



**HAL**  
open science

# Approximation et résolution de problèmes d'équilibre, de point fixe et d'inclusion monotone

Sever Adrian Hirstoaga

► **To cite this version:**

Sever Adrian Hirstoaga. Approximation et résolution de problèmes d'équilibre, de point fixe et d'inclusion monotone. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2006. Français. NNT: . tel-00137228

**HAL Id: tel-00137228**

**<https://theses.hal.science/tel-00137228>**

Submitted on 18 Mar 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

THÈSE DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE – PARIS VI

Spécialité :

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Présentée par :

Sever Adrian HIRSTOAGA

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE – PARIS VI

Sujet :

**APPROXIMATION ET RÉOLUTION  
DE PROBLÈMES D'ÉQUILIBRE, DE POINT FIXE  
ET D'INCLUSION MONOTONE**

Soutenue le 28 septembre 2006 devant le jury composé de :

Hédy ATTOUCH	<i>Rapporteur</i>
Frédéric BONNANS	<i>Examineur</i>
Patrick Louis COMBETTES	<i>Directeur de thèse</i>
Alain HARAUX	<i>Examineur</i>
Sylvain SORIN	<i>Président</i>
Michel THÉRA	<i>Rapporteur</i>

---

Laboratoire Jacques-Louis Lions – UMR 7598



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude et ma sincère reconnaissance à Patrick Louis Combettes qui a dirigé ce travail de thèse. C'est avec beaucoup de gentillesse et d'enthousiasme qu'il a su me guider et me faire confiance au cours de ces dernières années. Je ne trouverai jamais les mots pour le remercier pour sa remarquable disponibilité, sa patience et ses précieux conseils.

Je suis très reconnaissant envers Messieurs Hédÿ Attouch et Michel Théra d'avoir accepté de rapporter ma thèse, et particulièrement honoré qu'ils aient tous deux accepté d'assister à ma soutenance. Je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont accordé à ce travail.

Je remercie également Messieurs Frédéric Bonnans, Alain Haraux et Sylvain Sorin de me faire l'honneur de faire partie du jury. Je leur en suis très reconnaissant. Je suis extrêmement honoré que Monsieur Sylvain Sorin ait accepté d'être président du jury.

Je voudrais remercier le Laboratoire Jacques-Louis Lions de m'avoir si bien accueilli en son sein et de m'avoir permis de travailler dans un milieu très stimulant et enrichissant. J'adresse toute ma gratitude à Mesdames Danièle Boulic, Liliane Ruprecht, Martine Legras et Luce Loriller, ainsi qu'à Monsieur Christian David pour leur aide, leurs compétences et leur gentillesse. Je remercie également Messieurs Michel Legendre, Antoine le Hyaric et Jacques Portès pour leur disponibilité et leurs conseils.

C'est avec plaisir que j'exprime mes vifs remerciements tous mes collègues thésards et post-doctorants du Laboratoire Jacques-Louis Lions pour leur amitié et leur agréable compagnie tout au long de la préparation de cette thèse.

Enfin, je ne remercierai jamais assez tous ceux qui m'ont soutenu et encouragé sans cesse.



# Table des matières

<b>Résumé</b> . . . . .	ix
<b>Notations et glossaire</b> . . . . .	xi
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Présentation générale et objectifs . . . . .	1
1.2 Organisation de la thèse . . . . .	2
1.3 Bibliographie . . . . .	6
<b>2 Algorithmes pour la résolution de systèmes de problèmes d'équilibre</b>	<b>9</b>
2.1 Description et résultats principaux . . . . .	9
2.2 Article en anglais . . . . .	14
2.2.1 Introduction . . . . .	14
2.2.2 Notation and preliminary results . . . . .	16
2.2.2.1 Notation . . . . .	16
2.2.2.2 Set-valued operators . . . . .	16
2.2.2.3 Nonlinear operators . . . . .	17
2.2.2.4 Convergence of two $\mathfrak{T}$ -class algorithms . . . . .	18
2.2.2.5 Convergence of compositions of averaged operators . . . . .	19
2.2.2.6 Resolvents of bifunctions . . . . .	20
2.2.3 Block-iterative algorithms . . . . .	24
2.2.4 A regularization method . . . . .	28
2.2.5 Splitting . . . . .	31
2.2.6 Inconsistent problems . . . . .	34
2.3 Bibliographie . . . . .	36

<b>3</b>	<b>Courbes d'approximation pour les contractions et les opérateurs monotones</b>	<b>39</b>
3.1	Description et résultats principaux . . . . .	39
3.2	Article en anglais . . . . .	43
3.2.1	Introduction . . . . .	43
3.2.2	Nonexpansive fixed point problems . . . . .	44
3.2.3	Monotone inclusion problems . . . . .	49
3.2.4	Further nonexpansive fixed point results . . . . .	55
3.3	Courbes d'approximation perturbées pour les opérateurs monotones .	57
3.4	Bibliographie . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Visco-pénalisation des problèmes d'inclusion monotone</b>	<b>63</b>
4.1	Introduction . . . . .	63
4.2	Résultats préliminaires . . . . .	66
4.3	Résultat principal . . . . .	70
4.4	Bibliographie . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Étude du comportement asymptotique de systèmes dynamiques viscosifiés</b>	<b>75</b>
5.1	Introduction . . . . .	75
5.1.1	Le problème classique . . . . .	76
5.1.2	Discussion . . . . .	77
5.1.3	Le problème viscosifié . . . . .	78
5.2	Systèmes dynamiques continus . . . . .	79
5.3	Systèmes dynamiques discrets . . . . .	86
5.4	Bibliographie . . . . .	88
<b>6</b>	<b>Systèmes dynamiques discrets pour la sélection de points fixes</b>	<b>91</b>
6.1	Description et résultats principaux . . . . .	91
6.2	Article en anglais . . . . .	95
6.2.1	Introduction . . . . .	95
6.2.2	A selection method for a fixed point problem . . . . .	97

6.2.3	Applications . . . . .	102
6.2.3.1	Finitely many operators . . . . .	102
6.2.3.2	Zeros of maximal monotone operators . . . . .	109
6.2.3.3	Applications to equilibrium problem . . . . .	111
6.3	Convergence de l'Algorithme 6.2.1 avec perturbations . . . . .	113
6.4	Application à la restauration d'images . . . . .	116
6.4.1	Introduction . . . . .	116
6.4.2	Décomposition en contraintes dures et douces . . . . .	117
6.4.3	Résultats numériques . . . . .	119
6.5	Bibliographie . . . . .	123
<b>7</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>127</b>
7.1	Bibliographie . . . . .	129





## Résumé

Cette thèse est consacrée à la résolution de trois types de problèmes fondamentaux qui apparaissent en analyse fonctionnelle hilbertienne non-linéaire et dans ses applications : les problèmes d'équilibre pour les bifonctions monotones, les problèmes de point fixe pour les contractions, et les problèmes d'inclusion pour les opérateurs monotones. Notre objectif est d'élaborer de nouvelles méthodes d'approximation et de construction de solutions pour ces problèmes et d'étudier leur comportement asymptotique. Dans un premier temps, nous proposons de nouvelles perturbations visqueuses et visco-pénalisées de ces problèmes, et étudions le comportement asymptotique des courbes d'approximation associées quand la perturbation devient évanescence. Nous étudions ensuite les propriétés de divers systèmes dynamiques discrets et continus associés à ces courbes. Cette étude débouche en particulier sur de nouveaux algorithmes, dont la convergence est établie. Des applications numériques à des problèmes de restauration en traitement de l'image sont fournies pour illustrer la mise en œuvre et les performances de certains des algorithmes proposés.

**Mots-clés** : analyse convexe, courbe d'approximation, viscosité évanescence, régularisation, pénalisation, inéquation variationnelle, méthode itérative, opérateur maximal monotone, contraction, problème d'équilibre, système dynamique, théorie du point fixe, restauration d'image.

## Abstract

This thesis is devoted to solving three basic types of problems which arise in non-linear hilbertian functional analysis and its applications : equilibrium problems for monotone bifunctions, fixed point problems for nonexpansive operators, and inclusion problems for monotone operators. Our aim is to devise new methods to approximate and construct solutions to these problems, and to study their asymptotic behavior. We first propose new viscous and visco-penalized perturbations for these problems and investigate the asymptotic behavior of the associated approximating curves as the perturbation vanishes. We then study the properties of discrete and continuous dynamical systems associated with these approximating curves. This investigation gives rise in particular to new algorithms, the convergence of which is established. Numerical applications to image restoration problems are provided to illustrate the implementation and the performance of some of the proposed algorithms.

**Keywords** : convex analysis, approximating curve, vanishing viscosity, regularization, penalization, variational inequality, iterative method, maximal monotone operator, nonexpansive operator, equilibrium problem, dynamical system, fixed-point theory, image restoration.



## Notations et glossaire

- $\mathcal{H}$  : espace de Hilbert réel.
- $2^{\mathcal{H}}$  : la famille des sous-ensembles de  $\mathcal{H}$ .
- $\langle \cdot | \cdot \rangle$  : produit scalaire de  $\mathcal{H}$ .
- $\| \cdot \|$  : norme de  $\mathcal{H}$ , induite par le produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ .
- $\rightharpoonup$  : convergence faible dans  $\mathcal{H}$ .
- $\rightarrow$  : convergence forte dans  $\mathcal{H}$ .
- $\Gamma_0(\mathcal{H}) = \{f: \mathcal{H} \rightarrow ]-\infty, +\infty] \mid f \text{ propre, convexe et semi-continue inférieurement}\}$ .
- $L^p([a, b]; \mathcal{H}) = \{f: [a, b] \rightarrow \mathcal{H} \mid f \text{ mesurable et } \int_a^b \|f(\xi)\|^p d\xi < +\infty\}$ , où  $p \in [1, +\infty[$  et  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .
- $d_S(x) = \inf_{y \in S} \|x - y\|$  : la distance d'un point  $x \in \mathcal{H}$  à l'ensemble  $S \subset \mathcal{H}$ .
- $P_S$  : le projecteur sur l'ensemble convexe fermé non-vide  $S \subset \mathcal{H}$ .
- $\iota_S$  : la fonction indicatrice de l'ensemble  $S \subset \mathcal{H}$ , définie par

$$(\forall x \in \mathcal{H}) \quad \iota_S(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in S; \\ +\infty, & \text{si } x \notin S. \end{cases}$$

- $1_S$  : la fonction caractéristique de l'ensemble  $S \subset \mathcal{H}$ , définie par

$$(\forall x \in \mathcal{H}) \quad 1_S(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in S; \\ 0, & \text{si } x \notin S. \end{cases}$$

- $\text{Fix } T = \{x \in \mathcal{H} \mid Tx = x\}$  : l'ensemble des points fixes de  $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ .
- $\text{dom } A = \{x \in \mathcal{H} \mid Ax \neq \emptyset\}$  : le domaine de l'opérateur multivoque  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$ .
- $\text{ran } A = \bigcup_{x \in \text{dom } A} Ax$  : l'image de l'opérateur multivoque  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$ .
- $\text{gr } A = \{(x, u) \in \mathcal{H}^2 \mid u \in Ax\}$  : le graphe de l'opérateur multivoque  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$ .
- $A^{-1}$  : l'opérateur inverse de l'opérateur multivoque  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$ , défini par son graphe,

$$\text{gr } A^{-1} = \{(u, x) \in \mathcal{H}^2 \mid (x, u) \in \text{gr } A\}.$$

- $J_A = (\text{Id} + A)^{-1}$  : la résolvante de l'opérateur multivoque  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$ .
- ${}^\gamma A = (\gamma \text{Id} + A^{-1})^{-1} = (\text{Id} - J_{\gamma A})/\gamma$  : l'approximation de Yosida d'indice  $\gamma \in ]0, +\infty[$  de l'opérateur multivoque  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$ .
- $A_n \xrightarrow{G} A$  : la famille d'opérateurs  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en graphe vers l'opérateur  $A$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , i.e., pour tout  $(x, u) \in \text{gr } A$  et  $n \in \mathbb{N}$  il existe  $(x_n, u_n) \in \text{gr } A_n$  tel que  $x_n \rightarrow x$  et  $u_n \rightarrow u$ .
- $\text{dom } f = \{x \in \mathcal{H} \mid f(x) < +\infty\}$  : le domaine d'une fonction  $f: \mathcal{H} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ .
- $\partial f$  : le sous-différentiel d'une fonction propre  $f: \mathcal{H} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$ , défini par

$$(\forall x \in \mathcal{H}) \quad \partial f(x) = \{u \in \mathcal{H} \mid (\forall y \in \mathcal{H}) \langle y - x \mid u \rangle + f(x) \leq f(y)\}.$$

- $\text{Argmin}_S f$  : l'ensemble des minimiseurs de  $f: \mathcal{H} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  sur  $S \subset \mathcal{H}$ .
- $\text{argmin}_S f$  : le minimiseur de  $f: \mathcal{H} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  sur  $S \subset \mathcal{H}$ .
- $\text{prox}_f = J_{\partial f}$  : l'opérateur proximal associé à la fonction  $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ , défini par

$$(\forall x \in \mathcal{H}) \quad \text{prox}_f(x) = \text{argmin}_{y \in \mathcal{H}} (f(y) + \|x - y\|^2/2).$$

- $N_S = \partial \iota_S$  : l'opérateur cône-normal associé à l'ensemble convexe non-vidé  $S \subset \mathcal{H}$ , i.e.,

$$(\forall x \in \mathcal{H}) \quad N_S(x) = \begin{cases} \{u \in \mathcal{H} \mid (\forall y \in S) \langle y - x \mid u \rangle \leq 0\}, & \text{si } x \in S; \\ \emptyset, & \text{si } x \notin S. \end{cases}$$

- $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est une *quasi-contraction* si

$$(\forall (x, y) \in \mathcal{H} \times \text{Fix} T) \quad \|Tx - y\| \leq \|x - y\|.$$

- $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est une *contraction* si

$$(\forall (x, y) \in \mathcal{H}^2) \quad \|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|.$$

- $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est une *contraction stricte* s'il existe  $\theta \in [0, 1[$  tel que

$$(\forall (x, y) \in \mathcal{H}^2) \quad \|Tx - Ty\| \leq \theta \|x - y\|.$$

- $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est une *contraction ferme* si

$$(\forall (x, y) \in \mathcal{H}^2) \quad \|Tx - Ty\|^2 \leq \langle Tx - Ty \mid x - y \rangle.$$

- $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  est *monotone* si  $(\forall (x, u) \in \text{gr} A) (\forall (y, v) \in \text{gr} A) \langle x - y \mid u - v \rangle \geq 0$ , et *maximal monotone* si, de plus, il n'existe pas d'opérateur monotone  $B: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  tel que  $\text{gr} A \subset \text{gr} B$  et  $A \neq B$ .

- $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  est *strictement monotone* si

$$(\forall (x, u) \in \text{gr} A) (\forall (y, v) \in \text{gr} A) \quad x \neq y \quad \Rightarrow \quad \langle x - y \mid u - v \rangle > 0.$$

- $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  est *uniformément monotone* s'il existe une fonction croissante  $c: [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  ne s'annulant qu'en 0 et vérifiant  $\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t)/t = +\infty$  telle que

$$(\forall (x, u) \in \text{gr} A) (\forall (y, v) \in \text{gr} A) \quad \langle x - y \mid u - v \rangle \geq c(\|x - y\|).$$

- $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  est *fortement monotone* s'il existe  $\rho \in ]0, +\infty[$  tel que

$$(\forall (x, u) \in \text{gr} A) (\forall (y, v) \in \text{gr} A) \quad \langle x - y \mid u - v \rangle \geq \rho \|x - y\|^2.$$

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Présentation générale et objectifs

Cette thèse est consacrée à la résolution de trois types de problèmes fondamentaux qui apparaissent en analyse fonctionnelle hilbertienne non-linéaire et dans ses applications : les problèmes d'équilibre, les problèmes de point fixe et les problèmes d'inclusion. Dans leur expression la plus simple, ces problèmes s'écrivent sous la forme suivante (dorénavant,  $\mathcal{H}$  désignera un espace hilbertien réel) :

– Problème d'équilibre :

$$\text{trouver } \bar{x} \in K \text{ tel que } (\forall y \in K) F(\bar{x}, y) \geq 0, \quad (1.1)$$

où  $K$  est un sous-ensemble non-vide de  $\mathcal{H}$  et  $F$  est une application de  $K \times K$  vers  $\mathbb{R}$ .

– Problème de point fixe :

$$\text{trouver } \bar{x} \in \mathcal{H} \text{ tel que } T\bar{x} = \bar{x}, \quad (1.2)$$

où  $T$  est un opérateur monovoque de  $\mathcal{H}$  vers  $\mathcal{H}$ .

– Problème d'inclusion :

$$\text{trouver } \bar{x} \in \mathcal{H} \text{ tel que } 0 \in A\bar{x}, \quad (1.3)$$

où  $A$  est un opérateur multivoque de  $\mathcal{H}$  vers  $2^{\mathcal{H}}$ .

Ces formulations offrent un cadre flexible pour modéliser une multitude de problèmes issus de disciplines telles que l'optimisation, l'économie, la finance, la théorie de la décision, la mécanique, l'optique, la théorie des jeux, le traitement du signal et de l'image [2], [5], [9], [10], [12], [13], [14], [17], [18], [20], [24], [25], [26], [27], [28], [29], [32], [33], [34], [35].

Nous ne nous proposons pas d'examiner l'existence et/ou l'unicité des solutions de ces problèmes puisque ces questions sont déjà bien maîtrisées [3], [6], [19], [23],

[25], [33], [35]. Notre objectif sera d'élaborer de nouvelles méthodes d'approximation et de construction de ces solutions et d'étudier leur comportement asymptotique. Ces méthodes peuvent être classifiées comme suit :

- Courbes d'approximation (Chapitres 3 et 4) : on construit une famille de versions perturbées du problème initial, qui admettent des solutions uniques. Nous étudierons les propriétés de convergence de la famille de ces solutions (la courbe d'approximation), quand le terme de perturbation devient évanescent.
- Méthodes itératives (Chapitres 2, 5 et 6) : il s'agit de construire, à partir d'un point initial, une suite dans  $\mathcal{H}$ , via un système dynamique discret du premier ordre. Nous nous intéresserons à la convergence faible ou forte d'une telle suite vers une solution du problème.
- Systèmes dynamiques continus du premier ordre (Chapitre 5) : un tel système dynamique produit une fonction de  $[0, +\infty[$  vers  $\mathcal{H}$  en tant que solution d'une inclusion d'évolution avec condition initiale. Nous étudierons le comportement asymptotique d'une telle fonction.

Nous montrerons que, dans la plupart des cas, ces méthodes ont comme limite un élément identifiable dans l'ensemble des solutions, à savoir la solution d'une inéquation variationnelle strictement monotone. Le lien entre les trois points ci-dessus est le suivant : l'étude des courbes d'approximation est motivée par le fait qu'elles suggèrent naturellement (en ajoutant un terme de vitesse) des systèmes dynamiques discrets et continus ; d'autre part, elles peuvent être utilisées pour établir la convergence des trajectoires de ces systèmes dynamiques.

La principale motivation de nos travaux est de fournir de nouveaux outils pour la modélisation et la résolution de problèmes d'analyse non-linéaire appliquée. Nous nous restreindrons aux problèmes variationnels convexes, aux problèmes d'équilibre monotones, aux problèmes de point fixe pour les quasi-contractions et aux problèmes d'inclusion monotone. Ce cadre nous permettra à la fois de disposer d'outils puissants (analyse convexe, théorie des opérateurs monotones, théorie des opérateurs contractants) et de viser un vaste champ d'application pour des problèmes concrets.

## 1.2 Organisation de la thèse

Dans cette section nous exposons brièvement les résultats saillants que nous avons obtenus. Une présentation plus détaillée de ces résultats est donnée en début de chaque chapitre.

Au Chapitre 2, notre objectif est de proposer de nouveaux algorithmes pour résoudre un système de problèmes d'équilibre, i.e.,

$$\text{trouver } \bar{x} \in K \text{ tel que } (\forall i \in I)(\forall y \in K) F_i(\bar{x}, y) \geq 0, \quad (1.4)$$

où  $K \neq \emptyset$  est un convexe fermé de  $\mathcal{H}$  et  $(F_i)_{i \in I}$  est une famille dénombrable de bifonctions de  $K^2$  vers  $\mathbb{R}$ . Dans un premier temps, nous montrons que l'on peut

associer une résolvente  $J_F$  à toute bifonction  $F$  vérifiant des hypothèses convenables. Ensuite, nous donnons des exemples mettant en évidence le cadre unifié que (1.4) fournit pour certains problèmes d'inclusion monotone et d'optimisation.

Dans un deuxième temps, en nous basant sur des résultats de [4] et [11], nous proposons deux nouvelles méthodes itératives par blocs utilisant des combinaisons convexes extrapolées des résolventes  $(J_{F_i})_{i \in I}$  :

- La première, de type « Fejér-monotone », converge faiblement vers une solution de (1.4).
- La seconde, de type « Haugazeau », converge fortement vers une solution de (1.4), à distance minimale d'un point donné.

Dans le cas d'une seule bifonction, nous obtenons la convergence forte d'un algorithme avec « point d'ancrage » vers une solution particulière de (1.4). Ensuite, nous étudions le problème décomposé

$$\text{trouver } \bar{x} \in K \quad \text{tel que} \quad (\forall y \in K) \quad F_0(\bar{x}, y) + \langle B\bar{x} \mid y - \bar{x} \rangle \geq 0, \quad (1.5)$$

où  $F_0: K^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $B: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  satisfont certaines propriétés. Deux méthodes itératives de décomposition explicite-implicite (i.e., utilisant  $B$  et  $J_{F_0}$  séparément) sont étudiées pour résoudre (1.5) :

- Une méthode de type « Fejér-monotone », faiblement convergente vers une solution de (1.5).
- Une méthode de type « Haugazeau », fortement convergente vers une solution particulière de (1.5).

Finalement, nous considérons le problème de la construction de solutions approchées pour un système incompatible de problèmes d'équilibre, i.e., quand (1.4) n'admet pas de solution. Le travail de ce chapitre a fait l'objet de la publication [15].

Au Chapitre 3, nous étudions diverses courbes d'approximation pour résoudre des extensions des problèmes (1.2) et (1.3). Plus précisément, nous cherchons tout d'abord à trouver un point fixe commun à une famille de contractions  $(T_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  sur  $\mathcal{H}$ . La courbe considérée est

$$(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad x_\varepsilon = T_\varepsilon(x_\varepsilon + \varepsilon(QS_\varepsilon x_\varepsilon - x_\varepsilon)), \quad (1.6)$$

où  $Q: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est une contraction stricte et  $(S_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  sont des opérateurs convenablement choisis. Comme cas particulier, nous étudierons la courbe

$$(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad w_\varepsilon = T_\varepsilon w_\varepsilon + \varepsilon(QS_\varepsilon T_\varepsilon w_\varepsilon - T_\varepsilon w_\varepsilon). \quad (1.7)$$

Ensuite, nous nous proposons de trouver un zéro commun à une famille d'opérateurs maximaux monotones multivoques  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  sur  $\mathcal{H}$ . La courbe considérée est

$$(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad 0 \in A_\varepsilon y_\varepsilon + \varepsilon V y_\varepsilon, \quad (1.8)$$

où  $V: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  est un opérateur strictement monotone. Nos résultats sont les suivants :



- Sous des hypothèses adéquates, nous montrons que les familles  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  et  $(y_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  sont définies de manière unique.
- Nous obtenons la convergence forte, quand  $\varepsilon \downarrow 0$ , de la courbe  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  vers le point  $x_0 = P(Qx_0)$ , où  $P$  est le projecteur sur l'ensemble des points fixes communs à la famille  $(T_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$ .
- Nous démontrons la convergence forte, quand  $\varepsilon \downarrow 0$ , de la courbe  $(y_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  vers le point  $y_0 \in \mathcal{H}$  vérifiant  $0 \in Ny_0 + Vy_0$ , où  $N$  est l'opérateur cône-normal associé à l'ensemble des zéros communs à la famille  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$ .

Nos résultats englobent et étendent de nombreux résultats existant dans la littérature. On retrouvera en particulier les résultats classiques de Browder [7] et de Tikhonov [30]. Les travaux présentés dans ce chapitre ont fait l'objet de l'article [16].

Au Chapitre 4, nous nous fixons comme objectif de résoudre le problème

$$\text{trouver } \bar{x} \in \mathcal{H} \text{ tel que } 0 \in A\bar{x} + B\bar{x}, \quad (1.9)$$

où  $A, B: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  sont deux opérateurs maximaux monotones tels que  $A + B$  soit maximal monotone. Nous considérons la courbe d'approximation

$$(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad 0 \in {}^{\phi(\varepsilon)}Az_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} + Bz_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} + \varepsilon Vz_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)}, \quad (1.10)$$

où  $\phi: ]0, 1[ \rightarrow ]0, 1[$ ,  ${}^{\phi(\varepsilon)}A$  dénote l'approximation de Yosida de  $A$  et  $V: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est un opérateur strictement monotone. Nous présentons un exemple qui met en évidence le fait que la convergence de la famille  $(z_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)})_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  ne peut pas être déduite de celle de la famille  $(y_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$ , définie dans (1.8). Sous des hypothèses adéquates, nous démontrons que la courbe  $(z_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)})_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  est définie de manière unique dans (1.10) et qu'elle converge fortement, quand  $\varepsilon \downarrow 0$ , vers le point  $z_0 \in \mathcal{H}$  satisfaisant à l'inéquation variationnelle

$$0 \in N_{(A+B)^{-1}0}z_0 + Vz_0, \quad (1.11)$$

où  $N_{(A+B)^{-1}0}$  est l'opérateur cône-normal associé à l'ensemble des zéros de l'opérateur  $A + B$ . Un résultat classique d'Attouch et Cominetti [1] sur des problèmes de minimisation (voir aussi Torralba [31]) est ainsi généralisé.

Au Chapitre 5, nous étudions le comportement asymptotique des trajectoires de nouveaux systèmes dynamiques continus et discrets du premier ordre associés à la courbe d'approximation (1.8). L'objectif est de

$$\text{trouver } \bar{x} \in \mathcal{H} \text{ tel que } 0 \in N_{A^{-1}0}\bar{x} + V\bar{x}, \quad (1.12)$$

où  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  est un opérateur maximal monotone admettant des zéros et  $V: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est un opérateur fortement monotone. Tout d'abord, nous supposons que l'inclusion d'évolution

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in Au(t) + \varepsilon(t)Vu(t), & t \geq 0, \\ u(0) = u_0 \in \mathcal{H} \end{cases} \quad (1.13)$$

admet une solution unique, où  $\varepsilon: [0, +\infty[ \rightarrow ]0, 1[$  vérifie  $\varepsilon(t) \downarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . Sous certaines hypothèses sur la fonction  $\varepsilon$ , nous démontrons que

$$\|u(t) - y_{\varepsilon(t)}\| \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty, \quad (1.14)$$

où  $(y_{\varepsilon(t)})_{t \in ]0, +\infty[}$  est définie dans (1.8), avec  $A_\varepsilon \equiv A$ . Nous obtenons ainsi la convergence forte de  $u(t)$  vers  $y_0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ , où  $y_0$  est la solution de (1.12). Dans le cas particulier où  $V = \text{Id}$ , ce problème est bien connu [8], [22]. Dans un deuxième temps, nous considérons un système dynamique discret du premier ordre associé à (1.8), à savoir le schéma implicite inexact

$$u_0 \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad -(u_{n+1} - u_n)/\alpha_n \in Au_{n+1} + \beta_n V u_{n+1} + e_n, \quad (1.15)$$

où  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  joue le rôle d'une suite d'erreurs. Sous des hypothèses adéquates sur les suites  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , nous établissons la convergence forte de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers la solution  $y_0$  de (1.12). Nous en déduisons ensuite la convergence forte vers  $y_0$  du schéma explicite

$$v_0 \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad -(v_{n+1} - v_n)/\alpha_n = Av_n + \beta_n V v_n, \quad (1.16)$$

où  $A$  et  $V$  sont des opérateurs monotones monovoques.

Au Chapitre 6, nous proposons un schéma itératif général pour trouver une solution particulière d'une extension du problème (1.2). Plus précisément, nous cherchons à trouver un point fixe commun à une famille de quasi-contractions  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $\mathcal{H}$ . Étant données une suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $]0, 1[$  convergeant « lentement » vers 0, une famille de quasi-contractions  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et une contraction stricte  $Q$ , nous considérons l'algorithme

$$u_0 \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = \alpha_n Q(S_n u_n) + (1 - \alpha_n) T_n u_n. \quad (1.17)$$

Sous des hypothèses adéquates, nous montrons la convergence forte de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $x_0 = P(Qx_0)$ , où  $P$  est le projecteur sur l'ensemble des points fixes communs à la famille  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Ensuite, nous en déduisons la convergence forte vers le même point  $x_0$  de l'algorithme

$$v_0 \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_{n+1} = T_{n+1}(\alpha_n Q(S_n v_n) + (1 - \alpha_n) v_n). \quad (1.18)$$

Notons que (1.17) et (1.18) peuvent être vus comme des systèmes dynamiques discrets correspondant aux courbes d'approximation (1.7) et (1.6), respectivement. Diverses applications aux problèmes d'équilibre, d'inclusion monotone et d'optimisation sont considérées. En particulier, nous retrouvons des résultats de convergence des méthodes du gradient et du gradient projeté pour des fonctions convexes lisses. Ce travail fait l'objet de la publication [21]. Ensuite, dans la Section 6.4, nous proposons une application concrète de l'algorithme (1.17) au problème de la restauration d'une image numérique. Il s'agit de résoudre un problème variationnel sous contraintes

multiples. En traitement de l'image, ce type d'approche a jusqu'à présent été limité à des coûts quadratiques et nos résultats permettent de les étendre au delà.

Au Chapitre 7, nous concluons ce mémoire et nous présentons quelques questions que nous envisageons de poursuivre dans nos recherches futures.

### 1.3 Bibliographie

- [1] H. Attouch and R. Cominetti, A dynamical approach to convex minimization coupling approximation with the steepest descent method, *J. Differential Equations*, **128**, 519–540, 1996.
- [2] J. P. Aubin, *Optima and Equilibria – An Introduction to Nonlinear Analysis*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [3] J. P. Aubin and H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, Boston, MA, 1990.
- [4] H. H. Bauschke and P. L. Combettes, A weak-to-strong convergence principle for Fejér-monotone methods in Hilbert spaces, *Math. Oper. Res.*, **26**, 248–264, 2001.
- [5] H. H. Bauschke, P. L. Combettes, and D. R. Luke, Hybrid projection-reflection method for phase retrieval, *J. Opt. Soc. Amer. A*, **20**, 1025–1034, 2003.
- [6] E. Blum and W. Oettli, From optimization and variational inequalities to equilibrium problems, *Math. Student*, **63**, 123–145, 1994.
- [7] F. E. Browder, Existence and approximation of solutions of nonlinear variational inequalities, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **56**, 1080–1086, 1966.
- [8] F. E. Browder, *Nonlinear Operators and Nonlinear Equations of Evolution in Banach Spaces*, Proc. Symp. Pure Math., **18** (Part 2), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1976.
- [9] C. L. Byrne, *Signal Processing – A Mathematical Approach*, A. K. Peters, Wellesley, MA, 2005.
- [10] P. L. Combettes, The foundations of set theoretic estimation, *Proc. IEEE*, **81**, 182–208, 1993.
- [11] P. L. Combettes, Quasi-Fejérian analysis of some optimization algorithms, in *Inherently Parallel Algorithms for Feasibility and Optimization* (D. Butnariu, Y. Censor, and S. Reich, eds.), 115–152, Elsevier, New York, 2001.
- [12] P. L. Combettes, A block-iterative surrogate constraint splitting method for quadratic signal recovery, *IEEE Trans. Signal Process.*, **51**, 1771–1782, 2003.
- [13] P. L. Combettes, Solving monotone inclusions via compositions of nonexpansive averaged operators, *Optimization*, **53**, 475–504, 2004.

- [14] P. L. Combettes and P. Bondon, Hard-constrained inconsistent signal feasibility problems, *IEEE Trans. Signal Process.*, **47**, 2460–2468, 1999.
- [15] P. L. Combettes and S. A. Hirstoaga, Equilibrium programming in Hilbert spaces, *J. Nonlinear Convex Anal.*, **6**, 117–136, 2005.
- [16] P. L. Combettes and S. A. Hirstoaga, Approximating curves for nonexpansive and monotone operators, *J. Convex Anal.*, **13**, 2006.
- [17] P. L. Combettes and V. R. Wajs, Signal recovery by proximal forward-backward splitting, *Multiscale Model. Simul.*, **4**, 1168–1200, 2005.
- [18] F. Facchinei and J.-S. Pang, *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [19] K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in Metric Fixed Point Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [20] A. Göpfert, H. Riahi, C. Tammer, and C. Zălinescu, *Variational Methods in Partially Ordered Spaces*, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [21] S. A. Hirstoaga, Iterative selection methods for common fixed point problems, à paraître dans *J. Math. Anal. Appl.*
- [22] M. M. Israel and S. Reich, Asymptotic behavior of solutions of a nonlinear evolution equation, *J. Math. Anal. Appl.*, **83**, 43–53, 1981.
- [23] A. N. Iusem and W. Sosa, New existence results for equilibrium problems, *Nonlinear Anal.*, **52**, 621–635, 2003.
- [24] J.-S. Pang and M. Fukushima, Quasi-variational inequalities, generalized Nash equilibria, and multi-leader-follower games, *Comput. Manag. Sci.*, **2**, 21–56, 2005.
- [25] R. T. Rockafellar, Monotone operators and the proximal point algorithm, *SIAM J. Control Optim.*, **14**, 877–898, 1976.
- [26] R. T. Rockafellar, Augmented Lagrangians and applications of the proximal point algorithm in convex programming, *Math. Oper. Res.*, **1**, 97–116, 1976.
- [27] R. T. Rockafellar and J.-B. Wets, *Variational Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [28] S. Sorin, *A First Course on Zero-Sum Repeated Games*, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [29] H. Stark and Y. Yang, *Vector Space Projections : A Numerical Approach to Signal and Image Processing, Neural Nets, and Optics*, New York, Wiley, 1998.
- [30] A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin, *Solution of Ill-Posed Problems*, Halsted Press, New York, 1977.
- [31] D. Torralba, *Convergence Épigraphique et Changements d'Échelle en Analyse Variationnelle et Optimisation*, Thèse, Université de Montpellier II, 1996.

- [32] I. Yamada, K. Slavakis, and K. Yamada, An efficient robust adaptive filtering algorithm based on parallel subgradient projection techniques, *IEEE Trans. Signal Process.*, **50**, 1091–1101, 2002.
- [33] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications I – Fixed-Point Theorems*, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [34] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications II/B – Nonlinear Monotone Operators*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [35] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications III – Variational Methods and Optimization*, Springer-Verlag, New York, 1985.

# Chapitre 2

## Algorithmes pour la résolution de systèmes de problèmes d'équilibre

### 2.1 Description et résultats principaux

Dans sa généralité, le problème (1.1) englobe les problèmes d'inéquations variationnelles, les problèmes de minimisation, les problèmes de point-selle, les équilibres de Nash dans les jeux non-coopératifs, les équilibres walrasien dans les économies d'échange, les problèmes d'équilibre vectoriel et certains problèmes de point fixe [2], [7], [15], [17], [26]. Dans ce chapitre, nous nous placerons dans un cadre plus restreint qui exclura certains de ces problèmes (la plupart des équilibres de Nash en particulier) mais qui sera propice au développement et à l'analyse de nouveaux algorithmes couvrant de nombreux cas importants dans les applications.

Nous nous proposons de résoudre un système de problèmes d'équilibre dans un espace de Hilbert réel  $\mathcal{H}$ . Plus précisément, fixons un sous-ensemble non-vide convexe fermé  $K$  de  $\mathcal{H}$  et une famille dénombrable  $(F_i)_{i \in I}$  de bifonctions de  $K^2$  vers  $\mathbb{R}$ . On cherche à

$$\text{trouver } x \in K \text{ tel que } (\forall i \in I)(\forall y \in K) F_i(x, y) \geq 0. \quad (2.1)$$

Nous nous intéresserons également au problème de trouver la meilleure approximation d'un point  $a \in \mathcal{H}$  dans l'ensemble des solutions de (2.1), i.e., au problème de

$$\begin{aligned} \text{projeter } a \text{ sur } S = \bigcap_{i \in I} S_i, \\ \text{où } (\forall i \in I) \quad S_i = \{x \in K \mid (\forall y \in K) F_i(x, y) \geq 0\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ces généralisations du problème (1.1), qui n'ont pas été envisagées dans la littérature, permettent de retrouver diverses formulations du problème d'admissibilité convexe

[3], [5], [12], [13]. Notre principal objectif est de développer de nouveaux algorithmes pour résoudre (2.1) et (2.2), et d'étudier leur comportement asymptotique sous les hypothèses suivantes imposées aux bifonctions  $(F_i)_{i \in I}$ . Soulignons que, même dans le cas d'une seule bifonction, nos résultats sont originaux.

**Condition 2.1.1** La bifonction  $F: K^2 \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait aux propriétés suivantes :

- (i)  $(\forall x \in K) F(x, x) = 0$ .
- (ii)  $(\forall (x, y) \in K^2) F(x, y) + F(y, x) \leq 0$ .
- (iii) Pour tout  $x \in K$ ,  $F(x, \cdot): K \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe et semi-continue inférieurement.
- (iv)  $(\forall (x, y, z) \in K^3) \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F((1 - \varepsilon)x + \varepsilon z, y) \leq F(x, y)$ .

Il est à remarquer que ces conditions sur une bifonction  $F$  font partie des hypothèses qui garantissent l'existence d'une solution du problème d'équilibre, c'est-à-dire, l'existence d'un point  $x \in K$  tel que  $(\forall y \in K) F(x, y) \geq 0$  (voir [7, Theorem 1]). À toute bifonction  $F$  vérifiant la Condition 2.1.1 on peut associer une contraction ferme (nécessairement monovoque), définie partout. On rappelle qu'un opérateur  $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est une contraction ferme si

$$(\forall (x, y) \in \mathcal{H}^2) \|Tx - Ty\|^2 \leq \langle Tx - Ty \mid x - y \rangle. \quad (2.3)$$

**Définition 2.1.2** La résolvente d'une bifonction  $F: K^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est l'opérateur

$$J_F: \mathcal{H} \rightarrow 2^K: x \mapsto \{z \in K \mid (\forall y \in K) F(z, y) + \langle z - x \mid y - z \rangle \geq 0\}. \quad (2.4)$$

On montre que, si  $F$  satisfait à la Condition 2.1.1, alors  $J_F$  est une contraction ferme de domaine  $\mathcal{H}$  telle que  $\text{Fix } J_F = \{x \in K \mid (\forall y \in K) F(x, y) \geq 0\}$  (voir le Lemme 2.2.13).

Plusieurs exemples de bifonctions  $F$  vérifiant la Condition 2.1.1 et les résolventes associées sont présentés dans le Lemme 2.2.16, en voici quelques-uns :

- (i) Soit  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  un opérateur maximal monotone tel que  $K \subset \text{int dom } A$ . Posons

$$(\forall (x, y) \in K^2) F(x, y) = \max_{u \in Ax} \langle u \mid y - x \rangle. \quad (2.5)$$

Alors  $F$  satisfait à la Condition 2.1.1 et  $J_F = (\text{Id} + A + N_K)^{-1} = J_{A+N_K}$ . On déduit à partir de cet exemple que si  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  est un opérateur maximal monotone de domaine  $\mathcal{H}$  alors la résolvente de la bifonction  $F$  donnée par (2.5) coïncide avec la résolvente  $J_A$  de  $A$ .

- (ii) Soit  $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$  telle que  $K \subset \text{dom } f$ . Posons

$$(\forall (x, y) \in K^2) F(x, y) = f(y) - f(x). \quad (2.6)$$

Alors  $F$  satisfait à la Condition 2.1.1 et  $J_F = (\text{Id} + \partial(f + \iota_K))^{-1} = \text{prox}_{f+\iota_K}$ .

On présente maintenant les résultats principaux de convergence vers les solutions de (2.1) et (2.2) de nouveaux algorithmes itératifs par blocs. Les opérateurs  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui y apparaissent sont associés aux bifonctions  $(F_i)_{i \in I}$  de la façon suivante.

**Procédure 2.1.3** On fixe  $\delta \in ]0, 1[$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n \in \mathcal{H}$  est donné et on construit  $T_n$  comme suit :

- ①  $\emptyset \neq I_n \subset I$ ,  $I_n$  fini.
- ②  $(\forall i \in I_n) \gamma_{i,n} \in ]0, +\infty[$ .
- ③  $(\forall i \in I_n) \omega_{i,n} \in [0, 1]$ ,  $\sum_{i \in I_n} \omega_{i,n} = 1$  et

$$(\exists j \in I_n) \begin{cases} \|J_{\gamma_{j,n}F_j}x_n - x_n\| = \max_{i \in I_n} \|J_{\gamma_{i,n}F_i}x_n - x_n\| \\ \omega_{j,n} \geq \delta. \end{cases}$$

- ④  $(\forall x \in \mathcal{H}) \lambda_n(x) \in [\delta, L(x, (J_{\gamma_{i,n}F_i})_{i \in I_n^+}, (\omega_{i,n})_{i \in I_n^+})]$ , où  $I_n^+ = \{i \in I_n \mid \omega_{i,n} > 0\}$  et l'opérateur  $L$  est défini par

$$(\forall x \in \mathcal{H}) \quad L\left(x, (J_{\gamma_{i,n}F_i})_{i \in I_n^+}, (\omega_{i,n})_{i \in I_n^+}\right) = \begin{cases} \frac{\sum_{i \in I_n^+} \omega_{i,n} \|J_{\gamma_{i,n}F_i}x - x\|^2}{\left\| \sum_{i \in I_n^+} \omega_{i,n} J_{\gamma_{i,n}F_i}x - x \right\|^2}, & \text{si } x \notin \bigcap_{i \in I_n^+} S_i; \\ 1, & \text{si } x \in \bigcap_{i \in I_n^+} S_i. \end{cases}$$

- ⑤  $T_n: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}: x \mapsto x + \lambda_n(x) \left( \sum_{i \in I_n^+} \omega_{i,n} J_{\gamma_{i,n}F_i}x - x \right)$ .

Dans la suite de ce chapitre, on dénote par  $Q(x, y, z)$  la projection de  $x$  sur  $H(x, y) \cap H(y, z)$ , où  $(x, y, z) \in \mathcal{H}^3$  et  $H(x, y) = \{u \in \mathcal{H} \mid \langle u - y \mid x - y \rangle \leq 0\}$ .

**Théorème 2.1.4** Soit  $(F_i)_{i \in I}$  une famille dénombrable de bifonctions de  $K^2$  vers  $\mathbb{R}$ . On suppose que la Condition 2.1.1 est vérifiée par  $(F_i)_{i \in I}$  et que l'ensemble  $S$  introduit en (2.2) est non-vide. Soit  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille d'opérateurs construits d'après la Procédure 2.1.3. On suppose qu'il existe des entiers strictement positifs  $(M_i)_{i \in I}$  tels que

$$(\forall (i, n) \in I \times \mathbb{N}) \quad i \in \bigcup_{k=n}^{n+M_i-1} I_k, \quad (2.7)$$

et de plus que, pour tout  $i \in I$  et pour toute suite strictement croissante  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathbb{N}$  telle que  $i \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_{p_n}$ , on a  $\inf_{n \in \mathbb{N}} \gamma_{i,p_n} > 0$ . Alors, on a les résultats suivants.



(i) Étant donnés  $\varepsilon \in ]0, 1]$  et  $x_0 \in \mathcal{H}$ , on pose

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = x_n + (2 - \varepsilon)(T_n x_n - x_n). \quad (2.8)$$

Alors, la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers une solution de (2.1).

(ii) On pose  $y_0 = a$  et

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad y_{n+1} = Q(y_0, y_n, T_n y_n). \quad (2.9)$$

Alors, la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge fortement vers l'unique solution de (2.2).

Quand la famille  $(F_i)_{i \in I}$  se réduit à une seule bifonction  $F$ , le problème (2.2) se réécrit

$$\text{projeter } a \text{ sur } S = \{z \in K \mid (\forall y \in K) \quad F(z, y) \geq 0\}. \quad (2.10)$$

Dans ce cas, en plus de l'itération (2.9), une autre méthode pour trouver la solution de (2.10) est étudiée dans le théorème suivant.

**Théorème 2.1.5** *Soit  $F$  une bifonction de  $K^2$  vers  $\mathbb{R}$  vérifiant la Condition 2.1.1 et telle que l'ensemble  $S$  de (2.10) soit non-vide. Soit  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $]0, +\infty[$  telle que  $\gamma_n \rightarrow +\infty$  et soit  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $]0, 1[$  telle que  $\alpha_n \rightarrow 0$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = +\infty$ . On fixe  $x_0 = a$  et on pose*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = \alpha_n a + (1 - \alpha_n)(J_{\gamma_n F} x_n + e_n), \quad (2.11)$$

où  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite dans  $\mathcal{H}$ . Alors, si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|e_n\| < +\infty$ , la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge fortement vers la solution de (2.10).

Une variante du Théorème 2.1.5 sans les erreurs  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ainsi que d'autres méthodes pour résoudre un problème plus général que (2.10) seront obtenues au Chapitre 6 (Corollaire 6.2.19).

On considère maintenant le problème (2.1) avec une seule bifonction  $F$  sous la forme particulière

$$\text{trouver } x \in K \text{ tel que } (\forall y \in K) \quad F_0(x, y) + \langle Bx \mid y - x \rangle \geq 0, \quad (2.12)$$

où  $F_0: K^2 \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait à la Condition 2.1.1 et  $B: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est tel que  $\beta B$  soit une contraction ferme, où  $\beta \in ]0, +\infty[$ . Alors, le problème (2.2) s'écrit

$$\text{projeter } a \text{ sur } S = \{z \in K \mid (\forall y \in K) \quad F_0(z, y) + \langle Bz \mid y - z \rangle \geq 0\}. \quad (2.13)$$

Sous ces hypothèses sur  $F_0$  et  $B$ , on propose les méthodes de décomposition suivantes pour trouver les solutions de (2.12) et (2.13).

**Théorème 2.1.6** *On suppose que l'ensemble  $S$  de (2.13) est non-vide.*

(i) *Soient  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $]0, 1]$  et  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $]0, 2\beta[$  telles que*

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n > 0 \quad \text{et} \quad 0 < \inf_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n < 2\beta. \quad (2.14)$$

*Étant donnés  $x_0 \in \mathcal{H}$  et deux suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathcal{H}$ , on pose*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = x_n + \lambda_n \left( J_{\gamma_n F_0}(x_n - \gamma_n(Bx_n + b_n)) + a_n - x_n \right). \quad (2.15)$$

*Alors, si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|a_n\| < +\infty$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|b_n\| < +\infty$ , la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers une solution de (2.12).*

(ii) *Soient  $\gamma \in ]0, 2\beta[$  et  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $]0, 1/2]$  telle que  $\inf_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n > 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $T_n = \text{Id} + \lambda_n(J_{\gamma F_0}(\text{Id} - \gamma B) - \text{Id})$ . Alors, la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  produite par la méthode (2.9) converge fortement vers l'unique solution de (2.13).*

Dans la Section 2.2.6 on étudie les problèmes (2.1) et (2.2) dans le cas d'un nombre fini de bifonctions  $(F_i)_{i \in I}$ ,  $I = \{0, \dots, m\}$ , lorsque l'ensemble des solutions  $S$  est vide. Dans ce cas, on introduit les approximations de Yosida associées aux bifonctions  $(F_i)_{1 \leq i \leq m}$ , i.e., les opérateurs  $({}^{\rho_i}F_i)_{1 \leq i \leq m}$  définis par

$${}^{\rho_i}F_i: \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto \langle x - J_{\rho_i F_i} x \mid y - x \rangle / \rho_i, \quad \text{où } \rho_i \in ]0, +\infty[. \quad (2.16)$$

Notons que les opérateurs  $({}^{\rho_i}F_i)_{1 \leq i \leq m}$  sont bien définis car on fait l'hypothèse que les bifonctions  $(F_i)_{1 \leq i \leq m}$  vérifient la Condition 2.1.1. On considère alors le problème de

$$\text{trouver } x \in K \text{ tel que } (\forall y \in K) \quad F_0(x, y) + \sum_{i=1}^m {}^{\rho_i}F_i(x, y) \geq 0, \quad (2.17)$$

dont l'ensemble de solutions est noté par  $G$ . Le lien avec le problème (2.1) est le suivant

$$S \subset G \text{ et de plus, si } S \neq \emptyset, \text{ alors } S = G. \quad (2.18)$$

On remarque que le problème (2.17) est un cas particulier de (2.12) en choisissant

$$B = \sum_{i=1}^m \frac{\text{Id} - J_{\rho_i F_i}}{\rho_i} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{\sum_{i=1}^m 1/\rho_i}. \quad (2.19)$$

En appliquant le Théorème 2.1.6 à la bifonction  $F_0$  et à l'opérateur  $B$  défini dans (2.19), on obtient le résultat suivant sur l'approximation des solutions de (2.1).

**Théorème 2.1.7** *On suppose que l'ensemble  $G$  est non-vide. Soient  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $]0, 1[$  et  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $]0, 2/(\sum_{i=1}^m \rho_i^{-1})[$  telles que*

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n > 0 \text{ et } 0 < \inf_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n < \frac{2}{\sum_{i=1}^m \rho_i^{-1}}. \quad (2.20)$$

*Étant donnés  $x_0 \in \mathcal{H}$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \in \mathcal{H}$  et  $(b_{i,n})_{1 \leq i \leq m} \in \mathcal{H}^m$ , on pose*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = x_n + \lambda_n \left( J_{\gamma_n F_0} \left( x_n + \gamma_n \sum_{i=1}^m (J_{\rho_i F_i} x_n + b_{i,n} - x_n) / \rho_i \right) + a_n - x_n \right). \quad (2.21)$$

*Alors, si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|a_n\| < +\infty$  et  $\max_{1 \leq i \leq m} \sum_{n \in \mathbb{N}} \|b_{i,n}\| < +\infty$ , la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers une solution de (2.17).*

Quelques liens entre tous ces résultats de convergence vers une solution du problème (2.1) et des résultats bien connus (comme la méthode des projections cycliques ou parallèles pour le problème d'admissibilité convexe, la méthode explicite-implicite pour trouver un zéro de la somme de deux opérateurs maximaux monotones) sont mis en évidence dans les remarques 2.2.21, 2.2.32 et 2.2.38.

## 2.2 Article en anglais

### EQUILIBRIUM PROGRAMMING IN HILBERT SPACES<sup>1</sup>

**Abstract :** Several methods for solving systems of equilibrium problems in Hilbert spaces – and for finding best approximations thereof – are presented and their convergence properties are established. The proposed methods include proximal-like block-iterative algorithms for general systems, as well as regularization and splitting algorithms for single equilibrium problems. The problem of constructing approximate equilibria in the case of inconsistent systems is also considered.

