



**HAL**  
open science

# Analyse et modélisation du comportement des liaisons cannelées – Mise en place des bases d’un outil d’assistance à la conception

Adrien Barrot

► **To cite this version:**

Adrien Barrot. Analyse et modélisation du comportement des liaisons cannelées – Mise en place des bases d’un outil d’assistance à la conception. Mécanique [physics.med-ph]. INSA de Toulouse, 2006. Français. NNT: . tel-00136499

**HAL Id: tel-00136499**

**<https://theses.hal.science/tel-00136499>**

Submitted on 14 Mar 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L’archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d’enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**L'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse**

Numéro d'ordre : 852

# **THESE**

Pour obtenir le grade de : **DOCTEUR DE L'INSAT**

**Discipline : Génie Mécanique**

Présentée et soutenue publiquement par

**Pierre BARROT**

Le 24 novembre 2006

**Analyse et modélisation du comportement des liaisons  
cannelées – Mise en place des bases d'un outil d'assistance  
à la conception**

## **JURY**

<b>M. Jean-Yves COGNARD</b>	Professeur à l'ENSIETA, Brest	Rapporteur
<b>M. David DUREISSEIX</b>	Professeur à l'Université Montpellier 2	Rapporteur
<b>M. Jean GUILLOT</b>	Professeur à l'INSA de Toulouse	Président
<b>M. Emmanuel MERMOZ</b>	Docteur, Ingénieur Groupe Eurocopter, Marignane	Examineur
<b>M. Manuel PAREDES</b>	Maître de Conférences à l'INSA de Toulouse	Codirecteur
<b>M. Marc SARTOR</b>	Professeur à l'INSA de Toulouse	Directeur



---

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier vivement M. Marc Sartor et M. Manuel Paredes pour la confiance qu'ils m'ont accordée ainsi que pour leur encadrement, leurs nombreux conseils et leur soutien constant tout au long de cette thèse.

J'adresse ma reconnaissance à M. Jean-Yves Cognard et M. David Dureisseix qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de la thèse. Pour cela, ainsi que pour leurs commentaires sur mon mémoire, je leur exprime ma profonde gratitude. Je remercie M. Emmanuel Mermoz d'avoir accepté d'être examinateur de ma thèse, apportant ainsi un avis industriel sur le sujet. Je remercie également M. Jean Guillot d'avoir accepté de présider le jury de thèse.

Je remercie tous les chercheurs, enseignants et membres du personnel du laboratoire LGMT et de l'INSA pour leur amitié et leur aide pendant ces trois années de thèse. Notamment les membres des équipes Cosam et Mmf avec qui j'ai pu partager de nombreux bons moments.

Cette thèse est dédiée à ma femme Christine, qui m'a supporté dans les moments difficiles et sans qui ce travail n'aurait sans doute jamais commencé ni abouti.

Cette thèse n'est pas dédiée à un certain Recteur d'une Académie lointaine, qui a tout fait pour que je ne puisse pas la terminer dans les trois années imparties, à toutes les personnes qui dénigrent le fait de vouloir faire une thèse alors qu'on est agrégé.

Je termine par un grand remerciement à mes parents ainsi qu'à toute ma famille.



---

## SOMMAIRE

Nomenclature.....	1
Introduction Générale.....	4
1    PRESENTATION DES TYPES DE CANNELURES ET DE LEURS UTILISATIONS .....	4
2    GENERALITE SUR LE DIMENSIONNEMENT .....	8
3    DEROULEMENT DE L'ETUDE .....	9
Chapitre 1    Bibliographie sur les cannelures.....	11
1.1    DESCRIPTION DES PHENOMENES .....	11
1.1.1 <i>Comportement axial</i> .....	12
1.1.2 <i>Comportement radial</i> .....	30
1.1.3 <i>Comportement des dents</i> .....	36
1.2    EXPLOITATIONS DES MODELES : FRETTEMENT ET FATIGUE .....	37
1.2.1 <i>Définition du fretting</i> .....	37
1.2.2 <i>Le fretting appliqué aux cannelures</i> .....	39
1.2.3 <i>Conclusion sur l'étude du fretting</i> .....	42
1.3    NORMALISATIONS .....	43
1.3.1 <i>Normalisation française</i> .....	43
1.3.2 <i>Normalisation américaine</i> .....	46
1.4    CONCLUSION .....	49
Chapitre 2    Etude de la pression et découpage de l'analyse du comportement d'une cannelure.....	51
2.1    ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE SUR L'ANALYSE EXPERIMENTALE DU CONTACT ...	51
2.1.1 <i>Mesure durant le chargement</i> .....	52
2.1.2 <i>Mesure avant et après le chargement</i> .....	53
2.2    ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE SUR L'ANALYSE PAR ELEMENTS FINIS DU CONTACT ET CHOIX DU MODELE .....	55
2.2.1 <i>Les modèles EF dans la littérature</i> .....	56
2.2.2 <i>Confrontation des différents codes de calculs</i> .....	57
2.3    PRESENTATION DU CHAMP DE PRESSION POUR LES DIFFERENTS TYPES DE CANNELURE ET DECOUPLAGE DE L'ETUDE DU COMPORTEMENT .....	58

Chapitre 3	Comportement radial.....	61
3.1	MODELE ELEMENTS FINIS DE REFERENCE .....	61
3.2	ETUDE DES MODELES ANALYTIQUES DE CONTACT 1D.....	63
3.2.1	<i>Méthode se basant sur des surfaces irrégulières</i> .....	63
3.2.2	<i>Méthodes se basant sur des surfaces parfaites</i> .....	64
3.3	MISE EN PLACE D'UN MODELE DE CONTACT RADIAL ADAPTE AUX CANNELURES A FLANCS EN DEVELOPPANTE DE CERCLE .....	66
3.3.1	<i>Modèle de Sackfield</i> .....	66
3.3.2	<i>Modèle de Goryacheva</i> .....	69
3.3.3	<i>Adaptation possible du modèle choisi</i> .....	72
3.4	DEFINITION DE LA PROCEDURE DE CALCUL POUR LA DETERMINATION ANALYTIQUE DU COMPORTEMENT RADIAL.....	72
3.4.1	<i>Détermination de la pression radiale</i> .....	73
3.4.2	<i>Détermination des déplacements des dents</i> .....	76
3.4.3	<i>Définition de l'angle d'inclinaison</i> .....	89
3.4.4	<i>Détermination de la rigidité des dents</i> .....	90
3.5	RESULTATS ET VALIDATION.....	90
3.5.1	<i>Adéquation entre les résultats des modèles analytiques et EF 2D</i> .....	90
3.5.2	<i>Discussion</i> .....	93
3.6	CONCLUSION .....	95
Chapitre 4	Comportement axial.....	97
4.1	INTRODUCTION.....	97
4.2	MODELE ELEMENTS FINIS TRIDIMENSIONNEL .....	98
4.3	COMPARAISON DES RESULTATS EF A DES MESURES EXPERIMENTALES .....	99
4.3.1	<i>Présentation du banc d'essai</i> .....	100
4.3.2	<i>Résultats issus du banc d'essai</i> .....	102
4.4	DETERMINATION ANALYTIQUE DU COUPLE PAR LE MODELE DE TATUR - ORAIN .....	107
4.4.1	<i>Etude du modèle Tatur - Orain dans le sens traversant</i> .....	107
4.4.2	<i>Exploitation du modèle de Tatur - Orain</i> .....	113
4.4.3	<i>Extension du modèle Tatur - Orain au cas du sens non traversant</i> .....	117
4.5	DETERMINATION DU COUPLE PAR LA METHODE DE BLANC .....	120
4.5.1	<i>Mise en place du modèle de Blanc</i> .....	120

4.5.2	<i>Comparaison des résultats entre le modèle Tatur - Orain et le modèle de Blanc</i> .....	125
4.5.3	<i>Exploitation du modèle de Blanc</i> .....	125
4.6	CONCLUSION .....	126
Chapitre 5	Développement d'une maquette d'outil d'Assistance à la conception d'une liaison cannelée.....	128
5.1	INTERFACE DE L'OUTIL D'ASSISTANCE .....	128
5.1.1	<i>Interface de définition de la cannelure</i> .....	129
5.1.2	<i>Interface de lancement des calculs</i> .....	130
5.2	ALGORITHMES DE CALCUL.....	132
5.2.1	<i>Description du programme</i> .....	132
5.2.2	<i>Exemples d'application</i> .....	135
5.3	CONCLUSION .....	139
Chapitre 6	Etude complémentaire sur l'influence du débordement des dents.....	140
6.1	INTRODUCTION : INSUFFISANCE DU MODELE 1D.....	140
6.2	DEFINITION D'UN MODELE ETENDU .....	143
6.3	EXPLOITATION NUMERIQUE DU MODELE ETENDU.....	151
6.4	IDENTIFICATION DE LA RAIDEUR GLOBALE EQUIVALENTE A PARTIR DES MESURES SUR UN MODELE EF 3D .....	155
6.4.1	<i>Détermination de <math>C_\phi</math> obtenu par EF3D</i> .....	155
6.4.2	<i>Calcul de <math>I^a</math> et de <math>I^m</math> à partir de <math>C_{\phi EF}(z)</math></i> .....	157
6.4.3	<i>Discussion sur l'allure de la raideur globale équivalente, <math>C_{\phi EF}(z)</math></i> .....	160
6.5	CONCLUSION .....	162
Conclusion Générale.....		163
Références.....		166
Liste des travaux publiés.....		169
Annexe I.....		170
NORME FRANÇAISE .....		171
NORME AMERICAINE.....		172
<i>Généralité sur la norme américaine</i> .....		172
<i>Tables des différents facteurs et valeurs admissibles</i> .....		172



Annexe II.....	176
Annexe III.....	180
MISE EN PLACE DU CHARGEMENT SOUS FORME DE CONTRAINTE .....	181
OBTENTION DU COUPLE ISSU DU MODELE EF .....	182
<i>Méthode par pression</i> .....	182
<i>Méthode par éléments forces</i> .....	184
<i>Confrontation des deux procédés présentés</i> .....	185

---

## NOMENCLATURE GENERALE

Cette nomenclature regroupe les notations les plus souvent employées au cours de cette thèse pour les chapitres 3 et 4 concernant les comportements radial et axial de la cannelure.

### *Longueurs*

<i>Noms</i>	<i>Descriptions</i>	<i>Unités</i>
$a$	Demi-longueur du contact le long de l'axe curviligne $s$	m
$c$	Demi-longueur du contact le long de l'axe $x$	m
$d$	Longueur curviligne où les forces $f_q^a$ et $f_q^m$ sont appliquées	m
$h_k^a, h_k^m$	Hauteurs de la dent de l'arbre et du moyeu au nœud $k$	m
$h_{inter,q}^a, h_{inter,q}^m$	Hauteur de la dent de l'arbre et du moyeu où les forces $f_q^a$ et $f_q^m$ sont appliquées dans la direction $y$	m
$h_p$	Hauteur de la dent sur le rayon primitif	m
$L$	Longueur totale du contact dans la direction $z$	m
$l_a^a, l_a^m$	Distance entre les rayons de tête et de fondation dans le cas de l'arbre et du moyeu	m
$l_{inter,q}^a, l_{inter,q}^m$	Distance entre les rayons de fondation de l'arbre et du moyeu et le point où les forces $f_q^a$ et $f_q^m$ sont dans la direction $x$	m
$l_o^a$	Distance entre le rayon de fondation de l'arbre et le point où $M_{f,k}^a$ est appliqué dans la direction $x$	m
$l_o^m$	Distance entre le rayon de fondation du moyeu et le point où $M_{f,k}^m$ est appliqué dans la direction $x$	m
$l_p^a, l_p^m$	Distance entre le rayon de fondation et le rayon primitif dans le cas de l'arbre et du moyeu	m
$l_{s_k}$	Distance curviligne entre le rayon de commencement du contact et le nœud $k$	m
$L_t$	Longueur du tronçon $t$	m
$L_x$	Longueur totale du contact dans la direction $x$	m
$s$	Coordonnée curviligne	m
$s_j$	Coordonnée curviligne au nœud $j$	m
$t_b$	Epaisseur curviligne de la dent sur le rayon de base	m
$x$	Coordonnée suivant la hauteur de la dent	m
$x_k$	Distance entre le nœud $k$ et le précédent $k - 1$ dans la direction $x$	m
$x_k$	Distance entre le nœud $k$ et le précédent $k - 1$ dans la direction $x$	m
$y$	Coordonnée suivant la largeur de la dent	m
$z$	Coordonnée suivant la longueur de la cannelure	m

*Rayons et Diamètres*

<i>Noms</i>	<i>Descriptions</i>	<i>Unités</i>
$D_{int}$	Diamètre intérieur de l'arbre	m
$D_p$	Diamètre primitif de la cannelure	m
$R_0$	Rayon de tête de l'arbre	m
$R_b$	Rayon de base de la cannelure	m
$R_{ext}, D_{ext}$	Rayon et diamètre extérieur du moyeu	m
$R_i$	Rayon de tête du moyeu	m
$R_k$	Rayon au nœud k	m
$R_{moy}$	Rayon moyen des dents de la cannelure, équivalent au rayon primitif	m
$R_{re}$	Rayon fondation de l'arbre	m
$R_{ri}$	Rayon de fondation du moyeu	m

*Angles*

<i>Noms</i>	<i>Descriptions</i>	<i>Unités</i>
$\alpha$	Angle d'inclinaison d'une dent par rapport à l'autre	rad
$\phi^a(z), \phi^m(z)$	Angles de rotation de l'arbre et du moyeu à la section z	rad
$\phi_i^a, \phi_i^m$	Rotations dans le tronçon t au nœud i de l'arbre et du moyeu	rad
$\theta_{d,k}$	Angle de contact incluant l'angle de la dent	rad
$\theta_j^a, \theta_j^m$	Angle entre l'axe x et la droite passant par le centre de la cannelure et l'intersection entre le diamètre primitif et le flanc en contact respectivement de l'arbre et du moyeu	rad
$\theta_{p,j}$	Angle de la force de contact avec la pression $p(s_j)$	rad
$\phi$	Angle de pression de la dent	rad
$\phi_k$	Angle de pression de contact au nœud k	rad
$\phi_{p,j}$	Angle de la force de contact avec la pression $p(s_j)$	rad

*Forces, moments et pression*

<i>Noms</i>	<i>Descriptions</i>	<i>Unités</i>
$C_0$	Couple par unité de profondeur et par dent	N
$C_{ext}$	Couple extérieur transmis par la cannelure	Nm
$F$	Force appliquée sur le flanc de la dent	N/m
$f_q^a, f_q^m$	Force appliquée sur le segment q de l'arbre et du moyeu	N/m
$M$	Couple appliqué sur le flanc de la dent	N
$M^a(z), M^m(z)$	Couple dans l'arbre et dans le moyeu à la section z	Nm
$M_{b,k}^a, M_{b,k}^m$	Moments de flexion de l'arbre et du moyeu au nœud k	N
$M_{t_i}^a, M_{t_i}^m$	Couple dans l'arbre et le moyeu d'un tronçon t au nœud i	N
$p(s_i)$	Pression suivant l'abscisse curviligne s au nœud i	Pa
$p(x)$	Pression suivant l'axe radial de la dent x	Pa
$p_m(z)$	Pression moyenne suivant la longueur du contact	Pa
$p_{max}$	Pression maximale suivant l'axe radial de la dent x	Pa
$p_r^a, p_r^m$	Pression radiale équivalente de l'arbre et du moyeu	Pa
$V_k^a, V_k^m$	Effort tranchant au nœud k de l'arbre et du moyeu	N/m

*Sections et inerties*

<i>Noms</i>	<i>Descriptions</i>	<i>Unités</i>
$A_K$	Constante dépendant de $\chi$ et $\mu$	$\text{m}^2/\text{N}$
$\mu$	Module de rigidité	
$G^a, G^m$	Module de cisaillement de l'arbre et du moyeu	Pa
$E^a, E^m$	Module d'Young de l'arbre et du moyeu	Pa
$I_o^a, I_o^m$	Moments quadratiques polaires des dents de l'arbre et du moyeu où $M_{f,k}^a$ et $M_{f,k}^m$ sont appliquées	$\text{m}^4$
$I^a, I^m$	Moments quadratiques polaires de l'arbre et du moyeu	$\text{m}^4$
$\chi$	Constante de Kolosov	$\text{m}^2/\text{N}$
$S_k^a, S_k^m$	Surface de l'arbre et du moyeu où $V_k^a$ et $V_k^m$ sont appliqués	$\text{m}^2$
$S^a, S^m$	Surface cisailée respectivement d'une dent de l'arbre et du moyeu	$\text{m}^2$

*Autres*

<i>Noms</i>	<i>Descriptions</i>	<i>Unités</i>
$A$	Constante dépendant de $k$ et des propriétés matériaux et géométriques de la cannelure	Nm
$A'$	Constante dépendant de $k$ et des propriétés matériaux et géométriques de la cannelure	Nm
$B$	Constante dépendant de $k$ et des propriétés matériaux et géométriques de la cannelure	Nm
$C_\varphi$	Valeur caractéristique de la rigidité des dents de la cannelure	N/rad
$k$	Constante géométrique fonction des propriétés matériaux et géométriques de la cannelure	$\text{m}^{-1}$
$k_c^a, k_c^m$	Coefficients correcteurs de l'arbre et du moyeu de la compression	
$k_{glis}$	Coefficient correctif du glissement	
$k_o^a, k_o^m$	Coefficients d'influence de la rotation de la fondation pour l'arbre et pour le moyeu	
$k_s^a, k_s^m$	Coefficients « section modulus » de l'arbre et du moyeu	
$K_{t, global}$	Matrice de rigidité du tronçon $t$	Nm/rad
$K_t^a, K_t^m$	Rigidité de la partie arbre et moyeu du tronçon $t$	Nm/rad
$K_{t,d}$	Rigidité d'une moitié de tronçon	Nm/rad
$\theta_{rf}^a, \theta_{rf}^m$	Rotation de la fondation des dents de l'arbre et du moyeu	rad
$\theta_{globale}$	Rotation globale de corps du moyeu	rad
$m$	Module des dents	m
$u_{glis}$	Déplacement orthoradial créés par le glissement dans l'arbre et le moyeu	m
$u_{s,j}^a, u_{s,j}^m$	Flèche issue du cisaillement respectivement de l'arbre et du moyeu	m
$u_{b,j}^a, u_{b,j}^m$	Flèche issue de la flexion respectivement de l'arbre et du moyeu	m
$u_c^a, u_c^m$	Déplacement au niveau du rayon primitif issue de la compression	m
$v_{glis}^a, v_{glis}^m$	Déplacements radiaux créés par le glissement dans l'arbre et le moyeu	m
$Z$	Nombre de dents de la cannelure	



---

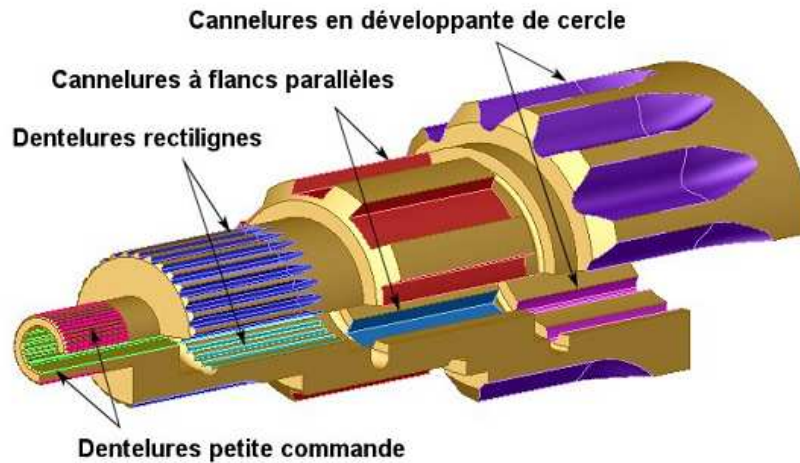
## INTRODUCTION GENERALE

*Pour introduire le travail qui est développé dans ce mémoire, nous consacrons quelques pages à la description des différents types de cannelures existants et de leurs utilisations. Chaque type présente des particularités au niveau de son comportement mécanique. Ces spécificités sont à la base de certains choix que nous serons emmenés à faire, particulièrement au chapitre 3 concernant le comportement radial des cannelures.*

### 1 PRESENTATION DES TYPES DE CANNELURES ET DE LEURS UTILISATIONS

Dans un grand nombre d'assemblages mécaniques, l'emploi de simples clavettes permettent de lier en rotation un arbre avec un moyeu (exemples : poulies, roues dentées) et, ainsi transmettre un couple. Toutefois, l'usinage d'une ou de plusieurs rainures dans l'arbre et l'ajustage de la ou des clavettes dans celles-ci constituent un travail toujours délicat. De plus, l'endommagement des clavettes se traduit par l'augmentation du jeu dans les rainures de l'assemblage, ce qui crée en dynamique des efforts parasites, souvent à l'origine de la destruction de la liaison. C'est pourquoi les clavettes sont utilisées lorsque le couple à transmettre reste faible. Pour des couples plus importants l'utilisation de cannelures est plus appropriée. Leurs avantages sont multiples. L'usinage est plus facile à réaliser en utilisant par exemple le brochage. La précision de l'usinage permet aussi de diminuer nettement le risque de jeu dans la liaison et enfin il y a une augmentation significative de la section utile de l'arbre.

Il existe deux types de cannelures différentes présentées en Figure 1 : les cannelures à flancs parallèles et à flancs en développante de cercle. Il est aussi d'usage d'associer à ce type de liaison les dentelures rectilignes et les axes dentelés pour petites commandes.



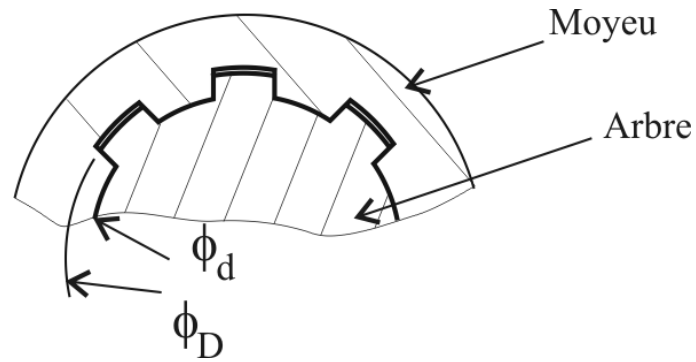
**Figure 1 Les différents types de cannelures et dentelures**

La cannelure à flancs parallèles est essentiellement employée lors de transmission de puissance de faibles vitesses pour des systèmes développés en petites séries comme le montre la Figure 2 pour une boîte de transmission de marque « Belt ».



**Figure 2 Boîte de transmission « Belt ».**

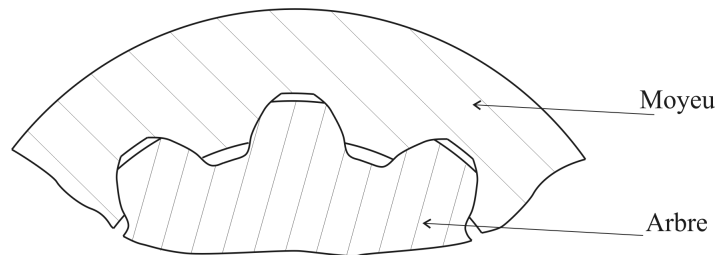
En effet de par sa géométrie (Figure 3), elle se révèle être moins résistante et plus bruyante qu'une cannelure à flancs en développante de cercle.



**Figure 3 Géométrie de la cannelure à flancs parallèles**

La désignation employée pour ce type de cannelure est :  $Z \times d \times D$ , avec  $Z$  le nombre de dents,  $d$  et  $D$  sont des diamètres de fondation et de tête de l'arbre, visible sur la Figure 3.

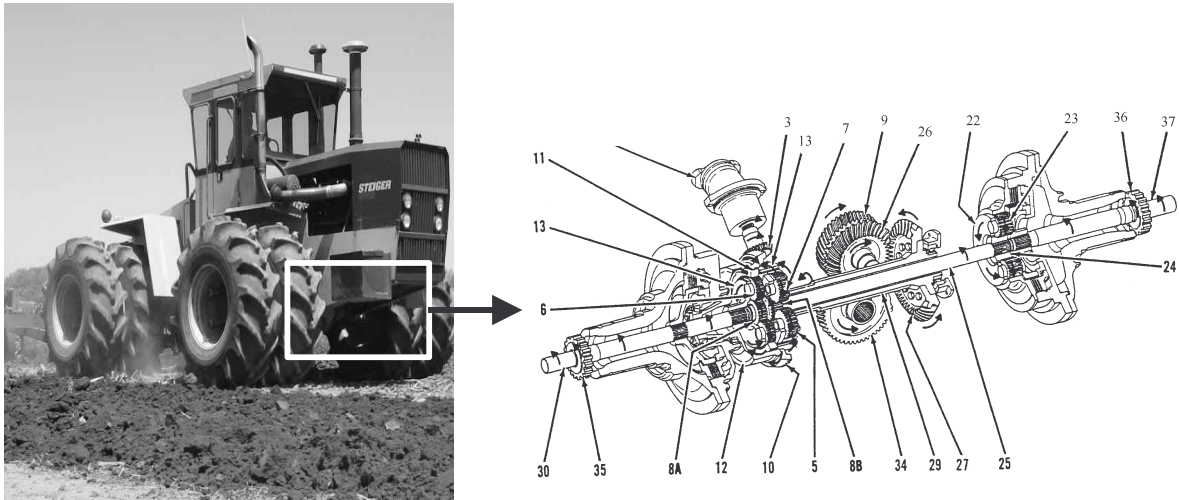
La cannelure à flancs en développante de cercle est une application indirecte des engrenages à flancs en développante de cercle. La Figure 4 est une illustration représentant sa géométrie. La désignation utilisée dans cette thèse est  $Z \times m$ , avec  $Z$  le nombre de dents,  $m$  le module.



**Figure 4 Géométrie de la cannelure à flancs en développante de cercle**

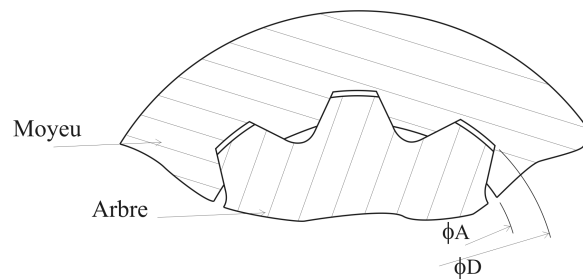
Elle permet des vitesses de rotation et des couples importants, comme dans les boîtes de transfert d'hélicoptère ou d'engins de chantier. La Figure 5 en est une illustration.



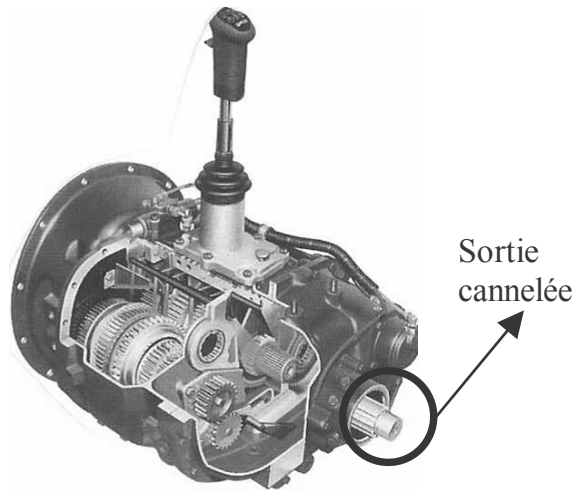


**Figure 5** Système de direction d'un tracteur

Les dentelures rectilignes sont employées pour la réalisation d'assemblages fixes ou bloqués pour lesquels la précision du centrage et de l'ajustement peut sans inconvénient être inférieure à celle obtenue par l'emploi de cannelures à flancs en développante de cercle. Ainsi les dentelures rectilignes sont utilisées essentiellement pour des petites transmissions de puissance, comme la transmission du couple en sortie de boîte de vitesse de voiture vers les roues. Leur géométrie est représentée Figure 6.



**Figure 6** Géométrie de dentelures rectilignes



**Figure 7 Boite de vitesse de voiture**

Finalement les axes dentelés pour petites commandes permettent le calage angulaire d'un organe de commande dans plusieurs positions. Souvent les petits leviers de commande en sont équipés.

Notre travail de thèse étant lié au dimensionnement des cannelures lors d'une transmission de puissance, nous n'étudierons pas les axes dentelés pour petites commandes.

## 2 GENERALITE SUR LE DIMENSIONNEMENT

La liaison cannelée, grâce à sa géométrie offre aussi la possibilité de transmettre un torseur d'effort quasi complet, assimilable à une liaison glissière. Cependant sa principale fonction est de transmettre un couple, ainsi les autres forces et moments transmis par la liaison sont alors considérés comme des parasites.

Le dimensionnement d'une cannelure s'effectue en émettant un certain nombre d'hypothèses simplificatrices qui peuvent se révéler très éloignées de la réalité des résultats obtenus expérimentalement ou en faisant appel à des études plus approfondies comme la modélisation par Eléments Finis. Pour la plupart des applications industrielles, le dimensionnement donné par les normes suffit et l'accouplement ainsi dimensionné remplit ses fonctions. Ceci est dû au fait que la méconnaissance du comportement de tels systèmes mécaniques est palliée par un surdimensionnement au travers de coefficients de sécurité.

En revanche, pour des applications pointues et beaucoup plus contraignantes, par exemple dans le domaine de l'aéronautique (transmission de puissance de turbines ou turboréacteurs...), les normes se révèlent limitées et des ruptures de pièces qui ont pourtant été dimensionnées dans les règles, peuvent être observées. Le problème vient essentiellement

du fait que la modélisation initiale utilisée pour le calcul utilise une hypothèse forte qui consiste à dire que la pression de contact sur les éléments de l'assemblage est également répartie sur toute la longueur de la clavette pour les assemblages clavetés, et sur toute la longueur de la dent pour les éléments cannelés, ce qui n'est pas vérifié en réalité. Si les différentes normes concernant les cannelures sont similaires en ce qui concerne la définition géométrique, on remarque que les formules de capacité de charge (transmission de couple) et de contraintes sont plus ou moins précises d'une norme à l'autre, même si les hypothèses sur le comportement mécanique restent identiques.

### 3 DEROULEMENT DE L'ETUDE

Cette étude concerne l'analyse du comportement des cannelures lorsqu'elles sont soumises à de la torsion pure. Dans le monde industriel actuel, la nécessité de dimensionner rapidement est devenu primordial. Au départ d'une collaboration avec un industriel aéronautique, nous avons voulu développer un outil d'aide au dimensionnement des cannelures qui soit rapide et qui ne fasse pas appel à des modélisations lourdes sous Eléments Finis. Pour cela nous avons développé une méthode analytique, qui est exposée dans ce mémoire.

Le premier chapitre propose une étude bibliographique traitant uniquement des cannelures. A travers les publications, nous présentons les divers comportements d'une cannelure, suivi d'une analyse d'un phénomène d'usure : le fretting. Enfin une présentation des règles de dimensionnement des normalisations courantes est faite.

Le deuxième chapitre traite de l'analyse du contact entre les flancs des dents en contact afin d'obtenir un champ de pression. Après une investigation bibliographique des études expérimentales ou numériques du contact, nous exposons l'allure du champ de pression présent sur les flancs des dents pour les différents types de cannelure. Nous en déduisons alors la possibilité de découpler l'analyse du comportement global d'une cannelure.

Le troisième chapitre est consacré à la modélisation du comportement radial d'une cannelure. Après une analyse de modèles analytiques déjà existant, une méthode entièrement analytique est développée pour des cannelures à flancs en développante de cercle. Cette méthode est validée en s'appuyant sur des résultats issus de modèles EF.

Le quatrième chapitre présente une méthode analytique décrivant axialement le comportement d'une cannelure. Au cours de cette étude, des expériences ont été nécessaires. C'est pourquoi une partie de ce chapitre expose la conception, et l'exploitation d'un banc d'essai. Enfin, nous proposons une validation des modèles analytiques déjà existants. Nous présentons aussi une extension de ces modèles à un autre cas de chargement.

Le cinquième chapitre décrit l'ébauche d'une maquette d'outil d'assistance à la conception de cannelures, objectif du travail de thèse. C'est le bilan des deux précédents chapitres.

Un sixième chapitre est motivé par l'objectif d'améliorer le modèle analytique décrivant le comportement axial. Nous montrons que le modèle analytique développé au chapitre 4 ne permet pas de représenter fidèlement toutes les géométries et nous proposons un nouveau modèle. Un paramètre clé est plus particulièrement étudié : la rigidité des dents. Ce travail reste une analyse où nous proposons quelques pistes de réflexions.

Pour terminer une conclusion dégagant les perspectives et développements futurs de notre travail, est présentée.

En annexe, il est possible de retrouver des tableaux décrivant des coefficients utilisés dans la normalisation américaine. Nous présentons aussi une étude de l'influence d'un film entre deux dents sur la répartition de la pression en contact. Enfin une troisième partie consacrée à la mise en place du chargement dans les modèles EF 3D et l'exploitation des résultats des modèles EF 3D pour obtenir la distribution du couple à travers une cannelure.



---

## CHAPITRE 1 BIBLIOGRAPHIE SUR LES CANNELURES

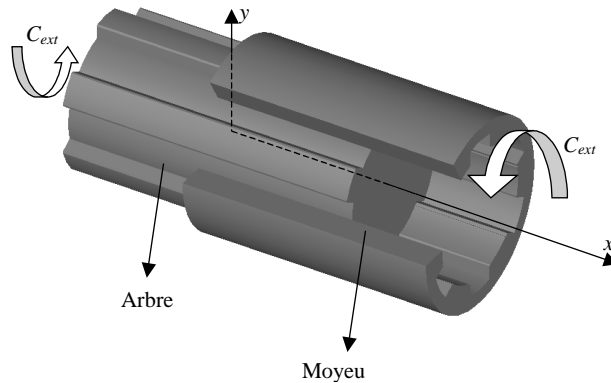
*Ce chapitre présente les connaissances relatives aux cannelures que nous avons pu capitaliser menant une étude bibliographique. Nous analysons tout d'abord les phénomènes existant au sein d'une telle liaison sous un chargement de torsion pure. Pour cela des modèles expérimentaux, Eléments Finis et analytiques sont détaillés. Ensuite nous présentons une exploitation possible de ces études pour résoudre un problème important dans une cannelure : le fretting. Enfin nous décrivons brièvement les normalisations française et américaine et nous mettons en évidence leurs lacunes.*

### 1.1 DESCRIPTION DES PHENOMENES

Au regard de la littérature, le comportement d'un assemblage cannelé apparaît comme complexe. La plupart des écrits signalent de fortes variations au sein de la liaison pour de nombreuses caractéristiques mécaniques : transfert de couple, contraintes, pression de contact sur les dentelures.... Cette non-uniformité se retrouve à travers l'étude du comportement dans deux directions principales. Il s'agit tout d'abord du comportement axial de la cannelure, qui permet de connaître la répartition de la pression de contact le long de la cannelure, des contraintes, et donc du transfert de couple de l'arbre vers le moyeu ou inversement. Ensuite il s'agit du comportement radial de la cannelure qui permet, dans cette direction, l'analyse des distributions de contraintes et de la pression de contact.

Enfin pour pouvoir modéliser le comportement d'une cannelure, par exemple au sein d'un ensemble dynamique, il est important de connaître la raideur de la liaison. Une modélisation de cette raideur globale est proposée par Blanc dans les Techniques de l'Ingénieurs [Blanc, 2000].

Notons que dans la littérature, et donc dans ce chapitre, la charge considérée rentre par un coté de la liaison et sort par l'autre, comme le montre la Figure 1-1. Le cas où la charge rentre et sort du même coté est fréquent dans le monde industriel. Pourtant il n'a pas donné lieu, à notre connaissance, à des publications.



**Figure 1-1 Schéma du sens traversant de la puissance**

### 1.1.1 Comportement axial

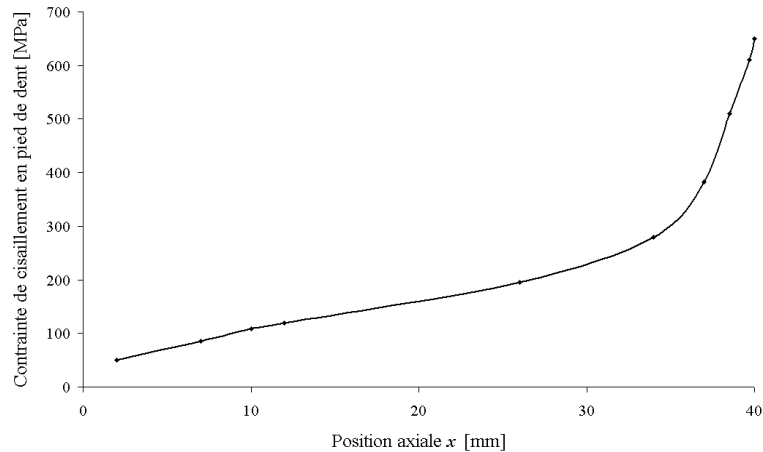
#### 1.1.1.1 Modèles EF

##### ➤ Analyse des modèles Éléments Finis

Une étude par Éléments Finis met assez facilement en évidence le phénomène de non-uniformité au sein d'une cannelure et plus particulièrement celle de la répartition de pression de contact le long des dents. La suite de ce paragraphe présente quelques résultats significatifs relatifs à la répartition de la pression de contact et de la distribution de contraintes obtenues par simulation numérique. A travers ces différentes études, seules des cannelures à flancs en développantes de cercle ont été exploitées.

Tjernberg [Tjernberg, 2001] présente une étude des contraintes de cisaillement en pied de dent à l'aide d'une simulation par calcul Éléments Finis. Ce travail est réalisé dans le but d'obtenir une méthode analytique permettant de trouver un transfert de couple régulier à travers la cannelure. La position axiale  $x$  est mesurée à partir de l'extrémité du contact comme le montre la Figure 1-1, qui représente schématiquement la configuration adoptée.

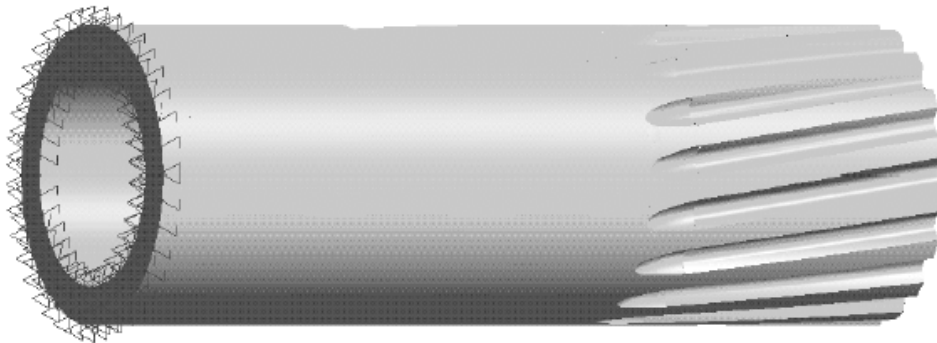
La Figure 1-2, qui décrit la contrainte de cisaillement en pied de dent selon Tjernberg, montre que cette contrainte de cisaillement varie de manière importante en fonction de la position axiale, mais surtout qu'il existe un fort gradient en bout de dentelure.



**Figure 1-2 - Contrainte de cisaillement en pied de dent en fonction de la position axiale  $x$  [Tjernberg, 2001]**

Des résultats comparables sur la contrainte de cisaillement sont présentés dans une autre étude menée par Leen *et al.* [Leen, 2000].

Adey [Adey, 2000] réalise une simulation sur des cannelures hélicoïdales à 18 dents. Le chargement est introduit par un ensemble d'efforts tangentiels appliqués sur la périphérie de l'extrémité du moyeu, créant ainsi un couple. L'extrémité de ce moyeu (non représenté) est immobilisée dans la direction axiale. La Figure 1-3 montre les conditions aux limites imposées à l'arbre, l'extrémité gauche étant totalement immobilisée.



**Figure 1-3 Arbre du modèle de Adey [Adey, 2000]**

La Figure 1-4 illustre les zones et les distributions de pression de contact obtenues, révélant la non-uniformité des champs de pression, notamment suivant l'axe de la cannelure.

Pour étudier la répartition de chargement dans un assemblage cannelé, Leen et son équipe [Leen, 2000] ont aussi développé un modèle EF. La géométrie est visible sur la Figure 1-5.



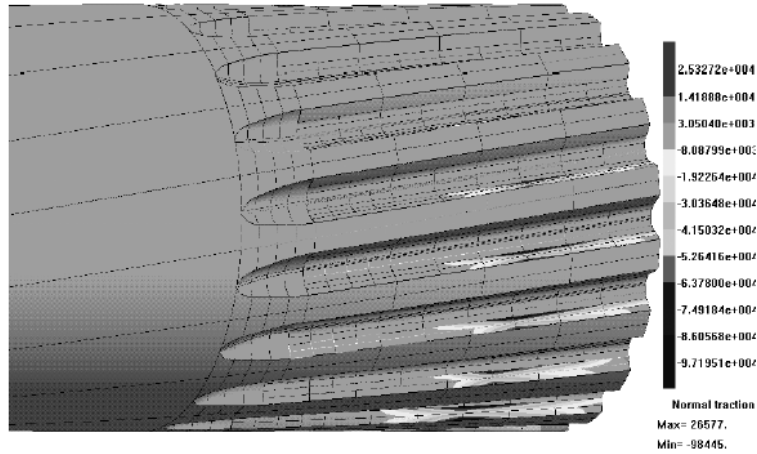
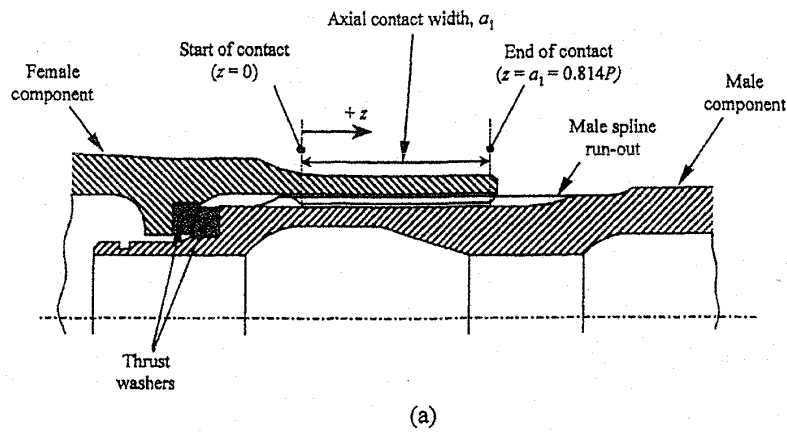
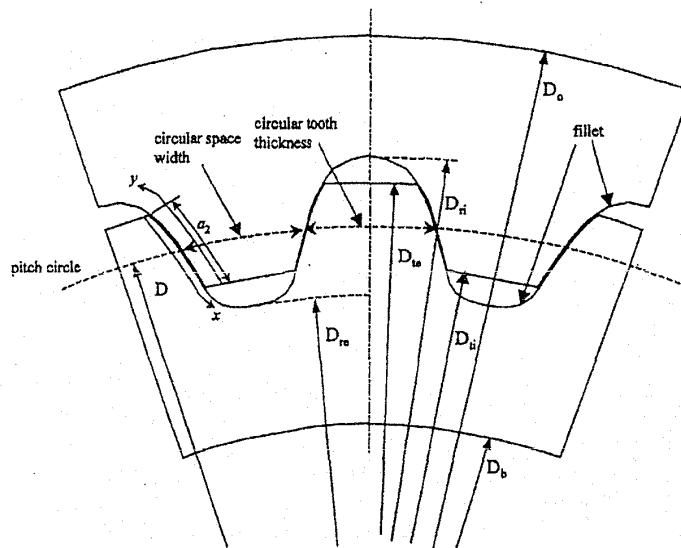


Figure 1-4 Détail du maillage de l'arbre et visualisation de la pression de contact

[Adey, 2000]



(a)

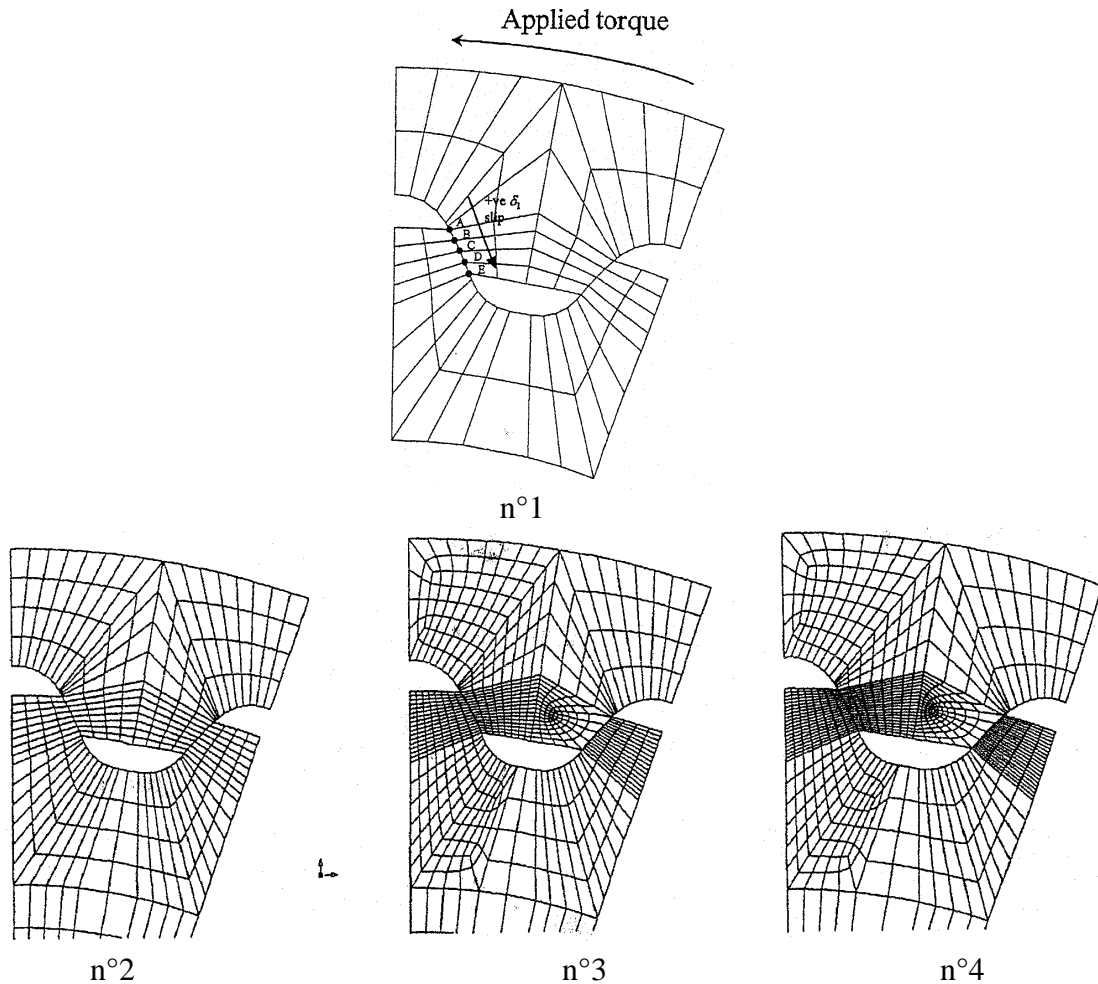


(b)

Figure 1-5 Géométrie du modèle EF de l'assemblage cannelé (développante de cercle).

Définitions des côtes x et z, et des dimensions  $a_1$  et  $a_2$ . [Leen, 2000]

Cette étude propose quatre maillages différents au contact dent intérieure / extérieure, du plus simple (maillage 1) au plus raffiné (maillage 4), et cinq points de mesure (A-E) des pressions de contact le long du flanc des dents (Cf. Figure 1-6), le point C étant proche du rayon primitif.



**Figure 1-6 Section du modèle EF de l'accouplement cannelé, avec les points de calcul au contact et 4 niveaux de discrétisation [Leen, 2000]**

Le maillage 4 en  $z = 0$  et  $z = a_1$  est affiné afin de mieux observer les phénomènes existant aux bords de la cannelure (Figure 1-7).

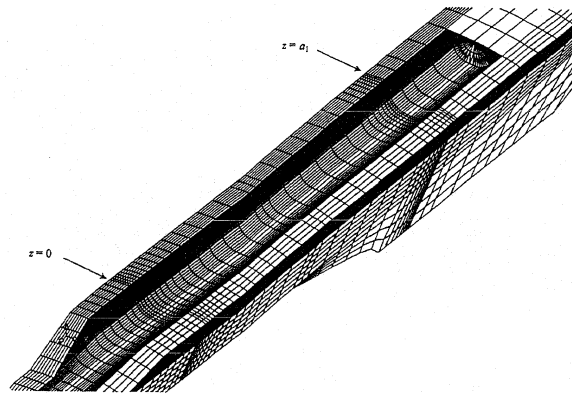


Figure 1-7 Maillage n°4 de la cannelure externe [Leen, 2000]

La Figure 1-8 permet une comparaison des résultats issus des 4 maillages pour la répartition axiale de la pression de contact adimensionnée. Les résultats aux points A et E présentent une singularité due aux arêtes vives en tête et pied de dent, ils n'apparaissent donc pas sur les graphes.

Remarque : les abscisses  $x$  et  $z$  et les dimensions  $a_1$  et  $a_2$  sont définies Figure 1-5.

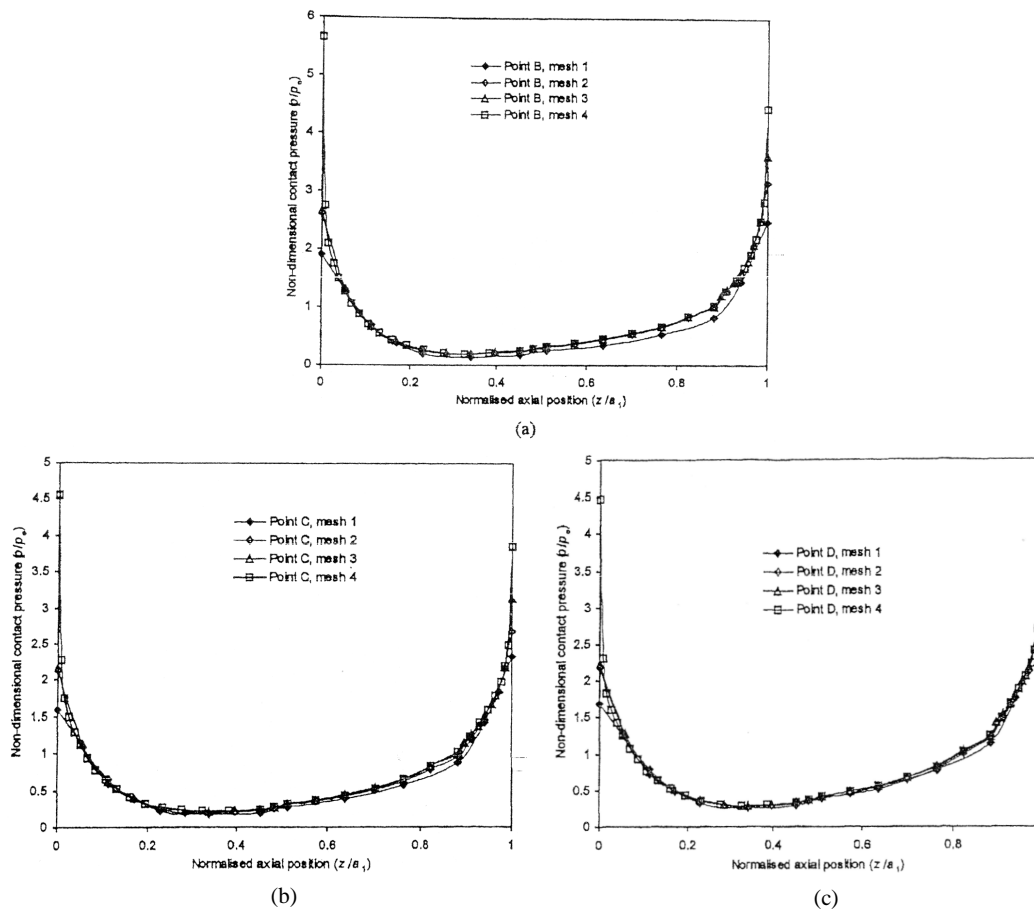


Figure 1-8 Répartition axiale de la pression de contact adimensionnée en B, C et D le long de l'axe et pour différents maillages [Leen, 2000]

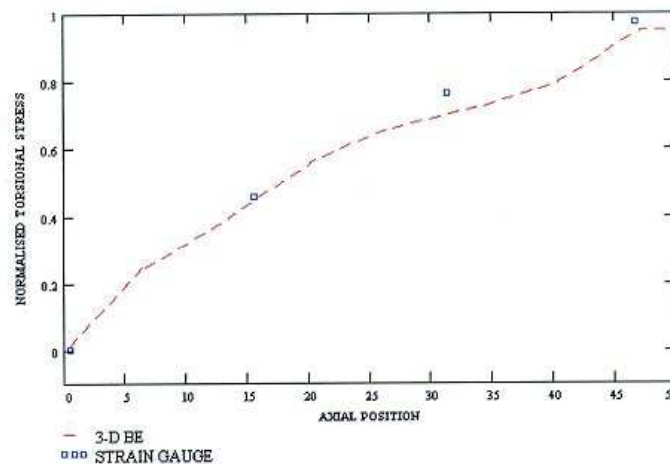
La répartition axiale semble être peu sensible à la finesse du maillage adopté et cela pour chacun des trois points présentés. Aux extrémités ( $z = 0$  et  $z = a1$ ), il apparaît des pics de pression. Selon le maillage, la valeur de ces pics varie. En effet, alors qu'en théorie cette pression est infinie comme nous le verrons plus loin (phénomène de « punch »), la pression aux extrémités obtenue par modélisation en Eléments Finis atteint une valeur maximale qui est d'autant plus importante que le maillage est fin vers les bords.

Il est clair que ces grands maximums de pression aux bords du contact sont particulièrement déterminants pour la rupture en fatigue des cannelures et probablement aussi pour l'usure, ceci dépendant bien sûr des charges appliquées et du champ de contraintes dans le matériau. C'est pourquoi des chercheurs ont tenté de mettre en place des expériences permettant de valider les résultats obtenus avec les Eléments Finis.

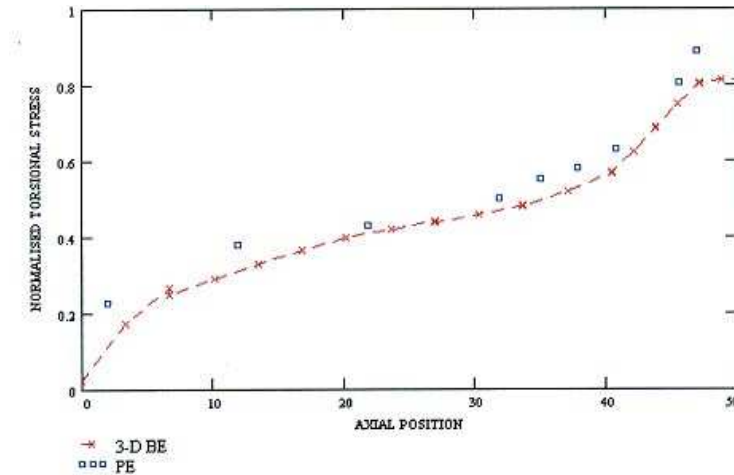
➤ Confrontation des modèles EF et des expériences

Afin de vérifier que les modèles EF fournissent des résultats dignes d'intérêt, il est conseillé d'établir des comparaisons entre ces modèles virtuels et des expériences. Elles sont cependant difficiles à mettre en place dans le cadre des cannelures, ce qui explique le peu de publication qui existe sur ce sujet.

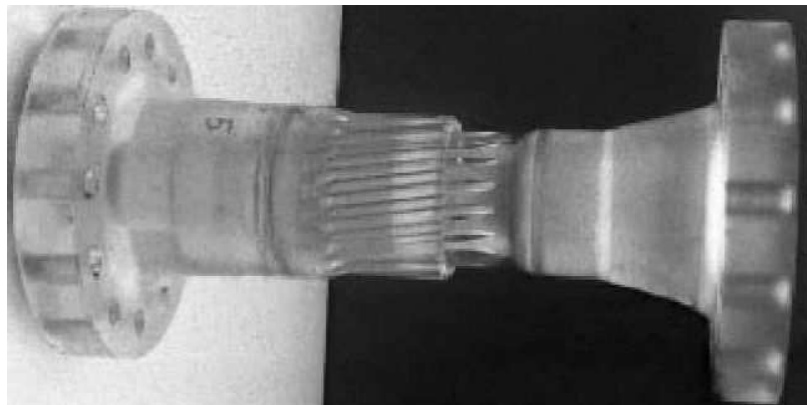
Adey [Adey, 2000] établit une comparaison entre les résultats concernant la contrainte de cisaillement en pied de dent donnée par la simulation numérique d'une part et ceux obtenues par des expériences d'autre part. Ces expériences consistent à mesurer les contraintes à l'aide de jauges de contraintes dans un premier temps (Figure 1-9), puis, dans un second temps, à mesurer ces mêmes contraintes par photoélasticité (Figure 1-10). Une photographie de l'ensemble cannelé étudié en photoélasticité est visible Figure 1-11.



**Figure 1-9** Contrainte de cisaillement : comparaison entre la simulation numérique et les mesures par les jauges de contraintes [Adey, 2000]



**Figure 1-10** Contrainte de cisaillement : comparaison entre la simulation numérique et les mesures par photoélasticité [Adey, 2000]



**Figure 1-11** Ensemble cannelé [Adey, 2000]

Les résultats obtenus confirment l'inégalité de la répartition des contraintes le long de la denture. Ils mettent en évidence la présence de deux gradients importants de contrainte, un à chaque extrémité de la cannelure. De plus ils montrent une bonne corrélation entre les résultats donnés par la simulation numérique et les mesures effectuées avec les jauges de contraintes et par photoélasticité.

Ceci démontre tout l'intérêt de simuler numériquement de tels assemblages afin de les dimensionner le plus correctement possible ou de vérifier les résultats des modèles analytiques.

### 1.1.1.2 Modèles analytiques

Afin d'essayer de prédire le comportement des cannelures, il est possible d'évaluer analytiquement la répartition axiale du couple le long d'une cannelure. Cette partie a pour but

de dresser un bilan des diverses études analytiques visant à décrire la répartition axiale du couple. Notons qu'il existe une relation directe entre le transfert du couple de l'arbre ou du moyeu (et donc la distribution du couple dans chacune des deux pièces) et la variation selon l'axe de la pression de contact au niveau des dentures.

➤ Travaux de Volfson

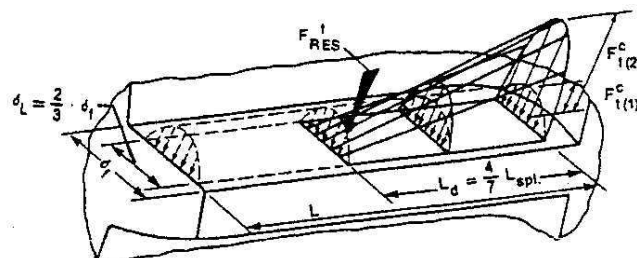
Volfson en 1982 [Volfson, 1982] réalise une étude sur la pression maximum que peut subir une dent de la cannelure à flancs parallèles. Pour cela, une cannelure soumise à de la torsion est prise en compte dans la même configuration que celle présentée à la Figure 1-1, c'est-à-dire lorsque les efforts traversent la cannelure de part en part.

La répartition de la pression de contact par l'approche des méthodes d'Eléments Finis est alors écartée à cause du coût trop élevé pour mener une telle analyse (document écrit en 1982).

Par étapes successives, et en posant des hypothèses sur la répartition radiale de la pression, Volfson cherche à obtenir la pression de contact dans la direction axiale. Pour cela, il met en évidence l'importance du rôle du rapport des moments quadratiques polaires du moyeu et de l'arbre. Deux configurations sont alors traitées :  $I^a \ll I^m$  ou  $I^a \gg I^m$  et  $I^a = I^m$ , en notant  $I^m$  et  $I^a$  les moments quadratiques polaires respectifs du moyeu et de l'arbre.

- Dans le cas où  $I^a \gg I^m$  ou  $I^a \ll I^m$ .

La distribution de pression obtenue met en évidence que seule une extrémité de la cannelure travaille (longueur  $L_d$ ) et qu'il existe des zones à pression nulle comme le montre le diagramme Figure 1-12. En trait pointillé est représenté la pression moyenne le long de la cannelure en supposant d'une part une répartition radiale parabolique de la pression et d'autre part une répartition uniforme axialement. En trait continu, apparaît la distribution réelle selon Volfson.



