



HAL
open science

ANALYSE DE FRONT D'ONDE POUR LES OPTIQUES ADAPTATIVES DE NOUVELLE GENERATION

Magalie Nicolle

► **To cite this version:**

Magalie Nicolle. ANALYSE DE FRONT D'ONDE POUR LES OPTIQUES ADAPTATIVES DE NOUVELLE GENERATION. Astrophysique [astro-ph]. Université Paris Sud - Paris XI, 2006. Français. NNT: . tel-00137288

HAL Id: tel-00137288

<https://theses.hal.science/tel-00137288v1>

Submitted on 19 Mar 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS XI, FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY
ECOLE DOCTORALE D'ASTRONOMIE ET D'ASTROPHYSIQUE D'ILE DE FRANCE
OFFICE NATIONAL D'ETUDES ET RECHERCHES AÉROSPATIALES

Thèse

Présentée le 19 décembre 2006 par

Magalie NICOLLE

Pour obtenir le grade de

Docteur de la faculté des sciences d'Orsay

Spécialité : physique

**ANALYSE DE FRONT D'ONDE
POUR LES OPTIQUES ADAPTATIVES
DE NOUVELLE GÉNÉRATION :
OPTIQUES ADAPTATIVES À LARGE CHAMP ET
OPTIQUE ADAPTATIVE EXTRÊME**

Thèse dirigée par
Gérard ROUSSET

Co-encadrée par
Thierry FUSCO et Vincent MICHAU
pour l'ONERA

JURY :

Thierry	FUSCO	Co-directeur
Miska	LE LOUARN	Examinateur
Jean-Louis	MEYZONNETTE	Examinateur
Gérard	ROUSSET	Directeur
Andrei	TOKOVININ	Rapporteur
Jean-Pierre	VERAN	Rapporteur
Jean-Luc	BEUZIT	Invité du jury
Vincent	MICHAU	Invité du jury

ANALYSE DE FRONT D'ONDE POUR LES OPTIQUES ADAPTATIVES DE NOUVELLE GÉNÉRATION

La performance d'un système d'optique adaptative (AO) est intrinsèquement liée à sa capacité à mesurer les déformations subies par le front d'onde incident lors de sa traversée de l'atmosphère. Or un certain nombre de limitations restreignent l'efficacité de cette analyse de front d'onde. Les plus importantes sont le bruit de mesure et l'anisoplanétisme. Le premier limite la magnitude des objets astronomiques pouvant servir de guides aux systèmes d'AO, tandis que le second restreint leur champ corrigé à quelques dizaines de secondes d'arc, du fait de la distribution volumique de la turbulence atmosphérique. A elles deux, ces limitations réduisent à quelques pourcents la couverture de ciel des instruments assistés par AO. Pour cette raison, les nouvelles générations d'optiques adaptatives ont pour objectif soit la très haute performance, impliquant entre autres une bonne robustesse au bruit de mesure, soit l'élargissement du champ corrigé, impliquant la connaissance de la répartition 3D de la turbulence atmosphérique. Pour ces systèmes d'AO à large champ, il est indispensable d'utiliser plusieurs directions d'analyse. La problématique de l'analyse de front d'onde s'articule alors autour de trois pôles : les étoiles guides dont on dispose pour effectuer la multi-analyse, le concept d'analyse de front d'onde considéré pour mesurer le volume de turbulence et la capacité des senseurs de front d'onde à fournir des mesures de qualité. L'objectif de cette thèse est d'étudier chacun de ces trois aspects. Ainsi, une redéfinition de la notion de couverture de ciel est proposée pour les AO à large champ, permettant de prendre en compte le nombre d'étoiles guides et leur magnitude, mais également la fraction du champ scientifique qu'elles permettent de couvrir, le concept d'analyse de front d'onde considéré et l'objectif de performance de l'instrument. Par ailleurs une étude comparative des concepts d'analyse de front d'onde *Star Oriented* et *Layer Oriented* est présentée, sur laquelle on s'appuie pour proposer une optimisation de chaque concept. On montre ainsi qu'une fois optimisés ils présentent tous deux des performances très proches. Enfin, on propose dans un troisième temps une étude comparative de plusieurs estimateurs de pente pour l'analyseur Shack-Hartmann. On étudie en particulier l'estimateur centre de gravité pondéré, qui offre à la fois une bonne robustesse au bruit et de bonnes propriétés de linéarité. Cette dernière étude est utile aussi bien pour l'AO à large champ que pour l'AO à très haute performance.

MOTS CLÉS : OPTIQUE ADAPTATIVE, ANALYSE DE FRONT D'ONDE, STAR ORIENTED, LAYER ORIENTED, SHACK-HARTMANN, COUVERTURE DE CIEL, MULTI-ANALYSE.

WAVEFRONT ANALYSIS FOR NEW GENERATION ADAPTIVE OPTICS SYSTEMS

The performance of an adaptive optics (AO) system is intrinsically related to its capacity to measure the deformations of the incoming wavefront its propagation through the atmosphere. However some limitations restrict the efficiency of this wavefront analysis. The main ones are the measurement noise and the anisoplanatism. The first one limits the magnitude of the astronomical objects that are likely to guide the AO systems, while the second one restricts their corrected field to a few tens of arcseconds, due to the volumic distribution of the atmospheric turbulence. Together, these limitations reduce to a few percents the sky coverage of the instruments assisted by AO. For this reason, rising generation of AO systems aims at either the very high performance, implying in particular a good robustness to measurement noise, or the widening of the corrected field, implying the knowledge of the 3D distribution of the atmospheric turbulence. For these wide field AO systems, it is essential to use several directions of analysis. The wavefront analysis problem is then articulated around three items : the guides stars one has to carry out for the multi-analysis, the wavefront sensing concept considered to measure the volume of turbulence and the capacity of the wavefront sensors to provide good measurements. The purpose of this PhD thesis is to study each one of these three aspects. Hence a redefinition of the concept of sky coverage is proposed for wide field AO. The definition suggested here takes into account the number of guide stars and their magnitude, but also the fraction of the scientific field that is really covered, the considered wavefront sensing concept and the expected performance of the instrument. Concerning the wavefront sensing concepts, a comparative study of the Star Oriented and Layer Oriented concepts is presented and an optimization is proposed for each one, leading to very close performance. Finally, a comparison of different wavefront slope estimators is proposed for the Shack-Hartmann wavefront sensor. In particular, a weighted center of gravity estimator is studied, that offers a good robustness to noise and good properties of linearity. This last study is usefull as well for wide field AO as for very high performance AO.

KEYWORDS : ADAPTIVE OPTICS, WAVEFRONT SENSING, STAR ORIENTED, LAYER ORIENTED, SHACK-HARTMANN, SKY COVERAGE, MULTI-ANALYSIS.

Remerciements

Voici arrivé le temps où tout est posé ou presque. Les dernières coquilles sont corrigées (mais on en trouvera encore, c'est sûr...), la bibliographie est vérifiée, on a trouvé la petite citation qui va bien pour l'exergue... Il faut bien se résoudre à le finir, ce manuscrit, même s'il n'est pas parfait. Comme à mon habitude, j'ai gardé le meilleur pour la fin, et me voilà en pensée face à tous ceux qui ont d'une façon ou d'une autre apporté leur pierre à l'édifice que voici. Ils sont nombreux, et leurs apports très différents. Mais tous étaient indispensables.

En premier lieu, je pense à ceux qui m'ont proposé cette thèse et m'ont aidé à la mener à bien par leurs conseils, les pistes données, les séances de brainstorming, le partage de leur expérience, et primant par dessus tout, leur rigueur scientifique et leur passion de comprendre et d'avancer : Thierry Fusco, Vincent Michau et Gérard Rousset. J'ai parfois maudit intérieurement leur sens du détail (je peux bien l'avouer maintenant), mais il faut reconnaître que travailler avec eux est sans doute la meilleure école scientifique qui soit... et la meilleure école d'humilité aussi. Merci en particulier à Thierry, pour la gestion des crises de panique avant les premières présentations (je me suis améliorée, avec le temps...), pour sa grande disponibilité et pour l'amitié dont il me fait l'honneur.

Je pense ensuite à tous ceux que j'ai côtoyé pendant 3 ans, et qui m'ont apporté une ouverture précieuse sur leurs propres sujets de recherche, ou d'autres thèmes plus futiles. Jean-Marc Conan, Frédéric Cassaing, Marie-Thérèse Velluet, Clélia Robert, Laurent Mugnier, Jean-Luc Beuzit... Tous incroyablement curieux, positifs et passionnés. J'ajoute une mention spéciale pour Laurent, qui en tant que voisin de bureau a supporté stoïquement mes monologues et mes accès de mauvaise humeur quand mes simulations ne marchaient pas. Mention spéciale aussi pour Valérie : ton dynamisme et ton amitié ont été très précieux.

Et puis il y a "la relève" : Cyril, avec qui les discussions sur les aspects commande de la MCAO m'ont apporté un complément d'information indispensable pour me construire une vue d'ensemble de ces systèmes. Serge, excellent pédagogue de l'interférométrie. Jeff, spécialiste des aberrations non communes, Isa, pro. du cophasage de pupilles, Nicolas expert en herbe de l'anisoplanétisme de scintillation, Guillaume avec l'excellent projet œil et Sandrine, trop rarement côtoyée, mais avec qui j'ai eu énormément de bonheur à partager les études sur le SH... et à faire tourner chèvre Thierry avec nos discussions de filles. Merci à vous pour les pauses café/chocolat, les joutes verbales, les fous rires et le partage des états d'âme (comme il est surprenant de découvrir qu'un frère - ou une sœur - d'armes qui impressionne par sa compétence a les mêmes angoisses que soi de ne pas être à la hauteur...).

Mais là ne s'arrête pas, et loin s'en faut, la liste des personnes à qui je dois le succès de cette entreprise. Il y a tous ceux de l'autre moitié de ma vie, qui m'ont soutenue, parfois à bout de bras, qui m'ont entourée de leur amitié ou de leur amour, et qui ont parfois accepté qu'on ne se voie que

très (trop) rarement : mes vieilles copines, Géraldine, Maud et Sandrine. Toutes trois mamans. Vous me mettez la pression, les filles... Mes parents, toujours discrets, tellement patients, mais toujours là au moindre appel. En particulier mon père, qui d'aussi loin que je me souviens, m'a montré la voie de l'exigence et du dépassement de soi. Merci aussi à mon Frangin pour les instants de musique, trop rares moments de poésie dans mon univers bien cartésien.

Il me reste une personne à citer. Les trois années passées n'ont pas été de tout repos, pour l'un comme pour l'autre. Pour moi une thèse de doctorat, pour lui rien de moins qu'une entreprise à développer en partant presque de zéro : trois ans d'engagement professionnel intense, des journées marathons, 6 voire 7 jours par semaine. Malgré tout, il est toujours resté disponible, à l'écoute, apaisant, encourageant.

Te dire merci me semble désuet, ridicule, inapte à exprimer toute la gratitude que je ressens. T'avoir chaque jour à mes côtés m'émerveille toujours au bout de 7 ans. Tout ce que je veux, c'est que cela dure sept fois autant. Je te dédie ce manuscrit.

*The most exciting phrase to hear in science, the one that heralds new discoveries, is not "Eureka!"
but "That's funny..."*

*La phrase la plus excitante à entendre en science, celle qui annonce de nouvelles découvertes, n'est
pas "Eureka!" mais plutôt "Tiens, c'est marrant..."*

Isaac Asimov

Table des matières

I	Turbulence atmosphérique et optiques adaptatives	5
1	Effets optiques de la turbulence atmosphérique	7
1.1	Propriétés statistiques de la phase turbulente	8
1.1.1	Hypothèses de travail	8
1.1.2	Propriétés statistiques des fluctuations d'indice de réfraction dans une couche turbulente	10
1.1.3	Propriétés statistiques des fluctuations de phase d'une onde plane perturbée par la turbulence atmosphérique	10
1.2	Caractérisation des effets optiques de la turbulence	11
1.2.1	Constante de structure des fluctuations d'indice	11
1.2.2	Paramètre de Fried	12
1.2.3	Seeing	12
1.2.4	Domaine isoplanétique	13
1.3	Décomposition modale de la phase turbulente.	14
1.3.1	La base des modes de Zernike	14
1.3.2	Décomposition de la phase turbulente et propriétés statistiques des coefficients de Zernike	16
1.4	Imagerie optique à travers la turbulence	19
2	L'optique adaptative	21
2.1	Analyse de front d'onde	22
2.1.1	L'analyse de front d'onde en plan focal	22
2.1.2	Analyseurs en plan pupille	23
2.1.3	Modélisation de la mesure d'un analyseur de front d'onde.	28
2.2	Reconstruction du front d'onde	29
2.2.1	Reconstruction en boucle ouverte	30
2.2.2	Reconstruction en boucle fermée	32
2.3	Correction du front d'onde	32
2.4	Budget d'erreur d'une optique adaptative	33
2.4.1	Erreurs dues à la modélisation de l'atmosphère	33
2.4.2	L'anisoplanétisme	34
2.4.3	Erreurs dues à la boucle d'AO	36
2.5	Propriétés de l'image corrigée par AO	38
2.5.1	Caractéristiques de l'image en correction partielle	38
2.5.2	Caractérisation de la qualité d'une image corrigée par AO.	38
2.6	Conclusion	40

3	Les nouveaux enjeux de l'optique adaptative	41
3.1	Détection de planètes extra-solaires	41
3.1.1	Objectifs scientifiques	41
3.1.2	La XAO	43
3.2	L'étude des étoiles et des populations stellaires	44
3.2.1	Objectifs scientifiques	44
3.2.2	L'optique adaptative multi-conjuguée	44
3.3	L'exploration extra-galactique	46
3.3.1	Objectifs scientifiques	46
3.3.2	L'optique adaptative <i>ground layer</i> et l'optique adaptative multi-objet	47
3.4	Conclusion : une AO à large champ indispensable	48
4	L'analyse de front d'onde pour l'AO à large champ	49
4.1	Le concept <i>Star oriented</i>	49
4.1.1	Principe et mesures	49
4.1.2	Reconstruction	50
4.2	Le concept <i>Layer oriented</i>	56
4.2.1	Principe et Mesure	56
4.2.2	Reconstruction	57
4.3	Le triple problème de la multi-analyse	60
II	Etude de la couverture de ciel pour une AO à large champ	63
5	Notion de couverture de ciel en AO à large champ	65
5.1	Position du problème	65
5.2	Le modèle de populations stellaires de Besançon	66
5.3	Redéfinition de la couverture de ciel pour l'AO à large champ	67
5.4	Etude de couverture de ciel pour MAD	69
III	Etude de concepts d'analyse de front d'onde pour une AO à large champ	81
6	Etude et optimisation des concepts SO et LO	83
6.1	<i>Star Oriented, Layer Oriented</i> : comment choisir?	83
6.2	Choix d'un critère de performance	85
6.2.1	Critères de performance en MCAO	85
6.2.2	Critères de performance en correction partielle	85
6.2.3	Performance accessible par minimisation de QC_{GLAO}	87
6.2.4	Comparaison de QC_{GLAO} et des critères basés sur la PSF corrigée	89
6.2.5	Définition d'un sous-critère dépendant spécifiquement du concept d'analyse considéré	92
6.3	Etude des concepts SO et LO	93
6.3.1	Expression analytique du critère QC_{WFSC}	94
6.3.2	Evaluation des performances des concepts SO et LO	97
6.3.3	Le <i>Numerical Layer Oriented</i> (NLO)	101
6.4	Optimisation des concepts SO et LO	103

6.4.1	Optimisation de l'utilisation des mesures du SO :	103
6.4.2	Optimisation de l'utilisation des mesures du LO :	105
6.4.3	Comparaison des performances des concepts optimisés	110
6.5	Conclusion	112
7	Validation expérimentale des SO et LO optimisés	127
7.1	Présentation du démonstrateur	127
7.2	Configurations utilisées pour les tests	130
7.3	Caractérisation du système MAD	131
7.3.1	Evolution de la performance selon le flux en AO classique	131
7.3.2	Choix d'un critère pour l'analyse des résultats expérimentaux	133
7.3.3	Caractérisation des aberrations statiques	137
7.3.4	Introduction de la turbulence	138
7.3.5	En résumé	139
7.4	Etude du SO, du NLO et du SO optimisé	139
7.4.1	Le <i>Star Oriented</i>	141
7.4.2	Le <i>Numerical Layer Oriented</i>	144
7.4.3	Optimisation du SO	147
7.5	Conclusion	150
8	Optimisation de la performance d'un GLAO	153
8.1	Objectifs et conditions de l'étude	153
8.2	Optimisation de la performance moyenne	154
8.2.1	Simulation numérique de la reconstruction de front d'onde avec un GLAO	155
8.2.2	Quantification de l'erreur de mesure due à la discrétisation du champ par les GS	160
8.2.3	Optimisation de la performance globale du GLAO à fort flux	163
8.2.4	Influence du rapport signal à bruit sur les WFSs	170
8.2.5	Uniformité de la correction du GLAO optimisé	173
8.3	Optimisation de l'uniformité de la correction	178
8.3.1	Minimisation de la variance dans le champ corrigé de la variance de phase résiduelle	178
8.3.2	Minimisation sous contrainte	180
8.4	Conclusion	180
IV	Comparaison d'algorithmes de mesure du front d'onde pour un senseur Shack-Hartmann	181
9	Estimation de la position d'un spot	185
9.1	Cadre et enjeu de l'étude	185
9.2	Estimation au sens du maximum de vraisemblance	187
9.2.1	Estimateur ML en présence de bruit de photons	188
9.2.2	Estimateur ML en présence de bruit de détecteur	188
9.2.3	Cas particulier d'un spot à profil gaussien	189
9.3	Estimation au sens du maximum <i>a posteriori</i>	192
9.4	Discussion sur le choix d'un estimateur	194

10	Performance de l'estimateur barycentre	197
10.1	Erreurs statiques	198
10.1.1	Effet de la taille du support de calcul du barycentre	198
10.1.2	Effet de la taille des pixels du détecteur	205
10.1.3	Limitation des erreurs statiques	208
10.1.4	Synthèse et conclusions sur les erreurs statiques	212
10.2	Erreurs statistiques	215
10.2.1	Bruits de mesure	215
10.2.2	Fluctuations turbulentes de la forme du spot	218
10.3	Synthèse sur l'estimation de pente par barycentre	221
11	Performance de l'estimateur barycentre pondéré	223
11.1	Erreurs statiques	228
11.1.1	Effet de la taille du support	228
11.1.2	Effet de la taille des pixels	231
11.2	Erreurs statistiques	233
11.2.1	Bruits de mesure	233
11.2.2	Fluctuations turbulentes de la forme du spot	235
11.3	Validation expérimentale	237
11.4	Conclusion sur l'estimateur centre de gravité pondéré	246
12	Estimateurs basés sur la corrélation	247
12.1	Corrélation sur source ponctuelle	248
12.2	Corrélation sur source étendue	284
12.3	Conclusions sur la corrélation	297
A	Formulaire de calcul matriciel	305
A.1	Notations	305
A.2	Définitions	305
A.2.1	Produit scalaire	305
A.2.2	Dérivée matricielle	305
A.3	Propriétés des dérivées matricielles	306
A.3.1	Dérivées par rapport à un vecteur	306
A.3.2	Dérivées par rapport à une matrice	306
A.3.3	Dérivées de traces de matrices	307
A.3.4	Dérivée d'une fonction de matrice	307
A.4	Propriétés des matrices inverses	307
B	Estimation de la position d'un spot lumineux	309
B.1	Estimation au sens du maximum de vraisemblance	310
B.1.1	Estimateur ML en présence de bruit de photons	310
B.1.2	Estimateur ML en présence de bruit de lecture	311
B.1.3	Cas particulier : spot à profil gaussien	311
B.2	Estimation au sens du maximum <i>a posteriori</i>	313
B.2.1	Estimateur MAP en présence de bruit de photons	314
B.2.2	Estimateur MAP en présence de bruit de détecteur	314
B.2.3	Cas particulier : spot à profil gaussien	315

C	Linéarité des estimateurs CdG et CdG pondéré	317
C.1	Définitions et notations	317
C.2	L'estimateur Centre de gravité	318
C.2.1	Support infini	318
C.2.2	Support fini	318
C.3	L'estimateur Centre de gravité pondéré	320
C.3.1	Fonction de pondération centrée sur la position vraie du spot	320
C.3.2	Fonction de pondération centrée sur le détecteur	323
C.4	En résumé	325
C.4.1	Cas général	325
C.4.2	Cas $\sigma_W = \sigma_T$	326
D	Effets du bruit sur le CdG et le CdG pondéré	327
D.1	Estimation de l'angle d'arrivée sur la sous-pupille	327
D.2	Centre de gravité	328
D.2.1	Bruit de photons	329
D.2.2	Bruit de lecture	330
D.3	Centre de gravité pondéré	331
D.3.1	Bruit de photons	333
D.3.2	Bruit de lecture	333
E	Liste des publications	335

Table des figures

1.1	Gain apporté par l'optique adaptative sur l'image d'une étoile triple.	7
1.2	Profils de $C_n^2(h)$ pour les sites de Paranal et du Dome C.	11
1.3	Le phénomène d'anisoplanétisme.	13
1.4	Les dix premiers polynômes de Zernike.	15
1.5	Matrice des covariances des coefficients de Zernike d'une phase turbulente.	18
2.1	Schéma de principe d'un système d'optique adaptative.	21
2.2	Principe de l'analyse de front d'onde avec un analyseur de courbure.	24
2.3	Principe de l'analyse de front d'onde avec un analyseur à pyramide.	25
2.4	Principe de l'analyse de front d'onde avec un senseur Shack-Hartmann.	26
2.5	Evolution de la performance du Shack-Hartmann en fonction du flux.	28
2.6	Schéma de Block d'une optique adaptative en boucle ouverte.	29
2.7	Schéma de Block d'une optique adaptative en boucle fermée.	29
2.8	PSF courte pose et longue pose d'un instrument corrigé par optique adaptative.	38
3.1	Schéma de principe d'une optique adaptative multiconjuguée (MCAO)	45
3.2	Schéma de principe d'une optique adaptative GLAO.	47
4.1	Le concept <i>Star Oriented</i>	50
4.2	Analyse multi-source de la turbulence atmosphérique.	52
4.3	Le concept <i>Layer Oriented</i>	56
4.4	Empreintes de la pupille dans les directions des étoiles guides sur une couche d'altitude.	57
5.1	Propriétés statistiques des populations stellaires selon le modèle de Besançon.	67
6.1	Exemple de maillage du champ en directions de reconstruction et en étoiles guides.	90
6.2	Validation du critère sur la phase pour le GLAO.	91
6.3	Performance du SO et du LO en fonction du nombre d'étoiles guides.	99
6.4	Performance du SO et du LO pour les latitudes galactiques plus élevées.	100
6.5	Comparaison du NLO avec le SO et le LO.	102
6.6	Comparaison du SO optimisé avec le NLO et le SO.	105
6.7	Procédure simplifiée d'optimisation du LO.	107
6.8	Comparaison du LO optimisé et du LO.	109
6.9	Comparaison du SO optimisé et du LO optimisé.	111
7.1	Schéma optique du démonstrateur de MCAO de l'ESO.	127
7.2	Miroir bimorphe et monture Tip-Tilt de MAD.	128
7.3	Le module MAPS de MAD.	129

7.4	Comportement d'un WFS de MAD en fonction du flux.	131
7.5	Cartes d'énergies encadrées dans 200 mas en l'absence de turbulence.	134
7.6	Valeur moyenne de l'énergie encadrée dans le champ en fonction de la taille du pixel d'intégration.	135
7.7	Cartes des rapports de Strehl en l'absence de turbulence.	136
7.8	Différences point à point entre les trois directions d'analyse.	138
7.9	Energie encadrée dans 200 mas sans correction.	139
7.10	Energie encadrée en présence uniquement de la turbulence au sol.	140
7.11	Energie encadrée pour le mode SO.	143
7.12	Comparaison NLO et SO avec turbulence au sol ; configuration M 120.	144
7.13	Comparaison NLO et SO 3 couches turbulentes ; configuration M 102.	145
7.14	Energie encadrée pour le mode NLO en présence de turbulence d'altitude.	146
7.15	Energie encadrée pour le mode SO optimisé.	148
8.1	Organigramme représentant la simulation numérique de l'analyse de front d'onde pour le GLAO.	156
8.2	Profils de $C_n^2(h)$ pour les sites de Paranal et du Dome C.	157
8.3	Convergence de l'estimation de $QC_{discret}$	159
8.4	Exemple de maillage du champ et de pavage pour une répartition uniforme des étoiles guides.	160
8.5	Evolution de $QC_{discret}$ en fonction du nombre d'étoiles guides.	162
8.6	Comparaison de $QC_{discret}$ et QC_{WFSC} pour les concepts SO et LO optimisés.	163
8.7	Gain apporté par la tomographie pour le GLAO. Répartition uniforme des étoiles dans le champ.	164
8.8	Carte de gain apporté par la tomographie selon le champ et le nombre d'étoiles guides. Répartition uniforme.	165
8.9	Evolution de la corrélation spatiale des 5 premiers ordres radiaux de Zernike.	166
8.10	Effet du profil de turbulence.	167
8.11	Gain apporté par la tomographie dans le cas d'étoiles guides situées en bord de champ.	168
8.12	Gain apporté par la tomographie pour des étoiles en cercle autour du champ.	169
8.13	Gain apporté par la tomographie pour une répartition aléatoire des étoiles guides.	171
8.14	Cartes des variances de phase résiduelle après correction par GLAO.	172
8.15	Cartes des énergies encadrées après correction par GLAO.	174
8.16	Cartes des variances de phase résiduelle après correction par GLAO. Etoiles à faible flux.	175
8.17	GLAO sur un champ de 3 arcmin avec 7 étoiles guides dont une au centre du champ corrigé.	176
8.18	GLAO sur un champ de 3 arcmin avec 7 étoiles guides rejetées en bord de champ.	177
8.19	GLAO sur un champ de 6 arcmin avec 7 étoiles guides rejetées en bord de champ.	177
8.20	Principe de l'analyse de front d'onde avec un senseur Shack-Hartmann.	183
9.1	Relation entre déplacement d'un spot Hartmann au plan focal d'une micro-lentille et pente moyenne du front d'onde incident.	185
9.2	Approximation de la tache de diffraction d'une sous-pupille carrée par une fonction gaussienne.	189
9.3	Convergence vers l'estimation ML par recentrages successifs de la pondérante du CdG pondéré.	191

10.1	Représentation graphique de la fonction $\Phi(x)$.	199
10.2	Centre de gravité d'un spot gaussien sur support fini.	200
10.3	Erreur relative d'estimation en fonction de déplacement pour un spot gaussien.	201
10.4	Centre de gravité d'un spot gaussien pour un support plus large.	201
10.5	Centre de gravité d'un spot à profil sinc^2 sur support fini.	202
10.6	Erreur relative d'estimation en fonction de déplacement pour un spot gaussien.	203
10.7	Le décentrement de la tache de diffraction induit une erreur sur l'estimation du centroid	204
10.8	Effet de la largeur de la bande spectrale du Shack-Hartmann sur le spot.	204
10.9	Spot gaussien échantillonné à Shannon.	205
10.10	Erreur d'estimation de la position d'un spot gaussien sur un support fini et pixélisé.	206
10.11	Oscillation de l'erreur sur la position du spot.	206
10.12	Erreur d'estimation de la position d'un spot à profil sinc^2 sur un support fini et pixélisé.	207
10.13	Effet du recentrage de la fenêtre de calcul du centre de gravité sur le maximum du spot.	209
10.14	Effet du seuillage à 4 pixels.	210
10.15	Effet du seuillage à valeur fixée.	211
10.16	Nombre de pixels pris en compte selon le niveau de seuillage du spot.	212
10.17	Allure du spot et niveaux de seuil pour quatre positions du spot.	213
10.18	Evolution du bruit de mesure en fonction du champ utile.	217
10.19	Gain à très faible flux apporté par la compensation des fluctuations du dénominateur du barycentre et le seuillage du spot.	218
10.20	Effet des déformations turbulentes du spot sur un CdG fenêtré.	219
10.21	Effet des déformations turbulentes du spot sur un CdG seuillé.	220
10.22	Réponse de l'estimateur barycentre en fonction de l'échantillonnage du détecteur pour un spot turbulent.	221
11.1	Convergence vers l'estimation ML par recentrages successifs de la pondérante du CdG pondéré.	224
11.2	Comparaison de l'erreur de linéarité du centre de gravité classique et du centre de gravité pondéré.	229
11.3	Comparaison de l'effet de taille de support pour le centre de gravité classique et le centre de gravité pondéré.	230
11.4	Différences de largeur et de position de l'image sur laquelle le barycentre est calculé en fonction de l'estimateur considéré.	231
11.5	Comparaison l'effet de la taille des pixels pour le centre de gravité classique et le centre de gravité pondéré.	232
11.6	Variance de l'erreur d'estimation de pente avec centre de gravité pondéré, corrigé ou non de son coefficient de réponse ; comparaison avec le centre de gravité classique.	235
11.7	Evolution de la variance de l'erreur d'estimation de la pente locale du front d'onde en fonction de la FWHM de la pondérante.	236
11.8	Optimisation de la FWHM de la pondérante en fonction du flux, pour un spot à profil sinc^2 .	236
11.9	Optimisation de la FWHM de la pondérante pour un spot turbulent.	237
12.1	Conditions de l'étude comparative des algorithmes de détection du maximum du produit de corrélation menée dans [Thomas et al. 2006].	249
C.1	Représentation graphique de la fonction $\Phi(x)$.	319

D.1 Relation entre position d'une tache image au foyer d'une micro-lentille et pente locale
du front d'onde incident. 327

Table des acronymes

L'attention du lecteur est appelée sur le fait que nombre de termes et d'acronymes utilisés dans ce manuscrit sont sous leur forme anglaise. Il s'agit là d'un choix délibéré, motivé par la volonté de respecter la terminologie couramment employée dans tous les laboratoires scientifiques, français comme internationaux. J'adresse cependant mes excuses à ceux que ce choix pourrait heurter.

AO	<i>Adaptive Optics</i> , optique adaptative
ASO	Analyseur de Surface d'Onde
CCD	<i>Charge Coupled Device</i>
COG	<i>Center Of Gravity</i> , centre de gravité
DM	<i>Deformable Mirror</i> , miroir déformable
DSP	Densité Spectrale de Puissance
EE	Energie Encerclée ou énergie encadrée (selon contexte)
ELT	<i>Extremely Large Telescope</i> , télescope de diamètre supérieur à 20m
EMCCD	<i>Electron Multiplying CCD</i> , CCD à multiplication d'électrons
ESA	<i>European Space Agency</i> , agence spatiale européenne.
ESO	<i>European Southern Observatory</i> , observatoire austral européen
FOV	<i>Field Of View</i> , champ de vue
FWHM	<i>Full Width at Half Maximum</i> , largeur à mi-hauteur
GL	<i>Ground Layer</i> , couche turbulente localisée au sol
GLAO	<i>Ground Layer Adaptive Optics</i>
GS	<i>Guide Star</i> , étoile guide
LASER	<i>Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation</i> ,
LO	<i>Layer Oriented</i>
LTAO	<i>Laser Tomography Adaptive Optics</i>
MAP	Maximum A Posteriori
MCAO	<i>Multi-conjugate Adaptive optics</i> , optique adaptative multi-conjuguée
ML	<i>Maximum Likelihood</i> , maximum de vraisemblance
MOAO	<i>Multi Object Adaptive optics</i> , optique adaptative multi-objet

NASA	<i>National Aeronautics and Space Administration (USA),</i>
NCPA	<i>Non Common Path Aberrations, aberrations non communes</i>
NLO	<i>Numerical Layer Oriented, LO numérique</i>
OLO	<i>Optimized Layer Oriented, LO optimisé</i>
ONERA	Office National d'Etudes et Recherches Aéropatiales
OSO	<i>Optimized Star Oriented, SO optimisé</i>
OTF	<i>Optical Transfert Function, fonction de transfert optique</i>
PSF	<i>Point Spread Function, fonction d'étalement de point</i>
QC	<i>Quad Cell detector, détecteur quatre quadrants</i>
RMS	<i>Root Mean Square, Ecart-type</i>
RON	<i>Read Out Noise, bruit de détecteur</i>
RTC	<i>Real Time Computer, calculateur temps réel</i>
SH	Shack-Hartmann
SNR	<i>Signal to Noise Ratio, rapport signal à bruit</i>
SO	<i>Star Oriented</i>
SR	<i>Strehl Ratio, rapport de Strehl</i>
SSK	<i>Surface Sky Coverage, couverture de ciel surfacique.</i>
VLT	<i>Very Large Telescope</i>
WCOG	<i>Weighted Center Of Gravity, centre de gravité pondéré</i>
WFS	<i>Wave-Front Sensor, analyseur de surface d'onde</i>
WFSC	<i>Wave-Front Sensing Concept, concept d'analyse de surface d'onde</i>
XAO	<i>eXtreme Adaptive Optics, OA à très haute performance</i>

Introduction

Depuis la nuit des temps, les phénomènes astronomiques ont participé à la structuration des sociétés et de la pensée humaines, en permettant aux hommes de définir des références spatiales, temporelles et spirituelles communes. Ils ont permis l'élaboration des calendriers, fourni les références indispensables à l'exploration et la cartographie de la Terre, et ont été à la base du développement spirituel des communautés primitives par les cultes religieux qui leur étaient voués. Cette omniprésence dans la vie des hommes a de tout temps motivé leur insatiable curiosité et fait de l'astronomie un des moteurs de l'évolution de l'humanité.

Au cours son histoire, l'astronomie a connu trois révolutions majeures, chacune motivée par l'utilisation de nouveaux moyens d'observation. A la Renaissance, l'utilisation des premières lunettes et la multiplication des observatoires provoquent une mutation profonde de l'astronomie, qui devient une science exacte en abandonnant ses composantes ésotériques et spirituelles et en se dotant d'une méthodologie de l'analyse des observations. A la fin du XIX^e siècle, l'application des méthodes spectroscopiques à l'astronomie signe l'avènement de l'astrophysique. L'analyse de la lumière donne alors accès aux propriétés physico-chimiques des corps célestes, mais aussi à leur histoire et à celle de l'univers. La troisième révolution est contemporaine, et a pour origine la démultiplication des moyens d'acquisition et de traitement des données apportés par l'électronique et l'informatique. Au cours de cette évolution, les astronomes n'ont cessé d'augmenter le diamètre des collecteurs de leurs instruments, afin de pouvoir observer avec le plus de précision possible des objets de magnitude toujours plus élevée. Le flux de photons collecté par un instrument est en effet proportionnel à sa surface collectrice, et sa résolution théorique proportionnelle à son diamètre. Ainsi, les grands télescopes actuellement en opération ont un diamètre de l'ordre de la dizaine de mètres, et le XXI^e siècle verra l'avènement des ELTs (*Extremely Large Telescopes*), avec des diamètres allant de 20m à 40m. Malheureusement, si ces dimensions permettent bel et bien de collecter un nombre croissant de photons, la résolution de ces instruments reste limitée à celle d'un télescope de quelques dizaines de centimètres par la turbulence atmosphérique.

De fait, parmi tous les apports de l'électronique et de l'informatique à l'astronomie moderne, la très récente capacité à s'affranchir partiellement des effets optiques de la turbulence atmosphérique est l'une des plus spectaculaires car elle a permis de multiplier environ par 10 la résolution des grands télescopes terrestres. Dès 1953, Babcock [Babcock 1953] propose le premier un concept d'instrument capable de mesurer et de corriger en temps réel les effets optiques de la turbulence atmosphérique : l'optique adaptative (*adaptive optics*, AO). Il faudra toutefois attendre une quarantaine d'années avant que le premier système d'optique adaptative pour l'astronomie (COME ON, en 1990 [Kern et al. 1990, Rousset et al. 1990]) arrive sur le ciel. Depuis, la quasi-totalité des grands observatoires sont équipés de systèmes d'optique adaptative. Toutefois, si ces systèmes ont permis d'obtenir des images d'une qualité sans précédent, leur performance et leur champ d'application restent limités. En effet,

deux sources d'erreurs viennent principalement restreindre le type d'objets célestes observables avec une AO : le bruit de mesure et l'anisoplanétisme. Le premier restreint les cibles potentielles aux objets les plus brillants, la magnitude limite des systèmes actuellement en opération étant de l'ordre de $V=16$ à 17 . Le second, dû à la répartition verticale de la turbulence dans le volume d'atmosphère situé à l'aplomb de l'instrument, limite le champ corrigé à quelques dizaines de secondes d'arc. A elles deux, ces deux limitations restreignent à quelques pourcents la couverture de ciel des instruments assistés par AO.

Dès 1975, Dicke [Dicke 1975] propose une généralisation du système d'AO proposé par Babcock afin d'étendre le champ corrigé à quelques minutes d'arc. Le principe de ce concept d'optique adaptative multi-conjuguée (*Multi-conjugate Adaptive Optics*, MCAO) est de multiplier les sources guides dans le champ afin de pouvoir reconstruire et corriger le volume de turbulence grâce à plusieurs miroirs déformables. Depuis, plusieurs concepts d'optique adaptative à large champ ont été proposés, pour répondre à des objectifs scientifiques spécifiques : le GLAO (*Ground Layer Adaptive Optics*) pour corriger spécifiquement la turbulence localisée au voisinage de la pupille du télescope, permettant ainsi une correction partielle mais uniforme sur un très large champ, la MOAO (*Multi-Object Adaptive Optics*) pour apporter une haute correction dans quelques directions du champ. Le point commun de ces optiques adaptatives à large champ est de nécessiter la connaissance du volume de turbulence, et donc une analyse de front d'onde utilisant plusieurs étoiles guides.

Dans le concept initialement proposé, le système de MCAO mesure indépendamment le front d'onde dans chacune des directions matérialisées par les étoiles guides (typiquement 4 à 6 étoiles), puis ces mesures sont utilisées pour commander plusieurs miroirs déformables (typiquement 2 à 3 miroirs), chacun étant conjugué optiquement à une couche à corriger. Simple dans son énoncé, ce concept, dit *Star Oriented* (SO) n'en pose pas moins des problèmes pour son application à l'astronomie, du fait de la faiblesse et de la rareté des sources guides. Pour cette raison, un concept alternatif, dit *Layer Oriented* (LO), a été proposé [Ragazzoni 1999] dans lequel l'analyse de front d'onde ne se fait plus par direction d'étoiles guides, mais par couche turbulente corrigée, chaque couche étant illuminée par la totalité des étoiles guides prises en compte. Le nombre d'étoiles guides étant généralement supérieur au nombre de miroirs déformables, on comprend aisément que le concept *Layer Oriented* est moins sensible au bruit que le concept *Star Oriented*. En revanche, les informations issues des différentes directions d'analyse étant combinées avant le processus d'analyse du front d'onde, on paye cette meilleure robustesse par une perte d'information sur le volume de turbulence.

Dès lors, plusieurs problèmes se posent pour évaluer la performance de l'un ou l'autre de ces concepts, et plus généralement de la multi-analyse. Le premier est le nombre et la magnitude limite des étoiles guides nécessaires à une reconstruction efficace du front d'onde. Des caractéristiques requises pour les étoiles guides va dépendre la couverture de ciel de l'instrument. En particulier, plus les étoiles guides devront être nombreuses et lumineuses et plus la couverture de ciel sera restreinte. Notons cependant qu'en la matière, le développement de la technologie des étoiles Laser permettra en théorie de produire des instruments dont la couverture de ciel avoisinera les 100 %. Le second problème, à l'autre bout de la chaîne d'information, est celui de la robustesse au bruit des senseurs de front d'onde utilisés pour effectuer la mesure. Plus ils pourront travailler à faible flux, plus la contrainte sur la magnitude limite des étoiles guides sera relaxée, et meilleure sera la couverture de ciel de l'instrument. Enfin, le troisième problème est celui du concept d'analyse de front d'onde envisagé qui, en privilégiant soit une meilleure gestion du bruit, soit la reconstruction du

volume turbulent, influe fortement sur les performances de l'analyse de front d'onde. Le problème de l'analyse de front d'onde pour l'AO à large champ est donc un problème triple, chacun des aspects interagissant fortement avec les deux autres.

L'objectif du travail présenté ici est d'étudier chaque point et de proposer des outils permettant au mieux de caractériser, et le cas échéant d'améliorer la performance de l'analyse de front d'onde. Dans la première partie, on présente un rappel des bases indispensables à la bonne compréhension de ce travail. Le premier chapitre est consacré à la présentation des effets de la turbulence sur l'imagerie. Le chapitre 2 présente le principe de l'optique adaptative, ses principaux constituants et son budget d'erreur. Le chapitre 3 est consacré à la présentations des enjeux scientifiques motivant le développement des optiques adaptatives de nouvelle génération. Le chapitre 4 présente les concepts d'analyse de front d'onde *Star Oriented* et *Layer Oriented*, introduit la problématique de l'analyse de front d'onde et motive l'approche développée dans la suite de ce manuscrit.

La partie II présente une étude de la notion de couverture de ciel pour l'optique adaptative à large champ. On propose une redéfinition de la notion de couverture de ciel pour la multi-analyse, prenant en compte le nombre d'étoiles et leur magnitude, mais aussi leur répartition dans le champ.

La partie III de ce manuscrit est consacrée à l'étude de performance et à l'optimisation des deux concepts d'analyse de front d'onde présentés ci-dessus. Cette étude est effectuée dans le cadre d'une optique adaptative à large champ : le GLAO. Le chapitre 6 présente une étude comparative du *Star Oriented* et du *Layer Oriented*, basée sur le développement d'un modèle analytique de la mesure effectuée dans chaque cas. Cette étude débouche sur la proposition d'algorithmes d'optimisation de la mesure pour les deux concepts. Le chapitre 7 présente la validation expérimentale effectuée sur le démonstrateur d'optique adaptative multi-conjuguée MAD de l'ESO (observatoire austral européen) pour l'optimisation du *Star Oriented*. Le chapitre 8, quant à lui, reprend la problématique de l'optimisation de l'analyse de front d'onde dans le cadre plus général de l'optimisation de la performance globale du GLAO.

Enfin, la partie IV s'intéresse à l'étude comparative des différents algorithmes de mesure du senseur de front d'onde Shack-Hartmann. Le chapitre 9 propose une revue des estimateurs optimaux ML et MAP de la pente locale du front d'onde. Les chapitres 10, 11 et 12 proposent une étude détaillée de trois modes de détermination de la pente locale : le centre de gravité, le centre de gravité pondéré et la corrélation.

Première partie

**Turbulence atmosphérique et optiques
adaptatives**

Chapitre 1

Effets optiques de la turbulence atmosphérique

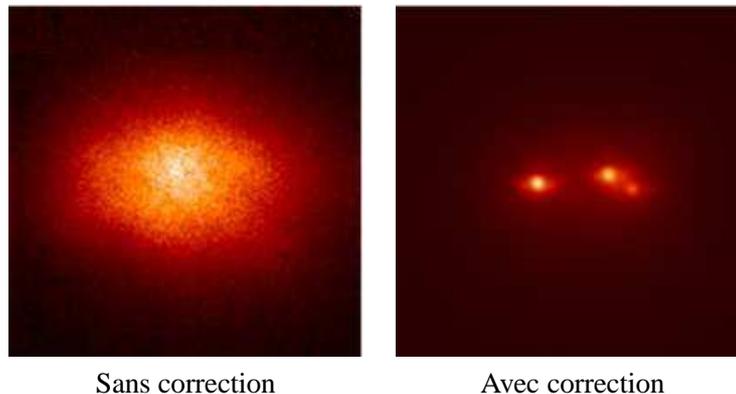


FIG. 1.1 – Image d’une étoile triple vue par le télescope de 1.52 m de l’observatoire de Haute Provence, en présence de turbulence atmosphérique (à gauche), et avec correction de ses effets (à droite) par le banc d’optique adaptative BOA de l’ONERA.

L’atmosphère terrestre est un fluide en perpétuelle interaction avec son environnement. Le soleil et la terre sont les deux principaux intervenants dans son bilan énergétique : le soleil grâce au flux radiatif qu’il émet, la terre principalement grâce au flux lumineux qu’elle réfléchit, aux frottements visqueux dont la basse atmosphère est le site (couche limite atmosphérique), et à l’évaporation de l’eau à l’aplomb des océans. Combinés, ces échanges de matière et d’énergie font de l’atmosphère un milieu inhomogène constitué de masses d’air de température, pression et d’humidité différentes. Les interfaces entre ces masses d’air sont le site de formation de couches limites, au sein de laquelle les caractéristiques physiques (pression, température, hygrométrie) du fluide tendent à s’uniformiser. Du fait de la viscosité de l’air, ce processus est turbulent et l’homogénéisation se fait par transfert d’énergie cinétique des tourbillons les plus gros vers les plus petits. Les couches turbulentes ainsi formées sont donc le siège de variations locales des propriétés physiques de l’air sur de petites échelles spatiales (typiquement quelques dizaines de centimètres), qui s’accompagnent de fluctuations d’indice de réfraction de l’air et perturbent la propagation des ondes électromagnétiques.

En astronomie, ces perturbations sont pénalisantes dès que la pupille du télescope a un diamètre supérieur à la taille caractéristique des tourbillons ayant perturbé le front de l'onde électromagnétique collectée. La résolution des images devient alors fonction de l'intensité de la turbulence au dessus du télescope. L'intérêt scientifique des images ainsi obtenues s'en trouve considérablement diminué (Fig. 1.1), et c'est précisément pour contrecarrer ces effets de la turbulence atmosphérique que les systèmes d'optique adaptative sont conçus. Toutefois, une bonne connaissance des propriétés de la turbulence est indispensable à la mise en œuvre de tels systèmes. On présente dans le paragraphe (1.1) une description statistique des déformations subies par le front d'onde incident à la traversée de l'atmosphère. On définit ensuite au paragraphe (1.2) les observables permettant de caractériser ces déformations. Puis, après avoir présenté le formalisme de description de la phase turbulente utilisé dans la suite de ce travail (paragraphe 1.3), on décrira les effets de la turbulence sur les images des télescopes (paragraphe 1.4).

1.1 Propriétés statistiques de la phase turbulente

Les propriétés optiques de l'atmosphère sont intimement liées aux caractéristiques des couches turbulentes qui la composent. Dans chacune de ces couches, la turbulence se développe sur une gamme de distances que l'on appelle le *domaine inertiel*, et qui est borné par deux échelles de distances :

- *L'échelle externe*, qui est la taille caractéristique de l'écoulement turbulent, c'est-à-dire l'épaisseur de la couche turbulente ; c'est aussi la taille caractéristique des plus gros tourbillons ; elle est généralement notée L_0 et vaut typiquement de 10 à 10^2 mètres.
- *L'échelle interne*, qui est l'échelle caractéristique de la dissipation de l'énergie cinétique par frottements visqueux ; c'est aussi la taille caractéristique des plus petits tourbillons ; elle est généralement notée l_0 et vaut typiquement 10^{-3} à 10^{-2} mètres.

Comprendre les comportements du fluide turbulent dans le domaine inertiel est indispensable pour remédier à ses effets optiques. Les hypothèses fondatrices de cette étude et les deux modèles de turbulence que nous serons amenés à utiliser par la suite sont présentés succinctement dans le paragraphe suivant. Une étude plus détaillée est disponible dans [Roddiier 1981]. Ces hypothèses sont ensuite exploitées pour caractériser les propriétés statistiques des fluctuations d'indice au sein d'une couche turbulente.

1.1.1 Hypothèses de travail

1.1.1.1 Hypothèse SLIT

On supposera dans la suite que le système optique { atmosphère + télescope } est un système linéaire et invariant dans le temps. Cela suppose en particulier que les propriétés statistiques de la turbulence (valeur moyenne, variance des variables d'intérêt) sont invariantes sur une échelle de temps correspondant à la durée caractéristique d'une séquence de travail. On suppose également qu'il en est de même pour le télescope.

1.1.1.2 Turbulence localement stationnaire et isotrope à petite échelle

Les propriétés statistiques de la turbulence sont supposées invariantes spatialement et isotropes dans le domaine inertiel.

1.1.1.3 Atmosphère est non absorbante et non diffusante

On ne tiendra pas compte dans ce travail de la perte d'intensité lumineuse due à l'absorption et à la diffusion atmosphériques.

1.1.1.4 Hypothèse des couches minces

La turbulence est supposée localisée dans une série de couches dont l'épaisseur est suffisamment faible pour pouvoir négliger les effets de diffraction et de diffusion à leur traversée. L'atmosphère peut donc être modélisée par une succession d'écrans de phase d'épaisseur nulle. Le bien-fondé de cette hypothèse est justifié dans le paragraphe (1.2).

1.1.1.5 Turbulence à statistique gaussienne

Les couches turbulentes sont suffisamment éloignées les unes des autres pour que l'on puisse les considérer statistiquement indépendantes les unes des autres. D'après le théorème central limite, le déphasage résultant de la traversée de ces couches suit alors une loi statistique gaussienne à moyenne nulle.

1.1.1.6 L'hypothèse du champ proche

Les couches turbulentes sont situées dans les premiers kilomètres de l'atmosphère, c'est à dire au plus près du collecteur du télescope. On se trouve donc en situation de champ proche. Cela nous permet de faire l'hypothèse que les effets de scintillation liés à la turbulence sont négligeables devant les effets de phase.

1.1.1.7 Les modèles de turbulence

Plusieurs modèles ont été proposés pour caractériser les propriétés statistiques de la turbulence atmosphérique. Dans le modèle de Kolmogorov [Kolmogorov 1941], la turbulence atmosphérique est supposée *pleinement développée*, c'est-à-dire que le transfert de l'énergie cinétique a lieu à toutes les échelles spatiales. Autrement dit, ce modèle ne tient pas compte des échelles interne et externe caractérisant les dimensions extrémales des tourbillons. Pour cette raison, il ne rend pas compte de tous les phénomènes observés. Ce modèle sera cependant largement suffisant dans l'étude de la plupart des phénomènes qui nous occuperont ici, et c'est lui que nous utiliserons par défaut. Quand la prise en compte des échelles externe et interne sera nécessaire, nous utiliserons le modèle de Von Karman [von Karman 1948].

A partir de ces hypothèses, on peut construire un modèle de comportement statistique des fluctuations de l'indice de réfraction au sein d'une couche turbulente. On présente succinctement les points clés de ce modèle dans le paragraphe suivant.

1.1.2 Propriétés statistiques des fluctuations d'indice de réfraction dans une couche turbulente

Dans cette partie nous nous intéressons aux fluctuations d'indice de réfraction d'une unique couche turbulente, supposée mince et perpendiculaire à l'axe optique (cf. § 1.1.1). Soit $\Delta n(\mathbf{r}, h_0, t)$ la fluctuation d'indice de réfraction au point \mathbf{r} , à l'instant t , dans la couches située à l'altitude h_0 et d'épaisseur δh . Par définition on a :

$$\Delta n(\mathbf{r}, h_0, t) = n(\mathbf{r}, h_0, t) - \langle n(\mathbf{r}, h_0, t) \rangle \quad (1.1)$$

Où $\langle \cdot \rangle$ représente la moyenne statistique de la grandeur incluse. Dans le cadre du modèle de Kolmogorov, la fonction de structure des fluctuations de l'indice de réfraction suit la loi d'Obukhov [Obukhov 1949]. Ainsi, à une altitude h_0 donnée, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\Delta n}(\boldsymbol{\rho}, h_0) &= \left\langle (n(\mathbf{r}, h_0, t) - n(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, h_0, t))^2 \right\rangle \\ \mathcal{D}_{\Delta n}(\boldsymbol{\rho}, h_0) &= \mathcal{C}_n^2(h_0) \rho^{\frac{2}{3}} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Où $\mathcal{C}_n^2(h_0)$ est la constante de structure des fluctuations d'indice dans la couche considérée (à l'altitude h_0). Dans le cadre du modèle de turbulence de Von Karman, la fonction de structure est modifiée par l'introduction de l'échelle externe [Consortini et al. 1973] :

$$\mathcal{D}_{\Delta n}(\boldsymbol{\rho}, h_0) = \mathcal{C}_n^2(h_0) \left(0.307 L_0^{\frac{2}{3}} - 0.366 (\rho L_0)^{\frac{1}{3}} K_{1/3} \left(2\pi \frac{\rho}{L_0} \right) \right) \quad (1.3)$$

Où $K_{1/3}$ est la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'ordre $1/3$.

En utilisant le même formalisme, on peut exprimer la densité spectrale de puissance (DSP) des fluctuations d'indice :

$$\text{Kolmogorov : } \mathcal{W}_{\Delta n}(\mathbf{f}, h_0) = 0.033 (2\pi)^{-\frac{2}{3}} \mathcal{C}_n^2(h_0) f^{-\frac{11}{3}} \quad (1.4)$$

$$\text{Von Karman : } \mathcal{W}_{\Delta n}(\mathbf{f}, h_0) = 0.033 (2\pi)^{-\frac{2}{3}} \mathcal{C}_n^2(h_0) \left(\left(\frac{1}{L_0} \right)^2 + f^2 \right)^{-\frac{11}{6}} e^{-(f l_0)^2} \quad (1.5)$$

1.1.3 Propriétés statistiques des fluctuations de phase d'une onde plane perturbée par la turbulence atmosphérique

Les propriétés statistiques d'une onde plane perturbée par la traversée d'une couche turbulente se déduisent de la statistique des fluctuations d'indice de réfraction au sein de la couche. En utilisant l'hypothèse de statistique gaussienne de la turbulence (§ 1.1.1), on peut exprimer \mathcal{D}_φ en utilisant la description des fluctuations d'indice de réfraction développée au paragraphe (1.1) [Roddiier 1981]. Dans le cadre du modèle de turbulence de Kolmogorov, on obtient :

$$\mathcal{D}_\varphi(\boldsymbol{\rho}, h_0) = 2.91 k^2 \rho^{\frac{5}{3}} \mathcal{C}_n^2(h_0) \delta h_0 \quad (1.6)$$

Cette dernière expression est valide si ρ est faible devant l'épaisseur de la couche turbulente¹. A

¹Cette hypothèse n'est pas en contradiction avec celle des couches minces.

l'issue de la traversée de la totalité des couches atmosphériques (*i.e.* dans la pupille), on a :

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \varphi(\mathbf{r}, h_{\ell}, t) \equiv \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \varphi_{\ell}(\mathbf{r}, t) \quad (1.7)$$

D'où l'expression de la fonction de structure de la phase dans la pupille, pour le modèle de Kolmogorov :

$$\mathcal{D}_{\phi}(\boldsymbol{\rho}) = 2.91 k^2 \rho^{\frac{5}{3}} \int_0^{\infty} \mathcal{C}_n^2(h) dh \quad (1.8)$$

et l'expression de sa DSP :

$$\mathcal{W}_{\phi}(\mathbf{f}) = 0.033 (2\pi)^{-\frac{2}{3}} k^2 f^{-\frac{11}{3}} \int_0^{\infty} \mathcal{C}_n^2(h) dh \quad (1.9)$$

Ces expressions permettent de mettre en évidence les paramètres d'importance pour décrire les effets optiques de la turbulence. On examine en détail ces paramètres ci-dessous.

1.2 Caractérisation des effets optiques de la turbulence

1.2.1 Constante de structure des fluctuations d'indice

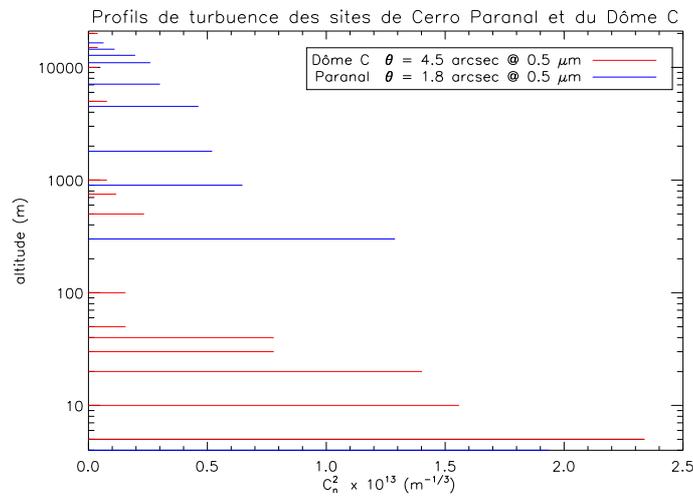


FIG. 1.2 – Profils de $C_n^2(h)$ pour les sites de Paranal et du Dome C.

D'après les équations (1.8) et (1.9), la constante de structure des fluctuations d'indice est un paramètre essentiel pour décrire les effets optiques de la turbulence atmosphérique puisqu'elle caractérise la force de la turbulence à une altitude donnée. La qualité d'un site d'observation peut donc être caractérisée par son profil de $C_n^2(h)$. C'est ce que montre la figure (1.2), qui représente les profils de $C_n^2(h)$ des sites de Cerro Paranal, au Chili (données fournies par le groupe de travail pour l'optique adaptative de l'ESO) et du Dôme C, en Antarctique [Agabi et al. 2006].

Expérimentalement, de tels profils sont obtenus par lâchers de ballons sondes [Barletti et al. 1977, Lawrence et al. 2004, Sarazin 1996] ou par utilisation d'instruments au sol utilisant la scintillation des étoiles (SCIDAR généralisé [Klückers et al. 1998, Avila et al. 2001, Wilson et al. 2003], DIMM et MASS [Tokovinin et al. 2003a, Kornilov et al. 2003, Tokovinin et al. 2005]) qui déduisent le profil de turbulence de mesures de la scintillation différentielle entre deux étoiles.

Comme on le verra au paragraphe 4.1.2, la connaissance des profils de C_n^2 à l'aplomb des sites des grands télescopes terrestres est précieuse car elle permet l'introduction d'*a priori* sur la turbulence dans la reconstruction du front d'onde.

1.2.2 Paramètre de Fried

Si la connaissance de la répartition en altitude de la turbulence est primordiale dans certains domaines de l'optique instrumentale pour l'astronomie, il n'est pas toujours nécessaire d'avoir une pleine connaissance du profil de C_n^2 . Ainsi, lorsque l'on fait l'image d'une source ponctuelle au foyer d'un télescope, le paramètre d'intérêt pour caractériser la turbulence est plutôt l'intégrale de C_n^2 le long du chemin optique suivi par la lumière. On caractérise alors la turbulence vue depuis le sol par son paramètre de Fried r_0 , défini par l'équation (1.10) :

$$r_0 = \left(0.42 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \left(\frac{1}{\cos \gamma} \right) \int_0^\infty C_n^2(h) dh \right)^{-\frac{3}{5}} \quad (1.10)$$

Dans cette équation, λ est la longueur d'onde d'imagerie et γ est l'angle zénithal de la direction d'observation. Ainsi défini, r_0 a la dimension d'une distance, et correspond en fait à la taille caractéristique d'une cellule turbulente. On remarque que r_0 est une grandeur chromatique puisqu'elle dépend de la longueur d'onde d'imagerie (proportionnelle à $\lambda^{6/5}$). En utilisant cette définition, on peut exprimer plus simplement les équations (1.8) et (1.9) :

$$\mathcal{D}_\phi(\rho) = 6.88 \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \quad (1.11)$$

$$\mathcal{W}_\phi(f) = 0.023 r_0^{-\frac{5}{3}} f^{-\frac{11}{3}} \quad (1.12)$$

1.2.3 Seeing

Le seeing d'un site d'observation est la résolution angulaire que l'on peut espérer atteindre lors de la formation de l'image d'une source ponctuelle - située à l'infini - en présence de turbulence. Lorsque le diamètre de la pupille du télescope est grand devant le paramètre de Fried de la turbulence, c'est en effet r_0 qui caractérise la résolution du système optique car c'est lui qui caractérise le plus petit élément diffractant du système { atmosphère + télescope }. Le seeing s est alors donné par la relation (1.13) :

$$s = 0.98 \frac{\lambda}{r_0} \text{ (rad)} \quad (1.13)$$

Ainsi défini, s est le diamètre angulaire de l'image d'une source ponctuelle localisée à l'infini (cf. § 1.4), que l'on obtiendrait en l'absence de turbulence, avec une pupille de télescope de diamètre r_0 . On

remarque que r_0 évoluant en $\lambda^{6/5}$ (cf eq. 1.10), le seeing est quasiment achromatique (proportionnel à $\lambda^{-1/5}$). Si D est le diamètre du collecteur du télescope, la dégradation de l'image peut être caractérisée par l'élargissement de la tache dû à la turbulence :

$$\eta = \frac{\overbrace{(\lambda/r_0)}^{\text{diamètre PSF avec turbulence}}}{\underbrace{(\lambda/D)}_{\text{diamètre PSF sans turbulence}}} = \frac{D}{r_0} \quad (\text{pour } D \gg r_0) \quad (1.14)$$

1.2.4 Domaine isoplanétique

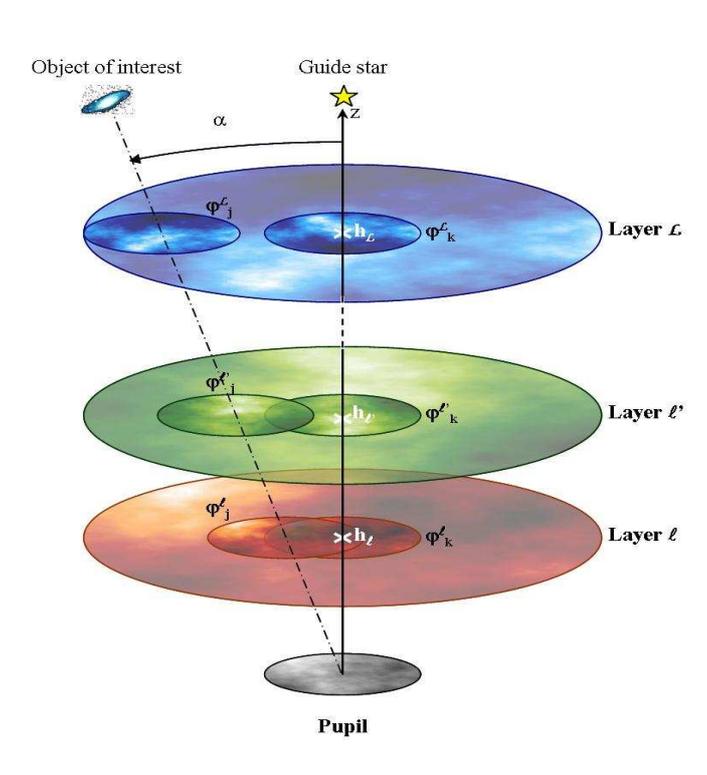


FIG. 1.3 – Le phénomène d'anisoplanétisme.

Une des caractéristiques importantes de la turbulence atmosphérique est le phénomène d'anisoplanétisme, qui limite la largeur du champ corrigé par le système d'optique adaptative. Comme le montre le schéma de la Fig. (1.3), ce phénomène est principalement dû à la turbulence localisée en altitude. En effet, dès que la direction d'imagerie s'écarte de la direction d'analyse, le volume de turbulence traversé par l'onde lumineuse utilisée pour l'analyse de front d'onde est différent du volume turbulent affectant la voie d'imagerie. Le domaine isoplanétique d'un télescope assisté par AO varie ainsi de quelques secondes d'arc à une dizaine de secondes d'arc, selon le profil de turbulence du site d'observation et la longueur d'onde d'imagerie.

On caractérise cette limitation en évaluant l'angle isoplanétique du site d'observation. On retiendra

ici la définition de Fried [Fried 1982], d'après laquelle l'angle isoplanétique est la distance angulaire par rapport à l'axe optique pour laquelle l'erreur d'estimation de la phase turbulente reste inférieure à 1 rad^2 en variance. Roddier [Roddier 1981] a exprimé cet angle en fonction du paramètre de Fried de la turbulence et de son profil :

$$\theta_0 = 0.314 \frac{r_0}{\bar{h}}, \quad \text{avec : } \bar{h} = \left(\frac{\int_0^\infty h^{5/3} C_n^2(h) dh}{\int_0^\infty C_n^2(h) dh} \right)^{3/5} \quad (1.15)$$

L'angle isoplanétique est chromatique car il dépend de r_0 . A titre d'exemple, il est de l'ordre de 1.8 arcsec à $0.5 \mu\text{m}$ pour le site de Paranal. Le site du Dôme C, en Antarctique, bénéficie quant à lui d'un domaine isoplanétique exceptionnellement grand (4.5 arcsec à $0.5 \mu\text{m}$) car l'essentiel de la turbulence y est concentré dans les trente premiers mètres de l'atmosphère (cf. § 1.2.1, fig. 1.2).

Ce paragraphe nous a permis de caractériser statistiquement les fluctuations de phase d'une onde plane après la traversée de la turbulence atmosphérique. Comme nous venons de le dire, cette caractérisation est essentielle pour l'alimentation des modèles de turbulence qu'utilisent les systèmes d'optique adaptative. Mais il est également essentiel pour ces systèmes de caractériser instantanément les fluctuations de phase du front d'onde incident. Pour ce faire, on décompose la phase turbulente sur une base de modes appropriée. Nous présentons dans la suite la base des modes de Zernike, très couramment utilisée en optique.

1.3 Décomposition modale de la phase turbulente.

Lorsqu'on travaille sur des phases turbulentes, il est utile de pouvoir les caractériser par rapport à une base donnée de modes spatiaux. On travaillera dans la suite en décomposant les phases sur la base des modes de Zernike, qui a le triple avantage d'être décrite analytiquement par les polynômes du même nom, d'être définie sur une pupille circulaire² et de décrire les aberrations optiques les plus courantes. De plus, un travail considérable d'étude des propriétés statistiques des projections des phases turbulentes sur ces modes a déjà été fait [Noll 1976, Rigaut and Gendron 1992, Chassat 1992, Roddier 1999].

1.3.1 La base des modes de Zernike

1.3.1.1 Définition et représentation des modes de Zernike

Les modes de Zernike s'expriment comme le produit d'une fonction radiale et d'une fonction angulaire :

$$\mathcal{Z}_p(\rho, \theta) = \sqrt{n+1} \begin{cases} \mathcal{R}_n^m(\rho) \sqrt{2} \cos m\theta \text{ (} p \text{ pair)} \\ \mathcal{R}_n^m(\rho) \sqrt{2} \sin m\theta \text{ (} p \text{ impair)} \end{cases} \Bigg\} m \neq 0 \quad (1.16)$$

$$\left. \begin{matrix} \mathcal{R}_n^m(\rho) \end{matrix} \right\} m = 0$$

²Notons que lorsqu'on travaille sur le volume de turbulence, le domaine d'intérêt pour la description de la phase turbulente est la projection de la pupille d'entrée du télescope à l'altitude et dans la direction voulues - la méta-pupille.

Dans ces expressions, n est l'ordre radial et m l'ordre azimutal du polynôme d'indice p . Les fonctions radiales sont données par :

$$\mathcal{R}_n^m(\rho) = \begin{cases} \sum_{s=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! (\frac{n+m}{2}-s)! (\frac{n-m}{2}-s)!} \rho^{n-2s} & \text{si } (n-m) \text{ pair} \\ 0 & \text{si } (n-m) \text{ impair} \end{cases} \quad (1.17)$$

Les 10 premiers polynômes de Zernike sont exprimés et représentés dans la figure (1.4).

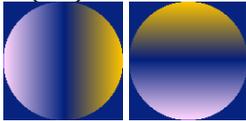
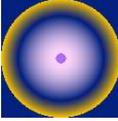
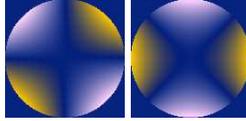
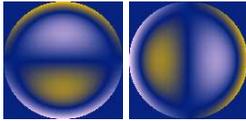
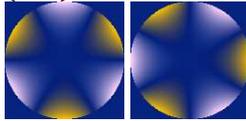
$Z_p(\rho, \theta)$	m=0	m=1	m=2	m=3
n=0	$Z_1 = 1$  piston			
n=1		$\begin{Bmatrix} Z_2 \\ Z_3 \end{Bmatrix} = 2\rho \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix}$  tip, tilt		
n=2	$Z_4 = \sqrt{3}(2\rho^2 - 1)$  défocalisation		$\begin{Bmatrix} Z_5 \\ Z_6 \end{Bmatrix} = \sqrt{6}\rho^2 \begin{Bmatrix} \sin 2\theta \\ \cos 2\theta \end{Bmatrix}$  astigmatisme	
n=3		$\begin{Bmatrix} Z_7 \\ Z_8 \end{Bmatrix} = \sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho) \begin{Bmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{Bmatrix}$  Coma		$\begin{Bmatrix} Z_9 \\ Z_{10} \end{Bmatrix} = \sqrt{8}\rho^3 \begin{Bmatrix} \sin 3\theta \\ \cos 3\theta \end{Bmatrix}$  Trifoil

FIG. 1.4 – Expressions analytiques, représentation et nom des dix premiers modes de Zernike.

1.3.1.2 Orthonormalité

La base des polynômes de Zernike est orthonormée. En effet, en appelant $\mathcal{P}(\rho)$ la fonction pupille :

$$\mathcal{P}(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2} & \text{si } \frac{|\rho|}{R} \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.18)$$

On a :

$$\iint \mathcal{P}(\boldsymbol{\rho}) Z_p(\boldsymbol{\rho}) Z_q(\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho} = \delta_{qp} \quad (1.19)$$

1.3.1.3 Transformée de Fourier

Chaque polynôme admet une transformée de Fourier définie par :

$$\mathcal{F}_{Z_p}(\mathbf{k}) = \iint \mathcal{P}(\boldsymbol{\rho}) Z_p(\boldsymbol{\rho}) e^{2i\pi\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}} d\boldsymbol{\rho}$$

$$\mathcal{F}_{Z_p}(\mathbf{k}) = \sqrt{n+1} \frac{J_{n+1}(2\pi k)}{\pi k} \begin{cases} (-1)^{\frac{n-m}{2}} i^m \sqrt{2} \begin{cases} \cos m\phi & (p \text{ pair}) \\ \sin m\phi & (p \text{ impair}) \end{cases} & m \neq 0 \\ (-1)^{\frac{n}{2}} & m = 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

Où $J_n(x)$ est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n :

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2^{2s} s! (n+s)!} x^{2s} \quad (1.21)$$

1.3.2 Décomposition de la phase turbulente et propriétés statistiques des coefficients de Zernike

Une phase turbulente $\varphi(\boldsymbol{\rho})$ se décompose de façon unique sur la base des polynômes de Zernike :

$$\forall p, \quad a_p = \iint \mathcal{P}(\boldsymbol{\rho}) \varphi(\boldsymbol{\rho}) Z_p(\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho} \quad (1.22)$$

Toutefois, en optique adaptative, on s'intéresse aux perturbations de la phase par rapport à son profil non perturbé, à l'exception du piston. En effet, pour un système mono-pupille il n'y a aucun moyen de connaître le premier des modes de Zernike. Dans la pratique, les phases turbulentes ne sont donc décrites qu'à l'aide des polynômes d'indice ≥ 2 . On peut alors écrire :

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\rho}) \varphi(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{p=2}^{\infty} a_p Z_p(\boldsymbol{\rho}) \quad (1.23)$$

Comme dans ce cas $\langle \varphi(\boldsymbol{\rho}) \rangle_{turb} = 0$, on a :

$$\sigma_{\varphi}^2 = \left\langle \iint (\mathcal{P}(\boldsymbol{\rho}) \varphi(\boldsymbol{\rho}))^2 \right\rangle_{turb} = \sum_{p=2}^{\infty} \langle a_p^2 \rangle_{turb} \quad (1.24)$$

En supposant que la turbulence suit une loi de type Kolmogorov, Noll [Noll 1976] a calculé les covariances des coefficients de Zernike de la phase turbulente :

$$\begin{aligned}
\langle a_p a_q \rangle_{turb} &= 3.895 \sqrt{(n_p + 1)(n_q + 1)} (-1)^{\frac{n_p + n_q - 2m_p}{2}} \delta_{m_p m_q} \left(\frac{D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \\
&\times \int_0^\infty k^{-\frac{14}{3}} J_{n_p+1}(k) J_{n_q+1}(k) dk \\
&= 3.895 \sqrt{(n_p + 1)(n_q + 1)} (-1)^{\frac{n_p + n_q - 2m_p}{2}} \delta_{m_p m_q} \left(\frac{D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \\
&\times \frac{2^{-\frac{14}{3}} \Gamma\left(\frac{14}{3}\right) \Gamma\left(\frac{n_p + n_q - \frac{14}{3} + 3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-n_p + n_q + \frac{14}{3} + 1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_p - n_q + \frac{14}{3} + 1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_p + n_q + \frac{14}{3} + 3}{2}\right)} \quad (1.25)
\end{aligned}$$

La figure (1.5) représente la matrice de Noll de covariance des polynômes jusqu'à l'ordre radial 16, pour une turbulence caractérisée par $D/r_0 = 1$. Cette matrice n'est pas diagonale : certains modes sont statistiquement intercorrélés. La sommation de l'équation (1.25) permet de donner une expression de la variance de la phase turbulente en fonction de $\frac{D}{r_0}$:

$$\sigma_\varphi^2 = \sum_{p=2}^{\infty} \langle a_p^2 \rangle_{turb} \simeq 1.03 \left(\frac{D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \quad (1.26)$$

Cependant le modèle de turbulence Kolmogorov ne tient pas compte de la grande échelle L_0 de la turbulence (cf. § 1.1). Or la grande échelle a une influence non négligeable sur les tous premiers modes spatiaux. Ainsi, pour le tip/tilt ($n = 1$), il est nécessaire d'introduire une correction à la relation (1.26) :

$$\sigma_{n=1}^2 \simeq \sigma_{n=1, Noll}^2 \left(1 - 0.77 \left(\frac{2\pi D}{L_0} \right)^{\frac{1}{3}} + 0.09 \left(\frac{2\pi D}{L_0} \right)^2 - 0.054 \left(\frac{2\pi D}{L_0} \right)^{\frac{7}{3}} + \dots \right) \quad (1.27)$$

Des corrections du même type sont à appliquer pour les autres modes, dont on pourra trouver le calcul exact dans [Conan 2000]. Par ailleurs, la diagonale de la matrice de covariance donne la variance des modes spatiaux de la phase. Les premiers modes sont les plus énergétiques, et la variance des coefficients de Zernike décroît en fonction de l'ordre radial en suivant une loi en $(n_p + 1)^{-\frac{11}{3}}$.

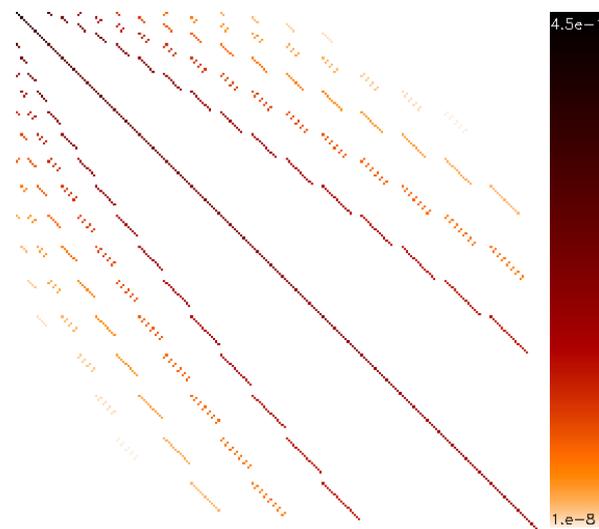


FIG. 1.5 – Matrice des covariances des coefficients de Zernike d'une phase turbulente. $D/r_0 = 1$, statistique de Kolmogorov.

1.4 Imagerie optique à travers la turbulence

Maintenant que l'on connaît les propriétés statistiques des fluctuations de phase à l'entrée du télescope, il est possible de caractériser les déformations de ses images. On procède en deux temps. Nous caractériserons d'abord les images instantanées obtenues au plan focal du télescope (images courtes poses), puis les images longues poses, qui réalisent un moyennage temporel des fluctuations de phase.

Le télescope est un système optique qui peut être modélisé très simplement par une lentille mince : il réalise en effet la focalisation d'un faisceau lumineux. On peut caractériser ses images par sa fonction d'étalement de point (en anglais *Point Spread Function*, PSF), définie comme l'image au foyer du télescope d'une source ponctuelle située à l'infini. La théorie de la diffraction de Fraunhofer permet d'exprimer cette PSF comme le module au carré de la transformée de Fourier de l'onde électromagnétique incidente. Cette onde est diaphragmée par la pupille du télescope. Afin d'en tenir compte, on définit la fonction pupille du télescope. Pour une pupille circulaire, de rayon R_{PUP} et de surface S_{PUP} , on a :

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\rho}) = \begin{cases} \frac{1}{S_{PUP}} & \text{si } |\boldsymbol{\rho}| \leq R_{PUP} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.28)$$

Alors la PSF du système s'écrit :

$$PSF(\mathbf{r}) \propto \|\mathcal{F}\{\psi(\boldsymbol{\rho})\mathcal{P}(\boldsymbol{\rho})\}\|^2 \quad (1.29)$$

où $\psi(\boldsymbol{\rho})$ est l'amplitude complexe du champ électromagnétique et $\mathcal{F}\{\cdot\}$ est la transformée de Fourier de la fonction incluse. En l'absence de turbulence la PSF d'un système optique dépend de la forme de sa fonction de pupille. Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{Pour une pupille circulaire : } PSF(\mathbf{r}) &\propto \left(\frac{J_1(kDr)}{kDr}\right)^2 \\ \text{Pour une pupille carrée : } PSF(\mathbf{r}) &\propto \left(\frac{\sin(kDx)}{kDx}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin(kDy)}{kDy}\right)^2 \end{aligned}$$

où $\mathbf{r}(x, y)$ est le vecteur coordonnée dans la plan focal, $k = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)$ est le vecteur d'onde et D est la taille caractéristique de la pupille (diamètre ou arête, selon la forme). Dans les deux cas précédents, la largeur du pic central de la PSF est proportionnelle à (λ/D) . En l'absence de turbulence, le pouvoir de résolution de l'instrument augmente donc avec la taille de sa pupille.

En présence de turbulence, les fluctuations de phases décrites précédemment (§ 1.1.3) dégradent la PSF du système. La déformation subie par l'image dépend alors de la nature du plus petit élément diffractant : s'il s'agit de la pupille, la PSF de l'instrument conservera sa forme de tache d'Airy, légèrement déformée, et sa largeur à mi-hauteur (FWHM) sera de l'ordre de (λ/D) . Si la turbulence est le facteur limitant de la résolution de l'instrument, alors la PSF du télescope est constituée de tavelures (*speckles*) de dimension caractéristique (λ/D) regroupées dans une tache de taille caractéristique (λ/r_0) . La résolution du système est alors directement caractérisée par le paramètre de Fried de la turbulence (§ 1.2.2).

L'évolution temporelle de la turbulence se traduit au niveau de la PSF du système par un déplacement des *speckles* et une déformation de la tache image. Ces phénomènes étant dus à l'action conjuguée d'un grand nombre d'évènements indépendants, la statistique de déplacement des *speckles* est gaussienne et l'image obtenue en intégrant un grand nombre d'images courtes poses a l'allure d'une gaussienne dont la FWHM est de l'ordre de $\frac{\lambda}{r_0}$.

Chapitre 2

L'optique adaptative

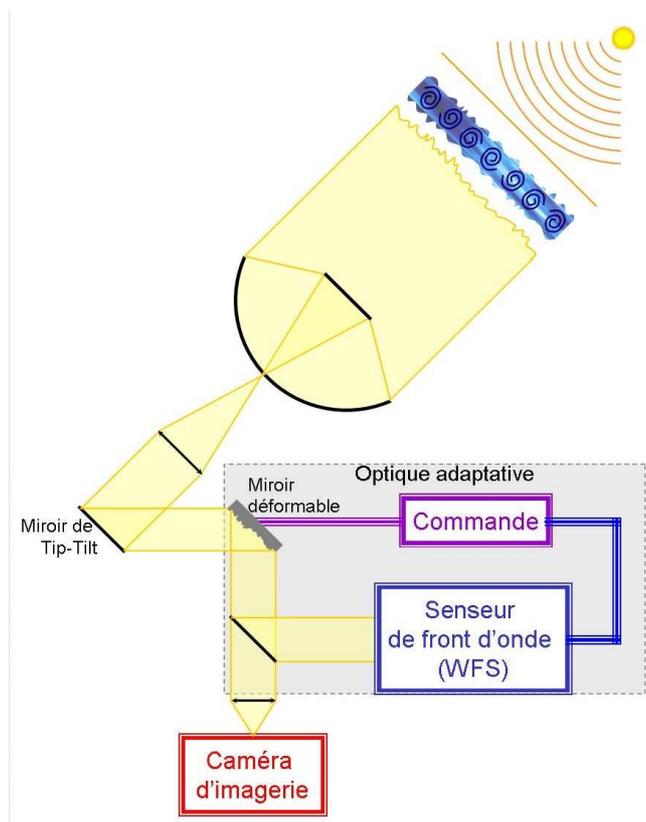


FIG. 2.1 – Schéma de principe d'un système d'optique adaptative.

Une optique adaptative est un système assurant la correction en temps réel des perturbations du front d'onde dues à la turbulence atmosphérique. Pour assurer sa fonction un tel système doit comprendre trois éléments clés (voir fig. 2.1) :

- L'analyseur (ou senseur) de front d'onde (*wave-front sensor*, WFS), dont le rôle est de mesurer les déformations du front d'onde incident,
- Le miroir déformable (*deformable mirror*, DM), qui imprime au front d'onde incident une déformation complémentaire de celle qui a été détectée par l'analyseur,
- La commande (*real time computer*, RTC), qui pilote le miroir déformable à partir des mesures du senseur de front d'onde.

On détaille la description de chacun de ces éléments dans les paragraphes suivants. On présente ensuite un budget d'erreur pour l'optique adaptative.

2.1 Analyse de front d'onde

Le senseur de front d'onde est le sous-système de l'optique adaptative chargé de mesurer la déformation du front d'onde incident. Dans les applications de l'analyse de front d'onde pour l'astronomie, on demande essentiellement à ces senseurs une bonne robustesse au bruit et un temps de mesure de la phase compatible avec le caractère temps réel du système (de l'ordre de quelques millisecondes). Pour les senseurs amenés à travailler en boucle ouverte ou en correction partielle, la plage de linéarité sera une contrainte supplémentaire.

Plusieurs types de senseurs de front d'onde ont été proposés. Les plus utilisés en optique adaptative sont présentés brièvement ci-dessous. Une description plus complète est disponible dans [Rousset 1999]. On traite d'abord les techniques en plan focal, avant de s'intéresser aux techniques en plan pupille.

2.1.1 L'analyse de front d'onde en plan focal

Ces techniques utilisent directement les propriétés de l'image au plan focal du télescope (ou dans son proche voisinage) pour caractériser les déformations du front d'onde. Leur intérêt est de prendre en compte la totalité du chemin optique, de l'atmosphère jusqu'aux optiques de la caméra d'imagerie, dans l'évaluation des aberrations subies par le front d'onde incident. Pour cette raison, elles sont utilisées pour l'estimation des aberrations non communes du système d'AO (cf. § 2.4). On présente dans un premier temps le principe du *phase retrieval*, puis sa généralisation, la diversité de phase.

2.1.1.1 Phase retrieval

La technique du *phase retrieval* traite le problème inverse de l'imagerie optique à travers l'atmosphère turbulente abordée au paragraphe (1.4) : on cherche à reconstituer les déformations du front d'onde d'après l'image d'un objet connu ou inconnu obtenue au foyer du télescope. Le système optique étant supposé linéaire et invariant, l'image i d'un objet o s'écrit :

$$i = h_{tur} \otimes o + \mathcal{B}ruit \quad (2.1)$$

Où h_{tur} est la PSF du système optique soumis à la turbulence et \otimes représente le produit de convolution. On peut écrire h_{tur} comme la transformée de Fourier inverse de l'OTF du système, elle-même

caractérisant la fonction d'auto-corrélation de la fonction pupille du télescope :

$$h_{tur} = \mathcal{F}^{-1}(OTF) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{i\phi_{tur}}\mathcal{P} \star e^{i\phi_{tur}}\mathcal{P}\right) \quad (2.2)$$

La technique du phase retrieval est limitée dans son utilisation par la pluralité des solutions de l'inversion de l'équation (2.1). Il suffit pour s'en convaincre de remarquer que d'après l'équation (2.2), deux phases opposées conduisent à la même PSF h_{tur} . Plus généralement, si l'on utilise une décomposition modale de la phase turbulente, par exemple sur la base des polynômes de Zernike (cf. § 1.3), il y a indétermination du signe des projections de la phase sur tous les polynômes d'ordres radiaux pairs (cf. [Blanc 2002] Annexe B). Plusieurs techniques ont été proposées pour venir à bout de cette indétermination [Fienup 1982, Carrano et al. 1998, Gonsalves 2001]. Une solution consiste à introduire de l'information supplémentaire dans le traitement du problème. Gonsalves [Gonsalves 1976- 1982] a proposé d'utiliser une seconde image, dans laquelle une aberration est connue : on fait alors de la diversité de phase.

2.1.1.2 Diversité de phase

La diversité de phase (voir [Mugnier et al. 2006] pour une description complète) utilise deux images, dont l'une est déformée par une aberration connue, pour retrouver la phase dans la pupille du télescope. L'aberration introduite dans la seconde image est généralement une défocalisation, car elle est simple à mettre en œuvre et à maîtriser : il suffit de déplacer légèrement le détecteur d'une distance connue, ou bien de l'appliquer grâce au miroir déformable. Les deux images fournissent un système d'équations à résoudre :

$$\begin{cases} i_f &= (\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{P}e^{i\phi_{tur}} \star \mathcal{P}e^{i\phi_{tur}})) \otimes o & + \mathcal{Bruit}_f \\ i_d &= (\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{P}e^{i(\phi_{tur}+\phi_d)} \star \mathcal{P}e^{i(\phi_{tur}+\phi_d)})) \otimes o & + \mathcal{Bruit}_d \end{cases}$$

Toutefois, la résolution du problème de la détermination de la phase n'est pas triviale car elle nécessite la connaissance de l'objet. Lorsque l'objet est mal connu, on utilise des techniques de reconstruction myopes, lesquelles estiment conjointement la phase et l'objet. Par ailleurs, cette technique est sensible au chromatisme puisqu'elle est basée sur la théorie de la diffraction. Elle est toutefois très utilisée en instrumentation pour l'astronomie, en particulier pour la calibration des aberrations fixes des instruments [Sauvage et al. 2005].

L'analyse de front d'onde peut également se faire en travaillant directement sur de front d'onde incident. Pour cela, on se place en plan pupille. Les grandeurs mesurées dépendent ainsi linéairement de la phase, ce qui simplifie le problème d'inversion. Cependant, cela sous-entend généralement de travailler dans une voie auxiliaire à la voie d'imagerie.

2.1.2 Analyseurs en plan pupille

2.1.2.1 Analyseur de courbure

Le principe de l'analyseur de courbure [Roddier 1988, Rigaut et al. 1994, Véran 1997] est d'observer la répartition de l'énergie lumineuse dans deux plans parallèles situés à égale distance de part et d'autre la pupille. Si le front d'onde incident est parfaitement plan, les deux plans sont éclairés uniformément. Si le front d'onde est perturbé, ses portions convergeant vers la pupille se remarqueront par un déficit d'éclairement dans le plan amont de la pupille et un excès dans le plan aval. Inversement, les portions du front d'onde divergentes se traduiront par un excès d'éclairement

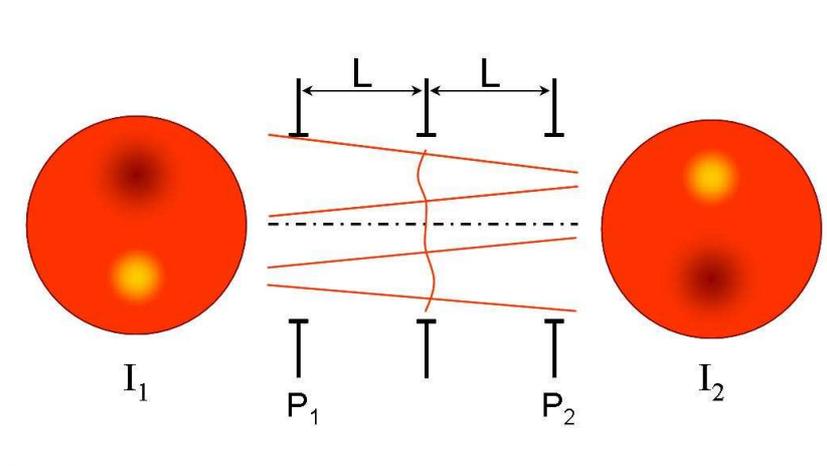


FIG. 2.2 – Principe de l'analyse de front d'onde avec un analyseur de courbure.

dans le plan amont et un déficit dans le plan aval (cf. Fig. 2.2). La différence d'intensité lumineuse entre les deux plans de mesure dépend linéairement du Laplacien de la phase du front d'onde [Roddir 1981].

Bien que cet analyseur fasse preuve d'une bonne robustesse au bruit et à la scintillation, son utilisation en AO reste limitée, principalement à cause de la difficulté d'avoir accès simultanément à une large gamme de modes spatiaux. En effet, le domaine des fréquences spatiales observables avec un analyseur de courbure est fonction de la distance de défocalisation utilisée. Si on souhaite une correction à haute performance, il est alors nécessaire d'utiliser l'analyseur de courbure avec plusieurs distances de défocalisation (au moins 2), afin de couvrir toute la gamme des modes à corriger.

2.1.2.2 Pyramide

L'analyseur à pyramide [Ragazzoni 1996] reprend et généralise le principe du couteau de Foucault. Le principe est de focaliser le front d'onde incident sur le sommet d'un prisme pyramidal, dont les quatre faces dévient la lumière incidente selon des directions différentes (cf. fig. 2.3). Une optique de relais permet de créer quatre images de la pupille du télescope. Le signal obtenu dans le plan des pupilles ré-imaginées est modulé par un petit déplacement circulaire du foyer de l'instrument autour du sommet du prisme pouvant être obtenu par le biais d'un miroir de tip-tilt. Le rôle de cette modulation est d'améliorer la dynamique et la linéarité du senseur. L'analyse des variations d'intensité entre les images de la pupille permet alors d'accéder au gradient de la phase du front d'onde incident [Ragazzoni 1996, Vérinaud 2004].

Cet analyseur est de conception récente mais est prometteur par sa sensibilité et sa robustesse au bruit. On verra également plus loin qu'il a le mérite de permettre la recombinaison des fronts d'onde issus de plusieurs directions d'analyse avant le processus de détection des phases ré-imaginées, ce qui en fait un bon candidat pour la multi-analyse de front d'onde en concept Layer Oriented (cf. § 4.2).

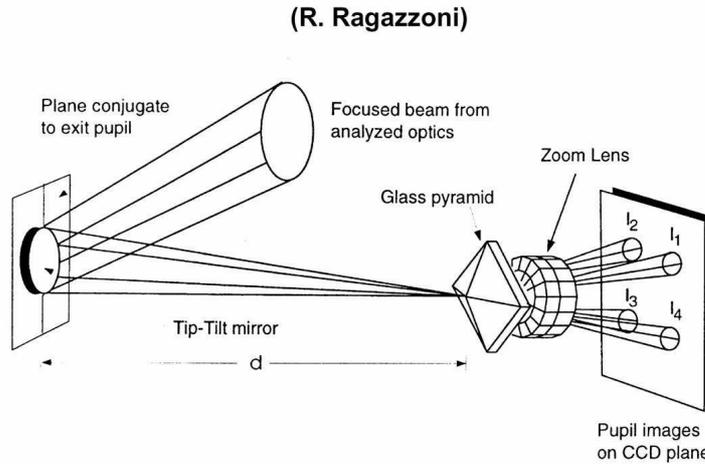


FIG. 2.3 – Principe de l'analyse de front d'onde avec un analyseur à pyramide.

2.1.2.3 Shack-Hartmann

C'est le senseur de front d'onde plus couramment utilisé en optique adaptative, pour sa relative simplicité de mise en œuvre et sa maturité. Un senseur Shack-Hartmann (SH) échantillonne spatialement le front d'onde incident grâce à une matrice de micro-lentilles, au plan focal desquelles on place un détecteur pour enregistrer les sous-images. La partie gauche de la figure (2.4) présente un schéma de principe de ce dispositif.

Le déplacement d'un spot dans le plan focal d'une micro-lentille dépend linéairement de l'angle d'arrivée de la portion de front d'onde imagée. La partie droite de la figure (2.4) représente la situation. Si on appelle C_x la position du spot selon l'axe (Ox), d la taille de la sous-pupille et f , la focale de la micro-lentille, alors le déplacement ΔC_x du spot s'écrit :

$$\Delta C_x = f \cdot \tan \alpha_x \quad (2.3)$$

où α_x est l'angle d'arrivée moyen du front d'onde incident sur la micro-lentille :

$$\alpha_x = \frac{\delta_x}{d} = \frac{\lambda}{2\pi d} \int_0^d \int_0^d \frac{\partial}{\partial x} (\phi(x, y)) dx dy \quad (2.4)$$

où δ_x est la différence de chemin optique de bord à bord de sous-pupille (cf. Fig. 2.4). L'angle d'arrivée sur une sous-pupille est produit par la traversée de l'ensemble du volume turbulent, dont on a vu qu'il est constitué d'une succession de couches minces indépendantes (cf. § 1.1.1). En vertu du théorème central limite, l'angle α est donc caractérisé par une statistique gaussienne centrée, dont la variance a été estimée par [Fante 1975, Dessenne 1998] :

$$\sigma_{\alpha_x}^2 = \sigma_{\alpha_y}^2 = 0.162 \frac{\lambda^2}{d^{1/3} r_0^{5/3}} \left[1 - 1.6 \left(\frac{d}{L_0} \right)^{1/3} + 7.4 \left(\frac{d}{L_0} \right)^2 - 9.0 \left(\frac{d}{L_0} \right)^{7/3} + \dots \right] \quad (2.5)$$

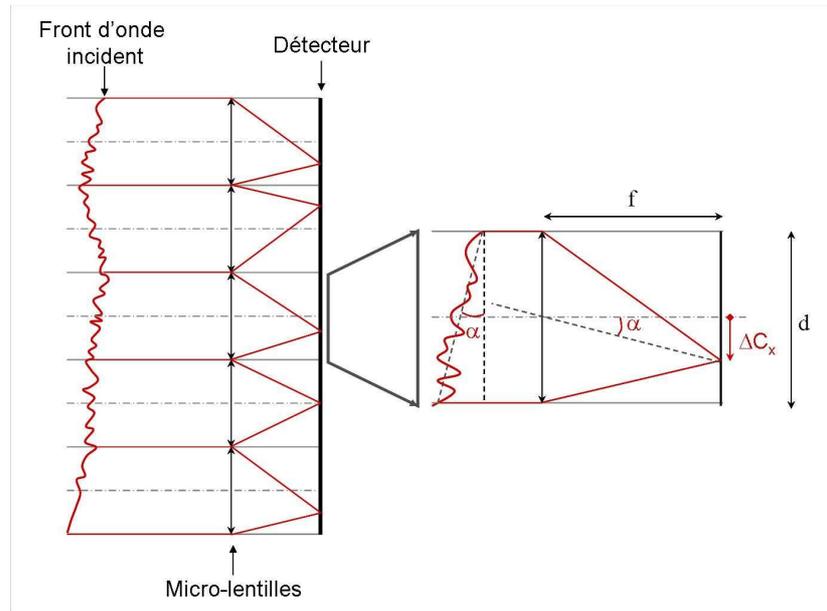


FIG. 2.4 – Principe de l'analyse de front d'onde avec un senseur Shack-Hartmann.

Par ailleurs, tel qu'il est défini dans l'équation (2.4), l'angle d'arrivée α est achromatique. On en profite généralement pour effectuer l'analyse de front d'onde dans le visible, ce qui permet à la fois de gagner en résolution et de conserver les photons infra-rouges pour la seule voie d'imagerie. De plus, la voie d'analyse est ainsi moins sensible au bruit généré par le rayonnement thermique de l'environnement. Finalement, en introduisant le nombre d'onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ et la différence de phase de bord à bord de sous-pupille $\Delta\phi_x = k\delta_x$, le déplacement du spot s'exprime :

$$\Delta C_x = \frac{\lambda f}{2\pi d} \cdot \Delta\phi_x \quad (2.6)$$

Le déplacement ΔC_x est mesuré par rapport à une position de référence, mesurée hors atmosphère en utilisant une source de calibration placée juste en aval de la séparatrice du système d'AO (cf. fig. 2.1). Pour un système optique parfait, la position de référence coïncide avec le foyer de la sous-pupille. Dans la pratique, elle en diffère du fait des aberrations statiques du système. Ces aberrations sont présentes tout au long du trajet optique et peuvent être séparées en deux catégories :

- Les aberrations situées en amont de la séparatrice (cf. Fig. 2.1), vues à la fois par la voie d'imagerie et par la voie d'analyse. Elles ont pour le système d'AO le même statut que les aberrations dynamiques dues à la turbulence, et seront mesurées et corrigées de la même façon.
- Les aberrations non communes (cf. § 2.4.3.6), au sein desquelles on distingue :
 - Les aberrations situées en aval de la séparatrice sur la voie d'analyse. Elles sont vues par l'analyseur de front d'onde, mais n'affectent pas la voie d'imagerie. Ce sont ces aberrations que l'on calibre en mesurant les positions de référence lorsque le senseur SH est illuminé par la source de référence.
 - Les aberrations situées en aval de la séparatrice sur la voie d'imagerie, généralement appelées aberrations résiduelles. Elles ne sont pas vues par le senseur de front d'onde. On utilise généralement des techniques en plan focal (cf. § 2.1.1) pour les mesurer [Sauvage et al.

2005]. Elles sont prises en compte en corrigeant les pentes de référence du Shack-Hartmann en conséquence.

Un senseur de Shack-Hartmann permet ainsi d'avoir accès à une image échantillonnée du front d'onde incident. La qualité de la reconstruction du front d'onde sera limitée par le pas des micro-lentilles, qui influera sur la restitution des hautes fréquences spatiales de la phase, et par la qualité de la mesure du déplacement d'un spot au plan focal d'une micro-lentille¹. On s'intéressera particulièrement à ce point dans la partie (IV) de ce manuscrit. Disons simplement ici que la position du spot dans le plan focal d'une sous-pupille est généralement déterminée en estimant son barycentre, éventuellement en seuillant au préalable l'image pour atténuer les effets du bruit. Trois sources principales d'erreur viennent alors dégrader l'estimation de la pente locale du front d'onde (cf. Fig. 2.5) :

- Le bruit de détecteur, dont l'impact sur l'estimation de la pente locale du front d'onde a été évalué par Rousset [Rousset 1999] dans l'approximation d'un spot gaussien :

$$\sigma_{\Delta\phi}^2 = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{\sigma_{RON}}{N_{ph}} \right)^2 \left(\frac{N_S^2}{N_D} \right)^2 \quad (2.7)$$

Dans cette équation, $\sigma_{\Delta\phi}^2$ est la variance de la différence de phase de bord à bord de la sous-pupille (en rad^2), σ_{RON} est l'écart-type du bruit de détecteur (en photo-électrons par pixel et par trame), N_{ph} est le flux récolté dans la sous-pupille (en photo-électrons par sous-pupille et par trame), N_S^2 est le nombre de pixels utilisés pour la détermination du barycentre du spot et N_D correspond à la largeur à mi-hauteur du spot *en l'absence de turbulence* (à la diffraction), exprimée en pixel.

- Le bruit de photons, dont Rousset a également décrit l'effet sur la variance de la pente locale du front d'onde [Rousset 1999] :

$$\sigma_{\Delta\phi}^2 = \frac{\pi^2}{2 N_{ph}} \left(\frac{N_T}{N_D} \right)^2 \quad (2.8)$$

où N_{ph} et N_D ont la même signification que pour l'équation (2.7) et N_T est la largeur à mi-hauteur du spot *turbulent* exprimée en pixel.

- La forme du spot, dépendant de l'intensité de la turbulence et des paramètres du senseur de front d'onde. Cette dernière source d'erreur est constante quel que soit le flux disponible pour réaliser l'estimation de pente.

Le senseur de Shack-Hartmann étant à ce jour le plus largement utilisé en optique adaptative, c'est avant tout à cet analyseur que nous nous intéresserons dans la suite. Une partie des travaux présentés ici lui est consacrée (cf partie IV). Sauf mention contraire, les analyseurs considérés dans la suite de cette thèse seront par défaut des senseurs Shack-Hartmann. La partie suivante introduit une modélisation analytique de l'analyse de front d'onde.

¹Ajoutons que le temps d'intégration et de lecture du détecteur sera le premier poste d'erreur temporelle de la reconstruction. Nous aborderons ce point dans le paragraphe 2.2.

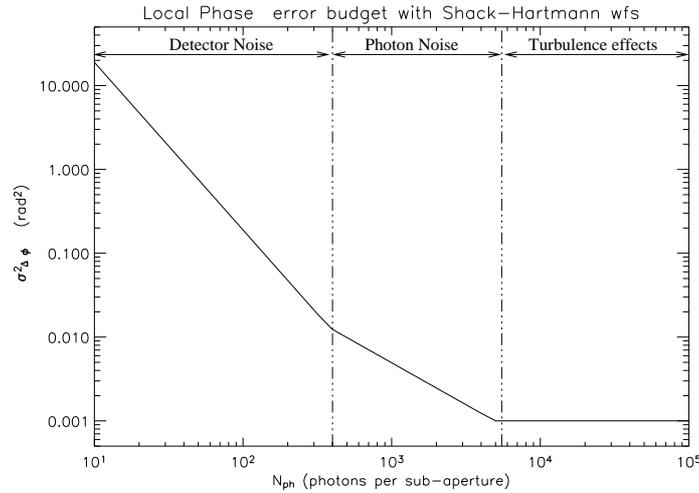


FIG. 2.5 – Domaines de prédominance du bruit de détecteur, du bruit de photons et des erreurs dues aux déformations turbulentes du spot selon le flux disponible pour la mesure dans une sous-pupille d'un senseur Shack-Hartmann. Les flux de transition entre les trois domaines dépendent des caractéristiques du senseur et de la turbulence.

2.1.3 Modélisation de la mesure d'un analyseur de front d'onde.

Pour pouvoir reconstruire la phase à partir des mesures d'un analyseur de front d'onde, on a besoin de connaître la relation de passage qui lie ses mesures à la phase incidente. Cette relation, ou plutôt un modèle analytique de cette relation, sera utilisé ensuite au niveau de la commande. Nous nous limiterons ici au cas des analyseurs linéaires. C'est le cas de tous ceux qui mesurent des gradients de phase, et en particulier du senseur de Shack-Hartmann.

Soient \mathbf{m} le vecteur des mesures d'un tel senseur. Comme on l'a vu précédemment, ces mesures sont affectées par les bruits de photons et de détecteur. Si l'analyseur est linéaire, \mathbf{m} s'écrit :

$$\mathbf{m} = \mathcal{D} \cdot \Phi + \mathcal{B} \quad (2.9)$$

\mathcal{D} est appelée la matrice d'interaction du senseur de front d'onde. Et \mathcal{B} est le vecteur des termes de bruit affectant chaque mesure. Tout le problème est alors de retrouver Φ à partir des mesures \mathbf{m} . C'est la problématique de la reconstruction du front d'onde.

2.2 Reconstruction du front d'onde

L'étape de reconstruction est celle qui, à partir des mesures effectuées par l'analyseur de front d'onde (les pentes locales sur les sous-pupilles d'un Shack-Hartmann, par exemple) permet de produire la phase à appliquer en correction sur le miroir déformable. Dans cette opération, l'ordre dans lequel l'analyseur de front d'onde et le miroir déformable interviennent le long du chemin optique n'est pas anodin.

En effet, on peut envisager deux architectures pour un système d'optique adaptative. La première est une architecture en boucle ouverte, dans laquelle le miroir déformable est situé en aval de la séparation entre la voie d'analyse et la voie d'imagerie. Dans ce cas il n'est pas vu par l'analyseur de front d'onde, et le diagramme de Block de la boucle d'AO est donné par la figure (2.6).

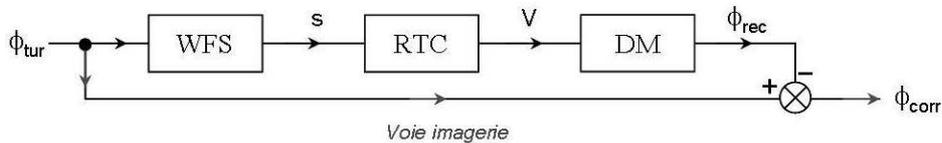


FIG. 2.6 – Schéma de Block d'une optique adaptative en boucle ouverte.

La seconde architecture correspond à un fonctionnement en boucle fermée. Dans ce cas, le miroir déformable est vu par l'analyseur de front d'onde, qui mesure à l'instant t le résidu de correction de la phase turbulente mesuré à l'instant $t - \delta t$, δt étant la durée d'une phase d'acquisition/correction de la boucle d'AO. C'est l'architecture représentée par la figure (2.1). Le diagramme de Block d'une AO en boucle fermée est donné par la figure (2.7).

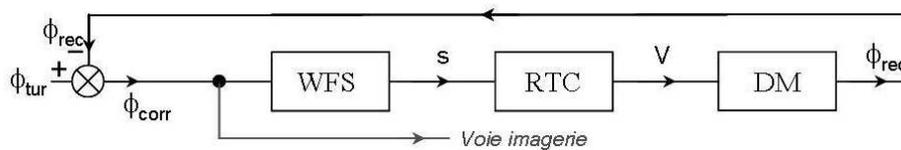


FIG. 2.7 – Schéma de Block d'une optique adaptative en boucle fermée.

La situation boucle fermée a un double avantage : elle relaxe une partie des contraintes de performance de l'analyseur de front d'onde car les perturbations à mesurer sont de moindre amplitude. De plus, elle permet d'avoir un retour sur le comportement du miroir déformable, puisqu'il est vu par l'analyseur. Cependant, la commande doit tenir compte du fait que l'analyseur ne mesure pas la turbulence brute mais un résidu constitué à la fois de défauts de correction et de l'évolution temporelle de la turbulence entre l'instant de la mesure et l'instant où la correction est appliquée.

Dans l'architecture en boucle ouverte (cf. Fig. 2.6), l'analyseur de front d'onde voit la turbulence brute, ce qui simplifie la commande du miroir déformable. Toutefois, il n'y a alors pas de

contre-réaction possible au comportement du miroir déformable, ce qui est susceptible de poser des problèmes de stabilité de la performance de la boucle. Cette architecture pose donc elle aussi des problèmes spécifiques. On note en outre que même un système prévu pour fonctionner en boucle fermée est amené à travailler transitoirement en boucle ouverte lors des phases d'accrochage de la boucle d'optique adaptative.

On traite ici le problème de la reconstruction pour les deux cas d'architecture.

2.2.1 Reconstruction en boucle ouverte

En boucle ouverte, l'analyseur de front d'onde voit directement les déformations du front d'onde dues à la turbulence. Dans la mesure où l'on ne tient pas compte du problème de scintillation, la grandeur à corriger est la phase de l'onde électromagnétique incidente. De plus, on considère ici le cas d'un système sans effet temporel, c'est-à-dire que l'on suppose que les étapes de mesure et de reconstruction n'introduisent aucun retard dans la boucle. On intégrera ces problèmes de retard à la problématique de la reconstruction dans le paragraphe consacré à la boucle fermée.

L'erreur d'estimation de la phase du front d'onde incident est définie par l'expression :

$$\Delta\Phi_{res}(\boldsymbol{\rho}) = \Phi(\boldsymbol{\rho}) - \hat{\Phi}(\boldsymbol{\rho})$$

Où $\Phi(\boldsymbol{\rho})$ est la phase turbulente vraie dans la pupille et $\hat{\Phi}(\boldsymbol{\rho})$ est la phase estimée. $\Delta\Phi_{res}$ est caractérisée statistiquement par sa valeur moyenne, qui caractérise le biais de l'estimation, et par sa variance, qui caractérise sa robustesse au bruit. Cependant, en supposant que :

- La phase turbulente suit une statistique gaussienne à moyenne nulle,
- L'analyseur a une réponse linéaire,
- Le bruit affectant les mesures de l'analyseur a une statistique gaussienne à moyenne nulle,

on montre que la phase résiduelle est à moyenne nulle. La qualité de la reconstruction est alors caractérisée uniquement par la variance de la phase résiduelle dans la pupille :

$$\sigma_{res}^2 = \frac{1}{S_{PUP}} \iint_{PUP} \langle \|\Phi(\boldsymbol{\rho}) - \hat{\Phi}(\boldsymbol{\rho})\|^2 \rangle d\boldsymbol{\rho} \quad (2.10)$$

La minimisation de ce critère de variance de la phase résiduelle permet de définir la reconstruction optimale de la phase. On peut réaliser cette minimisation de deux façons, selon que l'on dispose ou non d'informations sur le système et la turbulence. Dans les paragraphes qui suivent, une simple minimisation au sens des moindres carrés est présentée. Mais le reconstruteur à envisager est différent selon que l'on raisonne dans l'espace des mesures du senseur de front d'onde ou dans l'espace des phases reconstruites.

2.2.1.1 Estimation dans l'espace des mesures du capteur de front d'onde.

Soit \mathbf{m} le vecteur des mesures du capteur de front d'onde. D'après l'équation (2.9), on a :

$$\mathbf{m} = \mathcal{D} \cdot \Phi + \mathcal{B}$$

En l'absence de toute information *a priori* sur la turbulence et le bruit, on recherche la phase estimée telle que :

$$\widehat{\mathbf{m}} = \mathcal{D} \cdot \widehat{\Phi}$$

Pour cela, on recherche la mesure $\widehat{\mathbf{m}}$ permettant de minimiser la distance entre \mathbf{m} et $\widehat{\mathbf{m}}$:

$$\widehat{\Phi} \quad / \quad \frac{\partial}{\partial \widehat{\Phi}} \left(\|\mathbf{m} - \mathcal{D}\widehat{\Phi}\|^2 \right) = 0$$

où \mathcal{D} est la matrice d'interaction du capteur de front d'onde (cf. eq. 2.9). La résolution de cette équation est triviale :

$$\widehat{\Phi} = (\mathcal{D}^t \mathcal{D})^\dagger \mathcal{D}^t \mathbf{m} \quad (2.11)$$

Où \mathcal{M}^\dagger est la matrice inverse généralisée de la matrice \mathcal{M} . La matrice $\mathbf{R} = (\mathcal{D}^t \mathcal{D})^\dagger \mathcal{D}^t$ est le reconstruteur optimal de la phase au sens des moindres carrés. Cependant, il ne prend pas en compte les connaissances *a priori* dont on dispose sur la statistique de la phase et du bruit.

2.2.1.2 Reconstruction optimale

On cherche maintenant directement le reconstruteur \mathbf{R} défini par la relation $\widehat{\Phi} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{m}$ en cherchant directement à minimiser la variance de phase résiduelle :

$$\begin{aligned} \sigma_{res}^2 &= \frac{1}{S_{PUP}} \iint \langle \|\Phi(\rho) - \widehat{\Phi}(\rho)\|^2 \rangle_{time} d\rho \\ &= \frac{1}{S_{PUP}} \iint \langle \|\Phi(\rho) - \mathbf{R}\mathbf{m}\|^2 \rangle_{time} d\rho \\ &= \frac{1}{S_{PUP}} \iint \langle \|\Phi(\rho) - \mathbf{R}(\mathcal{D}\Phi(\rho) + \mathcal{B})\|^2 \rangle_{time} d\rho \end{aligned}$$

Minimiser la variance de phase par rapport à \mathbf{R} aboutit à :

$$\mathbf{R} = \mathcal{C}_\Phi \mathcal{D}^t (\mathcal{D} \mathcal{C}_\Phi \mathcal{D}^t + \mathcal{C}_b)^{-1} \quad (2.12)$$

Où \mathcal{C}_Φ est la matrice de covariance de la phase turbulente, \mathcal{C}_b est le vecteur du bruit affectant les mesures \mathbf{m} et \mathcal{D} est la matrice de passage du capteur de front d'onde. Se placer directement dans l'espace des phases mesurées et reconstruites nous permet donc de prendre en compte dans la reconstruction la connaissance que l'on a de la statistique de la turbulence, de celle du bruit, et du capteur de front d'onde. Cela permet de réguler la prise en compte de la mesure dans la reconstruction, en fonction notamment son rapport signal à bruit (*Signal to Noise Ratio*, SNR).

2.2.2 Reconstruction en boucle fermée

En boucle fermée le problème est différent car les effets correctifs du miroir sont vus par l'analyseur de front d'onde, qui ne mesure que le résidu de correction. De plus, ce résidu est constitué d'un terme dû à l'erreur d'estimation de la phase turbulente mesurée et d'un terme dû à l'évolution temporelle de la phase turbulente entre le moment de l'acquisition de la mesure du front d'onde et celui de l'application de la phase corrigée sur le miroir déformable.

On comprend dès lors que la reconstruction en boucle fermée ne peut pas ignorer les aspects temporels de la boucle, et qu'il est indispensable de disposer de modèles d'évolution de la turbulence et de la boucle d'optique adaptative pour réaliser la reconstruction optimale. De plus, la reconstruction optimale devra intégrer l'étape de projection de la phase reconstruite sur le miroir déformable, et prend alors une dimension allant bien au delà des problématiques de l'analyse de front d'onde. De fait, elle est généralement traitée de façon globale dans le cadre de la commande du miroir déformable.

Pour cette raison, on ne s'étendra pas ici sur cette problématique. On rappelle simplement qu'une solution de la reconstruction optimale en boucle fermée consiste à décrire l'ensemble de la boucle dans le cadre d'un modèle d'état et à utiliser une reconstruction linéaire quadratique [Gendron and Léna 1994, Wiberg and Gavel 2004] associée à un filtre de Kalman [Petit et al. 2004, Le Roux et al. 2004].

Une fois la phase reconstruite, il faut l'appliquer sur le miroir déformable. On présente cet élément et sa commande dans le paragraphe suivant.

2.3 Correction du front d'onde

Le miroir déformable est constitué d'une lame de matériau réfléchissant dont on contrôle la forme grâce à des éléments électromécaniques. Plusieurs technologies existent, dont on trouvera une description détaillée dans [Hardy 1998] et [Séchaud 1999]. On présente brièvement ici les technologies les plus utilisées.

Les miroirs déformables les plus communément utilisés actuellement en AO sont les miroirs SAM (Stacked Actuators Mirror), dans lesquels la surface est contrôlée par un réseau d'actionneurs piézo-électriques. Ces actionneurs déforment la surface réfléchissante en lui appliquant des contraintes orthogonales, ce qui permet de créer des gradients locaux de phase. Ces analyseurs sont généralement utilisés conjointement à un senseur Shack-Hartmann.

Les miroirs bimorphes utilisent une autre technologie, dans laquelle les électrodes sont intégrées dans la surface réfléchissante, entre deux couches de matériaux diélectriques. Les actionneurs impriment alors des contraintes longitudinales à la surface réfléchissante qui influent sur sa courbure. La géométrie des électrodes étant de plus circulaire, ces miroirs sont utilisés de préférence avec les analyseurs de courbure.

Ces deux technologies sont désormais matures et équipent la totalité des systèmes d'AO fonctionnant actuellement sur le ciel. Toutefois, de nouvelles technologies sont en cours de développement afin de pourvoir aux nouvelles exigences des systèmes d'AO actuellement en cours d'étude, dont certains exigent la multiplication du nombre d'actionneurs (Extremely Large Telescopes, AO à très

haut degré de correction). Ces technologies sont principalement les miroirs magnétiques [Charton et al. 2003], les MOEMS [Liotard et al. 2004], ou le contrôle de phase par traversée de cristaux liquides [Love et al. 1995].

Tous ces miroirs ont pour point commun d'être contrôlés par application de tensions de commande à partir des informations sur la phase issues du senseur de front d'onde. Entre les deux, le calculateur temps réel est chargé de gérer à la fois la reconstruction de front d'onde, la commande du miroir déformable, mais aussi les erreurs temporelles et la stabilité du système. Tous ces aspects sont inter-dépendants, et une approche optimale du problème ne peut se concevoir qu'en prenant en compte globalement tous ces facteurs [Ellerbroek 1994, Dessenne 1998, Le Roux 2003, Petit 2006].

Cependant, pour les problèmes qui nous occuperont au long de ce manuscrit, nous supposons que les aspects spatiaux et temporels de la commande peuvent être traités séparément, et nous nous contenterons d'aborder les aspects spatiaux. Qui plus est, nous considérerons toujours dans la suite un miroir déformable capable de reproduire parfaitement les P_{max} premiers modes de Zernike.

Chacun des éléments d'une optique adaptative introduit des erreurs dans la correction. On présente un budget d'erreur pour l'AO dans le paragraphe suivant.

2.4 Budget d'erreur d'une optique adaptative

Les causes limitant la qualité de la correction par optique adaptative sont multiples. Certaines sont liées aux limites des modèles utilisés dans la boucle d'AO pour la reconstruction et la commande, d'autres plus simplement au bruit affectant la mesure du front d'onde ou encore aux aspects temporels. On donne dans la suite de cette partie un aperçu de chacune de ces sources d'erreurs.

2.4.1 Erreurs dues à la modélisation de l'atmosphère

La description des phénomènes turbulents que nous avons présenté au paragraphe (1.1) est basée sur un certain nombre d'hypothèses (cf. § 1.1.1) dont la validité est limitée. Parmi les phénomènes qui ne sont pas gérés par la boucle d'AO, la scintillation et les effets de réfraction différentielle représentent des sources d'erreur liées à la modélisation des propriétés de la turbulence atmosphérique.

La scintillation est sensible principalement en propagation endoatmosphérique et nécessite pour être corrigée une prise en charge du volume de turbulence, telle qu'on l'assure pour des raisons différentes en MCAO (cf. 3.2.2). Toutefois elle n'est généralement pas limitante pour les systèmes dédiés à l'astronomie. Les phénomènes de réfraction différentielle interviennent lorsque la longueur d'onde d'analyse et la longueur d'onde d'imagerie diffèrent. Dans ce cas, l'indice de réfraction étant chromatique, le chemin optique suivi par la lumière à la longueur d'onde d'analyse n'est pas exactement le même que celui qui est suivi par la lumière à la longueur d'onde d'imagerie. En conséquence, la correction appliquée sur la voie d'imagerie diffère légèrement de la correction nécessaire.

2.4.2 L'anisoplanétisme

Le phénomène d'anisoplanétisme (cf § 1.2.4) limite à quelques secondes d'arc le champ corrigé par optique adaptative. Son effet est limitant lors de l'imagerie de scènes étendues, ou lorsque l'objet d'intérêt scientifique est trop peu lumineux pour servir de guide à l'analyse de front d'onde et que l'on est contraint de choisir une autre source guide.

L'erreur d'anisoplanétisme peut être caractérisée en quantifiant la décorrélation angulaire de la phase turbulente. Ce problème a déjà été étudié à plusieurs reprises [Chassat 1992, Molodij 1996, Fusco 2000]. On effectue ici une simple synthèse des résultats que nous serons amenés à exploiter par la suite.

Soient $\phi(\mathbf{r}, \alpha_1)$ et $\phi(\mathbf{r}, \alpha_2)$ les phases turbulentes mesurées au point \mathbf{r} de la pupille dans les directions α_1 et α_2 . La fonction de corrélation de ces phases s'exprime :

$$\mathcal{C}_{\alpha_1, \alpha_2}(\mathbf{r}) = \langle \phi(\mathbf{r}, \alpha_1) \cdot \phi(\mathbf{r}, \alpha_2) \rangle_{time}$$

En exprimant $\phi(\mathbf{r}, \alpha_1)$ et $\phi(\mathbf{r}, \alpha_2)$ en fonction de leurs composantes de Zernike, et en supposant la turbulence stationnaire, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\alpha_1, \alpha_2}(\mathbf{r}) &= \left\langle \sum_{p=2}^{\infty} \sum_{q=2}^{\infty} a_p(\alpha_1) a_q(\alpha_2) \mathcal{Z}_p(\mathbf{r}) \mathcal{Z}_q(\mathbf{r}) \right\rangle_{time} \\ \mathcal{C}_{\alpha_1, \alpha_2}(\mathbf{r}) &= \sum_{p=2}^{\infty} \sum_{q=2}^{\infty} \langle a_p(\mathbf{0}) a_q(\delta\alpha) \rangle_{time} \mathcal{Z}_p(\mathbf{r}) \mathcal{Z}_q(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.13)$$

où on a posé $\delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$. Chassat [Chassat 1992] a exprimé la décorrélation angulaire de modes de Zernike en considérant le modèle de Kolmogorov (§ 1.1.1) :

$$\langle a_p(\mathbf{0}) \cdot a_q(\delta\alpha) \rangle = \left(\frac{D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \frac{\int_0^{h_{max}} C_n^2(h) \mathcal{I}_{pq} \left(\frac{2h\delta\alpha}{D}, \frac{D}{2L_0} \right) dh}{\int_0^{h_{max}} C_n^2(h) dh}$$

Où \mathcal{I}_{pq} est définie par l'expression suivante, dans laquelle n_p et m_p (respectivement n_q et m_q) sont les ordres radiaux et azimutaux du polynôme d'indice p (resp. q) :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{pq}(x, y) &= 3.895 (-1)^{\frac{(n_p+n_q)-(m_p+m_q)}{2}} \sqrt{(n_p+1)(n_q+1)} \times \\ &\times \left[K_{pq}^+ \int_0^\infty t^{-\frac{14}{3}} J_{(n_p+1)}(t) J_{(n_q+1)}(t) J_{(m_p+m_q)}(xt) \left(1 + \left(\frac{y}{t} \right)^2 \right)^{-11/6} dt \right. \\ &\quad \left. + K_{pq}^- \int_0^\infty t^{-\frac{14}{3}} J_{(n_p+1)}(t) J_{(n_q+1)}(t) J_{|m_p-m_q|}(xt) \left(1 + \left(\frac{y}{t} \right)^2 \right)^{-11/6} dt \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

Dans cette relation, K_{pq}^+ et K_{pq}^- sont définis dans le tableau suivant :

K_{pq}^+	$m_p = 0$	$m_p \neq 0, p \text{ pair}$	$m_p \neq 0, p \text{ impair}$
$m_q = 0$	1	$\sqrt{2}$	0
$m_q \neq 0, q \text{ pair}$	$(-1)^{m_q} \sqrt{2}$	$(-1)^{m_q}$	0
$m_q \neq 0, q \text{ impair}$	0	0	$(-1)^{m_q+1}$
K_{pq}^-	$m_p = 0$	$m_p \neq 0, p \text{ pair}$	$m_p \neq 0, p \text{ impair}$
$m_q = 0$	0	0	0
$m_q \neq 0, q \text{ pair}$	0	s_{pq}	0
$m_q \neq 0, q \text{ impair}$	0	0	s_{pq}

Et $s_{pq} = \text{signe}(m_p - m_q)$ si $(m_p - m_q)$ impair et $s_{pq} = 1$ si $(m_p - m_q)$ pair

Cette relation permet d'estimer analytiquement et numériquement [Fusco 2000] les corrélations angulaires des modes de Zernike et, partant, la variance de l'erreur d'anisoplanétisme. Pour ce faire, il suffit d'exprimer la variance de la différence de phase entre un front d'onde arrivant en incidence normale par rapport à l'axe optique et d'un front d'onde arrivant avec une incidence $\delta\alpha$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{aniso}^2(\delta\alpha) &= \frac{1}{\mathcal{S}_{PUP}} \iint_{\mathcal{S}_{PUP}} \left\langle (\phi(\mathbf{r}, \mathbf{0}) - \phi(\mathbf{r}, \delta\alpha))^2 \right\rangle_{time} d\mathbf{r} \\
&= \frac{1}{\mathcal{S}_{PUP}} \iint_{\mathcal{S}_{PUP}} \left\langle \phi^2(\mathbf{r}, \mathbf{0}) \right\rangle_{time} + \left\langle \phi^2(\mathbf{r}, \delta\alpha) \right\rangle_{time} - 2 \left\langle \phi(\mathbf{r}, \mathbf{0}) \phi(\mathbf{r}, \delta\alpha) \right\rangle_{time} d\mathbf{r} \\
&= 2 \left(\sigma_{turb}^2 - \frac{1}{\mathcal{S}_{PUP}} \iint_{\mathcal{S}_{PUP}} \mathcal{C}_{\delta\alpha}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right)
\end{aligned}$$

$$\text{D'où finalement : } \sigma_{aniso}^2(\delta\alpha) = 2 \left(\sigma_{turb}^2 - \sum_{p=2}^{\infty} \left\langle a_p(\mathbf{0}) a_p(\delta\alpha) \right\rangle_{time} \right) \quad (2.15)$$

Car on a par définition $\iint_{\mathcal{S}_{PUP}} \mathcal{Z}_p(\mathbf{r}) \mathcal{Z}_q(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{qp}$, où cette fois δ_{qp} est le symbole de Kröenecker.

Ce problème d'anisoplanétisme est très limitant pour certains champs applicatifs de l'optique adaptative. Il se traduit en premier lieu par une limitation drastique de la portion de ciel accessible aux instruments équipés d'une AO. On peut le résoudre en partie en utilisant la connaissance à priori que l'on a de la turbulence, et en particulier de sa corrélation spatiale : on réalise alors une optimisation hors axe [Petit 2006]. Cependant ce procédé n'est pas applicable pour l'imagerie de scènes étendues. On verra plus loin que la solution consiste alors à multiplier les directions d'analyse pour accéder à la connaissance de la répartition volumique de la turbulence.

2.4.3 Erreurs dues à la boucle d'AO

Les erreurs dues à la boucle d'AO sont intimement liées à la technologie utilisée dans les composants de la boucle : analyseur de surface d'onde, détecteur et miroir déformable pour l'essentiel.

2.4.3.1 Erreur temporelle

La boucle d'optique adaptative contient deux éléments introduisant des retards de la commande sur l'évolution de la turbulence : le détecteur de l'analyseur de front d'onde et la commande. Des deux, c'est généralement le premier qui génère le plus grand retard. Ainsi, la boucle d'AO est rythmée temporellement par l'acquisition des mesures de phase. A l'instar de ce que qui se passe pour l'anisoplanétisme, le retard de la boucle sur la turbulence génère une erreur, qu'il est possible de compenser en partie en utilisant un modèle d'évolution temporelle de la turbulence [Conan 1994].

2.4.3.2 Erreur de sous-modélisation

L'erreur de sous-modélisation est l'erreur que l'on commet en n'estimant et corrigeant qu'un nombre fini de modes spatiaux de la phase turbulente. Cette erreur est intrinsèquement liée au pas d'échantillonnage spatial du senseur de front d'onde et du miroir déformable, les deux agissant comme des filtres passe bas sur les fréquences spatiales de la turbulence.

La connaissance des propriétés statistiques de la phase turbulente permet de prédire la variance de la phase après correction parfaite de ses j_{max} premiers modes de Zernike [Conan 1994]. Soit n_{max} le dernier ordre radial de Zernike complètement corrigé, alors :

$$\sigma_{res}^2 \simeq 0.458 (n_{max} + 1)^{-\frac{5}{3}} \left(\frac{D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \quad (2.16)$$

Où D est le diamètre de l'instrument et r_0 le paramètre de Fried de la turbulence (cf. § 1.2.2).

Remarquons également que le fait de ne corriger qu'un nombre fini de modes a une influence sur l'expression de la variance de l'erreur anisoplanétique donnée plus haut par l'équation (2.15). En prenant en compte la sous-modélisation, cette expression devient [Fusco 2000] :

$$\sigma_{aniso, ss\ mod.}^2(\delta\alpha) = 2 \sum_{p=2}^{P_{max}} \left(\langle a_p^2(\mathbf{0}) \rangle_{time} - \langle a_p(\mathbf{0}) a_p(\delta\alpha) \rangle_{time} \right) + \sum_{p=P_{max}+1}^{\infty} \langle a_p^2(\mathbf{0}) \rangle_{time} \quad (2.17)$$

Des modifications du même ordre devraient être prises en compte également pour la caractérisation de l'erreur temporelle de la boucle.

2.4.3.3 Aliasing

L'erreur d'aliasing est intrinsèquement liée à l'échantillonnage de la surface d'onde par l'analyseur. Ainsi, si on prend l'exemple d'un senseur Shack-Hartmann (cf. § 2.1.2.3), l'échantillonnage du front d'onde incident par la galette de micro-lentille provoque dans l'espace de Fourier une périodisation du signal qui s'accompagne d'un repliement des fréquences spatiales supérieures à

$1/2d$, d étant le pas d'échantillonnage du front d'onde (*i.e.* la taille d'une microlentille).

On verra lors de la description d'un système d'optique adaptative à très haute performance (cf. § 3.1) qu'il est possible de diminuer sensiblement cette erreur en réalisant un filtrage des fréquences spatiales de la turbulence avant l'estimation de la pente du front d'onde.

2.4.3.4 Propagation du bruit

La propagation du bruit est un élément déterminant du budget d'erreur d'une AO. Elle est liée à la mesure de la phase turbulente et à au processus de reconstruction. Quel que soit l'analyseur envisagé (cf. § 2.1), l'information sur la phase turbulente est à un moment donné codée en terme d'intensité lumineuse lue sur un détecteur. A ce moment, la mesure est dégradée par du bruit de photon et du bruit de détecteur. Ensuite, la propagation du bruit lors du processus de reconstruction dépend de l'algorithme de reconstruction utilisé (cf. 2.2). Elle a été modélisée par Rigaut et Gendron [Rigaut and Gendron 1992] pour une reconstruction de la phase turbulente sur la base des modes de Zernike. La part du bruit total propagé (en variance) sur le mode d'ordre radial n et d'ordre azimutal m est donnée par les relations :

$$\begin{aligned} p_{n,m} &= 0.295 (n+1)^{2.05} & \text{si } n = m \\ p_{n,m} &= 0.174 (n+1)^2 & \text{si } n \neq m \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.4.3.5 Erreurs de calibration

On a vu (cf. 2.2) que la reconstruction de front d'onde et la commande intègrent des modèles de la turbulence et des différents éléments de la boucle permettant d'améliorer la performance de l'AO. Toutefois ces modèles sont susceptibles eux-mêmes de comporter des erreurs, ou bien d'être victimes d'obsolescence du fait de dérives des conditions de fonctionnement de la boucle. Des erreurs de calibration apparaissent alors. Des procédures de re-calibration sont mises en place pour recalibrer les modèles, mais elles sont coûteuses en temps. Leur occurrence est donc réduite au strict minimum pour les systèmes fonctionnant sur le ciel. Les algorithmes de reconstruction actuellement en cours d'évaluation offrent quant à eux la possibilité d'estimer conjointement la phase à mesurer et certains paramètres des modèles utilisés, ce qui facilite grandement le recalage des modèles. On pourra alors envisager de tirer partie des temps morts des runs d'observation pour recalibrer le système.

2.4.3.6 Les aberrations non communes (NCPA)

On désigne par aberrations non communes (non common path aberrations, NCPA) toutes les aberrations différentielles entre la voie d'analyse et la voie d'imagerie de l'instrument. Elles se séparent en deux catégories :

- Les aberrations situées en aval de séparatrice *sur la voie d'analyse*. Elles sont vues par l'analyseur de front d'onde, mais n'affectent pas la voie d'imagerie. La compensation de ces aberrations est généralement dans la procédure de calibration de l'analyseur de front d'onde. Ainsi, pour le Shack-Hartman (§ 2.1.2.3), on les calibre en mesurant les pentes de référence lorsque le senseur Shack-Hartmann est illuminé par une source de référence située au voisinage immédiat de la lame séparatrice.

- Les aberrations situées en aval de séparatrice *sur la voie d'imagerie*. Elles ne sont pas vues par le senseur de front d'onde. On utilise généralement des techniques en plan focal pour les mesurer (cf. § 2.1.1). Pour le Shack-Hartmann, elles sont prises en compte en utilisant les pentes de référence (technique de pré-compensation [Sauvage et al. 2005]).

2.5 Propriétés de l'image corrigée par AO

2.5.1 Caractéristiques de l'image en correction partielle

Les caractéristiques des images corrigées par optique adaptative ont été largement étudiées [Roddir and Roddir 1986, Conan 1994, Fusco 2000], que ce soit en longue pose ou en courte pose. On rappelle ici brièvement les points les plus importants.

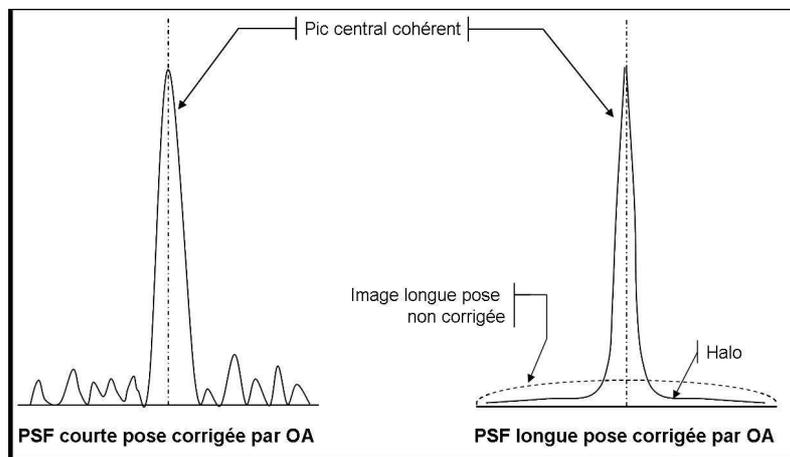


FIG. 2.8 – PSF courte pose et longue pose d'un instrument corrigé par optique adaptative.

La PSF courte pose d'un système corrigé par optique adaptative (fig. 2.8, gauche) est constituée d'un pic central autour duquel des tavelures (speckles) de moindre intensité persistent. Le pic central est le résultat de la correction des bas ordres de la turbulence par l'optique adaptative, tandis que les tavelures résiduelles sont la manifestation des modes non corrigés. Elles évoluent dans le temps, si bien qu'une moyenne temporelle des images courte pose peut se modéliser comme la superposition d'un pic cohérent de largeur à mi-hauteur λ/D_{PUP} (avec λ , la longueur d'onde d'imagerie et D_{PUP} , le diamètre de la pupille du télescope) et d'un halo gaussien de diamètre λ/r_0 (r_0 étant le paramètre de Fried de la turbulence) (fig. 2.8, droite).

2.5.2 Caractérisation de la qualité d'une image corrigée par AO.

Quantifier la performance d'un instrument incluant une optique adaptative est avant tout un problème de point de vue et de choix de critère. Selon que l'on cherche à évaluer les performances de l'optique adaptative ou la qualité de l'image sur la voie imagerie le critère pertinent ne sera pas le même. De même, il pourra être différent selon le degré de correction de l'image. Toutefois, à la lumière de ce qui a été dit au paragraphe précédent (§ 2.5.1), il existe des relations entre ces critères.

2.5.2.1 Variance de phase résiduelle

La variance de la phase après correction par l'optique adaptative est le critère le plus couramment utilisé pour quantifier les performances d'une AO car il permet de travailler directement sur la grandeur sur laquelle le système agit. Elle permet de prendre en compte la totalité du budget d'erreur de l'AO. Pour une direction donnée α du champ, elle est définie par :

$$\sigma_{res}^2(\alpha) = \frac{1}{S_{PUP}} \iint_{S_{PUP}} \langle \|\phi(\mathbf{r}, \alpha) - \phi_{corr}(\mathbf{r}, \alpha)\|^2 \rangle_{time} d\mathbf{r} \quad (2.19)$$

Si la variance de phase résiduelle est le paramètre d'intérêt pour estimer les performances d'une AO, il n'est pas le mieux adapté pour décrire la qualité de l'image corrigée. Les trois critères présentés dans la suite sont plus adaptés à ce type de description.

2.5.2.2 Les paramètres caractérisant la PSF de l'instrument

Le critère d'intérêt sur la PSF change selon les applications de l'instrument.

Le rapport de Strehl (Strehl Ratio, SR) [Strehl 1902] est un critère particulièrement bien adapté à la caractérisation de systèmes à haute correction, ayant pour but de réaliser de l'imagerie à haute résolution angulaire. Il quantifie l'écart par rapport au cas purement diffractif de la PSF de l'instrument corrigé par AO. La définition la plus largement utilisée du rapport de Strehl est basée sur l'intensité lumineuse au foyer de l'instrument. Il est alors défini comme le rapport de l'intensité lumineuse au foyer dans le cas corrigé sur l'intensité au foyer dans le cas purement limité par la diffraction :

$$SR(\mathbf{0}) = \frac{I_{corr}(\mathbf{0})}{I_{diff}(\mathbf{0})} \quad (2.20)$$

Notons que l'on peut étendre cette définition à l'ensemble du champ corrigé, en fonction de la direction d'imagerie. Bien que le rapport de Strehl soit un critère lié à la PSF de l'instrument, il est possible de le relier très simplement à la variance de la phase résiduelle, en appliquant l'approximation de Maréchal [Born and Wolf 1980] :

$$SR \simeq Ec = e^{-\sigma_{\Delta\phi}^2} \quad (2.21)$$

Où Ec est l'énergie cohérente de la PSF, c'est-à-dire l'énergie du pic central de la PSF corrigée intégrée sur la FWHM du pic. Le rapport de Strehl décroît très vite lorsque la performance du système est dégradée, ce qui en fait un critère pour l'imagerie à haute résolution.

