



**HAL**  
open science

# Relations entre microstructure et propriétés mécaniques de matériaux enchevêtrés

Sandra Bergonnier

► **To cite this version:**

Sandra Bergonnier. Relations entre microstructure et propriétés mécaniques de matériaux enchevêtrés. Mécanique [physics.med-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2005. Français. NNT : . tel-00136408

**HAL Id: tel-00136408**

**<https://theses.hal.science/tel-00136408>**

Submitted on 13 Mar 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT  
DE  
L'UNIVERSITE PARIS VI**

Spécialité :  
**Solides, Structures et Systèmes Mécaniques**

par

**Sandra Bergonnier**

pour obtenir le grade de  
**Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie**

Sujet de la thèse :  
**Relations entre microstructure et propriétés mécaniques de  
matériaux enchevêtrés**

Thèse soutenue le 02 Décembre 2005 devant le jury composé de :

RENÉ BILLARDON	Président
DOMINIQUE JEULIN	Rapporteur
JEAN-JOSÉ ORTEU	Rapporteur
JEAN-FRANÇOIS GANGHOFFER	Examineur
FRANÇOIS HILD	Examineur
JEAN-BAPTISTE RIEUNIER	Examineur
STÉPHANE ROUX	Examineur

---

Laboratoire de Mécanique et Technologie  
ENS Cachan/CNRS/Université Paris 6  
61, avenue du Président Wilson, F-94235 CACHAN CEDEX (France)

---

## Remerciements

Les travaux présentés dans ce manuscrit ont été réalisés au sein du Laboratoire de Mécanique et de Technologie en collaboration avec le CRIR (Centre de Recherche Isover de Rantigny) sous la direction de François Hild et de Stéphane Roux . Je tiens à remercier François et Stéphane de m'avoir proposé un tel sujet, d'avoir encadré ce travail et de la confiance qu'ils m'ont témoignée au cours de ces trois ans. J'exprime toute ma gratitude à François pour sa disponibilité, sa patience, sa pédagogie et sa réactivité et toute ma reconnaissance à Stéphane pour m'avoir fait partager son enthousiasme scientifique.

Cette thèse s'est déroulée en étroite collaboration avec Saint-Gobain Isover. Je remercie vivement Jean-Baptiste Rieunier et Maud Baudequin de l'intérêt qu'ils ont porté à cette étude. Le caractère industriel de cette thèse m'a permis de diversifier les thématiques développées au cours de ce travail.

Mes remerciements vont aussi à M. René Billardon qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse ainsi qu'à Messieurs Jean-José Orteu et Dominique Jeulin d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail. Je remercie également Jean-François Ganghoffer pour l'intérêt qu'il a porté à cette thèse.

Si ces trois années de thèse sont passées si vite, c'est grâce aux membres passés et actuels du LMT. Merci à Cédric, Cloups, Laurent et Karine d'avoir animé la mezzanine gauche, à Benoit, Charles et Rami de la mezzanine droite, Mathilde, Pierrot et Stéphane P. responsables, entre autre, de la bonne ambiance lors des pauses-café. Enfin, et elles apparaîtront deux fois sur cette page, merci à Karine et Mathilde pour les discussions inutiles sur des sujets anodins mais tellement agréables !

Merci également à toutes les personnes du CRIR qui ont été à un moment donné mon interlocuteur : Valérie Dupouy, Caroline Machelart, Helle Krogsgaard et Eric Mangematin.

Finalement, j'aurais mis plus de temps à rédiger ces quelques lignes de remerciements que pour écrire le reste du manuscrit. Ceci souligne l'importance de l'exercice pour moi, la peur d'oublier des noms. La tâche est presque accomplie mais serait tellement inachevée si je ne mentionnais pas celui qui m'encourage depuis si longtemps, qui m'épaule et qui m'a soutenu lors des moments de doute. Cette thèse était un beau projet, et aujourd'hui notre projet pour les années à venir s'appelle Louise.

# Table des matières

Table des matières	i
Introduction	1
<b>1 La laine minérale : de la fabrication aux propriétés du matériau</b>	<b>3</b>
1.1 La laine minérale	4
1.1.1 Les constituants de la laine minérale	4
1.1.2 Les procédés d'élaboration	5
1.1.3 L'opération de crêpage	9
1.2 Importance de la texture	11
1.2.1 Relation avec le procédé de fabrication	11
1.2.2 Influence sur les propriétés mécaniques	12
1.3 Plan de thèse	13
<b>2 Analyse de la cinématique d'un procédé de mise en forme</b>	<b>17</b>
2.1 Présentation de la méthode	18
2.1.1 Utilisation de la carte brute	20
2.1.2 Utilisation des fonctions de corrélation	22
2.1.3 Choix de la base de fonction	25
2.1.4 Étude d'une carte test	27
2.1.5 Extension au cas 2D	38
2.2 Étude de films d'un écoulement réel	42
2.2.1 Résultats 1D	43
2.2.2 Résultats 2D	50
2.2.3 Utilisation des résultats	53
2.3 Conclusion	55
<b>3 Étude de l'anisotropie locale d'un matériau enchevêtré</b>	<b>59</b>
3.1 Introduction	60
3.1.1 Principe de l'analyse d'anisotropie	62
3.1.2 Remarques préliminaires	63
3.2 Les méthodes proposées	65
3.2.1 Les différentes méthodes	65
3.2.2 Cas des images non régulières	69

3.2.3	<i>Neutral padding</i> . . . . .	71
3.3	Application sur différentes images . . . . .	74
3.3.1	Les empreintes digitales . . . . .	74
3.3.2	Une image non régulière : le bois . . . . .	74
3.3.3	Cercles concentriques . . . . .	75
3.3.4	Laine minérale crêpée . . . . .	79
3.3.5	Mesure d'objectivité . . . . .	80
3.3.6	Carte spatio-temporelle . . . . .	81
3.4	Conclusion . . . . .	83
<b>4</b>	<b>Essais mécaniques sur matériau enchevêtré</b>	<b>85</b>
4.1	Les essais mécaniques normalisés . . . . .	86
4.1.1	La corrélation d'images numériques . . . . .	86
4.1.2	Essais sur matériaux enchevêtrés . . . . .	90
4.1.3	Résultats des essais mécaniques . . . . .	91
4.1.4	Liens avec l'anisotropie locale . . . . .	95
4.2	Caractérisation de matériaux isotropes transverses . . . . .	98
4.2.1	La problématique . . . . .	98
4.2.2	Les essais réalisés . . . . .	99
4.2.3	Les résultats obtenus . . . . .	100
4.3	Conclusion . . . . .	105
<b>5</b>	<b>Relations entre anisotropie locale et performances mécaniques</b>	<b>107</b>
5.1	Modélisation par éléments finis . . . . .	108
5.1.1	Correspondance des maillages . . . . .	108
5.1.2	Paramètres du calcul par éléments finis . . . . .	110
5.2	Résultats sur un essai de compression . . . . .	115
5.2.1	Résultats expérimentaux . . . . .	116
5.2.2	Résultats des simulations . . . . .	117
5.2.3	Procédure d'identification . . . . .	123
5.3	Conclusion . . . . .	131
	<b>Conclusion</b>	<b>135</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>139</b>
	<b>Annexe A</b>	<b>145</b>
	<b>Annexe B</b>	<b>147</b>

# Introduction

L'étude du comportement mécanique de matériaux souples enchevêtrés nécessite des précautions particulières. En effet, l'utilisation de moyens de mesure classiques peut perturber la réponse du matériau. Le développement récent des techniques de mesures optiques et donc sans contact a permis une nouvelle appréhension du problème. Ne perturbant pas la mesure, elles sont particulièrement bien adaptées pour ces matériaux. Dans sa gamme de production, la société Isover Saint-Gobain propose des matériaux isolants thermiques de densité moyenne qui allient performances thermiques et tenue mécanique. On s'intéressera ici exclusivement aux propriétés mécaniques des matériaux au détriment des performances thermiques. Le procédé de fabrication de ces matériaux isolants enchevêtrés, appelé crêpage, confère au produit sa texture finale, ajustables selon l'intensité du crêpage. Enfin, la texture du produit fini est directement reliée aux performances mécaniques du matériau. Le but de cette étude est la compréhension fine des relations entre les paramètres de réglage du crêpage et les propriétés mécaniques du produit fini. Différentes approches vont être développées et ont comme point commun d'être basées sur l'analyse d'images ou de vidéos numériques.

Après une présentation plus détaillée du matériau étudié, de son procédé de fabrication, ainsi que des enjeux de l'étude au chapitre 1, une première partie, développée au chapitre 2, concernera l'analyse cinématique du procédé de fabrication. À partir de vidéos numériques prises sur ligne de production, au niveau de l'étage de crêpage, une approche, basée sur l'analyse d'images et sur les fonctions de corrélation, est mise en place pour déterminer localement les champs des taux de déformations au sein de la crêpeuse. Cette approche permet de quantifier la cinématique dans une machine de crêpage et l'identification des zones de la crêpeuse responsables de la texturation du matériau est alors possible. Enfin, grâce à cette approche, l'influence des paramètres de réglage d'une crêpeuse sur la cinématique de la machine est quantifiable.

Nous verrons que la texture est le lien entre le procédé de fabrication et les performances mécaniques du matériau. Le chapitre 3 est donc dédié au développement d'un outil d'analyse de l'anisotropie locale d'un matériau enchevêtré. Basée sur l'analyse numérique d'une image, elle permet d'identifier l'axe principal d'anisotropie d'une zone locale de l'image analysée, ainsi que le degré d'anisotropie associé.

Ce champ d'anisotropie déterminé pour plusieurs images de produits issus de paramètres de réglage différents, permet de mettre en évidence l'influence des paramètres de fabrication sur la texture du produit fini. Par ailleurs la texture du produit étudié a une forte influence sur les performances mécaniques du produit, en termes de tenue à la compression et à l'arrachement. Cette interaction est mise en évidence expérimentalement, et suggère de modéliser le comportement mécanique élastique anisotrope du matériau étudié.

Le chapitre 4 traite des essais mécaniques. Une présentation de la méthode de mesure utilisée, la corrélation d'images numériques, est introduite, et les résultats d'essais de compression et de traction simple sur le matériau sont présentés. Puis dans le but de modéliser le comportement mécanique élastique anisotrope du matériau étudié, de nouveaux essais sont présentés. Destinés à identifier les paramètres mécaniques d'un produit non texturé, les résultats sont développés et discutés.

Enfin, le chapitre 5 est consacré à la modélisation de la réponse élastique anisotrope du matériau à une sollicitation de compression. Pour cela, une démarche est proposée : on suppose que localement, le matériau étudié suit une loi de comportement élastique isotrope transverse (dont les paramètres ont été identifiés) selon une direction particulière, celle-ci correspondant à la direction d'anisotropie identifiée par l'outil développé au chapitre 3. Les résultats de la modélisation sont confrontés aux données expérimentales et une procédure d'identification permet finalement d'optimiser les paramètres élastiques.

# Chapitre 1

## La laine minérale : du procédé de fabrication aux propriétés d'usage du matériau

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>La laine minérale . . . . .</b>	<b>4</b>
1.1.1	Les constituants de la laine minérale . . . . .	4
1.1.2	Les procédés d'élaboration . . . . .	5
1.1.3	L'opération de crêpage . . . . .	9
<b>1.2</b>	<b>Importance de la texture . . . . .</b>	<b>11</b>
1.2.1	Relation avec le procédé de fabrication . . . . .	11
1.2.2	Influence sur les propriétés mécaniques . . . . .	12
<b>1.3</b>	<b>Plan de thèse . . . . .</b>	<b>13</b>

---



Dans ce chapitre, les laines minérales, et en particulier les laines de verre et de roche, sont présentées. Matériaux isolants thermiques, on s'intéresse plus précisément aux produits de densité moyenne à élevée qui allient performances thermiques et tenue mécanique. Ces deux propriétés sont contradictoires. En effet, ce matériau, formé de fibres de verre encollées par un liant, possède les meilleures propriétés thermiques lorsque ses fibres seront orientées à l'horizontale, ne créant ainsi aucun pont thermique entre le haut et le bas du produit, ces ponts étant propices aux transferts de chaleur. Cependant le même matériau possède de meilleures performances mécaniques, en termes de tenue à la compression et à l'arrachement lorsque la majorité des fibres est orientée à la verticale. Il y a donc compétition entre les deux phénomènes et un compromis est obtenu en ajoutant sur ligne de production une opération dite de crêpage. Ce protocole est ajustable selon différents paramètres qui ont une influence importante sur la texture du produit fini en modifiant l'orientation locale des mèches de fibres constituant le matériau. Nous montrerons ensuite que la texture du produit fini conditionne ses performances mécaniques en termes de tenue à la compression et à l'arrachement. Enfin, si l'on souhaite relier les paramètres ajustables sur ligne de production, notamment au niveau de l'étape de crêpage, aux performances mécaniques du produit fini, il apparaît alors légitime d'utiliser la texture du produit comme intermédiaire.

### 1.1 La laine minérale

Il existe trois variétés de laines minérales : les laines de verre, élaborées essentiellement à partir de sable et de verre recyclé (calcin), les laines de roche, produites à partir de roches volcaniques et les laines de laitier, réalisées à partir de matières recyclées en provenance de hauts-fourneaux. Leurs propriétés d'isolant découlent de leur structure, à savoir un mat de fibres, qui empêche le déplacement de l'air, et de leur composition chimique. Nous nous limiterons, dans le cadre de cette étude, aux cas de la laine de verre et de la laine de roche. Les différentes étapes d'élaboration de ces deux produits sont similaires, i.e. fusion, fibrage, pulvérisation et polymérisation, les phases de fusion et de fibrage étant spécifiques à chaque matériau.

#### 1.1.1 Les constituants de la laine minérale

Une dizaine de matières premières entre dans la fabrication des laines minérales, à regrouper en deux catégories : les fibres, dont le rôle est de limiter la thermoconvection, et le liant, qui apporte une cohésion au produit fini.

##### 1.1.1.1 Les fibres

- pour la laine de verre, les matières premières sont un mélange alumino-borocalcique. Le verre en fusion est filé en fibres discontinues dont le diamètre

moyen varie de moins de  $1\ \mu\text{m}$  à  $10\ \mu\text{m}$  et dont la longueur est milli- ou centimétrique. Il existe un indice caractérisant la finesse des fibres de verre : le *micronaire Sheffield* [1, 2]. Il caractérise la perméabilité à l'air sous différence de pression constante. Le débit d'air est mesuré à travers le matériau (sous forme de touffe de fibres sans rangement privilégié). Cet indice, noté  $F$  accompagné par la masse de l'échantillon ( $F = 3,0(5g)$ ) est en relation directe avec le diamètre des fibres constituant l'échantillon : plus le micronaire est faible, plus le diamètre des fibres est petit. À titre indicatif, un micronaire de  $F = 3,0(5g)$  correspond à des fibres d'un diamètre de 4 à  $5\ \mu\text{m}$ .

- pour la laine de roche, les matières premières proviennent de basalte et de matières recyclées. Le diamètre des fibres, comparable à celui des laines de verre est caractérisé par le fasonaire. Cet indice, noté  $FAS$  accompagné par la masse de l'échantillon ( $FAS = 250(5g)$ ), repose sur le même principe que le micronaire, avec cette fois, un débit imposé et une mesure de la différence de pression. À titre indicatif, un fasonaire  $FAS = 250(5g)$  correspond à des fibres d'un diamètre de 4 à  $5\ \mu\text{m}$ .

### 1.1.1.2 Le liant

Pour renforcer la résistance mécanique et la tenue de ces isolants à matrice, les fibres sont agglomérées avec de faibles quantités de résines synthétiques pulvérisées sous forme aqueuse sur les fibres. Le liant utilisé est un thermodurcissable composé de six constituants principaux :

- une résine formophénolique, qui permet l'adhésion de la résine sur les fibres,
- un agent anti-pollution, l'urée, dont le taux est optimisé pour éviter la pollution due au vieillissement,
- un hydrocarbure, l'huile, qui limite les émissions des poussières lors de la fabrication et de l'utilisation des produits,
- du sulfate d'ammonium, responsable de la couleur jaune du produit (pour la laine de verre), qui accélère la réaction de polycondensation,
- de l'ammoniaque qui diminue la pollution due au formol libre et accélère la réticulation,
- du silane qui permet aux propriétés mécaniques d'être mieux conservées après vieillissement humide.

Les compositions du liant sont ajustables en fonction des propriétés souhaitées du produit fini notamment en termes de performances thermiques.

## 1.1.2 Les procédés d'élaboration

La fabrication des laines minérales consiste à faire fondre et à fibrer les matières naturelles et recyclées. La température de fusion dans les fours est comprise entre  $1050^\circ\text{C}$  et  $1500^\circ\text{C}$ . Le fibrage de la laine de verre est réalisé par centrifugation à grande vitesse (procédé TEL, figure 1.1), celui de la laine de roche, à partir de ro-

tors (procédé REX, figure 1.2). Après refroidissement, les fibres sont fixées entre elles à l'aide du liant, et après un passage en étuve, forment un matelas de laine, plus ou moins épais, et plus ou moins dense.

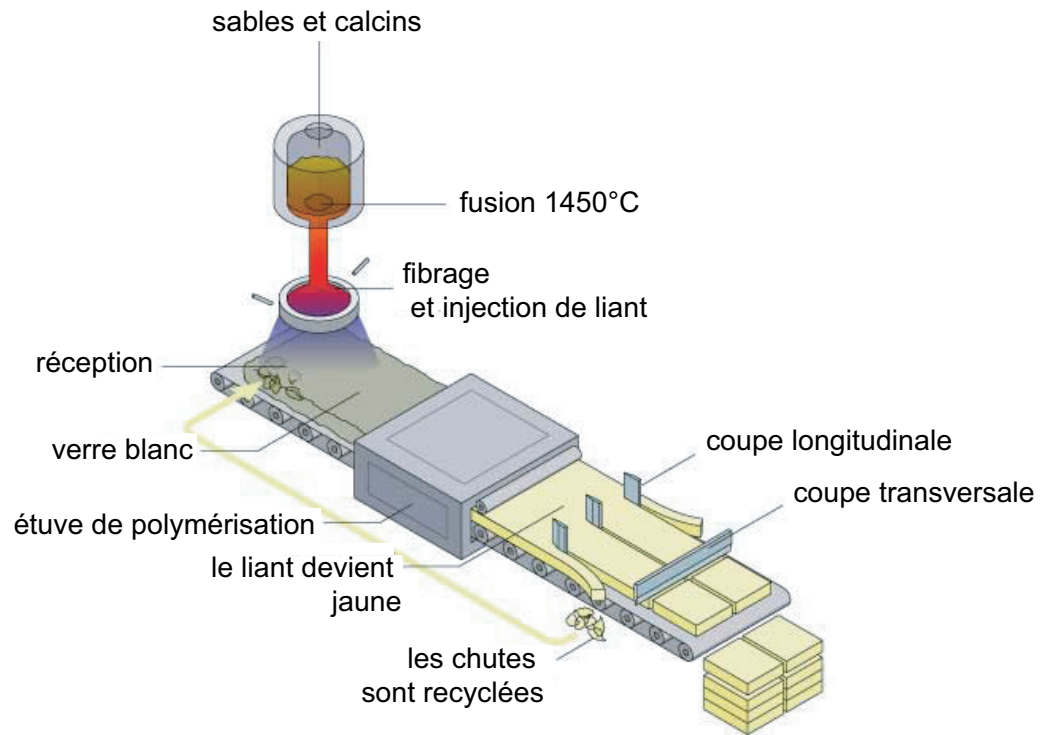


Figure 1.1 – Procédé TEL : fabrication de la laine de verre (d'après [3]).

Les différentes étapes de fabrication vont être détaillées, depuis la fusion de la matière première jusqu'au calandrage du produit fini en passant par le fibrage, la pulvérisation du liant et sa polymérisation. La description de ces étapes est volontairement succincte : plus de détails sont développés dans [4].

### 1.1.2.1 La fusion

La première étape du procédé de fabrication de la laine minérale est la fusion des matières premières. Il s'agit d'un mélange aluminoboro-calciq pour la laine de verre (figure 1.1) et de « laitiers » des hauts-fourneaux ou basaltes pour la laine de roche (figure 1.2).

En ce qui concerne la laine de verre, le mélange de matières premières est porté à une température de 1450°C dans un four revêtu de matériau réfractaire. La composition, après avoir été pesée et mélangée est introduite à la surface du four et portée

à température de fusion à l'aide d'un chauffage au gaz ou de jeux d'électrodes plongés dans le bain. En effet, à l'état fondu, les verres sont conducteurs d'électricité, si bien qu'en faisant traverser un bain de verre par un courant électrique, on peut le chauffer par effet Joule. À l'heure actuelle, les fours électriques sont majoritairement utilisés, pour des raisons économiques.

Pour la laine de roche, des fondants et du coke sont ajoutés aux matières premières, puis le tout est introduit dans un cubilot et chauffé. La température de fusion de la roche est aux alentours de  $1600^{\circ}\text{C}$ . Une fois en fusion, le mélange (roche ou verre) s'écoule jusqu'aux têtes de fibrage.

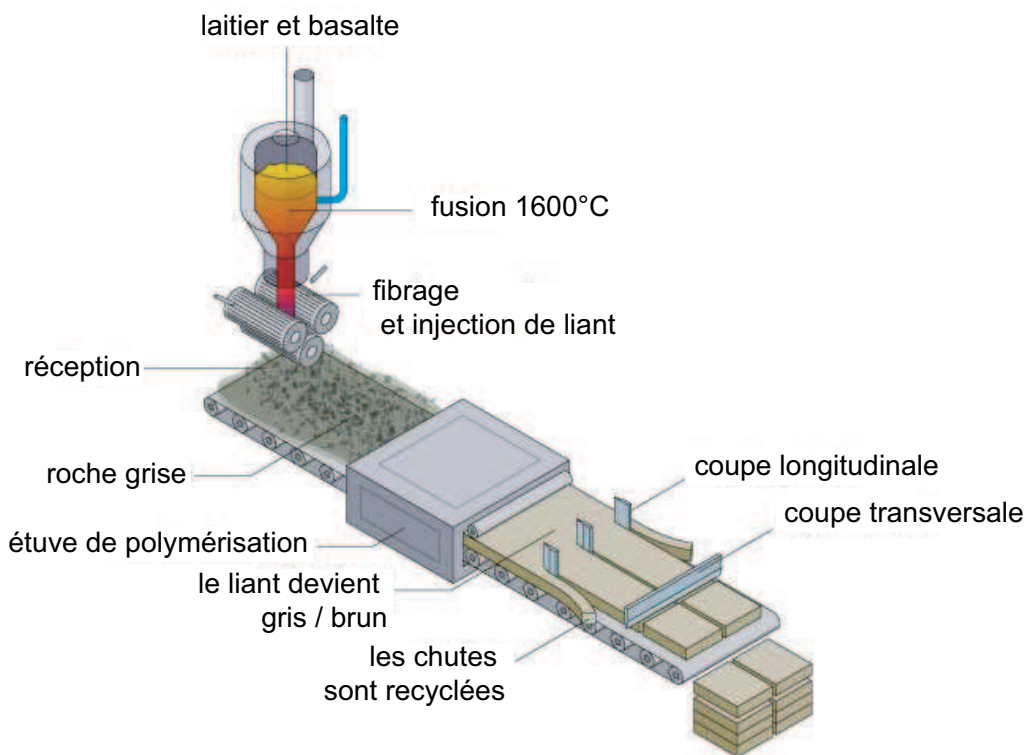


Figure 1.2 – Procédé REX : fabrication de la laine de roche (d'après [3]).

### 1.1.2.2 Le fibrage

Le procédé de fibrage est l'étape d'élaboration qui diffère le plus entre la laine de verre et la laine de roche. Le premier utilise le procédé TEL, et le deuxième, le procédé REX [5].

Le procédé TEL désigne un procédé de fibrage de type centrifuge à grande vitesse. Le filet de verre tombe dans un panier de distribution qui tourne à une vitesse

de 2000 à 3000 tours/minute. Ce panier alimente une assiette de fibrage, en alliage réfractaire, percée à la périphérie de 10000 à 20000 trous. Le verre émergeant de ces trous est étiré vers le bas par un courant de gaz chauds. On obtient ainsi, à grand débit, des fibres fines, de diamètre centré sur  $4\ \mu\text{m}$ , et pratiquement exemptes de verre non-fibré. À la sortie de l'assiette, les fibres forment un tore sur lequel est pulvérisé le liant en solution aqueuse à l'aide d'une couronne d'encollage placée à l'extérieur du tore.

Le procédé REX est une autre technique pour produire des fibres : le jet de liquide fondu tombe sur un rotor en alliage réfractaire tournant à quelques milliers de tours/minute. Le liquide est alors projeté sous l'action de la force centrifuge sur un autre puis sur un troisième voire un quatrième rotor (figure 1.3) et forme des fibres discontinues dont le diamètre est centré sur  $3\ \mu\text{m}$  parmi lesquelles on trouve, en proportion non négligeable, des gouttes de produit infibré. Le liant est ensuite pulvérisé sur les fibres de roche en sortie des têtes de fibrage.

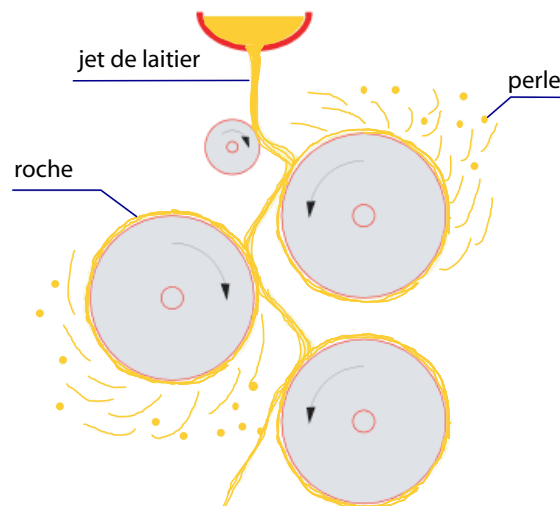


Figure 1.3 – Procédé pour le fibrage de laitier ou de roche fondue (d'après [6]).

### 1.1.2.3 La fin de la ligne

Après l'étape de pulvérisation du liant, les fibres tombent sur un tapis de réception. Leur température est alors inférieure à  $100^\circ\text{C}$ . La laine ainsi formée (qui est blanche pour le verre, et grise pour la roche) est acheminée vers l'étuve où polymérise le liant. Avant cette dernière étape, la laine est calandree et éventuellement crêpée (voir paragraphe 1.1.3). La polymérisation du liant est effectuée en créant un flux d'air chaud vertical au sein de l'étuve. La température de l'air parcourant la laine dépend alors des différentes zones de l'étuve.

Une fois le liant réticulé, la structure de la laine est figée, le produit possède donc sa forme, ses propriétés mécaniques et sa couleur finale. Le produit refroidit sur la fin de la ligne, où différents contrôles sont alors effectués (épaisseur, masse surfacique, etc.) avant d'être découpé, emballé puis stocké.

### 1.1.3 L'opération de crêpage

De par la manière dont elle est produite, la laine minérale est constituée de fibres enchevêtrées et encollées, mais sa structure est stratifiée et présente des différences de densité clairement visible sur l'épaisseur du produit (figure 1.4).

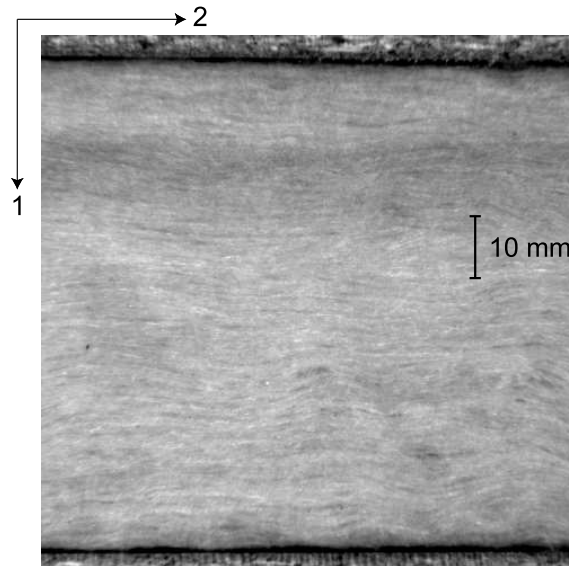


Figure 1.4 – Image d'un produit présentant une structure stratifiée.

Un tel produit possède de très bonnes performances thermiques, mais ses résistances à la compression et à l'arrachement sont faibles, même pour des densités moyennes. Pour certaines applications, le produit doit posséder des performances mécaniques. Une opération dite de « crêpage » est alors réalisée. Elle consiste à effectuer une compression uniaxiale, en ligne, le long du plan de stratification du matelas pour imposer une rotation de l'axe d'anisotropie et déformer les couches denses pour obtenir une texture plus isotrope.

#### 1.1.3.1 Présentation

L'opération dite de « crêpage » a lieu sur la ligne de production. Elle est ajustable selon un certain nombre de paramètres indépendants. La figure 1.5 présente le schéma d'une machine de crêpage. Cette machine est composée d'une succession de

tapis convergents. Le matelas de laine stratifiée entre dans la crêpeuse avec une vitesse  $V_1$  correspondant à la vitesse de la ligne de fabrication. Le premier jeu de tapis convoyeurs est convergent. Le matelas est alors acheminé au niveau du deuxième jeu de tapis ayant une vitesse  $V_2$  inférieure à celle des tapis d'entrée. Un troisième jeu de tapis peut être présent. Leur vitesse de défilement  $V_3$  est alors inférieure à la vitesse des tapis précédents ( $V_2$ ). La stratification naturelle de la laine est ainsi cassée avant réticulation du liant. Une fois cette opération achevée, le matelas déstructuré entre dans l'étuve de polymérisation et la texture ainsi formée est figée.

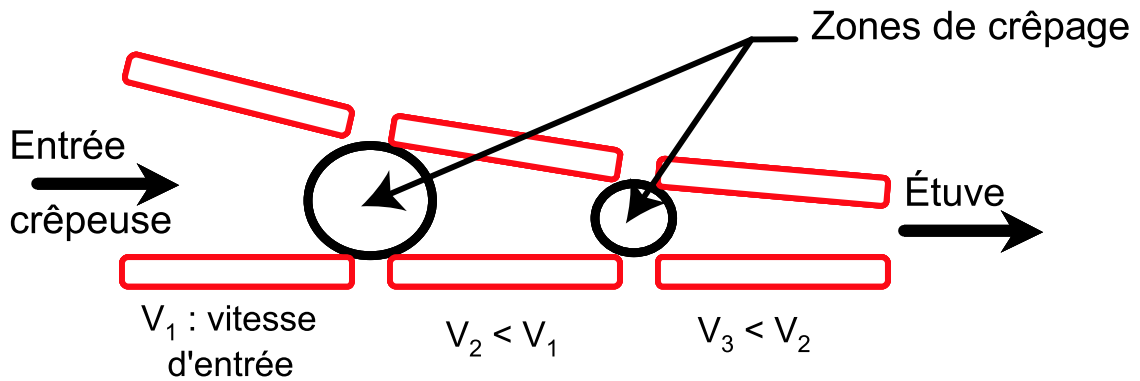


Figure 1.5 – Schéma d'une machine de crêpage à deux étages.

Plusieurs paramètres sont alors ajustables en fonction du produit fini désiré. Tout d'abord le fait qu'il y ait 2 ou 3 jeux de tapis : ceci définit une crêpeuse à « simple étage » (*i.e.*, ayant une seule transition entre les deux tapis) ou une crêpeuse à « double étage » (comme le montre la figure 1.5). On définit alors le rapport de crêpage comme le rapport  $R$  entre les vitesses d'entrée et de sortie de la crêpeuse ( $R = V_1/V_3$  dans le cas d'une double crêpeuse ou  $R = V_1/V_2$  dans le cas d'une simple crêpeuse). La hauteur ainsi que l'inclinaison des différents tapis convoyeurs a également une influence sur la texture du produit fini. Enfin, il est possible d'introduire un différentiel de vitesse entre les tapis haut et bas de la crêpeuse, ce différentiel ayant pour but de redresser le matelas de laine.

### 1.1.3.2 Cinématique d'une machine de crêpage

Le crêpage est réalisé en imposant une discontinuité de vitesse au niveau de la jonction entre les tapis, ceci ayant pour but de créer un « bouchon » au niveau de la transition. La transition n'étant pas idéalement brutale, la cinématique imposée par les tapis n'est pas compatible avec celle du matériau. Ainsi, des contraintes s'accumulent dans le matelas de laine en amont de la transition et le crêpage commence dès ce niveau. Ceci suggère d'étudier finement ce qu'il se passe au voisinage de la transition dans le but de mettre en évidence les zones de la crêpeuse responsables

du crêpage et les zones de glissement relatif entre le feutre et les tapis. Si l'on note  $x$  la coordonnée spatiale dans la direction de la ligne de production et  $z$  la direction verticale, la hauteur des tapis est imposée par les rouleaux et est notée  $h(x)$ . Les rouleaux haut et bas imposent une vitesse axiale notée  $u(x)$ . La correspondance temps/position est donnée en intégrant la loi de vitesse :

$$t(x) = \int_0^x \frac{dx'}{u(x')} \quad (1.1)$$

Cette relation, ou son inverse, permet de passer simplement d'un paramétrage en position à un temps. Le taux de déformation axial imposé est

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{du(x)}{dx} \quad (1.2)$$

alors que le taux de déformation transverse vaut

$$\dot{\epsilon}_{zz} = \frac{u(x)}{h(x)} \frac{dh(x)}{dx} \quad (1.3)$$

Ceci montre que seuls les différentiels de vitesse sont importants pour autant qu'ils puissent être suivis par le feutre. La seule donnée du champ des vitesses ne suffit pas à rendre compte de ce qu'il se passe au niveau de la crêpeuse et les champs de taux de déformation sont alors nécessaires pour caractériser la cinématique d'une machine de crêpage.

## 1.2 Importance de la texture

### 1.2.1 Relation avec le procédé de fabrication

L'étude présentée ici ne concerne que les produits lourds, c'est-à-dire dont la densité est moyenne à élevée (de 100 à 150 kg/m<sup>3</sup> pour la roche et de 50 à 130 kg/m<sup>3</sup> pour le verre), pour lesquels des performances mécaniques sont exigées. Comme le souligne Trdič [7], plusieurs facteurs influent sur les propriétés mécaniques du produit fini pour une densité donnée :

- le diamètre des fibres et leur longueur,
- la proportion d'infiltrés, non négligeable dans la laine de roche,
- l'agencement des fibres au sein du produit, c'est-à-dire l'orientation des mèches de fibres.

Trdič [7] a étudié l'importance du procédé de fibrage de la laine de roche, en suivant la roche en fusion et en modélisant sa trajectoire à partir de vidéos numériques, notamment la position du filet de laitier sur le premier rotor (figure 1.3).

L'opération de crêpage étant une opération commune aux deux procédés d'élaboration de laine de verre et de roche, optimiser les propriétés mécaniques du produit



fini en essayant de comprendre et quantifier les mécanismes mis en jeu au sein de la machine de crêpage fournira une approche polyvalente du problème. Aujourd'hui les crêpeuses sont réglées de manière empirique : les performances d'un produit fini sont associées à un jeu de paramètres de réglage donné. Comme le montre la figure 1.6, les paramètres de crêpage ont une influence directe sur les textures obtenues. Si la macrostructure d'un produit est liée aux propriétés mécaniques du produit, utiliser l'anisotropie locale comme intermédiaire permettra d'établir une relation entre procédé d'élaboration et performances mécaniques du produit fini.

### 1.2.2 Influence sur les propriétés mécaniques

La texture étant conditionnée par le procédé de fabrication, il peut être intéressant de mettre en évidence son influence sur les performances mécaniques du produit fini. La norme pour les produits isolants thermiques destinés aux applications du bâtiment [8, 9] impose d'évaluer les performances mécaniques d'un produit grâce à sa contrainte en compression à  $-10\%$  de déformation relative ainsi qu'à sa contrainte au pic d'arrachement. Plusieurs produits, de paramètres de crêpage différents, ont alors été testés mécaniquement, ainsi qu'un produit non crêpé afin d'avoir une référence. Les textures correspondantes sont présentées sur la figure 1.6. La texture 1.6(a) est celle d'un produit non crêpé, les mèches de fibres forment alors un produit stratifié unidirectionnel. Le produit correspondant à la texture 1.6(b) présente deux parties distinctes : la partie supérieure de l'échantillon avec une orientation dominante de  $45^\circ$  (si l'on prend comme référence d'angle l'horizontale) et la partie inférieure, avec une orientation dominante de  $-45^\circ$ . Cette double orientation fait apparaître sur la tranche du produit une texture particulière, que l'on appellera par la suite une « structure en V ».

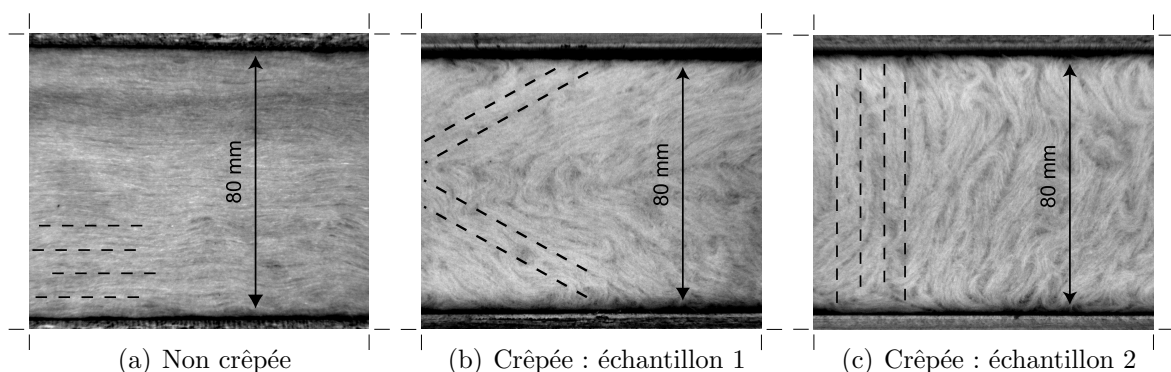


Figure 1.6 – Textures obtenues pour différents paramètres de crêpage.

Des essais de compression uniaxiale et d'arrachement ont été réalisés afin de déterminer les propriétés mécaniques de la laine de verre crêpée au sens de la norme. Les résultats présentés ici correspondent à des essais pilotés en déplacement : une

compression uniaxiale (dans la direction 1 indiquée sur la figure 1.4) jusqu'à  $-20\%$  de déformation globale a été appliquée pour les essais de compression, et une traction jusqu'à  $15\%$  de déformation globale pour les essais d'arrachement.

Les résultats des essais sont présentés sur les figures 1.7 et 1.8. Une première comparaison quantitative peut être effectuée au sens de la norme en évaluant les contraintes à  $-10\%$  de déformation relative et les contraintes au pic d'arrachement pour les 3 produits testés. Les valeurs obtenues sont reportées dans le tableau 1.1. À densité donnée, de bien meilleures performances mécaniques peuvent être obtenues : les résistances à la compression et à l'arrachement peuvent en effet être augmentées d'un facteur supérieur à 2 grâce au crêpage.

	$\sigma_{10\%}$ (kPa)	$\sigma_{arr}$ (kPa)
non crêpé	-29.6	14
crêpage 1	-49.4	25.7
crêpage 2	-83.9	50

Tableau 1.1 – Résultats d'essais mécaniques sur différents crêpages.

Si l'on compare par ailleurs les différentes courbes expérimentales, on peut noter, pour la compression et dans le cas du produit ayant les meilleures performances, l'apparition d'un plateau plastique dès  $-7\%$  de déformation globale imposée. Ce domaine plastique n'est pas encore présent à  $-20\%$  de déformation globale dans le cas du produit non crêpé, ni dans le cas du produit correspondant au crêpage 1. Si l'essai est poursuivi au delà des  $-20\%$  de déformation globale, une zone de densification apparaît dont le début dépend principalement de la densité du produit testé.

En ce qui concerne les résultats en arrachement, mise à part la contrainte correspondant au pic d'arrachement, qui correspond à l'apparition d'une fissure dans l'éprouvette, le niveau de déformation pour lequel il apparaît dépend également du crêpage considéré. En effet, le matériau ayant les meilleures performances en arrachement (le crêpage 2) est aussi le plus fragile : le pic d'arrachement est atteint pour une déformation globale imposée de  $3.5\%$  pour le crêpage 2,  $4\%$  pour le crêpage 1 et  $4.5\%$  pour le produit non crêpé.

Enfin, il est à noter qu'un crêpage qui donne de bons résultats en compression, donnera également de bons résultats en arrachement.

## 1.3 Plan de thèse

Le crêpage est un procédé de fabrication utilisé sur ligne de production pour déstructurer la laine minérale, dans le but de donner au produit fini des performances

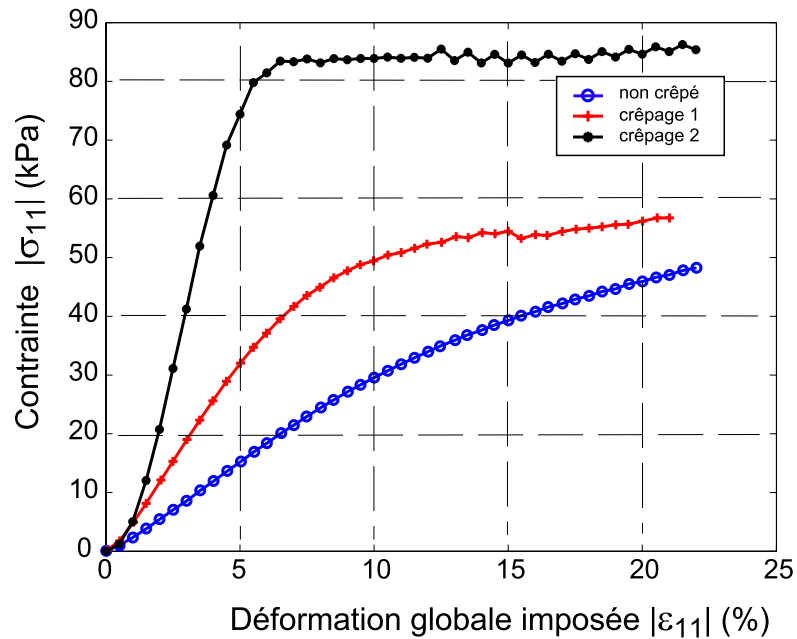


Figure 1.7 – Comportement de la laine de verre en compression.

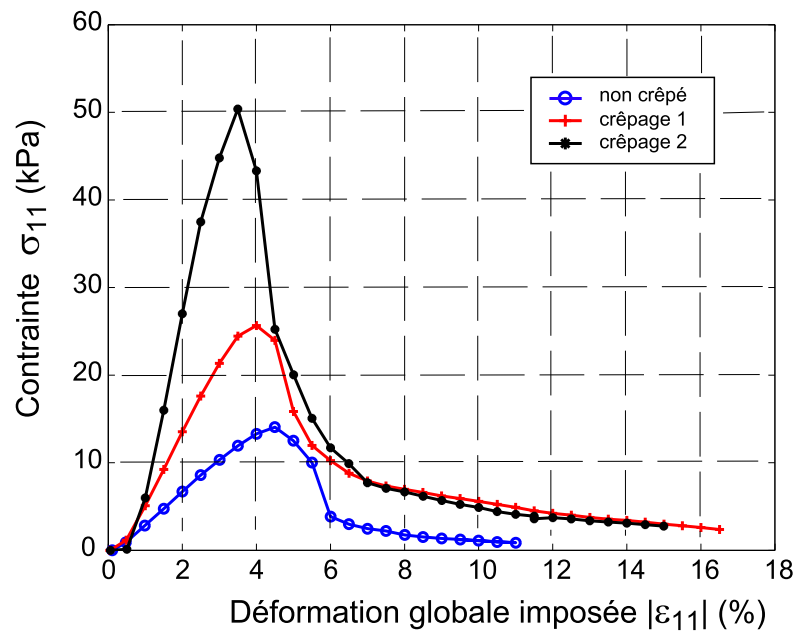


Figure 1.8 – Comportement de la laine de verre en arrachement.

mécaniques meilleures. Il a été souligné l'influence de cette étape de crêpage sur la texture du produit fini : selon les paramètres utilisés sur ligne de production, la macrostructure du matériau est modifiée.

Une première étude légitime ressort donc de cette observation : relier qualitativement et quantitativement les paramètres de crêpage à la texture du produit fini. Cette étude implique, dans un premier temps d'analyser ce qu'il se passe au niveau de la crêpeuse. Cela permet de répondre à un certain nombre de questions comme :

- Quelles sont les zones de la crêpeuse les plus actives, c'est-à-dire celles où le matelas se déforme le plus ?
- Quelle est l'influence des paramètres de crêpage sur la cinématique de la crêpeuse ?
- Peut-on relier l'étude des zones de la crêpeuse où le matelas se déforme le plus à la macrostructure du produit fini ?

Il apparaît donc intéressant d'étudier plus précisément ce qu'il se passe au niveau de la crêpeuse, notamment en termes de cinématique. Le crêpage étant une opération réalisée en continu, ceci suggère de mettre en œuvre une mesure à partir d'observations possibles sur ligne de production. Le but du prochain chapitre est de répondre à cette problématique en introduisant différentes approches afin de modéliser la cinématique d'une machine de crêpage. À partir de vidéos numériques prises sur ligne de production, au niveau de l'étage de crêpage, une méthode basée sur l'analyse d'images et sur les fonctions de corrélation est mise en place pour déterminer localement les champs des taux de déformations au sein de la crêpeuse ainsi que le profil des vitesses sur la tranche du produit. L'analyse des champs obtenus permet alors d'identifier les zones de la crêpeuse responsables de la texturation du matériau.

La macrostructure, une fois figée par le procédé de fabrication du matériau, est en lien direct avec les propriétés mécaniques du produit. Étudier la texture du produit fini semble alors être l'intermédiaire entre le procédé de fabrication et les performances mécaniques. Dans la quasi-totalité des usines Saint-Gobain, l'opération de crêpage est une opération 2D, la texture du matériau étant persistante dans la troisième direction. Caractériser la macrostructure du produit est possible à partir de l'étude de la texture du matériau à partir d'observations faites sur la tranche du produit. Ceci fait l'objet du troisième chapitre pour lequel une étude de l'anisotropie locale d'un matériau enchevêtré est présentée : basée sur l'analyse d'une image numérique, elle permet d'identifier l'axe principal d'anisotropie d'une zone locale de l'image analysée, ainsi que le degré d'anisotropie associé. L'influence des paramètres de fabrication sur la texture du produit fini est alors accessible à partir du champ d'anisotropie déterminé pour plusieurs images de produits, issus de paramètres de réglage différents.

Enfin la texture du produit étudié a une forte influence sur les performances mécaniques du produit, en termes de tenue à la compression et à l'arrachement. Cette interaction a été mise en évidence expérimentalement, et suggère de modéliser le comportement mécanique élastique anisotrope du matériau étudié. Ceci sera présenté dans les chapitres 4 et 5 afin d'établir des relations entre performances mé-

caniques et anisotropie locale. Pour cela, une modélisation de la réponse élastique anisotrope du matériau à une sollicitation de compression sera introduite. Une démarche originale est proposée : on suppose que localement, le matériau suit une loi de comportement élastique isotrope transverse (dont les paramètres seront identifiés) selon une direction particulière, celle-ci correspondant à la direction d'anisotropie identifiée par l'outil développé au chapitre 3. Les résultats de la modélisation sont finalement confrontés aux résultats expérimentaux et une procédure d'identification permet enfin d'optimiser les paramètres élastiques.

# Chapitre 2

## Analyse de la cinématique d'un procédé de mise en forme

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Présentation de la méthode</b>	<b>18</b>
2.1.1	Utilisation de la carte brute	20
2.1.2	Utilisation des fonctions de corrélation	22
2.1.3	Choix de la base de fonction	25
2.1.4	Étude d'une carte test	27
2.1.5	Extension au cas 2D	38
<b>2.2</b>	<b>Étude de films d'un écoulement réel</b>	<b>42</b>
2.2.1	Résultats 1D	43
2.2.2	Résultats 2D	50
2.2.3	Utilisation des résultats	53
<b>2.3</b>	<b>Conclusion</b>	<b>55</b>

---

Dans ce chapitre, nous présentons une méthode pour analyser la cinématique d'un procédé de mise en forme. Cet outil, destiné à être utilisable directement sur ligne de production, est basé sur l'analyse d'images, et plus précisément sur des images extraites d'un film vidéo numérique. Un procédé de mise en forme peut être assimilé à un écoulement, et la caméra, fixe sur la ligne de production, permet de mettre en place une approche eulérienne du problème. Sous certaines hypothèses, l'analyse du film réalisé en tant que séquence d'images permet d'évaluer plusieurs champs cinématiques caractérisant l'écoulement. L'exploitation d'un grand nombre d'images permet de pallier la modeste qualité de chacune d'entre elles et de résoudre spatialement des écoulements rapides. Cette méthode, basée sur une technique de corrélation, utilise une approche similaire à la méthode des éléments finis, en décomposant le champ recherché sur une base de fonctions.

Dans une première partie, la méthode sera présentée et les hypothèses utilisées seront justifiées. Puis les différentes approches seront développées, en commençant par une approche 1D du problème, puis en étendant les résultats à une approche 2D. Enfin, nous utiliserons la méthode sur un film réalisé en conditions réelles, c'est-à-dire le film d'un procédé de mise en forme qui remplit les hypothèses requises. Nous verrons alors quelles sont les quantités disponibles à partir de cette étude (champs de trajectoires, vitesses, etc.).

### 2.1 Présentation de la méthode

Les progrès de l'imagerie numérique, que ce soit en photographie ou en vidéo ont permis la mise au point de nouvelles techniques de mesures optiques. Faciles à mettre en oeuvre car sans contact, elles sont notamment utilisées en mécanique des fluides afin de visualiser les trajectoires des particules transportées par l'écoulement [10, 11, 12]. Une de ces techniques, la vélocimétrie par imagerie de particules (VIP) [13, 14] est une mesure du champ cinématique d'un écoulement fluide.

En mécanique des matériaux et des structures, une technique proche utilisée est la corrélation d'images numériques (CIN) [15, 16, 17]. À partir d'images prises à des instants différents lors d'un essai, elle permet de déterminer les champs de déplacement et de déformation en surface d'une éprouvette testée mécaniquement. Cette méthode sera plus largement développée au chapitre 4. Pour de grands déplacements ou des écoulements rapides, ces méthodes présentent des limites, les différences entre deux images successives à analyser étant trop importantes pour permettre un calcul fiable [18].

Une nouvelle approche est proposée ici. Elle permet de déterminer la composante stationnaire du champ des vitesses à partir du film vidéo numérique d'un écoulement. L'utilisation d'un film fournit un grand nombre d'images et permet alors une

analyse de la cinématique stationnaire inhomogène en dépit de la modeste qualité des images de départ prises indépendamment (problèmes de compression d'images, de bruit ambiant, de la faible dynamique de la caméra, etc.). Il est alors nécessaire de disposer d'une première approximation des lignes de vitesse. On suppose, dans la suite, que les trajectoires sont approximativement suivant l'axe  $x$ , direction de l'écoulement.

Pour chaque valeur de  $y$  (selon une direction perpendiculaire au champ de vitesse), une carte spatio-temporelle  $f(x, t)$  est reconstruite (figure 2.1), où le « pixel » en temps correspond à une image, et a donc une durée de  $1/25^e$  s. La carte  $f(x, t)$  donne le niveau de gris du pixel  $(x, y)$  de l'image  $t$ .

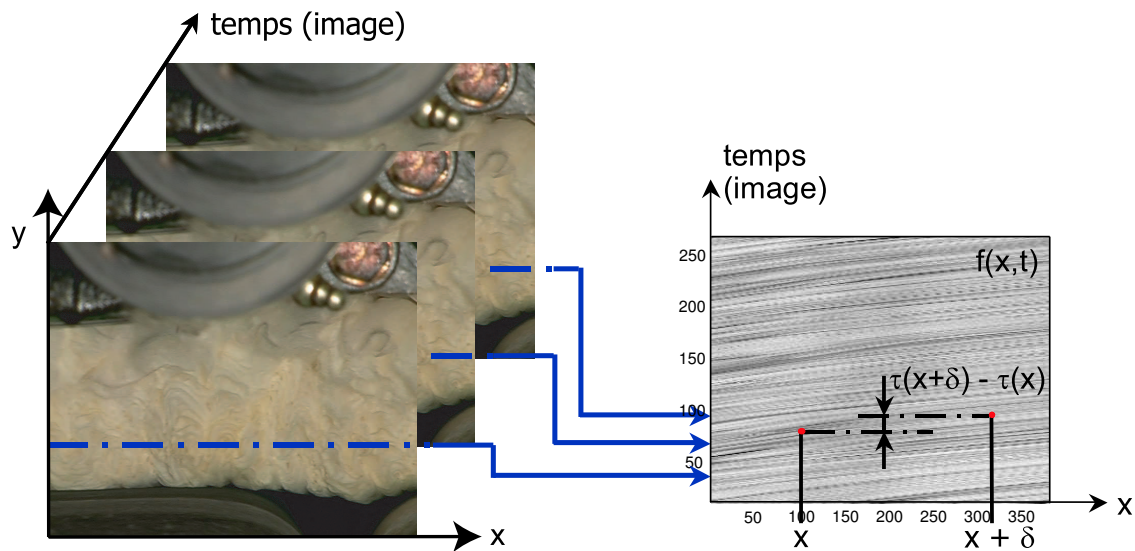


Figure 2.1 – Construction de la carte utile à partir d'un film pour une hauteur  $y$  donnée.

Pour une différence d'abscisse  $\delta$  donnée (figure 2.1), le décalage temporel moyen entre les deux lignes verticales, correspondant à  $\tau(x+\delta) - \tau(x)$  est recherché. On peut alors déterminer ce décalage inconnu de deux manières différentes : si l'on recherche directement le champ  $\tau(x)$ , on pourra reconstruire le champ des trajectoires, et en déduire par dérivation temporelle le champ des vitesses. Cette dérivation a alors comme inconvénient d'introduire un bruit aux données à analyser. Si l'on recherche directement le champ des vitesses, ou plus précisément le champ des inverses de la vitesse relié à  $\tau(x+\delta) - \tau(x)$ , il faudra alors intégrer le signal pour revenir aux trajectoires inconnues. L'étape d'intégration nécessaire pour revenir aux trajectoires ne perturbera pas la mesure, et apportera une régularité supplémentaire au champ des trajectoires. Par ailleurs, issue du champ des vitesses, une grandeur à analyser est le champ des taux de déformation. Ce nouveau champ correspond à une dérivation



spatiale du champ des vitesses, qui doit alors posséder une certaine régularité afin de limiter le bruit dû à la dérivation. Rechercher le champ des trajectoires ou le champ des vitesses sont deux approches similaires dont les performances seront testées et comparées. Il faudra cependant tenir compte de l'utilisation du champ recherché (pour déduire de nouveaux champs comme le champ des taux de déformation), pour imposer une régularité suffisante au champ inconnu.

Plusieurs approches sont possibles, dont le point de départ diffère. L'information que fournit la carte spatio-temporelle est un signal 2D correspondant aux niveaux de gris du film analysé pour une hauteur donnée. On peut travailler sur l'information fournie par la carte directement. Cette information étant sensible au bruit pixel, une seconde approche possible est d'utiliser les fonctions de corrélation du signal. Ces fonctions étant une signature du signal analysé et leur régularité étant plus forte que celle de la carte spatio-temporelle brute, leur utilisation est légitime. On se propose de mettre en place deux méthodes permettant de résoudre le problème posé. La première travaillera directement sur la carte spatio-temporelle brute et la seconde exploitera les fonctions de corrélation du signal 2D des niveaux de gris de la carte spatio-temporelle. On verra alors, selon l'information utilisée quel champ sera paramétré (champ des trajectoires ou des vitesses).

L'hypothèse qui sert à reconstruire le champ inconnu est la conservation du flot optique [19, 20, 21], écrite de manière intégrale comme reposant sur l'existence d'une fonction d'une seule variable  $\varphi$  telle que

$$f(x, t) = \varphi(t - \tau(x)) \quad (2.1)$$

où  $\tau$  est le décalage temporel recherché dépendant de la coordonnée spatiale  $x$ . Pour tenir compte de l'éventuelle variation systématique des conditions d'éclairage d'un pixel à l'autre, on peut relaxer la condition (2.1) en permettant d'accommoder une translation et une affinité sur les niveaux de gris d'un pixel à l'autre. La figure 2.2 présente l'évolution de  $f(x, t)$  et de  $f(x + \delta, t)$  en fonction du temps. Le décalage temporel entre les deux fonctions est alors relié au paramètre  $\tau$  inconnu.

### 2.1.1 Utilisation de la carte brute

On se propose dans un premier temps d'utiliser directement l'information fournie par la carte brute. On suppose par ailleurs que les vitesses recherchées sont majoritairement suivant la direction de l'écoulement (direction  $x$ ). Cette méthode, proche de celle développée par Wagne [22] utilisant une approche spectrale pour évaluer le champ de déplacement d'une analyse d'images, a comme point de départ la fonction  $f$ , réécrite pour introduire une vitesse, et sa copie décalée  $g$  telle que

$$\begin{cases} f(x, t) = f(x, x/V_x) \\ g(x, t) = f(x + dx, t) = f(x + dx, (x + dx)/V_x) \end{cases} \quad (2.2)$$

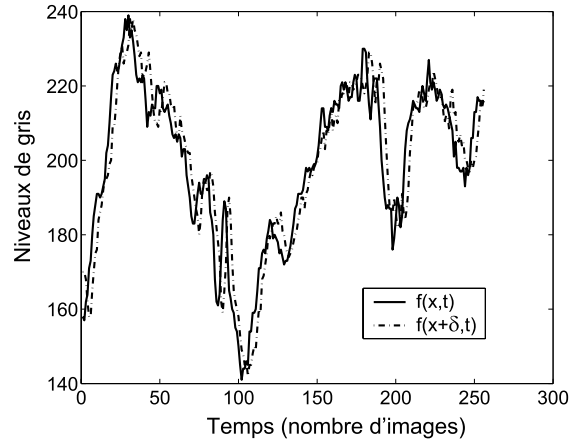


Figure 2.2 – Évolution des fonctions  $f(x, t)$  et  $f(x + \delta, t)$  pour  $x$  fixé en fonction du temps,  $\delta = 3$  pixels.

où  $dx$  représente l'incrément de déplacement d'amplitude faible. Le système à résoudre s'écrit comme la minimisation d'une fonctionnelle

$$\mathcal{T}(\nu_x(x)) = \iint \left( f(x + dx, (x + dx)/\nu_x(x)) - f(x, x/\nu_x(x)) \right)^2 dt dx \quad (2.3)$$

Si l'on suppose  $f$  suffisamment régulière, l'écriture en  $1/\nu_x(x)$  pour une vitesse supposée élevée permet un développement de Taylor qui au premier ordre introduit une nouvelle expression de  $\mathcal{T}$

$$\mathcal{T}(\nu_x(x)) = \iint \left( f(x + dx, t) - f(x, t) + dx/\nu_x(x) \frac{\partial f}{\partial t}(x + dx, x/\nu_x(x)) \right)^2 dt dx \quad (2.4)$$

On peut ensuite décomposer le champ recherché  $x/\nu_x(x)$  sur une base de fonctions choisie  $\phi$

$$x/\nu_x(x) = \sum_j a_j \phi_j(x) \quad (2.5)$$

La fonctionnelle  $\mathcal{T}$  s'écrit alors comme une forme quadratique des nouvelles inconnues  $a_j$ . La minimisation donne alors, pour tout  $k$

$$\left[ \int \left( \int \frac{\partial f}{\partial t}(x + dx, t) \times \frac{\partial f}{\partial t}(x + dx, t) dt \right) \phi_j(x) \phi_k(x) dx \right] a_k = \int \left( \int \nabla f(x, t) \times \frac{\partial f}{\partial t}(x + dx, t) dt \right) \phi_j(x) dx \quad (2.6)$$

Ce système peut aussi être écrit sous forme matricielle

$$M_{jk} a_k = A_j \quad (2.7)$$

et sa résolution est simple. Au lieu de résoudre le problème de manière globale, la longueur de l'image (selon  $x$ ) peut être divisée en un nombre fini d'éléments, et l'identification des paramètres  $a_k$  permettra de reconstruire ensuite directement le champ des vitesses.

### 2.1.2 Utilisation des fonctions de corrélation

Au lieu de travailler directement sur la carte brute, cette nouvelle approche fait intervenir les fonctions d'inter- et d'autocorrélation des signaux correspondant aux niveaux de gris des deux séries temporelles choisies. Une première approche 1D permet alors de déterminer le décalage inconnu  $\tau$  de manière incrémentale pour chaque abscisse  $x$  de l'image pour une hauteur  $y$  donnée. Par son principe, elle se rapproche de l'approche classique de corrélation [15, 16]. Une deuxième approche sera ensuite proposée : elle permet de rendre l'algorithme plus robuste en recherchant  $\tau$  sous la forme d'une décomposition tout d'abord très générale puis particularisée à deux bases de fonction spécifiques.

Cette résolution 1D peut être effectuée sur toute la hauteur utile de l'image composant l'écoulement. En juxtaposant les trajectoires, un champ 2D peut être construit. Cette méthode pouvant induire des perturbations dans le champ résolu des trajectoires, une autre approche, recherchant  $\tau$  sous la forme d'une décomposition sur une base de fonctions dans les deux directions, sera présentée.

L'utilisation des fonctions d'inter- et d'autocorrélation, plus régulières que la fonction  $\varphi$  permettra de déduire une information très bien résolue spatialement et moyennée en temps. Les fonctions d'auto- et d'intercorrélation s'écrivent

$$C_0(\theta, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t)f(x, t + \theta) dt \quad (2.8)$$

$$C_1(\theta, x, \delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t)f(x + \delta, t + \theta) dt \quad (2.9)$$

où  $\theta$  est un décalage temporel et  $\delta$  l'incrément spatial. Si l'on appelle  $L$  la longueur en pixels de l'image étudiée, l'analyse est alors effectuée sur une longueur de  $L - \delta$  pixels. La conservation du flot optique impose que  $C_1$  soit obtenu par une simple translation de  $C_0$  par  $\Delta\tau(x, \delta) = \tau(x + \delta) - \tau(x)$  (figure 2.3). Sur la figure 2.3 on voit nettement que rechercher le décalage moyen entre les fonctions d'inter- et d'autocorrélation est un problème similaire au problème précédent, travaillant directement sur les fonctions de niveau de gris (figure 2.2). Enfin, si les fonctions d'inter- et d'autocorrélation correspondent à un signal particulier traduisant les niveaux de gris d'une image, la problématique est alors identique.

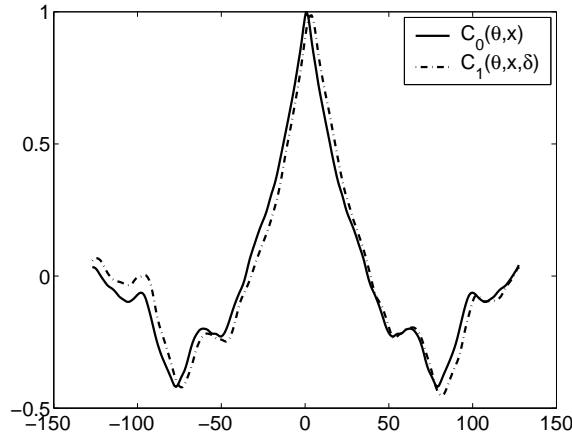


Figure 2.3 – Fonctions d’inter- et d’autocorrélation normées  $C_1$  et  $C_0$ ,  $\delta = 3$  pixels.

Lorsque le décalage  $\Delta\tau$  est petit devant la longueur de corrélation du signal temporel, un développement de Taylor au premier ordre conduit à

$$C_1(\theta, x, \delta) \simeq C_0(\theta, x) - [\tau(x + \delta) - \tau(x)] \frac{\partial C_0}{\partial \theta}(\theta, x) \quad (2.10)$$

Ainsi, il suffit de projeter la différence  $C_1 - C_0$  sur la fonction  $\frac{\partial C_0}{\partial \theta}(\theta, x)$  pour avoir accès au décalage  $\tau$  calculé à l’abscisse  $x$ . À ce stade de l’étude plusieurs approches sont possibles : une approche incrémentale pour laquelle le décalage inconnu  $\tau$  est recherché pour chaque abscisse  $x$  indépendamment ou une approche en décomposant le champ recherché sur une base de fonctions.

### 2.1.2.1 L’approche incrémentale

La projection de  $C_1 - C_0$  sur la fonction  $\frac{\partial C_0}{\partial \theta}(\theta, x)$  (équation (2.10)) peut être effectuée sur toutes les lignes verticales de la carte  $f(x, t)$ . Cette méthode fournit les lignes de courant de la carte spatio-temporelle (figure 2.1). Pour relaxer l’hypothèse de conservation du flot optique, il est possible d’ajouter une composante additionnelle  $\Delta K(x, \delta)$  proportionnelle à  $C_0$ . Le système à résoudre s’écrit comme la minimisation de la nouvelle fonctionnelle suivante

$$\mathcal{T}[\Delta K(x, \delta), \Delta\tau(x, \delta)] = \int_{\theta} \left[ \Delta C(\theta, x, \delta) - \Delta K(x, \delta) C_0(\theta, x) + \Delta\tau(x, \delta) \frac{\partial C_0}{\partial \theta}(\theta, x) \right]^2 d\theta \quad (2.11)$$

avec

$$\begin{cases} \Delta C(\theta, x, \delta) = C_1(\theta, x, \delta) - C_0(\theta, x) \\ \Delta K(x, \delta) = K(x + \delta) - K(x) \\ \Delta\tau(x, \delta) = \tau(x + \delta) - \tau(x) \end{cases}$$

Cette minimisation permet d'aboutir à la résolution d'un système linéaire  $2 \times 2$  dont les inconnues sont  $\Delta K(x, \delta)$  et  $\Delta \tau(x, \delta)$ . Les développements mathématiques correspondant à cette première méthode sont détaillés dans l'annexe A. Cette première méthode fournit de bons résultats (*cf.* paragraphe 2.1.4) mais reste sensible au bruit pixel. Une deuxième méthode a été développée pour rendre l'algorithme d'identification plus robuste.

