Contrôle des perturbations aéroacoustiques par impédances de parois : application à un modèle de matériaux poreux

Y. Ventribout

ONERA - Département Traitement de l'information et Modélisation
UPS - Mathématiques pour l'Industrie et la Physique
SUPAERO - Ecole nationale supérieure de l'aéronautique et de l'espace

20 Janvier 2006

1. Introduction
2. Problème direct
   - EEL
   - Existence et unicité
3. Résolution et approximation des problèmes inverses
   - Problèmes inverses
   - Approximation numérique
   - Propagation du bruit sortant d'une prise d'air
   - Conditions d'espace libre pour les (EEL)
4. Résultats numériques
5. Conclusions et perspectives

Contexte général

L'aéroacoustique ou l'étude de la **génération du son** par

- Des écoulements turbulents.
- L'interaction d'un écoulement avec des corps solides.
- Propagation dans des écoulements.

Applications industrielles :

- Aéronautique : Etude et **réduction** des nuisances sonores émises par un avion au décollage ou à l'atterrissage (normes OACI).

Insonorisation des nacelles en aéronautique :

- Propagation des ondes sonores dans les conduits à **parois traitées** en présence d'écoulement.
- Rayonnement en champ libre et solutions technologiques pour réduire le bruit rayonné.

Problème

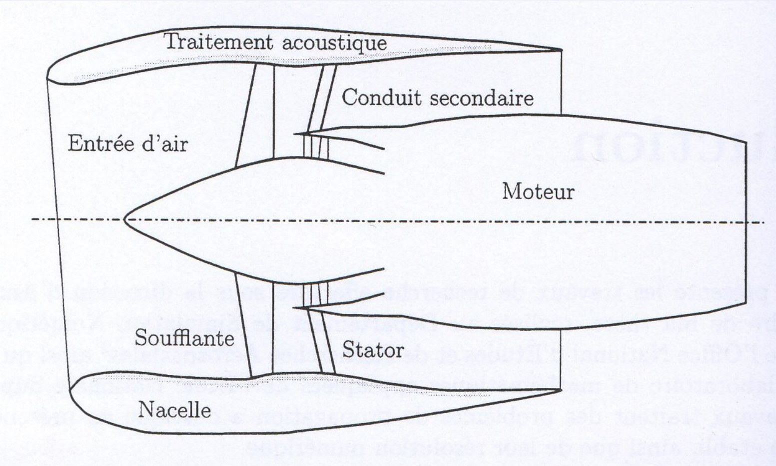


FIG.: Schéma d'une nacelle.

Contraintes

- Les phénomènes physiques sont **complexes**, instationnaires et souvent non linéaires $\Longrightarrow$ Méthodes analytiques ou asymptotiques non **adaptées**

  - Etudier par analyse **d'EDP** les **perturbations** aéroacoustiques d'un écoulement porteur subsonique et suffisamment régulier dans un domaine borné.

- Le traitement acoustique des parois doit être **réalisable** par des matériaux absorbants :

  - Caractérisables par des **impédances complexes**, fonctions de la **fréquence** des perturbations.
  - Adaptés aux **contraintes** de l'aéronautique (chocs thermiques, faible poids, ...).

Objectif : réduire le bruit

- **Réduire** le bruit rayonné à l'extérieur de la prise d'air (mesuré par des capteurs)

Problème de contrôle optimal

1. Variables (ou paramètres) de contrôle.
2. Fonction(s) objectif(s).

- **Modélisation** du contexte expérimental :
  - Qu'est-ce qui fait du bruit (**source**) ?
  - Comment mesure-t-on ce bruit (**fonction objectif**) ?

- **Enjeu** : Etablir pour l'aéroacoustique, une méthode de résolution **numérique** de ce problème la plus **robuste** possible.

Objectif : identifier un matériau

Problème d'identification

- On dispose de mesures expérimentales prélevées sur des capteurs.
- **Identifier** les matériaux absorbants pour lesquels on a obtenu ces données.

- **But** : Appliquer à partir de ces matériaux, la méthode d'optimisation pour réduire les nuisances.

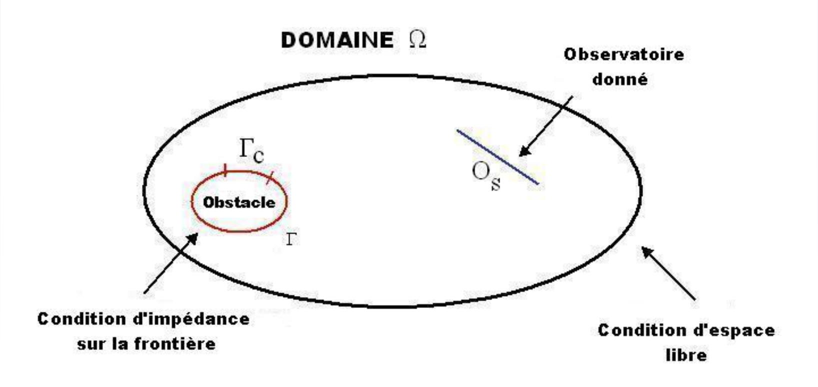
- **Difficultés** inhérentes aux problèmes inverses :

- **Unicité** de la solution.
- Problème **sévèrement** mal posé
(nb paramètres $\nearrow \Longrightarrow$ **mauvais** conditionnement du problème $\nearrow$).

