HAL
open science

Pleins étiquetages et configurations équilibrées : aspects topologiques de l'Optimisation Combinatoire

Frédéric Meunier

▶ **To cite this version:**

Frédéric Meunier. Pleins étiquetages et configurations équilibrées : aspects topologiques de l'Optimisation Combinatoire. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2006. Français. NNT : . tel-00136938

HAL Id: tel-00136938

https://theses.hal.science/tel-00136938v1

Submitted on 15 Mar 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Joseph Fourier Grenoble I
École Doctorale Mathématiques et Informatiques

Thèse en vue de l'obtention du diplôme de
docteur de l'Université Joseph Fourier
en Mathématiques Appliquées

Pleins étiquetages et configurations équilibrées : aspects topologiques de l'Optimisation Combinatoire

Frédéric Meunier

Cette thèse a été soutenue le 13 juillet 2006.
Le jury était constitué de

Jean FONLUPT
Victor CHEPOÏ (rapporteur)
Charles DELORME (rapporteur)
Roland BACHER
Sylvain GRAVIER
András SEBŐ (directeur)
Jean-Pierre UHRY (invité)

A ma femme

Remerciements

Mes remerciements vont d'abord à ma femme, Magali, qui m'a soutenu de manière constante au cours de cette thèse, et qui a su mettre tant de bonheur dans notre foyer aux cours de ces années à Grenoble. Tous les midis, et tous les soir, c'était une joie de reprendre le chemin de la maison.

Je suis très reconnaissant au Corps des Ponts et Chaussées, et à ces représentants, de m'avoir autorisé à partir en thèse, à Grenoble, tout en continuant à me rémunérer. Sans lui, cette thèse n'aurait pas été possible.

Merci bien sûr à Andras Sebö, mon directeur de thèse, pour ses conseils, pour son aide lors de mes rédactions laborieuses, et de m'avoir fait partager son enthousiasme pour l'Optimisation Combinatoire.

Je remercie également les membres de mon jury de thèse, les rapporteurs, Victor Chepoi et Charles Delorme, dont la lecture minutieuse de ma thèse m'a été d'une grande aide pour améliorer le manuscrit, le président Jean Fonlupt, qui m'a initié à la combinatoire lorsque j'hésitais à faire le DEA OJME, et les examinateurs, Jean-Pierre Uhry, Roland Bacher et Sylvain Gravier avec chacun desquels j'ai eu une relation mathématique particulière et enrichissante.

D'autres personnes m'ont beaucoup apporté : Nadia Brauner, et Jean-Pierre Colomb, qui m'ont permis de me confronter au monde de la Recherche Opérationnelle appliquée et de découvrir ce qu'est la création d'une start-up. Expérience précieuse! Qu'ils soient assurés de ma gratitude. Jean-Pierre Uhry, Christophe Lacote, Renaud Lepeyre, ainsi que toute l'équipe productique d'Alma, ont également contribué à ce que cette thèse puisse se dérouler dans de bonnes conditions : d'abors en me permettant de faire mon stage de l'Ecole des Ponts à Grenoble, ensuite, en me faisant partager leur expérience en mathématiques vraiment appliquées, et enfin en me prêtant l'ordinateur portable sur lequel cette thèse a été tapée. Pour tout cela, Je les remercie du fond du coeur.

Merci à Frédéric Maffray, Myriam Preissman, et Sylvain Gravier, qui ont toujours bien accueilli mes questions de Théorie des Graphes, et y ont souvent répondu. J'ai appris à leur contact plus qu'ils ne le soupçonnent.

Merci à Gerd Finke, de m'avoir donné l'occasion de faire ma première expérience d'enseignement, à l'Université Joseph Fourier de Grenoble, et à Jean-Patrick Lebacque, de m'avoir donné celle de la prolonger à l'Ecole Nationale des Travaux Public d'Etat.

Merci à tous les doctorants du laboratoire Leibniz pour l'ambiance agréable et chaleureuse qu'ils ont su y faire régner, et en particulier à David Deffossez d'avoir supporté, sans jamais se plaindre, le partage du bureau avec moi.

Enfin, merci à mes enfants, Paul, Etienne, Grégoire, Claire et Pierre, qui m'ont apporté tant de bonheur et de fierté, et qui ont su accepter leur papa perdu si souvent dans ses pensées.

Table des matières

Remerciements **1**

Introduction **6**

1 Notations et outils **9**

1.1 Notions élémentaires . . . 9
1.1.1 Ensembles . . . 9
1.1.2 Nombres . . . 10
1.1.3 Séquences . . . 10
1.1.4 Ordres, maximum, maximal, minimum, minimal, borne supérieure, borne inférieure . . . 10
1.1.5 Alphabet et mots . . . 10
1.2 Algèbre élémentaire et algèbre linéaire . . . 11
1.2.1 Groupes . . . 11
1.2.2 Complexes de chaînes, homologie, cohomologie . . . 11
1.2.3 Espaces vectoriels et géométrie élémentaire . . . 12
1.3 Polyèdres et polytopes . . . 15
1.3.1 Définitions . . . 15
1.3.2 Polarité . . . 15
1.3.3 Quelques polytopes particuliers . . . 16
1.4 Topologie élémentaire . . . 17
1.4.1 Notions de base . . . 17
1.4.2 Simplexes et complexes simpliciaux géométriques . . . 19
1.4.3 Complexes polytopaux . . . 20
1.4.4 Simplexes et complexes simpliciaux abstraits . . . 20
1.4.5 Fonction simpliciale, étiquetage, fonction cubique . . . 22
1.4.6 Joints et joints effacés . . . 23
1.4.7 Chaînes pour complexes simpliciaux . . . 23
1.4.8 Preuve combinatoire . . . 24
1.5 Objets combinatoires . . . 24
1.5.1 Graphes . . . 24
1.5.2 Hypergraphes . . . 31
1.6 Complexité algorithmique . . . 31
1.6.1 Préliminaires . . . 31
1.6.2 Problèmes de décision . . . 31
1.6.3 Problèmes d'optimisation . . . 32
1.6.4 Problèmes de recherche associé à un problème de décision . . . 32

2 Variations sur le lemme de Sperner **35**
2.1 Introduction . . . 35
2.2 Le lemme de Sperner . . . 36
2.2.1 Enoncés et quelques preuves traditionnelles . . . 36
2.2.2 Version continue : théorème de Brouwer et théorème de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz . . . 38
2.2.3 Quelques mots sur la complexité algorithmique . . . 39
2.2.4 Multi-étiquetage . . . 39
2.3 D'autres étiquetages . . . 41
2.3.1 Un lemme de Scarf . . . 41
2.3.2 Théorème de Shapley et jeux équilibrés . . . 42
2.3.3 Polarité et lemme de Garcia . . . 44
2.3.4 Lemme de Sperner et matroïdes . . . 46
2.4 Le lemme de Sperner pour d'autres objets que le simplexe . . . 46
2.4.1 Théorèmes de Freund sur les polytopes . . . 46
2.4.2 Théorème de De Loera, Peterson et Su, et généralisations . . . 52

3 Variations sur la Formule de Ky Fan **63**
3.1 Introduction . . . 63
3.2 Le lemme de Tucker . . . 63
3.2.1 Enoncé et quelques preuves . . . 63
3.2.2 Version continue : le théorème de Borsuk-Ulam . . . 66
3.2.3 Quelques mots sur la complexité algorithmique . . . 70
3.3 Formules de Ky Fan . . . 70
3.3.1 Enoncé et preuves . . . 70
3.3.2 Autre preuve du lemme de Sperner . . . 74
3.3.3 Versions continues et applications . . . 75
3.3.4 Versions multi-étiquetage . . . 75
3.4 Généralisation de la formule de Ky Fan pour plus de 2 signes . . . 78
3.4.1 Mots, chaînes de mots et cochaînes de mots . . . 78
3.4.2 Une formule de Ky Fan généralisée . . . 80
3.4.3 Une généralisation combinatoire du théorème de Dold . . . 82
3.4.4 Une preuve du $\mathbb{Z}_p$-lemme de Tucker . . . 85
3.4.5 Questions finales . . . 86

4 Coloration des graphes de Kneser **87**
4.1 Introduction . . . 87
4.2 Les graphes de Kneser . . . 87
4.2.1 Définition . . . 87
4.2.2 Nombre chromatique . . . 88
4.3 Cas stable . . . 89
4.4 Nombre chromatique circulaire . . . 92

5 Le problème du collier **95**
5.1 Introduction . . . 95
5.2 Partager équitablement le collier . . . 96
5.2.1 Une preuve directe pour $t \leq 2$ et q quelconque . . . 97
5.2.2 Une preuve directe pour le cas $a_1 = a_2 = \ldots = a_t = 1$ et t et q quelconques . . . 97
5.2.3 Une preuve directe pour $t = 3$ et $q = 2$ . . . 98
5.2.4 Lemme de Ky Fan cubique et preuve constructive pour deux voleurs . 101
5.3 Optimiser le partage : l'atelier de peinture . . . 106

5.3.1 Description du problème 106
5.3.2 PAP$(2,1)$, intervalles et hypergraphes binaires 107
5.3.3 Complexité de PAP$(2,1)$ 108
5.3.4 Graphes signés, cas polynomiaux et cas gloutons 109
5.3.5 Annexe : coupe maximum dans les graphes 4-réguliers 111

6 Les σ-jeux **113**
6.1 Introduction 113
6.2 Quelques résultats classiques 116
6.2.1 Rappels d'algèbre linéaire sur $\mathbb{Z}_2$ et preuve du théorème de Sutner . . 116
6.2.2 Inversibilité de la matrice d'adjacence 118
6.3 Cas particulier de la grille 119
6.3.1 Préliminaires 120
6.3.2 Cas unidimensionel : le cas de la chaîne 123
6.3.3 Grille cartésienne en dimension 2 123
6.3.4 Grille de Pour la Science 125
6.3.5 La grille pour des dimensions ≥ 3 126
6.3.6 Conclusion 127

Introduction

En mathématiques il existe des assertions vraies, et des assertions fausses. Mais il existe des assertions qui possèdent, en plus de leur véracité, une beauté indubitable, au sens artistique du terme. Certains théorèmes ont cette harmonie, cette unité, en même temps que cet aspect mystérieux et synesthésique des oeuvres d'art.

Le théorème du partage du collier de Noga Alon est de ceux-là. q voleurs dérobent un collier fait de n perles, de t types différents. Supposons de plus que le nombre de perles de chaque type est divisible par q. Alors, affirme Alon, il existe un moyen de couper équitablement le collier en moins de $t(q-1)$ coupes, équitablement signifiant que chaque voleur reçoit autant de perles de chaque type. Résultat inattendu. Et stimulant : si ces $t(q-1)$ coupes existent, peut-on les trouver facilement ?

Cette question, à laquelle nous n'avons pu malheureusement répondre, nous a hanté au cours de cette thèse. Question fascinante qui associe des aspects de topologie algébrique, puisque seule la topologie algébrique est pour le moment en mesure de fournir les outils démontrant ce résultat, d'algorithmique (peut-on faire ce partage efficacement ?), économique (un partage équitable est une question éminemment économique), de la recherche opérationnelle, puisque cette question est apparue indépendamment dans le contexte de la peinture de voitures sur une chaîne de montage.

Cette quête esthétique d'une part, et cette association d'approches et de questionnements différents d'autre part peuvent être vues comme des axes de lecture de cette thèse : s'intéresser à des questions fondamentales, y exercer un sens artistique, sans jamais perdre de vue des applications potentielles, sans lesquelles les mathématiques sont "en danger de dégénérescence" (Von Neumann).

Ainsi, dans le Chapitre 2, nous nous intéressons au très célèbre lemme de Sperner. D'un côté, il peut être vu comme un théorème abstrait (et esthétique) de topologie algébrique, d'un autre, il est une source d'inspiration en économie et en théorie des jeux, et d'un autre encore, il est une version constructive, et donc implémentable, du théorème du point fixe de Brouwer. Nous avons cherché, dans la rédaction de ce chapitre, à mettre en avant ces aspects divers du lemme de Sperner. Les nouveautés apportées par cette thèse à l'étude de ce lemme sont les suivantes

1. L'usage systématique du formalisme des complexes de chaînes, ce qui nous permet de simplifier considérablement plusieurs preuves de généralisation du lemme de Sperner (lemme de Scarf, théorème de Shapley).
2. La formulation d'une conjecture concernant plusieurs étiquetages de Sperner simultanés d'une triangulation d'un simplexe (Conjecture 2.2). La résolution de cette conjecture conduirait probablement à un nouveau type de lien entre la topologie et la combinatoire.
3. La résolution d'une question ouverte, posée par Freund en 1989, concernant l'existence d'une preuve combinatoire à l'un de ses théorèmes (sous-section 2.4.1). Ce résultat a donné lieu à un article actuellement en révision [69].
4. La généralisation et l'amélioration d'un théorème de De Loera, Peterson et Su (voir sous-section 2.4.2), publiée dans l'article [68].

Dans le chapitre suivant, le Chapitre 3, notre objet d'étude devient une formule que la mathématicien Ky Fan a découverte en 1952 et généralisant le lemme de Sperner, et le lemme de Tucker, qui est au théorème de Borsuk-Ulam, ce qu'est le lemme de Sperner au théorème de Brouwer. Cette formule de Ky Fan utilise comme étiquette des entiers signés par $+$ et $-$. Bien qu'élémentaire, elle permet de trouver des théorèmes profonds de topologie continue, sans passer par des considérations abstraites de topologie algébrique comme le nombre de Lefschetz ou le degré d'une application continue. Nous avons obtenu quelques résultats dans cette étude :

1. Nous faisons une remarque simple, qui apparemment avait échappé à certains de mes prédécesseurs, sur l'existence de preuve constructive pour le lemme de Tucker quelque soit la triangulation (voir sous-section 3.2.1).
2. Toujours en utilisant le formalisme des complexes de chaînes (tout comme dans le chapitre précédent), nous pouvons donner une preuve extrêmement compacte de la formule de Ky Fan (voir section 3.3).
3. Cette technique nous permet de prouver de manière plus simple une version multi-étiquette de la formule de Ky Fan trouvée par Lee et Shih, ce qui nous a conduit à soumettre un article sur ce thème actuellement en révision ([70]).
4. De plus, elle nous permet de généraliser la formule de Ky Fan pour plus de deux signes, dans la perspective de parvenir, à terme, à une preuve constructive du théorème de Dold, qui est une généralisation du théorème de Borsuk pour des actions de groupes autre que $\mathbb{Z}_2$. On en déduit différentes généralisations de théorèmes de Ky Fan et Dold. En passant, nous introduisons un nouveau type de complexes de chaînes, les complexes de chaînes de mots. Cette formule de Ky Fan généralisée sera prochainement soumise [69].
5. Enfin, un autre théorème est obtenu, concernant les coïncidences de $\mathbb{Z}_2$-applications, généralisant le résultat d'un exercice proposé par Jiri Matousek dans son livre "Using the Borsuk-Ulam Theorem" [65]. Ce théorème semble avoir des liens avec la Conjecture 2.2 formulée dans le Chapitre 2.

La première application du théorème de Borsuk-Ulam à la combinatoire a été faite par László Lovász, dans sa démonstration de la conjecture de Kneser en 1978. Ce lien qui unit la topologie à un problème de coloration de graphe a quelque chose de cette harmonie mystérieuse (et "bizarre" comme le souligne Baudelaire) que l'on trouve dans l'objet beau. Cette conjecture concernait le nombre chromatique des graphes dont les sommets sont des k-parties et dont les arêtes relient les k-parties disjointes. Le Chapitre 4 de cette thèse concerne quelques questions actuelles sur ces graphes, appelés graphes de Kneser.

1. L'une des principales conjectures qui résistent encore concerne leur nombre chromatique circulaire (généralisation de la coloration classique où les sommets voisins doivent être coloriés avec des points d'un cercle suffisamment éloignés). La conjecture affirme que le nombre chromatique circulaire des graphes de Kneser est égal à leur nombre chromatique. En utilisant un théorème de Ky Fan démontré au Chapitre 3, nous parvenons à démontrer cette conjecture dans le cas où le nombre de sommets est pair (résultat obtenu indépendamment par Simonyi et Tardos). Nous avons publié cette preuve dans [67].
2. Un autre type de questionnement consiste à se débarasser des outils de la topologie continue pour redémontrer les théorèmes concernant les graphes de Kneser dans un cadre purement combinatoire. Matousek y est parvenu pour le théorème de Lovász [64], Ziegler pour le théorème de Schrijver (qui concerne des sous-graphes critiques des graphes de Kneser). Nous appuyant sur la formule de Ky Fan, nous simplifions la preuve de Ziegler. Cette preuve se trouve dans l'article soumis et déjà cité [70].

L'autre application célèbre à la combinatoire du théorème de Borsuk-Ulam est le théorème d'Alon, concernant le partage du collier (dans le cas à deux voleurs ; pour plus de deux voleurs, il faut utiliser le théorème de Dold). Dans le Chapitre 5, nous nous tournons donc vers ce problème. Nous cherchons à obtenir des preuves directes, ou du moins des preuves combinatoires constructives.

1. Nous sommes parvenu à trouver une preuve directe du cas à deux voleurs et trois types de perles, ce qui n'était jusqu'à présent pas connu.

2. De plus, nous donnons une vraie preuve constructive du théorème du partage du collier pour deux voleurs et pour un nombre de types de perles quelconque. Une telle preuve n'était pas connue. Elle s'appuie sur une preuve constructive d'un lemme de Ky Fan concernant des complexes cubiques (une telle preuve ne semblait pas non plus connue, mais nous nous inspirons directement d'une preuve constructive de Prescott et Su [78] d'un lemme de Ky Fan semblable pour les complexes simpliciaux). Enfin, des pistes sont données pour le cas à plus de deux voleurs. L'ensemble de ces résultats (preuve directe précédente et preuve constructive) constitue le matériel d'un article en préparation [72].
3. Dans un second temps (Section 5.3), nous nous tournons vers le problème consistant à minimiser le nombre de coupes pour des instances très simples (chaque type de perle possède exactement deux représentants), problème qui apparaît également dans le cadre de l'organisation de la production de voitures. Mais même dans ce cas, le problème est NP-difficile. Nous démontrons ce résultat de complexité de manière plus simple que celle connue jusqu'ici. De plus, nous identifions précisément à quelle famille de problèmes d'Optimisation Combinatoire ce problème appartient (couverture de cycles signés impairs), et proposons des algorithmes effectifs dans des cas particuliers, répondant à des questions formulées par Bonsma, Epping et Höchstättler dans l'article [8]. Ce travail a été mené en commun avec A. Sebő, et sera prochainement soumis [73].

Enfin, dans le dernier chapitre de la thèse, le Chapitre 6, nous nous intéressons à un petit jeu. Un graphe a ses sommets qui peuvent être allumés ou éteints. Appuyant sur un sommet, on change son état, ainsi que celui de ces voisins. Partant du graphe tout éteint, il est demandé de trouver une séquence d'appuis qui allument tout le graphe. Un théorème célèbre (théorème de Sutner) affirme qu'une telle séquence existe toujours (plaisir esthétique !). Les nouveautés que nous apportons à l'étude des σ-jeux, puisque c'est le nom technique de ces jeux, sont de deux types :

1. Nous faisons brièvement l'étude du cas où le graphe est un arbre, et que l'état du sommet sur lequel on appuie ne change pas. A notre connaissance, cette étude, quoique simple, n'avait pas encore été menée.
2. Dans un deuxième temps, nous redémontrons plus simplement un beau théorème de Mathieu Florence qui indique qu'il est possible d'obtenir n'importe quel motif de cases allumées symétrique par rapport aux deux axes médians horizontal et vertical, lorsqu'on joue sur un damier. Nous appuyant sur cette nouvelle preuve, nous résolvons une conjecture formulée dans la revue Pour la Science en août 2002, et nous généralisons le théorème de Florence pour des damiers de dimension 3 et plus. Un article, en préparation, reprendra tous ces résultats [28].

Chapitre 1

Notations et outils

Nous présentons dans cette partie les outils et les notations dont nous nous servons dans la thèse. Lorsqu'ils sont d'usage courant en mathématiques, les résultats présentés dans cette partie ne sont pas démontrés.

1.1 Notions élémentaires

1.1.1 Ensembles

Dans cette thèse, la plupart des ensembles considérés sont finis. On omettra souvent de le préciser, lorsque, par exemple, on définit un graphe par son ensemble de sommets et son ensemble d'arêtes.

Une *famille* est un ensemble dans lequel un élément peut apparaître plusieurs fois. Une *collection* est synonyme d'ensemble, mais est employé lorsque les éléments sont eux-mêmes des ensembles. Un *multi-ensemble* est la donnée d'un ensemble E et d'une application $m : E \to \mathbb{N}$, appelée *multiplicité*, qui à tout élément de E fait correspondre un entier. On peut voir un multi-ensemble comme un ensemble dans lequel tout élément peut être présent un certain nombre de fois, sa multiplicité.

Un sous-ensemble Y d'un ensemble de X est dit *propre* si $Y \neq X$. Deux ensembles X et Y sont *disjoints* si $X \cap Y = \emptyset$. L'ensemble des parties d'un ensemble X est noté $\mathcal{P}(X)$. Deux ensembles X, Y sont dits *comparables* si $X \subseteq Y$ ou si $Y \subseteq X$. Une collection d'ensembles comparables est appelée *chaîne*.

Une *partition* d'un ensemble X est un ensemble de parties $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ tel que

- $\forall Y \in \mathcal{E}$, $Y \neq \emptyset$,
- $\bigcup_{Y \in \mathcal{E}} Y = X$,
- $\forall (Y, Z) \in \mathcal{E}^2$, $Y \neq Z \Rightarrow Y \cap Z = \emptyset$.

Si X et Y sont deux ensembles, $X \triangle Y$ est la *différence symétrique* de X et de Y, et est définie par

$$X \triangle Y := (X \cup Y) \setminus (X \cap Y).$$

Si X et Y sont deux ensembles, on écrit $X \uplus Y$ pour l'ensemble $(X \times \{1\}) \cup (Y \times \{2\})$. Ainsi, $X \uplus Y$ est l'union disjointe de X et de Y, où l'on attache l'étiquette 1 aux éléments de X et l'étiquette 2 aux éléments de Y. Bien entendu, $X \uplus Y \neq Y \uplus X$.

Pour un ensemble fini Λ, $\binom{\Lambda}{k}$ est l'ensemble des parties à k éléments de Λ et $\binom{\Lambda}{\leq k}$ l'ensemble des parties de Λ dont la cardinalité est inférieure ou égale à k.

1.1.2 Nombres

$\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$ désignent respectivement l'ensemble des nombres réels, nombres rationnels, entiers relatifs, entiers naturels, nombres complexes. Lorsqu'on met $+$ (resp. $-$) en indice, cela signifie que l'on se restreint aux nombres positifs (resp. négatifs) ou nuls.

La notation suivante est utilisée fréquemment dans la thèse : pour $n \in \mathbb{N}$, $[n]$ désigne l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. L'anneau des entiers modulo q est noté $\mathbb{Z}_q$.

Pour x un réel, on note $\lfloor x \rfloor$ et $\lceil x \rceil$ respectivement le plus grand entier k tel que $k \leq x$ et le plus petit entier k tel que $k \geq x$.

1.1.3 Séquences

Soit E un ensemble. Une *séquence finie* d'éléments de E est une application d'un ensemble de la forme $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ ou $\{1, 2, \ldots, n\}$, pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, dans E. On note une telle séquence $\{x_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$ ou $\{x_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$. Une *séquence infinie* d'éléments de E est une application de $\mathbb{N}$ ou de $\mathbb{N}^*$ dans E. On note une telle séquence $\{x_i\}_{i=0,1,\ldots}$ ou $\{x_i\}_{i=1,2,\ldots}$.

Soit $\{x_i\}_{i \in A}$ une séquence d'éléments d'un ensemble E (A est un des ensembles d'indices possibles précisés ci-dessus). Une sous-séquence est une séquence de la forme $\{x_{n_i}\}_{i \in B}$, où $\{n_i\}_{i \in B}$ est une séquence d'éléments de A telle que $n_i < n_{i+1}$ pour tout $i \in B$, et où B est d'une des formes possibles pour un ensemble d'indices.

Pour une séquence $a_0, \ldots, a_i, \ldots, a_k$, la séquence $a_0, \ldots, \hat{a}_j, \ldots, a_k$ est la même séquence avec l'élément a_j en moins.

1.1.4 Ordres, maximum, maximal, minimum, minimal, borne supérieure, borne inférieure

Une relation $\preceq$ sur un ensemble X est un ordre partiel si

(i) $x \preceq x$ pour tout $x \in X$ (*réflexivité*),
(ii) $x \preceq y$ et $y \preceq z$ implique $x \preceq z$ (*transitivité*), et
(iii) $x \preceq y$ et $y \preceq x$ implique $x = y$ (*antisymétrie*).

Deux éléments x, y de X sont dits *comparables* si $x \preceq y$ ou si $y \preceq x$. Si l'on a $x \preceq y$ et $x \neq y$, on note parfois $x \prec y$. La paire $(X, \preceq)$ est alors appelée *ensemble partiellement ordonné*, ou *poset* (pour *partially ordered set* en anglais).

Un élément $x \in X$ est dit *maximal* (resp. *minimal*) si pour tout $y \in X$ comparable à x, $y \preceq x$ (resp. $x \preceq y$).

Un ordre partiel est appelé *ordre total* si tous les éléments sont comparables. Pour un ordre total, s'il y a un élément maximal (resp. minimal), il est unique et appelé *maximum* (resp. *minimum*).

Comme exemple d'ordre partiel, on a l'inclusion : Pour une collection de parties d'un ensemble X, on a un ordre partiel naturel donné par la relation $\subseteq$.

Soit X un ensemble muni d'un ordre total $\leq$ et Y une partie de X. Une *borne inférieure* (resp. *supérieure*) de Y est le maximum (resp. minimum) des éléments $x \in X$ tel que, pour tout $y \in Y$, $x \leq y$ (resp. $x \geq y$). Un tel élément n'existe pas forcément (par exemple si $X = \mathbb{Q}$).

1.1.5 Alphabet et mots

Un *mot* est une séquence finie ou infinie de symbole pris dans un ensemble fini appelé *alphabet*. L'ensemble des mots finis sur un alphabet Σ est noté Σ^*. La *longueur* d'un mot w est le nombre de symboles qui le composent et est notée $|w|$. Un mot est plutôt noté en accolant simplement ses symboles dans l'ordre de la séquence, au lieu d'employer les

accolades comme ci-dessus dans la définition des séquences. Par exemple $abaa$ est un mot de longueur 4, sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Un *sous-mot* d'un mot w donné est une sous-séquence de la séquence des lettres de w. Par exemple abc est un sous-mot de $abbaca$.

Un *facteur* d'un mot w donné est une sous-séquence de lettres consécutives.

Soit $w = a_1a_2, \dots a_r$ et $w' = a'_1a_2 \dots a'_{r'}$ deux mots finis sur un alphabet. $w'' := ww'$ est le mot obtenu en concaténant les deux séquences w et w' : $w'' = a_1a_2 \dots a_ra'_1a'_2 \dots a'_{r'}$.

1.2 Algèbre élémentaire et algèbre linéaire

Le livre de référence sur ce thème est le célèbre livre de Serge Lang ([55]).

1.2.1 Groupes

Homomorphismes

Soit $(G, *)$ et $(H, \star)$ deux groupes. $f : G \to H$ est un *homomorphisme* si pour tout couple $(g, h) \in G^2$, on a $f(g * h) = f(g) \star f(h)$. L'ensemble des homomorphismes de G vers H est noté $\mathrm{Hom}(G, H)$.

Groupes agissant sur un ensemble

Soit E un ensemble et $(G, *)$ un groupe. On dit que G *agit* sur E si l'on a une application

$$\begin{array}{ccc} G \times E & \to & E \\ (g, x) & \mapsto & gx \end{array}$$

qui vérifie $g(hx) = (g * h)x$ pour tous $g, h \in G$ et $ex = x$ pour e l'élément neutre de G.

L'*orbite* d'un élément x de E est l'ensemble des gx, pour $g \in G$.

Soient E et F deux ensembles sur lesquels un groupe G agit. On dit qu'une application $f : E \to F$ est une *G-application* si $f(gx) = gf(x)$ pour tout $g \in G$ et tout $x \in E$.

Groupes additifs

Soit $(G, +)$ un groupe additif. Notons 0 son élément neutre et $-g$ l'opposé de l'élément $g \in G$. On adopte de plus la convention suivante : si n est un entier strictement positif, et g un élément de G, ng représente la somme $\underbrace{g + g + \dots + g}_{n \text{ fois}}$, et $-ng$ représente $n(-g)$. Enfin, $0g = 0$, pour tout $g \in G$. Ainsi, on a défini la notation ng lorsque $n \in \mathbb{Z}$.

Groupes libres

Soit G un groupe additif. G est un *groupe libre* s'il existe une famille $\{g_1, g_2, \dots\}$ telle que tout élément g de G s'écrive de manière unique $g = \sum_i n_i g_i$, où les $n_i \in \mathbb{Z}$.

1.2.2 Complexes de chaînes, homologie, cohomologie

Chaînes

Un *complexe de chaînes* $\mathcal{C}$ est une séquence (finie ou infinie) de groupes $\{C_i\}_i$ et une séquence d'homomorphismes $(\partial_i : C_i \to C_{i-1})_i$ telles que $\partial_{i-1} \circ \partial_i = 0$ pour tout i. On écrit :

$$\mathcal{C} : \dots \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \dots$$

La séquence $\{\partial_i\}$ est appelé *bord*. On omettra souvent l'indice, écrivant ∂ plutôt que ∂_i.

Le groupe C_i est appelé *groupe des chaînes de dimension i*. Un élément de C_i est appelé *chaîne de dimension i*, ou simplement *chaîne*.

Etant donnés deux complexes de chaînes $\mathcal{C} = \{C_i, \partial_i\}_i$ et $\mathcal{C}' = \{C'_i, \partial'_i\}_i$, une *application de chaînes* $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est une séquence $\{f_i\}_i$ d'homomorphismes $f_i : C_i \to C'_i$ telle que

$$\partial'_i f_i = f_{i-1}\partial_{i-1}.$$

Homologie

Le $i^{\text{ème}}$ d'homologie du complexe est alors le groupe $H_i(\mathcal{C}) := \text{Ker } \partial_i/\text{Im } \partial_{i+1}$. Nous ne nous servons pas de ces groupes dans la thèse ; rappelons simplement que les groupes d'homologie permettent de ramener dans un cadre algébrique l'étude de propriété topologique dans le cas où le complexe de chaîne est associé à un complexe simplicial.

Cochaînes

Soit $\mathcal{C} = \{C_i, \partial_i\}_i$ un complexe de chaînes, et soit G un groupe abélien. On définit le *groupe des cochaînes de dimenion i*, à coefficients dans G, par l'équation :

$$C^i(\mathcal{C}, G) := \text{Hom}(C_i, G).$$

Une cochaîne de dimension i est donc un morphisme de C_i dans G.

On considère la forme bilinéaire suivante :

$$\begin{array}{rccc} \langle .,. \rangle : & C^i(\mathcal{C}, G) \times C_i & \to & G \\ & (c^i, c_i) & \mapsto & c^i(c_i) \end{array}.$$

Le *cobord* δ_i (ou δ, on omet souvent l'indice) est alors le dual du *bord* ∂_{i+1}, ce qui implique que l'on a $\delta_i \circ \delta_{i-1} = 0$. La séquence $\{C^i(\mathcal{C}, G), \delta_i\}_i$ est appelée le *complexe de cochaînes* de $\mathcal{C}$, à coefficients dans G.

Etant donnés deux complexes de chaînes $\mathcal{C} = \{C_i, \partial_i\}_i$ et $\mathcal{C}' = \{C'_i, \partial'_i\}_i$, et une application de chaînes $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$. Alors l'homomorphisme dual, noté $\tilde{f}$

$$C^i(\mathcal{C}, G) \xleftarrow{\tilde{f}} C^i(\mathcal{C}, G)$$

commute avec δ ; un tel homomorphisme est appelé une *application de cochaînes*.

Cohomologie

Le $i^{\text{ème}}$ groupe de cohomologie du complexe est alors le groupe $H^i(\mathcal{C}) := \text{Ker } \delta_i/\text{Im } \partial_{i-1}$. Nous ne nous servons pas plus des groupes de cohomologie que des groupes d'homologie. Algébriquement, les groupes de cohomologie sont plus riches que les groupes d'homologie (on peut les munir d'une structure d'anneau), ce qui permet l'usage de théorèmes algébriques plus profonds dans l'étude de ces complexes de chaînes.

1.2.3 Espaces vectoriels et géométrie élémentaire

Quelques notations

Soit A une matrice. Ker A, Im A, rg A désignent respectivement le noyau de A, l'image de A et le rang de A.

Nous noterons l'élement de la $i^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne par $A_{i,j}$ ou $A(i, j)$, indifféremment.

Si A est une matrice carrée $n \times n$, la *diagonale* de A, i.e. le vecteur de composantes $A_{i,i}$, est noté diag A.

La matrice identité $n \times n$ est toujours notée I_n.

Si $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sont des vecteurs d'un espace vectoriel E, on note $\mathrm{vect}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ l'espace vectoriel engendré par les x_i.

Généralités sur les espaces euclidiens

Dans la thèse, on considère $\mathbb{R}^d$ comme étant l'espace euclidien de dimension d. On note les points de $\mathbb{R}^d$ en gras : on écrit $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Les vecteurs $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_d$ désignent la base orthonormale standard de $\mathbb{R}^d$ ($\boldsymbol{e}_i$ a un 1 à la position i et des 0 partout ailleurs). Le *produit scalaire* de deux vecteurs $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ est $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$. La *norme euclidienne* de $\boldsymbol{x}$ est $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2}$. De manière générale, on définit la norme l_p comme étant $||\boldsymbol{x}||_p = \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^p\right)^{1/p}$, pour $1 \leq p < +\infty$, et la norme l_∞ par $||\boldsymbol{x}||_\infty = \max\{|x_i| : i \in [d]\}$.

Soit X une partie de $\mathbb{R}^d$. Le *diamètre* de X est la quantité

$$\max_{(x,y) \in X^2} ||x - y||.$$

La boule unité $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : ||\boldsymbol{x}|| \leq 1\}$ est noté B^d, tandis que la sphère unité $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : ||\boldsymbol{x}|| = 1\}$ est notée S^{d-1}. Dans toute la thèse, S^{-1} est interprétée comme $\emptyset$. Dans le cas où l'on remplace la norme euclidienne par la norme l_1, on note la boule unité $\hat{B}^d$, qui est alors un polytope appelé le cross-polytope (voir plus bas).

Dans $\mathbb{R}^d$ muni du produit scalaire standard, l'*ϵ-boule fermée* (resp. *ouverte*) centrée en $\boldsymbol{x}_0$, avec $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ est l'ensemble des points $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}^d$ tel que $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|| \leq \epsilon$ (resp. $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|| < \epsilon$).

Espaces affines

On convient que $\emptyset$ est un espace affine de dimension -1.

L'*enveloppe affine* d'un ensemble X de points de $\mathbb{R}^d$ est le plus petit sous-espace affine de $\mathbb{R}^d$ contenant X et est noté $\mathrm{aff}(X)$. Tout point $\boldsymbol{x} \in \mathrm{aff}(X)$ peut être écrit comme *combinaison affine* de points de X : il existe des points $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in X$ et des nombres réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ et $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{x}_i$.

Soient $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ des points de $\mathbb{R}^d$. On dit qu'ils sont *affinement dépendants* s'il existe des nombres réels $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$, non tous nuls, tels que $\sum_{i=0}^k \alpha_i \boldsymbol{v}_i = 0$ et $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 0$. Sinon, on dit que les points $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ sont *affinement indépendants*.

Deux sous-espaces affines F et G d'un espace vectoriel E sont dits *transverses* si $F \cap G = \emptyset$ et si $\dim \mathrm{aff}(F \cup G) = \dim F + \dim G + 1$.

Produit tensoriel

Soit K un corps.

On introduit de manière informelle le produit tensoriel :

Etant donné deux K-espaces vectoriels E et F, de bases respectives $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_{\dim E}$ et $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_{\dim F}$, on définit $E \otimes F$ l'espace vectoriel de dimension $\dim E \times \dim F$ et de base tous les $\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_j$, avec $i \in [\dim E]$ et $j \in [\dim F]$.

On peut interpréter $E \otimes F$ comme le K-espace des matrices $\dim E \times \dim F$. On dit aussi que les éléments de $E \otimes F$ sont des *tenseurs 2 fois covariants*.

Puisqu'on a un isomorphisme naturel entre $E \otimes (F \otimes G)$ et $(E \otimes F) \otimes G$, avec E, F et G trois espaces vectoriels, on considère que ces deux espaces vectoriels ne sont qu'un même espace vectoriel, que l'on note $E \otimes F \otimes G$. On peut l'assimiler à le K-espace des "tableaux" tridimensionnels $\dim E \times \dim F \times \dim G$, dont une base est l'ensemble des $\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_j \otimes \boldsymbol{g}_k$,

où les $\boldsymbol{g}_k$ forment une base de G. Les éléments de $E \otimes F \otimes G$ sont appelés *tenseurs 3 fois covariants*.

Et ainsi de suite : on définit de même les *tenseurs 4 fois covariants, 5 fois, ..., r fois, ...* Dans ce contexte, on parle aussi de *tenseurs 1 fois covariants* pour qualifier les vecteurs traditionnels.

Si $E^{(1)}, E^{(2)}, \ldots, E^{(d)}$ sont des K-espaces vectoriels, on définit aussi, dans le cadre de cette thèse, un produit scalaire $\langle ., . \rangle$ sur un K-espace de tenseurs $E^{(1)} \otimes E^{(2)} \otimes \ldots \otimes E^{(d)}$ (on note $\boldsymbol{e}_1^{(i)}, \boldsymbol{e}_2^{(i)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n_i}^{(i)}$ la base de $E^{(i)}$) : soit

$$X = \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_d)\in[n_1]\times[n_2]\times\ldots\times[n_d]} \underbrace{X(i_1,i_2,\ldots,i_d)}_{\in K} \boldsymbol{e}_{i_1}^{(1)} \otimes \boldsymbol{e}_{i_2}^{(2)} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{e}_{i_d}^{(d)}$$

et

$$Y = \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_d)\in[n_1]\times[n_2]\times\ldots\times[n_d]} \underbrace{Y(i_1,i_2,\ldots,i_d)}_{\in K} \boldsymbol{e}_{i_1}^{(1)} \otimes \boldsymbol{e}_{i_2}^{(2)} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{e}_{i_d}^{(d)}$$

deux tenseurs (d fois covariants) de $E^{(1)} \otimes E^{(2)} \otimes \ldots \otimes E^{(d)}$, on pose alors

$$\langle X, Y \rangle := \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_d)\in[n_1]\times[n_2]\times\ldots\times[n_d]} X(i_1,i_2,\ldots,i_d)Y(i_1,i_2,\ldots,i_d) \in K.$$

Dans le cas où les tenseurs sont 1 fois covariants (des vecteurs traditionnels), on retrouve bien la définition du produit scalaire naturel.

De plus, on adopte la notation suivante : $\mathbf{1}_n$ est le vecteur $\underbrace{(1,1,\ldots,1)}_{n \text{ '1'}}$, $\mathbf{1}_{n_1,n_2}$ est la matrice $n_1 \times n_2$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. De manière générale, $\mathbf{1}_{n_1,n_2,\ldots,n_r}$ représente un tenseur r fois covariant (si on veut, un tableau $n_1 \times n_2 \times \ldots n_r$) dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Hyperplans et convexité

On se place dans $\mathbb{R}^d$, espace vectoriel de dimension d.

Un *hyperplan* de $\mathbb{R}^d$ est un sous-espace affine de dimension $(d-1)$, i.e. un ensemble de la forme $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle = b\}$ pour un certain $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$ non nul et un certain $b \in \mathbb{R}$. Un *demi-espace fermé* (resp. *ouvert*) est de la forme $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle \leq b\}$ (resp. $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle < b\}$), où $\boldsymbol{a}$ et b sont comme précédemment.

Un ensemble $C \subseteq \mathbb{R}^d$ est dit *convexe* si pour tout couple $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ de points de C, le segment d'extrémités $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$, noté $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$, est contenu dans C : formellement, on dit que C est convexe si $\forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in C^2, \forall t \in [0,1]$, $t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y} \in C$.

L'*enveloppe convexe* d'un ensemble $X \subseteq \mathbb{R}^d$ est l'intersection de tous les ensembles convexes contenant X, et est noté $\mathrm{conv}(X)$. Tout point $\boldsymbol{x} \in \mathrm{conv}(X)$ peut être écrit comme *combinaison convexe* de points de X : il existe des points $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in X$ et des nombres réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ et $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{x}_i$. Comme l'indique le théorème de Carathéodory ([11]), on peut toujours choisir $n \leq d+1$:

Théorème 1.1 (Théorème de Carathéodory) *Pour tous $X \subseteq \mathbb{R}^d$ et $\boldsymbol{x} \in \mathrm{conv}(X)$, il existe des points $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ de X, affinement indépendants, tels que $\boldsymbol{x} \in \mathrm{conv}(\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\})$.*

Couverture, couverture binaire

Soit X une partie de $\mathbb{R}^d$. Une famille $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots\}$ de parties de $\mathbb{R}^d$ est une *couverture* de X si $X \subseteq \bigcup_{i=1,2,\ldots} A_i$.

Une famille $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots\}$ de parties de $\mathbb{R}^d$ est une *couverture binaire* de X si tout x de X appartient à un nombre impair d'éléments de $\mathcal{A}$, sauf peut-être pour un sous-ensemble de X de mesure nulle.

1.3 Polyèdres et polytopes

On se place dans $\mathbb{R}^d$, espace vectoriel de dimension d.

1.3.1 Définitions

Polyèdres et polytopes

Un sous-ensemble P de $\mathbb{R}^d$ est appelé *polyèdre* s'il existe une matrice A $m \times d$ et un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$ (pour un certain $m \geq 0$) tel que

$$P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}.$$

Ainsi, P est un polyèdre si et seulement si il est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés.

La *dimension* d'un polyèdre P, notée $\dim P$, est la dimension de l'espace affine qu'il engendre : $\dim P := \dim \mathrm{aff}(P)$. Si P est de *plein rang*, i.e. si $\dim P = d$ (avec $P \subseteq \mathbb{R}^d$), on peut toujours écrire P sous la *forme canonique* suivante :

$$P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \leq \mathbf{1}_m\},$$

où A est une matrice $m \times d$, m est le nombre de faces de P (voir plus bas pour la définition de *faces*) et $\boldsymbol{x}_0$ est un point dans l'intérieur de P (voir par exemple [82]).

Un *polytope* est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de $\mathbb{R}^d$. Si un polytope est de dimension k, on parle de *k-polytope*.

On a le résultat fondamental suivant ([74], [90], [97]) :

Théorème 1.2 *Un ensemble P est un polytope si et seulement si P est un polyèdre borné.*

Faces, facettes et sommets

Soit $P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ un polyèdre de $\mathbb{R}^d$. Un *hyperplan support* H de P est un hyperplan de $\mathbb{R}^d$ qui intersecte P mais tel que l'un des deux demi-espaces ouverts que H délimite n'intersecte pas P. Un sous-ensemble F de P est appelé *facette* si $F = \emptyset$, $F = P$ ou $F = P \cap H$ pour un certain hyperplan support H de P. Une *face*[1] est une facette F de P maximale pour l'inclusion avec $F \neq P$.

Une *arête* de P est une facette de dimension 1, et un *sommet*, une facette de dimension 0. L'ensemble des arêtes est noté $E(P)$ et l'ensemble des sommets $V(P)$. Noter que d'après cette définition, $\emptyset$ est la facette de dimension -1.

Observation 1.1 *Toute facette d'un polyèdre est également un polyèdre.*

Toute face a comme dimension la dimension de P moins un.

Si P est un polytope, on dénote par $\mathsf{L}(P)$ l'ensemble des facettes de P et par $\mathsf{F}(P)$ l'ensemble de facettes propres de P. En particulier, $\mathsf{L}(P) = \{P\} \cup \mathsf{F}(P)$.

1.3.2 Polarité

Soit P un polytope de $\mathbb{R}^d$ contenant 0 dans son intérieur. Si m est le nombre de faces, nous pouvons représenter P sous sa forme canonique $P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x} \rangle \leq 1, i = 1, 2, \ldots, m\}$, où les $\boldsymbol{a}_i$ sont des éléments de $\mathbb{R}^d$.

Le polytope $P^\triangle := \mathrm{conv}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ est appelé le *polytope polaire* de P.

[1] Il convient d'être vigilant sur l'emploi des termes faces et facettes : le mot correspondant à face en anglais est le mot facet, et celui correspondant à facette en anglais est le mot face.

Proposition 1.1 *On a les propriétés suivantes :*

1. *0 est dans l'intérieur de* $P^{\triangle}$.
2. $P^{\triangle\triangle} = P$.
3. *Pour* F *une face de* P,

$$F \mapsto F^{\diamondsuit} := \mathrm{conv}\{\boldsymbol{a}_i : i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}\rangle = 1 \text{ pour tout } \boldsymbol{x} \in F\}$$

   (a) *est bijective.*
   (b) *est telle que* $\dim(F) + \dim(F^{\diamondsuit}) = d - 1$.
   (c) *est telle que si* F *et* G *sont deux facettes de* P *telles que* $F \subseteq G$, *alors* $G^{\diamondsuit} \subseteq F^{\diamondsuit}$.
   (d) *est telle que* $F^{\diamondsuit\diamondsuit} = F$.

En particulier, les sommets de $P^{\triangle}$ sont les $\boldsymbol{a}_i$, $\emptyset^{\diamondsuit} = P^{\triangle}$ et $P^{\diamondsuit} = \emptyset$.

1.3.3 Quelques polytopes particuliers

Les simplexes

Un *simplexe (géométrique)* σ est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini X de points affinement indépendants de $\mathbb{R}^d$. C'est donc un polytope dont les sommets sont les points de X, et tel que $\dim \sigma = |X| - 1$. Tout *k-simplexe* (simplexe de dimension k) a $k+1$ sommets. De plus, toute facette d'un simplexe est encore un simplexe, et l'enveloppe convexe de n'importe quel sous-ensemble des sommets de σ est une facette.

Par $\triangle^d$, on désigne un simplexe de dimension d.

Les cubes

Un *cube* τ de $\mathbb{R}^d$ est un ensemble de points image par une isométrie d'un ensemble de points de la forme $[a, b]^{d'} \in \mathbb{R}^{d'}$, où $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ (on a forcément $d' \leq d$).

Par $\square^d$, on désigne le *cube standard* de dimension d, i.e. le cube pour lequel $a = -1$ et $b = +1$ dans la définition précédente et $d' = d$: $\square^d := [-1, +1]^d$.

Les polytopes cycliques

Les polytopes cycliques forment une classe importante et peu intuitive de polytopes. Ce sont les polytopes qui possèdent le plus grand nombre de facettes, à nombre de sommets et dimension fixés.

On a besoin d'une définition préliminaire : La courbe $\{\gamma(t) : t \in \mathbb{R}\}$ donnée par $\gamma(t) := (t, t^2, \ldots, t^d)$ est la *courbe des moments* de $\mathbb{R}^d$. L'enveloppe convexe de n points distincts sur la courbe des moments de $\mathbb{R}^d$ définit un d-polytope, appelé *polytope cyclique*, et noté $C(n, d)$.

Propriété 1.1 *$C(n, d)$ a n sommets, et est tel que l'enveloppe convexe de tout ensemble de k sommets, $k \leq \frac{d}{2}$, définit une facette de $C(n, d)$.*

Pour la démonstration complète, voir par exemple [40] ou [100].

Les cross-polytopes

Les cross-polytopes sont les boules pour la norme l_1. On note $\hat{B}^d$ le cross-polytope de dimension d, pour rappeler qu'il s'agit bien d'une boule pour une norme standard.

Sur la Figure 1.1 est représenté le cross-polytope de dimension 3.

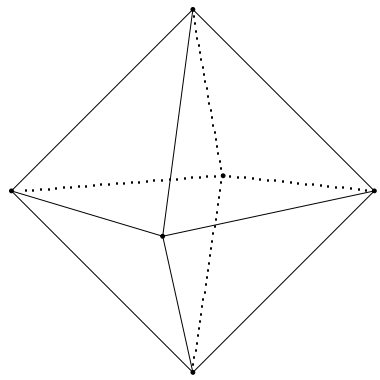

FIG. 1.1 – Le cross-polytope de dimension 3.

1.4 Topologie élémentaire

1.4.1 Notions de base

Espaces topologiques, continuité, connectivité et homéomorphismes

Un *espace topologique* est une paire $(X, \mathcal{O})$, où $\mathcal{O}$, l'ensemble des *ouverts* de X, est telle que $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$, l'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert, ainsi que l'union d'un nombre arbitraire d'ouverts.

Lorsqu'on regarde $\mathbb{R}^d$ en tant qu'espace topologique, sans préciser de quelle topologie il s'agit, on utilise la *topologie standard* de $\mathbb{R}^d$: $U \subseteq \mathbb{R}^d$ est ouvert si pour tout $\boldsymbol{x} \in U$, il existe $\epsilon > 0$ tel que l'ϵ-boule centrée en $\boldsymbol{x}$ soit incluse dans U.

Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique. Tout sous-ensemble $Y \subseteq X$ définit un *sous-espace topologique* de X, qui est l'espace topologique $(Y, \{U \cap Y : U \in \mathcal{O}\})$. Lorsque l'on considère une partie de $\mathbb{R}^d$ comme espace topologique, ce sera toujours en tant que sous-espace de $\mathbb{R}^d$ muni de sa topologie standard, sauf mention explicite contraire.

Si $(X_1, \mathcal{O}_1)$ et $(X_2, \mathcal{O}_2)$ sont deux espaces topologiques, une application $f : X_1 \to X_2$ est dite *continue* si $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_1$ pour tout $V \in \mathcal{O}_2$.

Soit $k \geq -1$. Un espace topologique est de *connectivité* k si pour tout $l = -1, 0, 1, \ldots, k$, toute application $f : S^l \to X$ peut être étendue en une application continue $\bar{f} : B^{l+1} \to X$. Comme $S^{-1} = \emptyset$ et B^0 est un point, (-1)-connexe signifie non-vide.

Si $\mathbb{R}^{d_1}$ et $\mathbb{R}^{d_2}$ sont munis de leur topologie standard, la définition ci-dessus implique qu'une fonction $f : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}^{d_2}$ est continue si et seulement pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{d_1}$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que l'image de tout point dans la boule fermée centrée en $\boldsymbol{x}$ et de rayon δ soit dans la boule fermée centrée en $f(\boldsymbol{x})$ et de rayon ϵ. Si ce δ peut être choisi indépendamment de $\boldsymbol{x}$, f est dite *uniformément continue*, et δ est alors appelé *module d'uniforme continuité* relatif à ϵ.

Un *homéomorphisme* d'un espace topologique $(X_1, \mathcal{O}_1)$ dans un espace topologique $(X_2, \mathcal{O}_2)$ est une bijection $\phi : X_1 \to X_2$ telle que pour tout $U \subseteq X_1$, $\phi(U) \in \mathcal{O}_2$ si et seulement si $U \in \mathcal{O}_1$.

Si X et Y sont deux espaces topologiques et s'il existe un homéomorphisme $X \to Y$, on écrit $X \cong Y$, et l'on dit que X et Y sont *homéomorphes*.

Fermeture, frontière et intérieur

Un ensemble F d'un espace topologique X est dit *fermé* si $X \setminus F$ est ouvert. La *fermeture* d'un ensemble $Y \subseteq X$ dans X, notée $\mathrm{Cl}_X(Y)$, est l'intersection de tous les espaces fermés de X contenant Y (en cas d'absence d'ambiguïté, l'indice X peut être omis). La *frontière* de Y est $\partial Y := \mathrm{Cl}(Y) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus Y)$.

Compacité

Nous nous limitons à la notion de compacité pour $\mathbb{R}^d$, et ses parties, muni de sa topologie standard. $X \subseteq \mathbb{R}^d$ est *compact* si et seulement si X est fermé et borné. On a alors les propriétés classiques suivantes

Propriété 1.2 *Toute séquence infinie d'un espace compact X a une sous-séquence convergente vers un point de X.*

Propriété 1.3 *Soit $\mathcal{U}$ une collection d'ouverts d'un compact X telle que $\bigcup \mathcal{U} = X$, alors il existe une sous-collection finie $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ telle que $\bigcup \mathcal{U}_0 = X$.*

Propriété 1.4 *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fontion continue d'un espace compact dans $\mathbb{R}$. Alors f atteint son minimum et son maximum, i.e. il existe x et x' dans X tels que $f(x) \leq f(y) \leq f(x')$ pour tout $y \in X$.*

Propriété 1.5 *Tout fonction continue sur un espace compact est uniformément continue.*

Joint topologique

Soient X et Y deux espaces topologiques. Le *joint* $X * Y$ est l'espace quotient $X \times Y \times [0,1]/\approx$ où la relation d'équivalence $\approx$ est donnée par $(x, y, 0) \approx (x', y, 0)$ pour tous $x, x' \in X$ et pour tout $y \in Y$ et $(x, y, 1) \approx (x, y', 1)$ pour tout $x \in X$ et pour tous $y, y' \in Y$.

Proposition 1.2 *Soient X et Y deux sous-espaces bornés d'un espace euclidien, et suposons que $X \subseteq U$ et $Y \subseteq V$, où U et V sont des sous-espaces affines vérifiant $U \cap V = \emptyset$ et $\dim \mathrm{aff}(U \cup V) = \dim U + \dim V + 1$ (U et V sont transverses). Alors $\{t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y} : t \in [0,1], \boldsymbol{x} \in X, \boldsymbol{y} \in Y\}$ est homéomorphe à $X * Y$.*

On note (notation prise du livre de Matousek [65]) $tx \oplus (1-t)y$ le point de $X * Y$ dans la classe d'équivalence de $[(x, y, t)]$. Il convient d'être prudent puisque $\oplus$ n'est pas additif (en particulier $\oplus$ n'est pas commutatif).

On a la propriété fondamentale suivante :

Propriété 1.6 $S^k * S^l \cong S^{k+l+1}$.

Pour X un espace topologique, on définit également la notation :

$$X^{*n} := \underbrace{X * X * \ldots X}_{n \text{ fois}}.$$

On note un point de X^{*n} par $t_1 x_1 \oplus t_2 x_2 \oplus \ldots \oplus t_n x_n$, où les t_i sont positifs et de somme égale à 1.

Le n-*"fois" joint effacé* de X est l'espace topologique

$$X^{*n}_{\triangle} := X^{*n} \setminus \{\frac{1}{n}x_1 \oplus \frac{1}{n}x_2 \oplus \ldots \oplus \frac{1}{n}x_n : x_1 = x_2 = \ldots = x_n\}.$$

On définit également le joint d'applications continues : soient $f : X_1 \to X_2$ et $g : Y_1 \to Y_2$.

$$f * g : X_1 * Y_1 \to X_2 * Y_2$$

est donné par

$$tx \oplus (1-t)y \mapsto tf(x) + (1-t)f(y).$$

Enfin, f^{*n} représente $\underbrace{f * f * \ldots * f}_{n \text{ fois}}$.

1.4.2 Simplexes et complexes simpliciaux géométriques

Définitions

Une famille non vide C de simplexes est un *complexe simplicial (géométrique)* si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $\emptyset \in \mathsf{C}$,
(ii) la face d'un simplexe $\sigma \in \mathsf{C}$ est également un simplexe de C et
(iii) l'intersection $\sigma_1 \cap \sigma_2$ de toute paire de simplexes σ_1 et σ_2 de C est une facette de σ_1 et également une facette de σ_2.

L'union de tous les simplexes d'un complexe simplicial C est appelé le *polyèdre*, ou l'*espace sous-jacent*, de C et est noté $||\mathsf{C}||$. La *dimension* d'un complexe simplicial est la plus grande dimension d'un simplexe : $\dim \mathsf{C} := \max\{\dim \sigma : \sigma \in \mathsf{C}\}$. Si d est la dimension d'un complexe simplicial, on parle de *d-complexe simplicial*. L'*ensemble des sommets* de C, noté par $V(\mathsf{C})$, est l'union de tous les ensembles de sommets de tous les simplexes de C.

Si X est un espace topologique, le complexe géométrique T est une *triangulation* de X si $||\mathsf{T}|| \cong X$.

Joint et joint effacé géométriques

Etant donné deux simplexes géométriques σ et τ tels que l'ensemble de leurs sommets soit affinement indépendant, on note $\sigma * \tau$ appelé *joint* de σ et τ le simplexe géométrique $\operatorname{conv}\big(V(\sigma) \cup V(\tau)\big)$.

On a alors (voir par exemple le livre de Munkres, p. 368, [75]) :

Proposition 1.3 *Soient U et V deux sous-espaces affines de $\mathbb{R}^d$ tels que $U \cap V = \emptyset$ et tels que l'enveloppe affine de $U \cup V$ satisfasse $\dim \operatorname{aff}(U \cup V) = \dim U + \dim V + 1$ (U et V sont transverses). Soit C (resp. D) un complexe simplicial géométrique plongé dans U (resp. V). Alors $\{\sigma * \tau : \sigma \in \mathsf{C}, \tau \in \mathsf{D}\}$ est un complexe simplicial géométrique.*

$\{\sigma * \tau : \sigma \in \mathsf{C}, \tau \in \mathsf{D}\}$ est dénoté $\mathsf{C} * \mathsf{D}$ et est appelé le *joint* de C et D.

Cette définition du joint est compatible avec la définition du joint topologique :

Observation 1.2 $||\mathsf{C} * \mathsf{D}|| \cong ||\mathsf{C}|| * ||\mathsf{D}||$.

De même, on peut définir également le *n-"fois" joint effacé* d'un complexe simplicial géométrique C qui soit compatible avec la définition du joint effacé pour les espaces topologiques :

$$\mathsf{C}^{*n}_{\triangle} := \{\sigma_1 \uplus \sigma_2 \uplus \ldots \uplus \sigma_n \in \mathsf{C}^{*n} : \sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \ldots \cap \sigma_n = \emptyset\}.$$

On a alors $||\mathsf{C}^{*n}_{\triangle}|| \subseteq ||\mathsf{C}||^{*n}_{\triangle}$, mais l'inclusion est propre sauf dans des cas triviaux[2]

[2] en revanche, ces deux espaces topologiques sont homotopiquement équivalents.