### 2.1.2.2 L'approche par décomposition sur une base de fonctions

En partant de l'équation (2.10), une forte régularité est imposée sur le décalage temporel en recherchant  $\tau$  sous la forme d'une décomposition sur une base de fonctions  $\psi_i$

$$\tau(x) = \sum_i a_i \psi_i(x) \quad (2.12)$$

où les paramètres  $a_i$  sont inconnus. La résolution du problème se ramène à la minimisation de la fonctionnelle

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\Delta K(x, \delta), a_i) = & \int_{\theta} \int_x \left[ \Delta C(\theta, x, \delta) - \Delta K(x, \delta) C_0(\theta, x) \right. \\ & \left. - \sum_i a_i (\psi_i(x) - \psi_i(x + \delta)) \frac{\partial C_0}{\partial \theta}(\theta, x) \right]^2 dx d\theta \end{aligned} \quad (2.13)$$

par rapport aux paramètres  $a_i$  et  $\Delta K(x, \delta)$ . Sachant que la détermination des  $\Delta K(x, \delta)$  n'est pas directement utilisée, la minimisation de (2.13) permet, dans un premier temps d'écrire  $\Delta K(x, \delta)$  pour tout  $x$  en fonction des inconnues  $a_i$

$$\begin{aligned} \Delta K(x, \delta) = & \\ & \frac{\int_{\theta} \Delta C(\theta, x) C_0(\theta, x) d\theta - \sum_i a_i (\psi_i(x) - \psi_i(x + \delta)) \int_{\theta} C_0(\theta, x) \frac{\partial C_0}{\partial \theta}(\theta, x) d\theta}{\int_{\theta} C_0(\theta, x)^2 d\theta} \end{aligned} \quad (2.14)$$

puis d'introduire l'expression trouvée dans les autres équations déduites de la minimisation par rapport aux inconnues  $a_i$ . Cette minimisation permet d'obtenir un système linéaire de la forme

$$M_{ji} a_i = f_j, \quad (2.15)$$

dont les détails sont développés dans l'annexe A. À ce stade de l'algorithme, le champ inconnu peut être recherché de manière globale ou projeté sur une base de fonctions choisie. La largeur de l'image est alors décomposée en un nombre fini d'éléments. Le choix de la base de fonctions utilisée va maintenant être discuté.

### 2.1.3 Choix de la base de fonction

Pour les deux approches présentées (la méthode utilisant les fonctions de corrélation et recherchant le champ des trajectoires et la méthode utilisant l'image brute et recherchant le champ des vitesses), le champ recherché est décomposé sur une base de fonctions. Cette décomposition permet une résolution plus fine qu'une résolution globale. Le choix de la base de fonctions doit alors être discuté. En effet la base de fonctions doit permettre d'écrire facilement le champ inconnu, mais également les champs issus de celui-ci. On se propose ici d'utiliser deux bases de fonctions pour les deux méthodes présentées : une base de fonctions splines cubiques et une base de fonctions linéaires. De plus, pour la méthode pour laquelle le champ des vitesses est recherché, une troisième base sera introduite : la décomposition du signal en modes de Fourier.

#### 2.1.3.1 Base de fonctions splines cubiques

Le choix d'une base de fonctions splines cubiques (figure 2.4) comme base de projection se justifie par l'utilisation du champ solution. En effet, que l'on souhaite déterminer le champ des trajectoires ou le champ des vitesses, le champ recherché doit être régulier et dérivable. L'écriture en splines cubiques permet de calculer aisément le champ dérivé. Par ailleurs, l'écriture des conditions de continuité du champ recherché et de sa dérivée entre deux éléments consécutifs se fait aisément en utilisant une telle base. Si  $N$  représente le nombre d'éléments composant la largeur de l'image à analyser, l'ordre du système à résoudre, quelle que soit l'approche utilisée, est de  $4N$ . La prise en compte des conditions de continuité entre deux éléments consécutifs  $e$  et  $e + 1$  s'écrit

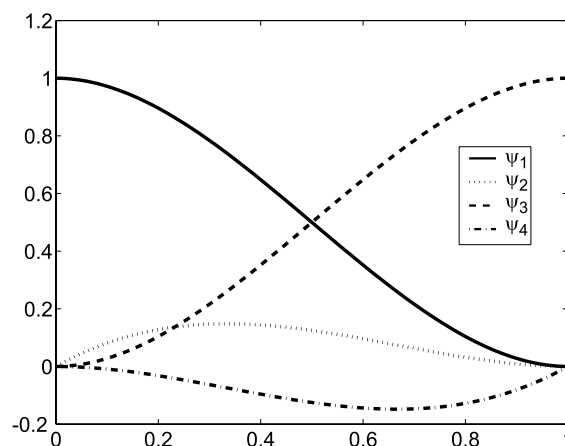


Figure 2.4 – Base des fonctions splines cubiques, représentée dans l'élément de référence.

$$\begin{cases} a_3^e = a_1^{e+1} \\ a_4^e = a_2^{e+1} \end{cases} \quad (2.16)$$

Ces conditions de continuité permettent de réduire la taille du système à résoudre à  $2N + 2$  équations. Enfin, deux conditions aux limites (dites « naturelles ») aux extrémités de l'image analysée peuvent être ajoutées

$$\frac{d^2\tau(0)}{dx^2} = \frac{d^2\tau(L - \delta)}{dx^2} = 0 \quad (2.17)$$

avec  $L$  la longueur de l'image analysée, soit

$$\begin{cases} -3a_1^1 - 2a_2^1 + 3a_3^1 + a_4^1 = 0 \\ -3a_1^N - a_2^N + 3a_3^N - 2a_4^N = 0 \end{cases}$$

Finalement le système à résoudre est d'ordre  $2N + 4$ . Notons cependant qu'il est très facile de réduire la régularité des fonctions de base recherchées.

### 2.1.3.2 Base de fonctions linéaires

Une base simplement continue (linéaire par intervalle) peut s'avérer suffisante pour la plupart des applications. L'ordre du système se réduit alors à  $2N$ . Des conditions de continuité du champ recherché aux frontières de deux éléments consécutifs  $e$  et  $e + 1$  existent encore, et s'écrivent sous la forme

$$a_1^e = a_2^{e+1} \quad (2.18)$$

Le champ résolu sera alors continu, et le système à résoudre ainsi formé sera d'ordre  $N + 1$ . Pour ce cas particulier, il faut noter que le champ dérivé sera constant par morceaux mais présentera une discontinuité à la frontière de chaque élément. L'écriture de conditions aux limites n'est pas nécessaire, celles-ci étant naturellement respectées si l'on utilise des éléments linéaires (la dérivée seconde des fonctions de base est nulle sauf aux points de raccordement où c'est un Dirac).

### 2.1.3.3 Décomposition en mode de Fourier

Une troisième base de fonctions qui peut être utilisée est une décomposition en modes de Fourier. Dans ce cas, la longueur de l'image à analyser n'est plus décomposée en un nombre fini d'éléments. Ce dernier correspond au nombre de modes de Fourier utilisé pour résoudre le champ recherché. Par ailleurs, on rajoute à cette nouvelle base, une composante continue, une composante linéaire et une composante quadratique. Finalement, si le nombre de modes choisi est  $N$ , la base de décomposition du champ recherché sera de dimension  $N + 3$ .

Le champ inconnu étant recherché sur la largeur entière de l'image, l'écriture de conditions de continuité entre deux éléments consécutifs n'est pas nécessaire. La

taille du système à résoudre sera de  $[N + 3] \times [N + 3]$ . Cette dernière décomposition sera utilisée uniquement dans le cas de l'approche travaillant sur l'image brute et recherchant le champ inconnu sous la forme d'un champ de vitesse.

#### 2.1.4 Étude d'une carte test

Avant d'utiliser la méthode développée pour caractériser un écoulement réel, elle a été testée sur une carte artificielle formée explicitement. Pour la suite du chapitre, sauf mention explicite du contraire, la valeur du décalage spatial  $\delta$  est fixé à 1 pixel pour avoir la plus grande partie de l'image possible disponible pour l'analyse.

La carte-test a été créée pour que sa trajectoire ne soit ni dans l'espace des splines ni dans celui des fonctions linéaires. La carte est formée en utilisant, comme point de départ, une ligne verticale de niveau de gris. À partir de cette ligne, des vitesses sont imposées pour former l'image entière, en utilisant la propriété de translation de la transformée de Fourier. La valeur de la vitesse en tout point est donnée par

$$v(x) = \frac{1}{\sin(2\pi \frac{x}{n_x-1}) + \frac{2x}{n_x-1} + 1} \quad (2.19)$$

où  $x$  représente la coordonnée spatiale, et  $n_x$  la longueur totale de l'image selon la direction  $x$ . La figure 2.5 représente la carte-test ainsi formée en utilisant 256 images.

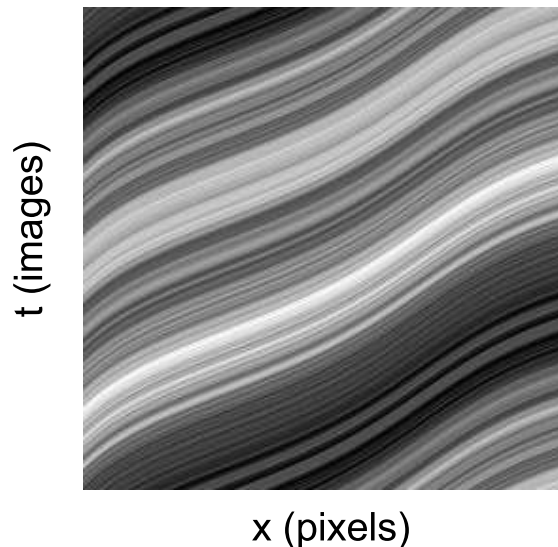


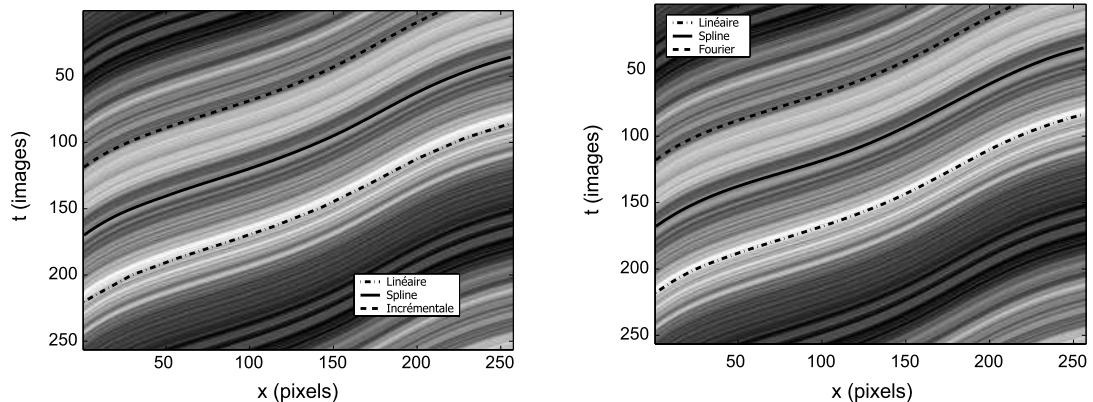
Figure 2.5 – Carte-test dont les trajectoires sont connues en tout point.

Les différentes approches, avec les décompositions sur les différentes bases, ont ensuite été utilisées pour déterminer les trajectoires, les vitesses et les taux de déformation.



### 2.1.4.1 Détermination des trajectoires

La figure 2.6 présente les résultats correspondant aux différentes approches superposés à l'image de départ : sur la figure 2.6(a) les trajectoires représentent celles obtenues en utilisant l'approche par corrélation. La trajectoire en pointillés représente les résultats de l'approche incrémentale, celle en traits mixtes ceux en utilisant des éléments linéaires, et en trait plein ceux en utilisant des éléments splines. Sur la figure 2.6(b), les trajectoires sont celles obtenues en utilisant l'approche travaillant directement sur la carte brute. Il est à noter que cette approche fournit dans un premier temps le champ des vitesses et qu'une intégration numérique du résultat a été effectuée pour remonter aux trajectoires. Par ailleurs, les résultats présentés pour cette approche correspondent à un calcul itéré : 10 itérations ont été utilisées. La trajectoire en pointillés correspond à celle obtenue en utilisant une base de Fourier, celle en traits mixtes à celle en utilisant une base d'éléments linéaires, et celle en trait plein à celle en utilisant une base d'éléments splines. La très bonne corrélation entre trajectoires déterminées et trajectoire réelle suggère d'étudier les différentes trajectoires selon le nombre de degrés de liberté utilisé.



(a) Trajectoires en utilisant l'approche par corrélation : en pointillés, l'approche incrémentale, en traits mixtes, les résultats en utilisant des éléments linéaires, en traits pleins des éléments splines.

(b) Trajectoires en utilisant l'image brute : en pointillés, les résultats utilisant une base de Fourier, en traits mixtes, en utilisant des éléments linéaires, en traits pleins des éléments splines.

Figure 2.6 – Trajectoires superposées à l'image de départ pour les deux approches et les différentes bases utilisées,  $\delta = 1$  pixel, 10 ddl.

Les performances des différentes approches peuvent être étudiées pour cette carte-test. En ce qui concerne le temps de calcul, qui peut être un critère de choix important dans la mesure où cette méthode a pour but final d'analyser un processus industriel, il est similaire pour les deux approches utilisées, augmente avec le nombre de degrés de liberté, mais ne dépasse pas la dizaine de secondes (figure 2.7).

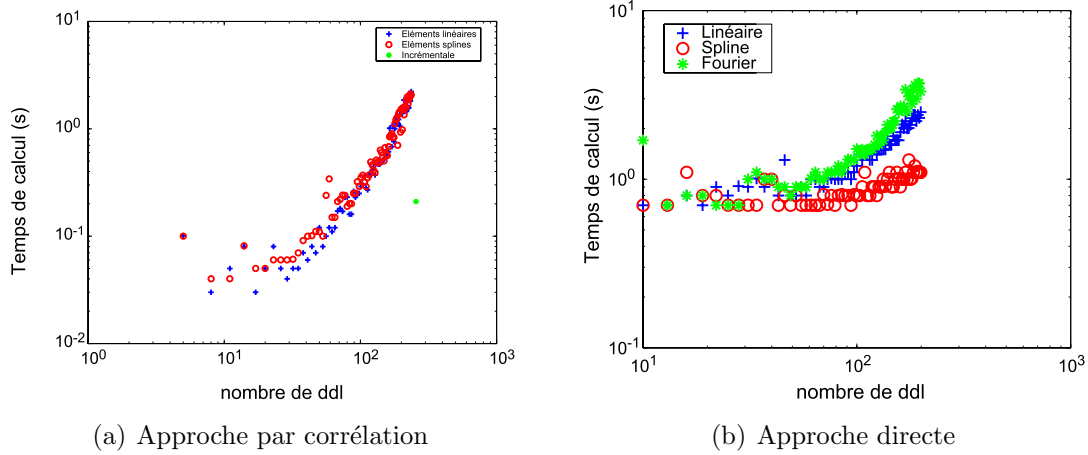


Figure 2.7 – Temps de calcul en fonction du nombre de degrés de liberté utilisé pour les deux approches.

En termes de performances des différentes approches, et de sensibilité au nombre d'éléments, l'erreur RMS peut être calculée en fonction du nombre de degrés de liberté, ce dernier étant relié au nombre d'éléments ( $ddl_{lin} = N + 1$  et  $ddl_{spline} = 2N + 4$ ). La figure 2.8 présente, en échelle log-log, l'évolution de l'erreur RMS  $\eta^2$ , calculée au sens de la norme  $L_2$

$$\eta^2(ddl) = \frac{\sum_{x=1}^{L-\delta} (T_{ex} - T_c)^2}{\sum_{x=1}^{L-\delta} (T_{ex})^2} \quad (2.20)$$

où  $T_{ex}$  représente la trajectoire imposée lors de la création de la carte-test,  $T_c$  la trajectoire déterminée par l'algorithme,  $L$  la largeur en pixel de l'image analysée,  $\delta$  la différence d'abscisse en pixel et  $ddl$  le nombre de degrés de liberté.

On peut alors noter, pour l'approche par corrélation, figure 2.8(a), que pour les faibles nombres de degrés de liberté, la décomposition sur une base spline donne une erreur beaucoup plus faible que la décomposition sur une base linéaire, la valeur de cette erreur se stabilisant entre  $10^{-4}$  et  $10^{-5}$  pour un faible nombre de degrés de liberté. L'erreur correspondant à la décomposition sur une base linéaire est plus importante pour les faibles nombres de degrés de liberté et décroît rapidement pour se stabiliser au même niveau que l'erreur obtenue en utilisant des éléments splines pour environ 60 degrés de liberté.

Pour l'approche travaillant directement sur l'image spatio-temporelle, l'évolution de l'erreur RMS est présentée sur la figure 2.8(b). On observe alors, pour les trois

décompositions utilisées une erreur RMS très faible (inférieure à  $10^{-4}$ ) dès les faibles nombres de degrés de liberté. Cette erreur décroît pour les trois méthodes jusqu'à atteindre un minimum inférieur à  $10^{-10}$  pour environ 80 degrés de liberté. Le comportement de l'erreur après cette valeur minimum diffère selon la base utilisée : pour la base spline, l'erreur se stabilise et reste inférieure à  $10^{-10}$ . Pour les bases linéaires et de Fourier, l'erreur augmente rapidement après la valeur minimum pour revenir à son niveau initial pour un nombre de degrés de liberté élevé (aux environs de 200 degrés de liberté pour une image d'une largeur de 256 pixels). Cette approche donne donc, quelle que soit la base de décomposition utilisée, d'excellents résultats dès les faibles valeurs de degrés de liberté et présente un nombre de degré de liberté optimum à utiliser selon l'image analysée.

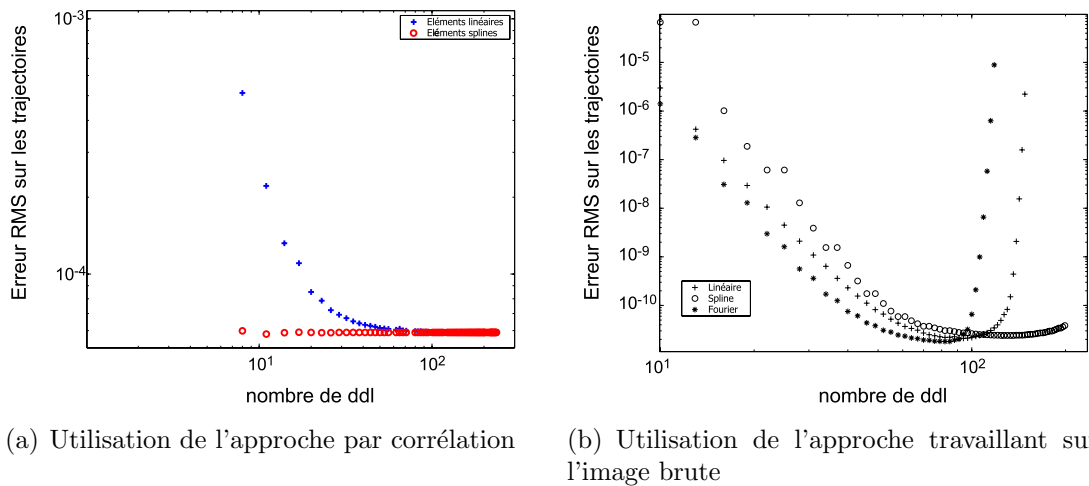
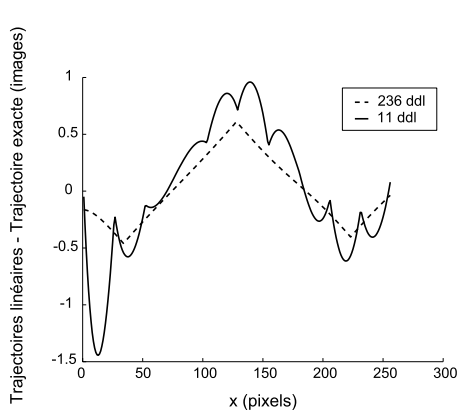


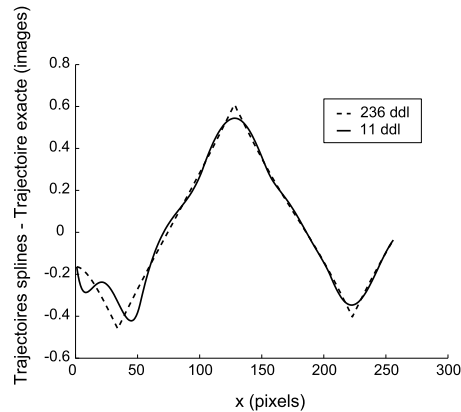
Figure 2.8 – Erreur RMS  $\eta^2$  en fonction du nombre de degrés de liberté,  $\delta = 1$  pixel.

Les deux approches utilisées donnent des résultats très encourageants et leur sensibilité au nombre de degrés de liberté a été illustrée. En termes de localisation de l'erreur, la figure 2.9 présente les résultats pour les deux approches et pour les différentes bases utilisées. Les résultats correspondent à la différence entre les trajectoires calculées et la trajectoire réelle pour des valeurs différentes de nombre de degrés de liberté. Pour l'approche par corrélation, l'erreur ne semble pas se localiser et oscille entre  $-0.5$  et  $0.5$  pixel-image. Pour l'approche utilisant l'image brute, la différence entre trajectoire calculée et trajectoire exacte présente des oscillations haute-fréquence autour de 0 mais l'amplitude de ces oscillations est faible ( $10^{-3}$  pixel-image).

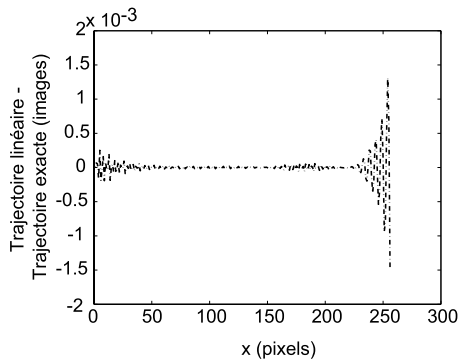
En termes de trajectoire, la méthode utilisant directement la carte brute semble donner de meilleurs résultats. Une dernière étude reste cependant à mener : la stabilité des méthodes présentées au bruit. Ceci sera développé au paragraphe 2.1.4.3.



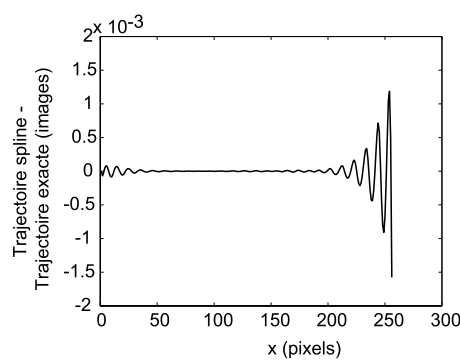
(a) Approche par corrélation, éléments linéaires



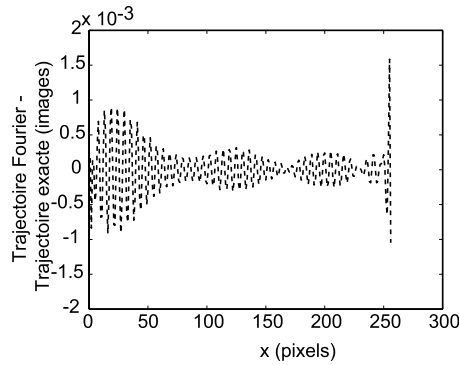
(b) Approche par corrélation, éléments splines



(c) Approche directe, éléments linéaires, 101 ddl



(d) Approche directe, éléments splines, 101 ddl



(e) Approche directe, base de Fourier, 101 ddl

Figure 2.9 – Localisation de l'erreur : différences entre trajectoire exacte et trajectoire calculée pour les deux méthodes présentées et les différentes bases introduites,  $\delta = 1$  pixel.

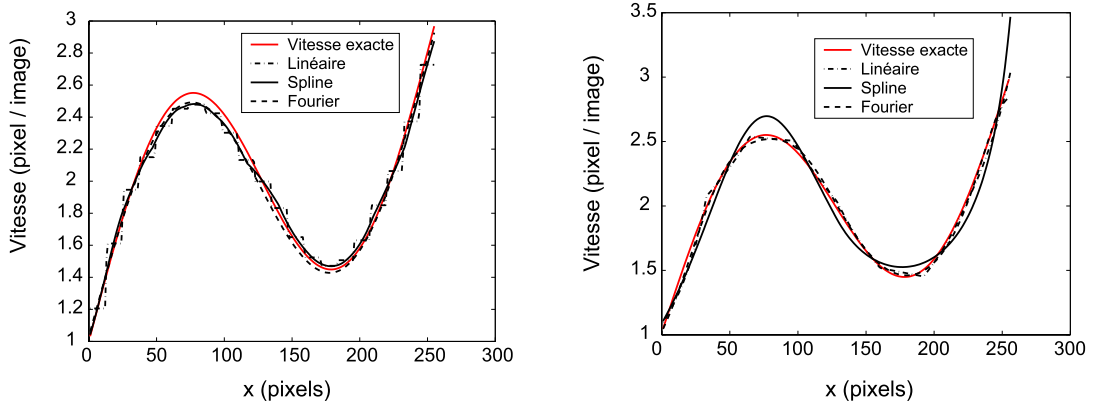
### 2.1.4.2 Détermination des vitesses et taux de déformation

La sensibilité des deux méthodes étudiées par rapport à la détermination des trajectoires a été présentée en fonction de la base de fonctions utilisée. La même

## 2. Analyse de la cinématique d'un procédé de mise en forme

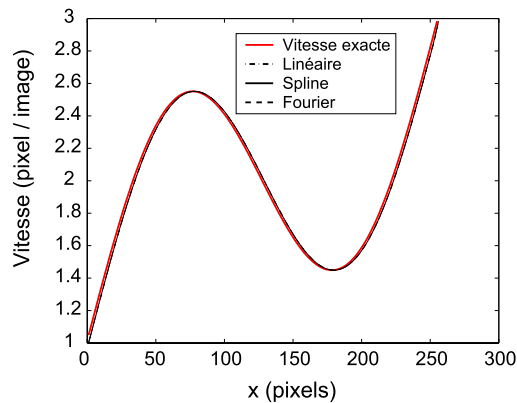
---

démarche peut maintenant être utilisée pour caractériser les performances des méthodes en termes de champ de vitesses. L'approche par corrélation déterminant le champ des trajectoires, le champ des vitesses est obtenu en effectuant une dérivation numérique des fonctions de base : cette dernière peut introduire un bruit sur les résultats. L'étude de sensibilité permettra alors de quantifier l'amplitude du bruit sur les résultats. Par ailleurs, pour cette méthode, la décomposition des trajectoires sur une base d'éléments linéaires donnera alors un champ des vitesses constant par morceaux, possédant une éventuelle discontinuité à la frontière entre deux éléments consécutifs. L'approche utilisant l'image brute détermine directement le champ des vitesses : ces résultats seront donc directement exploités.



(a) Utilisation de l'approche par corrélation, 22 ddl.

(b) Utilisation de l'approche travaillant sur l'image brute, 10 ddl.

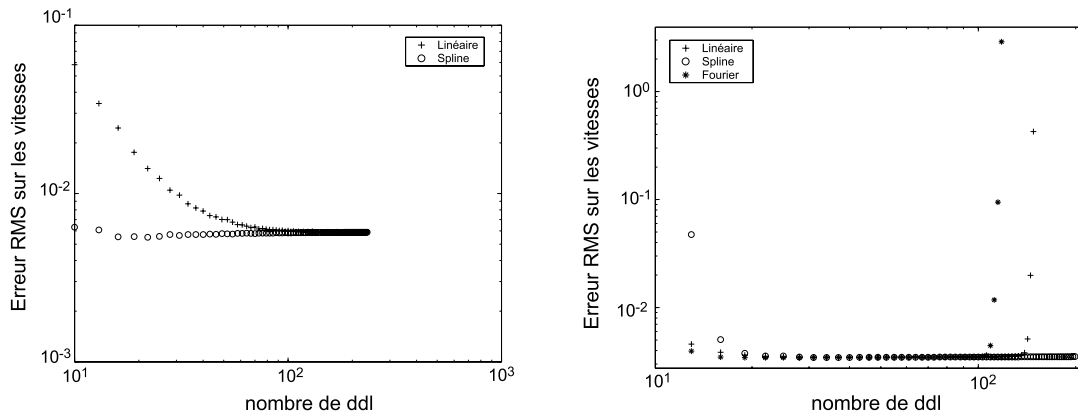


(c) Utilisation de l'approche travaillant sur l'image brute, 150 ddl.

Figure 2.10 – Vitesses obtenues en fonction de la méthode utilisée, de la base de décomposition et du nombre de degrés de liberté,  $\delta = 1$  pixel.

La figure 2.10 présente, superposées à la vitesse exacte, les vitesses déterminées par les algorithmes. La figure 2.10(a) correspond à l'approche par corrélation : les vi-

tesses obtenues en utilisant la décomposition sur une base spline ou une base linéaire sont représentées. On observe une légère dérive de la vitesse calculée par rapport à la vitesse exacte, ainsi qu'une vitesse constante par morceaux correspondant à celle déterminée en utilisant la décomposition sur une base linéaire. Les figures 2.10(b) et 2.10(c) correspondent aux résultats obtenus en utilisant l'approche travaillant sur l'image brute, pour deux nombres de degrés de liberté : 10 et 150 respectivement. Les résultats pour un faible nombre de degrés de liberté sont encourageants et les différences entre vitesse imposée et vitesse calculée pour un grand nombre de degrés de liberté sont minimales. L'erreur RMS calculée sur la vitesse peut ensuite être calculée pour quantifier les performances des deux méthodes en fonction du nombre de degrés de liberté utilisé.



(a) Utilisation de l'approche par corrélation.

(b) Utilisation de l'approche travaillant sur l'image brute.

Figure 2.11 – Erreur RMS  $\eta^2$  sur les vitesses en fonction du nombre de degrés de liberté,  $\delta = 1$  pixel.

L'erreur RMS  $\eta^2$  est représentée sur la figure 2.11. Selon la méthode utilisée, on peut observer une diminution de l'erreur lorsque le nombre de degrés de liberté augmente. Pour l'approche par corrélation, la décomposition de la trajectoire sur une base spline donne naturellement de meilleurs résultats que pour une base linéaire dont la dérivation fournit une vitesse constante par morceaux. Les deux erreurs semblent se stabiliser au même niveau, mais la base spline atteint ce niveau très rapidement (pour une vingtaine de degrés de liberté). Il est à noter par ailleurs, que la rapidité de la convergence suggère d'employer un nombre réduit de degrés de liberté lors d'une utilisation ultérieure de la méthode sur un film réel notamment. Pour l'approche travaillant sur l'image brute, l'erreur RMS se stabilise pour une vingtaine de degrés de liberté, quelle que soit la base de fonction utilisée. Lorsque le nombre de degrés de liberté augmente, on observe pour les résultats utilisant une base de fonctions splines ou une décomposition en modes de Fourier une augmentation de l'erreur. Ceci s'explique par l'apparition d'oscillations, qui n'ont pas lieu

## 2. Analyse de la cinématique d'un procédé de mise en forme

pour l'utilisation d'une base linéaire. En effet, le degré des fonctions splines est trop élevé par rapport à la taille des éléments utilisés, et de même, le nombre de modes de Fourier devient trop important par rapport à la taille de l'image analysée.

Enfin, il peut être intéressant de regarder, pour un nombre faible et pour un nombre élevé de degrés de liberté, en fonction de la méthode utilisée et de la base choisie, où se localisera l'erreur. On observe alors, sur la figure 2.12 les différences entre vitesse calculée et vitesse imposée. Quelle que soit la méthode utilisée pour un nombre de degrés de liberté choisi, l'amplitude des différences atteint le même niveau. Pour un nombre de degrés de liberté élevé, on observe également de fortes oscillations de cette différence pour les deux méthodes présentées, lorsque la base choisie est une base spline.

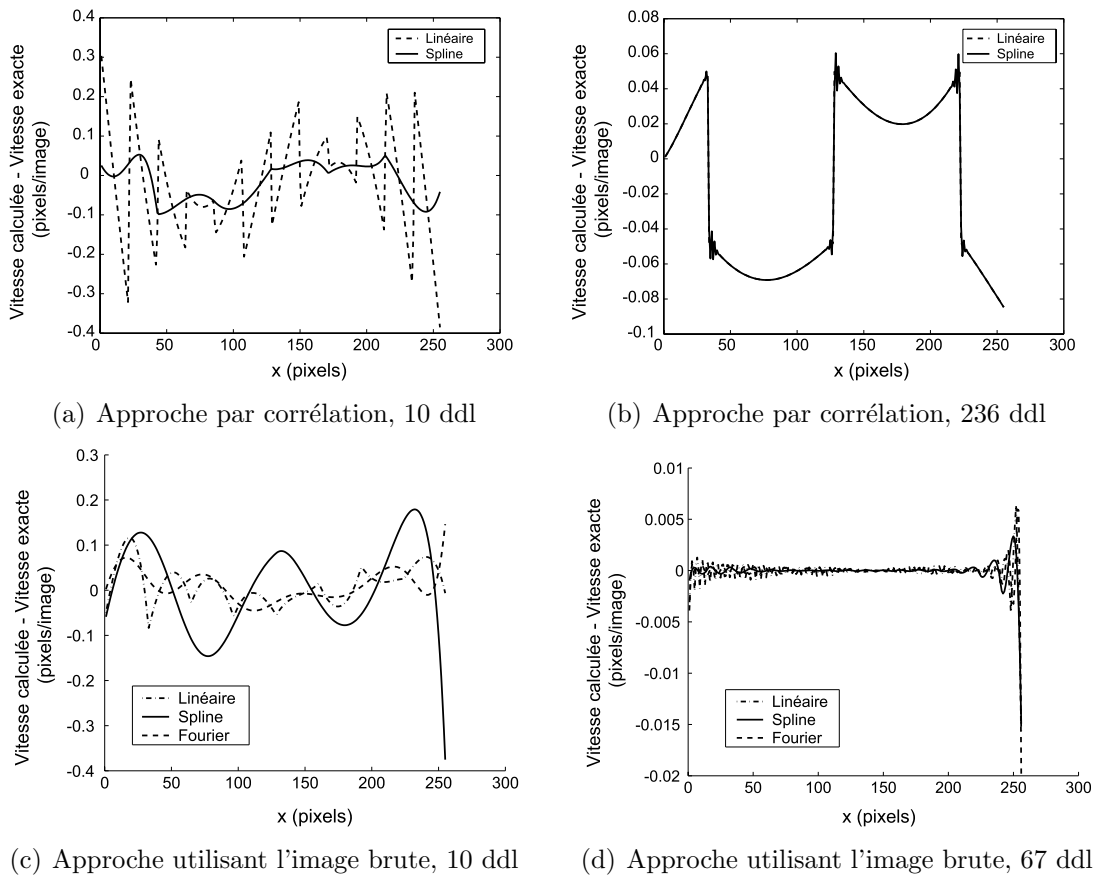


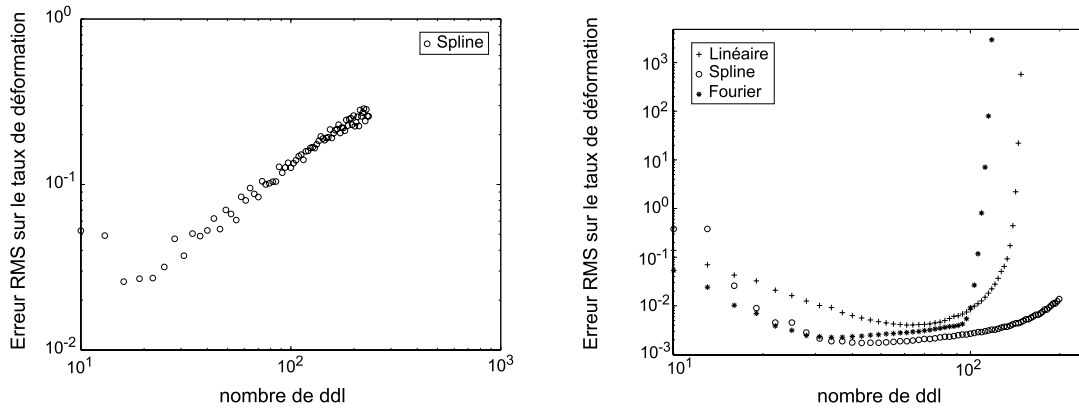
Figure 2.12 – Différence entre vitesse exacte et vitesse calculée pour deux nombres de ddl différents.

Ces résultats encourageants en termes de détermination des vitesses amènent à étudier ceux que l'on pourra obtenir en termes de taux de déformation (cf chapitre 1). À partir du champ des vitesses, le taux de déformation correspond à la partie

symétrique du gradient eulérien des vitesses. On se limite, dans le cas étudié ici, à la composante du taux de déformation  $\mathbb{D}$  suivant l'axe  $x$

$$\mathbb{D}(x, y) = \frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{V_x(x + dx, y) - V_x(x, y)}{dx} \quad (2.21)$$

Pour la méthode par corrélation, le taux de déformation ne sera déterminé que dans le cas d'une décomposition sur une base spline, la dérivée seconde des éléments linéaires étant identiquement nulle. La figure 2.13 présente l'erreur RMS  $\eta^2$  calculée par rapport au taux de déformation exact en fonction du nombre de degrés de liberté. Pour l'approche par corrélation, on observe alors que l'erreur augmente avec le nombre de degrés de liberté : ceci correspond à des oscillations dans le taux de déformation calculé par rapport au taux de déformation exact. Ces oscillations peuvent être visualisées sur la figure 2.14(a). Le niveau de l'erreur RMS atteint reste cependant relativement faible. En ce qui concerne l'approche utilisant l'image brute, les trois bases proposées peuvent être étudiées. On observe alors sur la figure 2.13(b) que l'erreur RMS a un niveau plus faible que pour la première approche. Par ailleurs, quelle que soit la base utilisée, cette erreur présente un minimum autour de 30 degrés de liberté, ce qui confirme la remarque précédente : un nombre de degrés de liberté faible suffit pour atteindre une bonne précision. Après le minimum, l'erreur RMS croît de nouveau, ce qui correspond à l'apparition d'oscillations, comme on peut l'observer sur la figure 2.14. Cette figure présente, superposés au taux de déformation exact, les taux de déformations obtenus pour différents nombres de degrés de liberté (variant de 10 à 200 par pas de 3).



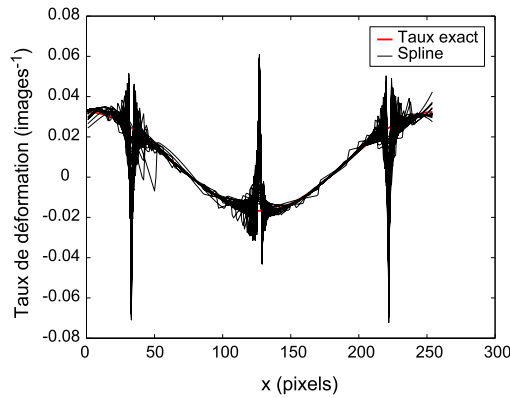
(a) Utilisation de l'approche par corrélation

(b) Utilisation de l'approche travaillant sur l'image brute

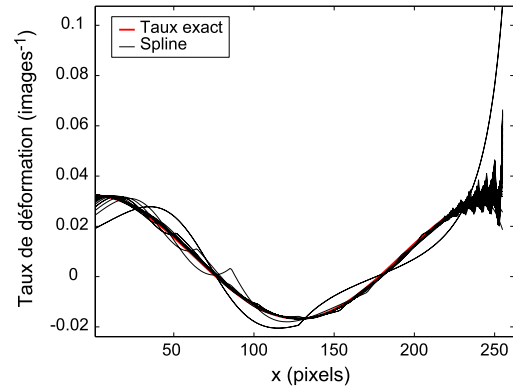
Figure 2.13 – Erreur RMS  $\eta^2$  sur les taux de déformation en fonction du nombre de degrés de liberté,  $\delta = 1$  pixel.



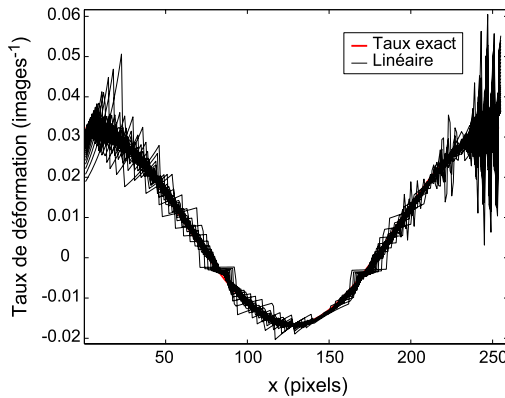
## 2. Analyse de la cinématique d'un procédé de mise en forme



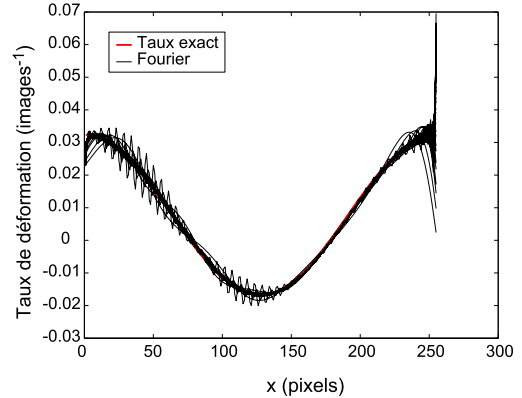
(a) Approche par corrélation, éléments splines



(b) Approche utilisant l'image brute, éléments splines



(c) Approche utilisant l'image brute, éléments linéaires



(d) Approche utilisant l'image brute, base de Fourier

Figure 2.14 – Taux de déformation calculé et exact pour les deux méthodes et les différentes bases utilisées.

### 2.1.4.3 Sensibilité au bruit

Les performances des différentes méthodes ont été étudiées et présentées. La carte utilisée était alors une carte artificielle, non bruitée. On se propose ici de tester la robustesse de la méthode par rapport au bruit d'acquisition présent lors de l'utilisation de cette approche en conditions réelles. Pour évaluer cette sensibilité, un bruit gaussien est ajouté et son amplitude est quantifiée par l'écart-type en niveaux de gris du bruit. Les différentes images sont alors analysées. Le nombre de degrés de liberté est fixé à 20 pour cette étude étant donné les résultats obtenus précédemment. La carte-test analysée est codée sur 256 niveaux de gris. L'amplitude du bruit ajouté sera alors de 1, 2, 4, 8 et 16 niveaux de gris. La figure 2.15 présente l'évolution de l'erreur RMS  $\eta^2$  calculée par rapport à la trajectoire (figure 2.15(a)), par rapport à la vitesse (figure 2.15(b)) et par rapport au taux de déformation (figure 2.15(c)) en fonction du niveau de bruit.

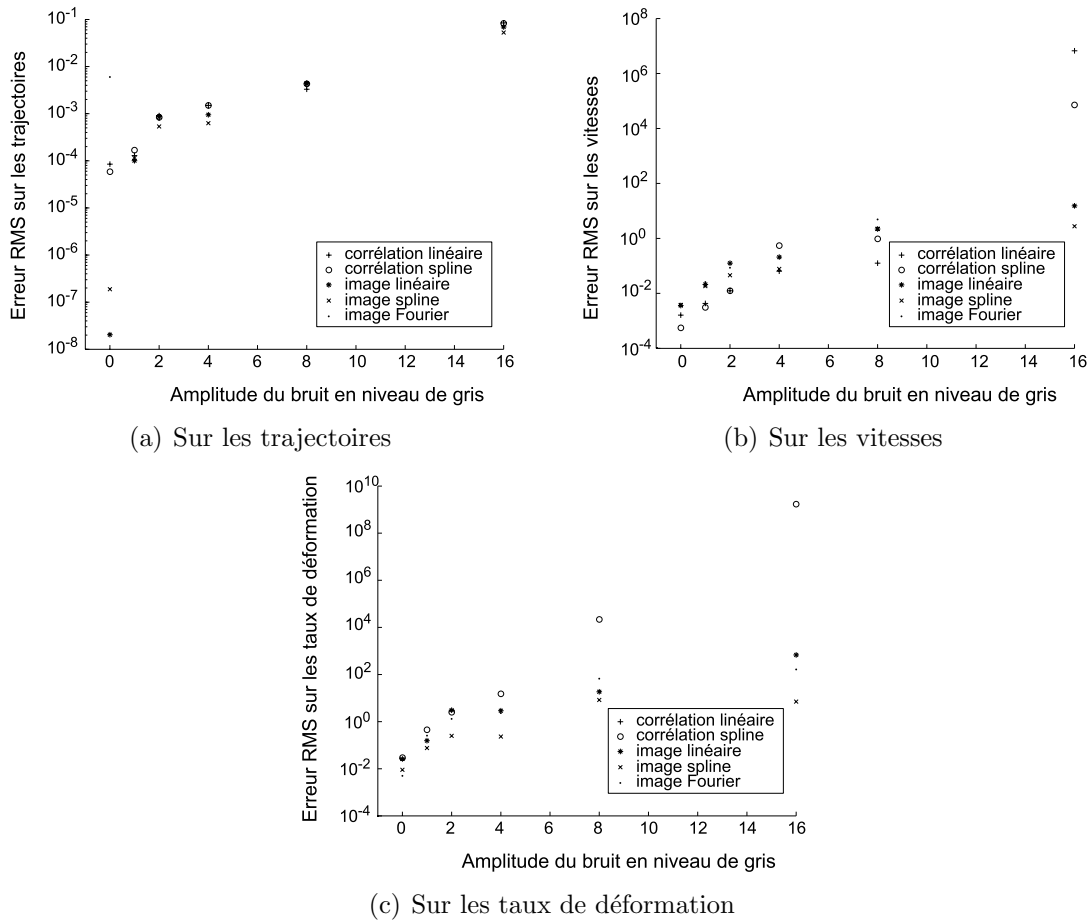


Figure 2.15 – Erreur RMS  $\eta^2$  en fonction du niveau de bruit (en niveau de gris) ajoutée à l'image analysée, 20 ddl,  $\delta = 1$  pixel.

On observe alors une sensibilité au bruit pour trois informations : trajectoire, vitesse et taux de déformation. L'amplitude de bruit égale à 0 correspond à l'image non bruitée. Pour les différentes approches et bases utilisées, on remarque que la sensibilité au bruit reste similaire pour la détermination des trajectoires. Pour la détermination des vitesses, l'erreur RMS garde un niveau correct pour une amplitude de bruit inférieure à 4 niveaux de gris, sur les 256 que contient l'image. On remarque par ailleurs, que lorsque le niveau de bruit augmente, le comportement en vitesse de l'approche travaillant sur l'image brute est meilleur : ceci s'explique par la recherche directe des champs de vitesse. Concernant l'erreur RMS calculée sur les taux de déformation, l'influence du bruit est beaucoup plus importante quelle que soit la méthode ou la base utilisées.

Le niveau d'erreur obtenu pour l'image analysée a permis de valider les différentes méthodes proposées en termes de robustesse et de temps de calcul. Cette méthode

a alors été utilisée sur un film tourné en conditions réelles, c'est-à-dire le film d'un écoulement correspondant à une ligne de production et permet d'atteindre une très bonne résolution spatiale. L'environnement du film utilisé est un environnement industriel : les conditions d'éclairage, de netteté sont difficilement ajustables mais ont une influence directe sur la qualité des films et donc des résultats.

### 2.1.5 Extension au cas 2D

Le but de l'étude étant d'utiliser cette approche sur un écoulement réel, il s'agit d'intégrer la deuxième dimension spatiale correspondant à la hauteur  $y$  du film analysé. Une première solution est alors d'étendre les résultats obtenus en 1D en construisant un champ 2D à partir de l'analyse 1D effectuée sur plusieurs lignes horizontales consécutives. Si l'on utilise la carte-test présentée précédemment, les résultats obtenus sont très encourageants avec une erreur RMS moyenne  $\eta^2$  selon les deux directions entre  $10^{-2}$  et  $10^{-4}$  selon la base d'éléments utilisée, mais ne représentent pas les conditions réelles dans lesquelles la méthode est destinée à être utilisée. L'environnement industriel fournira en effet des films dont le niveau de bruit sera plus important. Cette première approche de l'extension au 2D sera illustrée au paragraphe 2.2. On verra alors qu'une simple juxtaposition des résultats induira des perturbations dans le champ résolu des trajectoires. Le but de l'étude étant de déterminer les champs de vitesse et de taux de déformation d'un écoulement, une dérivation du champ des trajectoires obtenu sera nécessaire. Le niveau de bruit pour les trajectoires doit donc être limité au maximum.

Pour la méthode par corrélation, une autre approche, recherchant le champ inconnu  $\tau$  sous la forme d'une décomposition sur une base de fonctions, dans les deux directions, a été développée pour rendre l'algorithme plus robuste.

#### 2.1.5.1 Décomposition du champ des trajectoires : extension au cas 2D

Juxtaposer les trajectoires résolues en 1D pour différentes hauteurs a pour inconvénient de laisser une quantité indéterminée qui peut être choisie en imposant, de façon arbitraire,  $\tau(x = 0, y) = 0$ . On préfère alors imposer un couplage transverse aux lignes de courant. Pour cela, les inconnues  $a_i$  de l'approche 1D sont réécrites comme dépendantes de la coordonnées  $y$ . Les composantes  $a_i(y)$  sont alors décomposées sur une autre base de fonctions  $\varphi_l$  suivant la coordonnée  $y$

$$a_i(y) = \sum_l \alpha_{il} \varphi_l(y) \quad (2.22)$$

où les paramètres  $\alpha_{il}$  sont inconnus. La fonctionnelle à minimiser s'écrit alors, à partir de l'équation (2.13), par rapport aux paramètres  $\alpha_{il}$

$$\mathcal{T}(\alpha_{il}) = \int_y \left[ M_{ji}(y) \sum_l \alpha_{il} \varphi_l(y) - f_j(y) \right]^2 dy \quad (2.23)$$

Cette minimisation permet d'aboutir au système linéaire

$$\alpha_{il} \int_y \varphi_l(y) M_{jk}(y) M_{ji}(y) \varphi_m(y) dy = \int_y \varphi_l(y) M_{ji}(y) f_j(y) dy \quad (2.24)$$

Comme précédemment, au lieu de résoudre le système de manière globale sur la hauteur, on peut utiliser une approche par éléments finis et diviser la hauteur  $L_y$  de l'image analysée en  $N_y$  éléments. Le décalage  $\tau$  recherché s'écrit

$$\tau(x, y) = \sum_{k,l} \alpha_{kl}^{i,j} \psi_k(x_i) \varphi_l(y_j) \quad (2.25)$$

avec  $i$  le numéro de l'élément en  $x$ ,  $j$  celui en  $y$  et  $x_i$  et  $y_j$  les coordonnées réduites au sein de l'élément considéré.

Si l'on choisit comme base de fonctions  $\psi_k$  et  $\varphi_l$  des splines cubiques, l'ordre du système à résoudre est alors de  $4N_x \times 4N_y$ . Le choix d'une telle base permet d'écrire aisément des conditions de continuité du champ recherché et de sa dérivée aux frontières d'éléments consécutifs en 2D, soit pour tout  $y$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_l \alpha_{3l}^{i-1,j} = \sum_l \alpha_{1l}^{i,j} \\ \sum_l \alpha_{4l}^{i-1,j} = \sum_l \alpha_{2l}^{i,j} \end{array} \right.$$

et pour tout  $x$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_k \alpha_{k3}^{i,j-1} = \sum_k \alpha_{k1}^{i,j} \\ \sum_k \alpha_{k4}^{i,j-1} = \sum_k \alpha_{k2}^{i,j} \end{array} \right.$$

Le système est alors d'ordre  $[(2N_x + 2)(2N_y + 2)]$ . Enfin des conditions naturelles sont écrites sur chacun des bords de l'image, soit pour tout  $y$

$$\frac{d^2\tau(0, y)}{dx^2} = \frac{d^2\tau(L_x - \delta_x, y)}{dx^2} = 0 \quad (2.26)$$

et pour tout  $x$

$$\frac{d^2\tau(x, 0)}{dy^2} = \frac{d^2\tau(x, L_y)}{dy^2} = 0 \quad (2.27)$$

L'écriture de ces conditions rajoute  $2(2N_x + 2 + 2N_y + 2)$  équations au système à résoudre.

## 2. Analyse de la cinématique d'un procédé de mise en forme

---

Si l'on choisit comme base de fonctions, au lieu des splines cubiques, des éléments linéaires, l'ordre du système à résoudre devient  $2N_x \times 2N_y$ . Par ailleurs des conditions de continuité du champ recherché entre deux éléments consécutifs peuvent être ajoutées et s'écrivent, pour tout  $y$

$$\sum_l \alpha_{1l}^{i-1,j} = \sum_l \alpha_{2l}^{i,j} \quad (2.28)$$

et pour tout  $x$

$$\sum_k \alpha_{k1}^{i,j-1} = \sum_k \alpha_{k2}^{i,j} \quad (2.29)$$

Les conditions aux limites ajoutées lors de l'utilisation d'éléments splines sont naturellement respectées dans le cas d'éléments linéaires. Finalement, le système est d'ordre  $[(N_x + 1)(N_y + 1)]$  pour ce type d'éléments.

### 2.1.5.2 Étude d'un cas test 2D

Nous présentons, dans cette partie, les performances des différentes méthodes sur un cas test particulier : les trajectoires ont été imposées dans les deux directions spatiales  $x$  et  $y$  et la trajectoire est linéaire dans chacune des directions avec une discontinuité. La figure 2.16 présente la trajectoire test explicitement formée.

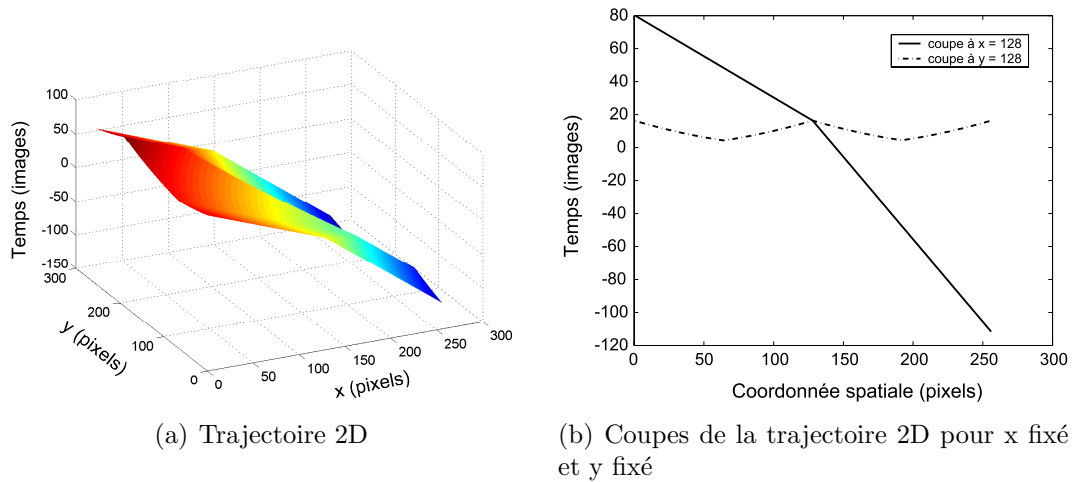


Figure 2.16 – Trajectoire test.

Les performances entre les différentes méthodes peuvent alors être étudiées. La figure 2.17 présente les trajectoires calculées en utilisant la juxtaposition des trajectoires 1D (figure 2.17(a)), la décomposition sur une base linéaire dans les deux directions (figure 2.17(b)) et la décomposition sur une base de fonctions splines 2D (figure 2.17(c)). Les trois approches donnent des trajectoires proches de la trajectoire réelle, l'évolution de l'erreur  $\eta^2$  est un paramètre à étudier pour statuer sur la

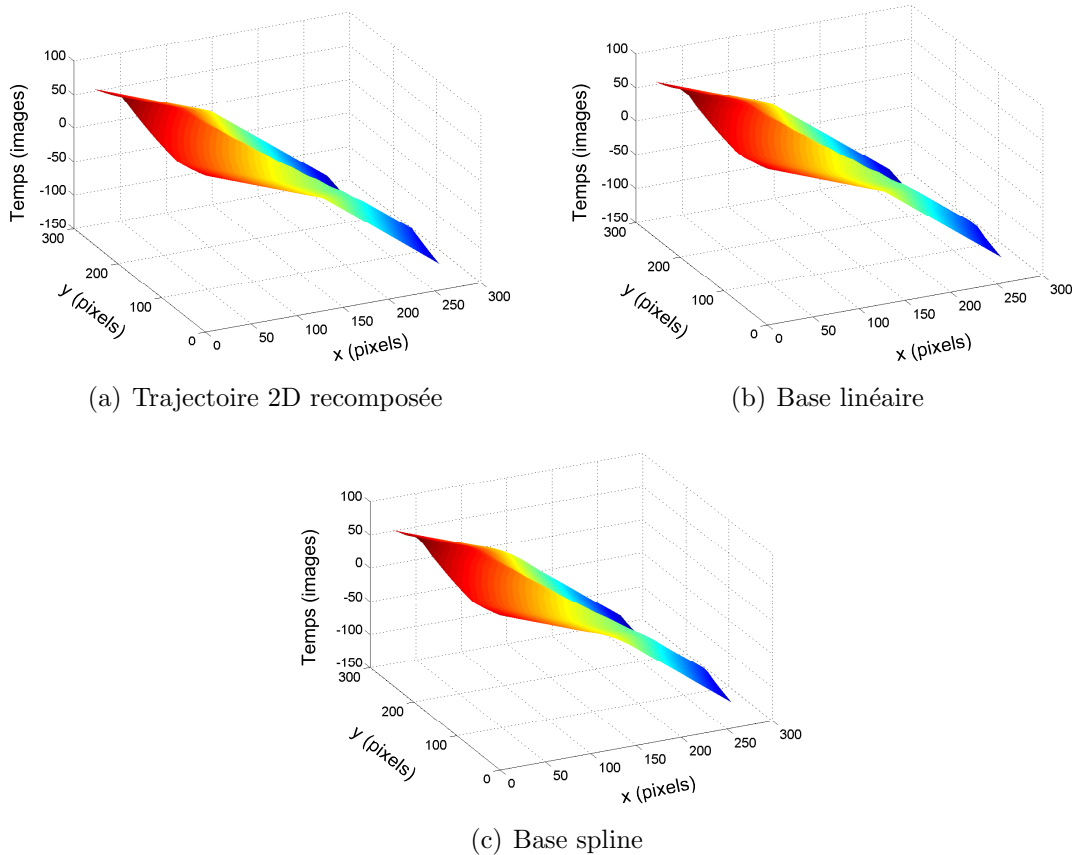


Figure 2.17 – Trajectoires obtenues pour les diverses approches.

performance de chacune des méthodes.

La figure 2.18 présente l'évolution de l'erreur  $\eta^2$  en fonction du nombre de degrés de liberté suivant la direction  $y$ . Le nombre de degrés de liberté suivant  $x$  est fixé à 15. On observe que l'erreur diminue lorsque le nombre de degrés de liberté augmente. Pour indication, l'erreur correspondant aux résultats de l'approche 1D en juxtaposant les trajectoires résolues pour différentes hauteurs ont été rajoutées en pointillés. On remarque alors que la décomposition du champ des trajectoires suivant la direction  $y$  en éléments spline donne de meilleurs résultats que ceux obtenus en juxtaposant les résultats 1D pour les mêmes bases. Pour l'utilisation d'une base linéaire par intervalle, l'erreur par juxtaposition des trajectoires reste plus faible que l'erreur obtenue par l'approche 2D. Ceci s'explique par le fait que pour une hauteur  $y$  fixée, la trajectoire linéaire est très bien résolue par l'approche 1D ; le couplage transverse impose donc une recherche des trajectoires selon deux directions simultanément et induit par ailleurs des erreurs résiduelles dans le cas de trajectoires linéaires dans les deux directions. En ce qui concerne les temps de calcul, l'assemblage des matrices est l'élément limitant de l'algorithme. Ce temps d'assemblage de

la matrice varie de quelques secondes pour un faible nombre de degrés de liberté dans la direction  $y$  à quelques dizaines de secondes pour un nombre de degrés de liberté plus élevé. Une fois cette étape effectuée, quelques secondes seulement sont nécessaires à l'algorithme pour terminer la résolution du champ recherché.

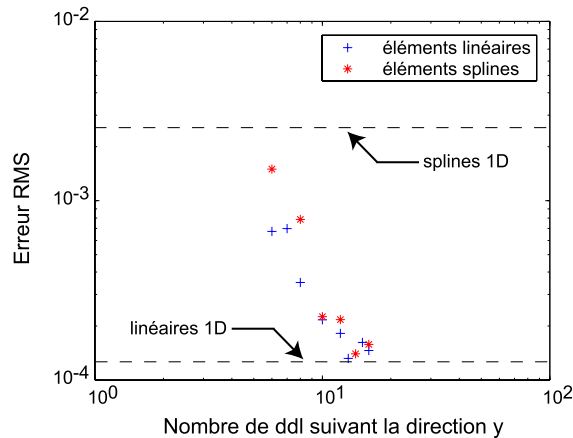


Figure 2.18 – Évolution de l'erreur RMS  $\eta^2$  en fonction du nombre d'éléments suivant  $y$ .

Cette approche est donc opérationnelle. Elle a été testée et validée sur un cas-test, il reste maintenant à évaluer ses performances sur un film réel. Ce cas-test, 2D présentant une discontinuité dans la trajectoire linéaire, est difficile pour l'approche travaillant directement sur l'image brute. En effet, cette approche recherche dans un premier temps le champ des vitesses avant de l'intégrer pour remonter aux trajectoires. Dans le cas d'une trajectoire linéaire présentant une discontinuité, la vitesse associée a l'allure d'un signal créneau : deux zones de vitesse constante, et un saut au niveau de la discontinuité. Ce saut est difficilement capté sur le champ des vitesses avec une concentration d'oscillations autour de la discontinuité (figure 2.19). Ceci explique le niveau d'erreur RMS moyen de 0.6 sur les trajectoires atteint pour ce cas test avec cette méthode.

Le paragraphe suivant présente les résultats obtenus pour un film correspondant à la production de laine minérale.

## 2.2 Étude de films d'un écoulement réel : mise en forme d'un matériau enchevêtré

Les deux méthodes sont utilisées pour caractériser le champ de vitesse d'un écoulement réel. Celui-ci correspond à une zone d'une ligne de production de laine minérale. Ce matériau formé de fibres encollées avec une résine peut, pour certaines applications être unidirectionnel, et pour d'autres avoir des fibres enchevêtrées. Ce

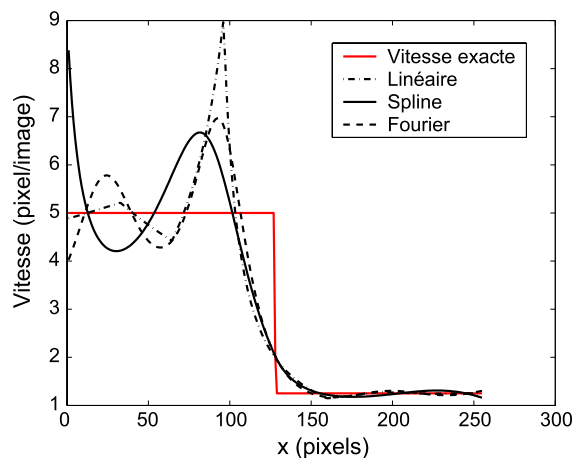


Figure 2.19 – Approche utilisant l'image brute : cas d'une discontinuité du champ des vitesses, 10 ddl.

dernier cas nécessite une opération additionnelle, réalisée sur ligne de production, dont le but est de déstructurer la stratification naturelle du matériau. Cette modification de la texture est obtenue en effectuant une compression dans la direction de l'écoulement le long de la ligne de production. Un film de cette opération est réalisé à l'aide d'un caméscope numérique standard. Sur la figure 2.1(gauche), une image extraite du film montre la laine minérale entre deux tapis d'entraînement. La hauteur du matelas de laine compris entre les tapis convoyeurs représente la zone utile sur laquelle l'algorithme peut être utilisé. Avant de présenter les résultats 2D ainsi que les informations disponibles en termes de champs de vitesse ou taux de déformation, les résultats 1D seront analysés.

### 2.2.1 Résultats 1D

Selon la qualité du film de départ, l'amplitude du bruit des cartes spatio-temporelles formées sera plus ou moins importante. On se propose d'utiliser les méthodes présentées précédemment sur 2 films différents. La figure 2.20 présente les cartes spatio-temporelles issues des films choisis.

Le premier film présente un bruit pixel assez important. La figure 2.21 présente les champs de trajectoire obtenus par les différents algorithmes, superposés à la carte spatio-temporelle. Les méthodes donnent des résultats proches, mais la décomposition sur base de fonctions est plus stable au bruit de l'image que la méthode incrémentale. Pour cette dernière, les résultats présentés sur la figure 2.21 ont été obtenus pour 100 degrés de liberté. Dans le cas de films réels, la trajectoire est inconnue, il n'est pas évident de mettre en place un indicateur de qualité absolu des résultats. On peut toutefois étudier la stabilité des algorithmes par rapport au nombre de degrés de liberté.