Position des problèmes

Deux **finalités** :

1. **Contrôler** les phénomènes de propagation en utilisant les conditions aux limites **d'impédances complexes** sur Γ_c comme paramètres **locaux** de contrôle.
2. **Identifier** les impédances locales qui modélisent au mieux le comportement acoustique de l'obstacle.



Equation d'état : EEL

Aéroacoustique = Problème **multi**-échelle :

1. Perturbations acoustiques pas du tout du même ordre de grandeur que les grandeurs physiques dans l'écoulement.
2. Ondes acoustiques propagées à la vitesse du son $\leftrightarrow$ Perturbations aérodynamiques convectées par l'écoulement.

Une solution = Les Equations d'Euler Linéarisées **EEL** (C. Bailly, T. Colonius)

- Les petites perturbations sont supposées **barotropes** : $\rho = \rho_0 + \varepsilon\rho' + \circ(\varepsilon) \Rightarrow P = P_0 + \varepsilon c_0^2 \rho', c_0(x)$.
- Théorème de Godunov-Mocke $\Rightarrow$ Système de **Friedrichs** (forme symétrique).

EEL barotropes

1. **Notation** : $U^i = U_0^i + \varepsilon u^i$
2. **Inconnue** : $\varphi = \left(u^i, \rho = \frac{c_0 \rho'}{\rho_0} \right)^T$

Système EEL

$$L\varphi = \partial_t \varphi + A^i \partial_i \varphi + B\varphi = f \quad (1)$$

avec :

$$A^i \partial_i = \left(U_0^i \partial_i\right) \mathbb{I}_4 + c_0 \begin{pmatrix} 0 & \nabla \\ \nabla^T & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} [\partial_i U_0^j]_{i,j} & \frac{1}{\rho_0}\left(\nabla (c_0 \rho_0) - \frac{1}{c_0} \nabla P_0 \right) \\ \frac{c_0}{\rho_0} \nabla^T \rho_0 & \frac{-1}{c_0}\left(U_0^i \partial_i c_0 \right) \end{pmatrix}$$

Instabilités d'écoulements

Bilan énergétique :

$$\frac{1}{2}\partial_t (\varphi,\varphi)_{L^2} + \frac{1}{2}\partial_i \left(A^i\varphi,\varphi\right)_{L^2} + \frac{1}{2}(K\varphi,\varphi)_{L^2} = (f,\varphi)_{L^2} \tag{2}$$

- La matrice $K = B + B^T - \partial_i A^i$ n'est généralement pas **signée**.
- Gain ou perte d'énergie $\Leftrightarrow$ Existence d'**instabilités**.

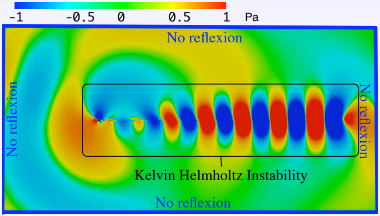


FIG.: Instabilité convective.

1. Théorie du **Scattering** pour les problèmes harmoniques (Petkov).
2. $\varphi = \varphi' e^{\alpha t}$ avec $\alpha > 0$ $\Rightarrow K \rightarrow K + 2\alpha\mathbb{I}_4 > 0$ dans (2).
3. (1) + CL **admissibles** dans $Q = \Omega \times [0, T]$ $\Rightarrow$ Problème direct (P).

Notations et hypothèses

- **Régularités** nécessaires :
  1. Coefficients des A^i et de B respectivement dans $W^{1,\infty}\left(\overline{\Omega}\times[0,T],\mathbb{C}\right)$ et $L^{\infty}\left(Q,\mathbb{C}\right)$.
  2. Ω domaine borné ou non de $\mathbb{R}^3$ à frontière $\partial\Omega$ bornée et C^1.

- CL **Homogènes** introduites par :
  - $\mathcal{D}(L)=\left\{\varphi\in\left(C^1\left(\overline{Q}\right)\right)^4,\ \varphi|_{\partial\Omega\times[0,T]}\in\mathcal{N}(x,t),\ \varphi(x,0)=0\right\}$.
  - $L^{\#}\psi=-\partial_t\psi-\partial_i\left(A^i\psi\right)+B^*\psi$.
  - $\mathcal{N}^{\#}(x,t)=\left(A^in_i\left(\mathcal{N}\right)\right)^{\perp}$, $\vec{n}$ vecteur unitaire sortant à $\partial\Omega$.

Propriété de l'aéroacoustique :

L'opérateur A^in_i n'est pas de rang **constant** sur chaque composante connexe de $\partial\Omega \Longleftrightarrow$ Hypothèse de **Rauch (85)** trop restrictive.

Notations et hypothèses

- **Régularités** nécessaires :
  1. Coefficients des A^i et de B respectivement dans $W^{1,\infty}\left(\overline{\Omega}\times[0,T],\mathbb{C}\right)$ et $L^{\infty}\left(Q,\mathbb{C}\right)$.
  2. Ω domaine borné ou non de $\mathbb{R}^3$ à frontière $\partial\Omega$ bornée et C^1.

