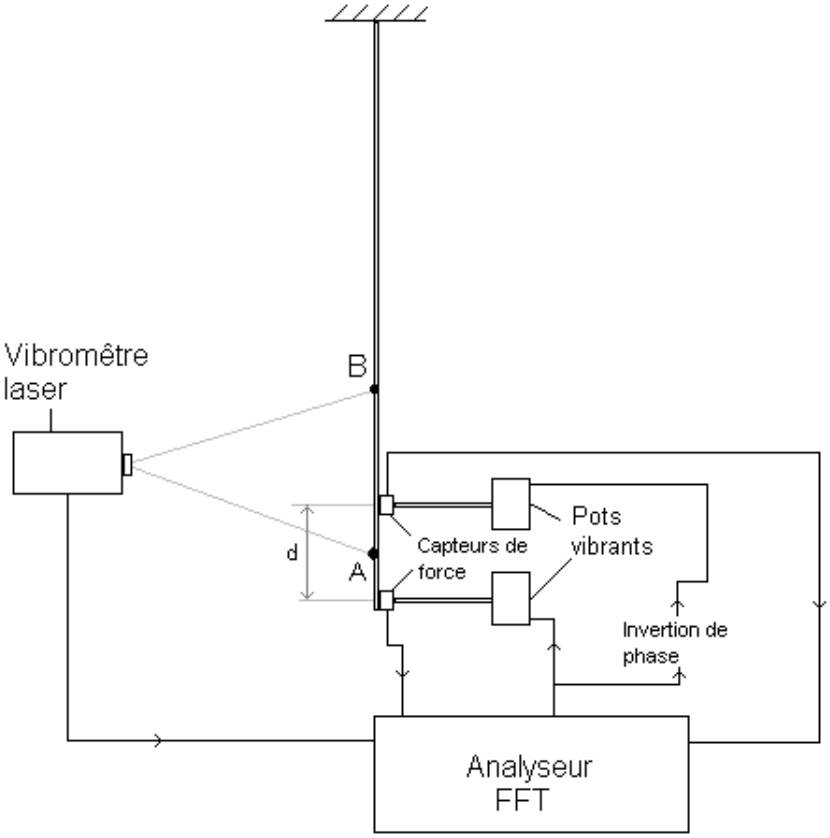


FIG. 3.6 – Dispositif expérimental utilisé pour la reconstruction du moment fléchissant. Poutre d'acier de longueur L=1.5m, largeur l=6cm, épaisseur h=1cm.

3.1.2.2 Résultats de la reconstruction

La figure 3.7 montre les amplitudes et phases des moments fléchissants obtenus par l'équation 3.1 et par une reconstruction utilisant une méthode d'intégration trapézoidale. Le niveau d'erreur est également représenté figure 3.7.c).

Les amplitudes comparées sont très proches jusqu'à $2500Hz$. Cela correspond à la limite $\frac{d}{2} \approx \frac{\lambda}{4}$ établie précédement. Le niveau d'erreur est faible et reste entre $-2dB$ et $+2dB$, excepté en basse fréquence. Malgré tout, quelques singularités apparaissent ponctuellement aux fréquences présentant de très faibles amplitudes vibratoires. On remarque que la reconstruction de la phase donne également de très bon résultats.

Les reconstructions du moment fléchissant utilisant une méthode d'intégration Gauss-Legendre sont comparées aux mesures directes en figure 3.8. La reconstruction de l'amplitude est excellente entre $100Hz$ et $2000Hz$. L'erreur est faible sur cet intervalle. Des maximums d'erreur apparaissent également aux fréquences de faibles amplitudes. La phase reconstruite est très proche de celle issue des mesures directes.

Les reconstructions du moment fléchissant présentés dans cette section sont bonnes. On retrouve les limites fréquentielles et spatiales qui avaient été établies lors des simulations numériques.

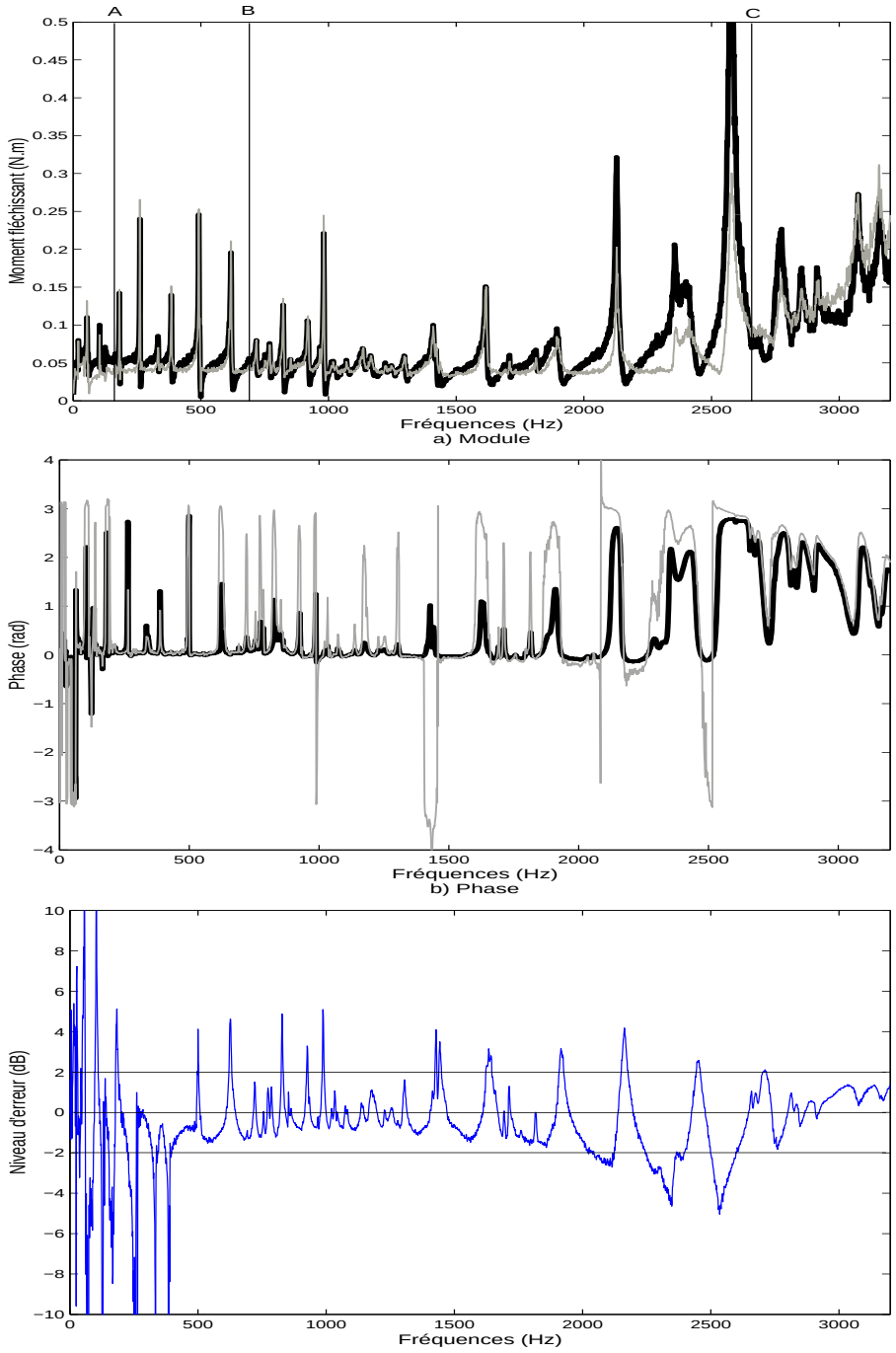


FIG. 3.7 – Reconstruction du moment fléchissant en utilisant une intégration trapézoidale. Mesure directe : courbe noire épaisse, reconstruction : fine courbe grise.

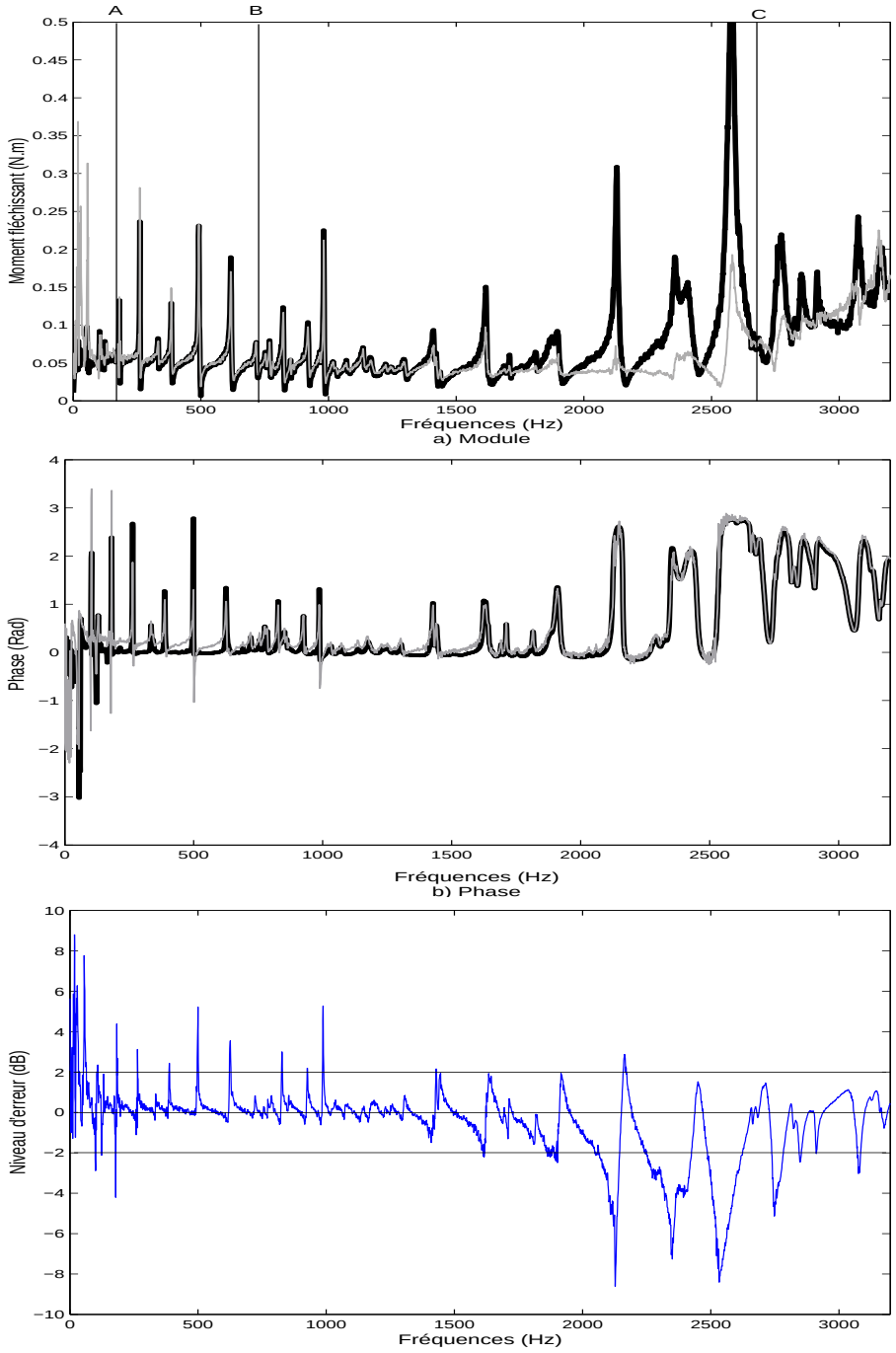


FIG. 3.8 – Reconstruction du moment fléchissant en utilisant une intégration de type Gauss-Legendre. Mesure directe : courbe noire épaisse, reconstruction : fine courbe grise.

3.2 Conclusion

Ce chapitre a permis de valider expérimentalement la méthode de reconstruction d'effort. Une poutre suspendue a servi de support. Celle-ci a été excitée par un ou deux pots vibrants à son extrémité libre. Ainsi, une reconstruction de l'effort tranchant ou du moment fléchissant ont pu être effectuées au point limite du domaine d'intégration. Deux méthodes d'intégrations discrètes ont été utilisées et comparées. On utilise ici un vibromètre laser à balayage, mais on peut imaginer d'autres types d'acquisitions (antenne holographique, accéléromètre...). De très bon résultats ont été obtenus en utilisant seulement 10 points de mesure quel que soit le type d'intégration. Les limites fréquentielles et spatiales déterminées lors du chapitre précédent ont été retrouvées. Ces premières expérimentations mettent en évidence que le méthode est simple et robuste. Son application sur des cas simples n'a posé aucun problème particulier.

Chapitre 4

Identification des conditions aux limites d'une poutre en flexion

4.1 Objectifs

En pratique, les conditions aux limites sont très difficiles à déterminer, car elles sont le lien avec le milieu extérieur, non modélisé. Les conditions aux limites des poutres en flexion peuvent souvent être caractérisées par des raideurs dynamiques (une de torsion et une de translation), des amortissements et des masses, proportionnelles au déplacement ou à ses dérivées. Ainsi, l'identification des conditions aux limites est liée à l'estimation des dérivées spatiales du déplacement. Il est connu que ces dérivées sont difficilement accessibles avec précision aux limites d'un domaine. Par conséquent, il existe de nombreuses approches se limitant à identifier les conditions limites dites extrêmes (encastrées, libres, appuies, ou guidées) basées sur le calcul des impédances de translation et de rotation (cf [PEZ 96]). Mais lorsque ces quantités sont non nulles, ou non infinies, leur quantification devient délicate. L'approche proposée dans les chapitres précédents, s'intéresse aux efforts aux limites, proportionnels aux dérivées spatiales du déplacement, on peut donc adapter la méthode afin d'identifier les conditions limites de manières générales.

4.2 Principe de l'identification

La représentation des limites par des raideurs dynamiques inclut des effets d'amortissement via la partie imaginaire de K et de C et de masse pour une valeur négative de la partie réelle. Bien entendu,

la raideur dynamique varie en fréquence. Pour caractériser les éléments actifs d'une condition limite de flexion de poutre, il est nécessaire de calculer sa raideur de translation, K (en $N.m^{-}1$) et sa raideur de rotation, C (en $N.m$). Afin d'identifier les quantités nécessaires aux calculs de ces raideurs, on considère l'équilibre des forces et des moments à l'extrémité d'une poutre en flexion, dans le cas où aucun effort extérieur n'est directement appliqué à la limite.
Equilibre des forces :

$$EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = Kw \tag{4.1}$$

Equilibre des moments :

$$EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = C\frac{\partial w}{\partial x} \tag{4.2}$$

Le moment fléchissant est donc égale à la raideur que multiplie la pente.
Ces deux équations mènent à l'identification de K et C :

$$\begin{cases} K = \frac{T(w)}{w} \\ C = \frac{M(w)}{\frac{\partial w}{\partial x}} \end{cases} \tag{4.3}$$

Le déplacement est issu des mesures. Les méthodes de calcul de l'effort tranchant et du moment fléchissant ont été explicitées dans les chapitres précédents. Seule la pente nécessite une nouvelle approche afin de pouvoir calculer la raideur de torsion.

4.3 Identification de la pente à la limite d'une poutre

4.3.1 Principe

Le principe d'identification de la pente suit la même démarche que les identifications d'efforts. L'équation 1.9 nous sert à nouveau de base pour redéfinir un polynôme permettant l'extraction de la pente. Ainsi, la fonction η_P permettant d'identifier la pente à l'extrémité a d'un domaine $[a, b]$, doit vérifier les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \eta(a) = 0 & \eta(b) = 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial x}(a) = 0 & \frac{\partial \eta}{\partial x}(b) = 0 \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}(a) = 1 & \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}(b) = 0 \\ \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}(a) = 0 & \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}(b) = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

Le polynôme de plus petit degré vérifiant ces conditions est :

$$\eta_P(x) = \frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{(b-a)} - 5\frac{(x-a)^4}{(b-a)^2} + 10\frac{(x-a)^5}{(b-a)^3} - \frac{15}{2}\frac{(x-a)^6}{(b-a)^4} + 2\frac{(x-a)^7}{(b-a)^5} \tag{4.5}$$

Les figures 4.1 et 4.2, montrent les fonctions $\eta_P(x)$ et $\frac{\partial^4 \eta_P(x)}{\partial x^4}$ pour x appartenant à un intervalle quelconque $[a, b]$. On précise toutefois que sur les figures, la norme $|ab|$ est unitaire, les valeurs des fonctions test pouvant varier selon la longueur de cet intervalle. On remarque que les valeurs de ces polynômes sont inférieures à celles de $\eta_T(x)$ et $\eta_M(x)$.

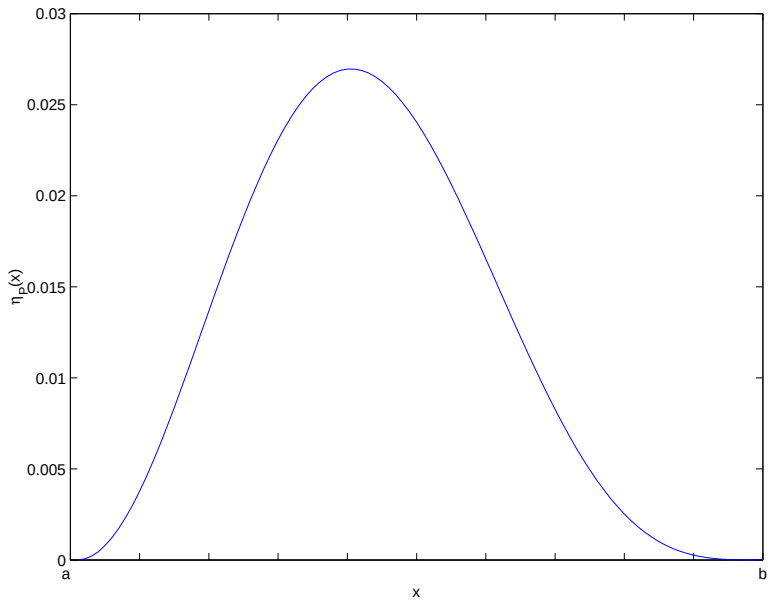


FIG. 4.1 – Fonction $\eta_P(x)$ pour x $\in$ [a,b], utilisée pour le calcul de la pente à la borne inférieure du domaine d'intégration.

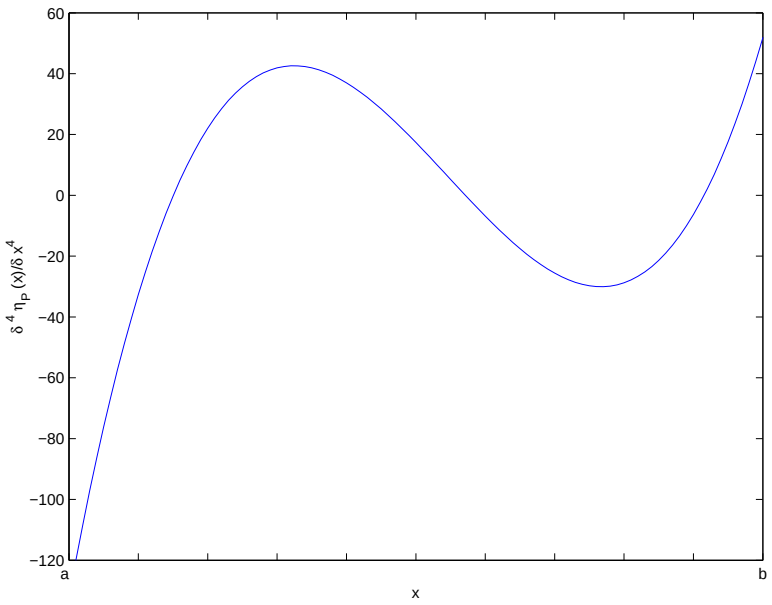


FIG. 4.2 – Fonction $\frac{\partial^4 \eta_P(x)}{\partial x^4}$ pour x $\in$ [a ;b], utilisée pour le calcul de la pente à la borne inférieure du domaine d'intégration.

L'équation générale 1.9 devient alors :

$$P(a) = -\frac{1}{EI}\int_a^b w(x)[\rho S\omega^2\eta_P(x) - EI\frac{\partial^4\eta_P}{\partial x^4}(x)]dx \tag{4.6}$$

Cette équation, associée aux polynôme $\eta_P(x)$ de l'équation 4.5, permet de calculer la pente à la limite d'un domaine. Des résultats de simulations numériques montrant la précision de cette approche sont présentés dans le paragraphe suivant.

4.3.2 Simulations numériques

La méthode des ondes forcées (cf [GUY 02]) est utilisée pour effectuer le calcul direct. La figure 4.3 illustre le modèle que l'on utilise ici. Il s'agit d'une poutre dont l'extrémité gauche est munie d'un ressort en translation et d'un ressort en rotation, l'autre extrémité est encastrée. La poutre est en acier avec une longueur de 2.5m, une largeur de 6cm, une hauteur de 1cm, et est excitée en $x = 2m$ par une force unitaire à la fréquence $f = 1500Hz$. Cette fréquence est située entre deux fréquences propres du système ($1403Hz$ et $1543Hz$). Les valeurs des raideurs sont $K = 10^8 N.m^-1$ et $C = 10000N.m$. On utilise une intégration de type trapézoïdale à 20 points.

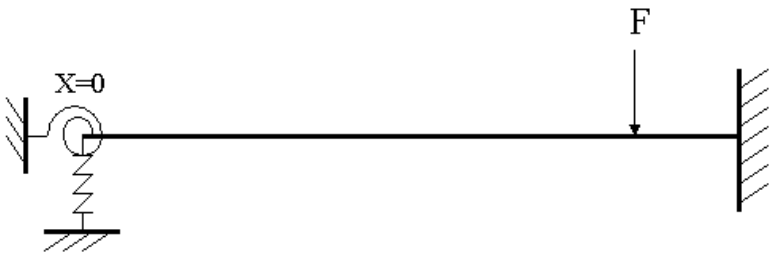


FIG. 4.3 – Poutre avec des ressorts de translation et de rotation de raideur K et C à l'une de ses extrémités.

Un indicateur d'erreur ϵ_P est défini pour quantifier la précision de l'identification :

$$\epsilon_P = 10 * log \left| \frac{P(0)}{\frac{\partial w}{\partial x}(0)} \right| \tag{4.7}$$

où $P(0)$ est la pente calculée en $x = 0$ à l'aide des simulations numériques et de l'équation 4.6. La figure 4.4 montre ce niveau d'erreur en fonction du nombre d'onde dans le domaine d'intégration.
Cette erreur reste inférieure à $1dB$ sur l'intervalle étudié. Elle augmente régulièrement avec le nombre d'onde dans le domaine d'intégration, car le nombre de points par longueur d'onde devient trop faible pour effectuer une intégration précise. Cependant ce résultat montre la justesse de l'approche lorsque l'on choisit un domaine d'intégration appropriée.
Le déplacement w peut être directement mesuré. Dans les premiers chapitres de ce mémoire on a défini les polynômes nécessaires à l'identification de l'effort tranchant et du moment fléchissant. En explicitant $\eta_P(x)$, on complète l'étude permettant l'identification des conditions aux limites. Les 4 quantités nécessaires au calcul des raideurs K et C, peuvent donc être estimées correctement à l'aide de ces méthodes.

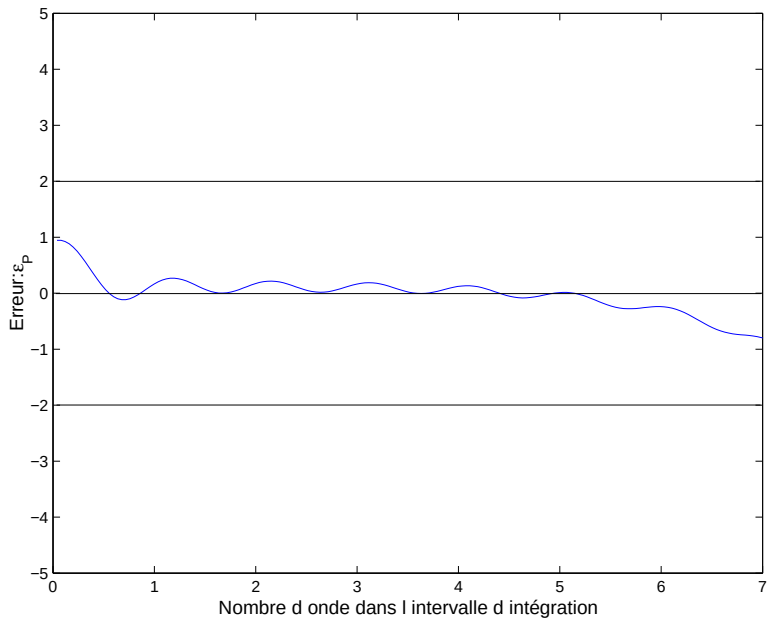


FIG. 4.4 – Niveau d'erreur ϵ_P entre la pente calculée par simulation et la pente analytique, pour une intégration de type trapézoidale utilisant 20 points

4.4 Identification des conditions aux limites : Simulations numériques

Pour étudier la faisabilité de ce principe et afin d'en établir les limites, des simulations numériques ont été menées. On utilise à nouveau le calcul direct issu du cas illustré en figure 4.3.

4.4.1 Simulations exactes

Une fois les déplacements calculés de manière directe. L'effort tranchant, le moment fléchissant et la pente sont calculés à l'aide de la méthode. Les raideurs de translation et de torsion sont ensuite estimées à l'aide du système 4.3. L'analyse se base sur une comparaison entre les valeurs initiales de K et C qui ont servi au calcul direct et celles retrouvées à partir du calcul des efforts et de la pente. Deux indicateurs d'erreurs sont définis afin d'estimer l'erreur de chaque identification.

$$\epsilon_K = 10 * log \left| \frac{\frac{T(w)}{w}}{K} \right| \tag{4.8}$$

$$\epsilon_C = 10 * log \left| \frac{\frac{M(w)}{\frac{\partial w}{\partial x}}}{C} \right| \tag{4.9}$$

où K et C sont les valeurs exactes des raideurs que l'on cherche à identifier, $T(w)$, $M(w)$, $\frac{\partial w}{\partial x}$ sont respectivement l'effort tranchant, le moment fléchissant et la pente, issus du calcul indirect.
La figure 4.5 montre le niveau d'erreur ϵ_K défini par l'équation 4.8.

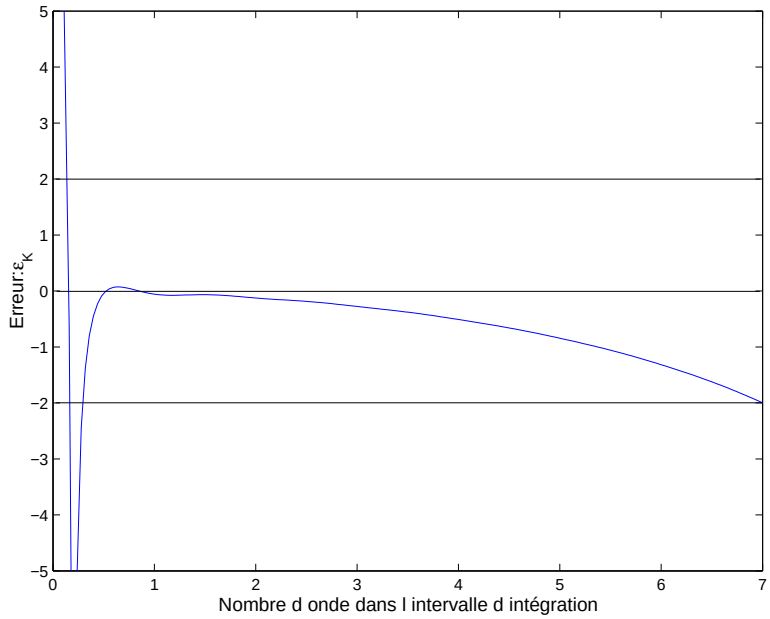


FIG. 4.5 – Niveau d'erreur ϵ_K entre la raideur de translation calculée par simulation et la raideur de translation K exacte, pour une intégration de type trapezoidale utilisant 20 points

On retrouve logiquement la forme du niveau d'erreur de la reconstruction de l'effort tranchant (figure 2.3). Effectivement la seule quantité variable par rapport aux paramètres d'intégration est l'effort tranchant, alors que le déplacement w est une donnée du problème et ne varie donc pas. Les conclusions sont donc identiques à celles de la reconstruction de l'effort tranchant. En dessous de 0.5 NODI (Nombre d'Onde dans le Domaine d'Intégration) l'erreur augmente de manière importante en raison des trop grandes valeurs de la dérivée quatrième qui faussent l'estimation. L'erreur augmente ensuite régulièrement car le nombre de points de discrétisation par longueur d'onde devient trop faible.
La figure 4.6 montre les niveaux d'erreur de la reconstruction du moment fléchissant(a) et de la pente(b). Ces figures servent à comprendre le comportement du niveau d'erreur de la reconstruction de la raideur de rotation présentée figure 4.7.

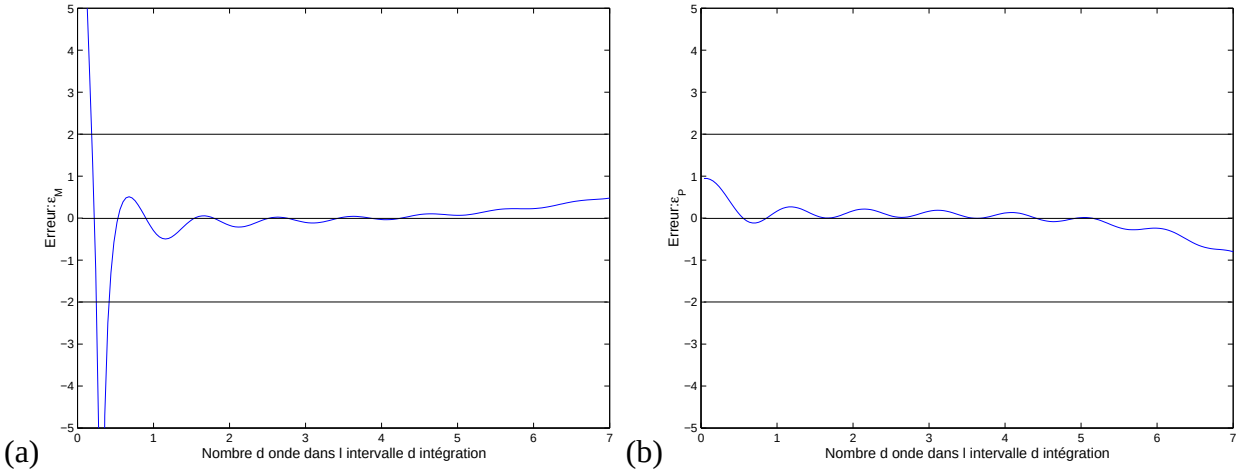


FIG. 4.6 – (a)Niveau d'erreur ϵ_M entre le moment fléchissant calculé par simulation et le moment fléchissant exact, pour une intégration de type trapézoïdale utilisant 20 points (b)Niveau d'erreur ϵ_P entre la pente calculée par simulation et la pente exacte, pour une intégration de type trapézoïdale utilisant 20 points

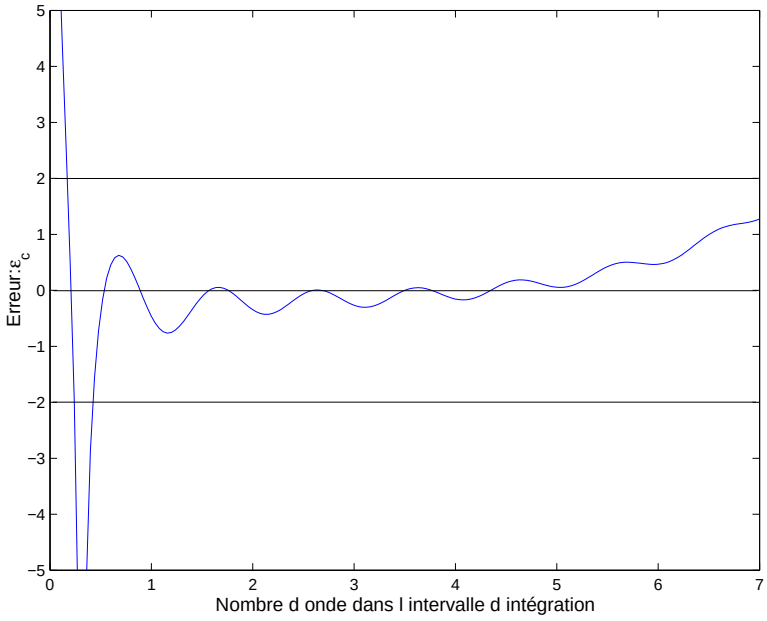


FIG. 4.7 – Niveau d'erreur ϵ_K entre la raideur de torsion calculée par simulation et la raideur de torsion C exacte, pour une intégration de type trapezoidale utilisant 20 points

La raideur de rotation est une quantité calculée à partir du moment fléchissant et de la pente. Ces approximations correspondent donc aux approximations issues à la fois de la reconstruction du moment fléchissant et de la recontruction de la pente. Les oscillations qu'on observe, sont donc accentuées. Le pic d'erreur au dessous de 0.5 NODI est également présent.