#### 2.2.1 Introduction

Let  $\mathcal{H}$  be a real Hilbert space, let  $K$  be a nonempty closed convex subset of  $\mathcal{H}$ , and let  $(F_i)_{i \in I}$  be a countable family of bifunctions from  $K^2$  to  $\mathbb{R}$ . We address the

---

<sup>1</sup>P. L. Combettes and S. A. Hirstoaga, Equilibrium programming in Hilbert spaces, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, vol. 6, no. 1, pp. 117-136, 2005.

broad class of problems whose basic formulation reduces to solving the system of equilibrium problems

$$\text{find } x \in K \text{ such that } (\forall i \in I)(\forall y \in K) F_i(x, y) \geq 0. \quad (2.22)$$

In the case of a single equilibrium, i.e.,  $I$  is a singleton, the formulation (2.22) was shown in [7, 26] to cover monotone inclusion problems, saddle point problems, variational inequality problems, minimization problems, Nash equilibria in noncooperative games, vector equilibrium problems, as well as certain fixed point problems (see also [17]). The above formulation extends this formalism to systems of such problems, covering in particular various forms of feasibility problems [3, 13]. We shall also address the problem of finding a best approximation to a point  $a \in \mathcal{H}$  from the solutions to (2.22), namely

$$\text{project } a \text{ onto } S = \bigcap_{i \in I} S_i, \text{ where } (\forall i \in I) S_i = \{z \in K \mid (\forall y \in K) F_i(z, y) \geq 0\}. \quad (2.23)$$

Our main objective is to devise algorithms for solving (2.22) and (2.23) and to analyze their asymptotic behavior under the standing assumption that the bifunctions  $(F_i)_{i \in I}$  all satisfy the following set of standard properties.

**Condition 2.2.1** The bifunction  $F: K^2 \rightarrow \mathbb{R}$  is such that :

- (i)  $(\forall x \in K) F(x, x) = 0$ .
- (ii)  $(\forall (x, y) \in K^2) F(x, y) + F(y, x) \leq 0$ .
- (iii) For every  $x \in K$ ,  $F(x, \cdot): K \rightarrow \mathbb{R}$  is lower semicontinuous and convex.
- (iv)  $(\forall (x, y, z) \in K^3) \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F((1 - \varepsilon)x + \varepsilon z, y) \leq F(x, y)$ .

While some methods have been proposed to solve (2.22) in this context in the case of a single bifunction (see [24, 25] and, in the case of Euclidean spaces, [15, 19, 22]), we are not aware of any result for systems of equilibrium problems. In addition, there does not seem to be any iterative algorithm in the literature to solve (2.23), even in the case of a single bifunction. Our analysis will also bring to light new connections between equilibrium programming and standard optimization methods.

The remainder of the paper is organized as follows. In section 2.2.2, we define our notation and provide technical facts that will be used in subsequent sections. In section 2.2.3, we establish convergence results for parallel, proximal-like, block-iterative methods to solve (2.22) and (2.23). In the case of a single equilibrium problem, an alternative approach to (2.23) based on regularization ideas is presented in section 2.2.4. In section 2.2.5, we address problems with a single bifunction which can be split into two components, and devise forward-backward-like algorithms for solving them. In section 2.2.6, these results are applied to the problem of finding approximate solutions to (2.22) and (2.23) in the inconsistent case, i.e., when  $S = \emptyset$ .

## 2.2.2 Notation and preliminary results

### 2.2.2.1 Notation

Throughout the paper  $\mathbb{N}$  denotes the set of nonnegative integers and  $\mathcal{H}$  is a real Hilbert space with scalar product  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ , norm  $\| \cdot \|$ , and distance  $d$ .  $K$  is a fixed nonempty closed convex subset of  $\mathcal{H}$  and  $\text{Id}$  denotes the identity operator on  $\mathcal{H}$ . The expressions  $x_n \rightharpoonup x$  and  $x_n \rightarrow x$  denote respectively the weak and strong convergence to  $x$  of a sequence  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{H}$ , and  $\mathfrak{W}(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  its set of weak cluster points. The class of all proper, lower semicontinuous, convex functions from  $\mathcal{H}$  to  $]-\infty, +\infty]$  is denoted by  $\Gamma_0(\mathcal{H})$ . Now let  $C$  be a subset of  $\mathcal{H}$ . Then  $\text{int } C$  is the interior of  $C$ ,  $d_C$  its distance function, and  $\iota_C$  its indicator function, which takes the value 0 on  $C$  and  $+\infty$  on its complement. If  $C$  is nonempty, closed, and convex, then  $P_C$  denotes the projection operator onto  $C$ . Finally,  $\text{Fix } T = \{x \in \mathcal{H} \mid Tx = x\}$  denotes the set of fixed points of an operator  $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ .

### 2.2.2.2 Set-valued operators

Let  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  be a set-valued operator. The sets  $\text{dom } A = \{x \in \mathcal{H} \mid Ax \neq \emptyset\}$  and  $\text{gr } A = \{(x, u) \in \mathcal{H}^2 \mid u \in Ax\}$  are the domain and the graph of  $A$ , respectively. The inverse  $A^{-1}$  of  $A$  is the set-valued operator with graph  $\{(u, x) \in \mathcal{H}^2 \mid u \in Ax\}$ . The resolvent of  $A$  is  $J_A = (\text{Id} + A)^{-1}$  and its Yosida approximation of index  $\gamma \in ]0, +\infty[$  is

$$\gamma_A = \frac{\text{Id} - J_{\gamma A}}{\gamma}. \quad (2.24)$$

Moreover,  $A$  is monotone if

$$(\forall (x, u) \in \text{gr } A)(\forall (y, v) \in \text{gr } A) \quad \langle x - y \mid u - v \rangle \geq 0, \quad (2.25)$$

and maximal monotone if, furthermore,  $\text{gr } A$  is not properly contained in the graph of any monotone operator  $B: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$ . If  $A$  is monotone, then  $J_A$  is single-valued on  $\text{dom } J_A$ ; in addition, if  $A$  is maximal monotone, then  $\text{dom } J_A = \mathcal{H}$  (see [1, section 3.5] for details).

**Lemma 2.2.2** *Let  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  be a maximal monotone operator and let  $\gamma \in ]0, +\infty[$ . Then*

$$J_{(\gamma_A)} = \text{Id} + \frac{1}{\gamma + 1} (J_{(\gamma+1)A} - \text{Id}). \quad (2.26)$$

*Proof.* Let  $(x, y) \in \mathcal{H}^2$ . Then

$$\begin{aligned}
y = J_{(\gamma A)}x &\Leftrightarrow y = \left( \frac{\gamma+1}{\gamma} \text{Id} - \frac{1}{\gamma} J_{\gamma A} \right)^{-1} x \\
&\Leftrightarrow (\gamma+1)y - \gamma x = J_{\gamma A}y \\
&\Leftrightarrow y \in (\gamma+1)y - \gamma x + \gamma A((\gamma+1)y - \gamma x) \\
&\Leftrightarrow x - y \in A((\gamma+1)y - \gamma x) \\
&\Leftrightarrow x - ((\gamma+1)y - \gamma x) \in (\gamma+1)A((\gamma+1)y - \gamma x) \\
&\Leftrightarrow (\gamma+1)y - \gamma x = J_{(\gamma+1)A}x \\
&\Leftrightarrow y = x + \frac{1}{\gamma+1} (J_{(\gamma+1)A}x - x). \tag{2.27}
\end{aligned}$$

□

The subdifferential of a proper function  $f: \mathcal{H} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  is the set-valued operator

$$\partial f: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}: x \mapsto \{u \in \mathcal{H} \mid (\forall y \in \mathcal{H}) \langle y - x \mid u \rangle + f(x) \leq f(y)\}. \tag{2.28}$$

The normal cone operator of a nonempty closed convex set  $C \subset \mathcal{H}$  is  $N_C = \partial \iota_C$ . If  $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ , then  $\partial f$  is maximal monotone and

$$\text{prox}_f = J_{\partial f} \tag{2.29}$$

is Moreau's proximity operator [23]; moreover, the Moreau envelope of index  $\gamma \in ]0, +\infty[$  of  $f$  is the function  $\gamma f: x \mapsto \min_{y \in \mathcal{H}} f(y) + \frac{1}{2\gamma} \|x - y\|^2$ .

**Lemma 2.2.3** *Let  $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$  and  $\gamma \in ]0, +\infty[$ . Then*

$$\text{prox}_{(\gamma f)} = \text{Id} + \frac{1}{\gamma+1} (\text{prox}_{(\gamma+1)f} - \text{Id}). \tag{2.30}$$

*Proof.* Since [23, Proposition 7.d] implies that  $\partial(\gamma f) = \gamma(\partial f)$ , it suffices to set  $A = \partial f$  in Lemma 2.2.2. □

### 2.2.2.3 Nonlinear operators

**Definition 2.2.4** Let  $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  be a single-valued operator with  $\text{dom}T = \mathcal{H}$ . Then  $T$

- (i) belongs to the class  $\mathfrak{T}$  [4] if  $(\forall (x, y) \in \mathcal{H} \times \text{Fix}T) \langle y - Tx \mid x - Tx \rangle \leq 0$ ;
- (ii) is *nonexpansive* if  $(\forall (x, y) \in \mathcal{H}^2) \|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ ;

- (iii) is *firmly nonexpansive* if  $(\forall (x, y) \in \mathcal{H}^2) \|Tx - Ty\|^2 \leq \langle Tx - Ty \mid x - y \rangle$ ;
- (iv) is  $\alpha$ -*averaged* for some  $\alpha \in ]0, 1[$  if  $T = (1 - \alpha)\text{Id} + \alpha R$  for some nonexpansive operator  $R: \text{dom } R = \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  [10]. The class of  $\alpha$ -averaged operators on  $\mathcal{H}$  is denoted by  $\mathcal{A}(\alpha)$ .

The following relationships exist between these types of operators (see, e.g., [4, Proposition 2.3] and [14, Lemma 2.1]) :

$$\begin{array}{ccc}
T \in \mathfrak{T} & \Leftrightarrow & T \text{ is firmly nonexpansive} & \Leftrightarrow & \text{Id} - T \text{ is firmly nonexpansive} \\
& & \Downarrow & & \Updownarrow \\
& & T \text{ is nonexpansive} & & T \in \mathcal{A}(\frac{1}{2}).
\end{array} \tag{2.31}$$

**Lemma 2.2.5** [13, Proposition 2.4] *Let  $(T_i)_{i \in I}$  be a finite family of operators in  $\mathfrak{T}$  such that  $C = \bigcap_{i \in I} \text{Fix } T_i \neq \emptyset$  and let  $(\omega_i)_{i \in I}$  be real numbers in  $]0, 1]$  such that  $\sum_{i \in I} \omega_i = 1$ . Define*

$$(\forall x \in \mathcal{H}) \quad L(x, (T_i)_{i \in I}, (\omega_i)_{i \in I}) = \begin{cases} \frac{\sum_{i \in I} \omega_i \|T_i x - x\|^2}{\|\sum_{i \in I} \omega_i T_i x - x\|^2}, & \text{if } x \notin C; \\ 1, & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{2.32}$$

and

$$\begin{aligned}
T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}: x \mapsto x + \lambda(x) \left( \sum_{i \in I} \omega_i T_i x - x \right), \\
\text{where } 0 < \lambda(x) \leq L(x, (T_i)_{i \in I}, (\omega_i)_{i \in I}).
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Then :

- (i) For all  $x \in \mathcal{H}$ ,  $L(x, (T_i)_{i \in I}, (\omega_i)_{i \in I})$  is a well defined number in  $[1, +\infty[$ .
- (ii)  $\text{Fix } T = C$ .
- (iii)  $T \in \mathfrak{T}$ .

#### 2.2.2.4 Convergence of two $\mathfrak{T}$ -class algorithms

**Algorithm 2.2.6** Given  $\varepsilon \in ]0, 1]$  and  $x_0 \in \mathcal{H}$ , a sequence  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is constructed inductively as follows : for every  $n \in \mathbb{N}$ , select  $T_n \in \mathfrak{T}$  and set  $x_{n+1} = x_n + (2 - \varepsilon)(T_n x_n - x_n)$ .

**Theorem 2.2.7** *Let  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be an arbitrary orbit of Algorithm 2.2.6 and let  $C$  be a nonempty closed convex subset of  $\mathcal{H}$  such that  $C \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Fix } T_n$ . Then :*

- (i)  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is bounded.
- (ii)  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_{n+1} - x_n\|^2 < +\infty$  and  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|T_n x_n - x_n\|^2 < +\infty$ .

(iii)  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converges weakly to a point in  $C$  if and only if  $\mathfrak{W}(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C$ .

*Proof.* For  $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Fix } T_n$ , this is precisely [4, Theorem 2.9]. However, in view of [4, Proposition 2.1], the results remain true as stated above.  $\square$

The second algorithm, which goes back to [18] (see also [12]), concerns the best approximation of the point  $a$  in (2.23).

### Algorithm 2.2.8

Step 0. Set  $n = 0$  and  $x_0 = a$ .

Step 1. Select  $T_n \in \mathfrak{T}$ .

Step 2. Set  $\pi_n = \langle x_0 - x_n \mid x_n - T_n x_n \rangle$ ,  $\mu_n = \|x_0 - x_n\|^2$ ,  $\nu_n = \|x_n - T_n x_n\|^2$ , and  $\rho_n = \mu_n \nu_n - \pi_n^2$ .

Step 3. If  $\rho_n = 0$  and  $\pi_n < 0$ , then stop; otherwise set

$$x_{n+1} = \begin{cases} T_n x_n, & \text{if } \rho_n = 0 \text{ and } \pi_n \geq 0; \\ x_0 + (1 + \pi_n/\nu_n)(T_n x_n - x_n), & \text{if } \rho_n > 0 \text{ and } \pi_n \nu_n \geq \rho_n; \\ x_n + \frac{\nu_n}{\rho_n}(\pi_n(x_0 - x_n) + \mu_n(T_n x_n - x_n)), & \text{if } \rho_n > 0 \text{ and } \pi_n \nu_n < \rho_n. \end{cases} \quad (2.34)$$

Step 4. Set  $n = n + 1$  and go to Step 1.

As shown in [4, Proposition 3.4(v)], the above algorithm does generate an infinite sequence  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  for any starting point  $x_0 \in \mathcal{H}$  provided that  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Fix } T_n \neq \emptyset$ .

**Theorem 2.2.9** *Let  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be an arbitrary orbit of Algorithm 2.2.8 and let  $C$  be a nonempty closed convex subset of  $\mathcal{H}$  such that  $C \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Fix } T_n$ . Then :*

- (i)  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is bounded.
- (ii)  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_{n+1} - x_n\|^2 < +\infty$  and  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|T_n x_n - x_n\|^2 < +\infty$ .
- (iii)  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converges strongly to the projection of  $a$  onto  $C$  if and only if  $\mathfrak{W}(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C$ .

*Proof.* For  $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Fix } T_n$ , this is precisely [4, Theorem 3.5(ii)&(v)&(iv)]. However, an inspection of the proofs of [4, section 3] shows that the assertions remain true as stated above.  $\square$

### 2.2.2.5 Convergence of compositions of averaged operators

**Algorithm 2.2.10** Fix  $x_0 \in \mathcal{H}$  and, for every  $n \in \mathbb{N}$ , set

$$x_{n+1} = x_n + \lambda_n (T_{1,n}(T_{2,n}x_n + e_{2,n}) + e_{1,n} - x_n), \quad (2.35)$$



where  $T_{1,n} \in \mathcal{A}(\alpha_{1,n})$  and  $T_{2,n} \in \mathcal{A}(\alpha_{2,n})$ , with  $(\alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}) \in ]0, 1[^2$ ,  $(e_{1,n}, e_{2,n}) \in \mathcal{H}^2$ , and  $\lambda_n \in ]0, 1]$ .

In the above iteration,  $e_{1,n}$  and  $e_{2,n}$  model errors induced by the inexact evaluation of the operators  $T_{1,n}$  and  $T_{2,n}$ , respectively.

**Theorem 2.2.11** [14, Theorem 6.3] *Suppose that the following conditions are satisfied.*

- (i)  $G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Fix}(T_{1,n}T_{2,n}) \neq \emptyset$ .
- (ii)  $\underline{\lim} \lambda_n > 0$ ,  $\overline{\lim} \alpha_{1,n} < 1$ , and  $\overline{\lim} \alpha_{2,n} < 1$ .
- (iii) *For every subsequence  $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  of an orbit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  generated by Algorithm 2.2.10, we have*

$$\left\{ \begin{array}{l} (\forall x \in G) \sum_{n \in \mathbb{N}} \|(\text{Id} - T_{1,n})T_{2,n}x_n + (\text{Id} - T_{2,n})x\|^2 < +\infty \\ (\forall x \in G) \sum_{n \in \mathbb{N}} \|(\text{Id} - T_{2,n})x_n - (\text{Id} - T_{2,n})x\|^2 < +\infty \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} \|T_{1,n}T_{2,n}x_n - x_n\|^2 < +\infty \\ x_{k_n} \rightharpoonup z \end{array} \right. \Rightarrow z \in G. \quad (2.36)$$

- (iv)  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|e_{1,n}\| < +\infty$  and  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|e_{2,n}\| < +\infty$ .

*Then every orbit of Algorithm 2.2.10 converges weakly to a point in  $G$ .*

### 2.2.2.6 Resolvents of bifunctions

The following notion appears implicitly in [7].

**Definition 2.2.12** The *resolvent* of a bifunction  $F: K^2 \rightarrow \mathbb{R}$  is the set-valued operator

$$J_F: \mathcal{H} \rightarrow 2^K: x \mapsto \{z \in K \mid (\forall y \in K) F(z, y) + \langle z - x \mid y - z \rangle \geq 0\}. \quad (2.37)$$

**Lemma 2.2.13** *Suppose that  $F: K^2 \rightarrow \mathbb{R}$  satisfies Condition 2.2.1 and let*

$$S_F = \{x \in K \mid (\forall y \in K) F(x, y) \geq 0\}. \quad (2.38)$$

*Then :*

- (i)  $\text{dom } J_F = \mathcal{H}$ .
- (ii)  $J_F$  is single-valued and firmly nonexpansive.
- (iii)  $\text{Fix } J_F = S_F$ .
- (iv)  $S_F$  is closed and convex.

*Proof.* (i) : [7, Corollary 1] asserts that for every  $x \in \mathcal{H}$  there exists a point  $z \in K$  such that

$$(\forall y \in K) \quad F(z, y) + \langle z - x \mid y - z \rangle \geq 0. \quad (2.39)$$

(ii) : This statement is implicitly given in [7, p. 135], we provide the details for completeness. Fix  $(x, x') \in \mathcal{H}^2$  and let  $z \in J_F x$ ,  $z' \in J_F x'$ . Then  $F(z, z') \geq \langle x - z \mid z' - z \rangle$  and  $F(z', z) \geq \langle x' - z' \mid z - z' \rangle$ . Therefore, by Condition 2.2.1(ii),  $0 \geq F(z, z') + F(z', z) \geq \langle (x - x') - (z - z') \mid z' - z \rangle$ , hence

$$\langle x - x' \mid z - z' \rangle \geq \|z - z'\|^2. \quad (2.40)$$

In particular, for  $x = x'$ , we obtain  $z = z'$ , which implies that  $J_F$  is single-valued. In turn, we derive from (2.40) that  $J_F$  is firmly nonexpansive. (iii) : Take  $x \in K$ . Then  $x \in \text{Fix } J_F \Leftrightarrow x = J_F x \Leftrightarrow (\forall y \in K) F(x, y) + \langle x - x \mid y - x \rangle \geq 0 \Leftrightarrow (\forall y \in K) F(x, y) \geq 0 \Leftrightarrow x \in S_F$ . (iv) : Follows from (iii), (ii), and (2.31) since the fixed point set of a nonexpansive operator is closed and convex [16, Proposition 1.5.3].  $\square$

**Lemma 2.2.14** *Suppose that  $F: K^2 \rightarrow \mathbb{R}$  satisfies Condition 2.2.1. Let  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a sequence in  $\mathcal{H}$  and  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a sequence in  $]0, +\infty[$ . Define*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad z_n = J_{\gamma_n F} x_n \quad \text{and} \quad u_n = (x_n - z_n)/\gamma_n, \quad (2.41)$$

and suppose that

$$z_n \rightharpoonup x \quad \text{and} \quad u_n \rightarrow u. \quad (2.42)$$

Then  $x \in K$  and  $(\forall y \in K) \quad F(x, y) + \langle u \mid x - y \rangle \geq 0$ .

*Proof.* It follows from Lemma 2.2.13(i)&(ii) that the sequence  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is well defined and from (2.37) that it lies in  $K$ , which is weakly closed. Therefore  $x \in K$ . On the other hand, it follows from Condition 2.2.1(iii) that  $F(y, \cdot)$  is weak lower semicontinuous for every  $y \in K$ . Therefore, we derive from Condition 2.2.1(ii), (2.41), and (2.37) that

$$(\forall y \in K) \quad F(y, x) \leq \underline{\lim} F(y, z_n) \leq \underline{\lim} -F(z_n, y) \leq \underline{\lim} \langle u_n \mid z_n - y \rangle = \langle u \mid x - y \rangle, \quad (2.43)$$

where the last equality follows from (2.42) and the sequential continuity of  $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$  on  $\mathcal{H}^{\text{strong}} \times \mathcal{H}^{\text{weak}}$ . Now fix  $y \in K$  and define, for every  $\varepsilon \in ]0, 1]$ ,  $x_\varepsilon = (1 - \varepsilon)x + \varepsilon y$ .

Then, for every  $\varepsilon \in ]0, 1]$ ,  $x_\varepsilon \in K$  by convexity of  $K$  and, in turn, Condition 2.2.1(i), Condition 2.2.1(iii), and (2.43) yield

$$\begin{aligned}
0 &= F(x_\varepsilon, x_\varepsilon) \\
&\leq (1 - \varepsilon)F(x_\varepsilon, x) + \varepsilon F(x_\varepsilon, y) \\
&\leq (1 - \varepsilon) \langle u \mid x - x_\varepsilon \rangle + \varepsilon F(x_\varepsilon, y) \\
&= \varepsilon(1 - \varepsilon) \langle u \mid x - y \rangle + \varepsilon F(x_\varepsilon, y),
\end{aligned} \tag{2.44}$$

whence  $F(x_\varepsilon, y) \geq (1 - \varepsilon) \langle u \mid y - x \rangle$ . In view of Condition 2.2.1(iv), we conclude that  $F(x, y) \geq \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F(x_\varepsilon, y) \geq \langle u \mid y - x \rangle$ .  $\square$

Next, we recall an important technical fact that will be required subsequently.

**Lemma 2.2.15** [7, Lemma 1] *Let  $C_1$  and  $C_2$  be two nonempty convex subsets of  $\mathcal{H}$  such that  $C_1$  is weakly compact. Let the function  $\Phi: C_1 \times C_2 \rightarrow \mathbb{R}$  be concave and upper semicontinuous in the first argument, and convex in the second argument. Assume furthermore that*

$$(\forall y \in C_2) \max_{u \in C_1} \Phi(u, y) \geq 0. \tag{2.45}$$

Then

$$(\exists u \in C_1)(\forall y \in C_2) \Phi(u, y) \geq 0. \tag{2.46}$$

We complete this section with concrete examples of resolvents of bifunctions.

**Lemma 2.2.16** *Let  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  be a maximal monotone operator, let  $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ , let  $C \subset \mathcal{H}$  be a nonempty closed convex set, and let  $\mu \in ]0, +\infty[$ .*

(i) *Suppose that  $K \subset \text{int dom } A$  and set*

$$(\forall (x, y) \in K^2) \quad F(x, y) = \max_{u \in Ax} \langle u \mid y - x \rangle. \tag{2.47}$$

*Then  $F$  satisfies Condition 2.2.1 and  $J_F = J_{A+N_K}$ .*

(ii) *Set*

$$K = \mathcal{H} \quad \text{and} \quad (\forall (x, y) \in \mathcal{H}^2) \quad F(x, y) = \langle {}^\mu Ax \mid y - x \rangle. \tag{2.48}$$

*Then  $F$  satisfies Condition 2.2.1 and  $J_F = \text{Id} + \frac{1}{\mu+1} (J_{(\mu+1)A} - \text{Id})$ .*

(iii) *Set*

$$K = \mathcal{H} \quad \text{and} \quad (\forall (x, y) \in \mathcal{H}^2) \quad F(x, y) = \langle x - \text{prox}_{\mu f} x \mid y - x \rangle / \mu. \tag{2.49}$$

*Then  $F$  satisfies Condition 2.2.1 and  $J_F = \text{Id} + \frac{1}{\mu+1} (\text{prox}_{(\mu+1)f} - \text{Id})$ .*

(iv) Set

$$K = \mathcal{H} \quad \text{and} \quad (\forall (x, y) \in \mathcal{H}^2) \quad F(x, y) = \langle x - P_C x \mid y - x \rangle / \mu. \quad (2.50)$$

Then  $F$  satisfies Condition 2.2.1 and  $J_F = \text{Id} + \frac{1}{\mu+1}(P_C - \text{Id})$ .

(v) Suppose that  $K \subset \text{dom } f$  and set

$$(\forall (x, y) \in K^2) \quad F(x, y) = f(y) - f(x). \quad (2.51)$$

Then  $F$  satisfies Condition 2.2.1 and  $J_F = \text{prox}_{f+\iota_K}$ .

*Proof.* (i) : By [27, Theorem 2.28],  $A$  is locally bounded on  $\text{int dom } A$ . Therefore, it follows from [1, Proposition 3.5.6.1] that the sets  $(Ax)_{x \in K}$  are weakly compact and that, for every  $(x, y) \in K^2$ , the weakly continuous function  $\langle \cdot \mid y - x \rangle$  achieves its maximum over  $Ax$ . Hence,  $F$  is well defined. In addition,  $F$  satisfies Condition 2.2.1 : Indeed, item (i) there is obvious, item (ii) follows at once from the monotonicity of  $A$ , and item (iii) from the fact that  $F(x, \cdot)$  is the supremum of the family of lower semicontinuous convex functions  $(\langle u \mid \cdot - x \rangle)_{u \in Ax}$ . Finally, to establish item (iv) in Condition 2.2.1, let us observe that our assumptions imply that  $A|_{\text{int dom } A}$  is a weakusco operator [27, section 7]. Hence, it follows from [6, Théorème VI.3.2] that, for every  $y \in K$ ,  $F(\cdot, y)$  is upper semicontinuous and, therefore, that Condition 2.2.1(iv) holds. Now take  $x$  and  $z$  in  $\mathcal{H}$ . Then Lemma 2.2.13(ii) and (2.37) yield

$$\begin{aligned} z = J_F x &\Leftrightarrow z \in K \quad \text{and} \quad (\forall y \in K) \quad \max_{u \in Az} \langle y - z \mid u + z - x \rangle \geq 0 \\ &\Leftrightarrow z \in K \quad \text{and} \quad (\exists u \in Az)(\forall y \in K) \quad \langle y - z \mid u + z - x \rangle \geq 0 \quad (2.52) \\ &\Leftrightarrow (\exists u \in Az) \quad x - z - u \in N_K z \\ &\Leftrightarrow x \in z + Az + N_K z \\ &\Leftrightarrow z = (\text{Id} + A + N_K)^{-1} x \\ &\Leftrightarrow z = J_{A+N_K} x, \end{aligned} \quad (2.53)$$

where we have used Lemma 2.2.15 (with  $C_1 = Az$ ,  $C_2 = K$ , and  $\Phi(u, y) = \langle y - z \mid u + z - x \rangle$ ) to get (2.52). (ii) :  ${}^\mu A$  is a single-valued maximal monotone operator with domain  $\mathcal{H}$  [1, Theorem 3.5.9]. Using this operator in (2.47) yields (2.48), and it follows from (i) that  $J_F = J_{({}^\mu A)}$ , which proves the assertion via Lemma 2.2.2. (iii) : Set  $A = \partial f$  in (ii) and use (2.24) and (2.29). (iv) : Set  $f = \iota_C$  in (iii). (v) : It is easily verified that  $F$  satisfies Condition 2.2.1. Now take  $x$  and  $z$  in  $\mathcal{H}$ . Then it follows from (2.37), (2.51), and (2.28) that

$$\begin{aligned} z = J_F x &\Leftrightarrow z \in K \quad \text{and} \quad (\forall y \in K) \quad \langle y - z \mid x - z \rangle + f(z) \leq f(y) \\ &\Leftrightarrow (\forall y \in \mathcal{H}) \quad \langle y - z \mid x - z \rangle + f(z) + \iota_K(z) \leq f(y) + \iota_K(y) \\ &\Leftrightarrow x - z \in \partial(f + \iota_K)(z) \\ &\Leftrightarrow z = \text{prox}_{f+\iota_K} x. \end{aligned} \quad (2.54)$$

□

**Remark 2.2.17** In all of the above examples, the function  $F(\cdot, y)$  is actually upper semicontinuous for every  $y \in K$ .

### 2.2.3 Block-iterative algorithms

The main objective of this section is to apply Theorem 2.2.7 and Theorem 2.2.9 with a suitable choice of the sequence  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  to solve (2.22) and (2.23). It is recalled that  $(F_i)_{i \in I}$  is a countable (finite or countably infinite) family of bifunctions from  $K^2$  to  $\mathbb{R}$  which all satisfy Condition 2.2.1. We shall use the following construction, in which the operator  $L$  is defined by (2.32).

**Procedure 2.2.18** Fix  $\delta \in ]0, 1[$ . At every iteration  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n$  is available and  $T_n$  is constructed according to the following steps.

- ①  $\emptyset \neq I_n \subset I$ ,  $I_n$  finite.
- ②  $(\forall i \in I_n) \gamma_{i,n} \in ]0, +\infty[$ .
- ③  $(\forall i \in I_n) \omega_{i,n} \in [0, 1]$ ,  $\sum_{i \in I_n} \omega_{i,n} = 1$ , and

$$(\exists j \in I_n) \begin{cases} \|J_{\gamma_j, n F_j} x_n - x_n\| = \max_{i \in I_n} \|J_{\gamma_i, n F_i} x_n - x_n\| \\ \omega_{j,n} \geq \delta. \end{cases}$$

- ④  $(\forall x \in \mathcal{H}) \lambda_n(x) \in [\delta, L(x, (J_{\gamma_i, n F_i})_{i \in I_n^+}, (\omega_{i,n})_{i \in I_n^+})]$ , where  $I_n^+ = \{i \in I_n \mid \omega_{i,n} > 0\}$ .
- ⑤  $T_n: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}: x \mapsto x + \lambda_n(x) (\sum_{i \in I_n^+} \omega_{i,n} J_{\gamma_i, n F_i} x - x)$ .

#### Condition 2.2.19

- (i) The set  $S$  in (2.23) is nonempty.
- (ii)  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is constructed as in Procedure 2.2.18.
- (iii) There exist strictly positive integers  $(M_i)_{i \in I}$  such that

$$(\forall (i, n) \in I \times \mathbb{N}) i \in \bigcup_{k=n}^{n+M_i-1} I_k. \quad (2.55)$$

- (iv) For every  $i \in I$  and every strictly increasing sequence  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{N}$  such that  $i \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_{p_n}$ ,  $\inf_{n \in \mathbb{N}} \gamma_{i, p_n} > 0$ .

**Theorem 2.2.20** *Suppose that Condition 2.2.19 is satisfied. Then :*

- (i) *Every orbit of Algorithm 2.2.6 converges weakly to a solution to (2.22).*
- (ii) *Every orbit of Algorithm 2.2.8 converges strongly to the unique solution to (2.23).*

*Proof.* We are going to show that the two assertions follow from Theorem 2.2.7 and Theorem 2.2.9 with  $C = S$ . We first observe that Lemma 2.2.13(iv) guarantees that the sets  $(S_i)_{i \in I}$  in (2.23) are closed and convex. Accordingly, it follows from Condition 2.2.19(i) that  $S$  is nonempty, closed, and convex. Problem (2.23) therefore possesses a unique solution. Moreover, for all  $n \in \mathbb{N}$ , the weights  $(\omega_{i,n})_{i \in I_n^+}$  are real numbers in  $]0, 1]$  such that  $\sum_{i \in I_n^+} \omega_{i,n} = 1$ . On the other hand, it follows from Lemma 2.2.13(i)&(ii) and (2.31) that

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall i \in I_n) \quad J_{\gamma_{i,n}F_i} \in \mathfrak{T}. \quad (2.56)$$

Therefore, Lemma 2.2.5(iii) yields

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad T_n \in \mathfrak{T}. \quad (2.57)$$

Furthermore, we derive from (2.23), Lemma 2.2.13(iii), and Lemma 2.2.5(ii) that

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad S = \bigcap_{i \in I} S_i \subset \bigcap_{i \in I_n^+} \text{Fix } J_{\gamma_{i,n}F_i} = \text{Fix } T_n. \quad (2.58)$$

Therefore  $S \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Fix } T_n$ . Now let  $i$  be an index in  $I$ , let  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a sequence generated by either algorithm, and let  $x \in \mathfrak{W}(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , say  $x_{k_n} \rightharpoonup x$ . Then, in view of Theorem 2.2.7(iii) and Theorem 2.2.9(iii), it is enough to show that  $x \in S_i$ , i.e.,

$$x \in K \quad \text{and} \quad (\forall y \in K) \quad F_i(x, y) \geq 0. \quad (2.59)$$

Theorem 2.2.7(ii) and Theorem 2.2.9(ii) assert that  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_{n+1} - x_n\|^2 < +\infty$  and  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|T_n x_n - x_n\|^2 < +\infty$ . Now fix  $z \in S$  and set  $\beta = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n - z\|$ . Then  $\beta < +\infty$  by Theorem 2.2.7(i) and Theorem 2.2.9(i). On the other hand, we derive from (2.56), (2.58), and Definition 2.2.4(i) that

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall j \in I_n) \quad \|J_{\gamma_{j,n}F_j} x_n - x_n\|^2 \leq \langle z - x_n \mid J_{\gamma_{j,n}F_j} x_n - x_n \rangle. \quad (2.60)$$

Thus, it follows from Procedure 2.2.18③, (2.60), the Cauchy-Schwarz inequality, and Procedure 2.2.18④&⑤ that

$$\begin{aligned} (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \delta \max_{j \in I_n} \|J_{\gamma_{j,n}F_j} x_n - x_n\|^2 &\leq \sum_{j \in I_n} \omega_{j,n} \|J_{\gamma_{j,n}F_j} x_n - x_n\|^2 \\ &\leq \left\langle z - x_n \mid \sum_{j \in I_n} \omega_{j,n} J_{\gamma_{j,n}F_j} x_n - x_n \right\rangle \\ &\leq \beta \left\| \sum_{j \in I_n^+} \omega_{j,n} J_{\gamma_{j,n}F_j} x_n - x_n \right\| \\ &\leq \frac{\beta \lambda_n(x_n)}{\delta} \left\| \sum_{j \in I_n^+} \omega_{j,n} J_{\gamma_{j,n}F_j} x_n - x_n \right\| \\ &= \beta \|T_n x_n - x_n\| / \delta. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Therefore, since  $T_n x_n - x_n \rightarrow 0$ , we obtain

$$\max_{j \in I_n} \|J_{\gamma_{j,n} F_j} x_n - x_n\| \rightarrow 0. \quad (2.62)$$

After passing to a subsequence of  $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  if necessary, we assume that, for every  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k_{n+1} \geq k_n + M_i$ . Then Condition 2.2.19(iii) asserts that there exists a sequence  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{N}$  such that

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad k_n \leq p_n \leq k_n + M_i - 1 < k_{n+1} \leq p_{n+1} \quad \text{and} \quad i \in I_{p_n}. \quad (2.63)$$

However,  $x_{p_n} - x_{k_n} \rightarrow 0$  since  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_{n+1} - x_n\|^2 < +\infty$  and

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \|x_{p_n} - x_{k_n}\| \leq \sum_{l=k_n}^{k_n+M_i-2} \|x_{l+1} - x_l\| \leq \sqrt{M_i - 1} \sqrt{\sum_{l \geq k_n} \|x_{l+1} - x_l\|^2}. \quad (2.64)$$

Hence,  $x_{p_n} \rightharpoonup x$ . On the other hand, we derive from (2.62) and (2.63) that

$$z_{p_n} - x_{p_n} \rightarrow 0, \quad \text{where} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad z_{p_n} = J_{\gamma_{i,p_n} F_i} x_{p_n}. \quad (2.65)$$

In turn, we obtain

$$z_{p_n} \rightharpoonup x. \quad (2.66)$$

Now set, for every  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{p_n} = (x_{p_n} - z_{p_n})/\gamma_{i,p_n}$ . Then (2.65) and Condition 2.2.19(iv) imply that

$$u_{p_n} \rightarrow 0. \quad (2.67)$$

Altogether, it follows from (2.66), (2.67), and Lemma 2.2.14 that (2.59) is satisfied.  $\square$

### Remark 2.2.21

- By considering the special cases described in Lemma 2.2.16, one can recover from Theorem 2.2.20 various convergence results for block-iterative methods involving resolvents of maximal monotone operators, proximity operators, or projection operators (see [4] and [13] and the references therein). For instance, suppose that  $I = \{1, \dots, m\}$  and that  $(S_i)_{i \in I}$  is a family of closed convex sets in  $\mathcal{H}$  with associated projection operators  $(P_i)_{i \in I}$ . Now fix  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , define  $i: \mathbb{N} \rightarrow I: n \mapsto (n \text{ modulo } m) + 1$ , and set

$$K = \mathcal{H} \quad \text{and} \quad (\forall i \in I)(\forall (x, y) \in \mathcal{H}^2) \quad F_i(x, y) = \langle x - P_i x \mid y - x \rangle / (1 - \varepsilon). \quad (2.68)$$

Then it follows from Lemma 2.2.16(iv) that, for every  $i \in I$ ,  $F_i$  satisfies Condition 2.2.1 and  $J_{F_i} = \text{Id} + (P_i - \text{Id})/(2 - \varepsilon)$ . Now set

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \lambda_n \equiv 1, \quad I_n = \{i(n)\}, \quad \text{and} \quad \gamma_{i(n),n} = 1. \quad (2.69)$$

Then Theorem 2.2.20(i) states that, if  $S = \bigcap_{i \in I} S_i \neq \emptyset$ , the sequence produced by the cyclic projections method

$$x_0 \in \mathcal{H} \quad \text{and} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = P_{i(n)}x_n \quad (2.70)$$

converges weakly to a point in  $S$ . This classical result is due to Bregman [8, Theorem 1].

- It follows from the analysis of [13] that the conclusion of Theorem 2.2.20(i) remains true if certain errors are present in evaluation of the resolvents in Procedure 2.2.18.

In the case when the family  $(F_i)_{i \in I}$  consists of a single bifunction  $F$ , Problem (2.22) reduces to

$$\text{find } x \in K \quad \text{such that} \quad (\forall y \in K) \quad F(x, y) \geq 0. \quad (2.71)$$

Moreover, we have  $L \equiv 1$  and, for  $\lambda_n \equiv 1/(2 - \varepsilon)$  in Procedure 2.2.18, the iteration described by Algorithm 2.2.6 assumes the form

$$x_0 \in K \quad \text{and} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = J_{\gamma_n F}x_n, \quad \text{where } \gamma_n \in ]0, +\infty[. \quad (2.72)$$

Theorem 2.2.20(i) states that every sequence  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  so constructed converges weakly to a solution to (2.71) provided that  $\inf_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n > 0$  (see also [15, 22, 24, 25] for related results). This statement can be refined as follows.

**Theorem 2.2.22** *Suppose that  $F: K^2 \rightarrow \mathbb{R}$  satisfies Condition 2.2.1 and that the set  $S$  of solutions to (2.71) is nonempty. Let  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be an arbitrary sequence generated by (2.72), where  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n^2 = +\infty$ . Then  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converges weakly to a point in  $S$ .*

*Proof.* Let  $n \in \mathbb{N}$ . It follows from (2.72) and (2.37) that

$$\begin{cases} 0 \leq \gamma_n F(x_{n+1}, x_{n+2}) + \langle x_{n+1} - x_n \mid x_{n+2} - x_{n+1} \rangle \\ 0 \leq \gamma_{n+1} F(x_{n+2}, x_{n+1}) + \langle x_{n+2} - x_{n+1} \mid x_{n+1} - x_{n+2} \rangle. \end{cases} \quad (2.73)$$

Now set  $z_n = J_{\gamma_n F}x_n$  and  $u_n = (x_n - z_n)/\gamma_n$ . Then (2.73) yields

$$\begin{cases} \langle u_n \mid x_{n+2} - x_{n+1} \rangle \leq F(x_{n+1}, x_{n+2}) \\ \langle u_{n+1} \mid x_{n+1} - x_{n+2} \rangle \leq F(x_{n+2}, x_{n+1}) \end{cases} \quad (2.74)$$

and it therefore follows from Condition 2.2.1(ii) that

$$\langle u_n - u_{n+1} \mid x_{n+2} - x_{n+1} \rangle \leq F(x_{n+1}, x_{n+2}) + F(x_{n+2}, x_{n+1}) \leq 0. \quad (2.75)$$

Consequently, we have  $\langle u_{n+1} - u_n \mid u_{n+1} \rangle \leq 0$  and, by Cauchy-Schwarz,  $\|u_{n+1}\| \leq \|u_n\|$ . Therefore

$$(\|u_n\|)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converges.} \quad (2.76)$$



Let us now apply Theorem 2.2.7 with  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} = (J_{\gamma_n F})_{n \in \mathbb{N}}$ . We first obtain from Theorem 2.2.7(ii) that  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n^2 \|u_n\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \|z_n - x_n\|^2 < +\infty$ . Since  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n^2 = +\infty$ , it follows that  $\underline{\lim} \|u_n\| = 0$  and, consequently, (2.76) yields  $u_n \rightarrow 0$ . Now suppose that  $x_{k_n} \rightharpoonup x$ . Then, in view of Theorem 2.2.7(iii), it remains to show that  $x \in S$ . As seen above,

$$u_{k_n} \rightarrow 0. \quad (2.77)$$

On the other hand, since  $z_n - x_n \rightarrow 0$ , we have

$$z_{k_n} \rightharpoonup x. \quad (2.78)$$

Combining (2.77), (2.78), and Lemma 2.2.14, we conclude that  $x$  solves (2.71).  $\square$

**Remark 2.2.23** Consider the setting of Lemma 2.2.16(i) with  $K = \mathcal{H}$ . Then, for every  $n \in \mathbb{N}$ ,  $J_{\gamma_n F} = (\text{Id} + \gamma_n A)^{-1}$  reduces to the usual resolvent of  $\gamma_n A$  and Theorem 2.2.22 therefore corresponds to [9, Proposition 8] (see also [10, Theorem 2.6(a)]).

## 2.2.4 A regularization method

In this section, we suppose that the family  $(F_i)_{i \in I}$  consists of a single bifunction  $F$ . Then the problem (2.23) of finding the best approximation to the point  $a$  becomes

$$\text{project } a \text{ onto } S = \{z \in K \mid (\forall y \in K) F(z, y) \geq 0\}. \quad (2.79)$$

We now describe an alternative to Theorem 2.2.20(ii) to solve this problem.

### Algorithm 2.2.24

Step 0. Set  $n = 0$  and  $x_0 = a$ .

Step 1. Let  $\alpha_n \in ]0, 1[$ ,  $\gamma_n \in ]0, +\infty[$ , and  $e_n \in \mathcal{H}$ .

Step 2. Set  $x_{n+1} = \alpha_n a + (1 - \alpha_n)(J_{\gamma_n F} x_n + e_n)$ .

Step 3. Set  $n = n + 1$  and go to Step 1.

We shall study this iterative scheme in the context described below.

### Condition 2.2.25

- (i) The set  $S$  in (2.79) is nonempty.
- (ii)  $\alpha_n \rightarrow 0$  and  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = +\infty$ .
- (iii)  $\gamma_n \rightarrow +\infty$ .
- (iv)  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|e_n\| < +\infty$ .

**Theorem 2.2.26** *Suppose that  $F: K^2 \rightarrow \mathbb{R}$  satisfies Condition 2.2.1 and that Condition 2.2.25 is satisfied. Then every orbit of Algorithm 2.2.24 converges strongly to the unique solution to (2.79).*

*Proof.* In view of Lemma 2.2.13(iv) and Condition 2.2.25(i), Problem (2.79) does possess a unique solution. Now let  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be an orbit of Algorithm 2.2.24 and set

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad z_n = J_{\gamma_n F} x_n \quad \text{and} \quad u_n = (x_n - z_n)/\gamma_n. \quad (2.80)$$

It follows from Lemma 2.2.13(i)–(iii), and (2.31) that

$$(\forall x \in S)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \|z_n - x\| = \|J_{\gamma_n F} x_n - J_{\gamma_n F} x\| \leq \|x_n - x\|. \quad (2.81)$$

Therefore

$$\begin{aligned} (\forall x \in S)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \|x_{n+1} - x\| & \\ & \leq \alpha_n \|a - x\| + (1 - \alpha_n)(\|z_n - x\| + \|e_n\|) \\ & \leq \alpha_n \|a - x\| + (1 - \alpha_n)\|x_n - x\| + \|e_n\|. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Since  $x_0 = a$ , we obtain by induction

$$(\forall x \in S)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \|x_{n+1} - x\| \leq \|a - x\| + \sum_{k=0}^n \|e_k\|. \quad (2.83)$$

Hence, it follows from Condition 2.2.25(iv) that  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is bounded and, in turn, from (2.81) that  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is bounded. Consequently,  $(x_n - z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is bounded and we derive from (2.80) and Condition 2.2.25(iii) that

$$u_n \rightarrow 0. \quad (2.84)$$

Now let  $(z_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  be a subsequence of  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  such that

$$\langle a - P_S a \mid z_{k_n} - P_S a \rangle \rightarrow \overline{\lim} \langle a - P_S a \mid z_n - P_S a \rangle, \quad (2.85)$$

and such that  $(z_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converges weakly to some point  $z \in \mathcal{H}$ . Then it follows from (2.84) and Lemma 2.2.14 that  $z \in S$ . We therefore deduce from Lemma 2.2.13(iv) and the standard characterization of projections onto convex sets that

$$\langle a - P_S a \mid z_{k_n} - P_S a \rangle \rightarrow \langle a - P_S a \mid z - P_S a \rangle \leq 0. \quad (2.86)$$

Therefore, (2.85) and Condition 2.2.25(iv) imply that

$$\overline{\lim} \langle a - P_S a \mid z_n + e_n - P_S a \rangle \leq 0. \quad (2.87)$$

Next, we observe that

$$\begin{aligned}
(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \|x_{n+1} - P_S a\|^2 &= \|\alpha_n(a - P_S a) + (1 - \alpha_n)(z_n + e_n - P_S a)\|^2 \\
&= \alpha_n^2 \|a - P_S a\|^2 + (1 - \alpha_n)^2 \|z_n + e_n - P_S a\|^2 \\
&\quad + 2\alpha_n(1 - \alpha_n) \langle a - P_S a \mid z_n + e_n - P_S a \rangle \\
&\leq \alpha_n^2 \|a - P_S a\|^2 + (1 - \alpha_n)(\|z_n - P_S a\| + \|e_n\|)^2 \\
&\quad + 2\alpha_n(1 - \alpha_n) \langle a - P_S a \mid z_n + e_n - P_S a \rangle. \quad (2.88)
\end{aligned}$$

Now let us fix  $\varepsilon \in ]0, +\infty[$ . We infer from Condition 2.2.25(ii)&(iv) and (2.87) the existence of an index  $q \in \mathbb{N}$  such that, for every  $n \geq q$ ,

$$\alpha_n \|a - P_S a\|^2 \leq \varepsilon, \quad \sum_{k \geq q} \|e_k\| \leq \varepsilon, \quad \text{and} \quad \langle a - P_S a \mid z_n + e_n - P_S a \rangle \leq \varepsilon. \quad (2.89)$$

Thus, it follows from (2.88), (2.89), and (2.81) that, for every  $n \geq q$ ,

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - P_S a\|^2 &\leq 3\alpha_n \varepsilon + (1 - \alpha_n)(\|z_n - P_S a\|^2 + \beta \|e_n\|) \\
&\leq 3\alpha_n \varepsilon + (1 - \alpha_n)\|x_n - P_S a\|^2 + \beta \|e_n\|, \quad (2.90)
\end{aligned}$$

where  $\beta = \sup_{n \in \mathbb{N}} (\|e_n\| + 2\|z_n - P_S a\|) < +\infty$ . Hence, we obtain by induction that, for every  $n \geq q$ ,

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - P_S a\|^2 &\leq 3 \left(1 - \prod_{k=q}^n (1 - \alpha_k)\right) \varepsilon \\
&\quad + \left(\prod_{k=q}^n (1 - \alpha_k)\right) \|x_q - P_S a\|^2 + \beta \sum_{k=q}^n \|e_k\|. \quad (2.91)
\end{aligned}$$

However, it follows from Condition 2.2.25(ii) that  $\prod_{k=q}^n (1 - \alpha_k) \rightarrow 0$  [21, Theorem 3.7.7]. Therefore, (2.91), Condition 2.2.25(iv), and (2.89) yield

$$\overline{\lim} \|x_n - P_S a\|^2 \leq 3\varepsilon + \beta \sum_{k \geq q} \|e_k\| \leq \varepsilon(3 + \beta), \quad (2.92)$$

and hence we conclude that  $\|x_n - P_S a\|^2 \rightarrow 0$ .  $\square$

**Remark 2.2.27** Consider the setting of Lemma 2.2.16(i) with  $K = \mathcal{H}$ . Then, for every  $n \in \mathbb{N}$ ,  $J_{\gamma_n F} = (\text{Id} + \gamma_n A)^{-1}$  and Theorem 2.2.26 therefore corresponds to [20, Theorem 1].

## 2.2.5 Splitting

In this section, we return to the single equilibrium problem (2.71) in instances when the bifunction  $F$  can be broken up into the sum of two terms, say

$$F: (x, y) \mapsto F_0(x, y) + \langle Bx \mid y - x \rangle, \text{ where } F_0: K^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ and } B: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}. \quad (2.93)$$

In this scenario, (2.71) becomes

$$\text{find } x \in K \text{ such that } (\forall y \in K) \ F_0(x, y) + \langle Bx \mid y - x \rangle \geq 0. \quad (2.94)$$

Our objective is to devise a splitting algorithm in which the bifunction  $F_0$  and the operator  $B$  are employed in separate steps at each iteration. It is assumed throughout this section that

$$F_0: K^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ satisfies Condition 2.2.1} \quad (2.95)$$

and that

$$\beta B \text{ is firmly nonexpansive on } \text{dom } B = \mathcal{H}, \text{ for some } \beta \in ]0, +\infty[. \quad (2.96)$$

Moreover, we denote by  $G$  the set of solutions to (2.94), i.e.,

$$G = \{x \in K \mid (\forall y \in K) \ F_0(x, y) + \langle Bx \mid y - x \rangle \geq 0\}. \quad (2.97)$$

**Remark 2.2.28** The bifunction  $F$  defined in (2.93) satisfies Condition 2.2.1. Indeed, by (2.96),  $B$  is continuous and monotone on  $\mathcal{H}$ , hence maximal monotone [1, Proposition 3.5.7]. Thus, it follows from Lemma 2.2.16(i) that the bifunction  $(x, y) \mapsto \langle Bx \mid y - x \rangle$  satisfies Condition 2.2.1. In view of (2.95), so does the sum  $F$  in (2.93).