- CL **Homogènes** introduites par :
  - $\mathcal{D}\left(L\right)=\left\{\varphi\in\left(C^1\left(\overline{Q}\right)\right)^4\ ,\ \varphi|_{\partial\Omega\times[0,T]}\in\mathcal{N}(x,t)\ ,\ \varphi\left(x,0\right)=0\right\}$.
  - $L^{\#}\psi=-\partial_t\psi-\partial_i\left(A^i\psi\right)+B^*\psi$.
  - $\mathcal{N}^{\#}(x,t)=\left(A^i n_i\left(\mathcal{N}\right)\right)^{\perp}$, $\vec{n}$ vecteur unitaire sortant à $\partial\Omega$.

Propriété de l'aéroacoustique :

L'opérateur $A^i n_i$ n'est pas de rang **constant** sur chaque composante connexe de $\partial\Omega \Longleftrightarrow$ Hypothèse de **Rauch (85)** trop restrictive.

Conditions aux limites admissibles

1. Hypothèses de **Rauch (94)** : Augmenter la dimension de $\mathcal{N}(x,t)$ en franchissant le saut de rang $A^i n_i$ (avec condition **d'inclusion**).
2. Hypothèse de **Maximale positivité** :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(L), \left(A^i n_i \varphi, \varphi\right)_{\mathbb{C}^4} \geq 0 (\leq 0, \forall \psi \in \mathcal{D}\left(L^{\#}\right)).$$

Théorème

Si $(f,g) \in \left(L^2(Q)\right)^4 \times \left(L^2(Q)\right)^4$, (P) et $(P^{\#})$ admettent une unique solution faible-forte dans $\left(L^2(Q)\right)^4$:

(P)

$$\left\{\begin{array}{lllll} \overline{L}\varphi & = & f(x,t) & dans & Q \\ \varphi(\cdot,0) & = & 0 & dans & \Omega \\ \varphi(x,t) & \in & \mathcal{N}(x,t) & & \end{array}\right.$$

$(P^{\#})$

$$\left\{\begin{array}{lllll} \overline{L^{\#}}\psi & = & g(x,t) & ds & Q \\ \psi(\cdot,T) & = & 0 & ds & \Omega \\ \psi(x,t) & \in & \mathcal{N}^{\#}(x,t) & & \end{array}\right.$$

Conditions aux limites admissibles

1. Hypothèses de **Rauch (94)** : Augmenter la dimension de $\mathcal{N}(x,t)$ en franchissant le saut de rang $A^i n_i$ (avec condition **d'inclusion**).
2. Hypothèse de **Maximale positivité** :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(L), \left(A^i n_i \varphi, \varphi\right)_{\mathbb{C}^4} \geq 0 (\leq 0, \forall \psi \in \mathcal{D}\left(L^\#\right)).$$

Théorème

Si $(f,g) \in \left(L^2(Q)\right)^4 \times \left(L^2(Q)\right)^4$, (P) et $(P^\#)$ admettent une unique solution faible-forte dans $\left(L^2(Q)\right)^4$:

$$(P) \quad \left\{\begin{array}{lclll} \overline{L}\varphi & = & f(x,t) & \textit{dans} & Q \\ \varphi(\cdot,0) & = & 0 & \textit{dans} & \Omega \\ \varphi(x,t) & \in & \mathcal{N}(x,t) & & \end{array}\right. \qquad (P^\#) \quad \left\{\begin{array}{lclll} \overline{L^\#}\psi & = & g(x,t) & \textit{ds} & Q \\ \psi(\cdot,T) & = & 0 & \textit{ds} & \Omega \\ \psi(x,t) & \in & \mathcal{N}^\#(x,t) & & \end{array}\right.$$

Relèvement matriciel(1)

1. $\mathcal{N}(x,t) = ker(M), M = -\frac{1}{2}\left(A^i n_i - N\right), M^{\#} = A^i n_i + M^*.$
2. $A^i n_i = V_n \mathbb{I}_4 + c_0 \begin{pmatrix} 0 & n \\ n^T & 0 \end{pmatrix}.$

Les CL admissibles **dépendent** de l'écoulement porteur :

Cas $V_n = 0$

Les conditions d'**obstacle** et d'**impédance** complexe classique sur $\Gamma \times [0,T]$ s'expriment par la **même** condition :

- $\alpha =$ **impédance** acoustique, $\rho = \alpha \vec{u} \cdot \vec{n}$, $Re(\alpha(x,t)) \geq 0$.

$$M_\alpha = \frac{c_0}{2} \begin{pmatrix} \alpha n \otimes n & -n \\ -n^T & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$$

- $\beta =$ **réflexion** acoustique, $(\beta - 1)\rho + (\beta + 1)\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, $|\beta(x,t)| \leq 1$.

$$M_\beta = \frac{c_0}{2} \begin{pmatrix} (\beta+1) n \otimes n & (\beta-1) n \\ -(1+\beta) n^T & (1-\beta) \end{pmatrix}$$

Relèvement matriciel(1)

1. $\mathcal{N}(x,t) = ker(M), M = -\frac{1}{2}\left(A^i n_i - N\right), M^{\#} = A^i n_i + M^*.$
2. $A^i n_i = V_n \mathbb{I}_4 + c_0 \begin{pmatrix} 0 & n \\ n^T & 0 \end{pmatrix}.$

Les CL admissibles **dépendent** de l'écoulement porteur :