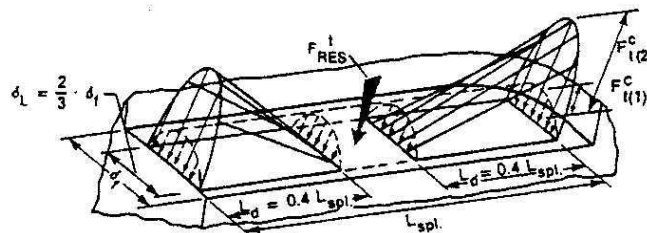
**Figure 1-12 Diagramme des pressions issues de la torsion ( $I^a \gg I^m$  ou  $I^a \ll I^m$ )**

[Volfson, 1982]

Volfson considère dans cette configuration que la pression maximale atteint 3,5 fois la pression moyenne. Aucune explication n'est proposée permettant de savoir comment ce diagramme a été trouvé. Selon Tjernberg [Tjernberg, 2001] d'autres chercheurs ont trouvé des résultats similaires, mais aucun n'explique la façon de les obtenir.

- Dans le cas où  $I^a \equiv I^m$ .

Cette fois, le chargement est transféré par les deux extrémités des dents. Il existe encore une zone à pression nulle comme le montre le diagramme Figure 1-13. Il est possible de retrouver sur ce graphique en trait pointillé la pression moyenne et en trait continu la répartition de la pression selon Volfson. Dans ce cas, le coefficient de concentration permettant d'obtenir la pression maximale est pris égal à 2,5.



**Figure 1-13 Diagramme des pressions issues de la torsion ( $I^a = I^m$ ) [Volfson, 1982]**

➤ Travaux de Tatur et Tjernberg

La distribution axiale du couple a suscité l'attention de Tatur [Tatur, 1969]. Son approche, développée pour des cannelures à flancs parallèles, peut être également employée pour n'importe quel genre d'accouplement cannelé. En effet aucune hypothèse à propos des dents n'est posée durant son étude. Contrairement à Volfson qui impose a priori un coefficient de concentration de répartition, cette étude détermine la répartition axiale du chargement sans hypothèse ni sur un modèle de répartition radiale ni sur un coefficient de concentration de contrainte.

En prenant une configuration identique à celle présentée en Figure 1-1, Tatur propose de calculer le couple transmis  $m(x)$  du moyeu à l'arbre le long de la direction axiale  $x$ . Il définit tout d'abord un couple  $M_2(x)$  présent dans l'arbre et un autre  $M_1(x)$  présent dans le moyeu, à la position  $x$ . Ainsi à chaque section  $x$ , le couple total transmis qui est constant et égal à  $C_{ext}$  vaut  $M_2(x) + M_1(x)$ . Il est alors possible de mettre en place une relation qui

gouverne la répartition du couple le long de l'axe en tenant compte de la rigidité des dents. Le modèle schématisé Figure 1-14 conduit à l'équation suivante :

$$m(x) = \frac{dM_2(x)}{dx} = C_\varphi [\varphi_1(x) - \varphi_2(x)]$$

Avec

$m(x)$  : moment transmis par unité de longueur depuis le moyeu à l'arbre dans la section d'abscisse  $x$ ,

$M_2(x)$  : moment sur l'arbre à la section  $x$ ,

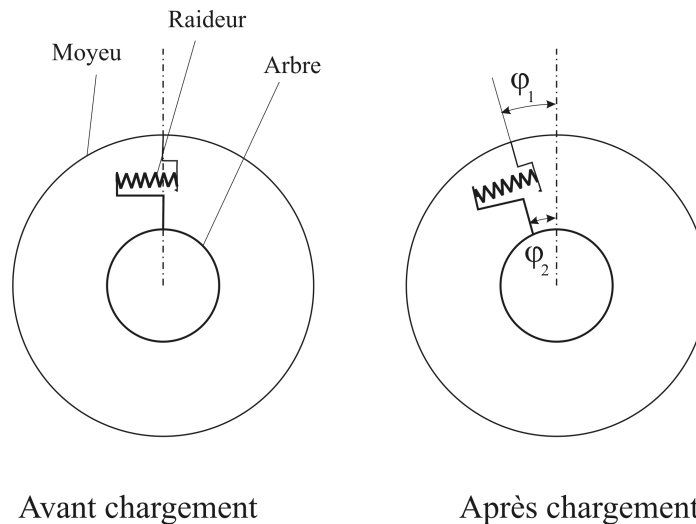
$\varphi_1(x)$  et  $\varphi_2(x)$  : angles de rotation du moyeu et de l'arbre à la section  $x$ ,

$$\varphi_1(x) = \varphi_1(x=0) - \int_0^x \frac{M_1(x)}{G_1 I_1} dx \quad \text{et} \quad \varphi_2(x) = \varphi_2(x=0) - \int_0^x \frac{M_2(x)}{G_2 I_2} dx,$$

$G_1, G_2$  : modules de cisaillement du moyeu et de l'arbre,

$I_1, I_2$  : moments quadratiques polaires respectivement du moyeu et de l'arbre. Ils représentent les caractéristiques géométriques de la rigidité en torsion de ces deux éléments. Ils correspondent aux caractéristiques utilisées couramment en torsion pure. Ils supposent donc que les contraintes de cisaillement ont une forme linéaire.

$C_\varphi$  : valeur caractéristique de la rigidité des dents de la cannelure.



**Figure 1-14 Schématisation de l'ensemble cannelé considéré par Tatur**

En remplaçant l'expression des angles de rotation dans l'équation de  $m(x)$ , Tatur obtient :



$$\frac{d^2 M_2(x)}{dx^2} = C_\varphi \left[ \frac{M_2(x)}{G_2 I_2} - \frac{M_1(x)}{G_1 I_1} \right]$$

Finalement il en déduit l'expression de  $M_2(x)$  comme étant :

$$M_2(x) = C_{ext} \left[ 1 - \frac{\beta}{a^2} (1 - \cosh L) \right] \frac{\sinh x}{\sinh L} - \frac{\beta}{a^2} C_{ext} \cosh x + \frac{\beta}{a^2} C_{ext}$$

$$M_1(x) = C_{ext} - M_2(x)$$

Avec  $\beta = \frac{C_\varphi}{G_1 J_1}$ ,  $a = \sqrt{C_\varphi \left[ \frac{1}{G_1 I_1} + \frac{1}{G_2 I_2} \right]}$  et  $L$  la longueur de la liaison cannelée.

$C_\varphi$  est un paramètre qui joue un rôle primordial dans le comportement d'une cannelure. C'est pourquoi, Tatur a cherché à obtenir ce coefficient de manière expérimentale mais aussi de manière analytique.

a) Calage expérimental

Une fois le  $m(x)$  défini, un coefficient d'irrégularité longitudinal de la distribution des efforts,  $K(x)$  est alors introduit :

$$K(x) = \frac{m(x)}{m_{av}}$$

Avec

$m_{av}$  : moment par unité de longueur pour une distribution de pression uniforme :

$$m_{av} = C_{ext}/L,$$

$C_{ext}$  : couple appliqué en entrée de l'arbre.

L'équipe de recherche a mis en place un essai expérimental pour mesurer  $K(x)$  ainsi que le paramètre  $C_\varphi$ . Quatre jauges de contraintes sont ainsi positionnées sur la périphérie extérieure de la cannelure en chacune des sept sections décrites sur la Figure 1-15. La valeur du couple introduit est lue à l'aide des résultats des jauges de la section 0-0. L'exploitation des mesures sur les sections I-I à VI-VI permet de définir  $K$ . Les valeurs de  $K$  sur la section V-V et VI-VI servent à déterminer une valeur moyenne pour  $C_\varphi$ . C'est cette valeur qui est exploitée pour obtenir une courbe 'théorique' de  $K(x)$ . Les résultats sont présentés sur la Figure 1-16.

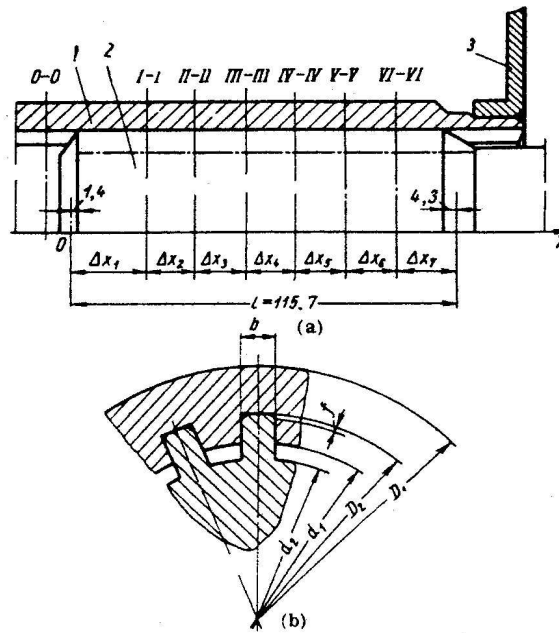


Figure 1-15 (a) Accouplement cannelé, (b) Coupe transversale, (1) Moyeu, (2) Arbre  
 [Tatur, 1969]

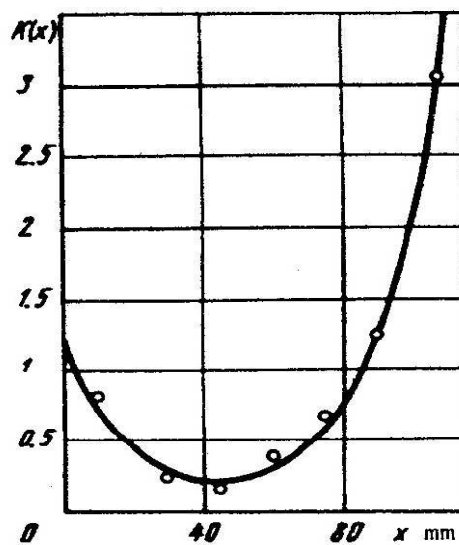


Figure 1-16  $K(x)$  : Fonction de la distribution du couple le long de l'accouplement cannelé, déterminé expérimentalement (petit cercle) et théoriquement (courbe)  
 [Tatur, 1969]

b) *Approche analytique*

Après avoir obtenu expérimentalement  $C_\varphi$ , Tatur en propose une formulation analytique. Elle est élaborée en considérant les déplacements dus à la flexion et au cisaillement. La rigidité des dents trouvée expérimentalement est alors 2,9 fois moins

importante que la valeur calculée. Ensuite, afin de déterminer une valeur plus précise, Tatur met en place une autre équation de  $C_\varphi$  dont voici l'expression :

$$C_\varphi = \frac{m_{av}}{2 \left( \frac{\delta_{sh+b}}{d_{av}} + \frac{\delta_{rsm}}{D_2} + \frac{\delta_{rsa}}{d_2} \right)}$$

Avec

$m_{av}$  : moment par unité de longueur pour une distribution de pression uniforme,

$\delta_{sh+b}$  : déplacement total d'une unité de longueur du moyeu et de l'arbre cannelé sur un diamètre moyen sous contraintes de flexion et de cisaillement dans chaque corps de la cannelure quand le couple  $m(x)$  est transmis. Ce déplacement a été obtenu à l'aide de mesures expérimentales,

$\delta_{rs1}$  : déplacement du pied de la dent d'une unité de longueur du moyeu

$$\delta_{rs1} = \frac{m_{av} (D_1^4 + D_2^4)}{2 \pi G_1 d_{av} (D_1^4 - D_2^4)},$$

$\delta_{rs2}$  : déplacement du pied de la dent d'une unité de longueur de l'arbre

$$\delta_{rs2} = \frac{m_{av}}{2 \pi G_2 d_{av}},$$

$d_{av}$  : diamètre moyen de l'accouplement cannelé  $d_{av} = \frac{1}{2}(D_2 + d_1 - 2f)$ ,

$D_2$  : diamètre de tête de l'arbre,

$D_1$  : diamètre de tête du moyeu,

$f$  : hauteur du chanfrein de la dent de l'arbre.

Selon Tatur, la valeur de  $C_\varphi$  obtenue à partir de cette formulation amène une dispersion de 12% par rapport à la valeur de  $C_\varphi$  obtenue par calage des essais expérimentaux.

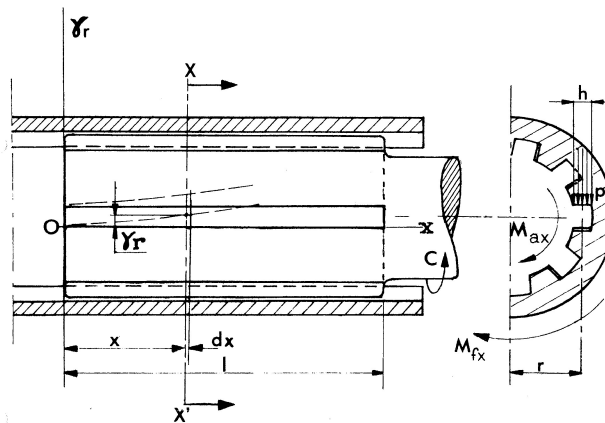
### c) Conclusion

Finalement des études du modèle de Tatur réalisées par Tjernberg [Tjernberg, 2001] prouvent que le modèle décrivant les couples le long de la cannelure, sous certaines conditions, mène à des résultats satisfaisants si la valeur assignée à la rigidité des dents est appropriée.

➤ Travaux d'Orain

Orain [Orain, 1976] en 1976 mène une étude analytique plus poussée sur la répartition du couple. L'objectif de cette recherche est non seulement de prouver l'influence bénéfique d'un revêtement plastique sur les contacts des dents mais aussi de chercher à uniformiser la répartition de la pression axiale en modifiant la géométrie de la cannelure.

Dans un premier temps Orain prend en compte le cas des cannelures à flancs parallèles avec des moments quadratiques polaires de l'arbre et du moyeu constants.



**Figure 1-17 Représentation de l'accouplement cannelé [Orain, 1976]**

Comme Tatur, cette étude établit une équation différentielle permettant de connaître la répartition du couple dans la direction axiale de la cannelure. Les symboles utilisés sont illustrés à la Figure 1-17.

$$M_a \left( \frac{1}{G_a I_a} + \frac{1}{G_f I_f} \right) = \frac{C}{G_f I_f} + \frac{1}{h n r H} \frac{d^2 M_a}{dx^2}$$

Avec

$C$  : couple nominal,

$M_a$  : moment de torsion à la section XX' de l'arbre cannelé (Figure 1-17),

$G_f, G_a$  : modules de cisaillement respectivement du moyeu et de l'arbre,

$I_f, I_a$  : moments quadratiques polaires respectivement du moyeu et de l'arbre,

$h$  : longueur suivant la hauteur d'une dent sur laquelle le contact entre le moyeu et l'arbre a lieu,

$n$  : nombre de dents de la cannelure,

$r$  : rayon moyen efficace,

$H$  : rigidité torsionnelle de contact des cannelures.

Cette équation est en fait équivalente à celle de Tatur où  $C_\varphi = h n r H$ . Par contre Orain ne donne aucun calcul explicitant  $H$ . La rigidité des dents est juste imposée lors des exemples d'application :  $H = 48000 \text{ kg/mm}^2$ .

Dans un deuxième temps, Orain exploite cette équation différentielle du couple afin d'obtenir une répartition axiale de la pression moyenne.

Il définit la pression moyenne ainsi :

$$\frac{dM_a}{dx} = n h r p(x).$$

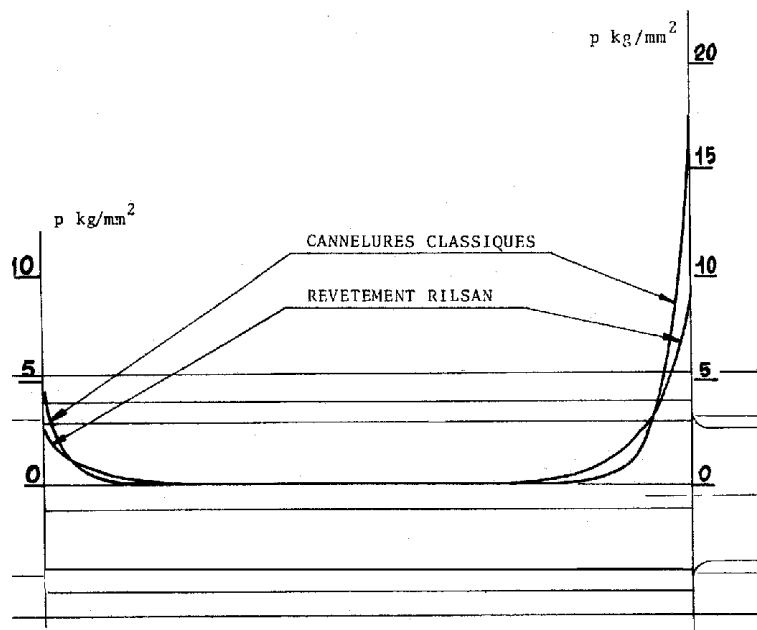
Ce qui donne :

$$p(x) = A e^{kx} + B e^{-kx}$$

Avec

$A$  et  $B$  des constantes dépendant des conditions aux limites,

$$k = \sqrt{H h n r \left( \frac{1}{G_a I_a} + \frac{1}{G_f I_f} \right)}.$$



**Figure 1-18 Répartition axiale de la pression moyenne de contact selon Orain**

**[Orain, 1976]**

Pour atténuer l'augmentation de pression en bout de cannelure, un revêtement en plastique est proposé, cette variation est visible sur la Figure 1-18 (revêtement Rilsan). Cependant cette solution présente un danger de « pelage » si l'on ne prend pas soin d'étendre

ce revêtement sur toute la pièce ayant la longueur des dents la plus courte. La valeur de  $H$  chute alors pour atteindre la valeur de  $14117\text{kg/mm}^2$ .

Dans un troisième temps Orain impose comme constante la pression moyenne et cherche à obtenir une équation permettant de décrire le moment quadratique polaire pour l'arbre et le moyeu axialement.

En partant de la même équation décrivant la répartition du couple dans une section quelconque  $XX'$ , il est possible d'obtenir une loi d'évolution du rapport des moments quadratiques polaires du moyeu et de l'arbre :

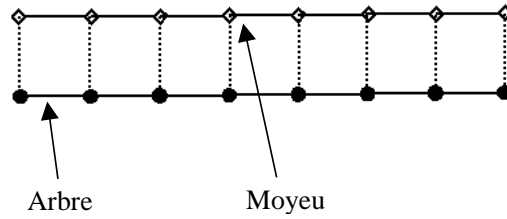
$$\frac{I_f}{I_a} = \frac{L}{x} - 1$$

Il est important de noter que cette loi n'est aucunement dépendante du couple à transmettre. Cette étude a aussi été réalisée par Tjernberg [Tjernberg, 2001] quelques années plus tard. Il en déduit l'évolution du diamètre extérieur du moyeu pour satisfaire cette condition. Il n'est cependant pas réalisable de créer une telle liaison cannelée car le diamètre en début de contact serait infini et en bout de cannelure l'épaisseur du moyeu serait nulle.

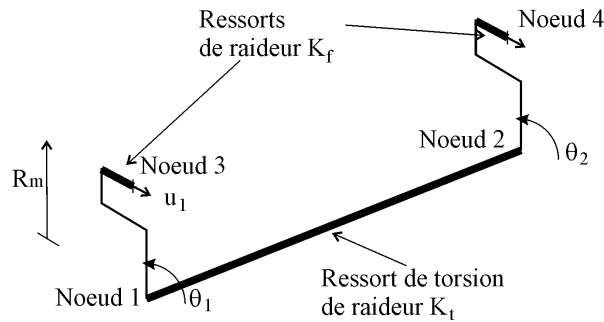
Un dernier point dans l'étude d'Orain décrit un moyen d'obtenir la pression moyenne et les moments quadratiques polaires constants axialement. Cette fois le paramètre variable est la géométrie axiale de la dent décrit par une équation régissant la correction de denture. Tjernberg a aussi mis en valeur ce moyen pour obtenir un transfert du couple le plus uniforme possible.

➤ Travaux de Blanc

Plus récemment, Blanc s'est intéressé à la raideur globale des cannelures pour analyser le comportement dynamique des rotors [Blanc, 2000]. Il a aussi décrit [Blanc, 1999] un modèle permettant de déterminer la distribution axiale du couple pour une cannelure à flancs en développante de cercle ainsi que la répartition axiale de la pression de contact le long de la surface de contact. La cannelure est soumise uniquement à de la torsion. Elle est divisée en plusieurs tronçons le long de l'axe, comme le montre Figure 1-19. La Figure 1-20 décrit les différents degrés de liberté pris en compte dans chaque tronçon. Ce découpage permet de prendre en compte les variations du diamètre extérieur du moyeu et du diamètre intérieur de l'arbre.



**Figure 1-19 Découpage de l'arbre ou du moyeu en  $n$  tronçons**



**Figure 1-20 Description des degrés de liberté de l'élément fini représentant un tronçon (arbre ou moyeu) [Blanc, 1999]**

Ce modèle est basé sur l'énergie de déformation d'un tronçon. Elle tient compte des déformations induites par la transmission de couple de l'arbre vers le moyeu, qui sont d'après Blanc au nombre de quatre. Il s'agit de la torsion de l'arbre et du moyeu cannelés, de la flexion et du cisaillement des dents en contact de la cannelure.

En exprimant les rotations autour de l'axe principal de la liaison cannelée, l'énergie de déformation pour un tronçon a pour expression :

$$E = \frac{1}{2} K_T (\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{1}{2} K_F (R_m \theta_1 - u_1)^2 + \frac{1}{2} K_F (R_m \theta_2 - u_2)^2 + \frac{1}{2} K_C [(u_1 - R_m \theta_1)^2 - (u_2 - R_m \theta_2)^2]$$

Avec

$R_m$  : rayon moyen de la liaison,

$\theta_1, \theta_2$  : angles respectifs des nœuds 1 et 2 du tronçon,

$K_T$  : rigidité en torsion de l'arbre ou du moyeu pour une longueur  $L$ . Cette rigidité prend en compte non seulement les corps des pièces mais aussi l'influence des dents qui augmente selon Blanc de 10% la rigidité en torsion des corps des pièces,

$$K_T = 1.1 \frac{G.J}{L}$$

Avec

$G$  : module de cisaillement de l'arbre ou du moyeu,

$J$  : moment quadratique polaire de l'arbre ou du moyeu,

$K_c$  : rigidité en cisaillement de la cannelure de longueur  $L$  et de surface de la section d'une dent  $S$

$$K_C = \frac{G \cdot S}{L}$$

$K_F$  : rigidité tangentielle en flexion de la cannelure pour une longueur  $L / 2$ .

La détermination de  $K_F$  est obtenue à partir de calcul Eléments Finis 2D. Blanc emploie une méthode numérique permettant d'obtenir un seul coefficient de rigidité valable pour la plupart des cannelures à flancs en développante de cercle ( $K_F = 7,3 \cdot 10^7 \text{N/m}$ ). Cette rigidité permet de décrire la raideur des dents, comme le paramètre  $C_\phi$  chez Tatur.

Le principal avantage d'un tel modèle réside dans la possibilité de considérer des géométries variables d'arbres et de moyeux et de pouvoir introduire le couple extérieur en n'importe quelle position axiale  $x$  le long de la cannelure.

### 1.1.1.3 Conclusion sur le comportement axial

Quel que soit le type de cannelure, la répartition non uniforme du chargement a depuis longtemps été mise en évidence, mais les moyens techniques ne permettaient pas de calculer précisément les concentrations de contraintes. Dès 1982 la possibilité d'employer la méthode par Eléments Finis en 3D est évoquée mais pas encore appliquée. Ce n'est qu'autour des années 2000 que les premiers modèles 3D apparaissent et permettent ainsi de décrire le comportement d'une telle liaison.

Les études menées montrent que dans des conditions normales de fonctionnement, les sollicitations sont transmises essentiellement par les extrémités des cannelures et qu'il peut exister des zones où la pression de contact est nulle.

Volfson met en évidence que le moment quadratique polaire joue un rôle important dans la distribution des pressions, il retient deux critères différents : si  $I_a = I_m$  et si  $I_a \ll I_m$  ou  $I_a \gg I_m$ . Dans le premier cas, le couple est transmis par les deux extrémités de la liaison, dans le second, le couple est transmis par un seul côté de la liaison.

La détermination analytique de la répartition axiale des pressions nécessite la caractérisation du coefficient de rigidité des dents,  $C_\phi$ . Le calcul analytique de ce coefficient n'a été effectué que par Tatur mais se révèle être imprécis.



Orain et Tjernberg ont cherché à uniformiser la répartition axiale du couple en faisant varier les moments quadratiques polaires de l'arbre et du moyeu, en optimisant la forme axiale des dents de la cannelure ou en plaçant un revêtement plastique sur le contact.

Enfin dans tous les cas rencontrés au cours de cette bibliographie, le couple a été transmis d'une extrémité du contact à l'autre. Seul Blanc, qui a développé un modèle permettant de prendre en compte toutes les configurations d'introduction de couple possibles, propose rapidement une configuration particulière sans pour autant l'analyser. Par exemple aucune étude n'a décrit ou analysé la façon dont le couple était transmis dans le cas où entrée et sortie des efforts sont situées du même côté.

### 1.1.2 Comportement radial

En 1982, afin de développer un modèle analytique, Volfson [Volfson, 1982] opte pour une distribution parabolique de la pression dans la direction radiale, mais n'a pas pu valider son hypothèse. Avec les avancées modernes des techniques numériques notamment les calculs Eléments Finis, il est maintenant possible de prévoir la distribution de pression de façon plus appropriée.

Pour étudier la répartition de la pression de contact d'un assemblage cannelé selon la direction radiale, Leen et son équipe [Leen, 2000] ont développé un modèle EF. La géométrie est visible sur la Figure 1-5. Comme pour la répartition axiale, une comparaison des résultats issus de 4 maillages différents a été menée pour la répartition radiale de la pression de contact. La Figure 1-21 correspond à la répartition radiale de la pression à la position axiale  $z = 0,94a_1$ .

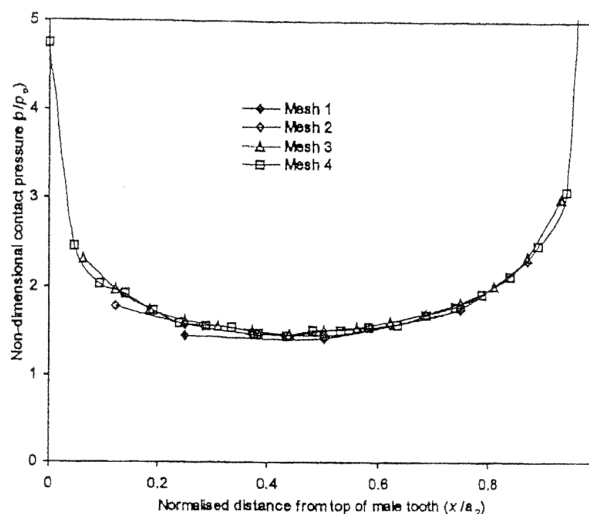
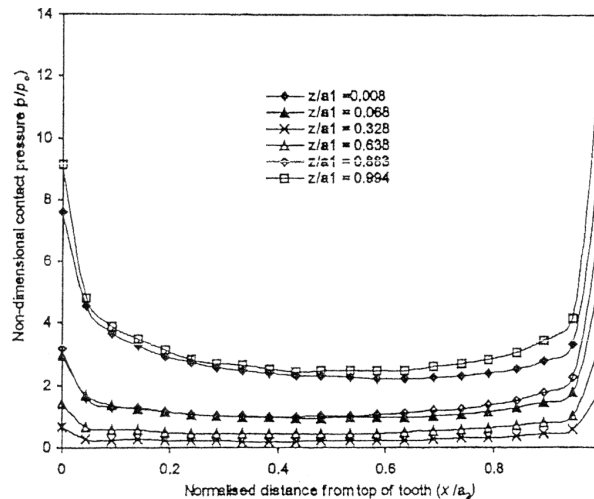


Figure 1-21 Répartition radiale de la pression de contact [Leen, 2000]

Les résultats convergent pour les maillages 3 et 4, sauf – là encore – aux pics en tête et pied de dent (extrémités du contact :  $x = 0$  et  $x = a_2$ ), dus aux singularités.

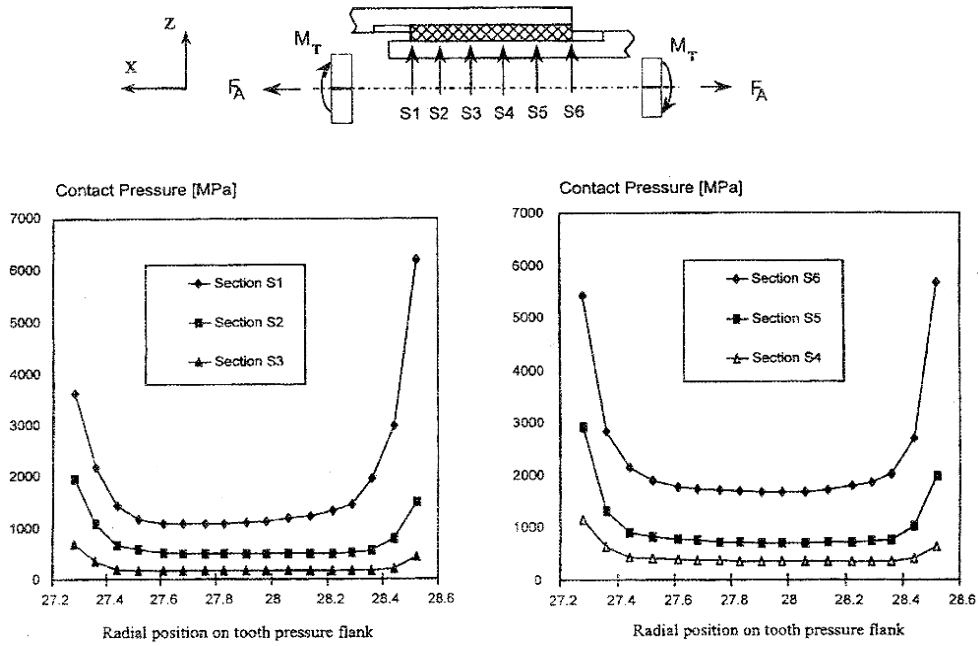
La répartition adimensionnée de la pression de contact sur le flanc d'une dent (suivant  $x$ , voir Figure 1-5) en différentes positions axiales, calculée avec le maillage 4 a été tracée sur la Figure 1-22.



**Figure 1-22 Répartition radiale de la pression de contact en différentes positions axiales [Leen, 2000]**

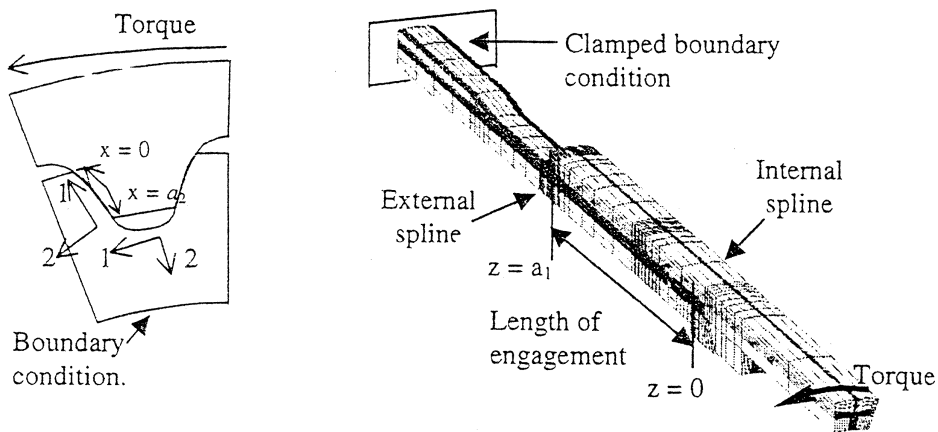
Ces résultats confirment, non seulement la non-uniformité de la pression de contact suivant l'axe de l'accouplement (le long des dents), mais mettent également en évidence sa non-uniformité suivant la direction radiale. La valeur de  $p/p_0$  est de 3 en milieu de flanc contre 12 en pied de dent (position axiale  $z/a_1 = 0,994$ ) avec  $p$  la pression de contact à la position  $x$  et  $p_0$  la pression moyenne pour une surface de contact d'une dent de cannelure.

Cette « non-uniformité radiale » semble d'autant plus pertinente qu'une autre équipe aboutit aux mêmes conclusions [Limmer, 2001]. Leurs résultats issus d'un modèle EF d'assemblage cannelé sont présentés Figure 1-23. La distribution radiale de la pression est tracée pour six sections différentes.



**Figure 1-23 Distribution radiale de la pression de contact suivant 6 sections d'un accouplement cannelé [Limmer, 2001]**

Une étude paramétrique de Sum et Leen [Sum, 2003] met en place différentes comparaisons de répartition de pression radiale à l'aide de modèles EF 2D et 3D pour une cannelure à flancs en développante de cercle. Les modèles employés sont représentés à la Figure 1-24.



**Figure 1-24 Modèles EF 2D et 3D selon Sum [Sum, 2003]**

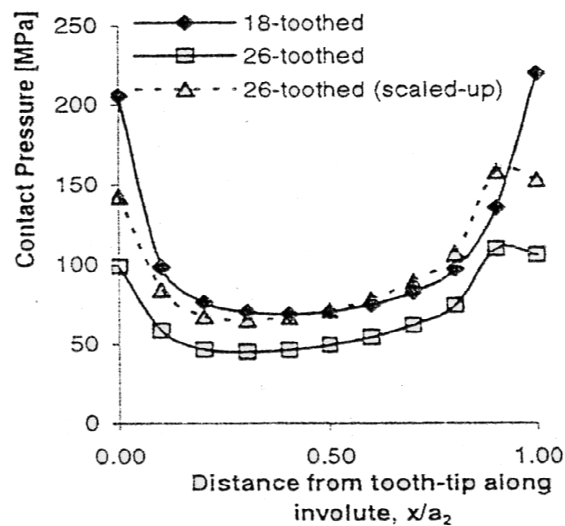
Cette étude est réalisée dans le but de mettre en évidence les paramètres géométriques qui influent sur la répartition de la pression radiale. Un autre objectif consiste à voir si un

modèle EF 2D donne les mêmes résultats qu'un modèle EF 3D, beaucoup plus long à développer. Ainsi Sum choisit d'observer l'influence :

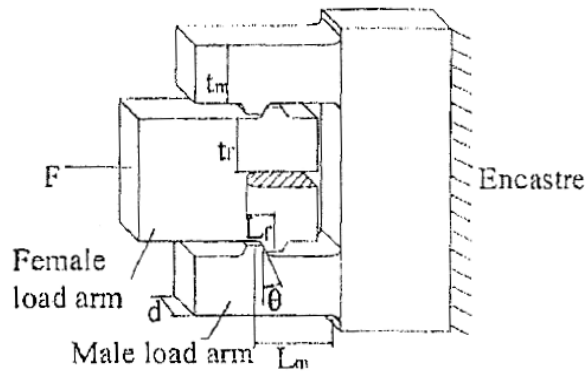
- du nombre de dents, en modélisant des cannelures comportant 18 et 26 dents,
- du diamètre extérieur du moyeu, en considérant deux diamètres exprimés en fonction du diamètre primitif :  $0.56 \cdot \text{diamètre primitif}$  et  $0.72 \cdot \text{diamètre primitif}$ . A travers ce paramètre c'est le rapport des moments quadratiques polaires arbre – moyeu qui est étudié.

L'étude de la variation du diamètre du moyeu révèle du point de vue répartition de la pression que dans le cas du modèle 3D, la distribution du transfert de couple de l'arbre au moyeu change le long du contact pour deux modèles 3D ayant des moments quadratiques polaires différents.

Le nombre de dents apparaît comme un paramètre inversement proportionnel à la pression. Si l'on cherche à obtenir la répartition de pression radiale pour une cannelure ayant 18 dents à partir d'un modèle ayant 26 dents, il suffit de multiplier la répartition par un facteur de  $26/18$ . La Figure 1-25 est une représentation de ce résultat. La courbe en pointillés révèle que ce système permet uniquement d'avoir une estimation de la répartition de la pression de contact.



**Figure 1-25 Répartition de la pression radiale pour 2 nombres de dents différents**  
[Sum, 2003]



**Figure 1-26 Géométrie de l'expérience [Hyde, 2000], [Leen, 2000]**

Enfin, un concept d'expérience simulant le comportement des dents d'une cannelure est présenté par Hyde [Hyde, 2000] et Leen [Leen, 2000]. Cette expérience a pour but d'étudier le comportement local d'une paire de dents. Afin de calibrer le banc d'essai, visible à la Figure 1-26, ces chercheurs l'ont modélisé et ont paramétré l'entaille centrale pour retrouver la répartition radiale de la pression de contact obtenue avec le modèle 3D EF, comme le montre la Figure 1-28. Aucune description de la procédure de la mesure de la pression dans le cas de l'étude expérimentale n'est faite.

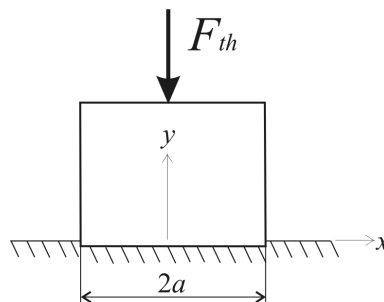
De plus lors de cette étude, les répartitions obtenues sont comparées à celle issues des résultats classiques d'un punch à embout plat sur un plan, dont une représentation est visible Figure 1-27. L'équation de la répartition de pression  $p(x)$  d'un tel punch est de la forme :

$$p(x) = \frac{F_{th}}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Avec

$F_{th}$  : force appliquée sur le punch,

$a$  : demi-longueur de contact.



**Figure 1-27 Illustration du punch utilisé par Leen [Leen, 2000]**

En assimilant les dents du moyeu au punch et le plat aux dents de l'arbre ou inversement, il est possible selon Leen de décrire la répartition radiale si l'on connaît la répartition axiale de la pression. L'effort appliqué au punch correspond à l'effort normal au contact par unité de longueur issu du modèle EF. Il a alors pour expression :

$$F_{th} = x_1 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_i + p_{i+1}}{2}$$

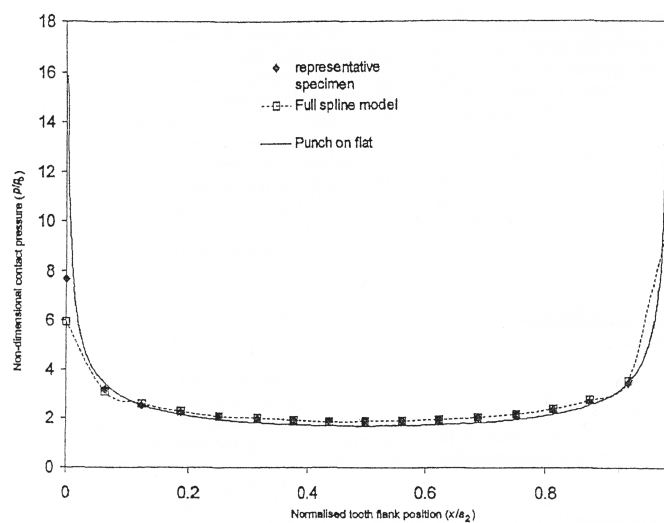
Avec

$x_1$  : longueur du flanc de dent en contact dans le modèle EF de la cannelure,

$p_i$  : pression de contact au nœud  $i$  du modèle EF de la cannelure.

Comme la Figure 1-28 le révèle, les modèles donnent des résultats similaires loin des extrémités du contact. En effet alors que la pression de contact déterminée analytiquement part à l'infini en  $-a$  et  $+a$ , les modèles EF, eux, connaissent une limite.

Finalement à travers cette étude, Leen met en évidence deux points importants. Le premier porte sur la partie expérimentale. En effet nous verrons plus tard qu'il est difficile d'observer en condition réelle la répartition de la pression radiale au sein d'une cannelure. Un tel système permettrait alors de valider les résultats des calculs EF facilement. Le second est la similarité du comportement des dents du point de vue répartition de la pression radiale avec un modèle punch, qui offre une possibilité de créer une méthode analytique décrivant la répartition de la pression.



**Figure 1-28 Distribution radiale de la pression de contact pour les 3 modèles présentés par Leen [Leen, 2000]**

Finalement nous avons vu dans cette partie que peu d'études ont été menées sur la détermination de la répartition radiale de la pression de contact. Il apparaît pourtant que cette répartition n'est pas uniforme et qu'elle peut être décrite analytiquement par un modèle de punch. Il n'existe cependant pas de travaux explicitant une méthode analytique permettant d'obtenir la pression sans l'aide d'expériences ou de modèles EF.

### *1.1.3 Comportement des dents*

Le banc d'essai, présenté lors de l'étude de Leen sur la répartition radiale de la pression, met en évidence l'importance du comportement des dents. En effet pour caler ce système avec le modèle EF, Leen *et al.* ont joué sur la souplesse des composants le constituant. De plus lors de l'étude du comportement axial, Blanc a cherché à décrire les déformations que subissait une cannelure. C'est pourquoi, nous avons cherché à travers la littérature à savoir quelles sont les sollicitations des dents et comment elles réagissent.

Un certain nombre d'études sont consacrées à l'analyse du comportement d'une paire de dents en évaluant la rigidité de cannelures à flancs en développante de cercle. Elles sont soit expérimentales soit analytiques.

#### **1.1.3.1 Approche expérimentale**

Ku *et al.* [Ku, 1993, Ku, 1994a, Ku, 1994b] ont développé une méthode expérimentale concernant un accouplement cannelé de machine rotative à grande vitesse. L'objectif de ces publications est de trouver les coefficients dynamiques qui influent dans une telle machine. Un banc d'essais permettant de connaître les différents moments de flexion et les angles de déflexion est décrit. Cette solution permet de connaître la raideur globale d'un accouplement cannelé, mais n'offre pas la possibilité de connaître plus en détail le comportement d'une paire de dents.

#### **1.1.3.2 Modèle analytique**

Une méthode analytique a été développée par Marmol [Marmol, 1980] pour examiner des vibrations de rotor. Pour obtenir la raideur d'une paire de dent, Marmol prend en compte différents phénomènes au niveau des dents comme :

- la flexion,
- le cisaillement,
- la compression locale au contact,
- la rotation du support des dents.

Il a considéré que les dents de l'arbre et du moyeu se comportaient comme des poutres en porte-à-faux. Mais la solution proposée s'écarte de la réalité car les contacts entre l'arbre et le moyeu ont été considérés comme simplement ponctuels par similitude aux engrenages.

Blanc [Blanc, 1999] a aussi modélisé le comportement des dents en ne prenant en compte que le cisaillement et la flexion de la dent (voir chapitre correspondant : 1.1.1.2). Ce qui au regard de la publication de Marmol apparaît comme incomplet.

Une autre méthode analytique simplifiée a été développée par Hayashi [Hayashi, 1985] où les dents des cannelures de l'arbre et du moyeu ont été considérées comme étant de forme rectangulaire et seule la flexion des dents a été prise en compte.

### 1.1.3.3 Conclusion sur le comportement des dents

Des études expérimentales existent mais n'ont pour objectif que de connaître globalement le comportement d'une cannelure.

Une étude analytique a identifié des phénomènes permettant de décrire le comportement des dents, cependant en considérant le contact entre les dents comme ponctuel, elle est éloignée de la réalité et ne permet donc pas actuellement de connaître avec précision le comportement des dents d'une cannelure.

## 1.2 EXPLOITATIONS DES MODELES : FRETTEMENT ET FATIGUE

Le principal problème rencontré dans les cannelures est le phénomène de fretting. Après avoir défini ce qu'est ce phénomène, nous nous attacherons à présenter les études réalisées pour analyser et prédire ce phénomène pour des cannelures.

### 1.2.1 Définition du fretting

Selon Colin ou Gedeon, le « fretting » [Colin, 1988, Gedeon, 2002] est une forme d'usure qui est propre aux mécanismes soumis à de petits déplacements tangentiels rapides ou à des vibrations sous forte charge. Il se produit entre deux surfaces en contact. Le phénomène concerne les matériaux métalliques et non-métalliques.

Pendant que les surfaces frottent, de fins oxydes abrasifs se forment, et contribuent ainsi à rayer les surfaces. Ce phénomène peut provoquer plusieurs sortes de détériorations :

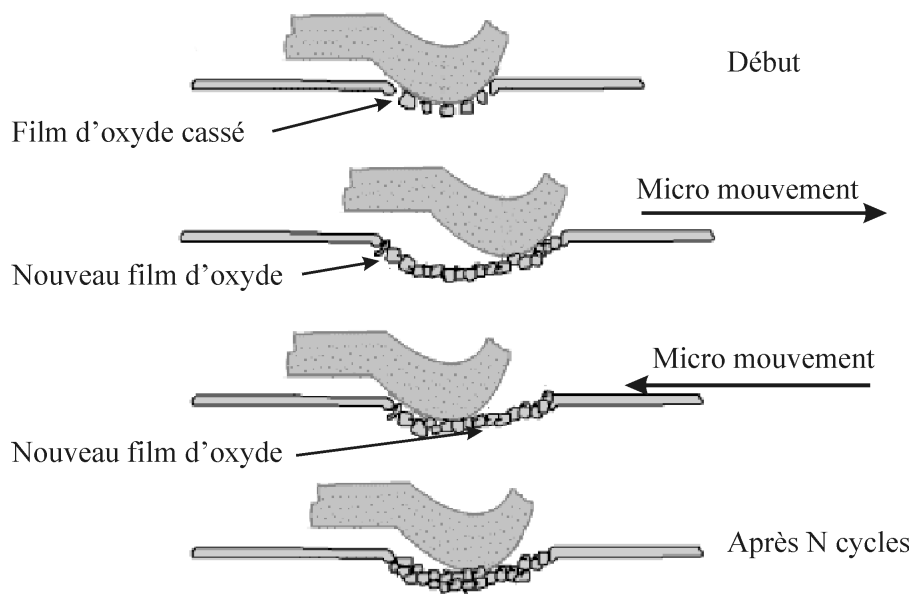
- le fretting corrosion : la corrosion est une conséquence du dommage et non sa cause. Des oxydes dus à la dégradation, et appelés « poudres rouges » pour les pièces en aciers apparaissent à l'interface,



- le fretting wear : il s'agit d'usure lors de vibrations externes (déplacements de très faible amplitude environ 10nm) appliquées aux surfaces en contact qui ne sont pas soumises à des déplacements imposés,
- le fretting fatigue : ce terme est employé lorsque des phénomènes de fatigue se produisent au niveau des contacts soumis au fretting.

Les dommages occasionnés par ces phénomènes observés sont le plus souvent : piquûres, oxydes, débris, rayures, transferts, déformation plastique, cratères, fissurations en sous-couche et en surface, etc. Selon les cas, l'usure par petits débatssements provoque une prise de jeu des pièces en contact conduisant à une rupture en fatigue. Le fretting peut accélérer l'apparition du processus de fissuration ou provoquer une prise de jeu des pièces en contact conduisant à une rupture en fatigue.

Pour comprendre facilement de quoi il s'agit, le schéma présenté en Figure 1-29 illustre le phénomène de fretting.



**Figure 1-29 Phénomènes de fretting**

Les principaux paramètres qui influencent le comportement des matériaux en fretting sont les suivants :

- amplitude des déplacements relatifs entre les surfaces,
- charge appliquée,
- température au niveau du contact,
- environnement,

- type de matériau en contact,
- type de vibrations,
- fréquences des oscillations,
- nombre de cycles,
- état et traitement des surfaces.

De nombreuses études actuelles se penchent sur ces phénomènes encore mal maîtrisés et qui pourtant conditionnent de plus en plus le fonctionnement des machines. Il demeure aujourd'hui impératif de maîtriser ces phénomènes afin d'améliorer la durée de vie des mécanismes puisque le fretting peut se manifester dans tous les assemblages mécaniques soumis à des vibrations. A priori, il demeure impossible de supprimer ces phénomènes, mais il est possible d'en retarder l'apparition en agissant sur divers paramètres qui vont être exposés dans la suite de ce chapitre.

### *1.2.2 Le fretting appliqué aux cannelures*

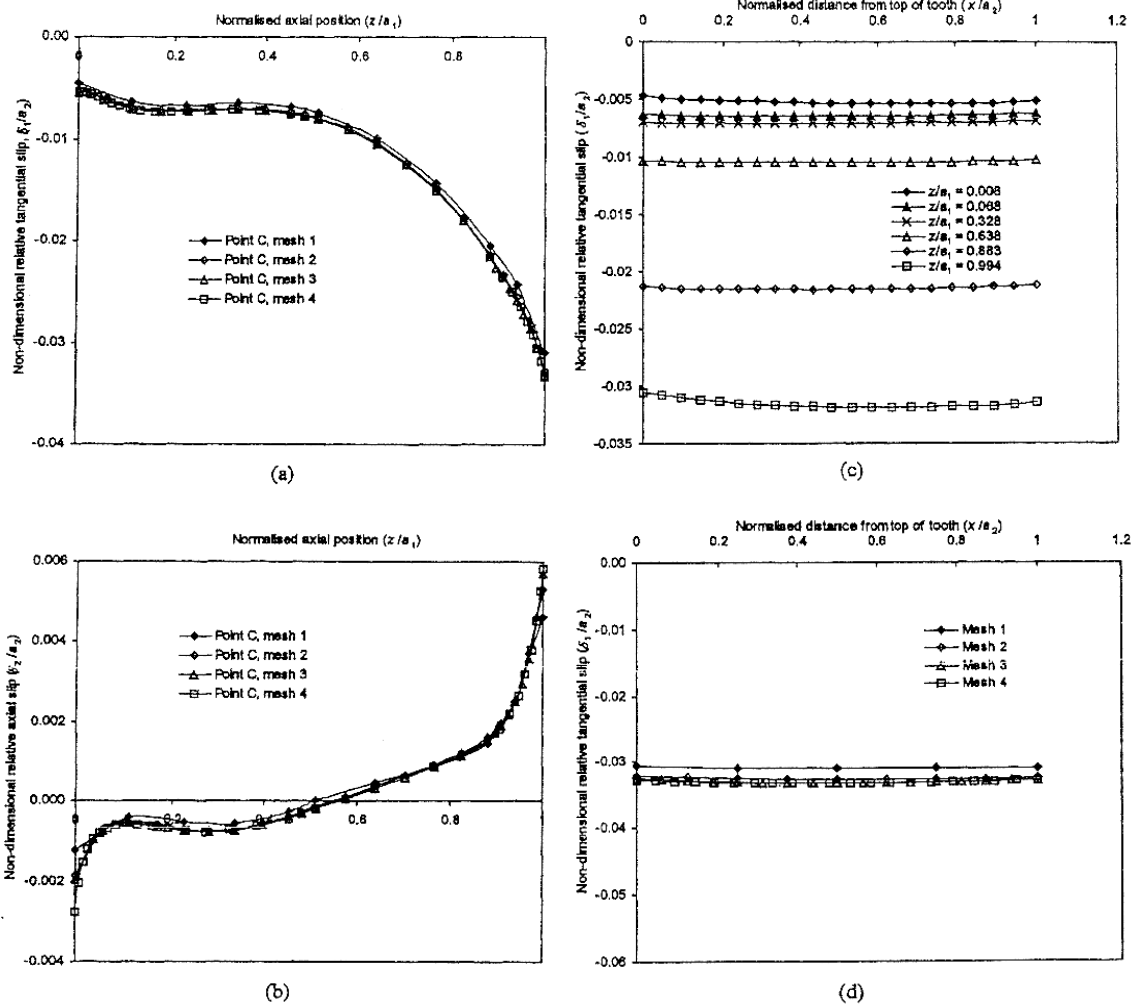
Avec la répartition du chargement, une autre caractéristique fondamentale traduisant le comportement d'un assemblage cannelé est le régime de contact qui sévit entre les dents.

En effet, même sans défaut d'alignement, un accouplement cannelé transmettant du couple présente des déformations (flexion des dents...) qui engendrent des mouvements relatifs de l'arbre par rapport au moyeu.

Plusieurs équipes de chercheurs se sont penchées sur la détermination du type de contact local (glissant, adhérent,...), le glissement relatif et le coefficient de frottement étant en particulier reconnus comme très influents sur l'usure d'une cannelure.

Nous allons voir dans cette partie des études réalisées sur les conditions de glissement et de frottement dans des assemblages cannelés à flancs en développante de cercle sans défaut d'alignement.

A partir du modèle EF présenté Figure 1-5, Leen *et al.* [Leen, 2000] ont étudié le glissement relatif dent / dent. La Figure 1-30 montre les résultats obtenus : glissement relatif tangentiel ( $\delta_1$ ) et axial ( $\delta_2$ ) en différentes positions du contact.



**Figure 1-30 - Glissements relatifs tangential  $\delta_1$  et axial  $\delta_2$  au point C [Leen, 2000]**

Les Figure 1-30 a et b présentent respectivement les glissements relatifs tangential  $\delta_1$  et axial  $\delta_2$  au point C, selon la position axiale  $z$  et le niveau de maillage EF (Figure 1-5 et Figure 1-6).

La Figure 1-30c décrit le glissement relatif tangential  $\delta_1$  selon la position radiale, sur le flanc de la dent et pour 6 positions axiales.

La Figure 1-30d présente le glissement relatif axial  $\delta_2$  selon la position radiale, sur le flanc de la dent et pour la position axiale  $z = a_1$ .

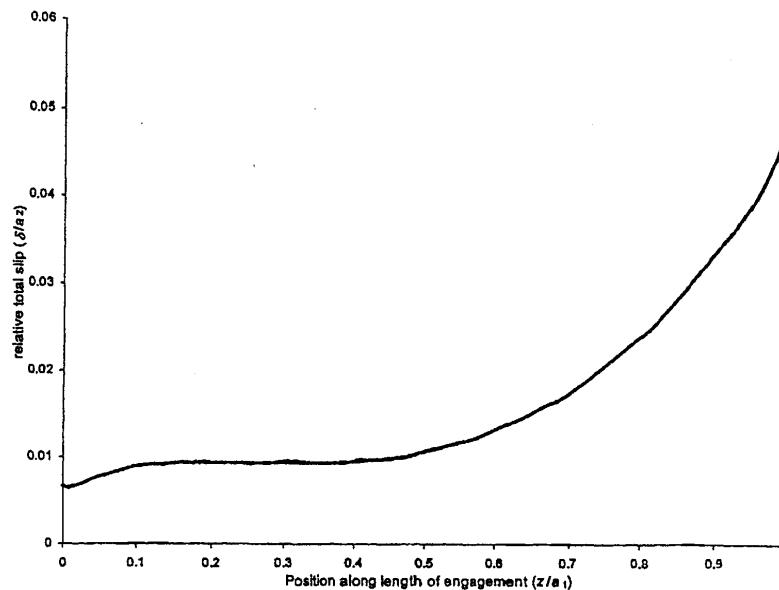
Il apparaît que le glissement tangential  $\delta_1$  varie d'environ  $-0,005a_2$  à  $-0,035 a_2$ , tandis que le glissement axial  $\delta_2$  varie d'environ  $-0,002a_2$  à  $-0,006 a_2$ . L'amplitude du glissement tangential est donc globalement plus élevée que celle du glissement axial.

Dans les deux cas (Figure 1-30a et b), d'une manière générale le glissement augmente avec la position  $z$  et est maximal en  $z = a_1$ , qui correspond à l'extrémité du moyeu. Par

ailleurs le glissement – tangentiel comme axial - semble particulièrement constant suivant la hauteur du flanc de la dent, (Figure 1-30c et d).

Leen *et al.* ont également réalisé une étude 3D du contact avec frottement dans un accouplement cannelé hélicoïdal [Leen, 2001], afin d'évaluer des variables macroscopiques caractérisant le fretting.

Cette étude est toujours basée sur le même modèle EF de cannelures (Figure 1-5), chargé simultanément par un couple et un effort axial. Ils ont effectué le calcul du glissement relatif total ( $\delta$ ) dent / dent au nœud C (Figure 1-6) le long de la cannelure.



**Figure 1-31 - Evolution du glissement relatif total au milieu du flanc de la dent selon la position axiale  $z/a_1$  [Leen, 2001]**

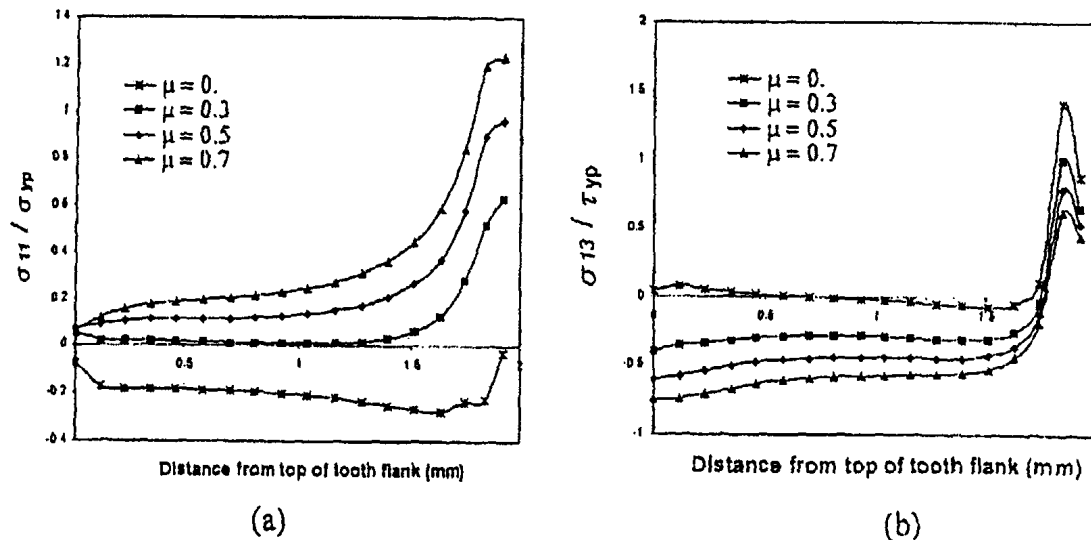
Remarque : le glissement relatif total  $\delta$  est défini à partir des glissements relatifs tangentiels ( $\delta_1$ ) et axial ( $\delta_2$ ) [Leen, 2000]:  $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$

Sur la Figure 1-31, pour un coefficients de frottement de 0,3, le glissement relatif total augmente le long de l'axe de  $z = 0$  à  $z = a_1$ . Celui-ci atteint son maximum  $\delta = 0,05a_2$  à l'extrémité de l'arbre cannelé  $z = a_1$ . Cette distribution croît à peu près uniformément avec l'augmentation de la charge.

L'étude des régimes de contact conduit inévitablement à s'intéresser aux conditions de frottement et d'adhérence, et en particulier de l'effet du coefficient de frottement.

Une étude réalisée par Hyde [Hyde, 2000] indique que de récents essais de fretting cylindre / plan d'un matériau de cannelure ont abouti à un grand coefficient de frottement d'environ 0,7 (sans lubrification additive).

La Figure 1-32 présente les résultats EF « representative model » (voir Figure 1-26) sur les contraintes  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{13}$  pour divers coefficients de frottement  $\mu$ .



**Figure 1-32 - Effet du coefficient de frottement  $\mu$  (a) sur  $\sigma_{11}$  (contrainte tangentielle) et (b) sur  $\sigma_{13}$  (contrainte de cisaillement) du « representative model » (voir Figure 1-26) [Hyde, 2000]**

Le coefficient de frottement a un effet significatif sur la distribution de ces contraintes sous-surfaciques. En particulier,  $\sigma_{11}$  (tangentielle) en bord de contact augmente avec  $\mu$  tandis que  $\sigma_{13}$  (cisaillement) diminue. Enfin, en terme d'apparition de fissures par fatigue, le coefficient de frottement a un effet prononcé sur l'usure et les détériorations par fretting.

### 1.2.3 Conclusion sur l'étude du fretting

Différentes études ont établi par calculs EF que même dans un accouplement sans défaut d'alignement, des déplacements relatifs dent / dent sous charge apparaissent.

Par ailleurs, couplé à ces déplacements relatifs, le coefficient de frottement influence les valeurs des contraintes sous-surfaciques dans les dentures (qui ont elles-mêmes un rôle important dans les phénomènes de fissuration).

### 1.3 NORMALISATIONS

Avant tout travail, il est important de connaître les notions abordées et phénomènes prédits par les normalisations courantes. Nous examinons donc dans cette partie la normalisation française mais aussi la normalisation américaine qui est la base de certaines études rencontrées.

#### 1.3.1 Normalisation française

Les règles de dimensionnement données par cette norme s'appliquent aux cannelures cylindriques en développante de cercle est présentées dans la norme NF E 22-144.

Les calculs prennent en compte trois paramètres seulement :  $\sigma_a$  (contrainte de compression),  $\tau_a$  et  $\tau_m$  (contraintes de cisaillement de l'arbre et du moyeu). Ces contraintes ont été choisies en fonction des types de détérioration des cannelures les plus courants : corrosion de contact, matage et rupture en fatigue.

La notation employée est décrite dans le Tableau 1-1. La Figure 1-33 présente la géométrie retenue par la normalisation française.