**Proposition 2.2.29** *Let  $\gamma \in ]0, 2\beta[$  and set*

$$S_{F_0, B} = \{x \in K \mid Bx = 0 \text{ and } (\forall y \in K) \ F_0(x, y) \geq 0\}.$$

*Then :*

- (i)  $G = \text{Fix } J_{\gamma F_0}(\text{Id} - \gamma B)$ .
- (ii)  $J_{\gamma F_0}(\text{Id} - \gamma B)$  is nonexpansive.
- (iii)  $G$  is closed and convex.
- (iv) Suppose that  $S_{F_0, B} \neq \emptyset$ . Then  $G = S_{F_0, B}$ .

*Proof.* Note that, by (2.95) and Lemma 2.2.13(i),  $\text{dom } J_{\gamma F_0} = \mathcal{H}$ . (i) : Let  $x \in \mathcal{H}$ . Then, in view of (2.37) and Lemma 2.2.13(ii),

$$\begin{aligned} x \in G &\Leftrightarrow x \in K \text{ and } (\forall y \in K) \ F_0(x, y) + \langle Bx \mid y - x \rangle \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \in K \text{ and } (\forall y \in K) \ \gamma F_0(x, y) + \langle x - (x - \gamma Bx) \mid y - x \rangle \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x = J_{\gamma F_0}(x - \gamma Bx). \end{aligned} \quad (2.98)$$

(ii) : It follows from (2.96) and (2.31) that  $\beta B \in \mathcal{A}(\frac{1}{2})$  and hence from [14, Lemma 2.3] that  $\text{Id} - \gamma B \in \mathcal{A}(\frac{\gamma}{2\beta})$ . On the other hand, (2.95), Lemma 2.2.13(ii) and (2.31) yield  $J_{\gamma F_0} \in \mathcal{A}(\frac{1}{2})$ . Hence  $J_{\gamma F_0}$  and  $\text{Id} - \gamma B$  are nonexpansive and so is their composition. (iii) : The assertion follows from (ii), (i), and [16, Proposition 1.5.3]. Alternatively, this claim follows from Remark 2.2.28 and Lemma 2.2.13(iv). (iv) : Set  $T_1 = J_{\gamma F_0}$  and  $T_2 = \text{Id} - \gamma B$ . Then, on the one hand, (i) yields  $\text{Fix } T_1 T_2 = G$  and, on the other hand, Lemma 2.2.13(iii) yields  $\text{Fix } T_1 \cap \text{Fix } T_2 = S_{F_0, B}$ . Now, as seen above, the operators  $T_1$  and  $T_2$  are averaged. Therefore it follows from [10, Lemma 2.1] that  $\text{Fix } T_1 \cap \text{Fix } T_2 \neq \emptyset \Rightarrow \text{Fix } T_1 \cap \text{Fix } T_2 = \text{Fix } T_1 T_2$ , which completes the proof.  $\square$

We now describe a splitting algorithm and analyze its convergence.

**Algorithm 2.2.30**

Step 0. Fix  $x_0 \in \mathcal{H}$  and set  $n = 0$ .

Step 1. Take  $\lambda_n \in ]0, 1]$ ,  $\gamma_n \in ]0, 2\beta[$ ,  $a_n \in \mathcal{H}$ , and  $b_n \in \mathcal{H}$ .

Step 2. Set  $x_{n+1} = x_n + \lambda_n \left( J_{\gamma_n F_0}(x_n - \gamma_n(Bx_n + b_n)) + a_n - x_n \right)$ .

Step 3. Set  $n = n + 1$  and go to Step 1.

**Theorem 2.2.31** *Suppose that the following conditions are satisfied :*

- (i)  $G \neq \emptyset$ .
- (ii)  $\underline{\lim} \lambda_n > 0$  and  $0 < \underline{\lim} \gamma_n \leq \overline{\lim} \gamma_n < 2\beta$ .
- (iii)  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|a_n\| < +\infty$  and  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|b_n\| < +\infty$ .

*Then every orbit of Algorithm 2.2.30 converges weakly to a point in  $G$ .*

*Proof.* Let  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be an arbitrary orbit of Algorithm 2.2.30. Set

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad T_{1,n} = J_{\gamma_n F_0} \quad \text{and} \quad T_{2,n} = \text{Id} - \gamma_n B. \tag{2.99}$$

Then the update rule at Step 2 of Algorithm 2.2.30 assumes the form given in (2.35) and, moreover, it follows from (2.95), Lemma 2.2.13(i)&(ii) and (2.31) that  $(T_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$  lies in  $\mathcal{A}(\frac{1}{2})$ . Likewise, it follows from (2.96) and (2.31) that  $\beta B \in \mathcal{A}(\frac{1}{2})$  and hence from [14, Lemma 2.3] that  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad T_{2,n} \in \mathcal{A}(\frac{\gamma_n}{2\beta})$ . Thus, Algorithm 2.2.30 is a special case of Algorithm 2.2.10 with  $\alpha_{1,n} = 1/2$ ,  $\alpha_{2,n} = \gamma_n/(2\beta)$ ,  $e_{1,n} = a_n$ , and  $e_{2,n} = -\gamma_n b_n$ . We shall show that all the conditions of Theorem 2.2.11 are satisfied. First, Proposition 2.2.29(i) yields

$$G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Fix}(T_{1,n} T_{2,n}). \tag{2.100}$$

Hence, item (i) in Theorem 2.2.11 is implied by (i) above. Moreover, items (ii) and (iv) in Theorem 2.2.11 are implied by (ii) and (iii) above. Let us now verify item (iii)

in Theorem 2.2.11. To this end, let us fix a suborbit  $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  of Algorithm 2.2.30,  $x \in G$ , and set

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad z_n = J_{\gamma_n F_0}(x_n - \gamma_n Bx_n) \quad \text{and} \quad u_n = \frac{x_n - z_n}{\gamma_n} - Bx_n. \quad (2.101)$$

In view of (2.99) and (ii), (2.36) holds if

$$\begin{cases} u_n \rightarrow -Bx \\ Bx_n \rightarrow Bx \\ z_n - x_n \rightarrow 0 \\ x_{k_n} \rightarrow z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad z \in G. \quad (2.102)$$

Since  $B$  is continuous and monotone on  $\mathcal{H}$ , it is maximal monotone [1, Proposition 3.5.7]. Therefore  $\text{gr } B$  is sequentially weakly-strongly closed in  $\mathcal{H}^2$  [1, Proposition 3.5.6.2], and the conditions  $x_{k_n} \rightarrow z$  and  $Bx_{k_n} \rightarrow Bx$  imply  $Bx = Bz$ . Consequently, the condition  $z_n - x_n \rightarrow 0$  yields

$$z_{k_n} \rightarrow z \quad \text{and} \quad u_{k_n} \rightarrow -Bz. \quad (2.103)$$

It therefore follows from (2.101) and Lemma 2.2.14 that

$$z \in K \quad \text{and} \quad (\forall y \in K) \quad F_0(z, y) + \langle Bz \mid y - z \rangle \geq 0, \quad (2.104)$$

i.e.,  $z \in G$ . Therefore, the conclusion follows from Theorem 2.2.11.  $\square$

**Remark 2.2.32** We point out some connections between Theorem 2.2.31 and existing results.

(i) In the special case when  $\gamma_n \equiv \gamma$ ,  $\lambda_n \equiv 1$ ,  $a_n \equiv 0$ , and  $b_n \equiv 0$ , Theorem 2.2.31 follows from [25, Theorem 1].

(ii) As in Lemma 2.2.16(i), let  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  be a maximal monotone operator such that  $K \subset \text{int dom } A$  and set  $F_0: K^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto \max_{u \in Ax} \langle u \mid y - x \rangle$ . Then  $x \in \mathcal{H}$  solves (2.94)  $\Leftrightarrow x \in K$  and  $(\forall y \in K) \max_{u \in Ax} \langle u + Bx \mid y - x \rangle \geq 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x \in K \text{ and } (\exists u \in Ax)(\forall y \in K) \\ &\quad \langle u + Bx \mid y - x \rangle \geq 0 \end{aligned} \quad (2.105)$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (\exists u \in Ax) \quad -u - Bx \in N_K x \\ &\Leftrightarrow 0 \in Ax + Bx + N_K x, \end{aligned} \quad (2.106)$$

where we have used Lemma 2.2.15 to get (2.105). Thus, (2.94) coincides with the problem of finding a zero of  $A + B + N_K$ . In particular, if  $K = \mathcal{H}$ , then  $J_{\gamma_n F_0} = J_{\gamma_n A}$  by Lemma 2.2.16(i) and therefore Algorithm 2.2.30 produces the forward-backward iteration

$$x_{n+1} = x_n + \lambda_n \left( J_{\gamma_n A}(x_n - \gamma_n (Bx_n + b_n)) + a_n - x_n \right), \quad (2.107)$$

for finding a zero of  $A + B$ . In this context, for  $\lambda_n \equiv 1$ ,  $a_n \equiv 0$ , and  $b_n \equiv 0$ , Theorem 2.2.31 corresponds to [28, Proposition 1(c)].

We now turn to the problem of finding the best approximation to a point  $a \in \mathcal{H}$  from  $G$ .

**Theorem 2.2.33** *Let  $\varepsilon \in ]0, 1[$  and  $\gamma \in ]0, 2\beta[$ , and let  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be an arbitrary orbit of Algorithm 2.2.8 generated with*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad T_n = \text{Id} + \lambda_n (J_{\gamma F_0}(\text{Id} - \gamma B) - \text{Id}), \quad \text{where } \varepsilon \leq \lambda_n \leq 1/2. \quad (2.108)$$

Then :

- (i) *If  $G \neq \emptyset$ ,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converges strongly to  $P_G a$ .*
- (ii) *If  $G = \emptyset$ ,  $\|x_n\| \rightarrow +\infty$ .*

*Proof.* In view of Proposition 2.2.29(i)&(ii), the assertions follow from [4, Corollary 6.6(ii)].  $\square$

## 2.2.6 Inconsistent problems

We now consider problems (2.22) and (2.23) with finitely many sets, say  $I = \{0, \dots, m\}$ . In this section we aim at solving these problems when the assumption  $S \neq \emptyset$  is relaxed. We shall use the following notion, which was introduced in [25].

**Definition 2.2.34** The *Yosida approximation* of index  $\rho \in ]0, +\infty[$  of a bifunction  $F: K^2 \rightarrow \mathbb{R}$  is the set-valued operator  ${}^\rho F: \mathcal{H}^2 \rightarrow 2^{\mathbb{R}}: (x, y) \mapsto \langle x - J_{\rho F} x \mid y - x \rangle / \rho$ .

In the present context, (2.22) becomes

$$\text{find } x \in K \text{ such that } (\forall i \in \{0, \dots, m\}) (\forall y \in K) \quad F_i(x, y) \geq 0. \quad (2.109)$$

We recall that its set of solutions is denoted by  $S$ , while each  $F_i$  satisfies Condition 2.2.1. Now, let us fix  $(\rho_i)_{1 \leq i \leq m}$  in  $]0, +\infty[$ . When (2.109) has no solution, it can be approximated by the problem

$$\text{find } x \in K \text{ such that } (\forall y \in K) \quad F_0(x, y) + \sum_{i=1}^m \rho_i F_i(x, y) \geq 0, \quad (2.110)$$

in which the bifunctions  $(F_i)_{1 \leq i \leq m}$  have been replaced by their Yosida approximations, which are single-valued operators by Lemma 2.2.13(ii). This approximation is justified by item (iii) below. We henceforth denote by  $G$  the set of solutions to (2.110).

**Proposition 2.2.35** *Let  $\gamma \in ]0, 2/(\sum_{i=1}^m \rho_i^{-1})[$ . Then :*

- (i)  $G = \text{Fix } J_{\gamma F_0} (\text{Id} + \gamma \sum_{i=1}^m (J_{\rho_i F_i} - \text{Id}) / \rho_i)$ .

- (ii)  $G$  is closed and convex.
- (iii) Suppose that  $S \neq \emptyset$ . Then  $G = S$ .

*Proof.* Problem (2.110) is a special case of Problem (2.94)–(2.96) with

$$B = \sum_{i=1}^m \frac{\text{Id} - J_{\rho_i F_i}}{\rho_i} \quad \text{and} \quad \beta = \frac{1}{\sum_{i=1}^m 1/\rho_i}. \quad (2.111)$$

Indeed, set  $(\forall i \in \{1, \dots, m\}) \omega_i = \beta/\rho_i$ . Then  $\sum_{i=1}^m \omega_i = 1$ . Moreover, it follows from Lemma 2.2.13(ii) and (2.31) that the operators  $(\text{Id} - J_{\rho_i F_i})_{1 \leq i \leq m}$  are firmly nonexpansive. Therefore, their convex combination  $\beta B = \sum_{i=1}^m \omega_i (\text{Id} - J_{\rho_i F_i})$  is also firmly nonexpansive. Hence (2.95) and (2.96) hold and we can apply Proposition 2.2.29(i)&(iii) to obtain at once (i) and (ii). To show (iii), we first observe that Lemma 2.2.13(iii) asserts that

$$S = S_{F_0} \cap \bigcap_{i=1}^m \text{Fix } J_{\rho_i F_i}, \quad \text{where } S_{F_0} = \{x \in K \mid (\forall y \in K) F_0(x, y) \geq 0\}. \quad (2.112)$$

Now suppose that  $S \neq \emptyset$ . Then  $\bigcap_{i=1}^m \text{Fix } J_{\rho_i F_i} \neq \emptyset$  and it therefore follows from (2.31) and Lemma 2.2.5(ii) with  $\lambda \equiv 1$  that  $\text{Fix } \sum_{i=1}^m \omega_i J_{\rho_i F_i} = \bigcap_{i=1}^m \text{Fix } J_{\rho_i F_i}$ . Consequently, it results from (2.111) that

$$(\forall x \in \mathcal{H}) \quad Bx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \text{Fix } \sum_{i=1}^m \omega_i J_{\rho_i F_i} = \bigcap_{i=1}^m \text{Fix } J_{\rho_i F_i}, \quad (2.113)$$

and we deduce from (2.112) that  $S$  coincides with the set  $S_{F_0, B}$  introduced in Proposition 2.2.29. Hence  $S_{F_0, B} \neq \emptyset$  and Proposition 2.2.29(iv) yields  $G = S_{F_0, B} = S$ .  $\square$

Specializing Algorithm 2.2.30 and Theorem 2.2.31 to (2.111), we obtain the following result.

**Algorithm 2.2.36**

Step 0. Fix  $x_0 \in \mathcal{H}$  and set  $n = 0$ .

Step 1. Take  $\lambda_n \in ]0, 1]$ ,  $\gamma_n \in ]0, 2/(\sum_{i=1}^m \rho_i^{-1})[$ ,  $a_n \in \mathcal{H}$ , and  $(b_{i,n})_{1 \leq i \leq m} \in \mathcal{H}^m$ .

Step 2. Set  $x_{n+1} = x_n + \lambda_n \left( J_{\gamma_n F_0} \left( x_n + \gamma_n \sum_{i=1}^m (J_{\rho_i F_i} x_n + b_{i,n} - x_n) / \rho_i \right) + a_n - x_n \right)$ .

Step 3. Set  $n = n + 1$  and go to Step 1.

**Corollary 2.2.37** *Suppose that the following conditions are satisfied.*

- (i)  $G \neq \emptyset$ .
- (ii)  $\underline{\lim} \lambda_n > 0$  and  $0 < \underline{\lim} \gamma_n \leq \overline{\lim} \gamma_n < 2/(\sum_{i=1}^m \rho_i^{-1})$ .



(iii)  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|a_n\| < +\infty$  and  $\max_{1 \leq i \leq m} \sum_{n \in \mathbb{N}} \|b_{i,n}\| < +\infty$ .

Then every orbit of Algorithm 2.2.36 converges weakly to a point in  $G$ .

Likewise, a direct reformulation of Theorem 2.2.33 for the scenario (2.111) yields a sequence that converges strongly to the best approximation to a point  $a \in \mathcal{H}$  from the solutions to (2.110).

**Remark 2.2.38** Let  $(S_i)_{1 \leq i \leq m}$  be a family of closed convex sets in  $\mathcal{H}$  with associated projection operators  $(P_i)_{1 \leq i \leq m}$ , and let  $(\rho_i)_{1 \leq i \leq m}$  be numbers in  $[1, +\infty[$  such that  $\sum_{i=1}^m 1/\rho_i = 1$ . Now set

$$K = \mathcal{H}, F_0 = 0, \text{ and } (\forall i \in \{1, \dots, m\}) (\forall (x, y) \in \mathcal{H}^2) \\ F_i(x, y) = (d_{S_i}^2(y) - d_{S_i}^2(x))/2. \quad (2.114)$$

Then (2.109) corresponds to the basic convex feasibility problem of finding a point in  $S = \bigcap_{i=1}^m S_i$  and the bifunctions  $(F_i)_{1 \leq i \leq m}$  satisfy Condition 2.2.1 by Lemma 2.2.16(v). Now let  $(\forall i \in \{1, \dots, m\}) f_i = \rho_i d_{S_i}^2/2 = {}^{1/\rho_i} \iota_{S_i}$ . Then it follows from Lemma 2.2.16(v) and Lemma 2.2.3 that

$$(\forall i \in \{1, \dots, m\}) J_{\rho_i F_i} = \text{prox}_{f_i} = \text{Id} + \frac{\rho_i}{\rho_i + 1} (P_i - \text{Id}). \quad (2.115)$$

Thus, we deduce from Proposition 2.2.35(i) that the set of solutions to (2.110) is  $G = \text{Fix} \sum_{i=1}^m J_{\rho_i F_i} / \rho_i$ . Now set  $(\forall i \in \{1, \dots, m\}) \omega_i = 1/(\rho_i + 1)$ . Then  $x \in G \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m \omega_i (x - P_i x) = 0 \Leftrightarrow \nabla \sum_{i=1}^m \omega_i d_{S_i}^2(x) = 0$ . Hence,  $G = \text{Argmin} \sum_{i=1}^m \omega_i d_{S_i}^2$ . On the other hand, Corollary 2.2.37 with  $\lambda_n \equiv 1$ ,  $a_n \equiv 0$ , and  $b_{i,n} \equiv 0$  asserts that, if  $G \neq \emptyset$  and if  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}} \in ]0, 2[^\mathbb{N}$  satisfies  $0 < \underline{\lim} \gamma_n \leq \overline{\lim} \gamma_n < 2$ , every sequence  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  generated by the iteration

$$x_0 \in \mathcal{H} \quad \text{and} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = x_n + \gamma_n \sum_{i=1}^m \omega_i (P_i x_n - x_n) \quad (2.116)$$

converges weakly to a point in  $G$ . This framework was considered in [11] to deal with inconsistent signal feasibility problems.

## 2.3 Bibliographie

- [1] J. P. Aubin and H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, Boston, MA, 1990.
- [2] J. P. Aubin, *Optima and Equilibria – An Introduction to Nonlinear Analysis*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [3] H. H. Bauschke and J. M. Borwein, On projection algorithms for solving convex feasibility problems, *SIAM Rev.*, **38**, 367–426, 1996.

- [4] H. H. Bauschke and P. L. Combettes, A weak-to-strong convergence principle for Fejér-monotone methods in Hilbert spaces, *Math. Oper. Res.*, **26**, 248–264, 2001.
- [5] H. H. Bauschke, P. L. Combettes, and D. R. Luke, Hybrid projection-reflection method for phase retrieval, *J. Opt. Soc. Amer. A*, **20**, 1025–1034, 2003.
- [6] C. Berge, *Espaces Topologiques, Fonctions Multivoques*, 2nd ed., Dunod, Paris, 1966.
- [7] E. Blum and W. Oettli, From optimization and variational inequalities to equilibrium problems, *Math. Student*, **63**, 123–145, 1994.
- [8] L. M. Bregman, The method of successive projection for finding a common point of convex sets, *Soviet Math. Dokl.*, **6**, 688–692, 1965.
- [9] H. Brézis and P. L. Lions, Produits infinis de résolvantes, *Israel J. Math.*, **29**, 329–345, 1978.
- [10] R. E. Bruck and S. Reich, Nonexpansive projections and resolvents of accretive operators in Banach spaces, *Houston J. Math.*, **3**, 459–470, 1977.
- [11] P. L. Combettes, Inconsistent signal feasibility problems : Least-squares solutions in a product space, *IEEE Trans. Signal Process.*, **42**, 2955–2966, 1994.
- [12] P. L. Combettes, Strong convergence of block-iterative outer approximation methods for convex optimization, *SIAM J. Control Optim.*, **38**, 538–565, 2000.
- [13] P. L. Combettes, Quasi-Fejérian analysis of some optimization algorithms, in *Inherently Parallel Algorithms for Feasibility and Optimization* (D. Butnariu, Y. Censor, and S. Reich, eds.), 115–152, Elsevier, New York, 2001.
- [14] P. L. Combettes, Solving monotone inclusions via compositions of nonexpansive averaged operators, *Optimization*, **53**, 475–504, 2004.
- [15] S. D. Flåm and A. S. Antipin, Equilibrium programming using proximal-like algorithms, *Math. Program.*, **78**, 29–41, 1997.
- [16] K. Goebel and S. Reich, *Uniform Convexity, Hyperbolic Geometry, and Nonexpansive Mappings*, Marcel Dekker, New York, 1984.
- [17] A. Göpfert, H. Riahi, C. Tammer, and C. Zălinescu, *Variational Methods in Partially Ordered Spaces*, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [18] Y. Haugazeau, *Sur les Inéquations Variationnelles et la Minimisation de Fonctionnelles Convexes*, Thèse, Université de Paris, Paris, France, 1968.
- [19] A. N. Iusem and W. Sosa, Iterative algorithms for equilibrium problems, *Optimization*, **52**, 301–316, 2003.
- [20] S. Kamimura and W. Takahashi, Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces, *J. Approx. Theory*, **106**, 226–240, 2000.
- [21] K. Knopp, *Infinite Sequences and Series*, Dover, New York, 1956.

- [22] I. V. Konnov, Application of the proximal point method to nonmonotone equilibrium problems, *J. Optim. Theory Appl.*, **119**, 317–333, 2003.
- [23] J. J. Moreau, Proximité et dualité dans un espace hilbertien, *Bull. Soc. Math. France*, **93**, 273–299, 1965.
- [24] A. Moudafi, Second-order differential proximal methods for equilibrium problems, *J. Inequal. Pure Appl. Math.*, **4**, art. 18, 2003.
- [25] A. Moudafi and M. Théra, Proximal and dynamical approaches to equilibrium problems, in *Ill-Posed Variational Problems and Regularization Techniques*, (M. Théra and R. Tichatschke, eds.), 187–201. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, **477**, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [26] W. Oettli, A remark on vector-valued equilibria and generalized monotonicity, *Acta Math. Vietnamica*, **22**, 215–221, 1997.
- [27] R. R. Phelps, *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1993.
- [28] P. Tseng, Applications of a splitting algorithm to decomposition in convex programming and variational inequalities, *SIAM J. Control Optim.*, **29**, 119–138, 1991.

# Chapitre 3

## Courbes d'approximation pour les contractions et les opérateurs monotones

### 3.1 Description et résultats principaux

En analyse non-linéaire, une méthode classique pour résoudre un problème admettant plusieurs solutions est de lui associer une famille de problèmes perturbés admettant des solutions uniques. Sous des hypothèses adéquates, en passant à la limite lorsque la perturbation devient évanescence, la famille de solutions de ces problèmes converge vers une solution particulière du problème initial. On appelle courbe d'approximation, la famille des solutions des problèmes perturbés.

Dans ce chapitre on applique le principe ci-dessus pour résoudre des problèmes de point fixe de contraction et d'inclusion monotone. Notre démarche consiste à introduire de nouvelles courbes d'approximation et à étudier leurs propriétés asymptotiques. La limite  $x_0$  atteinte par ces courbes est la solution d'une inéquation variationnelle du type

$$0 \in N_C x_0 + V x_0, \tag{3.1}$$

où  $V: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  est un opérateur strictement monotone et  $N_C$  est l'opérateur cône-normal de l'ensemble  $C$  des solutions du problème initial.

Le premier problème traité est de trouver un point fixe commun particulier à une famille de contractions. Plus précisément, étant données une contraction stricte  $Q: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  et une famille de contractions  $(T_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  de  $\mathcal{H}$  vers  $\mathcal{H}$  telle que  $C = \bigcap_{\varepsilon \in ]0,1[} \text{Fix } T_\varepsilon \neq \emptyset$ , on cherche à

$$\text{trouver } x_0 \in \mathcal{H} \text{ tel que } x_0 = P_C(Qx_0), \tag{3.2}$$

où  $P_C$  est l'opérateur de projection sur  $C$ . La solution  $x_0$  est définie de manière unique dans (3.2) en vertu du Théorème de Banach-Picard appliqué à la contraction stricte  $P_C Q$ . Notons que l'équation  $x_0 = P_C(Qx_0)$  est équivalente à l'inclusion  $0 \in N_C x_0 + (\text{Id} - Q)x_0$  et que  $\text{Id} - Q$  est un opérateur fortement monotone (des exemples de telles solutions  $x_0$  pour des choix particuliers de  $Q$  sont donnés dans l'Exemple 3.2.4). Pour étudier de nouvelles courbes d'approximation pour la solution  $x_0$  de (3.2), il est pertinent d'introduire la notion suivante, qui généralise à une famille de contractions le principe de demi-fermeture en 0 d'une contraction.

**Définition 3.1.1** Soient  $(T_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  une famille d'opérateurs de  $\mathcal{H}$  vers  $\mathcal{H}$  et  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  une famille dans  $\mathcal{H}$ . On dit que  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  est  $\mathcal{T}$ -focalisée par rapport à  $(T_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  si, pour tout  $x \in \mathcal{H}$  et toute suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $]0,1[$  telle que  $\varepsilon_n \downarrow 0$ ,

$$[x_{\varepsilon_n} \rightarrow x \quad \text{et} \quad x_{\varepsilon_n} - T_{\varepsilon_n} x_{\varepsilon_n} \rightarrow 0] \quad \Rightarrow \quad (\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad T_\varepsilon x = x. \quad (3.3)$$

Notre premier résultat est le suivant.

**Théorème 3.1.2** Soient  $(T_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  et  $(S_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  deux familles de contractions de  $\mathcal{H}$  vers  $\mathcal{H}$  et soit  $Q: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  une contraction stricte. Supposons que  $C = \bigcap_{\varepsilon \in ]0,1[} \text{Fix } T_\varepsilon \neq \emptyset$ . Alors, il existe un point unique  $x_0 \in C$  tel que  $x_0 = P_C(Qx_0)$ . Définissons à présent

$$(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad x_\varepsilon = T_\varepsilon(x_\varepsilon + \varepsilon(QS_\varepsilon x_\varepsilon - x_\varepsilon)). \quad (3.4)$$

Alors, la famille  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  est définie de manière unique. De plus, si  $C \subset \bigcap_{\varepsilon \in ]0,1[} \text{Fix } S_\varepsilon$ , si  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  est  $\mathcal{T}$ -focalisée par rapport à  $(T_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  et si, pour tout  $x \in \mathcal{H}$  et toute suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $]0,1[$  telle que  $\varepsilon_n \downarrow 0$ , on a

$$[x_{\varepsilon_n} \rightarrow x \in C \quad \text{et} \quad x_{\varepsilon_n} - T_{\varepsilon_n} x_{\varepsilon_n} \rightarrow 0] \quad \Rightarrow \quad S_{\varepsilon_n} x_{\varepsilon_n} \rightarrow x, \quad (3.5)$$

alors  $x_\varepsilon \rightarrow x_0$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$ .

Par une manipulation simple, on obtient une autre courbe d'approximation pour la solution  $x_0$  de (3.2) : sous les hypothèses du Théorème 3.1.2, considérons la famille  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  définie en (3.4) et posons  $(\forall \varepsilon \in ]0,1[) y_\varepsilon = x_\varepsilon + \varepsilon(QS_\varepsilon x_\varepsilon - x_\varepsilon)$ . Alors on montre facilement que

$$(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad y_\varepsilon = T_\varepsilon y_\varepsilon + \varepsilon(QS_\varepsilon T_\varepsilon y_\varepsilon - T_\varepsilon y_\varepsilon), \quad (3.6)$$

et on déduit que  $y_\varepsilon - x_\varepsilon \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$ , donc que  $y_\varepsilon \rightarrow x_0$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$ .

Le deuxième objectif de ce chapitre est d'étudier le problème de trouver un zéro commun particulier à une famille d'opérateurs maximaux monotones. Plus précisément, on se donne une famille d'opérateurs maximaux monotones  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$

de  $\mathcal{H}$  vers  $2^{\mathcal{H}}$  telle que  $C = \bigcap_{\varepsilon \in ]0,1[} A_\varepsilon^{-1}0 \neq \emptyset$  et un opérateur strictement monotone  $V: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$ . On se propose alors de résoudre le problème de

$$\text{trouver } x_0 \in \mathcal{H} \text{ tel que } 0 \in N_C x_0 + V x_0, \quad (3.7)$$

qui admettra une solution unique sous nos hypothèses (cf. [8, Théorèmes 3 et 4]). Notre deuxième résultat est basé sur la notion suivante.

**Définition 3.1.3** Soient  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  une famille d'opérateurs maximaux monotones de  $\mathcal{H}$  vers  $2^{\mathcal{H}}$  et  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  une famille dans  $\mathcal{H}$ . On dit que  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  est  $\mathcal{A}$ -focalisée par rapport à  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  si, pour tout  $x \in \mathcal{H}$  et toute suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $]0,1[$  telle que  $\varepsilon_n \downarrow 0$ ,

$$[x_{\varepsilon_n} \rightarrow x \quad \text{et} \quad {}^1A_{\varepsilon_n} x_{\varepsilon_n} \rightarrow 0] \quad \Rightarrow \quad (\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad 0 \in A_\varepsilon x. \quad (3.8)$$

La convergence d'une première courbe d'approximation vers le point  $x_0$  défini dans (3.7) est établie ci-dessous.

**Théorème 3.1.4** Soit  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  une famille d'opérateurs maximaux monotones de  $\mathcal{H}$  vers  $2^{\mathcal{H}}$  telle que  $C = \bigcap_{\varepsilon \in ]0,1[} A_\varepsilon^{-1}0 \neq \emptyset$  et soit  $V: \text{dom } V = \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  un opérateur maximal monotone et  $c$ -uniformément monotone. Il existe alors un point unique  $x_0 \in \mathcal{H}$  tel que  $0 \in N_C x_0 + V x_0$ . Définissons à présent

$$(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad 0 \in A_\varepsilon x_\varepsilon + \varepsilon V x_\varepsilon. \quad (3.9)$$

Alors, la famille  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  est définie de manière unique. De plus, si  $V$  est borné sur tout borné de  $\mathcal{H}$  et si  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  est  $\mathcal{A}$ -focalisée par rapport à  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$ , alors  $x_\varepsilon \rightarrow x_0$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$ .

Il est à remarquer qu'il existe un lien entre (3.4) et (3.9). Soit  $Q: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  une contraction stricte et soit  $V = \text{Id} - Q$ . L'opérateur  $V$  vérifie alors les hypothèses du Théorème 3.1.4 et (3.9) peut être réécrite sous la forme

$$(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad x_\varepsilon = J_{A_\varepsilon}(x_\varepsilon + \varepsilon(Qx_\varepsilon - x_\varepsilon)). \quad (3.10)$$

On sait que  $F: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est une contraction ferme si et seulement si  $F = J_A$ , i.e.,  $F$  est la résolvente d'un opérateur maximal monotone  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  [12]; dans ce cas  $\text{Fix } F = A^{-1}0$ . Ce résultat nous permet de réécrire (3.10) sous la forme

$$(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad x_\varepsilon = F_\varepsilon(x_\varepsilon + \varepsilon(Qx_\varepsilon - x_\varepsilon)), \quad (3.11)$$

où  $(F_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  est une famille de contractions fermes de domaine  $\mathcal{H}$ . Par conséquent, dans le Théorème 3.1.2 (avec  $S_\varepsilon \equiv \text{Id}$ ), les conclusions restent vraies si on renforce l'hypothèse sur les opérateurs  $T_\varepsilon$ , en imposant qu'ils soient contractions fermes, mais on relaxe la condition sur  $Q$  en imposant seulement que  $V = \text{Id} - Q$  vérifie les

hypothèses du Théorème 3.1.4. Notons qu'il existe des opérateurs  $V$  satisfaisant à ces trois hypothèses sans que  $\text{Id} - V$  soit contraction stricte : par exemple, dans  $\mathcal{H} = \mathbb{R}$  il suffit de poser  $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \theta x$ , avec  $\theta \in [2, +\infty[$ .

Supposons maintenant que  $V$  soit univoque dans le Théorème 3.1.4. Alors on peut définir une deuxième courbe d'approximation par

$$(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad y_\varepsilon = J_{A_\varepsilon} y_\varepsilon - \varepsilon V J_{A_\varepsilon} y_\varepsilon. \quad (3.12)$$

Cette courbe converge vers le point  $x_0$  défini dans (3.7) quand  $\varepsilon \downarrow 0$  si les hypothèses du Théorème 3.1.4 sont satisfaites (voir la Remarque 3.2.20(ii)).

En guise d'illustration, voici deux cas particuliers des Théorèmes 3.1.2 et 3.1.4 qui nous permettent de retrouver des résultats classiques sur l'approximation des points fixes de contractions et sur la minimisation de fonctions convexes.

- Soient  $a \in \mathcal{H}$  et  $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  une contraction telle que  $\text{Fix } T \neq \emptyset$ . En prenant  $T_\varepsilon \equiv T$ ,  $S_\varepsilon \equiv \text{Id}$  et  $Q: x \mapsto a$ , (3.6) se réduit à

$$(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad y_\varepsilon = \varepsilon a + (1 - \varepsilon) T y_\varepsilon. \quad (3.13)$$

D'après le Théorème 3.1.2,  $(y_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  converge fortement, quand  $\varepsilon \downarrow 0$ , vers  $x_0$ , le point fixe de  $T$  le plus proche de  $a$  (on retrouve ainsi un résultat classique de Browder, [9, Theorem 2]).

- Soit  $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$  telle que  $\text{Argmin } f \neq \emptyset$ , soit  $\partial f$  le sous-différentiel de  $f$  et soit  $g: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction fortement convexe et bornée sur tout borné de  $\mathcal{H}$ . Posons  $A_\varepsilon \equiv \partial f$  et  $V = \partial g$ . Alors le point  $x_\varepsilon$  défini dans (3.9) est le minimiseur de  $f + \varepsilon g$  et la famille  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  est  $\mathcal{A}$ -focalisée par rapport à  $\partial f$ , car le graphe d'un opérateur maximal monotone est séquentiellement fermé dans  $\mathcal{H}^{\text{faible}} \times \mathcal{H}^{\text{fort}}$ . D'après le Théorème 3.1.4,  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  converge fortement, quand  $\varepsilon \downarrow 0$ , vers  $x_0$ , le minimiseur de  $g$  sur  $\text{Argmin } f$ . Le cas  $g = \|\cdot\|^2$  correspond à la régularisation classique de Tikhonov [27].

On conclut la Section 3.2 en présentant une autre courbe d'approximation convergeant vers le point  $x_0$  défini dans (3.2). Soient  $(T_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  et  $(S_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  deux familles de contractions de  $\mathcal{H}$  vers  $\mathcal{H}$  telles que

$$\emptyset \neq C = \bigcap_{\varepsilon \in ]0, 1[} \text{Fix } T_\varepsilon \subset \bigcap_{\varepsilon \in ]0, 1[} \text{Fix } S_\varepsilon. \quad (3.14)$$

Soient  $Q: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  une contraction stricte et  $x_0 \in C$  tel que  $x_0 = P_C(Qx_0)$ . On définit

$$(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad x_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} Q S_\varepsilon x_\varepsilon + \frac{1}{1 + \varepsilon} T_\varepsilon x_\varepsilon. \quad (3.15)$$

Si, de plus,  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  est  $\mathcal{J}$ -focalisée par rapport à  $(T_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  et la condition donnée dans (3.5) est vérifiée, alors d'après le Théorème 3.1.2, on obtient  $x_\varepsilon \rightarrow x_0$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$ . En effet, (3.15) est équivalent à

$$(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad x_\varepsilon = J_{\text{Id}-T_\varepsilon}(x_\varepsilon + \varepsilon(QS_\varepsilon x_\varepsilon - x_\varepsilon)) \quad (3.16)$$

et, de plus,  $(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad \text{Fix } J_{\text{Id}-T_\varepsilon} = \text{Fix } T_\varepsilon$ . Au Chapitre 6 on démontrera la convergence vers  $x_0$  d'un système dynamique discret associé à la courbe définie dans (3.15).

Dans la Section 3.3 on étudie une version inexacte de la courbe d'approximation définie dans (3.9). Plus précisément, sous les hypothèses du Théorème 3.1.4, on remplace la famille définie dans (3.9) par

$$(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad 0 \in A_\varepsilon x_\varepsilon + \varepsilon V x_\varepsilon + e_\varepsilon, \quad (3.17)$$

où  $(e_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  est une famille dans  $\mathcal{H}$  telle que  $e_\varepsilon/\varepsilon \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$ . Dans ces conditions, on démontre, par deux méthodes différentes, que cette nouvelle famille converge fortement vers le point  $x_0$  défini dans (3.7). Deux cas particuliers sont mis en évidence à la fin de la section, où l'on fournit des exemples pour lesquels la condition de  $\mathcal{A}$ -focalisation est vérifiée.

## 3.2 Article en anglais

### APPROXIMATING CURVES FOR NONEXPANSIVE AND MONOTONE OPERATORS<sup>1</sup>

**Abstract :** A classical tool in nonlinear analysis is the notion of an approximating curve, whereby a particular solution to a nonuniquely solvable problem is obtained as the limit of the solutions to uniquely solvable perturbed problems. We introduce and analyze new types of approximating curves for nonexpansive fixed point problems and monotone inclusion problems in Hilbert spaces. The solution attained by these curves solves a strictly monotone variational inequality over the original solution set. Various special cases are discussed.

#### 3.2.1 Introduction

In nonlinear analysis, a common approach to solving a problem with multiple solutions is to replace it by a family of perturbed problems admitting a unique solution, and to obtain a particular original solution as the limit of these perturbed

---

<sup>1</sup>P. L. Combettes and S. A. Hirstoaga, Approximating curves for nonexpansive and monotone operators, *Journal of Convex Analysis*, vol. 13, no. 3/4, 2006. Soumis le 12 avril 2005 et accepté le 6 juillet 2005.



solutions as the perturbation vanishes. This principle arises for instance in minimization problems (Tikhonov regularization [2, 27]), in partial differential equations (viscosity solutions [30, Section 33.11]), in monotone inclusions [30, Section 32.18], in variational inequalities [9], in evolution equations (elliptic regularization [20, Chapitre 3]), and in fixed point theory (approximating curves [17]); further examples will be found in [3, 26, 30] and the references therein. For the sake of illustration, let us consider two examples in a Hilbert space  $\mathcal{H}$ .

- Let  $T$  be a nonexpansive operator defined on  $\mathcal{H}$ , and suppose that the set  $\text{Fix } T$  of its fixed points is nonempty. Given  $a \in \mathcal{H}$ , a classical way to perturb the basic fixed point equation  $x = Tx$  is to add to  $T$  a viscosity term  $\varepsilon(a - T)$ , which yields  $x_\varepsilon = \varepsilon a + (1 - \varepsilon)Tx_\varepsilon$ , where  $\varepsilon \in ]0, 1[$ . As the viscosity term vanishes, i.e., as  $\varepsilon \rightarrow 0$ , the approximating curve  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  converges strongly to the best approximation  $x_0$  to  $a$  from  $\text{Fix } T$  [9]. A simple manipulation shows that the same result holds for the approximating curve defined by

$$(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad x_\varepsilon = T(x_\varepsilon + \varepsilon(a - x_\varepsilon)). \quad (3.18)$$

- Let  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  be a maximal monotone operator with zeros. Given  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , consider the perturbation  $0 \in Ax_\varepsilon + \varepsilon x_\varepsilon$  of the inclusion  $0 \in Ax$ . Then the approximating curve  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  converges strongly to the zero  $x_0$  of  $A$  of minimal norm as  $\varepsilon \rightarrow 0$  [11].

Besides their importance in the problems mentioned above, approximating curves are also relevant to numerical methods since understanding their properties is central in the analysis of parent continuous [3, 22, 24] and discrete [5, 13, 18, 29] dynamical systems (see also [14] for an application of such dynamical systems to concrete problems). The goal of this paper is to analyze the properties of new types of approximating curves for fixed point and monotone inclusion problems. The limit attained by these curves is the solution of the general variational inequality  $0 \in N_C x_0 + Vx_0$ , where  $N_C$  denotes the normal cone operator to the original solution set  $C$  and  $V: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  is a suitable strictly monotone operator.

Throughout,  $\mathcal{H}$  is a real Hilbert space with scalar product  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ , norm  $\|\cdot\|$ , and identity operator  $\text{Id}$ . In addition,  $P_C$  denotes the projector onto a nonempty closed convex subset  $C$  of  $\mathcal{H}$ , and  $N_C: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  its normal cone operator, i.e.,

$$N_C: x \mapsto \begin{cases} \{u \in \mathcal{H} \mid (\forall y \in C) \langle y - x \mid u \rangle \leq 0\}, & \text{if } x \in C; \\ \emptyset, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3.19)$$

As is customary,  $\rightarrow$  and  $\rightharpoonup$  denote, respectively, strong and weak convergence.

### 3.2.2 Nonexpansive fixed point problems

The domain and fixed point set of an operator  $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  are denoted by  $\text{dom } T$  and  $\text{Fix } T$ , respectively. Recall that  $T$  is nonexpansive if it is Lipschitz-continuous

with constant 1, firmly nonexpansive if  $2T - \text{Id}$  is nonexpansive, and a strict contraction if it is Lipschitz-continuous with a constant in  $]0, 1[$ . It will be convenient to introduce the following notion.

**Definition 3.2.1** Let  $(T_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  be a family of operators from  $\mathcal{H}$  to  $\mathcal{H}$  with domain  $\mathcal{H}$  and let  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  be a family in  $\mathcal{H}$ . Then  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  is  $\mathcal{T}$ -focused with respect to  $(T_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  if, for every  $x \in \mathcal{H}$  and every sequence  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $]0, 1[$  such that  $\varepsilon_n \downarrow 0$ ,

$$[x_{\varepsilon_n} \rightharpoonup x \quad \text{and} \quad x_{\varepsilon_n} - T_{\varepsilon_n} x_{\varepsilon_n} \rightarrow 0] \quad \Rightarrow \quad (\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad T_\varepsilon x = x. \quad (3.20)$$

**Example 3.2.2** Let  $T: \text{dom } T = \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  be a nonexpansive operator such that  $\text{Fix } T \neq \emptyset$ , let  $(\lambda_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  be a family in  $]0, 1[$  such that  $\inf_{\varepsilon \in ]0, 1[} \lambda_\varepsilon > 0$ , set  $(\forall \varepsilon \in ]0, 1[)$   $T_\varepsilon = \text{Id} + \lambda_\varepsilon(T - \text{Id})$ , and take  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  in  $\mathcal{H}$ . Then  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  is  $\mathcal{T}$ -focused with respect to  $(T_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$ .

*Proof.* Suppose that  $]0, 1[ \ni \varepsilon_n \downarrow 0$ ,  $x_{\varepsilon_n} \rightharpoonup x$ , and  $x_{\varepsilon_n} - T_{\varepsilon_n} x_{\varepsilon_n} \rightarrow 0$ . Then, since  $\inf_{\varepsilon \in ]0, 1[} \lambda_\varepsilon > 0$ , we obtain  $x_{\varepsilon_n} - T x_{\varepsilon_n} \rightarrow 0$  and the demiclosed principle [10, Lemma 2] yields  $x \in \text{Fix } T \equiv \text{Fix } T_\varepsilon$ .  $\square$

Our first result concerns the convergence of a generalization of (3.18).

**Theorem 3.2.3** Let  $(T_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  and  $(S_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  be families of nonexpansive operators from  $\mathcal{H}$  to  $\mathcal{H}$  with domain  $\mathcal{H}$ , let  $Q: \text{dom } Q = \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  be a strict contraction, and suppose that  $C = \bigcap_{\varepsilon \in ]0, 1[} \text{Fix } T_\varepsilon \neq \emptyset$ . Then there exists a unique point  $x_0 \in C$  such that  $x_0 = P_C(Q x_0)$ . Now set

$$(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad x_\varepsilon = T_\varepsilon(x_\varepsilon + \varepsilon(Q S_\varepsilon x_\varepsilon - x_\varepsilon)). \quad (3.21)$$

Then  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  is uniquely defined. In addition, if  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  is  $\mathcal{T}$ -focused with respect to  $(T_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$ ,  $C \subset \bigcap_{\varepsilon \in ]0, 1[} \text{Fix } S_\varepsilon$ , and, for every  $x \in \mathcal{H}$  and every sequence  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $]0, 1[$  such that  $\varepsilon_n \downarrow 0$ ,

$$[x_{\varepsilon_n} \rightarrow x \in C \quad \text{and} \quad x_{\varepsilon_n} - T_{\varepsilon_n} x_{\varepsilon_n} \rightarrow 0] \quad \Rightarrow \quad S_{\varepsilon_n} x_{\varepsilon_n} \rightarrow x, \quad (3.22)$$

then  $x_\varepsilon \rightarrow x_0$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

*Proof.* Let  $\varepsilon \in ]0, 1[$ . Since  $T_\varepsilon$  is nonexpansive,  $\text{Fix } T_\varepsilon$  is closed and convex [17, Proposition 1.5.3] and, therefore,  $C$  is a nonempty closed convex set. As a result, since  $P_C$  is nonexpansive and  $Q$  is a strict contraction,  $P_C Q$  is a strict contraction, and it follows from the standard Banach-Picard theorem that the point  $x_0$  is uniquely defined. Likewise, since  $S_\varepsilon$  is nonexpansive, the composition  $Q S_\varepsilon$  is a strict contraction. In turn,  $\varepsilon Q S_\varepsilon + (1 - \varepsilon) \text{Id}$  is a strict contraction and so is  $T_\varepsilon(\varepsilon Q S_\varepsilon + (1 - \varepsilon) \text{Id})$ . Hence, the point  $x_\varepsilon$  is uniquely defined in (3.21).

To show the last assertion, let  $\theta \in [0, 1[$  be the Lipschitz constant of  $Q$  and let  $x$  be a point in  $C$ . Then we deduce from (3.21) that

$$\begin{aligned}
(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad \|x_\varepsilon - x\| &= \|T_\varepsilon(\varepsilon QS_\varepsilon x_\varepsilon + (1 - \varepsilon)x_\varepsilon) - T_\varepsilon x\| \\
&\leq \|\varepsilon QS_\varepsilon x_\varepsilon + (1 - \varepsilon)x_\varepsilon - x\| \\
&= \|\varepsilon(QS_\varepsilon x_\varepsilon - QS_\varepsilon x) + (1 - \varepsilon)(x_\varepsilon - x) + \varepsilon(Qx - x)\| \\
&\leq \varepsilon\theta \|S_\varepsilon x_\varepsilon - S_\varepsilon x\| + (1 - \varepsilon)\|x_\varepsilon - x\| + \varepsilon\|Qx - x\| \\
&\leq (1 - \varepsilon + \varepsilon\theta)\|x_\varepsilon - x\| + \varepsilon\|Qx - x\|. \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Hence,

$$(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad \|x_\varepsilon - x\| \leq \frac{\|Qx - x\|}{1 - \theta}. \tag{3.24}$$

Consequently,  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  is bounded and, since

$$\begin{aligned}
(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad \|QS_\varepsilon x_\varepsilon - x_\varepsilon\| &\leq \|QS_\varepsilon x_\varepsilon - QS_\varepsilon x\| + \|x_\varepsilon - Qx\| \\
&\leq \theta\|x_\varepsilon - x\| + \|x_\varepsilon - Qx\|, \tag{3.25}
\end{aligned}$$

we obtain

$$\beta = \sup_{\varepsilon \in ]0, 1[} \|QS_\varepsilon x_\varepsilon - x_\varepsilon\| < +\infty. \tag{3.26}$$

Now set  $(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad y_\varepsilon = x_\varepsilon + \varepsilon(QS_\varepsilon x_\varepsilon - x_\varepsilon)$ . Then (3.21) yields

$$\begin{aligned}
(\forall y \in C)(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad \varepsilon^2 \|QS_\varepsilon x_\varepsilon - x_\varepsilon\|^2 + 2\varepsilon \langle QS_\varepsilon x_\varepsilon - x_\varepsilon \mid x_\varepsilon - y \rangle \\
&= \|y_\varepsilon - T_\varepsilon y_\varepsilon\|^2 + 2 \langle y_\varepsilon - T_\varepsilon y_\varepsilon \mid T_\varepsilon y_\varepsilon - y \rangle \\
&= \|y_\varepsilon - y\|^2 - \|T_\varepsilon y_\varepsilon - y\|^2 \\
&\geq 0. \tag{3.27}
\end{aligned}$$

Therefore, by (3.26),

$$(\forall y \in C)(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad \langle x_\varepsilon - QS_\varepsilon x_\varepsilon \mid x_\varepsilon - y \rangle \leq \frac{\varepsilon}{2} \|QS_\varepsilon x_\varepsilon - x_\varepsilon\|^2 \leq \frac{\varepsilon\beta^2}{2}. \tag{3.28}$$

Hence, using Cauchy-Schwarz, we obtain

$$\begin{aligned}
(\forall y \in C)(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad (1 - \theta)\|x_\varepsilon - y\|^2 \\
&\leq \|x_\varepsilon - y\|^2 - \|x_\varepsilon - y\| \cdot \|QS_\varepsilon x_\varepsilon - QS_\varepsilon y\| \\
&\leq \|x_\varepsilon - y\|^2 - \langle x_\varepsilon - y \mid QS_\varepsilon x_\varepsilon - QS_\varepsilon y \rangle \\
&= \langle (\text{Id} - QS_\varepsilon)x_\varepsilon - (\text{Id} - QS_\varepsilon)y \mid x_\varepsilon - y \rangle \\
&\leq \frac{\varepsilon\beta^2}{2} + \langle x_\varepsilon - y \mid Qy - y \rangle. \tag{3.29}
\end{aligned}$$

Next, we derive from (3.21) and (3.26) that

$$\begin{aligned} (\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad \|x_\varepsilon - T_\varepsilon x_\varepsilon\| &= \|T_\varepsilon(x_\varepsilon + \varepsilon(QS_\varepsilon x_\varepsilon - x_\varepsilon)) - T_\varepsilon x_\varepsilon\| \\ &\leq \varepsilon \|QS_\varepsilon x_\varepsilon - x_\varepsilon\| \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\leq \varepsilon \beta. \quad (3.31)$$

Thus,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|x_\varepsilon - T_\varepsilon x_\varepsilon\| = 0. \quad (3.32)$$

To complete the proof, let  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be an arbitrary sequence in  $]0, 1[$  such that  $\varepsilon_n \downarrow 0$ . Then it is enough to show that  $x_{\varepsilon_n} \rightarrow x_0$ . Let  $w$  be a weak cluster point of  $(x_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ , say  $x_{\varepsilon_{k_n}} \rightharpoonup w$ . Then it follows from (3.32) and (3.20) that  $w \in C$ . Therefore, (3.29) yields

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (1 - \theta) \|x_{\varepsilon_n} - w\|^2 \leq \frac{\varepsilon_n \beta^2}{2} + \langle x_{\varepsilon_n} - w \mid Qw - w \rangle, \quad (3.33)$$

which implies that  $x_{\varepsilon_{k_n}} \rightarrow w$ . Consequently, by (3.32) and (3.22), we obtain  $S_{\varepsilon_{k_n}} x_{\varepsilon_{k_n}} \rightarrow w$  and, therefore, (3.28) results in

$$\begin{aligned} (\forall y \in C) \quad \langle x_{\varepsilon_{k_n}} - QS_{\varepsilon_{k_n}} x_{\varepsilon_{k_n}} \mid x_{\varepsilon_{k_n}} - y \rangle &\rightarrow \langle w - Qw \mid w - y \rangle \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \langle x_{\varepsilon_n} - QS_{\varepsilon_n} x_{\varepsilon_n} \mid x_{\varepsilon_n} - y \rangle \leq 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

We thus obtain  $\sup_{y \in C} \langle w - Qw \mid w - y \rangle \leq 0$ , i.e.,  $w = P_C(Qw)$ . Since  $x_0$  is the unique fixed point of  $P_C Q$ , we have  $w = x_0$ . Accordingly, the bounded sequence  $(x_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$  admits  $x_0$  as its unique weak cluster point, whence  $x_{\varepsilon_n} \rightharpoonup x_0$ . In turn, it follows from (3.33) that  $x_{\varepsilon_n} \rightarrow x_0$ .  $\square$

**Example 3.2.4** Using the standard characterization of the projection onto a convex set, the limit  $x_0$  of the approximating curve  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  in Theorem 3.2.3 is the solution to the variational inequality

$$x_0 \in C \quad \text{and} \quad (\forall y \in C) \quad \langle y - x_0 \mid Qx_0 - x_0 \rangle \leq 0. \quad (3.35)$$

Here are some specific examples, where  $0 < \alpha \leq \beta < +\infty$ .