En respectant les critères de nombre d'onde dans l'intervalle d'intégration, on retrouve avec précision les raideurs de translation et de rotation à la limite d'une poutre. Les conditions aux limites peuvent donc être déterminées en combinant les différentes reconstructions d'effort et de pente proposées dans ce mémoire.

4.4.2 Effet du bruit sur l'identification

La précision des précédents résultats n'est valable que dans un cas théorique. En pratique de nombreux bruits viennent entacher les déplacements mesurés et biaiser la reconstruction des efforts et donc de l'identification des conditions aux limites. Il est donc nécessaire d'effectuer des simulations utilisant des déplacements bruités et d'évaluer la robustesse de la méthode face aux bruits de mesure.

4.4.2.1 Types de bruit

Une analyse des effets de différents types de bruits de mesure ont déjà été menée pour chacun des efforts aux chapitres précédents. Cette section ira directement à l'essentiel, les différents bruits de mesure ne sont pas séparés : les déplacements calculés par la méthode des ondes forcées sont détériorés par un bruit additif, multiplicatif et une erreur dans la localisation des points. Ces déplacements bruités sont modélisés par l'équation suivante :

$$w^{bruité}(x_i) = w^{exact}(x_i + \Delta x).\Delta w_m.e^{j\Delta\varphi} + \Delta w_a \tag{4.10}$$

où Δw_m est une variable aléatoire Gaussienne réelle, définie par sa moyenne égale à un et son écart type égale à 1% de l'amplitude du déplacement, $\Delta\varphi$ est une variable Gaussienne aléatoire réelle, définie par sa moyenne nulle, et son écart type égal à 1°. Δw_a représente un bruit de fond, défini par une variable aléatoire Gaussienne de moyenne nulle et un écart type dépendant directement de la chaîne d'acquisition (Pour ces simulations, le bruit de fond est fixé à 1% de la valeur maximale du déplacement de la poutre). En ce qui concerne la position des points, l'écart type est fixé à $0.5mm$.

La combinaison de ces trois bruits, détériore fortement le champ de déplacement et représente une mesure de mauvaise qualité par rapport aux moyens existants.

4.4.2.2 Simulations bruitées

La structure utilisée pour les simulations bruitées est toujours celle schématisée en figure 4.3. Les figures 4.8 et 4.9 montrent le niveau d'erreur de l'identification des raideurs de translation et de torsion. On supperpose sur ces figures, le résultat précédemment obtenu lors des simulations "exactes" afin d'avoir une référence ainsi qu'une série de simulations utilisant des déplacements bruités, représenté par un nuage de croix. L'identification de la raideur de translation est un peu particulière car elle

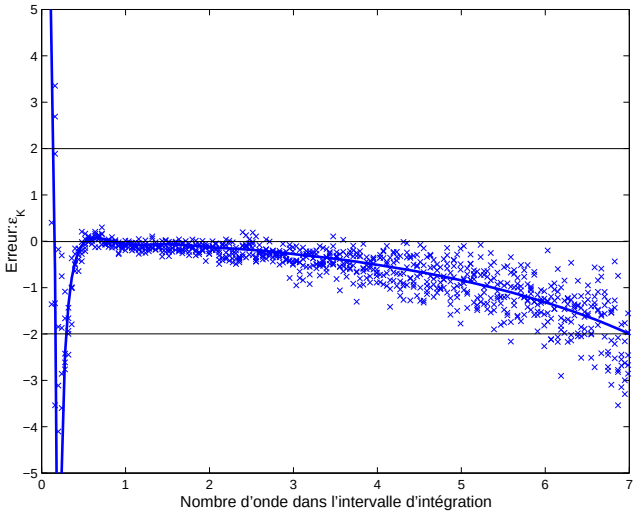


FIG. 4.8 – Niveau d'erreur ϵ_K entre la raideur de translation calculée par simulation bruitée et la raideur de translation K exacte, pour une intégration de type trapézoidale utilisant 20 points. Ligne continue : Simulation utilisant des déplacements exacts, x : Simulation utilisant des déplacements bruités

utilise w issu d'une mesure directe, ne nécessitant aucun post-traitement. L'erreur sur l'identification va donc être directement proportionnelle à l'erreur sur w multipliée par l'erreur sur $T(w)$. De plus, l'erreur sur w ne dépend pas de la longueur d'intégration, c'est un paramétre invariant. Il est donc logique de retrouver sur la figure 4.8 un comportement similaire à l'erreur sur la reconstruction de l'effort tranchant seul, déjà présentée au chapitre2, figures 2.7 à 2.9. Les nombreuses approximations et incertitudes sont moyennées sur l'intervalle d'intégration et l'erreur des simulations bruitées reste proche de l'erreur issue des simulations exactes.

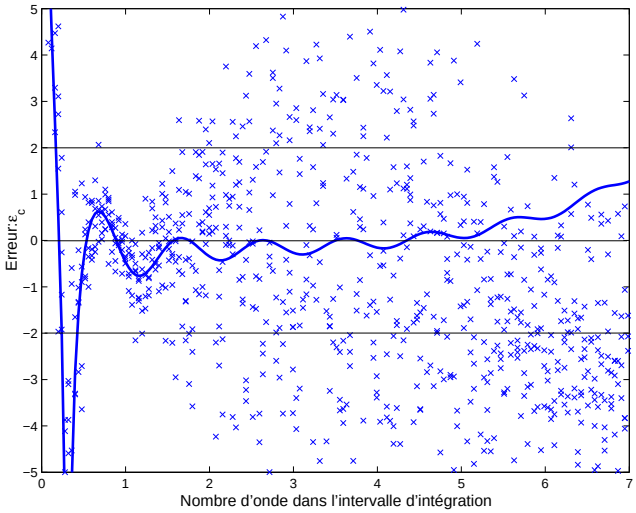


FIG. 4.9 – Niveau d'erreur ϵ_C entre la raideur de rotation calculée par simulation bruitée et la raideur de rotation C exacte, pour une intégration de type trapezoidale utilisant 20 points. Ligne continue : Simulation utilisant des déplacements exacts, x : Simulation utilisant des déplacements bruités

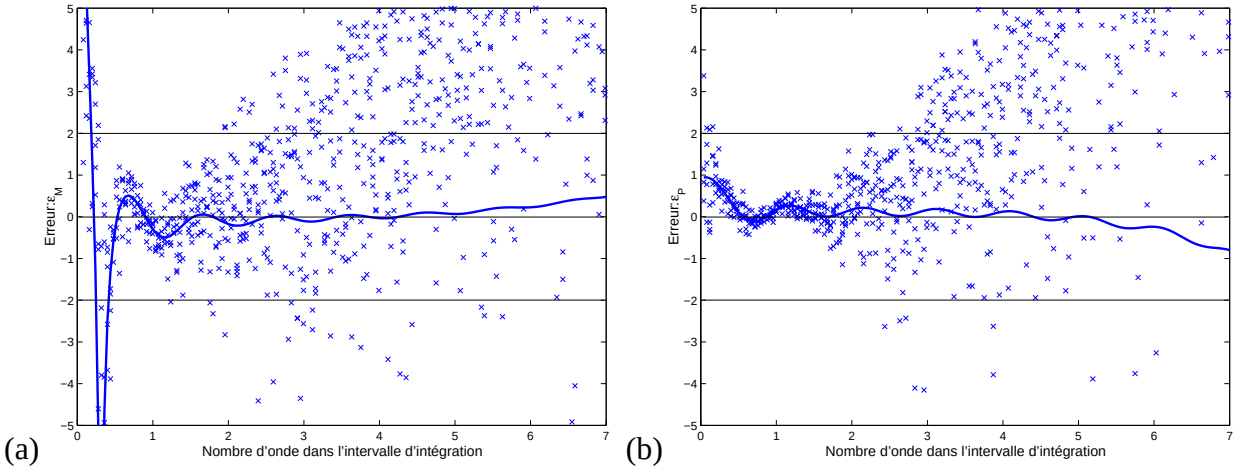


FIG. 4.10 – (a)Niveau d'erreur ϵ_M entre le moment fléchissant calculé par simulation(ligne continue : déplacements exacts, x :déplacements bruités) et le moment fléchissant exact , pour une intégration de type trapezoidale utilisant 20 points (b)Niveau d'erreur ϵ_P entre la pente calculée par simulation(ligne continue : déplacements exacts, x :déplacements bruités) et la pente exacte, pour une intégration de type trapezoidale utilisant 20 points

L'erreur sur l'identification de la raideur de torsion présenté en figure 4.9 a un comportement différent. Effectivement, pour un NODI supérieur à une longeur d'onde et demi, l'erreur dépasse les 2dB, puis continue à augmenter. Les figures 4.10 présentent les niveaux d'erreur des reconstructions bruitées du moment fléchissant et de la pente à la limite de la poutre. On constate que la sensibilité au bruit de l'identification de la raideur de torsion est issue de la sensibilité des deux quantités reconstruite qui la composent (c'est à dire le moment fléchissant et le pente).
Malgré tout, il est possible de déterminer un intervalle de nombre d'onde dans le domaine d'intégration pour lequel, l'identification de la raideur de torsion reste précise. Sur la figure 4.9, on constate qu'entre 0.5 et 1.5 NODI, le niveau erreur reste en dessous de 2dB. On rappelle que les déplacements sont ici fortement bruités, en conséquence ces simulations montrent que l'estimation de la raideur de torsion reste possible si l'on choisit la taille adéquate du domaine d'intégration.

4.5 Conclusions

L'identification des conditions limites est le sujet de nombreux ouvrages (Kamiya [KSMY 05], Ahmadian [AJM 01], ...), et rencontrent généralement le problème de l'estimation des dérivées (premières, secondes ou troisièmes) du déplacement. L'objectif final du travail de cette thèse est la recherche des efforts (effort tranchant ou moment fléchissant) à la limite des structures. Ces quantités elles aussi, dépendent directement des dérivées spatiales du déplacement, c'est donc naturellement qu'en combinant ces méthodes de reconstruction d'effort, on propose d'identifier les conditions aux limites des structures. Cependant, les approximations présentes dans chacune des reconstructions se multiplient et rendent le calcul des conditions aux limites légèrement plus délicat que le simple calcul d'effort. Les simulations numériques bruitées, ont montré la robustesse de cette approche à partir de déplacements fortement bruités.

Chapitre 5

Reconstruction de l'effort tranchant et du moment fléchissant : Cas d'une plaque en flexion

5.1 Objectifs du chapitre

Nous proposons dans ce chapitre, une extension aux plaques de la méthode précédemment décrite. Il sera indispensable de reprendre toute la base de la formulation intégrale qui caractérise l'approche. Si dans l'esprit la méthode ne change pas, les calculs d'intégrales à deux dimensions sont assez lourds et les expressions des efforts sont bien plus complexes, ils utilisent des dérivées spatiales croisées qui compliquent considérablement l'approche mathématique. Il est apparu préférable de revenir aux sources variationnelles de la mise en équation (cf [GUY 02]). Après avoir présenté les quantités recherchées et défini la fonctionnelle utilisée, les différentes étapes mathématiques permettant l'extraction des efforts à la limite sont décrites. Les effets liés aux incertitudes de mesure font l'objet du chapitre suivant.

5.2 Equations de base du problème

5.2.1 Effort tranchant et moment fléchissant

Comme dans le premier chapitre, les deux quantités qui caractérisent les efforts à la limite d'une plaque vibrant en flexion sont l'effort tranchant et le moment fléchissant. Ils dépendent également de dérivées spatiales du déplacement, mais leurs expressions sont plus compliquées. On constate effectivement l'apparition de dérivées croisées. L'orientation de la limite est prise en compte par l'intermédiaire des vecteurs normaux et tangentiels.
Les efforts tranchants et moments fléchissants sur le contour σ sont donnés par (cf [GUY 02]) :

$$\begin{cases} T(w) = D\frac{\partial}{\partial s}\left[2n_1n_2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) + 2(1-\nu)(n_2^2 - n_1^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right] + \frac{\partial}{\partial n}\left[M\right] \\ M(w) = -D\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)n_1^2 + 2(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}n_1n_2 + \left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)n_2^2\right] \end{cases} \tag{5.1}$$

où w est le déplacement transversal, ν est le coefficient de poisson, $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$ est la rigidité de flexion et n_1 et n_2 sont les coefficients directeurs du vecteur normal $\vec{n}$ et $\vec{s}$ est le vecteur tangentiel.

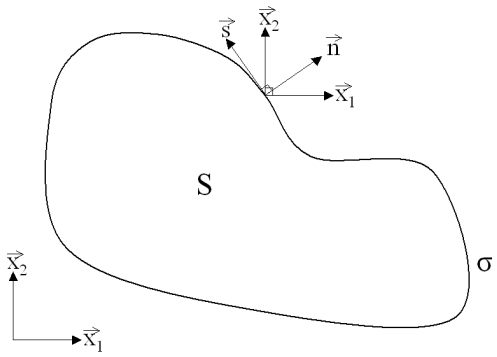


FIG. 5.1 – Représentation des vecteurs unitaires en un point du contour σ. $\vec{n}$ normale extérieure à S, $\vec{s}$ tangente à σ.

5.2.2 Modèle de plaque

Il est important de préciser que le modèle de plaque utilisé pour décire le champ de déplacement est celui défini par Love-Kirchoff (cf. [GUY 02]). Dans ce modèle, le déplacement est décrit par une

seule variable : le déplacement transversal $w(x, y, t)$. On qualifie ce modèle de flexion pure car il revient à négliger le cisaillement transversal de la plaque. Les hypothèses menant à ce modèle sont :
- Aucun déplacement dans le plan de la fibre neutre.
- Les sections droites déformées restent normales au plan de la fibre neutre.

Ce modèle s'oppose à celui de Mindlin (cf [GUY 02]) où les sections droites ne sont plus nécessairement normales à la fibre neutre.
La fonctionnelle de Hamilton pour la flexion des plaques minces, s'écrit (sous les hypothèses de Love-Kirchhoff et en négligeant l'inertie rotationnelle) :

$$H(W(x_1, x_2, t)) = \int_{t_1}^{t_0} \int_S \left[\rho \frac{h}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 - \frac{D}{2} \left(\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} \right)^2 \right.\right. \\ \left.\left. + 2\nu \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right) + FW \right] dx_1 dx_2 dt \tag{5.2}$$

La théorie variationnelle dit que si le champ de déplacement de la plaque est cinématiquement admissible, et si ce champ de déplacement rend la fonctionnelle de Hamilton extrémum, alors ce champ de déplacement vérifie l'équation de mouvement du système. Nous ne nous servirons pas de la fonctionnelle dans ce but, mais comme base du calcul, permettant d'extraire les expressions des efforts tranchants et des moments fléchissants.

5.3 Approche générale

5.3.1 Calcul analytique préliminaire

Nous rappelons que l'objectif de la méthode est d'identifier les efforts aux limites à partir de déplacements mesurés. Il est donc nécessaire d'obtenir une expression de l'effort tranchant et du moment fléchissant ne dépendant que de ces déplacements et de quantités connues. La démarche est la suivante : partant de la fonctionnelle d'Hamilton, on cherche à faire apparaître les quantités recherchées en introduisant une fonction test qui nous permettra de pondérer les différents termes présents dans les équations. Cette fonction, pour l'instant quelconque, devra vérifier des conditions aux limites judicieusement choisies, pour extraire le moment fléchissant ou l'effort tranchant.
Les trois équations de base que nous retiendrons sont donc celles des efforts 5.1 et celle de la fonctionnelle 5.3. On ne présente ici que les grandes lignes de la démarche mathématique. Les détails des

calculs sont présentés dans l'annexe C.
Dans le cas où il n'y a pas d'excitation extérieure de la structure dans le domaine considéré $(F = 0)$, la fonctionnelle de Hamilton s'écrit :

$$H(W(x_1,x_2,t)) = \int_{t_1}^{t_0}\int_S \left[\rho\frac{h}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 - \frac{D}{2}\left(\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2\right)\right] dx_1 dx_2 dt \tag{5.3}$$

Les méthodes variationnelles proposent de décomposer le champ de déplacement $W(x_1,x_2,t)$ de la façon suivante :

$$W(x_1,x_2,t) = w(x_1,x_2,t) + \lambda W^*(x_1,x_2,t) \tag{5.4}$$

où λ est une constante, et $W^*(x_1,x_2,t)$ est un déplacement virtuel, cinématiquement admissible, et w est le déplacement cinématiquement admissible qui minimise la fonctionnelle. La minimisation de H s'écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\, H\left[w(x_1,x_2,t) + \lambda W^*(x_1,x_2,t)\right]\big|_{\lambda=0} = 0 \tag{5.5}$$

Lorsque l'on dérive cette expression pour $\lambda = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial}{\partial\lambda}\, H\left[w(x_1,x_2,t) + \lambda W^*(x_1,x_2,t)\right]\big|_{\lambda=0} = \; & \int_{t_1}^{t_0}\int_S \Big[\rho h \tfrac{\partial w}{\partial t}(x_1,x_2,t)\tfrac{\partial W^*}{\partial t}(x_1,x_2,t) \\ & -\tfrac{D}{2}\Big(2\tfrac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}(x_1,x_2,t)\tfrac{\partial^2 W^*}{\partial x_1^2}(x_1,x_2,t) + 2\tfrac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}(x_1,x_2,t)\tfrac{\partial^2 W^*}{\partial x_2^2}(x_1,x_2,t) \\ & +2\nu\Big(\tfrac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}(x_1,x_2,t)\tfrac{\partial^2 W^*}{\partial x_2^2}(x_1,x_2,t) + \tfrac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}(x_1,x_2,t)\tfrac{\partial^2 W^*}{\partial x_1^2}(x_1,x_2,t)\Big) \\ & +4(1-\nu)\tfrac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}(x_1,x_2,t)\tfrac{\partial^2 W^*}{\partial x_1\partial x_2}(x_1,x_2,t)\Big)\Big]\, dx_1 dx_2 dt\end{aligned} \tag{5.6}$$

On considère le système en régime harmonique et en adoptant la simplification d'écriture suivante :

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1,x_2) = F_{,i} \tag{5.7}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\int_S -\rho h\omega^2 w W^* - D\,[w_{,11}W^*_{,11} + w_{,22}W^*_{,22} + \nu(w_{,11}W^*_{,22} + w_{,22}W^*_{,11}) \\ +2(1-\nu)w_{,12}W^*_{,12}]\, dx_1 dx_2 \quad = 0\;\forall\, W^*\end{aligned} \tag{5.8}$$

L'équation 5.8 conduit à l'équation de mouvement et aux conditions aux limites naturelles 5.9 après transformation des intégrales de surface en intégrales de contour, basée sur les identités de Green (cf [CM 88]).

$$\int_S(-\rho h\omega^2 w + D\Delta^2 w)W^* dx_1 dx_2 + \int_\sigma W^* T(w) d\,\vec{s} - \int_\sigma W^*{}_{,n}\, M_f(w) d\,\vec{s} = 0 \;\forall\, W^* \tag{5.9}$$

Les différentes étapes du calcul sont détaillés dans l'annexe C. Nous allons l'exploiter de façon différente en prenant comme fonction W^*, une fonction quelconque η qui n'est pas forcément cinématiquement admissible. L'intégrale n'est alors plus nulle, mais l'on peut appliquer les transferts de l'intégrale de surface comme dans le passage de 5.8 à 5.9, ce qui conduit, compte tenu de la symétrie entre w et η à deux expression égales :

$$H_{,\lambda}\left[w + \lambda\eta\right]|_{\lambda=0} = \int_S(-\rho h\omega^2 w + D\Delta^2 w)\eta dx_1 dx_2 + \int_\sigma \eta T(w) d\,\vec{s} - \int_\sigma \eta_{,n}\, M_f(w) d\,\vec{s} \tag{5.10}$$

ou sa forme symétrique :

$$H_{,\lambda}\left[w + \lambda\eta\right]|_{\lambda=0} = \int_S(-\rho h\omega^2 \eta + D\Delta^2 \eta) w dx_1 dx_2 + \int_\sigma w T(\eta) d\,\vec{s} - \int_\sigma w_{,n}\, M_f(\eta) d\,\vec{s} \tag{5.11}$$

Dans l'équation 5.10, on remarque avec intérêt l'apparition des termes de l'effort tranchant $T(w)$ et du moment fléchissant $M_f(w)$ dans les intégrales de contour.
Dans l'hypothèse qu'aucun effort ne soit appliqué dans le domaine d'intégration, l'équation de mouvement de flexion des plaques s'écrit :

$$-\rho h\omega^2 w + D\Delta^2 w = 0 \tag{5.12}$$

En multipliant cette expression par η et en l'intégrant sur S, cette dernière reste nulle. On obtient alors :

$$\int_S(-\rho h\omega^2 w + D\Delta^2 w)\eta dx_1 dx_2 = 0 \tag{5.13}$$

ce qui nous amène à simplifier l'équation 5.10, qui devient :

$$H_{,\lambda}\left[w + \lambda\eta\right]|_{\lambda=0} = \int_\sigma \eta T(w) d\,\vec{s} - \int_\sigma \eta_{,n}\, M_f(w) d\,\vec{s} \tag{5.14}$$

Les équations 5.14 et 5.11 donnent :

$$\int_\sigma \eta T(w) d\,\vec{s} - \int_\sigma \eta_{,n}\, M_f(w) d\,\vec{s} = \int_S(-\rho h\omega^2 \eta + D\Delta^2 \eta) w dx_1 dx_2 + \int_\sigma w T(\eta) d\,\vec{s} - \int_\sigma w_{,n}\, M_f(\eta) d\,\vec{s} \tag{5.15}$$

On obtient ici, l'équation intégrale à la base de la reconstruction des efforts aux limites en fonction du déplacement et de la fonction test η. Effectivement on remarque dans les termes de gauche, l'isolement des efforts tranchants et moments fléchissants à la limite σ du domaine. Les termes de droite contiennent dans leurs diverses intégrales des quantités dépendantes des déplacements w ou de leurs dérivées normales et de la fonction η.
On retrouve ici, comme dans le chapitre 1, un transfert de dérivées spatiales du déplacement transversal w vers la fonction η. Il s'agit maintenant de caractériser la fontion η qui nous permettra de poursuivre cette identification.
Dans le cas particulier d'un contour présentant un point singulier A (cf. figure 5.2), des termes correctifs doivent être ajoutés à l'équation 5.15(cf. annexes C et D) :

$$\begin{aligned}&\int_\sigma \eta T(w) d\,\vec{s} - \int_\sigma \eta_{,n}\, M_f(w) d\,\vec{s} + (\eta w_{,ns}\mid_{A^-} - \eta w_{,ns}\mid_{A^+}) = \\ &\int_S (-\rho h \omega^2 \eta + D\Delta^2 \eta) w dx_1 dx_2 + \int_\sigma w T(\eta) d\,\vec{s} - \int_\sigma w_{,n}\, M_f(\eta) d\,\vec{s} + (\eta_{,ns}\, w\mid_{A^-} - \eta_{,ns}\, w\mid_{A^+})\end{aligned} \tag{5.16}$$

Les domaines utilisés étant souvent rectangulaires, une attention particulière doit être portée à ces points singuliers du contour.

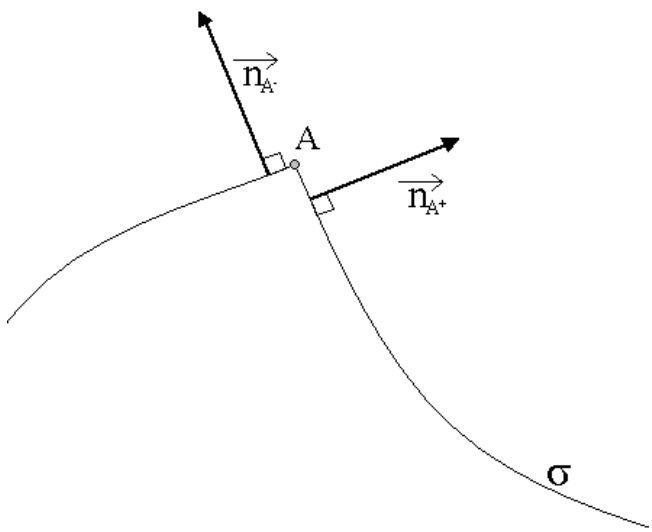


FIG. 5.2 – Contour σ présentant une singularité au point A. Le vecteur normal à gauche η_{A^-} est différent du vecteur normal à droite η_{A^+}

5.3.2 Caractérisation des fonctions test

Le but de cette section est de rechercher deux fonctions test distinctes : une pour l'identification de l'effort tranchant, qu'on notera η_T et une pour l'identification du moment fléchissant, qu'on notera η_M. Dans les deux cas, on recherche une expression analytique de ces fonctions qui devront satisfaire des conditions aux limites particulières.
Afin de compléter cette étude, et dans le but d'identifier les conditions aux limites, il peut être intéressant de rechercher une autre fonction test η_R, permettant le calcul de la dérivée normale du déplacement par rapport au contour. Cette dérivée normale représente physiquement la rotation de la plaque autour de la tangente au contour.

5.3.2.1 Cas de l'effort tranchant

C'est l'équation 5.15 qui nous permet de selectionner judicieusement ces conditions limites particulières. On cherche ici à isoler le terme $T(w)$, qui apparaît dans la première intégrale de contour. On appelle σ_T la partie du contour σ sur laquelle on souhaite identifier l'effort tranchant. Afin d'isoler cet effort sur σ_T, on choisit les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \eta_{T,n}(x_1, x_2) & = 0 \quad sur\ \sigma \\ M_f(\eta_T(x_1, x_2)) & = 0 \quad sur\ \sigma \\ \eta_T(x_1, x_2) & = 0 \quad sur\ (\sigma - \sigma_T) \\ \eta_T(x_1, x_2) & \neq 0 \quad sur\ \sigma_T \end{cases} \tag{5.17}$$

Si la fonction $\eta_T(x_1, x_2)$ vérifie ces conditions, alors l'équation 5.15 devient :

$$\int_{\sigma_T} \eta_T T(w) d\ \vec{s} = \int_S (-\rho h \omega^2 \eta_T + D\Delta^2 \eta_T) w dx_1 dx_2 + \int_\sigma w T(\eta_T) d\ \vec{s} \tag{5.18}$$

Il est évident que l'équation, solution du système 5.17 définisssant η_T, dépend directement de la forme du contour σ. La recherche exacte de η_T doit être faite après le choix de la forme du contour. Le paragraphe 5.3.3 présente un exemple détaillé de cette recherche de η_T dans le cas d'une surface rectangulaire. L'annexe E donne une expression analytique finale de η_T.

5.3.2.2 Cas du moment fléchissant

On cherche ici à isoler l'effort tranchant $M(w)$, il apparaît dans la seconde intégrale de contour. On appelle σ_M la partie du contour σ sur laquelle on souhaite identifier le moment fléchissant. Afin

d'isoler $M_f(w)$ sur σ_M, on choisit les conditions limites suivantes :

$$\begin{cases} \eta_M(x_1, x_2) & = 0 \quad sur\ \sigma \\ M_f(\eta_M(x_1, x_2)) & = 0 \quad sur\ \sigma \\ \eta_{M,n}(x_1, x_2) & = 0 \quad sur\ (\sigma - \sigma_M) \\ \eta_{M,n}(x_1, x_2) & \neq 0 \quad sur\ \sigma_M \end{cases} \tag{5.19}$$

Si la fonction $\eta_M(x_1, x_2)$ vérifie ces conditions, alors l'équation 5.15 devient :

$$-\int_{\sigma_M} \eta_{M,n} M_f(w) d\ \vec{s} = \int_S (-\rho h \omega^2 \eta_M + D\Delta^2 \eta_M) w dx_1 dx_2 + \int_\sigma wT(\eta_M) d\ \vec{s} \tag{5.20}$$

On donne dans la section suivante la méthode permettant d'obtenir l'expression analytique de η_M. Afin d'alléger la lecture de ce chapitre, la recherche de η_M ne sera pas détaillée ici, mais suivra la même démarche. Une expression analytique est donnée dans l'annexe E.

5.3.2.3 Cas de la rotation

Pour la rotation, on s'intéresse ici à $w_{,n}$ présent dans le dernier terme de l'équation 5.15. Pour se faire, la fonction test η_R doit vérifier :

$$\begin{cases} \eta_R(x_1, x_2) & = 0 \quad sur\ \sigma \\ M_f(\eta_R(x_1, x_2)) & = 0 \quad sur\ (\sigma - \sigma_R) \\ \eta_{R,n}(x_1, x_2) & = 0 \quad sur\ \sigma \\ M_f(\eta_R(x_1, x_2)) & \neq 0 \quad sur\ \sigma_R \end{cases} \tag{5.21}$$

Si la fonction $\eta_R(x_1, x_2)$ vérifie ces conditions, alors l'équation 5.15 devient :

$$-\int_{\sigma_R} w_{,n}\, M_f(\eta_R) d\ \vec{s} = \int_S (-\rho h \omega^2 \eta_R + D\Delta^2 \eta_R) w dx_1 dx_2 + \int_\sigma wT(\eta_R) d\ \vec{s} \tag{5.22}$$

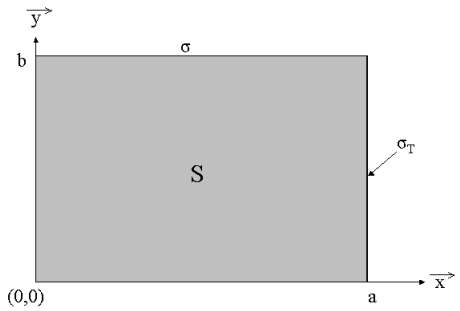
Une expression analytique de η_R est donnée en annexe E.

5.3.3 Cas d'un domaine d'intégration rectangulaire

5.3.3.1 Données du problème

Un seul des nombreux cas possibles sera developpé ici. La recherche de la fonction η_T permettant l'identification de l'effort tranchant en considérant une surface d'intégration rectangulaire. On rappelle que la recherche de η_M pour le calcul du moment fléchissant ou de η_R pour le calcul de la

rotation, pourra suivre une démarche similaire à celle présentée ici. La fonction η_T doit vérifier le système 5.17.
Afin de faciliter la compréhension de l'approche et d'alléger l'écriture et les indices utilisés, on pose dorénavant $\vec{x_1}=\vec{x}$ et $\vec{x_2}=\vec{y}$.