L'énergie lumineuse intégrée sur une petite surface du plan focal image est un critère de qualité de l'image plus pertinent lorsque le rôle de l'optique adaptative n'est pas d'atteindre la limite de diffraction de l'instrument mais simplement d'améliorer la concentration de l'énergie lumineuse. On utilise indifféremment en astronomie des critères d'énergie encerclée ou d'énergie encadrée (EE dans les deux cas), qui représentent la fraction d'énergie lumineuse récupérée dans un élément de surface carré ou circulaire au foyer de l'instrument :

$$EE_x = \frac{\iint_{S_x} I_{corr}(\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho}}{\iint_{-\infty}^{\infty} I_{corr}(\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho}} \quad (2.22)$$

La taille angulaire caractéristique de l'élément d'intégration x est généralement exprimée en secondes d'arc. Ce paramètre est utilisé en particulier pour les applications de spectro-imagerie de l'optique adaptative, dans lesquelles l'élément de surface d'intégration peut être un pixel du détecteur, ou bien l'entrée d'une fibre optique. On comprend alors que la géométrie de l'élément d'intégration est adaptée en fonction de la géométrie de l'élément devant recevoir le flux lumineux.

Enfin, la largeur à mi-hauteur de la PSF corrigée (FWHM) est un critère très intéressant en correction partielle car il permet à la fois de caractériser la concentration du flux lumineux dans la PSF corrigée et ses éventuelles dissymétries (en mesurant la FWHM dans deux directions orthogonales).

2.6 Conclusion

On a présenté dans ce chapitre les différents éléments constituant la boucle d'optique adaptative, leur rôle et leurs limitations. Des différents postes d'erreurs dont nous avons fait mention au paragraphe (2.4), les deux qui limitent actuellement le plus les objectifs scientifiques accessibles par les instruments corrigés par AO concernent l'analyse du front d'onde. Il s'agit du bruit sur la mesure de la phase et de l'anisoplanétisme. Le bruit de mesure contraint la magnitude limite des objets observables. L'anisoplanétisme, en limitant le champ corrigé par l'optique adaptative, dégrade l'imagerie de scène étendues. Les effets conjugués de ces deux postes d'erreur limitent la couverture de ciel des instruments assistés par AO, c'est-à-dire la fraction du ciel sur laquelle le système fournit ses performances nominales.

Les systèmes d'optique adaptative en projet ont presque tous pour objectif de dépasser les performances des systèmes actuels sur l'un ou l'autre de ces postes d'erreur. On présente ces concepts dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Les nouveaux enjeux de l'optique adaptative

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, l'optique adaptative classique permet d'obtenir des images haute résolution de scènes peu étendues (quelques secondes d'arc) dans lesquelles il existe une source guide suffisamment brillante (jusqu'à des magnitudes visibles de 16 à 17). Pour révolutionnaire que soit la qualité des images obtenues en comparaison d'une image sans correction de la turbulence, l'intérêt de ce système n'en est pas moins restreint par sa faible couverture de ciel, due précisément au besoin d'une source guide brillante et très proche de l'objet d'intérêt scientifique.

Pourtant, tous les domaines de l'astronomie moderne pourraient tirer profit de l'amélioration de la sensibilité et/ou de l'élargissement du champ corrigé par AO. Nous n'avons pas ici la prétention de dresser une liste exhaustive de tous les objectifs scientifiques qui pourront être accessibles grâce aux futures générations d'instruments. Un travail très complet à ce sujet peut être trouvé dans [Hook 2005]. On cite simplement dans ce chapitre quelques uns des objectifs d'observations principaux qui sont à l'origine du développement de nouveaux concepts d'optique adaptative. On décrit à chaque fois le(s) concept(s) dédiés en priorité à la réalisation de ces objectifs.

3.1 Détection de planètes extra-solaires

3.1.1 Objectifs scientifiques

La détection, l'imagerie et la caractérisation de planètes extra-solaires est l'un des enjeux scientifiques majeurs de l'astronomie du XXI^e siècle. Depuis la première détection il y a une dizaine d'années [Mayor and Queloz 1995], plus de 200 exoplanètes ont été répertoriées dans un rayon de 100 parsecs autour du système solaire. Toutes (sauf quelques unes, on y revient plus loin) ont été détectées de façon indirecte, soit par détection des transits de la planète devant son étoile hôte, soit par détection de ses effets gravitationnels sur son étoile, en mesurant les variations de la vitesse radiale de cette dernière ou encore par un effet de lentille gravitationnelle.

Toutes les stratégies observationnelles sont exploitées pour compléter et enrichir le catalogue des exoplanètes, et surtout caractériser leur composition physico-chimique. Plusieurs projets spatiaux sont actuellement en cours de développement, en particulier les projets COROT¹ [Rouan et al. 1999, Baglin 2003], DARWIN² [Leger et al. 1996] et TPF³ [Beichman 1998]. L'astronomie au sol n'est pas en reste puisque plusieurs instruments entièrement ou partiellement dédiés à la détection d'exoplanètes sont actuellement en opération ou en cours de développement. On peut citer en particulier ELODIE⁴ [Baranne et al. 1996], HARPS⁵ [Santos et al. 2004], les instruments du VLTI⁶ [Glindemann et al. 2000] et SPHERE⁷ [Beuzit et al. 2006]. Ajoutons que la recherche d'exoplanètes est également une des pierres angulaires des projets d'ELTs⁸.

L'apport de l'optique adaptative sera primordial pour les instruments basés au sol puisqu'il s'agit de détecter des objets situés à quelques centaines de milli-arcsecondes de leur étoile hôte et 10^6 à 10^{10} fois moins brillantes. Toutefois, la première image d'une exoplanète obtenue très récemment [Chauvin et al. 2005] avec l'instrument NACO (NAOS CONICA) [Rousset et al. 2003] du VLT laisse présager du succès de ces projets instrumentaux. Parmi les instruments cités ci-dessus, nous allons développer le cas de SPHERE, car son ambition induit des spécifications de très hautes performances pour le système d'optique adaptative dont il est équipé, au point qu'une dénomination spécifique a été attribuée à celui-ci : on parle désormais de XAO (eXtreme AO).

L'objectif scientifique principal de SPHERE est de réaliser l'imagerie et la spectroscopie de l'atmosphère de planètes de type "Jupiter chaud", afin d'en déterminer la composition et la physique. Avec ses performances, SPHERE permettra également l'étude des étoiles faibles de type naines brunes, de réaliser la spectro-imagerie des disques proto-planétaires autour d'étoiles jeunes, et permettra également d'approfondir notre connaissance du système solaire par l'étude des objets petits et froids tels que les astéroïdes et satellites des géantes gazeuses. Pour répondre à son objectif principal, SPHERE sera constitué principalement d'un coronographe à masque de phase [Rouan et al. 2000] permettant d'éteindre la lumière de l'étoile hôte, d'une optique adaptative à très haute performance, SAXO (Sphere Adaptive optics eXtreme Observation) [Fusco et al. 2006] et d'une caméra infra-rouge (IRDIS). L'objectif de SAXO est non seulement de permettre de résoudre la planète, mais également de permettre une stabilisation de l'image suffisante pour que le coronographe puisse éteindre l'étoile hôte avec un maximum d'efficacité. On présente les contraintes spécifiques que la XAO dans le paragraphe suivant, au travers de l'exemple de SPHERE.

¹Convection, ROTation and planetary Transits. Micro-mission du CNES (Centre National des Etudes Spatiales), dédiée entre autres à la détection des transits de planètes de type exo-terres.

²Interféromètre infrarouge spatial de l'ESA (European Space Agency), dédié à l'analyse spectrale de l'atmosphère des exoplanètes, dans le but d'y repérer des traceurs de vie.

³Terrestrial Planet Finder. Projet de la NASA (National Aeronautics and Space Administration), constitué d'un télescope avec coronographe (TPF-C) et d'un télescope avec interféromètre infra-rouge (TPF-I), tous deux mis en orbite et dédiés à la détection de planètes de type exo-terres.

⁴Spectrographe installé sur le télescope de 1.93m de l'Observatoire de Haute Provence et dédié à la mesure des vitesses radiales.

⁵High Accuracy Radial Velocity Planet Searcher. Spectrographe visible à très haute résolution en opération sur le télescope de 3.6m de l'ESO, à la Silla (Chili), dédié à la mesure des vitesses radiales des étoiles.

⁶mode interférométrique du VLT.

⁷Spectro-Polarimetric High contrast Exoplanet REsearch. Instrument de seconde génération du VLT dédié à l'imagerie direct et à la spectroscopie de l'atmosphère d'"exo-jupiters".

⁸Extremely Large Telescopes, projets d'instruments monopupilles de 20 à 50 mètres de diamètre.

3.1.2 La XAO

Le concept de XAO n'apporte pas de réelle nouveauté par rapport à l'optique adaptative classique que nous avons abordé au chapitre 2, si ce n'est qu'à l'exception de l'erreur anisoplanétique, tous les facteurs entrant dans le budget d'erreur doivent être analysés et contraints. L'objectif est en effet d'atteindre un rapport de Strehl supérieur à 90 % sur axe en bande H ($1,3 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 2 \mu\text{m}$). A titre de comparaison, NAOS, le système d'optique adaptative installé sur le télescope Yepun du VLT, permet d'atteindre 60 % de rapport de Strehl à $2,2 \mu\text{m}$, ce qui correspond à 40 % en bande H. Passer de 40 % à 90 % de rapport de Strehl implique de gagner environ un facteur 9 sur la variance de phase résiduelle à la longueur d'onde de la caméra d'imagerie (*i.e.* à $1,6 \mu\text{m}$). Pour arriver à ces fins, plusieurs éléments du concept de l'AO doivent être revus :

- Il est indispensable de corriger un grand nombre de modes, ce qui implique un miroir déformable à grand nombre d'actionneurs et un analyseur échantillonnant fortement le plan de la pupille. Le choix de l'analyseur s'étant porté sur un Shack-Hartmann, dont le comportement est bien connu et la technologie est éprouvée, SAXO sera équipée d'un SH de 40×40 sous-pupilles couplé à un miroir déformable de 41×41 actionneurs. Ceci permettra de corriger plus de 1300 modes.
- Il est également nécessaire de minimiser l'erreur temporelle : la fréquence nominale de fonctionnement de SAXO sera de 1,2 kHz, soit plus du double de l'actuel NAOS (500 Hz).
- Si l'on multiplie le nombre de sous-pupilles et que l'on diminue le temps d'intégration, il est indispensable de choisir un détecteur très peu bruyant : SAXO sera équipé d'un détecteur à multiplication d'électrons (de type EMCCD [Denvir and Conroy 2003]), caractérisé par un très faible bruit de détecteur équivalent ($< 1e^-$ par pixel et par trame).
- La mesure de la pente locale du front d'onde au niveau d'une sous-pupille doit être optimisée pour améliorer sa linéarité, sa fiabilité et la propagation du bruit. Dans SAXO, tous les points sont contrôlés : échantillonnage du spot, filtrage du plan focal pour éliminer les problèmes de repliement des hautes fréquences, et algorithme de mesure de la position du spot [Fusco et al. 2004, Nicolle et al. 2004].
- L'estimation des aberrations non communes par diversité de phase a également été améliorée [Sauvage et al. 2005].
- Enfin, la commande de l'optique adaptative doit non seulement être capable de gérer de façon optimale la reconstruction du front d'onde, mais également assurer une stabilité maximale de la boucle, et en particulier sa robustesse vis-à-vis des vibrations du télescope [Petit et al. 2004, Fusco et al. 2006].

La XAO est donc un système d'optique adaptative simple conjuguée, dans laquelle les composants, la commande et les pré et post traitements ont tous été optimisés afin de fournir une performance jamais atteinte à ce jour. L'un des rares éléments du budget d'erreur qu'il n'a pas été nécessaire de travailler est l'anisoplanétisme, la performance maximale étant recherchée sur axe pour un maximum d'effet du coronographe. La XAO est en fait la seule optique adaptative de nouvelle génération à ne pas rechercher un champ corrigé élargi. On présente ci-dessous les cibles scientifiques

qui justifient l'extension du champ corrigé et les concepts d'AO proposé pour répondre à ce besoin.

3.2 L'étude des étoiles et des populations stellaires

3.2.1 Objectifs scientifiques

La compréhension de la formation et de l'évolution des étoiles suscite l'intérêt toujours renouvelé des astronomes car elle seule peut nous permettre de comprendre les origines et l'évolution de notre propre système solaire. La vérification et l'enrichissement des modèles d'évolution actuellement accrédités ne peut se faire qu'en confrontant ces modèles à un grand nombre d'observations intra et extra galactiques. Les objectifs scientifiques en vue sont multiples :

- Enrichissement des données pour l'étude de la fonction de masse initiale des étoiles [Miller and Scalo 1979, Kroupa 2001]. Ces données sont actuellement biaisées vers les étoiles massives du fait de la sensibilité limitée des instruments. L'objectif est de pouvoir accumuler les données sur les étoiles faibles et les naines brunes. L'étude de la fonction de masse initiale des étoiles dans les nuages de Magellan et les amas globulaires est également un enjeu scientifique majeur, qui permet de comparer notre Galaxie avec ses proches voisines [Koen 2006].
- Histoire et évolution des étoiles dans les galaxies proches et lointaines : détermination de leur masse, leur âge et leur métallicité. Détermination du taux de formation d'étoiles, étude des disques d'accrétion, des étoiles jeunes et des disques proto-planétaires [Worthey 1994]. Etude des processus d'enrichissement chimique du milieu interstellaire par les Super Novea, [Matteucci and Greggio 1986, Rocha Pinto et al. 2000a-b].
- Etude des propriétés et du mouvement des étoiles du milieu inter-galactique et évolution galactique.

L'observation des systèmes stellaires nécessite maintenant des instruments capables de travailler à la limite de diffraction sur des champs plus larges que ceux de l'actuelle optique adaptative. L'optique adaptative multiconjuguée, présentée ci-dessous, a précisément vocation à fournir une telle correction.

3.2.2 L'optique adaptative multi-conjuguée

L'idée de l'optique adaptative multiconjuguée (MCAO) a été proposée pour la première fois par Dicke [Dicke 1975], puis reprise par Beckers en 1988 [Beckers 1988]. L'idée est de multiplier les directions d'analyse dans le champ afin d'accéder à la connaissance du volume de turbulence et de corriger celui-ci grâce à plusieurs miroirs déformables conjugués optiquement aux altitudes adéquates [Tallon et al. 1992, Ellerbroek 1994, Fusco et al. 1999- 2001]. La figure (3.1) propose un schéma de principe de ce concept. L'objectif est d'obtenir une correction proche de la limite de diffraction d'un champ de 1 à 2 minutes d'arc [Ellerbroek et al. 2003]. Pour ce faire, les systèmes actuellement en cours de projet utilisent 3 à 8 senseurs de front d'onde pour analyser le volume turbulent et commander 2 à 3 miroirs déformables.

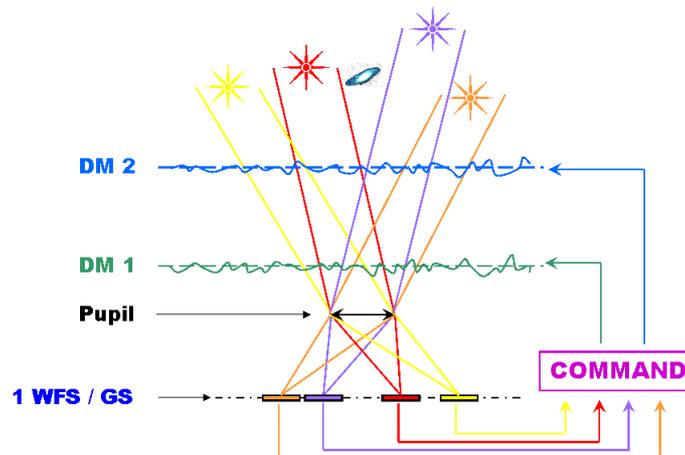


FIG. 3.1 – Schéma de principe d'une optique adaptative multiconjuguée (MCAO)

Deux problèmes font d'un système de MCAO une gageure technologique :

- Il faut trouver des étoiles guides suffisamment brillantes. Celles-ci étant rares, plusieurs solutions sont actuellement en cours d'évaluation pour garantir une couverture de ciel acceptable. Ainsi, au lieu du concept *Star Oriented* proposé par Beckers, dans lequel la mesure est faite indépendamment dans chaque direction d'étoile guide, un concept alternatif, dit *Layer Oriented* [Ragazzoni 1999, Ragazzoni et al. 2002] a été proposé, dans lequel le flux des étoiles est utilisé collectivement pour déterminer directement la turbulence à l'altitude des miroirs déformables. Un tel concept permettrait d'utiliser des étoiles plus faibles et d'améliorer ainsi la couverture de ciel de l'instrument. On reviendra en détail sur les qualités et les limitations de ces deux concepts d'analyse de front d'onde dans le chapitre 4 et dans la partie III. D'autre part, les nouvelles technologies de détecteur à faible bruit arrivant actuellement à maturité [Denvir and Conroy 2003, Foppiani et al. 2003, Daigle et al. 2004] permettront une meilleure sensibilité des senseurs de front d'onde, et offriront la possibilité d'utiliser les étoiles guides plus faibles. Enfin, une autre voie explorée pour améliorer la couverture de ciel de ces systèmes est leur assistance par une constellation d'étoiles Laser [Foy and Labeyrie 1985, Parenti and Sasiela 1994, Le Louarn et al. 1998]. Cette technique est actuellement en cours de développement pour plusieurs télescopes [D'Orgeville et al. 2002, Tokovinin et al. 2003b], et a déjà commencé à fournir des résultats prometteurs [Lloyd Hart et al. 2006]. Toutefois, un certain nombre de problèmes technologiques ou fondamentaux persistent [Tallon and Foy 1990, Rigaut and Gendron 1992, Neyman 1996, Ellerbroek and Rigaut 2001].
- Le grand nombre de degrés de liberté d'un système constitué de plusieurs senseurs de front d'onde et de plusieurs miroirs déformables pose des problèmes de mise à l'échelle et de temps de réponse des lois de commande [Petit 2006].

En réponse aux interrogations levées par ces problèmes, l'ESO a développé un démonstrateur de MCAO, MAD [Marchetti et al. 2003] (Multiconjugate Ao Demonstrator, cf. § 7). Sa mise sur le ciel prochaine permettra de tirer les premières conclusions sur les solutions proposées. Néanmoins,

des études poussées sont encore nécessaires à l'identification des points durs et des avantages de tels systèmes. Le travail présenté dans ce manuscrit est précisé dans ce cadre général, pour la partie analyse de front d'onde.

3.3 L'exploration extra-galactique

3.3.1 Objectifs scientifiques

Une troisième classe d'objectifs scientifiques d'envergure pour l'astronomie des prochaines années est l'exploration extra-galactique. L'étude des noyaux actifs de galaxies et des galaxies primordiales sont deux objectifs d'observation particulièrement importants car de leur étude dépend la vérification des modèles actuels sur la genèse et l'évolution des galaxies et de l'univers. Les objectifs scientifiques principaux des instruments dédiés à l'observation extragalactique sont :

- L'étude de la fonction de masse initiale dans les galaxies primordiales [Nakamura and Umemura 2002].
- L'études de la composition des galaxies primordiales en éléments légers [Izotov et al. 1994] et des processus d'ensemencement du milieu interstellaire par les Super Novae [Wada and Venkatesan 2003].
- Le recalage des échelles de distances extra-galactiques et la mesure de la constante de Hubble [Freedman et al. 2001].
- L'étude des galaxies actives [Marscher et al. 2002, Mobasher et al. 2005, Croton et al. 2006].
- L'étude de la formation des amas de galaxies [Hamilton et al. 1991].

L'astronomie extragalactique est limitée par l'extrême faiblesse de la luminosité des objets à observer. De plus, la totalité des sujets cités ci-dessus ne peuvent être traités par l'astronomie au sol car certains nécessitent des observations dans des gammes de longueur d'onde inaccessibles sur Terre (Gamma, X, ou infra-rouge lointain et sub-millimétrique). Concernant les projets spatiaux, un effort considérable a été fait puisque l'ESA a fait de la mission Herschel⁹ l'une des quatre pierres angulaires de son programme scientifique *horizon 2000*¹⁰. Toutefois, de nombreuses observations peuvent être réalisées au sol, en particulier en bandes J et K (de 1 à 2,5 μm). Du fait de la faible magnitude des objets d'intérêt scientifique, il est nécessaire d'améliorer la PSF des instruments, et donc d'utiliser une optique adaptative. Mais celle-ci ne peut être asservie sur les galaxies. Deux concepts d'optique adaptative sont actuellement en cours d'étude pour permettre les observations extra-galactiques : L'optique adaptative dédiée à la correction de la couche turbulence proche du sol (GLAO) et l'optique adaptative multi-objet (MOAO).

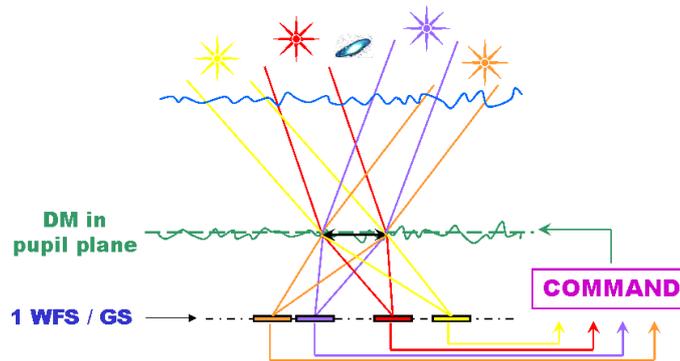


FIG. 3.2 – Schéma de principe d'une optique adaptative dédiée à la correction de la turbulence proche du sol (GLAO).

3.3.2 L'optique adaptative *ground layer* et l'optique adaptative multi-objet

3.3.2.1 GLAO

L'objectif d'un système *Ground Layer Adaptive Optics* (GLAO) [Rigaut 2001, Tokovinin et al. 2004] est d'assurer une correction partielle et uniforme sur un large champ : typiquement d'une dizaine de minutes d'arc de diamètre. Comme son nom l'indique, l'objectif du GLAO pour répondre à cette question est de corriger la turbulence localisée à proximité de la pupille du télescope. En effet, la couche au sol est à la fois la couche qui concentre la plus grande part de la turbulence (cf. § 1.2.1) et la couche pour laquelle le domaine isoplanétique (cf. § 2.4.2) est le plus large, ce qui garantira une certaine uniformité de la correction. A l'instar de la MCAO, il est donc indispensable de connaître la répartition en altitude de la turbulence, et donc de disposer de plusieurs sources guides dans le champ. Cependant l'objectif n'est pas ici d'atteindre la résolution maximale du télescope, mais simplement de concentrer l'énergie lumineuse dans la PSF. Par contre, l'obtention d'une correction *la plus uniforme possible* dans le champ est une spécification forte pour un GLAO, puisque l'on doit pouvoir effectuer des mesures photométriques sur les objets d'intérêt scientifique.

On peut s'interroger sur la nécessité d'ériger l'uniformité de correction en contrainte de performance pour le GLAO. En effet, privilégier l'uniformité de correction peut amener à dégrader intentionnellement la performance de l'instrument en certaines directions du champ. L'analyse de front d'onde permettant en théorie de connaître l'état du volume de turbulence, il serait pourtant possible d'estimer les caractéristiques de la PSF en chaque point du champ, et de traiter *a posteriori* l'image en conséquence [Fusco et al. 2000]. Cependant, certaines applications, par exemple la spectro-photométrie de champs de galaxies, ne peuvent semble-t-il pas bénéficier d'un tel post-traitement et nécessiteraient effectivement une PSF uniforme dans le champ.

Par ailleurs, la réflexion sur les ELTs a permis l'émergence de nouvelles perspectives d'utilisation

⁹Télescope spatial de 3,5 m observant depuis le point de Lagrange L2 les galaxies lointaines dans l'infrarouge lointain et le sub-millimétrique.

¹⁰Les quatre pierres angulaires du programme scientifique de l'ESA sont les missions Cluster-SOHO (étude du soleil et de ses interactions avec la Terre), XMM-Newton (Etude des phénomènes violents de la galaxie dans le domaine X), Darwin (détection d'exo-terres) et Herschel (exploration extra-galactique).

du concept GLAO : l'idée fait en effet son chemin d'utiliser des miroirs secondaires adaptatifs pour fournir un premier étage de correction de la turbulence [Brusa and del Vecchio 1998]. La correction fournie devra alors être profitable à tous les instruments susceptibles de se greffer sur le télescope. Il faut donc que ce soit une correction large champ et uniforme. De plus, pour que son utilisation soit quasiment transparente pour les instruments hôtes, il est indispensable que le système soit simple de conception et d'utilisation.

Concernant l'analyse du front d'onde, une idée largement répandue dans la communauté scientifique est de moyennner la phase mesurée dans différentes directions du ciel. On souhaite ainsi tirer partie de la décorrélation angulaire de la turbulence d'altitude. Si l'on choisit judicieusement le domaine sur lequel moyennner la turbulence, la contribution des couches d'altitude tend à s'annuler et la phase résultante est principalement due à la turbulence proche du sol. Une étude approfondie de la performance accessible en moyennnant la mesure de la phase turbulente dans plusieurs directions d'analyse et une comparaison avec une reconstruction optimale de la turbulence au sol est proposée dans la partie III de cette thèse.

3.3.2.2 La MOAO

L'optique adaptative multi-objet [Puech et al. 2006], elle, vise à permettre d'atteindre la limite de diffraction de l'instrument en quelques points d'un très large champ (25 arcmin pour Falcon). L'objectif est ici de pouvoir résoudre simultanément plusieurs galaxies du champ et d'en réaliser la spectro-imagerie. Les objets d'intérêt scientifique étant toujours très peu lumineux, la boucle d'optique adaptative est asservie sur plusieurs étoiles brillantes, dont les mesures de front d'onde sont extrapolées en utilisant des algorithmes d'optimisation hors axe pour estimer le front d'onde turbulent dans la direction de chaque objet et le corriger grâce à un unique miroir déformable [Gendron et al. 2005, Assémat et al. 2006]. Le système de MOAO est ainsi constitué de plusieurs micro-unités de correction du front d'onde, chacune étant dédiée à un objet particulier. Chaque miroir déformable est piloté en boucle ouverte (les senseurs de front d'onde ne voient pas la correction appliquée).

3.4 Conclusion : une AO à large champ indispensable

La quasi-totalité des cibles scientifiques citées ci-dessus nécessitent pour être observées depuis le sol de s'affranchir partiellement ou totalement de la turbulence atmosphérique sur un champ bien plus large que le domaine isoplanétique des optiques adaptatives conventionnelles. Le point commun des AO à large champ présentés ci-dessus est la nécessité de reconstruire le volume de turbulence, et donc de mesurer la turbulence dans plusieurs directions du champ. On présente dans le chapitre suivant les deux concepts d'analyse de front d'onde permettant cette opération. On discute ensuite plus largement de la problématique de l'analyse de front d'onde pour les optiques adaptatives à large champ.

Chapitre 4

Concepts d'analyse de front d'onde pour l'optique adaptative à large champ

Le point commun des optiques adaptatives à large champ est de nécessiter la connaissance du volume de turbulence. Ensuite, selon leurs objectifs, elles doivent permettre d'optimiser la correction dans quelques directions choisies (MOAO), d'obtenir la meilleure correction possible dans un champ de quelques arcmin (MCAO), ou bien d'améliorer uniformément le *seeing* dans un champ de quelques dizaines d'arcmin (GLAO). Le problème peut alors se décomposer en deux parties :

- Mesurer l'état de la turbulence dans le volume atmosphérique délimité par le champ d'intérêt. Deux concepts d'analyse de front d'onde ont été proposés pour accéder aux informations sur le volume. Ils sont présentés dans les sections 4.1 et 4.2. Ils diffèrent sur deux points fondamentaux : la sensibilité au bruit sur les mesures et la qualité de l'information sur le volume turbulent. Il est indispensable de caractériser leurs performances.
- Appliquer en conséquence la correction adéquate sur le(s) miroir(s) déformable(s). Cette étape inclut les aspects reconstruction et les aspects commande de miroir(s). Nous ne considérerons pas les problèmes de la commande ici. Nous nous limiterons à l'étude du problème de la reconstruction.

Dans un premier temps je présenterai les deux concepts d'analyse de front d'onde actuellement en cours d'évaluation : le *Star Oriented* et le *Layer Oriented*. Je mettrai ensuite en lumière la complexité de l'étude de la problématique de l'analyse front d'onde en MCAO et discuterai les choix qui ont été faits pour mener à bien cette étude.

4.1 Le concept *Star oriented*

4.1.1 Principe et mesures

Le concept *Star Oriented* a été proposé dès la fin des années 80 [Beckers 1988] comme la généralisation de l'AO classique. Son schéma de principe est présenté Fig. (4.1). Dans ce concept, la phase turbulente est mesurée indépendamment dans plusieurs directions du champ. Ces mesures sont ensuite utilisées pour calculer les phases à appliquer sur les miroirs déformables.

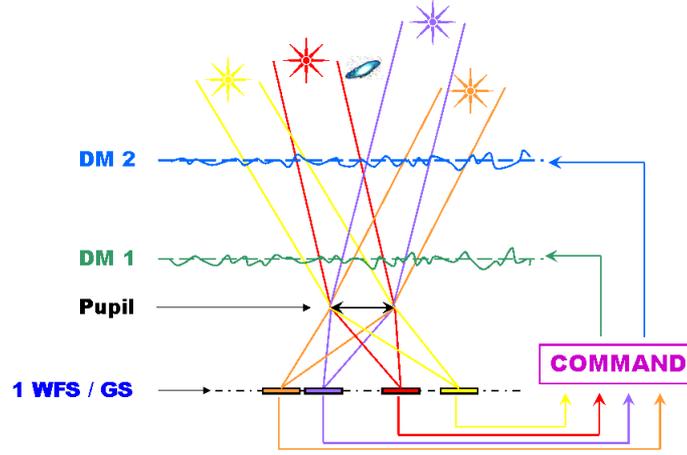


FIG. 4.1 – Le concept *Star Oriented* en MCAO : un WFS est conjugué optiquement à chaque étoile guide du champ.

Ce concept est dit *Star Oriented* car un senseur de front d'onde (WFS) est conjugué optiquement à chaque étoile guide. On obtient ainsi autant de mesures qu'il existe d'étoiles guides dans le champ, chacune étant dégradée, en particulier par les bruits de photons et de détecteur. Dans l'hypothèse où la réponse de l'analyseur de front d'onde est linéaire (cf. § 2.1.3), on mesure ainsi :

$$\left\{ \phi_k(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \varphi_{\ell}(\mathbf{r} - h_{\ell} \boldsymbol{\alpha}_k) + \mathcal{B}ruit_k(\mathbf{r}) \right\}_{k \in [1, \mathcal{K}_{*}]} \quad (4.1)$$

où \mathcal{K}_{*} est le nombre d'étoiles guides, les $\{\boldsymbol{\alpha}_k\}_{k \in [1, \mathcal{K}_{*}]}$ sont leurs directions, et $\mathcal{B}ruit_k(\mathbf{r})$ est la perturbation de phase due aux bruits de photons et de détecteur, dépendant du flux de la $k^{\text{ème}}$ étoile guide. Ainsi, ce concept est très sensible au rapport signal à bruit de chaque analyseur, si bien que le flux est un paramètre critique pour le choix des étoiles guides. Par ailleurs, on mesure à chaque fois l'intégrale de la phase le long du chemin optique correspondant à chaque étoile guide. Se pose alors le problème de la reconstruction du volume turbulent. Ce problème a déjà été traité par plusieurs auteurs (voir en particulier [Fusco 2000, Fusco et al. 2001]). Il est cependant intéressant de reprendre ici ce raisonnement car on le ré-utilisera à plusieurs reprises dans la suite de ce manuscrit, en particulier pour la reconstruction en Layer Oriented (§ 4.2) et pour l'optimisation des deux concepts d'analyse (Chap. 6).

4.1.2 Reconstruction

4.1.2.1 Objectif

A l'instar du problème de la reconstruction en AO classique (§ 2.2), la détermination d'un reconstruteur pour l'AO à large champ est nécessairement subordonnée à une recherche de performance du système. Dans tous les cas (MCAO, MOAO ou GLAO), l'objectif est de corriger la turbulence le mieux possible sur un champ qui peut varier de quelques minutes d'arc (MCAO) à quelques dizaines de minutes d'arc (GLAO). Notons que le cas de la MOAO est un peu particulier car le champ corrigé par une unité de correction du système est faible (quelques secondes d'arc).

Néanmoins plusieurs de ces points de corrections sont répartis sur un très large champ (25 arcmin pour FALCON), si bien que globalement le système de MOAO requiert une connaissance correcte du volume de turbulence sur la totalité du champ scientifique.

Du point de vue de l'imagerie, on a vu que le critère d'intérêt pour quantifier la performance d'une AO classique est le rapport de Strehl, ou de façon équivalente la variance de la phase corrigée (cf. 1.4). Ces grandeurs gardent tout leur sens en AO à large champ, à ceci près l'on s'intéresse à leurs valeurs *en tout point du champ d'intérêt scientifique*. Dans la perspective de la recherche d'un critère réduit, on peut donc considérer *les valeurs moyennes dans le champ* du rapport de Strehl et de la variance de la phase corrigée.

Comme pour l'étude de la reconstruction en AO classique (§ 2.2), on envisage ici la reconstruction en boucle ouverte, dans laquelle les analyseurs de fronts d'onde voient la turbulence non corrigée. La variance de la phase résiduelle dans une direction α du champ s'écrit :

$$\sigma_{res}^2(\alpha) = \frac{1}{S_{PUP}} \iint_{S_{PUP}} \left\langle \|\Phi(\rho, \alpha) - \Phi_{corr}(\rho, \alpha)\|^2 \right\rangle_{time} d\rho \quad (4.2)$$

où $\Phi(\rho, \alpha)$ est la phase turbulente vraie au point ρ de la pupille d'entrée du télescope, affectant la direction α du champ et $\Phi_{corr}(\rho, \alpha)$ est la phase appliquée en correction par le(s) miroir(s) déformable(s), vue depuis la pupille du télescope et pour la direction α du champ. Notons que dans ce travail et dans toute la suite de ce manuscrit, on supposera que le(s) miroir(s) déformable(s) sont capables de reproduire exactement tous les modes corrigés. On cherche à minimiser la moyenne sur le champ corrigé de cette variance de phase résiduelle :

$$\langle \sigma_{res}^2(\alpha) \rangle_{\alpha} = \frac{1}{S_{FOV}} \frac{1}{S_{PUP}} \iint_{S_{FOV}} \iint_{S_{PUP}} \left\langle \|\Phi(\rho, \alpha) - \Phi_{corr}(\rho, \alpha)\|^2 \right\rangle_{time} d\rho d\alpha$$

On utilisera dans la suite la notation suivante qui, bien qu'abusive, a le mérite d'être compacte :

$$\langle \sigma_{res}^2(\alpha) \rangle_{\alpha} = \left\langle \left\langle \|\Phi(\rho, \alpha) - \Phi_{corr}(\rho, \alpha)\|^2 \right\rangle_{time, \rho} \right\rangle_{\alpha} \quad (4.3)$$

L'objectif est de trouver le reconstruteur qui, à partir des mesures réalisées dans les directions d'analyse (cf. eq. 4.1), permet de reconstruire la phase $\Phi_{corr}(\rho, \alpha)$ la plus proche possible de $\Phi(\rho, \alpha)$.

4.1.2.2 Reconstruction optimale

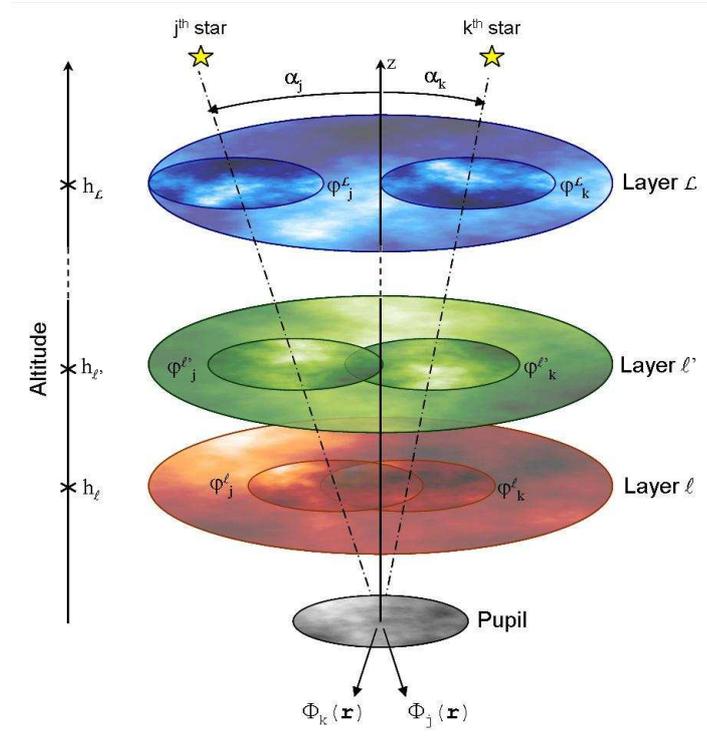


FIG. 4.2 – Analyse multi-source de la turbulence atmosphérique. La mesure de la phase dans la pupille dans différentes directions donne des informations sur la répartition de la turbulence en altitude. La difficulté est de reconstruire le volume de turbulence et de déterminer la ou les phase(s) de corrections à appliquer sur le(s) DM(s).

Nous allons dans un premier temps expliciter les différents termes de l'équation (4.3), afin de préciser la définition des quantités manipulées et de faire apparaître le reconstructeur. Dans l'équation (4.3), $\Phi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha})$ est la somme des contributions des différentes couches turbulentes (cf. Fig. 4.2) :

$$\Phi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \varphi_{\ell}(\boldsymbol{\rho} + h_{\ell} \boldsymbol{\alpha}) \quad (4.4)$$

$\Phi_{corr}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha})$ quant à elle est la somme des corrections de phase à introduire pas le biais les miroirs déformables :

$$\Phi_{corr}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{d=1}^{N_{DM}} \hat{\varphi}_d(\boldsymbol{\rho} + h_d \boldsymbol{\alpha}) \quad (4.5)$$

En fait, comme nous l'avons vu au paragraphe (2.2) pour l'AO, on ne peut estimer que la décomposition de $\Phi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha})$ sur un nombre fini de modes spatiaux. Si on se restreint aux P_{max} premiers modes, on peut exprimer $\Phi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha})$ et $\Phi_{corr}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha})$ sous forme vectorielle :

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\varphi} \quad (4.6)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{corr} = \mathbf{P}_{DM\boldsymbol{\alpha}} \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{DM} \quad (4.7)$$

Avec :

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} a_1(\boldsymbol{\alpha}) \\ \vdots \\ a_{P_{max}}(\boldsymbol{\alpha}) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Vecteur des coefficients de projection de } \Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\alpha}) \\ \text{sur la base des modes spatiaux} \end{array}$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} [a_p^{\ell=1}]_{p=1}^{P_{max}} \\ \vdots \\ [a_p^{\ell=L}]_{p=1}^{P_{max}} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Vecteur des coefficients des phases dans les couches} \\ \text{turbulentes} \end{array}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{DM} = \begin{pmatrix} [a_p^{d=1}]_{p=1}^{P_{max}} \\ \vdots \\ [a_p^{d=N_{DM}}]_{p=1}^{P_{max}} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Vecteur des coefficients des phases estimées sur} \\ \text{les DMs} \end{array}$$

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha}} \quad \begin{array}{l} \text{Opérateur de projection de la phase des couches} \\ \text{turbulentes dans la pupille} \end{array}$$

$$\mathbf{P}_{DM\boldsymbol{\alpha}} \quad \begin{array}{l} \text{Opérateur de projection de la phase des DMs} \\ \text{dans la pupille} \end{array}$$

Notons que dans $\boldsymbol{\varphi}$ et $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{DM}$, les modes de Zernike sont définis à chaque altitude de chaque couche ou miroir sur la métapupille définie par l'intersection du champ corrigé avec le plan orthonormal à l'axe optique et situé à l'altitude considérée. Ainsi, à une altitude h donnée, le diamètre de la métapupille est donnée par : $D_{metapup}(h) \simeq D_{pup} + h \cdot \theta_{FOV}$. Les modes de Zernike représentant la turbulence d'altitude étant définis sur une pupille de diamètre supérieur à la pupille d'entrée du télescope, il est nécessaire de mettre à l'échelle le nombre de modes à prendre en compte en fonction de l'altitude pour conserver une couverture fréquentielle identique sur la totalité du volume de turbulence : dans l'expression de $\boldsymbol{\varphi}$ ci-dessus, le nombre P_{max} de modes considérés pour chaque couche ℓ doit croître en h_ℓ^2 . Toutefois, par soucis de simplicité nous avons occulté cet aspect du problème dans les développements suivants : nous avons considéré un nombre P_{max} de modes de Zernike identique pour toutes les couches turbulentes et tous les miroirs déformables. Notons que cela n'enlève rien à la validité des raisonnements tenus ici. Par contre, il sera indispensable lors de la simulation numérique du problème de tenir compte de cette mise à l'échelle.

L'objectif de la reconstruction est donc, à partir des mesures $\{\phi_k\}_{k \in [1, \mathcal{K}_*]}$ définies Eq. (4.1), d'estimer au mieux les $\hat{\varphi}_{DM}$ afin de minimiser :

$$\langle \sigma_{res}^2(\alpha) \rangle_{\alpha} = \left\langle \left\langle \left\| \mathbf{P}\alpha\varphi - \mathbf{P}_{DM}\alpha\hat{\varphi}_{DM} \right\|^2 \right\rangle_{time, \rho} \right\rangle_{\alpha} \quad (4.8)$$

On modélise l'analyse de front d'onde et la reconstruction en se restreignant dans les deux cas aux processus linéaires. Ainsi on peut écrire :

$$\text{Pour l'étape d'analyse de front d'onde : } \Phi_{mes} = \mathbf{P}_{GS}\varphi + \mathcal{B} \quad (4.9)$$

$$\text{Pour l'étape de reconstruction : } \hat{\varphi}_{DM} = \mathbf{W}\Phi_{mes} \quad (4.10)$$

Avec :

$$\Phi_{mes} = \begin{pmatrix} [a_p(\alpha_1)]_{p=1}^{P_{max}} \\ \vdots \\ [a_p(\alpha_{\mathcal{K}_*})]_{p=1}^{P_{max}} \end{pmatrix} \quad \text{Vecteur des coefficients des phases mesurées dans la pupille dans les directions d'analyse ;}$$

$$\mathbf{P}_{GS} = \left(\mathbf{P}_{\alpha_1} \cdots \mathbf{P}_{\alpha_{\mathcal{K}_*}} \right) \quad \text{Opérateur de projection des phases des couches d'altitude dans la pupille, suivant les directions d'analyse ;} \quad (4.11)$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{B}_{\mathcal{K}_*} \end{pmatrix} \quad \text{Vecteur des coefficients du bruit propagé sur les modes mesurés.}$$

$$\mathbf{W} \quad \text{Reconstructeur}$$

L'équation (4.8) s'écrit finalement :

$$\langle \sigma_{res}^2(\alpha) \rangle_{\alpha} = \left\langle \left\langle \left\| \mathbf{P}\alpha\varphi - \mathbf{P}_{DM}\alpha\mathbf{W}(\mathbf{P}_{GS}\varphi + \mathcal{B}) \right\|^2 \right\rangle_{time, \rho} \right\rangle_{\alpha} \quad (4.12)$$

Il suffit de rechercher le minimum de cette expression par rapport à \mathbf{W} pour obtenir le reconstructeur optimal. On obtient [Fusco 2000] :

$$\mathbf{W} = \left(\left\langle \mathbf{P}_{DM}^t \alpha \mathbf{P}_{DM} \alpha \right\rangle_{\alpha} \right)^{\dagger} \left\langle \mathbf{P}_{DM}^t \alpha \mathbf{P} \alpha \right\rangle_{\alpha} \mathbf{C}_{\varphi} \mathbf{P}_{GS}^t (\mathbf{P}_{GS} \mathbf{C}_{\varphi} \mathbf{P}_{GS}^t + \mathbf{C}_b)^{-1} \quad (4.13)$$

Dans cette expression :

- \mathbf{C}_φ est la matrice de covariance des phases dans les couches turbulentes. C'est une matrice carrée, diagonale par blocs, chaque bloc étant la matrice de covariance des modes de Zernike de la phase dans une couche d'indice ℓ . \mathbf{C}_φ est donc de la forme :

$$\mathbf{C}_\varphi = \begin{pmatrix} [\mathbf{C}_{\varphi_1}] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [\mathbf{C}_{\varphi_2}] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & [\mathbf{C}_{\varphi_L}] \end{pmatrix}, \text{ Avec : } \mathbf{C}_{\varphi_\ell} = \left[\left\langle a_i^\ell \cdot a_j^\ell \right\rangle \right]_{(i,j)=1}^{P_{max}}$$

- \mathbf{C}_b est la matrice de covariance de bruit des mesures (dimensions $\mathcal{K}_* P_{max} \times \mathcal{K}_* P_{max}$). Si les mesures sont réalisées indépendamment, c'est une matrice diagonale.
- \mathbf{P}_{GS} est l'opérateur de projection des phases des couches turbulentes dans la pupille, défini par l'équation (4.11).

D'après l'équation (4.13), le reconstituteur optimal en *Star Oriented* est le produit de deux opérateurs :

1. Un reconstituteur tomographique \mathbf{W}_{tomo} , correspondant à une étape de reconstruction des phases dans les couches d'altitude : $\{\hat{\varphi}_\ell\}_{\ell \in [1, L]}$. Ce reconstituteur s'exprime :

$$\mathbf{W}_{tomo} = (\mathbf{P}_{GS}^t \mathbf{C}_b^{-1} \mathbf{P}_{GS} + \mathbf{C}_\varphi^{-1})^{-1} \mathbf{P}_{GS}^t \mathbf{C}_b^{-1} \quad (4.14)$$

\Leftrightarrow

$$\mathbf{W}_{tomo} = \mathbf{C}_\varphi \mathbf{P}_{GS}^t (\mathbf{P}_{GS} \mathbf{C}_\varphi \mathbf{P}_{GS}^t + \mathbf{C}_b)^{-1} \quad (4.15)$$

\mathbf{W}_{tomo} dépend de la configuration des étoiles guides par l'intermédiaire du projecteur \mathbf{P}_{GS} , de leur flux et de la sensibilité au bruit des senseurs de front d'onde via la matrice de covariance de bruit \mathbf{C}_b , et du profil de turbulence via \mathbf{C}_φ . Il réalise le compromis optimal entre l'information sur le volume turbulent récupérée lors des mesures et le bruit propagé. Si l'on a autant de DMs que de couches turbulentes, il garantit une performance moyenne dans le champ maximale. Il suffit d'appliquer directement les $\hat{\varphi}$ sur les DMs.

2. Un opérateur de projection de l'estimée du volume turbulent sur le ou les miroir(s) déformable(s) :

$$\mathcal{P} = \left(\left\langle \mathbf{P}_{DM\alpha}^t \mathbf{P}_{DM\alpha} \right\rangle_\alpha \right)^\dagger \left\langle \mathbf{P}_{DM\alpha}^t \mathbf{P}_\alpha \right\rangle_\alpha \quad (4.16)$$

Cet opérateur est lui indépendant du profil de turbulence et des caractéristiques des étoiles guides ou des senseurs de front d'onde. Il ne dépend que de la direction d'imagerie et des altitudes de conjugaison de(s) DM(s).

4.1.2.3 Conséquences pour l'analyse de front d'onde en *Star Oriented*

La subdivision du reconstituteur optimal pour le SO en deux opérateurs permet de mieux discerner les attentes en performances pour ce concept. En effet, seul l'opérateur de reconstruction tomographique du volume turbulent subit l'influence de la performance de l'analyse du front d'onde. C'est donc cette partie du problème précisément qui doit servir de cadre à l'évaluation de performance du concept d'analyse.

4.2 Le concept *Layer oriented*

4.2.1 Principe et Mesure

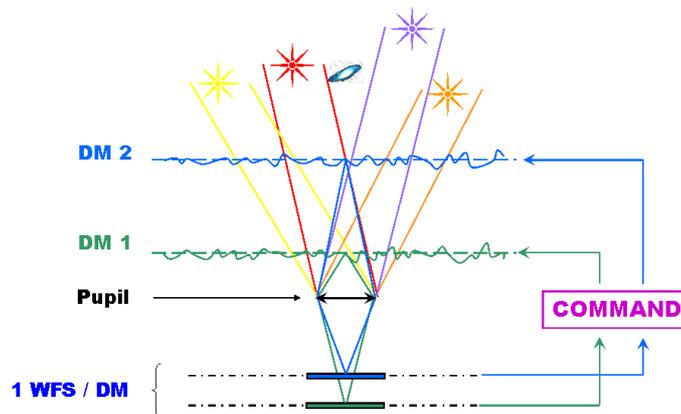


FIG. 4.3 – Le concept *Layer Oriented*, dans lequel un WFS est associé à chaque miroir déformable.

Le concept *Layer Oriented* a été proposé vers la fin des années 90 [Ragazzoni 1999] comme une solution possible au problème de limitant les performances du SO et au problème de la complexité de la reconstruction. Son schéma de principe est présenté Fig. (4.3).

La simplification du problème de la reconstruction vient du fait qu'initialement, le concept *Layer Oriented* a été conçu comme une superposition de boucles d'AO simple, chacune étant conjuguée à une couche à corriger [Ragazzoni et al. 2002]. On peut ainsi commander chaque miroir déformable de façon indépendante, et le volume total d'information à gérer croît linéairement avec le nombre de couches à corriger, au lieu de croître avec le nombre d'étoiles guides.

De plus, afin de limiter la sensibilité au bruit, l'idée est ici d'utiliser collectivement le flux de toutes les étoiles guides disponibles dans le champ pour illuminer les senseurs de front d'onde. Au lieu d'être réparti entre les différentes directions d'analyse (i.e. typiquement 4 à 8 WFS), le flux total disponible est réparti entre les altitudes de correction (i.e. 1 à 3 WFS). On réalise un gain notable sur la sensibilité au bruit de l'ensemble [Ragazzoni 1999, Ragazzoni et al. 2002, Bello et al. 2003]. De plus, l'indépendance des boucles les unes par rapport aux autres permet d'adapter la répartition du flux et les paramètres d'acquisition dans chaque voie d'analyse aux caractéristiques de chaque couche (force de la turbulence, temps de corrélation)[Ragazzoni et al. 2002].

Cependant l'utilisation collective des informations provenant des différentes directions du champ pose problème. En effet, dans la pratique, on co-additionne les flux des étoiles guides avant de répartir le flux total entre les différents senseurs de front d'ondes. Or le processus physique de mesure des déformations du front d'onde code les informations sur la phase en terme d'intensité lumineuse (cf. § 2.1.2.3). Pour un concept tel que le *Layer Oriented*, cela signifie que les régions des écrans turbulents illuminées par les étoiles guides les plus brillantes seront mieux vues par l'analyse de front d'onde que celles qui correspondent aux étoiles les plus faibles (cf. fig. 4.4 - b). De plus, certaines régions des couches de basse altitude sont illuminées par plusieurs étoiles guides, auquel cas le flux total

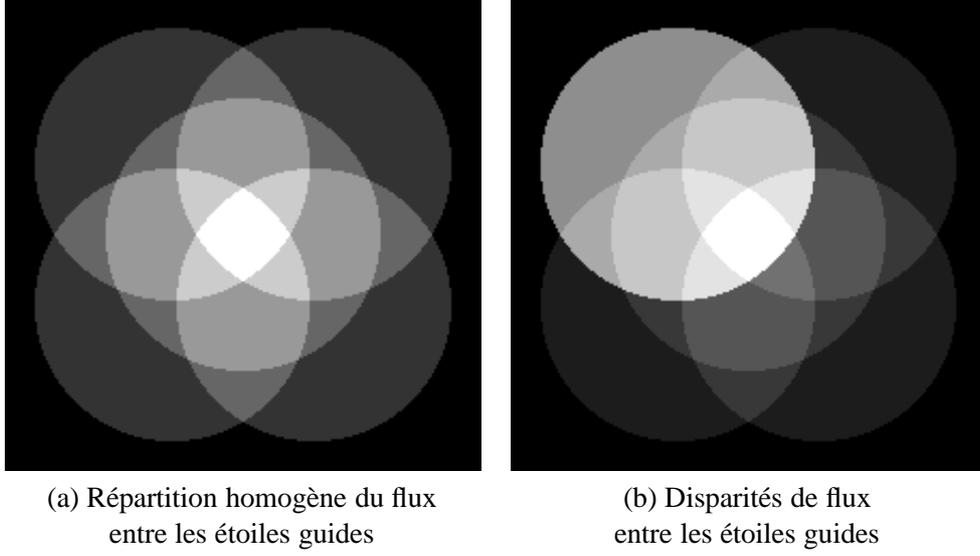


FIG. 4.4 – Empreintes de la pupille du télescope dans les directions des étoiles guides sur une couche d'altitude.

des étoiles co-illuminant la région importe(cf. fig. 4.4 - a). Finalement, la phase mesurée par chaque analyseur est beaucoup plus complexe que dans le cas du *Star Oriented* [Fusco et al. 2006]. On mesure en effet $\{\phi_n(\mathbf{r})\}_{n \in [1, N_{DM}]}$ pour chaque DM, avec :

$$\phi_d(\mathbf{r}) = \frac{\sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \bar{N}_k \mathcal{P}(\mathbf{r} - h_d \boldsymbol{\alpha}_k) \times \left[\sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \varphi_\ell(\mathbf{r} - (h_\ell - h_d) \boldsymbol{\alpha}_k) \right]}{\sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \bar{N}_k \mathcal{P}(\mathbf{r} - h_d \boldsymbol{\alpha}_k)} + \mathcal{Bruit} \left(\lambda_d \times \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \bar{N}_k \mathcal{P}(\mathbf{r} - h_d \boldsymbol{\alpha}_k) \right) \quad (4.17)$$

Dans cette expression, on retrouve l'effet pondérateur du flux des étoiles guides (\bar{N}_k). La fonction $\mathcal{P}(\mathbf{r} - h_d \boldsymbol{\alpha}_k)$ est la fonction pupille du télescope projetée à l'altitude de conjugaison du miroir déformable. Elle matérialise la région que chaque étoile guide permet d'illuminer à l'altitude de conjugaison du $d^{\text{ème}}$ miroir. Dans l'expression de la fonction de bruit, λ_d est la fraction du flux total collecté envoyée sur le $d^{\text{ème}}$ analyseur de front d'onde ($\sum_{d=1}^{N_{DM}} \lambda_d = 1$).

Ainsi, la phase que l'on mesure n'est pas exactement celle que l'on souhaite estimer mais un patchwork de cette phase, la connaissance des différentes régions étant fonction de la fraction du flux incident servant à les illuminer. De plus, les phases éclairées par les différentes étoiles guides sont recombinaées avant le processus de détection, conduisant à une perte d'information sur le volume turbulent. Le gain acquis sur la sensibilité au bruit et la complexité de la reconstruction se paie donc par une perte d'information sur la phase dans le volume turbulent.

4.2.2 Reconstruction

On ne s'intéresse ici qu'à la reconstruction en boucle ouverte. On développe dans un premier temps l'idée d'une reconstruction couche à couche, chaque phase étant reconstruite indépendamment

des autres. On traite ensuite de la reconstruction globale.

4.2.2.1 Reconstruction parallèle

Considérons pour commencer une unique couche turbulente, d'indice d , située à l'altitude h_d . Supposons qu'elle soit vue par un analyseur de front d'onde et corrigée par un DM. A l'instar de ce qui se passe en AO classique, la reconstruction est optimale quand on minimise la variance de la phase résiduelle dans la surface d'intérêt. La différence notable, c'est qu'ici la surface d'intérêt n'est pas la pupille du télescope, mais la méta-pupille à l'altitude de la couche, c'est-à-dire l'intersection de la couche et du champ d'intérêt. En appelant θ l'angle d'ouverture du champ d'intérêt (en radians), la fonction décrivant cette méta-pupille s'écrit :

$$\mathcal{P}_{\theta, h_d}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{\mathcal{S}_{\mathcal{P}_{\theta, h_d}}} & \text{si } \|\mathbf{r}\| \leq R_{pup} + h_d \theta \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Le critère d'intérêt est donc :

$$\sigma_{res_d}^2 = \frac{1}{\mathcal{S}_{\mathcal{P}_{\theta, h_d}}} \left\langle \iint_{\mathcal{S}_{\mathcal{P}_{\theta, h_d}}} \|\varphi(\boldsymbol{\rho}_d) - \hat{\varphi}(\boldsymbol{\rho}_d)\|^2 d\boldsymbol{\rho}_d \right\rangle_{time} \quad (4.18)$$

Comme en AO classique (cf. § 2.2), on détermine le reconstruteur optimal en émettant l'hypothèse de linéarité de la mesure et de la reconstruction. On suppose que l'analyseur de front d'onde permet directement d'accéder à une estimation des coefficients de Zernike de la phase. En utilisant la même écriture compacte que précédemment pour le SO et en remplaçant $\varphi(\boldsymbol{\rho}_d)$ par le vecteur de ses coefficients de Zernike $\boldsymbol{\varphi}_d$, Eq. (4.18) devient :

$$\sigma_{res_d}^2 = \left\langle \|\boldsymbol{\varphi}_d - \mathbf{W}_d \left(\mathbf{P}_{LO}^{h_d} \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{B} \right)\|^2 \right\rangle_{time} \quad (4.19)$$

où $\mathbf{P}_{LO}^{h_d}$ est tel que : $\mathbf{P}_{LO}^{h_d} \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{B} = \phi_d(\mathbf{r})$, ϕ_d étant donnée par l'équation (4.17). La minimisation de l'équation (4.19) permet alors d'exprimer le reconstruteur optimal :

$$\begin{aligned} \sigma_{res_d}^2 &= \left\langle Tr \left\{ \left(\boldsymbol{\varphi}_d - \mathbf{W}_d \left(\mathbf{P}_{LO}^{h_d} \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{B} \right) \right) \left(\boldsymbol{\varphi}_d - \mathbf{W}_d \left(\mathbf{P}_{LO}^{h_d} \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{B} \right) \right)^t \right\} \right\rangle_{time} \\ &= \sigma_{turb_d}^2 + Tr \left\{ \mathbf{W}_d \left(\mathbf{P}_{LO}^{h_d} \mathbf{C}_{\varphi\varphi} \left(\mathbf{P}_{LO}^{h_d} \right)^t + \mathbf{C}_b \right) \mathbf{W}_d^t - 2 \mathbf{W}_d \mathbf{P}_{LO}^{h_d} \mathbf{C}_{\varphi\varphi_d} \right\} \end{aligned}$$

où $\mathbf{C}_{\varphi\varphi}$ est la matrice appelée \mathbf{C}_{φ} dans le paragraphe (4.1.2) (eq. 4.1) et $\mathbf{C}_{\varphi\varphi_d} = \langle \boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi}_d^t \rangle_{time}$ est la matrice de covariance des coefficients de Zernike de la phase φ_d avec toutes les phases du volume turbulent. En vertu de l'indépendance statistique des couches turbulentes, $\mathbf{C}_{\varphi\varphi_d}$ s'écrit :

$$\mathbf{C}_{\varphi\varphi_d} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \left(\left\langle a_i^d a_j^d \right\rangle \right)_{(i,j)=1}^{P_{max}^d} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

En minimisant cette expression par rapport à \mathbf{W}_d , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{W}} (\sigma_{res_d}^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \mathbf{W}_d &= \mathbf{C}_{\varphi\varphi_d}^t \left(\mathbf{P}_{LO}^{h_d} \right)^t \left(\mathbf{P}_{LO}^{h_d} \mathbf{C}_{\varphi\varphi} \left(\mathbf{P}_{LO}^{h_d} \right)^t + \mathbf{C}_b \right)^{-1} \end{aligned}$$

Par sa structure en superposition de boucles d'AO conjuguées à différentes altitudes, le LO permet en théorie d'effectuer indépendamment la même opération pour toutes les altitudes de conjugaison. On peut toutefois s'interroger sur l'efficacité de la correction d'une telle architecture lorsque le nombre de miroirs déformables est inférieur au nombre de couches turbulentes. L'architecture parallèle peut alors rendre difficile la restitution du volume global de turbulence, d'autant plus que les couches turbulentes ne restent pas à altitude constante dans le temps. Dans ce cas, il faut envisager d'utiliser collectivement les phases mesurées aux différentes altitudes pour commander collectivement les miroirs déformables. Dans ce cas, le problème se rapproche du problème de la reconstruction tomographique pour le *Star Oriented*.

4.2.2.2 Reconstruction optimale

Si l'on souhaite utiliser l'ensemble des mesures pour reconstruire de façon optimale le volume turbulent, le problème revient, comme au paragraphe (4.1.2) pour le *Star Oriented*, à vouloir minimiser :

$$\langle \sigma_{res}^2(\boldsymbol{\alpha}) \rangle_{\boldsymbol{\alpha}} = \left\langle \left\langle \left\| \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \varphi_{\ell}(\boldsymbol{\rho} + h_{\ell} \boldsymbol{\alpha}) - \sum_{d=1}^{N_{DM}} \hat{\varphi}_d(\boldsymbol{\rho} + h_d \boldsymbol{\alpha}) \right\|^2 \right\rangle_{time, \mathcal{P}} \right\rangle_{FOV}$$

On remarque que la solution d'optimisation couche à couche proposée plus haut ne correspond à la reconstruction tomographique que dans le cas où on dispose d'autant de miroirs déformables qu'il existe de couches turbulentes. Sinon, le raisonnement à suivre est exactement le même que pour le *Star Oriented* :

- On exprime les phases mesurées par chaque WFS :

$$\forall d \in [1, N_{DM}] \phi_d = \left[\sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \frac{\bar{N}_k \mathcal{P}(\boldsymbol{\rho}_d - h_d \boldsymbol{\alpha}_k)}{\sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \bar{N}_k \mathcal{P}(\boldsymbol{\rho}_d - h_d \boldsymbol{\alpha}_k)} \times \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha}_k}^{h_d} \right] \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{B}_d = \mathbf{P}_{LO}^{h_d} \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{B}_d$$

- On exprime $\langle \sigma_{res}^2(\boldsymbol{\alpha}) \rangle_{\boldsymbol{\alpha}}$:

$$\langle \sigma_{res}^2(\boldsymbol{\alpha}) \rangle_{\boldsymbol{\alpha}} = \left\langle \left\| \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{P}_{DM\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{W} (\mathbf{P}_{LO} \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{B}) \right\|^2 \right\rangle_{time} \Big|_{\boldsymbol{\alpha}}$$

Où \mathbf{P}_{LO} est la concaténation des matrices $\mathbf{P}_{LO}^{h_d}$ de projection des phases issues des directions des étoiles guides dans les couches conjuguées aux miroirs déformables.

– D'après ce qu'on a vu avec le SO, il vient immédiatement :

$$W_{LO} = \left\langle P_{DM\alpha}^t P_{DM\alpha} \right\rangle_{\alpha}^{\dagger} \left\langle P_{DM\alpha}^t P_{\alpha} \right\rangle_{\alpha} C_{\varphi} P_{LO}^t (P_{LO} C_{\varphi} P_{LO}^t + C_b)^{-1}$$

La différence entre le reconstituteur optimal pour le SO et celui du LO tient en fait uniquement à la nature de la mesure (matérialisée par P_{GS} ou P_{LO} selon le concept) et au bruit (C_b). Ce qui est intéressant c'est que ces deux points n'apparaissent que dans la partie tomographique du reconstituteur. La partie projection ne dépend que de la direction d'imagerie et de l'altitude des miroirs déformables. On exploitera ce point dans la partie III de ce manuscrit.

4.3 Conclusion : le triple problème de la multi-analyse

L'analyse de front d'onde pour l'optique adaptative à large champ doit permettre d'accéder à la répartition volumique de la turbulence. Cela implique d'utiliser plusieurs directions d'analyse, et donc plusieurs étoiles guides du champ. Plus il y aura d'étoiles guides, meilleure sera la connaissance du volume de turbulence. Les problèmes commencent à ce moment là, car les étoiles brillantes sont rares dans le ciel. On comprend dès lors qu'il va falloir faire un compromis entre le nombre d'étoiles du champ choisies pour servir de guides à l'analyse de front d'onde et la détérioration de la mesure due à l'incorporation dans le processus de mesure d'étoiles de plus en plus faibles.

La problématique de l'analyse de front d'onde en MCAO s'organise finalement autour de trois pôles, fortement liés les uns aux autres :

- L'estimation du nombre d'étoiles pouvant servir de guides à l'AO : leur densité dans le ciel et l'évolution de cette densité selon les régions du ciel considérées. Cela permet de définir la couverture de ciel de l'instrument, qui donne la fraction du ciel où l'on pourra atteindre ses performances nominales.
- La caractérisation des concepts d'analyse de front d'onde *Star Oriented* et *Layer Oriented* : leur capacité à permettre une bonne reconstruction du volume turbulent, leur robustesse au bruit de mesure, mais aussi le nombre d'étoiles guides nécessaires pour atteindre une performance requise.
- La caractérisation et si besoin l'amélioration des performances des analyseurs de surface d'onde.

Ces trois pôles sont fortement interconnectés. Ainsi, l'utilisation d'un analyseur de front d'onde particulièrement performant à faible flux permettra d'utiliser des étoiles de magnitude plus élevée pour réaliser l'analyse de front d'onde, ce qui améliorera la couverture de ciel de l'instrument et/ou pourra être mis à profit pour affiner la reconstruction du volume turbulent.

L'étude de la problématique de l'analyse de front d'onde pour l'optique adaptative à large champ doit donc prendre en compte chacun de ces points. L'aspect fortement multivariable de cette étude peut la rendre redoutablement complexe. Il est cependant possible de décomposer le problème en plusieurs sous-items permettant d'étudier de façon assez simple chaque aspect. Nous commençons

dans la partie II par nous intéresser à la notion de couverture de ciel pour l'optique adaptative à large champ. On analysera dans la partie III la performance des deux concepts d'analyse de front d'onde proposés dans la littérature. Enfin, nous proposerons dans la partie IV une étude de performance de la mesure de front d'onde réalisée par l'analyseur de Shack-Hartmann.

Deuxième partie

Etude de la couverture de ciel pour une AO à large champ

Chapitre 5

Notion de couverture de ciel en AO à large champ

5.1 Position du problème

La notion de couverture de ciel est très importante pour la définition des instruments astronomiques, car elle permet de quantifier la fraction du ciel sur laquelle l'instrument pourra délivrer sa performance nominale. En optique adaptative classique (cf. chap. 2), cette caractérisation est relativement simple puisque le système d'optique adaptative est caractérisé par la magnitude limite des étoiles guides lui permettant d'atteindre ses performances. Dès lors, l'étude de couverture de ciel se limite à l'étude de la probabilité de trouver au moins une étoile de magnitude inférieure ou égale à la magnitude limite du système dans un champ donné.

Les choses sont plus compliquées lorsqu'on cherche à transposer cette notion à un système d'AO à large champ. En effet, la performance du système va dépendre à la fois du nombre d'étoiles guides disponibles pour l'analyse de front d'onde, de leur magnitude, mais aussi de la façon dont elles sont réparties dans le champ à corriger et du concept d'analyse de front d'onde considéré.

En effet, on a vu au chapitre 4 que dans le cas du *Star Oriented*, la mesure de phase est réalisée indépendamment dans chaque direction d'analyse, ce qui signifie que la magnitude de chaque étoile a une influence sur la performance globale du concept d'analyse. Pour le *Layer Oriented*, en revanche, la lumière de toutes les étoiles guides est co-additionnée avant d'être répartie entre les senseurs de front d'onde conjugués aux miroirs déformables. Dans ce cas, c'est la magnitude intégrée des étoiles et le nombre de senseurs de front d'onde à illuminer qui conditionnent la performance de chaque senseur et la performance globale de l'analyse. De plus, on a vu dans la section (4.2) que la performance d'un concept *Layer Oriented* est limitée par les écarts de magnitude entre les étoiles guides (cf. aussi § 6.3.1.2).

Enfin, la performance d'un système d'optique adaptative à large champ ne dépendra pas seulement du nombre d'étoiles guides et de leur magnitude, mais également de leur position dans le champ. Ce dernier point a un impact tout particulier pour des systèmes fonctionnant avec des étoiles guides naturelles.

Une étude de couverture de ciel pour une AO à large champ doit donc prendre en compte de nombreux éléments qui interagissent entre eux :

- Le nombre d'étoiles guides,
- Leur magnitude individuelle *ou* leur magnitude intégrée,
- Leur répartition dans le champ,
- Le concept d'analyse de front d'onde considéré,
- Le cas échéant, le nombre de miroirs déformables du système d'AO.

De plus, notons que la couverture de ciel dépend inévitablement de la direction du ciel dans laquelle on observe, les étoiles brillantes étant nettement moins nombreuses lorsqu'on regarde en direction des pôles galactiques qu'en direction de son plan équatorial. Une étude de couverture de ciel n'a donc de sens que si elle prend appui sur une description de la répartition des étoiles dans le ciel observé. Pour ce faire, on peut se baser soit sur des catalogues d'étoiles, soit sur un modèle statistique de la population galactique. Pour cette raison, on commencera ce chapitre en présentant brièvement le modèle de populations stellaires dont nous nous sommes servis ici. La troisième section est consacrée à la redéfinition de la notion de couverture de ciel pour l'AO à large champ, et la quatrième section de ce chapitre présente une étude de couverture de ciel pour le démonstrateur d'optique adaptative multiconjuguée MAD de l'observatoire austral européen (ESO) présentée dans l'article [Fusco et al. 2006].

5.2 Le modèle de populations stellaires de Besançon

Comme nous l'avons dit ci-dessus, une étude de couverture de ciel doit prendre appui sur une description de la répartition en nombre et en magnitude des étoiles susceptibles de servir de guide au système d'AO dans le ciel observable. Pour cela, on peut utiliser les catalogues issus des grandes campagnes d'observations astrométriques (Hipparcos [Perryman et al. 1997], 2MASS [Cutri et al. 2003]), mais cette méthode demande l'accès à un grand volume de données et peut se révéler fastidieuse. Nous avons choisi ici et dans toute la suite de cette thèse d'utiliser un modèle statistique de synthèse de populations stellaires : le modèle de Besançon [Robin et al. 2003].

Ce modèle permet de synthétiser le contenu de la Galaxie¹ à partir d'hypothèses physiques et d'un modèle d'évolution des populations stellaires. Il fournit le nombre moyen par degré carré d'étoiles de magnitude inférieure ou égale à une magnitude donnée, la loi de probabilité d'obtenir N étoiles de magnitude limite donnée étant Poissonnienne. A partir de ces données, on peut, comme le montre la figure 5.1, déduire le nombre moyen d'étoiles de magnitude donnée contenues dans un champ donné en fonction de la latitude galactique et synthétiser des champs d'étoiles.

Notons que d'autres modèles de statistiques de populations stellaires existent et sont utilisés. On pense en particulier au modèle de Bahcall et Soneira [Bahcall and Soneira 1980- 1984], très largement utilisé outre Atlantique. Les modèles de Bahcall et Besançon sont en fait peu différents, les deux ayant été recalés sur les résultats des dernières campagnes astrométriques. La principale

¹Notons que ce modèle n'est représentatif que de la population de la Voie Lactée, et ne rend pas compte des objets extra-galactiques. Ce point n'est cependant pas limitant pour les études suivantes, les objets extra-galactiques étant trop peu lumineux pour servir de guide aux systèmes d'AO.

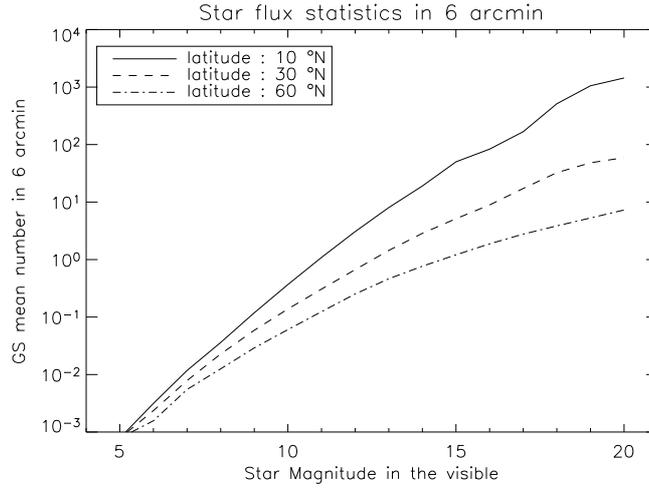


FIG. 5.1 – Nombre moyen d'étoiles en fonction de leur magnitude visible pour un champ de 6 arcmin et différentes latitudes galactiques. Données obtenues à partir du modèle de Besançon.

divergence de ces modèles réside dans l'estimation de la population des géantes rouges de faible luminosité : d'après Hutchings et al. [2002], le modèle de Bahcall surestime légèrement leur densité, tandis que le modèle de Besançon a plutôt tendance à la sous-estimer. On peut donc considérer que l'utilisation du modèle de Besançon mènera à une estimation légèrement pessimiste de la couverture de ciel d'un système d'AO. Toutefois, compte tenu de la faible luminosité des étoiles concernées, l'importance de ce point devrait rester marginale.

Nous avons donc utilisé le modèle de Besançon pour mener l'étude statistique de la couverture de ciel que nous présentons dans le paragraphe suivant, ainsi que les études de performances du *Star Oriented*, du *Layer Oriented* et du GLAO présentées dans la partie III.

5.3 Redéfinition de la notion de couverture de ciel pour l'optique adaptative à large champ

Comme nous l'avons dit ci-dessus, la couverture de ciel est définie pour l'optique adaptative classique comme la probabilité d'obtenir au moins une étoile de magnitude inférieure ou égale à la magnitude limite M_{lim} de l'instrument dans le champ technique de ce dernier (de rayon r , en arcsec). En supposant que la densité de probabilité des étoiles suit une loi Poissonnienne, on a [Le Louarn et al. 1998] :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{K}_* > 0}(M_{lim}, r) = 1 - e^{-\frac{\pi r^2}{3600^2} \nu(M_{lim})} \quad (5.1)$$

où $\nu(M_{lim})$ est la densité de probabilité des étoiles de magnitude inférieure à M_{lim} (par degré carré), pour une latitude galactique donnée.

Pour l'analyse à large champ, on peut généraliser cette définition en exprimant la probabilité de trouver au moins X étoiles de magnitude inférieure à M_{lim} :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{K}_* \geq X}(M_{lim}, r) = 1 - \sum_{i=0}^X \mathcal{P}_{\mathcal{K}_* = X-i}(m, r) \quad (5.2)$$

Dans la pratique, on peut alors définir la couverture de ciel du système d'AO à large champ en effectuant une étude statistique sur un grand nombre de tirages de champs d'étoiles représentatifs de la population galactique (le modèle de Besançon, par exemple) et en comptant le nombre de champs stellaires pour lesquels la condition sur le nombre d'étoiles est remplie [Marchetti et al. 2003]. On a alors :

$$SC = \langle \eta \rangle, \quad \eta = \begin{cases} 0 & \text{si le nombre requis d'étoiles de magnitude } \leq M_{lim} \text{ n'est pas atteint} \\ 1 & \text{si le nombre requis d'étoiles de magnitude } \leq M_{lim} \text{ est atteint} \end{cases} \quad (5.3)$$

Le problème est que cette définition suppose implicitement que le système fournit des performances nominales *sur la totalité du champ scientifique* dès que le nombre d'étoiles guides requis est atteint. Or, lorsque le nombre d'étoiles guides est faible, leur répartition dans le champ peut ne pas permettre de couvrir la totalité du champ d'intérêt scientifique. Pour prendre ce phénomène en compte, nous avons été amenés à définir quatre champs différents pour l'analyse de front d'onde en MCAO (voir fig. 3 de l'article présenté ci-après, p. 91) :

- Le champ technique, dans lequel l'analyse de front d'onde recherche les étoiles guides.
- Le champ scientifique, dans lequel l'objectif de performance doit être atteint.
- Le champ observable, qui est le champ dans lequel les étoiles guides permettent d'atteindre l'objectif de performance.
- Et finalement le plus important : le champ corrigé, qui est l'intersection du champ scientifique et du champ observable.

Notons que la définition du champ observable peut poser problème. Nous avons choisi pour l'étude présenté dans [Fusco et al. 2006] de supposer que le système d'AO est dimensionné de sorte que ses capacités d'interpolation de la turbulence permettent d'atteindre la performance requise sur la totalité de la surface du polygone défini par les étoiles guides. Le champ ainsi défini par les étoiles guides est ensuite convolué par l'angle isoplanétique classique.

On peut alors redéfinir la notion de couverture de ciel en optique adaptative à large champ, en corrigeant la définition conventionnelle de la couverture de ciel par un facteur égal à la fraction du champ scientifique effectivement corrigée par le système :

$$SC = \langle \mu \cdot \eta \rangle, \quad \mu = \frac{\mathcal{S}_{FOV_{cor}}}{\mathcal{S}_{FOC_{sci}}} \quad (5.4)$$

où η est défini par l'équation (5.3), $\mathcal{S}_{FOV_{cor}}$ est la surface du champ corrigé et $\mathcal{S}_{FOC_{sci}}$ est celle du champ d'intérêt scientifique. le coefficient μ est donc compris entre 0 et 1 et renseigne sur la performance effectivement atteinte par le système pour une configuration d'étoiles donnée.

Sur la base de cette nouvelle définition, l'article [Fusco et al. 2006] présente une étude de couverture de ciel pour les modes *Star Oriented* et *Layer Oriented* du démonstrateur d'optique adaptative multi-conjuguée MAD de l'observatoire austral européen (ESO).

5.4 Etude de couverture de ciel pour MAD

Cette étude est présentée dans l'article [Fusco et al. 2006], reproduit dans les pages suivantes de ce chapitre. Elle s'appuie sur la redéfinition de la notion de couverture de ciel pour l'optique adaptative à large champ présentée au paragraphe précédent. Cette nouvelle définition est utilisée pour caractériser les modes *Star Oriented* et *Layer Oriented* de MAD. Il est en effet important de distinguer ces deux concepts d'analyse de front d'onde car pour le *Star Oriented*, la magnitude de chaque étoile importe, les mesures étant faites indépendamment dans chaque direction d'analyse (cf. § 4.1), tandis que dans le cas du *Layer Oriented*, c'est la magnitude intégrée, correspondant au flux total de toutes les étoiles guides qui importe (cf. § 4.2). De plus, on montre plus loin (cf. § 6.3.1.2, [Nicolle et al. 2006]) que la performance d'un concept *Layer Oriented* est également limitée par les écarts de magnitude entre les étoiles guides.

L'étude de couverture de ciel présenté dans [Fusco et al. 2006] montre, comme on pouvait s'y attendre, que la définition de la couverture de ciel retenue jusqu'alors est optimiste au regard des performances du système d'AO. Elle souligne également l'importance de l'effet de la géométrie des étoiles guide dans le champ sur la performance du système. Enfin, l'algorithme de recherche des configuration d'étoiles utilisé pour cette couverture de ciel permet, pour le *Layer Oriented*, de contraindre le choix des étoiles guides en fonction d'un écart de magnitude toléré. On montre alors que cette contrainte supplémentaire a un impact important sur la couverture de ciel du système. Toutefois, on soulignera plus loin que cette contrainte peut être en partie relaxée en envisageant la possibilité d'atténuer optiquement les étoiles guides les plus brillantes en plaçant des densités sur les chemins optiques correspondants (cf. § 6.3.1.2, [Nicolle et al. 2006]).

Sky coverage estimation for multiconjugate adaptive optics systems: strategies and results

T. Fusco,^{1*} A. Blanc,^{1,2} M. Nicolle,¹ J.-L. Beuzit,² V. Michau,¹ G. Rousset¹
and N. Hubin³

¹ONERA/Département d'Optique Théorique et Appliquée, BP 72, F-92322 Châtillon Cedex, France

²Laboratoire d'Astrophysique de l'Observatoire de Grenoble, BP 53, F-38041 Grenoble Cedex 9, France

³European Southern Observatory, Karl-Schwarzschild-Straße 2, D-85748 Garching, Germany

Accepted 2006 April 13. Received 2006 April 12; in original form 2006 February 9

ABSTRACT

We propose an improvement of the sky coverage estimation for multiconjugate adaptive optics (MCAO) systems. A new algorithm is presented which allows us to account for the real corrected field-of-view surface corrected by an MCAO system [depending on guide star (GS) positions and system characteristics] as well as the type of strategy (star-oriented or layer-oriented) considered for the wavefront sensing. An application to the European Southern Observatory MCAO demonstrator (MAD) system is considered. In the context of this particular application, the importance of parameters such as the GS geometry, the generalized isoplanatic angle and the magnitude difference between GSs is highlighted.

Key words: instrumentation: adaptive optics – techniques: high angular resolution.

1 INTRODUCTION

Adaptive optics (AO) is a powerful technique to correct for the degradation induced by atmospheric turbulence and to reach the diffraction limit of large ground-based telescopes. Because of anisoplanatic effects, the correction is efficient only in a limited field of view (FoV) around the wavefront sensor (WFS) guide star (GS). These effects originate from the fact that the turbulence is distributed in the volume above the telescope. Then, wavefronts from different directions in the sky have different aberrations. For typical atmospheric conditions and at near-infrared wavelengths, the isoplanatic domain is only a few tens of arcseconds (Fried 1982). In addition, AO systems need to have relatively bright GSs [typically lower than magnitude 16–17 (see Rousset et al. 2002)] to produce a significant correction. The combination of these two points dramatically limits the portion of the sky accessible with classical AO. In order to extend the FoV, a modification of the classical AO is required, leading to the concept of multiconjugate AO (MCAO) (Dicke 1975; Beckers 1988; Ellerbroek & Rigaut 2000). Using a GS asterism to measure the wavefront in several directions in the FoV and several deformable mirrors (DMs) conjugated at different selected altitudes allows the MCAO system to correct for turbulence over a field larger than the isoplanatic patch.

When the GSs are natural ones, a key point of AO is related to the part of the sky accessible for a given system performance. This is provided by a global sky coverage study. Classically, sky coverage provides the fraction of the sky that contains stars meeting given

conditions on their fluxes in order to achieve a given system performance. The generalization to MCAO implies being able to account for the number, magnitude and magnitude difference of the natural GSs (NGSs). Several algorithms have been proposed to deal with all these parameters (Le Louarn et al. 1998; Marchetti, Raggazzoni & Diolaiti 2002). Nevertheless, they do not take into account the relative positions of the stars in the FoV; yet, this parameter is essential to quantify the final performance of a MCAO system (Fusco et al. 2000). We propose in this article an extension of the ‘classical’ notion of sky coverage (Le Louarn et al. 1998) for MCAO by introducing additional parameters in the sky coverage algorithm. These parameters are related to the observing conditions [GS geometry and magnitude difference between GSs (Raggazzoni et al. 2002), isoplanatic angle] and to the system itself (WFS concept).

The article is structured as follows. We first recall, in Section 2, the different approaches already proposed for sky coverage in MCAO. In Section 3, the wavefront sensing and the reconstruction concepts in MCAO are briefly described. We particularly highlight the difference between star- and layer-oriented concepts. In Sections 4 & 5, definitions and descriptions are proposed for the various types of FoV that must be considered in a MCAO system and which are mandatory for an accurate sky coverage estimation. In Section 6 a description of our new approach for sky coverage computation in MCAO is proposed. Improvements with respect to existing algorithms are highlighted. All of these points are gathered in a new sky coverage algorithm called ‘surface sky coverage’ (SSC). This new algorithm uses, as a basic input, a statistical model of the stellar population, called the Besançon model [see Robin et al. (2003) for more details] which is described in Section 6.4. Finally, examples of application are proposed in Section 7 for the MCAO demonstrator

*E-mail: thierry.fusco@onera.fr

(MAD) developed at the European Southern Observatory (ESO). It allows us to compare classical sky coverage estimation with our new approach and to highlight all the possibilities of the new sky coverage algorithm.

2 SKY COVERAGE IN MCAO

The notion of sky coverage is rather simple for classical AO. Indeed, in this case, the system performance can be directly related to the GS magnitude and its separation from the object of interest (for given atmospheric conditions). The AO sky coverage is therefore nothing but a simple count of GSs in a given sky region. Its value is given by the number of GSs (of magnitude lower than a given limit) multiplied by the isoplanatic angle over the global size of the sky region. Unfortunately, the generalization to MCAO systems is not obvious. Instead of one single parameter, the final system performance is given by a combination of multiple factors in interaction.

Two different kinds of studies can be performed to derive sky coverage information from MCAO design and performance requirements.

The first one, which is considered in this article, consists of a high-level study and, in fact, a generalization of the classical AO sky coverage estimation. The goal of our approach is rapidly to derive a first estimation of the sky coverage related to a given MCAO concept and WFS scheme. The idea here is to link the MCAO global performance to physical information on guide stars (number, magnitudes and positions) and on the system (diameter, FoV, WFS approaches and WFS devices). A first system analysis allows observational constraints to be determined (magnitude ranges, number of GSs, maximum distance between GSs, maximum magnitude difference between GSs) as a function of system characteristics (FoV, telescope diameter, system throughput, reconstruction approaches, WFS device, number of corrected modes . . .) and expected performance (correction level and uniformity in the FoV). It is clear that such a kind of approach will only give tendencies, but it is essential to explore a large domain of parameters and rapidly to obtain tendencies on general behaviours as well as orders of magnitude for sky coverage (as a function of galactic position, for instance) for various

Sky coverage estimation for MCAO systems 175

kinds of MCAO systems. It allows us to obtain the first trade-offs concerning the system design and to adjust the scientific requirements. In particular, it may help us to select the systems for which laser guide stars are mandatory. It would also help us to provide first inputs for MCAO systems on future extremely large telescopes.

The second kind of study consists of a complete simulation of a given MCAO system for a large number of GS configurations obtained from real star fields or statistical models (Arcidiacono et al. 2004; Assemat 2004). This approach is complex and time-consuming (since a lot of simulations have to be performed to reach a good statistical convergence). Nevertheless, it allows us to account for complex system characteristics and provide accurate and exhaustive results. It has to be performed at a final stage of a system design in order to confirm and refine the global system performance and the system design.

These two approaches complement each other, and have to be considered at different stages of the study of a MCAO system. In any case, information is required on the stellar distribution in the sky (for various spectral bandwidths). This information can be provided by:

- (i) the direct use of real star fields given by cross-correlation of catalogues;
- (ii) a statistical approach which provides synthesized star fields.

In the following, we have adopted the statistical approach using the so-called Besançon model (Robin et al. 2003) which will be briefly presented in Section 6.4.

3 WAVEFRONT SENSING AND RECONSTRUCTION CONCEPTS IN MCAO

Wavefront sensing and reconstruction processes are two of the main issues of any MCAO system. Indeed, an accurate wavefront sensing concept is essential to obtain pertinent information on the turbulent volume for which the MCAO has to correct. In addition, these WFS measurements have to be coupled with an optimal reconstruction process (see Ellerbroek 1994; Fusco et al. 2001; Le Roux et al. 2004) in order to find the best command to apply on each DM.

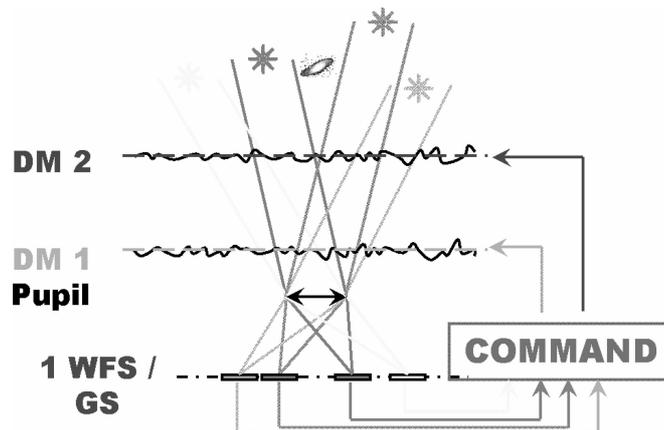


Figure 1. SO concept in MCAO. In this WFS concept, one WFS per GS is used and the measurements from all the sensors are combined to control several DMs.

176 *T. Fusco et al.*

Two approaches have been proposed so far to measure and correct for the turbulent volume in MCAO: the star-oriented (SO) and the layer-oriented (LO) schemes. They are briefly described below.

3.1 The SO concept

In the SO case (see Fig. 1) the wavefront $[\Phi_{SO}^{\alpha_k}(\mathbf{r})]$ is measured in each GS direction (α_k) by a dedicated WFS as shown in equation (1):

$$\{\Phi_{SO}^{\alpha_k}(\mathbf{r})\}_{k=1}^{\mathcal{K}_*} = \left\{ \sum_{l=1}^{n_l} \varphi_{true}^l(\mathbf{r} - \alpha_k h_l) + \text{Noise}(\bar{N}_k) \right\}_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \quad (1)$$

where φ_{true}^l represents the true turbulent wavefront in the layer l , \bar{N}_k is the flux per GS direction, \mathcal{K}_* is the number of GS directions, n_l is the number of turbulent layers used to estimate the turbulent volume and h_l is the altitude of the l th layer. \mathbf{r} stands for the pupil coordinates. The Noise (\cdot) function depends on the WFS characteristics.

The reconstruction process consists of the computation of the turbulent volume from the wavefronts measured in the GS directions followed by a projection on to the DMs in order to obtain the best correction for a specified field of interest [see Fusco et al. (2001) for a complete description]. Hence the quality of this process is directly related to the noisy data of each WFS, i.e. to the magnitude of each GS.

From a photometric point of view, the only constraint for the SO concept consists of a limiting magnitude (m_{lim} per GS). m_{lim} is defined as follows: considering a GS distribution in the technical FoV and a given set of system characteristics (sampling frequency, sub-aperture number, detector noise, transition...), the MCAO performance is achieved within the corrected FoV when all the GSs have a magnitude lower than or equal to m_{lim} .

3.2 The LO concept

In the LO case (see Fig. 2), the phase measurement is performed using one WFS per DM. The WFS device is optically conjugated to a given altitude h_j . In that case, the measured phase $[\varphi_{LO}^{WFS \text{ layer } j}(\mathbf{r})]$ is much more complex when compared with the SO case as shown

in equation (2):

$$\begin{aligned} & \left\{ \varphi_{LO}^{WFS \text{ layer } j}(\mathbf{r}) \right\}_{j=1}^{N_{WFS}} \\ &= \left\{ \frac{\sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} [\eta_k \bar{N}_k \sum_{l=1}^{n_l} \varphi_{true}^l(\mathbf{r} - \alpha_k(h_j - h_l))]}{\sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} [\eta_k \bar{N}_k \text{Pup}(\mathbf{r} - \alpha_k h_j)]} \right. \\ & \left. + \frac{\frac{1}{\gamma_j} \text{Noise}(\gamma_j \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \eta_k \bar{N}_k [\text{Pup}(\mathbf{r} - \alpha_k h_j)])}{\sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} [\eta_k \bar{N}_k \text{Pup}(\mathbf{r} - \alpha_k h_j)]} \right\}_{j=1}^{N_{WFS}} \quad (2) \end{aligned}$$

where Pup stands for the pupil function, and γ_j represents the flux separation between the WFS ($\sum_{j=1}^{N_{WFS}} \gamma_j = 1$) and η_k the optical attenuation in each GS direction before the flux co-addition on to the WFS. The main interest of such an approach is the light co-addition before the detection, which increases the signal-to-noise ratio per WFS especially when noisy CCDs are considered (Bello et al. 2003). There is no reconstruction process needed in that case since the measured phase $\varphi_{LO}^{WFS \text{ layer } j}(\mathbf{r})$ can be used to control the DMs directly. Nevertheless, this co-addition has a drawback, the wavefronts coming from different directions in the FoV being mixed and weighted by the GS flux [leading to an information loss and a possible phase estimation problem (Bello et al. 2003; Nicolle et al. 2006)]. As shown in equation (2), the wavefronts coming from the brighter stars are dominant in the phase measurement process. A way to deal with GS flux differences is optically to attenuate the flux of the brighter stars before the detection [η_k coefficients in equation (2), see Nicolle et al. (2006)]. From a photometric point of view, the relevant parameters in the LO case are the integrated flux over all the GSs, the magnitude difference between GSs and the values of the attenuation coefficients η_k ($0 \leq \eta_k \leq 1$). Using these coefficients, one reduces the effects of magnitude difference on the LO measurement (Nicolle et al. 2005), but it leads to a reduction of the global available flux and then to an increase of the noise measurements.

To summarize, if a SO approach is considered, the critical parameter would be the GS magnitude, while two parameters would be used in the LO case: the integrated flux per WFS (or layer) and the magnitude difference between GSs (including a possible attenuation coefficient per GS direction).

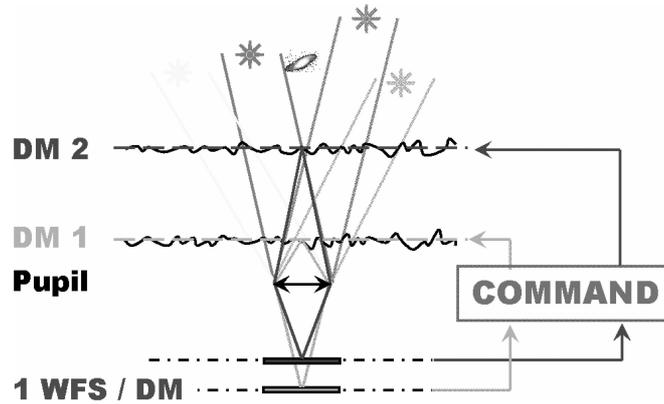


Figure 2. LO concept in MCAO. In this case, there is one WFS per DM (conjugate at the same altitude). The fluxes coming from all the GSs are co-added before the detection on each WFS.

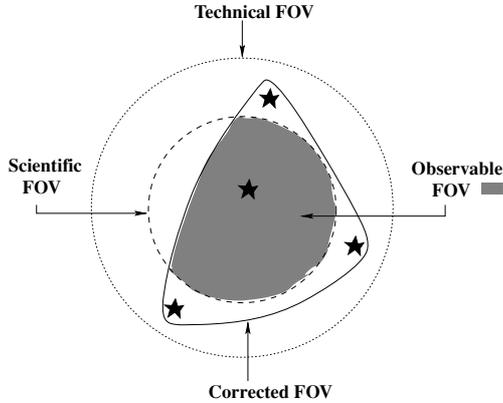


Figure 3. Definition of the various notions of FoV in MCAO: the technical FoV (Tech-FoV) (largest one) in which the GSs have to be found; the scientific FoV (Sci-FoV) (\leq the technical FoV) in which the required MCAO performance should be achieved; the corrected FoV (Corr-FoV) in which, for a given GS configuration, the MCAO performance is actually achieved; and the observable FoV (Obs-FoV) which represents the part of the scientific FoV actually corrected for a given GS configuration.

4 VARIETIES OF FOV IN MCAO

Whatever the chosen WFS concept, the use of several bright GSs is mandatory in order to sense the turbulent volume. These GSs have to be found in a FoV large enough to ensure a good measurement of the turbulent volume and thus a good correction in the directions of interest.

According to the scientific need, the FoV in which GSs have to be found may be different from the one in which the MCAO performance has to be achieved.

More generally, in MCAO, four notions of FoV can be defined to describe the system requirements and final performance fully. This clearly increases the complexity of the sky coverage estimation. These four FoV are described below and illustrated in Fig. 3.

4.1 The technical FoV

The technical FoV (Tech-FoV) is the field in which GSs have to be found in order to sense the turbulent volume. Several constraints govern the final choice of this field.

- (i) Technical constraints related to the telescope and system design.
- (ii) Scientific constraints – that is, the average value and the evolution of the system performance in the field (Strehl ratio, encircled energy ...). These constraints are linked to the telescope and system design as well as to the atmospheric parameters (seeing, C_n^2 profile ...). In particular, the size of the technical field directly impacts on the performance of a MCAO system since an increase of the technical FoV implies a larger volume of turbulence to be sensed and thus a possible increase of tomographic reconstruction error. It is interesting to mention here that larger telescope diameters may allow us to deal with larger technical FoVs (Ragazzoni 1999; Fusco et al. 2000) which should be potentially interesting for a MCAO system based on NGSs for extremely large telescopes.

Sky coverage estimation for MCAO systems 177

4.2 The scientific FoV

The scientific FoV (Sci-FoV) corresponds to the field in which the scientific targets have to be located and thus in which the system performance has to be achieved. The Sci-FoV can be smaller than the Tech-FoV depending on the telescope design. The performance to be achieved in the Sci-FoV depends on the GS separation and magnitudes. For instance, in terms of the Strehl ratio, the performance SR_α ($\alpha \subseteq$ Sci-FoV) can be expressed as follows:

$$SR_\alpha \simeq e^{-\sigma_\alpha^2}, \quad (3)$$

with (see Fusco et al. 2000)

$$\sigma_\alpha^2 = \mathbf{M}_\alpha \mathcal{C} \{ \sigma_{\text{noise},k}^2 \}_k. \quad (4)$$

Here, \mathbf{M}_α is a projection matrix from the reconstructed phase in the DM on to a given direction α of the Sci-FoV. \mathbf{M}_α depends on the Sci-FoV size, the C_n^2 and its sampling by the DMs. $\mathcal{C} \{ \sigma_{\text{noise},k}^2 \}_k$ is the noise propagation from the WFS measurements to the tomographic reconstruction of the volumic phase. $\mathcal{C} \{ \sigma_{\text{noise},k}^2 \}_k$ depends on the GS flux, the WFS characteristics and the GS relative positions. k stands for the k th GS direction.

From equation (4), it is clear that the MCAO performance in the Sci-FoV will depend on the following parameters:

- (i) the GS relative positions in the Tech-FoV but also with respect to the Sci-FoV (see Sections 4.3 and 4.4) which allow us to compute \mathbf{M}_α ;
- (ii) the GS limiting magnitudes and GS magnitude difference in the case of the LO WFS concept.

These parameters should be taken into account in the MCAO sky coverage in order to provide accurate results. They will be used to provide conditions on GSs which allow us to ensure that σ_α^2 is small (or uniform) enough to fulfil the performance requirement in the whole Sci-FoV.

4.3 The corrected FoV

The corrected FoV (Corr-FoV) represents, for a given GS configuration, the part of the Tech-FoV actually corrected by the MCAO system.

The Corr-FoV (see Fig. 3) is equal to the convolution of the surface defined by the stars within the Tech-FoV with the isoplanatic field. Note that we have assumed here that the MCAO system is able to interpolate the wavefront inside the surface defined by the GSs. Such an approximation is directly linked to the telescope diameter, the number of corrected modes and the C_n^2 profile.

4.4 The observable FoV

The observable FoV (Obs-FoV) is the last but also the really important FoV (from an astronomer's point of view). It corresponds to the part of the Sci-FoV actually corrected by the MCAO system for a given GS configuration. It is nothing but the intersection of the Corr-FoV with the Sci-FoV:

$$\text{Obs-FoV} = \text{Corr-FoV} \cap \text{Sci-FoV}. \quad (5)$$

It is interesting to note here that when the Tech-FoV is equal to the Sci-FoV, it automatically implies an equality between the Corr-FoV and Obs-FoV.

5 ISOPLANATIC ANGLE

In classical AO, the isoplanatic angle is defined as a distance from the GS position where the AO performance is better than a minimum requirement, this limit value being usually expressed as a residual variance or a Strehl ratio. It seems clear that, generally speaking, this isoplanatic angle should depend on the required performance (limit value), the system characteristics (actuator number, temporal sampling frequency . . .), the GS characteristics (flux) and of course the atmospheric conditions (C_n^2 profile). A particular case is the θ_0 angle defined by Fried (Fried 1982), which represents the isoplanatic angle obtained in the case of a perfect AO system (infinite number of actuators, infinite sampling frequency, no noise) and for a residual phase smaller than 1 rad^2 in the FoV. Under this assumption, Fried gives a simple expression of θ_0 which only depends on atmospheric conditions but remains pessimistic for realistic AO systems.

The generalization of the classical AO isoplanatic angle to MCAO systems is not straightforward, and two points have to be distinguished.

(i) The system capability to interpolate and correct for the turbulent volume within the field defined by the GS positions. This is characterized by the number and the positions of the GSs for the wavefront interpolation (Fusco et al. 2000) and by the number of DMs for the turbulent volume correction (Tokovinin et al. 2000). In this paper, we will assume that the MCAO system is well-dimensioned, i.e. the required performance is achieved in the field surface delimited by the GS positions. In other words, the choice of the Tech-FoV is done to ensure an efficient interpolation between GSs.

(ii) The degradation of the correction *outside* the corrected area due to angular decorrelation of the wavefront with respect to the DM correction. In a first approximation, this decorrelation should be the same in MCAO and classical AO and barely depends on the size of the corrected area (large for a MCAO system and equal to a single point for classical AO). In order to validate this assumption, an estimation of the isoplanatic angle is obtained on simulation (using the 100 GS realizations) as a function of a minimum Strehl ratio

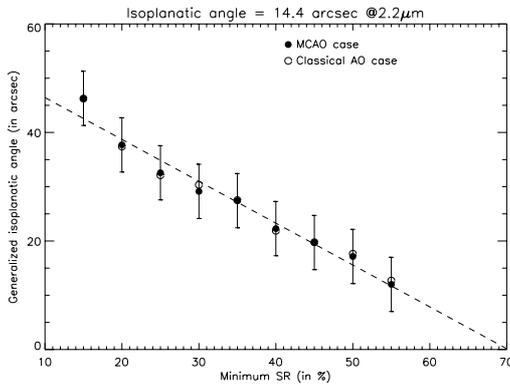


Figure 4. Evolution of the generalized isoplanatic angle with respect to the specification in terms of minimum performance to achieve in the FoV. Average and rms values (filled circles) obtained for 100 GS configurations (randomly determined) are considered. The same results (open circles) are plotted in the case of a classical AO system (using the same parameters for the turbulence profile). The dashed line represents a linear fit of the measured isoplanatic values.

specification for a classical AO system and a MCAO one (a MAD-like system as defined in Section 7.1). The results are presented in Fig. 4. The isoplanatic angles on classical AO and MCAO are nearly identical. For this particular system and for a typical Paranal profile, the evolution of the isoplanatic angle with the minimum Strehl ratio can be fitted by a linear law. Depending on the chosen criterion, the isoplanatic angle goes from 50 down to 10 arcsec. This has to be compared with Fried's θ_0 of 14.4 arcsec (which is known to be a pessimistic value) for the considered atmospheric conditions and imaging wavelengths ($2.2 \mu\text{m}$). These results allow us to consider simple AO data to estimate the generalized isoplanatic angle to be used in the SSC algorithm and thus avoid a complex MCAO simulation.

6 SKY COVERAGE IN MCAO

6.1 The conventional definition

The performance of a MCAO system depends on the quantity and quality of the wavefront measurements that can be obtained in the Tech-FoV. Thus the knowledge of star number and magnitude within a given region is a key point to study: the conventional MCAO sky coverage (Le Louarn et al. 1998; Marchetti et al. 2002) provides this information. It is based on the computation of the probability of finding stars that meet a set of conditions within one Tech-FoV, in the region of the sky considered. The classical sky coverage corresponds to the average number (in per cent) of Tech-FoVs in which the conditions on stars (number and/or magnitude) are met (Fig. 5) without any information on GS distributions in the FoV.

Assuming that the stellar distribution follows Poisson statistics, one can compute the probability P of finding at least one star within

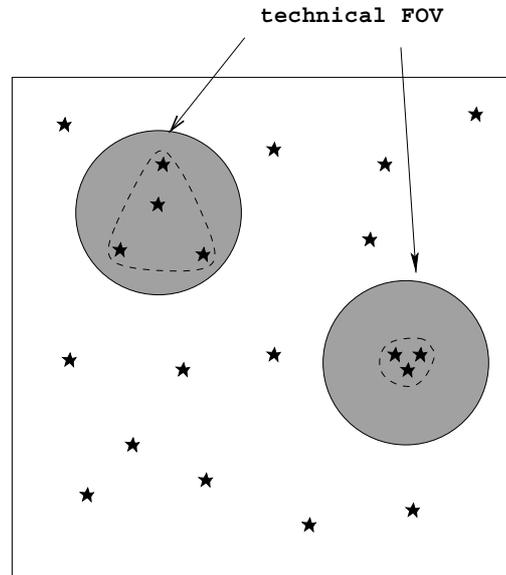


Figure 5. Conventional MCAO sky coverage. The solid line represents the Tech-FoV, the dashed line the actual Corr-FoV given the GS configuration. In the classical MCAO sky coverage definition, the Tech-FoV is assumed to be corrected whatever the GS configuration.

a given radius r (Le Louarn et al. 1998):

$$P_{N_{\text{stars}} > 0}(m, r) = 1 - \exp\left[-\frac{\pi r^2 v(m)}{3600^2}\right], \quad (6)$$

where $v(m)$ is the density of stars brighter than the magnitude m (per square degree) in a given galactic position (provided by the Besançon model). The probability of finding more than X stars is obtained from equation (6):

$$P_{N_{\text{stars}} > X}(m, r) = 1 - \sum_{i=0}^X P_{N_{\text{stars}} = i}(m, r). \quad (7)$$

This relation does not allow us to introduce specific conditions on stars such as limiting magnitude difference, etc. For this reason, a simulated process proposed by Marchetti et al. (2002) is considered.

To compute the sky coverage for different conditions (Galactic coordinates, limiting magnitude, FoV, etc.), and in order to account for GS positions in the FoV, star fields are generated using the following process. We first define conditions on stars and on the Tech-FoV:

- (i) a 1-deg² field is simulated on 512×512 pixels;
- (ii) the number of stars is generated using a Poisson distribution with the mean equal to the stellar density provided by the Galactic model at this magnitude (Besançon model);
- (iii) for each magnitude, the positions of the stars are defined by a random deviate drawn from a uniform distribution.

The sky coverage is computed using these simulated stellar fields. We search all of the Tech-FoV (defined as proposed in Section 4.1) within the 1-deg² star field in which the searched conditions on stars are met. The process is repeated typically 500 times and the sky coverage is obtained by averaging these results.

In the classical sky coverage approach, it is implicitly assumed that all of the Sci-FoV is corrected if the right number of GSs is found in the Tech-FoV. In other words, it does not account for the relative position between GSs within the Tech-FoV. Fig. 5 illustrates this approximation: the two grey Tech-FoVs (equal here to the scientific one) contain the searched GSs. In the classical sky coverage, they have the same weight in the computation, whereas the parts of the Tech-FoV really sensed by these two stellar configurations are very different. The results of the classical sky coverage in MCAO are thus optimistic.

Hence this sky coverage definition needs to be improved. In particular, accounting for the GS geometry is essential to describe well the system performance in a given FoV. This leads us to introduce some new parameters in the sky coverage computation to be as close as possible to the real description of the MCAO performance in the FoV and in particular the four FoV definitions (technical, scientific, corrected and observable) presented in Section 4.

6.2 The ‘surface’ sky coverage definition

In order to refine the sky coverage estimation, the classical approach defined in the previous section has to be corrected from the relative position of GSs within the Tech-FoV with respect to the Sci-FoV. This process is detailed below.

6.2.1 Refinement of the Obs-FoV computation

The computation of the Obs-FoV is obtained using the GS distribution in each Tech-FoV, the turbulence parameters (definition of an isoplanatic angle which accounts for the turbulence profile and

Sky coverage estimation for MCAO systems 179

system expected performance) and the system characteristics (see Section 5):

- (i) the limiting magnitude per GS;
- (ii) the integrated magnitude;
- (iii) the Δ_m (difference of magnitudes) between GSs;
- (iv) the minimum number of WFSs ($N_{\text{WFS, min}}$) required to obtain a correct wavefront reconstruction (minimum number of GSs); and
- (v) the maximum number of WFSs ($N_{\text{WFS, max}}$).

From these data, one can compute the corrected surface from the available GSs that fulfil flux conditions (limiting GS magnitude per WFS and/or limit difference of magnitude between GSs) and the Sci-FoV. Three cases have to be considered for each Tech-FoV.

- (i) The number of GSs is smaller than $N_{\text{WFS, min}}$. In that case the surface value is set to 0.
- (ii) The number of GSs is larger than $N_{\text{WFS, min}}$ but smaller than $N_{\text{WFS, max}}$. In that case we compute the largest possible surface including all the GSs.
- (iii) The number of GSs is larger than $N_{\text{WFS, max}}$. In that case we compute all the possible surfaces including the maximum number of GSs and we define the global surface as the union of all the computed surfaces.

For each case, the surface is obtained by the convolution of the polygon formed by the GS position with a disc of diameter equal to the isoplanatic angle (the higher the performance, the smaller the isoplanatic angle as illustrated in Fig. 4).

The surface optimization is rather simple when only conditions on individual GS magnitudes are considered (limiting magnitude per GS). When a condition on the magnitude difference between GSs is added (including the possibility of dimming the brightest star as presented in Section 3.2), however, the optimization process becomes more complex. Indeed, the maximization of the Obs-FoV has to be performed under the constraint of a maximum flux difference between GSs in addition to the constraint on GS flux. The surface maximization algorithm accounts for this kind of attenuation and allows us to find the optimal observable surface for a given maximum flux difference between GSs (with the possibility of an attenuation of the brightest star) and a given integrated flux.

6.3 The ‘surface’ sky coverage computation

The observable surface is introduced in the sky coverage computation by introducing the ratio between the surface of the Obs-FoV and the surface of the Sci-FoV in the sky coverage computation. This new sky coverage definition is called the ‘surface’ sky coverage (SSC). For each GS geometry, the fraction of the Sci-FoV really sensed by the GSs is defined by

$$\mu_s = \frac{S_{\text{obs-fov}}}{S_{\text{sci-fov}}}; \quad (8)$$

μ_s is called the weighted coefficient $\in [0, 1]$.

The smaller the Sci-FoV is in comparison with the Tech-FoV, the closer to 1 μ_s should be. The SSC defines the percentage of the sky that can be observed at a given galactic coordinate for

- (i) a given Tech-FoV,
- (ii) a given Sci-FoV
- (iii) a given system performance:

$$P_{N_{\text{stars}} > X}^{\text{Surface}}(m, r) = \langle \eta \mu_s \rangle, \quad (9)$$

180 *T. Fusco et al.*

where η is a Boolean number which is set to 0 when conditions on GSs in the FoV are not fulfilled and set to 1 otherwise. $\langle \cdot \rangle$ stands for a statistical average on random realizations obtained using a statistical model of the stellar population (see Section 6.4).

It is interesting to note here that if μ_s is always set to 1 then, $P_{\text{Stars} > \chi}^{\text{Surface}}(m, r)$ is nothing but the classical sky coverage for MCAO.

6.4 Model of stellar population

The sky coverage algorithm requires a statistical knowledge of the stellar distribution in the Galaxy. In the following, we have considered the Besançon model (Robin et al. 2003). This model reproduces the stellar content of the Galaxy using some physical assumptions and a scenario of star formation and evolution.

7 SKY COVERAGE ESTIMATIONS

7.1 System assumptions

In order to demonstrate the relevance of our approach for sky coverage estimation in MCAO, and to highlight the importance of the new parameters integrated in the algorithm (surface defined by the GS distributions, isoplanatic angle, magnitude difference between GSs in the case of LO WFSs), we have considered two MCAO system configurations.

The first one is based on a SO scheme based on the MAD design (see Section 7.2) with three WFSs and two DMs. In that case,

the important parameter is the limiting magnitude by WFS, that is the minimum number of photons required to obtain an accurate wavefront reconstruction per direction.

The second configuration is based on a LO scheme (see Section 7.3) with two measured layers (i.e two WFSs) and two DMs. Between three and eight GSs are co-added on each WFS and a 50/50 beam splitting between the two measured planes. The upper limit (eight GSs) is fixed by the number of devices used to collect the light from each star and to co-add this light on to a single detector. The lower limit (three GSs) is fixed by the need for an average of the wavefronts coming from several sky directions in order to isolate the contribution of the layer to be sensed by the WFS. In addition to a minimum number of GSs, a limiting magnitude difference Δ_m between GSs is also mandatory to ensure a good estimation of the phase in the turbulent layers (Raggazzoni et al. 2002; Nicolle et al. 2005) as presented in Section 3.2. For the LO WFS, the important parameter is the limiting integrated magnitude (that is the equivalent magnitude of all the GSs co-added on each WFS) defined as

$$\text{mag}_{\text{int,lim}} = 2.5 \log_{10} \left(0.5 \sum_{i=1}^{N_{\text{gs}}} 10^{-0.4\text{mag}_i} \right), \quad (10)$$

where the 0.5 factor comes from the beam splitting between layers (that is between WFSs). It is interesting to note that the larger the number of measured layers, the smaller the flux separation coefficient.

Both SO and LO WFS performance depend on a limiting magnitude (or integrated magnitude in the LO case). It is clear that such

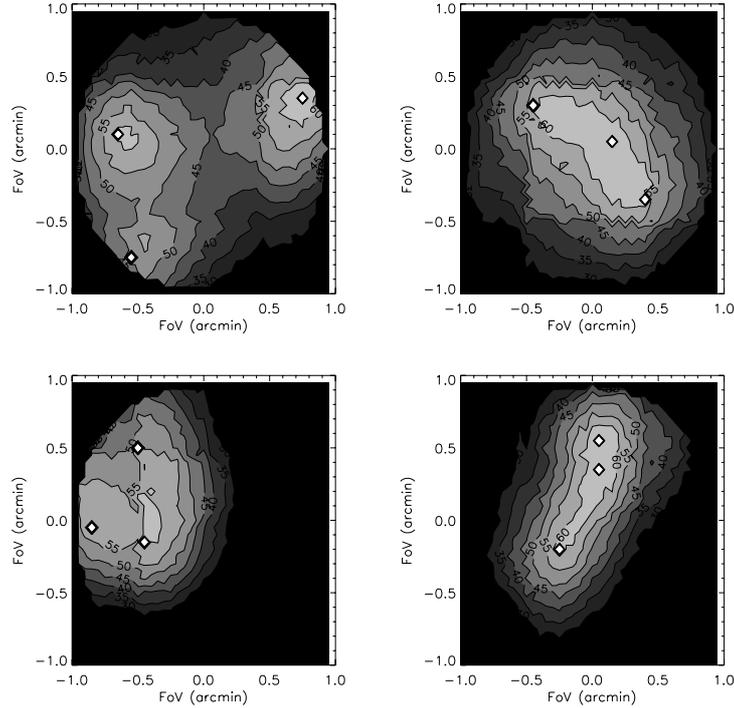


Figure 6. Strehl ratio evolution in the Tech-FoV (2 arcmin diameter field) for four GS configurations. Iso-Strehl ratios are plotted. The diamond symbols represent the GS positions.

a value depends both on the required performance of the MCAO system and on the telescope and system characteristics:

- (i) global throughput, imaging and analysis wavelengths, sampling frequency;
- (ii) WFS type – Shack–Hartmann, pyramid, curvature ...;
- (iii) detector characteristics – read-out noise, quantum efficiency.

In the following we will rely on the MAD (MCAO demonstrator, currently being developed at ESO) to set the main system characteristics even if several parameters will be modified in order to study their impact on the system sky coverage (in particular the CCD characteristics). The MAD bench is composed of two DMs of 66 actuators each (bimorph technology) respectively conjugated at 0 and 7 km from the telescope pupil. We have chosen a MAD-like configuration because this system already includes a SO (based on Shack–Hartmann devices) and a LO (based on pyramid devices) WFS mode.

7.2 The SO mode

Let us first consider the case of SO measurements. As presented before, three WFSs (that is three GSs) are considered. The Tech-FoV is a disc of 2 arcmin diameter and the Sci-FoV is equal to the Tech-FoV. For each WFS a Shack–Hartmann device is considered with 8×8 sub-apertures (8×8 pixels per sub-aperture) with a 2.4 FoV diaphragm. Each Shack–Hartmann device can pick up a GS in the entire FoV.

Sky coverage estimation for MCAO systems 181

Considering first that the GS magnitude is faint enough to ensure a good wavefront measurement per GS direction, we plot in Fig. 6 the Strehl ratio evolution in the FoV for four GS configurations (randomly positioned in the FoV). It is clear that the definition of a corrected surface depends on a criterion on the system performance. In the following we have chosen to consider a minimum Strehl ratio (equal to 30 per cent) as a limit value defining the corrected FoV. This figure highlights the importance of the introduction of a surface parameter in the sky coverage computation.

As explained before, the SSC algorithm uses an isoplanatic angle (see Section 5) to account for the different corrected surfaces associated with various performance criteria (the only assumption is that the required performance is achieved within the GS configuration). The surface obtained from the GS positions is convolved with a isoplanatic angle to provide the estimated corrected surface for the given GS positions. An estimation of the isoplanatic angle is obtained as a function of minimum Strehl ratio specifications using Fig. 4.

The last, but essential, parameter to consider is of course the GS limiting magnitude. This limiting magnitude depends on a lot of parameters, from expected system performances to WFS and detector characteristics, system throughput and atmospheric conditions. The first point to study is the behaviour of the system performance with respect to WFS noise for typical atmospheric conditions. In order to limit the number of variables, we will consider a reduced parameter on each WFS to characterize its performance. This parameter is a signal-to-noise ratio (SNR) term which can be defined as the ratio

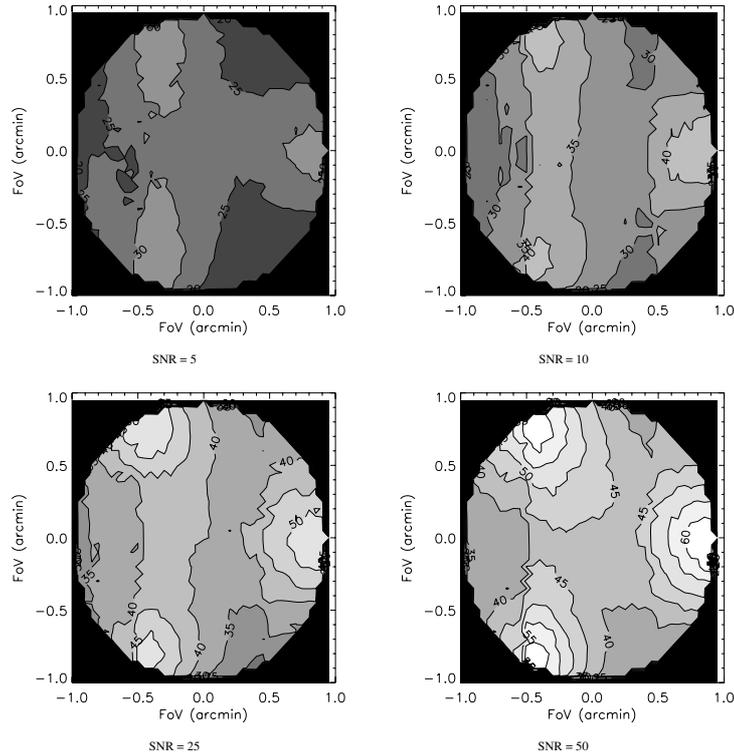


Figure 7. Strehl ratio evolution in the Tech-FoV (2 arcmin diameter field) for four SNR on GSs (same SNR per GS). Iso-Strehl ratios are plotted.

182 *T. Fusco et al.*

of the signal to be measured by the WFS (angle of arrival in the case of a Shack–Hartmann WFS) to the measurement noise (photon and detector noise):

$$\text{SNR} = \frac{\sigma_{\text{aoa}}^2}{\sigma_{\text{ph}}^2 + \sigma_{\text{detec}}^2}. \quad (11)$$

SNR depends on atmospheric conditions through σ_{aoa}^2 and system and GS characteristics through $\sigma_{\text{ph}}^2 + \sigma_{\text{detec}}^2$. As an example, in Fig. 7 we plot the two-dimensional map performance obtained for various SNRs (5, 10, 25, 50) and assuming an equilateral triangular GS geometry. The three WFSs are assumed to have the same SNR. A more complete description of the SNR influence is proposed in Fig. 8 where the averaged Strehl ratio (and its rms fluctuation in the Tech-FoV) is plotted as a function of the SNR (the same for each GS). The GS geometry is the same as the one considered in Fig. 7. It shows that an average Strehl ratio greater than 40 per cent is reached for a SNR greater than 10. A plateau is achieved for SNRs larger than 50. In the following we will consider that a SNR of 10 is a limit to ensure a pertinent wavefront reconstruction. Fig. 9 connects the WFS SNR to the GS magnitudes for various system sampling frequencies and assuming a given system throughput (here $2 \times$

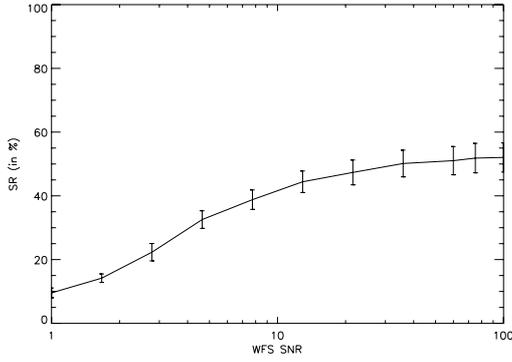


Figure 8. Average and rms values of the Strehl ratio in the Tech-FoV for various SNRs on the three WFSs.

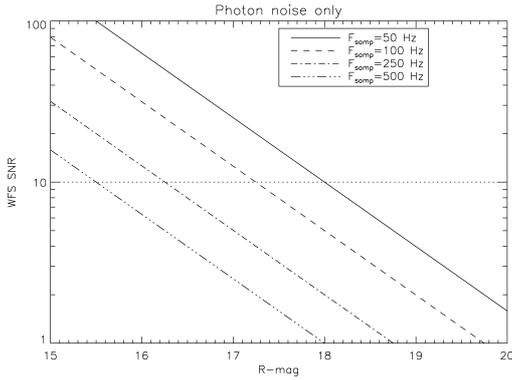


Figure 9. Evolution of the WFS SNR as a function of the GS magnitude (R band) and for various sampling frequencies (from 50 to 500 Hz). A photon noise limited detector is considered.

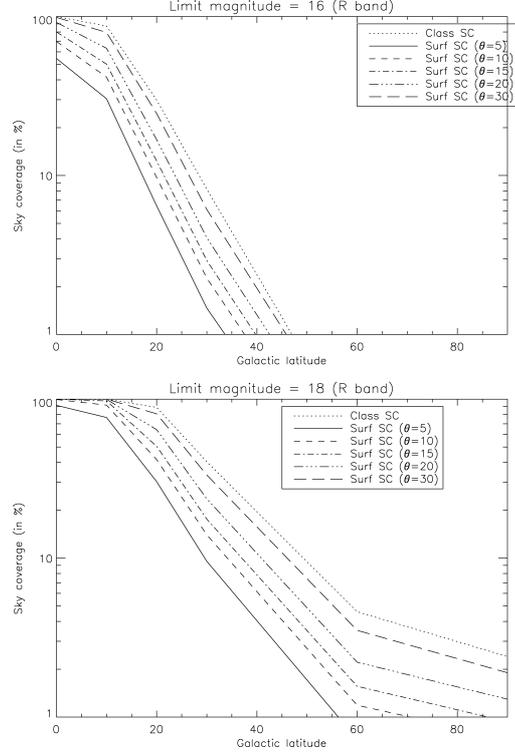


Figure 10. Comparison between classical and SSC estimations for various galactic latitudes and various generalized isoplanatic angles. Two cases have been considered in terms of limiting GS magnitude per WFS: 16 (upper panel) and 18 (lower panel). The SO MAD system has been considered.

10^{10} photon $\text{m}^{-2} \text{s}^{-1}$ for a 0-mag GS) and detector characteristics (Electron Multiplication CCD with zero read-out noise)

From Figs 4, 8 and 9, it is now possible to use our SSC algorithm in order to determine the real sky coverage of a MCAO system as a function of the required performance in the field (that is the generalized isoplanatic angle derived from Fig. 4) and as a function of the galactic latitude. Because the GS limiting magnitude is extremely dependent on the system characteristics, we have performed the sky coverage for two limiting GS magnitudes (16 and 18). The different plots in Fig. 10 show the overestimation of a classical MCAO sky coverage with respect to our new SSC algorithm. Of course this overestimation depends on the generalized isoplanatic angle or, in other words, on the tolerated performance in the FoV. The lower the limit performance, the smaller the overestimation should be.

7.3 The LO mode

In addition to its SO mode, the MAD MCAO system has a LO WFS developed by INAF (Istituto Nazionale di Astro Fisica). In this mode, eight star-enlarger devices (see Raggazzoni et al. 2002) are used to pick up the flux coming from eight GSs and to recombine the beams of these eight GSs on to two pyramid WFSs respectively conjugated to 0 and 7 km.

As explained in Section 3.2, the main difference between SO and LO from a photometric point of view is that the limiting GS magnitude per WFS of the SO approach is replaced by the integrated magnitude per WFS (sum of the flux coming from all the GSs after separation between the two WFSs) and a magnitude difference per GS. This limiting magnitude difference per GS [essential to ensure a good WFS measurement and reconstruction in a LO scheme as shown in Nicolle et al. (2006)] can be ensured using optical densities for the brighter GS direction before the beam co-addition. A complete study of the effect of GS magnitude difference on MAD performance is beyond the scope of this article, but it is interesting to study the behaviour of the SSC with respect to this parameter. As explained in Section 6.3, our algorithm is able to find the set of GSs maximizing the observable surface under constraints on (i) minimum integrated magnitude, and (ii) maximum magnitude difference. Another constraint is to consider at least three GSs (minimum value) up to eight GSs (maximum number of star-enlarger devices). The optimization of the surface defined by the GS position under the photometric constraints and GS number (3–8) leads to a complex multi-variable iterative process. It is nevertheless possible to find the optimal GS configuration that fulfils all the photometric requirements and ensures the largest corrected surface.

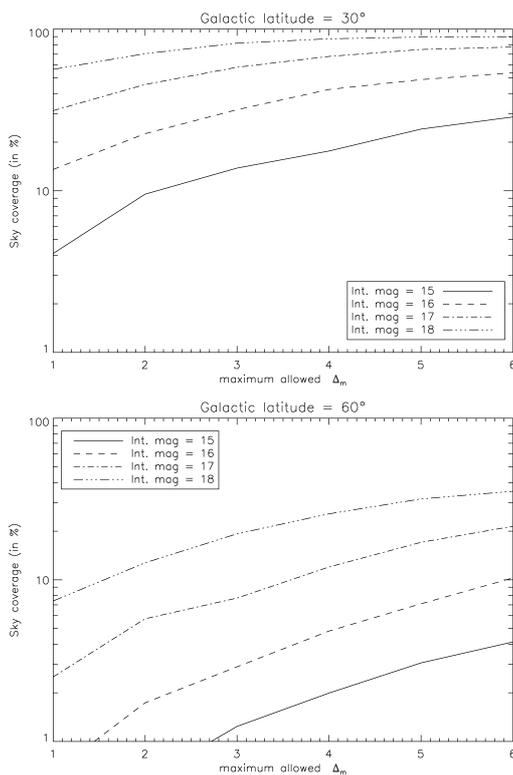


Figure 11. SSC as a function of the magnitude gap between GSs for the LO concept. Upper panel: galactic latitude = 30° ; lower panel: galactic latitude = 60° . For each plot, four different integrated magnitudes per WFS are considered.

Sky coverage estimation for MCAO systems 183

Fig. 11 presents the sky coverage estimates obtained with our algorithm in the LO case and for various maximum differences of magnitude between GSs. The case of 30° (upper plot) and 60° (lower plot) galactic latitude are considered. For each galactic latitude four integrated magnitudes per WFS are considered: 15, 16, 17 and 18.

As expected, increasing the magnitude gap between GSs leads to significant improvements in term of sky coverage. Indeed, it allows us to consider a large number of GSs for a given integrated magnitude, or in other words to increase the number of photons for a given GS configuration, because the brightest stars are less (or even no more) optically attenuated before the detection. Fig. 11 highlights the importance of the authorized gap of magnitude between GSs in terms of sky coverage. A compromise has to be found between requirements in terms of wavefront measurement accuracy (which is degraded by the magnitude difference between GSs in a LO scheme) and the expected sky coverage of the MCAO system. Such a kind of study will be proposed in a future paper.

8 CONCLUSION

We have proposed an improvement of the conventional sky coverage for MCAO. The new algorithm accounts for different conditions on GSs (number and flux conditions) as well as (which is new) the observed surface defined by the GSs. To represent well the diversity of the MCAO in terms of both concept and expected performance, four different notions of FoV have been introduced. The new sky coverage algorithm proposed in this article allows us to deal with SO and LO WFS concepts, with GS geometry in the FoV, with photometric issues (GS magnitude, integrated magnitude and magnitude difference between GSs in the case of the LO concept), turbulence characteristics and system expected performance (through the use of a generalized isoplanatic angle). An application to the MAD system developed at ESO has been considered. In the framework of this particular application, the importance of parameters such as the GS geometry, the generalized isoplanatic angle and the difference magnitude between GSs has been highlighted.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors thank J. M. Conan for fruitful discussion. This work was partly supported by the EC contract RII3-CT-2004-001566.

REFERENCES

- Arcidiacono C., Diolaiti E., Ragazzoni R., Farinato J., Vernet-Viard E., 2004, in Bonaccini Calia D., Ellerbroek B., Ragazzoni R., eds, *Advancements in Adaptive Optics*, Vol. 5490. SPIE, Bellingham, p. 563
- Assemat F., 2004, PhD thesis, Univ. Paris VII
- Beckers J. M., 1988, in Ulrich M. H., ed., *ESO Conf. Workshop Proc., Very Large Telescopes and their Instrumentation*. ESO, Garching, p. 693
- Bello D., Conan J.-M., Rousset G., Ragazzoni R., 2003, *A&A*, 410, 1101
- Dicke R. H., 1975, *AJ*, 198, 605
- Ellerbroek B. L., 1994, *J. Opt. Soc. Am. A*, 11, 2
- Ellerbroek B. L., Rigaut F., 2000, *Nat*, 403, 25
- Fried D. L., 1982, *J. Opt. Soc. Am.*, 72, 52
- Fusco T., Conan J.-M., Michau V., Rousset G., Mugnier L., 2000, in *Wizinowich P., ed., SPIE Conf. Proc. Vol. 4007, Adaptive Optical Systems Technology*. SPIE, Bellingham, p. 1044
- Fusco T., Conan J.-M., Rousset G., Mugnier L. M., Michau V., 2001, *J. Opt. Soc. Am. A*, 18, 2527
- Le Louarn M., Foy R., Hubin N., Tallon M., 1998, *MNRAS*, 295, 756

184 *T. Fusco et al.*

- Le Roux B., Conan J.-M., Kulcsár C., Raynaud H.-F., Mugnier L. M., Fusco T., 2004, *J. Opt. Soc. Am. A*, 21, 1261
- Marchetti E., Ragazzoni R., Diolaiti E., 2002, in Wizinowich P. L., Bonaccini D., eds, *SPIE Conf. Proc. Vol. 4839, Adaptive Optical System Technologies*. SPIE, Bellingham, p. 566
- Nicolle M., Fusco T., Michau V., Rousset G., Beuzit J.-L., 2005, in Tyson R. K., Lloyd-Hart M., eds, *SPIE Conf. Proc. Vol. 5903, Astronomical Adaptive Optics Systems and Applications II*. SPIE, Bellingham
- Nicolle M., Fusco T., Michau V., Rousset G., Beuzit J.-L., J., 2006, *Opt. Soc. Am. A*, in press
- Ragazzoni R., 1999, *A&AS*, 136, 205
- Ragazzoni R., Dialaiti E., Farinato J., Fedrigo E., Marchetti E., Tordi M., Kirkman D., 2002, *A&A*, 396, 731
- Robin A., Crézé M., 1986, *A&A*, 157, 71
- Robin A., Reylé C., Derrière S., Picaud S., 2003, *A&A*, 409, 523
- Rousset G. et al., 2002, in Wizinowich P. L., Bonaccini D., eds, *SPIE Conf. Proc. Vol. 4839, Adaptive Optical System Technologies*. SPIE, Bellingham, p. 140
- Tokovinin A., Le Louarn M., Sarazin M., 2000, *J. Opt. Soc. Am. A*, 17, 1819

This paper has been typeset from a $\text{\TeX}/\text{\LaTeX}$ file prepared by the author.

Troisième partie

Etude de concepts d'analyse de front d'onde pour une AO à large champ

Chapitre 6

Etude et optimisation de concepts d'analyse de front d'onde

6.1 *Star Oriented, Layer Oriented* : comment choisir ?

On a vu au chapitre 3 que deux concepts d'analyse de front d'onde sont actuellement proposés pour l'optique adaptative à large champ :

- Le concept *Star Oriented* (SO), qui mesure indépendamment la phase turbulente dans la direction de chaque étoile guide.
- Le concept *Layer Oriented* (LO), qui mesure directement la turbulence au voisinage de l'altitude de conjugaison des miroirs déformables en utilisant collectivement la lumière issue des différentes étoiles guides.

Chacun de ces deux concepts a des atouts qui lui sont propres. En tant que simple extrapolation d'une technique déjà éprouvée, la mise en œuvre d'un concept SO pourra bénéficier de toute l'expérience accumulée en AO. De plus, la mesure étant faite indépendamment dans les différentes directions d'analyse, l'utilisation de ces mesures lors de la reconstruction est totalement adaptable au type de performance recherché.

Cependant, deux inconvénients majeurs tempèrent ces points positifs. Le premier est la sensibilité au bruit du concept, chaque phase mesurée étant d'autant plus dégradée que l'étoile servant de guide à la mesure est faible. Le second est la complexité du système. En effet, la multiplication du nombre de directions d'analyse pèse sur le design optique de l'instrument car elle implique soit une multiplication des WFS posant un problème d'encombrement du plan focal, soit l'utilisation d'un seul senseur grand champ, capable d'imager toutes des directions d'analyse à la fois tout en conservant les propriétés adéquates en terme de vitesse de lecture¹. Par ailleurs, le SO pose également difficulté quant à la reconstruction et la commande, la simple mise à l'échelle des algorithmes de commande optimale utilisés à ce jour étant impossible du fait du volume de calculs à traiter [Le Roux 2003, Petit 2006].

¹Soulignons que pour un tel senseur la linéarité de la mesure sera de première importance. Une étude sur ce point est présentée dans la partie IV.

En regard, le concept du *Layer Oriented* bénéficie principalement de deux avantages :

- On passe d'un senseur de front d'onde par étoile guide à 1 senseur de front d'onde par miroir déformable à commander. Or un système multiconjugué utilise typiquement 4 à 6 étoiles guides pour corriger 2 à 3 couches turbulentes. Associer les analyseurs de front d'onde aux miroirs déformables plutôt qu'aux directions d'analyse permet donc de gérer le flux des étoiles guides de façon à limiter la sensibilité du concept au bruit de détecteur, qui est comme on vient de le dire la principale limitation du concept *Star Oriented*.
- On mesure directement la turbulence au voisinage du miroir déformable. Cela peut simplifier le problème de la reconstruction, en traitant chaque couple { senseur + miroir déformable } comme une boucle d'optique adaptative indépendante (cf. § 4.2.2)

Cependant un tel concept soulève lui aussi plusieurs problèmes :

- La mesure est moins riche puisque les informations sur la turbulence provenant des différentes directions sont combinées avant la détection.
- Plus ennuyeux, les différences d'illumination des couches turbulentes selon le flux des étoiles guides introduisent une erreur supplémentaire dans la mesure (cf. § 4.2, Fig. 4.4).
- Le problème de la mesure en boucle fermée est également difficile à appréhender : dans le cas où l'on opérerait pour une commande découplée de miroir à miroir, il est difficile de prendre en compte l'effet d'un miroir donné sur ce que voient les analyseurs et sur la commande des autres miroirs. Une solution pourrait être de traiter globalement les mesures au sein d'une commande optimale, mais l'algorithme de reconstruction aura alors le même degré de complexité que dans le cas du SO (cf. § 4.2.2).
- Enfin, d'un point de vue pratique, la recombinaison du flux des GS avant la détection n'est pas triviale. L'analyseur pyramidal (cf. § 2.1.2.2) est mieux adapté pour réaliser cette opération, mais des problèmes demeurent.

Le choix d'un concept plutôt que l'autre n'est donc pas évident. Un grand nombre de paramètres interviennent dans les performances de l'un et de l'autre, qu'il convient d'examiner avec le plus grand soin. Cependant on a vu (§ 4.1.2 & § 4.2.2) que quel que soit le concept considéré, le problème de la reconstruction peut se décomposer en deux étapes : une étape d'estimation tomographique du volume turbulent et une étape de projection du volume reconstruit sur les miroirs déformables. De ces deux étapes, seule l'estimation tomographique dépend du concept d'analyse de front d'onde, des caractéristiques des étoiles guides et de celles des senseurs de front d'onde. Le nombre de miroirs déformables à commander n'a pas d'influence sur la comparaison des performances des deux concepts. Pour cette raison, l'étude que nous allons mener dans ce chapitre sera effectuée dans le cadre de la plus simple des AO à large champ : le GLAO (cf. § 3.3.2.1), dans lequel on ne pilote qu'un seul DM, généralement conjugué à la pupille du télescope. Cette étude de performance est basée sur un critère de qualité dont nous justifions le choix ci-dessous.