- (i) Suppose that  $V: \text{dom } V = \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  is  $\alpha$ -strongly monotone (i.e.,  $V - \alpha \text{Id}$  is monotone) and Lipschitz-continuous with constant  $\beta$ , and let  $\gamma \in ]0, 2\alpha/\beta^2[$ . Then  $Q = \text{Id} - \gamma V$  is a strict contraction with constant  $\theta = \sqrt{1 - \gamma(2\alpha - \gamma\beta^2)}$  and  $x_0$  is the unique solution to the variational inequality

$$x_0 \in C \quad \text{and} \quad (\forall y \in C) \quad \langle y - x_0 \mid Vx_0 \rangle \geq 0. \quad (3.36)$$

- (ii) Suppose that  $V: \text{dom } V = \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  is  $\alpha$ -strongly monotone and that  $V/\beta$  is firmly nonexpansive, and let  $\gamma \in ]0, 2/\beta[$ . Then  $Q = \text{Id} - \gamma V$  is a strict contraction with constant  $\theta = \sqrt{1 - \alpha\gamma(2 - \beta\gamma)}$  (this constant is smaller than that given in [15, Theorem 2]). Indeed, for every  $x$  and  $y$  in  $\mathcal{H}$ , we have

$$\begin{aligned} \|Qx - Qy\|^2 &= \|x - y\|^2 - 2\gamma \langle x - y \mid Vx - Vy \rangle + \gamma^2 \|Vx - Vy\|^2 \\ &\leq \|x - y\|^2 - \gamma(2 - \beta\gamma) \langle x - y \mid Vx - Vy \rangle \\ &\leq (1 - \alpha\gamma(2 - \beta\gamma)) \|x - y\|^2. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Here,  $x_0$  is the unique solution to (3.36).

- (iii) Suppose that  $\varphi: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  is convex and differentiable, and that  $\nabla\varphi$  is  $\alpha$ -strongly monotone and Lipschitz-continuous with constant  $\beta$ . Then it follows from [4, Corollaire 10] that  $\nabla\varphi/\beta$  is firmly nonexpansive. Hence, we deduce from (ii) that  $Q = \text{Id} - \gamma\nabla\varphi$  is a strict contraction for  $\gamma \in ]0, 2/\beta[$ . In this case,  $x_0$  is the unique minimizer of  $\varphi$  over  $C$ .
- (iv) A special case of (iii) is when  $\varphi: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  is convex, twice continuously Fréchet-differentiable, and that

$$(\forall(x, y) \in \mathcal{H}^2) \quad \alpha\|y\|^2 \leq \langle y \mid \nabla^2\varphi(x)y \rangle \leq \beta\|y\|^2. \quad (3.38)$$

This follows from [15, Theorem 4].

- (v) Let  $a \in \mathcal{H}$  and suppose that  $Q: x \mapsto a$ . Then  $x_0$  is the projection of  $a$  onto  $C$ .

**Remark 3.2.5** In Theorem 3.2.3,  $\text{Fix } T_\varepsilon$  may vary with  $\varepsilon$ . For instance, let  $(C_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  be closed convex subsets of  $\mathcal{H}$  such that  $C = \bigcap_{\varepsilon \in ]0, 1[} C_\varepsilon \neq \emptyset$  and such that the associated projectors  $(T_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  satisfy  $(\forall x \in \mathcal{H}) T_\varepsilon x \rightarrow P_C x$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Furthermore, fix  $a \in \mathcal{H}$  and set  $Q: x \mapsto a$  and  $S_\varepsilon \equiv \text{Id}$ . Then  $(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \text{Fix } T_\varepsilon = C_\varepsilon$  and (3.21)  $\Rightarrow x_\varepsilon = T_\varepsilon(x_\varepsilon + \varepsilon(a - x_\varepsilon)) = T_\varepsilon a$ . Therefore, (3.22) holds trivially and  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  is  $\mathcal{J}$ -focused with respect to  $(T_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$ . Indeed,  $x_\varepsilon \rightarrow x \Leftrightarrow T_\varepsilon a \rightarrow x$ . However, since  $T_\varepsilon a \rightarrow P_C a$ , we obtain  $x = P_C a \in C$ .

**Remark 3.2.6** Let  $(V_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  be a family of operators from  $\mathcal{H}$  to  $\mathcal{H}$  with domain  $\mathcal{H}$  which uniquely define a curve  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  via the equations  $(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) x_\varepsilon = T_\varepsilon(\text{Id} - \varepsilon V_\varepsilon)x_\varepsilon$ . Set  $(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) y_\varepsilon = x_\varepsilon - \varepsilon V_\varepsilon x_\varepsilon$ . Then

$$(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad y_\varepsilon = (\text{Id} - \varepsilon V_\varepsilon)T_\varepsilon y_\varepsilon. \quad (3.39)$$

Thus, if  $x_\varepsilon \rightarrow x_0$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$  and  $(V_\varepsilon x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  is bounded, we also have  $y_\varepsilon \rightarrow x_0$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$ . This simple observation yields the following alternative approximating curve result. Let us make the same assumptions as in Theorem 3.2.3 and let us set  $(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) V_\varepsilon = \text{Id} - QS_\varepsilon$ . Then (3.39) becomes

$$(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad y_\varepsilon = \varepsilon QS_\varepsilon T_\varepsilon y_\varepsilon + (1 - \varepsilon)T_\varepsilon y_\varepsilon. \quad (3.40)$$

In view of (3.26), the family  $(V_\varepsilon x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  is bounded. Therefore, Theorem 3.2.3 yields  $y_\varepsilon \rightarrow x_0 = P_C(Qx_0)$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$ . In particular, if  $a \in \mathcal{H}$ ,  $Q: x \mapsto a$ ,  $T_\varepsilon \equiv T$ , and  $S_\varepsilon \equiv \text{Id}$ , we recover the classical result [9, Theorem 2] alluded to in Section 3.2.1 (see also [10, Theorem 1] and [18, Theorem 1] for alternate proofs of this result).

**Remark 3.2.7 (Infeasible case)** Suppose that we make the same assumptions as in Theorem 3.2.3, except that  $C = \emptyset$  and  $D = \bigcap_{\varepsilon \in ]0,1[} \text{Fix } S_\varepsilon \neq \emptyset$  (e.g.,  $S_\varepsilon \equiv \text{Id}$ ). Then  $\|x_\varepsilon\| \rightarrow +\infty$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Indeed, otherwise there would exist a bounded sequence  $(x_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ , where  $]0,1[ \ni \varepsilon_n \downarrow 0$ . Taking  $x \in D$  in (3.25), we would obtain the boundedness of  $(QS_{\varepsilon_n}x_{\varepsilon_n} - x_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$  and it would follow from (3.30) that  $T_{\varepsilon_n}x_{\varepsilon_n} - x_{\varepsilon_n} \rightarrow 0$ . On the other hand, we could extract a subsequence  $(x_{\varepsilon_{k_n}})_{n \in \mathbb{N}}$  such that  $x_{\varepsilon_{k_n}} \rightharpoonup w$ . However, the  $\mathcal{T}$ -focused assumption would yield  $w \in C$ , which is absurd.

We close this section with a special case of Theorem 3.2.3.

**Corollary 3.2.8** *Let  $T: \text{dom } T = \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  be a nonexpansive operator such that  $\text{Fix } T \neq \emptyset$  and let  $Q: \text{dom } Q = \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  be a strict contraction. Then there exists a unique point  $x_0 \in \text{Fix } T$  such that  $x_0 = P_{\text{Fix } T}(Qx_0)$ . Now let  $(\lambda_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  and  $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  be families in  $[0,1]$  such that  $\inf_{\varepsilon \in ]0,1[} \lambda_\varepsilon > 0$  and set*

$$(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad x_\varepsilon = (\text{Id} + \lambda_\varepsilon(T - \text{Id}))(x_\varepsilon + \varepsilon(Q(x_\varepsilon + \mu_\varepsilon(Tx_\varepsilon - x_\varepsilon)) - x_\varepsilon)). \quad (3.41)$$

*Then  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  is uniquely defined and  $x_\varepsilon \rightarrow x_0$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

*Proof.* Set  $C = \text{Fix } T$  and, for every  $\varepsilon \in ]0,1[$ ,  $T_\varepsilon = \text{Id} + \lambda_\varepsilon(T - \text{Id})$  and  $S_\varepsilon = \text{Id} + \mu_\varepsilon(T - \text{Id})$ . Then, for every  $\varepsilon \in ]0,1[$ ,  $T_\varepsilon$  and  $S_\varepsilon$  are nonexpansive, and  $\text{Fix } S_\varepsilon = C$  or  $\mathcal{H}$ , according as  $0 < \mu_\varepsilon \leq 1$  or  $\mu_\varepsilon = 0$ . On the other hand, since  $\inf_{\varepsilon \in ]0,1[} \lambda_\varepsilon > 0$ ,  $\text{Fix } T_\varepsilon \equiv C$ . Altogether,  $\emptyset \neq C = \bigcap_{\varepsilon \in ]0,1[} \text{Fix } T_\varepsilon \subset \bigcap_{\varepsilon \in ]0,1[} \text{Fix } S_\varepsilon$ . Moreover, Example 3.2.2 shows that  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  is  $\mathcal{T}$ -focused with respect to  $(T_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$ , while (3.22) is readily verified. Thus, the result is a special case of Theorem 3.2.3.  $\square$

In particular, setting  $Q: x \mapsto a$  and  $\lambda_\varepsilon \equiv 1$  in Corollary 3.2.8, we recover the fact that the limit of the approximating curve (3.18) is the best approximation to  $a$  from  $\text{Fix } T$ .

### 3.2.3 Monotone inclusion problems

Let  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  be a set-valued operator. The sets  $\text{dom } A = \{x \in \mathcal{H} \mid Ax \neq \emptyset\}$ ,  $\text{ran } A = \{u \in \mathcal{H} \mid (\exists x \in \mathcal{H}) u \in Ax\}$ , and  $\text{gr } A = \{(x, u) \in \mathcal{H}^2 \mid u \in Ax\}$  are the domain, the range, and the graph of  $A$ , respectively. The inverse  $A^{-1}$  of  $A$  is the set-valued operator with graph  $\{(u, x) \in \mathcal{H}^2 \mid u \in Ax\}$ , the resolvent of  $A$  is  $J_A = (\text{Id} + A)^{-1}$ , and its Yosida approximation of index  $\gamma \in ]0, +\infty[$  is  $\gamma A = (\text{Id} - J_{\gamma A})/\gamma$ . Moreover,  $A$  is monotone if

$$(\forall (x, u) \in \text{gr } A)(\forall (y, v) \in \text{gr } A) \quad \langle x - y \mid u - v \rangle \geq 0, \quad (3.42)$$

and maximal monotone if, furthermore,  $\text{gr } A$  is not properly contained in the graph of any monotone operator  $B: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$ . If  $A$  is monotone and  $\text{dom } A \neq \emptyset$ , the associated Fitzpatrick function [16] is the proper lower semicontinuous convex function  $f_A: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  defined by

$$(\forall (x, w) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}) \quad f_A(x, w) = \langle x \mid w \rangle + \sup_{(y, v) \in \text{gr } A} \langle x - y \mid v - w \rangle. \quad (3.43)$$

**Definition 3.2.9** Let  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  be a family of maximal monotone operators from  $\mathcal{H}$  to  $2^{\mathcal{H}}$  and let  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  be a family in  $\mathcal{H}$ . Then  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  is  $\mathcal{A}$ -focused with respect to  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  if, for every  $x \in \mathcal{H}$  and every sequence  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $]0, 1[$  such that  $\varepsilon_n \downarrow 0$ ,

$$[x_{\varepsilon_n} \rightharpoonup x \quad \text{and} \quad {}^1A_{\varepsilon_n} x_{\varepsilon_n} \rightarrow 0] \quad \Rightarrow \quad (\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad 0 \in A_\varepsilon x. \quad (3.44)$$

**Example 3.2.10** Let  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  be a family of maximal monotone operators from  $\mathcal{H}$  to  $2^{\mathcal{H}}$  which graph-converges to some maximal monotone operator  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  such that  $A^{-1}0 = \bigcap_{\varepsilon \in ]0, 1[} A_\varepsilon^{-1}0$ , and take  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  in  $\mathcal{H}$ . Then  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  is  $\mathcal{A}$ -focused with respect to  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$ .

*Proof.* Suppose that  $]0, 1[ \ni \varepsilon_n \downarrow 0$ ,  $x_{\varepsilon_n} \rightharpoonup x$ , and  ${}^1A_{\varepsilon_n} x_{\varepsilon_n} \rightarrow 0$ . Then  $J_{A_{\varepsilon_n}} x_{\varepsilon_n} \rightharpoonup x$  and  ${}^1A_{\varepsilon_n} x_{\varepsilon_n} \rightarrow 0$ , while  $(\forall n \in \mathbb{N}) (J_{A_{\varepsilon_n}} x_{\varepsilon_n}, {}^1A_{\varepsilon_n} x_{\varepsilon_n}) \in \text{gr } A_{\varepsilon_n}$ . Therefore, [1, Proposition 3.59] yields  $(x, 0) \in \text{gr } A$ .  $\square$

We start with an application of Theorem 3.2.3.

**Corollary 3.2.11** Let  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  be a family of maximal monotone operators from  $\mathcal{H}$  to  $2^{\mathcal{H}}$  such that  $C = \bigcap_{\varepsilon \in ]0, 1[} A_\varepsilon^{-1}0 \neq \emptyset$  and let  $Q: \text{dom } Q = \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  be a strict contraction. Then there exists a unique point  $x_0 \in C$  such that  $x_0 = P_C(Q x_0)$ . Now take  $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  and  $(\nu_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  in  $[0, 2]$  such that  $\inf_{\varepsilon \in ]0, 1[} \rho_\varepsilon > 0$ , and set

$$(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad x_\varepsilon = (\text{Id} + \rho_\varepsilon(J_{A_\varepsilon} - \text{Id}))(x_\varepsilon + \varepsilon(Q(x_\varepsilon + \nu_\varepsilon(J_{A_\varepsilon} x_\varepsilon - x_\varepsilon)) - x_\varepsilon)). \quad (3.45)$$

Then the family  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  is uniquely defined. In addition, if  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  is  $\mathcal{A}$ -focused with respect to  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$ , then  $x_\varepsilon \rightarrow x_0$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

*Proof.* Set  $(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) T_\varepsilon = \text{Id} + \rho_\varepsilon(J_{A_\varepsilon} - \text{Id})$  and  $S_\varepsilon = \text{Id} + \nu_\varepsilon(J_{A_\varepsilon} - \text{Id})$ . For every  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , since  $A_\varepsilon$  is maximal monotone,  $2J_{A_\varepsilon} - \text{Id}$  is nonexpansive with domain  $\mathcal{H}$  and fixed point set  $A_\varepsilon^{-1}0$  [17, Section 1.11]; consequently,  $T_\varepsilon$  and  $S_\varepsilon$  are nonexpansive,  $\text{Fix } T_\varepsilon = A_\varepsilon^{-1}0$  (since  $\rho_\varepsilon > 0$ ), and  $\text{Fix } S_\varepsilon = A_\varepsilon^{-1}0$  or  $\mathcal{H}$ , according as  $0 < \nu_\varepsilon \leq 2$  or  $\nu_\varepsilon = 0$ . Consequently,  $\emptyset \neq C = \bigcap_{\varepsilon \in ]0, 1[} \text{Fix } T_\varepsilon \subset \bigcap_{\varepsilon \in ]0, 1[} \text{Fix } S_\varepsilon$ . Now take  $]0, 1[ \ni \varepsilon_n \downarrow 0$ . Since  $\inf_{\varepsilon \in ]0, 1[} \rho_\varepsilon > 0$ ,  $x_{\varepsilon_n} - T_{\varepsilon_n} x_{\varepsilon_n} \rightarrow 0 \Rightarrow {}^1A_{\varepsilon_n} x_{\varepsilon_n} \rightarrow 0$ , and it follows from (3.44) that  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  is  $\mathcal{J}$ -focused with respect to  $(T_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$ . Finally, suppose that  $x_{\varepsilon_n} \rightarrow x \in C$ . Then  $x_{\varepsilon_n} - T_{\varepsilon_n} x_{\varepsilon_n} \rightarrow 0 \Rightarrow 2\|{}^1A_{\varepsilon_n} x_{\varepsilon_n}\| \rightarrow 0 \Rightarrow \nu_{\varepsilon_n}\|{}^1A_{\varepsilon_n} x_{\varepsilon_n}\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|x_{\varepsilon_n} - S_{\varepsilon_n} x_{\varepsilon_n}\| \rightarrow 0 \Rightarrow S_{\varepsilon_n} x_{\varepsilon_n} \rightarrow x$ . Hence, (3.22) holds. Altogether, since (3.45) is a special case of (3.21), the claims follow from Theorem 3.2.3.  $\square$

**Corollary 3.2.12** *Let  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  be a family of maximal monotone operators from  $\mathcal{H}$  to  $2^{\mathcal{H}}$  such that  $C = \bigcap_{\varepsilon \in ]0,1[} A_\varepsilon^{-1}0 \neq \emptyset$  and let  $V = \text{Id} - Q$ , where  $Q: \text{dom } Q = \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  is a strict contraction. Then there exists a unique point  $x_0 \in C$  such that  $x_0 = P_C(x_0 - Vx_0)$ . Now let*

$$(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad 0 \in A_\varepsilon x_\varepsilon + \varepsilon V x_\varepsilon. \quad (3.46)$$

*Then the family  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  is uniquely defined. In addition, if  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  is  $\mathcal{A}$ -focused with respect to  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$ , then  $x_\varepsilon \rightarrow x_0$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

*Proof.* Setting  $\rho_\varepsilon \equiv 1$  and  $\nu_\varepsilon \equiv 0$  in (3.45), we obtain (3.46). We can then apply Corollary 3.2.11.  $\square$

**Remark 3.2.13** We can rewrite (3.46) as  $(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad x_\varepsilon = J_{A_\varepsilon/\varepsilon}(x_\varepsilon - Vx_\varepsilon)$ . In particular, for  $A_\varepsilon \equiv A$  and  $V = \text{Id}$ , we obtain

$$(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad x_\varepsilon = J_{A/\varepsilon}0. \quad (3.47)$$

- (i) In this case, Corollary 3.2.12 coincides with [11, Lemma 1], i.e.,  $J_{A/\varepsilon}0 \rightarrow P_{A^{-1}0}0$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$  (here (3.44) follows from the fact that, by maximal monotonicity of  $A$ ,  $\text{gr } A$  is sequentially weakly-strongly closed in  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ ). This result can be traced back to [21] (see also [24, Theorem 1 and Remark 2] for a Banach space version, and [9, Theorem 1] for a related result; moreover, Remark 3.2.7 corresponds to [23, Theorem 2], i.e.,  $\|x_\varepsilon\| \rightarrow +\infty$  if  $0 \notin \text{ran } A$ ).
- (ii) Let  $U: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  be a maximal monotone operator, let  $x \in \mathcal{H}$ , and let  $A = U^{-1} - x$ . Then (3.47) becomes  $(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad x_\varepsilon = {}^\varepsilon Ux$ . Therefore, (i) asserts that
  - (a) if  $x \in \text{dom } U$ , that is  $0 \in \text{ran } A$ , then  $x_\varepsilon \rightarrow P_{A^{-1}0}0 = P_{Ux}0$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;
  - (b) if  $x \notin \text{dom } U$ , that is  $0 \notin \text{ran } A$ , then  $\|x_\varepsilon\| \rightarrow +\infty$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

This classical result can be found in [7, Proposition 2.6(iii)&(iv)].

In Corollary 3.2.12, the approximating curve (3.46) converges strongly to the solution  $x_0$  to the variational inequality

$$0 \in N_{\left(\bigcap_{\varepsilon \in ]0,1[} A_\varepsilon^{-1}0\right)} x_0 + Vx_0, \quad (3.48)$$

where  $V$  is a special type of single-valued strongly monotone operator (see Example 3.2.4 for specific examples). In Theorem 3.2.18 below, we extend this result to a more general type of set-valued strictly monotone operator  $V$ . First, we require the following facts, starting with a generalization of the notion of strong monotonicity.



**Definition 3.2.14** Let  $V: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  be a set-valued operator with  $\text{dom } V \neq \emptyset$  and let  $c: [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  be a nondecreasing function that vanishes only at 0 and such that  $\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t)/t = +\infty$ . Then  $V$  is *c-uniformly monotone* if

$$(\forall (x, u) \in \text{gr } V)(\forall (y, v) \in \text{gr } V) \quad \langle x - y \mid u - v \rangle \geq c(\|x - y\|). \quad (3.49)$$

If  $c: t \mapsto \alpha t^2$  for some  $\alpha \in ]0, +\infty[$ , then  $V$  is  *$\alpha$ -strongly monotone*.

**Lemma 3.2.15** Let  $V: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  be a *c-uniformly monotone operator*. Then  $(\text{dom } V) \times \mathcal{H} \subset \text{dom } f_V$ .

*Proof.* Fix  $(x, u) \in \text{gr } V$  and  $w \in \mathcal{H}$ , and set  $\gamma = \|u - w\|$  and  $\psi: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}: t \mapsto \gamma t - c(t)$ . Since  $\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t)/t = +\infty$ , we can find  $\tau \in [0, +\infty[$  such that  $\psi(t) < 0 = \psi(0)$  whenever  $t > \tau$ . Thus,  $\sup_{t \in [0, +\infty[} \psi(t) = \sup_{t \in [0, \tau]} \psi(t) \leq \gamma\tau < +\infty$ . Therefore, (3.43), (3.49), and Cauchy-Schwarz yield

$$\begin{aligned} f_V(x, w) - \langle x \mid w \rangle &= \sup_{(y, v) \in \text{gr } V} \langle x - y \mid v - u \rangle + \langle x - y \mid u - w \rangle \\ &\leq \sup_{y \in \text{dom } V} \psi(\|x - y\|) < +\infty. \end{aligned} \quad (3.50)$$

In other words,  $(x, w) \in \text{dom } f_V$ .  $\square$

**Lemma 3.2.16** Let  $A, V: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  be maximal monotone operators such that  $A + V$  is maximal monotone and  $V$  is *c-uniformly monotone*. Suppose that, in addition,  $(\text{dom } A) \times (\text{ran } A) \subset \text{dom } f_A$  or  $\text{dom } A \subset \text{dom } V$ . Then :

- (i)  $\text{ran}(A + V) = \mathcal{H}$ .
- (ii) The inclusion  $0 \in Ax + Vx$  admits a unique solution.

*Proof.* (i) : Fix  $(y, v) \in \text{gr } V$ . Then (3.49) yields

$$\begin{aligned} (\forall (x, u) \in \text{gr } V) \quad \|x - y\| \cdot \|u\| &\geq \langle x - y \mid u \rangle \\ &= \langle x - y \mid u - v \rangle + \langle x - y \mid v \rangle \\ &\geq c(\|x - y\|) - \|x - y\| \cdot \|v\|. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Accordingly, since  $\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t)/t = +\infty$ , we have  $\lim_{\substack{x \in \text{dom } V \\ \|x\| \rightarrow +\infty}} \inf_{u \in Vx} \|u\| = +\infty$  whenever  $\text{dom } V$  is unbounded. It then follows from [30, Corollary 32.35] that  $\text{ran } V = \mathcal{H}$  and, in turn, from Lemma 3.2.15 that  $(\text{dom } V) \times (\text{ran } V) = (\text{dom } V) \times \mathcal{H} \subset \text{dom } f_V$ . We then deduce from the Brézis-Haraux theorem [8, Théorèmes 3 and 4] that  $\text{int } \text{ran}(A + V) = \text{int}(\text{ran } A + \text{ran } V) = \mathcal{H}$ .

(ii) : Since  $A$  is monotone and  $V$  is strictly monotone,  $A + V$  is strictly monotone. Hence, the inclusion  $0 \in Ax + Vx$  has at most one solution. Existence follows from (i).  $\square$

**Remark 3.2.17** Fitzpatrick functions have recently been shown to be remarkably useful in establishing concise proofs of various key results in monotone operator theory (see [6, 25] and the references therein). In the same vein, S. Simons (personal communication, April 7, 2005) has produced a new proof of the Brézis-Haraux theorem in Banach spaces.

**Theorem 3.2.18** *Let  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  be a family of maximal monotone operators from  $\mathcal{H}$  to  $2^{\mathcal{H}}$  such that  $C = \bigcap_{\varepsilon \in ]0,1[} A_\varepsilon^{-1}0 \neq \emptyset$  and let  $V: \text{dom } V = \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  be a maximal monotone operator which is  $c$ -uniformly monotone. Then there exists a unique point  $x_0 \in \mathcal{H}$  such that  $0 \in N_C x_0 + Vx_0$ . Now let*

$$(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad 0 \in A_\varepsilon x_\varepsilon + \varepsilon Vx_\varepsilon. \quad (3.52)$$

*Then the family  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  is uniquely defined. In addition, if  $V$  maps every bounded subset into a bounded subset and if  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  is  $\mathcal{A}$ -focused with respect to  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$ , then  $x_\varepsilon \rightarrow x_0$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

*Proof.* By maximal monotonicity, the sets  $(A_\varepsilon^{-1}0)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  are closed and convex, and so is therefore  $C$ . Accordingly,  $N_C$  is maximal monotone and, since  $\text{dom } V = \mathcal{H}$ , Lemma 3.2.16(ii) guarantees that  $x_0$  is uniquely defined. Likewise, it follows from (3.52) and Lemma 3.2.16(ii) that  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  is uniquely defined.

To show the last assertion, we first derive from (3.52) that there exists a family  $(b_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  such that

$$(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad b_\varepsilon \in Vx_\varepsilon \quad \text{and} \quad -\varepsilon b_\varepsilon \in A_\varepsilon x_\varepsilon. \quad (3.53)$$

Now fix  $x \in C$  and  $u \in Vx$ . Then  $(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad 0 \in A_\varepsilon x$ . Hence, in view of (3.53), the monotonicity of the operators  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  yields

$$(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad \langle x - x_\varepsilon \mid b_\varepsilon \rangle \geq 0, \quad (3.54)$$

while the  $c$ -uniform monotonicity of  $V$  yields

$$(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad \langle x - x_\varepsilon \mid u - b_\varepsilon \rangle \geq c(\|x - x_\varepsilon\|). \quad (3.55)$$

Adding (3.54) and (3.55) we obtain

$$(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad \langle x - x_\varepsilon \mid u \rangle \geq c(\|x - x_\varepsilon\|), \quad (3.56)$$

and therefore

$$(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad \|x - x_\varepsilon\| \cdot \|u\| \geq c(\|x - x_\varepsilon\|). \quad (3.57)$$

Consequently, since  $\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t)/t = +\infty$ ,  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  is bounded. In turn, it follows from the boundedness of  $V$  on bounded sets that

$$\beta = \sup_{\varepsilon \in ]0,1[} \|b_\varepsilon\| < +\infty. \quad (3.58)$$

Now, observe that the monotonicity of the operators  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  and (3.53) yield

$$(\forall \varepsilon \in ]0,1[)(\forall y \in C) \quad \langle x_\varepsilon - y \mid b_\varepsilon \rangle \leq 0. \quad (3.59)$$

Likewise,

$$\begin{aligned} \begin{cases} -\varepsilon b_\varepsilon \in A_\varepsilon x_\varepsilon \\ {}^1A_\varepsilon x_\varepsilon \in A_\varepsilon J_{A_\varepsilon} x_\varepsilon \end{cases} &\Rightarrow \langle {}^1A_\varepsilon x_\varepsilon \mid {}^1A_\varepsilon x_\varepsilon + \varepsilon b_\varepsilon \rangle \leq 0 \\ &\Rightarrow \| {}^1A_\varepsilon x_\varepsilon \| \leq \varepsilon \| b_\varepsilon \| \leq \varepsilon \beta, \end{aligned} \quad (3.60)$$

where the last implication follows from Cauchy-Schwarz and (3.58). We have thus shown that

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \| {}^1A_\varepsilon x_\varepsilon \| = 0. \quad (3.61)$$

Now let  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be an arbitrary sequence in  $]0,1[$  such that  $\varepsilon_n \downarrow 0$ . Then it remains to show that  $x_{\varepsilon_n} \rightharpoonup x_0$ . To this end, take a weak cluster point of  $(x_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ , say  $x_{\varepsilon_{k_n}} \rightharpoonup w$ . Then it follows from (3.61) and (3.44) that  $w \in C$ . In turn, (3.56) implies that  $x_{\varepsilon_{k_n}} \rightarrow w$ . Moreover, in view of (3.58), passing to a further subsequence if necessary, we assume that  $(b_{\varepsilon_{k_n}})_{n \in \mathbb{N}}$  converges weakly, say  $b_{\varepsilon_{k_n}} \rightharpoonup v$ . Since  $V$  is maximal monotone, its graph is sequentially strongly-weakly closed in  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$  and therefore  $v \in Vw$ . Altogether,  $x_{\varepsilon_{k_n}} \rightarrow w$ ,  $b_{\varepsilon_{k_n}} \rightharpoonup v$ , and hence (3.59) yields

$$(\forall y \in C) \quad \langle x_{\varepsilon_{k_n}} - y \mid b_{\varepsilon_{k_n}} \rangle \rightarrow \langle w - y \mid v \rangle \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \langle x_{\varepsilon_n} - y \mid b_{\varepsilon_n} \rangle \leq 0. \quad (3.62)$$

Consequently,  $\sup_{y \in C} \langle w - y \mid v \rangle \leq 0$  and, therefore,  $-v \in N_C w$ . Recalling that  $v \in Vw$ , we obtain  $0 \in N_C w + Vw$ . However, since the inclusion  $0 \in N_C x_0 + Vx_0$  admits a unique solution,  $w = x_0$  is the unique weak cluster point of  $(x_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$  and therefore  $x_{\varepsilon_n} \rightharpoonup x_0$ . Invoking (3.56), we conclude that  $x_{\varepsilon_n} \rightarrow x_0$ .  $\square$

**Remark 3.2.19 (Infeasible case)** Suppose that we make the same assumptions as in Theorem 3.2.18, except that  $C = \emptyset$ . Then  $\|x_\varepsilon\| \rightarrow +\infty$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Indeed, otherwise there would exist a bounded sequence  $(x_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ , where  $]0,1[ \ni \varepsilon_n \downarrow 0$ . Hence, the sequence  $(b_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$  given by (3.53) would also be bounded and, as in (3.60), we would get  $\| {}^1A_{\varepsilon_n} x_{\varepsilon_n} \| \leq \varepsilon_n \| b_{\varepsilon_n} \| \rightarrow 0$ . Furthermore, we could extract a subsequence  $(x_{\varepsilon_{k_n}})_{n \in \mathbb{N}}$  such that  $x_{\varepsilon_{k_n}} \rightharpoonup w$ , and (3.44) would force  $w \in C = \emptyset$ .

**Remark 3.2.20**

- (i) As seen in Example 3.2.10, the  $\mathcal{A}$ -focused condition holds in Theorem 3.2.18 when  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  graph-converges to a maximal monotone operator  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  such that  $A^{-1}0 = \bigcap_{\varepsilon \in ]0,1[} A_\varepsilon^{-1}0$ . In such instances,  $0 \in N_{A^{-1}0} x_0 + Vx_0$ .

- (ii) Suppose that  $V$  is single-valued in Theorem 3.2.18. Then  $x_\varepsilon \rightarrow x_0 = P_C(x_0 - Vx_0)$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$ . However, as shown in (3.58), the family  $(Vx_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  is bounded. On the other hand, (3.52) can be rewritten as

$$(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad x_\varepsilon = J_{A_\varepsilon}(\text{Id} - \varepsilon V)x_\varepsilon. \quad (3.63)$$

Consequently, it follows from the observation made in Remark 3.2.6 that, under the same assumptions as in Theorem 3.2.18, the approximating curve defined by  $(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad y_\varepsilon = x_\varepsilon - \varepsilon Vx_\varepsilon$ , i.e., by

$$(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad y_\varepsilon = J_{A_\varepsilon}y_\varepsilon - \varepsilon VJ_{A_\varepsilon}y_\varepsilon, \quad (3.64)$$

converges strongly to  $x_0$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

- (iii) Consider the special case when  $A_\varepsilon \equiv A$ . Then (3.52) reduces to

$$(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad 0 \in Ax_\varepsilon + \varepsilon Vx_\varepsilon. \quad (3.65)$$

In this context, a result related to Theorem 3.2.18 – though based on different assumptions – is [30, Theorem 32.K]. If we further specialize by imposing that  $V$  be strongly monotone, then Theorem 3.2.18 and Remark 3.2.19 reduce to [19, Proposition 2.1]. Finally, when  $A$  is the subdifferential of a proper lower semicontinuous convex function  $f: \mathcal{H} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  and  $V$  the subdifferential of a uniformly convex function  $g: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_\varepsilon$  in (3.65) is the minimizer of  $f + \varepsilon g$ , and we obtain the Tikhonov regularization setting (see [2, Section 5] for related results and [27] for classical work).

### 3.2.4 Further nonexpansive fixed point results

In this section, we derive from the results of Section 3.2.3 additional approximating curves for fixed point problems.

As seen in Example 3.2.4(i)&(ii), Theorem 3.2.3 asserts that if  $V: \text{dom } V = \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  is strongly monotone and possesses additional properties then, for some suitable  $\gamma \in ]0, +\infty[$ , the limit  $x_0$  of the approximating curve

$$(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad x_\varepsilon = T_\varepsilon(x_\varepsilon + \varepsilon((\text{Id} - \gamma V)S_\varepsilon x_\varepsilon - x_\varepsilon)), \quad (3.66)$$

as  $\varepsilon \rightarrow 0$ , solves the variational inequality (3.36). We now investigate an alternative approximating curve, which allows for a more general type of operator  $V$ .

**Corollary 3.2.21** *Let  $(T_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  be a family of nonexpansive operators from  $\mathcal{H}$  to  $\mathcal{H}$  with domain  $\mathcal{H}$  such that  $C = \bigcap_{\varepsilon \in ]0,1[} \text{Fix } T_\varepsilon \neq \emptyset$  and let  $V: \text{dom } V = \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  be a maximal monotone operator which is  $c$ -uniformly monotone. Then there exists a unique point  $x_0 \in C$  such that  $x_0 = P_C(x_0 - Vx_0)$ . Now set*

$$(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad x_\varepsilon = T_\varepsilon(x_\varepsilon - \varepsilon Vx_\varepsilon) - \varepsilon Vx_\varepsilon. \quad (3.67)$$

Then  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  is uniquely defined. In addition, if  $V$  maps every bounded subset into a bounded subset and  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  is  $\mathcal{T}$ -focused with respect to  $(T_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$ , then  $x_\varepsilon \rightarrow x_0$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

*Proof.* Set  $(\forall \varepsilon \in ]0,1[) F_\varepsilon = (T_\varepsilon + \text{Id})/2$  and  $A_\varepsilon = F_\varepsilon^{-1} - \text{Id}$ . Since  $(F_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  is a family of firmly nonexpansive operators with domain  $\mathcal{H}$ ,  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  is a family of maximal monotone operators [17, Section 1.11]. Moreover, it follows from Definitions 3.2.1 and 3.2.9 that  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  is  $\mathcal{A}$ -focused with respect to  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$ . Finally, since (3.67) is equivalent to (3.63), which is itself equivalent to (3.52), the results follow from Theorem 3.2.18.  $\square$

We conclude with two results on the approximation of a particular fixed point of a nonexpansive operator.

**Corollary 3.2.22** *Let  $T: \text{dom } T = \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  be a nonexpansive operator such that  $\text{Fix } T \neq \emptyset$ , let  $(\lambda_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  be a family in  $]0,1[$  such that  $\inf_{\varepsilon \in ]0,1[} \lambda_\varepsilon > 0$ , and let  $V: \text{dom } V = \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  be a maximal monotone operator which is  $c$ -uniformly monotone. Then there exists a unique point  $x_0 \in \text{Fix } T$  such that  $x_0 = P_{\text{Fix } T}(x_0 - Vx_0)$ . Now set*

$$(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad x_\varepsilon = T(x_\varepsilon - Vx_\varepsilon) + \varepsilon \frac{\lambda_\varepsilon - 2}{\lambda_\varepsilon} Vx_\varepsilon. \quad (3.68)$$

Then  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  is uniquely defined. In addition, if  $V$  maps every bounded subset into a bounded subset, then  $x_\varepsilon \rightarrow x_0$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

*Proof.* Set  $(\forall \varepsilon \in ]0,1[) T_\varepsilon = \text{Id} + \lambda_\varepsilon(T - \text{Id})$  in Corollary 3.2.21 and use Example 3.2.2.  $\square$

**Corollary 3.2.23** *Let  $T: \text{dom } T = \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  be a nonexpansive operator such that  $\text{Fix } T \neq \emptyset$  and let  $V: \text{dom } V = \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  be a maximal monotone operator which is  $c$ -uniformly monotone. Then there exists a unique point  $x_0 \in \text{Fix } T$  such that  $x_0 = P_{\text{Fix } T}(x_0 - Vx_0)$ . Now set*

$$(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad x_\varepsilon = Tx_\varepsilon - \varepsilon Vx_\varepsilon. \quad (3.69)$$

Then  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  is uniquely defined. In addition, if  $V$  maps every bounded subset into a bounded subset, then  $x_\varepsilon \rightarrow x_0$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

*Proof.* It suffices to set  $A_\varepsilon \equiv \text{Id} - T$  in Theorem 3.2.18. To check (3.44), take  $]0,1[ \ni \varepsilon_n \downarrow 0$ ,  $x_{\varepsilon_n} \rightharpoonup x$ , and  ${}^1A_{\varepsilon_n}x_{\varepsilon_n} \rightarrow 0$ . Letting  $(\forall n \in \mathbb{N}) p_n = J_{A_{\varepsilon_n}}x_{\varepsilon_n}$ , we obtain  $p_n \rightharpoonup x$  and  $p_n - Tp_n = A_{\varepsilon_n}p_n = x_{\varepsilon_n} - p_n \rightarrow 0$ . Then the demiclosed principle [10, Lemma 2] yields  $x \in \text{Fix } T \equiv A_\varepsilon^{-1}0$ .  $\square$

In particular, if  $V = \text{Id} - Q$ , where  $Q: \text{dom } Q = \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  is a strict contraction, then (3.69) reduces to

$$(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad x_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} Qx_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon + 1} Tx_\varepsilon, \quad (3.70)$$

and Corollary 3.2.23 reduces to [22, Theorem 2.1].

### 3.3 Courbes d'approximation perturbées pour les opérateurs monotones

Dans cette section, on montre que l'évaluation de la courbe d'approximation décrite dans (3.52) peut être faite d'une façon inexacte (voir [28, Theorem 4.3], [28, Corollary 7.2] pour des résultats de convergence pour courbes d'approximation perturbées plus simples). La première démonstration du résultat suivant suit celle du Théorème 3.2.18.

**Théorème 3.3.1** *Soit  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  une famille d'opérateurs maximaux monotones de  $\mathcal{H}$  vers  $2^{\mathcal{H}}$  telle que  $C = \bigcap_{\varepsilon \in ]0,1[} A_\varepsilon^{-1}0 \neq \emptyset$  et soit  $V: \text{dom } V = \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  un opérateur maximal monotone et  $c$ -uniformément monotone. Alors il existe un point unique  $x_0 \in \mathcal{H}$  tel que  $0 \in N_C x_0 + V x_0$ . Soit à présent  $(e_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  une famille de  $\mathcal{H}$  telle que  $e_\varepsilon/\varepsilon \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$ . Alors il existe une famille unique  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  dans  $\mathcal{H}$  telle que*

$$(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad 0 \in A_\varepsilon x_\varepsilon + \varepsilon V x_\varepsilon + e_\varepsilon. \quad (3.71)$$

*De plus, si  $V$  est borné sur tout borné de  $\mathcal{H}$  et si  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  est  $\mathcal{A}$ -focalisée par rapport à  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$ , alors  $x_\varepsilon \rightarrow x_0$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$ .*

*Démonstration.* Les opérateurs  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  sont maximaux monotones, ce qui implique que les ensembles  $(A_\varepsilon^{-1}0)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  sont convexes et fermés, et donc que  $C$  l'est aussi. Par conséquent,  $N_C$  est maximal monotone et, vu que  $\text{dom } V = \mathcal{H}$ , le Lemme 3.2.16 implique que  $x_0$  est défini de manière unique. De même, en appliquant le Lemme 3.2.16 aux opérateurs  $A_\varepsilon$  et  $\varepsilon V + e_\varepsilon$ , on déduit que la famille  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  est définie de manière unique dans (3.71).

Pour montrer la convergence de  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  vers  $x_0$  on déduit tout d'abord de (3.71) l'existence d'une famille  $(v_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  qui vérifie

$$(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad v_\varepsilon \in V x_\varepsilon \quad \text{et} \quad -\varepsilon v_\varepsilon - e_\varepsilon \in A_\varepsilon x_\varepsilon. \quad (3.72)$$

On fixe maintenant  $x \in C$  et  $u \in V x$ . Alors  $(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad 0 \in A_\varepsilon x$ . Donc, d'après (3.72), la monotonie de  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  entraîne que

$$(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad \left\langle x - x_\varepsilon \mid v_\varepsilon + \frac{e_\varepsilon}{\varepsilon} \right\rangle \geq 0, \quad (3.73)$$

tandis que la monotonie  $c$ -uniforme de  $V$  conduit à

$$(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad \langle x - x_\varepsilon \mid u - b_\varepsilon \rangle \geq c(\|x - x_\varepsilon\|). \quad (3.74)$$

En additionnant (3.73) et (3.74) on obtient

$$(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \left\langle x - x_\varepsilon \mid u + \frac{e_\varepsilon}{\varepsilon} \right\rangle \geq c(\|x - x_\varepsilon\|). \quad (3.75)$$

D'après Cauchy-Schwarz et en raison de la bornitude de  $(e_\varepsilon/\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$ , il existe  $\gamma \in ]0, +\infty[$  tel que

$$(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \gamma \|x - x_\varepsilon\| \geq \|x - x_\varepsilon\| \cdot \left\| u + \frac{e_\varepsilon}{\varepsilon} \right\| \geq c(\|x - x_\varepsilon\|). \quad (3.76)$$

On en déduit, en utilisant le fait que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t)/t = +\infty$ , que  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  est bornée. Comme  $V$  est borné sur tout borné de  $\mathcal{H}$ , on obtient que

$$\beta = \sup_{\varepsilon \in ]0,1[} \|v_\varepsilon\| < +\infty. \quad (3.77)$$

D'après (3.72) et en raison de la monotonie des opérateurs  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$ , on a

$$(\forall \varepsilon \in ]0, 1[)(\forall y \in C) \left\langle x_\varepsilon - y \mid v_\varepsilon + \frac{e_\varepsilon}{\varepsilon} \right\rangle \leq 0. \quad (3.78)$$

De même,

$$\begin{aligned} \begin{cases} -\varepsilon v_\varepsilon - e_\varepsilon \in A_\varepsilon x_\varepsilon \\ {}^1A_\varepsilon x_\varepsilon \in A_\varepsilon J_{A_\varepsilon} x_\varepsilon \end{cases} &\Rightarrow \left\langle {}^1A_\varepsilon x_\varepsilon \mid {}^1A_\varepsilon x_\varepsilon + \varepsilon v_\varepsilon + e_\varepsilon \right\rangle \leq 0 \\ &\Rightarrow \|{}^1A_\varepsilon x_\varepsilon\| \leq \varepsilon \|v_\varepsilon\| + \|e_\varepsilon\| \leq \varepsilon \beta + \|e_\varepsilon\|, \end{aligned} \quad (3.79)$$

où l'on a utilisé Cauchy-Schwarz et (3.77) pour obtenir (3.79). On vient de montrer que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|{}^1A_\varepsilon x_\varepsilon\| = 0. \quad (3.80)$$

Soit à présent  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $]0, 1[$  telle que  $\varepsilon_n \downarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Notre but étant de montrer que  $x_{\varepsilon_n} \rightarrow x_0$ , on prend un point  $w \in \mathcal{H}$  faiblement adhérent à  $(x_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ , disons  $x_{\varepsilon_{k_n}} \rightharpoonup w$ . D'après (3.80), l'hypothèse que  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  est  $\mathcal{A}$ -focalisée, entraîne que  $w \in C$ . De plus, (3.75) implique que  $x_{\varepsilon_{k_n}} \rightarrow w$ . À partir de (3.77), quitte à passer à une sous-suite si nécessaire, on suppose que  $(v_{\varepsilon_{k_n}})_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement, disons  $v_{\varepsilon_{k_n}} \rightharpoonup v$ . On en déduit que  $v \in Vw$ , en utilisant le fait que le graphe de l'opérateur maximal monotone  $V$  est séquentiellement fermé dans  $\mathcal{H}^{\text{fort}} \times \mathcal{H}^{\text{faible}}$ . En résumé,  $x_{\varepsilon_{k_n}} \rightarrow w$ ,  $v_{\varepsilon_{k_n}} \rightharpoonup v$  et donc (3.78) implique que

$$\begin{aligned} (\forall y \in C) \left\langle x_{\varepsilon_{k_n}} - y \mid v_{\varepsilon_{k_n}} + \frac{e_{\varepsilon_{k_n}}}{\varepsilon_{k_n}} \right\rangle &\rightarrow \langle w - y \mid v \rangle \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left\langle x_{\varepsilon_n} - y \mid v_{\varepsilon_n} + \frac{e_{\varepsilon_n}}{\varepsilon_n} \right\rangle \leq 0. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Par conséquent,  $\sup_{y \in C} \langle w - y \mid v \rangle \leq 0$ , et donc  $-v \in N_C w$ . Comme  $v \in Vw$ , on obtient  $0 \in N_C w + Vw$ . Néanmoins, l'inclusion  $0 \in N_C x_0 + Vx_0$  admet une solution unique, donc  $w = x_0$  est l'unique point faiblement adhérent à  $(x_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ , ce qui entraîne que  $x_{\varepsilon_n} \rightharpoonup x_0$ . D'après (3.75), on conclut que  $x_{\varepsilon_n} \rightarrow x_0$ .  $\square$

Nous proposons à présent une deuxième démonstration du Théorème 3.3.1 qui repose sur la conclusion du Théorème 3.2.18. Plus précisément, on montre que l'écart entre les courbes d'approximation définies dans (3.52) et (3.71) tend vers 0 quand  $\varepsilon \downarrow 0$ .

*Démonstration.* L'existence et l'unicité de  $x_0$  et  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  résultent des raisonnements faits au début de la première démonstration.

D'après le Théorème 3.2.18, il existe une famille unique  $(y_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  dans  $\mathcal{H}$  telle que

$$(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad 0 \in A_\varepsilon y_\varepsilon + \varepsilon V y_\varepsilon. \quad (3.82)$$

Soit  $\varepsilon \in ]0,1[$ . Alors il existe  $w_\varepsilon \in V y_\varepsilon$  et  $z_\varepsilon \in V x_\varepsilon$  tels que

$$-\varepsilon w_\varepsilon \in A_\varepsilon y_\varepsilon \quad \text{et} \quad -\varepsilon z_\varepsilon - e_\varepsilon \in A_\varepsilon x_\varepsilon. \quad (3.83)$$

En invoquant la monotonie de  $A_\varepsilon$ , on obtient

$$0 \leq \left\langle y_\varepsilon - x_\varepsilon \mid z_\varepsilon + \frac{e_\varepsilon}{\varepsilon} - w_\varepsilon \right\rangle, \quad (3.84)$$

tandis que la monotonie  $c$ -uniforme de  $V$  entraîne que

$$c(\|y_\varepsilon - x_\varepsilon\|) \leq \langle y_\varepsilon - x_\varepsilon \mid w_\varepsilon - z_\varepsilon \rangle.$$

En additionnant cette dernière inégalité à (3.84), on obtient, en utilisant Cauchy-Schwarz, que

$$\begin{aligned} (\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad c(\|y_\varepsilon - x_\varepsilon\|) &\leq \left\langle y_\varepsilon - x_\varepsilon \mid \frac{e_\varepsilon}{\varepsilon} \right\rangle \\ &\leq \|y_\varepsilon - x_\varepsilon\| \left\| \frac{e_\varepsilon}{\varepsilon} \right\|. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Donc, puisque la famille  $(e_\varepsilon/\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  est bornée, il existe  $\eta \in ]0, +\infty[$  tel que

$$(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad \frac{c(\|y_\varepsilon - x_\varepsilon\|)}{\|y_\varepsilon - x_\varepsilon\|} \leq \eta. \quad (3.86)$$

Puisque  $\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t)/t = +\infty$ , on en déduit que la famille  $(\|y_\varepsilon - x_\varepsilon\|)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  est bornée. Donc (3.85) nous donne  $\|y_\varepsilon - x_\varepsilon\| \rightarrow 0$  lorsque  $\varepsilon \downarrow 0$ . Il s'ensuit que, puisque  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  est  $\mathcal{A}$ -focalisée par rapport à  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$ ,  $(y_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  l'est également. En appliquant le Théorème 3.2.18, on conclut que  $x_\varepsilon \rightarrow x_0$  lorsque  $\varepsilon \downarrow 0$ .  $\square$

On conclut ce chapitre en présentant deux corollaires de Théorème 3.3.1. Ils fournissent deux exemples simples pour lesquels la condition de  $\mathcal{A}$ -focalisation est vérifiée.