En prenant une surface d'intégration rectangulaire (longueur a, largeur b), et en cherchant à identifier l'effort tranchant sur le bord $x = a$, le système 5.17 donne 12 équations.

Pour $x = 0$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \eta_T(0,y) & = & 0 \\ \frac{\partial \eta_T}{\partial x}(0,y) & = & 0 \\ \frac{\partial^2 \eta_T}{\partial x^2}(0,y) + \nu \frac{\partial^2 \eta_T}{\partial y^2}(0,y) & = & 0 \end{array}\right. \tag{5.23}$$

Pour $y = 0$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \eta_T(x,0) & = & 0 \\ \frac{\partial \eta_T}{\partial y}(x,0) & = & 0 \\ \frac{\partial^2 \eta_T}{\partial y^2}(x,0) + \nu \frac{\partial^2 \eta_T}{\partial x^2}(x,0) & = & 0 \end{array}\right. \tag{5.24}$$

Pour $y = b$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \eta_T(x,b) & = & 0 \\ \frac{\partial \eta_T}{\partial y}(x,b) & = & 0 \\ \frac{\partial^2 \eta_T}{\partial y^2}(x,b) + \nu \frac{\partial^2 \eta_T}{\partial x^2}(x,b) & = & 0 \end{array}\right. \tag{5.25}$$

Pour $x = a$:

$$\begin{cases} \eta_T(a,y) & \neq & 0 \\ \frac{\partial \eta_T}{\partial x}(a,y) & = & 0 \\ \frac{\partial^2 \eta_T}{\partial x^2}(a,y) + \nu \frac{\partial^2 \eta_T}{\partial y^2}(a,y) & = & 0 \end{cases} \tag{5.26}$$

Le première condition du système 5.26 est une inégalité. Afin de manipuler l'ensemble plus facilement on la transforme par l'égalité suivante, en forçant la fonction à être unitaire au milieu de σ_T, au point de coordonnées $x = a, y = b/2$.

$$\eta_T(a, b/2) = 1 \tag{5.27}$$

Le système complet à résoudre, s'écrit alors :

$$\begin{cases} \eta_T(0,y) & = & 0 \\ \frac{\partial \eta_T}{\partial x}(0,y) & = & 0 \\ \frac{\partial^2 \eta_T}{\partial x^2}(0,y) + \nu \frac{\partial^2 \eta_T}{\partial y^2}(0,y) & = & 0 \\ \eta_T(x,0) & = & 0 \\ \frac{\partial \eta_T}{\partial y}(x,0) & = & 0 \\ \frac{\partial^2 \eta_T}{\partial y^2}(x,0) + \nu \frac{\partial^2 \eta_T}{\partial x^2}(x,0) & = & 0 \\ \eta_T(x,b) & = & 0 \\ \frac{\partial \eta_T}{\partial y}(x,b) & = & 0 \\ \frac{\partial^2 \eta_T}{\partial y^2}(x,b) + \nu \frac{\partial^2 \eta_T}{\partial x^2}(x,b) & = & 0 \\ \eta_T(a,b/2) & = & 1 \\ \frac{\partial \eta_T}{\partial x}(a,y) & = & 0 \\ \frac{\partial^2 \eta_T}{\partial x^2}(a,y) + \nu \frac{\partial^2 \eta_T}{\partial y^2}(a,y) & = & 0 \end{cases} \tag{5.28}$$

Bien entendu, la fonction η_T étant définie qu'au seul point $y = b/2$ sur le bord $x = a$, n'est pas unique.

5.3.3.2 Recherche des expressions analytiques des fonctions test

Ce système n'admet pas de solution analytique immédiate. On envisage donc différentes décompositions pouvant approcher au mieux ces conditions.

Fonctions à variables séparées :

Il s'agit de décomposer η_T en somme ou multiplication de deux fonctions à une variable. On chercherait alors une fonction du type :

$$\eta_T(x,y) = \quad f(x) + g(y) \tag{5.29}$$

$$ou$$

$$\eta_T(x,y) = \quad f(x) \times g(y) \tag{5.30}$$

Malheureusement certaines équations du système ne permettent pas une approche aussi simple, et mènent à des incohérences si l'on s'engage dans cette voie. Le lecteur trouvera la démonstration de cette impossibilité de solution dans l'annexe E.

Fonction polynôme :

L'approche polynomiale a aussi été testée, et n'a donné aucun succès. Effectivement, si l'on considère que les deux variables x et y ne sont pas issues de deux fonctions indépendantes (pour ne pas être dans le cas du paragraphe précédent), la fonction η_T comporte de très nombreux termes dépendant de x et y. Les conditions du système 5.28 ne sont approchées qu'avec difficulté et un très grand nombre de termes est alors nécessaire pour un résultat imprécis. Cette approche ne sera donc pas retenue.

Somme trigonométrique :

L'approche qui donne satisfaction est une décomposition en somme de sinus. On impose donc à la fonction η_T d'être du type :

$$\eta_T(x,y) = \sum_{m=1}^{k} \sum_{n=1}^{l} A_{mn} sin(\frac{2m+1}{2}\frac{\pi}{a}x) sin(n\frac{\pi}{b}y) \tag{5.31}$$

Même si cette formulation revient à faire une séparation de variable, celle-ci présente la particularité de vérifier naturellement de nombreuses équations différentielles du système 5.28. Les 5 conditions non vérifiées sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta_T}{\partial x}(0,y) & = & 0 \\ \frac{\partial \eta_T}{\partial y}(x,0) & = & 0 \\ \frac{\partial \eta_T}{\partial y}(x,b) & = & 0 \\ \eta_T(a,b/2) & = & 1 \\ \frac{\partial^2 \eta_T}{\partial x^2}(a,y) + \nu \frac{\partial^2 \eta_T}{\partial y^2}(a,y) & = & 0 \end{cases} \tag{5.32}$$

Si on considère que $\eta_T(x,y)$ est la somme de sinus décrite en 5.31, le système 5.32 devient :

$$\begin{cases} \sum\sum A_{mn}(\frac{2m+1}{2}\frac{\pi}{a})sin(n\frac{\pi}{b}y) = 0 & \forall\, y \\ \sum\sum A_{mn}sin(\frac{2m+1}{2}\frac{\pi}{a}x)(n\frac{\pi}{b}) = 0 & \forall\, x \\ \sum\sum A_{mn}sin(\frac{2m+1}{2}\frac{\pi}{a}x)(n\frac{\pi}{b})(-1)^n = 0 & \forall\, x \\ \sum\sum A_{mn}sin(\frac{2m+1}{2}\pi)sin(n\frac{\pi}{2}) - 1 = 0 & \\ \sum\sum A_{mn}[(\frac{2m+1\pi}{2a})^2 + \nu(\frac{n\pi}{b})^2](-1)^n sin(\frac{n\pi}{b}y) = 0 & \forall\, y \end{cases} \tag{5.33}$$

Pour estimer les coefficients A_{mn}, on cherche à vérifier ces équations au sens des moindres carrées. On ne cherche plus ici une solution exacte au système 5.32, mais une solution approchée à l'aide d'une estimation des coefficients A_{mn}.
Cela revient à calculer pour chaque coefficient.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial A_{pq}}\Big[& \int_0^b \left[\sum\sum A_{mn}(\frac{2m+1}{2}\frac{\pi}{a})sin(n\frac{\pi}{b}y)\right]^2 dy + \\ & \int_0^a \left[\sum\sum A_{mn}sin(\frac{2m+1}{2}\frac{\pi}{a}x)(n\frac{\pi}{b})\right]^2 dx + \\ & \int_0^a \left[\sum\sum A_{mn}sin(\frac{2m+1}{2}\frac{\pi}{a}x)(n\frac{\pi}{b})(-1)^n\right]^2 dx + \\ & \left[\sum\sum A_{mn}sin(\frac{2m+1}{2}\pi)sin(n\frac{\pi}{2}) - 1\right]^2 + \\ & \int_0^b \left[\sum\sum A_{mn}[(\frac{2m+1\pi}{2a})^2 + \nu(\frac{n\pi}{b})^2](-1)^n sin(\frac{n\pi}{b}y)\right]^2 dy\,\Big] \quad = \quad 0 \end{cases} \tag{5.34}$$

Soit, après calcul :

$$\begin{aligned} & b\frac{(2p+1)\pi}{2a}\sum_m A_{mq}\frac{(2m+1)\pi}{2a} + aq(\frac{\pi}{b})^2\sum_n A_{pn}(n) + (-1)^q aq(\frac{\pi}{b})^2\sum_n A_{pn}(n)(-1)^n + \\ & 2(-1)^p sin(\frac{q\pi}{2})[-1 + \sum_m\sum_n A_{mn}(-1)^m sin(\frac{n\pi}{2})] + \\ & (-1)^p b\left[(\frac{(2p+1)\pi}{2a})^2 + \nu(\frac{q\pi}{b})^2\right]\sum_m A_{mq}(-1)^m[(\frac{(2m+1)\pi}{2a})^2 + \nu(\frac{n\pi}{b})^2] = 0 \end{aligned} \tag{5.35}$$

La résolution de l'équation 5.35 à été réalisée via le logiciel Maple (Calcul symbolique). L'optimum simplicité-précision a été obtenu pour des indices k et l égaux à 5, c'est à dire un développement 5.31 à 25 termes, dont cependant seulement 9 termes sont non nuls.

Pour la recherche de η_M et de η_R, il suffit d'appliquer la nouvelle approche aux systèmes 5.19 et 5.21. Les expressions analytiques des fonctions η_T , η_M et η_R sont données dans l'annexe E. On notera que la fonction η_M ne contient que quatre termes non nuls.
Les figures 5.3, 5.4, et 5.5 présentent les fonctions η_T, η_M et η_R pour une surface d'intégration carrée.

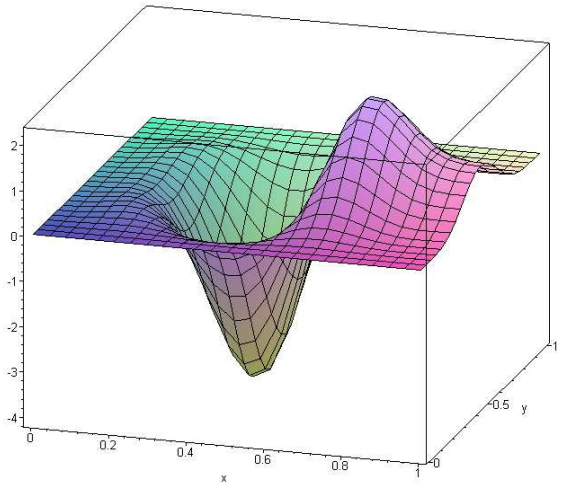


FIG. 5.3 – Fonction test $\eta_T(x, y)$ définie sur une surface d'intégration carrée unitaire et calculée à partir d'une série trigonométrique

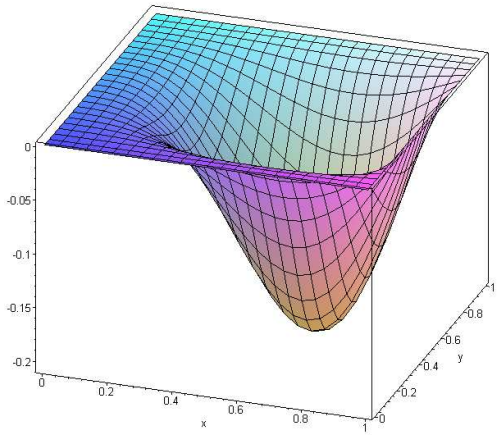


FIG. 5.4 – $\eta_M(x, y)$ définie sur une surface d'intégration carrée unitaire et calculée à partir d'une série trigonométrique

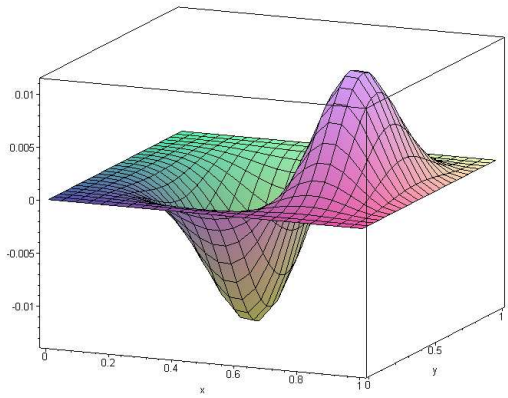


FIG. 5.5 – $\eta_R(x, y)$ définie sur une surface d'intégration carrée unitaire et calculée à partir d'une série trigonométrique

5.3.3.3 Singularités des contours rectangulaires

La surface d'intégration choisie présente des singularités en chacun de ses coins. C'est l'expression intégrale 5.16 tenant compte des discontinuités aux points singuliers, qu'il faut utiliser. Cependant, les fonctions test trigonométriques calculées pour ces identifications ainsi que leurs dérivées, tendent vers zéro en ces points singuliers. Les termes correctifs de l'équation 5.16 dûs aux discontinuités des normales et tangentes à σ sont annulés lors de l'intégration autour des singularités. On retrouve alors l'équation 5.15.

5.3.4 Identification des efforts locaux

Les calculs préliminaires et la recherche des fonctions test nous ont menés aux deux équations 5.18 et 5.20 , que nous rappelons :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \int_{\sigma_T} \eta_T T(w) d\,\vec{s} & = & \int_S (-\rho h \omega^2 \eta_T + D\Delta^2 \eta_T) w dx_1 dx_2 + \int_\sigma wT(\eta_T) d\,\vec{s} \\ - \int_{\sigma_M} \eta_{M,n} M_f(w) d\,\vec{s} & = & \int_S (-\rho h \omega^2 \eta_M + D\Delta^2 \eta_M) w dx_1 dx_2 + \int_\sigma wT(\eta_M) d\,\vec{s} \end{array} \right. \tag{5.36}$$

On constate que les efforts aux limites, c'est à dire l'effort tranchant et le moment fléchissant sur σ sont chacun, isolés dans une intégrale de contour. Il est essentiel de noter le fait que ces intégrales sont égales à des expressions ne contenant que des fonctions connues et les déplacements w. La disparition complète des dérivées spatiales du déplacement, difficilement mesurables ou calculables à la limite

est à souligner.

Par contre les intégrales 5.36 ne permettent que de calculer les moyennes pondérées des valeurs des efforts sur σ_T ou σ_M, et non pas leurs valeurs locales ; l'effort tranchant est pondéré par les valeurs de η_T,et est moyenné sur σ_T, le moment fléchissant est pondéré par les valeurs de η_M,et est moyenné sur σ_M.

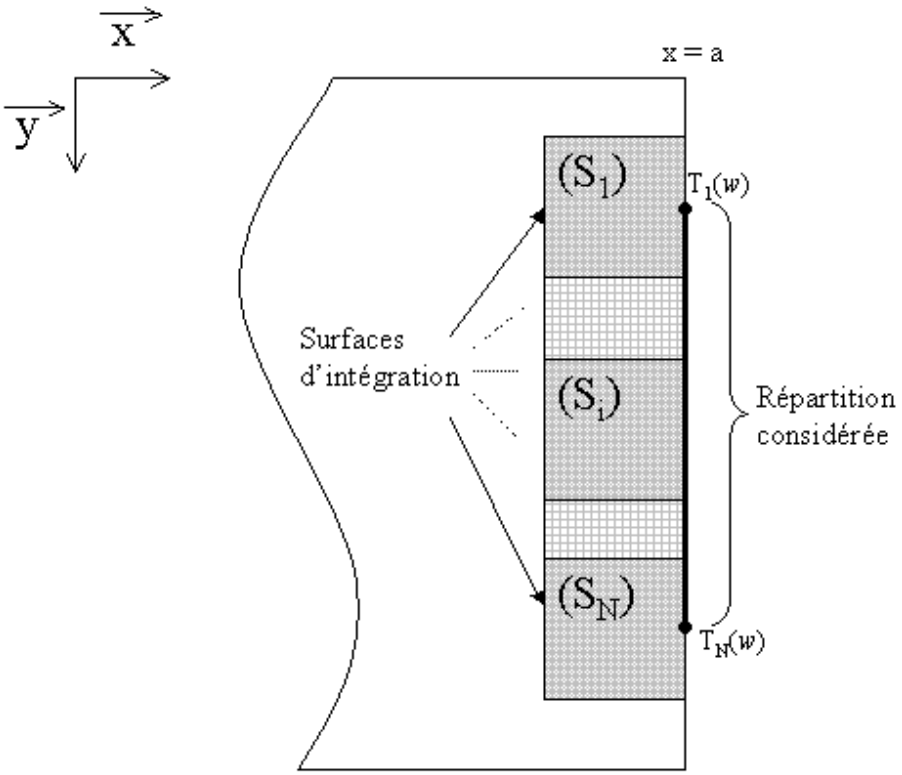


FIG. 5.6 – Recherche d'une répartition d'efforts pondérés moyennés avec N surfaces rectangulaires

Dans la suite, on considère des contours σ_T (ou σ_M) de type ligne droite. Pour remonter aux efforts locaux un traitement particulier est réalisé. La figure 5.6 illustre cette approche. Les surfaces d'intégration sont des rectangles identiques décalés successivement d'un point. Pour chaque surface, le calcul d'une valeur de l'effort (effort tranchant ou moment fléchissant) pondéré moyenné est réalisé. Pour N surfaces d'intégration, on obtient alors N valeurs moyennées pondérées de l'effort recherché. On note dans la suite T_{MPi} la $i^{ème}$ valeur moyennée pondérée de l'effort tranchant et M_{MPi} la $i^{ème}$ valeur moyennée pondérée du moment fléchissant. En considérant que les fonctions tests η_T et η_M

sont nulles en dehors de la surface d'intégration, on peut écrire globalement à partir de 5.36 dans le cas du schéma 5.6 :

$$\begin{cases} T_{MPi} & = & \int_{\sigma_T} \eta_T(a, y - i\Delta) T(a, y) dy \\ M_{MPi} & = & \int_{\sigma_M} \eta_{M,n}(a, y - i\Delta) M_f(a, y) dy \end{cases} \tag{5.37}$$

où Δ caractérise la translation de deux surfaces d'intégration consécutive, $T(a, y)$ est l'effort tranchant et $M(a, y)$ est le moment fléchissant le long de la droite $x = a$ située à la limite de la plaque. Les équations 5.37 correspondent à deux produits de convolutions. Pour remonter aux valeurs locales des répartitions d'effort tranchant $T(a, y)$ et de moment fléchissant $M(a, y)$ le long de y, il faut déconvoluer 5.37.

On propose de le faire en discrétisant les intégrales 5.37 par la méthode des trapèzes. Sous forme matricielle la discrétisation de 5.37 peut s'écrire :

-dans le cas de l'effort tranchant :

$$\Delta \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\eta_T(a,0) & \eta_T(a,\Delta) & \dots & \eta_T(a,b-\Delta) & \frac{1}{2}\eta_T(a,b) & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\eta_T(a,0) & \eta_T(a,\Delta) & \dots & \eta_T(a,b-\Delta) & \frac{1}{2}\eta_T(a,b) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2}\eta_T(a,0) & \eta_T(a,\Delta) & \dots & \eta_T(a,b-\Delta) & \frac{1}{2}\eta_T(a,b) & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & \frac{1}{2}\eta_T(a,0) & \eta_T(a,\Delta) & \dots & \eta_T(a,b-\Delta) & \frac{1}{2}\eta_T(a,b) \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} T_1(w) \\ \vdots \\ T_N(w) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_{MP1}(w) \\ \vdots \\ T_{MP_N}(w) \end{Bmatrix} \tag{5.38}$$

-dans le cas du moment fléchissant :

$$\Delta \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial \eta_M}{\partial x}(a,0) & \frac{\partial \eta_M}{\partial x}(a,\Delta) & \dots & \frac{\partial \eta_M}{\partial x}(a,b-\Delta) & \frac{1}{2}\frac{\partial \eta_M}{\partial x}(a,b) & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial \eta_M}{\partial x}(a,0) & \frac{\partial \eta_M}{\partial x}(a,\Delta) & \dots & \frac{\partial \eta_M}{\partial x}(a,b-\Delta) & \frac{1}{2}\frac{\partial \eta_M}{\partial x}(a,b) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial \eta_M}{\partial x}(a,0) & \frac{\partial \eta_M}{\partial x}(a,\Delta) & \dots & \frac{\partial \eta_M}{\partial x}(a,b-\Delta) & \frac{1}{2}\frac{\partial \eta_M}{\partial x}(a,b) & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial \eta_M}{\partial x}(a,0) & \frac{\partial \eta_M}{\partial x}(a,\Delta) & \dots & \frac{\partial \eta_M}{\partial x}(a,b-\Delta) & \frac{1}{2}\frac{\partial \eta_M}{\partial x}(a,b) \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} M_1(w) \\ \vdots \\ M_N(w) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{MP1}(w) \\ \vdots \\ M_{MP_N}(w) \end{Bmatrix} \tag{5.39}$$

où Δ est le pas séparant chaque point le long de y. La déconvolution consite à inverser ces systèmes matriciels et permet d'identifier l'effort sur la limite aux différents points de discrétisation.

On précise que la résolution numérique de ces systèmes n'est pas immédiate. Effectivement les matrices contenant les η_T ou les $\frac{\partial \eta_M}{\partial x}$, en plus d'être rectabgulaire, ont des lignes très similaires une à une et sont donc mal conditionnées, ce qui rend leurs inversions délicates. Afin de pallier ce problème, on utilise une méthode de résolution par troncature des valeurs singulières. Son application et en particulier le réglage du paramètre de régularisation sont détaillés dans le chapitre présentant les simulations numériques. Par la suite, les matrices contenant les valeurs des fonctions test seront respectivement notées $[\eta_T]$ et $[\frac{\partial \eta_M}{\partial x}]$

5.4 Conclusions

Ce chapitre a abordé la recherche des efforts aux limites des plaques en flexion. Le principe de base est une manipulation d'équations intégrales issues des formulations variationnelles. L'utilisation des identités de Green permet l'isolement des expressions des efforts tranchants et moments fléchissants moyennés pondérés dans des intégrales de contour. On obtient alors des expressions ne nécessitant plus l'estimation directe des dérivées spatiales du déplacement.
La caractérisation des fonctions test est également présentée dans le cas d'une surface d'intégration rectangulaire. Une identification par une approximation en série trigonométrique est proposée.
La simple formulation intégrale mène à un calcul de moyenne pondérée insuffisant pour caractériser localement les efforts, mais on montre qu'il est possible de remonter aux efforts par une technique de déconvolution à partir d'une répartition de moyennes pondérées.
Dans le chapitre suivant, des simulations numériques montrent la fiabilité et les limites de cette méthode d'identification. On dressera également les critères qui permettront le choix des paramètres des surfaces d'intégration, et l'on montrera la robustesse de la méthode face aux bruits de mesures.

Chapitre 6

Approximations et incertitudes : Cas d'une plaque en flexion

6.1 Objectifs du chapitre

Le chapitre précédent présentait l'approche théorique de la méthode d'identification, il montrait que deux grandes étapes caractérisent le calcul :
-tout d'abord une intégration de surface et de contour mettait en jeu des déplacements de la plaque et des données connues, afin d'obtenir une moyenne pondérée de l'effort recherché.
-puis, une déconvolution de la répartition de ces moyennes pondérées afin d'extraire les efforts locaux.
Chacune de ces étapes peut être perturbée par des approximations ou des incertitudes venant détériorer la qualité du résultat. Trois sources d'erreurs ont été identifiées :
- l'erreur due aux incertitudes de mesure,
- l'erreur due à la discrétisation du problème,
- l'erreur due à l'inversion des systèmes 5.38 et 5.39.

Ces trois types d'erreurs interviennent à différentes étapes de la méthode. Le shéma 6.1 illustre le cheminement de ce calcul ainsi que l'intervention des approximations et incertitudes précédemment décrites.
L'analyse d'erreurs faite dans ce chapitre sera décomposée en trois grandes parties, correspondant aux trois sources d'erreurs. Toutefois, il est nécessaire avant cela, de définir les modèles utilisés lors du calcul direct. Nous rappelons que le calcul direct donne les déplacements de la structure qui alimentent le calcul indirect et fournit une référence analytique afin d'estimer la justesse des résultats.

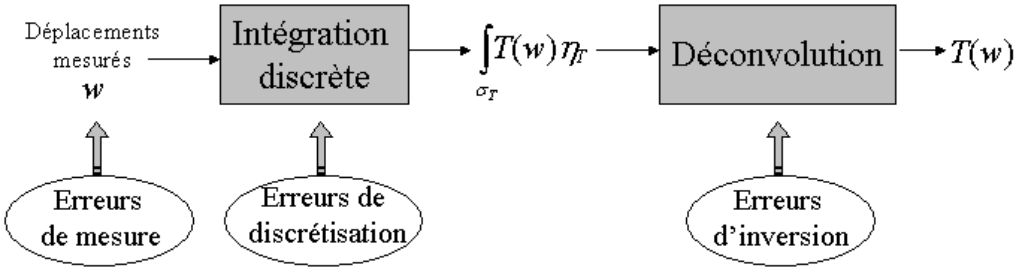


FIG. 6.1 – Différentes étapes du calcul et erreurs entachant la reconstruction, dans le cas ici de l'effort tranchant.

6.2 Calculs directs

Deux cas différents ont été traités : l'un pour la reconstruction de l'effort tranchant, l'autre pour la reconstruction du moment fléchissant.

6.2.1 Plaque appuyée aux quatre bords, reconstruction de l'effort tranchant

Une plaque appuyée aux bords présente un déplacement et un moment fléchissant nuls à ses limites. Ce cas théorique simple permet d'utiliser la décomposition modale pour le calcul direct.
Le déplacement w vérifie l'équation de mouvement en régime harmonique :

$$-\rho h\omega^2 w + D\Delta^2 w = F\delta(X_f, Y_f) \tag{6.1}$$

où $D = \frac{E(1+j\eta)h^3}{12(1-\nu^2)}$, ρ est la masse volumique, h est l'épaisseur de la plaque, ω est la pulsation et F est l'amplitude de la force excitatrice localisée en (X_f, Y_f).
Le déplacement est décrit dans une base cinématiquement admissible, vérifiant des conditions limites appuyées. Celles-ci imposent un déplacement et un moment fléchissant nuls aux limites, traduits par les équations suivantes :

$$\begin{cases} w(x,y) = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) n_1^2 + \left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) n_2^2 = 0 \end{cases} \tag{6.2}$$

où n_1 et n_2 sont les coefficients directeurs du vecteur normal extérieur à la ligne frontière considérée.
On décompose le déplacement dans la base modale vérifiant 6.2. Les déformées propres de la structure 6.4 utilisées par la suite, fournissent une base idéale compte tenu de leur orthogonalité.

Ainsi le déplacement w est égal à :

$$w(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_{nm} f_{nm}(x,y) \tag{6.3}$$

où f_{nm} est la déformée propre, du mode nm vérifant les conditions aux limites appuyées [GUY 02]. Son expression est :

$$f_{nm}(x,y) = sin(\frac{n\pi}{L_x}x)sin(\frac{m\pi}{L_y}y) \tag{6.4}$$

où L_x et L_y sont respectivement la longueur et la largeur de la plaque.
Les a_{nm} sont les coefficients modaux, correspondant à la projection du mouvement dans la base modale.

$$a_{nm} = \frac{4}{L_x L_y}\int_0^{L_x}\int_0^{Ly} w(x,y) f_{nm} dxdy \tag{6.5}$$

Afin d'identifier les amplitudes, on effectue une substitution du déplacement dans l'équation de mouvement et une projection dans la base modale.
Après identification des coefficients a_{nm}, et recombinaison du déplacement on obtient le champ de déplacement discrétisé suivant :

$$w_{i,j} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} \frac{4Fsin(\frac{n\pi}{L_x}X_f)sin(\frac{m\pi}{L_y}Y_f)}{L_x L_y D[k_{nm}^4 - k^4]} sin(\frac{n\pi}{L_x}i\Delta_x)sin(\frac{m\pi}{L_y}j\Delta_y) \tag{6.6}$$

où $k_{nm}^4 = (\frac{n^4\pi^4}{L_x^4} + \frac{m^4\pi^4}{L_y^4} + 2\frac{n^2m^2\pi^4}{L_x^2L_y^2})$, Δ_x et Δ_y sont les pas de discrétisation en x et y, et k est le nombre d'onde naturel régi par l'équation de dispersion de la plaque :

$$k = \sqrt[4]{\frac{\rho h}{D}}\sqrt{\omega} \tag{6.7}$$

On considère ici, une plaque carrée d'un mètre de côté, excitée par une force ponctuelle unitaire localisée en $X_f = 0.2m$, $Y_f = 0.4m$. Le champ de déplacement calculé constitue les données dites exactes. La figure 6.2 montre pour exemple, un champ de déplacement calculé avec cette méthode à une fréquence $f = 400Hz$.
La connaissance analytique du champ de déplacement, permet le calcul direct de l'effort tranchant en tout point de la plaque. L'équation 6.8 donne l'expression de cet effort. La figure 6.3 montre l'effort tranchant à une limite de la plaque présentée figure 6.2.

$$T(w) = D\frac{\partial}{\partial s}\left[2n_1n_2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) + 2(1-\nu)(n_2^2 - n_1^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right\} + \frac{\partial}{\partial n}\{M\} \tag{6.8}$$

6.2.2 Plaque guidée aux quatre bords, reconstruction du moment fléchissant

Le même principe est utilisé pour construire un champ de déplacement simple à calculer et donnant cette fois un moment fléchissant non nul aux bords. En effet, ces conditions limites dites guidées imposent une pente et un effort tranchant nuls aux bords.