1.4.3 Complexes polytopaux

Un *complexe polytopal* C est une collection de polytopes telle que

(i) $\emptyset \in \mathsf{C}$,
(ii) pour tout $P \in \mathsf{C}$, toute facette de P est encore dans C,
(iii) l'intersection de deux polytopes quelconques de C est une facette des deux.

En particulier, tout complexe simplicial est un complexe polytopal. Si tous les polytopes sont des cubes, on parle de *complexe cubique*. Si tout $(d-1)$-polytope d'un complexe polytopal de dimension d est contenu dans au plus deux d-polytopes, on parle de *pseudo-variété polytopale*. Si tous les polytopes sont des cubes, on parle de *pseudo-variété cubique*.

L'union de tous les polytopes d'un complexe polytopal C est notée $||\mathsf{C}||$. La *dimension* d'un complexe polytopal est la plus grande dimension d'un polytope. Si d est la dimension d'un complexe polytopal, on parle de d-complexe polytopal.

Par exemple, si P est un polytope, $\mathsf{L}(P)$ est un complexe polytopal.

Une propriété importante des complexes polytopaux est la suivante (importante car elle permet de donner un aspect combinatoire à leur étude) :

Propriété 1.7 *Si F et G sont deux polytopes d'un même complexe polytopal, alors $V(F \cap G) = V(F) \cap V(G)$.*

En effet, $V(F \cap G) \subseteq V(F) \cap V(G)$ car $F \cap G$ est une facette de F et une facette de G. Réciproquement, soit $v \in V(F) \cap V(G)$. $v \cap (F \cap G) = v$ est une facette de $F \cap G$. Et donc, $V(F) \cap V(G) \subseteq V(F \cap G)$.

Si tout $(d-1)$-polytope d'un d-complexe polytopal C est contenu dans un ou deux d-polytopes de C, on définit le *complexe de bord* de C, ou simplement le *bord*, noté $\mathsf{B}(\mathsf{C})$, comme suit : $P \in \mathsf{B}(\mathsf{C})$ si P est une facette d'un $(d-1)$-polytope contenu dans exactement un d-polytope de C (P peut être le $(d-1)$-polytope lui-même).

On peut faire les deux observations suivantes :

Observation 1.3 *Si P est un polytope, on a $\mathsf{B}(\mathsf{L}(P)) = \mathsf{F}(P)$.*

Observation 1.4 *Si P est un polytope, on a $||\mathsf{F}(P)|| = \partial P$.*

1.4.4 Simplexes et complexes simpliciaux abstraits

Définitions

Un *complexe simplicial (abstrait)* est une collection K de parties d'un ensemble fini avec la propriété : $\sigma' \subseteq \sigma \in \mathsf{K}$ implique $\sigma' \in \mathsf{K}$. On définit la *dimension* de K : $\dim \mathsf{K} := \max\{|\sigma| - 1 : \sigma \in \mathsf{K}\}$. Les parties dans K sont appelées les *simplexes (abstraits)* et la dimension d'un simplexe σ est $\dim \sigma := |\sigma| - 1$. Si $\dim \sigma = d$, on dit que σ est un *d-simplexe*. $\emptyset$ est de dimension -1. Les σ' inclus dans σ sont appelées les *facettes* de σ. Une p-facette d'un simplexe σ est une facette de σ de dimension p. Si $p = \dim \sigma - 1$, alors la facette est appelée *face* de σ. Les 0-facettes sont des *sommets*, les 1-facettes sont des *arêtes*. L'ensemble de tous les sommets dans K est noté $V(\mathsf{K})$, celui de toutes les arêtes est noté $E(\mathsf{K})$.

Exemple : $\mathsf{A} := \binom{[n]}{\leq d+1}$ est un complexe simplicial abstrait de dimension d, si $d < n$. Autre exemple : les σ tels que $\sigma \subseteq \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm m\}$ et $\{-i, +i\} \nsubseteq \sigma$ pour tout i, est un complexe simplicial abstrait (appelons-le B) de dimension $m-1$.

Ces deux complexes simpliciaux jouent un rôle important dans la thèse : le premier pour le lemme de Sperner, le second pour le lemme de Tucker et les formules de Ky Fan.

Une *pseudo-variété* de dimension d est un complexe simplicial abstrait dont tout $(d-1)$-simplexe est contenu dans au plus deux d-simplexes. Si M est une pseudo-variété de dimension

d, le *bord* de M est l'union de tous les $(d-1)$-simplexes contenus dans exactement un d-simplexe. Il est noté $\partial\mathsf{M}$.

Un complexe simplicial K de dimension d est dit *fortement connexe* si pour toute paire σ, σ' de d-simplexes distincts de K, il existe une séquence $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_r = \sigma'$ de d-simplexes de K telle que pour tout $i \in [r-1]$, $\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$ est un $(d-1)$-simplexe de K.

Orientation

Soit σ un simplexe d'un complexe simplicial K. On dit que deux ordres sur les sommets de σ sont équivalents s'ils diffèrent par une permutation paire. Si $\dim \sigma > 0$, les ordres se scindent en deux classes d'équivalence. Chacune de ces classes est appelée *orientation* de σ. Un *simplexe orienté* est un simplexe avec une orientation. On note $[v_0, v_1, \ldots, v_p]$ le p-simplexe orienté dont l'ensemble de sommets est $\{v_0, v_1, \ldots, v_p\}$ et dont l'orientation est la classe d'équivalence contenant l'ordre $(v_0, v_1, \ldots, v_p)$. Par $-[v_0, v_1, \ldots, v_p]$ on désigne le simplexe d'orientation opposée. On a donc $[v_0, v_1, \ldots, v_p] = -[v_1, v_0, v_2, v_3, \ldots, v_p]$.

L'orientation induite par $[v_0, \ldots, v_p]$ sur $\{v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p\}$ est $(-1)^i[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p]$.

Une pseudo-variété M de dimension d est dite *orientée de manière cohérente* si tout d-simplexe de M est orienté et si, pour tout $(d-1)$-simplexe contenu dans exactement deux d-simplexes, les orientations induites par ces deux d-simplexes sont opposées.

Réalisation géométrique

Un complexe simplicial géométrique C définit un complexe simplicial abstrait. Les sommets du complexe simplicial abstraits sont les sommets de C, et les simplexes sont les $V(\sigma)$ avec $\sigma \in \mathsf{C}$.

Si K est un complexe simplicial abstrait obtenu de cette manière, on dit que C est une *réalisation géométrique* de K. Il est facile de voir que tout complexe simplicial abstrait a une réalisation géométrique (voir par exemple p. 14 de [65]). De plus, toutes les représentations géométriques d'un complexe simplicial abstrait sont homéomorphes.

Exemple : reprenant les exemples ci-dessus : $\mathsf{L}(\triangle^d)$ (i.e. $\triangle^d$ avec ses facettes) est la réalisation géométrique de A ; $\mathsf{L}(\hat{B}^m)$ est la réalisation géométrique de B.

De manière générale dans la thèse, lorsqu'on est en présence d'un complexe simplicial géométrique, on le voit simultanément comme un complexe simplicial abstrait (pour les notions algébriques, l'orientation, etc.).

Complexes simpliciaux et ensembles partiellement ordonnés

Il y a un lien entre les complexes simpliciaux et les ensembles partiellement ordonnés : si P est un ensemble partiellement ordonné, on définit $\Delta(P)$ l'ensemble des chaînes de P. $\Delta(P)$ est alors un complexe simplicial dont les sommets sont les éléments de P, et les simplexes, les chaînes de P.

L'*ensemble partiellement ordonné des facettes* d'un complexe simplicial K, noté $P(\mathsf{K})$, est l'ensemble de tous les simplexes non vides de K, ordonnés par l'inclusion.

La *subdivision barycentrique* de K est le complexe simplicial

$$\mathsf{sd}(\mathsf{K}) := \Delta(P(\mathsf{K})).$$

Si on a une réalisation géométrique de K, la subdivision barycentrique a pour représentation géométrique la triangulation dont les sommets sont les centres de gravité des simplexes (on fait correspondre un simplexe de K à son centre de gravité), et dont les simplexes sont les ensembles de sommets correspondant aux chaînes de $P(\mathsf{K})$.

Propriété 1.8 *Soit* K *un complexe simplicial. On a* $||\mathsf{K}|| \cong ||\mathsf{sd}(\mathsf{K})||$.

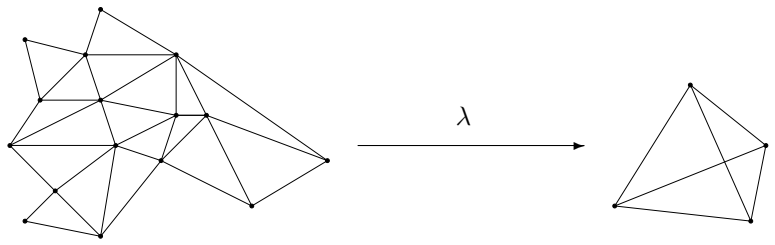

FIG. 1.2 –

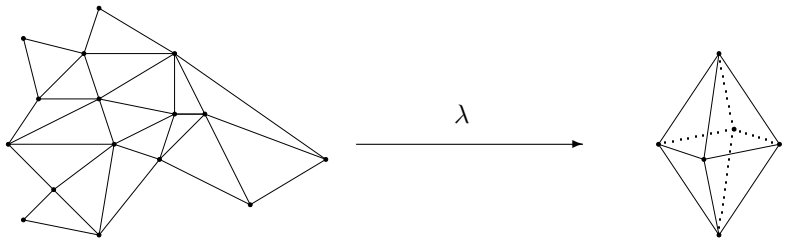

FIG. 1.3 –

1.4.5 Fonction simpliciale, étiquetage, fonction cubique

Si K et L sont deux complexes simpliciaux abstraits, une *fonction simpliciale* de K dans L est une fonction qui envoie les simplexes sur les simplexes, i.e. telle que $f(\sigma) \in \mathsf{L}$ quand $\sigma \in \mathsf{K}$.

Soient C_1 et C_2 deux complexes simpliciaux géométriques, K_1 et K_2 les complexes simpliciaux abstraits correspondants, et soit f une fonction simpliciale de K_1 dans K_2. On définit l'*extension affine* de f

$$||f|| : ||\mathsf{C}_1|| \to ||\mathsf{C}_2||,$$

de la manière suivante : pour $\boldsymbol{x} \in \sigma \in \mathsf{C}_1$, $||f||(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i f(\boldsymbol{v}_i)$, où les $\boldsymbol{v}_i$ sont les sommets de σ, et où les α_i sont tels que $\boldsymbol{x} = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i \boldsymbol{v}_i$, avec $\alpha_0, \ldots, \alpha_p \geq 0$, et $\sum_{i=0}^{p} \alpha_i = 1$.

Il est facile de voir que l'extension affine est une application continue.

Un *étiquetage* d'un complexe simplicial K est une application qui a tout sommet de K associe une *étiquette*, qui est un élément pris dans un ensemble fini. On peut toujours interpréter un étiquetage comme une fonction simpliciale. Par exemple, si λ est un étiquetage $V(\mathsf{K}) \to [n]$, on peut voir cette application comme une fonction simpliciale $\mathsf{K} \to \mathsf{L}(\triangle^{n-1})$ (voir Figure 1.2). Si λ est un étiquetage $V(\mathsf{K}) \to \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm m\}$, tel que, si $\{v, w\} \in E(\mathsf{K})$, $\lambda(v) \neq -\lambda(w)$, on peut voir cette application comme une fonction simpliciale $\mathsf{K} \to \mathsf{L}(\hat{B}^m)$ (voir Figure 1.3).

Soient C et D deux complexes cubiques. $\phi : V(\mathsf{C}) \to V(\mathsf{D})$ est une *fonction cubique* de C dans D si

- pour tout σ dans C, il existe $\tau \in \mathsf{D}$ tel que $\phi(V(\sigma)) \subseteq V(\tau)$ et
- l'image par ϕ de deux sommets voisins est consituée de deux sommets voisins ou d'un unique sommet.

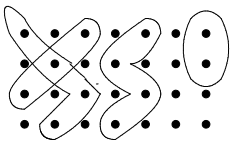

FIG. 1.4 – Une représentation de $\mathbb{Z}_7^{*4}$. Quelques simplexes ont été entourés.

Voir illustration Figure 1.5.

1.4.6 Joints et joints effacés

Soient K et L deux complexes simpliciaux abstraits. Le *joint* $\mathsf{K}*\mathsf{L}$ est le complexe simplicial dont l'ensemble des sommets est $V(\mathsf{K}) \uplus V(\mathsf{L})$ et dont l'ensemble des simplexes est $\{\sigma \uplus \tau : \sigma \in \mathsf{K}, \tau \in \mathsf{L}\}$. Il est aisé de voir que si C et D sont des réalisations géométriques de K et L, alors $\mathsf{C} * \mathsf{D}$ est une réalisation géométrique de $\mathsf{K} * \mathsf{L}$. Cette définition du joint est donc compatible avec les définitions données précédemment pour les espaces topologiques et pour les complexes simpliciaux géométriques.

On définit aussi la notation :

$$\mathsf{K}^{*n} := \underbrace{\mathsf{K} * \mathsf{K} * \ldots \mathsf{K}}_{n \text{ fois}}.$$

Par un abus de notation, on note $\mathbb{Z}_q^{*n}$ le complexe simplicial de dimension $n-1$, dont les simplexes sont les parties de $\big(\mathbb{Z}_q \times \{1\}\big) \cup \big(\mathbb{Z}_q \times \{2\}\big) \cup \ldots \cup \big(\mathbb{Z}_q \times \{n\}\big)$ de la forme $\{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_k, j_k)\}$ avec les j_l, $l \in [k]$, tous distincts. $\mathbb{Z}_7^{*4}$ est représenté sur la Figure 1.4. On adopte cette solution pour souligner le fait que $\mathbb{Z}_q$ agit naturellement sur les sommets d'un tel complexe simplicial abstrait : l'action correspondant à $1 \in \mathbb{Z}_q$ est $(i, j) \mapsto (i+1, j)$. De plus, il agit *librement* sur un tel complexe simplicial : les simplexes de l'orbite d'un simplexe donné sont toujours deux à deux disjoints.

Propriété 1.9 *$\mathbb{Z}_q^n$ est un complexe simplicial de dimension $(n-1)$ et est $(n-2)$-connexe.*

On définit également le *n-"fois" joint effacé* d'un complexe simplicial abstrait K :

$$\mathsf{K}_{\triangle}^{*n} := \{\sigma_1 \uplus \sigma_2 \uplus \ldots \uplus \sigma_n \in \mathsf{K}^{*n} : \sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \ldots \cap \sigma_n = \emptyset\}.$$

Si C est une représentation géométrique de K, on a $\mathsf{C}_{\triangle}^{*n}$ est une représentation géométrique de $\mathsf{K}_{\triangle}^{*n}$.

1.4.7 Chaînes pour complexes simpliciaux

Définitions

Soit G un groupe abélien et soit K un complexe simplicial abstrait. Le *complexe de chaîne* $\mathcal{C}(\mathsf{K}, G)$ est :

$$\ldots \to C_3(\mathsf{K}, G) \xrightarrow{\partial_{\mathsf{K}}} C_2(\mathsf{K}, G) \xrightarrow{\partial_{\mathsf{K}}} C_1(\mathsf{K}, G) \xrightarrow{\partial_{\mathsf{K}}} C_0(\mathsf{K}, G) \to \ldots,$$

où $C_p(\mathsf{K})$ est le groupe libre de toutes les combinaisons linéaires formelles de p-simplexes de K avec coefficients dans G. Tout élément c de $C_p(\mathsf{K}, G)$ est appelé une *p-chaîne*.

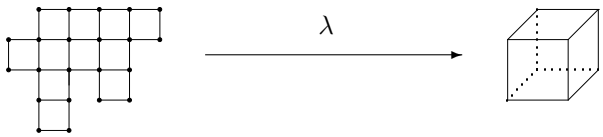

FIG. 1.5 –

Le *bord* ∂_{K} pour un complexe simplicial K est défini de la manière suivante : si σ est un p-simplexe $[v_0, \ldots, v_p]$, $p \geq 1$, $\partial_{\mathsf{K}}\sigma := \sum_{i=0}^{p}(-1)^i[v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p]$. La relation $\partial_{\mathsf{K}}\partial_{\mathsf{K}} = 0$ est vraie pour les simplexes puisque $[\ldots, \hat{v}_i, \ldots, \hat{v}_j, \ldots]$ apparaît deux fois, avec des signes opposés. Par conséquent, $\mathcal{C}(\mathsf{K}, G)$ est bien un complexe de chaîne.

Si f est une fonction simpliciale $\mathsf{K} \to \mathsf{L}$, on définit la collection $f_\#$ d'homomorphismes $f_{\#p} : C_p(\mathsf{K}, G) \to C_p(\mathsf{L}, G)$ en la définissant sur les simplexes comme suit : pour σ un p-simplexe, on a

$$f_{\#p}(\sigma) = \begin{cases} f(\sigma) \text{ si } \dim f(\sigma) = p \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

$f_\#$ est alors une fonction de chaîne, ce qui se vérifie facilement, en commençant par les simplexes.

Enfin, pour K un complexe simplicial, on introduit la fonction de chaînes $\mathsf{sd}_\# : \mathcal{C}(\mathsf{K}, G) \to \mathcal{C}(\mathsf{sd}(\mathsf{K}), G)$ que l'on définit sur les simplexes de K (la linéarité fait le reste) : à un simplexe σ de K, $\mathsf{sd}_\#$ associe le simplexe $\{\tau \in \mathsf{K} : \tau \subseteq \sigma\}$.

Complexe simplicial et chaînes

Soit K un d-complexe simplicial et soit $c \in C_k(\mathsf{K}, \mathbb{Z}_2)$, avec $k \leq d$.

Si σ est un k-simplexe dont le coefficient dans c et non nul, on note $\sigma \in c$.

On dit que c est *fortement connexe* si pour toute paire σ, σ' de k-simplexes distincts tels que $\sigma \in c$ et $\sigma' \in c$, il existe une séquence $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_r = \sigma'$ de k-simplexes de $\sigma_i \in c$ telle que pour tout $i \in [r-1]$, $\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$ est un $(d-1)$-simplexe de K.

1.4.8 Preuve combinatoire

Dans le cas où les preuves originelles sont topologiques, nous proposerons souvent des preuves combinatoires. Qu'entend-on par *preuve combinatoire* ? Nous nous référons à l'article de G. M. Ziegler [101] pour définir une preuve combinatoire comme une preuve ne faisant intervenir ni groupe d'homologie, ni approximation simpliciale, ni fonction continue.

1.5 Objets combinatoires

1.5.1 Graphes

Définitions fondamentales

Un *graphe* est la donnée d'un couple (V, E) où V est un ensemble fini et où E est une famille de paires non ordonnées d'éléments de V. Les éléments de V sont appelés *sommets* ou parfois *nœuds*. Les éléments de E sont appelés *arêtes*.

Une même arête peut apparaître plusieurs fois dans E (voilà pourquoi nous employons le mot "famille" plutôt qu'"ensemble" dans la définition de E). Une arête apparaissant strictement plus d'une fois est appelée *arête multiple*, et le nombre de fois qu'elle apparaît est appelé sa *multiplicité*. Une *boucle* est une arête de la forme $\{v, v\}$. Un graphe est dit *simple* s'il n'a ni boucle ni arête multiple. Il convient de noter qu'un graphe simple est un complexe simplicial abstrait de dimension 1.

Une arête $e = \{u, v\}$ *connecte* u et v. u et v sont alors *adjacents* et v est appelé *voisin* de u. On dit aussi que e est *incident* à u (et incident à v) et on appelle u et v les *extrémités* de e.

On note

$$N_G(v) := \text{ensemble des voisins de } v.$$

$$N_G[v] := N_G(v) \cup \{v\}.$$

$N_G(v)$ est appelé le *voisinage* de v et $N_G[v]$, le *voisinage étendu* de v.

Le *degré* d'un sommet v, noté $\deg_G(v)$, ou $\deg(v)$ s'il n'y a pas d'ambiguité, est le nombre d'arêtes incidentes à v. Si l'on a une boucle en v, la boucle est comptée 2 fois. Pour F un sous-ensemble de E, on note $\deg_F(v)$ le degré de v dans le graphe (V, F).

Un sommet de degré 0 est dit *isolé*. Un graphe G est dit *k-régulier* si tous les sommets sont de degré k. Un graphe 3-régulier est aussi appelé graphe *cubique*.

Sous-graphes, graphe partiel et mineurs

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

Un graphe $H = (V', E')$ est appelé *sous-graphe* de G si $V' \subseteq V$ et si E' est l'ensemble des arêtes de E dont les extrémités sont dans V'. On note alors un tel sous-graphe $G[V']$, et on dit que V' *engendre* $H = G[V']$.

Un graphe $H = (V', E')$ est un *graphe partiel* de G si $V' = V$ et $E' \subseteq E$.

Si U est un sous-ensemble de V, $G - U$ est le sous-graphe $G[V \setminus U]$, et si F est un sous-ensemble de E, $G - F$ est le graphe partiel $(V, E \setminus F)$.

Contracter une arête $e = \{u, v\}$ d'un graphe, c'est supprimer l'arête e de G, et identifier u et v. H est un *mineur* de G si on peut obtenir H à partir de G par une succession de suppressions d'arêtes, suppressions de sommets et contractions d'arêtes. On dit que G est *sans mineur* H si H n'est pas un mineur de G.

Les relations 'être un sous-graphe de' et 'être un mineur de' sont des relations d'ordre partiel.

Chaînes, cycles et mailles

Une *chaîne* d'un graphe $G = (V, E)$ est une séquence

$$P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k),$$

où $k \geq 0$, $v_0, v_1, \ldots, v_k$ sont des sommets et e_i est une arête connectant v_{i_1} à v_i. On dit que P *connecte* v_0 à v_k. La *longueur* d'une chaîne est son nombre d'arêtes.

Pour P une chaîne, on note $V(P)$ les sommets de P et $E(P)$ les arêtes de P.

Une *chaîne simple* est une chaîne dont tous les sommets sont distincts, sauf peut-être le premier et le dernier.

Une chaîne est dite *fermée* si $v_0 = v_k$, auquel cas on l'appelle *cycle*. La *maille* (resp. *maille impaire*, *maille paire*) d'un graphe G est la longueur du plus petit cycle (resp. du plus petit cycle de longueur impaire, du plus petit cycle de longueur paire) qui soit un sous-graphe de G.

Un *T-joint* d'un graphe $G = (V, E)$, avec $T \subseteq V$ de cardinalité paire, est un sous-ensemble F d'arêtes tel que $\deg_F(v)$ est impair si et seulement si $v \in T$.

Couplage, couplage parfait

Un *couplage* d'un graphe G est un ensemble d'arêtes deux à deux disjointes. Un *couplage parfait* d'un graphe G est un couplage contenant tous les sommets du graphe.

Graphes signés

Un *graphe signé* est un triplet $G = (V, E, S)$ où (V, E) est un graphe, et où $S \subseteq E$.

Un *S-cycle impair* (resp. *pair*) est un cycle de (V, E) contenant un nombre impair (resp. pair) d'arêtes dans S.

Connexité

Un graphe est dit *connexe* si pour toute paire de sommets u et v, il existe une chaîne qui les connecte. Un sous-graphe connexe de G, maximal pour la relation d'ordre partiel 'être un sous-graphe de', est appelé *composante connexe* de G.

Graphes eulériens, graphes hamiltoniens

Une chaîne (resp. cycle) est dite (resp. dit) *eulérienne* (resp. *eulérien*) si elle (resp. *il*) contient toutes les arêtes du graphe. Un graphe G est *eulérien* s'il possède un cycle eulérien.

On a la propriété suivante, attribuée à Euler [22] :

Propriété 1.10 *Un graphe G est eulérien si et seulement s'il est connexe et si tous ses sommets sont de degré pair.*

Pour construire un cycle eulérien dans un graphe connexe $G = (X, E)$ ayant tous ses sommets de degré pair, on peut appliquer différents algorithmes polynomiaux (voir plus loin la définition d'algorithme polynomial), le plus simple étant celui de Fleury [26], qui peut se décrire de la manière suivante :

ALGORITHME DE FLEURY

1. Choisir un sommet x_0, et poser $C := \emptyset$.
2. Pour i allant de 1 à $|E|$:
   - choisir une arête e_i adjacente à x_{i-1}, qui ne déconnecte pas $G - E(C)$,
   - faire $C := C \cup \{e_i\}$ et définir x_i comme étant l'extrémité de e_i différente de x_{i-1}.

FIN

Un cycle est dit *hamiltonien* s'il est une chaîne simple fermée contenant tous les sommets du graphe. Un graphe est dit *hamiltonien* s'il possède un cycle hamiltonien. Contrairement aux graphes eulériens, on ne connaît pas d'algorithme polynomial qui teste si un graphe est hamiltonien .

Nombre cyclomatique

Soit $G = (V, E)$ une graphe ayant n sommets $v_1, v_2 \ldots, v_n$ et m arêtes $e_1, e_2, \ldots, e_m$. Identifiant tout sous-ensemble F de E à un $\{0, 1\}$-vecteur à m composantes, où la $j^{\text{ème}}$ composante est égale à 1 si et seulement si $e_j \in F$, l'*espace des cycles* de G, noté $\mathcal{C}(G)$, est le $\mathbb{Z}_2$-espace vectoriel engendré par les cycles de G (l'addition des vecteurs se fait modulo 2).

Le *nombre cyclomatique* du graphe G, noté ϕ, est la dimension de son espace des cycles $\mathcal{C}(G)$. On a alors le théorème suivant :

Théorème 1.3 *Si ϕ est le nombre cyclomatique de G et p son nombre de composantes connexes, alors $\phi = m - n + p$.*

Démonstration : Remarquons d'abord que $F \in \mathcal{C}(G)$ si et seulement si $\deg_F(x) = 0 \bmod 2$ pour tout $x \in V$ (trivial). Ensuite, regardons G comme un complexe simplicial de dimension 1. Notons ∂ le bord de son complexe de chaînes : $\partial : C_1(G, \mathbb{Z}_2) \to C_0(G, \mathbb{Z}_2)$. On a alors $\mathcal{C}(G) = \ker \partial$, ce qui est précisément la traduction du fait que $F \in \mathcal{C}(G)$ si et seulement si $\deg_F(x) = 0 \bmod 2$ pour tout $x \in V$.

On écrit la formule du rang pour ∂ :

$$\text{rg } \partial + \dim \ker \partial = \dim C_1(G, \mathbb{Z}_2). \tag{1.1}$$

$C_1(G, \mathbb{Z}_2)$ est $\mathbb{Z}_2^E$, donc $\dim C_1(G, \mathbb{Z}_2) = m$.

Notons $K_1, K_2, \ldots, K_p$ les composantes connexes de G. Soit K_i l'une de ces composantes connexes. Notons k_i son nombre de sommets, que l'on note $w_1, w_2, \ldots, w_{k_i}$, et considérons la restriction de ∂ sur K_i, que l'on note $\partial|_{K_i}$. w_1 n'est pas dans l'image de $\partial|_{K_i}$, donc $\text{rg } \partial|_{K_i} \leq k_i - 1$. En revanche, tous les $w_1 + w_i$, avec $i = 2, 3, \ldots, k_i$, peuvent être obtenus et sont linéairement indépendants, ce qui implique $\text{rg } \partial|_{K_i} \geq k_i - 1$. Par conséquent $\text{rg } \partial|_{K_i} = k_i - 1$, pour chaque composante connexe K_i de G. Or $C_j(G, \mathbb{Z}_2) = \bigoplus_{i=1}^p C_j(K_i, \mathbb{Z}_2)$ pour $j = 0, 1$ (trivial), et $\partial|_{K_i} : C_1(K_i, \mathbb{Z}_2) \to C_0(K_i, \mathbb{Z}_2)$. Donc

$$\text{rg } \partial = \sum_{i=1}^{p} \text{rg } \partial|_{K_i},$$

et $\text{rg } \partial = n - p$.

En remplaçant dans l'équation 1.1, on obtient $n - p + \phi = m$. ∎

Quelques propriétés élémentaires

Propriété 1.11 *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Si $|V| \geq 2$, alors il existe un sommet dont la suppression ne déconnecte pas G.*

Démonstration : Soit $P = (v_0, \ldots, v_k)$ une plus longue chaîne simple de G. Comme $|V| \geq 2$, $k \geq 1$. Par maximalité de P, tous les voisins de v_0 sont dans P. Donc la suppression de v_0 ne déconnecte pas G. ∎

Propriété 1.12 *Un graphe possède toujours un nombre pair de sommets de degré impair. En particulier, s'il possède un sommet de degré impair, alors il en possède au moins un autre.*

Stabilité et domination

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un sous-ensemble C de V est appelé *stable*, si toute paire de sommets de C est non adjacente, et appelé *dominant* si tout sommet de $V \setminus C$ possède un voisin dans C (un dominant C est tel que $\bigcup_{v \in C} N_G[v] = V$).

On note traditionnellement $\alpha(G)$ la cardinalité du plus grand stable de G, et $\gamma(G)$ la cardinalité du plus petit dominant de G.

Coloration classique

Une *coloration* de $G = (V, E)$ est une application $\phi : V \to \mathbb{N}^*$ telle que $\phi(u) \neq \phi(v)$ si u et v sont adjacents. Les éléments de $\phi(V)$ sont alors appelées les *couleurs* de G. Le *nombre chromatique* de G, noté $\chi(G)$, est le nombre minimal de couleurs dont on a besoin pour colorier le graphe.

Coloration fractionnaire

Le *nombre chromatique fractionnaire* $\chi_f(G)$ d'un graphe $G = (V, E)$ est la borne inférieure des rapports $\frac{a}{b}$ tels qu'on puisse couvrir les sommets de G par a indépendants de G de manière à ce que chaque sommet soit couvert au moins b fois.

Propriété 1.13 *La borne inférieure est en réalité un minimum, et on a l'encadrement suivant :*

$$\frac{|V|}{\alpha(G)} \leq \chi_f(G) \leq \chi(G).$$

Coloration circulaire

Une (p, q)-*coloration* de $G = (V, E)$ est une application $\phi : V \to [p]$ telle que

$$\{u, v\} \in E \Rightarrow q \leq |\phi(u) - \phi(v)| \leq p - q.$$

Les éléments de $\phi(G)$ sont alors appelées les *couleurs* de G. Le *nombre chromatique circulaire* de G, noté $\chi_c(G)$, est la borne inférieure de p/q tel que G admette une (p, q)-coloration. On a la propriété suivante ([95])

Propriété 1.14 *La borne inférieure est en réalité un minimum, et on a l'encadrement suivant :*

$$\chi(G) - 1 < \chi_c(G) \leq \chi(G).$$

Coupe

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Pour tout $U \subseteq V$, on note $\delta(U)$ l'ensemble des arêtes connectant U et $V \setminus U$. Un sous-ensemble F de E est appelé *coupe* si $F = \delta(U)$ pour un certain $U \subseteq V$. En particulier, $\emptyset$ est une coupe.

Produit de graphes

Soit G_1 et G_2 deux graphes.
On définit le *produit cartésien* de G_1 et G_2, noté $G_1 \otimes G_2$ par

$$V(G_1 \otimes G_2) := V(G_1) \times V(G_2),$$

$$E(G_1 \otimes G_2) := \big\{\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) : x_1 = y_1 \text{ et } (x_2, y_2) \in E(G_2); \text{ ou } (x_1, y_1) \in E(G_1) \text{ et } x_2 = y_2\big\}.$$

On définit le *produit direct (fort)* de G_1 et G_2, noté $G_1 \bullet G_2$ par

$$V(G_1 \bullet G_2) := V(G_1) \times V(G_2),$$

$$E(G_1 \bullet G_2) := \big\{\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) : (x_1, y_1) \in E(G_1) \text{ et } (x_2, y_2) \in E(G_2); \text{ ou } x_1 = y_1 \text{ et } (x_2, y_2) \in E(G_2);$$

$$\text{ou } (x_1, y_1) \in E(G_1) \text{ et } x_2 = y_2\big\}.$$

Observation 1.5 *Ces produits sont associatifs (à un isomorphisme près).*

Les notations $G_1 \bullet G_2 \bullet \ldots \bullet G_r$ et $G_1 \otimes G_2 \otimes \ldots \otimes G_r$ ont donc un sens.

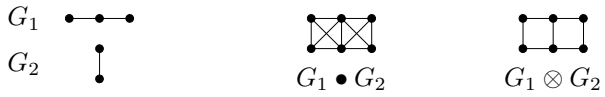

FIG. 1.6 – Produits de deux chaînes.

Quelques graphes particuliers

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

G est dit *complet* si pour toute paire de sommets $u \neq v$, $\{u, v\} \in E$. On note K_n le graphe complet à n sommets (K_5 est représenté sur la Figure 1.7).

G est dit *biparti* si deux couleurs suffisent pour le colorer.

G est une *forêt* s'il n'a pas de cycle (ou, de manière équivalente, si son nombre cyclomatique est nul). G est un *arbre* s'il est une forêt connexe (ou, de manière équivalente, si son nombre cyclomatique est nul et s'il ne possède qu'une composante connexe). Un *arbre enraciné* est la donnée d'un arbre connexe T et d'un sommet v de T. Les *feuilles* sont les sommets de degré 1 différents de v. On a alors naturellement un ordre partiel sur les sommets $x \preceq y$ si y est sur la chaîne la plus courte reliant x à v. Si $x \preceq y$, on dit que y est un *ascendant* de x, et que x est un *descendant* de y. Un *sous-arbre enraciné en w* est le sous-arbre de T engendré par w et ses descendants.

Si G, en tant que complexe simplicial géométrique de dimension 1, admet un *plongement* (i.e. une injection continue) dans $\mathbb{R}^2$, on dit que G est *planaire*. On note l'image de ce plongement $||G||$, qui est alors la *représentation planaire* de G. Les composantes 0-connexes (au sens topologique) de $\mathbb{R}^2 \setminus ||G||$ sont appelées *faces* de $||G||$. Le *dual* d'un graphe planaire $G = (V, E)$ est le graphe $G^* = (V^*, E^*)$, où les sommets sont les faces de $||G||$, $|E^*| = |E|$, et on a une bijection entre les arêtes $e \in E$ et leur dual $e^* \in E^*$.

On définit $e^* \in E^*$ comme l'arête qui joint les deux faces séparées par e. Il est possible que des deux côtés de e on ait la même face (arête d'articulation) en ce cas là, e^* est une boucle dans le graphe dual. Pour $F \subseteq E$ on notera

$$F^* := \{e^* : e \in F\}.$$

On a évidemment $(F^*)^* = F$ et $(G^*)^* = G$.

On a la célèbre formule d'Euler, qui lie le nombre de face, le nombre d'arêtes et le nombre de sommets d'un graphe planaire (elle peut se prouver en utilisant la formule du nombre cyclomatique) :

Théorème 1.4 (Formule d'Euler) *Si un graphe planaire connexe admet n sommets, f faces et m arêtes, alors :*

$$m + f - 2 = n.$$

On a encore l'observation suivante :

Observation 1.6 *Si H est un mineur d'un graphe planaire, alors H est planaire.*

On a le célèbre théorème de Kuratowski ([53]) :

Théorème 1.5 (Théorème de Kuratowski - version de Wagner [96]) *G est planaire si et seulement si G est sans mineur K_5 et sans mineur $K_{3,3}$.*

Un graphe célèbre est représenté Figure 1.8. Il s'agit du graphe de Petersen, qui a été plusieurs fois, dans l'histoire de la théorie des graphes, un contre-exemple à des conjectures.

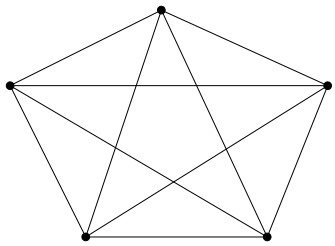

FIG. 1.7 – Le graphe complet à 5 sommets.

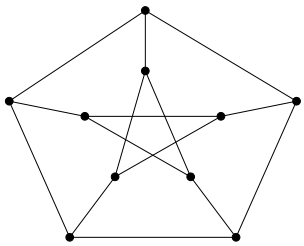

FIG. 1.8 – Le graphe de Petersen.

1.5.2 Hypergraphes

Un *hypergraphe* est une paire $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ où V est un ensemble fini et $\mathcal{E}$ est une famille de sous-ensembles de V. Les éléments de V et de $\mathcal{E}$ sont appelés respectivement *sommets* et *hyperarêtes*.

Une *couverture* d'un hypergraphe $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ est un sous-ensemble de V intersectant toute arête.

Le *bloquant* d'un hypergraphe $\mathcal{H}$ est l'hypergraphe des couvertures minimales pour l'inclusion de $\mathcal{H}$. On le note $b(\mathcal{H})$.

1.6 Complexité algorithmique

Nous présentons maintenant une brève introduction à la théorie de la complexité, dans un style relativement informel, mais qui répond aux besoins de la thèse. Des références à des ouvrages ou articles plus précis sont données.

1.6.1 Préliminaires

Un *problème* est la donnée d'une *instance*, ensemble de paramètres dont on peut calculer la *taille* (en nombre de bits par exemple), et d'une *tâche* à effectuer. La tâche peut être une question. Par exemple,

PROBLEME : graphe hamiltonien
INSTANCE : un graphe G
QUESTION : G est-il hamiltonien ?

Un *algorithme* est un ensemble d'opérations qui, à partir d'une instance quelconque d'un problème, fournit la réponse en un temps fini. Lorsqu'un tel algorithme existe, le problème est dit *décidable*.

Un algorithme est dit *polynomial* s'il existe un polynôme P tel que l'algorithme se termine après un nombre d'opérations majoré par $P(n)$, lorsque n est la taille de l'instance. On dit que la *complexité* de ce problème est polynomiale, et qu'elle est en $O(P(n))$. On dit encore que ce problème est de *classe* P. Par exemple, tester la connexité d'un graphe, ou identifier ses composantes, se fait en temps polynomial en la taille du graphe.

Nous présentons maintenant trois types de problèmes différents : les problèmes de décision, les problèmes d'optimisation et les problèmes de recherche. Les deux premiers types de problèmes possèdent leur livre de référence, écrit par Garey et Johnson ([36]). Papadimitriou a également écrit un livre de référence sur la complexité ([76]), qui cherche à aller plus loin que le livre précédent, et qui possède en particulier un chapitre sur les problèmes de recherche.

1.6.2 Problèmes de décision

Un problème est dit *de décision* si la tâche à effectuer est de répondre à une question fermée (la réponse est "oui" ou "non"). Répondre à la question, c'est *décider* si la réponse est "oui" ou "non". Le problème du graphe hamiltonien est un problème de décision. Un *certificat* du "oui" (resp. du "non") est un objet construit à partir de l'instance et qui existe si et seulement si la réponse est "oui" (resp. "non"). Un *bon certificat* est un certificat de taille polynomiale en la taille de l'instance, et dont on peut vérifier en temps polynomial qu'il est un certificat du oui.

Un problème de décision appartient à la *classe* NP s'il existe un bon certificat du oui et à la *classe* co-NP s'il existe un bon certificat du non[3].

Par exemple, un bon certificat du "oui" pour le problème du cycle hamiltonien est un cycle hamiltonien lui-même.

Observation 1.7 P $\subseteq$NP$\cap$co-NP

Actuellement on ignore si P$\neq$NP.

Un problème de décision est dit NP-*complet* s'il est dans la classe NP et si son appartenance à la classe P implique l'appartenance à la classe P de tout problème de la classe NP. Il existe beaucoup de problèmes NP-complets. Bien entendu, on ne connaît d'algorithme polynomial pour aucun d'entre eux, sinon on saurait que P=NP. Le premier problème de ce type a été identifié par Cook ([14]) Les problèmes NP-complets sont donc les problèmes difficiles de la classe NP. Le problème du cycle hamiltonien est un exemple de problème NP-complet (d'après Karp [46], ce problème a été identifié comme tel par E. L. Lawler et R. E. Tarjan)

Théorème 1.6 *Le problème du graphe hamiltonien est* NP-*complet.*

1.6.3 Problèmes d'optimisation

En plus des problèmes de décision, on a des problèmes *d'optimisation* pour lesquels la tâche à remplir est l'optimisation d'une fonction. Exemple :

PROBLEME : coupe maximum
INSTANCE : un graphe G
TACHE : trouver la cardinalité de la coupe maximum de G.

Un problème d'optimisation est dit NP-*difficile* si l'existence d'un problème polynomial le résolvant implique P=NP. On a par exemple le théorème suivant, prouvé par Karp en 1972 [46] :

Théorème 1.7 *Le problème de la coupe maximum est* NP-*difficile.*

Même si l'on se restreint aux graphes cubiques, le problème de la coupe maximum reste NP-difficile, voir le livre de Garey et Johnson [36][4] :

Théorème 1.8 *Le problème de la coupe maximum dans les graphes cubiques est* NP-*difficile.*

1.6.4 Problèmes de recherche associé à un problème de décision

Considérons les problèmes de décision de la forme : étant donnée une instance x, décider s'il existe une solution y telle que $R(x, y)$, où R est une relation binaire qui s'évalue en temps polynomial en fonction des tailles de x et de y (on dit que R est *polynomiale*).

INSTANCE : x
TACHE : décider s'il existe y tel que $R(x, y)$.

Le *problème de recherche associé* est le suivant :

INSTANCE : x

[3] NP ne signifie pas "non polynomial", mais "non deterministic polynomial", qui veut dire polynomial pour des machines non déterministes.

[4] Dans ce livre, c'est le problème de la coupe maximum dans les graphes de degré au plus 3 qui est donné comme NP-difficile, mais en ajoutant des arêtes pendantes sur les sommets de degré 2, et des graphes fixés dont tous les sommets sont de degré 3 sauf un de degré 2 sur les sommets de degré 1, on obtient le résultat pour les graphes cubiques.

TACHE : trouver y tel que $R(x, y)$ si un tel y existe, sinon, répondre "non".

Une relation R polynomiale est *totale* si pour tout x il existe un y tel que $R(x, y)$.

La classe FNP est la classe des problèmes de recherche associés aux problèmes de décision de NP. TFNP est la sous-classe de FNP caractérisée par une relation totale. FP est la sous-classe des problèmes de FNP que l'on peut résoudre en temps polynomial[5].

La classe TFNP peut être a priori déstabilisante. Elle a été introduite en 1991 par Meggido et Papadimitriou dans [66]. Un exemple de problème TFNP est la décomposition en facteurs premiers : le problème de décision auquel il est associé est le suivant : décider si un entier n admet une décomposition en facteur premier ; la réponse est toujours affirmative.

Papadimitriou a montré le théorème suivant [76] :

Théorème 1.9 FP=FNP *si et seulement si* P=NP.

Une sous-classe de TFNP qui apparaît parfois dans cette thèse est la classe PPA (de l'anglais "Polynomial Parity Argument"), introduite par Papadimitriou dans [77]. Un problème est dans cette classe si l'existence de y dans $R(x, y)$ peut être assurée par l'existence d'un autre sommet de degré impair dans un graphe ayant déjà un sommet de degré impair (conséquence de la Propriété 1.12).

[5] le "F" dans les acronymes FP,FNP,... signifie "functional", i.e. "fonctionnel" en anglais.

Chapitre 2

Variations sur le lemme de Sperner

2.1 Introduction

En 1928, Sperner démontrait un lemme, désormais connu sous le nom du lemme de Sperner, conduisant à une preuve simple et constructive du célèbre théorème du point fixe de Brouwer, ce qui ouvrit la voie à la mise au point d'algorithmes pour trouver des points fixes d'applications continues. Ce lemme mériterait plutôt l'appellation théorème. On parle d'ailleurs souvent de ce lemme en tant que version combinatoire (ou discrète) du théorème de Brouwer, ce qui signifie implicitement une égalité de statut entre les deux résultats.

Dans sa version la plus élémentaire, le lemme de Sperner dit la chose suivante : soit $\triangle$ un triangle de sommets $\{v_1, v_2, v_3\}$, et soit T une triangulation de $\triangle$; si les sommets de T sont étiquetés avec les entiers 1, 2 et 3 de manière à ce que v_1 soit étiqueté par 1, v_2 par 2, v_3 par 3, $v \in [v_1, v_2]$ par 1 ou par 2, $v \in [v_1, v_3]$ par 1 ou par 3 et $v \in [v_2, v_3]$ par 2 ou par 3 et enfin tous les autres sommets par 1, 2 ou 3, alors au moins l'un des "petit" triangles de la triangulation T est étiqueté 1, 2, 3 (voir Figure 2.1), i.e. *pleinement étiqueté*.

Depuis, le lemme de Sperner a connu une multitude de généralisations dont l'intérêt est, d'une part, d'apporter une meilleur compréhension des théorèmes de point fixe dans le cadre continu et d'améliorer les techniques permettant des les calculer pratiquement, et, d'autre part, de fournir des théorèmes d'existence qui n'ont pas forcément d'équivalent dans le continu, comme la généralisation polytopale de De Leora, Prescott et Su.

La Section 2.2 de ce chapitre est consacrée au lemme de Sperner lui-même, et à quelques variantes, mais en gardant les mêmes règles d'étiquetage (*étiquetage à la Sperner*). Différents types de preuves sont présentés, ainsi que l'équivalence avec le théorème de Brouwer. Quelques mots sont dits sur les questions algorithmiques. Une conjecture est proposée dans le cas où il y a plusieurs étiquetages simultanés. Cette conjecture propose un nouveau type de lien entre la combinatoire et la topologie, lien qui ne semble pas avoir été à ce jour exploré.

La Section 2.3 est consacrée à d'autres versions du lemme de Sperner mais toujours sur des simplexes. On relâche donc la condition sur le type d'étiquetage. La nouveauté introduite dans ce chapitre est l'usage systématique de la relation de commutativité entre le bord et une application de chaînes pour démontrer et renforcer ces résultats.

La Section 2.4 est consacrée à des généralisations du lemme de Sperner pour d'autres corps que des simplexes. Les premiers théorèmes que nous regardons dans cette section sont des théorèmes de Freund qui concernent l'étiquetage d'une triangulation d'un polytope avec des points d'un espace affine. On se demande alors s'il existe un simplexe de la triangulation dont l'étiquetage contient un certain point dans son enveloppe convexe. Dans un second temps, nous nous attaquons à l'amélioration d'un théorème de De Loera, Prescott et Su donnant une borne inférieure au nombre de d-simplexes pleinement étiquetés d'une triangu-

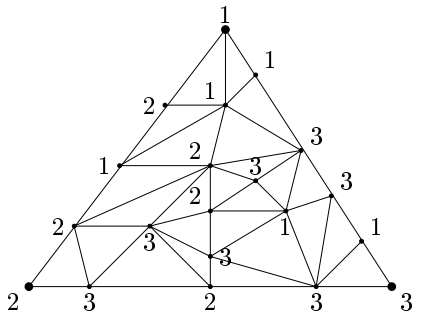

FIG. 2.1 – Les règles d'étiquetage sont respectées : il y a au moins un simplexe de la triangulation qui est pleinement étiqueté

lation d'un polytope étiqueté, lorsque le nombre d'étiquettes différentes utilisées est égal au nombre de sommets du polytope. Nous démontrons (i) une meilleure borne sur le nombre des ces d-simplexes (ii) que la condition "polytope" est très forte : il suffit de supposer que le corps compact triangulé a une surface fortement connexe.

2.2 Le lemme de Sperner

2.2.1 Enoncés et quelques preuves traditionnelles

Nous présentons maintenant le lemme de Sperner, dans sa version originale. Pour cela nous devons définir ce qu'est un étiquetage de Sperner d'une triangulation d'un d-simplexe.

Soit T une triangulation de $\triangle^d$ un d-simplexe, dont on a préalablement numéroté les sommets par des entiers $1, 2, 3, \ldots, d+1$. Si les sommets de T sont étiquetés de sorte que tout sommet v reçoit l'un des numéros des sommets de la facette minimale le supportant, alors on dit que l'étiquetage est un *étiquetage de Sperner*.

Lemme 2.1 *Soit T une triangulation de $\triangle^d$ un d-simplexe, dont on a préalablement numéroté les sommets par des entiers $1, 2, 3, \ldots, d+1$. Si l'on étiquette les sommets de T de manière à obtenir un étiquetage de Sperner, alors il y a au moins un d-simplexe de T dont les sommets sont étiquetés par les $d+1$ entiers $1, 2, \ldots, d+1$.*

Un d-simplexe étiqueté par $d+1$ étiquettes différentes est dit *pleinement étiqueté*.

Par exemple, sur la Figure 2.1, on a illustré le cas où $d = 2$.

Nous donnons maintenant deux preuves de ce résultat, la première constructive, que l'on attribue à Cohen [13], Kühn [52] et Scarf [79], ce dernier étant probablement le premier à s'être intéressé à cette question. La seconde, combinatoire, en guise d'illustration de la puissance et de la simplicité du formalisme des complexes de chaînes.

Démonstration constructive du Lemme 2.1 : Cette démonstration procède par récurrence. On démontre le Fait suivant :

Fait : *lorsqu'une triangulation T d'un d-simplexe a un étiquetage de Sperner, alors il y a un nombre impair de d-simplexes de T qui sont pleinement étiquetés (et donc en particulier il y a en au moins un).*

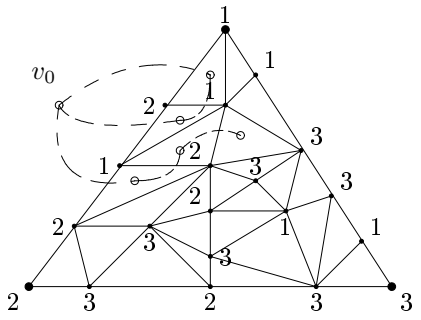

FIG. 2.2 – Illustration de la preuve constructive du lemme de Sperner

Preuve du Fait : Pour $d = 0$, c'est trivial. Supposons donc que $d > 0$. On note λ la fonction d'étiquetage. On construit un graphe G dont les nœuds sont les d-simplexes σ tel que $\lambda(\sigma) \supseteq \{1, 2, \ldots, d\}$. A ces nœuds on ajoute un nœud supplémentaire, que l'on va noter v_0.

Les arêtes sont de deux types :

1. du type $\{v_0, \sigma\}$ où σ est un d-simplexe ayant une face τ contenue dans la face $\{1, 2, \ldots, d\}$ de $\triangle$ et tel que $\lambda(\tau) = \{1, 2, \ldots, d\}$,
2. du type $\{\sigma, \sigma'\}$ où σ et σ' sont deux d-simplexes ayant une face en commun τ telle que $\lambda(\tau) = \{1, 2, \ldots, d\}$.

On regarde les degrés des sommets de G.

Par hypothèse de récurrence, $\deg_G(v_0)$ est impair : en effet, chaque arête quittant v_0 correspond à un $(d-1)$-simplexe pleinement étiqueté de la face $\{1, 2, \ldots, d\}$ de $\triangle^d$; l'hypothèse de récurrence appliquée à cette face indique la présence d'un nombre impair de tels $(d-1)$-simplexes.

Regardons maintenant les autres nœuds de G. Considérons σ un d-simplexe correspondant à un nœud de G. On a $\lambda(\sigma) \supseteq \{1, 2, \ldots, d\}$. Si $\lambda(\sigma) = \{1, 2, \ldots, d\}$, σ a exactement deux voisins dans G puisqu'exactement une étiquette apparaît deux fois sur les sommets de σ. Donc $\deg_g(\sigma) = 2$. Dans tout graphe, il y a un nombre pair de sommets de degré impair, donc v_0 ne peut être le seul sommet de degré impair et il y a un nombre impair de simplexes σ tels que $\lambda(\sigma) = \{1, 2, \ldots, d+1\}$. Ce qui démontre le Fait, et donc le lemme de Sperner. ∎

On peut aisément donner un procédé constructif à partir de cette preuve : partant de v_0, on peut suivre une chaîne qui inévitablement finira sur un sommet de G correspondant à un simplexe pleinement étiqueté.

La seconde démonstration, elle, est beaucoup plus courte, mais bien que combinatoire, elle ne fournit pas immédiatement un procédé pour construire un d-simplexe pleinement étiqueté.

Démonstration combinatoire : On procède également par récurrence, et on démontre de même qu'il y a un nombre impair de d-simplexes pleinement étiquetés. Pour $d = 0$, c'est trivial. Supposons donc $d > 0$. Soit T la chaîne (à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$) $\sum_{\sigma \in \mathsf{T}} \sigma$. L'étiquetage λ est une fonction simpliciale de T dans $\binom{\{1,2,\ldots,d+1\}}{\leq d+1}$. Montrer qu'il y a un nombre impair de d-simplexes pleinement étiquetés est équivalent à montrer que $\lambda_\# T = \{1, 2, \ldots, d+1\}$.

On a $\partial \lambda_\# T = \lambda_\# \partial T$. Or ∂T est la somme des $(d-1)$-simplexes des triangulations induites par T sur les faces de $\triangle^d$. Donc, par induction, $\partial \lambda_\# T = \sum_{k=1}^{d+1} \{1, 2, \ldots, \hat{k}, \ldots, d+1\}$. En

particulier $\partial\lambda_{\#}T \neq 0$. Donc $\lambda_{\#}T \neq 0$. Comme $\{1, 2, \ldots, d+1\}$ est le seul d-simplexe dans $\binom{\{1,2,\ldots,d+1\}}{\leq d+1}$, on a $\lambda_{\#}T = \{1, 2, \ldots, d+1\}$. ∎

On peut facilement adapter la preuve ci-dessus en travaillant non pas avec des chaînes à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$, mais avec des chaînes à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On obtient alors le lemme de Sperner "orienté", dont nous omettons la démonstration :

Lemme 2.2 *Soit T une triangulation orientée de manière cohérente de $\triangle^d$, dont on a préalablement numéroté les sommets par des entiers $1, 2, 3, \ldots, d+1$, et soit λ un étiquetage de Sperner. Alors le nombre de d-simplexes $[v_1, v_2, \ldots, v_{d+1}]$ tels que $\lambda(v_i) = i$ pour $i = 1, \ldots, d+1$ moins le nombre d-simplexes $-[v_1, v_2, \ldots, v_{d+1}]$ pour $i = 1, \ldots, d+1$ tels que $\lambda(v_i) = i$ est égal à 1.*

2.2.2 Version continue : théorème de Brouwer et théorème de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz

Nous ne pouvons pas ne pas rappeler le théorème de Brouwer ([10]) ainsi que la façon dont il se déduit du lemme de Sperner. De plus, nous donnons aussi le théorème de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz, en abrégé théorème KKM, qui est équivalent au théorème de Brouwer, mais qui se présente sous la forme d'un énoncé sur certaines couvertures par des fermés d'un d-simplexe $\triangle^d$.

Théorème 2.1 (Théorème de Brouwer) *Si f est une application continue d'une boule B dans elle-même, alors f a un point fixe, i.e. il existe $\boldsymbol{x} \in B$ tel que $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.*

Démonstration : On démontre que si f est une application continue de $\triangle^d$ dans lui-même, alors f a un point fixe. Cela implique le théorème, car une boule B de dimension d est homéomorphe à un simplexe $\triangle^d$, pour un certain d.

On considère $\triangle^d$ comme l'ensemble $\{(x_1, x_2, \ldots, x_{d+1}) : \forall i \in [d+1],\ x_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{d+1} x_i = 1\}$. On va démontrer par l'absurde qu'il existe $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{d+1})$ dans $\triangle^d$ tel que $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$. Supposons donc qu'un tel $\boldsymbol{x}$ n'existe pas.

Soit T_ϵ une triangulation de $\triangle^d$, dont tout simplexe a un diamètre inférieur à ϵ. On étiquette les sommets de T_ϵ de la manière suivante : v reçoit $\min\{i : f(\boldsymbol{x})_i < x_i\}$. Un tel i existe toujours car $\boldsymbol{x} \neq f(\boldsymbol{x})$ et $\sum_{i=1}^{d+1} f(\boldsymbol{x})_i = \sum_{i=1}^{d+1} x_i$. Un tel étiquetage est un étiquetage de Sperner. On peut donc appliquer le lemme de Sperner (Lemme 2.1) : il existe au moins un simplexe pleinement étiqueté. En faisant tendre ϵ vers 0, la compacité permet de voir qu'il existe une suite de simplexes pleinement étiquetés dont les sommets convergent vers un point $\boldsymbol{x}$ tel que pour tout i, $x_i \geq f(\boldsymbol{x})_i$. Comme $1 = \sum_{i=1}^{d+1} x_i \geq \sum_{i=1}^{d+1} f(\boldsymbol{x})_i = 1$, et les x_i et $f(\boldsymbol{x})_i$ sont tous positifs, on a $\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{x})$. ∎

La démonstration constructive du lemme de Sperner peut être facilement adaptée pour trouver, étant donné $\epsilon > 0$, un $\boldsymbol{x} \in B$ tel que $||\boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x})|| < \epsilon$ (voir par exemple Scarf [79]).

Et voici la version KKM ([47] :

Théorème 2.2 *On identifie chaque sommet de $\triangle^d$ à un entier différent de l'ensemble $[d+1]$. Si $C^1, C^2, \ldots, C^{d+1}$ sont $d+1$ fermés de $\triangle^d$ tels que, pour tout $F \subseteq \{1, 2, \ldots, d+1\}$, la facette de sommets F soit couverte par les C^i, $i \in F$, alors $\cap_{i=1}^{d+1} C^i \neq \emptyset$.*

Démonstration : Soit T_ϵ de $\triangle^d$ une triangulation dont les simplexes sont de diamètre inférieur à ϵ. On étiquette les sommets de T de la manière suivante : pour v un sommet de T, on prend la facette F minimale qui le supporte, et on lui associe le plus petit entier i tel que $i \in F$ et $v \in C^i$. Un tel i existe forcément par hypothèse. Il existe au moins un d-simplexe pleinement étiqueté. On fait tendre ϵ vers 0, la compacité permet de voir qu'il

existe une suite de simplexes pleinement étiquetés dont les sommets convergent vers un point $\boldsymbol{x}$. Comme les C^i sont des fermés, $\boldsymbol{x} \in \cap_{i=1}^{d+1} C^i$. ∎

Réciproquement, le théorème de Brouwer implique le lemme de Sperner :

Brouwer implique Sperner (preuve succincte) : Si λ est l'étiquetage de Sperner, on le compose avec la permutation $\pi : i \mapsto i+1$, prolongée de manière affine, qui ne laisse aucune facette propre stable. Cette fonction composée $\pi \circ \lambda$ peut être interprétée comme une application continue de $\triangle^d$ dans lui-même, qui ne peut admettre de point fixe sur les facettes. En vertu du théorème de Brouwer, il existe un point fixe, qui ne peut être contenu que dans un simplexe pleinement étiqueté. ∎

2.2.3 Quelques mots sur la complexité algorithmique

La première preuve que nous avons donnée du lemme de Sperner montre clairement que le problème de trouver un simplexe pleinement étiqueté est dans TFNP, et même dans PPA. Pour éviter de se poser des problèmes d'existence de triangulations suffisamment régulières, nous limitons notre brève discussion au cas $d = 2$.