**Corollaire 3.3.2** Soit  $A$  un opérateur maximal monotone de  $\mathcal{H}$  vers  $2^{\mathcal{H}}$  tel que  $C = A^{-1}0 \neq \emptyset$  et soit  $V: \text{dom } V = \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  un opérateur maximal monotone et  $c$ -uniformément monotone. Alors il existe un point unique  $x_0 \in \mathcal{H}$  tel que  $0 \in N_C x_0 + Vx_0$ . Soit à présent  $(e_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  une famille de  $\mathcal{H}$  telle que  $e_\varepsilon/\varepsilon \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$  et soit  $\phi$  une fonction de  $]0,1[$  vers  $]0,1[$  telle que  $\phi(\varepsilon) \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$ . Alors il existe une famille unique  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  dans  $\mathcal{H}$  telle que

$$(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad 0 \in \phi(\varepsilon)Ax_\varepsilon + \varepsilon Vx_\varepsilon + e_\varepsilon. \quad (3.87)$$

De plus, si  $V$  est borné sur tout borné de  $\mathcal{H}$ , alors  $x_\varepsilon \rightarrow x_0$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$ .

*Démonstration.* En utilisant le fait que  $\phi(\varepsilon)A \xrightarrow{G} A$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$  (cf. [1, p. 360]) et le fait que  $(\forall \varepsilon \in ]0,1[) A^{-1}0 = (\phi(\varepsilon)A)^{-1}0$ , on obtient comme dans l'Exemple 3.2.10 que la condition de  $\mathcal{A}$ -focalisation est vérifiée. On conclut en appliquant le Théorème 3.3.1.  $\square$

**Corollaire 3.3.3** Soit  $A$  un opérateur maximal monotone de  $\mathcal{H}$  vers  $2^{\mathcal{H}}$  tel que  $C = A^{-1}0 \neq \emptyset$  et soit  $V: \text{dom } V = \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  un opérateur maximal monotone et  $c$ -uniformément monotone. Alors il existe un point unique  $x_0 \in \mathcal{H}$  tel que  $0 \in N_C x_0 + Vx_0$ . Soit à présent  $(e_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  une famille de  $\mathcal{H}$  telle que  $e_\varepsilon/\varepsilon \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$ . Alors il existe une famille unique  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  dans  $\mathcal{H}$  telle que

$$(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad 0 \in Ax_\varepsilon + \varepsilon Vx_\varepsilon + e_\varepsilon. \quad (3.88)$$

De plus, si  $V$  est borné sur tout borné de  $\mathcal{H}$ , alors  $x_\varepsilon \rightarrow x_0$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$ .

*Démonstration.* Une conséquence immédiate du Théorème 3.3.1 avec  $A_\varepsilon \equiv A$ , car le graphe de l'opérateur maximal monotone  $A$  est séquentiellement fermé dans  $\mathcal{H}^{\text{faible}} \times \mathcal{H}^{\text{fort}}$ , ce qui fournit la condition de focalisation.  $\square$

## 3.4 Bibliographie

- [1] H. Attouch : Variational Convergence for Functions and Operators, Pitman, Boston, MA (1984).
- [2] H. Attouch : Viscosity solutions of minimization problems, SIAM J. Optim. 6 (1996) 769–806.
- [3] H. Attouch and R. Cominetti : A dynamical approach to convex minimization coupling approximation with the steepest descent method, J. Differential Equations 128 (1996) 519–540.
- [4] J.-B. Baillon and G. Haddad : Quelques propriétés des opérateurs angle-bornés et  $n$ -cycliquement monotones, Israel J. Math. 26 (1977) 137–150.

- [5] H. H. Bauschke : The approximation of fixed points of compositions of nonexpansive mappings in Hilbert space, *J. Math. Anal. Appl.* 202 (1996) 150–159.
- [6] J. M. Borwein : Maximal monotonicity via convex analysis, *J. Convex Anal.* 13 (2006).
- [7] H. Brézis : *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, New York, North-Holland/Elsevier (1973).
- [8] H. Brézis and A. Haraux : Image d’une somme d’opérateurs monotones et applications, *Israel J. Math.* 23 (1976) 165–186.
- [9] F. E. Browder : Existence and approximation of solutions of nonlinear variational inequalities, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 56 (1966) 1080–1086.
- [10] F. E. Browder : Convergence of approximants to fixed points of nonexpansive nonlinear mappings in Banach spaces, *Arch. Rational Mech. Anal.* 24 (1967) 82–90.
- [11] R. E. Bruck Jr. : A strongly convergent iterative solution of  $0 \in U(x)$  for a maximal monotone operator  $U$  in Hilbert space, *J. Math. Anal. Appl.* 48 (1974) 114–126.
- [12] R. E. Bruck and S. Reich : Nonexpansive projections and resolvents of accretive operators in Banach spaces, *Houston J. Math.* 3 (1977) 459–470.
- [13] P. L. Combettes : Construction d’un point fixe commun à une famille de contractions fermes, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 320 (1995) 1385–1390.
- [14] P. L. Combettes : A block-iterative surrogate constraint splitting method for quadratic signal recovery, *IEEE Trans. Signal Process.* 51 (2003) 1771–1782.
- [15] J. C. Dunn : Convexity, monotonicity, and gradient processes in Hilbert space, *J. Math. Anal. Appl.* 53 (1976) 145–158.
- [16] S. Fitzpatrick : Representing monotone operators by convex functions. Workshop/Miniconference on Functional Analysis and Optimization (Canberra, 1988), *Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ.*, 20, Austral. Nat. Univ., Canberra (1988) 59–65.
- [17] K. Goebel and S. Reich : *Uniform Convexity, Hyperbolic Geometry, and Nonexpansive Mappings*, Marcel Dekker, New York (1984).
- [18] B. Halpern : Fixed points of nonexpanding maps, *Bull. Amer. Math. Soc.* 73 (1967) 957–961.
- [19] B. Lemaire : Regularization of fixed-point problems and staircase iteration, in *Ill-Posed Variational Problems and Regularization Techniques*, (M. Théra and R. Tichatschke, eds.), *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* 477, Springer-Verlag, New York (1999) 151–166.
- [20] J. L. Lions : *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris (1969).

- [21] G. J. Minty : On a “monotonicity” method for the solution of nonlinear equations in Banach spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 50 (1963) 1038–1041.
- [22] A. Moudafi : Viscosity approximation methods for fixed-points problems, *J. Math. Anal. Appl.* 241 (2000) 46–55.
- [23] S. Reich : Asymptotic behavior of resolvents in Banach spaces, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* VIII 67 (1979) 27–30.
- [24] S. Reich : Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 75 (1980) 287–292.
- [25] S. Simons and C. Zălinescu : Fenchel duality, Fitzpatrick functions and maximal monotonicity, *J. Nonlinear Convex Anal.* 6 (2005) 1–22.
- [26] M. Théra and R. Tichatschke (eds.) : *Ill-Posed Variational Problems and Regularization Techniques*, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* 477, Springer-Verlag, New York (1999).
- [27] A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin : *Solution of Ill-Posed Problems*, Halsted Press, New York (1977).
- [28] P. Tossings : The perturbed Tikhonov’s algorithm and some of its applications, *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* 28 (1994) 189–221.
- [29] I. Yamada : The hybrid steepest descent method for the variational inequality problem over the intersection of fixed point sets of nonexpansive mappings, in *Inherently Parallel Algorithms in Feasibility and Optimization and Their Applications* (D. Butnariu, Y. Censor, and S. Reich, eds.), Elsevier, New York (2001) 473–504.
- [30] E. Zeidler : *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications II/B – Nonlinear Monotone Operators*, Springer-Verlag, New York (1990).

# Chapitre 4

## Visco-pénalisation des problèmes d'inclusion monotone

### 4.1 Introduction

Au Chapitre 3 nous avons étudié le comportement asymptotique de courbes d'approximation pour résoudre le problème de trouver un zéro commun particulier à une famille d'opérateurs maximaux monotones  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$ . Dans ce chapitre, on considère une application de ces résultats à la résolution du problème

$$\text{trouver } x \in \mathcal{H} \text{ tel que } 0 \in Ax + Bx, \quad (4.1)$$

où  $A, B: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  sont deux opérateurs maximaux monotones tels que  $A + B$  soit maximal monotone.

Une approximation classique de (4.1) consiste à pénaliser l'un des opérateurs dans (4.1), en considérant le problème (voir [9] pour le cas euclidien et [5] pour le cas hilbertien)

$$\text{trouver } z_\varepsilon \in \mathcal{H} \text{ tel que } 0 \in {}^\varepsilon A z_\varepsilon + B z_\varepsilon, \quad (4.2)$$

où  $\varepsilon \in ]0, 1[$ . On peut alors étudier le comportement asymptotique de  $(z_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$ . Malheureusement, le problème (4.2) n'admet en général pas de solution sous nos hypothèses sur  $A$  et  $B$ . De plus, même si on suppose l'existence et l'unicité d'une telle solution  $z_\varepsilon$ , ceci n'assure pas la convergence de la famille  $(z_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  vers une solution particulière de (4.1) (cf. [9, Section 4]).

Comme on l'a vu au Chapitre 3, on peut associer à (4.1) le problème viscosifié

$$\text{trouver } x_\varepsilon \in \mathcal{H} \text{ tel que } 0 \in Ax_\varepsilon + Bx_\varepsilon + \varepsilon Vx_\varepsilon, \quad (4.3)$$

où  $\varepsilon \in ]0, 1[$  et  $V: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est un opérateur strictement monotone convenable. En appliquant le Théorème 3.2.18, où l'on pose  $A_\varepsilon \equiv A + B$ , on obtient la convergence

forte, quand  $\varepsilon \downarrow 0$ , de la famille  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  vers la solution de (4.1) satisfaisant à l'inéquation variationnelle

$$0 \in N_{(A+B)^{-1}0}x_0 + Vx_0. \quad (4.4)$$

Néanmoins, la résolution de l'inclusion (4.3) peut s'avérer difficile, en raison de la présence de deux opérateurs multivoques. En général, la résolution d'une inclusion impliquant un seul opérateur multivoque est bien plus aisée [8].

À la lumière de ces remarques, on associe au problème (4.1) un problème visco-pénalisé en remplaçant  $A$  par son approximation de Yosida dans (4.3). Plus précisément, étant données une fonction  $\phi: ]0,1[ \rightarrow ]0,1[$  et une famille  $(e_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  de  $\mathcal{H}$ , on considère le problème perturbé

$$\text{trouver } y_{\varepsilon,\phi(\varepsilon)} \in \mathcal{H} \text{ tel que } 0 \in \phi(\varepsilon)Ay_{\varepsilon,\phi(\varepsilon)} + By_{\varepsilon,\phi(\varepsilon)} + \varepsilon Vy_{\varepsilon,\phi(\varepsilon)} + e_\varepsilon, \quad (4.5)$$

où  $\varepsilon \in ]0,1[$  et  $V: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est un opérateur maximal monotone. Sous des hypothèses convenables, on démontre que la famille  $(y_{\varepsilon,\phi(\varepsilon)})_{\varepsilon \in ]0,1[}$  est définie de manière unique et qu'elle converge, quand  $\varepsilon \downarrow 0$ , vers la solution  $x_0$  de (4.1) satisfaisant à (4.4) (Théorème 4.3.1). Remarquons que la solution de (4.5) est caractérisée par l'équation de point fixe

$$y_{\varepsilon,\phi(\varepsilon)} = J_{\phi(\varepsilon)B} \left( J_{\phi(\varepsilon)A} y_{\varepsilon,\phi(\varepsilon)} - \varepsilon \phi(\varepsilon) V y_{\varepsilon,\phi(\varepsilon)} - \phi(\varepsilon) e_\varepsilon \right).$$

De tels problèmes sont analysés dans [8].

Illustrons le problème (4.5) dans le cadre particulier d'un problème d'optimisation. Plus précisément, étant donné un convexe fermé non-vide  $S \subset \mathcal{H}$  et une fonction  $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ , on considère le problème

$$\text{trouver } x \in \text{Argmin}_S f = \text{Argmin}_{\mathcal{H}}(f + \iota_S). \quad (4.6)$$

L'approche classique de Tikhonov consiste à associer à ce problème le problème viscosifié

$$\text{trouver } x_\varepsilon = \text{argmin}_S \left( f + \varepsilon \frac{\|\cdot\|^2}{2} \right) = \text{argmin}_{\mathcal{H}} \left( f + \iota_S + \varepsilon \frac{\|\cdot\|^2}{2} \right). \quad (4.7)$$

où  $\varepsilon \in ]0,1[$ . En pénalisant la contrainte représentée par  $S$ , on aboutit au problème visco-pénalisé sans contrainte

$$\text{trouver } y_{\varepsilon,\phi} = \text{argmin}_{\mathcal{H}} \left( f + \frac{d_S^2}{2\phi} + \varepsilon \frac{\|\cdot\|^2}{2} \right), \quad (4.8)$$

où  $(\varepsilon, \phi) \in ]0,1[^2$ . Un tel problème est étudié dans [12]. Posons  $A = N_S$  (l'opérateur cône-normal de  $S$ ),  $B = \partial f$  et  $V = \text{Id}$ . Sous l'hypothèse générale de qualification que cône  $(S - \text{dom } f)$  soit un sous-espace vectoriel fermé (condition de Attouch-Brézis [3]), (4.6) est équivalent à (4.1), (4.7) est équivalent à (4.3) et (4.8) à (4.5).

**Remarque 4.1.1** Soit  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  une famille d'opérateurs maximaux monotones de  $\mathcal{H}$  vers  $2^{\mathcal{H}}$  telle que  $C = \bigcap_{\varepsilon \in ]0,1[} A_\varepsilon^{-1}0 \neq \emptyset$ . On a vu dans l'Exemple 3.2.10 que la famille  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  est  $\mathcal{A}$ -focalisée par rapport à  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  si  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  converge en graphe vers un opérateur maximal monotone  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  tel que  $C = A^{-1}0$ . Notons que l'inclusion  $C \subset A^{-1}0$  est toujours satisfaite sous l'hypothèse  $A_\varepsilon \xrightarrow{G} A$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$ . Néanmoins, comme le montre l'exemple suivant, l'inclusion peut être stricte. De plus, on donnera dans la Remarque 4.1.3 un exemple de famille dans  $\mathcal{H}$  qui n'est pas  $\mathcal{A}$ -focalisée par rapport à  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$ .

**Exemple 4.1.2** On considère  $\mathcal{H} = \mathbb{R}$  et les opérateurs  $\mathcal{A}, \mathcal{B}: \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$  définis par

$$\mathcal{A}x = \begin{cases} ]-\infty, -1], & \text{si } x = -1; \\ -1, & \text{si } x \in ]-1, 1[; \\ [-1, +\infty[, & \text{si } x = 1, \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}x = \begin{cases} ]-\infty, 1], & \text{si } x = -1; \\ 1, & \text{si } x \in ]-1, 1[; \\ [1, +\infty[, & \text{si } x = 1. \end{cases} \quad (4.9)$$

Donc,  $\text{dom } \mathcal{A} = \text{dom } \mathcal{B} = [-1, 1]$ . Alors,  $\text{dom}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = [-1, 1]$  et

$$(\forall x \in [-1, 1]) \quad (\mathcal{A} + \mathcal{B})x = \begin{cases} ]-\infty, 0], & \text{si } x = -1; \\ 0, & \text{si } x \in ]-1, 1[; \\ [0, +\infty[, & \text{si } x = 1. \end{cases} \quad (4.10)$$

On voit aisément que  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$  sont maximaux monotones. Maintenant, fixons une fonction  $\phi: ]0, 1[ \rightarrow ]0, 1[$  telle que  $\phi(\varepsilon) \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$ . Alors, d'après [6, Proposition 2.6(i)&Lemme 2.4], pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , l'opérateur  $\phi(\varepsilon)\mathcal{A} + \mathcal{B}$  est maximal monotone. De plus, d'après [2, Proposition 5.3],  $\phi(\varepsilon)\mathcal{A} + \mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{A} + \mathcal{B}$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$ . En utilisant le fait que  $(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \phi(\varepsilon)\mathcal{A} = (\phi(\varepsilon)\text{Id} + \mathcal{A}^{-1})^{-1}$ , il vient

$$(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad \phi(\varepsilon)\mathcal{A}x = \begin{cases} (x+1)/\phi(\varepsilon), & \text{si } x \in ]-\infty, -1 - \phi(\varepsilon)]; \\ -1, & \text{si } x \in ]-1 - \phi(\varepsilon), 1 - \phi(\varepsilon)[; \\ (x-1)/\phi(\varepsilon), & \text{si } x \in [1 - \phi(\varepsilon), +\infty[. \end{cases} \quad (4.11)$$

Donc,  $(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \text{dom}(\phi(\varepsilon)\mathcal{A} + \mathcal{B}) = [-1, 1]$  et

$$(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad (\phi(\varepsilon)\mathcal{A} + \mathcal{B})x = \begin{cases} ]-\infty, 0], & \text{si } x = -1; \\ 0, & \text{si } x \in ]-1, 1 - \phi(\varepsilon)[; \\ (x-1)/\phi(\varepsilon) + 1, & \text{si } x \in [1 - \phi(\varepsilon), 1[; \\ [1, +\infty[, & \text{si } x = 1. \end{cases} \quad (4.12)$$

Par conséquent, en posant  $(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) A_\varepsilon = \phi(\varepsilon)\mathcal{A} + \mathcal{B}$  et  $A = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ , on obtient

$$C = \bigcap_{\varepsilon \in ]0,1[} A_\varepsilon^{-1}0 = \bigcap_{\varepsilon \in ]0,1[} [-1, 1 - \phi(\varepsilon)] \quad \text{et} \quad A^{-1}0 = [-1, 1]. \quad (4.13)$$

Donc,  $C = [-1, 1 - \delta]$ , où  $\delta = \sup_{\varepsilon \in ]0, 1[} \phi(\varepsilon) \in ]0, 1[$ . Puisque  $1 - \delta < 1$ , on conclut que l'inclusion  $C \subset A^{-1}0$  est stricte.

**Remarque 4.1.3** Considérons le cadre de l'exemple précédent et, de plus, soit  $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  défini par  $V = \text{Id} - 1$ . Alors, pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , on a

$$(\phi(\varepsilon)\mathcal{A} + \mathcal{B} + \varepsilon V)x = \begin{cases} ]-\infty, -2\varepsilon], & \text{si } x = -1; \\ \varepsilon(x - 1), & \text{si } x \in ]-1, 1 - \phi(\varepsilon)[; \\ (\varepsilon + 1/\phi)x + 1 - \varepsilon - 1/\phi, & \text{si } x \in [1 - \phi(\varepsilon), 1[; \\ [1, +\infty[, & \text{si } x = 1. \end{cases} \quad (4.14)$$

Donc, la courbe d'approximation  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  définie dans (3.71), i.e.,

$$(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad 0 \in \phi(\varepsilon)\mathcal{A}x_\varepsilon + \mathcal{B}x_\varepsilon + \varepsilon Vx_\varepsilon + e_\varepsilon \quad (4.15)$$

devient, dans le cas  $e_\varepsilon \equiv 0$ ,

$$(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad x_\varepsilon = 1 - \frac{\phi(\varepsilon)}{1 + \varepsilon\phi(\varepsilon)}. \quad (4.16)$$

La famille  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  n'est pas  $\mathcal{A}$ -focalisée par rapport à  $(\phi(\varepsilon)\mathcal{A} + \mathcal{B})_{\varepsilon \in ]0, 1[}$ , puisque  $x_\varepsilon \rightarrow 1$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$  et  $1 \notin C = \bigcap_{\varepsilon \in ]0, 1[} (\phi(\varepsilon)\mathcal{A} + \mathcal{B})^{-1}0$ . Ceci nous interdit d'utiliser le Théorème 3.3.1 pour établir la convergence de la courbe d'approximation  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  vers un zéro commun à la famille  $(\phi(\varepsilon)\mathcal{A} + \mathcal{B})_{\varepsilon \in ]0, 1[}$ . En fait, la conclusion du Théorème 3.3.1 n'est pas vraie. En effet, soit  $x_0 \in \mathbb{R}$  le point unique satisfaisant à l'inclusion  $0 \in N_C x_0 + Vx_0$ , i.e.,  $x_0 = P_C(1) = 1 - \delta$ . Puisque  $1 - \delta \neq 1$ ,  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  ne converge pas vers  $x_0$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$ .

Dans ce chapitre, on verra que, sous des hypothèses adéquates, une courbe d'approximation du type de celle définie dans (4.15) a comme limite un zéro particulier de  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ .

## 4.2 Résultats préliminaires

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du Théorème 3.3.1, où l'on prend  $A_\varepsilon \equiv A + B$ .

**Corollaire 4.2.1** *Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs maximaux monotones de  $\mathcal{H}$  vers  $2^{\mathcal{H}}$  tels que  $A + B$  soit maximal monotone. Supposons que  $C = (A + B)^{-1}0 \neq \emptyset$  et que  $V: \text{dom } V = \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  soit maximal monotone et  $c$ -uniformément monotone. Alors il existe un point unique  $x_0 \in \mathcal{H}$  tel que  $0 \in N_C x_0 + Vx_0$ . De plus, soit  $(e_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$*

une famille de  $\mathcal{H}$  telle que  $e_\varepsilon/\varepsilon \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$ . Alors il existe une famille unique  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  dans  $\mathcal{H}$  telle que

$$(\forall \varepsilon \in ]0,1[) \quad 0 \in (A + B)x_\varepsilon + \varepsilon Vx_\varepsilon + e_\varepsilon. \quad (4.17)$$

Enfin, si  $V$  est borné sur tout borné de  $\mathcal{H}$ , alors  $x_\varepsilon \rightarrow x_0$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$ .

Le résultat principal de ce chapitre fait appel au théorème suivant.

**Théorème 4.2.2** *Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs maximaux monotones de  $\mathcal{H}$  vers  $2^{\mathcal{H}}$ . Soit  $V : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  un opérateur maximal monotone et  $c$ -uniformément monotone. Supposons que  $V$  soit borné sur tout borné de  $\mathcal{H}$ . Alors :*

- (i) *Pour tout  $\delta \in ]0,1[$  il existe un point unique  $z_\delta \in \mathcal{H}$  tel que  $0 \in {}^\delta A z_\delta + B z_\delta + V z_\delta$ .*
- (ii) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
  - (a) *Il existe un point unique  $z_0 \in \mathcal{H}$  tel que  $0 \in A z_0 + B z_0 + V z_0$ .*
  - (b) *La famille  $({}^\delta A z_\delta)_{\delta \in ]0,1[}$  est bornée.*
- (iii) *Si l'une des conditions de (ii) est vérifiée, alors  $z_\delta \rightarrow z_0$  quand  $\delta \downarrow 0$ .*

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord que  $\text{dom } V = \mathcal{H}$ . En effet, d'après [6, Théorème 2.3], le fait que  $V$  est localement borné implique que  $V^{-1}$  est surjectif.

(i) : Soit  $\delta \in ]0,1[$ . D'après [6, Proposition 2.6(i) et Lemme 2.4], l'opérateur  ${}^\delta A + B$  est maximal monotone. On applique le Lemme 3.2.16 aux opérateurs  ${}^\delta A + B$  et  $V$  pour montrer que  $z_\delta$  est défini de manière unique dans (i).

(ii) : Supposons que la condition (ii)(a) soit vérifiée. Alors il existe  $z_0 \in \mathcal{H}$  tel que  $0 \in A z_0 + B z_0 + V z_0$  ( $z_0$  est unique car  $A + B + V$  est strictement monotone). Fixons  $\delta \in ]0,1[$ . Alors, d'après (i), on déduit qu'il existe  $v_0 \in V z_0$ ,  $a_0 \in A z_0$  et  $v_\delta \in V z_\delta$  tels que

$$-v_0 - a_0 \in B z_0 \quad \text{et} \quad -v_\delta - {}^\delta A z_\delta \in B z_\delta. \quad (4.18)$$

D'une part, la monotonie de  $B$  implique que

$$\langle z_\delta - z_0 \mid a_0 - {}^\delta A z_\delta \rangle \geq \langle z_\delta - z_0 \mid v_\delta - v_0 \rangle, \quad (4.19)$$

et, en invoquant la monotonie de  $V$ , on obtient

$$\langle z_\delta - z_0 \mid a_0 - {}^\delta A z_\delta \rangle \geq 0. \quad (4.20)$$

D'autre part, les inclusions  $a_0 \in A z_0$  et  ${}^\delta A z_\delta \in A(J_{\delta A} z_\delta)$ , et la monotonie de  $A$  conduisent à l'inégalité

$$\langle z_0 - J_{\delta A} z_\delta \mid a_0 - {}^\delta A z_\delta \rangle \geq 0. \quad (4.21)$$



En additionnant (4.20) et (4.21), on obtient

$$0 \leq \langle z_\delta - J_{\delta A} z_\delta \mid a_0 - {}^\delta A z_\delta \rangle = \delta (\langle {}^\delta A z_\delta \mid a_0 \rangle - \| {}^\delta A z_\delta \|^2) \quad (4.22)$$

et, en utilisant Cauchy-Schwarz, on déduit que

$$(\forall \delta \in ]0, 1[) \quad \| {}^\delta A z_\delta \| \leq \| a_0 \|. \quad (4.23)$$

Réciproquement, supposons que la famille  $({}^\delta A z_\delta)_{\delta \in ]0, 1[}$  soit bornée. Il suffit de montrer l'existence de  $z_0 \in \mathcal{H}$  tel que  $0 \in A z_0 + B z_0 + V z_0$  (l'unicité d'un tel point  $z_0$  résulte de la stricte monotonie de  $A + B + V$ ).

Tout d'abord, on montre que  $\| z_\delta - z_\epsilon \| \rightarrow 0$  quand  $\delta \downarrow 0$  et  $\epsilon \downarrow 0$ . Fixons  $(\delta, \epsilon) \in ]0, 1[^2$ . D'après (i), il existe  $v_\delta \in V z_\delta$  et  $v_\epsilon \in V z_\epsilon$  tels que

$$-v_\delta - {}^\delta A z_\delta \in B z_\delta \quad \text{et} \quad -v_\epsilon - {}^\epsilon A z_\epsilon \in B z_\epsilon. \quad (4.24)$$

De plus, la monotonie de  $B$  et la monotonie  $c$ -uniforme de  $V$  entraînent

$$c(\| z_\delta - z_\epsilon \|) \leq \langle z_\delta - z_\epsilon \mid {}^\epsilon A z_\epsilon - {}^\delta A z_\delta \rangle. \quad (4.25)$$

Par ailleurs, les inclusions  ${}^\epsilon A z_\epsilon \in A(J_{\epsilon A} z_\epsilon)$  et  ${}^\delta A z_\delta \in A(J_{\delta A} z_\delta)$ , et la monotonie de  $A$  conduisent à l'inégalité

$$0 \leq \langle J_{\epsilon A} z_\epsilon - J_{\delta A} z_\delta \mid {}^\epsilon A z_\epsilon - {}^\delta A z_\delta \rangle. \quad (4.26)$$

En additionnant (4.25) et (4.26) et en utilisant Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} c(\| z_\delta - z_\epsilon \|) &\leq \langle {}^\epsilon A z_\epsilon - {}^\delta A z_\delta \mid \delta {}^\delta A z_\delta - \epsilon {}^\epsilon A z_\epsilon \rangle \\ &\leq \| {}^\epsilon A z_\epsilon - {}^\delta A z_\delta \| \| \delta {}^\delta A z_\delta - \epsilon {}^\epsilon A z_\epsilon \|. \end{aligned} \quad (4.27)$$

En utilisant le fait que les familles  $({}^\delta A z_\delta)_{\delta \in ]0, 1[}$  et  $({}^\epsilon A z_\epsilon)_{\epsilon \in ]0, 1[}$  sont bornées, on en déduit que

$$\| z_\delta - z_\epsilon \| \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \delta \downarrow 0 \quad \text{et} \quad \epsilon \downarrow 0. \quad (4.28)$$

Soit à présent  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $]0, 1[$  telle que  $\delta_n \downarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Il résulte de (4.28) que  $(z_{\delta_n})_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy. Donc il existe  $z_0 \in \mathcal{H}$  tel que  $z_{\delta_n} \rightarrow z_0$ .

D'une part, la bornitude de  $({}^{\delta_n} A z_{\delta_n})_{n \in \mathbb{N}}$  entraîne l'existence d'un point  $\bar{a} \in \mathcal{H}$  et d'une sous-suite  $(\delta_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  de  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tels que  ${}^{\delta_{k_n}} A z_{\delta_{k_n}} \rightarrow \bar{a}$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . En utilisant le fait que  ${}^{\delta_{k_n}} A \xrightarrow{G} A$  quand  $n \rightarrow +\infty$  (cf. [1, p. 360]) et en appliquant [1, Proposition 3.59], on obtient  $\bar{a} \in A z_0$ .

D'autre part, puisque la suite  $(z_{\delta_n})_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée et que  $V$  est borné sur tout borné de  $\mathcal{H}$ , on obtient la bornitude de  $(v_{\delta_n})_{n \in \mathbb{N}}$ . Quitte à passer à une sous-suite si

nécessaire, on suppose qu'il existe  $\bar{v} \in \mathcal{H}$  tel que  $v_{\delta_{k_n}} \rightharpoonup \bar{v}$ . On déduit de la propriété de fermeture séquentielle du graphe de  $V$  dans  $\mathcal{H}^{\text{fort}} \times \mathcal{H}^{\text{faible}}$ , que  $\bar{v} \in Vz_0$ .

Ensuite, on remarque que

$$-v_{\delta_{k_n}} - \delta_{k_n}Az_{\delta_{k_n}} \rightharpoonup -\bar{v} - \bar{a}. \quad (4.29)$$

En faisant appel à (4.18) et au fait que  $z_{\delta_{k_n}} \rightarrow z_0$ , on déduit en utilisant la fermeture séquentielle du graphe de  $B$  dans  $\mathcal{H}^{\text{fort}} \times \mathcal{H}^{\text{faible}}$ , que  $-\bar{v} - \bar{a} \in Bz_0$ . En résumé, les inclusions  $\bar{a} \in Az_0$ ,  $\bar{v} \in Vz_0$  et  $-\bar{v} - \bar{a} \in Bz_0$  donnent  $0 \in Az_0 + Bz_0 + Vz_0$ .

(iii) : Supposons qu'il existe  $z_0 \in \mathcal{H}$  tel que  $0 \in Az_0 + Bz_0 + Vz_0$ . Alors il existe  $v_0 \in Vz_0$ ,  $a_0 \in Az_0$  et  $v_\delta \in Vz_\delta$  qui vérifient (4.18). La monotonie de  $B$  et la monotonie  $c$ -uniforme de  $V$  conduisent à

$$c(\|z_\delta - z_0\|) \leq \langle z_\delta - z_0 \mid a_0 - \delta Az_\delta \rangle. \quad (4.30)$$

En additionnant la dernière inégalité à (4.21) et en utilisant Cauchy-Schwarz on obtient

$$c(\|z_\delta - z_0\|) \leq \delta \| \delta Az_\delta \| (\|a_0\| - \| \delta Az_\delta \|). \quad (4.31)$$

La bornitude de  $(\delta Az_\delta)_{\delta \in ]0,1[}$  entraîne alors que  $z_\delta \rightarrow z_0$  quand  $\delta \downarrow 0$ .  $\square$

**Remarque 4.2.3** Étant donné  $h \in \mathcal{H}$ , posons  $V: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ,  $V = \text{Id} - h$ . Alors, dans ce cas particulier, le Théorème 4.2.2 découle de [7, Section 2].

**Remarque 4.2.4** Soient  $(A_i)_{1 \leq i \leq m}$  des opérateurs maximaux monotones de  $\mathcal{H}$  vers  $2^{\mathcal{H}}$  et soit  $V: \text{dom } V = \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  un opérateur maximal monotone, fortement monotone et borné sur tout borné de  $\mathcal{H}$ . Considérons le problème de

$$\text{trouver } z_0 \in \mathcal{H} \text{ tel que } 0 \in \sum_{i=1}^m A_i z_0 + Vz_0. \quad (4.32)$$

Pour résoudre (4.32) on considère un problème pénalisé associé, où les opérateurs  $(A_i)_{1 \leq i \leq m}$  sont remplacés par leurs approximations de Yosida,  $(\delta A_i)_{1 \leq i \leq m}$ . Plus précisément, pour tout  $\delta \in ]0,1[$  il existe un unique  $z_\delta \in \mathcal{H}$  tel que

$$0 \in \sum_{i=1}^m \delta A_i z_\delta + Vz_\delta. \quad (4.33)$$

Pour  $\delta \in ]0, +\infty[$  fixé, le problème (4.33) est considéré dans [8], où certains liens avec (4.32) et des problèmes connexes sont établis. Sous nos hypothèses, le problème (4.32) admet une solution (automatiquement unique)  $z_0$  si et seulement si, il existe  $\gamma \in ]0, +\infty[$  tel que

$$(\forall \delta \in ]0,1[) \sum_{i=1}^m \| \delta A_i z_\delta \|^2 \leq \gamma. \quad (4.34)$$

De plus, si l'une de ces conditions est vérifiée, alors  $z_\delta \rightarrow z_0$  quand  $\delta \downarrow 0$ .

En effet, on applique le Théorème 4.2.2 aux opérateurs suivants qui sont définis sur la somme hilbertienne directe  $\mathcal{H}^m$  : l'opérateur multivoque

$$\mathcal{A}: \mathcal{H}^m \rightarrow 2^{\mathcal{H}^m} : (x_1, \dots, x_m) \mapsto A_1 x_1 \times \dots \times A_m x_m, \quad (4.35)$$

l'opérateur cône-normal  $N_{\mathcal{D}}: \mathcal{H}^m \rightarrow 2^{\mathcal{H}^m}$  associé à l'ensemble

$$\mathcal{D} = \{(x, \dots, x) \in \mathcal{H}^m \mid x \in \mathcal{H}\}, \quad (4.36)$$

et l'opérateur de viscosité

$$\mathcal{V}: \mathcal{H}^m \rightarrow 2^{\mathcal{H}^m} : (x_1, \dots, x_m) \mapsto V x_1 \times \dots \times V x_m. \quad (4.37)$$

Dans ce cadre, le problème (4.32) se réécrit

$$\text{trouver } z_0 \in \mathcal{H} \text{ tel que } 0 \in \mathcal{A}(z_0, \dots, z_0) + N_{\mathcal{D}}(z_0, \dots, z_0) + \mathcal{V}(z_0, \dots, z_0), \quad (4.38)$$

tandis que le problème pénalisé (4.33) est équivalent à

$$\text{trouver } z_\delta \in \mathcal{H} \text{ tel que } 0 \in {}^\delta \mathcal{A}(z_\delta, \dots, z_\delta) + N_{\mathcal{D}}(z_\delta, \dots, z_\delta) + \mathcal{V}(z_\delta, \dots, z_\delta). \quad (4.39)$$

### 4.3 Résultat principal

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat principal de ce chapitre.

**Théorème 4.3.1** *Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs maximaux monotones de  $\mathcal{H}$  vers  $2^{\mathcal{H}}$  tels que  $A + B$  soit maximal monotone et  $C = (A + B)^{-1}0 \neq \emptyset$ . Supposons que  $V: \text{dom } V = \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  soit maximal monotone et  $c$ -uniformément monotone. Soit  $(e_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  une famille de  $\mathcal{H}$  telle que  $e_\varepsilon/\varepsilon \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$  et soit  $\phi: ]0,1[ \rightarrow ]0,1[$  une fonction telle que  $\phi(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$ . Alors :*

- (i) *Il existe un unique  $x_0 \in \text{dom } A \cap \text{dom } B$  tel que  $0 \in N_{(A+B)^{-1}0}x_0 + Vx_0$ .*
- (ii) *Pour tout  $\varepsilon \in ]0,1[$  il existe un unique  $y_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} \in \mathcal{H}$  tel que*

$$0 \in {}^{\phi(\varepsilon)}Ay_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} + By_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} + \varepsilon Vy_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} + e_\varepsilon. \quad (4.40)$$

- (iii) *De plus, si  $x_0 \in \text{int dom } A \cup \text{int dom } B$ , si  $c$  est continue et si  $V$  est borné sur tout borné de  $\mathcal{H}$ , alors  $y_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} \rightarrow x_0$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$ .*

*Démonstration.* (i) : Le Lemme 3.2.16 garantit que  $x_0$  est défini de manière unique.

(ii) : Soit  $\varepsilon \in ]0,1[$ . D'après [6, Proposition 2.6(i) et Lemme 2.4], l'opérateur  ${}^{\phi(\varepsilon)}A + B$  est maximal monotone. En appliquant le Lemme 3.2.16 aux opérateurs  ${}^{\phi(\varepsilon)}A + B$  et  $\varepsilon V + e_\varepsilon$ , on obtient que  $y_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)}$  est défini de manière unique dans (4.40).

(iii) : Montrons qu'il existe  $\varepsilon_0 \in ]0, 1[$  et  $\tau > 0$  tel que

$$(\forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[) \quad c(\|y_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} - x_\varepsilon\|) \leq \tau \frac{\phi(\varepsilon)}{\varepsilon}, \quad (4.41)$$

où  $x_\varepsilon$  est défini dans (4.17). On aura donc  $y_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} - x_\varepsilon \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$  et, en appliquant le Corollaire 4.2.1 on conclura que  $y_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} \rightarrow x_0$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$ .

Donnons-nous une fonction  $\varrho: ]0, 1[ \rightarrow ]0, 1[$ . En raisonnant comme ci-dessus, on obtient que pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$  il existe un unique  $y_{\varepsilon, \varrho(\varepsilon)} \in \mathcal{H}$  tel que

$$0 \in {}^{\varrho(\varepsilon)}Ay_{\varepsilon, \varrho(\varepsilon)} + By_{\varepsilon, \varrho(\varepsilon)} + \varepsilon Vy_{\varepsilon, \varrho(\varepsilon)} + e_\varepsilon. \quad (4.42)$$

On en déduit, en utilisant (4.40), que pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$  il existe  $w_\varepsilon \in Vy_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)}$  et  $v_\varepsilon \in Vy_{\varepsilon, \varrho(\varepsilon)}$  tels que

$$-({}^{\phi(\varepsilon)}Ay_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)}) - \varepsilon w_\varepsilon - e_\varepsilon \in By_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} \quad \text{et} \quad -({}^{\varrho(\varepsilon)}Ay_{\varepsilon, \varrho(\varepsilon)}) - \varepsilon v_\varepsilon - e_\varepsilon \in By_{\varepsilon, \varrho(\varepsilon)}. \quad (4.43)$$

D'une part, la monotonie de  $B$  entraîne

$$(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad 0 \leq \langle y_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} - y_{\varepsilon, \varrho(\varepsilon)} \mid {}^{\varrho(\varepsilon)}Ay_{\varepsilon, \varrho(\varepsilon)} - {}^{\phi(\varepsilon)}Ay_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} + \varepsilon v_\varepsilon - \varepsilon w_\varepsilon \rangle, \quad (4.44)$$

et, en invoquant la monotonie  $c$ -uniforme de  $V$ , on obtient

$$\begin{aligned} (\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad \varepsilon c(\|y_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} - y_{\varepsilon, \varrho(\varepsilon)}\|) \\ \leq \langle y_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} - y_{\varepsilon, \varrho(\varepsilon)} \mid {}^{\varrho(\varepsilon)}Ay_{\varepsilon, \varrho(\varepsilon)} - {}^{\phi(\varepsilon)}Ay_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} \rangle. \end{aligned} \quad (4.45)$$

D'autre part, les inclusions

$$\begin{cases} (\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad {}^{\varrho(\varepsilon)}Ay_{\varepsilon, \varrho(\varepsilon)} \in A(J_{\varrho(\varepsilon)}Ay_{\varepsilon, \varrho(\varepsilon)}), \\ (\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad {}^{\phi(\varepsilon)}Ay_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} \in A(J_{\phi(\varepsilon)}Ay_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)}), \end{cases} \quad (4.46)$$

et la monotonie de  $A$  conduisent à l'inégalité

$$(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad 0 \leq \langle J_{\varrho(\varepsilon)}Ay_{\varepsilon, \varrho(\varepsilon)} - J_{\phi(\varepsilon)}Ay_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} \mid {}^{\varrho(\varepsilon)}Ay_{\varepsilon, \varrho(\varepsilon)} - {}^{\phi(\varepsilon)}Ay_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} \rangle. \quad (4.47)$$

En additionnant (4.45) et (4.47), on obtient que, pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$ ,

$$\begin{aligned} \varepsilon c(\|y_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} - y_{\varepsilon, \varrho(\varepsilon)}\|) \\ \leq \langle \phi(\varepsilon) {}^{\phi(\varepsilon)}Ay_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} - \varrho(\varepsilon) {}^{\varrho(\varepsilon)}Ay_{\varepsilon, \varrho(\varepsilon)} \mid {}^{\varrho(\varepsilon)}Ay_{\varepsilon, \varrho(\varepsilon)} - {}^{\phi(\varepsilon)}Ay_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} \rangle \\ = -\varrho(\varepsilon) \| {}^{\varrho(\varepsilon)}Ay_{\varepsilon, \varrho(\varepsilon)} \|^2 - \phi(\varepsilon) \| {}^{\phi(\varepsilon)}Ay_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} \|^2 \\ + \left( \phi(\varepsilon) + \varrho(\varepsilon) \right) \langle {}^{\varrho(\varepsilon)}Ay_{\varepsilon, \varrho(\varepsilon)} \mid {}^{\phi(\varepsilon)}Ay_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} \rangle \\ \leq -\varrho(\varepsilon) \| {}^{\varrho(\varepsilon)}Ay_{\varepsilon, \varrho(\varepsilon)} \|^2 - \phi(\varepsilon) \| {}^{\phi(\varepsilon)}Ay_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} \|^2 \\ + \phi(\varepsilon) \left( \| {}^{\varrho(\varepsilon)}Ay_{\varepsilon, \varrho(\varepsilon)} \|^2 / 4 + \| {}^{\phi(\varepsilon)}Ay_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} \|^2 \right) \\ + \varrho(\varepsilon) \left( \| {}^{\phi(\varepsilon)}Ay_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} \|^2 / 4 + \| {}^{\varrho(\varepsilon)}Ay_{\varepsilon, \varrho(\varepsilon)} \|^2 \right) \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\leq \frac{\phi(\varepsilon)}{4} \| {}^{\varrho(\varepsilon)}Ay_{\varepsilon, \varrho(\varepsilon)} \|^2 + \frac{\varrho(\varepsilon)}{4} \| {}^{\phi(\varepsilon)}Ay_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} \|^2, \quad (4.49)$$

où (4.48) a été déduite de l'inégalité

$$(\forall (u, v) \in \mathcal{H}^2) \quad \langle u \mid v \rangle \leq \min \left\{ \frac{\|u\|^2}{4} + \|v\|^2, \frac{\|v\|^2}{4} + \|u\|^2 \right\}. \quad (4.50)$$

On considère à présent une suite de fonctions  $(\varrho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $]0, 1[$  vers  $]0, 1[$  telle que, pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$ ,  $\varrho_n(\varepsilon) \downarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Soit  $\varepsilon \in ]0, 1[$ . En appliquant le Théorème 4.2.2(ii) aux opérateurs  $A$ ,  $B$  et  $\varepsilon V + e_\varepsilon$ , on obtient (cf. Corollaire 4.2.1) la bornitude de  $(\varrho_n(\varepsilon) A y_{\varepsilon, \varrho_n(\varepsilon)})_{n \in \mathbb{N}}$ . Plus précisément, en suivant les étapes de la démonstration du Théorème 4.2.2(ii), on obtient l'existence d'un point  $a_\varepsilon \in A x_\varepsilon$  tel que

$$-a_\varepsilon \in B x_\varepsilon + \varepsilon V x_\varepsilon + e_\varepsilon \quad (4.51)$$

et

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \|\varrho_n(\varepsilon) A y_{\varepsilon, \varrho_n(\varepsilon)}\| \leq \|a_\varepsilon\|. \quad (4.52)$$

On suppose maintenant que  $x_0 \in \text{int dom } A$  (si  $x_0 \in \text{int dom } B$ , on fera un raisonnement similaire). D'après [11, Theorem 1],  $A$  est localement borné au point  $x_0$ . Il existe donc  $\rho \in ]0, +\infty[$  tel que  $A(\mathcal{B}(x_0; \rho))$  soit borné. D'après le Corollaire 4.2.1,  $x_\varepsilon \rightarrow x_0$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$  et donc il existe  $\varepsilon_0 \in ]0, 1[$  tel que  $(\forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[) x_\varepsilon \in \mathcal{B}(x_0; \rho)$ . On en déduit que  $(a_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[}$  est bornée. Par suite, (4.52) entraîne l'existence d'un réel  $\tau \in ]0, +\infty[$  tel que

$$(\forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[) (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \|\varrho_n(\varepsilon) A y_{\varepsilon, \varrho_n(\varepsilon)}\|^2 \leq 4\tau. \quad (4.53)$$

En remplaçant dans (4.49) la fonction  $\varrho$  par chacune des fonctions  $\varrho_n$  on obtient

$$(\forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[) (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \varepsilon c(\|y_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} - y_{\varepsilon, \varrho_n(\varepsilon)}\|) \leq \phi(\varepsilon) \tau + \frac{\varrho_n(\varepsilon)}{4} \|\phi(\varepsilon) A y_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)}\|^2. \quad (4.54)$$

On déduit du Théorème 4.2.2(iii) que, pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ ,  $y_{\varepsilon, \varrho_n(\varepsilon)} \rightarrow x_\varepsilon$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , où  $x_\varepsilon$  est défini dans (4.17). En passant à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$  dans (4.54) et en utilisant la continuité de  $c$ , on obtient

$$(\forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[) \quad c(\|y_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} - x_\varepsilon\|) \leq \tau \frac{\phi(\varepsilon)}{\varepsilon}. \quad (4.55)$$

Donc (4.41) est vérifiée. On conclut que  $y_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} \rightarrow x_0$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$ .  $\square$

Notre premier corollaire est le suivant.

**Corollaire 4.3.2** *Soient  $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$  une fonction telle que  $\text{dom } f$  soit ouvert et  $S \neq \emptyset$  un convexe fermé de  $\mathcal{H}$  tel que  $S \cap \text{dom } f \neq \emptyset$  et  $\text{Argmin}_S f \neq \emptyset$ . Soient  $(e_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  une famille de  $\mathcal{H}$  telle que  $e_\varepsilon/\varepsilon \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$  et  $\phi: ]0, 1[ \rightarrow ]0, 1[$  une fonction telle que  $\phi(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$ . Alors :*

- (i) Il existe un unique  $x_0 \in S$  tel que  $x_0 = P_{\text{Argmin}_S f}(0)$ .
- (ii) Pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$  il existe un unique  $y_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} \in \mathcal{H}$  tel que

$$y_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} \approx \text{Argmin}_{\mathcal{H}} \left( f + \frac{d_S^2}{2\phi(\varepsilon)} + \varepsilon \frac{\|\cdot\|^2}{2} \right), \quad (4.56)$$

au sens où  $-e_\varepsilon \in \partial \left( f + \frac{d_S^2}{2\phi(\varepsilon)} + \varepsilon \frac{\|\cdot\|^2}{2} \right) y_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)}$ .

- (iii)  $y_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} \rightarrow x_0$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$ .

*Démonstration.* On applique le Théorème 4.3.1 aux opérateurs  $A = N_S$ ,  $B = \partial f$  et  $V = \text{Id}$ . Nos hypothèses impliquent que  $A+B = \partial(f+\iota_S)$  et  $(A+B)^{-1}0 = \text{Argmin}_S f$ .

- (i) : L'existence de  $x_0$  résulte de l'équivalence

$$0 \in N_{(A+B)^{-1}0}x_0 + x_0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = P_{\text{Argmin}_S f}(0). \quad (4.57)$$

(ii) : Pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , on a  $\phi(\varepsilon)A = \nabla \left( \frac{d_S^2}{2\phi(\varepsilon)} \right)$  et  $V = \nabla(\|\cdot\|^2/2)$ . Donc, la famille  $(y_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)})_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  est définie de manière unique dans (4.56).

(iii) : La convergence forte de  $(y_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)})_{\varepsilon \in ]0, 1[}$  vers  $x_0$  est une conséquence immédiate du Théorème 4.3.1(iii). En effet, le fait que  $\text{dom } f$  est ouvert conduit à  $x_0 \in \text{int dom } B = \text{dom } B$  et de plus, l'opérateur  $V = \text{Id}$  vérifie les conditions du Théorème 4.3.1 avec  $c: [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[ : t \mapsto t^2$ .  $\square$

**Remarque 4.3.3** Le résultat précédent généralise [4, Example (The Penalization-Viscosity Approximation), p. 531], où l'on suppose de plus que la fonction  $f$  est Lipschitz sur  $\mathcal{H}$  et que  $(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) e_\varepsilon = 0$ ,  $\phi(\varepsilon) = \varepsilon^\theta$ , où  $\theta \in ]1, +\infty[$ .

Un deuxième corollaire du Théorème 4.3.1 est obtenu en prenant  $V = \text{Id}$  et  $e_\varepsilon \equiv 0$ .

**Corollaire 4.3.4** Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs maximaux monotones de  $\mathcal{H}$  vers  $2^{\mathcal{H}}$  tels que  $A+B$  soit maximal monotone et  $C = (A+B)^{-1}0 \neq \emptyset$ . Soit  $\phi: ]0, 1[ \rightarrow ]0, 1[$  une fonction telle que  $\phi(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$ . Alors :

- (i) Il existe un unique  $x_0 \in \text{dom } A \cap \text{dom } B$  tel que  $x_0 = P_{(A+B)^{-1}0}(0)$ .
- (ii) Pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$  il existe un unique  $y_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} \in \mathcal{H}$  tel que

$$0 \in \phi(\varepsilon)Ay_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} + By_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} + \varepsilon y_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)}. \quad (4.58)$$

- (iii) De plus, si  $x_0 \in \text{int dom } A \cup \text{int dom } B$ , alors  $y_{\varepsilon, \phi(\varepsilon)} \rightarrow x_0$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$ .

**Remarque 4.3.5** Dans [10, Theorem 3], la conclusion (iii) du corollaire précédent est annoncée sans l'hypothèse

$$x_0 \in \text{int dom } A \cup \text{int dom } B. \quad (4.59)$$

Toutefois, la démonstration de ce résultat est peu convaincante car sans l'hypothèse (4.59), l'existence d'un réel  $\tau \in ]0, +\infty[$ , indépendant de  $\varepsilon$  et vérifiant (4.53), ne nous paraît pas garantie.

## 4.4 Bibliographie

- [1] H. Attouch : Variational Convergence for Functions and Operators, Pitman, Boston, MA (1984).
- [2] H. Attouch, J.-B. Baillon, and M. Théra : Variational sum of monotone operators, *J. Convex Anal.* 1 (1994) 1–29.
- [3] H. Attouch and H. Brézis : Duality for the sum of convex functions in general Banach spaces, in *Aspects of Mathematics and Its Applications*, North-Holland, Amsterdam 125–133 (1986).
- [4] H. Attouch and R. Cominetti : A dynamical approach to convex minimization coupling approximation with the steepest descent method, *J. Differential Equations* 128 (1996) 519–540.
- [5] H. H. Bauschke, P. L. Combettes, and S. Reich : The asymptotic behavior of the composition of two resolvents, *Nonlinear Anal.* 60 (2005) 283–301.
- [6] H. Brézis : Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert, New York, North-Holland/Elsevier (1973).
- [7] H. Brézis, M. G. Crandall, and A. Pazy : Perturbations of nonlinear maximal monotone sets in Banach space, *Comm. Pure Appl. Math.* 23 (1970) 123–144.
- [8] P. L. Combettes : Solving monotone inclusions via compositions of nonexpansive averaged operators, *Optimization* 53 (2004) 475–504.
- [9] P. Mahey and D. T. Pham : Partial regularization of the sum of two maximal monotone operators, *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* 27 (1993) 375–392.
- [10] A. Moudafi : On the regularization of the sum of two maximal monotone operators, *Nonlinear Anal.* 42 (2000) 1203–1208.
- [11] R. T. Rockafellar : Local boundedness of nonlinear monotone operators, *Michigan Math. J.* 16 (1969) 397–407.
- [12] D. Torralba : Convergence Épigraphique et Changements d'Échelle en Analyse Variationnelle et Optimisation, Thèse, Université de Montpellier II (1996).