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial n}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial s}\left[2n_1n_2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) + 2(1-\nu)(n_2^2 - n_1^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right\} + \frac{\partial}{\partial n}\{M\} = 0 \end{cases} \tag{6.9}$$

où n_1 et n_2 sont les coefficients directeurs du vecteur normal n extérieur à la ligne frontière considérée. Afin de satisfaire ces nouvelles conditions limites le déplacement est décomposé dans une base cinématiquement admissible dont les défomées sont les suivantes :

$$f_{nm}(x,y) = cos(\frac{n\pi}{L_x}x)cos(\frac{m\pi}{L_y}y) \tag{6.10}$$

Le déplacement au point i, j devient

$$w_{i,j} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} \frac{4Fcos(\frac{n\pi}{L_x}X_f)cos(\frac{m\pi}{L_y}Y_f)}{L_xL_yD[k_{nm}^4 - k^4]}cos(\frac{n\pi}{L_x}i\Delta_x)cos(\frac{m\pi}{L_y}j\Delta_y) \tag{6.11}$$

Les figures 6.4 et 6.5 montrent le champ de déplacement calculé avec cette méthode et le moment fléchissant à une limite de la plaque. On rappele l'expression générale du moment fléchissant :

$$M(w) = -D\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)n_1^2 + 2(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}n_1n_2 + \left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)n_2^2\right] \tag{6.12}$$

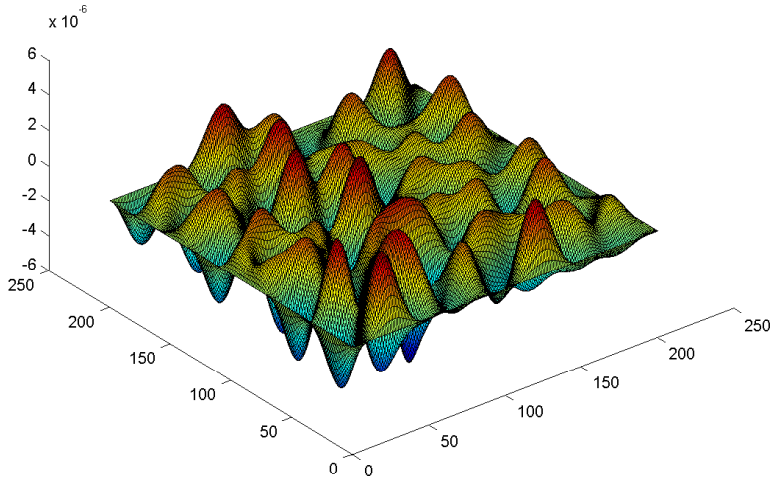


FIG. 6.2 – Vibrations d'une plaque d'épaisseur $1mm$ en acier, appuyée aux bords, soumise à une excitation harmonique ponctuelle unitaire de fréquence 400Hz, en $X_f = 0.2m$ et $Y_f = 0.4m$

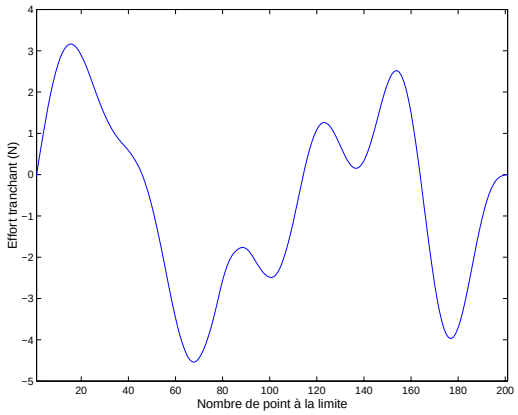


FIG. 6.3 – Effort tranchant à une limite d'une plaque d'épaisseur $1mm$ en acier, appuyée aux bords, soumise à une excitation harmonique ponctuelle unitaire de fréquence 400Hz, en $X_f = 0.2m$ et $Y_f = 0.4m$

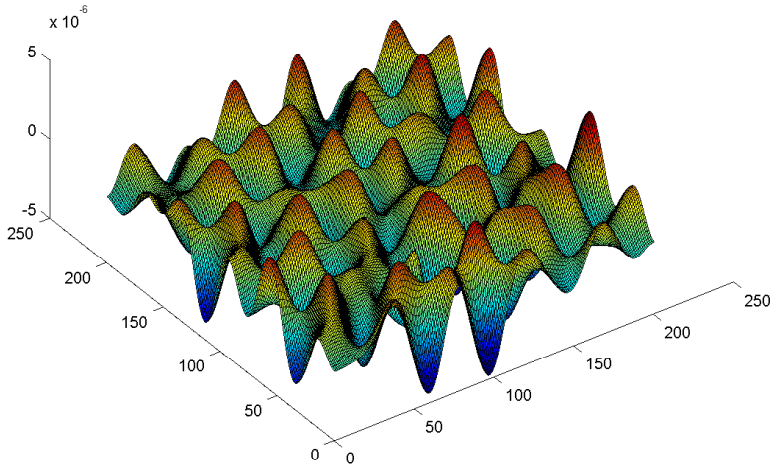


FIG. 6.4 – Vibrations d'une plaque d'épaisseur $1mm$ en acier, guidée aux bords, soumise à une excitation harmonique ponctuelle unitaire de fréquence 400Hz, en $X_f = 0.2m$ et $Y_f = 0.4m$

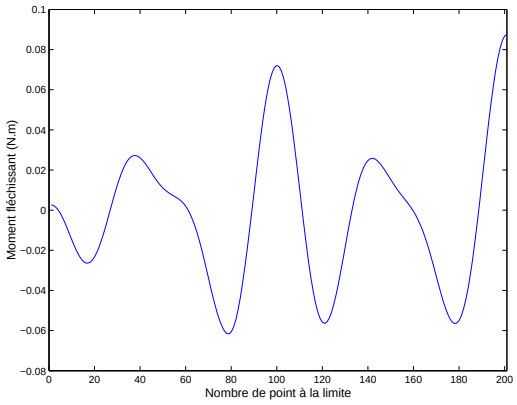


FIG. 6.5 – Moment fléchissant à une limite d'une plaque d'épaisseur $1mm$ en acier, guidée aux bords, soumise à une excitation harmonique ponctuelle unitaire de fréquence 400Hz, en $X_f = 0.2m$ et $Y_f = 0.4m$

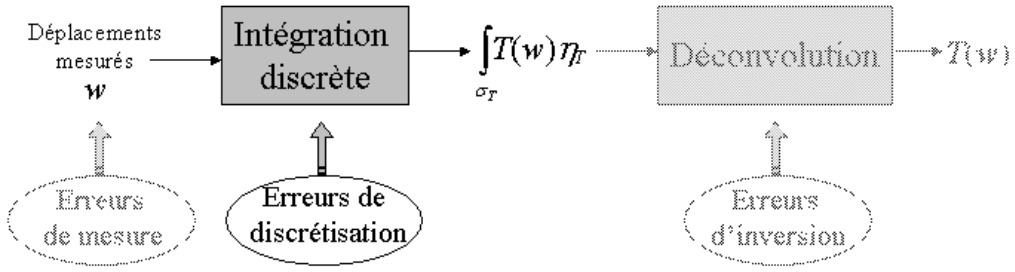


FIG. 6.6 – Différentes étapes du calcul et erreurs entachant la reconstruction. Erreur de discrétisation.

6.3 Intégrations discrètes

Après avoir effectué le calcul direct, on se sert des champs de déplacement comme données d'entrée afin de reconstruire les efforts aux limites. La première source d'erreur analysée sera celle liée au calcul des intégrales par discrétisation. Cela permettra de sélectionner de manière adéquate les paramètres de discrétisation pour obtenir une moyenne pondérée aussi exacte que possible. Le shéma 6.6 illustre l'étape qui est traitée ici.

On rappele ici, les intégrales sur lesquelles on étudie les erreurs de dicrétisation :

$$\int_{\sigma_T} \eta_T T(w) d\vec{s} = \int_S (-\rho h \omega^2 \eta_T + D\Delta^2 \eta_T) w dx_1 dx_2 + \int_\sigma w T(\eta_T) d\vec{s} \tag{6.13}$$

$$-\int_{\sigma_M} \eta_{M,n} M_f(w) d\vec{s} = \int_S (-\rho h \omega^2 \eta_M + D\Delta^2 \eta_M) w dx_1 dx_2 + \int_\sigma w T(\eta_M) d\vec{s} \tag{6.14}$$

6.3.1 Méthode d'intégration

Dans le but d'alléger cette partie, et contrairement au cas monodimensionnel, une seule méthode d'intégration numérique est utilisée. Il s'agit de l'extension de la méthode trapézoïdale à 2 dimensions. Sa formule est :

$$\int_{x_a}^{x_b} \int_{y_a}^{y_b} f(x,y) dx dy = \Delta_x \Delta_y \Sigma_{i=1}^{n-1} \Sigma_{j=1}^{m-1} \frac{f(x_i,y_j) + f(x_i,y_{j+1}) + f(x_{i+1},y_j) + f(x_{i+1},y_{j+1})}{4} \tag{6.15}$$

où $f(x,y)$ est une fonction quelconque, Δ_x et Δ_y les pas dans les directions x et y, n et m le nombre de points utilisés selon x et y, et i et j sont les indices de numérotation des points.

6.3.2 Simulations numériques

Des simulations numériques ont été menées, utilisant les déplacements et la méthode d'intégration précédemment décrits. Pour chacun des cas traités, des indicateurs d'erreur ont été définis pour estimer l'erreur de discrétisation. Ces indicateurs comparent, comme dans le cas à une dimension, une valeur issue d'un calcul analytique exact, servant de référence, avec une valeur issue du calcul intégral discret.

6.3.2.1 Reconstruction de l'effort tranchant

Deux paramètres sont à prendre en compte lors du calcul des intégrales discrétisées : la finesse du maillage et la taille de la surface d'intégration. Analytiquement l'équation 6.13 ne comporte aucune approximation. La discrétisation des intégrales se doit d'être analysée.
L'influence de la finesse du maillage est réprésentée sur les figures 6.7, où sont comparées des intégrales calculées à partir d'un effort tranchant analytique (termes de gauche des équations 6.13 et 6.14) et des intégrales calculées numériquement à partir de déplacements discrétisés (termes de droite des équations 6.13 et 6.14). Les trois figures proposent trois pas de discrétisations différents : $\Delta = 1cm, \Delta = 0.5cm$ et $\Delta = 0.25cm$.
La taille de la surface d'intégration S est constante. Il s'agit d'un carré de $10cm$ de côté. Sa largeur d'intégration comporte donc respectivement 11 ($\Delta = 1cm$), 21($\Delta = 0.5cm$) ou 41($\Delta = 0.25cm$) points. L'effet de la finesse du maillage est évident, on constate que plus le pas est petit, meilleure l'approximation est. Nous ne nous attarderons pas sur ce paramètre classique, aux effets évidents. Il était toutefois indispensable de l'illustrer.
L'intérêt principal de cette section est la recherche de la taille de la surface d'intégration adéquate. Dans le cas des poutres, il avait été constaté au chapitre 2, un lien direct entre la justesse de l'approximation et le nombre d'onde compris dans l'intervalle d'intégration, indépendemment de la fréquence considérée.
On définit un indicateur d'erreur comme suit :

$$\epsilon_T = 10log_{10}\left(\frac{\int_S(-\rho h\omega^2\eta_T + D\Delta^2\eta_T)w + \int_{\sigma_T} wT(\eta_T)}{\int_{\sigma_T} T(w)\eta_T}\right) \tag{6.16}$$

où le numérateur est issu d'un calcul numérique utilisant les données discrétisées, et le dénominateur est une intégrale discrète utilisant des données calculées analytiquement.
Dans le cas des plaques, du fait qu'il y ait plusieurs directions de propagation, le nombre d'onde peut

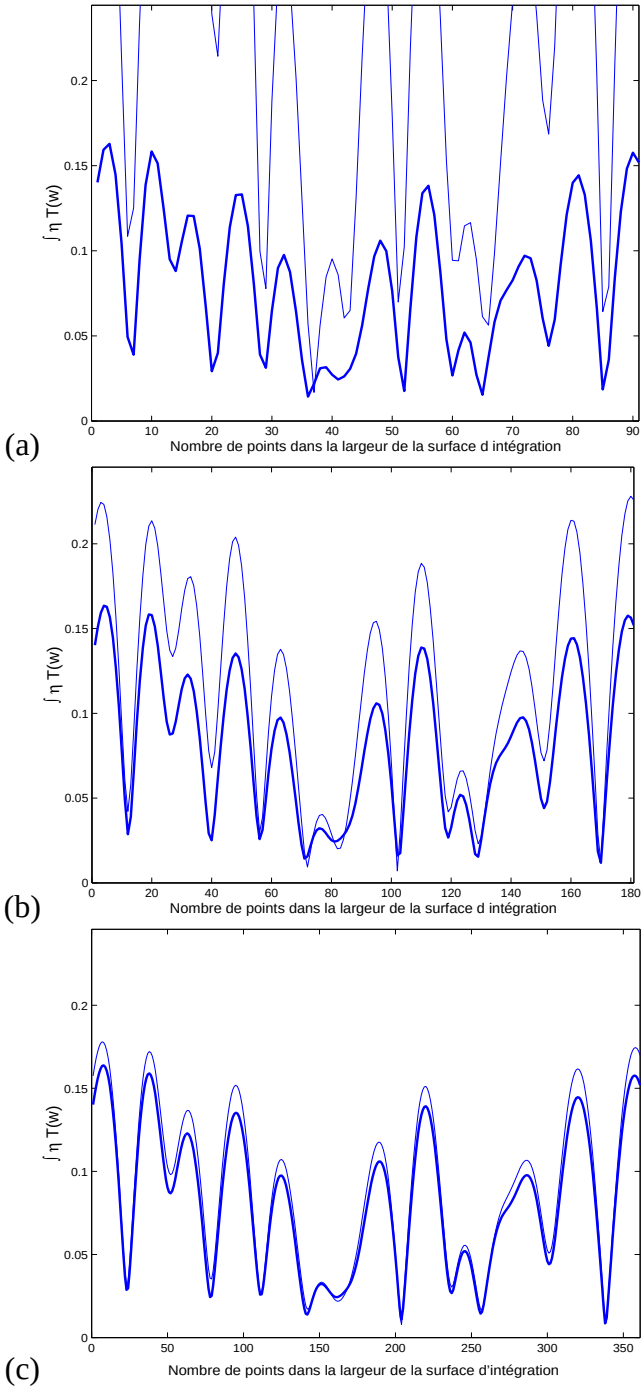


FIG. 6.7 – Calcul de l'intégrale 6.13. Lignes épaisses : intégrales calculées à partir de $T(w)_{analytique}$, lignes fines : intégrales calculées numériquement à partir de $w_{discret}$. a) $\Delta = 1cm$, b) $\Delta = 0.5cm$ et c) $\Delta = 0.25cm$

se projeter sur les axes x ou y donnant deux composants. Cependant, pour simplifier l'analyse on utilisera uniquement le nombre d'onde naturel des plaques infinies, défini par :

$$k = \sqrt[4]{\frac{\rho h}{D}}\sqrt{\omega} \tag{6.17}$$

Par analogie avec le cas monodimensionnel, on cherche à caractériser l'erreur en fonction du paramètre $k \times L$, où L est la largeur de la surface d'intégration.
La figure 6.8 montre l'erreur ϵ_T en fonction de $k \times L$ pour différentes fréquences d'excitation. Remarquons que pour chaque fréquence, la taille du côté de la surface d'intégration varie.
Le phénomène de superposition n'est pas aussi marqué que dans le cas à une dimension (voir figure 2.4). Cela s'explique par l'effet réducteur de l'analyse faite avec le nombre d'onde naturel et qu'il est possible d'avoir un faible nombre d'onde dans la largeur de la surface d'intégration mais un haut nombre d'onde dans la longueur ou inversement.
Toutefois on remarque que les courbes suivent une tendance commune. L'erreur dûe à la discrétisation devient faible à partir de $k \times L = 9$ environ. En dessous, de cette valeur, l'erreur augmente de manière importante. Cela s'explique par le fait que la taille de la surface d'intégration est trop faible par rapport aux longueurs d'ondes dans une des deux directions x ou y.
On précise que cette valeur minimum de $k \times L = 9$ varie en fonction du pas, s'il est plus fin, on améliore forcément l'intégration.

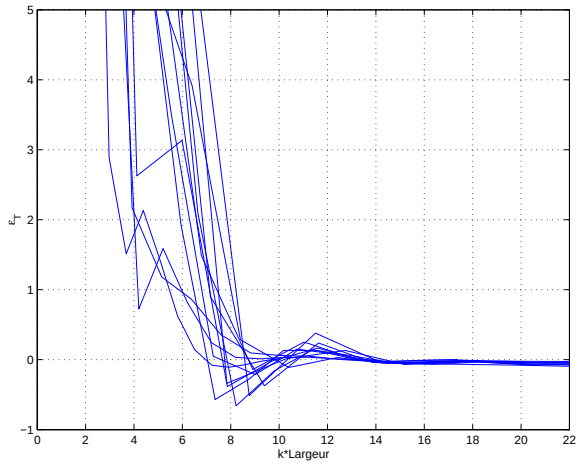


FIG. 6.8 – Erreur d'intégration ϵ_T entre intégrations numériques de surface et contour utilisant des données discrètisées issues des calculs directs et intégrations numériques utilisant des données analytiques, pour différentes fréquences d'excitation comprises entre 100Hz et 3000Hz, $\Delta = 0.5cm$

6.3.2.2 Reconstruction du moment fléchissant

Une approche similaire est proposée dans cette section. Ici,la plaque est guidée et sert de base à notre identification. Un indicateur d'erreur similaire à 6.18 est défini, à partir de l'équation 6.14 :

$$\epsilon_M = 10log_{10}\left(\frac{\int_S(-\rho h\omega^2\eta_M + D\Delta^2\eta_M)w + \int_{\sigma_M} wT(\eta_M)}{\int_{\sigma_M} M(w)\eta_{M,n}}\right) \tag{6.18}$$

La figure 6.9 montre l'erreur ϵ_M en fonction de $k \times L$ pour différentes fréquences d'excitation. Le comportement est proche de l'erreur précédemment décrite pour la reconstruction de l'effort tranchant. Une valeur minimum existe, à partir de laquelle l'erreur de discrétisation est faible. L'erreur s'amplifie fortement lorsque l'on est en dessous de cette valeur minimum. Pour des paramètres d'intégration similaires au cas pécédent (fig 6.8), cette valeur vaut 6, ce qui est légèrement plus faible que celle de la reconstruction de l'effort tranchant. Ceci peut s'expliquer indirectement par le fait que le moment fléchissant est directement proportionnel aux dérivées secondes du déplacement, dont l'approximation est plus aisée que celle des dérivées tièrces nécessaires au calcul de l 'effort tranchant.

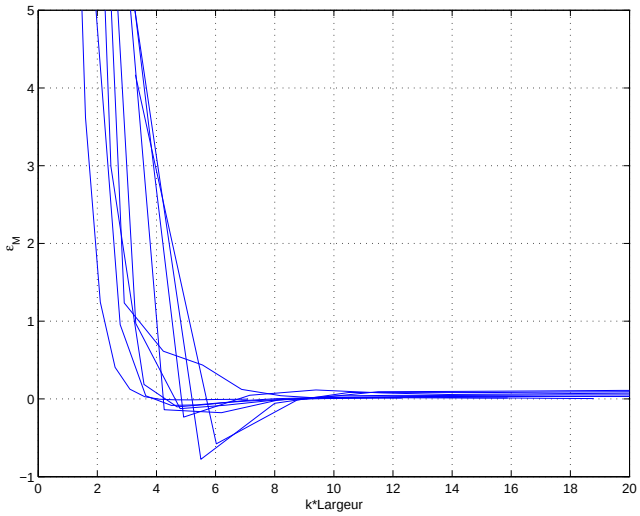


FIG. 6.9 – Erreur d'intégration ϵ_M entre entre intégrations numériques de surface et contour utilisant des données discrètisées issues des calculs directs et intégrations numériques utilisant des données analytiques, pour différentes fréquences d'excitation comprises entre 100Hz et 3000Hz, $\Delta = 0.5cm$

Cette section pose les bases des critères permettant le choix des bons paramètres de la surface d'intégration. L'influence logique de la finesse du maillage a été démontrée. Le maillage pourra donc être

choisi en fonction des moyens pratiques disponibles (mesures ou puissance de calcul). La taille de la surface d'intégration est l'autre paramètre important, dont dépend l'erreur de discrétisation. La taille de la surface d'intégration est directement liée, par le paramètre $k \times L$, à la fréquence ciblée par la reconstruction. Ce paramètre permet de déterminer la taille minimum de la surface d'intégration en fonction de la fréquence, afin que l'erreur de discrétisation soit faible.

6.4 Effet des incertitudes de mesure

Pour d'étudier l'influence des incertitudes de mesure sur les résultats, nous proposons de bruiter les déplacements exacts, calculés par les simulations numériques précédemment décrites. Ce type d'erreur est naturellement introduit avant celui lié à la discrétisation des intégrales comme l'illustre le schéma 6.10.

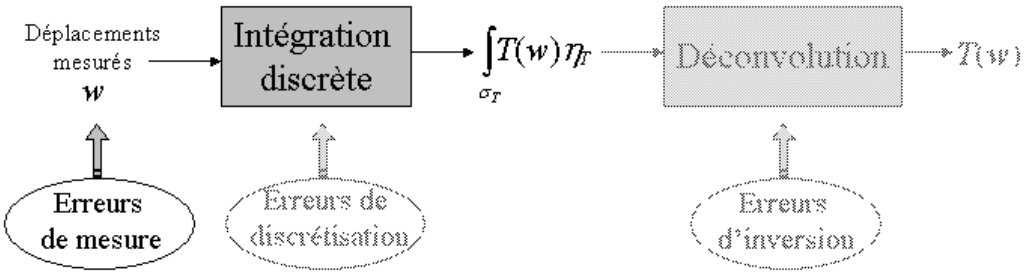


FIG. 6.10 – Différentes étapes du calcul et erreurs entachant la reconstruction. Incertitudes de mesure

6.4.1 Types de bruits

Dans le cas mono dimensionnel (chapitre 2) l'influence de 3 types d'erreur de mesure (bruit additif, bruit multiplicatif et erreur sur le positionnement des points) ont été étudiés, pour ne pas alourdir ce mémoire, on considère dans ce chapitre la présence des différents types de bruit dans leur ensemble. Les déplacements calculés par la méthode modale sont détériorés par un bruit additif, multiplicatif et une erreur sur la position des points :

$$w^{bruité}(x_i, y_j) = w^{exact}(x_i + \Delta x, y_j + \Delta y).\Delta w_m.e^{j\Delta\varphi} + \Delta w_a \tag{6.19}$$

où w^{exact} est le déplacement calculé par la méthode modale, $w^{bruité}$ est le déplacement bruité qui servira aux simulations, Δw_m est une variable aléatoire Gaussienne réelle, de moyenne égale à un

et d'écart type égal à 1% de l'amplitude du déplacement, $\Delta\varphi$ est une variable Gaussienne aléatoire réelle, définie par sa moyenne nulle, et son écart type égale à 1°, Δw_a représente le bruit de fond, c'est une variable aléatoire Gaussienne de moyenne nulle, avec un écart type dépendant directement de la chaîne d'acquisition utilisée pour la mesure. Pour ces simulations, il sera fixé à 1% de la valeur maximale du déplacement de la plaque. Enfin, Δx et Δy sont définis par leurs moyennes nulles et leurs écarts types sont égaux à $0.5mm$. Cette erreur est associée à l'incertitude liée au positionnement des capteurs lors des expériences.
La combinaison de ces trois bruits, dégrade fortement le champ de déplacement. La figure 6.11 montre les déplacements exacts, puis bruités pour deux plaques soumises à des excitations identiques.

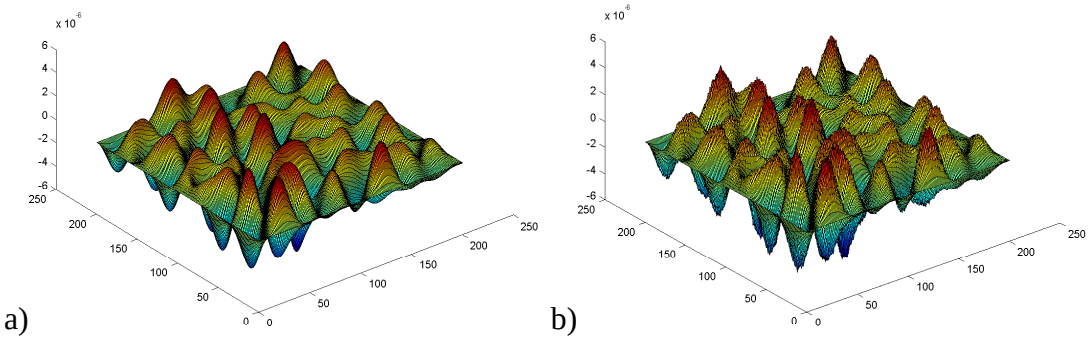


FIG. 6.11 – Vibrations de plaques d'épaisseur $1mm$ en acier, appuyées aux bords, soumises à une excitation harmonique ponctuelle unitaire de fréquence 400Hz, en $X_f = 0.2m$ et $Y_f = 0.4m$, a) déplacements exacts ; b) déplacements bruités

6.4.2 Simulations numériques bruitées

Les indicateurs d'erreur précédemments définis par les équations 6.16 et 6.18, sont à nouveau utilisés. On constatera ainsi les variations du niveau d'erreur, par rapport aux simulations utilisant des déplacements exacts.

6.4.2.1 Reconstruction de l'effort tranchant

Pour la reconstruction de l'effort tranchant, on utilise le cas d'une plaque appuyée aux quatre bords, excitée par des fréquences allant de 100Hz à 3000Hz. Après avoir bruité les déplacements, on effectue le calcul des intégrales afin d'estimer le niveau d'erreur. La figure 6.12 présente en superposition

le niveau d'erreur des calculs utilisant des déplacements exacts (lignes continues), et les niveaux d'erreurs issus des simulations bruitées (nuages de croix).

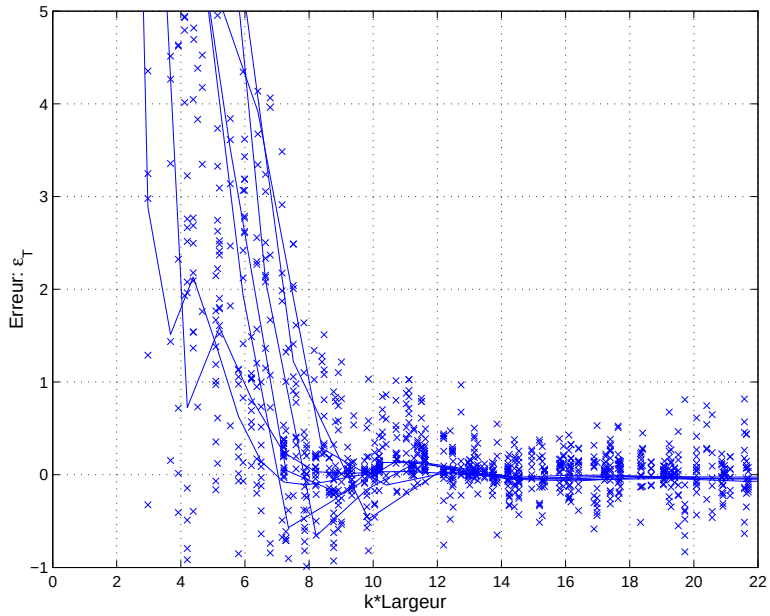


FIG. 6.12 – Niveau d'erreur ϵ_T entre intégrations numériques de surface et contour utilisant des données discrètisées issues des calculs directs et intégration numérique utilisant des données analytiques, pour différentes fréquences d'excitation comprises entre 10Hz et 3000Hz, $\Delta = 0.5cm$. Ligne continue : Simulations utilisant des déplacements exacts, x : Simulations utilisant des déplacements bruités.

Les niveaux suivent la même tendance et on constate que le seuil $k \times L = 9$ doit toujours être respecté. Pour $k \times L > 9$, le niveau d'erreur reste inférieur à 1dB malgré un niveau de bruit très important. Ce phénomène d'autorégularisation, déjà constaté dans le cas des poutres, est lié à l'effet de moyenne de l'intégration à la base de la méthode.

6.4.2.2 Reconstruction du moment fléchissant

Pour la reconstruction du moment fléchissant, on utilise le cas de la plaque guidée aux quatre bords, excitée harmoniquement dans la plage de fréquence allant de 100Hz à 3000Hz. L'analyse des niveaux d'erreur suit la même démarche que celle du paragraphe précédent. La figure 6.13 présente en superposition le niveau d'erreur des calculs utilisant des déplacements exacts, et les niveaux d'erreurs issus des simulations bruitées.

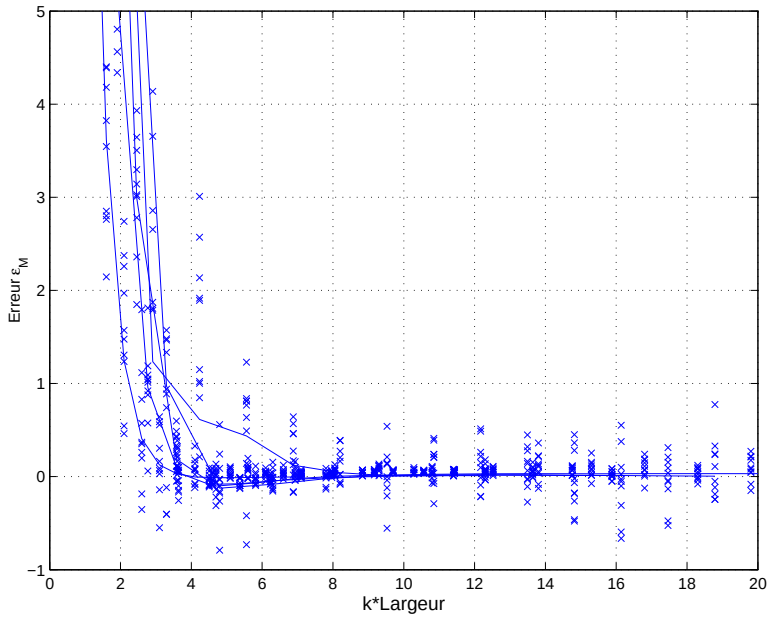


FIG. 6.13 – Niveau d'erreur ϵ_M entre intégrations numériques de surface et contour utilisant des données discrètisées issues des calculs directs et intégration numérique utilisant des données analytiques, pour différentes fréquences d'excitation comprises entre 100Hz et 3000Hz, $\Delta = 0.5cm$. Ligne continue : Simulation utilisant des déplacements exacts, x : Simulation utilisant des déplacements bruités

L'analyse de la figure 6.13 nous amène à des conclusions similaires à celles du paragraphe précédent. Sans être aussi précis que les résultats issus des simulations exactes, les niveaux d'erreur issus des simulations bruitées gardent la même tendance. Notamment, il reste inférieur à 1dB une fois le seuil critique $k \times L = 6$ passé.

On a caractérisé les erreurs pouvant entâcher la première phase du calcul : le calcul d'une valeur moyenne pondérée sur le contour σ_T ou σ_M. Des critères de taille de la surface d'intégration ont pu être définis en fonction de la fréquence à partir de valeurs minimums du paramètre $k \times L$. L'erreur due à la discrétisation peut être rendue très faible en choisissant la surface adéquate.
Il a aussi été montré que le bruit de mesure n'a qu'un faible effet sur la détermination des moyennes pondérées des efforts.

6.5 Troncature SVD

On rappelle que la première étape du calcul est effectuée plusieurs fois, le long d'une limite rectiligne de la structure, afin d'obtenir une répartition de moyennes pondérées, comme expliqué dans le chapitre précédent (Chap. 5). Il est ensuite nécessaire d'inverser les systèmes matriciels (5.38 et 5.39) représentant la déconvolution entre la fonction test et la répartition des valeurs moyennées pondérées. Ces systèmes sont mal conditionnés, les lignes de la matrice issue de la fonction test ont des valeurs très voisines, rendant l'inversion difficile. Le principe de troncature des valeurs singulières (TSVD pour "truncated singular value decomposition", cf [PS 84]) est utilisé. Cette technique permet de rendre cette inversion et la déconvolution, possibles. La shéma 6.14 illustre l'étape étudiée ici.

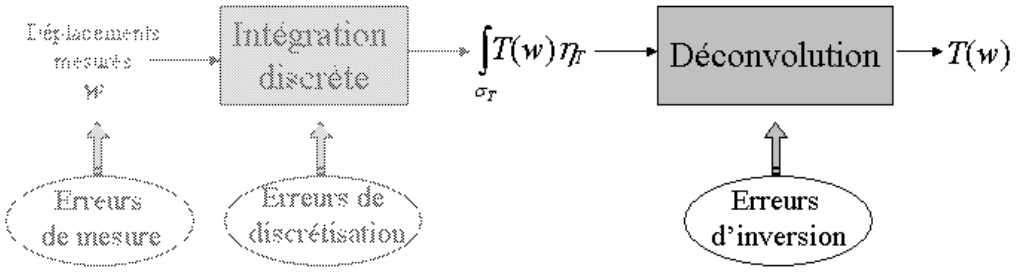


FIG. 6.14 – Différentes étapes du calcul et erreurs entachant la reconstruction

6.5.1 Principe de la troncature SVD

Un système matriciel présentant un mauvais conditionnement est délicat à inverser, car la présence d'incertitudes crée de fortes erreurs sur le résultat d'un calcul. Généralement, la troncature des valeurs singulières est utilisée pour réduire ces effets néfastes du mauvais conditionnement des matrices. Elle est ici utilisée comme méthode de régularisation pour contrer l'hypersensibilté des systèmes aux incertitudes de mesure.