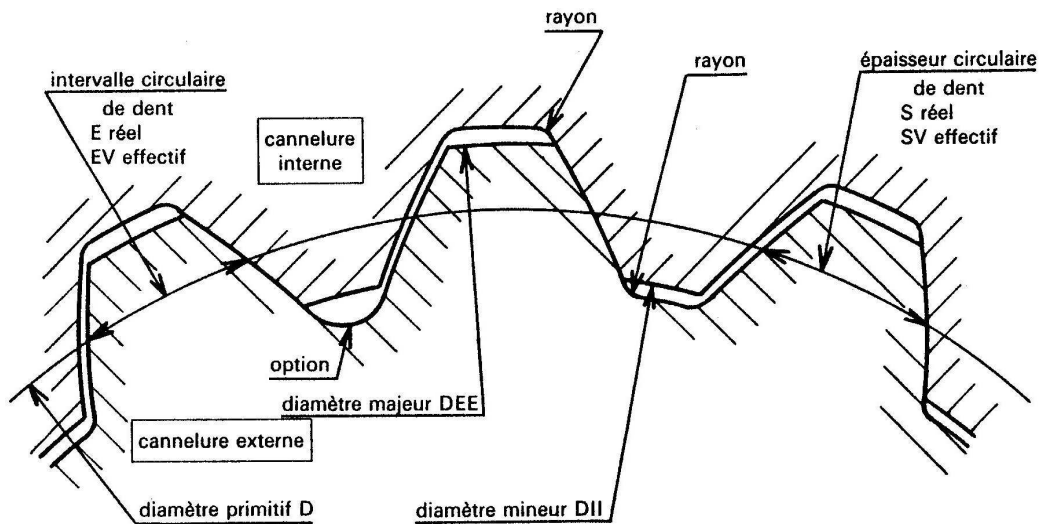


Figure 1-33 – Géométrie des dentures en développante de cercle

Symbole	Désignation	Unité
$Z$	Nombre de dents	
$m$	Module	
$\alpha$	Angle de pression	°
$g_w$	Longueur cannelée utile	mm
$D_{II} + tol$	Diamètre mineur maximal du moyeu	mm
$D_{EE} - tol$	Diamètre majeur minimal de l'arbre	mm
$S_{min}$	Epaisseur circulaire minimale	mm
$E_{max}$	Intervalle circulaire maximal	mm
$D = mZ$	Diamètre primitif	mm
$DB = mZ \cos \alpha$	Diamètre de base	mm
$C$	Couple à transmettre	N.mm
$\tau_m$	Cisaillement dans le moyeu	MPa
$\tau_a$	Cisaillement de l'arbre	MPa
$\sigma_a$	Contrainte de compression	MPa
$n$	Nombre de tours par minute	tr/min

**Tableau 1-1 Notation employée dans la norme française**

➤ La contrainte de cisaillement dans le moyeu peut être calculée à l'aide de la formulation suivante :

$$\tau_m = \frac{2C}{DB} \frac{1}{Z t_i g_w} \text{ (en MPa)}$$

Avec

$$W_i = D_{EE} \left( \frac{E_{max}}{D} + \text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_i \right),$$

$$\cos \alpha_i = \frac{DB}{D_{EE}},$$

$$t_i = \frac{\pi D_{EE}}{Z} - W_i,$$

$\alpha_i$  : angle d'incidence au diamètre majeur minimal de l'arbre,

$W_i$  et  $t_i$  : variables intermédiaires faisant intervenir à la fois des paramètres de l'arbre et du moyeu.

- La contrainte de cisaillement de l'arbre est définie par la formule ci-dessous :

$$\tau_a = \frac{2C}{DB} \frac{1}{Z t_j g_w} \text{ (en MPa)}$$

Avec

$$\cos \alpha_j = \frac{DB}{DII},$$

$$t_j = DII \left( \frac{S_{\min}}{D} + \text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha \right),$$

$\alpha_j$  : angle d'incidence au diamètre mineur maximal du moyeu,

$t_j$  : variable intermédiaire faisant intervenir à la fois des paramètres de l'arbre et du moyeu.

- La norme propose de calculer ainsi la contrainte de compression de l'assemblage :

$$\sigma_a = \frac{4 C \cos \alpha_m}{DB (DEE - DII) Z g_w} = \frac{8C}{Z g_w (DEE^2 - DII^2)}$$

Avec

$$D_m = \frac{DEE + DII}{2},$$

$$\cos \alpha_m = \frac{DB}{D_m},$$

$\alpha_m$  : angle d'incidence au diamètre  $D_m$ .

➤ A partir des contraintes admissibles par le matériau connues ou estimées, le couple maximal qui peut être transmis à travers les cannelures peut être calculé. Ce couple est la valeur minimale parmi les trois valeurs suivantes :

$$C = \frac{\tau_m DB}{2} Z t_i g_w,$$

$$C = \frac{\tau_a DB}{2} Z t_j g_w,$$

$$C = \frac{\sigma_a}{8} Z g_w (DEE^2 - DII^2).$$



➤ Les contraintes calculées d'après cette norme sont à comparer avec les valeurs des contraintes admissibles par le matériau utilisé et ne doivent pas les dépasser. En pratique, il est difficile d'estimer ces contraintes admissibles et la norme française propose d'utiliser les valeurs données par les tables tirées de la norme E 23-015 concernant les engrenages ( $\sigma_{Hlim}$  pour la contrainte de compression et  $\sigma_{Flim}$  pour les contraintes de cisaillement).

### 1.3.2 Normalisation américaine

En ce qui concerne la définition géométrique des cannelures, on retrouve les mêmes formulations que celles des normes françaises. La particularité intéressante du point de vue de la conception est la prise en compte dans ces normes des principaux défauts et phénomènes pouvant altérer le bon fonctionnement des cannelures à travers plusieurs coefficients. Ces coefficients donnent des formules de capacité de charge sûrement mieux adaptées que celles proposées par les normes françaises mais encore surdimensionnées. Toutefois ceci montre à nouveau que le comportement des cannelures reste un domaine peu approfondi par les instituts de normalisation. Nous présentons ci-après quelques précisions concernant les calculs donnés par cette norme. Les différentes normes américaines qui ont trait aux cannelures sont référencées en annexe.

La notation employée est décrite dans le Tableau 1-2.

<b>Symbole</b>	<b>Désignation</b>	<b>Unité</b>
$D$	Diamètre primitif	inch
$D_{re}$	Diamètre de pied de dent cannelure extérieure	inch
$D_{ri}$	Diamètre de pied de dent cannelure intérieure	inch
$D_{oi}$	Diamètre extérieur du moyeu	inch
$L$	Longueur de cannelure	inch
$L_e$	Longueur effective maximale	inch
$N$	Nombre de dents	
$P = \frac{N}{D}$	Nombre de dents par unité de diamètre	inch <sup>-1</sup>
$t$	Epaisseur circulaire réelle	inch
$t_w = \frac{D_{oi} - D_{ri}}{2}$	Epaisseur du moyeu	inch
$\phi$	Angle de pression	°

$D_h$	Diamètre interne d'un arbre creux	inch
$K_a$	Facteur d'application de charge	
$K_m$	Facteur de distribution de charge	
$K_f$	Facteur de fatigue	
$K_w$	Facteur d'usure	
$T$	Couple transmis	lb.inches
$S_s$	Contrainte de cisaillement	psi
$S_c$	Contrainte de compression	psi
$S_1$	Contrainte de traction radiale	psi
$S_2$	Contrainte de traction centrifuge	psi
$S_3$	Contrainte de traction due à la force tangentielle	psi
$S_t$	Contrainte de traction totale	psi
$h$	Profondeur d'engagement de la dent	inch
$Y$	Facteur de forme de Lewis	

**Tableau 1-2 Notation employée par la norme américaine**

Deux types de cannelures sont considérés:

- les cannelures “fixes” : ce sont des cannelures ajustées serré ou libre avec un guidage empêchant l'oscillation des cannelures qui engendre des petits mouvements axiaux.
- les cannelures “flexibles” : ce sont des cannelures qui permettent des oscillations pour des arbres mal alignés par exemple. On observe alors des mouvements axiaux.

Voici ci-dessous le calcul des contraintes en fonction du couple à transmettre, des coefficients de correction et des paramètres des cannelures. L'obtention des facteurs intervenant dans ces calculs est explicitée dans les tableaux en annexe.

➤ Contrainte de cisaillement en pied de dent pour des cannelures externes soumises à un couple  $T$  :

$$S_s = \frac{16TK_a}{\pi D_{re}^3 K_f} \text{ pour un arbre plein,}$$

$$S_s = \frac{16TD_{re}K_a}{\pi(D_{re}^4 - D_h^4)K_f} \text{ pour un arbre creux.}$$

➤ Contrainte de cisaillement des dents au diamètre primitif :

$$S_s = \frac{4T K^a K_m}{DN L_e t K_f}$$

Avec

$K_a$  : facteur d'application de charge,

$K_f$  : facteur de fatigue,

$K_m$  : facteur de distribution de charge,

$L_e$  : longueurs effectives maximales.

Les différents facteurs sont détaillés dans la norme, ainsi que les contraintes maximales qui ne doivent pas être dépassées par les valeurs calculées.

➤ Contrainte de compression sur les flancs des dents

$$S_c = \frac{2TK_m K_a}{DNL_e h K_w} \text{ pour les cannelures « flexibles »,}$$

$$S_c = \frac{2TK_m K_a}{9DNL_e h K_f} \text{ pour les cannelures « fixes ».}$$

Avec  $h$  la profondeur d'engagement de la dent. Elle vaut  $0.9/P$  pour des cannelures à fond plat et  $1/P$  pour des cannelures à plein rayon. La valeur de la contrainte calculée ne doit pas dépasser les valeurs données dans la norme.

➤ La norme américaine considère aussi le phénomène d'éclatement de la cannelure.

Les cannelures internes (sur le moyeu) peuvent se rompre (ou « éclater ») sous l'action de trois contraintes de traction :

- une due à la composante radiale du chargement transmis :

$$S_1 = \frac{T \tan \phi}{\pi D_t L}$$

- une due à la force centrifuge :

$$S_2 = \frac{1,656(N_{rot})^2(D_{oi}^2 + 0,212D_{ri}^2)}{1000000}$$

Avec  $N_{rot}$  la fréquence de rotation en tour par minute.

- une due à la force tangentielle sur le cercle primitif causant la flexion des dents :

$$S_3 = \frac{4T}{D^2 L_e Y}$$

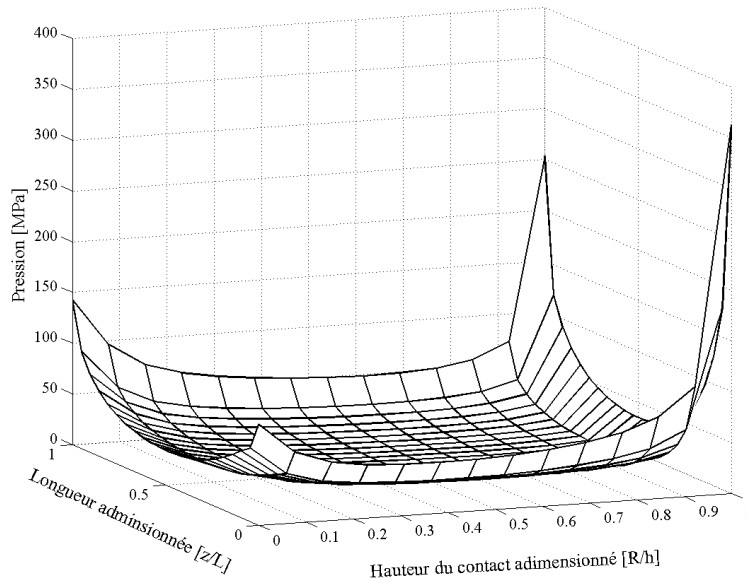
Dans cette équation,  $Y$  est le facteur de forme de Lewis obtenu à partir de la configuration des dents. Pour des cannelures internes à angle de pression de 30 degrés,  $Y = 1,5$  est une bonne estimation. Le facteur 4 traduit le fait que seule la moitié de la dent supporte le chargement.

La contrainte de traction totale qui tend à rompre le moyeu s'exprime par l'équation suivante et doit être inférieure aux valeurs données dans la norme:

$$S_t = \frac{K_a K_m (S_1 + S_3) + S_2}{K_f}.$$

## 1.4 CONCLUSION

Nous avons vu dans cette première partie que plusieurs études qu'elles soient analytiques, expérimentales (jauges de contrainte et photoélasticité) ou par calculs Eléments Finis aboutissent aux mêmes résultats : les répartitions de contraintes et de pression de contact dans les cannelures ne sont uniformes ni axialement ni suivant la hauteur du flanc des dents. La Figure 1-34 est un graphique issu d'une modélisation Eléments Finis tridimensionnelle permettant de voir dans sa globalité le champ de pression qui s'applique sur le flanc d'une dent dans le cas d'une cannelure à flanc en développante de cercle.



**Figure 1-34 Distribution 3D de la pression de contact sur un flanc d'une dent d'une cannelure à flancs en développante de cercle**

Il est donc difficile de croire que les normalisations soient suffisantes pour bien dimensionner de tels accouplements.

De plus, le phénomène complexe d'usure, prépondérant dans les cannelures, à savoir le fretting, est étudié soit de façon expérimentale soit par simulations Eléments Finis. Il dépend fortement d'une part des glissements au niveau du contact et d'autre part de la répartition de la pression de contact.

Dans le but de créer un modèle analytique permettant de prédire le comportement des cannelures, cette première analyse bibliographique nous emmène donc à chercher à déterminer la répartition de la pression sur un flanc de dent en contact.

---

## CHAPITRE 2 ETUDE DE LA PRESSION ET DECOUPAGE DE L'ANALYSE DU COMPORTEMENT D'UNE CANNELURE

*Ce chapitre a pour but de présenter une étude de la répartition de la pression sur un flanc d'une dent d'une cannelure. En effet dans le but de créer un modèle analytique, il est important d'établir tout d'abord une référence, servant de base au développement. Pour cela deux voies ont été recensées, la voie expérimentale et la voie numérique. Cette analyse du champ de la pression conduit à proposer un découpage de l'analyse du comportement global de la cannelure.*

Selon l'étude bibliographique du chapitre précédent, la connaissance du comportement d'une liaison cannelée passe par celle du champ de pression sur les flancs des dents. Or, comme nous l'avons précisé lors du chapitre introductif de cette thèse, nous cherchons à décrire le comportement de la cannelure à l'aide de modèles analytiques. Ces modèles doivent donc être aptes, que ce soit de manière directe ou indirecte, à décrire le champ de pression. Pour atteindre cet objectif, il est nécessaire de disposer de données de référence, donc de pouvoir mesurer ou évaluer les différentes répartitions de pression selon les types de cannelure. Deux possibilités nous sont alors offertes, une voie expérimentale ou une voie numérique.

### 2.1 ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE SUR L'ANALYSE EXPERIMENTALE DU CONTACT

Quel que soit le type de cannelure étudié, le flanc d'une dent est une surface disproportionnée : elle est longue et de largeur relativement étroite. A l'aide d'une étude bibliographique sur la mesure du contact, nous allons répertorier les différentes possibilités expérimentales qui nous sont offertes.

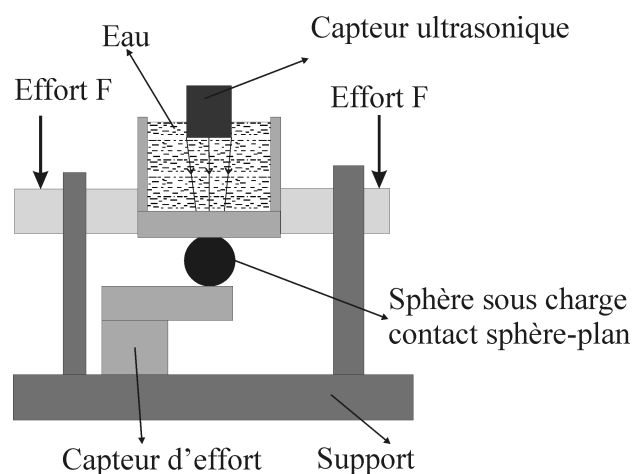
Une étude bibliographique très complète sur le contact a été menée par Barber [Barber, 2000]. Il recense différentes études traitant du contact. Ainsi, il aborde les problèmes de frottement, d'indentation, de l'effet de la rugosité des surfaces en contact, de la propagation de fissures mais aussi des problèmes thermiques. Il apparaît alors que deux voies différentes permettent de mesurer expérimentalement une pression de contact. La première consiste à mesurer directement le champ de pression entre les surfaces en contact durant le

chargement. La seconde nécessite la mesure de l'état de surface avant et après le contact pour ensuite analyser l'écrasement.

### 2.1.1 Mesure durant le chargement

#### ➤ Méthode par ultrasons

Pour mesurer la pression sans introduire de corps entre les deux surfaces en contact durant la charge, nous avons recensé un seul moyen, l'emploi d'ultrasons. Les ultrasons ont l'avantage d'être propre, et permettent des expériences non destructives. Quinn [Quinn, 2002] détaille une étude permettant de connaître la taille de la surface réelle en contact sur des dents d'engrenages ou des roulements. Il est aussi possible de connaître la distribution de la pression sur cette surface. L'expérience consiste à envoyer à travers un réservoir d'eau des ultrasons afin de connaître l'état de la surface des parties en contact, comme le montre la Figure 2-1. Quinn dans cette publication valide son procédé en cherchant le contact entre une sphère et un plan, ce qui correspond à vérifier la théorie de Hertz. La recherche de la distribution de la pression nécessite l'emploi d'un coefficient de réflexion ultrasonique. Ce paramètre est déterminé de manière empirique.



**Figure 2-1 Banc d'essai de Quinn [Quinn, 2002]**

Cette méthode a l'inconvénient de faire intervenir un coefficient empirique qui nécessite une connaissance de la distribution de la pression sur la surface. De plus elle n'a été réalisée que pour du contact sphère – plan. Le contact dans une cannelure est donc éloigné de ce modèle.

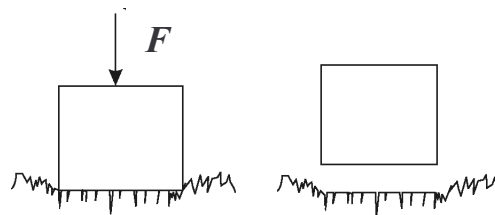
➤ Méthode par introduction d'un film

Fregly [Fregly, 2003] met en place un film entre deux surfaces en contact afin de mesurer les pressions dans un genou artificiel. Il existe dans le commerce deux types de film : le Fuji film et le K-scan sensor de Tekscan. Ce sont des films souples de faible épaisseur (0.1mm) contenant des capsules d'encre qui éclatent sous la pression. Ce moyen est simple d'utilisation et facile à mettre en œuvre. Cependant, aucune méthode n'existe actuellement pour prévoir la marge d'erreur de ce film du point de vue de la pression maximale, pression moyenne ou estimation de l'aire de contact. Il est donc difficile d'évaluer l'exactitude de telles mesures.

Afin de voir si ce système convient à une mesure qualitative de la pression dans le cadre des cannelures, nous avons testé cette méthode. Les résultats que nous avons obtenus se sont avérés non conforme aux résultats du modèle EF de la cannelure associée. Ces constatations nous ont conduits à comparer sous EF un modèle avec la présence du film et un modèle sans le film. Le film étant constitué de plastique et de capsules d'encre, il peut être considéré comme souple. Cet élément joue donc le rôle d'adaptateur entre les surfaces en contact et ainsi modifie, par sa présence, les zones en contact en les augmentant de manière significative et modifié aussi de ce fait l'intensité du champ de pression.

La technique qui consiste à insérer directement un film entre les dents d'une cannelure a donc été écartée. L'étude plus détaillée est présentée en annexe II.

### 2.1.2 *Mesure avant et après le chargement*

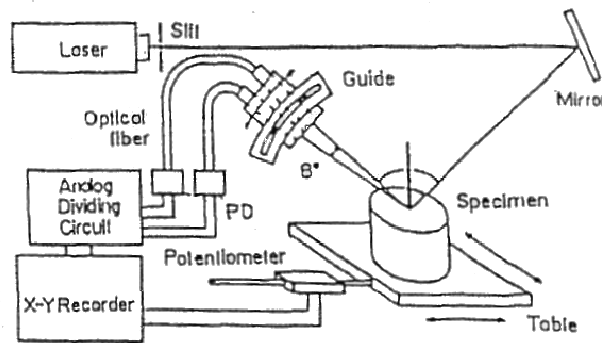


**Figure 2-2 Ecrasement d'une surface à l'aide d'un effort  $F$  [Yamaguchi, 1996]**

Pour connaître la distribution de la pression entre deux surfaces en contact, il est possible de mesurer l'état de surface avant et après le contact (Figure 2-2). L'analyse expérimentale a été développée par Yamaguchi [Yamaguchi, 1996]. Le principe consiste à exploiter la réflexion de la lumière (Figure 2-3). Pour le bon fonctionnement de cette expérience, les deux matériaux des pièces en contact ne doivent pas être de la même dureté.

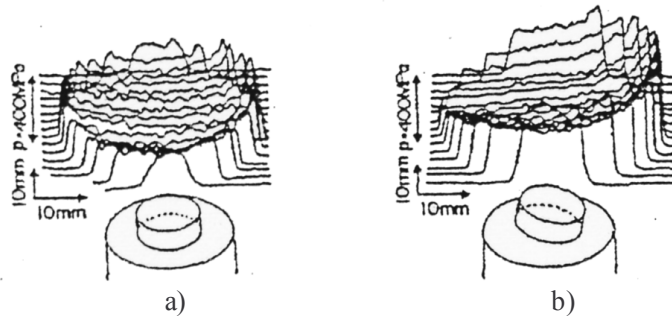


L'un doit être « mou » et l'autre « dur ». Ainsi la distribution de la pression peut être déterminée en analysant la pièce en matériau « mou ».



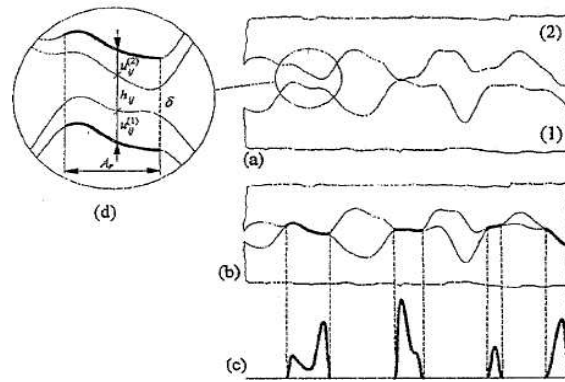
**Figure 2-3 Banc d'essai mis en place par Yamaguchi [Yamaguchi, 1996]**

Cette méthode nécessite un test permettant de relier la déformation observée avec la pression. Yamaguchi le réalise pour différents types de surfaces. Le champ de pression obtenu est en 3D. La Figure 2-4 est un graphe illustrant les essais de Yamaguchi. Ce système s'avère intéressant mais il nécessite un équipement particulier.



**Figure 2-4 Pression de contact et formes des pièces employées pour deux cas de charge différent [Yamaguchi, 1996]**

Varadi [Varadi, 1996] se base sur une analyse des surfaces en contact avant et après la mise sous charge (voir Figure 2-5a et b). Pour cela il étudie plus précisément la rugosité des surfaces qui est mesurée à l'aide d'un Perthometer S6P. Un algorithme 3D basé sur la matrice influente développée par Johnson [Johnson, 1985] permet ensuite une analyse du contact. Avec cette méthode la pression de contact peut être obtenue uniquement sur des surfaces rugueuses (Figure 2-5c).



**Figure 2-5 Pièce avant contact (a) et après contact (b) [Varadi, 1996]**

Cette méthode nécessite la mesure de la surface de contact avant et après déformation. Elle nécessite la mesure de la rugosité des deux pièces en contact. Autant la mesure de la surface de contact de l'arbre peut être réalisée facilement, autant celle du moyeu paraît être plus difficile à obtenir à cause de l'accès étroit dû à sa forme. De plus, notre laboratoire n'étant pas équipé pour de telles mesures, nous n'avons pas continué à étudier ce principe expérimental.

Varadi n'est pas le seul à avoir développé de tels modèles. Cependant la plupart des recherches se basent sur des contacts de type Hertz, comme les études de Selgren [Sellgren, 2003] ou Bücher [Bucher, 2002].

Finalement ces études s'avèrent inappropriées au cas des cannelures. En effet elles ne permettent pas de mesurer la pression parce que soit la méthode est inappropriée, soit la méthode n'est pas fiable, soit il n'est pas possible de mesurer la rugosité des dents du moyeu. Ce dernier paramètre est essentiel pour la méthode de mesure avant et après déformation.

Aucune méthode expérimentale nous permet de mesurer directement la pression. Pour connaître le champ de pression sur les flancs en contact, nous avons donc choisi d'utiliser une approche par Eléments Finis.

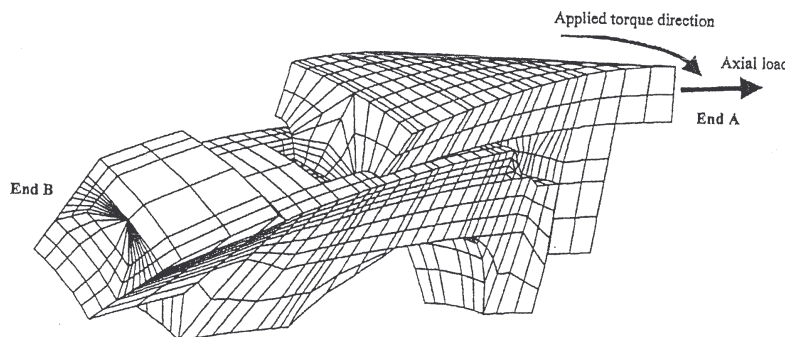
## 2.2 ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE SUR L'ANALYSE PAR ELEMENTS FINIS DU CONTACT ET CHOIX DU MODELE

Plusieurs chercheurs depuis 2000 appuient leur études sur des modèles Eléments Finis. Avant même de concevoir un nouveau modèle, il est apparu intéressant de comparer les différentes approches EF, en faisant attention à l'année de publication ainsi qu'aux logiciels employés.

### 2.2.1 Les modèles EF dans la littérature

En 2001, Tjernberg [Tjernberg, 2001] a développé un modèle avec des éléments de contact sur les flancs des dents en contact. Pour diminuer le nombre d'éléments dans le modèle, une symétrie cyclique est utilisée sur les bords. Le code de calcul alors employé est Abaqus. Ce code de calcul est aussi utilisé par Leen et son équipe depuis 2000 [Leen, 2000, Leen, 2001, Leen, 2002, Sum, 2003, Sum, 2004]. La cannelure est toujours modélisée de la même façon. Ainsi pour un chargement cyclique comme un couple, seule une paire de dents est modélisée, la cannelure entière étant simulée à l'aide d'une symétrie cyclique sur les bords du modèle. Le maillage tient aussi un rôle important dans une modélisation. En effet la précision des résultats est directement liée à la qualité des mailles. Dans les travaux présentés par Leen, un raffinement du maillage dans le sens longitudinal est réalisé sur les extrémités du contact. Des éléments du premier ordre sont employés car pour le contact, ils offrent une meilleure précision que les éléments du second ordre [ABAQUS, 2003]. La Figure 2-6 présente une vue non déformée d'un modèle EF d'une cannelure à flancs en développante de cercle hélicoïdale. L'extrémité B de l'arbre, opposée au contact, est entièrement fixée, tandis que les déplacements des nœuds de l'extrémité A du moyeu sont interdits seulement axialement de façon à obtenir une section qui reste plane au cours du chargement. Le couple est appliqué sur cette même section, sous forme de forces orthoradiales de même intensité, sur les nœuds du diamètre extérieur. D'après Leen le chargement est suffisamment loin du contact pour ne pas influencer sur la répartition des contraintes. Cela emmène donc à modéliser les corps de l'arbre et du moyeu avant et après le contact de la cannelure pour que les conditions aux limites ne perturbent pas le calcul.

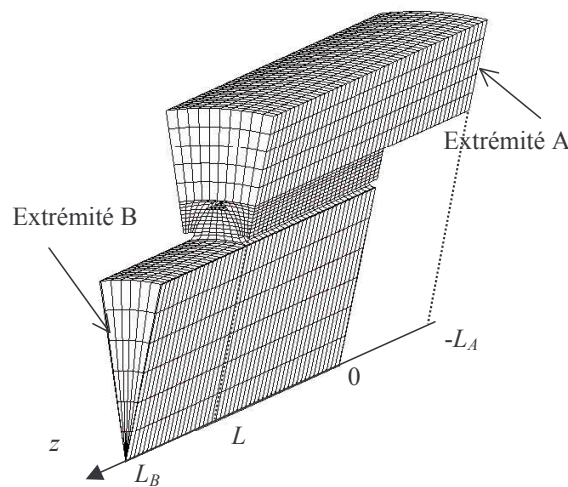
Des simulations comparables apparaissent dans l'étude de Limmer [Limmer, 2001].



**Figure 2-6 Cannelure modélisée par Leen *et al.***

Au regard de ces études, nous avons opté pour une modélisation type, visible sur la Figure 2-7. L'axe longitudinal est l'axe  $z$ , dont l'origine, visible sur cette figure correspond au début du contact. Les déplacements orthoradiaux et longitudinaux sont interdits sur le moyeu sur l'extrémité A, à  $z = -L_A$ , le déplacement longitudinal est interdit sur l'arbre sur l'autre extrémité B, à  $z = L_B$ . Une symétrie cyclique est appliquée sur les bords afin de ne représenter qu'une paire de dents. Le contact est géré entre les flancs à l'aide d'éléments du premier ordre.

Le chargement variant selon les modèles, les éléments qui le définissent seront donnés au moment opportun.



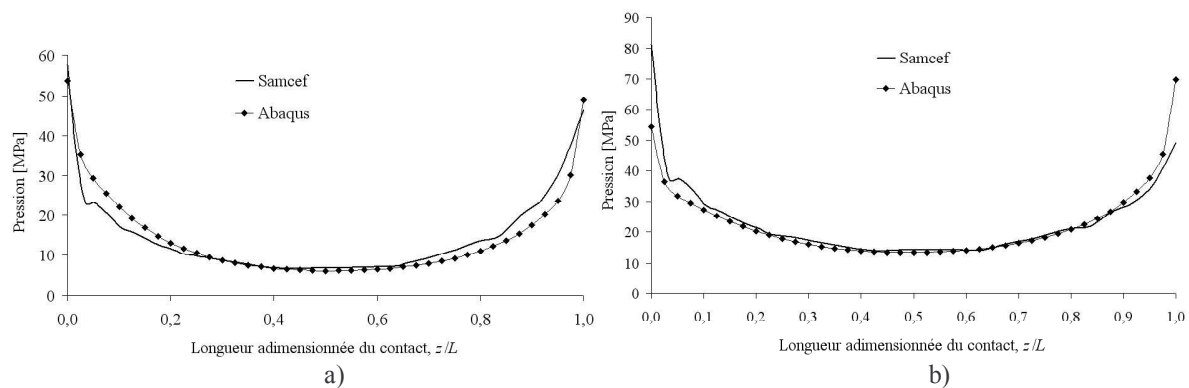
**Figure 2-7 Modélisation d'un secteur cannelure type**

### 2.2.2 Confrontation des différents codes de calculs

Plusieurs codes de calcul sont reconnus dans le monde de la recherche. Cependant en aéronautique, où les exigences sont les plus fortes en terme de précision, les codes de calculs les plus courants sont Samcef et Abaqus. Ayant la possibilité d'utiliser indifféremment les deux, il a été décidé de confronter les résultats de ces deux codes.

Pour un même modèle, les résultats d'Abaqus et de Samcef sont très proches du point de vue contrainte en pied de dent ou déformation. Cependant l'exploitation des pressions de contact s'avère plus compliquée. En effet il est possible d'observer une différence comme le montre la Figure 2-8. Ces graphes comparent la répartition axiale de la pression pour deux rayons différents. La zone la plus critique, visible Figure 2-8b, se situe en haut de la dent. Néanmoins l'ordre de grandeur des pressions est similaire.

La répartition axiale de la pression obtenue avec notre modèle est conforme à celle présentée dans l'étude bibliographique (Figure 1-8 du paragraphe 1.1.1).



**Figure 2-8 Comparaison de la répartition axiale de la pression de contact à deux rayons différents d'une dent. a) milieu de dent, b) haut de la dent.**

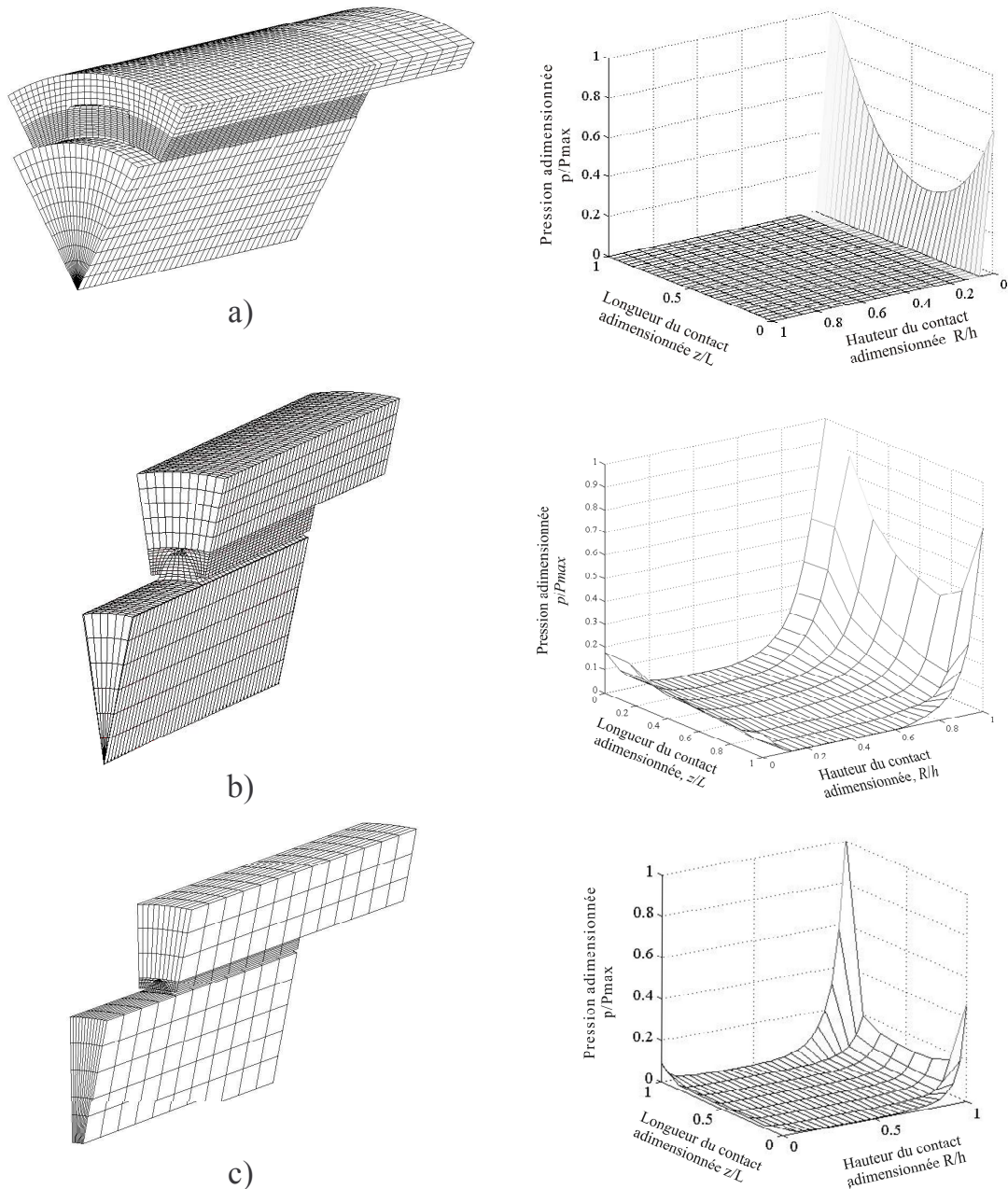
Finalement une solution qui permet de départager ces deux codes de calcul est le temps de calcul et le temps d'exploitation des résultats.

Les temps de calcul de ces deux codes sont quasi identiques sur un même ordinateur (30 minutes à 1h selon le degré de raffinement du modèle). Par contre il est possible d'exécuter Abaqus à partir d'un cluster ce qui réduit le temps de calcul à 10 minutes. De plus, Samcef est un logiciel qui s'avère complexe et lourd lors de l'exploitation des résultats alors qu'Abaqus offre la possibilité d'utiliser un autre logiciel comme Ideas en pré et post traitement ce qui le rend beaucoup plus maniable.

Finalement durant cette étude seul le logiciel Abaqus est utilisé comme code de calcul.

## 2.3 PRESENTATION DU CHAMP DE PRESSION POUR LES DIFFERENTS TYPES DE CANNELURE ET DECOUPLAGE DE L'ETUDE DU COMPORTEMENT

Nous avons vu dans le chapitre introductif que la géométrie des dents varie beaucoup d'un type de cannelures à l'autre. Cette différence induit l'obtention d'un champ de pression propre à chaque type de cannelure. A l'aide de modèles EF 3D présentés dans le paragraphe précédent, il est possible de connaître la pression en chaque nœud du contact. Les champs de pression ainsi obtenus pour les différents types de cannelures sont présentés à la Figure 2-9. Le cas des cannelures à flancs parallèles est présenté Figure 2-9a, celui des flancs en développante de cercle à la Figure 2-9b et celui des dentelures rectilignes à la Figure 2-9c.



**Figure 2-9 Répartitions des pressions pour les différents types de cannelure**

Ce graphique révèle de façon significative la différence de répartition de la pression selon la cannelure. En effet, la pression de contact sur les cannelures à flancs parallèles est répartie essentiellement sur l'arête du haut de la dent. Le reste de la surface du flanc ne travaille pas. A l'opposé, pour les deux autres types de cannelures, le champ de pression est présent sur la majeure partie ou la totalité du flanc de la dent.

De manière générale, on remarque que, pour ces deux types de cannelures :

- Les distributions de pression à iso-hauteur ( $R/h = \text{constante}$ ) ont toutes des allures identiques.
- Les distributions de pression à iso-longueur ( $z/L = \text{constante}$ ) ont aussi des allures semblables.

Connaître le champ de pression en tout point de contact n'a pas réellement d'intérêt quand l'objectif est de permettre un dimensionnement. En effet seules les zones où la pression est maximale nous intéresse. Nous pouvons voir à travers la Figure 2-9 que ces zones sont situées aux extrémités de la longueur d'une cannelure, plus particulièrement pour les cannelures à flancs en développante de cercle et pour les dentelures rectilignes. Nous choisissons donc de découpler le comportement de la cannelure en deux parties. D'une part le comportement radial, qui nous permet de connaître la répartition radiale de la pression ainsi que le comportement des dents et d'autre part le comportement axial qui nous permet de connaître la distribution du couple à travers la cannelure et donc connaître aussi les zones où les variations de couple sont les plus importantes.

---

## CHAPITRE 3 COMPORTEMENT RADIAL

*Ce chapitre a pour but de présenter une solution analytique permettant d'obtenir, connaissant la variation du couple à la position axiale  $z$ , la répartition de la pression suivant le flanc de la dent dans la direction radiale. A notre connaissance, ce type d'étude n'a jamais fait l'objet de publication comme le chapitre bibliographique le révèle. L'analyse du comportement radial d'une cannelure nécessite non seulement la connaissance des modèles de contact existant mais aussi la connaissance du comportement d'une paire de dents sous charge. Les analyses sont abordées à travers une étude bibliographique sur le contact et une étude des divers phénomènes engendrant les déformations des dents. Finalement ces études sont la base d'un travail que nous avons réalisé permettant d'évaluer la raideur d'une paire de dents. Ce paramètre, comme nous le verrons dans le chapitre suivant portant sur le comportement axial, apparaît comme essentiel lors de l'analyse du comportement axial de la cannelure. Cette raideur ayant été l'objet d'études comme celle de Tatur, Orain ou Blanc nous comparons en particulier les divers résultats obtenus.*

La différence de répartition de la pression des divers types de cannelure, observée au chapitre précédent nous a emmené à étudier un type de cannelure particulier. Compte tenu de notre partenariat avec le monde aéronautique, qui utilise essentiellement des cannelures à flancs en développante de cercle, nous avons choisi de nous focaliser en priorité sur le comportement de ce type de cannelure.

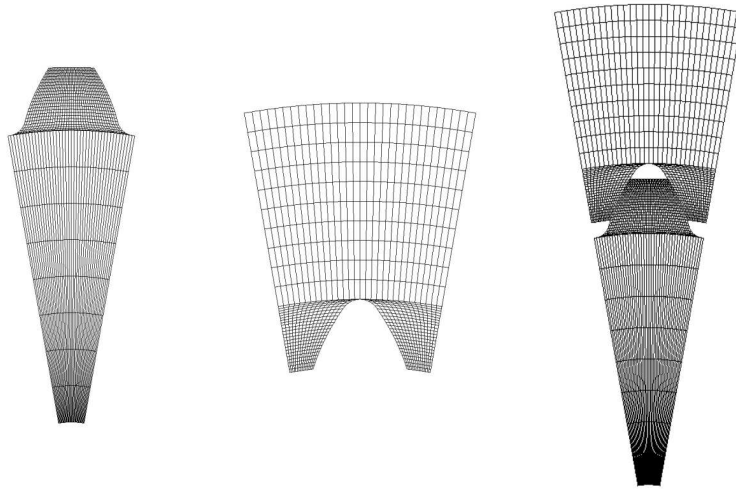
### 3.1 MODELE ELEMENTS FINIS DE REFERENCE

Créer un modèle EF 3D permettant de connaître de manière précise la répartition radiale du champ de pression est fort coûteux en terme de temps, de modélisation et de calcul. Aussi nous avons cherché à savoir si un modèle EF 2D permet d'obtenir la même répartition radiale de la pression que le modèle EF 3D.

La Figure 3-1 représente la modélisation EF 2D de l'arbre, du moyeu et de leur assemblage. Le contact est déclaré sur les flancs de dents sans prendre en compte le frottement. Le maillage est réalisé en considérant les hypothèses de déformations planes. C'est pourquoi aucune fixation axiale n'est nécessaire. Pour soumettre la liaison cannelée à de la torsion, les nœuds du centre de l'arbre sont fixés dans la direction orthoradiale et des forces orthoradiales uniformément réparties imposent un couple sur le diamètre extérieur du moyeu.



Enfin une contrainte de symétrie cyclique, permettant de recréer le comportement de la cannelure, est appliquée de part et d'autre du secteur angulaire.



**Figure 3-1 Cannelure modélisée en 2D sous EF**

Comparer des modèles 3D et 2D EF entre eux impose l'utilisation d'un chargement équivalent. Le chargement du modèle tridimensionnel est un couple extérieur,  $C_{ext}$ , imposé sur une extrémité de la cannelure. Les résultats de ce modèle permettent de connaître le couple le long de la cannelure en toutes coordonnées  $z$ . Il est alors possible de comparer, pour une position axiale,  $z$ , donnée, les résultats issus de ces deux modèles en intégrant dans le modèle 2D un couple exprimé par unité de profondeur issu des résultats du modèle de la cannelure 3D.

La modélisation est réalisée sous Ideas et le calcul est réalisé sous Abaqus.

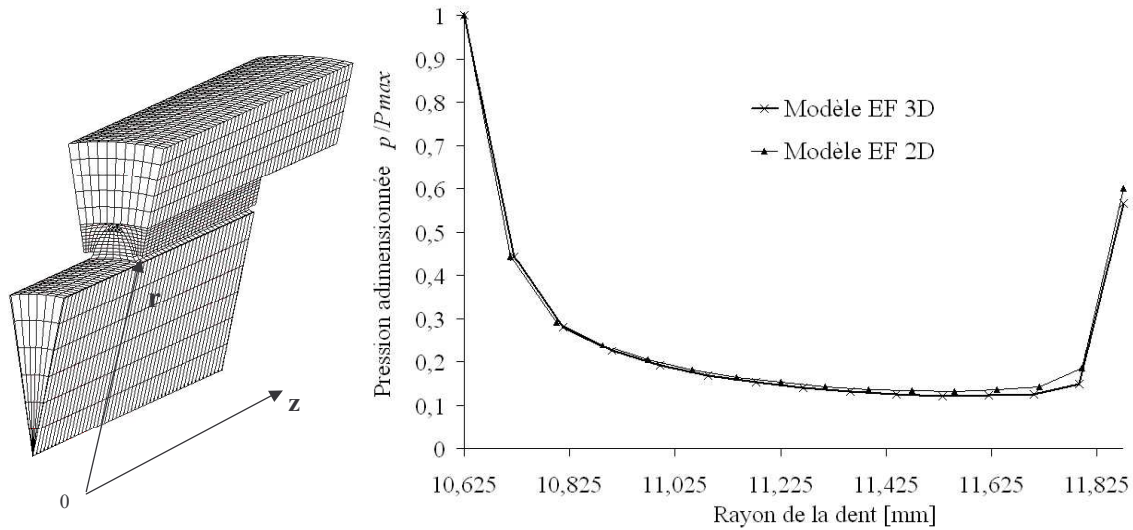
Le maillage de la dent est réalisé de manière à obtenir une maille carrée suffisamment fine pour décrire convenablement la développante de cercle. Concrètement la discrétisation de la courbe de contact permet d'avoir un nœud tous les  $2/100$  de la longueur du contact.

La pression de contact est calculée directement aux nœuds appartenant au contact.

Le temps de calcul pour de tels modèles est court, inférieur à 5 minutes en utilisant Abaqus 64bits sur un cluster cadencé à 2.6GHz avec 4Mo de mémoire vive, et ne dépassant pas 30 minutes avec Abaqus 32bits sur un P4 2.6GHz et 1Mo de mémoire vive. Cependant la création de différentes cannelures ne peut être automatisée sous Ideas car les développantes de cercles sont réalisées à l'aide d'équations qui ne sont pas paramétrables. Les temps de création des modèles sont donc conséquents.

La figure suivante montre qu'une très bonne corrélation est obtenue entre les résultats issus des modèles EF 2D et 3D. Il est donc possible de travailler avec des modèles EF 2D. La

cannelure étudiée est  $18 \times 1.25$  avec  $D_{ext} = 35\text{mm}$ ,  $D_{int} = 10\text{mm}$  et une longueur de cannelure de  $40\text{mm}$ . Les dents du modèle 3D EF sont divisés radialement en 15 éléments. La position axiale étudiée correspond à  $z = 40\text{mm}$ , c'est à dire à la zone la plus critique de la liaison cannelée.



**Figure 3-2 Comparaison des pressions radiales issues d'un modèle EF 2D et 3D**

Dotés du modèle EF 2D comme système de référence, nous pouvons maintenant rechercher si des solutions analytiques existent pour modéliser le comportement radial.

## 3.2 ETUDE DES MODELES ANALYTIQUES DE CONTACT 1D

Le contact est un phénomène complexe, dont la connaissance est en permanence approfondie et où des modèles mathématiques ou numériques et des analyses expérimentales sont toujours en progression. Nous ne cherchons donc pas à créer un nouveau modèle de contact mais à en exploiter un déjà existant, nous permettant ainsi de connaître la répartition de la pression selon une direction.

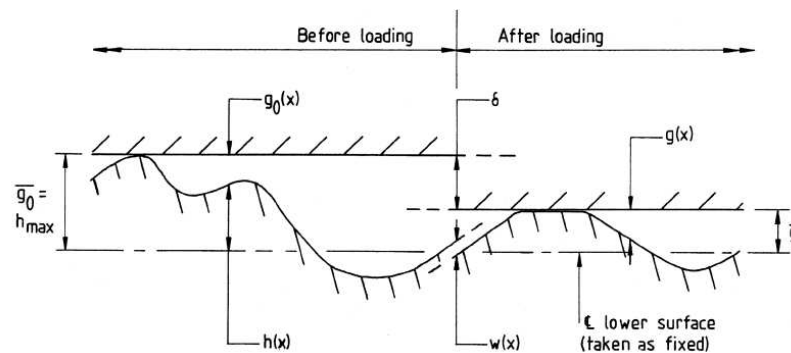
### 3.2.1 Méthode se basant sur des surfaces irrégulières

La méthode analytique développée par Manners [Manners, 2000, Manners, 2003] est basée sur le même principe que l'étude de Varadi. La pression de contact est obtenue en analysant l'irrégularité des surfaces en contact. Cependant la géométrie des surfaces n'est pas obtenue à l'aide d'expérience mais à l'aide d'une méthode numérique.

Cet article passe en revue les méthodes disponibles pour la solution numérique de problèmes de contact, en particulier, ceux dans lesquels l'ampleur de la surface de contact

n'est pas connue au début de l'analyse. Une fonction objectif permet à des problèmes de contact d'être résolus par minimisation sans contrainte, malgré l'état de frontière non linéaire à l'interface.

Le modèle considère deux surfaces dont une rugueuse. Les corps sont définis comme semi-infini, et le matériau de la surface supérieure définie à la Figure 3-3, est considéré comme mou, la surface inférieure est rugueuse à l'échelle microscopique. Quand les deux surfaces sont juste en contact, alors aucune charge n'est transmise et le jeu entre les surfaces, visible Figure 3-3, est de  $g_0(x)$ . Enfin les frottements sont négligés et les déplacements et contraintes sont supposés petits. Entre les deux surfaces, il existe un jeu,  $g(x)$ , visible à la Figure 3-3, qui est lié à l'aide d'équations complexes à la pression de contact.



**Figure 3-3 Surfaces théoriques de contact selon Manners**

Avec

$w(x)$  : déplacement normal à la surface,

$\delta$  : distance de recouvrement,

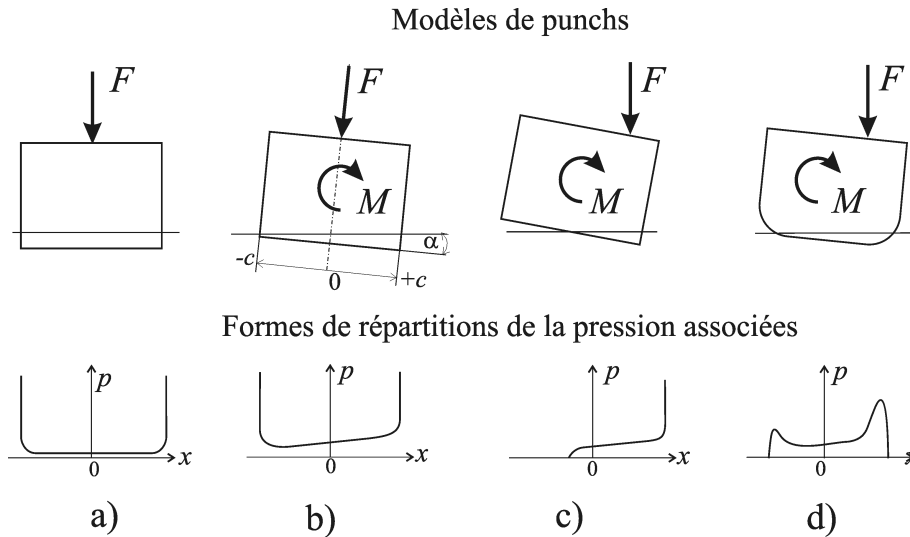
$h(x)$  : élévation de la surface non chargée.

Finalement la mise en place des surfaces rugueuses en vis à vis étant faite de manière aléatoire, il est extrêmement difficile d'en vérifier la véracité sans faire appel à des expériences. Or nous avons déjà signalé que les mesures de rugosité sur les flancs des dents à l'intérieur d'un moyeu cannelé nous pose un réel problème. Pour cette raison, nous avons choisi d'envisager plutôt des solutions dont les géométries des pièces seraient parfaites.

### 3.2.2 Méthodes se basant sur des surfaces parfaites

Les méthodes qui vont être abordées dans ce paragraphe sont basées sur le contact entre une surface rigide et un punch ou poinçon (voir Figure 3-4).

Afin de comprendre le phénomène de contact d'un accouplement cannelé, nous avons vu lors de l'étude bibliographique que Leen *et al.* [Leen, 2000] ont proposé une expérience semblable à celle d'un essai de punch. Cet essai est comparé alors avec les résultats issus d'un modèle EF et d'un modèle analytique de punch. Le modèle analytique de punch exploité est visible à la Figure 3-4a. Il a été auparavant étudié par Hanson [Hanson, 1989, Hanson, 1990].



**Figure 3-4 Différents modèles punch**

Cependant, le modèle du punch de Hanson considère une distribution symétrique de pression, tandis que la distribution de pression sur une dent de cannelure peut être dissymétrique [Leen, 2000]. Afin de prendre en compte cette caractéristique, il est nécessaire d'élargir les recherches à d'autres cas de chargement de punch. Pour faire apparaître un tel phénomène, le punch et la surface doivent former un angle lors de l'écrasement. Ainsi les travaux pris en compte doivent permettre d'obtenir un angle entre les deux surfaces en contact, comme le montre les schémas b), c), d) de la Figure 3-4. Des publications se basant sur des modèles de punch ont été développées faisant intervenir de telles répartitions de pression. C'est le cas de Sackfield *et al.* [Sackfield, 2003]. À la différence de l'étude d'Hanson, le chargement du punch est composé d'une force et d'un couple et deux configurations sont prises en compte. Dans la première configuration, la charge est telle que le contact est complet, comme le montre la Figure 3-4b. Dans la deuxième configuration, la charge est fortement décentrée, imposant un contact partiel, visible à la Figure 3-4c. Pour gérer le contact, Sackfield utilise une formulation de demi-plan élastique où le poinçon est supposé rigide et le support idéalisée comme un demi-plan élastique. Selon Sackfield, des expériences réalisées par Limmer, [Limmer, 2001] prouvent que la résolution de problèmes

de contact à l'aide de cette formulation n'introduit pas d'erreurs significatives tant qu'une des pièces est supposée rigide et l'autre élastique.

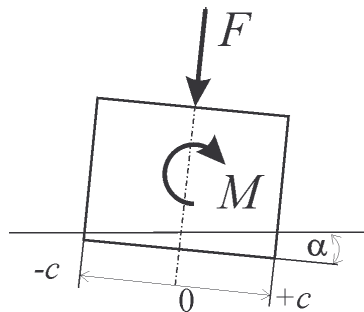
Plus récemment Goryacheva [Goryacheva, 2002] a développé une méthode analytique pour déterminer la répartition de la pression d'un punch élastique incliné ayant un fond plat et des coins arrondis en contact avec un demi-plan élastique, comme le montre la Figure 3-4d.

### 3.3 MISE EN PLACE D'UN MODELE DE CONTACT RADIAL ADAPTE AUX CANNELURES A FLANCS EN DEVELOPPANTE DE CERCLE

Deux études analytiques apparaissent être les plus appropriés pour modéliser le contact radial dans le cas des cannelures à flancs en développante de cercle. Ils vont être à présent confrontés dans le but d'en choisir un qui sera intégré dans notre modèle analytique.

#### 3.3.1 Modèle de Sackfield

Le modèle de Sackfield est le premier modèle a été retenu. Il est considéré dans la configuration où le contact est complet et où le frottement est négligé. Les paramètres géométriques du punch permettant de décrire la répartition de la pression sont visibles Figure 3-5.



**Figure 3-5 Punch de Sackfield avec son paramétrage**

L'équation de la répartition de la pression  $p(x)$  le long de la surface de contact est alors :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{(c^2 - x^2)}} \left( \frac{F}{\pi} + \frac{\alpha}{A_K} x \right)$$

Avec

$F$  : force extérieure appliquée au punch en N/m,

$$A_k = \frac{\chi + 1}{4\mu}, \text{ avec } \chi \text{ la constante de Kolosov et } \mu \text{ le module de rigidité en m}^2/\text{N},$$

$\alpha$  : angle d'inclinaison en rad,

$c$  : demi-longueur du contact en m,

$x$  : paramètre variable,  $x \in [-c ; c]$ .

L'équilibre statique de l'ensemble permet d'obtenir le couple  $M$  appliqué au punch. Il a pour expression :

$$M = \frac{c^2 \pi \alpha}{2 A_k} \quad (3-1)$$

Nous retrouvons dans cette équation de la pression la base de l'équation de Hanson qui est de la forme :

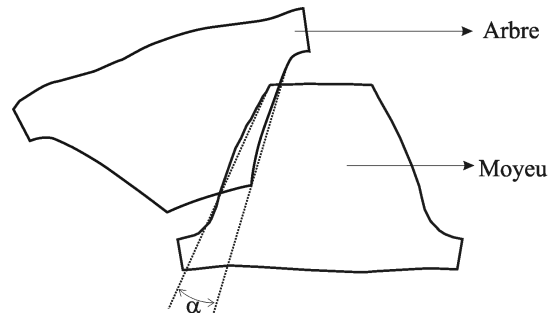
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{(c^2 - x^2)}} \left( \frac{F}{\pi} \right)$$

L'équation de la pression de Sackfield est complétée par une seconde partie qui permet de décrire la rotation du punch. L'angle d'inclinaison et le couple appliqué sont liés par une relation ne faisant intervenir que des paramètres constants de géométrie et de matériaux.

Ce modèle est présenté dans le cas où les surfaces de contact sont planes. Qu'en est-il dans le cas d'un contact entre deux dents d'une cannelure à flancs en développante de cercle ?

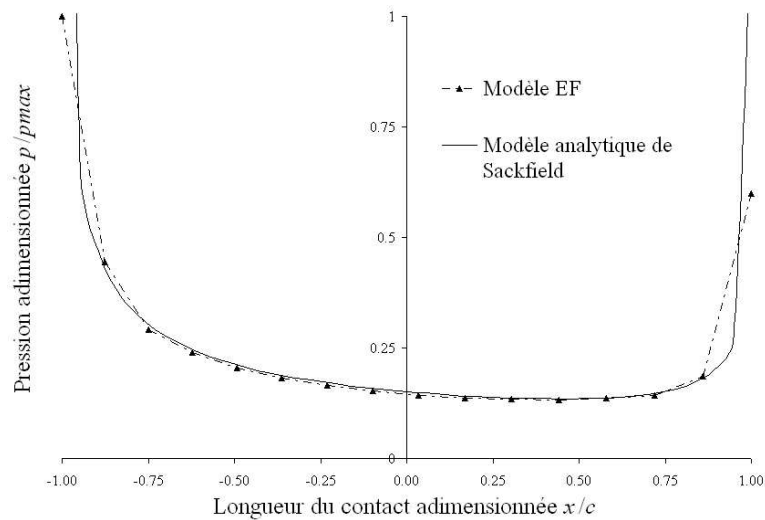
➤ Ce modèle est-il adapté au cas des cannelures ?

En se basant sur l'équation de la pression qui vient d'être présentée, l'analogie suivante peut être faite.  $c$  est la demi-longueur de contact suivant la hauteur du flanc des dents,  $A_k$  dépend du matériau de la cannelure,  $F$  et  $\alpha$  sont deux paramètres qui permettent de simuler le chargement à appliquer sur la dent.  $F$  est l'effort normal appliqué sur le flanc de la dent. Il correspond à la résultante de la pression de contact.  $\alpha$  est l'angle d'inclinaison d'une dent par rapport à l'autre. Il est directement lié au couple  $M$ .  $M$  est le couple appliqué sur le flanc de la dent, permettant de compléter la modélisation de l'action de l'autre dent.



**Figure 3-6 Visualisation de l'angle d'inclinaison  $\alpha$**

Pour savoir si le modèle est adapté au cas des cannelures nous avons choisi de vérifier dans un premier temps que ce type de modèle pouvait décrire correctement ce phénomène évalué par EF. Nous avons utilisé la méthode des moindres carrés pour trouver les paramètres ( $F$  et  $\alpha$ ) qui minimisent les écarts entre les résultats issus d'un modèle Eléments Finis et ceux issus de l'équation de Sackfield. Le résultat est visible à la Figure 3-7. Pour un problème de lisibilité du graphique, les pressions et longueurs ont été adimensionnées.  $p_{max}$  correspond à la valeur maximum obtenue par calcul éléments finis. Pour éviter d'obtenir une pression théorique tendant vers l'infini, les derniers points, considérés dans le modèle analytique, ont été calculés à 0.1% de la demi-longueur  $c$ .



**Figure 3-7 Test de la méthode de Sackfield**

La Figure 3-7 permet de révéler l'excellente corrélation qui est obtenue sur toute la hauteur de la dent. En effet hormis aux deux points extrêmes de part et d'autre du contact, le modèle analytique correspond exactement au modèle EF. La dissymétrie est bien retrouvée d'une part à travers le modèle EF mais aussi à travers le modèle analytique.

Le point négatif de cette modélisation se situe donc sur les extrémités. Effectivement le modèle analytique donne une pression infinie donc il n'est pas possible de connaître directement la pression. De plus en ces points, la pression EF n'est pas fiable. Effectivement comme nous l'avons signalé lors de l'étude bibliographique, plus le maillage est fin sur les extrémités, plus la pression sera importante en ces points. Il n'est donc pas possible de corréler les deux modèles aux extrémités.