# Chapitre 5

## Étude du comportement asymptotique de systèmes dynamiques viscosifiés

### 5.1 Introduction

En étudiant le comportement asymptotique de courbes d'approximation, dans la Section 3.2.3, on a fait une analyse statique du problème

$$\text{trouver } x \in \mathcal{H} \text{ tel que } 0 \in N_{A^{-1}x} + Vx, \quad (5.1)$$

où  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  est un opérateur maximal monotone et  $V: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un opérateur strictement monotone. Dans ce chapitre on applique les résultats du Chapitre 3 à l'étude asymptotique de systèmes dynamiques continus et discrets du premier ordre, basés sur la courbe définie dans (3.65), i.e.,

$$(\forall \nu \in ]0, 1[) \quad 0 \in Ax_\nu + \nu Vx_\nu, \quad (5.2)$$

pour résoudre le problème (5.1). Plus précisément, on montre que, sous certaines hypothèses sur les paramètres, les courbes d'approximation et les trajectoires des systèmes dynamiques associés sont arbitrairement proches asymptotiquement (cf. (5.17)). On obtiendra ainsi la convergence forte de ces trajectoires vers la solution  $x_0$  de (5.1). Les premiers travaux où ce principe a été appliqué sont [17] dans le cadre de la construction d'un point fixe d'une contraction, et [10] dans le cadre de la construction d'un zéro d'un opérateur maximal monotone (voir aussi [1], [2], [12], [13], [21], [23], [24]). Les systèmes dynamiques considérés dans ce chapitre étant plus généraux, nous étendrons en particulier ces résultats.



### 5.1.1 Le problème classique

Considérons le problème classique de trouver un zéro d'un opérateur maximal monotone  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$ , i.e.,

$$\text{trouver } x \in \mathcal{H} \text{ tel que } 0 \in Ax, \quad (5.3)$$

sous l'hypothèse  $0 \in \text{ran } A$ . Le système dynamique continu du premier ordre associé à (5.3) est l'inclusion d'évolution (on utilise la notation standard  $\dot{u} = du/dt$ )

$$u(0) = u_0 \in \mathcal{H} \text{ et } -\dot{u}(t) \in Au(t). \quad (5.4)$$

Un résultat classique ([7, Théorème 3.1] ou [27, Proposition IV.3.1]) garantit que, si  $u_0 \in \text{dom } A$ , le problème (5.4) admet une solution unique  $u: [0, +\infty[ \rightarrow \mathcal{H}$ , Lipschitz continue sur tout intervalle  $[0, T]$ , satisfaisant à l'inclusion de (5.4) pour presque tout  $t \in ]0, +\infty[$ . L'étude du comportement asymptotique de cette solution remonte au moins à [14], où l'on a démontré que la bornitude de la trajectoire engendrée par (5.4) est équivalente à la solvabilité du problème (5.3), i.e.,

$$A^{-1}0 \neq \emptyset \Leftrightarrow (\forall u_0 \in \overline{\text{dom } A}) \sup_{t \in ]0, +\infty[} \|u(t)\| < +\infty. \quad (5.5)$$

Notons que, si  $A$  est une rotation de  $\pi/2$  dans  $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$ , alors  $u(t)$  n'admet pas de limite quand  $t \rightarrow +\infty$  (cf. [7, Section III.5]). Cependant, sous certaines hypothèses sur l'opérateur  $A$ , on peut établir la convergence (faible ou forte) de  $u(t)$  vers un point de  $A^{-1}0$  quand  $t \rightarrow +\infty$  (voir [7, Chapitre 3], [22, Chapter 2] pour des résultats obtenus dans cette direction). Par exemple, si  $A = \partial f$ , où  $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$  est telle que  $\text{Argmin } f \neq \emptyset$ , alors on a [11]

$$(\forall u_0 \in \overline{\text{dom } f}) \quad u(t) \rightarrow x \in \text{Argmin } f = A^{-1}0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty. \quad (5.6)$$

Précisons qu'il n'y a pas convergence forte en général dans (5.6) (cf. le contre-exemple de [3]). En conclusion, si  $A$  est un opérateur maximal monotone, alors la trajectoire engendrée par (5.4) ne converge pas forcément (au sens précisé ci-dessus) et de plus, même si elle converge, on ne peut pas préciser quel point de  $A^{-1}0$  est cette limite.

On peut aussi associer à (5.3) deux systèmes dynamiques discrets du premier ordre, à savoir le schéma explicite

$$u_0 \in \mathcal{H} \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad -\frac{u_{n+1} - u_n}{\alpha_n} \in Au_n, \quad (5.7)$$

et le schéma implicite

$$u_0 \in \mathcal{H} \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad -\frac{u_{n+1} - u_n}{\alpha_n} \in Au_{n+1}, \quad (5.8)$$

où  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite dans  $]0, +\infty[$ . Le schéma implicite défini dans (5.8), baptisé « algorithme du point proximal » [25], possède des propriétés similaires à sa contrepartie continue (5.4). En effet, sous l'hypothèse  $A^{-1}0 \neq \emptyset$  et sous certaines conditions sur  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie dans (5.8) converge faiblement, quand  $n \rightarrow +\infty$ , vers un élément, non identifiable en général de  $A^{-1}0$  [8], [25]. De plus, la convergence n'est pas forte (cf. les contre-exemples de [4] ou de [15]).

## 5.1.2 Discussion

Dans la Section 5.1.1 nous avons mis en lumière certaines limitations du comportement asymptotique des méthodes classiques (5.4) et (5.8) pour résoudre le problème (5.3) : pour ces méthodes on ne peut espérer, sous des hypothèses générales, que la convergence faible et, par ailleurs, la limite atteinte n'est pas identifiable dans l'ensemble de solutions.

Notons tout d'abord, que dans de nombreuses applications telles que le traitement analogique ou optique du signal et de l'image, il est primordial d'obtenir des résultats de convergence forte plutôt que de convergence faible, cette dernière ne correspondant en général pas à une contrainte physique pertinente. Cet aspect a été mis en évidence en particulier dans [5, Section 1]. Le résultat principal de [5] porte sur le passage d'une méthode (de type « Fejér-monotone ») faiblement convergente en général, à une méthode (de type « Haugazeau ») qui assure la convergence forte sous les mêmes hypothèses. De plus, la limite d'un algorithme de type « Haugazeau » est identifiée comme la meilleure approximation d'un point donné. Un tel algorithme a été déjà utilisé au Chapitre 2 (Sections 2.2.3 et 2.2.5) pour résoudre un système de problèmes d'équilibre.

Il faut aussi remarquer que la convergence forte, qui est naturellement intéressante en soi par rapport à la convergence faible, se traduit souvent par un meilleur comportement dans le cas des problèmes de minimisation. Par exemple, dans [15], il est démontré que si  $A = \partial f$ , où  $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ , alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie dans (5.8) vérifie, sous l'hypothèse  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$f(u_n) - f(x) = O\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}\right), \quad (5.9)$$

où  $x \in \text{Argmin } f$ . Mais si  $u_n \rightarrow x$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , alors on a

$$f(u_n) - f(x) = o\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}\right). \quad (5.10)$$

Récemment, il a été établi dans [16] le même comportement asymptotique de la solution  $u$  de (5.4) quand  $A = \partial f$ , où  $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ . Ainsi, quand (5.6) est satisfaite, si

$x \in \text{Argmin } f$ , alors

$$f(u(t)) - f(x) = O(1/t). \quad (5.11)$$

En revanche, si  $u(t) \rightarrow x$  quand  $t \rightarrow +\infty$ , alors on a

$$f(u(t)) - f(x) = o(1/t). \quad (5.12)$$

### 5.1.3 Le problème viscosifié

À la lumière des remarques de la Section 5.1.2, nous sommes conduits à élaborer d'autres systèmes dynamiques, dont les trajectoires convergent fortement vers une solution particulière de (5.3). Tout d'abord, remarquons que (5.3) est équivalent à

$$\text{trouver } x \in \mathcal{H} \text{ tel que } 0 \in N_{A^{-1}0}x, \quad (5.13)$$

où  $N_{A^{-1}0}$  dénote l'opérateur cône-normal associé à l'ensemble convexe et fermé  $A^{-1}0$ . On viscosifie ce problème, en considérant le problème

$$\text{trouver } x \in \mathcal{H} \text{ tel que } 0 \in N_{A^{-1}0}x + Vx, \quad (5.14)$$

où  $V: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est tel que (5.14) admette une solution unique  $x_0$ . Notre but étant de résoudre (5.14), nous considérons, comme au Chapitre 3, le problème

$$\text{pour tout } \nu \in ]0, 1[ \text{ trouver } x_\nu \in \mathcal{H} \text{ tel que } 0 \in Ax_\nu + \nu Vx_\nu, \quad (5.15)$$

où  $V: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est un opérateur maximal monotone, convenablement choisi pour que (5.15) admette une solution unique et, de plus, pour que  $(x_\nu)_{\nu \in ]0, 1[}$  converge fortement vers la solution de (5.14) quand  $\nu \downarrow 0$  (voir le Corollaire 3.3.3).

En raisonnant comme dans la Section 5.1.1, on associe à la courbe d'approximation définie dans (5.15), le système dynamique continu du premier ordre

$$u(0) = u_0 \in \mathcal{H} \text{ et } -\dot{u}(t) \in Au(t) + \varepsilon(t)Vu(t), \quad (5.16)$$

où  $\varepsilon: [0, +\infty[ \rightarrow ]0, 1[$  vérifie  $\varepsilon(t) \downarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . En supposant que cette inclusion d'évolution admet une solution unique  $u: [0, +\infty[ \rightarrow \mathcal{H}$  (dans un sens à préciser), on montrera dans la Section 5.2 que, sous des hypothèses convenables sur la fonction  $\varepsilon$ ,  $u(t)$  converge fortement, quand  $t \rightarrow +\infty$ , vers la solution de (5.14). Plus précisément, on démontrera (Proposition 5.2.6 et Théorème 5.2.9) que

$$\|u(t) - x_{\varepsilon(t)}\| \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty, \quad (5.17)$$

puis on utilisera le Corollaire 3.3.3 qui affirme que  $x_{\varepsilon(t)} \rightarrow x_0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ , où  $x_0$  satisfait à (5.14).

Dans la Section 5.3, on considère tout d'abord un système dynamique discret du premier ordre associé à (5.15), à savoir le schéma implicite

$$u_0 \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad - \frac{u_{n+1} - u_n}{\alpha_n} \in Au_{n+1} + \beta_n V u_{n+1} + e_n, \quad (5.18)$$

où  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  joue le rôle d'une suite d'erreurs dans  $\mathcal{H}$  et  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont deux suites dans  $]0, +\infty[$  vérifiant des hypothèses convenables. Premièrement, dans la Proposition 5.3.1, on établit la convergence forte de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers la solution  $x_0$  de (5.14). Ensuite, on en déduit la convergence forte du schéma explicite

$$v_0 \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad - \frac{v_{n+1} - v_n}{\alpha_n} = Av_n + \beta_n V v_n, \quad (5.19)$$

vers  $x_0$ .

Enfin, dans les deux sections, on considère les cas particuliers  $A = \partial f$  et  $A = \text{Id} - T$ , où  $f$  est une fonction de  $\Gamma_0(\mathcal{H})$  et  $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est une contraction. Ainsi, on retrouve et on généralise des résultats connus sur la construction d'un minimiseur de  $f$  et sur la construction d'un point fixe de  $T$ .

## 5.2 Systèmes dynamiques continus

Dans cette section on étudie le comportement asymptotique de la solution de l'inclusion d'évolution

$$\begin{cases} 0 \in \dot{u}(t) + Au(t) + \varepsilon(t)Vu(t), \\ u(0) = u_0 \in \mathcal{H}. \end{cases} \quad (5.20)$$

Plus précisément, en supposant que  $V: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est maximal monotone, fortement monotone, et borné sur tout borné de  $\mathcal{H}$  et que la fonction  $\varepsilon$  décroît lentement vers 0 (e.g.  $\int_0^{+\infty} \varepsilon(t)dt = +\infty$ ), on montrera que la solution  $u$  de (5.20) vérifie  $u(t) \rightarrow x_0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ , où  $x_0 \in \mathcal{H}$  satisfait à (5.14). Nous devons tout d'abord définir une notion de solution pour un tel système dynamique.

**Définition 5.2.1** Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . On dit qu'une fonction  $u: [a, b] \rightarrow \mathcal{H}$  est absolument continue si pour tout  $\eta \in ]0, +\infty[$ , il existe  $\delta \in ]0, +\infty[$  tel que pour toute suite d'intervalles  $(] \alpha_n, \beta_n ] )_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $[a, b]$ , deux à deux disjoints et vérifiant  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (\beta_n - \alpha_n) < \delta$ , on ait  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|u(\beta_n) - u(\alpha_n)\| < \eta$ .

**Remarque 5.2.2** On rappelle (cf. [7, p. 143]) que  $u: [a, b] \rightarrow \mathcal{H}$  est absolument continue si et seulement s'il existe une fonction  $\varphi \in L^1([a, b]; \mathbb{R})$  telle que

$$(\forall (s, t) \in [a, b]^2) \quad s \leq t \quad \Rightarrow \quad \|u(t) - u(s)\| \leq \int_s^t \varphi(r)dr. \quad (5.21)$$

En invoquant la réflexivité de  $\mathcal{H}$ , ceci est encore équivalent (cf. [7, Corollaire A.2] ou [27, Theorem III.1.7]) au fait qu'il existe une fonction  $v \in L^1([a, b]; \mathcal{H})$  telle que

$$(\forall t \in [a, b]) \quad u(t) = u(a) + \int_a^t v(r) dr. \quad (5.22)$$

En particulier, toute fonction absolument continue  $u: [a, b] \rightarrow \mathcal{H}$  est différentiable presque partout sur  $]a, b[$  et la fonction  $t \mapsto \|\dot{u}(t)\|$  appartient à  $L^1([a, b]; \mathbb{R})$ .

**Définition 5.2.3** Soit  $(A_t)_{t \in [0, +\infty[}$  une famille d'opérateurs de  $\mathcal{H}$  vers  $2^{\mathcal{H}}$ . On dit qu'une fonction continue  $u: [0, +\infty[ \rightarrow \mathcal{H}$  est une solution du problème  $0 \in \dot{u}(t) + A_t u(t)$  si

- (i)  $u$  est absolument continue sur tout compact de  $[0, +\infty[$ ,
- (ii) pour presque tout  $t \in ]0, +\infty[$ , on a  $0 \in \dot{u}(t) + A_t u(t)$ .

#### Remarque 5.2.4

- (i) Dans [7, Définition 3.1] et [18, p. 2], si la propriété (i) dans la Définition 5.2.3 est remplacée par la condition plus faible (i')  $u$  est absolument continue sur tout compact de  $]0, +\infty[$ , alors  $u$  est appelée une solution forte (ou simplement solution dans [27, p. 171]).
- (ii) Si  $(A_t)_{t \in [0, +\infty[}$  est une famille d'opérateurs monotones, alors le problème

$$\begin{cases} 0 \in \dot{u}(t) + A_t u(t), \text{ pour presque tout } t \in ]0, +\infty[ \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (5.23)$$

admet au plus une solution au sens de la Définition 5.2.3. En effet, supposons que  $u$  et  $v$  soient des solutions de (5.23). Alors, pour presque tout  $t \in ]0, +\infty[$ , la monotonie de  $A_t$  entraîne  $\langle -\dot{u}(t) + \dot{v}(t) \mid u(t) - v(t) \rangle \geq 0$ , ou encore  $\frac{d}{dt} \|u(t) - v(t)\|^2 \leq 0$ . Donc, pour tout  $t \in [0, +\infty[$ ,  $\|u(t) - v(t)\| \leq \|u(0) - v(0)\|$ . Puisque  $u(0) = v(0) = u_0$ , on conclut que  $u = v$ .

- (iii) Si  $A_t \equiv A$ , où  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  est un opérateur maximal monotone, alors (5.23) admet une unique solution au sens de la Définition 5.2.3, dès que  $u_0 \in \text{dom } A$  (cf. [7, Théorème 3.1], [27, Proposition IV.3.1]).

Des résultats d'existence de solutions, au sens de la Définition 5.2.3, pour des problèmes proches de (5.20) se trouvent par exemple dans [6], [9], [27, Chapter IV], [28] et leurs bibliographies. Le résultat suivant de type « Gronwall » sera utilisé dans la suite.

**Lemme 5.2.5** Soit  $\tau \in ]0, +\infty[$  et soient  $f: [0, \tau] \rightarrow [0, +\infty[$  une fonction absolument continue et  $g: [0, \tau] \rightarrow [0, +\infty[$  et  $h: [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions de  $L^1([0, \tau]; \mathbb{R})$  telles que pour presque tout  $t \in ]0, \tau[$  on ait

$$\frac{1}{2} \dot{f}(t) \leq -h(t)f(t) + g(t)\sqrt{f(t)}. \quad (5.24)$$

Alors pour tout  $t \in [0, \tau]$  :

$$\sqrt{f(t)} \leq \sqrt{f(0)} \exp(-H(t)) + \int_0^t g(r) \exp(H(r) - H(t)) dr, \quad (5.25)$$

où  $(\forall t \in [0, \tau])$ ,  $H(t) = \int_0^t h(s) ds$ .

*Démonstration.* On prend  $\alpha = 1/2$  dans [27, Lemma IV.4.1].  $\square$

Le résultat qui suit est une extension directe du [2, Theorem 3.3], où l'on remplace la famille  $(\partial f(\cdot, \nu))_{\nu \in ]0, 1[}$  des sous-différentiels de fonctions fortement convexes par une famille  $(A_\nu)_{\nu \in ]0, 1[}$  d'opérateurs maximaux monotones et fortement monotones,  $\partial f$  par un opérateur maximal monotone  $A$  et  $\text{Argmin } f$  par  $A^{-1}0$ . Cette extension est déjà suggérée dans [20].

**Proposition 5.2.6** *Soit  $(A_\nu)_{\nu \in ]0, 1[}$  une famille d'opérateurs maximaux monotones de  $\mathcal{H}$  vers  $2^{\mathcal{H}}$  telle que pour tout  $\nu \in ]0, 1[$  il existe  $\alpha(\nu) \in ]0, +\infty[$  tel que  $A_\nu$  soit  $\alpha(\nu)$ -fortement monotone et la fonction  $\alpha: ]0, 1[ \rightarrow ]0, +\infty[$  soit continue. Supposons que, pour tout  $\nu \in ]0, 1[$ , il existe un unique  $x_\nu \in \mathcal{H}$  tel que  $0 \in A_\nu x_\nu$ . De plus, supposons que la fonction*

$$x: ]0, 1[ \rightarrow \mathcal{H} : \nu \mapsto x_\nu \quad (5.26)$$

soit absolument continue sur tout intervalle  $[\nu_1, \nu_2] \subset ]0, 1[$  et que

$$\left\| \frac{dx}{d\nu} \right\| \leq \frac{1}{\phi} \text{ p.p. sur } ]0, 1[, \quad (5.27)$$

où  $\phi: ]0, 1[ \rightarrow ]0, +\infty[$  est une fonction continue. Soit  $\varepsilon: [0, +\infty[ \rightarrow ]0, 1[$  une fonction strictement décroissante de classe  $C^1$  telle que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = 0, \quad \int_0^{+\infty} \alpha(\varepsilon(t)) dt = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\dot{\varepsilon}(t)}{\alpha(\varepsilon(t))\phi(\varepsilon(t))} = 0. \quad (5.28)$$

On suppose à présent que le problème

$$\begin{cases} 0 \in \dot{u}(t) + A_{\varepsilon(t)} u(t), \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (5.29)$$

admette une solution au sens de la Définition 5.2.3 (unique d'après la Remarque 5.2.4(ii)). Alors  $u(t) - x(\varepsilon(t)) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

*Démonstration.* Pour presque tout  $t \in ]0, +\infty[$  on a

$$0 \in A_{\varepsilon(t)} x(\varepsilon(t)) \quad \text{et} \quad -\dot{u}(t) \in A_{\varepsilon(t)} u(t). \quad (5.30)$$

Puisque les opérateurs  $(A_{\varepsilon(t)})_{t>0}$  sont fortement monotones, on obtient que, pour presque tout  $t \in ]0, +\infty[$ ,

$$\alpha(\varepsilon(t))\|x(\varepsilon(t)) - u(t)\|^2 \leq \langle \dot{u}(t) \mid x(\varepsilon(t)) - u(t) \rangle. \quad (5.31)$$

La fonction  $f: t \mapsto \|x(\varepsilon(t)) - u(t)\|^2$  est absolument continue sur tout intervalle  $[0, \tau]$ , où  $\tau \in ]0, +\infty[$ . En effet, pour tout  $\tau \in ]0, +\infty[$ , la fonction  $t \mapsto x(\varepsilon(t))$  est absolument continue sur  $[0, \tau]$  en tant que composée de la fonction absolument continue  $x$  et de la fonction  $\varepsilon$ , qui est Lipschitz sur  $[0, \tau]$ . D'après l'hypothèse sur  $u$ , on déduit que la fonction  $t \mapsto x(\varepsilon(t)) - u(t)$  est absolument continue sur  $[0, \tau]$ . Comme la fonction  $w \mapsto \|w\|^2$  est Lipschitz sur les bornés de  $\mathcal{H}$ , on conclut que  $f$  est absolument continue sur  $[0, \tau]$ .

Donc, en invoquant la Remarque 5.2.2, pour presque tout  $t \in ]0, +\infty[$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t) - x(\varepsilon(t))\|^2 &= \langle \dot{u}(t) \mid u(t) - x(\varepsilon(t)) \rangle \\ &\quad - \dot{\varepsilon}(t) \left\langle \frac{dx}{d\nu}(\varepsilon(t)) \mid u(t) - x(\varepsilon(t)) \right\rangle \\ &\leq -\alpha(\varepsilon(t)) \|u(t) - x(\varepsilon(t))\|^2 \\ &\quad - \dot{\varepsilon}(t) \left\| \frac{dx}{d\nu}(\varepsilon(t)) \right\| \|u(t) - x(\varepsilon(t))\|, \end{aligned} \quad (5.32)$$

où l'on a utilisé (5.31), Cauchy-Schwarz et la décroissance de la fonction  $\varepsilon$ . Les fonctions  $f, h: t \mapsto \alpha(\varepsilon(t))$  et  $g: t \mapsto -\dot{\varepsilon}(t) \left\| \frac{dx}{d\nu}(\varepsilon(t)) \right\| = \left\| \frac{d(x \circ \varepsilon)}{dt}(t) \right\|$  vérifient les hypothèses du Lemme 5.2.5. Ainsi, on obtient que pour tout  $t \in [0, +\infty[$ ,

$$\begin{aligned} &\|u(t) - x(\varepsilon(t))\| \\ &\leq \exp\left(-\int_0^t \alpha(\varepsilon(s)) ds\right) \|x(\varepsilon(0)) - u_0\| - \exp\left(-\int_0^t \alpha(\varepsilon(s)) ds\right) \\ &\quad \times \int_0^t \dot{\varepsilon}(r) \left\| \frac{dx}{d\nu}(\varepsilon(r)) \right\| \exp\left(\int_0^r \alpha(\varepsilon(s)) ds\right) dr \\ &\leq \exp\left(-\int_0^t \alpha(\varepsilon(s)) ds\right) \|x(\varepsilon(0)) - u_0\| - \exp\left(-\int_0^t \alpha(\varepsilon(s)) ds\right) \\ &\quad \times \int_0^t \frac{\dot{\varepsilon}(r)}{\phi(\varepsilon(r))} \exp\left(\int_0^r \alpha(\varepsilon(s)) ds\right) dr, \end{aligned} \quad (5.33)$$

où l'on a utilisé (5.27) pour déduire la deuxième inégalité. D'après (5.28)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp\left(\int_0^t \alpha(\varepsilon(s)) ds\right) = +\infty. \quad (5.34)$$

Donc, la règle de l'Hôpital [26, Théorème 5.13] entraîne que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^t \frac{\dot{\varepsilon}(r)}{\phi(\varepsilon(r))} \exp\left(\int_0^r \alpha(\varepsilon(s)) ds\right) dr}{\exp\left(\int_0^t \alpha(\varepsilon(s)) ds\right)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\dot{\varepsilon}(t)}{\alpha(\varepsilon(t))\phi(\varepsilon(t))}. \quad (5.35)$$

On en déduit, en passant à la limite quand  $t \rightarrow +\infty$  dans (5.33) et en utilisant (5.28), que  $\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \|u(t) - x(\varepsilon(t))\| = 0$ .  $\square$

**Remarque 5.2.7** Soit  $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ . En choisissant  $A = \partial f$ , (5.3) devient un problème de minimisation convexe, i.e.,

$$\text{trouver } x_0 \in \mathcal{H} \text{ tel que } (\forall y \in \mathcal{H}) f(x_0) \leq f(y). \quad (5.36)$$

On considère une famille de fonctions  $(f_\nu)_{\nu \in ]0,1[}$  dans  $\Gamma_0(\mathcal{H})$  telles que, pour tout  $\nu \in ]0,1[$ ,  $f_\nu$  soit  $\alpha(\nu)$ -fortement convexe et que  $\min_{y \in \mathcal{H}} f_\nu(y)$  soit atteint en un point unique  $x_\nu$ . Dans ce cadre, la Proposition 5.2.6 se réduit à [2, Theorem 3.3].

Pour démontrer le résultat principal de cette section, nous avons besoin du résultat suivant, qui est proche d'un résultat de [13].

**Lemme 5.2.8** Soit  $\varepsilon: [0, +\infty[ \rightarrow ]0,1[$  une fonction strictement décroissante de classe  $C^1$  telle que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = 0$ . Alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\dot{\varepsilon}(t)}{\varepsilon(t)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^{+\infty} \varepsilon(t) dt = +\infty. \quad (5.37)$$

*Démonstration.* Montrons que  $\exp\left(\int_0^t \varepsilon(s) ds\right) \rightarrow +\infty$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . Considérons la fonction

$$\varphi: [0, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[ : t \mapsto \varepsilon(t) \exp\left(\int_0^t \varepsilon(s) ds\right). \quad (5.38)$$

Alors,

$$(\forall t \in [0, +\infty[) \quad \dot{\varphi}(t) = \varepsilon(t)^2 \exp\left(\int_0^t \varepsilon(s) ds\right) \left(1 + \frac{\dot{\varepsilon}(t)}{\varepsilon(t)^2}\right). \quad (5.39)$$

Il existe donc  $t_0 \in ]0, +\infty[$  tel que  $(\forall t \in [t_0, +\infty[) \dot{\varphi}(t) > 0$ . Donc

$$(\forall t \in [t_0, +\infty[) \quad \varphi(t) > \varphi(t_0). \quad (5.40)$$



Par conséquent,

$$(\forall t \in [t_0, +\infty[) \quad \exp\left(\int_0^t \varepsilon(s) ds\right) \geq \frac{\varphi(t_0)}{\varepsilon(t)}. \quad (5.41)$$

En utilisant le fait que  $\varepsilon(t) \downarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ , on en déduit que  $\exp\left(\int_0^t \varepsilon(s) ds\right) \rightarrow +\infty$  quand  $t \rightarrow +\infty$  et donc que  $\int_0^t \varepsilon(s) ds \rightarrow +\infty$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .  $\square$

**Théorème 5.2.9** *Soit  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  un opérateur maximal monotone tel que  $C = A^{-1}0 \neq \emptyset$  et soit  $V: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un opérateur maximal monotone,  $\rho$ -fortement monotone et borné sur tout borné de  $\mathcal{H}$ . Soit  $\varepsilon: ]0, +\infty[ \rightarrow ]0, 1[$  une fonction strictement décroissante de classe  $C^1$  telle que*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\dot{\varepsilon}(t)}{\varepsilon(t)^2} = 0. \quad (5.42)$$

On suppose à présent que le problème

$$\begin{cases} 0 \in \dot{u}(t) + Au(t) + \varepsilon(t)Vu(t), \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (5.43)$$

admette une solution au sens de la Définition 5.2.3 (unique d'après la Remarque 5.2.4(ii)). Alors, il existe un point unique  $x_0 \in C$  tel que  $0 \in N_C x_0 + Vx_0$  et  $u(t) \rightarrow x_0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

*Démonstration.* D'après le Corollaire 3.3.3,  $x_0$  est défini de manière unique et, pour tout  $\nu \in ]0, 1[$ , il existe un unique  $x_\nu \in \mathcal{H}$  tel que  $0 \in Ax_\nu + \nu Vx_\nu$ . De plus,  $x_\nu \rightarrow x_0$  quand  $\nu \downarrow 0$ . Alors, en considérant la fonction

$$x: ]0, 1[ \rightarrow \mathcal{H}: \nu \mapsto x_\nu, \quad (5.44)$$

on déduit d'après (5.42), que  $x(\varepsilon(t)) \rightarrow x_0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . Ainsi, la conclusion de la Proposition 5.2.6 conduira à  $u(t) \rightarrow x_0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . Il reste donc à vérifier que les hypothèses de la Proposition 5.2.6 sont satisfaites. Posons ( $\forall \nu \in ]0, 1[$ )  $A_\nu = A + \nu V$  et  $\alpha(\nu) = \rho\nu$ . Il suffit de montrer que  $x$  est absolument continue sur chaque intervalle  $[\nu_1, \nu_2]$  de  $]0, 1[$  et de trouver une fonction  $\phi: ]0, 1[ \rightarrow ]0, +\infty[$  qui vérifie (5.27).

Il est facile de vérifier que l'inclusion  $0 \in Ax_\nu + \nu Vx_\nu$  se réécrit  $x_\nu = J_A(x_\nu - \nu Vx_\nu)$ . Alors, en utilisant le fait que  $J_A$  est une contraction ferme, i.e.,

$$(\forall (v, w) \in \mathcal{H}^2) \quad \|J_A v - J_A w\|^2 \leq \langle J_A v - J_A w \mid v - w \rangle, \quad (5.45)$$

on obtient

$$(\forall (\lambda, \mu) \in ]0, 1[^2) \quad \|x_\lambda - x_\mu\|^2 \leq \langle x_\lambda - x_\mu \mid x_\lambda - x_\mu - \lambda Vx_\lambda + \mu Vx_\mu \rangle, \quad (5.46)$$

d'où,

$$\begin{aligned}
(\forall (\lambda, \mu) \in ]0, 1[^2) \quad 0 &\leq \langle x_\lambda - x_\mu \mid \mu V x_\mu - \lambda V x_\lambda \rangle \\
&= \langle x_\lambda - x_\mu \mid (\mu - \lambda) V x_\mu + \lambda (V x_\mu - V x_\lambda) \rangle \\
&\leq |\mu - \lambda| \|V x_\mu\| \|x_\lambda - x_\mu\| \\
&\quad + \lambda \langle x_\lambda - x_\mu \mid V x_\mu - V x_\lambda \rangle.
\end{aligned} \tag{5.47}$$

D'après nos hypothèses,  $V$  est borné sur tout borné de  $\mathcal{H}$ . Donc,  $\gamma = \sup_{\mu \in ]0, 1[} \|V x_\mu\| < +\infty$  et, en invoquant la monotonie forte de  $V$ , (5.47) nous conduit à

$$(\forall (\lambda, \mu) \in ]0, 1[^2) \quad 0 \leq \gamma |\mu - \lambda| \|x_\lambda - x_\mu\| - \rho \lambda \|x_\lambda - x_\mu\|^2, \tag{5.48}$$

soit encore

$$(\forall (\lambda, \mu) \in ]0, 1[^2) \quad \|x_\lambda - x_\mu\| \leq \frac{\gamma |\lambda - \mu|}{\rho \lambda}. \tag{5.49}$$

On en déduit que la fonction  $x$  est Lipschitz sur chaque intervalle  $[\nu_1, \nu_2]$  de  $]0, 1[$  et que (5.27) est vérifiée avec  $\phi: ]0, 1[ \rightarrow ]0, +\infty[: \nu \mapsto (\rho/\gamma)\nu$ .  $\square$

**Remarque 5.2.10** Des résultats très proches du Théorème 5.2.9 dans le cas particulier  $V = \text{Id} - a$  ( $a \in \mathcal{H}$  fixé) ont été obtenus dans [9] et [19], dans certains espaces de Banach.

Prenons  $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$  et posons  $A = \partial f$ ,  $V = \text{Id}$  et  $\varepsilon: t \mapsto (t + \tau)^{-a}$ , où  $a \in ]0, 1[$  et  $\tau \in ]0, +\infty[$ . Alors, le Théorème 5.2.9 se réduit au corollaire suivant qui correspond à [2, Proposition 3.4].

**Corollaire 5.2.11** *Soit  $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$  telle que  $\text{Argmin } f \neq \emptyset$ . Soient  $a \in ]0, 1[$  et  $u_0 \in \text{dom } f$ . Supposons que le problème*

$$\begin{cases} 0 \in \dot{u}(t) + \partial f(u(t)) + (t + \tau)^{-a} u(t), \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{5.50}$$

*admette une solution au sens de la Définition 5.2.3 (unique d'après la Remarque 5.2.4(ii)). Alors  $u(t)$  converge fortement quand  $t \rightarrow +\infty$  vers le minimiseur de  $f$  de norme minimale.*

Posons  $A = \text{Id} - T$  et  $V = \text{Id} - Q$ , où  $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est une contraction et  $Q: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est une contraction stricte. Dans ce cas particulier, le Théorème 5.2.9 implique la convergence forte des trajectoires d'un système dynamique continu du premier ordre vers un point fixe identifiable de  $T$ . Ce système peut être associé à la courbe d'approximation définie dans (3.70), i.e.,

$$(\forall \varepsilon \in ]0, 1[) \quad x_\varepsilon = \frac{1}{1 + \varepsilon} T x_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} Q x_\varepsilon. \tag{5.51}$$

**Corollaire 5.2.12** Soit  $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  une contraction telle que  $\text{Fix}T \neq \emptyset$  et soit  $Q: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  une contraction stricte. Soit  $\varepsilon: [0, +\infty[ \rightarrow ]0, 1[$  une fonction strictement décroissante de classe  $C^1$  qui vérifie (5.42). Supposons que le problème

$$\begin{cases} \frac{1}{1 + \varepsilon(t)} \dot{u}(t) + u(t) = \frac{1}{1 + \varepsilon(t)} Tu(t) + \frac{\varepsilon(t)}{1 + \varepsilon(t)} Qu(t), \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (5.52)$$

admette une solution au sens de la Définition 5.2.3 (unique d'après la Remarque 5.2.4(ii)). Alors  $u(t)$  converge fortement quand  $t \rightarrow +\infty$  vers le point fixe  $x_0$  de  $T$  qui vérifie  $x_0 = P_{\text{Fix}T}(Qx_0)$ .

### 5.3 Systèmes dynamiques discrets

Dans cette section on montre la convergence des trajectoires des systèmes dynamiques discrets (5.18) et (5.19) vers la solution  $x_0$  de (5.14). Les deux résultats suivants sont à rapprocher de [24, Theorem 1] et de [24, Theorem 2].

**Proposition 5.3.1** Soit  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  un opérateur maximal monotone tel que  $C = A^{-1}0 \neq \emptyset$  et soit  $V: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un opérateur maximal monotone et  $\rho$ -fortement monotone. Alors il existe un point unique  $x_0 \in \mathcal{H}$  tel que  $0 \in N_C x_0 + Vx_0$ . Soient  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites dans  $]0, +\infty[$  telles que

$$\beta_n \downarrow 0, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \beta_n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\beta_{n+1} - \beta_n}{\alpha_{n+1} \beta_{n+1}^2} = 0. \quad (5.53)$$

Étant donnés  $u_0 \in \mathcal{H}$  et  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $\mathcal{H}$ , on considère la méthode implicite

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} \in u_n - \alpha_n (Au_{n+1} + \beta_n V u_{n+1}) + a_n. \quad (5.54)$$

Si  $V$  est borné sur tout borné de  $\mathcal{H}$  et si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|a_n\| < +\infty$  ou  $a_n / (\alpha_n \beta_n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge fortement vers  $x_0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

*Démonstration.* D'après le Corollaire 3.3.3,  $x_0$  est défini de manière unique et, pour tout  $\nu \in ]0, 1[$ , il existe un unique  $x_\nu \in \mathcal{H}$  tel que  $0 \in Ax_\nu + \nu Vx_\nu$ . De plus,  $x_\nu \rightarrow x_0$  quand  $\nu \downarrow 0$ . En utilisant [24, Proposition 2], la limite forte de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  quand  $n \rightarrow +\infty$  existe et est égale à la limite forte de  $(x_\nu)_{\nu \in ]0, 1[}$  quand  $\nu \downarrow 0$ . On en déduit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge fortement vers  $x_0$ .  $\square$

**Remarque 5.3.2** Si on prend dans (5.54)  $\beta_n \equiv 0$  et  $a_n \equiv 0$ , on obtient alors l'algorithme du point proximal

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = J_{\alpha_n A} u_n. \quad (5.55)$$

Sous des hypothèses convenables sur  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , la convergence faible de (5.55) vers un zéro, non identifiable en général, de  $A$ , a été démontrée dans [8] et [25]. En s'appuyant sur les résultats de [3], [15] a donné un exemple de fonction  $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$  pour laquelle, si  $A = \partial f$ , la suite définie dans (5.55) ne converge pas fortement vers un minimiseur de  $f$ .

La proposition précédente peut être utilisée pour établir la convergence d'un schéma explicite.

**Corollaire 5.3.3** *Soit  $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un opérateur maximal monotone et lipschitzien tel que  $C = A^{-1}0 \neq \emptyset$  et soit  $V: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un opérateur maximal monotone,  $\rho$ -fortement monotone et uniformément continu. Alors il existe un point unique  $x_0 \in \mathcal{H}$  tel que  $0 \in N_C x_0 + Vx_0$ . Soient par ailleurs  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites dans  $]0, +\infty[$  telles que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_n(1 + \beta_n) \leq 1$  et*

$$\beta_n \downarrow 0, \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \beta_n = +\infty, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\beta_{n+1} - \beta_n}{\alpha_{n+1} \beta_{n+1}^2} = 0. \quad (5.56)$$

Étant donné  $v_0 \in \mathcal{H}$ , on considère la méthode explicite

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_{n+1} = v_n - \alpha_n(Av_n + \beta_n Vv_n). \quad (5.57)$$

Si  $V$  est borné sur tout borné de  $\mathcal{H}$ , et la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, alors  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge fortement vers  $x_0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

*Démonstration.* Posons

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n = \alpha_n(Av_{n+1} + \beta_n Vv_{n+1}) - \alpha_n(Av_n + \beta_n Vv_n). \quad (5.58)$$

Alors, la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie dans (5.57), satisfait

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_{n+1} = v_n - \alpha_n(Av_{n+1} + \beta_n Vv_{n+1}) + a_n. \quad (5.59)$$

Il suffit de montrer que  $a_n/(\alpha_n \beta_n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Ainsi, les hypothèses de la Proposition 5.3.1 seront vérifiées et on en déduira que  $v_n \rightarrow x_0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . D'après (5.58),

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{a_n}{\alpha_n \beta_n} = \frac{1}{\beta_n}(Av_{n+1} - Av_n) + (Vv_{n+1} - Vv_n). \quad (5.60)$$

Soit  $\theta \in ]0, +\infty[$  la constante de Lipschitz de  $A$ . Alors, d'après (5.57), on obtient

$$\begin{aligned} (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \|Av_{n+1} - Av_n\| &\leq \theta \|v_{n+1} - v_n\| \\ &= \theta \alpha_n \|Av_n + \beta_n Vv_n\| \\ &\leq \theta \gamma \alpha_n, \end{aligned} \quad (5.61)$$

où  $\gamma = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|Av_n + \beta_n Vv_n\| < +\infty$ , car les suites  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont bornées et les opérateurs  $A$  et  $V$  sont bornés sur les bornés de  $\mathcal{H}$ . En utilisant le fait que  $\alpha_n/\beta_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , on déduit de (5.61) que  $1/\beta_n(Av_{n+1} - Av_n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . De plus, (5.57) conduit à  $(\forall n \in \mathbb{N}) \|v_{n+1} - v_n\| \leq \gamma\alpha_n$ , d'où,  $v_{n+1} - v_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Par la continuité uniforme de  $V$ , on déduit que  $Vv_{n+1} - Vv_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . En conclusion, d'après (5.60), on obtient que  $a_n/(\alpha_n\beta_n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . En appliquant la Proposition 5.3.1, on conclut que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge fortement vers  $x_0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .  $\square$

**Remarque 5.3.4** Les conditions imposées dans le Corollaire 5.3.3 aux suites  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont vérifiées si, par exemple,

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \alpha_n = \frac{1}{(n + n_0)^a} \quad \text{et} \quad \beta_n = \frac{1}{(n + n_0)^b}, \quad (5.62)$$

où  $n_0 \in \mathbb{N}$  est suffisamment grand et  $(a, b) \in ]0, 1[^2$  vérifient  $b < a$  et  $a + b < 1$ .

Si  $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est une contraction et  $Q: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  une contraction stricte, alors les opérateurs  $A = \text{Id} - T$  et  $V = \text{Id} - Q$  vérifient les hypothèses du Corollaire 5.3.3. On obtient alors le résultat suivant sur la construction d'un point fixe particulier de  $T$ . Il est à comparer au [23, Theorem 2.2].

**Corollaire 5.3.5** Soit  $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  une contraction telle que  $\text{Fix}T \neq \emptyset$  et soit  $Q: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  une contraction stricte. Soient  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites dans  $]0, +\infty[$  telles que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_n(1 + \beta_n) \leq 1$  et

$$\beta_n \downarrow 0, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \beta_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\beta_{n+1} - \beta_n}{\alpha_{n+1} \beta_{n+1}^2} = 0. \quad (5.63)$$

Étant donné  $v_0 \in \mathcal{H}$ , on pose

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_{n+1} = \alpha_n T v_n + \alpha_n \beta_n Q v_n + (1 - \alpha_n - \alpha_n \beta_n) v_n. \quad (5.64)$$

Alors, il existe un point unique  $x_0 \in \mathcal{H}$  tel que  $x_0 = P_{\text{Fix}T}(Qx_0)$ , et de plus, si la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, alors elle converge fortement vers  $x_0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

*Démonstration.* On pose  $A = \text{Id} - T$  et  $V = \text{Id} - Q$ . On vérifie aisément que  $A$  et  $V$  satisfont aux conditions imposées dans le Corollaire 5.3.3 et que, dans ce contexte, (5.57) se réduit à (5.64).  $\square$

## 5.4 Bibliographie

- [1] Ya. I. Alber : A new approach to investigation of evolution differential equations in Banach spaces, *Nonlinear Anal.* 23 (1994) 1115–1134.

- [2] H. Attouch and R. Cominetti : A dynamical approach to convex minimization coupling approximation with the steepest descent method, *J. Differential Equations* 128 (1996) 519–540.
- [3] J.-B. Baillon : Un exemple concernant le comportement asymptotique de la solution du problème  $du/dt + \partial\varphi(u) \ni 0$ , *J. Funct. Anal.* 28 (1978) 369–376.
- [4] H. H. Bauschke, J. V. Burke, F. R. Deutsch, H. S. Hundal, and J. D. Vanderwerff : A new proximal point iteration that converges weakly but not in norm, *Proc. Amer. Math. Soc.* 133 (2005) 1829–1835.
- [5] H. H. Bauschke and P. L. Combettes, A weak-to-strong convergence principle for Fejér-monotone methods in Hilbert spaces, *Math. Oper. Res.* 26 (2001) 248–264.
- [6] W. Bian and J. R. L. Webb : Solutions of nonlinear evolution inclusions, *Nonlinear Anal.* 37 (1999) 915–932.
- [7] H. Brézis : *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, New York, North-Holland/Elsevier (1973).
- [8] H. Brézis and P.-L. Lions : Produits infinis de résolvantes, *Israel J. Math.* 29 (1978) 329–345.
- [9] F. E. Browder : *Nonlinear Operators and Nonlinear Equations of Evolution in Banach Spaces*, Proc. Symp. Pure Math. Vol. 18 (Part 2), Amer. Math. Soc., Providence, RI (1976).
- [10] R. E. Bruck Jr. : A strongly convergent iterative solution of  $0 \in U(x)$  for a maximal monotone operator  $U$  in Hilbert space, *J. Math. Anal. Appl.* 48 (1974) 114–126.
- [11] R. E. Bruck Jr. : Asymptotic convergence of nonlinear contraction semigroups in Hilbert space, *J. Funct. Anal.* 18 (1975) 15–26.
- [12] C. E. Chidume and H. Zegeye : Approximation of solutions of nonlinear equations of Hammerstein type in Hilbert space, *Proc. Amer. Math. Soc.* 133 (2005) 851–858.
- [13] R. Cominetti and O. Alemany : Steepest descent evolution equations : asymptotic behavior of solutions and rate of convergence, *Trans. Amer. Math. Soc.* 351 (1999) 4847–4860.
- [14] M. G. Crandall and A. Pazy : Semi-groups of nonlinear contractions and dissipative sets, *J. Funct. Anal.* 3 (1969) 376–418.
- [15] O. Güler : On the convergence of the proximal point algorithm for convex minimization, *SIAM J. Control Optim.* 29 (1991) 403–419.
- [16] O. Güler : Convergence rate estimates for the gradient differential inclusion, *Optim. Methods Softw.* 20 (2005) 729–735.
- [17] B. Halpern : Fixed points of nonexpanding maps, *Bull. Amer. Math. Soc.* 73 (1967) 957–961.

- [18] A. Haraux : Nonlinear Evolution Equations – Global Behavior of Solutions, Lecture Notes in Mathematics 841, Springer-Verlag, Berlin (1981).
- [19] M. M. Israel and S. Reich : Asymptotic behavior of solutions of a nonlinear evolution equation, J. Math. Anal. Appl. 83 (1981) 43–53.
- [20] B. Lemaire : Staircase parameterization in dynamical selection, Set-Valued Anal. 9 (2001) 111–121.
- [21] P.-L. Lions : Approximation de points fixes de contractions, C. R. Acad. Sci. Paris 284 Sér. A (1977) 1357–1359.
- [22] G. Moroşanu : Nonlinear Evolution Equations and Applications, Mathematics and its Applications (East European Series) Vol. 26, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, Editura Academiei, Bucharest (1988).
- [23] A. Moudafi : Viscosity approximation methods for fixed-points problems, J. Math. Anal. Appl. 241 (2000) 46–55.
- [24] S. Reich : Constructing zeros of accretive operators II, Appl. Anal. 9 (1979) 159–163.
- [25] R. T. Rockafellar : Monotone operators and the proximal point algorithm, SIAM J. Control Optim. 14 (1976) 877–898.
- [26] W. Rudin : Principes d’Analyse Mathématique, Ediscience International, Paris (1995).
- [27] R. E. Showalter : Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations, Mathematical Surveys and Monographs Vol. 49, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1997).
- [28] D. Tătaru : Time dependent  $m$ -accretive operators generating differential evolutions, Differ. Integral Equ. 4 (1991) 137–150.

# Chapitre 6

## Systemes dynamiques discrets pour la selection de points fixes

### 6.1 Description et resultats principaux

Le probleme principal traite dans ce chapitre est de selectionner un point fixe commun a une famille de contractions. Au Chapitre 3 (Sections 3.2.2 et 3.2.4), nous avons propose des courbes d'approximation qui convergent fortement vers un tel point. Le but est a present d'analyser le comportement asymptotique de methodes iteratives associees a ces courbes afin d'obtenir des algorithmes pratiques. Nous allons obtenir la convergence forte de deux types d'iterations; cette analyse nous permettra d'englober et d'etendre de nombreux resultats existants. Des applications aux problemes d'equilibre, d'inclusion monotone et de restauration d'une image numerique seront deduites en mettant ces problemes sous la forme d'un probleme de point fixe.

Il est a remarquer que la convergence des trajectoires des systemes dynamiques discrets proposes sera demontree directement, sans faire appel aux resultats de convergence des trajectoires des courbes d'approximation associees (methode utilisee au Chapitre 5).

Le resultat principal de ce chapitre est le suivant.

**Theoreme 6.1.1** *Soient  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux familles de quasi-contractions de  $\mathcal{H}$  vers  $\mathcal{H}$  telles que*

$$\emptyset \neq C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Fix } T_n \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Fix } S_n. \quad (6.1)$$

*Soient  $Q: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  une contraction stricte et  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $]0, 1[$  telle que*



$\alpha_n \rightarrow 0$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = +\infty$ . Étant donné  $x_0 \in \mathcal{H}$ , on pose

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = \alpha_n Q(S_n x_n) + (1 - \alpha_n) T_n x_n. \quad (6.2)$$

Si, pour toute sous-suite  $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on a

$$\begin{cases} x_{k_n} \rightarrow x \\ x_{n+1} - T_n x_n \rightarrow 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x \in C,$$

alors la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge fortement, quand  $n \rightarrow +\infty$ , vers l'unique point  $\bar{x} \in C$  vérifiant  $\bar{x} = P_C(Q\bar{x})$ .

Remarquons que l'itération définie dans (6.2) correspond à la courbe d'approximation pour résoudre  $\bar{x} = P_C(Q\bar{x})$ , introduite au Chapitre 3 dans (3.15).

La conclusion du Théorème 6.1.1 reste vraie si on considère deux familles de contractions  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et, à la place de (6.2), on emploie l'algorithme

$$y_0 \in \mathcal{H} \text{ est fixé et } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad y_{n+1} = T_{n+1}(\alpha_n Q(S_n y_n) + (1 - \alpha_n) y_n). \quad (6.3)$$

Cette méthode itérative peut être associée à la courbe d'approximation (3.4) dont la convergence vers  $\bar{x} = P_C(Q\bar{x})$  a été établie dans le Théorème 3.1.2.

Dans la Section 6.2.3, on présente diverses applications du Théorème 6.1.1. On obtient ainsi des résultats de convergence vers un point  $\bar{x} \in C$  vérifiant  $\bar{x} = P_C(Q\bar{x})$ , où  $C$  est l'ensemble des solutions (qui sera précisé dans chaque cas) et  $Q: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est une contraction stricte.

Donnons-nous deux familles finies de contractions  $(R_j)_{1 \leq j \leq m}$  et  $(S_j)_{1 \leq j \leq m}$  de  $\mathcal{H}$  vers  $\mathcal{H}$  telles que  $C = \bigcap_{j=1}^m \text{Fix } R_j \subset \bigcap_{j=1}^m \text{Fix } S_j$  et

$$\emptyset \neq C = \text{Fix}(R_m \dots R_1) = \text{Fix}(R_1 R_m \dots R_2) = \dots = \text{Fix}(R_{m-1} \dots R_1 R_m). \quad (6.4)$$

Dans ces conditions, on a le résultat suivant.