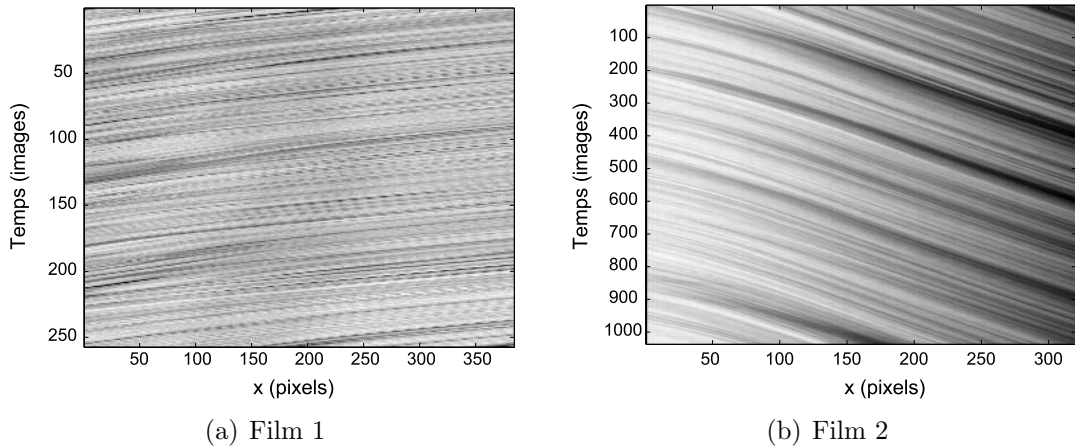


Figure 2.20 – Cartes spatio-temporelles issues de 2 films différents.

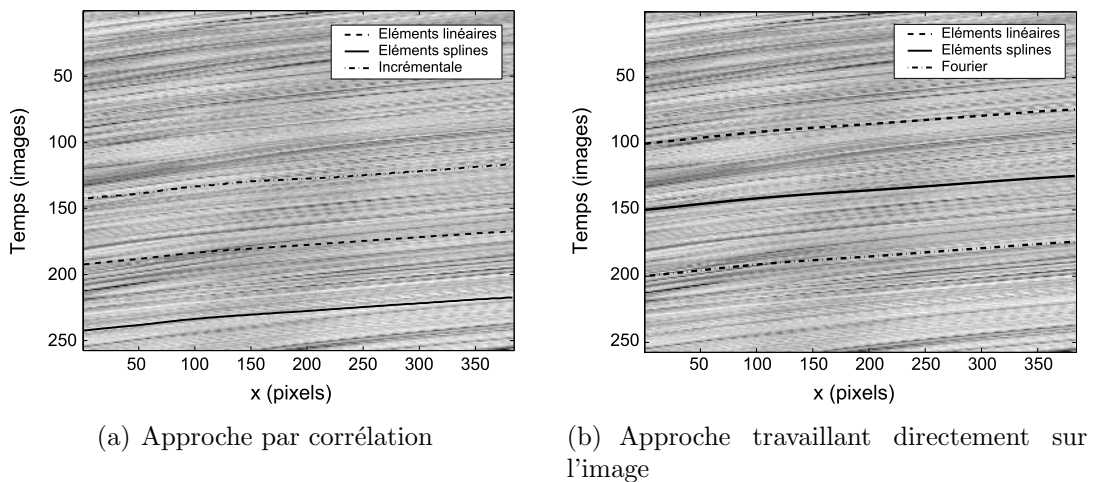
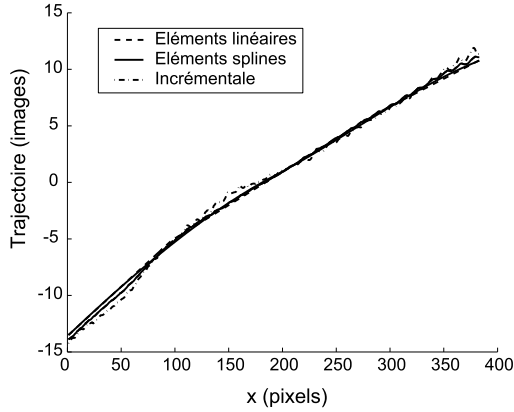


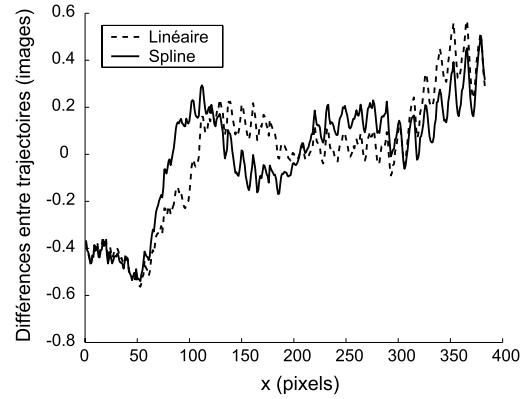
Figure 2.21 – Trajectoires superposées à l'image de départ, 100 ddl,  $\delta = 1$  pixel (Film 1).

La figure 2.22 présente les résultats des algorithmes par décomposition du champ recherché sur une base de fonction pour un nombre de degrés de liberté faible et un nombre de degrés de liberté élevé. Les figures 2.22(a) et 2.22(c) présentent les trajectoires en fonction de la coordonnée spatiale  $x$  en pixel pour les deux approches et les différentes bases et les figures 2.22(b) et 2.22(d) présentent les différences de trajectoires pour les deux valeurs de degrés de liberté. On peut alors noter que les trajectoires sont proches, avec une différences entre les deux oscillant entre  $-0.5$  et  $0.5$  temps-image (1 temps-image =  $1/25^e$  de seconde) pour l'approche par corrélation et entre  $-0.4$  et  $0.2$  pour l'approche travaillant directement sur l'image. Pour l'approche par corrélation, la composante oscillante obtenue avec le maillage le plus fin

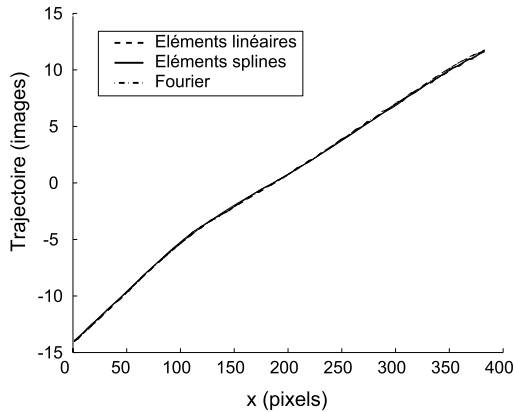
ou par la méthode incrémentale reflète un phénomène de battements parasites lié à l'acquisition de l'image et donc au film utilisé. Cette composante est naturellement filtrée pour un nombre de degrés de liberté plus faible.



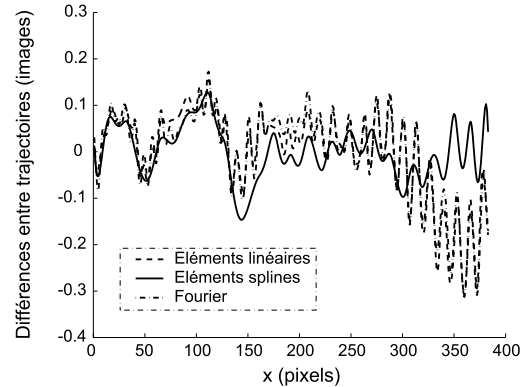
(a) Approche par corrélation, trajectoires obtenues pour 5 et 350 ddl



(b) Approche par corrélation, différences de trajectoires obtenues pour 5 et 350 ddl



(c) Approche travaillant directement sur l'image, trajectoires obtenues pour 10 et 100 ddl



(d) Approche travaillant directement sur l'image, différences de trajectoires obtenues pour 10 et 100 ddl

Figure 2.22 – Variation de trajectoires pour 2 valeurs de ddl différentes.

Étant donné les similitudes entre les résultats donnés par les deux approches, la robustesse des méthodes sera présentée pour l'approche par corrélation uniquement, pour laquelle les résultats semblent plus sensibles au nombre de degrés de liberté. La figure 2.23(a) montre l'erreur RMS calculée sur la région d'étude en fonction du nombre de degrés de liberté relié au nombre d'éléments composant la largeur de l'image analysée. Cette erreur est calculée par rapport à une trajectoire, qui est la moyenne de toutes les trajectoires déterminées pour un nombre de degrés de liberté variant de 5 à 350. On remarque alors que l'erreur décroît jusqu'à un certain nombre

de degrés de liberté (aux environs de 100 pour l'image analysée) où elle atteint une limite inférieure. Cette limite constitue un nombre de degrés de liberté optimum pour l'image à résoudre. Après cette valeur limite, l'erreur augmente légèrement : ceci s'explique par les oscillations qui apparaissent pour les nombre de degrés de liberté trop élevés.

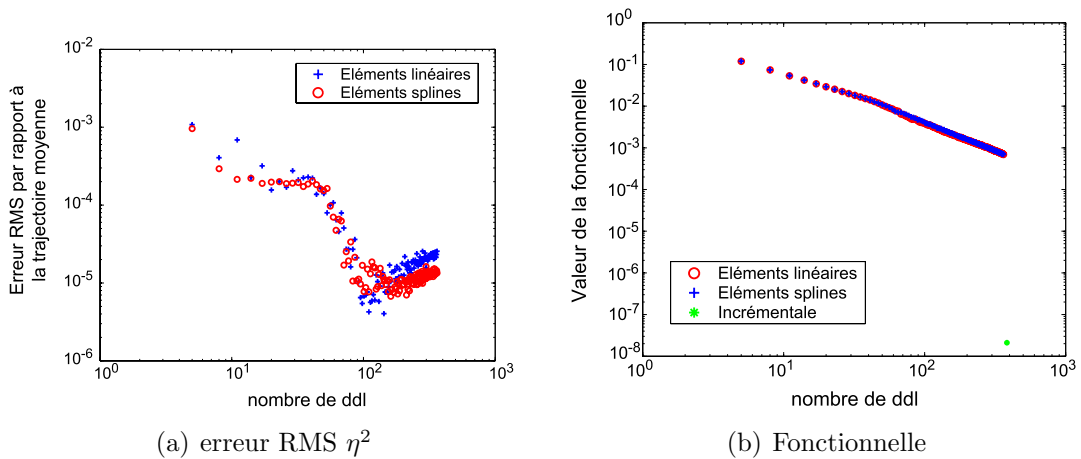


Figure 2.23 – Évolution de l'erreur RMS  $\eta^2$  et de la valeur de la fonctionnelle minimisée en fonction du nombre de degrés de liberté.

Un autre indicateur de qualité correspond à la valeur de la fonctionnelle minimisée pour résoudre le problème (équation (2.13)). La figure 2.23(b) représente son évolution en fonction du nombre de degrés de liberté. Pour les éléments linéaires et les éléments splines, la valeur de la fonctionnelle décroît lorsque le nombre de degrés de liberté augmente avec une légère rupture dans la pente de décroissance aux alentours de 40 ddl ce que l'on peut également noter sur l'évolution de l'erreur RMS (figure 2.23(a)). Un dernier point à mettre en avant est la très bonne résolution spatiale de la méthode : en effet un nombre de degrés de liberté de 350 pour une image dont la largeur est d'environ 400 pixels fournit des éléments linéaires de longueur 'pixel' et des éléments splines dont la longueur est proche de 2 pixels. Le compromis à cette excellente résolution spatiale est l'information moyennée en temps (256 images nécessaires à l'analyse).

Le deuxième film étudié est celui dont la carte spatio-temporelle correspondante est présentée figure 2.20(b). L'amplitude du bruit pour ce nouveau film est moins importante que pour le film précédent. On peut également remarquer que l'échelle de temps varie de 0 à 1024 images. L'analyse spatio-temporelle sera cependant effectuée en utilisant 256 images seulement et en moyennant l'information sur toutes les cartes spatio-temporelles de 256 images extraites de la figure de départ. La figure 2.24 présente les trajectoires obtenues pour les différentes méthodes, en utilisant 100 degrés de liberté. Comme pour le film précédent, les différences entre les trajectoires sont

faibles, et leur accord avec l'image de départ est satisfaisant. La stabilité au nombre de degrés de liberté doit donc être étudiée.

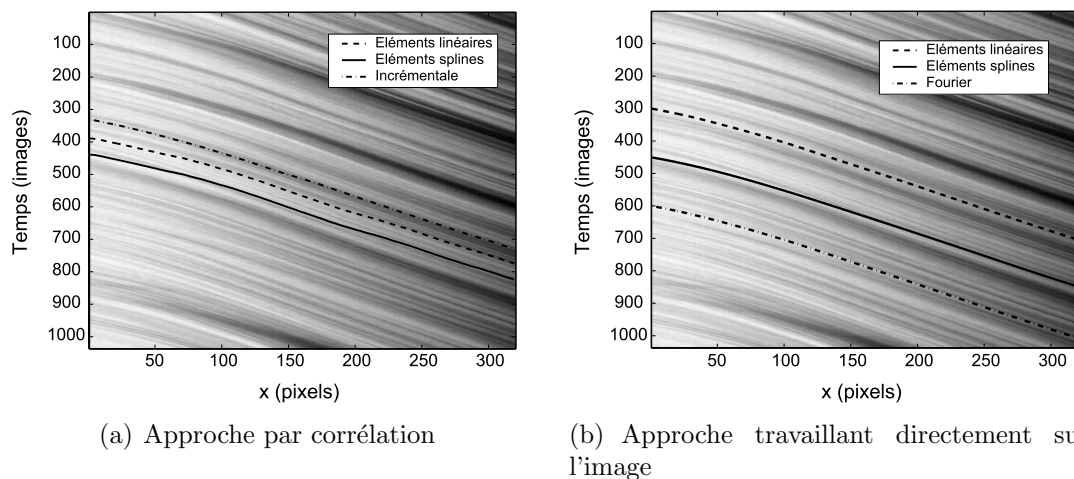


Figure 2.24 – Trajectoires superposées à l'image de départ, 100 ddl,  $\delta = 1$  pixel (Film 2).

Les figures 2.25(a) et 2.25(c) présentent la trajectoire résolue en fonction de la coordonnée spatiale  $x$  en pixels pour un nombre de degrés de liberté faible et pour un nombre élevé pour les deux approches étudiées. Les trajectoires étant encore une fois très proches, la différence entre les trajectoires en fonction de la coordonnée spatiale, comme le montre les figures 2.25(b) et 2.25(d), permet de localiser spatialement les écarts. Les différences obtenues sont plus importantes que pour le film précédent et ne sont pas localisées au même endroit selon l'utilisation d'éléments splines et d'éléments linéaires. Toutefois, la différence entre les trajectoires, pour les deux méthodes utilisées, ne semble pas se localiser. Elle oscille entre  $-4$  et  $3$  pixels de temps-image pour l'approche par corrélation et entre  $-1.5$  et  $1$  pixels de temps pour l'approche travaillant directement sur l'image. Comme pour le film précédent, l'indicateur de qualité sera présenté uniquement pour l'approche par corrélation, les résultats entre les deux approches étant très proches.

L'erreur RMS (figure 2.26(a)) est calculée par rapport à la trajectoire moyenne de toutes les trajectoires obtenues pour un nombre de degrés de liberté variant de 5 à 300 et pour une largeur d'image de 320 pixels. L'erreur RMS décroît jusqu'à atteindre un minimum aux environs de 200 degrés de liberté. Au delà de cette limite, l'erreur augmente à nouveau, phénomène dû aux oscillations autour de la trajectoire moyenne obtenue pour un nombre de degrés de liberté élevé, plus sensible au bruit. Enfin l'évolution de la valeur de la fonctionnelle (figure 2.26(b)) est calculée pour les 3 méthodes. La valeur de la fonctionnelle pour l'approche incrémentale est calculée comme étant la moyenne des résidus de chaque fonctionnelle minimisée pour chaque

## 2. Analyse de la cinématique d'un procédé de mise en forme

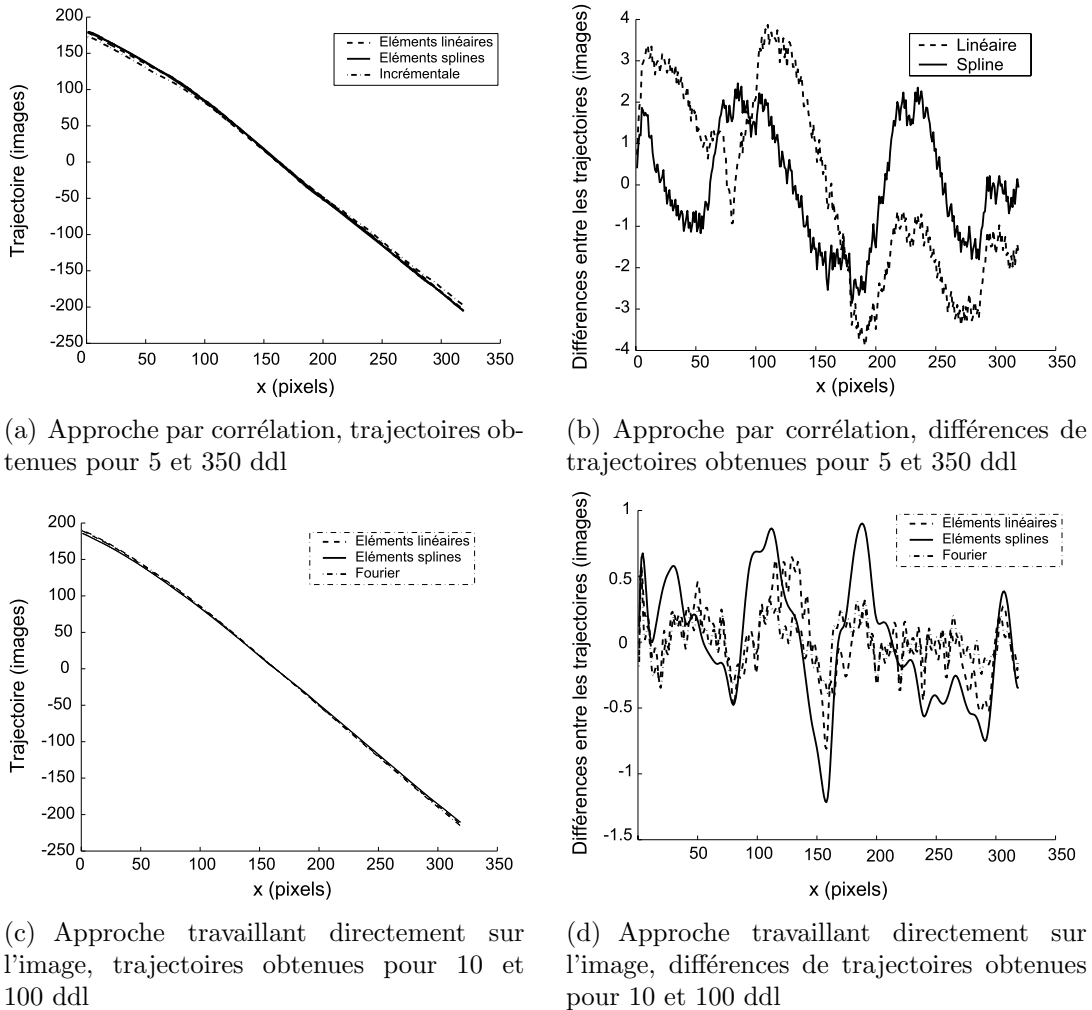


Figure 2.25 – Variation de trajectoires pour 2 valeurs de ddl différentes.

valeur de  $x$  en pixel. L'approche incrémentale résolvant la trajectoire de proche en proche, la valeur de la fonctionnelle est la plus faible. Pour l'approche par décomposition sur une base, qu'elle soit spline ou linéaire, une trajectoire moyenne par élément est recherchée. La valeur de la fonctionnelle est donc plus élevée, mais diminue lorsque le nombre de degrés de liberté augmente.

Ce film étant composé d'un grand nombre d'images, la sensibilité au nombre d'images utilisées peut être évaluée. La figure 2.27 présente les trajectoires obtenues pour les différentes méthodes en utilisant un nombre d'images différent : 64, 128, 256, 512 ou 1024 images. Pour chacun des cas, la trajectoire présentée correspond à la moyenne des trajectoires calculées en utilisant un nombre d'images fixé et en balayant la hauteur totale de la carte spatio-temporelle originale (composée de 1024 images). On remarque alors que la sensibilité au nombre d'images est assez

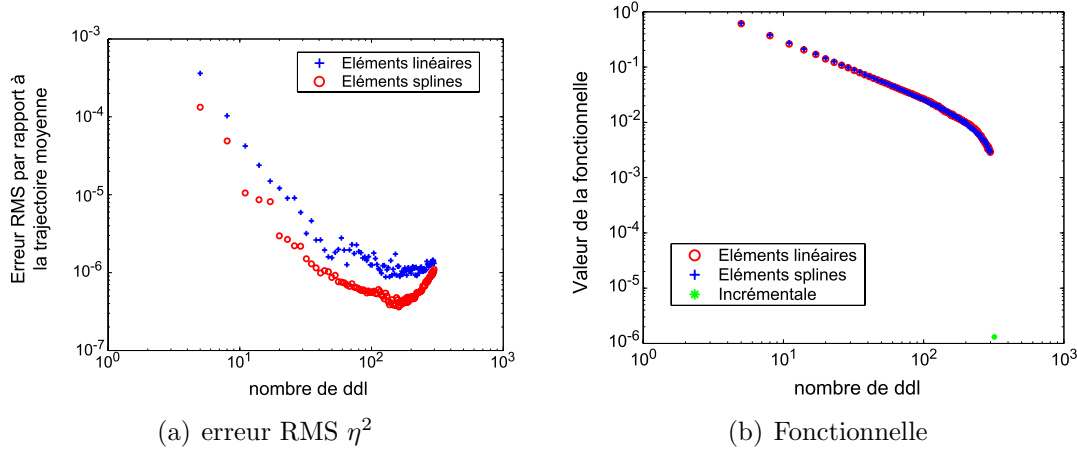


Figure 2.26 – Évolution de l'erreur RMS  $\eta^2$  et de la valeur de la fonctionnelle minimisée en fonction du nombre de degrés de liberté.

importante avec des différences dans les trajectoires, mais aussi dans les vitesses déterminées. Cependant on peut noter également que quelle que soit la méthode utilisée, les deux trajectoires enveloppes restent les mêmes : celle obtenue en utilisant 64 images (en pointillés noirs) et celle obtenue en utilisant 1024 images (en trait plein noir).

Enfin, grâce à ce film, on peut également revenir sur l'hypothèse de stationnarité utilisée pour résoudre le problème. Si l'on utilise la première partie du film pour résoudre les trajectoires (en utilisant 256 images pour l'analyse) et si l'on détermine par ailleurs une autre trajectoire en utilisant une partie du film totalement indépendante de la précédente (les 256 dernières images de la carte spatio-temporelle) les trajectoires obtenues peuvent être comparées pour évaluer la stationnarité du film étudié. La figure 2.28 présente les résultats obtenus. Les trajectoires restent proches dans chacune des méthodes utilisées et la pente des trajectoires correspondant à la vitesse de l'écoulement sont similaires. Il existe seulement une zone de transition aux alentours de  $x = 160$  pixels où la trajectoire déterminée à partir des 256 dernières images présente un point d'inflexion. Cette différence entre les trajectoires s'explique en observant les cartes spatio-temporelle correspondantes (figure 2.29). On peut alors voir que la carte spatio-temporelle correspondant à la fin du film présente, dans la zone d'inflexion de la trajectoire, une zone « noire » dans le bas de l'image pour laquelle le contraste de l'image est très faible, cette zone pouvant perturber la détermination de la trajectoire.

La méthode a été utilisée sur des films réels dans le cas de l'approche 1D. Nous allons maintenant nous attacher à étudier son adéquation avec la résolution de films en intégrant la deuxième coordonnée spatiale  $y$  correspondant à la hauteur du matelas de produit.

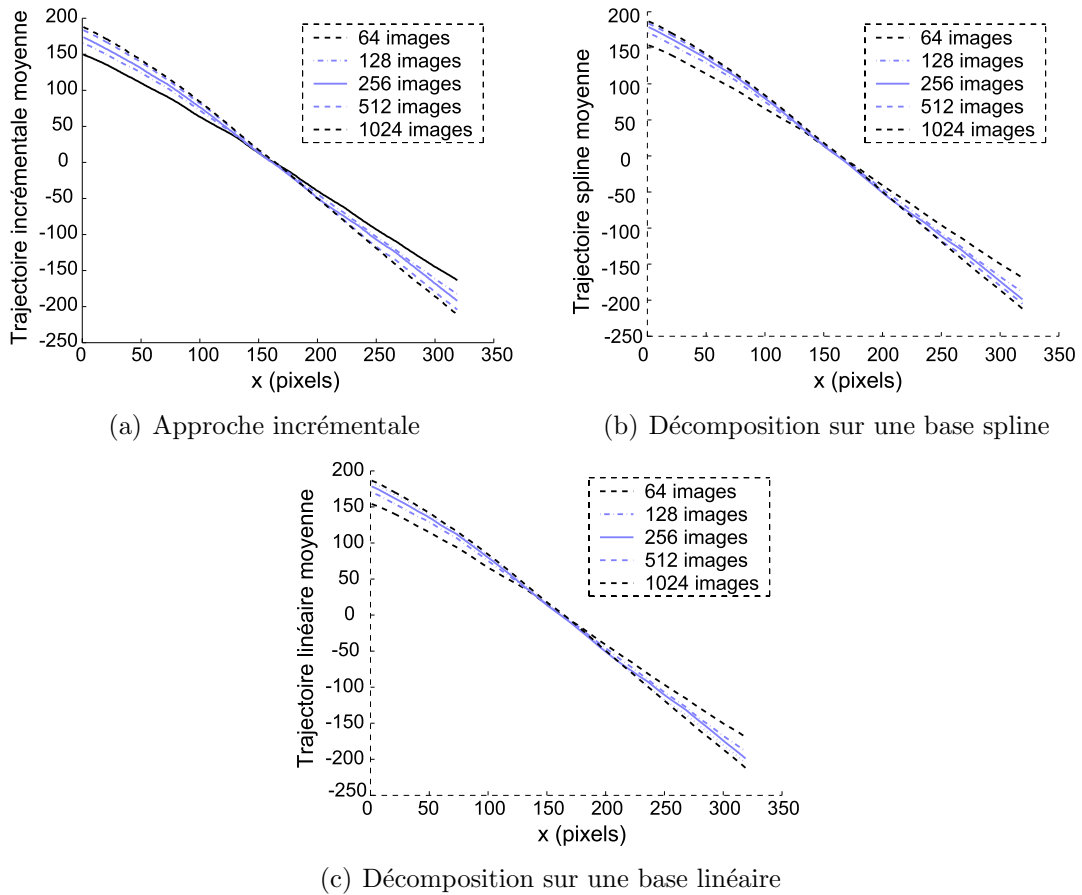


Figure 2.27 – Sensibilité de la trajectoire au nombre d'images utilisées.

## 2.2.2 Résultats 2D

La première méthode pour construire un champ des trajectoires 2D est de juxtaposer les trajectoires obtenues pour chaque hauteur  $y$  indépendamment. Cette méthode laisse une quantité indéterminée qui peut-être choisie en imposant, de façon arbitraire, la moyenne égale à zéro pour  $y$  fixé. Cette première appréhension du problème peut-être mise en œuvre en déterminant chacune des trajectoires 1D, soit par l'approche par corrélation en utilisant la méthode incrémentale ou la décomposition sur une base, soit par l'approche travaillant directement sur l'image en utilisant l'une des trois bases présentées. Cette première méthode induit des perturbations dans le champ obtenu comme le montre la figure 2.30 pour laquelle les résultats obtenus par l'approche par décomposition correspondent à l'utilisation de 9 degrés de liberté. Le but de l'étude étant d'utiliser ces champs de trajectoires pour en déduire des champs de vitesse, la présence de perturbations ne permettra pas l'exploitation des résultats. Le couplage du champ des trajectoires dans la direction spatiale transverse (la hauteur  $y$  du film analysé) permettra alors d'apporter la régularité nécessaire.

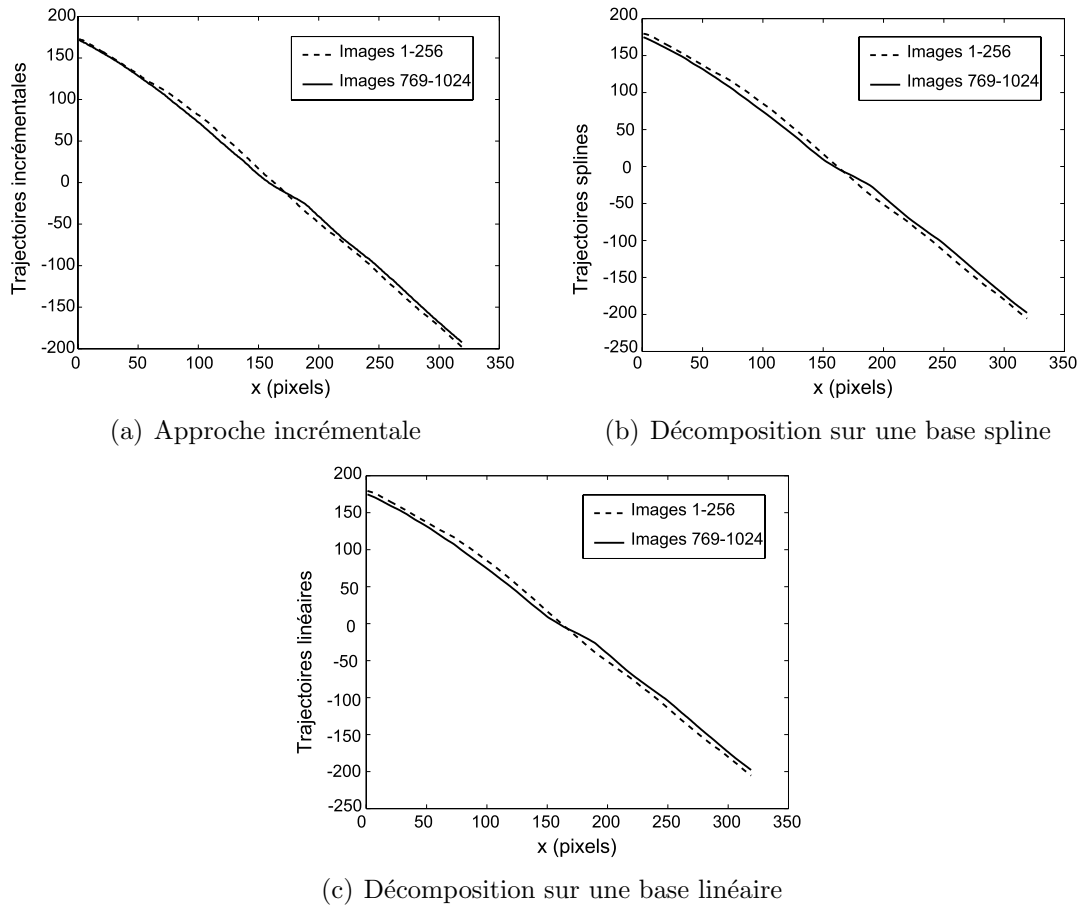


Figure 2.28 – Stationnarité du film étudié.

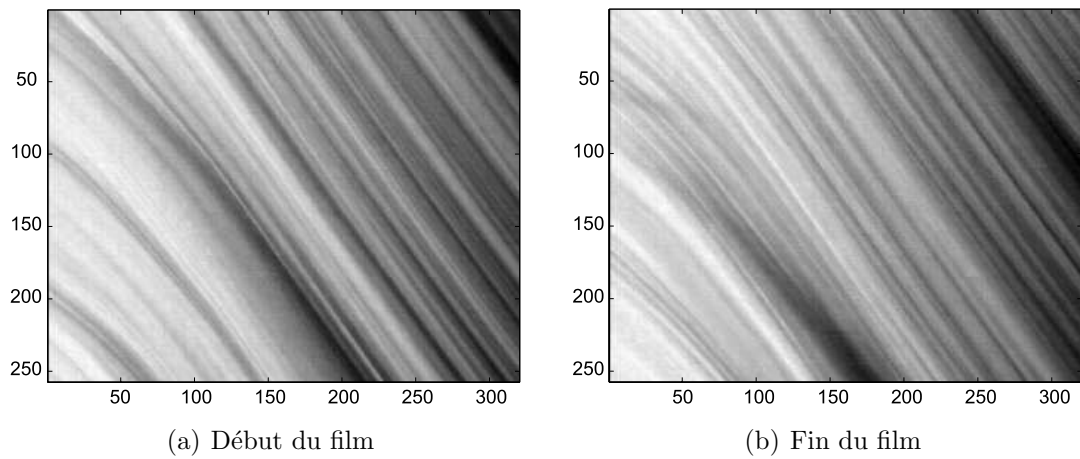


Figure 2.29 – Cartes spatio-temporelles issues du deuxième film à deux instants différents.



## 2. Analyse de la cinématique d'un procédé de mise en forme

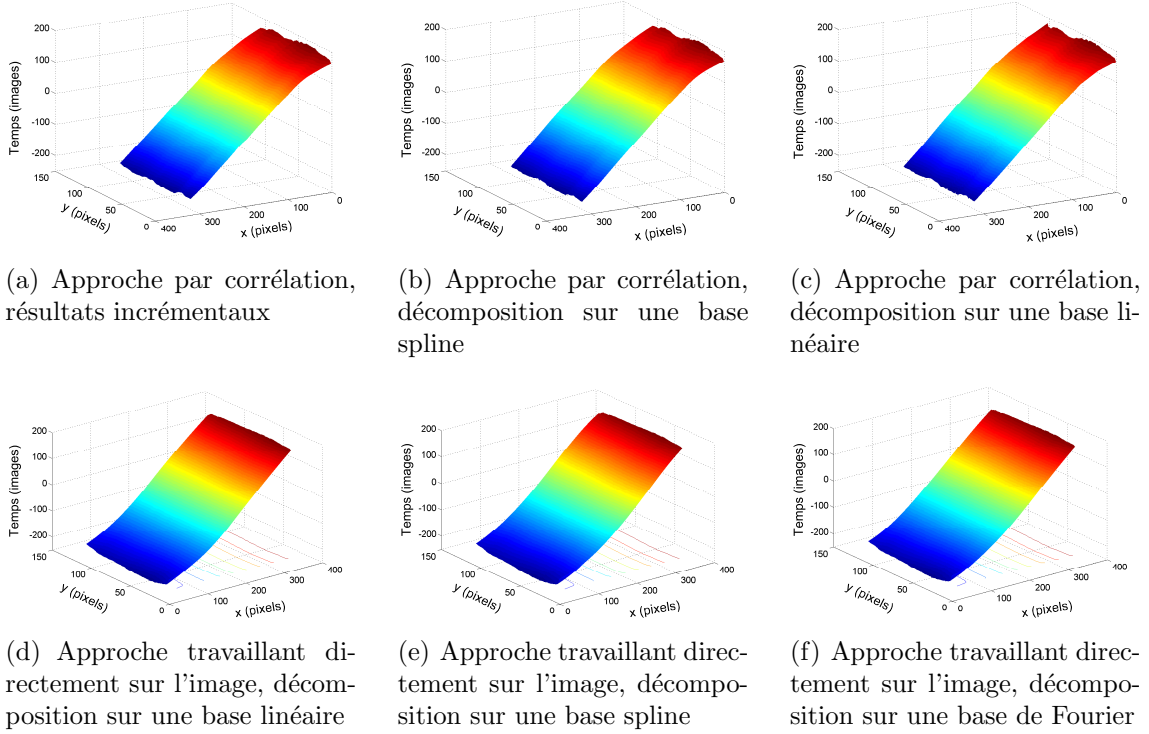


Figure 2.30 – Champ de trajectoires 2D obtenus en juxtaposant les résultats 1D pour les différentes approches, 9 ddl.

La figure 2.31 présente les résultats obtenus en utilisant l'extension au cas 2D. Les champs des trajectoires présentés correspondent à l'utilisation de 9 degrés de liberté dans les directions  $x$  et  $y$ , les dimensions spatiales du film analysé étant de 320 pixels dans la direction de l'écoulement  $x$ , et de 110 pixels dans la direction  $y$ . Finalement, pour la décomposition sur une base de fonctions splines, les éléments utilisés auront une dimension de 160 pixels suivant  $x$  par 55 pixels suivant  $y$ , et pour la décomposition sur une base linéaire, une dimension de 40 pixels suivant  $x$  par 13.75 pixels suivant  $y$ . Il est à noter que ces valeurs sont arbitraires et la taille des éléments peut facilement être réduite en augmentant le nombre de degrés de liberté (figure 2.32). En comparant les résultats de la figure 2.31 pour chacune des deux bases utilisées, on peut alors voir que l'utilisation d'éléments rectangulaires pour résoudre le problème fait apparaître quelques fluctuations dont l'amplitude reste faible comparée à celles obtenues en juxtaposant les trajectoires 1D. Cette deuxième approche agit comme un filtre sur les trajectoires résolues. Par ailleurs, contrairement à la méthode 1D pour laquelle il existe une quantité indéterminée pour chaque ligne composant la hauteur  $y$ , il n'y a plus, ici, qu'une seule quantité indéterminée choisie en imposant  $\langle \tau(x) \rangle_y = 0$ .

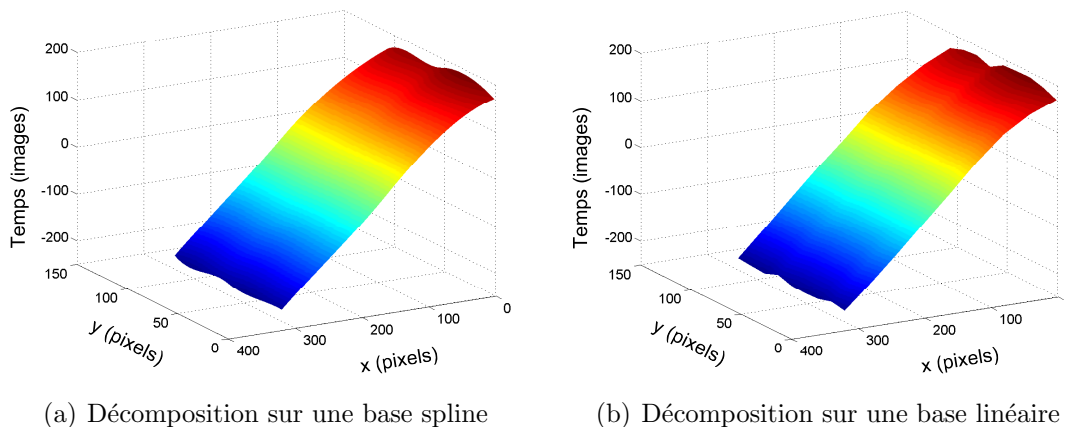


Figure 2.31 – Champ de trajectoires 2D obtenus en utilisant l'approche 2D pour les différentes approches, 9 ddl dans les deux directions.

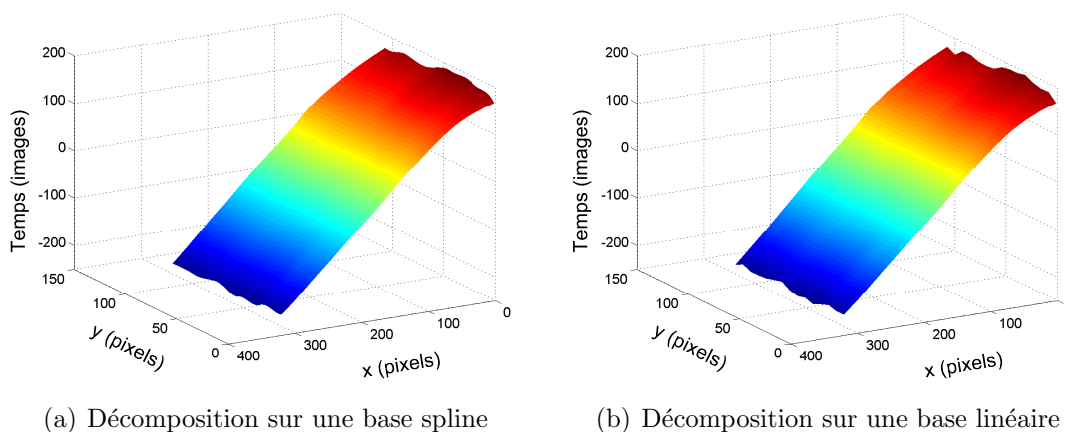


Figure 2.32 – Champ de trajectoires 2D obtenus en utilisant l'approche 2D pour les différentes approches, 15 ddl dans les deux directions.

### 2.2.3 Utilisation des résultats

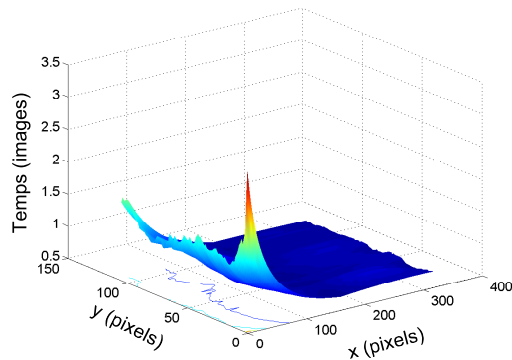
Pour l'utilisation des champs de trajectoire, en ce qui concerne l'approche par corrélation on se limitera à l'approche par décomposition sur une base de fonctions. En effet, l'approche incrémentale reste trop bruitée pour permettre une dérivation. Par ailleurs, deux bases de fonctions ont été étudiées : une base de fonctions linéaires et splines. Lors de la détermination du champ des vitesses à partir du champ des trajectoires, la première base de fonctions fournira un champ des vitesses constant par morceaux alors que la seconde donnera un champ des vitesses quadratique. La détermination du champ des taux de déformation nécessitant une dérivation spatiale du champ des vitesses, seule la décomposition sur une base de fonctions splines pourra fournir des résultats intéressants. C'est dans cette optique que cette base de

fonction avait été préalablement choisie.

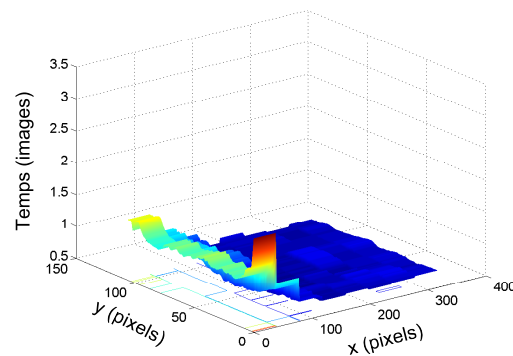
Le champ des vitesses peut aisément être déduit du champ des trajectoires par une dérivation temporelle obtenue en dérivant les fonctions de base. La figure 2.33 présente les champs de vitesses obtenus soit en utilisant le champ des trajectoires déterminés avec 9 degrés de liberté dans les deux directions  $x$  et  $y$  pour l'approche par corrélation soit en utilisant directement les résultats fournis par l'approche travaillant sur l'image brute. La figure 2.33(a) représente les résultats en utilisant une base spline et la figure 2.33(b) en utilisant une base linéaire pour l'approche par corrélation. Les figures 2.33(c), 2.33(d) et 2.33(e) correspondent aux champs de vitesse obtenus pour les trois bases présentées dans le cas de l'approche travaillant sur l'image brute. L'approche utilisant l'image brute fournit, par construction, un champ des vitesses plus régulier que celui obtenu en dérivant temporellement les trajectoires résolues par l'approche par corrélation. Pour les informations déduites du champ des vitesses, on utilisera donc le champ obtenu par l'approche directe. La vitesse est exprimée en pixel/image unité qui peut facilement être convertie en une unité traditionnelle de vitesse.

À partir du champ des vitesses obtenu par l'approche directe, une vitesse moyenne pour une hauteur donnée peut être calculée. La figure 2.34 représente, pour les différentes bases de fonction utilisées, la valeur moyenne de la vitesse (en pixel/image) calculée pour chaque pixel  $y$  composant la hauteur du matelas. Le profil des vitesses fait alors apparaître une vitesse plus importante sur les bords du matelas, ce qui s'explique par l'entraînement du matelas par les tapis convoyeurs, ainsi que la présence d'une couche limite, correspondant à la profondeur dans le matelas pour laquelle la présence des tapis d'entraînement modifie la vitesse.

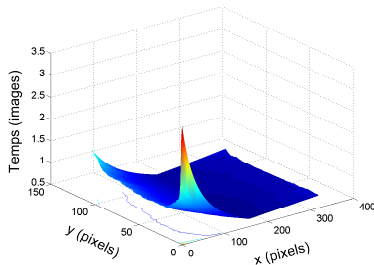
Enfin, à partir du champ des vitesses, le taux de déformation correspondant à la partie symétrique du gradient des vitesses est évalué. On se limite, dans notre cas, à la composante du taux de déformation suivant l'axe  $x$  ainsi qu'aux taux de déformation obtenus par l'approche travaillant sur l'image brute, les autres résultats étant trop bruités. La figure 2.35 représente, superposées à une des images extraites du film analysé les isovaleurs du champ des taux de déformation : une couleur est affectée à un niveau de taux de déformation. Ainsi des isovaleurs de taux de déformation rapprochées signifient un changement rapide du taux de déformation ; c'est ce que l'on observe dans la partie supérieure gauche des figures 2.35(a) et 2.35(b). Ces deux figures correspondent à l'utilisation d'une base spline et d'une base de Fourier respectivement. Le nombre de degrés de liberté utilisé est de 10. Ainsi, par rapport à la méthode simple de présentation de la cinématique d'une machine de crêpage introduite au chapitre 1, cette nouvelle approche fournit des plus amples renseignements sur la localisation spatiale des taux de déformation les plus importants au sein du matelas de laine minérale, ainsi que sur l'existence et la profondeur d'une couche limite imposée par les tapis d'entraînement haut et bas.



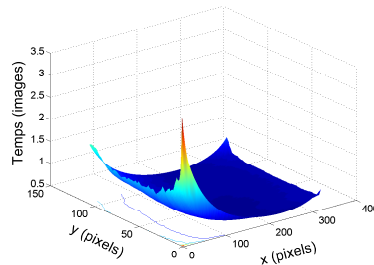
(a) Approche par corrélation, décomposition sur une base spline



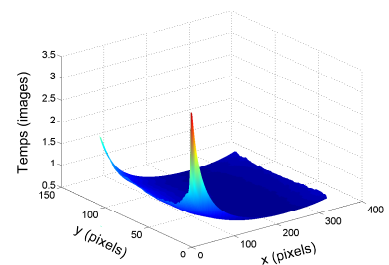
(b) Approche par corrélation, décomposition sur une base linéaire



(c) Approche utilisant l'image brute, décomposition sur une base linéaire

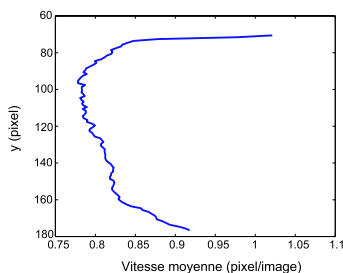


(d) Approche utilisant l'image brute, décomposition sur une base spline

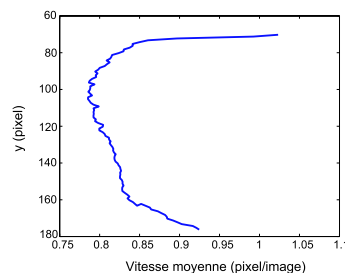


(e) Approche utilisant l'image brute, décomposition sur une base de Fourier

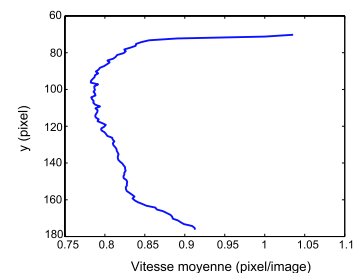
Figure 2.33 – Champ des vitesses 2D obtenus en dérivant le champ des trajectoires pour l'approche par corrélation, et directement pour l'approche travaillant sur l'image brute.



(a) Décomposition sur une base linéaire



(b) Décomposition sur une base spline



(c) Décomposition sur une base de Fourier

Figure 2.34 – Vitesse moyenne en pixel/image pour chaque hauteur  $y$  composant la hauteur du matelas.

## 2.3 Conclusion

Une approche de détermination de champs de vitesses stationnaires inhomogènes a été présentée. Elle est basée sur le film numérique d'un écoulement et permet d'étu-

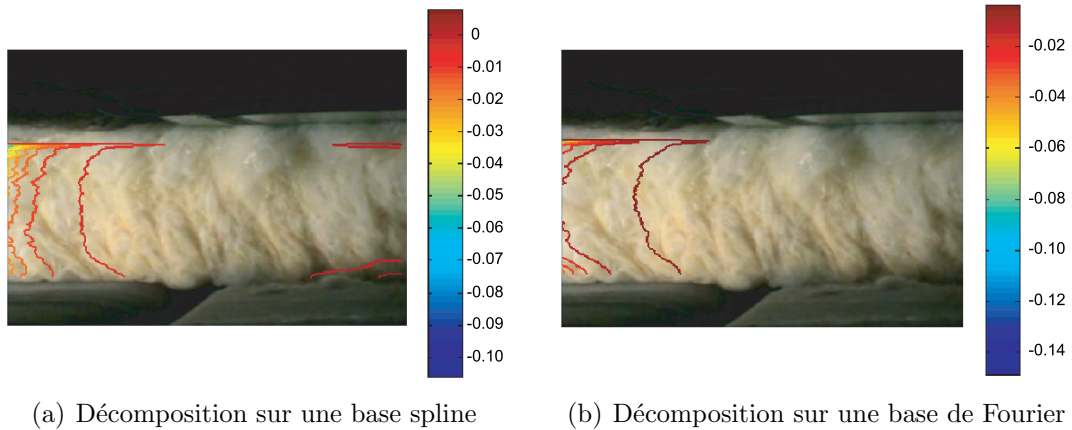


Figure 2.35 – Champ des taux de déformation en  $image^{-1}$  superposé à une des images composant le film analysé.

dier des écoulements rapides, tels que ceux rencontrés sur ligne de fabrication. Une carte spatio-temporelle est formée en utilisant un grand nombre d'images, permettant de pallier la modeste qualité de chacune d'entre elles prises indépendamment. Cette carte spatio-temporelle fait apparaître les lignes de courant de l'écoulement étudié, correspondant au champ recherché. Plusieurs méthodes ont été présentées pour résoudre le problème. Une première technique utilisant les fonctions de corrélation permet de déterminer le champ des trajectoires. Une deuxième approche travaille directement sur l'image brute : le champ recherché est alors directement celui des vitesses. Pour les deux méthodes proposées, le champ recherché est ensuite projeté sur une base de fonctions linéaires, splines ou de Fourier. Après une présentation des méthodes en 1D, elles ont été validées sur une image test. La sensibilité au bruit ambiant de chacune des méthodes a ensuite été évaluée et une extension au cas 2D a finalement été introduite : elle permet d'imposer un couplage transverse des lignes de courant recherchées et agit ainsi comme un filtre naturel sur les trajectoires et vitesses. Une très bonne résolution spatiale peut alors être obtenue. Les résultats de ces méthodes ont pu être comparés en termes de précision, de résolution et de temps de calcul :

- En termes de précision dans la détermination du champ des trajectoires, la méthode travaillant directement sur l'image brute donne de meilleurs résultats. Ceci est principalement dû au fait que, pour cette méthode, le champ des trajectoires est obtenu par intégration du champ des vitesses, donnant ainsi une régularité supplémentaire au champ des trajectoires. En termes de précision dans la détermination du champ des vitesses, les deux méthodes donnent des résultats comparables. Enfin, en termes de précision dans la détermination du champ des taux de déformation, celle la méthode travaillant directement sur l'image brute donne de bons résultats. En effet, l'approche utilisant les fonctions de corrélation détermine dans un premier temps les trajectoires : deux dérivations successives sont alors nécessaires pour en déduire le champ

- des taux de déformation, ce qui perturbe trop les résultats obtenus.
- En termes de sensibilité au bruit, les deux méthodes donnent des résultats équivalents et sont donc toutes deux utilisables en milieu industriel.
  - Les deux méthodes permettent d’atteindre une excellente résolution spatiale (jusqu’à 2 pixels par élément pour le cas 1D).
  - Enfin, en termes de temps de calcul, les résultats des deux méthodes sont comparables quel que soit le nombre de degrés de liberté utilisé.

Les deux méthodes ont ensuite été illustrées sur un film numérique d’un procédé industriel, réalisé à l’aide d’une caméra numérique standard sans précaution particulière. L’étude du champ 2D de vitesse déduit des algorithmes permet d’étudier les zones de la ligne de fabrication où les déformations sont plus importantes, et ainsi optimiser les paramètres de réglage de la ligne de production afin d’obtenir le produit désiré en bout de ligne.

Le développement actuel de la méthode travaillant sur l’image brute permet d’accéder à des champs de vitesse desquels on peut aisément déduire des profils de vitesse. Sur l’exemple analysé, celui-ci fait apparaître une profondeur de pénétration pour laquelle la vitesse du matériau est reliée à la vitesse des tapis d’entraînement. La détermination du champ des taux de déformation est possible en utilisant une dérivation spatiale numérique du champ des vitesses ce qui permet de localiser spatialement au sein de la machine de crêpage, les zones responsables de la plus forte texturation du matériau.

Les évolutions possibles à apporter à la méthode sont aujourd’hui un retour sur les hypothèses faites pour développer l’algorithme. L’écoulement est supposé être porté par la direction de la ligne de fabrication  $x$  : l’écriture du problème tridimensionnel est nécessaire pour tenir compte des vitesses et déformations suivant l’axe  $y$ . Par ailleurs le film est supposé être stationnaire, ce qui a été vérifié sur l’écoulement étudié. Une dernière évolution possible est enfin un retour sur cette deuxième hypothèse.



# Chapitre 3

## Étude de l'anisotropie locale d'un échantillon de matériau enchevêtré

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>60</b>
3.1.1	Principe de l'analyse d'anisotropie	62
3.1.2	Remarques préliminaires	63
<b>3.2</b>	<b>Les méthodes proposées</b>	<b>65</b>
3.2.1	Les différentes méthodes	65
3.2.2	Cas des images non régulières	69
3.2.3	<i>Neutral padding</i>	71
<b>3.3</b>	<b>Application sur différentes images</b>	<b>74</b>
3.3.1	Les empreintes digitales	74
3.3.2	Une image non régulière : le bois	74
3.3.3	Cercles concentriques	75
3.3.4	Laine minérale crêpée	79
3.3.5	Mesure d'objectivité	80
3.3.6	Carte spatio-temporelle	81
<b>3.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>83</b>

---



Dans le chapitre précédent, un outil pour analyser un procédé de fabrication basé sur l'utilisation d'un film numérique a été présenté. L'étude du procédé de fabrication permet alors de comprendre quels sont les paramètres responsables de la texturation du matériau. Cette même texture du matériau est directement reliée aux performances mécaniques du produit fini (cf chapitre 1). Il apparaît donc légitime de s'intéresser plus précisément à l'étude et la caractérisation de la texture du matériau étudié.

On se propose dans ce chapitre de mettre en place une méthode pour déterminer l'anisotropie locale d'un échantillon de matériau enchevêtré. Cette étude, basée sur l'analyse d'une image numérique du produit en niveaux de gris, permet d'identifier l'axe principal d'anisotropie d'une zone locale de l'image analysée ainsi que l'amplitude d'anisotropie associée. Plusieurs méthodes seront présentées et ont la propriété de pouvoir traiter des images non régulières à l'échelle pixel. Ces différentes approches seront ensuite validées et comparées sur des images-tests pour lesquelles l'orientation est connue en chaque point ou facile à estimer visuellement. Un outil supplémentaire sera également présenté pour tenir compte du caractère non régulier de l'image analysée. Cet outil de détermination de l'anisotropie locale et de l'amplitude d'anisotropie associée s'intégrera par la suite dans une chaîne ayant pour but de prévoir en fonction de la texture d'un échantillon de laine minérale les performances mécaniques de l'éprouvette associée.

Dans un premier temps, les différentes méthodes existantes seront détaillées afin de mettre en avant les évolutions qu'apporteront les nouvelles méthodes proposées. Ces nouvelles approches sont introduites, testées et comparées. Enfin, les résultats obtenus sur des images réelles de matériaux texturés, tels que le bois ou la laine minérale illustreront l'utilisation des méthodes sur des exemples réels. Ce chapitre reprend à quelques détails près, un article accepté dans la revue *Pattern Recognition*.

## 3.1 Introduction

Évaluer l'anisotropie d'une image ou de la zone d'une image, ainsi que le champ d'orientation correspondant possède un large champ d'applications dans l'analyse de textures. Des empreintes digitales au microscope électronique à transmission, un grand nombre de problèmes nécessite l'identification de l'anisotropie en tant que caractéristique majeure de la texture ou de la reconnaissance d'un motif. C'est pourquoi, diverses techniques pour évaluer des champs d'orientations locales ont été proposées jusqu'à aujourd'hui.

Une des premières approches, introduite par Rao [23], pour déterminer le champ d'orientation principal d'une image utilise la direction des gradients de niveaux de gris locaux. La direction principale d'anisotropie locale est en effet perpendiculaire

au gradient. Hanbury *et al.* [24] utilisent l'algorithme proposé par Rao pour décrire le champ de vecteurs d'une texture orientée. À partir de cette analyse, la texture est caractérisée grâce à des outils de morphologie mathématique, et plus précisément grâce à un opérateur gradient circulaire centré pour la segmentation de texture et un opérateur chapeau haut de forme [25] circulaire centré pour la détection de défaut. La méthode proposée a alors été validée [24] grâce à l'analyse d'une image d'une coupe de bois, pour laquelle la segmentation en régions d'orientation homogène a été effectuée.

Depuis lors, un certain nombre de variantes ont été développées pour caractériser une texture orientée. On désigne par texture orientée, une texture anisotrope caractérisée par une orientation principale locale pour chaque zone de la texture. La plupart de ces approches sont basées sur l'utilisation de gradients. Une de ces méthodes classiques est basée sur l'analyse en composantes principales (ACP) des gradients locaux [26, 27]. Appliquer cette analyse à la matrice des autocovariances des vecteurs gradients permet de déterminer l'orientation locale et peut être utilisée pour la segmentation d'images et la détection de défauts. Bazen *et al.* [28] ont utilisé l'ACP appliquée à la matrice des autocovariances des vecteurs gradients pour la segmentation d'empreintes digitales. Dans un premier temps l'image est filtrée par un filtre passe-bas pour atténuer le bruit, puis le champ d'orientation est estimé et finalement une segmentation basée sur une analyse de cohérence permet l'identification de la forme basique de l'empreinte, forme utilisée pour la classification, l'encodage et la reconnaissance.

Quelques améliorations sur les premières méthodes basées sur le calcul des gradients ont ensuite été développées. Gu *et al.* [29] ont proposé une nouvelle approche pour calculer le champ d'orientation d'empreintes digitales. C'est une combinaison de deux modèles à l'aide d'une fonction coût. Un modèle polynomial est utilisé pour calculer le champ d'orientation global, puis un modèle point de charge à chaque singularité de l'image est utilisé pour améliorer localement le résultat du calcul. Feng *et al.* [30, 31] ont présenté une technique basée sur l'analyse en composantes principales et la décomposition multi-échelle de l'image pour diminuer la sensibilité de la technique par rapport au bruit. Stuke *et al.* [32] ont proposé une méthode pour analyser des images présentant plusieurs orientations superposées. La définition d'un tenseur de structure généralisé (TSG) est utilisé pour détecter le nombre d'orientations présentes et le calcul est basé sur des mesures de fiabilité calculées à partir des invariants du TSG.

Toutes les méthodes précédentes reposent sur l'hypothèse forte que les gradients sont bien définis, et qui peuvent donc être facilement calculés numériquement. Une autre méthode répandue est celle proposée par Bigün *et al.* [33, 34, 35] pour des images (ou des films) qui sont invariants dans une (ou plusieurs) directions. Cette dernière méthode fournit une orientation reliée à l'anisotropie calculée au sens des

moindres carrés dans l'espace de Fourier. Cette méthode sera plus développée par la suite.

Souvent associée à la détermination du champ d'orientation, l'estimation d'une amplitude d'anisotropie locale soulève un problème important. En effet, selon l'échelle à laquelle la texture est observée, l'anisotropie correspondante peut être différente. Germain *et al.* [36] ont proposé un indicateur de dispersion qui associe la mesure d'anisotropie à l'échelle d'observation de la texture. Scharcanski *et al.* [37] utilisent une extension de l'algorithme de Rao pour déterminer l'orientation et proposent alors une mesure de l'anisotropie locale en considérant que plus l'anisotropie locale est forte, plus les vecteurs gradients seront alignés localement.

La majorité des techniques existantes sont donc basées sur l'analyse de champs de gradients locaux, ce qui les rend très sensibles au bruit. En résumant la plupart des méthodes mentionnées précédemment, différentes procédures de filtrage sont introduites pour restituer au champ de gradients une légitimité qui permettra d'utiliser l'algorithme de base. Dans la plupart des cas, ces approches fournissent un outil satisfaisant, tolérant un bruit non-corrélé d'amplitude faible. Cependant, il persiste un certain nombre de cas, tel que des images de laine de verre, matériau texturé et enchevêtré, objet de l'étude, pour lesquelles ces approches donnent des résultats insuffisants. La question est alors de savoir s'il est légitime ou non d'utiliser un filtre sur l'image à analyser sans pour autant perdre une partie de l'information, soit, entre d'autres termes, de savoir si le bruit, et l'information de l'image utile à l'algorithme peuvent facilement être dissociés à l'aide d'un filtre adapté.

Le but dans notre analyse est alors de présenter et discuter d'une philosophie différente à partir de laquelle plusieurs algorithmes sont proposés. Une catégorie de méthodes qui *ne requiert aucune hypothèse de régularité* sur l'image analysée (au moins au sens de la différentiabilité permettant le calcul de gradients numériques) est proposée. La première partie de ce chapitre présente brièvement les outils classiques mentionnés ci-dessus. On s'attachera par ailleurs à mettre en avant le problème majeur posé par la robustesse et la sensibilité par rapport aux textures non régulières. Les différentes méthodes seront présentées et appliquées sur quelques images-test. Leurs performances relatives seront comparées ainsi que leur stabilité au bruit. Une mesure d'objectivité sera enfin proposée pour valider la robustesse de la méthode en fonction de la qualité de l'image analysée.

#### 3.1.1 Principe de l'analyse d'anisotropie

La plupart des méthodes existantes sont basées sur le calcul d'un champ de gradients. Soit  $f(x, y)$  une fonction 2D représentant une image en niveaux de gris, et  $\nabla f(x, y)$  son gradient. Basé sur le champ discret, une approximation « adaptée »  $\mathbf{G}$  — ce terme est volontairement vague, dans la mesure où l'approximation ayant

pour but d'augmenter la robustesse et la précision de la mesure d'anisotropie dépend de la méthode utilisée — du vecteur gradient  $\nabla f$  est calculée et notée

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_x(x, y) \\ G_y(x, y) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Rao [23] propose de calculer sur une fenêtre  $W$ , définissant le voisinage du point de calcul, le tenseur

$$\mathbf{\Gamma} = \sum_W \mathbf{G} \otimes \mathbf{G} \quad (3.2)$$

où  $\otimes$  correspond au produit tensoriel. La direction de l'axe d'anisotropie est alors perpendiculaire au vecteur propre associé à la valeur propre la plus élevée. Bazen *et al.* [27] définissent une matrice d'autocovariance comme le produit tensoriel des vecteurs gradient moyennés sur une zone d'étude, *i.e.*, le tenseur  $\mathbf{\Gamma}$  défini par l'équation (3.2). La direction du gradient est donné par le vecteur propre de la matrice d'autocovariance  $\mathbf{\Gamma}$  qui correspond à la valeur propre la plus élevée. Une *amplitude* locale du champ des orientations qui caractérise le degré d'anisotropie est définie comme

$$Amp = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (3.3)$$

où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  correspondent respectivement aux valeurs propres la plus élevée et la plus faible de la matrice d'autocovariance  $\mathbf{\Gamma}$ .

Bigün *et al.* [33, 34, 35] se sont intéressés aux images ou films fortement anisotropes présentant une invariance stricte selon une direction de l'espace (ou du temps). Cette invariance implique que le spectre de puissance dans l'espace de Fourier est concentré suivant un plan (hyperplan) normal à la direction de l'invariance. L'orientation est alors déterminée en minimisant un moment d'inertie par rapport à un axe passant par l'origine de l'espace de Fourier. La densité de puissance  $|\hat{f}(k)|^2$  est interprétée comme une densité de masse et le tenseur d'inertie  $\mathbf{T}$  s'écrit

$$\mathbf{T}_{ij} = \iint_{E_2} k_i k_j |\hat{f}(k)|^2 dk_1 dk_2 \quad (3.4)$$

Le vecteur propre de  $\mathbf{T}$  associé à la plus petite valeur propre fournit la direction d'anisotropie.