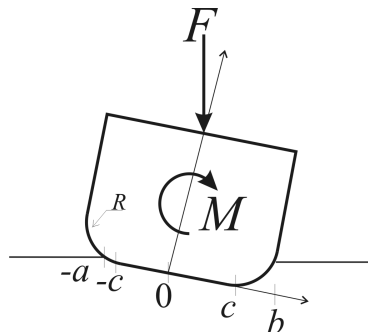
➤ Conclusion

Le modèle Sackfield est un modèle où  $p(x)$  tend vers l'infini aux extrémités. Cependant il permet une excellente corrélation sur le reste du contact, ce modèle est donc adapté au cas des cannelures à flancs en développante de cercle.

### 3.3.2 *Modèle de Goryacheva*

Comme il est impossible de connaître la pression sur les bords, une solution peut consister à choisir un modèle théorique avec des congés en haut des dents de l'arbre et du moyeu. Cette méthode permettrait de s'abstenir de l'analyse des pics de pressions qui apparaissent sur les résultats numériques ou sur le modèle de Sackfield. Dans la réalité, ces congés peuvent être soit ceux issus d'une opération d'ajustage soit ceux résultant de la plastification des extrémités du contact après le premier chargement. En effet, nous pouvons prévoir que si de fortes pressions existent aux bords du contact, alors un phénomène de plastification va apparaître et venir ainsi écraser les extrémités.

La Figure 3-8 est une représentation du punch utilisé par Goryacheva avec son paramétrage. Entre  $[-c ; c]$  le punch est un segment droit. Entre d'une part  $[-a ; -c]$  et d'autre part  $[c ; b]$ , le contact est situé sur les rayons de courbure du punch.



**Figure 3-8 Punch de Goryacheva avec les paramétrages**



L'équation de la répartition de la pression dans le cas du contact complet, lorsque  $b > c$  et  $a > c$  a pour expression

$$p(y) = \frac{E(a+b)}{2\pi R(1+y^2)} \left\{ \frac{(1-y^2)}{2} [\pi - 2 \arctan y_1 + 2 \arctan y_2] + \frac{(y-y_2)(1-yy_2)}{(1+y_2^2)} \ln \left| \frac{y_2-y}{yy_2-1} \right| - \frac{(y-y_1)(1-yy_1)}{(1+y_1^2)} \ln \left| \frac{y_1-y}{yy_1-1} \right| \right\}, y \leq 1$$

Avec

$$y = \tan\left(\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2x-b+a}{a+b}\right)\right),$$

$$y_1 = \tan\left(\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2c-b+a}{a+b}\right)\right),$$

$$y_2 = \tan\left(\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{-2c-b+a}{a+b}\right)\right).$$

$c$  : demi-longueur du contact,

$R$  : rayon des congés du punch,

$a$  : longueur entre le premier point en contact et le centre du punch,

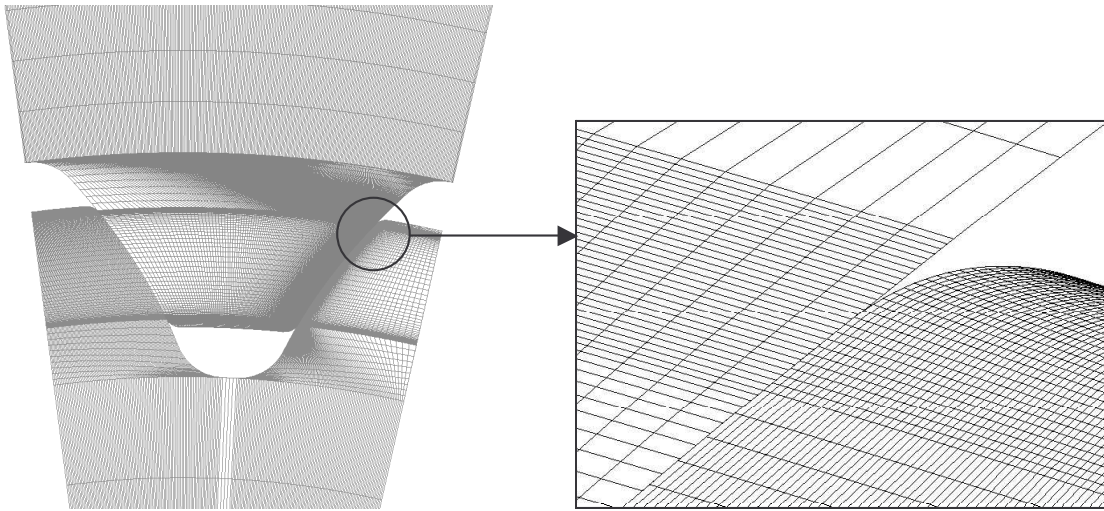
$b$  : longueur entre le dernier point en contact et le centre du punch,

$M$  et  $F$ , comme dans le punch de Sackfield représentent le couple extérieur et la force appliqués au punch.

➤ Ce modèle est-il adapté au cas des cannelures ?

Pour appliquer ce modèle aux cannelures, il est nécessaire de connaître les valeurs des dimensions  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $R$ . Or  $R$  n'est pas une valeur définie par la normalisation car elle est issue de la plastification. Ce paramètre influe directement sur la valeur de  $c$  qui dépend aussi de la géométrie de la cannelure. Donc finalement pour voir si le modèle de Goryacheva est adapté au cas des cannelures, il est nécessaire d'imposer arbitrairement ces valeurs. Ainsi  $R$  et  $c$  sont imposés lors de la modélisation sous EF et  $a$  et  $b$  sont issus des résultats EF car ce sont les derniers points en contact du modèle EF.

La Figure 3-9 représente la cannelure modélisée. Un maillage très fin sur les bords du contact permet de simuler au mieux les phénomènes en ces points.

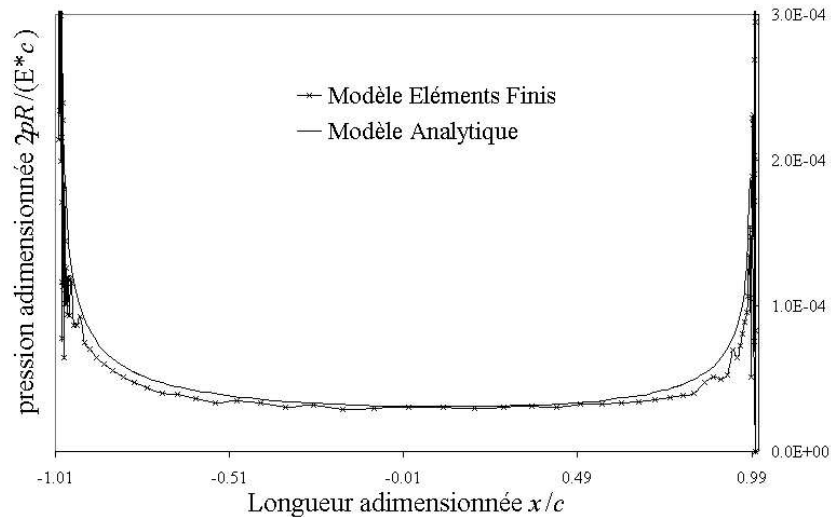


**Figure 3-9 Modèle EF d'une cannelure avec la modélisation de la plastification**

La Figure 3-10 représente la pression de contact adimensionnée en fonction de la longueur adimensionnée du contact.

L'oscillation de la pression obtenue par EF, visible sur les extrémités de la courbe, est due au nombre d'éléments très important dans ces zones.

La pression maximale est différente d'un modèle à l'autre. Le modèle EF de la Figure 3-10 présente un pic de 400MPa, l'écart entre les deux modèles en ce point est non négligeable, puisqu'il atteint 46%. Comme pour le cas d'arêtes vives, le modèle Eléments Finis présente des singularités aux points *a* et *b*, sur les bords du contact. D'un point de vue théorique cette solution ne tend pas vers l'infini étant donné que le pic de pression ne se situe pas en fin de contact. Pourtant lors de la modélisation Eléments Finis il apparaît comme impossible de mailler suffisamment fin pour piéger le phénomène et ne pas obtenir un pic de pression qui varie d'un modèle EF à l'autre.



**Figure 3-10 Comparaison de la pression issue du modèle analytique de Goryacheva et du modèle EF**

➤ Conclusion

Ce modèle se révèle complexe à mettre en place et à exploiter. En effet la présence d'arrondis impose une modélisation EF ayant un maillage au niveau du raccordement des rayons de courbure extrêmement fin, ce qui alourdi les temps de calcul et fait osciller la courbe de répartition de la pression. De plus imposer  $R$ ,  $a$  et  $b$  sans faire appel systématiquement aux EF fait intervenir des notions de plasticité difficiles à mettre en place sans l'aide d'expériences ou d'études EF longues. C'est pourquoi nous avons jugé que ce modèle n'est pas adapté au cas des cannelures.

### 3.3.3 Adaptation possible du modèle choisi

Ces deux études nous ont emmenés à travailler sur la base du modèle de Sackfield. Le principal problème que nous pose ce modèle, à savoir les pics de pression qui tendent vers l'infini, peut être limité dans la façon d'exploiter les résultats analytiques obtenus. Il est possible par exemple d'ajouter un critère de matage pour simuler de façon plus précise la réalité et ainsi éviter d'obtenir sur les bords une pression infinie.

## 3.4 DEFINITION DE LA PROCEDURE DE CALCUL POUR LA DETERMINATION ANALYTIQUE DU COMPORTEMENT RADIAL

Au cours de la création du modèle analytique, la connaissance du comportement de la dent s'avère nécessaire. Elle est atteinte à travers l'étude des divers phénomènes engendrant

les déformations des dents. Ainsi le comportement radial de la cannelure est décrit non seulement par l'intermédiaire de la répartition de la pression mais aussi de la rigidité des dents. En choisissant comme paramètre variable à définir l'angle d'inclinaison  $\alpha$ , un organigramme peut être élaboré pour visualiser les étapes nécessaires à l'obtention des résultats. Cet organigramme est visible en Figure 3-11. Les paragraphes suivants détaillent les différentes étapes décrivant la méthode de calcul du modèle développé.

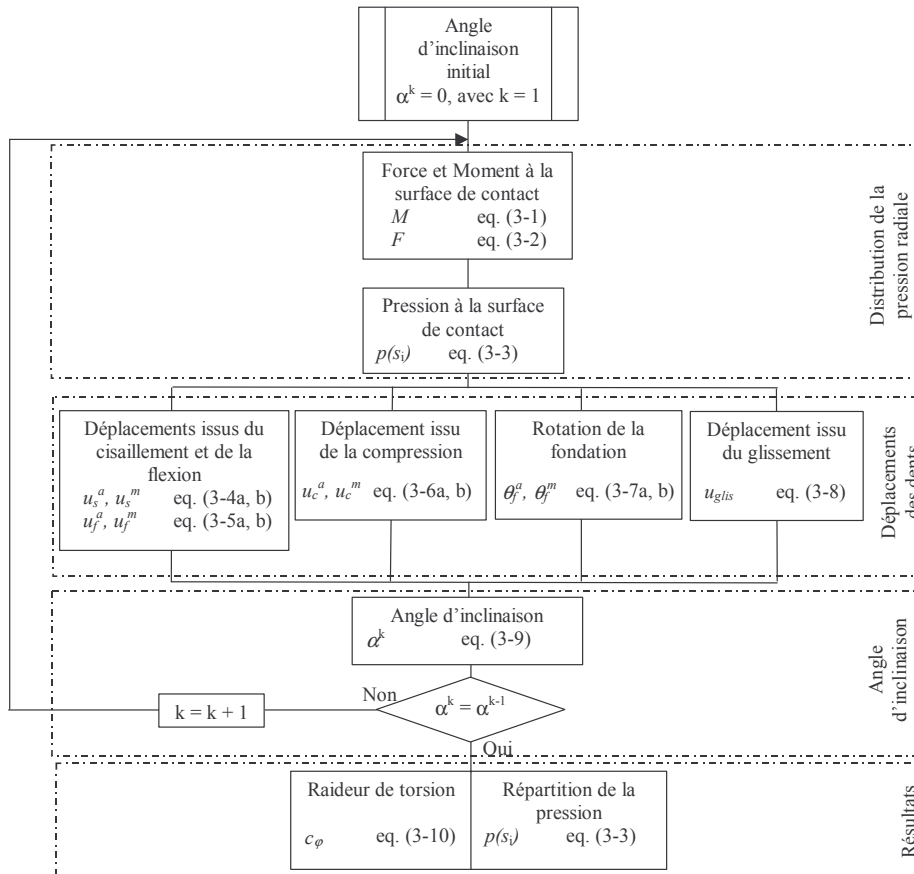


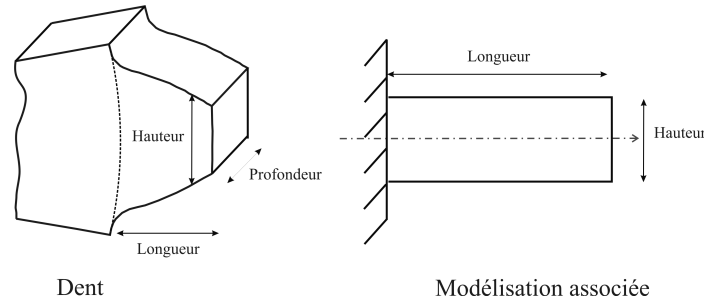
Figure 3-11 Procédure d'obtention du comportement radial

### 3.4.1 Détermination de la pression radiale

Lors de l'étude du modèle de Sackfield (paragraphe 3.3.1), il est apparu nécessaire de connaître  $F$  et  $\alpha$  afin d'obtenir la pression. Or  $\alpha$  est le résultat issu du chargement de la dent. Sans connaître la distribution de la pression radiale, il n'est a priori pas possible de connaître la valeur de l'angle. Afin de résoudre le problème, dans un premier temps, supposons le connu.

Considérons une dent de l'arbre (le même raisonnement pourra être développé pour une dent du moyeu). Cette dent est soumise à un couple extérieur  $C_o$ .

Remarques : pour faciliter la compréhension nous ferons une analogie entre la dent et une poutre classique. Les notions de longueur, de hauteur et de profondeur présentées en Figure 3-12, seront utilisées dans cette partie.



**Figure 3-12 Illustration du vocabulaire employé**

Les actions dues à la pression radiale peuvent être synthétisées par un couple  $M$  et un effort  $F$ , au point  $P_1$  situé sur le diamètre primitif comme le montre la Figure 3-13. L'expression du moment  $M$  est issue de l'équation (3-1). L'équilibre des moments appliqué à l'arbre au centre de sa section permet d'obtenir l'effort  $F$  :

$$F = (C_0 + M) \frac{1}{R_b} \quad (3-2)$$

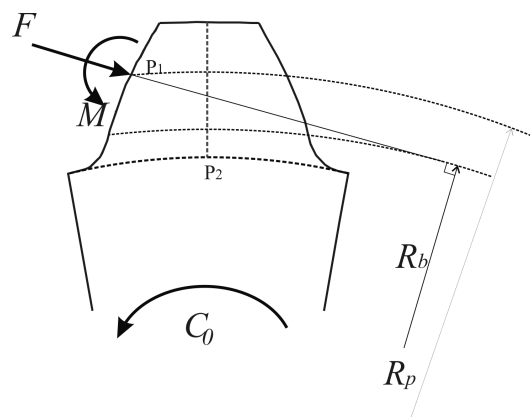
Avec

$R_b$  : rayon de base de l'arbre,

$M$  : moment équivalent par unité de profondeur en N,

$F$  : force résultante par unité de profondeur en N/m,

$C_0$  : couple par unité de profondeur appliqué sur une dent en N.



**Figure 3-13 Chargement sur l'arbre**

L'équation de la pression du modèle de Sackfield ne peut être appliquée directement puisque la surface du punch est considérée comme plane alors que celle d'une dent est courbée. Ainsi nous avons choisi de remplacer la variable linéaire  $x$  par la variable curviligne  $s$ . De plus la section des dents est variable, ce qui impose de diviser la dent, suivant sa hauteur, en  $n$  segments comme le montre la Figure 3-14.  $p(x)$  devient alors  $p(s_j)$  calculé pour chaque  $s_j$ , où  $j$  varie de 0 à  $n$ .

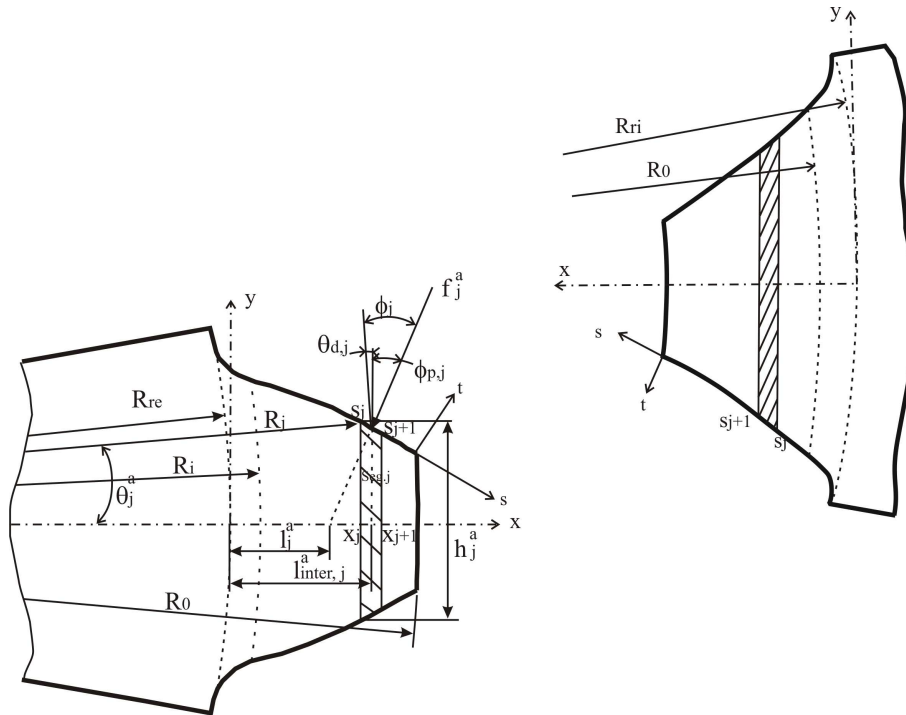


Figure 3-14 Géométries des sections des dents de l'arbre et du moyeu

Il est possible d'écrire l'équation de la pression sous la forme :

$$p(s_j) = \frac{1}{\sqrt{(a^2 - s_j^2)}} \left( \frac{F}{\pi} + \frac{\alpha}{A_K} s_j \right) \quad (3-3)$$

Avec

$a$  : demi longueur du contact le long de l'axe curviligne en mètre,

$s_j$  : coordonnée curviligne en mètre,

$$s_j = \sum_{k=1}^{j-1} l_{s_k} - a .$$

$l_{s_k}$  : distance curviligne entre le rayon de commencement du contact et le nœud  $k$ .

Pendant le calcul, pour un  $n$  suffisamment grand, l'approximation que la courbe de contact de la dent peut être coupée en segment droit entre deux nœuds consécutifs, peut être faite. la distance curviligne  $l_{S_k}$  a pour expression :

$$l_{S_k} = \sqrt{\left(\frac{h_k^a - h_{k+1}^a}{2}\right)^2 + \left(\frac{L_x}{n}\right)^2}$$

Avec

$L_x$  : longueur totale du contact dans la direction  $x$ ,  $L_x = R_0 - R_i$ .  $R_0$  est le rayon de tête de l'arbre et  $R_i$  le rayon de tête du moyeu. Ils ont pour expression :

$$R_0 = R_i + \frac{D_p}{\pi} \text{ et } R_i = \frac{D_p (Z-1)}{2\pi} \text{ avec } D_p \text{ le diamètre primitif de la cannelure.}$$

$h_k^a$  : hauteur de la dent de l'arbre au nœud  $k$ . Pour  $k = 0$ , en pied de dent,  $h_0^a = 2\pi \frac{R_{re}}{Z}$ ,

et pour  $k = 1$  à  $k = n$ ,  $h_k^a = 2 R_k \sin(\theta_{d,k})$ ,

Avec

$R_{re}$  : rayon fondation de l'arbre.  $R_{re} = (Z+1)m$ ,

$R_k$  : rayon au nœud  $k$ .  $R_k = R_i + \left(\frac{k}{n}\right) \frac{D_p}{\pi}$ ,

$\theta_{d,k}$  : angle de contact incluant l'angle de pression de la dent [Cornell, 1981].

$$\theta_{d,k} = \frac{t_b}{2 R_b} - \tan(\phi_k) - \phi_k,$$

Où

$R_b$  : rayon de base de la cannelure.  $R_b = D_p \cos \phi$ , avec  $\phi$  l'angle de pression de la dent,

$\phi_k$  : angle de pression de contact au nœud  $k$ .  $\phi_k = \arcsin\left(\frac{R_b}{R_k}\right)$ ,

$t_b$  : épaisseur curviligne de la dent sur le rayon de base,

$$t_b = R_b \left( \frac{\pi}{Z} + 2 \tan \phi - \phi \right).$$

### 3.4.2 Détermination des déplacements des dents

A travers l'étude de la bibliographie sur les cannelures, nous pouvons trouver des auteurs comme Blanc [Blanc, 1999] ou Marmol [Marmol, 1980] qui ont cherché à décrire les

déformations subies par les dents d'une cannelure en étudiant les phénomènes qui en sont l'origine. Les quatre phénomènes mis alors en évidence sont la flexion et le cisaillement des dents, la compression locale au contact et la rotation des supports des dents. Cependant, ces études étant incomplètes, aucune méthode permettant de connaître avec précision le comportement des dents n'a été mise en place.

Comme la géométrie d'un arbre cannelé est proche de celle d'un pignon, la bibliographie a été élargie à celle des engrenages afin d'analyser les phénomènes qui sont pris en compte dans l'étude des déformations des dents d'engrenage.

Terauchi [Terauchi, 1981] et Oda [Oda, 1986a, Oda, 1986b] ont défini une "mapping function", basée sur la théorie de l'élasticité en 2D définissant la rigidité d'une dent. Cette fonction permet d'obtenir une équation discrétisant le profil de la dent après déformation. C'est une équation issue du travail de Timoshenko qui fait intervenir 14 variables dont le procédé d'obtention n'est pas décrit dans cette publication. De plus ces études ne prennent pas en compte la rotation de la base de la dent.

Des chercheurs comme Huang *et al.* [Huang, 2000], qui proposent une approche analytique pour déterminer les paramètres dynamiques d'un engrenage droit, ou Sainsot [Sainsot, 2004], qui modélise les déformations des dents d'un engrenage, ont basé leurs études sur le travail de Cornell [Cornell, 1981]. Celui-ci a développé une méthode analytique permettant d'obtenir la rigidité des dents. Dans ce modèle, les déformations des dents des pignons droits sont dues à la flexion, au cisaillement, à la compression et à la rotation de la fondation. L'analyse de ce dernier paramètre est fondée sur les travaux de O'Donnell et Matusz [Matusz, 1969, O'Donnell, 1960, O'Donnell, 1974].

Des méthodes expérimentales [Munro, 2001] ou des investigations par éléments finis [Wang, 2004] cherchent à obtenir les déformations des dents. Cependant les résultats proposés qui peuvent permettre de valider des modèles pour des engrenages, ne peuvent pas être exploités pour une vérification d'une méthode développée pour des cannelures. En effet la nature du contact (ponctuel pour un engrenage et large pour une cannelure) et la géométrie du moyeu sont trop éloignées d'un engrenage. Les valeurs des déformations sont alors forcément différentes.

Plusieurs analyses numériques effectuées dans le cadre de cette thèse nous ont fait découvrir que le phénomène de glissement sur la surface de contact a des conséquences significatives dans le cas des cannelures. En effet, le flanc étant incliné, la pression exerce des forces radiales importante qui imposent une compression du corps de l'arbre et une expansion du corps du moyeu. Ceci produit des déplacements orthoradiaux, qui peuvent avoir une



influence importante. Afin d'obtenir une bonne évaluation de la rigidité des dents, il nous est apparu que le glissement devait être pris en considération dans le calcul de la rigidité de la liaison.

Finalement en prenant en compte ces différents travaux, le comportement des dents peut être considéré comme la superposition de cinq phénomènes :

- 1) la flexion des dents,
- 2) le cisaillement des dents,
- 3) la compression des dents à la surface de contact,
- 4) la rotation de la fondation des dents,
- 5) le glissement.

Ces différents phénomènes vont être maintenant décrits et modélisés séparément.

➤ Flexion et cisaillement des dents

Selon un certain nombre d'articles, l'effort de cisaillement et le moment de flexion semblent être les principales causes de la déformation des dents. Ces phénomènes peuvent être modélisés assez facilement en utilisant la résistance des matériaux, les dents étant alors considérées comme des poutres en porte-à-faux.

Nous avons choisi de diviser les dents de l'arbre et du moyeu en deux parties : la base de la dent et la dent elle-même. La première, pour l'arbre, se situe entre le rayon de fondation de l'arbre  $R_{re}$  et le rayon de début du contact  $R_i$  (voir la Figure 3-14). Pour le moyeu la base se situe entre le rayon de fondation du moyeu  $R_{ri}$  et le rayon de début du contact  $R_0$ . Sur ces parties, aucun chargement n'est appliqué. La seconde partie correspond à la zone où les dents sont en contact entre elles. Elle se situe entre  $R_i$  et  $R_0$ . A l'image de l'équation permettant d'obtenir la distribution de la pression, les équations permettant de calculer la flexion et le cisaillement nécessitent un découpage des dents en plusieurs segments. La flèche due à la flexion ou au cisaillement de l'arbre ou du moyeu est la somme des flèches de chaque segment de la dent.

Au nœud j, la flèche due au cisaillement a pour expression :

$$\text{Pour l'arbre : } u_{s,j}^a = \frac{k_c^a}{G^a} \sum_{k=0}^j \frac{V_k^a}{S_k^a} x_k \quad (3-4a)$$

$$\text{Pour le moyeu : } u_{s,j}^m = \frac{k_c^m}{G^m} \sum_{k=0}^j \frac{V_k^m}{S_k^m} x_k \quad (3-4b)$$

Avec

$G^a, G^m$  : modules de cisaillement de l'arbre et du moyeu en Pa,

$x_k$  : distance entre le nœud k et le précédent k - 1 dans la direction x,

$k_s^a, k_s^m$  : coefficients de correction de l'arbre et du moyeu, appelé « section modulus » selon Timochenko [Timoshenko, 2003].

$V_k^a$  et  $V_k^m$  : effort tranchant dans la section k de l'arbre et du moyeu par unité de profondeur. Ces efforts sont l'intégrale de la pression le long de la surface de contact entre l'encastrement (ou pied de la dent) et le nœud k, en N/m,

$$V_k^a = \sum_{q=0}^k \left( \frac{F}{\pi} \operatorname{asin} \left( \frac{S_q}{a} \right) - \frac{\alpha}{A_K} \sqrt{a^2 - S_q^2} \right) \text{ et } V_{n-k}^m = V_k^a,$$

$S_k^a$  et  $S_k^m$  : surfaces de l'arbre et du moyeu où  $V_k^a$  et  $V_k^m$  sont appliqués en m<sup>2</sup>,

$$S_k^a = \frac{2}{\frac{1}{h_k^a} + \frac{1}{h_{k+1}^a}} = 2 \frac{h_k^a h_{k+1}^a}{h_k^a + h_{k+1}^a} \text{ et } S_k^m = \frac{2}{\frac{1}{h_k^m} + \frac{1}{h_{k+1}^m}} = 2 \frac{h_k^m h_{k+1}^m}{h_k^m + h_{k+1}^m},$$

Avec  $h_k^a$  : hauteur des dents de l'arbre, déjà défini lors de la description de la répartition de la pression. Pour le moyeu, la hauteur est pour  $k = 0$ , en pied de dent,

$$h_0^m = 2 \pi \frac{R_{ri}}{Z}, \text{ et pour } k = 1 \text{ à } n, h_{n-k}^m = 2R_k \sin\left(\frac{\pi}{Z} - \theta_{d,k}\right).$$

La flèche issue de la flexion de l'arbre ou du moyeu au nœud j est calculée à partir de la dérivée seconde du moment :

$$\text{Pour l'arbre : } (u_{b,j}^a)'' = \sum_{k=0}^j \frac{M_{b,k}^a}{E^a I_k^a} \quad (3-5a)$$

$$\text{Pour le moyeu : } (u_{b,j}^m)'' = \sum_{k=0}^j \frac{M_{b,k}^m}{E^m I_k^m} \quad (3-5b)$$

Avec

$E^a, E^m$  : modules d'Young de l'arbre et du moyeu, en Pa,

$I_k^a, I_k^m$  : moments polaires des sections de l'arbre et du moyeu, en m<sup>4</sup>,

$$I_o^a = \frac{(h_o^a h_{o+1}^a)^3}{6(h_o^{a^3} + h_{o+1}^{a^3})} \text{ et } I_o^m = \frac{(h_o^m h_{o+1}^m)^3}{6(h_o^{m^3} + h_{o+1}^{m^3})},$$

$M_{b,k}^a, M_{b,k}^m$  : moments de flexion de l'arbre et du moyeu au nœud k par unité de profondeur, en N. Leur expression est :

$$M_{b,k}^a = \sum_{o=0}^k \sum_{q=0}^k \left( \frac{f_q^a}{E^a I_o^a} \left( (l_{inter,q}^a - l_o^a) \cos(\theta_q^a) - \frac{h_{inter,q}^a}{2} \sin(\theta_q^a) \right) \right) \text{ et}$$

$$M_{b,k}^m = \sum_{o=0}^k \sum_{q=0}^k \left( \frac{f_q^m}{E^m I_o^m} \left( (l_{inter,q}^m - l_o^m) \cos(\theta_q^m) - \frac{h_{inter,q}^m}{2} \sin(\theta_q^m) \right) \right),$$

Avec

$f_q^a, f_q^m$  : force appliquée sur le segment q de l'arbre et du moyeu.

$$f_q^a = f_q^m = \frac{F}{\pi} \left[ \text{asin} \left( \frac{s_{q+1}}{a} \right) - \text{asin} \left( \frac{s_q}{a} \right) \right] - \frac{\alpha}{A_K} \left[ \sqrt{a^2 - s_{q+1}^2} - \sqrt{a^2 - s_q^2} \right]$$

$l_o^a, l_o^m$  distance entre le rayon de fondation, extrémité de la dent fixée, et le point où le moment est appliqué dans la direction x,

$$l_o^a = \frac{o-1}{n-1} (R_o - R_i) + R_i - R_{re} \text{ et } l_o^m = \frac{o-1}{n-1} (R_o - R_i) + R_{ri} - R_o$$

$l_{inter,q}^a, l_{inter,q}^m$  : distance entre la fondation et le point où respectivement les forces  $f_q^a$  et  $f_q^m$  sont appliquées dans la direction x,

$$l_{inter,q}^a = \frac{l_q^a + l_{q+1}^a}{2} \text{ et } l_{inter,q}^m = \frac{l_q^m + l_{q+1}^m}{2}$$

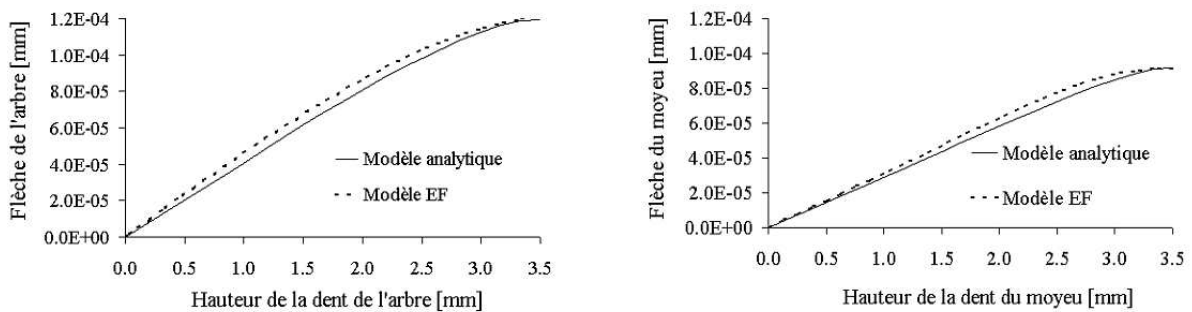
$h_{inter,q}^a, h_{inter,q}^m$  : hauteurs de la dent de l'arbre et du moyeu où les forces  $f_q^a$  et  $f_q^m$  sont appliquées dans la direction y

$$h_{inter,q}^a = \frac{h_q^a + h_{q+1}^a}{2} \text{ et } h_{inter,q}^m = \frac{h_q^m + h_{q+1}^m}{2}.$$

Le rôle des coefficients « section modulus » est d'ajuster le modèle dans le but d'obtenir des résultats proches des valeurs mesurées. Ne pouvant pas réaliser d'expériences, nous avons défini comme références les résultats obtenus par EF 2D. L'emploi d'un tel coefficient est usuel pour le cisaillement des poutres ayant des particularités de chargement ou géométriques (comme la hauteur grande face à la longueur). Nous proposons donc de

déterminer une valeur de ce coefficient appropriée aux cannelures à flancs en développante de cercle permettant de répondre au mieux à leur forme particulière.

Cependant l'analyse des résultats EF 2D ne permet pas de séparer l'effet du cisaillement de celui de la flexion. C'est pourquoi ils sont considérés simultanément lors de la comparaison. Les valeurs des coefficients sont obtenues en minimisant l'écart entre les résultats EF et ceux de notre modèle. Le modèle EF utilisé dans cette étude a été présenté au début de ce chapitre, au paragraphe 3.1. Pour obtenir  $k_s^a$ , le couple est introduit sur le diamètre extérieur du moyeu, les déplacements sur le diamètre de fondation des dents de l'arbre étant bloqués. Comme la dent est assimilée à une poutre, la flèche est lue sur la ligne neutre c'est à dire sur l'axe de symétrie. Cette confrontation, qui a été réalisée pour de nombreuses cannelures et différents couples, a toujours donné les mêmes valeurs des coefficients :  $k_s^a = 0.94$  et  $k_s^m = 0.8$ .



**Figure 3-15 Flèches suivant la hauteur de la dent de l'arbre et du moyeu**

La Figure 3-15 représente les résultats obtenus pour une cannelure  $18 \times 1.25$  ayant pour diamètre extérieur du moyeu 35mm et où un couple de 7.2Nm est appliqué.

Il est aussi intéressant de voir la contribution sur la flèche des deux parties « flexion-cisaillement ». Cette contribution, présentée à la Figure 3-16, est déterminée à partir du modèle analytique. L'influence du cisaillement apparaît flagrante face à la flexion. Cependant, la flexion atteignant les 20%, il n'est pas possible de la négliger.

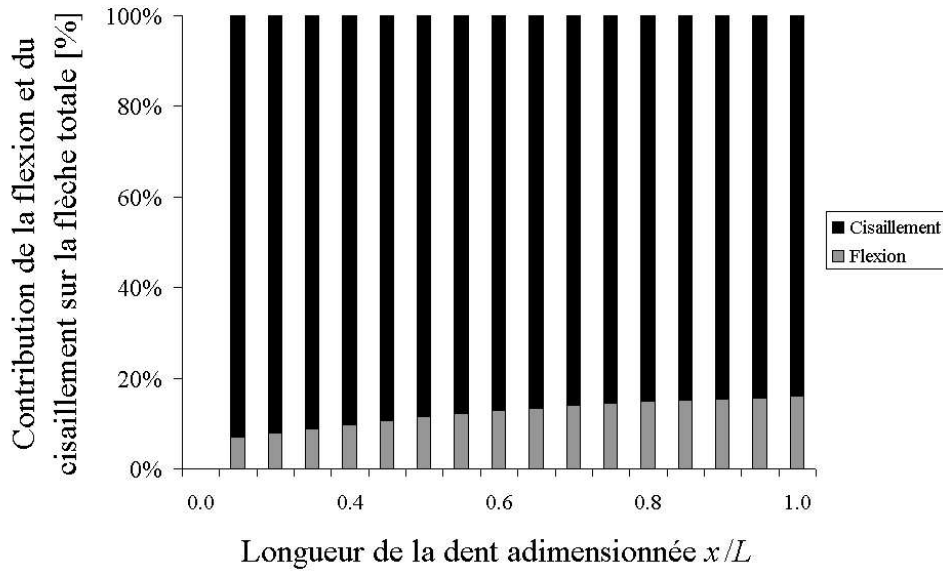


Figure 3-16 Contribution de la flexion et du cisaillement

➤ Compression des dents

Le phénomène de compression au niveau du contact des dents est régi par une équation inspirée du modèle de Marmol, présenté lors de l'étude bibliographique, au paragraphe 1.1.3.2. La compression est considérée sur le rayon primitif où la somme de toutes les flèches dues aux différents phénomènes sera effectuée. L'expression de la compression que nous avons retenue est sur le rayon primitif ( $j = n/2$ ) :

$$\text{Pour l'arbre } u_c^a = k_c^a \frac{f_{n/2}^a h_{n/2}^a}{d E^a \cos(\theta_{n/2}^a)} \quad (3-6a)$$

$$\text{Pour le moyeu } u_c^m = k_c^m \frac{f_{n/2}^m h_{n/2}^m}{d E^m \cos(\theta_{n/2}^m)} \quad (3-6b)$$

Avec

$f_{n/2}^a, f_{n/2}^m$  : forces de contact appliquées localement sur l'arbre et sur le moyeu,

$k_c^a, k_c^m$  : coefficients correcteurs de l'arbre et du moyeu,

$d$  : longueur curviligne, où  $f_{n/2}^a$  et  $f_{n/2}^m$  sont appliquées,  $d = \frac{S_{n/2+1} - S_{n/2-1}}{2}$ .

Dans ce chapitre, cinq cas de cannelures différents sont traités, dont les propriétés géométriques sont exposées au Tableau 3-1. Le module d'Young est identique dans tous les cas et vaut 206.8GPa. Le module de cisaillement a pour valeur 80155MPa.

Propriétés des cannelures étudiées					
Référence de la cannelure	A	B	C	D	E
Module [mm]	1.25	1.667	2.5	2.5	5
Nombre de dents	18	27	18	25	18
$D_{ext}$ [mm]	35	60	70	90	120
$D_{int}$ [mm]	4	10	10	16	8

**Tableau 3-1 Présentation des différentes cannelures étudiées dans ce chapitre**

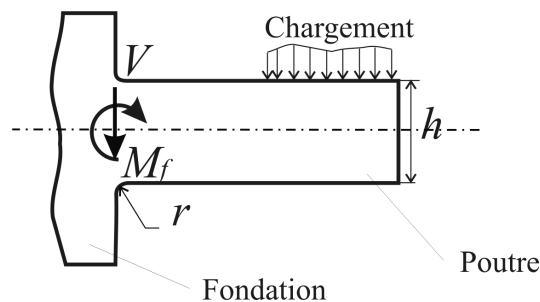
Pour trouver les coefficients, nous avons minimisé les écarts entre les résultats analytiques et EF 2D. Ce résultat est visible au Tableau 3-2. Dans le cas de l'arbre et du moyeu, les coefficients sont proches les uns des autres, mis à part  $k_c^m$  de la cannelure E. Cette variation peut s'expliquer par l'épaisseur curviligne des dents. En effet plus la dent d'une cannelure est massive, plus la zone affectée par la compression est faible devant l'épaisseur de la dent. Pour la cannelure E, l'épaisseur curviligne sur le diamètre primitif vaut 8mm tandis que les autres sont de l'ordre de 2 à 2.5mm.

Référence de la cannelure	A	B	C	D	E
$k_c^a$	9.5	8.5	8.5	8.3	7.5
$k_c^m$	7	6.5	6.5	6.6	4.1

**Tableau 3-2 Obtention des coefficients de compression**

Dans un premier temps, nous choisissons de prendre une valeur moyenne des coefficients de compression pour toutes les cannelures.  $k_c^a$  est pris égal à 8.5 et  $k_c^m$  égal à 6. Nous discutons à la fin de ce chapitre de la pertinence de ce choix.

➤ Rotation de la fondation des dents



**Figure 3-17 Rotation de la fondation d'une poutre**

Si une poutre est usinée dans la masse, comme le montre la Figure 3-17, alors sous charge il existe une déformation élastique dans la fondation qui engendre une rotation de la poutre autour de sa base. Il est possible de faire l'analogie entre une dent d'une cannelure et une telle poutre. Le corps de l'arbre ou du moyeu correspondrait à la poutre elle-même et la base des dents à la fondation de la poutre. Cette rotation crée une déformation qui s'additionne aux effets causés par la flexion et le cisaillement dans la poutre elle-même.

Ce phénomène a été étudié par plusieurs chercheurs qui ont supposé différentes distributions des contraintes. La plus réaliste est l'étude de O'Donnell [O'Donnell, 1960, O'Donnell, 1974]. O'Donnell a non seulement proposé une solution analytique mais aussi a réalisé des expériences permettant d'obtenir l'équation décrivant la rotation de la fondation en fonction du moment et de l'effort tranchant au niveau du support (voir Figure 3-17). Cette solution n'est correcte que sur la ligne neutre de la poutre, elle a pour expression :

$$\theta = \frac{16.67(1-\nu^2)M_f}{\pi E h'^2} + \frac{(1-\nu-\nu^2)V}{E h'}$$

Avec

$\theta$  : rotation de la poutre due à l'élasticité du support,

$h'$  : hauteur effective,  $h' = h + 1.5r$ ,

$V$  : effort tranchant par unité de profondeur,

$M_f$  : moment au niveau de la fondation par unité de profondeur,

$h$  : hauteur de la poutre,

$r$  : rayon de raccordement entre le support et la poutre.

Il est possible d'appliquer cette théorie au cas des cannelures. La rotation de la fondation devient  $\theta_{rf}^a$  pour l'arbre et  $\theta_{rf}^m$  pour le moyeu. Leur expression est :

$$\text{Pour l'arbre } \theta_{rf}^a = \frac{k_o^a(1-\nu^2)M_f^a}{\pi E h_0^{a^2}} + \frac{(1-\nu-\nu^2)V_0^a}{E^a h_0^a} \quad (3-7a)$$

$$\text{Pour le moyeu } \theta_{rf}^m = \frac{k_o^m(1-\nu^2)M_f^m}{\pi E h_0^{m^2}} + \frac{(1-\nu-\nu^2)V_0^m}{E^m h_0^m} \quad (3-7b)$$

Avec

$V_0^a, V_0^m$  : efforts tranchants au niveau de la fondation de l'arbre et du moyeu. Ils ont déjà été calculés lors de l'étude de la flexion des dents,

$$V_0^a = \frac{F}{\pi} \operatorname{asin}\left(\frac{s_0}{a}\right) - \frac{\alpha}{A_K} \sqrt{a^2 - s_0^2} \quad \text{et} \quad V_0^m = V_n^a,$$

$k_o^a, k_o^m$  : coefficients d'influence pour l'arbre et pour le moyeu.

$M_f^a, M_f^m$  : moments au niveau de la fondation de l'arbre et du moyeu. Ces moments sont obtenus par l'application de l'équilibre des moments, appliqué à l'arbre ou au moyeu au point de croisement de l'axe de symétrie de la dent et du diamètre de fondation. Sur la Figure 3-13, ce point est nommé P<sub>2</sub>.

$$M_f^a = F \left( -\frac{h_p}{2} \sin\phi_{p,n/2} + l_p^a \cos\phi_{p,n/2} \right) - M \quad \text{et} \quad M_f^m = F \left( \frac{h_p}{2} \sin\phi_{p,n/2} - l_p^m \cos\phi_{p,n/2} \right) + M,$$

Avec

$h_p$  : hauteur de la dent sur le rayon primitif. La valeur de cette hauteur est identique pour l'arbre et le moyeu,

$\phi_{p,n/2}$  : angle de la force de contact au rayon primitif avec la pression  $p(s_{n/2})$ ,

$l_p^a, l_p^m$  : distance entre le rayon de fondation et le rayon primitif dans le cas de

l'arbre et du moyeu, avec  $l_p^a = \frac{D_p}{2} - R_{re}$ , et  $l_p^m = R_{ri} - \frac{D_p}{2}$ .

Une étude EF 2D a été développée pour évaluer les coefficients  $k_o^a, k_o^m$ . Le Tableau 3-3 suivant présente les résultats obtenus pour les différentes cannelures étudiées. Il apparaît une variation des coefficients en fonction des cannelures étudiées. Nous verrons lors du paragraphe sur l'analyse des résultats que la rotation sur la fondation des dents n'a qu'une faible influence, rendant ces coefficients secondaires. C'est pourquoi nous n'avons pas cherché à mieux modéliser ce phénomène. Pour la suite du travail, les valeurs moyennes de ces coefficients ont été prises. Ainsi  $k_o^a$  vaut 5 et  $k_o^m$  8.6.

Référence de la cannelure	A	B	C	D	E
$k_o^a$	5.8	3.5	6	4.8	4.4
$k_o^m$	8.2	9	8.3	8.8	9.9

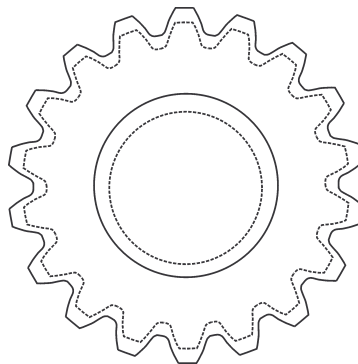
**Tableau 3-3 Coefficients d'influence de rotation de fondation**



➤ Le glissement

Jusqu'à présent aucune publication n'a pris en considération le glissement dans la détermination de la rigidité des dents des cannelures.

Le glissement peut être calculé en faisant une analogie avec le phénomène de la compression / expansion radiale d'un arbre creux. En effet, la composante radiale de la pression de dents de contact crée une compression du corps de l'arbre et une expansion de corps du moyeu. Sur la Figure 3-18, l'arbre creux est représenté comprimé sous charge (en pointillé). Ces nouveaux déplacements radiaux mènent à un déplacement orthoradial le long de la surface de contact des dents.



**Figure 3-18 Compression de l'arbre cannelé**

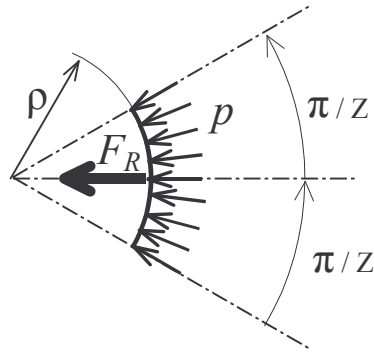
Pour résoudre ce problème, l'arbre et le moyeu sont considérés comme des arbres creux. Pour l'arbre, le rayon maximum est le rayon de base  $R_{re}$ . Pour le moyeu, le rayon minimum est le rayon de base  $R_{ri}$ . La composante radiale de l'effort de contact est répartie uniformément sur le diamètre extérieur pour l'arbre et le diamètre intérieur pour le moyeu.

La pression équivalente est obtenue en utilisant la relation entre la pression  $p$  agissant sur un secteur circulaire et l'effort résultant  $F_R$ , représentés Figure 3-19. L'équation de cette pression a pour expression :

$$F_R = \int_{\theta=-\frac{\pi}{Z}}^{\theta=\frac{\pi}{Z}} p \cos(\theta) \rho d\theta = 2 \rho \sin\left(\frac{\pi}{Z}\right) p$$

Où  $\rho$  est le rayon du secteur circulaire.

Dans notre cas, la force radiale est égale à  $F \sin(\phi_{p,j})$ . Elle est donnée par unité de profondeur.



**Figure 3-19 Schéma des pressions créant le phénomène d'expansion / compression**

Finalement la pression radiale équivalente dans le cas de l'arbre a pour expression :

$$p_r^a = \frac{F \sin(\phi_{p,n/2})}{2 R_{re} \sin\left(\frac{\pi}{Z}\right)}$$

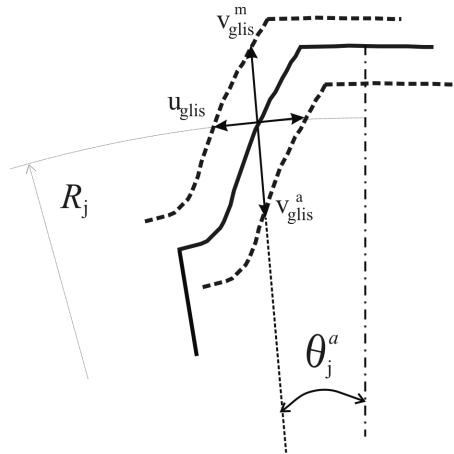
Dans le cas du moyeu la pression équivalente vaut :

$$p_r^m = \frac{F \sin(\phi_{p,n/2})}{2 R_{ri} \sin\left(\frac{\pi}{Z}\right)}$$

De la pression, il est possible de déduire les déplacements radiaux créés par le glissement dans l'arbre et le moyeu en faisant appel aux équations de Lamé.

$$v_{glis}^a = \frac{p_r^a R_{re}}{E^a (R_{re}^2 - R_{int}^2)} \left( (1-\nu) R_{re}^2 + (1+\nu) R_{int}^2 \right) \text{ et } v_{glis}^m = \frac{p_r^m R_{ri}}{E^m (R_{ext}^2 - R_{ri}^2)} \left( (1-\nu) R_{ri}^2 + (1+\nu) R_{ext}^2 \right)$$

Avec  $R_{ext}$  le rayon extérieur du moyeu et  $R_{int}$  le rayon du perçage de l'arbre.



**Figure 3-20 Illustration du déplacement orthoradial**

Le déplacement orthoradial, visible Figure 3-20, exprimé sur le diamètre primitif a pour expression :

$$u_{glis} = (v_{glis}^a + v_{glis}^m) \tan(\theta_{n/2}^a),$$

ce qui donne finalement :

$$u_{glis} = k_{glis} (v_{glis}^a + v_{glis}^m) \tan(\theta_{n/2}^a) \tag{3-8}$$

Avec

$\theta_{n/2}^a$  : angle entre l'axe  $x$  et la droite passant par le centre de la cannelure et l'intersection entre le diamètre primitif et le flanc en contact,

$k_{glis}$  : coefficient permettant de caler le déplacement issu du glissement en fonction des résultats obtenus à l'aide des modèles EF 2D. Le Tableau 3-4 permet de visualiser pour différentes cannelures l'évolution de ce coefficient.

Dans un premier temps, nous choisissons de prendre une valeur moyenne du coefficient de glissement pour toutes ces cannelures.  $k_{glis}$  est pris égal à 1.14. Nous discuterons à la fin de ce chapitre sur la pertinence de ce choix.

Caractéristiques des cannelures étudiées					
Référence de la cannelure	A	B	C	D	E
$k_{glis}$	1	1.3	1.1	1.35	0.95

**Tableau 3-4 Coefficients de calage du glissement**

### 3.4.3 Définition de l'angle d'inclinaison

L'angle d'inclinaison est l'angle entre la surface de contact du moyeu et celle de l'arbre. Pour faciliter la compréhension, les déformations globales des dents de l'arbre et du moyeu sont séparées.

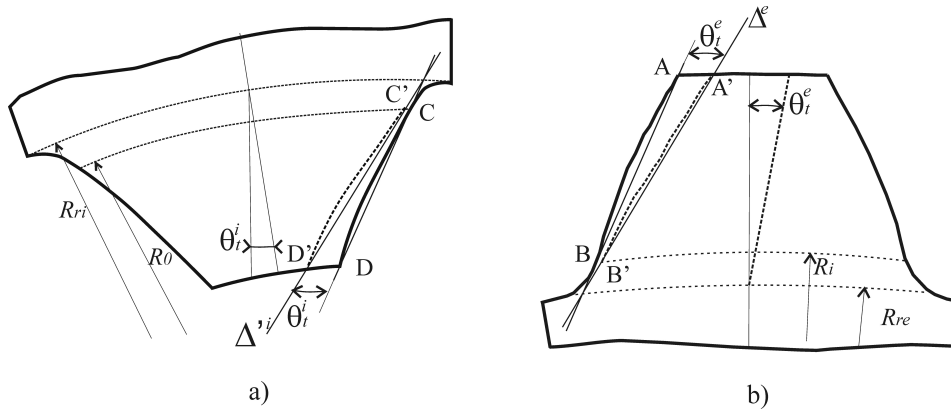


Figure 3-21 Déformations globales des dents du moyeu et de l'arbre

La méthode retenue pour obtenir les rotations des dents est de considérer que la rotation de la ligne de contact est la même que celle de la ligne neutre. La Figure 3-21a représente la dent du moyeu avant et après déformation. Après déformation la ligne formée par les points aux extrémités du contact C et D devient  $\Delta^m$  passant par les points C' et D'. L'angle entre (CD) et  $\Delta^i$  est noté  $\theta_i^m$ . Le même raisonnement peut être appliqué au cas de l'arbre, visible à la Figure 3-21b. La ligne avant déformation (AB) devient après déformation  $\Delta^a$ , et l'angle formé par ces deux droites est nommé  $\theta_i^a$ .

Seules les déformations déterminées sur la ligne neutre sont prises en compte dans la détermination de  $\theta_i^m$  et  $\theta_i^a$ .

$$\text{Pour l'arbre } \theta_i^a = \frac{u_{s,n}^a + u_{b,n}^a}{R_i - R_0} + \theta_{rf}^a$$

$$\text{Pour le moyeu } \theta_i^m = \frac{u_{s,n}^m + u_{b,n}^m}{R_i - R_0} + \theta_{rf}^m$$

Ces rotations et la déformation locale sur le contact (glissement et compression) créent une rotation de corps du moyeu. Cette rotation globale  $\theta_{globale}$ , qui n'apparaît pas sur la Figure 3-21, transforme  $\Delta^i$  en  $\Delta^1$ . Son équation est :

$$\theta_{globale} = \left( u_{glis} + u_c^a + u_c^m + u_{s,n/2}^a + u_{s,n/2}^m + u_{b,n/2}^a + u_{b,n/2}^m + \frac{\theta_{rf}^a}{l_p^a} + \frac{\theta_{rf}^m}{l_p^m} \right) \frac{2\pi}{D_p Z}$$

L'angle d'inclinaison  $\alpha$  est l'angle entre  $\Delta^a$  et  $\Delta^m$ . Il a pour expression :

$$\alpha = \theta_t^a - (\theta_t^m + \theta_{globale})$$

Ce qui donne finalement :

$$\alpha = \frac{u_{s,n}^a + u_{b,n}^a - (u_{s,n}^m + u_{b,n}^m)}{R_i - R_0} + \theta_{rf}^a + \theta_{rf}^m + \left( u_{glis} + u_c^a + u_c^m + u_{s,n/2}^a + u_{s,n/2}^m + u_{b,n/2}^a + u_{b,n/2}^m + \frac{\theta_{rf}^a}{l_p^a} + \frac{\theta_{rf}^m}{l_p^m} \right) \frac{2\pi}{D_p Z} \quad (3-9)$$

#### 3.4.4 Détermination de la rigidité des dents

Tous les paramètres définissant la rigidité des dents de la cannelure sont définis à travers les parties précédentes. Il est donc possible de calculer cette rigidité des dents  $C_\varphi$  par :

$$C_\varphi = \frac{C_0}{\theta_{globale}} \text{ en [N/rad]}. \quad (3-10)$$

### 3.5 RESULTATS ET VALIDATION

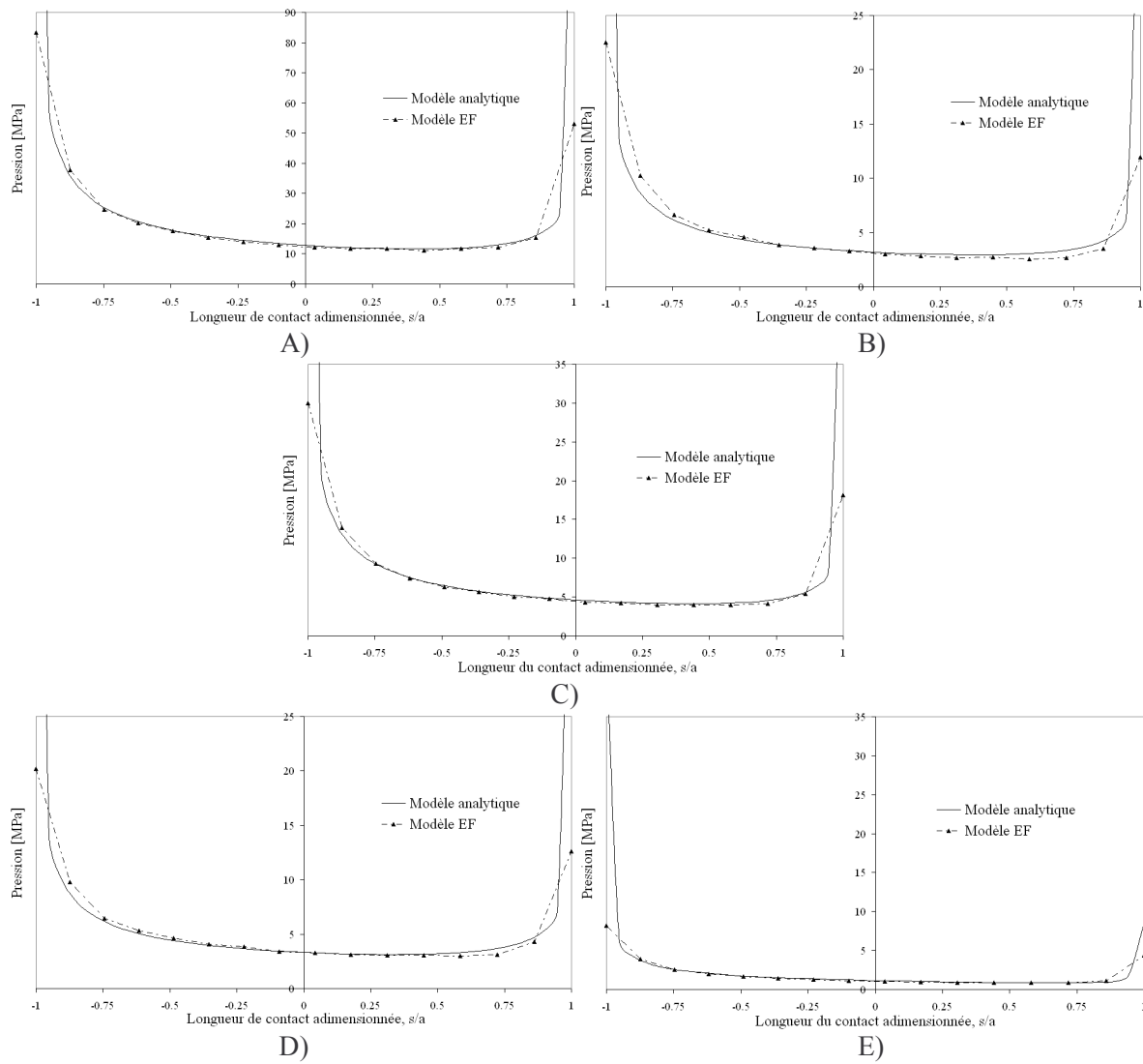
Une comparaison entre les résultats analytiques et les résultats EF 2D est maintenant présentée. Pour balayer différentes configurations, nous reprenons les cinq cannelures étudiées précédemment. Les résultats présentés sont donnés en considérant que toutes les cannelures ont les mêmes coefficients de correction.

La rigidité des dents est la division du couple extérieur (par unité de profondeur et pour une dent) par la différence des rotations au niveau du rayon de la fondation des dents du moyeu et de l'arbre. Ces rotations sont obtenues en divisant pour l'arbre comme pour le moyeu la moyenne des déplacements orthoradiaux par le rayon de fondation approprié.

Le modèle analytique est programmé à l'aide du logiciel Excel. La procédure de calcul s'avère être robuste car tous le calcul abouti toujours a une solution en quatre itérations. Le temps d'exécution dépend de l'ordinateur utilisé mais ne dépasse pas les quinze secondes.

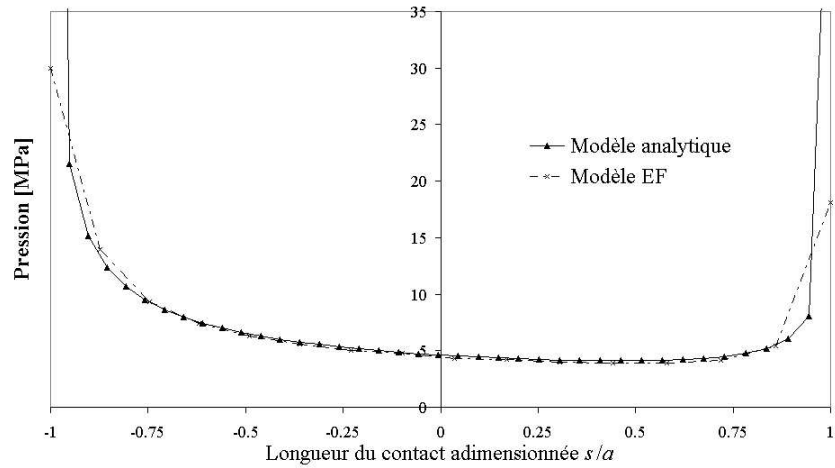
#### 3.5.1 Adéquation entre les résultats des modèles analytiques et EF 2D

La Figure 3-22 permet de comparer de manière globale les résultats issus du modèle analytique et des modèles EF 2D, pour les cinq cas différents de cannelure.