**Corollaire 6.1.2** *Soit  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $]0, 1[$  telle que  $\alpha_n \rightarrow 0$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = +\infty$ . Soient  $x_0 \in \mathcal{H}$  et  $y_0 = R_m x_0$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit*

$$x_{n+1} = \alpha_n Q S_{i(n)} x_n + (1 - \alpha_n) R_{i(n)} x_n \quad (6.5)$$

et

$$y_{n+1} = R_{i(n+1)} (\alpha_n Q S_{i(n)} y_n + (1 - \alpha_n) y_n), \quad (6.6)$$

où  $i(n) = ((m - n - 1) \bmod m) + 1$ . Si  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie l'une des conditions suivantes :

- (i)  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_{n+m} - \alpha_n| < +\infty$ ,

- (ii)  $\alpha_{n+m}/\alpha_n \rightarrow 1$ ,
- (iii)  $(\alpha_{n+m} - \alpha_n)/\alpha_{n+m}^2 \rightarrow 0$ ,
- (iv)  $1/\alpha_{n+m} - 1/\alpha_n \rightarrow 0$ ,

alors  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent fortement vers  $\bar{x} = P_C(Q\bar{x})$ .

Ce corollaire nous permet de retrouver des résultats classiques sur la convergence des itérations de type Krasnosel'skiï-Mann ou la convergence des méthodes du gradient et du gradient projeté vers les minima de certaines fonctions convexes (voir la Remarque 6.2.10 pour plus de détails). En guise d'illustration, voici une conséquence immédiate du Corollaire 6.1.2, portant sur la convergence d'un algorithme vers la solution d'un problème de minimisation sous contrainte du type point fixe.

Soit  $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe et différentiable telle que  $\nabla f$  soit  $\delta$ -fortement monotone et  $\beta$ -Lipschitz, où  $\beta \geq \delta > 0$ . D'après l'Exemple 3.2.4(iii), l'opérateur  $Q = \text{Id} - \gamma \nabla f$  est une contraction stricte pour tout  $\gamma \in ]0, 2/\beta[$ . Alors, étant donné un point  $x_0 \in \mathcal{H}$  et une contraction  $R: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  admettant des points fixes, on pose

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = \alpha_n(\text{Id} - \gamma \nabla f)x_n + (1 - \alpha_n)Rx_n, \quad (6.7)$$

où  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite dans  $]0, 1[$  qui vérifie  $\alpha_n \rightarrow 0$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = +\infty$  et l'une des conditions (i)–(iv) du Corollaire 6.1.2, avec  $m = 1$ . En prenant  $S_j \equiv \text{Id}$  et  $R_j \equiv R$  dans (6.5), on obtient, d'après le Corollaire 6.1.2, la convergence forte de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie dans (6.7) vers  $\bar{x} = P_{\text{Fix } R}(\bar{x} - \gamma \nabla f(\bar{x}))$ , i.e., le minimiseur de  $f$  sur l'ensemble  $\text{Fix } R$ .

La deuxième partie de la Section 6.2.3 porte sur le problème de trouver un zéro particulier d'un opérateur maximal monotone  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$ , plus précisément, trouver  $\bar{x} \in C = A^{-1}0$  tel que  $\bar{x} = P_C(Q\bar{x})$  (l'ensemble  $C$  est supposé non-vidé). Le résultat suivant est une conséquence simple du Théorème 6.1.1.

**Corollaire 6.1.3** *Soient  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  un opérateur maximal monotone et  $Q: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  une contraction stricte. Soit  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $]0, +\infty[$  telle que  $\gamma_n \rightarrow +\infty$  et soit  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $]0, 1[$  telle que  $\alpha_n \rightarrow 0$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = +\infty$ . Soient  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $[0, 2]$  et  $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $]0, +\infty[$ . Étant donné  $x_0 \in \mathcal{H}$  et  $y_0 = J_{\gamma_0 A}x_0$ , on pose*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = \alpha_n Q(x_n + \mu_n(J_{\rho_n A}x_n - x_n)) + (1 - \alpha_n)J_{\gamma_n A}x_n \quad (6.8)$$

et

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad y_{n+1} = J_{\gamma_{n+1} A}(\alpha_n Q(y_n + \mu_n(J_{\rho_n A}y_n - y_n)) + (1 - \alpha_n)y_n). \quad (6.9)$$

Alors  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent fortement vers  $\bar{x} = P_{A^{-1}0}(Q\bar{x})$ .

Si  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  peut être décomposé sous la forme  $A = A_1 + A_2$ , où  $A_1, A_2: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  sont des opérateurs maximaux monotones tels que  $\beta A_2$  soit une contraction ferme pour  $\beta \in ]0, +\infty[$ , on obtient la convergence de deux itérations qui utilisent séparément  $A_2$  et la résolvante de  $A_1$  (méthode à pas explicite-implicite).

**Corollaire 6.1.4** *Soient  $A_1: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  et  $A_2: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  des opérateurs maximaux monotones tels que  $\beta A_2$  soit une contraction ferme pour  $\beta \in ]0, +\infty[$  et soit  $Q: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  une contraction stricte. Soit  $\gamma \in ]0, 2\beta]$  et soit  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $]0, 1[$  telle que  $\alpha_n \rightarrow 0$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = +\infty$ . Étant donnés  $x_0 \in \mathcal{H}$  et  $y_0 = J_{\gamma A_1}(x_0 - \gamma A_2 x_0)$ , on pose*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = \alpha_n Q x_n + (1 - \alpha_n) J_{\gamma A_1}(x_n - \gamma A_2 x_n) \quad (6.10)$$

et

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad y_{n+1} = J_{\gamma A_1} \left( \alpha_n Q y_n + (1 - \alpha_n) y_n - \gamma A_2 (\alpha_n Q y_n + (1 - \alpha_n) y_n) \right). \quad (6.11)$$

Si  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie l'une des conditions suivantes :

- (i)  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < +\infty$ ,
- (ii)  $\alpha_{n+1}/\alpha_n \rightarrow 1$ ,
- (iii)  $(\alpha_{n+1} - \alpha_n)/\alpha_{n+1}^2 \rightarrow 0$ ,
- (iv)  $1/\alpha_{n+1} - 1/\alpha_n \rightarrow 0$ ,

alors  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent fortement vers  $\bar{x} = P_{(A_1 + A_2)^{-1}0}(Q\bar{x})$ .

Des méthodes itératives analogues à celles présentées dans le Corollaire 6.1.3 peuvent être déduites pour résoudre un problème d'équilibre. Donnons-nous un convexe fermé non-vidé  $K$  de  $\mathcal{H}$  et une bifonction  $F: K^2 \rightarrow \mathbb{R}$  qui satisfait à la Condition 2.1.1. L'ensemble des solutions  $C$  est, dans ce cas, l'ensemble des points  $x \in K$  tels que  $(\forall y \in K) F(x, y) \geq 0$ . Alors on sait que l'on peut définir  $J_F$ , la résolvante d'une telle bifonction  $F$  et, de plus, que  $\text{Fix } J_F = C$  (cf. Chapitre 2). Dans ce contexte, on peut réécrire le Corollaire 6.1.3 en remplaçant l'opérateur maximal monotone  $A$  par la bifonction  $F$  et les résolvantes de  $A$  par celles de  $F$ . On obtient ainsi la convergence forte de deux itérations de type (6.8) et (6.9) vers un point particulier  $\bar{x}$  de  $C$ .

Dans la Section 6.3 on étudie une version perturbée de l'itération (6.2). Plus précisément, à la place de (6.2), on considère l'algorithme

$$x_0 \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = \alpha_n Q(S_n x_n + d_n) + (1 - \alpha_n)(T_n x_n + e_n), \quad (6.12)$$

où  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont deux suites dans  $\mathcal{H}$ . Alors, en supposant de plus la sommabilité absolue des suites d'erreurs  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , la conclusion du Théorème 6.1.1 reste vraie.

Dans la Section 6.4 on applique le résultat sur la convergence de l'algorithme défini dans (6.7) au problème de la restauration d'une image numérique. Plus précisément, dans l'esprit de l'approche ensembliste [10], on cherche à restaurer une image à partir de contraintes disponibles que l'on décompose en contraintes dures (issues par exemple de connaissances a priori fiables) et contraintes douces (dues par exemple aux données observées incertaines) [16]. L'objectif sera alors de trouver l'image  $\bar{x} \in \mathcal{H}$  ( $\mathcal{H}$  sera l'espace des images) qui satisfait aux contraintes dures  $(S_i)_{i \in I}$  et qui viole le moins les contraintes douces. Ce problème peut être mis sous la forme abstraite suivante :

$$\text{trouver } \bar{x} \in \bigcap_{i \in I} S_i \quad \text{tel que} \quad f(\bar{x}) = \min f \left( \bigcap_{i \in I} S_i \right), \quad (6.13)$$

où  $(S_i)_{i \in I}$  sont des sous-ensembles convexes fermés de  $\mathcal{H}$  représentant les contraintes dures et  $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$  une fonction pénalisant la violation des contraintes douces. Pour résoudre le problème (6.13), on considérera un algorithme de type (6.7). Dans la Section 6.4.3, nous mettons en œuvre cet algorithme dans un problème concret de restauration d'images floues et bruitées.

## 6.2 Article en anglais

### ITERATIVE SELECTION METHODS FOR COMMON FIXED POINT PROBLEMS<sup>1</sup>

**Abstract :** Many problems encountered in applied mathematics can be recast as the problem of selecting a particular common fixed point of a countable family of quasi-nonexpansive operators in a Hilbert space. We propose two iterative methods to solve such problems. Our convergence analysis is shown to cover a variety of existing results in this area. Applications to solving monotone inclusion and equilibrium problems are considered.

#### 6.2.1 Introduction

Let  $\mathcal{H}$  be a real Hilbert space and let  $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  be a nonexpansive operator such that its fixed points set,  $\text{Fix}T$ , is not empty. A classical iterative method to find the fixed point of  $T$  of minimal norm is

$$\text{fix } x_0 \in \mathcal{H} \quad \text{and set} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = (1 - \alpha_n)Tx_n, \quad (6.14)$$

---

<sup>1</sup>S. A. Hirstoaga, "Iterative selection methods for common fixed point problems", à paraître dans *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. Soumis le 14 juillet 2005 et accepté le 20 décembre 2005.

where  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is in  $]0, 1[$ . The strong convergence of this iteration, under suitable assumptions on  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , is shown in [22]. Since then, various extensions of this result have been proposed. Thus, in [25] and [32], given  $a \in \mathcal{H}$ , the method (6.14) takes the form

$$\text{fix } x_0 \in \mathcal{H} \text{ and set } (\forall n \in \mathbb{N}) \ x_{n+1} = \alpha_n a + (1 - \alpha_n) T x_n, \quad (6.15)$$

with new assumptions on the sequence  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . The convergence properties of (6.15), for particular choices of the operator  $T$ , is analyzed in [11] and [25] and some applications to concrete problems are considered in [14]. In [4], (6.15) is extended to an iterative scheme which employs a finite family of operators activated cyclically. In [19] and [33], (6.15) is generalized to

$$\text{fix } x_0 \in \mathcal{H} \text{ and set } (\forall n \in \mathbb{N}) \ x_{n+1} = T x_n - \alpha_n \gamma A(T x_n), \quad (6.16)$$

for some  $\gamma \in ]0, +\infty[$  and some suitable strongly monotone operator  $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ . Using a different approach, [26] extended (6.15) to

$$\text{fix } x_0 \in \mathcal{H} \text{ and set } (\forall n \in \mathbb{N}) \ x_{n+1} = \alpha_n Q x_n + (1 - \alpha_n) T x_n, \quad (6.17)$$

where  $Q: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  is a strict contraction.

The goal of this paper is to bring together and extend the above results by investigating the convergence of the iteration

$$\text{fix } x_0 \in \mathcal{H} \text{ and set } (\forall n \in \mathbb{N}) \ x_{n+1} = \alpha_n Q(S_n x_n) + (1 - \alpha_n) T_n x_n, \quad (6.18)$$

where  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is in  $]0, 1[$ ,  $Q: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  is a strict contraction, and  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  and  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  are sequences of quasi-nonexpansive operators from  $\mathcal{H}$  to  $\mathcal{H}$  such that  $\emptyset \neq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Fix } T_n \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Fix } S_n$ . Our main result states that, if we suppose in addition that

$$\alpha_n \rightarrow 0 \quad \text{and} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = +\infty, \quad (6.19)$$

and that for every subsequence  $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  of the sequence given in (6.18),

$$\begin{cases} x_{k_n} \rightarrow x \\ x_{n+1} - T_n x_n \rightarrow 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Fix } T_n, \quad (6.20)$$

then the sequence defined in (6.18) converges strongly to the unique point  $\bar{x}$  in  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Fix } T_n$  which satisfies  $\bar{x} = P(Q\bar{x})$ , where  $P$  is the projection operator onto  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Fix } T_n$ .

Throughout the paper,  $\mathcal{H}$  is a real Hilbert space with scalar product  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ , norm  $\| \cdot \|$ , and identity operator  $\text{Id}$ . In addition,  $P_C$  denotes the projection operator onto a

nonempty closed convex subset  $C$  of  $\mathcal{H}$ . As is customary,  $\rightarrow$  and  $\rightharpoonup$  denote, respectively, strong and weak convergence. The fixed points set of an operator  $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  is denoted by  $\text{Fix } T$ . Recall that  $T$  is nonexpansive if it is Lipschitz continuous with constant 1, a strict contraction if it is Lipschitz continuous with constant in  $[0, 1[$ , firmly nonexpansive if  $2T - \text{Id}$  is nonexpansive, and quasi-nonexpansive if

$$(\forall x \in \mathcal{H})(\forall y \in \text{Fix } T) \quad \|Tx - y\| \leq \|x - y\|. \quad (6.21)$$

Definition (6.21) goes back at least to [20] (see also [5] and [6] for examples of quasi-nonexpansive operators). Let  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  be a set-valued operator. The set  $\text{gr } A = \{(x, u) \in \mathcal{H}^2 \mid u \in Ax\}$  is the graph of  $A$ , the inverse  $A^{-1}$  of  $A$  is the set-valued operator with graph  $\{(u, x) \in \mathcal{H}^2 \mid u \in Ax\}$  and the resolvent of  $A$  is  $J_A = (\text{Id} + A)^{-1}$ . Moreover,  $A$  is monotone if

$$(\forall (x, u) \in \text{gr } A)(\forall (y, v) \in \text{gr } A) \quad \langle x - y \mid u - v \rangle \geq 0, \quad (6.22)$$

and maximal monotone if, furthermore,  $\text{gr } A$  is not properly contained in the graph of any monotone operator  $B: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$ . It is well-known that the resolvent of a maximal monotone operator  $A$ ,  $J_A$  is a firmly nonexpansive operator on  $\mathcal{H}$  and that  $\text{Fix } J_A = A^{-1}0$ .

The paper is organized as follows. In section 2 we establish a strong convergence result for the algorithm given in (6.18). Section 3 is entirely devoted to the study of the generalizations of existing results; we first address problems with a finite number of operators and next consider applications in monotone inclusion and equilibrium problems.

## 6.2.2 A selection method for a fixed point problem

Let  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  and  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be families of quasi-nonexpansive operators from  $\mathcal{H}$  to  $\mathcal{H}$  such that

$$\emptyset \neq C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Fix } T_n \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Fix } S_n, \quad (6.23)$$

and let  $Q: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  be a strict contraction. We consider the problem

$$\text{find } \bar{x} \in \mathcal{H} \text{ such that } \bar{x} = P_C(Q\bar{x}), \quad (6.24)$$

which has a unique solution. Indeed, since  $T_n$  is quasi-nonexpansive,  $\text{Fix } T_n$  is closed and convex [6, Propositions 2.3 and 2.6(ii)] and, therefore,  $C$  is a nonempty closed convex set. Hence,  $P_C$  is nonexpansive and  $P_C Q$  is a strict contraction. It then follows from the standard Banach-Picard theorem that the point  $\bar{x}$  is uniquely defined in (6.24).

The algorithm under consideration is the following.

**Algorithm 6.2.1**

- Step 0. Fix  $x_0 \in \mathcal{H}$  and set  $n = 0$ .  
Step 1. Let  $\alpha_n \in ]0, 1[$ .  
Step 2. Set  $x_{n+1} = \alpha_n Q(S_n x_n) + (1 - \alpha_n) T_n x_n$ .  
Step 3. Set  $n = n + 1$  and go to Step 1.

We shall study this iterative scheme under the following conditions.

**Condition 6.2.2**

- (i)  $\emptyset \neq C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Fix } T_n \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Fix } S_n$ .  
(ii)  $\alpha_n \rightarrow 0$  and  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = +\infty$ .  
(iii) for every suborbit  $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  of the Algorithm 6.2.1,

$$\begin{cases} x_{k_n} \rightharpoonup x \\ x_{n+1} - T_n x_n \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow x \in C.$$

**Remark 6.2.3** There exist operators which are quasi-nonexpansive but not nonexpansive, and which satisfy Condition 6.2.2(iii). In  $\mathcal{H} = \mathbb{R}$ , take, for example,  $S_n \equiv \text{Id}$  and  $T_n \equiv T$  where  $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is defined by

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad Tx = \begin{cases} 0, & \text{if } x \leq 1; \\ x - 1/2, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (6.25)$$

Set  $Q: x \mapsto 0$  and  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1/n)_{n \geq 2}$ . Then  $C = \{0\}$  and Algorithm 6.2.1 becomes

$$\text{fix } x_0 \in \mathbb{R} \quad \text{and set} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) T x_n. \quad (6.26)$$

If  $x_0 \leq 1$  then  $(\forall n \in \mathbb{N}, n > 0) \quad x_n = 0$  and Condition 6.2.2(iii) is automatically satisfied. If  $x_0 > 1$  then there exists an integer  $p \geq 2$ , such that

$$x_0 \in \left] \frac{p(p+1)}{4} - \frac{1}{2}, \frac{(p+1)(p+2)}{4} - \frac{1}{2} \right] \quad \text{and} \quad x_{p-1} = \frac{1}{p} \left( x_0 - \frac{p(p-1)}{4} \right). \quad (6.27)$$

Then,  $T x_{p-1} = 0$ , hence,  $(\forall n \geq p) \quad x_n = 0$ , from which we deduce that Condition 6.2.2(iii) is satisfied.

**Theorem 6.2.4** *Suppose that Condition 6.2.2 is satisfied. Then every orbit of Algorithm 6.2.1 converges strongly to the unique solution  $\bar{x}$  to (6.24).*

*Proof.* Let  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be an orbit of Algorithm 6.2.1 and let  $\bar{x} \in C$  be defined by (6.24). We first show that

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ is bounded.} \quad (6.28)$$

Let  $\theta \in [0, 1[$  be the Lipschitz constant of  $Q$  and let  $x \in C$  be fixed. Then

$$\begin{aligned} (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \|x_{n+1} - x\| &\leq \|x_{n+1} - \alpha_n Qx - (1 - \alpha_n)x\| + \|\alpha_n Qx + (1 - \alpha_n)x - x\| \\ &= \|\alpha_n(Q(S_n x_n) - Qx) + (1 - \alpha_n)(T_n x_n - x)\| \\ &\quad + \alpha_n \|Qx - x\| \\ &\leq (1 - (1 - \theta)\alpha_n) \|x_n - x\| + \alpha_n \|Qx - x\|. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Let  $M = \max\left(\|x_0 - x\|, \|Qx - x\|/(1 - \theta)\right)$ . Thus, we obtain by induction that

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \|x_n - x\| \leq M, \quad (6.30)$$

hence,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is bounded. Consequently, it follows from Condition 6.2.2(i) that the sequences  $(T_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(S_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , and  $(Q(S_n x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  are also bounded. Therefore

$$\beta = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|Q(S_n x_n) - T_n x_n\| < +\infty. \quad (6.31)$$

Next, we shall show that for every  $\varepsilon \in ]0, +\infty[$  there exists an index  $q \in \mathbb{N}$  such that for every integer  $n \geq q$

$$\|x_{n+1} - \bar{x}\|^2 \leq (1 - (1 - \theta)\alpha_n) \|x_n - \bar{x}\|^2 + 5\varepsilon\alpha_n. \quad (6.32)$$

Using induction, this will allow us to conclude that  $\|x_n - \bar{x}\|^2 \rightarrow 0$ . In order to prove (6.32), we first show that

$$\overline{\lim} \langle T_n x_n - \bar{x} \mid Q\bar{x} - \bar{x} \rangle \leq 0. \quad (6.33)$$

Indeed, let  $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  be a subsequence of  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  such that

$$\langle T_{k_n-1} x_{k_n-1} - \bar{x} \mid Q\bar{x} - \bar{x} \rangle \rightarrow \overline{\lim} \langle T_n x_n - \bar{x} \mid Q\bar{x} - \bar{x} \rangle, \quad (6.34)$$

and such that  $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converges weakly to some point  $w \in \mathcal{H}$ . Since

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \|x_{n+1} - T_n x_n\| = \alpha_n \|Q(S_n x_n) - T_n x_n\|, \quad (6.35)$$

by (6.31), Condition 6.2.2(ii) implies that  $x_{n+1} - T_n x_n \rightarrow 0$ . Then it follows from Condition 6.2.2(iii) that  $w \in C$  and from (6.24) and the standard characterization of projections onto convex sets that

$$\langle Q\bar{x} - \bar{x} \mid T_{k_n-1} x_{k_n-1} - \bar{x} \rangle \rightarrow \langle Q\bar{x} - \bar{x} \mid w - \bar{x} \rangle \leq 0. \quad (6.36)$$



Hence, we infer from (6.34) and (6.36) that

$$\overline{\lim} \langle T_n x_n - \bar{x} \mid Q\bar{x} - \bar{x} \rangle \leq 0. \quad (6.37)$$

The second step for proving (6.32) is to observe that for every  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - \bar{x}\|^2 &= \|x_{n+1} - \alpha_n Q\bar{x} - (1 - \alpha_n)\bar{x}\|^2 + \|\alpha_n Q\bar{x} + (1 - \alpha_n)\bar{x} - \bar{x}\|^2 \\ &\quad + 2 \langle x_{n+1} - \alpha_n Q\bar{x} - (1 - \alpha_n)\bar{x} \mid \alpha_n Q\bar{x} + (1 - \alpha_n)\bar{x} - \bar{x} \rangle \\ &= \|\alpha_n(Q(S_n x_n) - Q\bar{x}) + (1 - \alpha_n)(T_n x_n - \bar{x})\|^2 + \alpha_n^2 \|Q\bar{x} - \bar{x}\|^2 \\ &\quad + 2\alpha_n \langle T_n x_n - \bar{x} + \alpha_n(Q(S_n x_n) - Q\bar{x} - T_n x_n + \bar{x}) \mid Q\bar{x} - \bar{x} \rangle \\ &\leq (1 - (1 - \theta)\alpha_n)^2 \|x_n - \bar{x}\|^2 + \alpha_n^2 \|Q\bar{x} - \bar{x}\|^2 \\ &\quad + 2\alpha_n \langle T_n x_n - \bar{x} \mid Q\bar{x} - \bar{x} \rangle \\ &\quad + 2\alpha_n^2 (\langle Q(S_n x_n) - T_n x_n \mid Q\bar{x} - \bar{x} \rangle - \|Q\bar{x} - \bar{x}\|^2) \\ &\leq (1 - (1 - \theta)\alpha_n) \|x_n - \bar{x}\|^2 + \alpha_n^2 \|Q\bar{x} - \bar{x}\|^2 + \\ &\quad + 2\alpha_n \langle T_n x_n - \bar{x} \mid Q\bar{x} - \bar{x} \rangle \\ &\quad + 2\alpha_n^2 \langle Q(S_n x_n) - T_n x_n \mid Q\bar{x} - \bar{x} \rangle. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Now let us fix  $\varepsilon \in ]0, +\infty[$ . We infer from Condition 6.2.2(ii), (6.37), the Cauchy-Schwarz inequality, and (6.31), the existence of an index  $q \in \mathbb{N}$  such that, for every integer  $n \geq q$ ,

$$\begin{cases} \alpha_n \|Q\bar{x} - \bar{x}\|^2 \leq \varepsilon, \\ \langle T_n x_n - \bar{x} \mid Q\bar{x} - \bar{x} \rangle \leq \varepsilon, \text{ and} \\ \alpha_n \langle Q(S_n x_n) - T_n x_n \mid Q\bar{x} - \bar{x} \rangle \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (6.39)$$

Next, we deduce from (6.38) and (6.39) that, for every integer  $n \geq q$ ,

$$\|x_{n+1} - \bar{x}\|^2 \leq (1 - (1 - \theta)\alpha_n) \|x_n - \bar{x}\|^2 + 5\varepsilon\alpha_n. \quad (6.40)$$

Hence, we obtain by induction that

$$\begin{aligned} (\forall n \geq q) \quad \|x_{n+1} - \bar{x}\|^2 &\leq \prod_{k=q}^n (1 - (1 - \theta)\alpha_k) \|x_q - \bar{x}\|^2 \\ &\quad + \frac{5\varepsilon}{1 - \theta} \left( 1 - \prod_{k=q}^n (1 - (1 - \theta)\alpha_k) \right). \end{aligned} \quad (6.41)$$

By Condition 6.2.2(ii),  $\sum_{k=q}^n (1 - \theta)\alpha_k \rightarrow +\infty$  as  $n \rightarrow +\infty$ , and therefore, it follows

from [24, Theorem 3.7.7] that  $\prod_{k=q}^n (1 - (1 - \theta)\alpha_k) \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow +\infty$ . Thus, (6.41) yields

$$\overline{\lim} \|x_n - \bar{x}\|^2 \leq \frac{5\varepsilon}{1 - \theta}, \quad (6.42)$$

and we conclude that  $\|x_n - \bar{x}\|^2 \rightarrow 0$ .  $\square$

**Remark 6.2.5 (An extension)** Consider the algorithm

**Algorithm 6.2.6**

Step 0. Fix  $x_0 \in \mathcal{H}$  and set  $n = 0$ .

Step 1. Let  $\alpha_n \in ]0, 1[$  and  $\lambda_n \in ]0, 1[$ .

Step 2. Set  $x_{n+1} = \alpha_n Q(S_n x_n) + (1 - \alpha_n)(x_n + \lambda_n(T_n x_n - x_n))$ .

Step 3. Set  $n = n + 1$  and go to Step 1.

Now suppose that  $\lambda_n \rightarrow 1$ , Condition 6.2.2(i)&(ii) are satisfied, and that for every suborbit  $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  of Algorithm 6.2.6,

$$\begin{cases} x_{k_n} \rightarrow x \\ x_{n+1} - T_n x_n \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow x \in C. \quad (6.43)$$

Then every orbit of Algorithm 6.2.6 converges strongly to the unique solution to (6.24). Indeed set  $R_n = \text{Id} + \lambda_n(T_n - \text{Id})$ . Then we have

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - T_n x_n\| &= \|x_{n+1} - R_n x_n - (1 - \lambda_n)(T_n x_n - x_n)\| \\ &\leq \|x_{n+1} - R_n x_n\| + (1 - \lambda_n)\|T_n x_n - x_n\| \\ &\leq \|x_{n+1} - R_n x_n\| + (1 - \lambda_n)\beta, \end{aligned} \quad (6.44)$$

where  $\beta = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n x_n - x_n\| < +\infty$  (indeed, if  $z \in C$ , then  $(\forall n \in \mathbb{N}) \|T_n x_n - x_n\| \leq \|T_n x_n - z\| + \|x_n - z\| \leq 2\|x_n - z\| < +\infty$  by (6.28)). Hence  $x_{n+1} - R_n x_n \rightarrow 0 \Rightarrow x_{n+1} - T_n x_n \rightarrow 0$ . Therefore (6.43) implies that for every suborbit  $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  of Algorithm 6.2.6,

$$\begin{cases} x_{k_n} \rightarrow x \\ x_{n+1} - R_n x_n \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow x \in C.$$

We therefore obtain the convergence of  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  to the unique solution to (6.24) since  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Fix } R_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Fix } T_n = C$ .

**Remark 6.2.7 (An alternative iterative method)** Let  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  and  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be families of nonexpansive operators from  $\mathcal{H}$  to  $\mathcal{H}$  such that Condition 6.2.2(i) is satisfied and let  $Q: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  be a strict contraction. Then, for every  $n \in \mathbb{N}$ , the operator  $S_n T_n$  is nonexpansive and Condition 6.2.2(i) implies that  $\emptyset \neq C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Fix } T_n \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Fix}(S_n T_n)$ . Now let  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a sequence in  $]0, 1[$  and let  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be given by

$$\text{fix } x_0 \in \mathcal{H} \quad \text{and set} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = \alpha_n Q(S_n T_n x_n) + (1 - \alpha_n) T_n x_n. \quad (6.45)$$

If, in addition, we suppose that Condition 6.2.2(ii) and Condition 6.2.2(iii) are satisfied, then by Theorem 6.2.4, the sequence given in (6.45) converges strongly to the

unique solution to (6.24). In this setting, we obtain the following alternative iterative method for solving (6.24). Let us set  $(\forall n \in \mathbb{N}) y_n = T_n x_n$ . Then

$$y_0 = T_0 x_0 \quad \text{and} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) y_{n+1} = T_{n+1}(\alpha_n Q(S_n y_n) + (1 - \alpha_n)y_n). \quad (6.46)$$

By (6.35) and Condition 6.2.2(ii), we have  $x_{n+1} - y_n \rightarrow 0$ . Hence,  $y_n \rightarrow \bar{x}$ , where  $\bar{x}$  is given by (6.24).

## 6.2.3 Applications

In the previous section, we proved that the orbits of Algorithm 6.2.1 converge strongly to a particular common fixed point of a countable family of quasi-nonexpansive operators. This result provides a unified framework to recover and generalize known results.

### 6.2.3.1 Finitely many operators

The main problem we investigate in this section consists of finding a particular common fixed point of a finite family of nonexpansive operators. More precisely, let  $Q: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  be a strict contraction and let  $(R_j)_{1 \leq j \leq m}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  be nonexpansive operators. Then Problem (6.24) becomes

$$\text{find } \bar{x} \in \mathcal{H} \text{ such that } \bar{x} = P_{\bigcap_{j=1}^m \text{Fix } R_j}(Q\bar{x}). \quad (6.47)$$

**Corollary 6.2.8** *Let  $Q: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  be a strict contraction and let  $(R_j)_{1 \leq j \leq m}$  and  $(S_j)_{1 \leq j \leq m}$  be nonexpansive operators from  $\mathcal{H}$  to  $\mathcal{H}$  such that  $C = \bigcap_{j=1}^m \text{Fix } R_j \subset \bigcap_{j=1}^m \text{Fix } S_j$  and*

$$\emptyset \neq C = \text{Fix}(R_m \dots R_1) = \text{Fix}(R_1 R_m \dots R_2) = \dots = \text{Fix}(R_{m-1} \dots R_1 R_m). \quad (6.48)$$

*Let  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a sequence in  $]0, 1[$  which satisfies*

$$\alpha_n \rightarrow 0 \quad \text{and} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = +\infty, \quad (6.49)$$

*and any of the following conditions :*

- (i)  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_{n+m} - \alpha_n| < +\infty,$
- (ii)  $\frac{\alpha_{n+m}}{\alpha_n} \rightarrow 1,$
- (iii)  $\frac{\alpha_{n+m} - \alpha_n}{\alpha_{n+m}^2} \rightarrow 0,$

$$(iv) \frac{1}{\alpha_{n+m}} - \frac{1}{\alpha_n} \rightarrow 0.$$

Given  $x_0 \in \mathcal{H}$  and  $y_0 = R_m x_0$ , set, for every  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$x_{n+1} = \alpha_n Q(S_{i(n)} x_n) + (1 - \alpha_n) R_{i(n)} x_n \quad (6.50)$$

and

$$y_{n+1} = R_{i(n+1)} (\alpha_n Q(S_{i(n)} y_n) + (1 - \alpha_n) y_n), \quad (6.51)$$

where  $i(n) = ((m - n - 1) \bmod m) + 1$ . Then  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  and  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge strongly to the unique solution  $\bar{x}$  to (6.47).

**Remark 6.2.9** We give some examples of operators for which the assumption (6.48) holds.

- (i) Let  $(R_j)_{1 \leq j \leq m} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  be nonexpansive operators such that, for every  $j \in \{1, \dots, m\}$ ,

$$(\forall x \in \mathcal{H} \setminus \text{Fix } R_j) \quad (\forall y \in \text{Fix } R_j) \quad \|R_j x - y\| < \|x - y\|. \quad (6.52)$$

By [5, Proposition 2.10(i)], if we suppose  $\bigcap_{j=1}^m \text{Fix } R_j \neq \emptyset$ , then (6.48) is satisfied.

- (ii) Let  $(R_j)_{1 \leq j \leq m}$  be averaged operators (see [15, Definition 1.1]). Then, by [5, Lemma 2.4(iv)], they satisfy (6.52) (see also [15, Lemma 2.2(iv)]). In particular, if  $\bigcap_{j=1}^m \text{Fix } R_j \neq \emptyset$  and  $(R_j)_{1 \leq j \leq m}$  are firmly nonexpansive, then (6.48) is satisfied.

*Proof.* Remark that (6.50) is a particular instance of Algorithm 6.2.1 by choosing  $(\forall n \in \mathbb{N}) T_n = R_{i(n)}$  and  $S_n = S_{i(n)}$ . We prove that every orbit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  of (6.50) satisfies Condition 6.2.2(iii). Let  $\theta \in [0, 1[$  be the Lipschitz constant of  $Q$ . Then, for every  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|x_{n+m+1} - x_{n+1}\| &\leq \|\alpha_{n+m} Q S_{i(n)} x_{n+m} + (1 - \alpha_{n+m}) R_{i(n)} x_{n+m} - \alpha_{n+m} Q S_{i(n)} x_n \\ &\quad - (1 - \alpha_{n+m}) R_{i(n)} x_n\| + \|\alpha_{n+m} Q S_{i(n)} x_n \\ &\quad + (1 - \alpha_{n+m}) R_{i(n)} x_n - \alpha_n Q S_{i(n)} x_n - (1 - \alpha_n) R_{i(n)} x_n\| \\ &= \|\alpha_{n+m} (Q S_{i(n)} x_{n+m} - Q S_{i(n)} x_n) \\ &\quad + (1 - \alpha_{n+m}) (R_{i(n)} x_{n+m} - R_{i(n)} x_n)\| \\ &\quad + |\alpha_{n+m} - \alpha_n| \cdot \|Q S_{i(n)} x_n - R_{i(n)} x_n\| \\ &\leq (1 - (1 - \theta) \alpha_{n+m}) \|x_{n+m} - x_n\| + \beta |\alpha_{n+m} - \alpha_n|, \end{aligned} \quad (6.53)$$

where  $\beta = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|Q S_{i(n)} x_n - R_{i(n)} x_n\| < +\infty$ . Next, we show that (6.53) coupled with any of conditions (i)–(iv) leads to  $\|x_{n+m} - x_n\| \rightarrow 0$ . To this end, let us fix  $\varepsilon \in ]0, +\infty[$ .

- Suppose that  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_{n+m} - \alpha_n| < +\infty$ . Then, we obtain by induction that, for every  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$  such that  $n \geq p$ , we have

$$\|x_{n+m+1} - x_{n+1}\| \leq \prod_{k=p}^n (1 - (1-\theta)\alpha_{k+m}) \|x_{p+m} - x_p\| + \beta \sum_{k=p}^n |\alpha_{k+m} - \alpha_k|. \quad (6.54)$$

It follows from (6.49) and [24, Theorem 3.7.7] that, for every  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\prod_{k=p}^n (1 - (1-\theta)\alpha_{k+m}) \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow +\infty$ . Therefore, (6.54) and (i) yield

$$(\forall p \in \mathbb{N}) \quad \overline{\lim} \|x_{n+m} - x_n\| \leq \beta \sum_{k=p}^{+\infty} |\alpha_{k+m} - \alpha_k|. \quad (6.55)$$

Hence, again by (i), we obtain  $\|x_{n+m} - x_n\| \rightarrow 0$ .

- Now suppose that  $\frac{\alpha_{n+m}}{\alpha_n} \rightarrow 1$ . Then (6.53) implies that, for every  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|x_{n+m+1} - x_{n+1}\| \leq (1 - (1-\theta)\alpha_{n+m}) \|x_{n+m} - x_n\| + \beta \alpha_n \left| \frac{\alpha_{n+m}}{\alpha_n} - 1 \right|. \quad (6.56)$$

Hence, by (ii), we deduce the existence of an index  $q \in \mathbb{N}$ , such that, for every integer  $n \geq q$ ,

$$\|x_{n+m+1} - x_{n+1}\| \leq (1 - (1-\theta)\alpha_{n+m}) \|x_{n+m} - x_n\| + \beta \varepsilon \alpha_n. \quad (6.57)$$

Thus, we obtain by induction that, for every integer  $n \geq q$ ,

$$\begin{aligned} \|x_{n+m+1} - x_{n+1}\| &\leq \prod_{k=q}^n (1 - (1-\theta)\alpha_{k+m}) \|x_{q+m} - x_q\| \\ &\quad + \frac{\beta \varepsilon}{1-\theta} \left( 1 - \prod_{k=q}^n (1 - (1-\theta)\alpha_k) \right). \end{aligned} \quad (6.58)$$

Since  $\prod_{k=q}^n (1 - (1-\theta)\alpha_{k+m}) \rightarrow 0$  and  $\prod_{k=q}^n (1 - (1-\theta)\alpha_k) \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow +\infty$ , (6.58) yields

$$\overline{\lim} \|x_{n+m+1} - x_{n+1}\| \leq \frac{\beta \varepsilon}{1-\theta}. \quad (6.59)$$

Hence, we conclude that  $\|x_{n+m} - x_n\| \rightarrow 0$ .

- Assume now that  $\frac{\alpha_{n+m} - \alpha_n}{\alpha_{n+m}^2} \rightarrow 0$ . Then (6.53) implies that, for every  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|x_{n+m+1} - x_{n+1}\| \leq (1 - (1-\theta)\alpha_{n+m}) \|x_{n+m} - x_n\| + \beta \alpha_{n+m} \frac{|\alpha_{n+m} - \alpha_n|}{\alpha_{n+m}^2}. \quad (6.60)$$

Hence, by (iii), we deduce the existence of an index  $r \in \mathbb{N}$ , such that, for every integer  $n \geq r$ ,

$$\|x_{n+m+1} - x_{n+1}\| \leq (1 - (1 - \theta)\alpha_{n+m})\|x_{n+m} - x_n\| + \beta\varepsilon\alpha_{n+m}. \quad (6.61)$$

By using the same arguments as before, we obtain  $\|x_{n+m} - x_n\| \rightarrow 0$ .

– Suppose that  $\frac{1}{\alpha_{n+m}} - \frac{1}{\alpha_n} \rightarrow 0$ . Then (6.53) implies that, for every  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|x_{n+m+1} - x_{n+1}\| \leq (1 - (1 - \theta)\alpha_{n+m})\|x_{n+m} - x_n\| + \beta\alpha_n \frac{|\alpha_{n+m} - \alpha_n|}{\alpha_n\alpha_{n+m}}. \quad (6.62)$$

Hence, by (iv), we deduce the existence of an index  $k \in \mathbb{N}$ , such that, for every integer  $n \geq k$ ,

$$\|x_{n+m+1} - x_{n+1}\| \leq (1 - (1 - \theta)\alpha_{n+m})\|x_{n+m} - x_n\| + \beta\varepsilon\alpha_n. \quad (6.63)$$

Using induction as before, we obtain  $\|x_{n+m} - x_n\| \rightarrow 0$ .

Consequently, we have proved in all cases that  $\|x_{n+m} - x_n\| \rightarrow 0$ . Remark that  $x_{n+1} - R_{i(n)}x_n \rightarrow 0$  is a direct consequence of (6.50) and (6.49). Proceeding as in the proof of Claim 6 of [4, Theorem 3.1], we deduce from the last two convergence results that

$$x_n - R_{i(n+m-1)} \dots R_{i(n)}x_n \rightarrow 0. \quad (6.64)$$

Now let  $w \in \mathcal{H}$  and let  $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  be a suborbit of (6.50) such that  $x_{k_n} \rightarrow w$  (such a point exists since  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is bounded). Then there exist  $j \in \{1, \dots, m\}$  and a subsequence  $(l_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  of  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  such that  $(\forall n \in \mathbb{N}) i(l_{k_n}) = j$ . Hence, we infer from (6.64) that

$$x_{l_{k_n}} - R_{j-1} \dots R_1 R_m \dots R_j x_{l_{k_n}} \rightarrow 0, \quad (6.65)$$

with the convention  $R_0 = R_m$ . In view of the demiclosed principle [9, Lemma 2] applied to  $R_{j-1} \dots R_1 R_m \dots R_j$ , we obtain from (6.65) and (6.48) that  $w \in C$ . We have thus established that Condition 6.2.2(iii) is valid for every orbit of (6.50). This shows the strong convergence of the sequence  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  to the unique point  $\bar{x} = P_C(Q\bar{x})$  by applying Theorem 6.2.4.

Proceeding as in Remark 6.2.7, we now consider (6.50) in which  $S_{i(n)}$  is replaced by  $S_{i(n)}R_{i(n)}$ . As shown above,  $x_n \rightarrow \bar{x}$ . In this case, the sequence given in (6.51) satisfies  $(\forall n \in \mathbb{N}) y_n = R_{i(n)}x_n$ . Hence  $x_{n+1} - y_n \rightarrow 0$  and  $y_n \rightarrow \bar{x}$ .  $\square$

**Remark 6.2.10** Next, we distinguish three particular cases of Corollary 6.2.8, which capture and extend several known results. We suppose that the sequence  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $]0, 1[$  satisfies (6.49) and any of conditions (i)–(iv) in Corollary 6.2.8.

(i) Considering  $S_{i(n)} \equiv \text{Id}$  and a fixed  $x_0 \in \mathcal{H}$ , the iteration (6.50) becomes

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = \alpha_n Q x_n + (1 - \alpha_n) R_{i(n)} x_n. \quad (6.66)$$

- (a) Let  $\theta \in ]0, 1[$ , let  $Q: x \mapsto \theta x$ , and suppose that the condition (6.48) on the nonexpansive operators  $(R_j)_{1 \leq j \leq m}$  is satisfied. Then (6.66) becomes a Krasnosel'skiĭ-Mann-like iterative scheme whose strong limit is the point in  $\bigcap_{j=1}^m \text{Fix } R_j$  of minimal norm.
  - (b) Let  $R_{i(n)} \equiv \text{Id}$ . Then (6.66) is a Krasnosel'skiĭ-Mann-type iteration for the strict contraction  $Q$ , which strongly converges to the fixed point of  $Q$ .
  - (c) If we choose  $R_{i(n)} \equiv Q$ , then  $C = \text{Fix } Q$  and (6.66) becomes the classical Banach-Picard iteration for the strict contraction  $Q$ . By Corollary 6.2.8, it converges to the unique fixed point of  $Q$ .
  - (d) Let us consider  $Q: x \mapsto a \in \mathcal{H}$  in (6.66). Then, Corollary 6.2.8 reduces to [4, Theorem 3.1], [28, Theorem 4.1].
- (ii) We consider now  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad S_{i(n)} = R_{i(n)}$  and we suppose that condition (6.48) is satisfied. If  $x_0 \in \mathcal{H}$  is fixed then Algorithm (6.50) becomes

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = \alpha_n Q(R_{i(n)} x_n) + (1 - \alpha_n) R_{i(n)} x_n. \quad (6.67)$$

- (a) Let  $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  be  $\alpha$ -strongly monotone (i.e.,  $A - \alpha \text{Id}$  is monotone) and Lipschitz continuous with constant  $\beta$ , and let  $\gamma \in ]0, 2\alpha/\beta^2[$ . Then, by [21, Theorem 2],  $Q = \text{Id} - \gamma A$  is a strict contraction, and the iteration (6.67) becomes

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = R_{i(n)} x_n - \alpha_n \gamma A(R_{i(n)} x_n). \quad (6.68)$$

Applying Corollary 6.2.8, we obtain the strong convergence of the algorithm (6.68) to the point  $\bar{x} = P_{\bigcap_{j=1}^m \text{Fix } R_j}(\bar{x} - \gamma A\bar{x})$ , i.e., to the point  $\bar{x} \in \bigcap_{j=1}^m \text{Fix } R_j$  which satisfies the variational inequality

$$\left( \forall y \in \bigcap_{j=1}^m \text{Fix } R_j \right) \quad \langle y - \bar{x} \mid A\bar{x} \rangle \geq 0. \quad (6.69)$$

We thus recover [33, Theorem 3.3].

- (b) Let  $f: \mathcal{H} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  be a convex, twice continuously Fréchet-differentiable function, and suppose that there exist  $\bar{\mu} > \underline{\mu} > 0$  such that

$$(\forall (x, y) \in \mathcal{H}^2) \quad \underline{\mu} \|y\|^2 \leq \langle \nabla^2 f(x) y \mid y \rangle \leq \bar{\mu} \|y\|^2. \quad (6.70)$$

Then, by [21, Theorem 4], the Fréchet derivative  $\nabla f$  is  $\bar{\mu}$ -lipschitzian and  $\underline{\mu}$ -strongly monotone. Let  $\gamma \in ]0, 2/\bar{\mu}[$ , hence, by [21, Theorem 2],  $\text{Id} - \gamma \nabla f$  is a strict contraction. Considering  $A = \nabla f$ , (6.68) becomes

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = R_{i(n)} x_n - \alpha_n \gamma \nabla f(R_{i(n)} x_n). \quad (6.71)$$

Applying Corollary 6.2.8, the iteration (6.71) converges strongly to  $\bar{x} \in \bigcap_{j=1}^m \text{Fix } R_j$  which satisfies

$$\left( \forall y \in \bigcap_{j=1}^m \text{Fix } R_j \right) \quad \langle y - \bar{x} \mid \nabla f(\bar{x}) \rangle \geq 0. \quad (6.72)$$

Since  $f$  is convex and Gâteaux-differentiable over  $\bigcap_{j=1}^m \text{Fix } R_j$ , we deduce from (6.72) that  $\bar{x}$  is the unique minimizer of the function  $f$  over  $\bigcap_{j=1}^m \text{Fix } R_j$ . We thus recover [19, Theorem 3.7].

- (c) If we consider the function  $f$  with the properties mentioned in item (ii)(b) above and if  $R_{i(n)} \equiv \text{Id}$  in (6.71), then we obtain the strong convergence of the classical gradient iteration [21, Theorem 6] to the minimizer of  $f$  over  $\mathcal{H}$ .
- (iii) Now let  $(\forall j \in \{1, \dots, m\}) S_j = \text{Id}$  and  $R_j = P_{C_j}$  be the projection operators associated with a family  $(C_j)_{1 \leq j \leq m}$  of nonempty closed convex sets in  $\mathcal{H}$  such that  $\bigcap_{j=1}^m C_j \neq \emptyset$ . Since  $(P_{C_j})_{1 \leq j \leq m}$  are firmly nonexpansive, the condition (6.48) is satisfied via Remark 6.2.9(ii). Fix  $y_0 \in C_m$ . Then the Algorithm (6.51) becomes

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad y_{n+1} = P_{C_{i(n+1)}}(\alpha_n Q y_n + (1 - \alpha_n) y_n). \quad (6.73)$$

- (a) If, in addition,  $Q: x \mapsto 0$ , then (6.73) is a cyclic projection method for finding the point in  $\bigcap_{j=1}^m C_j$  of minimal norm. Note that, if  $\alpha_n \equiv 0$  in (6.73), then  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converges weakly to an unspecified point in  $\bigcap_{j=1}^m C_j$  [8, Theorem 1].
- (b) Let  $f$  be a function with the properties mentioned in item (ii)(b) above. Let  $\gamma \in ]0, 2/\bar{\mu}[$  and let  $Q = \text{Id} - \gamma \nabla f$ . Then the iteration in (6.73) assumes the form of a projected gradient-type method

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad y_{n+1} = P_{C_{i(n+1)}}(y_n - \alpha_n \gamma \nabla f(y_n)). \quad (6.74)$$

By Corollary 6.2.8,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converges strongly to the minimizer of  $f$  over  $\bigcap_{j=1}^m C_j$ .

We now turn to the case of a single operator.

**Corollary 6.2.11** *Suppose that  $Q: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  is a strict contraction and that  $R: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  is a nonexpansive operator such that*

$$C = \text{Fix } R \neq \emptyset. \quad (6.75)$$

Let  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a sequence in  $]0, 1[$  which satisfies

$$\alpha_n \rightarrow 0 \quad \text{and} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = +\infty, \quad (6.76)$$

and any of the following conditions :



- (i)  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < +\infty$ ,
- (ii)  $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \rightarrow 1$ ,
- (iii)  $\frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\alpha_{n+1}^2} \rightarrow 0$ ,
- (iv)  $\frac{1}{\alpha_{n+1}} - \frac{1}{\alpha_n} \rightarrow 0$ .

Given  $x_0 \in \mathcal{H}$  and  $y_0 = Rx_0$ , set, for every  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$x_{n+1} = \alpha_n Qx_n + (1 - \alpha_n)Rx_n \quad (6.77)$$

and

$$y_{n+1} = R(\alpha_n Qy_n + (1 - \alpha_n)y_n). \quad (6.78)$$

Then  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  and  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge strongly to  $\bar{x} = P_C(Q\bar{x})$ .

*Proof.* A direct consequence of Corollary 6.2.8 with  $m = 1$ .  $\square$

**Remark 6.2.12** We point out some connections between Corollary 6.2.11 and existing results.

- The iteration (6.77) in the case of  $Q: x \mapsto 0$  was shown in [22] to converge under more restrictive conditions on  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- Let  $Q: x \mapsto a \in \mathcal{H}$  in (6.77) in the Corollary above. Then we recover [32, Theorem 2] and [25, Théorème 1]. We also recover the case of an arbitrary strict contraction  $Q$  in [26, Theorem 2.2].
- Consider the nonexpansive operators  $(R_j)_{1 \leq j \leq m}$  from  $\mathcal{H}$  to  $\mathcal{H}$  such that  $C = \bigcap_{j=1}^m \text{Fix } R_j$  satisfies (6.48) and

$$C = \text{Fix} \left( \sum_{j=1}^m \omega_j R_j \right), \quad (6.79)$$

where  $(\omega_j)_{1 \leq j \leq m}$  are fixed numbers in  $]0, 1]$  such that  $\sum_{j=1}^m \omega_j = 1$ . We observe that if we consider (6.77) and (6.78) with the particular choices  $R = R_m \dots R_1$ , respectively  $R = \sum_{j=1}^m \omega_j R_j$ , we obtain alternative iterative methods to (6.50) and (6.51) for solving (6.47).

- Let  $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$  be a countable family of firmly nonexpansive operators on  $\mathcal{H}$  and let  $(\omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$  be in  $]0, 1]$  such that  $\sum_{i \in \mathbb{N}} \omega_i = 1$ . Thus we can define on  $\mathcal{H}$  the firmly nonexpansive operator  $R = \sum_{i \in \mathbb{N}} \omega_i R_i$ . Applying Corollary 6.2.11 to  $R$  and to  $Q: x \mapsto a \in \mathcal{H}$ , we recover [11, Théorème 3].

### 6.2.3.2 Zeros of maximal monotone operators

In this section, we describe applications of the previous results to finding particular solutions to monotone inclusion problems. Precisely, let  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  be a maximal monotone operator and consider the inclusion problem

$$\text{find } x \in \mathcal{H} \text{ such that } 0 \in Ax, \quad (6.80)$$

to which a solution is supposed to exist.