6.2 Choix d'un critère de performance

6.2.1 Critères de performance en MCAO

On a vu (§ 2.5.2.2) que lorsque l'on cherche à atteindre la limite de diffraction d'un instrument, la grandeur d'intérêt pour caractériser la qualité de la correction est le rapport de Strehl du système, défini comme le rapport de l'énergie lumineuse de la PSF corrigée sur l'axe optique sur l'énergie lumineuse de la PSF en l'absence de toute aberration :

$$SR = \frac{PSF_{corrigée}(\mathbf{0})}{PSF_{diffraction}(\mathbf{0})}$$

Or, d'après l'approximation de Maréchal [Born and Wolf 1980], le rapport de Strehl est lié à la variance de la phase résiduelle (cf. § 2.5.2.2) par la relation :

$$SR(\mathbf{0}) \propto e^{-\sigma_{res}^2(\mathbf{0})}, \quad \text{avec : } \sigma_{res}^2(\mathbf{0}) = \frac{1}{S_{PUP}} \iint_{S_{PUP}} \left\langle (\phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}) - \phi_{corr}(\mathbf{r}))^2 \right\rangle_{time} d\mathbf{r}$$

où $\phi(\mathbf{r}, \mathbf{0})$ est la phase turbulente au point de vecteur coordonnée \mathbf{r} de la pupille et en regardant dans la direction de l'axe optique. Le système d'optique adaptative travaillant précisément sur la phase du front d'onde incident, la variance de la phase résiduelle est considérée comme le critère de performance pertinent pour l'optique adaptative à haute correction.

Dans le cas de l'AO à large champ, la variance de phase résiduelle est toujours le paramètre d'intérêt puisqu'elle est liée à la grandeur corrigée, mais on s'intéresse à son évolution dans le champ corrigé, c'est-à-dire en fonction de l'angle $\boldsymbol{\alpha}$ entre la direction d'imagerie et l'axe optique de l'instrument. Si l'on part du principe que le but de l'AO à large champ est d'atteindre une correction moyenne dans le champ la plus élevée possible, le critère pertinent devient la moyenne d'ensemble dans le champ corrigé de la variance de phase résiduelle :

$$\langle \sigma_{res}^2(\boldsymbol{\alpha}) \rangle_{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{1}{S_{\boldsymbol{\alpha}}} \iint_{S_{\boldsymbol{\alpha}}} \frac{1}{S_{PUP}} \iint_{S_{PUP}} \left\langle (\phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}) - \phi_{corr}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}))^2 \right\rangle_{time} d\mathbf{r} d\boldsymbol{\alpha} \quad (6.1)$$

C'est ce critère sur la phase qui est communément utilisé pour évaluer la performance d'un système de MCAO, et c'est précisément pour cela que nous l'avons utilisé précédemment pour établir les différents reconSTRUCTEURS envisageables pour le *Star Oriented* et le *Layer Oriented*. Ce n'est pourtant pas nécessairement le critère pertinent lorsque l'on s'intéresse à une AO ne délivrant qu'une correction partielle, telle que le GLAO (§ 3.3.2.1).

6.2.2 Critères de performance en correction partielle

En effet, du point de vue de l'imagerie, le rapport de Strehl n'est plus un critère pertinent pour évaluer la qualité de l'image corrigée par un GLAO : on ne cherche plus à se rapprocher de la limite de diffraction du système, mais simplement à concentrer l'énergie lumineuse dans la PSF. Ainsi les contraintes de performances d'un GLAO sont généralement exprimées en terme de gain sur l'énergie encerclée ou la FWHM de la PSF corrigée (cf. § 2.5.2.2). Le problème est qu'il n'existe pas de relation simple entre l'énergie encerclée ou la FWHM de la PSF du système et la variance de la phase corrigée [Tokovinin et al. 2004]. Pourtant c'est ce paramètre qui demeure pertinent pour l'estimation de performance de l'analyse de front d'onde. Il est donc indispensable de contrôler la bonne adéquation entre l'évolution des critères liés à la PSF et la variance de phase résiduelle. Nous

aborderons ce point dans le paragraphe (6.2.4.2).

Avant cela, il faut s'interroger sur la nature de la phase que l'on souhaite mesurer. La configuration du GLAO nous intéresse pour mener l'étude comparative du SO et du LO car la reconstruction y est plus simple. Cependant, outre son nombre minimal de miroirs déformables, le GLAO se distingue des autres systèmes d'AO à large champ par la nécessité d'assurer une correction *la plus uniforme possible* dans le champ. Par ailleurs, le GLAO est conçu comme un système d'AO simple de conception et d'utilisation, susceptible de servir de premier étage de correction avant l'intervention de systèmes d'AO plus sophistiqués permettant d'améliorer spécifiquement certains aspects de la correction.

Un objectif est donc également de minimiser la complexité du système. On souhaite pour cela estimer la phase au sol de la façon la plus simple possible. Une idée largement répandue dans la communauté scientifique est de moyennner la phase mesurée dans différentes directions du ciel. On souhaite ainsi tirer partie de la décorrélation angulaire de la turbulence d'altitude. Si l'on choisit judicieusement le domaine \mathcal{D}_* sur lequel moyennner la turbulence, la contribution des couches d'altitude tend à s'annuler et la phase moyenne vue par l'instrument est principalement due à la turbulence située proche du sol. En suivant cette approche, on souhaite en fait mesurer :

$$\Phi_{\widehat{GL}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathcal{S}_{\mathcal{D}_*}} \iint_{\mathcal{D}_*} \phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha}, \quad \text{avec : } \mathcal{S}_{\mathcal{D}_*} = \iint_{\mathcal{D}_*} d^2\boldsymbol{\alpha} \quad (6.2)$$

Les concepts *Star Oriented* et *Layer Oriented* permettront avec plus ou moins de bonheur d'estimer la phase $\Phi_{\widehat{GL}}(\mathbf{r})$, le critère permettant de quantifier l'acuité de l'estimation étant :

$$QC_{GLAO} = \frac{1}{\mathcal{S}_{\mathcal{P}}} \iint_{\mathcal{P}} \left\langle \|\Phi_{\widehat{GL}}(\mathbf{r}) - \Phi_{SO/LO}(\mathbf{r})\|^2 \right\rangle d^2\mathbf{r}, \quad \text{avec : } \mathcal{S}_{\mathcal{P}} = \iint_{\mathcal{P}} d^2\mathbf{r} \quad (6.3)$$

où $\Phi_{SO/LO}$ est la phase de correction estimée d'après les mesures du SO ou du LO.

Plusieurs questions se posent alors :

- A quel objectif de performance correspond la minimisation du critère QC_{GLAO} ?
- Quelle est l'adéquation du critère QC_{GLAO} avec l'évolution de l'énergie encerclée (ou la FWHM) dans le champ ?
- Quels comportements ce critère permet-il de prévoir pour le LO et le SO ?

Nous allons traiter successivement ces trois questions.

6.2.3 Performance accessible par minimisation de QC_{GLAO}

Nous allons considérer dans un premier temps un cas couramment envisagé pour le GLAO, dans lequel le champ où l'on sélectionne les étoiles guides est confondu avec le champ d'intérêt scientifique. Dans ce cas $\Phi_{\overline{GL}}$ est la phase moyenne dans le champ à imager, et l'on peut l'écrire de façon synthétique :

$$\Phi_{\overline{GL}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{S_{\mathcal{D}_*}} \iint_{\mathcal{D}_*} \phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha}, \equiv \langle \phi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha}) \rangle_{\boldsymbol{\alpha}}$$

On introduit ici une notation qui, bien qu'abusive, aura le mérite de rendre nos équations plus compactes et plus lisibles : ici et dans la suite, la notation $\langle \cdot \rangle_{\boldsymbol{\alpha}}$ représentera la moyenne d'ensemble de la quantité incluse sur l'ensemble du champ d'intérêt scientifique \mathcal{D}_* .

D'autre part, dans notre définition de $\Phi_{\overline{GL}}(\mathbf{r})$, on a placé implicitement le DM dans un plan conjugué à la pupille. Supposons pour le moment de l'on mesure indépendamment la turbulence dans la direction de chaque étoile guide (cas d'une analyse en SO, mais le raisonnement que nous allons suivre est tout à fait transposable au concept LO). En prenant en compte ces hypothèses, et en utilisant les mêmes conventions de notations que pour la section (4.1), QC_{GLAO} s'écrit :

$$QC_{GLAO} = \langle \| \langle \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\varphi} \rangle_{\boldsymbol{\alpha}} - \mathbf{P}_{DM_0} \mathbf{W} (\mathbf{P}_{GS}\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{B}) \|^2 \rangle_{\boldsymbol{\rho}, time}$$

Où \mathbf{W} est le reconstruteur, \mathbf{P}_{GS} est l'opérateur de projection des phases turbulentes d'altitude dans les directions des étoiles guides sur la pupille, et \mathbf{P}_{DM_0} est l'opérateur de projection du volume turbulent estimé sur le miroir déformable. Celui-ci étant dans la pupille, \mathbf{P}_{DM_0} ne dépend pas de la direction d'imagerie $\boldsymbol{\alpha}$. A l'instar des développements analytiques de la section (4.1), on peut développer l'expression ci-dessus et exprimer QC_{GLAO} en fonction des grandeurs statistiques associées à la turbulence et au bruit :

$$QC_{GLAO} = Tr \{ \langle \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha} \rangle_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{C}_{\varphi} \langle \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha} \rangle_{\boldsymbol{\alpha}}^t \} - 2Tr \{ \mathbf{P}_{DM_0} \mathbf{W} \mathbf{P}_{GS} \mathbf{C}_{\varphi} \langle \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha} \rangle_{\boldsymbol{\alpha}}^t \} \\ + Tr \{ \mathbf{P}_{DM_0} \mathbf{W} (\mathbf{P}_{GS} \mathbf{C}_{\varphi} \mathbf{P}_{GS}^t + \mathbf{C}_b) \mathbf{W}^t \mathbf{P}_{DM_0}^t \}$$

Cette expression est quasiment identique à celle que l'on obtient en développant l'équation (4.12) du paragraphe (4.1). En effet, si l'on exprime cette équation en conjuguant l'unique DM à la pupille, on a :

$$\langle \sigma_{res}^2(\boldsymbol{\alpha}) \rangle_{\boldsymbol{\alpha}} = Tr \{ \langle \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha} \mathbf{C}_{\varphi} \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha} \rangle_{\boldsymbol{\alpha}}^t \} - 2Tr \{ \mathbf{P}_{DM_0} \mathbf{W} \mathbf{P}_{GS} \mathbf{C}_{\varphi} \langle \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha} \rangle_{\boldsymbol{\alpha}}^t \} \\ + Tr \{ \mathbf{P}_{DM_0} \mathbf{W} (\mathbf{P}_{GS} \mathbf{C}_{\varphi} \mathbf{P}_{GS}^t + \mathbf{C}_b) \mathbf{W}^t \mathbf{P}_{DM_0}^t \}$$

En fait, les expressions de QC_{GLAO} et $\langle \sigma_{res}^2(\boldsymbol{\alpha}) \rangle_{\boldsymbol{\alpha}}$ ne diffèrent que par leur premier terme, qui n'a pas d'incidence sur le reconstruteur optimal découlant de leur minimisation. Le reconstruteur \mathbf{W}_{GLAO} minimisant QC_{GLAO} aura donc rigoureusement la même expression que celui qui minimise $\langle \sigma_{res}^2(\boldsymbol{\alpha}) \rangle_{\boldsymbol{\alpha}}$, et qui est exprimé par l'équation(4.13). QC_{GLAO} est donc un critère de maximisation de la performance moyenne dans le champ. W_{GLAO} s'exprime :

$$\mathbf{W}_{GLAO} = (\mathbf{P}_{DM_0}^t \mathbf{P}_{DM_0})^\dagger \mathbf{P}_{DM_0}^t \langle \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha} \rangle_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{C}_{\varphi} \mathbf{P}_{GS}^t (\mathbf{P}_{GS} \mathbf{C}_{\varphi} \mathbf{P}_{GS}^t + \mathbf{C}_b)^{-1} \quad (6.4)$$

Cette expression et sa signification quant à l'objectif de performance appellent quelques remarques, en particulier sur les différences entre QC_{GLAO} et $\langle \sigma_{res}^2(\boldsymbol{\alpha}) \rangle_{\boldsymbol{\alpha}}$, et sur l'impact d'un déplacement du miroir déformable en altitude.

6.2.3.1 Signification des premiers termes des expressions de QC_{GLAO} et $\langle \sigma_{res}^2(\alpha) \rangle_{\alpha}$

On peut expliciter un peu les premiers termes des expressions de QC_{GLAO} et $\langle \sigma_{res}^2(\alpha) \rangle_{\alpha}$ afin d'en saisir les différences. Concernant $\langle \sigma_{res}^2(\alpha) \rangle_{\alpha}$, ce premier terme a pour expression :

$$\begin{aligned}
T_1^{\langle \sigma_{res}^2 \rangle_{\alpha}} &= \langle \mathbf{P}\alpha \mathbf{C}_{\varphi} \mathbf{P}^t \alpha \rangle_{\alpha} \\
&= \left\langle \left\langle \|\mathbf{P}\alpha \varphi\|^2 \right\rangle_{time, \rho} \right\rangle_{\alpha}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{P}\alpha \varphi = \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \left(\sum_{p=1}^{P_{max}} a_p^{\ell}(\alpha) Z_p(\rho - h_{\ell}\alpha) \right) \\
&= \left\langle \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{p=1}^{P_{max}} \sum_{\ell'=1}^{\mathcal{L}} \sum_{p'=1}^{P_{max}} \underbrace{\langle a_p^{\ell}(\alpha) a_{p'}^{\ell'}(\alpha) \rangle_{time}}_{=0 \text{ si } \ell' \neq \ell} \underbrace{\langle Z_p(\rho - h_{\ell}\alpha) Z_{p'}(\rho - h_{\ell'}\alpha) \rangle_{\rho}}_{=\delta_{pp'}} \right\rangle_{\alpha} \\
&= \left\langle \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{p=1}^{P_{max}} \left(a_p^{\ell}(\alpha) \right)^2 \right\rangle_{\alpha} = \sigma_{turb}^2
\end{aligned}$$

$T_1^{\langle \sigma_{res}^2 \rangle_{\alpha}}$ est ici la variance de la phase turbulente, que l'hypothèse de stationnarité de la turbulence suppose égale dans toutes les directions du champ. Dans l'expression de QC_{GLAO} , maintenant, le premier terme a pour expression :

$$\begin{aligned}
T_1^{QC_{GLAO}} &= \left\langle \|\langle \mathbf{P}\alpha \varphi \rangle_{\alpha}\|^2 \right\rangle_{time, \rho} = \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{p=1}^{P_{max}} \left\langle \left\langle a_p^{\ell}(\alpha) \right\rangle_{\alpha}^2 \right\rangle_{time} \\
&= \left\langle \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \sum_{p=1}^{P_{max}} \left(\frac{1}{S_{\alpha}^{\ell}} \right)^2 \iint_{S_{\alpha}^{\ell}} \iint_{S_{\alpha}^{\ell}} a_p^{\ell}(\alpha) a_p^{\ell}(\alpha') d\alpha d\alpha' \right\rangle_{time}
\end{aligned}$$

Ici $T_1^{QC_{GLAO}}$ n'est pas seulement fonction de la force globale de la turbulence mais de sa corrélation angulaire dans les différentes couches.

6.2.3.2 Cas du miroir déformable conjugué en altitude

Pour mieux prendre en compte les cas où le DM est conjugué à une altitude non nulle, il faut définir $QC_{GLAO}(\alpha)$ tel que :

$$QC_{GLAO}(\alpha) = \left\langle \|\langle \Phi(\rho, \alpha) \rangle_{\alpha} - \Phi_{DM}(\rho + h_{DM}\alpha)\|^2 \right\rangle_{\rho, turb, bruit}$$

En minimisant $\langle QC_{GLAO}(\alpha) \rangle_{\alpha}$ on obtient :

$$\mathbf{W} = \left(\left\langle \mathbf{P}_{DM}^t \alpha \mathbf{P}_{DM} \alpha \right\rangle_{\alpha} \right)^{\dagger} \left\langle \mathbf{P}_{DM}^t \alpha \right\rangle_{\alpha} \langle \mathbf{P}\alpha \rangle_{\alpha} \mathbf{C}_{\varphi} \mathbf{P}_{GS}^t (\mathbf{P}_{GS} \mathbf{C}_{\varphi} \mathbf{P}_{GS}^t + \mathbf{C}_b)^{-1} \quad (6.5)$$

Ce reconstruteur ne diffère du reconstruteur obtenu par minimisation de $\langle \sigma_{res}^2(\alpha) \rangle_{\alpha}$ (eq. 4.13) que par le remplacement de $\left\langle \mathbf{P}_{DM}^t \alpha \mathbf{P}_{DM} \alpha \right\rangle_{\alpha}$ par $\left\langle \mathbf{P}_{DM}^t \alpha \right\rangle_{\alpha} \langle \mathbf{P}\alpha \rangle_{\alpha}$. Alors, minimiser QC_{GLAO}

plutôt que $\langle \sigma_{res}^2(\alpha) \rangle_{\alpha}$ revient à négliger la non superposition des empreintes de la pupille dans le plan du miroir. Soulignons que cette approximation affecte uniquement la partie projection du reconstruteur. Sa partie tomographique reste inchangée, ce qui signifie que l'approximation de $\langle \sigma_{res}^2(\alpha) \rangle_{\alpha}$ par QC_{GLAO} n'a pas d'incidence sur la comparaison des concepts d'analyse de front d'onde.

6.2.3.3 Discussion sur la signification de QC_{GLAO}

A la lumière de ce qui vient d'être démontré, le choix de QC_{GLAO} comme critère de performance du GLAO est ambivalent. Le point positif est que sa minimisation conduit à la minimisation du critère de performance utilisé en MCAO ($\langle \sigma_{res}^2(\alpha) \rangle_{\alpha}$) : l'extrapolation de l'analyse de performance des concepts d'analyse au cas à plusieurs DM en sera plus aisée. Le point négatif, c'est que l'on vient de démontrer que ce critère ne permet pas de réguler l'uniformité de la correction dans le champ. Ce problème est d'ailleurs connu [Tokovinin et al. 2001], et la solution proposée est de dissocier de façon *ad-hoc* le champ où trouver les étoiles et le champ où effectuer la correction, le premier étant annulaire et entourant le second. Toutefois, rien ne garantit l'optimalité de ce procédé. On reviendra au chapitre 8 sur ce problème de l'uniformité de la correction. Cependant, le soucis qui nous occupe pour l'instant est l'étude de performance du SO et du LO. On vient de démontrer que dans le cadre du GLAO, l'utilisation du critère QC_{GLAO} est pertinente pour caractériser les erreurs d'estimation de la phase. Un point reste cependant en suspens : la corrélation entre QC_{GLAO} et l'évolution des propriétés de la PSF dans le champ.

6.2.4 Comparaison de QC_{GLAO} et des critères basés sur la PSF corrigée

L'objectif est ici de s'assurer de la cohérence des évolutions du critère QC_{GLAO} et d'un critère basé sur les caractéristiques de la PSF corrigée (Energie encerclée ou FWHM). La relation entre ces deux types de critères n'étant pas exprimable aisément analytiquement, nous avons choisi de travailler dans le cadre d'une simulation numérique de type Monte-Carlo, dans laquelle on a supposé que l'on disposait d'un nombre croissant d'étoiles guides, réparties uniformément dans le champ. On expose d'abord le cadre précis de la simulation, puis les résultats.

6.2.4.1 Conditions de l'étude

- On s'est placé dans le cas d'un télescope de type VLT, avec une pupille de 8m monolithique ; on a négligé l'effet de l'occultation centrale sur la PSF et les optiques de relais sont supposées parfaites, en dehors de leur coefficient de transmission.
- Le champ corrigé est un disque de 8 arcmin, situé au zénith. Les quantités évoluant dans le champ sont déterminées en suivant un maillage carré de 30 arcsec d'arête (Il a été vérifié qu'un maillage plus serré ne modifie pas les résultats obtenus).
- Les étoiles guides sont réparties uniformément dans ce champ. On a choisi de travailler avec une maille hexagonale centrée pour le pavage par les étoiles guides. La figure (6.1) montre un exemple de la disposition des nœuds du maillage du champ et des étoiles guides. Ces dernières ont toutes la même magnitude ($V = 13$).
- Le modèle de turbulence utilisé est un modèle simplifié, à deux couches turbulentes, l'une située dans la pupille du télescope et regroupant 80% de la turbulence, l'autre située à 10 km d'altitude. La force totale de la turbulence est caractérisée par un seeing de 1 arcsec, ce qui correspond à un angle isoplanétique de 10.3 arcsec à la longueur d'onde d'imagerie ($2.2 \mu m$).

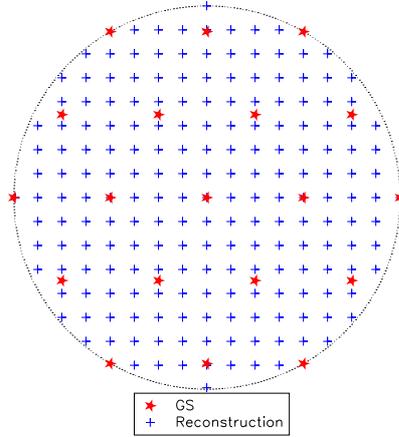


FIG. 6.1 – Exemple de maillage du champ en directions de reconstruction (bleu) et étoiles guides (rouge). Le champ a un diamètre angulaire de 8 arcmin et on considère une direction de reconstruction toute les 30 arcsec (soit 197 points au total). Les 19 étoiles guides sont réparties uniformément selon une maille hexagonale centrée.

- Les WFS sont des Shack Hartmann tous identiques, supposés linéaires, analysant le front d’onde incident à $0.5 \mu m$, dont les principales caractéristiques ont été empruntées à NAOS : 14×14 sous-pupilles et une fréquence d’échantillonnage de 500 Hz. Seul le bruit de photons est pris en compte. Compte tenu de la magnitude des étoiles guides, de la transmission des optiques de relais et de la fréquence d’échantillonnage, le rapport signal à bruit (SNR) dans chaque sous-pupille est de 40.
- Enfin, le miroir déformable reconstruit parfaitement les 190 premiers modes de Zernike mesurés par les WFS.

Les résultats présentés ci-après ont été obtenus avec un concept d’analyse Star Oriented, mais on montrera plus loin (§ 6.3.1.2) que lorsque les étoiles ont toutes le même flux et en l’absence de bruit de détecteur, les deux concepts sont rigoureusement équivalents.

6.2.4.2 Comparaison de QC_{GLAO} avec des critères usuels d’évaluation de la correction d’une AO

Nous venons de démontrer que QC_{GLAO} est un critère dont la minimisation garantit d’atteindre le minimum de la valeur moyenne dans le champ de la variance de la phase résiduelle. Notre objectif est ici de s’assurer qu’un critère sur la phase tel que $\langle \sigma_{res}^2(\alpha) \rangle_{\alpha}$ est un critère pertinent pour les études présentées dans la suite. La figure (6.2) compare donc $\langle \sigma_{res}^2(\alpha) \rangle_{\alpha}$ à la valeur moyenne dans le champ de l’énergie encerclée ou de la FWHM de la PSF corrigée. Le système considéré étant un système de correction partielle (GLAO), nous n’avons pas jugé opportun de considérer le rapport de Strehl. La figure (6.2) présente l’évolution des trois critères selon le nombre d’étoiles guides présentes dans le champ, celles-ci étant uniformément réparties. On note que la tendance d’évolution des trois critères est identique : ils montrent tous une amélioration de la performance moyenne dans le champ en fonction du nombre d’étoiles guides. Cette amélioration se traduit par une décroissance de

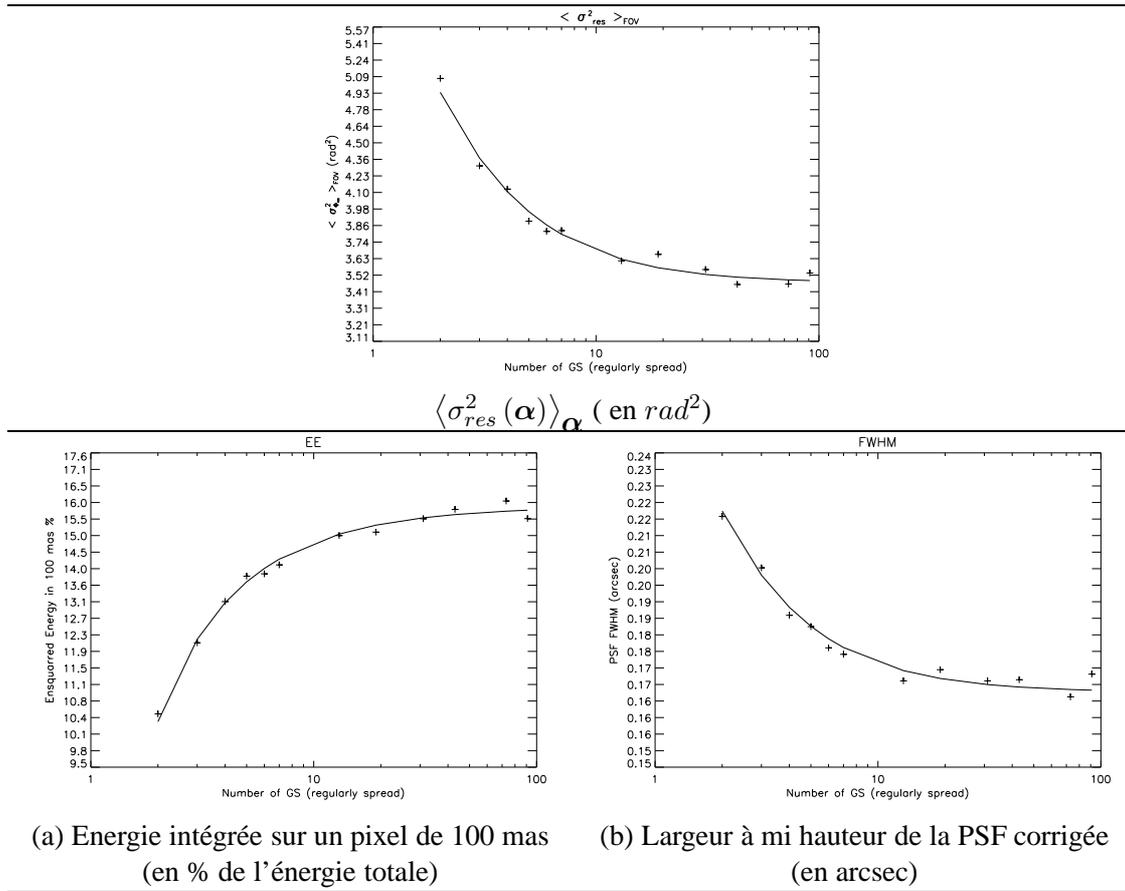


FIG. 6.2 – Comparaison d'un critère sur la phase ($\langle \sigma_{res}^2(\alpha) \rangle_{\alpha}$) avec deux critères usuels de performance en imagerie : l'énergie intégrée dans un pixel et la largeur à mi-hauteur de la PSF.

la variance de phase résiduelle et de la FWHM de la PSF corrigée, et par une croissance de l'énergie intégrée dans 100 mas. En particulier, on note que les effets de saturation apparaissent pour le même nombre d'étoiles guides (pour une vingtaine d'étoiles guides). Cette saturation est due à la turbulence d'altitude, qui n'est pas corrigée par le système GLAO.

Cette étude qualitative montre par l'exemple qu'un critère sur la phase est bien pertinent pour décrire la qualité d'imagerie accessible avec un système d'AO. Ce résultat était au demeurant prévisible, puisque la variance de phase résiduelle quantifie la planéité du front d'onde sur la voie imagerie, c'est-à-dire sa capacité à converger au foyer de l'imageur. Améliorer la planéité de la phase corrigée se traduit donc nécessairement par une meilleure convergence des rayons lumineux au foyer de l'instrument, et donc par une amélioration de la concentration de l'énergie lumineuse au foyer de la voie imagerie (si l'on s'affranchit des aberrations statiques du système).

En particulier, on pourra dans la suite utiliser le critère QC_{GLAO} comme critère de mesure de la performance moyenne d'un système GLAO. Cependant nous souhaitons pour l'instant caractériser la performance d'un composant du GLAO : le bloc d'analyse de front d'onde. On montre dans la partie suivante que l'on peut utiliser un critère encore plus simple pour réaliser cette étude.

6.2.5 Définition d'un sous-critère dépendant spécifiquement du concept d'analyse considéré

Il reste un dernier point à aborder dans la recherche du critère adéquat pour l'étude de performance du SO et du LO. En effet, deux problèmes différents interviennent dans la description de la performance du GLAO par le critère QC_{GLAO} :

- Le problème de la discrétisation du domaine \mathcal{D}_* d'intégration de la phase. Ce point est rattaché à la problématique de la couverture de ciel. Lorsque l'on confronte deux concepts d'analyse différents à la même scène, l'erreur de discrétisation est la même pour les deux concepts. On peut la quantifier en exprimant l'écart entre la moyenne continue de la phase turbulente dans le champ et la moyenne discrète dans les directions des étoiles guides :

$$QC_{discret} = \frac{1}{\mathcal{S}_{\mathcal{P}}} \iint_{\mathcal{P}} \left\langle \left(\Phi_{\widehat{GL}}(\mathbf{r}) - \frac{1}{\mathcal{K}_*} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \phi(\mathbf{r}, \alpha_k) \right)^2 \right\rangle_{time} d^2\mathbf{r} \quad (6.6)$$

où $\Phi_{\widehat{GL}}$ est définie par l'équation (6.2), \mathcal{K}_* est le nombre d'étoiles guides présentes dans le domaine \mathcal{D}_* et les $\{\alpha_k\}$ sont les directions d'analyses définies par ces étoiles. Ainsi défini, $QC_{discret}$ est positif, maximal lorsque l'information sur la phase mesurée est nulle ($\mathcal{K}_* = 0$, pas d'étoile guide) et égal à 0 lorsqu'elle est totale.

- Le problème de la performance du concept d'analyse de front d'onde à proprement parler, lié au premier problème par la contrainte que le nombre d'étoiles guides à gérer fait peser sur le choix du concept. L'étude de ce problème peut se ramener à l'étude du critère QC_{WFSC} :

$$QC_{WFSC} = \frac{1}{\mathcal{S}_{\mathcal{P}}} \iint_{\mathcal{P}} \left\langle \left(\frac{1}{\mathcal{K}_*} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \phi(\mathbf{r}, \alpha_k) - \Phi_{WFSC}(\mathbf{r}) \right)^2 \right\rangle_{time} d^2\mathbf{r} \quad (6.7)$$

Où Φ_{WFSC} est la phase reconstruite à partir des mesures issues du concept d'analyse de front d'onde envisagé.

Il est important de souligner ici que les deux critères $QC_{discret}$ et QC_{WFSC} ne sont pas indépendants l'un de l'autre. La séparation des problèmes que nous proposons ici n'a pas de sens dans le cadre d'une étude globale de la performance d'un système d'AO à large champ. Cependant, des deux sous-critères, seul le second, QC_{WFSC} , dépend du concept d'analyse de front d'onde considéré. On peut donc mener l'étude comparative des concepts *Star Oriented* et *Layer Oriented* à l'aide de ce seul sous-critère.

Notons enfin que l'intérêt de décomposer ainsi le problème n'est pas uniquement théorique : simuler un champ de 8 arcmin par un maillage suffisamment fin pour être représentatif du cas continu demande énormément de ressources informatiques. Nous venons de démontrer qu'il n'est pas utile de travailler sur la totalité du champ : mener l'étude comparative en ne tenant compte que des directions d'analyse suffit. Il sera toutefois absolument indispensable de considérer le critère global QC_{GLAO} lorsque l'on s'intéressera à la performance globale du GLAO (cf. chap. 8).

6.3 Etude de performance des concepts Star Oriented et Layer Oriented

Cette étude de performance repose sur le critère QC_{WFSC} que nous avons défini au paragraphe précédent, pour lequel la grandeur à estimer est la moyenne discrète des phases issues des différentes directions d'analyse. Cette moyenne est appelée dans la suite Φ_{moy} et est définie par :

$$\Phi_{moy}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathcal{K}_*} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \phi_k(\mathbf{r}) \quad (6.8)$$

D'après l'équation (6.7), QC_{WFSC} s'écrit alors :

$$QC_{WFSC} = \frac{1}{\mathcal{S}_P} \iint_{\mathcal{P}} \left\langle (\Phi_{moy}(\mathbf{r}) - \Phi_{WFSC}(\mathbf{r}))^2 \right\rangle_{time} d^2\mathbf{r}$$

Où $\Phi_{WFSC}(\mathbf{r})$ est la phase moyenne reconstruite d'après les mesures obtenues avec le concept d'analyse de front d'onde considéré. En reprenant le formalisme développé aux paragraphes 4.1, 4.2 et 6.2.5, on peut exprimer Φ_{moy} comme le vecteur de ses projections sur les modes reconstruits par le système.

En supposant que le système peut reconstruire des modes de Zernike purs, on peut écrire :

$$\Phi_{moy} = \begin{pmatrix} a_1^{moy} \\ \vdots \\ a_{P_{max}}^{moy} \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{unif} P_{GS} \varphi \quad (6.9)$$

où φ est le vecteur des coefficients de Zernike des phases turbulentes associées à chaque couche atmosphérique et P_{GS} est la matrice de projection de ces phases dans la pupille et dans les directions d'analyse. On introduit ici \mathcal{M}_{unif} , qui réalise l'opération de moyennage sur les directions des étoiles guides. Toutes les étoiles guides ayant la même contribution à Φ_{moy} , \mathcal{M}_{unif} est de la forme :

$$\mathcal{M}_{unif} = \frac{1}{\mathcal{K}_*} \times \left(\underbrace{(\mathbf{Id}_{P_{max}}), \dots, (\mathbf{Id}_{P_{max}})}_{\mathcal{K}_* \text{ fois}} \right) \quad (6.10)$$

où $\mathbf{Id}_{P_{max}}$ est la matrice identité de rang P_{max} . On continuera d'utiliser ce formalisme dans la suite de ce chapitre pour exprimer le critère QC_{WFSC} pour chaque concept, en fonctions des paramètres du problème. Ceci nous permettra de mettre en évidence les points caractéristiques du comportement de chaque concept d'analyse et de proposer dans chaque cas une optimisation de la mesure.

6.3.1 Expression analytique du critère QC_{WFSC}

6.3.1.1 Cas du *Star Oriented*

Comme nous l'avons vu précédemment (§ 4.1), le concept *Star Oriented* permet de récupérer autant de mesures qu'il y a d'étoiles guides, chaque mesure étant la somme des contributions de toutes les couches turbulentes ayant déformé le front d'onde incident et subissant les dégradations dues au bruit de mesure. Si on a \mathcal{K}_* directions d'analyse, on mesure donc :

$$\left\{ \phi_k(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} \varphi_{\ell}(\mathbf{r} - h_{\ell} \boldsymbol{\alpha}_k) + \mathcal{B}ruit_k(\mathbf{r}) \right\}_{k \in [1, \mathcal{K}_*]} \quad (6.11)$$

où $\mathcal{B}ruit_k(\mathbf{r})$ est le terme d'erreur dû au bruit sur la mesure du $k^{\text{ème}}$ WFS. Ce terme d'erreur comprend les bruits de mesure proprement dits, c'est-à-dire les bruits de photons et de détecteur, propagés lors de la reconstruction de la phase et filtrés par la boucle d'optique adaptative. Nous supposons ici que les senseurs de front d'onde ont une réponse linéaire et que leurs bruits sont les seules sources d'erreur dans le processus de mesure : en particulier, la prise en compte des erreurs de sous-modélisation est hors de propos ici. Le vecteur Φ_{mes} des phases mesurées dans les différentes directions d'analyse s'exprime alors :

$$\Phi_{mes} = [\phi_k]_{k=1}^{\mathcal{K}_*} = P_{GS} \boldsymbol{\varphi} + \mathcal{B} \quad (6.12)$$

Si l'on se limite aux reconstituteurs linéaires, les mesures étant indépendantes, il est possible d'estimer Φ_{moy} par une combinaison linéaire des ϕ_k , chaque mesure étant pondérée par un coefficient que l'on peut optimiser, en particulier selon le rapport signal à bruit de la mesure. Ainsi l'estimation de Φ_{moy} faite à partir des mesures du SO peut s'écrire :

$$\Phi_{SO} = \mathcal{M}_{SO} (P_{GS} \boldsymbol{\varphi} + \mathcal{B}) \quad (6.13)$$

Où \mathcal{M}_{SO} est la matrice recombinaison des mesures dans les différentes directions d'analyse. L'erreur sur la mesure de Φ_{moy} s'écrit :

$$\begin{aligned} \Phi_{RESSO} &= \Phi_{moy} - \Phi_{SO} \\ &= (\mathcal{M}_{unif} - \mathcal{M}_{SO}) P_{GS} \boldsymbol{\varphi} - \mathcal{M}_{SO} \mathcal{B} \end{aligned}$$

Le rôle de la matrice \mathcal{M}_{SO} est ici d'exprimer toute la latitude dont on dispose pour utiliser au mieux chaque mesure. Le choix des coefficients de cette matrice permet de faire un compromis entre l'information sur la phase contenue dans les mesures et le bruit qui les dégrade. Une façon simple d'utiliser les mesures du SO est de considérer le cas $\mathcal{M}_{SO} = \mathcal{M}_{unif}$. Ce cas n'est pas optimal, mais son étude est intéressante car elle permet de dégager les comportements types du SO.

Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned}
\Phi_{RESSO} &= -\mathcal{M}_{unif} \mathcal{B} \\
QC_{SO} &= \langle \|\Phi_{RESSO}\|^2 \rangle_{time} \\
&= Tr \{ \mathcal{M}_{unif} \mathcal{C}_B \mathcal{M}_{unif}^t \} \\
QC_{SO} &= \left(\frac{1}{\mathcal{K}_*} \right)^2 \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \sigma_{B_k}^2
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Dans ce cas, la variance de l'erreur commise sur la mesure de la phase Φ_{moy} est égale à la moyenne des variances du bruit sur les mesures. On peut expliciter ces termes en supposant par exemple que la mesure de front d'onde est réalisée avec des senseurs de type Shack-Hartmann et en utilisant les formules classiques d'expression du bruit² [Rousset 1999, Nicolle et al. 2004]. On peut alors écrire :

$$\sigma_{B_k} = \frac{\zeta_k}{\bar{N}_k} + \frac{\xi_k \sigma_{det_k}^2}{\bar{N}_k^2} \tag{6.15}$$

Où \bar{N}_k est le flux moyen par sous-pupille pour le $k^{ème}$ WFS, et ζ_k et ξ_k sont des coefficients associés respectivement au bruit de photons et au bruit de détecteur, dépendant des conditions de la mesure sur le $k^{ème}$ WFS (échantillonnage du détecteur, temps d'intégration, algorithme de mesure... voir chap. 10) et des paramètres de la boucle d'AO (propagation du bruit, gain). En supposant d'une part que le filtrage de la boucle et la propagation du bruit sur la phase reconstruite sont identiques pour tous les WFSs, et d'autre part que ces WFSs sont tous identiques entre eux, on peut exprimer globalement QC_{SO} :

$$\begin{aligned}
QC_{SO} &= \left(\frac{1}{\mathcal{K}_*} \right)^2 \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \left(\frac{\zeta}{\bar{N}_k} + \frac{\xi \sigma_{det}^2}{\bar{N}_k^2} \right) \\
QC_{SO} &= \frac{\zeta}{\mathcal{K}_*} \left(\frac{1}{\mathcal{K}_*} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} (\bar{N}_k)^{-1} \right) + \frac{\xi \sigma_{det}^2}{\mathcal{K}_*} \left(\frac{1}{\mathcal{K}_*} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} (\bar{N}_k)^{-2} \right) \\
\text{Soit finalement : } QC_{SO} &= \underbrace{\frac{\zeta}{\mathcal{K}_*} \left\langle \frac{1}{\bar{N}_k} \right\rangle_{\mathcal{K}_*}}_{\text{bruit de photons}} + \underbrace{\frac{\xi \sigma_{det}^2}{\mathcal{K}_*} \left\langle \frac{1}{\bar{N}_k^2} \right\rangle_{\mathcal{K}_*}}_{\text{bruit de détecteur}}
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Où $\langle \cdot \rangle_{\mathcal{K}_*}$ représente la moyenne arithmétique sur les directions d'analyse de la quantité incluse. On note que dans le concept SO, la qualité de l'estimation de la phase *Ground Layer* dépend fortement du flux incident sur chaque WFS. Cette expression souligne particulièrement que les étoiles guides de faible luminosité dégradent l'estimation de phase au mieux en raison inverse de leur flux, voire en raison inverse du carré de leur flux si les capteurs photoniques des WFSs considérés sont bruyants (CCD). Cette grande sensibilité au bruit constitue le principal inconvénient du concept SO, et l'on a vu que c'est précisément pour cette raison que le concept LO suscite un grand intérêt. Nous allons maintenant caractériser ses performances.

²On trouvera plus de précision sur la sensibilité au bruit de l'analyseur SH dans la partie IV de ce manuscrit.

6.3.1.2 Cas du *Layer Oriented*

Dans le cas du *Layer Oriented* maintenant, on a vu au paragraphe (4.2) qu'une seule mesure de phase est réalisée pour chaque couche à corriger. Dans le cadre simplifié du GLAO que nous traitons ici, cela signifie que la mesure de front d'onde utilise un unique senseur, conjugué à la pupille du télescope. Mais comme précédemment, la phase mesurée est la moyenne des phases incidentes pondérées par le flux des étoiles guides correspondantes. La phase mesurée par le LO dans le cadre d'un GLAO s'écrit alors (cf. eq. 4.17) :

$$\Phi_{LO}(\mathbf{r}) = \frac{\sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} (\bar{N}_k \times \phi_k(\mathbf{r}))}{\sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \bar{N}_k} + \mathcal{B}_{\text{bruit}_{\bar{N}_{tot}}}(\mathbf{r})$$

où les \bar{N}_k sont les flux moyens des étoiles guides et \bar{N}_{tot} est le flux total disponible : $\bar{N}_{tot} = \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \bar{N}_k$. On remarque que le bruit sur la phase reconstruite est précisément fonction du flux total. A l'instar de l'approche suivie pour le SO, cette équation peut s'écrire :

$$\Phi_{LO} = \mathcal{M}_{LO} \mathbf{P}_{GS} \boldsymbol{\varphi} + \mathcal{B}(\bar{N}_{tot}) \quad (6.17)$$

$$\text{avec cette fois : } \mathcal{M}_{LO} = \left(\left(\frac{\bar{N}_1}{\bar{N}_{tot}} \mathbf{Id}_{P_{max}} \right) \cdots \left(\frac{\bar{N}_{\mathcal{K}_*}}{\bar{N}_{tot}} \mathbf{Id}_{P_{max}} \right) \right) \quad (6.18)$$

On note que la matrice de recombinaison \mathcal{M}_{LO} ne s'applique pas au vecteur bruit puisque la recombinaison des phases a lieu avant le processus de mesure.

QC_{LO} s'exprime donc (Eq. 6.8 et 6.17) :

$$QC_{LO} = \langle \| (\mathcal{M}_{unif} - \mathcal{M}_{LO}) \mathbf{P}_{GS} \boldsymbol{\varphi} - \mathcal{B}(\bar{N}_{tot}) \|^2 \rangle_{time}$$

$$\text{Soit : } QC_{LO} = Tr \{ \Delta \mathbf{P}_{GS} \mathbf{C}_{\varphi} \mathbf{P}_{GS}^t \Delta^t + \mathcal{C}_B \} \quad (6.19)$$

où la matrice Δ est définie par $\Delta = (\mathcal{M}_{unif} - \mathcal{M}_{LO})$ et caractérise les écarts de flux des étoiles guides par rapport au flux moyen :

$$\Delta = \frac{1}{\bar{N}_{tot}} \left(\left((\langle \bar{N}_{\ell} \rangle_{\mathcal{K}_*} - \bar{N}_k) \mathbf{Id}_{P_{max}} \right)_{k=1} \cdots \left((\langle \bar{N}_{\ell} \rangle_{\mathcal{K}_*} - \bar{N}_k) \mathbf{Id}_{P_{max}} \right)_{k=\mathcal{K}_*} \right)$$

$$\Delta = \frac{1}{\bar{N}_{tot}} \left((\Delta_k \mathbf{Id}_{P_{max}})_{k=1} \cdots (\Delta_k \mathbf{Id}_{P_{max}})_{k=\mathcal{K}_*} \right)$$

où $\langle \bar{N}_{\ell} \rangle_{\mathcal{K}_*}$ est la moyenne du flux des GS : $\langle \bar{N}_{\ell} \rangle_{\mathcal{K}_*} = (\bar{N}_{tot} / \mathcal{K}_*)$ et Δ_k l'écart de flux de la $k^{\text{ème}}$ GS par rapport à la moyenne : $\Delta_k = (\langle \bar{N}_{\ell} \rangle_{\mathcal{K}_*} - \bar{N}_k)$.

L'équation (6.19) peut s'exprimer de façon plus lisible en réduisant les différents produits matriciels et en exprimant $\sigma_{\mathcal{B}_{\bar{N}_{tot}}}^2$ comme la somme des contributions du bruit de photons et du bruit de détecteur.

On obtient finalement :

$$QC_{LO} = \underbrace{\left(\frac{1}{\overline{N}_{tot}}\right)^2 \left(\sum_{j=1}^{\mathcal{K}_*} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \Delta_k \Delta_j \mathcal{C}_{jk}\right)}_{\text{Turbulence}} + \underbrace{\frac{\zeta}{\overline{N}_{tot}}}_{\text{Bruit de photons}} + \underbrace{\frac{\xi \sigma_{det}^2}{\overline{N}_{tot}^2}}_{\text{Bruit de détecteur}} \quad (6.20)$$

Dans cette équation, $\mathcal{C}_{jk} = \sum_{p=1}^{P_{max}} \langle a_p(\alpha_j) a_p(\alpha_k) \rangle_{time}$ est la covariance des phases mesurées dans la pupille dans les directions α_j et α_k .

On retrouve dans l'équation (6.20) la dépendance aux bruits de photons et de détecteur de la réponse du LO, mais celle-ci est fonction du flux total disponible. Cette contribution des bruits est donc nécessairement plus faible que dans le cas du SO. Cependant, l'erreur d'estimation de ϕ_{moy} en concept LO dépend également des écarts de flux entre les étoiles guides et du profil de turbulence (premier terme de eq. 6.20). Ce terme est une erreur additionnelle due au fait que la phase mesurée est une moyenne *pondérée* des phases issues des différentes directions d'analyse, les coefficients de pondération étant déterminés par le flux des étoiles guides correspondantes. Ce terme est nul si toutes les étoiles ont le même flux (car alors $\Delta_k = 0 \forall k$) et/ou si toute la turbulence est localisée dans la pupille : alors $\mathcal{C}_{jk} = \sigma_{turb}^2 \forall (j, k)$ et par définition $\left(\sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \Delta_k\right) = 0$.

Le gain obtenu sur le bruit de mesure du LO est ainsi tempéré par un terme de dépendance à la turbulence d'altitude. Il est de première importance de quantifier ce terme d'erreur pour estimer l'apport d'une analyse de front d'onde en LO par rapport au cas SO. Nous présentons dans le paragraphe suivant une analyse quantitative des performances des deux concepts, basée sur la simulation numérique que nous avons présentée au paragraphe 6.2.4.

6.3.2 Evaluation des performances des concepts SO et LO

6.3.2.1 Conditions de l'étude

Nous avons utilisé au paragraphe 6.2.4 un modèle numérique simplifié de l'analyse et de la reconstruction du GLAO pour discuter de la pertinence d'un critère de performance attaché à la phase corrigée. Nous reprenons ici ce modèle et l'utilisons pour mener l'étude des deux concepts d'analyse. Les conditions sont identiques à celles de la partie (6.2.4), à ceci près qu'il est cette fois indispensable de prendre en compte les caractéristiques des étoiles guides.

En effet l'étude comparative du *Star Oriented* et du *Layer Oriented* prend tout son sens en présence d'étoiles guides naturelles, car les étoiles brillantes sont rares dans le ciel, et les écarts de magnitude entre les étoiles peuvent être considérables. Or on vient de démontrer que ces deux aspects ont une influence sur les performances des concepts. On a donc étudié les performances du *Star Oriented* et du *Layer Oriented* en générant des champs stellaires pour trois latitudes galactiques différentes (Latitudes 30°N, 60°N et 90°N). A chaque latitude galactique, un millier de champs stellaires ont été générés, en utilisant le modèle statistique de population galactique présenté en partie II [Reylé et al. 2004]. Les performances fournies ici sont les performances moyennes observées sur l'ensemble des tirages.

Pour chaque champ stellaire, nous avons inclus les étoiles guides dans le processus d'analyse de front d'onde dans l'ordre croissant de leur magnitude, sans tenir compte de leur répartition dans le champ. Cette omission est justifiée car nous ne nous intéressons pas à la performance globale du GLAO mais uniquement à la performance relative des concepts SO et LO. La non prise en compte de la position relative des étoiles guides est justifiée également par le choix de travailler avec un modèle simplifié d'atmosphère. On se place ici dans le cas d'un modèle de turbulence à deux couches, caractérisé par un seeing de 1 arcsec, 80 % de la turbulence étant localisés dans le plan de la pupille et les 20 % restants étant situés à 10 km d'altitude. Avec une pupille de 8m de diamètre on peut, sans influence notable sur le résultat de l'étude, faire l'approximation que la turbulence de la couche d'altitude est totalement décorrélée d'une direction d'analyse à l'autre. Cette étude est donc menée avec l'hypothèse que la turbulence est totalement décorrélée spatialement dans la couche d'altitude. Ainsi, les coefficients de covariance C_{jk} de l'équation (6.20) s'expriment : $C_{jk} = \sigma_{grd}^2 + \delta_{jk}\sigma_{alt}^2$, σ_{grd}^2 (respectivement σ_{alt}^2) étant la variance de la phase turbulente au sol (resp. en altitude) et δ_{jk} étant le symbole de Krönecker ($\delta_{jk} = 1$ si $j = k$, nul sinon). De fait, l'équation (6.20) est considérablement simplifiée :

$$QC_{LO} = \mathcal{K}_* \sigma_{alt}^2 \cdot \frac{\left(\sigma_{N_k}^2\right)_{\mathcal{K}_*}}{\overline{N}_{tot}^2} + \frac{\zeta}{\overline{N}_{tot}} + \frac{\xi \sigma_{det}^2}{\overline{N}_{tot}^2} \quad (6.21)$$

où $\left(\sigma_{N_k}^2\right)_{\mathcal{K}_*}$ est la variance du flux stellaire calculé sur l'échantillon des \mathcal{K}_* étoiles considérées et \overline{N}_{tot} est le flux total disponible pour l'analyse de front d'onde. Enfin, pour mener à bien cette étude, nous avons considéré que les deux concepts incluent des senseurs de front d'onde tous strictement identiques entre eux. En particulier, il n'y a aucune optimisation (du gain, de l'échantillonnage spatial ou temporel de la turbulence) en fonction du flux des étoiles guides. Ce dernier point est clairement défavorable au Star Oriented, mais se révèle utile dans cette première approche pour cerner les comportements des deux concepts.

6.3.2.2 Etude de performance

La figure (6.3) montre l'évolution de QC_{SO} et QC_{LO} en fonction du nombre d'étoiles guides pour des champs stellaires correspondant à des régions proches de l'équateur galactique (Latitude : 30°N, Longitude : 0°). On incorpore les étoiles guides au processus d'analyse par ordre croissant de magnitude : lorsqu'on considère 4 étoiles, ce sont les quatre plus brillantes du champ, puis on ajoute au fur et à mesure des étoiles de plus en plus faibles. En regard de l'axe des abscisses, l'axe secondaire placé en haut des graphiques donne la moyenne arithmétique sur les tirages de champs stellaires de la magnitude limite des étoiles guides³. On considère que 4 étoiles guides sont indispensables pour garantir une couverture minimale du champ. De plus, pour des raisons de complexité du système, on se limite à 20 étoiles guides au maximum.

Les courbes de la figure (6.3) montrent l'évolution de QC_{SO} et QC_{LO} , soit en présence du seul bruit de photon, soit en ajoutant à ce bruit de photons un faible bruit de détecteur. Pour le Layer Oriented, on a tracé deux courbes : celle de la performance réelle du LO, et une courbe présentant la performance qu'aurait le LO si l'erreur liée à la turbulence d'altitude (premier terme de droite de

³Deux approches sont envisageables pour ce type d'études. Dans celle qui est proposée ici, on travaille à nombre d'étoiles fixe. La magnitude limite des \mathcal{K}_* étoiles sélectionnées varie alors selon la scène observée. Dans l'article présenté plus loin, on a travaillé à magnitude limite donnée. C'est alors le nombre d'étoiles guides qui peut varier selon la scène. Toutefois ces deux approches donnent des résultats tout à fait similaires.

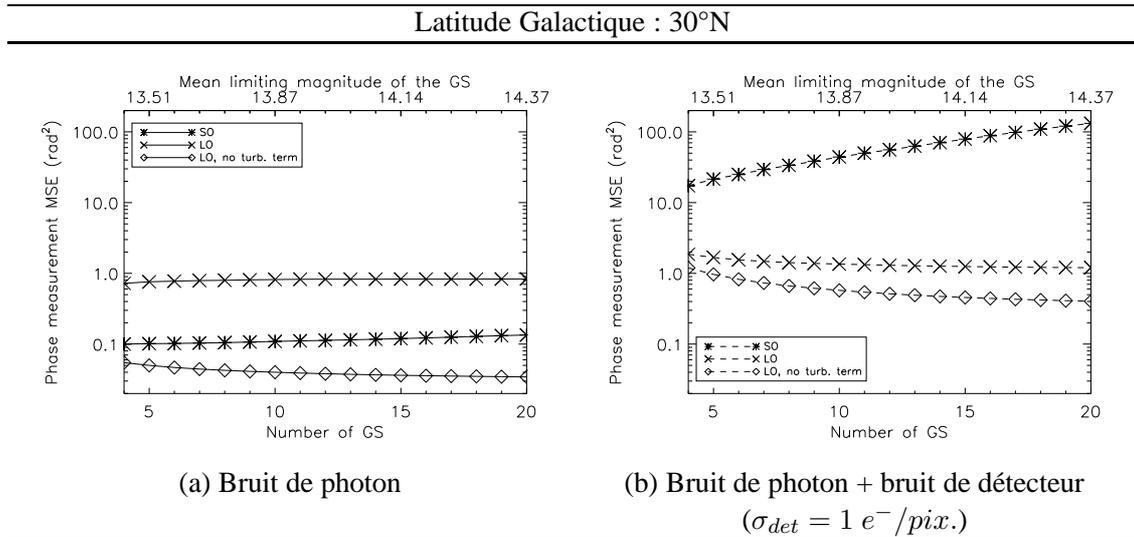


FIG. 6.3 – Performance du *Star Oriented* et du *Layer Oriented* en fonction du nombre d'étoiles.

l'équation (6.21)) était nulle. Cette courbe représente la performance ultime du LO, que l'on ne peut atteindre que si toute la turbulence est localisée dans la pupille, ou si toutes les étoiles ont le même flux (cf. § 6.3.1.2). La différence entre cette courbe et celle qui correspond à l'erreur totale du LO permet d'évaluer l'importance du terme lié à la turbulence d'altitude dans la réponse du LO.

Les deux graphiques de la figure (6.3) permettent de dégager les tendances de comportement des concepts SO et LO. Ainsi, comme l'analyse de l'équation (6.16) nous avait permis de le prévoir, la performance du SO est dégradée lorsque l'on augmente le nombre d'étoiles utilisées pour l'analyse de front d'onde, car on prend en compte des étoiles de plus en plus faibles. De plus la performance du SO est fortement dégradée en présence de bruit de détecteur : à nombre d'étoiles guides fixé, la variance de phase résiduelle du SO est multipliée par 100 par l'ajout d'un faible bruit de détecteur (partie droite de la figure 6.3). On remarque également que la dégradation de la performance en fonction du nombre d'étoiles guides est fortement accentuée.

En ce qui concerne le LO, on remarque que l'erreur due à la propagation des bruits de photons et de détecteur (courbe \diamond) diminue lorsqu'on augmente le nombre d'étoiles guides : plus on prend en compte d'étoiles, plus le flux total augmente et meilleur est le rapport signal à bruit de la mesure. Cependant l'erreur totale du LO (courbe \times) subit peu cette influence. En présence du seul bruit de photons, la performance du LO est en effet dominée par le terme lié à la turbulence d'altitude. Ce terme, lui, croît légèrement lors de l'ajout de nouvelles étoiles guides, du fait des écarts de flux entre les directions d'analyse. En présence de bruit de détecteur, cette influence est toujours sensible et modère significativement le gain en performance apporté par l'ajout d'étoiles guides supplémentaires.

Ces résultats sont sensibles à la statistique des étoiles guides disponibles. La figure (6.4) permet de s'en rendre compte en présentant les mêmes résultats pour des latitudes galactiques plus élevées.

Le passage d'une latitude galactique de 30°N à 60°N ou 90°N s'accompagne d'une raréfaction des étoiles en général, et des étoiles très brillantes en particulier : la moyenne sur les champs considérés

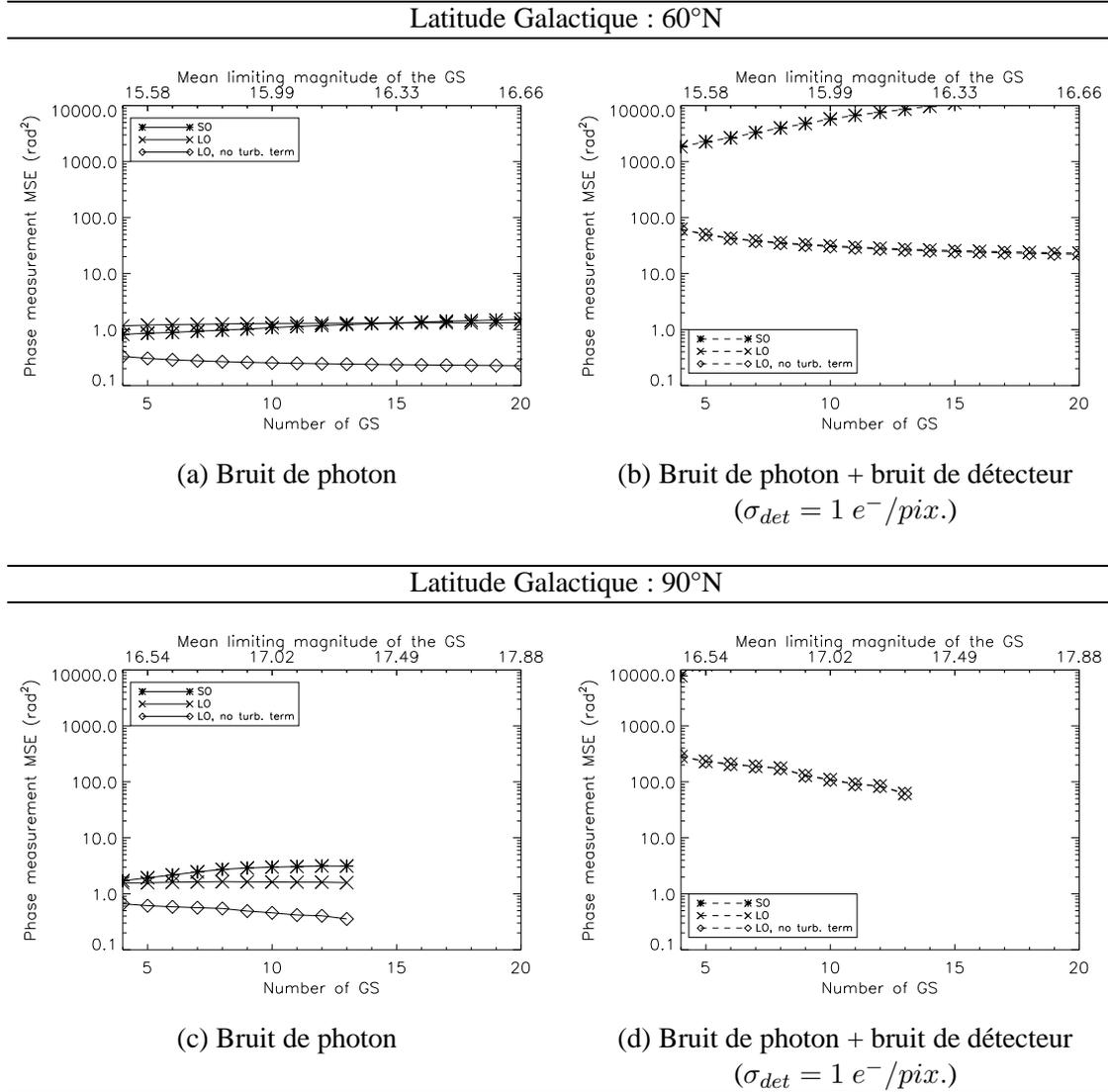


FIG. 6.4 – Performance du *Star Oriented* et du *Layer Oriented* en fonction du nombre d'étoiles guides pour les latitudes galactiques plus élevées.

de la magnitude limite des quatre premières étoiles passe de $R \approx 13.5$ à 30°N à $R \approx 15.5$ pour 60°N et $R \approx 16.5$ pour 90°N ⁴. De plus, pour 90°N de latitude, plus de 50% des champs stellaires générés ont moins de 13 étoiles. On s'est abstenu de représenter les résultats des 2 concepts au delà de 13 étoiles guides pour cette raison. Les conséquences pour l'analyse de front d'onde de la modification de la statistique des étoiles guides sont de deux ordres :

- La diminution du flux moyen par étoile rend le SO très sensible au bruit, y compris en régime de bruit de photons. Notons qu'au pôle galactique et en présence de bruit de détecteur (fig. 6.4-d), QC_{SO} est toujours supérieur à 10^4 rad^2 , ce qui signifie que les mesures sont inutilisables.
- La diminution du flux total dans le champ rend le LO plus sensible au bruit. Ainsi, en présence de bruit de détecteur, il passe d'un régime dominé par l'erreur liée à la turbulence d'altitude (LAT 30°N) à un régime dominé par le bruit (LAT 60°N et 90°N). La dégradation de performance qui s'en suit est toutefois bien moindre que celle du SO : elle lui reste inférieure d'un facteur 10.

Ces résultats permettent de souligner deux points clés dans la recherche de performance pour le SO et le LO :

- En régime de bruit de photons, la performance du *Layer Oriented* est principalement dégradée par le terme lié à la turbulence d'altitude identifié dans l'équation (6.21), au point que ces performances sont nettement moins bonnes que celles du SO lorsque les étoiles brillantes sont abondantes (LAT 30°N). Comme on l'a vu lors de l'analyse de la relation (6.21), ce problème est précisément dû à la coexistence dans le champ d'étoiles de magnitudes très différentes. L'amélioration des performances du LO passera donc forcément par la maîtrise de ce problème.
- Le *Star Oriented* est lui dominé par le bruit. Il est indispensable d'améliorer la gestion de ses mesures, en particulier lorsque des détecteurs bruyants sont considérés⁵.

Pour rapprocher les performances du SO de celles du LO, il a été proposé [Bello et al. 2003] de combiner ses mesures afin de reconstruire numériquement la phase mesurée par un LO. On fait le point sur l'intérêt de ce mode de reconstruction dans la partie suivante.

6.3.3 Le Numerical Layer Oriented (NLO)

Le principe du *Numerical Layer Oriented* (NLO) est de reconstituer la phase reconstruite par un LO à partir des mesures indépendantes d'un SO [Bello et al. 2003]. Pratiquement, la matrice \mathcal{M}_{SO} de l'équation (6.13) est fixée de façon à correspondre à la matrice \mathcal{M}_{LO} de l'équation (6.17). Cependant, ce remplacement de matrice opère sur les mesures bruitées :

$$\Phi_{NLO} = \mathcal{M}_{LO} (\mathbf{P}_{GS}\varphi + \mathcal{B}) \quad (6.22)$$

En posant comme pour le LO $\bar{N}_{tot} = \sum_{\ell=1}^{\mathcal{K}_*} \bar{N}_\ell$, le flux total disponible dans le champ, $\langle \bar{N}_\ell \rangle_{\mathcal{K}_*} = \bar{N}_{tot}/\mathcal{K}_*$, le flux moyen par étoile guide, et $\Delta_k = \left(\langle \bar{N}_\ell \rangle_{\mathcal{K}_*} - \bar{N}_k \right)$, le critère QC_{WFSC} s'écrit :

$$QC_{NLO} = \left(\frac{1}{\bar{N}_{tot}} \right)^2 \sum_{j=1}^{\mathcal{K}_*} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \Delta_j \Delta_k C_{jk} + \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \left(\frac{\bar{N}_k}{\bar{N}_{tot}} \right)^2 \sigma_{B_k}^2 \quad (6.23)$$

⁴Notons qu'une augmentation de 3 points de la magnitude correspond à une chute de 93 % du flux d'une étoile.

⁵On comprend également tout l'intérêt que l'on aura à rechercher des technologies de senseurs de fronts d'onde à faible bruit.

Où $\mathcal{C}_{jk} = \int \int_{\mathcal{P}} \langle \phi_j(\mathbf{r}) \cdot \phi_k(\mathbf{r}) \rangle_{time} d^2\mathbf{r}$ est la covariance dans la pupille des phases en provenance des directions α_j et α_k . On retrouve donc le même terme d'erreur lié à la turbulence d'altitude que dans le cas du LO. La différence entre le LO et le NLO tient en fait uniquement à la propagation du bruit de mesure. Explicitons maintenant ce terme de bruit :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \left(\left(\frac{\overline{N}_k}{\overline{N}_{tot}} \right)^2 \times \sigma_{B_k}^2 \right) &= \overbrace{\frac{1}{\overline{N}_{tot}^2} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \left(\overline{N}_k^2 \times \frac{\zeta}{\overline{N}_k} \right)}^{\text{bruit de photons}} + \overbrace{\frac{1}{\overline{N}_{tot}^2} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \left(\overline{N}_k^2 \times \frac{\xi \sigma_{det}^2}{\overline{N}_k} \right)}^{\text{bruit de détecteur}} \\ &= \frac{\zeta}{\overline{N}_{tot}^2} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} (\overline{N}_k) + \frac{\xi \sigma_{det}^2}{\overline{N}_{tot}^2} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} (1) \\ &= \frac{\zeta}{\overline{N}_{tot}} + \mathcal{K}_* \cdot \left(\frac{\xi \sigma_{det}^2}{\overline{N}_{tot}^2} \right) \end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$QC_{NLO} = \underbrace{\left(\frac{1}{\overline{N}_{tot}} \right)^2 \sum_{j=1}^{\mathcal{K}_*} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \Delta_j \Delta_k \mathcal{C}_{jk}}_{\equiv QC_{LO, phot}} + \frac{\zeta}{\overline{N}_{tot}} + \mathcal{K}_* \cdot \frac{\xi \sigma_{det}^2}{\overline{N}_{tot}^2} \quad (6.24)$$

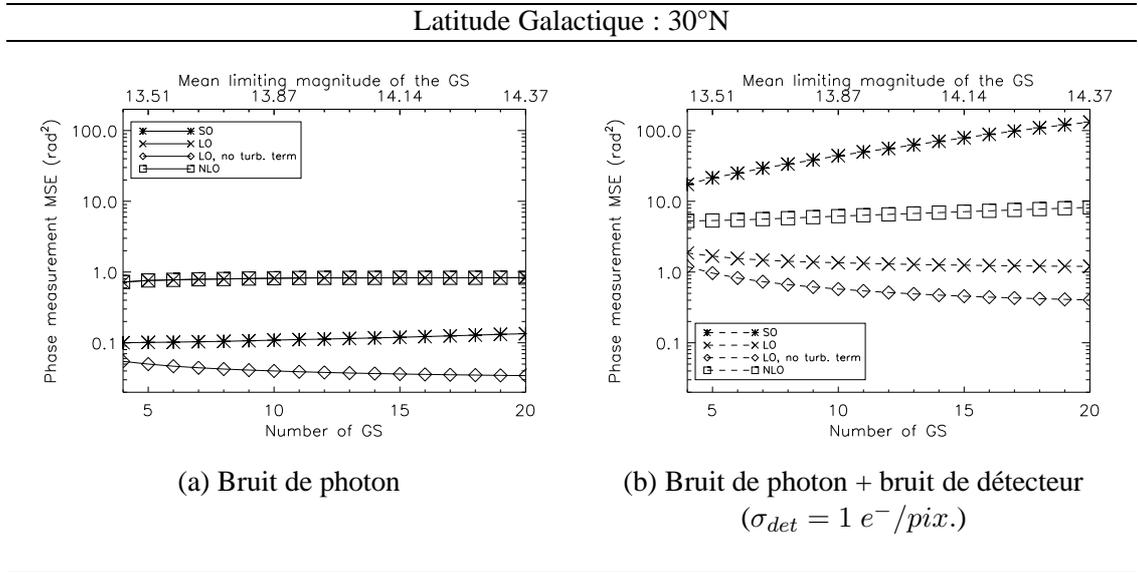


FIG. 6.5 – Comparaison du *Numerical Layer Oriented* avec le *Star Oriented* et le *Layer Oriented* en fonction du nombre d'étoiles guides.

Selon l'équation(6.24), il est toujours possible, en présence du seul bruit de photons, d'obtenir des performances identiques à celles du LO avec un SO. Il suffit de pondérer les mesures de chaque WFS par le flux de l'étoile guide correspondante. La partie gauche de la figure (6.5), obtenue dans les mêmes conditions que les figures (6.3) et (6.4), montre que c'est bien le cas : les performances du

LO et du NLO sont rigoureusement identiques en l'absence de bruit de détecteur. Cela ne représente malheureusement pas une amélioration dans le cas où ce dernier est limité par la turbulence d'altitude, comme présenté ici.

Par contre, en présence de bruit de détecteur, l'équation (6.24) montre que la composante liée au bruit de l'erreur de mesure du NLO correspond à celle du LO *multipliée par le nombre d'étoiles guides*. On retrouve ce comportement dans la partie droite de la figure (6.5). La reconstruction NLO apporte au SO un gain sensible en performance en présence de bruit de détecteur, bien que ce gain ne soit pas suffisant pour atteindre les performances du LO. Cependant, choisir pour coefficients de pondération des phases mesurées la fraction du flux total disponible par direction d'analyse relève d'un choix *ad-hoc*, pas nécessairement optimal. On présente dans le paragraphe suivant la détermination optimale des coefficients de pondération pour le SO ainsi qu'une procédure d'optimisation du LO.

6.4 Optimisation des concepts Star Oriented et Layer Oriented

Cette section explique et développe sous une forme légèrement différente les résultats présentés dans un article publié dans JOSAA [Nicolle et al. 2006]. L'objectif de ce remaniement est simplement de permettre une reprise et une comparaison de ces résultats avec ceux qui seront présentés dans le chapitre 8. L'article publié est présenté à la toute fin du chapitre.

6.4.1 Optimisation de l'utilisation des mesures du SO :

6.4.1.1 Détermination analytique des coefficients optimaux :

On cherche à utiliser de façon optimale chaque mesure de phase du SO de façon à minimiser l'erreur de mesure de Φ_{moy} . Cette optimisation est obtenue par l'ajustement des coefficients de la matrice \mathcal{M}_{SO} de l'équation (6.13). Soit Φ_{OSO} le vecteur des coefficients de Zernike de la phase optimale reconstruite à partir des \mathcal{K}_* mesures indépendantes du SO. En reprenant le même formalisme que pour le paragraphe (6.3.1), on a :

$$\Phi_{OSO} = \mathcal{M}_{OSO} (\mathbf{P}_{GS}\varphi + \mathcal{B})$$

Le critère QC_{WFSC} s'exprime alors :

$$QC_{OSO} = \langle \|\mathcal{M}_{unif}\mathbf{P}_{GS}\varphi - \mathcal{M}_{OSO}(\mathbf{P}_{GS}\varphi + \mathcal{B})\|^2 \rangle_{time}$$

$$\text{Soit : } QC_{OSO} = \text{Tr} \{ (\mathcal{M}_{unif} - \mathcal{M}_{OSO}) \mathbf{P}_{GS}\mathcal{C}_\varphi \mathbf{P}_{GS}^t (\mathcal{M}_{unif} - \mathcal{M}_{OSO})^t + \mathcal{M}_{OSO}\mathcal{C}_B\mathcal{M}_{OSO}^t \} \quad (6.25)$$

La combinaison linéaire des phases individuelles est optimale lorsque la matrice \mathcal{M}_{OSO} est choisie de façon à minimiser QC_{OSO} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial QC_{OSO}}{\partial \mathcal{M}_{OSO}} &= 2 (\mathcal{M}_{OSO} (\mathbf{P}_{GS}\mathcal{C}_\varphi \mathbf{P}_{GS}^t + \mathcal{C}_B) - \mathcal{M}_{unif}\mathbf{P}_{GS}\mathcal{C}_\varphi \mathbf{P}_{GS}^t) \\ \frac{\partial QC_{OSO}}{\partial \mathcal{M}_{OSO}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \mathcal{M}_{OSO} &= \mathcal{M}_{unif}\mathbf{P}_{GS}\mathcal{C}_\varphi \mathbf{P}_{GS}^t (\mathbf{P}_{GS}\mathcal{C}_\varphi \mathbf{P}_{GS}^t + \mathcal{C}_B)^{-1} \end{aligned} \quad (6.26)$$

La matrice \mathcal{M}_{OSO} étant différente de \mathcal{M}_{unif} (sauf en l'absence de bruit), QC_{OSO} a la même structure que QC_{LO} et QC_{NLO} : on retrouve un terme d'erreur lié à la turbulence et un terme lié aux bruits de photons et de détecteur. Il existe toutefois deux différences majeures entre \mathcal{M}_{OSO} et par exemple \mathcal{M}_{NLO} (cf. § 6.3.3) :

- Les termes de la matrice \mathcal{M}_{OSO} réalisent le compromis optimal entre l'information sur la turbulence apportée par un élément du vecteur Φ_{mes} et le bruit qui l'affecte.
- On n'a fait aucune hypothèse préalable sur la structure de la matrice \mathcal{M}_{OSO} . En effet, dans les cas du LO et du NLO, on applique le même coefficient de pondération à toutes les composantes modales de Φ_{mes} issues d'une même direction d'analyse. Ici, on propose une optimisation mode à mode du calcul de la phase moyenne ⁶.

Cependant, il est possible d'imposer une structure identique à celle de \mathcal{M}_{LO} et \mathcal{M}_{NLO} . Dans ce cas la relation 6.25 se simplifie :

$$\begin{aligned} \text{Si } \mathcal{M}_{OSO} &= ((\eta_1 \mathbf{Id}_{P_{max}}) \cdots (\eta_{\mathcal{K}_*} \mathbf{Id}_{P_{max}})) \\ \text{Alors } QC_{OSO} &= \sum_{j=1}^{\mathcal{K}_*} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \left(\frac{1}{\mathcal{K}_*} - \eta_j \right) \left(\frac{1}{\mathcal{K}_*} - \eta_k \right) C_{jk} + \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \eta_k^2 \sigma_{B_k}^2 \end{aligned} \quad (6.27)$$

où $C_{jk} = \iint_{PUP} \langle \phi_j(\mathbf{r}) \phi_k(\mathbf{r}) \rangle_{time} d\mathbf{r}$ est la covariance des phases mesurées dans la pupille dans les directions α_j et α_k et les η_j sont les coefficients de l'optimisation.

Enfin, notons que l'optimisation proposée ici est un processus entièrement numérique. La matrice \mathcal{M}_{OSO} peut être calculée lors de la phase d'initialisation de la boucle d'optique adaptative, en utilisant des modèles du système (en particulier des WFSs) et de la turbulence. \mathcal{M}_{OSO} peut ensuite être intégrée à la phase de reconstruction. Reste à voir l'impact de cette optimisation sur la performance du SO.

6.4.1.2 Comparaison des performances du *Star Oriented* et du *Star Oriented* optimisé

On reprend les conditions utilisées précédemment pour étudier les performances du SO (cf. § 6.3.2). On s'est placé ici dans le cas simplifié d'une optimisation par étoile guide (et non mode à mode). C'est donc l'équation 6.27 que nous avons minimisée. La figure 6.6 montre le gain en performance apporté par l'optimisation des coefficients η_k . Si le gain de l'optimisation paraît faible en présence du seul bruit de photons, il est sensible en présence de bruit de détecteur. Le SO optimisé est meilleur que le NLO, et a même une performance de l'ordre de celle du LO (cf. fig. 6.3-b). De plus la gestion des mesures est telle que la dégradation des performances observée précédemment lors de l'ajout d'étoiles de faible flux est maîtrisée.

⁶A ne pas confondre avec l'optimisation modale de la mesure, qui en AO désigne usuellement l'optimisation du gain de la boucle d'AO par mode en fonction du rapport signal à bruit de la mesure et de l'évolution temporelle de la turbulence [Gendron 1995].

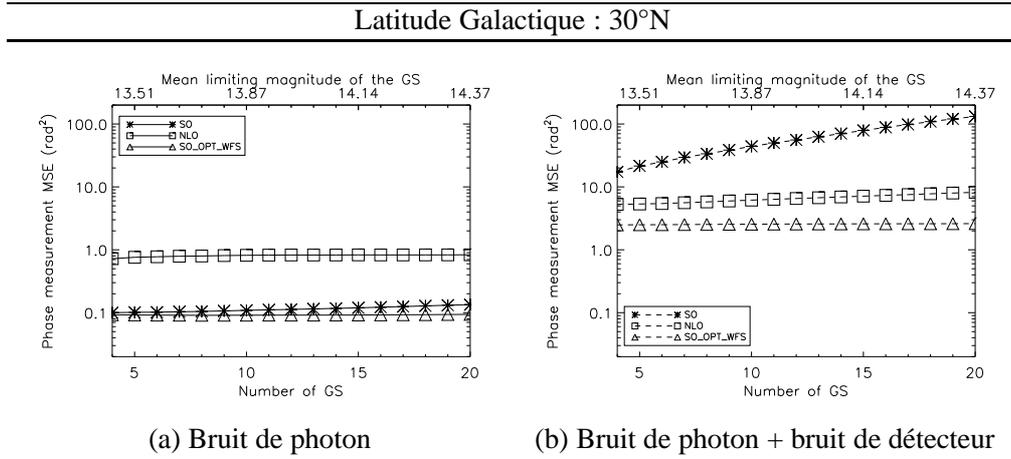


FIG. 6.6 – Comparaison du SO optimisé avec le *Numerical Layer Oriented* et le *Star Oriented* en fonction du nombre d'étoiles guides.

6.4.2 Optimisation de l'utilisation des mesures du LO :

6.4.2.1 Détermination des coefficients optimaux :

Contrairement à ce que nous avons observé pour le *Star Oriented*, c'est ici le terme lié à la turbulence d'altitude qui domine et justifie la recherche d'un traitement optimal de la mesure. Pour atténuer cette erreur (premier terme de l'équation 6.20) il faut limiter les écarts entre les coefficients de la combinaison linéaire des phases issues des différentes directions d'analyse. La difficulté est que dans le cas du *Layer Oriented* la combinaison linéaire des phases incidentes est inhérente au processus de la mesure : les coefficients de la combinaison sont définis par la fraction du flux total provenant de chaque direction d'analyse. Le seul moyen dont on dispose pour optimiser le LO est donc d'atténuer le flux des étoiles guides les plus brillantes *avant* la mesure, afin de limiter les écarts de flux entre les directions d'analyse.

Cependant cette atténuation des étoiles brillantes diminue le flux total disponible pour la mesure et augmente en conséquence la part des bruits de photon et de détecteur dans l'erreur d'estimation. On peut même montrer qu'aligner le flux de toutes les étoiles guides sur celui de la moins lumineuse conduit nécessairement à une performance moins bonne que celle du SO.

Considérons en effet un lot de \mathcal{K}_* étoiles, caractérisé par leur flux $\{\bar{N}_k\}_{k=1}^{\mathcal{K}_*}$ et le flux total $\bar{N}_{tot} = \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \bar{N}_k$. Appelons \bar{N}_{min} le flux de l'étoile la plus faible. Alors, par définition, $\forall k, \bar{N}_k \geq \bar{N}_{min}$ et concernant le terme de bruit de photons, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\bar{N}_k &\geq \bar{N}_{min} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{\bar{N}_k} &\leq \frac{1}{\bar{N}_{min}} \\
\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \frac{1}{\bar{N}_k} &\leq \frac{\mathcal{K}_*}{\bar{N}_{min}} \\
\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{\mathcal{K}_*^2} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \frac{1}{\bar{N}_k}}_{\text{bruit de photons SO}} &\leq \underbrace{\frac{1}{\mathcal{K}_* \bar{N}_{min}}}_{\text{bruit de photons LO seuillé}}
\end{aligned}$$

Il y a donc une véritable optimisation à réaliser. Par ailleurs, à l'instar de ce que nous avons fait pour le *Star Oriented*, il est possible de gérer mode à mode le rapport signal à bruit de la mesure en introduisant pour chaque mode reconstruit d'indice p un coefficient η_p^{OLO} adapté. Reprenons l'expression du critère QC_{WFSC} pour le LO, en intégrant les coefficients d'atténuation $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\mathcal{K}_*}$ des flux des étoiles guides et les coefficients $\{\eta_p^{OLO}\}_{p=1}^{P_{max}}$ d'optimisation mode par mode de l'utilisation de la mesure. Exprimons d'abord la phase reconstruite :

$$\Phi_{OLO} = \sum_{p=1}^{P_{max}} \eta_p^{OLO} \left(\sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \frac{\lambda_k \bar{N}_k}{\sum_{\ell=1}^{\mathcal{K}_*} \lambda_\ell \bar{N}_\ell} a_p^k + b_p \left(\sum_{\ell=1}^{\mathcal{K}_*} \lambda_\ell \bar{N}_\ell \right) \right) Z_p$$

On peut alors exprimer QC_{OLO} . Il suffit dans l'équation (6.20) de remplacer le flux des étoiles par leur flux atténué :

$$QC_{OLO} = \sum_{j=1}^{\mathcal{K}_*} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \left(\frac{1}{\mathcal{K}_*} - \eta_p^{OLO} \frac{\lambda_j \bar{N}_j}{\sum_{\ell=1}^{\mathcal{K}_*} \lambda_\ell \bar{N}_\ell} \right) \left(\frac{1}{\mathcal{K}_*} - \eta_p^{OLO} \frac{\lambda_k \bar{N}_k}{\sum_{\ell=1}^{\mathcal{K}_*} \lambda_\ell \bar{N}_\ell} \right) C_{jk} \quad (6.28)$$

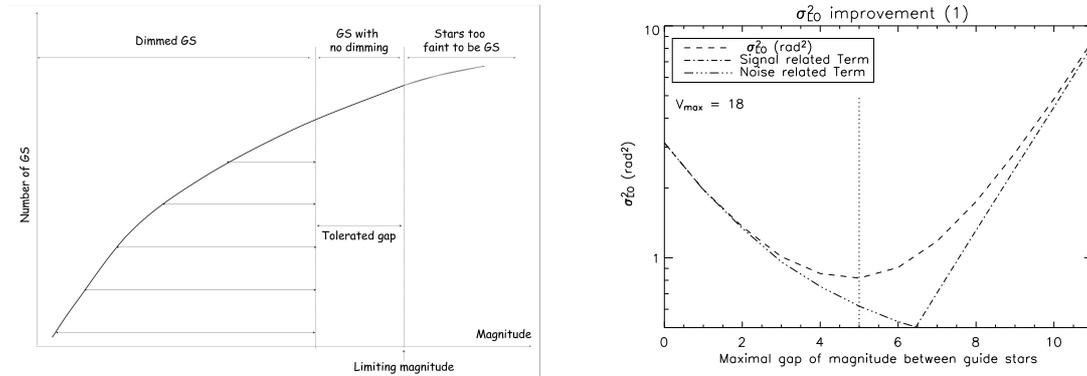
$$+ \eta_p^{OLO} \left[\frac{\zeta}{\sum_{\ell=1}^{\mathcal{K}_*} \lambda_\ell \bar{N}_\ell} + \frac{\xi}{\left(\sum_{\ell=1}^{\mathcal{K}_*} \lambda_\ell \bar{N}_\ell \right)^2} \right] \quad (6.29)$$

Soit, en posant $\mathcal{N}_\ell = \lambda_\ell \bar{N}_\ell$ et $\mathcal{N}_{tot} = \sum_{\ell=1}^{\mathcal{K}_*} \mathcal{N}_\ell$

$$QC_{OLO} = \sum_{j=1}^{\mathcal{K}_*} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \left(\frac{1}{\mathcal{K}_*} - \eta_p^{OLO} \frac{\mathcal{N}_j}{\mathcal{N}_{tot}} \right) \left(\frac{1}{\mathcal{K}_*} - \eta_p^{OLO} \frac{\mathcal{N}_k}{\mathcal{N}_{tot}} \right) C_{jk} + \eta_p^{OLO} \left[\frac{\zeta}{\mathcal{N}_{tot}} + \frac{\xi}{\mathcal{N}_{tot}^2} \right]$$

Malheureusement, cette expression n'est pas quadratique en \mathcal{N}_ℓ , et il n'existe pas de solution analytique à la minimisation de QC_{OLO} . Des solutions numériques doivent être envisagées. Comme η_p^{OLO} dépendra nécessairement des \mathcal{N}_ℓ , l'optimisation des coefficients doit être globale. Cependant, il faut considérer que dans le cadre d'un système fonctionnant sur le ciel, l'implémentation de l'optimisation du LO passe par la mise en place sur le trajet optique des différents fronts d'onde incidents, en amont des recombineurs, de densités optiques de coefficients d'atténuation conformes à l'optimisation calculée. On entrevoit sans peine la difficulté d'adapter précisément les densités à intégrer au système. Pour cette raison, on propose ci-dessous une méthode d'optimisation simplifiée, susceptible d'être plus facilement utilisable dans un système fonctionnant sur ciel.

6.4.2.2 Proposition d'une procédure simplifiée d'optimisation



(a) Atténuation des étoiles les plus brillantes (b) Effet du seuillage sur la performance du LO

FIG. 6.7 – Procédure simplifiée d'optimisation du *Layer Oriented*.

L'idée est de relâcher autant que possible les contraintes sur le flux des étoiles guides. Pour cela, plutôt que de chercher l'atténuation de flux optimale pour chaque étoile guide, on propose de se contenter d'optimiser l'écart de magnitude entre l'étoile guide la plus faible et la plus brillante. On fixe ainsi un écart de magnitude maximal tolérable par rapport à l'étoile la plus faible. Si M_{max} est la magnitude de l'étoile la plus faible et ΔM_{opt} est l'écart de flux optimal calculé, alors toutes les étoiles de magnitude inférieure à $M_{max} - \Delta M_{opt}$ seront atténuées de façon à ce que leur magnitude remonte à $M_{max} - \Delta M_{opt}$; les étoiles dont la magnitude est naturellement comprise entre M_{max} et $M_{max} - \Delta M_{opt}$ ne sont pas atténuées. La figure 6.7 représente la façon dont le seuillage du flux des étoiles les plus brillantes est réalisé (à gauche), et le gain apporté par l'optimisation de l'écart de magnitude (à droite). Cette dernière courbe, tracée en considérant toutes les étoiles du champ jusqu'à la magnitude 18, montre qu'optimiser l'écart de flux entre les étoiles guides peut permettre de gagner un facteur 10 sur la variance de phase résiduelle par rapport au cas non optimisé. On remarque également de conformément à ce qui a été dit ci-dessus, ramener le flux de toutes les étoiles au niveau de la plus faible n'est pas optimal : on peut gagner un facteur 4 sur la variance de la phase résiduelle en optimisant l'écart de flux. Une fois l'écart de flux optimal fixé et le flux des étoiles trop brillantes atténué, on peut calculer analytiquement les coefficients $[\eta_p^{OLO}]_{p=2}^{P_{max}}$ optimaux.

6.4.2.3 Comparaison des performances du *Layer Oriented* et du *Layer Oriented* optimisé.

On reprend les conditions d'études utilisées précédemment pour comparer les performances du LO et du LO optimisé. La figure 6.8 présente cette comparaison et montre bien la bonne gestion à la fois du terme lié à la turbulence d'altitude et de la propagation du bruit dans la boucle par la version optimisée du LO.

Ainsi, lorsque le rapport signal à bruit sur le détecteur est bon (Figs. 6.8 a,b, c et e), c'est l'optimisation de l'écart de flux entre les étoiles guides qui permet d'améliorer les performances du LO. La performance du LO optimisé est alors intermédiaire entre celle du LO classique et la performance du LO accessible seulement si toute la turbulence est localisée dans la pupille du

télescope.

Mais lorsque le comportement du LO est dominé par le bruit (Figs. 6.8 d et f), c'est l'optimisation mode à mode qui apporte le plus grand gain à la performance du LO : le LO optimisé permet alors de dépasser la performance obtenue avec le LO classique et toute la turbulence localisée dans la pupille.

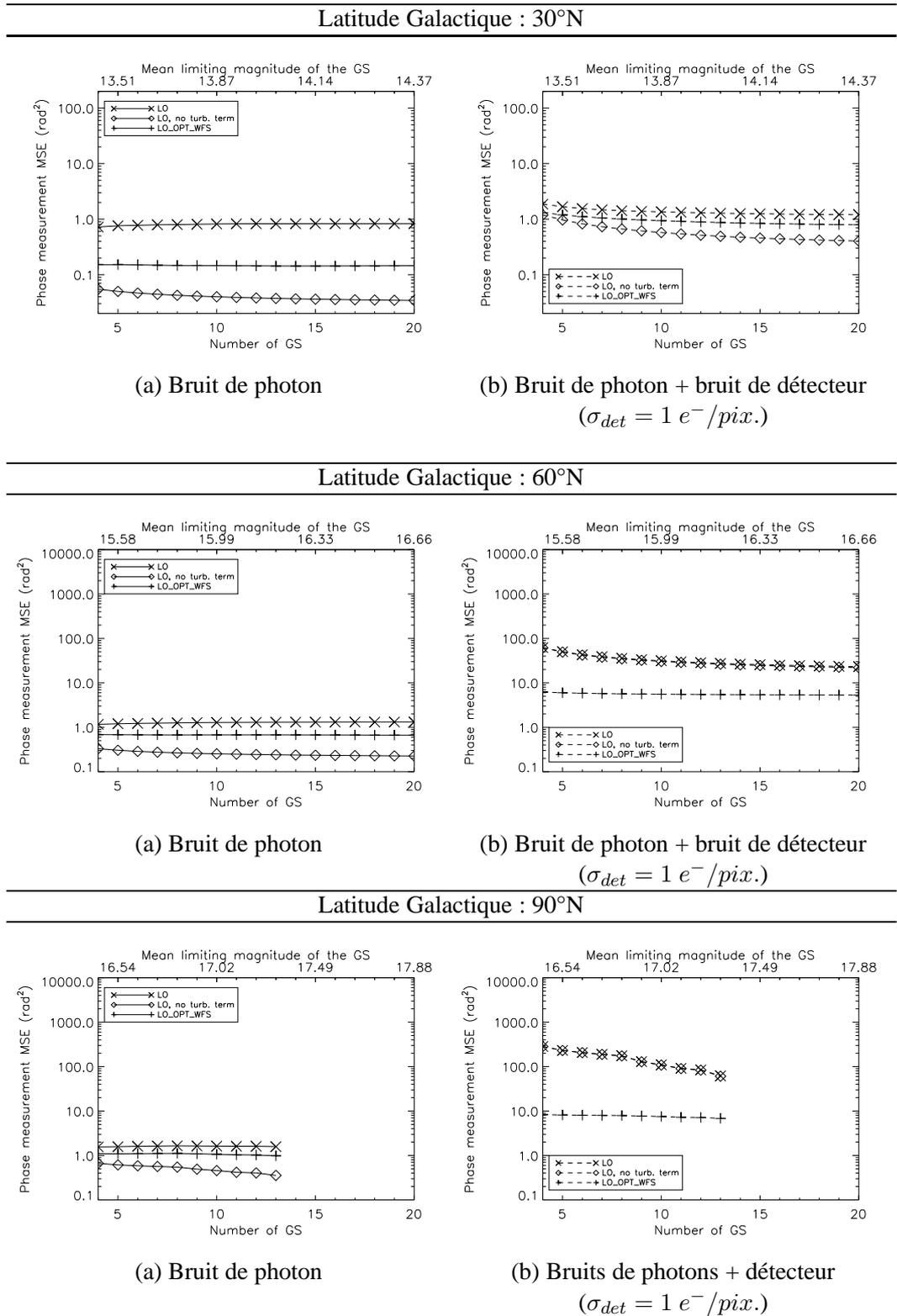


FIG. 6.8 – Comparaison du *Layer Oriented* et du *Layer Oriented* optimisé en fonction du nombre d'étoiles guides.

6.4.3 Comparaison des performances des concepts optimisés

La figure 6.9 compare les performances du *Star Oriented* et du *Layer Oriented* optimisés. On montre ici que les performances des deux concepts sont très proches pour peu qu'on prenne la peine d'optimiser les mesures. En présence du seul bruit de photons, le SO reste légèrement meilleur que le LO car on garde une meilleure information sur le volume turbulent. Notons toutefois que la performance du LO optimisé pourrait encore être rapprochée de celle du SO optimisé en réalisant une véritable optimisation telle qu'évoquée au paragraphe précédent. En présence de bruit de détecteur, le LO optimisé est cette fois légèrement meilleur que le SO optimisé, ce qui se comprend tout à fait puisqu'il n'utilise qu'un seul détecteur.

Cette analyse montre qu'il est possible d'obtenir des performances très proches avec un concept d'analyse *Star Oriented* et un concept *Layer Oriented*. A conditions d'utilisation identiques, la performance du système n'est donc pas le seul critère d'importance pour orienter le choix d'un concept d'analyse. Il faut également prendre en compte la complexité de mise en œuvre du concept d'analyse de front et des éléments qui permettront son optimisation.

Pour le *Star Oriented*, outre les inconvénients cités au paragraphe 6.1 du chapitre précédent (complexité de la reconstruction, problèmes de mise à l'échelle de la commande), il est nécessaire de pouvoir intégrer à la commande un module de calcul des gains optimaux à attribuer à chaque direction d'analyse. Ce calcul peut être fait hors-boucle, en utilisant les connaissances que l'on a sur la scène observée (flux des étoiles guides). Cependant, il nécessitera la connaissance du profil de turbulence au dessus du site d'observation.

Pour le *Layer Oriented*, l'optimisation nécessite l'introduction d'éléments optiques supplémentaires dans le chemin optique de l'instrument, pour atténuer le flux des étoiles les plus brillantes. Ces densités optiques devront pouvoir être adaptées à la scène observée et seront placées sur la voie d'analyse, ce qui risque de poser des problèmes de design optique. De plus la gestion mode à mode du gain sur de la mesure nécessite également l'intégration d'un module spécifique à la commande, de structure semblable à celui du SO.

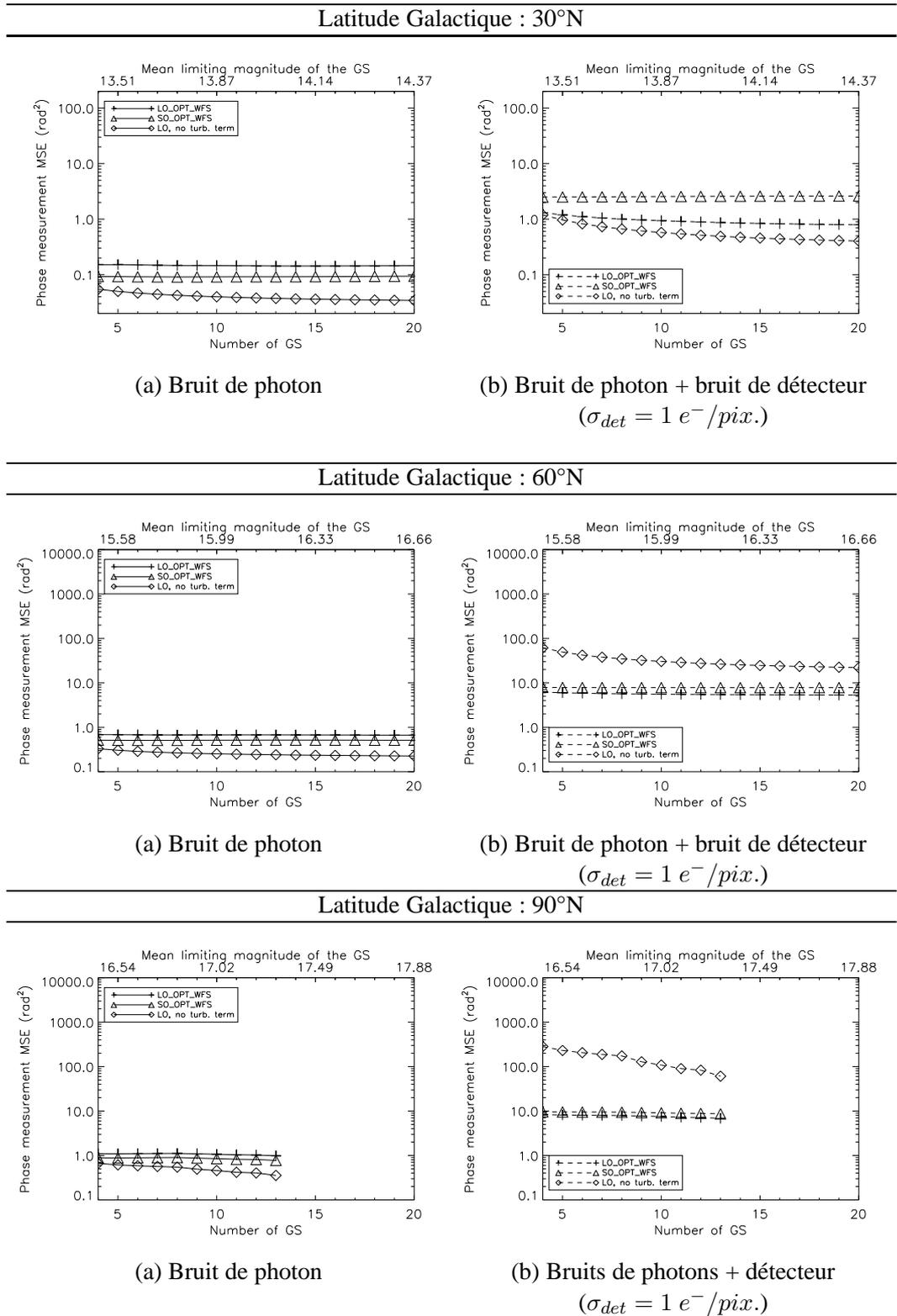


FIG. 6.9 – Comparaison du *Star Oriented* optimisé et du *Layer Oriented* optimisé en fonction du nombre d'étoiles guides.

6.5 Conclusion

Nous avons dans ce chapitre réalisé l'étude de performance des concepts *Star Oriented* et *Layer Oriented*. Cette étude permet de compléter le tableau des principaux atouts et inconvénients de ces deux concepts.

- Le concept *Star Oriented* permet une grande liberté d'utilisation des informations sur la turbulence provenant des différentes étoiles guides, mais il est limité par le bruit de détecteur, ce qui est susceptible de réduire considérablement sa couverture de ciel.
- Le concept *Layer Oriented* est clairement optimal en ce qui concerne la sensibilité au bruit de détecteur, mais il est limité par la turbulence d'altitude, qui dégrade sa performance lorsque des étoiles guides de flux différents sont utilisées.

Cependant, nous avons mis en évidence qu'il est possible d'améliorer sensiblement la performance de l'un et l'autre concept. Nous avons proposé un critère d'optimisation de la prise en compte des directions d'analyse dans la reconstruction de la phase de correction en fonction du flux de chaque étoile guide, qui nous a permis d'établir une procédure d'optimisation des deux concepts. Les résultats de ces optimisations ramènent les performances des deux concepts dans des gammes de performance très proches. De légères différences persistent, inhérentes à la structure des concepts :

- Le concept *Star Oriented* optimisé demeure plus sensible au bruit de détecteur que le *Layer Oriented* optimisé, du fait de son plus grand nombre de senseurs de front d'onde.
- Le concept *Layer Oriented* optimisé demeure légèrement moins bon que le *Star Oriented* optimisé en l'absence de bruit de détecteur, en particulier parce que la procédure d'optimisation proposée ici pour le *Layer Oriented* ne permet pas d'atteindre l'optimalité véritable de performance.

Toutefois, la performance obtenue avec les concepts optimisés ne devrait pas être le seul argument d'évaluation de l'efficacité de l'optimisation. En effet les deux concepts ne sont pas égaux devant la complexité de leur optimisation :

- Dans le cas du *Star Oriented*, l'optimisation est un processus purement numérique, dans lequel les coefficients à affecter à chaque direction d'analyse sont obtenus par résolution d'une équation matricielle linéaire.
- Dans le cas du *Layer Oriented*, l'optimisation est un processus à la fois optique et numérique. En effet, pour diminuer la sensibilité à la turbulence d'altitude, il est nécessaire d'atténuer optiquement le flux des étoiles guides les plus lumineuses avant la recombinaison des faisceaux et la détection. Ceci ne peut se faire qu'en plaçant devant ces étoiles des densités optiques dont le coefficient d'atténuation est contrôlable et adaptable à la scène observée, et donc au prix d'une complexification importante du design optique de l'instrument. De plus l'équation à minimiser pour obtenir les coefficients d'atténuation optimaux des étoiles guides n'est pas quadratique, si bien qu'une méthode de résolution numérique telle que la méthode des gradients conjugués est nécessaire.

Enfin, soulignons que dans les deux cas, l'optimisation requiert la connaissance préalable du profil de turbulence du site d'observation et des caractéristiques des senseurs de front d'onde. L'étude de la robustesse des optimisations proposées ici aux erreurs de modèle pourra amener des éléments

de réflexion importants pour juger de leur opportunité.

Cette étude prend appui sur le développement d'un modèle analytique de la mesure de phase pour un GLAO. Il semblait important de vérifier les conclusions de cette analyse. Nous avons eu l'opportunité d'effectuer des mesures sur le démonstrateur d'optique adaptative MAD de l'ESO. Je présente les résultats de cette série d'expériences dans le chapitre suivant.

Optimization of star-oriented and layer-oriented wavefront sensing concepts for ground layer adaptive optics

Magalie Nicolle, Thierry Fusco, and Vincent Michau

Office National d'Etudes et de Recherches Aéronautiques, BP 72, 92322 Châtillon, France

Gérard Rousset

Observatoire de Paris Meudon, LESIA, 5 place Jules Janssen, 92195 Meudon, France

Jean-Luc Beuzit

Observatoire de Grenoble, BP 53, 38041 Grenoble, France

Received February 3, 2006; accepted March 10, 2006; posted April 6, 2006 (Doc. ID 67687)

Multiconjugate adaptive optics is one of the major challenges in adaptive optics. It requires the measurement of the volumic distribution of the turbulence. Two wavefront sensing (WFS) concepts have been proposed to perform the wavefront analysis for such systems: the star-oriented and layer-oriented approaches. We give a performance analysis and a comparison of these two concepts in the framework of the simplest of the multi-guide-star adaptive optics systems, that is, ground layer adaptive optics. A phase-related criterion is proposed to assess analytically the performance of both concepts. This study highlights the main advantages and drawbacks of each WFS concept and shows how it is possible to optimize the concepts with respect to the signal to noise ratio on the phase measurement. A comparison of their optimized versions is provided and shows that one can expect very similar performance with the two optimized concepts. © 2006 Optical Society of America
OCIS codes: 010.1080, 010.7350.

1. INTRODUCTION

Although adaptive optics (AO) systems¹ enable ground-based telescopes to provide diffraction-limited images, their use remains restricted to a small fraction of the sky. Indeed, their need for a bright reference star and the narrowness of their corrected field of view² (FOV) strongly reduce the number and variety of the accessible targets.^{3,4} At the same time, many scientific cases could take advantage of a wider corrected FOV. Thus one of the most challenging aims of next generation turbulence compensation systems is to increase the field where turbulence is compensated for. Such systems would have many applications, such as deep field mapping, astrometry, and spectroimaging of extended scenes.⁵

Hence multiconjugate adaptive optics (MCAO)^{6,7} has been proposed to achieve diffraction-limited images on fields typically ten times wider than that of a conventional AO system. Reaching such a performance requires knowing about the volumic distribution of turbulence, and thus a wavefront sensing (WFS) concept able to deal with a multidirectional phase measurement is needed. Two concepts have been proposed to perform this measurement. They are the star-oriented⁷ (SO) and layer oriented^{8,9} (LO) approaches.

The purpose of this paper is to study the performance of both WFS concepts, to highlight their advantages and drawbacks, and to propose algorithms making possible their optimization. To simplify this study, we have chosen

to perform it in the context of the simplest of the systems that require a multidirectional phase measurement, that is, ground layer adaptive optics (GLAO). Moreover, it considers the case of natural guide stars (GSs). The study could be extended to laser GS assisted systems, although the conclusions it could lead to may not be relevant for such systems. A presentation of the SO and LO phase measurement concepts adapted to GLAO is provided in Section 2. In Section 3 a phase-related criterion is proposed to characterize the effects of the noise propagation on the performance of both WFS concepts. Its expression is derived in each case and used to perform the study of the WFS concepts. In Section 4, the optimization of the concepts is proposed, and the gain in performance that it provides is analyzed.

2. MEASURING THE GROUND LAYER TURBULENCE

The GLAO¹⁰ concept has been proposed as a solution for improving uniformly the quality of wide field images (typically 10 arc min). For this reason GLAO systems aim at compensating for the boundary layer of the atmosphere, which is at the same time the location of most of the atmospheric turbulence^{11–13} and the layer for which correction remains valid on a wide FOV. Hence a GLAO system has only one deformable mirror (DM), usually conjugated to the pupil of the telescope. As the turbulence

correction is only partial, GLAO is not supposed to achieve the diffraction limit. Rather, it has to be considered a seeing reducer.

Compensating for the ground layer phase perturbations requires measurements of the distribution in altitude of the turbulence. Several phase estimation processes can give suitable information on the ground layer turbulence. The most commonly used is presented in Subsection 2.A. Then a brief description of the WFS concepts used for the phase estimation is provided in Subsection 2.B.

A. Phase To Be Estimated

The optimal way to get knowledge of the ground layer turbulence is to perform an optical tomography^{14–16} of the atmosphere from phase information obtained in various directions of the FOV. A simpler and widely approach is to take benefit of the angular decorrelation of the phase perturbations due to high altitude turbulence by simply averaging the phase perturbations over a given domain \mathcal{D}_* of the sky:

$$\Phi_{to\ be\ estim.}(\mathbf{r}) = \frac{1}{S_{\mathcal{D}_*}} \iint_{\mathcal{D}_*} \phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}) d^2\boldsymbol{\alpha}, \quad (1)$$

where \mathbf{r} stands for the pupil plane coordinates, $S_{\mathcal{D}_*}$ is the surface of the domain where the phase has to be averaged, and $\phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha})$ is the phase of the wavefront (WF) coming from the direction $\boldsymbol{\alpha}$: $\phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}) = \int_0^{\infty} \varphi(\mathbf{r} - h\boldsymbol{\alpha}, h) dh$ (with φ being the phase perturbation due to the turbulent layer located at the altitude h). Hence the resulting phase that is measured is due only to the correlated part of the turbulence, which is mainly located at low altitude and forms the ground layer.

Nevertheless, only a finite number of directions of \mathcal{D}_* can be used for the WF analysis: the ones of the stars that are bright enough to contribute to the WF measurement process. If there are enough GSs in \mathcal{D}_* , then $\Phi_{to\ be\ estim.}(\mathbf{r})$ can be approximated by the following expression:

$$\Phi_{to\ be\ estim.}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathcal{K}_*} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}_k), \quad (2)$$

where \mathcal{K}_* is the number of GSs available in \mathcal{D}_* and $\phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}_k)$ is the phase of the WF coming from the direction of the k th GS.

Note that the study of the shape of the domain \mathcal{D}_* where the GSs have to be found is beyond the scope of this paper (more information can be found on it in Fusco *et al.*¹⁷), as well as the way in which the finite average of Eq. (2) approximates the continuous average of Eq. (1). Here we are interested only in how WFS concepts make possible the use of the existing stars to measure the phase $\Phi_{to\ be\ estim.}$ [Eq. (2)]. Hence, in the following, \mathcal{D}_* is supposed to be superimposed onto the field of interest for the astronomical observations, and the goal of this paper is to study how accounting for more and more GSs of this FOV (with fainter and fainter photon fluxes) modifies the performance of the WFS concepts.

Measuring a phase average over various angular directions requires specific WFS concepts. They are presented in Subsection 2.B.

B. Wavefront Sensing Concepts for Ground Layer Adaptive Optics

The two WFS concepts proposed to perform the measurement of the phase perturbations due to the ground layer are derived from MCAO. They are the star-oriented (SO) and the layer-oriented (LO) approaches. Their GLAO versions are represented in Fig. 1 and discussed in Subsections 2.B.1 and 2.B.2, respectively.

1. Star-Oriented Wavefront Sensing Concept

In the SO concept [Fig. 1(a)] the WF is measured independently in each GS direction by a dedicated WFS device, so that we get as many measurements as there are GSs in the FOV, each being corrupted by noise:

$$\{\phi_{meas.,k}(\mathbf{r}) = \phi_k(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}_k) + \text{Noise}(\mathbf{r}, N_k)\}_{k \in [1, \mathcal{K}_*]}, \quad (3)$$

where $\phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}_k)$ is the phase coming from the direction of the k th GS and $\text{Noise}(\mathbf{r}, N_k)$ is the noise term related to the k th WFS device and is dependent on the flux of the k th GS (N_k). Note that here and in the following the $\{\phi_{meas.,k}\}_{k \in [1, \mathcal{K}_*]}$ are reconstructed phases. It is assumed that the measurements delivered by the WFS devices allow reconstruction of the first P_{\max} Zernike modes, P_{\max} being a function of the size of the WFS subapertures (that is to say, of the number of subapertures for a given telescope diameter). The reconstruction model used hereafter accounts only for noise effects on the reconstructed phase. Aliasing and temporal errors are not considered here.

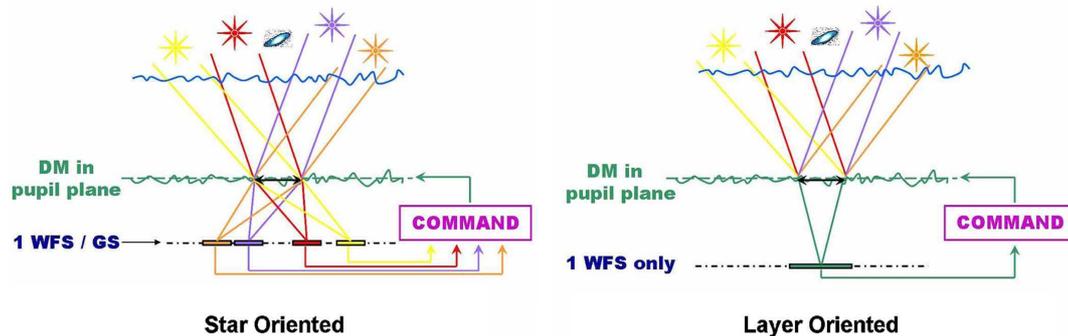


Fig. 1. (Color online) SO and LO WFS concepts for GLAO.

Nicolle *et al.*

Vol. 23, No. 9/September 2006/J. Opt. Soc. Am. A 2235

first because their effects are negligible when compared with the noise effects when the signal to noise ratio (SNR) of the WFS devices is low, and second because in the following all the WFS will be considered identical, leading to the same order of magnitude of these errors for both the SO and LO approaches. Hence the $\{\phi_{meas.,k}\}_{k \in [1, \mathcal{K}_*]}$ have the following expression:

$$k, \quad \phi_{meas.,k}(\mathbf{r}) = \sum_{p=2}^{P_{max}} a_p^{meas.,k} Z_p(\mathbf{r}), \quad a_p^{meas.,k} = a_p^k + n_p^k, \quad (4)$$

where $a_p^k = a_p(\alpha_k)$ is the projection of $\phi(\mathbf{r}, \alpha_k)$ onto the p th Zernike mode and n_p^k is the noise of the k th measurement propagated on the same mode.¹⁸ The \mathcal{K}_* reconstructed phases are then recombined to drive the DM.^{14,16,19} A simple way to recombine the $\{\phi_{meas.,k}\}_{k \in [1, \mathcal{K}_]}$ is to make an average of the individual phases:

$$\Phi_{SO}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathcal{K}_*} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} [\phi_k(\mathbf{r}) + \text{Noise}(\mathbf{r}, N_k)]. \quad (5)$$

This average is not optimal with regard to the propagation of the noise, first because Eq. (5) makes no distinction between the measurements coming from WFS devices with low SNR and the ones obtained with good SNR, and second because there is no modal optimization considered in the reconstruction of the $\{\phi_{meas.,k}\}_{k \in [1, \mathcal{K}_]}$ with respect to the SNR. This makes the SO approach very sensitive to noise, especially when faint GSs are considered. To work around this problem, one can apply two strategies:

- Optimize the phase reconstruction with respect to the SNR on the WFS; this solution will be explored in Section 4.
- Use fewer WFS devices; this is the point of the LO concept, presented in Subsection 2.B.2.

2. Layer-Oriented Wavefront Sensing Concept

In the LO concept [Fig. 1(b)] the photon fluxes of several stars are coadded and sensed simultaneously with one unique WFS device conjugated to the ground layer.⁹ Hence only one resultant phase is measured. In the WFS process the phase information is coded in terms of intensity, so that the measured phase is the average of the phases in each GS direction *weighted by the corresponding GS flux*:

$$\Phi_{LO} = \frac{\sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} N_k \phi_k}{N_{tot}} + \text{Noise}(N_{tot}), \quad (6)$$

where ϕ_k and N_k are the same as those for Eq. (3) and N_{tot} is the total flux provided by all the GSs: $N_{tot} = \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} N_k$. As only one WFS device is used for the WF perturbation measurements, only one noise term exists, dependent on the total flux in the FOV. Finally, just as in the case of the SO concept, Φ_{LO} is reconstructed onto the first P_{max} Zernike modes.

The main difference between the two concepts is the way in which they use the photons coming from the GS. In the LO approach the flux coaddition made before the

detection increases the SNR of the WFS device,²⁰ but the WFs coming from different directions in the FOV are mixed and weighted by the GS flux, leading to a loss of information and possibly a reconstruction problem.^{20,21} In the SO case, WFs are measured separately in different directions without any information loss, but with a lower sensitivity when noisy detectors are considered.²⁰ It is rather hard to predict the performance of these two WFS concepts in conditions close to the ones of on-sky use. We propose an analytical criterion in Section 3 that makes possible some study of the performance of the SO and LO concepts and some comparison between them.

3. CRITERION FOR EVALUATION OF THE PERFORMANCE OF WAVEFRONT SENSING CONCEPTS

The performance of an AO system can be assessed by using criteria based either on the corrected phase or on the corrected point spread function. When more specifically considering the WF analysis performance, the use of a phase-related criterion is more comfortable. This is one of the reasons that make the residual phase variance a very commonly used criterion for characterizing AO loop performance. In the case of a wide field AO (MCAO or GLAO), a suitable criterion for assessing only the effects of the noise propagation on the WFS concept performance is the variance of the difference between the phase that should be reconstructed from the WFS data and the phase that is actually reconstructed. In the GLAO case, the phase to be reconstructed is the projection of $\Phi_{to\ be\ estim.}$ [Eq. (2)] onto the first P_{max} Zernike modes:

$$\Phi_{to\ be\ rec.}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathcal{K}_*} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \sum_{p=1}^{P_{max}} a_p^k Z_p(\mathbf{r}), \quad (7)$$

where $a_p^k = a_p(\alpha_k)$ is the same as that in Eq. (4). The phase actually reconstructed is Φ_{SO} [Eq. (5)] or Φ_{LO} [Eq. (6)], according to the considered WFS concept. Basing this performance study on only the P_{max} Zernike modes corrected by the DM excludes the fitting error from the performance analysis; this error is assumed to be the same for both concepts. Then the quality criterion (QC) that is proposed here for the evaluation of both SO and LO performance is

$$\text{QC}_{(LO)}^{(SO)} = \left\langle \int \int_P [\Phi_{to\ be\ rec.}(\mathbf{r}) - \Phi_{(SO)}^{(LO)}(\mathbf{r})]^2 d^2\mathbf{r} \right\rangle_{turb.} \quad (8)$$

The lower this criterion is, the better the considered WFS concept approximates $\Phi_{to\ be\ rec.}$. This expression is derived for both the SO and LO approaches in the following subsections.

A. Quality Criterion Expression for the Star-Oriented Concept

Introducing the expressions for $\Phi_{to\ be\ rec.}$ [Eq. (7)] and Φ_{SO} [Eq. (5)] into Eq. (8), we get

$$QC_{SO} = \left\langle \int \int_{\mathcal{P}} \frac{1}{\mathcal{K}_*^2} \left[\sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \phi_k(\mathbf{r}) - \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} [\phi_k(\mathbf{r}) + \text{Noise}_{\mathbf{r}_k}(\mathbf{r})] \right]^2 d^2\mathbf{r} \right\rangle_{\text{turb.}}$$

Then the difference between Φ_{SO} and $\Phi_{to\ be\ estim.}$ is simply the noise introduced by each WFS device into the reconstruction process, and QC_{SO} becomes

$$QC_{SO} = \frac{1}{\mathcal{K}_*^2} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \sigma_{\text{Noise}_k}^2,$$

where $\sigma_{\text{Noise}_k}^2$ is the variance of the noise in the k th measurement. This average is not optimal because it does not properly manage a WFS device with a bad SNR, but it makes possible a first evaluation of the SO concept. Whatever the type of considered WFS device, each noise term $\sigma_{\text{Noise}_k}^2$ can be expressed^{22,23} as

$$\sigma_{\text{Noise}_k}^2 = \frac{\zeta_k}{N_k} + \frac{\xi_k \sigma_{RON_k}^2}{N_k^2},$$

where N_k is the statistical average of the flux in one subaperture of the k th WFS device (corresponding to the k th GS), $\sigma_{RON_k}^2$ is the variance of the CCD readout noise (RON) of the k th WFS device, and ζ_k (ξ_k) is a numerical coefficient for the photon (detector) noise that takes into account the WFS device characteristics (CCD readout mode and sampling, spot position estimator, etc.), the propagation of the noise through the reconstruction process (number P_{max} of reconstructed modes), and the filtering of the AO loop. Assuming that all the WFS parameters are identical (that is to say, $k \in [1, \mathcal{K}_*]$, $\zeta_k = \zeta$, $\xi_k = \xi$, and $\sigma_{RON_k}^2 = \sigma_{RON}^2$), QC_{SO} can simply be written as

$$QC_{SO} = \underbrace{\frac{\zeta}{\mathcal{K}_*} \left\langle \frac{1}{N_k} \right\rangle_{GS}}_{\text{phot. error}} + \underbrace{\frac{\xi \sigma_{RON}^2}{\mathcal{K}_*} \left\langle \frac{1}{N_k^2} \right\rangle_{GS}}_{\text{RON error}}, \quad (9)$$

where $\langle \cdot \rangle_{GS}$ is the arithmetical average over the GS directions of the included quantity. The first term of Eq. (9) represents the photon noise error, and the second term represents the CCD RON error. This model, where the WFS parameters are all considered identical, is pessimistic with regard to the SO performance. Indeed, on a real AO system the spatial and temporal sampling frequencies of the detector of the WFS can be adapted in order to improve the SNR when the corresponding GS is faint. Moreover, as already said in Subsection 2.B, an optimization could be performed. But this expression clearly shows that in the SO concept, the quality of the ground layer phase estimation is highly dependent on the flux on each WFS device. Indeed, according to Eq. (9) GSs with low flux make the SO performance decrease at least as the inverse of their flux, and even as the inverse of the square of their flux when noisy detectors are considered. This great sensitivity to noise is the main drawback of the SO concept. The LO concept has been proposed precisely to deal with this problem.

B. Quality Criterion Expression for the Layer-Oriented Concept

Introducing the expressions for $\Phi_{to\ be\ rec.}$ [Eq. (2)] and Φ_{LO} [Eq. (6)] into Eq. (8), we get

$$QC_{LO} = \left\langle \int \int_{\mathcal{P}} \left[\sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \left(\frac{1}{\mathcal{K}_*} - \frac{N_k}{N_{tot}} \right) \phi_k(\mathbf{r}) - \text{Noise}(\mathbf{r}, N_{tot}) \right]^2 d^2\mathbf{r} \right\rangle_{\text{turb.}}$$

Here it is clear that the linear coefficients affecting the individual phases ϕ_k introduce an additional error source into the WF measurement process. Besides, as only one WFS device is used for the WF perturbation measurement, only one term of noise exists, depending on the total flux in the FOV. Denoting $\langle N_\ell \rangle_{GS} = N_{tot}/\mathcal{K}_*$ as the average flux per GS and $\Delta_k = \langle N_\ell \rangle_{GS} - N_k$ as the gap between the flux of the k th GS and the average flux, and using the same hypothesis as that for deriving Eq. (9), we get

$$QC_{LO} = \underbrace{\frac{1}{N_{tot}^2} \sum_{j=1}^{\mathcal{K}_*} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \Delta_j \Delta_k C_{jk}}_{\text{turb. error}} + \underbrace{\frac{\zeta}{N_{tot}}}_{\text{phot. error}} + \underbrace{\frac{\xi \sigma_{RON}^2}{N_{tot}^2}}_{\text{RON error}}, \quad (10)$$

where $C_{jk} = \sum_{p=0}^{P_{max}} \langle a_p(\alpha_j) a_p(\alpha_k) \rangle_{\text{turb.}}$ is the covariance of the turbulent phase on the first P_{max} Zernike modes between the directions α_j and α_k and where ζ , ξ , and σ_{RON}^2 are the same as those for Eq. (9). Chassat²⁴ showed that by knowing the turbulence profile, it is possible to estimate analytically $\langle a_p(\alpha_j) a_p(\alpha_k) \rangle_{\text{turb.}}$ and thus C_{jk} .

Three terms can be identified in the expression for QC_{LO} . We recognize in the last two terms of Eq. (10) the photon and detector noise effects on the phase estimation performance. In the LO case these terms depend on the total flux available in the FOV. This means that adding one GS, even faint, in the WFS process makes this term decrease. The first term of Eq. (10) is related to the turbulent phase covariance from one GS direction to another. This error term is due to the inhomogeneities in the repartition of the total flux between the GSs, which prevents the average of the uncorrelated part of the turbulence from being null, as expected in Subsection 2.A. If all the GSs have the same flux ($\langle N_k \rangle_{GS} = \langle N_\ell \rangle_{GS}$), or if all the turbulence is in the pupil plane, then QC_{LO} is sensitive only to the noise on the WFS and Eq. (10) gets simplified:

$$QC_{LO, no\ turb. term} = \frac{\zeta}{N_{tot}} + \frac{\xi \sigma_{RON}^2}{N_{tot}^2}. \quad (11)$$

In addition, it can be shown that when all the GSs have the same flux, and if only photon noise is considered, then the LO and SO WFS concepts are equivalent.

In all the other cases, comparing SO and LO performance requires a careful study. Indeed, on the one hand, the LO approach is much less sensitive to noise than the SO approach because of the coaddition of the light coming from all the GSs on its single WFS device. But, on the other hand, the mismeasurement of the phase due to the flux differences between the GSs degrades its performance, so that it is impossible to predict which WFS concept performs better without a careful study.

Nicolle *et al.*

Vol. 23, No. 9/September 2006/J. Opt. Soc. Am. A 2237

Otherwise, some attempts have been made to render the SO performance less sensitive to noise by reconstructing the weighted phase average measured by the LO method with the individual measurements of the SO method. This is the numerical layer-oriented²⁰ (NLO) WFS concept, which is presented next.

C. Quality Criterion Expression for the Numerical Layer-Oriented Concept

The NLO concept has already been studied.²⁰ Here only a few results are recalled. The point of the NLO concept is to treat the independent measurements obtained in a SO concept so as to reconstruct a phase similar to the one measured by a LO concept. This introduces into the phase average some weighting coefficients that are proportional to the fluxes of the GSs, and thus a discrimination is made between the phase information coming from bright GSs and the ones coming from fainter GSs. Hence the NLO phase can be written as

$$\Phi_{NLO} = \frac{1}{N_{tot}} \sum_{k=1}^{K_*} N_k (\phi_k + \text{Noise}_k). \quad (12)$$

This expression for the reconstructed phase leads to the following expression for QC_{NLO} :

$$QC_{NLO} = \frac{1}{N_{tot}^2} \sum_{j=1}^{K_*} \sum_{k=1}^{K_*} \Delta_j \Delta_k C_{jk} + \frac{\zeta}{N_{tot}} + K_* \left(\frac{\xi \sigma_{RON}^2}{N_{tot}^2} \right). \quad (13)$$

The first two terms of this equation are identical to the ones for QC_{LO} . This means that in the presence of photon noise only, it is possible to get the same performance with both the SO and LO methods, by reconstructing a NLO phase. Unfortunately, the term in Eq. (13) related to the detector noise corresponds to the LO term *multiplied by the number of GSs*. Subsection 3.D compares the performance of the SO, LO, and NLO concepts.

D. Comparison of the Star-Oriented, Layer-Oriented, and Numerical Layer-Oriented Performance

The performance of the WFS concepts described above can be studied thanks to the mean square error (MSE) criterion. In Subsection 3.D.1 the conditions of the study are described. The performance of the WFS concepts is then analyzed in Subsection 3.D.2.

1. Conditions of the Study

The present study can be described by the following conditions:

- The system is characterized by an 8 m pupil, an 8 arc min FOV, and an imaging wavelength $\lambda_{ima}=2.2 \mu\text{m}$.
- The turbulence profile is a test profile, characterized by
 1. Seeing of 1 arc sec at $0.5 \mu\text{m}$.
 2. Outer scale $L_0=25 \text{ m}$.
 3. 80% of the turbulence in the pupil plane and 20% in an upper layer.

4. Full decorrelation of the phase perturbations in the upper layer. This makes the covariance C_{jk} become $C_{jk} = \sigma_{\varphi_{grd}}^2 + \sigma_{\varphi_{alt}}^2 \delta_{jk}$, where δ_{jk} is the Kronecker symbol ($\delta_{jk}=1$ if $j=k$, $\delta_{jk}=0$ otherwise). With the turbulence profile considered here, we have $\sigma_{\varphi_{grd}}^2=25.2 \text{ rad}^2$ and

$\sigma_{\varphi_{alt}}^2=6.3 \text{ rad}^2$. Moreover, this assumption also makes the equations for QC_{LO} and QC_{NLO} simpler:

$$QC_{LO} = K_* \sigma_{\varphi_{alt}}^2 \frac{\langle \Delta_l^2 \rangle_{GS}}{N_{tot}^2} + \frac{\zeta}{N_{tot}} + \frac{\xi \sigma_{RON}^2}{N_{tot}^2},$$

$$QC_{NLO} = K_* \sigma_{\varphi_{alt}}^2 \frac{\langle \Delta_l^2 \rangle_{GS}}{N_{tot}^2} + \frac{\zeta}{N_{tot}} + \frac{K_* \xi \sigma_{RON}^2}{N_{tot}^2}.$$

- The WFS devices are all identical Shack–Hartmann type, characterized by the following:

1. There are 14×14 subapertures (which means 190 reconstructed modes).

2. The photon and/or detector noises are simulated, with $\sigma_{RON}=1 \text{ e}^-$ per pixel.

3. The focal plane is sampled so that the full width at half-maximum of a diffraction-limited subaperture spot corresponds to 2 pixels of the camera (Shannon criterion).

4. Phase slopes in the subaperture are measured by computing the center of gravity of the subimages on windows twice as wide as the turbulent spot. In this case, the linear coefficients ζ and ξ can be determined with expressions derived by Rousset²² and Rigaut and Gendron.¹⁸

- Star fields are generated numerically by using a statistical model of the galactic population.^{25,26} Various pairs (latitude, longitude) of galactic coordinates are considered: $(30^\circ, 0)$, $(60^\circ, 0)$, and $(90^\circ, 90^\circ)$. Figure 2(a) shows the evolution of the mean number of GSs with respect to the limiting magnitude for these three sets of galactic coordinates. These curves clearly show that when the working latitude is high, the number of available GSs is very low.
- For each set of galactic coordinates, 1000 star fields are generated.

• For each star field, the criteria QC_{SO} [Eq. (9)], QC_{LO} [Eq. (10)], $QC_{LO, \text{ no turb. term}}$ [Eq. (11)], and QC_{NLO} [Eq. (13)] are computed versus the limiting magnitude of the GSs; increasing the limiting magnitude means considering in the WFS process more and more GSs, but with fainter and fainter photon flux. Hence increasing the limiting magnitude means the following:

1. Increasing the number of GSs.
2. In the SO and NLO cases, measuring more individual phases, but with lower SNR.

3. In the LO case, increasing the total flux available for the WFS (integrated flux). Figure 2(b) shows the evolution of the integrated flux in the FOV with respect to the limiting magnitude. This curve clearly shows that when the working latitude is high, the integrated flux saturates earlier than at low galactic latitudes, due to the fact that faint GSs are scarcer [cf. Fig. 2(a)]. This saturation means that there is not much information to get by increasing the limiting magnitude of the system.

- For each star field and limiting magnitude we impose the requirement that there must be at least 4 GSs to perform a relevant measurement of the ground layer turbulence; no upper limit is set.

• The results presented here are the averages of the criteria over the star field occurrences, fulfilling the condition on the minimum number of GSs.

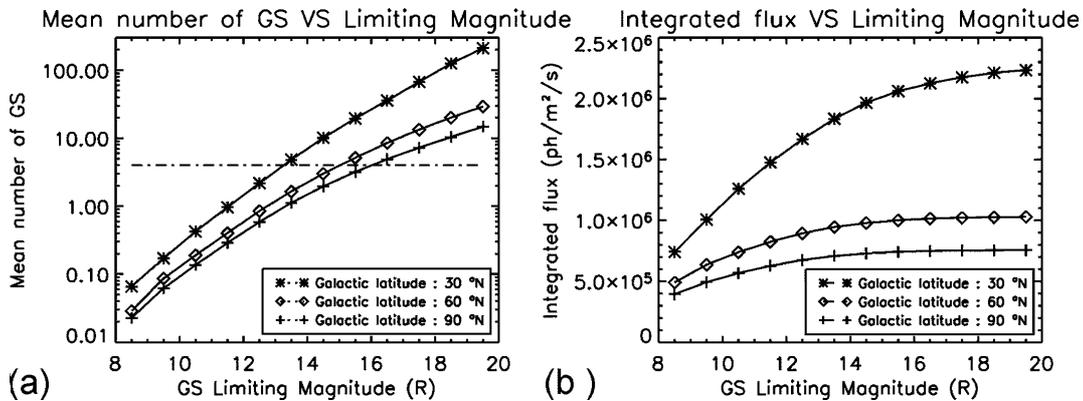


Fig. 2. (a) Mean number of GSs in the simulated star fields with respect to the considered limiting magnitude for various galactic latitudes, (b) integrated flux with respect to the limiting magnitude.

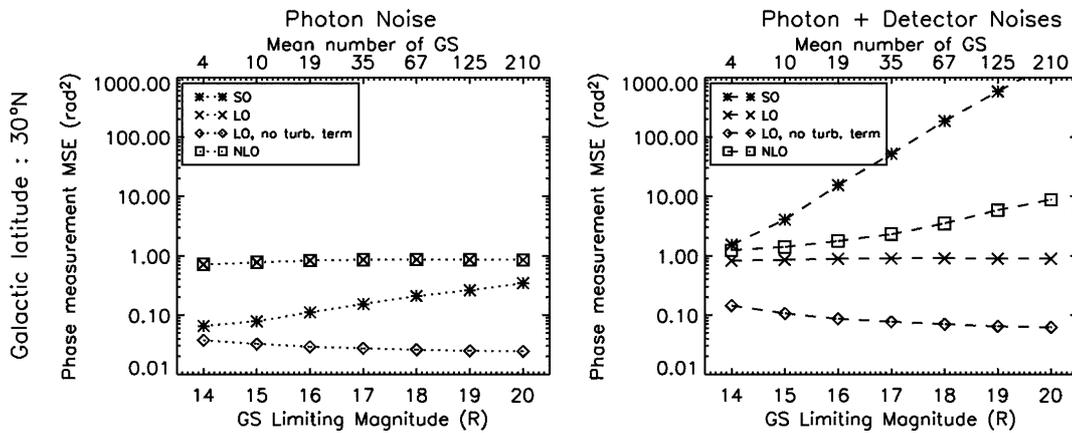


Fig. 3. Comparison of SO, LO, and NLO performance.

2. Performance Analysis of the Star-Oriented, Layer-Oriented, and Numerical Layer-Oriented Wavefront Sensing Concepts

Figure 3(a) shows the comparison of the performance of the LO, SO, and NLO WFS concepts when increasing the limiting magnitude of the considered GS and in the presence of photon noise only.

In the LO case two curves are plotted: one corresponding to the total error [Eq. (10)] and one for which the term related to the GS flux dispersion is ignored [Eq. (11)]. This case mimics a case where all the turbulence would be located in the pupil plane or where all the available flux would be equitably distributed among the GSs. Thus it represents the best performance achievable with the LO system. The difference between this case and the true LO performance is the turbulence-related term of Eq. (10) [the first term of Eq. (10)]. Concerning this point, Fig. 3(a) shows that the contribution of the turbulence-related term prevails in the LO measurement error and even makes the LO performance worse than the SO one, whereas the single noise-related term of QC_{LO}

($QC_{LO, no turb. term}$) is significantly better than QC_{SO} . Besides, as expected, increasing the GS limiting magnitude improves the LO performance because it increases the integrated flux on the single WFS device.

On the contrary, for the SO concept, increasing the limiting magnitude worsens the performance. This is due to the fact that increasing the limiting magnitude of the GS implies that more WFS devices with bad SNR are incorporated into the WF estimation. Nevertheless, according to Eq. (9), one can note that an optimal limiting magnitude should exist for the SO case. Indeed, the SO performance is proportional to the total photon noise on all the WFS, but also inversely proportional to the square of the number of GSs. This means that increasing the limiting magnitude of the GS should be fruitful if the induced increase of the photon noise remains low with respect to the increase of the number of GSs. But Fig. 3(a) shows that such a situation may occur only with very bright GSs (limiting magnitude lower than 15), which is a marginal situation when considering natural GSs.

Finally, one can note that, as expected, the NLO perfor-

mance is exactly the same as the LO one when only photon noise is considered. But because of the turbulence-related term [first term of Eq. (13)], combining the individual SO measurements into a NLO measurement degrades the WF analysis performance.

When some additional detector noise is considered [Fig. 3(b)], the SO performance is dramatically degraded, especially at high limiting magnitude, that is to say, when measurements obtained with very faint GSs are included in the WF estimation process.

On the contrary, with a $1 e^-$ per pixel rms detector noise, the LO performance is still dominated by the turbulence effects, so that its performance hardly varies with regard to the case where only photon noise is considered. But note that with a $3 e^-$ per pixel rms detector noise, the error due to the detector noise and the one due to the turbulence would have the same order of magnitude.

Finally, one can note that combining the individual SO measurements in the NLO way improves its performance, but not sufficiently to be competitive with the true LO concept, which remains the best because of the integration of the whole flux on its single WFS device.

These results depend on the GS characteristics and thus on the working galactic latitude. Figure 4 shows the

influence of the GS statistics on SO and LO behavior. First, when only photon noise is considered [Fig. 4(a)], one can note that only the SO performance is sensitive to an increase of the galactic latitude. Indeed, when increasing the galactic latitude for which the star fields are simulated, the number of GSs decreases, as shown in Fig. 2, and bright GSs become scarce. This degrades the SO performance because of its sensitivity to the noise, whereas the LO performance is still dominated by the turbulence effects and hardly evolves. This makes the SO performance closer to the LO performance.

When some detector noise is considered [Fig. 4(b)], the SO measurement is still completely hopeless. In the LO case one can note that increasing the galactic latitude makes the detector noise effects progressively dominate its performance. Indeed, the global error (curves with crosses) becomes almost equal to the error due only to the noise (curves with diamonds).