**Figure 3-22 Comparaison des distributions de la pression radiale**

Cette rapide comparaison permet de voir qu'une bonne estimation de la pression est obtenue le long du contact, hormis les points extrêmes, quel que soit le cas étudié. La différence observée sur les extrémités est normale. Elle provient de l'expression même de la pression analytique qui tend vers l'infini pour les points aux extrémités  $s = +a$  et  $s = -a$  (selon l'équation modifiée de Sackfield ( 3-3)).



**Figure 3-23 Comparaison entre le modèle analytique et le modèle EF affiné de la cannelure 18 × 1.25**

Pour évaluer plus précisément les écarts entre ces deux modèles, une comparaison entre les résultats en chaque nœud de la cannelure 18 × 1.25 est présentée en Tableau 3-5. La référence permettant de donner les écarts est le modèle EF.

Longueur du contact adimensionnée s/a	Pression EF [MPa]	Pression analytique [MPa]	Ecart [%]
-9.99E-01	83.4	∞	
-8.74E-01	37.8	35.5	-6.21
-7.47E-01	24.5	25.0	1.98
-6.19E-01	20.2	20.3	0.51
-4.91E-01	17.5	17.6	0.31
-3.61E-01	15.3	15.7	2.79
-2.30E-01	13.9	14.4	3.47
-9.80E-02	12.9	13.4	3.78
3.51E-02	12.1	12.6	4.21
1.69E-01	11.6	12.1	3.94
3.05E-01	11.6	11.8	2.10
4.41E-01	11.1	11.8	2.70
5.79E-01	11.6	12.1	4.23
7.18E-01	12.0	13.2	8.71
8.58E-01	15.4	16.5	6.67
9.99E-01	53.0	∞	
		Moyenne	3.33

**Tableau 3-5 Résultats de la comparaison entre le modèle EF et le modèle analytique de la cannelure 18 × 1.25**

Sans considérer les nœuds des extrémités, la longueur étudiée correspond à 90% de la longueur totale du contact et la moyenne des écarts est alors de 3% avec un écart maximum de 6.21%. Ainsi la précision du modèle analytique est donc suffisante pour considérer que la distribution de la pression radiale est correctement modélisée.

Désignation	A	A	A	B	C	D	E
$C_{ext}$ [Nm]	5	7.2	25	5	7.2	10	7.2
Raideur EF [ $10^6$ N/rad]	67.6	67.5	66.8	276	270	582	839
Raideur analytique [ $10^6$ N/rad]	68.9	67.4	66.4	307	266	687	800
Ecart de la raideur [%]	1.84	-0.15	-0.53	9.9	-1.48	15	-4.85

**Tableau 3-6 Comparatif des raideurs des dents**

Le Tableau 3-6 compare les résultats de la rigidité des dents issues du calcul EF et du calcul analytique. La raideur EF est calculée en divisant le couple extérieur  $C_0$  (par unité de profondeur) par la différence entre les rotations sur les rayons de fondation de l'arbre et du moyeu. La référence utilisée pour évaluer les écarts est le modèle EF. Tout d'abord ce tableau révèle la précision du modèle analytique qui est supérieure à 91%. Ensuite il offre la possibilité d'observer l'influence de la valeur du couple extérieur sur le modèle. Pour une même cannelure, la raideur ne varie quasiment pas.

### 3.5.2 Discussion

Les résultats présentés sont issus de calcul avec des coefficients de correction identiques pour toutes les cannelures. Nous pouvons donc en conclure qu'une bonne estimation est obtenue malgré les approximations faites pour chacun de ces coefficients.

Il est intéressant de connaître l'influence sur la rigidité des différents phénomènes régissant le comportement des dents. La contribution varie comme cette estimation moyenne sur les cas étudiés le révèle :

- 58% est dû au glissement,
- 29% est dû à l'effet combiné du cisaillement et de la flexion,



- 8% est dû à la compression,
- 5% est dû à la rotation de la fondation.

Ce résultat montre la faible influence de la compression et de la rotation de la fondation. L'approximation des coefficients de correction de ces deux phénomènes a donc un faible impact sur les résultats globaux. Il n'apparaît pas nécessaire de développer des modèles plus précis ni de personnaliser les coefficients en fonction des caractéristiques des dents. Par contre il apparaît que le phénomène de glissement est primordial et qu'il est judicieux de le prendre en compte avec précision. Une étude plus précise sur la variation du coefficient de calage serait une priorité si on souhaitait minimiser les erreurs.

Au cours de cette étude nous avons proposé une nouvelle méthode de calcul de la raideur des dents. Ce paramètre peut être comparé avec les études présentées par Tatur [Tatur, 1969], Orain [Orain, 1976] ou même Blanc [Blanc, 1999].

Selon Tatur, la rigidité des dents vaut :

$$C_{\varphi} = \frac{m_{av}}{2 \left( \frac{\delta_{sh+b}}{d_{av}} + \frac{\delta_{rs1}}{D_2} + \frac{\delta_{rs2}}{d_2} \right)}$$

Pour permettre la comparaison avec le modèle EF 2D, la cannelure « C » a été utilisée. Un couple extérieur,  $C_{ext}$ , de 7.2Nm est imposé avec un module de cisaillement de 80GPa. Les déplacements ont alors pour valeurs :

$$\delta_{sh+b} = 2,23 \times 10^{-7} \text{ m}$$

$$\delta_{rs1} = 7,57 \times 10^{-7} \text{ m}$$

$$\delta_{rs2} = 4,41 \times 10^{-7} \text{ m}$$

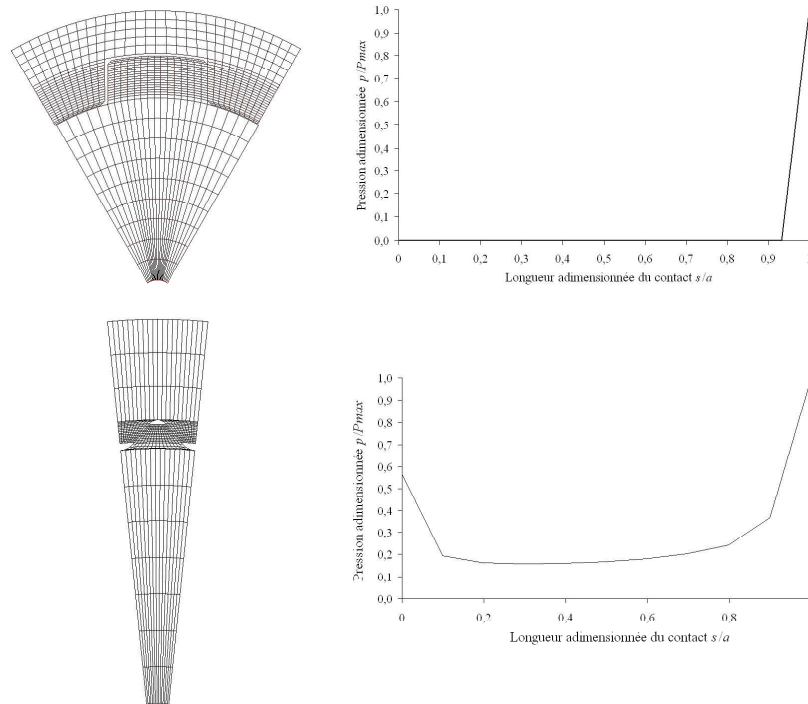
Pour la valeur de  $\delta_{sh+b}$  présenté ici, nous avons exploité le modèle EF associé à la cannelure. Selon l'étude du comportement radial, il est aussi possible d'obtenir le déplacement  $\delta_{sh+b}$ . Il correspond à la somme des déplacements issus du cisaillement et de la flexion de l'arbre et du moyeu.

Finalement  $C_{\varphi}$  vaut  $1.58 \times 10^8 \text{ N/rad}$ , alors qu'à partir des EF, la valeur est de  $2.70 \times 10^8 \text{ N/rad}$ . Ce qui correspond à un écart de 40%. La méthode de Tatur s'avère donc moins précise que la notre, qui selon le Tableau 3-6, conduit à un écart de seulement 1.5%.

Examinons maintenant les résultats fournis par Blanc [Blanc, 1999]. Ce dernier propose d'utiliser une raideur fixe :  $K_F = 7.3 \times 10^7 \text{ N/m}$ , quelle que soit la cannelure ce qui pour

la cannelure étudiée revient à  $3.6 \times 10^8 \text{N/rad}$ , soit un écart de 33% par rapport aux EF 2D. Le Tableau 3-6 laisse apparaître clairement qu'il n'est pas opportun d'utiliser une valeur unique pour la raideur de toutes les cannelures.

### 3.6 CONCLUSION



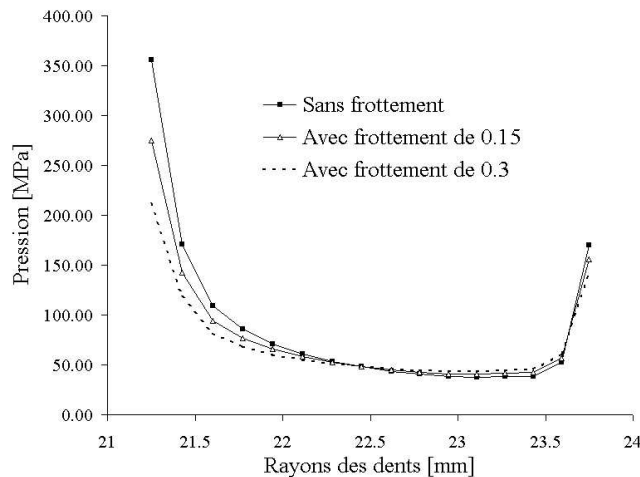
**Figure 3-24 Répartition radiale de la pression pour la cannelure à flancs parallèles et les dentelures rectilignes**

Nous avons proposé un modèle analytique permettant d'obtenir la répartition radiale de la pression avec une bonne précision dans les zones critiques de la cannelure. Notre approche combine la modélisation d'un contact de type punch à celle du comportement des dents. Cette dernière s'appuie sur cinq phénomènes qui sont la flexion, le cisaillement, la compression, la rotation de la fondation des dents et enfin le glissement. Ce dernier phénomène apparaît comme étant le phénomène ayant le plus d'influence, alors qu'il n'avait jamais été considéré dans d'autres études.

Ce modèle a été développé pour une cannelure à flancs en développante de cercle ayant une géométrie parfaite. Mais ce modèle peut-il être étendu aux autres cas de cannelures ? Les répartition radiales de la pression en 2D des deux autres types de cannelures sont illustrées sur la Figure 3-24. La cannelure à flancs parallèles ne travaillant que sur une arête, il paraît possible d'établir une analogie avec les engrenages. Il n'est donc pas opportun

de chercher à modéliser la répartition de la pression radiale. Cependant la rigidité des dents pourrait être obtenue à l'aide de l'étude de Cornell. A l'opposé, le cas des dentelures rectilignes offre une répartition de la pression de la même nature que celle des cannelures à flancs en développante de cercle, il semble que ce cas puisse être traité avec le modèle de punch issu de l'étude de Sackfield.

Dans cette étude le contact est simulé comme un contact entre un punch et un plan élastique sans frottement. Le frottement a cependant une influence sur la répartition de la pression, comme le révèle la Figure 3-25. Cette figure présente la répartition radiale de la pression obtenue avec notre modèle EF 2D pour trois coefficients de frottement différents. L'augmentation du frottement paraît diminuer la pression aux extrémités. Cette particularité est accompagnée par une diminution du glissement au niveau du contact et donc une augmentation de la rigidité des dents. Les répartitions de pression observées restent toutefois conformes à celles décrites par le modèle de Sackfield. Il est donc possible d'envisager une extension de la méthode que nous avons présentée, en ajoutant des composantes tangentielles aux seules actions normales considérées jusqu'ici.



**Figure 3-25 Influence du frottement sur la répartition radiale de la pression**

De plus nous avons choisi de créer un modèle analytique simulant des conditions parfaites : pas de défauts géométriques, liaison sollicitée en torsion dans l'axe ... Des travaux complémentaires sont envisageables sur la base du modèle existant pour tenir compte de certains défauts comme l'erreur de pas (taillage du pignon). Enfin les résultats obtenus ont mis en avant la nécessité de réaliser une étude paramétrique, permettant de tester un grand nombre de cas de cannelures, afin de délimiter le domaine de validité du modèle proposé et d'améliorer notre connaissance des coefficients de calage.

---

## CHAPITRE 4 COMPORTEMENT AXIAL

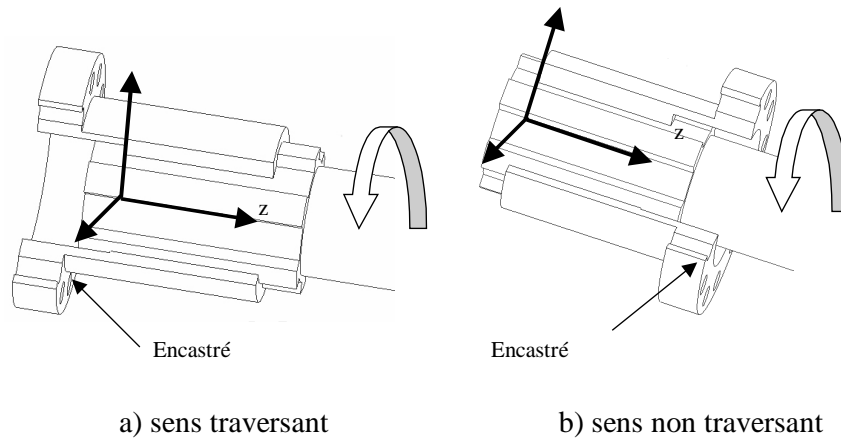
*Ce chapitre présente deux méthodes permettant de décrire simplement le comportement axial d'une cannelure. Ce phénomène ayant été étudié par d'autres auteurs comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, nous nous inspirons de leurs travaux pour développer ces méthodes. Le manque de précision des résultats expérimentaux présentés dans la littérature nous a conduit à étudier expérimentalement le comportement axial des cannelures. En s'appuyant sur les essais, nous vérifions l'influence prédite par Volfson des moments quadratiques polaires de l'arbre et du moyeu sur le comportement d'une cannelure. Enfin nous étendons cette méthode à un cas d'introduction du couple différent de celui rencontré dans les diverses études.*

### 4.1 INTRODUCTION

Lors de l'étude de la répartition de la pression, au chapitre 2, nous avons mis en valeur la nécessité de découpler le comportement global de la cannelure analytiquement afin de le décrire. Dans ce chapitre nous allons développer un modèle analytique et un modèle EF simplifié permettant de simuler le comportement axial d'une cannelure.

Dans le but de valider ces modèles, nous les confrontons aux modèles EF 3D, déjà présentés lors du chapitre 2. Mais dans un premier temps nous avons choisi de vérifier que ces modèles EF 3D, qui nous serviront de références, donnent bien des résultats en accord avec des mesures expérimentales. Nous présentons quelques essais que nous avons réalisés à cette fin.

Nous souhaitons traiter analytiquement deux configurations de chargement qui nous paraissent les plus courantes. La première, rencontrée dans la bibliographie, visible Figure 4-1a, considère que les conditions aux limites permettant de mettre sous torsion la cannelure sont imposées aux extrémités opposées de la cannelure. Dans ce cas, le sens de passage des efforts dans la cannelure est dit « traversant ». La seconde configuration, par opposition à la première visible Figure 4-1b, considère que les conditions aux limites introduisant la torsion sont situées sur les extrémités de l'arbre et du moyeu qui se situent du même côté. Ainsi le sens de passage des efforts dans la cannelure est dit « non-traversant ». Cette seconde configuration n'a jamais fait l'objet de publication jusqu'à présent, pourtant elle correspond à un cas de montage rencontré dans le milieu industriel.



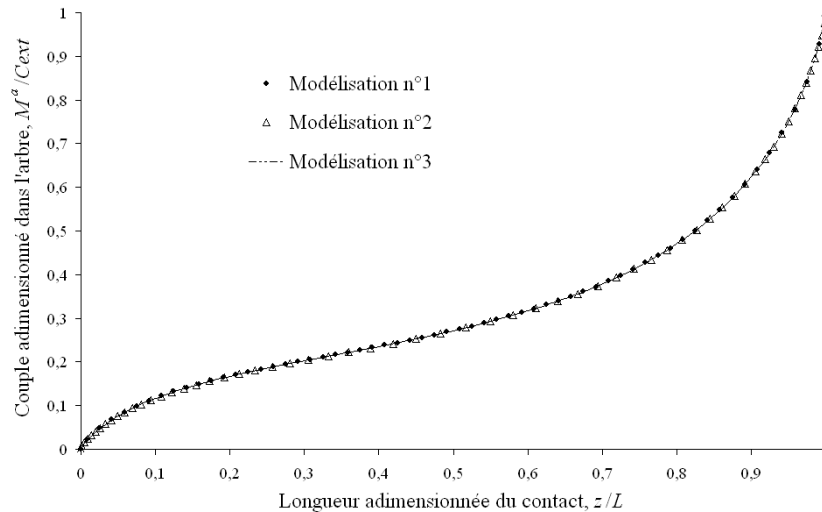
**Figure 4-1 Schématisation des deux configurations de chargement**

## 4.2 MODELE ELEMENTS FINIS TRIDIMENSIONNEL

Le modèle EF 3D utilisé dans ce chapitre est celui introduit au chapitre 2.2.1.

Dans les publications telles que celles de Tatur, le comportement axial est décrit par le biais du transfert du couple le long de l'axe de la cannelure. Nous avons choisi de procéder de la même manière. Cependant une étude préalable est nécessaire. En effet nous avons constaté dans le chapitre précédent que la valeur de la pression aux extrémités du contact n'est pas la même en fonction du maillage du modèle EF. Le transfert du couple étant lié à la distribution de pression, il faut donc voir si la mesure du couple est elle aussi sensible à la finesse du maillage.

Un test, basé sur une cannelure  $25 \times 2.5$  de diamètre extérieur 90mm, de diamètre intérieur nul et de longueur 60mm, permet une étude de l'influence du maillage. Trois modélisations ont été alors retenues. La modélisation n°1 discrétise la longueur du contact avec un pas de 1mm. La seconde comporte le même nombre d'éléments mais concentrés essentiellement sur les bords. Le pas varie alors de 0.2mm sur les bords à 2mm au centre. La troisième comporte deux fois plus d'éléments que la modélisation n°1 pour discrétiser la zone de contact entre l'arbre et le moyeu. La Figure 4-2 permet de comparer les résultats obtenus à partir de ces modélisations. La méthode permettant d'obtenir le couple à partir des résultats EF est donnée en annexe III. Les écarts étant très faibles, la modélisation n°1 qui est la plus facile à exploiter est retenue pour les développements ultérieurs. Une analyse de l'allure de cette courbe est faite plus loin dans ce chapitre.



**Figure 4-2 Couple à travers l'arbre le long de la zone du contact de la cannelure pour trois maillages différents.**

Il est donc possible d'exploiter les EF 3D comme référence pour valider le modèle analytique, à condition que le modèle EF simule bien la réalité. Pour vérifier cela, la mise en place d'expériences s'avère nécessaire.

#### 4.3 COMPARAISON DES RESULTATS EF A DES MESURES EXPERIMENTALES

L'objectif de cette partie est de vérifier la validité des résultats de notre modèle Eléments Finis 3D vis à vis du comportement axial d'une cannelure. Les expériences menées par Adey, présentées dans la partie bibliographique (paragraphe 1.1.1.1) en vue de vérifier ses résultats EF, ne sont pas exploitables ici car elles ont été réalisées pour un cas particulier de la cannelure hélicoïdale. Nous n'avons pas pu non plus réutiliser les expériences réalisées par Tatur (présentées au paragraphe 1.1.1.2) car nous ne disposons pas de toutes les données nécessaires pour pouvoir produire le modèle EF associé. Nous avons donc été emmenés à développer un banc d'essai.

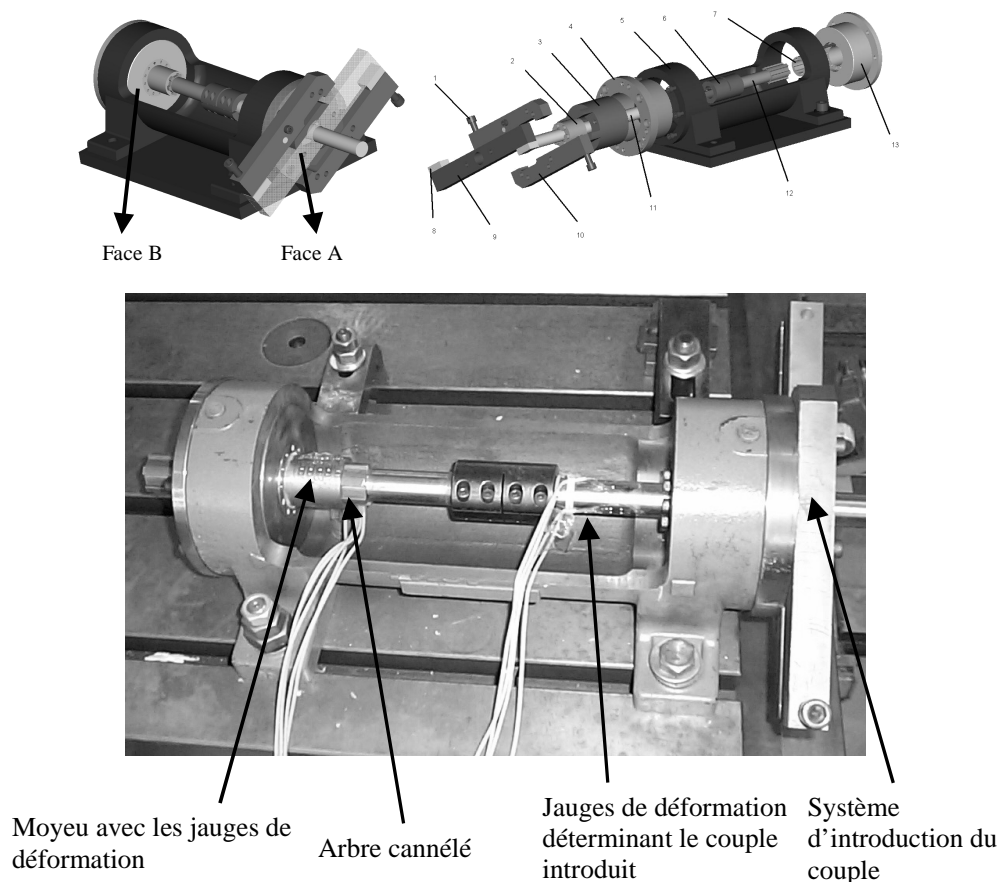
Ayant côtoyé au départ des travaux illustrés sur le cas de cannelures à flancs parallèles [Tatur, 1969], [Orain, 1976], nous avons donc été naturellement conduits à tester ce type de cannelure. De plus ces cannelures sont les plus faciles à acquérir car vendues sur stock dans le commerce. Leur désignation est  $6 \times 28 \times 34$ .

D'autres expériences prenant en compte les autres types de cannelures sont prévus dans de futurs travaux.

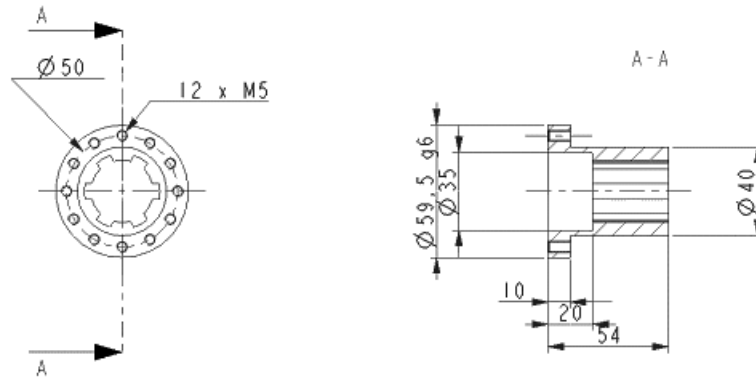
### 4.3.1 Présentation du banc d'essai

Le banc d'essai a pour but de transmettre une torsion pure à la liaison cannelée. La Figure 4-3 en est une représentation. En appliquant à l'aide de deux vis diamétralement opposées un couple sur la face A, l'arbre cannelé est soumis à de la torsion. La face B correspond à la partie encastrée, supportant le moyeu. Le moyeu peut être monté sur l'une ou l'autre des faces du palier support, ce qui permet de tester les deux configurations de chargement envisagées : sens traversant et non traversant (Figure 4-1). Il est possible de connaître le couple introduit grâce à des jauges de contrainte placées sur l'arbre de transmission. Ces jauges permettent aussi de mesurer la flexion existant dans cet arbre. Ainsi il est possible de limiter les effets parasites comme l'introduction d'un désalignement qui aurait pour effet de ne faire travailler que quelques dents et non pas régulièrement l'ensemble cannelé.

La géométrie du moyeu, visible à la Figure 4-4, peut être divisée en 3 parties. La bride, une partie tubulaire et une partie cannelée. La partie tubulaire a pour fonction de limiter l'influence de la bride sur l'accouplement.



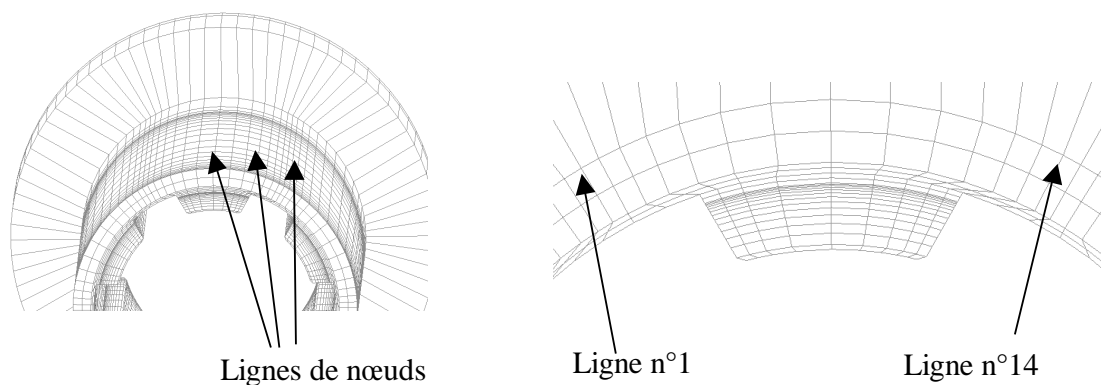
**Figure 4-3 Visualisation du banc d'essai**



**Figure 4-4 Géométrie du moyeu (valeurs en mm)**

Pour réaliser ses expériences, Leen a utilisé deux méthodes : la photoélasticité et les jauges de déformation. Par analogie, nous avons choisi de mesurer les déformations de cisaillement orthoradial sur la peau de l'assemblage cannelé à l'aide de jauges. Pour les positionner, l'exploitation des résultats du modèle numérique s'est avérée nécessaire. Deux critères ont été pris en compte : la facilité du collage des jauges et la valeur des déformations. Ainsi les jauges sont placées sur le diamètre extérieur du moyeu. Ce sont des jauges doubles à  $\pm 45^\circ$ , de marque Micro Measurement et de référence EA-06-062TW-120 montées en demi-pont.

En ce qui concerne la recherche des valeurs extrémales des déformations, il a fallu relever pour chaque ligne de nœuds les différentes valeurs des déformations. La Figure 4-5 est une illustration permettant de situer ces lignes sur le moyeu.

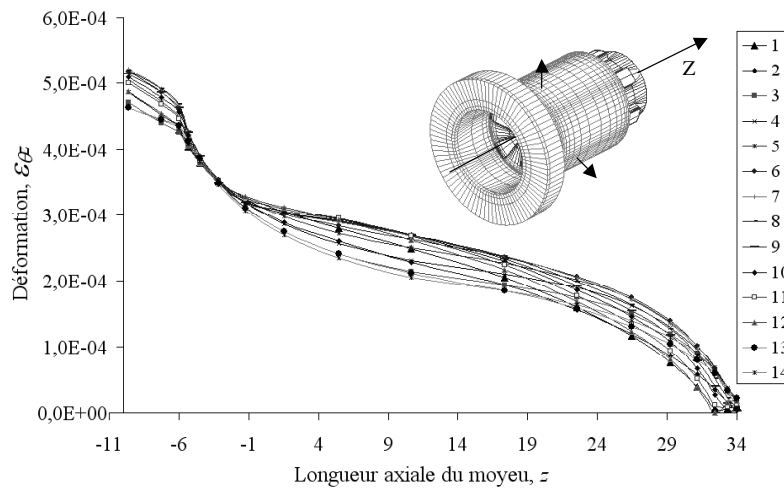


**Figure 4-5 Lignes de nœuds**

Après avoir tracé le graphe de la Figure 4-6, le choix de la ligne la plus déformée peut être fait. Cette ligne se situe proche d'un bord de dent en contact du moyeu.



Le zéro de l'axe des abscisses correspond au début du contact de la cannelure, coté encastrement. Le contact s'effectue donc entre  $z = 0\text{mm}$  et  $z = 34\text{mm}$ .



**Figure 4-6 Déformations du moyeu le long des lignes de nœuds**

Finalement les jauges de déformation sont collées sur la surface extérieure du moyeu le long de la ligne de nœud qui présente le plus de déformation selon les EF. Pour un problème d'encombrement, elles sont au nombre de cinq.

#### 4.3.2 Résultats issus du banc d'essai

La première configuration de chargement examinée est celle qui est présentée à travers la littérature, c'est-à-dire le sens traversant. Dans un second temps la nouvelle configuration est étudiée. Dans tous les cas la corrélation avec le modèle EF et l'influence du moment quadratique polaire sont les deux préoccupations essentielles.

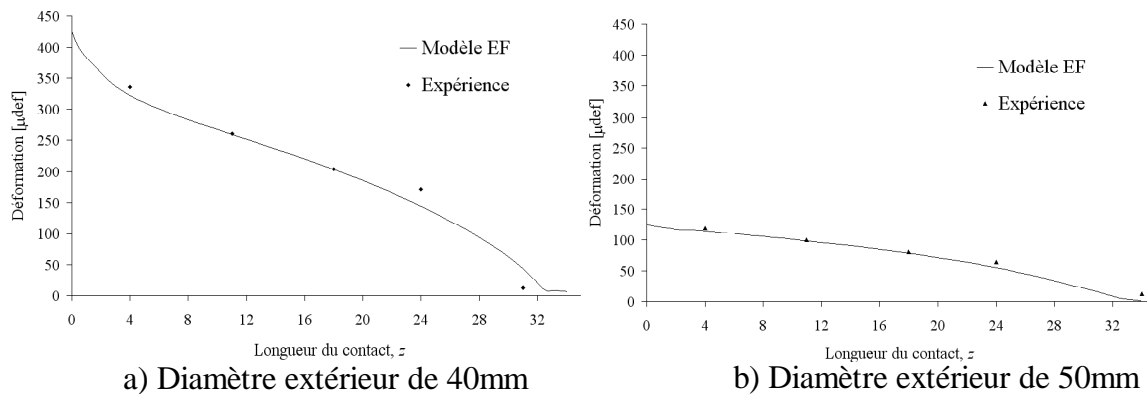
##### ➤ Configuration de chargement dans le sens traversant

L'expérience a été menée en utilisant deux cannelures ayant des diamètres de moyeu différents. Ce choix permet de vérifier les conclusions du travail de Volfson [Volfson, 1982] qui affirme que les moments quadratiques polaires des pièces ont une forte influence sur la distribution du couple.

La Figure 4-7 présente les résultats du modèle EF et de l'expérience associée obtenus pour deux moyeux différents. Le cas a) correspond à un diamètre extérieur de 40mm et le cas b) à un diamètre de 50mm.

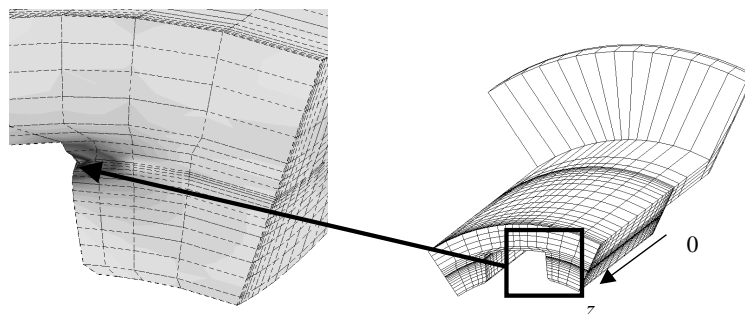
Les courbes issues des expériences sont une moyenne des essais réalisés pour un même couple de 200Nm. L'axe  $z$  représente la direction axiale de la cannelure. L'origine de l'abscisse, définie à la Figure 4-6, se situe du côté de l'encastrement.

On peut noter que l'on obtient une corrélation satisfaisante entre les déformations mesurées et celles données par le modèle EF 3D. Selon Volfson, le moment quadratique polaire a une influence sur la distribution de la pression et donc sur la distribution des déformations. La comparaison des courbes a) et b) de la Figure 4-7 permet de se rendre compte que l'impact du moment polaire sur le comportement de la liaison est bien réel.



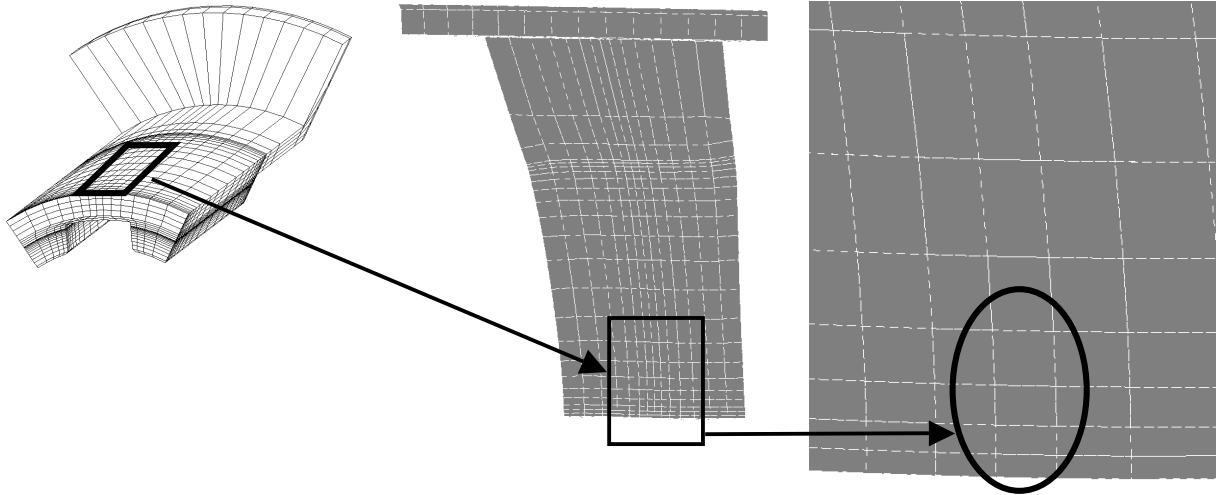
**Figure 4-7 Comparaison des déformations dans le sens traversant**

La Figure 4-7 révèle qu'entre 32 et 34mm, en fin du contact, la courbe du modèle éléments finis est horizontale. Cela provient de la déformation locale sur les dents. C'est un phénomène qui apparaît aussi expérimentalement sur le cas a). En effet la valeur des déformations de la dernière jauge est quasi nulle. La Figure 4-8, issue des résultats du modèle EF, permet de visualiser l'écrasement local de la matière en fin de contact.



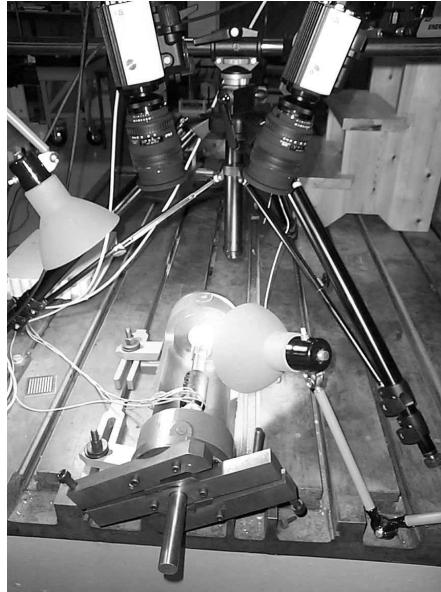
**Figure 4-8 Ecrasement local en bout de dent**

La zone sur laquelle est collée la dernière jauge, située sur la peau extérieure et en bout de moyeu, se trouve un peu écartée de flux d'efforts. La Figure 4-9 montre que les déformations du diamètre extérieur du moyeu restent peu influencées par la présence d'un écrasement en bout, pourtant significatif. Les éléments sur le rayon extérieur sont très peu déformés ce qui se traduit par une partie horizontale sur la courbe de la Figure 4-7.



**Figure 4-9 Visualisation des déformations extérieures**

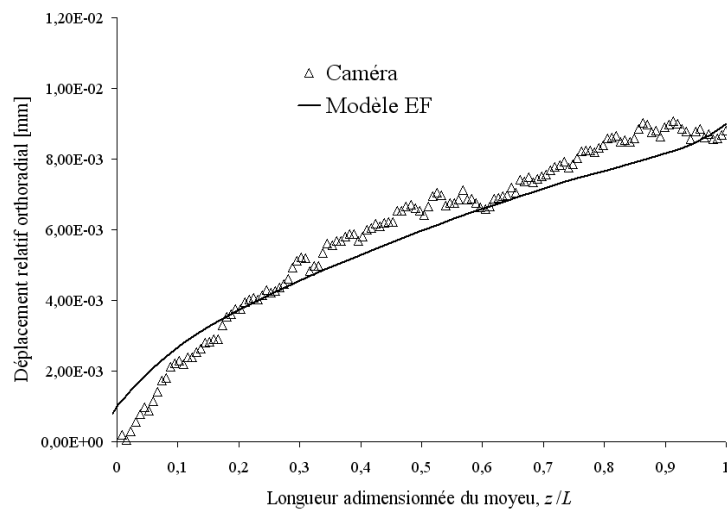
Le faible nombre de jauges sur le moyeu limite la précision des résultats obtenus. De plus, la liaison cannelée est une liaison fortement hyperstatique (six dents en prise simultanément dans notre cas). La probabilité de voir des défauts géométriques venir perturber les résultats est donc élevée. Afin de mieux connaître la répartition des déformations, une solution consiste à utiliser un système de stéréo-corrélation d'images (mesure de déplacement par caméras). La Figure 4-10 en est une photographie. Deux caméras dynamiques sont reliées à un ordinateur, le moyeu est peint en blanc avec une peinture élastique, des points de peinture noire sont ajoutés par-dessus. Le système compare une image avant déformation et pendant la déformation, en analysant le déplacement du mouchetis de peinture noire. Après traitement il est alors possible de connaître les déplacements relatifs des points et donc de la surface extérieure du moyeu. Pour un problème de précision, seule une bande le long de l'axe perpendiculairement au plan horizontal est prise en considération. De plus pour obtenir les plus grands déplacements possibles afin de minimiser les erreurs dues à la précision, le moyeu testé est en laiton, car il offre pour un même couple des déformations plus importantes qu'un moyeu en acier. Pour être certain que la dent observée travaille, seules deux dents de part et d'autre de l'arbre sont conservées les autres sont usinées au diamètre de fondation des dents.



**Figure 4-10 Banc d'essai avec l'utilisation de caméras**

Les essais ont été réalisés avec un couple de 90Nm. La comparaison entre les résultats du modèle EF 3D et les expériences est visible en Figure 4-11. L'origine de l'abscisse correspond comme précédemment en début du contact du côté de l'encastrement. Ce graphique permet de voir que l'allure du déplacement est bien estimée par les Eléments Finis, mais que les valeurs mesurées sont supérieures à celles calculées.

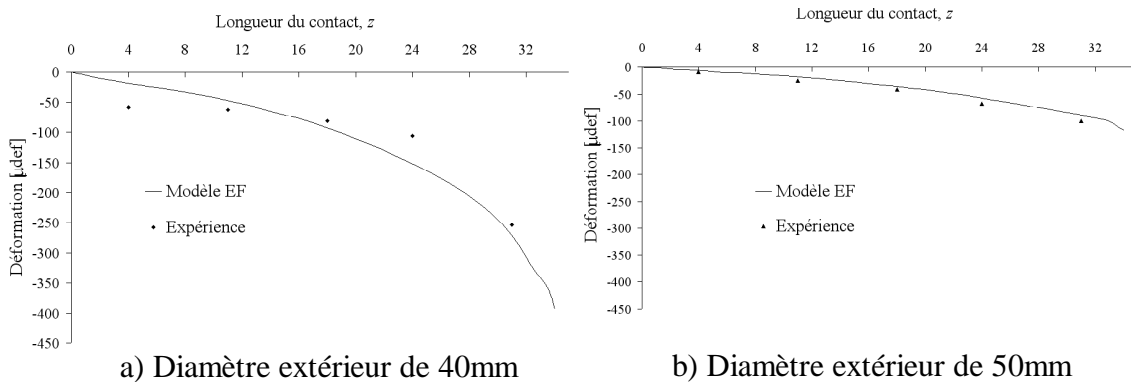
Ce résultat est cependant tout à fait acceptable. En effet, pour de petits déplacements comme ceux qui sont mis en jeu dans le cas des cannelures, un léger écart dans les réglages de repères et de positionnement des caméras, qui n'est pas visible à travers les logiciels, peut engendrer un décalage des résultats.



**Figure 4-11 Résultats des essais issus du système de caméras**

Les essais réalisées nous ont permis de vérifier que les EF produisent des résultats qui sont bien en accord avec les phénomènes réels observés dans la configuration sens traversant. Est-ce aussi le cas quand les efforts ne traversent pas la cannelure ? Nous avons voulu le vérifier à travers une étude expérimentale.

➤ Configuration de chargement dans le sens non traversant



**Figure 4-12 Comparaison des déformations dans le sens non traversant**

La Figure 4-12 représente les résultats obtenus pour les mêmes cannelures que celles utilisées précédemment mais testées dans le cas où le chargement est non traversant (Figure 4-1b).

Ces graphes révèlent dans un premier temps la différence de distribution de couple par rapport à la configuration où les efforts traversent la cannelure. Ici n'apparaît qu'un seul gradient de couple. Ce phénomène emmène donc à penser que comme tout le couple passe d'un seul coté de la cannelure, alors les contraintes seront plus élevées que dans la première configuration. Ainsi pour un même couple de chargement donné, cette configuration conduit à des pressions de contact localement plus élevées que dans l'autre cas où le transfert du couple est mieux réparti le long de la cannelure.

De plus, les déplacements étant faibles dans cette configuration, la résolution de notre équipement de stéréo corrélation d'image est insuffisante pour nous permettre de réaliser les mêmes mesures que dans le cas du couple traversant.

Malgré tout les résultats obtenus avec les jauges nous ont permis de s'assurer que les résultats EF sont viables. C'est pourquoi nous proposons de prendre pour référence les modèles Eléments Finis, et de chercher à obtenir analytiquement le couple à travers une cannelure.

#### 4.4 DETERMINATION ANALYTIQUE DU COUPLE PAR LE MODELE DE TATUR - ORAIN

Comme nous l'avons présenté lors de l'étude bibliographique, la détermination analytique de la distribution du couple le long d'une cannelure a surtout été étudiée par Tatur [Tatur, 1969] puis par Orain [Orain, 1976] et enfin par Blanc [Blanc, 1999] quand les efforts traversent la cannelure. Nous proposons donc de vérifier la conformité de ces modèles en prenant comme référence les Eléments Finis, et d'en regarder les limites. Puis nous étendrons ce modèle à la configuration du sens non-traversant.

##### 4.4.1 Etude du modèle Tatur - Orain dans le sens traversant

###### ➤ Mise en place du modèle analytique

Selon Tatur, la répartition du couple le long de l'axe s'écrit :

$$-\frac{dM^a(z)}{dz} = C_\varphi [\varphi^m(z) - \varphi^a(z)] \quad (4-1)$$

Avec

$M^m(z)$  : Moment sur l'arbre à la section  $z$ ,

$C_\varphi$  : valeur caractéristique de la rigidité des dents de la cannelure. Cette valeur est un des résultats du modèle analytique développé lors de l'analyse du comportement radial,

$\varphi^a(z)$  et  $\varphi^m(z)$  : angles de rotation de l'arbre et du moyeu à la section  $z$ . En supposant que la cannelure travaille en torsion pure, chaque section droite reste droite. Cela est traduit par les relations suivants entre les angles et les moments :

$$\text{Pour le moyeu } \frac{d\varphi^m(z)}{dz} = \frac{M^m(z)}{G^m I^m}, \quad (4-2)$$

$$\text{Pour l'arbre } \frac{d\varphi^a(z)}{dz} = \frac{M^a(z)}{G^a I^a}, \quad (4-3)$$

Avec

$G^m, G^a$  : modules de cisaillement respectivement du moyeu et de l'arbre,

$I^m, I^a$  : moments quadratiques polaires respectivement du moyeu et de l'arbre. Ils représentent les caractéristiques géométriques de la rigidité en torsion de ces deux éléments.

En remplaçant  $\phi'(z)$  et  $\phi''(z)$  dans l'équation (4-1) par leurs expressions, l'équation différentielle alors obtenue a pour expression :

$$\frac{d^2 M^a(z)}{dz^2} - C_\phi \left( \frac{1}{G^a I^a} + \frac{1}{G^m I^m} \right) M^a(z) = -\frac{C_\phi C_{ext}}{G^m I^m} \quad (4-4)$$

En considérant les moments quadratiques des pièces et la rigidité des dents constants, l'intégration de l'équation (4-4) permet d'obtenir le couple le long de la cannelure. Ainsi :

$$M^a(z) = \frac{A}{k} (e^{kz} - 1) - \frac{B}{k} (e^{-kz} - 1) \quad (4-5)$$

Avec

$z$  : position axiale variable comprise entre 0 et  $L$ , longueur du contact de la cannelure,

$$k = \sqrt{C_\phi \left( \frac{1}{G^a I^a} + \frac{1}{G^m I^m} \right)},$$

$$A = C_{ext} \left( \frac{k + \frac{C_\phi}{k G^m I^m} (e^{-kL} - 1)}{e^{kL} - e^{-kL}} \right),$$

$$B = A + \frac{C_\phi C_{ext}}{k G^m I^m}.$$

L'expression de cette équation permet de remarquer facilement que la distribution du couple dépend fortement du facteur constant  $k$  qui est fonction de la raideur des corps et des dents. De plus ce modèle est basé sur l'hypothèse d'une torsion pure de l'arbre et du moyeu, où chaque section reste droite. C'est une hypothèse forte qui, nous le verrons plus tard, peut éloigner le modèle analytique de la solution.

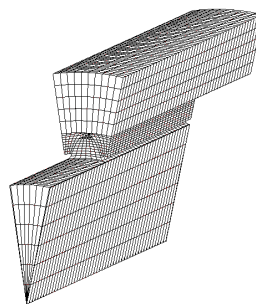
➤ Confrontation du modèle analytique à des modèles EF 3D

Nous allons maintenant confronter les résultats du modèle analytique à ceux des modèles EF considérés comme référence afin de déterminer les conditions dans lesquelles le modèle est valide. Ainsi une recherche des différents agencements possibles entre l'arbre et le moyeu est proposée. Le choix de ne pas étudier tous les types de cannelure en même temps est fait. En effet le raisonnement permettant de confronter les modèles développés est identique pour toutes les cannelures. Seule la forme des dents, donc leur raideur, change. Le choix du type de cannelure étudiée se porte ainsi sur la cannelure à flancs en développante de cercle qui a déjà fait l'objet d'études lors du comportement radial.

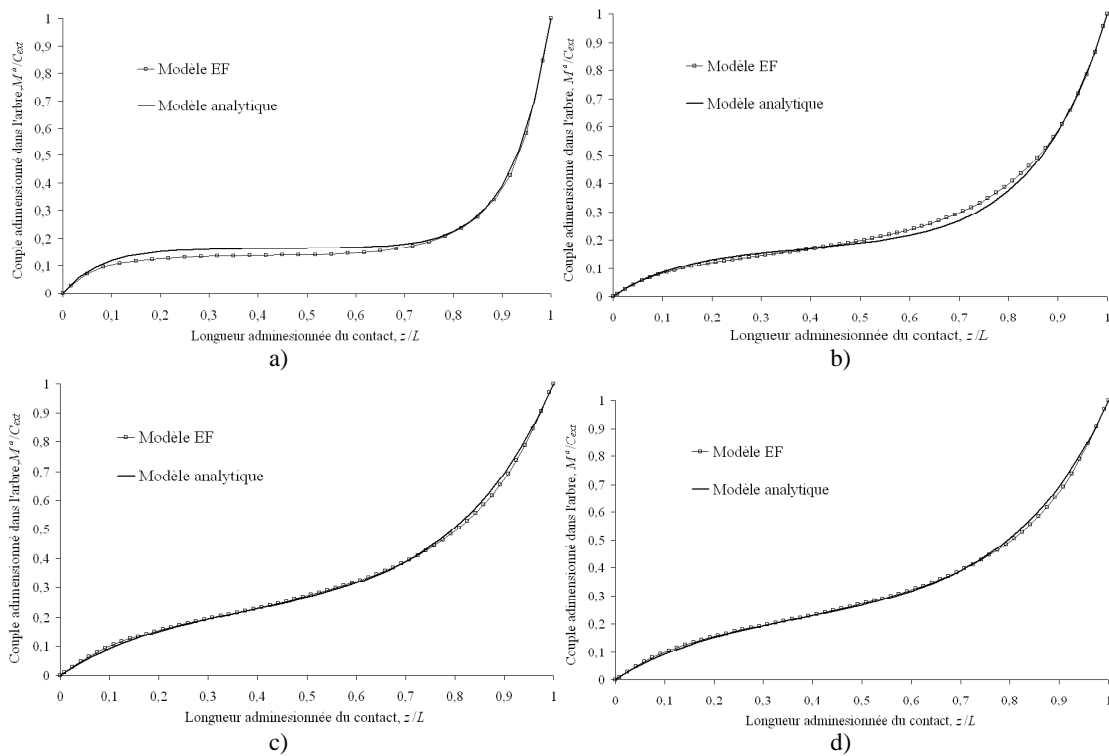
Le chargement en torsion du modèle EF est introduit en imposant une contrainte de cisaillement qui augmente proportionnellement au rayon dans la section chargée. Ce chargement est identique au cas d'une torsion pure d'une poutre de section circulaire. La façon dont la contrainte est imposée lors de la modélisation EF est détaillée en annexe III.

- Cas où les dents ne débordent pas du contact

Deux configurations de la cannelure sont retenues lors de cette étude. La première est un non-dépassement des dents de l'arbre et du moyeu après le contact, comme le montre la Figure 4-13. Les dents de l'arbre et du moyeu sont donc de même longueur et le contact existe sur toute cette longueur.



**Figure 4-13** Secteur d'une cannelure sans dépassement des dents



**Figure 4-14** Comparaison du modèle EF 3D et du modèle 1D pour quatre cannelures différentes sans dépassement des dents



La comparaison entre les résultats des modèles EF et analytique de la répartition du couple à travers l'arbre est présentée pour cette nouvelle configuration à la Figure 4-14. Quatre cannelures différentes sont alors étudiées, leur géométrie est définie au Tableau 4-1.

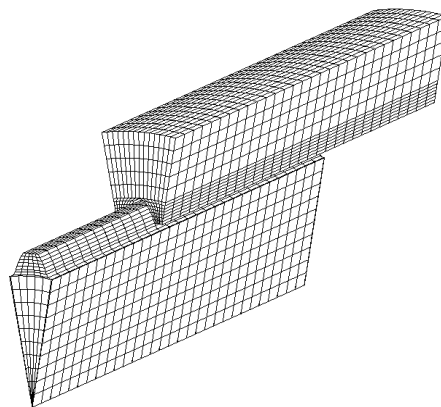
Figure 4-14	Cannelures correspondantes		
<i>indice</i>	<i>désignation</i>	<i>Diamètre extérieur du moyeu</i>	<i>Diamètre intérieur de l'arbre</i>
a	18 × 1.25	35 mm	10 mm
b	27 × 1.667	70 mm	15 mm
c	18 × 2.5	70 mm	10 mm
d	25 × 2.5	90 mm	30 mm

**Tableau 4-1 Correspondance des graphiques et des cannelures étudiées**

Il est possible de remarquer, sur la Figure 4-14a, la présence d'une zone où le couple est quasiment constant. Cela se traduit par une zone où la pression de contact est très faible. C'est un phénomène mis en avant par Volfson. Si une cannelure est longue alors apparaît en son centre une zone ne travaillant pas.

- Cas où les dents débordent du contact

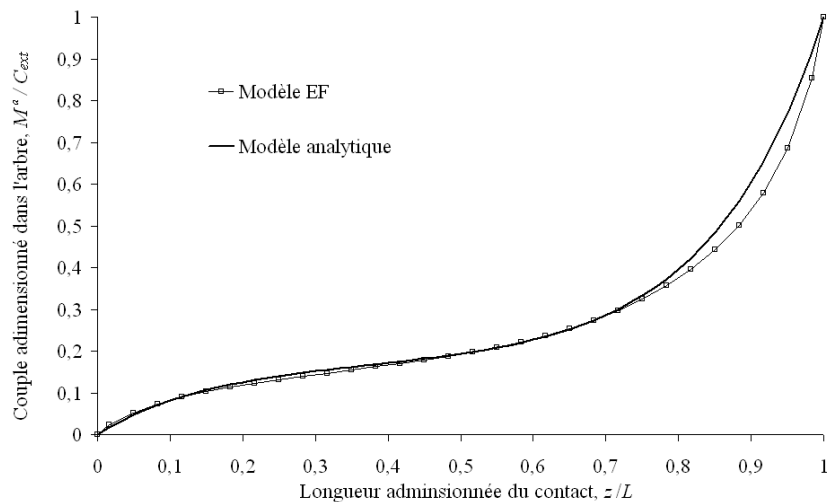
Une deuxième configuration est étudiée. Elle est illustrée à la Figure 4-15. Cette fois-ci les dents débordent du contact. D'un côté il s'agit des dents de l'arbre qui continuent après le contact et de l'autre il s'agit des dents du moyeu.



**Figure 4-15 Section d'une cannelure avec dépassement des dents**

Les résultats du modèle Tatur - Orain s'éloignent de ceux du modèle EF 3D, comme le montre la Figure 4-16 qui représentent les résultats des modèles analytiques et EF d'une cannelure 18 × 2.5 avec un  $D_{ext}$  de 70mm et un  $D_{int}$  de 10mm. Cet écart peut provenir de

l'apparition du phénomène de punch, vu lors du comportement radial, aux extrémités du contact. En effet dans la première configuration étudiée, il n'y avait pas de phénomène d'indentation des dents dans le sens longitudinal, donc pas d'effet punch dans cette direction. La principale hypothèse du modèle de Tatur - Orain (chaque section droite reste droite et tourne en bloc au cours du chargement) peut aussi éloigner le modèle des bons résultats. Nous discutons lors du dernier chapitre de la validité de cette hypothèse.



**Figure 4-16 Comparaison du modèle EF 3D et du modèle analytique avec dents dépassant du contact**

Finalement cette étude a mis en évidence la possibilité de simuler la distribution du couple à travers une cannelure à flancs en développante de cercle sous certaines conditions. Ce modèle analytique utilisant un paramètre de raideur pour traduire la contribution des dents, nous pouvons penser que les autres types de cannelures peuvent aussi être traitées. Ce modèle corrèle-t-il toujours aussi bien les résultats des modèles EF pour d'autres types de liaisons cannelées ?

➤ Généralisation de l'étude aux autres types de liaison cannelée

Pour répondre à cette question, il est nécessaire de comparer les résultats des modèles EF et analytique dans le cas d'une cannelure à flancs parallèles et de dentelures rectilignes. Nous nous plaçons dans la première configuration, quand les dents ne débordent pas du contact (voir Figure 4-13).

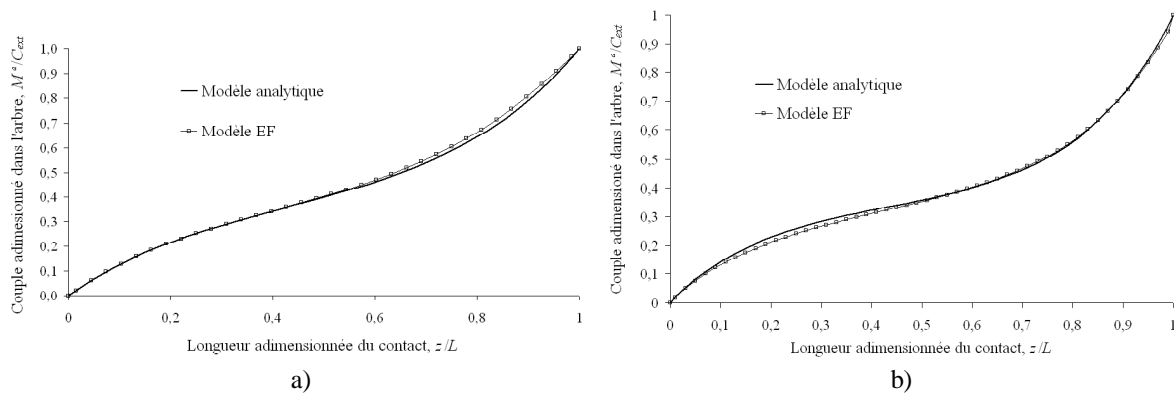
○ Cannelure à flancs parallèles

Pour obtenir la distribution analytique du couple, il est nécessaire de connaître au préalable la rigidité des dents  $C_\varphi$ . Au cours de l'étude du comportement radial, ce type de

cannelure n'a pas été traité analytiquement. Par contre, comme dans le cas des cannelures à flancs en développantes de cercle, ce paramètre peut être déterminé à l'aide d'un modèle Eléments Finis 2D en déformation plane.

Deux cannelures sont choisies pour étudier ici le comportement axial, celle exploitée pour le banc d'essai,  $6 \times 28 \times 34$ , ayant un  $C_\phi$  de  $5.71 \times 10^7$  N/rad et une autre ayant pour désignation  $8 \times 36 \times 40$  avec un  $C_\phi$  de  $1.25 \times 10^8$  N/rad.

Leurs résultats associés sont visibles respectivement Figure 4-17a et b.

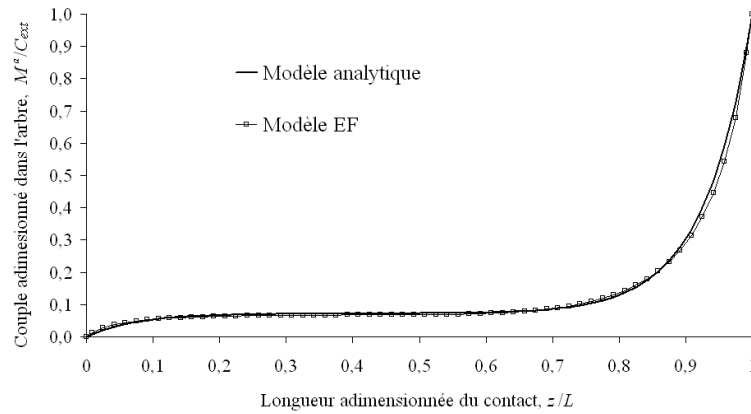


**Figure 4-17 Comparaison du modèle EF avec le modèle analytique pour deux cannelures à flancs parallèles**

La Figure 4-17 conforte l'idée déjà formulée lors de l'introduction que le comportement axial d'une cannelure peut être décrit par le modèle de Tatur - Orain quel qu'en soit le type. Seul le comportement radial et donc la raideur des dents change.

#### o Dentelures rectilignes

La Figure 4-18 met en évidence la validité du modèle 1D dans le cas de la recherche de la distribution du couple d'une dentelure rectiligne. La dentelure employée pour la comparaison a un module 2mm, comportant 31 dents et de diamètre primitif 16mm. Un léger écart est cependant visible entre  $z = 0.7L$  et  $z = 0.9L$ . Cela n'est pas problématique car ce qui compte dans la distribution du couple est la bonne estimation des forts gradients. En effet ils permettront ensuite de connaître les zones de fortes pressions qui sont les paramètres de base pour obtenir des critères de dimensionnement ou de durée de vie.



**Figure 4-18 Comparaison du modèle EF avec le modèle analytique d'une dentelure rectiligne**

En conclusion le modèle analytique 1D de Tatur - Orain permet de simuler de manière satisfaisante une cannelure dans une situation réelle où les dents ne dépassent pas du contact. C'est une méthode rapide qui est basée sur la connaissance de la rigidité d'une dent, qui a été obtenue lors du chapitre sur le comportement radial.