PROBLEME : 2D-SPERNER
INSTANCE : un entier n, et une fonction f qui, à chaque point $p = (i_1, i_2, i_3)$ avec $i_1, i_2, i_3 \geq 0$ et $i_1 + i_2 + i_3 = n$, associe un entier $f(p)$ valant 1, 2 ou 3 tel que $i_j = 0$ implique $f(p) \neq j$,
TACHE : trouver trois points p, p', p'', deux à deux à distance 1, tels que $f\{p, p', p''\}) = \{1, 2, 3\}$.

La longueur de la chaîne dans le graphe G construit dans la preuve constructive du lemme de Sperner ci-dessus peut très bien être de taille exponentielle puisqu'elle peut être de l'ordre de n^2, alors que la taille de l'instance est en $O(\log n + k)$, où k est la taille de la fonction, et l'on peut facilement imaginer des fonctions pour lesquelles k est indépendant de n.

A ce jour, on ignore si 2D-SPERNER est dans FP.

2.2.4 Multi-étiquetage

Le théorème de Bapat

On peut aussi imaginer le cas où l'on met plusieurs étiquettes par sommet. Bapat, en 1989, a proposé une telle version du lemme de Sperner ([6]), pour fournir une preuve constructive de la généralisation du lemme KKM par Gale ([33]).

Pour énoncer le théorème de Bapat, on doit introduire la notion de plein étiquetage pour une paire (σ, f) : soit σ un d-simplexe d'une triangulation T de $\triangle^d$; si tout sommet v de σ reçoit $d+1$ étiquettes $\lambda_1(v)$, $\lambda_2(v)$, ..., $\lambda_{d+1}(v)$, et si f est une bijection de $V(\sigma)$ dans $[d+1]$, alors on dit que la paire (σ, f) est *pleinement étiquetée* si $\bigcup_{v \in V(\sigma)} \{\lambda_{f(v)}(v)\} = \{1, 2, \ldots, d+1\}$. Si $v_1, \ldots, v_{d+1}$ sont les sommets de σ et si σ est orienté $[v_1, \ldots, v_{d+1}]$, on dira que la paire (σ, f) est *positive* (resp. *négative*) si

$$\lambda_{f(v_1)}(v_1), \lambda_{f(v_2)}(v_2), \ldots, \lambda_{f(v_{d+1})}(v_{d+1})$$

forme une permutation paire (resp. impaire) de $1, 2, \ldots, d+1$.

Théorème 2.3 *Soit T une triangulation orientée de manière cohérente de $\triangle^d$ et soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{d+1}$ une collection de $d+1$ étiquetages de Sperner. Alors le nombre de paires pleinement étiquetés positives moins le nombre de paires pleinement étiquetés négatives est égal à $(d+1)!$.*

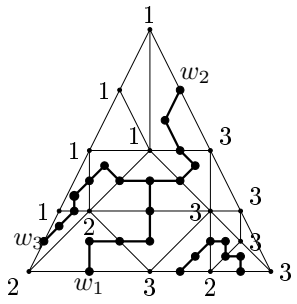

FIG. 2.3 – Illustration du complexe simplicial $\mathsf{S}(\lambda)$.

Dans le cas où tous les λ_i sont égaux, on retrouve le lemme de Sperner orienté (Lemme 2.2). Nous ne donnons pas immédiatement une démonstration de ce théorème. Il sera déduit d'une version plus générale qui concerne la formule de Ky Fan (voir prochain chapitre) multi-étiquettes.

Plusieurs étiquetages : une conjecture

Pour finir cette section sur le lemme de Sperner et ses variantes utilisant les mêmes étiquetages, nous proposons une conjecture qui, si elle est vraie, fournit un lien d'un nouveau type entre la combinatoire et la topologie.

Imaginons un d-simplexe $\triangle^d$, triangulé, et considérons deux étiquetages de Sperner, λ_1 et λ_2, de cette triangulation. On a alors la proposition suivante :

Proposition 2.1 *Il existe un d-simplexe σ de la triangulation telle que $|\lambda_1(V(\sigma))| = 2$ et $|\lambda_2(V(\sigma))| = d$.*

Le lemme de Sperner dit que si λ est un étiquetage de Sperner, alors il existe σ tel que $|\lambda(V(\sigma))| = d + 1$.

Nous donnons une preuve de la Proposition 2.1 qui s'appuie sur la construction du complexe simplicial de dimension 1 (c'est donc un graphe) $\mathsf{S}(\lambda)$ défini pour λ, un étiquetage de Sperner de la triangulation. Les sommets de $\mathsf{S}(\lambda)$ sont les barycentres des $(d-1)$-simplexes pleinement étiquetés (i.e. dont toutes les étiquettes sont distinctes), et les barycentres des d-simplexes ayant au moins une face pleinement étiquetée (voir la Figure 2.3).

Démonstration : Considérons $\mathsf{S}(\lambda_2)$. Il est facile de voir, comme dans la démonstration constructive du lemme de Sperner, que $\mathsf{S}(\lambda_2)$ possède au moins un sommet (correspondant à un d-simplexe pleinement étiqueté) d'où partent $d+1$ chaînes rejoignant les $d+1$ faces de $\triangle^d$. Appelons les extrémités de ces chaînes $w_1, w_2, \ldots, w_{d+1}$. Mettons sur chaque sommet v de $\mathsf{S}(\lambda_2)$ l'une des étiquettes données par λ_1 au plus petit simplexe contenant v. Les $d+1$ sommets w_i ne peuvent tous avoir la même étiquette. Par conséquent $\mathsf{S}(\lambda_2)$ possède au moins une arête dont les étiquettes sont différentes. Le simplexe σ de la triangulation contenant cette arête est alors le simplexe recherché. ∎

Dans le cas où $d = 2$, on a une autre démonstration qui peut peut-être généralisée pour démontrer la conjecture dans le cas général (voir la coïncidence de $\mathbb{Z}_2$-applications pour quelques réflexions à ce sujet, dans la sous-section 3.2.2) :

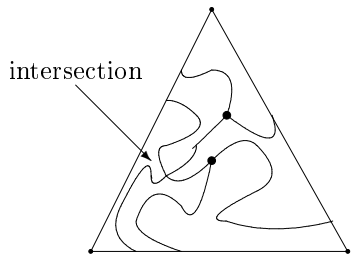

FIG. 2.4 – L'intersection est forcée.

Elements de démonstration de la Proposition 2.1 pour $d = 2$: $\mathsf{S}(\lambda_1)$ et $\mathsf{S}(\lambda_2)$ possèdent chacun un sommet relié par 3 chaînes aux 3 faces de $\triangle^d$ (voir la démonstration ci-dessus). $\mathsf{S}(\lambda_1)$ et $\mathsf{S}(\lambda_2)$ sont forcés de s'intersecter (un argument topologique permet de le montrer simplement, voir Figure 2.4) et possèdent donc un sommet en commun. Ce sommet est contenu dans un 2-simplexe de la triangulation qui possède la propriété recherchée. ∎

On peut essayer de généraliser la Proposition 2.1, par exemple, on peut conjecturer dans le cas $d = 4$ (puisqu'il semble qu'on puisse escompter $|\lambda_1(V(\sigma))| + |\lambda_2(V(\sigma))| = d + 2$) :

Conjecture 2.1 *Supposons donnés λ_1 et λ_2 deux étiquetages de Sperner d'une triangulation T d'un simplexe $\triangle^4$. Alors il existe un 4-simplexe σ de T tel que $|\lambda_1(V(\sigma))| = |\lambda_2(V(\sigma))| = 3$.*

Ou de manière générale :

Conjecture 2.2 *On considère T une triangulation de $\triangle^d$, un entier $n \geq 1$. Supposons que l'on ait n étiquetages de Sperner $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et n entiers $k_1, k_2, \ldots, k_n$ strictement positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} k_i \leq d + n$. Alors il existe $\sigma \in \mathsf{T}$ tel que, pour tout $i \in [n]$, on ait $|\lambda_i(V(\sigma))| \geq k_i$.*

Pour le moment, nous ne sommes parvenu qu'à démontrer les cas où tous les k_i sont égaux à 1 sauf un égal à $d + 1$ (c'est une conséquence directe du lemme de Sperner), et le cas où $n = 2$, et l'un des k_i est égal à 2 (Proposition 2.1).

2.3 D'autres étiquetages

2.3.1 Un lemme de Scarf

Nous présentons, et démontrons, maintenant un lemme de H. Scarf de 1967 [79], très utile en microéconomie.

Théorème 2.4 *Soit T une triangulation du d-simplexe $\triangle^d$, que l'on définit comme étant l'ensemble des points $(x_1, x_2, \ldots, x_{d+1})$ tels que l'on ait $x_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, d+1\}$ et $\sum_{i=1}^{d+1} x_i = 1$. Supposons que les sommets de T soient étiquetés par les entiers $1, 2, \ldots, d+1$ de façon à ce que si $\boldsymbol{x}$ de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_{d+1})$ est un sommet de T sur une facette de $\triangle^d$, alors il reçoit comme étiquette $\min\{i : x_i = 0 \text{ et } x_{i+1} > 0\}$, avec la convention $d + 2 := 1$. Alors au moins des d-simplexes de T est pleinement étiqueté.*

La démonstration que nous proposons est quasiment identique à la deuxième que nous avons donnée pour le lemme de Sperner, et simplifie encore les preuves connues jusqu'à présent (pour une preuve déjà relativement courte, voir [54]).

Démonstration : On procède par induction et on montre que $\lambda_{\#}T = \{1, 2, \ldots, d+1\}$, où λ est l'étiquetage induisant une application simpliciale de T dans $\binom{\{1,2,\ldots,d+1\}}{\leq d+1}$, et où T est la somme de tous les d-simplexes de T. Pour $d = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons $d > 0$. Par induction, $\lambda_{\#}\partial T = \sum_{k=0}^{d}\{1, 2, \ldots, \hat{k}, \ldots, d+1\}$. En particulier $\partial\lambda_{\#}T \neq 0$. Donc $\lambda_{\#}T \neq 0$. Comme $\{1, 2, \ldots, d+1\}$ est le seul d-simplexe dans $\binom{\{1,2,\ldots,d+1\}}{\leq d+1}$, on a $\lambda_{\#}T = \{1, 2, \ldots, d+1\}$. ∎

2.3.2 Théorème de Shapley et jeux équilibrés

En 1972, Shapley proposait dans [85] une généralisation du théorème KKM, que nous appellerons le théorème KKMS (S pour Shapley), qui devint un outil important de la théorie de l'équilibre générale en analyse économique. Il permet de montrer entre autre le célèbre résultat de Scarf sur la non-vacuité du cœur de tout jeu équilibré sans paiements latéraux : c'est le fameux résultat de Scarf publié dans [80] (voir l'article de Y. Kannai dans le Handbook of Game theory [45] pour les définitions des termes précédents). Comme nous l'avons fait pour les résultats précédents, nous appliquons le formalisme des chaînes pour obtenir une preuve courte de ce théorème. Il semble d'ailleurs qu'il y ait une sorte de compétition pour trouver des preuves toujours plus courte du théorème KKMS (Ichiishi [43], Shapley et Vohra [86], Komiya [49], Krasa et Yannelis [50], Zhou [99]). La nôtre est à peu près à égalité avec la plus courte connue à ce jour, celle de [42], mais il est à noter que toutes ces preuves font appel à d'autres théorèmes de topologie continue (théorème de Brouwer, théorème de Kakutani, théorème des coïncidences de Ky Fan) et ne sont donc ni combinatoire (ce qui nous intéresse), ni autosuffisante. De plus, nous sommes convaincu que le formalisme des chaînes permet d'entrer plus profondément dans la compréhension du théorème, comme nous l'avons déjà exprimé précédemment. Passons à l'exposé du théorème KKMS, et du cadre dans lequel il prend son sens.

Soit N un ensemble fini. Pour tout $S \subseteq N$, on note par $\boldsymbol{e}^S$ le vecteur dans $\mathbb{R}^n$ dont la $i$ème coordonnée est 1 si $i \in S$ et 0 sinon. Pour alléger la notation, $\boldsymbol{e}^{\{i\}}$ sera dénoté $\boldsymbol{e}^i$. Contrairement au reste de la thèse, les indices sont mis ici en exposant, conformément à la (forte) tradition qui prévaut en Théorie des Jeux.

Pour tout S dans $\mathcal{P}(N)$, on définit :

$$\triangle^S := \mathrm{conv}\{\boldsymbol{e}^i : i \in S\},$$

et :

$$\boldsymbol{m}^S := \frac{\boldsymbol{e}^S}{|S|}.$$

Soit $\mathcal{B}$ une collection de parties de N. On dit que la collection est *équilibrée* s'il existe des poids positifs ou nuls $\{\lambda^S\}_{S\in\mathcal{B}}$ telle que :

$$\sum_{S\in\mathcal{B}} \lambda^S \boldsymbol{e}^S = \boldsymbol{e}^N.$$

Observation 2.1 *$\mathcal{B}$ est équilibrée si et seulement si $\boldsymbol{m}^N \in \mathrm{conv}\{\boldsymbol{m}^S : S \in \mathcal{B}\}$.*

On a alors le théorème suivant :

Théorème 2.5 (Théorème KKMS) *Soit $\{C^S : S \in \mathcal{P}(N)\}$ une collection d'ensembles fermés de $\triangle^N$ tel que :*

$$\cup_{S\subseteq T} C^S \supseteq \triangle^T, \text{ pour tout } T \in \mathcal{P}(N).$$

Alors il existe un $\boldsymbol{x}^* \in \triangle^N$ tel que $S(\boldsymbol{x}^*) := \{S \in \mathcal{P}(N) : \boldsymbol{x}^* \in C^S\}$ est équilibrée.

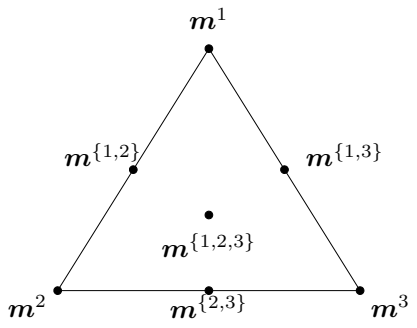

FIG. 2.5 – Les points $\boldsymbol{m}$ en dimension 2.

Nous proposons ici une nouvelle preuve, combinatoire, de ce résultat, non-constructive, mais extrêmement simple.

La version discrète du théorème KKMS que nous allons montrer est la suivante :

Théorème 2.6 (Théorème KKMS, version discrète) *Soit* T *une triangulation de* $\triangle^N$ *et soit* μ *un étiquetage des sommets de* T *par les points* $\boldsymbol{m}^S$ *qui satisfait la condition suivante :*

$$v \in \triangle^T \cap V(\mathsf{T}) \Rightarrow \mu(v) \in \{\boldsymbol{m}^S : S \subseteq T\}, \forall T \in \mathcal{P}(N).$$

Alors il existe un simplexe σ *de* T *tel que* $\boldsymbol{m}^N \in \operatorname{conv}\big(\mu(\sigma)\big)$.

Démonstration : On pose $n := |N|$. $\triangle^N$ est un $(n-1)$-simplexe. L'étiquetage μ induit une fonction simpliciale, que nous notons également μ, $\mathsf{T} \to \mathsf{K}$, où K est le complexe simplicial dont les sommets sont les $\boldsymbol{m}^S$ et dont les simplexes sont les parties de $\{\boldsymbol{m}^S : S \subseteq N\}$. Il suffit de montrer qu'il existe un $(n-1)$-simplexe σ de T tel que $\boldsymbol{m}^N \in \operatorname{conv}\big(\mu(\sigma)\big)$.

Nous démontrons d'abord par récurrence le fait suivant :

Fait : *Soit* c *la somme de tous les* $(n-1)$*-simplexes de* T. *Alors* $\{\sigma \in \mathsf{T} : \sigma \in \mu_\# c\}$ *est une couverture binaire de* $\triangle^N$.

Si $n = 1$: cette proposition est triviale. Soit donc $n > 1$.

On a $\partial \mu_\# c = \mu_\# \partial c$. En notant par c^S la sous-chaîne obtenue lorsqu'on ne conserve que les simplexes de c contenus dans $\triangle^S$, on a donc :

$$\partial \mu_\# c = \sum_{i=1}^{n} \mu_\# (\partial c)^{N-\{i\}}.$$

On se place dans $\mathbb{R}^{n-1}$. Soit alors $\boldsymbol{g}$ un point générique, ce qui signifie que si l'on prend n sous-ensembles $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ de N tels que les n points $\boldsymbol{m}^{S_i}$ soient affinement indépendants, alors les points $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{m}^{S_1}, \boldsymbol{m}^{S_2}, \ldots, \boldsymbol{m}^{S_{n-1}}$ sont affinement indépendants.

On choisit également $(\boldsymbol{g}, \vec{b})$ un rayon générique quittant $\boldsymbol{g}$. Générique signifie que dès que l'on prend $n-2$ sous-ensembles $S_1, S_2, \ldots, S_{n-2}$ de N tels que les $n-2$ points $\boldsymbol{m}^{S_i}$ soient affinement indépendants, alors $(\boldsymbol{g}, \vec{b})$ n'intersecte pas $\operatorname{conv}\big(\{\boldsymbol{m}^{S_1}, \boldsymbol{m}^{S_2}, \ldots, \boldsymbol{m}^{S_{n-2}}\}\big)$.

Comme on est en dimension $n-1$, on peut effectivement trouver de tels $\boldsymbol{g}$ et $(\boldsymbol{g}, \vec{b})$ génériques.

Pour σ un $(n-1)$-simplexe de K, on pose $\phi_{\boldsymbol{g}}(\sigma) = 1$ si $\boldsymbol{g} \in \sigma$ et $\phi_{\boldsymbol{g}}(\sigma) = 0$ sinon.

Pour τ un $(n-2)$-simplexe de K, on pose $\psi_{(\boldsymbol{g},\vec{b})}(\tau) = 1$ si $(\boldsymbol{g},\vec{b}) \cap \tau \neq \emptyset$ et $\psi_{(\boldsymbol{g},\vec{b})}(\tau) = 0$ sinon.

Par linéarité, on étend $\phi_{\boldsymbol{g}}$ sur $C_{n-1}(\mathsf{T},\mathbb{Z}_2)$ et $\psi_{(\boldsymbol{g},\vec{b})}$ sur $C_{n-2}(\mathsf{T},\mathbb{Z}_2)$. On a alors la relation suivante :

$$\phi_{\boldsymbol{g}} = \psi_{(\boldsymbol{g},\vec{b})}\partial. \tag{2.1}$$

Il suffit de la démontrer pour un unique $(n-1)$-simplexe de $\mathbb{R}^{n-1}$, ce qui est direct puisqu'elle signifie qu'un point $\boldsymbol{g}$ est à l'intérieur d'un $(n-1)$-simplexe de $\mathbb{R}^{n-1}$ si et seulement si une ligne $(\boldsymbol{g},\vec{b})$ quittant $\boldsymbol{g}$ et de direction $\vec{b}$ intersecte la frontière du simplexe un nombre impair de fois (en l'occurrence une seule fois).

On applique les fonction $\phi_{\boldsymbol{g}}$ et $\psi_{(\boldsymbol{g},\vec{b})}$:

$$\phi_{\boldsymbol{g}}\mu_{\#}c = \psi_{(\boldsymbol{g},\vec{b})}\partial\mu_{\#}c,$$

et donc :

$$\phi_{\boldsymbol{g}}\mu_{\#}c = \sum_{i=1}^{n} \psi_{(\boldsymbol{g},\vec{b})}\mu_{\#}(\partial c)^{N-\{i\}}.$$

$(\partial c)^{N-\{i\}}$ est la somme formelle des $(n-2)$-simplexes de la face $\triangle^{N-\{i\}}$. Par induction, $\mu_{\#}(\partial c)^{N-\{i\}}$ est une couverture binaire de $\triangle^{N-\{i\}}$. Par conséquent, si $(\boldsymbol{g},\vec{b})$ intersecte $\triangle^{N-\{i\}}$ en p_i, alors p_i est contenu dans un nombre impair de simplexes de $\mu_{\#}(\partial c)^{N-\{i\}}$, ce qui signifie : $\psi_{(\boldsymbol{g},\vec{b})}\mu_{\#}(\partial c)^{N-\{i\}} = 1$, et si $(\boldsymbol{g},\vec{b})$ n'intersecte pas $\triangle^{N-\{i\}}$, alors $\psi_{(\boldsymbol{g},\vec{b})}\mu_{\#}(\partial c)^{N-\{i\}} = 0$. D'où

- si $\boldsymbol{g}$ est dans $\triangle^N$, $(\boldsymbol{g},\vec{b})$ intersecte exactement l'un des $\triangle^{N-\{i\}}$ et $\phi_{\boldsymbol{g}}\mu_{\#}c = 1$, et
- si $\boldsymbol{g}$ n'est pas dans $\triangle^N$, $(\boldsymbol{g},\vec{b})$ intersecte 0 ou 2 fois l'une des $\triangle^{N-\{i\}}$ et $\phi_{\boldsymbol{g}}\mu_{\#}c = 0$.

Ce qui démontre le fait.

Pour conclure, il suffit de remarquer que l'image de $\triangle^N$ par μ est un compact. Il existe donc $\sigma \in \mathsf{T}$ et une suite de points $(\boldsymbol{g}_i)_{i=1,2,\ldots}$ de $\triangle^N$ convergeant vers $\boldsymbol{m}^N$ telle que, pour tout i, $\boldsymbol{g}_i \in \operatorname{conv}(\mu(\sigma))$, ce qui entraîne $\boldsymbol{m}^N \in \operatorname{conv}\big(\mu(\sigma)\big)$. ∎

Démonstration du Théorème 2.5 : On se donne arbitrairement un ordre total $\preceq$ sur les parties de N. Soit ϵ un réel positif. On considère une triangulation T_ϵ dont le diamètre des $(n-1)$-simplexes est inférieur à ϵ. On étiquette les sommets de T_ϵ de la manière suivante : soit v un sommet ; on considère la facette minimale $\triangle^T$ contenant v et on lui attribue comme étiquette $\mu(v) := \boldsymbol{m}^S$, où S est le plus petit élément par rapport à $\preceq$ tel que $S \subseteq T$. Un tel étiquetage satisfait les conditions du Théorème 2.6. Il existe donc un simplexe σ_ϵ tel que $\boldsymbol{m}^N \in \operatorname{conv}\big(\mu(\sigma_\epsilon)\big)$.

On fait tendre maintenant ϵ vers 0. Le nombre d'étiquettes étant en nombre fini, il existe un ensemble équilibré $\mathcal{P}$ de parties de N et une suite ϵ_0, ϵ_1, ... de réels tendant vers 0, telle que $\mu\big(V(\sigma_{\epsilon_i})\big) = \{\boldsymbol{m}^S : S \in \mathcal{P}\}$. Par compacité, il existe une sous-suite de (ϵ_i), notons-la $(\epsilon_{\phi(i)})$ tel que les sommets de $(\sigma_{\phi(i)})$ convergent vers un point x^*. Puisque les C^S sont des fermés, x^* est inclus dans tous les C^S tels que $S \in \mathcal{P}$. ∎

2.3.3 Polarité et lemme de Garcia

Finalement, nous présentons un autre lemme de la famille du lemme de Sperner. Il est l'occasion d'introduire un lemme (le Lemme 2.3) "topologique" en lien avec l'étude des relations entre un polytope et son dual. Il est également utilisé dans la Section 2.4 dans la preuve combinatoire de la généralisation du théorème de Freund.

Cette généralisation du lemme de Sperner est due à Garcia et date de 1976 [35]. Il convient de noter que contrairement aux autres versions, ce lemme n'impose pas de condition particulière sur l'étiquetage. On rappelle que $\triangle^d$ est l'ensemble des points $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{d+1})$ tel que $x_i \geq 0$ pour tout i et tel que $\sum_{i=1}^{d+1} x_i = 1$.

Théorème 2.7 (Lemme de Garcia) *Soit* T *une triangulation de* $\triangle^d$ *et supposons que l'on ait une fonction d'étiquetage* $\lambda : V(\mathsf{T}) \to \{1, 2, \ldots, d+1\}$. *Alors il existe un simplexe* σ *de* T *tel que*

$$\lambda(V(\sigma)) \cup \{i : x_i = 0 \text{ pour tout } \boldsymbol{x} \in \sigma\} = \{1, 2, \ldots, d+1\}.$$

Pour démontrer le théorème, on a besoin du lemme suivant. Il nous sera également utile plus loin pour une démonstration combinatoire d'un théorème de Robert Freund. Un lemme semblable est présenté dans un de ses articles [31].

Lemme 2.3 *Soit* P *un polytope de dimension* d. *Supposons que* P *et* $P^\triangle$ *soient triangulés indépendamment par* T *et* T' *respectivement. Le complexe simplicial abstrait :*

$$\mathsf{L} := \{V(\sigma) \uplus V(\tau) : \sigma \in \mathsf{T}, \tau \in \mathsf{T}', \sigma \subseteq F, \tau \subseteq F^\diamondsuit, F \in \mathsf{L}(P)\}$$

est une pseudo-variété sans bord.

Démonstration : Soient σ et τ deux simplexes tels que $V(\sigma) \uplus V(\tau)$ est un $(d-1)$-simplexe de L, et soit F une facette de P supportant σ. Notons que les rôles joués par σ et F d'une part, et ceux joués par τ et $F^\diamondsuit$ d'autre part, sont symétriques.

Posons $k := \dim \sigma$. Nous avons les relations suivantes, valides également si l'un des simplexes est l'ensemble vide : $\dim \tau = d - k - 2$, $\dim F \geq k$, puisque F supporte σ et que $\dim F^\diamondsuit \geq d - k - 2$. De plus, par polarité, $\dim F + \dim F^\diamondsuit = d - 1$. En remplaçant cette égalité dans l'inégalité précédente, on obtient : $\dim F \leq k + 1$. Par conséquent, soit $\dim F = \dim \sigma$, et alors $\dim F^\diamondsuit = \dim \tau + 1$, soit $\dim F = \dim \sigma + 1$, et alors $\dim F^\diamondsuit = \dim \tau$.

Comme ces deux possibilités sont symétriques, il nous suffit de vérifier l'une d'elles. Supposons donc que l'on ait $\dim F = k$. Un d-simplexe de L contenant $V(\sigma) \uplus V(\tau)$ a soit la forme $V(\sigma') \uplus V(\tau)$, avec $\dim \sigma' = k + 1$, soit la forme $V(\sigma) \uplus V(\tau')$, avec $\dim \tau' = d - k - 1$.

1. si τ est supporté par une $(d-k-2)$-facette $G^\diamondsuit$ de $F^\diamondsuit$:
   (a) il y a un et un seul d-simplexe dans L qui soit de la forme $V(\sigma') \uplus V(\tau)$, $\sigma \subseteq \sigma'$: en effet, si un tel σ' existe, il doit être contenu dans une facette F' de P de dimension $\geq k+1$, et $F'^\diamondsuit$ doit avoir une dimension $\leq d-k-2$, et doit contenir τ. Donc $F' = G$ et un seul tel σ' existe : il s'agit du $(k+1)$-simplexe de T inclus dans G et contenant σ.
   (b) il y a un et un seul d-simplexe dans L qui soit de la forme $V(\sigma) \uplus V(\tau')$, $\tau \subseteq \tau'$: en effet, si un tel τ' existe, il doit être contenu dans une facette $G'^\diamondsuit$ de $P^\triangle$ de dimension $\geq d-k-1$, et G' doit avoir une dimension $\leq k$, et doit contenir σ. Donc $G' = F$ et un seul tel τ' existe : il s'agit du $(d-k-1)$-simplexe de T' inclus dans $F^\diamondsuit$ et contenant τ.
2. si τ n'est pas supporté par une $(d-k-2)$-facette $G^\diamondsuit$ de $F^\diamondsuit$:
   (a) il n'y a pas de d-simplexe dans L de la forme $V(\sigma') \uplus V(\tau)$, $\sigma \subseteq \sigma'$: en effet, si un tel σ' existait, il devrait être contenu dans une facette F' de P de dimension $\geq k+1$, et $F'^\diamondsuit$ devrait avoir une dimension $\leq d-k-2$ tout en contenant τ. Une telle facette n'existe pas par hypothèse.

(b) il y a exactement deux d-simplexes de L de la forme $V(\sigma) \uplus V(\tau')$, $\tau \subseteq \tau'$: en effet, si un tel τ' existe, il doit être contenu dans une facette $G'^{\diamond}$ de $P^{\triangle}$ de dimension $\geq d-k-1$, et G' doit avoir une dimension $\leq k$, tout en contenant σ, ce qui entraîne que nécessairement $G' = F$. Il y a exactement deux tels τ' : ce sont les deux $(d-k-1)$-simplexes de T' inclus dans $F^{\diamond}$ et contenant τ.

Dans les deux cas 1. et 2., on voit que le $(d-1)$-simplexe $V(\sigma) \uplus V(\tau)$ est contenu dans exactement deux d-simplexes de L. Par conséquent, L est bien une pseudo-variété sans bord. ∎

Démonstration du Théorème 2.7 : On considère :

$$\mathsf{L} := \{V(\sigma) \uplus V(\tau) : \sigma \in \mathsf{T}, \tau \in \mathsf{L}((\triangle^d)^{\triangle})\}.$$

D'après le Lemme 2.3, L est une pseudo-variété sans bord. On étend λ sur l'ensemble des sommets de L : tout sommet v de $(\triangle^d)^{\triangle}$ reçoit l'entier i tel que $x_i = 0$ sur la face correspondant à v dans $\triangle^d$. Donc $\lambda\big(V((\triangle^d)^{\triangle})\big) = \{1, 2, \ldots, d+1\}$. On notant c la chaîne qui est la somme de tous les d-simplexes de L, on a $\partial c = 0$. Donc $\lambda_{\#}\partial c = 0$, ce qui implique qu'il existe un simplexe $\tau \in \mathsf{L}$ tel que $\tau \neq \emptyset \uplus V((\triangle^d)^{\triangle}$ et tel que $\lambda(\tau) = \{1, 2, \ldots, d+1\}$. Les sommets de τ qui sont dans $V(\mathsf{T})$ sont les sommets du simplexe σ recherché. ∎

2.3.4 Lemme de Sperner et matroïdes

Pour finir, notons qu'en 1980, Lovász proposait une version du lemme de Sperner où les étiquettes sont des éléments d'un matroïde ([61]). Des généralisations ont été données par Lindström [59]), par Krynski [51]) et par Lee et Shih [57].

2.4 Le lemme de Sperner pour d'autres objets que le simplexe

Dans les sections précédentes, nous avons vu que le formalisme des complexes de chaînes pouvait être appliqué avec succès pour donner des preuves simples du lemme de Sperner et de quelques unes de ses généralisations. L'objet de la section présente est d'appliquer ce formalisme pour démontrer des généralisations plus ambitieuses du lemme de Sperner. Dans un premier temps, nous nous intéressons aux généralisations du type "Théorèmes de Freund", où l'on regarde des triangulations de polytopes dont les étiquettes sont des points d'un espace affine et l'on se demande s'il y a un simplexe dont les étiquettes contiennent un certain point dans leur enveloppe convexe (un peu comme dans le théorème de Shapley ci-dessus - Théorème 2.6). Dans la seconde, nous nous intéresserons à une généralisation du lemme de Sperner conjecturée par Atanassov et démontrée par De Loera, Peterson et Su en 2001, et qui donne une borne inférieure au nombre de simplexes pleinement étiquetés. Nous redémontrons ce théorème en l'étendant à une classe d'objets plus large que les polytopes, et, en passant, nous améliorons la borne inférieure.

2.4.1 Théorèmes de Freund sur les polytopes

Entre 1984 et 1990, Robert Freund démontrait plusieurs théorèmes qui généralisent les lemmes de Garcia, Scarf et Sperner pour des triangulations de polytopes (voir par exemple [29],[30] ou [31]). Nous retiendrons principalement deux théorèmes. Ces derniers ont été de même généralisés en 2001 [54] par van der Laan, Talman et Yang en un théorème unique. C'est ce dernier que nous démontrerons. Il implique immédiatement les théorèmes de Freund. Nous soulignons que l'existence d'une preuve combinatoire pour le Théorème 2.9, ainsi que

l'assertion précisant la parité, était jusqu'à présent une question ouverte. Toutes les preuves connues faisant intervenir les outils continues de la topologie (le théorème de Kakutani entre autres). De plus, les preuves combinatoires permettent d'alléger les conditions de validités du théorème de Van der Laan, Talman et Yang.

Pour pouvoir les énoncer clairement, quelques notations et définitions préliminaires sont nécessaires :

Définitions et notations préliminaires

Soit P un polytope de plein rang de $\mathbb{R}^d$, ayant m faces et dont la forme canonique est :

$$P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle \leq 1 + \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_0 \rangle, \boldsymbol{a} \in A\}.$$

A est donc un ensemble de m éléments de $\mathbb{R}^d$, et $\boldsymbol{x}_0$ un point à l'intérieur de P. Pour X un sous-ensemble de P, on définit :

$$\mathrm{supp}(X) := \{\boldsymbol{a} : \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle = 1 + \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_0 \rangle \text{ pour tout } \boldsymbol{x} \in X\}.$$

P étant fixé, on définit alors l'ensemble suivant pour $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ et pour $C \subseteq \mathbb{R}^d$:

$$E_{\boldsymbol{y}}(C) := \{(S, T) \subseteq C \times A : \boldsymbol{y} \in \mathrm{conv}(S \cup T)\}.$$

Les théorèmes de Freund

Les deux principaux théorèmes de Freund généralisant le lemme de Sperner pour les polytopes sont les suivants :

Théorème 2.8 *Soit T une triangulation d'un polytope P de dimension d dans $\mathbb{R}^d$ dont la forme canonique est $P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \boldsymbol{a}^T, \boldsymbol{x} \rangle \leq 1, \boldsymbol{a} \in A\}$. Soit $\lambda : V(\mathsf{T}) \to A$ un étiquetage des sommets de $V(\mathsf{T})$. Alors pour tout $\boldsymbol{y} \in P^{\triangle}$ il existe un simplexe σ de T tel que $\boldsymbol{y} \in \mathrm{conv}\big(\mathrm{supp}(\sigma) \cup \lambda(V(\sigma))\big)$.*

Et :

Théorème 2.9 *Soit T une triangulation d'un polytope P de dimension d dans $\mathbb{R}^d$ dont la forme canonique est $P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \boldsymbol{a}^T, \boldsymbol{x} \rangle \leq 1, \boldsymbol{a} \in A\}$. Soit $\lambda : V(\mathsf{T}) \to A$ un étiquetage des sommets de $V(\mathsf{T})$. Alors pour tout $\boldsymbol{y} \in P^{\triangle}$ il existe un simplexe σ de T tel que $\big(\lambda(V(\sigma)), \mathrm{supp}(\sigma)\big) \in E_{\boldsymbol{y}}(-A)$.*

Nous ne démontrons pas ces théorèmes directement, mais nous en démontrons les généralisations de van der Laan, Talman et Yang. C'est l'objet de la sous-section suivante.

Illustrons par exemple le Théorème 2.8. Considérons le polytope P de la Figure 2.6. Il est obtenu avec $A = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_5\}$, où $\boldsymbol{a}_1 = (3, 2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 4)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-1, 2)$, $\boldsymbol{a}_4 = (-1, -2)$ et $\boldsymbol{a}_5 = (3, -2)$, et $\boldsymbol{x}_0 = 0$. $P^{\triangle}$ est représenté sur la Figure 2.7, ainsi que 2 points $\boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{z}$. Considérons maintenant la triangulation T de P représentée sur la Figure 2.8.

Il y a 5 simplexes σ de T tels que $\boldsymbol{y} \in \mathrm{conv}\big(\mathrm{supp}(\sigma) \cup \lambda(V(\sigma))\big)$: $\{a\}$, $\{t\}$, $\{w, v\}$, $\{f, g, k\}$ et $\{p, q, u\}$. Il y a 3 simplexes σ de T tels que $\boldsymbol{z} \in \mathrm{conv}\big(\mathrm{supp}(\sigma) \cup \lambda(V(\sigma))\big)$: $\{w, v\}$, $\{x, t, y\}$ et $\{p, q, u\}$

Contrairement au Théorème 2.9, le Théorème 2.8 est démontré de manière combinatoire dans l'article de Freund [31], ce qui permet en plus d'avoir l'assurance qu'il y a un nombre impair de simplexe σ satisfaisant les conditions de l'énoncé du Théorème 2.8 si $\boldsymbol{y}$ est générique (pris au hasard dans P). La preuve combinatoire présentée à la sous-section suivante assure une propriété identique pour le nombre de simplexes σ pour le Théorème 2.9.

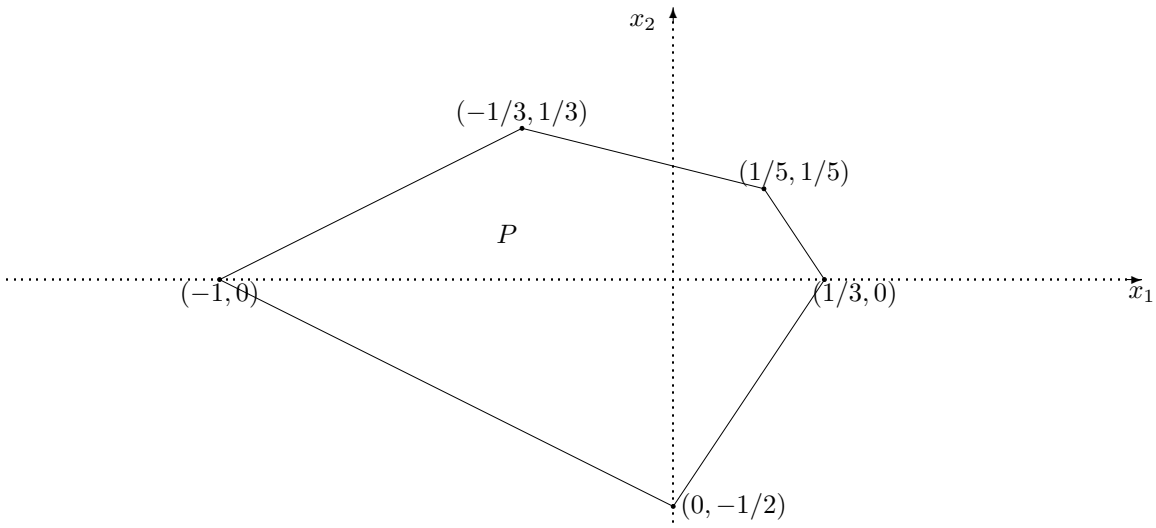

FIG. 2.6 – Le polytope P utilisé dans l'illustration du Théorème 2.8.

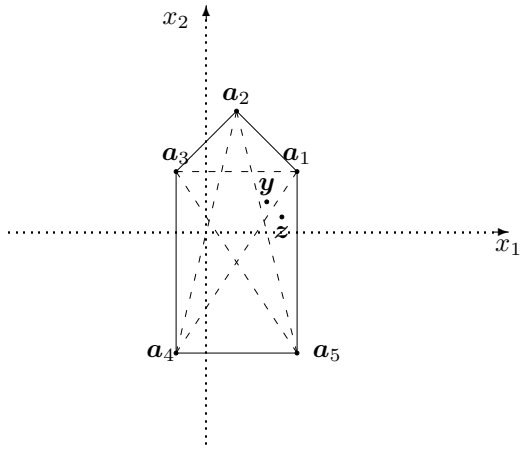

FIG. 2.7 – Le polaire du polytope P utilisé dans l'illustration du Théorème 2.8, ainsi que les points $\boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{z}$.

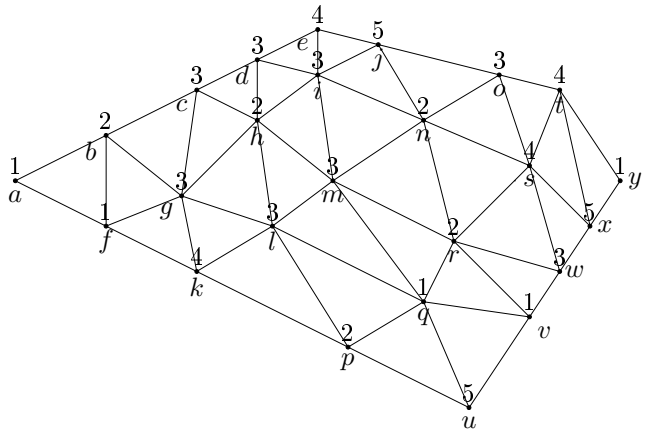

FIG. 2.8 – La triangulation T et l'étiquetage du polytope P utilisés dans l'illustration du Théorème 2.8, les noms des sommets de T sont indiqués en-dessous des sommets, l'indice i des étiquettes $\boldsymbol{a}_i$ (resp. $\boldsymbol{c}_i$) au-dessus.

Le théorème de van der Laan, Talman et Yang et le test de présence d'un point donné dans un simplexe

Enoncé

Voici la généralisation de van der Laan, Talman et Yang :

Théorème 2.10 *Soit $C \subseteq \mathbb{R}^d$, P un polytope de plein rang de $\mathbb{R}^d$ et T une triangulation de P. On suppose P sous forme canonique : $P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \boldsymbol{a}^T, \boldsymbol{x}\rangle \leq 1 + \langle \boldsymbol{a}^T, \boldsymbol{x}_0\rangle, \boldsymbol{a} \in A\}$. Soit $\lambda : V(\mathsf{T}) \to C$ un étiquetage des sommets de T. Alors pour tout $\boldsymbol{y} \in \mathrm{int}(P^{\triangle})$, il existe un simplexe σ tel que $\big(\lambda(V(\sigma)), \mathrm{supp}(\sigma)\big) \in E_{\boldsymbol{y}}(C)$.*

Comme on le voit, Van der Laan, Talman et Yang ont formulé leur théorème en demandant à ce que $\boldsymbol{y}$ soit dans l'intérieur de $P^{\triangle}$. Notre preuve combinatoire permet de voir que cette condition n'est pas nécessaire et nous permet de réécrire le Théorème 2.10 sous la forme plus générale suivante :

Théorème 2.11 *Soit $C \subseteq \mathbb{R}^d$, P un polytope de plein rang de $\mathbb{R}^d$ et T une triangulation de P. On suppose P sous forme standard : $P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \boldsymbol{a}^T, \boldsymbol{x}\rangle \leq 1 + \langle \boldsymbol{a}^T, \boldsymbol{x}_0\rangle, \boldsymbol{a} \in A\}$. Soit $\lambda : V(\mathsf{T}) \to C$ un étiquetage des sommets de T. Alors pour tout $\boldsymbol{y} \in P^{\triangle}$, il existe un simplexe σ tel que $\big(\lambda(V(\sigma)), \mathrm{supp}(\sigma)\big) \in E_{\boldsymbol{y}}(C)$.*

Si de plus $\boldsymbol{y}$ est générique, i.e. n'appartient à aucun $(d-1)$-simplexe géométrique dont les sommets sont dans $A \cup C$, alors il y a un nombre impair de tels simplexes σ.

Illustrons ce théorème sur un exemple. On reprend le polytope et sa triangulation des Figures 2.6 et 2.8, mais on prend comme ensemble $C = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_5\}$, avec $\boldsymbol{c}_1 = (5, 2)$, $\boldsymbol{c}_2 = (7, 2)$, $\boldsymbol{c}_3 = (7, 4)$, $\boldsymbol{c}_4 = (6, 9)$ et $\boldsymbol{c}_5 = (5, 14)$ (voir Figure 2.9).

Pour $\boldsymbol{z} = (1, 1)$, il y a 3 simplexes σ de T tels que $\big(\lambda(V(\sigma)), \mathrm{supp}(\sigma)\big) \in E_{\boldsymbol{z}}(C) : \{a\}$, $\{f, k\}$ et $\{k, p\}$.

Pour $\boldsymbol{y} = (1, -2)$, il y a un simplexe σ de T tel que $\big(\lambda(V(\sigma)), \mathrm{supp}(\sigma)\big) \in E_{\boldsymbol{y}}(C) : \{u\}$.

Avant d'en venir à la démonstration proprement dite, nous introduisons notre outil principal, qui teste la présence d'un point donné dans un simplexe. On procède comme à la Section 2.3.2, dans la preuve de la version discrète du lemme KKMS.

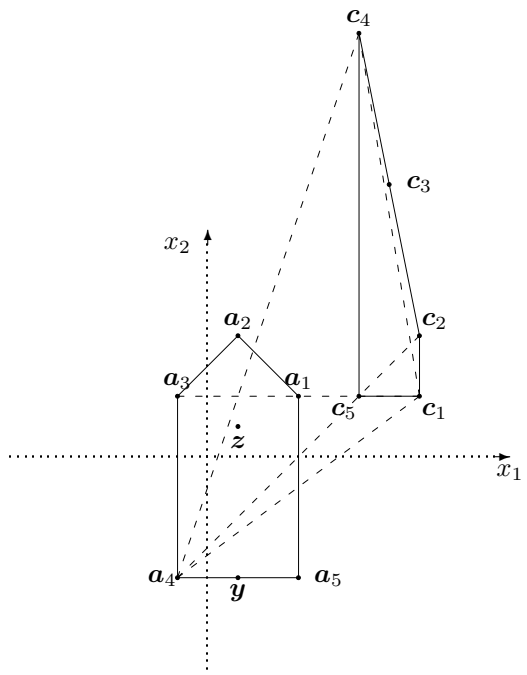

FIG. 2.9 – Les points de A et de C utilisés dans l'illustration du Théorème 2.11, ainsi que les points $\boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{z}$.

Complexe de chaînes et test de présence d'un point donné dans un simplexe

Soit X un ensemble fini de points dans $\mathbb{R}^d$ et soit K un complexe simplicial abstrait dont l'ensemble de sommets est X. Pour $\boldsymbol{g}$ un point de $\mathbb{R}^d$, on définit l'application $\phi_{\boldsymbol{g}}$ qui teste la présence de $\boldsymbol{g}$ dans l'enveloppe convexe d'un d-simplexe de K :

$$\phi_{\boldsymbol{g}} : \sigma \in \mathsf{K}_d \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } \boldsymbol{g} \in \operatorname{conv}(\sigma) \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

et l'application $\psi_{(\boldsymbol{g},\vec{b})}$, qui teste si la demi-droite $(\boldsymbol{g},\vec{b})$ (dont l'origine est $\boldsymbol{g}$ et la direction et le sens donné par $\vec{b}$) intersecte l'enveloppe convexe d'un $(d-1)$-simplexe :

$$\psi_{(\boldsymbol{g},\vec{b})} : \tau \in \mathsf{K}_{d-1} \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } (\boldsymbol{g},\vec{b}) \text{ intersecte } \operatorname{conv}(\tau) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

En étendant par linéarité ces deux applications respectivement sur $C_d(\mathsf{K},\mathbb{Z}_2)$ et $C_{d-1}(\mathsf{K},\mathbb{Z}_2)$, on a la propriété suivante :

Propriété 2.1 *Si $\boldsymbol{g}$ et $\vec{b}$ sont génériques, i.e. si $\boldsymbol{g}$ n'est contenu dans aucune enveloppe convexe de $(d-1)$-simplexe de K et si $(\boldsymbol{g},\vec{b})$ n'intersecte aucune enveloppe convexe de $(d-2)$-simplexe de K, alors on a*

$$\phi_{\boldsymbol{g}} = \psi_{(\boldsymbol{g},\vec{b})}\partial. \tag{2.2}$$

Démonstration : En effet, elle est vraie pour un unique d-simplexe : $\boldsymbol{g}$ est contenu dans l'intérieur d'un d-simplexe σ si et seulement si $(\boldsymbol{g},\vec{b})$ intersecte exactement une fois le bord de σ. D'autre part, $(\boldsymbol{g},\vec{b})$ intersecte au plus 2 fois le bord de σ. La linéarité fait le reste. ∎

Démonstration du Théorème 2.11 : Remarquons d'abord que l'on peut supposer que $\boldsymbol{y}$ est générique. En effet, s'il ne l'est pas, prendre un $\boldsymbol{y}'$ générique proche de $\boldsymbol{y}$ à l'intérieur de $P^{\triangle}$. Un tel $\boldsymbol{y}'$ existe pour des raisons de mesure évidentes et si σ est tel que $\big(\lambda(V(\sigma)),\operatorname{supp}(\sigma)\big) \in E_{\boldsymbol{y}'}(C)$, alors on a aussi $\big(\lambda(V(\sigma)),\operatorname{supp}(\sigma)\big) \in E_{\boldsymbol{y}}(C)$.

Soit T' une triangulation de $P^{\triangle}$ qui utilise uniquement les sommets de $P^{\triangle}$, i.e. $V(\mathsf{T}') = A$. On considère le complexe simplicial

$$\mathsf{L} := \{V(\sigma) \uplus V(\tau) : \sigma \in \mathsf{T}, \tau \in \mathsf{T}', \sigma \subseteq F, \tau \subseteq F^{\diamondsuit}, F \in \mathsf{L}(P)\}.$$

Soit c la somme de tous les d-simplexes de L. D'après le Lemme 2.3, on a $\partial c = 0$. On définit alors $\tilde{\lambda} : V(\mathsf{L}) \to A \cup C$ de la manière suivante :

$$\tilde{\lambda}(v) = \begin{cases} \lambda(v) \text{ si } v \in V(\mathsf{T}) \\ v \text{ si } v \in A. \end{cases}$$

On pose $X := A \cup C$, $\mathsf{K} := \binom{X}{\leq d+1}$, $\boldsymbol{g} := \boldsymbol{y}$ et $\vec{b}$ générique. On peut appliquer la Propriété 2.1, et on obtient alors :

$$\phi_{\boldsymbol{y}}(\tilde{\lambda}_{\#}c) = \psi_{(\boldsymbol{y},\vec{b})}(\partial\tilde{\lambda}_{\#}c) = \psi_{(\boldsymbol{y},\vec{b})}(\tilde{\lambda}_{\#}\partial c) = 0,$$

ce qui signifie qu'il y a un nombre pair de d-simplexes de L qui contiennent $\boldsymbol{y}$ dans leur enveloppe convexe. Or, il y a exactement un d-simplexe de L de la forme $\emptyset \uplus V(\tau)$ contenant $\boldsymbol{y}$ dans l'enveloppe convexe de son image par $\tilde{\lambda}$ puisque T' est une triangulation de $P^{\triangle}$. Par conséquent, il y en a un nombre impair dans $\mathsf{L} - (\emptyset \uplus \mathsf{T}')$, i.e. qu'il y a un nombre impair de couples $(\sigma,\tau) \in \mathsf{T} \times \mathsf{T}'$ tels que $\sigma \neq \emptyset$ et tels que $\boldsymbol{y} \in \operatorname{conv}\big(\tilde{\lambda}(V(\sigma) \cup V(\tau))\big)$. Pour $\tau \in \mathsf{T}'$, on a $\tilde{\lambda}(V(\tau)) = V(\tau) \subseteq \operatorname{supp}(\sigma)$ (l'égalité vient de la définition de $\tilde{\lambda}$, l'inclusion,

de la définition de L). Il y a donc au moins un simplexe $\sigma \in \mathsf{T}$ tel que $\sigma \neq \emptyset$ et tel que $\big(\lambda(V(\sigma)), \mathrm{supp}(\sigma)\big) \in E_{\boldsymbol{y}}(C)$.

Il nous reste à montrer qu'il y a un nombre impair de tels simplexes σ. Nous savons qu'il y a un nombre impair de couples $(\sigma, \tau) \in \mathsf{T} \times \mathsf{T}'$ tels que $\sigma \neq \emptyset$ et tels que $\boldsymbol{y} \in \mathrm{int}\big(\mathrm{conv}\big(\tilde{\lambda}(V(\sigma) \cup V(\tau))\big)\big)$. Soit (σ, τ) un tel couple, et soient F et $F^{\diamondsuit}$ les facettes correspondant respectivement à σ et τ. En montrant qu'il ne peut y avoir de simplexe τ' tel que (σ, τ') vérifient les mêmes conditions que (σ, τ), la conclusion suivra. Mais ceci est immédiat : le sous-espace affine U engendré par les points $\tilde{\lambda}(V(\sigma))$ et le sous-espace affine supportant $F^{\diamondsuit}$ sont transverses car $F^{\diamondsuit} = \mathrm{aff}(\tau)$ et

$$\dim \mathrm{aff}\big(\tilde{\lambda}(V(\sigma)) \cup V(\tau)\big) = d = \dim \mathrm{aff}\big(\tilde{\lambda}(V(\sigma))\big) + \dim \mathrm{aff}\big(V(\tau)\big) + 1.$$

Les intérieurs de $\tau = \tilde{\lambda}(V(\tau))$ et de $\tau' = \tilde{\lambda}(V(\tau'))$, si τ' existe, sont disjoints. Et donc les intérieurs de $\tilde{\lambda}(V(\sigma)) * \tilde{\lambda}(V(\tau))$ et $\tilde{\lambda}(V(\sigma)) * \tilde{\lambda}(V(\tau'))$ le sont également. ∎

Le Théorème 2.8 est la conséquence du Théorème 2.10 pour $C = A$. Le Théorème 2.9 est la conséquence du Théorème 2.10 pour $C = -A$.

2.4.2 Théorème de De Loera, Peterson et Su, et généralisations

En 2002, De Loera, Peterson et Su ont démontré le théorème suivant [15], conjecturé par Atanassov en 1996 :

Théorème 2.12 *Soit P un polytope de dimension d ayant n sommets : $v_1, v_2, \ldots, v_n$, et soit T une triangulation de P. Supposons que l'on étiquette les sommets de T de la manière suivante avec les entiers de 1 à n : $v \in V(\mathsf{T})$ ne peut être étiqueté par i que si la facette minimiale de P contenant v a v_i pour sommet. Alors le nombre de d-simplexes de T pleinement étiquetés est $\geq n - d$.*

Un simplexe *pleinement étiqueté* est un simplexe dont les étiquettes sont toutes différentes.

Dans [15], les auteurs donnent deux démonstrations différentes : l'une géométrique, l'autre en partie combinatoire (les auteurs démontrent le théorème de manière combinatoire pour les polytopes simpliciaux, avant de généraliser par un argument géométrique). Notre objectif est de donner une preuve purement combinatoire de ce théorème et, partant, de généraliser le Théorème 2.12 pour une classe d'objets plus large que l'ensemble des polytopes, et d'améliorer la borne $n - d$.

Cette classe d'objets que nous allons regarder, définie dans le cadre de cette thèse, est la classe des *corps polytopaux*.

Les corps polytopaux

Définitions

Un *corps polytopal de dimension d* est un complexe polytopal P de dimension d représenté dans $\mathbb{R}^d$ tel que

- si $d = 0$, $\mathsf{P} = \{v, \emptyset\}$, où v est un point.
- si $d = 1$, $\mathsf{P} = \{[v, w], v, w, \emptyset\}$, où v et w sont deux points différents dans $\mathbb{R}$, et $[v, w]$ est le segment reliant v à w.
- si $d > 1$,
  1. $\mathsf{B}(\mathsf{P})$ est fortement connexe,
  2. toute $(d-2)$-facette de $\mathsf{B}(\mathsf{P})$ appartient à exactement deux $(d-1)$-facettes de $\mathsf{B}(\mathsf{P})$.

Si P est un polytope, $\mathsf{L}(P)$ est un corps polytopal. Le contraire est en général faux, comme en témoigne la Figure 2.10.

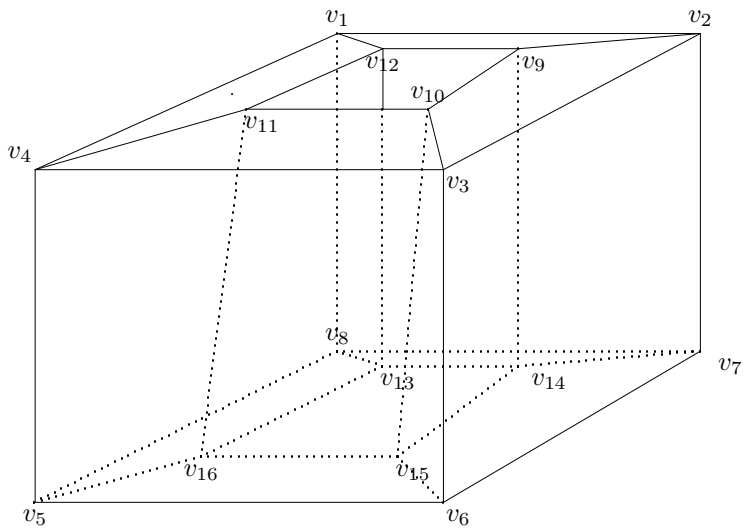

FIG. 2.10 – Un corps polytopal de dimension 3 dont le bord a 16 faces

Quelques propriétés

Nous énonçons d'abord une propriété fondamentale, qui permettra d'introduire les outils dont nous nous servirons dans la preuve.

Observation 2.2 *Soit* P *un corps polytopal, et soit* $\tau \subseteq V(\mathsf{B}(\mathsf{P}))$. *S'il y a un élément* G *de* $\mathsf{B}(\mathsf{P})$ *tel que* $\tau \subseteq V(G)$, *alors il y en a un unique minimal pour l'inclusion.*

En effet, supposons qu'il existe $G \in \mathsf{B}(\mathsf{P})$ tel que $\tau \subseteq V(G)$. Prenons alors toutes les facettes F_i telles que $\tau \subseteq V(F_i)$. La Propriété 1.7 permet d'écrire $V(\cap_i F_i) = \cap_i V(F_i)$. Par conséquent, il existe un unique polytope de $\mathsf{B}(\mathsf{P})$ minimal pour l'inclusion dont l'ensemble des sommets contient τ : $\cap_i F_i$.

En s'appuyant sur l'Observation 2.2, on peut introduire la notation suivante : soit P un polytope et c une chaîne à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$ (de simplexes abstraits), on définit :

$$c|_P := \sum_{\tau \in c : P \text{ est la facette minimale de } \mathsf{L}(P) \text{ t.q. } \tau \subseteq V(P)} \tau.$$

En particulier, si $V(P) \cap V(c) = \emptyset$, alors $c|_P = 0$.