Cas $V_n = 0$

Les conditions d'**obstacle** et d'**impédance** complexe classique sur $\Gamma \times [0,T]$ s'expriment par la **même** condition :

- $\alpha =$ **impédance** acoustique, $\rho = \alpha \vec{u} \cdot \vec{n}$, $Re(\alpha(x,t)) \geq 0$.

$$M_\alpha = \frac{c_0}{2} \begin{pmatrix} \alpha n \otimes n & -n \\ -n^T & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$$

- $\beta =$ **réflexion** acoustique, $(\beta - 1)\rho + (\beta + 1)\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, $|\beta(x,t)| \leq 1$.

$$M_\beta = \frac{c_0}{2} \begin{pmatrix} (\beta + 1) n \otimes n & (\beta - 1) n \\ -(1 + \beta) n^T & (1 - \beta) \end{pmatrix}$$

Relèvement matriciel(2)

Cas $V_n <> 0$

Ecoulement porteur **entrant** ou sortant.

CL admissibles sont **non réfléchissantes** à l'ordre 1. Matrices associées :

$$M = -\left(A^i n_i\right)^-,$$

et l'hypothèse de **Rauch** est vérifiée.

Théorème (Existence et unicité)

Les Problèmes direct (P) et adjoint ($P^\#$), avec des valeurs de traces a priori définies dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma \times [0,T])$ et $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega \setminus \Gamma \times [0,T])$ admettent une unique solution φ_β et ψ_β dans $\left(L^2(Q)\right)^4$:

$$(P)\left\{\begin{array}{lcl} L\varphi & = & f \\ M_\beta\varphi & = & 0 \\ A^i n_i^- \varphi & = & 0 \\ \varphi(x,0) & = & 0 \end{array}\right. \qquad (P^\#)\left\{\begin{array}{lcl} L^\#\psi & = & g \\ M_\beta^\#\psi & = & 0 \\ A^i n_i^+ \psi & = & 0 \\ \psi(x,T) & = & 0 \end{array}\right.$$

Fonctions objectifs

Deux **objectifs** :

Minimisation du bruit acoustique

1. $J(\beta) = \int_{O_s \times [0,T]} (C^* C\varphi_\beta, \varphi_\beta).$
2. $C \in \mathcal{M}_4 \left(W^{1,\infty}\left(\overline{Q}\right), \mathbb{C} \right).$

Identification

1. $J_{id}(\beta) = \int_{O_s \times [0,T]} |\varphi_\beta - \varphi_d|^2.$
2. $\varphi_d =$ données expérimentales.

- $\beta \longmapsto \varphi_\beta$ non linéaire, non surjective, non injective, non bicontinue $\Longrightarrow$ **Unicité** non assurée.
- **Problème**: Les valeurs des traces $M_\beta \varphi_\beta, M_\beta^\# \psi_\beta, A^i n_i^- \varphi_\beta, A^i n_i^+ \psi_\beta$, sont a priori dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma \times [0,T])$ ou $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega \setminus \Gamma \times [0,T])$.

Un résultat de régularité supplémentaire

En vertu du théorème **faible-fort**, on a en fait :

Théorème

Soit $\beta \in C^0\left(\overline{\Gamma_c} \times [0,T], I\right) \cap C^1_m\left(\Gamma_c \times [0,T], I\right)$ *avec* $I \subset\subset \{\mid z \mid < 1\}$.
A la solution φ_β*, les combinaisons "lipchitziennes" de* $\vec{u} \cdot \vec{n}$ *et* ρ *sont dans* $L^2(\Gamma)$ *:*

$$|a(x)\rho + b(x)\vec{u} \cdot \vec{n}|_{L^2(\Gamma)} \leq C\,|f|_{L^2(Q)}\,.$$

Le même résultat existe pour le problème $P^\#$*.*

En **particulier**, cela permet de définir $\left(N' \varphi_\beta, \psi_\beta\right)_{\mathbb{C}^4}$ dans $L^1(\Gamma)$, où :

$$N_\beta = 2M_\beta + A^i n_i,\; N' = c_0 \begin{pmatrix} n \otimes n & n \\ -n^T & -1 \end{pmatrix}.$$

On est alors en mesure de **prouver** l'existence de $J'(\beta)$ (J est même C^1).

Evaluation des gradients

Dans ces conditions, les **gradients** s'explicitent par :

Théorème

$$J'(\beta,\xi) = Re\left(-\frac{1}{2}\int_{\Gamma\times[0,T]} \left(N'\varphi_\beta,\psi_\beta\right)_{\mathbb{C}^4}\overline{\xi}\right), \tag{3}$$

où ψ_β est la solution de $(P^\#)$ avec $g = \chi_{O_s\times[0,T]}C^*C\varphi_\beta$.

Mauvais **conditionnement** :

- Problèmes inverses **sévèrement mal posés** (manque de continuité) $\Rightarrow$ Approximation de problèmes inverses très mal conditionnée.

Conséquence : La **Précision** de l'évaluation des gradients est **essentielle** pour la résolution de problèmes inverses.