All of this analysis makes it possible to highlight key points in the SO and LO performance:

- The two WFS concepts are not equivalent when only photon noise is considered. The LO performance is dominated by the turbulence effects, which makes it worse

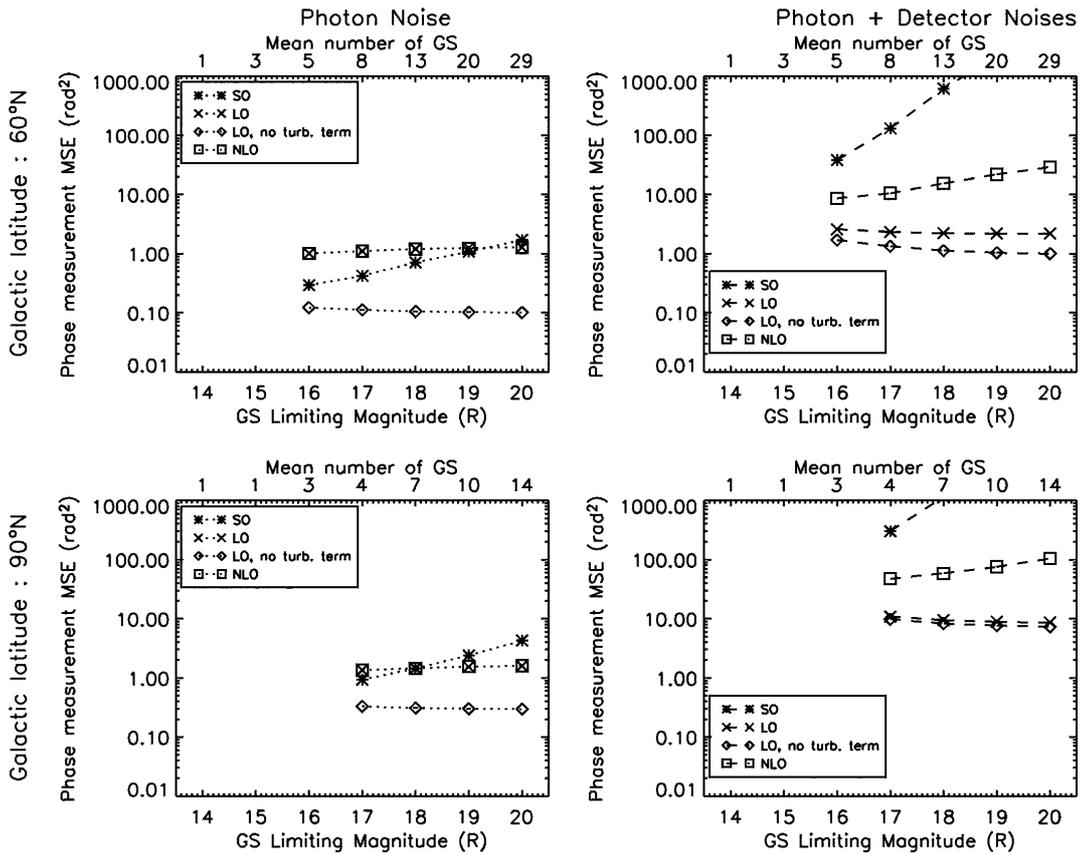


Fig. 4. Comparison of SO, LO, and NLO performance for high galactic latitudes.

than the SO one. Nevertheless, this advantage of the SO approach shrinks when the working galactic latitude increases, because of the bright GS scarcity. Moreover, the LO performance could be improved by an optimization aiming at reducing its turbulence-related term.

- When some detector noise is considered, the SO performance is dramatically degraded, which is unacceptable. The combination of the SO measurements into a NLO scheme brings better results, but not good enough to make it competitive with the true LO approach. Hence optimizing the way in which the SO measurements are combined is mandatory. Concerning the LO method, the detector noise effects and the turbulence effects have almost the same influence on its performance for a low RON and a low galactic latitude. In this case the optimization proposed just above (reduction of its turbulence-related term) should still provide a significant gain. But when considering detectors with higher RON or regions of the sky where bright GSs are scarcer, the detector noise effects becomes dominant, so that a mode-by-mode optimization of the reconstruction should be planned also.

4. OPTIMIZATION OF THE STAR-ORIENTED PERFORMANCE

As stated in Subsection 3.D.2, the great sensitivity of the SO method with regard to the noise on the WFS devices makes its optimization mandatory. This optimization can be performed rather easily because each phase is independently estimated. It is therefore possible to weight independently each WF measurement in the average process, attributing to each a coefficient that accounts for SNR in the corresponding WFS. But this optimization can be improved again by accounting for the propagation of the noise on the reconstructed modes. Hence a mode-by-mode optimization can be performed, where the coefficients of the optimization are computed independently for each mode reconstructed from each WF measurement. After exposing the analytical layout of the optimization, a comparison of the optimized SO approach with the “classical” one and the NLO approach is performed.

A. Analytical Developments

The SO optimization can be done rather simply by decomposing Φ_{SO} , given by Eq. (5), onto the Zernike polynomials, accounting for the propagation of the noise on the reconstructed modes¹⁸ and introducing linear coefficients:

$$\Phi_{SO}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathcal{K}_*} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \sum_{p=1}^{P_{max}} \eta_p^k a_p^{meas.,k} Z_p(\mathbf{r}), \quad (14)$$

where the $a_p^{meas.,k} = a_p^k + n_p^k$ are defined in Eq. (4) and $\{\{\eta_p^k\}_{k \in [1, \mathcal{K}_*]}\}_{p \in [1, P_{max}]}$ are the coefficients to optimize. This is the best way to perform the optimization because each mode measured from each GS direction is optimally used in the reconstruction. Hence Eq. (8) becomes

$$\begin{aligned} \text{QC}_{OSO} = & \frac{1}{\mathcal{K}_*^2} \left[\sum_{j=1}^{\mathcal{K}_*} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \sum_{p=1}^{P_{max}} \sum_{q=1}^{P_{max}} (1 - \eta_p^k)(1 - \eta_q^j) \right. \\ & \left. \times \langle a_p^k a_q^j \rangle \int \int_p Z_p(\mathbf{r}) Z_q(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} + \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \sum_{p=1}^{P_{max}} (\eta_p^k)^2 (\sigma_p^k)^2 \right], \end{aligned}$$

where $(\sigma_p^k)^2$ is the variance of the noise in the k th WFS device and propagated onto the p th Zernike polynomial.^{18,22} In this expression, the $\{Z_p\}_{p \in [1, P_{max}]}$ are Zernike polynomials and thus are orthogonal: $\int \int_p Z_p(\mathbf{r}) Z_q(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} = \delta_{pq}$, where δ_{pq} stands for the Kronecker symbol. Hence

$$\text{QC}_{OSO} = \sum_{p=1}^{P_{max}} \text{QC}_{OSO,p}, \quad (15)$$

with

$$\begin{aligned} \text{QC}_{OSO,p} = & \left(\frac{1}{\mathcal{K}_*} \right)^2 \left[\sum_{j=1}^{\mathcal{K}_*} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} (1 - \eta_p^j)(1 - \eta_p^k) \langle a_p^j a_p^k \rangle \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} (\eta_p^k)^2 (\sigma_p^k)^2 \right]. \quad (16) \end{aligned}$$

The minimization of $\text{QC}_{OSO,p}$ with respect to the $\{\eta_p^k\}$ provides their optimal values. This optimization is easy to do as it corresponds to inverting a linear matrix equation. Indeed, Eq. (16) can be expressed as

$$\text{QC}_{OSO,p} = (\mathbf{1} - \boldsymbol{\eta}_p)^t \mathbf{C}_p (\mathbf{1} - \boldsymbol{\eta}_p) + \boldsymbol{\eta}_p^t \mathcal{N}_p \boldsymbol{\eta}_p, \quad (17)$$

where $\boldsymbol{\eta}_p$ is the vector of the linear coefficients $\{\eta_p^k\}$ for the Zernike mode Z_p , $\mathbf{C}_p = [\langle a_p^j a_p^k \rangle]_{jk}$ is the covariance matrix of the p th Zernike coefficient between the different GS directions, and \mathcal{N}_p is a diagonal matrix gathering the noise variances of the WFS devices, still for Z_p . One can differentiate this equation with respect to $\boldsymbol{\eta}_p$ and look for the zeros of the expression of the derivative. Practically speaking, the inversion of the derivative equation was easy to realize in the cases that we studied because of the good conditioning of the problem. Otherwise, it is possible to invert the derivative equation with a truncated singular value decomposition algorithm.

In the performance study in Subsection 4.B this optimization is compared with the “classical” SO and NLO methods.

B. Comparison of Optimal Star-Oriented Performance with Star-Oriented and Numerical Layer-Oriented Performance

Figure 5 shows the comparison of the optimized SO approach with the classical one and the NLO method in the same conditions as those for Fig. 3. One can note that the optimized SO performance is not degraded any longer by increasing the limiting magnitude of the GSs in the presence of photon noise as well as when some detector noise is considered. For high limiting magnitudes, this means that the faintest GSs have very low weighting coefficients and are hardly accounted for in the phase reconstruction.

Here again it is important to clarify that this optimization method does not pretend to manage a global optimization of a GLAO system but is only a comparison of sev-

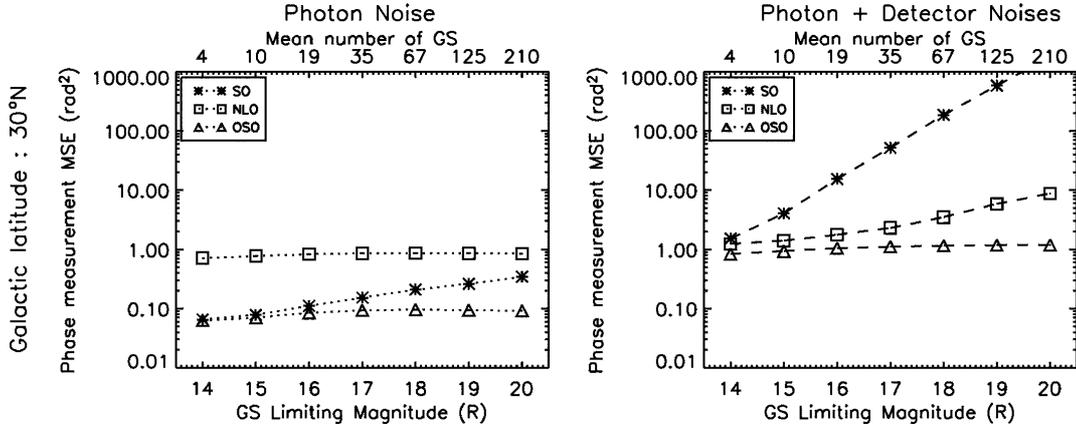


Fig. 5. Comparison of the OSO performance with the "classical" and NLO performance.

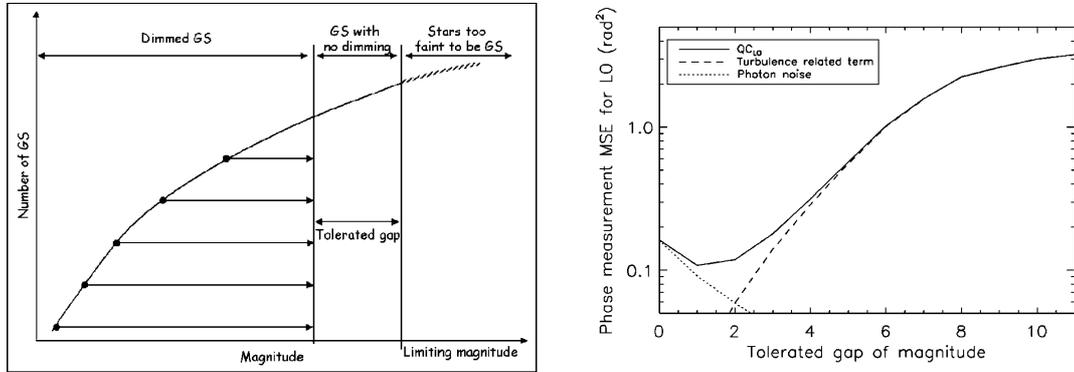


Fig. 6. Gain brought by dimming the brightest GS for the LO approach.

eral WFS concepts, all involving the same set of star fields. The analysis of the way in which the ground layer is actually approximated by an average over the selected and weighted GS directions is beyond the scope of this paper.

With regard to the noise propagation, the gain of the SO optimization is very fruitful. After exposing in Section 5 the LO optimization, both WFS concepts will be compared in Section 6.

5. OPTIMIZATION OF THE LAYER-ORIENTED PERFORMANCE

A. Effect of Dimming the Brightest Guide Stars

As we underlined when commenting on Fig. 3, the LO performance is degraded by the fact that when there are some differences of flux among the GSs, the phase measurement is sensitive to the high altitude turbulence [cf. the first term of Eq. (10)]. Figure 3 showed that this phenomenon can even make the LO performance worse than the SO performance.

This problem could be solved by nulling the flux differences among the GSs. Hence the first term of Eq. (10)

would be null, and only the photon and detector noises would degrade the performance. Doing this means dimming all the GSs to bring their flux to that of one of the faintest GSs. This is necessarily an optical process, which has to be done *before* the light coaddition and the detection by the WFS device. Therefore it makes the total flux coming into the WFS device decrease and the term due to photon and detector noises increase. Hence nulling the GS flux dispersion is clearly not optimal. It can even be shown that this always makes the LO performance worse than the SO performance when considering only the photon noise. Indeed, if we denote as N_{min} the flux of the faintest GS, then by definition $k \in [1, \mathcal{K}_*], N_{min} \leq N_k$, and we have

$$k \frac{1}{N_k} \leq \frac{1}{N_{min}} \quad \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \frac{1}{N_k} \leq \frac{\mathcal{K}_*}{N_{min}} \quad \frac{\zeta}{\mathcal{K}_*} \left\langle \frac{1}{N_k} \right\rangle_{GS} \leq \frac{\zeta}{\mathcal{K}_* N_{min}}.$$

Therefore it is necessary to make a compromise between the performance degradation due to the turbulence-related term and the one due to photon and detector noises. This means optimizing the dimming of the GSs.

Figure 6 illustrates the effect of such an optimization.

This figure has been obtained by simulating 1000 sky fields corresponding to the galactic latitude 30°N , with a limiting magnitude set to 17, computing QC_{LO} for each of them for different dimmings, and making an average over the different scenes. Here the dimming of the GSs is not rigorously optimized. Only the gap in magnitude between the brightest GS and the faintest one is, with a bin of 1 mag. Hence, when the tolerated gap in magnitude is null, all the GSs are dimmed, so that they all have the same flux as that of the faintest one. If a gap of 1 bin of magnitude is tolerated, all the GSs of magnitude lower than the limiting magnitude minus 1 are dimmed, so that their magnitude is brought back to the limiting magnitude minus 1B. Figure 6(a) shows a diagram representing this dimming operation. Figure 6(b) shows the evolution of QC_{LO} with respect to the gap in magnitude tolerated among the GSs. This figure shows that as explained in the proceeding paragraph, it is possible to make a compromise between the photon and detector noises and the GS flux dispersion effects by adapting the dimming of the GSs. Here optimizing the gap in magnitude leads to QC_{LO} divided by 30 in the undimmed case (high tolerated gap) and divided by 2 in the case where all the GSs have the same flux (null tolerated gap).

The optimal gap in magnitude varies from 0 to 4 when the limiting magnitude varies from 14 to 20. The higher the limiting magnitude is, the higher the optimal gap in magnitude is too, due to the high number of faint GSs. Indeed, the GS flux variance decreases when increasing the limiting magnitude because faint GSs are much more numerous than bright ones, as shown by Fig. 7.

Finding the optimal dimming for the GSs is made possible by using the same analytical formalism as that for the SO case.

B. Analytical Developments

The optimization of the LO performance by dimming the brightest stars can be introduced into Eq. (6) thanks to new coefficients, one per GS, called $\{\lambda_k\}_{k \in [1, \mathcal{K}_*]}$. But another optimization can be considered too. Indeed, just as in the SO case, a mode-by-mode optimization can be performed when using Φ_{LO} to approximate $\Phi_{to\ be\ estim}$. Hence each mode of Φ_{LO} can be weighted by a coefficient η_p^{OLO}

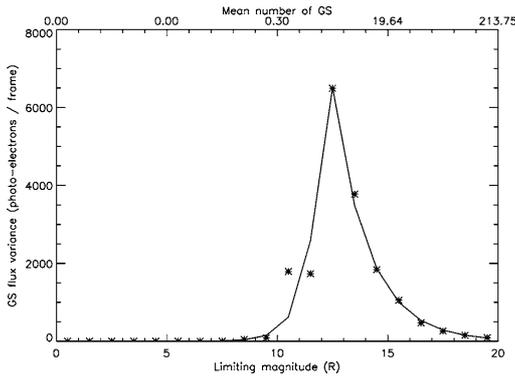


Fig. 7. Dispersion of the flux of the GSs available in a star field around the mean flux per GS.

depending on the SNR in the WFS device and on the propagation of the noise onto the Zernike modes.¹⁸ Then, accounting for these two optimizations, we get

$$\Phi_{OLO}(\mathbf{r}) = \sum_{p=1}^{P_{max}} \eta_p^{OLO} \left[\left(\sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \frac{\lambda_k N_k}{\mathcal{K}_*} a_p^k \right) + n_p \left(\sum_{\ell=1}^{\mathcal{K}_*} \lambda_\ell N_\ell \right) \right] Z_p(\mathbf{r}). \quad (18)$$

Here the $\{\lambda_k\}_{k \in [1, \mathcal{K}_*]}$ coefficients correspond to the optical attenuation of each GS ($k, \lambda_k \in [0, 1]$). Accounting for this new expression, Eq. (10) becomes

$$\text{QC}_{OLO} = \sum_{p=1}^{P_{max}} \text{QC}_{OLO,p}, \quad (19)$$

with

$$\text{QC}_{OLO,p} = \sum_{j=1}^{\mathcal{K}_*} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \left(\frac{1}{\mathcal{K}_*} - \frac{\eta_p^{OLO} \lambda_j N_j}{\sum_{\ell=1}^{\mathcal{K}_*} \lambda_\ell N_\ell} \right) \left(\frac{1}{\mathcal{K}_*} - \frac{\eta_p^{OLO} \lambda_k N_k}{\sum_{\ell=1}^{\mathcal{K}_*} \lambda_\ell N_\ell} \right) \times (\alpha_p^j \alpha_p^k + (\eta_p^{OLO})^2 \left[\frac{\xi_p}{\sum_{\ell=1}^{\mathcal{K}_*} \lambda_\ell N_\ell} + \frac{\xi_p^2 \sigma_{RON}^2}{\left(\sum_{\ell=1}^{\mathcal{K}_*} \lambda_\ell N_\ell \right)^2} \right]). \quad (20)$$

As already said, the attenuations are done before the detection process and thus degrade the WFS SNR. As the optimization of the $\{\eta_p^{OLO}\}_{p \in [1, P_{max}]}$ depends on the WFS SNR, a global optimization would be required for the $\{\eta_p^{OLO}\}_{p \in [1, P_{max}]}$ and the $\{\lambda_k\}_{k \in [1, \mathcal{K}_*]}$. Moreover, no analytical solution can be found for the $\{\lambda_k\}_{k \in [1, \mathcal{K}_*]}$ by trying to minimize QC_{OLO} . A numerical multivariable minimization algorithm would be mandatory, leading to a substantial increase in the computation time. In addition, the practical realization of the optimal dimming requires a precision and a system complexity that may be very difficult to reach for real systems. For these two reasons we propose a “rough” but more realistic LO optimization: First, the numerical method described in Subsection 5.A is used to determine the $\{\lambda_k\}_{k \in [1, \mathcal{K}_*]}$; once these coefficients are known the $\{\eta_p^{OLO}\}_{p \in [1, P_{max}]}$ are determined by deriving the analytical solution of the minimization of Eq. (20). The LO approach optimized in this way is compared with the “classical” LO approach in Subsection 5.C.

C. Comparison of Optimized Layer-Oriented and Layer-Oriented Performance

Figure 8 shows the comparison of the optimized LO method with the classical LO method in the same conditions as those for the previous figures. Note that a “rough” optimization of the LO concept has been performed, as described in the previous paragraph. For this reason, the optimized LO (OLO) performance may not be as good as it would be if we could set the GS optical attenuations as precisely as required. Nevertheless, one can note that,

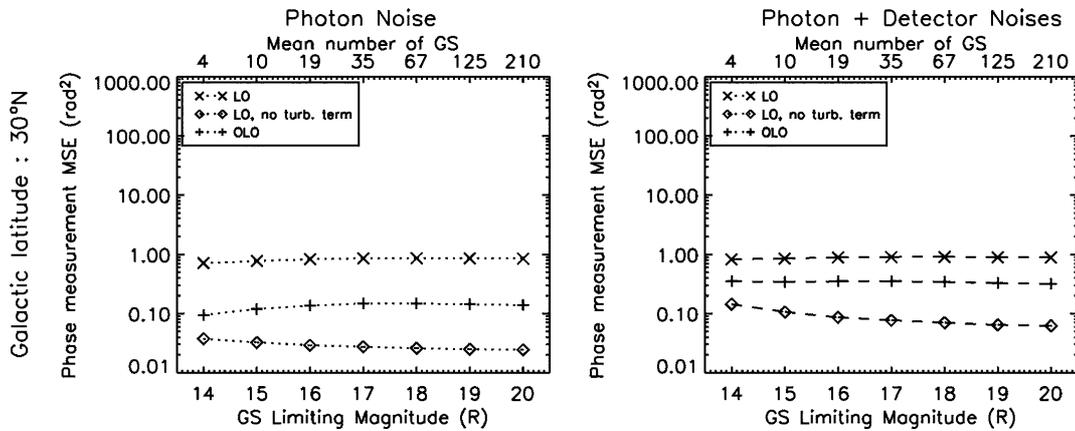


Fig. 8. Comparison of LO and OLO performance.

with or without detector noise, the optimization significantly improves the LO performance. Note that at the considered galactic latitude (30°N), the number and the brightness of the GSs are important, so that the WFS SNR is very good, and the optimization that brings the highest gain is the dimming of the brightest GS.

6. COMPARISON OF OPTIMIZED LAYER-ORIENTED AND OPTIMIZED STAR-ORIENTED PERFORMANCE

Figure 9 shows the comparison of the optimized SO (OSO) and OLO performance at different galactic latitudes. The optimization of the optical dimming of the OLO concept is the same as that for Fig. 8.

When only photon noise is considered, the two optimized WFS concepts have almost the same performance. As said previously, the improvement of the LO performance is mainly due to the dimming of the brightest GS, which made possible the reduction of the turbulence effects. The OLO performance remains slightly worse than the OSO performances but could be improved a little if the OLO optimization were rigorously performed, as explained in Subsection 5.A. When considering high galactic latitudes, both WFS concepts have their performance degraded in the same way, and the residual phase variance remains lower than 1 rad^2 .

When detector noise is considered, the OLO method is better than the OSO method, due to its smaller number of wavefront sensors. But when increasing the galactic latitude, this advantage of the LO approach is reduced. This is due to the fact that the GSs become scarcer and fainter. Hence only one or two bright GSs gather almost all the flux available in the FOV, and the way in which the phase average is performed has not much importance. Hence the higher the galactic latitude is, the closer the two WFS concepts are to each other. This result should appear at lower galactic latitudes if noisier detectors are considered because the detection limit of the WFS devices is reduced.

Hence the optimization of the SO and LO method brought a significant gain for both WFS concepts, what-

ever the galactic latitude and the considered limiting magnitude. Moreover, it made it possible for their performances to be very close to each other. Nevertheless, optimizing these two concepts does not have the same cost in terms of system complexity. Hence the SO optimization is a software matter, whereas the LO optimization mainly relies on the optical attenuation of the bright GSs (except for very high latitudes), the attenuations being a function of the turbulence conditions and of the GS position and magnitude. This requires additional optical elements along the optical path of the GS and could introduce an optical design upset.

7. CONCLUSION

The analytical modeling of the two WFS concepts for phase estimation in the framework of a GLAO system has highlighted key points in the evolution of their performance. Concerning the "classical" SO and LO performance, it has been underlined that the LO performance is mainly limited by the error introduced by the mixing and the weighting of the phase information before detection whereas the SO performance is significantly limited by the noise propagation in the reconstruction process, above all in the presence of detector noise.

For these reasons, optimizing both the SO and LO approaches is very fruitful. A mode-by-mode optimization has been proposed for the SO method. It consists in a numerical operation, the proper coefficients being computed by simple inversion of a linear matrix equation. LO optimization consists in the optical attenuation of the brightest GS (to reduce the GS flux differences) and in the mode-by-mode optimization of the phase reconstruction thanks to numerical coefficients. The GS attenuations and the numerical coefficients of the optimization are interdependent and have to be determined together by using a multivariable minimization algorithm. Nevertheless, it has been shown that pretty good results can be obtained with a crude but more realistic GS attenuation algorithm, which consists in a simple limitation of the gap

in magnitude between the brightest GS and the faintest one.

The OSO and OLO methods have very similar performance in the presence of photon noise; when considering additional detector noise, the OLO approach remains bet-

ter than the OSO approach, but the difference is much lower than in the unoptimized cases and decreases when considering growing galactic latitudes or a noisier WFS device. In both optimized cases the dependency of the measurement error with respect to the limiting magni-

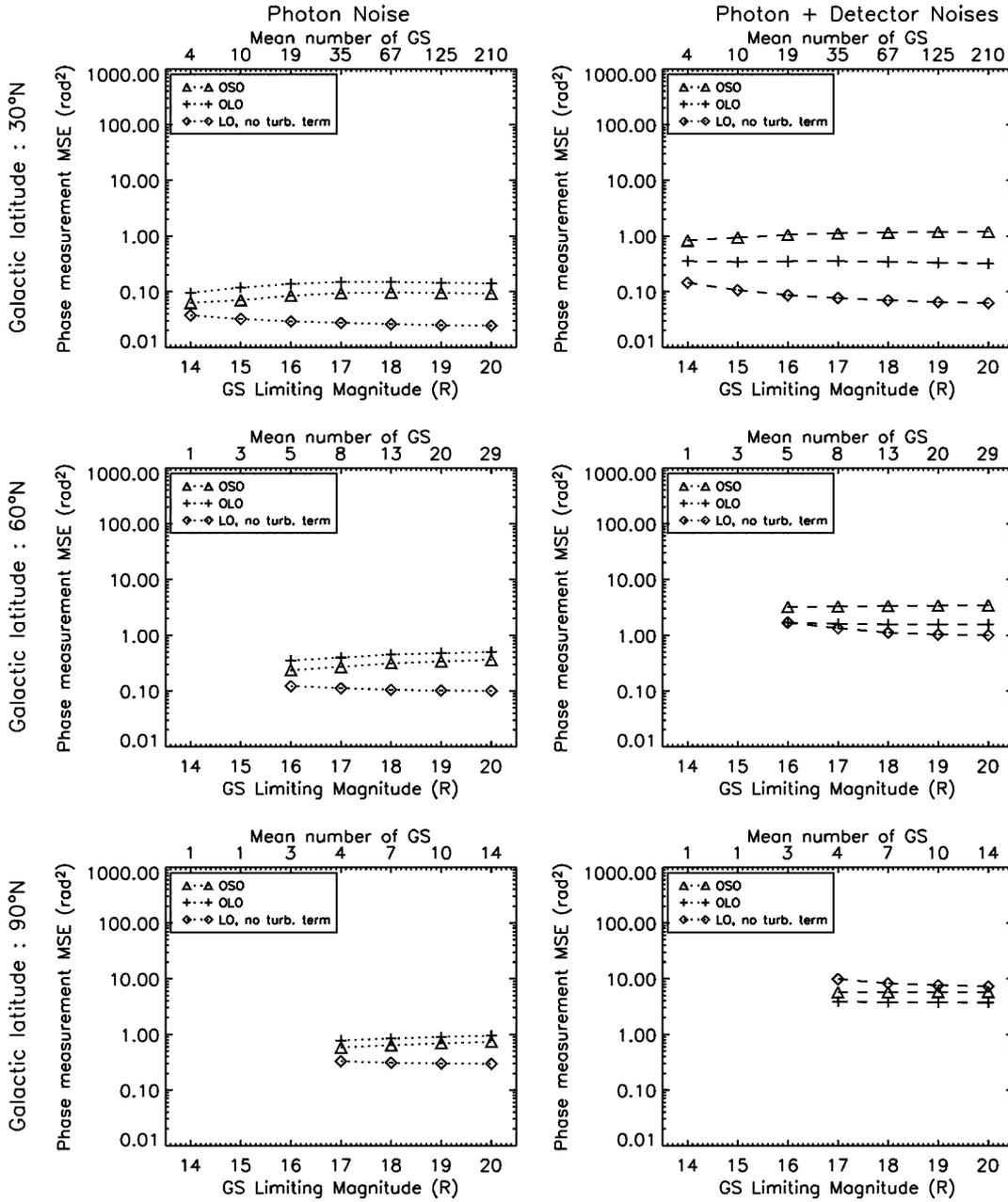


Fig. 9. Comparison of OSO and OLO performance.

Nicolle *et al.*

tude of the GS is very faint, because both optimizations manage very well the WFS SNR.

Nevertheless, optimizing these two concepts does not have the same cost in terms of system complexity. That is, the SO optimization is just a software matter, whereas the LO optimization requires some additional optical elements along the optical path of the GS, these elements needing to be adaptable to outer parameters such as turbulence conditions and GS properties (magnitude and position).

Once again, it is necessary to keep in mind that this study does not mean to present an optimization of the GLAO system. This work studies only one point of a total error budget that includes all the other facets of the GLAO system, i.e., the reconstruction algorithm (tomography, for instance), the shape of the domain D_s where GSs are to be found, and the sky coverage problem.

Finally, this study should be fruitful for the performance analysis of the first stage of a multiple-FOV WFS concept,⁹ with the results presented here probably needing modification with respect to the characteristics of this concept.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors thank A. Blanc, J.-M. Conan, N. Hubin, and L. Mugnier for very fruitful discussions. This work was partly supported under EC contract RII3-CT-2004-001566.

Corresponding author: Magalie Nicolle, magalie.nicolle@onera.fr.

REFERENCES

1. F. Roddier, *Adaptive Optics in Astronomy* (Cambridge U. Press, 1999).
2. D. L. Fried, "Anisoplanatism in adaptive optics," *J. Opt. Soc. Am.* **72**, 52–61 (1982).
3. J. M. Beckers, "Adaptive optics for astronomy: principles, performance, and applications," *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **31**, 13–62 (1993).
4. R. W. Wilson and C. R. Jenkins, "Adaptive optics for astronomy: theoretical performance and limitations," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **278**, 39–61 (1996).
5. M. Le Louarn and N. Hubin, "Wide-field adaptive optics for deep-field spectroscopy in the visible," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **349**, 1009–1018 (2004).
6. R. H. Dicke, "Phase-contrast detection of telescope seeing and their correction," *Astron. J.* **198**, 605–615 (1975).
7. J. M. Beckers, "Increasing the size of the isoplanatic patch with multiconjugate adaptive optics," in *Very Large Telescopes and Their Instrumentation*, ESO Conference and Workshop Proceedings (European Southern Observatory, 1988), pp. 693–703.
8. R. Ragazzoni, "No laser guide stars for adaptive optics in giant telescopes," *Astron. Astrophys., Suppl. Ser.* **136**, 205–209 (1999).
9. R. Raggazzoni, E. Dialaiti, J. Farinato, E. Fedrigo, E. Marchetti, M. Tordi, and D. Kirkman, "Multiple field of view layer-oriented adaptive optics. Nearly whole sky coverage on 8 m class and beyond," *Astron. Astrophys.* **396**, 731–744 (2002).
10. F. Rigaut, "Ground-conjugate wide field adaptive optics for the ELTs," in *Beyond Conventional Adaptive Optics*, R. Ragazzoni and S. Esposito, eds. (European Southern Observatory, 2001).
11. J. Vernin and C. Munoz-Tunon, "Optical seeing at La Palma Observatory. 2: Intensive site testing campaign at the Nordic Optical Telescope," *Astron. Astrophys.* **284**, 311–318 (1994).
12. R. Avila, J. Vernin, and S. Cuevas, "Turbulence profiles with generalized SCIDAR at San Pedro Mártir Observatory and isoplanatism studies," *Publ. Astron. Soc. Pac.* **110**, 1106–1116 (1998).
13. A. Tokovinin, S. Baumont, and J. Vasquez, "Statistics of turbulence profile at Cerro Tololo," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **340**, 52–58 (2003).
14. M. Tallon, R. Foy, and J. Vernin, "3-d wavefront sensing for multiconjugate adaptive optics," in *Progress in Telescope and Instrumentation Technologies*, ESO Conference and Workshop Proceedings, M. H. Ulrich, ed. (European Southern Observatory, 1992), pp. 517–521.
15. R. Ragazzoni, E. Marchetti, and F. Rigaut, "Modal tomography for adaptive optics," *Astron. Astrophys.* **342**, L53–L56 (1999).
16. T. Fusco, J.-M. Conan, G. Rousset, L. M. Mugnier, and V. Michau, "Optimal wavefront reconstruction strategies for multiconjugate adaptive optics," *J. Opt. Soc. Am. A* **18**, 2527–2538 (2001).
17. T. Fusco, M. Nicolle, G. Rousset, V. Michau, A. Blanc, J.-L. Beuzit, and J.-M. Conan, "Wavefront sensing issues in MCAO," *C. R. Phys.* **6**, 1049–1058 (2006).
18. F. Rigaut and E. Gendron, "Laser guide star in adaptive optics: the tilt determination problem," *Astron. Astrophys.* **261**, 677–684 (1992).
19. B. L. Ellerbroek, "First-order performance evaluation of adaptive-optics systems for atmospheric-turbulence compensation in extended-field-of-view astronomical telescopes," *J. Opt. Soc. Am. A* **11**, 783–805 (1994).
20. D. Bello, J.-M. Conan, G. Rousset, and R. Ragazzoni, "Signal to noise ratio of layer oriented measurements for multiconjugate adaptive optics," *Astron. Astrophys.* **410**, 1101–1106 (2003).
21. M. Nicolle, T. Fusco, V. Michau, G. Rousset, A. Blanc, and J.-L. Beuzit, "Ground layer adaptive optics: analysis of the wavefront sensing issue," in *Advancements in Adaptive Optics*, D. B. Calia, B. L. Ellerbroek, and R. Ragazzoni, eds., in *Proc. SPIE* **5490**, 858–869 (2004).
22. G. Rousset, "Wave-front sensors," in *Adaptive Optics in Astronomy*, F. Roddier, ed. (Cambridge U. Press, 1999), Chap. 5, pp. 91–130.
23. M. Nicolle, T. Fusco, G. Rousset, and V. Michau, "Improvement of Shack–Hartmann wavefront sensor measurement for extreme adaptive optics," *Opt. Lett.* **29**, 2743–2745 (2004).
24. F. Chassat, "Calcul du domaine d'isoplanétisme d'un système d'optique adaptative fonctionnant à travers la turbulence atmosphérique," *J. Opt. (Paris)* **20**, 13–23 (1989).
25. A. Robin, C. Reylé, S. Derrière, and S. Picaud, "A synthetic view on structure and evolution of the Milky Way," *Astron. Astrophys.* **409**, 523–540 (2003).
26. T. Fusco, A. Blanc, M. Nicolle, V. Michau, G. Rousset, J.-L. Beuzit, and N. Hubin, "Improvement of sky coverage estimation for MCAO systems: strategies and algorithms," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* (to be published).

Chapitre 7

Validation expérimentale de l'optimisation des concepts SO et LO

Nous avons eu l'opportunité de passer trois jours sur le démonstrateur d'optique adaptative multiconjuguée de l'Observatoire Austral Européen (ESO) afin de tester, entre autres, la validité de notre procédure d'optimisation du *Star Oriented* pour le GLAO. On réalise ici la synthèse des résultats obtenus. On présente d'abord succinctement le banc MAD, avant d'utiliser une partie des résultats pour la caractérisation du système. Enfin on s'intéresse à la caractérisation des concepts *Star Oriented* et *Layer Oriented*, et à l'optimisation du mode *Star Oriented*.

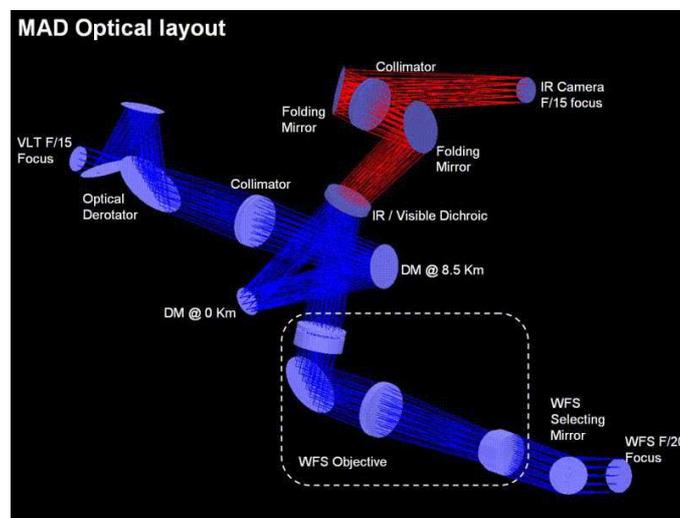


FIG. 7.1 – Schéma optique du démonstrateur de MCAO de l'ESO, MAD. (crédits : ESO, www.eso.org)

7.1 Présentation du démonstrateur

MAD (Multi-conjugate Adaptive optics Demonstrator, fig. 7.1) est le démonstrateur d'optique adaptative multiconjuguée de l'ESO [Marchetti et al. 2003]. Son objectif est de démontrer la

faisabilité et les performances d'une optique à large champ sur le ciel, en présence d'étoiles guides naturelles. Prévu pour être intégré dans le courant de l'année 2007 sur l'un des télescopes du VLT, il sera alors le premier système de MCAO pour l'astronomie fonctionnant sur le ciel.

Le champ total de MAD couvre 2 minutes d'arc et est imagé par une caméra infra-rouge (CAMCAO) [Amorim et al. 2004] de 2048×2048 pixels carrés de 28 mas de côté. Le champ total de la caméra étant d'environ une minute d'arc, celle-ci se déplace dans le plan focal de l'instrument afin de couvrir la totalité des 2 arcmin.

MAD peut corriger la turbulence grâce à deux miroirs déformables bimorphes (cf. § 2.3) de 60 actionneurs chacun (fig. 7.2 a), l'un étant conjugué à la pupille du télescope et l'autre à 8.5 km d'altitude. Le miroir conjugué à la pupille est monté sur une monture tip/tilt (fig. 7.2 b), permettant de compenser les deux premiers modes de Zernike¹ et de conserver la totalité de la dynamique des miroirs déformables pour la correction des modes d'ordres supérieurs. Ajoutons qu'il est possible d'utiliser ces miroirs individuellement ou ensemble, et d'explorer ainsi pratiquement tous les concepts d'AO large champ : MCAO, GLAO ou LTAO [Tokovinin et al. 2004].

(a) Miroir déformable bimorphe (b) Monture Tip/tilt du miroir pupille

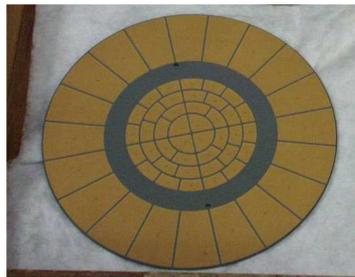


FIG. 7.2 – MAD corrige la turbulence grâce à deux miroirs déformables bimorphes (fig. a). Celui qui est conjugué à la pupille est monté sur une monture tip/tilt (fig. b). (Crédits : ESO)

Concernant l'analyse de front d'onde, MAD pourra fonctionner soit en mode *Star Oriented* (SO, cf § 4.1), soit en mode *Layer Oriented* (LO, cf § 4.2). Cependant, au moment où les données présentées ici ont été enregistrées, seul le mode *Star Oriented* était implanté ; l'intégration du mode *Layer Oriented* est prévue pour la fin de l'année 2006. En mode SO [Marchetti et al. 2006], MAD dispose de trois analyseurs de front d'onde de type Shack-Hartmann (SH, cf § 2.1.2.3) identiques, dont les caractéristiques sont synthétisées dans le tableau (7.1). Une unité de calibration permet pré-compenser les aberrations statiques du système par recalage des pentes de référence [Kolb 2005].

Les mesures des senseurs sont ensuite récupérées par le calculateur temps réel, chargé de la reconstruction du front d'onde. Celle-ci est réalisée par un algorithme intégrateur/proportionnel (cf. § 2.3). MAD offre la possibilité d'adapter les gains (intégrateur et proportionnel) de la boucle, mais

¹on rappelle qu'en instrumentation monopupille le mode piston n'est jamais considéré.

<i>Longueur d'onde</i>	<i>Nombre de sous-pupilles</i>	<i>Sous-pupilles utiles</i>	<i>Pixels par sous-pupille</i>
$0.7 \pm 0.25 \mu\text{m}$	8×8	52	8×8
<i>Taille pixel</i>	<i>Echantillonnage à la diffraction</i>	<i>Modes de lecture</i>	<i>Fréquence maximale</i>
300 mas	Shannon /4	Binnings 1×1 et 2×2	400 Hz (binning 1×1) 636 Hz (binning 2×2)
<i>Bruit de détecteur</i> (indépendant de la fréquence de lecture)		<i>Traitements avant calcul</i>	
10.2 photon électrons/pixel/trame		retrait du fond, mise à 0 des pixels négatifs et fenêtrage 6×6	

TAB. 7.1 – Caractéristiques des senseurs Shack-Hartmann du mode *Star Oriented* de MAD.

également d'attribuer des gains différents à chacune des voies d'analyse dans la reconstruction. Ces derniers sont en fait de simples coefficients multiplicatifs appliqués aux pentes mesurées par les différents analyseurs avant la reconstruction du front d'onde. Cette possibilité d'adapter le gain par analyseur a été cruciale pour le travail que je présente ici car elle a permis de simuler le comportement du LO en générant un mode *Numerical Layer Oriented* (NLO, cf. § 6.3.3) et de tester l'optimisation du SO en mode GLAO.

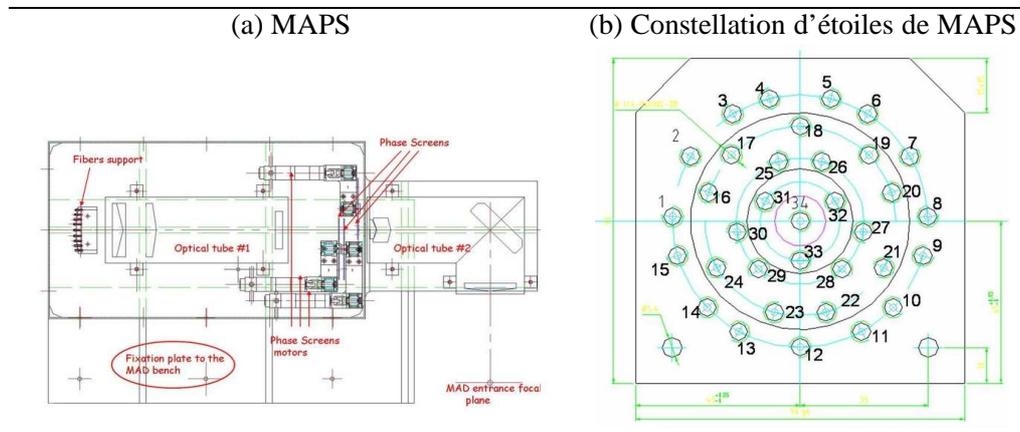


FIG. 7.3 – MAPS est le module apportant turbulence et sources de références à MAD en laboratoire. (Crédits : ESO)

Lorsqu'il sera intégré sur le site du VLT, MAD fonctionnera sur le ciel, avec des étoiles guides naturelles. En laboratoire, il est associé à un générateur de turbulence (Multi-Atmospheric Phase screens and Stars, MAPS, fig. 7.3 a) [Kolb et al. 2004]. Celui-ci simule la turbulence à l'aide de trois écrans de phase reproduisant le profil de turbulence atmosphérique à Paranal. Les caractéristiques de la turbulence ainsi générée sont résumées dans le tableau 7.2. MAPS est également constitué d'une constellation de sources lumineuses d'intensité variable simulant le ciel (fig. 7.3 b). On peut soit faire

varier collectivement le flux de toutes les sources, soit introduire des écarts de flux entre elles par le biais de densités optiques étalonnées. Ces sources servent à la fois de guides à l'analyse de front d'onde et de points de référence pour estimer la qualité de la correction dans le champ sur la voie imagerie.

	Altitude (km)	Vitesse vent ($m \cdot s^{-1}$)		% profil total
Ecran 1	0.	7.		64.
Ecran 2	6.	13.		22.
Ecran 3	8.5	30.		14.
Caractéristiques globales				
seeing (arcsec)	r_0 (cm)	τ_0 (ms)	θ_0 (arcsec)	L_0 (m)
0.84	11.9	3.2	2	22

TAB. 7.2 – Caractéristiques de la turbulence simulée par le générateur MAPS.

7.2 Configurations utilisées pour les tests

Pour cette étude nous avons utilisé MAD en mode AO classique, en fermant la boucle sur l'une des étoiles guides disponibles, et en mode GLAO, en utilisant trois étoiles du champ pour réaliser la moyenne (simple ou pondérée) de la phase. La configuration des étoiles est représentée sur le schéma de la figure (7.3 b). Nous avons utilisé les étoiles indexées 5, 10 et 15, régulièrement réparties le long d'un cercle de diamètre 108 arcsec.

Au moment de notre accès au banc, seul le mode *Star Oriented* était opérationnel pour la multi-analyse. Nous avons exploité au maximum les possibilités qu'il nous a offert, en faisant fonctionner le système en *Star Oriented* (SO, § 4.1), en *Numerical Layer Oriented* (NLO, § 6.3.3) ou bien en *Star Oriented Optimisé* (OSO, § 6.4.1).

Notre objectif principal étant l'exploitation du mode GLAO du banc, caractérisé par une correction très partielle, nous avons choisi certains paramètres de la boucle de façon à assurer sa robustesse plus que sa performance ultime :

1. Nous avons choisi de ne pas calibrer les pentes de référence de ses senseurs de front d'onde. Ceci se justifie en considérant deux caractéristiques du système :
 - La prise en compte des aberrations statiques des voies d'analyse nécessite pour être correcte la présence d'un plan focal au voisinage immédiat de la lame séparatrice, dans lequel on place la source de référence. Or cette possibilité n'existe pas sur MAD : l'unité de calibration est située nettement en amont de la séparatrice, ce qui revient à introduire des erreurs dans la mesure des pentes de référence.
 - De plus, le tableau (7.1) montre que la PSF d'une sous-pupille est fortement sous-échantillonnée par les pixels du détecteur (4 fois moins que Shannon). Ce sous-échantillonnage induit une forte non-linéarité de la mesure du déplacement du spot lorsqu'il n'est pas centré entre quatre pixels (cf. 10.1.2).
 - Enfin, il a été établi au préalable par l'équipe MAD de l'ESO que la non prise en compte des aberrations statiques sur axe ne dégrade pas significativement les performances du système

en GLAO.

2. Les pixels sous-échantillonnant fortement la PSF des sous-pupilles, nous avons décidé de ne pas utiliser le mode de lecture rapide (binning 2×2). De plus, afin d'être moins limité par le bruit de détecteur, nous avons travaillé à une fréquence de 200 Hz, soit la moitié seulement de la fréquence maximale accessible.
3. Enfin nous avons utilisé une loi de commande de type intégrateur pour reconstruire la phase turbulente (cf. § 2.3). Le retard de correction étant de deux trames, nous avons choisi de travailler avec un gain de 0.3, inférieur au gain optimal mais permettant de travailler à faible flux.

7.3 Caractérisation du système MAD

7.3.1 Evolution de la performance selon le flux en AO classique

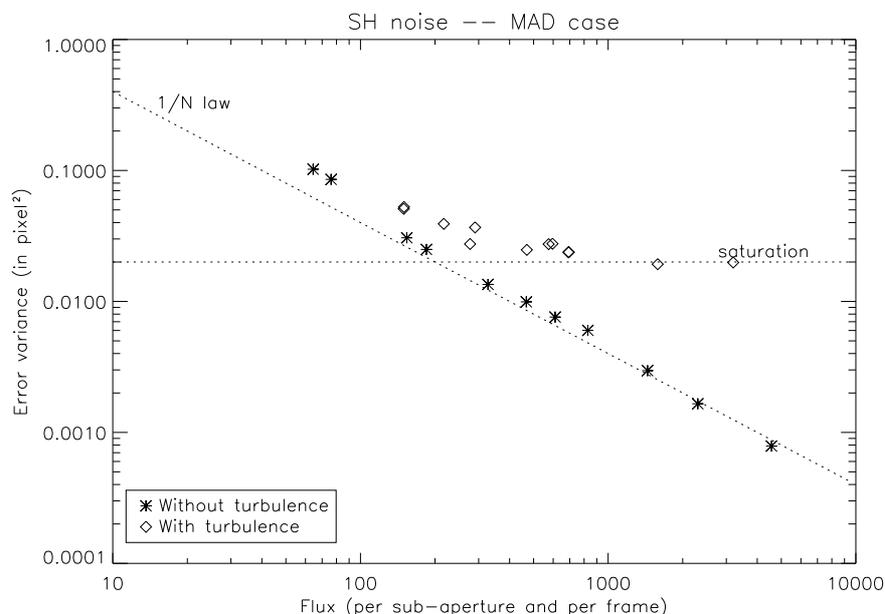


FIG. 7.4 – Evolution de la variance de pente locale aux bords d'une sous-pupille de Shack-Hartmann en fonction du flux incident.

Avant d'entamer l'analyse de performance pour le GLAO, il était indispensable de réaliser une série de tests afin de s'appropriier les conditions de fonctionnement du démonstrateur. Le premier test a été de caractériser le comportement des senseurs de front d'onde en fonction du flux. Cette première étape est importante pour la suite car elle permet de connaître les différents régimes de fonctionnement du Shack-Hartmann (cf. § 2.1.2.3) et de choisir la gamme de flux appropriée pour tester l'optimisation du SO. Nous avons donc tracé sur la figure (7.4) l'évolution de la variance de la pente locale de la phase corrigée sur une sous-pupille en fonction du flux par sous-pupille. Nous avons travaillé en AO simple, en boucle fermée et avec ou sans turbulence.

Comme nous l'avons vu précédemment (cf. § 2.1.2.3), l'évolution de la variance du bruit sur la mesure du Shack-Hartmann dépend de la source d'erreur dominante. En l'absence de turbulence, la figure (7.4) montre clairement une évolution en $1/N_{ph}$ de la variance de l'erreur de mesure, ce qui signifie que la mesure est dominée par le bruit de photons. On remarque toutefois que les deux points correspondants aux plus faibles flux s'écartent de la loi en $1/N_{ph}$, ce qui peut s'expliquer par l'influence croissante du bruit de détecteur (loi en $1/N_{ph}^2$) lorsque le flux diminue.

Cette prédominance du bruit de photons étonne lorsqu'on considère les caractéristiques des senseurs de front d'onde. En effet, le bruit de détecteur étant caractérisé par un écart-type de 10.2 photo-électrons/trame/pixel, il devrait dominer la mesure, y compris pour des flux relativement importants : Un écart important existe entre les mesures relevées sur MAD et le bruit attendu. Plusieurs hypothèses peuvent expliquer ceci :

- Le fond est soustrait des imagerie du SH avant le calcul des pentes ; il est possible que le fond soustrait soit trop faible ou trop important :
 - * S'il est surestimé, les imagerie sont en fait seillées ;
 - * S'il est sous-estimé, les mesures de pente sont biaisées vers 0
 Dans un cas comme dans l'autre, l'effet du bruit de détecteur sur les mesures de pente est beaucoup moins marqué que ce qui est prévu par la théorie.
- Les pixels négatifs des imagerie sont mis à 0, ce qui atténue également l'impact du bruit de détecteur sur les mesures du SH.
- Enfin, le bruit de détecteur est peut-être moins fort que l'on ne pense, les mesures étant réalisées à une fréquence de 200 Hz seulement.

Nous ne nous étendons pas plus sur ce problème ici : notre objectif pour l'instant n'est pas d'étudier les SH de MAD mais d'en connaître les régimes de fonctionnement pour mieux comprendre les performances du démonstrateur en GLAO. Une étude approfondie du comportement d'un senseur Shack-Hartmann est disponible dans la quatrième partie de ce manuscrit (cf. en particulier chapitre 10).

Ajoutons simplement qu'en présence de turbulence, le régime de bruit de photons s'arrête très tôt pour laisser la place au régime de saturation. Le plateau de saturation a un niveau élevé et est dû aux déformations turbulentes de la tâche image au foyer des sous-pupilles et aux caractéristiques des sous-pupilles du SH (champ et échantillonnage principalement, cf. Chap. 10). Il est susceptible de nous gêner pour l'optimisation du SO pour le GLAO. En effet, les trois senseurs de front d'onde étant identiques et la turbulence étant stationnaire dans le champ, la simple moyenne des mesures sur les directions d'analyse est déjà optimale en régime de saturation puisque les rapports signal à bruit sont égaux dans les trois directions d'analyse. Adapter le gain de chaque analyseur en fonction du flux qu'il reçoit n'a alors pas de sens, et est même délétère puisque cela introduit une erreur supplémentaire liée à la turbulence d'altitude (cf. § 6.4.1).

On en conclut que l'optimisation du *Star Oriented* ne pourra apporter de gain sensible à la performance du GLAO que pour des étoiles dont le flux reste dans une gamme allant d'une cinquantaine à 500 photons par sous-pupille et par trame. Notons que le cas du *Layer Oriented* (optique ou numérique) est différent : à fort flux, la précision de sa mesure est en effet limitée par la turbulence d'altitude et les écarts de flux entre les étoiles guides (cf. § 4.2). L'optimisation des écarts de flux entre les étoiles garde tout son sens. C'est ce que nous mettrons en évidence plus loin par l'étude du

Numerical Layer Oriented.

7.3.2 Choix d'un critère pour l'analyse des résultats expérimentaux

Nous avons basé toute l'étude analytique des concepts d'analyse de front d'onde que nous avons présenté au chapitre précédent sur un critère de performance lié à la phase estimée : la variance de l'erreur d'estimation de la moyenne de la phase dans le champ (cf. § 6.2.5). Sur MAD, nous n'avons évidemment pas accès à une telle grandeur. Les données de sortie du système sont les images longue pose des étoiles de MAPS. Nous allons donc travailler sur des critères dérivés de ces images : l'énergie intégrée sur un élément de surface carré du plan focal et le rapport de Strehl, dont on rappelle les définitions ci-dessous :

$$EE_a = \frac{\int_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{y=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} PSF(x, y) dx dy}{\iint_{-\infty}^{\infty} PSF(x, y) dx dy}$$

$$SR = \frac{PSF(\mathbf{0})}{PSF_{diffraction}(\mathbf{0})}$$

La figure (7.5) montre les cartes des énergies encadrées obtenues après fermeture de la boucle d'optique adaptative dans quatre cas différents et en l'absence de turbulence. Les trois premières cartes (Fig. 7.5 - a, b et c) montrent la performance obtenue avec une boucle d'optique adaptative simple asservie chaque fois sur une source guide différente (les étoiles d'indices 5, 10 et 15 respectivement). La quatrième montre la performance obtenue avec une boucle GLAO, la mesure de phase étant dans ce cas la simple moyenne des mesures des voies d'analyse pointant sur les 3 étoiles précédentes (SO). Le critère de performance utilisé ici est l'énergie intégrée sur un pixel carré de 200 mas de côté. On trouve en titre de chaque carte la valeur moyenne de l'énergie encadrée sur le champ ainsi que son écart-type.

Dans un système parfait, les quatre cartes doivent être rigoureusement identiques et uniformes. La figure (7.5) montre que ce n'est pas exactement le cas. On ne s'intéresse pas dans l'immédiat aux causes de ces variations de performance dans le champ : ce point, très important, est traité dans le paragraphe suivant. On souhaite simplement ici faire le point sur les différents estimateurs de performance à notre disposition et en choisir un que l'on puisse utiliser seul en toute confiance.

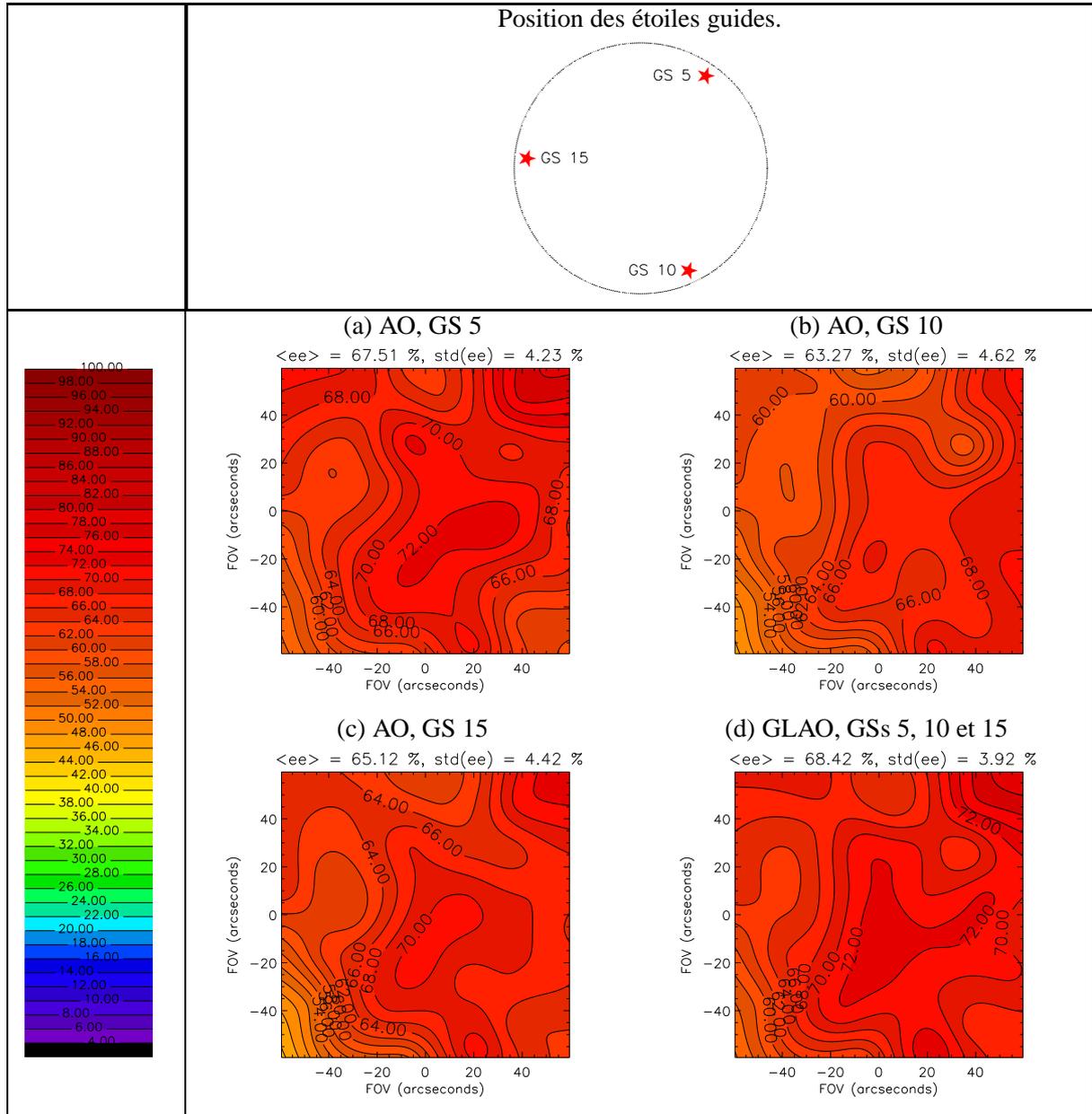
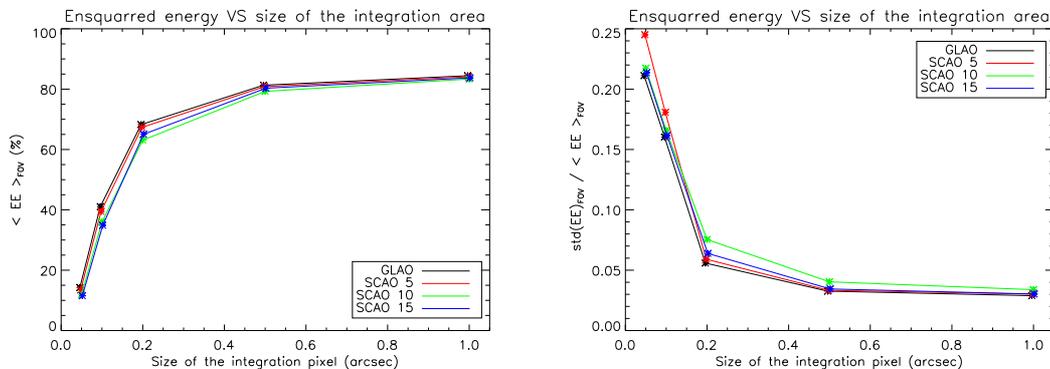


FIG. 7.5 – Cartes d'énergies encadrées dans 200×200 mas en l'absence de turbulence. Les cartes (a), (b) et (c) présentent les résultats en AO classique pour chacune des 3 étoiles guides. La carte (d) présente le résultat du GLAO.

On remarque en premier lieu que la performance fluctue d'un point à l'autre au sein d'une même carte. Ces fluctuations sont de l'ordre de 4% d'énergie encadrée en écart-type, ce qui représente 6% de fluctuations relatives par rapport au niveau moyen. Cependant l'énergie est ici intégrée sur un élément de surface important. Un moyen de mieux voir les fluctuations de performance quand on considère un critère intégré tel que l'énergie encadrée est de réduire la taille de l'élément de surface d'intégration de l'énergie lumineuse. C'est ce que montre la figure (7.6). Quand la taille du domaine d'intégration diminue, l'énergie moyenne diminue logiquement, et les fluctuations augmentent. On note cependant sur cette figure que les caractéristiques de la correction dans le champ évoluent de la même façon pour les quatre configurations envisagées ici (les 3 AO classiques et le GLAO). La comparaison de performance peut donc être réalisée en fixant une fois pour toutes la taille de l'élément de surface d'intégration. On a choisi d'intégrer l'énergie dans un pixel carré de 200 mas de côté, taille typique d'un élément d'intégration pour les applications de spectro-imagerie du GLAO.



(a) Energie encadrée moyenne dans le champ Fluctuations par rapport à la valeur moyenne

FIG. 7.6 – Valeur moyenne et écart-type dans le champ de l'énergie encadrée en fonction de la taille de l'élément d'intégration.

On peut également accentuer la dynamique de l'évolution de la performance dans le champ en choisissant le rapport de Strehl comme critère de performance. La figure (7.7) montre ainsi l'équivalent des cartes de la figure (7.5), la qualité de la correction étant exprimée cette fois en rapport de Strehl. Ici encore, on montre qu'il y a peu de différences entre les cartes de la figure (7.5) et celles de la figure (7.7), bien que les fluctuations de ces dernières soient effectivement plus importantes. Le critère du rapport de Strehl n'apporte pas de supplément d'information sur qualité de la correction par rapport au critère d'énergie encadrée. Dans la suite de cette étude on se limitera donc à une analyse sur l'énergie encadrée dans 200 mas.

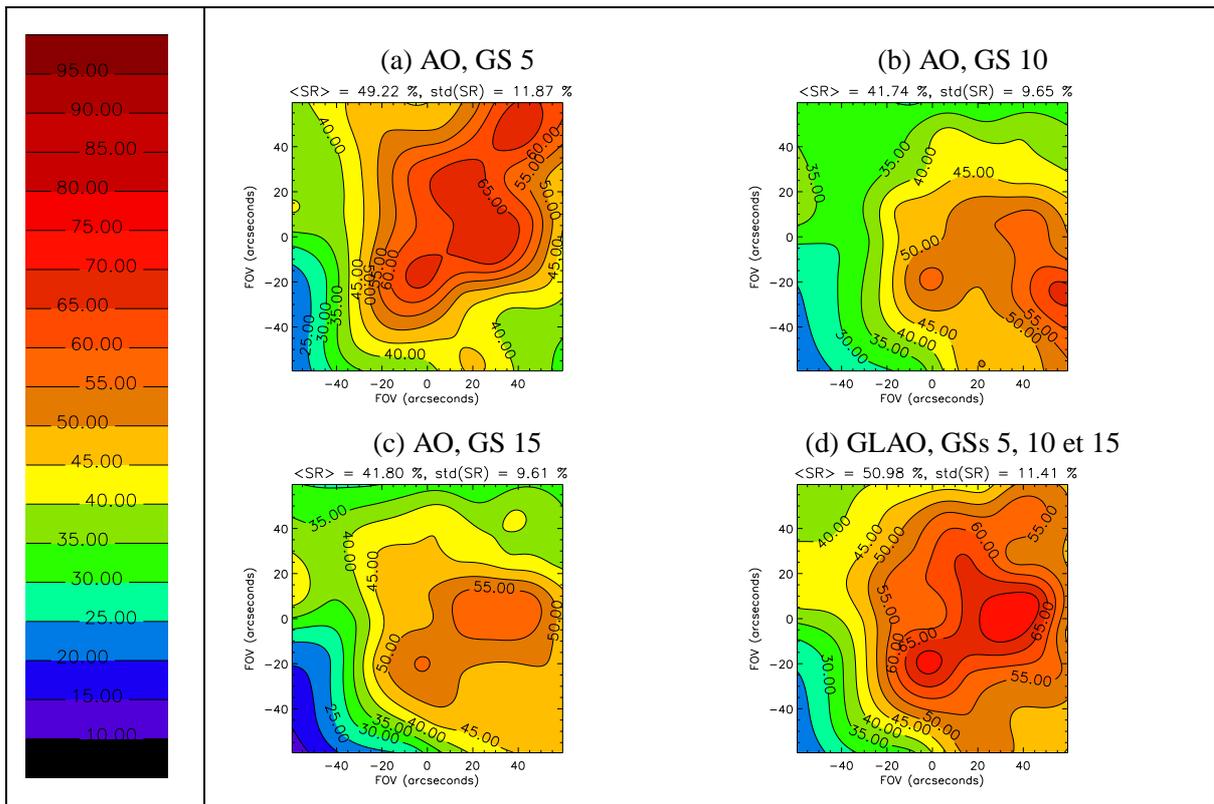


FIG. 7.7 – Cartes des rapports de Strehl en l'absence de turbulence. Les cartes (a), (b) et (c) présentent les résultats en AO classique pour chacune des 3 étoiles guides. La carte (d) présente le résultat du GLAO.

7.3.3 Caractérisation des aberrations statiques

En l'absence de turbulence, la principale limitation des performances du système réside dans ses aberrations statiques de champ, visibles sur les cartes de la figure (7.5). On souhaite ici les caractériser et connaître ainsi la performance ultime du système. Pour un système multi-analyse, on peut distinguer trois catégories d'aberrations de champ :

- Les aberrations de champ communes : ce sont les aberrations de champ situées en amont de la séparatrice sur le trajet optique. Elles sont vues à la fois par les voies d'analyse et la voie d'imagerie. Mais en AO classique, elle sont vues différemment par le système selon la direction de l'étoile sur laquelle il est asservi. La correction de ces aberrations est alors maximale dans la direction de l'étoile guide, mais se dégrade à mesure qu'on s'en éloigne dans le champ.
- Les aberrations de champ non communes : ce sont les aberrations de la voie imagerie. A moins de mettre en place une procédure spécifique pour leur estimation et leur prise en compte par la boucle (cf. § 2.4.3.6), ces aberrations ne sont ni vues, ni corrigées par le système d'AO. Leur impact sur la performance finale est donc le même quel que soit le type d'AO envisagé et quelles que soient les positions des étoiles guides.
- Les aberrations spécifiques aux voies d'analyse, qui ne sont vues que par le Shack-Hartmann associé. Elles n'affectent pas la voie d'imagerie, mais sont pourtant corrigées par le système d'AO, ce qui introduit une dégradation de la performance du système. Lorsque les voies d'analyse sont calibrées, ces aberrations sont automatiquement compensées par la boucle. Ce n'est pas le cas ici car les pentes de référence des senseurs sont calées sur les centres des sous-pupilles, pour les raisons données précédemment (§ 7.2).

On estime ici l'impact de ces différentes aberrations sur la performance du système en boucle fermée. On considère ici et dans la suite l'énergie intégrée sur un pixel carré de 200 mas de côté. On travaille à fort flux et en éclairage uniforme. Les cartes de la figure 7.5 montrent voie d'analyse par voie d'analyse les aberrations statiques dégradant le niveau de correction dans le champ. On note en premier lieu que les niveaux d'énergie encadrée dans 200 mas sont de l'ordre de 40 à 50 %, ce qui est élevé et traduit la faiblesse des aberrations.

On constate également de fortes similitudes entre les trois premières cartes (AO classique, figs. 7.5 a, b et c). En réalisant la moyenne des mesures sur les trois voies d'analyse, le GLAO (fig. 7.5 d) permet de lisser les différences entre les directions, mais la tendance commune aux trois voies demeure. Ce comportement similaire révèle l'influence des aberrations de champ non communes. C'est le cas en particulier de la dégradation de performance au niveau du coin inférieur gauche des cartes. Bien que l'effet de ces aberrations sur un critère tel que l'énergie intégrée ne soit pas linéaire, il est possible de limiter en partie leur influence sur les cartes de correction en soustrayant les cartes deux à deux. On visualise alors mieux les aberrations spécifiques à l'une ou l'autre des voies et les aberrations de champ communes. C'est ce que l'on fait sur les cartes résiduelles de la figure (7.8), représentant les différences point à point entre les cartes (7.5 a), (7.5 b) et (7.5 c).

On note en particulier que ces écarts d'une voie à l'autre sont du même ordre de grandeur, voire inférieurs aux écarts d'un point à l'autre du champ pour une même voie. Ces aberrations différentielles ne constituent donc pas un facteur dominant dans le comportement de MAD. On remarque enfin que la configuration GLAO, en réalisant la moyenne des phases dans les différentes directions, lisse les effets des aberrations internes aux voies d'analyse et des aberrations communes

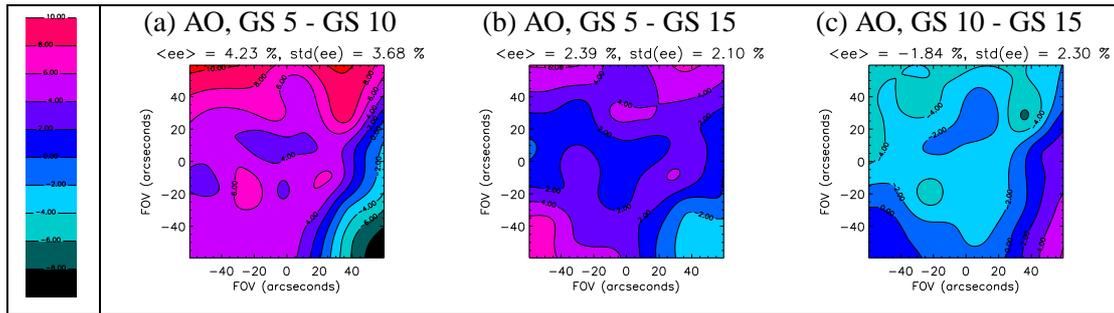


FIG. 7.8 – Différences point à point entre les trois premières cartes (AO classique) de la figure 7.5.

de champ, ce qui permet à la fois d'améliorer la performance moyenne dans le champ et de réduire les fluctuations d'un point du champ à l'autre (7.5 d). Ainsi, pour peu qu'elles soient décorréliées d'une voie à l'autre, l'influence des aberrations différentielles sur la phase moyenne doit varier en $1/\sqrt{3}$. La relation entre la phase et l'énergie intégrée n'étant pas linéaire cette loi n'est pas valide lorsqu'on considère l'énergie encadrée, mais on discerne toutefois nettement l'atténuation des fluctuations dans le cas du GLAO.

7.3.4 Introduction de la turbulence

7.3.4.1 Absence de correction

La figure 7.9 montre les niveaux de performance du système sans correction, pour les deux profils atmosphériques que nous avons considéré par la suite : un profil à une couche au sol (7.9 a) et un profil à trois couches (7.9 b). On remarque que ces deux cartes sont très homogènes. On retrouve toutefois la dégradation déjà observée précédemment dans la partie inférieure gauche du champ et due aux aberrations non communes de champ. Celles-ci sont plus visibles dans le cas où seule la turbulence au niveau du sol est considérée. Cette différence est due en fait à une différence de *seeing* (cf. § 1.2.3) entre les deux profils de turbulence : celui-ci est en effet plus faible lorsque seul l'écran de phase de la pupille est en place.

7.3.4.2 Turbulence au sol

Une autre caractéristique intéressante du banc est son comportement à fort flux en présence uniquement de l'écran de turbulence conjugué à la pupille du télescope. En effet, si l'écran de phase est bien conjugué à la pupille, toutes les voies d'analyse doivent voir la même turbulence et restituer la même carte de correction. En outre cette configuration nous intéresse particulièrement car elle nous renseigne sur la performance maximale que peut atteindre le GLAO. La figure 7.10 présente les mêmes cartes que les figures 7.5 et 7.8, en ajoutant l'écran de turbulence conjugué à la pupille du télescope. Cet écran est caractérisé par un *seeing* de 0.64 arcsec (cf. tab. 7.2). On remarque une homogénéisation de la réponse des trois cas d'optique adaptative classique (7.10 - a, b et c) par rapport au cas sans turbulence (7.5 - a, b et c). Cette uniformisation est visible à la fois dans le champ pour une voie d'analyse donnée et en un point du champ pour les différentes directions d'analyse. Elle est le signe que les aberrations statiques du banc deviennent négligeables par rapport au résidu turbulent après correction, ce qui confirme l'analyse du paragraphe (7.3.3). Ceci est également confirmé par

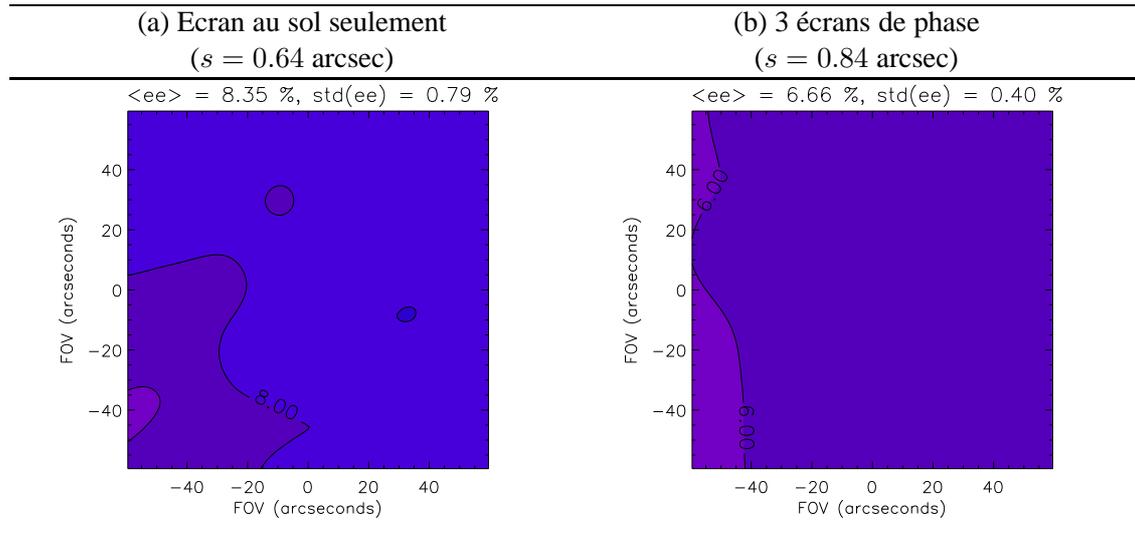


FIG. 7.9 – Energie encadrée dans 200 mas sans correction.

les cartes présentant les différences de réponse d’une configuration d’analyse à l’autre. En effet, les figures (7.10 - e, f et g) montrent que les fluctuations de performance entre deux directions d’analyse sont en moyenne de 2 % alors que les fluctuations au sein du champ pour une même direction d’analyse sont en moyenne de 2.6 %.

7.3.5 En résumé

Le tableau (7.3) résume les performances en énergie encadrée obtenues sur MAD pour le GLAO, à fort flux, selon la turbulence et la correction appliquée.

Configuration	$\langle EE_{200\text{ mas}} \rangle_{FOV}$ (%)	$\sigma_{FOV}(EE_{200\text{ mas}})$ (%)
Pas de turbulence, boucle fermée	68.4	3.92
Turbulence au sol, boucle fermée	47.0	2.67
Turbulence au sol, boucle ouverte	8.4	0.79
Turbulence 3 couches, boucle ouverte	6.7	0.40

TAB. 7.3 – Performances en GLAO à fort flux selon la turbulence et la correction appliquée.

7.4 Etude des performances du mode *Star Oriented* non optimisé, du *Numerical Layer Oriented* et du *Star Oriented* optimisé

Après cette caractérisation du banc, nous avons effectué quelques mesures pour analyser les performances du GLAO avec les trois modes de reconstruction de la phase “*Ground Layer*” que nous pouvions tester, à savoir le SO (simple moyenne des phases dans les différentes directions), le NLO (moyenne pondérée par la fraction du flux total provenant de chaque direction, synthétisant numériquement le LO) et le OSO (moyenne pondérée avec coefficients optimisés). L’objectif est de

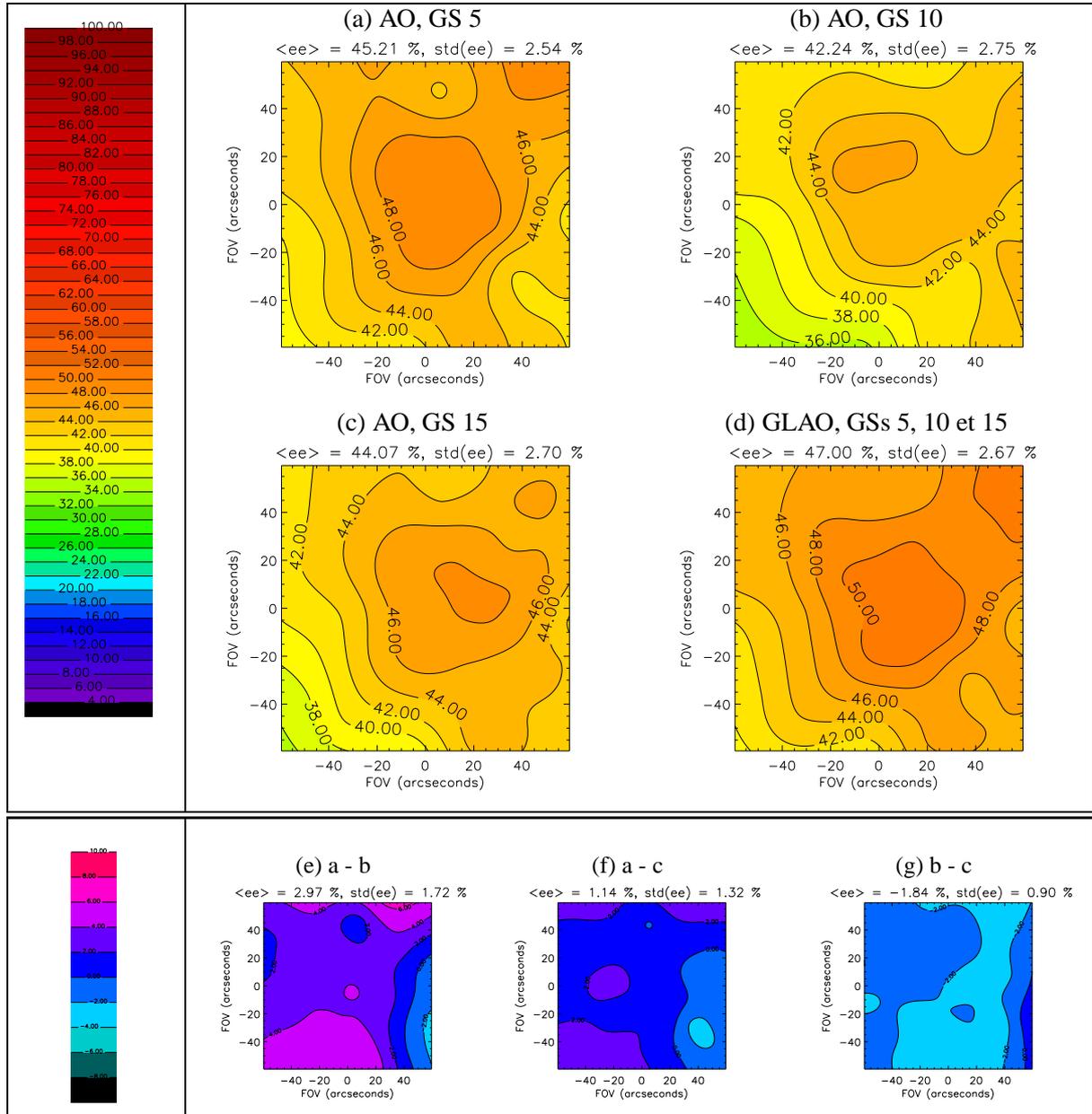


FIG. 7.10 – Cartes d'énergie encadrée dans 200 mas en présence uniquement de la turbulence proche du sol (seeing : 0.64 arcsec). Les cartes (a), (b) et (c) présentent les résultats en AO classique pour chacune des 3 étoiles guides. La carte (d) présente le résultat du GLAO. Les cartes (e) à (g) représentent les différences points à points entre les cartes (a), (b) et (c).

s'assurer du comportement des trois concepts de reconstruction en présence de turbulence et d'étoiles guides de flux différents. Nous avons testé le GLAO en quatre points de fonctionnement, correspondant à 4 sets de magnitudes différentes. Les étoiles guides considérées sont toujours les étoiles 5, 10 et 15 de la figure (7.3) ; le tableau 7.4 donne le flux mesuré dans une sous-pupille pleinement éclairée du Shack-Hartmann pour chaque configuration testée ainsi que leur magnitude équivalente en bande V.

Configuration	GS 5		GS 10		GS 15	
	V	flux	V	flux	V	flux
M000	10.7	1400	10.6	1540	10.5	1690
M102	10.0	2675	8.75	8460	11.67	575
M120	12.6	220	13.3	120	11.7	600
M320	13.8	70	13.2	140	11.4	740

TAB. 7.4 – Magnitude visible des étoiles guides et flux par sous-pupille de SH (en photo-électrons / sous-pupille / trame) selon la configuration.

7.4.1 Le *Star Oriented*

On peut tout d'abord analyser le comportement du GLAO en *Star Oriented*, c'est-à-dire lorsqu'on réalise la simple moyenne des mesures obtenues dans les différentes directions. La figure (7.11) montre les cartes de performances obtenues dans les 4 configurations décrites dans le tableau (7.4), en présence des trois écrans turbulents de MAPS.

La première carte (M 000) a été réalisée à fort flux et en éclairage uniforme. D'après les mesures de flux effectuées sur le banc et résumées dans le tableau (7.4), on remarque qu'il existe en réalité des écarts de flux entre les étoiles guides. Toutefois, si on se réfère à la courbe (7.4) représentant les régimes de fonctionnement des senseurs SH en fonction du flux incident, on remarque que le flux collecté dans les sous-pupilles est tel que la boucle fonctionne dans la zone de saturation des senseurs de fronts d'onde. En définitive, le rapport signal à bruit sur les senseurs est donc bien le même dans toutes les directions d'analyse.

Cette configuration peut donc servir de référence pour l'analyse : elle donne la performance ultime du mode GLAO SO pour ce lot d'étoiles et ce profil de turbulence. L'énergie encadrée dans 200 mas est de l'ordre de 16.8 % en moyenne sur le champ. En boucle ouverte, elle était de 6.7 % seulement en moyenne. On réalise donc un gain d'un facteur 2.5 sur l'énergie encadrée par rapport au cas non corrigé. Par ailleurs, les fluctuations dans le champ sont réduites encore du tiers par rapport au cas vu précédemment où seule la turbulence au sol était considérée (cf. tableau 7.3) : erreurs liées à la turbulence d'altitude dominent les aberrations statiques du banc.

Les trois autres cartes de la figure (7.11) montrent les effets d'une disparité de flux des étoiles guides. On voit très clairement sur ces cartes les effets du bruit sur les senseurs de front d'onde dans la direction des étoiles de faible luminosité. C'est le cas en particulier sur la carte (M 102) dans la direction de l'étoile 15 (au milieu à gauche) et sur la carte (M320) dans la direction de l'étoile 5 (en haut à droite). En conséquence, la performance moyenne sur le champ chute et l'uniformité de

correction est dégradée : on perd 4% d'énergie encadrée entre la carte (M 000) et la carte (M 320), qui utilise l'étoile la moins lumineuse des 4 configurations testées. Entre les deux mêmes configurations, l'écart-type des fluctuations d'énergie dans le champ double.

L'alternative proposée au *Star Oriented* pour limiter les effets du bruit de détecteur est le *Layer Oriented*. Il n'a malheureusement pas été possible de le tester expérimentalement, mais nous nous sommes intéressés à son pendant numérique, le NLO.

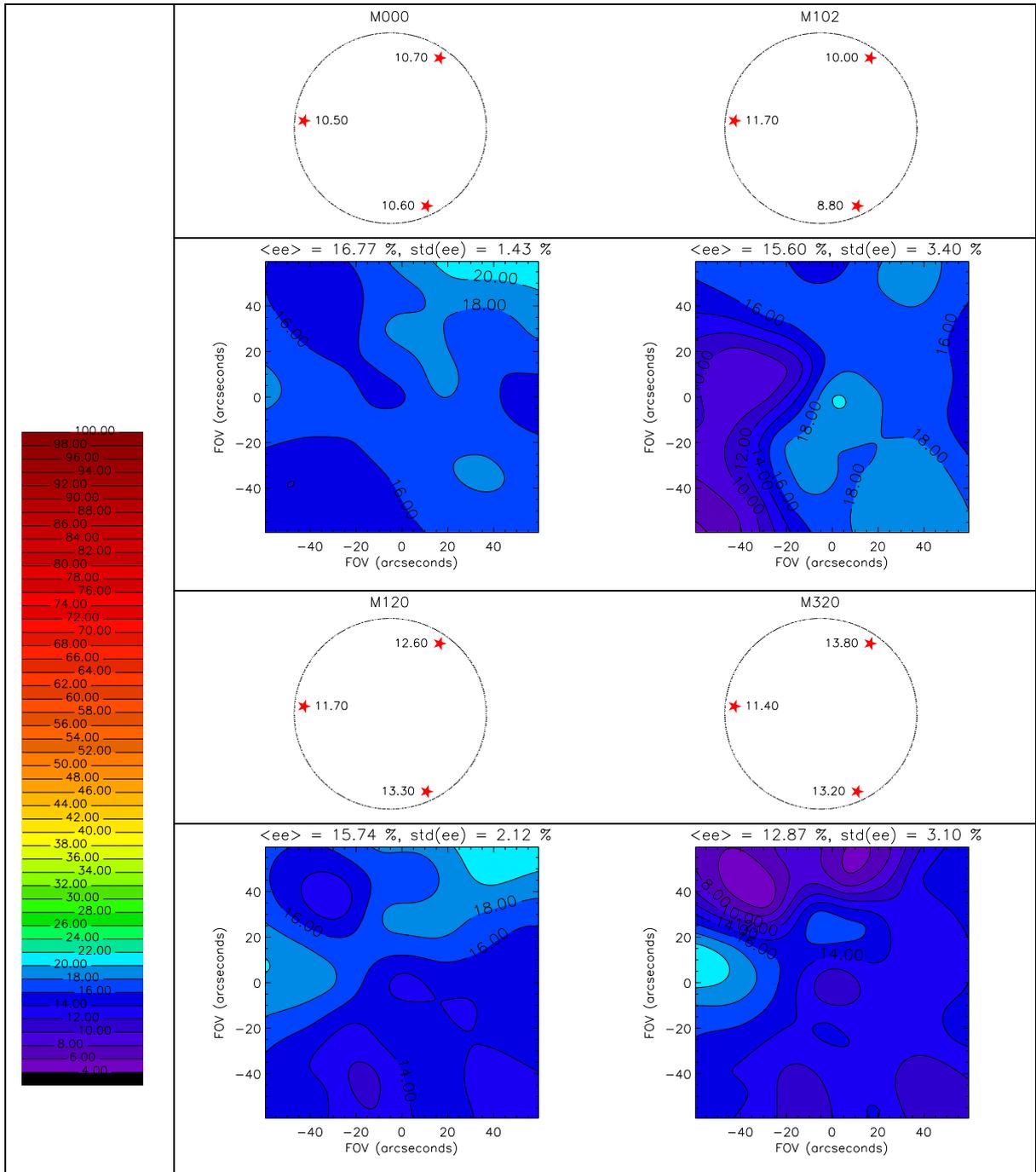


FIG. 7.11 – Cartes d'énergie encadrée dans 200 mas pour le GLAO en mode SO.

7.4.2 Le Numerical Layer Oriented

L'étude du *Layer Oriented* numérique (NLO) nous intéresse particulièrement parce que son principe est tel qu'en présence uniquement de bruit de photons il se comporte exactement comme le *Layer Oriented* optique (cf. § 6.3.3). Il faudra toutefois garder ici à l'esprit que la contribution du bruit de détecteur est multipliée par le nombre de senseurs de front d'onde dans le NLO par rapport au LO optique (cf. § 6.3.3).

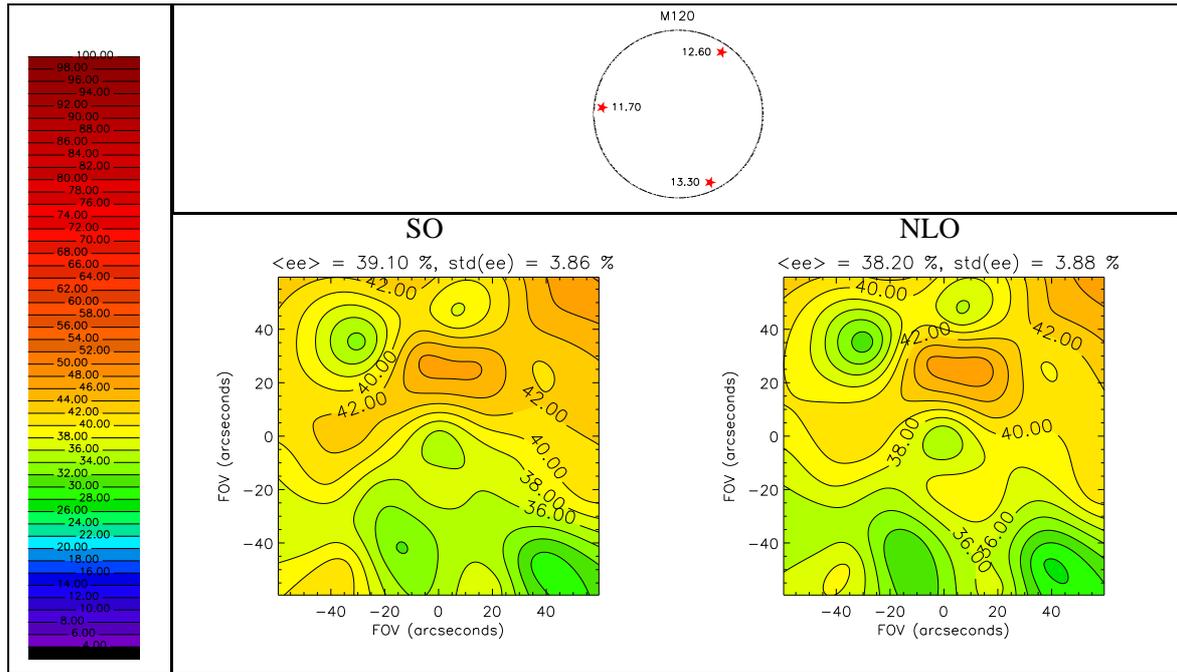


FIG. 7.12 – Cartes d'énergie encadrée dans 200 mas pour le GLAO en mode NLO et en mode SO. Configuration d'étoiles M 120, turbulence dans la pupille uniquement ($s = 0.64$ arcsec).

La figure (7.12) compare les cartes d'énergie encadrée du SO et du NLO dans une configuration où les étoiles ont des flux différents (configuration 120) et où seule la turbulence au sol est considérée. On note que les deux modes de reconstruction offrent des performances quasiment identiques : elles diffèrent de moins de 1 % d'énergie intégrée en moyenne sur le champ, et les fluctuations au sein de la carte sont identiques en écart-type. En particulier, on note la même dégradation de la performance dans la direction de l'étoile la plus faible. Conformément aux prévisions faites sur la base de l'étude analytique présentée au paragraphe (6.3.1), le NLO a un comportement identique au SO lorsque la turbulence est localisée intégralement dans la pupille.

Par contre les choses changent radicalement lorsqu'il existe de la turbulence d'altitude. On se place pour étudier ce point dans le cas de la configuration (M 102). Cette configuration est intéressante ici car les flux sur les senseurs sont très forts (cf. tableau 7.4), si bien que la mesure des WFSs est limitée en variance par les erreurs dues à la troncature des spots Hartmann et que les rapports signal à bruit sur les senseurs sont égaux (cf. fig. 7.4). De plus les écarts de flux entre les trois senseurs de front d'onde sont importants. Dans cette situation, comme nous venons de le dire,

le NLO se comporte exactement comme le ferait un LO optique. La figure (7.13) montre les cartes d'intensité obtenues dans cette configuration pour le SO et le NLO.

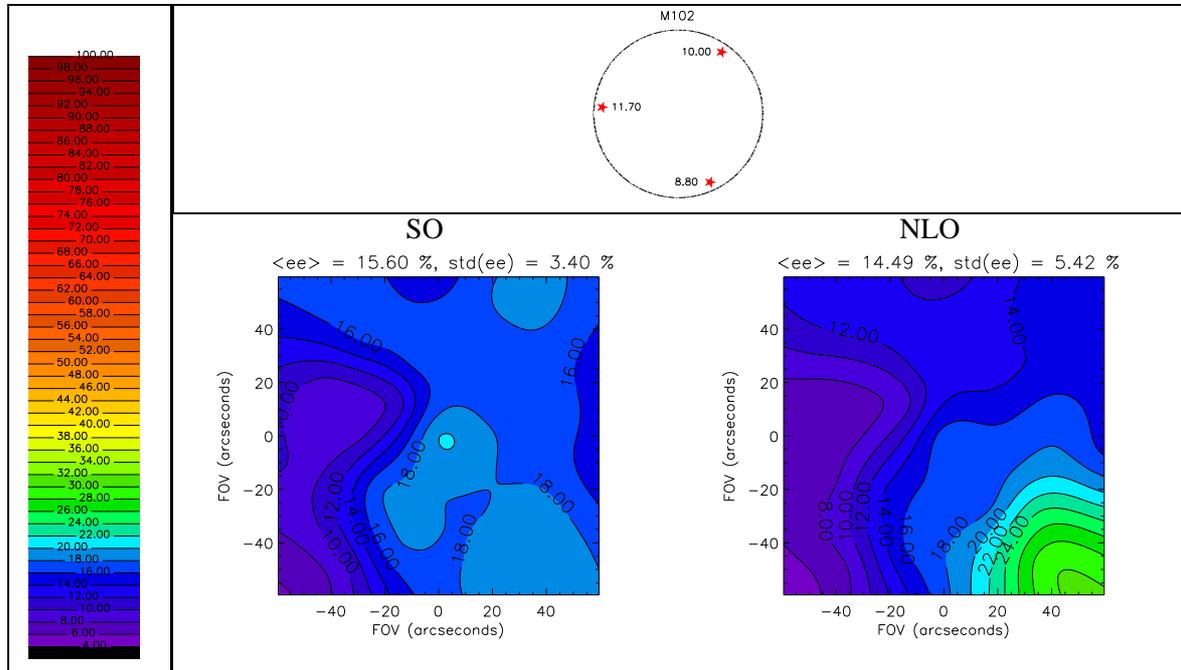


FIG. 7.13 – Cartes d'énergie encadrée dans 200 mas pour le GLAO en mode NLO et en mode SO. Configuration d'étoiles M 102, 3 couches turbulentes ($s = 0.84$ arcsec).

On remarque que la performance du NLO est très clairement distordue dans la direction de l'étoile la plus brillante (ici, l'étoile 10, en bas à droite). On observe également une perte de performance dans la direction de l'étoile 15 (à gauche) plus importante que dans le cas du SO : la pondération de la mesure effectuée dans cette direction est trop importante, de l'information est perdue. Le rapport signal à bruit des WFSs étant identique dans les deux cas, la dégradation observée pour le NLO en présence des trois écrans de phase ne peut être attribuée qu'aux effets conjugués de la turbulence d'altitude et des écarts de flux entre les étoiles guides. Avec un écart de magnitudes entre l'étoile guide la plus forte et la plus faible de seulement une magnitude et demie (cf tab. 7.4), la perte de performance du NLO par rapport au SO est légèrement supérieure à 1 % d'énergie encadrée moyenne, ce qui reste acceptable, mais les fluctuations dans le champ augmentent de 60 %.

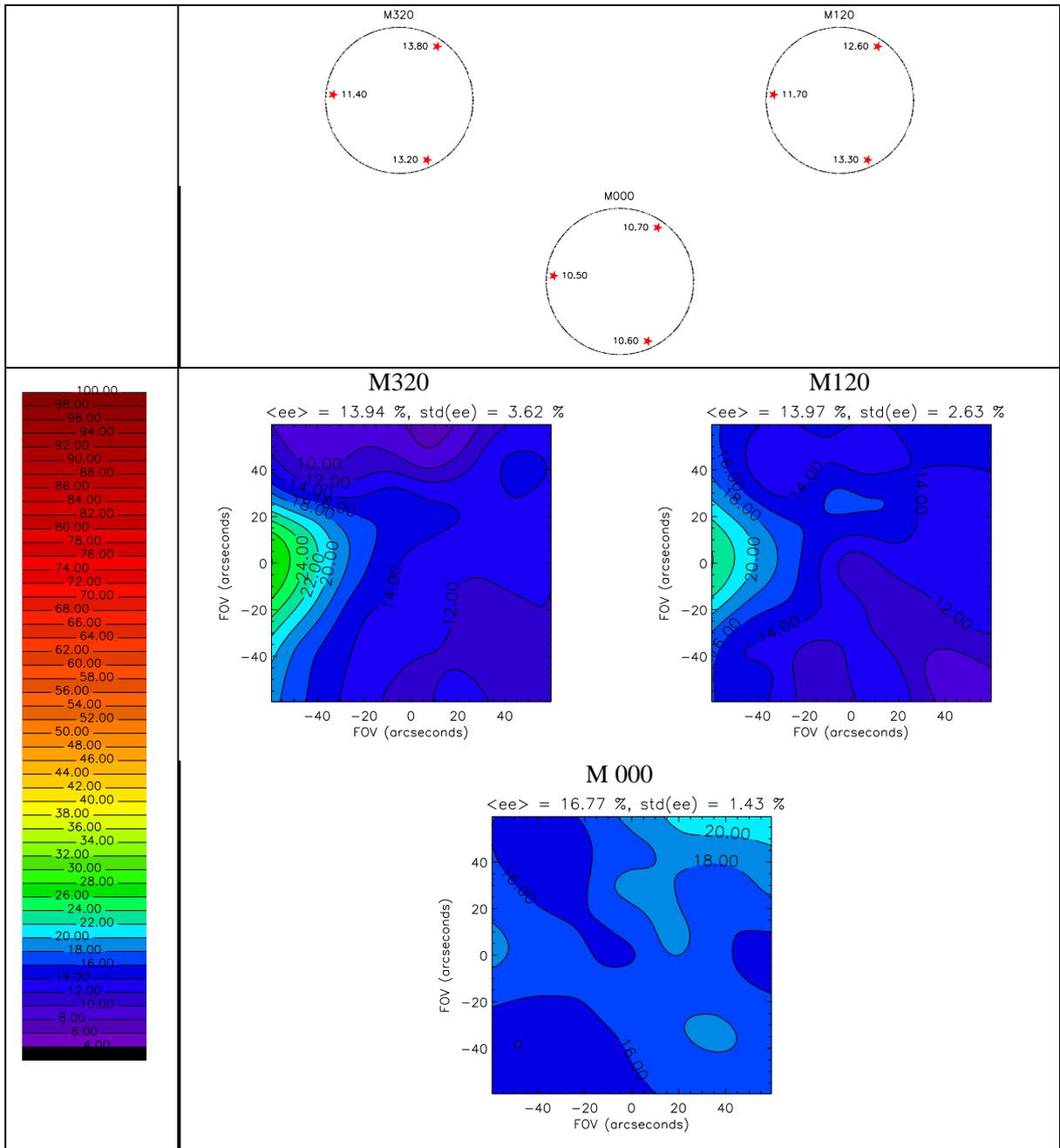


FIG. 7.14 – Cartes d'énergie encadrée dans 200 mas pour le GLAO en mode NLO, en présence de turbulence d'altitude.

Cette dégradation de la performance du NLO se retrouve pour les autres configurations testées. C'est ce que montre la figure (7.14). On reporte pour mémoire sur cette figure la carte de correction en configuration (M 000), obtenue en mode SO, et qui sert de référence : elle correspond à la performance ultime que l'on pourrait atteindre avec un LO à fort flux, l'éclairement étant quasiment uniforme. On remarque que par rapport à cette carte, les performances du NLO dans les configurations (M120) et (M 320) augmentent systématiquement vers l'étoile la plus brillante dès qu'il existe des écarts de flux : pour les deux configurations de la figure 7.14, la correction est nettement plus forte dans la direction de l'étoile 15 (à gauche). Pour aller un peu plus loin dans l'analyse, Le tableau 7.5 permet de comparer les performances moyennes sur le champ pour le SO et le NLO.

Configuration		M 000	M102	M120	M320
$\langle EE_{200\text{ mas}} \rangle_{FOV}$ (%)	SO		15.6	15.7	12.9
	NLO	16.8	14.5	14	13.9
$std_{FOV}(EE_{200\text{ mas}})$ (%)	SO		3.40	2.12	3.10
	NLO	1.43	5.42	2.63	3.62

TAB. 7.5 – Comparaison des performances du SO et du NLO en présence de turbulence en altitude.

Ce tableau démontre clairement que pour les deux configurations à fort flux (M 102 et M 120) le SO est meilleur que le NLO², en performance moyenne comme en uniformité de correction. Le NLO ne prend le pas sur le SO que lorsque ce dernier a l'un de ses senseurs limité par le bruit de détecteur : c'est le cas de la configuration M 320, pour laquelle l'analyse de front d'onde dans la direction de l'étoile 5 ne se fait qu'avec 70 photo-électrons par sous-pupille et par trame. Dans ce cas, le NLO permet d'obtenir une performance moyenne dans le champ meilleure que celle du SO. Notons que le LO étant moins sensible au bruit de détecteur que le NLO, ce bénéfice sera accentué. Cependant, on remarque que c'est au prix de l'uniformité de la correction : la performance du NLO fluctue un peu plus dans le champ.

7.4.3 Optimisation du SO

Grâce au modèle analytique développé précédemment (cf. § 6.4.1), nous avons calculé les coefficients de gain optimaux pour les voies d'analyse pour les différentes configurations. Le tableau 7.6 donne les valeurs de gains calculées et permet de les comparer avec les coefficients correspondants au NLO (i.e. les flux relatifs par étoile guide).

La différence principale entre les deux concepts est le critère de pondération : dans le cas du NLO, la pondération se fait en fonction de la fraction du flux total illuminant chaque voie d'analyse. Dans le SO optimisé (OSO), c'est la rapport signal à bruit sur les senseurs de front d'onde qui importe. La différence entre les deux approches est flagrante dans le cas de la configuration M 102 : alors que les gains affectés aux trois voies sont très différents dans le cas du NLO, ils sont très proches dans le cas du OSO : les trois coefficients sont quasiment égaux à l'unité, si bien que sa performance est identique à celle du SO.

²et que le LO puisqu'on est en régime de bruit de photons.

Configuration	M102	M120	M320
Coefficients NLO	$\eta_5 = 0.30$	$\eta_5 = 0.23$	$\eta_5 = 0.07$
	$\eta_{10} = 0.57$	$\eta_{10} = 0.13$	$\eta_{10} = 0.15$
	$\eta_{15} = 0.13$	$\eta_{15} = 0.64$	$\eta_{15} = 0.78$
Coefficients OSO	$\eta_5 = 1.03$	$\eta_5 = 1.03$	$\eta_5 = 0.45$
	$\eta_{10} = 1.05$	$\eta_{10} = 0.65$	$\eta_{10} = 0.86$
	$\eta_{15} = 0.91$	$\eta_{15} = 1.25$	$\eta_{15} = 1.55$

TAB. 7.6 – Coefficients de gain par étoile guide dans le cas du NLO et du SO optimisé.

Les cartes de la figure 7.15 montrent les résultats obtenus avec le OSO dans les deux configuration à plus faible bruit que nous avons testées. On présente dans le tableau 7.7 une comparaison des performances moyennes dans le champ des trois concepts étudiés ici.

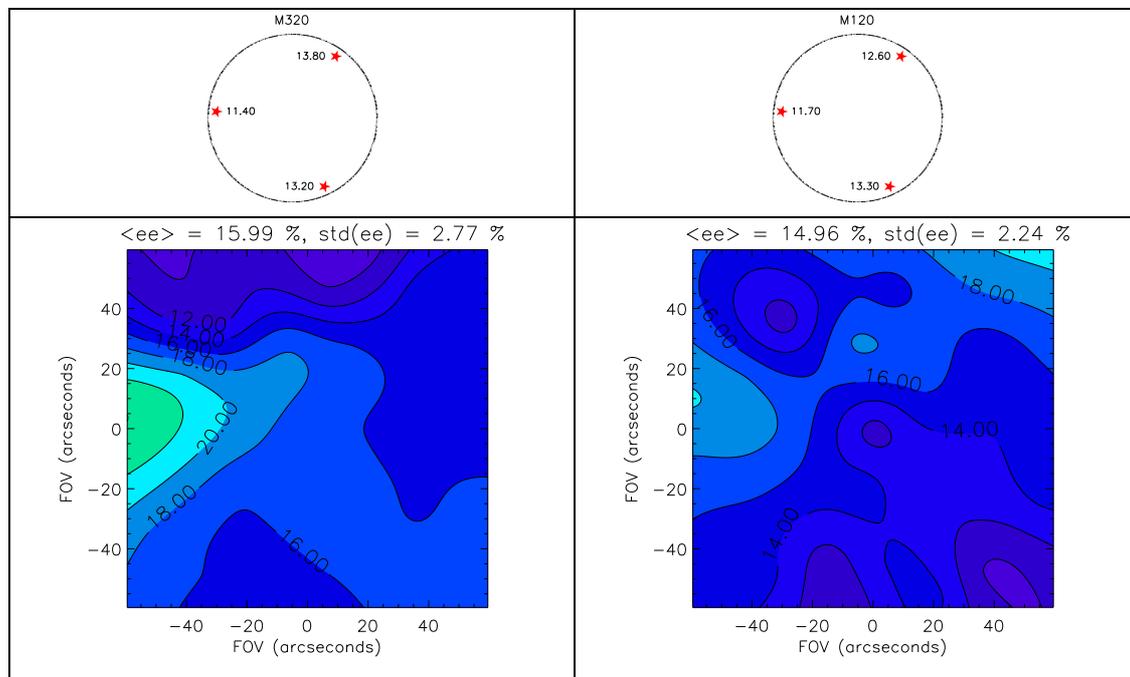


FIG. 7.15 – Cartes d'énergie encadrée dans 200 mas pour le GLAO en mode SO optimisé, en présence de turbulence d'altitude.

On remarque que les résultats de l'optimisation du SO sont très probants dans le cas de la configuration (M 320) : l'optimisation du SO permet de dépasser les performances du SO et NLO, que ce soit en performance moyenne ou en uniformité. Remarquons toutefois qu'on ne peut pas complètement extrapoler ces résultats au LO optique : l'un des analyseur étant dominé par le bruit de détecteur, la performance du NLO est ici nécessairement moins bonne que celle qu'aurait un véritable LO. Cependant toutes les études analytiques précédemment menées montrent qu'on atteint de meilleures performances avec un SO optimisé qu'avec un LO (cf. § 6.4.2, [Nicolle et al. 2006]). C'est pour cette raison que l'optimisation de ce dernier a été proposée dans le paragraphe 6.4.2.

Configuration		M320	M120
$\langle EE_{200\text{ mas}} \rangle_{FOV}$ (%)	SO	12.9	15.7
	NLO	13.9	14
	OSO	16.	15.
$std_{FOV}(EE_{200\text{ mas}})$ (%)	SO	3.10	2.12
	NLO	3.62	2.63
	OSO	2.77	2.24

TAB. 7.7 – Comparaison des performances du SO et du NLO en présence de turbulence en altitude.

Les résultats de l'optimisation sont par contre moins probants dans la configuration (M 120) : Si le OSO permet effectivement de faire mieux que le NLO, sa performance reste légèrement inférieure à celle du SO, l'écart étant toutefois inférieur à 1 % d'énergie encadrée. Le fait que l'on soit dans une situation intermédiaire entre le NLO et le SO montre que les coefficients calculés pour le OSO sont en fait trop dispersés par rapport à ce qu'ils devraient être.

Le problème vient très certainement d'une mauvaise modélisation du bruit sur la mesure du front d'onde dans le modèle servant à calculer les coefficients de l'optimisation. En effet, on a vu au paragraphe (7.3.1) que les résultats de la caractérisation des Shack-Hartmann de MAD a permis de mettre en évidence une limitation de l'erreur de mesure par les effets de troncature du spot Hartmann et non par le bruit de photons à fort flux (plus de 500 photo-électrons par sous-pupille et par trame). De plus on a considéré un bruit de détecteur d'écart-type 10.2 photo-électrons par trame et par pixel. Cependant on a vu (§ 7.3.1) que plusieurs facteurs modifient ou sont susceptibles de modifier l'impact du bruit de détecteur sur la mesure. Le point commun de ces facteurs est d'améliorer le rapport signal à bruit de la mesure.

Or, dans la configuration M 120, le WFS correspondant à l'étoile 10 est limité par le bruit de détecteur si l'on considère que ce dernier a un écart-type 10.2 photo-électrons/trame/pixel. Mais ce n'est déjà plus vraiment le cas lorsque l'on met à 0 les pixels négatifs. Ainsi le tableau (7.8) donne la

	GS 5	GS 10	GS 15
Sans seuillage à 0	1.03	0.65	1.25
Avec seuillage à 0	1.02	0.89	1.12

TAB. 7.8 – Coefficients de pondération optimaux pour la configuration M 120, selon le bruit de détecteur.

valeur des coefficients de gain calculés pour le OSO en fonction de l'écart-type du bruit de détecteur. Il est clair que la sur-estimation du bruit de détecteur conduit à une atténuation trop sévère de la mesure de l'étoile 10.

Or les mesures aboutissant à ces résultats n'ont malheureusement pu être dépouillées qu'après l'acquisition des données sur l'optimisation du GLAO. Les coefficients affectés à chaque WFS pour l'optimisation ont donc été calculés à partir d'un modèle erroné des WFSs, ne prenant pas en compte les effets de troncature mentionnés ci-dessus.

Ajoutons enfin que la remarque est également valable pour la configuration M 320 : en revoyant à la baisse l'impact du bruit de détecteur dans le modèle nous permettant de calculer les coefficients optimaux, on s'aperçoit que la mesure correspondant à l'étoile 5 est un peu trop atténuée. Cela signifie que les performances du OSO décrites par la carte de la figure 7.15 pourraient être encore meilleures.

7.5 Conclusion

Cette validation expérimentale nous a permis de confirmer plusieurs points importants mis en évidence par l'étude analytique et numérique proposée au chapitre 6 :

- L'étude du *Numerical Layer Oriented* nous a permis de confirmer la dégradation importante des performances d'un concept *Layer Oriented* par la turbulence d'altitude lorsque celui-ci est confronté à des étoiles guides de flux différents. Cette dégradation de la performance par rapport à celle du SO est sensible sur la performance moyenne dans le champ corrigé à fort flux (configurations M102 et M120). Mais elle est surtout sensible sur l'uniformité de la performance dans le champ : la correction est nettement dopée dans la direction de l'étoile guide la plus forte, et ce même pour de faibles écarts de magnitude : c'est le cas par exemple dans la configuration M320, où l'écart de magnitude entre les trois étoiles guides est inférieure à 1.5 magnitude dans le visible et où le NLO apporte une performance meilleure en valeur moyenne, mais moins bonne en uniformité que la performance du SO.
- L'étude du *Star Oriented* optimisé nous a permis de confirmer le gain apporté par une gestion optimale des directions d'analyse dans la reconstruction de la phase à appliquer sur le miroir déformable du GLAO. Mais elle nous a également permis de souligner l'importance de la bonne modélisation des senseurs de front d'onde pour l'optimisation du SO. On a ainsi vu avec l'exemple de la configuration M 320 que la méconnaissance de la loi de comportement des senseurs vis-à-vis du bruit de détecteur peut rendre la reconstruction légèrement sous-optimale. Il est également important d'intégrer au modèle de Shack-Hartmann proposé au chapitre 6 une modélisation du comportement de saturation à très fort flux de la variance de l'erreur de mesure, sans quoi on s'expose au risque de dégrader inutilement l'uniformité de la correction du GLAO.

L'implantation prochaine sur MAD du mode *Layer Oriented* et la mise sur le ciel du démonstrateur devraient apporter de très fructueuses informations pour compléter cette étude et discuter de l'opportunité d'une optimisation des concepts SO et LO.

Enfin, certains des résultats proposés ici soulèvent un problème plus général que la comparaison des concepts *Star Oriented* et *Layer Oriented* : celui de la performance globale du GLAO. On a vu au paragraphe (3.3.2.1) que la demande de performance est double pour un GLAO, puisque l'on souhaite à la fois une correction bonne et uniforme dans le champ. Or on a vu au travers de l'exemple de la configuration M320 que les deux ne sont pas nécessairement compatibles : dans cet exemple, la performance moyenne dans le champ du SO est moins bonne que celle de la reconstruction NLO,

mais son uniformité est meilleure. Le choix du mode de reconstruction de la phase de correction à partir des mesures doit donc intégrer et hiérarchiser les deux aspects de la performance du GLAO. On propose une analyse de ce problème dans le chapitre suivant.

Chapitre 8

Optimisation de la performance d'un GLAO

8.1 Objectifs et conditions de l'étude

Dans les deux chapitres précédents, nous avons proposé une optimisation des concepts *Star Oriented* et *Layer Oriented* permettant de gérer au mieux le flux provenant des différentes directions d'analyse et les perturbations de la mesure liées à la turbulence en altitude. L'optimisation ainsi proposée ne permet pourtant pas d'atteindre la performance optimale d'un système d'optique adaptative donné. En effet, dans le cas du GLAO, on a vu au paragraphe (6.2.5) que les aspects traités par l'optimisation proposée au chapitre 6 ne sont pas les seuls facteurs déterminant la performance globale du système GLAO : la répartition des étoiles guides dans le champ joue également un rôle important, surtout lorsqu'elles sont rares. Au delà de la comparaison *Star Oriented / Layer Oriented*, il est donc essentiel d'intégrer à l'optimisation d'un système d'optique adaptative reposant sur la multi-analyse l'aspect de discrétisation du champ introduit par les étoiles guides.

Nous allons ici traiter le cas particulier de l'optimisation du GLAO. Pour un tel système, on a vu au chapitre 6 que la recherche de la meilleure performance moyenne dans le champ ne répond qu'à une partie de la spécification de correction du GLAO : celle d'améliorer la performance moyenne dans le champ. Ainsi, la question de l'uniformité de la correction n'a pas été prise en compte dans l'optimisation partielle que nous venons de présenter.

Le fait est que la demande d'uniformité de la correction est difficile à intégrer dans une analyse de performance pour deux raisons :

- Cette spécification reste mal définie : on cherche une correction "la plus uniforme possible", sans que la marge de tolérance soit clairement définie.
- La priorité entre la spécification de performance moyenne et l'uniformité de performance n'est pas explicitement formulée.

On peut raisonnablement partir du principe que c'est la spécification d'amélioration de la PSF moyenne dans le champ qui prime sur les aspects d'uniformité. En effet, dans le cas contraire, le plus sûr moyen d'arriver à satisfaire la spécification prioritaire (l'uniformité de la correction) serait de ne rien corriger du tout. Le problème de l'optimisation de la performance du GLAO devient alors un

problème d'optimisation de l'uniformité de correction *sous contrainte* de garantir une performance moyenne minimale.

On propose ici une étude en deux temps de l'optimisation globale de la reconstruction du front d'onde pour le GLAO. Dans une première partie, on quantifie l'impact de la répartition des étoiles guides dans le champ sur la performance moyenne du GLAO et on analyse le gain apporté par la reconstruction tomographique par rapport à un simple calcul de phase moyenne. Dans une seconde partie, on donnera des pistes pour la formalisation du problème de la maximisation de l'uniformité de la performance dans le champ *sous contrainte* d'obtenir une performance moyenne minimale.

Par souci de simplicité, on traitera la totalité de ce chapitre en considérant des mesures indépendantes dans les différentes directions d'analyse, telles qu'on les obtient avec un SO.

8.2 Optimisation de la performance moyenne dans le champ

On a démontré au chapitre 6 que la minimisation du critère QC_{GLAO} défini par :

$$QC_{GLAO} = \left\langle \|\widehat{\phi_{GL}} - \phi_{corr.}\|^2 \right\rangle, \quad \text{avec : } \begin{cases} \widehat{\phi_{GL}}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{S_{D_*}} \iint_{D_*} \phi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha}, \\ \phi_{corr.}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{k=1}^{K_*} \beta_k \cdot \phi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha}_k) + \mathcal{Bruit}(\boldsymbol{\rho}) \end{cases}$$

permet de maximiser la performance moyenne dans le champ D_* pour un GLAO dont le miroir est conjugué à la pupille du télescope. Dans ce critère, $\widehat{\phi_{GL}}$ est la moyenne continue de la phase sur toutes les directions du champ technique. Par la suite, sauf mention contraire, on considèrera que le champ technique où l'on recherche les étoiles guides et le champ scientifique où la correction doit être appliquée sont confondus.

La phase $\phi_{corr.}$ est la phase reconstruite à partir des mesures effectuées dans les différentes directions d'analyse, et s'écrit comme la combinaison linéaire des phases turbulentes mesurées dans chaque direction, à laquelle s'ajoute un terme dû à la propagation du bruit de mesure. Dans l'expression de $\phi_{corr.}$, les coefficients β_k et la fonction \mathcal{Bruit} dépendent du concept d'analyse de front d'onde envisagé (cf. § 6.3.1). On restera ici dans le cadre du concept *Star oriented*.

On a vu au chapitre 6 que la minimisation du critère QC_{GLAO} est assurée lorsque l'on effectue la reconstruction tomographique du volume turbulent puis sa projection dans la pupille du télescope. Toutefois, nous n'étions intéressés dans ce chapitre que par la comparaison des concepts d'analyse de front d'onde. Pour simplifier celle-ci, nous avons scindé QC_{GLAO} en deux, en considérant le passage de la phase moyenne $\widehat{\phi_{GL}}$ à la phase $\phi_{corr.}$ comme la succession de deux étapes (cf. § 6.2.5) :

- une étape de discrétisation du champ corrigé D_* par les étoiles guides présentes dans le champ,
- une étape de combinaison linéaire et de dégradation par le bruit des phases mesurées dans les différentes directions d'analyse.

Ce séquençage nous a permis au paragraphe (6.2.5) de définir deux sous-critères issus de QC_{GLAO} :

$$QC_{discret} = \left\langle \left\| \widehat{\phi}_{GL} - \frac{1}{\mathcal{K}_*} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \phi_k \right\|_{turb, bruit}^2 \right\rangle \quad (8.1)$$

$$QC_{WFSC} = \left\langle \left\| \frac{1}{\mathcal{K}_*} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \phi_k - \left(\sum_{k=1}^{\mathcal{K}_*} \beta_k \phi_k + \mathcal{B}ruit \right) \right\|_{turb, bruit}^2 \right\rangle \quad (8.2)$$

$QC_{discret}$ permet d'estimer l'erreur commise en approximant la moyenne continue de la phase sur le champ par une moyenne discrète sur les directions d'analyse, tandis que QC_{WFSC} permet d'estimer l'erreur commise dans le processus de mesure et de reconstruction de la phase moyenne. De ces deux critères, seul QC_{WFSC} subit l'influence du concept d'analyse de front d'onde envisagé, et c'est sur ce critère que nous avons développé l'étude comparative des deux concepts d'analyse du front d'onde ainsi que leur optimisation.

Mais de fait, l'optimisation proposée au chapitre 6 occulte une partie du problème. Avant de se lancer dans une optimisation du GLAO reposant directement sur le critère QC_{GLAO} , on propose de quantifier approximativement l'erreur de discrétisation décrite par $QC_{discret}$, afin de juger de l'opportunité d'une optimisation globale. Une fois établie la nécessité de réaliser l'optimisation globale, on présentera cette dernière et on la comparera à l'optimisation orientée concepts d'analyse proposée au chapitre précédent. Enfin, on s'attachera à évaluer l'importance des fluctuations de performance dans le champ du GLAO optimisé.

Le travail proposé ici s'appuie en partie sur une simulation numérique End-to-End de l'analyse du front d'onde pour le GLAO. D'autres études [Tokovinin et al. 2000- 2001] ont utilisé avec profit une modélisation analytique de l'analyse et de la correction avec un GLAO. Nous avons préféré ici l'approche numérique de type Monte-Carlo car elle permet une grande liberté d'adaptation des paramètres et une étude fine des comportements du système. Le modèle numérique et les conditions dans lesquelles nous avons généré les résultats discutés ci-après sont complexes. Aussi nous semble-t-il utile de présenter le modèle numérique dans le paragraphe suivant.

8.2.1 Simulation numérique de la reconstruction de front d'onde avec un GLAO

8.2.1.1 Principe du modèle numérique

L'organigramme du modèle numérique utilisé pour l'étude de l'analyse et de la reconstruction de front d'onde pour le GLAO est présenté sur la figure (8.1). Ce modèle est principalement constitué de trois modules :

1. Un module de génération des phases turbulentes, qui produit une série d'écrans de phase turbulents conformes au modèle de turbulence de Von Karman. Ces écrans sont générés à partir du profil de turbulence, du seeing et de l'échelle externe donnés en entrée, et reproduisent un volume d'atmosphère turbulent couvrant la totalité du champ imagé par l'instrument. En sortie, le module fournit les phases obtenues dans la pupille après la traversée du volume selon les directions d'analyse (étoiles guides) et les directions de reconstruction (imagerie).
2. Un module simulant la mesure des phases dans les directions d'analyse, qui, pour chaque direction, décompose l'écran de phase sur les modes de Zernike et ajoute du bruit aux

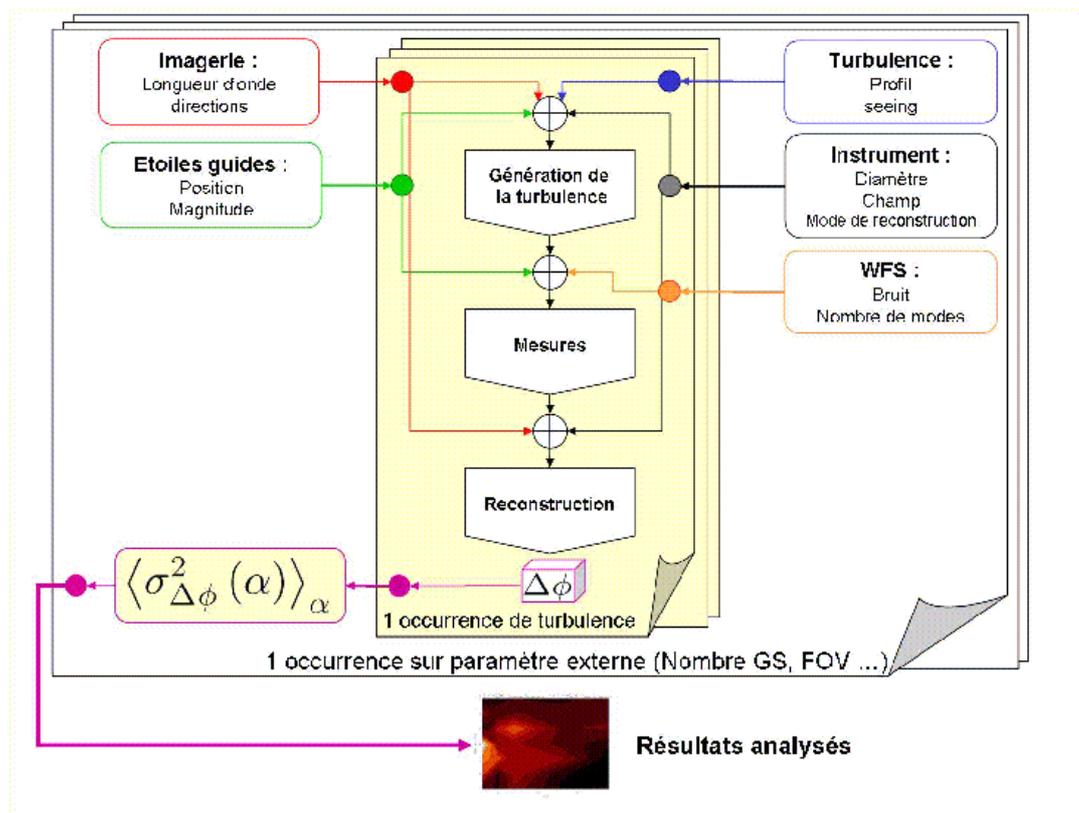


FIG. 8.1 – Organigramme représentant la simulation numérique de l'analyse de front d'onde pour le GLAO.

coefficients mesurés. Le modèle inclut du bruit de photons et du bruit de détecteur, selon la loi de propagation du bruit donnée par Rigaut et Gendron [Rigaut and Gendron 1992]. On tient compte du fait qu'en boucle fermée, une partie du bruit est filtré par le gain de la boucle [Conan 1994].

3. Un module de reconstruction et de correction de la phase. Ce module recombine mode à mode les mesures effectuées dans les différentes directions d'analyse pour reproduire trois phases de correction :
 - Une phase obtenue en moyennant simplement les contributions des différentes directions d'analyse,
 - Une phase reconstruite en utilisant l'optimisation du SO proposée au chapitre 6, l'équation de recombinaison des directions d'analyse étant donnée par l'équation 6.25.
 - Une phase obtenue en réalisant la reconstruction tomographique du volume de turbulence suivie d'une projection dans la pupille, à laquelle le miroir déformable est conjugué (cf. § 4.1.2). La recombinaison se fait alors selon l'équation 4.15.

La phase résultant de chaque recombinaison est ensuite retranchée de la phase turbulente dans chaque direction d'imagerie. On estime la variance de la phase résiduelle pour chaque direction, puis la valeur moyenne ou l'écart-type pour le champ corrigé.

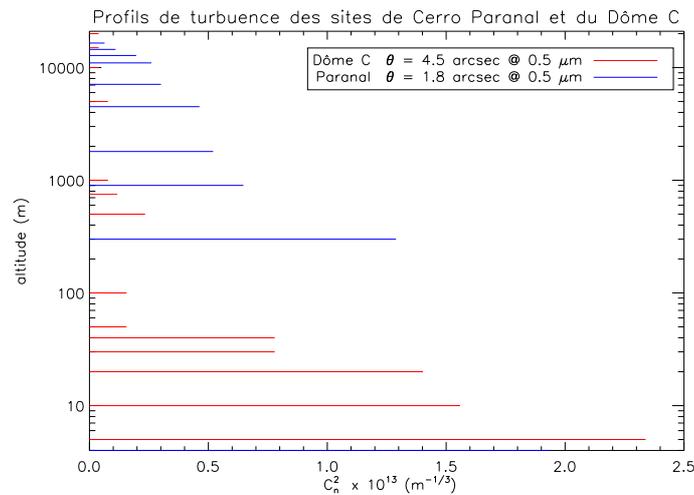


FIG. 8.2 – Profils de $C_n^2(h)$ pour les sites de Paranal (crédit : ESO) et du Dome C [Agabi et al. 2006].

Les paramètres d'entrée du modèle se répartissent en six classes :

- Les paramètres de turbulence : il s'agit principalement du profil de turbulence $C_n^2(h)$, de l'échelle externe et du seeing. Sauf mention contraire, on utilise dans la suite un profil de turbulence test, constitué de 2 couches : une couche dans la pupille comptant pour 80% de la turbulence totale, et une couche localisée à 10 km, concentrant les 20% restants. Le seeing est alors de 1 arcsec (à 500 nm ; soit un angle isoplanétique $\theta_0 = 1.7$ arcsec). Lors de l'étude de l'effet du profil du turbulence sur la performance de l'optimisation, on considèrera

également des profils de turbulence modélisant la répartition de la turbulence à l'aplomb du site de Paranal, au Chili, ou du Dome C, en Antarctique. La figure (8.2) représente les profils considérés.

- Les paramètres des étoiles guides : leur position dans le champ et leur magnitude.
- Les paramètres de l'instrument : son diamètre, le diamètre du champ imagé, le type de recombinaison des phases. On considère toujours dans la suite une pupille de 8m de diamètre. Le champ corrigé varie selon les résultats présentés et sera précisé au coup par coup.
- Les paramètres de l'analyse de front d'onde : le bruit, la longueur d'onde d'analyse, le nombre de modes mesurés. Dans les cas présentés ici, nous avons considéré un bruit de détecteur caractérisé par $\sigma_{det} = 1 e^-/\text{pixel}$ et par trame. Le bruit de photons est également simulé. La longueur d'onde d'analyse est égale à 700 nm.
- Les paramètres de l'imagerie : la longueur d'onde d'imagerie, les directions, le type de données à sortir. L'imagerie est réalisée à une longueur d'onde de $2.2 \mu m$. Les résultats présentés ici seront basés sur la variance de la phase résiduelle dans les directions d'imagerie.
- Les paramètres de simulation : la taille des écrans de phase, le nombre d'itérations sur la turbulence.

Etant donnés les champs considérés lors des études que nous présentons dans la suite de ce chapitre (de 1 à 10 arcmin), les volumes de données à générer et les temps de calcul sont considérables. Dans notre recherche des paramètres de simulation assurant des résultats fiables *et* un temps de calcul raisonnable, plusieurs problèmes de type purement numériques se sont posés à nous. Nous disons quelques mots sur les plus importants de ces problèmes ci-dessous.

8.2.1.2 Echantillonnage du champ à corriger

Le premier problème a été celui de la densité de points nécessaires dans le champ \mathcal{D}_* pour simuler avec suffisamment de précision l'intégrale continue de la phase dans le champ corrigé $\widehat{\phi_{GL}}$. Ce point est particulièrement sensible pour l'étude du sous-critère $QC_{discret}$ que nous proposons dans la section suivante. En effet, $QC_{discret}$ caractérise précisément l'erreur de discrétisation de la moyenne de la phase turbulente dans le champ. On propose ici une étude préliminaire permettant de définir l'échantillonnage nécessaire et suffisant du champ pour que les résultats ultérieurs soient fiables.

Pour cette étude, on a simulé un champ de 8 arcmin, pavé régulièrement avec un nombre croissant d'étoiles guides, et on a calculé $QC_{discret}$ pour différents pas d'échantillonnage du champ \mathcal{D}_* servant de support d'intégration à $\widehat{\phi_{GL}}$. Les directions de discrétisation de $\widehat{\phi_{GL}}$ sont situées aux nœuds d'un réseau à maille carrée.

La figure (8.3) montre l'évolution de l'estimation de $QC_{discret}$ en fonction du pas d'échantillonnage du champ, pour différents nombres d'étoiles guides. Plus il y a d'étoiles guides et plus le maillage doit être fin pour que l'estimation de $QC_{discret}$ converge. Autrement dit, si

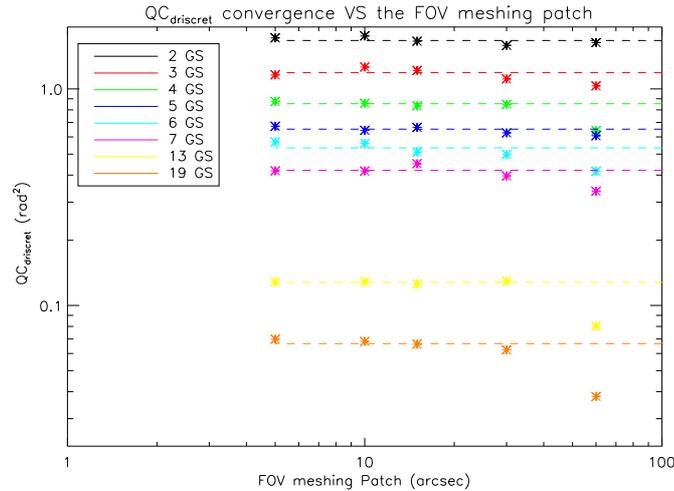


FIG. 8.3 – Convergence de l'estimation de $QC_{discret}$ selon le paramètre de la maille d'échantillonnage du champ

le maillage du champ \mathcal{D}_* est trop lâche, l'estimation de $QC_{discret}$ est biaisée. En effet, considérons la différence entre l'intégrale continue $\iint_{\mathcal{D}_*} \phi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha}$ et la somme discrète $\sum_k \phi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha}_k)$. Pour chaque direction $\boldsymbol{\alpha}_k$ correspondant à une étoile guide, il existe une infinité de directions d'imagerie $\boldsymbol{\alpha}$ sur lesquelles est réalisée la moyenne continue. Les choses sont différentes lorsqu'on discrétise l'intégrale $\iint_{\mathcal{D}_*} \phi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha}$ sur un maillage : pour chaque direction d'analyse, il n'y a plus qu'un nombre fini de directions de reconstruction. Si elles sont trop peu nombreuses, la différence globale entre moyenne discrète et moyenne continue est sous-estimée et $QC_{discret}$ est biaisé. Dans la suite, nous n'irons pas au delà de 19 étoiles guides, donc nous utiliserons un pas d'échantillonnage de 30 arcsec pour estimer $\widehat{\phi_{GL}}$.

8.2.1.3 Géométries des réseaux d'étoiles guides et de directions d'imagerie

Pour des raisons identiques à celle qui sont invoquées au paragraphe précédent, il est utile de faire en sorte que les directions d'analyse ne coïncident pas systématiquement avec des directions d'imagerie lorsqu'on considère le cas d'étoiles uniformément réparties dans le champ. La solution proposée ici est de changer de géométrie de réseau, comme le montre la figure (8.4) : on utilise un réseau à maille hexagonale centrée pour les étoiles guides et un réseau à maille carrée pour les directions d'imagerie.

8.2.1.4 Inversions de matrices pour la reconstruction tomographique :

Un problème récurrent d'inversion de matrices a été constaté au cours de nos études, dès que les matrices à inverser deviennent trop importantes, car elles sont mal conditionnées. Des problèmes de convergence des calculs de matrices inverses généralisés se posent alors, avec une propagation anormale du bruit et une perte de performance pour le GLAO avec tomographie. Les paramètres externes sensibles sont principalement le nombre de modes corrigés et le nombre de couches turbulentes dans le profil de C_n^2 . Pour ces raisons, on a limité le nombre de modes reconstruits dans

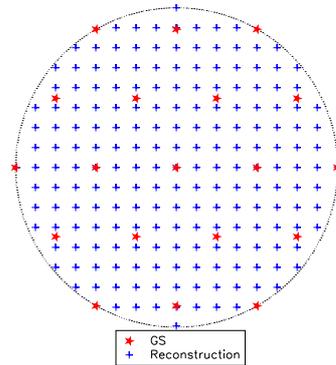


FIG. 8.4 – Exemple de maillage du champ pour l'estimation de $QC_{discret}$ et de pavage pour une répartition uniforme des étoiles guides ; Les nœuds du maillage sont en bleu (pas de 30 arcsec) et les 19 étoiles guides en rouge.

la pupille aux dix premiers ordres radiaux des polynômes de Zernike (65 modes reconstruits). Pour la tomographie, on a également été contraint à limiter la mise à l'échelle du nombre de polynômes de Zernike reconstruits dans les couches d'altitude : le seuil des ordres radiaux reconstruits en altitude a été fixé à l'ordre 26.

On s'est également restreint dans nos études à des profils de turbulence comprenant au maximum trois couches. Cela signifie que lorsque l'on s'intéressera au profil de turbulence Paranal ou Dome C, la simulation fonctionnera sur le modèle équivalent à trois couches de l'atmosphère à l'aplomb du site [Fusco 2000]. La figure (8.2) donne l'allure des profils de turbulence que nous avons considéré pour les sites de Paranal et du Dome C. Le tableau (8.1) donne leur modèle équivalent à trois couches.

8.2.2 Quantification de l'erreur de mesure due à la discrétisation du champ par les GS

On s'intéresse ici à l'évaluation de l'importance de l'erreur due à la discrétisation du champ par les étoiles guides. Cette erreur peut être quantifiée par l'estimation de $QC_{discret}$, défini par l'équation (8.1). Les paramètres sensibles de cette étude sont le nombre d'étoiles guides dont on dispose et leur distribution dans le champ. On étudiera donc l'évolution de $QC_{discret}$ en fonction du nombre de GS, dans le cas d'étoiles guides à répartition aléatoire, de type étoiles guides naturelles, et dans le cas d'étoiles guides artificielles, distribuées uniformément dans le champ. Par contre, le flux des étoiles n'importe pas dans cette partie du problème puisqu'on se situe en amont du processus de mesure.

On propose une étude numérique du problème, le modèle utilisé ayant été décrit au paragraphe précédent. Le domaine \mathcal{D}_* est ici un disque de 8 arcmin de diamètre, discrétisé selon un maillage carré de paramètre 30 arcsec, conformément aux conclusions de l'étude préliminaire présentée plus haut (cf. § 8.2.1.2). On utilise le profil de turbulence test (cf. § 8.2.1.1). Les étoiles sont soit régulièrement espacées le long d'un cercle (si on considère moins de 7 étoiles), soit disposées selon un pavage régulier hexagonal centré (si l'on dispose de plus de 7 étoiles), soit placées au hasard. Dans le cas où la répartition des étoiles est aléatoire, on effectue un traitement statistique sur 100 tirages.