Par exemple, soit P un hypercube de dimension 4. $\mathsf{L}(P)$ est un corps polytopal de dimension 4. Soit alors F une face de dimension 3 de P, et soit G une face (carrée) de F avec $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$, et définissons c comme étant le 3-simplexe $\{1, 2, 3, 4\}$. On a alors $c|_F = 0$ (parce que F n'est pas minimale) et $c|_G = \{1, 2, 3, 4\}$. Comme autre exemple, on prend le corps polytopal de dimension 3 représenté sur la Figure 2.10 et soit F la facette dont les sommets sont v_1, v_{12}, v_{11}, v_4. Soit alors $c := \{v_1, v_{12}, v_{11}, v_4\} + \{v_1, v_{12}, v_7, v_8\}$. Alors $c|_F = \{v_1, v_{12}, v_{11}, v_4\}$. Pour $c' := \{v_1, v_{11}\} + \{v_{11}, v_{12}\}$, on a $c'|_F = \{v_1, v_{11}\}$.

Propriété 2.2 *Pour deux chaînes* c *et* c', *on a* $(c + c')|_F = c|_F + c|_{F'}$.

Observation 2.3 *Soit P un polytope et c un chaîne telle que $V(c) \subseteq V(P)$. On a l'égalité suivante :*

$$c = \sum_{F \in \mathsf{L}(P)} c|_F.$$

Triangulations

Nous définissons maintenant ce qu'est une *triangulation d'un corps polytopal*. Dans le cas où le corps polytopal est un polytope, nous verrons que la notion coïncide avec celle de triangulation d'un polytope.

Une *triangulation* d'un corps polytopal est une triangulation de son espace sous-jacent qui induit des triangulations des facettes de son bord.

Si le bord $\mathsf{B}(\mathsf{P})$ d'un corps polytopal P a deux faces voisines ayant le même hyperplan support, on pourrait imaginer des triangulations de $||\mathsf{P}||$ qui n'induisent pas des triangulations des faces de $\mathsf{B}(\mathsf{P})$. De telles triangulations ne constituent donc pas des triangulations du corps polytopal P. Une triangulation d'un polytope P est une triangulation de $\mathsf{L}(P)$; par conséquent, pour un polytope, on retrouve donc bien la même notion.

Nous formulons une observation simple sur les triangulations polytopales, qui sera très utile dans l'induction qui sous-tend la preuve du Théorème 2.14. Soit donc T une triangulation d'un corps polytopal P. Nous notons $(\partial\mathsf{T})|_F$ la triangulation induite par T sur F.

Observation 2.4 *Soit F une des faces de $\mathsf{B}(\mathsf{P})$. Soit T la somme formelle de tous les d-simplexes de T. $(\partial T)|_F$ est alors la somme formelle de tous les $(d-1)$-simplexes de $(\partial\mathsf{T})|_F$*

En effet, soit τ un simplexe de $(\partial T)|_F$. Alors τ est une face d'un unique d-simplexe σ de T, et $\tau \subseteq V(F)$. Comme F est un polytope, cela entraîne que τ est un simplexe de $(\partial\mathsf{T})|_F$.

Réciproquement, soit τ un $(d-1)$-simplexe de $(\partial\mathsf{T})|_F$. Alors $\tau \subseteq V(F)$ et comme les sommets de τ sont affinement indépendants, ils ne sont pas dans une facette propre de F. De plus, τ est un simplexe de ∂T. Par conséquent, $\tau \in (\partial T)|_F$.

Etiquetage de Sperner

Un étiquetage λ d'une triangulation T d'un corps polytopal P est un *étiquetage de Sperner* si

(i) l'ensemble des étiquettes est l'ensemble des sommets de P,

(ii) chaque sommet de $\mathsf{B}(\mathsf{P})$ reçoit lui-même comme étiquette et

(iii) chaque sommet de T appartenant à une face de $\mathsf{B}(\mathsf{P})$ reçoit comme étiquette l'un des sommets de la plus petite facette le contenant.

Formellement, λ est un étiquetage à la Sperner si : pour $v \in V(\mathsf{T})$, $\lambda(v) \in V(\mathsf{B}(\mathsf{P}))$ et pour $F \in \mathsf{B}(\mathsf{P})$, $v \in F \Rightarrow \lambda(v) \in V(F)$.

Pour les sommets de T à l'intérieur de $||\mathsf{P}||$, il n'y a pas de condition particulière : n'importe quel sommet de $\mathsf{B}(\mathsf{P})$ peut être une étiquette. Cette définition de l'étiquetage à la Sperner coïncide avec celle donnée par De Loera, Peterson et Su pour les polytopes ([15]).

Pour le corps polytopal de la Figure 2.10, les sommets à l'intérieur de la facette F définie par les sommets v_1, v_{12}, v_{11}, v_4 peuvent uniquement recevoir les sommets v_1, v_{12}, v_{11} et v_4 comme étiquettes. Les sommets sur l'arête $[v_1, v_4]$ peuvent uniquement recevoir v_1 et v_4. Et $\lambda(v_1) = v_1$, $\lambda(v_2) = v_2$,...

La généralisation du lemme de Sperner pour les corps polytopaux : énoncé et principe de la preuve

Théorème 2.13 *Soit* P *un corps polytopal de dimension* d *dont le complexe de bord* $\mathsf{B}(\mathsf{P})$ *a* n *sommets* $v_1, v_2, \ldots, v_n$. *Soit* T *une triangulation de* P. *Tout étiquetage à la Sperner de* T *contient au moins* $n + \left\lceil \frac{\min_i \deg_{\mathsf{B}(\mathsf{P})}(v_i)}{d} \right\rceil - d - 1$ *simplexes pleinement étiquetés tels que deux quelconques d'entre eux reçoivent des étiquetages différents.*

Comme $\min_i \deg_{\mathsf{B}(\mathsf{P})}(v_i) \geq d$, on retrouve la borne de [15] pour les polytopes. Mais notre borne est une amélioration sensible : pour le polytope cyclique $C(n)$ avec n sommets en dimension 4, qui est tel que $\big(V(C(n)), E(C(n))\big) = K_n$, la borne obtenue avec le Théorème 2.13 est $n + \lceil \frac{n-1}{4} \rceil - 4 - 1 \sim \frac{5}{4}n$ (pour $n \to \infty$), alors qu'elle n'est que de $\sim n$ pour le Théorème 2.12.

La preuve de ce théorème, présentée ci-dessous, suit le schéma suivant : un étiquetage de Sperner est une fonction simpliciale de T dans le complexe simplicial $\binom{V(\mathsf{B}(\mathsf{P}))}{\leq d+1}$. Cette fonction induit une fonction de chaîne. C'est ici qu'apparaissent les simplexes pleinement étiquetés : un simplexe dans l'image de la fonction de chaîne correspond à un simplexe pleinement étiqueté de T

On prouve alors par induction que la somme formelle de tous les d-simplexes de T par la fonction de chaîne est une couverture binaire de $||\mathsf{P}||$. En appliquant la Proposition 2.3 à l'une des composantes fortement connexe de la couverture binaire, on obtient une borne inférieure pour le nombre de simplexes pleinement étiquetés de T.

Quelques outils pour la preuve

Dans le schéma de la preuve, nous avons indiqué que l'image de la somme formelle de tous les d-simplexes de T était un couverture binaire de $||\mathsf{P}||$. Pour avoir une interprétation combinatoire de cette couverture binaire, nous allons définir une notion plus forte que celle de couverture binaire, la notion de *quasi-triangulation*, qui aura une interprétation combinatoire directe.

Pour définir une quasi-triangulation, il faut disposer de la notion de *chaîne étalée*.

Chaînes étalées

Soit P un corps polytopal, et notons $V := V(\mathsf{B}(\mathsf{P}))$. Une d-chaîne $c \in C_d\big(\binom{V}{\leq d+1}\big)$ est *étalée* sur P si pour tout simplexe $\sigma \in \partial c$, il existe une facette F de $\mathsf{B}(\mathsf{P})$ telle que $\sigma \subseteq V(F)$.

En particulier, 0 est toujours une chaîne étalée. Si on remplace le mot "facette" dans la définition ci-dessus par le mot "face", on obtient une définition équivalente, puisque toute facette est incluse dans une face.

Regardons un petit exemple : soit P le carré dont les 4 sommets sont v_1, v_2, v_3 et v_4, dans cet ordre. La chaîne $\{v_1, v_2, v_3\}$ n'est pas étalée sur $\mathsf{L}(P)$ parce que les sommets v_1 et v_3 ne sont pas sur une même face de P. En revanche, $\{v_1, v_2, v_3\} + \{v_1, v_2, v_4\}$ est étalée.

On peut faire l'observation suivante, conséquence directe de l'Observation 2.2 et de la définition d'une chaîne étalée :

Observation 2.5 *c est étalée si et seulement si* $\partial c = \sum_{F \in \mathsf{B}(\mathsf{P})} (\partial c)|_F$.

De plus, le lemme suivant est extrêmement utile :

Lemme 2.4 *Si c est étalée sur* P *et si F est face de* $\mathsf{B}(\mathsf{P})$, *alors* $(\partial c)|_F$ *est étalée sur* $\mathsf{L}(F)$.

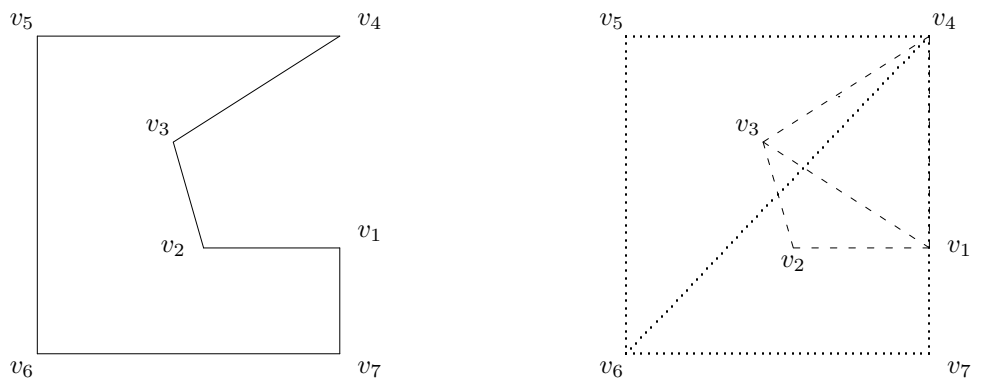

FIG. 2.11 – Une couverture binaire n'est pas nécessairement une quasi-triangulation (v_7, v_1 et v_4 sont alignés)

Démonstration : Soit $c' := (\partial c)|_F$ et soit $\tau \in \partial c'$. Pour montrer que c' est étalée, on doit seulement montrer qu'il existe une facette H de $\mathsf{B}(\mathsf{L}(F))$ telle que $\tau \subseteq V(H)$, c'est-à-dire, d'après l'Observation 1.3, que l'on doit montrer qu'il existe une facette propre H de F telle que $\tau \subseteq V(H)$. Comme $\partial^2 c = 0$, $\tau \in \partial(\partial c - c')$. Soit $\sigma \in \partial c - c'$ telle que $\tau \in \partial\sigma$. c est étalée et, par définition de σ, la plus petite facette dont l'ensemble de sommets contient σ n'est pas F. Par conséquent, il existe une facette F' de $\mathsf{B}(\mathsf{P})$ telle que $F' \neq F$ et $\tau \subseteq V(F')$. Donc $\tau \subseteq V(F) \cap V(F')$, ce qui signifie, en utilisant la Propriété 1.7, que $\tau \subseteq V(H)$, où $H := F \cap F'$ est une facette de F. Il reste à montrer que H est une facette propre de F, ce qui est immédiat : si $F = F \cap F'$, on a simultanément $F \subseteq F'$, $F \neq F'$, F face de $\mathsf{B}(\mathsf{P})$ et F' facette de $\mathsf{B}(\mathsf{P})$. Contradiction. ∎

Quasi-triangulations et couvertures binaires

On définit maintenant de manière récursive les *quasi-triangulations* :

Soit P un corps polytopal de dimension d. c est une *quasi-triangulation* de P si :

(i) c est une chaîne étalée et

(ii) soit $d = 0$ et $c \neq 0$, soit $d > 0$ et $(\partial c)|_F$ est une quasi-triangulation de $\mathsf{L}(F)$ pour toute face F de $\mathsf{B}(\mathsf{P})$.

Par exemple, si $||\mathsf{P}||$ est un segment $[v, w]$, la seule quasi-triangulation de P est $\{v, w\}$.

Un autre exemple : si T est une triangulation d'un complexe polytopal P, la somme formelle des simplexes maximaux de T est une quasi-triangulation.

Nous donnons maintenant une propriété fondamentale des quasi-triangulations. Nous n'aurons pas nous en servir pour prouver le Théorème 2.13, mais elle permet d'avoir une idée intuitive de ce qu'est une quasi-triangulation :

Proposition 2.2 *Si c est une quasi-triangulation d'un corps polytopal P, alors $\bigcup_{\sigma \in c} \mathrm{conv}(\sigma)$ est une couverture binaire de $||\mathsf{P}||$.*

Démonstration : La démonstration fonctionne par récurrence sur d. Pour $d = 0$, la démonstration de la proposition est immédiate. Supposons donc que $d \geq 1$. Soit c une quasi-triangulation de P. Considérons $\boldsymbol{g}$ un point générique dans $\mathbb{R}^d$ (ce qui signifie que

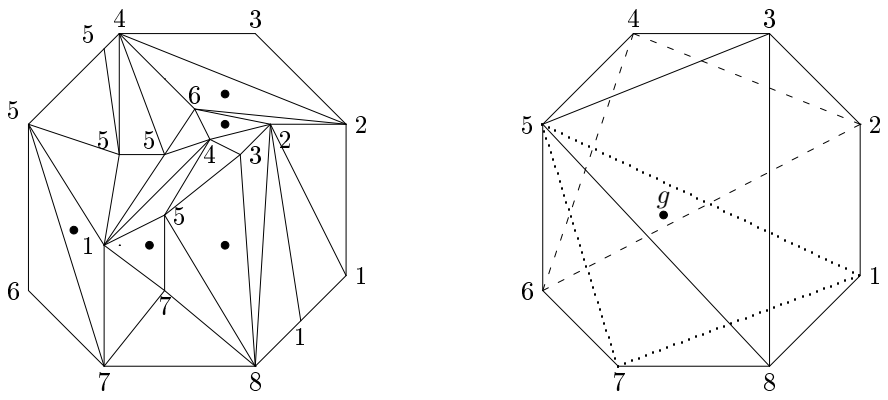

FIG. 2.12 – Une illustration du Théorème 2.14

$\boldsymbol{g}$ et d sommets indépendants quelconques de $V(\mathsf{B}(\mathsf{P}))$ sont affinement indépendants), et considérons l une demi-droite générique émanant de $\boldsymbol{g}$ (ce qui signifie que pour tout ensemble de $d-1$ sommets de $V(\mathsf{B}(\mathsf{P}))$, l n'intersecte pas leur enveloppe convexe).

Soit alors σ un simplexe de c. Si $\mathrm{conv}(\sigma)$ contient $\boldsymbol{g}$, alors, comme $\boldsymbol{g}$ est générique, $\boldsymbol{g}$ est dans l'intérieur de σ et les sommets de σ sont affinement indépendants. Par conséquent, l intersecte $\partial\mathrm{conv}(\sigma) = \bigcup_{\tau\in\partial\sigma}\mathrm{conv}(\tau)$ exactement une fois. Si $\mathrm{conv}(\sigma)$ ne contient pas $\boldsymbol{g}$, alors l intersecte $\bigcup_{\tau\in\partial\sigma}\mathrm{conv}(\tau)$ 0 ou 2 fois.

Donc, modulo 2, le nombre de simplexes σ de c tels que $\mathrm{conv}(\sigma)$ contiennent $\boldsymbol{g}$ est égal au nombre de simplexes τ de $\sum_{\sigma\in c}\partial\sigma$ tels que l intersecte $\mathrm{conv}(\tau)$.

Mais cette dernière somme est précisément ∂c. Comme c est étalée, $\partial c = \sum_{F\in\mathsf{B}(\mathsf{P})}(\partial c)|_F$. Soit s le nombre d'intersections de l avec $||\mathsf{B}(\mathsf{P})||$. Si $s \neq 0$, soient alors $p_1, p_2, \ldots, p_s$ ces intersections, et soient $F_1, F_2, \ldots, F_s$ les faces contenant ces intersections. Comme $(\partial c)|_{F_i}$ est une quasi-triangulation de $\mathsf{L}(F_i)$, par induction, le nombre de simplexes τ de $(\partial c)|_{F_i}$ tels que p_i soient dans $\mathrm{conv}(\tau)$ est impair. Par conséquent, modulo 2, il y a s simplexes τ de ∂c tels que l intersecte $\mathrm{conv}(\tau)$. Cela signifie qu'il y a s modulo 2 simplexes σ de c tels que $\mathrm{conv}(\sigma)$ contiennent $\boldsymbol{g}$. Comme $||\mathsf{P}||$ est borné, s est impair si et seulement si $\boldsymbol{g}$ est dans l'intérieur de $||\mathsf{P}||$. ∎

On utilise dans cette preuve le fait que P est plongé dans $\mathbb{R}^d$: en effet, lorsque l quitte ou pénètre $||\mathsf{P}||$, l intersecte $||\mathsf{B}(\mathsf{P})||$. De même pour tout d-simplexe de $\mathbb{R}^d$.

Une couverture binaire ne correspond pas nécessairement à une quasi-triangulation, comme on peut le voir sur la Figure 2.11 : soit $V_1 := \{v_1, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ et $V_2 := \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Notons P_i l'enveloppe convexe de V_i et $\mathsf{T_i}$ une triangulation de P_i telle que $V(\mathsf{T}_i) = V_i$, pour $i = 1, 2$. La somme formelle T des 2-simplexes de ces deux triangulations forme une couverture binaire, mais n'est pas forcément une quasi-triangulation : par exemple si le simplexe $\{v_6, v_7, v_4\}$ est dans T_1, T n'est pas étalée car il n'y a pas de face contenant v_4 et v_7 simultanément.

Etiquetages de Sperner et quasi-triangulations

La fin de cette sous-section est maintenant consacrée à la preuve des résultats suivants :

Théorème 2.14 *Si λ est un étiquetage à la Sperner d'une triangulation T d'un corps polytopal de dimension d, alors $\lambda_{\#}T$ est une quasi-triangulation de P, où T est la somme formelle de tous les d-simplexes de T.*

Théorème 2.15 *Si λ est un étiquetage à la Sperner d'une triangulation T d'un corps polytopal de dimension d, alors au moins une composante fortement connexe (et en fait un nombre impair) de $\lambda_{\#}T$ est une quasi-triangulation de P, où T est la somme formelle de tous les d-simplexes de T.*

Corollaire 2.1 *Si λ est un étiquetage à la Sperner d'une triangulation T d'un corps polytopal de dimension d, alors au moins une composante fortement connexe c de $\lambda_{\#}T$ est une quasi-triangulation de P, et en particulier toute facette simpliciale de P est une facette d'un simplexe de c.*

La Figure 2.12 illustre le Théorème 2.14. Presque tous les points à l'intérieur de l'octogone de droite sont couverts par un nombre impair d'images de simplexes pleinement étiquetés de l'octogone de gauche. Le point $\boldsymbol{g}$ est couvert 5 fois. Les 5 simplexes pleinement étiquetés correspondant sont marqués par un point.

De plus, on peut vérifier le Théorème 2.13 sur cette figure : il y a bien au moins 6 simplexes pleinement étiquetés recevant des étiquetages différents : $\{1,5,7\}$, $\{2,4,6\}$, $\{3,5,8\}$, $\{2,3,4\}$, $\{4,5,6\}$ et $\{5,7,8\}$.

La propriété centrale des quasi-triangulations, qui nous permettra de démontrer les 2 théorèmes ci-dessus, est la suivante :

Théorème 2.16 *Soit $d \geq 0$.*

(A) *Si c_1 et c_2 sont deux chaînes étalées d'un corps polytopal de dimension d, et si $c = c_1 + c_2$, alors c est également une chaîne étalée. De plus c est une quasi-triangulation si et seulement si exactement l'une des deux chaînes c_1 et c_2 est une quasi-triangulation.*

(B) *Soit Q un corps polytopal de dimension $d+1$. On a l'équivalence suivante : c' est une quasi-triangulation de Q si et seulement si c' est étalée et s'il y a une face de $\mathsf{B}(\mathsf{Q})$ telle que $(\partial c')|_F$ est une quasi-triangulation de $\mathsf{L}(F)$.*

De (A), on peut déduire qu'une chaîne étalée qui n'est pas une couverture binaire est une sorte "couverture binaire paire" : tout point générique est contenu dans un nombre pair de simplexes de la chaîne étalée. (B) montre que pour vérifier que c est une quasi-triangulation, il suffit de vérifier que $(\partial c)|_F$ est une quasi-triangulation pour une face arbitraire F. Ainsi, le point (ii) de la définition d'une quasi-triangulation est trop fort.

Démonstration : La preuve fonctionne par induction sur d. Pour $d = 0$, la démonstration est directe. Supposons donc que $d \geq 1$.

Preuve de (A) : Le fait que c soit une chaîe étalée est directe. Il reste à montrer que c est une quasi-triangulation si et seulement si exactement l'une des deux chaînes c_1 et c_2 est une quasi-triangulation.

$(\partial c)|_F = (\partial c_1)|_F + (\partial c_2)|_F$ pour toute face F de $\mathsf{B}(\mathsf{P})$. D'après le Lemme 2.4 et le point (A) du Théorème 2.16 pour $d-1$ (déjà prouvé par induction), $(\partial c)|_F$ est une quasi-triangulation de $\mathsf{L}(F)$ si et seulement si exactement l'une des deux chaînes $(\partial c_1)|_F$ et $(\partial c_2)|_F$ est une quasi-triangulation de $\mathsf{L}(F)$. On a donc besoin que soit $(\partial c_1)|_F$ soit une quasi-triangulation de $\mathsf{L}(F)$ pour toute face F, soit que $(\partial c_2)|_F$ soit une quasi-triangulation de $\mathsf{L}(F)$ pour toute face F. Ce qu'on a par (B) du Théorème 2.16 pour $d-1$. Par conséquent, (A) est démontré.

Preuve de (B) : On dit que deux faces F_1 et F_2 de $\mathsf{B}(\mathsf{Q})$ sont *voisines* si $F_1 \cap F_2$ est une face de F_1 et de F_2. Soit c' une chaîne étalée sur le corps polytopal Q de dimension $(d+1)$, et soient F_1 et F_2 deux faces voisines de $\mathsf{B}(\mathsf{Q})$. Si on montre que $(\partial c')|_{F_1}$ est une quasi-triangulation de $\mathsf{L}(F_1)$ si et seulement si $(\partial c')|_{F_2}$ est une quasi-triangulation de $\mathsf{L}(F_2)$, en utilisant la forte connectivité de $\mathsf{B}(\mathsf{Q})$, (B) en découle.

Montrons donc que $(\partial c')|_{F_1}$ est une quasi-triangulation de $\mathsf{L}(F_1)$ si et seulement si $(\partial c')|_{F_2}$ est une quasi-triangulation de $\mathsf{L}(F_2)$. Soit $F_{12} := F_1 \cap F_2$. Comme c' est étalé, on a, en utilisant l'Observation 2.5 :

$$\partial c' = \sum_{J \in \mathsf{B}(\mathsf{Q})} (\partial c')|_J.$$

On applique ∂ à nouveau :

$$0 = \sum_{J \in \mathsf{B}(\mathsf{Q})} \partial[(\partial c')|_J].$$

En particulier, en regardant ce qui se passe sur F_{12} :

$$\sum_{J \in \mathsf{B}(\mathsf{Q})} \big(\partial[(\partial c')|_J]\big)\big|_{F_{12}} = 0. \tag{2.3}$$

Un simplexe σ de $\big(\partial[(\partial c')|_J]\big)\big|_{F_{12}}$ est tel que $\sigma \subseteq V(J) \cap V(F_{12}) = V(J \cap F_{12})$ (Propriété 1.7) et tel qu'il n'y a pas de facette propre H de F_{12} tel que $\sigma \subseteq V(H)$. Par conséquent, $\big(\partial[(\partial c')|_J]\big)\big|_{F_{12}} \neq 0$ implique que $J \cap F_{12}$ n'est pas une facette propre de F_{12}. En utilisant le point 2. dans la définition d'un corps polytopal, on obtient que $J \in \{F_1, F_2, F_{12}\}$.

L'égalité (2.3) se réduit donc à :

$$(\partial e_1)|_{F_{12}} + (\partial e_2)|_{F_{12}} + (\partial f)|_{F_{12}} = 0, \tag{2.4}$$

où $e_1 := (\partial c')|_{F_1}$, $e_2 := (\partial c')|_{F_2}$ et $f := (\partial c')|_{F_{12}}$.

f est étalée sur $\mathsf{L}(F_1)$. Soit $G \neq F_{12}$ une autre face de F_1 (qui existe parce que $d \geq 1$). Un simplexe τ de $(\partial f)|_G$ est tel que $\tau \subseteq V(G) \cap V(F_{12}) = V(G \cap F_{12})$ (Propriété 1.7)), c'est-à-dire est tel qu'il y a une facette plus petite que G contenant τ. Donc $(\partial f)|_G = 0$, et f n'est pas une quasi-triangulation de $\mathsf{L}(F_1)$.

Par récurrence, on peut appliquer (B) pour $d-1$: $(\partial f)|_{F_{12}}$ n'est pas une quasi-triangulation de $\mathsf{L}(F_{12})$. Toujours par récurrence, on peut appliquer (A) pour $d-1$ sur l'équation (2.4) ci-dessus et on obtient que $(\partial e_1)|_{F_{12}}$ est une quasi-triangulation de $\mathsf{L}(F_{12})$ si et seulement si $(\partial e_2)|_{F_{12}}$ est une quasi-triangulation de $\mathsf{L}(F_{12})$. Donc, par (B) pour $d-1$, $e_1 = (\partial c')|_{F_1}$ est une quasi-triangulation de $\mathsf{L}(F_1)$ si et seulement si $e_2 = (\partial c')|_{F_2}$ est une quasi-triangulation de $\mathsf{L}(F_2)$. ∎

Démonstration du Théorème 2.14 : Pour $d = 0$, c'est trivial. On procède par récurrence. Supposons que $d \geq 1$. On doit vérifier les points (i) et (ii) de la définition d'une quasi-triangulation.

Vérification de (i) : si c est une composante fortement connexe de $\lambda_\# T$, alors c est étalée sur P : en effet soit $\tau \in \partial c$. Supposons $\tau \notin \partial(\lambda_\# T)$. Alors il existe une autre composante fortement connexe c' de $\lambda_\# T$ telle que $\tau \in \partial c'$. Mais alors c n'est pas maximale. Par conséquent $\tau \in \partial(\lambda_\# T)$. Comme $\lambda_\# \partial = \partial \lambda_\#$, il y a un $\epsilon \in \partial T$ tel que $\lambda_\# \epsilon = \tau$. Les étiquettes de ϵ sont des sommets d'une facette F de $\mathsf{B}(\mathsf{P})$. Et donc $\tau \subseteq V(F)$. Comme $\lambda_\# T$ est la somme de ces composantes fortement connexes, $\lambda_\# T$ est étalée.

Vérification de (ii) : On doit prouver que $[\partial(\lambda_\# T)]|_F$ est une quasi-triangulation de $\mathsf{L}(F)$ pour toute face F de $\mathsf{B}(\mathsf{P})$. Utilisant la relation $\partial \lambda_\# = \lambda_\# \partial$, on a $[\partial(\lambda_\# T)]|_F = [\lambda_\#(\partial T)]|_F$. Ainsi, on doit démontrer que $[\lambda_\#(\partial T)]|_F$ est une quasi-triangulation de $\mathsf{L}(F)$.

Soit σ un $(d-1)$-simplexe de ∂T tel que $\lambda(\sigma) \subseteq V(F)$ et tel qu'il n'y a pas de facette plus petite dont l'ensemble de sommets contienne $\lambda(\sigma)$ (en d'autres termes, $\lambda(\sigma)$ contribue à $[\lambda_\#(\partial T)]|_F$). Par définition d'un étiquetage de Sperner, il n'y a pas de facette $H \neq F$, telle que $\sigma \subseteq V(H)$. Par conséquent $[\lambda_\#(\partial T)]|_F = (\lambda_\#[(\partial T)|_F])\,|_F$. Avec la notation $e := \lambda_\#[(\partial T)|_F]$, notre objectif devient de démontrer que $e|_F$ est une quasi-triangulation de $\mathsf{L}(F)$.

$(\partial \mathsf{T})|_F$ est une triangulation de F, et λ est un étiquetage de Sperner de ses sommets. L'Observation 2.4 et la récurrence impliquent que e est une quasi-triangulation de $\mathsf{L}(F)$.

Pour une facette propre G de F, il y a une face G' de F tel que $G \neq G'$ (une telle face existe parce que $d \geq 1$). $[\partial(e|_G)]|_{G'} = 0$ parce qu'un terme non nul serait un simplexe dont les sommets sont dans $V(G)$, et G' ne serait alors pas la facette minimale contenant ces sommets. Donc, $e|_G$ n'est pas une quasi-triangulation de $\mathsf{L}(F)$ pour toute facette propre G de F, et donc, en utilisant le Théorème 2.16 (A) et l'égalité $e = e|_F + \sum_{G \in \mathsf{F}(F)} e|_G$ (Observation 2.3), on obtient que $e|_F$ est bien une quasi-triangulation. ∎

Démonstration du Théorème 2.15 : D'après le Théorème 2.14, $c := \lambda_\# T$ est une quasi-triangulation. Soit c_1 une composante fortement connexe de c, et posons $c_2 := c - c_1$. Clairement, c_1 et c_2 sont étalées, puisque $\partial c_1, \partial c_2 \subseteq \partial c$.

La preuve est alors terminée grâce au Théorème 2.16 par récurrence sur la taille du support de c (le support de c est l'ensemble des simplexes affectés d'un coefficient non nul dans c) : en effet, soit c_1 est une quasi-triangulation, et il n'y a alors rien à prouver, soit c_2 est une quasi-triangulation et alors la récurrence permet de conclure. ∎

Démonstration du Corollaire 2.1 : En effet, la première partie est juste une reformulation du Théorème 2.15, et la deuxième partie se déduit de la définition d'une quasi-triangulation, puisque la seule quasi-triangulation de $\mathsf{L}(\sigma)$, où σ est un simplexe géométrique, est le simplexe abstrait $V(\sigma)$ vu comme une chaîne (cette affirmation se vérifie immédiatement). ∎

Preuve

Pour terminer la preuve, nous avons besoin de la proposition suivante, où $\text{supp } c := \{\sigma \in \mathsf{K} : \sigma \in c\}$ et où $\deg_c(v)$ est le nombre d'arêtes de K contenant v et contenues dans au moins un simplexe de c :

Proposition 2.3 *Soit K un complexe simplicial de dimension d, et soit c une chaîne fortement connexe de $C_d(\mathsf{K}, \mathbb{Z}_2)$. On a :*

$$|\text{supp } c| \geq |V(c) + \left\lceil \frac{\min_{v \in V(c)} \deg_c(v)}{d} \right\rceil - d - 1.$$

Remarquons qu'elle implique entre autres : $|\text{supp } c| \geq |V(c)| - d$.

Démonstration : La démonstration fonctionne par récurrence sur $k := |\text{supp } c|$. Si $k = 1$, la proposition est triviale. Supposons donc que $k > 1$. Considérons le graphe dont les sommets sont les d-simplexes de c, et dont les arêtes relient les d-simplexes ayant une face en commun. D'après la Propriété 1.11, il existe un d-simplexe σ tel que $c' := c - \sigma$ est encore une chaîne fortement connexe. Remarquons que l'on a toujours, pour $v \in V(c')$, $\deg_{c'}(v) \geq \deg_c(v) - d$.

Comme σ a une $(d-1)$-facette en commun avec un autre d-simplexe de c, au moins d sommets parmi les $d+1$ de σ restent dans $V(c')$, donc soit $|V(c')| = |V(c)|$, soit $|V(c')| = |V(c)| - 1$. Si $|V(c')| = |V(c)| - 1$, $\min_{v \in V(c)} \deg_c(v) = d$, et donc $\min_{v \in V(c')} \deg_{c'}(v) \geq \min_{v \in V(c)} \deg_c(v)$. Par conséquent :

$$|\text{supp } c| - 1 = |\text{supp } c'| \geq |V(c')| + \left\lceil \frac{\min_{v \in V(c')} \deg_{c'}(v)}{d} \right\rceil - d - 1$$

$$\geq |V(c)| + \left\lceil \frac{\min_{v \in V(c)} \deg_c(v)}{d} \right\rceil - 1 - d - 1,$$

ce qui entraîne

$$|\text{supp } c| \geq |V(c)| + \left\lceil \frac{\min_{v \in V(c)} \deg_c(v)}{d} \right\rceil - d - 1.$$

∎

On peut maintenant montrer le Théorème 2.13 :

Démonstration du Théorème 2.13 : Soit T la somme formelle de tous les d-simplexes de T, et soit c comme dans le Corollaire 2.1. Comme les sommets et les arêtes de $\mathsf{B}(\mathsf{P})$ sont des simplexes, on sait que $V\big(\mathsf{B}(\mathsf{P})\big) = V(c)$ (l'égalité vient du fait que les étiquettes sont les sommets de $\mathsf{B}(\mathsf{P})$) et $E\big(\mathsf{B}(\mathsf{P})\big) \subseteq E(c)$. Le théorème est alors une conséquence directe de la Proposition 2.3 :

$$|\text{supp } c| \geq |V(c)| + \left\lceil \frac{\min_{v \in V(c)} \deg_c(v)}{d} \right\rceil - d - 1 \geq |V\big(\mathsf{B}(\mathsf{P})\big)| + \left\lceil \frac{\min_{v \in V(\mathsf{B}(\mathsf{P}))} \deg_{\mathsf{B}(\mathsf{P})}(v)}{d} \right\rceil - d - 1.$$

Des simplexes différents de c correspondent à des simplexes de T ayant un étiquetage différent. ∎

Remarque : Il est probable que l'on puisse généraliser les résultats précédents pour des corps polytopaux encore plus généraux, construits de manière inductive, dont les facettes sont elles-mêmes des corps polytopaux : la convexité ne joue pas de rôle réel ici, c'est la forte connexité des bords des facettes qui est essentielle.

D'autre part, si le bord n'est pas fortement connexe, il est vraisemblable que la borne du Théorème 2.13 puisse être diminuée d'une quantité fonction du nombre de composantes fortement connexes du bord.

Chapitre 3

Variations sur la Formule de Ky Fan

3.1 Introduction

En 1952, pour une pseudo-variété de dimension d, dont les sommets sont étiquetés, Ky Fan démontrait une formule combinatoire qui lie le nombre de $(d-1)$-simplexes pleinement étiquetés du bord et le nombre de d-simplexes pleinement étiquetés. Cette formule permet d'unifier et de généraliser le lemme de Sperner et le lemme de Tucker dans une seule et même formule.

Le lemme de Tucker, qui est l'objet du Section 3.2 de ce chapitre, est au théorème de Borsuk-Ulam ce qu'est le lemme de Sperner au théorème de Brouwer : une version combinatoire et constructive.

Dans la Section 3.3, on présente la formule de Ky Fan, ou plutôt les formules de Ky Fan, puisqu'il existe une version orientée et une version non orientée, dont nous donnons une preuve beaucoup plus compacte que toutes celles connues à ce jour. De ces formules, on peut déduire quelques théorèmes généralisant le théorème de Borsuk-Ulam. A la fin de la section, nous nous attardons un peu sur une version multi-étiquetage, trouvée par Lee et Shih [56]. Nous appuyant sur le formalisme introduit dans la preuve des formules de Ky Fan, nous donnons une preuve plus simple que l'originale, ce qui, de plus, permet également de la généraliser.

Enfin, dans le Section 3.4, on généralise la formule de Ky Fan dans un autre sens : le théorème de Borsuk-Ulam peut être généralisé en théorème de Dold où la symétrie centrale de la sphère S^d est remplacée par d'autres actions de groupe ; nous proposons une généralisation de la formule de Ky Fan qui soit au théorème de Dold ce que la formule de Ky Fan est au théorème de Borsuk ; en passant, nous construisons un complexe de chaînes sur des mots, qui ne semble pas avoir été introduit jusqu'ici.

3.2 Le lemme de Tucker

3.2.1 Enoncé et quelques preuves

Pour énoncer le lemme de Tucker, démontré en dimension 2 par Tucker [94], puis en dimension quelconque par Lefschetz [58], quelques petites définitions sont nécessaires : une triangulation T de la sphère S^d est dite *antipodale* si l'on a l'implication suivante : $\sigma \in \mathsf{T} \Rightarrow -\sigma \in \mathsf{T}$.

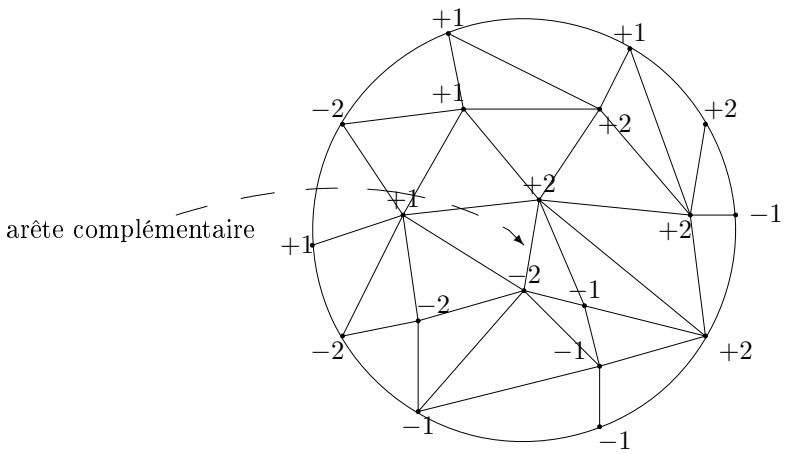

FIG. 3.1 – Le lemme de Tucker.

Un étiquetage λ d'une triangulation T de la sphère S^d est dit *antipodal* si l'on a, pour tout $v \in V(\mathsf{T})$, $\lambda(-v) = -\lambda(v)$.

Une arête dont les sommets v et w sont étiquetés est dite *complémentaire* si $\lambda(v) = -\lambda(w)$.

Le lemme de Tucker dit alors la chose suivante :

Théorème 3.1 (Lemme de Tucker) *Soit T une triangulation de la boule B^d dont la restriction à la sphère $S^{d-1} = \partial B^d$ est antipodale, et soit $\lambda : V(\mathsf{T}) \to \{-1, +1, -2, +2, \ldots, -d, +d\}$ un étiquetage qui soit antipodal sur la restriction de T à $S^{d-1} = \partial B^d$. Alors il existe une arête complémentaire.*

La Figure 3.1 illustre le lemme de Tucker.

Nous allons donner une première preuve de ce lemme. La preuve sera contructive. En revanche, contrairement à ce que nous avons fait pour le lemme de Sperner, une preuve compacte et combinatoire ne sera pas donnée immédiatement, mais sera une conséquence de la formule de Ky Fan.

La démonstration constructive du lemme de Tucker utilise un type particulier de triangulations : les triangulations antipodales *spéciales*. Une triangulation *spéciale* est une triangulation du cross-polytope de dimension d, $\hat{B}^d$, qui *raffine* la triangulation naturelle N induite par les hyperplans $\{x_i = 0\}$, c'est-à-dire que tout simplexe σ de T, il existe $\tau \in \mathsf{N}$ tel que $\sigma \subseteq \tau$. Une triangulation T est dite *antipodale* si T est telle que si $\sigma \in \mathsf{T}$ alors $-\sigma \in \mathsf{T}$.

La question de l'existence d'une démonstration constructive pour d'autres triangulations que les triangulations antipodales spéciales a intrigué plusieurs chercheurs (comme l'indique la remarque p.36 du livre de J. Matousek [65] ou l'article de T. Prescott et F. E. Su [78]). En réalité, on peut aisément construire une preuve constructive pour n'importe quelle triangulation antipodale T :

1. on ajoute les hyperplans $\{x_i = 0\}$,
2. on triangule les simplexes de T que ces hyperplans intersectent, ce qui donne une nouvelle triangulation T' qui affine la triangulation T,
3. on étend l'étiquetage antipodal de T à T', toujours de manière antipodale et enfin

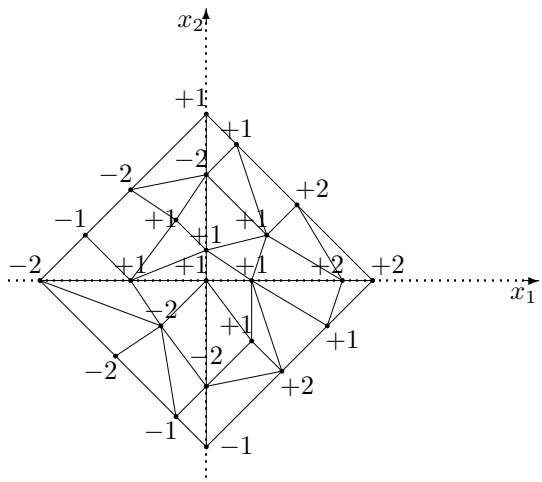

FIG. 3.2 – Une triangulation spéciale, et un étiquetage conforme à l'énoncé du lemme de Tucker.

4. on montre que si T' contient une arête e antipodale (que l'on sait trouver d'après la preuve contructive du lemme de Tucker), alors il y a une arête complémentaire dans le simplexe σ de T tel que $e \subseteq \sigma$.

Pour le point 3., on met sur tous les nouveaux sommets à l'intérieur d'un simplexe σ de T l'étiquette dont la valeur absolue est la plus petite. Le point 4. est alors immédiat.

On peut donc se limiter aux triangulations spéciales antipodales. Nous présentons maintenant une preuve constructive du lemme de Tucker, trouvée par Freund et Todd en 1981 [32], telle qu'elle est présentée dans [65].

Démonstration constructive du lemme de Tucker : Soit donc T une triangulation spéciale du cross-polytope $\hat{B}^d$ de dimension d et soit $\lambda : V(\mathsf{T}) \to \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm d\}$ un étiquetage de T qui soit antipodal sur son bord. On note $\mathbf{0}$ le sommet de T correspondant à l'origine du repère, et donc au centre de $\hat{B}^d$.

Tout comme pour la preuve constructive du lemme de Sperner, on construit un graphe G dont les nœuds sont des simplexes de T. On montre qu'ils sont tous de degré 2 sauf le nœud correspondant à $\{\mathbf{0}\}$ et ceux correspondant à des simplexes contenant une arête complémentaire, qui sont de degré 1. Partant de $\{\mathbf{0}\}$, on parvient alors forcément en suivant une chaîne de G à un simplexe contenant une arête complémentaire.

Pour $\sigma \in \mathsf{T}$, on définit

$$S(\sigma) := \{+i : x_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, d\} \cup \{-i : x_i < 0,\ i = 1, 2, \ldots, d\},$$

où $\boldsymbol{x}$ est un point quelconque dans l'intérieur de σ. Comme T est une triangulation spéciale, tout choix de $\boldsymbol{x}$ donne le même ensemble $S(\sigma)$. Conformément à cette définition, $S(\{\mathbf{0}\}) = \emptyset$.

Un simplexe σ est dit *heureux* si $S(\sigma) \subseteq \lambda(\sigma)$ (par convention, on exclut $\emptyset$ de l'ensemble des simplexes heureux). Que peut-on dire d'un simplexe heureux ? Soit donc σ un simplexe heureux. Posons $k := |S(\sigma)|$. σ est contenu dans le sous-espace vectoriel engendré par les $\boldsymbol{e}_i$ tels que $i \in S(\sigma)$ ou $-i \in S(\sigma)$. Par conséquent, $\dim \sigma \leq k$. D'autre part, $\dim \sigma \geq k - 1$ puisque il faut au moins k étiquettes différentes pour que σ soit heureux. On dit que σ est *serré* si $\dim \sigma = k - 1$ et *lâche* si $\dim \sigma = k$. Pour un simplexe heureux et lâche, il y a une

étiquette qui soit apparaît deux fois, soit n'apparaît pas dans $S(\sigma)$. De plus, un simplexe sur le bord de $\hat{B}^d$ est nécessairement serré, et $\{\mathbf{0}\}$ est heureux et lâche.

Nous procédons maintenant à la définition du graphe G dont les nœuds sont les simplexes heureux de T, et les arêtes relient les paires de sommets $\sigma, \tau \in \mathsf{T}$ telles que l'une des deux conditions suivantes soit satisfaite :

(1) σ et τ sont des simplexes antipodaux : $\sigma = -\tau \subset \partial\hat{B}^d$, ou
(2) σ est une face de τ telle que $\lambda(\sigma) = S(\tau)$, i.e. que les étiquettes de σ font déjà de τ un simplexe heureux.

Nous affirmons que G a tous ses nœuds de degré 2 sauf le sommet correspondant à $\{\mathbf{0}\}$ et ceux correspondant à des simplexes contenant une arête complémentaire.

Nous considérons maintenant un simplexe σ heureux, qui ne soit ni $\{\mathbf{0}\}$ ni un simplexe contenant une arête complémentaire. On va vérifier que σ est de degré 2 dans G. On distingue deux cas principaux : si σ est un simplexe heureux et serré, et si σ est un simplexe heureux et lâche.

1. σ est un simplexe heureux et serré. Soit τ un voisin (dans G) de σ. Ce τ est soit égal à σ, soit a σ comme face (τ ne peut être une face de σ, car σ est serré). Comme $S(\sigma) = \lambda(\sigma) = S(\tau)$, $L_\tau = L_\sigma$ (définition ci-dessus), de dimension $k = 1 + \dim\sigma$. Deux sous-cas peuvent se présenter :
   (a) σ est entièrement contenu dans le bord $\partial\hat{B}^d$. Alors $-\sigma$ est un de ses voisins. Tout autre voisin τ a σ comme face, et est contenu dans L_τ. L'intersection $L_\sigma \cap \hat{B}^d$ est un cross-polytope de dimension k triangulé par les simplexes de T contenus dans L_σ. Si σ est un $(k-1)$-simplexe du bord d'une triangulation de $\hat{B}^k$, σ est la face d'exactement un k-simplexe.
   (b) σ n'est pas contenu dans le bord. Tout comme précédemment, σ est un $(k-1)$-simplexe d'une triangulation d'un crosspolytope de dimension k. N'étant pas sur le bord, de ce cross-polytope, il est voisin d'exactement deux k-simplexes.
2. σ est un simplexe heureux et lâche. Les deux sous-cas sont :
   (a) On a $S(\sigma) = \lambda(\sigma)$. Dans ce cas, une des étiquettes apparaît deux fois sur les sommets de σ. σ ne peut être face d'un simplexe τ heureux, car on aurait alors $S(\sigma) = \lambda(\sigma) = S(\tau)$ et $1 + \dim\sigma = \dim\tau \geq |S(\tau)| - 1 = |S(\sigma)| - 1 = \dim\sigma - 1$, ce qui est absurde. Donc σ est voisin d'exactement deux de ces faces.
   (b) Il existe $i \in \lambda(\sigma) \setminus S(\sigma)$. Puisque l'on a supposé que σ ne contenait pas d'arête complémentaire, $-i \notin S(\sigma)$. Il est clair que la face de σ ne contenant pas le sommet étiqueté i est voisine de σ dans G (cette face existe puisque l'on a supposé que $\sigma \neq \{\mathbf{0}\}$). Toute autre face de σ ne peut être voisine de σ car elle doit avoir comme ensemble d'étiquettes $S(\sigma)$. D'autre part, il y a exactement un simplexe τ dont σ est une face, et qui soit déjà rendu heureux par les étiquettes de σ : celui tel que $S(\tau) = \lambda(\sigma)$.

G a donc bien tous les sommets autres que $\{\mathbf{0}\}$ et ceux contenant une arête complémentaire de degré 2 ∎

Pour trouver une arête complémentaire, il suffit de suivre la chaîne de G qui part de $\{\mathbf{0}\}$. On parvient forcément à une simplexe contenant une arête complémentaire. Le procédé est ilustré sur la Figure 3.3.

3.2.2 Version continue : le théorème de Borsuk-Ulam

Soit d et d' deux entiers positifs ou nuls. Une application $S^d \to S^{d'}$ est dite *antipodale* si $f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$ pour tout $\boldsymbol{x} \in S^d$.

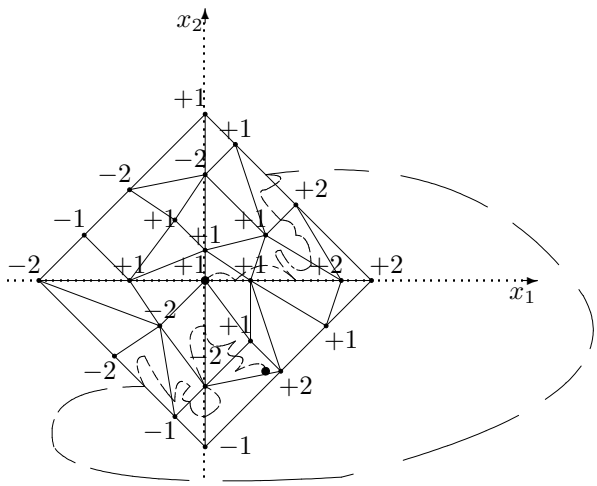

FIG. 3.3 – Ilustration de la preuve constructive du leme de Tucker.

Enoncé et preuve

Il existe plusieurs versions équivalentes du théorème de Borsuk-Ulam. Les quatre premières sont celles prouvées par Borsuk en 1933 ([9], elles avaient été formulées comme conjecture par Ulam). Les deux suivantes sont en fait un peu antérieures - elles datent de 1930 - et ont été trouvées pas Lyusternik et Shnirel'man [63]. Elles ne semblent pas avoir été connues de Borsuk. Enfin, la dernière version est de Greene ([39]) et est utilisée dans une preuve courte du théorème de Lovász-Kneser (voir le chapitre consacré aux graphes de Kneser).

Théorème 3.2 *Soit $d \geq 0$.*

1. *Si f est une application continue de S^d dans $\mathbb{R}^d$, alors il existe $\boldsymbol{x}_0 \in S^d$ tel que $f(\boldsymbol{x}_0) = f(-\boldsymbol{x}_0)$.*

2. *Si f est une application antipodale de S^d dans $\mathbb{R}^d$, alors il existe $\boldsymbol{x}_0 \in S^d$, tel que $f(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}$.*

3. *Il n'existe pas d'application antipodale de S^d dans S^{d-1}.*

4. *Il n'existe pas d'application continue de B^d dans S^{d-1} dont la restriction à ∂B^d soit antipodale.*

5.(Liusternyk-Shnirel'man) *Si $F_1, F_2, \ldots, F_{d+1}$ sont $d+1$ fermés couvrant S^d, il existe $i \in [d+1]$ tel que F_i contienne 2 points antipodaux.*

6.(Liusternyk-Shnirel'man) *Si $O_1, O_2, \ldots, O_{d+1}$ sont $d+1$ ouverts couvrant S^d, il existe $i \in [d+1]$ tel que O_i contienne 2 points antipodaux.*

6.(Greene) *Si $A_1, A_2, \ldots A_{d+1}$ sont $d+1$ ensembles couvrant S^d tels que chacun d'eux soit soit ouvert soit fermé, il existe $i \in [d+1]$ tel que A_i contienne 2 points antipodaux.*

Avant de démontrer le théorème ci-dessus, nous allons montrer que les 6 formes sont équivalentes :

2.⇒1. : Soit f une application continue de S^d dans $\mathbb{R}^d$. Posons $g(\boldsymbol{x}) := f(-\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})$. g est antipodale ; d'après 2. il existe $\boldsymbol{x}_0$ tel que $g(\boldsymbol{x}_0) = 0$, i.e. il existe $\boldsymbol{x}_0$ tel que $f(\boldsymbol{x}_0) = f(-\boldsymbol{x}_0)$.

3.⇒2. : Soit f une application antipodale de S^d dans $\mathbb{R}^d$. Supposons que f ne s'annule pas. Définissons $g := f/||f||$. g est alors antipodale de S^d dans S^{d-1}. Absurde.

4.$\Leftrightarrow$3. : On note P la projection de l'hémisphère supérieur H de S^d ($H = S^d \cap (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$) sur $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{array}{cccc} P : H & S^d \cap (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+) & \to & B^d \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) & \mapsto & (x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{array}.$$

S'il existe f, application antipodale $S^d \to S^{d-1}$, alors $g := f \circ P^{-1}$ serait une application continue de B^d dans S^{d-1} dont la restriction à ∂B^d serait antipodale. Réciproquement, pour g comme dans l'énoncé 4., f définie par $f(\boldsymbol{x}) := (g \circ P)(\boldsymbol{x})$ et $f(-\boldsymbol{x}) := -(g \circ P)(\boldsymbol{x})$ est une application antipodale $S^d \to S^{d-1}$.

5.$\Rightarrow$3. : Supposons que f soit une application antipodale de S^d dans S^{d-1}. Soient alors $F_1, \ldots, F_{d+1}$ $d+1$ fermés couvrant S^{d-1} tels qu'aucun des F_i ne contienne de points antipodaux. Une telle couverture existe : prendre les $d+1$ faces d'un d-simplexe géométrique régulier et les projeter de manière radiale sur un S^{d-1} dans lequel s'inscrit le d-simplexe géométrique. Les $F_i' = f^{-1}(F_i)$ sont $d+1$ fermés couvrant S^d. D'après 4., l'un des F_i' contient une paire de points antipodaux. Comme f est antipodale, F_i doit alors contenir des points antipodaux. Absurde.

1.$\Rightarrow$5. : Soient $F_1, F_2, \ldots, F_{d+1}$ $d+1$ fermés couvrant S^d. Considérons

$$f(\boldsymbol{x}) = (\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, F_1), \ldots, \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, F_d)).$$

f satisfait les conditions de 1., donc il existe $\boldsymbol{x}_0$ tel que $(\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}_0, F_1), \ldots, \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}_0, F_d)) = (\mathrm{dist}(-\boldsymbol{x}_0, F_1), \ldots, \mathrm{dist}(-\boldsymbol{x}_0, F_d))$.

Soit l'une des composantes, disons la $i$ème, de ce vecteur est nulle, et dans ce cas $\boldsymbol{x}_0$ et $-\boldsymbol{x}_0$ sont tous deux dans F_i, soit aucune des composantes n'est nulle et dans ce cas $\boldsymbol{x}_0$ et $-\boldsymbol{x}_0$ sont tous deux dans F_{d+1}.

5.$\Rightarrow$6. : Soient $O_1, O_2, \ldots, O_{d+1}$ $d+1$ ouverts couvrant S^d. Pour tout $\boldsymbol{x}$, on définit $B(\boldsymbol{x})$ une boule ouverte centrée en $\boldsymbol{x}$ telle que $\mathrm{Cl}(B(\boldsymbol{x})) \subseteq O_i$ si $\boldsymbol{x} \in O_i$. Les $B(\boldsymbol{x})$ forment une famille d'ouverts couvrant S^d. Par compacité, il existe un nombre fini de $B(\boldsymbol{x})$ couvrant également S^d. Notons-les $B(\boldsymbol{x}_1), B(\boldsymbol{x}_2), \ldots, B(\boldsymbol{x}_r)$. Définissons $F_i := \mathrm{Cl}\big(\bigcup_{j=1}^r B(\boldsymbol{x}_j) \cap O_i\big)$. Les F_i sont $d+1$ fermés couvrant S^d. On peut appliquer 4. et comme pour tout i, $F_i \subseteq O_i$, la conclusion est immédiate.

6.$\Rightarrow$7. : Soit $\epsilon > 0$ et soient $A_1, A_2, \ldots, A_{d+1}$ des ensembles satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Pour chaque A_i fermé, on considère A_i' ouvert, contenant A_i tel que pour tout $\boldsymbol{x} \in A_i'$,$\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, A_i) < \epsilon$. On a donc maintenant $d+1$ ouverts couvrant S^d, on peut donc appliquer 5. On fait tendre ϵ vers 0. Soit à un moment l'un des A_i contient une paire de points antipodaux, et alors, c'est fini, soit pour tout ϵ, c'est l'un des A_i'. Par compacité, on peut donc extraire une suite de points antipodaux convergeant vers une paire de points antipodaux contenue dans l'un des A_i fermé.

7.$\Rightarrow$5. : trivial.

Démonstration du Théorème 3.2 : Supposons que l'on ait une fonction continue $f : B^d \to S^d$, antipodale sur ∂B^d. On construit T et λ contredisant le Théorème 3.1.

f est uniformément continue sur B^d, il existe donc η tel que, pour tous $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in B^d$ tels que $||f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}')||_\infty < \frac{2}{\sqrt{d}}$ (voir Propriété 1.5). On définit T une triangulation de B^d, antipodale sur ∂B^d, dont le diamètre des simplexes est plus petit que η.

On définit maintenant $\lambda : V(\mathsf{T}) \to \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm d\}$. Pour cela, on pose

$$i(\boldsymbol{v}) := \min\{i : |f(\boldsymbol{v})_i| \geq \frac{1}{\sqrt{d}}\}.$$

Ce nombre est bien défini, car sinon $1 = \sum_{i=1}^d f(\boldsymbol{v})_i^2 < d\left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right)^2$. On définit

$$\lambda(\boldsymbol{v}) := \begin{cases} +i(\boldsymbol{v}) \text{ si } f(\boldsymbol{v})_{i(\boldsymbol{v})} > 0 \\ -i(\boldsymbol{v}) \text{ si } f(\boldsymbol{v})_{i(\boldsymbol{v})} < 0 \end{cases}$$

Comme f est antipodale sur le bord ∂B^d, λ est antipodale sur le bord de T et il existe une arête complémentaire $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}'\}$. On doit donc avoir $||f(\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{v}')||_\infty < \frac{2}{\sqrt{d}}$ par uniforme continuité et $||f(\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{v}')||_\infty \geq \frac{2}{\sqrt{d}}$ parce que $f(\boldsymbol{v})_{i(\boldsymbol{v})} \geq \frac{1}{\sqrt{d}}$ et $f(\boldsymbol{v}')_{i(\boldsymbol{v}')} \leq -\frac{1}{\sqrt{d}}$. Absurde. ∎

On peut facilement adapter cette preuve à la version 2. du théorème de Borsuk. Tout comme pour le théorème de Brouwer, cela permet de déduire un algorithme trouvant, pour tout $\epsilon > 0$, un $\boldsymbol{x} \in B^d$ tel que $||f(\boldsymbol{x})|| \leq \epsilon$.

Borsuk implique Tucker

Réciproquement, le théorème de Borsuk implique le lemme de Tucker : en effet si λ est une application simpliciale satisfaisant les conditions de l'énoncé du lemme de Tucker (3.1), alors λ peut être vu comme une application continue de B^d dans $\partial \hat{B}^d \cong \partial B^d$, antipodale sur le bord de B^d, ce qui est en contradiction avec la version 4. du théorème de Borsuk (3.2).