Les incertitudes de mesures sont en partie régularisées par les intégrations à la base de la méthode. La TSVD est néanmoins nécessaire à cause du mauvais conditionnement de la matrice caractéristique de la déconvolution (voir équations 5.38 et 5.39), qui présente un nombre de conditionnement tellement élevé que son inversion est numériquement impossible.

Le principe est d'exprimer une matrice $[\eta]$ sous la forme :

$$[\eta]_{mn} = [U]_{mn}[S]_{nn}[V]^*_{nn} \tag{6.20}$$

où $[U]_{mn}$ et $[V]^*_{nn}$ sont des matrices unitaires, et $[S]_{nn}$ est la matrice diagonale des valeurs singulières classées par ordre décroissant. Les petites valeurs singulières, présentes dans la matrice $[S]_{nn}$ sont responsables du mauvais conditionnement. Il est alors nécessaire de fixer un seuil en dessous duquel les valeurs singulières sont rejetées.
Si l'on considère que seules r valeurs singulières sont retenues, alors l'inversion de la matrice donne :

$$[\eta]^{-1}_{mn} = [V]_{nr}[S]^{-1}_{rr}[U]^*_{mr} \tag{6.21}$$

En baissant ainsi le nombre de conditionnement de la matrice $[\eta]$, on rend son inversion possible. C'est dans cette logique que la TSVD est initialement utilisée.

6.5.2 Choix du nombre de troncature

Il reste maintenant à définir une méthode permettant le choix du nombre de valeurs singulières conservées r.
On distinguera 2 cas : le cas des simulations dites "exactes" et le cas des simulations dites "bruitées". Dans le cas des simulations exactes, la TSVD est indispensable car le nombre de conditionnement de la matrice de la fonction test $[\eta]$ ou $[\frac{\partial \eta}{\partial x}]$ devient trop grand. Le choix de r, le nombre de valeurs singulières conservées, dépend directement de la capacité des ordinateurs à inverser une matrice dont le nombre de conditionnement est très grand, il sera déterminé à la suite d'essais numériques.
Dans le cas des simulations bruitées, le choix de r se fait de manière différente et nous est imposé par le comportement de la reconstruction face aux incertitudes.
L'idée clé consiste à accepter une norme résiduelle $||Ax - b||$ non nulle et en contrepartie, «pénaliser» la solution. Où, dans notre problème, A serait la matrice $[\eta]$, x le vecteur recherché, c'est à dire, les valeurs exacte de la répartition d'effort, et b le vecteur connu, c'est à dire la répartition des moyennes pondérées.
Ce choix est assez délicat : Le principe consiste à minimiser la norme résiduelle $||Ax - b||$ ainsi que la norme de la solution issue du système tronqué $||x_r||$. Le choix de r va donc correspondre à un compromis entre la stabilité et la vraisemblance de la solution obtenue.
En pratique, on peut utiliser le critère de la courbe en L (cf [HAN 92]). Cette courbe qui a généralement l'apparence d'un L, représente l'évolution de la solution régularisée $||x_r||$ en fonction du résidu

$||A_r x_r - b||$ pour différentes valeurs de r. Ainsi, les points situés au creux de la courbe présentent un bon compromis entre la norme du résidu et la norme de la solution.
La figure 6.15 montre un exemple général de courbe en L, où r est le nombre de troncature et k le nombre maximal de valeurs singulières. On voit nettement un point d'inflexion où le compromis entre les différentes normes considérées est optimal.
Cette méthode sera mise en application et illustrée dans les paragraphes suivants.

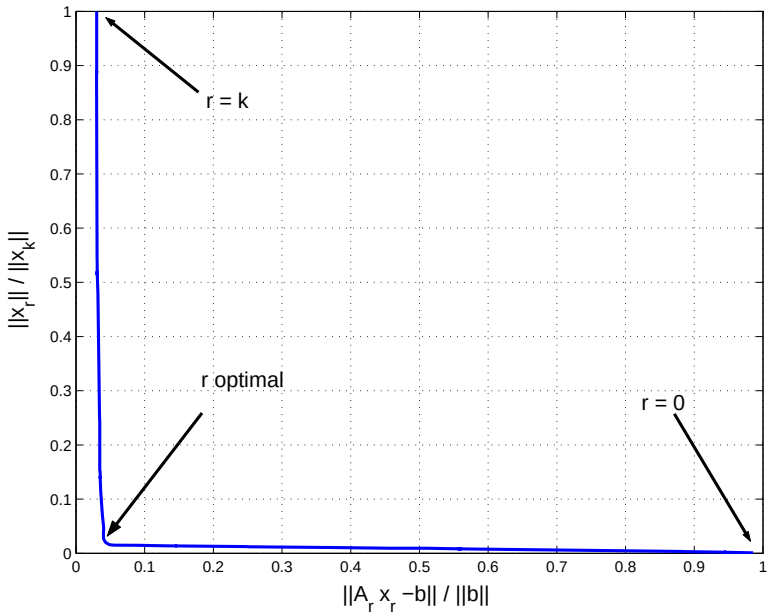


FIG. 6.15 – Courbe en L générale d'un problème type $Ax = b$, r est le nombre de troncature et k le nombre maximal de valeurs singulières.

6.5.3 Simulations numériques

Des simulations numériques vont permettre d'évaluer la faisabilité de la méthode. On distinguera à nouveau, la reconstruction de l'effort tranchant utilisant une plaque appuyée et la reconstruction du moment fléchissant utilisant une plaque guidée. Les données de plaque, de maillage et d'effort restent les mêmes.

6.5.3.1 Reconstruction de l'effort tranchant

La fréquence de la force d'excitation est de $f = 1500Hz$, en choisissant une surface d'intégration carrée de $15cm$ de côté, le paramètre $k \times L$ est égal à 12. Le pas de discrétisation étant de $0.5cm$, le carré d'intégration comporte 31×31 points (soit un total de 961 points). Ainsi, dans la première étape du calcul, toutes les conditions sont respectées pour avoir un minimum d'erreur sur les valeurs moyennées pondérées.

Simulations numériques exactes

On considère ici un champ de déplacement non bruité, issu du calcul direct. La figure 6.16 montre la répartition des moyennes pondérées de l'effort tranchant, à la limite de la plaque. La ligne continue donne les valeurs calculées à partir de l'effort tranchant analytique, tandis que les croix représentent l'identification selon la technique de calcul développée en chapitre 5. Les deux courbes coïncident, le choix de la surface d'intégration et des paramètres de discrétisation respectent les critères établis précédemment.

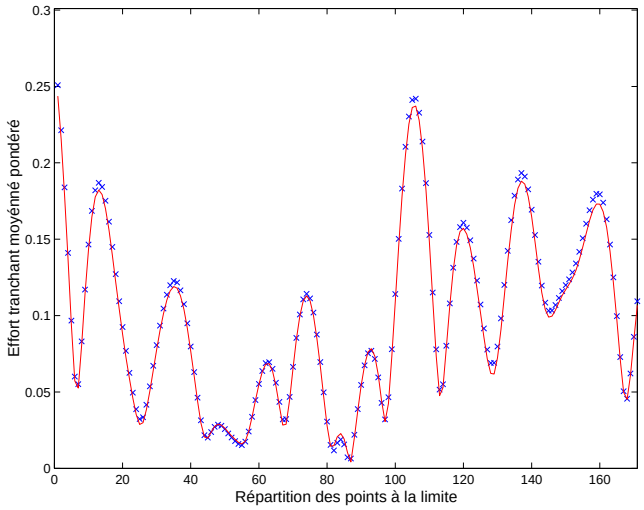


FIG. 6.16 – Reconstruction de la répartition des moyennes pondérées de l'effort tranchant. Ligne continue : intégrale numérique utilisant des données analytiques, Croix : calcul de l'intégrale discretisée utilisant des déplacements exacts et une surface d'intégration carrée de $15cm$ de côté, $\Delta = 0.5cm$, Fréquence d'excitation $f = 1500Hz$.

Une fois ces moyennes pondérées obtenues, la déconvolution du système est plus problèmatique et nécessite l'utilisation de la TSVD. Néanmoins, cette méthode n'est pas utilisée dans ce cas comme

une méthode de régularisation, mais comme un moyen numérique de faire chuter le nombre de conditionnement de la matrice $[\eta]$ qui doit être inversée. Sans troncature, la matrice $[\eta]$ a 171 valeurs singulières et son nombre de conditionnement tend vers l'infini, son inversion est impossible. On choisit un nombre de troncature égale à 70 (c'est à dire que l'on garde les 70 premières valeurs singulières). Le nombre de conditionnement est alors égale à 13216. Même si ce nombre est très grand, l'inversion devient possible.
Le principe de la courbe en L n'est donc pas exploité ici, car les données d'entrée ne sont pas bruitées. Afin d'illustrer cela, la figure 6.17 montre une comparaison normalisée entre la norme du résidu et la norme de la solution normalisée pour des valeurs du nombre de troncature allant de 70 à 1. On constate que la courbe n'a pas la forme cractéristique en L. On choisit donc le plus grand nombre de troncature qui rend l'inversion possible.

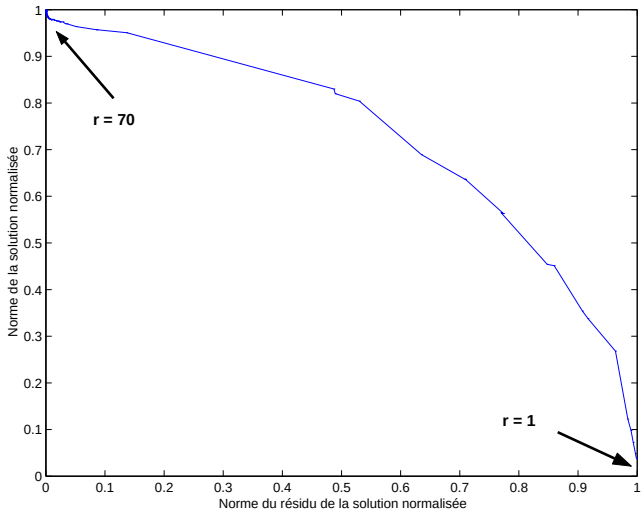


FIG. 6.17 – Comparaison normalisée entre la norme du résidu et la norme de la solution normalisée, pour la reconstruction de l'effort tranchant en simulation "exacte". Comparaison normalisée entre la norme du résidu et la norme de la solution. Fréquence d'excitation $f = 1500Hz$.

La figure 6.18 montre un résultat final. La ligne continue représente l'effort tranchant analytique, les croix représentent la répartition reconstruit à l'aide de notre méthode. La reconstruction est très bonne, malgré la troncature de valeurs singulières.
Néanmoins, le calcul se base ici sur des données exactes. Le nombre de conditionnement très haut de la matrice $[\eta]$ (plus de 13000), laisse présager une grande sensibilté aux incertitudes de mesure. Le paragraphe suivant s'intéresse à cet aspect.

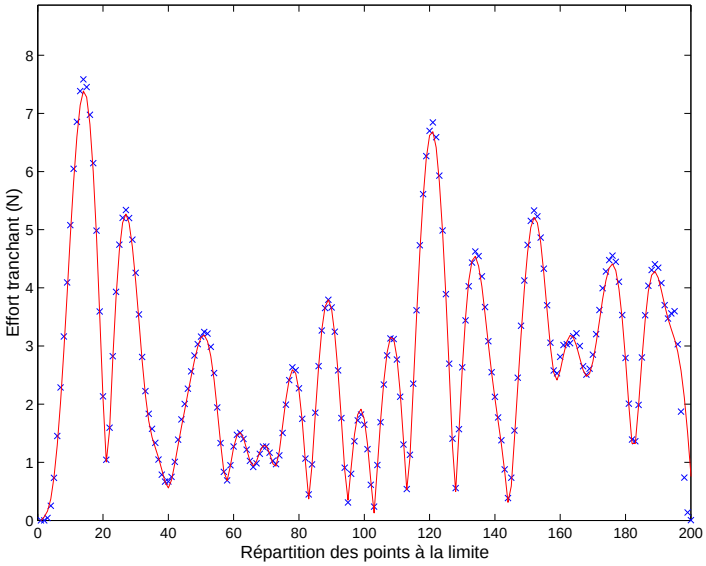


FIG. 6.18 – Reconstruction de la répartition de l'effort tranchant. Ligne continue : calcul analytique, Croix : calcul de l'intégrale discretisée utilisant des déplacements exacts et une surface d'intégration carrée de $15cm$ de côté, $\Delta = 0.5cm$, Fréquence d'excitation $f = 1500Hz$, nombre de troncature :70.

Simulations numériques bruitées

On a montré précédemment que les incertitudes issues des mesures ont peu d'effet sur la reconstruction de la répartition des moyennes pondérées. Malgré tout, la très légère variation sur la justesse du calcul des moyennes pondérées peut engendrer des résultats aberrants lors de la déconvolution.
Les déplacements sont maintenant bruités. Les bruits appliqués correspondent à ceux décrits par l'équation 6.19. La figure 6.19, montre la reconstruction de la répartition des moyennes pondérées. En la comparant avec la figure 6.16 issue des simulations non bruitées, on constate que l'effet du bruit à ce niveau du calcul est à peine visible. La figure 6.20 montre le calcul de l'effort tranchant après résolution du système 5.38, en utilisant comme précédemment les 70 premières valeurs singulières. En comparaison avec la figure 6.18, on voit que les très légères erreurs présentes dans la reconstruction des moyennes pondérées sont considérablement amplifiées et faussent radicalement le résultat. Le choix du nombre de troncature se doit d'être repensé.

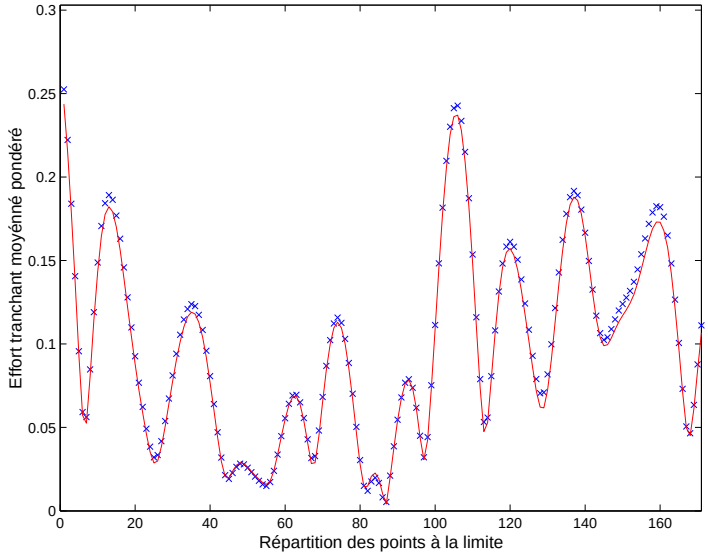


FIG. 6.19 – Reconstruction de la répartition des moyennes pondérées de l'effort tranchant. Ligne continue : intégrale numérique utilisant des données analytiques, Croix : calcul de l'intégrale discretisée utilisant des déplacements bruités et une surface d'intégration carrée de $15cm$ de côté, $\Delta = 0.5mm$, Fréquence d'excitation $f = 1500Hz$.

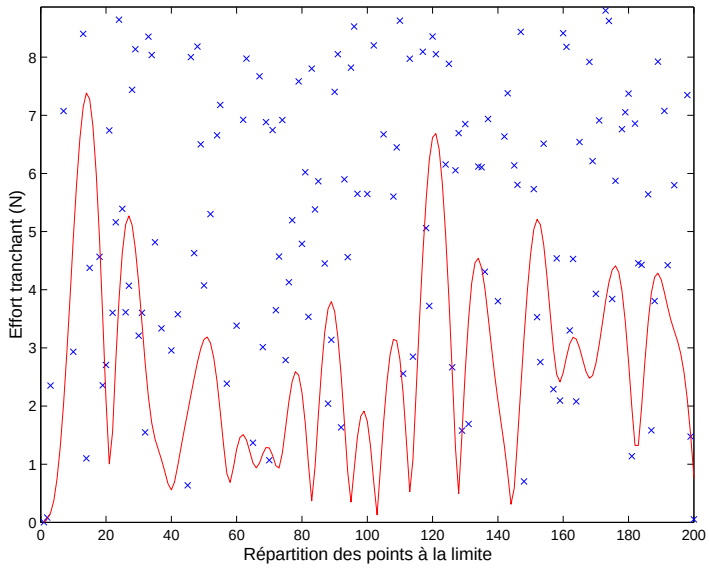


FIG. 6.20 – Reconstruction de la répartition de l'effort tranchant. Ligne continue : calcul analytique, Croix : calcul de l'intégrale discrétisée utilisant des déplacements bruités et une surface d'intégration carrée de $15cm$ de côté, $\Delta = 0.5cm$, Fréquence d'excitation $f = 1500Hz$, nombre de troncature :70.

La figure 6.21 montre, le tracé de la courbe en L, dans des axes normalisés. Chacune des étoiles correspond à un nombre de troncature. Le point d'inflexion est ici très marqué. A l'aide de cette courbe le choix du meilleur compromis entre norme de la solution et norme du résidu est possible. Le nombre de troncature est alors fixé à 31.

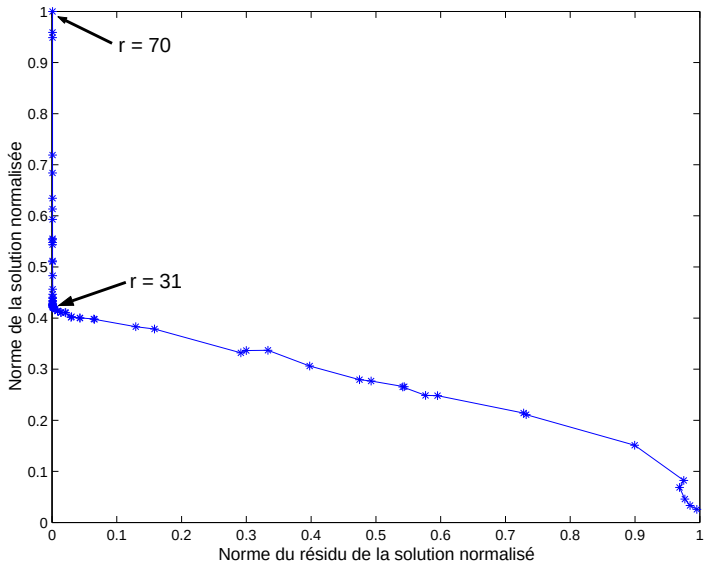


FIG. 6.21 – Courbe en L, pour la reconstruction de l'effort tranchant. Comparaison normalisée entre la norme du résidu et la norme de la solution. Fréquence d'excitation $f = 1500Hz$.

La figure 6.22 montre le calcul de l'effort tranchant après résolution du système 5.38, en utilisant les 31 premières valeurs singulières. Le nombre de conditionnement de la matrice $[\eta]$ a alors chuté à $13,2$, le problème est plus stable et la reconstruction n'amplifie plus les petites variations des données d'entrée. On retrouve une répartition d'effort tranchant proche de celle issue du calcul analytique. Toutefois, on remarque qu'à l'approche des coins, la précision est moins bonne.

L'approche proposée présente donc de très bon résultats, même lorsque les déplacements utilisés sont fortement bruités.

Une vision globale de la méthode fait ressortir deux étapes de calcul. Chacune d'elle régularise la solution. Les intégrales de la première étape moyennent les éventuels bruits de mesure, sans toutefois permettre une déconvolution précise à cause du mauvais conditionnement du problème. Lors de la deuxième étape, la troncature de valeurs singulières permet de rendre ce problème stable, et la courbe en L permet elle d'ajuster le paramètre de troncature.

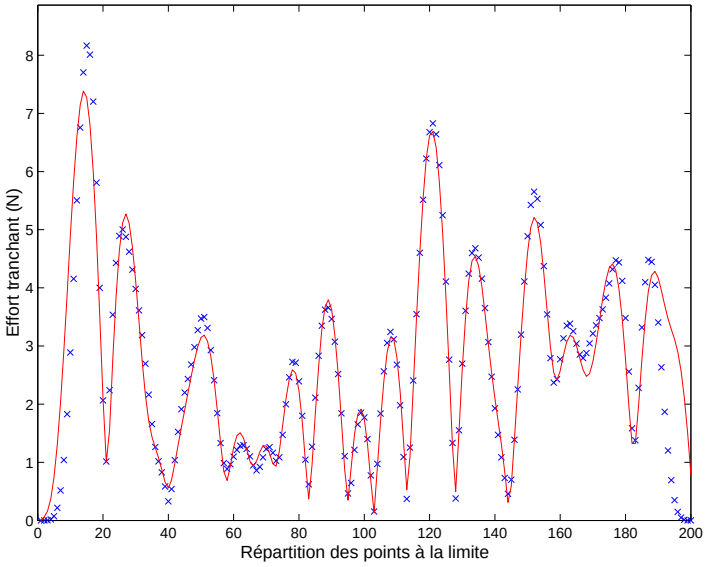


FIG. 6.22 – Reconstruction de la répartition de l'effort tranchant. Ligne continue : calcul analytique, Croix : calcul de l'intégrale discrétisée utilisant des déplacements bruités et une surface d'intégration carrée de $15cm$ de côté, $\Delta = 0.5cm$, Fréquence d'excitation $f = 1500Hz$, nombre de troncature :31.

6.5.3.2 Reconstruction du moment fléchissant

On s'intéresse maintenant à la reconstruction du moment fléchissant. Le champ de déplacement considéré est celui d'une plaque guidée aux quatre bords. Les données physiques d'entrées sont similaires à celles utilisées précédemment pour la reconstruction de la répartition des moyennes pondérées du moment fléchissant. La surface d'intégration est également un carré de $15cm$ de côté, la pas est de $\Delta = 0.5cm$, le côté du carré contient donc 31 points de discrétisation (961 points sur toute sa surface). Le paramètre $k \times L$ est fixé à 9, pour que l'erreur dûe à la discrétisation soit minime.

Simulations numériques exactes

On considère ici un champ de déplacement non bruité, issu du calcul direct. La figure 6.23 montre la répartition des moyennes pondérées du moment fléchissant, à la limite de la plaque. La ligne continue donne les valeurs exactes calculées analytiquement, tandis que les croix représentent le calcul intégral discrétisé. Les deux courbes coïncident parfaitement, le choix de la surface d'intégration et des paramètres de discrétisation correspondent aux critères établis précédemment.

Une fois ces moyennes pondérées obtenues, la résolution du système 5.39 est plus problèmatique et nécessite l'utilisation de la TSVD. Afin de faire chuter le nombre de conditionnement de la matrice

$[\frac{\partial \eta}{\partial x}]$, qui doit être inversée, on applique à nouveau le principe de troncature des valeurs singulières. Sans troncature, son nombre de conditionnement tend vers l'infini. On choisit, comme précédemment, un nombre de troncature égale à 70. Le nombre de conditionnement est alors égale à 3246, l'inversion devient possible.

La figure 6.24 montre le résultat final d'une reconstruction de moment fléchissant à la limite. La ligne continue représente le moment fléchissant analytique exact, les croix représentent la répartition reconstruite. La reconstruction est très bonne, malgré la troncature de quelques valeurs singulières.

Néanmoins, le calcul se base ici sur des données exactes. Le nombre de conditionnement très haut de la matrice $[\frac{\partial \eta}{\partial x}]$, laisse présager une grande sensibilté aux incertitudes, comme constaté pour la reconstruction de l'effort tranchant. Le paragraphe suivant s'intéresse à cet aspect.

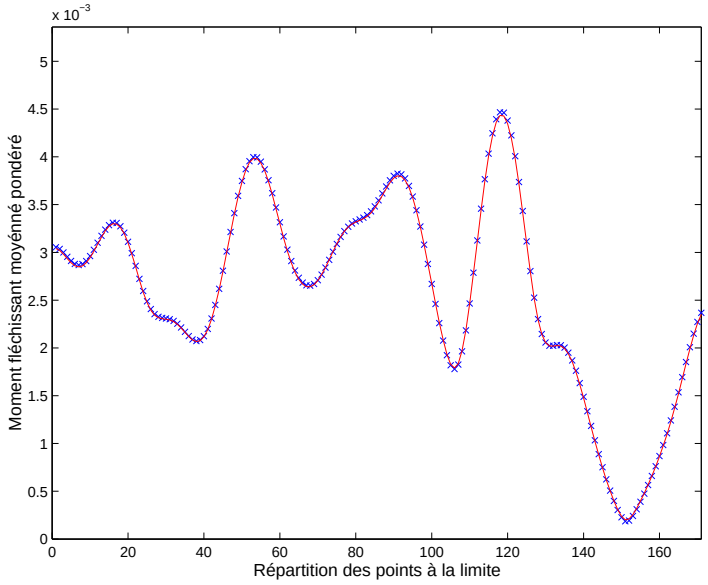


FIG. 6.23 – Reconstruction de la répartition des moyennes pondérées du moment fléchissant. Ligne continue : calcul utilisant des données analytiques, Croix : calcul de l'intégrale discrétisée utilisant des déplacements exacts et une surface d'intégration carrée de $15cm$ de côté, $\Delta = 0.5cm$, Fréquence d'excitation $f = 1500Hz$.

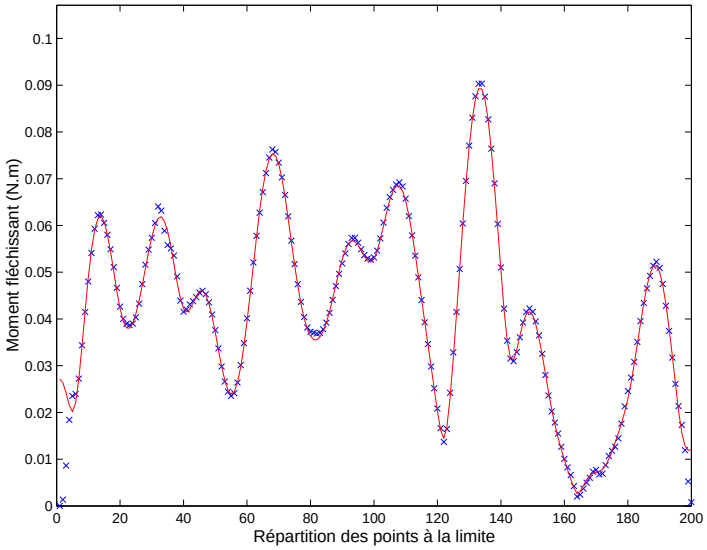


FIG. 6.24 – Reconstruction de la répartition du moment fléchissant. Ligne continue : calcul analytique, Croix : calcul de l'intégrale discrétisée utilisant des déplacements exacts et une surface d'intégration carrée de $15cm$ de côté, $\Delta = 0.5cm$, Fréquence d'excitation $f = 1500Hz$, nombre de troncature :70.

Simulations numériques bruités

Les incertitudes issues des mesures ont peu d'effet sur la reconstruction de la répartition des moyennes pondérées. Mais il a été constaté lors de la reconstruction de l'effort tranchant que la très légère variation sur la justesse du calcul des moyennes pondérées peut engendrer des résultats abérrants lors de la déconvolution pour une troncature similaire au cas "exact".

Les déplacements sont maintenant bruités. Les bruits appliqués correspondent à ceux décrits par l'équation 6.19.

La figure 6.25 montre la reconstruction de la répartition des moyennes pondérées. En la comparant avec la figure 6.23, on constate que l'effet du bruit à ce niveau du calcul est à peine visible.

La figure 6.26 montre le calcul du moment fléchissant après resolution du système 5.39, en utilisant comme précedemment les 70 premières valeurs singulières. Une comparaison avec la figure 6.24 montre que les résultats sont aberrants. Les très légères erreurs présentes dans la reconstruction des moyennes pondérées sont considérablement amplifiées et faussent radicalement le résultat.

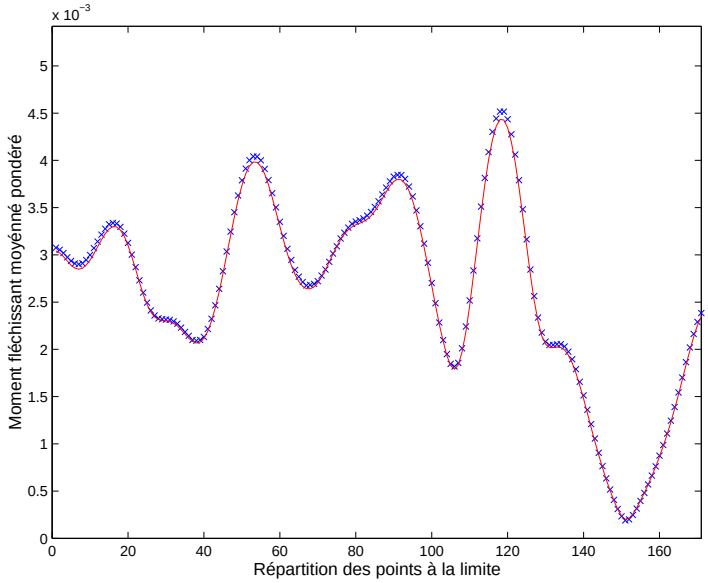


FIG. 6.25 – Reconstruction de la répartition des moyennes pondérées du moment fléchissant. Ligne continue : calcul utilisant des données analytiques, Croix : calcul de l'intégrale discrétisée utilisant des déplacements bruités et une surface d'intégration carrée de $15cm$ de côté, $\Delta = 0.5mm$, Fréquence d'excitation $f = 1500Hz$.

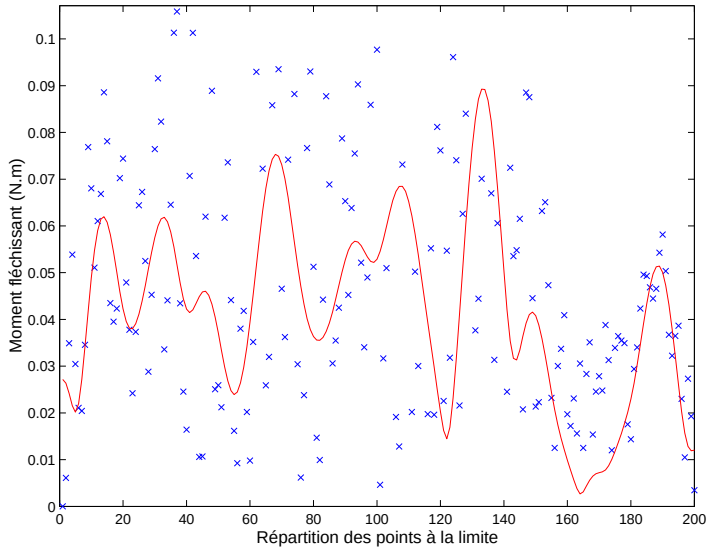


FIG. 6.26 – Reconstruction de la répartition du moment fléchissant. Ligne continue : calcul analytique, Croix : calcul de l'intégrale discrétisée utilisant des déplacements bruités et une surface d'intégration carrée de $15cm$ de côté, $\Delta = 0.5cm$, Fréquence d'excitation $f = 1500Hz$, nombre de troncature :70.