Méthode Galerkine discontinue DGM

- **Nécessité** d'une approximation non conforme pour les EEL :

$$det(A^i\eta_i) = ((U_0^i\eta_i)^2 - c_0^2 \parallel \eta \parallel_2^2)(U_0^i\eta_i)^2$$

- **DGM** avec un **flux-splitting** **décentré** en espace :
  1. Erreur en **dispersion** très faible $\Longrightarrow$ Aptitude à l'approximation de problèmes de contrôle (Fernandez-Berdaguer).
  2. Parfaite adaptation à des maillages **destructurés**.
  3. **Parallélisation** peu coûteuse $\Longrightarrow$ Possibilité de méthodes **PML**.

- Discrétisation symétrique Espace/Temps trop coûteuse

$$\Downarrow$$

Discretisation P^k Espace/RK Temps

$$\int_{\omega_e\times[0,T]} (L\varphi_h,\psi_h) + \int_{\partial\omega_e/\Gamma\times[0,T]} \left(\mathbf{A^i n_i^-}\left(\varphi_h^+ - \varphi_h^-\right),\psi_h^-\right)$$

$$+ \int_{\partial\omega_e\cap\Gamma\times[0,T]} (M_\beta\varphi_h,\psi_h) = \int_{\omega_e\times[0,T]} (f,\psi_h)\,.$$

Propriétés numériques

Un Résultat de "commutation"

Adjoint du problème **discrétisé** = **Discrétisé** du problème **adjoint**.
L'explicitation de la dérivée reste valable pour l'approximation de (P) et $(P^{\#})$.

Pour une approximation spatiale donnée d'ordre k, la **stabilité** forte d'une approximation Euler explicite est **conservée** par un schéma **RK** d'ordre r (Gottlieb).

CFL avec prise en compte des CL (P^k en espace/RK d'ordre r en temps)

$$\Delta t \leq \inf_{e,x\in\Omega} \left(\frac{1}{\beta_e} \frac{1}{\mid V_n + c_0 \mid} \frac{vol\,(\omega_e)}{aire\,(\partial\omega_e)} \right)$$

- "β_e" $= 1$ en 1D et VF/RK1
- "β_e" $= 1.5$ en 1D et P^1/RK1
- $\beta_e = 3$ en $2D$ et P^1/RK1
- "β_e" $= 0.5$ en 1D et VF/RK2
- "β_e" ≈ 1.11 en 1D et P^1/RK2
- $\beta_e \approx 2{,}55$ en $3D$ et P^1/RK1

Propriétés numériques

Un Résultat de "commutation"

Adjoint du problème **discrétisé** = **Discrétisé** du problème **adjoint**.
L'explicitation de la dérivée reste valable pour l'approximation de (P) et $(P^{\#})$.

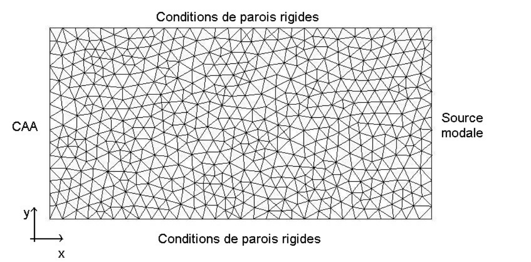
Pour une approximation spatiale donnée d'ordre k, la **stabilité** forte d'une approximation Euler explicite est **conservée** par un schéma **RK** d'ordre r (Gottlieb).

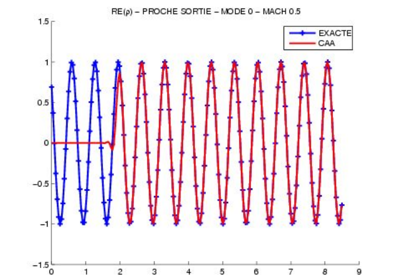
CFL avec prise en compte des **CL** (P^k en espace/RK d'ordre r en temps)

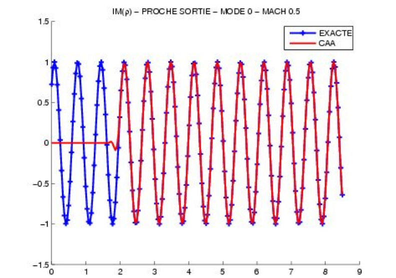
$$\Delta t \leq \inf_{e,x\in\Omega}\left(\frac{1}{\beta_e}\frac{1}{\mid V_n + c_0 \mid}\frac{vol\left(\omega_e\right)}{aire\left(\partial\omega_e\right)}\right)$$

- "β_e" $= 1$ en 1D et VF/RK1
- "β_e" $= 1.5$ en 1D et P^1/RK1
- $\beta_e = 3$ en $2D$ et P^1/RK1
- "β_e" $= 0.5$ en 1D et VF/RK2
- "β_e" ≈ 1.11 en 1D et P^1/RK2
- $\beta_e \approx 2{,}55$ en $3D$ et P^1/RK1

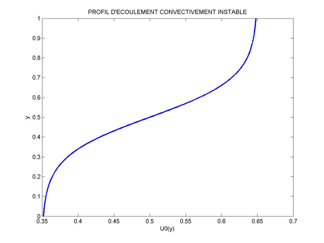
Modes guidés bidimensionnel en présence d'écoulement uniforme