Une application du théorème de Borsuk-Ulam : coïncidence de $\mathbb{Z}_2$-applications

Jiri Matousek propose comme exercice dans son livre [65] la démonstration du théorème suivant, qui peut être vu en un certain sens comme une généralisation du théorème de Borsuk-Ulam, bien que la preuve y fasse appel :

Théorème 3.3 *Soient $f : S^k \to S^d$ et $g : S^l \to S^d$ deux applications antipodales, $k, l \geq -1$. Si $k + l \geq d$, alors les images de f et g s'intersectent.*

Le théorème de Borsuk-Ulam est obtenu en posant $k = d + 1$ et $l = -1$.

La raison qui nous a poussé à nous intéresser à ce problème est son lien avec la Conjecture 2.2. En effet, pour le cas $n = 2$ et $d = 2$, nous avons vu qu'une preuve possible s'appuyait sur l'intersection forcée de deux complexes simpliciaux. Dans le cas le plus général de la conjecture, on peut également construire ce type de complexes simpliciaux, qui semblent avoir les bonnes propriétés de connexité. Si on pouvait montrer qu'ils possèdent forcément un point d'intersection, la conjecture serait démontrée[1].

Il apparaît que le Théorème 3.3 peut être généralisé au théorème suivant, avec plus de deux applications antipodales. Ce qui est alors intéressant, c'est qu'ici, on démontre l'existence d'une intersection commune à plus de deux objets, sans faire appel à d'autres actions de groupe que $\mathbb{Z}_2$.

Théorème 3.4 (Coïncidence d'applications antipodales) *Soient n applications antipodales $f_i : S^{k_i} \to S^d$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Si $\sum_{i=1}^n k_i \geq (n-1)d$, alors l'image des f_i ont une intersection commune, i.e. il existe $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \in S^{k_1} \times S^{k_2} \times \ldots \times S^{k_n}$ tel que $f_1(\boldsymbol{x}_1) = f_2(\boldsymbol{x}_2) = \ldots = f_n(\boldsymbol{x}_n)$.*

Démonstration : $f := f_1 * f_2 * \ldots * f_n$ est une application antipodale allant de $S^{k_1} * S^{k_2} * \ldots * S^{k_n} \cong S^{(\sum_{i=1}^n k_i)+n-1}$ dans $(S^d)^{*n}$. L'antipodalité sur les joints de sphères $S^{d_1} * S^{d_2} * \ldots * S^{d_n}$ est donnée, tout au long de la preuve, par l'application :

$$t_1\boldsymbol{x}_1 \oplus t_2\boldsymbol{x}_2 \oplus \ldots \oplus t_n\boldsymbol{x}_n \mapsto -(t_1\boldsymbol{x}_1 \oplus t_2\boldsymbol{x}_2 \oplus \ldots \oplus t_n\boldsymbol{x}_n) = t_1(-\boldsymbol{x}_1) \oplus t_2(-\boldsymbol{x}_2) \oplus \ldots \oplus t_n(-\boldsymbol{x}_n).$$

Si un n-uplet $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \in S^{k_1} \times S^{k_2} \times \ldots \times S^{k_n}$ tel que $f_1(\boldsymbol{x}_1) = f_2(\boldsymbol{x}_2) = \ldots = f_n(\boldsymbol{x}_n)$ n'existe pas, l'image de f est incluse dans $(S^d)^{*n}_\triangle$. Nous allons montrer que l'on peut plonger de manière antipodale $(S^d)^{*n}_\triangle$ dans $S^{(d+1)(n-1)-1}$. Le théorème sera alors

[1] Il convient en particulier de noter que, en généralisant de façon naturelle, $\mathsf{S}(\lambda_i)$ est de dimension $d+1-k_i$. En replaçant cette valeur dans le Théorème 3.4, on obtient comme condition d'intersection : $\sum_{i=1}^n (d+1-k_i) \geq (n-1)d$, i.e. $d + n \geq \sum_{i=1}^n k_i$, qui est précisément la condition de la Conjecture 2.2

démontré car, d'après le théorème de Borsuk-Ulam, il n'existe pas d'application antipodale $S^{(\sum_{i=1}^n k_i)+n-1} \to S^{(d+1)(n-1)-1}$.

Montrons donc que l'on peut plonger de manière antipodale $(S^d)^{*n}_{\triangle}$ dans $S^{(d+1)(n-1)-1}$. Considérons l'application :

$$\begin{array}{rccc} h: & (S^d)^{*n}_{\triangle} & \to & S^{(d+1)(n-1)-1} \\ & t_1\boldsymbol{x}_1 \oplus t_2\boldsymbol{x}_2 \oplus \ldots \oplus t_n\boldsymbol{x}_n & \mapsto & \frac{\left((\sum_{i=1}^n t_i\boldsymbol{x}_i)-nt_1\boldsymbol{x}_1,(\sum_{i=1}^n t_i\boldsymbol{x}_i)-nt_2\boldsymbol{x}_2,\ldots,(\sum_{i=1}^n t_i\boldsymbol{x}_i)-nt_{n-1}\boldsymbol{x}_{n-1}\right)}{\sqrt{||(\sum_{i=1}^n t_i\boldsymbol{x}_i)-nt_1\boldsymbol{x}_1||^2+||(\sum_{i=1}^n t_i\boldsymbol{x}_i)-nt_2\boldsymbol{x}_2||^2+\ldots+||(\sum_{i=1}^n t_i\boldsymbol{x}_i)-nt_{n-1}\boldsymbol{x}_{n-1}||^2}} \end{array}$$

Le dénominateur ne s'annule pas car sinon, on aurait pour tout $j \in [n-1]$, $\sum_{i=1}^n t_i\boldsymbol{x}_i = nt_j\boldsymbol{x}_j$, ce qui impliquerait que $t_1\boldsymbol{x}_1 = t_2\boldsymbol{x}_2 = \ldots = t_n\boldsymbol{x}_n$, ce qui est impossible car un tel point n'existe pas, par définition, dans $(S^d)^{*n}_{\triangle}$. D'autre part, h est bien antipodale :

$$h(-(t_1\boldsymbol{x}_1 \oplus t_2\boldsymbol{x}_2 \oplus \ldots \oplus t_n\boldsymbol{x}_n)) = -h(t_1\boldsymbol{x}_1 \oplus t_2\boldsymbol{x}_2 \oplus \ldots \oplus t_n\boldsymbol{x}_n).$$

∎

3.2.3 Quelques mots sur la complexité algorithmique

Tout comme pour le lemme de Sperner, le lemme de Tucker est dans PPA. En se limitant à la dimension 2, on a le problème

PROBLEME : 2D-TUCKER
INSTANCE : un entier n, et une fonction f qui, à chaque point $p = (i_1, i_2)$ avec $|i_1|+|i_2| \leq n$, associe un entier $f(p)$ valant ± 1 ou ± 2 tel que $|i_1| + |i_2| = n$ implique $f(-p) = -f(p)$,
TACHE : trouver deux points p, p' tels que $p-p'$ soit de la forme $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$ ou $(\pm 1, \mp 1)$ et tel que $f(p) + f(p') = 0$.

Suivre la chaîne dans le graphe G construit dans la preuve constructive ci-dessus peut également être exponentiel, tout comme dans le lemme de Sperner : la taille d'une telle chaîne peut être de l'ordre de n^2, alors que la taille de l'instance est en $O(\log n + k)$, où k est la taille de la fonction f, et l'on peut facilement imaginer des fonctions pour lesquelles k est indépendant de n.

A ce jour, on ignore si 2D-TUCKER est dans FP.

3.3 Formules de Ky Fan

3.3.1 Enoncé et preuves

Nous présentons maintenant la formule que Ky Fan avait proposée en 1952 ([23]), pour généraliser le lemme de Sperner et le lemme de Tucker. Quelques notations sont nécessaires.

Supposons que l'on ait une pseudo-variété M de dimension d dont les sommets sont étiquetés par des entiers pris dans un certain ensemble de la forme $\{-1, +1, -2, +2, \ldots, -m, +m\}$. On note λ la fonction d'étiquetage.

Pour $d+1$ entiers distincts $j_1, j_2, \ldots, j_{d+1}$, on note $\alpha(j_1, j_2, \ldots, j_{d+1})$ le nombre de simplexes σ tels que

* σ est un d-simplexe de M et
* $\sigma = \{v_1, v_2, \ldots, v_{d+1}\}$ et $\lambda(v_i) = j_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, d+1$.

Pour d entiers distincts $j_1, j_2, \ldots, j_d$, on note $\beta(j_1, j_2, \ldots, j_d)$ le nombre de simplexes τ tels que :

* τ est un $(d-1)$-simplexe de $\partial\mathsf{M}$ et
* $\tau = \{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$ et $\lambda(v_i) = j_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, d$.

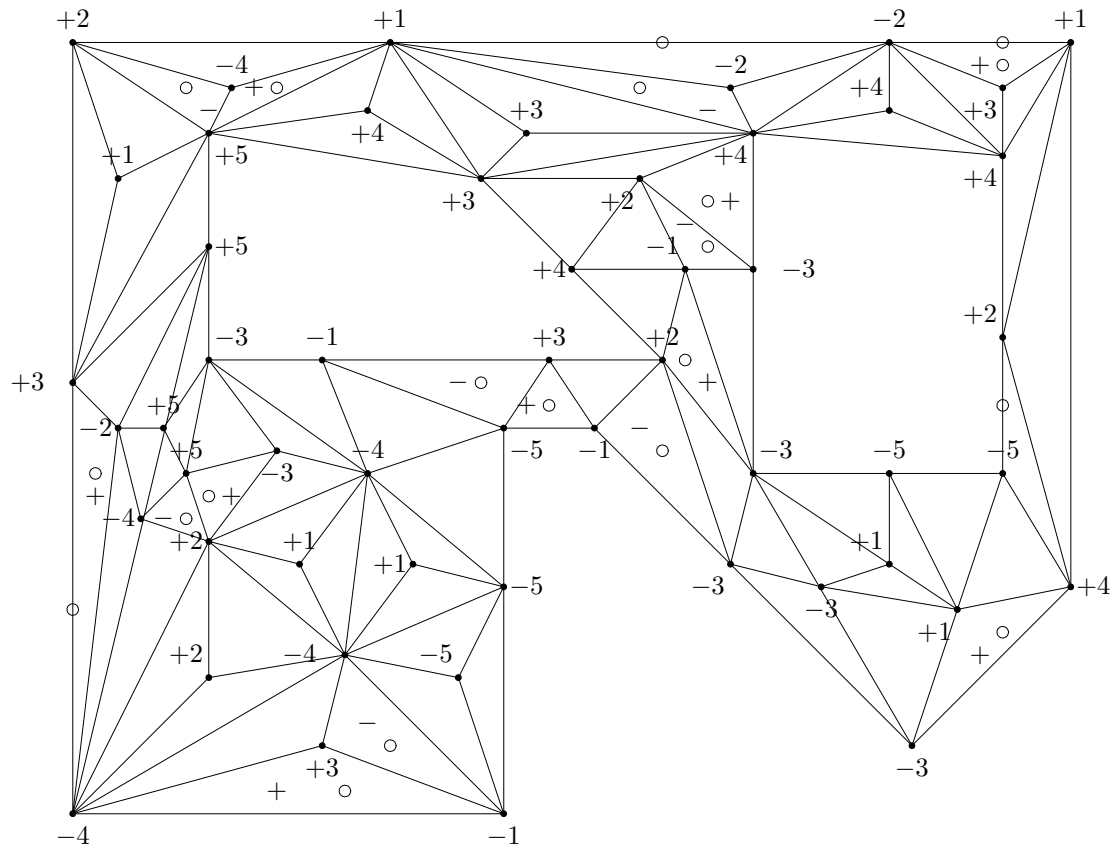

FIG. 3.4 – Illustration de la formule de Ky Fan pour un pseudo-variété de dimension 2.

Théorème 3.5 *Soient m et d deux entiers positifs et soit M une pseudo-variété de dimension d. Soit $\lambda : V(\mathsf{M}) \to \{-1, +1, -2, +2, \ldots, -m, +m\}$ un étiquetage des sommets de M tel qu'il n'y ait pas d'arête complémentaire. On a alors :*

$$\sum_{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_{d+1} \le m} \alpha(-j_1, +j_2, \ldots, (-1)^{d+1} j_{d+1}) + \alpha(+j_1, -j_2, \ldots, (-1)^d j_{d+1}) =$$

$$\sum_{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_d \le m} \beta(+j_1, -j_2, \ldots, (-1)^d j_d) \bmod 2.$$

La Figure 3.4 illustre ce théorème. On a affaire à une pseudo-variété de dimension 2, ayant deux "trous". Ici $m = 5$. Les simplexes qui interviennent dans la formule sont marqués par un petit cercle (les signes marqués dans ces simplexes n'ont pas de signification ici). Les 1-simplexes dont les étiquettes sont de signes $+, -$ dans l'ordre croissant : il y en a 4 ; les 2-simplexes dont les étiquettes sont de signes $+, -, +$ et $-, +, -$ dans l'ordre croissant : il y en a 16. 4 et 16 sont congrus à 0 modulo 2, conformément à la formule du théorème.

La preuve que donnait Ky Fan est assez longue, quoique élémentaire. Nous proposons ici une preuve très courte, ayant un plus grand pouvoir explicatif. Partant, cette approche

nous permettra de généraliser là formule de Ky Fan pour plus de deux signes (ici, les signes $-$ et $+$, qui apparaissent de manière alternée).

Démonstration du Théorème 3.5 : On remarque comme d'habitude que λ est une fonction simpliciale allant de M dans le complexe simplicial C dont les simplexes sont les parties de $\{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm m\}$ ne contenant pas de paire de la forme $-i, +i$, pour $i \in [m]$. C est le complexe de bord du cross-polytope $\hat{B}^m$ de dimension m : $\mathsf{C} = \mathsf{F}(\hat{B}^m)$.

On considère maintenant la famille W des mots sur l'alphabet $\mathbb{Z}_2$. On définit $C_k(\mathsf{W}, \mathbb{Z}_2)$ l'ensemble des sommes formelles finies, à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$, de mots de taille $k+1$. On définit alors le morphisme suivant :

$$\begin{array}{rccc} \partial : & C_{k+1}(\mathsf{W}, \mathbb{Z}_2) & \to & C_k(\mathsf{W}, \mathbb{Z}_2) \\ & w = a_0 \ldots a_k & \mapsto & \sum_{i=0}^{k} a_0 \ldots \hat{a}_i \ldots a_k \end{array}.$$

On vérifie alors aisément que l'on a $\partial \circ \partial = 0$, et donc que l'on a un complexe de chaîne associé, $\mathcal{C}(\mathsf{W}, \mathbb{Z}_2)$, dont ∂ est l'opérateur de bord. On note δ le cobord associé, et l'on identifie les chaînes et les cochaînes par le produit $\langle ., . \rangle$: tout k-mot w est identifié avec la cochaîne w^* qui prend la valeur 1 sur w et 0 sur les autres k-mots.

On transforme maintenant les signes $+$ et $-$ en 1 et 0, par la fonction suivante :

$$\phi : x \in \mathbb{Z}_2^* = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

On définit alors la fonction de chaîne :

$$\begin{array}{rccc} \phi_\# : & \mathcal{C}(\mathsf{C}, \mathbb{Z}_2) & \to & \mathcal{C}(\mathsf{W}, \mathbb{Z}_2) \\ & \sigma = \{j_0, j_1, \ldots, j_k\} & \mapsto & \phi(j_0)\phi(j_1)\ldots\phi(j_k) \end{array}.$$

La vérification que ce soit bien une fonction de chaîne est directe. La formule de Ky Fan est alors la transduction directe de la formule suivante, où c est la somme formelle de tous les d-simplexes de M :

$$\langle \underbrace{0101\ldots}_{d+1 \text{ termes}} + \underbrace{1010\ldots}_{d+1 \text{ termes}}, (\phi_\# \circ \lambda_\#)(c) \rangle = \langle \underbrace{1010\ldots}_{d \text{ termes}}, \partial(\phi_\# \circ \lambda_\#)(c) \rangle,$$

qui est une conséquence de l'égalité directe suivante :

$$\underbrace{0101\ldots}_{d+1 \text{ termes}} + \underbrace{1010\ldots}_{d+1 \text{ termes}} = \delta \underbrace{1010\ldots}_{d \text{ termes}}.$$

∎

En 1967, Ky Fan généralisait [25] sa formule dans le cas où M est orienté. Pour la donner, il faut généraliser les notations précédentes.

Supposons que l'on ait une pseudo-variété orientée de manière cohérente M, de dimension d, dont les sommets sont étiquetés par des entiers pris dans un certain ensemble de la forme $\{-1, +1, -2, +2, \ldots, -m, +m\}$. On note λ la fonction d'étiquetage.

Pour $d+1$ entiers distincts $j_1, j_2, \ldots, j_{d+1}$, on note $\alpha_+(j_1, j_2, \ldots, j_{d+1})$ (resp. $\alpha_-(j_1, j_2, \ldots, j_{d+1})$) le nombre de simplexes σ tels que

* σ est un d-simplexe de M et
* $\sigma = +[v_1, v_2, \ldots, v_{d+1}]$ (resp. $\sigma = -[v_1, v_2, \ldots, v_{d+1}]$) et $\lambda(v_i) = j_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, d+1$.

Pour d entiers distincts $j_1, j_2, \ldots, j_d$, on note $\beta_+(j_1, j_2, \ldots, j_d)$ (resp. $\beta_-(j_1, j_2, \ldots, j_d)$) le nombre de simplexes τ tels que :

* τ est un $(d-1)$-simplexe de $\partial\mathsf{M}$ et
* $\tau = +[v_1, v_2, \ldots, v_d]$ (resp. $\tau = -[v_1, v_2, \ldots, v_d]$) et $\lambda(v_i) = j_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, d$.

Finalement, on pose $\alpha := \alpha_+ - \alpha_-$ et $\beta = \beta_+ - \beta_-$. Le théorème de Ky Fan dans le cas orienté s'énonce alors :

Théorème 3.6 *Soient m et d deux entiers positifs et soit M une pseudo-variété orientée de manière cohérente, de dimension d. Soit $\lambda : V(\mathsf{M}) \to \{-1, +1, -2, +2, \ldots, -m, +m\}$ un étiquetage des sommets de M tel qu'il n'y ait pas d'arête complémentaire. On a alors :*

$$\sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_{d+1} \leq m} \alpha(-j_1, +j_2, \ldots, (-1)^{d+1} j_{d+1}) + (-1)^d \alpha(+j_1, -j_2, \ldots, (-1)^d j_{d+1}) =$$

$$\sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_d \leq m} \beta(+j_1, -j_2, \ldots, (-1)^d j_d).$$

La Figure 3.4 peut également servir à illustrer ce théorème. L'orientation des 2-simplexes est donnée par l'orientation naturelle du plan. L'orientation des 1-simplexes, rappelons-le, est l'orientation induite par celle des 2-simplexes de M.

La partie de droite de la formule vaut 2. Déterminons la partie de gauche : les simplexes comptant positivement, marqués $+$, sont au nombre de 9 ; ceux comptant négativement, marqués $-$, sont au nombre de 7. On a bien $9 - 7 = 2$.

Démonstration du Théorème 3.6 : Elle suit le même schéma que la démonstration précédente. On considère toujours la famille W des mots sur l'alphabet $\mathbb{Z}_2$, mais on considère cette fois $C_k(\mathsf{W}, \mathbb{Z})$ l'ensemble des sommes formelles finies, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, de mots de taille $k+1$. Le bord se définit alors :

$$\begin{array}{rccc} \partial : & C_{k+1}(\mathsf{W}, \mathbb{Z}) & \to & C_k(\mathsf{W}, \mathbb{Z}) \\ & w = a_0 \ldots a_k & \mapsto & \sum_{i=0}^{k} (-1)^i a_0 \ldots \hat{a}_i \ldots a_k \end{array}.$$

On a $\partial \circ \partial = 0$, un complexe de chaînes associé, $\mathcal{C}(\mathsf{W}, \mathbb{Z})$ et δ le cobord associé. Tout comme précédemment, on transforme maintenant les signes $+$ et $-$ en 1 et 0, par la fonction suivante :

$$\phi : x \in \mathbb{Z}_2^* = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

et on introduit alors la fonction de chaîne :

$$\begin{array}{rccc} \phi_\# : & \mathcal{C}(\mathsf{C}, \mathbb{Z}) & \to & \mathcal{C}(\mathsf{W}, \mathbb{Z}) \\ & \sigma = \{j_0, j_1, \ldots, j_k\} & \mapsto & \phi(j_0)\phi(j_1) \ldots \phi(j_k) \end{array}.$$

La formule de Ky Fan orientée est alors la transduction directe de la formule suivante, où c est la somme formelle de tous les d-simplexes de M :

$$\langle \underbrace{0101\ldots}_{d+1 \text{ termes}} + (-1)^d \underbrace{1010\ldots}_{d+1 \text{ termes}}, (\phi_\# \circ \lambda_\#)(c) \rangle = \langle \underbrace{1010\ldots}_{d \text{ termes}}, \partial(\phi_\# \circ \lambda_\#)(c) \rangle,$$

qui est une conséquence de l'égalité directe suivante :

$$\underbrace{0101\ldots}_{d+1 \text{ termes}} + (-1)^d \underbrace{1010\ldots}_{d+1 \text{ termes}} = \delta \underbrace{1010\ldots}_{d \text{ termes}}.$$

∎

Nous terminons par un lemme combinatoire pour le sphère, généralisant le lemme de Tucker. Ce lemme aura aussi un pendant continu, utilisé en microéconomie. Nous nous en servirons plus loin dans le chapitre sur le nombre chromatique des graphes de Kneser.

Nous l'appelons "lemme de Ky Fan", bien qu'il mérite le statut de théorème (tout comme les lemmes de Sperner et de Tucker), mais Ky Fan lui-même le qualifiait de lemme, probablement par analogie avec les deux lemmes précédents. Ce lemme est présenté dans le papier où apparaît la première formule de Ky Fan [23].

Théorème 3.7 (Lemme de Ky Fan) *Soit* T *une triangulation antipodale spéciale de la sphère* S^d. *Soit* m *un entier positif. On étiquette les sommets de* T *avec des entiers pris dans* $\{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm m\}$ *de façon que*

(i) deux sommets antipodaux ont toujours des étiquettes opposées, et

(ii) il n'y a pas d'arête complémentaire.

. Alors il y a un nombre impair de d*-simplexes dont les étiquettes sont de la forme* $\{+j_0, -j_1, +j_2, \ldots, (-1)^d j_d\}$, *où* $1 \leq j_0 < j_1 < \ldots < j_d \leq m$. *En particulier,* m *est nécessairement* $\geq d+1$.

Comme m est nécessairement $\geq d+1$, on retrouve le lemme de Tucker.

Démonstration : La démonstration fonctionne par induction sur d. Pour $d = 0$, c'est trivial. Supposons que le lemme soit prouvé pour d. Considérons une triangulation antipodale spéciale de S^{d+1}. On est dans $\mathbb{R}^{d+2}$. L'intersection de l'hyperplan d'équation $x_{d+2} = 0$ avec S^{d+1} est la sphère S^d, satisfaisant toutes les conditions de l'énoncé. Elle possède en particulier un nombre impair de d-simplexes dont les étiquettes sont de la forme $\{j_0, -j_1, j_2, \ldots, (-1)^d j_d\}$, où $1 \leq j_0 < j_1 < \ldots < j_d \leq m$ (hypothèse de récurrence). Dans l'hémisphère $x_{d+2} \geq 0$ de S^{d+2}, on a modulo 2

$$\sum_{1 \leq j_0 < j_1 < \ldots < j_{d+1} \leq m} \alpha(-j_0, +j_1, \ldots, (-1)^{d+2} j_{d+1}) + \alpha(+j_0, -j_1, \ldots, (-1)^{d+1} j_{d+1}) =$$

$$\sum_{1 \leq j_0 < j_1 < \ldots < j_d \leq m} \beta(+j_0, -j_1, \ldots, (-1)^d j_d) \bmod 2.$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence : $\sum_{1 \leq j_0 < j_1 < \ldots < j_d \leq m} \beta(+j_0, -j_1, \ldots, (-1)^d j_d) = 1 \bmod 2$. D'autre part, par antipodalité, $\sum_{1 \leq j_0 < j_1 < \ldots < j_{d+1} \leq m} \alpha(-j_0, +j_1, \ldots, (-1)^{d+2} j_{d+1})$ est le nombre de $(d+1)$-simplexes de l'hémisphère $x_{d+2} \leq 0$ de S^{d+2} dont les étiquettes sont de la forme $\{j_0, -j_1, j_2, \ldots, (-1)^{d+1} j_{d+1}\}$, avec $1 \leq j_0 < j_1 < \ldots < j_{d+1} \leq m$. Par conséquent, le terme $\sum_{1 \leq j_0 < j_1 < \ldots < j_{d+1} \leq m} \alpha(-j_0, +j_1, \ldots, (-1)^{d+2} j_{d+1}) + \alpha(+j_0, -j_1, \ldots, (-1)^{d+1} j_{d+1})$ dans l'équation ci-dessus est le nombre total de $(d+1)$-simplexes de S^{d+2} dont les étiquettes sont de la forme $\{j_0, -j_1, j_2, \ldots, (-1)^{d+1} j_{d+1}\}$, avec $1 \leq j_0 < j_1 < \ldots < j_{d+1} \leq m$, et est donc égal à 1 mod 2. ∎

3.3.2 Autre preuve du lemme de Sperner

Comme nous l'avons indiqué, un des intérêts des formules de Ky Fan est de pouvoir prouver les lemmes de Sperner et de Tucker dans un cadre commun. Le lemme de Tucker est une conséquence du lemme de Ky Fan (Théorème 3.7). Nous prouvons maintenant le lemme de Sperner.

Démonstration du lemme de Sperner à partir de la formule de Ky Fan : On montre par induction sur d que le nombre de simplexes pleinement étiquetés est impair. Pour $d = 0$, c'est trivial. Supposons que ce soit vrai pour d. Considérons un étiquetage de Sperner du simplexe $\triangle^{d+1}$. Changeons maintenant les signes des étiquettes paires : les étiquettes 2 deviennent -2, les étiquettes 4 deviennent -4, etc. D'après la formule de Ky Fan modulo 2, appliquée à $\triangle^{d+1}$, avec $m = d+2$,

$$\alpha(+1, -2, \ldots, (-1)^{d+1}(d+2)) + \alpha(-1, +2, \ldots, (-1)^d (d+2)) = \beta(+1, -2, \ldots, (-1)^d (d+1)).$$

Il n'y a pas d'étiquettes -1, ni $+2$, etc., donc $\alpha(-1,+2,\ldots,(-1)^d(d+2)) = 0$. De plus, $\beta(+1,-2,\ldots,(-1)^d(d+1))$ est le nombre modulo 2 de simplexes du bord de $\triangle^{d+1}$ étiquetés $1,2,\ldots,d+1$ dans l'étiquetage de Sperner. De tels simplexes ne peuvent apparaître que sur la face de sommets $1,2,\ldots,d+1$ du $\triangle^{d+1}$. Par hypothèse de récurrence, on a donc $\beta(+1,-2,\ldots,(-1)^d(d+1)) = 1$. Ce qui implique $\alpha(+1,-2,\ldots,(-1)^{d+1}(d+2)) = 1$, dont la signification est la présence d'un nombre impair de simplexes pleinement étiquetés dans l'étiquetage de Sperner de la triangulation de $\triangle^{d+1}$. ∎

3.3.3 Versions continues et applications

Tout comme le lemme de Tucker, la formule de Ky Fan peut avoir de nombreuses interprétations continues. Dans son article de 1952, Ky Fan proposait la version continue suivante :

Théorème 3.8 *Soient d et k deux entiers positifs. Si k fermés $F_1, F_2, \ldots, F_k$ de S^n couvrent S^n et si aucun d'eux ne contient de paire de points antipodaux, alors il existe $n+2$ indices $l_1, l_2, \ldots, l_{n+2}$, tels que $1 \leq l_1 < l_2 < \ldots < l_{n+2} \leq k$ et*

$$F_{l_1} \cap -F_{l_2} \cap F_{l_3} \cap \ldots \cap (-1)^{n+1} F_{l_{n+2}} \neq \emptyset.$$

Démonstration : Soit $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon < \mathrm{dist}(F_i, -F_i)$ pour tout i (on a $F_i \cap -F_i = \emptyset$ pour tout i, et F_i et $-F_i$ sont des compacts). On prend une triangulation T_ϵ antipodale spéciale dont le diamètre des simplexes est inférieur à ϵ[2]. On considère les $2k$ fermés $F_1, F_2, \ldots, F_k$ et $-F_1, -F_2, \ldots, -F_k$ couvrant S^n. On étiquette les sommets on mettant sur v l'entier $\min\{i : v \in -F_i \cup F_i\}$ avec le signe $+$ si $v \in F_i$ et $-$ sinon. Il existe un n-simplexe avec des étiquettes de la forme $\{l_1, -l_2, l_3, \ldots, (-1)^{n+1} l_{n+2}\}$, où $1 \leq l_1 < l_2 < \ldots < l_{n+2} \leq m$ (conséquence Théorème 3.7). La finitude de l'ensemble des étiquettes et la compacité de S^n permettent de conclure. ∎

La version avec des ouverts est également vraie :

Théorème 3.9 *Soient d et k deux entiers positifs. Si k ouverts $0_1, 0_2, \ldots, 0_k$ de S^n couvrent S^n et si aucun d'eux ne contient de paire de points antipodaux, alors il existe $n+2$ indices $l_1, l_2, \ldots, l_{n+2}$, tels que $1 \leq l_1 < l_2 < \ldots < l_{n+2} \leq k$ et*

$$O_{l_1} \cap -O_{l_2} \cap O_{l_3} \cap \ldots \cap (-1)^{n+1} O_{l_{n+2}} \neq \emptyset.$$

Démonstration : Grâce au Théorème 3.8, il suffit de montrer qu'il existe k fermés $F_i \subseteq U_i$ qui couvrent la sphère. On le fait de la manière suivante, comme pour le théorème de Borsuk-Ulam (Théorème 3.2 : pour tout $x \in U_i$, on prend V_x un voisinage ouvert contenant x et dont la fermeture est incluse dans U_i. Par compacité, il existe une famille finie des $\{V_x\}_{x \in S^n}$ qui couvre S^n, et l'on définit alors F_i comme la réunion des fermetures des V_x de cette famille qui sont inclus strictement dans U_i. ∎

3.3.4 Versions multi-étiquetage

Theorème de Lee et Shih

A l'instar du lemme de Sperner, la formule de Ky Fan possède aussi une version multi-étiquetage, proposée et démontrée par Lee et Shih dans [56]. Toujours en utilisant le formalisme des chaînes, nous allons en donner une démonstration beaucoup plus courte que la

[2] il n'est pas difficile d'obtenir de telles triangulations, par exemple en prenant les subdivisions barycentriques. Voir [65], ou [75].

démonstration originale (nous donnons d'ailleurs quelques généralisations de la version de Lee et Shih dans l'article [70]).

Pour présenter le théorème de Lee et Shih généralisant la formule de Ky Fan avec plusieurs étiquettes, nous redéfinissons les fonctions de comptage $\alpha(\ldots)$ et $\beta(\ldots)$ introduites précédemment.

Supposons que l'on ait une pseudo-variété orientée de manière cohérente M, de dimension d, dont les sommets sont étiquetés par q fonctions d'étiquetage $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$.

Pour $d+1$ entiers distincts $j_1, j_2, \ldots, j_{d+1}$, on note $\alpha_+(j_1, j_2, \ldots, j_{d+1})$ (resp. $\alpha_-(j_1, j_2, \ldots, j_{d+1})$) le nombre de paires (σ, f) telles que

* σ est un d-simplexe de M et f est injection de $V(\sigma)$ dans $[q]$, et
* $\sigma = +[v_1, v_2, \ldots, v_{d+1}]$ (resp. $\sigma = -[v_1, v_2, \ldots, v_{d+1}]$) et $\lambda_{f(v_i)}(v_i) = j_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, d+1$.

Pour d entiers distincts $j_1, j_2, \ldots, j_d$, on note $\beta_+(j_1, j_2, \ldots, j_d)$ (resp. $\beta_-(j_1, j_2, \ldots, j_d)$) le nombre de paires (τ, g) telles que :

* τ est un $(d-1)$-simplexe de $\partial\mathsf{M}$ et g est une injection de $V(\tau)$ dans $[q]$, et
* $\tau = +[v_1, v_2, \ldots, v_d]$ (resp. $\tau = -[v_1, v_2, \ldots, v_d]$) et $\lambda_{g(v_i)}(v_i) = j_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, d$.

Finalement, on pose $\alpha := \alpha_+ - \alpha_-$ et $\beta = \beta_+ - \beta_-$.

Si M n'est pas orienté de manière cohérente, on définit α et β sans tenir compte de l'orientation.

Théorème 3.10 (Théorème de Lee-Shih) *Soient m,, d et q trois entiers positifs, et soit M une pseudo-variété de dimension d orientée de manière cohérente. Supposons que l'on ait q fonctions d'étiquetage $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ telles que, pour tout $k \in [q]$,*

1. *$\lambda_k : V(\mathsf{M}) \to \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm m\}$, et*
2. *si $k_1 \neq k_2$ et $(v_1, v_2) \in E(\mathsf{M})$, $\lambda_{k_1}(v_1) \neq -\lambda_{k_2}(v_2)$,*

alors on a

$$\sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_{d+1} \leq m} \alpha(-j_1, +j_2, \ldots, (-1)^{d+1} j_{d+1}) + (-1)^d \alpha(+j_1, -j_2, \ldots, (-1)^d j_{d+1}) =$$

$$(q-d) \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_d \leq m} \beta(+j_1, -j_2, \ldots, (-1)^{d-1} j_d).$$

Si M n'est pas orientée de manière cohérente, alors la formule se lit modulo 2.

Démonstration : On n'écrit la preuve que dans le cas où M est orienté de manière cohérente. L'autre cas se prouve de manière semblable.

On considère le complexe simplicial L qui a comme ensemble de sommets l'ensemble $V(\mathsf{M}) \times [m]$. Un simplexe $\sigma = \{(v_1, k_1), (v_2, k_2), \ldots, (v_{p+1}, k_{p+1})\} \in \mathsf{L}$ est tel que $\{v_1, v_2, \ldots, v_{p+1}\}$ est un simplexe de M et tel que tous les k_i sont distincts. On oriente L en donnant à σ la même orientation que celle de $\{v_1, v_2, \ldots, v_{p+1}\}$, autrement dit $[(v_1, k_1), \ldots, (v_{p+1}, k_{p+1})]$ est l'orientation positive de σ si et seulement si $[v_1, \ldots, v_{p+1}]$ est l'orientation positive de $\{v_1, \ldots, v_{p+1}\}$ dans M.

Considérons alors ψ l'étiquetage de L tel que, pour $(v, k) \in \mathsf{L}$, $\psi\big((v, k)\big) = \lambda_k(v)$. ψ est une fonction simpliciale allant de L dans $\mathsf{C} = \mathsf{F}(\hat{B}^m)$ (complexe de bord du cross-polytope de dimension m). On suit alors le même schéma que dans la preuve du Théorème 3.6 (formule de Ky Fan orientée), dont on reprend la fonction ϕ. Comme

$$\underbrace{0101\ldots}_{d+1 \text{ termes}} + (-1)^d \underbrace{1010\ldots}_{d+1 \text{ termes}} = \delta \underbrace{1010\ldots}_{d \text{ termes}},$$

on a, notant L la somme de tous les d-simplexes orientés positivement de L,

$$\langle \underbrace{0101\ldots}_{d+1 \text{ termes}} +(-1)^d \underbrace{1010\ldots}_{d+1 \text{ termes}}, (\phi_\# \circ \psi_\#)(L)\rangle = \langle \underbrace{1010\ldots}_{d \text{ termes}}, (\phi_\# \circ \psi_\#)(\partial L)\rangle.$$

Il est facile de voir que

$$\partial L = (q-d) \sum_{[v_1,\ldots,v_d]\in\partial\mathsf{M},\ \text{tous les } k_i \text{ distincts}} \big[(v_1,k_1),\ldots,(v_d,k_d)\big].$$

La formule ci-dessus est alors une simple réécriture de la formule à démontrer. ∎

Dans la preuve ci-dessus, on a défini L en demandant que les k_i soient distincts. Si on ne demande pas à ce qu'ils soient distincts, on obtient un autre théorème. On redéfinit α et β, en ne demandant pas que f et g soient des injections :

Supposons que l'on ait une pseudo-variété orientée de manière cohérente M, de dimension d, dont les sommets sont étiquetés par q fonctions d'étiquetage $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$.

Pour $d+1$ entiers distincts $j_1, j_2, \ldots, j_{d+1}$, on note $\alpha_+(j_1, j_2, \ldots, j_{d+1})$ (resp. $\alpha_-(j_1, j_2, \ldots, j_{d+1})$) le nombre de paires (σ, f) telles que

* σ est un d-simplexe de M et f est une application de $V(\sigma)$ dans $[q]$, et
* $\sigma = +[v_1, v_2, \ldots, v_{d+1}]$ (resp. $\sigma = -[v_1, v_2, \ldots, v_{d+1}]$) et $\lambda_{f(v_i)}(v_i) = j_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, d+1$.

Pour d entiers distincts $j_1, j_2, \ldots, j_d$, on note $\beta_+(j_1, j_2, \ldots, j_d)$ (resp. $\beta_-(j_1, j_2, \ldots, j_d)$) le nombre de paires (τ, g) telles que :

* τ est un $(d-1)$-simplexe de $\partial\mathsf{M}$ et g est une application de $V(\tau)$ dans $[q]$, et
* $\tau = +[v_1, v_2, \ldots, v_d]$ (resp. $\tau = -[v_1, v_2, \ldots, v_d]$) et $\lambda_{g(v_i)}(v_i) = j_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, d$.

Finalement, on pose $\alpha := \alpha_+ - \alpha_-$ et $\beta = \beta_+ - \beta_-$.

Si M n'est pas orientée de manière cohérente, on définit α et β sans tenir compte de l'orientation.

Théorème 3.11 *Soient m, d et q trois entiers positifs, et soit M une pseudo-variété de dimension d orienté de manière cohérente. Supposons que l'on ait q fonctions d'étiquetage $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ telles que, pour tout $k \in [q]$,*

1. *$\lambda_k : V(\mathsf{M}) \to \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm m\}$, et*
2. *si $k_1 \neq k_2$ et $(v_1, v_2) \in E(\mathsf{M})$, $\lambda_{k_1}(v_1) \neq -\lambda_{k_2}(v_2)$,*

alors on a

$$\sum_{1\le j_1<j_2<\ldots<j_{d+1}\le m} \alpha(-j_1, +j_2, \ldots, (-1)^{d+1} j_{d+1}) + (-1)^d \alpha(+j_1, -j_2, \ldots, (-1)^d j_{d+1}) =$$

$$q \sum_{1\le j_1<j_2<\ldots<j_d\le m} \beta(+j_1, -j_2, \ldots, (-1)^{d-1} j_d).$$

Si M n'est pas orientée de manière cohérente, alors la formule se lit modulo 2.

Démonstration du théorème de Bapat

Le théorème de Bapat (Théorème 2.3) est une simple conséquence du théorème de Lee et Shih.

Démonstration du théorème de Bapat à partir de la formule de Lee et Shih (formule de Ky Fan multi-étiquettes) : Le théorème de Bapat dit que $\alpha(1,2,\ldots,d+1) = (d+1)!$.

Nous allons montrer par récurrence sur d, à $q \geq d$, fixé que si on étiquette les sommets de T avec q étiquetages de Sperner $\lambda_1,\ldots,\lambda_q$, alors $\alpha(1,2,\ldots,d+1) = \frac{q!}{(q-d-1)!}$.

C'est vrai pour $d=0$. Supposons que ce soit vrai pour $d<q$. Montrons que c'est vrai pour $d+1$. Comme dans la preuve du lemme de Sperner à partir de la formule de Ky Fan, on change les signes des étiquettes paires : les étiquettes 2 deviennent -2, les étiquettes 4 deviennent -4, etc. D'après la formule de Lee et Shih (Théorème 3.10), appliquée à $\triangle^{d+1}$, avec $m=d+2$,

$$\alpha(-1,+2,\ldots,(-1)^d(d+2)) + (-1)^{d+1}\alpha(+1,-2,\ldots,(-1)^{d+1}(d+2)) =$$

$$(q-(d+1))\beta(+1,-2,\ldots,(-1)^d(d+1).$$

Il n'y a pas d'étiquettes -1, ni $+2$, etc., donc $\alpha(-1,+2,\ldots,(-1)^d d+2) = 0$. De plus, $\beta(+1,-2,\ldots,(-1)^d d+1)$ est le nombre de paires, dont le simplexe provient du bord de $\triangle^{d+1}$, étiquetées $1,2,\ldots,d+1$ dans l'étiquetage de Sperner. De tels simplexes ne peuvent apparaître que sur la face de sommets $1,2,\ldots,d+1$ du $\triangle^{d+1}$. Par hypothèse de récurrence, on a donc $\beta(+1,-2,\ldots,(-1)^d d+1) = \frac{q!}{(q-d-1)!}$. Ce qui implique $\alpha(+1,-2,\ldots,(-1)^{d+1}d+2) = (q-(d+1))\frac{q!}{(q-d-1)!}$, i.e. $\alpha(1,2,\ldots,d+2) = \frac{q!}{(q-d-2)!}$, quand on a remis tous les signes des étiquettes à $+$. ∎

3.4 Généralisation de la formule de Ky Fan pour plus de 2 signes

3.4.1 Mots, chaînes de mots et cochaînes de mots

On reprend dans cette section les idées qui ont été introduites dans la preuve de la formule de Ky Fan.

Les mots

On considère une famille W de mots sur un alphabet fini Σ. On dit que $w \in \mathsf{W}$ est un *k-mot* si $|w| = k+1$. La raison d'un tel choix est que l'on considère les mots un peu comme des simplexes, dont l'ensemble des sommets est Σ, et k, dans "k-mot", fait référence à la dimension du simplexe. En réalité, les k-mots sont des simplexes ordonnés dans la littérature traditionnelle de topologie algébrique.

Soit G un groupe agissant sur l'alphabet Σ par le biais d'actions $(\nu_g)_{g\in G}$. On étend alors ces actions sur les mots : pour $g \in G$, $\nu_g(a_0a_1\ldots a_k) := (\nu_g a_0)(\nu_g a_1)\ldots(\nu_g a_k)$.

Chaînes et cochaînes de mots

Soit H un groupe. On définit l'ensemble des k-chaînes de mots à coefficients dans H, dénoté $C_k(\mathsf{W},H)$, comme l'ensemble des sommes formelles finies de la forme $\sum n_i w_i$, où les n_i sont dans H et les w_i sont des k-mots.

Dans la suite, on identifie les chaînes et les cochaînes naturellement par le produit $\langle .,. \rangle$: tout k-mot w est identifié avec la cochaîne w^* qui prend la valeur 1 sur w et 0 sur les autres k-mots.

Pour obtenir un complexe de chaînes, il reste à définir l'opérateur de bord ∂ pour un mot $w = a_0a_1\ldots a_k \in \mathsf{W}$:

$$\partial a_0 a_1 \dots a_k = \sum_i (-1)^i a_0 \dots \hat{a}_i \dots a_k.$$

On a bien $\partial \circ \partial = 0$. On note δ le cobord, et l'on a alors bien sûr :

$$\delta a_0 a_1 \dots a_k = \sum_{b \in \Sigma} b a_0 a_1 \dots a_k + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{b \in \Sigma} (-1)^{i+1} a_0 a_1 \dots a_i b a_{i+1} \dots a_k$$
$$+ \sum_{b \in \Sigma} (-1)^{k+1} a_0 a_1 \dots a_k b.$$

Du complexe de chaîne simplicial au complexe de chaîne de mots

La technique qui nous permettra de passer d'un complexe de chaînes simplicial à un complexe de chaînes de mots est la suivante.

Soit L un complexe simplicial. Supposons que l'on ait défini $\preceq$ un ordre partiel sur $V(\mathsf{L})$ tel que tout simplexe de L ait ses sommets comparables entre eux et que l'on ait une fonction du type :

$$\phi : v \in V(\mathsf{L}) \mapsto \phi(v) \in \Sigma.$$

On définit alors la fonction de chaîne $\phi_{\#}^{\preceq} : \mathcal{C}(\mathsf{L}, H) \to \mathcal{C}(\mathsf{W}, H)$ pour $\sigma = [v_0, \dots, v_k] \in \mathsf{L}$ avec $v_0 \prec v_1 \prec \dots \prec v_k$ par

$$\phi_{\#}^{\preceq}(\sigma) = \phi(v_0)\phi(v_1)\dots\phi(v_k)$$

Il est alors facile de voir que $\phi_{\#}^{\preceq}$ est une fonction de chaîne : $\phi_{\#}^{\preceq}\partial = \partial\phi_{\#}^{\preceq}$.

Concaténation

On a défini, dans le premier chapitre de la thèse, la concaténation pour les mots. On peut l'étendre pour les chaînes de mots : soit $c = \sum_i n_i a_{0,i} \dots a_{k,i}$ une k-chaîne et $c' = \sum_i' n'_{i'} a'_{0,i'} \dots a'_{k',i'}$ une k'-chaîne ; cc' est alors la $(k+k'+1)$-chaîne $\sum_{i,i'} n_i n'_{i'} a_{0,i} \dots a_{k,i} a'_{0,i'} \dots a'_{k',i'}$.

Actions de groupe sur les chaînes

On peut de même étendre par linéarité les actions de groupe aux chaînes :

pour $g \in G$ et $c_k := \sum_i n_i w_i \in C_k(\mathsf{W}, H)$, on définit $\nu_{g\#} c_k$ par $\sum_i n_i \nu_g w_i$. $\nu_{g\#}$ est une application de chaîne, induisant une application de cochaîne $\nu_g^{\#}$.

Toujours en idéntifiant chaînes et cochaînes, on a :

Observation 3.1 $\nu_g^{\#} = \nu_{-g\#}$.

En effet, pour w' et w deux k-mots, et $g \in G$, on a

$$\langle w', \nu_g w \rangle = \langle \nu_g^{-1} w', w \rangle = \langle \nu_{-g} w', w \rangle.$$

Cas particulier où $\Sigma = \mathbb{Z}_q$ et $H = \mathbb{Z}$

Dans le reste de ce chapitre, nous nous limitons au cas $\Sigma = \mathbb{Z}_q$ et $H = \mathbb{Z}_q$ ou $H = \mathbb{Z}$. H agit sur $\mathbb{Z}_q$: pour $x \in \mathbb{Z}_q$, on pose $\nu_1 x = x+1 \mod q$. Dans toute la suite, ν_1 et $\nu_{1\#}$ sont notés par ν. En particulier, pour $a_0 a_1 \dots a_k$ un k-mot, $\nu(a_0 a_1 \dots a_k) = (a_0+1)(a_1+1)\dots(a_k+1)$ (compté modulo q).

On notera le 0 du groupe H par $\emptyset$, pour éviter les confusions avec le 0 de Σ.

Par exemple, pour $q = 5$, on a $\nu(104) = 210$.

3.4.2 Une formule de Ky Fan généralisée

Dans la formule de Ky Fan précédente (Théorème 3.5), le mot $1010\ldots$ joue un rôle particulier, qui s'appuie sur la propriété :

$$\delta \underbrace{1010\ldots}_{d \text{ termes}} = \nu \underbrace{1010\ldots}_{d+1 \text{ terms}} + \underbrace{1010\ldots}_{d+1 \text{ termes}} .$$

Pour la formule du Théorème 3.6, c'est la propriété :

$$\delta \underbrace{1010\ldots}_{d \text{ termes}} = \nu \underbrace{1010\ldots}_{d+1 \text{ termes}} +(-1)^{d+1} \underbrace{1010\ldots}_{d+1 \text{ termes}} ,$$

qui est utilisée.

Pour généraliser la formule de Ky Fan à plus de deux signes (codés dans ce dernier cas par le 0 et le 1 de $\mathbb{Z}_2$), il faut trouver un mot, ou une famille de mots, qui joue le rôle de $1010\ldots$ pour $\mathbb{Z}_q$. En réalité, il ne semble pas possible de faire autrement que de définir des chaînes de mots : dans la suite, nous définissons récursivement, pour q impair, une suite infinie de chaînes $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$, où $e_k \in C_k(\mathsf{W},\mathbb{Z})$, qui vérifie pour tout entier $l \geq 0$:

1. $\delta e_{2l} = (\nu - \nu^{-1})e_{2l+1}$.
2. $\delta e_{2l+1} = (\mathrm{id} + \nu^1 + \ldots + \nu^{q-1})e_{2l+2}$.

Nous ne sommes pas parvenu à définir une séquence équivalente pour q pair $\neq 2$. Pour les applications considérées, cela n'a pas vraiment d'importance, puisque il suffit de l'avoir pour q premier.

Cette propriété inductive implique alors automatiquement la formule de Ky Fan généralisée suivante :

Proposition 3.1 *Soit* K *un complexe simplicial orienté de dimension* d*, soit* $\preceq$ *l'ordre partiel sur l'ensemble* $\mathbb{Z}_q \times \{1,2,\ldots,m\}$ *(*q *impair) tel que* $(x,y) \preceq (x',y')$ *si* $y \leq y'$ *et soit* $\phi : (x,y) \in \mathbb{Z}_q \times \{1,2,\ldots,m\} \mapsto x \in \mathbb{Z}_q$.

Soit alors $\lambda : V(\mathsf{K}) \to \mathbb{Z}_q \times \{1,2,\ldots,m\}$ *un étiquetage des sommets de* K *tel qu'il n'y ait pas d'arêtes* $\{v_1,v_2\}$ *de* K *ayant un étiquetage* $(s_i,j_i) := \lambda(v_i)$*,* $i = 1,2$ *avec* $j_1 = j_2$ *et* $s_1 \neq s_2$*, et soit* c *la somme formelle de tous les simplexes orientés positivement de* K.

On a pour tout $l \geq 1$ *:*

$$\langle(\nu - \nu^{-1})e_{2l-1}, (\phi_{\#}^{\preceq} \circ \lambda_{\#})(c)\rangle = \langle e_{2l-2}, (\phi_{\#}^{\preceq} \circ \lambda_{\#})(\partial c)\rangle,$$

et

$$\langle(\mathrm{id} + \nu^1 + \ldots + \nu^{q-1})e_{2l}, (\phi_{\#}^{\preceq} \circ \lambda_{\#})(c)\rangle = \langle e_{2l-1}, (\phi_{\#}^{\preceq} \circ \lambda_{\#})(\partial c)\rangle.$$

Démonstration : λ est une $\mathbb{Z}_q$-fonction simpliciale $\mathsf{K} \to \mathbb{Z}_q^{*m}$. On a $\phi_{\#}^{\preceq} \circ \nu = \nu \circ \phi_{\#}^{\preceq}$. Les formules ci-dessus sont alors la traduction directe des propriétés récursives des e_k. ∎

Remarque :

La formule de Ky Fan du Théorème 3.6 peut se mettre sous une forme semblable :

$$\langle(\mathrm{id} + (-1)^{d+1}\nu) \underbrace{1010\ldots}_{d+1 \text{ termes}} , (\phi_{\#}^{\preceq} \circ \lambda_{\#})(c)\rangle = \langle\underbrace{1010\ldots}_{d \text{ termes}}, (\phi_{\#}^{\preceq} \circ \lambda_{\#})(\partial c)\rangle.$$

Pour démontrer cette formule de Ky Fan généralisée, il nous reste donc à construire une séquence $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Construction de la séquence $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$:

On suppose q impair et on pose $q = 2r+1$. On rappelle que l'on veut définir une séquence $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$, où $e_k \in C_k(\mathsf{W},\mathbb{Z})$, avec W l'ensemble des mots sur l'alphabet $\mathbb{Z}_q$.

On pose d'abord :

$$e_0 := 0.$$

$$e_1 := \sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=0}^{j}[(2i+1)(2r-2j+2i)-(2r-2j+2i)(2i+1)].$$

Puis on définit le morphisme $C : C_k(\mathsf{W},\mathbb{Z}) \to C_{k+2}(\mathsf{W},\mathbb{Z})$ par son image sur la base naturelle de $C_k(\mathsf{W},\mathbb{Z})$:

$$C : w = a_0\dots a_k \mapsto a_0\dots a_k(\nu^{a_k}e_1).$$

Pour $k \geq 2$, on définit alors la séquence de la manière suivante :

$$e_k := C(e_{k-2}).$$

Exemples : Pour $q = 3$:
$e_0 = 0$,
$e_1 = 12 - 21$,
$e_2 = 012 - 021$,
$e_3 = 1201 - 1210 - 2120 + 2102$,
$e_4 = 01201 - 01210 - 02120 + 02102$, etc.

Pour $q = 5$:
$e_0 = 0$,
$e_1 = 12 + 34 + 14 - 21 - 43 - 41$,
$e_2 = 012 + 034 + 014 - 021 - 043 - 041$,
$e_3 = 1234 + 1201 + 1231 - 1243 - 1210 - 1213 + 3401 + 3423 + 3403 - 3410 - 3432 - 3430 + 1401 + 1423 + 1403 - 1410 - 1432 - 1430 - 2123 - 2140 - 2120 + 2132 + 2104 + 2102 - 4340 - 4312 - 4342 + 4304 + 4321 + 4324 - 4123 - 4140 - 4120 + 4132 + 4104 + 4102$,
$e_4 = 01234 + 01201 + 01231 - 01243 - 01210 - 01213 + 03401 + 03423 + 03403 - 03410 - 03432 - 03430 + 01401 + 01423 + 01403 - 01410 - 01432 - 01430 - 02123 - 02140 - 02120 + 02132 + 02104 + 02102 - 04340 - 04312 - 04342 + 04304 + 04321 + 04324 - 04123 - 04140 - 04120 + 04132 + 04104 + 04102$, etc.

Propriété 3.1 *On a :*

1. $\delta(2+4+\ldots+(2r)) = (\mathrm{id}-\nu)e_1$.
2. $\delta e_1 = \sum_{j\in\mathbb{Z}_q}\nu^j e_2$.

Démonstration : On démontre d'abord 1. D'après la définition de e_1, si un mot w est tel que $\langle e_1, w\rangle \neq 0$, alors w est de la forme yx ou xy avec x pair, y impair et $0 \leq y < x \leq 2r$. De même, si w est tel que $\langle \nu e_1, w\rangle \neq 0$, alors w est de la forme yx ou xy avec x pair ≥ 2, y impair et $0 \leq x < y \leq 2r$ ou alors w est de la forme $0x$ ou $x0$ avec x pair et $0 < x \leq 2r$.

Par conséquent, si w est tel que $\langle(\mathrm{id}-\nu)e_1, w\rangle \neq 0$, alors w est de la forme xy ou yx avec $x \in X := \{2,4,\ldots,2r\}$ et $y \in Y := \{0\}\cup\{1,3,\ldots,2r-1\}$. Pour $x \in X$ et $y \in Y$, le coefficient de xy dans $(\mathrm{id}-\nu)e_1$ est -1 et celui de yx est $+1$. D'où l'égalité $\delta(2+4+\ldots+(2r)) = (\mathrm{id}-\nu)e_1$.

On appliquant δ de part et d'autre de la relation 1., on obtient : $\delta e_1 = \nu(\delta e_1)$. Ceci implique que δe_1 se met sous la forme $\sum_{j\in\mathbb{Z}_q} \nu^j(0h)$, où $h \in C_2(\mathsf{W},\mathbb{Z})$. Comme les mots apparaissant dans e_1 ne commencent jamais par 0, on obtient $0e_1$ en ne gardant de δe_1 seulement les mots commençant par 0. Donc $h = e_1$, et l'on a bien $\delta e_1 = \sum_{j\in\mathbb{Z}_q} \nu^j e_2$, puisque $e_2 = 0e_1$.

∎

Propriété 3.2 *On a les deux relations de commutation suivantes :*

1. $\nu \circ C = C \circ \nu$.
2. $\delta \circ C = C \circ \delta$.

Démonstration : La première est triviale. La seconde demande un petit calcul : Soit $w = a_0 \dots a_k$ un k-mot. On a

$$\begin{aligned}(\delta \circ C)(w) &= \delta\big(w(\nu^{a_k} e_1)\big) \\ &= (\delta w)(\nu^{a_k} e_1) + (-1)^{k+1} w\delta(\nu^{a_k} e_1) - (-1)^{k+1} \textstyle\sum_{j\in\mathbb{Z}_q} wj(\nu^{a_k} e_1),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(C \circ \delta)(w) &= C(\delta w) \\ &= (\delta w)(\nu^{a_k} e_1) + (-1)^{k+1} \textstyle\sum_{j\in\mathbb{Z}_q} wj(\nu^{j} e_1) - (-1)^{k+1} \textstyle\sum_{j\in\mathbb{Z}_q} wj(\nu^{a_k} e_1).\end{aligned}$$

Par conséquent, $(\delta \circ C)(w) - (C \circ \delta)(w) = (-1)^{k+1} w\delta(\nu^{a_k} e_1) - (-1)^{k+1} \sum_{j\in\mathbb{Z}_q} wj\nu^j e_1$. Or $\delta(\nu^{a_k} e_1) - \sum_{j\in\mathbb{Z}_q} j\nu^j e_1 = \nu^{a_k}(\delta e_1) - \sum_{j\in\mathbb{Z}_q} \nu^j(0e_1) = \emptyset$, d'après 2. de la Propriété 3.1 (on a $e_2 = 0e_1$). D'où $(\delta \circ C)(w) - (C \circ \delta)(w) = \emptyset$. ∎

Propriété 3.3 *Pour l un entier ≥ 0, on a :*

1. $\delta e_{2l} = (\nu - \nu^{-1}) e_{2l+1}$.
2. $\delta e_{2l+1} = (\mathrm{id} + \nu^1 + \ldots + \nu^{q-1}) e_{2l+2}$.

Démonstration : Par récurrence sur l.

Pour $l = 0$, on a $\delta e_0 = (\nu - \nu^{-1}) e_1$: en effet, posons $c := 2 + 4 + \ldots + (2r)$; on a $\delta c = (\mathrm{id} - \nu) e_1$, d'après la Propriété 3.1 ; on a également, $\delta(0 + 1 + \ldots + (2r-1) + (2r)) = \emptyset$ (la vérification est directe) ; par conséquent $\delta 0 + \delta c + \delta\nu^{-1} c = \emptyset$; et donc $\delta 0 = (\nu - \nu^{-1}) e_1$. Le point 1. est démontré pour $l = 0$. Le point 2. pour $l = 0$ n'est rien d'autre que le deuxième point du Lemme 3.1. La Propriété 3.3 est donc démontrée pour $l = 0$.