#### 4.4.2 Exploitation du modèle de Tatur - Orain

Le modèle de Tatur - Orain permet la description de la distribution du couple le long de la cannelure. Il est possible d'aller plus loin en l'exploitant de façon à obtenir des informations qui sont intéressantes physiquement. Certains chercheurs comme Orain ou Adey [Adey, 2000] l'ont utilisé afin de prouver qu'en bombant axialement les dents de la cannelure, la pression aux extrémités chute.

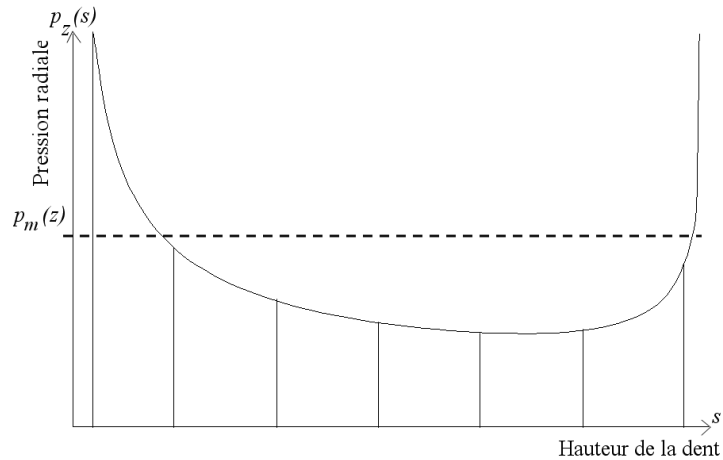
D'autres possibilités, tout aussi intéressantes, n'ont jamais fait l'objet d'étude. Il s'agit de la recherche de la pression moyenne maximale le long de l'axe et des conditions conduisant à un transfert de couple optimum (le même pic de pression aux deux extrémités).

##### ➤ Recherche de la pression maximum

Dans le chapitre 2 puis le chapitre 3, nous avons mis en évidence la non-uniformité de la pression suivant la direction radiale de la dent d'une cannelure. Posons  $p_z(s)$  l'évolution radiale de la pression dans une section  $z$ . La pression moyenne est définie ainsi :

$$\int_{s=-a}^{s=a} p_z(s) ds = 2a p_m(z)$$

Avec  $p_m(z)$  la pression moyenne en  $z$  (moyenne dans la direction radiale) et  $a$  est la demi-hauteur curviligne de la dent (entre le rayon maximum et minimum du contact).



**Figure 4-19 Définition de la pression moyenne**

Comme l'a montré Orain, il est possible de lier le couple avec cette pression moyenne par l'équation suivante :

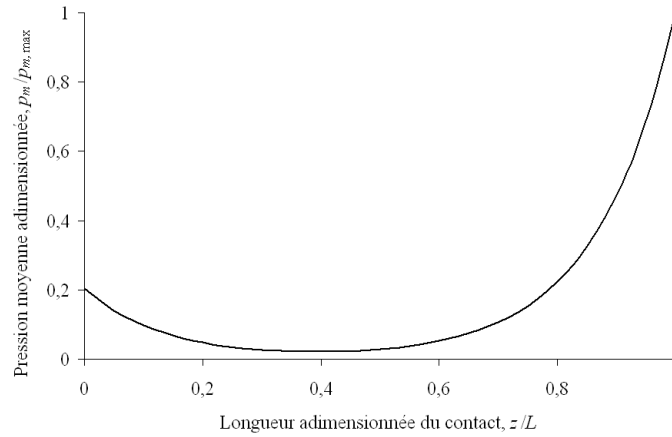
$$2 a Z R_{moy} p_m(z) = -\frac{dM^a(z)}{dz} = \frac{dM^m(z)}{dz},$$

Avec  $R_{moy}$  est le rayon moyen de la dent, il correspond aussi au rayon primitif.

Dans le cas de la méthode de Tatur - Orain le couple dans l'arbre est donné par l'équation (4-5). L'expression de la pression moyenne est donc :

$$p_m(z) = \frac{Ae^{kz} + Be^{-kz}}{2 a Z R_{moy}}$$

Avec  $A, B$  les constantes définies dans le chapitre 4. Son allure pour une cannelure à flancs en développante de cercle 18× 2.5, avec un  $D_{ext}$  de 70mm et un  $D_{int}$  de 10mm, est illustrée à la Figure 4-20.



**Figure 4-20 Allure de la pression moyenne**

Afin de connaître les propriétés de la répartition de la pression moyenne, il est utile d’analyser sa dérivée. Celle-ci à pour expression :

$$\frac{dp_m(z)}{dz} = \frac{A k e^{kz} - B k e^{-kz}}{2 a Z R_{moy}} .$$

Son allure, pour la même cannelure 18× 2.5, est illustrée par la Figure 4-21.

La dérivée s’annule en une seule position axiale qui a pour valeur :

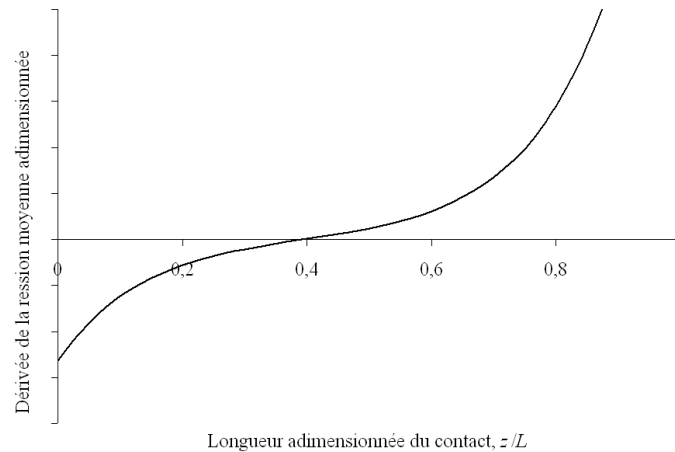
$$z_1 = \frac{1}{k} \ln \left( \frac{\sqrt{(G^m I^m e^{kL} + G^a I^a)(G^a I^a e^{kL} + G^m I^m) e^{kL}}}{G^m I^m e^{kL} + G^a I^a} \right)$$

De plus la valeur de la constante  $B$  étant plus grande que celle de  $A$ , pour  $z = 0$ , la dérivée est toujours négative.

Enfin il est possible d’écrire la dérivée sous la forme suivante :

$$\frac{dp_m(z)}{dz} = \frac{A k (e^{kz} - e^{-kz})}{2 a Z R_{moy}} - \frac{B k e^{-kz}}{2 a Z R_{moy}} = \frac{A k \sinh(k z)}{a Z R_{moy}} - \frac{C_\varphi C_{ext} e^{-kz}}{2 G^m I^m a Z R_{moy}}$$

Les fonctions  $\sinh(k z)$  et  $-e^{-kz}$  étant croissantes, nous pouvons conclure que la dérivée entre 0 et  $z = L$  est croissante, en s’annulant en  $z_1$ . Ces propriétés montrent qu’entre 0 et  $z_1$   $p_m(z)$  est une fonction qui décroît pour croître entre  $z_1$  et  $L$ . Il existe donc deux maximums, qui seront obligatoirement en  $z = 0$  et  $z = L$ .



**Figure 4-21 Allure de la dérivée de la pression moyenne**

➤ Recherche du transfert de couple optimum

Obtenir un transfert de couple optimum se traduit par le fait d'avoir des pics de pression moyenne équivalents aux extrémités. Qu'impose physiquement cette condition ? Autrement dit, quelles sont les solutions de l'équation :

$$p_m(0) = p_m(L)$$

Soit :

$$\frac{A+B}{2aZR_{moy}} = \frac{Ae^{kL} + Be^{-kL}}{2aZR_{moy}}$$

$$A(1 - e^{kL}) + B(1 - e^{-kL}) = 0$$

$k$  et  $L$  étant non nul, cette équation a pour solution  $A = Be^{-kL}$ . Elle se simplifie pour donner :

$$C_\varphi = \frac{k^2 G^m I^m}{2}$$

$C_\varphi$  étant non nul, la seule solution ayant une signification physique est  $G^a I^a = G^m I^m$ . Cela signifie que pour avoir un transfert de couple optimum les raideurs des corps des pièces mises en jeu doivent être identiques.

Ce résultat est très intéressant pour un concepteur qui ne souhaite pas fragiliser une partie d'une cannelure. En effet en respectant cette condition, les deux pics de pression seront

identiques, ce qui a pour avantage de faire travailler de la même quantité les deux extrémités axiales du contact. Une conséquence est donc d'atténuer l'usure.

#### 4.4.3 Extension du modèle Tatur - Orain au cas du sens non traversant

##### ➤ Mise en place du modèle analytique

Le changement de configuration impose un changement dans l'équilibre des moments dans une section de la cannelure. Ainsi il est possible d'écrire pour le cas d'une cannelure travaillant dans le sens non traversant :

$$M^a(z) = -M^m(z) \quad (4-6)$$

En intégrant dans l'équation de base de Tatur - Orain (4-1) les équations des angles de rotation de l'arbre et du moyeu à la section  $z$ , (4-2) et (4-3), et en utilisant la propriété du sens non traversant décrite par l'équation (4-6), nous trouvons l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 M^a}{dz^2} - C_\varphi \left( \frac{1}{G^a I^a} + \frac{1}{G^m I^m} \right) M^a = 0 \quad (4-7)$$

La solution de cette équation, en définissant le paramètre  $k$  de la même manière que pour l'équation (4-5) et en considérant la condition aux limites qui impose  $M^a(L) = C_{ext}$  est :

$$M^a(z) = \frac{A'}{k} (e^{kz} - e^{-kz}) \quad (4-8)$$

Avec

$$A' = \frac{k C_{ext}}{e^{kL} - e^{-kL}}.$$

Comme dans l'étude du cas du sens traversant, ce modèle est confronté aux résultats issus du modèle EF 3D.

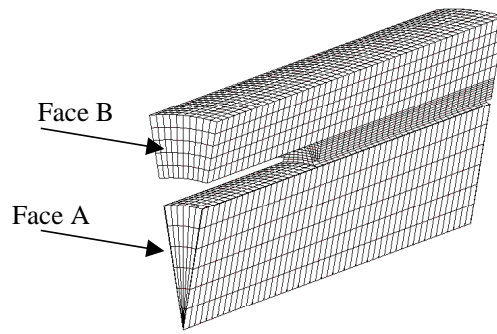
##### ➤ Confrontation du modèle analytique à des modèles EF 3D

Comme dans le cas du sens traversant, les deux configurations sans ou avec débordement des dents peuvent être envisagées.

##### ○ Cas où les dents ne débordent pas du contact

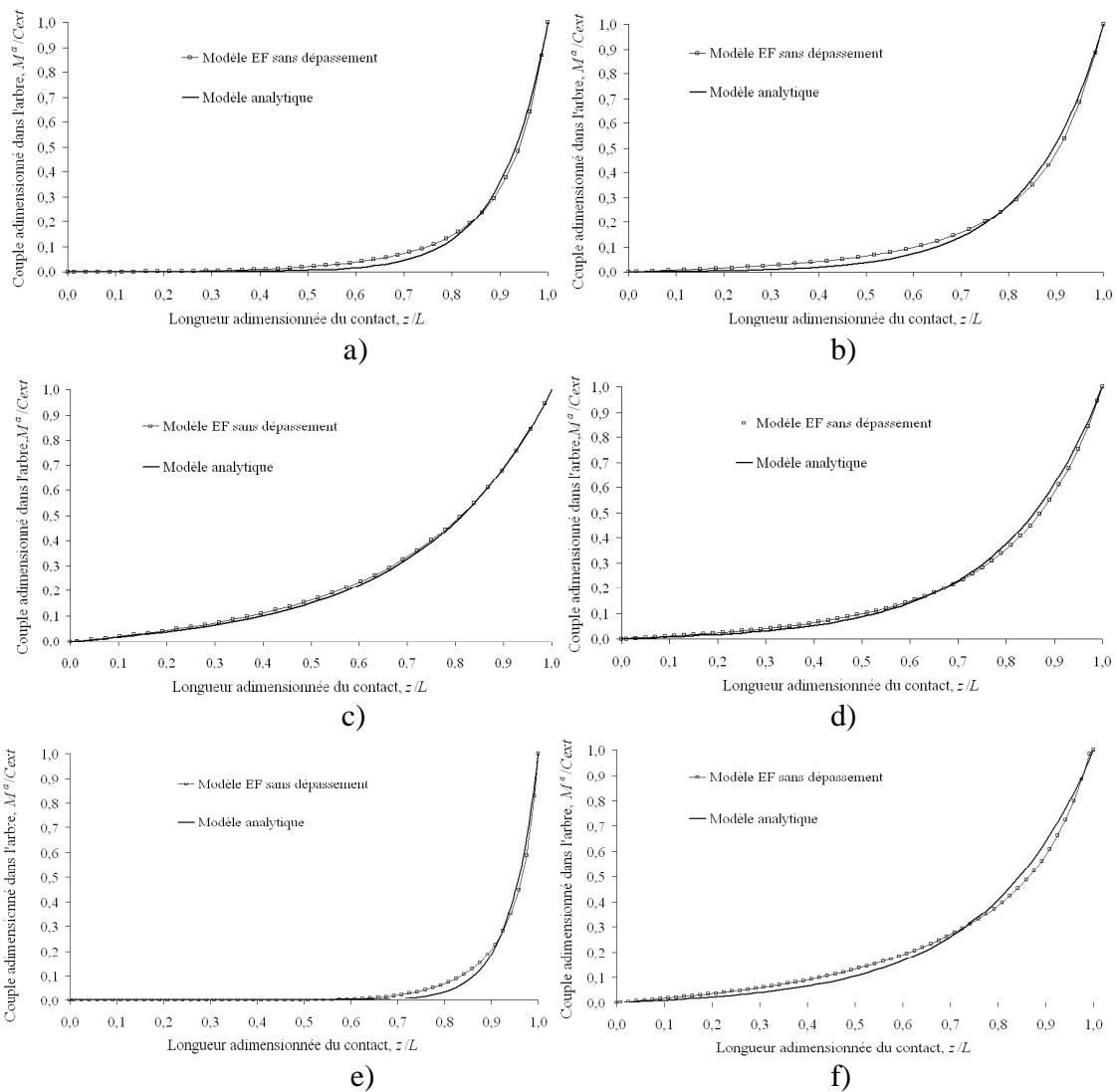
La première configuration est lorsqu'il n'y a aucun dépassement des dents après le contact. Cette configuration est visible à la Figure 4-22. Les blocages du moyeu (sur la face B) sont situés cette fois du même côté que le chargement de l'arbre (sur la face A).





**Figure 4-22 Cannelure sans dépassement des dents travaillant dans le sens non traversant**

Nous comparons les résultats analytiques avec les modèles EF des différents types de liaisons cannelées.



**Figure 4-23 Comparaison entre le modèle EF 3D sans dépassement des dents et le modèle analytique**

Nous avons retenu deux cannelures de chaque type afin d'avoir une vision globale sur la précision des résultats obtenus. La Figure 4-23 permet d'effectuer une comparaison entre les différentes cannelures. Pour faciliter la compréhension, le Tableau 4-2 donne la correspondance entre les courbes et la définition des cannelures exploitées.

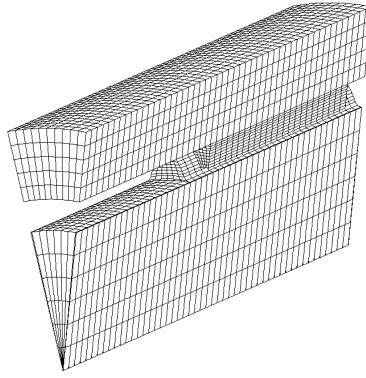
Figure 4-23	Cannelures correspondantes			
<i>indice</i>	<i>Type</i>	<i>Désignation</i>	<i>D<sub>ext</sub></i>	<i>D<sub>int</sub></i>
a	Flancs à développante de cercle	18 × 1.25	35 mm	10 mm
b	Flancs à développante de cercle	18 × 2.5	70 mm	10 mm
c	Flancs parallèles	6 × 28 × 34	40 mm	0 mm
d	Flancs parallèles	8 × 36 × 40	50 mm	0 mm
e	Dentelures rectilignes	16	30 mm	0 mm
f	Dentelures rectilignes	52	70 mm	0 mm

**Tableau 4-2 Correspondance des graphiques et des cannelures étudiées**

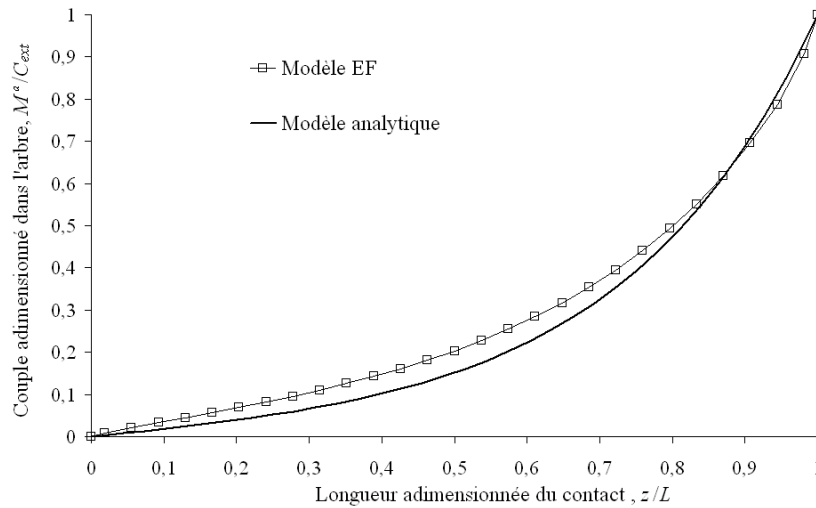
La Figure 4-23 révèle que certaines cannelures offrent de meilleurs résultats que d'autres. Cependant une bonne corrélation est obtenue entre les différents modèles EF et analytiques de manière générale. Les différences observées peuvent provenir d'un écart dans l'estimation de la raideur ou des moments quadratiques polaires des cannelures.

○ Cas où les dents débordent du contact

La deuxième configuration correspond au dépassement des dents du contact, visible Figure 4-24. Les résultats, représentés Figure 4-25, correspondent à la cannelure à flancs parallèles 6 × 28 × 34. Ils rappellent ceux du cas où le sens est traversant et révèle la mauvaise corrélation entre les résultats analytique et EF.



**Figure 4-24 Cannelure avec dépassement des dents travaillant dans le sens non traversant**



**Figure 4-25 Comparaison des transferts de couples avec dépassement des dents**

Il est donc toujours possible de considérer que les modèles analytique et EF sans dépassement des dents aboutissent aux mêmes transferts de couple dans une cannelure. De plus le modèle analytique permet d'obtenir la distribution du couple à travers la liaison avec cependant une légère baisse de précision par rapport au sens passant.

Enfin dans le cas du sens non-traversant, il n'est pas utile de rechercher la pression moyenne maximale car la zone la plus sollicitée est située toujours en  $z = L$ .

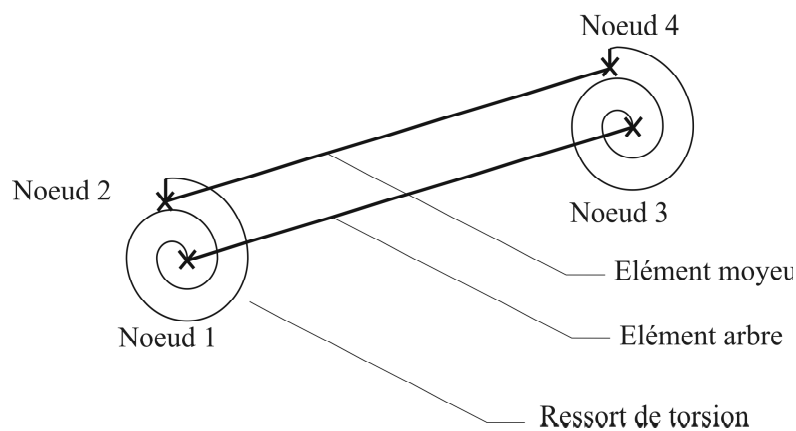
## 4.5 DETERMINATION DU COUPLE PAR LA METHODE DE BLANC

### 4.5.1 Mise en place du modèle de Blanc

Le modèle de Tatur - Orain est basé sur des sections de géométrie constantes le long de l'axe. La présence de bride ou de rayons extérieurs évolutifs le long de l'axe ne peuvent

pas être modélisés avec cette méthode. Nous proposons donc d'étudier un autre modèle, développé par Blanc [Blanc, 1999] basé sur les Eléments Finis 1D. Il permet, contrairement à la méthode analytique, d'introduire des diamètres extérieurs de moyeu variables. Cette approche présente toutefois l'avantage de rester simple et peu coûteux en temps de calcul.

La cannelure est divisée en tronçons (voir chapitre 1), qui sont constitués d'une partie corps de l'arbre, d'une partie moyeu et d'une partie dent. La Figure 4-26 est une représentation schématique d'un secteur de tronçon de la cannelure. Chaque tronçon comporte deux éléments poutres coaxiaux délimités chacun par deux nœuds et deux éléments « ressort de torsion » complétant la description de l'ensemble.



**Figure 4-26 Représentation d'un secteur de tronçon de cannelure**

Dans chaque tronçon, il est possible d'exprimer le couple traversant l'arbre en fonction du couple du moyeu et des caractéristiques des dents. Il en est de même avec le couple du moyeu.

La relation entre les déplacements et les efforts dans la partie arbre du tronçon est exprimée sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} M_{t_1}^a \\ M_{t_3}^a \end{Bmatrix} = [K_t^a] \begin{Bmatrix} \varphi_{t_1}^a \\ \varphi_{t_3}^a \end{Bmatrix} \quad (4-9)$$

Avec

$M_{t_1}^a, M_{t_3}^a$  : les couples dans le tronçon  $t$  au nœud 1 et 3 de l'arbre,

$\varphi_{t_1}^a, \varphi_{t_3}^a$  : les rotations dans le tronçon  $t$  au nœud 1 et 3 de l'arbre,

$K_t^a$  : la matrice de rigidité de la partie arbre du tronçon.

L'expression classique d'une matrice de rigidité dans le cas d'une poutre soumise à de la torsion est :

$$K_t = \begin{bmatrix} \frac{GI}{L} & -\frac{GI}{L} \\ -\frac{GI}{L} & \frac{GI}{L} \end{bmatrix}$$

Avec

$G$  : le module de cisaillement de la poutre,

$I$  : le moment quadratique polaire de la poutre,

$L$  : la longueur de la poutre.

Dans le cas étudié de la cannelure, nous rajoutons juste un indice de façon à différencier les termes provenant de l'arbre de ceux provenant du moyeu. Les termes  $G$ ,  $I$  et  $L$  deviennent donc pour un tronçon d'arbre  $G^a$ ,  $I^a$  et  $L_t$ .

$G^a I^a$  peut être obtenu de deux manières différentes. Soit le moment quadratique polaire exact de l'arbre avec les dents peut être calculé, soit cette raideur est décomposée en deux parties comme le propose Blanc. Le calcul exact du moment quadratique polaire s'avérant ne pas être trivial nous avons choisi de développer la seconde solution. Elle revient à séparer le comportement du corps et celui des dents :

- le corps travaille en torsion, sa raideur a pour expression :

$$K^a = \frac{G^a I^a}{L_t} \quad (4-10)$$

Le moment quadratique polaire  $I^a$  étant uniquement celui du corps délimité par le rayon de la fondation des dents de l'arbre  $R_{re}$  et le rayon intérieur dans le cas d'un arbre creux,  $R_{int}$ . Il vaut donc :

$$I^a = \frac{\pi(R_{re}^2 - R_{int}^4)}{4}$$

- Les dents travaillent en cisaillement, leur raideur vaut :

$$K^a = \frac{G^a S^a Z D_p^2}{4L_t} \quad (4-11)$$

Avec

$S^a$  : la surface cisailée d'une dent de l'arbre,

$D_p$  : le diamètre primitif de la cannelure,

$Z$  : le nombre de dents.

Finalement le corps de l'arbre et les dents travaillant en parallèle, la matrice de raideur d'un tronçon de l'arbre est obtenue en additionnant les raideurs (4-10) et (4-11). Elle a pour expression :

$$K_t^a = \begin{bmatrix} \frac{G^a (I^a + S^a Z D_p^2)}{4L_t} & -\frac{G^a (I^a + S^a Z D_p^2)}{4L_t} \\ -\frac{G^a (I^a + S^a Z D_p^2)}{4L_t} & \frac{G^a (I^a + S^a Z D_p^2)}{4L_t} \end{bmatrix} \quad (4-12)$$

Le même raisonnement nous conduit à la raideur d'un tronçon du moyeu, comportant des dents mais sans contact avec l'arbre :

$$K_t^m = \begin{bmatrix} \frac{G^m (I^m + S^m Z D_p^2)}{4L_t} & -\frac{G^m (I^m + S^m Z D_p^2)}{4L_t} \\ -\frac{G^m (I^m + S^m Z D_p^2)}{4L_t} & \frac{G^m (I^m + S^m Z D_p^2)}{4L_t} \end{bmatrix} \quad (4-13)$$

Avec bien entendu

$G^m$  : le module de cisaillement du moyeu,

$S^m$  : la surface cisailée d'une dent du moyeu,

$I^m$  : le moment quadratique polaire du corps du moyeu délimité par le rayon de la fondation des dents du moyeu  $R_{ri}$  et le rayon extérieur  $R_{ext}$ . Sa formulation est :

$$I^m = \frac{\pi (R_{ext}^4 - R_{ri}^2)}{4}.$$

Nous avons souligné que les matrices  $K_t^m$  et  $K_t^a$  ne sont valables que pour lier les efforts et les déplacements dans le cas où le moyeu ou l'arbre ne sont pas en contact.

Rajoutons maintenant cette liaison. Les dents transmettent le couple entre le moyeu et l'arbre. Leur raideur engendre une différence angulaire entre l'arbre et le moyeu régie par les équations :

$$\begin{aligned} M_{t_1}^a &= -M_{t_2}^m = K_{t,d} (\varphi_{t_1}^a - \varphi_{t_2}^m) \\ M_{t_3}^a &= -M_{t_4}^m = K_{t,d} (\varphi_{t_3}^a - \varphi_{t_4}^m) \end{aligned}$$

Avec  $K_{t,d}$  la raideur d'une moitié de tronçon. Elle a pour expression :

$$K_{t,d} = C_\varphi \frac{L_t}{2}.$$

Ainsi il est possible d'obtenir la matrice de rigidité globale d'un tronçon.

$$\begin{Bmatrix} M_{t_1}^a \\ M_{t_2}^m \\ M_{t_3}^a \\ M_{t_4}^m \end{Bmatrix} = [K_{t,global}] \begin{Bmatrix} \varphi_{t_1}^a \\ \varphi_{t_2}^m \\ \varphi_{t_3}^a \\ \varphi_{t_4}^m \end{Bmatrix} \quad (4-14)$$

Avec

$M_{t_2}^m, M_{t_4}^m$  : les couples dans le tronçon t aux nœuds 2 et 4 du moyeu,

$\varphi_{t_2}^m, \varphi_{t_4}^m$  : les rotations dans le tronçon t aux nœuds 2 et 4 du moyeu,

$K_{t,global}$  : la matrice de rigidité du tronçon :

$$K_{t,global} = \begin{bmatrix} K_t^a + K_{t,d} & -K_{t,d} & -K_t^a & 0 \\ -K_{t,d} & K_t^m + K_{t,d} & 0 & -K_t^m \\ -K_t^a & 0 & K_t^a + K_{t,d} & -K_{t,d} \\ 0 & -K_t^m & -K_{t,d} & K_t^m + K_{t,d} \end{bmatrix}$$

Pour simuler la cannelure, il faut assembler toutes les matrices  $K_{t,global}$  entre elles. La matrice de raideur obtenue est appelée  $K_{cannelure}$ .

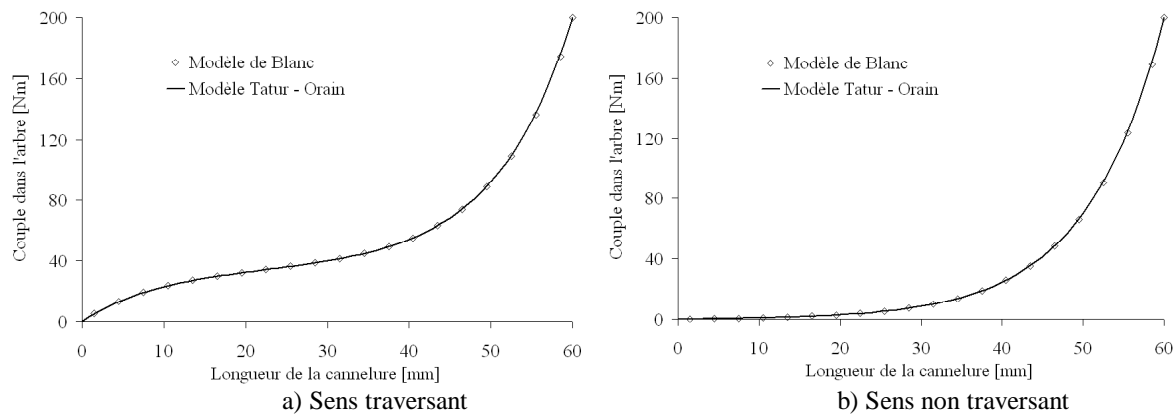
$$K_{cannelure} = \begin{bmatrix} \begin{array}{cc|cc|cc} \text{Tronçon } n^{\circ}1 & & & & & \\ \hline K_1^a + K_{1,d} & -K_{1,d} & -K_1^a & 0 & 0 & 0 \\ -K_{1,d} & K_1^m + K_{1,d} & 0 & -K_1^m & 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{cc|cc} \text{Tronçon } n^{\circ}2 & & & \\ \hline 0 & -K_2^m & 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{cc|cc} \text{Tronçon } n^{\circ}3 & & & \\ \hline -K_2^a & 0 & -K_2^a & 0 \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc|cc|cc} 0 & -K_1^m & -K_{1,d} - K_{2,d} & (K_1^m + K_{1,d}) + (K_2^m + K_{2,d}) & 0 & -K_1^m \\ 0 & 0 & -K_2^a & 0 & (K_2^a + K_{2,d}) + (K_3^a + K_{3,d}) & -K_{2,d} - K_{3,d} \\ 0 & 0 & 0 & -K_2^m & -K_{2,d} - K_{3,d} & (K_2^m + K_{2,d}) + (K_3^m + K_{3,d}) \end{array} \end{bmatrix}$$

Connaissant la matrice de rigidité de l'ensemble, il est alors possible de donner les conditions aux limites fournies par l'utilisateur. Il s'agit tout d'abord de la configuration de chargement. La charge est affectée sur le premier nœud de l'arbre. Ensuite si la cannelure travaille dans le sens traversant, alors le dernier nœud du moyeu est bloqué, sa rotation est

donc nulle. Dans le cas inverse, c'est le premier nœud qui est bloqué. Ce modèle est bien sûr adaptable à d'autres cas, en effet il est facile d'introduire le chargement et le blocage n'importe où sur l'arbre ou le moyeu. Cela n'a pas fait l'objet d'étude au cours de cette thèse, mais une programmation du modèle permet une rapide adaptation.

La résolution du système est réalisée par la méthode classique de Goss-Jordan.

#### 4.5.2 Comparaison des résultats entre le modèle Tatur - Orain et le modèle de Blanc



**Figure 4-27 Comparaison des modèles dans les deux configurations de chargement différentes**

Nous confrontons les modèles présentés de Blanc et Tatur - Orain pour une même cannelure ( $18 \times 2.5$ ,  $D_{ext}=70\text{mm}$ ,  $D_{int}=10\text{mm}$ ). La Figure 4-27 permet de visualiser cette comparaison pour les deux configurations de chargement sens traversant et sens non traversant. Nous pouvons voir que les modèles donnent exactement les mêmes résultats.

#### 4.5.3 Exploitation du modèle de Blanc

Le modèle de Blanc offre la possibilité de travailler avec des diamètres variables. Pour voir la pertinence des résultats de ce modèle, nous l'avons confronté à un modèle EF pour deux exemples de cannelure. Le premier cas est une variation brusque du diamètre extérieur de la cannelure. Le second exemple est une cannelure dont les diamètres varient de telle manière à obtenir un cône sur les diamètres extrêmes de la cannelure.

Dans les deux cas, le modèle de Blanc prédit le comportement axial de la cannelure. Nous pouvons tout de même remarquer un écart entre les résultats EF 3D et ceux de Blanc qui peuvent provenir de plusieurs phénomènes comme l'approximation des moments



quadratiques polaires dans la méthode de Blanc et le couplage simpliste utilisé dans ce modèle entre les différents tronçons.

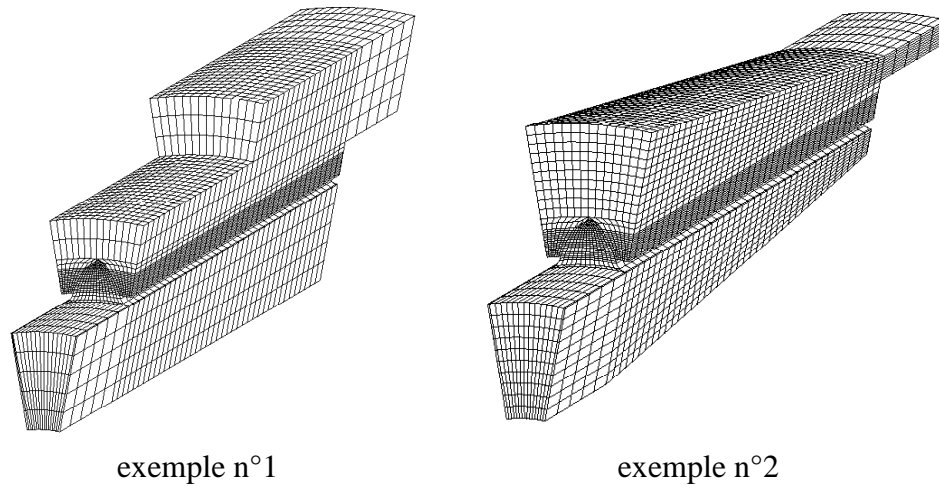


Figure 4-28 Illustration des cannelures étudiées

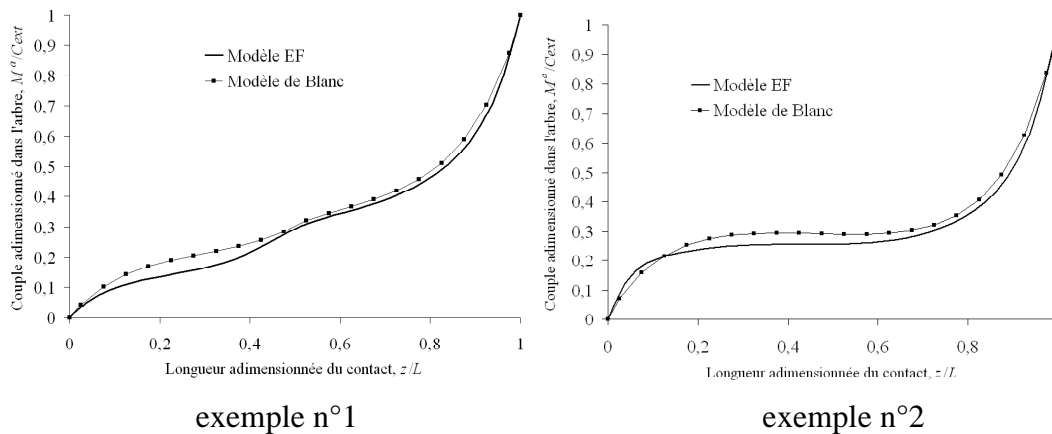


Figure 4-29 Comparaison des modèles EF et de Blanc

#### 4.6 CONCLUSION

A travers cette étude, nous avons montré que le modèle 1D présenté par Tatur et Orain est apte à déduire rapidement le comportement axial des cannelures et dentelures rectilignes. Ce modèle possède cependant une limite : il est valable pour le cas où les dents ne dépassent pas du contact.

Nous avons choisi de tester deux configurations d'introduction du couple pour observer la variation de comportement. Dans le cas où les efforts sont traversant, l'analyse nous a emmené à constater que le moment quadratique polaire joue bien un rôle dans la distribution du couple. Plus le rapport de moment quadratique polaire entre le moyeu et

l'arbre est important plus le couple est transmis par un coté de la cannelure. Dans le cas où les efforts sont non traversant, alors le couple est transmis par seulement un coté et le rapport des moments quadratiques polaires a un rôle qui est minimisé.

Une partie expérimentale a été créée afin de valider les résultats des simulations Eléments finis, ce qui ensuite nous a permis de considérer par la suite comme références les résultats issus des modèles EF 3D. Ces expériences sont basées sur la comparaison des déformations du diamètre extérieur du moyeu. Elles ont été réalisées pour les deux configurations d'introduction du couple.

Enfin ce travail a permis aussi de valider le travail précédent réalisé sur le comportement radial d'une cannelure. En effet pour les cannelures à flancs en développante de cercle, la rigidité des dents  $C_\phi$ , clé de voûte du modèle Tatur - Orain et obtenue dans le chapitre précédent, nous a permis d'obtenir une bonne corrélation avec la distribution de couple issue d'un modèle EF 3D.



---

## CHAPITRE 5 DEVELOPPEMENT D'UNE MAQUETTE D'OUTIL D'ASSISTANCE A LA CONCEPTION D'UNE LIAISON CANNELEE

*Dans les chapitres précédents, il a été mis en évidence la possibilité de prédire le comportement axial et radial d'une cannelure. Les diverses approches exposées permettent de mettre en place un outil d'assistance au dimensionnement d'une liaison cannelée. Une maquette d'outil est développée à l'aide du logiciel Excel. Celui-ci possède une facilité de programmation et d'interface, de plus ce logiciel, très connu, est largement distribué dans le monde industriel. Après une présentation de l'interface de l'outil, une description du déroulement des calculs sous forme algorithmique est présentée. Enfin, une analyse des résultats et des possibilités qu'offre cet outil d'assistance est menée.*

### 5.1 INTERFACE DE L'OUTIL D'ASSISTANCE

Le monde industriel a un besoin accru d'outils d'assistance. Dans les phases de pré-dimensionnement les outils doivent permettre d'obtenir des résultats cohérents dans des délais brefs. Afin de répondre à cette attente nous avons choisi de créer un outil d'assistance à la conception des liaisons cannelées qui évite le recours à des modèles Eléments Finis 3D. En effet les trois étapes de la mise en œuvre d'un modèle 3D, Concevoir, Calculer et Analyser sont des étapes incontournables qui demandent du temps. Exploiter le modèle 1D présenté lors de l'étude du comportement axial nous a paru très judicieux. Notre solution permettrait alors après seulement quelques choix d'obtenir une première expertise. Dans un premier temps, nous avons choisi de nous limiter à l'exploitation de cannelures à flancs en développante de cercle. Les autres cas pourront être intégrés plus tard après avoir modélisé leur comportement radial.

### 5.1.1 Interface de définition de la cannelure

**Figure 5-1 Interface définissant les propriétés principales de la liaison cannelée**

L'interface principale de l'outil proposé est réalisée à partir d'une boîte de dialogue intégrée à Excel (voir Figure 5-1). Il est possible d'y choisir les propriétés de la liaison cannelée comme le nombre de dents ou le module, la longueur, le diamètre extérieur du moyeu et intérieur de l'arbre, qui peuvent être non constants axialement. Quand ces rayons sont variables, la longueur de la cannelure est divisée en 10 parties et l'utilisateur doit rentrer les valeurs correspondantes à l'aide d'un tableau visible Figure 5-2. Cette interface permet également de sélectionner tout d'abord les types de matériaux souhaités pour l'arbre et pour le moyeu, mais aussi le chargement. L'arbre étant considéré comme bloqué à une extrémité, le chargement est réalisé depuis le moyeu et permet selon l'option choisie de faire travailler la cannelure dans le sens traversant ou non (option « oui – non » à droite de la valeur du couple). En effet, comme nous l'avons montré lors de l'étude du comportement axial, selon l'introduction de la charge la distribution du couple n'est pas la même.

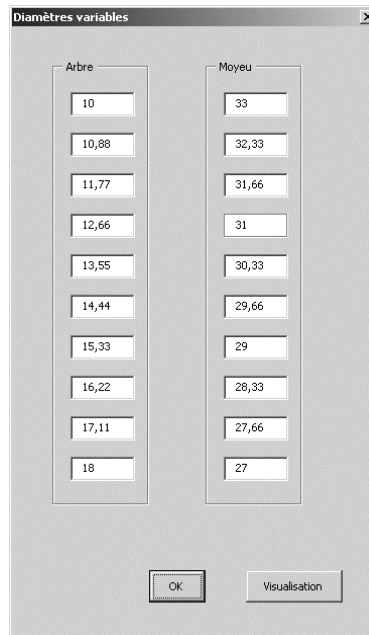


Figure 5-2 Tableau permettant d'insérer les différents diamètres

### 5.1.2 Interface de lancement des calculs

Une seconde interface, visible à la Figure 5-3, permet de choisir les résultats que l'utilisateur souhaite obtenir. Sur cette interface, il est alors possible de lancer les calculs ou de quitter le programme.

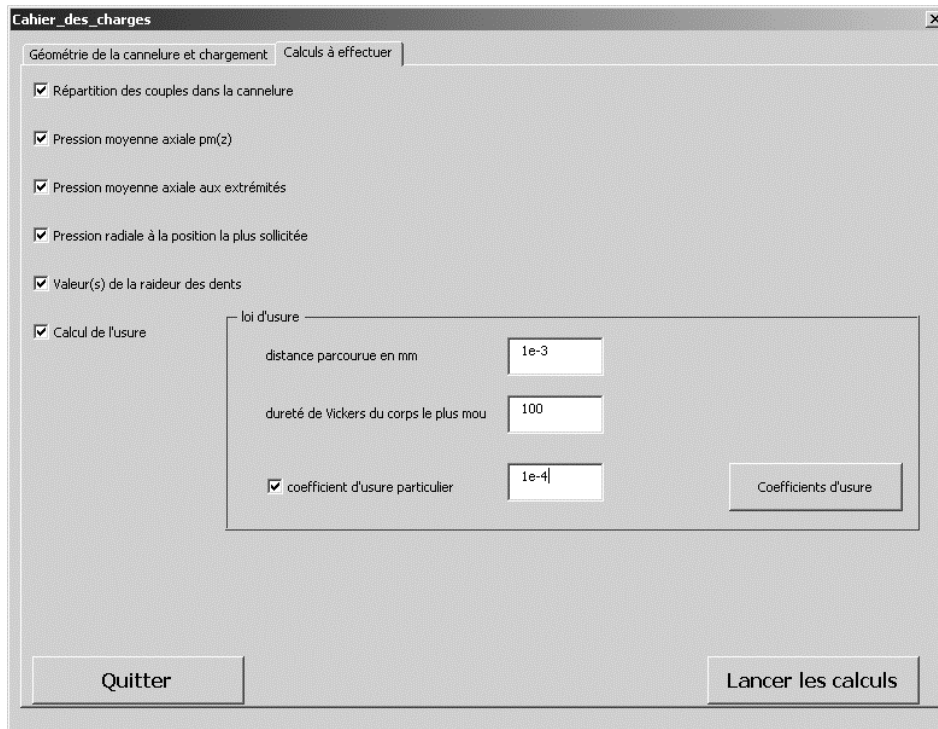


Figure 5-3 Interface permettant le choix des calculs

Ce logiciel permet aussi de calculer l'usure de la cannelure à l'aide d'une loi que nous détaillerons plus loin. Cette partie étant facultative, l'utilisateur a la possibilité à travers un bouton d'activer ou non ce calcul.

Pour laisser plus de choix, l'utilisateur peut calculer le volume usé en fonction d'un coefficient d'usure pré-réglé ou non. Un abaque des coefficients d'usure est disponible à partir de cette interface. Il est visible en Figure 5-4. Ce tableau est issu d'un article des Techniques de l'Ingénieur [Kapsa, 2006].

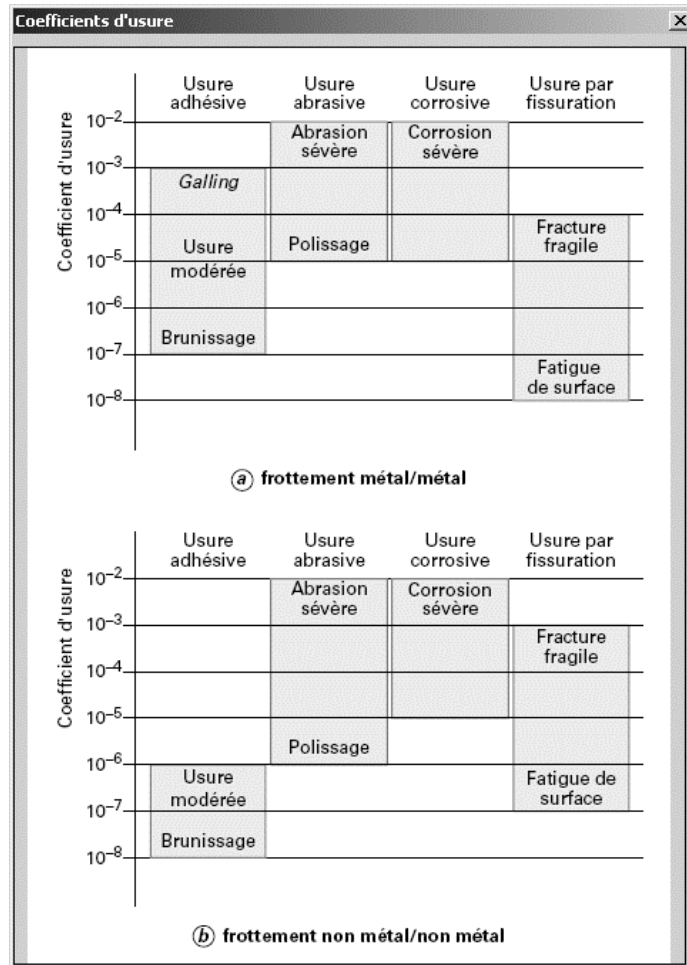
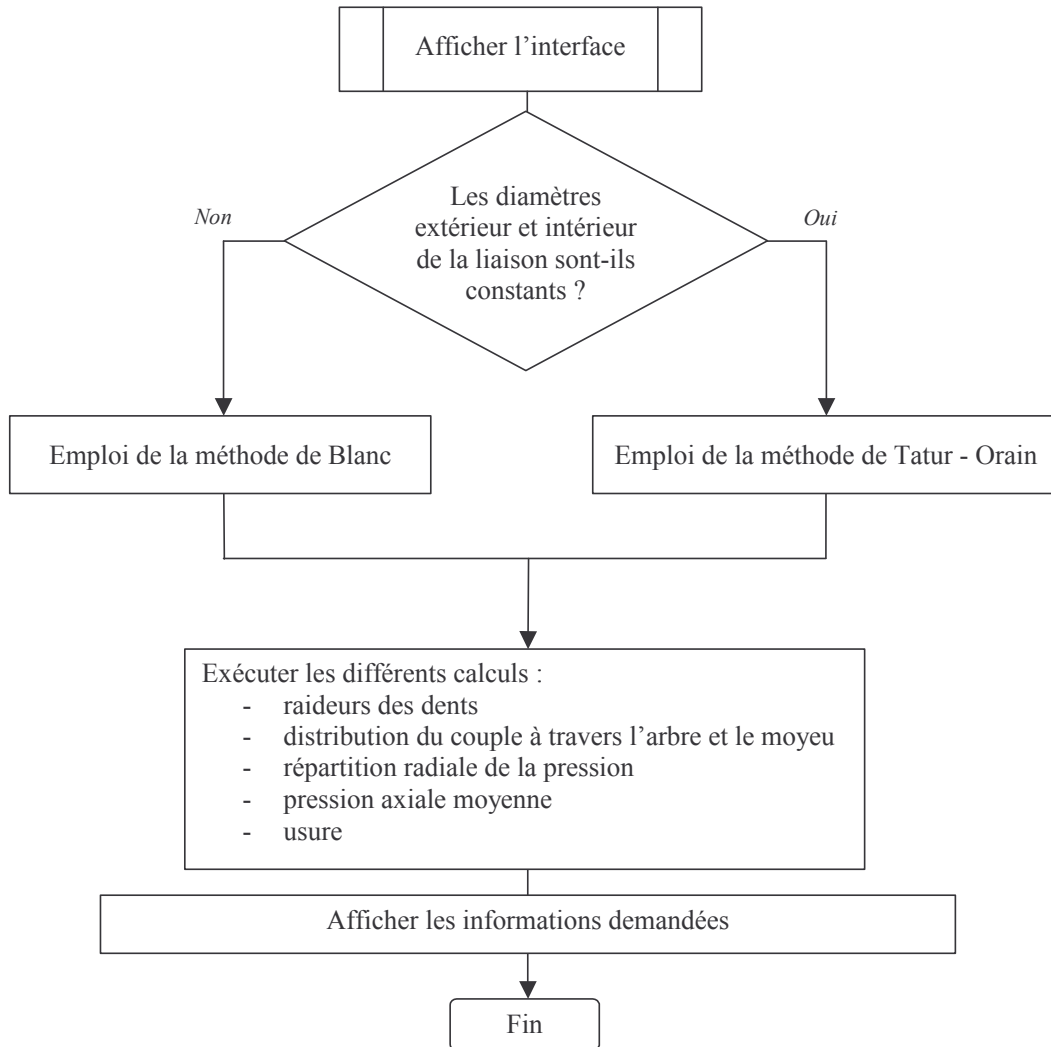


Figure 5-4 Tableau de coefficients d'usure

## 5.2 ALGORITHMES DE CALCUL

### 5.2.1 Description du programme



**Figure 5-5 Algorithme de résolution**

Lors de la présentation des interfaces de l'outil, nous avons montré la possibilité de travailler à diamètres constants ou variables. Selon le cas choisi, il est nécessaire d'utiliser une méthode de résolution plutôt qu'une autre. En effet selon le chapitre 4 sur le comportement axial, nous avons vu que deux méthodes valables existaient. La méthode analytique de Tatur - Orain permet d'obtenir très rapidement la répartition du couple à travers la cannelure mais n'offre pas la possibilité de faire varier les diamètres intérieurs et extérieurs de la liaison. La seconde méthode, celle de Blanc, basée sur les Eléments Finis 1D, permet l'utilisation de diamètres variables, mais en terme de temps de calcul est plus coûteuse. Nous avons donc



choisi d'implanter dans l'outil d'assistance ces deux méthodes, en fonction des propriétés de la liaison cannelée voulue.

Le cœur du système étant expliqué, une illustration décrivant l'architecture du programme est présentée Figure 5-5.

➤ Pressions et couples

Avant tout calcul de transfert de couple, nous avons vu lors des études précédentes que la raideur des dents doit être connue, et ce quelle que soit la méthode employée. Cependant, en fonction de la géométrie de la cannelure (diamètres variables ou non) il est nécessaire d'effectuer plusieurs fois le calcul de la raideur des dents. Ce calcul est réalisé pour un couple fictif, fixé dans le logiciel.

Une fois cette étape passée, il est possible de calculer la répartition du couple à travers l'arbre et le moyeu en utilisant la méthode appropriée au cas étudié.

En fonction de la demande, il est possible d'obtenir la pression moyenne le long d'un flanc de la cannelure ou bien obtenir cette pression aux positions les plus sollicitées. Nous rappelons que lors du chapitre 4 sur le comportement axial, nous avons montré que la pression moyenne était maximale aux extrémités de la cannelure.

Contrairement au cas du modèle analytique, dans le cas de la méthode de Blanc, il n'existe pas d'expression analytique de la pression moyenne. Il faut alors dériver de manière numérique en utilisant les différences finies. Ainsi en considérant que la longueur du contact est divisée régulièrement en  $n$  nœuds, l'expression de la pression moyenne est :

$$p_m(i) = \frac{M^a(i+1) - M^a(i-1)}{2\Delta z} \frac{1}{2aZR_{moy}}$$

Avec

$i$  : nœud, variant de 1 à  $n$ ,

$\Delta z$  : longueur entre deux nœuds consécutifs,

$R_{moy}$  : rayon moyen des dents de la cannelure,

$a$  : demi-longueur curviligne de la dent (entre le rayon maximum et minimum du contact).

$M^a(i)$  : le couple dans l'arbre au nœud  $i$ .

Pour les extrémités, en  $i = 1$  et  $i = n$ , nous obtenons respectivement :

$$p_m(1) = \frac{M^a(2) - M^a(1)}{2 a Z \Delta z R_{moy}} \text{ et } p_m(n) = \frac{M^a(n) - M^a(n-1)}{2 a Z \Delta z R_{moy}}.$$

Après avoir obtenu les valeurs des pressions moyennes maximales, nous pouvons en déduire la zone la plus sollicitée en recherchant le couple associé. Pour cela nous exploitons l'équation :

$$M_{sollicité}^a = Z R_{moy} S_{flanc,max} P_{m,max}$$

Avec

$M_{sollicité}^a$  : le couple dans l'arbre où la pression moyenne est maximale,

$p_{m,max}$  : la pression moyenne maximale,

$S_{flanc,max}$  : la surface sur laquelle  $P_{m,max}$  est appliquée :  $S_{flanc,max} = 2 a \Delta z_{max}$  .  $\Delta z_{max}$  est la distance axiale sur laquelle la pression est exercée.

A partir de ce couple et du modèle de comportement radial présenté au chapitre 3, il est alors possible d'obtenir la répartition radiale de la pression correspondante.

Finalement connaissant la répartition moyenne axiale de la pression et la répartition radiale de la pression, nous offrons donc à l'utilisateur la possibilité de connaître la distribution de la pression sur le flanc.

#### ➤ Usure

Dans le cas où le calcul de l'usure est demandé une recherche de la zone la plus sollicitée est réalisée. C'est dans cette zone que l'usure sera la plus importante.

Il est très difficile de prédire précisément l'usure d'une pièce sans faire appel à des essais. En effet les paramètres influant sur l'usure sont nombreux et dépendent essentiellement des mouvements relatifs entre les pièces en contact, de leurs vitesses, de la charge appliquée, du type de contact ponctuel ou surfacique mais aussi de l'environnement comme la température ou l'atmosphère. Cependant il existe des situations où même une estimation grossière de l'usure s'avère être utile. C'est pour cela que nous avons décidé de proposer dans le logiciel une loi de l'usure. Elle est issue des Techniques de l'Ingénieur dans un dossier traitant de l'usure [Kapsa, 2006]. En voici les termes :

$$U = k \frac{QD}{H}$$

Avec

$U$  : le volume usé en  $m^3$ ,

$k$  : le coefficient d'usure. Il prend en compte les paramètres influents comme la température, l'environnement, le type de contact, etc. Selon le type d'usure (adhésive, abrasive, corrosive ou par fissuration) la valeur de  $k$  correspond à une usure spécifique. Un abaque permettant d'estimer ce coefficient pour deux types de frottement (métaux/métaux et métaux/ non-métaux) est proposé Figure 5-4. Dans le cas des cannelures l'usure typique est de la fissuration,

$D$  : distance parcourue en mètre. Cette valeur est définie par l'utilisateur,

$H$  : dureté du corps (selon Vickers). Nous choisissons dans notre cas le matériau le plus contraignant entre l'arbre et le moyeu dans le cas où ils seraient différents, c'est à dire la dureté la plus faible. Cette valeur doit être rentrée par l'utilisateur,

$Q$  : la charge appliquée dans la zone d'usure en N. Elle directement issue dans notre cas de la pression moyenne axiale maximale,  $Q = 2 a \Delta z P_{m,max}$ .

### 5.2.2 Exemples d'application

#### ➤ Exemple de diamètres constants

L'exemple présenté ici est basé sur une cannelure de type 18×1.25, avec un diamètre extérieur de 35mm, un diamètre intérieur de 10mm et une longueur de 40mm. Le couple à transmettre est de 204Nm. Les diamètres intérieurs et extérieurs de la cannelure étant constants, le logiciel va utiliser la méthode de Tatur - Orain.

L'interface principale étant complétée comme sur la Figure 5-1, il est possible de choisir les types de calculs voulus. Après les avoir tous sélectionnés, et lancé les calculs, voici une présentation des résultats obtenus.

La courbe de distribution du couple apparaît en premier. Le programme affiche les résultats à travers un graphe regroupant la variation du couple dans le moyeu et celle dans l'arbre. Ce graphique est visible à la Figure 5-6.

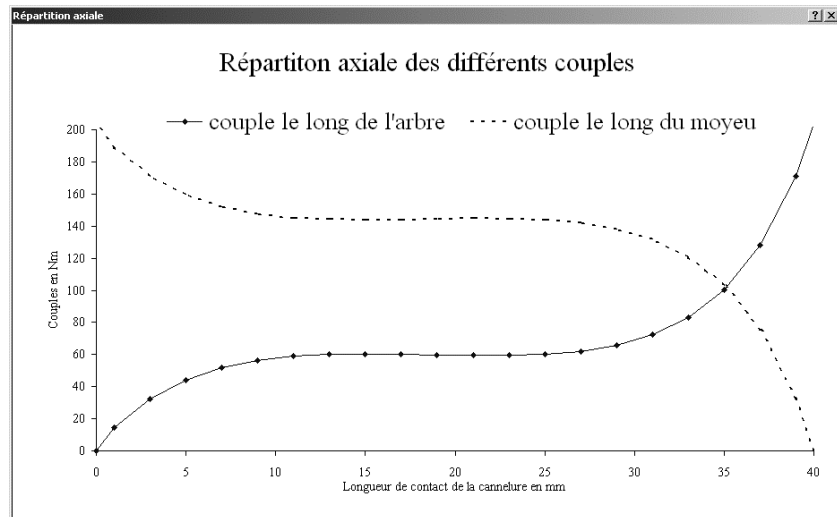


Figure 5-6 Présentation des résultats de la variation des couples dans l'arbre et le moyeu

Ensuite vient l'affichage de la pression moyenne le long de l'axe, Figure 5-7 suivi de la valeur de cette pression aux extrémités, Figure 5-8.

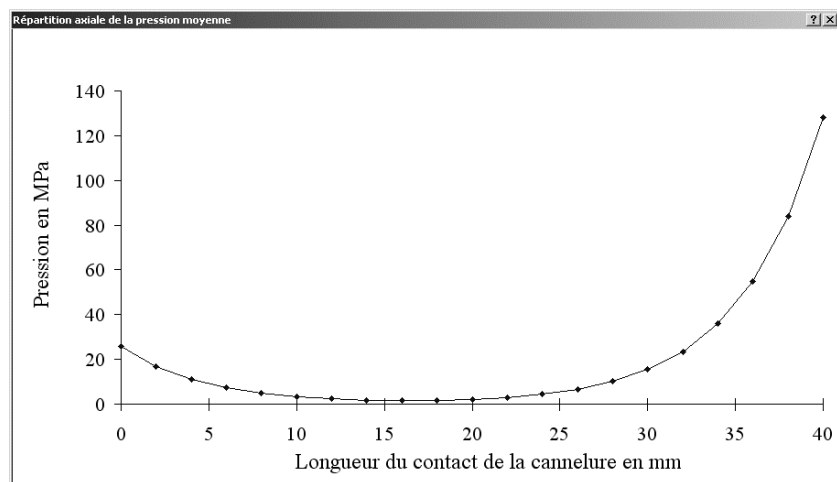


Figure 5-7 Affichage de la pression moyenne le long de l'axe

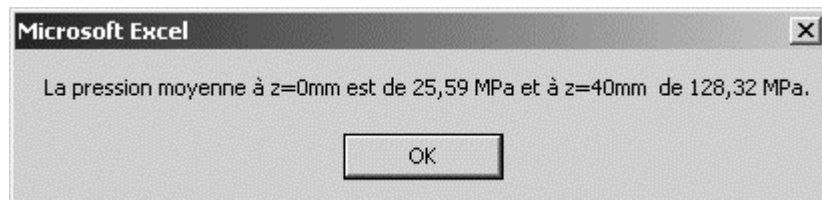
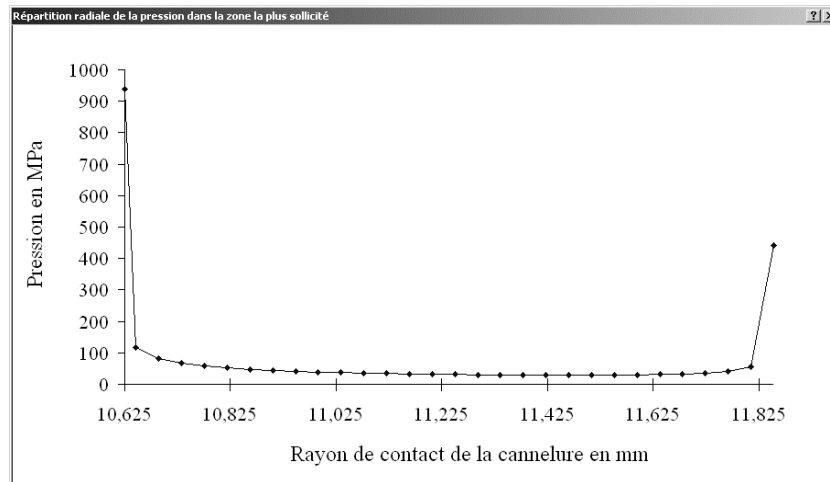


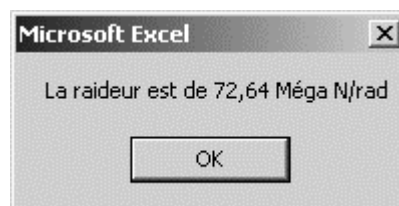
Figure 5-8 Pression moyenne aux extrémités

L'outil affiche la répartition radiale de la pression à la position la plus sollicitée :



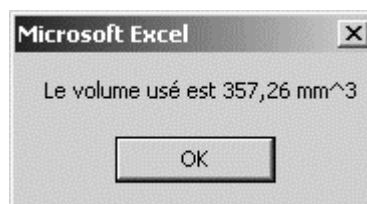
**Figure 5-9 Répartition radiale de la pression dans la zone la plus sollicitée**

Cet outil permet aussi de connaître la raideur des dents de la cannelure comme le montre la Figure 5-10.