Modèle à 3 couches du profil de Paranal ($seeing@0.5\mu m = 0.92''$, $\theta_0@2.2\mu m = 10.5''$)			
Altitude (m)	360	4360	12810
C_n^2 (%)	67	22	11
Modèle à 3 couches du profil du Dome C ($seeing@0.5\mu m = 1.1''$, $\theta_0@2.2\mu m = 26.7''$)			
Altitude (m)	15	190	7970
C_n^2 (%)	78	17	5

TAB. 8.1 – Modèles équivalents à 3 couches des profils de turbulence de Paranal et du Dome C.

La figure (8.5) montre l'évolution de $QC_{discret}$ selon le nombre d'étoiles guides utilisées pour le calcul de la moyenne de la phase sur les directions d'analyse. On constate que pour une répartition aléatoire des étoiles dans le champ, $QC_{discret}$ décroît comme l'inverse du nombre d'étoiles guides. Lorsque le pavage du champ est régulier et que les étoiles sont suffisamment nombreuses (plus de 7), $QC_{discret}$ décroît plus vite, comme le carré de l'inverse du nombre d'étoiles guides. On remarque également que pour un faible nombre de directions d'analyse (7 GS), le gain à disposer d'étoiles guides régulièrement réparties dans le champ n'est que faible. L'intérêt des étoiles guides artificielles réside en fait surtout dans la régularité de la performances obtenue.

Enfin, on signale que le point cassure de la courbe correspondant aux étoiles guides artificielles observé autour de $NGS = 7$ doit être considéré comme un artéfact de la simulation numérique : il coïncide avec le passage à 2 cercles concentriques pour la répartition des étoiles.

8.2.2.1 Comparaison de $QC_{discret}$ et QC_{WFSC}

On souhaite comparer les ordres de grandeur des deux termes d'erreurs que sont QC_{WFSC} (eq. 8.2) et $QC_{discret}$ (eq. 8.1) afin de quantifier les importances relatives des erreurs de discrétisation du champ par les étoiles guides et de reconstruction du front d'onde par les concepts d'analyse optimisés définis au chapitre 6. Pour cela, nous allons nous replacer dans le contexte de la simulation numérique qui nous a servi à comparer et optimiser les performances du SO et du LO au paragraphe (6.4.3). On rappelle qu'on avait alors considéré un télescope de 8m observant un champ de 8 arcmin, peuplé d'étoiles naturelles, et qu'on avait regardé l'évolution de la performance du SO et du LO en fonction du nombre d'étoiles guides prises en compte dans l'analyse de front d'onde, leur intégration au processus d'estimation de la phase se faisant par ordre décroissant de luminosité.

Les résultats de l'analyse de performance et de l'optimisation des concepts ont été vus au paragraphe (6.4.3). On ré-utilise ici les résultats portant sur la performance des concepts optimisés. On a vu au moment de la présentation de ces résultats que les deux concepts optimisés présentent

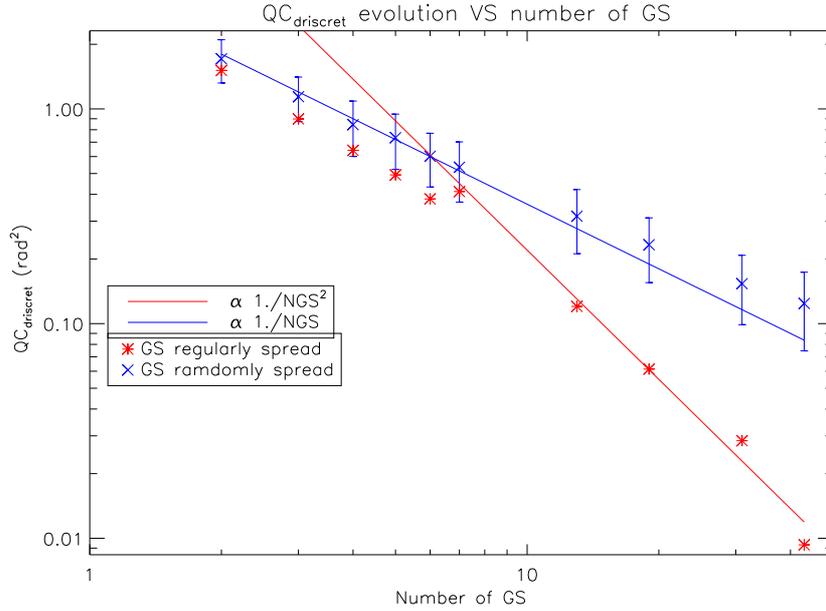


FIG. 8.5 – Evolution de $QC_{discret}$ selon le nombre d'étoiles guides et leur répartition dans le champ.

des résultats très proches. En présence de bruit de photons, le SO optimisé présente des résultats légèrement meilleurs que ceux du LO optimisé, principalement à cause de la complexité de l'optimisation de ce dernier. En présence de bruit de détecteur, c'est le LO qui présente les meilleures performances, car il est intrinsèquement moins sensible au bruit que le concept SO.

Par soucis de clarté et de simplicité, on compare ici $QC_{discret}$ avec le QC_{WFSC} correspondant au concept optimisé le plus performant dans son domaine : le SO optimisé en présence du seul bruit de photons, et le LO optimisé lorsque le bruit de détecteur est également considéré. On trace dans les graphiques de la figure (8.6) les données extraites de la figure (6.9) pour différentes latitudes galactiques ainsi que l'évolution de $QC_{discret}$ pour des étoiles réparties aléatoirement dans le champ, ces données étant extraites de la figure (8.5).

On retrouve sur la figure (8.6) la décroissance de $QC_{discret}$ en fonction du nombre d'étoiles guides constatée au paragraphe précédent. La performance des concepts optimisés ne variant quasiment pas avec le nombre d'étoiles (cf. § 6.4), il existe des domaines de pré-dominance de l'un ou l'autre facteur dans l'erreur globale. Ainsi, pour des directions proches du plan galactique (latitude 30°N), les étoiles guides sont brillantes et c'est l'erreur quantifiée par $QC_{discret}$ qui domine l'erreur globale. Toutefois, lorsqu'on se rapproche du pôle galactique, la magnitude des étoiles guides augmente et c'est l'erreur due à la propagation du bruit sur la phase reconstruite qui domine l'erreur globale.

L'optimisation des concepts d'analyse de front d'onde au regard des seules considérations de rapport signal à bruit n'est donc pas suffisante pour assurer une performance globale du GLAO (en terme de valeur moyenne dans le champ de la performance) optimale en toute circonstance. Il est nécessaire de prendre en compte les aspects de discrétisation du champ par les étoiles guides. Or on n'avait séparé ces deux aspects au chapitre 6 que pour pouvoir isoler un critère dépendant spécifiquement du

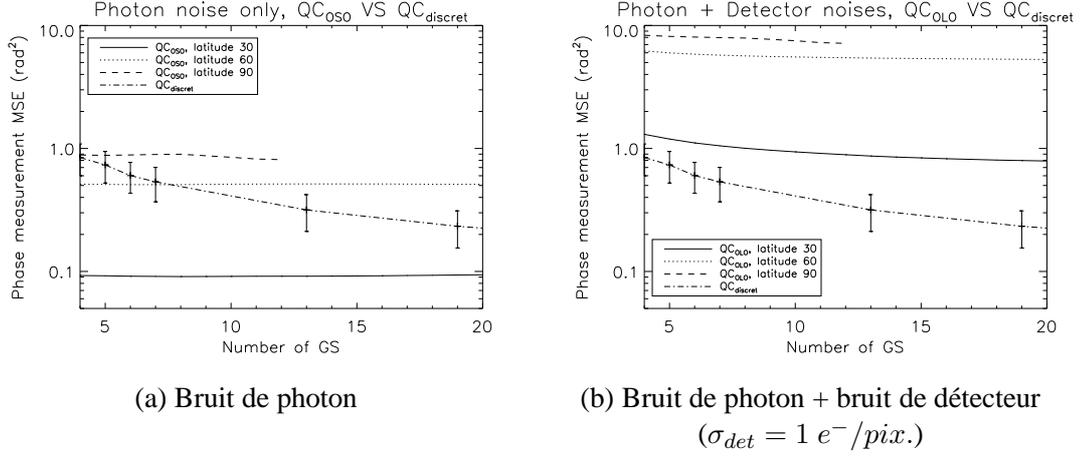


FIG. 8.6 – Comparaison des termes d’erreur $QC_{discret}$ et QC_{WFSC} pour les concepts SO et LO optimisés. Pour chaque type de bruit considéré, on considère le concept conduisant à la plus petite valeur de QC_{WFSC} . On se souvient toutefois que les deux concepts optimisés fournissent des performances très proches (cf. fig. 6.9).

concept d’analyse de front d’onde envisagé. En réalité, le problème de l’optimisation doit s’envisager de manière globale, le critère pertinent étant celui qui a été défini au chapitre 6 pour le GLAO :

$$QC_{GLAO} = \left\langle \left\| \frac{1}{S_{D^*}} \iint_{D^*} \phi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha} - \left(\frac{1}{K^*} \sum_{k=1}^{K^*} \beta_k \cdot \phi_k(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha}_k) + \mathcal{Bruit}(\boldsymbol{\rho}) \right) \right\|_{turb, bruit}^2 \right\rangle$$

8.2.3 Optimisation de la performance globale du GLAO à fort flux

On a vu au chapitre 6 et rappelé au début de ce chapitre-ci que lorsque que le miroir du GLAO est conjugué à la pupille du télescope, la minimisation de QC_{GLAO} est assurée en reconstruisant tomographiquement le volume de turbulence atmosphérique et en le projetant sur le miroir déformable. Le formalisme analytique permettant d’exprimer le reconstruteur optimal a été développé au paragraphe (4.1.2) dans le cas du concept SO. Dans le cas où le miroir déformable est conjugué à la pupille du télescope, le reconstruteur optimal s’écrit :

$$\mathbf{W} = (\mathbf{P}_{DM_0}^t \mathbf{P}_{DM_0})^\dagger \mathbf{P}_{DM_0}^t \langle \mathbf{P}_\alpha \rangle_\alpha \mathbf{C}_\varphi \mathbf{P}_{GS}^t (\mathbf{P}_{GS} \mathbf{C}_\varphi \mathbf{P}_{GS}^t + \mathbf{C}_b)^{-1} \quad (8.3)$$

Où (cf. § 4.1.2) :

- \mathbf{P}_{DM_0} est l’opérateur de projection de la phase reconstruite par le miroir déformable dans la pupille, pour les directions de reconstruction. Le miroir étant dans la pupille, \mathbf{P}_{DM_0} est indépendant de la direction α .
- \mathbf{P}_α est l’opérateur de projection des phases turbulents atmosphériques dans la pupille, pour une direction de reconstruction α .
- \mathbf{P}_{GS} est l’opérateur de projection des phases turbulents atmosphériques dans la pupille, pour les directions d’analyse.
- \mathbf{C}_φ est la matrice de covariance des écrans de phase turbulents atmosphériques.
- \mathbf{C}_b est la matrice de covariance du bruit propagé sur les modes reconstruits.

- $\langle \cdot \rangle_{\alpha}$ est l'opérateur de moyenne d'ensemble de la quantité incluse sur toutes les directions du champ corrigé.
- $(\cdot)^{\dagger}$ indique la matrice pseudo-inverse de la matrice indexée.
- $(\cdot)^t$ indique la matrice transposée de la matrice indexée.

On cherche dans ce paragraphe à évaluer le gain apporté à fort flux par la tomographie pour le GLAO. Dans ce cas, les aspects de propagation du bruit dans la reconstruction de la phase à appliquer au miroir déformable ne sont pas limitants, et seuls la géométrie de la répartition des étoiles guides et le profil de turbulence ont un impact significatif.

Nous allons donc mener cette étude en quatre étapes :

- Comparaison des performances du GLAO avec simple moyenne des phase turbulentes mesurées dans les directions d'analyse et avec reconstruction tomographique puis projection pour une répartition uniforme des étoiles dans le champ.
- Même comparaison en considérant des répartitions aléatoires des étoiles.
- Etude du cas particulier des étoiles Laser : étoiles réparties sur un cercle situé en bord de champ.
- Etude de l'impact du profil de turbulence.

8.2.3.1 Cas d'une répartition uniforme des étoiles dans le champ

On commence cette étude de la tomographie pour le GLAO par le cas d'une répartition uniforme des étoiles guides dans le champ (cf. § 8.2.1.3). La figure (8.7- a) montre l'évolution de la performance du GLAO en fonction du champ corrigé, pour 7 étoiles guides réparties dans le champ selon un pavage à maille hexagonale centrée. On trace la performance du GLAO lorsque la phase Φ_{GL} est estimée par simple moyenne des phases mesurées dans les différentes directions d'analyse et lorsque l'on réalise une reconstruction tomographique du volume turbulent avant de projeter celui-ci sur le miroir déformable. Le profil turbulent utilisé pour obtenir ces résultats est le profil test (cf. 8.2.1.1). Les autres paramètres de la simulation sont ceux désignés par défaut dans le paragraphe (8.2.1.1).

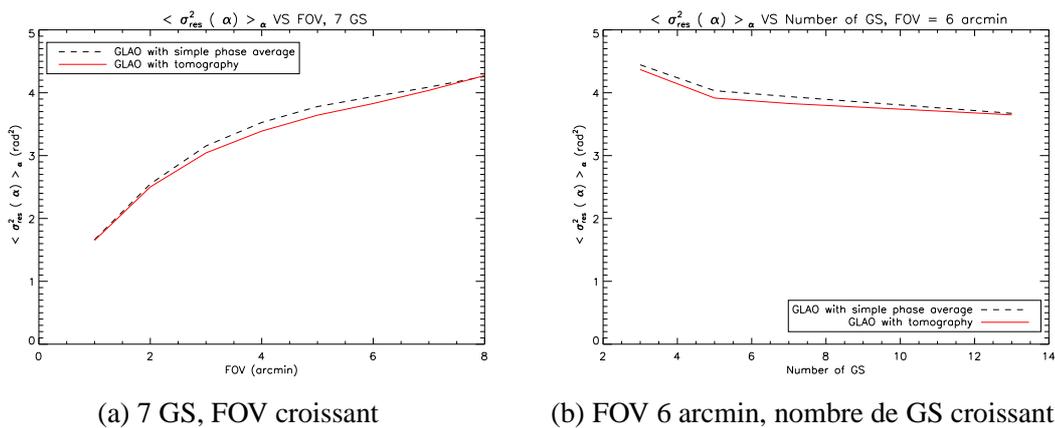


FIG. 8.7 – Gain apporté par la tomographie pour le GLAO. Répartition uniforme des étoiles dans le champ. La grandeur d'intérêt est la valeur moyenne sur le champ corrigé de la variance de phase résiduelle $\langle \sigma_{res}^2(\alpha) \rangle_{\alpha}$.

On remarque que le gain apporté par la tomographie est très faible lorsque la répartition des étoiles guides dans le champ est uniforme. Les résultats étant exprimés ici en terme de valeur moyenne sur le champ corrigé de la variance de phase résiduelle, le gain en performance se traduit par une variance de phase plus faible. Ce résultat était prévisible car un pavage régulier du champ par les étoiles guides est la condition qui permet le mieux d'approximer la turbulence de la couche au sol par la moyenne des phases dans les directions d'analyse. La tomographie se démarque toutefois dans une plage de champ intermédiaire. Ceci s'explique par la structure du volume turbulent :

- Lorsque le champ est très petit (1 arcmin), les mesures réalisées dans les différentes directions sont fortement corrélées et il y a peu de différence entre la moyenne des phase mesurées dans les différentes directions et la phase estimée par reconstruction tomographique.
- A l'inverse, lorsque le champ est très étendu, les mesures dans les différentes directions sont totalement décorrélées, et la tomographie n'apporte plus de gain.

Le domaine favorable à l'utilisation de la tomographie est donc celui des champs intermédiaires : de 3 à 6 arcmin avec le profil de turbulence que nous avons considéré ici. Toutefois, notons bien que la notion de "champ intermédiaire" dépend fortement du profil de turbulence, comme on le verra au paragraphe suivant.

D'autre part, la figure (8.7- b) représente la comparaison de performance du GLAO selon l'algorithme d'estimation choisi à champ fixé, pour un nombre croissant d'étoiles. Comme dans le cas de la figure (a), on montre ici que le gain apporté par la tomographie est faible. Comme on pouvait s'y attendre, c'est lorsque les étoiles guides sont les plus rares (3 à 7 étoiles) que la tomographie s'avère le plus utile.

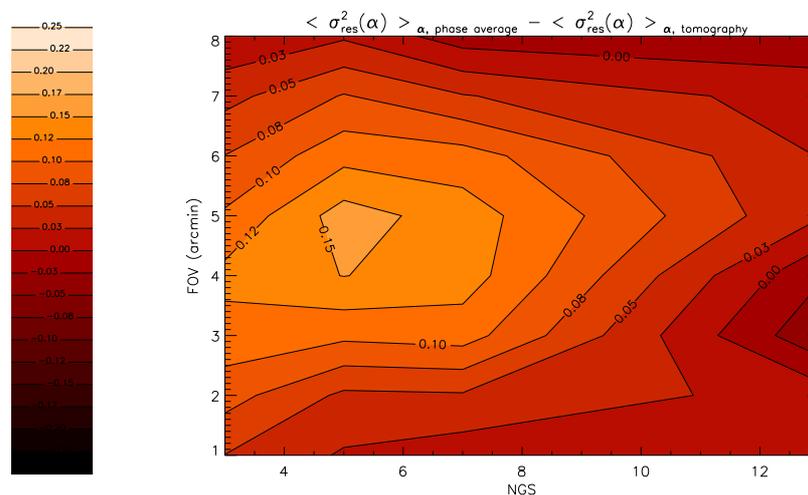


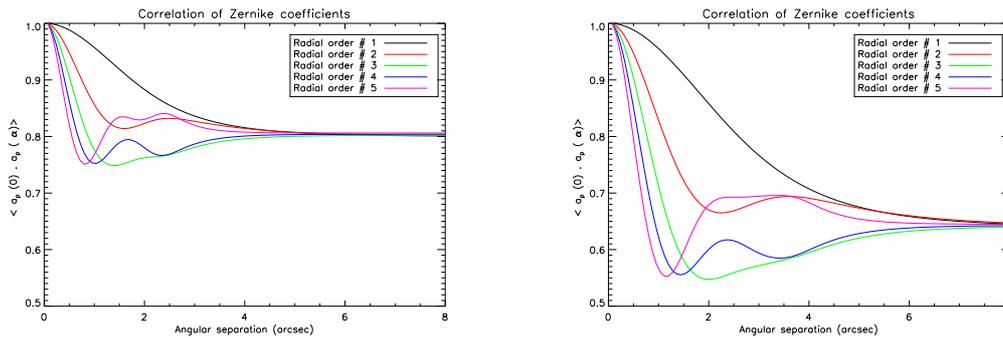
FIG. 8.8 – Gain apporté par la tomographie sur la valeur moyenne dans le champ corrigé de la variance de la phase corrigée en fonction du nombre d'étoiles guides et du champ corrigé. Les étoiles sont réparties uniformément dans le champ. Le code couleur indique l'importance de la différence entre $\langle \sigma_{res}^2(\alpha) \rangle_{\alpha}$ obtenue en estimant la phase de correction par simple moyenne des phases mesurées et $\langle \sigma_{res}^2(\alpha) \rangle_{\alpha}$ obtenue en utilisant la reconstruction tomographique.

Une façon synthétique de représenter le gain apporté par la reconstruction tomographique selon le nombre d'étoiles et le champ est présentée par la figure (8.8). Cette figure montre clairement que la tomographie peut apporter un gain en performance pour des champs de 3 à 7 arcmin et lorsque le nombre d'étoiles guides est inférieur à 10.

Comme nous l'avons souligné plus haut, la gamme de champ dans laquelle la tomographie est susceptible d'apporter un gain sensible dépend intrinsèquement de la corrélation angulaire de la turbulence localisée dans les couches d'altitude, et donc du profil de turbulence. Nous examinons cet effet au paragraphe suivant.

8.2.3.2 Influence du profil de turbulence

On a vu au paragraphe (8.2.3.1) que le gain apporté par la tomographie dépend du degré de corrélation de la turbulence d'altitude sur la largeur du champ corrigé. Ce degré de corrélation dépend évidemment du diamètre du champ corrigé, mais également du profil de turbulence du site. C'est ce que montrent les courbes de la figure (8.9), représentant la courbe de corrélation angulaire des premiers modes de Zernike mesurés dans la pupille pour le profil test défini au paragraphe (8.2.1.1) et pour le modèle équivalent à 3 couches du profil de Paranal.



(a) Profil test à 2 couches (80% turbulence dans la pupille, $\theta_0 = 1.7$ arcsec @ $0.5 \mu m$). (b) Profil équivalent à trois couches pour Paranal (64% turbulence dans la pupille, $\theta_0 = 1.8$ arcsec @ $0.5 \mu m$).

FIG. 8.9 – Evolution de la corrélation spatiale des 5 premiers ordres radiaux de Zernike. On trace ici la corrélation spatiale entre la direction sur axe et le bord du champ, pour deux profils de turbulence. Sur l'axe des abscisses, la séparation angulaire est donnée en *arcmin*.

Ces courbes montrent que le degré de corrélation angulaire des premiers modes de Zernike est bien plus important dans le cas du profil Paranal que dans le cas de notre profil test. Cela est dû à la prise en compte de couches turbulentes localisées à des altitudes intermédiaires (autour de 5 km). La conséquence de cette plus forte corrélation est visible sur les courbes de la figure (8.10), obtenue avec 5 étoiles de fort flux situées en bord de champ : le gain apporté par la corrélation pour un champ de 8 arcmin est sensiblement plus important pour le profil Paranal que pour le profil test. Cela signifie en particulier que les résultats présentés ci-dessus seront plus marqués pour des champs corrigés élevés en utilisant un profil de turbulence impliquant une meilleure corrélation angulaire de la turbulence.

La figure (8.10) montre également que pour le cas du site du Dome C, en Antarctique, la tomographie n'apporte rien car la quasi-totalité de la turbulence est localisée dans la pupille du télescope.

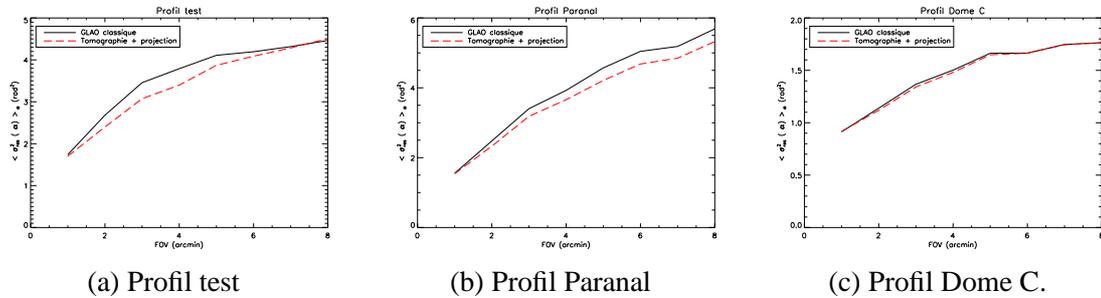


FIG. 8.10 – Effet du profil de turbulence.

Les effets de décorrélation angulaire de la turbulence localisée en altitude sont de première importance lorsque les étoiles guides sont localisées en bord de champ, comme c'est le cas lors de l'utilisation d'étoiles Laser. Nous examinons cette situation dans le paragraphe suivant.

8.2.3.3 Cas d'une répartition de type étoiles Laser

On considère ici une géométrie d'étoiles guides typique de ce que l'on pourrait faire avec des étoiles Laser : les étoiles sont situées en bord de champ car on souhaite éviter à tout prix la pollution lumineuse du champ d'intérêt scientifique. Elles sont plus réparties uniformément le long d'un cercle. On ne s'intéresse qu'aux effets de la répartition des étoiles : on ne considère pas le caractère étendu de ces sources, ni l'effet de cône, ni le problème d'indétermination du tilt.

La figure (8.11) montre les cartes de variance de phase résiduelle dans le champ corrigé pour un GLAO dans lequel la phase de correction est obtenue par simple moyenne des phases mesurées et dans le cas d'un GLAO réalisant la tomographie du volume turbulent. Le champ d'intérêt scientifique a un diamètre de 4 arcmin et 7 étoiles guides sont utilisées.

Dans le cas où la phase de correction correspond à la moyenne des phases mesurées, on constate que la qualité de la correction est médiocre au centre du champ. Ceci s'explique par la méconnaissance de la turbulence d'altitude affectant la zone centrale du champ : avec le profil test que nous utilisons dans cette étude de cas, la couche d'altitude est localisée à 10 km, altitude pour laquelle l'angle maximal permettant un recouvrement partiel des empreintes de la pupille dans la couche d'altitude est de 2.75 arcmin. Pour un champ corrigé de 4 arcmin, la turbulence d'altitude n'est pas mesurée dans un disque d'un diamètre environ égal à 1 arcmin au centre du champ.

On constate sur la même figure que la tomographie permet tout à fait de compenser cette méconnaissance de la turbulence d'altitude en utilisant la connaissance à priori de la corrélation angulaire de la turbulence pour reconstruire la couche d'altitude. L'efficacité de la tomographie est alors telle qu'elle permet de doper la performance du GLAO au centre du champ, augmentant ainsi à la fois la performance moyenne dans le champ, mais aussi les variations angulaires de la variance de

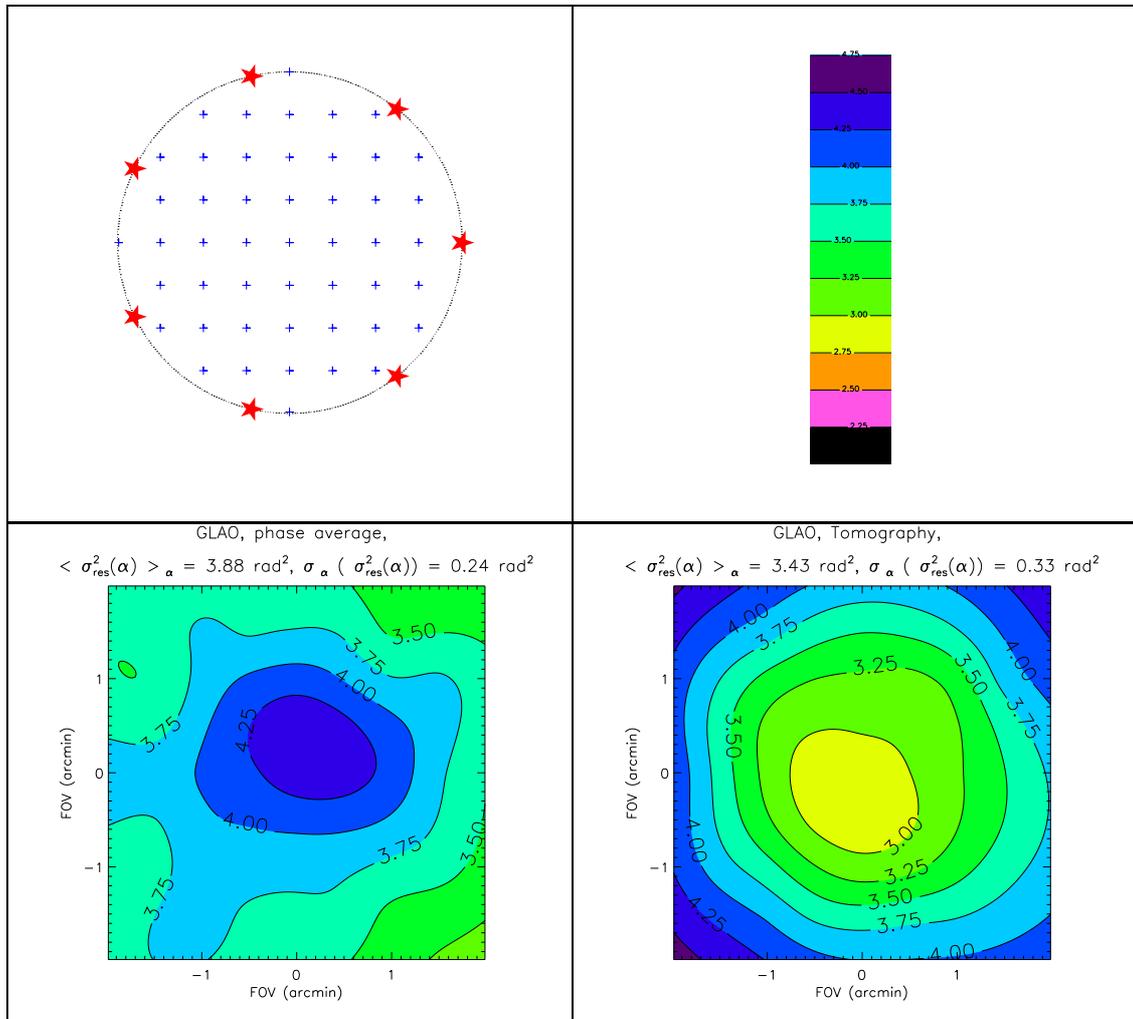


FIG. 8.11 – Gain apporté par la tomographie sur la valeur moyenne dans le champ corrigé de la variance de la phase résiduelle dans le cas d'étoiles guides situées en bord de champ. Il y a 7 étoiles guides, de fort flux (SNR = 40 sur les WFS) et de même luminosité. Le champ corrigé a un diamètre de 4 arcmin.

phase résiduelle.

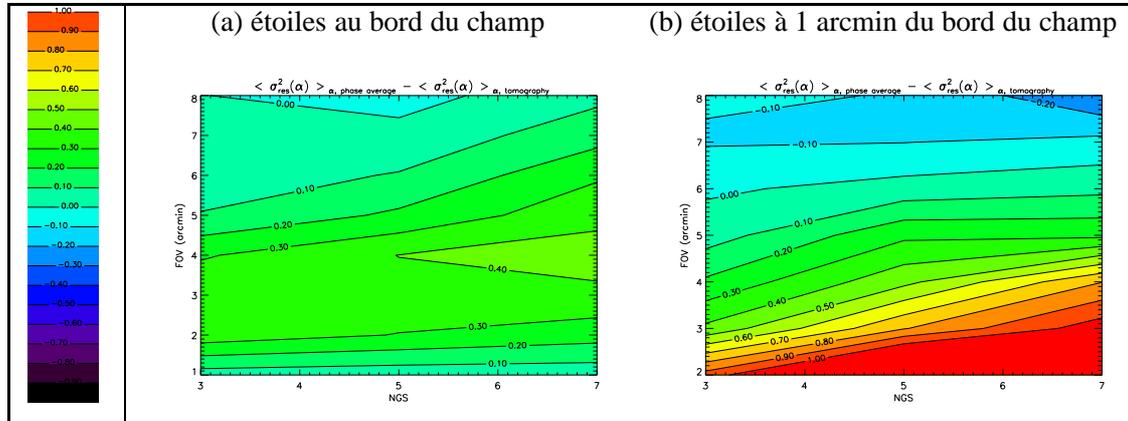


FIG. 8.12 – Gain apporté par la tomographie sur la valeur moyenne dans le champ corrigé de la variance de la phase corrigée en fonction du nombre d'étoiles guides et du champ corrigé. Les étoiles sont en cercle autour du champ.

La figure (8.12) permet d'étendre les conclusions données ci-dessus à d'autres configurations. La figure (8.12 - a) montre l'évolution du gain apporté par la tomographie en fonction du nombre d'étoiles guides et du champ. Comme dans le cas d'une répartition uniforme d'étoiles guides, ce gain est le plus manifeste pour les gammes de champ où la corrélation angulaire de la turbulence d'altitude permet une reconstruction efficace, c'est-à-dire, pour le profil test considéré ici, pour des champs de 2 à 6 arcmin. On note également que plus le champ corrigé est large, plus on gagne à augmenter le nombre d'étoiles guides.

Enfin, la figure (8.12 - b) représente le même type de carte que la figure (8.12 - a), les étoiles guides étant cette fois-ci rejetées à 1 arcmin du bord du champ à corriger, afin de tenir compte du défocus affectant l'image au plan focal des étoiles Laser (celle-ci étant à distance finie). Notons que dans ce cas, la reconstruction tomographique permet d'optimiser la correction pour le champ d'intérêt scientifique. On constate sur la figure (8.12 - b) que cette optimisation est très profitable à la performance moyenne du GLAO dans le champ corrigé, en particulier pour les petits champs. Cette amélioration est due au fait que la tomographie permet d'optimiser la performance spécifiquement dans le champ d'intérêt scientifique, tandis que la reconstruction simple ne permet pas de distinguer une région du champ à privilégier. Or, pour un champ corrigé de 1 arcmin et des étoiles réparties sur un cercle de 2 arcmin de diamètre, le champ d'intérêt ne représente que 25 % du champ total sur lequel la turbulence est mesurée. La tomographie montre alors tout son intérêt.

Un autre cas où la tomographie est susceptible d'apporter un gain important en performance est le cas où les étoiles guides sont distribuées aléatoirement dans le champ, comme dans le cas des étoiles naturelles. Nous allons traiter ce cas en deux étapes, en commençant dans le paragraphe suivant par étudier l'effet de la distribution des étoiles, indépendamment de toute considération de flux.

8.2.3.4 Cas d'une répartition aléatoire des étoiles dans le champ

On entame ici une analyse sur les performances du GLAO en présence d'étoiles guides naturelles. Dans cette première étape, on ne s'intéresse qu'à la gestion de la répartition des étoiles, indépendamment de toute considération de bruit de mesure. Toutes les étoiles ont donc la même luminosité et garantissent un bon rapport signal à bruit sur les WFS ($SNR = 40$).

La figure (8.13) montre le gain apporté par la tomographie lorsque les étoiles guides sont réparties aléatoirement dans le champ. Afin de dégager un comportement global, indépendant d'une géométrie d'étoiles particulière, chaque point des cartes de la figure (8.13) correspond au traitement de 50 tirages d'étoiles guides différents.

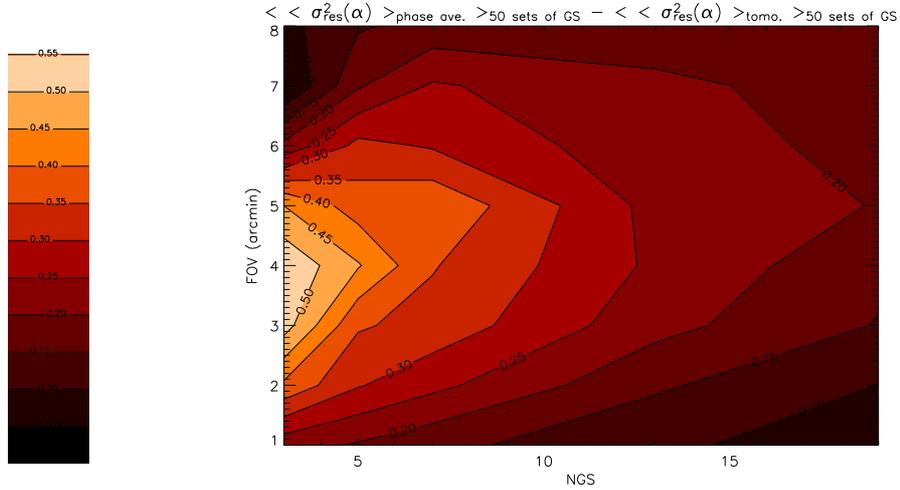
La figure (8.13 - a) montre le gain moyen observé sur les 50 tirages en utilisant la reconstruction tomographique. La grandeur d'intérêt est la moyenne sur les tirages d'étoiles de la différence de performance du GLAO entre le cas où la phase de correction est estimée par simple moyenne des phases mesurées et le cas de l'utilisation de la tomographie. La performance est ici exprimée en terme de valeur moyenne dans le champ de la variance de phase résiduelle. On constate que la tomographie apporte un gain significatif par rapport au simple moyenne des phases mesurée, et ce quels que soient le champ et le nombre d'étoiles guides. Toutefois, comme précédemment, ce gain est le plus manifeste pour les champs de 3 à 6 arcmin et pour les petits nombres d'étoiles guides.

La figure (8.13 - b) quantifie la régularité du gain apporté par la tomographie au cours des tirages. Pour ce faire, on représente la différence entre l'écart-type sur les tirages d'étoiles de la performance du GLAO pour le cas où la phase de correction est estimée par simple moyenne des phases mesurées et le même écart-type pour le cas de l'utilisation de la tomographie. Comme pour la figure (8.13 - a), la performance est quantifiée par la valeur moyenne dans le champ de la variance de phase résiduelle. On constate que la performance obtenue en utilisant la reconstruction tomographique est plus régulière que celle obtenue en moyennant simplement la phase sur les directions d'analyse : la variation de la performance moyenne d'un tirage à l'autre est moins importante dans le cas de la reconstruction tomographique que dans le cas de la moyenne.

8.2.4 Influence du rapport signal à bruit sur les WFSs

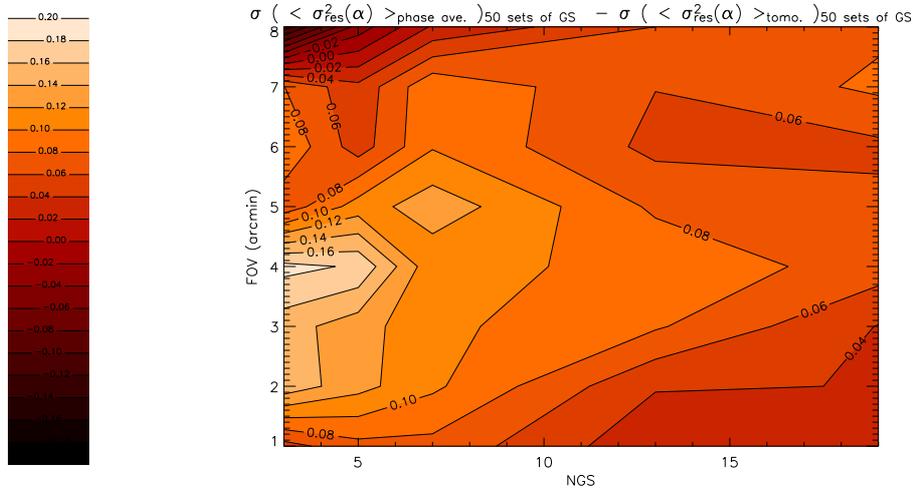
Les cas étudiés au paragraphe précédent correspondent tous à des cas à très fort flux, où toutes les étoiles guides ont la même luminosité. Nous allons ici nous intéresser au cas d'étoiles guides naturelles, réparties aléatoirement dans le champ et ayant des flux différents. On s'intéresse ici à un tirage d'étoiles, obtenu à partir du modèle de Besançon de la population galactique (cf. § 5.2), pour une latitude Galactique de $60^\circ N$. Ce tirage d'étoiles a été obtenu sur un champ de 8 arcmin ; 11 étoiles guides ont été générées, et nous avons conservé les cinq plus brillantes. La répartition des étoiles guides dans le champ et leur magnitude sont données par la figure (8.14 - o).

La figure (8.14) montre les cartes de variance de phase résiduelle obtenues avec et sans correction et en fonction du mode de détermination de la phase de correction. On remarque en premier lieu qu'on se trouve ici dans une situation où globalement le rapport signal à bruit sur les senseurs de front d'onde est bon : le GLAO non optimisé donne des résultats très corrects, avec une réduction de la valeur moyenne dans le champ de la variance de phase résiduelle de 60.8% par rapport au cas non corrigé.



(a) - Gain moyen sur 50 tirages d'étoiles :

$$\langle \langle \sigma_{res}^2(\alpha) \rangle_{\alpha} \rangle_{\text{moyenne, 50 lots de GS}} - \langle \langle \sigma_{res}^2(\alpha) \rangle_{\alpha} \rangle_{\text{tomographie, 50 lots de GS}}$$



(b) - Régularité de la performance sur 50 tirages d'étoiles :

$$\sigma(\langle \sigma_{res}^2(\alpha) \rangle_{\alpha})_{\text{moyenne, 50 lots de GS}} - \sigma(\langle \sigma_{res}^2(\alpha) \rangle_{\alpha})_{\text{tomographie, 50 lots de GS}}$$

FIG. 8.13 – Gain apporté par la tomographie sur la valeur moyenne dans le champ corrigé de la variance de la phase corrigée en fonction du nombre d'étoiles guides et du champ corrigé. Les étoiles guides sont réparties aléatoirement dans le champ. Chaque point de la carte représente le gain moyen obtenu sur 50 tirages d'étoiles.

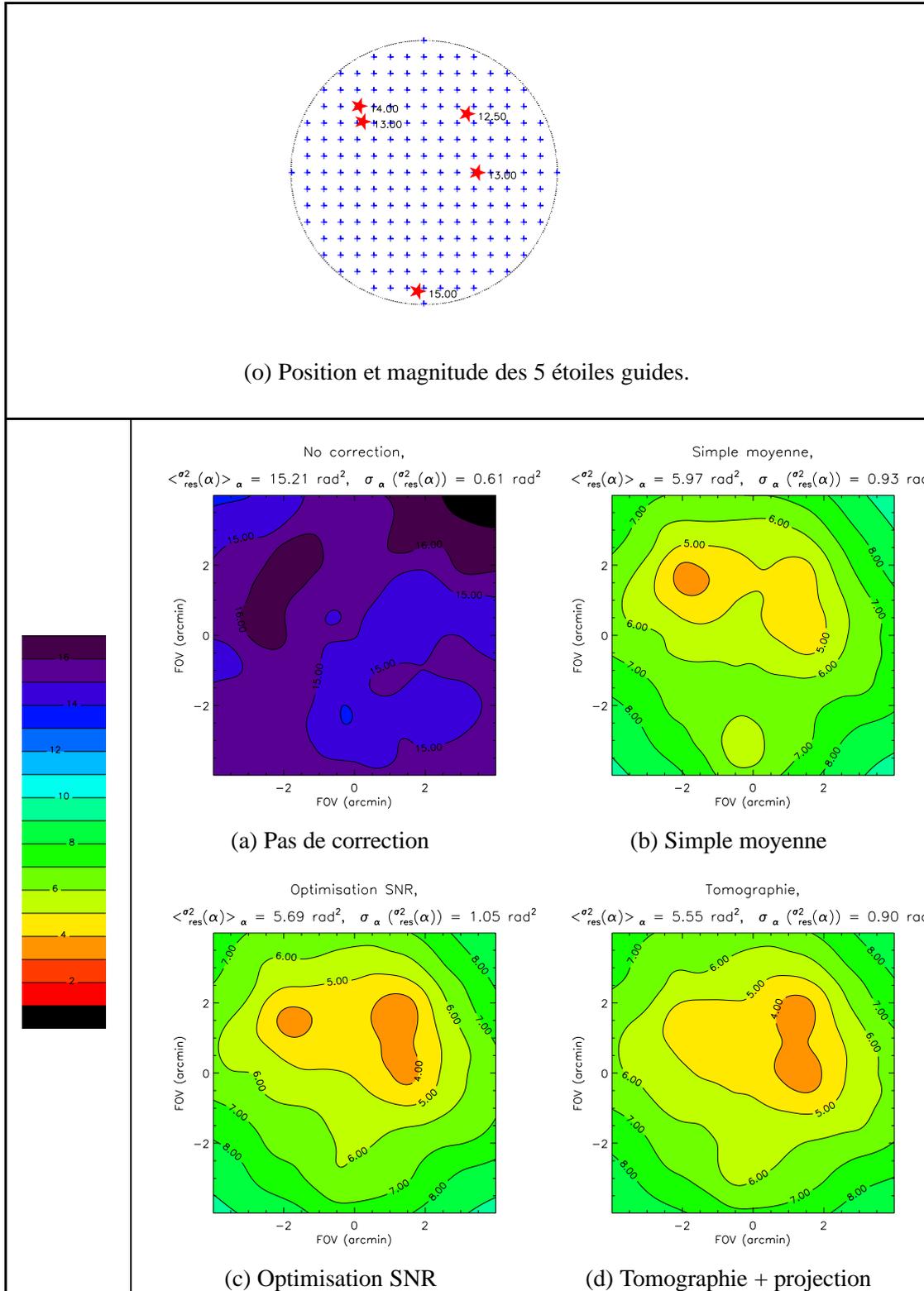


FIG. 8.14 – Cartes des variances de phase résiduelle après correction par GLAO.

Le cas dénommé "optimisation orientée SNR" sur la figure (8.14 - c) est l'optimisation présentée au chapitre 6. On note qu'elle permet d'améliorer la performance, en apportant un gain supplémentaire sur la moyenne de la variance de phase résiduelle. On note enfin que la tomographie (fig. 8.14 - c) permet d'atteindre un gain supplémentaire sur $\langle \sigma_{res}^2(\alpha) \rangle_{\alpha}$. Le tableau (8.2) résume les gains en performance par rapport au cas non corrigé pour chaque mode d'estimation de la phase de correction.

	Simple moyenne	Optimisation SNR	Tomographie
Gain sur $\langle \sigma_{res}^2(\alpha) \rangle_{\alpha}$ (%)	60.8	62.6	63.5
Gain sur $\langle EE_{100 mas}(\alpha) \rangle_{\alpha}$ (%)	88	121	126

TAB. 8.2 – Gain sur la valeur moyenne dans le champ de la variance de phase résiduelle et de l'énergie encerclée dans 100 *mas* en fonction du mode d'estimation de la phase de correction.

Nous avons démontré au paragraphe (6.2.5) la bonne adéquation entre la variation de $\langle \sigma_{res}^2(\alpha) \rangle_{\alpha}$ et celle des caractéristiques de la PSF corrigée. Nous illustrons cette adéquation une fois encore par la figure (8.15), qui représente le même type de carte que la figure (8.14), pour la même configuration d'étoiles guides, la grandeur d'intérêt étant cette fois l'énergie intégrée dans un pixel carré de 100 *mas* de côté. On note que les tendances générales observées en considérant la variance de phase résiduelle sont ici confirmées, les gains étant accentués (cf. tab. 8.2). On remarque également que là où l'estimation de la phase de correction par simple moyenne des mesures obtenues dans les directions d'analyse ne permet pas d'atteindre le gain d'un facteur 2 généralement imposé en spécification de performance pour le GLAO, l'optimisation orientée SNR et la tomographie permettent toutes deux de remplir cette spécification. La tomographie apporte en plus un gain supplémentaire par rapport à l'optimisation orientée SNR, du fait de la meilleure gestion de la répartition des étoiles guides dans le champ.

La figure (8.16) montre toutefois que le gain apporté par la tomographie n'est pas toujours sensible. Pour obtenir cette figure, on a conservé le même nombre d'étoiles, ainsi que leurs positions dans le champ, mais on a imposé une plus grande dispersion dans leur flux. La figure (8.16 - o) donne les nouvelles magnitudes affectées aux étoiles. Les figures (8.16 a à d) montrent les cartes de performance dans le champ corrigé pour les différentes méthodes d'estimation de la phase de correction, la grandeur d'intérêt étant la variance de la phase résiduelle. On note que sans optimisation, la performance est tout à fait médiocre, signe d'une propagation importante du bruit sur les senseurs de front d'onde. Le deuxième point important est que pour cette configuration, l'optimisation orientée SNR et la tomographie apportent toutes deux un gain important, par la gestion de rapport signal à bruit qu'elle permettent (cf. aussi tableau 8.3). Cependant, la tomographie n'apporte pas de gain significatif par rapport à l'optimisation orientée SNR. Ceci est dû précisément au fait que le bruit de mesure domine largement la performance du GLAO.

8.2.5 Uniformité de la correction du GLAO optimisé

Jusqu'à maintenant, nous nous sommes exclusivement préoccupés de la performance moyenne dans le champ du GLAO. Nous avons montré que la reconstruction tomographique du volume turbulent permet d'améliorer celle-ci, en particulier lorsque les étoiles guides sont peu nombreuses

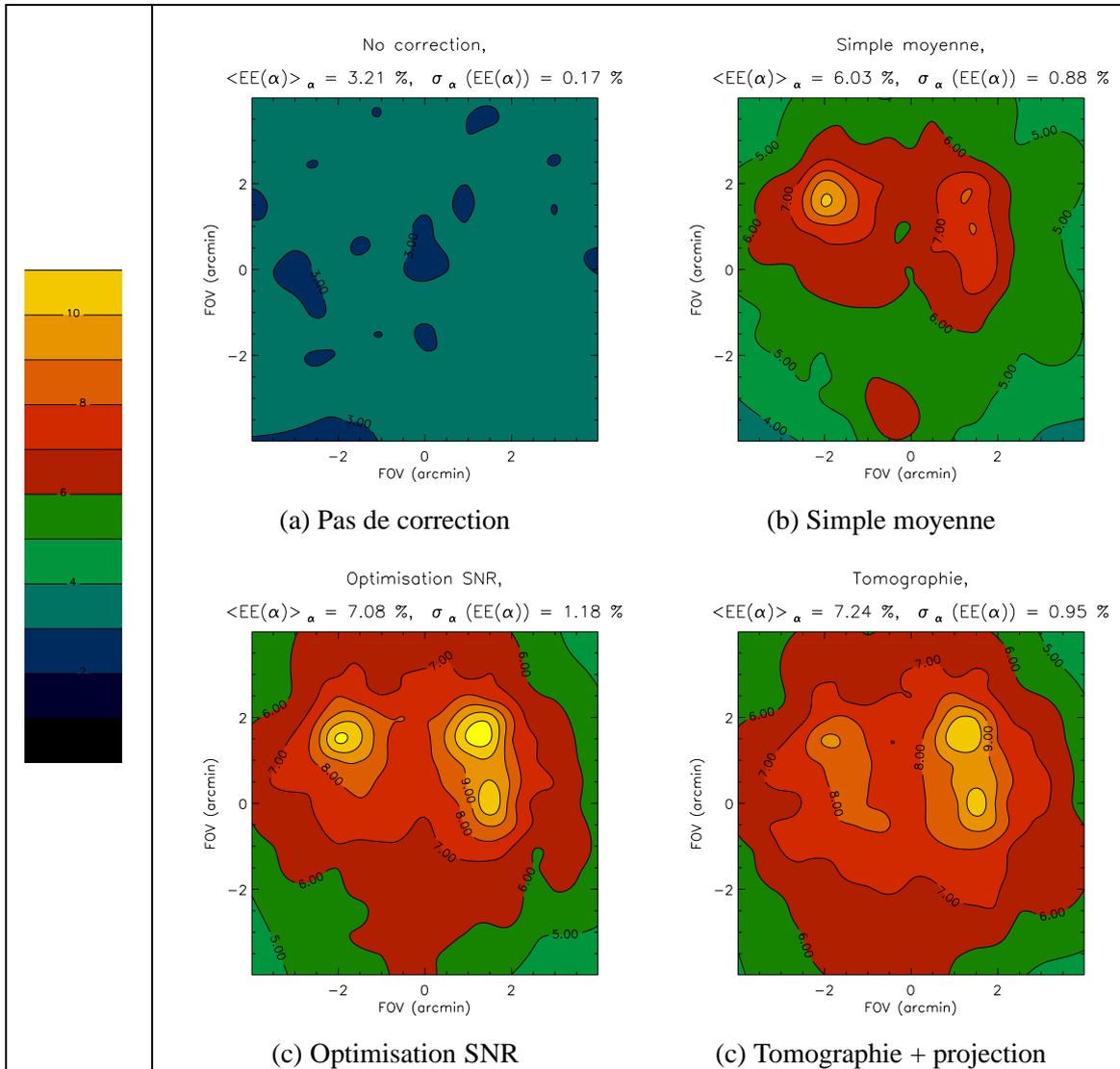


FIG. 8.15 – Cartes des énergies encadrées dans 100 mas après correction par GLAO.

	Simple moyenne	Optimisation SNR	Tomographie
Gain sur $\langle \sigma_{res}^2(\alpha) \rangle_{\alpha}$ (%)	57.5	70.4	70.5
Gain sur $\langle EE_{100\ mas}(\alpha) \rangle_{\alpha}$ (%)	32	213	213

TAB. 8.3 – Gain sur la valeur moyenne dans le champ de la variance de phase résiduelle et de l'énergie encadrée dans 100 mas en fonction du mode d'estimation de la phase de correction. Tirage à faible SNR.

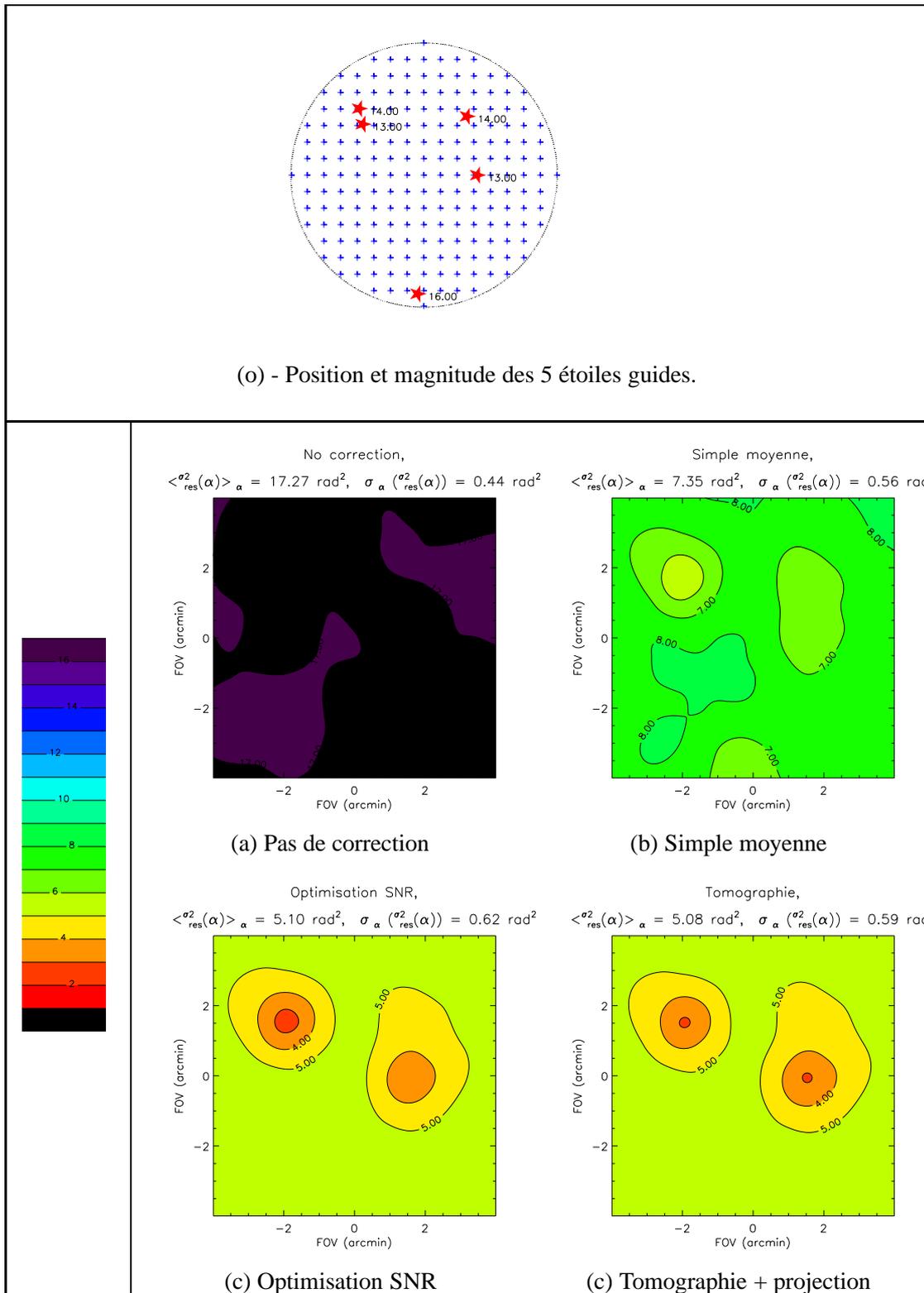


FIG. 8.16 – Cartes des variances de phase résiduelle après correction par GLAO pour un tirage d'étoiles à faible flux.

et lorsque la corrélation angulaire de la turbulence d'altitude est suffisante pour permettre une reconstruction efficace de la turbulence dans les hautes couches de l'atmosphère.

Cependant, comme nous l'avons dit en introduction de ce chapitre, l'amélioration de la performance moyenne dans le champ n'est pas l'unique spécification pour le GLAO. Une demande importante est l'assurance d'une bonne uniformité de la correction.

Le problème de l'uniformité de la correction du GLAO a déjà été étudié. Ainsi, A. Tokovinin [Tokovinin 2004] a mis en évidence le fait que la prise en compte d'étoiles guides localisées au centre du champ est susceptible de doper la correction au centre du champ et de dégrader l'uniformité de la correction. C'est ce qu'on voit sur la figure (8.17), représentant la carte des corrections obtenues dans un champ de 3 arcmin de diamètre avec 7 étoiles réparties dans le champ selon une géométrie hexagonale centrée.

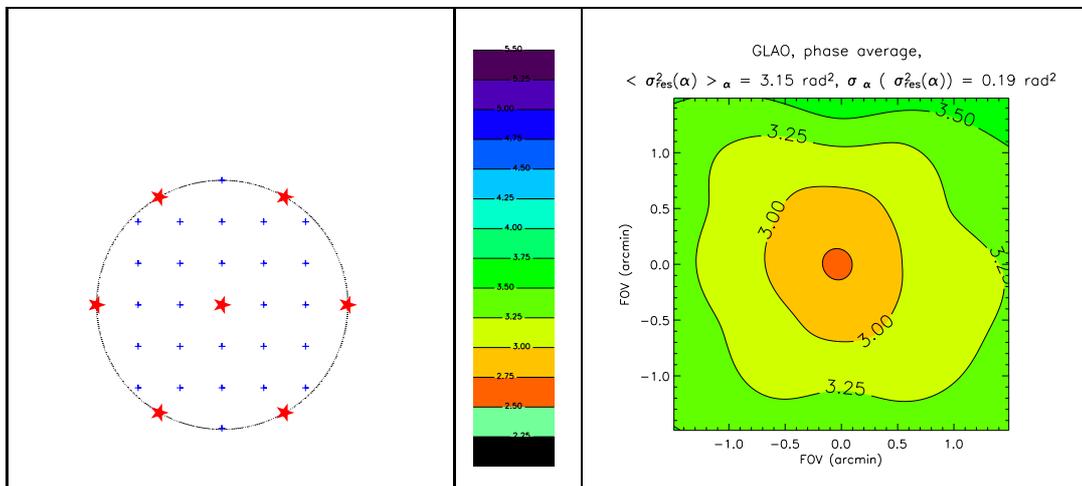


FIG. 8.17 – GLAO sur un champ de 3 arcmin avec 7 étoiles guides dont une au centre du champ corrigé. Cette étoile dégrade l'uniformité de la correction.

Cette figure montre que l'étoile centrale joue effectivement un rôle ambivalent dans la correction du GLAO : si elle permet indéniablement d'améliorer la correction moyenne, sa présence dégrade également l'uniformité de la correction. La solution proposée par A. Tokovinin est de choisir comme domaine de recherche des étoiles guides \mathcal{D}_* un champ annulaire autour du champ d'intérêt scientifique. En fait on s'est déjà placé dans une telle situation au paragraphe (8.2.3.3), lorsque les étoiles guides étaient rejetées en bord de champ.

La figure (8.18) montre une carte de correction obtenue dans une situation identique à celle de la figure (8.17), les sept étoiles guides étant réparties le long d'un cercle en bord de champ. Conformément aux études antérieurement publiées, cette configuration permet bien, pour le champ considéré ici, d'atteindre une correction plus uniforme. Toutefois, la situation change si l'on considère un champ plus large.

La figure (8.19) montre ainsi que pour un champ de 6 arcmin de diamètre, la même configuration

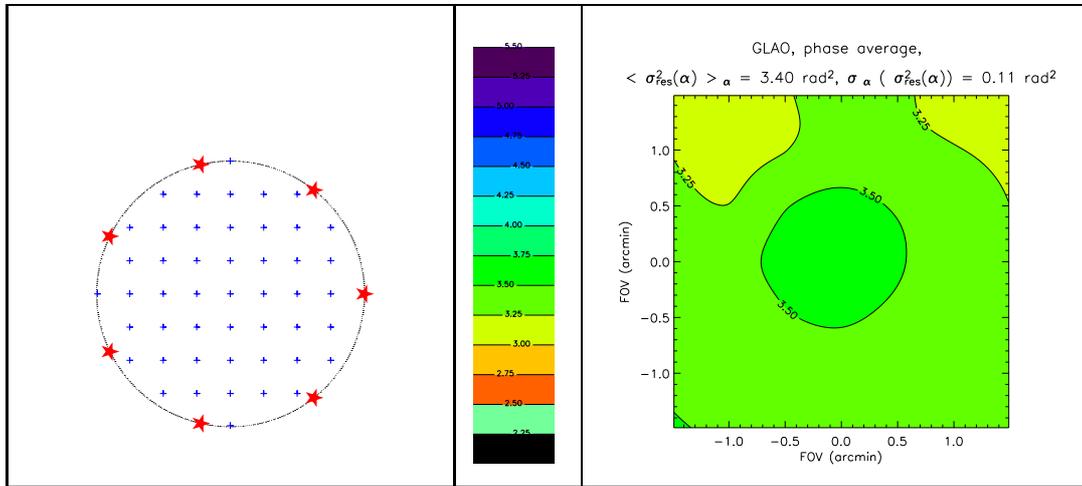


FIG. 8.18 – GLAO sur un champ de 3 arcmin avec 7 étoiles guides rejetées en bord de champ. La correction est plus uniforme que dans le cas de la figure (8.17).

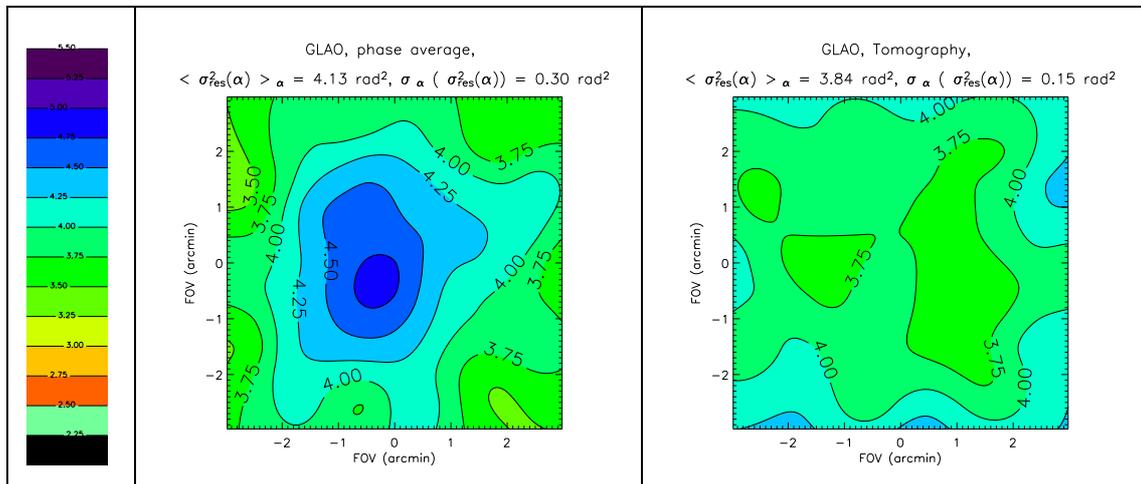


FIG. 8.19 – GLAO sur un champ de 6 arcmin avec 7 étoiles guides rejetées en bord de champ. La correction est dégradée au centre du champ si on ne pratique pas de reconstruction tomographique.

circulaire des étoiles guides ne permet plus de reconstruire efficacement la turbulence en bord de champ. Comme nous l'avons vu au paragraphe (8.2.3.3), la tomographie permet alors un gain significatif sur la performance au centre du champ. C'est que qu'on voit dans la figure (8.19), sur la carte de droite.

Ainsi, si la tomographie ne permet pas de gérer l'uniformité de la correction, le choix *ad-hoc* de la forme du champ technique (dans lequel on sélectionne les étoiles guides) n'est pas non plus garant de cette uniformité. On propose dans la suite de ce chapitre des pistes allant dans le sens d'une véritable reconstruction optimale prenant en compte la contrainte d'uniformité.

8.3 Optimisation de l'uniformité de la correction dans le champ

Si on veut formaliser l'optimisation de l'uniformité de la correction dans le champ, il nous faut un critère représentatif des fluctuations de la qualité de correction. On propose de considérer ici la variance sur le domaine \mathcal{D}_* de la variance de phase résiduelle :

$$\begin{aligned} Var_{\alpha} (\sigma_{res}^2 (\alpha)) &= \frac{1}{S_{\mathcal{D}_*}} \iint_{\mathcal{D}_*} (\sigma_{res}^2 (\alpha) - \langle \sigma_{res}^2 (\alpha) \rangle_{\alpha})^2 d\alpha \\ Var_{\alpha} (\sigma_{res}^2 (\alpha)) &= \left\langle (\sigma_{res}^2 (\alpha) - \langle \sigma_{res}^2 (\alpha) \rangle_{\alpha})^2 \right\rangle_{\alpha} \end{aligned} \quad (8.4)$$

Nous allons dans un premier temps tenter de minimiser ce critère. On se rendra alors compte que l'on aboutit à des solutions sans intérêt pour l'optique adaptative à large champ. On donnera alors des pistes pour la minimisation de $Var_{\alpha} (\sigma_{res}^2 (\alpha))$ sous contrainte de respecter une performance moyenne $\langle \sigma_{res}^2 (\alpha) \rangle_{\alpha}$ donnée.

8.3.1 Minimisation de la variance dans le champ corrigé de la variance de phase résiduelle

Lors de l'étude de la reconstruction optimale pour le SO en MCAO, nous avons exprimé la variance de phase dans une direction du champ $\sigma_{res}^2 (\alpha)$ dans un formalisme matriciel (cf. § 4.1.2, eq. 4.12) :

$$\langle \sigma_{res}^2 (\alpha) \rangle_{\alpha} = \left\langle \left\langle \left\| \mathbf{P}_{\alpha} \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{P}_{DM\alpha} \mathbf{W} (\mathbf{P}_{GS} \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{B}) \right\|^2 \right\rangle_{time, \rho} \right\rangle_{\alpha} \quad (8.5)$$

Avec :

- $\boldsymbol{\varphi}$: matrice des projections des phases des couches turbulentes sur la base des polynômes de Zernike,
- \mathbf{P}_{GS} : opérateur de projection des phases des couches d'altitude dans la pupille, suivant les directions d'analyse,
- \mathbf{B} : vecteur des coefficients du bruit propagé sur les modes reconstruits,
- $\mathbf{P}_{DM\alpha}$: opérateur de projection des phases des couches d'altitude dans la pupille, suivant les directions d'imagerie,
- \mathbf{W} : reconstruteur à optimiser.

On s'intéresse ici aux variations de performance dans le champ du GLAO. On choisit comme critère d'uniformité la variance dans le champ de la variance de phase résiduelle, définie par l'équation (8.4).

La recherche d'un reconstruteur garantissant d'avoir $Var_\alpha (\sigma_{res}^2 (\alpha))$ minimale est réalisée par recherche des zéros de sa dérivée par rapport à \mathbf{W} . En utilisant les règles classiques de la dérivation matricielle (cf. annexe A), on a :

$$\text{Or : } \frac{\partial}{\partial \mathbf{W}} (Var_\alpha) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{W}} \left(\left\langle (\sigma_{res}^2 (\alpha) - \langle \sigma_{res}^2 (\alpha) \rangle_\alpha)^2 \right\rangle_\alpha \right)$$

Le reconstruteur \mathbf{W} ne dépend pas de la direction d'imagerie considérée. On a donc :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{W}} (Var_\alpha) = 2 \left\langle \Delta_{\sigma^2} (\alpha) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{W}} (\Delta_{\sigma^2} (\alpha)) \right\rangle_\alpha^2, \quad \text{avec : } \Delta_{\sigma^2} (\alpha) = (\sigma_{res}^2 (\alpha) - \langle \sigma_{res}^2 (\alpha) \rangle_\alpha)$$

Pour poursuivre la minimisation, il faut écrire explicitement $\Delta_{\sigma^2} (\alpha)$ en fonction de \mathbf{W} .

Pour cela, il faut développer l'expression de $\sigma_{res}^2 (\alpha)$ donnée par l'équation (8.5). Si l'on se restreint au cas d'un GLAO dont le miroir déformable est conjugué à la pupille du télescope, l'opérateur $\mathbf{P}_{DM\alpha}$ ne dépend plus de α et on peut poser : $\mathbf{P}_{DM\alpha} = \mathbf{P}_{DM_0}$. $\sigma_{res}^2 (\alpha)$ s'exprime alors :

$$\begin{aligned} \sigma_{res}^2 (\alpha) &= Tr \{ \mathbf{M}\alpha \}, \\ \text{Avec : } \mathbf{M}\alpha &= \mathbf{P}\alpha \mathbf{C}_\varphi \mathbf{P}^t_\alpha + \mathbf{P}_{DM_0} \mathbf{W} (\mathbf{P}_{GS} \mathbf{C}_\varphi \mathbf{P}^t_{GS} + \mathbf{C}_b) \mathbf{W}^t \mathbf{P}^t_{DM_0} \\ &\quad - \mathbf{P}_{DM_0} \mathbf{W} \mathbf{P}_{GS} \mathbf{C}_\varphi \mathbf{P}^t_\alpha - \mathbf{P}\alpha \mathbf{C}_\varphi \mathbf{P}^t_{GS} \mathbf{W}^t \mathbf{P}^t_{DM_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Alors : } \Delta_{\sigma^2} (\alpha) &= Tr \{ \Delta \mathbf{M}\alpha \}, \\ \text{avec : } \Delta \mathbf{M}\alpha &= \mathbf{M}\alpha - \langle \mathbf{M}\alpha \rangle_\alpha = \mathbf{P}_{DM_0} \mathbf{W} \mathbf{P}_{GS} \mathbf{C}_\varphi (\langle \mathbf{P}^t_\alpha \rangle_\alpha - \mathbf{P}^t_\alpha) \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \frac{\partial Tr \{ \Delta \mathbf{M}\alpha \}}{\partial \mathbf{W}} = 2 \mathbf{P}^t_{DM_0} (\langle \mathbf{P}\alpha \rangle_\alpha - \mathbf{P}\alpha) \mathbf{C}_\varphi \mathbf{P}^t_{GS}$$

Soit finalement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{W}} (Var_\alpha) &= 0 \\ &\Leftrightarrow \\ 4 \mathbf{P}^t_{DM_0} \langle Tr \{ \mathbf{P}_{DM_0} \mathbf{W} \mathbf{P}_{GS} \mathbf{C}_\varphi (\langle \mathbf{P}^t_\alpha \rangle_\alpha - \mathbf{P}^t_\alpha) \} \cdot (\langle \mathbf{P}\alpha \rangle_\alpha - \mathbf{P}\alpha) \rangle_\alpha \mathbf{C}_\varphi \mathbf{P}^t_{GS} &= 0 \quad (8.6) \end{aligned}$$

Il existe deux solutions évidentes à l'équation (8.6) :

– $\forall \alpha, (\mathbf{P}\alpha - \langle \mathbf{P}\alpha \rangle_\alpha) = 0$, ce qui est possible si et seulement si $\mathcal{S}_{\mathcal{D}_*} = 0$, c'est-à-dire si l'on corrige sur axe uniquement. On est ainsi amené au cas de l'optique adaptative classique.

- $\mathbf{W} = 0$, ce qui veut dire que l'on ne corrige pas.

En dehors de ces deux solutions, il est impossible de résoudre analytiquement l'équation (8.6). En effet, le problème est mal posé car \mathbf{W} est réduit par l'opérateur *Trace*. De plus, une fois encore, s'intéresser de façon réductrice à un seul des deux aspects de la performance du GLAO n'a rien d'optimal. Pour ces raisons, on propose dans la suite des éléments de réflexion pour la réalisation d'une optimisation sous contrainte.

8.3.2 Minimisation sous contrainte

Notre objectif est ici de minimiser Var_{α} en conservant un champ étendu et en corrigeant au mieux une partie de la turbulence. L'idée est donc de relaxer la contrainte de maximisation de la performance moyenne dans le champ et, dans l'espace des solutions vérifiant la contrainte relaxée, de sélectionner celle qui assure la meilleure uniformité.

On formalise ceci en considérant les critères que nous avons manipulés jusqu'à présent, à savoir la valeur moyenne et la variance dans le champ de la variance de phase résiduelle. On a en fait un système de deux équations à résoudre :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{res}^2(\alpha) \rangle_{\alpha} &\leq \Sigma \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{W}} \left(\left\langle \left(\sigma_{res}^2(\alpha) - \langle \sigma_{res}^2(\alpha) \rangle_{\alpha} \right)^2 \right\rangle_{\alpha} \right) &= 0 \end{aligned}$$

La première équation permet d'isoler un espace des reconstruteurs acceptables pour le GLAO en terme de correction moyenne. Il faut ensuite minimiser localement Var_{α} dans cet espace. Le problème est que la seconde de ces équations n'est pas quadratique en \mathbf{W} .

8.4 Conclusion

On a vu dans ce chapitre que l'optimisation de la performance moyenne du GLAO ne doit pas seulement prendre en compte les problèmes de propagation du bruit de l'analyse de front d'onde mais également l'erreur de discrétisation du champ par les étoiles guides, en particulier lorsque celles-ci sont peu nombreuses (moins de 7). L'utilisation d'une procédure de reconstruction tomographique du volume turbulent apporte alors un gain significatif sur la performance moyenne du GLAO, que ce soit en présence d'étoiles guides naturelles ou d'étoiles Laser localisées en bord de champ. En ce qui concerne les étoiles naturelles, on a toutefois pu constater que lorsque les problèmes de propagation du bruit dominant l'erreur d'estimation de la phase, il n'y a pas de gain significatif à utiliser la reconstruction tomographie plutôt que l'optimisation proposée au chapitre 6.

Par ailleurs, nous avons entamé dans ce chapitre une réflexion plus générale sur la nature de la performance attendue pour un GLAO. Nous avons montré que tenter d'optimiser la seule uniformité de la performance amène à des solutions sans intérêt pour l'AO à large champ (faire tendre le diamètre du champ vers 0 ou bien ne rien reconstruire). La prise en compte de la contrainte d'uniformité de la correction ne peut donc se faire qu'en réalisant une optimisation sous contrainte de garder une performance moyenne dans le champ acceptable.

Quatrième partie

Comparaison d'algorithmes de mesure du front d'onde pour un senseur Shack-Hartmann

Introduction

L'analyseur de front d'onde est un élément déterminant du système d'optique adaptative car c'est lui qui quantifie les déformations turbulentes du front d'onde. On a vu au chapitre 2 qu'il existe une grande variété d'analyseurs, chacun ayant des qualités spécifiques (cf. § 2.1). Parmi eux, l'analyseur Shack-Hartmann possède le double avantage d'être basé sur une technologie désormais mature et d'être aisément adaptable dans son design au type de performance demandé. En particulier, il permet d'obtenir un haut degré de correction en conservant des temps d'acquisition et de calcul suffisamment faibles pour s'intégrer dans un système fonctionnant en temps réel. Pour ces raisons, il est actuellement l'analyseur le plus utilisé en optique adaptative : la plupart des grands observatoires mondiaux (Keck [Wizinowich et al. 2000, van Dam et al. 2004], VLT [Rousset et al. 2003, Fusco et al. 2006, Herriot et al. 1998]) utilisent ou développent des instruments dont l'optique adaptative utilise un senseur Shack-Hartmann.

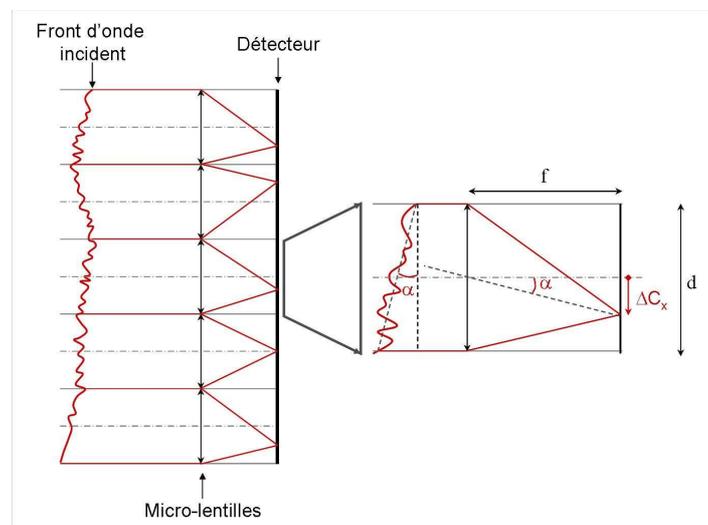


FIG. 8.20 – Principe de l'analyse de front d'onde avec un senseur Shack-Hartmann.

Nous avons donc choisi de concentrer ce travail sur l'étude de la mesure de front d'onde réalisée par un senseur Shack-Hartmann. On en rappelle le principe sur la figure (8.20). Dans le cadre général de notre étude (les optiques adaptatives de nouvelle génération, cf. chapitre 3) les spécifications de performance pour l'analyseur de front d'onde sont très variées et dépendent étroitement du type d'optique adaptative envisagé. Le design du senseur de front d'onde est à chaque fois le fruit de l'analyse du budget d'erreur du système d'AO dans son ensemble (cf. § 2.4, [Fusco et al. 2006]).

Trois aspects déterminent ses performances :

- Le nombre de micro-lentilles échantillonnant le front d'onde incident.
- Les caractéristiques du détecteur.
- L'algorithme d'estimation du déplacement des spots dans le plan focal du Shack-Hartmann.

Le nombre de sous-pupilles est directement lié au nombre d'actionneurs du miroir déformable (cf. § 2.3) et conditionne avec lui le degré de correction du système. Il est donc défini par le nombre de modes turbulents que l'optique adaptative doit corriger.

Concernant les détecteurs, il s'agit généralement en optique adaptative pour l'astronomie de capteurs CCD, car les senseurs de front d'onde travaillent dans le visible ou le proche infra-rouge. Les caractéristiques importantes sont leur rendement quantique, leur temps de lecture, la taille de leurs pixels et leur niveau de bruit. Une étude poussée des détecteurs est hors de propos ici. On considèrera dans la suite des capteurs CCD classiques dont la technologie actuelle génère un bruit de détecteur de quelques photo-électrons par pixel et par trame pour des fréquences d'échantillonnage temporel de l'ordre du kilo-Hertz. L'utilisation de capteurs à faibles bruits, L3CCD [Foppiani et al. 2003] ou EMCCD [Denvir and Conroy 2003], est désormais envisagée pour des systèmes à très haut niveau de performance [Fusco et al. 2005]. Dans ces détecteurs, la réduction du niveau de bruit est due à la multiplication des photons avant leur détection. La multiplication de photons modifie la statistique du bruit de mesure [Robbins and Hadwen 2003, Daigle et al. 2004] : les détecteurs faibles bruits peuvent être considérés comme des capteurs classiques avec un bruit de lecture de l'ordre de 0.5 photo-électrons par pixel et par trame RMS, mais un bruit de photons deux fois plus important que pour un détecteur classique. De fait, les études menées dans cette partie sur la base de capteurs CCD classiques ne seront que partiellement transposables aux détecteurs à faible bruit.

Une fois les caractéristiques techniques du senseur définies, c'est finalement la recherche de méthodes d'estimation performantes de la position des spots Hartmann qui peut permettre d'apporter un gain sur l'estimation du front d'onde. C'est précisément à ce problème que nous nous attacherons dans cette partie. Le chapitre 9 présente un bilan des estimateurs optimaux de la position d'un spot dans le plan focal d'une micro-lentille. Les trois chapitres suivants présentent une étude complète de trois estimateurs : le centre de gravité (chap. 10), le centre de gravité du spot pondéré par une fonction de référence (chap. 11), et le maximum du produit de corrélation (chap. 12) du spot par une référence.

Chapitre 9

Comment estimer la position d'un spot à partir d'une image pixélisée et bruitée ?

9.1 Cadre et enjeu de l'étude

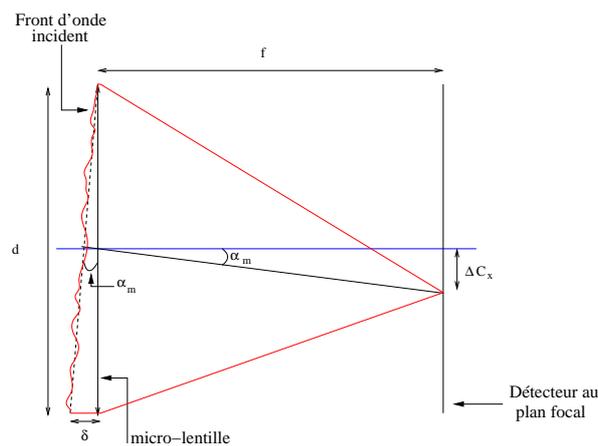


FIG. 9.1 – Relation entre déplacement d'un spot Hartmann au plan focal d'une micro-lentille et pente moyenne du front d'onde incident.

Comme nous l'avons vu au paragraphe (2.1.2.3), la position d'un spot dans le plan focal d'une micro-lentille de Shack-Hartmann dépend linéairement de la pente moyenne de la portion de front d'onde imagée par la sous-pupille (cf. fig. 9.1) :

$$\mathcal{C} = f \cdot \tan \alpha \quad (9.1)$$

Où $\vec{C} (C_x, C_y)$ est la position du spot et $\vec{\alpha} (\alpha_x, \alpha_y)$ est la pente moyenne du front d'onde sur la sous-pupille (dit aussi angle d'arrivée).

Il existe alors une relation bijective entre la pente moyenne du front d'onde et le déplacement du spot :

$$\Delta C_x = \frac{\lambda f}{2\pi d} \cdot \Delta \phi_x \quad (9.2)$$

Dans cette expression, λ est la longueur d'onde de l'analyse, f est la distance focale de la micro-lentille, d la taille d'une sous-pupille et $\Delta \phi_x$ est la différence de phase de bord à bord de sous-pupille. Chercher le meilleur estimateur de la pente revient alors à chercher le meilleur estimateur de la position du spot. Dans un senseur Shack-Hartmann, quatre facteurs viennent perturber la mesure de la position du spot :

- La surface du détecteur dédiée à chaque sous-pupille est finie. Cela est gênant lorsque les mouvements du spot sont tels que celui-ci est amené à sortir partiellement du champ.
- Le détecteur utilisé pour enregistrer le spot est pixelisé et bruyant.
- Le bruit de photons perturbe aussi la mesure.
- La turbulence déforme le spot et peut même l'éclater en un groupe de speckles si le rapport d/r_0 de la taille de la sous-pupille sur le paramètre de Fried de la turbulence (cf. § 1.2.2) est trop élevé (cf. § 1.4).

Tout le problème est donc d'estimer en temps réel la position d'un spot déformé par la turbulence, bruité et détecté sur un support de taille finie et pixelisé. En général, le système d'optique adaptative est défini avec un nombre suffisant de sous-pupilles pour que le rapport d/r_0 par sous-pupille reste faible (inférieur ou de l'ordre de 2 à 3), si bien que les spots Hartmann restent compacts, bien que déformés. Du fait de la faiblesse des sources guides rencontrées en astronomie (hormis en astronomie solaire), c'est bien en fait souvent le bruit, et en particulier le bruit de détecteur qui limite la qualité de la mesure de position.

Plusieurs algorithmes sont utilisés pour estimer le déplacement des spots Hartmann dans les systèmes actuellement en opération. En astronomie stellaire, où les sources guides sont ponctuelles et généralement faibles, le plus couramment utilisé est le calcul du barycentre du spot [Rousset et al. 2003], souvent en seuillant celui-ci pour éliminer en partie les problèmes de bruit [Arines and Ares 2002, Ares and Arines 2003]. Une façon radicale de limiter les problèmes liés au bruit de détecteur est de réduire au strict minimum le nombre de pixels du détecteur, c'est-à-dire de faire une lecture sur 2×2 pixels. Cette approche, dans laquelle la détection se fait en mode dit *quatre quadrants* [Tyler and Fried 1982], est principalement utilisée aux Etats Unis [van Dam et al. 2004, Herriot et al. 1998]. Lorsque le Shack-Hartmann fonctionne sur scène étendue, ce qui est le cas en astronomie solaire [Rimmele and Radick 1998, van der Luehe et al. 2003], dans certaines applications militaires de l'analyse de front d'onde et lorsque l'optique adaptative est asservie sur une étoile Laser [Bauman 2003], l'estimation de position est faite préférentiellement en utilisant le produit de corrélation de l'image, soit par elle-même, soit par une image de référence [Michau et al. 1992, Rimmele and Radick 1998, Poyneer et al. 2005]. Reste alors à déterminer la position du maximum du pic de corrélation.

Ces différentes techniques ont chacune leur domaine d'application, mais ne sont pas forcément optimales en toute circonstance.

On s'attache dans cette partie à définir les estimateurs optimaux de la position d'un spot dans différentes conditions :

- Bruit de photons ou bruit de détecteur,
- Spot de forme quelconque ou gaussien.

On ne tiendra compte dans l'immédiat ni du caractère fini du champ par sous-pupille, ni de sa pixélisation : on traitera la recherche d'estimateur dans un support infini et continu, et on analysera dans les chapitres suivants les effets du champ et de la pixélisation sur certains estimateurs. Dans un premier temps, on se base sur une approche de type maximum de vraisemblance, puis on utilise une approche de type maximum *a posteriori* (MAP).

9.2 Estimation au sens du maximum de vraisemblance

On recherche ici l'estimateur optimal du déplacement d'une tache lumineuse dans le plan focal d'une micro-lentille de Shack-Hartmann, en présence soit d'un bruit de photons (statistique poissonnienne), soit d'un bruit de détecteur (statistique gaussienne uniforme). On suppose ici et dans toute la suite de ce chapitre que l'on connaît parfaitement la forme du spot Hartmann. On cherche simplement à estimer sa position. Le spot peut alors être considéré comme la manifestation décalée et bruitée de la PSF - turbulente ou non - d'une sous-pupille de SH. On peut écrire :

$$s(\mathbf{x}) = r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + b(\mathbf{x}) \quad (9.3)$$

Avec :

- $\mathbf{x}(x, y)$: vecteur position dans le plan de l'image ;
- $\mathbf{x}_0(x_0, y_0)$: Position de l'image déplacée ;
- $s(\mathbf{x})$: image lue sur le détecteur ;
- $r(\mathbf{x})$: PSF non décalée et non bruitée (supposée connue) ;
- $b(\mathbf{x})$: Une réalisation du bruit en chaque point \mathbf{x} .

On travaille pour l'instant sans *a priori* sur la position de la tache. On utilise donc l'estimation au sens du maximum de vraisemblance (en anglais, Maximum Likelihood, ML). Soit $\hat{\mathbf{x}}_0$ une estimation de la position vraie \mathbf{x}_0 de la tache. La fonction de vraisemblance \mathcal{L} de $\hat{\mathbf{x}}_0$ est par définition :

$$\mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}_0) = \mathcal{P}(s(\mathbf{x}) | \hat{\mathbf{x}}_0) \quad (9.4)$$

L'estimateur $(\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML}$ qui maximise la vraisemblance vérifie :

$$(\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML} = \arg \max_{\hat{\mathbf{x}}_0} \{\mathcal{P}(s(\mathbf{x}) | \hat{\mathbf{x}}_0)\}$$

$(\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML}$ dépend de la forme de la PSF, $r(\mathbf{x})$, et de la statistique du bruit, $b(\mathbf{x})$. Dans la section (9.2.1), on considère un spot de forme quelconque, soumis à un bruit de photons, et on dérive l'estimateur optimal au sens du maximum de vraisemblance. La section (9.2.2) présente ensuite l'estimateur ML pour un spot de forme quelconque, soumis au bruit de détecteur. Enfin, on particularise ces résultats au cas d'un spot gaussien dans la partie (9.2.3).

9.2.1 Estimateur ML en présence de bruit de photons

On considère ici un spot de forme quelconque, dégradé par du bruit de photons. Ce dernier a une statistique poissonnienne, et l'image est caractérisée en chaque point par :

$$\forall (\mathbf{x}) \mathcal{P}(s(\mathbf{x})) = \frac{(\mu(\mathbf{x}))^{s(\mathbf{x})}}{s(\mathbf{x})!} \cdot e^{-\mu(\mathbf{x})}, \text{ avec : } \mu(\mathbf{x}) = r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (9.5)$$

D'après l'équation (9.5), et en considérant que le bruit est décorréolé d'un point à l'autre, l'estimateur $\hat{\mathbf{x}}_0$ du déplacement \mathbf{x}_0 du spot s'exprime :

$$(\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML} = \arg \max_{\hat{\mathbf{x}}_0} \left\{ \mathcal{P} \left(\prod_{\mathbf{x}} s(\mathbf{x}) \right) \right\}$$

L'annexe B détaille le raisonnement permettant de déterminer $(\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML}$: il suffit de passer à la log-vraisemblance en considérant un support infini et continu. On a alors [Guillaume et al. 1997] :

$$(\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML}^{phot, spot\ qcq} = \arg \max_{\hat{\mathbf{x}}_0} \left\{ \iint s(\mathbf{x}) \ln(r(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0)) d\mathbf{x} \right\} \quad (9.6)$$

L'estimateur optimal au sens du maximum de vraisemblance de la position d'un spot de forme quelconque dégradé par le bruit de photons est le maximum du produit de corrélation du spot par le logarithme de son profil non bruité. Utiliser un tel estimateur n'est pas aisé dans la pratique :

- Le profil non bruité du spot n'est pas forcément connu. Il est possible d'en obtenir une bonne approximation en calculant l'enveloppe moyenne du spot sur plusieurs trames, afin de lisser les effets du bruit de photon. Cependant, lorsque le spot est déformé par la turbulence, moyenné temporellement l'enveloppe du spot lisse également ses fluctuations de forme, et l'estimateur perd son optimalité.
- Il faut disposer d'un algorithme efficace et robuste de détection du maximum du produit de corrélation. Ce dernier point n'est pas évident : faire une simple détection de maximum peut se révéler dangereux à faible rapport signal à bruit. De plus, la taille des pixels limite alors la précision de l'estimation. Dans la pratique, on contourne ces problèmes soit en calculant le barycentre du pic de corrélation, éventuellement en le seuillant pour atténuer les problèmes liés au bruit, soit en réalisant un fit quadratique ou gaussien du pic pour estimer la position de son maximum. La comparaison des résultats de ces différentes techniques est effectuée au chapitre 12.

9.2.2 Estimateur ML en présence de bruit de détecteur

Supposons maintenant que l'on traite toujours une tache à profil quelconque d'intensité lumineuse sur support infini, mais en présence d'un bruit gaussien uniforme et centré (bruit de détecteur). Cette fois le bruit a pour caractéristiques :

$$\forall (\mathbf{x}) \mathcal{P}(b(\mathbf{x})) = \frac{1}{2\pi\sigma_{det}^2} e^{-b^2(\mathbf{x})/2\sigma_{det}^2} \quad (9.7)$$

Où σ_{det} est identique $\forall \mathbf{x}$.

On procède de même que précédemment, en introduisant l'expression (9.7) dans l'équation (9.5) et en passant à la log-vraisemblance de l'estimateur $\hat{\mathbf{x}}_0$ (cf. annexe B pour les détails) :

$$(\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML}^{det, spot\ qcq} = \arg \max_{\hat{\mathbf{x}}_0} \left\{ \iint s(\mathbf{x}) r(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0) d\mathbf{x} \right\} \quad (9.8)$$

L'estimateur optimal au sens du maximum de vraisemblance de la position d'un spot de forme quelconque dégradé par un bruit gaussien est le maximum du produit de corrélation du spot bruité par son profil non bruité. Cet estimateur pose exactement les mêmes problèmes que l'estimateur ML en présence de bruit de photons (§ 9.2.1).

9.2.3 Cas particulier d'un spot à profil gaussien

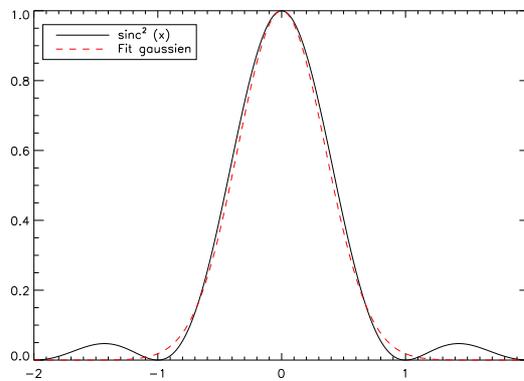


FIG. 9.2 – Approximation de la tache de diffraction d'une sous-pupille carrée par une fonction gaussienne.

Dans les études sur le Shack-Hartmann, le spot est souvent modélisé au premier ordre par une tache à profil gaussien d'intensité lumineuse. Cette approximation est justifiée par la géométrie et le design du Shack-Hartmann :

- Les senseurs SH sont généralement constitués d'une matrice de microlentilles carrées. En l'absence de turbulence, le spot dans le plan focal d'une micro-lentille a donc la forme d'un sinc^2 (cf. § 1.4). Dans un tel spot, 91% de l'énergie lumineuse est concentrée dans la tache centrale de diffraction. Or, comme le montre la figure (9.2), on peut en première approximation modéliser la tache centrale par une fonction gaussienne.
- Lors de son fonctionnement en présence de turbulence, le Shack-Hartmann est presque toujours dimensionné de sorte que le rapport d/r_0 de la taille de la sous-pupille sur le paramètre de Fried de la turbulence (cf. § 1.2.2) soit suffisamment faible pour que le spot Hartmann reste compact. Dans ce cas l'approximation au premier ordre d'un spot gaussien est également justifiée.

Pour ces raisons, on considère par la suite un spot isotrope, à profil gaussien d'intensité lumineuse, caractérisé par :

$$r(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{R}}{2\pi\sigma_T^2} \cdot e^{-\mathbf{x}^2/2\sigma_T^2} \quad (9.9)$$

On recherche ici l'estimateur optimal de la position de ce spot, en présence d'un bruit à statistique Poissonnienne (bruit de photons) puis d'un bruit à statistique gaussienne uniforme (bruit de détecteur).

9.2.3.1 Estimateur ML en présence de bruit de photons

On considère le spot dont l'enveloppe est définie par l'équation (9.9), dégradé par du bruit de photons. On mesure sa position en considérant un support infini et continu. Le bruit de photons a une statistique poissonnienne, caractérisée par l'équation (9.5). On peut alors reprendre l'équation (9.6) obtenue pour un spot à profil quelconque et y introduire l'expression de $r(\mathbf{x})$ (eq. 9.9). On obtient :

$$(\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML} = \underset{\hat{\mathbf{x}}_0}{\operatorname{argmin}} \left\{ \iint s(\mathbf{x}) \times \left(\frac{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0)^2}{2\sigma_T^2} \right) d^2\mathbf{x} \right\}$$

Il suffit ensuite de rechercher le minimum de cette expression et la dérivant par rapport à $\hat{\mathbf{x}}_0$. On a donc $(\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML}$ tel que :

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{x}}_0} \left[\iint s(\mathbf{x}) \times \left(\frac{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0)^2}{2\sigma_T^2} \right) d^2\mathbf{x} \right]_{\hat{\mathbf{x}}_0 = (\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML}} = 0$$

D'où :

$$(\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML}^{phot, spot\ gauss} = \left[\frac{\iint \mathbf{x} \cdot s(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x}}{\iint s(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x}}, \frac{\iint \mathbf{y} \cdot s(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x}}{\iint s(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x}} \right] \quad (9.10)$$

L'estimateur ML de la position d'une tache gaussienne à support infini dégradée par le bruit de photons est donc le centre de gravité de la tache.

9.2.3.2 Estimateur ML en présence de bruit de détecteur

On considère toujours le spot dont l'enveloppe est définie par l'équation (9.9), mais dégradé cette fois par du bruit de détecteur. On mesure sa position en considérant un support infini et continu. Le bruit de détecteur a une statistique gaussienne, caractérisée par l'équation (9.7). On peut alors reprendre l'équation (9.8) obtenue pour un spot à profil quelconque y et introduire l'expression de $r(\mathbf{x})$ (eq. 9.9). On obtient :

$$(\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML} = \underset{\hat{\mathbf{x}}_0}{\operatorname{argmax}} \left\{ \iint s(\mathbf{x}) \times r_0 \cdot e^{-(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0)^2/2\sigma_T^2} d^2\mathbf{x} \right\}$$

En dérivant cette expression par rapport à $\hat{\mathbf{x}}_0$, on obtient (cf. annexe B pour les détails) :

$$(\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML}^{det, spot\ gauss} = \left[\frac{\iint \mathbf{x} \cdot s(\mathbf{x}) \cdot r(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0) d^2\mathbf{x}}{\iint s(\mathbf{x}) \cdot r(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0) d^2\mathbf{x}}, \frac{\iint \mathbf{y} \cdot s(\mathbf{x}) \cdot r(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0) d^2\mathbf{x}}{\iint s(\mathbf{x}) \cdot r(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0) d^2\mathbf{x}} \right] \quad (9.11)$$

Le meilleur estimateur ML de la position d'une tache gaussienne dégradée par du bruit de détecteur est donc le centre de gravité de la tache image pondérée par la PSF centrée sur la position estimée du spot. Cette équation est problématique car elle est récursive et implique la nécessité de connaître *a priori* la position du spot. En l'absence de cette connaissance, la solution s'obtient en utilisant une relation récurrente pour converger vers l'estimateur ML :

$$\hat{x}_0^n = \frac{\iint \mathbf{x} \cdot s(\mathbf{x}) \cdot r(\mathbf{x} - \hat{x}_0^{n-1})}{\iint s(\mathbf{x}) r(\mathbf{x} - \hat{x}_0^{n-1})}, \quad (\hat{x}_0)_{ML}^{det, spot\ gauss} = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{x}_0^n \quad (9.12)$$

Dans cette relation, il faut fixer la condition initiale de centrage de la pondérante x_0^0 . On peut la fixer de façon arbitraire. Toutefois, il est judicieux de centrer la pondérante soit sur la position de référence de la sous-pupille, soit sur la position estimée à la trame précédente. La première solution est intéressante pour des systèmes en boucle fermée, dans lesquels le spot se déplace peu autour de la position de référence. En boucle ouverte ou en correction partielle, on pourra préférer tirer parti de la corrélation temporelle de la turbulence en centrant la pondérante sur la mesure effectuée à la trame précédente.

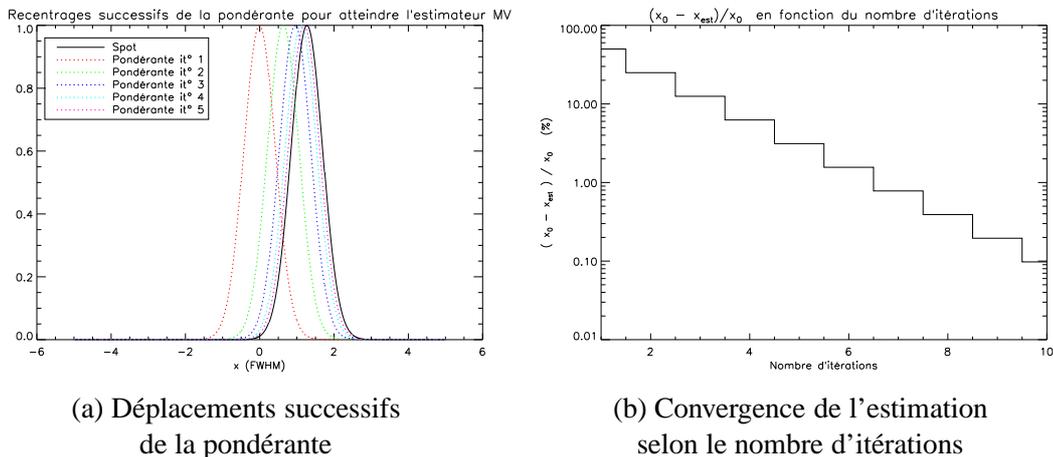


FIG. 9.3 – Réalisation de l'estimation ML par recentrages successifs de la pondérante du CdG pondéré. Spot gaussien, non bruité. On atteint une erreur d'estimation de 0.1 % après une dizaine d'itérations.

La figure (9.3) représente la convergence de l'estimation itérative de la position du spot. L'estimateur ML n'est atteint que pour un nombre infini d'itérations. Dans la pratique, on sera nécessairement amené à limiter le nombre d'estimations successives. On devra alors définir une marge de tolérance pour l'erreur d'estimation. La figure (9.3) montre que pour un petit déplacement et en l'absence de bruit, on atteint 0.1 % de précision sur l'estimation après une dizaine d'itérations. Notons que ces itérations successives doivent être réalisées sur la même image courte pose, c'est-à-dire pour une seule trame. Cela signifie que lors de l'implantation de cet algorithme dans un système temps réel le nombre d'itérations successives devra faire l'objet d'un compromis entre la précision souhaitée pour l'estimation et le temps imparti pour l'estimation de pente du front d'onde. Dans la pratique, on peut même être contraint à se borner à une estimation unique. On étudie ce cas précisément dans le chapitre 11.

Enfin, comme nous l'avons dit plus haut, l'utilisation d'un algorithme récurrent a pour objectif principal de contourner le problème de l'introduction d'*a priori* dans l'estimation de position. Il peut être intéressant au contraire d'introduire explicitement une information *a priori* sur la position de la tache en utilisant une approche de type maximum *a posteriori*. On étudie le résultat de ce type d'estimation dans le paragraphe suivant.

9.3 Estimation au sens du maximum *a posteriori*

L'intérêt de l'estimation MAP est d'intégrer au processus d'estimation une connaissance *a priori* sur la position du spot. Cette connaissance peut être acquise en prenant en compte les caractéristiques de la turbulence atmosphérique à l'aplomb du site d'observation. On a vu au paragraphe (2.1.2.3) que dans le cadre d'un modèle de turbulence de Von Karman, la variance de l'angle d'arrivée du front d'onde sur une sous-pupille s'exprime [Fante 1975, Dessenne 1998] :

$$\sigma_{\alpha_x}^2 = \sigma_{\alpha_y}^2 = 0.162 \frac{\lambda^2}{d^{1/3} r_0^{5/3}} \left[1 - 1.6 \left(\frac{d}{L_0} \right)^{1/3} + 7.4 \left(\frac{d}{L_0} \right)^2 - 9.0 \left(\frac{d}{L_0} \right)^{7/3} + \dots \right]$$

Où d est la taille de l'ouverture (ici, la sous-pupille), r_0 est le paramètre de Fried de la turbulence et L_0 est son échelle externe (avec $d \ll L_0$). La connaissance des paramètres de la turbulence nous renseigne donc directement sur la variance du déplacement du spot. De plus, le déplacement du spot étant le fruit de fluctuations de phase dont la statistique suit une loi gaussienne (cf. § 1.1), on peut introduire comme *a priori* un modèle de déplacement du spot suivant une statistique gaussienne.

On supposera donc dans la suite que le déplacement du spot suit une loi statistique gaussienne, isotrope, centrée sur la position de référence de la sous-pupille $\bar{\mathbf{x}}_0$ et d'écart-type σ_x^2 . La probabilité de trouver la tache à une position \mathbf{x}_0 s'exprime alors :

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} e^{-(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)^2 / 2\sigma_x^2} \quad (9.13)$$

Nous recherchons le meilleur estimateur MAP $(\hat{\mathbf{x}}_0)_{MAP}$ du déplacement \mathbf{x}_0 du spot Hartmann étant données les mesures et les *a priori* disponibles sur ces déplacements. On doit maximiser le critère :

$$J_{MAP}(\mathbf{x}_0) = \mathcal{P}(\mathbf{x}_0 | s(\mathbf{x})) = \frac{\mathcal{P}(s(\mathbf{x}) | \mathbf{x}_0) \mathcal{P}(\mathbf{x}_0)}{\mathcal{P}(s(\mathbf{x}))}$$

Où $\mathcal{P}(s(\mathbf{x}) | \mathbf{x}_0)$ est la vraisemblance de \mathbf{x}_0 . En prenant le logarithme de $J_{MAP}(\mathbf{x}_0)$, le meilleur estimateur de \mathbf{x}_0 au sens MAP est tel que :

$$(\hat{\mathbf{x}}_0)_{MAP} = \arg \max_{\mathbf{x}_0} \{ \ln(\mathcal{L}(\mathbf{x}_0)) + \ln(\mathcal{P}(\mathbf{x}_0)) \} \quad (9.14)$$

Si on considère un spot Hartmann sur un support continu et infini dont le déplacement est décrit par la loi de probabilité donnée par l'équation (9.13), on a :

$$(\hat{\mathbf{x}}_0)_{MAP} = \arg \max_{\mathbf{x}_0} \left\{ \ln(\mathcal{L}(\mathbf{x}_0)) - \frac{(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)^2}{2\sigma_x^2} \right\} \quad (9.15)$$

On retrouve dans la fonction à maximiser le terme de vraisemblance de l'estimateur. Mais ici, ce terme est régularisé par une fonction quadratique qui discrimine les estimateurs selon leur distance à la valeur moyenne $\bar{\mathbf{x}}_0$ de la loi statistique du déplacement. On peut maintenant particulariser l'équation (9.15) aux cas du bruit de photon et du bruit de détecteur :

$$(\hat{\mathbf{x}}_0)_{MAP}^{phot, spot\ qcq} = \arg \max_{\mathbf{x}_0} \left\{ (s \star \ln(r))(\mathbf{x}_0) - \frac{(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)^2}{2\sigma_x^2} \right\} \quad (9.16)$$

$$(\hat{\mathbf{x}}_0)_{MAP}^{det, spot\ qcq} = \arg \max_{\mathbf{x}_0} \left\{ \frac{1}{\sigma_{det}^2} (s \star r)(\mathbf{x}_0) - \frac{(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)^2}{2\sigma_x^2} \right\} \quad (9.17)$$

De même, on particularise les équations (9.16) et (9.17) au cas d'un spot à profil gaussien (voir annexe B.2 pour les détails) :

$$(\hat{\mathbf{x}}_0)_{MAP}^{phot, spot\ gauss} = \mu \cdot \bar{\mathbf{x}}_0 + (1 - \mu) \cdot (\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML} \quad (9.18)$$

$$\text{avec : } \mu = \left(1 - \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_T} \right)^2 \iint s(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{-1}$$

L'estimateur optimal s'écrit comme une combinaison linéaire de l'espérance mathématique de la position du spot et de son barycentre. Plus précisément, l'utilisation du barycentre comme estimateur de la position est régularisée par un terme d'*a priori*, la régularisation étant une fonction de la fiabilité de l'*a priori* : plus σ_x est grand, moins l'*a priori* a de poids.

$$(\hat{\mathbf{x}}_0)_{MAP}^{det, spot\ gauss} = \mu(\mathbf{x}_0) \cdot \bar{\mathbf{x}}_0 + (1 - \mu(\mathbf{x}_0)) \cdot (\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML}, \quad (9.19)$$

$$\text{avec : } \mu(\mathbf{x}_0) = \left(1 - \frac{\sigma_x^2}{\sigma_T^2 \sigma_{det}^2} \iint s(\mathbf{x}) r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d^2\mathbf{x} \right)^{-1}$$

De même qu'au paragraphe (9.2.3.2), on aboutit ici à une équation récursive, qui nécessite pour être résolue l'utilisation d'une relation de récurrence :

$$\hat{\mathbf{x}}_0^n = \mu^{n-1} \cdot \bar{\mathbf{x}}_0 + (1 - \mu^{n-1}) \cdot \frac{\iint \mathbf{x} s(\mathbf{x}) r(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0^{n-1}) d\mathbf{x}}{\iint s(\mathbf{x}) r(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0^{n-1}) d\mathbf{x}}$$

$$(\hat{\mathbf{x}}_0)_{MAP}^{det, spot\ gauss} = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{x}}_0^n, \quad (9.20)$$

$$\text{Avec : } \mu^{n-1} = \left(1 - \frac{\sigma_x^2}{\sigma_T^2 \sigma_{det}^2} \iint s(\mathbf{x}) r(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0^{n-1}) d^2\mathbf{x} \right)^{-1}$$

Comme précédemment, l'estimateur optimal MAP s'écrit comme une combinaison linéaire de l'espérance mathématique de la position du spot et de l'estimateur ML. On note qu'ici le coefficient μ de régularisation dépend à la fois de la fiabilité de l'*a priori* σ_x^2 et du bruit de détecteur σ_{det}^2 .

9.4 Discussion sur le choix d'un estimateur

Nous venons de dériver huit estimateurs possibles de la position d'un spot dans le plan focal d'une sous-pupille de Shack-Hartmann, chacun étant optimal dans un cas précis. Le tableau (9.1) rappelle les notations employées, les expressions de ces huit estimateurs et les conditions de leur optimalité.

Les critères de choix d'un estimateur sont :

- la linéarité de sa réponse sur sa plage d'utilisation,
- son biais,
- sa robustesse au bruit,
- Les ressources et le temps de calcul nécessaires.

La criticité de chacun de ces points dépend des caractéristiques du système dans lequel le Shack-Hartmann est intégré. Ainsi, pour un système de XAO (cf. § 3.1), où le degré de correction est très élevé et où le spot a très peu de mouvements, la plage de linéarité pourra être restreinte à de petits déplacements, mais la robustesse au bruit et le caractère non biaisé de la mesure seront primordiaux. A l'inverse, dans le cas d'un système en boucle ouverte tel que la MOAO (cf. § 3.3.2.2), les mouvements du spot seront importants et la linéarité du détecteur sera critique. De même, on pourra tolérer un estimateur biaisé si la mesure est fortement limitée par le bruit de détecteur et que l'estimateur considéré permet de diminuer la sensibilité au bruit. Cependant, si la commande du système est basée sur un algorithme de gain modal optimisé, celui-ci part du postulat que l'estimation de pente n'est pas biaisée. Ajoutons que dans le cas des ELTs les volumes de données à traiter sont tels que le problème des temps de calculs se pose.

Finalement, le problème peut s'analyser une fois de plus en termes de gestion d'un budget d'erreur. Dans le travail que nous proposons ici, nous ne chercherons pas à quantifier le terme temporel de ce budget. On se contentera d'analyser tous les aspects "spatiaux" de l'erreur d'estimation de la position. Globalement, celle-ci peut être modélisée en exprimant l'estimation de position selon l'équation suivante [Thomas et al. 2006] :

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \underbrace{\rho \cdot \mathbf{x}_0 + \nu(\mathbf{x}_0)}_{\text{statique}} + \underbrace{\beta_{\text{bruits}} + \varepsilon_{\text{turb}}}_{\text{statistique}} \quad (9.21)$$

Dans cette équation, ρ est le coefficient de réponse de l'estimateur, défini de façon à être indépendant du déplacement \mathbf{x}_0 ; ν est une fonction de non-linéarité qui lui dépend de \mathbf{x}_0 . Ces deux termes de l'erreur sont des biais de la mesure. Ils représentent des erreurs statiques, prédictibles, et, en théorie, calibrables. Les deux derniers termes d'erreur sont de nature statistique, et représentent les bruits de photon et de détecteur pour le troisième terme, et les erreurs dues aux déformations du spot sous l'effet de la turbulence pour le quatrième terme. Bien que l'on puisse caractériser ces erreurs en terme de variance, il est impossible de connaître ponctuellement leurs effets.

Dans la suite de cette partie, nous caractériserons trois estimateurs choisis parmi ceux que nous venons d'évoquer. A chaque fois, nous considérerons indépendamment la partie biais et la partie statistique de l'erreur globale.

Notation	Signification	
\mathbf{x}_0	déplacement vrai du spot	
$r(\mathbf{x})$	PSF de la sous-pupille (éventuellement avec turbulence)	
$s(\mathbf{x})$	spot décalé et bruité	
\star	produit de corrélation : $(f \star g)(x) = \iint f(t) g^*(t-x) dt$	
Spot quelconque		
	ML	MAP
Bruit de photons	$\max \{s \star \ln(r)\}$	$\max \left\{ s \star \ln(r) - \frac{(\hat{\mathbf{x}}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)^2}{2\sigma_x^2} \right\}$
Bruit de détecteur	$\max \{s \star r\}$	$\max \left\{ s \star r - \frac{(\hat{\mathbf{x}}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)^2}{2\sigma_x^2} \right\}$
Spot gaussien		
	ML	MAP
Bruit de photons	$\frac{\iint \mathbf{x} s(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\iint s(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}$	$\mu \bar{\mathbf{x}}_0 + (1 - \mu) \cdot \frac{\iint \mathbf{x} s(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\iint s(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}$
Bruit de détecteur	$\frac{\iint \mathbf{x} s(\mathbf{x}) r(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0) d\mathbf{x}}{\iint s(\mathbf{x}) r(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0) d\mathbf{x}}$	$\mu \hat{\mathbf{x}}_0 \cdot \bar{\mathbf{x}}_0 + (1 - \mu \hat{\mathbf{x}}_0) \cdot \frac{\iint \mathbf{x} s(\mathbf{x}) r(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0) d\mathbf{x}}{\iint s(\mathbf{x}) r(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0) d\mathbf{x}}$

TAB. 9.1 – Estimateurs ML et MAP du déplacement d'un spot dans le plan focal d'une sous-pupille de l'analyseur SH et rappel des notations utilisées.

Nous allons concentrer cette étude sur les estimateurs dérivés du maximum de vraisemblance, car ce sont les plus utilisés actuellement : le centre de gravité, le centre de gravité de la tache pondérée (dit ci-après centre de gravité pondéré) et le maximum du produit de corrélation. Concernant le centre de gravité pondéré, on ne traitera ici, faute de temps, que de la première itération de l'estimation par récurrence nécessaire à la véritable estimation ML. Pour la même raison, nous ne développerons pas, bien qu'elle soit toute à fait intéressante, l'approche de type maximum *a posteriori*.

Nous quantifierons les effets de plusieurs sources d'erreurs sur les estimateurs considérés :

- L'influence du caractère fini et pixélisé du support de la PSF sur la linéarité des estimateurs,
- L'influence des bruits de photons et de détecteur,
- La méconnaissance de la forme instantanée du spot en présence de turbulence.

Nous commençons cette étude par l'estimateur centre de gravité, car c'est actuellement le plus largement utilisé.

Chapitre 10

Etude de la performance de l'estimateur barycentre

Le centre de gravité est l'estimateur de position du spot Hartmann le plus couramment utilisé dans les systèmes d'optique adaptative pour l'astronomie (Hors astronomie solaire). Cette quasi-unanimité est due au fait que c'est un estimateur simple, rapide à calculer et peu gourmand en ressources informatiques. De plus, il est directement lié à la pente moyenne du front d'onde incident, et on a démontré au chapitre précédent qu'il s'agit de l'estimateur optimal au sens du maximum de vraisemblance dans le cas d'un spot gaussien soumis à du bruit de photons. Cette optimalité n'est valide toutefois que dans le cas d'un support infini et continu. Or dans le cadre d'un senseur Shack-Hartmann, plusieurs conditions éloignent l'estimateur de ses conditions d'optimalité :

- La zone du détecteur dédiée à une sous-pupille est finie. Le barycentre est donc calculé sur un support fini.
- Le détecteur enregistrant le spot est pixelisé.
- Il introduit un bruit de lecture dans la mesure.
- Le spot n'est pas gaussien : la PSF hors turbulence d'une sous-pupille carrée a un profil en sinc^2 . En présence de faible turbulence ($d/r_0 \leq 3$, cf. chap. 9), sa forme conserve l'allure générale d'un profil sinc^2 , légèrement déformé par les fluctuations des hauts ordres de la turbulence.

Chacun de ces écarts par rapport aux conditions optimales d'utilisation de l'estimateur barycentre se traduit par une erreur additionnelle. On a modélisé au paragraphe (9.4) [Thomas et al. 2006] la réponse de l'estimation de position du spot par l'équation (9.21) :

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \underbrace{\rho \cdot \mathbf{x}_0 + \nu(\mathbf{x}_0)}_{\text{statique}} + \underbrace{\beta_{\text{bruits}} + \varepsilon_{\text{turb}}}_{\text{statistique}} \quad (10.1)$$

Où ρ est le coefficient de réponse de l'estimateur, indépendant du déplacement du spot, ν est une fonction de non linéarité, dépendant du déplacement du spot, β_{bruits} est le terme dû aux bruits de mesure (photons et détecteur) et $\varepsilon_{\text{turb}}$ est l'erreur due à la déformation du spot sous l'effet de la turbulence. On peut distinguer deux classes dans ces erreurs :

- Les erreurs statiques. Elles sont dues à un coefficient de réponse différent de l'unité et/ou à une non-linéarité de l'estimateur. Pour une configuration et une position du spot données, elles

n'évoluent pas au cours du temps, et pour cette raisons, pourraient en théorie être calibrées.

- Les erreurs statistiques. Ce sont les erreurs dues aux bruits de mesure et aux déformations turbulentes du spot. De par leur origine, il est impossible de prévoir à chaque instant leur influence sur la mesure. Elles ne sont donc pas calibrables, mais on peut tenter d'en atténuer les effets, par exemple en seillant le spot avant d'estimer sa position. Telles qu'elles sont définies ici, ces erreurs sont quantifiées sur le spot recentré.

Contenir les erreurs statiques de la mesure est primordial dans les cas où le caractère non biaisé de l'estimateur importe avant tout. C'est le cas lorsque le système d'AO doit fournir un très haut degré de correction (instrument SPHERE [Fusco et al. 2006, Fusco et al. 2006], par exemple, cf. § 3.1), ou lorsqu'il fonctionne en boucle ouverte (MOAO, cf. § 3.3.2.2). Pour les autres types d'optique adaptative, c'est la robustesse aux erreurs de nature statistique qui primera. Nous allons étudier successivement ces deux classes d'erreurs, puis une synthèse nous permettra de dégager les domaines de prédominance de ces erreurs.

10.1 Erreurs statiques

On mène cette étude en l'absence de toute source de bruit. Le spot et la mesure sont considérés sur un support bi-dimensionnel, mais par soucis de simplicité, on considère un déplacement uniquement le long de l'un des axes privilégiés du détecteur. Travaillant avec des spots à profil gaussien ou *sinc*², on pourra toutefois, du fait de la séparation des variables, extrapoler totalement les résultats obtenus au cas d'un déplacement bi-dimensionnel.

On s'intéresse dans un premier temps à l'effet sur la réponse de l'estimation de la taille finie du support de calcul du centre de gravité. Ce support est défini par l'utilisateur du Shack-Hartmann, et est borné supérieurement par le champ de la sous-pupille. On traitera ensuite de l'effet de la taille des pixels.

10.1.1 Effet de la taille du support de calcul du barycentre

On entend ici par support de calcul le domaine d'intégration de la fonction d'intensité lumineuse caractérisant le spot. Ce support est ici supposé fixe, tandis que le spot se déplace.

10.1.1.1 Cas d'un spot à profil gaussien

Plaçons-nous dans un premier temps dans le cas d'un spot à profil gaussien. Soit $\mathcal{I}(x, y)$ l'intensité lumineuse du spot. Si le spot est centré sur le point de coordonnées $(x_0, 0)$, $\mathcal{I}(x, y)$ s'exprime :

$$\mathcal{I}(x, y) = \frac{N_{ph}}{2\pi\sigma_T^2} e^{-((x-x_0)^2+y^2)/2\sigma_T^2}, \quad \iint_{-\infty}^{\infty} \mathcal{I}(x, y) dx dy = N_{ph}$$

Le calcul du centre de gravité du spot sur un support centré et de largeur totale 2ℓ est biaisé dans la direction du déplacement. En effet, le centre de gravité C_x dans la direction du déplacement s'exprime :

$$C_x = \frac{1}{\mathcal{I}_0} \iint_{-\ell}^{\ell} x \mathcal{I}(x, y) dx dy, \quad \text{Avec : } \mathcal{I}_0 = \iint_{-\ell}^{\ell} \mathcal{I}(x, y) dx dy \quad (10.2)$$

La résolution de cette équation donne l'expression suivante pour C_x (cf annexe C.2 pour le détail des calculs) :

$$C_x = x_0 + \sigma_T \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\left(\frac{\ell+x_0}{\sigma_T\sqrt{2}}\right)^2} - e^{-\left(\frac{\ell-x_0}{\sigma_T\sqrt{2}}\right)^2}}{\Phi\left(\frac{\ell+x_0}{\sigma_T\sqrt{2}}\right) + \Phi\left(\frac{\ell-x_0}{\sigma_T\sqrt{2}}\right)} \quad (10.3)$$

$$\text{Où la fonction } \Phi \text{ est définie par : } \Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du \quad (10.4)$$

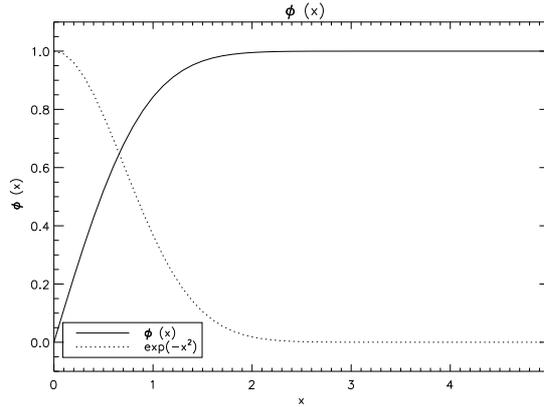


FIG. 10.1 – Représentation graphique de la fonction $\Phi(x)$.

Une représentation graphique de la fonction Φ est fournie par la figure (10.1). Le biais de mesure exprimé par l'équation (10.3) s'apparente à la fonction de non-linéarité $\nu(x_0)$ de l'équation (10.1). Le coefficient de réponse ρ est ici égal à l'unité. Le dénominateur de l'expression de $\nu(x_0)$ fournie par l'équation (10.3) correspond en fait à l'énergie lumineuse effectivement présente dans le support de calcul du barycentre. Le numérateur, quant à lui, caractérise la dissymétrie du spot tronqué.

L'erreur de non linéarité exprimée par l'équation (10.3) dépend logiquement de la largeur du spot et du champ utilisé pour le calcul du barycentre. Pour un déplacement nul, on retrouve $C_x = x_0$. De même, pour x_0 et σ_T fixés, on a :

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-\left(\frac{\ell+x_0}{\sigma_T\sqrt{2}}\right)^2} - e^{-\left(\frac{\ell-x_0}{\sigma_T\sqrt{2}}\right)^2}}{\Phi\left(\frac{\ell+x_0}{\sigma_T\sqrt{2}}\right) + \Phi\left(\frac{\ell-x_0}{\sigma_T\sqrt{2}}\right)} \right] = 0 \quad \text{d'où : } \lim_{\ell \rightarrow \infty} C_x = x_0$$

On retrouve alors le caractère non biaisé de l'estimateur sur support infini.

On représente sur la figure (10.2) la réponse de l'estimation de position par barycentre en fonction du déplacement réel, pour une configuration donnée. On considère ici un spot gaussien, de largeur à mi-hauteur $FWHM_T = 2$ (unités arbitraires), dont on mesure le déplacement en calculant son centre de gravité sur un support dont la largeur totale a été fixée à $2 \times FWHM_T$ ¹.

¹ Il s'agit d'une configuration classique d'utilisation du Shack-Hartmann

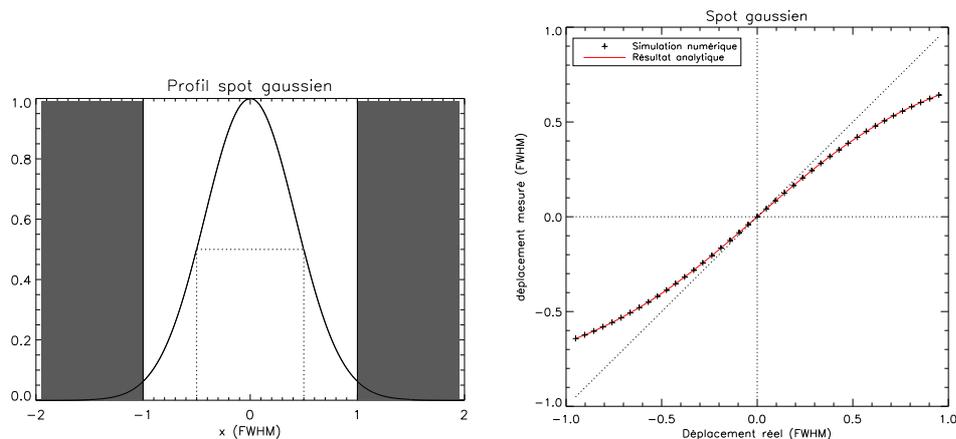


FIG. 10.2 – Calcul du centre de gravité d'un spot gaussien sur support fini : déplacement mesuré en fonction du déplacement réel. Le support de calcul du barycentre du spot a une largeur de $2 \times FWHM_T$.

La figure (10.2 - a) montre le profil du spot sur son support fini, pour un déplacement nul. La figure (10.2 - b) montre l'évolution du déplacement estimé du spot en fonction de son déplacement réel. La courbe rouge représente l'estimation théorique calculée d'après la relation (10.3) et les points (+) représentent l'estimation obtenue en simulant numériquement le problème. Pour la taille de support considérée ici, on note que l'estimation par centre de gravité n'est fiable que pour de très faibles déplacements autour de l'origine. Dès que l'on s'en écarte, l'erreur d'estimation croît rapidement, comme le montre la figure (10.3) (courbe noire). Elle est ainsi d'environ 20% pour un déplacement de $FWHM_T/2$. Ceci est dû au fait que la taille du support de calcul du centre de gravité est insuffisante : en l'absence de tout déplacement, 2% de l'énergie totale sont tronqués ; au moindre déplacement, cette perte s'accroît, la dissymétrie du spot également, générant une erreur d'estimation.

Toutefois, pour de faibles déplacements (amplitude inférieure à $FWHM_T/2$), on peut modéliser la réponse de l'estimateur barycentre par une relation linéaire dont le coefficient de réponse est inférieur à 1. Ainsi, la figure (10.3) montre qu'en prenant en compte un facteur de linéarité de 0.9 entre le déplacement vrai et la réponse de l'estimateur, l'erreur d'estimation est très faible pour des déplacements de l'ordre de $FWHM_T/10$. Avec un coefficient de 0.85, il est possible de réduire à moins 5% l'erreur d'estimation pour des déplacements d'amplitude inférieure à $FWHM_T/2$.

Enfin, la figure (10.4) montre que l'on gagne grandement en linéarité lorsque l'on augmente la taille du support. En effet, en doublant la taille du support, l'erreur relative d'estimation du déplacement devient inférieure à 1% pour des déplacements inférieurs à $FWHM_T$. Au delà, on retrouve un comportement similaire à celui que l'on a observé sur un support plus petit car l'énergie lumineuse perdue lors du déplacement du spot n'est plus négligeable : le spot commence à sortir du support de calcul du barycentre.

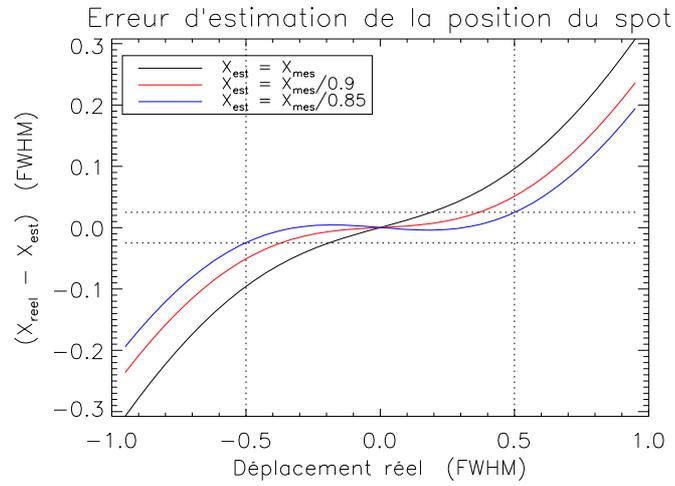


FIG. 10.3 – Erreur relative d'estimation en fonction de déplacement pour un spot gaussien.

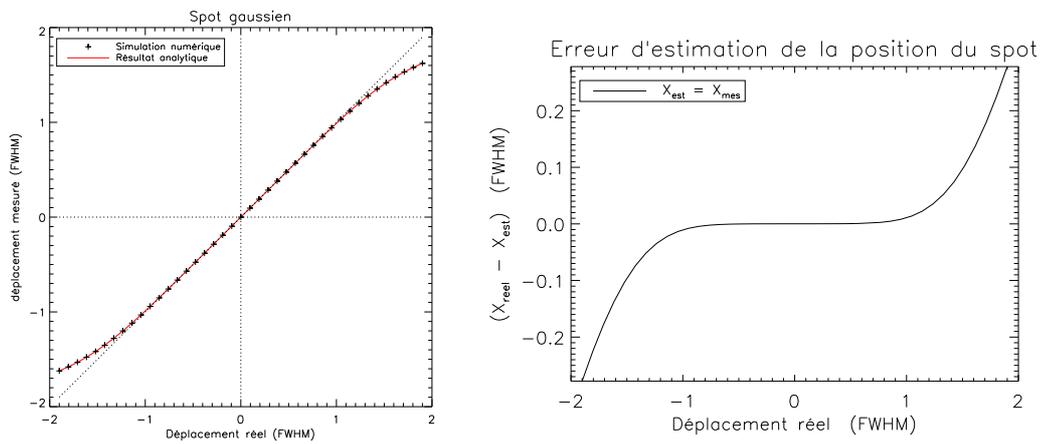


FIG. 10.4 – Calcul du centre de gravité d'un spot gaussien sur support fini : déplacement mesuré en fonction du déplacement réel. Le support de calcul du barycentre du spot a une largeur de $4 \times FWHM_T$.

La plage de linéarité de l'estimateur barycentre dépend donc de la largeur du support de calcul du barycentre et des caractéristiques de la tache. En particulier, l'erreur d'estimation croît dès que quelques pourcents de l'énergie lumineuse sortent du support de calcul. Ce point risque de poser problème lorsque le spot dont on cherche à mesurer la position a un profil de tache de diffraction (sinc^2 ou Airy). En effet, une partie de l'énergie lumineuse se trouve alors hors du pic central et est susceptible de perturber la mesure de position. On s'intéresse au cas d'un spot à profil sinc^2 dans le paragraphe suivant.

10.1.1.2 Cas d'un spot à profil sinc^2

On a vu au paragraphe précédent que l'estimateur barycentre présente des défauts de linéarité dès qu'une part significative (quelques %) de l'énergie lumineuse sort du support de calcul du barycentre du spot. Cette étude a été menée dans le cadre d'un spot gaussien car il s'agit de l'approximation au premier ordre du profil de la tache de diffraction d'une sous-pupille de Shack-Hartmann (cf. § 9.2.3). Or il existe une différence entre un spot gaussien et un spot en sinc^2 : le second possède des lobes secondaires dans lesquels se retrouvent environ 10% de l'énergie lumineuse. Il est donc important de caractériser l'effet de ces lobes sur l'estimation de position par barycentre.

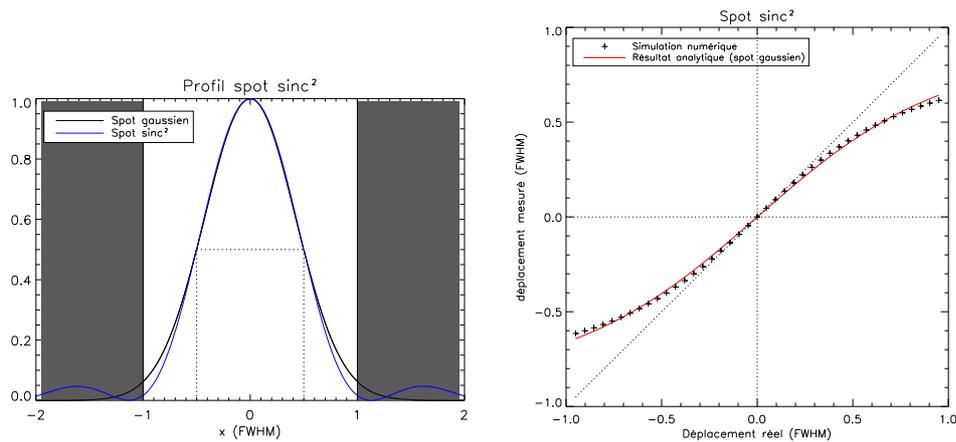


FIG. 10.5 – Calcul du centre de gravité d'un spot à profil sinc^2 sur support fini : déplacement mesuré en fonction du déplacement réel. Les points (+) correspondent au profil gaussien, tandis que la courbe rouge rappelle l'expression analytique obtenue pour un spot gaussien (eq. 10.3).

La figure (10.5) montre l'évolution de la mesure du déplacement du spot en fonction de son déplacement réel pour un spot à profil sinc^2 de même FWHM que le spot gaussien du paragraphe précédent. Comme précédemment le centre de gravité est calculé en utilisant un support dont la largeur est fixée à $2 \times FWHM_T$. La figure (10.5 - a) montre le profil du spot et le compare au profil gaussien utilisé au paragraphe précédent. En plus des deux lobes secondaires encadrant le pic central, le profil en sinc^2 présente des zéros qui, pour la taille de support considérée ici coïncident avec les bords de la fenêtre de calcul du barycentre. Ces franges sombres dans la tache de diffraction ont une conséquence positive sur l'estimation du déplacement du spot : comme le montre la figure (10.5 - b), elles induisent une meilleure linéarité de l'estimation du déplacement par centre de gravité pour

de petits déplacements du spot. Ceci est dû au fait que les variations de l'intensité lumineuse et les dissymétries de la tache sont moins importantes que dans le cas gaussien. Toutefois, le profil de la tache centrale étant plus piqué que dans le cas gaussien, le biais d'estimation croît plus rapidement lorsqu'il commence à sortir de la fenêtre de calcul du barycentre. L'estimation du déplacement par barycentre est moins fiable que dans le cas gaussien pour de forts déplacements ($> FWHM/2$).

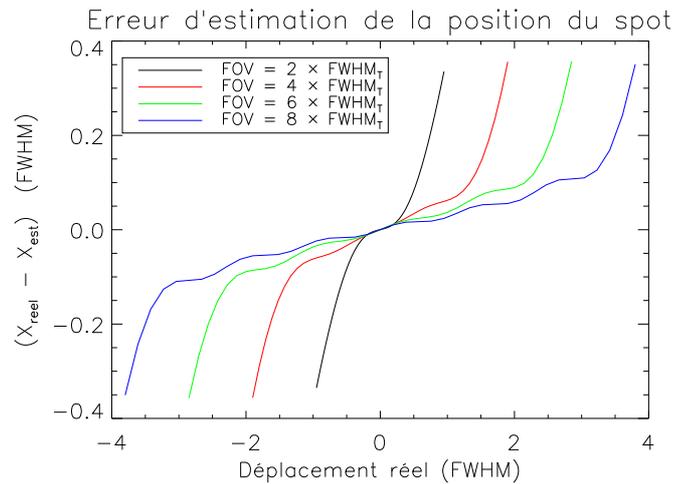


FIG. 10.6 – Erreur relative d'estimation en fonction de déplacement pour un spot gaussien.

L'augmentation de la taille du support de calcul du barycentre fait apparaître deux autres différences importantes avec le cas gaussien. C'est ce que montrent les courbes de la figure (10.6), représentant pour différentes largeurs de support l'erreur d'estimation du déplacement en fonction du déplacement réel. Comme dans le cas d'un spot gaussien, on note d'abord que l'élargissement du support de calcul améliore l'estimation de la position du spot. Mais ici on note deux phénomènes inobservés dans le cas gaussien :

- Il existe une dérive lente et régulière de l'estimation de position, signe d'un coefficient de réponse ρ différent de 1 entre le déplacement réel et le déplacement estimé. Plus le support de calcul est large, plus cette dérive est faible.
- On observe des oscillations de l'erreur d'estimation en fonction du déplacement du spot. Ces oscillations ont une période égale à $FWHM_T$.

Ces deux phénomènes sont dus au déplacement des lobes secondaires dans le support de calcul du barycentre. La dérive est due à la variation de l'énergie totale générée par le défilement des lobes secondaires sur le support de calcul du barycentre. La figure (10.7) montre un schéma de principe du phénomène. La variation d'énergie étant due aux lobes de hauts ordres situés en bord de support, la pente diminue lorsque la taille du support de calcul augmente, car les lobes impliqués sont moins énergétiques. Les oscillations de l'erreur d'estimation ont la même source et sont dues à la concentration par paquets (les lobes) de l'énergie lumineuse. Comme nous l'avons noté plus haut, lorsque les bords du support coïncident avec deux franges sombres de la tache de diffraction, l'intensité totale dans le support varie peu pour un petit déplacement et l'erreur d'estimation est

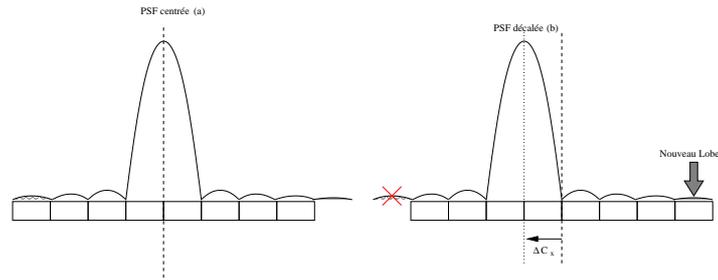


FIG. 10.7 – Le décentrement de la tache de diffraction sur le support de calcul induit une erreur d'estimation du centroïde - Schéma de principe.

localement minimale. D'où une période des oscillations égale à la taille d'un lobe, soit $FWHM_T$.