Supposons la Propriété 3.3 démontrée pour $l \geq 0$. On a alors, d'après la Propriété 3.2 :

$$\delta e_{2l+2} = (\delta \circ C)(e_{2l}) = (C \circ \delta)(e_{2l}) = C\big((\nu - \nu^{-1}) e_{2l+1}\big) = (\nu - \nu^{-1}) e_{2l+3}$$

et

$$\delta e_{2l+3} = (\delta \circ C)(e_{2l+1}) = (C \circ \delta)(e_{2l+1}) = C\big(\sum_{j\in\mathbb{Z}_q} \nu^j e_{2l+2}\big) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_q} \nu^j e_{2l+4}.$$

∎

3.4.3 Une généralisation combinatoire du théorème de Dold

Une application possible de la formule généralisée de Ky Fan est une démonstration et une généralisation combinatoire du théorème de Dold [18], que nous rappelons ci-dessous.

Enoncé du théorème de Dold

Si G est un groupe, et si E et F sont deux ensembles sur lesquels agit G, une *G-application* $E \to F$ est une application qui commute avec les actions de G.

Théorème 3.12 (Théorème de Dold) *Soient* X *et* Y *deux complexes simpliciaux sur lesquels* $\mathbb{Z}_n$ *agit librement*[3]*. Si* $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ *est une* $\mathbb{Z}_n$*-application continue, alors la dimension de* Y *est supérieure ou égale à la connectivité de* $||\mathsf{X}||$.

Dans le cas où $n = 2$, on retrouve le théorème de Borsuk-Ulam. Notre objectif est de donner l'équivalent d'un lemme de Ky Fan (Théorème 3.7) pour $n = q$ impair. Nous ne sommes pas parvenu à trouver un équivalent pour n pair. Cela ne constitue pas une limitation excessive puisque tout groupe (non trivial) contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}_p$ avec p premier. Pour démontrer le théorème de Dold, il suffit de traiter le cas $n = p$ premier.

Le complexe simplicial sur lequel on exprime notre équivalent du lemme de Ky Fan est le complexe simplicial $(\mathbb{Z}_q)^{*(d+1)}$. Sa dimension est d, sa connectivité est égale à $d-1$, et $\mathbb{Z}_q$ agit de manière naturelle sur lui et de manière libre.

Définitions des "hémisphères"

Dans le cas du lemme de Ky Fan, on a besoin de triangulations spéciales antipodales de S^d. Ici, on doit définir un équivalent à ces triangulations ; pour cela, il faut avoir un équivalent des hémisphères de la sphère.

On note $v_{i,j}$ le sommet de $(\mathbb{Z}_q)^{*(d+1)}$ qui est la $i^{\text{ème}}$ copie de $j \in \mathbb{Z}_q$: avec la notation des sommets introduite dans la définition du joint, on a donc $v_{i,j} = (j, i)$.

On définit la séquence d'hémisphères $(\mathsf{H}_k)_{k=0,\dots,d}$. H_k est un sous-complexe de $(\mathbb{Z}_q)^{*(d+1)}$ de dimension k.

On définit d'abord $\mathsf{H}_0 := v_{1,0}$. Le reste se définit par induction pour $k \geq 0$:

$$\mathsf{H}_{2l+1} = v_{2l+2,0} * (\cup_{j \in \mathbb{Z}_j} \nu^j \mathsf{H}_{2l}),$$

et

$$\mathsf{H}_{2l+2} = v_{2l+3,0} * (\nu^{-1}\mathsf{H}_{2l+1} \cup \nu \mathsf{H}_{2l+1}).$$

Les *hémisphères* sont les $\nu^i \mathsf{H}_k$, $i \in \mathbb{Z}_q$, $k \in \{0, 1, \dots, d\}$.

Orientation des hémisphères

Pour tout $k \geq 1$, on oriente les k-simplexes de H_k :

- Les 1-simplexes positifs de H_1 sont les $[v_{2,0}, v_{1,i}]$, avec $i \in \mathbb{Z}_q$.
- Les $(2l+2)$-simplexes positifs de H_{2l+2} sont les $[v_{2l+3,0}, -\nu^{-1}\tau]$ et les $[v_{2l+3,0}, \nu\tau]$, où τ est orienté positivement dans H_{2l+1}.
- Les $(2l+3)$-simplexes positifs de H_{2l+3} sont les $[v_{2l+4,0}, \nu^i\tau]$, avec $i \in \mathbb{Z}_q$ et τ orienté positivement dans H_{2l+2}.
- Un k-simplexe de $\nu^i \mathsf{H}_k$, pour $i \in \mathbb{Z}_q$, a l'orientation du simplexe correspondant dans H_k.

[3] Un groupe agit de manière libre si toute orbite est de même cardinalité que le groupe lui-même. Ici, on demande que $\mathbb{Z}_n$ agisse de manière libre sur $||\mathsf{X}||$.

Lemme de Ky Fan généralisé

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le lemme de Ky Fan généralisé :

Théorème 3.13 (Lemme de Ky Fan généralisé) *Soit q un entier impair et soit X une triangulation de $(\mathbb{Z}_q)^{*(d+1)}$ induisant une triangulation de chaque hémisphère $\nu^i\mathsf{H}_k$, $i \in \mathbb{Z}_q$, $k \in \{0, 1, \ldots, d\}$, et invariante par l'action de $\mathbb{Z}_q$. Si $f : \mathsf{X} \to (\mathbb{Z}_q)^{*(d'+1)}$ est une $\mathbb{Z}_q$-fonction simpliciale, alors il y a un simplexe de X dont l'ensemble des étiquettes est de la forme $\{(b_0, j_0), (b_1, j_1), \ldots, (b_d, j_d)\}$, où b_i est pris dans la $j_i^{\text{ème}}$ copie de $\mathbb{Z}_q$ dans $(\mathbb{Z}_q)^{*(d'+1)}$, $b_{i-1} \neq b_i$ pour tout $i \in [d]$ et où $1 \leq j_0 < j_1 < \ldots < j_d \leq d' + 1$. En particulier, $d' \leq d$.*

Par des techniques standard, pour prouver le théorème de Dold (Théorème 3.12), il suffit de considérer les cas quand $n = p$ est premier, X est la triangulation de $(\mathbb{Z}_p)^{*(d+1)}$ et $\mathsf{Y} := (\mathbb{Z}_p)^{*d}$ (voir par exemple p. 135 [65]). Le Théorème 3.13 implique donc le théorème de Dold, et sa preuve combinatoire, qui suit, en constitue une preuve combinatoire. Notre preuve n'est pas la première preuve de ce type pour le lemme de Dold, puisque on trouve un "$\mathbb{Z}_p$-Tucker's lemma" dans l'article de Ziegler [101]. Cela dit, le Théorème 3.13 est une vraie généralisation du théorème de Dold, et est plus proche d'une preuve constructive puisque elle n'utilise pas de raisonnement par l'absurde, contrairement à la preuve de Ziegler, qui parvient à contourner l'usage des groupes d'homologie, mais ne parvient pas à se débarrasser du raisonnement par l'absurde. Nous revenons sur le $\mathbb{Z}_p$-lemme de Tucker plus bas.

Démonstration du Théorème 3.13 : On considère maintenant X. On en oriente les simplexes : tout simplexe de X reçoit l'orientation de l'hémisphère le contenant.

Notant $h_k \in C_k(\mathsf{X}, \mathbb{Z}_q)$ la somme de tous les k-simplexes positifs de X dans H_k et utilisant $(\sum_{i\in\mathbb{Z}_q} \nu^i) \circ (\nu - \nu^{-1}) = (\nu - \nu^{-1}) \circ (\sum_{i\in\mathbb{Z}_q} \nu^i) = 0$, on a par une induction directe (les coefficients sont pris dans $\mathbb{Z}_q$) :

$$\partial h_{2l+2} = (\nu - \nu^{-1}) h_{2l+1} \tag{3.1}$$

et :

$$\partial h_{2l+1} = \sum_{i\in\mathbb{Z}_q} \nu^i h_{2l}. \tag{3.2}$$

L'ensemble des sommets de $(\mathbb{Z}_q)^{*(d'+1)}$ est l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{Z}_q \times \{1, 2, \ldots, d' + 1\}$ où x appartient à la $y^{\text{ème}}$ copie de $\mathbb{Z}_q$. Tout comme dans la Proposition 3.1, on définit $\preceq$ sur son ensemble de sommet par $(x, y) \preceq (x', y')$ si $y \leq y'$, et soit $\phi : (x, y) \in \mathbb{Z}_q \times \{1, \ldots, m\} \mapsto x \in \mathbb{Z}_q$.

On a par la Proposition 3.1 :

$$\langle (\nu - \nu^{-1}) e_{2l+1}, (\phi_{\#}^{\preceq} \circ \lambda_{\#})(h_{2l+1}) \rangle = \langle e_{2l}, (\phi_{\#}^{\preceq} \circ \lambda_{\#})(\partial h_{2l+1}) \rangle \bmod q.$$

D'où (en utilisant l'équation 3.2),

$$\langle (\nu - \nu^{-1}) e_{2l+1}, (\phi_{\#}^{\preceq} \circ \lambda_{\#})(h_{2l+1}) \rangle = \langle e_{2l}, \sum_{j\in\mathbb{Z}_q} \nu^j (\phi_{\#}^{\preceq} \circ \lambda_{\#})(h_{2l}) \rangle \bmod q.$$

Et (d'après l'Observation 3.1) :

$$\langle (\nu - \nu^{-1}) e_{2l+1}, (\phi_{\#}^{\preceq} \circ \lambda_{\#})(h_{2l+1}) \rangle = \langle \sum_{j\in\mathbb{Z}_q} \nu^j e_{2l}, (\phi_{\#}^{\preceq} \circ \lambda_{\#})(h_{2l}) \rangle \bmod q. \tag{3.3}$$

On a également (toujours par la Proposition 3.1) :

$$\langle(\mathrm{id}+\nu^1+\ldots+\nu^{q-1})e_{2l+2},(\phi_{\#}^{\preceq}\circ\lambda_{\#})(h_{2l+2})\rangle=\langle e_{2l+1},(\phi_{\#}^{\preceq}\circ\lambda_{\#})(\partial h_{2l+2})\rangle \bmod q.$$

Par conséquent, on a l'égalité suivante, en utilisant l'équation 3.1 et l'Observation 3.1 :

$$\langle(\sum_{j\in\mathbb{Z}_q}\nu^j)e_{2l+2},(\phi_{\#}^{\preceq}\circ\lambda_{\#})(h_{2l+2})\rangle=\langle(\nu^{-1}-\nu)e_{2l+1},(\phi_{\#}^{\preceq}\circ\lambda_{\#})h_{2l+1}\rangle \bmod q. \tag{3.4}$$

En combinant l'équation (3.3) avec l'équation (3.4), on obtient par une induction directe :

$$\langle\sum_{j\in\mathbb{Z}_q}\nu^j e_{2l},(\phi_{\#}^{\preceq}\circ\lambda_{\#})(h_{2l})\rangle=(-1)^l \bmod q,$$

ainsi que

$$\langle(\nu-\nu^{-1})e_{2l+1},(\phi_{\#}^{\preceq}\circ\lambda_{\#})(h_{2l+1})\rangle=(-1)^l \bmod q.$$

Comme dans un mot présent dans e_k, deux lettres successives sont toujours différentes, la conclusion suit. ∎

Avec la même preuve, on peut obtenir la généralisation suivante du théorème de Dold, qui, à notre connaissance, est nouvelle :

Théorème 3.14 *Soient* X *et* Y *deux complexes simpliciaux sur lesquels* $\mathbb{Z}_q$ *agit de manière libre, q impair. Si* $f:\mathsf{X}\to\mathsf{Y}$ *est une* $\mathbb{Z}_q$*-application continue, et s'il existe une séquence de k-chaînes de* X *telle que* $(h_k)_{k\in\{0,\ldots,\dim(\mathsf{X})\}}$ *satisfasse les relations (3.1) et (3.2), alors* $\dim(\mathsf{Y})\geq\dim(\mathsf{X})$.

Considérations algorithmiques

Dans le rapport technique [71], nous montrons comment interpréter cette preuve de manière semi-constructive : on exhibe un graphe dont une composante connexe K contient à la fois un sommet connu v (correspondant à un sommet de X) et un sommet qui correspond à un simplexe étiqueté $(b_0,j_0),(b_1,j_1),\ldots,(b_d,j_d)$, où les b_i sont pris dans la $j^{\text{ème}}$ copie de $\mathbb{Z}_q$ dans $(\mathbb{Z}_q)^{*(d'+1)}$, avec $1\leq j_0<j_1<\ldots<j_d\leq d'+1$ et $\langle e_d,b_0b_1\ldots b_d\rangle\neq 0$. On montre qu'en partant de v et en explorant de manière systématique K, on doit forcément trouver un tel sommet. Il n'est pas clair que l'on puisse parler de preuve constructive car le procédé d'exploration d'un graphe n'est pas un procédé glouton.

De plus, nous n'avons pu identifier de classe correspondante à PPA pour ce problème.

Il serait très sans aucun doute très intéressant d'éclaircir ces questions concernant les aspects constructifs et algorithmiques de ces versions combinatoires de théorème de Dold.

3.4.4 Une preuve du $\mathbb{Z}_p$-lemme de Tucker

Nous terminons ce chapitre avec une nouvelle démonstration combinatoire du $\mathbb{Z}_p$-lemme de Tucker, dont il a déjà été fait mention.

Dans l'article [101], Günter Ziegler redémontre des résultats de coloration de graphes et hypergraphes de Kneser (voir Partie 4) de façon purement combinatoire. Pour cela, il formule une version du lemme de Tucker utilisant p signes, avec p premier, version qu'il appelle le $\mathbb{Z}_p$-lemme de Tucker, et qu'il démontre également de manière purement combinatoire.

L'énoncé que donne Ziegler du $\mathbb{Z}_p$-lemme de Tucker est formulé en termes de parties d'un ensemble et les complexes simpliciaux apparaissent comme complexe d'ordre d'un ensemble partiellement ordonné. Nous nous intéressons à la version (équivalente) suivante, où un *p-simplexe complémentaire* est un p-simplexe dont l'image est de la forme $\{(1,k),(2,k),\ldots,(p,k)\}$, où $k\in[m]$.

Théorème 3.15 ($\mathbb{Z}_p$-lemme de Tucker) *Soient $p \geq 2$ un nombre premier et n un entier ≥ 1 et soit $\lambda : V\big((\mathbb{Z}_p)^{*n}\big) \to \mathbb{Z}_p \times [m]$ un $\mathbb{Z}_p$-étiquetage des sommets de $(\mathbb{Z}_p)^{*n}$. Si $m \leq \left\lfloor \frac{n-1}{p-1} \right\rfloor$, alors il y a un p-simplexe complémentaire dans $(\mathbb{Z}_p)^{*n}$.*

La preuve qu'en propose Ziegler cherche à recopier la preuve classique du théorème de Dold utilisant le nombre de Lefschetz (pour une définition précise, voir [75]). Le tour de force de Ziegler est de parvenir à calculer ce nombre sans avoir à recourir aux groupes d'homologie.

Ici, nous proposons une autre preuve combinatoire de ce théorème, utilisant le lemme de Ky Fan généralisé (Théorème 3.7) et qui ne fasse pas appel aux groupes d'homologie. L'un des intérêts de la preuve qui suit est de montrer que l'on peut obtenir de manière combinatoire des versions combinatoires du théorème de Dold pour d'autres comlexes simpliciaux que ceux dans l'énoncé du Théorème 3.13.

Elle s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme 3.1 *Il existe une $\mathbb{Z}_p$-fonction simpliciale $\mathsf{sd}\big(\binom{[p]}{\leq p-1}\big) \to \mathbb{Z}_p^{*(p-1)}$.*

Démonstration : On peut construire une telle fonction ψ de la manière suivante :

- Les sommets de la subdivision barycentrique de $\binom{[p]}{\leq p-1}$ sont les sous-ensembles propres ($\neq [p]$) de $[p]$.
- On prend $A_1 \subset [p], A_2 \subset [p], \ldots$ des représentants des orbites quand $\mathbb{Z}_p$ agit sur les sous-ensembles propres de $[p]$.
- On définit alors arbitrairement, pour tout j, $\psi(A_j)$ comme étant un sommet de $(\mathbb{Z}_p)^{*(p-1)}$ dans la $|A_j|^{\text{ème}}$ copie de $\mathbb{Z}_p$.
- Comme $\mathbb{Z}_p$ agit librement, on peut étendre sur l'ensemble des orbites la définition de ψ de manière à ce que ψ soit bien une $\mathbb{Z}_p$-fonction.

∎

Démonstration du Théorème 3.15 : Supposons qu'il n'y ait pas de p-simplexe complémentaire. Alors λ induit une $\mathbb{Z}_p$-fonction simpliciale $(\mathbb{Z}_p)^{*n} \to \binom{\{0,1,\ldots,p-1\}}{\leq p-1}^{*m}$ ($\mathbb{Z}_p$ agit de manière cyclique sur $\{0, 1, \ldots, p-1\}$).

Soit ψ la fonction simpliciale donnée par le Lemme 3.1. On considère $\psi_\#^{*m} \circ sd_\# \circ \lambda_\#$ qui donne une $\mathbb{Z}_p$-fonction de chaînes $\mathcal{C}\big((\mathbb{Z}_p)^{*n}, \mathbb{Z}_p\big) \to \mathcal{C}\big((\mathbb{Z}_p)^{*m(p-1)}, \mathbb{Z}_p\big)$. Si $m \leq \left\lfloor \frac{n-1}{p-1} \right\rfloor$, alors $m(p-1) < n$, ce qui est impossible pour les mêmes raisons que dans la preuve du Théorème 3.13, en posant $d := n-1$ et $d' := m(p-1)-1$. ∎

3.4.5 Questions finales

On peut se demander, en vue d'application à des théorèmes du type "Dold", ou même simplement par curiosité, quels sont les groupes d'homologie et de cohomologie de $\mathcal{C}(\mathsf{W}, \mathbb{Z})$. Il est vrai, nous l'avons dit, qu'ils correspondent à des simplexes **ordonnés** sur l'ensemble de sommets Σ, et qu'il y a équivalence avec les groupes d'homologie et de cohomologie pour les simplexes **orientés** (voir p.76 et suivantes du livre de Munkres [75]). Mais cette équivalence n'est vraie que pour des dimensions $\leq |\Sigma|$, et ce qui nous intéresse se passe dans des dimensions $\geq |\Sigma|$.

Nous n'avons pas cherché pour le moment à répondre à cette question, mais cela constitue une question ouverte, à explorer dans des recherches futures.

Chapitre 4

Coloration des graphes de Kneser

4.1 Introduction

En 1978, Lovász employait pour la première fois dans l'histoire des mathématiques un théorème profond de topologie algébrique pour démontrer une conjecture purement combinatoire. Dans un article publié en 1978 [60], il employait le théorème de Borsuk-Ulam pour résoudre la conjecture suivante, que Martin Kneser avait formulée à fin d'un exercice, en 1955 :

> Soient k et n deux entiers naturels, $k \leq n$; soient N un ensemble avec n éléments, N_k l'ensemble de toutes les parties à k éléments de N ; soit f une application de N_k dans un ensemble M tel que $f(K_1) \neq f(K_2)$ si l'intersection $K_1 \cap K_2$ est vide ; soient $m(k,n,f)$ le nombre d'éléments de M et $m(k,n) = \min_f(k,n,f)$. Prouver que pour tout k fixé, il y a des nombres $m_0 = m_0(k)$ et $n_0 = n_0(k)$ tels que $m(k,n) = n - m_0$ pour $n \geq n_0$; ici $m_0(k) \geq 2k-2$ et $n_0(k) \geq 2k-1$; les deux inégalités sont probablement des égalités.

Dans la Section 4.2, nous introduisons la thématique des graphes de Kneser. Entre autres, une preuve récente de la conjecture de Kneser (preuve due à Greene [39]), après avoir reformulé la conjecture en termes de coloration de graphes.

Dans le Section 4.3, nous démontrons de manière combinatoire un théorème de Schrijver qui renforce la conjecture de Kneser en remplaçant les parties à k éléments de N_k par des parties à k éléments qui sont *stables* : on pose $N := [n]$, et une partie stable est une partie ne contenant pas deux entiers consécutifs, ni les deux entiers 1 et n. Une telle preuve combinatoire a été trouvée en 2002 par Ziegler [101]. Nous inspirant de sa preuve, ainsi que de la méthode proposée par Ky Fan pour démontrer le lemme de Tucker, nous proposons une preuve combinatoire plus simple et inductive.

Dans la Section 4.4, nous présentons une démonstration partielle d'une conjecture de Johnson, Holroyd et Stahl [44] généralisant d'une autre manière la conjecture de Kneser.

4.2 Les graphes de Kneser

4.2.1 Définition

Soit $\mathcal{H}$ un hypergraphe. $\mathrm{KG}(\mathcal{H})$, le graphe de Kneser associé à $\mathcal{H}$, a pour sommets les hyperarêtes, et a pour arêtes les paires d'hyperarêtes disjointes. Dans le cas particulier où $\mathcal{H} = \binom{[n]}{k}$, où n et k sont deux entiers tels que $n \geq 2k-1$, on note $\mathrm{KG}(n,k) := \mathrm{KG}\left(\binom{[n]}{k}\right)$.

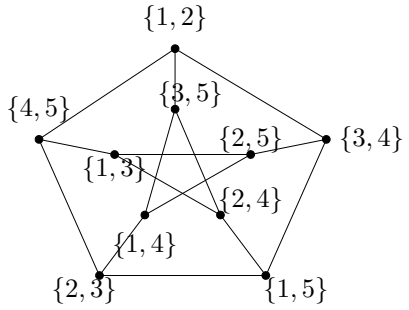

FIG. 4.1 – KG$(5, 2)$ est le graphe de Petersen.

On vérifie par exemple que KG$(5, 2)$ est le graphe de Petersen. KG$(n, 1)$ est le graphe complet à n sommets K_n. KG$(2k-1, k)$ est un graphe sans arête, à $\binom{2k-1}{k}$ sommets. KG$(2k, k)$ est un couplage parfait.

La conjecture de Kneser se reformule alors : $\chi(\mathrm{KG}(n, k)) = n - 2k + 2$. Comme c'est maintenant un théorème, on peut écrire :

Théorème 4.1 (Théorème de Lovász-Kneser) *Pour $n \geq 2k - 1$, on a $\chi(\mathrm{KG}(n, k)) = n - 2k + 2$.*

L'un des principaux intérêts des graphes de Kneser est de fournir une large classe d'exemples de graphes de nombre chromatique et de maille impaire arbitrairement grands. Par exemple, la famille de graphes KG$(2k - 2 + c, k)$ est une famille de graphe à nombre chromatique fixé c, et de maille impaire aussi grande que l'on veut. Les graphes de Kneser forment également une famille pour laquelle l'écart entre le nombre chromatique fractionnaire et le nombre chromatique peut être arbitrairement grand : on a en effet la proposition suivante :

Proposition 4.1

$$\chi_f(\mathrm{KG}(n, k)) = \frac{n}{k}.$$

La démonstration de ce résultat est relativement simple, mais nous l'omettons ici (voir par exemple [65], p.61). Un autre intérêt est la valeur de son nombre chromatique circulaire (voir ci-dessous).

4.2.2 Nombre chromatique

Nous procédons maintenant à la preuve du Théorème 4.1. Kneser avait réussi à montrer la proposition suivante :

Proposition 4.2 *Pour $n \geq 2k - 1$, $\chi(\mathrm{KG}(n, k)) \leq n - 2k + 2$*

en exhibant une coloration de KG(n, k).

Démonstration : Considérons par exemple l'application $c : A \in \binom{[n]}{k} \mapsto \min(\min_{j \in A} j, n - 2k + 2) \in [n - 2k + 2]$. Pour que c soit une coloration, il suffit de vérifier que pour A et B dans $\binom{[n]}{k}$, si $A \cap B = \emptyset$, alors $c(A) \neq c(B)$.

Supposons donc $A \cap B = \emptyset$ et que $c(A) = c(B)$. Posons alors $\alpha = c(A)$. On ne peut avoir $\alpha < n - 2k + 2$, car alors $\alpha \in A$ et $\alpha \in B$ par définition de $c(A)$ et de $c(B)$. Donc $\alpha \geq n - 2k + 2$ et $A \cup B \subseteq \{n - 2k + 2, n - 2k + 3, \ldots, n\}$. Or $|A \cap B| = 0$, ce qui implique $2k = |A| + |B| = |A \cup B| \leq |\{n - 2k + 2, n - 2k + 3, \ldots, n\}| = n - (n - 2k + 2) + 1 = 2k - 1$. Absurde. ∎

Ce phénomène est assez général en théorie de la coloration : il est souvent plus facile de démontrer une borne supérieure sur un nombre chromatique qu'une borne inférieure. Pour trouver une borne supérieure, il suffit en effet d'exhiber une coloration particulière.

L'idée géniale de Lovász a été de faire le lien entre l'impossibilité de plonger $\mathrm{KG}(n, k)$ dans K_{n-2k+2}, par un homomorphisme de graphe et l'impossibilité de plonger S^d dans S^{d-1} par une application antipodale (théorème de Borsuk-Ulam). Nous n'allons pas présenter la preuve de Lovász ici. Elle est longue, très riche, et dépasse largement le cadre de cette thèse. Elle a d'ailleurs été l'origine d'un nouveau champ d'exploration mathématiques, très vivante, qui consiste à étudier les morphismes de graphes d'un point de vue topologique.

A peine Lovász avait-il annoncé sa preuve, que Barany s'en inspirait pour en proposer une autre, beaucoup plus courte, s'appuyant aussi sur le théorème de Borsuk, mais sur une version différente que celle de Lovász puisque Barany utilisa la version 5. du Théorème 3.2 alors que Lovász utilisa la version 3 [7].

En 2002, Greene, encore étudiant, simplifiait encore la preuve de Barany, et c'est elle que nous allons donner ici.

Démonstration(Greene) : Posons $d := n - 2k + 1$. Soit $X \subset S^d$ un ensemble de n points en position générique. En particulier, tout hyperplan passant par l'origine contient au plus d points de X.

On assimile les sommets de $\mathrm{KG}(n, k)$ aux parties à k éléments de X, en identifiant X à $[n]$.

Supposons qu'il existe une coloration de $\mathrm{KG}(n, k)$ n'utilisant que d couleurs. Choisissons alors une telle coloration et définissons alors $A_1, A_2, \ldots A_d \subseteq S^d$ de la manière suivante : $\boldsymbol{x} \in S^d$ appartient à A_i si l'hémisphère ouvert centré en $\boldsymbol{x}$, que nous noterons $H(\boldsymbol{x})$ (formellement $H(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in S^d : \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle > 0\}$), contient une k-partie de X colorée par la couleur i. De plus, on pose : $A_{d+1} := S^d \setminus (\bigcup_{i=1\ldots d} A_i)$. Par construction, les A_i couvrent S^d. $A_1, A_2, \ldots, A_d$ sont ouverts. A_{d+1} est fermé. On peut appliquer 6. du Théorème 3.2 : l'un des A_i, disons A_j, contient une paire de points antipodaux $\boldsymbol{x}_0$ et $-\boldsymbol{x}_0$. Si $j \leq d$, $H(\boldsymbol{x}_0)$ et $H(-\boldsymbol{x}_0)$ contiennent tous deux une k-partie colorée par j. Or $H(\boldsymbol{x}_0)$ et $H(-\boldsymbol{x}_0)$ sont disjoints, donc on devrait avoir deux k-parties disjointes de même couleur j. Impossible. Donc $j = d+1$. Par définition de A_{d+1}, ni $H(\boldsymbol{x}_0)$ ni $H(-\boldsymbol{x}_0)$ ne contiennent de k-partie de X. Il y a donc au moins $n - 2(k - 1) = d + 1$ points de X dans $S^d \setminus (H(\boldsymbol{x}_0) \cup H(-\boldsymbol{x}_0))$, qui sont contenus dans un hyperplan passant par l'origine. Absurde. ∎

Une telle preuve est purement topologique. On peut se demander s'il existe une preuve purement combinatoire du théorème de Lovász-Kneser, et la réponse est oui, comme l'a prouvé Jiri Matousek [64]. Nous ne reproduisons pas la preuve ici, mais des idées en seront reprises dans la suite (pour démontrer le théorème de Schrijver de manière combinatoire, voir section suivante).

4.3 Cas stable

Peu de temps après l'annonce des preuves de Lovász et Barany, Schrijver démontrait un résultat plus fort ([81]), en s'inspirant de la preuve de Barany.

Pour formuler le théorème de Schrijver, il nous faut définir les graphes de Schrijver :

Pour n et k entiers tels que $n \geq 2k$, on considère l'hypergraphe $\mathcal{S}$ dont l'ensemble de sommets est $[n]$ et dont les hyperarêtes sont les k-parties *stables* de $[n]$, i.e. les k-parties A telles que $x, y \in A \subseteq [n]$, $1 < |x - y| < n - 1$ (en plaçant les éléments de $[n]$ sur un cercle dans l'ordre naturel, les hyperarêtes sont les k-parties n'ayant pas d'éléments adjacents). Le *graphe de Schrijver* de paramètres n, k est alors défini $\mathrm{SG}(n, k) := \mathrm{KG}(\mathcal{S})$.

C'est un sous-graphe de $\mathrm{KG}(n, k)$. Alors que $\mathrm{KG}(5, 2)$ est le graphe de Petersen, $\mathrm{SG}(5, 2)$ est le 5-cycle.

Théorème 4.2 (Theorème de Schrijver) *Pour tout $n \geq 2k \geq 0$, on a $\chi(\mathrm{SG}(n, k)) = \chi(\mathrm{KG}(n, k)) = n - 2k + 2$.*

La preuve qu'en propose Schrijver est topologique et ressemble beaucoup à celle de Barany. En 2002, dans l'article [101], Ziegler proposait une démonstration puremement combinatoire de ce théorème, mais assez longue. Nous en proposons une nouvelle, plus courte, qui s'inspire de celle de Ziegler (en particulier dans la définition du complexe simplicial $\Sigma_{n,k}$), mais qui s'appuie sur les idées que Ky Fan utilise pour démontrer de manière inductive le lemme de Tucker.

On introduit d'abord quelques notations : pour un entier positif n, on écrit $\{+, -, 0\}^n$ pour l'ensemble de tous les *sous-ensembles signés* de $[n]$, dont les éléments peuvent être vus comme des paires (X^+, X^-) de parties disjointes de $[n]$. En effet, pour $X \in \{+, -, 0\}^n$, on peut définir $X^+ := \{i \in [n] : X_i = +\}$ et X^- de manière analogue.

Pour les sous-ensembles signés, on utilise l'ordre partiel de la théorie des matroïdes orientés, qui est défini composante par composante par $0 \leq +$ et $0 \leq -$. Par conséquent, on $X \leq Y$ si et seulement si $X^+ \subseteq Y^+$ et $X^- \subseteq Y^-$.

Par $\mathrm{alt}(X)$, on note la longueur de la plus longue sous-séquence alternée de signes non nuls de X. Par exemple : $\mathrm{alt}(+0--+0-) = 4$, alors que $\mathrm{alt}(--++-+0+-) = 5$.

Démonstration du Théorème 4.2 : L'inégalité $\chi(\mathrm{SG}(n, k)) \leq n - 2k + 2$ est une conséquence directe de la Proposition 4.2. Il suffit donc de prouver l'inégalité opposée.

Définissons le complexe simplicial suivant :

$$\Sigma_{n,k} := \Delta\big(\{X \in \{0, -, +\}^n : \mathrm{alt}(X) \geq 2k\}\big).$$

On définit alors deux autres complexes simpliciaux, qui sont des sous-complexes de $\Sigma_{n,k}$:

$$\Sigma^+_{n,k} := \Delta\big(\{X \in \{0, -, +\}^{n-1} \times \{0, +\} : \mathrm{alt}(X) \geq 2k\}\big)$$

et :

$$\Sigma^-_{n,k} := \Delta\big(\{X \in \{0, -, +\}^{n-1} \times \{0, -\} : \mathrm{alt}(X) \geq 2k\}\big).$$

On a alors les propriétés suivantes :

1. $\Sigma^-_{n,k} \cup \Sigma^+_{n,k} = \Sigma_{n,k}$,
2. $\dim(\Sigma_{n,k}) = \dim(\Sigma^-_{n,k}) = \dim(\Sigma^+_{n,k}) = n - 2k$,
3. $\Sigma^-_{n,k}$ et $\Sigma^+_{n,k}$ sont des pseudo-variétés et
4. $\Sigma^-_{n,k} \cap \Sigma^+_{n,k} = \partial\Sigma^-_{n,k} = \partial\Sigma^+_{n,k} = \Delta\big(\{X \in \{0, -, +\}^{n-1} \times \{0\} : \mathrm{alt}(X) \geq 2k\}\big) \cong \Sigma_{n-1,k}$ (par l'isomorphisme consistant à supprimer la $n^{\text{ème}}$ composante de chaque sommet de ces complexes simpliciaux).

Toutes ces propriétés sont évidentes, sauf peut-être la troisième que nous démontrons maintenant.

Il est clair qu'il suffit de montrer que $\Sigma_{n,k}$ est une pseudo-variété. Prenons donc un $(n - 2k - 1)$-simplexe de $\Sigma_{n,k}$. Il est soit de la forme

(i) $X^{2k} \leq X^{2k+1} \leq \ldots \leq X^{i-1} \leq X^{i+1} \leq \ldots \leq X^n$, avec $2k+1 \leq i \leq n-1$, soit de la forme
(ii) $X^{2k+1} \leq \ldots X^n$, soit de la forme
(iii) $X^{2k} \leq \ldots \leq X^{n-1}$,

où X^i est un élément de $V(\Sigma_{n,k})$ ayant exactement i composantes non-nulles.

Dans le cas (i), comme on transforme deux composantes nulles de X^{i-1} en composantes non nulles de X^{i+1}, et qu'on peut le faire dans deux ordres différents, le $(n-2k-1)$-simplexe considéré est dans exactement deux $(n-2k)$-simplexes différents de $\Sigma_{n,k}$.

Dans le cas (ii), soit $\mathrm{alt}(X^{2k+1}) = 2k+1$ et il y a deux $X < X^{2k+1}$ tels que $\mathrm{alt}(X) \geq 2k$, ou alors $\mathrm{alt}(X^{2k+1}) = 2k$ et il y a exactement un j tel que $X_j^{2k+1} = X_{j+1}^{2k+1} \neq 0$, ce qui implique qu'il y a deux $X < X^{2k+1}$ tels que $\mathrm{alt}(X) \geq 2k$. Dans les deux cas, cela signifie que le $(n-2k-1)$-simplexe considéré est dans exactement deux $(n-2k)$-simplexes différents de $\Sigma_{n,k}$.

Dans le cas (iii), soit j l'unique entier tel que $X_j^{n-1} = 0$; il y a exactement deux possibilités pour X_j^n : $X_j^n = -$ ou $X_j^n = +$, et le $(n-2k-1)$-simplexe considéré est dans exactement deux $(n-2k)$-simplexes différents de $\Sigma_{n,k}$.

Nous montrons maintenant que l'on a un "lemme de Ky Fan" pour $\Sigma_{n,k}$ (qui joue le rôle de la sphère dans le théorème de Ky Fan 3.7) :

Fait : *Supposons que les sommets de $\Sigma_{n,k}$ sont étiquetés par des entiers dans l'ensemble $\{-1,+1,-2,+2,-3,+3,\ldots,-d,+d\}$ de façon à ce qu'il n'y ait pas d'arête complémentaire et à ce que pour tout sommet X, $\lambda(-X) = -\lambda(X)$. Alors, il y a un nombre impair de $(n-2k)$-simplexes étiquetés par $n-2k+1$ entiers $+j_1, -j_2, \ldots, (-1)^{n-2k} j_{n-2k+1}$, avec $j_1 < j_2 < \ldots < j_{n-2k+1}$.*

La preuve fonctionne par induction sur n, pour k fixé, selon le même schéma que pour la preuve du lemme de Tucker par la formule de Ky Fan.

Si $n = 2k$: $\Sigma_{2k,k} = \{\{(+,-,+,-,\ldots,+,-)\},\{(-,+,-,+,\ldots,-,+)\}\}$, et la démonstration est directe.

Si $n > 2k$: $\Sigma_{n,k}^+$ est une pseudo-variété (propriété 3). Son bord est $\Sigma_{n-1,k}$ (propriété 4). Par induction et en appliquant le Théorème 3.5, on a, pour $\Sigma_{n,k}^+$:

$$\sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_{n-2k+1} \leq d} \alpha(-j_1, +j_2, \ldots, (-1)^{n-2k+1} j_{n-2k+1}) + \alpha(+j_1, -j_2, \ldots, (-1)^{n-2k} j_{n-2k+1}) \equiv 1 \bmod 2.$$

En notant que le nombre de $(n-2k)$-simplexes de $\Sigma_{n,k}^-$ dont l'étiquetage est de la forme $+j_1, -j_2, \ldots, (-1)^{n-2k} j_{n-2k+1}$ avec $j_1 < j_2 < \ldots < j_{n-2k+1}$ est le nombre de $(n-2k)$-simplexes de $\Sigma_{n,k}^+$ dont l'étiquetage est de la forme $-j_1, +j_2, \ldots, (-1)^{n-2k+1} j_{n-2k+1}$ avec $j_1 < j_2 < \ldots < j_{n-2k+1}$ (par antipodalité), on obtient la conclusion cherchée. Ce qui démontre le Fait.

On applique ce lemme de Ky Fan pour terminer la preuve combinatoire du théorème de Schrijver.

Soit c une coloration de $\mathrm{SG}(n,k)$ avec t couleurs : $c : V(\mathrm{SG}(n,k)) \to [t]$. Notre objectif est de montrer que $t \geq n-2k+2$.

Définissons alors $\lambda : \{+,-,0\}^n \to \{-1,+1,-2,+2,\ldots,-(t-1),+(t-1)\}$ l'étiquetage des sommets de $\Sigma_{n,k}$ par : $\lambda(X^+, X^-)$ est égal à $\pm c(S)$, où S est la k-partie stable de $[n]$ de plus petit $c(S)$ qui soit contenue dans X^+ ou dans X^- (comme $\mathrm{alt}(X) \geq 2k$, X^+ et X^- contiennent l'un et l'autre au moins une k-partie stable et donc le plus petit $c(S)$ est strictement inférieur à t). Le signe indique dans lequel de X^+ ou X^- on a pris S. Par définition d'une coloration, il ne peut y avoir d'arête complémentaire.

On peut donc appliquer le Fait ci-dessus : il y a au moins un $(n-2k)$-simplexe de $\Sigma_{n,k}$ étiqueté par $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_{n-2k+1} \leq t-1$. D'où, $n-2k+1 \leq t-1$. ∎

4.4 Nombre chromatique circulaire

En 1997, Johnson, Holroyd et Stahl publiaient un article [44] où apparaissait la conjecture suivante :

Conjecture 4.1 *Pour tout n et k entiers tels que $n \geq 2k-1$, $\chi_c(\mathrm{KG}(n,k)) = \chi(\mathrm{KG}(n,k))$.*

Nous proposons une solution partielle de cette conjecture (publiée dans [67]) :

Théorème 4.3 *Si n est pair, alors $\chi_c(\mathrm{SG}(n,k)) = \chi_c(\mathrm{KG}(n,k)) = \chi(\mathrm{SG}(n,k)) = \chi(\mathrm{KG}(n,k)) = n-2k+2$.*

Ce théorème a été démontré indépendamment par Simonyi et Tardos ([88]), qui ne connaissaient pas les théorèmes de Ky Fan. A ce jour, la conjecture reste ouverte pour n impair. En revanche, on peut montrer (voir [88]) que pour n impair, $\chi_c(\mathrm{SG}(n,k)) < n-2k+2$.

La démonstration que nous en proposons s'inspire de celle de Schrijver pour les graphes de Schrijver. Il serait tout à fait possible d'en donner une preuve combinatoire, suivant le même schéma que pour le Théorème 4.2.

Dans la preuve du Théorème 4.3 qui va suivre, nous aurons besoin, en plus du théorème de Ky Fan (Théorème 3.9), d'un autre résultat topologique : le lemme de Gale. Dans le libre de Jiri Matousek [65], on peut trouver une version du lemme de Gale qui renforce la version originale, avec une preuve courte utilisant la courbe des moments. Cette nouvelle version a été trouvée par G. Ziegler, dans l'optique de simplifier la preuve du théorème de Schrijver. Nous donnons ce lemme ici sans preuve.

Lemme 4.1 (Lemme de Gale - version de Ziegler) *Pour tout $d \geq 0$, et pour tout $k \geq 1$, il existe un ensemble $X \subset S^d$ de $(2k+d)$ points tel que pour une identification adéquate de X et $[2k+d]$, tout hémisphère ouvert contienne une k-partie stable.*

Rappelons qu'un hémisphère ouvert (introduit dans la preuve de Greene ci-dessus) est déterminé par son "centre" sur S^d : si on note $H(\boldsymbol{x})$ l'hémisphère centré en $\boldsymbol{x}$, on a $H(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in S^d : \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle > 0\}$.

Démonstration du Théorème 4.3 : Soit n un entier positif pair, et soit k un entier positif tel que $n \geq 2k$. Il est suffisant de démontrer que $\chi_c(\mathrm{SG}(n,k)) \geq n-2k+2$, puisque l'inégalité inverse est directe et bien connue $\chi_c(\mathrm{SG}(n,k)) \leq \chi(\mathrm{KG}(n,k)) \leq n-2k+2$.

Soit ϕ une (p,q)-coloration de $\mathrm{SG}(n,k)$. On identifie les n entiers de $[n]$ avec n points de la sphère S^{n-2k} de manière à ce que tout hémisphère ouvert contienne une k-partie stable (voir Lemme 4.1).

On définit p ouverts de S^{n-2k}, $O_1, O_2, \ldots, O_p$, de la manière suivante : $\boldsymbol{x}$ est dans O_i si et seulement si $H(x)$ (l'hémisphère ouvert centré en $\boldsymbol{x}$) contient une k-partie stable de couleur i par ϕ. Il est facile de voir qu'ainsi définis, les O_i sont bien des ouverts de S^{n-2k} et la couvrent effectivement. Pour tout $i \in [p]$, O_i ne peut contenir deux points antipodaux : sinon on aurait deux hémisphères ouverts disjoints, chacun contenant une k-partie stable de couleur i. On peut donc appliquer le théorème de Ky Fan (Théorème 3.9) : il existe des entiers $l_1, l_2, \ldots, l_{n-2k+2}$ tels que $1 \leq l_1 < l_2 < \ldots < l_{n-2k+2} \leq p$ et $O_{l_1} \cap -O_{l_2} \cap O_{l_3} \cap \ldots \cap (-1)^{n-2k+1} O_{l_{n-2k+2}} \neq \emptyset$.

Soit $i \in [n-2k+1]$. $O_{l_i} \cap -O_{l_{i+1}} \neq \emptyset$. Comme pour tout $\boldsymbol{x} \in S^{n-2k}$, on a $H(\boldsymbol{x}) \cap H(-\boldsymbol{x})$, on a deux k-parties stables disjointes, l'une de couleur l_i, l'autre de couleur l_{i+1}. Comme ϕ est une (p,q)-coloration, on a $l_i + q \leq l_{i+1}$.

n étant pair, $n-2k+1$ est impair et l'on a de plus $O_{l_1} \cap O_{l_{n-2k+2}} \neq \emptyset$. Pour les mêmes raisons que précédemment, l_1 et l_{n-2k+2} sont les couleurs de deux k-parties stables disjointes. Par conséquent, on a : $l_{n-2k+2} \leq p-q$.

On peut donc écrire :

$$0 = (l_{n-2k+2} - l_1) + (l_1 - l_2) + (l_2 - l_3) + \ldots + (l_{n-2k+1} - l_{n-2k+2}) \leq (p-q) + (n-2k+1)(-q).$$

Ce qui se réécrit :

$$0 \leq p - (n - 2k + 2)q.$$

Ou, plus clairement :

$$n - 2k + 2 \leq \frac{p}{q}.$$

∎

Chapitre 5

Le problème du collier

5.1 Introduction

Une application, désormais classique, du théorème de Borsuk-Ulam est le théorème du partage du collier. Ce théorème fut prouvé la première fois en 1985 par Goldberg et West [37], par une méthode topologique, assez laborieuse, sans utilisation du théorème de Borsuk-Ulam. En 1986, Alon et West, redémontraient ce théorème, cette fois avec le théorème de Borsuk-Ulam, ce qui racourcit considérablement la preuve [3].

Pour rendre toute la saveur de l'énoncé du théorème, on le précède souvent d'une petite histoire :

Deux voleurs (disons Alice et Bob) dérobent un collier d'une valeur inestimable. Ce collier comporte n perles au total, ces dernières se partageant en t types différents. On suppose qu'il y a un nombre pair, $2a_i$, de perles du type i, et ce pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$. En passant, remarquons que l'on a donc : $2\sum_{i=1}^{t} a_i = n$. Ces perles sont fixées sur une chaînette (ouverte) en or. Voir la Figure 5.1. Les différents types sont codés par les chiffres 1,2,3.

Ne connaissant pas la valeur des différents types de perles, un partage équitable consiste à donner à chacun des voleurs autant de perles de chaque type. Puisque le nombre de perles de chaque type est pair, un tel partage est toujours possible : il suffit de couper la chaînette en chacun des $n-1$ endroits possibles, puis donner à chacun autant de perles de chaque type. Mais la chaînette est en or ! Il est dommage d'avoir à l'abîmer. Ne peut-on pas effectuer moins de coupes ? Si, comme l'indique le théorème de Goldberg et West :

Théorème 5.1 *Un partage équitable du collier entre 2 voleurs du collier (ouvert) à n perles, t types de perles, et $2a_i$ perles du type i pour chaque i, peut être fait en au plus t coupes.*

En 1987, Alon démontrait la généralisation suivante, à l'aide d'une généralisation du théorème de Borsuk-Ulam [1] :

Théorème 5.2 *Un partage équitable du collier entre q voleurs (ouvert) à n perles, t types de perles, et qa_i perles du type i pour chaque i, peut être fait en au plus $t(q-1)$ coupes.*

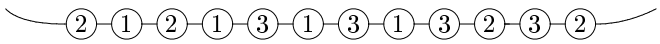

FIG. 5.1 – Un collier ouvert, à 12 perles, de 3 types différents, à partager entre Alice et Bob

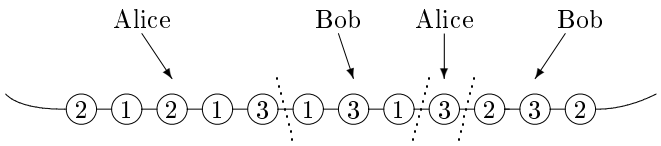

FIG. 5.2 – Un partage équitable entre Alice et Bob.

Pour $q = 2$, on retrouve bien le théorème précédent. De plus, cette borne peut être atteinte, même dans le cas où $a_1 = a_2 = \ldots = a_t = 1$: il suffit de fabriquer un collier où toutes les perles du premier type viennent en premier, puis toutes celles du second type, puis toutes celles du troisième type, etc.

Dans la Section 5.2, nous nous intéressons à des preuves directes de ce résultat, ainsi qu'à des preuves constructives, qui n'utilisent pas d'outils continus. Ces questions sont importantes car leurs résolutions donneraient des méthodes effectives pour calculer ces partages équitables (sur ces questions, voir par exemple [2],[87] et [17]). Pour 2 voleurs, nous sommes en mesure de proposer une telle méthode, s'appuyant sur une preuve constructive de la version cubique du lemme de Ky Fan (Théorème 3.7). Pour plus de 2 voleurs, la question est toujours ouverte. En revanche, même pour 2 voleurs, on ne sait pas s'il existe un algorithme polynomial en n et t qui fournisse un partage équitable entre les deux voleurs (à t fixé, on a bien sûr un algorithme en $O(n^{t-1})$, qui consiste à essayer tous les partages possibles en deux paquets de $n/2$ perles) ; dans [37], Goldberg et West proposent une méthode dichotomique qui permet de se ramener à $O(n^{t-2} \log n)$ si $t \geq 3$, et à $O(n)$ si $t = 2$.

Dans la Section 5.3, résultant d'un travail commun avec A. Sebő, on s'intéresse au problème d'optimisation consistant à chercher à minimiser le nombre de coupes donnant un partage équitable dans le cas où $q = 2$ et les a_i sont tous égaux à 1 (chaque type de perle est donc représenté deux fois sur le collier). Nous montrons que ce problème est NP-difficile (a fortiori, il est donc NP-difficile pour q et les a_i quelconques). Ce problème est lié à un problème intéressant de recherche opérationnelle qui cherche à minimiser le nombre de changements de couleurs de la peinture utilisée sur une chaîne de montage de voiture, problème introduit par Epping, Hochstättler et Oertel [21]. Dans le cas correspondant à $q = 2$, $a_1 = a_2 = \ldots = a_t = 1$ pour le collier, nous donnons une formulation graphique équivalente de ce problème, ce qui permet simplement de montrer qu'il est NP-difficile. Cela est également prouvé dans l'article de Bonsma, Epping et Hochstättler consacré à ce cas particulier [8]. Notre formulation graphique répond à la question posée dans ce dernier papier sur la nature combinatoire de ce problème[1]. Grâce à la machinerie de l'optimisation combinatoire, nous étudions de plus quelques cas particuliers.

5.2 Partager équitablement le collier

Les démonstrations données par Goldberg, West et Alon sont toutes topologiques. Jusqu'à présent, les seules preuves non topologiques connues concernaient le cas facile $t \leq 2$ pour q quelconque (prouvé dans [21]), et le cas $a_1 = a_2 = \ldots = a_t$, pour t et q quelconques (dans [20], ce dernier cas est présentée, sans les détails, comme la conséquence directe d'un résultat d'algèbre linéaire ; nous verrons une preuve encore plus immédiate). Elles sont expliquées ci-dessous. Nous proposons une telle preuve dans le cas $q = 2, t = 3$, ce qui est donc

[1] En langage technique, nous montrons qu'il existe un algorithme combinatoire effectif qui résout le problème dans le cas mengerien (l'algorithme des ellipsoïdes peut être évité). Pour entrer dans le détail des termes employés, voir le livre de Schrijver [83], p. 1397 et suivantes.

une nouveauté. L'existence de cette preuve a probablement des conséquences importantes en théorie des partages équitables (partage du gâteau), en particulier pour l'existence de procédure fournissant des partages équitables exacts (voir par exemple [87] pour des remarques allant dans cette direction). L'existence de preuves non-topologiques pour les autres cas restent ouverts. Peut-être est-il possible d'adapter les idées de ce cas pour la situation plus générale ?

Dans un deuxième temps, nous donnons une preuve constructive et combinatoire dans le cas général pour 2 voleurs, en utilisant une preuve constructive d'un (autre) théorème de Ky Fan (publié dans [24]), semblable au Théorème 3.7, à ceci près que les complexes simpliciaux sont remplacés par des complexes cubiques. Une telle preuve constructive était également inconnue jusqu'à présent. Cela dit, la preuve reste d'inspiration topologique.

Pour notre preuve constructive de ce théorème, nous nous inspirons très largement de la preuve constructive du Théorème 3.7 donnée par Prescott et Su dans [78].

5.2.1 Une preuve directe pour $t \leq 2$ et q quelconque

Si $t = 1$, c'est-à-dire s'il n'y a qu'un seul type de perle, la solution est triviale, il suffit de partager le collier en q morceaux de même taille, ce qui se fait en $q - 1$ coupes (et en temps constant).

Si $t = 2$: cela se démontre par induction sur q. Pour $q = 1$, il n'y a rien à montrer. Supposons donc que $q \geq 2$. On partage le collier en q morceaux de a_1+a_2 perles consécutives ; on imagine le collier ouvert, horizontal ; les perles sont numérotées de 1 à n de gauche à droite.

Si l'un de ces q morceaux contient a_1 perles du type 1 et a_2 perles du type 2, on le retire et on le donne à l'un des voleurs, et par induction, on sait que l'on peut partager équitablement ce qui reste en $2(q-2)$ coupes ; au total, cela fait $2 + 2(q-2) = 2(q-1)$ coupes.

On peut donc supposer qu'il n'y a pas de tel morceau parmi les q morceaux. Parmi ceux-là, il y en a donc au moins un, appelons le M^+, qui a strictement plus de a_1 perles, et un autre, disons M^-, qui en a strictement moins. En translatant le groupe de $a_1 + a_2$ perles du morceau M^- au morceau M^+ en se déplaçant toujours d'exactement une perle, on doit forcément passer par a_1 perles du type 1. On a donc $a_1 + a_2$ perles consécutives que l'on peut donner à l'un des voleurs, et appliquer l'induction sur le reste du collier, ce qui fait comme précédemment : $2 + 2(q-2) = 2(q-1)$ coupes.

La complexité en temps se calcule de la manière suivante : on associe d'abord à chaque perle le nombre de perles de chaque type parmi les $a_1 + a_2$ perles qui la précèdent (elle inclus), ce qui se fait en n opérations : ainsi, lorsqu'on considère un morceau du collier de a_1+a_2 perles, on sait directement combien de perles de chaque type il y a dans ce morceau ; ensuite il faut q opérations pour repérer les valeurs des q morceaux ; la dichotomie entre M^+ et M^- pour trouver une succession de $a_1 + a_2$ perles contenant a_1 perles du type 1 se fait au plus $\log n$ opérations. En tout, une complexité en $O(n + q \log n)$.

5.2.2 Une preuve directe pour le cas $a_1 = a_2 = \ldots = a_t = 1$ et t et q quelconques

On regarde les perles une à une de gauche à droite. On a à tout instant un "voleur courant". A la $k^{\text{ème}}$ perle, on regarde si le voleur courant a déjà une perle de ce type.

Si oui, on prend comme voleur courant un voleur n'ayant pas encore une perle de ce type et on lui donne la perle, avant de passer à la perle suivante.

Si non, on donne la perle au voleur courant, et on passe à la perle suivante.

Cette procédure assure un partage du collier en au plus $t(q-1)$ coupes : en effet, on ne change jamais de voleur courant lorsqu'on rencontre pour la première fois une perle d'un type donné. Changer de voleur courant signifie précisément couper le collier à cet endroit.

Le nombre de coupes est donc inférieur ou égal à n, nombre total de perles, moins t, nombre de premières rencontres d'un type de perles : au total : $n - t = qt - t = t(q-1)$.

De plus, le procédé est glouton, et a comme complexité $O(n)$.

5.2.3 Une preuve directe pour $t = 3$ et $q = 2$

Préliminaires

On identifie le collier avec l'intervalle $[0, n] \subset \mathbb{R}$. Les perles sont numérotées avec les entiers $1, 2, \ldots, n$, de gauche à droite. La $k^{\text{ème}}$ perle occupe uniformément l'intervalle $[k-1, k[$.

Pour $S \subseteq [0, n]$, on note $\phi_i(S)$ la quantité de perles de type i aux positions incluses dans S. Plus précisément, notons $\mathbf{1}_i(u)$ la fonction qui indique s'il y a une perle de type i à l'abscisse u :

$$\mathbf{1}_i(u) = \begin{cases} 1 \text{ si la } \lfloor u \rfloor^{\text{ème}} \text{ perle est de type } i \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On a alors

$$\phi_i(S) := \int_S \mathbf{1}_i(u) du.$$

Preuve

Si couper au milieu induit un partage équitable, il n'y a rien à faire. On peut donc supposer sans perte de généralité que $\phi_1([0, a_1+a_2+a_3]) > a_1$. On appelera cette supposition, la "supposition de départ".

Dans un premier temps, on rassemble le type 2 et le type 3 en un seul type, que l'on appelle le type 2'. On définit donc $\phi_{2'} := \phi_2 + \phi_3$.

Ensuite, on construit un graphe G, dont les sommets sont les triplets (c_1, c_2, c_3), tels que
- c_1, c_2 et c_3 sont des entiers,
- $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq n$,
- $\phi_1([0, c_1] \cup [c_2, c_3]) = a_1$ et $\phi_{2'}([0, c_1] \cup [c_2, c_3]) = a_2 + a_3$.

Deux sommets distincts (c_1, c_2, c_3) et (d_1, d_2, d_3) sont voisins dans ce graphe si $|c_i - d_i| \leq 1$ pour $i = 1, 2, 3$.

Dit autrement, les sommets de G correspondent aux coupes du collier qui donnent autant de perles à chacun, et qui partagent équitablement les perles de type 1. Sans perte de généralité, on peut décider de donner la part $[0, c_1] \cup [c_2, c_3]$ à Alice, et le reste à Bob.

On va montrer que dans G, il y a une chaîne qui relie un sommet donnant plus de perles de type 3 à Alice à un sommet donnant plus de perles de type 3 à Bob. Comme dans G, les partages par rapport au type 1 sont toujours équitables, et que les arêtes ne font varier les quantités de type de perles au plus d'une unité, il existe forcément un sommet de cette chaîne qui correspond à un partage équitable. Pour montrer l'existence d'une telle chaîne, on va regarder les degrés des sommets dans G.

Remarquons que la supposition de départ implique qu'il ne peut y avoir de sommet de la forme $(0, c_2, n)$. Ci-dessous, le premier | représente c_1, le second c_2 et le troisième c_3. Les chiffres de part et d'autre de la $j^{\text{ème}}$ barre | indiquent le type de perle se trouvant juste à gauche ou juste à droite de la coupe d'abscisse c_j. Par exemple :

$$\underbrace{\ldots 1}_{\text{Alice}} \,|\, \underbrace{2' \ldots 2'}_{\text{Bob}} \,|\, \underbrace{1 \ldots 1}_{\text{Alice}} \,|\, \underbrace{2' \ldots}_{\text{Bob}}.$$

Calculons donc le degré d'un sommet (c_1, c_2, c_3). On doit distinguer trois cas :

1. $c_1 = 0$: on ne détaille que quelques sous-cas, la vérification étant toujours directe.