**Figure 5-10 Affichage de la raideur des dents de la cannelure**

Enfin après avoir rentré dans le programme les informations nécessaires au calcul de l'usure, visible à la Figure 5-3, l'estimation de l'usure dans la zone la plus sollicitée est donnée sous forme d'un simple affichage comme le révèle la Figure 5-11.



**Figure 5-11 Affichage de l'estimation de l'usure de la cannelure**

➤ Exemple de diamètres variables

Nous avons expliqué précédemment que le programme n'utilise pas la même méthode de calcul selon la forme de la cannelure demandée. Pour les diamètres extérieurs et / ou intérieurs variables, alors nous exploitons le modèle de Blanc.

L'exemple pris ici est basé sur une cannelure de type 18x1.25, avec un diamètre extérieur variant de 33mm à 27mm, un diamètre intérieur variant de 10mm à 18mm et une longueur de 40mm. Le couple à transmettre est de 204Nm.

L'interface définissant les propriétés géométrique ne varie quasiment pas mis à part au niveau des diamètres, comme le montre la Figure 5-12. Les valeurs des diamètres extérieurs et intérieurs sont rentrés à l'aide du tableau présenté à la Figure 5-2. Une visualisation schématique des diamètres est accessible à partir de ce même tableau. La Figure 5-13 en est une illustration.

**Figure 5-12 Interface définissant les propriétés principales de la liaison cannelée pour le deuxième exemple**

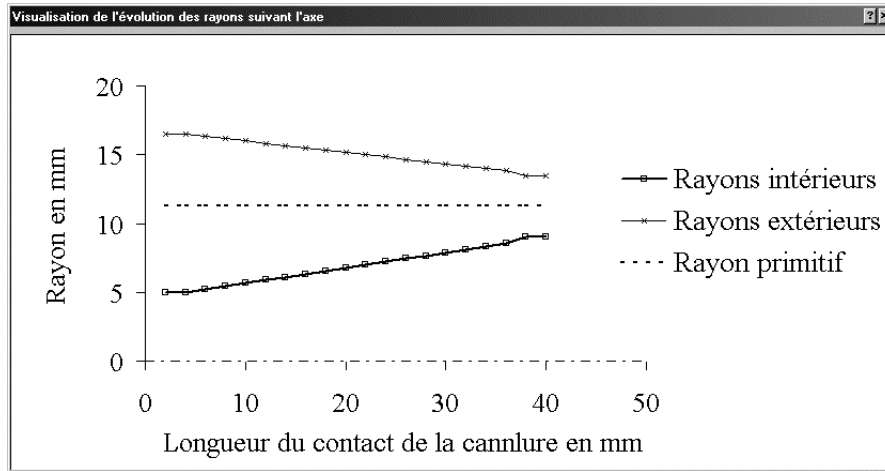


Figure 5-13 Visualisation des rayons extérieurs et intérieurs de la cannelure

Les résultats proposés sont présentés de manière identique à l'exception de la raideur qui va varier le long de l'axe.

Raideurs des différentes parties (unité : Mega N/rad)									
Partie n°1	Partie n°2	Partie n°3	Partie n°4	Partie n°5	Partie n°6	Partie n°7	Partie n°8	Partie n°9	Partie n°10
67,15	64,93	62,45	59,73	56,62	53,12	49,18	44,6	39,29	33,16

Figure 5-14 Affichage des raideurs des dents de la cannelure selon le tronçon

### 5.3 CONCLUSION

Nous avons créé une maquette d'outil d'assistance exploitant les connaissances acquises au cours de cette thèse. L'utilisateur, après avoir choisi les dimensions de la cannelures et son chargement, obtient la variation du couple dans l'arbre et le moyeu ainsi que une estimation de l'usure. D'autres informations comme la raideur, la distribution axiale de la pression moyenne ou la répartition radiale de la pression dans la zone la plus sollicitée lui sont accessibles. Cette maquette permet aussi de modéliser des variations de diamètre sur le moyeu.

---

## CHAPITRE 6 ETUDE COMPLEMENTAIRE SUR L'INFLUENCE DU DEBORDEMENT DES DENTS

*Jusqu'à présent les études présentées ont pu être développées et exploitées afin de simuler analytiquement une cannelure en prenant en considération certaines hypothèses et conditions aux limites. Nous avons vu que les modèles construits à partir de ceux de Tatur ou Blanc donnent des résultats qui s'éloignent un peu de ceux obtenus par les EF 3D quand les dents ne sont pas de même longueur. Nous avons choisi d'approfondir l'étude du comportement axial dans le but à terme de pouvoir traiter les cas où il y a débordement des dents en dehors de la zone de le contact. Une analyse des différents paramètres influents permet de révéler entre autre la non uniformité de la raideur. Cette variation est alors étudiée dans le but d'améliorer l'équation de base du comportement axial proposée par Tatur.*

### 6.1 INTRODUCTION : INSUFFISANCE DU MODELE 1D

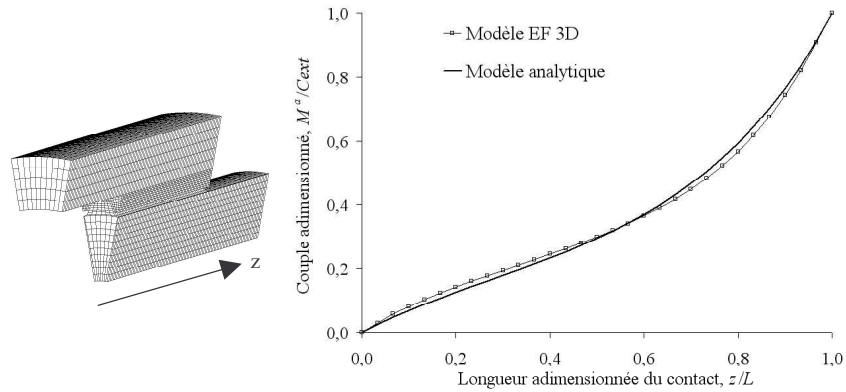
A travers la distribution du couple, c'est la répartition axiale de la pression moyenne qui nous intéresse, car c'est elle qui peut nous permettre de remonter à la répartition radiale de la pression sur les flancs qui est une information importante pour le dimensionnement d'une liaison cannelée. L'équation suivante rappelle le lien entre pression moyenne et couple.

$$2 a R_{moy} p_m(z) = -\frac{dM^a}{dz} = \frac{dM^m}{dz}$$

Nous étudions dans ce chapitre le cas d'une cannelure en acier 18 × 2.5, le diamètre extérieur du moyeu étant de 70mm et le diamètre intérieur de l'arbre étant de 15mm. La longueur du contact est de 30mm. Le couple à transmettre est égal à 200Nm.

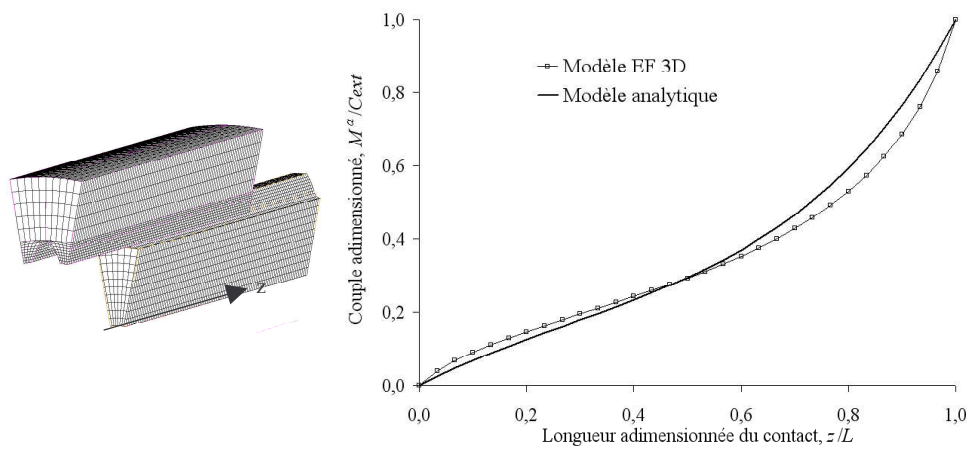
L'étude sur le comportement axial, développée dans le cas où les dents ne dépassent pas, a mis en évidence la bonne corrélation entre le modèle EF 3D de référence et le modèle 1D, permettant de connaître la distribution du couple le long de l'arbre ou le moyeu. La distribution du couple le long de l'arbre pour la cannelure étudiée dans ce chapitre pour cette configuration est visible Figure 6-1.





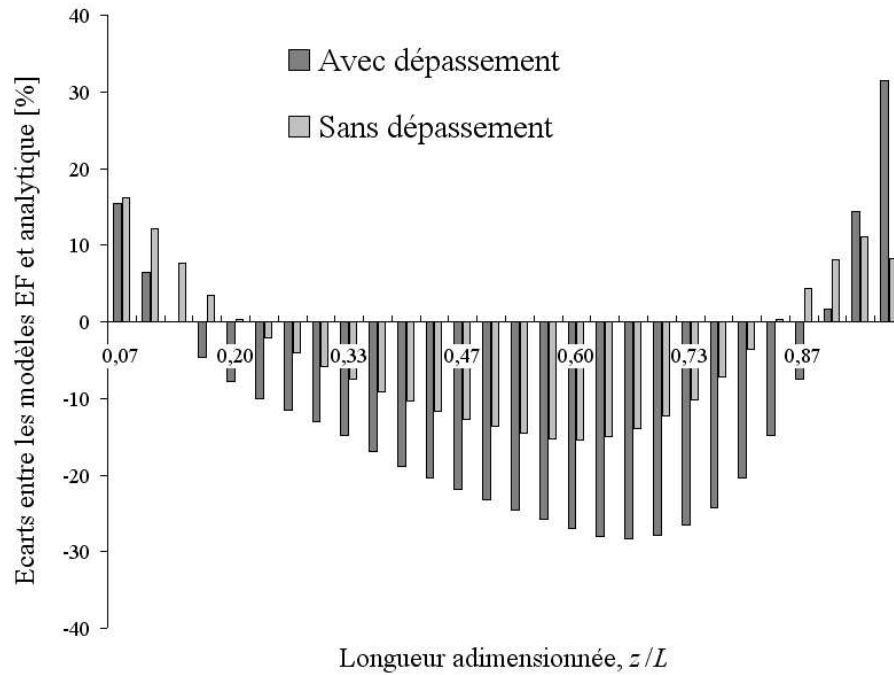
**Figure 6-1 Section d'une cannelure sans dépassement des dents et comparaison des modèles EF 3D et analytique correspondant**

Nous pouvons observer un petit écart entre le couple obtenu par le modèle EF 3D et celui obtenu par le modèle 1D et notamment un écart de la pente des courbes aux deux extrémités, ce qui correspond aux valeurs des pressions moyennes là où elles sont le plus importantes. Cet écart est beaucoup plus important pour une cannelure dont les dents dépassent du contact comme le rappelle la Figure 6-2.



**Figure 6-2 Section d'une cannelure avec dépassement des dents et comparaison des modèles EF 3D et analytique correspondant**

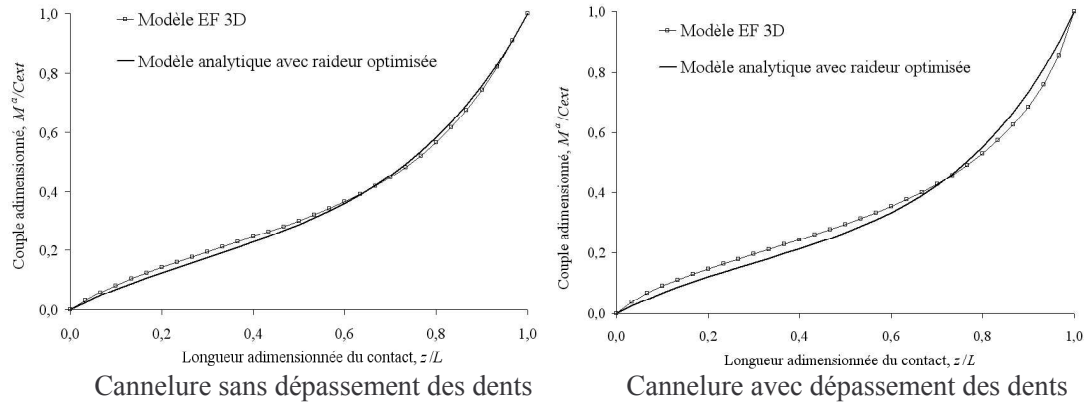
Le Figure 6-3 permet de visualiser les écarts relatifs des variations du couple, donc de la pression moyenne le long du contact, dans les deux configurations présentées. Les références utilisées dans ces calculs d'écarts sont les résultats des modèles EF 3D.



**Figure 6-3 Écarts relatifs observés sur la pression moyenne le long de dans deux configurations différentes : avec et sans dépassement des dents**

Notons que les écarts relatifs paraissent élevés dans la partie centrale (entre 0.2 et 0.8) mais que cela est sans gravité vis-à-vis des logiques de dimensionnement car dans cette zone la pression moyenne est très faible. Les écarts observés aux deux extrémités sont plus préoccupant car nous avons vu qu'il y avait deux pics de pressions dans ces parties. A l'extrémité droite où la pression est maximale, l'écart relatif est de 9% dans le cas où les dents ne dépassent pas du contact et atteint 31% dans le cas où les dents dépassent. Cela vient souligner la forte dispersion des résultats lorsque les dents dépassent du contact, déjà observée lors de l'étude sur le comportement axial.

Les résultats du modèle 1D présentés ont été obtenus en prenant la rigidité en torsion  $C_\varphi$  calculée analytiquement (méthode présentée lors du chapitre sur le comportement radial) d'une valeur de  $2.98 \times 10^8$  N/rad. En cherchant à minimiser la somme des écarts entre la distribution du couple analytique et EF 3D, il est possible d'obtenir un  $C_\varphi$  optimum. Dans le cas où les dents ne dépassent pas, la nouvelle rigidité en torsion obtenue est de  $3.25 \times 10^8$  N/rad, alors que dans la deuxième configuration, la rigidité optimum est de  $4.09 \times 10^8$  N/rad. Une brève comparaison de ces résultats avec ceux déjà présentés, à l'aide des graphes Figure 6-4, révèle l'insuffisance de cette optimisation.



**Figure 6-4 Comparaison entre les modèles EF et analytique avec la raideur optimisée pour deux configurations différentes.**

Malgré tout, le principe d'un modèle 1D reste intéressant car le temps de calcul est très court. Ainsi afin d'obtenir un outil d'assistance le plus performant possible, nous avons choisi d'améliorer ce modèle en étudiant de façon plus précise la distribution du couple.

## 6.2 DEFINITION D'UN MODELE ETENDU

Dans toute recherche il est important de déceler les paramètres influents sur le phénomène étudié. Dans notre cas nous cherchons à mieux prédire le transfert de couple à travers la cannelure. Nous avons cherché à améliorer le modèle de Tatur en vue de le rendre apte à traiter le cas où il y a débordement des dents. Nous rappelons ci-après les équations fondatrices de ce modèle :

$$-\frac{dM^a(z)}{dz} = \frac{dM^m(z)}{dz} = C_\varphi [\varphi^m(z) - \varphi^a(z)] \quad (6-1)$$

Avec

$C_\varphi$  : valeur caractéristique de la rigidité des dents de la cannelure, il est supposé constant le long du contact,

$M^m(z)$ ,  $M^a(z)$  : couples respectivement du moyeu et de l'arbre à la section  $z$ ,

$\varphi^a(z)$  et  $\varphi^m(z)$  : angles de rotation de l'arbre et du moyeu à la section  $z$ . En supposant que la cannelure travaille en torsion pure, chaque section droite reste droite. Cela est traduit par les relations entre les angles et les moments suivants :

$$\text{Pour le moyeu, } \frac{d\varphi^m(z)}{dz} = \frac{M^m(z)}{G^m I^m},$$

$$\text{Pour l'arbre, } \frac{d\varphi^a(z)}{dz} = \frac{M^a(z)}{G^a I^a}.$$

Ce qui donne finalement l'équation suivante :

$$C_\varphi (\varphi^m(z) - \varphi^a(z)) = -\frac{dM^a(z)}{dz}$$

En considérant  $C_\varphi$  et les moments quadratiques polaires des pièces constants, la combinaison de ces équations conduit à l'équation différentielle suivante:

$$M^a(z) \left( \frac{1}{G^a I^a} + \frac{1}{G^m I^m} \right) = \frac{C_{ext}}{G^m I^m} + \frac{1}{C_\varphi} \frac{d^2 M^a(z)}{dz^2} \quad (6-2)$$

Les paramètres que nous pouvons envisager de modifier dans l'équation (6-2) sont les moments quadratiques polaires des pièces,  $I^a$  et  $I^m$  et la rigidité en torsion de la cannelure,  $C_\varphi$ . Les deux questions qui en découlent sont alors : Que faut-il prendre comme  $I^a$ ,  $I^m$  et comme  $C_\varphi$  ? Comment intégrer dans ces paramètres l'influence de phénomènes perturbateurs ?

➤ Etude des moments quadratiques polaires

Le calcul du moment quadratique polaire est issu de la relation classique de la RDM :

$$I = \frac{M_t}{G \theta}$$

Avec

$I$  : le moment quadratique polaire de la pièce en  $m^4$ ,

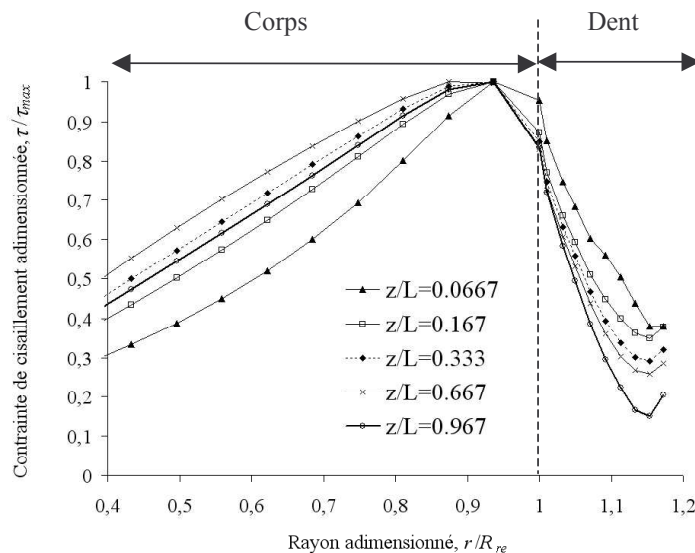
$G$  : le module de cisaillement en Pa,

$\theta$  : la rotation unitaire en rad/m.

Cette relation est valable si et seulement si la contrainte de cisaillement dans la section est proportionnelle au rayon. La Figure 6-5 est une représentation de l'évolution de la contrainte de cisaillement  $\tau_{\theta z}$  dans un arbre cannelé percé en son centre d'un diamètre de 15mm, en fonction du rayon, pour plusieurs positions axiales. Pour permettre la comparaison de l'allure de la contrainte,  $\tau_{\theta z}$  est adimensionnée en divisant chaque évolution de la contrainte par la valeur maximale de la contrainte dans cette section. Le rayon est aussi adimensionné en choisissant le rayon de fondation des dents comme position remarquable. Effectivement ce rayon correspond à la fin du corps et au début des dents. La répartition de la contrainte peut être ainsi divisée en deux parties. La première de  $r = 0.4$  à  $r = 0.9$ , c'est à dire sur le corps de

l'arbre, la contrainte augmente proportionnellement au rayon. Dans la seconde partie, au-delà de  $r = 0.9$ , la contrainte décroît. Selon la section étudiée, une distribution plus ou moins linéaire de la contrainte peut être observée, cependant quelle que soit la cannelure étudiée, les caractéristiques décrites ici sont toujours observées.

Ce graphe met finalement en valeur la limite de validité des moments quadratiques polaires du moyeu et de l'arbre pris en compte jusqu'à présent. En effet en calculant le moment quadratique polaire avec la méthode classique de la RDM, la valeur du moment quadratique polaire est surdimensionnée. Contrairement, si les moments quadratiques polaires des corps des pièces sont pris seuls en compte, alors les valeurs de  $I^a$  et  $I^m$  seront sous dimensionnées.



**Figure 6-5** Contrainte de cisaillement dans une section donnée d'un arbre cannelé

Nous pourrions envisager de considérer des moments quadratiques polaires variables selon la position axiale  $z$ . Mais introduire dans l'équation (6-1) des moments quadratiques polaires variables  $I^a(z)$  et  $I^m(z)$  rendrait très difficile la résolutions de cette équation différentielle.

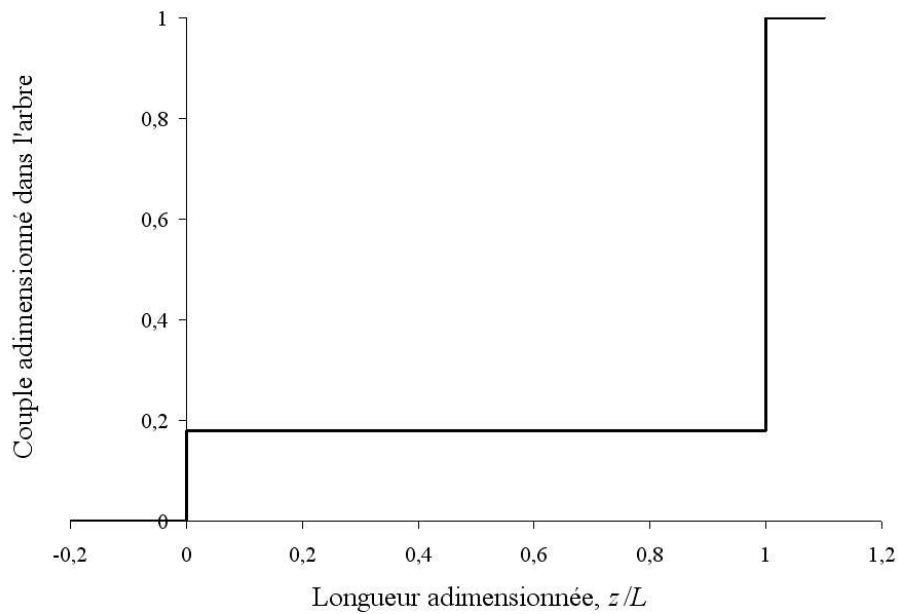
➤ Etude du comportement en torsion des corps des pièces

L'hypothèse du travail de la cannelure en torsion simple considère que les sections des corps des pièces (moyeu et arbre) tournent en bloc (sans se déformer dans leur plan). Pour montrer que cette hypothèse n'est pas satisfaisante, nous avons choisi de traiter le cas extrême où les dents seraient infiniment rigides. Dans ces conditions, et si nous considérons

l'hypothèse de torsion pure, l'arbre et le moyeu travaillent comme une pièce unique, chaque partie transmettant une part du couple total à transmettre  $C_{ext}$  :

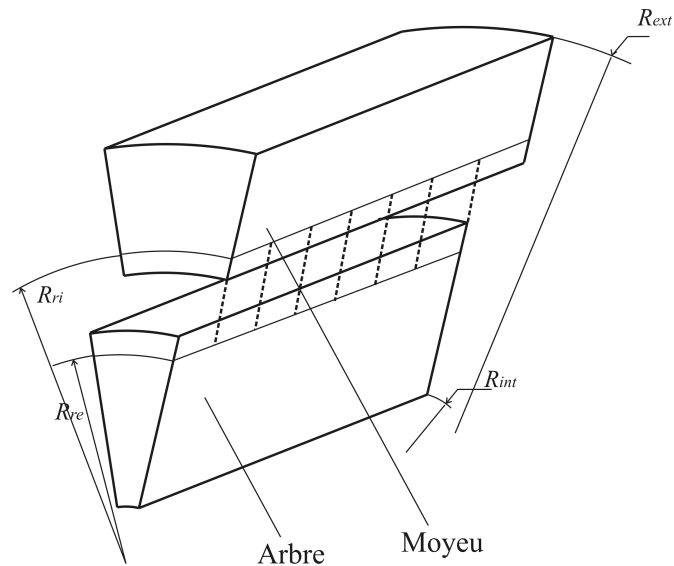
$$M^a = \frac{G^a I^a}{G^m I^m + G^a I^a} C_{ext} \text{ et } M^m = \frac{G^m I^m}{G^m I^m + G^a I^a} C_{ext} .$$

En théorie l'évolution du couple le long de l'arbre devrait avoir la forme visible Figure 6-6. Ce graphe représente le couple adimensionné. Le contact est réalisé de  $z/L = 0$  à  $z/L = 1$ .



**Figure 6-6 Couple adimensionné le long du corps de l'arbre dans le cas de la torsion simple et d'une rigidité infinie des dents**

Nous proposons maintenant de modéliser ce cas en EF 3D. La Figure 6-7 est un schéma permettant de mieux comprendre le modèle réalisé. Plus précisément ce modèle comprend un secteur de  $1^\circ$  de deux parties cylindriques représentant l'arbre et le moyeu. Une symétrie cyclique permet de simuler l'ensemble complet. Enfin le moyeu est bloqué à une extrémité et le couple est introduit sur la section opposée de l'arbre de façon à imposer une rotation uniforme.



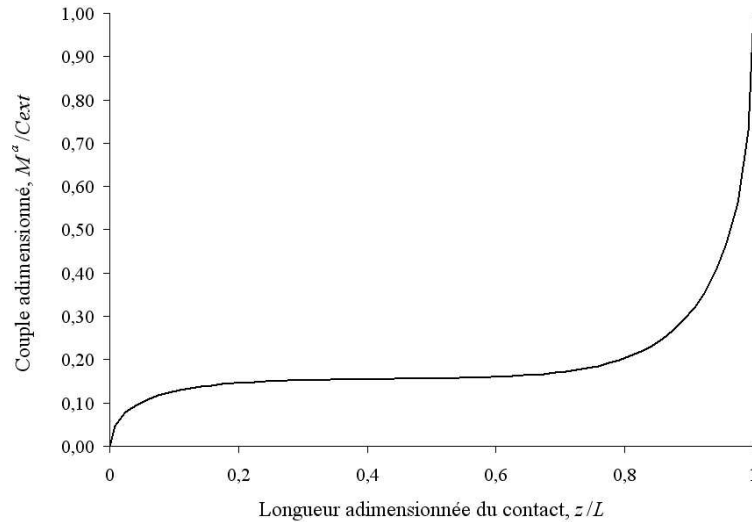
**Figure 6-7 Schéma du modèle utilisé pour obtenir la raideur de corps**

Pour simuler la rigidité infinie des dents, une relation de couplage cinématique liant les nœuds du moyeu et de l'arbre impose la même rotation au niveau des rayons de fondation (en pointillé sur le schéma). Donc pour chaque couple de nœuds en vis à vis, la relation est :

$$v^a = \frac{R_{re}}{R_{ri}} v^m$$

Avec  $v^a$  et  $v^m$  les déplacements orthoradiaux sur les rayons respectivement de l'arbre et du moyeu.

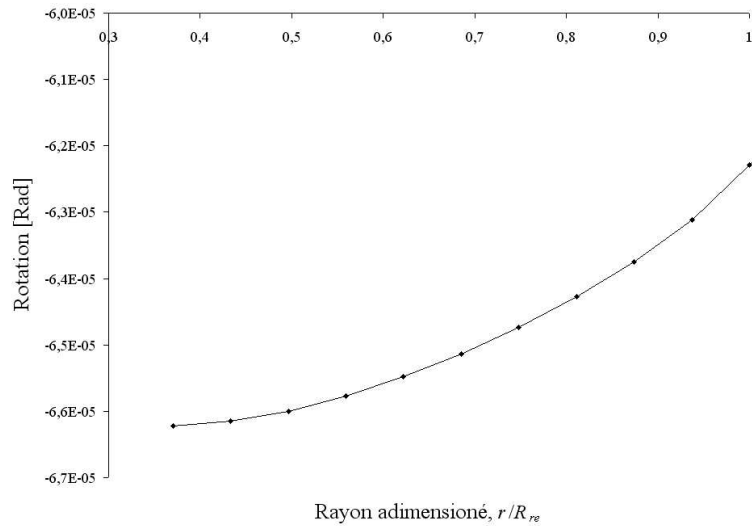
La répartition du couple est obtenue comme dans le cas du travail sur le comportement axial, en analysant les éléments forces. Cette répartition est représentée en Figure 6-8.



**Figure 6-8 Couple le long du corps de l'arbre selon le modèle EF développé**

La comparaison des distributions de couple de l'arbre de la Figure 6-6 et de la Figure 6-8 révèle l'erreur réalisée si l'hypothèse de torsion simple est considérée vraie.

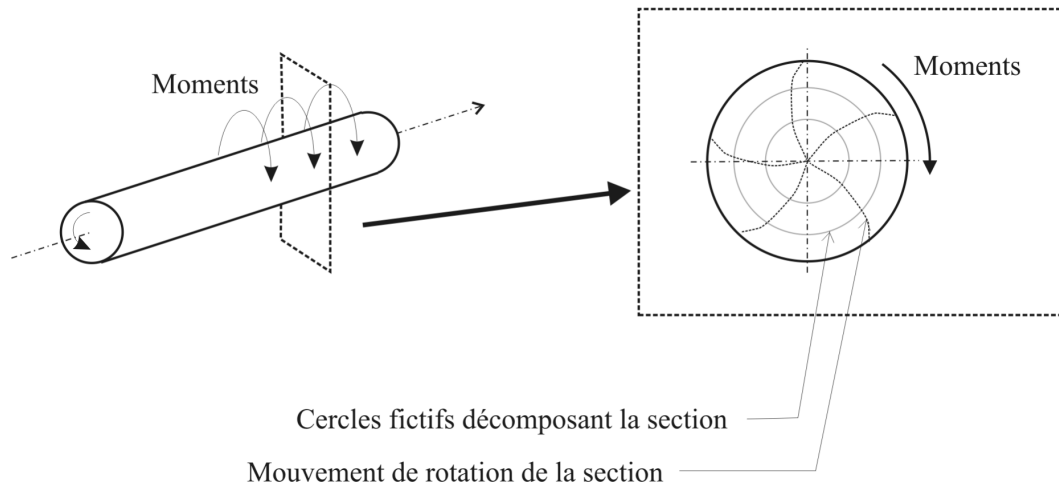
De plus si les sections restent droites alors la rotation de la section est constante. Or les résultats EF, présentés Figure 6-9 pour la section  $z/L = 0,7$ , prouvent que la rotation est variable et dépendante du rayon.



**Figure 6-9 Rotation suivant le rayon d'une section quelconque de l'arbre**

En réalité les corps de la cannelure sont aussi soumis à une torsion orthoradiale. La Figure 6-10 en est une représentation. Dans le cas d'une liaison cannelée, les moments sont introduits par l'intermédiaire des dents sur la face latérale du cylindre et non sur la face transversale située en bout dans le cas de la torsion pure.





**Figure 6-10** Cylindre soumis à de la torsion orthoradiale

Cette torsion orthoradiale contribue à rendre non uniforme la raideur de la cannelure axialement. Il serait donc intéressant d'introduire cette influence dans la rigidité en torsion,  $C_{\varphi}$ .

➤ Etude de la raideur globale équivalente

Pour analyser ce que pourrait être une raideur globale équivalente, un modèle EF 3D est utilisé. La raideur est obtenue en calculant le rapport entre le couple qui transite à la coordonnée  $z$  et la différence des rotations mesurées à cette même coordonnée. Son expression est donc, conformément à l'équation (6-1) qui régit le modèle :

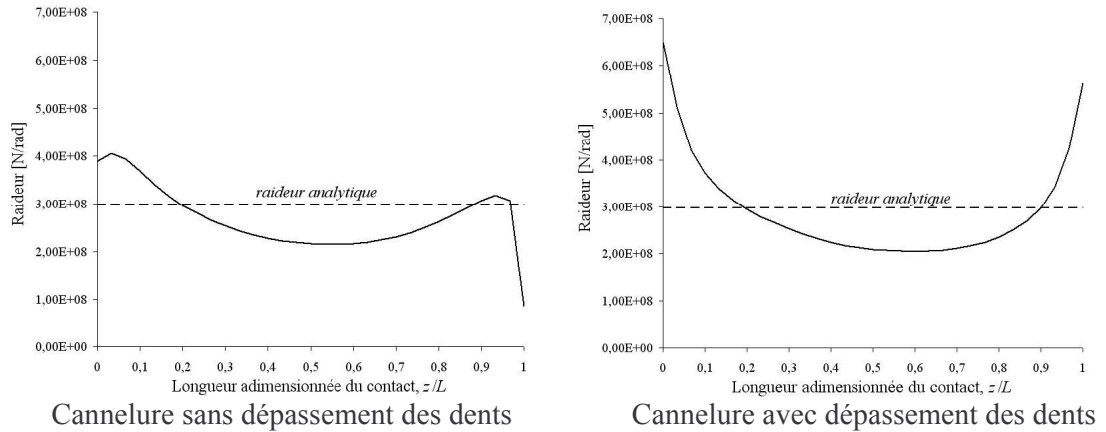
$$C_{\varphi_{EF}}(z) = \frac{\Delta C_{EF}(z)}{\varphi_{EF}^m(z) - \varphi_{EF}^a(z)}$$

Avec

$C_{\varphi_{EF}}(z)$  : raideur issue du modèle EF à la coordonnée  $z$  en rad/m,

$\Delta C_{EF}(z)$  : variation du couple dans l'arbre à la coordonnée  $z$  en N. Le calcul de cette variation s'appuie sur les variations de couple présentées en Annexe III,

$\varphi_{EF}^m(z)$ ,  $\varphi_{EF}^a(z)$  : rotation de la section de coordonnée  $z$  en radians, respectivement du moyeu et de l'arbre (précisions fournies au chapitre 6.4).



**Figure 6-11 Raideur d'une cannelure en fonction de la position axiale et pour deux configurations différentes**

La Figure 6-11 décrit la raideur le long du contact d'une cannelure dans deux configurations. Que les dents dépassent ou non du contact, la rigidité en torsion des dents apparaît comme étant non uniforme axialement, avec des écarts importants par rapport à la raideur moyenne dans le cas où les dents dépassent du contact.

Finalement nous avons choisi de travailler sur la possibilité de remplacer la constante de raideur par une variable  $C_\varphi(z)$  qui prendrait en compte une forme différente selon les cas étudiés, cette fonction restant à définir. Les moments quadratiques polaires sont supposés constants mais leurs valeurs restent à déterminer.

➤ Définition du modèle étendu

Pour une question de facilité d'écriture et de manipulation de termes, il est plus aisé d'introduire la notion de souplesse. Ainsi en appelant  $s(z)$  la souplesse, l'équation (6-1) devient :

$$\varphi^m(z) - \varphi^a(z) = -s(z) \frac{dM^a(z)}{dz} \quad (6-3)$$

Avec  $s(z) = \frac{1}{C_\varphi(z)}$

En dérivant l'équation (6-3) nous obtenons :

$$\frac{d\varphi^m}{dz} - \frac{d\varphi^a}{dz} = -\frac{ds(z)}{dz} \frac{dM^a(z)}{dz} - s(z) \frac{d^2M^a(z)}{dz^2} \quad (6-4)$$

Connaissant les relations déjà présentées lors de l'étude bibliographique :

$$\frac{d\varphi^a}{dz} = \frac{M^a}{G^a I^a}, \quad \frac{d\varphi^m}{dz} = \frac{M^m}{G^m I^m} = \frac{C_{ext} - M^a}{G^m I^m}$$

Il est possible d'écrire l'équation (6-4) sous la forme :

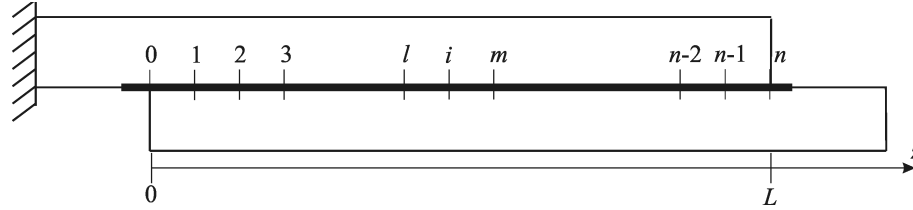
$$\frac{C_{ext}}{G^m I^m} - \left( \frac{1}{G^m I^m} + \frac{1}{G^a I^a} \right) M^a(z) = - \frac{ds(z)}{dz} \frac{dM^a(z)}{dz} - s(z) \frac{d^2 M^a(z)}{dz^2} \quad (6-5)$$

Cette équation est la base du modèle étendu que nous proposons.

### 6.3 EXPLOITATION NUMERIQUE DU MODELE ETENDU

L'équation différentielle (6-5) n'admet pas de solution analytique pour toute fonction de  $s(z)$ . Par contre, pour  $s(z)$  défini numériquement en un certain nombre de points sur l'axe, nous allons montrer que, nous savons construire la distribution du couple le long de la cannelure par une méthode numérique aux différences finies, donc obtenir la pression moyenne le long du contact,  $p_m(z)$ .

Pour avoir le plus de précision possible, nous traitons le problème par la méthode des différences centrées pour toute la cannelure, hormis les points extrêmes.



**Figure 6-12** Discrétisation de la partie contact de la cannelure

La Figure 6-12 permet de visualiser les notations utilisées lors de cette analyse. La cannelure est découpée en  $n$  nœuds le long du contact (entre  $z = 0$  et  $z = L$ ).

$$\text{Soit : } \alpha = s(z), \quad \beta = \frac{ds}{dz}, \quad \gamma = \frac{1}{G^m I^m} + \frac{1}{G^a I^a}, \quad \delta = \frac{C_{ext}}{G^m I^m}.$$

En différences finies centrées ces paramètres deviennent :

$$\alpha_i = s_i, \quad \beta_i = \frac{s_{i+1} - s_{i-1}}{2\Delta z}, \quad \gamma_i = - \left( \frac{1}{G^m I^m} + \frac{1}{G^a I^a} \right), \quad \delta_i = \frac{C_{ext}}{G^m I^m}.$$

En tout nœud  $i$  l'équation (6-5) devient :

$$\alpha_i \frac{d^2 M_i^a}{dz^2} + \beta_i \frac{dM_i^a}{dz} + \gamma_i M_i^a + \delta_i = 0$$

$$\alpha_i \frac{M_{i+1}^a - 2M_i^a + M_{i-1}^a}{\Delta z^2} + \beta_i \frac{M_{i+1}^a - M_{i-1}^a}{2\Delta z} + \gamma_i M_i^a + \delta_i = 0$$

$$\left(\frac{\alpha_i}{\Delta z^2} - \frac{\beta_i}{2\Delta z}\right)M_{i-1}^a + \left(\gamma_i - \frac{2\alpha_i}{\Delta z^2}\right)M_i^a + \left(\frac{\alpha_i}{\Delta z^2} - \frac{\beta_i}{2\Delta z}\right)M_{i+1}^a + \delta_i = 0.$$

Deux cas particuliers existent, pour les points extrêmes ( $i = 0$  et  $i = n$ ). Pour ces points nous utilisons les méthodes d'Euler progressive et d'Euler rétrograde pour calculer  $\beta_0$  et  $\beta_n$  :

$$\beta_0 = \frac{s_1 - s_0}{\Delta z}, \quad \beta_n = \frac{s_n - s_{n-1}}{\Delta z}$$

Le système ainsi obtenu peut être mis sous la forme matricielle suivante :

$$[A] M^a = [B],$$

Avec :

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_1}{\Delta z^2} - \frac{\beta_1}{2\Delta z} & -\frac{2\alpha_1}{\Delta z^2} + \gamma_1 & \frac{\alpha_1}{\Delta z^2} - \frac{\beta_1}{2\Delta z} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_2}{\Delta z^2} - \frac{\beta_2}{2\Delta z} & -\frac{2\alpha_2}{\Delta z^2} + \gamma_2 & \frac{\alpha_2}{\Delta z^2} - \frac{\beta_2}{2\Delta z} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\alpha_{n-3}}{\Delta z^2} - \frac{\beta_{n-3}}{2\Delta z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{2\alpha_{n-2}}{\Delta z^2} + \gamma_{n-2} & \frac{\alpha_{n-2}}{\Delta z^2} - \frac{\beta_{n-2}}{2\Delta z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\alpha_{n-1}}{\Delta z^2} - \frac{\beta_{n-1}}{2\Delta z} & -\frac{2\alpha_{n-1}}{\Delta z^2} + \gamma_{n-1} & \frac{\alpha_{n-1}}{\Delta z^2} - \frac{\beta_{n-1}}{2\Delta z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[B] = [0 \quad \delta_1 \quad \delta_2 \quad \dots \quad \delta_{n-3} \quad \delta_{n-2} \quad \delta_{n-1} \quad C_{ext}]^T$$

La solution  $M^a$  peut alors être trouvée en résolvant le système.

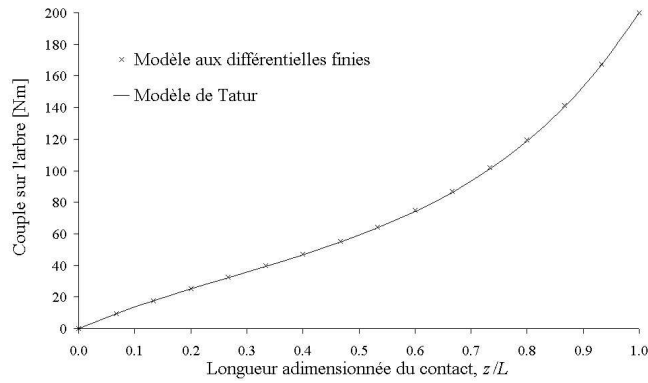
➤ Application au cas d'une raideur constante

Pour valider la méthode numérique développée, nous partons d'un  $C_\phi(z)$  constant égal à  $2.98 \times 10^{-8} \text{N/rad}$ , obtenu dans le chapitre traitant du comportement radial.

Pour ce cas d'étude,  $s(z)$  étant constant, les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  deviennent :

$$\alpha = s(z) = s_0 \text{ et donc } \alpha_i = s_0 \text{ et } \beta_i = \frac{s_{i+1} - s_{i+1}}{2\Delta z} = 0$$

La Figure 6-13 permet de visualiser la distribution du couple le long de l'arbre ainsi obtenue. La courbe de référence est issue du modèle 1D développé par Tatur avec un  $C_\phi$  constant. Il n'y a aucun écart entre la courbe de couple obtenue à partir du modèle 1D ou du modèle en différences finies.



**Figure 6-13 Distribution du couple dans l'arbre selon le modèle 1D et le modèle DF**

➤ Application au cas d'une raideur variable

Nous venons de montrer que la méthode numérique du modèle étendu fonctionne bien avec une raideur constante. En est-il de même si nous prenons une raideur variable ? Comme précédemment, il est plus aisé de travailler en terme de souplesse. Prenons une souplesse évoluant linéairement, de la forme :

$$s(z) = s_0 + s_1 z$$

L'équation (6-5) devient alors :

$$\frac{C_{ext}}{G^m I^m} - \left( \frac{1}{G^m I^m} + \frac{1}{G^a I^a} \right) M^a(z) = -s_1 \frac{dM^a(z)}{dz} - (s_0 + s_1 z) \frac{d^2 M^a(z)}{dz^2} \quad (6-6)$$

Pour cette souplesse une solution exacte existe. Elle a pour expression :

$$M^a(z) = K_1 BesselY \left( 0, 2\sqrt{k} \sqrt{\frac{s_1 z - s_0}{s_1^2}} \right) + K_2 BesselJ \left( 0, 2\sqrt{k} \sqrt{\frac{s_1 z - s_0}{s_1^2}} \right) + \frac{C_{ext}}{k G^m I^m},$$

Avec

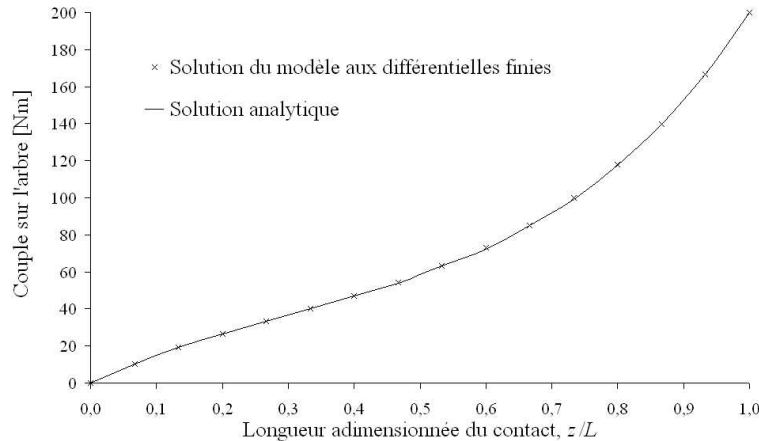
$$k = \frac{1}{G^a I^a} + \frac{1}{G^m I^m},$$

$$K_1 = \frac{C_{ext} \left( BesselJ \left( 0, 2\sqrt{k} \sqrt{\frac{s_1 L - s_0}{s_1^2}} \right) - BesselJ \left( 0, 2\sqrt{k} \sqrt{-\frac{s_0}{s_1^2}} \right) + k G^m I^m BesselJ \left( 0, 2\sqrt{k} \sqrt{-\frac{s_0}{s_1^2}} \right) \right)}{k G^m I^m \left( BesselY \left( 0, 2\sqrt{k} \sqrt{\frac{s_1 L - s_0}{s_1^2}} \right) BesselJ \left( 0, 2\sqrt{k} \sqrt{-\frac{s_0}{s_1^2}} \right) - BesselJ \left( 0, 2\sqrt{k} \sqrt{\frac{s_1 L - s_0}{s_1^2}} \right) BesselY \left( 0, 2\sqrt{k} \sqrt{-\frac{s_0}{s_1^2}} \right) \right)}$$

$$K_2 = \frac{C_{ext} \left( Bessely \left( 0, 2\sqrt{k} \sqrt{\frac{s_1 L - s_0}{s_1^2}} \right) - Bessely \left( 0, 2\sqrt{k} \sqrt{\frac{-s_0}{s_1^2}} \right) + k G^m I^m Bessely \left( 0, 2\sqrt{k} \sqrt{\frac{-s_0}{s_1^2}} \right) \right)}{k G^m I^m \left( Bessely \left( 0, 2\sqrt{k} \sqrt{\frac{s_1 L - s_0}{s_1^2}} \right) BesselJ \left( 0, 2\sqrt{k} \sqrt{\frac{-s_0}{s_1^2}} \right) - BesselJ \left( 0, 2\sqrt{k} \sqrt{\frac{s_1 L - s_0}{s_1^2}} \right) Bessely \left( 0, 2\sqrt{k} \sqrt{\frac{-s_0}{s_1^2}} \right) \right)}$$

Parallèlement, nous pouvons aussi obtenir  $M^a(z)$  en exploitant la discrétisation par différences finies comme pour le cas précédent. La cannelure est découpée en  $n$  nœuds le long du contact (entre  $z = 0$  et  $z = L$ ) comme montré sur la Figure 6-12 .

Cette fois-ci,  $s_i$  étant non constant,  $\beta_i$  est non nul.



**Figure 6-14 Distribution du couple dans l'arbre entre le modèle analytique et le modèle DF pour une raideur variable**

La Figure 6-14 permet de visualiser la distribution du couple le long de l'arbre ainsi obtenue à l'aide des deux approches analytique et numérique. Aucun écart entre les courbes ne peut être observé.

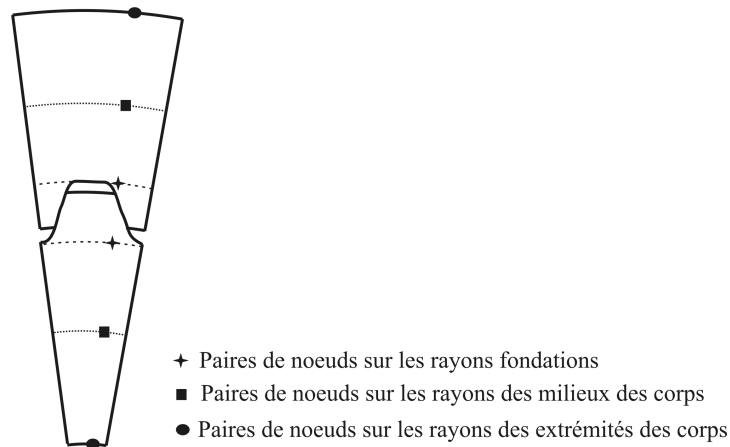
Nous venons de montrer que le modèle étendu à l'aide des différences finies permet de retrouver les résultats du modèle 1D de Tatur si la raideur considérée est constante. La fiabilité de cette méthode a été démontrée à l'aide d'une autre comparaison entre les résultats issus des différences finies et ceux de issus de l'exploitation analytique de l'équation de base, pour une forme de raideur variable. Nous pouvons donc en conclure que si nous connaissons avec précision la raideur globale équivalente le long du contact, nous pourrions avec cette méthode connaître de façon précise la répartition du couple, donc celle de la pression moyenne, le long de l'axe.

## 6.4 IDENTIFICATION DE LA RAIDEUR GLOBALE EQUIVALENTE A PARTIR DES MESURES SUR UN MODELE EF 3D

Nous venons de montrer qu'une méthode permet d'obtenir une distribution du couple dans une cannelure de façon précise lorsque la raideur  $C_{\phi}(z)$  est connue de façon précise. Mais quelle est la distribution de  $C_{\phi}(z)$ , quelle sont les valeurs des moments quadratiques polaires des pièces,  $I^m$  et  $I^a$ , qui injectées dans cette méthode permettraient d'obtenir la bonne répartition des couples ?

### 6.4.1 Détermination de $C_{\phi}$ obtenu par EF3D

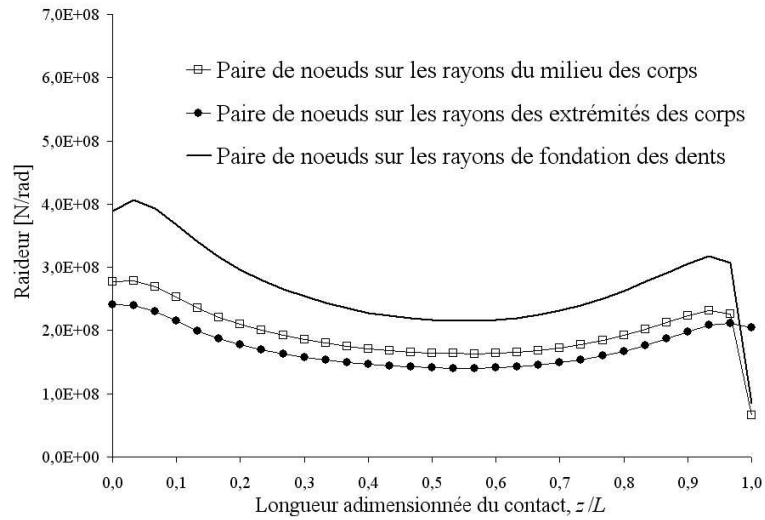
La façon dont la raideur Eléments Finis est obtenue a été exposée précédemment au paragraphe 6.2. Cependant cette raideur est variable selon les paires de nœuds utilisées pour le calcul. En effet  $\phi^f$  n'a pas une valeur identique dans une section. Ainsi en fonction du nœud choisi dans la section,  $\phi^f$  varie. Il en est de même avec le moyeu. Pour connaître l'influence de cette variation au sein de chaque section, nous avons cherché la raideur  $C_{\phi EF}$  pour plusieurs paires de nœuds.



**Figure 6-15 Visualisation des paires de nœuds**

Nous avons choisi de présenter trois répartitions de raideur correspondant à des emplacements remarquables. La Figure 6-15 permet de visualiser ces paires de nœuds choisies. La première répartition est obtenue en traitant les résultats de la paire de nœuds symbolisée par des cercles, entre le rayon intérieur de l'arbre et le rayon extérieur du moyeu. La seconde est issue des résultats de la paire de nœuds symbolisée par des carrés, entre les rayons des milieux des corps de l'arbre et du moyeu. La dernière est obtenue en prenant la paire de nœuds symbolisée par des croix, entre les rayons de fondation de l'arbre et du moyeu.

➤ Cas de la cannelure dont les dents ne dépassent pas du contact

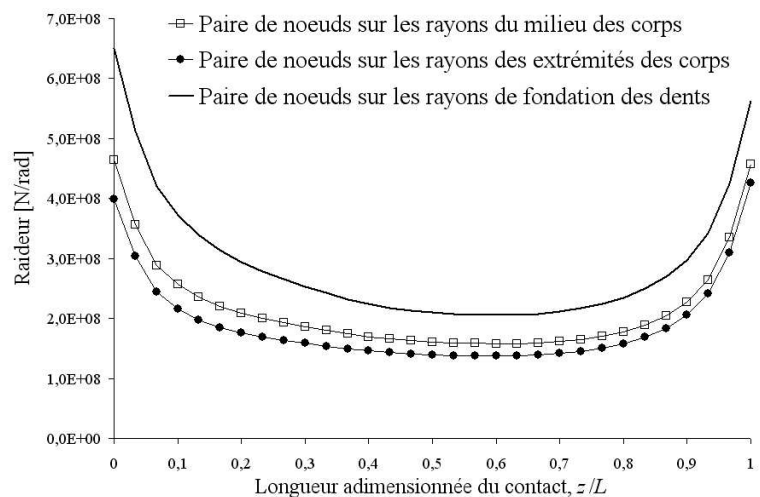


**Figure 6-16 Raideur EF 3D pour différentes paires de nœuds dans le cas d'une cannelure sans dépassement des dents du contact**

La Figure 6-16 révèle tout d'abord une différence d'un point de vue valeur entre les différents résultats des paires de nœuds. Il est possible de remarquer la chute de la raideur sur les extrémités du contact apparaît pour toutes les paires de nœuds.

Regardons à présent le comportement de la raideur EF dans le cas où les dents dépassent du contact.

➤ Cas de la cannelure dont les dents dépassent du contact



**Figure 6-17 Raideur EF 3D pour différentes paires de nœuds dans le cas d'une cannelure avec dépassement des dents du contact**

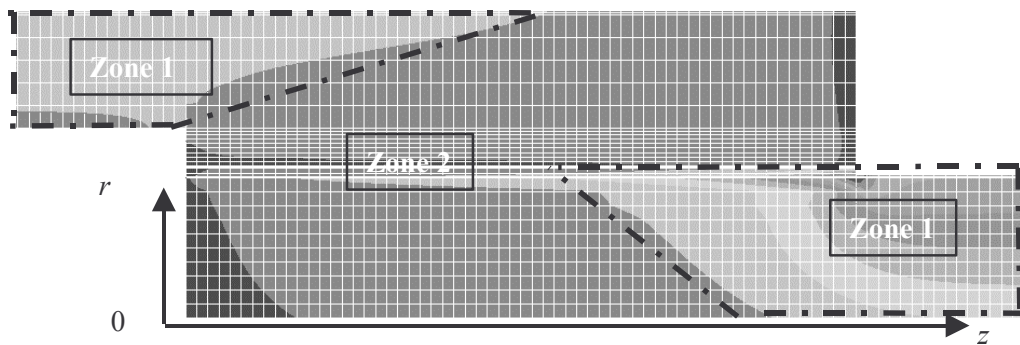


La Figure 6-17 révèle une fois de plus la variation des valeurs de la raideur selon les paires de nœuds étudiées. Cependant, contrairement au modèle sans dépassement des dents, la raideur augmente de façon significative sur les extrémités.

➤ Conclusion

Ces figures mettent en évidence la difficulté de mesurer de manière fiable les valeurs des angles  $\varphi^m$ ,  $\varphi^d$ . En effet selon la paire de nœuds choisie, la valeur de la raideur EF varie. Cette variation peut cependant s'expliquer par la présence de la torsion orthoradiale. Le schéma Figure 6-18 permet de mieux comprendre l'explication suivante. Il représente l'évolution de la torsion orthoradiale au sein de la cannelure. Les couleurs gris clair correspondent à une zone, appelée zone 1, où la torsion est quasi nulle tandis que la couleur gris foncé, appelée zone 2, indique la présence de torsion orthoradiale.

Cette figure met alors en évidence la perturbation induite par la torsion orthoradiale pour les résultats des paires de nœuds situées aux extrémités des sections de la cannelure ou au milieu des corps. En effet selon la position axiale, les angles  $\varphi_a$  et  $\varphi_m$  prennent en compte l'influence de la torsion orthoradiale. Le seul couple de nœuds qui paraît ne pas être perturbé par cette torsion est la paire de nœuds sur le rayon de fondation des dents. C'est pourquoi par la suite nous considérons comme référence la raideur issue de cette paire de nœuds.



**Figure 6-18 Visualisation de la zone soumise à de la torsion orthoradiale**

**6.4.2 Calcul de  $I^a$  et de  $I^m$  à partir de  $C_{\varphi EF}(z)$**

Nous savons que les moments quadratiques polaires ont une influence assez forte sur la forme de la distribution du couple  $M_a(z)$ . Si nous choisissons de prendre  $I^a$  et  $I^m$  constants, existe-il des valeurs des moments quadratiques polaires permettant d'obtenir une distribution satisfaisante ?

Pour répondre à cette question, nous considérons comme connue la répartition axiale de la raideur globale équivalente en exploitant  $C_{\varphi EF}(z)$  mesurée sur le modèle EF. Ensuite nous procédons au calcul du couple en prenant en compte les moments quadratiques polaires issus du modèle CAO, puis nous voyons le cas où les moments quadratiques polaires correspondent uniquement à ceux des corps des pièces et enfin une dernière partie permet de présenter la répartition du couple dans le cas où les moments quadratiques polaires sont optimisés.

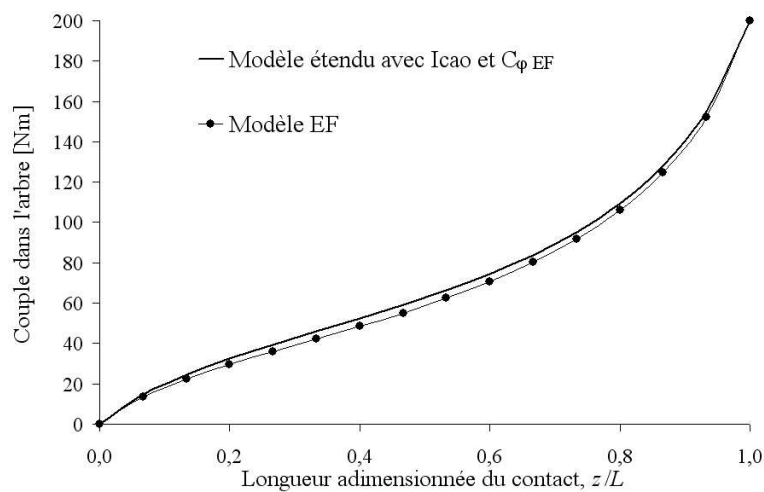
➤ Moments quadratiques polaires issus du modèle CAO.

Le modèle CAO des cannelures offre la possibilité de connaître l'inertie des différentes pièces par rapport à l'axe principal. Ainsi pour la cannelure étudiée dans ce chapitre de thèse, les inerties sont :

$$I^a_{CAO} = 3.88 \times 10^5 m^4$$

$$I^m_{CAO} = 1.93 \times 10^6 m^4$$

La répartition du couple le long de l'arbre peut donc être calculée en exploitant le modèle étendu et en considérant la raideur en torsion  $C_{\varphi EF}(z)$ . La Figure 6-19 permet la comparaison entre le résultat de référence issu du modèle EF et celui issu du modèle étendu.