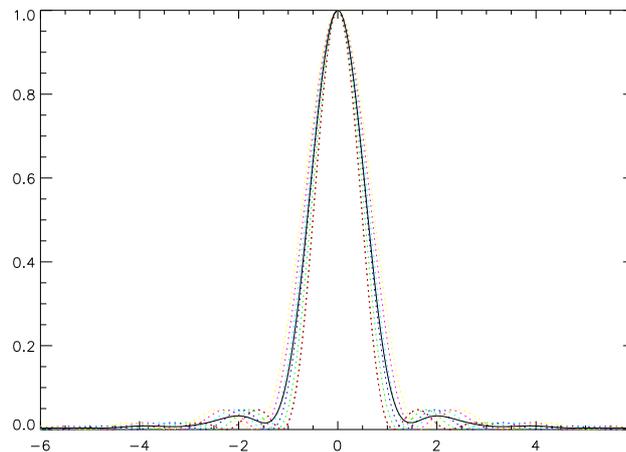


FIG. 10.8 – Effet de la largeur de la bande spectrale du Shack-Hartmann sur le spot à la diffraction. Le profil représenté en noir est la somme des contributions monochromatiques représentées en couleur.

Ces résultats valent pour un spot à profil purement sinc^2 , c'est-à-dire pour une mesure monochromatique. Dans la pratique, le flux lumineux incident est polychromatique². Le spot est alors la superposition des contributions de chaque longueur d'onde, et ses lobes secondaires sont atténués. Toutefois, la figure (10.8) montre que les lobes d'ordre 1 restent visibles. Les effets mentionnés ci-dessus seront sensibles dès que ces lobes interagiront avec les bords du support.

Les phénomènes que nous avons étudiés jusqu'à maintenant ne sont dus qu'au caractère fini du support. Ces erreurs d'estimation décroissent très vite lorsque la taille du support augmente. On ne peut malheureusement pas étendre à loisir le champ utilisé pour le calcul du barycentre. En effet, ce champ est couvert par les pixels du détecteur, et le processus de détection amène un bruit de lecture

²Dans le cas de SPHERE, la largeur de bande de l'ordre est $0.1\mu\text{m}$, ce qui est relativement faible, mais nécessaire pour pouvoir effectuer le filtrage spatial des spots Hartmann et éliminer les problèmes d'aliasing.

proportionnel au nombre de pixels impliqués dans le calcul du centre de gravité. Ceci restreint le nombre de pixels utilisables pour la mesure. Toutefois, faute de pouvoir augmenter le nombre de pixels à loisir, on peut en augmenter la taille angulaire en jouant sur la focale des micro-lentilles. On fait le point sur l'effet de la taille des pixels sur l'estimation de position du spot dans le paragraphe suivant.

10.1.2 Effet de la taille des pixels du détecteur

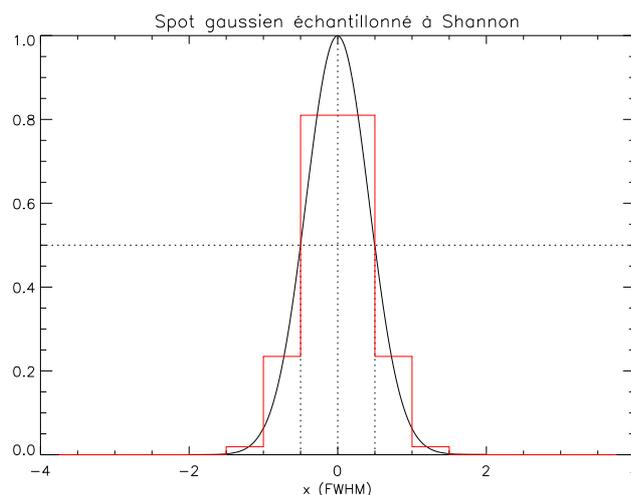


FIG. 10.9 – Spot gaussien échantillonné à Shannon (critère de Nyquist, $p = FWHM_T/2$).

L'objet de ce paragraphe est d'étudier l'effet de la pixélisation du support de calcul du barycentre sur la réponse du Shack-Hartmann, indépendamment de toute autre source d'erreur. Nous proposons une étude numérique de ce problème. Cette étude a été menée dans les circonstances suivantes :

- Nous utilisons un modèle mono-dimensionnel de sous-pupille de Shack-Hartmann ;
- Le spot est généré avec un échantillonnage à Shannon $\times 500$ (soit $(FWHM_T)_{pix.} = 1000$ pixels) ;
- Le support de calcul du centre de gravité du spot a un champ maximum de $10 \times FWHM_T$ pour limiter les effets de taille de support décrits au paragraphe précédent ;
- Le support est ensuite ré-échantillonné selon différents échantillonnages du spot (cf. fig. 10.9).

Les courbes présentées figure (10.10) représentent l'erreur d'estimation de la position du spot en fonction de son déplacement réel pour un spot à profil gaussien d'intensité lumineuse et pour plusieurs tailles de pixels. On remarque que tant que l'échantillonnage du spot est correct, c'est-à-dire tant que le critère de Nyquist est respecté (pas de pixel $\leq FWHM_T/2$), aucune erreur supplémentaire n'est générée par la pixélisation du support. Par contre, lorsque les pixels sont trop gros, on perd de l'information sur la position du spot. L'erreur d'estimation oscille, avec une période correspondant à la taille du pixel et une amplitude croissant avec elle. Ceci s'explique par la perte d'information haute fréquence sur le profil d'intensité lumineuse. En effet, pour des tailles de pixels supérieures à $FWHM_T/2$, La quasi-totalité du spot lumineux peut tenir dans un seul pixel.

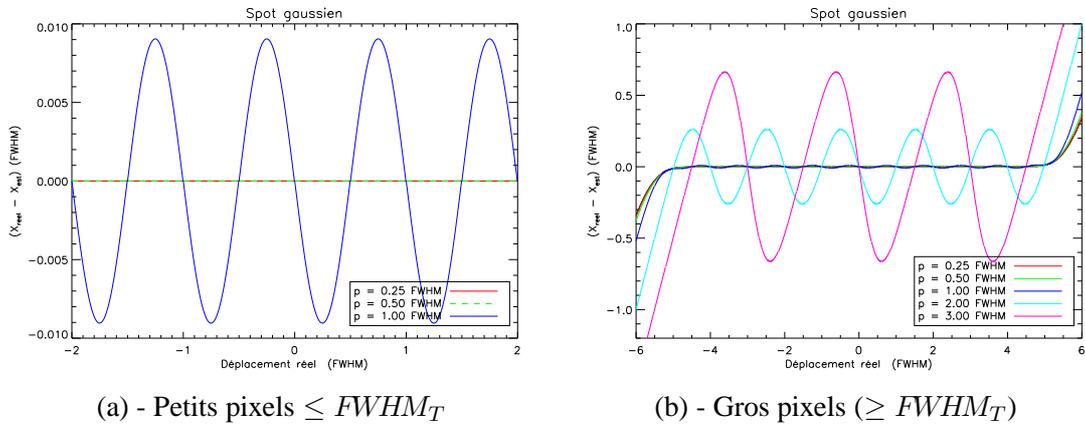


FIG. 10.10 – Erreur d’estimation de la position d’un spot sur un support fini et pixélisé, pour différentes tailles de pixels. Spot à profil gaussien d’intensité. Les échelles des axes des ordonnées des deux courbes diffèrent (facteur 100).

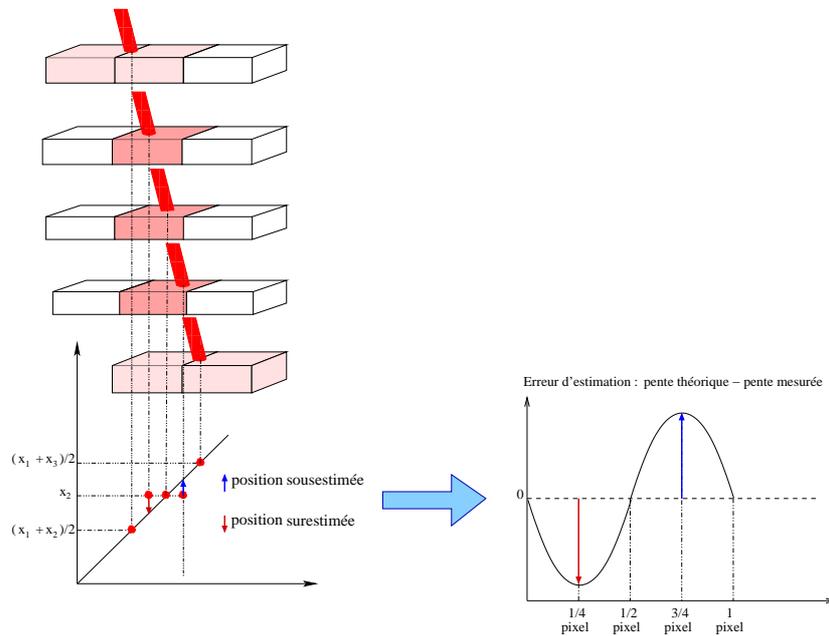


FIG. 10.11 – Oscillation de l’erreur sur la position du spot : lorsque le critère de Nyquist n’est plus respecté, la taille du pixel génère une erreur périodique sur la mesure de la position du spot.

Une illustration simpliste de ce cas consiste à considérer le passage sur une barrette de pixels d'un faisceau lumineux de taille inférieure ou égale à la taille d'un pixel, comme le montre la figure (10.11). Lorsque le faisceau est exactement centré entre deux pixels, ceux-ci participent tous les deux au calcul de son centroid et l'erreur d'estimation est nulle. Mais du moment que le faisceau n'interagit qu'avec un pixel du détecteur, celui-ci devient seul à participer au calcul du centre de gravité de la tache. celui-ci correspond alors à la position du centre du pixel. De la sorte, on surestime le déplacement du spot lumineux si celui-ci est sur la première moitié du pixel et on la sous-estime s'il est situé sur la seconde partie du pixel. Le seul moment où l'on ne commet pas d'erreur, c'est quand le spot passe exactement sur le centre du pixel. L'erreur d'estimation oscille donc avec une période spatiale égale à la taille d'un pixel.

On retrouve ce phénomène sur la figure (10.12), en considérant cette fois un spot à profil sinc^2 : lorsque la taille du pixel est supérieure à $FWHM_T/2$, on commet une erreur d'estimation qui oscille périodiquement autour de zéro. On note également que quelle que soit la taille du pixel, on retrouve la dérive signalée au paragraphe (10.1.1.2), due aux variations d'énergie lumineuse totale dans la fenêtre de calcul du centre de gravité.

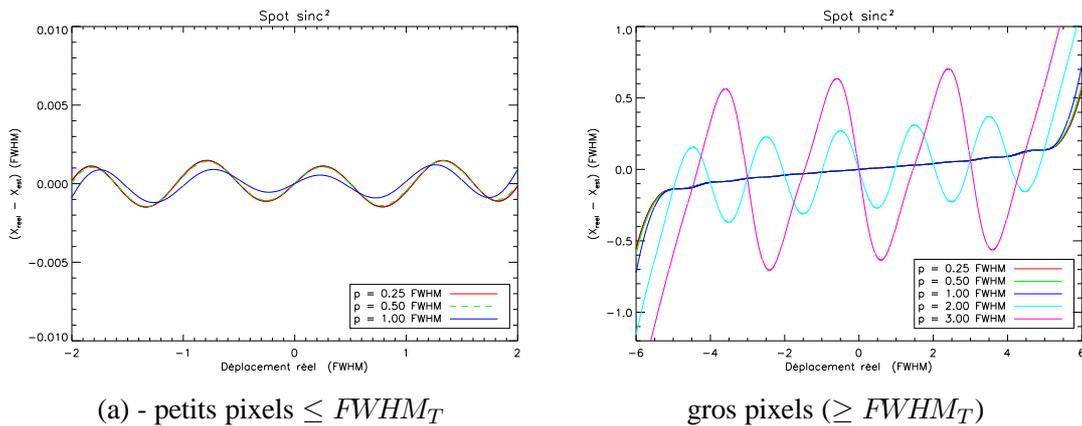


FIG. 10.12 – Erreur d'estimation de la position d'un spot sur un support fini et pixélisé, pour différentes tailles de pixels. Spot à profil sinc^2 . Sur la figure (a), l'erreur d'estimation a été corrigée de sa dérive (cf. § 10.1.1.2) pour une meilleure visibilité.

Cependant, la figure(10.12 - a) montre également que même lorsque le critère de Nyquist est respecté, une oscillation demeure, cette fois avec une période constante et égale à $FWHM_T$. Il s'agit ici de l'erreur d'estimation due à la présence des lobes secondaires qui a été signalée au paragraphe (10.1.1.2). La présence de cette erreur, de même période et d'amplitude tout à fait comparable à celle des oscillations observées pour un pixel de taille $FWHM_T$, font que *pour un spot à profil sinc^2 , il n'y a pas de gain sensible en linéarité à échantillonner la tache à mieux que Shannon/2 (pas de pixel = $FWHM_T$).*

Les erreurs statiques dues à la pixélisation du support sont plus importantes en amplitude que les erreurs liées à la taille du support lorsque le spot est échantillonné à moins que Shannon/2. Sous-échantillonner fortement le spot n'est donc pas la solution pertinente au regard des erreurs statiques. Dès lors, si on souhaite limiter le nombre de pixels pris en compte dans le calcul du barycentre tout

en limitant les erreurs liées à la taille de la fenêtre de calcul, il faut recentrer la fenêtre de calcul sur le spot. On peut procéder de deux façons :

- soit définir une fenêtre de calcul restreinte, en la recentrant sur le maximum du spot,
- soit seuiller le spot, de façon à ne garder que les pixels les plus brillants.

On étudie successivement ces deux techniques dans le paragraphe suivant.

Remarque : le cas du quatre quadrant.

Nous avons évoqué dans l'introduction du chapitre 9 l'utilisation courante de l'analyseur Shack-Hartmann dans un mode de détection dit quatre quadrants, dans lequel le plan focal des sous-pupilles est échantillonné avec seulement 2×2 pixels. Les pixels sous-échantillonnent alors fortement le spot dont ils mesurent la position. Conformément à ce que nous venons de voir, les non-linéarités que cela implique influent sur le gain de la boucle d'optique adaptative dans son ensemble. Dans le cas du quatre quadrant, des solutions spécifiques peuvent être trouvées, que l'on ne développera par ici. Ainsi, dans le cas de l'instrument d'optique adaptative de Gemini [Herriot et al. 1998], la modulation du front d'onde par le système d'optique adaptative est envisagée pour quantifier les non-linéarités du Shack-Hartmann [Véran and Herriot 2000].

10.1.3 Limitation des erreurs statiques

On considère la mesure de la position d'un spot à profil sinc^2 se déplaçant le long de l'axe des abscisses. Le support de calcul du barycentre est pixelisé de sorte que le spot est échantillonné à Shannon (pas pixel = $FWHM_T/2$). L'objectif est de minimiser les problèmes de linéarité tout en gardant un faible nombre de pixels. On étudie :

- Le fenêtrage avec recentrage sur le maximum de la tache,
- Le seuillage.

10.1.3.1 Recentrage de la fenêtre de calcul du barycentre

L'objectif est ici de mettre en évidence les effets d'un recentrage sur le maximum d'intensité du spot de la fenêtre de calcul du barycentre. Pour cela, on considère un spot se déplaçant sur un support de largeur $8 \times FWHM_T$ et on calcule son centre de gravité en utilisant une fenêtre de calcul de largeur $2 \times FWHM_T$ (soit la taille du pic central de diffraction) centrée sur le maximum d'intensité. La figure (10.13 - a) compare l'erreur d'estimation par centre de gravité sur fenêtre recentrée avec l'erreur commise lors du calcul sur centre de gravité sur un support de même largeur mais non recentré.

Cette figure montre que l'opération de recentrage a trois effets sur la fonction de non-linéarité de l'estimateur centre de gravité : elle la périodise, la période de l'erreur d'estimation correspondant exactement à la taille du pixel, elle y introduit des discontinuités et fait que la fonction de non linéarité n'est pas à moyenne nulle.

Ces propriétés se comprennent en fait aisément : pour un déplacement nul, le spot est parfaitement centré entre 2 pixels, il est symétrique et, en l'absence de bruit, l'erreur d'estimation de sa position est nulle. Dès que le spot subit un petit déplacement, la fenêtre de calcul est recentrée un pixel plus loin que précédemment (cf. Fig. 10.13 - b). De fait, la mesure effectuée subit un biais égal à celui

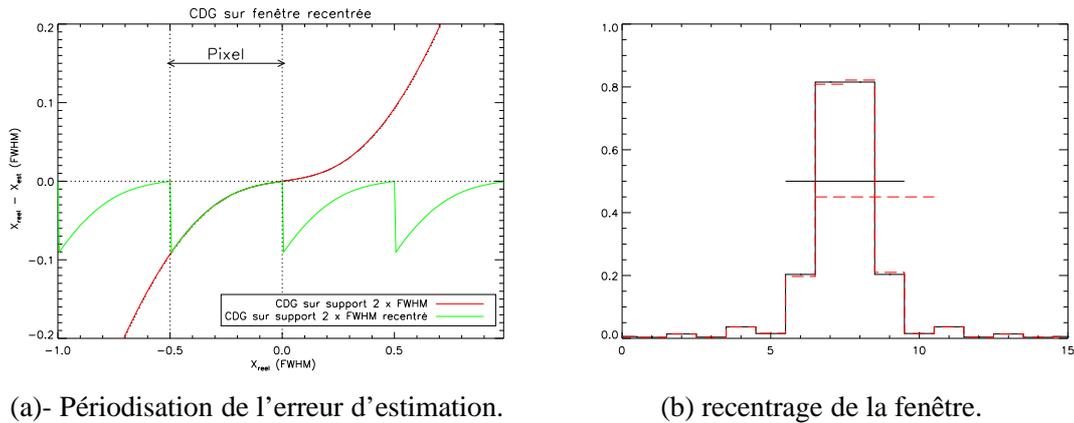


FIG. 10.13 – Effet du recentrage de la fenêtre de calcul du centre de gravité sur le maximum du spot. Comparaison avec centre de gravité sur support non recentré.

du calcul sur une fenêtre de même largeur et non recentrée (courbe rouge) pour un déplacement égal à la différence entre le pas d'un pixel et le déplacement réel du spot. Lorsque le déplacement réel du spot croît en restant sub-pixélique, la fenêtre de calcul reste centrée sur le même pixel, et le décalage entre le centre de la fenêtre et le centre du spot décroît, si bien que le biais de l'estimation décroît également, jusqu'à ce que le spot soit parfaitement centré dans la fenêtre de calcul : l'erreur d'estimation est alors à nouveau nulle. Pour un déplacement immédiatement supérieur à la taille du pixel, le centre de la fenêtre se décale à nouveau d'un pixel, et de nouveau l'erreur d'estimation est maximale et correspond au biais de l'estimation non recentrée pour un déplacement de presque un pixel. Puis elle décroît à nouveau lorsque le spot rattrape la fenêtre dans son déplacement.

Le recentrage de la fenêtre de calcul du barycentre sur le maximum n'apporte finalement que peu de bénéfices par rapport au cas non recentré. Son intérêt réside dans le fait de borner les effets de non linéarité pour les déplacements supérieurs au pixel. Ceci restreint son intérêt au cas des systèmes fonctionnant en boucle ouverte. Cependant, les discontinuités introduites périodiquement dans la réponse et le fait que la moyenne du biais ne soit pas nulle sont susceptibles de dégrader la performance du Shack-Hartmann et du système d'AO.

10.1.3.2 Seuillage du spot

Une autre façon de pallier aux problèmes de linéarité de l'estimation de la position du spot est de seuiller ce dernier. Dans la pratique, on peut définir le seuillage de plusieurs façons :

1. En gardant les n pixels les plus éclairés. Cela garantit de travailler à nombre de pixels constant, mais est difficilement utilisable dans un système temps réel : un tel seuillage implique de lire tous les pixels et de les trier avant de sélectionner les plus brillants. Ce sont des opérations compliquées et coûteuses en temps de calcul du RTC.
2. En gardant les pixels d'intensité supérieure à une valeur seuil, définie soit comme un pourcentage du maximum, soit comme un pourcentage de la dynamique du spot.

Nous allons dans la suite de ce paragraphe nous intéresser aux deux modes de seuillage. Pour cela, on utilise le même modèle numérique qu'au paragraphe précédent, avec un spot à profil sinc^2 plongé dans un support de largeur $8 \times FWHM_T$ et constitué de pixels de pas $FWHM_T/2$. Pour le premier mode de seuillage, on gardera systématiquement les 4 pixels les plus éclairés, afin de travailler avec le même nombre de pixels qu'au paragraphe précédent. Pour le second mode de seuillage, nous allons définir les valeurs de seuil en pourcentage du maximum d'intensité du spot. Notons que notre modèle n'intégrant ni bruit, ni fond, ni dark, la dynamique du spot est égale à son maximum et qu'une définition des valeurs de seuil par rapport à la dynamique donnerait des résultats identiques. Un seuillage à 75% correspond donc à une valeur de seuil définie par :

$$V_{Seuil} = \max(\text{spot}) \times 0.75 \quad (10.5)$$

Si $\mathcal{I}(x, y)$ est l'intensité lumineuse du spot, on a alors :

$$\mathcal{I}_{seuillée}(x, y) = (\mathcal{I}(x, y) - V_{Seuil}) > 0 \quad (10.6)$$

Il est en effet indispensable de ramener à zéro le minimum de l'intensité seuillée pour éviter d'ajouter un biais à la mesure.

Seuillage à nombre de pixels constants

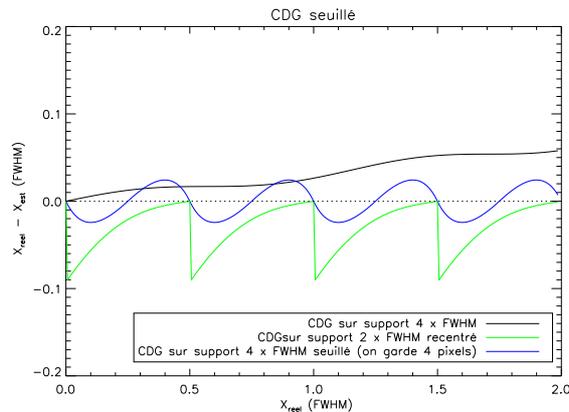


FIG. 10.14 – Effet du seuillage à 4 pixels sur l'erreur d'estimation par centre de gravité. Comparaison avec centre de gravité sur support de 4 pixels recentré sur le maximum du spot.

La figure (10.14) montre l'évolution de l'erreur d'estimation de la position du spot en fonction de son déplacement réel pour un seuillage conservant les 4 pixels les plus éclairés. On a tracé sur la même figure l'erreur d'estimation obtenue en utilisant une fenêtre de calcul comportant également 4 pixels (largeur $2 \times FWHM_T$) et recentrée sur le maximum du spot. On constate qu'à nombre égal de pixels pris en compte pour le calcul du barycentre, le seuillage offre de meilleures conditions de linéarité :

- L'amplitude crête-à-crête de l'erreur d'estimation est moins importante,
- La valeur moyenne de l'erreur d'estimation est nulle,

- On ne constate pas de discontinuité de l'erreur d'estimation en fonction du déplacement.

Ces trois points font qu'à nombre de pixels identiques, ce type de seuillage est nettement préférable au fenêtrage recentré.

Seuillage à niveau de seuil constant

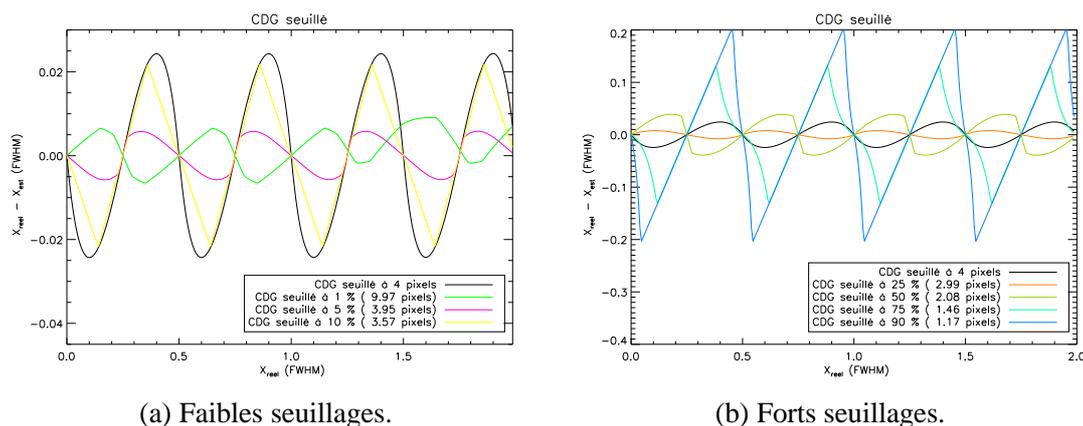


FIG. 10.15 – Effet du seuillage à valeur fixée sur l'erreur d'estimation par centre de gravité seuillé. Les valeurs de seuil sont exprimées en pourcentage du maximum du spot.

La figure (10.15) permet d'étudier le comportement du seuillage à valeur de seuil fixée. Globalement, on remarque que la réponse de l'estimateur barycentre ainsi seuillé oscille en fonction du déplacement, avec une période d'oscillation égale au pas d'un pixel. De plus, les amplitudes et l'allure de ces oscillations varient fortement en fonction de la valeur du seuil. La tendance d'ensemble est que plus on seuille fortement le spot, plus les battements de l'erreur sont importants et plus le coefficient de non-linéarité de la réponse présente de discontinuités. Ceci est logique dans la mesure où l'opération de seuillage se rapproche d'un fenêtrage recentré lorsque le niveau de seuil est élevé. C'est ce que montre la figure (10.16 - a), représentant le nombre moyen de pixels restant après seuillage sur la totalité de déplacement (soit de 0 à 4 pixels). Cette courbe montre que pour une valeur de seuil supérieure à 5% du maximum, seuls les quatre pixels centraux sont pris en compte en moyenne. L'amplitude des oscillations est alors proche de celle que l'on obtient en seuillant de façon à garder exactement quatre pixels. Par contre, quand on seuille fortement le spot, tel que c'est le cas pour un seuillage à 75%, l'estimation du barycentre ne se fait plus que sur deux pixels, et la réponse de l'estimateur de position devient fortement non-linéaire.

Toutefois, un examen plus attentif des courbes montre que l'évolution de l'amplitude et de la forme des oscillations en fonction de la valeur de seuil est en fait très complexe. Ainsi, sur la figure (10.15 - a), on observe qu'un seuillage à 25% offre une bien meilleure réponse qu'un seuillage à 10%. Ceci est dû au fait que dans un seuillage à valeur de seuil constante, le nombre de pixels pris en compte dans le calcul du barycentre varie en fonction de la position du spot. Cette variation dépend du niveau de seuil et de la forme du spot. En effet, le nombre de pixels pris en compte dans le calcul varie beaucoup lorsque la valeur de seuil est telle qu'un ou plusieurs pixels passent

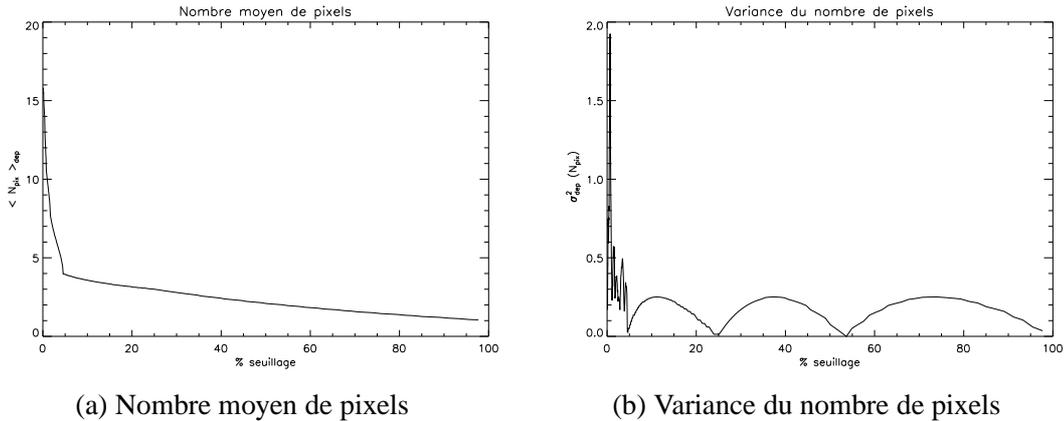


FIG. 10.16 – Nombre de pixels pris en compte dans le calcul du centre de gravité, selon le niveau de seuillage du spot. On représente ici la valeur moyenne et la variance des nombres de pixels pour un déplacement du spot de 0 à 4 pixels.

alternativement en deçà et au delà du seuil au cour du déplacement du spot. Ceci se vérifie sur les courbes de la figure (10.16-b), montrant l'évolution de la variance du nombre de pixels restant après seuillage en fonction de la valeur de seuil. On note ainsi que la variabilité du nombre de pixels après seuillage est beaucoup plus importante pour un seuillage à 10% que pour un seuillage à 25%, ce qui explique la relative médiocrité de la réponse de l'estimateur barycentre pour un seuillage à 10%.

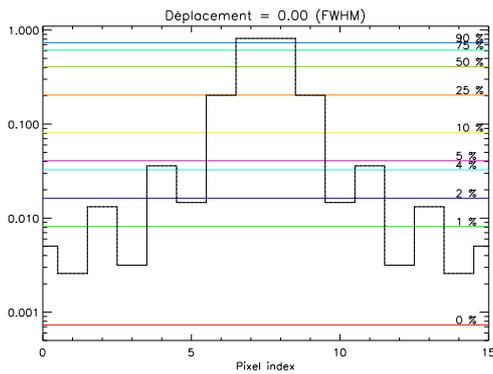
Les courbes de la figure (10.17) permettent également de comprendre les processus à l'œuvre. Elles représentent pour plusieurs déplacements du spot l'allure de celui-ci et les niveaux de seuillage. On remarque ainsi sur la figure (10.17) que pour un seuillage à 1%, les lobes du deuxième ordre du spot sont pris en compte dans le calcul du centre de gravité. Cependant, pour les forts déplacements du spot, ils sortent de la fenêtre de calcul du centre de gravité. Cela se traduit sur la figure (10.15) par une dérive moyenne de l'erreur d'estimation en fonction du déplacement du spot pour un seuillage à 1% (cf § 10.1.1.2). Pour les niveaux de seuil plus élevés, cette dérive n'existe plus car les lobes de hauts ordres ne sont plus pris en compte. Pour des seuils supérieurs à 5%, le nombre de pixels pris en compte pour le calcul diminue (voir aussi fig. 10.16) et l'amplitude des oscillations de l'erreur d'estimation commence à croître. Pour des valeurs très élevées du seuil, très peu de pixels sont pris en compte. Typiquement, pour un seuillage à 90 %, Seul le pixel le plus éclairé est pris en compte et on commet une erreur maximale dès que la tache de diffraction n'est pas centrée soit sur le pixel, soit entre deux pixels (cf § 10.1.1.2).

10.1.4 Synthèse et conclusions sur les erreurs statiques

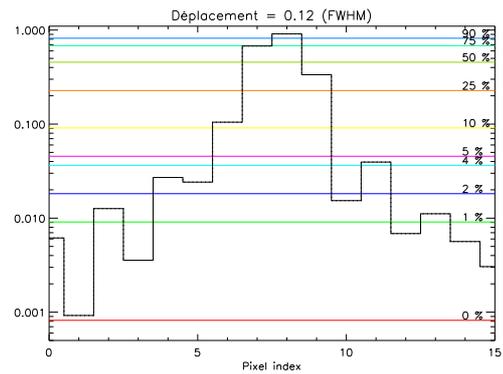
Le caractère fini et pixelisé du support de calcul du barycentre est source d'erreurs statiques d'estimation de la position du spot. On peut exprimer la position estimée du spot par la relation suivante :

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \rho_\ell \cdot \mathbf{x}_0 + \nu_\ell(\mathbf{x}_0) + \nu_{pix.}(\mathbf{x}_0)$$

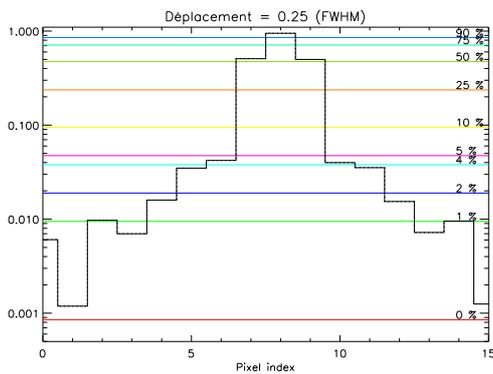
Où ρ_ℓ est le coefficient de réponse, dépendant de la taille du support de calcul du barycentre, $\nu_\ell(\mathbf{x}_0)$ est l'erreur de non-linéarité due à la taille du support et $\nu_{pix.}(\mathbf{x}_0)$ est l'erreur de non-linéarité



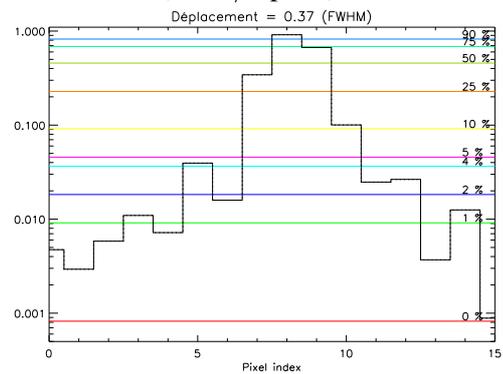
(a) Déplacement nul



(b) Déplacement de $0.12 \times FWHM_T$
(soit 1/4 pixel)



(c) Déplacement de $0.5 \times FWHM_T$
(soit 1/2 pixel)



(d) Déplacement de $0.37 \times FWHM_T$
(soit 3/4 pixel)

FIG. 10.17 – Allure du spot et niveaux de seuil (en pourcentage du maximum) pour quatre positions du spot.

due à l'échantillonnage du support. Le tableau 10.1 résume les tendances de ces erreurs dans le cas d'un spot gaussien et dans le cas d'un spot à profil sinc^2 .

Support fini		
	Déplacement quelconque	Approximation faibles déplacements ($ \mathbf{x}_0 \leq FWHM_T/2$)
Spot Gaussien	$\rho_\ell = 1$ ν_ℓ donnée par eq. (10.3)	$\rho_\ell \leq 1$ $\nu_\ell \approx 0$
Spot sinc^2	$\rho_\ell \leq 1$ ν_ℓ périodique (période $FWHM_T$)	$\rho_\ell \approx 1$ ν_ℓ périodique (période $FWHM_T$)
Support pixelisé		
	pixel $\leq FWHM_T/2$.	pixel $\geq FWHM_T$
Spot Gaussien	Pas d'erreur Supplémentaire	$\nu_{pix.}$ périodique (période : pas pixel)
Spot sinc^2	Pas d'erreur Supplémentaire	$\nu_{pix.}$ périodique (période : pas pixel)

TAB. 10.1 – Effets de la taille et de la pixélisation du support de calcul sur le biais de la mesure de position par barycentre.

Le biais de l'estimation diminue lorsque la taille du support de calcul du barycentre augmente. Cela incite à prendre un support de calcul le plus large possible. Cependant, la présence de bruit de détecteur fait que l'on a généralement plutôt intérêt à limiter le nombre de pixels pris en compte dans le calcul du barycentre. Pour réaliser ces deux conditions (un large support et peu de pixels), il faut sous-échantillonner le spot.

Mais si nous avons pu vérifier que le respect du critère de Nyquist (au moins deux pixels dans la FWHM du spot) permet de pixéliser le détecteur sans ajouter d'erreur supplémentaire, augmenter la taille des pixels par rapport à ce critère revient à introduire des erreurs de non-linéarité supplémentaires. On a vu toutefois que dans le cas d'un spot à profil sinc^2 , la présence des lobes secondaires du spot fait que l'on peut sans perte sensible sur la linéarité se permettre d'échantillonner le spot à Shannon/2.

On a testé deux méthodes envisageables pour pallier à ces erreurs statiques. Les études menées montrent que le fait d'utiliser une fenêtre de calcul de taille réduite mais recentrée sur le maximum d'intensité du spot introduit des discontinuités dans la réponse du détecteur. Ces discontinuités peuvent être préjudiciables au bon fonctionnement du système d'optique adaptative. Concernant le seuillage, nous avons vu que s'il est effectué à valeur de seuil constante, la linéarité de la réponse dépend fortement du niveau de seuil. Il ne suffit pas de s'assurer de conserver un nombre moyen de pixels suffisant pour éviter les phénomènes de discontinuité. Il faut également s'assurer que le nombre de pixels restant après seuillage varie peu au gré des déplacements du spot. Ceci est d'autant plus difficile à réaliser dans la pratique qu'en fonctionnement nominal la turbulence atmosphérique dégrade la

forme du spot. Finalement, le seul mode de seuillage qui soit réellement performant est aussi le moins aisé à mettre en œuvre dans un système temps réel : il s'agit du seuillage à nombre de pixels constants.

Cependant, la vocation première du seuillage n'est pas de garantir la linéarité de la réponse de l'estimateur mais de limiter la propagation du bruit de détecteur dans la mesure. Le paragraphe suivant présente l'étude des effets des différentes sources de bruit sur l'estimation de la position d'un spot Hartmann. A l'issue de ce paragraphe, une synthèse de tous les aspects de la mesure sera proposée et permettra de dégager les conditions où le seuillage du spot présente un intérêt.

10.2 Erreurs statistiques

On s'intéresse dans cette partie aux sources d'erreurs de l'estimation d'origine statistique, à savoir les bruits de mesure (bruit de photons et bruit de détecteur) et les erreurs liées aux déformations du spot. La quantification de l'effet de ces sources d'erreur ne peut se faire qu'au sens statistique. On exprimera ici les erreurs statistiques en termes de variance de l'écart de phase du front d'onde de bord à bord de sous-pupille :

$$\sigma_{\Delta\phi}^2 = \left\langle (\Delta\phi - \langle \Delta\phi \rangle_{time})^2 \right\rangle_{time} \quad (rad^2), \quad \text{avec : } \Delta\phi = \frac{2\pi d}{\lambda f} \cdot C_x \quad (10.7)$$

On s'intéresse d'abord à l'effet des bruits de photons et de détecteur. On traitera ensuite l'effet de la turbulence.

10.2.1 Bruits de mesure

10.2.1.1 Expression analytique de la variance de la phase résiduelle

Les lois de variation de la variance de l'écart de phase de bord à bord de sous-pupille en présence de bruit de photons et de bruit de détecteur sont bien connues [Rousset 1999] :

$$\sigma_{\Delta\phi, phot}^2 = \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{N_{ph}} \left(\frac{N_T}{N_D} \right)^2 \quad (10.8)$$

$$\sigma_{\Delta\phi, det}^2 = \frac{\pi^2}{3} \frac{\sigma_{det}^2}{N_{ph}^2} \left(\frac{N_S^2}{N_D} \right)^2 \quad (10.9)$$

Avec :

- N_{ph} , le nombre moyen de photons collectés par sous-pupille et par trame,
- σ_{det} , l'écart-type du bruit de détecteur (en photo-électrons par pixels et par trame),
- N_T , le nombre de pixels inclus dans le FWHM du spot,
- N_D , le nombre de pixels inclus dans la PSF de la sous-pupille *hors turbulence*,
- N_S , la taille en pixels de la fenêtre de calcul du barycentre (N_S^2 est le nombre total de pixels pris en compte dans l'estimation).

Les expressions (10.8) et (10.9) permettent de dégager des lois de comportement du Shack-Hartmann qui ont été vérifiées à maintes reprises [Noël 1997, Nicolle et al. 2004, Thomas et al. 2006] :

- En présence de bruit de photons, la variance de la différence de phase de bord-à-bord de sous-pupille :
 - décroît en $1/N_{ph}$ lorsque le nombre de photons collectés dans la pupille augmente,
 - croît comme le carré de la taille du spot, c'est-à-dire approximativement comme $(d/r_0)^2$, où d est la taille d'une sous-pupille et r_0 le paramètre de Fried de la turbulence.
- En présence de bruit de détecteur, la variance de la différence de phase de bord-à-bord de sous-pupille :
 - est proportionnelle à la variance du bruit de détecteur,
 - décroît en $1/N_{ph}^2$ lorsque le nombre de photons collectés dans la pupille augmente,
 - croît comme le carré du nombre total de pixels pris en compte dans le calcul du barycentre.

Ces expressions ont toutefois été obtenues en faisant plusieurs hypothèses :

- Spot gaussien, dont l'écart-type a été approximé par la relation $\sigma_T^2 \simeq \frac{FWHM_T}{2\sqrt{2}}$.
- Faibles fluctuations du dénominateur de l'expression du barycentre,

Ces trois hypothèses limitent la validité des relations (10.8) et (10.9). On met en évidence et on propose des solutions aux écarts par rapport aux relations dans le paragraphe suivant.

10.2.1.2 Ecarts aux comportements prévus par Rousset

Correction de l'expression de la variance de différence de phase de bord à bord de sous-pupille en présence de bruit de photons.

Si l'on analyse le détail des calculs de la relation (10.8) présentés dans l'annexe de [Noël 1997], on se rend compte qu'une approximation a été faite dans la définition du spot gaussien : la relation entre l'écart-type du spot et sa largeur à mi-hauteur a été approximée. La résolution exacte du problème est présenté en annexe (D.2) de ce manuscrit. Après correction la relation (10.8) devient :

$$\sigma_{\Delta\phi, phot}^2 = \frac{\pi^2}{2 \ln(2)} \frac{1}{N_{ph}} \left(\frac{N_T}{N_D} \right)^2 \quad (10.10)$$

Bien qu'anecdotique, cette correction permet de mieux rendre compte du comportement du Shack-Hartmann en présence de bruit de photons. Il est toutefois une correction bien plus importante pour la bonne description du comportement du Shack-Hartmann : la prise du profil en sinc^2 du spot.

Prise en compte du profil sinc^2 du spot.

Si l'on étudie la réponse du Shack-Hartmann en présence de bruit de photons en considérant une sous-pupille carrée et non soumise à la turbulence, c'est-à-dire un spot à profil sinc^2 , il apparaît que la variance de la pente locale de la phase dépend approximativement linéairement de la taille de la fenêtre de calcul du barycentre du spot, ce qui n'apparaît pas dans les relations (10.8) et (10.10). La figure (10.18), tirée de [Thomas et al. 2006], montre ce phénomène, étudié antérieurement dans [Noël 1997]. Cet écart au comportement prévu par le modèle gaussien est dû au fait que la fonction $x^2 \cdot \text{sinc}^2$ n'est pas intégrable sur un support infini. Les lobes secondaires, peu lumineux, ont un faible rapport signal à bruit et dégradent l'estimation de la pente locale du front d'onde. On peut caractériser analytiquement ce phénomène en reprenant le calcul présenté en annexe (D.2) et en utilisant un modèle de spot en sinc^2 , intégré sur un support fini. Les détails du calcul sont présentés dans l'article [Thomas et al.

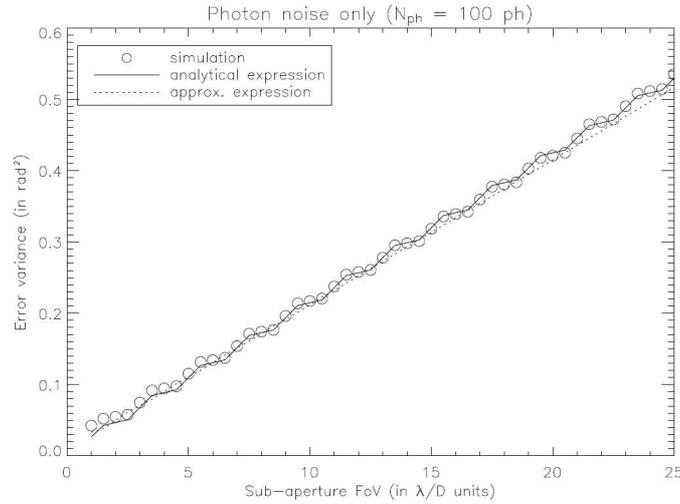


FIG. 10.18 – Evolution du bruit de mesure en fonction du champ utile pour un spot à profil sinc^2 bruité par le bruit de photons. Echantillonnage à Shannon. Figure extraite de [Thomas et al. 2006].

2006]. On aboutit à la relation suivante pour la variance de l'erreur d'estimation de la pente locale du front d'onde :

$$\sigma_{\Delta\phi, phot}^2 = \frac{4}{\pi N_{ph}} \left(\frac{N_S}{N_D} \right) \left(1 - \text{sinc} \left(\pi \frac{N_S}{N_D} \right) \right) \int_0^{\pi \frac{N_S}{N_D}} \text{sinc}^2(u) du \quad (10.11)$$

La figure (10.18) montre l'adéquation entre cette description analytique et les résultats d'une simulation numérique du problème. On observe que l'équation (10.11) décrit fidèlement l'évolution de $\sigma_{\Delta\phi, phot}^2$ en fonction de la taille du support de calcul du barycentre. De plus, dès que la taille du support de calcul du barycentre est supérieure à la largeur totale du spot ($N_S \geq 2N_D$), l'équation (10.11) se simplifie :

$$\lim_{\frac{N_S}{N_D} \rightarrow \infty} \int_0^{\pi \frac{N_S}{N_D}} \text{sinc}^2(u) du = \frac{\pi}{2}, \quad \text{d'où} \quad \sigma_{\Delta\phi, phot}^2 \simeq \frac{2}{N_{ph}} \left(\frac{N_S}{N_D} - \frac{1}{\pi^2} \sin \left(\pi^2 \frac{N_S}{N_D} \right) \right)$$

Une bonne approximation de la variance de l'erreur commise est alors fournie par l'expression [Thomas et al. 2006] :

$$\sigma_{\Delta\phi, phot}^2 \approx \frac{2}{N_{ph}} \left(\frac{N_S}{N_D} \right) \quad (10.12)$$

Impact des fluctuations du dénominateur du barycentre

La troisième limite du modèle de la mesure sous-tendant les équations (10.8, 10.9, 10.10 et 10.11) est l'hypothèse considérant que les fluctuations de l'intensité totale dans l'imagette sont négligeables. Ce n'est pas le cas lorsque du bruit de détecteur affecte la mesure et que le flux incident est faible. En effet, lorsque le rapport signal à bruit de l'image devient de l'ordre de 1, le dénominateur du

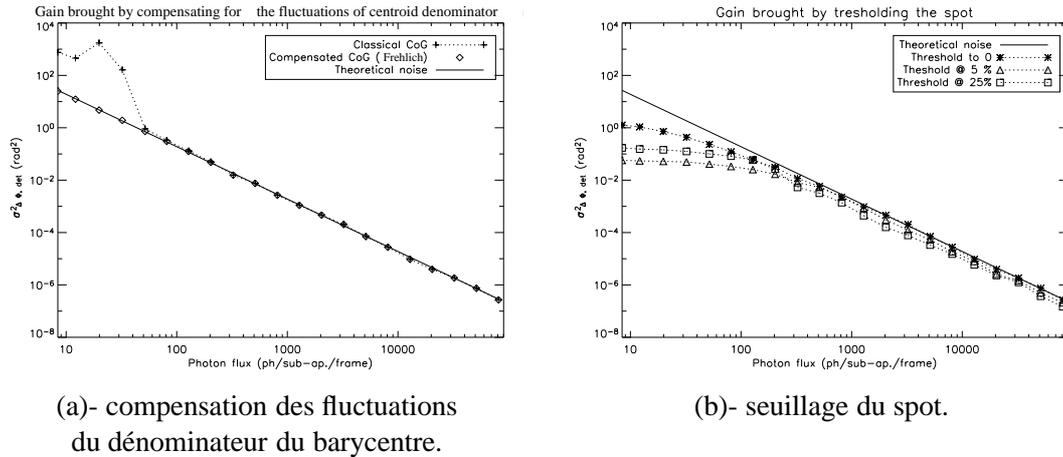


FIG. 10.19 – Gain à très faible flux apporté par la compensation des fluctuations du dénominateur du barycentre et le seuillage du spot. Spot à profil sinc^2 ; bruit de détecteur : $\sigma_{\text{det}} = 3 e^-/\text{pix.}/\text{trame}$.

barycentre fluctue fortement, jusqu'à devenir sporadiquement très faible, ce qui introduit de fortes erreurs d'estimation de la pente locale. Il en résulte une augmentation de la variance de l'erreur d'estimation de la pente locale. La figure (10.19) montre ce phénomène. Frehlich[Frehlich 1990] a proposé de résoudre ce problème en remplaçant à chaque instant le dénominateur du barycentre par la valeur moyenne de l'intensité lumineuse dans la sous-pupille. Comme le montre la figure (10.19), cette solution permet de retrouver un comportement fidèle à la loi théorique en $1/N_{ph}^2$ y compris pour de très faibles flux.

Pendant, cette solution n'a à ce jour jamais été adoptée dans un système fonctionnant sur ciel. En effet, on préfère seuiller le spot. Bien que le seuillage introduise du biais dans la mesure (cf § 10.1.3.2), il contraint en effet bien plus efficacement les effets du bruit de mesure à très faible flux, comme le montre la figure (10.19 - b). Cette figure montre que le seuillage introduit une saturation de la variance de l'erreur d'estimation de la pente locale du front d'onde à très faible flux. Cette saturation est précisément due au fait que l'opération de seuillage biaise la mesure en sous-estimant la position du spot lorsque le rapport signal à bruit de l'image est inférieur ou égal à 1 [Thomas et al. 2006]. En effet, lorsque le rapport signal à bruit dans l'imagette est trop faible (≤ 1), il est impossible de savoir si le seuillage se fait par rapport au spot ou à un pixel excité par le bruit de détecteur. Une opération de seuillage mal conduite peut alors préserver essentiellement des pixels excités par le bruit [Thomas et al. 2006]. Les propriétés statistiques du bruit de lecture étant uniformes dans le champ, les pixels excités par le bruit et résistant au seuillage biaisent alors la mesure de position vers le centre du détecteur. L'utilisation du seuillage doit donc être menée avec attention, dans un souci constant de compromis entre le filtrage du bruit de détecteur et la préservation du caractère non biaisé de la mesure [Arines 2002].

10.2.2 Fluctuations turbulentes de la forme du spot

En dehors des phases de calibration du système d'optique adaptative, le senseur Shack-Hartmann ne fonctionne qu'en présence de fronts d'onde turbulents. On cherche ici à évaluer l'impact des déformations turbulentes du spot sur la mesure de pente locale. On s'intéresse d'abord à une esti-

mation par barycentre sur un support de taille variable, puis on considère le cas d'un spot seuillé.

10.2.2.1 Cas du centre de gravité classique

On s'appuie ici sur une étude numérique présentée dans [Thomas et al. 2006], dans laquelle on simule la réponse d'une sous-pupille de Shack-Hartmann à la turbulence atmosphérique. Cette simulation utilise les conditions suivantes :

- Les écrans de phase sont générés en suivant la loi statistique de Kolmogorov, en faisant varier le rapport d/r_0 de la taille de la sous-pupille sur le paramètre de Fried de la turbulence.
- On ne considère ni bruit de photons, ni bruit de détecteur.
- On ne s'intéresse qu'aux effets des déformations du spot. En particulier, on souhaite faire abstraction autant que possible des effets de biais détaillés au paragraphe (10.1). Les spots sont donc recentrés avant le calcul de leur barycentre.
- Le spot est échantillonné à Shannon. On estime sa position par calcul de son barycentre sur un support carré de taille croissante.

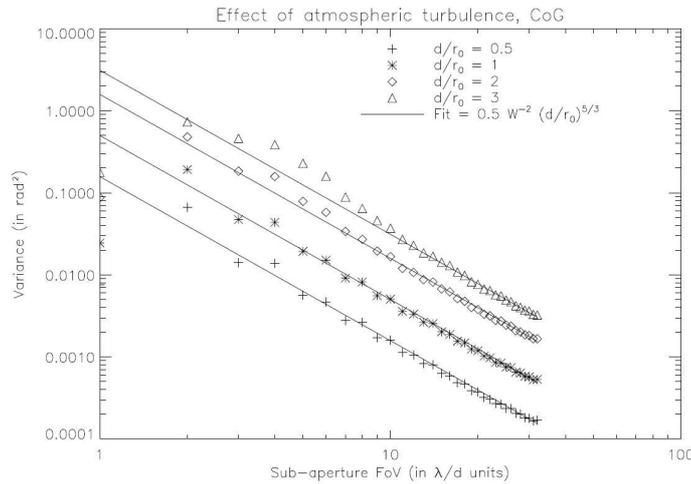


FIG. 10.20 – Effet des déformations turbulentes du spot sur l'erreur d'estimation de la pente locale du front d'onde par centre de gravité. Echantillonnage à Shannon. Figure extraite de [Thomas et al. 2006].

La figure (10.20), extraite de [Thomas et al. 2006], montre l'évolution de la variance de l'erreur d'estimation de la pente locale du front d'onde en fonction du rapport d/r_0 caractérisant la force de la turbulence et de la taille du support utilisé pour le calcul du barycentre. Cette courbe montre que $\sigma_{\Delta\phi, turb}^2$ évolue en suivant la loi [Thomas et al. 2006] :

$$\sigma_{\Delta\phi, turb}^2 = K \cdot W^{-2} \cdot \left(\frac{d}{r_0}\right)^{\frac{5}{3}} \quad (10.13)$$

Où W est la taille du support de calcul du barycentre, exprimée en radians, et K est un coefficient dépendant entre autres de l'échantillonnage du détecteur. La dépendance en W^{-2} caractérise la perte d'énergie lumineuse due à la taille restreinte du support. La dépendance en $(d/r_0)^{5/3}$ provient quant

à elle des déformations du spot sous l'effet de la turbulence, et en particulier de son élargissement [Irwan and Lane 1999].

10.2.2.2 Cas du centre de gravité seuillé

On présente dans cette partie une étude similaire à celle qui est décrite au paragraphe précédent, en seuillant le spot. On ne tient compte ni du bruit de photons, ni de celui de détecteur, et les spots sont recentrés avant seuillage et traitement. La figure (10.21) montre l'évolution de l'erreur liée aux déformations turbulentes du spot en fonction du niveau de seuillage et de l'intensité de la turbulence.

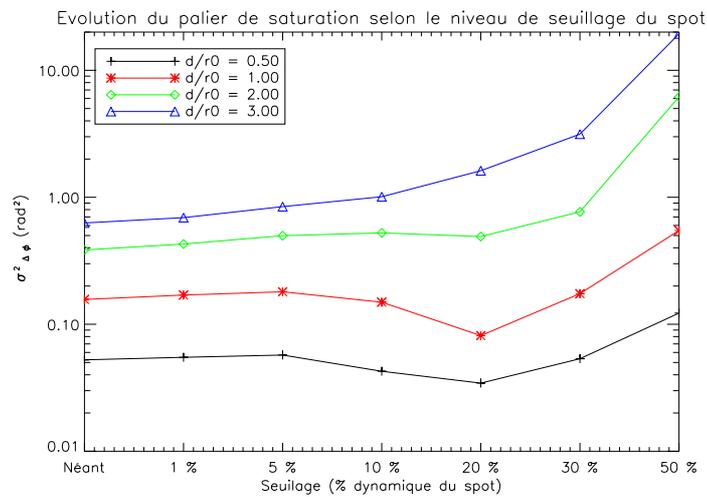


FIG. 10.21 – Effet des déformations turbulentes du spot sur l'erreur d'estimation de la pente locale du front d'onde par centre de gravité seuillé. Echantillonnage à Shannon. Support $2 \times \lambda f/d$.

Les courbes de la figure (10.21) montrent qu'en conditions de faible turbulence ($d/r_0 \leq 2$) il existe un niveau de seuillage optimal permettant de minimiser la variance de l'erreur d'estimation de la pente locale du front d'onde. Ce niveau optimal est de l'ordre de $\approx 20\%$ de la dynamique. Ce comportement s'explique à partir des observations faites au paragraphe (10.1.3.2) :

- A faible niveau de seuillage, le nombre de pixels pris en compte dans le calcul du centre de gravité varie beaucoup à cause des lobes secondaires du spot qui, sous l'effet de la turbulence, sont tantôt conservés, tantôt rejetés par le processus de seuillage. Ce phénomène disparaît à mesure que les lobes de hauts ordres sont définitivement écartés de la mesure du centre de gravité par l'augmentation du niveau de seuil.
- A fort niveau de seuil, par contre, les effets de non linéarité dus au faible nombre de pixels restants après seuillage prennent le dessus : plus on seuil, plus le support réel de calcul est restreint et plus les effets de non linéarité se font sentir.

La figure (10.21) montre de plus qu'en situation de forte turbulence, on gagne à ne pas seuiller le spot : l'éclatement du spot est tel que les lobes secondaires ne sont plus perceptibles, et seul subsiste

l'effet de réduction du nombre de pixels utilisés lorsque le niveau de seuil augmente.

Cette étude ayant été réalisée en l'absence de bruit, elle n'est représentative que des performances à très fort flux du Shack-Hartmann, lorsque son comportement est déterminé par la turbulence du front d'onde incident. Toutefois la recherche d'un niveau de seuil optimal permettant de minimiser la variance de la position estimée du spot peut être réalisée en prenant en compte les bruits de photons et de détecteur [Arines 2002].

Ce paragraphe et ceux qui précèdent nous ont permis d'identifier et de quantifier les principales sources d'erreur de la mesure de pente locale d'une sous-pupille de Shack-Hartmann. Dans la partie suivante, on introduit une étude synthétique prenant en compte tous les différents aspects vus ici.

10.3 Synthèse sur l'estimation de pente par barycentre

Nous avons au début de ce chapitre décrit le budget d'erreur de la mesure de position d'un spot Hartmann dans le plan focal d'une sous-pupille par la relation (10.1) :

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \rho \cdot \mathbf{x}_0 + \nu(\mathbf{x}_0) + \beta_{\text{bruits}} + \varepsilon_{\text{turb}}$$

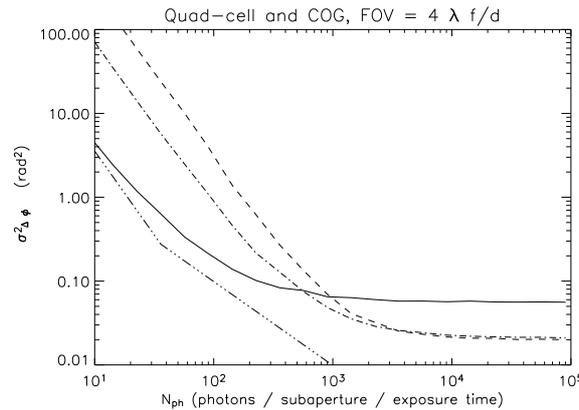


FIG. 10.22 – Réponse de l'estimateur barycentre en fonction de l'échantillonnage du détecteur pour un spot turbulent. La courbe [— —] représente la variance de l'erreur d'estimation de la pente du front d'onde pour un détecteur échantillonné à Shannon (8×8 pixels). La courbe [— · —] vaut pour un détecteur échantillonné à Shannon/2 (4×4 pixels), et la courbe continue vaut pour un détecteur quatre quadrants (2×2 pixels), échantillonné à Shannon/4. Figure extraite de [Nicolle et al. 2004].

Jusqu'à maintenant, ce chapitre a été consacré à l'analyse de chacun des termes de cette équation. Nous proposons ici une synthèse par l'analyse de quelques cas choisis. Nous nous appuyons pour cela sur la première partie de l'article [Nicolle et al. 2004]. L'étude menée dans cet article propose une analyse à champ constant, fixé à $4 \times \frac{\lambda f}{d}$. On étudie trois échantillonnages différents du spot : Shannon, Shannon/2 et Shannon/4. Les trois courbes tracées sur la figure (1) de l'article (reproduite en figure 10.22) correspondent donc aux trois cas suivants :

- 8×8 pixels de pas $\lambda f/2d$,

- 4×4 pixels de pas $\lambda f/d$,
- 2×2 pixels de pas $2\lambda f/d$. Ce cas est un cas quatre quadrants, pour lequel les lois d'évolution de la variance de l'erreur d'estimation de la pente locale du front d'onde diffère du cas d'un barycentre classique :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma_{\Delta\phi, phot}^{2, 4Q, diffraction} = \frac{\pi^2}{nph} & \sigma_{\Delta\phi, phot}^{2, 4Q, seeing} = \frac{\pi^2}{nph} \cdot \left(\frac{d}{r_0}\right)^2 \\ \sigma_{\Delta\phi, det}^{2, 4Q, diffraction} = 4\pi^2 \left(\frac{\sigma_{lect}}{nph}\right)^2 & \sigma_{\Delta\phi, det}^{2, 4Q, seeing} = 4\pi^2 \left(\frac{\sigma_{lect}}{nph}\right)^2 \cdot \left(\frac{d}{r_0}\right)^2 \end{array} \right. \quad (10.14)$$

Ajoutons que dans cette simulation, les perturbations du front d'onde incident suivent la statistique de Kolmogorov, avec un rapport $d/r_0 = 1$, et que le front d'onde incident est corrigé de son tilt avant la formation du spot Hartmann. On considère le bruit de photons et le bruit de détecteur, ce dernier étant caractérisé par $\sigma_{det} = 3 e^-/\text{pixel/trame}$. Enfin, on a choisi de compenser les fluctuations du dénominateur de barycentre pour assurer la stabilité à très faible flux (cf. § 10.2.1.2).

On retrouve sur la figure (10.22) tous les phénomènes évoqués au long de ce chapitre :

- Le bruit de détecteur domine à très faible flux. Pour cette raison, moins le détecteur comporte de pixels, meilleure est l'estimation de pente.
- Le bruit de photons ne se ressent que pour les détecteurs à faible nombre de pixels (4×4 et 2×2 pixels), et de façon transitoire.
- à fort flux, la variance de l'erreur d'estimation de la pente du front d'onde sature à cause des effets conjugués de non linéarité de l'estimation et des fluctuations de la forme du spot sous l'effet de la turbulence. Les effets de non-linéarité sont particulièrement sensibles pour le détecteur quatre quadrants (2×2 pixels), pour lequel le niveau de saturation est environ trois fois supérieur aux deux autres cas. On note également que conformément à ce qui a été dit au paragraphe (10.1.2), il n'y a aucun gain sur la saturation à échantillonner le détecteur à mieux que Shannon/2 (cas 4×4 pixels).

Chapitre 11

Etude de la performance de l'estimateur barycentre pondéré

La sensibilité aux effets de support (taille et pixélisation) de l'estimation de position par barycentre seuillé ou fenêtré est en partie due au fait que seuillage et fenêtrage sont des opérations non linéaires. De plus, ces opérations éliminent du processus de mesure des pixels qui, bien qu'ayant un mauvais rapport signal à bruit, contiennent de l'information. Une façon de récupérer en partie cette information est d'affecter à chaque pixel de la tache un coefficient de pondération représentatif de son rapport signal à bruit avant d'en calculer le barycentre. Cette estimation du déplacement du spot par *centre de gravité pondéré* (CdGP) a été proposée dans l'article [Nicolle et al. 2004], reproduit dans les trois pages suivantes. La pertinence de la proposition du centre de gravité pondéré a été démontrée au chapitre 9 : il s'agit en effet de l'estimateur optimal au sens du maximum de vraisemblance de la position d'un spot gaussien dégradé par un bruit de lecture, si la pondérante est centrée sur la position vraie du spot (cf. § 9.2.3.2).

Le problème est que dans la pratique, on ne connaît pas la position du spot avant de l'avoir estimée. Comme on l'a vu au chapitre (9), l'unique moyen pour atteindre l'estimateur ML est donc de procéder par itérations successives, en recentrant à chaque fois la pondérante sur la position estimée à l'étape de calcul précédente. Ces itérations successives doivent être réalisées sur la même image courte pose, c'est-à-dire pour une seule trame. La figure (11.1) montre l'effet des recentrages successifs de la pondérante sur la précision de l'estimation de la position du spot. Pour le déplacement considéré et en l'absence de bruit, on atteint 0.1 % de précision sur l'estimation après une dizaine d'itérations.

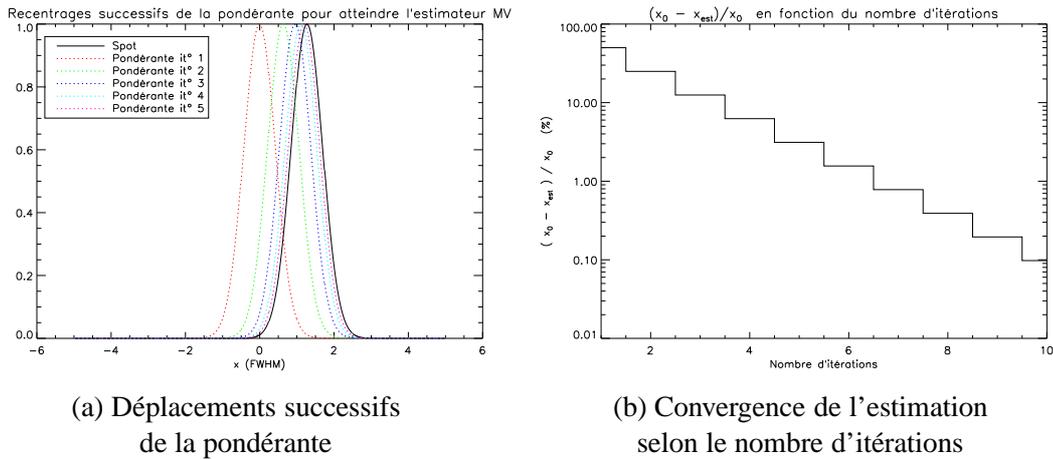


FIG. 11.1 – Convergence vers l'estimation ML par recentrages successifs de la pondérante du CdG pondéré. Spot gaussien, non bruité. On atteint une erreur d'estimation de 0.1 % après une dizaine d'itérations.

Toutefois, ce procédé itératif est coûteux en temps de calcul et est susceptible de poser des difficultés d'implantation dans un système temps réel. Pour cette raison, on étudiera ici deux estimateurs différents :

- L'estimateur ML, calculé en réalisant plusieurs mesures successives du CdGP, la pondérante étant recentrée au fur et à mesure,
- Un CdGP avec pondérante centrée sur la position de référence de la sous-pupille¹, tel qu'il sera le plus facile à implanter dans un système temps réel. Cet estimateur est en fait l'arrêt à la première itération de l'estimateur ML.

A l'instar du raisonnement suivi pour l'estimateur barycentre, nous allons dans ce chapitre nous baser sur le budget d'erreur de l'estimation de position proposé par l'équation (9.21) et en analyser chacun des termes :

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \underbrace{\rho \cdot \mathbf{x}_0 + \nu(\mathbf{x}_0)}_{\text{statique}} + \underbrace{\beta_{\text{bruits}} + \varepsilon_{\text{turb}}}_{\text{statistique}} \quad (11.1)$$

On commencera donc l'étude de l'estimateur CdGP par l'analyse des erreurs statiques. On viendra ensuite à sa robustesse vis-à-vis des sources d'erreur de nature statistique, puis on proposera une validation expérimentale de la performance de l'estimateur avant d'effectuer une synthèse sur les conditions optimales de son utilisation.

¹On peut également tenir compte de la corrélation temporelle de la turbulence en recentrant la pondérante sur la pente estimée lors de la trame précédente.

Improvement of Shack–Hartmann wave-front sensor measurement for extreme adaptive optics

M. Nicolle, T. Fusco, G. Rousset, and V. Michau

Département d'Optique Théorique et Appliquée–Office National d'Etudes de Recherche Aéronautique,
29 Avenue de la Division Leclerc, 92322 Châtillon Cedex, France

Received April 19, 2004

The development of high-performance adaptive optics systems requires the optimization of wave-front sensors (WFSs) working in the high-order correction regime. We propose a new method to improve the wave-front slope estimation of a Shack–Hartmann WFS in such a regime. Based on a detailed analysis of the different errors in the slope estimation with a classical centroid and with the new method, the gain in terms of wave-front-sensing accuracy in both the detector and the photon noise regimes is stressed. This improvement is proposed without major system disruption. © 2004 Optical Society of America
OCIS codes: 010.1080, 010.7350, 110.2990, 220.2740.

Adaptive optics (AO; see Roddier¹ for a review) is now widely used in astronomical ground-based telescopes. One of the most challenging next-generation AO systems is extreme AO, the goal of which is to achieve an overall Strehl ratio of better than 90%. Development of such a system requires performance improvement of each of its components and particularly of its wave-front sensor (WFS). Different WFSs are candidates for use in extreme AO systems. Among them is the Shack–Hartmann (SH) WFS.² In such a sensor the local wave-front (WF) slope directly drives the image spot position in each subaperture. Position estimation is generally done by computing the spot's center of gravity (COG). This measurement is corrupted by both photon and detector noise. Windowing or thresholding before the COG calculation may reduce the noise effects, but these are not the optimal processes for improving the WF estimation.³ However, they are the most widely used, since they are easy to implement on a real-time computer.^{2,4,5}

The behavior of the different position estimators is driven by the WFS [detector sampling and field of view (FOV)] and by the guide star magnitude. Assuming a Gaussian spot in a square subaperture to approximate windowing or thresholding effects on the spot, Rousset *et al.*⁶ showed analytically by deriving the COG that the noise variance in the local WF estimate, given in terms of phase difference at the borders of a subaperture (in rad²), is expressed by

$$(\sigma_{\Delta\phi}^2)_{\text{ph,th}}^{\text{COG}} = \frac{\pi^2}{2 \ln(2) \mathcal{N}_{\text{ph}}} \left(\frac{N_T}{N_D} \right)^2 \quad (1)$$

for photon noise and

$$(\sigma_{\Delta\phi}^2)_{\text{det,th}}^{\text{COG}} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{\sigma_{\text{det}}}{\mathcal{N}_{\text{ph}}} \right)^2 \left(\frac{N_S^2}{N_D} \right)^2 \quad (2)$$

for detector noise, where \mathcal{N}_{ph} is the number of detected photons contributing to the COG computation after thresholding and windowing, N_T is the full

width at half-maximum (FWHM) of the subaperture point-spread function (PSF) in pixels, and N_D is the FWHM of the diffraction-limited PSF in pixels (N_D corresponds to λ/d , where d is the subaperture size; for Nyquist sampling $N_D = 2$), N_S^2 is the total number of pixels used in the COG computation (after thresholding and windowing), and σ_{det} is the standard deviation of the detector noise, expressed in electrons per pixel. In Eq. (1) the true Gaussian FWHM is considered, which leads to a slightly different numerical coefficient from the one given in Refs. 2 and 6.

According to Eq. (1), $(\sigma_{\Delta\phi}^2)_{\text{ph,th}}^{\text{COG}}$ is independent of the size of the COG computation window (assuming thresholding process). On the contrary, Eq. (2) shows that $(\sigma_{\Delta\phi}^2)_{\text{det,th}}^{\text{COG}}$ increases dramatically with N_S .

These behaviors have been numerically simulated. The simulation computes images in the focal plane of a square lenslet by use of incoming turbulent wave fronts. Shannon-sampled PSFs are first computed in a large field (64×64 pixels). Integration of intensity on the pixel size is not taken into account. Then the PSFs are windowed and binned to obtain the effective FOV and sampling. The reported results correspond to $d/r_0 = 1$ (where r_0 is the Fried parameter), a subaperture size d of 20 cm, a WFS wavelength of $0.7 \mu\text{m}$, and a detector noise of $3e^-$ per pixel. In this case we have $N_T = N_D$. To take into account the closed-loop AO correction, we subtract from the incident WF its angle of arrival and add a random residual angle of arrival fluctuation corresponding to a phase difference variance on one subaperture $\sigma_{\Delta\phi_{\text{inc}}}^2 \approx 10^{-2} \text{ rad}^2$. This variance mimics the WF residuals for very good AO correction. The measurement error is computed between the estimated spot position and the true position. For each simulation case the number of photons reported in the figures is N_{ph} , the averaged total number of detected photons within the lenslet aperture.

Figure 1 shows the simulated measurement error versus the total number of incident photons in the subaperture. Figure 1 shows two centroid position estimators commonly used for SH WFS in AO^{7,8}: (1) the COG estimator, for two pixel sizes $\lambda/2d$ and λ/d and a FOV of $4\lambda/d$, without any additional windowing or

2744 OPTICS LETTERS / Vol. 29, No. 23 / December 1, 2004

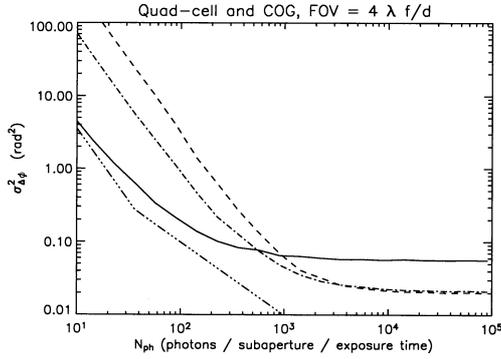


Fig. 1. WF variance of the COG (---, pixel size $\lambda/2d$; - · -, pixel size λ/d) and four-quadrant estimators (-, pixel size $2\lambda/d$); ····, four-quadrant theoretical detector noise (low flux) and photon noise (intermediate flux) asymptotes.

thresholding, and (2) the four-quadrant estimator, for a quad-cell detector with $2\lambda/d$ -wide pixels and a FOV of $4\lambda/d$. Theoretical errors given by the adaptation of Eqs. (1) and (2) to the four-quadrant are plotted. Figure 1 reveals three domains of the error variance curves. At low photon flux the error is dominated by detector noise, at moderate flux photon noise prevails, and at high flux a saturation of accuracy is observed.

At high flux the error saturates whatever the photon flux level is. There is no gain in accuracy by increasing the number of detected photons. This saturation of the accuracy has already been reported.⁴ It is linked to the fact that the instantaneous image is not perfectly symmetrical with respect to the center of the window because of its residual movement and because the turbulence distorts its shape. Any static aberration will also introduce such an effect. Therefore the window induces an error in the computation of the centroid by image truncation. We have verified that this effect diminishes when the size of the field corresponding to the computation window increases: the saturation level decreases, providing better accuracy. For FOVs of $4\lambda/d$ and $8\lambda/d$, the error is close to 0.015 and 0.003 rad^2 , respectively. In the case of four-quadrant detection undersampling of the image is an additional contribution to the saturation of the accuracy, which leads to a higher error at high flux than in the two COG cases for the same FOV. Hence increasing the FOV of the quad cell does not lead to a substantial reduction of this error. For the quad cell and the COG this error contributor at high flux limits the accuracy. It is in fact correlated to the turbulence and the residual angle of arrival. When the turbulence is stronger, the error increases. For pure turbulent incoming WFs, we have found an error proportional to $(d/r_0)^{5/3}$.

At moderate flux the error dependence is close to the $\mathcal{N}_{\text{ph}}^{-1}$ theoretical behavior [Eq. (1)], where \mathcal{N}_{ph} is the number of photons effectively detected in the computation window. Note that, for a FOV of $4\lambda/d$, \mathcal{N}_{ph} is of the order of 90% of N_{ph} . This behavior is observed

near 10^2 photons for the quad cell but is not clearly seen for the classical COG. This is due to the relatively low photon noise level given by Eq. (1). Indeed, the photon noise domain is extremely limited because of the relatively small size of the computation window (inducing the saturation of the accuracy) and the detector noise level ($3e^-$ per pixel). At low flux the error dependence is close to the theoretical behavior of $\mathcal{N}_{\text{ph}}^{-2} N_s^4$ [Eq. (2)]. Reducing the number of pixels to 2 pixels in the quad-cell case significantly decreases the error variance.

In Fig. 1, $N_{\text{ph}} = 600$ typically corresponds to a visible magnitude equal to 11 for a WFS exposure time of 2 ms (500-Hz frame rate, SH WFS similar to the one in Ref. 8). For stars with a magnitude fainter than 11, the four-quadrant estimator is much better than the COG because it uses fewer pixels, leading to a lower detector noise contribution. For brighter stars, improving image sampling (and using the COG) allows us to achieve better accuracy for a given FOV. We have already underlined that increasing the FOV also reduces the error in this case. Hence the number of pixels in the subaperture image appears to be one of the key parameters determining the noise performance of the SH WFS with respect to the number of incident photons. To cover a large range of photon numbers as required in astronomy, one image sampling and one FOV are not sufficient. For such a WFS a CCD is a useful device, allowing efficient binning and windowing for adaptation of the sensor to the observing conditions, as implemented in NAOS.⁸

Thresholding, windowing, and binning induce a loss of information in the image and are not optimal.³ To account for all the illuminated pixels without amplifying noise, we propose to consider a new centroid estimator [weighted center of gravity (WCOG)], using the whole subaperture image and a penalizing function weighting (but not canceling) low signal-to-noise ratio pixels:

$$(C_{\text{WCOG}})_x = \frac{\sum_{i,j} x_{ij} W_{ij} I_{ij}}{\sum_{i,j} W_{ij} I_{ij}}, \quad (3)$$

where x_{ij} is the abscissa of the (i, j) pixel, W_{ij} is its weighting coefficient, and I_{ij} is its intensity. If $W_{ij} = \prod_{N_s}^{ij}$, where $\prod_{N_s}^{ij}$ is the centered window function of width N_s and is equal to 1, we achieve a windowing process and Eq. (3) reduces to the COG estimate. Using the same analytical approach as reported in Ref. 6, we can derive the new photon and detector noise errors on the local WF estimation:

$$(\sigma_{\Delta\phi}^2)_{\text{ph, th}}^{\text{WCOG}} = \frac{\pi^2}{2 \ln(2) \mathcal{N}_{\text{ph}}} \left(\frac{N_T}{N_D} \right)^2 \left(\frac{N_T^2 + N_W^2}{2N_T^2 + N_W^2} \right)^2, \quad (4)$$

$$(\sigma_{\Delta\phi}^2)_{\text{det, th}}^{\text{WCOG}} = \frac{\pi^3}{32[\ln(2)]^2} \left(\frac{\sigma_{\text{det}}}{\mathcal{N}_{\text{ph}}} \right)^2 \left(\frac{N_T^2 + N_W^2}{N_D} \right)^2. \quad (5)$$

Equations (4) and (5) are found by use of Gaussian profiles for both the spot and the weighting functions. The weighting function is fully characterized by its FWHM, N_W . Equations (4) and (5) stress that a

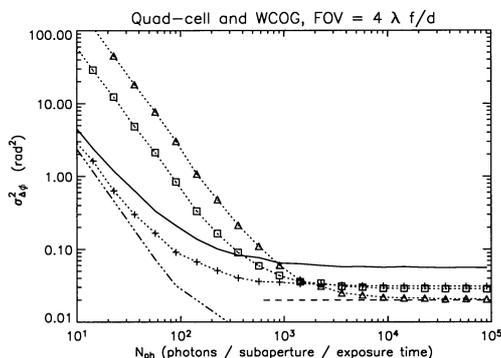


Fig. 2. WF variance for the four-quadrant (—) and the WCOG ($N_W = N_T[\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot]$, $N_W = 3N_T[\cdot \cdot \square \cdot \cdot \cdot]$ and $N_W = 8N_T[\cdot \cdot \Delta \cdot \cdot \cdot]$, pixel size $\lambda/2d$ for the three curves). $-\cdots-$, Eqs. (4) (intermediate flux) and (5) (low flux); $-\cdots-$, COG saturation level.

suitable choice of the width of the weighting function has to be made. It can be shown⁹ that, in the case of Gaussian noise statistics, the WCOG is the maximum likelihood estimate if the weighting function is the mean spot intensity. In this case, $N_W = N_T$.

We compare in Fig. 2 the WCOG performance with that of the four-quadrant COG, using the same numerical simulation as presented in Fig. 1 and Eqs. (4) and (5). The WCOG curves are plotted for the FWHM of three weighting functions ($N_W = N_T$, $N_W = 3N_T$, and $N_W = 8N_T$, with $N_D = 2$). One can clearly observe the gain achieved with our approach at a low light level (weighting the spot with the mean spot, i.e., $N_W = N_T$) even compared with the four-quadrant case. The error variance is reduced by a factor of 2 at 100 incident photons. As for the classical COG, the photon noise domain is limited.

Equation (5) is valid only for $N_T^2 + N_W^2 \leq N_S^2$. Indeed, Eq. (5) has been derived assuming an infinite subaperture size, the weighting function acting as a smooth windowing. When the weighting function FWHM becomes comparable with the FOV, the WCOG error is close to the classical COG error. When the number of photons is increased (i.e., when truncation effects dominate), Fig. 2 shows that one must increase the weighting function FWHM to preserve the efficiency of the WCOG computation from $N_W = N_T$ to $N_W = 8N_T$. Enlarging the weighting function of the WCOG improves the WF estimation at high flux for the same reasons as the ones given above to explain the improvement of COG performance when the computation window is increased. Therefore we find the same error behavior (proportional to $(d/r_0)^{5/3}$ for pure turbulence) for the WCOG estimator as for the classical COG. Note that at high photon flux the only way to improve the performance further will be to increase the FOV per subaperture.

The weighting function is introduced into SH WFS image real-time processing by use of weighting coefficients [see Eq. (3)]. The weighting function allows easy adaptation of the values of the coefficients with regard to the guide star magnitude and drifts in atmospheric conditions. There is no need here to have different readout modes of the CCD to cover the large photon flux range, as there is, for instance, in Ref. 8. Only one readout mode is required, simplifying the AO system, and adaptation to the observing conditions is accomplished by the choice of the weighting function FWHM, i.e., the weighting coefficients.

In conclusion, estimating the spot position in the focal plane of a SH WFS from the PSF intensity weighted by the PSF mean value brings a significant improvement in wave-front measurement accuracy for low and moderate photon flux. At high flux the weighting function FWHM must be adapted to obtain the best performance. It has been shown that for close-to-zero WF fluctuations (closed-loop mode) the phase slope error budget can be reduced. The Strehl ratio of large ground-based telescopes using AO systems can therefore be improved without major disruption of implementation or real-time computing. The weighted center of gravity estimate should be seriously considered for next-generation AO systems, especially in the case of extreme AO, where the considered photon flux is relatively high.

Ms. Nicolle's e-mail address is magali.nicolle@onera.fr.

References

1. F. Roddier, ed., *Adaptive Optics in Astronomy* (Cambridge U. Press, Cambridge, England, 1999).
2. G. Rousset, in *Adaptive Optics in Astronomy*, F. Roddier, ed. (Cambridge U. Press, Cambridge, England, 1999), Chap. 5, pp. 91–130.
3. M. Van Dam and R. Lane, *J. Opt. Soc. Am. A* **17**, 1319 (2000).
4. T. Noël, "Caractérisation spatiale et temporelle de la turbulence atmosphérique par analyse de surface d'onde," Ph.D. dissertation (Université Paris VI, Paris, 1997).
5. J. J. Arines, *Opt. Lett.* **27**, 497 (2002).
6. G. Rousset, J. Primot, and J.-C. Fontanella, in *Workshop on "Adaptive Optics in Solar Observations,"* Lest Foundation Tech. Rep. 28 (University of Oslo, Oslo, Norway, 1987), pp. 17–33.
7. P. Wizinowich, D. S. Acton, O. Lai, J. Gathright, W. Lupton, and P. Stomski, *Proc. SPIE* **4007**, 2 (2000).
8. G. Rousset, F. Lacombe, P. Puget, N. Hubin, E. Gendron, T. Fusco, R. Arsenault, J. Charton, P. Gigan, P. Kern, A.-M. Lagrange, P.-Y. Madec, D. Mouillet, D. Rabaud, P. Rabou, E. Stadler, and G. Zins, *Proc. SPIE* **4839**, 140 (2002).
9. T. Fusco, M. Nicolle, G. Rousset, V. Michau, J.-L. Beuzit, and D. Mouillet, "Optimisation of Shack–Hartmann wave front for extreme adaptive optics systems," in *Advancement of Adaptive Optics*, *Proc. SPIE* **5490** (SPIE, Bellingham, Wash., to be published).

11.1 Erreurs statiques

A l'instar des études menées pour le centre de gravité (cf § 10.1), nous allons considérer successivement l'effet de la taille du support de calcul de l'estimateur, puis l'effet de sa pixélisation. Nous nous limiterons cependant ici au cas d'un spot gaussien.

Les deux études présentées dans cette partie sont réalisées en l'absence de toute source de bruit. On traite les deux estimateurs définis au paragraphe précédent. Toutefois, dans le cas de l'estimateur ML, l'absence de bruit nous autorise à remplacer dans nos modélisations le recentrage itératif de la pondérante par une estimation en une seule étape, la pondérante étant directement centrée sur la position réelle du spot.

Le spot et la mesure sont considérés sur un support bi-dimensionnel, mais par soucis de simplicité, on considère un déplacement uniquement le long de l'un des axes principaux du support carré. Travaillant avec des spots à profil gaussien, on pourra toutefois, du fait de la séparation des variables, extrapoler totalement les résultats obtenus au cas d'un déplacement bi-dimensionnel.

11.1.1 Effet de la taille du support

Soit $\mathcal{I}(x, y)$ l'intensité lumineuse d'un spot à profil gaussien, centré en $(x_0, 0)$:

$$\mathcal{I}(x, y) = \frac{N_{ph}}{2\pi\sigma_T^2} e^{-((x-x_0)^2+y^2)/2\sigma_T^2}, \quad \iint_{-\infty}^{\infty} \mathcal{I}(x, y) dx dy = N_{ph} \quad (11.2)$$

Considérons la pondérante à profil gaussien, de largeur non déterminée, décrite par l'expression :

$$\mathcal{W}(x, y) = \frac{\mathcal{W}_0}{2\pi\sigma_W^2} e^{-(x^2+y^2)/2\sigma_W^2} \quad (11.3)$$

11.1.1.1 Pondérante centrée sur la position vraie du spot (\sim estimateur ML)

Dans ce cas, l'équation (11.3) devient :

$$\mathcal{W}(x, y) = \frac{\mathcal{W}_0}{2\pi\sigma_W^2} e^{-((x-x_0)^2+y^2)/2\sigma_W^2}$$

L'image traitée par barycentre, c'est-à-dire le spot pondéré, s'exprime alors :

$$\mathcal{J}(x, y) = \frac{N_{ph} \mathcal{W}_0}{4\pi^2 \sigma_T^2 \sigma_W^2} e^{-((x-x_0)^2+y^2)/2\sigma_{eq}^2}, \quad \text{avec : } \frac{1}{\sigma_{eq}^2} = \frac{1}{\sigma_T^2} + \frac{1}{\sigma_W^2}$$

Le centre de gravité du spot pondéré s'exprime, dans la direction du déplacement :

$$C_x = \frac{1}{\mathcal{J}_0} \iint_{-\ell}^{\ell} x \mathcal{J}(x, y) dx dy, \quad \text{Avec : } \mathcal{J}_0 = \iint_{-\ell}^{\ell} \mathcal{J}(x, y) dx dy \quad (11.4)$$

La résolution de cette équation donne l'expression suivante pour C_x (cf annexe C.3 pour le détail des calculs) :

$$Cp_x = x_0 + \sigma_{eq} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\left(\frac{\ell+x_0}{\sigma_{eq}\sqrt{2}}\right)^2} - e^{-\left(\frac{\ell-x_0}{\sigma_{eq}\sqrt{2}}\right)^2}}{\Phi\left(\frac{\ell+x_0}{\sigma_{eq}\sqrt{2}}\right) + \Phi\left(\frac{\ell-x_0}{\sigma_{eq}\sqrt{2}}\right)} \quad (11.5)$$

$$\text{Où la fonction } \Phi \text{ est définie par : } \Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du$$

Le biais de l'estimation de position est identique à celui de l'estimateur centre de gravité (cf. § 10.1.1.1, eq. 10.3), à ceci près que l'écart-type de la tache image σ_T est remplacé par celui de la tache pondérée σ_{eq} . Comme le montre la figure (11.2), ce point est favorable à l'estimateur CdG pondéré. En effet, la FWHM du spot pondéré est inférieure à la largeur originelle du spot. Le terme de non-linéarité de l'estimateur barycentre pondéré est donc moins important que celui du barycentre simple.

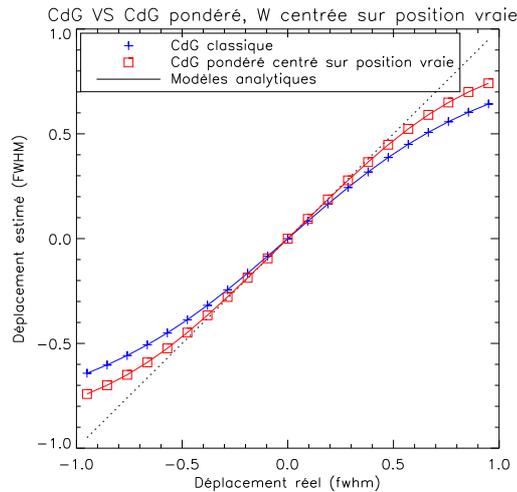


FIG. 11.2 – Comparaison de l'erreur de linéarité du centre de gravité classique et du centre de gravité pondéré, la pondérante étant centrée sur la position vraie du spot (estimateur ML).

Remarque : Pour x_0 et σ_{eq} fixés, on retrouve :

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-\left(\frac{\ell+x_0}{\sigma_{eq}\sqrt{2}}\right)^2} - e^{-\left(\frac{\ell-x_0}{\sigma_{eq}\sqrt{2}}\right)^2}}{\Phi\left(\frac{\ell+x_0}{\sigma_{eq}\sqrt{2}}\right) + \Phi\left(\frac{\ell-x_0}{\sigma_{eq}\sqrt{2}}\right)} \right] = 0 \quad \text{d'où : } \lim_{\ell \rightarrow \infty} C_x = x_0$$

11.1.1.2 Pondérante centrée sur le centre du détecteur

Cette étude peut être menée en choisissant un point quelconque du détecteur comme centre de la pondérante. Le paramètre important est la distance entre le centre du spot et celui de la pondérante. Toutefois, deux positions revêtent un intérêt particulier :

- La référence de la sous-pupille considérée, qui correspond par définition à la position du spot pour un front d'onde incident plan.
- La position du spot à la trame précédente, qui permet de tirer parti de la corrélation temporelle de la turbulence.

Cette étude a été réalisée en l'absence de turbulence, pour un système optique parfait. On a donc choisi de centrer la pondérante sur le centre du détecteur. Dans ce cas, le spot pondéré s'exprime :

$$\mathcal{J}(x, y) = \frac{N_{ph} W_0}{4\pi^2 \sigma_T^2 \sigma_W^2} e^{-((x-x_0)^2+y^2)/2\sigma_T^2} \cdot e^{-(x^2+y^2)/2\sigma_W^2}$$

Le centre de gravité du spot pondéré est toujours donné par l'expression (11.4) :

$$C_x = \frac{1}{\mathcal{J}_0} \iint_{-\ell}^{\ell} x \mathcal{J}(x, y) dx dy, \text{ Avec : } \mathcal{J}_0 = \iint_{-\ell}^{\ell} \mathcal{J}(x, y) dx dy$$

Et la résolution de cette équation donne l'expression suivante pour C_x (cf annexe C.3 pour le détail des calculs) :

$$C_x = \left(\frac{\sigma_W^2}{\sigma_T^2 + \sigma_W^2} \right) x_0 + \sigma_{eq} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\left(\frac{\ell}{\sigma_{eq}\sqrt{2}} + x_0 \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_T^2\sqrt{2}}\right)^2} - e^{-\left(\frac{\ell}{\sigma_{eq}\sqrt{2}} - x_0 \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_T^2\sqrt{2}}\right)^2}}{\Phi\left(\frac{\ell}{\sigma_{eq}\sqrt{2}} + x_0 \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_T^2\sqrt{2}}\right) + \Phi\left(\frac{\ell}{\sigma_{eq}\sqrt{2}} - x_0 \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_T^2\sqrt{2}}\right)} \quad (11.6)$$

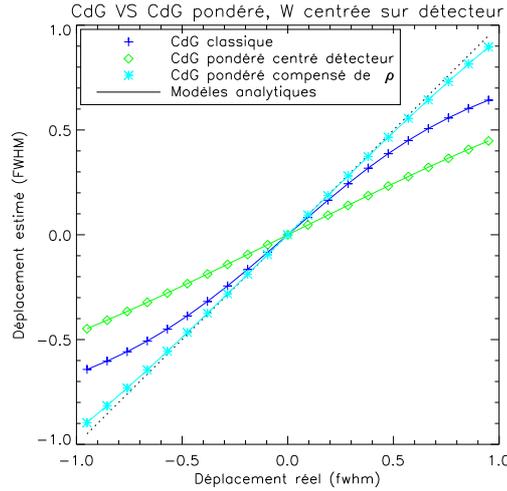


FIG. 11.3 – Comparaison de l'effet de taille de support pour le centre de gravité classique et le centre de gravité pondéré, la pondérante étant centrée sur la position de référence de la sous-pupille.

Lorsque la pondérante reste centrée sur le détecteur sans suivre le spot dans ses déplacements, la réponse de l'estimateur contient à la fois un élément de non linéarité $\nu(x_0)$, de même forme que celui que l'on a mis en évidence au paragraphe précédent pour une pondérante centrée sur la position vraie du spot, et un coefficient de réponse ρ différent de l'unité. Comme le montre la figure (11.3), ce dernier point est susceptible de causer de fortes erreurs dès que le spot bouge. Toutefois, il est possible de connaître la valeur de ρ et d'en tenir compte : on connaît la largeur à mi-hauteur de la pondérante, puisque c'est nous qui l'imposons, et la largeur du spot peut être déduite simplement d'une mesure du paramètre de Fried de la turbulence ou de l'intégration d'une image longue pose du spot Hartmann (prenant la précaution de recentrer celui-ci).

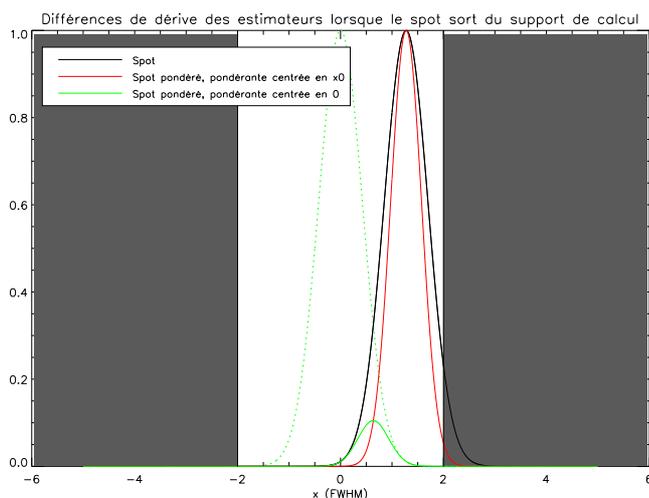


FIG. 11.4 – Différences de largeur et de position de l'image sur laquelle le barycentre est calculé en fonction de l'estimateur considéré.

La figure (11.3) montre l'effet de la correction du coefficient de réponse de l'estimateur, toujours pour un spot gaussien et une pondérante de même profil que le spot. Comme au paragraphe précédent, la linéarité de l'estimateur CdGP est alors meilleure que celle du simple CdG. Mais elle est aussi meilleure que celle de l'estimateur ML. Ceci est dû au fait que le spot pondéré est plus proche du centre du détecteur lorsque la pondérante est centrée sur le détecteur. La figure (11.4) montre les formes et positions relatives du spot, du spot pondéré de l'estimateur ML et met clairement en évidence le fait que dans le dernier cas (celui que nous traitons dans ce paragraphe), le spot pondéré est moins tronqué par le support.

11.1.2 Effet de la taille des pixels

Le fait que le détecteur soit pixélisé revêt plus d'importance lorsqu'on souhaite pondérer le spot avant de faire la mesure. En effet, un effet délétère du processus de pondération est de diminuer la largeur à mi-hauteur du spot traité. La taille des pixels étant définie par rapport à la PSF d'une sous-pupille, lorsque celle-ci est échantillonnée à Shannon, le spot pondéré, hors turbulence, est lui légèrement sous-échantillonné. Or on a vu au chapitre précédent (cf. § 10.1.2) que dès que le spot est échantillonné à moins que Shannon, une erreur de non-linéarité périodique apparaît, la période coïncidant avec la taille du pixel.

On retrouve ce phénomène dans le cas du spot pondéré, comme le montre la figure (11.5), représentant l'erreur d'estimation de la position d'un spot gaussien en fonction de son déplacement réel. Le spot non pondéré est échantillonné à Shannon/2 (pas pixel = $FWHM_T$). Cette figure représente sur un même graphique les effets de non linéarité subis par l'estimateur centre de gravité (cf. § 10.1.2 pour les explications) et ceux qui affectent l'estimation par pondération du spot, la pondérante ayant la même largeur à mi-hauteur que le spot. Une troisième courbe montre les effets de non linéarité affectant l'estimation de position par simple barycentre d'un spot de largeur à mi-hauteur $FWHM_T/\sqrt{2}$.

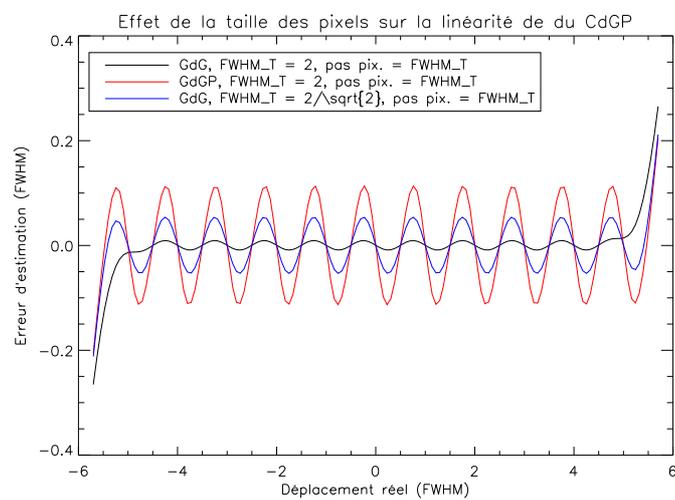


FIG. 11.5 – Comparaison l'effet de la taille des pixels pour le centre de gravité classique et le centre de gravité pondéré, la pondérante étant centrée sur la position vraie du spot.

On note deux phénomènes :

- Les amplitudes de la fonction de non-linéarité sont effectivement plus importantes dans le cas du barycentre pondéré (courbe rouge de la figure 11.5) que dans le cas du simple barycentre (courbe noire). La période de ses oscillations elle ne varie pas, puisqu'elle est liée à la taille des pixels (cf. § 10.1.2).
- On note de plus que l'amplitude des oscillations de l'erreur d'estimation est environ deux fois plus importante dans le cas de la mesure du barycentre du spot pondéré que dans le cas de la mesure du barycentre d'un spot de largeur à mi-hauteur $FWHM_T/\sqrt{2}$. Cette différence vient de l'ordre dans lequel les opérations de traitement du spot sont effectuées dans l'un et l'autre cas :
 - Dans le cas du calcul du barycentre pondéré du spot (courbe rouge de la figure 11.5), le spot est ré-échantillonné par les pixels du détecteur avant d'être traité par la pondérante.
 - Le cas du calcul du barycentre du spot de FWHM égale à $FWHM_T/\sqrt{2}$ correspond en fait au cas où il serait possible de pondérer le spot *avant* son ré-échantillonnage par les pixels du détecteur.

Le fait de pondérer le spot après son ré-échantillonnage fait donc apparaître un erreur supplémentaire. Cette erreur n'est toutefois pas une limitation fondamentale de l'estimateur. En effet, on pourrait tout à fait envisager d'appliquer au spot un pré-traitement le sur-échantillonnant avant d'effectuer l'opération de pondération. Une telle opération serait cependant inévitablement coûteuse en temps, et peut-être difficilement implantable dans un algorithme de calcul en temps réel.

11.2 Erreurs statistiques

On étudie dans cette partie l'effet des dégradations du spot dues au bruit de photons, au bruit de détecteur et à la turbulence atmosphérique. Par soucis de simplicité et de clarté, on restreint cette étude au cas d'un système d'optique adaptative fonctionnant en boucle fermée. Le spot reste alors toujours centré au proche voisinage de la position de référence de la sous-pupille, et, pour peu que l'on tienne compte de la modification du coefficient de réponse de l'estimateur, on peut laisser la pondérante du spot centrée sur la position de référence sans commettre d'erreur importante. On ne traitera donc ici que du second type de CdG pondéré évoqué en introduction de ce chapitre : celui où la pondérante reste fixe dans le champ de calcul du CdG pondéré.

11.2.1 Bruits de mesure

11.2.1.1 Expressions analytiques

A l'instar de ce qu'a fait G. Rousset [Rousset 1999] pour l'estimateur centre de gravité, nous avons exprimé les lois de comportement de la variance de l'erreur d'estimation de la pente locale du front d'onde lorsque l'estimateur de position est le centre de gravité pondéré. L'article [Nicolle et al. 2004] présente les lois d'évolution de la variance de la pente résiduelle en fonction du flux, lorsque le spot et la pondérante sont tous deux gaussiens et que la pondérante est centrée sur la position de référence de la sous-pupille. On obtient les lois de comportement suivantes :

$$\text{Bruit de photons : } \sigma_{\Delta\phi, phot}^2 \text{ CdGP} = \frac{\pi^2}{2\ln 2 N_{ph}} \left(\frac{N_T}{N_D} \right)^2 \left(\frac{N_T^2 + N_W^2}{2N_T^2 + N_W^2} \right)^2 \quad (11.7)$$

$$\text{Bruit de détecteur : } \sigma_{\Delta\phi, det}^2 \text{ CdGP} = \frac{\pi^3}{32 (\ln 2)^2} \left(\frac{\sigma_{det}}{N_{ph}} \right)^2 \left(\frac{N_T^2 + N_W^2}{N_D} \right)^2 \quad (11.8)$$

Avec :

- N_D : Largeur à mi-hauteur de la tache de diffraction en pixels : $N_D = \frac{(\lambda f/d)}{p}$, où p est le pas d'un pixel ;
- N_T : Largeur à mi-hauteur du spot (en pixels) ;
- N_W : Largeur à mi-hauteur de la fonction de pondération (en pixels).

Les lois de comportement données par les équations (11.7) et (11.8) sont très semblables à celles du centre de gravité classique (Eqs. 10.8 et 10.9). La principale différence est le comportement en présence de bruit de détecteur. En effet, l'équation (11.8) montre que la variance résiduelle ne dépend plus de la taille du support utilisé pour le calcul comme dans le cas du CdG (cf eq. 10.9) mais de la FWHM de la fonction de pondération. Ce point se comprend aisément car c'est ici la pondérante qui joue le rôle de fenêtre à bords doux. L'intérêt de la pondération est de permettre la prise en compte, même en faible proportion, de pixels éloignés du centre du spot et contenant de l'information. Notons toutefois que l'équation (11.8) n'est valide que dans le cas où la FWHM de la pondérante reste inférieure au champ disponible pour le calcul du barycentre pondéré. Lorsque que ce n'est plus le cas, on retrouve un comportement typique du barycentre classique (cf. § 10.2.1).

En présence de bruit de photons, la variance résiduelle garde le même profil que pour un barycentre classique (bruit proportionnel à $1/N_{ph}$, cf. § 10.2). Cependant, pour le cas particulier $N_W = N_T$, elle est inférieure d'un facteur 9/4 à la variance obtenue dans le cas d'un simple calcul de barycentre. Ceci ne doit pas surprendre : l'estimateur centre de gravité est bien l'estimateur *non biaisé* optimal en présence de bruit de photons (cf. § 9.2.3.1). Mais on a montré plus haut (§ 11.1.1.2) que sans précaution, l'estimateur avec pondération est précisément biaisé lorsque la pondérante n'est pas centrée sur le spot. Pour débiaiser l'estimateur, il faut corriger son coefficient de réponse [Thomas et al. 2006]. En exprimant la mesure du centre de gravité pondéré comme :

$$\mathbf{x}_{mes} = \frac{1}{\rho} \hat{\mathbf{x}}_0 = \frac{\sigma_T^2 + \sigma_W^2}{\sigma_W^2} \hat{\mathbf{x}}_0 \quad (11.9)$$

$$\text{On obtient : } \sigma_{\Delta\phi, phot}^2 \text{ CdGP, débiaisé} = \frac{\pi^2}{2\ln 2 N_{ph}} \left(\frac{N_T}{N_D} \right)^2 \frac{(N_T^2 + N_W^2)^4}{(2N_T^2 + N_W^2)^2 N_W^4} \quad (11.10)$$

$$\sigma_{\Delta\phi, det}^2 \text{ CdGP, débiaisé} = \frac{\pi^3}{32 (\ln 2)^2} \left(\frac{\sigma_{det}}{N_{ph}} \right)^2 \frac{(N_T^2 + N_W^2)^4}{N_D^2 N_W^4} \quad (11.11)$$

La figure (11.6) compare la variance de l'erreur d'estimation de pente avec centre de gravité pondéré, corrigé ou non de son coefficient de réponse, à celle que l'on obtient par calcul d'un simple centre de gravité. Ces courbes ont été obtenues par simple tracé des lois données par les équations (11.10, 11.11, 11.7, 11.8, 10.9 et 10.10), dans le cas particulier où $N_W = N_T$. Conformément à ce que l'on pouvait attendre, le CdGP est bien l'estimateur gérant le mieux le bruit de détecteur,

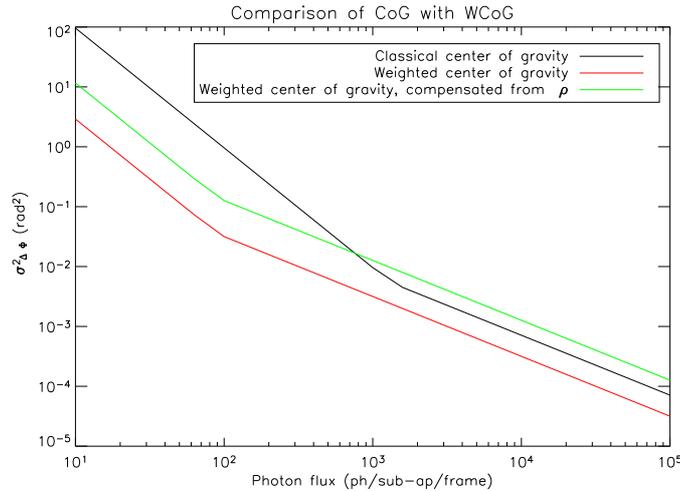


FIG. 11.6 – Variance de l’erreur d’estimation de pente avec centre de gravité pondéré, corrigé ou non de son coefficient de réponse ; comparaison avec le centre de gravité classique. Champ utilisé pour le calcul : $2 \times FWHM_T$; échantillonnage à Shannon ; spot et pondérante gaussiens ; bruit de photons et bruit de détecteur, avec $\sigma_{det} = 3 e^-/\text{pix} / \text{trame}$.

y compris lorsqu’il est corrigé de son coefficient de réponse. L’estimateur centre de gravité sans pré-traitement du spot reste, lui, l’estimateur non biaisé optimal en régime dominé par le bruit de photons.

Cependant, d’après les équations (11.10) et (11.11), les effets du bruit de photons et du bruit de détecteur sur la variance de l’erreur d’estimation de la pente locale du front d’onde dépendent de la FWHM de la pondérante. La figure (11.7) représente l’évolution de la variance de l’erreur d’estimation de la pente locale du front d’onde en fonction de la FWHM de la pondérante, pour différents flux de photons et pour un spot gaussien. Cette figure montre qu’à flux fixé, il existe une largeur à mi-hauteur optimale permettant de minimiser l’effet des bruits de photons et de détecteur. Dans le cas présenté ici d’un spot gaussien, plus le flux de photons est fort, plus la FWHM optimale augmente, si bien qu’à très fort flux, on gagne à ne plus pondérer le spot avant calcul de son barycentre.

Ces résultats sont légèrement modifiés par la forme du spot. En effet, on a vu au paragraphe précédent que lorsque la FWHM de la pondérante augmente, le comportement du CdGP tend vers celui du CdG. L’équation (11.7) n’est alors plus valide et tend vers la limite donnée par l’équation (10.12) du chapitre précédent. La figure (11.8) montre la conséquence de cet effet : les courbes représentant la variance de l’erreur d’estimation en fonction de la FWHM de la pondérante sont légèrement plus piquées, et même à fort flux, on gagne légèrement à optimiser la FWHM de la pondérante.

11.2.2 Fluctuations turbulentes de la forme du spot

Cette étude s’appuie sur l’article [Thomas et al. 2006], dans lequel une analyse similaire à celle qui est présentée ci-dessus est réalisée à fort flux, afin d’établir un compromis entre les effets du bruit de photons et les effets liés à la turbulence atmosphérique sur la performance du CdG pondéré. La figure (11.9 - a), tirée de [Thomas et al. 2006], montre l’effet des fluctuations turbulentes de la forme

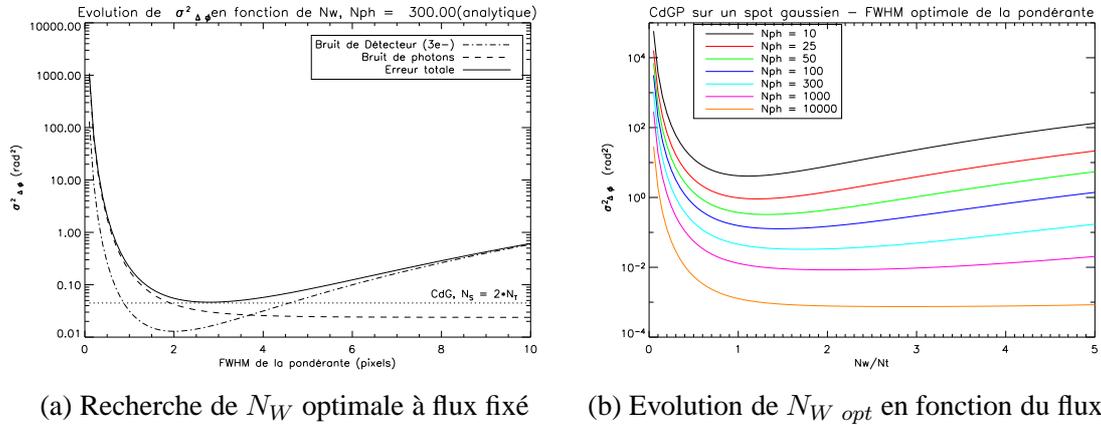


FIG. 11.7 – Evolution de la variance de l'erreur d'estimation de la pente locale du front d'onde en fonction de la FWHM de la pondérante, selon le flux de photons. Bruit de photons et bruit de détecteur, avec $\sigma_{det} = 3 e^- / \text{pix.} / \text{trame}$.

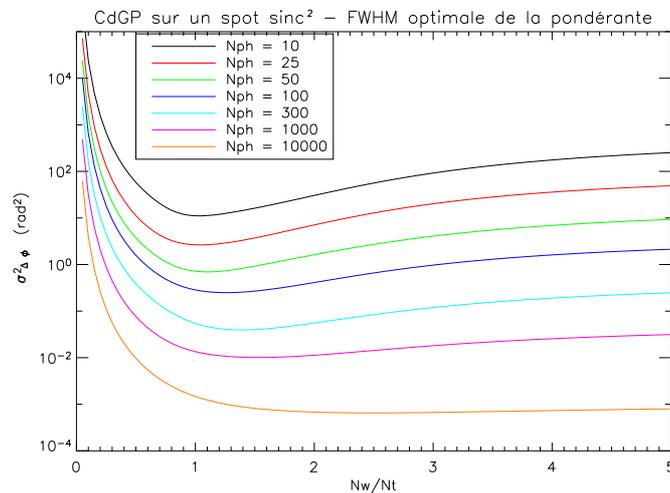


FIG. 11.8 – Optimisation de la FWHM de la pondérante en fonction du flux, pour un spot à profil $sinc^2$. Bruit de photons et bruit de détecteur, avec $\sigma_{det} = 3 e^- / \text{pix.} / \text{trame}$.

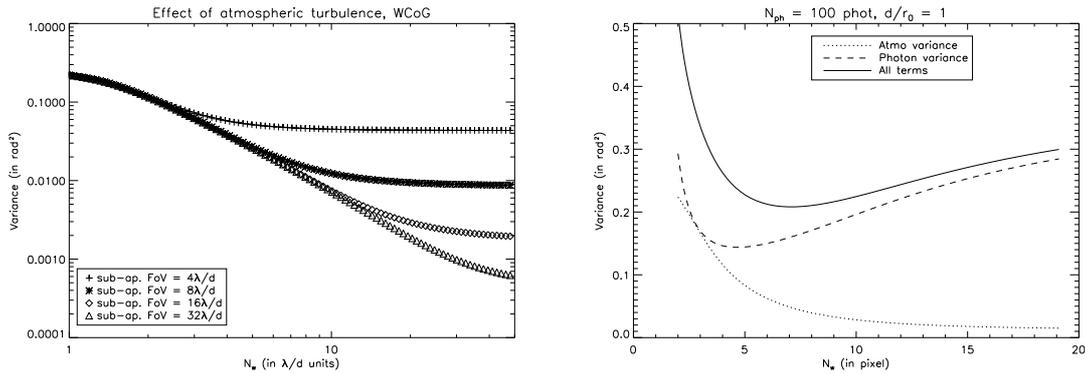


FIG. 11.9 – Optimisation de la FWHM de la pondérante pour un spot turbulent.

du spot sur la variance de l'erreur d'estimation de la pente locale du front d'onde, en fonction de la FWHM de la pondérante et de la taille du support de calcul du CdGP. A l'instar de ce qui a été vu au chapitre 10 pour l'estimateur centre de gravité, la variance de l'erreur d'estimation dépend du champ utile pour le calcul du centre de gravité. Cependant, dans le cas du CdG pondéré, la notion de champ utile doit être redéfinie : la figure (11.9 - a) montre que lorsque la FWHM de la pondérante est faible devant la taille du support de calcul du CdGP, ce n'est plus cette dernière qui importe mais la largeur à mi-hauteur de la pondérante. De fait, [Thomas et al. 2006] montre que la loi d'évolution de la variance en fonction de l'intensité de la turbulence devient, pour l'estimateur CdGP :

$$\sigma_{\Delta\phi}^2 \propto (4N_W^{-2} + N_S^{-2}) \left(\frac{d}{r_0} \right)^{5/3} \quad (11.12)$$

Dès lors, il est possible, à fort flux, de déterminer une FWHM permettant de faire un compromis entre le bruit de photons et les effets liés à la turbulence. C'est ce que montre la figure (11.9 - b), extraite de [Thomas et al. 2006].

Que ce soit pour gérer au mieux le bruit de détecteur ou la turbulence, il est donc toujours possible d'optimiser la FWHM de la fonction de pondération afin de minimiser la variance de l'erreur d'estimation de la pente locale du front d'onde. Cette optimisation s'apparente formellement à l'optimisation du seuillage lors du calcul d'un simple CdG. Toutefois, il s'agit ici d'une opération purement logicielle, simple de mise en œuvre et de meilleure linéarité que le seuillage.

11.3 Validation expérimentale

Suite aux études ayant mené à la publication de l'article [Nicolle et al. 2004], l'estimateur centre de gravité pondéré a été proposé comme algorithme pour le senseur Shack-Hartmann de l'instrument SPHERE [Fusco et al. 2006, Fusco et al. 2006]. Une étude expérimentale a alors été menée pour valider les lois de comportement de l'estimateur. Cette expérience a été menée au LAOG, à Grenoble, sous la direction de Jean Luc Beuzit et avec le concours de Guillaume Montagnier. Les pages qui suivent reproduisent le rapport de validation expérimentale qui a été inclus dans les annexes de la revue de Phase A de l'instrument SPHERE, appelé alors VLT Planet Finder.

Rapport d'expérience sur le traitement des imagettes d'un Shack-Hartmann :

M. Nicolle

8 octobre 2004

Table des matières

1 Description de l'expérience :	1
2 Confrontation de l'expérience et de la simulation :	1
2.1 CDG fenêtré :	1
2.2 CDG pondéré :	4
3 Comparaison COG / WCOG :	7
4 Conclusions :	8

1 Description de l'expérience :

L'expérience a été montée au LAOG par Guillaume Montagnier dans le cadre d'une étude des effets du déplacement de la pupille du télescope sur la mesure du front d'onde par un Shack-Hartmann (étude pour VLT-PF). G.M. a travaillé sur un ASO Shack-Hartmann constitué de 40×40 sous-pupilles carrées et au plan focal desquelles se trouvait un détecteur 1024×1024 pixels.

Nous avons profité de cette expérience pour récupérer les données correspondant à la zone centrale du Shack, correspondant à un éclairage uniforme des sous-pupilles. Les images récupérées sont caractérisées par :

- 8×8 sous-pupilles ;
- 16×16 pixels par sous-pupille ;
- $\sigma_{lect} \simeq 114 e^- / \text{pixel} / \text{trame}$.
- ASO éclairé en lumière blanche, en incidence normale et sans turbulence (front d'onde plan) ;
- $N_D = N_T \approx 6$ pixels du détecteur (Echantillonnage à Shannon $\times 3$)
- Le champ par sous-pupille est donc : $FOV \approx 2.7 \times \frac{\lambda}{d}$ soit à peine plus de la largeur totale du pic central de diffraction ($2.44 \times \frac{\lambda}{d}$).

Nous avons récupéré pour cette portion de détecteur 100 images de 128×128 pixels, et ce pour différentes valeurs du flux incident. Nous avons également récupéré les fonds correspondants.

2 Confrontation de l'expérience et de la simulation :

2.1 CDG fenêtré :

Nous allons dans un premier temps confronter les résultats de l'expérience avec ceux de sa simulation numérique par un modèle E2E et avec les modèles analytiques de comportement.

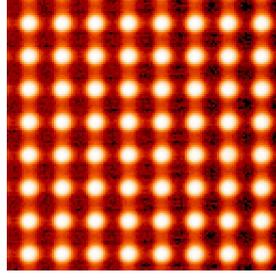


FIG. 1 – Moyenne des images récupérées à Grenoble. 8×8 sous pupilles avec chacune 16×16 pixels au plan focal.

Dans le cadre de l'expérience, la donnée à laquelle nous avons directement accès est la variance du décalage entre la position du CDG et la référence (en pixels). L'expression analytique de la variance du CDG, exprimée en pixels, est :

$$(\sigma_{\Delta C_x}^2)_{th}^{COG} = \underbrace{\frac{N_T^2}{8 \ln(2) N_{ph}}}_{Photon} + \underbrace{\left(\frac{\sigma_{det}}{N_{ph}}\right)^2 \cdot \left(\frac{N_S^4}{12}\right)}_{Detecteur} \quad (1)$$

N_T est la FWHM du spot en pixels et N_S est la taille de la fenêtre en pixels. En utilisant cette relation, on confronte sur la figure 2 les modèles analytiques et numériques à l'expérience. Ces courbes permettent de tirer plusieurs conclusions :

- ★ Les résultats des tests pour $N_S = 4$ et $N_S = 6$ ne sont pas satisfaisants ; En effet, si la simulation donne des résultats identiques à ceux du traitement des images expérimentales, les deux séries sous-estiment les variances d'erreur de mesure, en particulier à fort flux, c'est-à-dire dans le domaine où le bruit de photon devient prépondérant. Ce résultat n'est pas surprenant si l'on considère que l'on tente de mesurer la position d'une PSF en la fenêtrant sur moins de la moitié de sa FWHM ($N_D \simeq 6$). Dans ce cas, l'hypothèse de support infini qui sous-tend la dérivation de la partie bruit de photons de l'équation 1 n'est plus valide. On peut ajouter qu'ici le résultat de la mesure ne semble meilleur que parce que l'on travaille en absence de turbulence. En toute rigueur, il n'est pas pertinent de mesurer la position d'une PSF sur une fenêtre couvrant moins de sa tache centrale (ce qui nous amènerait à $N_S \geq 12$). En tout état de cause nous nous bornerons dans la suite à des cas $N_S \geq 8$ pixels.
- ★ Lorsque l'on augmente la taille de la fenêtre, points expérimentaux, simulation et bruit théorique suivent la même loi. On remarque cependant qu'aux faibles flux la mesure perd en stabilité. Plus on augmente la taille de la fenêtre et plus ce phénomène perdure lorsque le flux augmente. Ceci a déjà été repéré lors de l'étude du Shack-Hartmann numérique et est dû au bruit de détecteur. On avait alors mentionnée la possibilité de limiter ce problème en introduisant dans le traitement de l'image une compensation des fluctuations de l'intensité totale du spot.
- ★ Pour les résultats expérimentaux à très forts flux, on observe un accroissement sensible de la variance de l'erreur de mesure lorsque l'on augmente la taille de la fenêtre. Nous avons tenté de vérifier que cela ne vient pas d'un recouvrement des PSFs issues des différentes sous-pupilles. Une simulation de ce problème de recouvrement n'a pas permis de retrouver ce phénomène. L'hypothèse d'un changement de conditions entre la prise du fonds et la mesure pourrait expliquer le problème, qui n'intervient que lorsque l'on incorpore au calcul des pixels ayant un faible RSB.

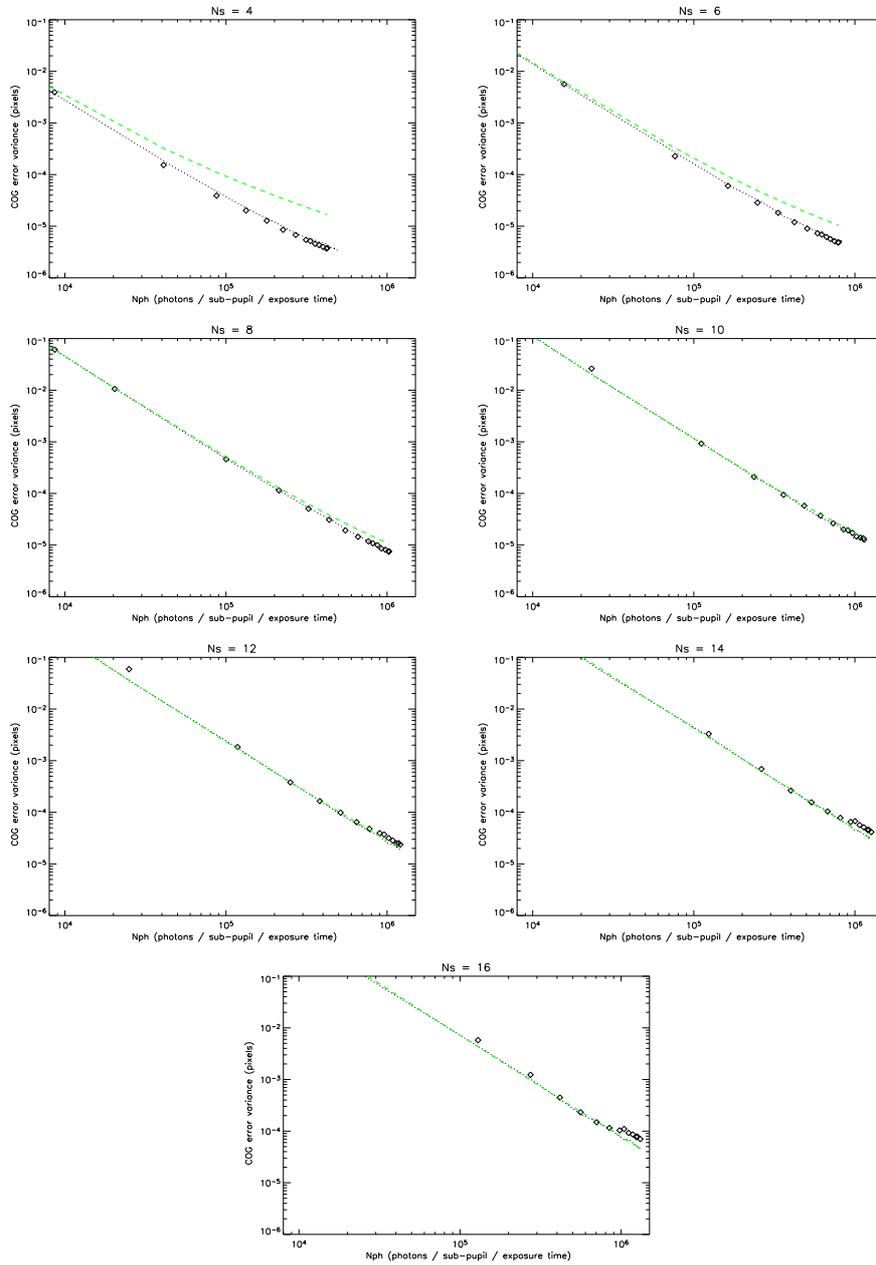


FIG. 2 – Confrontation Simulation / Expérience sur le cas du CDG fenêtré.
 \diamond : Points expérimentaux; \cdots : Simulation numérique, $---$: Modèle analytique.

2.2 CDG pondéré :

Conformément à ce qui a été exposé précédemment sur le sujet, le centre de gravité pondéré s'exprime :

$$(C_{WCOG})_x = \frac{\sum_{i,j} x_{ij} \cdot W_{ij} \cdot I_{ij}}{\sum_{i,j} W_{ij} \cdot I_{ij}} \quad (2)$$

Où W est la fonction de pondération (appelée dans la suite *pondérante*). Sa variance en pixels de détecteur s'exprime :

$$(\sigma_{\Delta C_x}^2)^{WCOG} = \underbrace{\frac{N_T^2}{8 \ln(2) \mathcal{N}_{ph}} \cdot \left(\frac{N_T^2 + N_W^2}{2N_T^2 + N_W^2} \right)^2}_{Photon} + \underbrace{\frac{\pi (N_T^2 + N_W^2)^2}{128 (\ln(2))^2} \cdot \left(\frac{\sigma_{det}}{\mathcal{N}_{ph}} \right)^2}_{Detecteur} \quad (3)$$

N_T est toujours la FWHM du spot et N_W est la FWHM de la pondérante. La figure 3 montre les premiers tests de validation de la mesure de position par CDG pondéré (WCOG). On y représente l'erreur de mesure obtenue en pondérant les images avec la moyenne des imagerie. La figure

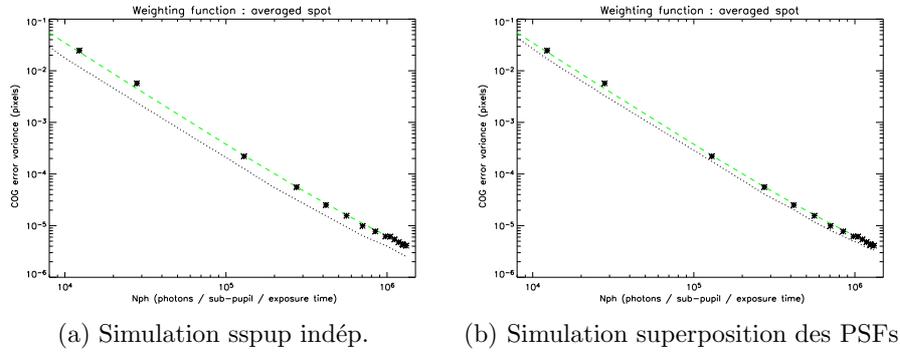


FIG. 3 – Confrontation Simulation / Expérience sur le cas du CDG pondéré, la pondérante étant l'image moyenne. [*] : Points expérimentaux ; [···] : Simulation numérique, [---] : Modèle analytique.

(3) montre l'adéquation entre les résultats expérimentaux, les lois analytiques correspondantes et la simulation numérique de l'expérience. Dans le cas de la première figure (3-a) la simulation considère que les sous-pupilles sont indépendantes 2 à 2. Dans le cas de la fig. (3-b) on a simulé le recouvrement mutuel des PSF issues des différentes sous-pupilles. On remarque que dans le premier cas de simulation le modèle numérique est optimiste : l'erreur de mesure est sous-estimée ; il est ici nécessaire de tenir compte du recouvrement des PSFs d'une sous-pupille à l'autre car le FOV par sous-pupille est trop faible.

La fig.(3-b) montre l'amélioration qu'apporte la prise en compte de ce phénomène dans la simulation numérique. Cette dernière est sensiblement améliorée, mais toutefois pas suffisamment pour décrire fidèlement les résultats expérimentaux. Ceci est certainement dû à la forme des spots expérimentaux. En effet, comme le montre la figure (4-b), la superposition des PSF n'explique qu'une partie de l'élargissement de ces spots, le reste pouvant être dû à d'éventuelles aberrations du système. L'examen des images moyennes sous-pupille par sous-pupille (fig. 4-a) ne révélant pas de différence notable dans la forme du spot d'une sous-pupille à l'autre, il est possible que le système soit légèrement défocalisé. Enfin, l'écart entre résultats expérimentaux et simulation numérique est plus visible avec le WCOG pondérant par l'image moyenne qu'avec le CDG fenêtré ou même le WCOG pondérant par une gaussienne (cf. fig. 5), simplement parce que dans le premier cas la forme du spot détermine aussi celle de la pondérante.

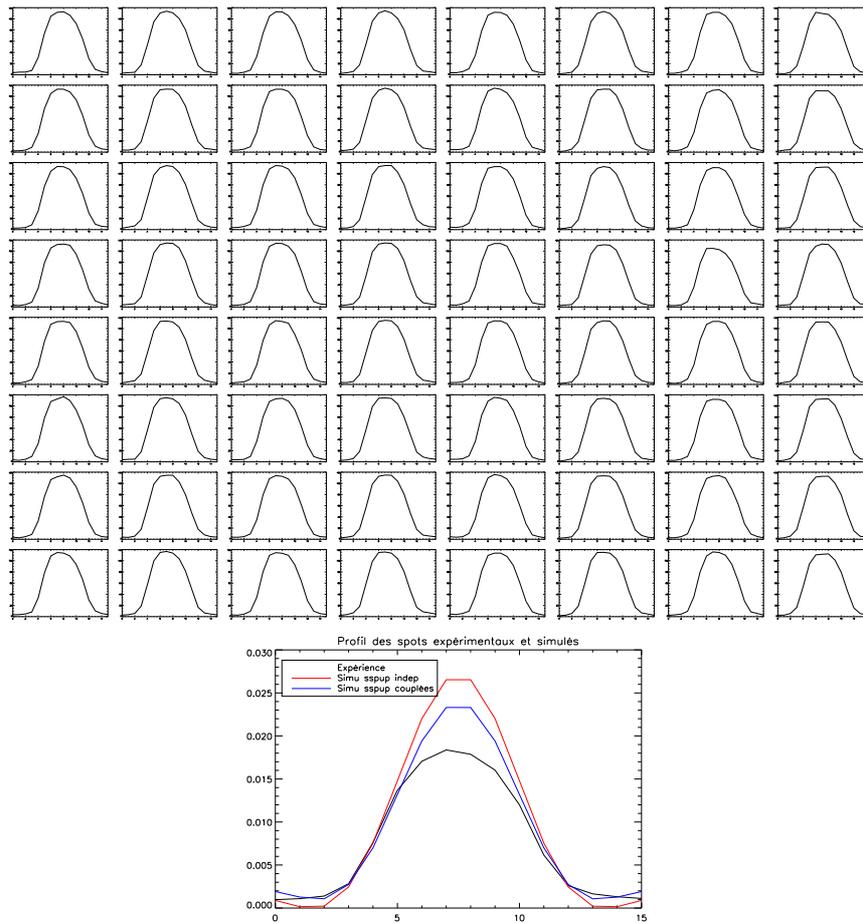


FIG. 4 – Vue en coupe des spots. En haut, coupe de la moyenne des spots sous-pupille par sous-pupille ; En bas moyennes des spots sur toutes les sous-pupilles [Noir], Simulation avec sous-pupilles indépendantes [Rouge] et Simulation avec repliement des PSFs [Bleu]

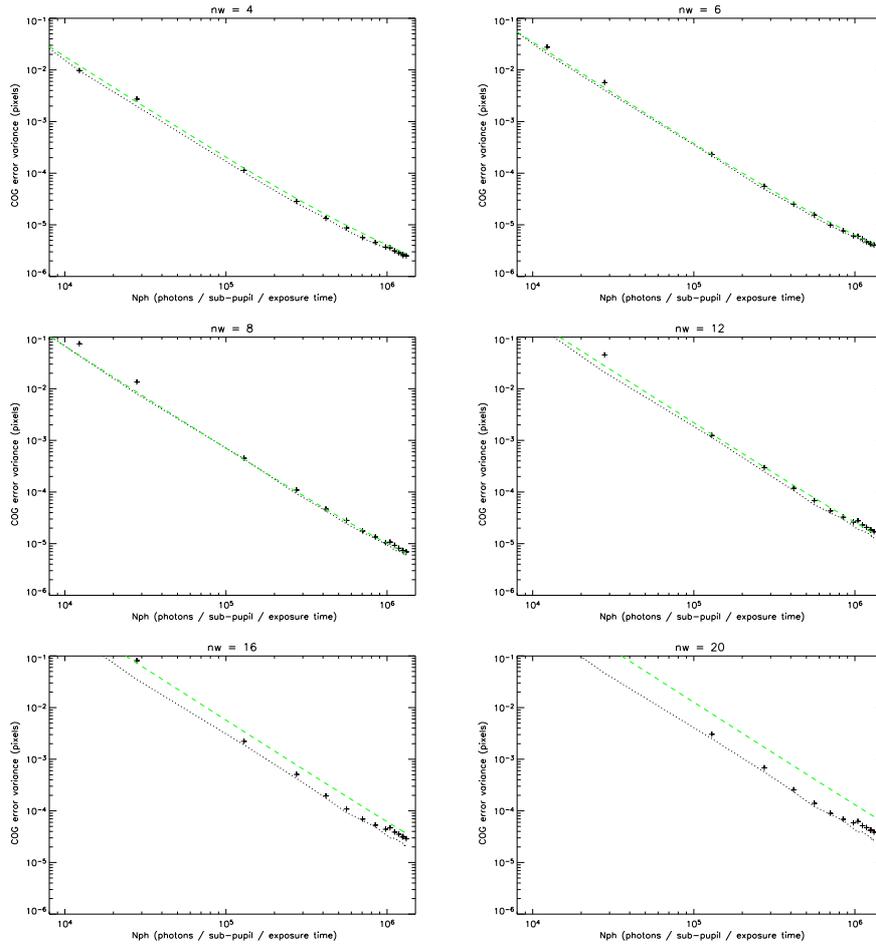


FIG. 5 – Confrontation Simulation / Expérience sur le cas du CDG pondéré. [+]: Points expérimentaux pour N_W variable; [\cdots]: Simulation numérique, [$-$]: Modèle analytique.

La figure 5 montre les tests de validation du comportement de l'estimateur CDG pondéré lorsque la FWHM de la pondérante augmente. On a pris en compte les interactions entre sous-pupilles et la pondérante est une gaussienne. On remarque plusieurs points :

- ★ Pour de petites valeurs de N_W ($N_W < 12$), points expérimentaux et modèles analytiques et numériques sont en bonne adéquation. On remarque ici comme précédemment qu'aux faibles flux la mesure perd en stabilité.
- ★ Pour $N_W > 12$ pixels, l'effet de support prend le dessus sur l'effet d'élargissement de la pondérante. La partie bruit de détecteur de la relation 3 ne décrit plus la situation car on sort de son domaine de validité, qui est restreint aux cas $N_T^2 + N_W^2 \leq N_S^2$.
- ★ La pondération par la tache image moyenne (fig.3-b) donne enfin d'excellents résultats, et est fittée par la courbe de bruit théorique correspondant à $N_W = 6$ pixels.

3 Comparaison COG / WCOG :

On compare maintenant figure 6 les performances du COG et du WCOG.

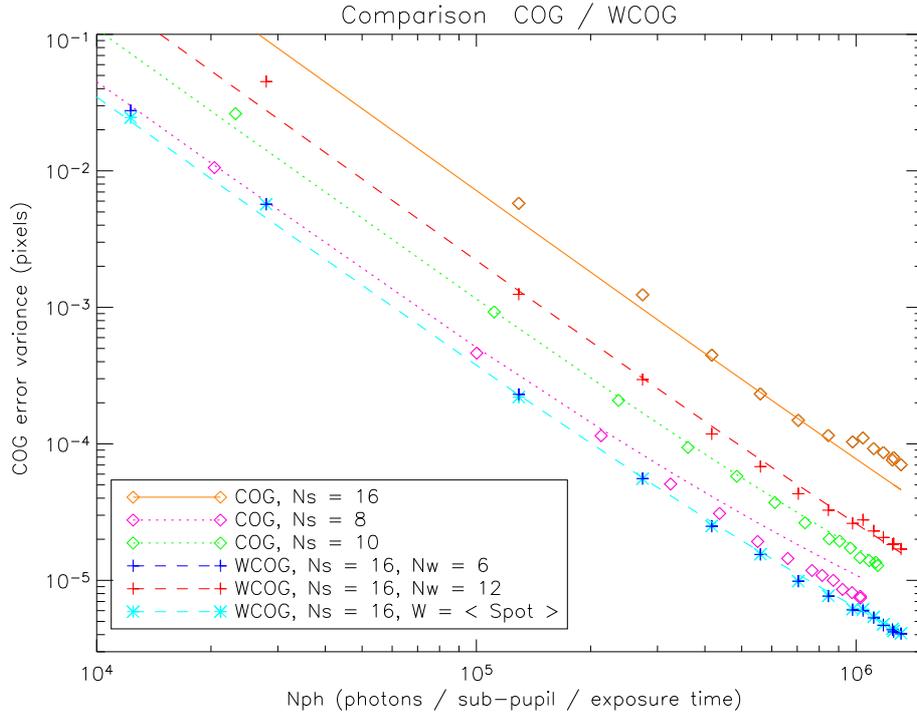


FIG. 6 – Comparaison COG / WCOG

On remarque qu'en régime de bruit de détecteur la pondération par l'image moyenne fait à peine mieux que le fenêtrage sur 8×8 pixels. Ceci est dû au fort sur-échantillonnage de la tache image. En effet, en régime de bruit de détecteur, $(\sigma_{\Delta C_X}^2)_{th}^{WCOG} / (\sigma_{\Delta C_X}^2)_{th}^{COG} \approx 1.3$ seulement. Pour avoir un gain meilleur, il est important d'avoir un FOV par sous-pupille plus important. Ceci sera également indispensable dans le cas du CDG fenêtré dès que l'on intéressera à des mesures en présence de turbulence (même faible).