- sous-cas $|1\dots1|1\dots1|1\dots$: le degré d'un tel sommet est égal à 4. En effet, il y a 4 voisins : $|1\dots|11\dots|11\dots$, $|1\dots11|\dots11|\dots$, $1|\dots11|\dots1|1\dots$ et $1|\dots1|1\dots|11\dots$.
- sous-cas $|1\dots1|1\dots1|2'\dots$: le degré d'un tel sommet est égal à 3. En effet, il y a 3 voisins : $|1\dots|11\dots|12'\dots$, $1|\dots11|\dots1|2'\dots$ et $1|\dots1|1\dots|12'\dots$.
- sous-cas $|1\dots1|1\dots2'|1\dots$: le degré d'un tel sommet est égal à 2.
- sous-cas $|1\dots1|2'\dots1|1\dots$: le degré d'un tel sommet est égal à 2.
- sous-cas $|1\dots2'|1\dots1|1\dots$: le degré d'un tel sommet est égal à 3.
- sous-cas $|1\dots1|1\dots2'|2'\dots$: le degré d'un tel sommet est égal à 1.
- sous-cas $|1\dots1|2'\dots1|2'\dots$: le degré d'un tel sommet est égal à 3.
- sous-cas $|1\dots1|2'\dots2'|1\dots$: le degré d'un tel sommet est égal à 0.
- sous-cas $|1\dots2'|1\dots1|2'\dots$: le degré d'un tel sommet est égal à 2.
- sous-cas $|1\dots2'|1\dots2'|1\dots$: le degré d'un tel sommet est égal à 3.
- sous-cas $|1\dots2'|2'\dots1|1\dots$: le degré d'un tel sommet est égal à 1.
- sous-cas $|1\dots2'|2'\dots2'|1\dots$: le degré d'un tel sommet est égal à 1.
- sous-cas $|1\dots2'|2'\dots1|2'\dots$: le degré d'un tel sommet est égal à 2.
- sous-cas $|1\dots2'|1\dots2'|2'\dots$: le degré d'un tel sommet est égal à 2.
- sous-cas $|1\dots1|2'\dots2'|2'\dots$: le degré d'un tel sommet est égal à 1.
- sous-cas $|1\dots2'|2'\dots2'|2'\dots$: le degré d'un tel sommet est égal à 2.

Les autres sous-cas se déduisent en échangeant les rôles de 1 et 2'. On constate que certains sommets sont de degré impair, d'autres de degré pair. Nous avons le Fait important suivant :

Fait : *Il y a un nombre impair de sommets de degré impair tels que* $c_1 = 0$.

En effet, fixons un $\epsilon > 0$ très petit. On vérifie aisément, quoique laborieusement, que le sommets impairs correspondent exactement à la situation où l'un des deux intervalles $[c_2-1, c_3-1+\epsilon]$ et $[c_2, c_3+\epsilon]$ possède une proportion de perles de type 1 strictement plus petite que $\frac{a_1}{a_1+a_2+a_3}$ et l'autre possède une proportion de perles de type 1 strictement plus grande que $\frac{a_1}{a_1+a_2+a_3}$.
Formellement, les sommets impairs correspondent aux cas où les quantités

$$\frac{\phi_1([c_2-1, c_3-1+\epsilon])}{(\phi_1+\phi_{2'})([c_2-1, c_3-1+\epsilon])} - \frac{a_1}{a_1+a_2+a_3}$$

et

$$\frac{\phi_1([c_2, c_3+\epsilon])}{(\phi_1+\phi_{2'})([c_2, c_3+\epsilon])} - \frac{a_1}{a_1+a_2+a_3}$$

sont de signes opposés.
Par exemple, pour le quatrième sous-cas (degré égal à 2), la première et la seconde quantité valent toutes deux

$$\frac{a_1+\epsilon}{a_1+a_2+a_3+\epsilon} - \frac{a_1}{a_1+a_2+a_3}$$

et sont bien toutes deux positives. Dans le cinquième sous-cas (degré égal à 3), la première quantité vaut

$$\frac{a_1-1+\epsilon}{a_1+a_2+a_3+\epsilon} - \frac{a_1}{a_1+a_2+a_3},$$

négative, et la seconde vaut

$$\frac{a_1+\epsilon}{a_1+a_2+a_3+\epsilon} - \frac{a_1}{a_1+a_2+a_3},$$

positive, il y a bien changement de signe.

En utilisant le même raisonnement que dans la sous-section 5.2.1, i.e. en imaginant l'intervalle $[c_2, c_3 + \epsilon]$ se déplacer vers la droite, on voit qu'il y a un nombre impair de telles situations, puisque $\frac{\phi_1([u,v])}{(\phi_1+\phi_{2'})([u,v])} - \frac{a_1}{a_1+a_2+a_3}$ change strictement de signe quand l'intervalle $[u, v]$ se translate de $[0, a_1 + a_2 + a_3 + \epsilon]$ à $[a_1 + a_2 + a_3, n + \epsilon]$ (cela est vrai pour $\epsilon = 0$, d'après la supposition de départ, et donc pour tout $\epsilon > 0$ suffisament petit). Il y a donc un nombre impair de sommets de degré impair pour $c_1 = 0$.

2. $c_3 = n$: se traite exactement comme le cas précédent : Il y a donc un nombre impair de sommets de degré impair pour $c_3 = n$. De plus, on vérifie que l'on a l'équivalence :

$$\deg(0, c_2, c_3) \text{ impair} \Leftrightarrow \deg(c_2, c_3, n) \text{ impair.}$$

3. $c_1 > 0$ et $c_3 < n$: on énumère des sous-cas (en évitant ceux qui se déduisent des autres par symétrie, ou échange de 1 et 2') : on n'explicite que quelques sous-cas, la vérification étant toujours directe :
   - sous-cas $\ldots 1|1\ldots 1|1\ldots 1|1\ldots$: degré égal à 6.
   - sous-cas $\ldots 1|1\ldots 1|1\ldots 1|2'\ldots$: degré égal à 4.
   - sous-cas $\ldots 1|1\ldots 1|1\ldots 2'|1\ldots$: degré égal à 4.
   - sous-cas $\ldots 1|1\ldots 1|1\ldots 2'|2'\ldots$: degré égal à 2. En effet, il y a exactement 2 voisins : $\ldots 11|\ldots 11|\ldots 2'|2'\ldots$ et $\ldots|11\ldots|11\ldots 2'|2'\ldots$.
   - sous-cas $\ldots 1|1\ldots 1|2'\ldots 2'|1\ldots$: degré égal à 2.
   - sous-cas $\ldots 1|1\ldots 2'|1\ldots 1|2'\ldots$: degré égal à 2.
   - sous-cas $\ldots 1|1\ldots 1|2'\ldots 2'|2'\ldots$: degré égal à 2. En effet, il y a exactement 2 voisins : $\ldots 1|1\ldots 12'|\ldots 2'2'|\ldots$ et $\ldots|11\ldots|12'\ldots 2'|2'\ldots$.
   - sous-cas $\ldots 1|1\ldots 2'|2'\ldots 2'|2'\ldots$: degré égal à 2.
   - sous-cas $\ldots 1|2'\ldots 2'|1\ldots 1|2'\ldots$: degré égal à 0.
   - sous-cas $\ldots 1|2'\ldots 1|2'\ldots 2'|1\ldots$: degré égal à 4.

   Les degrés des sommets de ce type sont donc tous pairs.

Considérons maintenant A l'ensemble des sommets de degré impair pour lesquels $\phi_3([0, c_1] \cup [c_2, c_3]) < a_3$ et B l'ensemble des sommets de degré impair pour lesquels $\phi_3([0, c_1] \cup [c_2, c_3]) > a_3$. D'après l'étude qui précède, ces sommets sont forcément tels que $c_1 = 0$ ou que $c_3 = n$. Nous avons signalé le fait que $(0, c_2, c_3)$ est un sommet de degré impair si et seulement si (c_2, c_3, n) en est également un, et si l'un de ces deux sommets appartient à A, l'autre appartient à B (et réciproquement). On a donc $|A| = |B|$ impair, ce qui implique qu'il y a une chaîne dans G qui relie un sommet de A à un sommet de B. Sur ce chemin, forcément on doit avoir à un moment $\phi_1 = a_1$, $\phi_2 = a_2$ et $\phi_3 = a_3$, puisque ϕ_1 et $\phi_{2'} = \phi_2 + \phi_3$ sont constants sur G. ∎

Conclusion

Illustrons cette preuve sur l'exemple de la Figure 5.1.

Le graphe G est illustré sur la Figure 5.3. On a une chaîne (et même plusieurs) reliant le sommet $(0, 4, 10)$, qui donne plus de perles de types 3 à Alice, au sommet $(4, 10, 12)$, qui donne plus de perles de type 3 à Bob. Sur cette chaîne, on trouve le sommet $(2, 6, 10)$ qui fournit un partage équitable.

En revanche, il n'est pas certain que l'on puisse facilement tirer un algorithme efficace de cette preuve : la complexité de la méthode présentée ci-dessus n'est pas claire.

D'autre part, la méthode est clairement laborieuse. Peut-on la simplifier ?

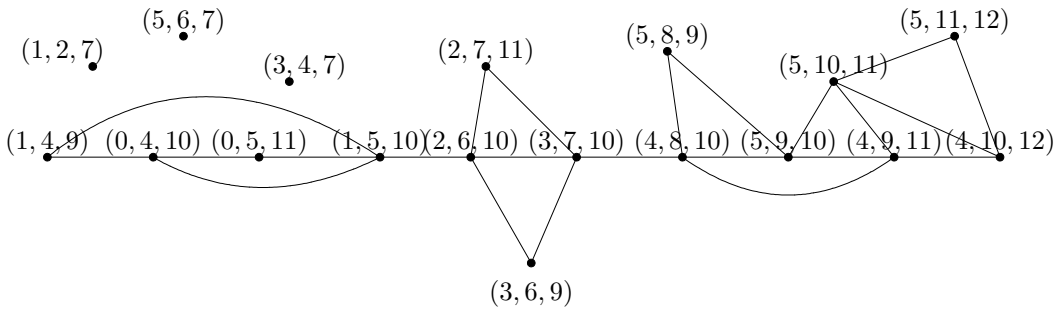

FIG. 5.3 – Le graphe G de la preuve directe pour $t = 3$, $q = 2$.

5.2.4 Lemme de Ky Fan cubique et preuve constructive pour deux voleurs

Préliminaires

Nous donnons maintenant une preuve constructive et combinatoire du Théorème 5.1. On pourrait se dire qu'une telle preuve se déduit facilement de la preuve constructive du lemme de Tucker : puisque le théorème se prouve avec le théorème de Borsuk, et que le théorème de Borsuk se montre de manière constructive avec le lemme de Tucker, on devrait en déduire une preuve constructive du Théorème 5.1. On peut effectivement le faire (voir [87]), mais le résultat obtenu n'est pas satisfaisant : il faut expliciter une triangulation de la sphère S^t de diamètre inférieur à $1/n$. Comment construire en pratique une telle triangulation ? La question de l'existence d'un algorithme effectif pour le partage du collier entre deux voleurs est considérée comme étant toujours ouverte (voir par exemple [17]). La méthode que nous présentons ci-dessous répond à cette question. Elle s'appuie sur une version cubique du Théorème 3.7, le lemme de Ky Fan cubique (Corollaire 5.3), dont on donne ci-dessous une preuve constructive. Le complexe cubique dont on a besoin est totalement naturel.

Avant de donner le théorème de Ky Fan, quelques notations s'imposent.

On note C^d le complexe cubique qui est l'union du cube $\square^d = [-1, 1]^d$ et de ses facettes.

Etant donnés k entiers distincts $i_1, i_2, \ldots, i_k$ entre 1 et m, et k nombres $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_k$, chacun valant soit -1, soit $+1$, on note

$$F\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_k \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & \ldots & \epsilon_k \end{pmatrix} := \{(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \square^d : x_{i_j} = \epsilon_j \text{ pour } j \in [k]\},$$

qui est une $(d-k)$-facette de $\square^d$.

On munit $\partial\square^d$ d'*hémisphères*. Ces hémisphères sont notés H_0, $-H_0$, H_1, $-H_1$, ..., H_{d-1}, $-H_{d-1}$. H_i (resp. $-H_i$) est l'ensemble des points $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ de $\partial\square^d$ tels que $x_{i+1} \geq 0$ (resp. $x_{i+1} \leq 0$), et tels que, si $i \leq d-2$, $x_j = 0$ pour $j > i+1$ (voir illustration Figure 5.4 pour $t = 2$).

Observation 5.1 *Pour $i \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$, H_i est homéomorphe à la boule B^i, $H_i \cup -H_i$ est homéomorphe à la sphère S^i et $H_{d-1} \cup -H_{d-1} = \partial\square^d$.*

Supposons que l'on ait une application cubique λ d'une pseudo-variété cubique M de dimension n dans le complexe cubique C^m.

On note $\alpha\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{m-n} \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & \dots & \epsilon_{m-n} \end{pmatrix}$ le nombre de n-cubes de M dont l'image par λ est $F\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{m-n} \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & \dots & \epsilon_{m-n} \end{pmatrix}$, et $\beta\begin{pmatrix} i_0 & i_1 & i_2 & \dots & i_{m-n} \\ \epsilon_0 & \epsilon_1 & \epsilon_2 & \dots & \epsilon_{m-n} \end{pmatrix}$ le nombre de n-cubes de M dont l'image par λ est $F\begin{pmatrix} i_0 & i_1 & i_2 & \dots & i_{m-n} \\ \epsilon_0 & \epsilon_1 & \epsilon_2 & \dots & \epsilon_{m-n} \end{pmatrix}$.

Théorème 5.3 (Formule de Ky Fan cubique) *Pour tout famille $i_0, i_1, \dots, i_{m-n}$ de $m-n+1$ entiers distincts de $[m]$, et pour $\eta = -1$ ou 1, on a :*

$$\sum_{\epsilon_1,\dots,\epsilon_{m-n}=-1,+1} \alpha\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{m-n} \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & \dots & \epsilon_{m-n} \end{pmatrix} = \sum_{\epsilon_1,\dots,\epsilon_{m-n}=-1,+1} \beta\begin{pmatrix} i_0 & i_1 & i_2 & \dots & i_{m-n} \\ \eta & \epsilon_1 & \epsilon_2 & \dots & \epsilon_{m-n} \end{pmatrix} \bmod 2.$$

On notant ∂ et δ le bord et le cobord des complexes cubiques, ce théorème est une conséquence directe de l'égalité triviale :

$$\sum_{j=0}^{m-n} F\begin{pmatrix} i_0 & i_1 & \dots & \hat{i}_j & \dots & i_{m-n} \\ \eta & \epsilon_1 & \dots & \hat{\epsilon}_j & \dots & \epsilon_{m-n} \end{pmatrix} = \delta F\begin{pmatrix} i_0 & i_1 & i_2 & \dots & i_{m-n} \\ \eta & \epsilon_1 & \epsilon_2 & \dots & \epsilon_{m-n} \end{pmatrix} \bmod 2,$$

en sommant de part et d'autre par $\sum_{\epsilon_1,\dots,\epsilon_{m-n}=-1,+1}$.

Nous utiliserons le corollaire suivant, dont on donne ci-après une preuve constructive :

Corollaire 5.1 (Lemme de Ky Fan cubique) *Soit M la pseudo-variété cubique sans bord obtenue en subdivisant $\partial\mathsf{C}^{t+1}$ par les hyperplans d'équation $x_i = \frac{j}{n+1}$ où $i \in [t]$ et $j \in \{-n, -n+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n-1, n\}$. Soit λ une application cubique de M dans C^m, avec $m \geq t$. Si λ est antipodale (i.e. si $\lambda(-x) = -\lambda(x)$), alors on a :*

$$\sum_{\epsilon_2,\dots,\epsilon_{m-t}=-1,+1} \alpha\begin{pmatrix} t+1 & t+2 & \dots & m \\ +1 & \epsilon_2 & \dots & \epsilon_{m-t} \end{pmatrix} = 1 \bmod 2.$$

Démonstration constructive (et auto-suffisante) du lemme de Ky Fan cubique

Comme nous l'avons déjà indiqué, nous nous inspirons très largement de la preuve présentée dans [78].

– Un d-cube de M est dit *complet* si son image par λ est de la forme

$$F\begin{pmatrix} d+1 & d+2 & \dots & m \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & \dots & \epsilon_{m-d} \end{pmatrix}.$$

– Un d-cube de M est dit *presque complet* si son image par λ est de la forme

$$F\begin{pmatrix} d & \dots & \hat{j} & \dots & m \\ \epsilon_1 & \dots & \hat{\epsilon}_{j-d+1} & \dots & \epsilon_{m-d} \end{pmatrix}$$

ou de la forme

$$F\begin{pmatrix} d & d+1 & \dots & m \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & \dots & \epsilon_{m-d-1} \end{pmatrix}.$$

Le *signe* d'un d-cube complet ou presque complet est ϵ_1 dans les expressions ci-dessus.

Un d-cube est dit *agréable* si son signe est celui de son hémisphère support.

On définit le graphe G suivant. Un cube σ de support $\pm H_d$ est un nœud de G si l'on est dans une des situations suivantes :

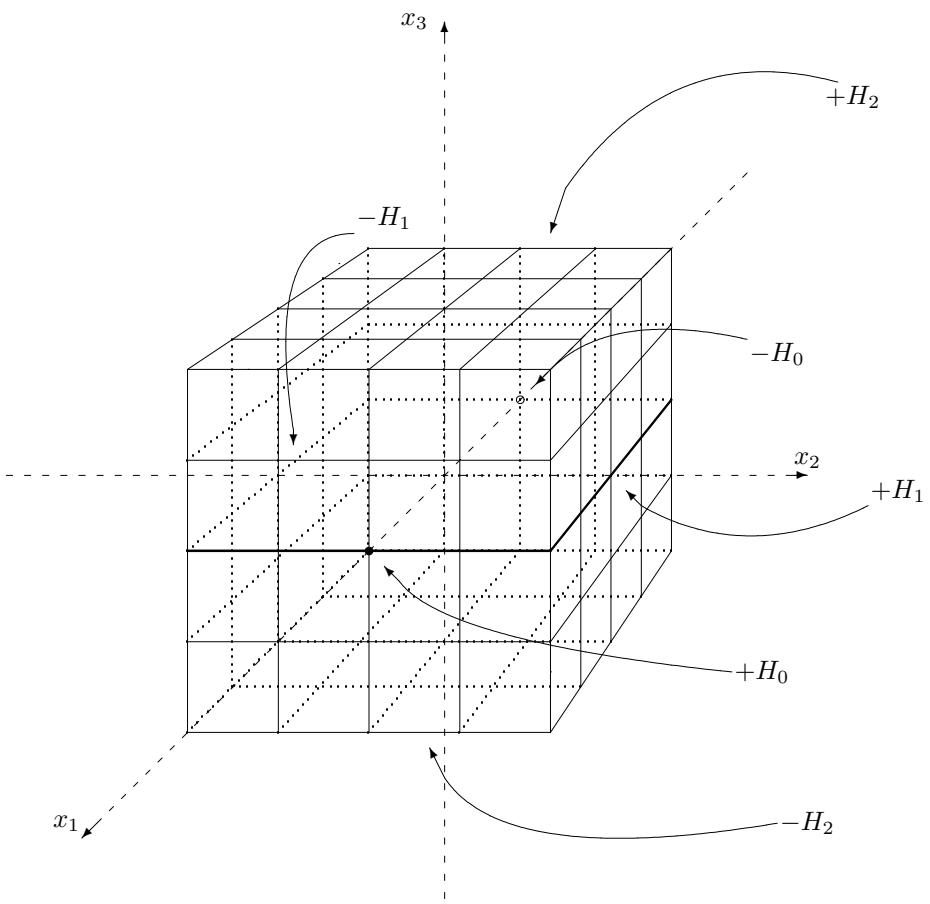

FIG. 5.4 – Une illustration de M pour $n = 2$ et $t = 2$

(1) σ est un agréable $(d-1)$-cube complet,
(2) σ est un agréable d-cube presque complet, ou
(3) σ est un d-cube complet.

Deux nœuds σ et τ sont adjacents dans G si les trois conditions suivantes sont simultanément satisfaites :

(a) l'un est une face de l'autre,
(b) $\sigma \cap \tau$ est complet, et
(c) le signe de l'hémisphère support de $\sigma \cup \tau$ et le signe de $\sigma \cap \tau$ sont identiques.

Nous affirmons que G est un graphe dont chaque sommet est de degré 1,2 ou 4. De plus, un sommet est de degré 1 si et seulement si il est d'hémisphère support H_0, ou s'il correspond à un t-cube complet. En utilisant l'antipodalité, on peut montrer que le point H_0 est forcément relié par une chaîne dans G à un t-cube complet. Pour voir pourquoi, nous considérons les trois sortes de nœuds de G :

(1) Un agréable $(d-1)$-cube complet σ, porté par $\pm H_d$, est une face d'exactement deux d-cubes, chacun d'eux étant complet ou agréable presque complet, de même hémisphère support. Cela satisfait les conditions d'adjacence (a)-(c) pour σ, et donc σ est de degré 2 dans G.

(2) Un agréable d-cube presque complet d'hémisphère support $\pm H_d$ est adjacent dans G à ses deux ou quatres faces qui sont d'agréables $(d-1)$-cubes complets [2]. (La condition d'adjacence (c) est satisfaite parce que σ est agréable et un d-cube presque agréable a le même signe que ses faces complètes).

(3) Un d-cube complet de support $\pm H_d$ a une face τ complète dont le signe est le même que celui de l'hémisphère support de σ. Par conséquent σ est adjacent à τ dans G.

D'autre part, σ est la face d'exactement deux $(d+1)$-cubes : l'un dans H_{d+1} et l'autre dans $-H_{d+1}$, mais σ est adjacent dans G à uniquement l'un des deux : celui dont le signe est déterminé par le signe de σ, puisque la condition d'adjacence (c) doit être satisfaite.

En résumé, σ est de degré 2 ou 4 dans G sauf si $d = 0$ ou $d = t$: si $d = 0$, σ est le point $\pm H_0$ et il n'a acune face, et donc σ est de degré 1 ; et si $d = t$, alors σ n'est la face d'aucun autre cube, et donc est de degré 1.

On construit un nouveau graphe G' à partir de G : on remplace tout n{œud v de degré 4 par deux nœuds v' et v'' tous deux de degré 2, et on remplace les 4 arêtes par deux arêtes reliant v' à deux faces complètes opposées, et par deux autres arêtes reliant v'' aux deux autres faces complètes.

Tout nœud dans G' est de degré 2 sauf les points $\pm H_0$ et les t-cubes complets. Par conséquent, G' consiste en une collection de chaînes et de cycles disjoints avec des extrémités en $\pm H_0$ ou dans la dimension maximale.

Notons que l'image antipodale d'une chaîne de G' est encore une chaîne G'. Aucune chaîne ne peut avoir des extrémités antipodales, sinon, elle devrait être sa propre antipodale, et posséder un nœud ou une arête qui devrait être antipodale. Par conséquent, en commençant une chaîne en H_0, on ne peut terminer en $-H_0$, mais en un t-cube complet. ∎

Le procédé est illustré sur la Figure 5.6.

Partager le collier entre Alice et Bob

On en déduit alors aisément le théorème d'Alon pour $q = 2$, en posant $m = t$: soit un sommet $\boldsymbol{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_{t+1})$ de M. On ordonne les x_i dans l'ordre croissant de leur valeur absolue. Lorsque $|x_i| = |x_{i'}|$, on place x_i avant $x_{i'}$ si $i < i'$. Cela donne une permutation π :

[2] d'après une propriété classique des fonctions cubiques.

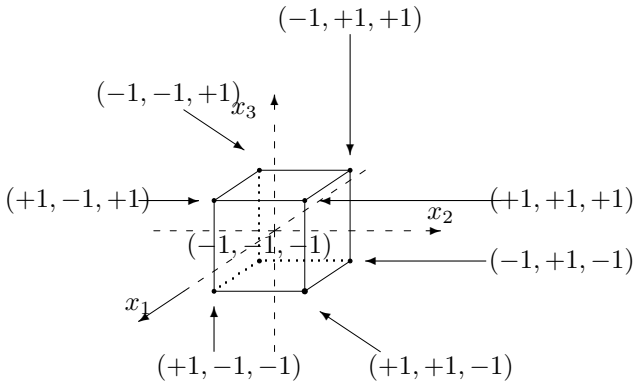

FIG. 5.5 –

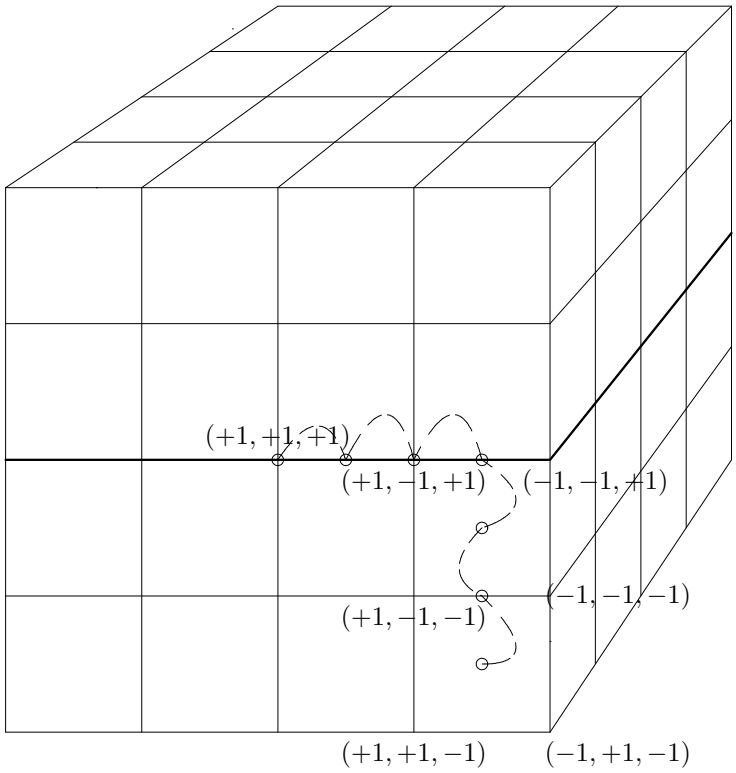

FIG. 5.6 – Illustration de la preuve constructive du Corollaire 5.1. Les triplets indiquent l'étiquette correspondant sur le cube image de la Figure 5.5

$$|x_{\pi(1)}| \leq |x_{\pi(2)}| \leq \ldots \leq |x_{\pi(t+1)}|.$$

Soit alors $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t) : \mathsf{M} \to \mathsf{C}^t$ définie de la manière suivante : on coupe le collier aux abscisses $n|x_i|$ (il y en a au plus t qui sont différentes de 1 en valeur absolue). En convenant que $x_{\pi(0)} := 0$ et que signe$(0) := 0$, on pose

$$\lambda_i(x) := \begin{cases} +1 \text{ si } \sum_{j=0}^{t} \text{signe}(x_{\epsilon(j)})\phi_i\big([n|x_{\pi(j)}|, n|x_{\pi(j+1)}|]\big) > 0 \\ -1 \text{ sinon,} \end{cases}$$

pour $i = 1, 2, \ldots, t$, où $\epsilon(j)$ est le plus petit entier k tel que $|x_k| \geq |x_{\pi(j+1)}|$. Cette formule s'interprète de la manière suivante : λ_i vaut $+1$ (resp. -1) si le premier voleur reçoit strictement plus (resp. strictement moins) de perles de type i que le second, lorsqu'on coupe aux abscisses $n|x_j|$, et que le signe de x_k indique à qui revient la $(j+1)^{\text{ème}}$ part, où k est le plus petit indice tel que $|x_k|$ est plus grand que l'abscisse de tout point de la part.

Cette définition convient presque : lorsque $\sum_{j=0}^{t} \text{signe}(x_{\epsilon(j)})\phi_i([n|x_{\pi(j)}|, n|x_{\pi(j+1)}|]) = 0$, il y a tout de même un problème : $\lambda_i(x) = \lambda_i(-x) = -1$; l'antipodalité n'est pas respectée.

On perturbe alors légèrement les poids des perles pour éviter ce phénomène de façon que lorsqu'on coupe aux coordonnées entières, il n'y ait pas de partage équitable pour tout type de perle.

λ est une fonstion cubique. En appliquant le Corollaire 5.1 précédent, on voit qu'il existe un t-cube dont l'image par λ est le cube C^t. Il est alors facile de voir que l'un des sommets de ce t-cube correspond à un partage équitable.

La preuve constructive que l'on a donnée précédemment pour le Corollaire 5.1 s'adapte parfaitement pour construire une solution au problème du partage du collier. Le complexe cubique est naturel dans ce contexte : un k-cube ($k \leq t$) correspond précisément aux choix de k perles, et le fait qu'un cube soit complet s'interprète facilement en termes des perles. On a donc une preuve constructive, qui de plus indique que le problème du collier pour 2 voleurs est dans PPA.

Cela dit, la chaîne que l'on suit dans G peut être de taille $O(n^t)$. Nous n'avons donc d'algorithme polynomial que pour t fixé. La question de l'existence d'un algorithme polynomial pour le partage du collier, même pour deux voleurs, est toujours ouverte. Dit autrement, on ne sait pas si le problème du collier est dans FP.

Et s'il y a plus de deux voleurs

Un point d'attaque pour trouver une démonstration combinatoire du cas $q \geq 3$ pourrait de remplacer les cubes par des cellules de la forme $\Pi_{k=1}^{N}\{(\omega^j, t) : j = 0, 1, \ldots, q-1,\ t \in [0, n]\}$, où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{q}}$. Ce sera l'objet de recherches ultérieures à la thèse.

5.3 Optimiser le partage : l'atelier de peinture

5.3.1 Description du problème

Dans [21], T. Epping, W. Hochstättler et P. Oertel ont introduit le problème suivant. L'origine du modèle se situe dans le contexte de la production industrielle de voitures, sur chaîne de montage.

Supposons donnée une séquence de voitures, où des répétitions sont possibles, et pour chaque voiture, un multi-ensemble de couleurs où la somme des multiplicités est égale au nombre d'occurences de la voiture dans la séquence. Le problème consiste à décider la couleur attribuée à chaque occurence de voiture, de manière à ce que chaque couleur apparaisse avec la multiplicité qui lui a été assignée. L'objectif est de minimiser les changements de couleur

dans la séquence. Si les voitures sont assimilées à des lettres dans un alphabet, on peut formaliser le problème de la manière suivante :

Problème 1 (Problème de l'atelier de peinture - PAP) *Etant donné un alphabet fini* Σ*, un mot* $w = w_1 w_2 \dots w_n \in \Sigma^*$*, un ensemble de couleurs* F*, et une coloration* $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ *de* w *avec* $f_i \in F$ *pour* $i = 1, 2, \dots, n$*, trouver une permutation* π *de* $[n]$ *telle que* $w_{\pi(i)} = w_i$ *pour* $i = 1, 2, \dots, n$*, et telle que le nombre de changements de couleur dans* $\pi(f) = (f_{\pi(1)}, f_{\pi(2)}, \dots, f_{\pi(n)})$ *est le plus petit possible.*

Le problème PAP restreint aux instances où le nombre de couleurs est c, chaque couleur apparaissant k fois avec chaque lettre, et par conséquent chaque lettre apparaissant ck fois dans le mot donné, est dénoté PAP(c, k). De telles instances sont appelées k-régulières.

On dit qu'il y a changement de couleur chaque fois que $f_{\pi(i)} \neq f_{\pi(i+1)}$. On notera $\gamma = \gamma(w; f)$ le nombre minimum de changements de couleur.

Dans [21], les auteurs résolvent le problème avec un algorithme de programmation dynamique qui peut être implémenté avec une complexité en temps et en espace de l'ordre de $O(|F| n^{(|F|-1)|\Sigma|})$, et ils prouvent que le problème est NP-difficile si le nombre de couleurs ou si le nombre de lettres (types de voiture) est non borné.

Ils formulent également deux conjectures : la Conjecture 5.1 ci-dessous, ainsi que son cas particulier pour $c = 2$ et $k = 1$:

Conjecture 5.1 *Pour toute instance de* PAP(c, k)*, on a* $\gamma \leq |\Sigma|(c-1)$*, indépendamment de* k*.*

Cette conjecture n'en est pas une, puisque c'est en fait un cas particulier du Théorème 5.2, lorsque $t = |\Sigma|$, $q = c$, $a_1 = a_2 = \dots = a_t = k$.

Enfin, ils posent la question de la complexité de PAP$(2, 1)$. PAP$(2, 1)$ joue un rôle particulier dans plusieurs interprétations naturelles de problèmes "pratiques", et génère un nouveau problème d'optimisation tout à fait intéressant : par exemple, peindre un ensemble de cartes, avec deux couleurs, une couleur pour chaque face, lorsque les cartes arrivent sous la forme d'une séquence ordonnée où chacune d'elles apparaît exactement deux fois. Minimiser le nombre de changements de couleur.

L'objet de cette section est de montrer que ce problème est NP-difficile. Ce résultat a été obtenu indépendamment de nous par P. Bonsma, T. Epping et W. Hochstättler [8], mais contrairement à leur approche, notre preuve est courte et permet d'avoir un résultat structurel fort sur PAP$(2, 1)$: PAP$(2, 1)$ est, en gros, équivalent au problème de la couverture impaire des cycles d'un graphe 4-régulier.

Nous débutons l'étude par quelques rappels sur les hypergraphes binaires, qui y jouent un rôle important.

5.3.2 PAP$(2, 1)$, intervalles et hypergraphes binaires

Rappels sur les hypergraphes binaires

Un hypergraphe $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ est *binaire* si pour tout s impair et pour tous $E_1, E_2, \dots, E_s \in \mathcal{E}$, il existe $E \in \mathcal{E}$ telle que $E \subseteq E_1 \triangle \dots \triangle E_s$.

On a la proposition suivante, fondamentale dans l'étude des hypergraphes binaires :

Proposition 5.1 *Le bloquant* $b(\mathcal{H})$ *d'un hypergraphe binaire* $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ *est la collection de tous les ensembles* F *minimaux pour l'inclusion qui satisfont* $|F \cap E|$ *impair pour tout* $E \in \mathcal{E}$*.*

Démonstration : Si $|F \cap E|$ est impair pour tout $E \in \mathcal{E}$, alors F est une couverture de $\mathcal{H}$, et donc contient un ensemble de $b(\mathcal{H})$. Réciproquement, si $F \in b(\mathcal{H})$, alors $|F \cap E|$ est impair pour tout $E \in \mathcal{E}$. En effet, supposons que $|F \cap E|$ soit pair. Comme F est une couverture minimale, pour tout $v \in F \cap E$, il existe une hyperarête $E_v \in \mathcal{E}$ telle que $F \cap E_v = \{v\}$ (sinon, on pourrait enlever v à F). Comme $\mathcal{H}$ est un hypergraphe binaire,

$$E \triangle (\triangle_{v \in F \cap E} E_v)$$

contient une hyperarête $E' \in \mathcal{H}$. Or E' est alors telle que $F \cap E' = \emptyset$. Absurde. ∎

Si $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ est un hypergraphe, $B(\mathcal{H})$ est l'hypergraphe binaire *engendré par* $\mathcal{H}$:

$$B(\mathcal{H}) := \{E_1 \triangle \ldots \triangle E_s : \text{ pour } s \text{ impair et les } E_i \in \mathcal{E}\}.$$

Par exemple, si $G = (V, E, S)$ est un graphe signé, les sous-ensembles d'arêtes F tels que
- $\deg_F(v)$ est pair pour tout $v \in V$, et
- $|F \cap S|$ est impair.

est un hypergraphe binaire, engendré par les S-cycles impairs.

L'hypergraphe peint(w)

Pour exprimer et démontrer cette équivalence plus précisément, nous allons reformuler PAP$(2,1)$ en terme d'hypergraphe binaire. Nous notons $\gamma(w)$ la solution optimale pour PAP$(2,1)$. Si un hypergaphe $\mathcal{H}$ est de la forme $B(\mathcal{I})$, où $\mathcal{I} \neq \emptyset$ est un ensemble d'intervalles, on dit que $\mathcal{H}$ est un *hypergraphe binaire d'intervalles*. On définit un *intervalle* comme étant un ensemble d'entiers consécutifs.

L'*hypergraphe* peint(w) est alors défini, pour chaque instance $w = w_1 w_2 \ldots w_{2n}$ de PAP$(2,1)$, comme l'hypergraphe binaire d'intervalles :

$$\text{peint}(w) := B(\mathcal{I}(w)),$$

où

$$\mathcal{I}(w) := \big\{\{i, i+1, \ldots, j-1\} : 1 \leq i < j \leq 2n-1, w_i = w_j\big\}.$$

On interprète les entiers de 1 à $2n-1$ comme les paires de lettres consécutives dans w : l'entier i est la paire $\{w_i, w_{i+1}\}$.

Couverture minimale

Une coloration correcte de w fournit une couverture A de $\mathcal{I}(w)$ intersectant tout $I \in \mathcal{I}(w)$ en un nombre impair d'éléments. En effet, étant donnée une coloration correcte des lettres, on définit l'ensemble A des entiers i tels que w_i et w_{i+1} soient de couleur différentes. Il est clair que pour tout $I = \{i, i+1, \ldots, j-1\} \in \mathcal{I}(w)$, $|A \cap I|$ est impair, puisque w_i et w_j sont de couleurs différentes. Par conséquent $A \in b(\text{peint}(w))$.

Réciproquement, soit $A \in b(\text{peint}(w))$. D'après la Proposition 5.1, A intersecte toute hyperarête de peint(w) en un nombre impair d'éléments.

Par conséquent, résoudre PAP$(2,1)$ est équivalent à trouver une couverture minimale de l'hypergraphe binaire peint(w).

5.3.3 Complexité de PAP$(2,1)$

Théorème 5.4 PAP$(2,1)$ *est* NP-*difficile.*

Démonstration : On va réduire polynomialement le problème de la coupe maximum dans les graphes 4-réguliers à PAP$(2,1)$ (la preuve que le problème de la coupe maximum dans les graphes 4-réguliers est NP-difficile est donnée plus bas).

Soit $G = (V, E)$ un graphe 4-régulier connexe, sans boucle, et non biparti. On va montrer la chose suivante : si e est une arête de G, on peut construire en temps polynomial une instance w dont une solution donne en temps linéaire une coupe maximum de $G-e$. Comme G n'est pas biparti, $\max_{e\in E} M(G-e) = M(G)$, et si l'on savait résoudre PAP$(2,1)$ en temps polynomial, on saurait trouver $M(G)$ en temps polynomial.

Il reste donc à montrer comment on fait cette réduction. $G-e$ est connexe, a tous ses sommets de degré 4, sauf 2 de degré 3, il possède donc une chaîne eulérienne, que nous notons P. Soit $(v_1, v_2, ..., v_{2n})$ $(n = |V|)$ la séquence des sommets dans P. Chaque sommet y apparaît deux fois, c'est donc bien une instance de PAP$(2,1)$, avec $\Sigma = V$.

Cela dit, pour qu'une solution de PAP$(2,1)$ corresponde bien à une coupe maximum dans $G-e$, il nous faut encore faire l'opération suivante : si entre deux occurences d'un sommet $v \in \Sigma = V$, il y a un nombre impair de lettres comptées avec leur multiplicité : on ajoute deux *nouvelles lettres*, v_a et v_b, chacune en deux exemplaires. On met alors les deux v_a juste avant la deuxième occurrence de v, et les deux v_b juste après, et on fait ainsi pour tout v de ce type. On note alors w' et Σ' le nouveau mot et le nouvel alphabet obtenu de cette manière.

Par exemple, si $w = ABCADBECDE$, $w' = ABCADB_aB_aBB_bB_bECDE$.

On va construire en temps linéaire, à partir d'une solution de PAP$(2,1)$, un ensemble minimal d'arêtes F tel que $|F \cap C| \equiv |C| \bmod 2$, ce qui est équivalent à dire que $E \setminus F$ est une coupe maximum de $G-e$.

On construit F de la manière suivante :

1. s'il y a un changement de couleur entre v_i et v_{i+1}, et si v_i et v_{i+1} sont des éléments de V (i.e. ne sont pas des nouvelles lettres), alors $\{v_i, v_{i+1}\}$ est une arête de F.
2. s'il y a exactement un changement de couleur entre v_i et v_{i+3} (i.e. si v_i et v_{i+3} sont de couleurs différentes), si v_i et v_{i+3} ne sont pas des nouvelles lettres et si v_{i+1} et v_{i+2} sont, elles, des nouvelles lettres, alors l'arête $\{v_i, v_{i+3}\}$ est dans F.

F est alors tel que pour tout I dans $\mathcal{I}(w)$, $|F \cap I| \equiv |I| \bmod 2$. Remarquons qu'un tel I est un cycle de G. Donc $\mathcal{I}(w) \subseteq \mathcal{C}(G-e)$. Comme $\dim \mathcal{C}(G) = (2n-1) - n + 1 = n$ (voir Théorème 1.3), et que les éléments de $\mathcal{I}(w)$ sont au nombre de n et linéairement indépendants (les sommets extrémités sont tous différents), $\mathcal{I}(w)$ est une base de $\mathcal{C}(G-e)$, ce qui implique que $|F \cap C| \equiv |C| \bmod 2$ pour tout $C \in \mathcal{C}(G-e)$. ∎

5.3.4 Graphes signés, cas polynomiaux et cas gloutons

Si on autorise les boucles et les arêtes multiples, on a la proposition suivante :

Proposition 5.2 *Soit $w = w_1 w_2 \dots w_{2n}$ une instance de* PAP$(2,1)$ *et soit G le multigraphe dont l'ensemble des sommets est Σ et dont les arêtes sont les $\{w_i, w_{i+1}\}$ (avec multiplicités), $i = 1, \dots, 2n-1$. Il existe alors une signature S de G telle que* peint(w) *soit l'hypergraphe binaire des S-cycles impairs de (G, S). De plus, cette signature peut être construite en temps linéaire.*

Démonstration : La preuve a plus ou moins été déjà faite dans la démonstration précédente. On choisit la signature S telle que tout $I \in \mathcal{I}(w)$, soit un S-cycle impair de (G, S), ce qui se fait de manière gloutonne en suivant la chaîne eulérienne donnée par w : on met l'arête $\{w_i, w_{i+1}\}$ dans S si et seulement si on rencontre la lettre w_{i+1} pour la seconde fois et si l'intervalle I correspondant à w_{i+1} n'intersecte S pour le moment qu'en un nombre pair

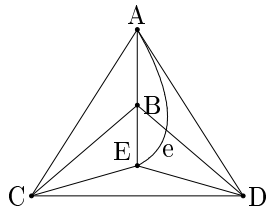

FIG. 5.7 – on peut obtenir $w = ABCADBECDE$

d'éléments. On a alors trivialement $\mathcal{I}(w) \subseteq \mathcal{C}(G, S)$. Or $\mathcal{I}(w)$ est une base de l'espace des cycles de G, et donc $B(\mathcal{I}(w))$ est l'hypergraphe binaire des S-cycles impairs de (G, S). ∎

Si on a une représentation planaire de $G(w)$, on a alors un algorithme polynomial simple. Trouver une couverture impaire minimale des S-cycles dans un graphe planaire signé $G = (V, E, S)$ se fait en cherchant le T-joint minimum dans le graphe dual $G^* = (V^*, E^*, S^*)$, où T est l'ensemble des sommets de G^* extrémités d'un nombre impair d'arêtes de S^* (voir pages 485 et suivantes du volume A du livre d'A. Schrijver [83] pour la méthode).

La planarité de $G(w)$ peut parfois "se lire" sur w, comme en témoigne la proposition suivante.

Proposition 5.3 *Soit w une instance de* PAP$(2, 1)$. *Soit H le graphe dont les sommets sont Σ et dont les arêtes sont les paires de lettres $\{x, y\}$ telles que $xyxy$ soit un sous-mot de w. Alors :*

$$H \text{ biparti } \Rightarrow G(w) \text{ est planaire. .}$$

Démonstration : On note $w = (w_1, w_2, \ldots, w_{2n})$. Soit L le graphe dont $[2n]$ est l'ensemble des sommets, et dont les arêtes sont toutes les paires $\{i, i+1\}$ (type A), et toutes les paires $\{i, j\}$ telles que $i \neq j$ et $w_i = w_j$ (type M). On identifie les arêtes de type M aux sommets de H. On donne maintenant une représentation planaire de L : on place les sommets en ligne de gauche à droite, en ordre croissant de 1 à $2n$, on place les arêtes de type A sur la ligne, et les arêtes de type M de part et d'autre de la ligne, l'une des classes de H en haut, l'autre en bas, ce qui entraîne la planarité de L. En contractant les arêtes de type M, on obtient G, qui est alors un mineur de L, donc planaire. ∎

La réciproque est fausse : $w = ABCABC$.

On peut aussi s'intéresser au cas où la solution de PAP$(2, 1)$ s'obtient de manière gloutonne : on colorie les lettres de gauche à droite, en ne changeant la couleur que lorsque la lettre rencontrée a déjà été colorée de la couleur courante. On a la proposition suivante :

Proposition 5.4 *Soit w une instance de* PAP$(2, 1)$, *sur l'alphabet Σ. Si pour tout x, y dans Σ, $xyyx$, n'est pas un sous-mot de w, alors l'algorithme glouton fournit la solution optimale.*

Démonstration : $w = w_1 \dots w_n$. Considérons une solution obtenue avec l'algorithme glouton. Notons $a_1, a_2, \dots, a_k$ les lettres où il y a un changement : ces a_i sont tels que pour $w_{d(i)} = w_{f(i)} = a_i$, $d(i) < f(i)$, $w_{f(i)-1}$ et $w_{f(i)}$ sont de couleurs différentes ($d(i)$ comme "début", $f(i)$ comme "fin"). On indexe les a_i de manière à ce que les $f(i)$ soient rangés dans l'ordre croissant.

Montrons que, si pour tout x, y dans Σ, $xyyx$, n'est pas un sous-mot de w, alors les intervalles $I_i := \{d(i), d(i)+1, \dots, f(i)-1\}$ sont disjoints. La proposition sera alors démontrée puisque toute solution optimale est supérieure ou égale au nombre maximal d'intervalles disjoints de $\mathcal{I}(w)$.

Il suffit de montrer que $I_i \cap I_{i+1} = \emptyset$ pour tout $i \in [k]$. Comme les $f(i)$ sont croissants, cela impliquera automatiquement que tous les I_i sont disjoints.

Par définition de $f(i)$ et $f(i+1)$, le premier changement de couleur après $w_{f(i)}$ a lieu entre $w_{f(i+1)-1}$ et $w_{f(i+1)}$. Donc les couleurs de $w_{f(i)}$ et $w_{f(i+1)}$ sont différentes, de même donc que celles de $w_{d(i)}$ et $w_{d(i+1)}$. Il n'y a pas de sous-mot de la forme $xyyx$, on a donc $w_{d(i+1)} > w_{d(i)}$. Si $f(i-1) < d(i)$, alors le changement de couleur sur le facteur $w_{d(i)} \dots w_{d(i+1)}$ implique que $f(i) < d(i+1)$, et une induction directe permet deconclure. ∎

Même dans le cas $G(w)$ planaire, la solution n'est en général pas gloutonne : par exemple pour $w = ABACDCBD$. $G(w)$ est alors planaire puisqu'il a quatre sommets. Cela dit, la solution optimale est 10000111, i.e. 2 changements de couleurs (on note 1 et 0 les deux couleurs). L'algorithme glouton donne : 11000101, i.e. 4 changements. Même dans le cas couvert par la Proposition 5.3, l'algorithme glouton ne fonctionne pas : $w = ABACCB$, la solution optimale est 011100, i.e. 2 changements, et l'algorithme glouton donne $w = 001101$, i.e. 3 changements.

5.3.5 Annexe : coupe maximum dans les graphes 4-réguliers

Nous donnons ici la preuve que le problème de la coupe maximum est NP-difficile puisqu'à notre connaissance, cette démonstration n'est écrite nulle part.

Proposition 5.5 *Le problème de la coupe maximum dans les graphes 4-réguliers est* NP-*difficile.*

On rappelle que pour un graphe G, $M(G)$ est la cardinalité de la coupe maximum de G.

Démonstration : On réduit de manière polynomiale le problème de la coupe maximum dans les graphes cubiques (qui est un problème NP-difficile, voir Théorème 1.8) au problème de la coupe maximum dans les graphes 4-réguliers.

Soit $G = (V, E)$ un graphe cubique. La réduction est alors la suivante : soit $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ deux copies de G. Soit F un couplage entre les sommets correspondant de G_1 et de G_2. Le graphe $\tilde{G}$ obtenu de cette manière est 4-régulier. Si $\delta(X)$ est une coupe maximum de G, avec $X \subseteq V$, alors pour X_1 (resp. X_2) correspondant à X dans V_1 (resp. dans V_2), la coupe de $\tilde{G}$ $\delta(X_1 \cup (V_2 \setminus X_2))$ est une coupe de cardinalité $2M(G) + |F|$. Réciproquement, toute coupe de $\tilde{G}$ induit une coupe dans G_1, de cardinalité inférieure ou égale à $M(G)$, et une coupe dans G_2 de cardinalité inférieure ou égale à $M(G)$, donc $M(\tilde{G}) \leq M(G) + M(G) + |F|$. Par conséquent, $M(\tilde{G}) = 2M(G) + |F|$, et une coupe maximum de $\tilde{G}$ induit une coupe maximum de G. ∎

Chapitre 6

Les σ-jeux

6.1 Introduction

Considérons le petit jeu suivant. On dispose d'un damier 3×3, chaque case peut être éteinte ou allumée, et lorsqu'on appuie sur une case, son état change ainsi que l'état de ses voisines. Le but du jeu est de passer du damier tout éteint au damier tout allumé. Voir la Figure 6.1 pour une illustration du jeu sur un damier 3×3, avec une solution.

Un tel jeu est très répandu, a ses fans club[1] et est même commercialisé physiquement (par Parker Brother, Tiger Toys, etc.). Il connaît de multiples variantes, avec des dimensions différentes, ou des voisinages différents pour les sommets. On peut aussi supposer qu'appuyer sur une case ne modifie pas son état, mais seulement celui des ses voisines. Toutes les combinaisons sont possibles.

Il porte des noms variés : Fiver, Merlin, Lights Out, Ping,... Mais le nom adopté par la communauté mathématicienne est celui de σ-game, en français σ-jeu, et peut se rattacher à la famille des automates cellulaires. Au lieu d'avoir un damier, on suppose simplement que l'on a un graphe. Les sommets de ce graphe peuvent être éteints ou allumés. Lorsqu'on appuie sur un sommet, cela change l'état des sommets du voisinage. Si le voisinage comprend le sommet sur lequel on appuie, on parle de σ^+-jeu. Sinon, on parle de σ^--jeu. Dans l'exemple de la Figure 6.2, on a affaire à un σ^+-jeu, sur la grille 3×3.

On définit la *matrice d'adjacence* d'un σ-jeu joué sur un graphe G comme étant la matrice d'adjacence A^G du graphe G, à ceci près que dans le cas σ^+-jeu, tous les termes de

[1] voir le site http ://www.haar.clara.co.uk/Lights/index.html par exemple

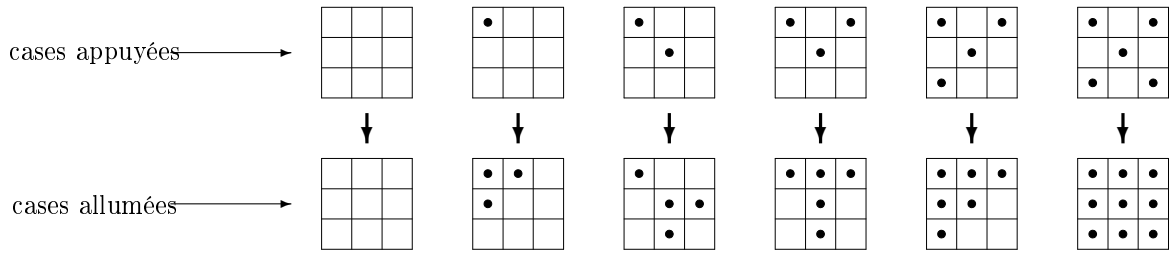

FIG. 6.1 – Une solution pour le σ^+-jeu sur le damier 3×3 : La première ligne indique les cases sur lesquelles on appuie, la seconde ligne indique les cases allumées.

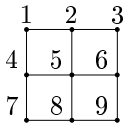

FIG. 6.2 – Le graphe réprésentant le damier 3×3.

la diagonale de A^G sont égaux à 1.

Par exemple, pour le damier 3×3, la matrice A^G est la suivante (les sommets sont ordonnés selon les numéros sur la Figure 6.2) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a la proposition fondamentale suivante, qui fournit le bon cadre pour étudier ces jeux :

Proposition 6.1 *L'étude d'un σ-jeu sur le graphe $G = (V, E)$ se ramène à l'étude de sa matrice d'adjacence A^G, où les coefficients sont vus dans $\mathbb{Z}_2$.*

Un vecteur $\boldsymbol{e} \in \mathbb{Z}_2^V$ indiquant les sommets allumés de G correspond à une configuration que l'on peut effectivement obtenir si et seulement si $\boldsymbol{e} \in \operatorname{Im} A^G$.

Tout vecteur $\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}_2^V$ tel que $\boldsymbol{e} = A_G\boldsymbol{a}$ indique les sommets sur lesquels il faut appuyer un nombre impair de fois pour obtenir la configuration à laquelle $\boldsymbol{e}$ correspond.

Preuve : On suppose que tous les sommets sont éteints. Demandons-nous, pour w un sommet du graphe, quel sera son état lorsqu'on aura appuyé sur certains sommets. Il est facile de voir que l'état de w sera éteint si l'on a appuyé un nombre pair de fois dans son voisinage, et allumé si l'on a appuyé un nombre impair de fois dans son voisinage.

Puisque seule la parité compte, on peut alors faire la première remarque suivante : l'ordre dans lequel on appuie sur les sommets n'a pas d'importance.

Deuxième remarque, immédiate elle aussi : seule compte la parité du nombre d'appuis sur un sommet.

Ces deux remarques permettent d'introduire la notation a_v qui vaut 1 si l'on appuie un nombre impair de fois sur v et 0 si l'on appuie un nombre pair de fois.

Par conséquent, si l'on note $e_v = 0$ pour indiquer que le sommet v est éteint et $e_v = 1$ pour indiquer que le sommet v est allumé, on a :

$$e_w = \sum_{v \in V} A^G_{v,w} a_v \bmod 2.$$

On reconnaît immédiatement la multiplication matrice×vecteur traditionnelle. Si l'on note $\boldsymbol{e}$ le vecteur d'état $(e_v)_{v \in V}$ et $\boldsymbol{a}$ le vecteur d'appuis $(a_v)_{v \in V}$, on a $\boldsymbol{e} = A^G\boldsymbol{a}$. ∎

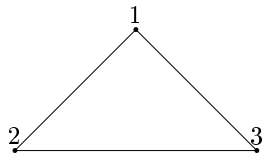

FIG. 6.3 – Le graphe triangle.

Se demander si en partant du graphe tout éteint on peut tout allumer revient donc à se demander si le vecteur $\mathbf{1}_n$ ($n := |V|$) est dans Im A^G. Un résultat important est le théorème suivant :

Théorème 6.1 (Théorème de Sutner) *Soit A_G la matrice d'adjacence d'un σ^+-jeu. Alors on a toujours $\mathbf{1}_n \in$ Im A^G, où n est le nombre de sommets.*

Ce théorème appelle quelques remarques : ce théorème ne vaut que pour les σ^+-jeux, et n'est pas valable pour les σ^--jeux, comme en témoigne la Figure 6.3, pour laquelle il est facile de voir qu'il n'est pas possible de tout allumer : supposons en effet qu'il soit possible de tout allumer, alors on appuie sur au moins un sommet. Disons le sommet 1. On ne peut pas appuyer sur le sommet 2, car sinon, quoique que l'on fasse, 3 restera éteint. De même, on ne peut pas appuyer sur 3. Donc 1 reste éteint.

On peut le voir aussi sur sa matrice d'adjacence :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On veut $A\boldsymbol{x} = \mathbf{1}_3$ (dans $\mathbb{Z}_2^3$), i.e. $x_2 + x_3 = x_1 + x_3 = x_1 + x_2 = 1$. Or cela implique $x_1 = x_2 = x_3$, et donc $x_1 + x_2 = 0$. Impossible.

Autre remarque : on peut faire une interprétation plus combinatoire de la formule $\mathbf{1}_n = A^G\boldsymbol{a}$: regardons le vecteur $\boldsymbol{a}$ comme le vecteur qui indique si on appuie sur le sommet i du graphe : $a_i = 1$ si et seulement si on appuie sur le sommet i. Si S est l'ensemble de sommets appuyés, on peut réécrire le formule de manière équivalente $|S \cap N(v)| = 1 \bmod 2$ pour tout $v \in V$ dans le cas d'un σ^--jeu, et $|S \cap N[v]| = 1 \bmod 2$ pour tout $v \in V$ dans le cas d'un σ^+-jeu. Se demander si on peut tout allumer en partant d'une configuration tout éteinte revient à se demander s'il existe $S \subseteq V$ vérifiant l'une des formules ci-dessus. Si on enlève l'expression $\bmod 2$, on retrouve la question de la domination dans le graphe G. C'est ce qui explique que l'étude des σ-jeux est aussi appelée l'étude de la domination en parité (parity domination en anglais), et est présentée par exemple sous ce nom dans le livre de référence sur la domination [41].

Quelles sont les questions que l'on peut se poser à propos des σ-jeux ?

La question la plus naturelle peut-être, au vu du Théorème de Sutner, est celle de savoir quand un σ^--jeu a une solution. Une autre question est celle du nombre de solutions, qui en fait celle du rang de la matrice A^G. Nous nous intéressons à ces questions dans un premier temps en toute généralité (Section 6.2). Nous en profiterons pour démontrer quelques résultats concernant les σ^--jeux sur les arbres, puisque l'étude des σ^+-jeux sur les arbres, tant du point de vue de l'obtention de la solution tout allumée ([34],[12]), que de la dimension de sa matrice d'adjacence ([4], [5], [38]), est très avancée, alors que celle des σ^--jeux n'a pour le moment pas été entamée.

Dans un second temps nous nous intéressons au cas particulier de la grille (Section 6.3). Nous démontrons entre autres une conjecture formulée en 2002 dans la revue Pour la Science sur la condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution au σ^--jeu sur un certain type de grille [16]. Cette conjecture est en réalité le corollaire d'un théorème, qui dit que, sur la grille, en partant de la configuration où tous les sommets sont éteints, on peut obrenir n'importe quelle configuration de sommets allumés qui soit symétrique par rapport aux deux axes de symétrie de la grille. Ce théorème a été formulé et démontré dans le cas σ^+ par Mathieu Florence sur un autre type de grille (communication personnelle et page de jeux de Le Recherche [27]), en utilisant des propriétés des polynômes de Chebycheff à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$. Nous redémontrons son théorème de manière différente et plus courte, le généralisons au cas σ^- ainsi que sur des grilles de plus grandes dimensions.