La figure 6.27 montre le tracé de la courbe en L. Chacune des étoiles correspond au résultat d'un calcul pour une troncature fixée. Le point d'inflexion est très marqué et le choix de la valeur permettant le meilleur compromis entre norme de la solution et norme du résidu est aisé. La troncature est fixée à 25 valeurs singulières.

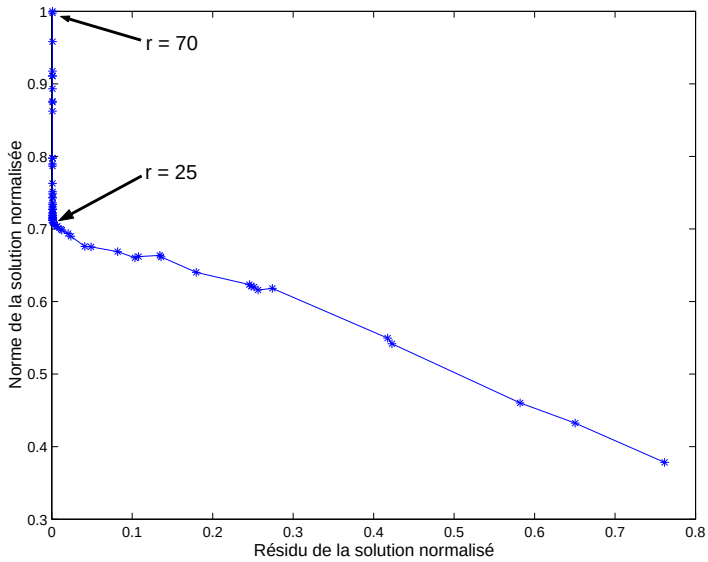


FIG. 6.27 – Courbe en L pour la reconstruction du moment fléchissant. Comparaison normalisée entre la norme du résidu et la norme de la solution. Fréquence d'excitation $f = 1500Hz$.

La figure 6.28 montre le calcul du moment fléchissant après résolution du système 5.39, en utilisant les 25 premières valeurs singulières. Le nombre de conditionnement de la matrice $[\frac{\partial \eta}{\partial x}]$ a chuté à 13. Mathématiquement le problème est donc plus stable et la reconstruction n'amplifie plus les petites variations des données d'entrée. On retrouve une répartition de moment fléchissant proche de celle issue du calcul analytique.
Comme dans le cas de la reconstruction de l'effort tranchant, l'approche proposée présente de très bons résultats, même lorsque les déplacements utilisés sont fortement bruités.

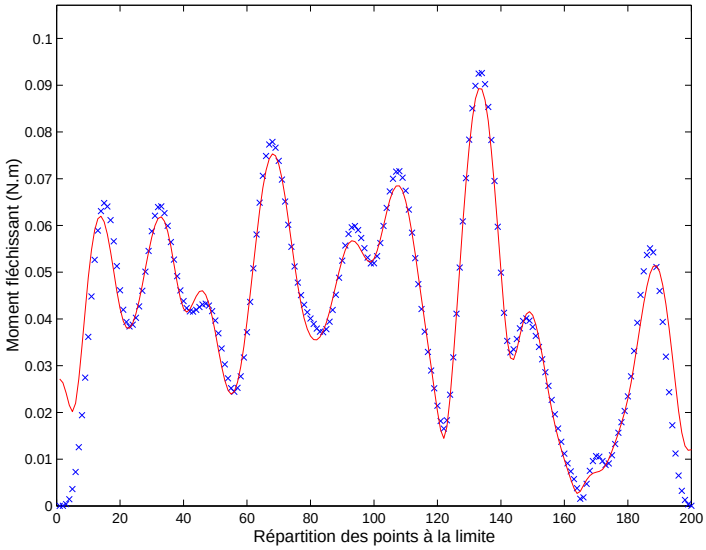


FIG. 6.28 – Reconstruction de la répartition du moment fléchissant. Ligne continue : calcul analytique, Croix : calcul de l'intégrale discrétisée utilisant des déplacements bruités et une surface d'intégration carrée de $15cm$ de côté, $\Delta = 0.5cm$, Fréquence d'excitation $f = 1500Hz$, nombre de troncature :25.

6.6 Conclusions

Dans ce chapitre, on montre que l'extension de la méthode aux plaques en flexion est réalisable, une étape supplémentaire de déconvolution est cependant nécessaire. Des critères de taille de la surface d'intégration par rapport aux fréquences étudiées ont pu être établis afin de minimiser l'erreur de discrétisation. A nouveau, on constate la nature "autorégularisante" de la méthode grâce à un moyennage des erreurs lors des intégrations numériques. L'étape de déconvolution, nouvelle par rapport au cas monodimensionnel, nécessite l'utilisation de la méthode TSVD couplée avec un réglage du paramètre de régularisation basé sur la courbe en L. Avec cette technique les simulations réalisées à partir de données bruitées ont permis d'identifier l'effort tranchant ou le moment fléchissant à la limite d'une plaque.

Chapitre 7

Validations expérimentales : Cas d'une plaque en flexion

7.1 Objectifs du chapitre

Les simulations numériques menées lors du chapitre précédent ont permis d'appréhender l'application de l'approche détaillée théoriquement au chapitre 5. Ce chapitre propose une validation expérimentale de la méthode dans le cas d'une reconstruction de l'effort tranchant à la limite d'une plaque en flexion. La première partie décrit le dispositif expérimental qui a été mis en place pour mesurer les déplacements vibratoires de la plaque. La seconde partie porte sur le post-traitement des données. Les différentes étapes d'intégration surfacique et de déconvolution des moyennes pondérées de l'effort tranchant, y sont détaillées, afin de pouvoir vérifier les limites fréquentielles et spatiales de la méthode.

7.2 Dispositif expérimental

L'expérience consiste à mesurer le champ de déplacement vibratoire d'une plaque, afin de reconstruire l'effort tranchant en un point situé à la limite. La figure 7.1 présente le principe de l'expérience.
Un pot vibrant, excite une plaque verticale, encastrée à son extrémité supérieure, et libre aux trois autres bords. La plaque est en acier, de forme carré, de côté $1m$, et d'épaisseur $1mm$. L'excitation se situe au milieu du bord libre inférieur. Un capteur de force situé entre la plaque et le pot vibrant mesure l'effort excitateur qui est alors égale à l'effort tranchant en ce point notéA.

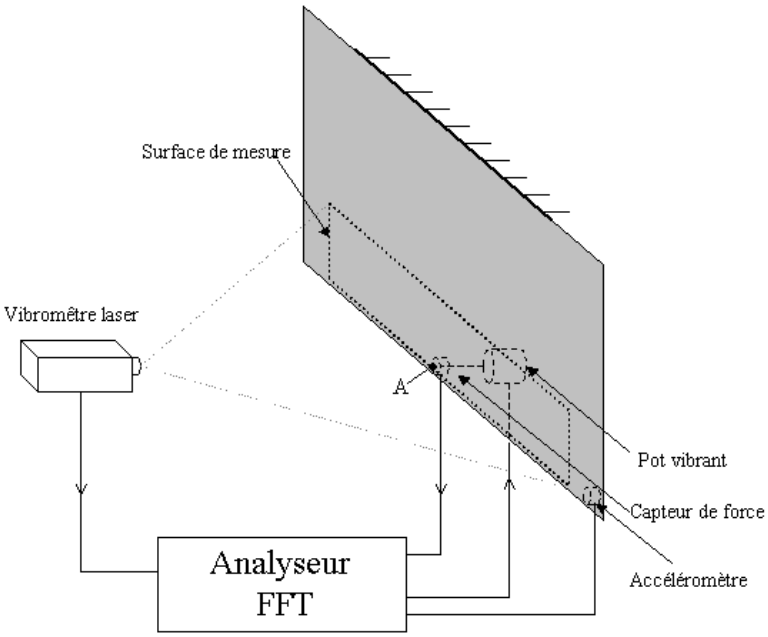


FIG. 7.1 – Montage expérimental utilisé pour la reconstruction de l'effort tranchant à la limite d'une plaque de carré, de côté $1m$ et d'épaisseur $1mm$.

Les déplacements sont mesurés à l'aide d'un vibromètre laser à balayage, sur une surface de $15cm$ de hauteur et de $78cm$ de largeur. La limite inférieure de la surface est très proche ($5mm$) de la limite inférieure libre de la plaque. Cette proximité permet d'avoir un effort tranchant nul le long de la limite excepté au point d'excitation.
Le pas de discrétisation est $\Delta = 0.5cm$. Ici, l'effort recherché est l'effort tranchant au point A, égal à l'effort excitateur mesuré par le capteur de force. La surface d'intégration pour le calcul de chaque seule moyenne pondérée de l'effort tranchant est de $15 \times 15cm$. La figure 7.2 illustre la surface discrétisée.
Pour la mesure des interspectres des vitesses vibratoires nécessaires au calcul la référence de phase est fournie par un accéléromètre fixé à un inférieur coin de la plaque.

7.3 Résultats

7.3.1 Reconstruction de l'effort tranchant moyenné pondéré par intégration de surface

La première partie du calcul consiste à calculer les efforts tranchants moyennés pondérés à la limite, à partir des déplacements mesurés. On rappelle l'équation analytique de l'intégration 5.18 donnée au chapitre 5 :

$$\int_{\sigma_T} \eta_T T(w) d\,\vec{s} = \int_{S_i} (-\rho h \omega^2 \eta_T + D\Delta^2 \eta_T) w dx_1 dx_2 + \int_{\sigma} w T(\eta_T) d\,\vec{s} \tag{7.1}$$

où η_T est la fonction test connue, définie au chapitre 5, et w est le déplacement transversal mesuré. La surface d'intégration est discrétisée dans un carrée de 31 points de côté (Surface S_i sur la figure 7.2).

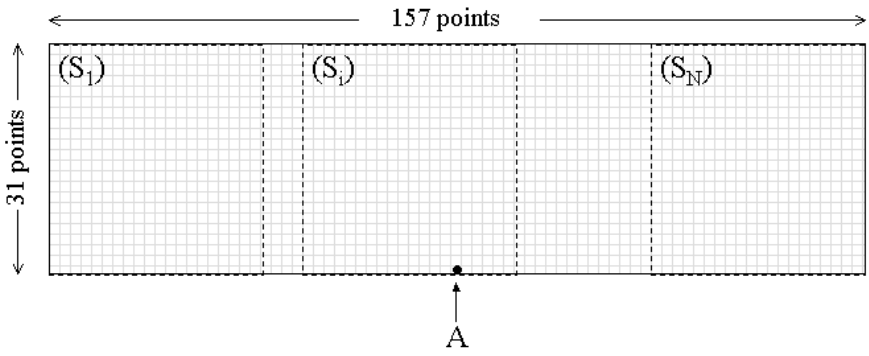


FIG. 7.2 – Discrétisation du domaine de mesure $15cm \times 78cm$ à la limite inférieure de la plaque, $\Delta = 5mm$. En pointillé : Surfaces d'intégration du calcul de l'effort tranchant moyenné pondéré.

L'équation 7.1 devient :

$$T_{MPi} = \sum_{S_i} (-\rho h \omega^2 \eta_{Tp,q} + D\Delta^2 \eta_{Tp,q}) w_{p,q} + \sum_{\sigma_T} w_{p,q} T(\eta_{Tp,q}) \tag{7.2}$$

où $w_{p,q}$ et $\eta_{Tp,q}$ sont le déplacement vibratoire et la valeur de la fonction test au point indicé (p, q). La figure 7.3 présente l'effort tranchant moyenné pondéré à la limite de la plaque pour différentes fréquences ($a) f = 500Hz$, $b) f = 1000Hz$, $c) f = 2200H$ et $d) f = 3200Hz$). Etant donné que les fréquences varient, les paramètres $k \times L$ de ces courbes sont aussi différents. Il a été montré au chapitre 6 que ce paramètre devait être supérieur à 9 afin que l'erreur dûe à la discrétisation ne fausse

pas le résultat de l'intégrale. Pour ces reconstructions, les valeurs $k \times L$ correspondantes sont égales à : $a)6.6$, $b)9.5$, $c)13.5$ et $d)17$. La présence d'un effort tranchant au centre de la limite apparaît nettement sur les figures 7.3 b), c) et d), pour lesquelles le critère $k \times L > 9$ est respecté. Ce n'est pas le cas sur la figure 7.3 a), où l'effort tranchant n'est pas discernable, les surfaces S_i étant trop petites face aux longueurs d'onde des basses fréquences et le critère n'est pas respecté.
Sur les figures 7.3 b), c) et d), où la présence de l'effort excitateur émerge bien, on remarque cependant que sur les parties du bord de la plaque non excitées, la moyenne pondérée calculée n'est pas nulle où même très faible. Ceci dénote la présence de bruit de mesure assez important.

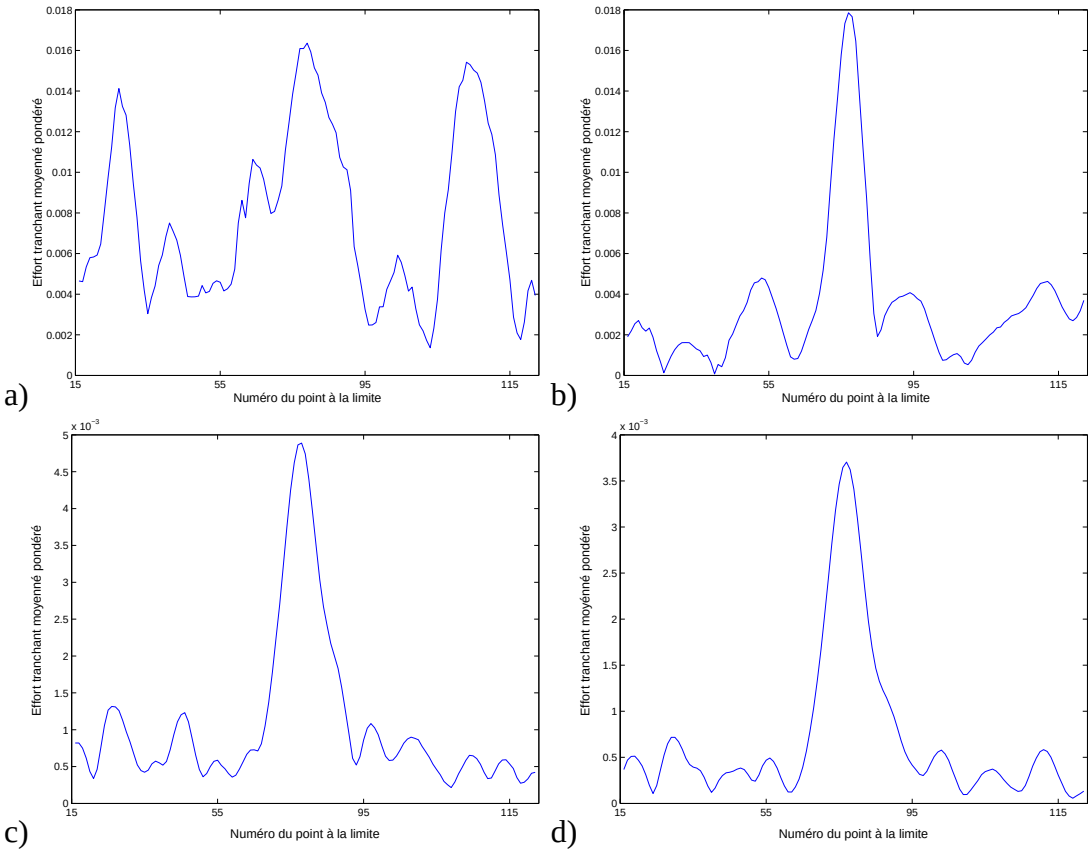


FIG. 7.3 – Effort tranchant moyenné pondéré à la limite d'une plaque, surface d'intégration $15 \times 15cm$, pas de discrétisation $\Delta = 0.5cm$, pour différentes fréquences $a)f = 500Hz$, $b)f = 1000Hz$, $c)f = 2200H$ et $d)f = 3200Hz$, et $k \times L$: $a)6.6$, $b)9.5$, $c)13.5$ et $d)17$.

7.3.2 Reconstruction de l'effort tranchant local à la limite

On s'intéresse ici, à la reconstruction de l'effort tranchant au point A (voir figure 7.1) par déconvolution des répartitions des moyennes pondérées. L'étape de déconvolution est décrite au paragraphe 5.3.4 et nécessite la troncature de valeurs singulières lors de l'inversion de la matrice $[\eta]$. A chaque fréquence, on choisit à l'aide d'une courbe en L, le paramètre de troncature r optimal. La figure 7.4 montre la courbe en L obtenue pour la fréquence $1600Hz$. On remarque qu'elle présente un point d'inflexion très marqué, ce qui facilite le choix de r. Ce paramètre varie de $r = 5$ en basses fréquences jusqu'à $r = 35$ pour la fréquence maximum étudiée $f = 3200Hz$.

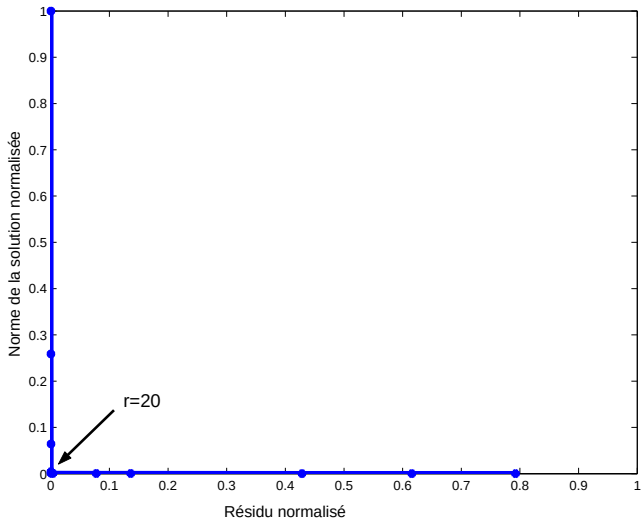


FIG. 7.4 – Courbe en L pour le choix du paramètre de troncature lors de l'inversion de la matrice $[\eta]$ pour $f = 1600Hz$.

La figure 7.5 montre les efforts tranchants obtenus après déconvolution pour 4 fréquences ($a)500Hz$, $b)1000Hz, c)2200H$ et $d)3200Hz$). A nouveau, la présence d'un effort localisé apparaît nettement sur les figures $b), c)$ et $d)$ dont les paramètres respectent le critère $k \times L > 9$. Cependant, les amplitudes du pic principal représentant l'excitation, ne correspondent pas avec les modules de l'effort tranchant issus de la mesure directe (cf figure7.6) pour chacune de ces fréquences.
Les distributions reconstruites figure 7.5 sont homogènes à des N/m, contrairement à la mesure directe qui est homogène à des N. Le pas de dicrétisation Δ est donc à prendre en compte pour comparer ces deux quantités.

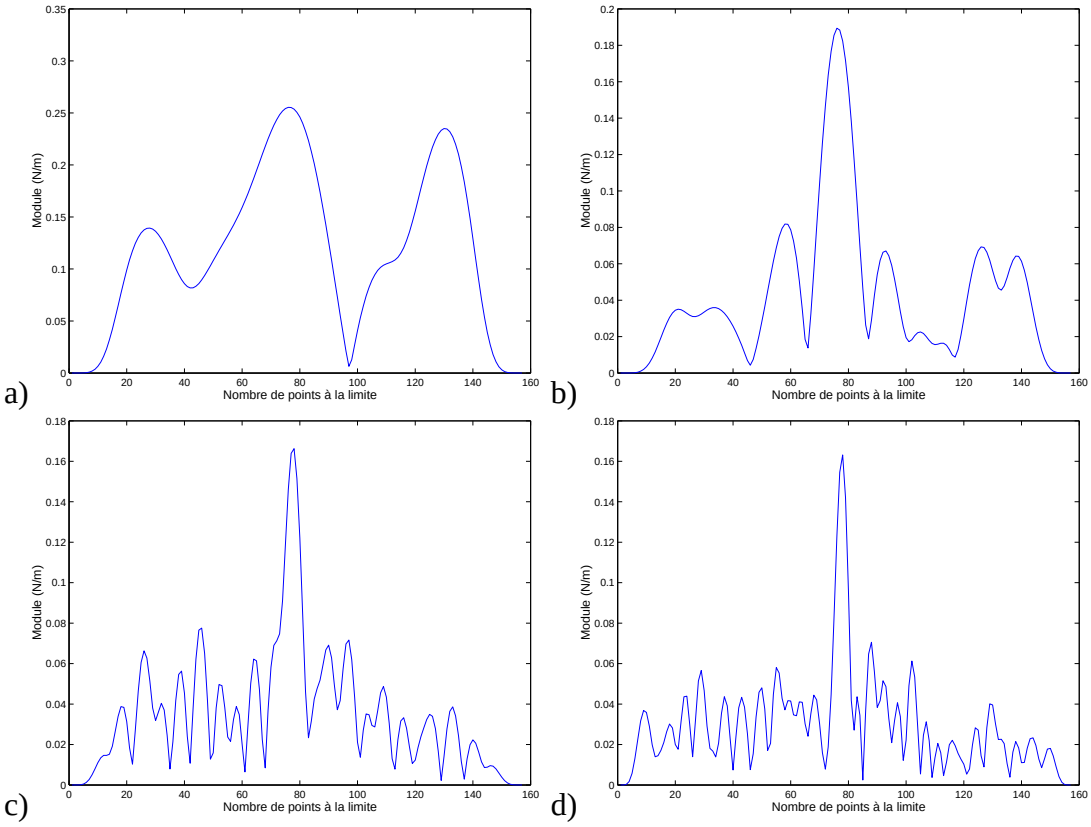


FIG. 7.5 – Modules des distributions d'effort tranchant à la limite d'une plaque, surface d'intégration $15 \times 15cm$, pas de discrétisation $\Delta = 0.5cm$, pour différentes fréquences $a)500Hz$, $b)1000Hz$, $c)2200Hz$ et $d)3200Hz$, et pour des valeurs de $k \times L$ correspondantes à : $a)6.6$, $b)9.5$, $c)13.5$ et $d)17$.

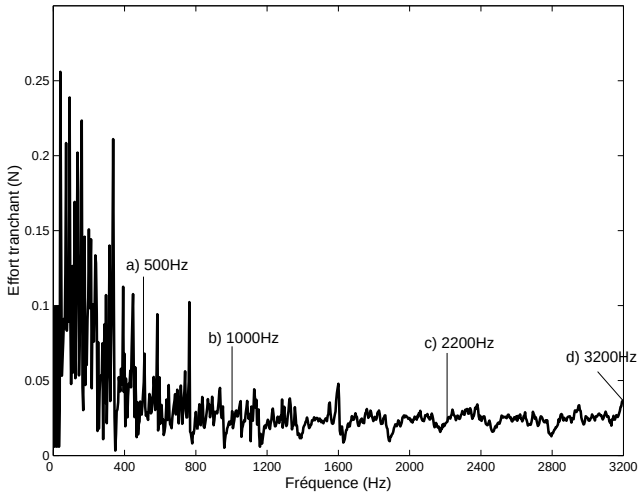


FIG. 7.6 – Module de l'effort tranchant issu de la mesure directe

De plus il semble qu'apparait un phénomène perturbant le résultat de la déconvolution, analogue au phénomène de Gibbs dans le cas des transfrormées de Fourier de discontinuités. L'effort tranchant à reconstruire ici présente également une forte discontinuité puisqu'on applique un effort externe quasi ponctuel à la limite du domaine.
Ce type de phénomène apparaissant généralement lors d'identification de sources discontinues est dû à la troncature de valeurs singulières lors de l'inversion de la matrice $[\eta]$. Il agit de la même manière qu'un filtre passe-bas en nombre d'onde. Le résultat est lissé et des oscillations autour de la discontinuité apparaîssent(cf [PG 95b]). La figure 7.7 illustre de manière générale ce phénomène. La longueur d'onde de ces oscillations dépend de la troncature choisie. On constate effectivement que les oscillations de la courbe 7.5 b) ($f = 1000Hz$ et $r = 10$) ont une longueur d'onde plus grande que celles de la courbe 7.5 d) ($f = 3200Hz$ et $r = 35$). Ceci prouve que ces perturbations ne sont pas seulement dûes au bruit, car la longueur d'onde des oscillations dépendent du paramètre de troncature. Un phénomène de lissage intervient donc lors de la déconvolution. Ce lissage change l'amplitude et la forme de la répartition, seule l'aire engendrée par ces courbes reste inchangée. C'est cette quantité que nous comparerons avec la mesure directe. Comme les quantités calculées sont complexes, il est indispensable de séparer le calcul réel du calcul imaginaire.

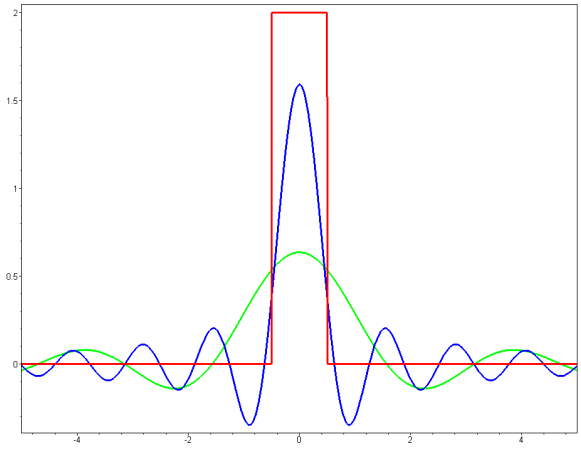


FIG. 7.7 – Exemple de phénomène de lissage après déconvolution et troncature de valeurs singulières. Ligne rouge : Discontinuité originale, ligne bleue : Reconstruction lissée, utilisant x valeurs singulières, ligne verte : Reconstruction lissée, utilisant y valeurs singulières, avec $y < x$.

La figure 7.8 présente l'évolution avec la fréquence du module et de la phase issues de la mesure directe (courbe noire épaisse) ainsi que celles issues de la reconstruction (fine courbe grise). La troi-

sième courbe est le niveau d'erreur de la reconstruction du module. La reconstruction du module est bonne à partir de $1000Hz$ ($k \times L = 9.5$), ce qui correspond aux limites fréquentielles établies lors des simulations numériques du chapitre 6. Le niveau d'erreur du module reste globalement entre $\pm 2dB$ à partir de cette limite, à l'exception d'un pic autour de $1100Hz$. En basses fréquences (en dssous de $800Hz$), la reconstruction présente des résultats très éloignés de l'effort tranchant issu des mesures directes, la surface d'intégration S_i devient trop petite face aux longueurs d'onde, et le critère $k \times L > 9$ n'est plus respecté. Pour compenser, cela il est possible d'envisager une surface de mesure plus importante.

La reconstruction de la phase est quant à elle décevante. Même si quelques tendances communes apparaissent (autour de $2000Hz$), la phase reconstruite est généralement éloignée de $\pm 1rad$ de la phase mesurée.

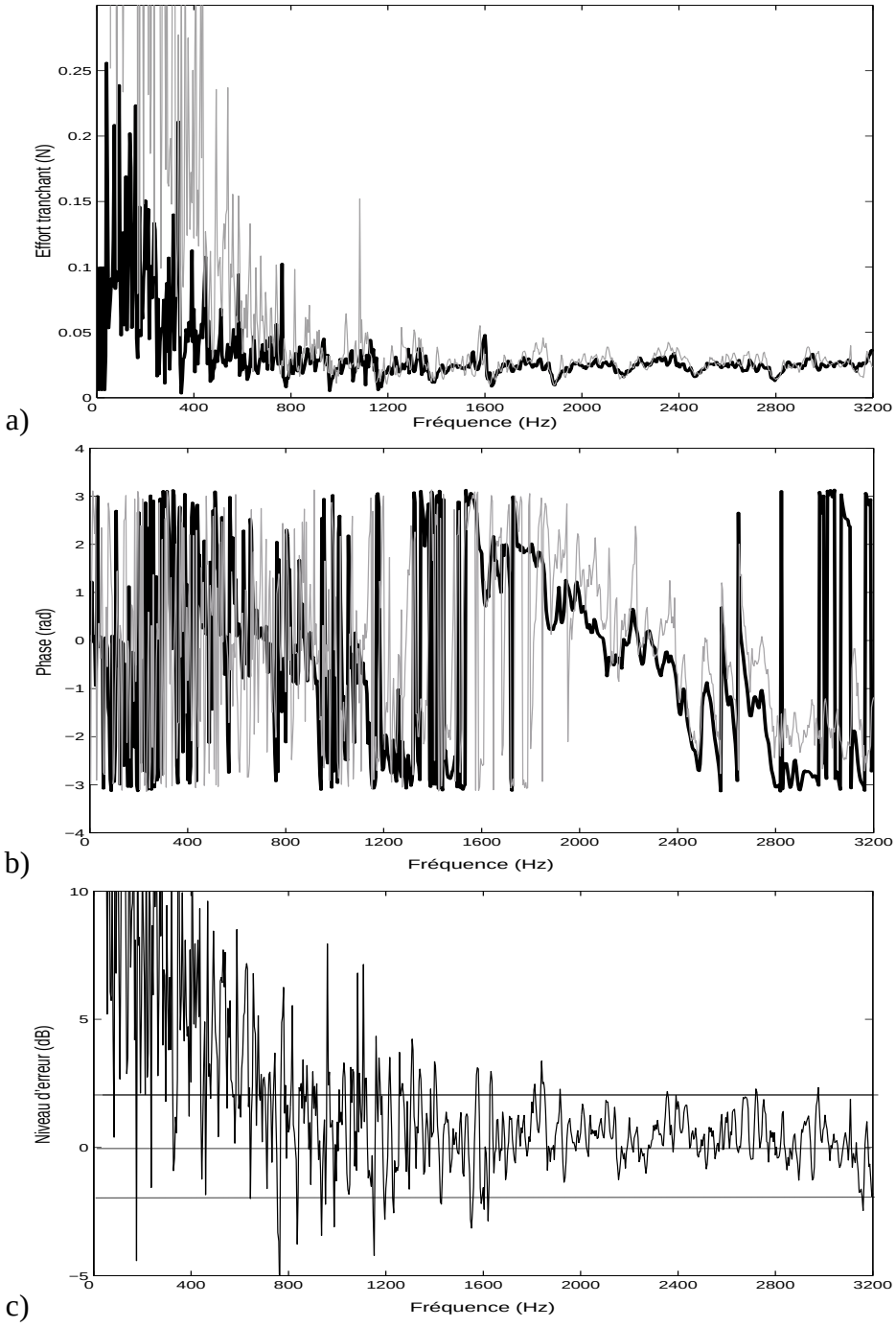


FIG. 7.8 – Reconstruction de l'effort tranchant. Courbe noire épaisse : Mesure directe, fine courbe grise : reconstruction. a)Module, b)Phase et c)Niveau d'erreur.

7.4 Conclusions

Ce chapitre a permis de valider expérimentalement la méthode de reconstruction d'effort tranchant. Une plaque suspendue a servi de support à cette expérience. Celle-ci a été excitée par un pot vibrant sur l'un de ses bords libres. Ainsi, une reconstruction de l'effort tranchant a pu être effectuée en un point limite du domaine de mesure. La mise en oeuvre expérimentale de la méthode est encourageante mais une marge de perfectionnement subsiste. Le cas choisi par simplicité du montage de l'expérience et la possibilité de mesure directe de l'effort tranchant s'est révélé délicat par la présence du phénomène de Gibbs. Pour une identification de densité de force continue apparaissant par exemple à une liaison avec une autre plaque, le reconstruction ne présenterait pas cette difficulté. On peut donc envisager d'étendre une telle technique sur des cas industriels simples.