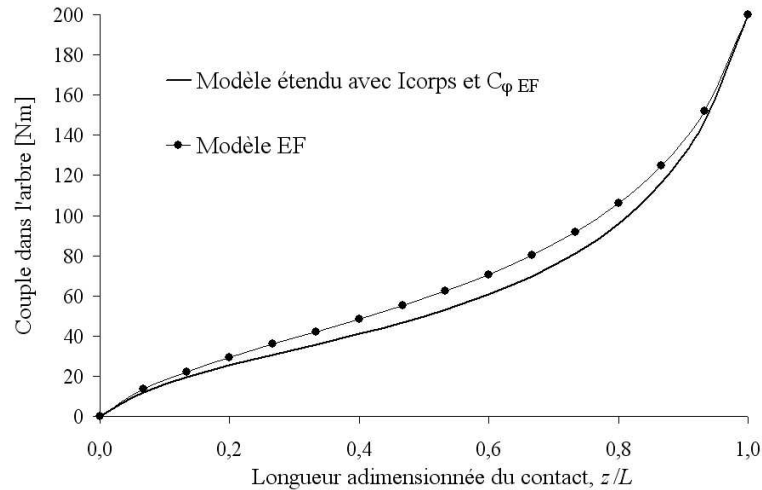


**Figure 6-19 Comparaison de la répartition du couple sur l'arbre obtenu avec le modèle étendu considérant les  $I_{CAO}$**

Cette figure révèle la non similarité des résultats. Nous avons vu lors du paragraphe 6.2 la limite du calcul théorique de du moment quadratique polaire. Le modèle CAO se basant sur la linéarité dans la direction radiale de la contrainte de cisaillement, il est possible de supposer que ces valeurs des moments quadratiques sont trop grandes.

➤ Moments quadratiques polaires issus des corps des pièces.

Dans un second temps, il est intéressant de rechercher la distribution du couple dans le cas où seule la contribution des corps des pièces est prise en compte dans la valeur des moments quadratiques polaires. La confrontation entre ce modèle et le modèle EF est présentée à la Figure 6-20.



**Figure 6-20 Comparaison de la répartition du couple sur l'arbre obtenu avec le modèle étendu considérant les  $I_{corps}$**

Les valeurs des moments quadratiques polaires de l'arbre et du moyeu sont :

$$I^a_{corps} = 2.60 \times 10^5 m^4$$

$$I^m_{corps} = 1.77 \times 10^6 m^4$$

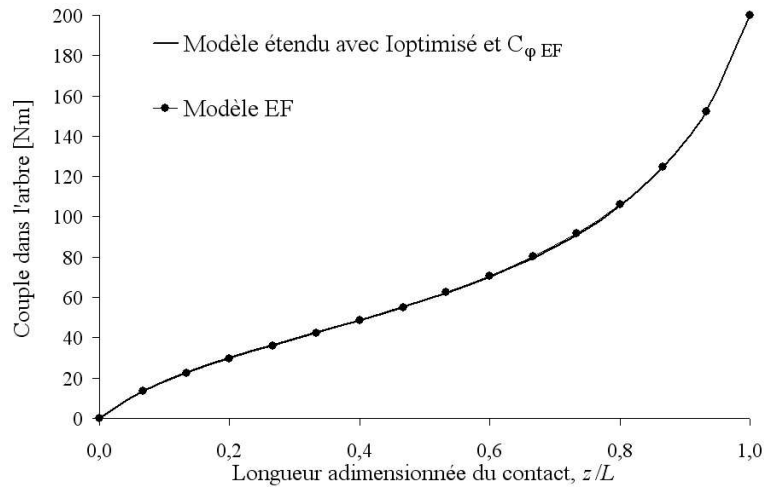
Cette fois-ci le phénomène inverse est observé avec une courbe de couple analytique plus faible que celle issue du modèle EF. Les moments quadratiques polaires à considérer sont donc compris entre les valeurs issues de la CAO et des corps.

➤ Moments quadratiques polaires optimisés.

En couplant le modèle à un outil d'optimisation, nous avons pu obtenir les valeurs des moments quadratiques polaires de l'arbre et du moyeu qui minimisent les écarts entre les résultats obtenus et les résultats EF 3D de référence. Ces valeurs sont :

$$I^a_{opti} = 3.23 \times 10^5 m^4$$

$$I^m_{opti} = 1.90 \times 10^6 m^4$$



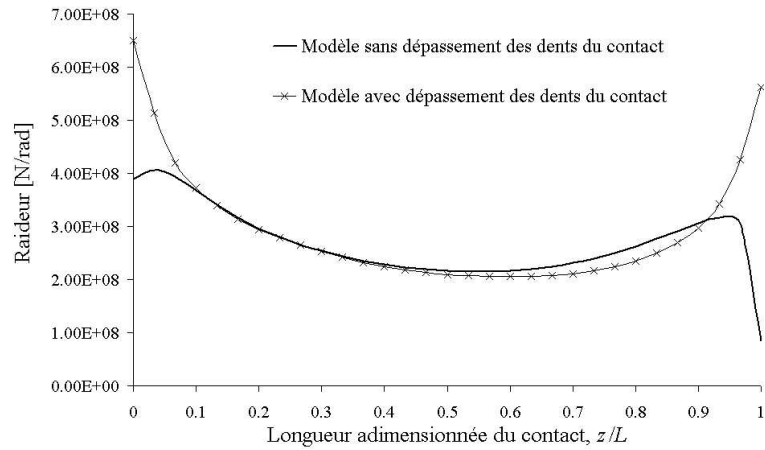
**Figure 6-21 Comparaison de la répartition du couple sur l'arbre obtenu avec le modèle EF et le modèle étendu considérant les inerties optimisées des pièces**

Comme attendu les valeurs sont comprises entre les deux modèles présentés précédemment, avec cependant des résultats plus proches du modèle CAO. La Figure 6-21 révèle une bonne corrélation entre les modèles analytique et EF.

Finalement, le modèle étendu peut donner un très bon résultats à partir d'une raideur  $C_\varphi(z)$  variable et de moments quadratiques polaires  $I^a$  et  $I^m$  constants. Cependant les moments quadratiques polaires de pièces influent sur la distribution du couple le long de la cannelure et seule une valeur appropriée des moments quadratiques polaires permet d'obtenir un résultat satisfaisant.

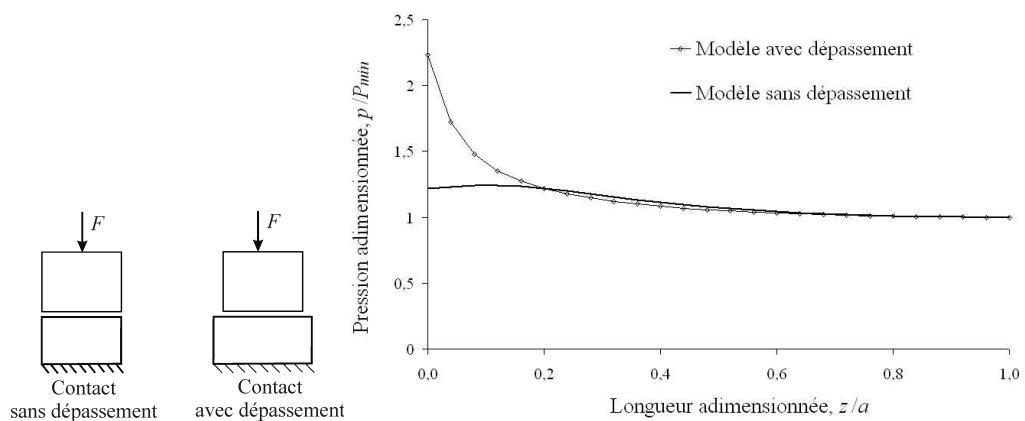
#### 6.4.3 Discussion sur l'allure de la raideur globale équivalente, $C_{\varphi EF}(z)$

Essayons de trouver les causes de la non uniformité de la raideur et de son allure axiale. Pour faciliter la compréhension des phénomènes, nous avons transposé sur un même graphique, Figure 6-22, la raideur d'une cannelure ayant les dents qui ne dépassent pas du contact et d'une cannelure ayant les dents qui débordent.



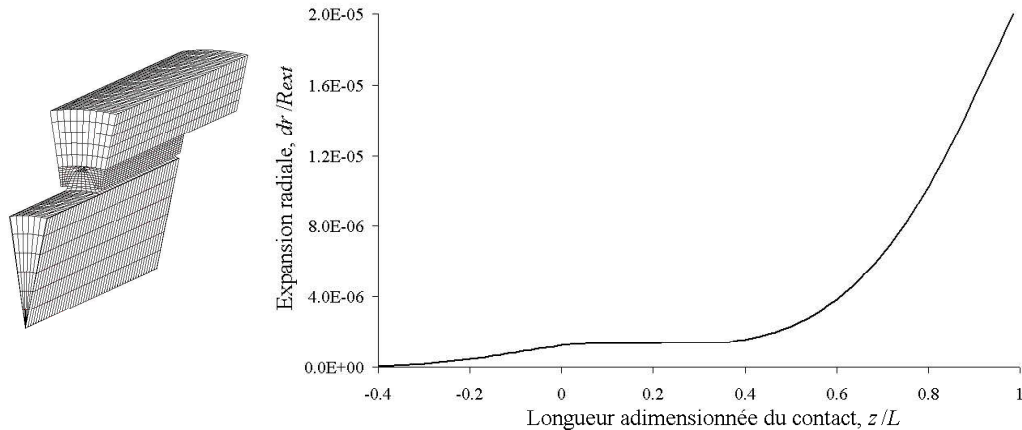
**Figure 6-22 Comparaison de l'évolution axiale de la raideur pour deux configurations différentes**

Nous avons déjà discuté de l'évolution de la raideur aux extrémités d'un contact large au paragraphe 6.4.2. Les pics de raideurs, dans le modèle avec dépassement, font penser au phénomène de bord dans le cas d'un punch. L'évolution de la raideur d'un punch plan est donnée Figure 6-23 pour deux configurations différentes : contact entre deux surfaces de même dimensions et contact avec deux surfaces de dimensions différentes. Ces courbes révèlent l'effet local aux extrémités du contact. D'une part quand les deux surfaces n'ont pas la même dimension, un pic de pression apparaît. Ce phénomène est bien retrouvé à travers la Figure 6-22. D'autre part une légère bosse apparaît sur la courbe qui correspond au contact sans dépassement de matière. C'est aussi une particularité qui est retrouvée à la Figure 6-22.



**Figure 6-23 Comparaison de la pression pour deux configurations de punch différentes**

Cependant il est possible de remarquer, à la Figure 6-22, une dissymétrie des courbes avec une raideur plus importante du côté  $z/L = 0$  que du côté  $z/L = 1$ . Ce phénomène pourrait être expliqué par la présence de l'expansion radiale. La Figure 6-24 représente l'expansion radiale le long du contact sur le diamètre extérieur de la cannelure mesurée sur le modèle EF 3D de référence.  $dr$  est le déplacement radial du point considéré,  $R_{ext}$  est le rayon de ce point.



**Figure 6-24 Expansion radiale du diamètre extérieur d'une cannelure**

$z = 0$  correspond à la zone de transition entre la partie tubulaire sans dent et de la partie avec les dents, où a lieu le contact (voir Figure 6-1). La présence de matière empêche le moyeu de se déplacer librement suivant la direction radiale. La conséquence est donc une faible valeur de l'expansion radiale. A l'opposé, en  $z/L = 1$ , il n'y a pas de matière après le contact et donc le moyeu se dilate librement dans cette direction, ce qui explique l'augmentation significative de l'expansion radiale dans cette zone.

Ce phénomène se traduit ainsi par une plus grande raideur dans la zone où l'expansion est empêchée ( $z = 0$ ) que dans la zone où l'expansion est libre ( $z = L$ ).

## 6.5 CONCLUSION

Le modèle de Tatur, base de l'étude sur le comportement axial, peut être étendu pour obtenir une distribution axiale du couple et de la pression moyenne beaucoup plus proche des valeurs mesurées. Dans ce modèle, raideur globale équivalente  $C_\phi(z)$  réalise l'adaptation nécessaire mais les valeurs des moments quadratiques polaires de l'arbre et du moyeu doivent aussi être ajustées. Après avoir réalisé cette première analyse sur l'évolution de la raideur globale équivalente, un travail complémentaire pourra être développé. Il s'agira notamment d'établir les relations qui permettent d'écrire  $C_\phi(z)$ ,  $I^a$  et  $I^m$  en fonction des paramètres du problème.



---

## CONCLUSION GENERALE

L'objectif de notre travail était d'évaluer la possibilité de créer un outil d'assistance à la conception de liaisons cannelées, après en avoir au préalable analysé le comportement.

Nous avons souhaité que le cœur de cet outil soit basé sur un modèle d'utilisation simple et d'exécution rapide, ce qui excluait tout recours aux Eléments Finis tridimensionnels. Or contrairement aux hypothèses sur lesquelles se base la norme, la répartition de la pression au contact des dents n'est pas uniforme excluant d'emblée le recours à des calculs directs. Cette particularité a été mise en évidence par l'intermédiaire de recherches bibliographiques mais aussi à l'aide de modélisations Eléments Finis 3D. Ces modélisations qui permettent de connaître des informations comme la distribution du couple le long de la cannelure ou le champ de pression sur les dents ont servi de référence aux modèles simplifiés que nous avons réalisés.

Devant l'impossibilité d'apporter une solution analytique globale à ce problème, nous avons choisi de décomposer le comportement de la cannelure en travaillant d'une part dans la direction radiale et d'autre part dans la direction axiale.

La modélisation du comportement radial est basée sur un modèle de « punch » incliné. Cette méthode nous a permis de simuler le champ de pression sur un flanc de dent. En y conjuguant le comportement d'une dent nous construisons conjointement deux éléments qui sont caractéristiques des phénomènes en présence : la répartition radiale de la pression et la rigidité en torsion des dents. Le comportement des dents est décrit à l'aide de cinq phénomènes influents qui sont la flexion, le cisaillement des dents, la compression due au contact entre les dents, la rotation au niveau de la fondation des dents et enfin le glissement relatif au contact entre les dents. Ce dernier phénomène n'a jamais fait l'objet d'étude à notre connaissance. Il est pris en compte en considérant l'expansion et la compression radiale de l'arbre et du moyeu lors du chargement. Il apparaît que le glissement relatif peut être le phénomène prépondérant dans le calcul de la rigidité des dents. Cette rigidité est l'élément clé du comportement axial.

Réaliser des expériences pour valider ce modèle est apparu impossible de par la complexité des essais à mettre en œuvre (ultra sons, mesure de la rugosité) ou de par la modification des phénomènes physiques qu'elles entraînent (film de pression). Nous avons donc eu recours à des comparaisons avec des modélisations 2D qui permettent de simuler la répartition radiale de la pression dans les zones les plus sollicitées et offrent l'avantage d'être



plus facile à créer et d'avoir des temps de calcul beaucoup plus court que le modèles EF 3D. Ces comparaisons montrent que la précision des résultats est très satisfaisante.

La modélisation du comportement axial est développée en s'inspirant de modèles déjà existants qui permettent de répondre de manière satisfaisante à notre attente.

Des tests expérimentaux sont développés afin de mieux connaître ce comportement. A l'aide de jauges de déformation puis de stéréo-corrélation d'images nous mettons en évidence l'influence de l'introduction de la charge sur la distribution du couple à travers la cannelure. Ces essais sont aussi utiles pour confirmer les hypothèses formulées par Volfson sur l'influence des moments quadratiques polaires des pièces dans la répartition du couple lorsque les efforts traversent la cannelure. En s'aidant de ces tests et de modèles EF 3D nous montrons que le sens des efforts (traversant ou non la cannelure) ont une influence significative sur le comportement axial.

Deux modèles sont retenus. Le premier est celui de Tatur - Orain qui est analytique. Il permet de simuler des cannelures de diamètres constants. Le second est un modèle EF simplifié qui offre la possibilité de simuler des cannelures de diamètres variables. Ces modèles permettent de connaître aussi les phénomènes liés au couple comme la répartition axiale de la pression moyenne.

Nous avons créé, à l'aide des modèles décrivant les comportements axial et radial de la cannelure, une maquette d'outil d'assistance au dimensionnement de liaisons cannelées. Cet outil permet de calculer rapidement la distribution du couple à travers l'arbre et le moyeu, la pression moyenne et la répartition radiale de la pression dans la zone la plus sollicitée. Nous avons aussi choisi d'y intégrer un calcul de l'usure de la cannelure, basé sur une loi simple d'usure.

Cependant, le modèle analytique pour des diamètres constants n'est pas valable selon que les dents dépassent ou non du contact. Nous analysons alors les causes de l'éloignement des résultats analytiques de la réalité à travers les moments quadratiques polaires et de la raideur des dents. Nous cherchons aussi à optimiser la valeur des moments quadratiques polaires des pièces sans pour autant minimiser de manière significative les écarts entre les modèles EF et analytique. Enfin nous utilisons une nouvelle raideur, appelée raideur globale équivalente, remplaçant la raideur des dents, permettant d'englober les phénomènes locaux qui ne sont pas pris en compte dans le modèle simple du comportement axial. Ce nouveau modèle étendu ouvre la possibilité de simuler de manière très satisfaisante le comportement des liaisons dont les dents dépassent du contact.

### ***Améliorations à apporter au modèle et développements futurs***

Un premier développement, qui s'impose, est la création d'un modèle Eléments Finis paramétré permettant l'étude de tous les cas de cannelures du même type. En effet au cours de notre travail nous avons développé des modèles EF spécifiques pour quelques cannelures, mais aucun ne permet de simuler les différentes tailles de cannelure. Pour analyser plus efficacement l'existence de certains phénomènes, cette étape est nécessaire.

Dans un second temps, il sera nécessaire d'élargir les fonctionnalités de l'outil d'assistance aux différentes cannelures existantes. En effet les trois types de cannelures ont toutes un comportement radial différent, notre attention s'étant particulièrement portée sur le cas des flancs en développante de cercle.

Une amélioration du modèle analytique de Tatur – Orain du comportement axial peut être apportée si nous y intégrons notamment une raideur globale équivalente. Cela offre alors la possibilité de modéliser de manière plus fine la répartition axiale du couple et donc de la pression moyenne. Un travail futur consistera donc à établir les relations qui permettront d'écrire  $C_\phi(z)$ ,  $I^a$  et  $I^m$  en fonction des paramètres du problème.

Enfin il sera intéressant d'associer à l'outil d'assistance un critère de fretting permettant de donner une estimation de la durée de vie d'une cannelure. La principale difficulté de ce problème est la validité du critère exploité, qui nécessite obligatoirement la réalisation de tests expérimentaux complexes.



---

## RÉFÉRENCES

- ABAQUS (2003). "User's and theory manuals".
- Adey, R. A., Baynham, J. and Taylor, J. W. (2000). "Development of analysis tools for spline couplings." *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, vol. 214(6), pp. 347-357.
- Barber, J. R. and Ciavarella, M. (2000). "Contact mechanics." *International Journal of Solids and Structures*, vol. 37(1-2), pp. 29-43.
- Blanc, H. (1999). "Un Nouveau modèle pour l'étude et le dimensionnement des liaisons par cannelures axiales." *4th World Congress on Gearing and Power Transmission*, vol. 2, pp. 1217-1227.
- Blanc, H. (2000). "Dynamique des rotors en torsion - Répartition de l'inertie et de la raideur." *Technique de l'ingénieur*, vol. BM5 122, pp. 10.
- Bucher, F., Knothe, K. and Theiler, A. (2002). "Normal and tangential contact problem of surfaces with measured roughness." *Wear*, vol. 253(1-2), pp. 204-218.
- Colin, G. (1988). "Le fretting corrosion." *CETIM-Informations*, vol. 107, pp. 47-52.
- Cornell, R. W. (1981). "Compliance and stress sensitivity of spur gear teeth." vol. 103(2), pp. 447-459.
- Dundurs and Lee (1972). "Stress concentration at a sharp edge in contact problems." *J. elasticity*, vol. 2, pp. 109-112.
- Fregly, B. J., Bei, Y. and Sylvester, M. E. (2003). "Experimental evaluation of an elastic foundation model to predict contact pressures in knee replacements." *Journal of Biomechanics*, vol. 36(11), pp. 1659-1668.
- Gedeon, M. (2002). "Fretting Corrosion." *Technical Tidbits, Brushwellman engineering materials*, vol. 4(3).
- Goryacheva, I. G., Murthy, H. and Farris, T. N. (2002). "Contact problem with partial slip for the inclined punch with rounded edges." *International Journal of Fatigue*, vol. 24(11), pp. 1191-1201.
- Hanson, M. T. and Keer, L. M. (1989). "Stress analysis and contact problems for an elastic quarter-plane." *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 42 pt 3, pp. 363-383.
- Hanson, M. T. and Keer, L. M. (1990). "Simplified analysis for an elastic quarter-space." *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 43(pt 4), pp. 561-587.
- Hayashi, I. and Hayashi, T. (1985). "Miniaturisation of involute splined couplings. Discussion from torsional stiffness and yield torque." *Bulletin of the JSME*, vol. 28(236), pp. 259-266.
- Huang, K. J. and Liu, T. S. (2000). "Dynamic analysis of a spur gear by the dynamic stiffness method." vol. 234(2), pp. 311.
- Hyde, T. R., Leen, S. B., McColl, I. R. and Williams, E. J. (2000). "A representative model for life assessment of spline couplings". *Gearing, Transmissions and Mechanical Systems*, Nottingham Trent University, UK, Professional Engineering Publishing, pp. 625-634.
- Johnson, K. L. (1985). "Contact Mechanics". Cambridge, *Cambridge University Press*.
- Kapsa, P. and Cartier, M. (2006). "Usure des contacts mécaniques : Manifestations de l'usure". *Technique de l'Ingénieur*, vol. BM 5 067, pp. 14.

- Ku, C. P. R., Walton, J. F. J. and Lund, J. W. (1993). "A theoretical approach to determine angular stiffness and damping coefficients of an axial spline coupling in high-speed rotating machinery." *Journal of Vibration of Rotating Systems, Transactions of the ASME*, vol. 60, pp. 249-256.
- Ku, C. P. R., Walton, J. F. J. and Lund, J. W. (1994a). "Dynamic coefficients of axial spline couplings in high-speed rotating machinery." *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, vol. 116(3), pp. 250-256.
- Ku, C. P. R., Walton, J. F. J. and Lund, J. W. (1994b). "An investigation of angular stiffness and damping coefficients of an axial spline coupling in high-speed rotating machinery". *Nasa conference publication*, pp. 293-303.
- Leen, S. B., Hyde, T. H., Ratsimba, C. H. H., Williams, E. J. and McColl, I. R. (2002). "An investigation of the fatigue and fretting performance of a representative aero-engine spline coupling." *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, vol. 37(6), pp. 565-583.
- Leen, S. B., Hyde, T. R., Williams, E. J., Becker, A. A., McColl, I. R., Hyde, T. H. and Taylor, J. W. (2000). "Development of a representative test specimen for frictional contact in spline joint couplings." *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, vol. 35(6), pp. 521-544.
- Leen, S. B., McColl, I. R., Ratsimba, C. H. H. and Williams, E. J. (2003). "Fatigue life prediction for a barrelled spline coupling under torque overload." *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, vol. 217(3), pp. 123-142.
- Leen, S. B., Richardson, I. J., McColl, I. R., Williams, E. J. and Hyde, T. R. (2001). "Macroscopic fretting variables in a splined coupling under combined torque and axial load." *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, vol. 36(5), pp. 481-497.
- Limmer, L., Nowell, D. and Hills, D. A. (2001). "A combined testing and modelling approach to the prediction of the fretting fatigue performance of splined shafts." *Institution of Mechanical Engineers, Part G. : Journal of Aerospace Engineering*, vol. 215, pp. 105-111.
- Manners, W. (2000). "Pressure required to flatten an elastic random rough profile." *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 42(12), pp. 2321-2336.
- Manners, W. (2003). "Methods for analysing partial contact between surfaces." *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 45(6-7), pp. 1181-1199.
- Marmol, R. A., Smalley, A. J. and Tecza, J. A. (1980). "Spline coupling induced nonsynchronous rotor vibrations." vol. 102(1), pp. 168-176.
- Matusz, J. M., O'Donnell, W. J. and Erdlac, R. J. (1969). "Local flexibility coefficients for the built-in ends of beams and plates." *Journal of Engineering for Industry*, vol. 91, pp. 607-614.
- Munro, R. G., Palmer, D. and Morrish, L. (2001). "An experimental method to measure gear tooth stiffness throughout and beyond the path of contact." *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 215(7), pp. 793-803.
- O'Donnell, W. J. (1960). "The additional deflection of a cantilever due to the elasticity of the support." *Journal of Applied Mechanics*, vol. 27, pp. 461-464.
- O'Donnell, W. J. (1974). "Stresses and deflections in built-in beams", *ASME*, vol. 62WA16, pp. 1-8.
- Oda, S., Koide, T., Ikeda, T. and Umezawa, K. (1986a). "Effects of pressure angle on tooth deflection and root stress." *Bulletin of the JSME*, vol. 29(255), pp. 3141-3148.
- Oda, S. and Miyachika, K. (1986b). "Practical formula for tooth deflection of internal spur gear." *Bulletin of the JSME*, vol. 29(257), pp. 3905-3910.

- Orain, M. (1976). "Contribution à l'étude de mécanismes homocinétiques". *Thèse de docteur ingénieur de l'université Paris III*, pp. 260-276.
- Quinn, A. M., Drinkwater, B. W. and Dwyer-Joyce, R. S. (2002). "The measurement of contact pressure in machine elements using ultrasound." *Ultrasonics*, vol. 39(7), pp. 495-502.
- Sackfield, A., Mugadu, A., Barber, J. R. and Hills, D. A. (2003). "The application of asymptotic solutions to characterising the process zone in almost complete frictionless contacts." vol. 51(7), pp. 1333.
- Sainsot, P. and Velez, P. (2004). "Contribution of gear body to tooth deflections - A new bidimensional analytical formula." *Journal of mechanical design (ASME)*, vol. 126, pp. 748-752.
- Sellgren, U., Bjorklund, S. and Andersson, S. (2003). "A finite element-based model of normal contact between rough surfaces." *Wear*, vol. 254(11), pp. 1180-1188.
- Sum, W. S., Leen, S. B. and Williams, E. J. (2003). "Parametric Study on the Frictional Contact Behaviour between Spline Teeth". *Modern Practice in Stress and Vibration Analysis: Proceedings of the 5th International Conference on Modern Practice in Stress and Vibration Analysis, Sep 9-11 2003*, Glasgow, Scotland, United Kingdom, Trans Tech Publications Ltd, vol. 440-441, pp. 69-76.
- Sum, W. S., Williams, E. J. and Leen, S. B. (2004). "Finite element, critical-plane, fatigue life prediction of simple and complex contact configurations." *International Journal of Fatigue*, vol. In Press, Corrected Proof.
- Tatur (1969). "Irregularity of load distribution along a splined coupling." *Russain Engineering Journal*, vol. XLIX, pp. 23-27.
- Terauchi, Y. and Nagamura, K. (1981). "Study on deflection of spur gear teeth - 2. Calculation of tooth deflection for spur gears with various tooth profiles." *Bulletin of the JSME*, vol. 24(188), pp. 447-452.
- Timoshenko, S. P. and Gere, J. M. (2003). "Mechanics of materials solutions manual".
- Tjernberg, A. (2001). "Load distribution in the axial direction in a spline coupling." *Engineering Failure Analysis*, vol. 8(6), pp. 557-570.
- Varadi, K., Neder, Z. and Friedrich, K. (1996). "Evaluation of the real contact areas, pressure distributions and contact temperatures during sliding contact between real metal surfaces." *Wear*, vol. 200(1-2), pp. 55-62.
- Volfson, B. P. (1982). "Stress sources and critical stress combinations for splined shaft." *Journal of Mechanical Design*, vol. 104(3), pp. 551-556.
- Wang, J. and Howard, I. (2004). "The torsional stiffness of involute spur gears." *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 218(1), pp. 131-142.
- Yamaguchi, K., Uchida, M. and Mondori, F. (1996). "Measurement of the pressure distribution between contact surfaces by light reflection." *Journal of Engineering for Industry*, vol. 118, pp. 161-165.



---

## **LISTE DES TRAVAUX PUBLIES**

### CONFERENCE INTERNATIONALE

Barrot, P., Paredes, M., and Sartor, M., (2004). “An assistance tool for spline coupling design”, in *Proceedings on CDROM of 5th International Conference on Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering (IDMME 2004)*, ISBN 1857901290, A. N. Bramley, et al., Eds. Bath, UK: Univ. of Bath, pp. 1-12,.

### PUBLICATIONS INTERNATIONALES

Barrot, P., Paredes, M. and Sartor, M. (2005). "An assistance tool for spline coupling design". *Recent Advances in Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering*, Springer, ISBN 1402034814, .Eds. Dordrecht, pp. 329-342.

Barrot, P., Paredes, M., and Sartor, M., (2006). “Determining both radial pressure distribution and torsional stiffness of involute spline couplings”, *Institution of Mechanical Engineers, Part C, Journal of Mechanical Engineering Science*,





# ANNEXE I

Complément sur les normalisations



Cette annexe présente les dimensions géométriques nécessaires dans le chapitre 1 traitant des normalisations française et américaine.

## NORME FRANÇAISE

Il existe plusieurs normes françaises concernant les différents types de cannelures. En voici une énumération :

NF E 22-131 Avril 1986	Cannelures cylindriques à flancs parallèles, à centrage intérieur - Dimensions, tolérance et vérification
NF E 22-141 Décembre 1955	Cannelures rectilignes à flancs en développantes
E 22-142 Janvier 1986	Cannelures cylindriques droites à flancs en développante - Angle de pression 20° - Vérification par calibres
E 22-143 Mai 1950	Cannelures à flancs en développante
NF E 22-144 Octobre 1987	Cannelures cylindriques droites à flancs en développante et centrage sur flancs – Angles de pression 30°, 37,5° et 45° - Généralités et dimensions
NF E 22-145 Juin 1979	Cannelures cylindriques droites à flancs en développante, à module métrique, à centrage sur flancs - Angles de pression 30 degrés, 37,5 degrés et 45 degrés - Vérification.
NF E 22-146 Octobre 1987	Cannelures cylindriques droites à flancs en développante et centrage sur flancs - Angles de pression 30°, 37,5° et 45° - Tableaux de dimensions des cannelures
E 22-148 Novembre 1985	Cannelures cylindriques droites à flancs en développante – Règles pour le choix dimensionnel et la vérification
NF E 22-151 Janvier 1967	Dentelures rectilignes – Arbres et moyeux cylindriques
NF E 22-152 Février 1961	Dentelures rectilignes – Arbres et moyeux coniques

L'ensemble des ces normes traite du dimensionnement géométrique des différents types de cannelures (côtes de fabrication) et de leur contrôle. Seule la norme E 22-148 (complément de la norme NF E 22-144) précise le calcul des contraintes et celui du couple admissible en vue du choix des dimensions pour des cannelures à flancs en développante. Nous présentons ci-après quelques précisions concernant ces calculs.

## NORME AMERICAINE

*Généralité sur la norme américaine*

Les deux principales normes américaines concernant les cannelures sont les deux suivantes :

- ANSI B92.1-1970 (R 1993)
- ANSI B92.2M-1980 (R 1989) qui est en fait la version « métrique » de la norme précédente.

En ce qui concerne la définition géométrique des cannelures, on retrouve les mêmes formulations que celles des normes françaises. La particularité intéressante du point de vue de la conception est la prise en compte dans ces normes des principaux défauts et phénomènes pouvant altérer le bon fonctionnement des cannelures à travers plusieurs coefficients. Ces coefficients donnent des formules de capacité de charge sûrement mieux adaptées que celles proposées par les normes françaises mais encore surdimensionnées. Toutefois ceci montre à nouveau que le comportement des cannelures reste un domaine peu approfondi par les instituts de normalisation. Nous présentons ci-après quelques précisions concernant les calculs donnés par cette norme.

*Remarque : les unités de longueur sont en inch, de pression en psi.*

*Tables des différents facteurs et valeurs admissibles*

Source de puissance	Type de chargement			
	Uniforme (ventilateur)	Chocs légers (pompes oscillantes, etc.)	Chocs intermittents (pompes à vérin)	Chocs forts (perforateurs)
	Facteur d'application de charge $K_a$			
Uniforme (turbine, moteur)	1.0	1.2	1.5	1.8
Chocs légers (moteur hydraulique)	1.2	1.3	1.8	2.1
Chocs moyens (combustion interne, moteur)	2.0	2.2	2.4	2.8

**Tableau AI.1 : Facteur d'application de charge  $K_a$**

ANNEXE I : Complément sur les normalisations

Défaut d'alignement en inch par inch	Facteur de distribution de charge, $K_m$			
	0.5 inch de largeur de face	1 inch de largeur de face	2 inch de largeur de face	4 inch de largeur de face
0.001	1	1	1	1.5
0.002	1	1	1.5	2
0.004	1	1.5	2	2.5
0.008	1.5	2	2.5	3

**Tableau AI.2 : Facteur de distribution de charge  $K_m$**

Nombre de cycles de couple*	Facteur de fatigue, $K_f$	
	Unidirectionnel	Alterné
1000	1.8	1.8
10000	1.0	1.0
100000	0.5	0.4
1000000	0.4	0.3
10000000	0.3	0.2

**Tableau AI.3 : Facteur de fatigue  $K_f$**

\*Un cycle de couple correspond à une application de couple suivie d'un déchargement (à ne pas confondre avec le nombre de rotations).

Nombre de tours de la cannelure	Facteur d'usure, $K_w$	Nombre de tours de la cannelure	Facteur d'usure, $K_w$
10000	4.0	100000000	1.0
100000	2.8	1000000000	0.7
1000000	2.0	10000000000	0.5
10000000	1.4	...	...

**Tableau AI.4 : Facteur d'usure  $K_w$**

ANNEXE I : Complément sur les normalisations

Matériau	Dureté		Contrainte maximale de cisaillement admissible en psi
	Brinell	Rockwell C	
acier	160-200	--	20000
acier	230-260	--	30000
acier	302-351	33-38	40000
acier traité en surface	--	48-53	40000
acier cimenté	--	58-63	50000
acier trempé à cœur	--	42-46	45000

**Tableau AI.5 : Contrainte de cisaillement admissible**

Matériau	Dureté		Contrainte de compression maximale admissible (psi)	
	Brinell	Rockwell C	Cannelures non bombées	Cannelures bombées
acier	160-200	--	1500	6000
acier	230-260	--	2000	8000
acier	302-351	33-38	3000	12000
acier traité en surface	--	48-53	4000	16000
acier cimenté	--	58-63	5000	20000

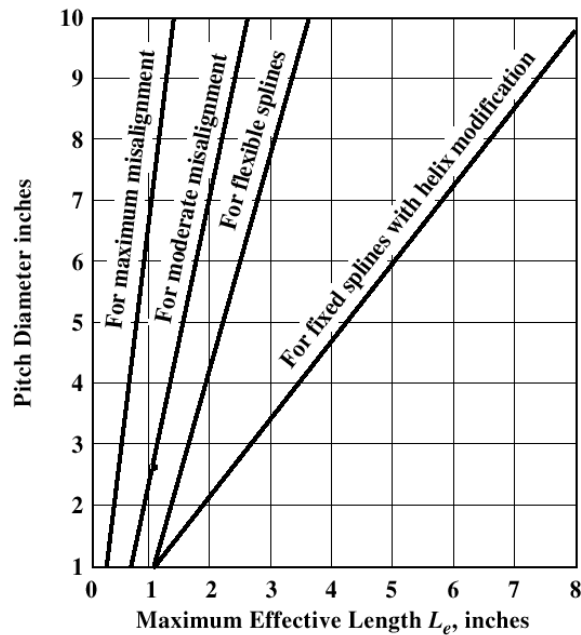
**Tableau AI.6 : Contrainte de compression admissible**

ANNEXE I : Complément sur les normalisations

Matériau	Dureté		Contrainte de traction maximale admissible (psi)
	Brinell	Rockwell C	
acier	160-200	--	22000
acier	230-260	--	32000
acier	302-351	33-38	45000
acier traité en surface	--	48-53	45000
acier cimenté	--	58-63	55000
acier trempé à cœur	--	42-46	50000

**Tableau AI.7 : Contrainte de traction admissible**

Longueur maximale effective en fonction du type de cannelures, de l'assemblage et du diamètre primitif.



**Tableau AI.8 : Longueurs effectives maximales  $L_e$**





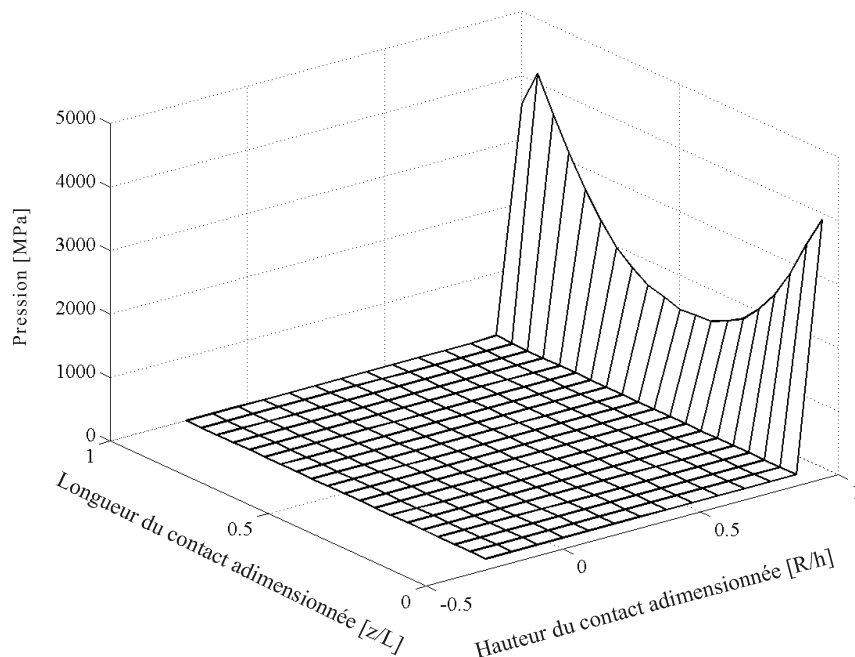
## ANNEXE II

Influence de l'introduction d'un film entre les  
dents en contact



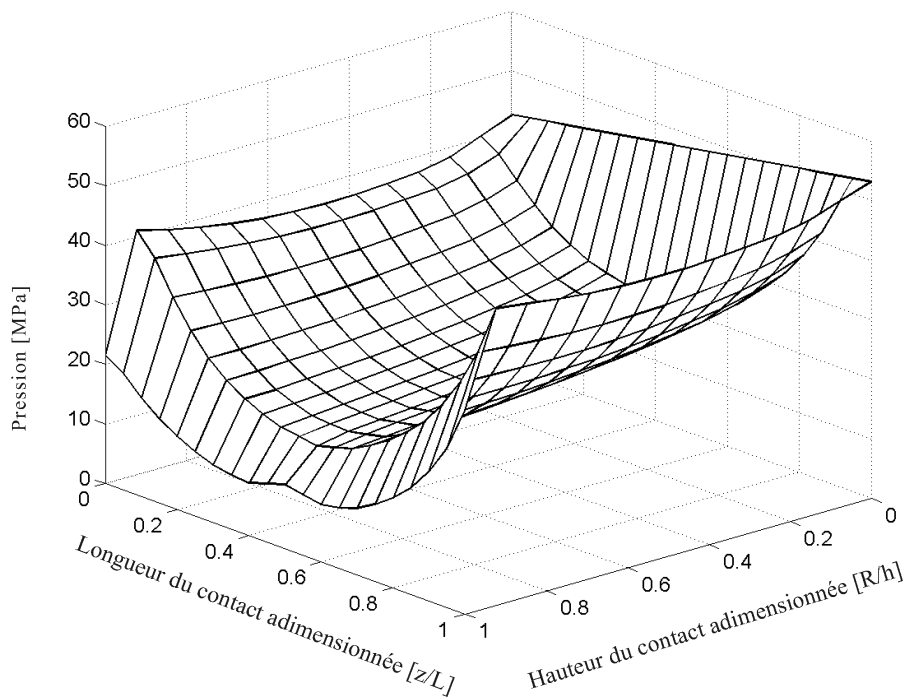
L'influence de la présence d'un film entre deux flancs en contact est exposé ici pour une cannelure à flancs parallèles. Le film est inséré dans le modèle EF entre chaque contact de la cannelure. Le matériaux du film est considéré comme étant un plastique de type PTFE. Pour limiter les grands déplacements du film, il faut placer deux ressorts de faible raideur entre l'arbre ou le moyeu et le film.

Le première interrogation porte sur la répartition de la pression. Etant donné la faible épaisseur du film (0.1mm) la répartition de la pression avec film est-elle identique à celle sans présence de film ? Pour répondre à cette interrogation deux graphes 3D de la répartition sur un des flancs en contact suffisent. Les graphes visibles Figure AII.1 et Figure AII.2 permettent une comparaison rapide de ces deux configurations.  $R$  représente le rayon,  $h$  la hauteur du contact,  $L$  la longueur totale du contact et  $z$  la position axiale.



**Figure AII.1 Répartition de la pression sans présence du film**

La Figure AII.1 révèle que seule une ligne de nœuds travaille selon les Eléments Finis. C'est normal sur un tel type de cannelure. La rotation de l'arbre par rapport au moyeu ou inversement créé un décalage car les dents ne sont pas de forme complémentaire (par opposition à une cannelure à flancs en développante de cercle). Ainsi l'arête de tête de la dent de l'arbre est la première partie en contact sur le flanc des dents avec le moyeu. Si le couple est très important alors le contact s'étend sur une plus grande zone.



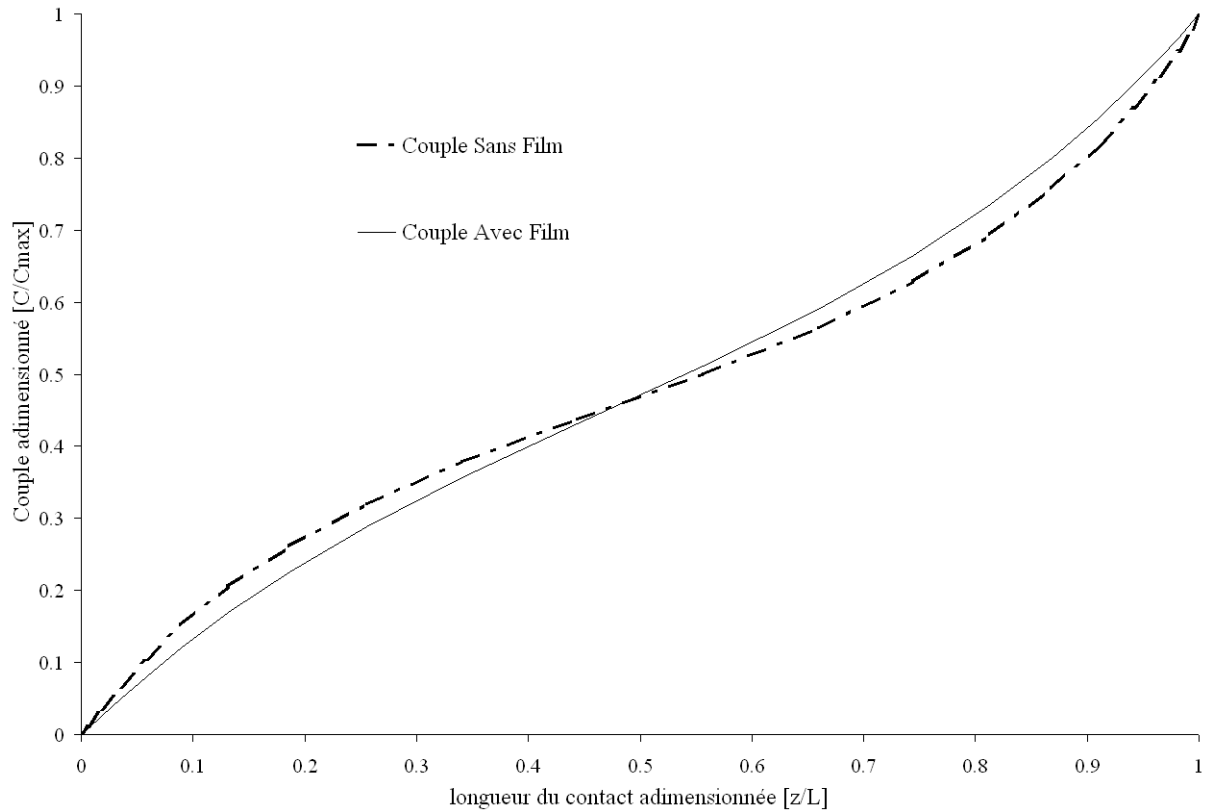
**Figure AII.2 Répartition de la pression avec présence du film**

Sur la Figure AII.2, il apparaît évident que le comportement se trouve fortement perturbé par la présence du film. Le test a été aussi réalisé avec une cannelure à flanc en développante de cercle qui a la propriété d'avoir un contact sur toute la surface sans film. Cette cannelure étant sans jeu, il est nécessaire d'en créer pour insérer le film. Cette création de jeu ôte à la cannelure l'intérêt de la développante de cercle car il n'y a plus un vis à vis exact entre moyeu et arbre. C'est pourquoi la conclusion est similaire : il n'est pas possible avec un film de prédire la répartition de la pression.

Il est par contre possible en partant de la pression de remonter à la distribution du couple le long de l'arbre ou du moyeu. En annexe III, une description d'une méthode permettant de réaliser le lien entre couple et pression est présentée.

Une seconde question peut être alors posée. Est-il possible avec la présence de film, que la répartition de couple soit la même que celle sans la présence de film ?

Grâce à la Figure AII.3, il est possible d'y répondre. Cette figure est une comparaison de la même cannelure avec et sans film. Il est donc évident que ces répartitions ne sont pas identiques.



**Figure AII.3 Comparaison de la distribution des couples avec et sans film**

En conclusion il peut être noté que le film vient perturber fortement le comportement d'une cannelure. Que ce soit la répartition de pression ou la distribution du couple, les résultats sont très différents. Cette comparaison a été présentée ici pour une cannelure à flancs parallèles, mais des tests ont révélés que pour tous types de cannelures les résultats étaient similaires.



# ANNEXE III

Précisions sur les modèles EF 3D des  
cannelures





## MISE EN PLACE DU CHARGEMENT SOUS FORME DE CONTRAINTE

Le but de ce paragraphe est de décrire la procédure utilisée pour introduire un couple sur une cannelure en répartissant linéairement en fonction du rayon la contrainte de cisaillement,  $\tau$ .

En considérant la répartition de la contrainte de cisaillement identique à celle d'un arbre en torsion :

$$\tau = \frac{C_{ext}}{I} r$$

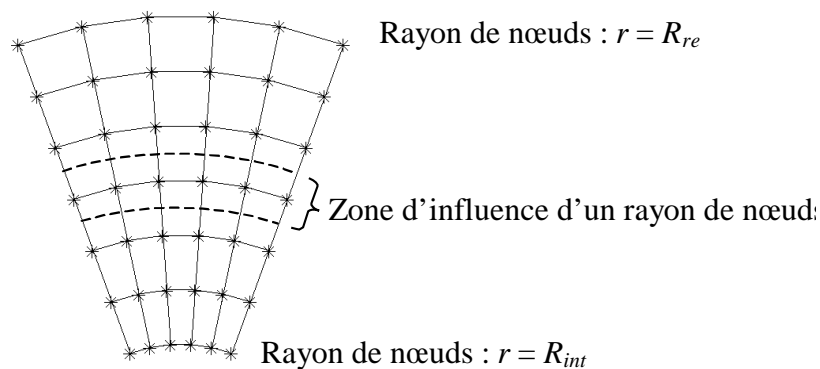
Avec :

$r$  : rayon compris entre le rayon minimum  $R_{int}$  et le rayon de fondation  $R_{re}$ .

$I$  : inertie de la partie soumise à la contrainte. Pour mettre en place le chargement sous forme de contrainte dans le modèle EF, il est nécessaire de faire une hypothèse. Elle consiste à négliger les dents lors de l'introduction du couple. Ainsi l'inertie a pour expression :

$$I = \frac{\pi}{2} (R_{re}^4 - R_{int}^4)$$

Lors de la modélisation EF, il est impossible de définir directement une fonction permettant d'introduire une contrainte paramétrée. Il est donc nécessaire de convertir la contrainte en forces nodales.



**Figure AIII.1** Secteur de l'arbre où le chargement est introduit

Le corps de la cannelure est modélisé comme le montre la Figure AIII.1. Ainsi sur chaque rayon de nœuds, une force orthoradiale nodale est imposée ayant comme équation :

$$F(r) = \frac{\tau S}{Z n}$$

Avec :

$S$  : surface d'influence du rayon de nœuds,

$n$  : nombre de nœuds sur chaque rayon.

Connaissant la force à imposer en chaque nœud, il suffit d'imposer dans le fichier source d'Abaqus la charge avec sa direction en fonction du numéro du nœud.

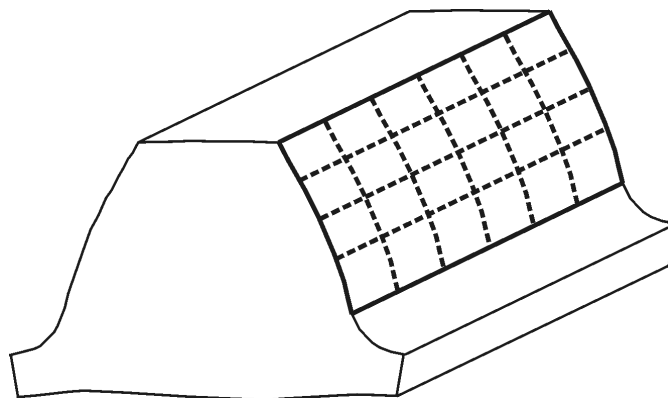
## OBTENTION DU COUPLE ISSU DU MODELE EF

Le but de ce paragraphe est de décrire la procédure utilisée pour obtenir le couple à partir des résultats disponibles du modèle EF.

Il n'est pas possible de connaître le couple dans chaque section de la cannelure en exploitant directement les résultats EF. Il est alors nécessaire de mettre en place une méthodologie afin de le connaître. Le couple peut être obtenu à l'aide de la pression de contact. Une seconde méthode consiste à utiliser les éléments forces.

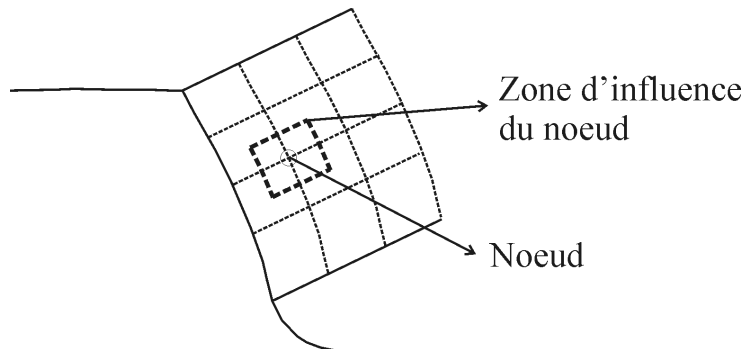
### *Méthode par pression*

Afin d'obtenir le couple, une solution est de récupérer les pressions de contact sur un flanc. Sur Abaqus la pression est disponible uniquement aux nœuds. La Figure AIII.2 représente une surface type en contact.



**Figure AIII.2 Surface de contact**

La pression agit en réalité non pas en un point mais sur une surface. Ainsi la pression d'un nœud agit sur une surface autour de celui-ci appelée zone d'influence (voir Figure AIII.3).



**Figure AIII.3 Zone d'influence d'un nœud**

Ainsi une fois la surface calculée, il est possible de connaître la force issue de la pression en chaque nœud. Le point d'application est au centre de la surface d'influence. Le transfert de couple est donnée Tableau AIII.1.

Coordonnée longitudinale du point d'application du couple	Valeur du couple
0	0
$\frac{0+a}{4}$	$\Delta C_0$
$a$	$\Delta C_0 + \Delta C_1$
$a + b$	$\Delta C_0 + \Delta C_1 + \Delta C_2$
...	...
$L$	$C_{ext}$

**Tableau AIII.1 Description du transfert du couple issu de la pression**

Avec :

$a$  : longueur de l'élément 1

$b$  : longueur de l'élément 2

$c$  : longueur de l'élément 3

Cependant cette méthode est longue à mettre en place. Une autre méthode, basée sur les éléments forces a donc été développée.

### Méthode par éléments forces

Les éléments forces sont les forces extérieures qui s'exercent sur un élément. Elles sont exprimées aux nœuds constituant cet élément. Ainsi si on isole un ensemble d'éléments, les éléments forces sont nulles au sein de ce groupe mais existent pour les éléments qui sont à la frontière du groupe.

La première étape consiste à exporter dans un tableur les données correspondant aux coordonnées des nœuds dans un système cylindrique et aux éléments forces orthoradiales associées. Ce sont ces forces qui génèrent le couple.

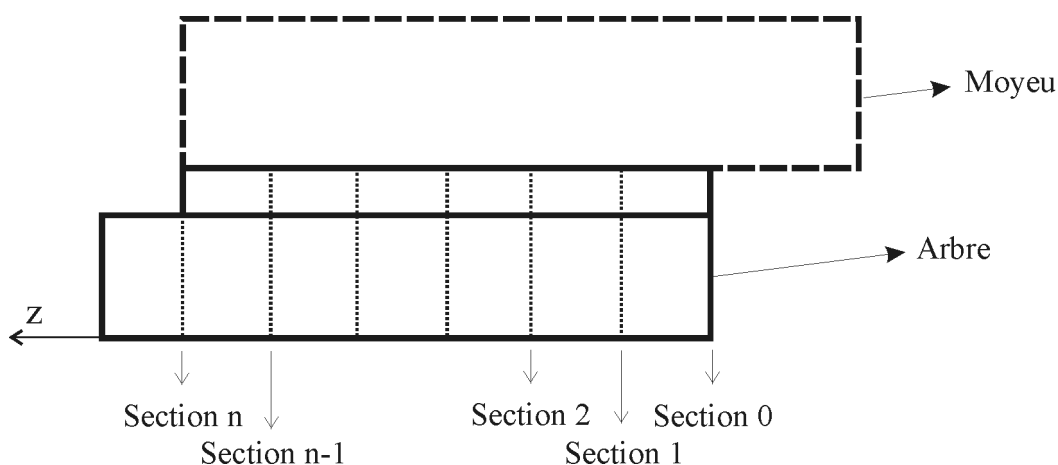
La cannelure est modélisée en utilisant la symétrie cyclique. Seul un secteur est représenté, dans chaque section (visible à la Figure AIII.4) le couple vaut alors

$$C_i = Z \sum F_i r_i$$

Avec :

$F_i$  : composante orthoradiale de l'élément force au nœud  $i$

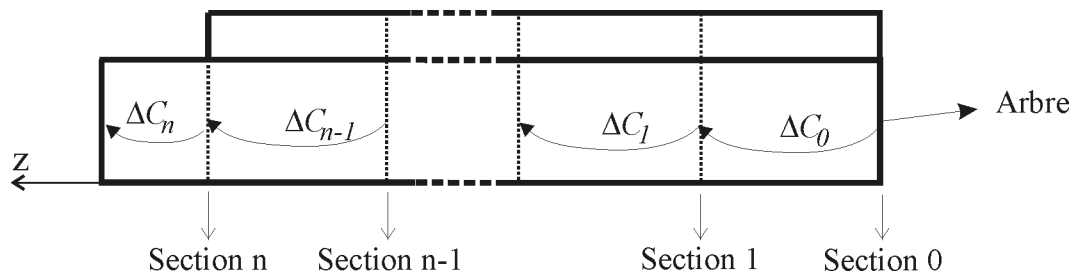
$r_i$  : rayon du nœud  $i$



**Figure AIII.4 Visualisation des sections de l'arbre d'une cannelure**

Le couple de la section 0 vaut en théorie 0. Or dans ce cas là,  $\Delta C_0$ , couple issu des éléments forces de la section 0, est non nul. Cela vient du fait qu'en théorie l'élément force est une force appliquée à un élément qui est ensuite redistribuée en chaque nœud de cet élément. Ainsi le  $\Delta C_0$  est le couple qui transite dans la zone d'influence de la section 0, visible Figure AIII.5. De même  $\Delta C_1$  est le couple qui transite dans la zone d'influence de la section 1. Le

point où le couple est exprimé est le milieu de la zone d'influence. Finalement le transfert de couple est donné Tableau AIII.2.



**Figure AIII.5 Visualisation des  $\Delta C$  dans l'arbre de la cannelure**

Si l'arbre de la cannelure dépasse du contact, comme sur la Figure AIII.5, alors le  $\Delta C_n$  est non nul. Par contre dans le cas où l'arbre ne dépasse pas, alors  $\Delta C_n$  est nul.

Coordonnée longitudinale du point d'application du couple	Valeur du couple
0	0
$\frac{0+a}{2}$	$\Delta C_0$
$\frac{a+b}{2}$	$\Delta C_0 + \Delta C_1$
$\frac{b+c}{2}$	$\Delta C_0 + \Delta C_1 + \Delta C_2$
...	...
$L$	$C_{ext}$

**Tableau AIII.2 Description du transfert du couple issu des éléments force**

Avec :

$a$  : longueur de l'élément 1

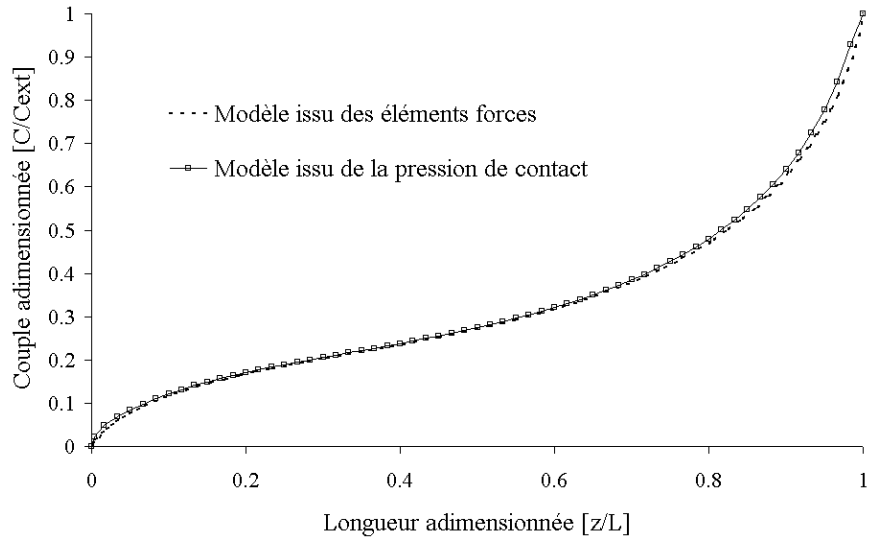
$b$  : longueur de l'élément 2

$c$  : longueur de l'élément 3

### *Confrontation des deux procédés présentés*

La Figure AIII.6 permet de visualiser le couple à travers l'arbre d'une cannelure ayant un module de 2.5mm et 25 dents. Les deux solutions sont identiques. Cependant l'obtention

de la surface en contact n'est pas un procédé facile à mettre en place et fiable, contrairement à l'exploitation des éléments forces. Durant la thèse, une même méthode est utilisée : celle des éléments forces.



**Figure AIII.6 Confrontation des deux méthodes présentées**

---

## RESUME

Les travaux de cette thèse consistent à étudier le comportement des cannelures afin de développer les bases d'un outil d'aide à la conception. Nous nous appuyons sur une modélisation Eléments Finis tridimensionnels validée par des études expérimentales. Des méthodes de calcul rapides et précises sont ainsi définies. Dans la première partie nous mettons en évidence les limites des normes de dimensionnement et la nécessité d'analyser le comportement d'une cannelure suivant les directions radiale et axiale. L'étude du comportement radial est basée sur une méthode déterminant d'une part un modèle de répartition de pression dit de « punch » et d'autre part la rigidité des dents. Ce dernier paramètre est utilisé ensuite pour décrire le comportement axial de la cannelure. Une analyse du transfert du couple le long de la cannelure a permis d'étudier les influences de la géométrie des pièces et du chargement. Enfin, nous avons travaillé à l'extension du modèle analytique relatif au comportement axial en vue d'élargir son domaine d'application aux cas où les dentures débordent de part et d'autre du contact. Nous avons identifié la possibilité d'utiliser une raideur globale équivalente, variable le long du contact, et capable de rendre compte d'un certain nombre de phénomènes parasites.

Works of this thesis consist in a study of the spline coupling behaviour in order to develop the bases of an assistance tool to the conception. We use tridimensional Finite Elements models validated by experimental studies. Calculus methods, which are fast and accurate, are so defined. In a first part, we examine the limits of the dimension normalization and the necessity to analyze the spline coupling behaviour in the radial and axial directions. The radial behaviour study is based on a method, which defines on the one hand a pressure repartition model, called "punch model" and on the other hand the teeth rigidity. This last parameter is used after to describe the axial behaviour of the spline. An analyse of couple transfert along the spline enables to study the geometry influence of shaft and sleeve and the load. Finally we have worked on an extension of analytical method of the axial behaviour to widen the application domain in the case where the teeth reach beyond the contact. We have identified the possibility to use an equivalent global rigidity, variable along the contact, and able to take into account some parasite phenomena.