4 Conclusions :

- ★ L'analyse des données récupérées a permis de montrer la bonne adéquation entre modèles analytiques, simulations numériques et résultats expérimentaux, dans le cas du CDG conventionnel comme dans celui du WCOG.
- ★ Le fort sur-échantillonnage du spot gêne l'évaluation des performances du CDG fenêtré et ne permet pas d'avoir un gain substantiel par l'utilisation du WCOG.
- ★ La dérive observée à fort flux n'a pas été expliquée. Il est possible qu'elle soit due à un brusque changement dans les conditions expérimentales (Déplacement d'un bafflage? Obsolescence du fond?).
- ★ Une seconde acquisition de données expérimentales serait bienvenue pour asseoir ces résultats. Si elle avait lieu, il serait utile de travailler dans une configuration plus classique, avec en particulier un spot échantillonné à Shannon et un champ par sous-pupille plus étendu ($4 \times \lambda/d$?). Il serait bienvenu à cette occasion de prendre en compte l'effet de la turbulence, tant pour le COG que pour le WCOG, dans la mesure où le positionnement relatif des paliers de saturation est important pour comparer leurs performances respectives. Cela pourrait enfin être l'occasion de tester la linéarité de l'estimateur WCOG.

11.4 Conclusion sur l'estimateur centre de gravité pondéré

L'estimateur centre de gravité pondéré présente des comportements différents de centre de gravité, seuillé ou non :

- Lorsqu'il est utilisé dans le but d'atteindre le maximum de vraisemblance (recentrage de la pondérante par itérations successives), son coefficient de réponse est égal à l'unité. De plus, le spot pondéré étant plus étroit que le spot brut, l'erreur de non linéarité est plus faible que dans la cas du CdG.
- Lorsque l'on se restreint à une estimation unique, la pondérante peut être centrée en un point quelconque du détecteur, bien qu'il soit préférable de la centrer soit sur la position de référence de la sous-pupille, soit sur la position occupée par le spot à la trame précédente. Dans ce cas, le coefficient de réponse du CdG pondéré est différent de l'unité, mais peut être connu et corrigé en connaissant simplement la largeur du spot.
- Contrairement à l'estimateur centre de gravité, le CdG pondéré n'est sensible à la taille du support ni en présence de bruit de détecteur, ni en présence de bruit de photons, même lorsque le spot a un profil sinc^2 . Cela permet de prendre en compte autant de pixels que l'on souhaite pour réaliser l'estimation de position du spot, et de prendre en compte l'information présente dans les pixels à mauvais rapport signal à bruit.
- Dans le cas du CdGP, c'est la pondérante qui fait office de fenêtrage du spot. Cela signifie que la variance de l'erreur d'estimation de la pente locale du front d'onde dépend de la largeur de la pondérante. Les lois de dépendance ont été écrites, et permettent de mettre en évidence l'existence d'une largeur optimale permettant de réaliser le meilleur compromis entre les termes liés au bruit de photons, au bruit de détecteur et aux déformations du spot sous l'effet de la turbulence. L'adaptation de la FWHM de la pondérante se fait par un processus purement logiciel, en fonction du flux incident, des caractéristiques géométriques du système et de l'intensité de la turbulence.
- Enfin, l'utilisation du CdG pondéré nécessite soit un échantillonnage du détecteur adapté à la taille du spot *pondéré*, soit une étape de pré-traitement sur-échantillonnant le spot avant sa pondération. Cependant, si par rapport à la tache de diffraction de la microlentille l'échantillonnage optimal est $\text{Shannon} \times \sqrt{2}$, on peut sans perte sensible de linéarité descendre à $\text{Shannon} / \sqrt{2}$.

Chapitre 12

Etude de la performance de l'estimation par corrélation

Le centre de gravité (Chap. 10) et le centre de gravité pondéré itératif (Chap. 11) sont les estimateurs optimaux au sens du maximum de vraisemblance de la position d'un spot gaussien, en présence respectivement de bruit de photons et de bruit de détecteur (cf. Chap. 9). Pour être proche de leur condition d'optimalité, il faut donc travailler avec une source guide ponctuelle et en présence de faible turbulence.

Or certaines applications de l'optique adaptative sortent de ce cadre d'utilisation. C'est le cas en particulier des systèmes fonctionnant avec des sources guides étendues : l'optique adaptative avec étoile Laser, l'optique adaptative solaire ou encore des applications dédiées à l'observation de cibles terrestres. Le postulat d'une image au plan focal d'une sous-pupille ayant un profil gaussien n'est alors plus adapté à la modélisation du problème.

On a montré (cf. Chap. 9) qu'alors l'estimateur optimal au sens ML est le maximum du produit de corrélation de l'imagette par une fonction de référence impliquant le profil non bruité de l'imagette et dépendant de la nature statistique du bruit :

$$\text{Bruit de photons : } (\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML}^{phot, spot\ qcq} = \underset{\hat{\mathbf{x}}_0}{\operatorname{argmax}} \{(s \star \ln(r))(\hat{\mathbf{x}}_0)\} \quad (12.1)$$

$$\text{Bruit de détecteur : } (\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML}^{det, spot\ qcq} = \underset{(\hat{\mathbf{x}}_0)}{\operatorname{argmax}} \{(s \star r)(\hat{\mathbf{x}}_0)\} \quad (12.2)$$

Où $s(\mathbf{x})$ est l'intensité lumineuse dans l'image, $r(\mathbf{r})$ est son profil non bruité et \star désigne le produit de corrélation : $(f \star g)(x_0) = \iint f^*(x) \cdot g(x - x_0) dx$. Tout le problème des estimateurs à base de corrélation est de détecter de façon sub-pixélique le maximum du produit de corrélation. Plusieurs solutions ont été proposées pour ce faire : calcul de centre de gravité du pic de corrélation seuillé [Noël 1997], fit parabolique [Poyneer 2003, Poyneer et al. 2005] ou gaussien [Thomas et al. 2006].

Nous présentons dans ce chapitre deux publications traitant de deux cadres d'application différents de l'estimation de pente locale du front d'onde par corrélation. Le premier article [Thomas

et al. 2006] reste dans le cadre d'une source ponctuelle située à l'infini. Le spot traité est soit gaussien, soit soumis à la turbulence. [Thomas et al. 2006] compare les performances de plusieurs algorithmes de recherche du maximum du pic de corrélation entre eux, et avec les algorithmes CdG seuillé et CdG pondéré. La seconde publication [Michau et al. 2006] traite du cas d'une source étendue et compare des algorithmes basés sur la corrélation et sur le CdG.

On présente successivement ces deux articles, avant de réaliser une synthèse de leurs conclusions.

12.1 Estimation par corrélation en présence d'une source ponctuelle

Après une étude détaillée des estimateurs CdG et CdG pondéré, reprise dans les chapitres précédents, l'article [Thomas et al. 2006] compare différents algorithmes d'estimation de la pente locale du front d'onde par corrélation. Deux points sont abordés :

- La comparaison de différentes méthodes de détection du maximum du produit de corrélation d'un spot Hartmann avec une fonction de référence gaussienne.
- La comparaison de l'estimateur basé sur la corrélation retenu avec les estimateurs CdG et CdG pondéré.

Les algorithmes considérés dans cette étude pour la détection du maximum du produit de corrélation sont ceux dont la littérature fait référence : le calcul du barycentre du pic de corrélation seuillé [Noël 1997], le fit quadratique du pic de corrélation [Poyneer 2003, Poyneer et al. 2005] et son fit gaussien.

On considère ici uniquement le cas d'une source ponctuelle, vue soit en présence de turbulence, soit en présence d'un tip/tilt aléatoire. Dans ce dernier cas, le spot Hartmann est modélisé par un spot gaussien se déplaçant aléatoirement sur le détecteur, le déplacement suivant une loi normale centrée d'écart-type 0.1 pixel.

Ce modèle de spot gaussien a été utilisé pour l'étude comparative des algorithmes basés sur le produit de corrélation. La méthodologie employée est résumée par les images de la figure (12.1), représentant un spot gaussien échantillonné à Shannon $\times 4$ (8 pixels dans la FWHM) et déplacé de 0.25 pixel, dont le profil recentré sert de référence au produit de corrélation, le même spot dégradé par du bruit de photons et du bruit de détecteur ($3e^-$ / pixel / trame RMS), le produit de corrélation du spot et de la référence et une coupe du pic de corrélation avec les résultats des différents algorithmes d'estimation de sa position.

Cette étude nous a permis de mettre en évidence plusieurs points :

- En premier lieu, on montre que les différents algorithmes d'estimation du maximum du pic de corrélation offrent des performances pratiquement identiques en présence de bruit de photons et de bruit de détecteur. Les études présentées dans la suite de l'article [Thomas et al. 2006] seront donc réalisées en estimant le maximum du pic de corrélation uniquement par calcul du barycentre du pic seuillé, le niveau de seuil étant adapté au rapport signal à bruit du produit de corrélation.
- Le coefficient de réponse de l'estimateur barycentre du pic de corrélation est égal à l'unité.

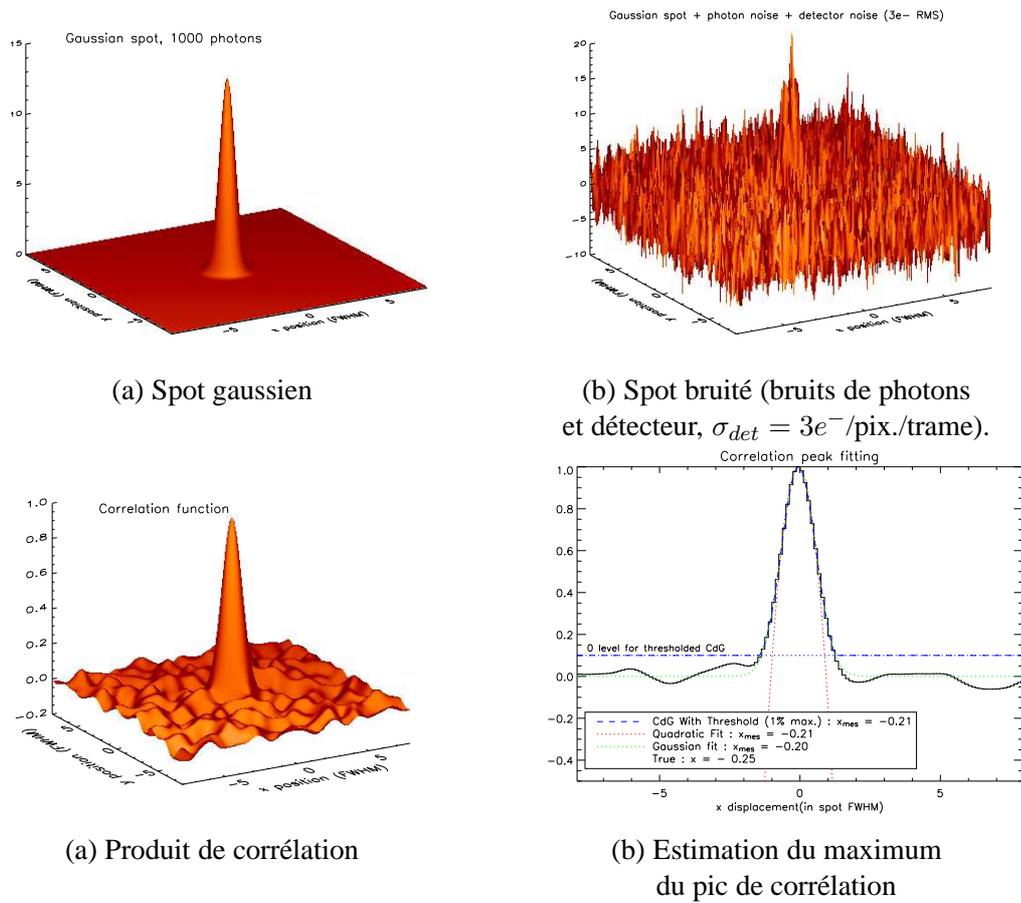


FIG. 12.1 – Conditions de l'étude comparative des algorithmes de détection du maximum du produit de corrélation menée dans [Thomas et al. 2006].

De plus, les problèmes de non-linéarité peuvent être gérés à loisir car on a la maîtrise de l'échantillonnage de la fonction de corrélation. En effet, le produit de corrélation peut avantageusement être réalisé dans l'espace des transformées de Fourier. Il suffit alors de choisir un support de taille adéquate pour les transformées de Fourier du spot et de la fonction de référence pour adapter l'échantillonnage du produit de corrélation.

- En présence du seul bruit de photons, il n'y a pas de différence sensible de comportement selon que la référence de la corrélation ait un profil gaussien (utilisation de l'éq. 12.2) ou parabolique (ie le logarithme d'un profil gaussien, utilisation de l'éq. 12.1). La loi de comportement est la même dans les deux cas, et identique à celle du CdG (cf. § 10.2.1). Ce dernier point ne doit pas étonner puisque l'estimateur CdG est la particularisation de l'estimateur donné par l'équation (12.1) au cas d'un spot gaussien (cf. § 9.2.3).
- Par ailleurs, à l'instar de ce que nous avons vu dans le cas du CdG pondéré, la FWHM du pic de corrélation conditionne la variance de l'erreur d'estimation de la pente locale du front d'onde en présence de bruit de détecteur.

D'autres lois de comportement peuvent être mises en évidence en considérant un spot déformé par une faible turbulence ($d/r_0 \approx 1$). Cette étude est réalisée dans [Thomas et al. 2006] en estimant le maximum du produit de corrélation par calcul du barycentre du pic seuillé. Les autres modes de détermination de la position du maximum du pic n'ont pas été envisagés puisqu'on a montré plus haut qu'il n'y avait pas de différence notable sur le résultat de l'estimation. En présence de faible turbulence, on montre donc que :

- L'estimateur barycentre du pic de corrélation suit une loi de comportement tout à fait similaire à celle du CdG et du CdG pondéré : La variance de l'erreur d'estimation de la pente locale du front d'onde varie proportionnellement à $(d/r_0)^{5/3}$. Toutefois, là où cette erreur dépendait de la taille du support de calcul dans le cas du CdG ou de la FWHM de la pondérante dans le cas du CdG pondéré, c'est ici la FWHM du pic de corrélation qui conditionne son importance.
- La comparaison de l'estimateur barycentre du pic de corrélation avec le CdG, le CdG pondéré et le quatre quadrants dans deux cas pratiques caractéristiques des conditions d'utilisation des Shack-Hartmanns : les instruments SAM¹ [Tokovinin et al. 2004] et SPHERE² [Fusco et al. 2005], montre que quel que soit le flux, il est possible de reproduire la performance de l'estimateur basé sur la corrélation en réalisant un CdG ou un CdG pondéré, la FWHM de la pondérante étant alors optimisée en fonction du flux.
- Enfin, le choix de l'estimateur garantissant la plus faible variance dépend fortement du niveau de bruit du détecteur du Shack-Hartmann :
 - Lorsque le bruit du détecteur est relativement élevé, comme dans le cas de SAM ($\sigma_{det} = 5 e^-/\text{pixel/trame}$), l'estimateur le mieux adapté à la mesure en très faible flux est le quatre quadrants, pour peu que l'on connaisse avec précision son coefficient de réponse, et donc la taille du spot. Toutefois, les problèmes de linéarité affectant le quatre quadrants sont

¹SOAR Adaptive Module, système d'optique adaptative développé pour le télescope inter-américain SOAR à Cerro Paranal

²Spectro-Polarimetric High contrast Exoplanet REsearch. Instrument de seconde génération du VLT dédié à l'imagerie direct et à la spectroscopie de l'atmosphère d'exo-jupiters (cf. § 3.1).

tels qu'à fort flux, sa performance est significativement dégradée par rapport aux estimateurs basés sur le CdG pondéré ou la corrélation.

- Lorsque le bruit du détecteur est faible, comme dans le cas de SPHERE, qui repose sur la technologie des détecteurs à multiplication de photons (EMCCD, $\sigma_{det} \simeq 0.5 e^-/\text{pixel/trame}$), Le CdG pondéré permet d'atteindre la meilleure performance quel que soit le flux incident, grâce à l'optimisation de la FWHM de la pondérante.

Finalement le résultat de la comparaison des estimateurs basé sur la corrélation présentée dans cet article montre que dans le cas d'une source ponctuelle, les estimateurs par corrélation n'apportent pas de gain significatif en performance. A fort flux, leur performance est identique à celle d'un calcul de barycentre. A faible flux, il est toujours possible d'atteindre les performances de l'estimateur basé sur la corrélation en calculant un centre de gravité du spot pondéré, la FWHM de la fonction de pondération étant optimisée en fonction du flux incident.

Comparison of centroid computation algorithms in a Shack-Hartmann sensor

S. Thomas^{1*}, T. Fusco², A. Tokovinin¹, M. Nicolle², V. Michau² and G. Rousset²

¹*Cerro Tololo Inter-American Observatories, Casilla 603, La Serena, Chile*

²*ONERA, BP 72, 92322 Chatillon France*

Accepted . Received ; in original form

ABSTRACT

Analytical theory is combined with extensive numerical simulations to compare different flavors of centroiding algorithms: thresholding, weighted centroid, correlation, quad cell. For each method, optimal parameters are defined in function of photon flux, readout noise, and turbulence level. We find that at very low flux the noise of quad cell and weighted centroid leads the best result, but the latter method can provide linear and optimal response if the weight follows spot displacements. Both methods can work with average flux as low as 10 photons per sub-aperture under a readout noise of 3 electrons. At high flux levels, the dominant errors come from non-linearity of response, from spot truncations and distortions and from detector pixel sampling. It is shown that at high flux, CoG and correlation methods are equivalent (and provide better results than QC) as soon as their parameters are optimized. Finally, examples of applications are given to illustrate the results obtained in the paper.

Key words: Atmospheric turbulence, Adaptive Optics, Wavefront sensing, Shack-Hartmann

1 INTRODUCTION

Adaptive Optics (AO) is nowadays a mature astronomical technique. New varieties of AO, such as multi-object AO (MOAO) (Gendron et al. 2005) or extreme AO (ExAO) (Fusco et al. 2005) are being studied. These developments, in turn, put new requirements on wave-front sensing de-

* E-mail: sthomas@ctio.noao.edu

2 *S. Thomas, T. Fusco, A. Tokovinin, M. Nicolle, V. Michau and G. Rousset*

vices (WFS) in terms of their sensitivity, precision, and linearity. New ideas like pyramid WFS (Ragazzoni & Farinato 1999; Esposito & Riccardi 2001) are being proposed. Yet, the classical Shack-Hartmann WFS (SHWFS) remains a workhorse of astronomical AO systems now and in the near future.

A SHWFS samples the incident wavefront by means of a lenslet array which produces an array of spots on a detector. The wavefront is then analyzed by measuring, in real time, the displacements of the centroids of those spots which are directly proportional to the local wavefront slopes averaged over sub-apertures. A good estimation of the wavefront distortion is therefore obtained from a good measurement of the spots positions. The accuracy of such measurements depends on the strength of the different noise source as well as on a non-negligible number of WFS parameters such as the detector size, the sampling factor, Field of View (FoV) size, etc.

The goal of this study is to compare quantitatively different estimators of spot positions and suggest best suitable methods in cases of low and high photon fluxes. In this paper, three main classes of algorithms are considered: quad-cell estimator (QC), center of gravity approaches (CoG) and correlation methods (Corr).

Centroid measurements are usually corrupted by the coarse sampling of the CCD, photon noise from the guide star, readout noise (RON) of the CCD, and speckle noise introduced by the atmosphere. In case of strong RON and weak signal, the spot can be completely lost in the detector noise, at least occasionally. This presents a problem to common centroid algorithms like thresholding that rely on the brightest pixel(s) to determine approximate center of the spot. When the spot is not *detected*, the centroid calculation with such methods is completely wrong. Thus, the lowest useful signal is determined by spot detection rather than by centroiding noise.

Concerning the CoG approaches, different types of algorithms have been developed to improve the basic centroid calculation in a SHWFS: Mean-Square-Error estimator (van Dam & Lane 2000), Maximum A Posteriori estimator (Sallberg et al. 1997) or Gram-Charlier matched filter (Ruggiu et al. 1998). Arines & Ares (2002) analyzed the thresholding method. On the other hand, many parameters are involved in the estimation of the centroid calculation error as explained below, and therefore there are many ways to approach this problem. For example, Irwan & Lane (1999) just considered the size of the CCD and the related truncation problem. They concentrated on photon noise only using different models of spot shape (Gaussian or diffraction-limited spot), neglecting readout noise or other parameters. In this paper, we choose to focus on various causes of errors such as detector, photon noises or turbulence as well as WFS parameters. Most previous studies remained theoretical or compared performance to simple centroiding. Despite a large number of

Comparison of centroid computation algorithms in a Shack-Hartmann sensor 3

papers on this subject, the ultimate performance of SHWFS and a recipe of the best slope estimation method (at least in the framework of an AO loop) are still debated. Moreover, there are no clear results concerning detection limits and linearity.

As for the linearity, it is often assumed that an AO system working in a closed loop scheme keeps the spots well centered, hence linearity is not essential. However, in any real AO instrument the spots can be offset intentionally to compensate for the non-common-path aberrations (Blanc et al. 2003; Hartung et al. 2003; Sauvage et al. 2005). In critical applications such as planet detection by means of ExAO with coronagraph, a linearity of the response becomes important. It is interesting to add that it will also drive the selection of the sensing technique towards a SHWFS, as opposed to curvature sensing or pyramid (Fusco et al. 2004). The same is true for MOAO, where turbulence will be compensated in open loop relying on a SHWFS with a perfectly linear response. Our study is thus of relevance to these new developments.

Finally, an AO system working with *faint* natural guide stars (for low or medium correction level) requires a WFS with highest possible sensitivity, whereas linearity becomes less critical. Here, simple quad-cell centroiding is often used (e.g. Herriot et al. (2000)), despite its non-linearity. Are there any better options? As shown below, the weighted centroiding method (Nicolle et al. 2004) offers comparable noise performance while being linear.

Correlation approaches are another way to measure a spot position. Such approaches are particularly well adapted when complex and extended objects are considered (c.f. Michau et al. (1992); Rimmele & Radick (1998); Poyneer et al. (2003)). They have been widely used in solar AO for more than 10 years. Here we apply correlation centroiding to the case of a point source, select best variants of calculating the position of the correlation peak, and compare it to also other algorithms.

We begin by introducing relevant parameters and relations and by describing our technique of numerical simulations in Sect. 2. Different techniques of centroid measurements are discussed in detail in Sect. 3 (for the simple CoG), Sect. 4 (for the improved CoG algorithms) and Sect. 5 (for the correlation method). Finally, a comparison of the different methods for an ideal case and for more realistic systems is given in Sect. 6.

4 *S. Thomas, T. Fusco, A. Tokovinin, M. Nicolle, V. Michau and G. Rousset*

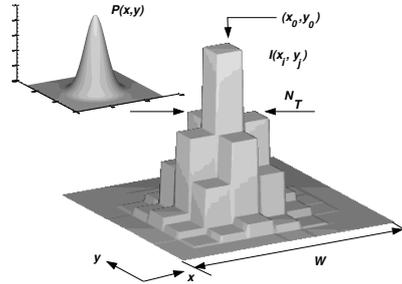


Figure 1. Some notations used in the paper. Intensity distribution in the spot $P(x, y)$ is transformed by the detector into a discrete array of pixel values $I_{i,j}$.

2 THE METHOD OF STUDY

2.1 Definitions

Throughout the paper, we consider only one spot in one sub-aperture of a SHWFS (Fig. 1). The spot is sampled by the detector within a Field-of-View (FoV) of the width W_p pixels. A spot intensity distribution $P(x, y)$ is first transformed into an array of pixel intensity values $I_{i,j}$ of the size $W_p \times W_p$, and then corrupted by photon and detector noise. These data are used to compute the spot centroid (\hat{x}, \hat{y}) , whereas the true centroid of $P(x, y)$ is located at (x_0, y_0) . The Full Width at Half Maximum (FWHM) of the spot is N_T pixels.

Let d be the size of a square sub-aperture and λ the sensing wavelength. The parameter $N_{samp} = (\lambda/d)/p$ conveniently relates the angular pixel size p to the half-width of the diffraction-limited spot, λ/d . The condition $N_{samp} = 2$ corresponds to the Nyquist sampling of the spots and is used throughout this paper, unless stated otherwise. It means that for diffraction-limited spots $N_T = N_{samp} = 2$. Such sampling is close to optimum at medium or high flux (Winick 1986). When spot images are very noisy, the optimum sampling corresponds to a spot FWHM of 1 to 2 pixels. Selecting an even coarser sampling, $N_{samp} < 1$, only increases the error. Over-sampling ($N_{samp} > 2$) does not bring any additional information but increases the effect of detector noise and thus the final centroid error.

In the following, W_p is used for the FoV of the subaperture expressed in pixels and W for the same FoV expressed in λ/d .

2.2 Spot profile

Two spot models were used. The first is a 2-dimensional Gaussian function:

$$P(x, y) = \frac{N_{ph}}{2\pi\sigma_{spot}^2} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2\sigma_{spot}^2}\right], \quad (1)$$

where (x_0, y_0) is the true centroid position. We introduce a random jitter of the spot center with rms amplitude $\sigma_t = 0.1$ pixels, with the average spot position centered in the field. The FWHM of such spot is $N_T = 2\sqrt{2 \ln 2} \sigma_{spot} \approx 2.3548 \sigma_{spot}$. Gaussian spots are convenient for analytical derivations and as a benchmark for comparison with our simulations. In the following, we assimilate N_T with λ/d for convenience, using the fact that the first rough approximation of a diffraction spot is a Gaussian.

Diffraction spots formed by a square $d \times d$ sub-aperture and distorted by atmospheric turbulence represent a second, more realistic model. In this case, $P(x, y)$ becomes a random function and its parameters, like N_T , can be defined only in statistical sense. Atmospheric phase distortion was generated for each realization from a Kolmogorov power spectrum with a Fried parameter r_0 (at the sensing wavelength λ). The overall tilt was subtracted, and a monochromatic spot image was calculated. The true centroids (x_0, y_0) were computed for each distorted spot. We call this *realistic spot model* throughout the paper. The strength of spot distortion depends on the ratio d/r_0 : for $d/r_0 < 1$ the spots are practically diffraction-limited (hence $N_T = N_{samp}$),

$$P(x, y) = N_{ph} \text{sinc}^2\left(\frac{x}{N_{samp}}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{y}{N_{samp}}\right), \quad (2)$$

where $\text{sinc}(y) = \sin(\pi y)/(\pi y)$. On the other hand, for $d/r_0 > 3$ the central maximum begins to split randomly into multiple speckles.

2.3 Measurement error

As mentioned in the introduction, light intensity in each detector pixel is first corrupted by the photon noise (following a Poisson statistics) and by the additive Gaussian readout noise (RON) with variance N_r^2 . Moreover, centroiding errors arise from coarse sampling of the spot by CCD pixels, from truncation of the spot wings by finite size of the sub-aperture field, from the spot distortions produced by atmospheric turbulence, etc. The error variance of the estimated centroid position (\hat{x}) can be expressed as

$$\sigma_x^2 = \langle (\hat{x} - x_0)^2 \rangle, \quad (3)$$

where $\langle \cdot \rangle$ represents a statistical (ensemble) average, x_0 is the real centroid position in pixels and \hat{x} is the centroid position estimated by a given algorithm. We write the estimate in a general form

6 *S. Thomas, T. Fusco, A. Tokovinin, M. Nicolle, V. Michau and G. Rousset*

as

$$\hat{x} = \alpha_r x_0 + f_{nl}(x_0) + \epsilon + noise, \quad (4)$$

where α_r is a response coefficient (it remains the same whatever the spot motion), f_{nl} describes the non-linearity of the centroid algorithm, and ϵ gathers all errors due to spot shape, including truncations by the finite FoV (we often refer to these effects as “turbulence”). Finally, *noise* stands for errors caused by the readout and photon noise. Including Eq. 4 in Eq. 3 leads to

$$\sigma_x^2 = \langle [(\alpha_r - 1)x_0 + f_{nl}(x_0) + \epsilon + noise]^2 \rangle. \quad (5)$$

The function $f_{nl}(x)$ can be represented as Taylor expansion around $x = x_0$. The constant and linear terms are zero by definition. Assuming that $f_{nl}(x)$ is symmetric around $x = x_0$, the quadratic term vanishes as well, and we can model the non-linearity by a cubic term with a coefficient β ,

$$f_{nl}(x_0) \approx \beta x_0^3. \quad (6)$$

We can safely assume that photon and detector noises are not correlated with the shape and position of the spot. We make further, less certain assumptions that ϵ and x_0 are uncorrelated (not strictly true for truncation error) and that the response coefficient α_r is constant (true for undistorted spots, $d/r_0 < 1$, and for Gaussian spots). To simplify further, we will assume here that the centroid calculation algorithm is always adjusted to unit response, $\alpha_r = 1$. Then Eq. 5 becomes

$$\sigma_x^2 = \beta^2 \langle x_0^6 \rangle + \langle \epsilon^2 \rangle + \sigma_{noise}^2. \quad (7)$$

If the residual spot motion in a SHWFS is Gaussian with zero average and variance $\sigma_t^2 = \langle x_0^2 \rangle$ pixels², then $\langle x_0^6 \rangle = 15\sigma_t^6$. The variance σ_{noise}^2 contains two independent terms related to detector ($\sigma_{N_r}^2$) and photon ($\sigma_{N_{ph}}^2$) noises. Hence

$$\sigma_x^2 = 15\beta^2\sigma_t^6 + \sigma_\epsilon^2 + \sigma_{N_r}^2 + \sigma_{N_{ph}}^2. \quad (8)$$

It is important to remind that σ_{noise}^2 is defined here for unit response, $\alpha_r = 1$. The relative importance of each noise source changes depending on the conditions of use of the SHWFS. The strategy was to identify major noise contributors in each case and to select most appropriate centroiding algorithms. Whenever possible, the modelization of different terms in Eq.8 is provided.

For example, a well-known theoretical result is that the minimum possible centroid noise for an un-biased estimator, considering a Gaussian spot with rms size σ_{spot} pixels and pure photon noise, is equal to $\sigma_{N_{ph}} = \sigma_{spot}/\sqrt{N_{ph}}$ (Irwan & Lane 1999; Winick 1986), where N_{ph} is the average number of photons per spot and per frame. Moreover, this boundary is reached by a simple centroid (Rousset 1999), which is thus the maximum likelihood estimator in this case.

Comparison of centroid computation algorithms in a Shack-Hartmann sensor 7

Here we also adopt the common practice of expressing centroid errors in units of phase difference across sub-aperture (in radians). Thus, the relation between the rms phase error σ_ϕ and the centroid error σ_x is

$$\sigma_\phi = \frac{2\pi dp}{\lambda} \sigma_x = \frac{2\pi}{N_{\text{samp}}} \sigma_x, \quad (9)$$

where λ is the sensing wavelength, d is the sub-aperture size and p is the angular size of the CCD pixel. We caution the reader that σ_ϕ is computed in radians for one sub-aperture at the WFS wavelength. To be used in calculations of AO performance, it has to be re-scaled to the imaging wavelength and to the full telescope aperture, and filtered by the AO loop rejection transfer function (Madec 1999). Thus, errors exceeding 1 rad are perfectly acceptable for IR imaging when a visible-band WFS is considered. However, when, for a Gaussian spot, we reach a condition $\sigma_x \geq \sigma_{\text{spot}}$, centroid measurements become meaningless because they fail to localize spots better than the spot size. Given that $N_{\text{samp}} = N_T = 2.355\sigma_{\text{spot}}$, this condition corresponds to $\sigma_\phi = 2\pi/2.355 = 2.67$ rad, or a variance of 7.1 rad^2 .

2.4 Simulations

Our main technique to study various centroid algorithms consists in numerical simulation. We generate series of 1000 independent spot realizations. The intensity distribution $P(x, y)$ (either Gaussian or realistic) is computed without noise first. The pixel signals are then replaced by the Poisson random variable, with the average of N_{ph} photons per spot on a FoV W_p pixels. A zero-mean normal noise with variance N_r^2 is added to simulate the RON.

At very low light level, each simulated spot is tested for detectability. The first possible check is to have the maximum well above the RON, $I_{\text{max}} > 2N_r$. A second one is to reject the centroids with measured $|\hat{x} - x_0| > \sigma_{\text{spot}}$ or $|\hat{y} - y_0| > \sigma_{\text{spot}}$ as spurious (outside the spot). If one of those checks is not passed, the measure is assumed to have failed and therefore rejected. The number of rejected cases gives us information on the detectability limit: when more than a certain fraction of images are rejected, we consider that the centroid measurements have failed and are not reliable for those light conditions. Otherwise, the rms centroid error σ_x is computed on the retained images.

A certain fraction of frames with undetected spots is acceptable because an AO system will then simply use centroid measurements from previous frames (this only leads to an additional delay in the closed loop scheme). We set this fraction to 50% and determine for each method the minimum number of photons $N_{\text{ph},\text{min}}$ when this limit is reached. Adopting a somewhat more strict

8 *S. Thomas, T. Fusco, A. Tokovinin, M. Nicolle, V. Michau and G. Rousset*

criterion (say, 10% invalid frames) would increase the detection threshold. The robustness of each centroiding method is characterized here by $N_{ph,min}$.

In the following we will describe the centroid algorithms considered in this study. For each method, we give a short explanation and then we focus on their advantages and drawbacks.

3 SIMPLE CENTROID (COG)

The Center of Gravity (CoG) is the simplest and most direct way to calculate the position of a symmetric spot:

$$\hat{x}_{CoG} = \frac{\sum x I_{x,y}}{\sum I_{x,y}}. \quad (10)$$

This formula is widely used in AO. However, it has some limitations when using a real spot (diffraction or seeing limited) and in presence of readout noise. In the following, those limitations are described.

3.1 Centroid noise

Let us first recall well-known results concerning the noise of the CoG estimator. Rousset (1999) shows that for a Gaussian spot, the photon-noise and RON contributions to phase variance are, respectively,

$$\sigma_{\phi, N_{ph}}^2 = \frac{\pi^2}{2 \ln 2} \frac{1}{N_{ph}} \left(\frac{N_T}{N_{samp}} \right)^2, \quad (11)$$

$$\sigma_{\phi, N_r}^2 = \frac{\pi^2}{3} \frac{N_r^2}{N_{ph}^2} \frac{N_s^4}{N_{samp}^2}, \quad (12)$$

where N_T is the FWHM of the spot in pixels, N_r is the readout noise, and N_s^2 the total number of pixels used in the CoG calculation. It is interesting to note here that for $N_T = N_{samp}$, the photon-noise contribution $\sigma_{\phi, N_{ph}}^2$ reaches its Cramér-Rao bound (Sect. 6.1). At low light levels, the RON contribution is dominant. It can be decreased by using the smallest number of pixels N_s^2 possible in the CoG calculation. This leads to the quad-cell method and to other modifications of the CoG considered below.

Two main hypothesis have been used to derive Eq. 11. Firstly, a Gaussian spot shape has been considered whereas diffraction spots are described by Eq. 2. Compared to the Gaussian function, the sinc² function decreases slower in the field. In the case of a Poisson statistics (photon noise case), it can be shown that (c.f. appendix):

$$\sigma_{\phi, N_{ph}}^2 \approx 2 \frac{W}{N_{ph}}, \quad (13)$$

Comparison of centroid computation algorithms in a Shack-Hartmann sensor 9

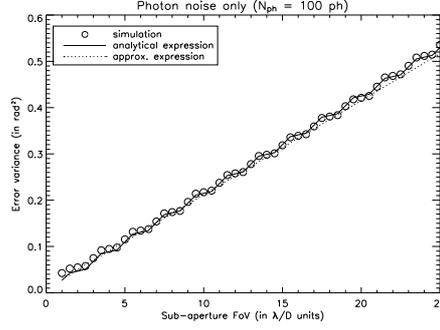


Figure 2. Error variance as a function of the FoV in presence of photon noise for a spot with a sinc^2 distribution.

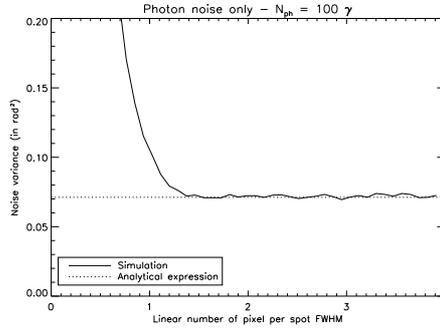


Figure 3. Validity of the analytical expression (11) for the noise influence on CoG measurements in case of Gaussian spots. Error variance as a function of the spot sampling (i.e the number of pixels per FWHM). 2 pixels corresponds to a Nyquist sampling. Photon-noise case (100 photons per sub-aperture and per frame).

where W is the sub-aperture FoV expressed in λ/d units ($W = W_p \cdot dp/\lambda$, with p the pixel size in radians).

In this context and in presence of photon noise only, this means that the size of the window will become important for a realistic spot, while the error variance does not depend on the size of the window for a Gaussian spot. When taking into account the diffraction, the error variance increases linearly with the FoV of one lenslet. Thus, for an infinite window size we get an infinite error variance. This result can be explained by the non-integrability of the function $x^2 \text{sinc}^2(x)$.

It is therefore obvious that the noise depends on the structure of the spot. This structure changes for different configurations – Gaussian spot, diffraction spot, turbulent spot, – which adds some difficulties in the determination of a general theoretical expression. On the other hand, in presence of RON, the noise does not depend on the structure of the spot, since when the FoV is increased, the error due to the RON dominates the photon error.

Secondly, a Nyquist sampling criterion ($N_{\text{samp}} \geq 2$) is implicitly assumed. As shown in Fig. 3, increasing N_{samp} (typically $N_{\text{samp}} > 1.25$) does not modify the noise variance. On the other

10 *S. Thomas, T. Fusco, A. Tokovinin, M. Nicolle, V. Michau and G. Rousset*

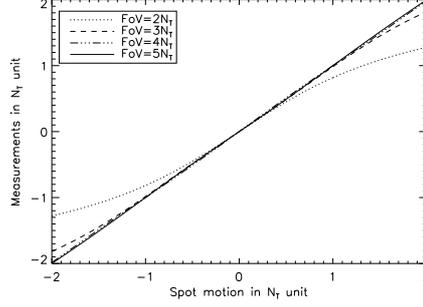


Figure 4. Linearity of the simple CoG as a function of the spot motion for different FoV sizes. The unit used here is N_T , FWHM of the spot.

hand, taking N_{samp} smaller than 1.25 induces an additional error related to the under-sampling effect. This error can be explained by non-linearity for under-sampled images, as shown in the next section and in Fig. 3.

3.2 Response coefficient and non-linearity

Non-linear CoG response appears when the FoV is too small in comparison to the spot size. Indeed, it is straightforward to show that the CoG is perfectly linear for infinite FoV and adequate sampling. The smaller the FoV, the larger the deviation from linearity (Fig. 4). We can easily quantify this effect for a Gaussian spot of rms size σ_{spot} centered on $(x_0, 0)$. The CoG estimate \hat{x} calculated on the finite window of size W_p pixels is

$$\hat{x} = x_0 - \sigma_{spot} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^\zeta - e^\eta}{\Phi(\zeta) + \Phi(\eta)}, \quad (14)$$

where $\zeta = (W_p/2 - x_0)/(\sqrt{2}\sigma_{spot})$, $\eta = (W_p/2 + x_0)/(\sqrt{2}\sigma_{spot})$, and $\Phi(t) = 2/\sqrt{\pi} \int_0^t \exp(-u^2) du$

It is interesting to note that if $W_p \rightarrow \infty$ then $\hat{x} = x_0$, in other words the CoG algorithm is asymptotically unbiased. For moderately large FoV size, $W_p/2 > 2\sqrt{2}\sigma_{spot}$, we can develop (14) in series around $x_0 = 0$, up to the 3rd order:

$$\hat{x} \simeq x_0 - \sigma_{spot} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{(W_p/2)^2}{2\sigma_{spot}^2}} \left(\frac{W_p x_0}{\sqrt{2}\sigma_{spot}} + \frac{1}{6} \left(\frac{W_p x_0}{\sqrt{2}\sigma_{spot}} \right)^3 \right) \quad (15)$$

We recognize here a small deviation of the response coefficient from 1 (2nd term) and a non-linearity proportional to x_0^3 (3rd term). The difference of α_r from 1 is less than 2.5% for a $W = 2$ (or $W_p = 4$ for a Nyquist sampling) and $< 0.04\%$ for a $W = 3$ (or $W_p = 6$ for a Nyquist sampling).

Apart from the FoV size, the linearity of response is affected by sampling (Hardy 1998). This

Comparison of centroid computation algorithms in a Shack-Hartmann sensor 11

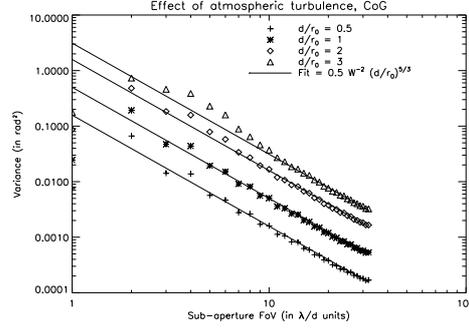


Figure 5. Illustration of the dependence of the CoG error variance on the turbulence and the sub-aperture FoV. The different curves represent different turbulence strengths (i.e various d/r_0). A Nyquist-sampled spot is considered.

error is periodic, with the period of 1 pixel. We verified that CoG non-linearity is extremely small for reasonably well sampled spots, $N_{samp} > 1$, and becomes obvious only for very coarse sampling, $N_{samp} = 0.5$

3.3 Atmospheric effects

The behavior of all centroiding methods changes when we go from the Gaussian spot to a realistic diffraction spot distorted by atmospheric turbulence. In order to isolate the contribution of the atmosphere itself, we simulated recentered and noiseless spots. All methods effectively truncate outer parts of the spots and thus lead to a difference between calculated position and real CoG. This difference mainly depends on the Shack-Hartmann FoV size W relative to λ/d and on the turbulence strength. It can be modeled as:

$$\sigma_{\phi, \text{Atm}}^2 = K W^{-2} (d/r_0)^{5/3}, \quad (16)$$

Fits to our simulation results (Fig. 5) show that $K \simeq 0.5$ for well-sampled ($N_{samp} > 1.5$) spots (the error increases for coarser samplings).

The origin of atmospheric centroid error can be understood as follows. The maximum intensity in the spot corresponds to a position in the FoV where the waves from sub-aperture interfere constructively or, in other words, to a minimum rms residual phase perturbation. The best-fitting plane approximating a given wave-front corresponds to the Zernike tilt, while the true spot centroid corresponds to the average phase gradient over the sub-aperture, called G-tilt (Tyler 1994). Formulae for both tilts and their difference are well known in case of circular apertures and lead to the expression $\sigma_{\phi, \text{Atm}}^2 = 0.241 (d/r_0)^{5/3}$ (see Eq. 4.25, Sasiela 1994). Most of this difference is related to the coma aberration in the wavefront over each sub-aperture, never corrected by the AO.

12 *S. Thomas, T. Fusco, A. Tokovinin, M. Nicolle, V. Michau and G. Rousset*

Thus, even in the worst case where only the spot maximum is measured (e.g. high threshold), the atmospheric error should not exceed $0.25(d/r_0)^{5/3}$.

The residual fitting error in an AO system with sub-aperture size d is of the order $0.3(d/r_0)^{5/3}$ rad (Noll 1976). It might seem that reducing the WFS measuring error much below this quantity is useless as it will not improve the Strehl ratio. However, fitting errors contain mostly high spatial frequencies and hence scatter light into the distant wings of the compensated PSF. The residual PSF intensity at distances from λ_i/D to λ_i/d (where D is the telescope diameter and λ_i is the imaging wavelength) is directly related to the WFS errors, dominated by $\sigma_{\phi, \text{Atm}}^2$ in case of bright stars and unfortunate choice of centroiding algorithm.

3.4 CoG: the necessary trade-offs

The trade-offs needed to optimize a simple CDG concern the FoV and the sampling factor.

In presence of photon noise only, Nyquist-sampled images are required. Then a trade-off in terms of FoV W is needed. This trade-off depends on the photon noise error, which increases with W (cf. Sect. 3.1), and the atmospheric error, which decreases as W^{-2} . In this case, one can define the optimal FoV size W_{opt} by minimizing the sum of Eqs. 13 and 16.

$$\sigma_{noise+atm}^2 = 2 \frac{W}{N_{ph}} + 0.5W^{-2}(d/r_0)^{5/3}. \quad (17)$$

This leads to an analytical expression for W_{opt} :

$$W_{opt} = 1.26 N_{ph}^{1/2} (d/r_0)^{5/9}. \quad (18)$$

Taking, for example, $d/r_0 = 2$ and $N_{ph} = 50$, we obtain the best FoV of $6.8 \lambda/d$.

In presence of detector noise, we want to decrease the number of pixels to minimize the noise at low flux. However, this configuration is not optimal at high flux, as explained earlier. It is therefore interesting to improve the simple CoG algorithm, adapting it to a large range of flux and readout noise. We present some optimization methods in the following.

4 IMPROVED CENTER-OF-GRAVITY ALGORITHMS

Centroid errors due to detector noise can be reduced if we take into account only pixels with signal above certain threshold. The thresholding approach is detailed in Sect. 4.1. Recently, it has been proposed to weight pixels depending on their flux and readout noise. This method is called the weighted CoG (WCOG) (Nicolle et al. 2004) and is detailed in Sect. 4.2.

Comparison of centroid computation algorithms in a Shack-Hartmann sensor 13

4.1 Thresholding (TCoG)

Compared to the simple CoG, the thresholding method is used to follow the spot and therefore avoids the non-linearity problems (if the threshold value is not too high). However, the truncation effects are still present since we take into account only a fraction of all pixels.

There are many ways to select pixels with high flux. We could consider a fixed number of brightest pixels or choose pixels with values above some threshold. We use the following method. The pixel with the maximum value I_{max} is first determined, then the threshold I_T is set to $I_T = TI_{max}$, where T is a parameter to optimized. I_T is then subtracted from the spot image and the centroid is computed using only pixels with non-negative values, such as

$$\hat{x}_{TCoG} = \frac{\sum_{I>I_T} x(I - I_T)}{\sum_{I>I_T} (I - I_T)}. \quad (19)$$

It is important to subtract the threshold before the CoG calculation. Indeed, it can be shown that otherwise, the response coefficient α_r will be less than 1, i.e. the estimate \hat{x}_{TCoG} will be intrinsically biased.

In the low-flux regime, it may be difficult to detect spot maximum against the RON. Therefore, we add the following condition: the threshold is set to $I_T = \max(TI_{max}, mN_r)$. The choice of m depends on a trade-off between robustness ($m > 3$ required) and sensitivity ($m \sim 1$ is better). We choose $m = 3$

The noise of thresholded CoG can still be computed with Eqs. 11, 12, where N_s^2 represents the average number of pixels above threshold. By reducing N_s^2 , we diminish σ_{ϕ, N_r}^2 but increase the error due to the atmospheric turbulence. Hence, there is a compromise to find for T to optimize the threshold I_T as a function of N_{ph} .

In conclusion, thresholding resolves only part of our problems, such as the noise at medium flux. It is also very simple to implement. However, it is not optimal as it is difficult for example to choose pixels to be considered and their number (Arines & Ares 2002). In the next section we present a more efficient method proposed recently.

4.2 The Weighted Center of Gravity (WCoG)

The idea of the Weighted Center of Gravity (WCoG) is to give weight to the different pixels depending on their flux – a kind of “soft” thresholding. The contribution of the noisy pixels with very little signal – outside the core of the spot – is attenuated but not eliminated. Let’s define

14 S. Thomas, T. Fusco, A. Tokovinin, M. Nicolle, V. Michau and G. Rousset

$(F_w)_{x,y}$ the weighting function of FWHM N_w . Then the WCoG centroid is computed as

$$\hat{x}_{WCoG} = \gamma \frac{\sum x I_{x,y}(F_w)_{x,y}}{\sum I_{x,y}(F_w)_{x,y}}. \quad (20)$$

The coefficient γ is needed to ensure unit response, $\alpha_r = 1$. We can simply specify a circular window of radius r , $(F_w)_{x,y} = 1$ for $\sqrt{x^2 + y^2} < r$, or a square window. However, a better choice of the weighting function $(F_w)_{x,y}$ (i.e different from a constant) is needed to optimize the performance of the centroid algorithm, as shown by Nicolle et al. (2004).

The WCoG method exists in two versions. The weight $(F_w)_{x,y}$ can either be fixed, or re-centered on the spot (“following weight”), in a manner similar to thresholding. The properties of these two algorithms are different. Here, we consider only a fixed weight, centered on the most likely spot position, which can be seen as an *a priori* information for centroid measurement. This WCoG flavor is well suited for closed-loop AO systems where the spots are always centered.

4.2.1 Response coefficient and non-linearity

The result of the estimation of the spot position using the WCoG with fixed window would be biased if we set $\gamma = 1$. For a Gaussian spot and Gaussian weight, the WCoG response can be calculated analytically, similarly to the CoG:

$$\hat{x}_{WCoG} = \gamma \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_{spot}^2} x_0 - \gamma \sigma_{eq} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^\zeta - e^\eta}{\Phi(\zeta) + \Phi(\eta)}, \quad (21)$$

where if σ_w^2 is the rms size of the weighting function, σ_{eq} is defined as $\sigma_{eq}^2 = \sigma_{spot}^2 \sigma_w^2 / (\sigma_{spot}^2 + \sigma_w^2)$, and the variables ζ and η are the same as in Eq. 14 with σ_{spot} replaced by σ_{eq} .

In order to obtain unit response, we have to set

$$\gamma = \frac{\sigma_{spot}^2}{\sigma_{eq}^2} = \frac{N_T^2 + N_w^2}{N_w^2}. \quad (22)$$

4.2.2 Noise of WCoG

The noise of WCoG with unit response is obtained from the study of Nicolle et al., corrected by the factor γ^2 :

$$\sigma_{N_{ph}, WCoG}^2 = \frac{\pi^2}{2 \ln 2 N_{ph}} \left(\frac{N_T}{N_{samp}} \right)^2 \frac{(N_T^2 + N_w^2)^4}{(2N_T^2 + N_w^2)^2 N_w^4} \quad (23)$$

$$\sigma_{N_r, WCoG}^2 = \frac{\pi^3}{32 (\ln 2)^2} \left(\frac{N_r}{N_{ph}} \right)^2 \frac{(N_T^2 + N_w^2)^4}{N_{samp}^2 N_w^4} \quad (24)$$

Eqs. 23 and 24 were derived by assuming a Gaussian spot, a Gaussian weight, and a good sampling.

We see from those formulae that for photon noise only and $N_w = N_T$, the error variance is

Comparison of centroid computation algorithms in a Shack-Hartmann sensor 15

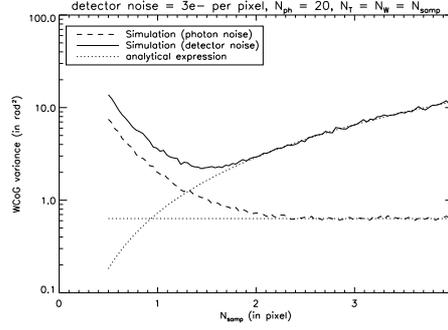


Figure 6. Error variance of WCoG as a function of the sampling, for photon noise (dashed line) and RON with $N_r = 3$ (full line). $N_{ph} = 20$ and $N_T = N_w$. The analytical expressions are plotted in dotted lines.

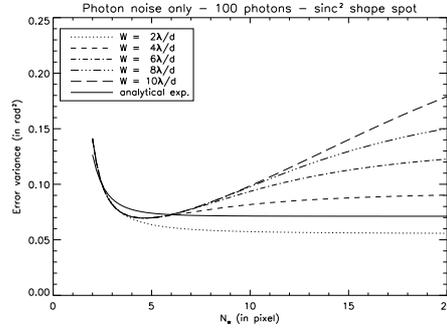


Figure 7. Influence of sub-aperture FoV W and of N_w on the photon noise variance with a WCoG, in presence of a diffraction spot. The number of iterations is 10000 and we took the same set of noise for each value of N_w , explaining the absence of fluctuations in the curves. The analytical curve corresponds to the Eq. 23 derived for a Gaussian spot.

1.78 times larger than for simple CoG (11). This factor tends to 1 when N_w increases. Therefore there is no real interest to use this method when the spot is Gaussian and in presence of photon noise only. This ideal case is only useful as an illustration. In the following we will present the advantages of WCoG.

4.2.2.1 Sampling. The analytical formulae have been obtained for a well-sampled spot. A comparison between theory and simulation is given in Fig. 6. A good match is obtained for $N_{samp} > 2$, but for coarser samplings the errors are larger than given by Eqs. 23 and 24. The error due to RON, $\sigma_{N_r, WCoG}^2$, reaches a minimum for $N_{samp} = 1.5$. Our simulations show that by reducing sampling from $N_{samp} = 2$ to 1.5, the $\sigma_{N_r, WCoG}^2$ is reduced by 1.35 times, not 1.77 as predicted by Eq. 23.

4.2.2.2 Spot shape. The contribution of RON noise to WCoG (Eq. 24) does not depend on the spot shape, as for the simple CoG. However, the photon noise (Eq. 23) does. We observe

16 *S. Thomas, T. Fusco, A. Tokovinin, M. Nicolle, V. Michau and G. Rousset*

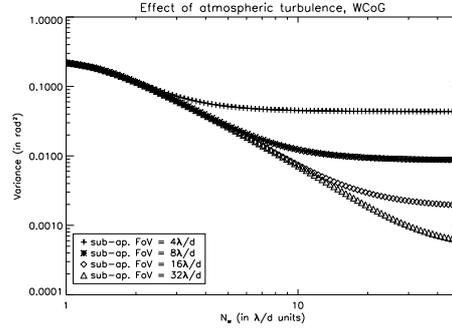


Figure 8. The variance of atmospheric error of WCoG centroids depends on the width of the weighting function N_w and on the FoV size W .

differences between analytical formulae and simulations, both for a Gaussian and for diffraction spots, and the noise depends on the FoV size (Fig. 7).

The behaviors of WCoG and simple CoG with respect to photon noise are radically different. By weighting pixels with a Gaussian function F_w , we reduce the dependence of photon noise on the FoV size (as long as it is large enough, $W > 2$). There is an optimal width of the weighting function, $N_{w,opt} \simeq 4.5$ pixel (for Nyquist sampling $N_{samp} = 2$), cf. Fig. 7, that ensures the minimum photon-noise centroid variance of

$$\sigma_{N_{ph},lin,opt}^2 = \frac{7.1}{N_{ph}} \approx \left(\frac{2\pi}{N_{samp}} \right)^2 \frac{\sigma_{spot}^2}{N_{ph}}. \quad (25)$$

Therefore, by using the WCOG algorithm with diffraction spot, we can reach the same level of photon noise as for a Gaussian spot of the same FWHM. We suspect that this is close to Cramér-Rao bound, although we did not optimize the shape of weighting function explicitly for the case of diffraction spot. The gain of WCoG over simple CoG depends on the FoV size and can be dramatic.

4.2.3 Atmospheric effects

As for the CoG, the error variance due to the atmosphere depends on the subaperture FoV, W . It also depends on the weighting function FWHM N_w . A first approximation of this error variance is given by:

$$\sigma_{atmo,WCoG}^2 \approx K(4N_w^{-2} + W^{-2})(d/r_0)^{5/3} \quad (26)$$

where N_w is in pixels and W is the FoV in λ/d units. The coefficient K is equal to 0.5 for Nyquist-sampled spot.

Comparison of centroid computation algorithms in a Shack-Hartmann sensor 17

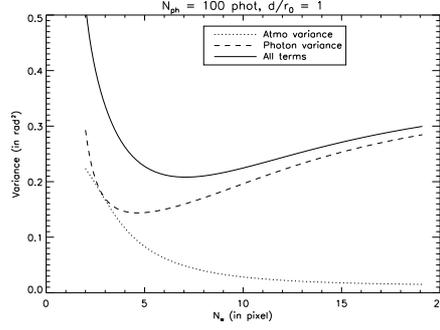


Figure 9. Trade-off for the FWHM of the weighting function. Photon-noise (dashed line) and atmospheric (dotted line) variances are plotted as a function of N_w (in pixels) for the following conditions: $d/r_0 = 1$, $N_{ph} = 100$ and $W = 8\lambda/d$. The variance sum (solid line) shows a minimum around $N_w = 7$. Nyquist-sampled spot is considered.

4.2.4 Optimization

As for the CoG, there is an optimum width of the weight, N_w , depending on the noise parameters, d/r_0 , and the number of photons. For example, in the case of a detector without RON, the optimum N_w is found by minimizing the sum $\sigma_{N_{ph}, WCoG}^2 + \sigma_{atmo, WCoG}^2$. Figure 9 gives the optimum for $d/r_0 = 1$ and $N_{ph} = 100$.

4.3 Quad cell (QC)

A quad-cell (QC) is the specific case of the CoG for a 2x2 pixels array ($N_s^2 = 4$). In this case, the FoV is given by the pixel size and by definition, the spot is under-sampled. QC is widely used in astronomical AO systems, e.g. in Altair (Herriot et al. 2000), because the weak signal from guide stars is better detected against RON and because, with a small number of pixels, the RON can be further reduced by a slow CCD readout. A quad-cell algorithm calculates the centroid \hat{x}_{QC} in each direction from the differential intensity between one half of the detector and the other,

$$\hat{x}_{QC} = \pi\gamma \frac{I_l - I_r}{I_l + I_r}, \quad (27)$$

where I_l and I_r are the intensities, respectively, on the left and the right halves of the detector and γ is the coefficient, given in pixels, translating intensity ratio into displacement, depending on the spot shape and size. For a Gaussian spot we found that $\gamma = \sigma/\sqrt{2\pi}$ pixels

18 *S. Thomas, T. Fusco, A. Tokovinin, M. Nicolle, V. Michau and G. Rousset*

4.3.1 Noise of QC

Expression (27) leads to the following variance for photon and detector noises Rousset (1999)

$$\sigma_{N_{ph},QC}^2 = \pi^2 \kappa^2 / N_{ph} \quad (28)$$

$$\sigma_{N_r, QC}^2 = 4\pi^2 \kappa^2 (N_r / N_{ph})^2. \quad (29)$$

For a diffraction-limited spot Nyquist-sampled, $\kappa = 1$. For a Gaussian spot, κ depends on the rms size of the spot. Following our definition for a Gaussian spot, the rms size is defined by σ and is given in radians in this case (and in this paper for this case only). Therefore $\kappa = \gamma 2\pi / (\lambda/d) = \sqrt{2\pi} \sigma / (\lambda/d)$. In real AO systems γ is usually variable, and considerable effort has been invested in developing methods of real-time QC calibration (Veran & Herriot 2000).

In the following, we will assume that we are able to correct for γ fluctuations. In our simulation, the estimation of γ has been made by first calculating the long-exposure PSF, considering the turbulence and the spot parameters. From this point several methods have been investigated. The best method is linear fitting by Fourier method. Firstly, the Fourier Transform allows to oversample the PSF and then, we use a linear extrapolation.

It is also interesting to note that nowadays, detectors in SHWFS can be photon-noise limited. In that case, the error variance ratio of the QC and the simple CoG is:

$$\frac{\sigma_{N_{ph},QC}^2}{\sigma_{N_{ph},CoG}^2} = 2\ln 2 \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{2\ln 2}}. \quad (30)$$

The QC's error variance is 1.48 times greater than the simple CoG's one.

4.3.2 Non-linearity of QC

The response of the QC algorithm is non-linear. Elementary calculation for a Gaussian spot leads to $\beta = -1/\sigma_{spot}^2$. Hence, the non-linearity centroid error (in pixels) is $\sigma_{NL} = \sqrt{15} \sigma_{spot} (\sigma_t / \sigma_{spot})^3$ (cf. eq. 8) It may quickly dominate other error sources even at moderate N_{ph} . On top of that, if the FoV size becomes smaller than the spot, additional non-linearity appears, similar to simple CoG.

4.3.3 Atmospheric noise

As for the previous algorithms, we study the atmospheric component of QC noise by ignoring both RON and photon-noise contributions, as well as any residual spot motion. Figure 10 shows the error variance as a function of d/r_0 for different FoV. A fit of the data leads to the following expression:

$$\sigma_{\phi,Atm}^2 \approx K_W (d/r_0)^{5/3}, \quad (31)$$

Comparison of centroid computation algorithms in a Shack-Hartmann sensor 19

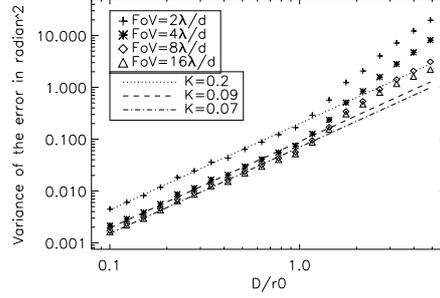


Figure 10. Atmospheric error variance of QC centroids: simulations (symbols) and models (lines).

with K_W depending on the FoV. When the FoV is very small, the error is higher ($K_W = 0.2$) because the spot is truncated. At larger FoV, the error variance saturates at $K_W = 0.07$. This model, however, works only for low turbulence, $d/r_0 < 1$. As we see in Fig. 10, the dependence on d/r_0 becomes steeper than $5/3$ power under strong turbulence. One explanation comes from the noise of γ 's fluctuations when $d/r_0 > 1$.

The atmospheric error barely depends on the FoV size (as soon as it is larger than a few λ/d). Even in the low-turbulence case ($K_W = 0.07$), it is $1.4W^2$ times larger than for simple CoG (cf. Eq. 16). In conclusion, using QC centroiding is only efficient for a noisy detector under low-flux conditions and considering small d/r_0 values. For accurate wavefront measurement and photon-noise-limited detectors other CoG methods are better.

5 CORRELATION ALGORITHM

The use of the correlation in imagery is not new and has been already proposed for AO systems that use extended reference objects, e.g. in solar observations (Rimmele & Radick 1998; Michau et al. 1992; Keller et al. 2003; Poyneer et al. 2003). In this study, we apply *correlation algorithm* (COR) to a point source. First, we compute the cross-correlation function (CCF) C between the spot image I and some template F_w .

$$C(x, y) = I \otimes F_w = \sum_{i,j} I_{i,j} F_w(x_i + x, y_j + y) \quad (32)$$

and then determine the spot center from the maximum of $C(x, y)$. The methods of finding this position are discussed below. Since the COR method is not based on the centroid calculation, it appears to be very good at suppressing the noise from pixels outside the spot. Moreover, correlation is known to be the best method of signal detection (“matched filtering”). We note that the

20 *S. Thomas, T. Fusco, A. Tokovinin, M. Nicolle, V. Michau and G. Rousset*

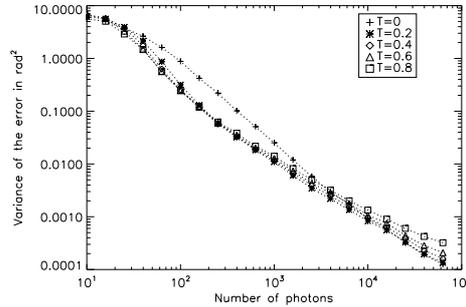


Figure 11. Error variance of \hat{x}_{corr} determined by estimation of correlation maximum using a thresholded center of gravity with Gaussian shape spots (with FWHM = 2 pixels). The spot motion is 0.1 pixel rms. Both photon and readout ($N_r = 3$) noises are considered. Various values of threshold are used. The template image is a noise-free Gaussian ($P(x)$).

coordinates x, y are continuous, unlike discrete image pixels, hence $C(x, y)$ can be computed with arbitrarily high resolution.

A correlation template $F_w(x, y)$ can be either a mean spot image, some analytical function or the image in one subaperture, like in solar AO systems (Keller et al. 2003).

In practice, the CCF has been calculated using Fourier Transform (FT). In that case, the image has to be put in a support at least twice as big as the image size to avoid aliasing effects. The sampling of the computed CCF can be made arbitrarily fine. One way to do this is to plunge the FT product into a grid K_e times larger, where K_e is the over-sampling factor.

The behavior of correlation centroiding with respect to the image sampling is not different from other centroid methods. At low flux – for example $N_{ph} = 30$ for $N_r = 3e^-$ – it is slightly better to use $N_{samp} = 1.5$. However, for higher flux, under-sampling ($N_{samp} < 2$) leads to a worse error variance, while for over-sampling ($N_{samp} > 2$) the error variance stays the same.

We remind the reader that N_T is the FWHM of the spot image, N_w the FWHM of the template F_w . Furthermore, we will call δ the FWHM of CCF.

5.1 Determination of the CCF peak

Once the CCF is computed, it is not trivial to determine the precise position of its maximum \hat{x}_{corr} . To do this, we studied four methods: simple CoG with threshold (Noël 1997), parabola fitting and Gaussian fitting.

For the thresholding method, \hat{x}_{corr} is computed by Eq. 19 where I is replaced by C and I_T by $C_T = T_{corr} \max(C)$. The value of T_{corr} has been optimized in parallel with K_e . Figure 11 shows the behavior of the error variance for different thresholds (from $T = 0$ or $T = 0.9$).

For the parabola fitting, the determination of \hat{x}_{corr} was done separately in x and y . Three points

Comparison of centroid computation algorithms in a Shack-Hartmann sensor 21

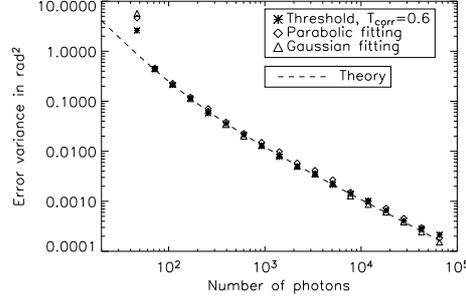


Figure 12. Comparison of three different cases of peak determination for a Gaussian spot: the thresholding, the parabola fitting and the Gaussian fitting. All methods use an oversampling factor $K_e = 8$. There is photon noise and readout noise ($N_r = 3$). The theory corresponds to the sum of Eq.B7 and Eq.35.

around the maximum x_*, y_* of C along either x or y define a parabola, and its maximum leads to the \hat{x}_{corr} estimate (Poyneer et al. 2003) as

$$\hat{x}_{corr} = x_* - \frac{0.5[C(x_* + 1, y_*) - C(x_* - 1, y_*)]}{C(x_* + 1, y_*) + C(x_* - 1, y_*) - 2C(x_*, y_*)}. \quad (33)$$

In this case, a resampling of $K_e = 4$ is necessary and sufficient. For the Gaussian fitting, the one-dimensional cut through the maximum $C(x_*, y_*)$ is fitted by a Gaussian curve to find \hat{x}_{corr} .

We found that all methods of peak determination are almost identical and linear (Fig. 12) when using a Gaussian spot.

However, while the determination of the correlation peak using a few pixels around the maximum position is the best method to use in presence of readout noise, it is not the case in presence of atmospherical turbulence. In this latest case, information contained in the wings of the CCF is important as well. For this reason, the methods using a given function fit, such as the parabola fitting, will not be optimum.

The thresholding method on the other hand can be optimized by adapting the threshold value in function of the dominant noise. If the readout noise is dominant, we will use a high value of threshold to be sensitive only to the information contained in the peak. If the atmospherical noise is dominant, we will use a very low threshold to also be sensitive to the information contained in the wings of the CCF and therefore the image itself.

Thus, for comparison with other centroid algorithms, we will use the thresholding method with a adaptable threshold.

22 *S. Thomas, T. Fusco, A. Tokovinin, M. Nicolle, V. Michau and G. Rousset*

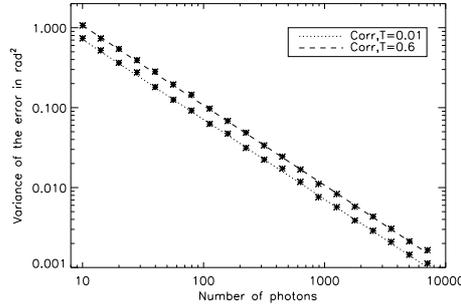


Figure 13. Error variance as a function of the number of photons for the correlation method, in presence of photon noise only, for different threshold values. The spot and template are Gaussian.

5.2 Noise of correlation centroiding

It is possible to derive a theoretical expression of the error variance for the correlation method (Michau et al. 1992). The derivation is given in Appendix.

A simplified expression of Eq. B7 is:

$$\sigma_{x,COR,N_r}^2 = \frac{4\delta^2 N_r^2}{N_{ph}^2}, \quad (34)$$

where δ is the FWHM of $C_{(F_w)}$, the autocorrelation function of F_w . σ_{x,COR,N_r}^2 is given in pixels².

The photon noise derivation is more complex, we studied it by simulation only. Fig. 13 shows the behavior of the correlation error variance in presence of photon noise only. A fit of the curve corresponding to the best thresholding gives:

$$\sigma_{x,COR,N_{Ph}}^2 \approx \frac{\pi^2}{2 \ln(2) N_{ph}} \left(\frac{N_T}{N_{samp}} \right)^2 \quad (35)$$

This expression is equivalent to the error variance found in presence of photon noise only for the simple CoG. It can be shown (Cabanillas 2000) that the correlation is similar to the CoG, the optimal centroid estimator (Maximum likelihood) for a Gaussian spot in presence of photon noise only, if the template is the logarithm of the same Gaussian F_w . We found however that using the Gaussian distribution or the logarithm of this distribution gives very similar results.

5.3 Response coefficient and non-linearity

The response coefficient of COR used with any of the optimized peak determination methods is equal to 1. Moreover, the linearity is very good, even when using the thresholding. Indeed, $C(x, y)$ is a function which can be resampled, as explained before. This allows to increase the value of the threshold to select only the region very close to the maximum without considering only one pixel.

Comparison of centroid computation algorithms in a Shack-Hartmann sensor 23

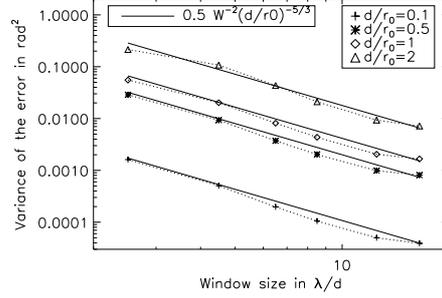


Figure 14. Error variance due to the atmospheric noise as a function of the correlation window size in λ/d for different value of d/r_0 . The model (Eq. 36) is overplotted as full lines. In this case $T=0.01$

5.4 Atmospheric noise

In this section, we study the behavior of the correlation method in function of the size of the window used in the CCF peak determination W_{cor} and the FWHM of the template, in presence of atmospheric turbulence only. The CCF peak is determined by thresholding with $T = 0.01$, which is the best method in this particular case; it gives lower errors at high flux. It is important to also notice that using the thresholding method to determine the CCF peak allows the adaptation of the threshold value depending on the flux and readout noise. Hence, the results are more accurate than for other CCF peak determination method for any flux.

We find the same dependence of the error variance on the window size W_{cor} and the strength of the turbulence as for the simple CoG, which is:

$$\sigma_{\phi,cor,Atm}^2 = KW_{cor}^{-2}(d/r_0)^{5/3}. \quad (36)$$

A fit to the data of Fig. 14 gives $K \simeq 0.5$ for well-sampled spots ($N_{samp} = 2$). These results are valid as long as the correlation function is not truncated (due to a high threshold for example). This K value depends obviously on the method used to determine the peak position of the correlation function. For example, the parabolic fitting is worse than the thresholding with a low threshold by a factor 2. Indeed, the parabolic fitting take into account only the few pixels around the maximum. We saw in section 5.1 that this was not the optimum method.

The main conclusion here is that in presence of only atmospheric turbulence, the correlation method is identical to the CoG.

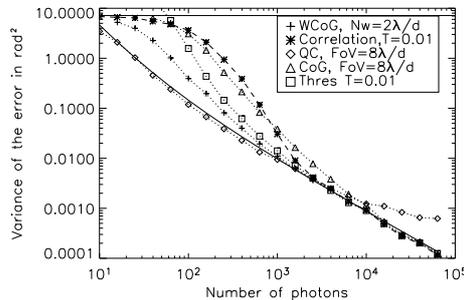
24 *S. Thomas, T. Fusco, A. Tokovinin, M. Nicolle, V. Michau and G. Rousset*

Figure 15. Comparison of different methods. Variance of the error in rad^2 in presence of photon noise and readout noise ($N_r = 3$). The Gaussian spot moves randomly of 0.1 pixels rms in each direction. The plain line is the Cramér-Rao bound. The values of N_w and the FoV are given in λ/d for reference. If $T_{\text{corr}} = 0.6$ for the correlation, the error variance decreases at low flux but the noise at high flux is higher. The best way is therefore to adapt the threshold as a function of the flux and noise.

6 COMPARISON BETWEEN CENTROID METHODS

6.1 The Cramér-Rao Bound

The Cramér-Rao bound (CRB) is a lower boundary for the error variance of any unbiased statistical estimator. Winick (1986) applied this powerful tool to the case of SHWFS. He assumes the CCD noise to be Poisson-distributed shot noise generated by both the image spot and the detector dark current. In theory, no un-biased method can give better results than this limit. Therefore, we computed and used it in our study as a lower boundary, to compare with our simulations. Moreover, it also indicates whether the best method has been found or not.

However, it is really important to be careful with the validity of assumptions inherent to the CR method. The estimator has to be unbiased, which is the case of all the estimators considered in this study except the QC. Indeed, QC is non-linear and therefore the response coefficient α_r becomes rapidly different from 1. This explains why the QC curve goes slightly below the CR bound (e.g. Fig. 15). This is also the case for WCoG method with $\gamma = 1$.

6.2 Robustness at low flux

In Fig. 15 we compare centroid methods for a Gaussian spot, at different levels of flux. The upper limit of reliable centroiding corresponds to the centroid variance equal to the rms spot size, or phase variance of 7.1 rad^2 . It turns out that the most robust method is the Quad Cell, which can give a good estimation of the spot position at 10 photons when $N_r = 3$. We recall that detection test has been implemented at low flux, explaining the behavior (saturation) of the curves.

Comparison of centroid computation algorithms in a Shack-Hartmann sensor 25**Table 1.** Parameters of the study. Note that the minimum number of photons is lower for PF because of the lower detector RON value for this system.

	d/r_0	N_r	N_{ph}	N_{samp}
PF	1	0.5	[2-10 ⁴]	2
SAM	2	5	[10-10 ⁴]	1

6.3 Comparison for a Gaussian spot

After studying in detail centroiding methods independently, the methods are inter-compared. The conclusions are:

- In presence of photon noise only, all methods after optimization are equivalent, with the exception of the QC where the error variance saturates at high flux due to the non-linearity. The motion of the spot is 0.1 pixel rms, leading to a non-linearity component equal to about $5 \cdot 10^{-4} \text{ rad}^2$.
- In presence of both readout and photon noise however, the best method depends on the flux, as shown in Fig. 15. At low flux, the QC is the optimum method. Then, its error variance saturates at around $5 \cdot 10^{-4} \text{ rad}^2$ for higher flux. At higher flux, the photon noise dominates and all methods except the QC are identical. Fig. 15 shows a comparison with the CRB as well. The sampling is equal to $N_{samp} = 2$, which is the optimum for all methods at high flux. At low flux, $N_{samp} = 1.5$ gives only marginally better results, which explains why we did not consider this value.

It is possible to adapt the values of the different method's parameter as a function of flux and readout noise to get lower error variances. In the following, we used this adaptation in the comparison of the different methods in presence of atmospheric turbulence.

6.4 Example of results for real AO systems

Considering the high number of parameters of this study, using one method with one set of parameters only is an utopia. The solution is to adapt the parameters of each method depending on the turbulence strength, the readout noise and the flux.

We will give a comparison of performance for two real systems, Planet Finder (PF) (Fusco et al. 2005) and the SOAR Adaptive Module (SAM) (Tokovinin et al. 2004), working in two different configurations (Table 1). PF is a second generation extreme AO for the VLT and SAM is an AO being built for the SOAR telescope using the Ground Layer AO concept.

The first example (PF) almost can be assimilated to the case of photon noise only, which can be reached by using a new type of CCD detectors with internal multiplication, L3CCD (Basden

26 *S. Thomas, T. Fusco, A. Tokovinin, M. Nicolle, V. Michau and G. Rousset*

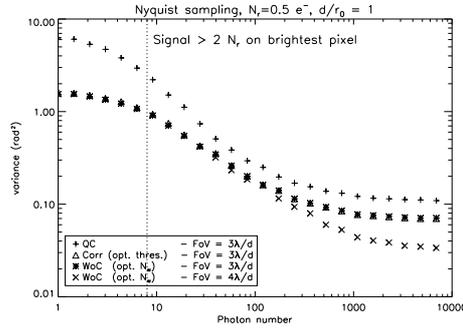


Figure 16. PF: Variance of the error in rad^2 in presence of the atmospheric turbulence ($d/r_0 = 1$) for different centroid methods. Only photon noise is considered. The vertical dotted line ($N_{ph} = 8$) represents the limit for which the signal in the brightest pixel is always greater than $2N_r$. The correlation method gives the same results as the WCoG when the same parameters are used.

et al. 2003). The second example (SAM) shows the case of common detectors where both photon and readout noise are present. The last difference is the sampling: Nyquist for PF and half-Nyquist for SAM. For each case, we compared the different methods described before, adapting their parameters in order to reach the best performance.

We will first comment on the detectability limit. Just as a reminder, the detectability limit is calculated from the occurrence of the maximum signal being higher than $2N_r$ over 1000 iterations 2.4. Here we will show the limit for which the maximum signal is lower than $2N_r$ at least once. To give an idea for SAM, the maximum intensity of an average image is equal to about 8% of the total flux when Nyquist sampled and 14% when half Nyquist sampled (assuming that the center of the spot is in between 4 pixels). We then conclude that for $N_{ph,min} = 70$, the maximum intensity of the spot is too low compared to the readout noise, and all methods relying on this maximum (like the thresholding) are useless. This limit is equal to $N_{ph,min} = 8$ for the case of PF. The values of $N_{ph,min}$ decrease to a few photons for FP and to about 20 photons when we set the percentage of occurrence to 50%.

In the following we will concentrate on the WCoG, the correlation and the QC. On the figures, we disregarded thresholding and simple CoG to avoid confusion. Those two methods are not optimal at low flux and similar to correlation and WCoG at high flux.

Case of PF. Without RON (Fig. 16), all methods are equivalent except the QC, as expected. Considering the computation time down-side of the correlation, it is better to use the simple or weighted CoG.

The vertical dotted line ($N_{ph} = 8$) represents the limit for which the signal in the brightest pixel is always greater than $2N_r$. If the signal happens to be lower for one iteration, we remind that the measure is not taking into account (see section 2.4).

Comparison of centroid computation algorithms in a Shack-Hartmann sensor 27

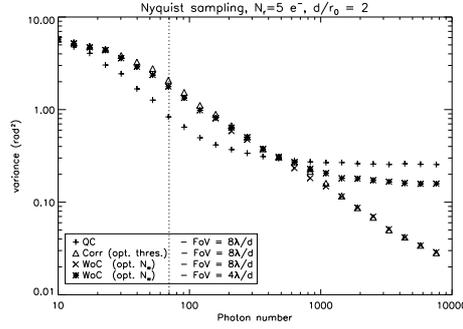


Figure 17. SAM: Variance of the error in rad^2 in presence of atmospheric turbulence ($d/r_0 = 2$) for SAM with a sampling of $N_{\text{samp}} = 1$. Both photon and readout noise are present. The vertical dotted line ($N_{\text{ph}} = 70$) represents the limit for which the signal in the brightest pixel is always greater than $2N_r$.

Case of SAM. If the RON increases (Fig. 17), the results do not change when the number of photons is high enough – $N_{\text{ph}} > 300$ for $N_r = 5$ – since the error variance is limited by the atmospheric turbulence.

To reduce the impact of the noise, we used a positivity constraint (use a threshold such as $T = 0$) on the images before applying any method.

For low flux, the QC is 1.5 times better, assuming the optimistic case where the FWHM and hence the response coefficient γ are known. This is linked to the high readout noise and the under-sampling. The two other methods however either do not rely on the knowledge of the FWHM or allow to measure the FWHM with accuracy since we have a direct access to the shape of spot, which is not the case for QC. Moreover, the results are better at high flux. Therefore, if the error budget allows it, the simplest and more reliable method, which is the WCoG, must be chosen, even if it is not the best at low flux.

6.5 Implementation issues

From those results, it is essential to consider the implementation issues of the WFS before making a final choice. In the following we will give some comments for the different methods.

- **The QC.** The advantage of this method is the low number of pixels (only 2×2), even if in practice we often use more pixels. However, there is an unknown which is the exact FWHM of the spot in presence of turbulence. This FWHM must be known to get a response coefficient $\gamma = 1$. Considering the poor sampling of the image, it is difficult to calculate the spot size from the data. Moreover, this method is non-linear. The QC method can be interesting though in case of a very high readout noise **and** small values of d/r_0 .

28 *S. Thomas, T. Fusco, A. Tokovinin, M. Nicolle, V. Michau and G. Rousset*

- **The CoG and its improvements.** The subaperture field is typically of 6×6 or 8×8 pixels. The pure CoG is very sensitive to noisy pixels when the signal is low compared to the readout noise or when the turbulence is high. Improvement can be achieved by optimizing the threshold or by using a WCoG. The last one gives the best results when adapting the rms size of the F_w as a function of flux and readout noise.

Moreover, the response coefficient γ depends on the FWHM of the spot like for the QC. However, in that case it will be easier to determine γ since we have a direct measurement of the spot. The procedure will be to recenter and average off-line individual frames in order to obtain a re-centered long exposure image and then derive the FWHM value from this direct data. Then, this value of FWHM will be used in the next measurement.

- **The correlation.** The computation for this method is more complex, especially when over sampling is needed to estimate the peak position of the correlation function. The thresholded CoG gives the best estimation of the peak position of the correlation function, since the adaptation of the threshold allows to deal with either high readout noise or high atmospheric turbulence. Other methods are not as robust and give higher error in presence of atmospheric turbulence. The advantage of COR is that the response coefficient does not depend on the spot size and shape.

7 CONCLUSIONS AND FUTURE WORK

In this paper, we gave a practical comparison of different methods of centroid calculation in a Shack-Hartmann wavefront sensor. We studied some variations of the center of gravity such as WCoG, thresholding and quad cell. We also considered the use of the correlation to determine the spot positions. The first part of the paper was focused on the simplified case of Gaussian spot or diffraction-limited spot without atmospheric turbulence, while the second part considered all sources of error.

We are not presenting here a real recipe but a methodology to calculate the error of a SH wavefront sensor. This study can be applied to different domains by changing the parameters and the shape of the spot.

We first show a good understanding of the theory in the case of a Gaussian spot. For this particular case, the formulae can be used directly to estimate the noise in the WFS.

For diffraction-limited spot and spots distorted by atmospheric turbulence, the derivation of such formulae is more challenging. Therefore, we have studied the methods mainly by simulation. The comparison is given in two different cases: with and without readout noise for a strength of

Comparison of centroid computation algorithms in a Shack-Hartmann sensor 29

turbulence equal to $d/r_0 = 2$. The best method would be the WCoG, with adapting the size of the weighting function, which does not require a complicated implementation.

The correlation gives also good results and good detectability by adapting the threshold value to the flux and the RON considered. One can notice as well that at high flux, the correlation and the simple CoG give smallest errors and are similar. It is safe to say that for point sources the correlation method is not worth using, considering the complexity of its implementation. However, in presence of elongated spots it is the best method (Poyneer et al. 2003). We are planning to continue this study.

For lower turbulence, the QC is very efficient for high readout noise and leads to simpler detectors.

The conclusion though is that we do not have a magic method. However, the WCoG gives the optimum results independently of the signal to noise ratio when adjusting the FWHM of the weighting function. The study was made in the context of detailed designs and trade-offs where simplified analytical formula do not apply in the prediction of the WFS behavior. We also show the complexity of the problem and the importance of the contribution of each error in the budget for the comparison of different methods (or more generally different type of WFS).

ACKNOWLEDGEMENTS

This study has been financed by NOAO. We thank Lisa Poyneer and Rolando Cantarutti for useful discussions. Jean-Marc Conan and Laurent Mugnier as well were very helpful in this study.

APPENDIX A: NOISE EXPRESSION IN THE CASE OF A DIFFRACTION LIMITED SPOT

In the case of a diffraction limited spot and a Poisson statistics (photon noise case), the eq. 11 is no longer valid. Indeed, there is some signal contained in the wings of the PSF leading to photon noise. The size of the window has to be optimized. The photon noise variance (for one direction) can be expressed for this case as

$$\sigma_{\phi, N_{ph}}^2 = \left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{N_{ph}^2} \int_{-W/2}^{W/2} \int_{-W/2}^{W/2} x^2 \langle P^2(x, y) \rangle dx dy \quad (A1)$$

30 *S. Thomas, T. Fusco, A. Tokovinin, M. Nicolle, V. Michau and G. Rousset*

with $P(x, y)$ the sinc^2 shape of the spot (cf Eq. 2). Because we are in presence of photon noise only in this case, $\langle P^2(x, y) \rangle = P(x, y)$ and therefore we can write:

$$\sigma_{\phi, N_{ph}}^2 = \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{N_{ph}} \int_{-W/2}^{W/2} x^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{x}{\lambda/d} \right) dx \int_{-W/2}^{W/2} \text{sinc}^2 \left(\frac{y}{\lambda/d} \right) dy. \quad (\text{A2})$$

Thus,

$$\sigma_{\phi, N_{ph}}^2 = \frac{4}{\pi} \frac{W}{N_{ph}} (1 - \text{sinc}(\pi W)) \int_0^{\pi W} \text{sinc}^2(y) dy, \quad (\text{A3})$$

where W is the sub-aperture FoV expressed in λ/d units ($W = W_p \cdot dp/\lambda$, with p the pixel size in radians). The function $1 - \text{sinc}(\pi W)$ tends to 1 (with some oscillation) and $\int_0^{\pi W} \text{sinc}^2(y) dy$ tends to $\pi/2$ when W tends to infinity. In that case, Eq. A3 can be approximated by

$$\sigma_{\phi, N_{ph}}^2 \approx 2 \frac{W}{N_{ph}}. \quad (\text{A4})$$

APPENDIX B: NOISE CALCULATION FOR THE CORRELATION METHOD

Here, we consider the case where the reference F_w is a known, deterministic function. Let's s be the threshold and D the domain where $C(x, y) \geq s$, and D_c the domain where the functions are defined. Then

$$x_{corr} = \frac{\int_D x [C(x, y) - s] dx dy}{\int_D [C(x, y) - s] dx dy} = \frac{N_g}{D_g}, \quad (\text{B1})$$

where N_g is the numerator and D_g the denominator. If we assume that the fluctuations of D_g are negligible compared to those of N_g , we find that:

$$\sigma_{x, COR}^2 = \frac{\langle N_g^2 \rangle - \langle N_g \rangle^2}{\langle D_g \rangle^2}, \quad (\text{B2})$$

where

$$\langle N_g^2 \rangle - \langle N_g \rangle^2 = \int_D \int_D x x' \sigma_C^2(x, y, x', y') dx dy dx' dy', \quad (\text{B3})$$

where $\sigma_C^2(x, y, x', y')$ is the variance of the correlation function. We can show that

$$\begin{aligned} \sigma_C^2(x, y, x', y') = & \int_{D_c} \int_{D_c} F_w(u, v) F_w(u', v') [\langle I(u+x, v+y) I(u'+x', v'+y') \rangle \\ & - \langle I(u+x, v+y) \rangle \langle I(u'+x', v'+y') \rangle] du dv du' dv'. \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

Comparison of centroid computation algorithms in a Shack-Hartmann sensor 31

Since

$$[\langle I(x, y)I(x', y') \rangle - \langle I(x, y) \rangle \langle I(x', y') \rangle] = \begin{cases} \sigma_b^2(x, y), & \text{if } (x, y) = (x', y') \\ 0, & \text{if } (x, y) \neq (x', y') \end{cases} \quad (\text{B5})$$

where $\sigma_b(x, y)$ is the noise density. In presence of readout noise, which is a white noise, σ_b is a constant equal to N_r .

$$\sigma_C^2(x, y, x', y') = N_r^2 \int_{D_c} F_w(u, v) F_w(u + x - x', v' + y - y') dudv \quad (\text{B6})$$

Therefore, a development of Eq. B2 gives:

$$\sigma_{x, COR, N_r}^2 = N_r^2 \frac{\int_D \int_D x x' [C_{(F_w)}(x - x', y - y')] dx dy dx' dy'}{\langle D_g \rangle^2}, \quad (\text{B7})$$

where $C_{(F_w)}$ is the autocorrelation function of F_w . σ_{x, COR, N_r}^2 is given in pixels².

A simplified expression of Eq. B7 can be derived using the following approximation:

$$C_{(F_w)}(x, y) \approx C_I(x, y)(D_c \otimes D_c)(x, y) \quad (\text{B8})$$

close to the maximum. Then, we can fit the function near the maximum by a parabola as:

$$C_I(x, y) = N_{ph}^2 \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2\delta^2} \right) \quad (\text{B9})$$

where δ is the FWHM of $C_{(F_w)}$.

We finally find

$$\sigma_{x, COR, N_r}^2 = \frac{4\delta^2 N_r^2}{N_{ph}^2}. \quad (\text{B10})$$

REFERENCES

- Arines J., Ares J., 2002, *Opt. Let.*, 27, 497
- Basden A. G., Haniff C. A., Mackay C. D., 2003, *MNRAS*, 345, 985
- Blanc A., Fusco T., Hartung M., Mugnier L. M., Rousset G., 2003, *A&A*, 399, 373
- Cabanillas S., 2000, Thesis from Aix-Marseille University
- Esposito S., Riccardi A., 2001, *A&A*, 369, L9
- Fusco T., Nicolle M., Rousset G., Michau V., Beuzit J.-L., Mouillet D., 2004, *Proc. SPIE*, 5490, p. 1155
- Fusco T., Rousset G., Beuzit J.-L., Mouillet D., Dohlen K., Conan R., Petit C., Montagnier G., 2005, *Proc. SPIE*, 5903, p.148
- Gendron E. et al., 2005, *C. R. Physique* 6, in press
- Guillaume M., Melon P., Refregier P., Llebaria A., 1998, *J.Opt.Soc.Amer(A)*, 15, p.2841

32 *S. Thomas, T. Fusco, A. Tokovinin, M. Nicolle, V. Michau and G. Rousset*

Hardy J.W., *Adaptive Optics for Astronomical Telescope*, 1998, Oxford University Press, p.147

Hartung M. , Blanc A., Fusco T., Lacombe F., Mugnier L. M., Rousset G., Lenzen R., 2003, *A&A*, 399, 385

Herriot G., Morris S., Anthon A., 2000, *Proc. SPIE*, 4007, p. 115

Irwan R., Lane R. G., 1999, *Appl. Opt.*, 38, 6737

Keller Ch. U., Plymate C., Ammons S.M., 2003, *Proc. SPIE*, 4853, p. 351

Madec P.Y., 1999, in F. Roddier, ed., *Adaptive optics in Astronomy*. Cambridge University press, p. 131

Michau V., Rousset G., Fontanella J.C., 1992, in *Real time and post facto solar image correction, Sunspot*, New Mexico, p. 124

Nicolle M., Fusco T., Rousset G., Michau V., 2004, *Opt. Let.*, 29, 2743

Noël T., 1997, Thesis ONERA, Paris

Noll R.J., 1976, *J.Opt.Soc.Amer(A)*, 66, p. 207

Poyneer L. A., LaFortune K., Awwal A.A.S., 2003, Lawrence Livermore National Lab Report (Livermore, CA 94551)

Ragazzoni, R., Farinato, J., 1999, *A&A*, 350, L23

Rimmele T. R., Radick R. R., 1998, *Proc. SPIE*, 3353, p.72

Rousset G., 1999, in F. Roddier, ed., *Adaptive optics in Astronomy*, Cambridge University press, p.115

Ruggiu J.-M., Solomon C. J., Loos G., 1998, *Opt. Let.*, 23, 235

Sallberg S.A., Welsh B.M., Roggemann M.C., 1997, *J.Opt.Soc.Amer(A)* , 14, 1347

Sandler D., 1999, in F. Roddier, ed., *Adaptive optics in Astronomy*. Cambridge University press, p.294

Sasiela R.J., *Electromagnetic wavepropagation in turbulence*, 1994, Springer-Verlag, Berlin

Sauvage J.-F., Fusco T., Rousset G., Petit C., Neichel B., Blanc A., Beuzit J.-L., 2005, *Proc. SPIE*, 5903, 100

Tokovinin A., Thomas S., Gregory B., van der Blik N., Schurter P., Cantarutti R., Mondaca E., 2004, *Proc. SPIE*, 5490, 870

Tyler G.A., 1994, *J.Opt.Soc.Amer(A)*, 11, 358

van Dam M. A. & Lane R. G., 2000, *J.Opt.Soc.Amer(A)*, 17, 1319

Véran J.-P., Herriot G., 2000, *J.Opt.Soc.Amer(A)*, 17, 1430

Winick K.A., 1996, *J.Opt.Soc.Amer(A)*, 3, 1809

12.2 Estimation par corrélation en présence d'une source étendue

L'article [Michau et al. 2006], reproduit à la fin de ce paragraphe, a pour objectif de caractériser l'estimation de la pente locale du front d'onde incident sur une micro-lentille de shack-Hartmann, lorsque la source de référence est étendue. Plusieurs estimateurs du déplacement de l'image obtenue au plan focal de la micro-lentille sont considérés et comparés. En particulier, à l'image de ce qui est fait dans l'article précédent, différentes techniques d'estimation du maximum du pic de corrélation sont comparées en elles, puis à un estimateur plus classique : le centre de gravité de l'imagette seuillée. Les estimateurs basés sur la corrélation considérés ici sont le barycentre du pic de corrélation seuillé et le fit parabolique.

Cependant, à la différence de ce qui a été fait pour [Thomas et al. 2006], la référence de la corrélation n'est pas une fonction analytique mais l'une des imagettes obtenues sur le Shack-Hartmann. En effet, l'analyse de front d'onde sur scène étendue est généralement réalisée sans que l'on ait de connaissance préalable précise sur la scène observée. Le meilleur modèle de l'imagette Hartmann est alors une autre imagette obtenue dans le même temps. Deux points viennent alors dégrader l'estimation de position : le recentrage de l'imagette de référence et sa dégradation par le bruit de photons et de détecteur.

L'article [Michau et al. 2006] compare dans un premier temps les estimateurs basés sur la détermination du maximum du produit de corrélation par simulation numérique. La simulation intègre une scène étendue de dimension supérieure au champ d'une sous-pupille. L'imagette dans le plan focal du Shack-Hartmann occupe 50×50 pixels, et est dégradée uniquement par du bruit de photons. On montre que dans ces conditions, les performances de ces différents estimateurs sont pratiquement identiques. Nous avons déjà tiré une conclusion similaire des études menées dans [Thomas et al. 2006] en présence d'une source ponctuelle. Pour cette raison, ici encore, seul l'estimateur basé sur le calcul du centre de gravité du pic de corrélation seuillé est étudié dans la suite de cette publication.

De plus, la même simulation montre que la relation analytique :
$$\sigma_{corr, det}^2 = \frac{4a^2 \sigma_{noise}^2}{C_{max}}$$

exprimant la variance de l'erreur d'estimation dans le cas d'un bruit gaussien et stationnaire (bruit de détecteur, [Michau et al. 1992], annexe B de [Thomas et al. 2006]) représente fidèlement la variance de l'estimation réalisée ici. Or le cas simulé ici ne considère que le seul le bruit de photons. Etant donné qu'à fort flux, un bruit à statistique poissonnienne tel que le bruit de photons peut être considéré comme un bruit gaussien non stationnaire, on montre ici qu'il n'est pas nécessaire de prendre en compte la non stationnarité du bruit lorsque l'on travaille sur scène étendue. Une étude expérimentale du problème a permis de valider cet effet.

La caractérisation du comportement de l'estimateur basé sur la corrélation effectuée, il est possible de comparer cet estimateur avec le simple centre de gravité de l'imagette, toujours dans le cas d'une scène étendue. Effectuer cette comparaison dans le cadre d'une source plus large que le champ d'une sous-pupille est malaisé : l'estimateur centre de gravité n'est clairement pas adapté à ce type de source et la comparaison n'a pas vraiment de sens. On a choisi de se placer dans un cas où la source reste limitée, mais structurée. C'est le cas par exemple des sources guides générées par

étoile Laser. Afin de pouvoir dégager des lois de comportement analytiques des deux estimateurs, on a considéré une source constituée de deux spots gaussiens, le paramètre d'intérêt de l'étude étant la distance entre les deux spots.

Après s'être assuré que lorsque les deux spots sont confondus on retrouve une identité de comportement entre les deux estimateurs centre de gravité et corrélation, (cf. § 9.2.3), l'étude de l'évolution de leur performance en fonction de la séparation entre les deux structures de la source permet de définir deux régimes de fonctionnement pour l'estimateur basé sur la corrélation :

- Lorsque les deux structures de la sources (*ie* les deux spots) sont bien séparées, l'estimateur basé sur la corrélation apporte un gain significatif par rapport à l'estimation par centre de gravité, pour peu que le barycentre du produit de corrélation soit calculé en restreignant le support au pic principal de corrélation.
- Lorsque les deux spots sont mal séparés, [Michau et al. 2006] montre que l'estimateur basé sur la corrélation a un comportement similaire à l'estimateur barycentre : la variance de l'erreur d'estimation de la pente locale du front d'onde croît avec la distance entre les deux éléments de la source. Par le terme "mal séparés", désigne ici le cas où la distance entre les deux spots est inférieure à $2 \times FWHM_{spot}$. Dans ce cas, les trois pics constituant le produit de corrélation sont partiellement confondus, et la mesure est dégradée.

Cette publication met donc en évidence l'intérêt de la corrélation lorsque la source guide du Shack-Hartmann est étendue et structurée. Il faut toutefois que les structures de la source soient suffisamment distinctes pour pouvoir isoler le pic principal de corrélation.

Shack-Hartmann Wavefront Sensing with Extended Sources

V. Michau, J.-M. Conan, T. Fusco, M. Nicolle, C. Robert, M.-T. Velluet, E. Piganeau
Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales, Optics Department, BP 72, F-92322
Châtillon cedex, France

ABSTRACT

Shack-Hartmann wavefront sensor is widely used for the measurement of phase perturbations induced by turbulence. Such a wavefront sensor relies on the measurement of the image displacements in the lenslet array focal plane. Different algorithms can be used to estimate this displacement. This paper is dedicated to the analysis and comparison of their performances. Special attention will be paid to correlation techniques which are well suited to extended sources.

Keywords: Shack-Hartmann, wavefront sensing, extended source, correlation

1. INTRODUCTION

Wave Front (WF) measurement is commonly linked to a wave, and therefore to an unresolved source when the light is incoherent. In fact when the light is not coherent, the so-called wave front measurement is often the measurement of an aberration induced by the propagation medium. This aberration is induced by atmospheric turbulence in adaptive optics. In case of active optics, it is caused by misalignments of optical system. Moreover, when the source is smaller than the isoplanatic patch, the aberration seen by all directions in the source is the same. Since extended sources are only available in some situations, different techniques have been developed for wave front sensing with extended sources.

In a Shack-Hartmann (SH), the WF is sampled by a lenslet array. The shift of each lenslet focal plane image is proportional to the mean slope of the WF in the subaperture onto this lenslet. In most Wave Front Sensors (WFS), the extent of the source reduces the contrast of the signal and hence the WFS performance.¹ Since SH measurements are performed in a focal plane, SH is one of the very few WFS with phase diversity technique which works with a scene of infinite spatial extent.²⁻⁶ In that case, a field stop has to be installed in front of SH to ensure that the lenslet images do not overlap.

This paper is dedicated to data processing for SH used with extended sources. Its performance is characterized both analytically and experimentally. However, the relationship between the aberration in the field and the SH measurement may be quite complex.⁷ Therefore, we will consider here only situations where each lenslet image is only shifted but not distorted. That condition implies that the wavefront is well sampled by the lenslet array (and that the anisoplanatic patch is larger than the field stop).

Two situations have been considered. The first one corresponds to an instrument dedicated to ground observation where the source is infinitely extended, i.e. larger than the WFS field of view. The second one to a WFS used with a source smaller than the WFS field of view. It corresponds typically to wavefront sensing with Laser Guide Star (LGS).

The first part of the paper is dedicated to the description of data processing for Shack-Hartmann with extended sources. The second part of the paper describes numerical modeling and experiment performed to validate the proposed data processing when the source is infinitely extended. A preliminary study of data processing performance with sources of limited extent is presented in the last part.

Further author information: (Send correspondence to V.Michau)
E-mail: vincent.michau@onera.fr, Telephone: +33 (0)1 46 73 47 80

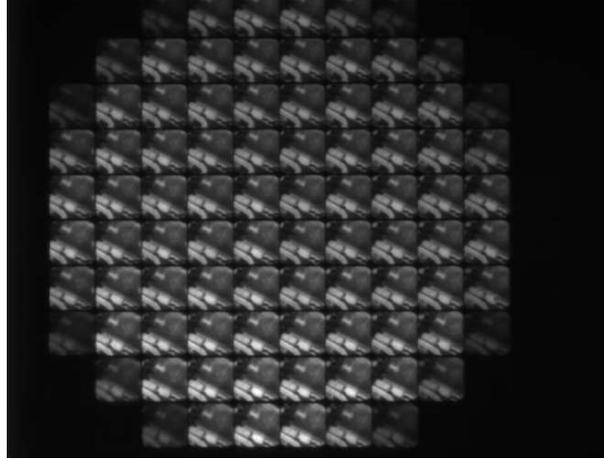


Figure 1. Example of SH image at 10 x 10 lenslet array focal plane in case of infinitely extended scene.

2. DATA PROCESSING

A typical image of an infinitely extended scene obtained in the lenslet array focal plane is presented in Figure 1. Each lenslet gives an image of the field stop which does not move. Inside the field stop, the image of the scene is shifted according to the slope of the WF in the subaperture defined by the lenslet. According to image shift, some details may appear or disappear near the edges of the field stop image. Therefore, algorithms like Center of gravity (COG) of the image cannot be used.

The image measured in the focal plane of a lenslet is denoted I_m . Since this image is detected with a CCD or CMOS, I_m is spatially sampled. The shift of I_m induced by the WF slope in the subaperture is denoted δ_t . For sake of simplicity, an image without noise and without shift is assumed to be known. This image is called the reference image and denoted I_{ref} . The maximum value of aberrations measured with the WFS may be estimated. From it, the maximum value of the shift amplitude, $max(\delta_t)$ may be deduced. We define a domain denoted D in the field of view whose limits are at distance $max(\delta_t)$ from the field stop sides. Therefore details in the measured image which are inside the domain D may be retrieved in the reference image. This is illustrated in Figure 2. When the SH is used in active or adaptive optics, once the loop closed, the size of D may be adjust close to the field stop one.

For pixels r_i inside D :

$$I_m(r_i) = n(r_i) + I_{ref}(r_i + \delta_t), \quad (1)$$

where $n(r_i)$ is a noise term.

The maximum likelihood approach is chosen in order to estimate δ_t .⁸ The stochastic process being the noise in I_m , the estimate of δ_t , denoted δ_{ML} is:

$$\delta_{ML} = Arg \max_{\delta} (P(I_m/\delta, I_{ref})) \quad (2)$$

In case of Gaussian noise statistics, δ_{ML} is then given by:

$$\delta_{ML_g} = Arg \min_{\delta} \left(\sum_{r_i \in D} |I_m(r_i) - I_{ref}(r_i + \delta)|^2 \right). \quad (3)$$

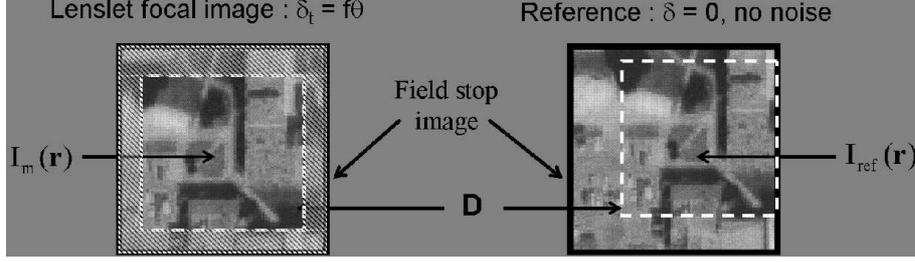


Figure 2. Measured image and Reference image.

$\sum_{r_i \in D} |I_m(r_i)|^2$ does not depend on δ . If the extent of the source is smaller than the field stop, $\sum_{r_i \in D} |I_{ref}(r_i + \delta)|$ does not depend on δ either. δ_{ML} writes:

$$\delta_{ML_g} = \text{Arg max}_{\delta} \left(\sum_{r_i \in D} I_m(r_i) I_{ref}(r_i + \delta) \right). \quad (4)$$

If the source is larger than D , the dependence of $\sum_{r_i \in D} |I_{ref}(r_i + \delta)|^2$ with respect to δ may be neglected. δ_{ML_g} is biased with infinitely extended scene. We will check further if this bias has some impact on the accuracy of the SH measurement.

Finally, δ_{ML_g} maximizes a correlation-type function between I_{ref} and I_m denoted C . It has to be stressed on that this function is a discrete sum since I_m is sampled but that I_{ref} is assumed to be a continuous function at this point. This correlation function is slightly different from the proposed one in,⁶ in the sense that C properties are unchanged whatever the image shift. As a matter of fact, the accuracy of the proposed shift estimate will be the same whatever the aberration. However, both methods are quite similar when the SH is used in closed loop, with adaptive optics for example.

In case of Poisson noise statistics, i.e. photon noise, it can be shown that the estimate δ_{ML_p} maximizes the correlation between I_m and the logarithm of I_{ref} . As in Gaussian noise case, this estimate is unbiased if the extent of the source is limited but biased in case of infinitely extended scene.

A subpixel determination of δ_{ML} is required to obtain accurate WF slope measurements. Unfortunately, in general, I_{ref} is measured and spatially sampled. Therefore, C , the correlation function between I_m and I_{ref} (or $\ln(I_{ref})$) is also sampled. Two equivalent methods can be used to obtain δ_{ML} subpixel estimate. Either interpolation of I_{ref} then calculation of C , or calculation of sampled C from sampled I_{ref} and I_m then oversampling of sampled C .

Different methods have been proposed for subpixel determination of the position of C maximum: undersampling,⁹ thresholding and calculation of the center of gravity of sampled C main peak,³ quadratic fitting of C around maximum.⁶

We tested these methods by studying their robustness and their sensitivity to noise and found them quite equivalent. In the following, the method based on thresholding and calculation of the center of gravity of sampled C main peak will be used.

Once the method chosen, analytical expressions of δ_{ML} variance were derived as functions of image characteristics in case of Gaussian noise. In case of stationary noise statistics:

$$\sigma_{\delta_{ML}}^2 = \frac{4a^2 \sigma_{I_m}^2}{C_{max}}, \quad (5)$$

where $\sigma_{I_m}^2$ is the noise variance in image I_m . a and C_{max} are parameters defined as: $E(C(r - \delta_t)) = C_{max}(1 - \frac{r^2}{2a^2})$ where $E(C)$ is the expected value of C . C_{max} is the maximum value of $E(C)$. a is the half width at half maximum

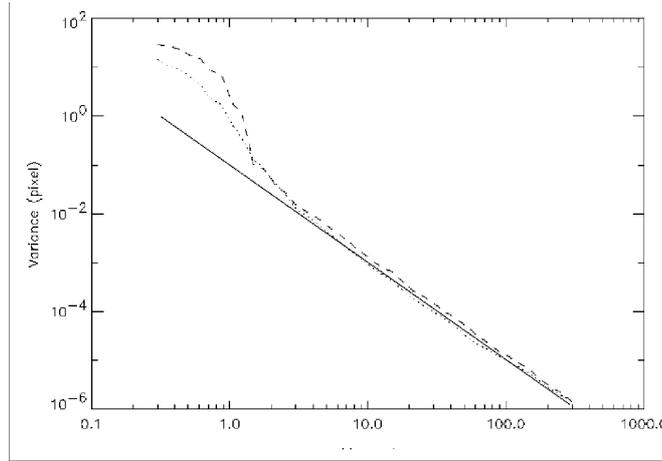


Figure 3. Variance of the shift estimates as function of image SNR. Dotted line: estimate by thresholding and COG of the correlation. Dashed line: estimate by quadratic fitting. Straight line: analytical expression given in equation 5.

of the correlation peak. a is related to the size of details in the image. In case of anisotropy of the correlation peak, equation 5 may be modified to take it into account. C_{max} is quadratic function of total number of photons in the image inside domain D .

In some conditions, it is not possible to get a reference image without noise. However, in case of stationary Gaussian statistics, provided that I_m and I_{ref} are independent, same approach may be performed. In that case, δ_{ML} variance generalizes:

$$\sigma_{\delta_{ML}}^2 = \frac{4a^2(\sigma_{I_m}^2 + \sigma_{I_{ref}}^2)}{C_{max}}, \quad (6)$$

where $\sigma_{I_{ref}}^2$ is the noise variance in the reference image.

Analytical expression may also be derived when image noise statistics are not stationary. In case of high flux level, Poisson noise can be approached by unstationary Gaussian noise. This situation was considered since Photon noise is frequently dominant compared to read out noise for high flux level. However, the obtained expression is not very tractable since it involves a triple correlation type function of I_{ref} :

$$\sigma_{\delta_{ML}}^2 = \frac{b^2 T_{max}}{C_{max}^2}, \quad (7)$$

where b is a parameter linked to the shape of the triple correlation and T_{max} the maximum value of the triple correlation. However, this result shows as expected that $\sigma_{\delta_{ML}}^2$ is proportional to the inverse of the number of photons in the image. This expression will not be used in the following.

3. WAVEFRONT SENSING WITH INFINITELY EXTENDED SCENE

3.1. Numerical modeling

We tested photon noise effect on δ_{ML} variance using a numerical modeling. The estimate obtained with Gaussian statistics is used since high enough flux levels were considered and because this estimate is simpler to implement. The scene is chosen to be representative of terrestrial visible scene (see Figure 2). From this 50 per 50 pixel image, 400 independent noisy images are obtained. The variance of δ_{ML} is plotted on Figure 3 as a function of the ratio between the mean signal divided by the mean standard deviation of the noise in image. As previously mentioned, results obtained by quadratic fitting or thresholding and COG of the correlation are very close.

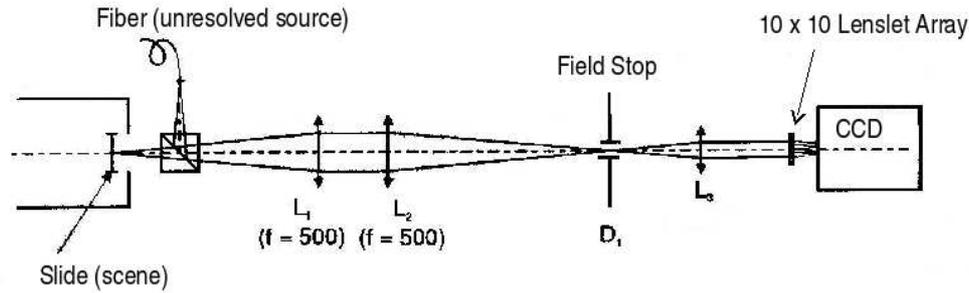


Figure 4. Schematic diagram of the optical set up .

Moreover the predicted value by equation 5 is in good accordance with numerical modeling. It confirms the ability to predict noise effects with analytical expression. Moreover, analytical noise prediction does not require to take into account the fact that noise is not stationary when terrestrial scene is used.

3.2. Experimental results

The data processing presented in the previous paragraph have been tested on data recorded with a laboratory experimental set up. Conditions representative of active optics for ground observation were chosen. The wavefront is perturbed by low order aberrations. The source is a terrestrial scene. The schematic diagram of the optical set up is presented in Figure 4. The principal components of the SH are a field stop, a collimating lens, L_3 , a 10 per 10 lenslet array and a CCD. The size of a field stop lenslet image is 50 per 50 pixels. The image is sampled according Shannon criterion. The read out noise of the CCD is lower than 10 phe^- . The pupil defined by the lenslet is conjugated by L_3 with L_2 . The field stop is conjugated with the source by L_1 and L_2 lenses. Two kinds of sources installed in the L_1 focal plane may be used. The unresolved one, a monomode fiber, permits to measure aberrations with a SH used in classical conditions. The second one, an enlightened slide representing a terrestrial scene, is used for correlation testing. Figure 1 represents an image recorded in the lenslet focal plane when the slide is used.

In order to test the accuracy of our processing, we realized a defocus by shifting lens L_2 of 1 mm along the optical axis. We first measured the wavefront with the unresolved source, by doing a classical COG onto the spots in lenslet array focal plane. Then, we measured it with the extended scene, by doing correlation on the lenslet images of it. One of the lenslet images recorded is used as reference. WF reconstruction is performed on 55 Zernike modes. Reconstructed wavefronts obtained from measurements performed with the fiber are presented on figure 5 (a) and those obtained with the slide on figure 5 (b). The Zernike coefficient corresponding to defocus, a_4 is 5.820 rd when unresolved source measurements are used, 5.824 rd with extended scene measurements. This result demonstrates an excellent wavefront measurement accuracy with the proposed data processing. We had to stress on the fact that shift estimates are given with δ_{MLg} which is biased in the present case. This bias does not seem to greatly induce errors on aberration estimate even with a rather large aberration, i.e. with image shifts of several pixels in the lenslet array focal plane. Moreover, the quality of the lenslet array is good enough to insure that all the lenslet images may be processed with the same reference image.

We studied also the measurement fluctuations. 100 wavefront measurements have been performed with extended scene and correlation for three different light levels. In order to analyze the sources of errors, the fluctuations onto the image shifts were not only studied as they were in the numerical modeling presented in paragraph 2 but also Zernike coefficients obtained from these measurements. The variances estimated with these coefficients are presented on Figure 6 as a function of the mode number. The fluctuations of slope measurements induced by noise in the lenslet images are not correlated between subapertures. The corresponding Zernike coefficient variance spectrum should follow a i^{-1} power law.¹⁰ However, this decrease is only observed for the highest order Zernike modes on Figure 6 (a). Another source of fluctuations is predominant at lower order modes.

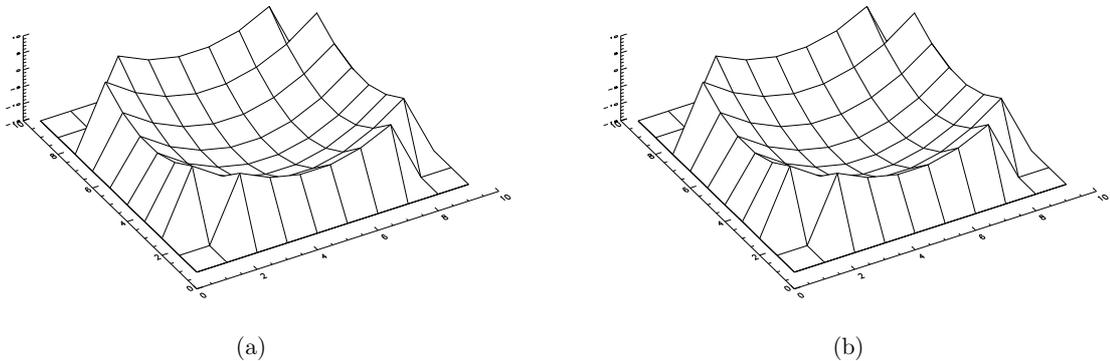


Figure 5. Reconstructed wavefronts from measurements: (a) unresolved source measurements, (b) infinitely extended scene measurements .

The results presented on Figure 6 (b) are obtained when the mean signal in the image is increased by a factor 10. As seen in numerical modeling the measurement noise level decreases roughly by the same factor. However, the other source of fluctuations does not decrease. It becomes predominant in a large part of the spectrum. Finally, for the highest light level (see Figure 6 (c)), the noise level is negligible whatever the Zernike mode.

In fact, low order Zernike coefficient variances decrease according to a $-11/3$ power law. This behavior suggests that the fluctuations may be induced by turbulence. Assuming that the source of fluctuations was the turbulence in the lab, the set up was modified in order to reduce air movements around the optical path. The results obtained with the modified set up are presented on Figure 6, cases (d), (e) and (f). The fluctuation variances which are not sensitive to light level are reduced by a factor 10 by comparison with the results obtained without protection. This confirms that the low mode fluctuations are probably induced by turbulence in the laboratory. At this point, it is necessary to put the stress on the low level of the fluctuations of the SH measurements which denotes a great stability and accuracy of the experimental set up.

Once this source of fluctuations reduced, the noise spectrum level appears clearly whatever the light level. From the noise propagation coefficient, it is now possible to calculate the image shift estimate variance knowing the Zernike coefficient noise spectrum level.¹⁰ The variance of the noise induced image shift estimate may also be calculated using the analytical approach given in paragraph 2. Since the lowest light level corresponds to a mean number of photoelectron per pixel of 100, the photon noise is predominant compared to CCD read out noise. Moreover, the Poisson statistics can be approached by Gaussian statistics. Finally, the noise in the images can be approached by an unstationary Gaussian noise whose variance is equal to the pixel light level temporal average. As seen in the numerical modeling performed in paragraph 3.1 the variance of the shift estimate can be reasonably obtained with the stationary Gaussian noise expression 5. By using it, we obtained a noise induced shift image variance in good accordance with the value obtained from the measurements. For example, both are inversely proportional to light level as expected.

Finally, this experiment validates the use of the data processing proposed in paragraph 2 in conditions representative of active optics for ground observation. Excellent measurement accuracy has been obtained. The influence of the flux level has been studied: the analytical expression derived to predict wavefront sensing performance is confirmed experimentally.

4. WAVEFRONT SENSING WITH LIMITED EXTENDED SCENE

On one hand, classical COG does not works with infinitely extended scene image and specific algorithm like correlation is required. On the other hand, when source is unresolved, for example in Adaptive Optics (AO) for

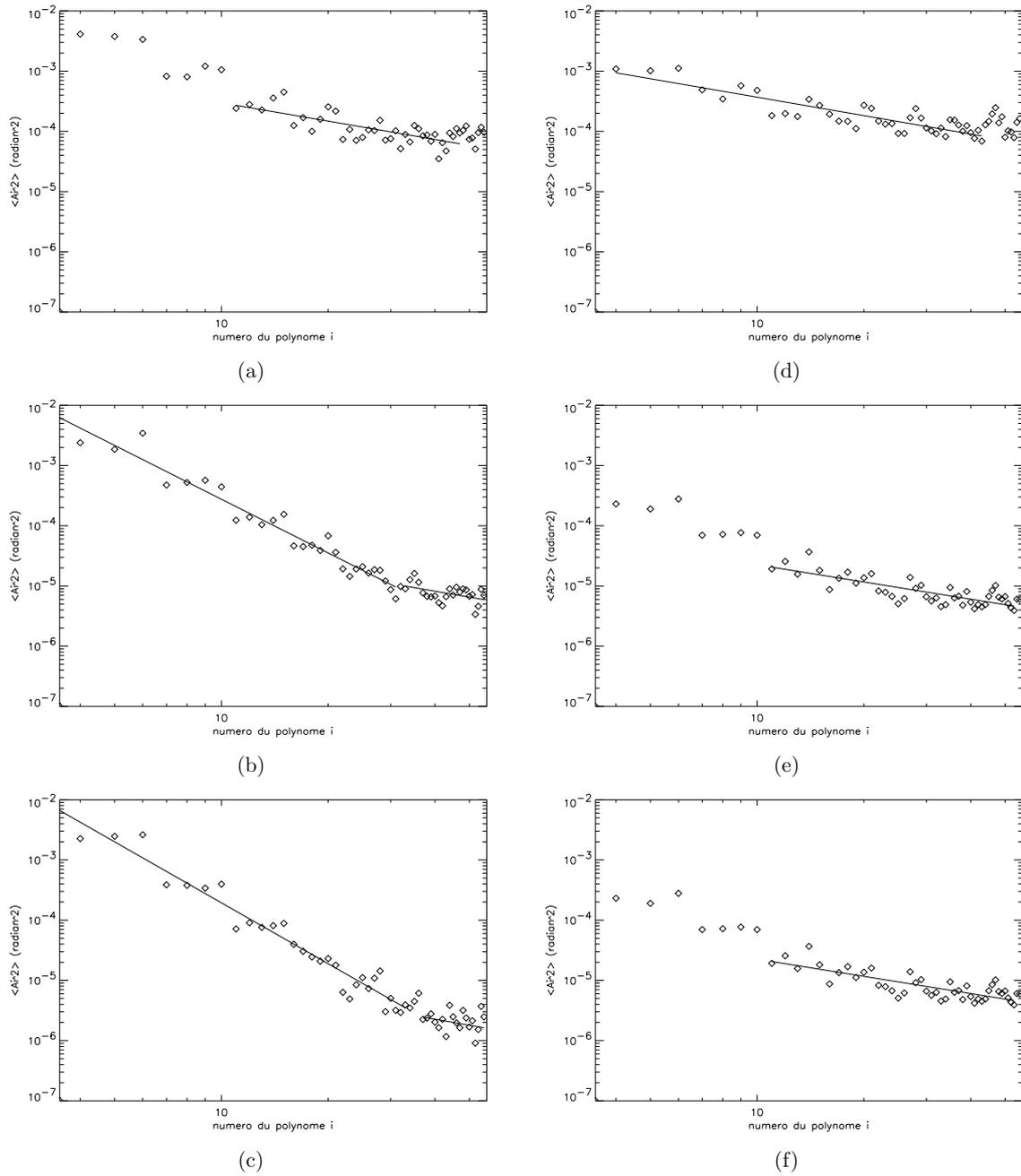


Figure 6. Zernike coefficient variances for different light levels. (a), (b), (c): unprotected optical setup. (d), (e), (f): protected optical setup. Mean number of photoelectrons per pixel (spatial and temporal average): (a) and (d) 100, (b) and (e) 1000, (c) and (f) 10000.

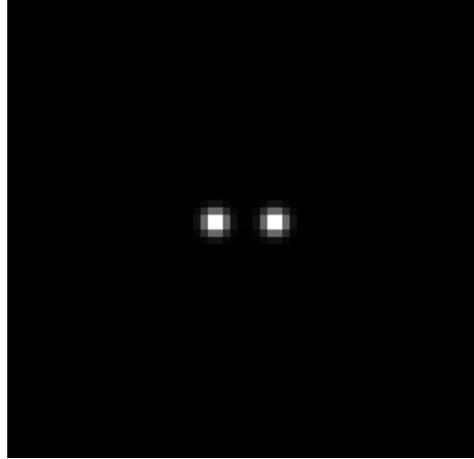


Figure 7. Image of two separated Gaussian spots . $\sigma_T = 1 \text{ pixel}$, $d = 0.75 \text{ pixels}$.

stellar astronomy, quad-cell, COG or Weighted COG¹¹ are used. In that last situation, no structure appears in the image or the structures due to wavefront undersampling are unknown. Correlation based techniques using structures in the images cannot bring significant gain.¹²

When wavefront sensing for astronomy with Laser Guide Star (LGS), the source is the fluorescence of atoms in the 95 km high sodium layer. The sodium thickness determines the laser guide star spot elongation as viewed from a subaperture. This elongation will dramatically increase with the next generation of telescopes, that is the extremely large telescopes compared to a 8 m telescope. Moreover, inside the elongation, some structures may appear since the sodium layer is stratified.

In order to analyze if correlation could bring a gain in such situation, the behavior of COG and correlation technique for shift estimation has been studied when a source of limited extent including structures is used. Since both of them are unbiased estimators, variance of the shift estimate function of noise in the image is only studied. Since astronomical application is considered, the image fluctuations are photon noise limited.

The image chosen for the study is composed of two spots. The separation between them is a parameter, d . Gaussian shape is chosen since analytical expressions can be easily derived:

$$E(I(x, y)) = \frac{N_{ph}}{4\pi\sigma_T^2} \left[e^{-\frac{(x+d)^2+y^2}{2\sigma_T^2}} + e^{-\frac{(x-d)^2+y^2}{2\sigma_T^2}} \right], \quad (8)$$

where:

$$N_{ph} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(I(x, y)) dx dy.$$

Such an image is presented on Figure 7.

The simple case where $d = 0$, that is the single spot case, may be first analyzed. An analytical approach was first chosen. The variance of the COG shift estimate is well known¹:

$$\sigma_{\delta_{1_{cog}}}^2 = \frac{\sigma_T^2}{N_{ph}}. \quad (9)$$

Since an analytical expression of the image is available, the variance of the correlation shift estimate may be directly derived. The calculation is performed by COG of the correlation function without thresholding. Same

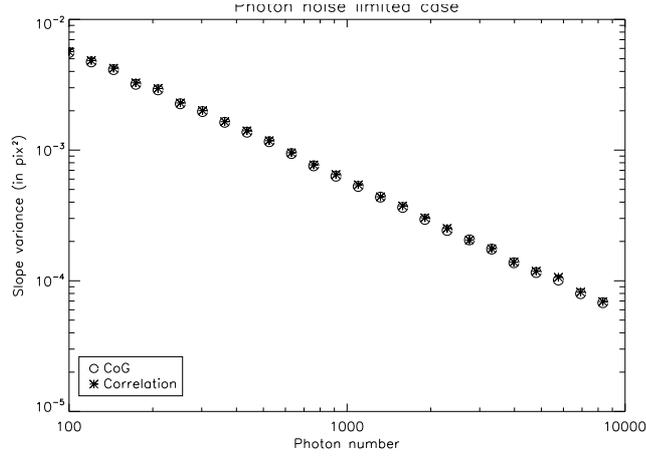


Figure 8. Variance of shift estimates in case of single Gaussian shaped spot. $\sigma_T = 0.75 \text{ pixel}$.

expression as for COG is obtained:

$$\sigma_{\delta 1_{corr}}^2 = \frac{\sigma_T^2}{N_{ph}}. \quad (10)$$

A numerical modeling was performed in order to validate these results. For each level of light, 100 noisy images are generated. The variance of both estimates are calculated from this set of images. The variances of COG and correlation estimates are plotted on Figure 8 as a function of the overall average number of photons per image, N_{ph} . The variances of the COG estimates obtained analytically and numerically are the same. Finally, this confirms that correlation does not bring any gain compared to COG in case of a single spot.

In a second step, we consider the case where d is large with regards to σ_T . Both components of the image are well separated. With an identical analytical approach, the variance of the COG estimator coordinate along the direction defined by the two spots has been calculated :

$$\sigma_{\delta 2_{cog}}^2 = \frac{\sigma_T^2 + d^2}{N_{ph}}. \quad (11)$$

The variance of COG estimator depends on the spot width but also on the two spot separation, d . In fact, it depends on the overall dimension of the image. In the the same way, the variance of the correlation estimator coordinate was derived. However since $d \gg \sigma_T$, the two spots are well separated and so are the three correlation peaks. We have estimated the position of the maximum after windowing the central peak :

$$\sigma_{\delta 2_{corr}}^2 = \frac{\sigma_T^2}{N_{ph}}. \quad (12)$$

The variance of the correlation estimator coordinate depends only on the spot width because of the windowing. If the position of the correlation maximum were estimated by doing the COG of the overall correlation function, same result as COG would have been obtained. A numerical modeling was performed in order to validate these results in a way similar to the single spot one. The variances of COG and correlation estimates are plotted on Figure 8 as a function of d . As predicted by equation 11, the variance of the COG estimator is proportional to d^2 when $d \gg \sigma_T$. As predicted by equation 12, the variance of the correlation estimator is not function of d when $d \gg \sigma_T$. When d and σ_T are of the same order of magnitude, the three peaks of correlation function cannot be separated: behaviors of COG and correlation are very similar.

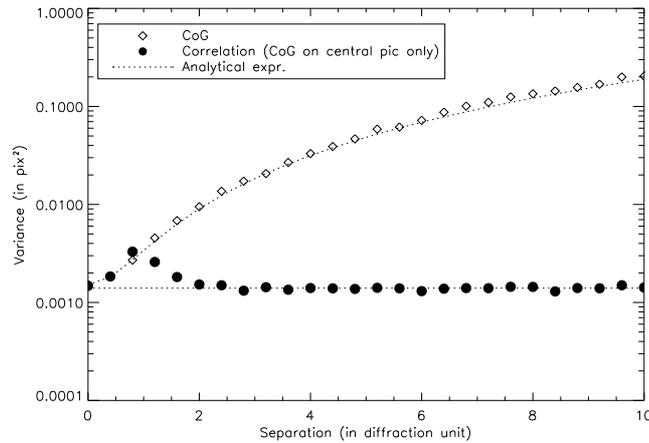


Figure 9. Variance of shift estimates in case of a double Gaussian shaped spot. $\sigma_T = 0.75 \text{ pixel}$.

Finally, the COG of the image is an estimator which does not make use of the information given by structures inside the image. On the contrary, correlation does. For data processing of SH working with structured sources like LGS for ELT, correlation may bring a gain compared to COG or similar methods.

5. CONCLUSION

A study dedicated to Shack-Hartmann with extended source has been presented. This study was restricted to the simple case where the measurement in each subaperture may be described by an image shift. When the extent of the image is limited, the estimate given by the maximum likelihood approach is the shift of the correlation function between the current image and an reference image. In case of an source extent larger than the Shack-Hartmann field of view, the estimate given by correlation is biased.

The case of an infinitely extended scene has first been considered. In that case, the source is larger than the Shack-Hartmann field of view. However a correlation-like technique is proposed. A method is described for the estimation of the correlation maximum position: thresholding and calculation of the Center of Gravity of correlation peak. Analytical expressions predicting performance of such an estimate as a function of the noise in the image and the spatial content of the image was derived. The main one was numerically validated. Moreover, the whole Shack-Hartmann data processing was tested with experimental data representative of active optics for ground observation. The bias identified in the theoretical study appears to be negligible. The obtained results demonstrate that the proposed data processing is a robust and accurate technique.

Sources of limited extent were also considered. The influence of structures inside the source image onto shift estimators accuracy has been studied. Preliminary analytical calculations and numerical modeling have shown that correlation based technique may bring a gain compared to classical center of gravity on image. In fact this situation can be encountered with Adaptive Optics and Laser Guide Star for Extremely Large Telescope.

REFERENCES

1. G. Rousset, "Wave-front sensors," in *Adaptive Optics in Astronomy*, F. Roddier, ed., ch. 5, pp. 91–130, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
2. O. von der Lühe, "Wavefront Error Measurement Technique Using Extended, Incoherent Light Sources," *Optical Engineering* **27**, pp. 1078–1087, 1988.

3. V. Michau, G. Rousset, and J.-C. Fontanella, "Wavefront sensing from extended sources," in *Real Time and Post Facto Solar Image Correction*, R. R. Radick, ed., *NSO/SP Summer Workshop Series* **13**, pp. 124–128, National Solar Observatory/Sacramento Peak, (Sunspot, New Mexico, USA), 1992.
4. R. L. Kendrick, D. S. Acton, and A. L. Duncan, "Phase-diversity wave-front sensor for imaging systems," *Appl. Opt.* **33**(27), pp. 6533–6546, 1994.
5. T. R. Rimele and R. R. Radick, "Solar adaptive optics at the national solar observatory," *Adaptive Optical System Technologies* **3353**(1), pp. 72–81, SPIE, 1998.
6. L. Poyneer, "Scene-based Shack-Hartmann wave-front sensing: analysis and simulation," *Applied Optics* **42**(29), pp. 5807–5815, 2003.
7. C. Robert, J.-M. Conan, V. Michau, T. Fusco, and N. Vedrenne, "Scintillation and Phase Anisoplanatism in Shack-Hartmann Wavefront Sensing," *J. Opt. Soc. Am. A* **23**, pp. 613–624, Mar. 2006.
8. M. Van Dam and R. Lane, "Wave-front slope estimation," *J. Opt. Soc. Am. A* **17**, pp. 1319–1324, 2000.
9. D. Gratadour, L. M. Mugnier, and D. Rouan, "Sub-pixel image registration with a maximum likelihood estimator," *Astron. Astrophys.* **443**, pp. 357–365, Nov. 2005.
10. F. Rigaut and E. Gendron, "Laser guide star in adaptive optics: the tilt determination problem," *Astron. Astrophys.* **261**, pp. 677–684, 1992.
11. M. Nicolle, T. Fusco, G. Rousset, and V. Michau, "Improvement of shack-hartmann wavefront sensor measurement for extreme adaptive optics," *Opt. Lett.* **29**, pp. 2743–2745, Dec. 2004.
12. S. Thomas, T. Fusco, A. Tokovinin, M. Nicolle, V. Michau, and G. Rousset, "Comparison of centroid computation algorithms in a shack-hartmann sensor," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **371**(1), pp. 323–336, 2006.

12.3 Conclusions sur la corrélation

Les deux publications présentées dans cet article mettent en évidence une grande similitude de comportement entre les estimateurs basés sur la corrélation et les estimateurs plus classiques basés sur le calcul du barycentre de l'image, seuillée ou pondérée. Deux cas distincts doivent être considérés :

- Le cas d'une source ponctuelle : les estimateurs basés sur la corrélation n'apportent alors pas de gain significatif par rapport aux estimateurs basés sur le calcul du barycentre du spot Hartmann (CdG seuillé et CdG pondéré). En effet, quel que soit le flux, il est possible d'obtenir des performances similaires avec l'une ou l'autre classe d'estimateurs, en prenant soin d'adapter les paramètres de la détection (seuillage pour le CdG, FWHM de la pondérante pour le CdG pondéré). A fort flux, c'est l'estimateur CdG qui est comparable à l'estimation basée sur la corrélation, tandis qu'à faible flux, c'est le centre de gravité pondéré qui permet d'atteindre des performances identiques. Dans un cas comme dans l'autre, la complexité des calculs étant augmentée dans le cas des estimateurs basés sur la corrélation, ces derniers semblent au final moins intéressants que les estimateurs basés sur le centre de gravité.
- Le cas d'une source étendue : Dans ce cas, la corrélation reste l'outil de détection incontournable lorsque la dimension angulaire de la scène servant de source guide à l'analyse de front d'onde est supérieure au champ d'une sous-pupille. C'est le cas par exemple en imagerie solaire et terrestre. Lorsque la dimension angulaire de la source est inférieure au champ d'une sous-pupille, comme dans le cas de l'AO assistée par étoile Laser, la corrélation peut également apporter un gain significatif sur l'estimation de la pente du front d'onde. Cependant, dans un cas comme dans l'autre, il est important de souligner que les algorithmes de corrélation nécessitent la connaissance de la forme du spot, et qu'ils sont généralement peu robustes aux erreurs de modèle.

Conclusion

Le travail de thèse présenté dans ce manuscrit avait pour but l'étude de la problématique globale de l'analyse de front d'onde pour les systèmes d'optique adaptative de nouvelle génération. Dans le contexte général du développement de nombreux systèmes pour les grands télescopes existants et pour les futurs *extremely large telescopes*, une approche générale de cette problématique est nécessaire pour identifier les points critiques nécessitant une étude approfondie.

Les optiques adaptatives qui ont motivé ce travail sont de deux sortes :

- Les systèmes à faible champ, pour lesquels l'analyse de front d'onde et la correction sont effectuées sur axe, et qui ne nécessitent pas la connaissance du volume de turbulence. Il s'agit principalement des systèmes d'AO conventionnels et d'optique adaptative à très haute performance, appelée AO extreme (XAO).
- Les systèmes à large champ, pour lesquels il est indispensable d'accéder à la connaissance de la répartition volumique de la turbulence. Il s'agit des systèmes d'optique adaptative multi-conjuguée (MCAO), d'optique adaptative dédiée à la correction de la turbulence localisée à proximité de la pupille (GLAO) et d'optique adaptative multi-objet (MOAO).