### 3.1.2 Remarques préliminaires

Déterminer l'anisotropie d'un domaine, noté après Zone d'Étude ou ZE, appartenant à une image implique d'évaluer les changements de niveaux de gris dans différentes directions, la direction pour laquelle les changements étant les plus faibles correspondant à l'axe principal d'anisotropie. Étant donné que des *changements* de niveau de gris sont à étudier, la plupart des méthodes sont basées sur le calcul de

gradients. Cependant la définition intrinsèque des gradients soulève la question de la sensibilité à l'échelle pixel des méthodes basées ensuite sur l'exploitation de ces champs de gradients. Différents aspects à prendre en compte peuvent être listés :

- *La sensibilité à l'échelle.* L'amplitude et la direction d'anisotropie ne sont pas des concepts intrinsèques, mais dépendent fortement de l'échelle de l'analyse, cet aspect étant discuté en détail dans plusieurs articles traitant de la détermination de la direction d'anisotropie et du degré d'anisotropie [36, 38].
- *La robustesse de l'analyse.* Le bruit de l'image à analyser est aléatoire et uniformément réparti dans l'image. La robustesse de la méthode dépendra manifestement du choix explicite ou implicite de l'échelle d'analyse. Dans le but de réduire la sensibilité à l'échelle pixel, certaines méthodes utilisent un opérateur gradient de Sobel qui permet d'en régulariser une partie.
- *La régularité de l'image.* Non corrélé au point précédent, on considère souvent que, par rapport au bruit, supposé essentiellement non corrélé spatialement, l'image de référence est une (discrétisation d'une) fonction régulière, avec très peu de contributions dans les modes hautes fréquences. En d'autres termes, on suppose que l'image de référence est « différentiable », dans le sens où l'évaluation de gradients obtenue en utilisant des estimateurs à différentes échelles fournira des valeurs quasi identiques pour un intervalle d'échelle de 1 à, disons, 10 pixels. Il faut noter enfin que ceci peut être une propriété inhérente de l'image originale à analyser ou bien résulter d'un filtrage passe-bas de l'image ce qui restaurera la régularité nécessaire pour l'analyse. Cependant, dans ce dernier cas, il est important de s'assurer que le filtrage effectué ne supprime pas la composante en fréquence responsable de l'anisotropie dominante.

De ces considérations, on notera que la plupart des méthodes supposent implicitement la régularité de l'image analysée, légitimant l'utilisation d'outils pour calculer les gradients. L'extraction de l'axe d'anisotropie consiste alors en la recherche de la direction orthogonale (en moyenne) au champ de gradients. On se propose d'étudier des méthodes basées sur une stratégie différente, *i.e.*, qui permettra *a priori* d'éviter toute hypothèse de régularité sur l'image analysée. Ces méthodes seront alors adaptées à l'étude d'images pour lesquelles l'anisotropie correspond aux modes très hautes fréquences (*i.e.*, les textures fines telles que la laine minérale crêpée).

## 3.2 Les méthodes proposées

### 3.2.1 Les différentes méthodes

#### 3.2.1.1 La méthode énergétique

Pour illustrer la discussion précédente, la figure 3.1(gauche) présente un exemple d'une texture anisotrope contenant des composantes hautes fréquences. Cette image a été obtenue à partir d'une fonction auto-affine [39]. Pour cet exemple simple, un grand nombre de longueurs d'onde est en fait responsable de la même anisotropie. Cependant, comme le montre la figure 3.1(droite), via deux coupes le long des directions  $x$  et  $y$  et passant par le centre de l'image, les changements de niveaux de gris sont drastiques à une distance d'un pixel. Dans ce cas, la valeur des gradients dépendra fortement de l'opérateur discret utilisé pour les évaluer.

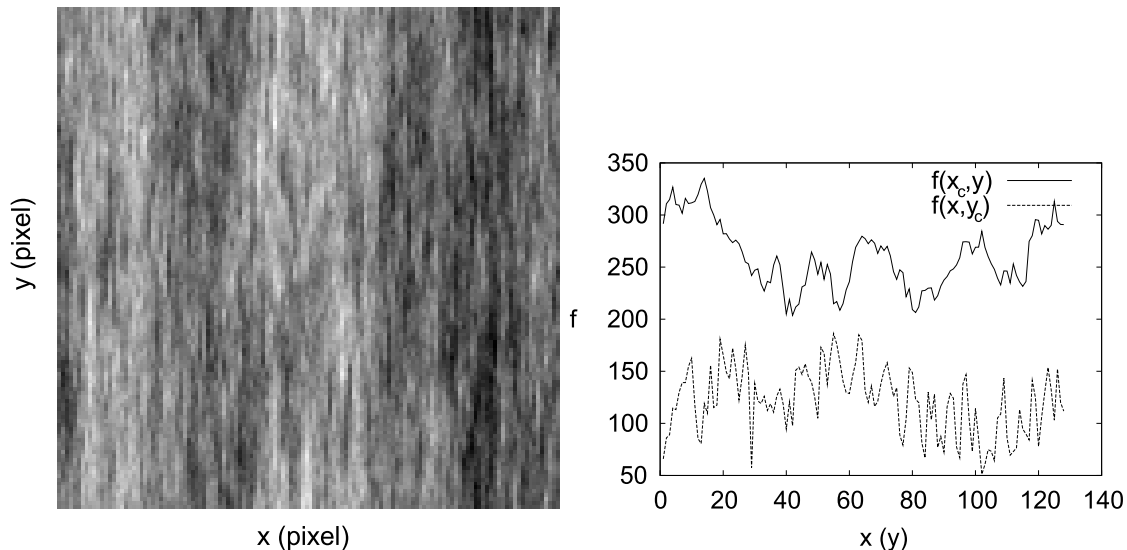


Figure 3.1 – (gauche) Exemple d'une image anisotrope, dont la régularité est insuffisante pour permettre une définition correcte d'un gradient. (droite) Niveau de gris selon deux coupes, horizontale et verticale, effectuées sur l'image précédente. Il est à noter que bien que les variations rapides à l'échelle pixel ne permettent pas le calcul d'un gradient, les spectres de puissance des deux coupes sont très différents.

Même si la notion d'un gradient en tant que quantité intrinsèque indépendante n'est pas valable, à partir des coupes selon les directions  $x$  et  $y$ , de grandes différences apparaissent. La courbe inférieure de la figure. 3.1(droite),  $f(x, y_c)$  à  $y = y_c$  fixé, fait apparaître des variations rapides de niveaux de gris à l'échelle pixel, alors que la courbe du haut,  $f(x_c, y)$  à  $x = x_c$  fixé, est beaucoup plus régulière pour les faibles longueurs d'onde, tout en fournissant des composantes à longueur d'onde plus élevée.

### 3. Étude de l'anisotropie locale d'un matériau enchevêtré

Ceci suggère d'utiliser une norme  $L_2$  des différences finies selon une direction  $\mathbf{e}$

$$\|D_{\mathbf{e}}f\| = \left[ \sum_{(x,y)} (f(x + e_x, y + e_y) - f(x, y))^2 \right]^{1/2} \quad (3.5)$$

où  $e_x$  et  $e_y$  sont les composantes du vecteur  $\mathbf{e}$ . Si l'on reprend l'exemple précédent, une telle norme appliquée uniquement sur les coupes représentées figure 3.1 (droite) retournera respectivement 29 et 11 niveaux de gris pour  $f(x, y_c)$  et  $f(x_c, y)$ . Il est également à noter que l'utilisation de cette norme ne nécessite aucune hypothèse de régularité sur l'image de départ  $f$ .

Cet exemple permet de faire ressortir la propriété la plus importante en vue de déterminer l'axe principal d'anisotropie. Dans les approches classiques, une fois que le bruit est proprement traité, on suppose que le signal est régulier et, à échelle locale, on peut observer des motifs tels que celui montré figure (3.2)(gauche), pour lequel un gradient moyen peut facilement être calculé, fournissant alors une détermination de l'axe d'anisotropie comme étant l'axe perpendiculaire à la direction du gradient. Parallèlement à cela, on considère des images non régulières pour lesquelles le motif local apparaîtra plutôt comme celui représenté schématiquement sur la figure 3.2(droite). Au lieu d'évaluer les gradients, qui peuvent ne pas être définis, on se focalise sur la puissance totale, soit la norme  $L_2$  de la sous-image dans différentes directions.

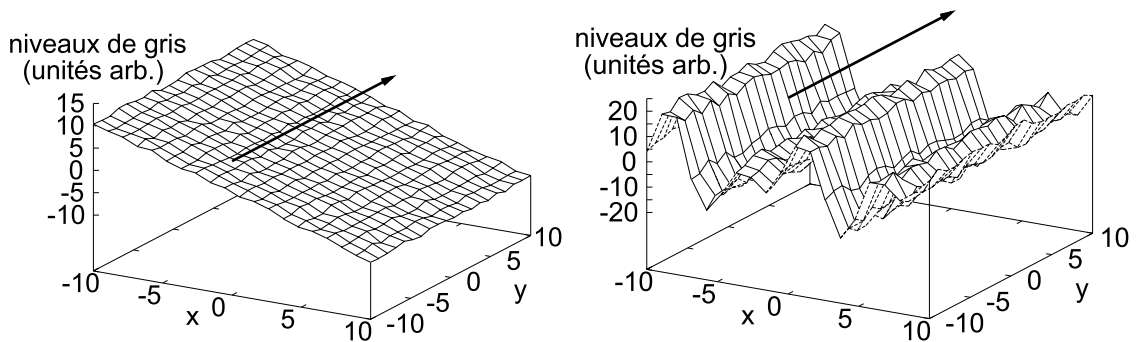


Figure 3.2 – Schéma en niveau de gris (gauche) d'un motif extrait d'une image pour utiliser une approche standard basée sur le gradient (droite) d'un motif non régulier pour l'approche considérée.

#### *Représentation en coordonnées polaires*

Une possibilité est alors d'extraire un anneau (de rayon  $r$ ,  $R_0 < r < R_1$ ), centré sur un point, centre d'une zone d'étude (figure 3.3(a)) et de le représenter en rectangle  $[R_0, R_1] \times [0, 2\pi]$  en utilisant les coordonnées polaires (figure 3.3(b)). Cette

représentation nécessite une interpolation subpixel des niveaux de gris qui peut aisément être effectuée en utilisant des fonctions élémentaires Q1 ( $1, x, y, xy$ ) sur le tableau de pixels à considérer. Une fois l'anneau déroulé en rectangle, la norme précédente sur les différences radiales peut être calculée pour chaque angle. Une fonction  $g(\theta) = \|D_{e_r} f(r, \theta)\|$  est alors obtenue et est  $2\pi$ -périodique. Basé sur le fait que cette norme variera comme une fonction de l'orientation relative du vecteur radial, et de l'axe d'anisotropie, on s'attend alors à ce que la fonction  $g(\theta)$  fournisse une composante en  $\cos(2(\theta - \theta_0))$  proportionnelle à l'anisotropie (figure 3.3(c)).

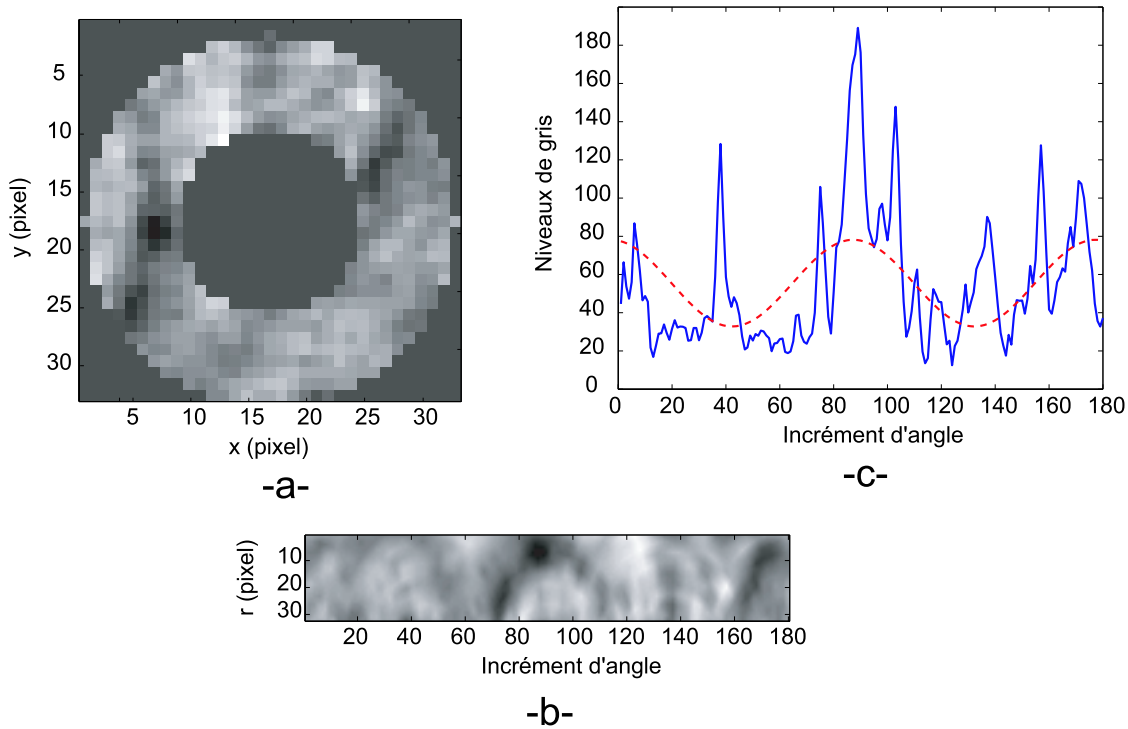


Figure 3.3 – (a) anneau considéré (rayon  $r$ ,  $8 < r < 16$  pixels), (b) sa représentation en polaire avec un incrément d'angle =  $2^\circ$ , (c) la norme  $L_2$  selon la direction radiale en fonction de  $\theta$  (trait plein) et sa composante en  $\cos(2(\theta - \theta_0))$  (trait pointillé).

Pour évaluer l'axe d'anisotropie, cette fonction est ensuite projetée sur la fonction  $e^{2i\theta}$  en calculant séparément les parties réelles et imaginaires

$$\begin{aligned} S_g &= (1/N) \sum_{j=1}^N \sin(2\theta_j) g(\theta_j) \\ C_g &= (1/N) \sum_{j=1}^N \cos(2\theta_j) g(\theta_j) \end{aligned} \quad (3.6)$$

où l'indice  $j$  balaie les  $N$  orientations discrètes de l'intervalle  $2\pi$ , et  $\theta_j = 2j\pi/N$ . L'amplitude de l'anisotropie  $A$  est donnée par la norme de la décomposition de Fourier,  $A = \sqrt{C_g^2 + S_g^2}$ , alors que la direction d'anisotropie est donnée par la phase  $\phi$



telle que  $C_g + iS_g = -Ae^{2i\phi}$ .

Le dual de cette approche peut également être considéré en effectuant le calcul de la norme  $L_2$  suivant la direction orthoradiale ( $\theta$ ), toujours moyennée sur les directions radiales,  $h(\theta) = \|D_{\mathbf{e}_\theta} f(r, \theta)\|$ . Cette fonction doit être maximale pour l'orientation correspondant à l'axe d'anisotropie. Là encore,  $h$  est décomposée sur le sinus et le cosinus de  $2\theta$

$$\begin{aligned} S_h &= (1/N) \sum_{j=1}^N \sin(2\theta_j) h(\theta_j) \\ C_h &= (1/N) \sum_{j=1}^N \cos(2\theta_j) h(\theta_j) \end{aligned} \quad (3.7)$$

L'amplitude de ce vecteur fournit également une détermination de l'amplitude d'anisotropie,  $A = \sqrt{C_h^2 + S_h^2}$ , alors que la direction d'anisotropie est donnée par  $C_h + iS_h = Ae^{2i\phi}$ .

L'étape pénalisante d'un point de vue temps de calcul de cet algorithme correspond à la représentation de l'anneau en un domaine rectangulaire. Une alternative, toujours basée sur la norme  $L_2$  est alors proposée.

#### 3.2.1.2 La méthode du tenseur d'anisotropie

La norme  $L_2$  peut facilement être calculée pour n'importe quelle direction de l'espace de Fourier. En effet, la puissance totale est conservée dans l'espace de Fourier, et donc

$$\|D_{\mathbf{e}} f\|^2 = \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e})^2 |\hat{f}(\mathbf{k})|^2 \quad (3.8)$$

C'est pourquoi, en introduisant le tenseur d'anisotropie  $\mathbf{T}$  (3.4), on observe que

$$\|D_{\mathbf{e}} f\|^2 = \mathbf{T} : (\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) \quad (3.9)$$

où ' $:$ ' correspond à la contraction tensorielle suivant les deux indices. L'axe d'anisotropie apparaît alors comme la direction donnée par le vecteur propre du tenseur  $\mathbf{T}$  correspondant à la plus petite des valeurs propres. L'amplitude d'anisotropie peut également être calculée facilement à l'aide de  $\text{dev}(\mathbf{T})/\text{tr}(\mathbf{T})$ , où  $\text{tr}$  représente la trace, et  $\text{dev}$  la norme du déviateur  $\mathbf{T} - (1/2)\text{tr}(\mathbf{T})\mathbf{I}$ . On peut alors remarquer, qu'à un facteur 2 près, cette définition est similaire à celle du coefficient *Amp* présenté précédemment (équation (3.3)) mais obtenu par le calcul d'un autre tenseur.

Cette deuxième formulation évite l'étape coûteuse en temps de calcul de la représentation en polaire, et fournit assez naturellement l'axe d'anisotropie en utilisant une étape numérique efficace *i.e.*, une Transformée de Fourier Rapide (TFR). Cet algorithme est identique à la méthode introduite par Bigün *et al.* [33, 34, 35]. Il faut noter cependant que les considérations fournissant la formulation suivent des routes très différentes.

### 3.2.1.3 La méthode par autocorrélation

Calculer la fonction d'autocorrélation est encore une approche différente. On appelle  $C(\mathbf{x})$ , la fonction d'autocorrélation d'une zone de l'image analysée

$$C(\mathbf{x}) = \iint f(\mathbf{y})f(\mathbf{y} + \mathbf{x})d\mathbf{y} \quad (3.10)$$

La façon dont cette fonction décroît lorsqu'on s'éloigne de son centre en  $\mathbf{r} = 0$  caractérise la perte de similarité du signal selon une direction donnée. C'est pourquoi l'autocorrélation constitue un bon outil pour déterminer l'anisotropie. Par ailleurs, la fonction d'autocorrélation est calculée facilement et rapidement en utilisant l'algorithme de Transformée de Fourier Rapide. Pour quantifier l'anisotropie et déterminer l'orientation principale de la texture, la fonction d'autocorrélation est tronquée à un niveau donné, choisi pour cette étude à 80% de la valeur maximum  $C(0)$ . Ceci définit un domaine  $\mathcal{D}$  pour lequel  $C(\mathbf{r})/C(0) > 0.8$ . Cette valeur de 80% a été choisie pour qu'un nombre de points suffisant appartienne au domaine défini  $\mathcal{D}$ , permettant un calcul fiable. Ce domaine est enfin caractérisé par un tenseur d'inertie géométrique

$$\mathbf{I} = \iint_{\mathcal{D}} \mathbf{y} \otimes \mathbf{y} d\mathbf{y} \quad (3.11)$$

Ce tenseur est finalement diagonalisé, et son axe principal (correspondant à la direction de la valeur propre la plus élevée) est l'axe d'anisotropie. Le degré d'anisotropie peut également être obtenu en utilisant l'expression (3.3), ou  $\text{dev}(\mathbf{I})/\text{tr}(\mathbf{I})$ .

### 3.2.1.4 Connexion entre les différentes méthodes

Les deux dernières méthodes telles qu'elles sont présentées peuvent sembler assez éloignées. Elles sont en fait fortement connectées. Lorsque le seuil  $C(\mathbf{r})/C(0)$  est choisi proche de l'unité, la fonction d'autocorrélation pour une image régulière peut être assimilée à une parabole. C'est pourquoi le domaine  $\mathcal{D}$  ressemblera à une ellipse. Le tenseur d'inertie de cette ellipse  $\mathbf{I}$  peut facilement être relié à la courbure de la fonction d'autocorrélation à l'origine. Lorsque cette courbure est calculée dans l'espace de Fourier, elle devient identique au tenseur  $\mathbf{T}$  introduit précédemment. Ainsi,  $\mathbf{T}^{-1}$  est proportionnel à  $\mathbf{I}$  lorsque le seuil  $C(\mathbf{r})/C(0)$  tend vers l'unité. On peut également vérifier facilement que les amplitudes d'anisotropie calculées en utilisant  $\mathbf{T}$  ou  $\mathbf{I}$  sont identiques.

## 3.2.2 Cas des images non régulières

Jusqu'à maintenant, le caractère non régulier de l'image analysée n'a pas été considéré. Il est cependant direct de voir comment étendre l'analyse à de telles images. La non régularité peut en effet être caractérisée de manière quantitative (statistique) par l'indice de Holder [39],  $\zeta$ , tel que

$$\langle [f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - f(\mathbf{x})]^2 \rangle \sim |\mathbf{y}|^{2\zeta} \quad (3.12)$$

### 3. Étude de l'anisotropie locale d'un matériau enchevêtré

---

L'indice  $\zeta$  caractérise l'ordre maximum de différentiabilité de  $f$ . Puisque le champ étudié est discret, il est toujours possible de calculer des « gradients » à partir de différences finies. Cependant, ces derniers seront très sensibles à l'outil utilisé pour les déterminer. En termes de fonction d'autocorrélation, une singularité apparaît à l'origine  $C(\mathbf{r})/C(0) = 1 - A|\mathbf{r}|^{2\zeta}$  et l'approximation parabolique de l'autocorrélation abordée précédemment sera alors inadaptée pour des valeurs de  $\zeta < 1$  (une valeur de  $\zeta = 1$  correspond à une fonction régulière ou différentiable). Le tenseur de courbure,  $\mathbf{T}$ , est également piloté par la taille des pixels.

Cet inconvénient majeur de rencontrer des cas pour lesquels  $\zeta < 1$  est dû au fait que les estimateurs sont contrôlés par les petites échelles et donc la sensibilité au bruit devient nuisible à leur qualité. Dans le but de compenser cet effet, on peut avoir recours à un filtrage adapté qui rendra les gradients bien définis. La manière la plus naturelle de réaliser cette opération est de construire une intégration d'ordre  $1 - \zeta$ . Dans l'espace de Fourier, ce calcul consiste simplement en la multiplication de la transformée de Fourier  $\hat{f}(\mathbf{k})$  par  $|\mathbf{k}|^{\zeta-1}$ . Cette opération transformera toute image en une image régulière, pour laquelle les gradients seront bien définis sans la sensibilité à l'échelle pixel mentionnée précédemment. En termes de fonction d'autocorrélation, la singularité à l'origine disparaît et la fonction est alors différentiable (figure 3.4).

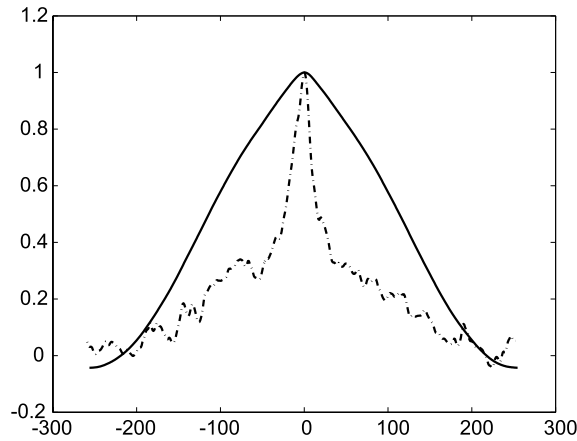


Figure 3.4 – Effet du filtre d'intégration sur l'autocorrélation suivant une direction donnée : en pointillés : fonction d'autocorrélation initiale présentant une singularité à l'origine, en trait plein : fonction d'autocorrélation après le filtrage ( $\zeta = 0.80$ ).

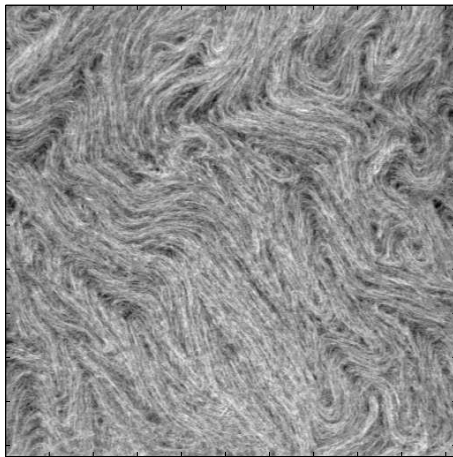
L'utilisation d'un tel filtre pour la méthode présentée est quasiment transparente. En termes de tenseur d'anisotropie, il faut simplement calculer

$$\mathbf{T}_\zeta = \iint_{E_2} \frac{\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^{2-2\zeta}} |\hat{f}(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} \quad (3.13)$$

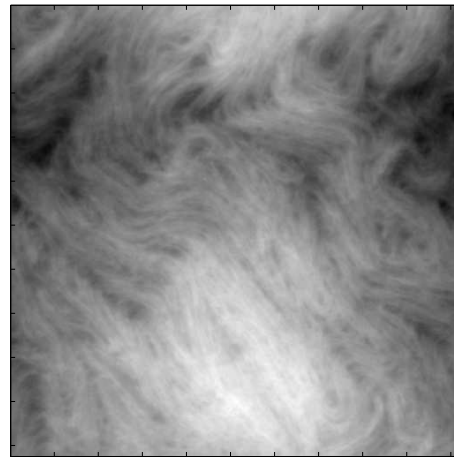
À partir de ce dernier tenseur, le traitement subséquent reste celui présenté auparavant.

Pour la méthode par autocorrélation, étant donné que  $C(\mathbf{r})$  est calculé dans l'espace de Fourier, il suffit de multiplier cette quantité par la loi puissance de  $\mathbf{k}$  correspondante avant de revenir dans l'espace réel et de seuiller la fonction d'autocorrélation résultante. Par construction, au voisinage de l'origine, l'approximation parabolique est alors adaptée.

En définitive, pour que ce traitement soit opérationnel, il reste à déterminer la valeur de l'indice  $\zeta$ . Ce dernier est la signature de la texture aléatoire de l'image. Pour évaluer  $\zeta$ , la façon la plus simple est d'étudier la moyenne du spectre de puissance sur les différentes zones d'étude composant l'image et de l'approximer par une loi puissance de  $|\mathbf{k}|$ . L'exposant de la loi puissance  $-\beta$  est relié à l'indice  $\zeta$  par  $\beta = 2(1+\zeta)$ . Ceci définit une procédure opérationnelle où  $\zeta$  n'est plus un paramètre ajusté manuellement, mais adapté à l'image analysée. Il ne reste donc aucun paramètre libre. La figure 3.5 représente l'effet d'un tel filtre sur une image de laine de verre crêpée.



(a) Image de laine de verre crêpée : image de départ



(b) Image de laine de verre crêpée après l'utilisation du filtre d'intégration

Figure 3.5 – Effet du filtre d'intégration sur une image de laine de verre crêpée ( $\zeta = 0.80$ ).

### 3.2.3 *Neutral padding*

Un des problèmes majeurs concernant l'utilisation de l'outil développé pour analyser une texture est la taille de la zone d'étude. Cette dernière est bornée par 2 propriétés différentes. D'une part, une borne supérieure, gouvernée par la texture elle-même : en effet, l'axe d'anisotropie ne doit pas varier de trop au sein d'une même

zone d'étude et sa taille doit rester inférieure à la longueur de corrélation du champ d'orientation. Il faut également noter que cette limite supérieure est une échelle physique et n'est en aucun cas reliée à la taille des pixels. D'autre part, la taille de la zone d'étude ne peut pas être réduite à trop peu de pixels. En effet l'information contenue dans la ZE doit être suffisamment riche pour permettre le calcul. Cependant une autre limite inférieure moins intuitive résulte de l'utilisation de la transformée de Fourier. Cette technique suppose implicitement que le champ analysé est périodique, donc le côté gauche et le côté droit d'une zone d'étude sont supposés périodiques ainsi que les côtés haut et bas. En général, cette hypothèse artificielle entraîne de fortes discontinuités le long des frontières et peut facilement être mal interprétée et reliée à l'orientation dominante de la texture. Il faut souligner qu'il s'agit d'un effet de bord et donc son poids diminue lorsque la taille de la ZE augmente. En pratique, pour les images étudiées, la taille des ZE inférieure à  $32 \times 32$  pixels donne des résultats non fiables (en effet l'utilisation de le TFR nécessite une taille de ZE en puissance de deux, si bien qu'une taille de ZE inférieure à  $32 \times 32$  pixels signifie  $16 \times 16$  pixels).

Pour diminuer la limite inférieure de la taille de la ZE, une nouvelle procédure a été développée permettant l'utilisation de ZE de  $16 \times 16$  pixels, voire de  $8 \times 8$  pixels. Cela consiste à remplir l'image de telle manière que la périodicité soit forcée sans altérer l'imagette originale située au cœur de la ZE. Supposons que l'on souhaite travailler avec une zone d'étude de taille  $N \times N$  pixels. On suppose que l'origine est placée au centre de l'imagette, si bien que  $-N/2 + 1 < x < N/2$  et  $-N/2 + 1 < y < N/2$ . On commence par positionner l'imagette dans un cadre plus grand, de taille  $M \times M$  possédant la même origine. La différence entre les deux correspond à un domaine qui sera utilisé pour implémenter la périodicité en utilisant un remplissage (*padding*) adapté, appelé *neutral padding*. Dans le but de ne pas introduire d'informations additionnelles qui pourraient perturber l'image, les composantes hautes fréquences de l'espace de Fourier sont mises à zéro. On choisit un nombre de modes égal à  $M^2 - N^2$  pour obtenir un problème uniquement défini. À ce moment là, la solution au problème peut facilement être formulée comme un simple système linéaire à résoudre. Cependant, le problème étant formulé en partie dans l'espace réel et en partie dans l'espace de Fourier, l'écriture de la solution explicite n'est pas simple. Cela signifierait un temps de calcul élevé. Toutefois, une solution *exacte* au problème n'est pas nécessaire. Un schéma itératif (une formulation de point fixe) est introduite et fournit en quelques itérations une solution approchée du problème.

Plus précisément, on appelle  $f(x, y)$  l'imagette originale, et  $h^{(m)}(x, y)$  la  $m^e$  itération de l'imagette remplie. On commence par une première approximation  $h^{(0)}(x, y) = f(x, y)$  pour  $-N/2 + 1 < x < N/2$  et  $-N/2 + 1 < y < N/2$  (voir figure 3.6(a)). La périphérie de l'image est ensuite complétée par l'information disponible : soit par l'image originale, si elle est définie, soit par un niveau de gris moyen. L'image formée est ensuite filtrée dans l'espace de Fourier  $\widehat{h}^{(1)}(k_x, k_y) = \widehat{h}^{(0)}(k_x, k_y)$

pour  $-N/2 + 1 < k_x < N/2$  et  $-N/2 + 1 < k_y < N/2$ . En dehors de la région cœur,  $\widehat{h}^{(1)}(k_x, k_y) = 0$ . En revenant dans l'espace réel, on obtient une fonction  $h^{(1)}(x, y)$  qui diffère de  $f$  dans sa région cœur. Ces valeurs  $h^{(2)}(x, y) = f(x, y)$  sont alors forcées si  $-N/2 + 1 < x < N/2$  et  $-N/2 + 1 < y < N/2$ , et  $h^{(2)}(x, y) = h^{(1)}(k_x, k_y)$  sinon. La procédure de  $h^{(0)}$  à  $h^{(2)}$  définit une itération. Au fur et à mesure des itérations,  $h$  converge vers un point fixe qui correspond à l'image originale au cœur, et à des hautes fréquences d'amplitude nulle dans l'espace de Fourier. En pratique, une dizaine d'itérations fournit une bonne approximation de la solution exacte car la convergence est exponentielle (voir figure 3.6(b)). Par construction  $M$  doit être un entier puissance de 2. Cependant  $N$  peut, en théorie, prendre n'importe quelle valeur inférieure à  $M$ . Pour valider l'impact de la procédure,  $N = M/2$  est choisi.

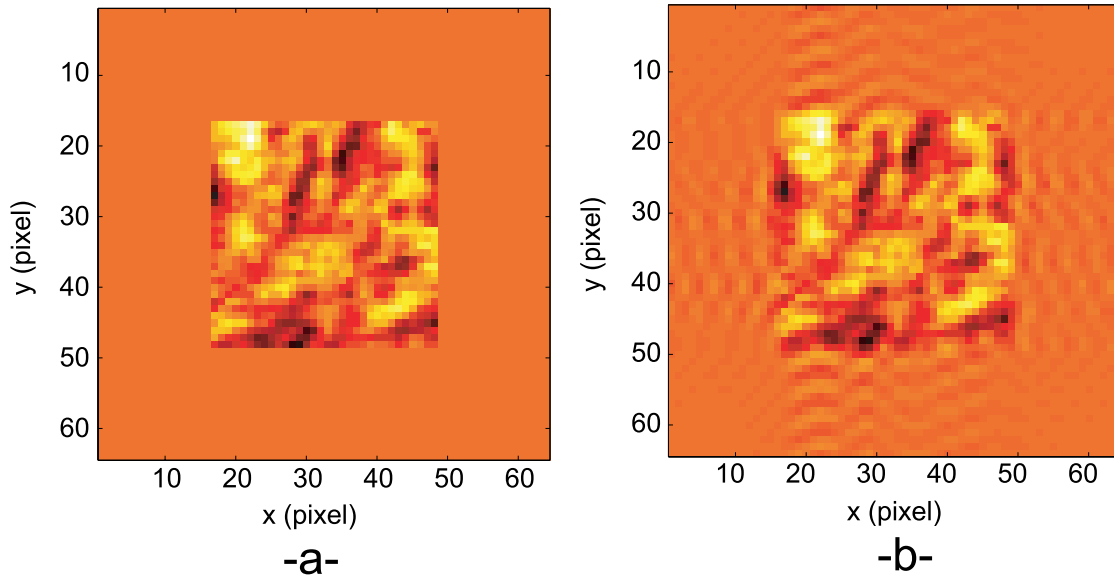


Figure 3.6 – (a) ZE originale :  $h^{(0)}(x, y) = f(x, y)$  avant le *neutral padding* ( $N = 32$  pixels), (b) *neutral padding* sur la ZE : résultat après 10 itérations ( $M = 64$  pixels).

Pour l'adaptation aux méthodes de détermination de l'anisotropie proposées, le *neutral padding* peut être utilisé de manière équivalente sur l'image analysée originale ou sur l'image traitée au préalable en utilisant le filtre d'intégration.

## 3.3 Application sur différentes images

### 3.3.1 Les empreintes digitales

Les méthodes présentées précédemment ont été utilisées sur différentes images. La première à être testée concerne une image d'empreintes digitales pour laquelle les stries forment la texture à identifier. La difficulté vient alors de l'interruption de ces sillons, ainsi que de la rotation de l'anisotropie au niveau du centre. La taille de l'image est de  $240 \times 240$  pixels divisée en ZE de  $32 \times 32$  pixels. Le décalage entre deux ZE consécutives est de 16 pixels, si bien que les ZE se chevauchent entre elles de 16 pixels.

Les résultats sont présentés en figure 3.7 : ils correspondent aux deux orientations des méthodes polaires, à la méthode par autocorrélation et à l'approche utilisant le tenseur d'anisotropie. Le rapport entre les deux rayons de l'anneau formé pour les méthodes polaires est de 2, et l'incrément d'angle utilisé est de  $2^\circ$ . Pour cette méthode, les résultats obtenus en utilisant les directions radiale et orthoradiale sont très proches, et comparables à ceux obtenus par les deux autres méthodes en dehors des sites localisés près des bords où le signal est faible. Cependant pour ces ZE, les méthodes par autocorrélation ou du tenseur d'anisotropie semblent donner des résultats plus satisfaisants. La différence significative entre ces méthodes concerne le temps de calcul qui est beaucoup plus faible (d'environ 100 fois) pour les techniques par autocorrélation et tenseur d'anisotropie que pour les méthodes polaires. Comme mentionné précédemment, ceci s'explique par l'étape de représentation du rectangle en coordonnées polaires qui est l'étape de l'algorithme nécessitant le plus de temps.

### 3.3.2 Une image non régulière : le bois

Si le caractère non régulier d'une image est considéré, la méthode du tenseur d'anisotropie peut être comparée à la même méthode couplée au filtre d'intégration. La photographie d'une coupe de bois représente un bon exemple d'image non régulière. L'alternance d'anneaux et de nœuds peut être une application complexe pour la méthode originale. La figure 3.8(gauche) montre les résultats de l'algorithme en utilisant la méthode du tenseur d'anisotropie, la figure 3.8(milieu) les résultats lorsque le filtre d'intégration est ajouté et la figure 3.8(droite) les résultats lorsque le *neutral padding* est utilisé après le filtre d'intégration. Il y a de légères différences entre les résultats obtenus bien que chacune des méthodes fournisse une estimation fiable même si l'orientation exacte reste inconnue. Pour la figure 3.8(gauche) les orientations correspondent globalement aux angles estimés visuellement à part pour la partie située à droite du cœur de la coupe. Pour la figure 3.8(milieu), le cœur de la coupe est mieux résolu et pour la figure 3.8(droite), les orientations du cœur de la coupe et du nœud ont une meilleure concordance avec les angles estimés visuellement.

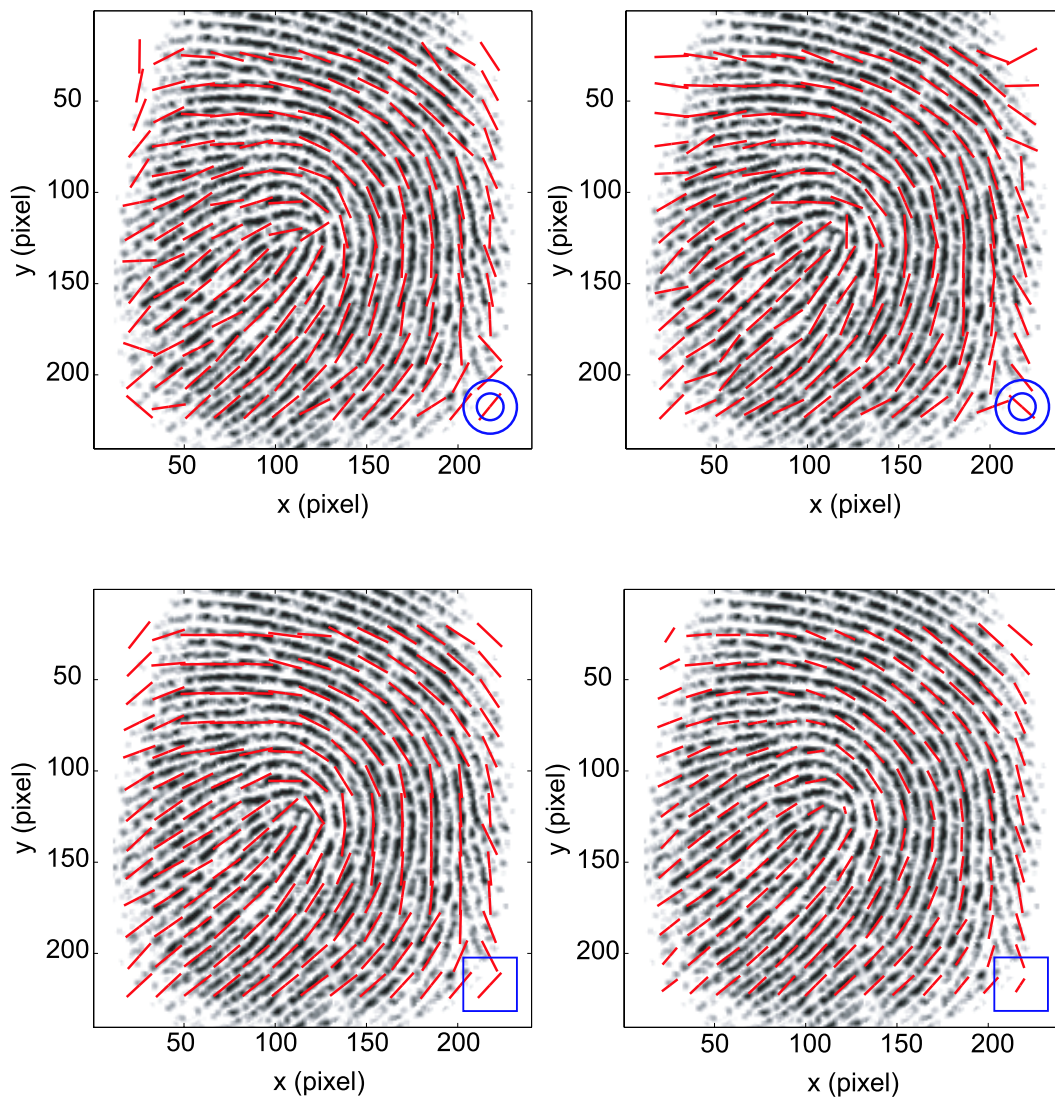


Figure 3.7 – (haut gauche) Méthode radiale polaire  $L_2$  (rayon externe = 32 pixels, rapport de rayons = 2, incrément d'angle =  $2^\circ$ ) temps de calcul : 36.9 s. (haut droite) Méthode orthoradiale polaire  $L_2$  (rayon externe = 32 pixels, rapport de rayons = 2, incrément d'angle =  $2^\circ$ ) temps de calcul : 33.4 s. (bas gauche) Méthode par autocorrélation (seuil  $C(r)/C(0)=0.8$ ) temps de calcul : 1.10 s. (bas droite) Méthode du tenseur d'anisotropie : temps de calcul : 0.33 s.

### 3.3.3 Cercles concentriques

Pour tester les différentes méthodes en termes de performances réelles, il faut un exemple pour lequel l'orientation exacte est connue en chaque point. Pour cela une image formée de cercles concentriques est créée et représente une référence absolue.



### 3. Étude de l'anisotropie locale d'un matériau enchevêtré

---

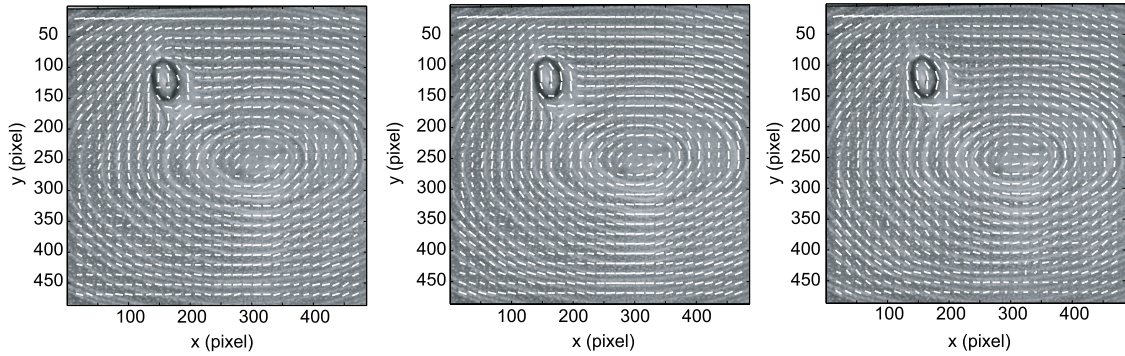


Figure 3.8 – Comparaison des résultats pour une planche de bois (taille des ZE =  $32 \times 32$  pixels, distance entre le centre de deux ZE = 16 pixels) (gauche) carte d'orientation originale obtenue avec la méthode du tenseur d'anisotropie, (milieu) filtre d'intégration ajouté à la méthode du tenseur d'anisotropie, (droite) *neutral padding* ajouté au filtre d'intégration.

La taille de l'image est de  $512 \times 512$  pixels, et celle des ZE de  $32 \times 32$  pixels. Ces zones sont centrées sur une grille régulière carrée et la distance entre le centre de deux ZE consécutives est de 16 pixels.

La figure 3.9, pour laquelle seul un quart de l'image originale est représenté, montre les orientations obtenues en utilisant les méthodes polaires, la technique d'autocorrélation et l'approche du tenseur d'anisotropie. Une première inspection visuelle donne une évaluation grossière de l'adéquation entre orientations réelles et estimations. Pour les quatre méthodes, les points de calculs sont les mêmes. La taille de la zone d'étude est représentée dans le coin en bas à droite de chacune des images. Pour les deux méthodes polaires, les résultats sont similaires et sont en adéquation avec l'orientation réelle. Le champ directionnel déterminé en utilisant le tenseur d'anisotropie correspond très précisément aux résultats attendus. En ce qui concerne les résultats fournis par l'approche par autocorrélation, les orientations déterminées ne correspondent pas aux cercles. Ceci s'explique par la forme de la fonction d'autocorrélation pour cette image particulière. Lorsque l'autocorrélation est tronquée à un niveau donné, il faut que le domaine résultant ne soit formé que d'une seule courbe fermée. Sur la figure 3.10, la fonction d'autocorrélation et sa projection après troncature sont représentées. Pour cette image, la projection est formée de plusieurs domaines non connectés entre eux. C'est pourquoi, la méthode par autocorrélation n'est pas adaptée à cette image particulière. On peut alors facilement envisager de modifier légèrement la méthode en vue d'extraire seulement le domaine issu de la troncature et centré sur zéro. Cependant cette modification augmenterait le temps de calcul et éliminerait cette méthode.

La figure 3.11 montre les différences entre une orientation déterminée et imposée

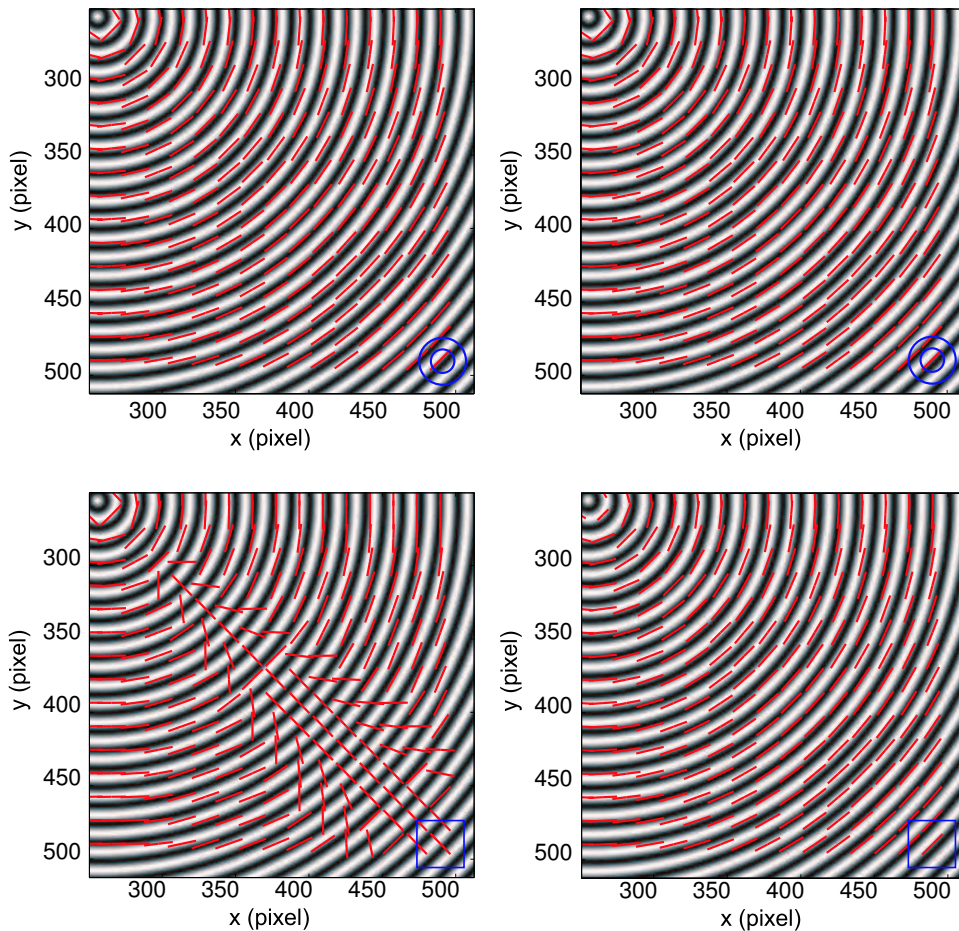


Figure 3.9 – (haut gauche) Méthode  $L_2$  polaire radiale (rayon externe = 32 pixels, rapport de rayons = 2, incrément d'angle =  $2^\circ$ ), temps de calcul : 178 s, (haut droite) Méthode  $L_2$  polaire orthoradiale (rayon externe = 32 pixels, rapport de rayons = 2, incrément d'angle =  $2^\circ$ ), temps de calcul : 184 s, (bas gauche) Méthode par autocorrélation (seuil  $C(r)/C(0) = 0.8$ ), temps de calcul : 4.85 s, (bas droite) Méthode du tenseur d'anisotropie complétée du filtre d'intégration et du *neutral padding*, temps de calcul : 53.4 s.

en fonction de l'angle pour les trois méthodes restantes. L'angle  $0^\circ$  correspond à une orientation horizontale. En ce qui concerne la méthode du tenseur d'anisotropie, complétée du filtre d'intégration et du *neutral padding*, les différences avec l'orientation réelle sont faibles avec une erreur RMS égale à  $0.35^\circ$ . Il faut souligner également que l'utilisation du filtre d'intégration et du *neutral padding* permet de gagner un ordre de grandeur en termes d'erreur par rapport à la méthode du tenseur d'anisotropie toute seule. Les résultats obtenus en utilisant les méthodes polaires (radiale et orthoradiale) sont celles qui fournissent les meilleurs résultats. L'erreur RMS est

### 3. Étude de l'anisotropie locale d'un matériau enchevêtré

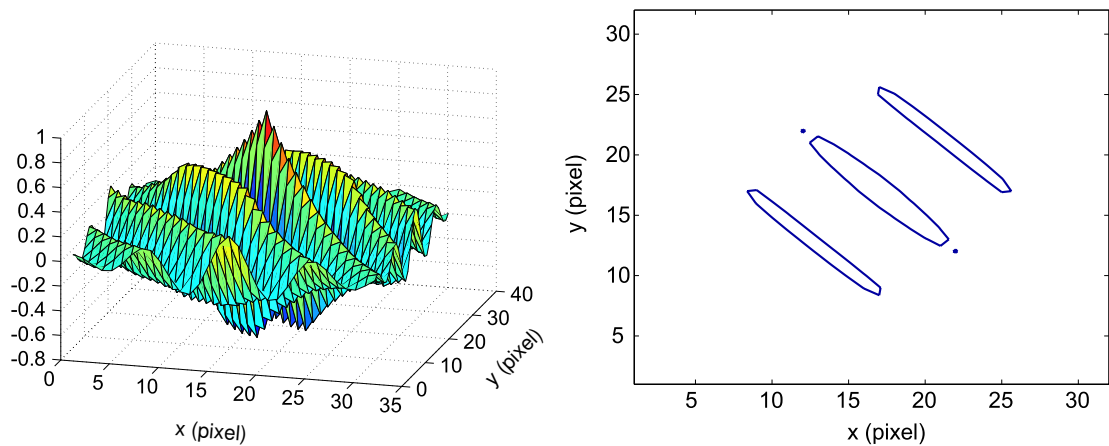


Figure 3.10 – (gauche) Fonction d'autocorrélation d'une zone d'étude. (droite) Projection de la fonction d'autocorrélation tronquée.

alors égale à  $0.053^\circ$  pour la méthode radiale et de  $0.046^\circ$  pour la méthode orthoradiale avec un temps de calcul de 178 s et 184 s respectivement. Cet exemple montre qu'il n'existe pas de méthode supplantant les autres en termes d'orientations estimées dans la mesure où pour les trois méthodes, l'erreur RMS est inférieure à  $1^\circ$ , mais le temps de calcul semble être plus faible (de 3 à 4 fois) pour la méthode du tenseur d'anisotropie complétée du filtre d'intégration et du *neutral padding*.

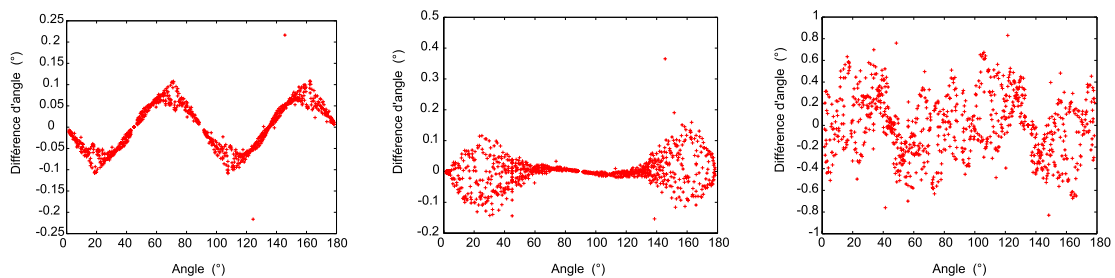


Figure 3.11 – Différences entre les orientations calculées et réelles pour la méthode polaire radiale (gauche), pour la méthode polaire orthoradiale (milieu) et pour la méthode du tenseur d'anisotropie complétée du filtre d'intégration et du *neutral padding* (droite).

La dernière étape pour valider la méthode proposée pour évaluer l'anisotropie locale d'une image est de quantifier la robustesse de la méthode par rapport au bruit d'une image à analyser. C'est une propriété importante dans la mesure où la majorité des images testées seront bruitées. Sur l'image des cercles concentriques pour laquelle l'orientation est connue en chaque point, seules les méthodes polaires et la

méthode d'anisotropie donnent des résultats satisfaisants. Par ailleurs la méthode complète du tenseur d'anisotropie, *i.e.*, avec le filtre d'intégration et le *neutral padding*, est celle qui est la moins sensible au bruit (ceci sera montré par la suite sur l'image de laine de verre crêpée 3.13). La sensibilité au bruit sera testée en utilisant cette approche particulière. L'image de référence est donc celle des cercles concentriques étant donné que l'orientation exacte est connue en chaque point et que la sensibilité au bruit peut être évaluée.

À partir de l'image de référence, un bruit blanc aléatoire gaussien est ajouté aux niveaux de gris, et son amplitude est quantifié par l'écart-type en niveaux de gris du bruit. Pour obtenir une amplitude relative du bruit, l'écart-type est adimensionné en utilisant l'écart-type sur les niveaux de gris de l'image de départ. La figure 3.12(gauche) illustre l'effet du bruit : l'image est scindée en deux avec une partie exempte de bruit sur la moitié gauche de l'image et une partie comportant un bruit d'amplitude 35.5% sur la moitié droite de l'image. Cette figure est uniquement présentée dans le but d'illustrer l'effet du bruit sur une image. En effet, pour tester la sensibilité de la méthode par rapport au bruit, des images où le bruit est uniformément réparti ont été utilisées. Pour le test, la taille des ZE est de 32 pixels et le décalage entre deux centres de ZE consécutives est de 16 pixels pour utiliser les mêmes valeurs que précédemment. Pour différents niveaux de bruit jusqu'à 35.5%, l'erreur moyenne de l'algorithme par rapport à l'orientation exacte est calculée et les résultats sont présentés sur la figure 3.12(droite). Pour un niveau de bruit faible (e.g., 2%, le niveau de bruit caractéristique d'une acquisition d'une image numérique), une erreur inférieure à 1° est obtenue. L'erreur augmente ensuite lorsque l'amplitude du bruit augmente mais reste bien inférieure à 5° pour une amplitude de bruit de 20%. Ces résultats démontrent la robustesse de l'approche proposée, *i.e.*, la méthode du tenseur d'anisotropie avec le filtre d'intégration et le *neutral padding*.

### 3.3.4 Laine minérale crêpée

Cette méthode peut également être testée sur une application plus complexe, à savoir la détermination d'une texture réelle de laine de verre crêpée. Pour de telles images la texture est très fine, avec une partition difficile entre le bruit, et le signal porteur de l'information utile. De plus, si l'anisotropie est clairement marquée, la longueur de cohérence est assez courte, et le motif présente des circonvolutions. Sur de telles images, les méthodes classiques basées sur le gradient sont inadaptées. Une telle texture est donc un cas très difficile pour les méthodes étudiées.

La figure 3.13(gauche) montre le résultat de la méthode polaire orthoradiale et la figure 3.13(milieu), les résultats du tenseur d'anisotropie complété du filtre d'intégration pour traiter le caractère non régulier de l'image analysée et du *neutral padding* particulièrement adapté à la détection des textures les plus fines. Si une mesure absolue de la qualité des méthodes ne pas être obtenue sur des images réelles, on

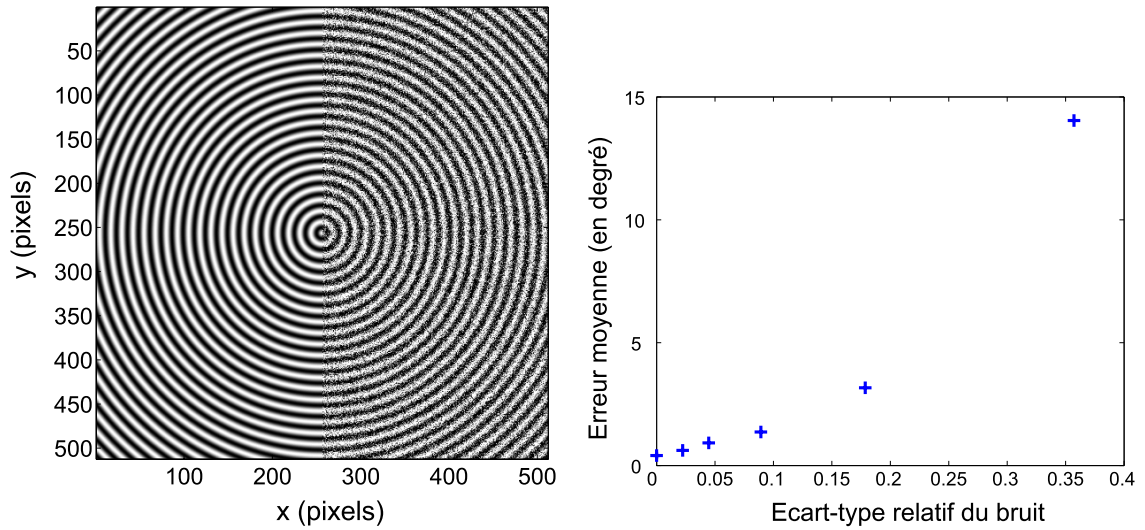


Figure 3.12 – Robustesse de la méthode par rapport au bruit : (gauche) Différences entre une image exempte de bruit (moitié gauche) et une image bruitée avec un bruit d'amplitude 35.5 % (moitié droite). (droite) Erreur moyenne de l'estimation d'angle en degré en fonction de l'écart-type relatif de bruit.

peut cependant proposer une comparaison quantitative entre les deux dernières méthodes. En outre, cette comparaison doit pouvoir s'accommoder de la  $\pi$ -périodicité de la détermination des angles. Pour une ZE donnée, centrée en  $\boldsymbol{x}$ , la différence d'angles déterminées par les deux méthodes (la méthode polaire orthoradiale et la méthode complète du tenseur d'anisotropie) est calculée. La figure 3.13(droite) représente le carré de l'amplitude d'anisotropie obtenue par méthode complète du tenseur d'anisotropie en fonction de la différence d'angles entre les deux méthodes. Le fait que les valeurs soient relativement étendues est une simple traduction de la difficulté à estimer les orientations. On peut cependant noter que des différences d'angles importantes sont obtenues plus fréquemment lorsque l'amplitude d'anisotropie est faible (*i.e.*, pour une faible anisotropie).

### 3.3.5 Mesure d'objectivité

Pour un cas difficile pour la méthode, tel que l'image 3.5(a) de laine de verre crêpée, l'objectivité de la méthode a été testée, *i.e.*, le fait que l'orientation soit indépendante de l'amplitude/résolution de l'image analysée. À partir d'une image de laine de verre, dont la taille originale est de  $512 \times 512$  pixels, la résolution de l'image est artificiellement dégradée, *i.e.*, cette opération aboutit à la construction d'images à différentes échelles. L'échelle no. 0 correspond à l'image considérée. À partir de l'image no. 1, chaque transition est caractérisée par la définition de super-pixels. Ces derniers sont définis de manière récurrente d'une échelle à la suivante en moyennant

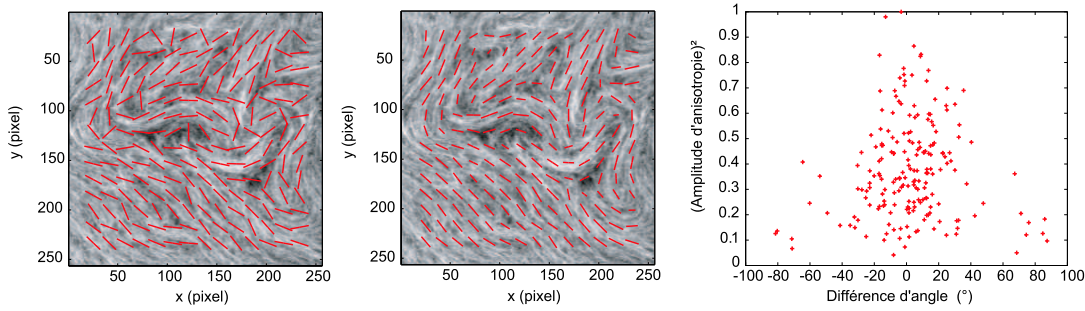


Figure 3.13 – Résultats sur une image de laine de verre crêpée : (gauche) pour la méthode polaire orthoradiale (rayon externe = 32 pixels, rapport de rayons = 2, incrément d’angle =  $2^\circ$ ), distance entre deux centres de ZE = 16 pixels), (milieu) pour la méthode du tenseur d’anisotropie (taille de la ZE =  $32 \times 32$  pixels, distance entre deux centres de ZE = 16 pixels), (droite) Carré de l’amplitude de l’anisotropie déterminée en utilisant le tenseur d’anisotropie en fonction de la différence d’angles entre la méthode polaire et celle du tenseur d’anisotropie.

les niveaux de gris de  $2 \times 2$  pixels voisins. Cette procédure est répétée jusqu’à ce que la taille minimum de la sous-image soit égale à  $128 \times 128$  pixels. La surface de la ZE est divisée par 4 d’une échelle par rapport à la suivante. La taille de l’image réelle est de  $512 \times 512$  pixels et la taille d’une ZE est de  $32 \times 32$  pixels. La taille de l’image à l’échelle no. 1 est de  $256 \times 256$  pixels avec des ZE de  $16 \times 16$  pixels. Pour la dernière échelle, correspondant à une image  $128 \times 128$  pixels, la taille d’une ZE est de  $8 \times 8$  pixels.

La technique choisie pour cette mesure d’objectivité est la méthode complète du tenseur d’anisotropie. La figure 3.14 montre les résultats pour les trois échelles analysées. Les trois cartes correspondent au carré du cosinus de la valeur de l’angle pour chaque ZE. Les résultats de l’échelle no. 0 sont donnés sur la figure 3.14(gauche), ceux de l’échelle no. 1 sur la figure 3.14(milieu) et ceux de l’échelle no. 2 sur la figure 3.14(droite). Une excellente correspondance est observée pour les deux premières cartes, malgré le fait que 16 pixels soit une dimension de ZE très faible. À l’échelle no. 2 l’écart avec les résultats précédents est plus important. Il faut cependant souligner que la taille de ZE correspondante de 8 pixels est extrêmement faible et introduit une sensibilité accentuée aux axes préférentiels ( $0^\circ$  et  $90^\circ$ ).

### 3.3.6 Carte spatio-temporelle

Une carte spatio-temporelle, comme celles rencontrées au chapitre 2, est également texturée. Déterminer le champ des vitesses d’une telle image revient alors à déterminer l’orientation locale de différentes zones de l’image, l’orientation dominante représentant alors la vitesse recherchée. La méthode complète du tenseur

### 3. Étude de l'anisotropie locale d'un matériau enchevêtré

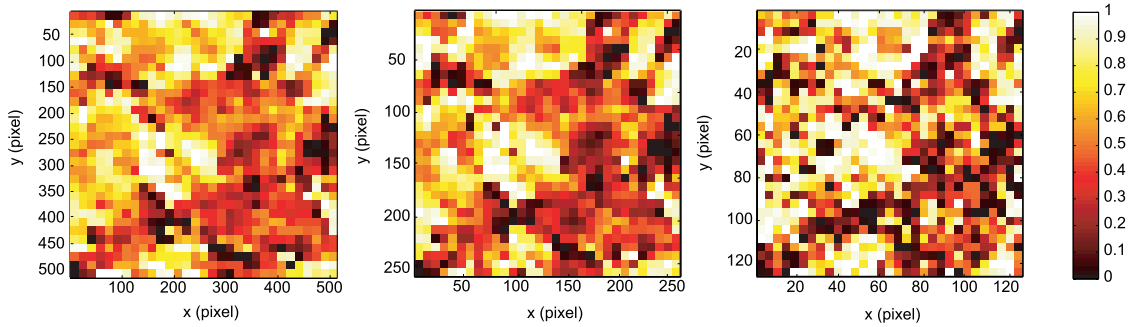
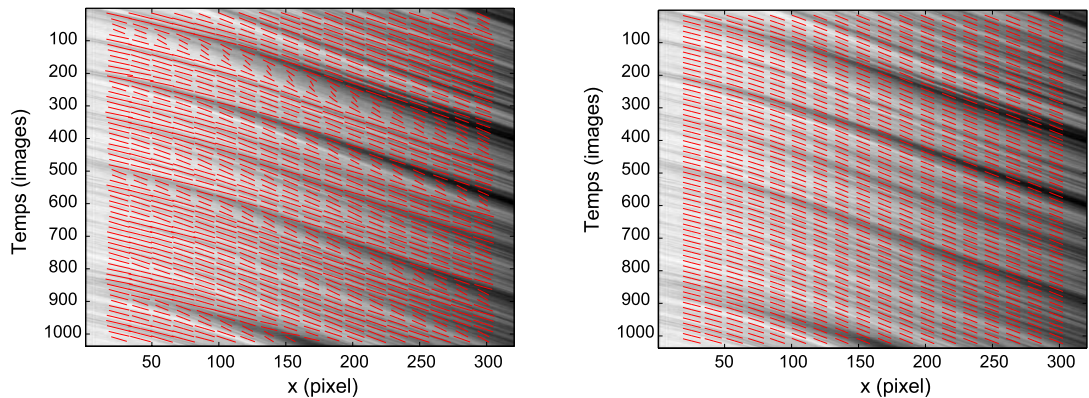


Figure 3.14 – Carré du cosinus de la carte d'orientation pour (gauche) une image 3.5(a) de laine de verre de  $512 \times 512$  pixels et une ZE de  $32 \times 32$  pixels, (milieu) une image réduite de  $256 \times 256$  pixels et une ZE de  $16 \times 16$  pixels, (droite) une image réduite de  $128 \times 128$  pixels et une ZE de  $8 \times 8$  pixels.

d'anisotropie a été utilisée sur une carte spatio-temporelle formée à partir d'un film de crêpage. La figure 3.15(a) présente les résultats obtenus en termes d'orientation, superposées à la carte de départ. La résolution spatiale obtenue est alors moins bonne que celle atteinte en utilisant l'une des approches présentées au chapitre 2. Cependant, l'hypothèse de stationnarité n'est plus nécessaire ici, et les champs déterminés deviennent des fonctions du temps. On peut cependant revenir à une approche stationnaire en moyennant les orientations déterminées par rapport au temps. La figure 3.15(b) représente alors les résultats obtenus.