6.2 Quelques résultats classiques

Cette section concerne les résultats classiques des σ-jeux. Le premier d'entre eux est bien entendu le théorème de Sutner, qui est démontré dans la sous-section 1. Dans la sous-section 2, nous démontrons un théorème classique qui lie le nombre de couplages parfaits différents de G et le rang de A^G. Ce résultat, simple à démontrer, permet parfois de démontrer très simplement que A^G est inversible, ou ne l'est pas, par des considérations élémentaires sur G. Dans la sous-section 3, on s'intéresse au rang de A^T dans le cas σ^- sur un arbre T.

6.2.1 Rappels d'algèbre linéaire sur $\mathbb{Z}_2$ et preuve du théorème de Sutner

Rappels d'algèbres linéaires sur $\mathbb{Z}_2$

Nous commençons par quelques rappels d'algèbre linéaire sur $\mathbb{Z}_2$ (nous nous inspirons des exercices sur ce thème, ainsi que leur correction, dans le livre [62]).

Si X est une partie de E un $\mathbb{Z}_2$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire, on définit l'*orthogonal de* X par $X^\perp := \{\boldsymbol{x} \in E : \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = 0, \forall \boldsymbol{y} \in X\}$.

Contrairement aux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, on peut avoir $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = 0$ avec $\boldsymbol{x} \neq 0$. Il convient donc d'être prudent lorsqu'on cherche à étendre les propriétés connues pour les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels aux $\mathbb{Z}_2$-espaces vectoriels.

Certaines, pourtant, restent valables :

Proposition 6.2 *Soit E un $\mathbb{Z}_2$-espace vectoriel de dimension n, et soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors* $\dim F + \dim F^\perp = n$.

Démonstration : Soit $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ une base orthogonale de E (par exemple, la base naturelle). Soit $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$ une base de F, que l'on complète en une base $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ de E. Considérons la matrice U définie par $U\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{v}_i$. On a alors :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} \in F^\perp &\Leftrightarrow \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_i\rangle = 0\,(i = 1, \ldots, k) \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{x}, U\boldsymbol{e}_i\rangle = 0\,(i = 1, \ldots k)\\ &\Leftrightarrow \langle \boldsymbol{e}_i, U^t\boldsymbol{x}\rangle = 0\,(i = 1, \ldots, k) \Leftrightarrow U^t\boldsymbol{x} \in \mathrm{vect}(\boldsymbol{e}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n)\\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in (U^t)^{-1}\mathrm{vect}(\boldsymbol{e}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n)\end{aligned}$$

Par conséquent, $F^\perp = (U^t)^{-1}\mathrm{vect}(\boldsymbol{e}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$, ce qui montre que $\dim F^\perp = n - k$. ∎

Proposition 6.3 *Soit A une matrice $n \times n$ symétrique à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$. On a :*

$$\mathrm{Im}\ A = (\mathrm{Ker}\ A)^\perp.$$

Démonstration : Soit $\boldsymbol{y} \in \text{Im } A$, $\boldsymbol{x}$ tel que $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{z} \in \text{Ker } A$. On a :

$$\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{z}, A\boldsymbol{x} \rangle = \langle A\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$$

Donc $\text{Im } A \subseteq (\text{Ker } A)^{\perp}$. La Proposition 1 implique que $\text{rg}\, A = \dim(\text{Ker } A)^{\perp}$ ce qui conduit à l'égalité recherchée. ∎

Preuve du théorème de Sutner

Grâce aux deux propositions précédentes, on peut démontrer le théorème de Sutner (Théorème 6.1) qui indique que dans le cas du σ^+-jeu, on peut toujours parvenir à allumer tous les sommets du graphe en partant de la configuration où tous les sommets sont éteints :

Démonstration du Théorème 6.1 : Il suffit de démontrer que si A est une matrice symétrique $n \times n$, à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$, avec $\text{diag}\, A = \mathbf{1}_n$ (nous sommes dans le cas σ^+), alors $\mathbf{1}_n \in \text{Im } A$.

Pour $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ quelconque, on a :

$$\boldsymbol{z}^t A \boldsymbol{z} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} z_i z_j = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{i,j} + a_{j,i}) z_i z_j + \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} z_i^2.$$

Comme A est symétrique, on $a_{i,j} + a_{j,i} = 0$. De plus, $z_i^2 = z_i$ sur $\mathbb{Z}_2$, et $a_{i,i} = 1$. On peut donc réécrire l'égalité ci-dessus sous la forme :

$$\boldsymbol{z}^t A \boldsymbol{z} = \sum_{i=1}^{n} z_i = \langle \mathbf{1}_n, \boldsymbol{z} \rangle.$$

Donc si on prend $\boldsymbol{z}$ dans Ker A, on obtient $\langle \mathbf{1}_n, \boldsymbol{z} \rangle = 0$. Par conséquent, $\mathbf{1}_n \in (\text{Ker } A)^{\perp}$. La Proposition 6.3 permet de conclure. ∎

Tout allumer pour le σ^--jeu sur les arbres

Nous avons déjà signalé le fait que le σ^+-jeu sur les arbres était bien connu. En revanche, le σ^--jeu n'a pas encore été étudié. Nous cherchons ici à pallier ce manque.

Pour un arbre T, on peut déterminer en temps linéaire s'il est possible de tout allumer en partant de la configuration tout éteinte, avec les règles σ^-.

Pour exposer la méthode, nous introduisons la notion de *quasi-tout allumé* pour un arbre enraciné en un sommet r : un arbre enraciné est *quasi-tout allumé* si r est éteint et tous les autres sommets allumés.

On procède de la manière suivante : on choisit une racine r. On part des feuilles. A chaque feuille, on associe la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A tout autre sommet v, on associe également une matrice 2×2 qui se déduit directement des matrices 2×2 de ses fils. Une telle matrice indique

- a si le sous-arbre enraciné en v peut être tout allumé avec v dans l'ensemble des sommets sur lesquels on appuie,
- b si le sous-arbre enraciné en v peut être tout allumé sans avoir à appuyer sur v,
- c si le sous-arbre enraciné en v peut être quasi-tout allumé avec v dans l'ensemble des sommets sur lesquels on appuie et
- d si le sous-arbre enraciné en v peut être quasi-tout allumé sans avoir à appuyer sur v.

On met 1 (resp. 0) dans la case correspondante de

	Tout allumé	Quasi-tout allumé
Appui racine	a	c
Pas appui racine	b	d

si la réponse est oui (resp. non). Il est alors clair que la matrice d'un sommet v se déduit directement des matrices de ses fils. Noter que la matrice associée aux feuilles satisfait la définition de cette matrice.

De plus, si on peut tout allumer pour un arbre enraciné en r, on peut, toujours en temps linéaire, exhiber un ensemble de sommet sur lequel appuyer pour tout allumer : il suffit de partir de r et de regarder si on doit appuyer ou non sur r pour tout allumer (cela se lit sur la matrice), puis on descend aux fils, etc...

Remarques : C'est ce genre de méthode que F. Galvin emploie dans [34] pour donner un algorithme linéaire qui allume tout dans un arbre, avec la règle σ^+. On peut généraliser la méthode pour répondre, toujours en temps linéaire, à la question de la possibilité d'obtention de n'importe quelle configuration de sommets allumés. De plus, on peut clairement adapter ce genre de méthode pour minimiser le nombre de sommets sur lequel on appuie pour tout allumer (voir par exemple [12])[2].

6.2.2 Inversibilité de la matrice d'adjacence

Un σ-jeu est *inversible* si sa matrice d'adjacence est inversible.

Déterminant et couplages

Lorsqu'on s'intéresse à l'inversibilité d'une matrice, plusieurs méthodes sont à notre disposition. Une des plus naturelles est le calcul du déterminant. Il s'avère que dans le cadre des σ-jeu le calcul du déterminant a une signification graphique simple, comme en témoigne le théorème suivant ([19]) :

Théorème 6.2 *Soit $G = (V, E)$ un graphe.*

Le déterminant de la matrice d'adjacence A^G d'un σ^--jeu est égal, modulo 2, aux nombres de couplages parfaits différents de G.

Le déterminant de la matrice d'adjacence A^G d'un σ^+-jeu est égal, modulo 2, aux nombres de couplages différents de G.

Démonstration : On a, dans $\mathbb{Z}_2$:

$$\det(A^G) = \sum_{\pi \text{ permutation}} \prod_{v \in V} A^G(v, \pi(v)).$$

(Pour la formule générale donnant les valeurs des coefficients du polynome caractéristique, voir [84]).

Les termes non-nuls de cette somme correspondent à des permutations π telles que pour les $v \neq \pi(v)$, les $\{v, \pi(v)\}$ soient des arêtes, et que l'ensemble de ces arêtes, notons le $E(\pi)$, est formé d'arêtes et de cycles disjoints de G . Notons que π donne une orientation aux cycles de $E(\pi)$.

Si $E(\pi)$ contient au moins un cycle C, alors il existe une puissance de deux permutations (π incluse) donnant le même ensemble $E(\pi)$, chaque permutation correspondant à une orientation particulière des cycles de $E(\pi)$.

[2] La minimisation du nombre de sommets appuyés pour tout allumer dans un graphe quelconque est NP-difficile (prouvé par Sutner dans [91]).

Par conséquent, modulo 2, seules les permutations telles que $\pi^2(v) = v$ pour tout $v \in V$ contribuent au déterminant. La conclusion est alors directe. ∎

Une conséquence directe est la proposition suivante :

Proposition 6.4 *Soit G le graphe d'un σ^--jeu. Si G a un nombre impair de sommets, alors le σ^--jeu n'est pas inversible.*

Démonstration : Si le nombre de sommets est impair, il ne peut y avoir de couplage parfait. Donc le déterminant est égal à 0 modulo 2. ∎

On peut en déduire également le théorème suivant, qui donne un algorithme glouton pour déterminer le rang de A^T pour T un arbre dans le cas σ^--jeu (pour le cas σ^+-jeu sur un arbre, on peut trouver un algorithme linéaire qui détermine le rang dans [38]) :

Théorème 6.3 *Soit T un arbre et A^T sa matrice d'adjacence. Dans le cas d'un σ^--jeu, le rang de A^T (vu comme matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$) est égal au double du nombre d'arêtes du couplage de cardinalité maximum de T.*

Démonstration : Soit r le rang de A^T. Il existe une sous-matrice principale $r \times r$ de A^T inversible (résultat classique), ce qui signifie qu'il existe un sous-graphe de T, à r sommets, dont la matrice d'adjacence est inversible. D'après 6.2, ce sous-graphe admet un couplage parfait avec $r/2$ arêtes. T possède donc un couplage de cardinalité $r/2$. S'il existe un couplage de cardinalité $> r/2$ dans T, alors le sous-graphe engendré par les sommets couverts par le couplage admet un couplage parfait. Comme ce sous-graphe est une forêt, ce couplage parfait est unique, la matrice d'adjacence de ce sous-graphe est donc inversible ainsi que la sous-matrice principale de A^T correspondante, de rang alors strictement plus grand que r. Ce qui est en contradiction avec la définition de r. ∎

Trouver un couplage maximum dans un arbre T se fait de manière gloutonne (résultat classique également) :

Poser $M := \emptyset$.

Tant que $T \neq \emptyset$, répéter :
- choisir e une arête pendante,
- faire $M := M \cup \{e\}$, et
- faire $T := T - \{e\}$.

FIN

M contient à la fin un couplage maximum.

6.3 Cas particulier de la grille

Nous nous intéressons maintenant aux σ-jeux joués sur des grilles. Les grilles peuvent également être vues comme des damiers ; dans ce cas-là, on ne parle pas de sommet, mais de case. C'est une simple question de termes, ou d'images, les notions étant totalement équivalentes.

La grille la plus simple est la chaîne, la grille unidimensionnelle. Nous montrons quelques propriétés des σ-jeux joués sur les chaînes à la sous-section 6.3.2.

Dans la sous-section 6.3.3 nous montrons qu'en général, en partant de la configuration toute éteinte, dans le cas σ^+-jeu sur grille cartésienne, il est possible d'allumer n'importe quel ensemble de cases simultanément symétrique par rapport à l'axe médian vertical et à l'axe médian horizontal. C'est le théorème de Florence, dont nous proposons une preuve élémentaire.

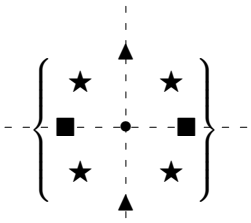

FIG. 6.4 – Les matrices équilibrées.

Dans la sous-section 6.3.4, nous nous intéressons à une conjecture parue en 2002 dans la revue Pour la Science qui donne une condition pour que l'on puisse tout allumer sur la grille produit direct de deux chaînes dans le cas σ^--jeu.

Enfin, nous terminons ce chapitre (et donc cette thèse) en généralisant le théorème de Florence aux grilles cartésiennes de dimension ≥ 3 (sous-section 6.3.5).

Mais avant de rentrer dans ces détails, il convient d'introduire quelques outils. C'est l'objet de la sous-section suivante, la sous section 6.3.1

6.3.1 Préliminaires

Dans la suite, S_n est la matrice d'adjacence de la chaîne à n sommets, i.e.

$$S_n := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & \dots & & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & & \dots & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & & \\ & & & \ddots & & & & \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & \dots & & & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vecteurs, matrices et tenseurs équilibrés

A partir de maintenant, on dira qu'un vecteur $x \in \mathbb{Z}_2^n$ est *équilibré* si, pour tout $i \in n$, $x_i + x_{n+1-i} = 0$ et si, de plus dans le cas où est n est impair, $x_{\frac{n+1}{2}} = 0$.

On dit qu'une matrice $n_1 \times n_2$, notée X, à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$, est *équilibrée* si

$$\sum_{\epsilon_1 \in A_1, \epsilon_2 \in A_2} X(\epsilon_1, \epsilon_2) = 0,$$

pour tous les A_i de la forme $\{r_i, n_i + 1 - r_i\}$ avec $r_i \leq \lfloor \frac{n_i}{2} \rfloor$ et ainsi que pour A_i de la forme $\{\frac{n_i+1}{2}\}$ si n_i est impair.

Sur la Figure 6.4, on illustre une matrice équilibrée : la somme de quatres cases symétriques (marquées ★) doit être nulle, ainsi que celle de deux cases symétriques (marquées ■ et ▲) si elles existent, ainsi que la case centrale (marquée •) si elle existe.

Par exemple, la matrice suivante, représentant le damier de la Figure 6.5, est équilibrée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

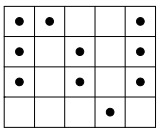

FIG. 6.5 – Un motif dont la représentation est une matrice équilibrée

De manière générale, on dit qu'un tenseur d fois covariant est *équilibré* si

$$\sum_{\epsilon_1 \in A_1, \epsilon_2 \in A_2, \ldots, \epsilon_d \in A_d} X(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_d) = 0,$$

pour tous les A_i de la forme $\{r_i, n_i + 1 - r_i\}$ avec $r_i \leq \lfloor \frac{n_i}{2} \rfloor$ et ainsi que pour A_i de la forme $\{\frac{n_i+1}{2}\}$ si n_i est impair..

Un lemme utile

Dans la suite, nous allons nous servir du lemme suivant :

Lemme 6.1 *Soit n un entier positif et soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{Z}_2^n$ tel que*

1. *$F \subseteq \mathbf{1}_n^\perp$ et*
2. *$S_n F \subseteq F$. Alors tout $\boldsymbol{x}$ dans F est équilibré.*

Démonstration : Supposons que F possède un $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tel que, pour un certain $i \in [n]$, on ait $x_i \neq x_{n+1-i}$. Comme $S_n^k \boldsymbol{x} \in F$ pour tout k entier positif, on peut supposer que $x_1 + x_n = 1$.

On a $S_n \boldsymbol{x} \in F$, donc $\langle S_n \boldsymbol{x}, \mathbf{1}_n \rangle = 0$. Ce qui implique

$$x_2 + (x_1 + x_3) + (x_2 + x_4) + \ldots + (x_{n-2} + x_n) + x_{n-1} = 0.$$

Dans cette somme, chaque x_i apparaît deux fois, sauf pour $i = 1$ et $i = n$. Donc $x_1 + x_n = 0$. Contradiction.

Par conséquent, pour tout $i \in [n]$, on a $x_i = x_{n+1-i}$.

De plus, si n est impair, comme $\langle \boldsymbol{x}, \mathbf{1}_n \rangle = 0$, on a $x_{\frac{n+1}{2}} = 0$. ∎

Représentation de l'état d'une grille

Supposons que l'on joue à un σ-jeu sur une chaîne P_n (chaîne à n sommets). On *représente* les sommets sur lesquels on appuie (resp. les sommets allumés) par un vecteur à n composantes, la composante i étant à 1 si et seulement si le sommet i est appuyé (resp. allumé).

Considérons la grille $P_{n_1} \otimes P_{n_2}$ (*grille cartésienne*) ou la grille $P_{n_1} \bullet P_{n_2}$, où P_{n_i} est une chaîne possédant n_i sommets. On *représente* les sommets sur lesquels on appuie (resp. les sommets allumés) par une matrice X de dimension $n_1 \times n_2$, la composante (i_1, i_2) étant à 1 si et seulement si le sommet (i_1, i_2) est appuyé (resp. allumé).

De même, pour la grille d-dimensionnelle de la forme $P_{n_1} \otimes P_{n_2} \otimes \ldots \otimes P_{n_d}$, où P_{n_i} est une chaîne possédant n_i sommets, on *représente* les sommets sur lesquels on appuie (resp. les sommets allumés) par un tenseur X de dimension $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_d$, la composante $X(i_1, i_2, \ldots, i_d)$ étant à 1 si et seulement si le sommet $(i_1, i_2, \ldots, i_d)$ est appuyé (resp. allumé).

Vecteurs, matrices et tenseurs σ-symétriques

Un vecteur X de dimension n est *σ-symétrique* si pour tout $i \in [n]$ on a $X(i) = X(n+1-i)$.

On dit qu'une matrice X de dimension $n_1 \times n_2$ est *σ-symétrique* si, pour tout (i_1, i_2), on a $X(i_1, i_2) = X(n_1 + 1 - i_1, i_2) = X(i_1, n_2 + 1 - i_2) = X(n_1 + 1 - i_1, n_2 + 1 - i_2)$.

σ-symétrique, on le voit, signifie précisément que les composantes égales à 1 forment un motif symétrique par rapport à l'axe médian vertical et l'axe médian horizontal (on a appelé cette symétrie σ-symétrie pour éviter la confusion avec la notion de matrice ou de tenseur symétrique).

Exemple de matrice σ-symétrique :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De manière générale, un tenseur X d fois covariant de dimension $n_1 \times \ldots \times n_d$ est *σ-symétrique* si pour tout $j \in [d]$ et pour tout $(i_1, i_2, \ldots, i_d)$ on a

$$X(i_1, i_2, \ldots, i_j, \ldots, i_d) = X(i_1, i_2, \ldots, i_{j-1}, n_j + 1 - i_j, i_{j+1}, \ldots, i_d).$$

Tenseur d'adjacence de la grille

Supposons que l'on joue à un σ-jeu sur une grille de dimension d. L'application qui donne le tenseur représentant les sommets allumés en fonction du tenseur représentant les cases allumées est un tenseur (d fois contravariant), qu'on appelle le *tenseur d'adjacence* du σ-jeu.

Noyau équilibré implique σ-symétrie dans l'image

On a alors le lemme suivant qui lie les notions de tenseur équilibré et de tenseur σ-symétrique :

Lemme 6.2 *Soit T le tenseur d'adjacence d'un σ-jeu d'une grille (de dimension quelconque). Si tout élément du noyau de T est équilibré, alors tout tenseur σ-symétrique est dans l'image de T.*

Démonstration : D'après la Proposition 6.3, il suffit de montrer qu'un tenseur X σ-symétrique est tel que $\langle X, Z \rangle = 0$ pour tout $Z \in \operatorname{Ker} T$.

Calculons donc $\langle X, Z \rangle$. Fixons

$$(i_1, i_2, \ldots, i_d) \in \left[\left\lceil \frac{n_1}{2} \right\rceil\right] \times \left[\left\lceil \frac{n_1}{2} \right\rceil\right] \times \ldots \times \left[\left\lceil \frac{n_1}{2} \right\rceil\right],$$

et posons $A_j := \{i_j, n_j + 1 - i_j\}$. Dans le cas où $i_j = n_j + 1 - i_j$, A_j n'a qu'un élément : $\{\frac{n_j+1}{2}\}$. On a

$$\sum_{(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_d) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_d} X(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_d) Z(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_d) =$$

$$X(i_1, i_2, \ldots, i_d) \sum_{(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_d) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_d} Z(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_d) = 0.$$

La première égalité vient du fait que X correspond à un état symétrique, la seconde du fait que Z est équilibré.

En sommant sur tous les $(i_1, i_2, \ldots, i_d)$, on obtient $\langle X, Z \rangle = 0$. ∎

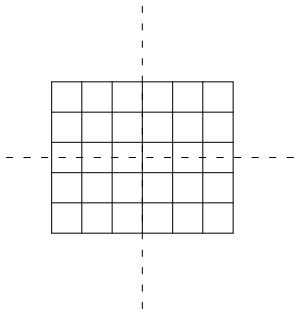

FIG. 6.6 – N'importe quel ensemble de cases symétrique par rapport aux deux axes peut être allumé en partant de la grille toute éteinte.

6.3.2 Cas unidimensionel : le cas de la chaîne

On note P_n la chaîne élémentaire à n sommets. On peut la voir également comme une bande de n cases adjacentes.

Théorème 6.4 *Jouant à un σ^+-jeu sur une bande de n cases, tout ensemble de cases symétriques peut être obtenu comme ensemble de cases allumées.*

Démonstration : Soit T la matrice d'adjacence de ce σ^+-jeu. On a $T := S_n + I_n$. Nous allons montrer que tout vecteur de dimension n qui est σ-symétrique est dans l'image de T. D'après le Lemme 6.2, il suffit de montrer que tout élément de Ker T est équilibré. Mais ceci est évident en utilisant le Lemme 6.1 pour $F :=$ Ker T. ∎

6.3.3 Grille cartésienne en dimension 2

Le théorème de M. Florence auquel nous avons fait allusion plus haut est le suivant :

Théorème 6.5 (Théorème de Florence) *Considérons un damier pour lequel deux cases sont voisines si elles ont un côté en commun. Partant du damier complètement éteint, il est possible, en respectant les règles du σ^+-jeu, d'obtenir n'importe quel ensemble de cases allumées symétrique par rapport aux deux axes médians.*

Le damier considéré est la grille cartésienne de dimension 2 (produit cartésien de deux chaînes).

Nous proposons une preuve courte et élémentaire de ce résultat :

Démonstration : L'application qui donne l'ensemble des cases allumées étant donnée une configuration de cases appuyées est la suivante :

$$T := I_{n_1} \otimes I_{n_2} + I_{n_1} \otimes S_{n_2} + S_{n_1} \otimes I_{n_2}.$$

Remarquer que T commute avec les tenseurs $I_{n_1} \otimes S_{n_2}$ et $S_{n_1} \otimes I_{n_2}$. On veut montrer que tout tenseur σ-symétrique est dans l'image de T (c'est exactement ce que signifie le théorème).

Soit

$$\begin{array}{rccc} c^{(1)} : & E^{(1)} \otimes E^{(2)} & \to & E^{(1)} \\ & X = \sum_{(i_1,i_2)\in[n_1]\times[n_2]} X(i_1,i_2)\boldsymbol{e}_{i_1}^{(1)} \otimes \boldsymbol{e}_{i_2}^{(2)} & \mapsto & Y = \sum_{(i_1,i_2)\in[n_1]\times[n_2]} X(i_1,i_2)\boldsymbol{e}_{i_1}^{(1)} \end{array}.$$

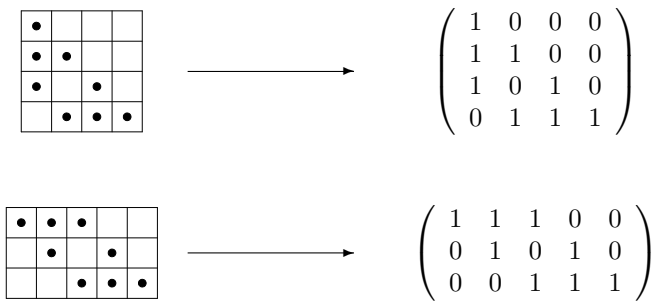

FIG. 6.7 – En appuyant sur les cases marquées •, le damier reste éteint. La matrice à droite représente les cases appuyées.

$c^{(1)}$ prend un tenseur 2 fois covariants, i.e. une matrice, et somme les éléments de chaque ligne pour obtenir un vecteur colonne (on l'a appelé c pour "contraction"). Par exemple :

$$c^{(1)}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice ci-dessus est par ailleurs un élément de Ker T : si on appuie sur les cases marquées 1, le damier reste éteint (voir Figure 6.7, damier du bas). On remarque que l'image par $c^{(1)}$ de cette matrice est équilibrée. Ce n'est pas un hasard, on a en effet le fait suivant :

Fait 1 : *Quelque soit $Y \in c^{(1)}(\text{Ker } T)$, Y est équilibré.*

Preuve : Soit $X \in \text{Ker } T$ et soit $Y := c^{(1)}(X)$. Puisqu'on a affaire à un σ^+-jeu, $\langle \mathbf{1}_{n_1,n_2}, X\rangle = 0$ pour tout $X \in \text{Ker } T$. Or, $\langle \mathbf{1}_{n_1,n_2}, X\rangle = \sum_{i_1\in[n_1],i_2\in[n_2]} X(i_1,i_2) = \langle \mathbf{1}_{n_1}, Y\rangle$. Donc $\langle \mathbf{1}_{n_1}, Y\rangle = 0$. D'autre part, $S_{n_1}Y = c^{(1)}\big((S_{n_1}\otimes I_{n_2})X\big)$, et $(S_{n_1}\otimes I_{n_2})X \in \text{Ker } T$. Par conséquent, $S_{n_1}Y \in c^{(1)}(\text{Ker } T)$, le Lemme 6.1 s'applique, et Y est bien équilibré.

Fait 2 : *Quelque soit $X \in \text{Ker } T$, X est équilibré.*

Preuve : Soit $X \in \text{Ker } T$. On définit, pour $r_1 \in \big[\lceil \frac{n_1}{2}\rceil\big]$,

$$\begin{array}{rccc} V_{r_1}: & E^{(1)}\otimes E^{(2)} & \to & E^{(2)} \\ & X = \sum_{(i_1,i_2)\in[n_1]\times[n_2]} X(i_1,i_2)\boldsymbol{e}^{(1)}_{i_1}\otimes \boldsymbol{e}^{(2)}_{i_2} & \mapsto & \sum_{i_2\in[n_2]}\sum_{\epsilon_1\in A_1} X(\epsilon_1,i_2)\boldsymbol{e}^{(2)}_{i_2} \end{array},$$

où A_1 signifie $\{r_1, n_1 - r_1 + 1\}$, sauf si n_1 est impair et que $r_1 = \frac{n_1+1}{2}$, où alors A_1 n'a qu'un seul élément : $\lceil \frac{n_1}{2}\rceil$.

Dit autrement, V_{r_1} sélectionne deux lignes de X (une seule si n_1 impair et que $r_1 = \frac{n_1+1}{2}$), symétrique par rapport à l'axe médian horizontal séparant en deux le damier, et les somme terme à terme pour obtenir un vecteur ligne.

On a $\langle \mathbf{1}_{n_2}, V_{r_1}(X)\rangle = \sum_{i_2\in[n_2]}\sum_{\epsilon_1\in A_1} X(\epsilon_1,i_2) = \sum_{\epsilon_1\in A_1}\sum_{i_2\in[n_2]} X(\epsilon_1,i_2) = \sum_{\epsilon_1\in A_1}(c^{(1)}(X))(\epsilon_1)$.

Or $X \in \text{Ker } T$ donc $(c^{(1)}(X))$ est équilibré (conséquence du Fait 1), ce qui implique $\sum_{\epsilon_1\in A_1}(c^{(1)}(X))(\epsilon_1) = 0$. D'autre part, $S_{n_2}V_{r_1}(X) = V_{r_1}\big((I_{n_1}\otimes S_{n_2})X\big)$. Donc l'espace $V_{r_1}(\text{Ker } T)$ est stable par S_{n_2}. D'après le Lemme 6.1, $V_{r_1}(X)$ est équilibré pour tout r_1, ce qui signifie précisément que X est équilibré.

Pour conclure le théorème, on utilise le Lemme 6.2. ∎

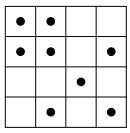

FIG. 6.8 – Un élément du noyau (cas Pour la Science) est équilibré.

6.3.4 Grille de Pour la Science

En août 2002, la rubrique mathématiques de la revue Pour la Science [16], rubrique tenue par Jean-Paul Delahaye, présentait un jeu, nommé Ping, se jouant sur un damier, ainsi que certaines conjectures le concernant. Ce jeu et ces conjectures avait été communiqués par un lecteur, N. Vaillant. Ce jeu est en réalité le σ^--jeu sur les grilles de la forme $P_{n_1} \bullet P_{n_2}$. Plusieurs conjecture étaient formulées (l'une d'entre elles était la Proposition 6.3 dans le cas particulier de ces grilles !). La conjecture que nous nous proposons de démontrer ici affirmait que lorsque n_1 ou n_2 est pair, on peut toujours tout allumer.

Nous montrons en réalité le théorème plus général suivant :

Théorème 6.6 *Considérons un damier, dont une des dimensions au moins est paire, pour lequel deux cases sont voisines si elles ont un côté en commun ou si elles ont un sommet en commun. Partant du damier complètement éteint, il est possible, en respectant les règles du σ^--jeu, d'obtenir n'importe quel ensemble de cases allumées symétrique par rapport aux deux axes médians.*

Nous sommes précisément dans le cas de la grille de la forme $P_{n_1} \bullet P_{n_2}$.

Démonstration : Le tenseur d'adjacence est le suivant :

$$T = (S_{n_1} + I_{n_1}) \otimes (S_{n_2} + I_{n_2}) + I_{n_1} \otimes I_{n_2}.$$

On veut montrer que tout tenseur σ-symétrique est dans l'image de T.

Supposons sans perte de généralité que n_1 est pair. S_{n_1} est alors inversible (cela peut être vu comme un conséquence du Théorème 6.2). Considérons alors le tenseur

$$S_{n_1}^{-1}T = (I_{n_1} + S_{n_1}^{-1}) \otimes (S_{n_2} + I_{n_2}) + S_{n_1}^{-1} \otimes I_{n_2},$$

et définissons le tenseur $E_{k,l}$ tel que $E_{k,l}(i,j) = 1$ si et seulement si $i = k$ et $j = l$. On a $\big(S_{n_1}^{-1}TE_{i,j}\big)(i,j) = 1$ (calcul immédiat). Donc $S_{n_1}^{-1}T$ peut être interprété comme le tenseur d'adjacence d'un σ^+-jeu. Ce tenseur commute avec les tenseurs $I_{n_1} \otimes S_{n_2}$ et $S_{n_1} \otimes I_{n_2}$. La démonstration présentée ci-dessus pour le Théorème 6.5 fonctionne également ici, exactement de la même manière, en exploitant la relation de commutation précédente et le fait que tout élément du noyau de $S_{n_1}^{-1}T$ est orthogonal à $\mathbf{1}_{n_1,n_2}$. En appliquant le Lemme 6.1, on montre que tout élément du noyau de $S_{n_1}^{-1}T$ est équilibré. En utilisant le Lemme 6.2, on obtient que tout tenseur σ-symétrique est dans l'image de $S_{n_1}^{-1}T$.

Or l'image d'un vecteur σ-symétrique par S_{n_1} est encore un vecteur σ-symétrique. Donc, si on prend un tenseur Y σ-symétrique, de dimension $n_1 \times n_2$, $S_{n_1}^{-1}Y$ est encore un tenseur σ-symétrique, de dimension $n_1 \times n_2$, qui est dans l'image de $S_{n_1}^{-1}T$, d'après ce qui vient d'être montré. Par conséquent, Y est dans l'image de T. ∎

On a alors le corollaire suivant, qui résout la conjecture :

Corollaire 6.1 *Considérons un damier $n_1 \times n_2$ tout éteint, dont au moins une des dimensions est paire, et pour lequel deux cases sont voisines si elles ont un côté ou un sommet en commun. En jouant au σ^--jeu sur ce damier, il est possible de tout allumer.*

En revanche, la caractérisation générale des cas où il est possible de tout allumer reste ouverte.

6.3.5 La grille pour des dimensions ≥ 3

Nous proposons maintenant de généraliser le théorème de Florence pour les dimensions de grilles $d \geq 3$, $P_{n_1} \otimes P_{n_2} \otimes \ldots \otimes P_{n_d}$.

Théorème 6.7 (Théorème de Florence généralisé) *Partant d'un damier d-dimensionnel tout éteint, il est possible, en respectant les règles du σ^+-jeu, d'obtenir n'importe quel ensemble de cases allumées qui soit symétrique par rapport à tous les hyperplans médians du damier d-dimensionnel.*

Démonstration : L'application qui donne l'ensemble des cases allumées étant donnée une configuration de cases appuyées est la suivante :

$$T := \bigotimes_{i=1}^{d} I_{n_i} + \sum_{i=1}^{d} I_{n_1} \otimes I_{n_2} \otimes \ldots \otimes I_{n_{i-1}} \otimes S_{n_i} \otimes I_{n_{i+1}} \otimes \ldots \otimes I_{n_d}.$$

On veut montrer que tout tenseur σ-symétrique est dans l'image de T (c'est exactement le contenu du théorème).

Remarquer que T commute avec n'importe quel tenseur de la forme $I_{n_1} \otimes I_{n_2} \otimes \ldots \otimes I_{n_{i-1}} \otimes S_{n_i} \otimes I_{n_{i+1}} \otimes \ldots \otimes I_{n_d}$.

Soit

$$c^{(j)} : E^{(1)} \otimes \ldots \otimes E^{(d)} \to E^{(1)} \otimes \ldots \otimes E^{(j)}$$

défini par

$$X = \sum_{(i_1,\ldots,i_d)\in[n_1]\times\ldots\times[n_d]} X(i_1,\ldots,i_d)\boldsymbol{e}_{i_1}^{(1)}\otimes\ldots\otimes\boldsymbol{e}_{i_d}^{(d)} \mapsto \sum_{(i_1,\ldots,i_d)\in[n_1]\times\ldots\times[n_d]} X(i_1,\ldots,i_d)\boldsymbol{e}_{i_1}^{(1)}\otimes\ldots\otimes\boldsymbol{e}_{i_j}^{(j)}.$$

$c^{(j)}$ prend un tenseur X d fois covariants et somme les éléments de X à j premières composantes fixées pour obtenir un tenseur j fois covariant (comme avant, on l'a appelé c pour "contraction").

On montre maintenant la propriété suivante par récurrence sur j :

Fait :*Quelque soit $j \in [d]$ et $Y \in c^{(j)}(\text{Ker } T)$, Y est équilibré.*

<u>Preuve de ce fait pour $j = 1$</u> : Soit $X \in \text{Ker } T$ et soit $Y := c^{(1)}(X)$. Puisqu'on a affaire à un σ^+-jeu, $\langle \mathbf{1}_{n_1,\ldots,n_d}, X\rangle = 0$ pour tout $X = \sum_{(i_1,\ldots,i_d)\in[n_1]\times\ldots\times[n_d]} X(i_1,\ldots,i_d)\boldsymbol{e}_{i_1}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{e}_{i_d}^{(d)} \in \text{Ker } T$. Or, $\langle \mathbf{1}_{n_1,\ldots,n_d}, X\rangle = \sum_{i_1\in[n_1],\ldots,i_d\in[n_d]} X(i_1,\ldots,i_d) = \langle \mathbf{1}_{n_1}, Y\rangle$. Donc $\langle \mathbf{1}_{n_1}, Y\rangle = 0$. D'autre part, $S_{n_1}Y = c^{(1)}\big((S_{n_1}\otimes I_{n_2}\ldots\otimes I_{n_d})X\big)$, et $(S_{n_1}\otimes I_{n_2}\otimes\ldots\otimes I_{n_d})X \in \text{Ker } T$. Par conséquent, $S_{n_1}Y \in c^{(1)}(\text{Ker } T)$, le Lemme 6.1 s'applique, et Y est bien équilibré.

<u>Preuve de ce fait pour $j+1$ sachant qu'il est vrai pour j</u> : Considérons $Y := c^{(j+1)}(X)$, avec $X \in \text{Ker } T$, et $Y' := c^{(j)}(X)$.

On définit $V_{r_1,\ldots,r_j}(Y) \in E^{(j+1)}$ pour $r_i \in \left[\left\lceil \frac{n_i}{2} \right\rceil\right]$ par

$$V_{r_1,\ldots,r_j}(Y)(i) = \sum_{\epsilon_1\in A_1,\ldots,\epsilon_j\in A_j} Y(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_j,i),$$

où A_i signifie $\{r_i, n_i - r_i + 1\}$, sauf si $r_i = n_i - r_i + 1$, où alors A_i n'a qu'un seul élément : $\frac{n_i+1}{2}$ (et n_i est alors impair).

On a $\langle \mathbf{1}_{n_{j+1}}, V_{r_1,\ldots,r_j}(Y)\rangle = \sum_{i=1}^{n_{j+1}} (V_{r_1,\ldots,r_j})(i) = \sum_{\epsilon_1\in A_1,\ldots,\epsilon_j\in A_j} \sum_{i=1}^{n_{j+1}} Y(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_j,i)$.

Or $\sum_{i=1}^{n_{j+1}} Y(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_j,i) = Y'(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_j)$. D'après l'hypothèse de récurrence, Y' est équilibré et donc $\langle \mathbf{1}_{n_{j+1}}, V_{r_1,\ldots,r_j}(Y)\rangle = 0$. D'autre part, on a

$$S_{n_{j+1}} V_{r_1,\ldots,r_j}(Y) = V_{r_1,\ldots,r_j}\big((I_{n_1}\otimes I_{n_2}\otimes\ldots\otimes I_{n_j}\otimes S_{n_{j+1}})Y\big)$$

$$= c^{(j+1)}\big((I_{n_1}\otimes I_{n_2}\otimes\ldots\otimes I_{n_j}\otimes S_{n_{j+1}}\otimes I_{n_{j+2}}\otimes\ldots\otimes I_{n_d})X\big)$$

et donc $S_{n_{j+1}} V_{r_1,\ldots,r_j}(Y) \in c^{(j+1)}(\mathrm{Ker}\ T)$ (c'est là qu'on se sert de la commutation de T avec les tenseurs de la forme $I_{n_1}\otimes I_{n_2}\otimes\ldots\otimes I_{n_{i-1}}\otimes S_{n_i}\otimes I_{n_{i+1}}\otimes\ldots\otimes I_{n_d}$). Donc en appliquant le Lemme 6.1 aux espaces $E := E^{(j+1)}$ et $F := V_{r_1,\ldots,r_j}(c^{(j+1)}(\mathrm{Ker}\ T))$, on obtient que Y est équilibré.

En appliquant le Fait ci-dessus pour $j := d$ et en utilisant le Lemme 6.2, le théorème est démontré. ∎

6.3.6 Conclusion

Nous avons présenté dans cette section une nouvelle technique pour étudier les motifs symétriques de cases allumées sur les damiers de dimensions quelconques. Tous les cas sont loin d'avoir été étudiés. Par exemple, que peut-on dire des grilles de la forme $P_{n_1}\bullet\ldots\bullet P_{n_r}$, tant du point de vue σ^--jeu que du point de vue σ^+-jeu ? Et que peut-on dire des σ^--jeux sur les grilles de la forme $P_{n_1}\otimes\ldots\otimes P_{n_r}$?

Bien des situations restent à étudier. Il semble que le même genre de résultats puisse être obtenu dans ces cas. Ce sera l'objet de recherches ultérieures à la thèse.

Bibliographie

[1] N. Alon, Splitting necklaces, *Advances in Math.*, 63 :247-253, 1987.

[2] N. Alon, Non-constructive proofs in combinatorics, *Proc. of the International Congress of Mathematicians, Kyoto 1990, Japan, Springer Verlag, Tokyo*, 1421-1429, 1991.

[3] N. Alon et D. West, The Borsuk-Ulam theorem and bisection of necklaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 98 :623-628, 1986.

[4] A. T. Amin et P. J. Slater, All Parity Realizable Trees, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 20 :53-63, 1996.

[5] A. T. Amin, L. H. Clark et P. J. Slater, Parity dimension for graphs, *Discrete Mathematics*, 187 :1-17, 1998.

[6] R. Bapat, A constructive proof of a permutation-based generalization of Sperner's lemma, *Mathematical Programming*, 44 :113-120, 1989.

[7] I. Bárány, A short Proof of Kneser's conjecture, *J. Combin. Theory, Serie A*, 25 :325-326, 1978.

[8] P. S. Bonsma, T. Epping et W. Hochstättler, Complexity results on restricted instances of a paint shop problem for words, *Discrete Applied Mathematics*, à paraître.

[9] K. Borsuk, Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre, *Fund. Math.*, 20 :177-190, 1933.

[10] L. E. J. Brouwer, Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten,, *Math. Ann.*, 71 :97-115, 1910.

[11] C. Carathéodory, Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 32 :193-217, 1911.

[12] W. Y. C. Chen, X. Li, C. Wang et X. Zhang, The Minimum All-Ones Problem for Trees, *SIAM J. Comput.*, 33 :379-392, 2004.

[13] D. I. A. Cohen, On the Sperner lemma, *J. Combin. Theory*, 2 :585-587, 1967.

[14] S. A. Cook, The complexity of theorem-proving procedures, dans : Conference Record of Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing, The Association for Computing Machinery, New York, 1971.

[15] J. De Loera, T. Prescott et F. E. Su, A polytopal generalization of Sperner's lemma, *J. Combin. Theory, Serie A*, 100 :1-26, 2002.

[16] J.-P. Delahaye et N. Vaillant, Un jeu à épisode pour l'été, *Pour la Science*, août 2002.

[17] M. De Longueville et R. T. Zivaljevic, The Borsuk-Ulam-property, Tucker-property and constructive proofs in combinatorics, *J. Combin. Theory, Serie A*, à paraître.

[18] A. Dold, Simple proofs of some Borsuk-Ulam results, *Contemp. Math.*, 19 :65-69, 1983.

[19] H. Eriksson, K. Eriksson and J. Sjöstrand, Note on the lamp lighting problem, *Adv. in Appl. Math.*, 27 :357-366, 2001.

[20] T. Epping, W. Hochstättler et M. E. Lübbecke, MaxFlow-MinCut duality for a paint shop problem, dans : U. Leopold-Wildburger, F. Rendl, G. Wäscher (Editeurs) : Operations Research Proceedings 2002, Berlin, Springer, 377-382, 2003.

[21] T. Epping, W. Höchstättler et P. Oertel, Complexity results on a paint shop problem, *Discrete Applied Mathematics*, 136 :217-226, 2004.

[22] L. Euler, Solutio Problematis ad geometriam situs pertinentis, *Commentarii academia scientiarum Petropolitanae*, 8 :128-140, 1736.

[23] K. Fan, A generalization of Tucker's combinatorial lemma with topological applications, *Annals Math.*, 56 :431-437, 1952.

[24] K. Fan, Combinatorial Properties of Certain Simplicial and Cubical Vertex Maps, *Arch. Math.*, 11 :368-377, 1960.

[25] K. Fan, Simplicial maps from an orientable n-pseudomanifold into S^m with the octahedral triangulation, *J. Combin. Theory*, 2 :588-602, 1967.

[26] Fleury, Deux problèmes de géométrie de situation, *Journal de mathématiques élémentaires*, 257-261, 1883.

[27] M. Florence, page jeux de *La Recherche*, et communication personnelle.

[28] M. Florence et F. Meunier, Symmetrical Patterns for σ-games, en préparation.

[29] R. M. Freund, Variable dimension complexes, part II : A unified approach to some combinatorial lemma in topology, *Math. Oper. Res.*, 9 :489-509, 1984.

[30] R. M. Freund, Combinatorial theorems on the simplotope that generalize results on the simplex and cube, *Math. Oper. Res.*, 11 :169-179, 1986.

[31] R. M. Freund, Combinatorial Analogs of Brouwer's Fixed-Point Theorem on a Bounded Polyhedron, *J. Combin. Theory, Serie B*, 47 :192-219, 1989.

[32] R. M. Freund et M. J. Todd, A constructive proof of Tucker's combinatorial lemma, *J. Combin. Theory, Serie A*, 30 :321-325, 1981.

[33] D. Gale, Equilibrium in a discrete exchange economy with money, *International Journal of Game Theory*, 13 :61-64, 1984.

[34] F. Galvin, Solution to problem 88-8, *Math. Intelligencer*, 11 :31-32, 1989.

[35] C. B. Garcia, A hybrid algorithm for the computation of fixed points, *Management Science*, 22 :606-613, 1976.

[36] M. Garey et D. Johnson, Computers and Intractibility, Bell Telephone Laboratories, Incorporated, 1979.

[37] C. H. Goldberg et D. West, Bisection of circle colorings, *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 6 :93-106, 1985.

[38] S. Gravier, M. Mhalla et E. Tannier, *Theoretical Computer Science*, 306 :291-303, 2003.

[39] J. E. Greene, A new short proof of Kneser's conjecture, *Amer. Math. Monthly*, 109 :918-920, 2002.

[40] B. Grünbaum, Convex Polytopes, Wiley-Interscience, 1967 (Pour la seconde édition : Springer, 2003).

[41] T. Haynes, S. Hedetniemi and P. Slater, Fundamentals of Domination in Graphs, Marcel Dekker, New York.

[42] J.-J. Herings, An extremely simple proof of the K-K-M-S Theorem, *Econ. Theory*, 10 :361-367, 1997.

[43] T. Ichiisi, On the Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz-Shapley theorem, *J. Math. Anal. Appl.*, 81 :297-299, 1981.

[44] A. Johnson, F. C. Holroyd et S. Stahl, Multichromatic numbers, star chromatic numbers and Kneser graphs, *J. Graph Theory*, 26 :137-145, 1997.

[45] Y. Kannai, The Core and Balancedness, dans : Handbook of Game Theory with Economic applications (édité par Aumann et Hart), Elvesier, vol 1, 355-395, 1992.

[46] R. M. Karp, Reductibility among combinatorial problems, dans : Complexity of Computer Computations, Plenum Press, New York, 85-103, 1972.

[47] B. Knaster, C. Kuratowski et C. Mazurkiewicz, Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe, *Fundam. Math.*, 14 :132-137, 1929.

[48] M. Kneser, Aufgabe 360, *Jahresbericht des Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 2. Abteilung*, 58 :27, 1955.

[49] H. Komiya, A simple proof of K-K-M-S theorem, *Econ. Theory*, 4 :463-466, 1994.

[50] S. Krasa et Y. C. Yannelis, An elementary proof of the Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz-Shapley theorem, *Econ. Theory*, 4 :467-471, 1994.

[51] S. Krynski, Remarks on matroids and Sperner's lemma, *Eur. J. Combinatorics*, 11 :485-488, 1990.

[52] H. W. Kühn, Simplicial Approximation of Fixed Points, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 61 :1238-1242, 1968.

[53] C. Kuratowski, Sur le problème des courbes gauches en Topologie, *Fundamenta Mathematicae*, 15 :271-280, 1930.

[54] G. van der Laan, A. J. J. Talman et Z. Yang, Existence of balanced simplices on polytopes, *J. of Combin. Theory, Serie A*, 96 :288-302, 2001.

[55] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley Publishing Company, 1993.

[56] S.-N. Lee et M.-H. Shih, A counting lemma and multiple combinatorial Stokes' theorem, *Eur. J. Combinatorics*, 19 :969-979, 1998.

[57] S.-N. Lee et M.-H. Shih, *Arch. Math.*, 81 :103-112, 2003.

[58] S. Lefschetz, Introduction to Topology, Princeton, 1949.

[59] B. Lindström, On Matroids and Sperner's Lemma, *Eur. J. Combinatorics*, 2 :65-66, 1981.

[60] L. Lovász, Kneser's conjecture, chromatic number and homotopy, *J. Combin. Theory, Serie A*, 25 :319-324, 1978.

[61] L. Lovász, Matroids and Sperner's Lemma, *Europ. J. Combinatorics*, 1 :65-67, 1980.

[62] L. Lovász, Combinatorial Problems and Exercize, Elvesier Science Publishers, Amsterdam, The Netherlands, et Akadémiai Kiadó, Budapest, Hungary, deuxième édition, 1993.

[63] L. Lyusternik et S. Shnirel'man, Méthodes topologiqes dans des problèmes variationnels (en russe), Issledowatelskii Institut Matematiki i Mechaniki pri O. M. G. U., Moscow, 1930.

[64] J. Matousek, A Combinatorial Proof of Kneser's Conjecture, *Combinatorica*, 24 :163-170, 2004.

[65] J. Matousek, Using the Borsuk-Ulam Theorem, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2003.

[66] N. Meggido et C. Papadimitriou, On total functions, existence theorems and computational complexity, *Theoretical Computer Science*, 81 :317-324, 1991.

[67] F. Meunier, A Topological Lower Bound for the Circular Chromatic Number of Schrijver Graphs, *J. Graph Theory*, 49 :257-261, 2005.

[68] F. Meunier, Sperner labellings : a combinatorial approach, *J. Combin. Theory, Serie A*, à paraître.

[69] F. Meunier, A combinatorial proof of a theorem of Freund, *J. Combin. Theory, Serie A*, soumis.

[70] F. Meunier, Combinatorial Stokes' formulae, *Eur. J. Combinatorics*, soumis.

[71] F. Meunier, A $\mathbb{Z}_q$-Fan formula, *Les cahiers du Laboratoire Leibniz*, rapport technique.

[72] F. Meunier, Discrete Splits of the Necklace, en préparation.

[73] F. Meunier et A. Sebő, Paint Shop, Odd Cyles and Necklaces, en préparation.

[74] H. Minkowski, Geometrie der Zahlen (Erste Lieferung), Teubner, Leipzig, 1896.

[75] J. Munkres, Elements of Algebraic Topology, Perseus Books Publishing, 1984.

[76] C. Papadimitriou, Computational Complexity, Addison-Welsey Publishing Company, 1994.

[77] C. Papadimitriou, On the Complexity of the Parity Argument and Other Inefficient Proofs of Existence, *J. Computer and System Sceinces*, 48 :498-532, 1994.

[78] T. Prescott et F. E. Su, A constructive proof of Ky Fan's generalization of Tucker's lemma, *J. Combin. Theory, Serie A*, 111 :257-265, 2005.

[79] H. E. Scarf, The Approximation of Fixed Point of a Continuous Mapping, *SIAM J. Appl. Math.*, 15 :1328-1343, 1967.

[80] H. E. Scarf, The core of an N person game, *Econometrica*, 35 :50-69, 1967.

[81] A. Schrijver, Vertex-critical subgraphs of Kneser graphs, *Nieuw Arch. Wiskd., III. Ser.*, 26 :454-461, 1978.

[82] A. Schrijver, Theory of Linear and Integer Programming, Wiley-Interscience Publication, 1986.

[83] A. Schrijver, Combinatorial Optimization, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2003.

[84] A. J. Schwerk and R. J. Wilson, On the Eigenvalues of a Graph, dans : Beineke, L. W., Wilson, R. J. (eds.) Selected Topics in Graph Theory, New York Academic Press, chap. 11, 1978.

[85] L. S. Shapley, On balanced games without side payments, dans : Hu, T. C., Robinson, S. M. (eds.) Mathematical programming, New York Academic Press, 261-273, 1973.

[86] L. S. Shapley et R. Vohra, On Kakutani's fixed point theorem, the K-K-M-S theorem and the core of a balanced game, *Econ. Theory*, 1 :108-116, 1991.

[87] F. W. Simmons et F. E. Su, Consensus-halving via theorems of Borsuk-Ulam and Tucker, *Mathematical social sciences*, 45 :15-25, 2003.

[88] G. Simonyi et G. Tardos, Local chromatic number, Ky Fan's theorem, and circular colorings, *Combinatorica*, à paraître.

[89] E. Sperner, Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 6 :265-272, 1928.

[90] E. Steinitz, Bedingt konvergente Reihen und konvexe System (Schluss), *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 146 :1-52, 1916.

[91] K. Sutner, Additive automata on graphs, *Complex Systems*, 2 :31-32, 1989.

[92] K. Sutner, Linear cellular automata and the Garden-of-Eden, *Math. Intelligencer*, 11 :49-53, 1989.

[93] K. Sutner, Sigma-Automata and Chebyshev Polynomials, *Theoretical Computer Science*, 230 :49-73, 2000.

[94] A. W. Tucker, Some topological properties of disk and sphere, dans : *Proc. First Canadian Math. Congress (Montréal, 1945)*, University of Toronto Press, 285-309, 1946.

[95] A. Vince, Star chromatic number, *J. Graph Theory*, 12 :551-559, 1988.

[96] K. Wagner, Über eine Eigneschaft der ebenen Komplexe, *Mathematische Annalen*, 114 :570-590, 1937.

[97] H. Weyl, Elementare Theorie der konvexen Polyeder, *Commentarii Mathematici Helvetici*, 7 :290-306, 1935.

[98] M. Yannakakis, Node- and edge-deletion problem NP-complete problems, *Proceedings of the STOC'78 Tenth Annual on Theory of Computing*, New York, ACM Press, 253-264, 1978.

[99] L. Zhou, A theorem on open coverings of a simplex and Scarf's core existence theorem through Brouwer's fixed point theorem, *Econ. Theory*, 4 :473-477, 1994.

[100] G. M. Ziegler, Lectures on Polytopes, Springer-Verlag, 1995

[101] G. M. Ziegler, Generalized Kneser coloring theorems with combinatorial proofs, *Inventiones Mathematicae*, 147 :671-691, 2002.

Index

T-joint, 25, 110
σ-jeux, 113
σ^+-jeux, 113
σ^--jeux, 113
σ-symétrique, 122

agréable, cube, 103
algèbre linéaire
    sur $\mathbb{Z}_2$, 116
tout allumé, 113, 115, 117
    quasi-, 117
alphabet, 78
arbre, 29, 117
arbre enraciné, 29, 117
arête, 20
arête, 24
arête complémentaire, 64, 66

Bapat, Théorème de, 39
beau, 7
beauté, 6
biparti, graphe, 29
bloquant, 107
bord, 12, 24, 72, 73, 79, 101
Borsuk-Ulam, Théorème de, 67
Brouwer, Théorème de, 38

chaine, 123
chaîne, 9, 12
    d'un graphe, 25
    eulérienne, 108
chaîne étalée, 55
circulaire, nombre chromatique, 92
cobord, 12, 72, 73, 79, 101
cochaîne, 12
cohomologie, 12, 86
collection, 9
collier, 95–98, 104
coloration, 27, 87
coloration
    circulaire, 28
    fractionnaire, 28
compacité, 18
complet
    complet, cube, 103
complet, graphe, 29
complexe polytopal, 20
concaténation, 79
connectivité, 17
connexe
    fortement, 21
connexe, graphe, 26
constructive, démonstration, 36, 65
corps polytopal, 52
couleur, 106
coupe, 28, 111
coupe maximum, 108
couplage, 25, 111, 118
couplage
    parfait, 25, 118
couverture, 14
couverture
    binaire, 14
    minimale, 108
couverture binaire, 43, 56
cube, 16
cubique, graphe, 25, 111
cyclomatique, nombre, 26

damier, 123, 125
décision, problème de, 31
degré, 25
degré d'une application continue, 6
dépendants, affinement, 13
descendant, 29
déterminant, 118
diagonale, 13
diamètre, 13
différence symétrique, 9
Dold, Théorème de, 83
dominant, 27
domination
    domination
        en parité, 115
dual, graphe, 109

ensemble partiellement ordonné, 10

des facettes, 21
enveloppe affine, 13
enveloppe convexe, 14
équilibré
tenseur, 120
vecteur, 120
équilibrée
matrice, 120
équilibrée, collection, 42
esthétique, 6
étalée, chaîne, 55
étiquetage, 22
étiquetage de Sperner, 36, 54, 57
étiquette, 22
eulérien
cycle, 26
graphe, 26
eulérienne
chaîne, 26

face, 15
facette, 15
facteur, 11, 110
famille, 9
Fan, formule de
cubique, 101
Fan, Lemme de, 74
Fan, lemme de
cubique, 102
fermé, 18
fermeture, 18
feuille, 29
forêt, 29
Freund, Théorème de, 46
frontière, 18

glouton, algorithme, 110
graphe, 24
graphe biparti, 110
graphe régulier
4-régulier, 111
graphe signé, 110
grille, 119, 123, 125
groupe, 78

hamiltonien
chaîne, 26
cycle, 26
graphe, 26
hémisphère, 83
heureux, simplexe, 65
homéomorphisme, 17
homologie, 12, 86
hypergaphe binaire
d'intervalles, 108
hypergraphes binaires, 107
hyperplan, 14

indépendants, affinement, 13
intervalle, 108
inversible
σ-jeu, 118

jeu, 113
joint topologique, 18

KKM, 38
Kneser, Conjecture de, 87
Kneser, graphes de, 87
Kuratowski, Théorème de, 29

lâche, simplexe, 65
Lefschetz, nombre de, 6

maille, 88
matrice d'adjacence
d'un σ-jeu, 114
matroïdes, 46
mineur, 110
mot, 11, 72, 73, 78
multi-étiquetage, 39, 76

nœud, 24

optimisation, problème de, 32
or, 95
orbite, 11

partage équitable, 96
partition, 9
peinture, Problème de l'atelier de, 106
permutation, 104, 106
planaire, graphe, 29
planaire, représentation, 29
pleinement étiqueté, 36
plongement, 29
polarité, 45
polarité, 15
polyèdre, 15
polytope, 15
polytope
cross-, 16
cyclique, 16
Pour la Science, 125
PPA, 33
presque complet
presque complet, cube, 103

produit
    cartésien de graphes, 28
    de graphes, 28
    direct fort de graphes, 28
programmation dynamique, 106
pseudo-variété, 20, 45, 90
    cubique, 20, 101
    polytopale, 20

quasi-triangulation, 55–57

réalisation géométrique, 21
recherche, problème de, 32
régulières, instances k-, 106
représentation planaire d'un graphe, 109

Scarf, Lemme de, 41
Schrijver, graphes de, 89
séquence, 10
serré, simplexe, 65
Shapley, Théorème de, 42
signé, graphe, 26
signe d'un cube, 103
signes, 72
simplexe
    géométrique, 16
sommet, 15, 20, 24
sous-mot, 11, 110
spéciale, triangulation, 64, 83
Sperner, Lemme de, 36
stable, 27, 87
subdivision barycentrique, 21
Sutner, Théorème de, 117

tenseur, 13
tenseur d'adjacence, 122
triangulation, 19
triangulation
    d'un corps polytopal, 54
Tucker, Lemme de, 63

voisinage, 25
voitures, 106
voleurs, 95