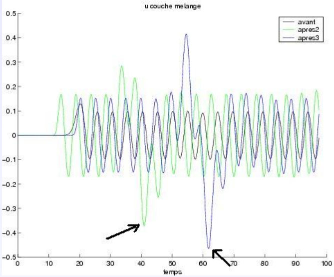


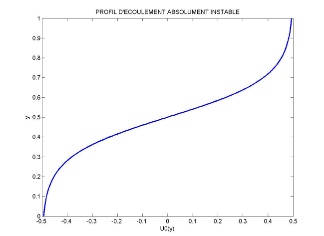


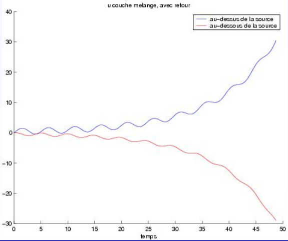


Instabilités d'écoulements (Volumes Finis)









Modélisation

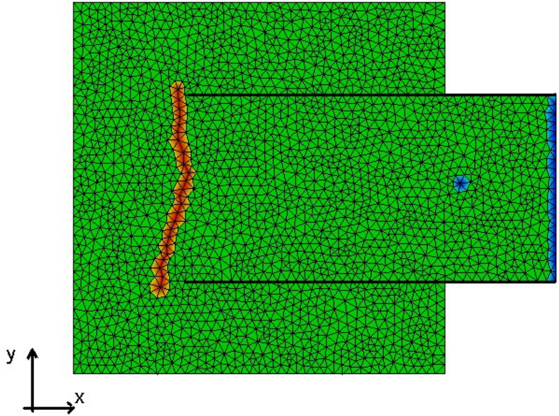


FIG.: Représentation 2D d'une prise d'air "réaliste".

Modèle de matériaux poreux

Rappel : Contraintes *mathématiques* $= \forall x \in \Gamma, |\beta(x,t)| \leq 1$.
But : Relier le coefficient de réflexion acoustique local β à un matériau **expérimentalement** réalisable.

1. Modèle obtenu par **homogénéisation** $\Longrightarrow$ **Matériau poreux** constitué d'empilements de billes creuses de Nickel (Gasser).
2. La source doit être **monochromatique** : $\omega \in [1000 - 5000] Hz$.
3. **Conséquence**: $\forall x \in \Gamma_c, \beta = \beta(x)$.

Modèle de réflexion acoustique

$$\beta = f\left(\omega, L, Por, \alpha_\infty, Re(\omega), Re'(\omega)\right)$$

- L = Epaisseur; Por = Porosité; Re, Re' = 2 longueurs caractéristiques.
- A fréquence donnée, les contraintes *physiques* sont données par l'ensemble des valeurs effectives de ces 4 paramètres.

Comportement de la réflexion acoustique en fonction de la fréquence

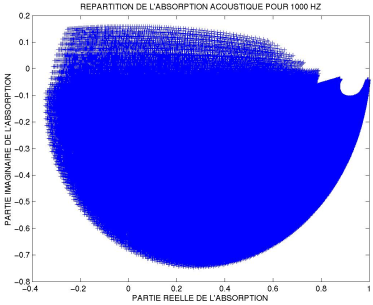


FIG.: $f = 1000$ Hz.

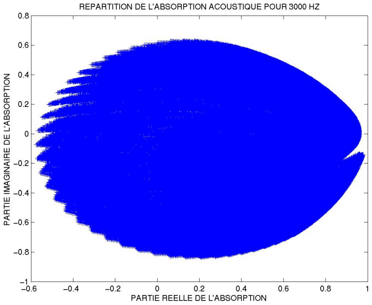
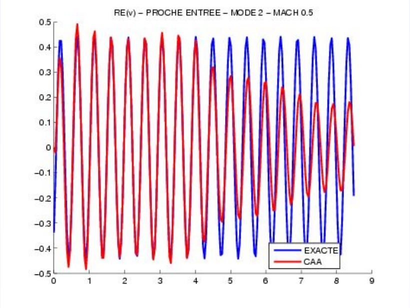


FIG.: $f = 3000$ Hz.

Réflexions **physiquement** réalisables $\Longrightarrow$ **Restriction** des contraintes.

Insuffisance des CAA

CAA insuffisantes $\Rightarrow$ Nécessité de conditions d'espace libre plus précises.



Principe des PML

Obtenir un système $(1^{'})$ augmenté défini sur tout l'espace tel que :

1. La solution **vérifie** les EEL dans Ω.
2. La solution **décroisse** exponentiellement sur $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ (indépendamment de la fréquence et de la direction de propagation des ondes).

PML : Couches cartésiennes et coefficients constants en dehors de Ω

On suppose qu'il existe une solution harmonique unique dans L^2_{loc} de :

$$p\Phi + \mathcal{A}\Phi = F(p), \tag{4}$$

avec F à support strictement contenu dans un pavé Π, et $\mathcal{A}$ à coefficients constants en **dehors** du pavé Π.

Principe : Modifier (4) en l'équation

$$p\widetilde{\Phi} + \widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\Phi} = \widetilde{F}, \tag{5}$$

avec $\widetilde{u} = \widetilde{u}(u) = u + \frac{1}{p}\int_0^u \sigma_u(\xi)\, d\xi, u = (x,y,z)$.

Résultat (incomplet)

- Pour $Re(p) \geq 0$, (5) admet une solution $\tilde{\Phi}$, C^∞ en dehors d'un compact de $\mathbb{R}^3$, et à décroissance rapide.
- Si $\widetilde{F}$ est à support dans Π, alors : $\widetilde{\Phi}|_\Pi = \Phi|_\Pi$.
- **Manque** : unicité, continuité par rapport aux données, CL adéquates, relèvement en temps.