Conclusion Générale

L'identification appliquée aux structures est un problème clé de la maîtrise de la vibroacoutique. La mesure directe des efforts est souvent impossible et seuls les déplacements vibratoires sont accessibles. Dans ce contexte des méthodes ont été proposées visant à caractériser les efforts pour les déplacements qu'ils induisent. L'approche la plus directe utilise la fonction de transfert entre un effort connu et l'effet qu'il produit, par linéarité on peut utiliser la relation en sens inverse pour identifier les efforts quand la position de l'excitation est connue. En second lieu, l'intensimétrie de structure a été envisagée et repose sur l'estimation des dérivées par différences finies. On obtient la cartographie des vecteurs d'intensité qui permettent la localisation des sources ponctuelles en terme de puissance injectée. L'inconvénient de l'approche tient à son aspect ponctuel qui n'autorise pas de régularisation et les erreurs de mesure entraînent de fortes incertitudes sur le résultat.
La méthode RIFF (cf. [PEZ 96]) developpée ces dernières années est une technique d'identification des efforts appliqués à une structure, à partir de la connaissance de son champ de déplacement mesuré en un nombre fini de points. Elle autorise une régularisation par filtrage dans le domaine des nombres d'ondes. Cependant, les efforts aux limites des structures ne peuvent pas être identifiés car la méthode RIFF devient imprécise. L'idée de la méthode indirecte exposée dans ce mémoire est venue de cette constatation. L'approche developpée permet la reconstruction d'efforts aux limites à partir de la mesure de déplacements de la structure, le cas des poutres et des plaques en flexion sont traités. Toute la difficulté du problème réside dans le fait que les efforts internes au matériaux sont des quantités directement liées aux dérivées spatiales du déplacement, et que ces dérivées ne sont pas mesurables directement.

Dans une première partie, la théorie établissant les bases de la méthode de mesure indirecte d'effort aux limites, a été développée dans le cas des poutres en flexion. Elle se base sur la forme faible de l'équation de mouvement, et l'introduction de fonctions tests propres à chaque quantité recherchée.

Des fonctions tests sont proposées sous forme polynômiale et l'approche est appliquée à des poutres d'abord avec des expériences numériques puis avec des données expérimentales.
Dans une seconde partie, l'approche théorique a été généralisée pour l'application au cas des plaques. La stratégie est identique à celle des poutres même si techniquement les calculs sont plus lourds. Elle permet l'extraction d'effort tranchant, du moment fléchissant ou de la pente à la limite du domaine considéré. A nouveau le choix d'une fonction test est nécessaire et se détermine à partir de conditions aux limites particulières dépendantes de la quantité recherchée. Par rapport au problème des poutres, une étape supplémentaire de déconvolution de la répartition d'efforts à la limite est nécessaire pour les plaques. Cette déconvolution pose une réelle difficulté car le problème est mal posé et conduit à l'utilisation de la troncature des valeurs valeurs singulières. Des simulations numériques ainsi qu'une expérimentation ont montré la faisabilité de l'approche.
Il est important de souligner que dans les deux cas, poutres ou plaques, la discrétisation des intégrales engendre des approximations. Afin que celles-ci ne faussent pas l'identification, nous avons défini des critères de maillage qui évoluent avec la fréquence.

L'approche développée se démarque des autres techniques d'identification (cf. [PEZ 96], [FS 96], [ZMI 96a],...) par deux principaux aspects :
-l'utilisation d'une formulation faible de l'équation de mouvement ce qui est nouveau dans cette problèmatique d'identification indirecte d'efforts. L'approche intégrale qui en résulte permet ainsi d'appréhender le problème d'une manière générale.
-l'identification d'efforts aux limites est également une originalité. Les travaux d'identifications ou de localisations ne s'intéressent généralement pas aux limites car les méthodes inverses deviennent imprécises à leurs approches.

On voit apparaître à travers ces caractéristiques un certain nombre d'avantages qui font la force de la méthode :
-sa stabilité face aux incertitudes, dûe à une régularisation naturelle liée à l'expression intégrale.
-son approche générale qui permet, à travers le choix de la fonction test, l'extraction de différents quantités (pente, moment fléchissant et effort tranchant) à partir d'une même mesure.

Les résultats obtenus lors de ce travail sont prometteurs, mais d'autres aspects mériteraient d'être approfondi :

- La validation expérimentale sur plaque s'est avérée complexe et nécessiterait d'être approfondie. La reconstruction d'un moment ou d'une répartition d'efforts tranchant sans discontinuité le long de la limite compléterait les expérimentations déjà menées.
- L'utilisation la forme faible des équations est prometteuse. De nouvelles fonctions tests méritent d'être recherchées afin d'accéder avec une même mesure à des quantités énergétiques telle que l'intensité structurelle.
- Enfin, l'adaptation de la méthode à des codes types élements finis serait intéressante. Car, même si cette étude a prouvé la faisabilité d'une telle approche pour la reconstruction d'efforts, seuls des cas simples ont été traités ici (poutre, plaque). On peut ainsi envisager d'étendre la méthode à des cas plus complexes nécessitant notamment l'utilisation de codes numériques.

Annexe A

Calcul détaillé de l'équation intégrale générale du cas des poutres en flexion

Cette annexe présente, le calcul permettant l'obtention l'équation 1.9 sous sa forme la plus générale. Toutes les étapes mathématiques y sont developpées. On rappelle que ce calcul est destiné aux identifications d'efforts pour les poutres et que les vibrations transversalles sont modélisées par des équations différentielles du quatrième ordre. Ce mouvement de flexion est régi par l'équation :

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x) - \rho S\omega^2 w(x) = F(x) \tag{A.1}$$

où ρ est la masse volumique du matériaux, E le module d'Young complexe du matériaux, I l'inertie de flexion, w le déplacement transversal, S la section de la poutre, ω la pulsation de l'excitation et $F(x)$ l'excitation. Les quantités à extraire sont

$$\begin{cases} T(x) = EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x) \\ \\ M(x) = EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x) \end{cases} \tag{A.2}$$

L'équation de mouvement A.1, est multipliée par une fonction arbitraire $\eta(x)$ définie ultérieurement. L'égalité résultante est intégrée sur un intervalle défini [a,b].

$$\int_a^b \eta(x)[EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x) - \rho S\omega^2 w(x)]dx = \int_a^b \eta(x)F(x)dx \tag{A.3}$$

où a et b sont les deux points définissant les limites du domaine d'intégration.

L'intégration par partie dont la formule est rappelé en A.4, permet de faire diminuer l'ordre de dérivation d'une fonction dans une intégrale.

$$\int uv' = [uv] - \int u'v \tag{A.4}$$

où u et v sont deux fonctions quelconques dérivables sur l'intervalle considéré. u' et v' sont les dérivées respectives de u et v. On constate bien, dans cette formulation, que la fonction v voit son ordre de dérivation chuter entre le terme de droite et le terme de gauche de cette équation. C'est cet aspect de l'intégration par partie qui est exploité par la suite pour faire disparaitre les dérivées spatiales du déplacement présentes dans l'équation A.1.

Afin de faciliter la compréhension des calculs, l'intégrale qui sera traitée est isolée dans la partie gauche de l'équation A.3, qui devient :

$$\int_a^b \eta(x)[EI\frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4}]dx = \int_a^b \eta(x)w(x)\rho S\omega^2 dx + \int_a^b \eta(x)F(x)dx \tag{A.5}$$

On remarque que la partie droite de l'équation ne contient plus que des termes connus (η), mesurable (w) ou nul (F dans le cas où il n'y aurait pas d'effort directement appliqué dans le domaine d'intégration). Après une intégration par partie sur le terme de gauche, on obtient :

$$[EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x)\eta(x)]_a^b - \int_a^b \frac{\partial \eta}{\partial x}(x)[EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x)]dx = \int_a^b \eta(x)w(x)\rho S\omega^2 + \int_a^b \eta(x)F(x)dx \tag{A.6}$$

On conserve dans cette annexe le terme d'effort extérieur F afin d'obtenir une forme générale de l'équation intégrale. On reconnait dans le terme de gauche, l'effort tranchant dont la forme est rappelé en A.2. En developpant on obtient :

$$EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(b)\eta(b) - EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(a)\eta(a) - \int_a^b \frac{\partial \eta}{\partial x}(x)[EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x)]dx = \int_a^b \eta(x)w(x)\rho S\omega^2 + \int_a^b \eta(x)F(x)dx \tag{A.7}$$

soit, en identifiant l'effort tranchant en b et en a :

$$T(b)\eta(b) - T(a)\eta(a) - \int_a^b \frac{\partial \eta}{\partial x}(x)[EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x)]dx = \int_a^b \eta(x)w(x)\rho S\omega^2 + \int_a^b \eta(x)F(x)dx \tag{A.8}$$

Afin de continuer à faire chuter l'ordre de dérivation du déplacement contenu dans l'intégrale restante de la partie gauche, d'autre intégrations par parties sont effectuées :

$$\begin{aligned} T(b)\eta(b) - T(a)\eta(a) - EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(b)\frac{\partial \eta}{\partial x}(b) + EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(a)\frac{\partial \eta}{\partial x}(a) + \int_a^b \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}(x)[EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x)]dx \\ = \int_a^b \eta(x)w(x)\rho S\omega^2 + \int_a^b \eta(x)F(x)dx \end{aligned} \tag{A.9}$$

Ce sont maintenant les termes en a et b du moment fléchissant que l'on peut identifier dans cette équation :

$$T(b)\eta(b) - T(a)\eta(a) - M(b)\frac{\partial \eta}{\partial x}(b) + M(a)\frac{\partial \eta}{\partial x}(a) + \int_a^b \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}(x)[EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x)]dx \\ = \int_a^b \eta(x)w(x)\rho S\omega^2 + \int_a^b \eta(x)F(x)dx \tag{A.10}$$

En continuant les intégrations par partie sur l'intégrale restante, on obtient :

$$T(b)\eta(b) - T(a)\eta(a) - M(b)\frac{\partial \eta}{\partial x}(b) + M(a)\frac{\partial \eta}{\partial x}(a) \\ +EI\frac{\partial w}{\partial x}(b)\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}(b) - EI\frac{\partial w}{\partial x}(a)\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}(a) - EIw(b)\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}(b) + EIw(a)\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}(a) \\ + \int_a^b w(x)(EI\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4}(x))dx \\ = \int_a^b w(x)(\rho S\omega^2\eta(x))dx + \int_a^b \eta(x)F(x)dx \tag{A.11}$$

La dernière intégrale présente dans le terme de gauche, ne contient plus de dérivée spatialle du déplacement. On obtient donc l'équation décrite au chapitre 1.

Annexe B

Intégration numérique 1D : Méthode hybride Gauss-Trapézoidale

Cette méthode dite "hybride" à été développée par Alper [ALP 99]. Elle propose une version modifiée de la méthode trapézoidale, en changeant les localisations et les pondérations d'un certain nombre de points d'intégration aux limites. La méthode donne une très bonne approximation de l'intégrale discrétisée, et se présente comme un compromis intéressant entre la méthode trapézoidale et la méthode de Gauss-Legendre.

B.1 Principe de la méthode

Celle-ci combine les deux approches précédemment présentées. Elle utilise un maillage régulier, type intégration trapézoidale en son centre, et un maillage irrégulier et des pondérations lorsqu'on se rapproche des limites.
La formulation généralisée sur un intervalle [a,b] est :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a}(& \underbrace{h\Sigma_{i=1}^{j} A_i f(x_i h)}_{Intégration\ de\ la\ partie\ gauche\ du\ domaine\ (pas\ irrégulier)} + \\ & \underbrace{h\Sigma_{i=0}^{n-1} f(\alpha h + ih)}_{Intégration\ de\ la\ partie\ centrale\ du\ domaine\ (pas\ régulier)} + \\ & \underbrace{h\Sigma_{i=1}^{j} A_i f(1 - x_i h)}_{Intégration\ de\ la\ partie\ droite\ du\ domaine\ (pas\ irrégulier)})\end{aligned} \tag{B.1}$$

Trapezoïdale		Gauss		Hybrid	
x_i	A_i	x_i	A_i	x_i	A_i
0.000	0.055	0.013	0.033	0.022	0.057
0.111	0.111	0.067	0.074	0.111	0.107
0.222	0.111	0.160	0.109	0.222	0.111
0.333	0.111	0.283	0.134	0.333	0.111
0.444	0.111	0.425	0.147	0.444	0.111
0.555	0.111	0.574	0.147	0.555	0.111
0.666	0.111	0.716	0.134	0.666	0.111
0.777	0.111	0.839	0.109	0.777	0.111
0.888	0.111	0.932	0.074	0.888	0.107
1.000	0.055	0.986	0.033	0.977	0.057

TAB. B.1 – Localisations des 10 points d'intégration et leurs coefficients de pondération pour chaque méthode, sur une intervalle [0,1]

où *n* est le nombre de points compris dans l'intervalle central, ceux-ci sont séparés par un pas régulier *h*, α est un paramêtre défini par $\alpha = \frac{1}{2}(1 - n + 1/h)$, *j* est le nombre de points du maillage irrégulier des intervalles latéraux de longueur αh, et A_i est le coefficient de pondération appliqué au point numéro i. Les paramètres j et n sont variables. On remarquera que l'on retrouve une intégration de type trapézoidale si $j = 0$.

Le tableau B.1 complète le tableau 2.1 et permet de visualiser les différences entre les trois types d'intégrations numériques proposés. Sur un interval $[0, 1]$, on considère une intégration numérique utilisant 10 points. Pour la méthode hybride, on choisit $j = 2$ et $i = 6$. Le tableau donne la localisation x_i et la pondération A_i appliquée pour chaque point utilisé :

Pour le calcul des coefficients de pondération et des localisations, on renverra le lecteur aux ouvrages et publications appropriés déjà cités. On notera que la valeur 0.111 présente dans le tableau correspond à la valeur sur pas Δx lorsque le maillage est régulier.

On observe que le maillage hybride, présente l'avantage de ne pas nécessiter de mesure aux bornes. Une grande partie de son maillage est régulier, ce qui facilite la mise en place pratique d'une telle méthode.

Les figures B.1 présentent les résultats expérimentaux de reconstruction de l'effort tranchant, utilisant un maillage et une intégration de type hybride. Ils prouvent la faisabilité d'utilisation de ce type d'intégration pour la méthode proposée. Les résultats ne sont pas fondamentalement meilleurs que ceux obtenus avec d'autres types d'intégrations numériques. L'intéret d'une telle approche est l'utilisation d'un maillage principalement régulier donc simple à mettre en place, et ne nécessitant pas de mesure à la limite. Ceci peut être un avantage déterminant dans le choix de la méthode d'intégration dans certains cas pratiques.

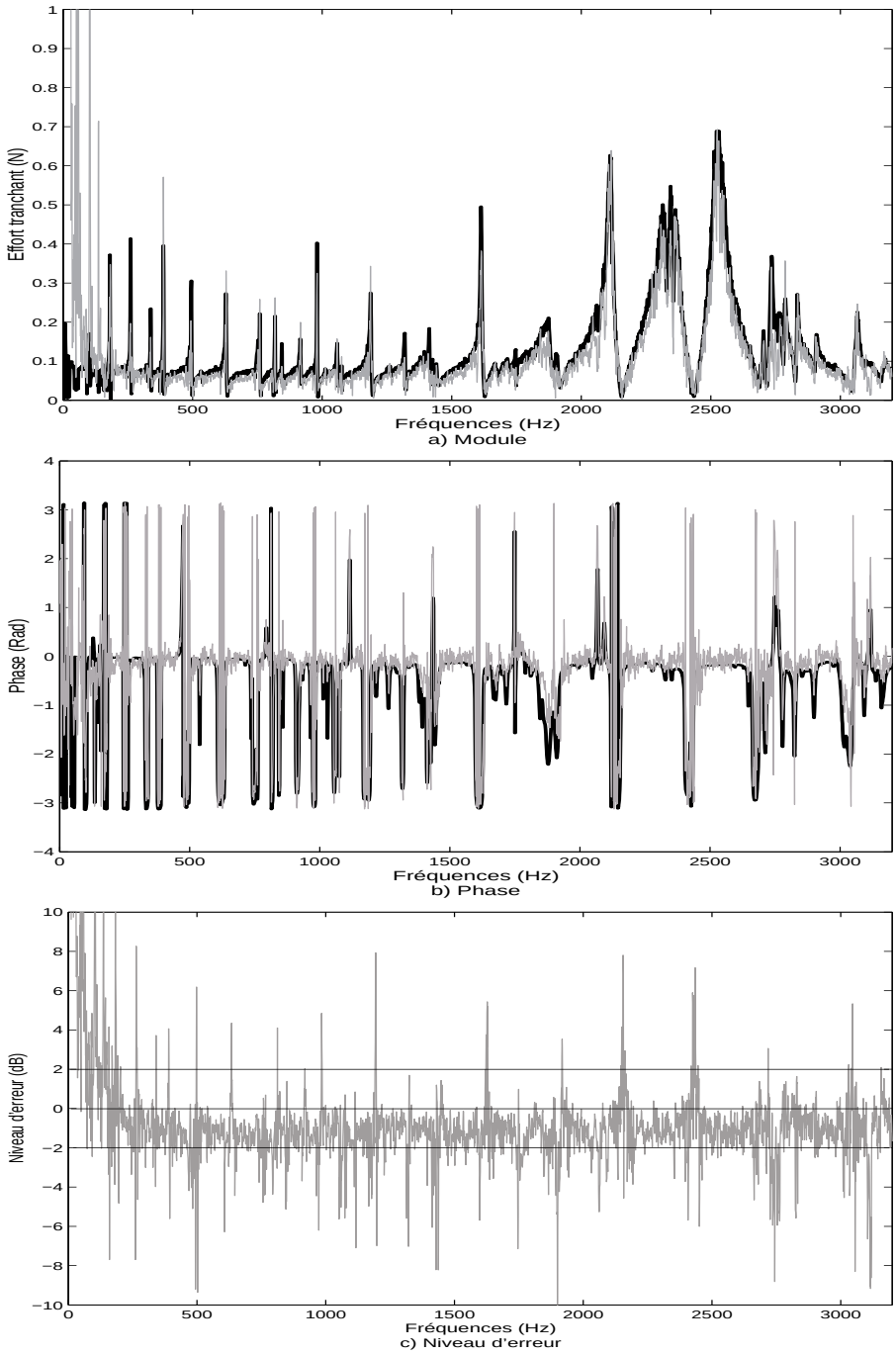


FIG. B.1 – Reconstruction de l'effort tranchant en utilisant une intégration de type hybride. Mesure directe : courbe noire épaisse, reconstruction : fine courbe grise.

Annexe C

Calcul détaillé de l'équation intégrale générale du cas des plaques en flexion

On rappelle que les quantités recherchées sont l'effort tranchant et le moment fléchissant à la limite d'une plaque. Ces dernières dépendent directement des dérivées spatiales du déplacement. L'équation de départ est la fonctionnelle d'Hamilton [GUY 02]. Celle-ci présente l'avantage de ne dépendre que des dérivées temporelles ou spatiales du déplacement, contrairement à d'autres fonctionnelles dites mixtes, qui utilisent également les contraintes et les déformations (cf. fonctionnelle de Reissner [GUY 02]) :

$$H(W(x_1,x_2,t) = \int_{t_1}^{t_0}\int_S \left[\rho\frac{h}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 - \frac{D}{2}\left(\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2}\right)^2 \right.\right. \\ \left.\left. +2\nu\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2\right)\right] dx_1 dx_2 dt \tag{C.1}$$

Les méthodes variationnelles proposent de décomposer le champ de déplacement $W(x_1,x_2,t)$ de la façon suivante :

$$W(x_1,x_2,t) = w(x_1,x_2,t) + \lambda W^*(x_1,x_2,t) \tag{C.2}$$

où λ est une constante, et $W^*(x_1,x_2,t)$ est un déplacement virtuel, cinématiquement admissible.
La minimisation de H s'écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\, H\left[w(x_1,x_2,t) + \lambda W^*(x_1,x_2,t)\right]\big|_{\lambda=0} = 0 \tag{C.3}$$

Après dérivation pour $\lambda =$on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\lambda}\, H\left[w(x_1,x_2,t)+\lambda W^*(x_1,x_2,t)\right]|_{\lambda=0} = \quad & \int_{t_1}^{t_0}\int_S \Big[\rho h\frac{\partial w}{\partial t}(x_1,x_2,t)\frac{\partial W^*}{\partial t}(x_1,x_2,t) \\ & -\frac{D}{2}\Big(2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}(x_1,x_2,t)\frac{\partial^2 W^*}{\partial x_1^2}(x_1,x_2,t)+2\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}(x_1,x_2,t)\frac{\partial^2 W^*}{\partial x_2^2}(x_1,x_2,t) \\ & +2\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}(x_1,x_2,t)\frac{\partial^2 W^*}{\partial x_2^2}(x_1,x_2,t)+\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}(x_1,x_2,t)\frac{\partial^2 W^*}{\partial x_1^2}(x_1,x_2,t)\right) \\ & +4(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}(x_1,x_2,t)\frac{\partial^2 W^*}{\partial x_1\partial x_2}(x_1,x_2,t)\Big)\Big]\, dx_1dx_2dt\end{aligned} \tag{C.4}$$

En considérant les simplifications d'écriture suivantes :

$$w(x_1,x_2,t) = w(x_1,x_2)e^{-j\omega t} \tag{C.5}$$
$$W^*(x_1,x_2,t) = W^*(x_1,x_2)e^{-j\omega t}$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1,x_2) = F_{,i} \tag{C.6}$$

on obtient :

$$\int_S -\rho h\omega^2 wW^* - D\left[w_{,11}W^*_{,11}+w_{,22}W^*_{,22}+\nu(w_{,11}W^*_{,22}+w_{,22}W^*_{,11}\right) \tag{C.7}$$
$$+2(1-\nu)w_{,12}W^*_{,12}\,]\,dx_1dx_2 \quad = 0\,\forall\, W^* \tag{C.8}$$

soit :

$$\int_S -\rho h\omega^2 wW^* dx_1dx_2 = D\int_S [w_{,11}W^*_{,11}+w_{,22}W^*_{,22}+\nu(w_{,11}W^*_{,22}+w_{,22}W^*_{,11}) \tag{C.9}$$
$$+2(1-\nu)w_{,12}W^*_{,12}\,]\,dx_1dx_2$$

Afin de décomposer le calcul, on pose :

$$-\int_S \rho h\omega^2 wW^* dx_1dx_2 = D\times(A_1+A_2+A_3+A_4) \tag{C.10}$$

avec

$$A_1 = \int_S (w_{,11}W^*_{,11}+w_{,12}W^*_{,12})dx_1dx_2 \tag{C.11}$$
$$A_2 = \int_S (w_{,22}W^*_{,22}+w_{,12}W^*_{,12})dx_1dx_2$$
$$A_3 = \nu\int_S (w_{,11}W^*_{,22}-w_{,12}W^*_{,12})dx_1dx_2$$
$$A_4 = \nu\int_S (w_{,22}W^*_{,11}-w_{,12}W^*_{,12})dx_1dx_2$$

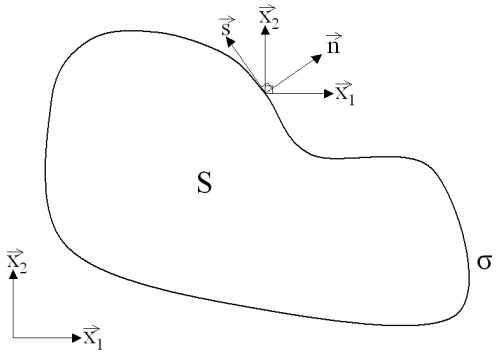


FIG. C.1 – Représentation des vecteurs unitaires en un point du contour σ. $\vec{n}$ normale, $\vec{s}$ tangente.

On rappelle les égalités suivantes, appelées communément première identité de Green [CM 88] :

$$\begin{aligned}\int_S (u_{,1}\, v_{,1} + u_{,2}\, v_{,2})dx_1dx_2 &= -\int_S (u\Delta v)dx_1dx_2 + \int_\sigma uv_{,n}\, d\,\vec{s} \\ &= -\int_S u(v_{,11} + v_{,22})dx_1dx_2 + \int_\sigma u(n_1v_{,1} + n_2v_{,2})d\,\vec{s}\end{aligned} \tag{C.12}$$

Ainsi qu'une autre forme qui dérive de la première [CM 88] :

$$\begin{aligned}\int_S (u_{,1}\, v_{,2} - u_{,2}\, v_{,1})dx_1dx_2 &= \int_\sigma uv_{,s}\, d\,\vec{s} \\ &= \int_\sigma u(-n_2v_{,1} + n_1v_{,2})d\,\vec{s}\end{aligned} \tag{C.13}$$

où u et v sont deux fonctions quelconques, σ le contour de la surface S, $\vec{s}$ et $\vec{n}$ sont le vecteur tangent et le vecteur normal du contour, n_1 et n_2 sont les cosinus directeurs du vecteur normal $\vec{n}$.
En utilisant les expressions C.12 ou C.13 on obtient :

$$\begin{aligned}A_1 &= \int_S (w_{,11}\, W^*_{,11} + w_{,12}\, W^*_{,12})dx_1dx_2 \\ &= -\int_S W^*_{,1}\,(w_{,111} + w_{,122})dx_1dx_2 + \int_\sigma W^*_{,1}\,(n_1w_{,11} + n_2w_{,12})d\,\vec{s}\end{aligned} \tag{C.14}$$

$$\begin{aligned}A_2 &= \int_S (w_{,22}\, W^*_{,22} + w_{,12}\, W^*_{,12})dx_1dx_2 \\ &= -\int_S W^*_{,2}\,(w_{,222} + w_{,211})dx_1dx_2 + \int_\sigma W^*_{,2}\,(n_1w_{,12} + n_2w_{,22})d\,\vec{s}\end{aligned} \tag{C.15}$$

$$\begin{aligned} A_3 &= \nu \int_S (w_{,11} W^*_{,22} - w_{,12} W^*_{,12}) dx_1 dx_2 \\ &= -\nu \int_\sigma W^*_{,2} (-n_2 w_{,11} + n_1 w_{,12}) d\vec{s} \end{aligned} \tag{C.16}$$

$$\begin{aligned} A_4 &= \nu \int_S (w_{,22} W^*_{,11} - w_{,12} W^*_{,12}) dx_1 dx_2 \\ &= \nu \int_\sigma W^*_{,1} (-n_2 w_{,12} + n_{,1} w_{,22}) d\vec{s} \end{aligned} \tag{C.17}$$

Des intégrales de surfaces et de contours résultent de ces modifications. En sommant les intégrales de surface comprises dans C.14 et C.15 puis en utilisant à nouveau les formules de Green, on obtient :

$$\begin{aligned} A_{Surface} &= -\int_S (W^*_{,1} w_{,111} + W^*_{,2} w_{,211} + W^*_{,1} w_{,221} + W^*_{,2} w_{,122}) dx_1 dx_2 \\ &= \int_S W^* (w_{,1111} + 2w_{,1122} + w_{,2222}) dx_1 dx_2 - \int_\sigma W^* (w_{,11n} + w_{,22n}) d\vec{s} \\ &= \int_S W^* \Delta^2 w dx_1 dx_2 - \int_\sigma W^* (w_{,11n} + w_{,22n}) d\vec{s} \end{aligned} \tag{C.18}$$

où Δ^2 est le bilaplacien, défini par :

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \tag{C.19}$$

Pour les intégrales de contours restantes dans les équations C.14, C.15, C.16, et C.17, on utilise la relation suivante de changement de base :

$$\begin{cases} W^*_{,1} = n_1 W^*_{,n} - n_2 W^*_{,s} \\ W^*_{,2} = n_2 W^*_{,n} + n_1 W^*_{,s} \end{cases} \tag{C.20}$$

En sommant ces intégrales de contours, on obtient :

$$\begin{aligned} A_{Contour} = \int_\sigma [&((\nu - 1) n_1 n_2 (w_{,11} - w_{,22}) + (\nu - 1)(n_2^2 - n_1^2) w_{,12}) W^*_{,s} \\ &+ ((n_1^2 + \nu n_2^2) w_{,11} + (n_2^2 + \nu n_1^2) w_{,22} + 2(1 - \nu) n_1 n_2 w_{,12}) W^*_{,n}] d\vec{s} \end{aligned} \tag{C.21}$$

Si les dérivées spatiales du déplacement sont changées en dérivées tangentielles et normales à l'aide des relations :

$$\begin{cases} w_{,1} = n_1 w_{,n} - n_2 w_{,s} \\ w_{,2} = n_2 w_{,n} + n_1 w_{,s} \end{cases} \tag{C.22}$$

on obtient :

$$A_{Contour} = \int_{\sigma} [W^*{}_{,s}\,(1-\nu)w_{,n}\,s + W^*{}_{,n}\,(w_{,nn} + \nu w_{,ss})]d\,\vec{s} \tag{C.23}$$

La combinaison des équations C.10, C.18 et C.23, donne :

$$-\int_S \rho h\omega^2 w W^* dx_1 dx_2 = D \times (A_{Surface} + A_{Contour}) \tag{C.24}$$

Soit :

$$\begin{aligned} -\int_S \rho h\omega^2 w W^* dx_1 dx_2 &= D\int_S W^*\Delta^2 w dx_1 dx_2 \\ &\quad -D\int_{\sigma} [W^*(w_{,11n} + w_{,22n}) \\ &\quad -W^*{}_{,s}\,(1-\nu)w_{,ns} - W^*{}_{,n}\,(w_{,nn} + \nu w_{,ss})]d\,\vec{s} \end{aligned} \tag{C.25}$$

On sait que le moment fléchissant, exprimé selon les directions normales et tangentielles, a pour expression :

$$M_f(w) = -D(w_{,nn} + \nu w_{,ss}) \tag{C.26}$$

De plus, les formules d'intégration par parties sur contours fermés lisses nous donnent :

$$\int_{\sigma} W^*{}_{,s}\,(1-\nu)w_{,ns}\,d\,\vec{s} = -\int_{\sigma} W^*(1-\nu)w_{,nss}\,d\,\vec{s} \tag{C.27}$$

L'équation C.25 devient :

$$\begin{aligned} -\int_S \rho h\omega^2 w W^* dx_1 dx_2 = \quad & D\int_S W^*\Delta^2 w dx_1 dx_2 \\ - \quad & \int_{\sigma} W^*{}_{,n}\,M_f(w)d\,\vec{s} \\ - \quad & D\int_{\sigma} W^*(w_{,11n} + w_{,22n} + (1-\nu)w_{,nss})d\,\vec{s} \end{aligned} \tag{C.28}$$

On s'intéresse maintenant à la dernière intégrale de cette équation. On sait que :

$$w_{,11} + w_{,22} = \Delta w = w_{,nn} + w_{,ss} \tag{C.29}$$

donc

$$
\begin{aligned}
& -D\int_\sigma W^*(w_{,11n}+w_{,22n}+(1-\nu)w_{,nss})d\vec{s} \qquad \text{(C.30)}\\
= & -D\int_\sigma W^*(w_{,nnn}+w_{,ssn}+(1-\nu)w_{,nss})d\vec{s}\\
= & -D\int_\sigma W^*(w_{,nnn}+\nu w_{,ssn}+2(w_{,ssn}-\nu w_{,ssn}))d\vec{s}\\
= & -\int_\sigma -W^*\frac{\partial M_f}{\partial n}d\vec{s}-D\int_\sigma 2W^*(1-\nu)w_{,ssn}\,d\vec{s}\\
= & -\int_\sigma -W^*\frac{\partial M_f}{\partial n}d\vec{s}-D\int_\sigma 2W^*(1-\nu)\frac{\partial}{\partial s}[-n_2(n_1w_{,11}+n_2w_{,12})+n_1(n_1w_{,12}+n_2w_{,22})]d\vec{s}\\
= & -\int_\sigma -W^*\frac{\partial M_f}{\partial n}d\vec{s}+D\int_\sigma W^*\frac{\partial}{\partial s}(1-\nu)[2n_1n_2(w_{,11}-w_{,22})+2(n_2^2-n_1^2)w_{,12}]d\vec{s}\\
= & \int_\sigma W^*[\frac{\partial M_f}{\partial n}+D\frac{\partial}{\partial s}(1-\nu)[2n_1n_2(w_{,11}-w_{,22})+2(n_2^2-n_1^2)w_{,12}]]d\vec{s}\\
= & \int_\sigma W^*T(w)d\vec{s}
\end{aligned}
$$

L'équation C.28 devient alors :

$$0=\int_S(-\rho h\omega^2w+D\Delta^2w)W^*dx_1dx_2+\int_\sigma W^*T(w)d\vec{s}-\int_\sigma W^*{}_{,n}\,M_f(w)d\vec{s} \qquad \text{(C.31)}$$

Toutes les opérations effectuées peuvent être menées en intervertissant W^* et w. L'équation précédente peut s'écrire aussi :

$$0=\int_S(-\rho h\omega^2W^*+D\Delta^2W^*)wdx_1dx_2+\int_\sigma wT(W^*)d\vec{s}-\int_\sigma w_{,n}\,M_f(W^*)d\vec{s} \qquad \text{(C.32)}$$

Nous introduisons ici, une fonction quelconque η non cinématiquement admissible, remplaçant W^*. Les intégrales ne sont plus nulles, nous retrouvons alors les équations du chapitre 5.

$$H_{,\lambda}\,[w+\lambda\eta]|_{\lambda=0}=\int_S(-\rho h\omega^2w+D\Delta^2w)\eta dx_1dx_2+\int_\sigma \eta T(w)d\vec{s}-\int_\sigma \eta_{,n}\,M_f(w)d\vec{s} \qquad \text{(C.33)}$$

ou sa forme symétrique :

$$H_{,\lambda}\,[w+\lambda\eta]|_{\lambda=0}=\int_S(-\rho h\omega^2\eta+D\Delta^2\eta)wdx_1dx_2+\int_\sigma wT(\eta)d\vec{s}-\int_\sigma w_{,n}\,M_f(\eta)d\vec{s} \qquad \text{(C.34)}$$

L'annexe D montre que les formules utilisées ici, sont valables quel que soit le contour. Cependant, dans le cas où le contour aurait une singularité, l'équation C.27, n'est plus vraie, et des termes correctifs doivent être ajoutés. Pour une singularité à un point A appartenant au contour, l'équation devient alors :

$$\int_\sigma \eta_{,s}\,(1-\nu)w_{,ns}\,d\,\vec{s} = -\int_\sigma \eta(1-\nu)w_{,nss}\,d\,\vec{s} + (\eta w_{,ns}\,|_{A^+} - \eta w_{,ns}\,|_{A^-}) \tag{C.35}$$

où $\eta w_{,ns}\,|_{A^+}$ et $\eta w_{,ns}\,|_{A^-}$ sont les valeurs limites "à droite" et "à gauche" de la fonction autour du point A. Ces termes correctifs doivent être ajoutés pour chaque singularité que le contour possède. Les équations C.31 et C.32 deviennent alors :

$$\begin{aligned} -H_{,\lambda}\,[w+\lambda\eta]|_{\lambda=0} = \; & \textstyle\int_S(-\rho h\omega^2 w + D\Delta^2 w)\eta dx_1 dx_2 + \int_\sigma \eta T(w) d\,\vec{s} \\ & - \textstyle\int_\sigma \eta_{,n}\,M_f(w) d\,\vec{s} + (\eta w_{,ns}\,|_{A^-} - \eta w_{,ns}\,|_{A^+}) \end{aligned} \tag{C.36}$$

$$\begin{aligned} -H_{,\lambda}\,[w+\lambda\eta]|_{\lambda=0} = \; & \textstyle\int_S(-\rho h\omega^2 \eta + D\Delta^2 \eta) w dx_1 dx_2 + \int_\sigma w T(\eta) d\,\vec{s} \\ & - \textstyle\int_\sigma w_{,n}\,M_f(\eta) d\,\vec{s} + (\eta_{,ns}\,w\,|_{A^-} - \eta_{,ns}\,w\,|_{A^+}) \end{aligned} \tag{C.37}$$

Annexe D

Singularités des contours, formules de Green

Les calculs détaillés dans l'annexe C et menant à l'équation 5.15 utilisent des formules de transformation d'intégrales de surfaces en intégrales de contour. Comme indiqué en figure D.1, un contour peut posséder une ou plusieurs discontinuités au niveau de sa normale. La question de ces singularités se pose : la première identité de Green est-elle valable dans le cas d'un contour σ présentant des discontinuités de sa normale ?