(a) Orientations superposées à la carte spatio-temporelle

(b) Orientations moyennées en temps superposées à la carte spatio-temporelle

Figure 3.15 – Étude locale d'anisotropie utilisée sur une carte spatio-temporelle, paramètres de calcul : taille de ZE =  $32 \times 32$  pixels, décalage entre deux ZE = 16 pixels.

On peut alors comparer les vitesses obtenues sur ce film en utilisant l'outil d'ana-

lyse locale de l'anisotropie et l'approche spatio-temporelle développée au chapitre précédent. Disposant des orientations moyennées en temps, la vitesse s'écrit comme l'inverse de la tangente des angles correspondant aux orientations. Par ailleurs, étant donné que l'on travaille ici sur des vitesses, l'approche travaillant directement sur la carte brute sera utilisée. De même, étant donné que pour cette approche, les résultats obtenus en utilisant les trois décompositions étudiées sont proches, nous nous limiterons au cas d'une décomposition linéaire. Le nombre d'éléments utilisés correspond alors au nombre de Zones d'Étude utilisées pour l'analyse locale d'anisotropie. L'évolution des vitesses en fonction de la coordonnée spatiale  $x$  est représentée sur la figure 3.16. Le champ des vitesses obtenues est très proche avec un erreur RMS de 1.4 %. L'outil d'analyse locale d'anisotropie peut aussi être utilisé pour déterminer le champ des vitesses (stationnaires) inhomogènes, mais la résolution spatiale atteinte sera inférieure à celle obtenue en utilisant les outils développés au chapitre 2.

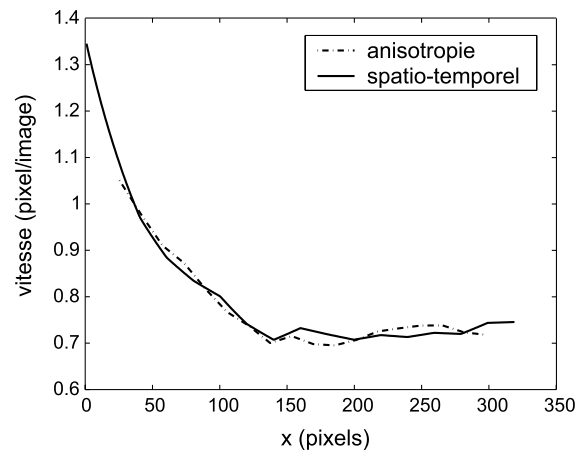


Figure 3.16 – Comparaison des vitesses en pixel/image obtenue en utilisant l'approche spatio-temporelle travaillant directement sur l'image brute, et l'outil d'analyse locale de l'anisotropie.

### 3.4 Conclusion

Trois méthodes pour évaluer l'anisotropie locale d'une texture ont été présentées et testées sur différentes images de texture complexe. Les résultats de ces méthodes ont alors pu être comparés en termes de précision et de temps de calcul :

- En termes de précision dans la détermination de l'orientation, pour les images dont l'orientation réelle est exactement connue en chaque point, la méthode par autocorrélation doit être légèrement modifiée afin de donner une estimation correcte. Les autres méthodes fournissent de bons résultats, avec des performances légèrement meilleures pour les méthodes polaires. Sur les exemples où



la texture est plus complexe, comme des images de laine de verre, les méthodes polaires, et la méthode complète du tenseur d'anisotropie donnent des résultats plutôt différents pour la même taille de ZE, mais les différences d'angle les plus importantes correspondent aux zones où l'anisotropie n'est pas clairement marquée. Par ailleurs, la méthode complète du tenseur d'anisotropie peut détecter des textures très fines.

- En termes de sensibilité au bruit, la méthode complète du tenseur d'anisotropie présente une très bonne robustesse. En effet, l'erreur reste bien inférieure à  $5^\circ$  pour une amplitude de bruit de 20%. Cette méthode peut donc être utilisée pour analyser les images acquises à l'aide d'une caméra CCD dont le niveau de bruit est de l'ordre de 2%.
- L'objectivité des résultats a également été démontrée : la méthode complète du tenseur d'anisotropie permet d'étudier des images dont la résolution est très faible en utilisant des tailles de zone d'étude très petites (jusqu'à 16 pixels).
- En termes de temps de calcul, les performances des méthodes par autocorrélation et du tenseur d'anisotropie sont comparables et sont largement plus rapides que les méthodes polaires.

Finalement, la méthode complète du tenseur d'anisotropie est plus performante que les autres méthodes dans le cas d'images réelles. C'est cette méthode qui sera utilisée par la suite. Il faut remarquer toutefois que dans le cas d'images régulières, cette méthode (sans le filtre d'intégration ni le *neutral padding*) se réduit à celle introduite par Bigün *et al.* [33, 34]. L'extension développée pour traiter le cas des images non régulières permet d'étudier les cas rencontrés par la suite, sans introduire de paramètre libre. De plus l'ajout du *neutral padding* permet l'analyse de textures très fines en utilisant de petites tailles de zone d'étude et fournit une évaluation de l'anisotropie fiable indépendamment de la résolution de l'image analysée. Ceci a été démontré par plusieurs études non discutées ici.

Grâce à l'outil développé dans ce chapitre, on a accès à l'anisotropie locale d'une image analysée, ainsi qu'à son amplitude d'anisotropie. On peut donc envisager d'étudier plusieurs images de laines minérales, fabriquées en utilisant des paramètres de fabrication différents. On a déjà remarqué que ces paramètres avaient une influence directe sur la texture du produit fini, et donc sur ses performances mécaniques. Connaissant l'orientation locale de chaque zone d'une éprouvette de laine minérale, on se propose par la suite de prendre en compte cette orientation ainsi que son amplitude afin de modéliser la réponse élastique de l'éprouvette associée à une sollicitation de compression. Cette modélisation sera développée au chapitre 5.

# Chapitre 4

## Essais mécaniques sur matériau enchevêtré

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Les essais mécaniques normalisés . . . . .</b>	<b>86</b>
4.1.1	La corrélation d'images numériques . . . . .	86
4.1.2	Essais sur matériaux enchevêtrés . . . . .	90
4.1.3	Résultats des essais mécaniques . . . . .	91
4.1.4	Liens avec l'anisotropie locale . . . . .	95
<b>4.2</b>	<b>Caractérisation de matériaux isotropes transverses . . . . .</b>	<b>98</b>
4.2.1	La problématique . . . . .	98
4.2.2	Les essais réalisés . . . . .	99
4.2.3	Les résultats obtenus . . . . .	100
<b>4.3</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>105</b>

---

Dans les chapitres précédents, des outils pour étudier la fabrication et la texture du matériau ont été présentés. Ces outils sont basés sur l'analyse de films ou d'images. L'analyse des films (développée au chapitre 2) permet de quantifier l'influence des paramètres de réglages du procédé de fabrication sur la texture du produit fini. L'analyse d'anisotropie (développée au chapitre 3) permet, quant à elle, d'étudier la texture du produit fini. Il semble par ailleurs que la texture du produit fini soit intimement liée à ses propriétés mécaniques (chapitre 1). Étudier les performances mécaniques du produit en fonction de sa texture est l'une des finalités de l'étude.

Les propriétés mécaniques des produits en laine minérale sont définies en utilisant les normes [8, 9] : elles correspondent à la résistance à la compression et à la résistance à l'arrachement. Ces deux propriétés seront développées par la suite. On se propose, dans ce chapitre, de présenter les moyens mis en œuvre pour réaliser les essais mécaniques sur laine minérale. Les essais effectués correspondent à ceux imposés par la norme, ainsi qu'à des essais de « cisaillement-compression » et le moyen de mesure est une technique de corrélation d'images numériques. Les dispositifs expérimentaux (essais et moyens de mesure) seront présentés dans un premier temps avant de développer les résultats obtenus.

### 4.1 Les essais mécaniques normalisés

Différents essais mécaniques ont été réalisés pour étudier l'influence de la texture d'un produit sur ces propriétés mécaniques. La laine minérale étant un matériau souple, les techniques de mesures extensométriques classiques (jauges de déformation, extensomètre mécanique) sont inadaptées car elles peuvent perturber la réponse du matériau. On utilise alors des moyens optiques de mesure des déformations. Pour les essais réalisés, une technique de corrélation d'images numériques (CIN) a été utilisée. Elle permet par ailleurs d'atteindre des niveaux de déformation supérieurs à quelques pour-cents. Avant de présenter les essais réalisés, la méthode de mesure est résumée.

#### 4.1.1 La corrélation d'images numériques

Les techniques de mesure sans contact [40] et donc non perturbatrices ont un large champ d'application dans le domaine de la mécanique des matériaux et des structures [41]. Au cours d'essais mécaniques, les champs de déplacements mesurés peuvent faire apparaître, selon la taille de la région de l'image analysée, des hétérogénéités de déformation à la surface de l'éprouvette. Ces dernières représentent les prémices éventuelles d'une localisation de la déformation. L'apparition et le suivi de fissures peuvent également être analysés par ces techniques [42, 43]. Les méthodes optiques fournissant une évaluation locale des champs cinématiques, il est possible

de suivre les déformations locales et/ou déplacements tout au long de l'essai et donc d'identifier la localisation de la déformation dès son apparition [44].

Différentes techniques peuvent être utilisées pour déterminer les champs de déplacement et de déformation. Lorsqu'une méthode expérimentale met en œuvre des techniques optiques (*i.e.*, photo) pour résoudre les problèmes mécaniques, on parle de photomécanique [45, 40]. La photoélasticité et les méthodes de moiré sont deux des premières méthodes développées depuis la première moitié du vingtième siècle. La photoélasticité [46, 47, 48, 49] est toujours très utilisée dans l'industrie. Les méthodes de moiré sont des techniques versatiles qui fournissent des champs de déplacement aussi bien que des mesures topographiques [50, 51, 52]. Le développement des lasers, au début des années 1960, a permis l'émergence de nouvelles techniques. La première approche est l'interférométrie holographique [53, 54] qui peut être appliquée à un grand nombre de problèmes industriels [55]. Un sous-produit est la technique de "speckle" (ou tavelure) qui regroupe l'interférométrie de speckle [56, 57, 58] et la photographie de speckle [13, 14, 59]. Lorsque cette dernière est utilisée en lumière blanche, elle est appelée corrélation d'images numériques (CIN) [15, 16, 17]. Proche de la technique de vélocimétrie par imagerie de particules [10, 12, 11] très répandue en mécanique des fluides, son principe est basé sur l'appariement d'images en maximisant l'intercorrélation. En termes de préparation d'éprouvettes, la CIN s'adapte généralement bien à l'environnement d'un laboratoire d'essais mécaniques. On peut noter que des techniques de stéréocorrélation sont également en développement [60, 61]. Dans le cas présent, les déplacements hors plan restent faibles si bien que ces corrections sont inutiles.

La technique de CIN est facile à mettre en œuvre et représente un outil efficace dont la résolution peut être étendue bien en dessous du pixel (*i.e.*,  $10^{-2}$ pixel voire en dessous dans certains cas). Lorsque le déplacement entre deux images utilisées pour le calcul est trop important, le résultat donné par les méthodes classiques peut donner lieu à des erreurs significatives. Dans ce cas, l'utilisation d'une approche multi-échelle de la corrélation d'images est possible [18]. Elle autorise de grands déplacements entre les images tout en garantissant de très bonnes robustesse et résolution. Cette méthode, appliquée d'abord à des essais de compression uniaxiale puis à des essais d'arrachement, permet d'atteindre des niveaux de déformation élevés avec une très bonne résolution, alors que la plupart des autres techniques de mesures de déformation ne seraient pas applicables ou donneraient des résultats erronés.

En pratique, on cherche à déterminer le champ de déplacement qui s'est produit entre deux instants pour lesquels une image a été acquise (figure 4.1). Le principe de la corrélation consiste à appairer deux zones des deux images afin d'en déduire le déplacement du centre de la zone. Le déplacement s'apparente alors à un décalage entre deux signaux bidimensionnels des intensités numérisées par une caméra CCD.

L'intercorrélation consiste alors à rechercher des vraisemblances entre deux signaux enregistrés à deux instants différents.

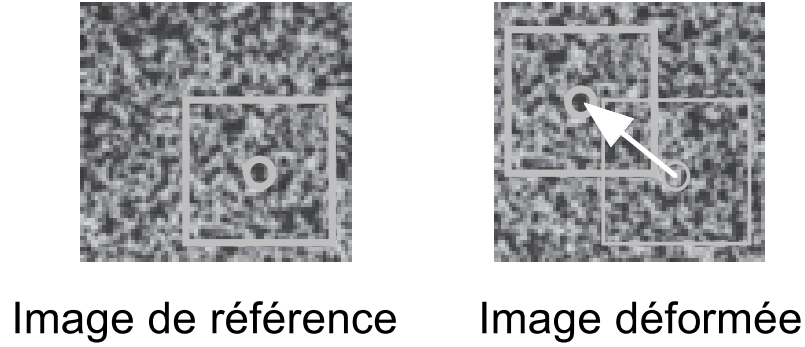


Figure 4.1 – Zone d'étude (ZE) sur les images de référence et « déformée ». Vecteur déplacement associé.

Deux images sont donc prises en compte pour le calcul, la première étant l'image de « référence », et la seconde l'image « déformée ». L'image de référence, schématisée sur la figure 4.2, est quadrillée par un ensemble de Zones d'Étude (ZE) qui forme la Région d'Étude (RE). Le but de la méthode de corrélation est d'apparier les ZE des deux images (figure 4.1). Ainsi une ZE est représentée par des fonctions  $g(\mathbf{x})$  qui sont des perturbations d'un signal décalé  $f(\mathbf{x} - \mathbf{u})$  par rapport à un signal de référence  $f(\mathbf{x})$

$$g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{u}) + b(\mathbf{x}) \quad (4.1)$$

où  $\mathbf{u}$  est le vecteur déplacement plan inconnu, supposé constant localement et  $b(\mathbf{x})$  un bruit aléatoire. Pour évaluer le déplacement  $\mathbf{u}$ , on minimise la norme de la différence entre  $f(\mathbf{x} - \mathbf{v})$  et  $g(\mathbf{x})$  par rapport à un déplacement test  $\mathbf{v}$

$$\min_{\mathbf{v}} (\|g(\cdot) - f(\cdot - \mathbf{v})\|^2). \quad (4.2)$$

Lorsque l'on choisit la norme quadratique habituelle  $\|f\|^2 = \iint |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$ , le problème de minimisation précédent est *équivalent* à maximiser la quantité  $h(\mathbf{v})$

$$h(\mathbf{v}) = (g \star f)(\mathbf{v}) \equiv \iint g(\mathbf{x}) f(\mathbf{x} - \mathbf{v}) d\mathbf{x}. \quad (4.3)$$

qui n'est rien d'autre que le produit d'intercorrélation des deux fonctions. De plus, lorsque le bruit est blanc, l'estimation obtenue est optimale. On remarquera la similitude avec certaines des méthodes développées dans les chapitres 2 et 3. Les paramètres d'un tel calcul sont alors la taille de la région d'étude, la sous-RE de taille  $2^P \times 2^Q$  pixels extraite de la RE de l'image de référence avec les plus grandes valeurs possibles de  $P$  et  $Q$  pour que celle-ci reste incluse dans la RE, la taille des

zones d'études, et le décalage  $\delta$  entre le centre de deux zones d'étude consécutives (figure 4.2).

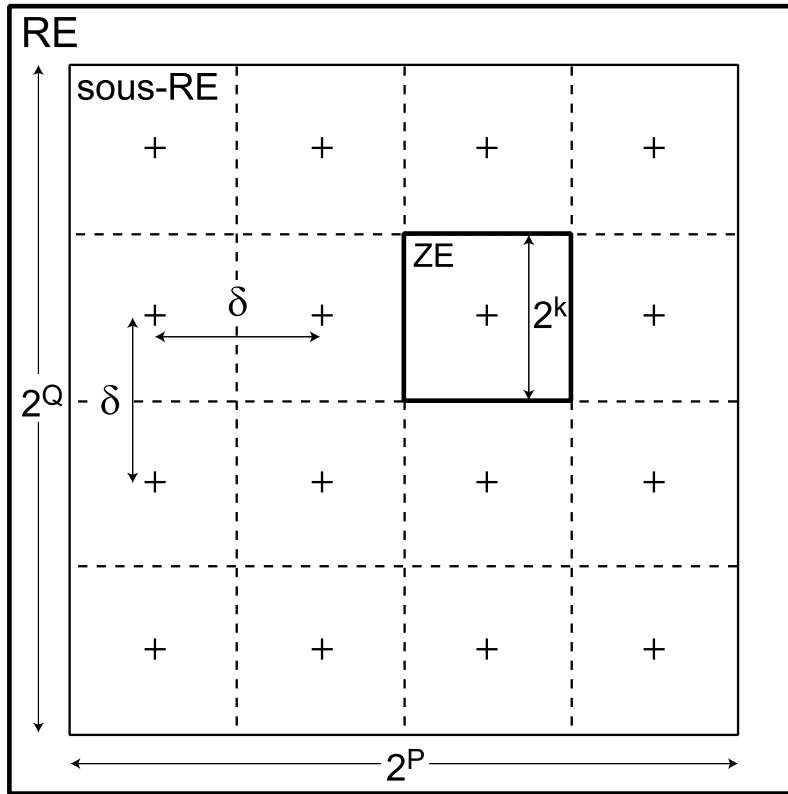


Figure 4.2 – Schéma de l'image de référence avec les paramètres de corrélation : taille de ZE =  $2^k$  pixels, décalage entre ZE  $\delta$ . Dans le cas particulier de la figure on a  $\delta = 2^k$  pixels.

Une approche conventionnelle du problème est bien adaptée dans le cas de petites perturbations. Si le déplacement est trop important une deuxième approche, dite multi-échelle [18] permet alors d'augmenter la déformation maximale mesurable et d'améliorer la résolution spatiale. L'image est alors redimensionnée et repositionnée à une échelle réduite pour augmenter la robustesse de la technique. Des déformations de l'ordre de  $\pm 30\%$  peuvent alors être mesurées entre deux images [18, 62]. En pratique, deux images peuvent être analysées ensemble ou encore une séquence d'images. Pour des images de laine minérale, l'incertitude moyenne obtenue sur un calcul est inférieure à  $1.4 \times 10^{-2}$  pixel en déplacement et à  $0.13\%$  en déformation pour des zones d'études de 32 pixels. L'approche multi-échelle ainsi que l'étude des performances de la technique sont développées dans l'annexe B. On notera alors qu'il existe un compromis à trouver entre incertitude et résolution spatiale (*i.e.*, taille de la ZE). Cette méthode de mesure a été utilisée pour analyser les essais réalisés sur

laine minérale.

### 4.1.2 Essais sur matériaux enchevêtrés

Les performances mécaniques d'un matériau isolant thermique destiné aux applications du bâtiment sont déterminées en utilisant les normes [8, 9] correspondant aux propriétés en compression et en arrachement respectivement. Pour les essais de compression, une éprouvette parallélépipédique est placée entre deux plateaux parallèles plan dont le côté est au moins égal à celui de l'éprouvette devant être soumise à l'essai (figure 4.3). Un déplacement est alors appliqué au plateau mobile, et l'effort de compression est mesuré. La valeur relevée et utilisée pour comparaison est la *contrainte en compression* à 10 % de *déformation relative* notée par la suite  $\sigma_{10}$  et exprimée en kPa. Des essais de compression sont réalisés sur des éprouvettes de laine de verre, crêpées ou non, et sur des éprouvettes de laine de roche (toujours crêpées).

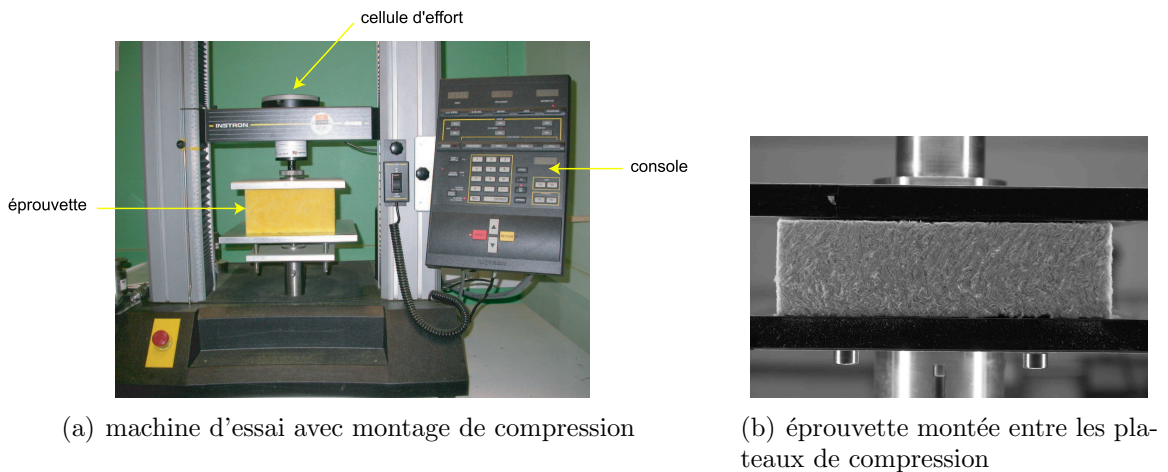


Figure 4.3 – Montage de compression utilisé pour tester des éprouvettes de laine minérale.

Les essais d'arrachement sont plus délicats à réaliser dans la mesure où l'on ne peut pas exercer de traction directement sur l'éprouvette. La solution est de coller l'éprouvette sur deux plaques de bois aggloméré de dimensions supérieures à celles de l'éprouvette à tester. L'éprouvette est insérée dans des mâchoires de traction comme le montre la figure 4.4. Un déplacement de traction est alors imposé à l'éprouvette testée et l'effort de traction est mesuré. L'essai est réalisé jusqu'à rupture de l'éprouvette. La valeur relevée et utilisée pour comparaison est la *contrainte maximale de traction* notée par la suite  $\sigma_{arr}$  et exprimée en kPa.

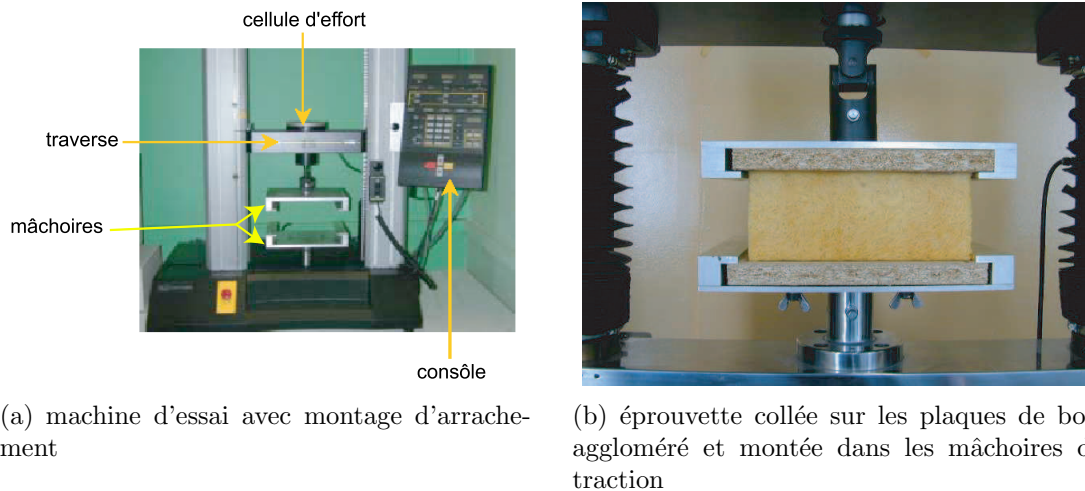


Figure 4.4 – Montage d'arrachement utilisé pour tester des éprouvettes de laine minérale.

Pour les deux types d'essais réalisés, compression et arrachement, les dimensions des éprouvettes utilisées étaient de  $200 \times 200 \times h$  mm<sup>3</sup>, avec  $h$ , la hauteur du produit, pouvant varier de 60 à 120 mm suivant les produits testés. Des photos de l'éprouvette, éclairée en lumière blanche ont été prises tout au long des essais afin de permettre le calcul de corrélation. Avec plusieurs éprouvettes de laine minérale testées, l'influence de la texture a pu être mise en évidence. La question sous-jacente étant alors : est-on capable de relier la texture d'un matériau enchevêtré à ses propriétés mécaniques ?

### 4.1.3 Résultats des essais mécaniques

Les essais réalisés ont tous été pilotés en déplacement (ou, de manière équivalente, la déformation globale  $\bar{\epsilon}$  est contrôlée ; elle est définie comme le rapport entre la variation de déplacement des deux plateaux et la hauteur initiale). Une compression uniaxiale (dans la direction 1, voir figure 4.5) jusqu'à  $-20$  % de déformation globale est appliquée sur des éprouvettes parallélépipédiques de dimension  $200 \times 200 \times 80$  mm<sup>3</sup>, 80 mm étant la hauteur de l'éprouvette. Des essais d'arrachement (dans la direction 1) jusqu'à environ 20 % de déformation globale sont également réalisés sur les mêmes éprouvettes collées. Pour ces essais, des images de l'éprouvette éclairée en lumière directe ont été prises pour différents niveaux de déformation globale (*i.e.*, avec des incréments de  $-0.5$  % en compression et  $+0.5$  % en arrachement). Des essais de compression et d'arrachement sont présentés en annexe B. On se propose ici d'étudier le résultat d'autres essais réalisés sur laine de verre crêpée.



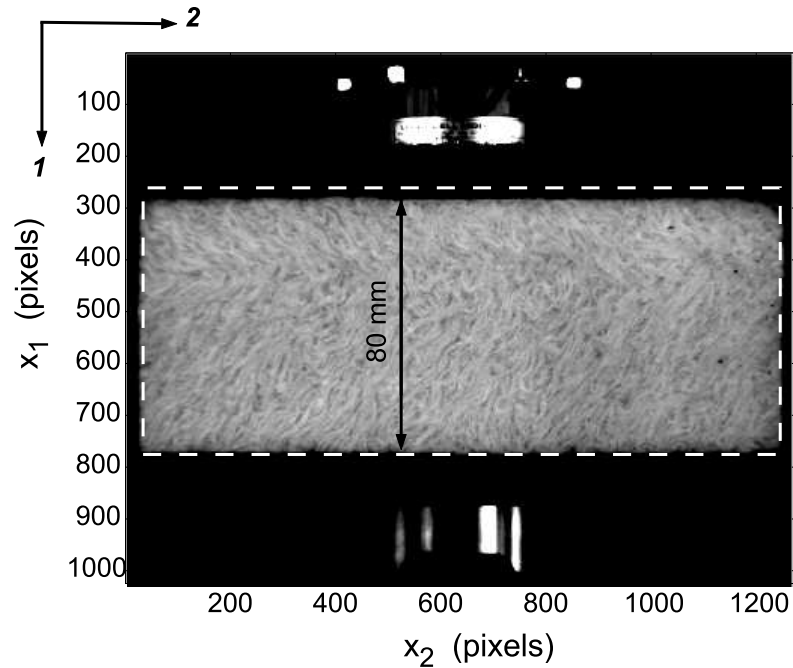


Figure 4.5 – Vue latérale d’un produit en laine de verre crêpée. Région d’étude (RE) pour la mesure des déplacements par corrélation d’images numériques.

#### 4.1.3.1 Essai de compression uniaxiale

Le résultat d’un essai de compression uniaxiale est présenté sur la figure 4.6. Le plateau « plastique » suggère l’existence de déformations localisées d’où l’intérêt d’étudier le champ de déformation du milieu avec une bonne résolution spatiale. Sur la figure 4.7 les champs de déformations sont représentés. Le calcul réalisé avec des ZE de 32 pixels (*i.e.*, résolution spatiale en déplacement) et avec un décalage de 16 pixels (*i.e.*, la résolution spatiale en déformation est égale à 32 pixels), correspond à la composante  $\epsilon_{11}$  du tenseur de déformation (nominale) globale pour différents niveaux de déformation nominale globale, à savoir,  $-5\%$  pour la figure 4.6(a),  $-7\%$  pour la figure 4.6(b),  $-10\%$  pour la figure 4.6(c), et  $-15\%$  pour la figure 4.6(d) respectivement. 1110 ZE sont considérées par niveau de déformation globale. Sur la figure 4.6, les points correspondants sont situés dans le domaine élastique, à la fin du domaine élastique, au début du plateau « plastique » et là où le plateau « plastique » est bien défini.

La figure 4.7 montre l’évolution du champ de déformation au cours de l’essai : les champs de déformation nominale dans la direction de sollicitation  $\epsilon_{11}$  cumulés depuis le début de l’essai. Au sein du domaine élastique (figures 4.7(a) et 4.7(b)), une première zone de localisation de la déformation peut être identifiée et semble traverser l’éprouvette de part en part. Pour  $-10\%$  de déformation globale (figure 4.7(c)), des

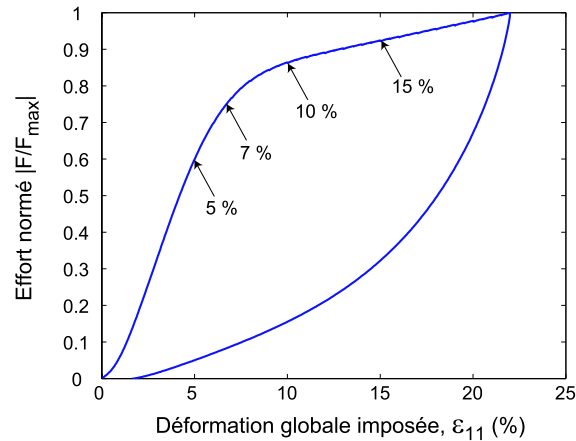


Figure 4.6 – Effort normé en fonction de la déformation globale imposée pour un essai de compression sur laine de verre crêpée.

hétérogénéités de déformation peuvent être observées et une zone bien démarquée apparaît et correspond à la première zone identifiée sur les figures 4.7(a) et 4.7(b). Pour  $-15\%$  de déformation globale, des fluctuations de déformation apparaissent autour des zones identifiées précédemment. À la fin de l'essai, la bande de localisation a une largeur d'environ 8 mm, *i.e.*, un dixième de la hauteur de l'éprouvette. Enfin, on remarque sur la figure 4.7 que les échelles de déformation utilisées ne correspondent pas à la déformation macroscopique relevée sur la courbe d'essai figure 4.6. En effet, pour ces essais de compression, la définition d'une référence en effort et en déplacement est arbitraire. C'est ce que l'on observe au début de la courbe d'essai figure 4.6 pour de très petites valeurs de la déformation globale. Les déformations à utiliser sont celles fournies par la méthode de corrélation d'images numériques. Si à partir de cette mesure de déformation, une déformation moyenne est calculée pour chacun des niveaux de déformation étudiés, on observe alors un décalage constant de 2 % entre les valeurs macroscopiques et les valeurs mesurées par corrélation d'images numériques. Ce décalage n'est en rien relié à la technique de mesure utilisée et est dû au type de matériau étudiée. Ceci suggère donc par la suite de travailler en utilisant les champs incrémentaux, c'est-à-dire les champs calculés par rapport à l'image précédemment acquise et d'avoir ainsi une image de référence flottante.

#### 4.1.3.2 Essai d'arrachement

Le résultat global de l'essai d'arrachement est présenté en figure 4.8. La fin du domaine élastique correspond à l'apparition d'une première fissure. La figure 4.9 montre les résultats obtenus par corrélation d'images. Le calcul, effectué sur des ZE de taille 32 pixels avec un décalage de 32 pixels entre deux ZE consécutives, correspond au déplacement vertical  $u_1$  pour différents niveaux de déformation globale, à savoir, 2 % pour les figures 4.9(a) et 4.9(b), 3.5 % pour les figures 4.9(c) et 4.9(d),

#### 4. Essais mécaniques sur matériau enchevêtré

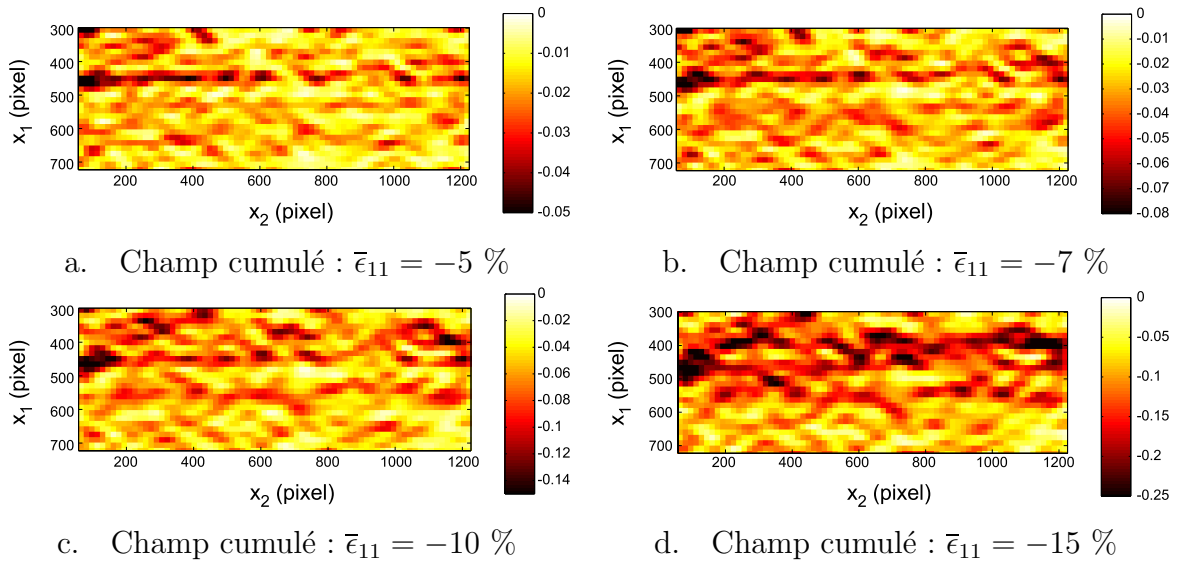


Figure 4.7 – Champ  $\epsilon_{11}$  cumulé pour différents niveaux de déformation globale. Paramètres de corrélation : taille de ZE =  $32 \times 32$  pixels,  $\delta = 16$  pixels. Échelle : 1 pixel  $\Leftrightarrow$  0.15 mm.

4.5 % pour les figures 4.9(e) et 4.9(f), et 6 % pour les figures 4.9(g) et 4.9(h), respectivement. La RE contient 576 ZE par niveau de déformation globale.

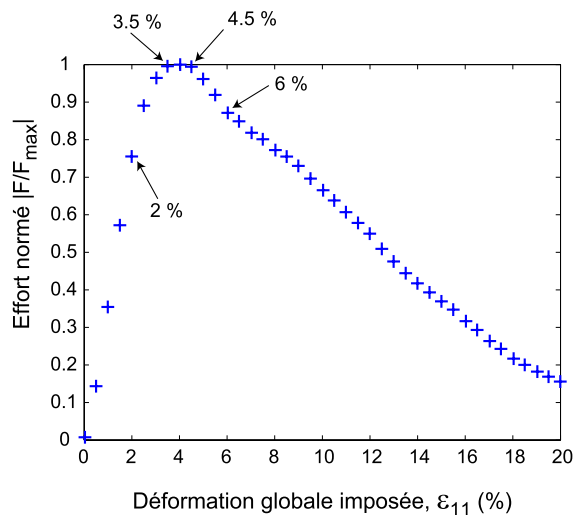


Figure 4.8 – Effort normé en fonction de la déformation globale imposée pour un essai d'arrachement sur laine de verre crêpée.

La figure 4.9 présente l'évolution des champs de déplacement observés en surface de l'éprouvette au cours de l'essai : les champs de déplacement dans la direction de

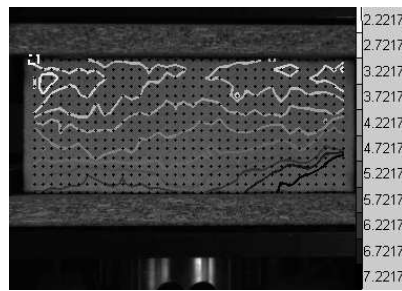
sollicitation  $u_1$  cumulés (depuis le début de l'essai) et les champs incrémentaux qui correspondent à un incrément de déformation globale de 0.5 % entre deux images. Sur les figures 4.9(a) et 4.9(b), le champ de déplacement  $u_1$  à la surface du matériau correspond au champ obtenu lors du domaine élastique. Sur la carte des champs incrémentaux, une première zone située en bas à droite de l'éprouvette semble faire apparaître une première fissure. Juste avant le pic d'arrachement, les figures 4.9(c) et 4.9(d) font apparaître les prémices d'une nouvelle fissure : des discontinuités dans les champs de déplacement verticaux  $u_1$  incrémentaux et cumulés, peuvent être observées. Elles correspondent à l'ouverture d'une fissure. Cette fissure se propage à la surface de l'éprouvette et à la fin de l'essai, la fissure traverse totalement l'éprouvette et constitue le mode de rupture final. Il est alors intéressant de relier le résultat de cet essai à la texture initiale du matériau. Pour cela, la figure 4.10 présente l'analyse locale de l'anisotropie de l'éprouvette testée. On observe alors une discontinuité dans l'orientation, plus marquée sur la partie droite de l'éprouvette et qui correspond à la zone à laquelle apparaît la première fissure ensuite écrantée. Enfin, ce défaut de texture ne correspond pas nécessairement au mode de rupture final, d'autres défauts de densité par exemple peuvent être responsables de la rupture de l'éprouvette. L'utilisation de l'analyse de texture pour prévoir en arrachement le comportement mécanique d'une éprouvette est donc limitée.

Ce calcul de corrélation permet de révéler les discontinuités de déplacement qui correspondent à des fissures à la surface de l'éprouvette. Étant donné qu'il s'agit d'une mesure de surface, on ne peut pas exclure le fait que les fissures puissent s'amorcer préalablement au sein du matériau, sans atteindre immédiatement la face analysée du matériau. Enfin, les résultats obtenus peuvent facilement être confirmés par des observations visuelles post-mortem.

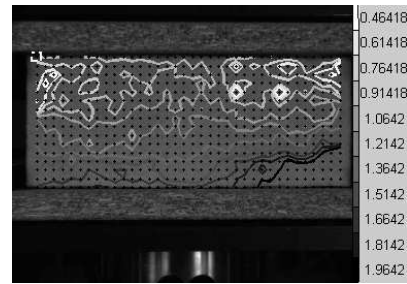
#### 4.1.4 Liens avec l'anisotropie locale

Connaissant le résultat d'essais de compression et/ou d'arrachement sur des éprouvettes de laine minérale, on peut dans un premier temps, essayer qualitativement de relier les résultats obtenus à la texture initiale de l'éprouvette testée. En ce qui concerne les résultats obtenus en arrachement, il faut noter cependant que l'amorçage de fissures ne se produit pas nécessairement sur la face de l'éprouvette analysée. Par ailleurs, cet amorçage peut être dû à un défaut du matériau, tel qu'un défaut de densité, totalement indépendant de sa texture. On se limitera donc au cas de la compression pour laquelle la déformation de l'éprouvette observée en surface est supposée être uniforme dans la profondeur de l'éprouvette. La figure 4.5 représente le produit testé en compression avant essai. La texture de l'éprouvette est très fine avec des circonvolutions à petite échelle. La méthode d'analyse locale de l'anisotropie présentée au chapitre 3 peut être utilisée pour caractériser l'orientation initiale des mèches de fibres de l'éprouvette testée en compression. Les points de calculs sont les mêmes que ceux utilisés pour la CIN. La figure 4.11 présente le champ

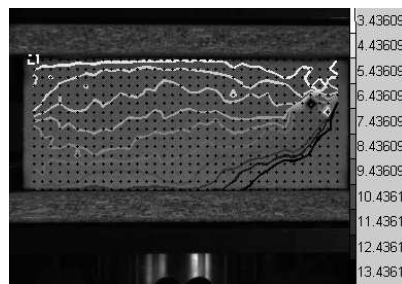
#### 4. Essais mécaniques sur matériau enchevêtré



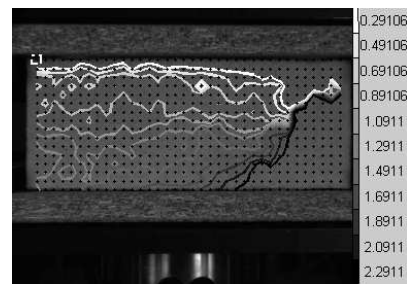
(a) Champ de déplacement cumulé  $u_1$  pour  $\bar{\epsilon}_{11} = 2\%$



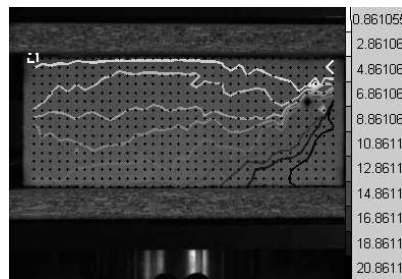
(b) Champ de déplacement incrémental  $u_1$  pour  $\bar{\epsilon}_{11} = 2\%$



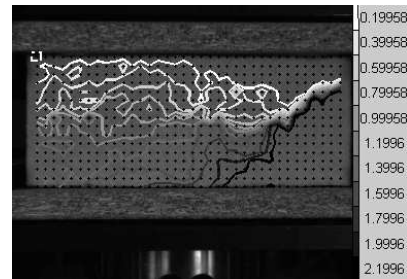
(c) Champ de déplacement cumulé  $u_1$  pour  $\bar{\epsilon}_{11} = 3.5\%$



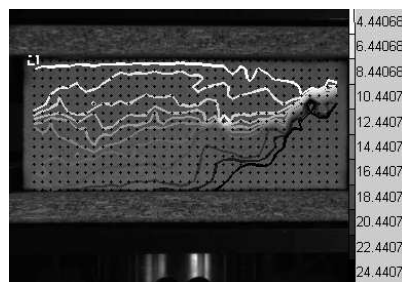
(d) Champ de déplacement incrémental  $u_1$  pour  $\bar{\epsilon}_{11} = 3.5\%$



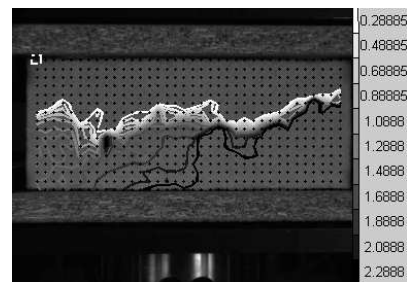
(e) Champ de déplacement cumulé  $u_1$  pour  $\bar{\epsilon}_{11} = 4.5\%$



(f) Champ de déplacement incrémental  $u_1$  pour  $\bar{\epsilon}_{11} = 4.5\%$



(g) Champ de déplacement cumulé  $u_1$  pour  $\bar{\epsilon}_{11} = 6\%$



(h) Champ de déplacement incrémental  $u_1$  pour  $\bar{\epsilon}_{11} = 6\%$

Figure 4.9 – Champ  $u_1$  (en pixels) cumulé et incrémental pour différents niveaux de déformation globale. Paramètres de corrélation : taille de ZE =  $32 \times 32$  pixels,  $\delta = 32$  pixels. Échelle : 1 pixel  $\Leftrightarrow$  0.16 mm.

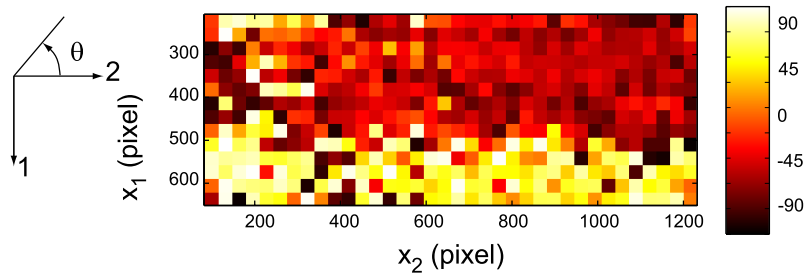


Figure 4.10 – Analyse de l’anisotropie locale de l’éprouvette testée en arrachement avant essai, paramètres de calcul : taille de ZE =  $32 \times 32$  pixels, décalage entre deux ZE = 32 pixels.

d’orientation obtenu en utilisant la méthode complète du tenseur d’anisotropie. Une discontinuité dans l’orientation entre la partie supérieure et la partie inférieure de l’éprouvette peut être observée, avec une orientation d’environ  $50^\circ$  pour la partie supérieure et  $-50^\circ$  pour la partie inférieure. On peut aussi remarquer le fait que la texture analysée est une texture fine : les variations du champ d’orientation, d’une zone d’étude à ses voisines, peuvent être importantes. Si l’on compare la carte des orientations à celles des champs de déformation (figure 4.7), on peut alors remarquer la bande de localisation de la déformation apparaît au même endroit que la discontinuité du champ d’orientation. Il est important de noter également que les orientations obtenues sont périodiques de période  $180^\circ$ . Un angle de  $90^\circ$  et un de  $-90^\circ$  correspondent à la même orientation verticale.

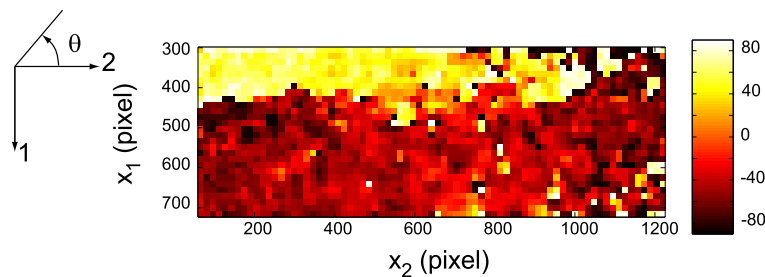


Figure 4.11 – Orientation de la texture (en degrés) avant essai de l’éprouvette de laine de verre testée en compression, taille de ZE =  $32 \times 32$  pixels, décalage entre deux ZE = 16 pixels.

En conclusion, lorsque la méthode de corrélation d’images numériques et l’analyse locale de l’anisotropie appliquées à une éprouvette de laine minérale testée en compression sont couplées, il semble que les résultats obtenus soient liés entre eux. L’idée est alors d’étudier ce lien plus précisément, dans le but de modéliser le comportement élastique anisotrope de l’éprouvette à partir de l’analyse de sa texture

initiale.

## 4.2 Caractérisation de matériaux isotropes transverses

### 4.2.1 La problématique

Les essais de compression ont permis de mettre en évidence, dès le domaine élastique, la présence de zones pour lesquelles la déformation semble se localiser. Ces mêmes bandes de localisation restent actives au niveau du plateau « plastique », ce qui suggère d'étudier avec attention le domaine élastique. Le but est alors de prévoir en fonction du chargement et de la texture initiale d'une éprouvette la réponse élastique anisotrope du matériau. On dispose d'un outil permettant d'analyser l'anisotropie locale d'une éprouvette à partir d'une image de cette dernière dans son état initial. Cette analyse fournit localement un axe d'anisotropie dominante ainsi qu'une amplitude d'anisotropie. On suppose pour la suite de l'étude que les matériaux étudiés ont tous les mêmes paramètres de fabrication et la même densité. L'idée est alors de considérer qu'un matériau texturé peut localement être supposé comme non texturé avec une orientation connue et une certaine amplitude d'anisotropie. Si le matériau est considéré comme non texturé localement, on peut supposer le comportement du matériau comme élastique à isotropie transverse. Dans le cas de l'hypothèse des contraintes planes, il existe 4 paramètres matériaux à identifier qui correspondent aux 4 constantes indépendantes dans le repère d'isotropie transverse. Dans le repère du matériau  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , la loi d'élasticité s'écrit

$$\{\boldsymbol{\sigma}_{xy}\} = [\mathbf{S}_{xy}]\{\boldsymbol{\epsilon}_{xy}\}, \quad (4.4)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}_{xy}$  et  $\boldsymbol{\epsilon}_{xy}$  sont les tenseurs des contraintes et des déformations en notation de Voigt dans le repère de référence avec

$$\{\boldsymbol{\sigma}_{xy}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \text{ et } \{\boldsymbol{\epsilon}_{xy}\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

et  $\mathbf{S}_{xy}$  la matrice de rigidité dont les composantes dans le repère d'isotropie transverse sont

$$[\mathbf{S}_{xy}] = \begin{bmatrix} s_{xx} & s_{xy} & 0 \\ s_{yx} & s_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & s_{qq} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

avec  $s_{xx}, s_{xy} = s_{yx}, s_{yy}, s_{qq}$  les quatre paramètres indépendants décrivant l'isotropie transverse à identifier. Les paramètres  $s_{xx}$  et  $s_{yy}$  se déterminent grâce à des essais de traction ou de compression sur des produits non texturés (laine de verre non crêpée)

dont les mèches de fibres sont horizontales (pour déterminer  $s_{xx}$ ) ou verticales (pour déterminer  $s_{yy}$ ). Pour déterminer le module de rigidité couplée ( $s_{xy}$ ) et le module de cisaillement ( $s_{qq}$ ) de nouveaux essais sont nécessaires.

### 4.2.2 Les essais réalisés

Les essais réalisés pour identifier les paramètres élastiques d'un matériau non texturé ont été, dans un premier temps, des essais de compression et de traction simple. Les éprouvettes utilisées sont les mêmes que celles en matériau texturé, *i.e.*, un parallélépipède de produit à tester collé entre deux plaques de bois aggloméré, les mèches de fibres du produit pouvant être verticales (figure 4.12(a)) ou horizontales (figure 4.12(b)). Les éprouvettes étant collées, la profondeur de pénétration de la colle dans l'éprouvette est un paramètre à prendre en compte : elle ne concerne que quelques millimètres sur le haut et le bas de l'éprouvette, mais les essais de compression seront préférés aux essais d'arrachement dans la mesure où la présence de la colle perturbe moins, dans ce cas, la réponse du matériau.

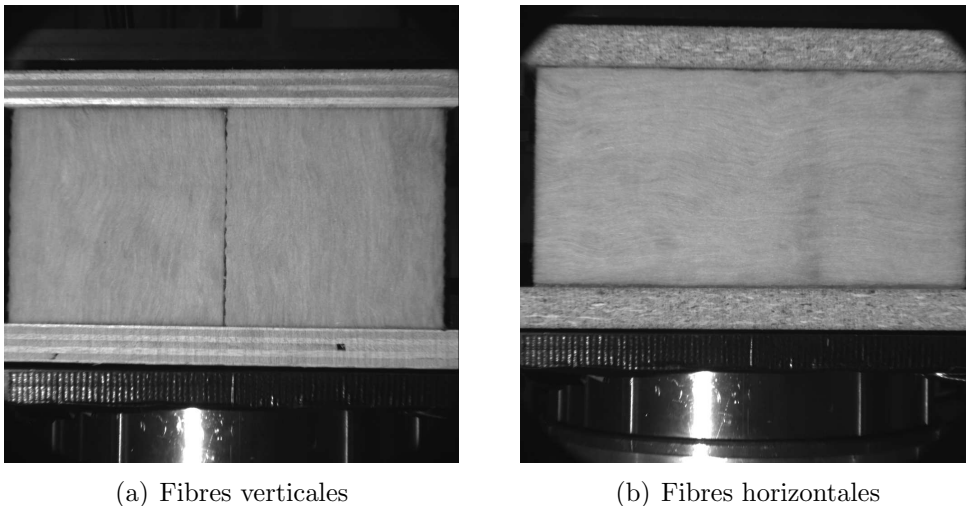


Figure 4.12 – Images d'éprouvettes de matériaux non texturés.

Les essais complémentaires réalisés pour identifier les deux paramètres restants  $s_{xy}$  et  $s_{qq}$  ont été sur une configuration de « cisaillement-compression ». Pour des questions de facilité de mise en œuvre, les éprouvettes utilisées pour ces nouveaux essais avaient la même géométrie que les précédentes. Par ailleurs les plateaux servant à la compression ont été utilisés pour fixer le montage et les essais ont été réalisés sur machine de traction/compression uniaxiale. Deux photos du montage à 45° sont présentées figure 4.13 : sur la photo 4.13(a), l'éprouvette montée est avec des mèches de fibres horizontales, et sur la photo 4.13(b), les mèches sont verticales et l'éprouvette est en cours d'essai de « cisaillement-compression ». Le même montage avec un angle de 30° a également été réalisé et les mêmes essais ont ensuite été



conduits. Le moyen de mesure utilisé pour les champs de déplacement a encore été la corrélation d'images numériques. Des images des éprouvettes ont alors été prises tout au long de l'essai. Cependant, étant donné l'angle d'inclinaison du montage, la caméra CCD servant à l'acquisition des images a, elle aussi, été inclinée du même angle que les éprouvettes afin que les images prises correspondent au maximum à la zone des éprouvettes que l'on souhaite observer. C'est ce que l'on peut remarquer sur les deux photos de montage de la figure 4.13. Les conditions aux limites d'un tel montage sont mixtes : en effort pour la composante verticale, et en déplacement pour la composante horizontale.

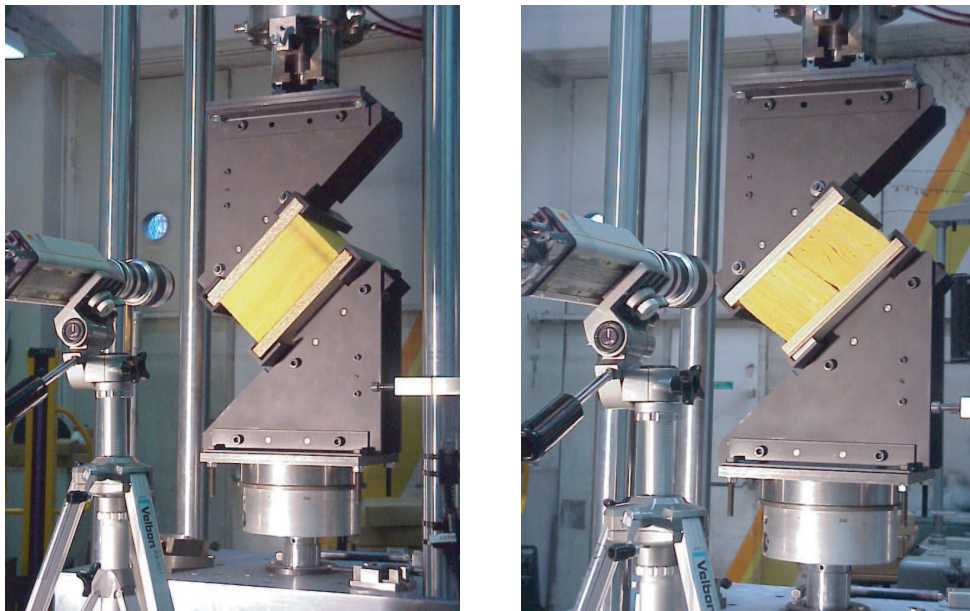


Figure 4.13 – Montage d'essais de « cisaillement-compression ».

### 4.2.3 Les résultats obtenus

Les essais ont été réalisés, et pour chacun d'entre eux, la zone élastique a été mise en évidence. Afin d'obtenir un maximum de points de calcul dans cette zone linéaire, des images des éprouvettes ont été prises tous les 0.25 % de déformation globale. Par ailleurs, pour le type de matériau testé, il existe toujours une accommodation de l'éprouvette en début d'essai, si bien que la référence en déplacement imposée, ne correspond pas toujours à la référence en effort et en déformation. Pour identifier le domaine élastique des essais réalisés, le premier point pour lequel le déplacement et l'effort sont non nuls représentera une nouvelle référence pour la courbe d'essai. La figure 4.14 présente les champs de déformations obtenus pour un essai de « cisaillement-compression » à 45° pour une déformation globale imposée de 2.5 %. On remarque alors que les déformations sont homogènes dans les deux directions.

Ceci suggère pour identifier les différents paramètres élastiques d'effectuer une minimisation globale sur les efforts mesurés et calculés.

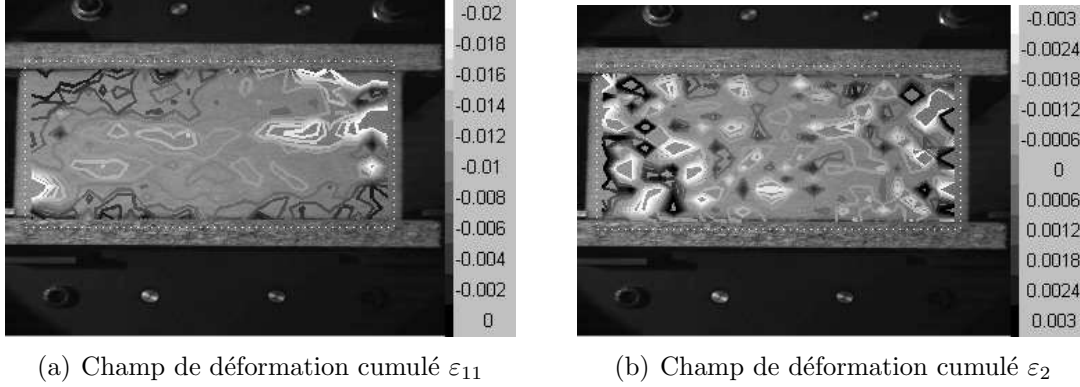


Figure 4.14 – Champs de déformation cumulés  $\varepsilon_{11}$  et  $\varepsilon_{22}$  pour un essai de « compression-cisaillement » à  $45^\circ$  et 2.5 % de déformation globale imposée.

Les différents essais réalisés ont permis d'obtenir plus de 250 points dans le domaine linéaire. Pour chacun des essais, on dispose d'une mesure de l'effort. On définit un repère de référence  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  et un deuxième repère  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  simple rotation du repère de référence d'un angle  $\theta$  et associé à l'inclinaison de l'éprouvette ( $\theta = 45^\circ$  ou  $\theta = 30^\circ$ ) (figure 4.15). On peut alors écrire dans le repère lié à l'éprouvette  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  l'expression des déplacements interpolés

$$\begin{cases} u = u_0 + \varepsilon_{xx}x + \gamma_{xy}y \\ v = v_0 + \gamma_{yx}x + \varepsilon_{yy}y \end{cases} \quad (4.7)$$

L'expression des déformations moyennes dans le repère  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  se déduit alors du

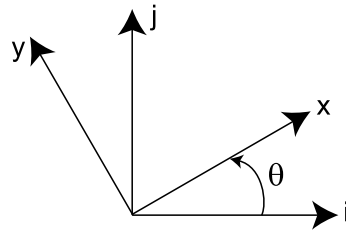


Figure 4.15 – Rotation du repère de référence d'angle  $\theta$ .

gradient du champ de déplacement et on obtient dans l'hypothèse de petites perturbations

$$\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy} + \gamma_{yx}}{2} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Ces déformations peuvent ensuite être reliées au tenseur des contraintes grâce à l'expression du tenseur de rigidité  $\mathbf{S}_{xy}$ , équation (4.6). On s'intéresse enfin à la résultante  $\mathbf{t}$  des efforts

$$\mathbf{t} = \int \int \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \mathbf{n} dS \quad (4.9)$$

avec  $\underline{n} = \underline{y}$ . Enfin la projection de  $\mathbf{t}$  suivant l'axe vertical  $\mathbf{j}$  donnera la composante verticale de l'effort calculé. Le calcul par corrélation d'images numériques donne accès aux déformations locales dans le repère  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , dont on déduit une valeur des déformations moyennes à la surface de l'échantillon. Ces déformations permettent alors de calculer une valeur de l'effort vertical, relié aux paramètres élastiques inconnus de manière linéaire. Ces derniers sont calculés en effectuant une minimisation globale par rapport aux paramètres inconnus de l'écart entre les efforts verticaux mesuré et calculé sur tous les essais réalisés.

$$\min_{s_{xx}, s_{yy}, s_{xy}, s_{qq}} \left( \sum_{points} (F_{mes} - F_{calc})^2 \right), \quad (4.10)$$

où  $F_{calc}$  dépend des paramètres inconnus. Les 4 paramètres identifiés par cette minimisation globale ont comme valeur :

$$\begin{cases} s_{xx} = 0.28 \text{ MPa} \\ s_{yy} = 0.15 \text{ MPa} \\ s_{xy} = 0.09 \text{ MPa} \\ s_{qq} = 1.9 \text{ MPa} \end{cases} \quad (4.11)$$

Afin de visualiser la bonne adéquation entre résultats d'essais et résultats issus de la minimisation, on peut superposer les courbes de contrainte en fonction de la déformation pour les différents types d'essais réalisés. La figure 4.16 présente l'évolution de la contrainte  $\sigma_{xx}$  en fonction de la déformation  $\epsilon_{xx}$  pour une éprouvette avec des mèches de fibres horizontales, pour le montage à  $45^\circ$  : une première courbe représente les résultats expérimentaux, une autre courbe représente la contrainte  $\sigma_{xx}$  obtenue en utilisant les valeurs des déformations mesurées et des paramètres élastiques identifiés. Une troisième courbe est représentée et correspond au résultat d'une minimisation effectuée sur cet essai indépendamment. On observe logiquement une meilleure adéquation entre la courbe d'essai et la minimisation effectuée sur l'essai seul, mais la minimisation globale représente le meilleur jeu de paramètres élastiques minimisant une fonctionnelle formée de tous les essais réalisés.

La figure 4.17 présente l'évolution de la contrainte  $\sigma_{xy}$  en fonction de la déformation  $\epsilon_{xy}$  pour deux essais utilisant le montage à  $45^\circ$ , l'un avec des mèches de fibres horizontales (figure 4.17(a)) et l'autre des mèches de fibres verticales (figure 4.17(b)). Comme précédemment sont superposés sur le même graphe, les résultats expérimentaux, les résultats issus de la minimisation globale, et les résultats obtenus en effectuant une minimisation sur l'essai pris indépendamment. On observe alors un cas

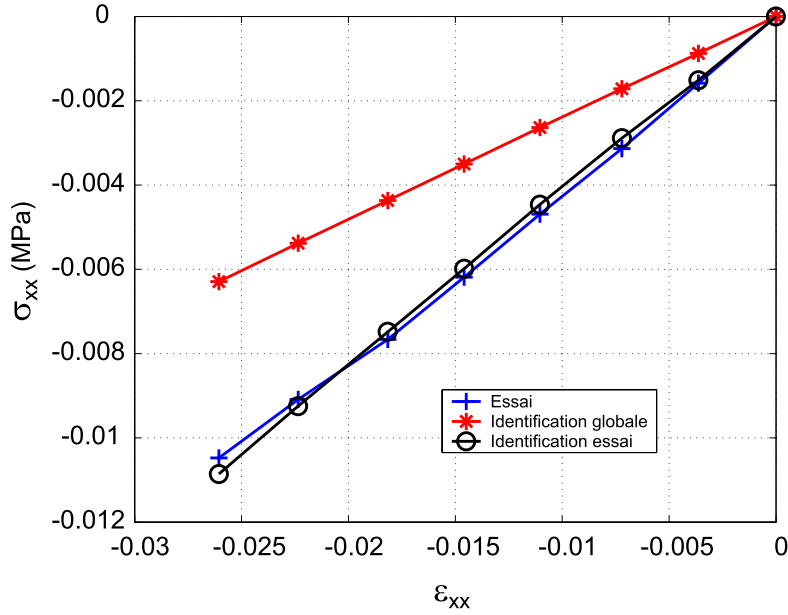


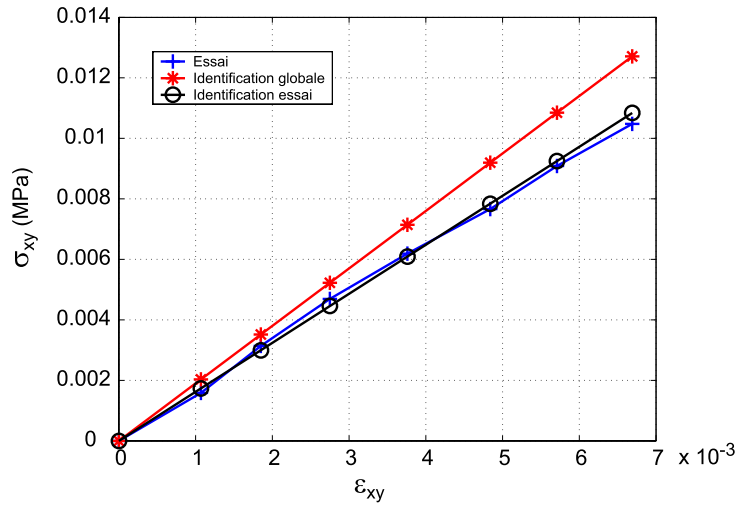
Figure 4.16 – Résultat d’un essai de « cisaillement-compression » sur une éprouvette avec des mèches de fibres horizontales, pour le montage d’essai à  $45^\circ$  : évolution de la contrainte  $\sigma_{xx}$  (en MPa) en fonction de la déformation  $\epsilon_{xx}$  mesurée : résultats expérimentaux, résultats de la minimisation globale et résultats de la minimisation sur l’essai.