**Lemma 6.2.13** *Let  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  be a maximal monotone operator. Then :*

- (i) [3, Theorem 3.5.9.i)]  $(\forall x \in \mathcal{H}) (\forall \gamma \in ]0, +\infty[) \left( J_{\gamma A} x, \frac{x - J_{\gamma A} x}{\gamma} \right) \in \text{gr } A$ .
- (ii) [3, Proposition 3.5.6.2] *If  $(x_n, u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\text{gr } A$  and  $(x, u) \in \mathcal{H}^2$  are such that  $x_n \rightarrow x$  and  $u_n \rightarrow u$ , then  $(x, u) \in \text{gr } A$ .*

The next result is a simple consequence of Remarks 6.2.5 and 6.2.7.

**Corollary 6.2.14** *Let  $Q: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  be a strict contraction and let  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  be a maximal monotone operator. Let  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a sequence in  $]0, +\infty[$  such that  $\gamma_n \rightarrow +\infty$  and let  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a sequence in  $]0, 1[$  such that*

$$\alpha_n \rightarrow 0 \quad \text{and} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = +\infty. \quad (6.81)$$

*Let  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a sequence in  $[0, 2]$ ,  $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $]0, +\infty[$ , and let  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a sequence in  $]0, 1]$  such that  $\lambda_n \rightarrow 1$ . Given  $x_0 \in \mathcal{H}$  and  $y_0 = J_{\gamma_0 A} x_0$ , set, for every  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$x_{n+1} = \alpha_n Q(x_n + \mu_n (J_{\rho_n A} x_n - x_n)) + (1 - \alpha_n) (x_n + \lambda_n (J_{\gamma_n A} x_n - x_n)) \quad (6.82)$$

and

$$y_{n+1} = J_{\gamma_{n+1} A} \left( \alpha_n Q(y_n + \mu_n (J_{\rho_n A} y_n - y_n)) + (1 - \alpha_n) y_n \right). \quad (6.83)$$

*Then  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  and  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge strongly to the solution  $\bar{x}$  to (6.80) which satisfies  $\bar{x} = P_{A^{-1}0}(Q\bar{x})$ .*

*Proof.* Set  $(\forall n \in \mathbb{N}) T_n = J_{\gamma_n A}$  and  $S_n = \text{Id} + \mu_n (J_{\rho_n A} - \text{Id})$ . Then for every  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_n$  is firmly nonexpansive,  $S_n$  is nonexpansive and  $A^{-1}0 = \text{Fix } T_n = \text{Fix } S_n$ . Hence, Condition 6.2.2(i)&(ii) are satisfied. As seen in Remark 6.2.5, it remains to check the implication

$$\begin{cases} x_{k_{n+1}} \rightarrow x \\ x_{n+1} - T_n x_n \rightarrow 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x \in A^{-1}0.$$

Suppose that  $x_{k_{n+1}} \rightharpoonup x$  and  $x_{n+1} - T_n x_n \rightarrow 0$ . We obtain on the one hand that  $J_{\gamma_{k_n} A} x_{k_n} \rightharpoonup x$ . On the other hand, since  $(T_n x_n - x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is bounded and  $\gamma_n \rightarrow +\infty$ , we have  $(T_n x_n - x_n)/\gamma_n \rightarrow 0$ , hence,  $(x_{k_n} - J_{\gamma_{k_n} A} x_{k_n})/\gamma_{k_n} \rightarrow 0$ . By applying Lemma 6.2.13(i)&(ii), it follows that  $x \in A^{-1}0$ . By Remark 6.2.5,  $x_n \rightarrow \bar{x}$  and, by Remark 6.2.7,  $y_n \rightarrow \bar{x}$ .  $\square$

**Remark 6.2.15**

- When  $Q: x \mapsto a \in \mathcal{H}$ , Corollary 6.2.14 corresponds to [23, Theorem 1]. In this case, (6.82) can be written as

$$\begin{aligned} \text{fix } x_0 \in \mathcal{H} \text{ and set } (\forall n \in \mathbb{N}) \\ x_{n+1} = \alpha_n a + (1 - \alpha_n)(x_n + \lambda_n(J_{\gamma_n A} x_n - x_n)). \end{aligned} \quad (6.84)$$

Moreover,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converges strongly to the zero of  $A$  which is closest to  $a$ .

- Now let  $\mu_n \equiv 0$ ,  $\lambda_n \equiv 1$ , and  $Q: x \mapsto \theta x$  for some  $\theta \in ]0, 1[$ . Then (6.82) becomes

$$\text{fix } x_0 \in \mathcal{H} \text{ and set } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = \alpha_n \theta x_n + (1 - \alpha_n) J_{\gamma_n A} x_n. \quad (6.85)$$

Hence,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converges strongly to the zero of  $A$  of minimal norm. If  $\alpha_n \equiv 0$  and  $\inf_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n > 0$ , this iteration is the standard proximal point algorithm, which converges weakly to an unspecified zero of  $A$  [29, Theorem 1] (see also [15, Corollary 4.5] for extensions).

We now consider the case when the Problem (6.80) assumes the form

$$\text{find } x \in \mathcal{H} \text{ such that } 0 \in Ax + Bx, \quad (6.86)$$

where  $A, B: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  are maximal monotone operators such that  $\beta B$  is firmly nonexpansive for some  $\beta \in ]0, +\infty[$ . In this setting, we propose two forward-backward-like splitting algorithms.

**Corollary 6.2.16** *Let  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  and  $B: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  be maximal monotone operators such that  $\beta B$  is firmly nonexpansive for some  $\beta \in ]0, +\infty[$ , and let  $Q: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  be a strict contraction. Let  $\gamma \in ]0, 2\beta]$  and let  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a sequence in  $]0, 1[$  which satisfies*

$$\alpha_n \rightarrow 0 \quad \text{and} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = +\infty, \quad (6.87)$$

*and any of conditions (i)-(iv) in Corollary 6.2.11. Given  $x_0 \in \mathcal{H}$  and  $y_0 = J_{\gamma A}(x_0 - \gamma Bx_0)$ , set, for every  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$x_{n+1} = \alpha_n Qx_n + (1 - \alpha_n) J_{\gamma A}(x_n - \gamma Bx_n), \quad (6.88)$$

and

$$y_{n+1} = J_{\gamma A} \left( \alpha_n Q y_n + (1 - \alpha_n) y_n - \gamma B (\alpha_n Q y_n + (1 - \alpha_n) y_n) \right). \quad (6.89)$$

Then  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  and  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge strongly to the solution  $\bar{x}$  to (6.86) which satisfies  $\bar{x} = P_{(A+B)^{-1}0}(Q\bar{x})$ .

*Proof.* Fix  $\gamma \in ]0, 2\beta]$  and set  $R = J_{\gamma A}(\text{Id} - \gamma B)$ . By [21, Theorem 2],  $\text{Id} - \gamma B$  is a nonexpansive operator, hence  $R$  is nonexpansive. Moreover,  $(A + B)^{-1}0 = \text{Fix } R$ . Since (6.88) and (6.89) are special cases of (6.77) and (6.78) respectively, the claims follow from Corollary 6.2.11.  $\square$

### 6.2.3.3 Applications to equilibrium problem

Let  $K$  be a nonempty closed convex subset of  $\mathcal{H}$ , and let  $F$  be a bifunction from  $K^2$  to  $\mathbb{R}$ . In this section, we address the broad class of problems whose basic formulation reduces to solving the equilibrium problem

$$\text{find } x \in K \text{ such that } (\forall y \in K) F(x, y) \geq 0, \quad (6.90)$$

whose solution set is denoted by  $C$  and is supposed nonempty (see [7] for examples of problems which can be covered by (6.90)).

Our aim is to apply Remarks 6.2.5 and 6.2.7 to find a particular solution to (6.90). Throughout this section, we suppose that the bifunction  $F$  satisfies the following set of standard properties.

**Condition 6.2.17** The bifunction  $F: K^2 \rightarrow \mathbb{R}$  is such that :

- (i)  $(\forall x \in K) F(x, x) = 0$ .
- (ii)  $(\forall (x, y) \in K^2) F(x, y) + F(y, x) \leq 0$ .
- (iii) For every  $x \in K$ ,  $F(x, \cdot): K \rightarrow \mathbb{R}$  is lower semicontinuous and convex.
- (iv)  $(\forall (x, y, z) \in K^3) \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F((1 - \varepsilon)x + \varepsilon z, y) \leq F(x, y)$ .

In this setting, it was implicitly shown in [7] that is possible to associate with  $F$  a resolvent operator  $J_F: \mathcal{H} \rightarrow K$  defined by

$$(\forall x \in \mathcal{H}) J_F x \in K \quad \text{and} \quad (\forall y \in K) F(J_F x, y) + \langle J_F x - x \mid y - J_F x \rangle \geq 0. \quad (6.91)$$

Moreover, we can show that  $J_F$  is a firmly nonexpansive operator such that  $\text{Fix } J_F = C$  (see [7], [27], and [17, Lemma 2.12] for details).

**Lemma 6.2.18** [17, Lemma 2.13] Suppose that  $F: K^2 \rightarrow \mathbb{R}$  satisfies Condition 6.2.17. Let  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a sequence in  $\mathcal{H}$  and  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a sequence in  $]0, +\infty[$ . Define

$$(\forall n \in \mathbb{N}) z_n = J_{\gamma_n F} x_n \quad \text{and} \quad u_n = (x_n - z_n) / \gamma_n, \quad (6.92)$$

and suppose that

$$z_n \rightharpoonup x \quad \text{and} \quad u_n \rightarrow u. \quad (6.93)$$

Then  $x \in K$  and  $(\forall y \in K) \quad F(x, y) + \langle u \mid x - y \rangle \geq 0$ .

Considering Algorithm 6.2.1 and (6.46) with the choice of  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  and  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  as relaxed resolvents of  $F$ , we obtain the following result.

**Corollary 6.2.19** *Let  $Q: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  be a strict contraction and let  $F: K^2 \rightarrow \mathbb{R}$  be a bifunction satisfying Condition 6.2.17. Let  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a sequence in  $]0, +\infty[$  such that  $\gamma_n \rightarrow +\infty$  and let  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a sequence in  $]0, 1[$  such that*

$$\alpha_n \rightarrow 0 \quad \text{and} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = +\infty. \quad (6.94)$$

*Let  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a sequence in  $[0, 2]$ ,  $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $]0, +\infty[$ , and let  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a sequence in  $]0, 1]$  such that  $\lambda_n \rightarrow 1$ . Given  $x_0 \in \mathcal{H}$  and  $y_0 = J_{\gamma_0 F} x_0$ , set, for every  $n \in \mathbb{N}$*

$$x_{n+1} = \alpha_n Q(x_n + \mu_n(J_{\rho_n F} x_n - x_n)) + (1 - \alpha_n)(x_n + \lambda_n(J_{\gamma_n F} x_n - x_n)) \quad (6.95)$$

and

$$y_{n+1} = J_{\gamma_{n+1} F} \left( \alpha_n Q(y_n + \mu_n(J_{\rho_n F} y_n - y_n)) + (1 - \alpha_n)y_n \right). \quad (6.96)$$

*Then  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  and  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge strongly to the solution  $\bar{x}$  to (6.90) which satisfies  $\bar{x} = P_C(Q\bar{x})$ .*

*Proof.* Set  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad T_n = J_{\gamma_n F}$  and  $S_n = \text{Id} + \mu_n(J_{\rho_n F} - \text{Id})$ . Then, for every  $n \in \mathbb{N}$ , by [17, Lemma 2.12]  $T_n$  is firmly nonexpansive,  $S_n$  is nonexpansive, and  $C = \text{Fix } T_n = \text{Fix } S_n$ . Hence, Condition 6.2.2(i)&(ii) are satisfied. As seen in Remark 6.2.5, it remains to check the implication

$$\begin{cases} x_{k_{n+1}} \rightharpoonup x \\ x_{n+1} - T_n x_n \rightarrow 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x \in C.$$

Suppose that  $x_{k_{n+1}} \rightharpoonup x$  and  $x_{n+1} - T_n x_n \rightarrow 0$ . We obtain on the one hand that  $J_{\gamma_{k_n} F} x_{k_n} \rightharpoonup x$ . On the other hand, since  $(T_n x_n - x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is bounded and  $\gamma_n \rightarrow +\infty$ , we have  $(T_n x_n - x_n)/\gamma_n \rightarrow 0$ , hence,  $(x_{k_n} - J_{\gamma_{k_n} F} x_{k_n})/\gamma_{k_n} \rightarrow 0$ . In view of Lemma 6.2.18, it follows that  $x \in C$ . By Remark 6.2.5,  $x_n \rightarrow \bar{x}$  and by Remark 6.2.7,  $y_n \rightarrow \bar{x}$ .  $\square$

**Remark 6.2.20** In the case when  $Q: x \mapsto a \in \mathcal{H}$  and  $\lambda_n \equiv 1$ , the strong convergence of (6.95) follows from [17, Theorem 4.3].

## Acknowledgment

I would like to thank Professor Patrick L. Combettes for bringing this problem to my attention and for interesting and helpful discussions.

### 6.3 Convergence de l'Algorithme 6.2.1 avec perturbations

Le résultat suivant montre que le Théorème 6.1.1 reste vrai si les évaluations des opérateurs  $S_n$  et  $T_n$  sont faites de façon approchée, pourvu que les erreurs induites soient absolument sommables.

**Théorème 6.3.1** *Soient  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des familles de quasi-contractions de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}$  telles que*

$$\emptyset \neq C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Fix } T_n \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Fix } S_n. \quad (6.97)$$

*Soient  $Q: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  une contraction stricte et  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $]0, 1[$  telle que  $\alpha_n \rightarrow 0$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = +\infty$ . Étant données les suites  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathcal{H}$  et  $x_0 \in \mathcal{H}$ , on pose*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = \alpha_n Q(S_n x_n + d_n) + (1 - \alpha_n)(T_n x_n + e_n). \quad (6.98)$$

*Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|d_n\| < +\infty$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|e_n\| < +\infty$  et, pour toute sous-suite  $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,*

$$\begin{cases} x_{k_n} \rightharpoonup x \\ x_{n+1} - T_n x_n \rightarrow 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x \in C, \quad (6.99)$$

*alors la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge fortement, quand  $n \rightarrow +\infty$ , vers l'unique point  $\bar{x} \in C$  vérifiant  $\bar{x} = P_C(Q\bar{x})$ .*

*Démonstration.* D'après le théorème classique de Banach-Picard appliqué à la contraction stricte  $P_C Q$ , le point  $\bar{x} \in C$  vérifiant  $\bar{x} = P_C(Q\bar{x})$  est défini de manière unique. Premièrement, on montre que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie en (6.98) est bornée. Soit  $\theta \in [0, 1[$  la constante de Lipschitz de  $Q$  et fixons  $x \in C$ . Alors

$$\begin{aligned} (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \|x_{n+1} - x\| &\leq \|x_{n+1} - \alpha_n Qx - (1 - \alpha_n)x\| + \|\alpha_n Qx + (1 - \alpha_n)x - x\| \\ &= \|\alpha_n(Q(S_n x_n + d_n) - Qx) + (1 - \alpha_n)(T_n x_n - x + e_n)\| \\ &\quad + \alpha_n \|Qx - x\| \\ &\leq \alpha_n \theta \|S_n x_n - x\| + \|d_n\| + (1 - \alpha_n) \|T_n x_n - x\| + \|e_n\| \\ &\quad + \alpha_n \|Qx - x\| \\ &\leq (1 - (1 - \theta)\alpha_n) \|x_n - x\| + \|d_n\| + \|e_n\| \\ &\quad + \alpha_n \|Qx - x\|. \end{aligned} \quad (6.100)$$

Posons

$$M = \max \left( \|x_0 - x\|, \|Qx - x\| / (1 - \theta) \right). \quad (6.101)$$

Alors on déduit par récurrence que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \|x_{n+1} - x\| \leq M + \sum_{k=0}^n \|d_k\| + \sum_{k=0}^n \|e_k\|, \quad (6.102)$$

d'où la bornitude de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . D'après (6.97), on obtient que les suites  $(T_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(S_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , et  $(Q(S_n x_n + d_n))_{n \in \mathbb{N}}$  sont bornées, donc

$$\beta = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|Q(S_n x_n + d_n) - T_n x_n\| < +\infty. \quad (6.103)$$

Maintenant, on se propose de démontrer que, pour tout  $\varepsilon \in ]0, +\infty[$ , il existe un  $q \in \mathbb{N}$  tel que pour tout entier  $n \geq q$ ,

$$\|x_{n+1} - \bar{x}\|^2 \leq (1 - (1 - \theta)\alpha_n) \|x_n - \bar{x}\|^2 + 5\varepsilon\alpha_n + \gamma(\|d_n\| + \|e_n\|), \quad (6.104)$$

où  $\gamma = \sup_{n \in \mathbb{N}} (\|d_n\| + \|e_n\| + 2\|x_n - \bar{x}\|) < +\infty$ . Par récurrence, on va en conclure que  $\|x_n - \bar{x}\|^2 \rightarrow 0$ . Pour démontrer (6.104), on vérifie premièrement que

$$\overline{\lim} \langle T_n x_n - \bar{x} + e_n \mid Q\bar{x} - \bar{x} \rangle \leq 0. \quad (6.105)$$

En effet, soit  $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  une sous-suite de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\langle T_{k_n-1} x_{k_n-1} - \bar{x} \mid Q\bar{x} - \bar{x} \rangle \rightarrow \overline{\lim} \langle T_n x_n - \bar{x} \mid Q\bar{x} - \bar{x} \rangle, \quad (6.106)$$

et telle que  $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers un point  $w \in \mathcal{H}$ . Puisque

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \|x_{n+1} - T_n x_n\| \leq \alpha_n \|Q(S_n x_n + d_n) - T_n x_n\| + (1 - \alpha_n) \|e_n\|, \quad (6.107)$$

on déduit de (6.103), et du fait que  $\alpha_n \rightarrow 0$  et  $e_n \rightarrow 0$ , que  $x_{n+1} - T_n x_n \rightarrow 0$ . Alors (6.99) implique que  $w \in C$  et, d'après la caractérisation variationnelle de  $P_C$ , on obtient que

$$\langle Q\bar{x} - \bar{x} \mid T_{k_n-1} x_{k_n-1} - \bar{x} \rangle \rightarrow \langle Q\bar{x} - \bar{x} \mid w - \bar{x} \rangle \leq 0. \quad (6.108)$$

Au vu de (6.106) et (6.108),  $\overline{\lim} \langle T_n x_n - \bar{x} \mid Q\bar{x} - \bar{x} \rangle \leq 0$  et, comme  $e_n \rightarrow 0$ , on obtient

$$\overline{\lim} \langle T_n x_n - \bar{x} + e_n \mid Q\bar{x} - \bar{x} \rangle \leq 0. \quad (6.109)$$

La deuxième étape de la démonstration de (6.104) consiste à remarquer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}
& \|x_{n+1} - \bar{x}\|^2 \\
&= \|x_{n+1} - \alpha_n Q\bar{x} - (1 - \alpha_n)\bar{x}\|^2 + \|\alpha_n Q\bar{x} + (1 - \alpha_n)\bar{x} - \bar{x}\|^2 \\
&\quad + 2 \langle x_{n+1} - \alpha_n Q\bar{x} - (1 - \alpha_n)\bar{x} \mid \alpha_n Q\bar{x} + (1 - \alpha_n)\bar{x} - \bar{x} \rangle \\
&= \|\alpha_n(Q(S_n x_n + d_n) - Q\bar{x}) + (1 - \alpha_n)(T_n x_n - \bar{x} + e_n)\|^2 + \alpha_n^2 \|Q\bar{x} - \bar{x}\|^2 \\
&\quad + 2\alpha_n \langle T_n x_n - \bar{x} + e_n \mid Q\bar{x} - \bar{x} \rangle \\
&\quad + 2\alpha_n^2 \langle Q(S_n x_n + d_n) - Q\bar{x} - T_n x_n + \bar{x} - e_n \mid Q\bar{x} - \bar{x} \rangle \\
&\leq \left( (1 - (1 - \theta)\alpha_n) \|x_n - \bar{x}\| + \alpha_n \theta \|d_n\| + (1 - \alpha_n) \|e_n\| \right)^2 + \alpha_n^2 \|Q\bar{x} - \bar{x}\|^2 \\
&\quad + 2\alpha_n \langle T_n x_n - \bar{x} + e_n \mid Q\bar{x} - \bar{x} \rangle \\
&\quad + 2\alpha_n^2 \langle Q(S_n x_n + d_n) - Q\bar{x} - T_n x_n + \bar{x} - e_n \mid Q\bar{x} - \bar{x} \rangle \\
&\leq (1 - (1 - \theta)\alpha_n)^2 (\|x_n - \bar{x}\| + \|d_n\| + \|e_n\|)^2 + \alpha_n^2 \|Q\bar{x} - \bar{x}\|^2 \\
&\quad + 2\alpha_n \langle T_n x_n - \bar{x} + e_n \mid Q\bar{x} - \bar{x} \rangle \\
&\quad + 2\alpha_n^2 (\langle Q(S_n x_n + d_n) - T_n x_n - e_n \mid Q\bar{x} - \bar{x} \rangle - \|Q\bar{x} - \bar{x}\|^2) \\
&\leq (1 - (1 - \theta)\alpha_n) \left( \|x_n - \bar{x}\|^2 + \gamma(\|d_n\| + \|e_n\|) \right) + \alpha_n^2 \|Q\bar{x} - \bar{x}\|^2 \\
&\quad + 2\alpha_n \langle T_n x_n - \bar{x} + e_n \mid Q\bar{x} - \bar{x} \rangle \\
&\quad + 2\alpha_n^2 \langle Q(S_n x_n + d_n) - T_n x_n - e_n \mid Q\bar{x} - \bar{x} \rangle \\
&\leq (1 - (1 - \theta)\alpha_n) \|x_n - \bar{x}\|^2 + \gamma(\|d_n\| + \|e_n\|) + \alpha_n^2 \|Q\bar{x} - \bar{x}\|^2 \\
&\quad + 2\alpha_n \langle T_n x_n - \bar{x} + e_n \mid Q\bar{x} - \bar{x} \rangle \\
&\quad + 2\alpha_n^2 \langle Q(S_n x_n + d_n) - T_n x_n - e_n \mid Q\bar{x} - \bar{x} \rangle. \tag{6.110}
\end{aligned}$$

On fixe maintenant  $\varepsilon \in ]0, +\infty[$ . On déduit alors du fait que  $\alpha_n \rightarrow 0$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|d_n\| < +\infty$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|e_n\| < +\infty$ , (6.109), ainsi que de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de (6.103), l'existence d'un entier  $q \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout entier  $n \geq q$ ,

$$\begin{cases} \alpha_n \|Q\bar{x} - \bar{x}\|^2 \leq \varepsilon, & \sum_{k \geq q} \|d_k\| \leq \varepsilon, & \sum_{k \geq q} \|e_k\| \leq \varepsilon, \\ \langle T_n x_n - \bar{x} + e_n \mid Q\bar{x} - \bar{x} \rangle \leq \varepsilon & \text{et} \\ \alpha_n \langle Q(S_n x_n + d_n) - T_n x_n - e_n \mid Q\bar{x} - \bar{x} \rangle \leq \varepsilon. \end{cases} \tag{6.111}$$

On tire alors de (6.110) et (6.111) que, pour tout entier  $n \geq q$ ,

$$\|x_{n+1} - \bar{x}\|^2 \leq (1 - (1 - \theta)\alpha_n) \|x_n - \bar{x}\|^2 + 5\varepsilon\alpha_n + \gamma(\|d_n\| + \|e_n\|). \tag{6.112}$$



Par récurrence, on en déduit que

$$\begin{aligned}
(\forall n \geq q) \quad \|x_{n+1} - \bar{x}\|^2 &\leq \prod_{k=q}^n (1 - (1 - \theta)\alpha_k) \|x_q - \bar{x}\|^2 \\
&\quad + \frac{5\varepsilon}{1 - \theta} \left( 1 - \prod_{k=q}^n (1 - (1 - \theta)\alpha_k) \right) \\
&\quad + \gamma \left( \sum_{k=q}^n \|d_k\| + \sum_{k=q}^n \|e_k\| \right). \tag{6.113}
\end{aligned}$$

Puisque  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = +\infty$ , on obtient  $\sum_{k=q}^n (1 - \theta)\alpha_k \rightarrow +\infty$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . D'après [24, Theorem 3.7.7], on en déduit que  $\prod_{k=q}^n (1 - (1 - \theta)\alpha_k) \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

Donc, d'après (6.113) et (6.111), on obtient

$$\begin{aligned}
\overline{\lim} \|x_n - \bar{x}\|^2 &\leq \frac{5\varepsilon}{1 - \theta} + \gamma \left( \sum_{k \geq q} \|d_k\| + \sum_{k \geq q} \|e_k\| \right) \\
&\leq \varepsilon \left( \frac{5}{1 - \theta} + 2\gamma \right), \tag{6.114}
\end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure que  $\|x_n - \bar{x}\|^2 \rightarrow 0$ .  $\square$

## 6.4 Application à la restauration d'images

### 6.4.1 Introduction

Dans le domaine de la restauration d'images, il y a de nombreux exemples de problèmes qui se formulent sur la base d'un critère d'admissibilité, au sens où une solution est dite acceptable si elle satisfait à toutes les contraintes disponibles  $(\Psi_i)_{i \in I}$  [10], [12], [30], [31]. En désignant l'espace des images par  $\mathcal{H}$  et par  $S_i$  le sous-ensemble de  $\mathcal{H}$  des images vérifiant la contrainte  $\Psi_i$ , le problème d'admissibilité se met sous la forme

$$\text{trouver } \bar{x} \in \bigcap_{i \in I} S_i = \{x \in \mathcal{H} \mid (\forall i \in I) \ x \text{ satisfait à } \Psi_i\}. \tag{6.115}$$

Dans les problèmes de restauration, ces contraintes proviennent des connaissances a priori (sur l'image originale, l'opérateur de dégradation) et des données observées (l'image dégradée). Ainsi, une solution d'un tel problème est toute image  $\bar{x} \in \mathcal{H}$  qui, à la lumière des connaissances a priori, a pu engendrer les données observées. Comme

de nombreux exemples le montrent (voir [12, Section IV] et sa bibliographie), bon nombre de contraintes couramment utilisées en traitement de l'image conduisent à des sous-ensembles  $S_i$  convexes et fermés.

À partir de considérations physiques ou empiriques, dans certains problèmes, il peut être souhaitable d'extraire une solution particulière de (6.115) (i.e., une image admissible), en minimisant sur  $\bigcap_{i \in I} S_i$  (supposé non-vidé) une certaine fonction  $f$  de  $\Gamma_0(\mathcal{H})$ . Le problème de restauration devient alors [14], [16]

$$\text{trouver } \bar{x} \in S = \bigcap_{i \in I} S_i \text{ tel que } f(\bar{x}) = \min f(S). \quad (6.116)$$

## 6.4.2 Décomposition en contraintes dures et douces

En restauration d'image, les contraintes dures, qui peuvent être dégagées à partir de connaissances a priori fiables (par exemple, la positivité des pixels d'une image) co-existent souvent avec des contraintes douces, issues de connaissances plus incertaines [16]. Une contrainte douce peut apparaître notamment quand l'ensemble associé est de la forme

$$S_i = \{x \in \mathcal{H} \mid f_i(x) \leq \xi_i\}. \quad (6.117)$$

Si la valeur de  $\xi_i$  est incertaine (à cause de mesures bruitées ou de connaissances a priori imprécises), alors l'ensemble  $S_i$  correspond à une contrainte douce et on ne cherchera pas à imposer la contrainte  $f_i(x) \leq \xi_i$  exactement. Dans de telles situations on cherchera à minimiser une fonction  $f$  agrégeant les contraintes douces sur l'intersection des ensembles représentant les contraintes dures, d'où la formulation (6.116) (cf. [14] et [16] pour des exemples concrets).

Dans la suite, on considère le cadre suivant. On dispose de  $q$  contraintes douces associées à des convexes fermés  $(C_k)_{1 \leq k \leq q}$ , et de  $p$  observations  $y_j = L_j \tilde{x} + u_j$ , où chaque  $L_j$  est un opérateur linéaire et borné, et où  $u_j$  représente un bruit inconnu. Étant donnés des poids  $(\omega_k)_{1 \leq k \leq q}$  et  $(\delta_j)_{1 \leq j \leq p}$  dans  $]0, +\infty[$ , on pose

$$f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=1}^q \omega_k d_{C_k}^2(x) + \sum_{j=1}^p \delta_j \|L_j x - y_j\|^2. \quad (6.118)$$

Par ailleurs, les sous-ensembles convexes fermés  $(S_i)_{1 \leq i \leq m}$  de  $\mathcal{H}$  représenteront les contraintes dures. Notons que  $f$  est Fréchet-différentiable partout et que son gradient est Lipschitz.

En guise d'illustration, on examine le cas particulier de la fonction  $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f: x \mapsto \frac{d_C^2(x)}{2} + \delta \frac{\|x\|^2}{2}, \quad (6.119)$$

où  $\delta \in ]0, +\infty[$  et  $C \subset \mathcal{H}$  est un convexe fermé non-vide. Cette fonction traduit le manque d'information sur une constante permettant de borner l'énergie  $\|\tilde{x}\|^2$  de l'image originale  $\tilde{x}$ , ainsi que la nature incertaine de la contrainte  $C$ . Il est clair que  $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$  et, de plus, que  $f$  est Fréchet-différentiable avec gradient [2]

$$\nabla f = (\delta + 1) \text{Id} - P_C. \quad (6.120)$$

On montre aisément qu'un tel opérateur est  $\delta$ -fortement monotone et  $(\delta + 1)$ -Lipschitz. D'après l'Exemple 3.2.4(iii), pour tout  $\gamma \in ]0, 2/(\delta + 1)[$ , l'opérateur

$$Q = \text{Id} - \gamma \nabla f = (1 - \gamma(\delta + 1)) \text{Id} + \gamma P_C \quad (6.121)$$

est une contraction stricte. On désigne par  $(P_i)_{1 \leq i \leq m}$  les projecteurs associés aux contraintes dures  $(S_i)_{1 \leq i \leq m}$ . Alors, puisque les opérateurs  $(P_i)_{1 \leq i \leq m}$  sont des contractions fermes sur  $\mathcal{H}$ , il est en de même de l'opérateur

$$R = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m P_i. \quad (6.122)$$

De plus, vu que  $\bigcap_{i=1}^m S_i$  est supposé non-vide, on a [5, Proposition 2.12]

$$\text{Fix } R = \bigcap_{i=1}^m S_i. \quad (6.123)$$

Dans ce contexte, le problème de minimisation sur  $\bigcap_{i=1}^m S_i$  de la fonction définie dans (6.119) se réécrit sous la forme

$$\text{trouver } \bar{x} \in \mathcal{H} \quad \text{tel que} \quad \bar{x} = P_{\text{Fix } R}((\text{Id} - \gamma \nabla f)\bar{x}), \quad (6.124)$$

où  $P_{\text{Fix } R}$  est le projecteur sur l'ensemble des points fixes de  $R$ . Ensuite, en tenant compte du fait que  $R$  est une contraction ferme, on déduit que l'opérateur

$$T = \text{Id} + \lambda(R - \text{Id}), \quad \text{où } \lambda \in ]0, 2], \quad (6.125)$$

est une contraction avec  $\text{Fix } T = \text{Fix } R$  [15].

L'objectif étant d'atteindre la solution du problème (6.124), on illustrera d'un point de vue numérique la convergence de l'algorithme suivant (étudié théoriquement dans la Section 6.2.3.1) :

$$x_0 \in \mathcal{H} \text{ est fixé et } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = \alpha_n (\text{Id} - \gamma \nabla f)x_n + (1 - \alpha_n)Tx_n, \quad (6.126)$$

où  $T$  est donné par (6.125) et (6.122), et  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite dans  $]0, 1[$  telle que  $\alpha_n \rightarrow 0$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = +\infty$ , et telle que l'une des conditions (i)–(iv) du Corollaire 6.2.11 soit vérifiée.



FIG. 6.1 – Image originale.

### 6.4.3 Résultats numériques

Dans cette section, on considère un problème concret de restauration d'image numérique, similaire aux problèmes de [12, Section VI.D], [13, Section VI.B] et [14, Section VI.B].

Une image discrète peut être représentée par une matrice réelle  $[\xi_{m,n}]_{0 \leq m,n \leq N-1}$  de taille  $N \times N$ , dont les éléments donnent les niveaux de gris de l'image. On prendra  $N = 256$  et on représentera une image  $x$  de taille  $N \times N$  par un vecteur de longueur  $N^2$ ,  $(\xi_k)_{0 \leq k \leq N^2-1}$ , dont la  $k^{\text{ième}}$  composante sera  $\xi_{m,n}$ , où  $k = mN + n$ . L'espace des images sera donc l'espace euclidien  $\mathcal{H} = \mathbb{R}^{N^2}$ .

L'image originale  $\tilde{x}$  (Fig. 6.1) est rendue floue par convolution avec un noyau uniforme carré. L'image dégradée  $y$  est obtenue en ajoutant à l'image floue un bruit blanc gaussien de moyenne nulle. On a donc à résoudre le problème d'estimer l'image  $\tilde{x}$  à partir de l'image observée

$$y = L\tilde{x} + u, \tag{6.127}$$



FIG. 6.2 – Image dégradée.

où la matrice  $N^2 \times N^2$ ,  $L$ , associée au noyau et la distribution des composantes du bruit  $u$  sont connues. La taille du noyau uniforme de convolution est  $9 \times 9$ . Le niveau du bruit est choisi de manière à ce que le rapport image floue/bruit soit

$$10 \log_{10} (\|L\tilde{x}\|^2/\|u\|^2) = 31.57 \text{ dB.} \quad (6.128)$$

L'image dégradée est donnée dans la Fig. 6.2. On montre dans la Fig. 6.3 l'image restaurée par le filtre classique de Wiener [1].

Les informations a priori sur  $\tilde{x}$ ,  $L$  et  $u$ , à partir desquelles on estimera l'image  $\tilde{x}$ , se traduisent par quatre contraintes dures et deux contraintes douces. On utilisera les contraintes dures suivantes [12, Section IV.C], [14, Section VI.B.1] :

- $S_1 = [0, +\infty[^{N^2}$ , l'ensemble des images positives.
- $S_2 = \{z \in \mathcal{H} \mid \|y - Lz\|^2 \leq \varepsilon\}$ , l'ensemble des images produisant une image résiduelle dont la variance est consistante avec celle du bruit.
- $S_3 = \{z \in \mathcal{H} \mid |\langle y - Lz \mid \mathbf{1} \rangle| \leq \tau\}$ , l'ensemble des images produisant une image résiduelle dont la moyenne est consistante avec celle du bruit ( $\mathbf{1}$  est le vecteur dont les composantes sont égales à 1).



FIG. 6.3 – Image restaurée avec le filtre de Wiener.

- $S_4 = \bigcap_{(k,l) \in D} \{z \in \mathcal{H} \mid |\widehat{y - Lz}|^2(k, l) \leq \eta\}$ , l'ensemble des images produisant une image résiduelle dont le périodogramme est consistant avec celui du bruit ( $D = \{1, \dots, N/2 - 1\} \times \{1, \dots, N - 1\}$  et  $\widehat{\cdot}$  représente la transformée de Fourier discrète bidimensionnelle).

Pour le calcul des bornes  $\varepsilon$ ,  $\tau$  et  $\eta$  à partir de la distribution du bruit, on consultera [12] et [18].

On suppose à présent que l'on connaît approximativement une partie de la transformée de Fourier de l'image originale  $\tilde{x}$  dans les basses fréquences [13, Section VI.A]. L'ensemble correspondant à cette contrainte douce est

$$C = \{z \in \mathcal{H} \mid \widehat{z}1_K = \widehat{\tilde{x}}1_K\}, \quad (6.129)$$

où  $1_K$  est la fonction caractéristique de  $K$ , et où  $K$  contient l'ensemble des couples de fréquences dans  $\{0, \dots, N/8 - 1\}^2$  ainsi que ceux résultant des propriétés de symétrie de la transformée de Fourier discrète bidimensionnelle d'une image réelle. On supposera également que l'énergie de  $\tilde{x}$  est « limitée », mais qu'on ne dispose pas de borne précise. Ces hypothèses nous conduisent au coût (6.119).



FIG. 6.4 – Image restaurée avec l’algorithme proposé.

Étant données ces contraintes, on illustrera la convergence d’une méthode itérative du type (6.126), utilisant les projecteurs associés aux convexes représentant les contraintes (voir [12], [13] et [14] pour les expressions de ces projecteurs). Plus précisément, en prenant  $\delta = 1/10$  dans (6.119) et en choisissant  $\gamma = 10/11$ , (6.121) se réduit à  $\text{Id} - \gamma \nabla f = 10P_C/11$ . Dans ce cas particulier, l’algorithme (6.126) s’écrit sous la forme

$$x_0 = 0 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = \frac{10\alpha_n}{11} P_C x_n + (1 - \alpha_n) \left( x_n + \frac{\lambda}{4} \sum_{i=1}^4 (P_i x_n - x_n) \right), \quad (6.130)$$

où l’on a choisi  $\alpha_n = 1/(20 + n)$  et  $\lambda = 1,99$ . L’image restaurée de la Fig. 6.4 est obtenue après 400 itérations de l’algorithme (6.130). La progression de l’orbite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est illustrée dans la Fig. 6.5, où l’erreur quadratique moyenne normalisée est

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad E_n = 10 \log_{10} (\|x_n - \bar{x}\|^2 / \|\bar{x}\|^2). \quad (6.131)$$

On atteint rapidement un niveau de convergence acceptable de  $-40$  dB, soit 1% sur la norme de l’erreur. Ce niveau a été atteint en 70 itérations, soit 13,6 secondes sur

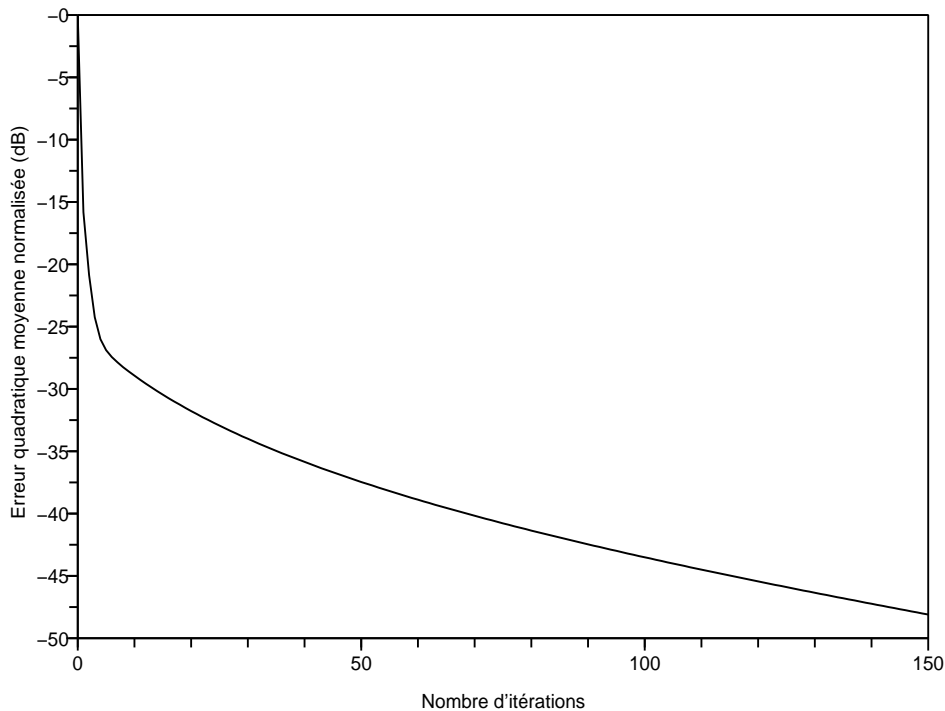


FIG. 6.5 – Comportement asymptotique.

une machine sous Linux avec un processeur Pentium standard cadencé à 3,2 GHz. L'algorithme a été programmé en C++.

Il est à noter que les méthodes de restauration existantes de ce type sont limitées au coûts quadratiques et que leur mise en œuvre est moins flexible [14]. Nos résultats théoriques s'affranchissent de ces limitations et nos expériences numériques préliminaires ouvrent de nouvelles perspectives dans ce domaine. Soulignons enfin que les algorithmes proposés dans ce chapitre sont très simples à mettre en œuvre en comparaison avec d'autres méthodes d'optimisation sous contraintes.

## 6.5 Bibliographie

- [1] H. C. Andrews and B. R. Hunt, *Digital Image Restoration*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1977.
- [2] J. P. Aubin, *Optima and Equilibria – An Introduction to Nonlinear Analysis*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1998.



- [3] J. P. Aubin and H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, Boston, MA, 1990.
- [4] H. H. Bauschke, The approximation of fixed points of compositions of nonexpansive mappings in Hilbert space, *J. Math. Anal. Appl.*, **202**, 150–159, 1996.
- [5] H. H. Bauschke and J. M. Borwein, On projection algorithms for solving convex feasibility problems, *SIAM Rev.*, **38**, 367–426, 1996.
- [6] H. H. Bauschke and P. L. Combettes, A weak-to-strong convergence principle for Fejér-monotone methods in Hilbert spaces, *Math. Oper. Res.*, **26**, 248–264, 2001.
- [7] E. Blum and W. Oettli, From optimization and variational inequalities to equilibrium problems, *Math. Student*, **63**, 123–145, 1994.
- [8] L. M. Bregman, The method of successive projection for finding a common point of convex sets, *Soviet Math. Dokl.*, **6**, 688–692, 1965.
- [9] F. E. Browder, Convergence of approximants to fixed points of nonexpansive nonlinear mappings in Banach spaces, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **24**, 82–90, 1967.
- [10] P. L. Combettes, The foundations of set theoretic estimation, *Proc. IEEE*, **81**, 182–208, 1993.
- [11] P. L. Combettes, Construction d’un point fixe commun à une famille de contractions fermes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **320**, Sér. I Math., 1385–1390, 1995.
- [12] P. L. Combettes, The convex feasibility problem in image recovery, in *Advances in Imaging and Electron Physics*, (P. Hawkes, Ed.), **95**, 155–270, 1996.
- [13] P. L. Combettes, Convex set theoretic image recovery by extrapolated iterations of parallel subgradient projections, *IEEE Trans. Image Process.*, **6**, 493–506, 1997.
- [14] P. L. Combettes, A block-iterative surrogate constraint splitting method for quadratic signal recovery, *IEEE Trans. Signal Process.*, **51**, 1771–1782, 2003.
- [15] P. L. Combettes, Solving monotone inclusions via compositions of nonexpansive averaged operators, *Optimization*, **53**, 475–504, 2004.
- [16] P. L. Combettes and P. Bondon, Hard-constrained inconsistent signal feasibility problems, *IEEE Trans. Signal Process.*, **47**, 2460–2468, 1999.
- [17] P. L. Combettes and S. A. Hirstoaga, Equilibrium programming in Hilbert Spaces, *J. Nonlinear Convex Anal.*, **6**, 117–136, 2005.
- [18] P. L. Combettes and H. J. Trussell, The use of noise properties in set theoretic estimation, *IEEE Trans. Signal Process.*, **39**, 1630–1641, 1991.
- [19] F. Deutsch and I. Yamada, Minimizing certain convex functions over the intersection of the fixed point sets of nonexpansive mappings, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **19**, 33–56, 1998.

- [20] W. G. Dotson, On the Mann iterative process, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **149**, 65–73, 1970.
- [21] J. C. Dunn, Convexity, monotonicity, and gradient processes in Hilbert space, *J. Math. Anal. Appl.*, **53**, 145–158, 1976.
- [22] B. Halpern, Fixed points of nonexpanding maps, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**, 957–961, 1967.
- [23] S. Kamimura and W. Takahashi, Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces, *J. Approx. Theory*, **106**, 226–240, 2000.
- [24] K. Knopp, *Infinite Sequences and Series*, Dover, New York, 1956.
- [25] P.-L. Lions, Approximation de points fixes de contractions, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **284**, Sér. A, 1357–1359, 1977.
- [26] A. Moudafi, Viscosity approximation methods for fixed-points problems, *J. Math. Anal. Appl.*, **241**, 46–55, 2000.
- [27] A. Moudafi and M. Théra, Proximal and dynamical approaches to equilibrium problems, in *Ill-Posed Variational Problems and Regularization Techniques*, (M. Théra and R. Tichatschke, eds.), 187–201, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, **477**, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [28] J. G. O’Hara, P. Pillay, and H.-K. Xu, Iterative approaches to finding nearest common fixed points of nonexpansive mappings in Hilbert spaces, *Nonlinear Anal.*, **54**, 1417–1426, 2003.
- [29] R. T. Rockafellar, Monotone operators and the proximal point algorithm, *SIAM J. Control Optim.*, **14**, 877–898, 1976.
- [30] H. Stark (Editor), *Image Recovery : Theory and Application*, San Diego, CA, Academic Press, 1987.
- [31] H. Stark and Y. Yang, *Vector Space Projections : A Numerical Approach to Signal and Image Processing, Neural Nets, and Optics*, New York, Wiley, 1998.
- [32] R. Wittmann, Approximation of fixed points of nonexpansive mappings, *Arch. Math.*, **58**, 486–491, 1992.
- [33] I. Yamada, The hybrid steepest descent method for the variational inequality problem over the intersection of fixed point sets of nonexpansive mappings, in *Inherently Parallel Algorithms in Feasibility and Optimization and Their Applications* (D. Butnariu, Y. Censor, and S. Reich, eds.), 473–504, Elsevier, New York, 2001.



# Chapitre 7

## Conclusions et perspectives

Cette thèse a porté sur la construction et l'approximation de solutions pour trois types de problèmes fondamentaux en analyse non-linéaire hilbertienne appliquée : les problèmes d'équilibre, les problèmes de point fixe et les problèmes d'inclusion.

Au Chapitre 2, nous avons proposé de nouvelles méthodes pour résoudre les systèmes de problèmes d'équilibre. Nous avons ainsi construit divers algorithmes de type proximal, convergeant fortement ou faiblement vers une solution du système, identifiable dans plusieurs cas.

Dans un deuxième temps, nous avons considéré dans les Chapitres 3 et 4 des perturbations visqueuses et visco-pénalisées des problèmes de point fixe et d'inclusion monotone. Une solution particulière de ces problèmes a été construite en tant que limite forte de diverses courbes d'approximation qui généralisent les courbes classiques.

Enfin, aux Chapitres 5 et 6, nous avons étudié le comportement asymptotique de nouveaux systèmes dynamiques continus et discrets du premier ordre, associés aux courbes d'approximation introduites au Chapitre 3. On a établi des résultats de convergence forte de ces systèmes dynamiques vers une solution particulière d'un problème de point fixe ou d'inclusion monotone. Une application concrète en restauration d'image a été utilisée pour illustrer la mise en œuvre d'un des algorithmes proposés.

Nous ébauchons à présent quelques perspectives dans la continuation de la thèse. D'une part, il s'agit de questions liées au développement des méthodes numériques et, d'autre part, de problèmes théoriques que nous envisageons de poursuivre dans nos recherches futures.

Tout d'abord, il est important de tester les algorithmes proposés dans cette thèse sur divers problèmes inverses, dans la lignée des résultats préliminaires présentés dans la Section 6.4.3, qui n'illustrent que de manière très limitée le potentiel de ces

méthodes.

Au Chapitre 2, un système dynamique discret de type « Haugazeau » a été utilisé pour résoudre des problèmes d'équilibre. Du point de vue théorique, il serait intéressant de définir un système dynamique continu associé à ce type de méthode et d'étudier son comportement asymptotique. Cette question a été déjà suggérée dans [6] dans un contexte particulier.

D'un autre point de vue, il serait intéressant d'appliquer les méthodes développées au Chapitre 2 dans le cadre abstrait d'un problème d'équilibre, pour résoudre des problèmes issus de l'économie, de la finance et de la théorie des jeux. Dans ce contexte, il est important de considérer des bifonctions  $F$  vérifiant des hypothèses plus générales que la Condition 2.1.1. Il s'agit notamment de relaxer la condition de monotonie sur  $F$  qui n'est pas vérifiée par les bifonctions intervenant dans les modèles walrasien et les jeux non-coopératifs à  $n$  personnes. Récemment, des résultats d'existence d'un équilibre pour des bifonctions non monotones ont été obtenus dans [7]. Une idée à explorer serait de remplacer la monotonie de  $F$  par une notion voisine de la cohypomonotonie d'un opérateur multivoque (voir [4], où cette notion a été utilisée pour résoudre des systèmes d'inclusions non monotones) qui assurerait l'existence d'un équilibre pour  $F$ , et ensuite, d'étudier l'existence de la résolvante associée à  $F$  et le comportement asymptotique de méthodes itératives qu'elle engendre.

Une autre direction de recherche à poursuivre est d'élaborer des systèmes dynamiques continus et discrets associés à la courbe d'approximation du Chapitre 4 et d'étudier leur comportement asymptotique, en vue de la résolution d'un problème d'inclusion monotone. Récemment, dans [5], un tel travail a été fait pour une courbe d'approximation de pénalisation pour résoudre un problème de minimisation sous contraintes. Dans le même esprit, une solution identifiable d'un problème d'optimisation sous contraintes, a été atteinte par un système dynamique continu du premier ordre, associé à une courbe de visco-pénalisation [2].

Dans le prolongement du point précédent, il serait intéressant de proposer et d'étudier un schéma itératif général (dans l'esprit de celui de [1]) qui pourrait offrir un cadre unifié pour diverses méthodes d'approximation apparaissant dans la programmation convexe, comme par exemple, la méthode de viscosité (ou la régularisation de Tikhonov), la méthode de pénalité-barrière [1], [5], l'approximation log-exp [1], [5] et les méthodes itératives envisagées dans la continuation du Chapitre 4.

Enfin, il nous a été signalé par H. Attouch qu'en utilisant une approche développée dans [3], il devrait être possible de relaxer la condition (5.42) dans le Théorème 5.2.9. Cette piste sera poursuivie.

Paris, juin 2006.

## 7.1 Bibliographie

- [1] F. Alvarez, M. Carrasco, and K. Pichard : Convergence of a hybrid projection-proximal point algorithm coupled with approximation methods in convex optimization, *Math. Oper. Res.* 30 (2005) 966–984.
- [2] H. Attouch and R. Cominetti : A dynamical approach to convex minimization coupling approximation with the steepest descent method, *J. Differential Equations* 128 (1996) 519–540.
- [3] H. Attouch and M.-O. Czarnecki : Asymptotic control and stabilization of nonlinear oscillators with non-isolated equilibria, *J. Differential Equations* 179 (2002), 278–310.
- [4] P. L. Combettes and T. Pennanen : Proximal methods for cohypomonotone operators, *SIAM J. Control Optim.* 43 (2004) 731–742.
- [5] R. Cominetti and M. Courdurier : Coupling general penalty schemes for convex programming with the steepest descent and the proximal point algorithm, *SIAM J. Optim.* 13 (2002) 745–765.
- [6] O. Güler : Convergence rate estimates for the gradient differential inclusion, *Optim. Methods Softw.* 20 (2005) 729–735.
- [7] A. Jofre, R. T. Rockafellar, and R. J.-B. Wets : A variational inequality scheme for determining an economic equilibrium of classical or extended type, in *Variational analysis and applications*, *Nonconvex Optim. Appl.*, 79 (2005) 553–577.