On rappelle ici la première identité de Green [CM 88] :

$$\int_S (u_{,x}\, v_{,x} + u_{,y}\, v_{,y})dxdy = -\int_S (u\Delta v)dxdy + \int_\sigma uv_{,n}\, d\,\vec{s} \tag{D.1}$$

où u et v sont des fonctions quelconques de x et de y. Les opérations mathématiques suivantes, ont pour but de prouver que les identités de Green peuvent être utilisées quelle que soit la forme de la surface d'intégration.

On considère une surface fermée S, quelconque, traversée par une droite parallèle à l'axe des $\vec{x}$. Le point d'entrée de cette droite dans S est $x_0(y)$ et son point de sortie $x_1(y)$. Avec y compris entre y_{min} et y_{max}. La figure D.2 illustre cette situation.

Si on intègre la dérivée selon x d'une fonction $f(x, y)$ le long de cette droite d'ordonnée y, on obtient :

$$\int_{x_0}^{x_1} f_{,x}(x, y)dx = f(x_1(y), y) - f(x_0(y), y) \tag{D.2}$$

Il suffit ensuite d'intégrer sur y, de y_{min} à y_{max} afin d'obtenir :

$$\int_{y_{min}}^{y_{max}} \int_{x_0}^{x_1} f_{,x}(x, y)dxdy = \int_{y_{min}}^{y_{max}} \left(f(x_1(y), y) - f(x_0(y), y)\right) dy \tag{D.3}$$

soit :

$$\int_{y_{min}}^{y_{max}} \int_{x_0}^{x_1} f_{,x}(x, y)dxdy = \int_{y_{min}}^{y_{max}} f(x_1(y), y)dy + \int_{y_{max}}^{y_{min}} f(x_0(y), y)dy \tag{D.4}$$

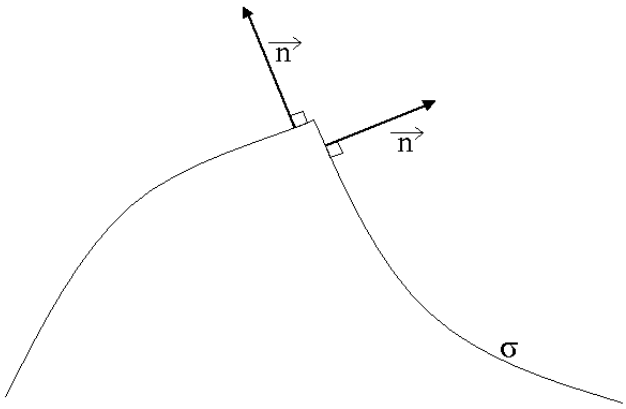


FIG. D.1 – Vecteurs normaux à σ aux abords d'une discontinuité.

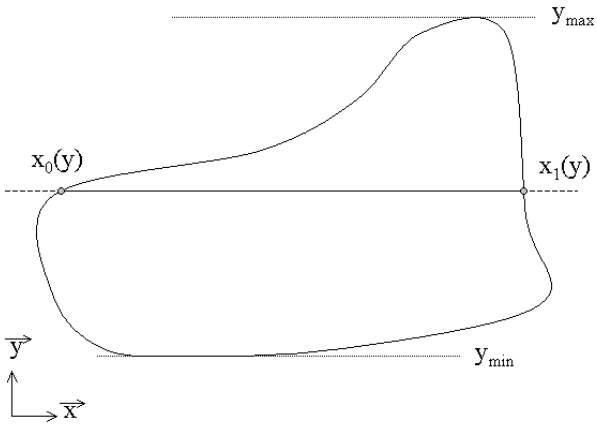


FIG. D.2 – Surface fermée S quelconque

or

$$\int_{y_{min}}^{y_{max}} \int_{x_0}^{x_1} f_{,x}(x,y)dxdy = \int\int_S f_{,x}(x,y)dxdy \tag{D.5}$$

et

$$\int_{y_{min}}^{y_{max}} f(x_1(y),y)dy + \int_{y_{max}}^{y_{min}} f(x_0(y),y)dy = \int_\sigma f(x,y)dy \tag{D.6}$$

donc

$$\int\int_S f_{,x}(x,y)dxdy = \int_\sigma f(x,y)dy \tag{D.7}$$

De la même manière mais en raisonnant dans le système d'axe $(\vec{y}, -\vec{x})$, on obtient :

$$\int\int_S g_{,y}(x,y)dxdy = -\int_\sigma g(x,y)dx \tag{D.8}$$

En sommant ces égalités, on retrouve une relation appelée formule de Gauss :

$$\int\int_S [f_{,x}(x,y) + g_{,y}(x,y)]dxdy = \int_\sigma [f(x,y)dy - g(x,y)dx] \tag{D.9}$$

On pose maintenant :

$$\begin{cases} f(x,y) = u(x,y)v_{,x}(x,y) \quad \Rightarrow \quad f_{,x}(x,y) = u_{,x}(x,y)v_{,x}(x,y) + u(x,y)v_{,xx}(x,y) \\ \\ g(x,y) = u(x,y)v_{,y}(x,y) \quad \Rightarrow \quad g_{,,y}(x,y) = u_{,y}(x,y)v_{,y}(x,y) + u(x,y)v_{,yy}(x,y) \end{cases} \tag{D.10}$$

En combinant ces égalités avec la formule de Gauss, il arrive (en simplifiant la notation des variables) :

$$\int\int_S (u_{,x}v_x + uv_{,xx} + u_{,y}v_y + uv_{,yy})dxdy = \int_\sigma (uv_{,x}dy - uv_{,y}dx) \tag{D.11}$$

avec :

$$v_{,xx} + v_{,yy} = \Delta v \tag{D.12}$$

il en résulte :

$$\int\int_S (u_{,x}v_{,x} + u_{,y}v_{,y})dxdy = -\int\int_S u\Delta v dxdy + \int_\sigma (uv_{,x}dy - uv_{,y}dx) \tag{D.13}$$

soit, en utilisant le théorème de Gauss [CM 88] :

$$\int\int_S (u_x, v_x + u_y v_y)dxdy = -\int\int_S u\Delta v dxdy + \int_\sigma uv_n ds \tag{D.14}$$

On retrouve bien la première identité de Green utilisée dans l'annexe C. Cette démonstration se base sur une technique de balayage de la surface S à intégrer. A aucun moment du calcul, la forme, ou les

éventuelles singularités de σ, contour de S, n'interviennent. Les formules de transformation d'intégrales peuvent donc être utilisées quelque soit la forme du contour.
Cependant, même si cette annexe montre que les formules utilisées sont valides, des termes correctifs doivent être ajoutés à l'équation générale 5.15 si le contour présente des singularités (cf.annexe C).

Annexe E

Compléments sur les fonctions test dans un cas bidimensionnel

Cette annexe comporte deux parties. Tout d'abord les expressions analytiques des fonctions test η_T, η_M et η_R. Ces expressions ont été trouvées à l'aide de la méthode décrite au chapitre 5, en utilisant des sommes de sinus.
Une rapide démonstration est ensuite présentée, montrant l'impossibilité d'utiliser une technique de séparation de variable pour résoudre le système 5.28.

E.1 Expressions analytiques des fonctions test

Les fonctions test ont pour équation dans le cas d'une surface rectangulaire de longueur a et de largeur b :

$$\begin{aligned}
\eta_T(x,y) \;=\; & -0.01171875(35b^2-2a^2)sin(11/2\tfrac{\pi x}{a})sin(\tfrac{\pi y}{b})/(b^2) \\
& -0.00390625(30a^2-33b^2)sin(7/2\tfrac{\pi x}{a})sin(5\tfrac{\pi y}{b})/(b^2) \\
& -0.00390625(-54a^2+165b^2)sin(7/2\tfrac{\pi x}{a})sin(3\tfrac{\pi y}{b})/(b^2) \\
& +0.0078125(165b^2-6a^2)sin(7/2\tfrac{\pi x}{a})sin(\tfrac{\pi y}{b})/(b^2) \\
& -0.00390625(385b^2-6a^2)sin(3/2\tfrac{\pi x}{a})sin(\tfrac{\pi y}{b})/(b^2) \\
& +0.005859375(-18a^2+35b^2)sin(11/2\tfrac{\pi x}{a})sin(3\pi y/b)/(b^2) \\
& +0.001953125(30a^2-77b^2)sin(3/2\tfrac{\pi x}{a})sin(5\tfrac{\pi y}{b})/(b^2) \\
& +0.001953125(-54a^2+385b^2)sin(3/2\tfrac{\pi x}{a}a)sin(3\tfrac{\pi y}{b})/(b^2) \\
& +0.005859375(10a^2-7b^2)sin(11/2\tfrac{\pi x}{a})sin(5\tfrac{\pi y}{b})/(b^2)
\end{aligned} \tag{E.1}$$

$$\begin{aligned}\eta_M(x,y) &= -0.1193662073asin(\tfrac{\pi x}{a})sin(\tfrac{\pi y}{b}) \\ &\quad +0.0596831asin(2\tfrac{\pi x}{a})sin(\tfrac{\pi y}{b}) \\ &\quad +0.0397887asin(\tfrac{\pi x}{a})sin(3\tfrac{\pi y}{b}) \\ &\quad -0.0198943asin(2\tfrac{\pi x}{a})sin(3\tfrac{\pi y}{b})\end{aligned} \tag{E.2}$$

$$\begin{aligned}\eta_R(x,y) &= -0.001583143494a^2sin(9/2\tfrac{\pi y}{a})sin(\tfrac{\pi y}{b}) \\ &\quad -0.001583143494a^2sin(7/2\tfrac{\pi x}{a})sin(3\tfrac{\pi y}{b}) \\ &\quad +0.004749430483ea^2sin(7/2\tfrac{\pi x}{a})sin(\tfrac{\pi y}{b}) \\ &\quad +0.002110857993a^2sin(3/2\tfrac{\pi x}{a})sin(\tfrac{\pi y}{b}) \\ &\quad -0.006332573978a^2sin(3/2\tfrac{\pi x}{a})sin(\tfrac{\pi y}{b}) \\ &\quad +0.005277144981a^2sin(9/2\tfrac{\pi x}{a})sin(3\tfrac{\pi y}{b})\end{aligned} \tag{E.3}$$

Ces fonctions ne sont pas les solutions exactes de systèmes 5.17, 5.19 ou 5.21, celles-ci sont des approximations vérifiant au mieu les conditions aux limites explicitées pour chacune d'entre elle au chapitre 5. Les calculs ont été menés à l'aide du logiciel Maple.

E.2 Recherche d'une Fonction test par variables séparées

On cherche a démontrer ici, que l'approche de recherche des fonctions test par variables séparées entraîne des incohérences dans le système 5.28. Cette approche bien connue ne peut donc pas être employée ici.

Multiplication de fonctions indépendantes

On considère d'abord le cas où

$$\eta_T(x,y) = \quad f(x) \times g(y) \tag{E.4}$$

On rappelle ici les équations que doit respecter η_T qui seront utiles par la suite :
Pour $x = a$:

$$\eta_T(a,y) \neq 0 \tag{E.5}$$

$$\frac{\partial \eta_T}{\partial x}(a,y) = 0 \tag{E.6}$$

$$\frac{\partial^2 \eta_T}{\partial x^2}(a,y) + \nu \frac{\partial^2 \eta_T}{\partial y^2}(a,y) = 0 \tag{E.7}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta_T}{\partial x}(a,y) &= \frac{\partial f(a)}{\partial x}g(y) + f(a)\frac{\partial g(y)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial f(a)}{\partial x}g(y) \end{aligned} \tag{E.8}$$

donc E.6 nous donne

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x}g(y) = 0 \tag{E.9}$$

or E.5 implique

$$g(y) \neq 0 \tag{E.10}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(a)}{\partial x} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \tag{E.11}$$

or E.7 équivaut à :

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2}g(y) + \nu f(a)\frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2} = 0 \tag{E.12}$$

Ce qui, d'après E.11, devient :

$$f(a)\frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2} = 0 \tag{E.13}$$

or E.5 implique

$$f(a) \neq 0 \tag{E.14}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial g(y)}{\partial y} &= C_1 \\ \Rightarrow g(y) &= C_1 y + C2 \end{aligned} \tag{E.15}$$

Avec C_1 et C_2 des constantes indéterminées.

Si l'on sintéresse maintenant au point de coordonnées $x = a$ et $y = 0$. La fonction η_T se doit de vérifier les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \eta_T(a,0) & = & 0 \\ \frac{\partial \eta_T}{\partial y}(a,0) & = & 0 \end{array} \right. \tag{E.16}$$

Ce qui devient en considérent E.14 :

$$\begin{cases} g(0) & = & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(0) & = & 0 \end{cases} \tag{E.17}$$

Ces conditions impliquent

$$\begin{cases} C_1 & = & 0 \\ C_2 & = & 0 \end{cases} \tag{E.18}$$

Donc

$$g(y) = 0 \tag{E.19}$$

Ce qui est en contradiction avec E.5.

Addition de fonctions indépendantes

On considère ici le cas où on pose :

$$\eta_T(x, y) = \quad f(x) + g(y) \tag{E.20}$$

Les dérivées normales de la fonction aux limites deviennent alors :

$$\frac{\partial \eta_T(x, 0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \tag{E.21}$$

$$\frac{\partial \eta_T(0, y)}{\partial y} = \frac{\partial g(y)}{\partial y} \tag{E.22}$$

D'après le système 5.28, ces dérivées doivent être nulles. Si c'est la cas, les fonctions $f(x)$ et $g(y)$ sont alors des constantes. La fonction test η devient également une constante. Cela est impossible par rapport aux conditions limites qui la définissent.

Annexe F

Liste des communications scientifiques issues de cette thèse

Journaux internationaux à comité de lecture :

CHESNE S, PEZERAT C, GUYADER J.L. Identification of Boundary Forces in Beams From Measured Displacements. Journal of Vibration and Acoustic (ASME). Accepté, à paraître.

Conférences internationales avec actes :

CHESNE S, PEZERAT C, GUYADER J.L. Identification of boundary shear force in plate from measured displacements Proceedings of Euronoise, Tampere, FINLANDE, 2006

CHESNE S, PEZERAT C, GUYADER J.L. Indirect identification of shear force and bending moment at boundaries of a beam. Proceedings of Novem 2005, St Raphaël, FRANCE, 2005

Conférences françaises avec actes :

CHESNE S, PEZERAT C, GUYADER J.L. Identification de l'effort tranchant d'une plaque en flexion Proceedings CFA Tours, FRANCE 2006.

Bibliographie

[AJM 01] AHMADIAN H., J.E. MOTTERSHEAD et M.I. FRISWELL. Boundary condition identification by solving characteristic equations. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, vol 247, n°5, p 755–763.

[ALP 99] ALPERT B. Hybrid gauss-trapezoidal quadrature rules. *Journal on Science Computing*, 1999, vol 20, n°5, p 1551–1584.

[BAK 77] BAKER C.T.H. *The numerical treatment of integral equations*. Oxford : Oxford university press, 1977, 1034 p.

[BLA 97] BLAU M. Indirect force spectra identification by frf matrix inversion : a reliable approach based on quantitative error models. **In :** Proceeding of Inter-Noise, Budapest, Hungary, 1997.

[BLA 99] BLAU M. Indirect measurement of multiple excitation force spectra by frf matrix inversion : Influence of errors in statistical estimates of frfs and response spectra. *Acta Acustica*, 1999, vol 85, p 464–479.

[BON 91] BONNET M. A numerical investigation for a source inverse problem in linear acoustics. *Journal d'acoustique*, 1991, vol 4, p 307–334.

[CM 88] COURANT R. et MCSHANE E.J. *Differential and integral calculus*. USA : Interscience, 1988, 616 p.

[DBHW 95] DUMBACHER S.M., BLOUGH J., HALLMAN D. et WANG P. Source identification using acoustic array techniques. *S.A.E Technical paper series*, 1995, n°951360.

[DCR 92] D'CRUZ J., CRISP J.D.C. et RYALL T.G. On the identification of a harmonic force on a viscoelastic plate from response data. *Journal of Applied Mechanics*, 1992, vol 59, p 722–729.

[DS 85] DESANGHERE G. et SNOEYS R. Indirect identification of excitation forces by modal coordinate transformation. **In :** Proceeding of IMAC 3, Orlando, Fl., USA, 1985.

[EJR 88] ELLIOT K.B., JUANG J.-N. et ROBINSON J. Force prediction using singular-value decomposition. **In :** Proceeding of IMAC 6, Kissimmee, Fl., USA, 1988.

[FS 96] FREGOLENT A. et SESTIERI A. Force identification from vibration measurements in the wavenumber domain. **In :** Proceeding of ISMA21, Leuven, Belgium, 1996.

[GLA 99] GLADWELL G.M.L. Inverse finite element vibration problems. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, vol 211, n°2, p 309–324.

[GLA 04] GLADWELL G.M.L. *Inverse Problems in Vibration*. London : Kluwer Academic Publishers, 2004, 457 p.

[GP 93] GAVRIC L. et PAVIC G. A finite element method for computation of structural intensity by normal mode approach. *Journal of Sound and Vibration*, 1993, vol 164, n°1, p 29–43.

[GP 99] GRANGER S. et PEROTIN L. An inverse method for the identification of a distributed random excitation acting on a vibrating structure part 1 : theory. *Journal of Mechanical System and Signal Processing*, 1999, vol 13, n°1, p 53–65.

[GPDS 02] GUILLAUME P., PARLOO E. et DE SITTER G. Source identification from noisy response measurements using an iterative weighted pseudo inverse approach. **In :** Proceeding of ISMA, volume 4, Leuven, Belgium, September 2002.

[GPVDS 02] GUILLAUME P., PARLOO E., VERBOVEN P. et DE SITTER G. An inverse method fot the identification of localized excitation source. **In :** Proceeding of IMAC 20, Los Angeles, California, USA, 2002.

[GUY 02] GUYADER J.-L. *Vibration des milieux continus*. Paris : Hermès Sciences, 2002, 442 p.

[HAD 02] HADAMARD J. *Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique.*, volume 13. Princeton : University Bulletin, 1902, p 49–52.

[HAN 92] HANSEN P.C. Analysis of discrete ill-posed problems by means of the l-curve. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1992, vol 34, n°4, p 561–580.

[HCDV 97] HADJIT R., CONTI C., DEHOMBREUX P. et VERLINDEN O. Exploitation des réponses en fonctionnement en vue de l'identification des forces d'excitation agissant

sur des structures mécanique. **In :** Actes du 3ème colloque national en calcul des structures, Giens, France, 1997.

[HDCV 99] HADJIT R., DEHOMBREUX P., CONTI C. et VERLINDEN O. Inverse methods for the identification of excitation forces from measured operational data. **In :** Proceedings of the Vibration, Noise and Structural Dynamics Conference, Venice, Italia, April 1999.

[HEN 94] HENDRICX I.W. Accurate vehicle frf measurements for indirect force determination based upon matrix inversion. **In :** Proceeding of ISMA19, Leuven, Belgium, September 1994.

[JBHW 93] JIN M., BOUIZEM B., HENRIO J.C. et WAGSTAFF P.R. Noise source identification using different structural measurement technique. **In :** Proceedings of the institute of Acoustics, volume 15, Southampton, 1993.

[KSMY 05] KAMIYA K., SUZUKI A., MIHARA J. et YASUDA K. Experimental identification of boundary conditions of a beam. **In :** Proceeding of NOVEM, St Raphaël, France, 2005.

[LEC 03] LECLERC Q. *Etude et développement de la mesure indirecte d'efforts*. Thèse, Institut National des Sciences Appliquées, Lyon, 2003, 204 p.

[LH 74] LAWSON C.L. et HANSON R.J. *Solving least squares problems*. Englewood Cliffs, NJ : Prentice Hall, 1974, 337 p.

[LPLP 04] LECLERC Q., PEZERAT C., LAULAGNET B. et POLAC L. Different least square approaches to identify dynamic forces acting on an engine cylinder block. *Acta Acustica*, 2004, vol 90, p 285–292.

[LS 05] LIU Y. et S. SHEPARD. Dynamic force identification based on enhanced least squares and total least squares schemes in frequency domain. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, vol 282, n°1, p 37–60.

[LS 06] LIU Y. et S. SHEPARD. An improved method for reconstruction of a distributed force acting on a vibrating structure. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, vol 291, p 369–387.

[MCL 03] MA C.-K., CHANG J.-M. et LIN D.-C. Input forces estimation of beam structures by an inverse method. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, vol 259, n°2, p 387–407.

[MOO 03] MOORHOUSE A.T. Compensation for discarded singular values in vibro-acoustic inverse methods. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, vol 267, p 245–252.

[MSW 94] MAS P., SAS P. et WYCKAERT K. Indirect force identification based upon impedance matrix inversion : A study on statistical and deterministical accuracy. **In :** Proceeding of ISMA19, Leuven, Belgium, September 1994.

[MWL 85] MAYNARD J.D., WILLIAMS E.G. et LEE Y. Nearfield acoustic holography : I. theory of generalized holography and development of nah. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1985, vol 78, n°4, p 1395–1413.

[NOI 70] NOISEUX D.U. Measurement of power flow in uniforms beams and plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1970, vol 1, n°2.

[PAV 76] PAVIC G. Measurement of structure borne wave intensity, part 1 : Formulation of the methods. *Journal of Sound and Vibration*, 1976, vol 49, n°2, p 221–230.

[PB 97a] PESTEREV A.V. et BERGMAN L.A. Response of elastic continuum carrying moving linear oscillator. *Journal of engineering mechanics*, 1997, vol 123, p 878–884.

[PB 97b] PESTEREV A.V. et BERGMAN L.A. Vibration of elastic continuum carrying moving linear oscillator. 1997, vol 123, p 886–889.

[PB 00] PESTEREV A.V. et BERGMAN L.A. An improved serie expansion of the solution to the moving oscillator problem. *Journal of vibration and acoustics*, 2000, vol 122, p 54–61.

[PEZ 96] PEZERAT C. *Methode d'identification des efforts appliqués sur une structure vibrante, par résolution et régularisation du problème inverse*. Thèse, Institut National des Sciences Appliquées, Lyon, 1996, 138 p.

[PG 95a] PEZERAT C. et GUYADER J.-L. Localization of mechanical sources exciting a beam using an inverse method. **In :** Proceeding of Vibration and Noise, Venice, Italia, 1995.

[PG 95b] PEZERAT C. et GUYADER J.-L. Two inverse methods for localization of external sources exciting a beam. *Acta Acustica*, 1995, vol 3, p 1–10.

[PG 96] PEZERAT C. et GUYADER J.-L. Localisation d'efforts appliques sur des structures minces ; régularisation du problème inverse. *Revue française de mécanique*, 1996, vol 1, p 49–55.

[PG 99] PEROTIN L. et GRANGER S. An inverse method for the identification of a distributed random excitation acting on a vibrating structure part 2 : Flow-induced vibration application. *Journal of Mechanical System and Signal Processing*, 1999, vol 13, n°1, p 67–81.

[PG 00] PEZERAT C. et GUYADER J.-L. Force analysis technique : Reconstruction of force distribution on plates. *Acta Acustica*, 2000, vol 86, p 322–332.

[PS 84] POWELL R.E. et SEERING W. Multichannel structural inverse filtering. *Journal of vibation, acoustics, stress, and reliability in design*, 1984, vol 106, p 22–28.

[PVGVO 02] PARLOO E., VERBOVEN P., GUILLAUME P. et VAN OVERMEIRE M. Force identification by means of in-operation modal models. **In :** Proceeding of IMAC20, Los Angeles, California, USA, 2002.

[RAM 94] RAM Y.M. Inverse mode problems for the discrete model of a vibrating beam. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, vol 169, n°2, p 239–252.

[RAW 90] ROMANO A.J., ABRAHAM P.B. et WILLIAMS E.G. A poynting vector formulation for thin shells and plates, and its application to structural intensity and source localisation part i : Theory. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1990, vol 87, p 1166–1175.

[RG 94] RAM Y.M. et GLADWELL G.M.L. Constructing a finite element of vibratory rod from eigendata. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, vol 169, n°2, p 229–237.

[SH 01] SCHUHMACHER A.P. et HANSEN P.C. Source sound reconstruction usinf inverse bem. **In :** Proceeding of Inter-noise, The Hague, Holland, 2001.

[SM 89] STARKEY J.M. et MERRILL G.L. On the ill-conditioned nature of indirect force-measurement techniques. *Journal of Modal Analysis*, 1989, vol 4, n°3, p 103–108.

[SS 66] STROUD A.H. et SECRET D. *Gaussian quadrature formulas*. Englewood Cliffs, NJ : Prentice Hall, 1966, 374 p.

[STE 87] STEVENS K.S. Force identification problems-an overview. **In :** Proceedings Of SEM Spring conference on Experimental Mechanics, Houston, TX,USA, 1987.

[SZA 89] SHIH C.Y., ZHANG Q. et ALLEMANG R.J. Force identification by using principle and modal coordinate transformation method. **In :** Proceeding of Vibration analysis-Techniques and applications, Montreal, Quebec, CAN, September 1989.

[TA 76] TIKHONOV A. et ARSENINE V. *Méthodes de résolution des problèmes mal posés*. Moscou : Mir, 1976, 192 p.

[TAR 87] TARANTOLA A. *Inverse problem theory : methods for data fitting and model parameter estimation*. Amsterdam : Elsevier, 1987, 613 p.

[TT 03] THITE A.N. et THOMPSON D.J. A systematic evaluation of different methods to improve inverse force determination. **In :** Proceeding of Euronoise, Naples, Italia, 2003.

[WG 93] WARWICK D.C. et GILHEANY J.J. Dynamic force estimation via model decomposition of operational response measurements in a multi-source environment. **In :** Proceeding of IMAC11, Kissimmee, Fl., USA, 1993.

[ZAB 90] ZHANG Q., ALLEMANG R.J. et BROWN D.L. Modal filter : Concept and application. **In :** Proceeding of IMAC 8, Kissimmee, Fl., USA, 1990.

[ZHA 98] ZHANG G.-X. *Détermination des forces appliquées aux structures industrielles pas des méthodes inverses*. Thèse, Universitée Paul Sabatier, Toulouse, 1998, 142 p.

[ZL 01] ZHU X.Q. et LAW S.S. Identification of moving load on an orthotropic plate. *Journal of vibration and acoustics*, 2001, vol 123, n°1, p 238–244.

[ZL 02] ZHU X.Q. et LAW S.S. Practical aspects in moving load identification. *Journal of sound and vibration*, 2002, vol 258, p 123–146.

[ZL 03] ZHU X.Q. et LAW S.S. Time domain identification of moving loads on bridge deck. *Journal of vibration and acoustics*, 2003, vol 125, p 187–198.

[ZMI 96a] ZHANG Y. et MANN III J.A. Examples of using structural intensity and force distribution to study vibrating plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1996, vol 99, n°1, p 354–361.

[ZMI 96b] ZHANG Y. et MANN III J.A. Measuring the structural intensity and force distribution in plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1996, vol 99, n°1, p 345–353.