(figure 4.17(a)) pour lequel les deux minimisations donnent des résultats équivalents en termes de qualité, et une plus grande divergence dans les résultats des minimisations pour le deuxième cas (figure 4.17(b)).

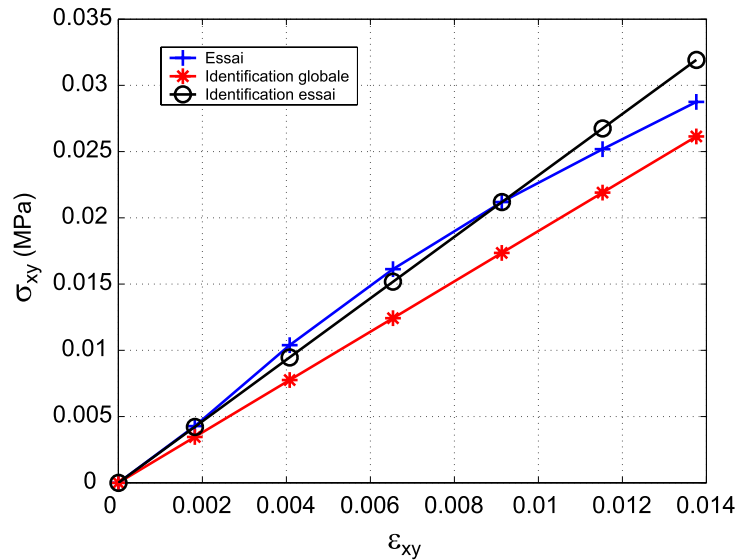
Ces essais d’identification ont permis d’obtenir une première estimation des paramètres élastiques du matériau étudié dans l’hypothèse de comportement isotrope transverse. La microstructure complexe du matériau induit une dispersion dans les résultats obtenus. Cette dispersion peut être quantifiée en utilisant les résultats obtenus et en effectuant une minimisation pour chacun des essais d’identification réalisés. Les écart-types obtenus pour chacun des quatre paramètres élastiques sont alors

$$\begin{cases} \sigma_{sxx} = 0.12 \text{ MPa} \\ \sigma_{syy} = 0.08 \text{ MPa} \\ \sigma_{sxy} = 0.10 \text{ MPa} \\ \sigma_{sqq} = 0.45 \text{ MPa} \end{cases} \quad (4.12)$$

Comparées aux valeurs des paramètres identifiés, ces écart-types sont très élevés et ceci souligne la difficulté à modéliser le comportement de ce matériau même lorsqu’il n’est pas texturé. En effet, d’une éprouvette à une autre, le même essai réalisé donnera une raideur macroscopique différente. C’est ce que l’on peut voir sur la



(a) Fibres horizontales, montage à 45°



(b) Fibres verticales, montage à 45°

Figure 4.17 – Résultat de deux essais de « cisaillement-compression », pour le montage d’essai à 45° : évolution de la contrainte  $\sigma_{xy}$  (en MPa) en fonction de la déformation  $\epsilon_{xy}$  mesurée : résultats expérimentaux, résultats de la minimisation globale et résultats de la minimisation sur l’essai.

figure 4.18 où le résultat de deux essais identiques pour deux éprouvettes différentes est représenté. On remarque alors que dès le domaine élastique, les raideurs des deux matériaux sont différentes.

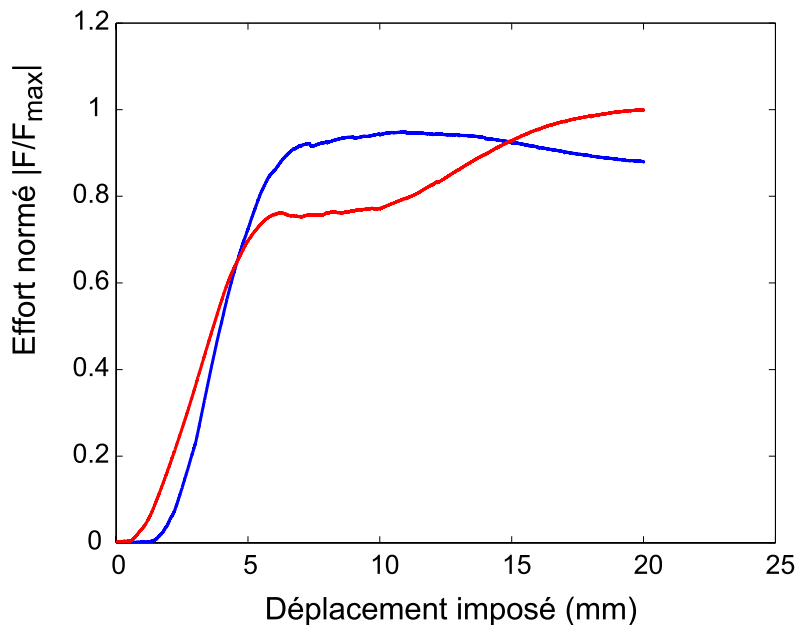


Figure 4.18 – Effort normé en fonction du déplacement imposé pour deux essais de « compression-cisaillement » à  $45^\circ$  sur des éprouvettes à mèches de fibres verticales.

### 4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons analysé les essais mécaniques réalisés. Dans un premier temps des essais de compression et de traction simple ont été présentés. La méthode de mesure utilisée (la corrélation d'images numériques) permet de suivre l'évolution des champs de déformation et de déplacement au cours de l'essai. Cette technique a alors permis de mettre en évidence, pour les essais de compression, une forte hétérogénéité de la déformation dès le domaine élastique et d'identifier des bandes de localisation de la déformation au cours de l'essai. Pour les essais d'arrachement, l'analyse des champs de déplacement permet d'observer des discontinuités, prémices de l'arrachement ou de l'apparition de fissures.

Par ailleurs, l'analyse de l'anisotropie locale de la texture d'une éprouvette avant un essai de compression a permis de relier, visuellement, les zones de discontinuités de l'orientation locale aux bandes de localisation de la déformation. Ceci suggère d'essayer de modéliser le comportement mécanique élastique anisotrope du matériau étudié. Dans ce sens, une démarche a été proposée pour effectuer la modélisation qui sera développée au chapitre suivant : on suppose que localement, le matériau étudié suit une loi de comportement élastique isotrope transverse selon une direction particulière, celle-ci correspondant à la direction d'anisotropie identifiée en utilisant l'outil développé au chapitre 3. De nouveaux essais mécaniques ont alors été réalisés. Ces derniers avaient pour but d'identifier les paramètres élastiques du matériau non

texturé associé au matériau enchevêtré. Ces paramètres élastiques, au nombre de quatre, ont été identifiés grâce à des essais de compression et des essais de cisaillement pour lesquels un montage particulier a été conçu. Les résultats de ces essais ont alors été présentés, et les résultats de l'identification des paramètres a été discutée. Une grande dispersion est obtenue sur les paramètres identifiés : ce décalage s'explique par la microstructure complexe du matériau utilisé.

# Chapitre 5

## Relations entre anisotropie locale et performances mécaniques

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Modélisation par éléments finis . . . . .</b>	<b>108</b>
5.1.1	Correspondance des maillages . . . . .	108
5.1.2	Paramètres du calcul par éléments finis . . . . .	110
<b>5.2</b>	<b>Résultats sur un essai de compression . . . . .</b>	<b>115</b>
5.2.1	Résultats expérimentaux . . . . .	116
5.2.2	Résultats des simulations . . . . .	117
5.2.3	Procédure d'identification . . . . .	123
<b>5.3</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>131</b>

---



Comme évoqué au chapitre précédent, il semblerait que, pour des essais de compression, les hétérogénéités du champ des déformations soient reliées à la texture initiale du matériau. L'idée est alors de savoir si l'on est capable de modéliser le comportement élastique d'un matériau texturé à partir de l'analyse de sa texture initiale ou en d'autres termes peut-on envisager un essai mécanique virtuel ?

Au chapitre précédent, nous avons présenté des essais d'identification de paramètres élastiques du matériau non texturé dont la loi de comportement associée est supposée isotrope transverse. Disposant de ces paramètres, on se propose de mettre en place une approche utilisant une modélisation par éléments finis qui prend en compte l'anisotropie locale de l'éprouvette analysée, ainsi que l'amplitude d'anisotropie pour simuler la réponse élastique d'un produit texturé à une sollicitation de compression. Cette orientation est alors utilisée pour affecter les paramètres élastiques à chacune des Zones d'Études. Connaissant par ailleurs les conditions aux limites en déplacement à imposer à l'éprouvette correspondant à un essai de compression, la réponse élastique du matériau peut être simulée. Parallèlement à cette approche, étant donné que le résultat de l'essai réel de compression est connu, les résultats expérimentaux et simulés peuvent être comparés et utilisés pour identifier numériquement les paramètres élastiques d'un produit non crêpé équivalent. Dans un premier temps la modélisation sera présentée : comment prendre en compte l'anisotropie locale et l'amplitude d'anisotropie dans le calcul par éléments finis ? Comment calculer les propriétés élastiques de chacune des ZE en fonction de leur orientation ? Et comment calculer la réponse élastique anisotrope d'une éprouvette à une sollicitation de compression ? Les résultats obtenus pour un essai sur laine de verre crêpée seront alors étudiés. Enfin, une procédure d'identification sera proposée dans le but de revenir, à partir de la comparaison des résultats expérimentaux et numériques, sur la détermination des paramètres élastiques d'un produit non crêpé.

## 5.1 Modélisation par éléments finis

### 5.1.1 Correspondance des maillages

Il a été présenté au chapitre 3 une méthode pour déterminer localement l'anisotropie d'une image et l'amplitude d'anisotropie associée. Disposant d'une image de l'éprouvette avant essai, on a alors accès à un champ d'anisotropie en surface. Par ailleurs, on dispose d'un outil permettant de déterminer les champs de déplacement et de déformation en surface de l'éprouvette au cours d'un essai. Ce moyen de mesure, la corrélation d'images numériques a été introduit au chapitre 4. Ces deux approches font intervenir des Régions d'Études (RE) et des Zones d'Études (ZE). Dans le but de comparer les résultats expérimentaux aux résultats de la modélisation par éléments finis prenant en compte l'anisotropie locale de chaque ZE et l'amplitude de cette anisotropie, il apparaît alors que les maillages correspondants au calcul d'anisotropie et au calcul de corrélation doivent être reliés.

Le point de départ pour faire correspondre les maillages est de représenter la Région d'Étude et les Zones d'Étude associées au calcul de corrélation d'images. La figure 5.1 fait apparaître ce maillage. Pour chaque ZE, le calcul fournit les déplacements homogènes dans la ZE considérée et affectés au centre de la ZE. Le centre de chaque ZE du calcul de corrélation d'images sera interprété par la suite comme un nœud du maillage éléments finis. Les éléments utilisés pour le calcul par éléments finis seront des éléments carrés de type Q1 dont les 4 nœuds correspondent aux centres de ZE de corrélation d'images deux à deux consécutives. Une orientation doit alors être attribuée à chaque élément du maillage. Cette orientation est le résultat de l'analyse locale d'anisotropie. Le maillage utilisé pour déterminer l'orientation locale doit être le même que celui utilisé pour le calcul par éléments finis *i.e.*, les tailles des ZE doivent être identiques, mais le maillage utilisé pour déterminer l'orientation locale sera décalé de la moitié de la taille d'une ZE.

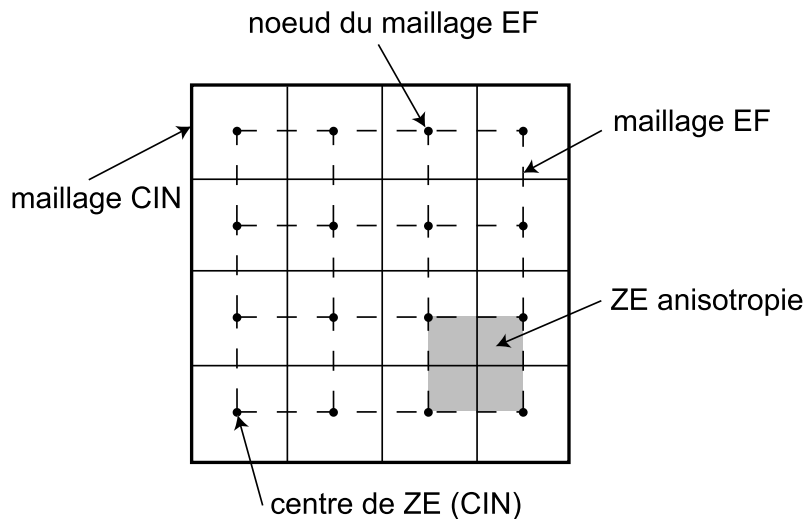


Figure 5.1 – Correspondance des maillages CIN et EF. En traits pleins, le maillage de CIN et en pointillés le maillage correspondant à l'étude locale d'anisotropie et au maillage éléments finis.

Le calcul de corrélation d'images définit la Région d'Étude ainsi que la taille des Zones d'Étude. Le maillage utilisé pour la détermination de l'anisotropie locale possède alors des éléments de même taille que ceux du calcul de corrélation, mais décalé d'une demi Zone d'Étude comme le montre la figure 5.1. Enfin, le calcul par éléments finis utilisera le même maillage que celui utilisé par l'analyse d'anisotropie.

### 5.1.2 Paramètres du calcul par éléments finis

La modélisation par éléments finis utilisée pour simuler la réponse du matériau crêpé à une sollicitation de compression est élastique : les éléments utilisés ont fonctions d'interpolation Q1 et la particularité de la modélisation est de prendre en compte l'orientation locale de chaque élément, ainsi que l'amplitude d'anisotropie associée à l'orientation.

Il a été présenté au chapitre précédent, l'identification des paramètres élastiques d'un produit de laine de verre non crêpée. L'identification de ces quatre paramètres sera prise en compte, ici, pour affecter des propriétés élastiques à chaque ZE composant la surface de l'éprouvette de laine de verre crêpée. En effet, localement, on suppose que la laine de verre crêpée peut être assimilée au même matériau non texturé avec une orientation connue et donnée par l'analyse d'anisotropie. Connaissant les paramètres élastiques d'une ZE dans le repère lié au matériau, c'est-à-dire le repère d'isotropie transverse, le problème est de déterminer les paramètres élastiques correspondants dans le repère de référence.

#### 5.1.2.1 Moyenne et écart-type d'une distribution d'angles

L'analyse d'orientation fournit un champ  $\theta(i, j)$  des orientations moyennes et une amplitude d'anisotropie  $A(i, j)$ . La première question est de déterminer la valeur moyenne et l'écart-type associés à une distribution d'orientation, c'est-à-dire une distribution périodique. On introduit la fonction complexe  $f(\theta) = e^{2i\theta}$ , qui ne privilégie aucune orientation particulière. L'orientation moyenne  $\Theta$  peut être définie comme

$$\langle f(\theta) \rangle = Ae^{2i\Theta}, \quad (5.1)$$

où  $A$  est l'amplitude d'anisotropie déterminée ultérieurement et  $\langle \cdot \rangle$  représente la valeur moyenne de la variable «  $\cdot$  ». En développant les parties réelles et imaginaires, il vient

$$\begin{aligned} \langle \cos(2\theta) \rangle &= A \cos(2\Theta), \\ \langle \sin(2\theta) \rangle &= A \sin(2\Theta). \end{aligned} \quad (5.2)$$

L'orientation dominante (*i.e.*, moyenne) s'écrit

$$\Theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{\langle \sin(2\theta) \rangle}{\langle \cos(2\theta) \rangle} \right). \quad (5.3)$$

On suppose que les angles  $\theta$  sont distribués selon une densité de probabilité  $p(\theta)$ . Pour les cas simples (e.g., lorsque  $p$  est symétrique par rapport à sa valeur moyenne) la définition de  $\Theta$  est satisfaisante et l'écart-type  $\sigma$  peut être relié à  $A$  ( $A \sim 1$  pour  $\sigma \sim 0$  et  $A \sim 0$  pour  $\sigma \gg 1$ ). Pour illustrer cette remarque, on peut prendre une distribution gaussienne, et l'amplitude d'anisotropie est définie par

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2x) e^{-x^2/2\sigma^2} dx. \quad (5.4)$$

On peut alors montrer que

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \Re \left[ e^{-x^2/2\sigma^2 + 2ix} \right] dx, \quad (5.5)$$

d'où

$$A = \frac{e^{-2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \Re \left[ e^{-(1/2)(x/\sigma - 2i\sigma)^2} \right] dx = e^{-2\sigma^2}. \quad (5.6)$$

L'écart-type est estimé par

$$\sigma^2 = -\frac{1}{4} \log \left( \langle \sin(2\theta) \rangle^2 + \langle \cos(2\theta) \rangle^2 \right). \quad (5.7)$$

### 5.1.2.2 Paramètres élastiques du matériau

On note  $\mathcal{S}$  le tenseur de rigidité d'ordre 4 et les tenseurs d'ordre deux de contrainte  $\Sigma$  et de déformation  $\mathbf{E}$  tels que

$$\Sigma = \mathcal{S}\mathbf{E}. \quad (5.8)$$

En utilisant les notations de Voigt, le tenseur d'ordre deux correspondant  $\mathcal{S}$  s'écrit dans le repère de référence et dans le cas de l'élasticité plane

$$[\mathcal{S}] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} \\ s_{21} & s_{22} & s_{26} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

où  $s_{ij}$  sont les coefficients inconnus à relier à l'orientation dominante  $\Theta$ , à l'amplitude d'anisotropie  $A$  et aux composantes du tenseur de rigidité  $\mathcal{S}_{xy}$  écrit dans le repère associé à l'orientation dominante

$$[\mathcal{S}_{xy}] = \begin{bmatrix} s_{xx} & s_{xy} & 0 \\ s_{yx} & s_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & s_{qq} \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

avec  $s_{xx}, s_{xy} = s_{yx}, s_{yy}, s_{qq}$  les quatre constantes indépendantes décrivant l'isotropie transverse dans le repère associé à l'orientation moyenne (chapitre 4). Dans ce repère, la relation d'élasticité s'écrit

$$\{\sigma_{xy}\} = [\mathcal{S}_{xy}]\{\epsilon_{xy}\}, \quad (5.11)$$

avec

$$\{\sigma_{xy}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \text{ and } \{\epsilon_{xy}\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (5.12)$$

Les contraintes et déformations dans le repère de référence s'écrivent

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{S}]\{\boldsymbol{\epsilon}\}, \quad (5.13)$$

avec

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{Q}]\{\boldsymbol{\sigma}_{xy}\} \text{ and } \{\boldsymbol{\epsilon}\} = [\mathbf{Q}]\{\boldsymbol{\epsilon}_{xy}\}, \quad (5.14)$$

où

$$[\mathbf{Q}(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

tel que

$$[\mathbf{S}] = [\mathbf{Q}][\mathbf{S}_{xy}][\mathbf{Q}^{-1}]. \quad (5.16)$$

L'expression des composantes du tenseur de rigidité en fonction de l'orientation dominante dans le repère de référence s'écrit

$$\begin{aligned} s_{11} &= s_{xx} \cos^4 \theta + 2(s_{xy} + s_{qq}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + s_{yy} \sin^4 \theta, \\ s_{12} &= s_{xy} \cos^4 \theta + (s_{xx} + s_{yy} - 2s_{qq}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + s_{xy} \sin^4 \theta, \\ s_{16} &= 2 \cos \theta \sin \theta [s_{xx} \cos^2 \theta - (s_{xy} + s_{qq})(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - s_{yy} \sin^2 \theta], \\ s_{22} &= s_{yy} \cos^4 \theta + 2(s_{xy} + s_{qq}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + s_{xx} \sin^4 \theta, \\ s_{26} &= 2 \cos \theta \sin \theta [-s_{yy} \cos^2 \theta + (s_{xy} + s_{qq})(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + s_{xx} \sin^2 \theta], \\ s_{66} &= 2(s_{xx} + s_{yy} - 2s_{xy}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + s_{qq}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2. \end{aligned} \quad (5.17)$$

On vérifie dans le cas d'un matériau isotrope que les propriétés obtenues ne dépendent pas de l'orientation, c'est-à-dire  $s_{xx} = s_{yy} = E/(1 - \nu^2)$ ,  $s_{xy} = s_{yx} = \nu E/(1 - \nu^2)$ ,  $s_{qq} = E/(1 + \nu)$  quelle que soit la base choisie.

La dernière étape est de calculer les composantes  $s_{xx}$ ,  $s_{xy} = s_{yx}$ ,  $s_{yy}$  et  $s_{qq}$ . Une approximation de Reuss est utilisée

$$\langle \mathbf{S}^{-1} \rangle_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}^{-1}(x) p(x) dx, \quad (5.18)$$

où  $\mathbf{S}(\theta)$  représente le tenseur de rigidité exprimé dans le repère  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  d'un produit non crêpé pour lequel l'angle entre l'orientation dominante et  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  est  $\theta$ . Cette approximation représente une borne inférieure du module de rigidité, en comparaison à l'approximation de Voigt, qui représente une borne supérieure. En effet, si l'on représente le module de rigidité normé en fonction de l'orientation  $\theta$  (figure 5.2), l'approximation de Reuss correspond mieux au modèle que l'on souhaite utiliser : les modules de rigidité sont maximum lorsque l'orientation est de  $0^\circ$ , *i.e.*, le repère

local correspond au repère d'isotropie transverse, et dès qu'on s'éloigne de l'axe isotropie transverse, la décroissance des valeurs des modules est rapide.

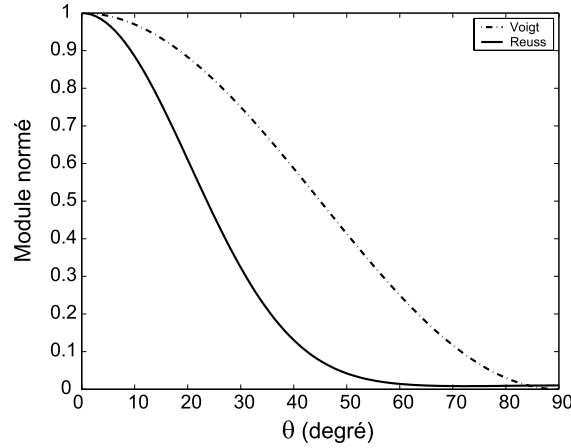


Figure 5.2 – Évolution des modules de rigidité en fonction de l'orientation  $\theta$ , pour les approximations de Reuss et Voigt.

Les composantes du tenseur de rigidité  $\mathbf{S}_m$  dans le repère d'orthotropie sont données par

$$[\mathbf{S}_m] = \begin{bmatrix} s_{nn} & s_{nt} & 0 \\ s_{nt} & s_{tt} & 0 \\ 0 & 0 & s_{uu} \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

où  $s_{nn}, s_{nt}, s_{tt}, s_{uu}$  sont les quatre paramètres indépendants décrivant l'orthotropie d'un matériau non crêpé. Ces paramètres ont été identifiés à l'aide des essais d'identification présentés au chapitre précédent. Les composantes du tenseur de souplesse s'écrivent enfin

$$[\mathbf{S}_m^{-1}] = \begin{bmatrix} q_{nn} & q_{nt} & 0 \\ q_{nt} & q_{tt} & 0 \\ 0 & 0 & q_{uu} \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

avec

$$q_{nn} = \frac{s_{tt}}{s_{nn}s_{tt} - s_{nt}^2}, q_{nt} = -\frac{s_{nt}}{s_{nn}s_{tt} - s_{nt}^2}, q_{tt} = \frac{s_{nn}}{s_{nn}s_{tt} - s_{nt}^2}, q_{uu} = \frac{1}{s_{uu}}. \quad (5.21)$$

Les composantes de  $\mathbf{S}^{-1}(\theta)$  s'écrivent

$$\begin{aligned}
 q_{xx} &= q_{nn} \cos^4 \theta + 2(q_{nt} + q_{uu}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + q_{tt} \sin^4 \theta, \\
 q_{xy} &= q_{nt} \cos^4 \theta + (q_{nn} + q_{tt} - 2q_{uu}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + q_{nt} \sin^4 \theta, \\
 q_{xq} &= 2 \cos \theta \sin \theta [q_{nn} \cos^2 \theta - (q_{nt} + q_{uu})(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - q_{tt} \sin^2 \theta], \\
 q_{yy} &= q_{tt} \cos^4 \theta + 2(q_{nt} + q_{uu}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + q_{nn} \sin^4 \theta, \\
 q_{yq} &= 2 \cos \theta \sin \theta [-q_{tt} \cos^2 \theta + (q_{nt} + q_{uu})(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + q_{nn} \sin^2 \theta], \\
 q_{qq} &= 2(q_{nn} + q_{tt} - 2q_{nt}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + q_{uu}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2. \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

Et enfin, les composantes de  $\langle \mathbf{S}^{-1} \rangle_{xy}$  sont données par (en utilisant l'équation (5.2))

$$\begin{aligned}
 \langle q_{xx} \rangle &= \frac{1}{8} [(3q_{nn} + 3q_{tt} + 2q_{nt} + 2q_{uu}) + 4(q_{nn} - q_{tt})A \\
 &\quad + (q_{nn} + q_{tt} - 2q_{nt} - 2q_{uu})A^4], \\
 \langle q_{xy} \rangle &= \frac{1}{8} [(q_{nn} + q_{tt} + 6q_{nt} - 2q_{uu}) + (-q_{nn} - q_{tt} + 2q_{nt} + 2q_{uu})A^4], \\
 \langle q_{yy} \rangle &= \frac{1}{8} [(3q_{nn} + 3q_{tt} + 2q_{nt} + 2q_{uu}) + 4(q_{tt} - q_{nn})A \\
 &\quad + (q_{nn} + q_{tt} - 2q_{nt} - 2q_{uu})A^4], \\
 \langle q_{uu} \rangle &= \frac{1}{4} [(q_{nn} + q_{tt} - 2q_{nt} + 2q_{uu}) + (-q_{nn} - q_{tt} + 2q_{nt} + 2q_{uu})A^4]. \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

Connaissant les orientations et amplitudes données par l'analyse d'anisotropie et connaissant les paramètres élastiques d'un produit non crêpé, les composantes du tenseur de souplesse  $q_{nn}$ ,  $q_{nt}$ ,  $q_{tt}$  et  $q_{uu}$  sont calculées en utilisant l'équation (5.21). À partir de ces composantes, les souplesses moyennes dans le repère associé à l'orientation dominante  $q_{xx}$ ,  $q_{xy}$ ,  $q_{yy}$  et  $q_{uu}$  sont calculées à partir de l'équation (5.22). L'expression des souplesses dans le repère de référence  $q_{11}$ ,  $q_{12}$ ,  $q_{22}$  et  $q_{66}$  est déduite en effectuant un changement de base faisant intervenir la matrice  $\mathbf{Q}$ . La matrice de rigidité de chaque élément, nécessaire au calcul par éléments finis est alors l'inverse de la matrice des souplesses dans le repère de référence.

### 5.1.2.3 Conditions aux limites

Une fois les matrices de rigidité calculées pour chaque élément et la matrice de rigidité globale assemblée, les conditions aux limites sont imposées. Pour un essai de compression, les conditions aux limites s'expriment en déplacement sur les bords haut et bas de l'éprouvette. Étant donné que les résultats de la modélisation seront ensuite comparés aux résultats d'un essai de compression qui a été réalisé et analysé grâce à la corrélation d'images numériques et que les maillages éléments finis et de corrélation d'images sont construits pour permettre la comparaison directe entre les résultats, au lieu d'imposer un déplacement nul sur l'un des bords haut ou bas

de l'éprouvette et un déplacement vertical sur le second, on utilisera les résultats donnés par la corrélation d'images comme conditions aux limites. Les déplacements mesurés en cours d'essai sur les bords haut et bas de l'éprouvette par corrélation d'images numériques (comme le montre la figure 5.3) sont imposés sur les nœuds correspondant du maillage éléments finis.

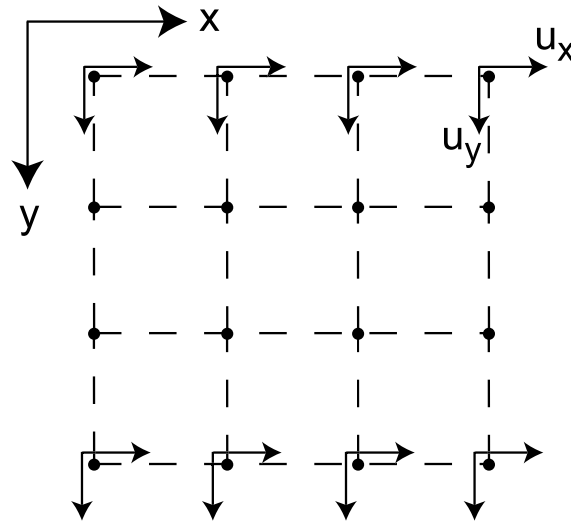


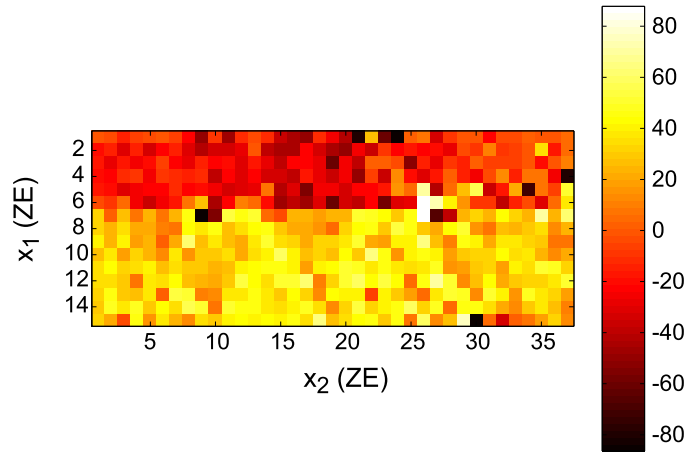
Figure 5.3 – Maillage éléments finis et conditions aux limites : les déplacements horizontaux et verticaux mesurés par corrélation d'images sont imposés sur les nœuds correspondant sur le maillage éléments finis.

## 5.2 Résultats sur un essai de compression

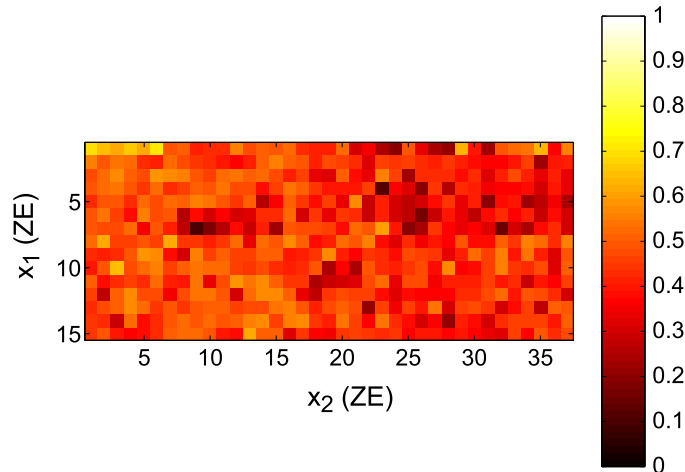
À partir des paramètres élastiques d'un produit non crêpé l'essai de compression sur laine de verre crêpée analysé au chapitre 4 va être simulé en utilisant l'approche développée. L'analyse locale d'anisotropie de l'éprouvette initiale fournit la carte des orientations figure 5.4(a). On observe deux zones d'orientation relativement homogènes : la moitié supérieure l'éprouvette ayant une orientation moyenne de  $-50^\circ$  et la moitié inférieure ayant une orientation moyenne de  $50^\circ$ . La discontinuité entre ces deux zones se situe au milieu de la hauteur de l'éprouvette étudiée. La carte des amplitudes d'anisotropie sera aussi utilisée pour le calcul. La figure 5.4(b) représente l'amplitude d'anisotropie locale pour l'éprouvette testée en compression. Cette amplitude varie entre 0 et 1 : une amplitude proche de 1 correspond à une anisotropie clairement marquée, et une amplitude proche de 0 correspond à une zone isotrope. Dans le cas d'un matériau non crêpé, l'amplitude d'anisotropie est supposée égale à 1. En réalité, si l'on utilise l'outil d'analyse d'anisotropie locale sur un produit non crêpé, l'amplitude d'anisotropie obtenue varie entre 0.5 et 1. Ceci représente une



première approximation utilisée pour le modèle. Pour l'éprouvette étudiée, l'amplitude d'anisotropie varie entre quasiment 0 et 0.7. On peut alors noter les différences d'amplitude qui soulignent la difficulté à modéliser le matériau.



(a) Anisotropie locale de l'éprouvette



(b) Amplitude de l'anisotropie locale

Figure 5.4 – Anisotropie locale et amplitude de l'anisotropie de l'éprouvette avant essai de compression : orientation exprimée en degrés, paramètres de calcul : taille de ZE =  $32 \times 32$  pixels,  $\delta = 32$  pixels, référence d'orientation = horizontale.

### 5.2.1 Résultats expérimentaux

Au chapitre 4, les champs de déformation mesurés ont été présentés pour différents niveaux de déformation globale imposée. Étant donné que l'approche présentée ici se limite au domaine élastique, la courbe des efforts normés en fonction de la déformation globale appliquée (figure 5.5), tracée à partir des points correspondant aux

prises d'images définit le nombre d'images appartenant au domaine élastique. Les champs de déplacements déterminés par corrélation d'images sont alors représentés figure 5.6 pour différents niveaux de déformation globale imposée dans le domaine élastique :  $-2.5\%$ ,  $-5\%$  et  $-7.5\%$ . Les deux premiers points correspondent parfaitement au domaine élastique, le dernier point ( $-7.5\%$ ) étant positionné à la fin du domaine.

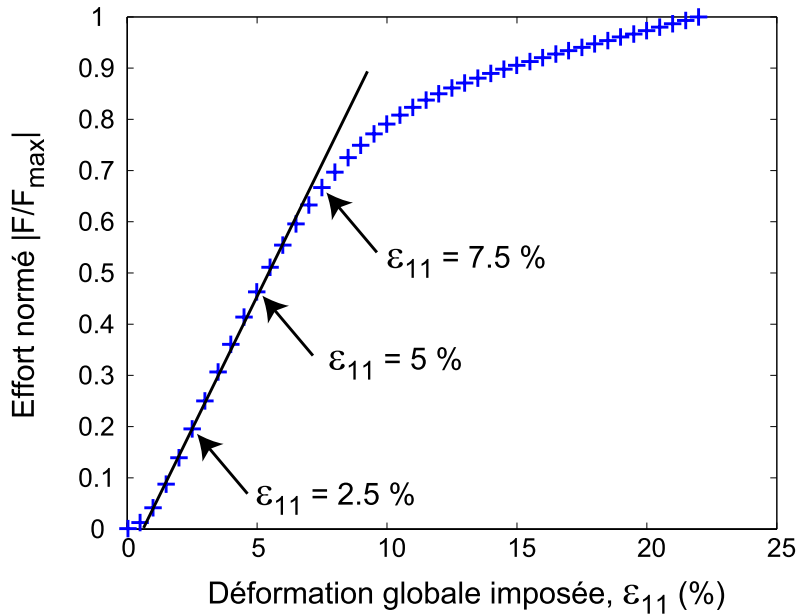


Figure 5.5 – Effort normé en fonction de la déformation globale imposée pour essai de compression sur laine de verre crêpée. Chaque point correspond à l'acquisition d'une photo de l'éprouvette.

Sur les champs de déplacement mesurés obtenus par corrélation d'images (figure 5.6), exprimés en pixels, on observe, pour les différents niveaux de déformation globale, un champ de déplacement vertical homogène à la surface de l'éprouvette (figures 5.7(a), 5.7(c) et 5.7(e)). Concernant les champs de déplacement mesurés par corrélation d'images dans la direction transverse, les niveaux de déplacements atteints sont nettement inférieurs aux niveaux obtenus dans la direction de sollicitation, mais des hétérogénéités apparaissent en surface.

### 5.2.2 Résultats des simulations

Le même essai a été simulé en utilisant l'approche par éléments finis développée ici et tenant compte de l'anisotropie locale et de son amplitude en surface de l'éprouvette. Les champs de déplacements obtenus pour trois niveaux de déformation choisis sont présentés sur la figure 5.7. On se propose maintenant de comparer

## 5. Relations entre anisotropie locale et performances mécaniques

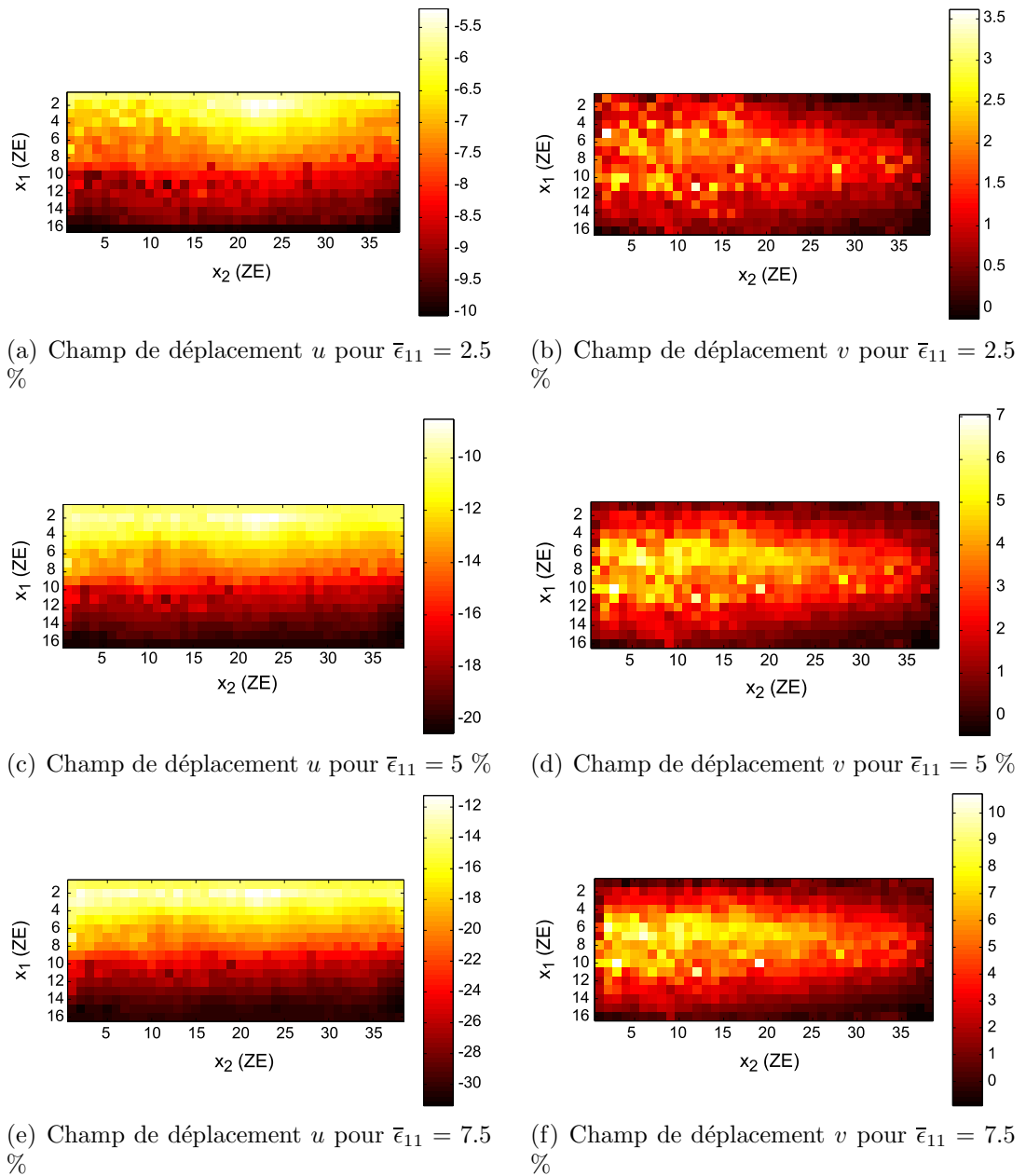


Figure 5.6 – Champs de déplacement mesurés en pixels pour différents niveaux de déformation globale. Paramètres de corrélation : taille de ZE =  $32 \times 32$  pixels,  $\delta = 32$  pixels. Échelle : 1 pixel  $\Leftrightarrow$  0.16 mm.

les champs obtenus, en séparant les champs dans la direction de sollicitation ( $u$ ) et les champs dans la direction transverse ( $v$ ).

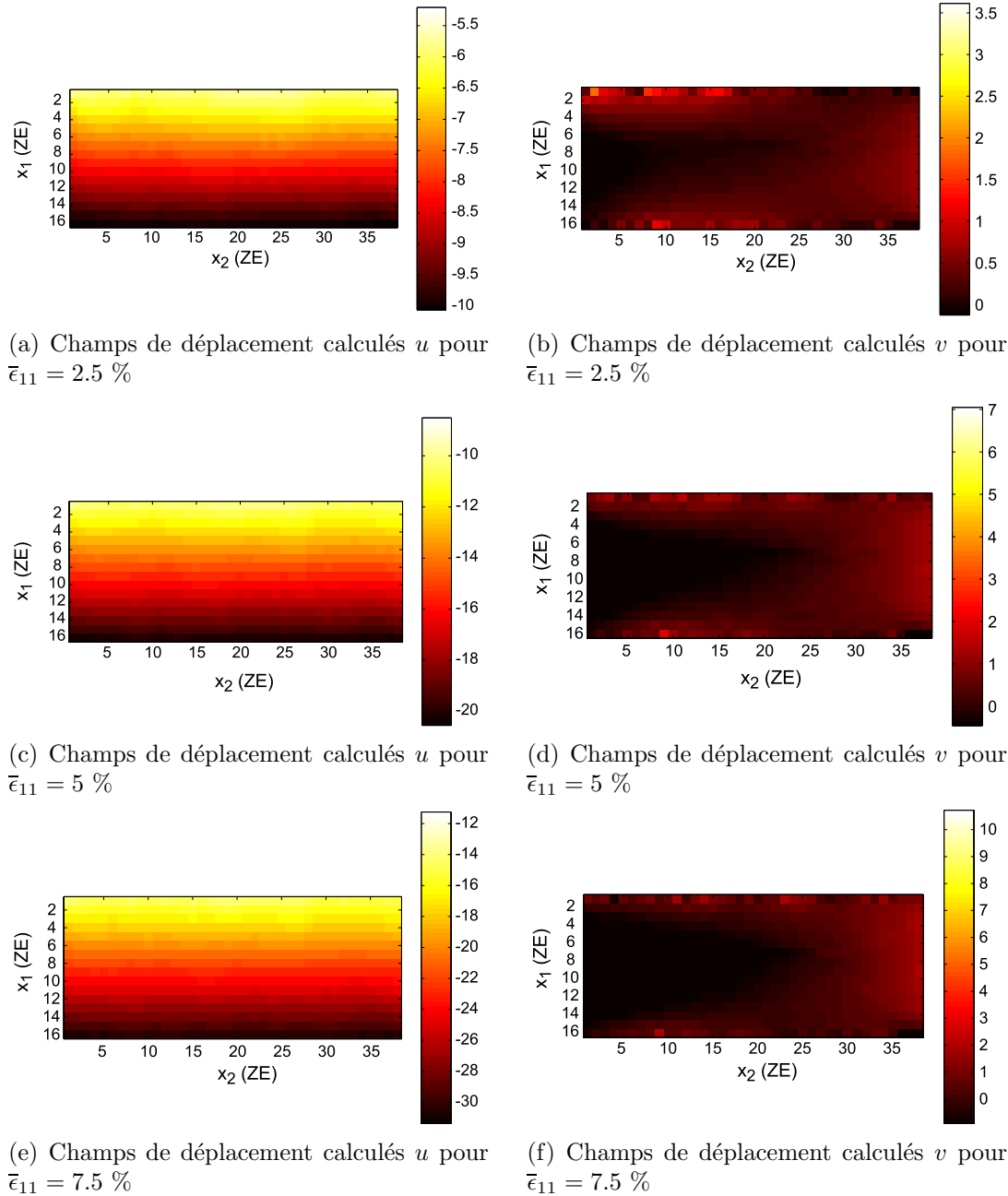


Figure 5.7 – Champs de déplacement calculés pour différents niveaux de déformation globale. Paramètres de corrélation : taille de ZE =  $32 \times 32$  pixels,  $\delta = 32$  pixels. Échelle : 1 pixel  $\Leftrightarrow$  0.16 mm.

### 5.2.2.1 Dans la direction de sollicitation

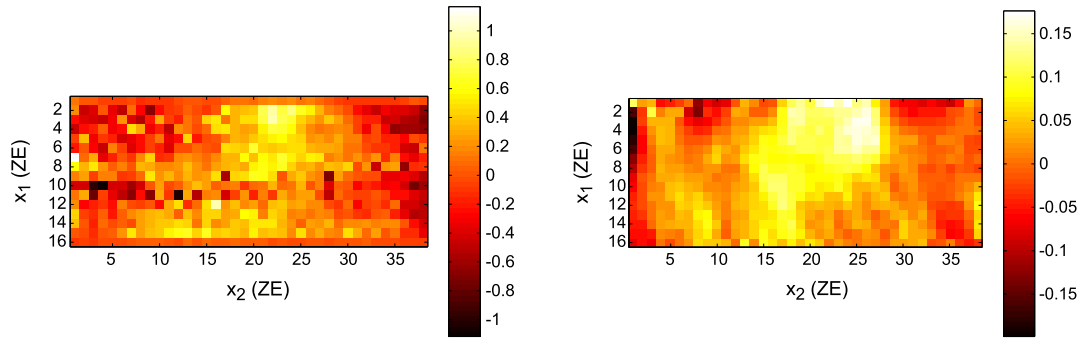
Si l'on compare les champs simulés à ceux obtenus par corrélation d'images correspondant aux résultats expérimentaux (figure 5.6), une première comparaison visuelle fournit un bon estimateur. Sur la figure 5.7, les mêmes échelles de champs de

déplacement que pour les résultats expérimentaux ont été imposées. Les champs de déplacement dans la direction de sollicitation (champs  $u$ ) sont proches et homogènes, mais les champs obtenus restent dominés par la sollicitation imposée. Par ailleurs, on retrouve bien, sur les bords supérieur et inférieur de l'éprouvette, les mêmes déplacements correspondant aux conditions aux limites imposées dans la modélisation numérique.

Étant donné que les champs verticaux observés, que ce soit numériquement ou expérimentalement, sont dominés par le déplacement imposé, on enlève aux champs mesurés et calculés, les déplacements, exprimés en pixels, correspondant à une déformation homogène due à la sollicitation. Cette opération fera alors apparaître les hétérogénéités du champ de déplacement. La figure 5.8 présente les fluctuations obtenues pour les champs mesurés et calculés. On observe alors des hétérogénéités de déplacement plus importantes pour les champs mesurés. L'amplitude de ces hétérogénéités est à comparer à l'incertitude de mesure. Pour l'image analysée, la même méthode pour évaluer les incertitudes en déplacement et en déformation que celle développée en annexe B est utilisée. L'incertitude moyenne en déplacement obtenue ici est  $2.75 \times 10^{-2}$  pixel. Cette incertitude reste bien inférieure à l'amplitude des hétérogénéités observées. À titre indicatif, l'incertitude moyenne en déformation obtenue pour l'image analysée est inférieure à  $10^{-3}$ . On suppose par la suite que cette analyse d'incertitude est valable pour toutes les images étudiées au cours du chapitre. L'amplitude des hétérogénéités obtenues pour les champs calculés est moins importante. On observe par ailleurs, sur les champs mesurés que ces fluctuations peuvent être divisées en deux zones, supérieure et inférieure de l'éprouvette, que l'on peut faire correspondre avec l'anisotropie locale de l'éprouvette. Cette observation est plus délicate en ce qui concerne le champ calculé.

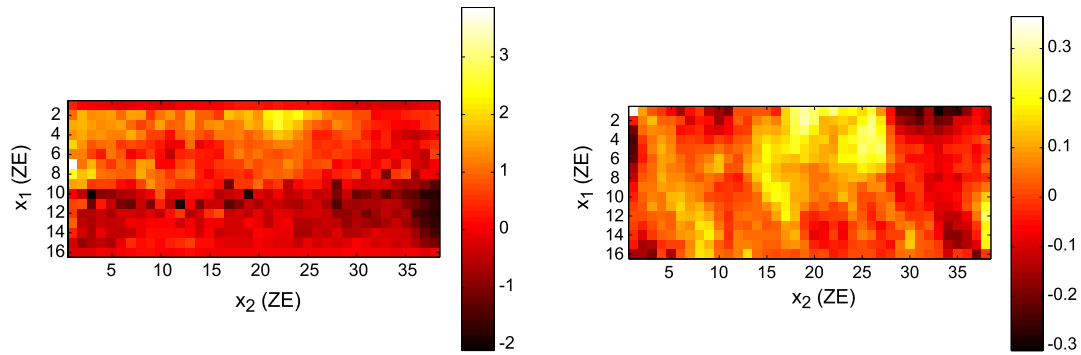
### 5.2.2.2 Dans la direction transverse

Si l'on compare dans un deuxième temps les champs de déplacement mesurés et calculés dans la direction transverse, on observe quantitativement des résultats relativement éloignés (figures 5.6 et 5.7). En effet, pour les deux figures, les mêmes échelles ont été imposées, si bien que les hétérogénéités que l'on voit apparaître sur les champs calculés pour les trois niveaux de déformation choisis sont écrasées. Si l'on essaie de comparer les résultats de manière qualitative, et si l'on laisse l'échelle des déplacements transverses en pixels libre, les résultats issus de la modélisation numérique sont représentés sur la figure 5.9. On observe alors que pour une valeur déformation globale imposée trop faible, les déplacements dans la direction transverse sont d'amplitude faible. Si l'on considère les résultats pour une déformation globale de 7.5%, et que l'on compare qualitativement le champ obtenu au champ mesuré, on observe alors que les zones où le déplacement en valeur absolue est le plus élevé sont identiques.



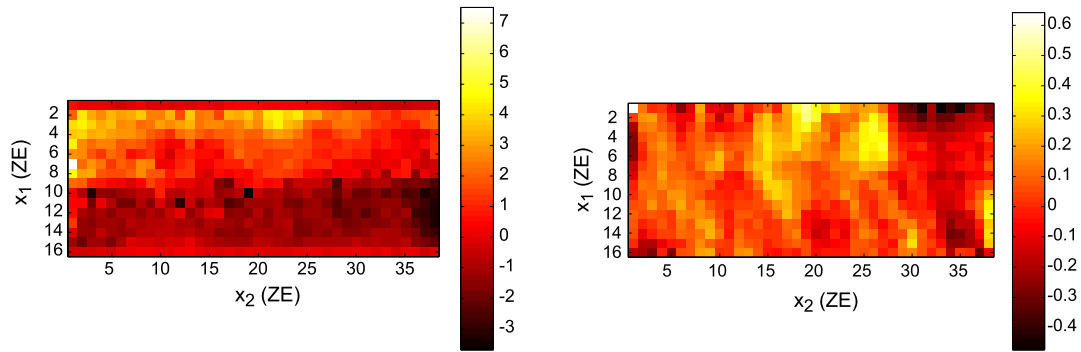
(a) Hétérogénéités du champ de déplacement mesuré dans la direction de sollicitation pour  $\bar{\epsilon}_{11} = 2.5 \%$

(b) Hétérogénéités du champ de déplacement calculé dans la direction de sollicitation pour  $\bar{\epsilon}_{11} = 2.5 \%$



(c) Hétérogénéités du champ de déplacement mesuré dans la direction de sollicitation pour  $\bar{\epsilon}_{11} = 5 \%$

(d) Hétérogénéités du champ de déplacement calculé dans la direction de sollicitation pour  $\bar{\epsilon}_{11} = 5 \%$



(e) Hétérogénéités du champ de déplacement mesuré dans la direction de sollicitation pour  $\bar{\epsilon}_{11} = 7.5 \%$

(f) Hétérogénéités du champ de déplacement calculé dans la direction de sollicitation pour  $\bar{\epsilon}_{11} = 7.5 \%$

Figure 5.8 – Fluctuation des champs de déplacement mesuré et calculé dans la direction de sollicitation pour différents niveaux de déformation globale imposée.

Pour évaluer les performances de la modélisation on définit une erreur relative en déplacement :

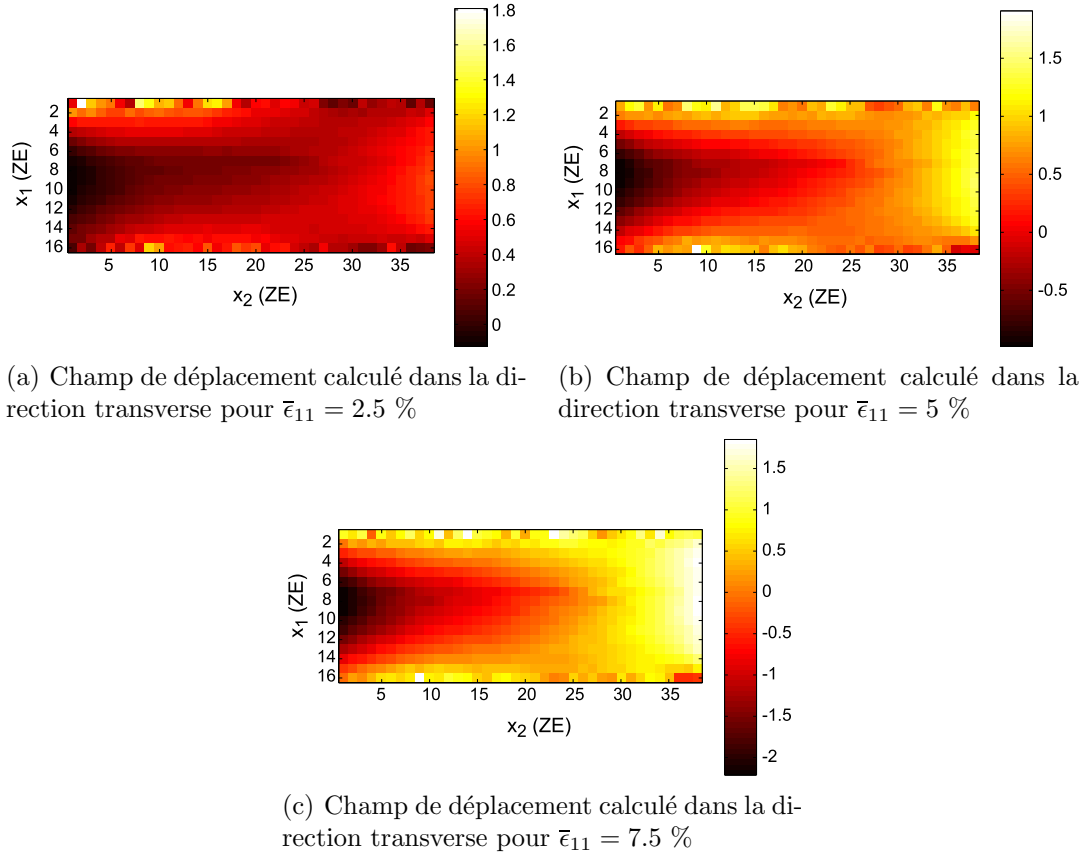


Figure 5.9 – Champ de déplacement calculés en pixels pour différents niveaux de déformation globale.

$$Err = \left\langle \frac{\|U_{calc} - U_{mes}\|}{\|U_{mes}\|} \right\rangle \quad (5.24)$$

où  $U_{calc}$  représente les déplacements calculés et  $U_{mes}$  les déplacements mesurés. Pour une déformation globale de 2.5 %, cette erreur est de 14.5 %. Elle augmente ensuite pour les différentes images analysées : pour une déformation de 5 %, elle est de 19.3 % et pour une déformation de 7.5 %, elle atteint 21.6 %. Cette erreur est relativement élevée, mais peut s'expliquer par la grande dispersion obtenue sur les valeurs des paramètres élastiques identifiés grâce aux essais sur matériaux non crêpés. D'autres phénomènes interviennent également lors d'un essai de compression que l'on n'a pas pris en compte, comme une non-linéarité géométrique voire matérielle. La modélisation effectuée est donc insuffisante, et on se propose maintenant de revenir sur les paramètres élastiques d'un produit non crêpé grâce à une procédure d'identification inverse en comparant les résultats expérimentaux et numériques correspondant à un essai de compression sur laine de verre crêpée.

### 5.2.3 Procédure d'identification

Disposant des résultats d'essais mécaniques sur laine de verre crêpée, l'analyse par corrélation d'images numériques fournit les champs de déplacement mesurés. Ces champs de déplacement fournissent plus de 500 points de mesure indépendants. Par ailleurs, l'outil de modélisation présenté donne accès aux champs de déplacement calculés dans l'hypothèse où la sollicitation reste dans le domaine élastique. Les paramètres élastiques des matériaux non crêpés, identifiés au chapitre 4 sont les seuls paramètres mesurés utilisés pour la modélisation. On se propose de revenir sur ces paramètres en effectuant une identification inverse, c'est-à-dire en minimisant, par rapport aux paramètres élastiques, l'écart entre les champs calculés et les champs mesurés. Cette identification nécessite l'utilisation d'une méthode numérique adaptée.

Il existe plusieurs stratégies destinées spécifiquement à l'identification de paramètres à partir de mesures de champs cinématiques. On peut citer, parmi ces techniques, le recalage de modèles éléments finis (RMEF [63, 64]), la minimisation d'une fonctionnelle à base d'erreur en relation de comportement (MERC [65, 66, 67]) ou la méthode des champs virtuels (MCV [68]) qui sont potentiellement applicables ici. L'utilisation de ces techniques nécessite la connaissance d'un champ cinématique. Certaines font appels au champ de déplacement et d'autres au champ des déformations. Le calcul du champ des déformations à partir du champ des déplacements mesurés faisant intervenir une dérivation numérique, les techniques basées sur les champs des déformations sont éliminées ici car elles sont plus sensibles au bruit de mesure.

La MERC est applicable à tout problème d'identification pour lequel des données surabondantes sont disponibles, sans être *a priori* des mesures de champ. Cette méthode a notamment été utilisée à partir de données vibratoires [69, 70] ou pour l'identification de modèles de comportement : dans le cas isotrope avec les travaux de Calloch *et al.* [65] pour lesquels le champ de déplacement est utilisé ou ceux de Geymonat *et al.* [66] pour lesquels le champ des déformations est utilisé et dans le cas anisotrope avec les travaux de Pagano *et al.* [67]. Par ailleurs, la méthode des champs virtuels est applicable aux situations où le champ de déformation est expérimentalement connu : on ne la retiendra donc pas ici.

Finalement, parce qu'elle fait appel aux champs de déplacement et pour sa simplicité de mise en œuvre, la méthode du recalage de modèles éléments finis est la technique choisie.

#### 5.2.3.1 Mise en œuvre

Le problème à traiter est de minimiser l'écart entre les champs mesurés et les champs calculés par éléments finis qui correspondent à un jeu de paramètres élas-



tiques  $\alpha$

$$\Phi(\alpha) = \sum_{ddl} \|\mathbf{u}_{id}(\alpha) - \mathbf{u}_{mes}\|^2 \quad (5.25)$$

où la norme  $\|\cdot\|$  peut être la norme classique 2,  $\mathbf{u}_{id}$  les déplacements calculés en utilisant le jeu de paramètres  $\alpha$  et  $\mathbf{u}_{mes}$  les déplacements mesurés par corrélation d'images numériques. On appelle  $\alpha_0$  le jeu de paramètres élastiques identifiés par les essais mécaniques sur matériaux non crêpés. Un nouveau jeu de paramètres  $\alpha$  peut s'écrire

$$\alpha = \alpha_0 + d\alpha. \quad (5.26)$$

Si l'on écrit les déplacements  $\mathbf{u}_{id}$  pour ce nouveau jeu de paramètres, et que l'on développe l'expression au premier ordre, cette perturbation s'écrira

$$\mathbf{u}_{id}(\alpha) \simeq \mathbf{u}_{id}(\alpha_0) + d\alpha \frac{\partial \mathbf{u}_{id}}{\partial \alpha}(\alpha_0). \quad (5.27)$$

Or, les champs de déplacements  $\mathbf{u}_{id}$  sont solutions du problème par éléments finis donc

$$\mathbf{K}(\alpha_0)\mathbf{u}_{id}(\alpha_0) = \mathbf{F}, \quad (5.28)$$

où  $\mathbf{K}$  représente la matrice de rigidité globale assemblée à partir des matrices élémentaires et  $\mathbf{F}$  le vecteur des efforts inconnus. En différenciant cette expression par rapport aux paramètres  $\alpha$ , on obtient au premier ordre

$$\mathbf{K}(\alpha_0) \frac{\partial \mathbf{u}_{id}}{\partial \alpha}(\alpha_0) = -\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \alpha}(\alpha_0)\mathbf{u}_{id}(\alpha_0), \quad (5.29)$$

ce qui permet d'en déduire l'expression de  $\frac{\partial \mathbf{u}_{id}}{\partial \alpha}(\alpha_0)$  à partir de l'expression de  $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \alpha}(\alpha_0)$ . Cette dernière se calcule en remarquant qu'au premier ordre

$$\mathbf{K}(\alpha) \simeq \mathbf{K}(\alpha_0) + d\alpha \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \alpha}(\alpha_0). \quad (5.30)$$

Une fois que l'expression de  $\frac{\partial \mathbf{u}_{id}}{\partial \alpha}(\alpha_0)$  peut être évaluée, l'équation (5.27) permet alors de calculer les champs  $\mathbf{u}_{id}$  correspondant au nouveau jeu de paramètres  $\alpha$ . Si le champ obtenu permet de diminuer la valeur de  $\Phi(\alpha)$ , une nouvelle itération est effectuée avec comme jeu de paramètres de départ les paramètres  $\alpha$  que l'on vient d'identifier. La procédure se poursuit tant que l'écart entre les champs identifiés et mesurés diminue.

### 5.2.3.2 Résultats

Cette procédure a été appliquée à l'essai de compression présenté auparavant. Il existe 4 paramètres élastiques sur lesquels l'identification peut être effectuée. Ces

paramètres sont définis à une constante multiplicative près, donc seulement trois d'entre eux peuvent être calculés de manière indépendante. Étant donné que l'essai analysé est de compression, on suppose que le paramètre qui aura le moins d'influence sur les résultats correspond au module de cisaillement  $s_{uu}$ . Lorsque l'identification est faite sur les trois paramètres restants, l'algorithme devient instable. On choisit donc d'effectuer une identification sur seulement deux paramètres : les modules d'élasticité  $s_{nn}$  et  $s_{tt}$  dont l'incidence sur les champs calculés est plus importante et donnant l'erreur RMS la plus faible. La valeur des paramètres fixes sont alors  $s_{nt} = 0.09$  MPa et  $s_u = 1.9$  MPa, valeurs identifiées au chapitre 4. L'incrément choisi pour la variation des paramètres élastiques  $d\alpha$  est égal à 1 %.

Pour les trois incréments de déformation globale choisis (2.5 %, 5 % et 7.5 %), la procédure d'identification est utilisée. Pour une déformation globale de 2.5%, l'algorithme converge en 6 itérations et les valeurs des paramètres identifiés sont

$$\begin{cases} s_{nn} = 1.72 \text{ MPa} \\ s_{tt} = 0.14 \text{ MPa} \end{cases} \quad (5.31)$$

Les champs de déplacement obtenus sont présentés en figure 5.10. Dans la direction de sollicitation, seule est présentée la partie hétérogène du champ, étant donné que le champ de déplacement total est gouverné par le déplacement imposé sur les bords haut et bas. Pour une meilleure visibilité, les mêmes échelles sont utilisées pour chacune des directions. Pour les champs dans la direction de sollicitation, les différences entre champs mesurés et identifiés sont relativement importantes. Si l'on compare par ailleurs les champs obtenus dans la direction transverse, on remarque alors que la concordance entre les champs mesurés et identifiés est meilleure. Les niveaux de déplacement transverse atteints, exprimés en pixel, sont du même ordre de grandeur que les fluctuations des champs de déplacement dans la direction de sollicitation. En terme d'erreur relative en déplacement, pour une déformation globale de 2.5 %, elle est de 6.5 %. Cette valeur est bonne compte tenu de la dispersion observée sur les résultats des essais d'identification et de la complexité de la microstructure et du bruit.