CPML : un relèvement en temps

En posant :

$$\partial \mathbf{x_i} \rightarrow \frac{\partial_t}{\partial_t + \sigma_i} \partial x_i = \left(1 - \sigma_i *_{(t)} e^{-\sigma_i t}\right) \partial x_i,$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} S = A^1 \, e^{-\sigma_x t} *_t \partial_x \widetilde{\varphi} \\ T = A^2 \, e^{-\sigma_y t} *_t \partial_y \widetilde{\varphi}, \end{array} \right.$$

on obtient le système pour $\Psi = (\widetilde{\varphi}, S, T)$:

CPML en 2D

$$\partial_t \Psi + \begin{pmatrix} A^1 \partial_x + A^2 \partial_y + B & -\sigma_x & -\sigma_y \\ -A^1 \partial_x & \sigma_x & 0 \\ -A^2 \partial_y & 0 & \sigma_y \end{pmatrix} \Psi = \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

- Le système CPML n'est pas un système de Friedrichs. Il est **faiblement hyperbolique**.
- A coefficients **gelés**, c'est un système de Cauchy bien posé.
- La **stabilité** de l'approximation numérique est "assurée" par des **volumes finis** structurés dans les PML.

Validation numérique des CPML

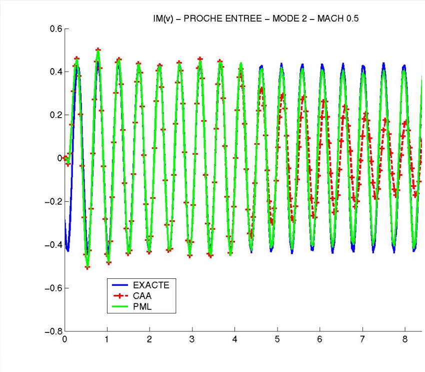


FIG.: Modes $n = 2$. **Exacte**; **CPML**; **CAA**.

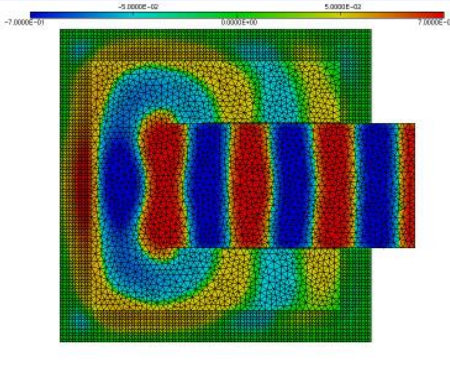
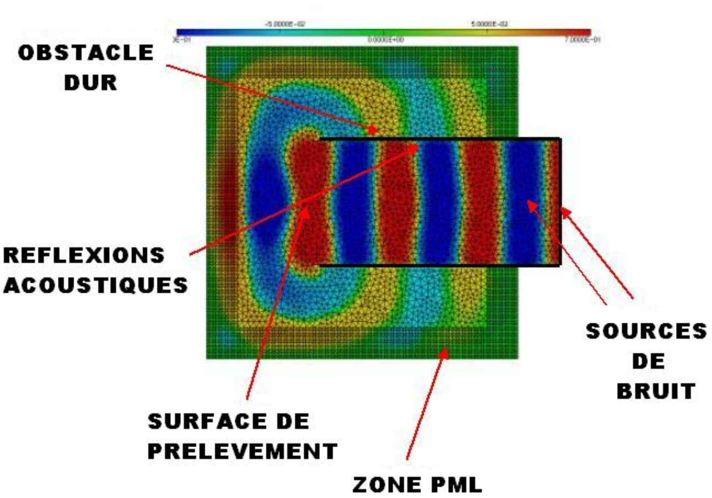


FIG.: P1/RK2 + VF/RK1.

- PML 2D-M=0

Modèle d'étude



Etude préliminaire

- **Sensibilité** des problèmes inverses par rapport à β :

  - Choix de la fonctionnelle **objectif** : $J(\beta) = \int_{O_s \times [0,T]} \left(A^i n_i \varphi_\beta, A^i n_i \varphi_\beta \right)_{\mathbb{C}^3}$
  - **Convexité** de $J(\beta)$ (pour β réel).
  - Minima extrêmement plats (mauvais conditionnement).

- **Sensibilité** importante aux **dimensions** du canal (existence de cas pathologiques pour le contrôle optimal).

- Résultats **liés** à la **géométrie** et au choix de la **fonctionnelle**.

Méthodologie d'optimisation

- Implémentation d'un algorithme d'optimisation de type quasi-Newton (le **BFGS-B**).
- Utilisation d'une méthode **multigrille** pour augmenter le nombre de paramètres de contrôle.

Réduction du bruit : β réel et source Dirac sinusoïdale

Configurations utilisées pour les cas tests :

- Vitesse uniforme de l'écoulement porteur : Mach $M = [0{,}0.5]$.
- Approximation : P^1/**RK2** (DGM).
- **Canal** maillé en $\lambda/10 \rightarrow \lambda/5$.