En ce qui concerne les systèmes à faible champ, la problématique se réduit à la gestion du budget d'erreur de l'analyse de front d'onde d'une optique adaptative conventionnelle, l'un des problèmes principaux étant l'amélioration de la robustesse au bruit de la mesure de front d'onde. Dans le cas des optiques adaptatives à large champ le problème est plus complexe car la connaissance du volume de turbulence nécessite l'utilisation de plusieurs étoiles guides et d'une procédure de reconstruction en trois dimensions de l'atmosphère turbulente. La qualité de l'analyse de front d'onde dépend alors de trois facteurs :

- La présence d'étoiles pouvant servir de guides à l'analyse.
- Le concept d'analyse de front d'onde considéré.
- La performance des senseurs de front d'onde.

Ceci nous a naturellement conduit à découper ce travail de thèse en trois volets :

- Une étude de la couverture de ciel pour les AO à large champ. Il est en effet primordial lors de la définition des instruments de pouvoir caractériser la fraction du ciel sur lequel un instrument nécessitant N étoiles guides de magnitude inférieure ou égale à une magnitude limite donnée pourra délivrer sa performance nominale.
- Une étude de performance des deux concepts d'analyse de front d'onde actuellement proposés. Leur sensibilité au bruit et leur capacité à permettre une reconstruction efficace du front d'onde

sont deux points critiques.

- Une étude de la performance d'un type de senseurs de front d'onde : l'analyseur de Shack-Hartmann. Ce choix est motivé par la large utilisation qui est faite de ce senseur en optique adaptative pour l'astronomie. Notons que cette étude est d'un intérêt commun à l'ensemble des systèmes cités ci-dessus.

Ces trois volets constituent les trois parties principales du manuscrit présenté ici. Ces études nous ont permis d'obtenir des résultats tout à fait intéressants, et ont soulevé de nombreuses questions et perspectives.

Bilan

La couverture de ciel pour une AO à large champ

L'étude de couverture de ciel présentée dans la partie II nous a permis de souligner les limitations de la définition communément admise de la couverture de ciel pour la multi-analyse. En effet, celle-ci prend en compte le nombre d'étoiles guides présentes dans le champ et leur magnitude, mais part du principe que du moment que le nombre d'étoiles guides requis est atteint, le champ d'intérêt scientifique est corrigé dans son ensemble. Or dans le cas d'étoiles guides naturelles, la répartition des étoiles dans le champ peut avoir une influence considérable sur la capacité de l'instrument à atteindre sa performance, en particulier si le nombre d'étoiles est faible.

Nous avons donc proposé une redéfinition de la notion de couverture de ciel, prenant en compte comme précédemment le nombre d'étoiles présentes dans un champ donné et leur magnitude limite, mais aussi la fraction de la surface du champ d'intérêt scientifique effectivement couverte par les étoiles guides. Pour effectuer ce travail, nous avons été amené à définir quatre champs différents pour l'analyse de front d'onde en MCAO :

- Le champ technique, dans lequel l'analyse de front d'onde recherche les étoiles guides.
- Le champ scientifique, dans lequel l'objectif de performance doit être atteint
- Le champ observable, qui est le champ dans lequel les étoiles guides permettent d'atteindre l'objectif de performance.
- Et finalement le plus important : le champ corrigé, qui est l'intersection du champ scientifique et du champ observable.

Nous proposons de corriger la définition usuelle de la couverture de ciel en la multipliant simplement par la fraction du champ scientifique représentée par le champ corrigé. Cette nouvelle définition de la couverture de ciel a été appliquée au cas du démonstrateur d'optique adaptative multi-conjuguée (MCAO) de l'observatoire austral européen (ESO). On a alors montré que ce nouvel algorithme fournit des résultats plus réalistes que l'algorithme classique et permet une estimation plus précise de la performance accessible par un instrument donné face à une configuration d'étoiles donnée.

Les concepts d'analyse de front d'onde pour l'AO à large champ

L'étude des concepts d'analyse de front d'onde présentée en partie III nous a permis d'évaluer et de comparer les performances des concepts d'analyse *Star Oriented* et *Layer Oriented*. On a souligné que chaque concept possède une limitation intrinsèque à sa façon de réaliser la mesure : la sensibilité au bruit de détecteur pour le *Star Oriented*, la sensibilité à la turbulence d'altitude lorsque les étoiles guides n'ont pas le même flux pour le *Layer Oriented*.

Toutefois, on a montré qu'il est possible dans les deux cas d'optimiser la gestion des directions d'analyse et d'améliorer significativement les performances des concepts. Dans le cas du *Star Oriented*, l'optimisation proposée est un processus numérique, consistant en un calcul des coefficients de gain optimaux pour chaque mode mesuré dans chaque direction d'analyse. Pour le *Layer Oriented*, on a montré qu'il est nécessaire d'envisager une optimisation à la fois optique et numérique. En effet, l'un des enjeux de cette optimisation est de limiter l'écart de flux entre les étoiles guides *avant* la mesure des déformations du front d'onde. Ceci ne peut se faire qu'en insérant des densités optiques sur le trajet de la lumière issue des étoiles guides les plus brillantes. Notons que cela est susceptible de poser des problèmes de design optique et de complexité de l'instrument.

On montre alors que les performances du *Star Oriented* optimisé et du *Layer Oriented* optimisé sont très proches et dépendent peu de la magnitude limite des étoiles guides prises en comptes. Ces optimisations ont été validées par simulation numérique et expérimentalement. La validation expérimentale présentée au chapitre 7 nous a permis de confirmer quelques unes des conclusions du chapitre 6, à savoir l'efficacité de la solution d'optimisation proposée dans le *Star Oriented* et la sensibilité du *Layer Oriented* à la turbulence d'altitude. Elle nous a également permis de souligner l'importance d'avoir un bon modèle de propagation du bruit pour calculer les coefficients de l'optimisation.

Enfin, le chapitre 8 a été l'occasion de se replacer dans la perspective globale de la performance du GLAO. Après avoir discuté de la dualité de la demande de performance pour le GLAO (une correction significative *et* uniforme), une étude du GLAO optimisé au regard de sa performance moyenne a été proposée. Cette étude montre que l'approche tomographique est susceptible d'apporter un gain significatif en performance lorsque les étoiles guides sont rares et réparties aléatoirement dans le champ, mais aussi lorsqu'elles sont localisées en bord de champ, comme c'est le cas des étoiles Laser.

On a montré également que cette approche ne garantit pas l'uniformité de la performance, puis que la minimisation d'un critère basé uniquement sur l'uniformité de la performance conduit à des solutions sans intérêt pour l'AO à large champ. La prise en compte de l'uniformité de la correction dans la reconstruction de front d'onde doit donc être envisagée sous l'aspect d'une optimisation sous contrainte d'assurer une performance moyenne minimale.

L'optimisation des algorithmes d'estimation du Shack-Hartmann

Enfin, la partie VI de ce manuscrit nous a permis d'analyser le budget d'erreur de la mesure de pente locale du front d'onde réalisée par un senseur Shack-Hartmann. Nous avons proposé dans cette partie une étude comparative de trois algorithmes d'estimation de la position du spot Hartmann : le centre de gravité, la corrélation et un nouvel estimateur proposé ici : le centre de gravité du spot auquel on a appliqué une fonction de pondération gaussienne (appelé ci-après centre de gravité pondéré). Les erreurs considérées sont la non-linéarité de l'estimateur, l'erreur due aux bruits de photons et de détecteur, et l'erreur due aux fluctuations turbulentes de la forme du spot.

On a montré en particulier que l'estimateur centre de gravité pondéré présente une meilleure robustesse au bruit de détecteur que les estimateurs basés sur le centre de gravité et sur la corrélation, mais qu'il est biaisé. Ce biais peut toutefois être connu et corrigé en connaissant la largeur à mi-hauteur du spot et de la fonction de pondération qui lui est appliquée en traitement.

On a montré également qu'en présence d'une source ponctuelle, les algorithmes basés sur la corrélation n'apportent pas de gain sensible en performance à fort flux par rapport au simple centre de gravité, et qu'elle n'apporte pas de gain significatif à faible flux par rapport au centre de gravité pondéré. Par contre, ces algorithmes sont plus performants en présence de sources étendues et structurées. Il est cependant nécessaire d'avoir une bonne connaissance *a priori* de la forme du spot.

Perspectives

Concernant la couverture de ciel, l'un des enjeux les plus intéressants est sans doute l'application de l'algorithme proposé ici aux études de couverture de ciel pour les futurs télescopes à très grand diamètre (ELTs). Il est en effet indispensable de pouvoir statuer sur la capacité des systèmes d'AO qui équiperont ces télescopes à fonctionner avec des étoiles guides naturelles, car il semblerait que l'assistance par étoiles Laser de ces instruments soit plus problématique que dans le cas des télescopes actuels.

Par ailleurs, l'étude de performance et l'optimisation des concepts d'analyse de front d'onde proposées en partie III nécessitent encore des expériences de validation expérimentale. Ces validations sont en particulier nécessaires pour le *Layer Oriented*, qui n'a pu pour l'instant être testé sur le démonstrateur MAD. Il serait du premier intérêt de mener une étude expérimentale de l'effet de la turbulence d'altitude sur les performances de ce concept en présence d'étoiles guides de flux différents. Concernant *Star Oriented*, de nouvelles validations expérimentales seraient également bienvenues, en particulier pour étudier de façon plus complète les effets d'erreurs de modèles sur l'efficacité de l'optimisation proposée. Ces validations pourront avoir lieu sur le banc d'optique adaptative multi-conjuguée HOMER actuellement en cours de développement à l'ONERA.

Par ailleurs l'étude numérique de la performance du GLAO optimisé que nous avons proposé au chapitre 8 nécessite elle aussi des validations expérimentales. De plus, cette étude pourra avec profit être étendue au concept de MCAO dénommé *Multiple Field of View*, dans lequel le champ total de l'instrument est séparé en deux champs techniques, l'un étant annulaire et entourant le second, qui est également le champ d'intérêt scientifique. Dans ce concept, le champ technique externe annulaire sert à l'estimation de la couche proche du sol, comme dans un GLAO, tandis que

le second champ sert à la correction de la turbulence d'altitude. Cette discrimination des étoiles en fonction de leur localisation dans le champ est intéressante car elle permet pour l'étage GLAO de profiter d'une forte décorrélation de la turbulence d'altitude, mais on pourrait également envisager de sélectionner les étoiles en fonction de leur magnitude, en utilisant les plus brillantes pour une optimisation tomographique de la correction du champ d'intérêt scientifique et en gardant les autres pour une estimation de la couche au sol grâce à un concept *Layer Oriented*.

Le lien de cette étude avec l'étude de couverture de ciel présentée dans la partie II reste également à faire, ainsi que la mise à l'échelle de ces résultats à la dimension des ELTs. Par ailleurs, l'optimisation sous contrainte de l'uniformité de la performance un GLAO reste à développer.

Enfin, pour ce qui est de l'analyseur Shack-Hartmann, de nouvelles validations sont ici encore nécessaires pour caractériser précisément les performances de l'estimateur centre de gravité pondéré. Ces validations permettront de justifier le choix d'un algorithme d'estimation pour l'optique adaptative de l'instrument SPHERE. Enfin, les formules de propagation du bruit pour le centre de gravité pondéré en présence d'un spot allongé ont été écrites, mais aucune étude n'a été menée dessus. Une étude poussée de ce cas serait très intéressante car elle permettrait de cerner l'apport éventuel de cet algorithme dans le cas où la source guide est une étoile Laser et de le comparer avec les algorithmes basés sur la corrélation.

Ce travail nous a permis de proposer des optimisations, pour les senseurs de front d'onde Shack-Hartmann, pour les concepts d'analyse de front *Star Oriented* et *Layer Oriented*, et pour le système *Ground Layer Adaptive Optics*. Toutefois, nous n'avons pas pris en compte ici les aspects temporels, ni les spécificités liées aux éléments de correction (dynamique temporelle, par exemple). L'optimisation d'un système d'optique adaptative devrait pourtant se concevoir selon une approche globale, en incluant chacun de ses éléments constitutifs : les variables d'entrée de cette optimisation devraient alors être les données directes fournies par le (ou les) senseur(s) de front d'onde (*i.e.* les intensités lues sur les pixels du (ou des) détecteur(s)), et les variables de sortie les tensions de commande du (ou des) miroir(s). Bien qu'une telle ambition puisse effrayer par le grand nombre de variables et de degrés de liberté, elle seule garantirait l'obtention de la performance ultime du système.

Annexe A

Formulaire de calcul matriciel

A.1 Notations

Soient :

- u , un scalaire,
- \mathbf{x} et \mathbf{y} , deux vecteurs,
- \mathcal{A} , \mathcal{B} et \mathcal{M} , trois matrices

A.2 Définitions

A.2.1 Produit scalaire

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \mathbf{x}^t \mathbf{y} = \text{trace} \{ \mathbf{x} \mathbf{y}^t \} \quad (\text{A.1})$$

On en déduit :

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^t \mathbf{x} = \text{trace} \{ \mathbf{x} \mathbf{x}^t \} \quad (\text{A.2})$$

A.2.2 Dérivée matricielle

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial A_{11}} \right] & \dots & \left[\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial A_{1c}} \right] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left[\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial A_{l1}} \right] & \dots & \left[\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial A_{lc}} \right] \end{bmatrix}, \quad \text{avec} \quad \left[\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial A_{ij}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_{11}}{\partial A_{ij}} & \dots & \frac{\partial M_{1n}}{\partial A_{ij}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial M_{m1}}{\partial A_{ij}} & \dots & \frac{\partial M_{mn}}{\partial A_{ij}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

A.3 Propriétés des dérivées matricielles

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathcal{A}^t} = \left(\frac{\partial \mathcal{M}^t}{\partial \mathcal{A}} \right)^t$$

Cas particulier : $\frac{\partial u}{\partial \mathcal{A}^t} = \left(\frac{\partial u}{\partial \mathcal{A}} \right)^t$ (u scalaire)

A.3.1 Dérivées par rapport à un vecteur

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (x^t \mathcal{M} y) &= \mathcal{M} y \\ \frac{\partial}{\partial x} (x^t \mathcal{M} x) &= \mathcal{M} x + \mathcal{M}^t x \\ \frac{\partial}{\partial x} (x^t \mathcal{M}^t \mathcal{M} x) &= 2\mathcal{M}^t \mathcal{M} x \\ \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{B}^t x x^t \mathcal{A}) &= \mathcal{B}^t x \mathcal{A} + \mathcal{B} x^t \mathcal{A} \end{aligned}$$

A.3.2 Dérivées par rapport à une matrice

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathcal{A}} (x^t \mathcal{A} y) &= x y^t \\ \frac{\partial}{\partial \mathcal{A}^t} (x^t \mathcal{A}^t \mathcal{A} x) &= 2x x^t \mathcal{A}^t \\ \frac{\partial}{\partial \mathcal{A}^t} (x^t \mathcal{A} \mathcal{M} \mathcal{A}^t y) &= x y^t \mathcal{A} \mathcal{M}^t + y x^t \mathcal{A} \mathcal{M} \end{aligned}$$

A.3.3 Dérivées de traces de matrices

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathcal{A}} \left(\text{trace} \begin{Bmatrix} \mathcal{A}\mathcal{B} \\ \mathcal{B}^t \mathcal{A}^t \\ \mathcal{B}\mathcal{A} \end{Bmatrix} \right) &= \mathcal{B}^t \\ \frac{\partial}{\partial \mathcal{A}} \left(\text{trace} \begin{Bmatrix} \mathcal{A}^t \mathcal{B} \\ \mathcal{A}\mathcal{B}^t \end{Bmatrix} \right) &= \mathcal{B} \\ \frac{\partial}{\partial \mathcal{A}} (\text{trace} \{ \mathcal{A}^n \}) &= n (\mathcal{A}^{(n-1)})^t \\ \text{Cas particulier : } \frac{\partial}{\partial \mathcal{A}} (\text{trace} \{ \mathcal{A} \}) &= \text{Id} \\ \frac{\partial}{\partial \mathcal{A}} (\text{trace} \{ \mathcal{B}^t \mathcal{A}^t \mathcal{M} \mathcal{A} \mathcal{B} \}) &= \mathcal{M}^t \mathcal{A} \mathcal{B} \mathcal{B}^t + \mathcal{M} \mathcal{A} \mathcal{B} \mathcal{B}^t \\ \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}} (\text{trace} \{ \mathcal{A} \mathcal{M} \mathcal{B} \}) &= \mathcal{A}^t \mathcal{B}^t \\ \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}} (\text{trace} \{ \mathcal{A} \mathcal{M} \mathcal{B} \mathcal{M} \}) &= \mathcal{A}^t \mathcal{M}^t \mathcal{B}^t + \mathcal{B}^t \mathcal{M}^t \mathcal{A}^t \\ \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}} (\text{trace} \{ \mathcal{A} \mathcal{M} \mathcal{B} \mathcal{M}^t \}) &= \mathcal{A}^t \mathcal{M} \mathcal{B}^t + \mathcal{A} \mathcal{M} \mathcal{B} \end{aligned}$$

A.3.4 Dérivée d'une fonction de matrice

Soient u un scalaire, \mathcal{M} une matrice dépendant de u et f une fonction scalaire de \mathcal{M} . Alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} (f(\mathcal{M})) &= \text{trace} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \mathcal{M}} \left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial u} \right)^t \right\} \\ \text{Cas particulier : } \frac{\partial}{\partial u} (\text{trace} \{ \mathcal{M} \}) &= \text{trace} \left\{ \frac{\partial \mathcal{M}^t}{\partial u} \right\} \end{aligned}$$

A.4 Propriétés des matrices inverses

- Soit \mathcal{A} une matrice carrée inversible, alors : $(\mathcal{A}^{-1})^t = (\mathcal{A}^t)^{-1}$
- Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux matrices carrées inversibles, alors : $(\mathcal{A}\mathcal{B})^{-1} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{-1}$

Annexe B

Estimation de la position d'un spot lumineux

On considère ici un spot lumineux, plongé dans un support continu et infini, dont on cherche à mesurer la position de façon optimale. Le spot observé sur le détecteur peut être considéré comme la manifestation décalée et bruitée de la PSF :

$$s(\mathbf{x}) = r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + b(\mathbf{x}) \quad (\text{B.1})$$

Avec :

- $\mathbf{x} (x, y)$: vecteur position dans le plan de l'image ;
- $\mathbf{x}_0 (x_0, y_0)$: Position de l'image déplacée ;
- $s(\mathbf{x})$: image lue sur le détecteur ;
- $r(\mathbf{x})$: PSF non décalée et non bruitée ;
- $b(\mathbf{x})$: Une réalisation du bruit sur chaque pixel ;

On recherche dans la suite les estimateurs optimaux de la position de ce spot lorsqu'il est soumis au bruit de photons ou au bruit de détecteur. Dans le premier cas, l'image $s(\mathbf{x})$ est caractérisée par une loi de probabilité Poissonnienne :

$$\forall (\mathbf{x}) \mathcal{P}(s(\mathbf{x})) = \frac{(\mu(\mathbf{x}))^{s(\mathbf{x})}}{s(\mathbf{x})!} \cdot e^{-\mu(\mathbf{x})}, \text{ avec : } \mu(\mathbf{x}) = r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (\text{B.2})$$

Dans le cas du bruit de détecteur, le bruit est additif et on supposera qu'il suit une loi de probabilité gaussienne, centrée, isotrope et d'écart-type σ_{det} :

$$\forall (\mathbf{x}) \mathcal{P}(b(\mathbf{x})) = \frac{1}{2\pi\sigma_{det}^2} e^{-b^2(\mathbf{x})/2\sigma_{det}^2} \quad (\text{B.3})$$

On traite successivement l'approche maximum de vraisemblance et l'approche maximum à postériori. Dans chaque cas, on considère d'abord le cas général d'un spot de forme quelconque, puis on particularise au cas d'un spot à profil gaussien d'intensité lumineuse.

B.1 Estimation au sens du maximum de vraisemblance

Soit $\hat{\mathbf{x}}_0$ une estimation de la position vraie \mathbf{x}_0 de la tache. La fonction de vraisemblance de $\hat{\mathbf{x}}_0$ est par définition :

$$\mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}_0) = \mathcal{P}(s(\mathbf{x}) | \hat{\mathbf{x}}_0) \quad (\text{B.4})$$

L'estimateur $(\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML}$ qui maximise la vraisemblance vérifie :

$$(\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML} = \arg \max_{\hat{\mathbf{x}}_0} \{ \mathcal{P}(s(\mathbf{x}) | \hat{\mathbf{x}}_0) \} \quad (\text{B.5})$$

$(\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML}$ dépend donc du profil de la tâche et de la statistique du bruit. Nous recherchons dans la suite $(\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML}$ pour un spot de forme quelconque, pour un bruit à statistique poissonnienne (bruit de photons) puis pour un bruit à statistique gaussienne (bruit de détecteur). On traite ensuite le cas particulier d'un spot à profil gaussien.

B.1.1 Estimateur ML en présence de bruit de photons

Dans le cas du bruit de photons, dont la statistique est donnée par l'équation (B.2), on a, en considérant la log-vraisemblance :

$$\begin{aligned} \text{Log-}\mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}_0) &= \iint_{-\infty}^{\infty} \ln(\mathcal{P}(s(\mathbf{x}))) d^2\mathbf{x} \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} \ln\left(\frac{r(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0)^{s(\mathbf{x})}}{s(\mathbf{x})!} \cdot e^{-r(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0)}\right) d^2\mathbf{x} \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} [s(\mathbf{x}) \ln(r(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0)) - \ln(s(\mathbf{x})!) - r(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0)] d^2\mathbf{x} \end{aligned}$$

On suppose dans cette équation que le bruit décorrélé d'un pixel à l'autre. Or sur un support infini, on a :

$$\left. \begin{array}{l} \iint r(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0) d^2\mathbf{x} \\ \iint \ln(s(\mathbf{x})!) d^2\mathbf{x} \end{array} \right\} \text{ indépendants de } (\hat{\mathbf{x}}_0)$$

La première affirmation est triviale : r étant la PSF et le support d'intégration étant infini, l'intégrale est indépendante de la position de la tâche. En ce qui concerne la seconde affirmation, il faut considérer que $s(\mathbf{x})$ est affectée d'un bruit à statistique poissonnienne dont le paramètre en chaque point \mathbf{x} est donné par $r(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0)$. Cependant, l'image étant considérée sur un support infini, l'espace des valeurs de $s(\mathbf{x})$ est invariant par translation de $\hat{\mathbf{x}}_0$. Donc l'espace des valeurs de $\ln(s(\mathbf{x})!)$ est également invariant par translation de $\hat{\mathbf{x}}_0$, et :

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{x}}_0} \left(\iint \ln(s(\mathbf{x})!) d^2\mathbf{x} \right) = 0$$

L'estimateur optimal au sens du maximum de vraisemblance $(\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML}$ est donc celui qui remplit la condition suivante :

$$(\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML} = \arg \max_{\hat{\mathbf{x}}_0} \left\{ \iint_{-\infty}^{\infty} s(\mathbf{x}) \cdot \ln(r(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0)) d^2\mathbf{x} \right\}$$

$$(\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML}^{phot, spot\ qcq} = \arg \max_{\hat{\mathbf{x}}_0} \{(s \star \ln(r))(\hat{\mathbf{x}}_0)\} \quad (B.6)$$

$$(B.7)$$

Où \star représente le produit de corrélation des deux fonctions. En l'absence d'informations sur le profil du spot, on ne peut rien dire de plus : L'estimateur optimal au sens du maximum de vraisemblance de la position d'un spot de profil quelconque affecté d'un bruit à statistique poissonnienne est le maximum du produit de corrélation du spot par le logarithme de son profil non bruité.

B.1.2 Estimateur ML en présence de bruit de lecture

Dans le cas d'un bruit gaussien uniforme et centré (bruit de détecteur, eq. B.3), on a, en considérant la log-vraisemblance de l'estimateur $\hat{\mathbf{x}}_0$:

$$\text{Log-}\mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}_0) = \ln\left(\frac{1}{2\pi\sigma_{det}^2}\right) - \frac{1}{2\sigma_{det}^2} \sum_{\mathbf{x}} b^2(\mathbf{x})$$

Or, si l'on se place sur support continu et infini, on a :

$$\left. \begin{array}{l} \iint r^2(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0) d^2\mathbf{x} \\ \iint s^2(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0) d^2\mathbf{x} \end{array} \right\} \text{ indépendants de } (\hat{\mathbf{x}}_0)$$

$$\text{D'où : } (\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML} = \arg \max_{\hat{\mathbf{x}}_0} \left\{ \iint s(\mathbf{x}) r(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0) d\mathbf{x} \right\}$$

$$(\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML}^{det, spot\ qcq} = \arg \max_{\hat{\mathbf{x}}_0} \{(s \star r)(\hat{\mathbf{x}}_0)\} \quad (B.8)$$

L'estimateur optimal au sens du maximum de vraisemblance de la position d'un spot de forme quelconque dégradé par un bruit gaussien est le maximum du produit de corrélation du spot bruité par son profil non bruité.

B.1.3 Cas particulier : spot à profil gaussien

Lorsque l'on connaît le profil d'intensité lumineuse du spot, il est possible de dériver un estimateur spécifique. On considère ici l'équation (B.6), dans laquelle $r(\mathbf{x})$ est ici une fonction gaussienne :

$$r(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{R}}{2\pi\sigma_T^2} \cdot e^{-\mathbf{x}^2/2\sigma_T^2}, \quad (B.9)$$

B.1.3.1 Estimateur ML en présence de bruit de photons

On reprend l'équation (B.6) valable pour un spot de forme quelconque en y introduisant l'équation (B.9), et on la dérive par rapport à $\hat{\mathbf{x}}_0$:

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML} &= \arg \max_{\hat{\mathbf{x}}_0} \left\{ \iint_{-\infty}^{\infty} s(\mathbf{x}) \cdot \ln \left(\frac{\mathcal{R}}{2\pi\sigma_T^2} \cdot e^{-(\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}_0)^2/2\sigma_T^2} \right) d^2\mathbf{x} \right\} \\ (\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML} &= \arg \max_{\hat{\mathbf{x}}_0} \left\{ \iint_{-\infty}^{\infty} s(\mathbf{x}) \cdot \left(\ln \left(\frac{\mathcal{R}}{2\pi\sigma_T^2} \right) - \frac{(\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}_0)^2}{2\sigma_T^2} \right) d^2\mathbf{x} \right\} \end{aligned}$$

On recherche l'extremum de cette expression en la dérivant par rapport à $\hat{\mathbf{x}}_0$:

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML} / \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{x}}_0} \left[\iint (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0)^2 \cdot s(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x} \right]_{\hat{\mathbf{x}}_0=(\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML}} &= 0 \\ \text{Soit : } \left[\iint (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0) \cdot s(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x} \right]_{\hat{\mathbf{x}}_0=(\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML}} &= 0 \end{aligned}$$

$$(\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML}^{phot, spot gauss} \left[\frac{\iint x \cdot s(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x}}{\iint s(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x}}, \frac{\iint y \cdot s(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x}}{\iint s(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x}} \right] \quad (\text{B.10})$$

L'estimateur ML de la position d'une tache gaussienne à support infini bruitée par un bruit à statistique poissonnienne est donc le centre de gravité de la tache.

B.1.3.2 Estimateur ML en présence de bruit de lecture

Reprenons cette fois l'équation (B.8), où $r(\mathbf{x})$ est donné par l'équation (B.9) :

$$(\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML} = \arg \max_{\hat{\mathbf{x}}_0} \left\{ \iint s(\mathbf{x}) \cdot \frac{\mathcal{R}}{2\pi\sigma_T^2} \cdot e^{-(\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}_0)^2/2\sigma_T^2} d^2\mathbf{x} \right\}$$

On dérive cette expression pour en trouver les extremas :

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML} / \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{x}}_0} \left[\iint s(\mathbf{x}) \cdot \frac{\mathcal{R}}{2\pi\sigma_T^2} e^{-(\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}_0)^2/2\sigma_T^2} d^2\mathbf{x} \right] &= 0 \\ \iint s(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{x}}_0} \left[\frac{\mathcal{R}}{2\pi\sigma_T^2} e^{-(\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}_0)^2/2\sigma_T^2} \right] d^2\mathbf{x} &= 0 \\ \frac{1}{2\sigma_T^2} \iint (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0) \cdot s(\mathbf{x}) \cdot r(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0) d^2\mathbf{x} &= 0 \end{aligned}$$

Soit finalement :

$$(\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML}^{det, spot gauss} \left[\frac{\iint x \cdot s(\mathbf{x}) r(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0) d^2\mathbf{x}}{\iint s(\mathbf{x}) r(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0) d^2\mathbf{x}}, \frac{\iint y \cdot s(\mathbf{x}) r(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0) d^2\mathbf{x}}{\iint s(\mathbf{x}) r(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0) d^2\mathbf{x}} \right] \quad (\text{B.11})$$

Cette expression est récursive, et trouver sa solution peut poser problème dans un contexte temps réel. Dans tous les cas, on peut la traiter par récurrence. Il faut alors se fixer une estimée de départ, puis procéder par estimations successives jusqu'à atteindre la convergence. Concernant l'estimée de départ, deux solutions doivent être envisagées : soit utiliser la position de référence de la sous-pupille, soit introduire un a priori en tenant compte de la corrélation temporelle de la turbulence.

B.2 Estimation au sens du maximum *a posteriori*

Nous recherchons cette fois le meilleur estimateur MAP $(\hat{\mathbf{x}}_0)_{MAP}$ du déplacement \mathbf{x}_0 du spot Hartmann, étant données les mesures et les à priori disponibles sur ces déplacements. L'observable pertinent est :

$$J(\hat{\mathbf{x}}_0) = \mathcal{P}(\mathbf{x}_0 | s(\mathbf{x})) = \frac{\mathcal{P}(s(\mathbf{x}) | \mathbf{x}_0) \cdot \mathcal{P}(\mathbf{x}_0)}{\mathcal{P}(s(\mathbf{x}))}$$

Le meilleur estimateur de \mathbf{x}_0 au sens MAP est tel que :

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{x}}_0)_{MAP} &= \arg \max_{\mathbf{x}_0} \{J(\mathbf{x}_0)\} \\ (\hat{\mathbf{x}}_0)_{MAP} &= \arg \max_{\mathbf{x}_0} \{\mathcal{P}(s(\mathbf{x}) | \mathbf{x}_0) \cdot \mathcal{P}(\mathbf{x}_0)\} \end{aligned}$$

On reconnaît dans le premier terme de la partie droite de cette équation la vraisemblance de l'estimateur (cf. § B.1). Ici, elle est régularisée en fonction de la loi probabilité du déplacement de la tache. En supposant que le bruit affectant le spot est décorréolé d'un point à l'autre du champ, on a, en passant au logarithme :

$$(\hat{\mathbf{x}}_0)_{MAP} = \arg \max_{\mathbf{x}_0} \{\ln(\mathcal{L}(\mathbf{x}_0)) + \ln(\mathcal{P}(\mathbf{x}_0))\} \quad (\text{B.12})$$

Si l'on considère un spot de forme quelconque, se déplaçant de façon aléatoire dans le plan focal en suivant une loi statistique gaussienne, centrée sur $\bar{\mathbf{x}}_0$, isotrope et d'écart-type σ_x^2 , alors la probabilité de trouver la tache à une position \mathbf{x}_0 s'exprime :

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} e^{-(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)^2 / 2\sigma_x^2} \quad (\text{B.13})$$

On peut alors écrire l'estimateur MAP en présence de bruit de photons et de bruit de détecteurs pour un spot de forme quelconque, puis pour un spot gaussien.

B.2.1 Estimateur MAP en présence de bruit de photons

Comme dans la partie (B.1.1), on considère un spot quelconque affecté d'un bruit de photons caractérisé par l'équation (B.2) :

$$\forall (\mathbf{x}) \mathcal{P}(s(\mathbf{x})) = \frac{(\mu(\mathbf{x}))^{s(\mathbf{x})}}{s(\mathbf{x})!} \cdot e^{-\mu(\mathbf{x})}, \text{ avec : } \mu(\mathbf{x}) = r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

En introduisant les expressions (B.13) et (B.2) dans l'équation (B.12), on a :

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{x}}_0)_{MAP} &= \arg \max_{\mathbf{x}_0} \left\{ \ln \left(\frac{e^{-(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)^2 / 2\sigma_x^2}}{2\pi\sigma_x^2} \right) + \iint \ln \left(\frac{(r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))^{s(\mathbf{x})}}{s(\mathbf{x})!} \cdot e^{-r(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0)} \right) d\mathbf{x} \right\} \\ (\hat{\mathbf{x}}_0)_{MAP} &= \arg \max_{\mathbf{x}_0} \left\{ \iint [s(\mathbf{x}) \cdot \ln(r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) - r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \ln(s(\mathbf{x})!)] d\mathbf{x} - \frac{(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)^2}{2\sigma_x^2} \right\} \end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, on a (cf. § B.1.1) :

$$\left. \begin{aligned} &\iint r(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0) d^2\mathbf{x} \\ &\iint \ln(s(\mathbf{x})!) d^2\mathbf{x} \end{aligned} \right\} \text{ indépendants de } (\hat{\mathbf{x}}_0)$$

$$\text{D'où : } (\hat{\mathbf{x}}_0)_{MAP}^{phot, spot\ qcq} = \arg \max_{\mathbf{x}_0} \left\{ (s \star \ln(r))(\mathbf{x}_0) - \frac{(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)^2}{2\sigma_x^2} \right\} \quad (\text{B.14})$$

Où \star représente le produit de corrélation des deux fonctions. On retrouve dans la fonction à maximiser le produit de corrélation du spot par son profil non bruité (cf. § B.1.1). Mais la connaissance a priori de la loi statistique du déplacement se traduit par l'apparition dans la fonction à maximiser d'un terme de rappel quadratique qui discrimine les estimateurs de position s'éloignant en fonction de leur distance à la valeur moyenne du déplacement.

B.2.2 Estimateur MAP en présence de bruit de détecteur

De même, en présence de bruit de détecteur, on introduit les expressions (B.13) et (B.3) dans l'équation (B.12) :

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{x}}_0)_{MAP} &= \arg \max_{\mathbf{x}_0} \left\{ \ln \left(\frac{e^{-(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)^2 / 2\sigma_x^2}}{2\pi\sigma_x^2} \right) + \iint \ln \left(\frac{e^{-b^2(\mathbf{x}) / 2\sigma_{det}^2}}{2\pi\sigma_{det}^2} \right) d\mathbf{x} \right\} \\ (\hat{\mathbf{x}}_0)_{MAP} &= \arg \max_{\mathbf{x}_0} \left\{ -\frac{(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)^2}{2\sigma_x^2} - \iint \frac{(s(\mathbf{x}) - r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))^2}{2\sigma_{det}^2} d\mathbf{x} \right\} \end{aligned}$$

Comme précédemment, on a (cf. § B.1.2) :

$$\left. \begin{aligned} &\iint r^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d^2\mathbf{x} \\ &\iint s^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d^2\mathbf{x} \end{aligned} \right\} \text{ indépendants de } (\mathbf{x}_0)$$

$$\text{D'où : } (\hat{\mathbf{x}}_0)_{MAP}^{det, spot\ qcq} = \arg \max_{\mathbf{x}_0} \left\{ \frac{1}{\sigma_{det}^2} (s \star r)(\mathbf{x}_0) - \frac{(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)^2}{2\sigma_x^2} \right\} \quad (\text{B.15})$$

B.2.3 Cas particulier : spot à profil gaussien

On peut alors préciser l'expression de l'estimateur MAP dans le cas particulier d'un spot à profil gaussien d'intensité lumineuse, décrit par l'équation (B.9) :

$$r(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{R}}{2\pi\sigma_T^2} \cdot e^{-\mathbf{x}^2/2\sigma_T^2},$$

B.2.3.1 Bruit de photons

Dans d'un spot à profil gaussien (B.9), l'équation (B.14) devient :

$$(\hat{\mathbf{x}}_0)_{MAP} = \arg \max_{\mathbf{x}_0} \left\{ \ln \left(\frac{\mathcal{R}}{2\sigma_T^2} \right) \iint s(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{2\sigma_T^2} \iint (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 \cdot s(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)^2}{2\sigma_x^2} \right\}$$

On dérive cette expression par rapport à \mathbf{x}_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \left[\frac{1}{2\sigma_T^2} \iint (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 \cdot s(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x} + \frac{1}{2\sigma_x^2} (\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)^2 \right]_{\mathbf{x}_0=(\hat{\mathbf{x}}_0)_{MAP}} &= 0 \\ \frac{1}{2\sigma_T^2} \iint \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 \cdot s(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x} + \frac{1}{2\sigma_x^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} [(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)^2] &= 0 \\ \frac{1}{\sigma_T^2} \iint (\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}) \cdot s(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x} + \frac{1}{\sigma_x^2} (\hat{\mathbf{x}}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Soit : } \left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_T^2} \iint s(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x} \right) (\hat{\mathbf{x}}_0)_{MAP} = \bar{\mathbf{x}}_0 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_T^2} \iint \mathbf{x} \cdot s(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x}$$

Alors finalement :

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{x}}_0)_{MAP}^{phot, spot\ gauss} &= \mu \cdot \bar{\mathbf{x}}_0 + (1 - \mu) \cdot (\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML}^{phot, spot\ gauss} \\ \text{avec : } \mu &= \left(1 + \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_T} \right)^2 \iint s(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

B.2.3.2 Bruit de détecteur

De même, en présence de bruit de détecteur, l'équation (B.15) devient :

$$(\hat{\mathbf{x}}_0)_{MAP} = \arg \max_{\mathbf{x}_0} \left\{ \frac{1}{\sigma_{det}^2} \iint s(\mathbf{x}) r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d^2\mathbf{x} - \frac{(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)^2}{2\sigma_x^2} \right\}$$

On dérive cette expression par rapport à $\hat{\mathbf{x}}_0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \left[\frac{1}{\sigma_{det}^2} \iint s(\mathbf{x}) r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d^2 \mathbf{x} + \frac{(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)^2}{2\sigma_x^2} \right]_{\mathbf{x}_0 = (\hat{\mathbf{x}}_0)_{MAP}} &= 0 \\ \frac{1}{\sigma_{det}^2} \iint s(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} [r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)] d^2 \mathbf{x} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \left[\frac{(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)^2}{2\sigma_x^2} \right] &= 0 \\ \frac{1}{\sigma_{det}^2} \iint s(\mathbf{x}) \frac{(\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x})}{\sigma_T^2} r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d^2 \mathbf{x} + \frac{(\hat{\mathbf{x}}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)}{\sigma_x^2} &= 0 \end{aligned}$$

Soit : $\left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_T^2 \sigma_{det}^2} \iint s(\mathbf{x}) r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d^2 \mathbf{x} \right) \hat{\mathbf{x}}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_T^2 \sigma_{det}^2} \iint \mathbf{x} \cdot s(\mathbf{x}) \cdot r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d^2 \mathbf{x}$

Posons : $\mu(\mathbf{x}_0) = \left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_T^2 \sigma_{det}^2} \iint s(\mathbf{x}) r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d^2 \mathbf{x} \right)^{-1}$

Alors finalement :

$$(\hat{\mathbf{x}}_0)_{MAP}^{det, spot\ gauss} = \mu(\mathbf{x}_0) \cdot \bar{\mathbf{x}}_0 + (1 + \mu(\mathbf{x}_0)) \cdot (\hat{\mathbf{x}}_0)_{ML}^{det, spot\ gauss} \quad (\text{B.17})$$

Annexe C

Linéarité des estimateurs de position barycentre et barycentre pondéré

C.1 Définitions et notations

On considère toujours dans cette annexe le cas d'un spot défini sur un support continu et infini, dont l'enveloppe est une gaussienne d'écart-type σ_T^2 et centrée au point $(x_0, 0)$. Soit $\mathcal{I}(x, y)$ le profil d'intensité lumineuse de ce spot. On a :

$$\mathcal{I}(x, y) = \frac{N_{ph}}{2\pi\sigma_T^2} e^{-\frac{(x-x_0)^2+y^2}{2\sigma_T^2}}, \text{ avec : } \iint_{-\infty}^{\infty} \mathcal{I}(x, y) dx dy = N_{ph} \quad (\text{C.1})$$

σ_T^2 est l'écart-type du spot et N_{ph} est le flux total. Appelons alors C_x la position mesurée selon l'axe des abscisses en utilisant l'estimateur centre de gravité. Sur un support infini, on a par définition :

$$C_x = \frac{1}{N_{ph}} \iint_{-\infty}^{\infty} x \mathcal{I}(x, y) dx dy \quad (\text{C.2})$$

On présente dans la section (C.2) la réponse de l'estimateur centre de gravité défini par l'équation (C.2) au déplacement du spot. Dans la section (C.3), on s'intéresse à l'estimateur centre de gravité pondéré. On définit donc une fonction de pondération, également gaussienne :

$$\mathcal{W}(x, y) = \frac{\mathcal{W}_0}{2\pi\sigma_W^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma_W^2}}, \text{ avec : } \iint_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}(x, y) dx dy = \mathcal{W}_0 \quad (\text{C.3})$$

σ_W^2 est l'écart-type de la fonction de pondération. Appelons alors C_{p_x} la position mesurée selon l'axe des abscisses en utilisant l'estimateur centre de gravité pondéré. Sur un support infini, on a par définition :

$$C_{p_x} = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} x \mathcal{I}(x, y) \cdot \mathcal{W}(x, y) dx dy}{\iint_{-\infty}^{\infty} \mathcal{I}(x, y) \cdot \mathcal{W}(x, y) dx dy} \quad (\text{C.4})$$

Pour chaque estimateur, on traite successivement le cas d'un support infini et d'un support fini.

C.2 L'estimateur Centre de gravité

C.2.1 Support infini

Calculons le centre de gravité du spot défini par l'équation (C.1), sur un support infini :

$$\begin{aligned}
 C_x &= \frac{1}{N_{ph}} \iint_{-\infty}^{\infty} x \mathcal{I}(x, y) dx dy \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma_T^2} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-(x-x_0)^2/2\sigma_T^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2\sigma_T^2} dy \\
 \text{Posons : } u &= \frac{(x-x_0)}{\sigma_T\sqrt{2}} \quad \text{Et : } v = \frac{y}{\sigma_T\sqrt{2}} \\
 \text{Alors : } C_x &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_T\sqrt{2} u + x_0) e^{-u^2} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv \\
 &\quad \text{Soit finalement : } C_x = x_0 \tag{C.5}
 \end{aligned}$$

Conformément aux propriétés d'un estimateur optimal au sens du maximum de vraisemblance, le centre de gravité d'une tâche gaussienne calculé sur un support infini est bien un estimateur non biaisé.

C.2.2 Support fini

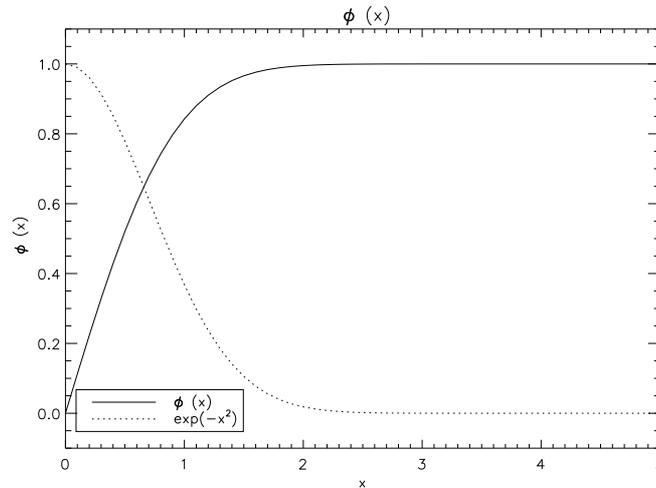
On procède de la même façon qu'au paragraphe précédent, en se plaçant cette fois sur un support fini, centré, carré et de demi-largeur ℓ . On a alors :

$$C_x = \frac{1}{\mathcal{I}_0} \iint_{-\ell}^{\ell} x \mathcal{I}(x, y) dx dy, \text{ avec : } \mathcal{I}_0 = \iint_{-\ell}^{\ell} \mathcal{I}(x, y) dx dy$$

Estimons d'abord l'intégrale \mathcal{I}_0 :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_0 &= \frac{N_{ph}}{2\pi\sigma_T^2} \int_{-\ell}^{\ell} e^{-(x-x_0)^2/2\sigma_T^2} dx \int_{-\ell}^{\ell} e^{-y^2/2\sigma_T^2} dy \\
 \text{On pose : } &\begin{cases} u = \frac{(x-x_0)}{\sigma_T\sqrt{2}} & \text{avec : } x \in [-\ell, \ell] \Rightarrow u \in \left[-\frac{\ell+x_0}{\sigma_T\sqrt{2}}, \frac{\ell-x_0}{\sigma_T\sqrt{2}}\right] \\ v = \frac{y}{\sigma_T\sqrt{2}} & \text{avec : } y \in [-\ell, \ell] \Rightarrow v \in \left[-\frac{\ell}{\sigma_T\sqrt{2}}, \frac{\ell}{\sigma_T\sqrt{2}}\right] \\ \text{Et : } \Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du & \text{(cf. figure C.1)} \end{cases} \tag{C.6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_0 &= \frac{N_{ph}}{\pi} \int_{u_{min}}^{u_{max}} e^{-u^2} du \int_{-v_{max}}^{v_{max}} e^{-v^2} dv \\
 &= \frac{N_{ph}}{\pi} \left[\int_{u_{min}}^0 e^{-u^2} du + \int_0^{u_{max}} e^{-u^2} du \right] \times 2 \int_0^{v_{max}} e^{-v^2} dv \\
 &= \frac{N_{ph}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi(-u_{min}) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi(u_{max}) \right] \times \Phi\left(\frac{\ell}{\sigma_T\sqrt{2}}\right)
 \end{aligned}$$

FIG. C.1 – Représentation graphique de la fonction $\Phi(x)$.

$$\mathcal{I}_0 = \frac{N_{ph}}{2} \left[\Phi \left(\frac{\ell + x_0}{\sigma_T \sqrt{2}} \right) + \Phi \left(\frac{\ell - x_0}{\sigma_T \sqrt{2}} \right) \right] \times \Phi \left(\frac{\ell}{\sigma_T \sqrt{2}} \right) \quad (\text{C.7})$$

Remarque : pour x_0 et σ_T fixés, on a :

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \Phi \left(\frac{\ell \pm x_0}{\sigma_T \sqrt{2}} \right) = 1 \quad \text{d'où :} \quad \lim_{\ell \rightarrow \infty} \mathcal{I}_0 = N_{ph}$$

Calculons maintenant le barycentre de la tache gaussienne sur support fini :

$$C_x = \frac{N_{ph}}{2\pi \sigma_T^2 \mathcal{I}_0} \int_{-\ell}^{\ell} x e^{-(x-x_0)^2/2\sigma_T^2} dx \int_{-\ell}^{\ell} e^{-y^2/2\sigma_T^2} dy$$

En utilisant les mêmes changements de variables que précédemment (Eq. C.6), on obtient :

$$C_x = x_0 + \sigma_T \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\left(\frac{\ell+x_0}{\sigma_T\sqrt{2}}\right)^2} - e^{-\left(\frac{\ell-x_0}{\sigma_T\sqrt{2}}\right)^2}}{\Phi\left(\frac{\ell+x_0}{\sigma_T\sqrt{2}}\right) + \Phi\left(\frac{\ell-x_0}{\sigma_T\sqrt{2}}\right)} \quad (\text{C.8})$$

Le centre de gravité calculé sur un support fini est un estimateur biaisé, dont le biais dépend de la taille du support, de la largeur du spot et de son déplacement.

Remarque : Pour x_0 et σ_T fixés, on retrouve :

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-\left(\frac{\ell+x_0}{\sigma_T\sqrt{2}}\right)^2} - e^{-\left(\frac{\ell-x_0}{\sigma_T\sqrt{2}}\right)^2}}{\Phi\left(\frac{\ell+x_0}{\sigma_T\sqrt{2}}\right) + \Phi\left(\frac{\ell-x_0}{\sigma_T\sqrt{2}}\right)} \right] = 0 \quad \text{d'où :} \quad \lim_{\ell \rightarrow \infty} C_x = x_0$$

C.3 L'estimateur Centre de gravité pondéré

Nous allons considérer ici deux façons possibles de pondérer le spot avant d'estimer sa position. En effet, on peut centrer la fonction de pondération :

- sur la position vraie du spot, comme dans le cas de l'estimateur optimal au sens du maximum de vraisemblance en présence d'un bruit gaussien (cf § B) ;
- sur le centre du détecteur. Cette seconde solution a un intérêt pratique quand on ne connaît pas à priori la position du spot.

C.3.1 Fonction de pondération centrée sur la position vraie du spot

C.3.1.1 Support infini

On considère le spot défini par l'équation (C.1) et la fonction de pondération définie par l'équation (C.3), mais recentrée sur la position vraie du spot :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(x, y) &= \frac{N_{ph}}{2\pi\sigma_T^2} e^{-((x-x_0)^2+y^2)/2\sigma_T^2} \\ \mathcal{W}(x, y) &= \frac{\mathcal{W}_0}{2\pi\sigma_W^2} e^{-((x-x_0)^2+y^2)/2\sigma_W^2} \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Définissons $\mathcal{J}(x, y)$, le profil d'intensité lumineuse du spot pondéré :

$$\mathcal{J}(x, y) = \mathcal{I}(x, y) \cdot \mathcal{W}(x, y) \quad (\text{C.10})$$

$$\text{D'où :} \quad C_{p_x} = \frac{1}{\mathcal{J}_0} \iint_{-\infty}^{\infty} x \mathcal{J}(x, y) dx dy \quad (\text{C.11})$$

$$\text{avec :} \quad \mathcal{J}_0 = \iint_{-\infty}^{\infty} \mathcal{J}(x, y) dx dy \quad (\text{C.12})$$

On commence par calculer \mathcal{J}_0 en introduisant (eq. C.1) et (eq. C.9) dans (eq. C.12) :

$$\mathcal{J}_0 = \frac{N_{ph}}{2\pi\sigma_T^2} \frac{\mathcal{W}_0}{2\pi\sigma_W^2} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2+y^2}{2\sigma_T^2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2+y^2}{2\sigma_W^2}} dx dy$$

Posons : $\frac{1}{\sigma_{eq}^2} = \frac{1}{\sigma_T^2} + \frac{1}{\sigma_W^2}$ (C.13)

Ainsi défini, σ_{eq} est l'écart-type du spot pondéré. Alors :

$$\mathcal{J}_0 = \frac{N_{ph} \mathcal{W}_0}{4\pi^2 \sigma_T^2 \sigma_W^2} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-((x-x_0)^2+y^2)/2\sigma_{eq}^2} dx dy$$

On intègre en effectuant le changement de variable : $\begin{cases} u = \frac{(x-x_0)}{\sigma_{eq}\sqrt{2}} \\ v = \frac{y}{\sigma_{eq}\sqrt{2}} \end{cases}$ (C.14)

$$\text{Et on a finalement : } \mathcal{J}_0 = \frac{N_{ph} \mathcal{W}_0}{2\pi (\sigma_T^2 + \sigma_W^2)}$$

Calculons maintenant la position estimée de la tache en reprenant la relation (C.11) :

$$\begin{aligned} C_{px} &= \frac{1}{\mathcal{J}_0} \iint_{-\infty}^{\infty} x \mathcal{J}(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{\mathcal{J}_0} \frac{N_{ph}}{2\pi\sigma_T^2} \frac{\mathcal{W}_0}{2\pi\sigma_W^2} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_{eq}^2}} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2\sigma_{eq}^2} dy \end{aligned}$$

En utilisant le même changement que précédemment (Eq. C.14) et en remplaçant \mathcal{J}_0 par sa valeur, on obtient finalement :

$$C_x = x_0 \quad (C.15)$$

A l'instar de l'estimateur centre de gravité, le centre de gravité pondéré est bien un estimateur non biaisé, sur support infini et lorsque la fonction de pondération est centrée sur la position vraie du spot.

C.3.1.2 Support fini

On se place cette fois sur un support fini, centré, carré et de demi-largeur ℓ . On s'intéresse toujours au spot pondéré dont le profil d'intensité \mathcal{J} est défini par la relation (C.10). Estimons d'abord :

$$\mathcal{J}_0 = \iint_{-\ell}^{\ell} \mathcal{I}(x, y) \mathcal{W}(x, y) dx dy$$

On définit de nouveau σ_{eq} défini par l'équation (C.13) :

$$\mathcal{J}_0 = \frac{N_{ph} \mathcal{W}_0}{4\pi^2 \sigma_T^2 \sigma_W^2} \int_{-\ell}^{\ell} e^{-(x-x_0)^2/2\sigma_{eq}^2} dx \int_{-\ell}^{\ell} e^{-y^2/2\sigma_{eq}^2} dy$$

En utilisant le même changement de variable que précédemment (cf eq. C.14) et en utilisant la fonction $\Phi(x)$ définie par la relation (C.6), on obtient :

$$\mathcal{J}_0 = \frac{N_{ph} \mathcal{W}_0}{4\pi (\sigma_T^2 + \sigma_W^2)} \left[\Phi \left(\frac{\ell + x_0}{\sigma_{eq}\sqrt{2}} \right) + \Phi \left(\frac{\ell - x_0}{\sigma_{eq}\sqrt{2}} \right) \right] \times \Phi \left(\frac{\ell}{\sigma_{eq}\sqrt{2}} \right)$$

Calculons maintenant Cp_x :

$$\begin{aligned} Cp_x &= \frac{1}{\mathcal{J}_0} \iint_{-\ell}^{\ell} x \mathcal{I}(x, y) \mathcal{W}(x, y) dx dy \\ &= \frac{N_{ph} \mathcal{W}_0}{4\pi^2 \sigma_T^2 \sigma_W^2 \mathcal{J}_0} \int_{-\ell}^{\ell} x e^{-(x-x_0)^2/2\sigma_{eq}^2} dx \int_{-\ell}^{\ell} e^{-y^2/2\sigma_{eq}^2} dy \end{aligned}$$

En utilisant toujours le changement de variable défini par l'équation (C.14), on obtient finalement :

$$Cp_x = x_0 + \sigma_{eq} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\left(\frac{\ell+x_0}{\sigma_{eq}\sqrt{2}}\right)^2} - e^{-\left(\frac{\ell-x_0}{\sigma_{eq}\sqrt{2}}\right)^2}}{\Phi\left(\frac{\ell+x_0}{\sigma_{eq}\sqrt{2}}\right) + \Phi\left(\frac{\ell-x_0}{\sigma_{eq}\sqrt{2}}\right)} \quad (\text{C.16})$$

Le biais de l'estimation de position est identique à celui de l'estimateur centre de gravité, à ceci près que l'écart-type de la tache image σ_T est remplacé par celui de la tache pondérée σ_{eq} .

Remarque : Pour x_0 et σ_{eq} fixés, on retrouve :

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-\left(\frac{\ell+x_0}{\sigma_{eq}\sqrt{2}}\right)^2} - e^{-\left(\frac{\ell-x_0}{\sigma_{eq}\sqrt{2}}\right)^2}}{\Phi\left(\frac{\ell+x_0}{\sigma_{eq}\sqrt{2}}\right) + \Phi\left(\frac{\ell-x_0}{\sigma_{eq}\sqrt{2}}\right)} \right] = 0 \quad \text{d'où : } \lim_{\ell \rightarrow \infty} C_x = x_0$$

C.3.2 Fonction de pondération centrée sur le détecteur

C.3.2.1 Support infini

On a toujours :

$$\mathcal{I}(x, y) = \frac{N_{ph}}{2\pi\sigma_T^2} e^{-((x-x_0)^2+y^2)/2\sigma_T^2}, \quad \iint_{-\infty}^{\infty} \mathcal{I}(x, y) dx dy = N_{ph}$$

Mais $\mathcal{W}(x, y)$ est maintenant centrée sur le détecteur :

$$\mathcal{W}(x, y) = \frac{\mathcal{W}_0}{2\pi\sigma_W^2} e^{-(x^2+y^2)/2\sigma_W^2}, \quad \iint_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}(x, y) dx dy = \mathcal{W}_0$$

Soit Cp_x le centre de gravité du spot pondéré par $\mathcal{W}(x, y)$:

$$Cp_x = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} x \mathcal{I}(x, y) \mathcal{W}(x, y) dx dy}{\iint_{-\infty}^{\infty} \mathcal{I}(x, y) \mathcal{W}(x, y) dx dy}$$

On calcule d'abord :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0 &= \iint_{-\infty}^{\infty} \mathcal{I}(x, y) \mathcal{W}(x, y) dx dy \\ &= \frac{N_{ph}}{2\pi\sigma_T^2} \frac{\mathcal{W}_0}{2\pi\sigma_W^2} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-((x-x_0)^2+y^2)/2\sigma_T^2} e^{-(x^2+y^2)/2\sigma_W^2} dx dy \\ &= \frac{N_{ph} \mathcal{W}_0}{4\pi^2 \sigma_T^2 \sigma_W^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[(x-x_0)^2/2\sigma_T^2 + x^2/2\sigma_W^2]} dx \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2\sigma_{eq}^2} dy}_{\sigma_{eq} \sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

Où σ_{eq} est défini par la relation (C.13). L'intégration en x se fait en remaniant l'argument de la fonction exponentielle et en effectuant un changement de variable. En effet, on a :

$$\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_T^2} + \frac{x^2}{2\sigma_W^2} = \left(\frac{x}{\sigma_{eq}\sqrt{2}} - \frac{x_0 \sigma_{eq}}{\sigma_T^2 \sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{x_0^2}{2(\sigma_T^2 + \sigma_W^2)} \right)$$

$$\text{On pose alors : } u = \frac{x}{\sigma_{eq}\sqrt{2}} - \frac{x_0 \sigma_{eq}}{\sigma_T^2 \sqrt{2}}$$

$$\text{D'où : } \mathcal{J}_0 = \frac{N_{ph} \mathcal{W}_0 \sigma_{eq}^2 \sqrt{\pi}}{2\pi^2 \sigma_T^2 \sigma_W^2} e^{-\frac{x_0^2}{2(\sigma_T^2 + \sigma_W^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du$$

$$\text{Soit : } \mathcal{J}_0 = \frac{N_{ph} \mathcal{W}_0}{2\pi (\sigma_T^2 + \sigma_W^2)} e^{-\frac{x_0^2}{2(\sigma_T^2 + \sigma_W^2)}}$$

Calculons maintenant C_x :

$$\begin{aligned} Cp_x &= \frac{1}{\mathcal{J}_0} \iint_{-\infty}^{\infty} x \mathcal{I}(x, y) \mathcal{W}(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{\mathcal{J}_0} \frac{N_{ph} \mathcal{W}_0}{4\pi^2 \sigma_T^2 \sigma_W^2} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-[(x-x_0)^2/2\sigma_T^2 + x^2/2\sigma_W^2]} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2\sigma_{eq}^2} dy \end{aligned}$$

On utilise la même démarche que pour le calcul de \mathcal{J}_0 , avec les mêmes notations et les mêmes changements de variable. On obtient :

$$Cp_x = \left(\frac{\sigma_W^2}{\sigma_T^2 + \sigma_W^2} \right) x_0 \quad (\text{C.17})$$

Le fait de centrer la fonction de pondération sur le centre du détecteur plutôt que sur la position vraie du spot induit un coefficient de linéarité de la réponse différent de 1. Ce coefficient est fonction de la largeur du spot et de la fonction de pondération. On peut donc le compenser si on connaît les caractéristiques du spot (et de la pondération).

C.3.2.2 Support fini

Enfin, on effectue le même calcul que précédemment, sur un support fini, centré, carré et de demi-largeur ℓ :

$$Cp_x = \frac{\iint_{-\ell}^{\ell} x \mathcal{I}(x, y) \mathcal{W}(x, y) dx dy}{\iint_{-\ell}^{\ell} \mathcal{I}(x, y) \mathcal{W}(x, y) dx dy}$$

Estimons d'abord :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0 &= \iint_{-\ell}^{\ell} \mathcal{I}(x, y) \mathcal{W}(x, y) dx dy \\ &= \frac{N_{ph} \mathcal{W}_0}{4\pi^2 \sigma_T^2 \sigma_W^2} \int_{-\ell}^{\ell} e^{-[(x-x_0)^2/2\sigma_T^2 + x^2/2\sigma_W^2]} dx \int_{-\ell}^{\ell} e^{-y^2/2\sigma_{eq}^2} dy \end{aligned}$$

En utilisant les mêmes définitions qu'au paragraphe précédent pour σ_{eq} (eq. C.13) et la fonction $\Phi(x)$ (eq. C.6), on obtient :

$$\mathcal{J}_0 = \frac{N_{ph} \mathcal{W}_0}{4\pi (\sigma_T^2 + \sigma_W^2)} e^{-\frac{x_0^2}{2(\sigma_T^2 + \sigma_W^2)}} \left[\Phi\left(\frac{\ell}{\sigma_{eq}\sqrt{2}} + x_0 \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_T^2\sqrt{2}}\right) + \Phi\left(\frac{\ell}{\sigma_{eq}\sqrt{2}} - x_0 \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_T^2\sqrt{2}}\right) \right] \times \Phi\left(\frac{\ell}{\sigma_{eq}\sqrt{2}}\right)$$

Le centre de gravité du spot pondéré s'écrit :

$$\begin{aligned} Cp_x &= \frac{1}{\mathcal{J}_0} \iint_{-\ell}^{\ell} x \mathcal{I}(x, y) \mathcal{W}(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{\mathcal{J}_0} \frac{N_{ph} \mathcal{W}_0}{4\pi^2 \sigma_T^2 \sigma_W^2} e^{-\frac{x_0^2}{2(\sigma_T^2 + \sigma_W^2)}} \int_{-\ell}^{\ell} x e^{-\left(\frac{x}{\sigma_{eq}\sqrt{2}} - \frac{x_0\sigma_{eq}}{\sigma_T^2\sqrt{2}}\right)^2} dx \int_{-\ell}^{\ell} e^{-y^2/2\sigma_{eq}^2} dy \end{aligned}$$

D'où finalement :

$$C_x = \left(\frac{\sigma_W^2}{\sigma_T^2 + \sigma_W^2} \right) x_0 + \sigma_{eq} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\left(\frac{\ell}{\sigma_{eq}\sqrt{2}} + x_0 \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_T^2\sqrt{2}}\right)^2} - e^{-\left(\frac{\ell}{\sigma_{eq}\sqrt{2}} - x_0 \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_T^2\sqrt{2}}\right)^2}}{\Phi\left(\frac{\ell}{\sigma_{eq}\sqrt{2}} + x_0 \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_T^2\sqrt{2}}\right) + \Phi\left(\frac{\ell}{\sigma_{eq}\sqrt{2}} - x_0 \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_T^2\sqrt{2}}\right)} \quad (\text{C.18})$$

C.4 En résumé

Notation	Signification
σ_T	Ecart-type du spot gaussien.
σ_W	Ecart-type de la gaussienne de pondération.
σ_{eq}	$\sigma_{eq}^2 = \frac{\sigma_T^2 \cdot \sigma_W^2}{\sigma_T^2 + \sigma_W^2}$
$\Phi(u)$	$\Phi(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} dt$

C.4.1 Cas général

Estimateur	Support infini	Support carré de largeur 2ℓ
CdG	x_0	$x_0 + \sigma_T \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\left(\frac{\ell+x_0}{\sigma_T\sqrt{2}}\right)^2} - e^{-\left(\frac{\ell-x_0}{\sigma_T\sqrt{2}}\right)^2}}{\Phi\left(\frac{\ell+x_0}{\sigma_T\sqrt{2}}\right) + \Phi\left(\frac{\ell-x_0}{\sigma_T\sqrt{2}}\right)}$
CdGP centré sur x_0	x_0	$x_0 + \sigma_{eq} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\left(\frac{\ell+x_0}{\sigma_{eq}\sqrt{2}}\right)^2} - e^{-\left(\frac{\ell-x_0}{\sigma_{eq}\sqrt{2}}\right)^2}}{\Phi\left(\frac{\ell+x_0}{\sigma_{eq}\sqrt{2}}\right) + \Phi\left(\frac{\ell-x_0}{\sigma_{eq}\sqrt{2}}\right)}$
CdGP centré en 0.	$\left(\frac{\sigma_W^2}{\sigma_T^2 + \sigma_W^2}\right) x_0$	$\left(\frac{\sigma_W^2}{\sigma_T^2 + \sigma_W^2}\right) x_0 + \sigma_{eq} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\left(\frac{\ell}{\sigma_{eq}\sqrt{2}} + x_0 \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_T^2\sqrt{2}}\right)^2} - e^{-\left(\frac{\ell}{\sigma_{eq}\sqrt{2}} - x_0 \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_T^2\sqrt{2}}\right)^2}}{\Phi\left(\frac{\ell}{\sigma_{eq}\sqrt{2}} + x_0 \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_T^2\sqrt{2}}\right) + \Phi\left(\frac{\ell}{\sigma_{eq}\sqrt{2}} - x_0 \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_T^2\sqrt{2}}\right)}$

C.4.2 Cas $\sigma_W = \sigma_T$

$$\text{Alors : } \sigma_{eq} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{2}}$$

Estimateur	Support infini	Support carré de largeur 2ℓ
CdGP centré sur x_0	x_0	$x_0 + \frac{\sigma_T}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\left(\frac{\ell+x_0}{\sigma_T}\right)^2} - e^{-\left(\frac{\ell-x_0}{\sigma_T}\right)^2}}{\Phi\left(\frac{\ell+x_0}{\sigma_T}\right) + \Phi\left(\frac{\ell-x_0}{\sigma_T}\right)}$
CdGP centré en 0.	$\frac{x_0}{2}$	$\frac{x_0}{2} + \frac{\sigma_T}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\left(\frac{2\ell+x_0}{2\sigma_T}\right)^2} - e^{-\left(\frac{2\ell-x_0}{2\sigma_T}\right)^2}}{\Phi\left(\frac{2\ell+x_0}{2\sigma_T}\right) + \Phi\left(\frac{2\ell-x_0}{2\sigma_T}\right)}$

Annexe D

Effets des bruits de photons et de détecteurs sur les estimateurs de position barycentre et barycentre pondéré

D.1 Estimation de l'angle d'arrivée sur la sous-pupille

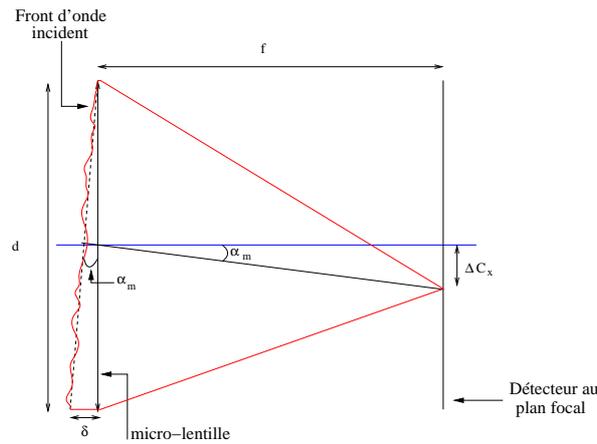


FIG. D.1 – Relation entre position d'une tache image au foyer d'une micro-lentille et pente locale du front d'onde incident.

Dans cette partie, on s'intéresse à la façon dont il convient d'estimer la position de la tache image au plan focal d'une micro-lentille. On rappelle les relations géométriques entre la position du centre de la tache $\vec{C} (C_x, C_y)$ et la pente moyenne $\vec{\alpha} (\alpha_x, \alpha_y)$ du front d'onde sur la sous-pupille :

$$C_x = f \cdot \tan \alpha_x, \quad C_y = f \cdot \tan \alpha_y \quad (\text{D.1})$$

Dans le cas qui nous intéresse les angles d'arrivée mesurés seront toujours tels que $(\alpha_x, \alpha_y) \in] -\pi/2, \pi/2 [^2$. Il existe alors une relation bijective entre la pente moyenne du front d'onde et la position du centre de la tache. Chercher le meilleur estimateur de la pente revient alors à chercher le meilleur estimateur de la position de la tache.

D.2 Centre de gravité

Dans cette partie, nous démontrerons l'expression de la variance de la différence de phase de bord à bord d'une sous-pupille de Shack Hartmann dans un cadre monodimensionnel et nous extrapolerons au cas bidimensionnel.

Exprimons d'abord le bruit sur la position du barycentre de la tache. En prenant pour origine le centre du détecteur, la position selon (Ox) du barycentre est donnée par l'expression :

$$(C_x)_{1D} = \frac{\sum_{i=-N_S/2}^{N_S/2} x_i \cdot I_i}{\sum_{i=-N_S/2}^{N_S/2} I_i} \quad (\text{D.2})$$

Où N_S est le nombre total de pixels dans la sous-pupille. La variance sur cette quantité s'exprime :

$$(\sigma_{C_x}^2)_{1D} = \left\langle \left(\frac{\sum_{i=-N_S/2}^{N_S/2} x_i \cdot I_i}{\sum_{i=-N_S/2}^{N_S/2} I_i} \right)^2 \right\rangle - \left(\left\langle \frac{\sum_{i=-N_S/2}^{N_S/2} x_i \cdot I_i}{\sum_{i=-N_S/2}^{N_S/2} I_i} \right\rangle \right)^2 \quad (\text{D.3})$$

Dans cette expression, $\langle \cdot \rangle$ désigne la moyenne statistique temporelle de la quantité incluse.

Au cours de ce travail, nous nous restreignons à l'étude des fluctuations du front d'onde dues uniquement aux fluctuations de *phase* du champ électromagnétique incident. On néglige donc les effets de scintillation. Dans ce contexte, il est légitime de considérer que les fluctuations de l'intensité totale sont négligeables devant les fluctuations d'intensité sur chaque pixel.

$$\begin{aligned} \text{Cela revient à écrire :} \quad & \left\langle \left(\sum_{i=-N_S/2}^{N_S/2} I_i \right)^2 \right\rangle \ll \left\langle \left(\sum_{i=-N_S/2}^{N_S/2} x_i \cdot I_i \right)^2 \right\rangle \\ \text{On peut alors poser :} \quad & N_{ph} = \sum_{i=-N_S/2}^{N_S/2} I_i \approx \sum_{i=-N_S/2}^{N_S/2} \langle I_i \rangle \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

$$\text{Et l'équation D.3 devient :} \quad (\sigma_{C_x}^2)_{1D} = \frac{1}{N_{ph}^2} \left(\left\langle \left(\sum_{i=-N_S/2}^{N_S/2} x_i \cdot I_i \right)^2 \right\rangle - \left\langle \sum_{i=-N_S/2}^{N_S/2} x_i \cdot I_i \right\rangle^2 \right)$$

Les $x_i, i \in [-N_S/2, N_S/2]$ représentant les positions des centres des pixels, leurs valeurs sont invariantes. L'équation précédente peut donc également s'écrire :

$$\begin{aligned}
(\sigma_{C_x}^2)_{1D} &= \frac{1}{N_{ph}^2} \left(\left\langle \left(\sum_{i=-N_S/2}^{N_S/2} x_i \cdot I_i \right)^2 \right\rangle - \left(\sum_{i=-N_S/2}^{N_S/2} x_i \cdot \langle I_i \rangle \right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{N_{ph}^2} \left(\left\langle \sum_{i=-N_S/2}^{N_S/2} \sum_{i'=-N_S/2}^{N_S/2} x_i x_{i'} I_i I_{i'} \right\rangle - \sum_{i=-N_S/2}^{N_S/2} \sum_{i'=-N_S/2}^{N_S/2} x_i x_{i'} \langle I_i \rangle \langle I_{i'} \rangle \right) \\
&= \frac{1}{N_{ph}^2} \left(\sum_{i=-N_S/2}^{N_S/2} \sum_{i'=-N_S/2}^{N_S/2} x_i x_{i'} (\langle I_i I_{i'} \rangle - \langle I_i \rangle \langle I_{i'} \rangle) \right)
\end{aligned}$$

Hypothèse : supposons que $\forall (i, i')$ tels que $i \neq i'$, I_i et $I_{i'}$ soient des variables aléatoires indépendantes (ce qui est vrai dans le cadre de l'étude du bruit de photons et du bruit de lecture) alors, on a [Noël 1997] :

$$\begin{aligned}
\langle I_i I_{i'} \rangle &= \langle I_i \rangle \cdot \langle I_{i'} \rangle \\
\text{D'où : } (\sigma_{C_x}^2)_{1D} &= \frac{1}{N_{ph}^2} \sum_{i=-N_S/2}^{N_S/2} x_i^2 (\langle I_i^2 \rangle - \langle I_i \rangle^2) \\
\text{Soit : } (\sigma_{C_x}^2)_{1D} &= \frac{1}{N_{ph}^2} \sum_{i=-N_S/2}^{N_S/2} x_i^2 \cdot \sigma_{I_i}^2 \tag{D.5}
\end{aligned}$$

Calculons maintenant la variance du retard de phase aux bords de la sous-pupille :
L'expression de ce déphasage est donné par (voir fig. D.1 et eq. D.1) :

$$\Delta\phi = \frac{2\pi d}{\lambda f} \cdot C_x \quad \text{D'où : } (\sigma_{\Delta\phi}^2)_{1D} = \left(\frac{2\pi d}{\lambda f} \right)^2 (\sigma_{C_x}^2)_{1D} \tag{D.6}$$

De façon rigoureusement équivalente, on aura, pour un cas à deux dimensions :

$$(\sigma_{C_x}^2)_{2D} = \frac{1}{N_{ph}^2} \sum_{i,j} x_{ij}^2 \cdot \sigma_{I_{ij}}^2 \quad \text{Et : } (\sigma_{\Delta\phi}^2)_{2D} = \left(\frac{2\pi d}{\lambda f} \right)^2 (\sigma_{C_x}^2)_{2D} \tag{D.7}$$

D.2.1 Bruit de photons

Plaçons-nous dans le cas d'une tache image bidimensionnelle, gaussienne, centrée et d'écart-type σ_T . L'intensité au plan focal s'exprime alors :

$$\mathcal{I}(x, y) = \frac{N_{ph}}{2\pi\sigma_T^2} e^{-(x^2+y^2)/2\sigma_T^2} \tag{D.8}$$

Le bruit de photons obéit à la statistique de Poisson. Cela signifie en outre que $\forall i, \sigma_{I_i}^2 = \langle I_i \rangle$. En supposant en plus que l'on travaille sur un support infini et continu, l'équation (D.5) devient alors :

$$\sigma_{C_x}^2 = \frac{1}{N_{ph}^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} x^2 \mathcal{I}(x, y) dx dy \tag{D.9}$$

En injectant (D.8) dans (D.9) :

$$\begin{aligned}\sigma_{C_x}^2 &= \frac{1}{2\pi\sigma_T^2 N_{ph}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-(x^2+y^2)/2\sigma_T^2} dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_T^2 N_{ph}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-(x/\sigma_T\sqrt{2})^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y/\sigma_T\sqrt{2})^2} dy\end{aligned}$$

$$\text{On pose : } \begin{cases} u = \frac{x}{\sigma_T\sqrt{2}} \Rightarrow x = \sigma_T\sqrt{2} u & \text{et } dx = \sigma_T\sqrt{2} du \\ v = \frac{y}{\sigma_T\sqrt{2}} \Rightarrow y = \sigma_T\sqrt{2} v & \text{et } dy = \sigma_T\sqrt{2} dv \end{cases}$$

$$\sigma_{C_x}^2 = \frac{2\sigma_T^2}{\pi N_{ph}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-u^2} du}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dv}_{\sqrt{\pi}}$$

$$\text{D'où : } (\sigma_{C_x}^2)_{2D} = \frac{\sigma_T^2}{N_{ph}} \quad (\text{D.10})$$

Posons maintenant :

- $(FWHM)_T$: Largeur à mi-hauteur de la tache image : $(FWHM)_T = 2\sqrt{2 \ln(2)} \sigma_T$,
 - p : la taille d'un pixel,
 - N_D : Largeur à mi-hauteur de la tache de diffraction en pixels : $N_D = \frac{(\lambda f/d)}{p}$,
 - N_T : Largeur à mi-hauteur de la tache image en pixels : $N_T = \frac{(FWHM)_T}{p} = \frac{2\sqrt{2 \ln(2)} \sigma_T}{p}$,
- Selon (D.7) on a alors :

$$\begin{aligned}\sigma_{\Delta\phi}^2 &= \left(\frac{2\pi d}{\lambda f}\right)^2 \sigma_{C_x}^2 \\ &= \left(\frac{2\pi d}{\lambda f}\right)^2 \frac{\sigma_T^2}{N_{ph}}\end{aligned}$$

$$\text{Et finalement : } (\sigma_{\Delta\phi}^2)_{photons} = \frac{\pi^2}{2 \ln(2) N_{ph}} \left(\frac{N_T}{N_D}\right)^2 \quad (\text{D.11})$$

D.2.2 Bruit de lecture

On reprend l'équation D.5, en prenant en compte cette fois le caractère bi-dimensionnel, fini et pixellisé du détecteur :

$$\sigma_{C_x}^2 = \frac{1}{N_{ph}^2} \sum_{i=-N_S/2}^{+N_S/2} \sum_{j=-N_S/2}^{+N_S/2} x_{ij}^2 \cdot \sigma_{I_{ij}}^2$$

Cette fois, émettons l'hypothèse que le bruit affectant I_i est un bruit gaussien centré d'écart-type σ_{det} . On suppose également que ce bruit est décorrélé d'un pixel à l'autre. On appelle p la taille d'un pixel. On peut écrire [Noël 1997] :

$$\forall(i) \in [-N_S/2, +N_S/2] \quad \forall(j) \in [-N_S/2, +N_S/2] \quad x_{ij} = p \times i$$

$$\text{D'où : } \sigma_{C_x}^2 = \left(\frac{p \times \sigma_{det}}{N_{ph}} \right)^2 \sum_{i=-N_S/2}^{N_S/2} \sum_{j=-N_S/2}^{N_S/2} i^2 \quad (\text{D.12})$$

$$\begin{aligned} \text{Or : } \sum_{i=-N_S/2}^{+N_S/2} i^2 &= 2 \times \sum_{i=0}^{N_S/2} i^2 = 2 \times \frac{\frac{N_S}{2} \left(\frac{N_S}{2} + 1 \right) \left(2 \frac{N_S}{2} + 1 \right)}{6} \\ &= \frac{N_S (N_S + 1) (N_S + 2)}{12} \\ &\approx N_S^3/12 \quad \text{si } N_S \gg 1 \end{aligned}$$

$$\text{Comme par ailleurs : } \sum_{j=-N_S/2}^{N_S/2} (1) = N_S$$

L'équation D.12 devient :

$$\sigma_{C_x}^2 = \left(\frac{p \times \sigma_{det}}{N_{ph}} \right)^2 \frac{N_S^4}{12} \quad (\text{D.13})$$

Par ailleurs, si N_D est la largeur à mi-hauteur de la tache de diffraction en pixels, on a :

$$p \times N_D = \frac{\lambda f}{d}, \quad \text{donc : } p = \frac{\lambda f}{d N_D} \quad (\text{D.14})$$

Et en associant les équations D.6, D.13 et D.14, on obtient :

$$(\sigma_{\Delta\phi}^2)_{2D} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{\sigma_{det}}{N_{ph}} \right)^2 \left(\frac{N_S^4}{N_D^2} \right) \quad (\text{D.15})$$

D.3 Centre de gravité pondéré

Soit $I(x, y, t)$, l'intensité lumineuse sur le détecteur. Soit $\mathcal{W}(x, y)$ la fonction de pondération bi-dimensionnelle. La coordonnée du centre de gravité de la tâche pondérée selon l'axe des abscisses s'écrit :

$$C_x = \frac{\iint x I(x, y, t) \mathcal{W}(x, y) dx dy}{\iint I(x, y, t) \mathcal{W}(x, y) dx dy} \quad (\text{D.16})$$

Posons pour plus de simplicité :

$$J(x, y, t) = I(x, y, t) \cdot \mathcal{W}(x, y) \quad (\text{D.17})$$

$$\text{et : } J_0(t) = \iint J(x, y, t) dx dy$$

$$\text{Alors : } C_x(t) = \frac{1}{J_0(t)} \iint x J(x, y, t) dx dy$$

Faisons, comme dans le cas du centre de gravité, l'hypothèse que les fluctuations de J_0 sont faibles devant celles de la position de la tâche. En définissant $\mathcal{J}_0 = \langle J_0 \rangle_t$, la variance de C_x s'exprime alors :

$$\sigma_{C_x}^2 = \frac{1}{\mathcal{J}_0^2} \iint x^2 \sigma_J^2(x, y) dx dy$$

Reste maintenant à exprimer σ_J^2 . Considérons pour cela une tache affectée d'un bruit à valeur moyenne nulle. Instantanément, l'intensité lumineuse $I(x, y, t)$ s'écrit :

$$I(x, y, t) = \mathcal{I}(x, y) + \mathcal{B}(x, y, t), \quad \text{avec : } \begin{cases} \langle \mathcal{B}(x, y, t) \rangle_t = 0 \\ \langle I(x, y, t) \rangle_t = \mathcal{I}(x, y) \end{cases}$$

Alors $J(x, y, t)$ s'exprime :

$$J(x, y, t) = \mathcal{W}(x, y) \cdot (\mathcal{I}(x, y) + \mathcal{B}(x, y, t))$$

$$\begin{aligned} \text{Et : } \sigma_J^2(x, y) &= \left\langle J(x, y, t)^2 \right\rangle_t - \langle J(x, y, t) \rangle_t^2 \\ &= \mathcal{W}^2(x, y) \left[\left\langle (\mathcal{I}(x, y) + \mathcal{B}(x, y, t))^2 \right\rangle_t - (\mathcal{I}(x, y) + \langle \mathcal{B}(x, y, t) \rangle_t)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\sigma_J^2(x, y) = \mathcal{W}^2(x, y) \sigma_{\mathcal{B}}^2(x, y)$$

D'où l'expression de la variance du centre de gravité pondéré :

$$\sigma_{C_x}^2 = \frac{1}{\mathcal{J}_0^2} \iint x^2 \mathcal{W}^2(x, y) \sigma_{\mathcal{B}}^2(x, y) dx dy \quad (\text{D.18})$$

Si on considère maintenant un spot gaussien dont le profil d'intensité lumineuse est donné par :

$$\mathcal{I}(x, y) = \frac{N_{ph}}{2\pi\sigma_T^2} e^{-(x^2+y^2)/2\sigma_T^2} \quad (\text{D.19})$$

et une fonction de pondération gaussienne, définie par :

$$\mathcal{W}(x, y) = \mathcal{W}_0 e^{-(x^2+y^2)/2\sigma_W^2} \quad (\text{D.20})$$

alors on peut calculer \mathcal{J}_0 :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0 &= \iint \mathcal{W}(x, y) \mathcal{I}(x, y) dx dy \\ &= \frac{\mathcal{W}_0 N_{ph}}{2\pi\sigma_T^2} \iint e^{-(x^2+y^2)/2\sigma_W^2} \cdot e^{-(x^2+y^2)/2\sigma_T^2} dx dy \end{aligned}$$

$$\text{Posons : } \left(\frac{1}{\sigma_W^2} + \frac{1}{\sigma_T^2} \right) = \frac{1}{\sigma_{eq}^2}$$

$$\text{Alors : } \mathcal{J}_0 = \frac{\mathcal{W}_0 N_{ph}}{2\pi\sigma_T^2} \left[(2\sigma_{eq}^2)^{\frac{1}{2}} \int e^{-\eta^2} d\eta \right]^2$$

$$\text{Soit finalement : } \mathcal{J}_0 = \mathcal{W}_0 N_{ph} \frac{\sigma_W^2}{\sigma_T^2 + \sigma_W^2} \quad (\text{D.21})$$

L'expression de la variance du retard de phase aux bords de la sous-pupille est toujours donnée par la relation (D.7).

D.3.1 Bruit de photons

Dans le cas d'un bruit de photons, on a $\sigma_B^2 = \mathcal{I}$. En tenant compte de cette relation et en introduisant les relations (D.20), (D.19) dans l'équation (D.18), on obtient :

$$\begin{aligned}\sigma_{C_x}^2 &= \frac{\mathcal{W}_0^2 N_{ph}}{2\pi\sigma_T^2 \mathcal{J}_0^2} \iint x^2 e^{-(x^2+y^2)/\sigma_W^2} \cdot e^{-(x^2+y^2)/2\sigma_T^2} dx dy \\ \text{Posons : } &\left(\frac{2}{\sigma_W^2} + \frac{1}{\sigma_T^2} \right) = \frac{1}{\sigma_{eq'}^2} \\ \text{On a : } \sigma_{C_x}^2 &= \frac{\mathcal{W}_0^2 N_{ph}}{2\pi\sigma_T^2 \mathcal{J}_0^2} \int x^2 e^{-x^2/2\sigma_{eq'}^2} dx \cdot \int e^{-y^2/2\sigma_{eq'}^2} dy \\ &= \frac{\mathcal{W}_0^2 N_{ph}}{4\mathcal{J}_0^2} \frac{\sigma_{eq'}^4}{\sigma_T^2} = \frac{\mathcal{W}_0^2 N_{ph}}{4\mathcal{J}_0^2} \frac{\sigma_T^2 \sigma_W^4}{(2\sigma_T^2 + \sigma_W^2)^2}\end{aligned}$$

En remplaçant \mathcal{J}_0 par son expression (cf eq. C.12), on obtient :

$$\sigma_{C_x}^2 = \frac{\sigma_T^2}{N_{ph}} \left(\frac{\sigma_T^2 + \sigma_W^2}{2\sigma_T^2 + \sigma_W^2} \right)^2 \quad (\text{D.22})$$

Posons maintenant :

- $(FWHM)_T$: Largeur à mi-hauteur de la tache image : $(FWHM)_T = 2\sqrt{2 \ln(2)} \sigma_T$,
- p : la taille d'un pixel,
- N_D : Largeur à mi-hauteur de la tache de diffraction en pixels : $N_D = \frac{(\lambda f/d)}{p}$,
- N_T : Largeur à mi-hauteur de la tache image en pixels : $N_T = \frac{(FWHM)_T}{p} = \frac{2\sqrt{2 \ln(2)} \sigma_T}{p}$,
- N_W : Largeur à mi-hauteur de la pondérante en pixels : $N_W = \frac{(FWHM)_W}{p} = \frac{2\sqrt{2 \ln(2)} \sigma_W}{p}$.

$$\begin{aligned}\text{Selon (D.7) on a alors : } \sigma_{\Delta\phi}^2 &= \left(\frac{2\pi d}{\lambda f} \right)^2 \sigma_{C_x}^2 \\ &= \left(\frac{2\pi d}{\lambda f} \right)^2 \frac{\sigma_T^2}{N_{ph}} \left(\frac{\sigma_T^2 + \sigma_W^2}{2\sigma_T^2 + \sigma_W^2} \right)^2 \\ \text{Et finalement : } \sigma_{\Delta\phi}^2 &= \frac{\pi^2}{2\ln(2) N_{ph}} \left(\frac{N_T}{N_D} \right)^2 \left(\frac{N_T^2 + N_W^2}{2N_T^2 + N_W^2} \right)^2 \quad (\text{D.23})\end{aligned}$$

D.3.2 Bruit de lecture

On reprend l'équation (D.18), avec cette fois un bruit gaussien centré et uniforme. La principale différence par rapport au cas de l'estimateur centre de gravité est qu'ici la pondération du spot bruité par une fonction à support compact nous permet de traiter le problème sur un support infini et continu. Afin toutefois de conserver des unités cohérentes, on définit en tout point (x, y) une densité de bruit de détecteur caractérisée par sa variance : $\sigma_B^2(x, y) = \frac{\sigma_{det}^2}{p^2}$, où p est le pas d'un pixel carré. Notons que

cette définition suppose que le bruit est totalement décorrélé d'un point à l'autre d'un pixel. L'équation (D.18) devient alors :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{C_x}^2 &= \frac{\sigma_{det}^2}{p^2 \mathcal{J}_0^2} \iint x^2 \mathcal{W}^2(x, y) dx dy \\
 &= \frac{\mathcal{W}_0^2 \sigma_{det}^2}{p^2 \mathcal{J}_0^2} \int x^2 e^{-x^2/\sigma_W^2} dx \int e^{-y^2/\sigma_W^2} dy \\
 &= \frac{\pi}{2} \frac{\mathcal{W}_0^2}{\mathcal{J}_0^2} \frac{\sigma_{det}^2}{p^2} \sigma_W^4
 \end{aligned}$$

En remplaçant \mathcal{J}_0 par son expression (cf eq. C.12), on obtient :

$$\sigma_{C_x}^2 = \frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{det}^2}{2p^2} \left(\frac{\sigma_T^2 + \sigma_W^2}{N_{ph}} \right)^2 \quad (D.24)$$

Selon (D.7) on a alors :
$$\sigma_{\Delta\phi}^2 = \left(\frac{2\pi d}{\lambda f} \right)^2 \frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{det}^2}{p^2} \left(\frac{\sigma_T^2 + \sigma_W^2}{N_{ph}} \right)^2$$

Et finalement :
$$\sigma_{\Delta\phi}^2 = \frac{\pi^3}{32 [\ln(2)]^2} \left(\frac{\sigma_{det}}{N_{ph}} \right)^2 \left(\frac{N_T^2 + N_W^2}{N_D} \right)^2 \quad (D.25)$$

Annexe E

Liste des publications

Articles

M. **Nicolle**, T. Fusco, V. Michau, G. Rousset, and J.-L. Beuzit, Optimization of star oriented and layer oriented wave-front sensing concepts for ground layer adaptive optics, *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 23, pp 2233–2245, September 2006.

M. **Nicolle**, T. Fusco, G. Rousset, and V. Michau, Improvement of shack-hartmann wavefront sensor measurement for extreme adaptive optics, *Opt. Lett.*, vol. 29, pp 2743–2745, December 2004.

T. Fusco, A. Blanc, M. **Nicolle**, J.-L. Beuzit, V. Michau, G. Rousset, and N. Hubin, Sky coverage estimation for multiconjugate adaptive optics systems : strategies and results, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, vol. 370, pp 174–184, July 2006.

T. Fusco, G. Rousset, C. Sauvage, J.-F. Petit, J.-L. Beuzit, K. Dohlen, D. Mouillet, J. Charton, M. **Nicolle**, M. Kasper, P. Baudoz, and P. Puget, High-order adaptive optics requirements for direct detection of extrasolar planets : Application to the SPHERE instrument, *Opt. Exp.*, vo. 14, pp 7515–7534, August 2006.

S. Thomas, T. Fusco, A. Tokovinin, M. **Nicolle**, V. Michau, and G. Rousset, Comparison of centroid computation algorithms in a Shack-Hartmann sensor, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, vol. 1, pp 323–333, january 2006.

T. Fusco, M. **Nicolle**, G. Rousset, V. Michau, A. Blanc, J.-L. Beuzit, and J.-M. Conan, Wavefront sensing issues in mcao, *C. R. Physique 6*, 2006.

Conférences

M. **Nicolle**, T. Fusco, V. Michau, G. Rousset, and J.-L. Beuzit, Performance analysis of multi-object wave-front sensing concepts for GLAO, In *Astronomical Adaptive Optics Systems and Applications II*, vol. 5903. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., SPIE, July 2005, San Diego, USA.

M. **Nicolle**, T. Fusco, V. Michau, G. Rousset, and J.-L. Beuzit, Ground layer correction for very large telescopes : performance of multi-object wave-front sensing concepts, In *Scientific Highlights 2005*, EDP Sciences, SF2A, 2005

M. **Nicolle**, T. Fusco, V. Michau, G. Rousset, A. Blanc, J.-L. Beuzit, and C. Petit, Ground layer adaptive optics : wavefront sensing concepts, In *Advancements in Adaptive Optics*, vol. 5490. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., June 2004, Glasgow, UK.

M. **Nicolle**, T. Fusco, V. Michau, G. Rousset, A. Blanc, and J.-L. Beuzit, Analysis of wavefront sensing concept for ground layer adaptive optics, In *Scientific Highlights 2004*, EDP Sciences, SF2A, 2004

V. Michau, J.-M. Conan, T. Fusco, M. **Nicolle**, C. Robert, M.-T. Velluet, and E. Piganeau, Shack-Hartmann wavefront sensing with extended sources, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., January 2006.

T. Fusco, S. Thomas, M. **Nicolle**, A. Tokovinin, V. Michau, and G. Rousset, Optimization of center of gravity algorithms in a shack-hartmann sensor, In *Advances in Adaptive Optics*, volume 6272. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., 2006.

T. Fusco, G. Rousset, R. Conan, M. **Nicolle**, C. Petit, and J.-L. Beuzit, End-to-end model for XAO simulations. Application to Planet-Finder, In *Scientific Highlights 2004*, EDP Sciences, 2004. SF2A.

T. Fusco, M. **Nicolle**, G. Rousset, V. Michau, J.-L. Beuzit, and D. Mouillet, Optimisation of Shack-Hartmann-based wavefront sensor for XAO system, In *Advancements in Adaptive Optics*, volume 5490. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., June 2004, Glasgow, UK.

R. Conan, T. Fusco, G. Rousset, D. Mouillet, J.-L. Beuzit, M. **Nicolle**, and C. Petit, Modeling and analysis of XAO systems. Application to VLT-Planet Finder, In *Advancements in Adaptive Optics*, volume 5490. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., June 2004, Glasgow, UK.

Bibliographie

- A. Agabi, E. Aristidi, M. Azouit, E. Fossat, F. Martin, T. Sadibekova, J. Vernin, and A. Ziad. First Whole Atmosphere Nighttime Seeing Measurements at Dome C, Antarctica. *Pub. Astron. Soc. Pacific*, 118 :344–348, February 2006.
- A. Amorim, A. Melo, J. Alves, J. Rebordao, J. Pinhao, G. Bonfait, J. Lima, R. Barros, R. Fernandes, I. Catarino, M. Carvalho, R. Marques, J.-M. Poncet, F. Duarte Santos, G. Finger, N. Hubin, G. Huster, F. Koch, J.-L. Lizon, and E. Marchetti. The CAMCAO infrared camera. In A. F. M. Moorwood and M. Iye, editors, *Ground-based Instrumentation for Astronomy.*, volume 5492, pages 1699–1709. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., September 2004.
- J. Ares and J. Arines. Influence of thresholding on centroid statistics. In G. C. Righini and A. Consortini, editors, *19th Congress of the International Commission for Optics : Optics for the Quality of Life.*, volume 4829, pages 180–181. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., November 2003.
- J. Arines. Minimum variance centroid thresholding. *Opt. Lett.*, 27 :497–499, 2002.
- J. Arines and J. Ares. Minimum variance centroid thresholding. *Opt. Lett.*, 27 :497–499, 2002.
- F. Assémat, E. Gendron, and F. Hammer. The FALCON concept : multi-object adaptive optics and atmospheric tomography for integral field spectroscopy. Principles and performances on an 8 meter telescope. *ArXiv Astrophysics e-prints*, December 2006.
- R. Avila, J. Vernin, and L. J. Sánchez. Atmospheric turbulence and wind profiles monitoring with generalized scidar. *Astron. Astrophys.*, 369 :364, 2001.
- H. W. Babcock. The possibility of compensating astronomical seeing. *Pub. Astron. Soc. Pacific*, 65 : 229, 1953.
- A. Baglin. COROT : A minisat for pionnier science, asteroseismology and planets finding. *Advances in Space Research*, 31 :345–349, 2003.
- J. N. Bahcall and R. M. Soneira. The universe at faint magnitudes. I - Models for the galaxy and the predicted star counts. 44 :73–110, September 1980.
- J. N. Bahcall and R. M. Soneira. Comparisons of a standard galaxy model with stellar observations in five fields. 55 :67–99, May 1984.
- A. Baranne, D. Queloz, M. Mayor, G. Adrianzyk, G. Knispel, D. Kohler, D. Lacroix, J.-P. Meunier, G. Rimbaud, and A. Vin. ELODIE : A spectrograph for accurate radial velocity measurements. 119 :373–390, October 1996.

- R. Barletti, G. Ceppatelli, L. Paterno, A. Righini, and N. Speroni. Astronomical site testing with balloon borne radiosondes - Results about atmospheric turbulence, solar seeing and stellar scintillation. *Astron. Astrophys.*, 54 :649–659, February 1977.
- B.J. Bauman. *Optical Design for Extremely Large Telescope Adaptive Optics Systems*. PhD thesis, Univ. of Arizona, Tucson, AZ (US), 2003. thèse.
- J. M. Beckers. Increasing the size of the isoplanatic patch with multiconjugate adaptive optics. In *Very Large Telescopes and their Instrumentation*, ESO Conference and Workshop Proceedings, pages 693–703, Garching Germany, March 1988. ESO.
- C. A. Beichman. Terrestrial Planet Finder : the search for life-bearing planets around other stars. In R. D. Reasenberg, editor, *Astronomical Interferometry*, volume 3350, pages 719–723. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., July 1998.
- D. Bello, J.-M. Conan, G. Rousset, and R. Ragazzoni. Signal to noise ratio of layer oriented measurements for multiconjugate adaptive optics. *Astron. Astrophys.*, 410 :1101–1106, November 2003.
- J.-L. Beuzit, M. Feldt, D. Mouillet, C. Moutou, K. Dohlen, P. Puget, T. Fusco, P. Baudoz, A. Boccaletti, S. Udry, D. Ségransan, R. Gratton, M. Turatto, H.-M. Schmid, R. Waters, D. Stam, P. Rabou, A.-M. Lagrange, F. Ménard, J.-C. Augereau, M. Langlois, F. Vakili, L. Arnold, T. Henning, D. Rouan, M. Kasper, and N. Hubin. A Planet Finder instrument for the VLT. In C. Aime and F. Vakili, editors, *IAU Colloq. 200 : Direct Imaging of Exoplanets : Science & Techniques*, pages 317–322, 2006.
- A. Blanc. *Identification de réponse impulsionnelle et restauration d'images : apports de la diversité de phase*. PhD thesis, Université Paris XI Orsay, July 2002.
- M. Born and E. Wolf. *Principles of Optics*. Pergamon Press, Sixth edition, 1980.
- G. Brusa and C. del Vecchio. Design of an Adaptive Secondary Mirror : A Global Approach. *Appl. Opt.*, 37 :4656–4662, July 1998.
- C. J. Carrano, S. S. Olivier, J. M. Brase, B. A. Macintosh, and J. R. An. Phase retrieval techniques for adaptive optics. In D. Bonaccini and R. K. Tyson, editors, *Adaptive Optical System Technologies*, volume 3353, pages 658–667. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., September 1998.
- J. Charton, Z. Hubert, E. Stadler, W. Schartz, and J.-L. Beuzit. System level simulation of micro-mirrors for adaptive optics. In E. Atad-Ettinger and S. D'Odorico, editors, *Specialized Optical Developments in Astronomy. Edited by Atad-Ettinger, Eli ; D'Odorico, Sandro. Proceedings of the SPIE, Volume 4842, pp. 207-218 (2003).*, pages 207–218, February 2003.
- F. Chassat. *Propagation optique à travers la turbulence atmosphérique. Etude modale de l'anisoplanétisme et application à l'optique adaptative*. PhD thesis, Université Paris Sud, June 1992.
- G. Chauvin, A.-M. Lagrange, C. Dumas, B. Zuckerman, D. Mouillet, I. Song, J.-L. Beuzit, and P. Lovis. Giant planet companion to 2MASSW J1207334-393254. *Astron. Astrophys.*, 438 :L25–L28, August 2005.
- J.-M. Conan. *Étude de la correction partielle en optique adaptative*. PhD thesis, Université Paris XI Orsay, October 1994.

- R. Conan. *Modélisation des effets de l'échelle externe de cohérence spatiale du front d'onde en observation à haute résolution angulaire en astronomie*. PhD thesis, Université de Nice, 2000.
- A. Consortini, L. Ronchi, and E. Moroder. Role of the outer scale of turbulence in atmospheric degradation of optical images. *J. Opt. Soc. Am. A*, 63 :1246–1248, October 1973.
- D. J. Croton, V. Springel, S. D. M. White, G. De Lucia, C. S. Frenk, L. Gao, A. Jenkins, G. Kauffmann, J. F. Navarro, and N. Yoshida. The many lives of active galactic nuclei : cooling flows, black holes and the luminosities and colours of galaxies. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 365 :11–28, January 2006.
- R. M. Cutri, M. F. Skrutskie, S. van Dyk, C. A. Beichman, J. M. Carpenter, T. Chester, L. Cambresy, T. Evans, J. Fowler, J. Gizis, E. Howard, J. Huchra, T. Jarrett, E. L. Kopan, J. D. Kirkpatrick, R. M. Light, K. A. Marsh, H. McCallon, S. Schneider, R. Stiening, M. Sykes, M. Weinberg, W. A. Wheaton, S. Wheelock, and N. Zacarias. *2MASS All Sky Catalog of point sources*. The IRSA 2MASS All-Sky Point Source Catalog, NASA/IPAC Infrared Science Archive, June 2003.
- O. Daigle, J.-L. Gach, C. Guillaume, C. Carignan, P. Balard, and O. Boisin. L3CCD results in pure photon-counting mode. In J. D. Garnett and J. W. Beletic, editors, *Optical and Infrared Detectors for Astronomy.*, volume 5499, pages 219–227. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., September 2004.
- D.J. Denvir and E. Conroy. Electron-multiplying CCD : the new ICCD. In C.B. Johnson, D. Sinha, and P.A. Laplante, editors, *Low-Light-Level and Real-Time Imaging Systems, Components, and Applications*, pages 164–174. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., February 2003.
- C. Dessenne. *Commande modale et prédictive en Optique Adaptative*. PhD thesis, Université de Paris VII, December 1998.
- R. H. Dicke. Phase-contrast detection of telescope seeing and their correction. *Astron. J.*, 198(4) : 605–615, 1975.
- C. D'Orgeville, B. J. Bauman, J. W. Catone, B. L. Ellerbroek, D. T. Gavel, and R. A. Buchroeder. Gemini north and south laser guide star systems requirements and preliminary designs. In R. K. Tyson, D. Bonaccini, and M. C. Roggemann, editors, *Adaptive Optics Systems and Technology II.*, volume 4494, pages 302–316. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., February 2002.
- B. L. Ellerbroek. First-order performance evaluation of adaptive-optics systems for atmospheric-turbulence compensation in extended-field-of-view astronomical telescopes. *Journal of the Optical Society of America A*, 11 :783–805, February 1994.
- B. L. Ellerbroek and F. Rigaut. Methods for correcting tilt anisoplanatism in laser-guide-star-based multiconjugate adaptive optics. *J. Opt. Soc. Am. A*, 18 :2539–2547, October 2001.
- B. L. Ellerbroek, F. J. Rigaut, B. J. Bauman, C. Boyer, S. L. Browne, R. A. Buchroeder, J. W. Catone, P. Clark, C. d'Orgeville, D. T. Gavel, G. Herriot, M. R. Hunten, E. James, E. J. Kibblewhite, I. T. McKinnie, J. T. Murray, D. Rabaud, L. K. Saddlemyer, J. Sebag, J. Stillburn, J. M. Telle, and J.-P. Veran. Multiconjugate adaptive optics for Gemini-South. In P. L. Wizinowich and D. Bonaccini, editors, *Adaptive Optical System Technologies II.*, volume 4839, pages 55–66. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., February 2003.
- R. L. Fante. Electromagnetic beam propagation in turbulent media. *IEEE Proceedings*, 63 :1669–1692, December 1975.

- J. R. Fienup. Phase retrieval algorithms : a comparison. *Appl. Opt.*, 21 :2758–2769, August 1982.
- I. Foppiani, C. Baffa, V. Biliotti, G. Bregoli, G. Cosentino, E. Giani, S. Esposito, B. Marano, and P. Salinari. Photon counting CCDs as wavefront sensors for AO. In P. L. Wizinowich and D. Bonaccini, editors, *Adaptive Optical System Technologies II.*, volume 4839, pages 312–316. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., February 2003.
- R. Foy and A. Labeyrie. Feasibility of adaptive telescope with laser probe. *Astron. Astrophys.*, 152 : L29–L31, November 1985.
- W. L. Freedman, B. F. Madore, B. K. Gibson, L. Ferrarese, D. D. Kelson, S. Sakai, J. R. Mould, R. C. Kennicutt, Jr., H. C. Ford, J. A. Graham, J. P. Huchra, S. M. G. Hughes, G. D. Illingworth, L. M. Macri, and P. B. Stetson. Final Results from the Hubble Space Telescope Key Project to Measure the Hubble Constant. *Astrophys. J.*, 553 :47–72, May 2001.
- R. G. Frehlich. Variance of focal-plane centroids. *J. Opt. Soc. Am. A*, 7 :2119–2140, November 1990.
- D. L. Fried. Anisoplanatism in adaptive optics. *J. Opt. Soc. Am.*, 72(1) :52–61, January 1982.
- T. Fusco. *Correction partielle et anisoplanétisme en Optique Adaptative : traitement a posteriori et Optique Adaptative Multiconjuguée*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, Nice France, October 2000.
- T. Fusco, J.-M. Conan, V. Michau, L. Mugnier, and G. Rousset. Efficient phase estimation for large field of view adaptive optics. *Opt. Lett.*, 24(21) :1472–1474, November 1999.
- T. Fusco, J.-M. Conan, L. Mugnier, V. Michau, and G. Rousset. Characterization of adaptive optics point spread function for anisoplanatic imaging. Application to stellar field deconvolution. *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, 142 :149–156, 2000.
- T. Fusco, J.-M. Conan, G. Rousset, L. M. Mugnier, and V. Michau. Optimal wavefront reconstruction strategies for multiconjugate adaptive optics. *J. Opt. Soc. Am. A*, 18(10) :2527–2538, October 2001.
- T. Fusco, M. Nicolle, G. Rousset, V. Michau, J.-L. Beuzit, and D. Mouillet. Optimization of a Shack-Hartmann-based wavefront sensor for XAO systems. In D. Bonaccini Calia, B. L. Ellerbroek, and R. Ragazzoni, editors, *Advancements in Adaptive Optics.*, volume 5490, pages 1155–1166. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., October 2004.
- T. Fusco, G. Rousset, J.-L. Beuzit, D. Mouillet, K. Dohlen, R. Conan, C. Petit, and G. Montagnier. Conceptual design of an extreme ao dedicated to extra-solar planet detection by the vlt-planet finder instrument. In *Astronomical Adaptive Optics Systems and Applications II*, volume 5903. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., SPIE, 2005. Date conférence : July2005, San Diego, USA.
- T. Fusco, A. Blanc, M. Nicolle, J.-L. Beuzit, V. Michau, G. Rousset, and N. Hubin. Sky coverage estimation for multiconjugate adaptive optics systems : strategies and results. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 370 :174–184, July 2006.
- T. Fusco, M. Nicolle, G. Rousset, V. Michau, A. Blanc, J.-L. Beuzit, and J.-M. Conan. Wavefront sensing issues in mcao. *C. R. Physique* 6, 2006.

- T. Fusco, G. Rousset, C. Sauvage, J.-F. Petit, J.-L. Beuzit, K. Dohlen, D. Mouillet, J. Charton, M. Nicolle, M. Kasper, P. Baudoz, and P. Puget. High-order adaptive optics requirements for direct detection of extrasolar planets : Application to the SPHERE instrument. *Opt. Exp.*, 14 :7515–7534, August 2006.
- T. Fusco, S. Thomas, M. Nicolle, A. Tokovinin, V. Michau, and G. Rousset. Optimization of center of gravity algorithms in a shack-hartmann sensor. In L. Ellerbroek, B. and D. Bonaccini Calia, editors, *Advances in Adaptive Optics*, volume 6272. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., 2006.
- E. Gendron. *Optimisation de la commande modale en optique adaptative : applications à l'astronomie*. PhD thesis, Université de Paris VII, 1995. thèse.
- E. Gendron and P. Léna. Astronomical adaptive optics : I. modal control optimization. *Astron. Astrophys.*, 291(337), 1994.
- E. Gendron, F. Assémat, F. Hammer, P. Jagourel, F. Chemla, P. Laporte, M. Puech, M. Marteaud, F. Zamkotsian, A. Liotard, J.-M. Conan, T. Fusco, and N. Hubin. FALCON : multi-object AO. *Comptes rendus. Physique*, 16 :1110–1117, 12005.
- A. Glindemann, R. Abuter, F. Carbognani, F. Delplancke, F. Derie, A. Gennai, P. B. Gitton, P. Kervella, B. Koehler, S. A. Leveque, S. Menardi, A. Michel, F. Paresce, T. P. Duc, A. Richichi, M. Schoeller, M. Tarengi, A. Wallander, and R. Wilhelm. The VLT Interferometer : a unique instrument for high-resolution astronomy. In P. J. Lena and A. Quirrenbach, editors, *Interferometry in Optical Astronomy*, volume 4006, pages 2–12. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., July 2000.
- R. A. Gonsalves. Small-phase solution to the phase-retrieval problem. *Opt. Lett.*, 26 :684–685, May 2001.
- R. A. Gonsalves. Phase retrieval from modulus data (T). *J. Opt. Soc. Am. A*, 66 :961–+, 1976.
- R. A. Gonsalves. Phase retrieval and diversity in adaptive optics. *Optical Engineering*, 21 :829–832, October 1982.
- M. Guillaume, T. Amouroux, P. Réfrégier, B. Milliard, and A. Llebaria . Optimal correlation at low photon levels : study for astronomical images. *Opt. Lett.*, 22 :322–324, March 1997.
- A. J. S. Hamilton, P. Kumar, E. Lu, and A. Matthews. Reconstructing the primordial spectrum of fluctuations of the universe from the observed nonlinear clustering of galaxies. *Astrophys. J. Lett.*, 374 :L1–L4, June 1991.
- J. W. Hardy. *Adaptive optics for astronomical telescopes*. Oxford University Press, 1998.
- G. Herriot, S. Morris, S. Roberts, J. M. Fletcher, L. K. Saddlemyer, G. Singh, J.-P. Veran, and E. H. Richardson. Innovations in Gemini adaptive optics system design. In D. Bonaccini and R. K. Tyson, editors, *Adaptive Optical System Technologies.*, volume 3353, pages 488–499. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., September 1998.
- I. Hook. *The science case for the European Extremely Large Telescope : the next step in mankind's quest for the Universe*. The science case for the European Extremely Large Telescope : the next step in mankind's quest for the Universe, Edited by I. Hook. Cambridge, UK : OPTICON and Garching bei Muenchen, Germany : European Southern Observatory (ESO), 2005, 2005.

- J. B. Hutchings, P. B. Stetson, A. Robin, and T. Webb. Faint Star Counts in the Near-Infrared. 114 : 761–765, July 2002.
- R. Irwan and R. G. Lane. Analysis of optimal centroid estimation applied to shack-hartmann sensing. *Appl. Opt.*, 38 :6737–6743, 1999.
- Y. I. Izotov, T. X. Thuan, and V. A. Lipovetsky. The primordial helium abundance from a new sample of metal-deficient blue compact galaxies. *Astrophys. J.*, 435 :647–667, November 1994.
- P. Y. Kern, P. J. Lena, P. Gigan, F. J. Rigaut, G. Rousset, J.-C. Fontanella, J.-P. Gaffard, C. Boyer, P. Jagourel, and F. Merkle. Adaptive optics prototype system for infrared astronomy, I : system description. In J. J. Schulte-In-den-Baeumen and R. K. Tyson, editors, *Proc. SPIE Vol. 1271, p. 243-251, Adaptive Optics and Optical Structures, Joachim J. Schulte-in-den-Baeumen ; Robert K. Tyson ; Eds.*, pages 243–251, August 1990.
- V. A. Klückers, N. J. Wooder, M. J. Nicholls, I. Munro, and J. C. Dainty. Profiling of atmospheric turbulence strength and velocity using a generalized scidar technique. *Astron. Astrophys.*, 130 : 141–155, 1998.
- C. Koen. On the upper limit on stellar masses in the Large Magellanic Cloud cluster R136. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 365 :590–594, January 2006.
- J. Kolb. *Outils d'étalonnage et de test pour les systèmes d'Optique Adaptative Multi Conjuguée : Application au démonstrateur MAD de l'ESO*. PhD thesis, Université de Paris VII, 2005. thèse.
- J. Kolb, E. Marchetti, S. Tisserand, F. Franza, B. Delabre, F. Gonte, R. Brast, S. Jacob, and F. Reversat. MAPS : a turbulence simulator for MCAO. In D. Bonaccini Calia, B. L. Ellerbroek, and R. Ragazzoni, editors, *Advancements in Adaptive Optics.*, volume 5490, pages 794–804. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., October 2004.
- A. N. Kolmogorov. Local structure of turbulence in incompressible fluids with very high reynolds number. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 30(4) :301–305, 1941.
- V. Kornilov, A. A. Tokovinin, O. Vozyakova, A. Zaitsev, N. Shatsky, S. F. Potanin, and M. S. Sarazin. MASS : a monitor of the vertical turbulence distribution. In P. L. Wizinowich and D. Bonaccini, editors, *Adaptive Optical System Technologies II.*, volume 4839, pages 837–845. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., February 2003.
- P. Kroupa. On the variation of the initial mass function. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 322 :231–246, April 2001.
- J. S. Lawrence, M. C. B. Ashley, A. Tokovinin, and T. Travouillon. Exceptional astronomical seeing conditions above Dome C in Antarctica. *Nature (London)*, 431 :278–281, September 2004.
- M. Le Louarn, R. Foy, N. Hubin, and M. Tallon. Laser guide star for a 3.6m and 8m telescopes : performance and astrophysical limitations. *MNRAS*, 295(4) :756, 1998.
- B. Le Roux. *Commande optimale en optique adaptative classique et conjuguée*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, October 2003.
- B. Le Roux, J.-M. Conan, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, L. M. Mugnier, and T. Fusco. Optimal control law for classical and multiconjugate adaptive optics. *Journal of the Optical Society of America A*, 21 :1261–1276, July 2004.

- A. Leger, J. M. Mariotti, B. Mennesson, M. Ollivier, J. L. Puget, D. Rouan, and J. Schneider. Could We Search for Primitive Life on Extrasolar Planets in the Near Future ? The Darwin Project. *Icarus*, 123 :249–255, October 1996.
- A. Liotard, S. Muratet, F. Zamkotsian, and J.-Y. Fourniols. Static and dynamic microdeformable mirror characterization by phase-shifting and time-averaged interferometry. In D. M. Tanner and R. Ramesham, editors, *Reliability, Packaging, Testing, and Characterization of MEMS/MOEMS IV. Edited by Tanner, Danelle M. ; Ramesham, Rajeshuni. Proceedings of the SPIE, Volume 5716, pp. 207-217 (2004).*, pages 207–217, December 2004.
- M. Lloyd Hart, C. Baranec, N.M. Milton, M. Snyder, T. Stalcup, and J.R.P. Angel. Experimental results of ground-layer and tomographic wavefront reconstruction from multiple laser guide stars. *Opt. Exp.*, 14 :7541–7551, August 2006.
- G. D. Love, J. S. Fender, and S. R. Restaino. Adaptive wavefront shaping with liquid crystals. *Optics & Photonics News*, 6 :16–21, October 1995.
- E. Marchetti, R. Ragazzoni, and E. Diolaiti. Which range of magnitudes for layer oriented MCAO ? In P. L. Wizinowich and D. Bonaccini, editors, *Adaptive Optical System Technologies II.*, volume 4839, pages 566–577. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., February 2003.
- E. Marchetti, R. Brast, B. Delabre, R. Donaldson, E. Fedrigo, F. Frank, N. Hubin, J. Kolb, M. Le Louarn, J.-L. Lizon, S. Oberti, F. Quirós-Pacheco, R. Reiss, J. Santos, S. Tordo, A. Baruffolo, P. Bagnara, A. Amorim, and J. Lima. MAD Star Oriented : laboratory results for Ground Layer and Multi- Conjugate Adaptive Optics. In B.L. Brent L. Ellerbroek and D. Bonaccini, editors, *Advances in Adaptive Optics II*, volume 6272. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., 2006. to be published.
- A. P. Marscher, S. G. Jorstad, J.-L. Gómez, M. F. Aller, H. Teräsranta, M. L. Lister, and A. M. Stirling. Observational evidence for the accretion-disk origin for a radio jet in an active galaxy. *Nature (London)*, 417 :625–627, June 2002.
- F. Matteucci and L. Greggio. Relative roles of type I and II supernovae in the chemical enrichment of the interstellar gas. 154 :279–287, January 1986.
- M. Mayor and D. Queloz. A Jupiter-mass companion to a solar-type star. *Nature (London)*, 378 : 355–359, November 1995.
- V. Michau, G. Rousset, and J.-C. Fontanella. Wavefront sensing from extended sources. In R. R. Radick, editor, *Real Time and Post Facto Solar Image Correction*, volume 13 of *NSO/SP Summer Workshop Series*, pages 124–128, Sunspot, New Mexico, USA, 1992. National Solar Observatory/Sacramento Peak.
- V. Michau, J.-M. Conan, T. Fusco, M. Nicolle, C. Robert, M.-T. Velluet, and E. Piganeau. Shack-Hartmann wavefront sensing with extended sources. volume 0. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., January 2006.
- G. E. Miller and J. M. Scalo. The initial mass function and stellar birthrate in the solar neighborhood. *Astrophys. J. Supp. Ser.*, 41 :513–547, November 1979.
- B. Mobasher, M. Dickinson, H. C. Ferguson, M. Giavalisco, T. Wiklind, D. Stark, R. S. Ellis, S. M. Fall, N. A. Grogin, L. A. Moustakas, N. Panagia, M. Sosey, M. Stiavelli, E. Bergeron, S. Casertano,

- P. Ingraham, A. Koekemoer, I. Labbé, M. Livio, B. Rodgers, C. Scarlata, J. Vernet, A. Renzini, P. Rosati, H. Kuntschner, M. Kümmel, J. R. Walsh, R. Chary, P. Eisenhardt, N. Pirzkal, and D. Stern. Evidence for a Massive Poststarburst Galaxy at $z \sim 6.5$. *Astrophys. J.*, 635 :832–844, December 2005.
- G. Molodij. *Etude de l'anisoplanétisme pour l'optique adaptative*. Astrophysique et techniques spatiales, Université Paris VII, April 1996.
- L. M. Mugnier, A. Blanc, and J. Idier. Phase diversity : a technique for wave-front sensing and for diffraction-limited imaging. In Peter Hawkes, editor, *Advances in Imaging and Electron Physics*, volume 141, chapter 1, pages 1–76. Elsevier, 2006.
- F. Nakamura and M. Umemura. The Stellar Initial Mass Function in Primordial Galaxies. *Astrophys. J.*, 569 :549–557, April 2002.
- C. R. Neyman. Focus anisoplanatism : a limit to the determination of tip-tilt with laser guide stars. *Opt. Lett.*, 21 :1806–1808, November 1996.
- M. Nicolle, T. Fusco, G. Rousset, and V. Michau. Improvement of shack-hartmann wavefront sensor measurement for extreme adaptive optics. *Opt. Lett.*, 29(23) :2743–2745, December 2004.
- M. Nicolle, T. Fusco, V. Michau, G. Rousset, and J.-L. Beuzit. Optimization of star oriented and layer oriented wave-front sensing concepts for ground layer adaptive optics. *J. Opt. Soc. Am. A*, 23 : 2233–2245, September 2006.
- R. J. Noll. Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *J. Opt. Soc. Am.*, 66(3) :207–211, 1976.
- T. Noël. *Caractérisation spatiale et temporelle de la turbulence atmosphérique par analyse de surface d'onde*. PhD thesis, Université Paris VI, September 1997.
- A. M. Obukhov. Structure of the temperature field in a turbulent current. *Izv. Aka. Nauk SSSR, Ser. Geograf. Geofiz.*, 13(1) :58–69, 1949.
- R. R. Parenti and R. J. Sasiela. Laser guide-star systems for astronomical applications. *J. Opt. Soc. Am. A*, 11 :288–309, January 1994.
- M. A. C. Perryman, L. Lindgren, J. Kovalevsky, E. Hoeg, U. Bastian, P. L. Bernacca, M. Crézé, F. Donati, M. Grenon, F. van Leeuwen, H. van der Marel, F. Mignard, C. A. Murray, R. S. Le Poole, H. Schrijver, C. Turon, F. Arenou, M. Froeschlé, and C. S. Petersen. The HIPPARCOS Catalogue. *Astron. Astrophys.*, 323 :L49–L52, July 1997.
- C. Petit. *Etude de la commande optimale en optique adaptative et optique adaptative multi-conjuguée ; validations en laboratoire*. PhD thesis, Université de Paris XIII, 2006. thèse.
- C. Petit, F. Quiros-Pacheco, J.-M. Conan, C. Kulcsar, H.-F. Raynaud, T. Fusco, and G. Rousset. Kalman-filter-based control for adaptive optics. In D. Bonaccini Calia, B. L. Ellerbroek, and R. Ragazzoni, editors, *Advancements in Adaptive Optics.*, volume 5490, pages 1414–1425. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., October 2004.
- L. A. Poyneer. Scene-based Shack-Hartmann wave-front sensing : analysis and simulation. *Appl. Opt.*, 42 :5807–5815, October 2003.

- L. A. Poyneer, D. W. Palmer, K. N. LaFortune, and B. Bauman. Experimental results for correlation-based wavefront sensing. In M. T. Gruneisen, J. D. Gonglewski, and M. K. Giles, editors, *Advanced Wavefront Control : Methods, Devices, and Applications III.*, volume 5894, pages 207–220. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., August 2005.
- M. Puech, F. Hammer, P. Jagourel, E. Gendron, F. Assémat, F. Chemla, H. Flores, P. Laporte, J.-M. Conan, T. Fusco, A. Liotard, and F. Zamkotsian. FALCON : Extending adaptive corrections to cosmological fields. *New Astron. Rev.*, 50 :382–384, June 2006.
- R. Ragazzoni. No laser guide stars for adaptive optics in giant telescopes ? *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, 136 :205–209, April 1999.
- R. Ragazzoni. Pupil plane wavefront sensing with an oscillating prism. *Journal of Modern Optics*, 43 :289–293, February 1996.
- R. Raggazzoni, E. Dialaiti, J. Farinato, E. Fedrigo, E. Marchetti, M. Tordi, and D. Kirkman. Multiple field of view layer-oriented adaptive optics. nearly whole sky coverage on 8 m class and beyond. *Astron. Astrophys.*, 396 :731–744, December(III) 2002.
- C. Reylé, A. C. Robin, S. Dierrière, S. Picaud, and B. Debray. Online modeling of the Galaxy and its applications. In F. Combes, D. Barret, T. Contini, F. Meynadier, and L. Pagani, editors, *SF2A-2004 : Semaine de l'Astrophysique Francaise*, pages 559–+, December 2004.
- F. Rigaut. Ground-conjugate wide field adaptive optics for the ELTs. In R. Ragazzoni and S. Esposito, editors, *Beyond Conventional Adaptive Optics*, Padova, Italy, 2001. Astronomical Observatory of Padova.
- F. Rigaut and E. Gendron. Laser guide star in adaptive optics - The tilt determination problem. *Astron. Astrophys.*, 261 :677–684, August 1992.
- F. Rigaut and E. Gendron. Laser guide star in adaptative optics : the tilt determination problem. *Astron. Astrophys.*, 261 :677–684, 1992.
- F. J. Rigaut, R. Arsenault, J. M. Kerr, D. A. Salmon, M. J. Northcott, Y. Dutil, and C. Boyer. Canada-France-Hawaii Telescope adaptive optics bonnette II : simulations and control. In M. A. Ealey and F. Merkle, editors, *Adaptive Optics in Astronomy*, volume 2201, pages 149–160. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., May 1994.
- T. R. Rimmele and R. R. Radick. Solar adaptive optics at the National Solar Observatory. In D. Bonaccini and R. K. Tyson, editors, *Adaptive Optical System Technologies*, volume 3353, pages 72–81. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., September 1998.
- M.S. Robbins and B.J. Hadwen. The noise performance of electron multiplying charge-coupled devices. *IEEE Trans. Electron Devices*, 50 :1227– 1232, May 2003.
- A. C. Robin, C. Reylé, S. Derrière, and S. Picaud. A synthetic view on structure and evolution of the Milky Way. 409 :523–540, October 2003.
- H. J. Rocha Pinto, W. J. Maciel, J. Scalo, and C. Flynn. Chemical enrichment and star formation in the Milky Way disk. I. Sample description and chromospheric age-metallicity relation. *Astron. Astrophys.*, 358 :850–868, June 2000a.

- H. J. Rocha Pinto, J. Scalo, W. J. Maciel, and C. Flynn. Chemical enrichment and star formation in the Milky Way disk. II. Star formation history. *358* :869–885, June 2000b.
- F. Roddier. Curvature sensing and compensation : a new concept in adaptive optics. *Appl. Opt.*, *27* : 1223–1225, 1988.
- F. Roddier. The effects of atmospherical turbulence in optical astronomy. In Wolf [1981], pages 281–376.
- F. Roddier, editor. *Adaptive Optics in Astronomy*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- F. Roddier and C. Roddier. NOAO infrared adaptive optics program. II - Modeling atmospheric effects in adaptive optics systems for astronomical telescopes. In L.D. Barr, J.H. Richardson, and K.L. Shu, editors, *Advanced technology optical telescopes III*, volume 628, pages 298–304. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., March 1986.
- D. Rouan, A. Baglin, P. Barge, E. Copet, M. Deleuil, A. Leger, J. Schneider, D. Toulblanc, and A. Vauclair. Searching for exosolar planets with the COROT space mission. *Physics and Chemistry of the Earth C*, *24* :567–571, October 1999.
- D. Rouan, P. Riaud, A. Boccaletti, Y. Clénet, and A. Labeyrie. The Four-Quadrant Phase-Mask Coronagraph. I. Principle. *Pub. Astron. Soc. Pacific*, *112* :1479–1486, November 2000.
- G. Rousset. Wave-front sensors. In Roddier [1999], chapter 5, pages 91–130.
- G. Rousset, J. C. Fontanella, P. Kern, P. Gigan, and F. Rigaut. First diffraction-limited astronomical images with adaptive optics. *Astron. Astrophys.*, *230* :L29–L32, April 1990.
- G. Rousset, F. Lacombe, P. Puget, N. N. Hubin, E. Gendron, T. Fusco, R. Arsenault, J. Charton, P. Feautrier, P. Gigan, P. Y. Kern, A.-M. Lagrange, P.-Y. Madec, D. Mouillet, D. Rabaud, P. Rabou, E. Stadler, and G. Zins. NAOS, the first AO system of the VLT : on-sky performance. In P. L. Wizinowich and D. Bonaccini, editors, *Adaptive Optical System Technologies II.*, volume 4839, pages 140–149. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., February 2003.
- N. C. Santos, F. Bouchy, M. Mayor, F. Pepe, D. Queloz, S. Udry, C. Lovis, M. Bazot, W. Benz, J.-L. Bertaux, G. Lo Curto, X. Delfosse, C. Mordasini, D. Naef, J.-P. Sivan, and S. Vauclair. The HARPS survey for southern extra-solar planets. II. A 14 Earth-masses exoplanet around μ Arae. *Astron. Astrophys.*, *426* :L19–L23, October 2004.
- M. Sarazin. Site atmospheric characterization. In M. Cullum, editor, *Adaptive Optics*, pages 439–+, 1996.
- J.-F. Sauvage, T. Fusco, G. Rousset, C. Petit, B. Neichel, A. Blanc, and J.-L. Beuzit. Fine calibration and pre-compensation of non-common path aberrations for high performance AO system. In R. K. Tyson and M. Lloyd-Hart, editors, *Chromaticity effects in adaptive optics ; wavelength dependence of amplitude compensation.*, volume 5903, pages 88–95. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., January 2005.
- K. Strehl. Verdoppelung der Marscanäle. *Astronomische Nachrichten*, *158* :91–+, May 1902.
- M. Séchaud. Wave-front compensation devices. In Roddier [1999], chapter 4, pages 57–90.

- M. Tallon and R. Foy. Adaptive telescope with laser probe : isoplanatism and cone effect. *Astron. Astrophys.*, 235 :549–557, 1990.
- M. Tallon, R. Foy, and J. Vernin. 3-d wavefront sensing for multiconjugate adaptive optics. In *Progress in Telescope and instrumentation technologies*, ESO Conference and Workshop Proceedings, pages 517–521, Garching Germany, 1992. ESO, M.-H. Ulric.
- S. Thomas, T. Fusco, A. Tokovinin, M. Nicolle, V. Michau, and G. Rousset. Comparison of centroid computation algorithms in a Shack-Hartmann sensor. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, (1) :323–333, 2006.
- A. Tokovinin. Seeing improvement with ground-layer adaptive optics. *Pub. Astron. Soc. Pacific*, 116 : 941–951, October 2004.
- A. Tokovinin, M. Le Louarn, and M. Sarazin. Isoplanatism in a multiconjugate adaptive optics system. *J. Opt. Soc. Am. A*, 17 :1819–1827, October 2000.
- A. Tokovinin, M. Le Louarn, E. Viard, N. Hubin, and R. Conan. Optimized modal tomography in adaptive optics. *Astron. Astrophys.*, 378 :710–721, November 2001.
- A. Tokovinin, S. Baumont, and J. Vasquez. Statistics of turbulence profile at Cerro Tololo. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 340 :52–58, March 2003a.
- A. Tokovinin, S. Thomas, B. Gregory, N. van der Blik, P. Schurter, R. Cantarutti, and E. Mondaca. Design of ground-layer turbulence compensation with a Rayleigh beacon. In D. Bonaccini Calia, B. L. Ellerbroek, and R. Ragazzoni, editors, *Advancements in Adaptive Optics.*, volume 5490, pages 870–878. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., October 2004.
- A. Tokovinin, J. Vernin, A. Ziad, and M. Chun. Optical Turbulence Profiles at Mauna Kea Measured by MASS and SCIDAR. *Pub. Astron. Soc. Pacific*, 117 :395–400, April 2005.
- A. A. Tokovinin, B. Gregory, H. E. Schwarz, V. Terebizh, and S. Thomas. A visible-light AO system for the 4.2m SOAR telescope. In P. L. Wizinowich and D. Bonaccini, editors, *Adaptive Optical System Technologies II.*, volume 4839, pages 673–680. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., February 2003b.
- G. A. Tyler and D. L. Fried. Image-position error associated with a quadrant detector. *J. Opt. Soc. Am. A*, 72 :804–+, June 1982.
- M. A. van Dam, D. Le Mignant, and B. A. Macintosh. Performance of the Keck Observatory Adaptive-Optics System. *Appl. Opt.*, 43 :5458–5467, October 2004.
- O. van der Luehe, D. Soltau, T. Berkefeld, and T. Schelenz. KAOS : Adaptive optics system for the Vacuum Tower Telescope at Teide Observatory. In S. L. Keil and S. V. Avakyan, editors, *Innovative Telescopes and Instrumentation for Solar Astrophysics.*, volume 4853, pages 187–193. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., February 2003.
- J.-P. Véran. *Estimation de la réponse impulsionnelle et restauration d'image en optique adaptative. Application au système d'optique adaptative du Télescope Canada-France-Hawaii.* PhD thesis, ENST, 1997.
- J.-P. Véran and G. Herriot. Centroid gain compensation in ShackHartmann adaptive optics systems with natural or laser guide star. *J. Opt. Soc. Am. A*, 17 :1430–1439, August 2000.

- C. Vérinaud. On the nature of the measurements provided by a pyramid wave-front sensor. *Optics Communications*, 233 :27–38, March 2004.
- T. von Karman. Progress in the statistical theory of turbulence. *Proceedings of the National Academy of Science*, 34 :530–539, November 1948.
- K. Wada and A. Venkatesan. Feedback from the First Supernovae in Protogalaxies : The Fate of the Generated Metals. *Astrophys. J.*, 591 :38–42, July 2003.
- D. Wiberg and D. T. Gavel. A Spatial Non-dynamic LQG Controller : Part I, Application to Adaptive Optics. In IEEE, editor, *IEEE Conference on Decision and Control numb. 43*, volume 3, pages 3326–3332, Nassau, Bahamas, Dec. 2004. IEEE Conf. on Decision and Control.
- R. W. Wilson, N. J. Wooder, F. Rigal, and J. C. Dainty. Estimation of anisoplanatism in adaptive optics by generalized scidar profiling. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 339 :491–494, 2003.
- P. Wizinowich, D. S. Acton, C. Shelton, P. Stomski, J. Gathright, K. Ho, W. Lupton, K. Tsubota, O. Lai, C. Max, J. Brase, J. An, K. Avicola, S. Olivier, D. Gavel, B. Macintosh, A. Ghez, and J. Larkin. First Light Adaptive Optics Images from the Keck II Telescope : A New Era of High Angular Resolution Imagery. *Pub. Astron. Soc. Pacific*, 112 :315–319, March 2000.
- E. Wolf, editor. *Progress in Optics*, volume XIX. North Holland, Amsterdam, 1981.
- G. Worthey. Comprehensive stellar population models and the disentanglement of age and metallicity effects. *Astrophys. J. Supp. Ser.*, 95 :107–149, November 1994.

ANALYSE DE FRONT D'ONDE POUR LES OPTIQUES ADAPTATIVES DE NOUVELLE GÉNÉRATION

La performance d'un système d'optique adaptative (AO) est intrinsèquement liée à sa capacité à mesurer les déformations subies par le front d'onde incident lors de sa traversée de l'atmosphère. Or un certain nombre de limitations restreignent l'efficacité de cette analyse de front d'onde. Les plus importantes sont le bruit de mesure et l'anisoplanétisme. Le premier limite la magnitude des objets astronomiques pouvant servir de guides aux systèmes d'AO, tandis que le second restreint leur champ corrigé à quelques dizaines de secondes d'arc, du fait de la distribution volumique de la turbulence atmosphérique. A elles deux, ces limitations réduisent à quelques pourcents la couverture de ciel des instruments assistés par AO. Pour cette raison, les nouvelles générations d'optiques adaptatives ont pour objectif soit la très haute performance, impliquant entre autres une bonne robustesse au bruit de mesure, soit l'élargissement du champ corrigé, impliquant la connaissance de la répartition 3D de la turbulence atmosphérique. Pour ces systèmes d'AO à large champ, il est indispensable d'utiliser plusieurs directions d'analyse. La problématique de l'analyse de front d'onde s'articule alors autour de trois pôles : les étoiles guides dont on dispose pour effectuer la multi-analyse, le concept d'analyse de front d'onde considéré pour mesurer le volume de turbulence et la capacité des senseurs de front d'onde à fournir des mesures de qualité. L'objectif de cette thèse est d'étudier chacun de ces trois aspects. Ainsi, une redéfinition de la notion de couverture de ciel est proposée pour les AO à large champ, permettant de prendre en compte le nombre d'étoiles guides et leur magnitude, mais également la fraction du champ scientifique qu'elles permettent de couvrir, le concept d'analyse de front d'onde considéré et l'objectif de performance de l'instrument. Par ailleurs une étude comparative des concepts d'analyse de front d'onde *Star Oriented* et *Layer Oriented* est présentée, sur laquelle on s'appuie pour proposer une optimisation de chaque concept. On montre ainsi qu'une fois optimisés ils présentent tous deux des performances très proches. Enfin, on propose dans un troisième temps une étude comparative de plusieurs estimateurs de pente pour l'analyseur Shack-Hartmann. On étudie en particulier l'estimateur centre de gravité pondéré, qui offre à la fois une bonne robustesse au bruit et de bonnes propriétés de linéarité. Cette dernière étude est utile aussi bien pour l'AO à large champ que pour l'AO à très haute performance.

MOTS CLÉS : OPTIQUE ADAPTATIVE, ANALYSE DE FRONT D'ONDE, STAR ORIENTED, LAYER ORIENTED, SHACK-HARTMANN, COUVERTURE DE CIEL, MULTI-ANALYSE.

WAVEFRONT ANALYSIS FOR NEW GENERATION ADAPTIVE OPTICS SYSTEMS

The performance of an adaptive optics (AO) system is intrinsically related to its capacity to measure the deformations of the incoming wavefront its propagation through the atmosphere. However some limitations restrict the efficiency of this wavefront analysis. The main ones are the measurement noise and the anisoplanatism. The first one limits the magnitude of the astronomical objects that are likely to guide the AO systems, while the second one restricts their corrected field to a few tens of arcseconds, due to the volumic distribution of the atmospheric turbulence. Together, these limitations reduce to a few percents the sky coverage of the instruments assisted by AO. For this reason, rising generation of AO systems aims at either the very high performance, implying in particular a good robustness to measurement noise, or the widening of the corrected field, implying the knowledge of the 3D distribution of the atmospheric turbulence. For these wide field AO systems, it is essential to use several directions of analysis. The wavefront analysis problem is then articulated around three items : the guides stars one has to carry out for the multi-analysis, the wavefront sensing concept considered to measure the volume of turbulence and the capacity of the wavefront sensors to provide good measurements. The purpose of this PhD thesis is to study each one of these three aspects. Hence a redefinition of the concept of sky coverage is proposed for wide field AO. The definition suggested here takes into account the number of guide stars and their magnitude, but also the fraction of the scientific field that is really covered, the considered wavefront sensing concept and the expected performance of the instrument. Concerning the wavefront sensing concepts, a comparative study of the Star Oriented and Layer Oriented concepts is presented and an optimization is proposed for each one, leading to very close performance. Finally, a comparison of different wavefront slope estimators is proposed for the Shack-Hartmann wavefront sensor. In particular, a weighted center of gravity estimator is studied, that offers a good robustness to noise and good properties of linearity. This last study is useful as well for wide field AO as for very high performance AO.

KEYWORDS : ADAPTIVE OPTICS, WAVEFRONT SENSING, STAR ORIENTED, LAYER ORIENTED, SHACK-HARTMANN, SKY COVERAGE, MULTI-ANALYSIS.