Pour une déformation globale de 5 %, l'algorithme converge en 17 itérations et les valeurs des paramètres identifiés sont

$$\begin{cases} s_{nn} = 0.45 \text{ MPa} \\ s_{tt} = 0.047 \text{ MPa} \end{cases} \quad (5.32)$$

Ces valeurs sont très différentes de celles obtenues pour une déformation globale imposée de 2.5 %. Cependant, leur rapport est du même ordre de grandeur que précédemment. Les champs de déplacement obtenus sont présentés figure 5.11. On observe alors comme précédemment une bonne corrélation entre les champs mesurés et identifiés lorsque l'on regarde les champs dans la direction transverse, mais des résultats plus mitigés dans la direction de sollicitation. En terme d'erreur relative en déplacement, pour une déformation globale imposée de 5 %, elle est de 6.9 %, ce

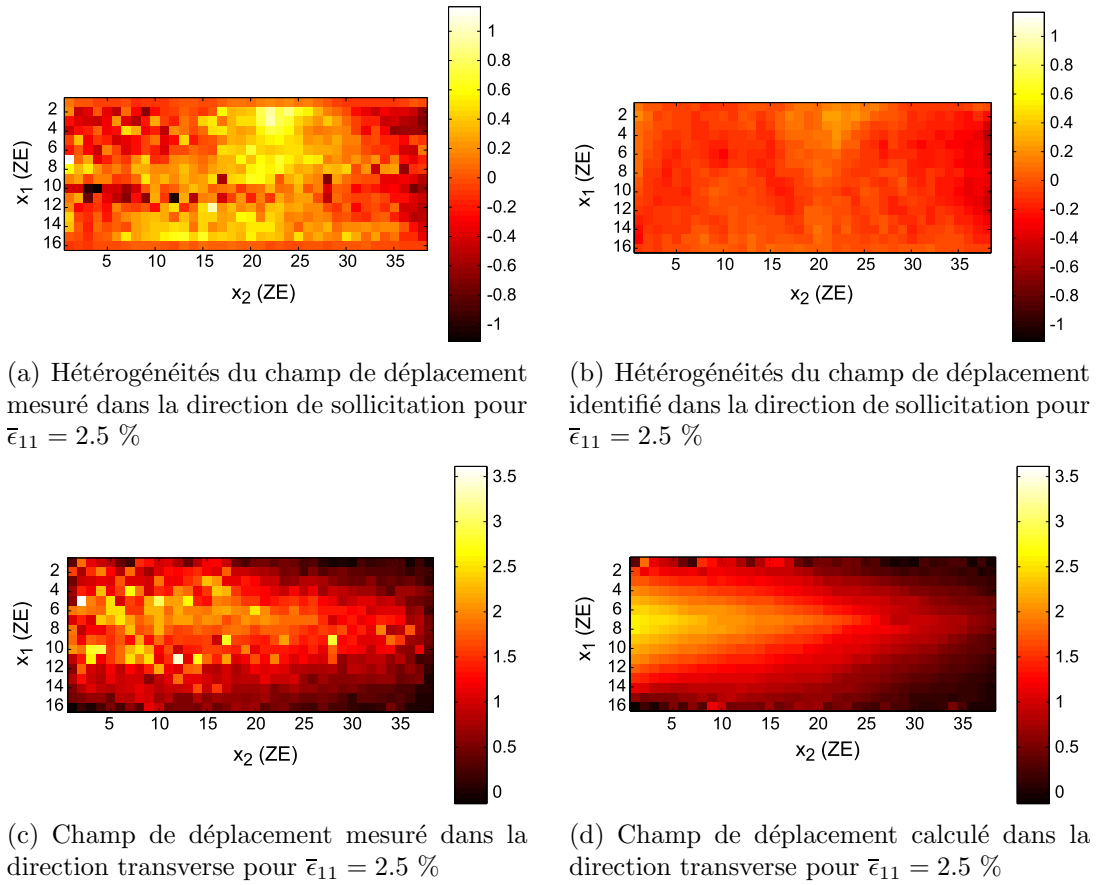


Figure 5.10 – Champs de déplacement mesuré et identifié, en pixels, pour une déformation globale imposée de  $\bar{\epsilon}_{11} = 2.5 \%$ .

qui reste faible.

Enfin, pour une déformation globale de 7.5 %, l'algorithme converge en 27 itérations et les valeurs des paramètres identifiés sont

$$\begin{cases} s_{nn} = 0.43 \text{ MPa} \\ s_{tt} = 0.053 \text{ MPa} \end{cases} \quad (5.33)$$

Ces valeurs sont cette fois proches de celles obtenues pour une déformation globale imposée de 5 %. Les champs de déplacement obtenus sont présentés figure 5.12. L'erreur relative en déplacement correspondant à ce niveau de déformation est de 8.9 %.

Les valeurs obtenues sont donc proches pour des déformations de 5 % et 7.5 %, mais assez éloignées de celles identifiées pour 2.5 % de déformation. On peut supposer que le début du domaine élastique correspond à des rotations importantes de la texture. Une fois cette accommodation effectuée, le domaine élastique se poursuit,

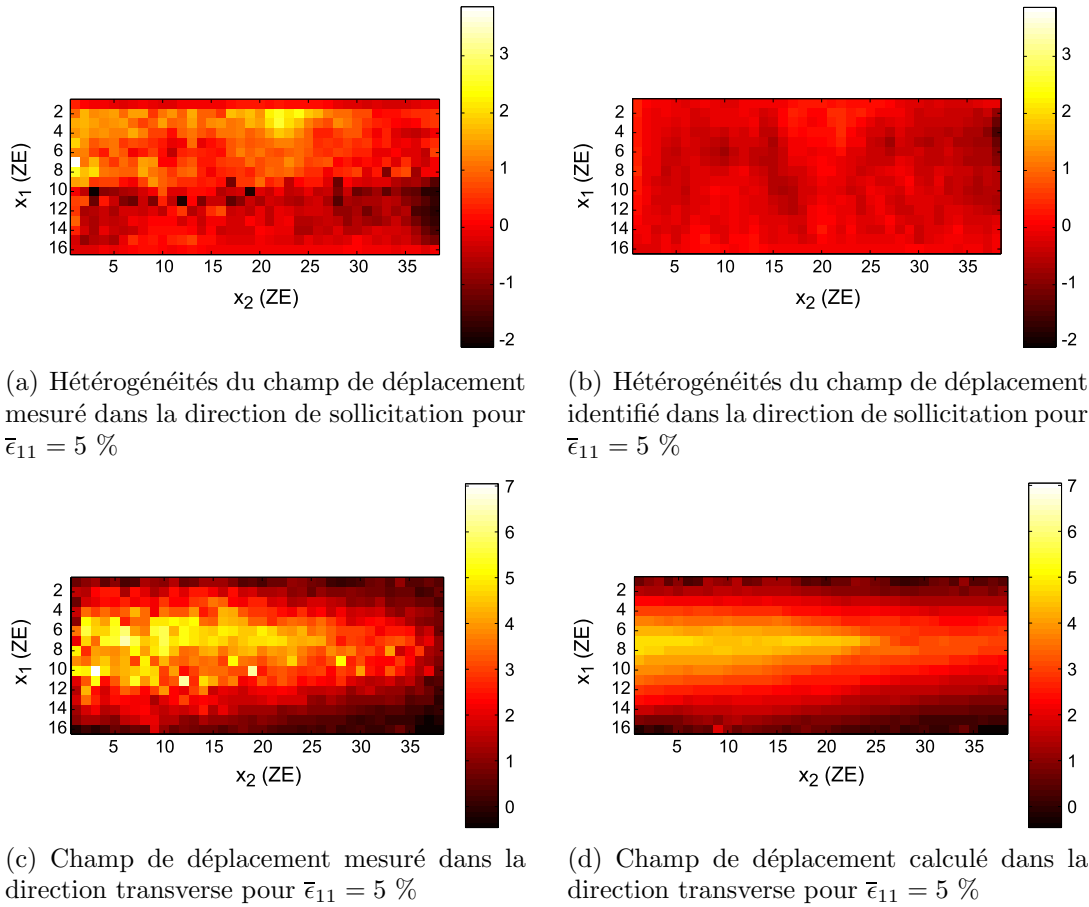


Figure 5.11 – Champs de déplacement mesuré et identifié, en pixels, pour une déformation globale imposée de  $\bar{\epsilon}_{11} = 5 \%$ .

et une plus grande stabilité est observée sur les coefficients identifiés. Ceci peut être observé sur la figure 5.13 où les résultats de l'identification des paramètres  $s_{nn}$  et  $s_{tt}$  sont représentés en fonction du niveau de déformation globale dans le domaine élastique. On peut noter une discontinuité pour les deux paramètres identifiés : pour une déformation inférieure à 4 %, les valeurs identifiées varient fortement selon la déformation considérée et pour une déformation supérieure à 4 %, une plus grande stabilité est observée dans les résultats : les rotations de la texture restantes sont alors beaucoup plus rares et localisées et n'affectent pas les résultats de l'identification. On peut par ailleurs noter que l'erreur relative en déplacement obtenue est inférieure à 10 %, ce qui, étant donné la complexité de la microstructure du matériau étudié reste faible. Enfin, on peut également remarquer que, dans les trois cas étudiés, le rapport entre les deux modules d'élasticité est toujours proche de 10. Le matériau étudié serait donc 10 fois plus raide dans la direction des fibres que dans la direction perpendiculaire à celle des fibres.

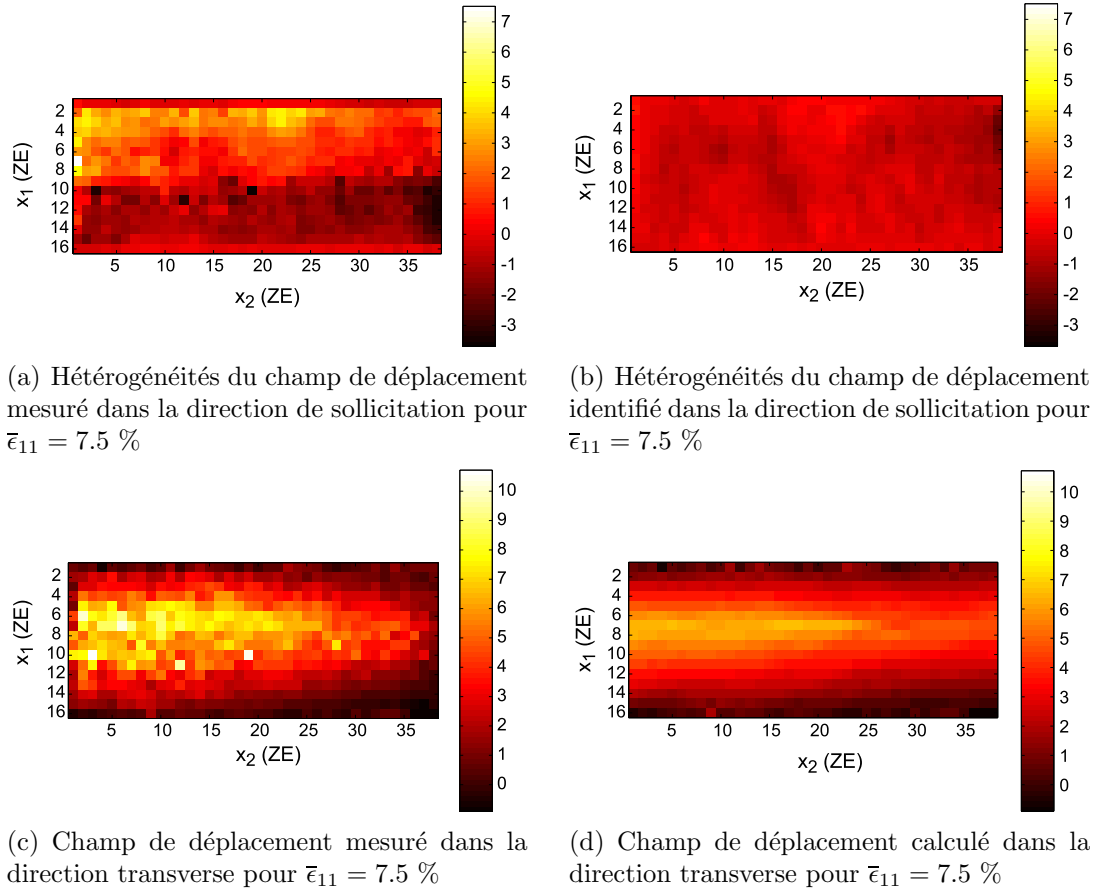


Figure 5.12 – Champs de déplacement mesuré et identifié, en pixels, pour une déformation globale imposée de  $\bar{\epsilon}_{11} = 7.5 \%$ .

L'évolution des valeurs de modules identifiés ou celle de l'erreur relative en déplacement en fonction du nombre d'itérations est présentée sur les figures 5.14(a), 5.14(b) et 5.15. On peut alors noter que l'évolution du module d'élasticité  $s_{nn}$  obtenu en fonction du nombre d'itérations pour une déformation globale de 5 % et 7.5 % est assez proche et présente une première phase où les modules augmentent avant de diminuer. Cette première phase est également commune avec l'évolution de  $s_{nn}$  pour une déformation globale de 2.5 %. Pour les modules d'élasticité  $s_{tt}$ , on observe, figure 5.14(b) que l'évolution en fonction du nombre d'itérations est assez proche pour les trois niveaux de déformation étudiés. Ces premiers résultats d'identification restent donc encourageants malgré la dispersion obtenue sur les paramètres élastiques. Enfin, la sensibilité de la méthode au jeu de paramètres initial a été testée. Il apparaît alors que pour des valeurs faibles de la déformation globale imposée (inférieure à 4 %), les valeurs identifiées dépendent fortement du jeu de paramètres initial. Cependant pour des déformations plus importantes, la méthode est plus robuste et les jeux de paramètres identifiés présentent une bonne répétabilité.

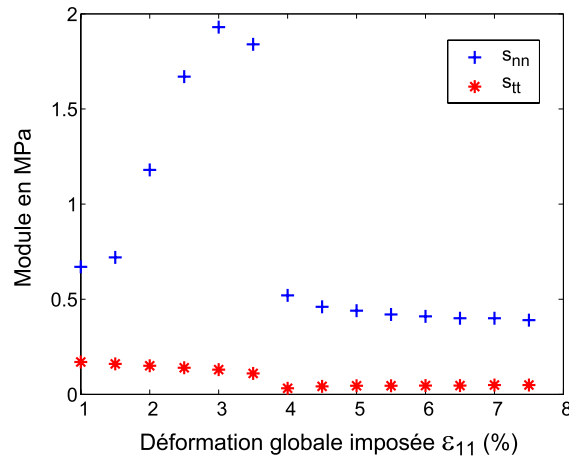


Figure 5.13 – Résultats de l'identification des paramètres  $s_{nn}$  et  $s_{tt}$  obtenus pour différents niveaux de déformation globale  $\epsilon_{11}$  dans le domaine élastique.

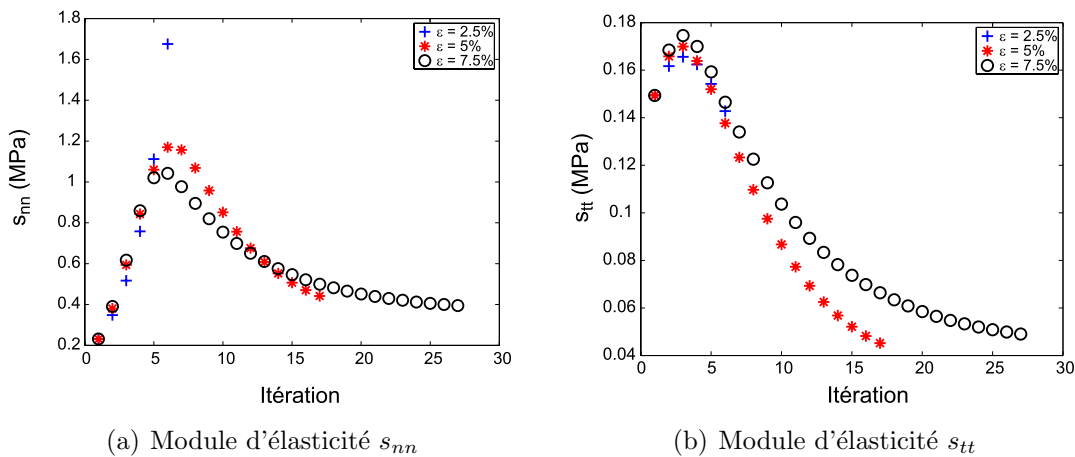


Figure 5.14 – Évolution des modules d'élasticité en fonction du nombre d'itérations pour les trois niveaux de déformation globale étudiés.

Cette procédure d'identification a également été utilisée sur un autre échantillon de laine minérale, crêpée avec des paramètres différents. L'essai de compression correspondant a également été effectué et le domaine élastique reste proche de celui de l'essai précédent. La figure 5.16 présente une photo de l'éprouvette avant essai : la texture de cette nouvelle éprouvette est très fine avec des circonvolutions à petite échelle. La méthode de détermination de l'anisotropie locale et de l'amplitude d'anisotropie associée a également été utilisée sur ce produit. Les résultats sont présentés sur la figure 5.17. Une discontinuité dans le champ d'orientation peut clairement être identifiée entre la partie supérieure et la partie inférieure de l'éprouvette. Cette même discontinuité apparaît également sur l'image de l'éprouvette vierge. Les amplitudes d'anisotropie associées à l'orientation ont des valeurs inférieures à 0.5, ce

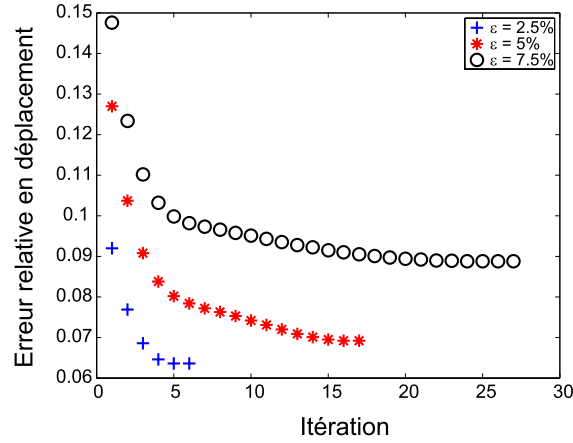


Figure 5.15 – Évolution de l'erreur relative en déplacement en fonction du nombre d'itération pour les trois niveaux de déformation globale étudiés.

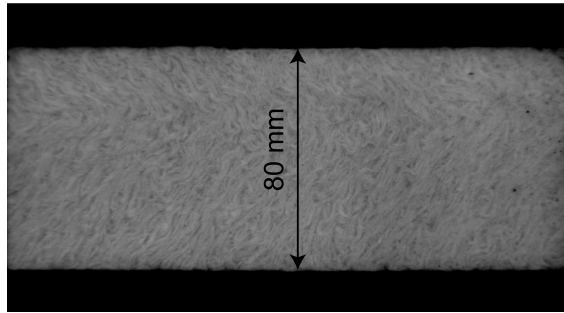


Figure 5.16 – Éprouvette de laine de verre testée en compression.

qui signifie que l'anisotropie n'est pas clairement marquée.

Les résultats de la procédure d'identification sont présentés sur la figure 5.18 pour une déformation globale imposée de 2.5 %. Comme précédemment, les paramètres élastiques fixes sont  $s_{nt} = 0.09$  MPa et  $s_u = 1.9$  MPa, et les paramètres sur lesquels est effectuée la minimisation sont  $s_{nn}$  et  $s_{tt}$ . L'erreur relative en déplacement obtenue pour ce nouvel essai est de 3.8 %, et les paramètres élastiques identifiés en 48 itérations sont

$$\begin{cases} s_{nn} = 0.56 \text{ MPa} \\ s_{tt} = 0.072 \text{ MPa} \end{cases} \quad (5.34)$$

Ces paramètres sont encore différents de ceux identifiés pour l'essai précédent, même pour une déformation globale imposée identique. On remarque toutefois que pour ce nouvel essai, le rapport entre les deux modules est encore proche de 10. L'erreur obtenue pour ce deuxième essai est encourageante, néanmoins, la différence entre les résultats obtenus montrent que la modélisation utilisée n'est pas complètement suffisante pour rendre compte de la réponse du matériau à une sollicitation de com-

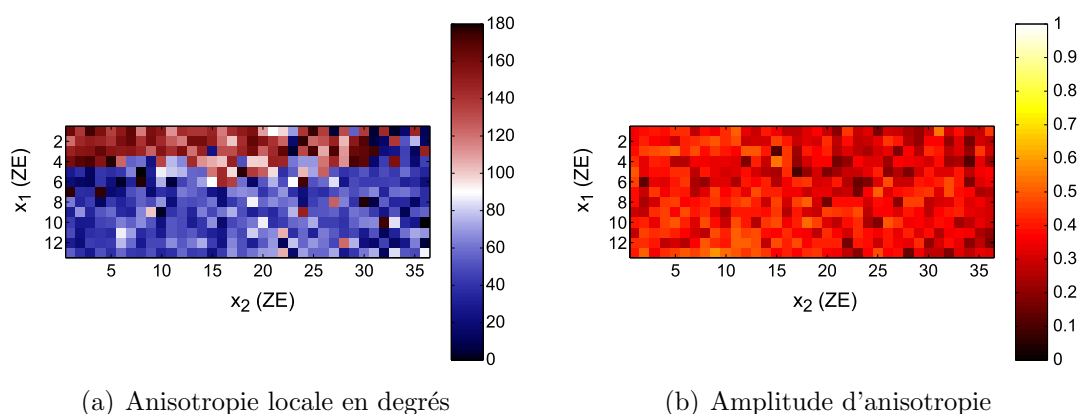


Figure 5.17 – Anisotropie locale et amplitude de l'anisotropie de l'éprouvette avant essai de compression : orientation exprimée en degrés, paramètres de calcul : taille de ZE =  $32 \times 32$  pixels,  $\delta = 32$  pixels, référence d'orientation = horizontale.

pression.

## 5.3 Conclusion

Une modélisation par éléments finis du comportement élastique anisotrope des laines minérales crêpées a été présentée : son originalité repose sur la prise en compte de l'anisotropie locale des éprouvettes étudiées, ainsi que l'amplitude d'anisotropie associée. En effet, on suppose que localement, le matériau peut être considéré comme non crêpé ayant une orientation connue, mais une amplitude d'anisotropie inférieure à 1. Suivant cette direction d'orientation, le matériau suit une loi de comportement élastique isotrope transverse dont les paramètres ont été identifiés au chapitre précédent. Cette modélisation donne de premiers résultats qui peuvent être comparés aux résultats de l'essai mécanique correspondant. On s'aperçoit alors que les réponses expérimentales et numériques sont éloignées, ce qui peut s'expliquer par la difficulté à identifier les paramètres élastiques du matériau non crêpé qui présentent une dispersion importante.

Dans le but de revenir sur les paramètres élastiques d'un matériau non crêpé identifiés expérimentalement, une procédure d'identification basée sur le recalage d'un modèle par éléments finis a été développée. Elle a alors été mise en œuvre sur l'essai de compression utilisé précédemment pour identifier les paramètres élastiques du matériau. L'erreur relative en déplacement obtenue reste inférieure à 10 % quelle que soit l'image analysée et représente un premier résultat encourageant compte tenu de la complexité de la microstructure étudiée. Un deuxième essai de compression sur un matériau obtenu en utilisant des paramètres de crêpage différents a alors été étudié. La même dispersion sur les résultats a été obtenue même si l'erreur relative en déplacement reste faible (inférieure à 5 %).



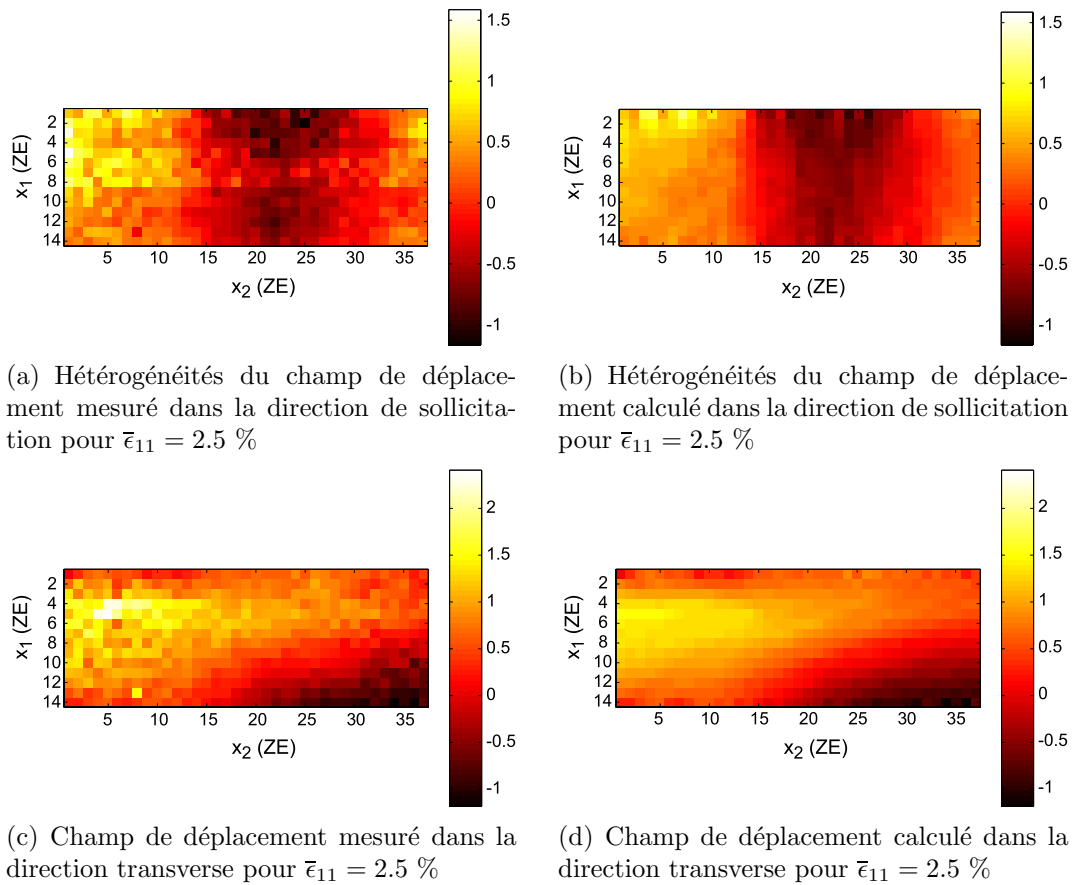


Figure 5.18 – Champs de déplacement mesuré et calculé, en pixels, pour un essai de compression sur une laine de verre crêpée avec des paramètres de crêpage différents. Déformation globale imposée  $\bar{\epsilon}_{11} = 2.5 \%$ .

Aujourd’hui, le modèle développé donne des résultats encourageants mais reste insuffisant pour modéliser la réponse du matériau à une sollicitation mécanique. En effet, même limité au domaine élastique, ce modèle ne prend pas en compte les non-linéarités géométriques du matériau, telles que les rotations locales de la texture qui interviennent dès le domaine élastique. Or, il semble que l’identification des paramètres élastiques dépende fortement de ces rotations locales : en effet, on observe un première phase dans la réponse élastique du matériau où les paramètres identifiés dépendent fortement de l’image considérée puis une deuxième phase pour laquelle les résultats obtenus présentent une bonne stabilité. Par ailleurs, les champs de déplacement mesurés comportent un bruit de mesure qui n’existe pas sur les champs calculés. Dans le but de réduire ce bruit de mesure, on peut envisager d’utiliser la méthode de filtrage développée au chapitre 3, *i.e.*, le filtre d’intégration complété du *neutral padding*. Ceci pourrait permettre de réduire l’erreur relative en déplacement obtenue.

Ces premiers résultats, encourageants, soulignent toute la complexité du comportement mécanique du matériau étudié. Le modèle présenté est simple, et ne prend pas en compte certains phénomènes qui semblent avoir une répercussion forte sur la réponse du matériau. La prise en compte des non-linéarités géométriques, ainsi que la modélisation du domaine non-linéaire permettra d'améliorer les performances de la méthodes, mais la réalisation d'un essai mécanique virtuel reste encore aujourd'hui ambitieuse pour les matériaux enchevêtrés.



# Conclusion

Plusieurs objectifs avaient été fixés en introduction : le premier concernait l'étude cinématique d'une machine de crêpage, dans le but d'identifier les champs de trajectoires, vitesses et taux de déformation. Plusieurs approches ont alors été présentées, basées sur l'analyse d'un film vidéo réalisé sur ligne de production, au niveau de l'étage de crêpage. Les méthodes proposées ont été validées sur des cas-test et ont ensuite été utilisées sur un film de crêpage. Le champ des taux de déformation en surface du matelas de laine minérale est alors accessible et permettra par la suite d'identifier les zones de la crêpeuse responsables de la texturation du matériau. Enfin, grâce à cette approche, l'influence des différents paramètres de crêpage pourra être quantifiée.

Le deuxième objectif concernait l'analyse de la texture du matériau étudié. En effet, la machine de crêpage confère au matériau sa texture, et celle-ci peut-être reliée aux performances mécaniques du produit fini. Étudier localement l'anisotropie du matériau a alors été le lien entre le procédé de fabrication et les propriétés mécaniques du produit. Plusieurs approches du problème ont été présentées, toutes basées sur l'analyse d'une image de produit et l'une d'entre elles, la méthode complète du tenseur d'anisotropie a été validée sur des images réelles. Elle permet l'analyse de textures très fines et est peu sensible au bruit, qui peut être présent lors de l'acquisition de l'image à analyser (sur ligne de production par exemple). Cet outil fournit alors un champ d'anisotropie locale ainsi qu'une amplitude d'anisotropie associée. On peut donc envisager aujourd'hui d'utiliser cet outil pour comparer des produits de laine minérale fabriqués en utilisant des paramètres de crêpage différents.

Ensuite les essais mécaniques sur laine minérale ont été présentés. Analysés par corrélation d'images numériques, ils ont permis de relier, visuellement, les bandes de localisation de la déformation, dans le cas d'un essai de compression uniaxiale, à l'anisotropie locale de l'éprouvette, déterminée en utilisant l'outil précédemment développé. Ces observations sont possibles dès le domaine élastique, et suggèrent d'effectuer une modélisation du comportement mécanique élastique anisotrope du matériau.

Cette modélisation par éléments finis a enfin été introduite : son originalité repose sur la prise en compte de l'anisotropie locale des éprouvettes étudiées, ainsi

que l'amplitude d'anisotropie associée. On suppose alors que localement le matériau étudié suit une loi de comportement élastique isotrope transverse selon une direction particulière, celle-ci correspondant à la direction d'anisotropie identifiée en utilisant l'outil développé. Le comportement élastique isotrope transverse correspond alors au comportement d'un matériau non crêpé possédant les mêmes propriétés de fabrication que le matériau crêpé associé (même densité, même taux de liant, etc. ). Les paramètres de ce matériau ont été déterminés grâce à des essais d'identification. En comparant les résultats d'un essai de compression aux résultats de la modélisation associée, un écart entre les deux solutions peut être observé. Cette différence peut s'expliquer notamment par la difficulté d'évaluer les paramètres élastiques d'un matériau non crêpé. Dans le but de revenir sur ces paramètres, une procédure d'identification basée sur le recalage d'un modèle éléments finis a été développée. Elle a été mise en œuvre sur l'essai de compression précédemment utilisé. L'erreur relative en déplacement obtenue reste alors inférieure à 10 %, ce qui est encourageant étant donné la complexité de la microstructure étudiée. Aujourd'hui, le modèle développé est encore insuffisant pour rendre compte d'un essai de compression ; certaines évolutions seront nécessaires comme la prise en compte des non-linéarités géométriques qui interviennent dès le domaine élastique, ou encore l'extension du modèle au domaine non-linéaire.

En termes de perspectives à ce travail, certaines évolutions sont encore possibles en ce qui concerne l'étude de la cinématique d'une machine de crêpage. Tout d'abord, à partir des champs déterminés, essayer de quantifier un certain nombre de grandeurs, permettant de relier ces champs calculés aux paramètres de réglage de la machine de crêpage. À plus long terme, on peut aussi penser à essayer de relier les champs déterminés à la texture finale du produit. En parallèle de ces avancées, un retour sur la modélisation est également possible : jusqu'à maintenant, les vitesses ont été supposées portées par la direction de l'écoulement et stationnaire, on pourrait donc envisager de revenir sur ces deux hypothèses. Concernant d'autres perspectives à ce travail, disposant d'un outil d'analyse de texture, on peut envisager d'essayer de mieux comprendre la relation entre les propriétés thermomécaniques du produit et sa structure. Pour cela, plusieurs approches sont possibles :

- On dispose aujourd'hui d'un outil permettant de caractériser une texture 2D. On peut envisager une caractérisation de la texture par (micro)tomographie qui permettra d'étudier la densité et la distribution d'orientations à partir de données tridimensionnelles obtenues par tomographie des rayons X.
- La corrélation d'images numériques fournit des champs de déplacement ou de déformation 2D. À partir des observations obtenues par tomographie, une méthode de mesure par corrélation d'images tridimensionnelle permettra l'identification de phénomènes mécaniques locaux.
- De la même manière, l'identification des phénomènes thermiques locaux sera possible à partir d'une caractérisation des propriétés thermiques du matériau. À partir d'observations en conditions transitoires et stationnaires conduites par

- thermographie IR, le développement de technique d'analyse spatio-temporelle de champs de température permettra de caractériser le champ de température résolu spatialement lors de sollicitations thermiques homogène ou hétérogène.
- Enfin, relier la déformation locale et le champ de température à la texture locale (densité de fibre, de liant, et orientation) fournira un couplage texture / propriétés thermomécaniques.

Ainsi, disposant d'un modèle réaliste de texture, et d'observations sur la relation entre morphologie et propriétés thermomécaniques, on peut penser que, de la même manière que pour les essais mécaniques, la mise en place d'essais virtuels utilisables sur ligne de production et pour la recherche de propriétés thermomécaniques optimales pour différentes applications concernant les laines minérales sera possible.



# Bibliographie

- [1] C. Langlais, S. Klarsfeld, Isolation thermique à température ambiante : Isolants, Technique de l'ingénieur BE9858.
- [2] A. Seghers, Micronaire : a few theoretical physical principles, communication personnelle (2001).
- [3] EURIMA, Association européenne des fabricants de matériaux d'isolation, <http://www.eurima.org/> (2005).
- [4] M. Baudequin, Identification des mécanismes physiques mis en jeu lors de la reprise d'épaisseur de la laine de verre, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI (2002).
- [5] C. Langlais, S. Klarsfeld, Isolation thermique à température ambiante : Propriétés, Technique de l'ingénieur BE9860.
- [6] J.-P. Maricourt, Tel process-products training (2004).
- [7] F. Trdič, B. Širok, P. Bullen, D. Philpott, Monitoring mineral wool production using real-time machine vision, *Real-Time Imaging* 5 (1999) 125–140.
- [8] NF EN 826, Thermal insulating products for building applications - Determination of compression behaviour. (1996).
- [9] NF EN 1067, Thermal insulating products for building applications - Determination of tensile strength perpendicular to faces. (1996).
- [10] R. Adrian, Particle imaging techniques for experimental fluid mechanics, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 123 (1991) 261–304.
- [11] C. Willert, M. Gharib, Digital particle image velocimetry, *Exps. Fluids* 10 (1991) 181–193.
- [12] M. Raffel, C. Willert, J. Kompenhans, *Particle Image Velocimetry, a Practical Guide*, Springer, Berlin (Germany), 1998.
- [13] T. Dudderar, P. Simpkins, Laser speckle photography in a fluid medium, *Nature* 270 (1977) 45–47.
- [14] C. Pickering, N. Halliwell, Speckle laser in fluid flows : signal recovery with two-step processing, *Appl. Opt.* 23 (1984) 1128–1129.
- [15] P. Burt, C. Yen, X. Xu, Local correlation measures for motion analysis : a comparative study, in : *Proceedings IEEE Conf. on Pattern Recognition and Image Processing*, (1982) pp. 269–274.



- [16] W. Peters, W. Ranson, Digital imaging techniques in experimental stress analysis, *Opt. Eng.* 21 (1982) 427–431.
- [17] M. Sutton, W. Wolters, W. Peters, W. Ranson, Determination of displacements using an improved digital correlation method, *Im. Vis. Comp.* 1 (3) (6) (1983) 133–139.
- [18] F. Hild, B. Raka, M. Baudequin, S. Roux, F. Cantelaube, Multi-scale displacement field measurements of compressed mineral wool samples by digital image correlation, *Appl. Optics* 41 (32) (2002) 6815–6828.
- [19] B. Horn, B. Schunck, Determining optical flow, *Artif. Intell.* 17 (1981) 185–203.
- [20] M. Black, Robust incremental optical flow, Ph.d. dissertation, Yale University, New Haven, Conn. (1992).
- [21] A. Mitiche, P. Bouthemy, Computation and analysis of image motion : a synopsis of current problems and methods, *Int. J. Comp. Vision.* 19 (1) (1996) 29–55.
- [22] B. Wagne, S. Roux, F. Hild, Spectral approach to displacement evaluation from image analysis, *Eur. Phys. J. AP* 17 (2002) 247–252.
- [23] A. Rao, *A Taxonomy for Texture Description and Identification*, Springer-Verlag, New York, NY, USA, 1990.
- [24] A. Hanbury, J. Serra, Analysis of oriented textures using mathematical morphology, in : *Vision with Non-Traditionnal Sensors*, 2002.
- [25] A. Hanbury, Morphologie mathématique sur le cercle unité avec applications aux teintes et aux textures orientées, Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2002.
- [26] A. Bazen, S. Gerez, Directional field computation for fingerprints based on the principal component analysis of local gradients, in : *ProRISC 2000 Workshop on Circuits, Systems and Signal Processing*, 2000.
- [27] A. Bazen, G. Verwaaijen, S. Gerez, L. Veelenturf, B. van der Zwaag, A correlation-based fingerprint verification system, in : *ProRISC 2000 Workshop on Circuits, Systems and Signal Processing*, 2000.
- [28] A. Bazen, S. Gerez, Systematic methods for the computation of the directional field and singular points of fingerprints, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* Volume 24, 2002.
- [29] J. Gu, J. Zhou, D. Zhang, A combination model for orientation field of fingerprints, *Pattern Recognition* Volume 36 (2003) 775–990.
- [30] X. Feng, P. Milanfar, Multiscale principal components analysis for image local orientation estimation, in : *Proceeding of the 36th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, 2002.
- [31] X. Feng, Analysis and approaches to image local orientation estimation, Master’s thesis, UC Santa Cruz (2003).

- 
- [32] I. Stuke, T. Aach, E. Barth, C. Mota, Analysing superimposed oriented patterns, in : 6th IEEE Southwest Symposium on Image Analysis and Interpretation, 2004, pp. 133–137.
- [33] J. Bigün, G. Granlund, Optimal orientation detection of linear symmetry, in : Proceeding of the IEEE first international conference on computer vision, 1987.
- [34] J. Bigün, G. Granlund, J. Wiklund, Multidimensional orientation estimation with applications to texture analysis and optical flow, IEEE-PAMI Volume 13 (1991) 775–990.
- [35] K. Nilsson, J. Bigün, Localization of corresponding points in fingerprints by complex filtering, Pattern Recognition Letters Volume 24 (2003) 2135–2144.
- [36] C. Germain, J. D. Costa, O. Laviolle, P. Baylou, Multiscale estimation of vector field anisotropy application to texture characterization, Signal Processing Volume 83 (2003) 1487–1503.
- [37] J. Scharcanski, C. Dodson, Stochastic texture image estimators for local spatial anisotropy and its variability, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement Volume 49, 2000.
- [38] F. L. Pouliquen, J. D. Costa, C. Germain, P. Baylou, A new adaptive framework for unbiased orientation estimation in textures images, Pattern Recognition Volume 38 (2005) 2032–2046.
- [39] J. Feder, Fractals, Plenum Press, New-York, 1988.
- [40] P. Rastogi, Edt. *Photomechanics*, Springer, Berlin (Germany), 2000.
- [41] P. Jacquot, J.-M. Fournier, Interferometry in Speckle Light, Theory and Applications, Springer, Berlin (Germany), 2000.
- [42] D. Dawicke, M. Sutton, CTOA and crack-tunneling measurements in thin sheet 2024-t3 aluminum alloy., Exp. Mech. 64 (1994) 357–368.
- [43] L. Humbert, V. Valle, M. Cottron, Experimental determination and empirical representation of out-of-plane displacements in a cracked elastic plate loaded in mode I, Int. J. Solids Struct. 37 (2000) 5493–5504.
- [44] J. Desrues, J. Lanier, P. Stutz, Localization of the deformation in tests on sand samples, Eng. Fract. Mech. 21 (4) (2002) 251–262.
- [45] Y. Berthaud, D. Paraskevas, M. Taroni, Edt. *Photomechanics*, GAMAC, Paris, 1995.
- [46] E. Coker, L. Filon, A Treatise on Photoelasticity, Cambridge University Press, New York, 1931.
- [47] M. Frocht, Photoelasticity, volume 1, John Wiley and Sons, New York, 1941.
- [48] M. Frocht, Photoelasticity, volume 2, John Wiley and Sons, New York, 1948.
- [49] H. Jessop, F. Harris, Photoelasticity : Principles and Methods, Dover, New York, 1949.

- [50] J. Guild, *Diffraction Gratings as Measuring Scales, Practical Guide to Metrological Use of Moiré Fringes*, Oxford University Press, Oxford, 1960.
- [51] P. Theocaris, *Moiré Fringes in Strain Analysis*, Pergamon Press, London, 1969.
- [52] A. Durelli, V. Parks, *Moiré Analysis of Strain*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1969.
- [53] R. Powell, K. Stetson, Interferometric vibration analysis by wavefront reconstruction, *J. Opt. Soc. Am.* 55 (1965) 1593–1598.
- [54] K. Stetson, R. Powell, Interferometric hologram evaluation and real-time vibration analysis of diffuse objects, *J. Opt. Soc. Am.* 55 (1965) 1694–1695.
- [55] P. Smigielski, *Holographie industrielle*, Teknea, Toulouse, 1994.
- [56] J. Burch, *Interferometry with scattered light*, *Optical Instruments and Techniques* (1970) 213–229.
- [57] J. Leendertz, Interferometric displacement on scattering surfaces utilizing speckle effect, *J. Phys. E, Sci. Instrum.* 3 (1970) 214–218.
- [58] E. Archbold, A. Ennos, P. Taylor, A laser speckle interferometer for the detection of surface movements and vibration, *Optical Instruments and Techniques* (1970) 265–275.
- [59] W. Merzkirch, *Flow Visualisation*, Academic, New York (USA), 1987.
- [60] D. Garcia, J.-J. Orteu, *Mesure de formes et de déformations 3d par stéréocorrélation : application sur des tôles minces embouties*, in : *Proceedings Nouveaux moyens optiques pour l'industrie*, 1999, pp. 177–184.
- [61] M. Sutton, S. McNeill, J. Helm, Y. Chao, *Advances in Two-Dimensional and Three-Dimensional Computer Vision*, Springer, Berlin (Germany), 2000.
- [62] L. Chevalier, Y. Marco, Behavior laws chosen for modeling hyper-elasticity of rubber-like materials, *Polym. Eng. Sci.* 42 (2) (2002) 280–298.
- [63] E. Pagnacco, D. Lemosse, F. Hild, F. Amiot, Inverse strategy from displacement field measurement and distributed forces using FEA, in : *Proceedings SEM XI*, 2005.
- [64] K. Kavanagh, Finite element applications in the characterization of elastic solids, *Int. J. Solids Struct.* 7, 1971.
- [65] S. Calloch, D. Dureisseix, F. Hild, Identification de modèles de comportement de matériaux solides : utilisation d'essais et de calculs, *Technologies et Formations* 100 (2002) 36–41.
- [66] G. Geymonat, F. Hild, S. Pagano, Identification of elastic parameters by displacement field measurement, *C. R. Mécanique* 330 (2002) 403–408.
- [67] F. Latourte, A. Chrysochoos, G. Geymonat, S. Pagano, B. Wattrisse, Full-field measurements applied to the identification of a non-linear mechanical behaviour, in : *Proceedings Euromech-Mecamat 2005*, 2005.

- [68] M. Grédiac, E. Toussaint, F. Pierron, L'identification des propriétés mécaniques de matériaux avec la méthode des champs virtuels, une alternative au recalage par éléments finis, *C. R. Mécanique* 330 (2002) 107–112.
- [69] P. Ladevèze, M. Reynier, A localization method of stiffness errors for the adjustment of f.e. models, in : *Proceedings F.E. modeling and analysis in vibrations analysis techniques and applications*, 1989.
- [70] P. Ladevèze, D. Nedjar, M. Reynier, Updating of finite element models using vibration tests, *AIAA* 32 (7) (1994) 1485–1491.



# Annexe A



---

## Analyse d'une cinématique stationnaire hétérogène

Sandra Bergonnier<sup>\*,\*\*</sup> — François Hild<sup>\*</sup> — Stéphane Roux<sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup> LMT/ENS de Cachan/CNRS-UMR 8535/Université Pierre et Marie Curie  
61 avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan Cedex  
{sandra.bergonnier, francois.hild}@lmt.ens-cachan.fr

<sup>\*\*</sup> Laboratoire «Surface du Verre et Interfaces»  
UMR 125 CNRS/Saint-Gobain  
39 quai Lucien Lefranc, 93303 Aubervilliers Cedex  
stephane.roux@saint-gobain.com

---

*RÉSUMÉ. Une nouvelle méthodologie est proposée pour quantifier un champ de vitesse stationnaire à partir de films vidéo numériques. À l'aide d'une séquence d'images, une technique de corrélation est mise en œuvre pour identifier le champ de vitesse via une décomposition sur une base spline cubique. L'exploitation d'un grand nombre d'images permet de pallier la modeste qualité de chacune d'entre elles et de résoudre spatialement des écoulements rapides. Une illustration est proposée sur l'analyse d'un procédé industriel.*

*ABSTRACT. A new approach is proposed to determine the steady-state component of a kinematic field from a numerical movie. Thanks to a sequence of images, a correlation technique is used to identify the kinematic field via a decomposition on a cubic spline basis. The use of an important amount of images can compensate the bad quality of each of them and resolve spatially fast flows. An illustration of the method is proposed on the analysis of an industrial process.*

*MOTS-CLÉS : technique de corrélation, flot optique, spatio-temporel.*

*KEYWORDS: correlation technique, optical flow, spatio-temporal.*

---



## 1. Introduction

Très utilisée en mécanique des fluides, l'étude des écoulements nécessite l'analyse d'une séquence d'images. Cette séquence peut correspondre à des photos prises à des instants précis, ou à des images extraites d'un film vidéo. La méthode de vélocimétrie par imagerie de particules (VIP) [DUD 77, PIC 84] est une des techniques de mesure du champ de vitesse d'un fluide qui fournit, en outre, une visualisation des trajectoires des particules transportées par l'écoulement [ADR 91, WIL 91, RAF 98].

Proche de la technique de VIP, la corrélation d'images numériques (CIN) [BUR 82, PET 82, SUT 83] permet de déterminer les champs de déplacement et de déformation à partir de photos prises à des instants différents. Utilisée en mécanique des matériaux et des structures, son principe est basé sur l'appariement d'images en maximisant l'intercorrélation. Pour des grands déplacements, cette technique présente des limites, la différence de déplacement entre deux images successives étant trop importante pour permettre un calcul de corrélation fiable [HIL 02].

Une nouvelle approche est proposée ici pour accéder à la composante stationnaire du champ des vitesses à partir d'un film vidéo numérique de l'écoulement. En dépit des modestes qualités de chaque image prise individuellement, le fait d'exploiter une séquence aussi longue que souhaitée permet d'atteindre de très bonnes résolutions spatiales. De plus, cette méthode est tolérante vis-à-vis de la vitesse de l'écoulement.

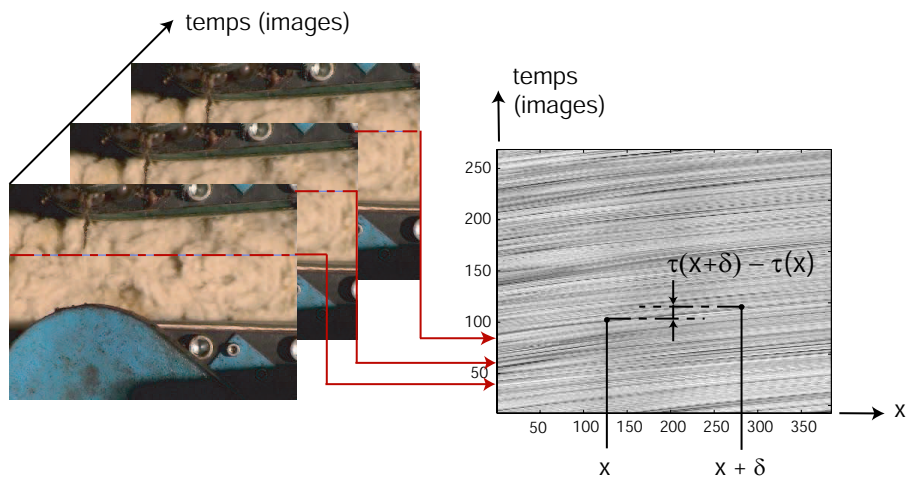
Le paragraphe 2 présente le développement de cette nouvelle méthode : après la formation de l'image utile à l'analyse, une première approche, incrémentale, permet de résoudre, ligne à ligne, le champ de vitesse. Une deuxième approche décompose le champ recherché sur une base de fonctions puis est particularisée à une approche par éléments finis (avec des splines cubiques). Le paragraphe 3 fournit quelques exemples de résultats. D'abord appliquées sur des images tests, les deux méthodes sont ensuite utilisées pour caractériser un procédé industriel (le crêpage de laines minérales) filmé directement sur ligne de production.

## 2. Analyse spatio-temporelle

Le film vidéo d'un écoulement, réalisé à l'aide d'une caméra numérique standard ou d'un caméscope, est facile à mettre en œuvre. Si la vidéo est scindée en images successives, un grand nombre d'images est disponible et permet alors une analyse de la cinématique stationnaire inhomogène en dépit de la pauvre qualité des images de départ (problème de compression d'images, de bruit ambiant, de faible dynamique, etc...). Cette analyse spatio-temporelle est réalisée en utilisant une approche par corrélation.

Il est nécessaire pour mettre en œuvre la méthode ci-dessous de disposer d'une première approximation des lignes de vitesse. Il est à noter que de manière itérative, cette information peut être affinée, jusqu'à coïncidence avec les mesures. Dans

la suite, on suppose que ces trajectoires sont approximativement suivant l'axe  $x$ . Pour chaque valeur de  $y$  (selon une direction perpendiculaire au champ de vitesse), une image spatio-temporelle  $f(x, t)$  est reconstruite (cf. figure 1), où le « pixel » en temps correspond à une image, et a donc une durée de  $1/25^e$  s. La fonction  $f(x, t)$  donne le niveau de gris du pixel  $(x, y)$  de l'image  $t$ .



**Figure 1.** Construction de l'image utile à partir d'un film

Pour une différence d'abscisse  $\delta$  donnée (figure 1), le décalage temporel  $\tau(x)$  moyen est recherché. Ce dernier est déterminé en utilisant la fonction d'intercorrélation des deux signaux correspondant aux niveaux de gris des deux séries temporelles choisies. L'hypothèse qui sert à reconstruire le champ de vitesse est la conservation du flot optique [HOR 81, BLA 92, MIT 96], que nous écrivons de manière intégrale comme reposant sur l'existence d'une fonction d'une seule variable  $\varphi$  telle que

$$f(x, t) = \varphi(t - \tau(x)) \quad [1]$$

où  $\tau(x)$  est le décalage temporel recherché dépendant de la coordonnée spatiale  $x$ . Pour tenir compte de l'éventuelle variation systématique des conditions d'éclairément d'un pixel à un autre, on peut relaxer la condition (1) en permettant d'accommoder une translation et une affinité sur les niveaux de gris d'un pixel à un autre.

Une première approche permet alors de déterminer le décalage inconnu  $\tau$  de manière incrémentale pour chaque abscisse  $x$  de l'image. Par son principe, elle se rapproche de l'approche classique de corrélation [BUR 82, PET 82]. Une deuxième approche est ensuite proposée : elle permet de rendre l'algorithme plus robuste en recherchant  $\tau$  sous la forme d'une décomposition tout d'abord très générale puis particularisée à des splines cubiques.

### 2.1. Méthode incrémentale

Formons les fonctions d'auto- et d'inter-corrélation suivantes

$$C_0(\theta, x) = \int f(x, t) f(x, t + \theta) dt \quad [2]$$

$$C_1(\theta, x, \delta) = \int f(x, t) f(x + \delta, t + \theta) dt \quad [3]$$

où  $\theta$  est un décalage temporel et  $\delta$  l'incrément spatial. Si l'on appelle  $L$  la longueur en pixel de l'image étudiée, l'analyse est alors effectuée sur une longueur de  $L - \delta$  pixels. La conservation du flot optique impose que  $C_1$  soit obtenu par une simple translation de  $C_0$  par  $\Delta\tau = \tau(x + \delta) - \tau(x)$ . Lorsque ce décalage  $\Delta\tau$  est petit devant la longueur de corrélation du signal temporel, un développement de Taylor conduit à

$$C_1(\theta, x, \delta) \simeq C_0(\theta, x) + [\tau(x + \delta) - \tau(x)] \frac{\partial C_0}{\partial \theta}(\theta, x) \quad [4]$$

Ainsi, il suffit de projeter la différence  $C_1 - C_0$  sur la fonction  $\frac{\partial C_0}{\partial \theta}(\theta, x)$  pour avoir accès au décalage  $\tau$  calculé à l'abscisse  $x$ . En répétant l'opération sur toutes les lignes verticales de l'image  $f(x, t)$ , cette méthode fournit les lignes de courant de l'image reconstruite à partir du film numérique. Pour relaxer la conservation du flot optique, il est possible d'ajouter une composante additionnelle  $\Delta K$  proportionnelle à  $C_0$ . Le système à résoudre s'écrit alors comme la minimisation de la fonctionnelle suivante

$$\mathcal{J}[\Delta K(x); \Delta\tau(x)] = \int_{\theta} \left[ \Delta C(\theta, x) - \Delta K(x) C_0(\theta, x) - \Delta\tau(x) \frac{\partial C_0}{\partial \theta}(\theta, x) \right]^2 d\theta \quad [5]$$

avec

$$\begin{cases} \Delta C(\theta, x) = C_1(\theta, x) - C_0(\theta, x) \\ \Delta K(x) = K(x + \delta) - K(x) \\ \Delta\tau(x) = \tau(x + \delta) - \tau(x) \end{cases}$$

Cette minimisation permet d'aboutir à la résolution d'un système linéaire  $2 \times 2$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta K(x) \\ \Delta\tau(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad [6]$$

avec

$$\begin{cases} C_{11} = \int_{\theta} C_0(\theta; x)^2 d\theta \\ C_{12} = C_{21} = \int_{\theta} C_0(\theta; x) \frac{\partial C_0}{\partial \theta}(\theta, x) d\theta \\ C_{22} = \int_{\theta} \left( \frac{\partial C_0}{\partial \theta}(\theta, x) \right)^2 d\theta \\ B_1 = \int_{\theta} C_0(\theta; x) \Delta C(\theta; x) d\theta \\ B_2 = \int_{\theta} \frac{\partial C_0}{\partial \theta}(\theta, x) \Delta C(\theta; x) d\theta \end{cases} \quad [7]$$

Selon l'image analysée, les variations d'intensité de niveaux de gris d'une ligne verticale par rapport à une autre, caractérisée par  $\Delta K(x)$  peuvent être très faibles. On peut

alors simplifier le système à résoudre (équation (6)) en négligeant le paramètre  $\Delta K$ . Le décalage recherché  $\tau(x)$  s'écrit alors

$$\Delta\tau(x) = \frac{\int_{\theta} \frac{\partial C_0}{\partial \theta}(\theta, x) \Delta C(\theta; x) d\theta}{\int_{\theta} \left(\frac{\partial C_0}{\partial \theta}(\theta, x)\right)^2 d\theta} \quad [8]$$

On pourra noter que cette démarche est proche de celle développée pour l'application d'une méthode alternative de corrélation d'images [ROU 02]. La différence importante concerne la prise en compte de tout l'intervalle de temps qui permet de rendre le problème bien posé ainsi que la prise en compte des variations d'intensité  $\Delta K$ .

Cette première méthode fournit de bons résultats (*cf.* paragraphe 3) mais reste sensible au bruit pixel. Une deuxième méthode a alors été développée pour rendre l'algorithme d'identification plus robuste.

## 2.2. Méthode par décomposition sur une base

En partant de l'équation (4), une forte régularité est imposée sur le décalage temporel en recherchant  $\tau$  sous la forme d'une décomposition sur une base de fonctions  $\psi_i$

$$\tau(x) = \sum_i a_i \psi_i(x) \quad [9]$$

où les paramètres  $a_i$  sont inconnus. La résolution du problème se ramène alors à la minimisation de la fonctionnelle

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\Delta K(x), a_i) = & \int_{\theta} \int_x \left[ \Delta C(\theta, x) - \Delta K(x) C_0(\theta, x) \right. \\ & \left. - \sum_i a_i (\psi_i(x) - \psi_i(x + \delta)) \frac{\partial C_0}{\partial \theta}(\theta, x) \right]^2 dx d\theta \end{aligned} \quad [10]$$

par rapport aux paramètres  $a_i$  et  $\Delta K(x)$ . Sachant que la détermination des  $\Delta K(x)$  n'est pas directement utilisée, la minimisation de (10) permet, dans un premier temps d'écrire  $\Delta K(x)$  pour tout  $x$  en fonction des inconnues  $a_i$

$\Delta K(x) =$

$$\frac{\int_{\theta} \Delta C(\theta, x) C_0(\theta, x) d\theta - \sum_i a_i (\psi_i(x) - \psi_i(x + \delta)) \int_{\theta} C_0(\theta, x) \frac{\partial C_0}{\partial \theta}(\theta, x) d\theta}{\int_{\theta} C_0(\theta, x)^2 d\theta} \quad [11]$$

puis d'introduire l'expression trouvée dans les autres équations déduites de la minimisation par rapport aux inconnues  $a_i$ . Cette minimisation permet d'obtenir un système linéaire

$$[K] \{a\} = \{F\} \quad [12]$$

avec, si l'on note  $\Delta\psi_i(x) = \psi_i(x) - \psi_i(x + \delta)$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{ij} = \int_x \Delta\psi_i(x) \times \int_{\theta} \left[ \left( \frac{\partial C_0}{\partial \theta}(\theta, x) \right)^2 \right. \\ \left. - \frac{\left( \int_{\theta} \frac{\partial C_0}{\partial \theta}(\theta, x) C_0(\theta, x) d\theta \right)^2}{\int_{\theta} (C_0(\theta, x))^2 d\theta} \right] d\theta \times \Delta\psi_j(x) dx \\ f_j = \int_x \Delta\psi_j(x) \left[ \int_{\theta} \Delta C(\theta, x) \frac{\partial C_0}{\partial \theta}(\theta, x) d\theta \right. \\ \left. - \frac{\int_{\theta} \Delta C(\theta, x) C_0(\theta, x) d\theta \times \int_{\theta} \frac{\partial C_0}{\partial \theta}(\theta, x) C_0(\theta, x) d\theta}{\int_{\theta} (C_0(\theta, x))^2 d\theta} \right] dx \end{array} \right. \quad [13]$$

Si, au lieu de résoudre le système de manière globale, on décompose la largeur de l'image étudiée en un nombre fini d'éléments, alors, la fonctionnelle  $\mathcal{T}$  devient

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\Delta K(x^e), a_i^e) &= \int_{\theta} \sum_e \int_{x^e} \left[ \Delta C(\theta, x^e) - \Delta K(x^e) C_0(\theta, x^e) \right. \\ &\quad \left. - \sum_i a_i^e \Delta\psi_i(x^e) \frac{\partial C_0}{\partial \theta}(\theta, x^e) \right]^2 dx d\theta \end{aligned} \quad [14]$$

de telle manière que les quantités élémentaires soient définies par

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{ij}^e = \int_{x^e} \Delta\psi_i(x^e) \times \int_{\theta} \left[ \left( \frac{\partial C_0}{\partial \theta}(\theta, x^e) \right)^2 \right. \\ \left. - \frac{\left( \int_{\theta} \frac{\partial C_0}{\partial \theta}(\theta, x^e) C_0(\theta, x^e) d\theta \right)^2}{\int_{\theta} (C_0(\theta, x^e))^2 d\theta} \right] d\theta \times \Delta\psi_j(x^e) dx^e \\ f_j^e = \int_{x^e} \Delta\psi_j(x^e) \left[ \int_{\theta} \Delta C(\theta, x^e) \frac{\partial C_0}{\partial \theta}(\theta, x^e) d\theta \right. \\ \left. - \frac{\int_{\theta} \Delta C(\theta, x^e) C_0(\theta, x^e) d\theta \times \int_{\theta} \frac{\partial C_0}{\partial \theta}(\theta, x^e) C_0(\theta, x^e) d\theta}{\int_{\theta} (C_0(\theta, x^e))^2 d\theta} \right] dx^e \end{array} \right. \quad [15]$$

avec  $x^e \in [1, l]$ , défini par  $x^e = x - (e - 1) \times l$  si l'on appelle  $x$ , la coordonnée spatiale dans le repère global,  $e$  le numéro de l'élément et  $l$  la longueur d'un élément. Lorsque la valeur de  $x^e + \delta$  dépasse  $l$ , alors on remplace  $x^e + \delta$  par  $x^e + \delta - l$  pour le calcul de la fonction spline correspondante. Il suffit ensuite d'écrire ce système pour chacun des éléments composant la longueur de l'image analysée et d'assembler entre elles les différentes matrices élémentaires  $[K^e]$  et  $\{f^e\}$ . Si  $N$  représente le nombre d'éléments et  $n$  le nombre de fonctions de la base, alors le système à résoudre sera linéaire d'ordre  $n \times N$ . Si l'on choisit comme base de fonctions, des splines cubiques, l'ordre du système est alors de  $4N$ . Par ailleurs, le choix d'une telle base permet d'écrire aisément des conditions de continuité du champ recherché et de sa dérivée aux frontières de deux éléments consécutifs  $e$  et  $e + 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_3^e = a_1^{e+1} \\ a_4^e = a_2^{e+1} \end{array} \right. \quad [16]$$

Ces conditions de continuité permettent donc de réduire la taille du système à résoudre à  $2N + 2$  équations. Enfin, deux conditions aux limites (naturelles) aux extrémités de l'image analysée sont ajoutées

$$\frac{d^2\tau(0)}{dx^2} = \frac{d^2\tau(L-\delta)}{dx^2} = 0 \quad [17]$$

avec  $L$  la longueur de l'image analysée, soit

$$\begin{cases} -3a_1^1 - 2a_2^1 + 3a_3^1 + a_4^1 = 0 \\ -3a_1^N - a_2^N + 3a_3^N - 2a_4^N = 0 \end{cases}$$

Finalement le système à résoudre est d'ordre  $2N + 4$ . Notons cependant qu'il est très facile de réduire la régularité des fonctions de base recherchées. Une base simplement continue (linéaire par intervalle) peut s'avérer suffisante pour la plupart des applications.

### 3. Résultats

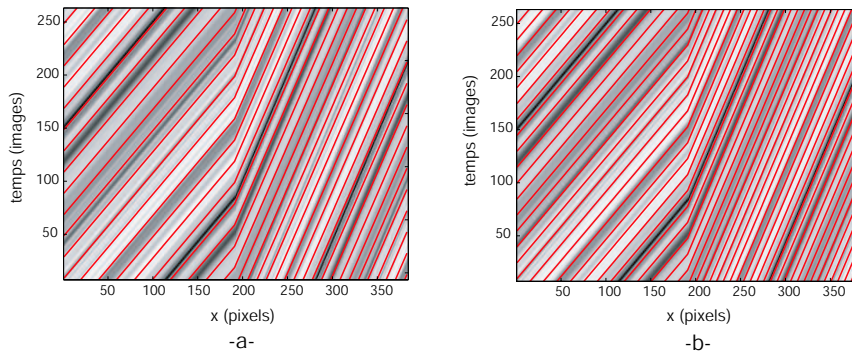
Avant d'être utilisée pour caractériser le champ de vitesse d'un écoulement réel, les deux méthodes ont été validées sur des images-tests, formées explicitement.

#### 3.1. Etude d'un cas test

Une image-test est formée en imposant des trajectoires, de pente unitaire jusqu'au milieu de l'image puis de pente égale à deux jusqu'à la fin de l'image. Cette image est testée pour les deux méthodes. La figure 2 présente, superposées à l'image de départ, les résultats de chacune des méthodes. Pour la méthode incrémentale, les pentes obtenues dans la première moitié de l'image correspondent exactement à celles imposées. Lorsque la pente est égale à 2, l'écart moyen entre le résultat et la solution réelle est de  $10^{-2}$  image (ce qui correspond à  $4 \times 10^{-4}$  seconde). La deuxième méthode est très stable au changement de pente. En ce qui concerne la sensibilité au nombre d'éléments, l'image a été testée pour un nombre d'éléments compris entre 2 et 180. Dans chacun des cas, l'écart maximum par rapport à la solution réelle reste inférieur à  $3 \times 10^{-14}$  image (ce qui correspond à  $1.2 \times 10^{-15}$  seconde). En terme de temps de calcul, les deux méthodes sont comparables, le calcul n'excédant pas quelques secondes.