Gain (dB) par rapport à l'absorption maximale des ondes normales

Source Dirac (paramètres en amont inutiles), $M = 0$, $f = 1000Hz$.

dimension de $\beta(x)$	Gain en dB
1	8,94
4	9,07
20	9,14
40	9,16

FIG.: Gains pour β réels.

Réduction du bruit : modes transverses et influence des contraintes

Gain (dB) par rapport à l'absorption maximale des ondes normales

Sources modales, $M = 0.3$, $f = 1000Hz$, $f = 3000Hz$.

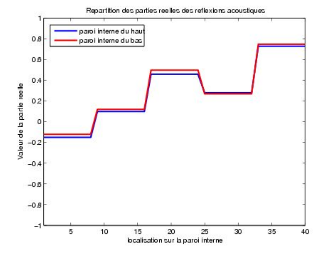
Contraintes *mathématiques* || Contraintes *physiques*

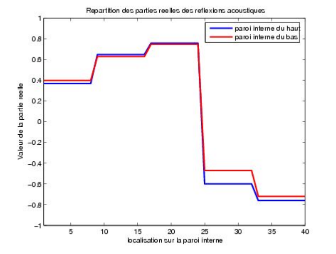
$\frac{\text{mode}}{\text{dimension}}$	0	1	2	$\frac{\text{mode}}{\text{dimension}}$	0	1	2
2	20.8	18.9	10.2	4	20.8	18.9	10.2
8	24.3	23.7	27.5	16	22.5	22.2	18.8
16	26.2	25.6	30.2	32	24.35	24.3	25.6
20	27.1	26.8	31.8	40	25.2	25.1	28.2

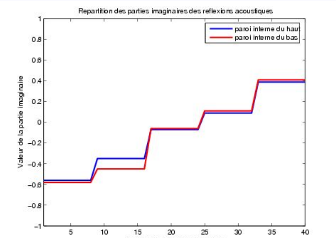
$\frac{\text{mode}}{\text{dimension}}$	0	1	2	$\frac{\text{mode}}{\text{dimension}}$	0	1	2
2	8.3	7.6	5.8	4	8.3	7.6	5.8
8	12.6	13.7	15.1	16	12.5	13.7	14.2
16	14.3	16	18.3	32	14	15.8	17.6
20	15.1	18.2	21.1	40	15	18	19.8

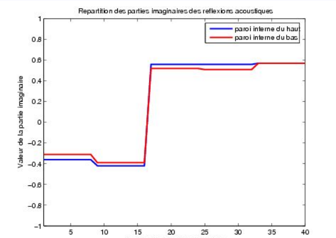
Réduction du bruit : Répartition des β complexes

$f = 1000Hz$ | $f = 3000Hz$





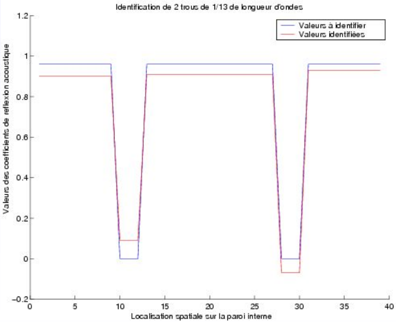




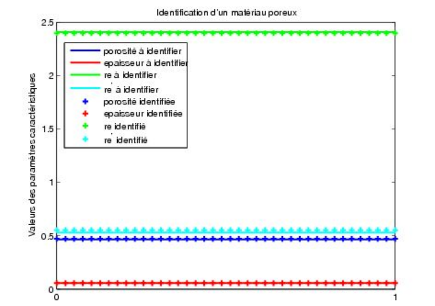
Résultats d'identification

- **L'unicité** de la solution au problème inverse est ici **cruciale**.
- Utilisation de données **non bruitées** pour tester les **limites** numériques d'application de la méthode d'optimisation.
  1. **Retrouver** la position exacte de **trous**.
  2. Identifier **un** matériau poreux par un matériau **au moins** de réflexion acoustique **équivalente**.

2 trous du 1/13 de longueurs d'ondes



Identification du matériau



Conclusions

Mise en place d'une méthodologie de résolution de problèmes inverses en aéroacoustique :

1. Adéquation de la théorie des systèmes de **Friedrichs** (Problèmes **direct** et **adjoint** bien posés, CL) à les résoudre.

2. **DGM** efficace pour simuler les phénomènes aéroacoustiques (précision, PML) et **apte** à l'approximation des problèmes inverses (commutation **Adjoint Discrétisé-Discrétisé adjoint**).

3. La méthode d'optimisation est **justifiée** : La réduction du bruit est **significative** avec des matériaux absorbants réalisables et non **intuitifs**.

Perspectives

Ces résultats sont très **sensibles** aux données et à la fonction objectif :

- La réalité complexe des sources de **bruit** mises en jeu nécessite un :
  1. **Relèvement** temporel du modèle harmonique des matériaux poreux.
  2. **Couplage** du système instationnaire avec les EEL + **nouveau** problème de contrôle.
  3. **couplage** du vrai problème d'aéroacoustique non linéaire avec le problème de propagation **linéarisé**.

- **Spécifier** les fonctions objectifs de manière plus pertinente (champ lointain-champ proche).

- Considérer des **géométries** plus complexes en 3D (méthodologie à implémenter + PML).

- Identification : Principe de **Morozov**.