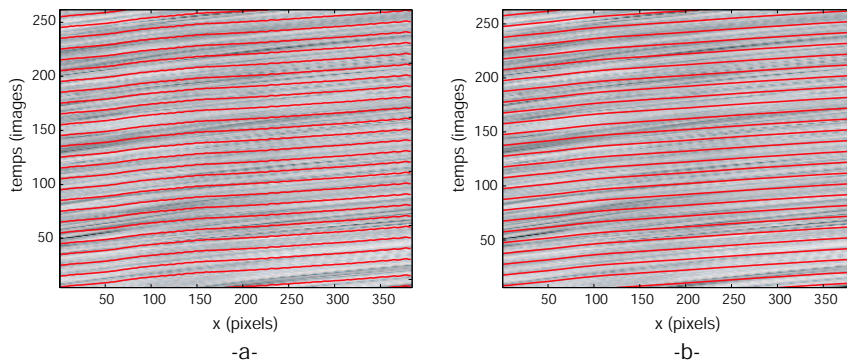
#### 3.2. Résultat sur des films de laine de verre crêpée

Cette méthode de corrélation a ensuite été utilisée pour caractériser le champ de vitesse au sein d'une machine de « crêpage » de laine de verre. La laine minérale est un produit constitué de fibres de verre ou de roche enchevêtrées et encollées avec une résine formophénolique [BAU 02]. Afin d'augmenter les performances mécaniques de



**Figure 2.** Résultat de la méthode sur une image test : trajectoires superposées à l'image de départ : (a) méthode incrémentale avec  $\delta = 1$  pixel, (b) méthode par décomposition avec  $N = 30$  éléments

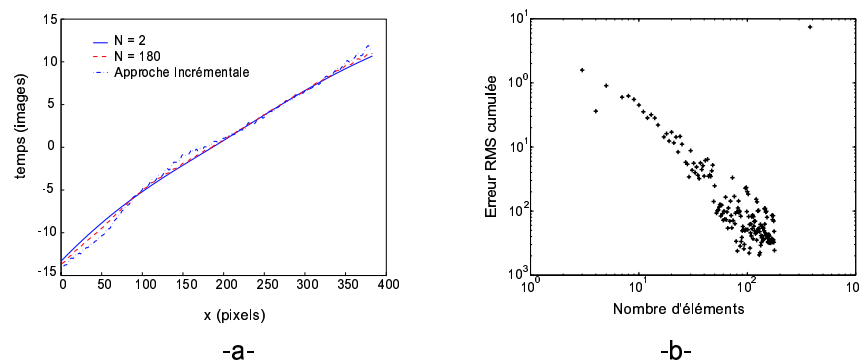
ce produit (tenue à la compression et à l'arrachement), une opération de crêpage est réalisée. Elle consiste à casser la stratification naturelle de la laine en effectuant une compression uniaxiale avant réticulation du liant. Un film de cette opération est réalisé à l'aide d'un caméscope numérique standard. Sur la figure 1 (gauche), une image extraite du film montre la laine entre deux tapis d'entraînement. La figure 3 présente le champ de vitesse obtenu par l'algorithme superposé à l'image spatio-temporelle pour les deux approches développées. Les deux méthodes donnent des résultats proches, mais la méthode par décomposition est plus stable au bruit de l'image. Pour la méthode



**Figure 3.** Résultats sur une image formée à partir d'un film vidéo : (a) méthode incrémentale avec  $\delta = 1$  pixel, (b) méthode par décomposition avec  $N = 20$  éléments

par décomposition, la taille des éléments de la base spline est choisie arbitrairement. Pour illustrer la robustesse de la méthode, la figure 4(a) montre deux déterminations du même décalage temporel  $\tau(x)$  pour deux choix extrêmes : soit  $N = 2$  (trait plein)

ou  $N = 180$  (pointillés). Le résultat donné par la méthode incrémentale a été superposé aux deux autres courbes : on remarque que la méthode par décomposition apporte une plus grande stabilité à la solution du champ recherché. La figure 4(b) montre l'erreur RMS cumulée sur la région d'étude exprimée en temps-image (1 temps-image =  $1/25^e$  de seconde) en fonction du nombre d'éléments composant la longueur de l'image analysée. Cette erreur est calculée par rapport à une trajectoire, moyenne de toutes les trajectoires déterminées pour un nombre d'éléments variant de 2 à 180 et de la trajectoire incrémentale. On remarque alors, qu'à partir d'un certain nombre d'éléments (aux environs de 70 pour l'image analysée) l'erreur RMS atteint une limite inférieure. Cette limite constitue un nombre d'élément optimum pour l'image à résoudre. Le point situé à l'extrémité droite du graphe représente l'erreur RMS calculée pour la méthode incrémentale. L'erreur correspondante est nettement supérieure à celles obtenues pour la méthode par décomposition. En dépit des différences considérables de flexibilité des choix de méthodes et de nombre d'éléments, les résultats restent comparables. La composante oscillante obtenue avec le maillage le plus fin ou par la méthode incrémentale reflète un phénomène de battements parasites lié à l'acquisition de l'image. Cette composante est naturellement filtrée pour un nombre  $N$  plus faible.



**Figure 4.** Résultat des deux méthodes : (a) Comparaison de la méthode par décomposition ( $N = 2$  à  $N = 180$  éléments par pas de 1) et de la méthode incrémentale avec  $\delta = 1$  pixel, (b) erreur RMS cumulée sur la longueur de l'image calculée pour la méthode par décomposition ( $N = 2$  et  $N = 180$  éléments) et pour la méthode incrémentale avec  $\delta = 1$  pixel

#### 4. Conclusion

Une méthode de détermination des champs de vitesses stationnaires hétérogènes a été présentée. Elle permet d'exploiter des films vidéo obtenus sans précaution particulière et réalisés à l'aide d'une caméra numérique standard. L'originalité du traitement proposé est l'exploitation de séries temporelles obtenues sur des paires de points appartenant à une même ligne de vitesse, et à la décomposition du décalage temporel sur



une base spline cubique. La robustesse de la méthode a été illustrée sur un exemple simple. Une extension permettant également un couplage transverse aux lignes de courant est en cours de développement.

## 5. Bibliographie

- [ADR 91] ADRIAN R., « Particle Imaging Techniques for Experimental Fluid Mechanics », *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol. 23, n° 6, 1991, p. 261-304.
- [BAU 02] BAUDEQUIN M., « Identification des mécanismes physiques mis en jeu lors de la reprise d'épaisseur de la laine de verre », Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 2002.
- [BLA 92] BLACK M., « Robust Incremental Optical Flow », Ph.D. Dissertation, Yale University, New Haven, Conn., 1992.
- [BUR 82] BURT P., YEN C., XU X., « Local Correlation Measures for Motion Analysis : A Comparative Study », *Proceedings IEEE Conf. On Pattern Recognition and Image Processing*, 1982, p. 269-274.
- [DUD 77] DUDDERAR T., SIMPKINS P., « Laser Speckle Photography in a Fluid Medium », *Nature (London)*, vol. 270, n° 1, 1977, p. 45-47.
- [HIL 02] HILD F., RAKA B., BAUDEQUIN M., ROUX S., CANTELAUBE F., « Multiscale Displacement Field Measurements of Compressed Mineral-Wool Samples by Digital Image Correlation », *Appl. Opt.*, vol. 41, n° 1, 2002, p. 6815-6828.
- [HOR 81] HORN B., SCHUNCK B., « Determining Optical Flow », *Artif. Intell.*, vol. 17, 1981, p. 185-203.
- [MIT 96] MITICHE A., BOUTHEMY P., « Computation and Analysis of Image Motion : a Synopsis of Current Problems and Methods », *Int. J. Comp. Vision.*, vol. 19, n° 1, 1996, p. 29-55.
- [PET 82] PETERS W., RANSON W., « Digital Imaging Techniques in Experimental Stress Analysis », *Opt. Eng.*, vol. 21, n° 1, 1982, p. 427-431.
- [PIC 84] PICKERING C., HALLIWELL N., « Speckle Laser in Fluid Flows : Signal Recovery with Two-Step Processing », *Appl. Opt.*, vol. 23, n° 1, 1984, p. 1128-1129.
- [RAF 98] RAFFEL M., WILLERT C., KOMPENHANS J., *Particle Image Velocimetry, a Practical Guide*, Springer, Berlin (Germany), 1998.
- [ROU 02] ROUX S., HILD F., BERTHAUD Y., « Correlation Image Velocimetry : a Spectral Approach », *Appl. Opt.*, vol. 41, n° 1, 2002, p. 108-115.
- [SUT 83] SUTTON M., WOLTERS W., PETERS W., RANSON W., « Determination of Displacements Using an Improved Digital Correlation Method », *Im. Vis. Comp.*, vol. 1 (3), n° 6, 1983, p. 133-139.
- [WIL 91] WILLERT C., GHARIB M., « Digital Particle Image Velocimetry », *Exps. Fluids*, vol. 10, n° 1, 1991, p. 181-193.

# Annexe B



# Digital image correlation used for mechanical tests on crimped glass wool samples

S Bergonnier<sup>1,2</sup>, F Hild<sup>1\*</sup>, and S Roux<sup>2</sup>

<sup>1</sup>LMT-Cachan, ENS de Cachan/CNRS-UMR 8535/Université Paris 6, Cachan, France

<sup>2</sup>Laboratoire 'Surface du Verre et Interfaces', UMR/CNRS/Saint-Gobain, Aubervilliers, France

*The manuscript was received on 27 April 2004 and was accepted after revision for publication on 21 September 2004.*

DOI: 10.1243/030932405X7773

**Abstract:** Mechanical compression and tearing tests are carried out on crimped glass wool samples. The displacement field is determined by using digital image correlation based on images taken at different stages of the mechanical tests. A multiscale algorithm is used to resolve accurately the fine details of the displacement field. This technique reveals strain heterogeneities and further localization in compression tests well below the peak stress. Crack formations are identified in tearing tests. Reliability and resolution of the displacement and strain fields are validated by using different window sizes in the correlation analysis.

**Keywords:** cracking, large strains, resolution, soft materials, strain localization

## 1 INTRODUCTION

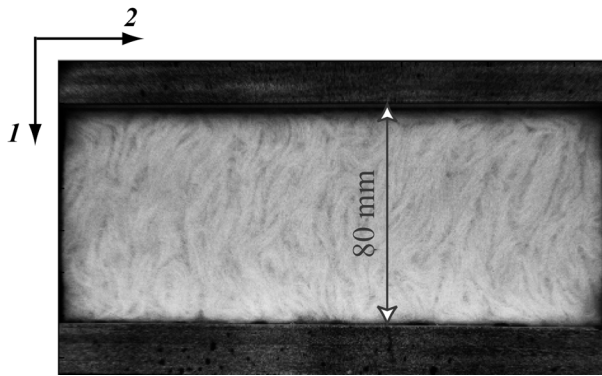
To model the mechanical properties of materials, constitutive equations validated by mechanical tests are needed. To carry out tests, different measurement techniques can be used, namely acoustic emission location [1] that corresponds to microcracking events in brittle or quasi-brittle materials such as concrete, composites, or rocks, replica techniques [2] that enable fatigue damage to be identified at the sample face, or optical methods. Since optical methods are non-contact measurements [3], they have a large field of application in materials and structural mechanics [4]. Because of the size of the analysed region, the measured displacement fields can reveal heterogeneities at the surface of the sample during mechanical tests. These heterogeneities can be the onset of strain localization. Cracks can also be analysed by these types of technique [5, 6]. As optical methods provide a local evaluation of kinematic fields, local strains and/or displacements can be followed during the test and then strain localization can be identified at a very early stage [7].

The aim of the present paper is to analyse mechan-

ical tests on very soft materials such as mineral wool. So-called compression and tearing tests are two means for assessing the mechanical properties of this class of materials [8, 9]. During these tests, it will be shown that either strain localization or cracking occurs, so that full-field measurement techniques are needed. Among many optical techniques [10–13], digital image correlation (DIC) [14–16] is chosen in the present case. The DIC technique is particularly suited to the analysis of 'soft' solids where strain gauges can be difficult to position or may disturb the response of the material (e.g. polymers [17, 18], mineral wool [19, 20], wood, and paper [21]). Furthermore, the strain levels are greater than a few per cent, thereby preventing the use of some of the above-mentioned optical techniques.

DIC methods are easy to use and have proven to be an efficient tool whose resolution can be extended much below the pixel value (i.e.  $10^{-2}$  pixel or below in some cases [22]). When the displacement between two images used for the calculation is too important, classical methods fail to give an accurate result. In that case, a multiscale approach of DIC [20] can be used to allow for large displacements between images with both very good robustness and very good resolution. Section 2 introduces the crimping process of mineral wool. The aim of this industrial process is to obtain better mechanical performances for a given density of the material. Section 3 deals with two DIC methods. The conventional approach and the

\*Corresponding author: LMT-Cachan, ENS de Cachan/CNRS-UMR 8535/Université Paris 6, 61 avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan Cedex, France. Email: francois.hild@lmt.ens-cachan.fr



**Fig. 1** Lateral view of a crimped glass wool product (1 pixel  $\leftrightarrow$  0.16 mm)

multiscale algorithm are discussed. A resolution analysis is performed to choose the relevant correlation parameters. Finally, the mechanical tests carried out on crimped glass wool samples are analysed in section 4. Compression tests are performed up to  $-20$  per cent global strain. Tearing tests are also carried out on the same kinds of sample up to 15 per cent global strain.

## 2 CRIMPED GLASS WOOL

Mineral wool is a product made of fibres, whose average diameter is micrometric and length millimetric to centimetric. Entangled fibres are bound with a formophenolic resin. As produced, the wool has a laminated structure with clearly visible density differences through the product thickness. As such, the compression and tearing resistances of the wool are poor even at medium densities. To increase the mechanical performances, ‘crimping’ is performed. This consists in imposing an on-line compression along the stratification plane to rotate the anisotropy axis along the thickness axis or to buckle these dense planes for a more isotropic texture (Fig. 1). In both cases, for a given density, much better mechanical performances are achieved. Compressive strength can be enhanced by a factor of two or more by crimping. This emphasizes the key role of the product texture for its mechanical behaviour, and hence a proper characterization of both the local texture and the local strain (and their interdependence) is required to optimize the product. This motivates the study detailed in section 4.

## 3 DISPLACEMENT MEASUREMENT BY DIGITAL IMAGE CORRELATION

DIC is based on the use of an image-matching algorithm (i.e. correlation product), which can be

performed either in the physical space [16, 23] or in Fourier space [24–26]. In the present case, Fourier computations are used. The in-plane displacement field is evaluated with the cross-correlation of an interrogation window in the picture of the deformed surface with respect to a reference surface. One advantage of such a method comes from the multi-purpose equipment necessary for its practical use, namely a charge-coupled device (CCD) camera, a fast data acquisition card, a computer, and a white-light source.

To determine the displacement field of one image of the deformed surface with respect to a reference image, a subimage is considered and will be referred to as a zone of interest (ZOI). The aim of the correlation method is to match the ZOIs in the two images (Fig. 2). The displacement of a ZOI with respect to the other is a two-dimensional shift of an intensity signal digitized by a CCD camera. Signals  $g$  are considered which are merely perturbations of a shifted copy of some reference signal  $f$  and are given by

$$g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{u}) + b(\mathbf{x}) \quad (1)$$

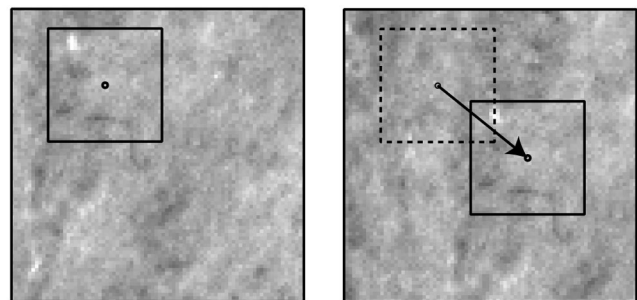
where  $\mathbf{u}$  is an unknown in-plane displacement vector assumed to be constant locally and  $b$  a random noise. To evaluate the displacement  $\mathbf{u}$ , the norm of the difference between  $f(\mathbf{x} - \mathbf{v})$  and  $g(\mathbf{x})$  may be minimized with respect to a trial displacement  $\mathbf{v}$  according to

$$\min_{\mathbf{v}} (\|g(\cdot) - f(\cdot - \mathbf{v})\|^2) \quad (2)$$

If the usual quadratic norm  $\|f\|^2 = \iint |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$  is chosen, the previous minimization problem is equivalent to maximizing the quantity  $h(\mathbf{v})$  according to

$$h(\mathbf{v}) = (g * f)(\mathbf{v}) \equiv \iint g(\mathbf{x})f(\mathbf{x} - \mathbf{v}) d\mathbf{x} \quad (3)$$

Furthermore, when  $b$  is a white noise, the previous estimate is optimal.



**Fig. 2** ZOI in the reference (left) and ‘deformed’ (right) images, with the associated displacement vector

### 3.1 Conventional approach

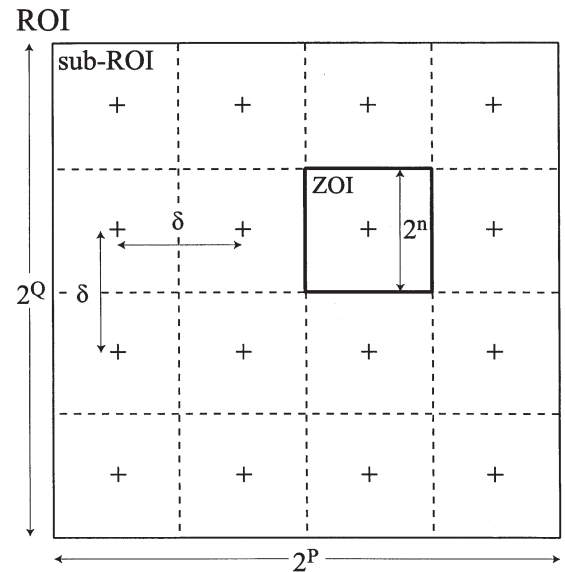
In practice, two images are considered. The first, referred to as the 'reference image' and the second, called the 'deformed image'. The reference image, schematically shown in Fig. 3, is meshed by ZOIs that form the region of interest (ROI). The sub-ROI of area  $2^P \times 2^Q$  pixels is extracted from the ROI in the reference image with the largest values of  $P$  and  $Q$ . A first fast Fourier transform correlation is carried out on the sub-ROI. The maximum value of the cross-correlation product enables the average displacement  $v_0$  to be estimated. The ROI in the deformed image is then centred at a point corresponding to the centre of the ROI in the reference image moved by an amount  $v_0$ . A second analysis is then performed for each ZOI independently. Each maximum of the calculated cross-correlation function gives a first value of the in-plane displacement correction  $\delta v$ . The centres of the ZOI in the deformed image are then moved by an additional amount  $\delta v$ .

A subpixel iterative scheme can be used to have estimations for which the resolution is of the order of a hundredth of pixel for 8-bit pictures [27]. An additional cross-correlation is performed. A subpixel correction of the displacement  $\delta\omega$  is obtained by determining the maximum of a parabolic interpolation of the correlation function. The interpolation is performed by considering the maximum pixel and its eight nearest neighbours. Therefore, a subpixel value is obtained. By using the 'shift modulation' property of the Fourier transform, the deformed ZOI can be moved by an amount  $\delta\omega$ . Since an interpolation is used, some (small) errors may be induced, requiring reiteration by considering the new 'deformed' ZOI until convergence. The procedure used checks whether the maximum of the interpolated correlation function increases as the number of iterations increases. Otherwise, the iteration scheme is stopped. To limit the influence of edge effects, a windowing of the ZOI can be performed. It consists in constructing a periodic ZOI, denoted  $\widehat{\text{ZOI}}$ , by averaging the pixels on the edges of the initial ZOI (i.e. 'blurring' the edges), which is given by

$$\widehat{\text{ZOI}} = \mathbf{W} \text{ZOI} \mathbf{W} \quad (4)$$

where the matrix  $\mathbf{W}$  is equal the identity matrix apart from the four 'corners', which are equal to  $\frac{1}{2}$ .

This first approach is well suited to small perturbations but, if displacements are too large, the information in the ZOI of the reference image will be partially lost in the ZOI of the deformed image; i.e. there is not enough information to determine a reliable correction  $\delta v$ . To use the method in the domain of large strains, as for the case of mineral wool, a large ZOI size should be used, whose main drawback is to



**Fig. 3** Schematic diagram of the reference image with the correlation parameters (ZOI area,  $2^n \times 2^n$  pixels; shift  $\delta$ )

average displacements over a larger surface. However, the aim of a correlation calculation is to determine displacement fields on the scale of texture heterogeneities. The maximum measurable displacement for the algorithm to converge to the proper solution has then to be increased. This is achieved by using a multiscale algorithm.

### 3.2 Multi-scale algorithm

The aim of the multi-scale algorithm is to improve the spatial resolution (i.e. to decrease the ZOI size) and yet to allow for a large displacement between two consecutive images. The previous approach is recursively applied to images on different scales. Figure 4 shows the construction of images on different scales. Scale 0 corresponds to the considered image and scale 1 to the region of interest. Scale 2, extracted from the ROI, is determined by the largest values for  $P$  and  $Q$  so that the corresponding area of the sub-ROI is  $2^P \times 2^Q$  pixels (Fig. 3). From scale 3 onwards each transition is characterized by the definition of super-pixels. The latter are defined recursively from one scale to the next by averaging the grey levels of  $2 \times 2$  neighbouring pixels. This procedure is carried out until the minimum size of the subimage is equal to 128 pixels. The analysis starts at, say, scale 4 and ends at scale 1. This allows a maximum measurable strain four times larger to be obtained even if the maximum measurable displacement is still limited [20], as in the standard approach, only to the coarser scale (here scale 4).

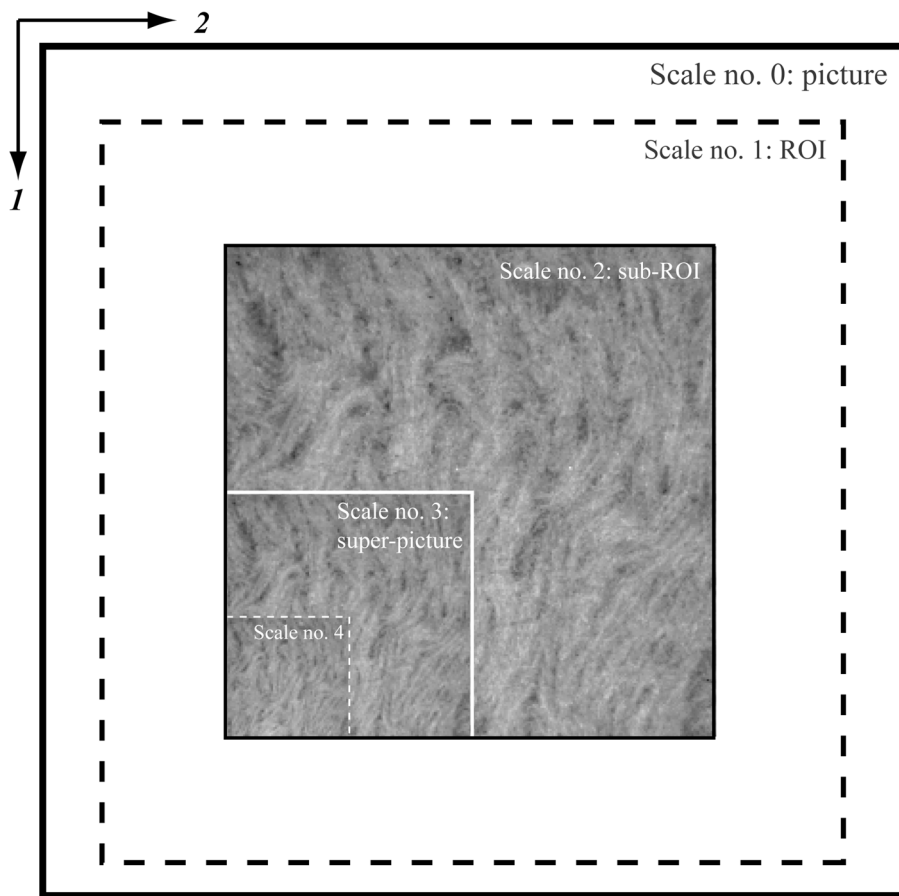


Fig. 4 Different scales used in the multi-scale approach for a glass wool sample

Starting on the highest (i.e. coarser) scale, for which the subimage size is at least equal to 128 superpixels (see Fig. 4), a first correlation is performed. From this first computation, the displacement field  $v_n$  is interpolated as

$$v_n(\mathbf{x}_n) = \mathbf{A} \mathbf{x}_n + \mathbf{a} \quad (5)$$

To check this first estimate, the centres of each ROI of the 'deformed' image are relocated according to these first estimates. A new correlation is performed and corrections to the previous displacement field are evaluated. The iterations are stopped as soon as there is no new correction between two iterations for *any* ZOI analysed. This iterative procedure was implemented to make the displacement evaluation more robust. This robustness is a key to the success of the procedure. If ever the displacement is not properly evaluated on higher scales, there is no chance of obtaining a good final result [20]. Consequently, the first evaluations have to be performed very carefully.

When the iterative procedure stops on scale  $n$ , it proceeds to scale  $n-1$ . Having identified a first estimate of the displacement field, it is used to position the ZOIs on scale  $n-1$ , according to the

transformation rules associated to each scale transition. The same iterative scheme is followed for scale  $n-1$  to scale 2. In practice, the user can choose between a first evaluation that is very fast since it remains on the pixel (or superpixel) level, and an accurate evaluation requiring several iterations. On scale 1, the user selects either a pixel or a subpixel resolution of the displacement by following the above described subpixel procedure, thereby allowing for the measurement of small levels of strains as well as large levels that will be evaluated in the following section.

When a sequence of more than two images is analysed, two routes can be followed. The first consists in considering the same reference image. It follows that the errors are not cumulated but there exists a maximum strain level above which the method fails. The second considers that the reference image is the deformed image of the previous step (i.e. updating procedure). Under these hypotheses, there is no real limitation, apart from the fact that the errors are now cumulated. Strains of the order of 1 and more are routinely observed in a full-field assessment even with a conventional DIC technique [18]. The procedure CORRELI<sup>LMT</sup> is implemented in

MATLAB™ [28]. On artificially deformed images, strains of the order of  $\pm 30$  per cent can be measured [20, 29] between two pictures.

### 3.3 Performance of the algorithm

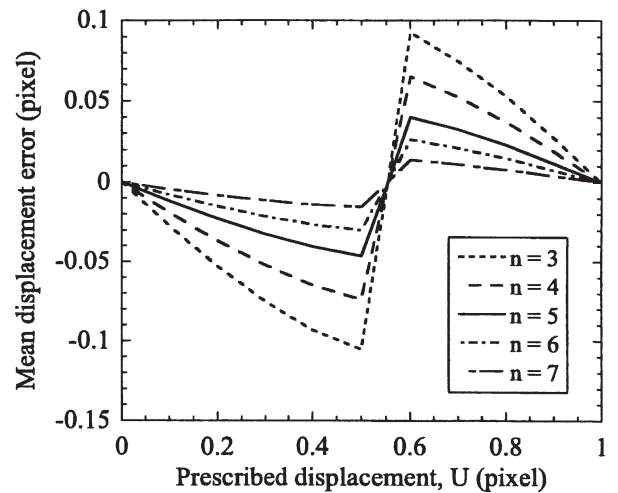
The aim of this section is to estimate the resolution of the correlation algorithm used herein. Two kinematic quantities are going to be analysed, namely displacements and strains, the resolution of which will be estimated when the correlation parameters are modified. To have *independent* estimates of the displacements in the following analyses, the shift  $\delta$  is equal to the ZOI size (i.e.  $\delta = 2^n$  pixels).

Firstly, the displacement resolution is estimated. In the present case, a constant displacement varying between 0 and 1 pixel, with an increment of 0.1 pixel is applied artificially by using the shift/modulation property of Fourier transforms [27]. The average gives an evaluation of the error and the standard deviation that of the corresponding resolution. These properties are associated with the analysed texture. Figure 5 shows the average error and the corresponding standard deviation as a function of the applied displacement for different ZOI sizes. For a given ZOI size, the maximum error is reached when the prescribed displacement is equal to 0.5 pixel. In this case, the information between each ZOI in the reference and deformed pictures is the most biased. Furthermore, the larger the ZOI, the smaller is the error. However, if the ZOI size increases, the spatial resolution is degraded; i.e. fewer independent measurement points are obtained. Secondly, the strain resolution is determined by using the same sequence of pictures. From the displacement field, the strains are evaluated by using a classical finite differences scheme so that the spatial resolution (i.e. the gauge length) is equal to  $2\delta$ , i.e.  $2^{n+1}$  pixels. In all cases, the mean strain is less than  $4 \times 10^{-5}$ . The strain resolution is more sensitive to  $\delta$  (here equal to the ZOI size) than the displacement resolution to the ZOI size [Fig. 6(a)].

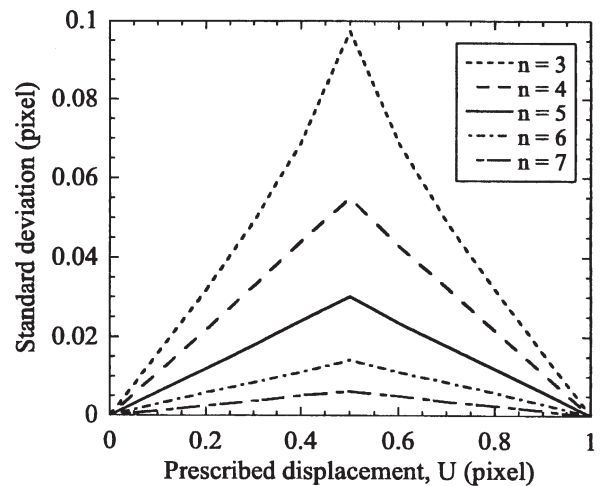
Figure 6(b) shows the change in the mean displacement and strain resolutions with the ZOI size when the displacement range varies between 0 and 1 pixel. For  $n \geq 4$  a power law with an exponent of the order of  $-1$  is obtained for the mean displacement resolution  $\sigma_U$  given by

$$\sigma_U = \frac{\alpha^2}{2^n} \quad (6)$$

with  $\alpha = 0.64$  pixel, thereby indicating that, for a large range of ZOI sizes, the displacement resolution and the spatial resolution are the result of a compromise described by equation (6). It should be noted that equation (6) shows a non-trivial dependence. Such a



- a -



- b -

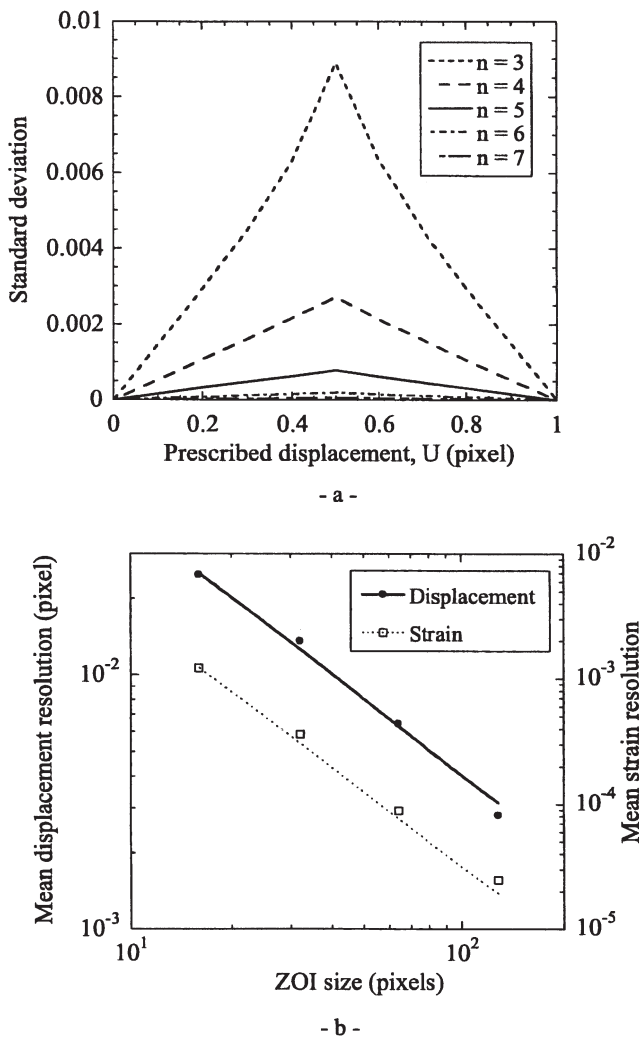
Fig. 5 (a) Mean displacement error and (b) corresponding standard deviation as functions of prescribed constant displacement for different correlation parameters (ZOI size,  $2^n$  pixels; shift  $\delta = 2^n$  pixels)

formula can be understood in the context of the central limit theorem, when deviations from a uniform translation can be described as a white noise with a correlation length smaller than the ZOI size. In that case, the resolution varies as the inverse square root of the number of pixels in the ZOI (i.e.  $1/\sqrt{2^n \times 2^n}$ ). This result will be wrong as soon as long-range correlations (e.g. power-law decay) exist on large scales. Moreover, the mean strain resolution is inversely proportional to  $\delta$  (here equal to the ZOI size) so that

$$\sigma_\varepsilon = \beta \frac{\sigma_U}{2\delta} \quad (7)$$

with  $\beta = 1.56$ , so that an increase in the 'gauge length'  $2\delta$  yields a better strain resolution, and yet a poorer spatial resolution. Equation (7) is in agreement with





**Fig. 6** (a) Standard deviation of strain as a function of prescribed constant displacement for different correlation parameters. (b) Mean strain and displacement standard deviations as functions of prescribed constant displacement for different correlation parameters (ZOI size,  $2^n$  pixels; shift  $\delta = 2^n$  pixels)

the results shown in Fig. 6(b) since a power law with an exponent  $-2$  is found when the shift parameter  $\delta$  is equal to the ZOI size. The origin of such a dependence can be understood by the fact that the finite difference operation relates the resolution of the displacement  $\sigma_U$  and that of the strain  $\sigma_\varepsilon$  as proportional to each other and inversely proportional to  $2\delta$ . It should be noted that this equation also survives in the case of long-range correlations (with a different prefactor  $\beta$ ). Consequently, displacement and strain resolutions are simply related in all cases by equation (7).

Note that the displacement resolution is analogous to a frequency (or spectral) resolution; namely the highest (or Nyquist) frequency controls the displacement resolution. To improve the resolution in displacements or strains, the ZOI size has to be

increased as much as possible. Simultaneously, since averages are taken over larger and larger zones, all information on spatial localization is lost. For the latter, the natural ‘spatial resolution’ is simply given by the ZOI size. Such a competition between spatial and spectral resolution (where the latter controls, in the present case, the strain resolution) is an ubiquitous property at play in a wide variety of different contexts, from Heisenberg’s principle in quantum mechanics to signal processing [30], where this question is at the very heart of the invention of wavelets [31]. Here a similar limitation is encountered in the quest for both a spatially resolved and an accurate kinematic measurement.

A good compromise for the present study is given by a ZOI size of 32 pixels (i.e.  $n = 5$ ) for which an average displacement resolution less than 0.015 pixel is achieved. In terms of strains, the corresponding average resolution is less than  $4 \times 10^{-4}$  with a spatial resolution of 64 pixels. It should be remembered that all the results discussed so far were obtained with the same reference picture. When large strains or severe texture variations occur [20], an updating procedure is preferred. Consequently the resolution gradually degrades as the number of analysed pictures increases.

With the chosen correlation parameters, two cases are now studied. Average strains of 2 and 20 per cent are applied by using a linear interpolation of each grey level to construct the artificially deformed images. To determine the average strain, the displacement field is linearly interpolated and the slope corresponds to the estimated average strain. From this interpolation, the displacement residuals are obtained as the difference between the measured displacement and the interpolation. The corresponding strain resolution is estimated by the standard deviation of strain associated with the residual displacement field. For any correlation parameter  $3 \leq n \leq 7$ , there is a difference of  $3 \times 10^{-4}$  at most between the measured mean strain and its prescribed value (i.e.  $2 \times 10^{-2}$ ). When  $n = 5$ , the corresponding resolution is less than  $3 \times 10^{-3}$ . For a prescribed strain of  $2 \times 10^{-1}$ , the difference between the mean measured strain and the prescribed value is less than  $10^{-3}$  for all the correlation parameters. The strain resolution is of the order of  $10^{-2}$  when  $n = 5$ . In the following section, this multi-scale technique is applied to the analysis of mechanical tests on crimped glass wool samples with  $n = 5$ .

#### 4 EXPERIMENTS: MECHANICAL TESTS ON CRIMPED GLASS WOOL

To assess the mechanical properties of crimped glass wool, mechanical tests are carried out. All the tests

reported herein are displacement controlled (or equivalently, the global strain  $\bar{\epsilon}$  is controlled; it is defined as the displacement between the two platens divided by the initial height of the sample). A uniaxial compression (in the 1-direction) up to  $-20$  per cent global strain is applied on parallelepipedic samples, whose dimensions are  $200 \text{ mm} \times 100 \text{ mm} \times 80 \text{ mm}$ ,  $80 \text{ mm}$  being the height of the sample and tearing tests (in the 1-direction) up to approximately  $15$  per cent global strain, applied on parallelepipedic samples, whose dimensions are  $200 \text{ mm} \times 200 \text{ mm} \times 80 \text{ mm}$ . For the tests, images of the sample illuminated with direct light have been taken for different global strain levels (with  $-0.5$  per cent increments in compression and  $+0.5$  per cent in tearing). In the present case, no special preparation was needed since the natural (random) texture of the studied material was sufficient to determine displacement fields and subsequently strain fields.

For the compression tests, the main information is given by the local strain to be compared with the global level. The strain distribution will be analysed with respect to the overall force versus global strain. In tearing tests, macroscopic cracks initiate and propagate. Consequently, the relevant quantity to study is the displacement field so that the above-mentioned stages of cracking can be monitored. In

all the experiments reported herein, two types of field are shown. Firstly, there are the so-called cumulative fields for which the analysed kinematic quantity is evaluated for a reference given prior to the beginning of the experiment. This quantity is generally given to describe an experiment. Secondly, to study active zones incrementally, the fields are also evaluated between a current state and the previous state for which a picture was taken (i.e. for a global strain increment of  $\pm 0.5$  per cent). In terms of results, the same relative resolution is to be expected for the two types of field since the same type of texture is considered with the same (i.e. multiscale) procedure.

#### 4.1 Uniaxial compression tests

The result of the test is shown in Fig. 7. The 'plastic' plateau suggests the existence of localized strains. This implies that the strain field of the material should be studied with a good spatial resolution. In Fig. 8, strain fields are shown. The calculation, which is performed with ZOIs of size  $32$  pixels with a  $32$ -pixel shift  $\delta$ , corresponds to the component  $\epsilon_{11}$  for different global strain levels, namely  $-4$  per cent for Fig. 8(a),  $-6.5$  per cent for Fig. 8(b) and  $-9$  per cent for Fig. 8(c). In Fig. 7, the corresponding points are located at the end of the elastic domain, at the

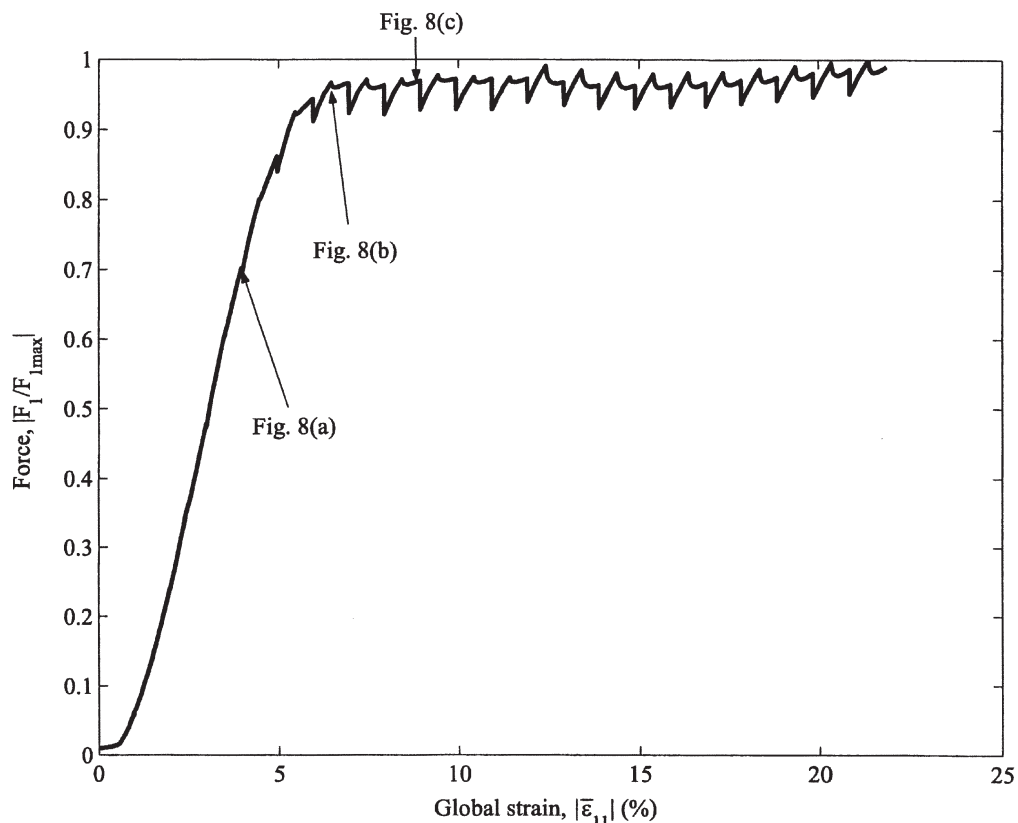
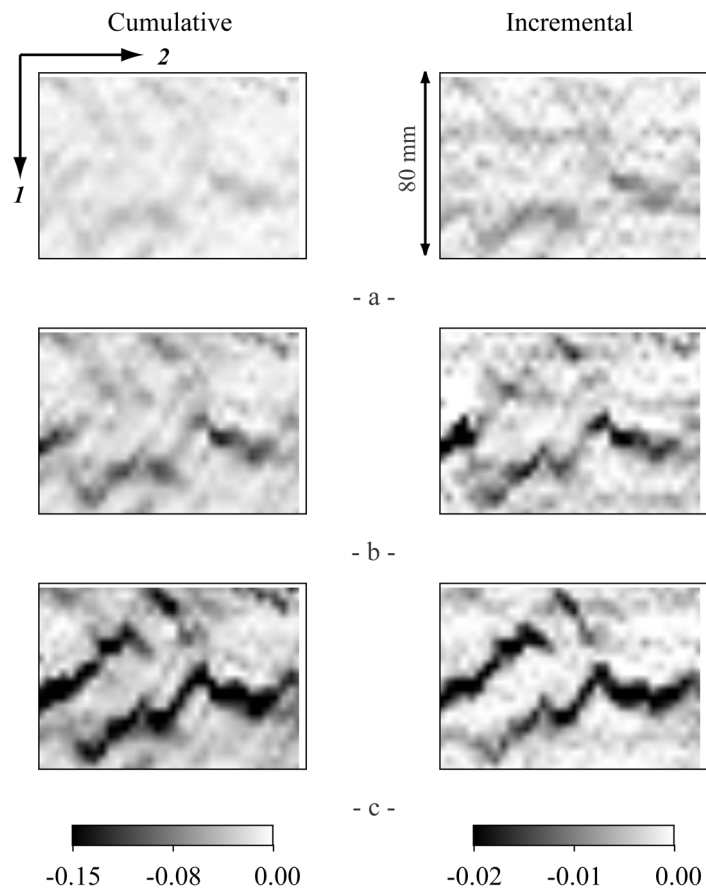


Fig. 7 Dimensionless load versus global strain for a compression test of crimped glass wool



**Fig. 8** Cumulative and incremental  $\varepsilon_{11}$  field for different levels of the global strain (a)  $\bar{\varepsilon}_{11} = -4$  per cent, (b)  $\bar{\varepsilon}_{11} = -6.5$  per cent, and (c)  $\bar{\varepsilon}_{11} = -9$  per cent in a compression test (correlation parameters: ZOI size, 32 pixels;  $\delta = 32$  pixels) (scale, 1 pixel  $\leftrightarrow$  0.085 mm)

beginning of the ‘plastic’ plateau, and where the ‘plastic’ plateau is well defined.

Figure 8 shows the change in the strain field during the test. From  $-4$  per cent global strain in Fig. 8(a), strain heterogeneities can be identified at the surface of the material. After a global strain level of  $-9$  per cent, a well-marked localized zone splits into two bands on the left of the sample. More importantly, precursors of this localized band can be seen at earlier stages [in Fig. 8(b) clearly and in Fig. 8(a) more faintly]. All along the test, the strain fluctuations are located only in the identified bands, and their width remains constant as the test goes on. Furthermore, the incremental strain levels vary within the band during the test. These two phenomena can be observed on the incremental strain maps in Fig. 8. At the end of the test, the localization band is about 8 mm wide, i.e. one-tenth of the height of the sample.

## 4.2 Tearing tests

The overall result of a tearing test is shown in Fig. 9. The end of the elastic domain corresponds to the

inception of cracking. As the test proceeds, another crack appears at the surface of the material, which prevents the opening of the first one because of stress shielding. In Fig. 10, correlation results are shown. The calculation, performed with ZOIs of size 32 pixels with a 32-pixel shift between two ZOIs, corresponds to the vertical displacement field  $u_1$  for different global strain levels, namely 4 per cent for Fig. 10(a), 4.5 per cent for Fig. 10(b), and 5.5 per cent for Fig. 10(c).

In Fig. 10(a), the displacement field  $u_1$  at the surface of the sample corresponds to the inception of the first crack. At that moment, the displacement field becomes heterogeneous. In Fig. 10(b), discontinuities in the incremental and cumulative vertical displacement field  $u_1$  can be observed. The discontinuity corresponds to an opening crack. In Fig. 10(c), another crack appears at the surface. This corresponds to the displacement discontinuity that can be observed on the cumulative displacement map. In the incremental displacement, the discontinuity also appears and it can be seen that the first crack stops opening, being shielded by the second crack. At the end of the test, the crack completely

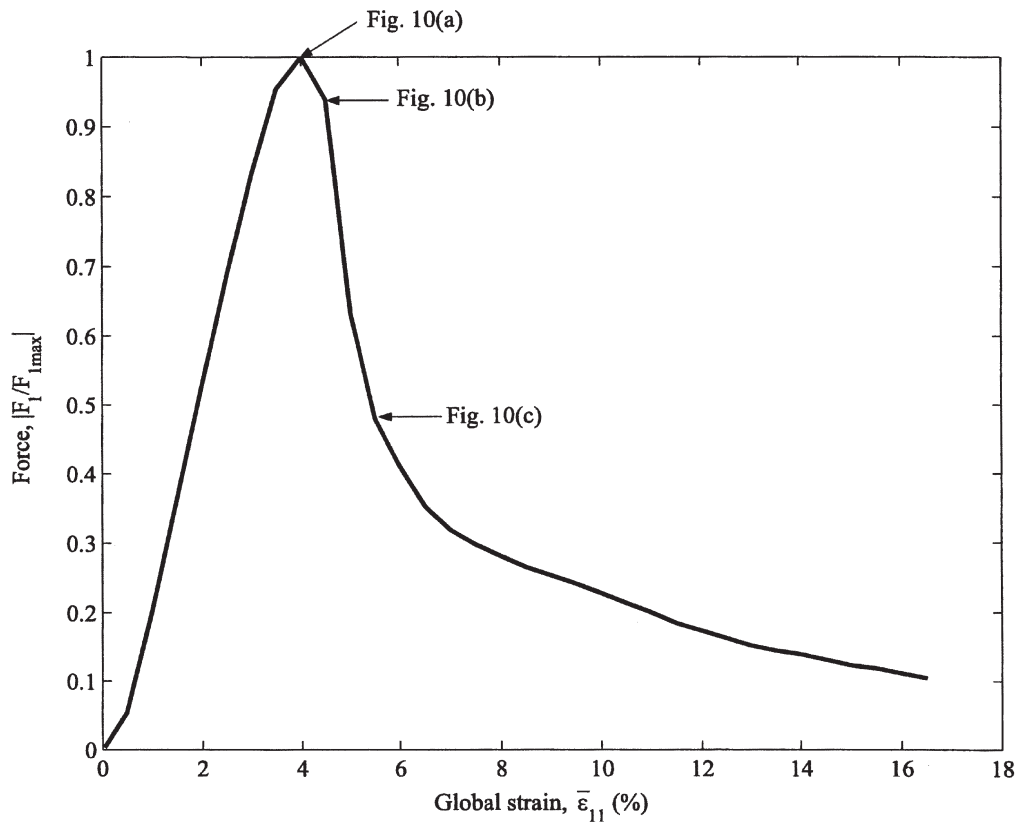


Fig. 9 Dimensionless load versus global strain for a tearing test of crimped glass wool

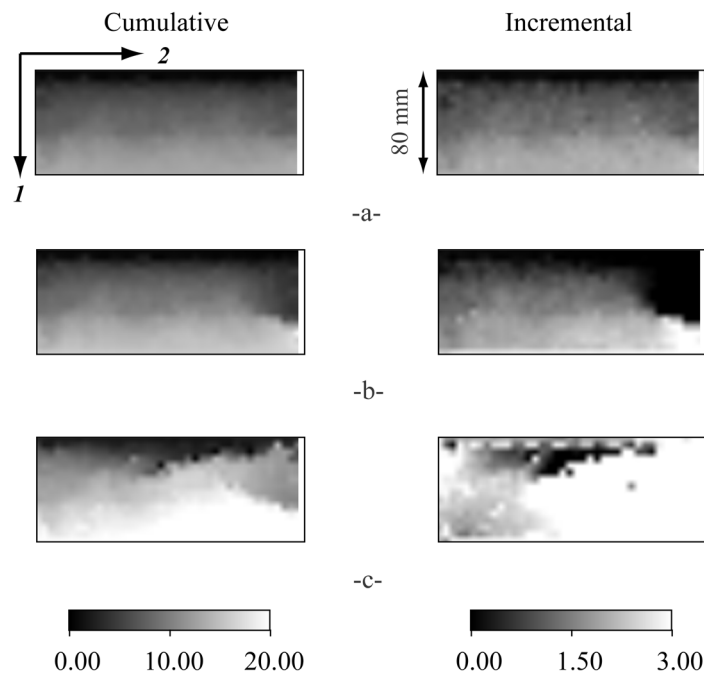


Fig. 10 Cumulative and incremental displacement field  $u_1$  expressed in pixels for different levels of global strain (a)  $\bar{\epsilon}_{11} = 4$  per cent, (b)  $\bar{\epsilon}_{11} = 4.5$  per cent, and (c)  $\bar{\epsilon}_{11} = 5.5$  per cent in a tearing test (correlation parameters: ZOI size, 32 pixels;  $\delta = 32$  pixels) (scale, 1 pixel  $\leftrightarrow$  0.16 mm)

traverses the sample and constitutes the final failure mode. This multi-scale correlation calculation enables displacement discontinuities or cracks to be revealed at the surface of the material. As it is a surface measurement, the fact that cracks may have been initiated earlier in the bulk of the material without intersecting with the analysed face of the sample cannot be excluded.

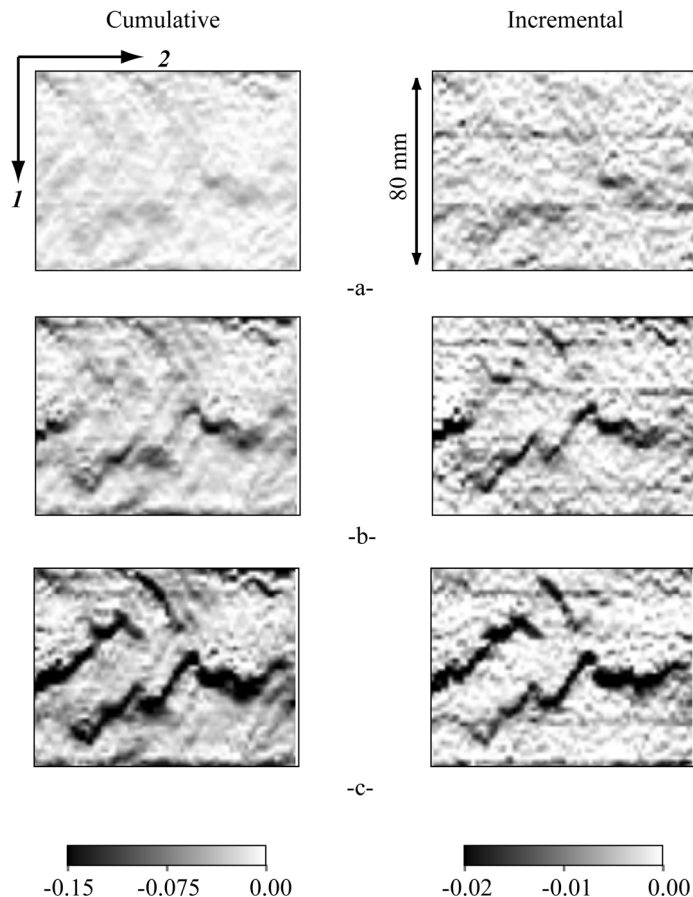
### 4.3 Influence of correlation parameters on the results

Correlation calculations are also performed with other parameters (a smaller shift  $\delta$  between two consecutive ZOIs) to study their influence on the results. The two tests are analysed again.

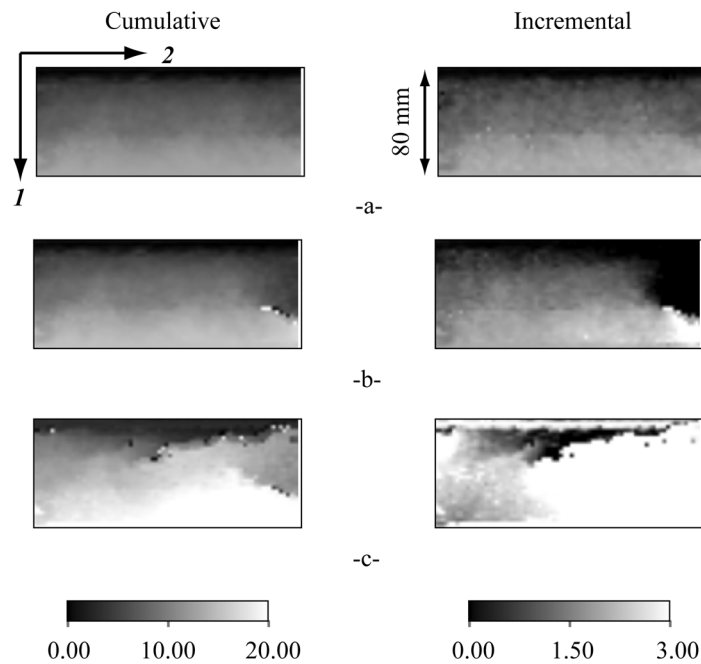
For the compression test, it can be expected, for instance, that the width of the localization band will depend on the shift between two consecutive ZOIs. A calculation with a 16-pixel shift  $\delta$  has been performed. Figure 11 shows the correlation results for the same global strain as the results presented

for a 32-pixel shift in section 4.1. For such a calculation, for the same ROI, the number of ZOIs in the height of the image is twice as important as for a 32-pixel shift. When the results are compared, it can be observed that strain localization appears for the same image and that the two identified bands are identically positioned. Moreover, in Figs 11 and 8, the widths of the bands are the same whereas the number of ZOIs belonging to the bands are different. If strain levels are compared, the two calculations have the same scales to analyse the results. In the present case, the influence of the correlation parameters is small when the scale of the measurement is relevant with respect to the underlying mechanism (e.g. strain localization).

For the tearing test, the difference between two calculations with different shifts  $\delta$  is greater because cracks correspond to discontinuities in the displacement field. If the crack belongs to only one ZOI, the discontinuity represents the whole crack but, if more than one ZOI makes up the crack, the mouth of the crack might be visible. Figure 12 shows the correlation results for a 16-pixel shift  $\delta$ . The results



**Fig. 11** Cumulative and incremental  $\varepsilon_{11}$  field for different levels of the global strain (a)  $\bar{\varepsilon}_{11} = -4$  per cent, (b)  $\bar{\varepsilon}_{11} = -6.5$  per cent, and (c)  $\bar{\varepsilon}_{11} = -9$  per cent in a compression test (correlation parameters: ZOI size,  $32 \times 32$  pixels;  $\delta = 16$  pixels) (scale, 1 pixel  $\leftrightarrow$  0.085 mm)



**Fig. 12** Cumulative and incremental displacement field  $u_1$  expressed in pixels for different levels of global strain (a)  $\bar{\epsilon}_{11} = 4$  per cent, (b)  $\bar{\epsilon}_{11} = 4.5$  per cent, and (c)  $\bar{\epsilon}_{11} = 5.5$  per cent in a tearing test (correlation parameters: ZOI size, 32 pixels;  $\delta = 16$  pixels) (scale, 1 pixel  $\leftrightarrow$  0.16 mm)

for the same global strain rate as those in Fig. 10 are shown. On the incremental field, it can be observed that, for a 16-pixel shift, the displacement field is more heterogeneous at the surface of the sample. For a 4.5 per cent global strain [Fig. 12(b)], the first crack can clearly be identified. The crack mouth appears at the surface of the sample, which cannot be seen for a 32-pixel shift. For the latter calculation, the crack is made up of more than one ZOI, and its opening is visible. In Fig. 12(c), the second crack can be seen. The results of the correlation calculation depend on the parameters. Their influence affects the results, but in a controlled manner. If the method is used to detect the presence of a crack, a coarse calculation, with a shift between two consecutive ZOIs of the same size as the ZOI, is effective enough. If the size of the crack is looked for, a finer calculation is required.

## 5 CONCLUSION

An original approach to identification of displacement and strain fields has been presented. Beyond the conventional DIC technique, which allows for a first evaluation of the displacement field, the image is resized and relocated to a coarser scale to increase both the robustness and the maximum measurable displacement and strain between two consecutive images. A resolution analysis is performed so that the correlation parameters can be chosen. This

multiscale approach has then been applied to mechanical tests by using the updating procedure.

Firstly, it is applied to a uniaxial compression test on a crimped glass wool sample. The technique allows identification of the strain heterogeneity zones, and then strain localization bands. If the correlation parameters are changed, the results are very similar, namely the strain level is the same, heterogeneities appear for the same global level, and localization bands have the same width for a given global strain level.

Secondly, by using the same procedure, tearing tests have been carried out on crimped glass wool. Discontinuities in the displacement field, early onset of tearing or the growth of a crack can be observed. The influence of calculation parameters has been quantified. If only the presence of a crack or a localization pattern is looked for, a coarse and quick calculation can be performed, whereas if a detailed analysis is to be carried out, a finer scale has to be used.

The correlation technique applied to crimped glass wool shows the change in macrostructure during the tests. As crimped glass wool is a highly textured material, the change in local orientations of constitutive fibres can be characterized to study the link between the texture and strain localization. A further development is then to relate the obtained displacement and strain fields to local heterogeneities of the crimped glass wool texture, to evaluate the *a priori* mechanical performances from the texture, and hence to optimize crimping.

## ACKNOWLEDGEMENTS

This work has been supported by Isover Saint-Gobain and by CNRS in a project entitled 'Analyses multi-échelles de champs de déformation par traitement d'image: vers l'identification de champs de propriétés mécaniques'. The authors acknowledge useful discussions with O. Gaume, C. Machelart, and J.-B. Rieunier.

## REFERENCES

- 1 **Drouillard, T. F.** A history of acoustic emission. *J. Acoust. Emission*, 1996, **14**(1), 1–34.
- 2 ISO 3057–1974 *NDT–Metallographic Replica Techniques of Surface Examinations*, 1974 (International Standardization Organization, Geneva).
- 3 **Rastogi, P. K.** (Ed.) *Photomechanics*, 2000 (Springer-Verlag, Berlin, Germany).
- 4 **Jacquot, P.**, and **Fournier, J.-M.**, (Eds) *Interferometry in Speckle Light, Theory and Applications*, 2000 (Springer-Verlag, Berlin, Germany).
- 5 **Dawicke, D. S.**, and **Sutton, M. S.** CTOA and crack-tunneling measurements in thin sheet 2024-T3 aluminum alloy. *Expl. Mechanics*, 1994, **34**, 357–368.
- 6 **Humbert, L.**, **Valle, V.**, and **Cottron, M.** Experimental determination and empirical representation of out-of-plane displacements in a cracked elastic plate loaded in mode I. *Int. J. Solids Struct.*, 2000, **37**, 5493–5504.
- 7 **Desrues, J.**, **Lanier, J.**, and **Stutz, P.** Localization of the deformation in tests on sand samples. *Engng. Fracture Mechanics*, 1985, **21**(4), 251–262.
- 8 EN 826 *Thermal Insulating Products for Building Applications—Determination of Compression Behaviour*, European Standard, 1996.
- 9 EN 1607 *Thermal Insulating Products for Building Applications—Determination of Tensile Strength Perpendicular to Faces*, European Standard, 1996.
- 10 **Coker, E. G.**, and **Filon, L. N. G.** *A Treatise on Photoelasticity*, 1931 (Cambridge University Press, Cambridge).
- 11 **Guild, J.** *Diffraction Gratings as Measuring Scales, Practical Guide to Metrological Use of Moiré Fringes*, 1960 (Oxford University Press, Oxford).
- 12 **Smigielski, P.** *Holographie Industrielle*, 1994 (Teknea, Toulouse, France).
- 13 **Dudderar, T. D.**, and **Simpkins, P. G.** Laser speckle photography in a fluid medium. *Nature*, 1977, **270**, 45–47.
- 14 **Burt, P. J.**, **Yen, C.**, and **Xu, X.** Local correlation measures for motion analysis: a comparative study. In Proceedings of the IEEE Conference on *Pattern Recognition and Image Processing*, 1982, pp. 269–274 (IEEE, New York).
- 15 **Peters, W. H.**, and **Ranson, W. F.** Digital imaging techniques in experimental stress analysis. *Opt. Engng*, 1982, **21**, 427–431.
- 16 **Sutton, M. A.**, **Wolters, W. J.**, **Peters, W. H.**, **Ranson, W. F.**, and **McNeill, S. R.** Determination of displacements using an improved digital correlation method. *Im. Vis. Comp.*, 1983, **1**(3), 133–139.
- 17 **G'Sell, C.**, **Hiver, J.-M.**, **Dahnoun, A.**, and **Souahi, A.** Video-controlled tensile testing of polymers and metals beyond the necking point. *J. Mater. Sci.*, 1992, **27**, 5031–5039.
- 18 **Chevalier, L.**, **Calloch, S.**, **Hild, F.**, and **Marco, Y.** Digital image correlation used to analyse the multiaxial behavior of rubber-like materials. *Eur. J. Mech. A, Solids*, 2001, **20**, 169–187.
- 19 **Roux, S.**, **Hild, F.**, and **Berthaud, Y.** Correlation image velocimetry: a spectral approach. *Appl. Optics*, 2002, **41**(1), 108–115.
- 20 **Hild, F.**, **Raka, B.**, **Baudequin, M.**, **Roux, S.**, and **Cante-laube, F.** Multi-scale displacement field measurements of compressed mineral wool samples by digital image correlation. *Appl. Optics*, 2002, **41**(32), 6815–6828.
- 21 **Choi, D.**, **Thorpe, J. L.**, and **Hanna, R.** Image analysis to measure strain in wood and paper. *Wood Sci. Technol.*, 1991, **25**, 251–262.
- 22 **Sutton, M. A.**, **McNeill, S. R.**, **Jang, J.**, and **Babai M.** Effects of subpixel image restoration on digital correlation error estimates. *Opt. Engng*, 1988, **27**(10), 870–877.
- 23 **Chu, T. C.**, **Ranson, W. F.**, **Sutton, M. A.**, and **Petters, W. H.** Applications of digital-image-correlation techniques to experimental mechanics. *Expl. Mechanics*, 1985, **3**(25), 232–244.
- 24 **Chen, D. J.**, **Chiang, F. P.**, **Tan, Y. S.**, and **Don, H. S.** Digital speckle-displacement measurement using a complex spectrum method. *Appl. Optics*, 1993, **32**, 1839–1849.
- 25 **Berthaud, Y.**, **Scholz, J.**, and **Thesing, J.** Méthodes optiques et acoustiques de mesures des caractéristiques mécaniques. In Proceedings of Colloque National on *Mécanismes et Mécanique des Grandes Déformations (MECAMAT)*, 1996, pp. 77–80.
- 26 **Chiang, F. P.**, **Wang, Q.**, and **Lehman, F.** New developments in full-field strain measurements using speckles. In *Non-Traditional Methods of Sensing Stress, Strain and Damage in Materials and Structures*, 1997, pp. 156–169 (American Society for Testing and Materials, Philadelphia, Pennsylvania).
- 27 **Périer, J. N.**, **Calloch, S.**, **Cluzel, C.**, and **Hild, F.** Analysis of a multiaxial test on a C/C composite by using digital image correlation and a damage model. *Expl. Mechanics*, 2002, **42**(3), 318–328.
- 28 *MATLAB 5.3, the Language of Technical Computing, version 5.3*, 1999 (The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts) (<http://www.mathworks.com>).
- 29 **Chevalier, L.**, and **Marco, Y.** Tools for multiaxial validation of behavior laws chosen for modelling hyper-elasticity of rubber-like materials. *Polym. Engng Sci.*, 2002, **42**(2), 280–298.
- 30 **Gabor, D.** Theory of communication. *J. Instn Elect. Engrs*, 1946, **93**(3), 429–457.
- 31 **Mallat, S.** *A Wavelet Tour of Signal Processing*, 1998 (Academic Press, San Diego, California).

## APPENDIX

## Notation

- a* in-plane displacement vector  
**A** in-plane strain tensor  
*b* noise

$f$	signal	ZOI	grey-level matrix of the zone of interest
$g$	shifted signal		
$h$	cross-correlation	$\alpha$	constant
$n$	integer	$\beta$	constant
$P, Q$	integers	$\delta$	shift between two neighbouring ZOIs
$u_1$	local displacement component along the 1-direction	$\delta v$	correction of in-plane trial displacement vector
$\mathbf{u}$	in-plane displacement vector	$\delta \omega$	subpixel correction of in-plane trial displacement vector
$\mathbf{v}$	in-plane trial displacement vector	$\bar{\epsilon}$	in-plane global strain
$v_n$	interpolation on scale $n$ of the in-plane displacement field	$\epsilon_{11}$	local normal strain along the 1-direction
$v_0$	initial evaluation of in-plane trial displacement vector	$\sigma_U$	displacement resolution
$\mathbf{W}$	windowing matrix	$\sigma_\epsilon$	strain resolution
$\mathbf{x}$	position vector	*	cross-correlation operator
$\mathbf{x}_n$	position vector associated with scale $n$	.	dummy variable



